http://gyermekneveles.elte.hu

GYERMEKNEVELÉS
TUDOMÁNYOS FOLYÓIRAT

JOURNAL OF EARLY YEARS EDUCATION

2014. 2. évfolyam, 2. szám

„Gondolod, hogy erre megy?”
– matematikatanítás módszertani különszám

Kiadja az ELTE TÓK

DOI 10.31074
ISSN 2063-9945

2014/2. szám szerzői
Árokszállási Eszter
Ambrus Gabriella
Bagota Mónika
Dalyay Zsuzsanna
Lampinen, Anni
Misetáné Burján Anita
Mátyásné Kokovay Jolán
Pintér Klára
Pintér Marianna
Puumalainen, Kirsi
Sarbó Gyöngyi
Szinger Ibolya
Szitányi Judit
Tautz, Jürgen
Wagner, Anke

DOI 10.31074
HU ISSN 2063-9945

Felelős kiadó:
Mikonya György dékán

gyermekneveles@tok.elte.hu
http://gyermekneveles.elte.hu

Szerkesztőség címe:
1126 Budapest, Kiss János altábornagy u. 40.
telefon: 00 36 1 487-81-00

Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Tanító- és Óvóképző Kar

„Gondolod, hogy erre megy?” – matematikatanítás módszertani kûlönszám

Üdvözlet az olvasónak!

A 2014. év karácsonyára elkészült folyóiratszám szeretett és tisztelt kollégánk, Szendrei Julianna munkássága előtt tisztelegve a matematikatanítás módszertani kérdéseit tárgyalja.

Jó olvasást és Boldog Ünnepeket kíván a főszerkesztő!

Budapest, 2014. december 22.

F. Lassú Zsuzsa

ELŐSZÓ

A Gyermeknevelés folyóirat 2. évfolyamának 1. számához

Az ELTE TÓK Matematika Tanszéke hosszú éveken át a Varga Tamás és munkatársai által megálmodott matematikatanítás hagyományait kívánta követni. Immár két esztendeje, hogy elhunyt Szendrei Julianna, aki Varga Tamás közvetlen munkatársa volt, majd tanszékvezetőként nagy erőfeszítéseket tett azért, hogy az élményszerű matematikatanítás gyökeret verjen a tanítóképzésben és ez által a kisgyermekek oktatásában.

Szendrei Julianna sokoldalú személyiség volt, számos hazai és nemzetközi kutatás vezetője, koordinátora vagy résztvevője. Érdeklődéssel tanulmányozta a fejlődéslélektan, az agykutatás, a drámapedagógia, általános pedagógia hazai és nemzetközi eredményeit, vizsgálta a tanulási nehézségek eredetét, a matematikatanulás problémáit, valamint az anyanyelvi fejlődés és a matematikai nevelés kapcsolatát. A matematikadidaktika területén végzett kutatásai mindenkor a gyakorlat jobbítását célozták. Több kapcsolódó tudományterületen is alapos tájékozottságot szerzett. Érdekelte a játék matematikája, a valószínűségi gondolkodás fejlődése, és szívügye volt a geometriai gondolkodás, geometriai látásmód fejlesztése. Jó érzékkel és nagy rálátással kapcsolódott a folytonosan változó, fejlődő informatika világához. Külön figyelmet szentelt a hátrányos helyzetű tanulók segítésének. Komoly részt vállalt a tanítóképzés módszertanának kutatásában, és szívügye volt az óvodapedagógus-képzés. Kutatási eredményeiről magyarul és több más nyelven is beszámolt hazai és nemzetközi konferenciákon. Könyveinek, tanulmányainak, szakcikkeinek száma jelentős.

Az ELTE TÓK Matematika Tanszéke elkötelezett Varga Tamás matematikatanításának irányában. Fő célja a hallgatók matematikai és módszertani kompetenciájának e szellemben történő bővítése.

A Kar és a tanszék tisztelettel adózik Szendrei Julianna munkássága előtt. Ezért 2004. május 9-10-én sor került egy nemzetközi konferencia megtartására „*Gondolod, hogy egyre megy?*” címmel. A cím Szendrei Julianna meghatározó könyvét viseli, melyben összegzi életének és kutatásainak évtizedes tapasztalatait, kiderülnek belőle a matematika tanításáról alkotott gondolatai

A Gyermeknevelés most megjelenő számában túlnyomórészt e konferencia előadásaiból válogattunk – természetesen a folyóirat jellegéhez illeszkedve.

Szendrei Julianna kollégái, tanítványai, hazai és nemzetközi kutatásokban résztvevő munkatársai, valamint doktorandusz hallgatók járultak hozzá írásaikkal a mostani folyóiratszámhoz.

A cikkek a neveléstudomány, a matematikadidaktika valamint a játék témakörében készültek, többnyire kutatásokhoz kapcsolódó tevékenységek, tapasztalatok és azok eredményei alapján. Különös hangsúly fektettünk Szendrei Julianna alapelvei közül annak megmutatására, hogy a játék milyen széleskörű lehetőséget kínál a matematikai fejlesztéshez.

Bízunk benne, hogy a tisztelt Olvasó hasznos ismeretekkel bővítheti matematikatanítással kapcsolatos tudását.

2014. december 14. *Szitányi Judit*

Gyermeknevelés
2. évf. 2. szám 2–7. (2014)

A *Z-* és az alfageneráció tanulási szokásai, matematikai szempontból

Pintér Marianna
Forrai Művészeti Szakközépiskola és Gimnázium, Budapest

Ennek a cikknek a témája az iskolai tanulás-tanítási folyamat egy aktuális problémájával hozható kapcsolatba.

A szokásos tanulás-tanítási megközelítésektől eltérően azonban nem általános, hanem speciálisan matematikai szempontból közelítjük meg a Z- és az α-generációhoz kapcsolódó problémát. Nem állítjuk, hogy a játékok és a digitálistananyag-használat automatikusan és okvetlenül didaktikai hasznot hozhatnak vagy áthidaló szerepet játszhatnak ebben a kérdéskörben. Érdekesnek tartom azonban ennek vizsgálatát néhány tananyagrész, néhány eszköz és néhány digitális taneszköz kapcsán, különös tekintettel a motiváció kérdésére, az új tanári szerepre, a „függetlenebb tanulás" utáni vágyra, az együttműködésre törekvésre.

***Kulcsszavak**: IKT, Z-generáció, α-generáció, játék, matematika*

A Z- és az α-generáció

Az informatikai eszközök – asztali gépek, notebookok, táblagépek, okostelefonok – elterjedése (különös tekintettel az érintőképernyős verziókra) és az egyre gyorsabb, szélessávúinternet-hozzáférés elterjedésével kialakult a Z- (1995 után születettek) és az α-generáció (2010 után születettek). Ők azok, akik a tényleges írás-olvasástudás előtt tesznek szert IKT-kompetenciára, már 3–4 évesen elkezdik aktívan használni a digitális eszközöket, hogy a legújabb játékokkal játsszanak, képeket, videókat nézegessenek.

A médiahasználat jelentőségét jól bizonyítják 2006-ban elvégzett magyar kutatások (*Pintér* és *Székely*, 2006; *Székely*, 2006), illetőleg a 2013-ban – a pécsi egyetem Kommunikáció- és Médiatudományi Tanszéke által – elvégzett kvalitatív kutatások. A tanulmányok szerint a középiskolás diákok átlagosan napi 6–7 órás digitálismédiahasználatról számoltak be (*Guld* és *Maksa*, 2013).

A Z-generáció jellemzésekor a korosztály legfőbb jellemzőjének a korábbi generációktól való elkülönülést tartják. A magyar szakirodalomban, az ifjúságkutató Székely Levente és Prensky nyomán – a következő ismérvek mentén jellemzi ezt a korosztályt:

- „gyorsan befogadják az információkat,
- az információkat párhuzamosan dolgozzák fel, tevékenységeiket szimultán végzik (multitasking),
- a szöveg helyett a képet és a hangot preferálják,
- előnyben részesítik a véletlenszerű kapcsolódásokat (hypertext),
- kitűnően dolgoznak hálózatban,
- vágyaik azonnali és gyakori kielégítésére törekszenek,
- előnyben részesítik a játékot a „komoly" munka helyett,
- a technológiában a kényelmetlen, de szükségszerű társ helyett, barátot látnak" (*Székely*, 2010. 44. o.).

A nemzetközi szakirodalom szerint a négy legfontosabb ismérvük:

Tanúi voltak a digitális szerkezetek és a digitális technológiák elterjedésének, versengenek a figyelemért, fontos számukra a társadalmi felelősségvállalás, állandóan kapcsolatban akarnak lenni mindenkivel.

Az őket követő alfageneráció tagjai lesznek azok a kisiskolások, akik számára még inkább elavultnak tűnnek majd a „szokásos” iskolai információátadási minták. Még jobban zavarja majd őket a „statikus” tananyag, mert nincsenek hozzászokva, hogy csak és kizárólag befogadók legyenek, hogy „magoljanak”, nem szívesen mondanak le az aktív közreműködésről és az azonnali kommunikációról.

Az igények és az iskola igényei – már a Z-generáció tagjainál is – megfigyelhetően eltérnek egymástól, ezért csak küzdelem árán vonhatók be a hagyományos tanítás-tanulás folyamatba.

Az új tanári szerep

Elsősorban az új tanári attitűd megjelenése lenne a legfontosabb, hiszen a tanóra légkörét ez nagymértékben befolyásolja. A magas szintű szakmai felkészültségről, a folyamatos önfejlesztésről, a továbbképzés igényéről, a következetességről, az empátiáról most nem ejtünk szót, hiszen ez a klasszikus tanári attitűdnek is része.

Viszont új elemként kiemelendő a tanuló- és nem a tanárközpontú tanulás, a pedagógiai reflektivitás, a személyes tulajdonságok közül pedig a humorérzék, valamint a rugalmasság. Szükséges lenne, hogy az oktatók képesek legyenek az új oktatási formák elsajátítására és használatára.

Az óra menetét a tanárnak kell kézben tartania, de semmiképpen sem mindent tudóként kell végig „uralnia” a helyzetet, sokkal inkább facilitátorként kellene működnie. Azonban nem csak az óra vezetésében kell új szemléletet kialakítani, hanem a generáció sajátosságai miatt, egyre nagyobb szükség van a változatos munkaformák használatára is. A legújabb kutatások szerint ugyanis, a tanulók igen rövid ideig tudnak csak koncentrálni, ezért szakmailag indokolt egy órán többször is munkaformát váltani. A frontális munkát célszerű párokban megoldható feladatoknak követnie, vagy a füzetben egyéni munkával megoldani egy érdekesnek gondolt gyakorlatot. Esetleg rávenni őket arra, hogy az osztály elé kiálljanak és a táblánál végezzenek el egy-egy feladatot.

A Z- és az α-generáció tagjai nyitottak a felfedeztetve tanítás eszközeire. Éppen ezért szeretik a következő kérdéseket: „*Mindenki így gondolja, ez a/az … jó? Mire gondolhatott Zoli akkor, amikor…*, *Vajon miért nem lehet, …*, *Mit jelent az, hogy,….*, *Mi következik abból, hogy…”* és a hasonló kérdezve oktató mondatokat.

A tanár-diák reflexió az „egymásra figyelést” is fokozza. A digitális generációnak rendkívül lényeges, hogy a véleményükre kíváncsi legyen a felnőtt, és az órai keretek között kell megteremteni a lehetőséget arra is, hogy egymás véleményét is meghallgassák (*Tari, 2011.*). Eszmét cserélhetnek például egy-egy bizonyítás, vagy egy-egy diszkutálható feladat kapcsán. Fontos lenne, hogy megfelelően tudják kifejezni magukat a matematikai szaknyelv használatával, továbbá, hogy képesek legyenek mások gondolatmenetébe beilleszkedni. Vegyék észre saját, vagy társuk tévedését, tudják a saját hibájukat javítani, a megoldásuk mellett érvelni. Szükséges a rendszeres visszajelzés is a tanulók felé, mind az esetleges hibák javítása, mind pedig az önbizalom növelése, és a kommunikáció fenntartása érdekében.

Ha ezek a szempontok előtérbe kerülnek a tanórák tervezésekor, esély van arra, hogy az együttműködés megvalósuljon.

Néhány digitális eszköz, illetve játék használata matematikaórán

A digitális tananyagok beépítése mindkét fél – a tanár és a diák – számára egyaránt kielégítő megoldást jelenthetnek a generációk (Z és α) tanulással kapcsolatos problémáira. A digitális tananyagon persze nem a digitalizált tankönyvek kivetítését értjük. Ezzel próbálkozni teljesen felesleges!

Nem gondolom, hogy a digitális tananyag teljes egészében felválthatná az analóg anyagokat. Sokkal inkább amellett érvelek, hogy értelmes módon használva erősítse, és kiegészítse azokat.

Néhány egyszerű példa a digitális anyagok, illetve a játékok felhasználási lehetőségére matematika tanórákon és otthon.

Az *interaktív tábla* felhasználásával végezhetünk mozgással gazdagított *frontális feladatmegoldást*.

1. ábra: Interaktív tábla

Ez a feladat egy klasszikus barkochba játék.

A játék során a halmazszemléletét és logikai készségét fejleszthetjük az alsós tanulóknak. Sokféleképpen lehet ezt a játékot játszani. Javaslom a mozgással bővített verzióját. Mivel a gyerekek nem képesek hosszan – átlagosan hét percnél tovább – koncentrálni, lelkesíti őket az a lehetőség, ha felállhatnak a helyükről. Jelentkezés és felszólítás után egy-egy gyermek kiszalad a táblához, és „kiválasztja” a kérdését. Ő döntheti el, hogy színre, formára, méretre vagy teliségre kérdez-e rá.

Adhatunk a gyerekeknek – szintén az *interaktív tábla* felhasználásával – olyan feladatokat (például *stratégiai játékok*), ahol egymás ellen „játszhatnak”. A motivációt a feladat elvégzésére az is adhatja, hogy mindig a győztes játékost lehet kihívni a következő körben.

De adhatók a gyerekeknek *internetes házi feladatok* is, amivel szintén lehetőséget teremtünk arra, hogy közelebb hozzuk a gyermekhez a tananyagot. Illetve az elkészült házi feladat bemutatásakor, lehetőséget teremthetünk a gyerekeknek a prezentálás gyakorlására, illetve a szaknyelv használatára. Ezek a feladatok lehetnek matematikatörténethez kapcsolódó feladatok, amelyek egy-egy személynek (pl.: Erdős Pál, Varga Tamás), egy probléma történetének (pl.: nagy Fermat-sejtés, ma már tétel) vagy egy időszaknak (pl.: Püthagoreusok) a bemutatását kérik. A prezentációkészítői és -előadói képességek fejlesztésén túl, az ilyen munkáknak szemlélettágító, ismeretszerző, és ismeretterjesztő funkciói is vannak.

Egy ilyen házi feladat témája lehet továbbá egy-egy rendszerező munka is. Például síkgeometriai tanulmányok során egy-egy gyerek megbízható különféle feladattal, „mutassa be a háromszögeket”, „készítse el a családfájukat”. Azaz csoportosítsa a háromszögeket.

Egészen speciális esetben az internetes házi feladatok lehetnek otthoni gyakorlásra elkészített digitális tananyag egységek is.

Az *otthoni gyakorlást* már nem csak az jelentheti, ha a gyermek tollal vagy ceruzával old meg feladatokat. Egy új forma lehet a digitális gyakorlás például *táblagépen*. Nem gondolom, hogy a papírral és ceruzával történő számolást fel kellene váltani a digitális formának! Sőt! De azt gondolom, hogy a bevésés folyamatát a digitális kor gyermekeinél megkönnyíti, ha nemcsak papíron végzünk el néhány unalmas gyakorlófeladatot, hanem játék formájában a táblagépen is.

Néhány izgalmas minta otthoni gyakorlásra:

2. ábra: Math is fun (Ages 6–7)

Ez az egyszerű feladat akár az első, vagy a második évfolyamon feladható lenne, gyakorlás céljából. Néhány összeadást kell elvégezni tízes átlépéssel. A feladatban a tavirózsák mozognak, a békák pedig várják, hogy a megfelelő virágra helyezze a gyermek őket. A feladat elvégzéséhez nem elég az összeadást elvégezni. Szükség van a gyors műveletvégzés mellett megfelelő szem-kéz koordinációra és jó reflexekre. Továbbá fejleszti a mintafelismerési és fejbenszámolási képességet, és gyakoroltatja a műveleti jelek felismerését is.

Ez az angol nyelvű (japán fejlesztésű) játék összetettebb az előzőnél. Ilyen nehézségű játékokat már második, még inkább harmadik osztályosoknak javasolnék.

Itt nem az összeget kell az összeadandókhoz hozzárendelni, hanem az összeghez kell kiválasztani a tagokat. Az egyszerűbb pályákon még nem lépünk ki a 100-as számkörből, azonban a feladatot tovább nehezíti, hogy a kis sushik közül több módon lehetséges az adott összegeket kialakítani.

A nehezebb pályákon már átlépjük a százas számkört, és egyre több összeadandó – és összeg – kerül a futószalagra.

3. ábra: SushiMonster (Scholastic inc.)

A játék fejlesztői nem csak az összeadást szeretnék sushi szörnyek segítségével gyakoroltatni, hanem a szorzást is. Itt az adott szorzathoz kell a szorzó tényezőket kiválogatni az asztalról. A szerzők kizárólag kéttényezős szorzatokat várnak a megoldás során! Ez a játék a második pályától már inkább negyedik osztályosok számára lesz megfelelő, hiszen a szorzatok esetenként az ezres nagyságrendet is meghaladják. Ahogy nő a mennyiség, úgy lesz egyre nehezebb a tagok illetve a tényezők kiválasztása.

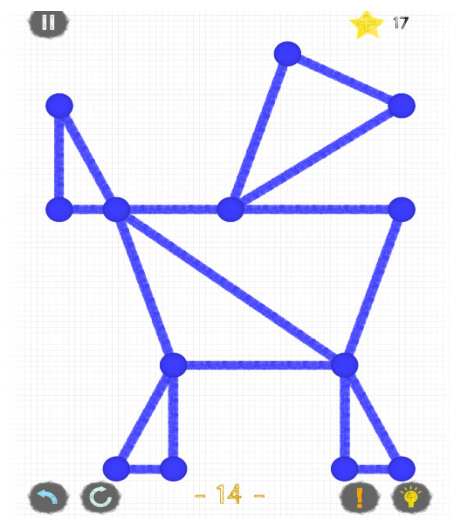
4. ábra: SushiMonster (Scholastic inc.)

A játékok természetesen időre mennek. Az adott nehézségi szinten több pálya is található. Az egyes szintek eredményei összeadódnak: pont jár a gyorsaságért és a helyes válaszokért. Az összpontszámot a játék naplózza. A gyerekek úgy végzik a műveleteket egymás után, hogy észre sem veszik, hogy „matematikát gyakorolnak", ők csak meg akarják dönteni saját illetve egymás rekordját!

A feladat elvégzéséhez szükséges készségek: gyors számforma-felismerés, gyors fejszámolás, jó reflex, megfelelő szem-kéz koordináció.

Hogy véletlenül se érhesse az a vád a játékok készítőit, hogy kizárólag az alsó tagozatra gondoltak, jöjjön egy tizenegyedikes témához kapcsolódó játék.

Ez a játék a gráfelmélet egy speciális kérdésköréhez kapcsolható. Ha feladat szöveget kellene hozzá írni, valahogy így szólna: „Az ábrán egy bejárható gráf látható, add meg egy bejárását!"



5. ábra: One touch Drawing (Ecapy inc.)

Nyílván nem így fogalmazza meg a játék kitalálója a feladatot. Hanem úgy, hogy „Színezd át az összes vonalat, anélkül, hogy felemelnéd a ceruzádat. Minden vonalon azonban csak egyszer haladhatsz át!

A pályák nehézségi szintje az egészen egyszerűtől az igen bonyolultakig terjed. A pontszám és az idő a játék során csillagok formájában öszszeadódik. Az ember a saját és a társai rekordjával versenyezhet.

A játéknak a korábbiakkal szemben nincs más fejlesztő hatása. Ugyanazt nyújtja, mit a tankönyvek és feladatgyűjtemények azonos típusú feladatai. A különbség csak annyi, hogy a játék izgalmas módon, versenyhelyzetet generálva gyakoroltatja a kívánt tudást.

Néhány analóg játék matematikaórára

Készítsünk memóriajátékot az alábbi módon:

- az egyik kártyán szerepeljen egy szám, a másikon az összeg vagy szorzat formája;
- az egyik kártyán szerepeljen egy alakzat neve, a másikon a képe;
- az egyik kártyán egy függvény, a másikon a képe;
- az egyik kártyán 2 geometriai transzformáció, a másikon az az egy, amivel ez a kettő helyettesíthető;
- az egyiken egy gráf, a másikon egy fokszám sorozat stb.

Alkossanak a gyerekek párokat, és játsszanak ezekkel a kártyákkal klasszikus memóriajátékot. Az nyer, akinek sikerül a legtöbb párt megszereznie. A memória fejlesztésén túl fejlesztjük a játék során a megfigyelőképességet, a lényeges és lényegtelen információk szétválasztását, illetve a szociális kompetenciákat.

Barkochbajáték matematikai objektumokkal. Pl.: „Gondoltam egy

- számra,
- alakzatra,
- sokszögre,
- testre,
- egy függvényre”,

és az ismert tulajdonságok rákérdezésével kitalálják a diákok. A játék játszható frontálisan, illetve csoportokban egyaránt. Minél több gyerek „gondol”, annál izgalmasabb a játék!

A játék során a szociális kompetenciák, a strukturált gondolkodás, a lényeges-lényegtelen információk szűrésének képessége egyaránt fejlődik.

Összefoglalás

Ebben a tanulmányban a szokásos tanulás-tanítási megközelítésektől eltérően, speciálisan matematikai szempontból közelítettem meg a *Z*- és az α-generáció tanulással kapcsolatos problémáját. Nem állítom, hogy a játékok és a digitális tananyagok használata automatikusan és okvetlenül didaktikai hasznot hozhat, vagy áthidaló szerepet játszhat ebben a kérdéskörben. Érdekesnek tartom azonban ennek vizsgálatát néhány tananyagrész, néhány eszköz és néhány digitális taneszköz kapcsán, különös tekintettel a motiváció kérdésére, az új tanári szerepre, a „függetlenebb tanulás” utáni vágyra, az együttműködésre törekvésre. Ennek egy lehetséges útját mutattam be.

Irodalom

Pintér Róbert és Székely Levente (2006) Bezzeg a mai fiatalok – a tizenéves korosztály médiafogyasztása a többségi társadalom tükrében.(In: Internet.hu A magyar társadalom digitális gyorsfényképe 3.)

Guld Ádám és Maksa Gyula (2013) *Kutatási jelentés. TÁMOP-4.2.3.-12/1/KONV-2012-0016 Tudománykommunikáció a Z-generációnak című kutatás Fiatalok kommunikációjának megismerése alprojekt*. Pécsi Tudományegyetem, Pécs.

Székely Levente (2010): Ifjúsági munka virtuális térben. In: Nagy Ádám dr., Földi László és Járosi Éva (2010, szerk.) *Ifjúságügy – ifjúsági szakma, ifjúsági munka. Módszertani kézikönyv.* ISzT–Mobilitás–ÚMK, Budapest.

Tari Annamária (2011): *Z generáció*, Tericum Kiadó Kft., Budapest.

Gyermeknevelés
2. évf. 2. szám 8–17. (2014)

A méhek csodálatos élete az alsó tagozaton – (nem csak) matematikaórákra

Ambrus Gabriella – Anke Wagner – Jürgen Tautz
ELTE Budapest – PH Ludwigsburg – Universität Würzburg

A különböző tárgyak tanításában a tárgyközi kapcsolatok feltárása és megfelelő beépítése fontos oktatási feladat. Ennek megvalósításához nagy segítséget jelentenek a körülöttünk levő világ megfigyeléséből adódó adatok, tapasztalatok. Az adott korosztály számára megfelelő vizsgálódást és alkalmazást meghatározzák egyrészt a gyerekek élményvilágába illeszthető témák és az oktatási dokumentumokban meghatározott általános és tantárgyi fejlesztési célok, műveltségi tartalmak. Emellett természetesen figyelembe kell venni a rendelkezésre álló lehetőségeket is.

A kisiskolás korosztály esetében természetesen adódik a közvetlen környezet megfigyelése és a tapasztalatok felhasználása, így gyakran kerül sor a vásárlással, iskolai élettel, könnyen elvégezhető kísérletekkel kapcsolatos tapasztalatok feldolgozására. A gyerekek élményvilágában a növények és állatok élete fontos szerepet kap, de ezzel kapcsolatban a megfigyeléseknek erősen határt szabnak a lehetőségek.

A kisgyerekek általában csodálattal tekintenek a nagyon kicsi, illetve az igen nagy állatokra, sokan szívesen is foglalkoznak velük, ám gyakran inkább csak „elméletben”, könyvek filmek segítségével. Például a méhek élete igen izgalmasnak ígérkezik, de megfigyelésükre – különösen a kaptárok zárt világa miatt nemigen van mód. A tanulmányban bemutatunk egy lehetőséget arra, hogy internet segítségével hogyan végezhetnek akár már kisiskolás gyerekek is a méhek életével kapcsolatos megfigyeléseket. Vizsgáljuk, hogy ilyen megfigyelések hogyan hasznosíthatók a német és magyar oktatásban, elsősorban a matematika tanításában és a vizsgálódások hogyan egészíthetők ki egyéb, a témához tartozó feladatokkal.

***Kulcsszavak**: méhek, megfigyelés, matematikafeladatok, természettudományok, geometria*

Elméleti háttér

A természeti ismeretek, a környezeti tapasztalatok oktatásba történő beépítése segít csökkenteni a távolságot az iskola valósága és az iskolán kívüli világ között. Ez fontos, hiszen az iskolai szituációban megtanult ismeretek gyakorlati alkalmazhatóságát erősen megnehezíti, hogy a tanultak osztálytermi körülményekhez kötöttek. *Renkl* (1996) szerint a megszerzett ismeretek akkor nem alkalmazásképesek, ha túl nagy a tanulási és az alkalmazási szituáció közötti különbség. Kiemeli, hogy az alkalmazásképes tudás egyik fontos feltétele, hogy tanulási szituáció a lehető legközelebb álljon az alkalmazási szituációhoz. Mivel tehát a szükséges transzfer nem jön létre automatikusan, így nem véletlenül kerülnek előtérbe a különböző tantárgyi ismereteket összekapcsoló, illetve a tanulók élményvilágát bekapcsoló tanulási tartalmak.

A tantárgyi kapcsolatok mélységére és sokszínűségére utal például az is, hogy a természettudomány tanítása jó hatással lehet a matematikai gondolkodás fejődésére, a gondolkodási folyamatokhoz tapasztalati alapot és „gyakorlóterepet” biztosítva (*Nunes és Csapó*, 2011).

Míg azonban például a biológia, a környezetismeret esetében természetes, hogy a vizsgálódásokhoz és kiértékelésükhöz némi matematika is szükséges, ez visszafelé már korántsem ilyen magától értetődő: a matematika tantárgyban a biológia és környezet tárgyakat alig említjük. Az újabb tankönyvek gyakorló, alkalmazó feladatai esetében, illetve új anyagrészek bevezetésekor már tapasztalható törekvés a valós környezet szituációinak többféle beépítésére. E tekintetben pozitív példák a *Vancsó*-féle[1] felső tagozatos tankönyvek, ahol sok ilyen jellegű példa található.

A matematika tanulása különböző célokkal készített feladatok segítségével történik, amelyek nagy része gyakorlásra, alkalmazásra való. A feladatok egy (kisebb) része valós szituációkra épül. Ezeket többféleképpen is lehet csoportosítani, például aszerint, hogy mennyire zártak. Eszerint alapvetően két különböző típus különíthető el:

1. megfigyelésekre, valós adatokra épülő zárt feladatok,
2. modellezési (nyitott, valós szituációra épülő, komplex, autentikus) feladatok.

Tekintsük a szöveges feladatok egy tanulói gondolkodási (és modellezési) folyamatra összpontosító rendszerét, melynek kategóriái röviden:

- valós tartalom szempontjából értelmetlen feladatok,
- kontextusból kiemelt feladatok, ahol a kontextusnak valójában nincs szerepe,
- standard alkalmazási feladatok: a szükséges matematika valóságos szituációba ágyazva, de az eljárás (még) meglehetősen standard,
- valódi modellezési feladatok, ahol a probléma „matematizálását” legalább részben a modellezőnek kell elvégezni (*Galbraith* és *Stillman,* 2001*; Verschaffel,* 2006 idézi *Csíkos* és *Verschaffel,* 2011. 81. o.*).*

Látható, hogy a valós szituáción alapuló feladatok két alapvetően különböző típusa gyakorlatilag megfelel az utolsó két kategóriának. A kategóriarendszer négy eleme határozottan elkülönül egymástól, de elképzelhető további finomítás, amely a kategóriák között „átmeneteket” tartalmaz. Például az utolsó két kategória „között” lehetne a helyük olyan komplexebb feladatoknak, amelyek valamely valós szituációt „járnak körül” zárt alkalmazási és egyszerűbb modellezési részfeladatokkal például feladatlap formájában (*Ambrus,* 2007*). Ebben a tanulmányban további példát mutatunk valós tartalmat felhasználó szöveges feladatok egy további lehetséges csoportosítására, azon az alapon, hogy a feladat milyen mértékben kapcsolódik közvetlen megfigyeléshez.*

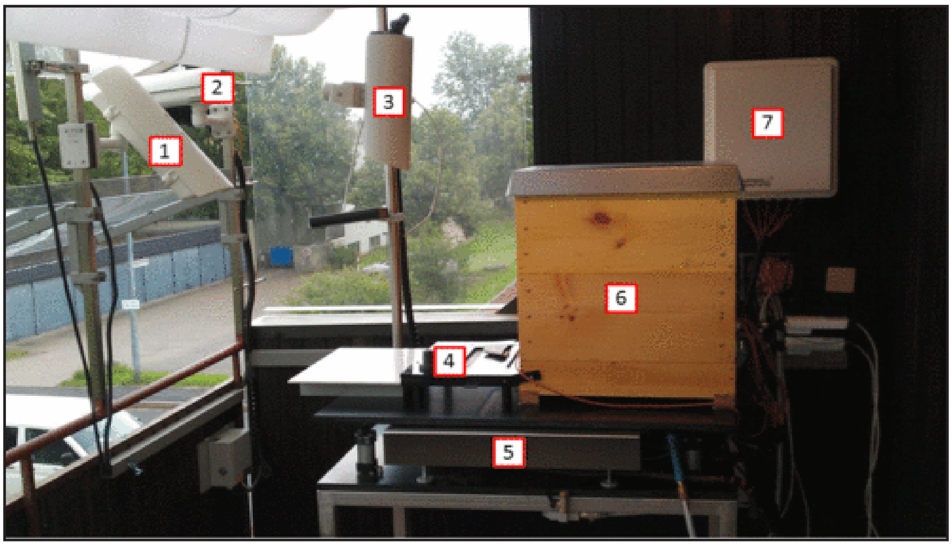
Miért éppen a méhek?

A méhekkel minden gyerek igen hamar találkozik, a virágokon szorgoskodó állatok látványa, és méztermelő képességük gyakran felkelti érdeklődésüket. Bár sok minden olvasható a méhekről, a közvetlen megfigyelést a méhek életének közelebbi megismerését semmi sem pótolja. Ha van rá lehetőség, és sikerül eljutni egy méhészetbe, láthatják a kaptárokat, ezekbe esetleg be is nézhetnek, megismerik a méhviasz szerkezetét, látnak üres, pollennel, illetve nektárral teli sejteket és szemügyre vehetik, milyen például a dolgozó, a here vagy a királynő (*Tautz,* 2013*). Ilyen látogatás aligha alkalmas azonban adatok gyűjtésére a méhek életével kapcsolatban.*

Megfigyelésekhez, adatok gyűjtéséhez alkalmas eszköz található az interneten is: egy interaktív, tanulói felület, középpontjában egy méhcsaláddal, mely a nap 24 órájában megfigyelés alatt áll (HOBOS, Honey Bee Online Studies[2]). Különböző kamerák és érzékelők segítségével lehetőség van a méhek életének és a környezetnek igen pontos megfigyelésére (lásd 1. ábra[3]). Elhelyezésre került a kaptár bejára-

[1] Vancsó Ödön (2012, szerk.): *Matematika körülöttünk, 5–8*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
[2] www.hobos.de/de/studenten/hobos-daten/bienenstock.html
[3] www.hobos.de/de/studenten/hobos-daten/bienenstock.html

tánál egy infravörös megvilágítású kamera, egy hőképkamera, a kaptár belsejében két endoszkópkamera mikrofonnal, valamint egy külső kamera, amely éjjel-nappal a környezeti és időjárásviszonyokról gyűjt adatokat (vö. *Gerstner, Heyne* és *Renninger,* 2012*). A kamerák felvételeit videoarchívumban tárolják.*



1. ábra:
A HOBOS központi része: 1. Kamera (infravörös) a kaptár bejáratánál 2. Kerti kamera az időjárási és környezeti viszonyok felvételéhez 3. Hőképkamera a bejáratnál 4. Kétirányú fény-sorompó amely minden egyes méhet érzékel aszerint is, hogy kijön vagy bemegy 5. Kaptármérleg 6. Kaptár érzékelőkkel 7. Mérési adatokat tároló készülék

A felvételek és tárolt adatok az interneten visszamenőleg is elérhetők és felhasználhatók, így alapul szolgálhatnak különféle vizsgálatokhoz, akár projektekhez is.

Egy közelmúltban végzett vizsgálat eredményeképpen például fény derült a méhek rajzásának körülményeire. Mint ismeretes, miután a méhek kirajzottak a kaptárból egy közeli fán fürtszerűen lógva várakoznak, míg visszatérnek a hírnökök, akik azzal a céllal repültek el, hogy a méhrajnak új helyet keressenek. Ekkor az egész raj egyszerre felkerekedik, elképesztő jelenség. Egyszerre mintegy 20 000 méh indul el, de az induláshoz fel kell előbb melegedniük több mint 30º C-ra. Honnan tudja meg a fürt belsejében levő méh, hogy indulni fognak? A hírnök méhek miután visszatértek, vad repkedésbe kezdenek a fürt körül, és többször is átrepülnek a fürtön a méhek között. Eközben zümmögő hangot adnak ki és az ezt érzékelő méhek megkezdik a felmelegedést. Néhány perc alatt az egész méhsereg indulásra kész lesz és elindulnak. De hogyan készültek fel a méhek a kaptárból való kirajzásra? Erre eddig senki sem tudott válaszolni. A HOBOS segítségével derült ki a kutatók számára, hogy az együttes indulás előtti 10 percben több mint 1 kg mézet fogyasztanak el, hogy a magas hőmérsékletet rövid idő alatt el tudják érni.

A HOBOS használatához nem szükséges előismeret, és bár a honlap német nyelvű, ez nem okozhat különösebb gondot a videókat, illetve tárolt adatokat felhasználóknak.

A méhek világa az oktatásban

A méhek életmódja valóságos kis társadalomnak tekinthető, ahol a különböző feladatokat elosztva végzik. Ez gyakorlatilag rengeteg kérdést vet fel, amelyek többféle tárgyat is érintenek. Ezek közül számos kérdés más a kisiskolás gyerek számára is érdekes és vizsgálható a HOBO adatbank segítségével:

- Mennyire kell kint világosnak lennie ahhoz, hogy a méhek kirepüljenek?
- Hány órakor repülnek ki az első dolgozók?
- Vajon ugyanannyian jönnek-e vissza, ahányan kirepültek?
- Milyen napszakban repül ki a legtöbb méh?
- Mit csinálnak télen a méhek?
- Milyen meleg van télen a kaptár belsejében?
- Legkésőbb mikor térnek vissza a méhek a kaptárba, ha vihar közeleg?
- Mennyivel lesz nehezebb egy kaptár, ha már lakói behordták a télre szánt élelmiszerkészletet?

A világ tele van mintákkal, ez a méhek világára is érvényes. Ha a méhviaszra tekintünk, feltűnik szabályos hatszögszerkezete. Ez további vizsgálódásra is lehetőséget ad minden korosztálynak. A méhek életében azonban más minták is fellelhetők, például életmódjuk ritmusa: nappal kirepülnek, de az éjszakát a kaptárban töltik.

A méhek életének vizsgálatát, az összefüggések feltárását a matematika és más természettudományok együtt, egymással kölcsönhatásban segíthetik. A kisiskolások esetében a természettudományok tanulása nálunk az ember és természet műveltségi terület keretében, Németországban a *Menuk – Mensch, Natur und Kultur* tárgy révén történik.

A magyar NAT-ban megfogalmazódik, hogy *a tanulókat meg kell ismertetni a tervszerű megfigyeléssel és kísérletezéssel, az eredmények ábrázolásával, a sejtett összefüggések matematikai formába öntésével.* A műveltségi terület kisiskolások számára előírt fejlesztési feladatai között pedig megtalálható: *Megfigyelések, egyszerű kísérletek elvégzéséhez szükséges készségek megalapozása, Néhány természeti jelenség megfigyelése, egyszerű magyarázatkeresés kísérlet segítségével.*

A német oktatási törvény szerint (*Ministerium für Kultus, Jugend und Sport,* 2004) a tanulóknak technikákat kell tanulniuk és felhasználniuk természeti megfigyelésekhez és a negyedik osztály végére el is kell jutniuk oda, hogy a gyűjtött tapasztalatokat dokumentálják, saját kérdéseket tegyenek fel, ehhez egyszerű kísérleteket tervezzenek, végezzenek, megvitassanak, kiértékeljenek és optimalizáljanak. Ugyancsak szerepel a dokumentumban, hogy a tanulókat fogékonnyá kell tenni mindennapi szituációk és jelenségek, valamint problémák matematikai tartalmára és arra irányítani őket, hogy ezeket matematikai eszközökkel meg is oldják.

Összevetve a magyar és a német oktatási célokat a természettudományos tantárgyak esetében sok hasonlóság látható, például hogy a célok eléréséhez feltétlenül szükségesek a megfelelő matematikai képességek és ismeretek.

(Matematikai) feladatok, amelyek közelebb hozzák a méhek világát

A világ dolgainak megismeréséhez szükség van matematikára, a méhek élete is érthetőbbé válik, ha becsléseket, összehasonlításokat végeznek a gyerekek, esetleg egyszerűbb modelleket is készítenek. A NAT szerint is szükséges ilyen tevékenységek végzése a matematika órákon. Az „Alapelvek, Célok” között a következőket olvashatjuk:

„A tanulók matematikai fejlődése és a tanulási folyamat során alapvető, hogy ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytani, statisztikai stb.) és leírásokat. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságá-

nak eldöntését segítő készségek kialakítása, valamint az ezeket megalapozó képességek fejlesztése.” (*NAT* 2012, 61. o.)

A méhek életével kapcsolatba hozható feladatok csoportosíthatók például aszerint, hogy a feladat milyen mértékben kapcsolatos közvetlen megfigyelésekkel, tapasztalatokkal. A továbbiakban három típust különítünk így el, amelyek között lehetnek átfedések:

- közvetlen megfigyelésen alapuló feladatok,
- elsősorban (szak)irodalmi adatokon alapuló feladatok,
- feladatok a léppel kapcsolatban.

Az első kategóriába tartozó feladatokhoz képest a másodiknál a megfigyelések és tapasztalatok sokkal kevésbé, esetenként egyáltalán nem jutnak szerephez. A harmadik kategória feladatai már nem alapulnak közvetlen méréseken, a matematikai tartalmak kerülnek előtérbe. Bármely más valós témán alapuló feladat elhelyezhető az előbbi három kategória valamelyikében, ha az utolsó kategóriát „általánosítjuk”. A lép helyett más valósággal kapcsolatos objektumot választva („Feladatok valamilyen valóságos objektummal kapcsolatban”).

a) Közvetlenül megfigyelésen alapuló feladatok

A méhekkel kapcsolatos megfigyelésekhez, mint említettük a természetben szerzett tapasztalatokon túl nagy segítségre lehet a HOBOS tanulói labor adatbankja. A következő két példából az első azonban egy alkalmas kép segítségével is feladható.

- A képen egy lép részlete látható. Hogyan tudnád megszámolni, hány sejt van rajta? Tudsz jobb módszert is megadni?
- A képen egy lép részlete látható méhekkel. Hogyan tudnád megszámolni, hány méh van rajta? Tudsz jobb módszert is megadni?

A második feladat a tanulók számára sokkal nehezebb, hiszen becslési stratégiák szükségesek hozzá (*Blankenagel,* 1983a, 1983b). A becslés során kapott eredményt (méhek száma) már meglevő reprezentánssal kellene gondolatban összehasonlítani (*Franke*, 2003) de ez itt nem áll rendelkezésre. Ezért más módszer keresendő, például felosztható a lép bizonyos nagyságú négyzetekre, ezeken leszámolhatók majd összegezhető a méhek száma.

*T*ovábbi példákhoz adatokat szolgáltathat a HOBOS. Megfigyelhető például hogy *hány méh repült be, illetve ki a kaptárból*. A megfigyelés adatainak rögzítése többféleképpen történhet, például vonásokkal, táblázatban. Itt mindjárt adódik a kérdés, hogy *hogyan változnak ezek az adatok különböző körülmények között, például esős időben, különböző hónapokban*. Azaz szükséges a kísérlet körülményeinek megadása.

A Würzburgi egyetem videoarchív felvételeit felhasználva, készült a következő táblázat:

időszak (óra)	16:00-17:00	17:00-18:00	18:00-19:00	19:00-20:00	20:00-21:00	21:00-22:00	22:00-23:00	23:00-24:00
berepülések száma	1314	1303	1082	712	479	50	218	150
kirepülések száma	1564	1374	1008	690	516	58	227	191

időszak (óra)	0:00-1:00	1:00-2:00	2:00-3:00	3:00-4:00	4:00-5:00	5:00-6:00	6:00-7:00	7:00-8:00
berepülések száma	16	16	16	8	5	3	59	269
kirepülések száma	21	16	23	10	4	4	101	316

időszak (óra)	8:00-9:00	9:00-10:00	10:00-11:00	11:00-12:00	12:00-13:00	13:00-14:00	14:00-15:00	15:00-16:00
berepülések száma	1018	1960	1670	1678	1898	1727	1067	1768
kirepülések száma	1250	2060	1801	1914	2212	1691	1264	2299

1. táblázat: A kaptárból ki és berepülő méhek száma 2011. augusztus elsején.

A táblázat ebben a formájában egy olyan adathalmaz, amely bár rendezett, de még feldolgozásra vár. Ennek során egyrészt további információk olvashatók ki a közölt számokból, például megkérdezhető, hogy:

- *Hány méh repült ki és be összesen ezen a napon?*

Másrészt reflektálni lehet a kapott eredményekre, amelyeket tanári vagy tanulói kérdések segíthetnek például a következők:

- *Miért repült ki több méh, mint amennyi visszaérkezett? Mi történhetett a távolmaradókkal – esetleg másik kaptárban alszanak?*
- *Előfordulhat, hogy valamikor kihal a kaptár?*

A kérdésekre többféle válasz adható, például, hogy elpusztulnak, eltévednek útközben; ez utóbbi elég valószínűtlen, ugyanis speciális illatanyaguk segítségével kiválóan tájékozódnak és saját kaptárukba térnek vissza. A különbség főleg abból adódik, hogy néhány méh elpusztul útközben. Ez a szám a koratavasszal a legnagyobb, amikor a telet túlélő méhek mind elpusztulnak. Az is előfordul néha, hogy a szorosan egymás mellett beérkező méheket a számláló egynek számlálja, azaz számolási hiba is adódhat.

A kaptár kihalása gyakorlatilag lehetetlen, hiszen egy egészségesen működő méhcsaládban naponta mintegy 2000 méh jön a világra.

A mérési adatok összehasonlításra is alkalmasak:

- *Keress tavasz és őszi hasonló adatokat egy-egy napról, foglald őket táblázatba és hasonlítsd össze a három táblázat adatait.*

Lehetőség van más méhekkel kapcsolatos adatok mérésére és feladatok készítésére is például ilyeneket ad meg *Gerstner, Heyne* és *Renninger* (2012) *és Tautz, Ruppert* és *Wörler* (2013).

b) Irodalmi adatokon alapuló feladatok

A dolgozó méhek rövid életük folyamán nektárt és pollent gyűjtenek fáradhatatlanul, de ők állítják elő a lépek építéséhez szükséges méhviaszt is. Ahhoz, hogy érzékelhessék a gyerekek milyen komoly munkáról is van szó, érdemes különféle számításokat végezni, esetleg modelleket készíteni. A feladatok kapcsán további kérdések is felmerülnek, amelyek részben a feladatokban szereplő fogalmakból adódnak (Például: Mi a nektár? Mi a pollen?), részben a kíváncsi ember természetes kérdései (Például: Ha van dolgozó méh, akkor van nem dolgozó is?)

A következőkben olyan feladatokra mutatunk példákat, amelyek esetében a feltett kérdés megválaszolásához különféle számítások és becslések szükségesek.

- *A dolgozó méhek pollent és nektárt gyűjtenek. Egy dolgozó tömege körülbelül 70 mg és mintegy 40 mg terhet képes cipelni. Körülbelül hány kilogrammot kellene cipelned ha méh volnál?*

Megjegyzés: Ez egy nyitott feladat, a kérdésre adható válasz nemcsak a tanuló tömegétől függ, hanem attól is, hogy milyen modell szerint számol. Például elhanyagolva az 5 mg különbséget, gondolhat arra, hogy legalább az ő tömegének felét, tehát legalább 15–20 kg-t is cipelnie kellene. Egy 35 kg-os tanuló arra a következtetésre is juthat, hogy ha ő egy kis 35 mg-os méhecske lenne, akkor 20 mg-t kellene cipelnie, így ez „embergyerekként", körülbelül 20 kg-t jelentene.

- *Egy méhcsaládtól évente körülbelül 30–40 kg méz vehető el, a többi saját szükségleteiket fedezi. Ehhez kétszeres mennyiségű nektárt kell a kaptárba cipelniük. Körülbelül hány kirepülés szükséges a mennyiség begyűjtéséhez?*

Megjegyzés: A feladat jó lehetőség a nagy számokkal kapcsolatos műveletek és az átváltások gyakorlására. Például 40 kg mézzel számolva mintegy 2 millió kirepülés szükséges a megfelelő mennyiségű nektár begyűjtéséhez. Ez az eredmény a szakirodalmi adatok alapján elfogadható, az ellenőrzéshez az internet is segítséget nyújthat.

- *A méhviasz fontos alapanyag kozmetikai és gyógyászati termékek gyártásánál. Egyetlen dkg viasz előállításához azonban körülbelül 1500 méh teljes viasztermelése szükséges, azaz az összes viasz, amit rövid életük alatt készítettek. Egy dolgozó 35 napos élete során nagyjából 10 napig tud viaszt termelni. Mennyi viaszt termel körülbelül 1500 dolgozó naponta?*

Megjegyzés: Egy nap alatt körülbelül az 1 dkg tizedrészét állítják elő.

Mivel az apró méhek életének vizsgálatánál kicsi mennyiségek is szerepelnek, természetesen szükség van az alsó tagozaton előírt dkg és kg használatán kívül kisebb egységek ismeretére is (a német oktatási dokumentumok a g, kg és t ismeretét írják elő). Azonban példák, modellek segítségével nem gond kisebb mértékegységek megismerése sem és ezzel az alapismeretek is bővülnek. A következő modell „kézzelfoghatóvá" teszi a kisiskolás számára is, hogy mekkora egy méh tömege:

- *Ha gondolatban kétkarú mérlegen az egyik serpenyőbe méheket, a másikba egy kis gumimacit tennél, vajon hány méhre lenne szükség, hogy a mérleg egyensúlyban legyen? Egy gumimaci tömege körülbelül 2 g.*

El lehet azon is tűnődni, hogy mit jelent az, hogy egy méh tömege körülbelül 70 mg és akár ennek alapján az átlag jelentésén is.

Feladatok készítéséhez felhasználható többféle méhekkel kapcsolatos szakirodalom például a magyar nyelven is elérhető (*Tautz,* 2013), de ugyanúgy hasznosak lehetnek, azaz internet megfelelő oldalai is.

c) Feladatok a léppel kapcsolatban

A méhek által készített viaszépítmény, a lép, felülnézetben szabályos hatszögekből épül fel. Ez is példa a természetben oly gyakran megtalálható szimmetriára, valamilyen szabályt követő felépítésre és ez a mintázat számos matematikai kutatás kiindulópontja is lehet kisiskolások számára (*Wittmann – Müller,* 2007).

A következő feladatok ötleteket adhatnak a matematika órán elvégzendő különféle vizsgálódáshoz.

Az első két feladat a síkidomok tulajdonságaihoz, és a geometriai transzformációk területére vezetnek.

- *Rajzolj le egy kis cellát a lépről egy papírra, és vágd ki. Fogalmazz meg tulajdonságokat a cellával kapcsolatban! Hogyan neveznéd ezt az alakzatot?*
- *Rajzolj le egy kis cellát a lépről kartonpapírra, vágd ki és próbálj vele lefedni „parkettázni" egy írólapot. A kép elkészítéséhez mindig rajzold körül a kis hatszöget. Figyeld meg, hogyan mozgathatod a kartonból kivágott kis hatszöget a rajzolás során!*

Megjegyzés: A tanulók az eszközt nem készen kapják a vizsgálódáshoz, így lehet, hogy ha túl kicsi vagy túl pontatlan cellát vágtak, akkor meg kell ismételni a „kivágást" – ez nem gond, a vizsgálódás folyamatához ez az „eszköztervezés" is hozzátartozik.

Megfigyelhető tulajdonságok például, hogy a cella oldalai egyenlő hosszúak, hat oldala van, szögei egyenlő nagyságúak. Ezek a tulajdonságok a kivágott hatszögön

„ellenőrizhetők”, és megkereshetők a szimmetriatengelyek is, hajtogatással. A hajtogatás során keletkező élek segítségével megfigyelhető a hatszög többféle felépítési lehetősége is síkidomokból pl. szabályos háromszögekből. A parkettázás során a kis hatszöget sokféleképpen lehet mozgatni úgy, hogy újabb hatszöget rajzolhassunk, lehet eltolni, „átfordítani” vagyis tükrözni valamelyik oldalára, egyik csúcsa körül mindkét irányba elforgatni akkora szöggel, mint az egy belső szöge.

A cella sokféleképpen elnevezhető; lehet, hogy például a méhekkel kapcsolatos lesz a név, de előfordulhat, hogy a tanulók már ismerik a „hatszög” elnevezést.

A következő feladatok a hatszögekkel parkettázott sík egy részletével, az úgynevezett szabályos hatszögtáblákkal foglalkoznak. Ezeket aszerint nevezzük el, hogy hány kis hatszög alkotja egy-egy oldalukat (ld. 2. ábra), de lehetne, akár a sakktábláknál, 2 x 2-es, 3 x 3-as tábláról beszélni itt is.

- *A lép egy részletét láthatod a rajzokon, ezeket hatszögtábláknak neveztük el. Adj módszereket arra, hogyan keletkezhet a kettes-táblából a hármas, a hármas-táblából a négyes-tábla. Tudnád folytatni?*

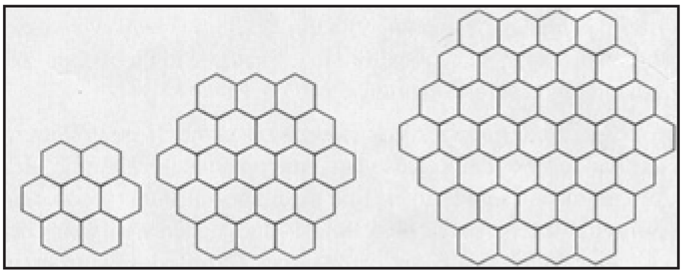
Megjegyzés: Egy lehetőség, hogy megfelelő (kis hatszögekből álló) gyűrűket rakunk rendre a táblákra ahhoz, hogy a következő tábla létrejöjjön.

- *Nézd meg hány cella (kis hatszög) van a felrajzolt táblákon, és add meg az ötös és hatos táblán található cellák számát a táblák felrajzolása nélkül!*

Megjegyzés: Ez például a következőképpen tehető meg: a kettes táblán 1 + 6 = 7 cella van, a hármas táblán 7 + 6 x 3 – 6 = 19 (hiszen 6 db 3-as léc rakható körbe, de le kell vonni a kétszer szereplő 6 cellát), a négyes táblán 19 + 6 x 4 – 6 = 37, az ötös táblán 37 + 6 x 5 – 6 = 61, a hatos táblán 61 + 6 x 6 – 6 = 91 cella van.

- *A 3. ábrán egy 1 x 3-as lécet látsz. A 2. ábrán látható három táblát próbáld meg lefedni 1 x 3-as léceket. Mit tapasztalsz?*

Megjegyzés: Egyik sem fedhető le, ugyanis a cellák száma a táblákon nem osztható 3-mal, azaz mindig lesz kimaradó cella.



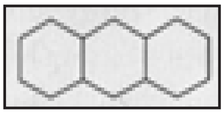
2. ábra: Kettes- hármas- és négyes hatszögtáblák

- *Színezd feketére a középső mezőt az előbbi három hatszögtáblán és próbáld meg lefedni a lécekkel a fehéren maradt tablarészt. Mit tapasztalsz?*

Megjegyzés: A fehér részen a cellák száma osztható 3-mal, így a lefedés létrejöhet és könnyen látható, hogy meg is valósítható az első (kettes) tábla kivételével.

- *Hány színnel tudsz kiszínezni egy hatszögtáblát úgy, hogy egymás melletti cellák (kis hatszögek) különböző színűek? Emlékeztet ez a színezés egy ismert másik tábla színezésére?*

Megjegyzés: Két színnel nyilvánvalóan nem megy a színezés az adott módon, viszont hárommal már igen. Kezdjük például a színezést a tábla közepén. Az analógia a sakktáblával mindenképpen megteremthető, amiről viszont már tudható, hogy két színnel is színezhető.



3. ábra: 1x3-as léc

A sakktáblával való hasonlóságból, adódhat az a gondolat is, hogy a bűvös négyzet mintájára készítsünk bűvös hatszögtáblás feladatokat.

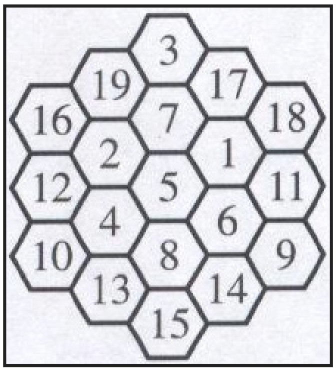
A bűvös hatszögtáblában 1-től kezdődően az egymást követő pozitív egész számok szerepelnek olyan elrendezésben, hogy a beírt számok összege minden egyenes mentén ugyanannyi. A kettes tábla esetében elég hamar belátható, hogy nem létezik ilyen kitöltés. Viszont a hármas tábla 19 mezője kitölthető ilyen módon.

Belátható, hogy ez a kitöltés a szimmetriáktól eltekintve egyértelmű. Meglepő viszont az a tény, hogy ennél nagyobb méretű bűvös hatszögtábla nem létezik. (*Tóth*, 1994).

A hármas tábla említett kitöltésének megtalálása nehéz feladat, de néhány értéket előre beírva már könnyebben *folytatható* a kitöltés. Attól függően, hogy hány szám és mely helyeken kerül megadásra, többféle és különböző nehézségű feladat készíthető. A következő egy egyszerű változata ennek a feladatcsaládnak.

- *A bűvös négyzetek kitöltéséhez hasonlóan próbáld meg kitölteni az alábbi bűvös hatszög üres celláit. A bűvös négyzeteknél minden oszlopban, sorban és az átlókban a számok összege ugyanannyi. Itt mire fogsz ennek alapján figyelni a kitöltésnél?*

Megjegyzés: A középső oszlopból kiderül, hogy a számok összege oszloponként és soronként 38. Ezt követően többféleképpen is el lehet járni a kitöltésnél, mindig keresve azokat a sorokat vagy oszlopokat, ahol csak egyetlen szám hiányzik.



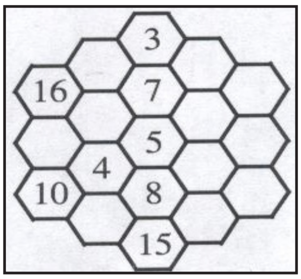
4. ábra: „Bűvös" hármas hatszögtábla kitöltve

A táblákkal további, összetettebb vizsgálatok is végezhetők; jó kutatási lehetőség felsőbb osztályokban is (*Ambrus,* 1997*; Tóth* 1994)*.*

További geometriai feladatok találhatók a méhsejttel kapcsolatban, de inkább az idősebb korosztálynak (*Tautz, Ruppert* és *Wörler,* 2013)*.*

A matematikán belüli kapcsolatok megmutatásán és ezek tanítása mellett az előbbi a feladatok a megismerés fejlesztési feladaton belül az alsó tagozatosok számára előírt *pontos megfigyelés, egyszerűsített rajzkészítés, kirakás, tapasztalati függvények, sorozatok alkotása, változó helyzetek megfigyelése* tevékenységeket támogatják elsősorban.

A német tantervi előírásokban külön kompetenciaként szerepel az alsó tagozaton a „Minták és struktúrák". Ezen belül egyszerű geometriai és aritmetikai minták, szabályszerűségek vizsgálatát, leírását és folytatási lehetőségek adását, minták egyéni létrehozását és függvényszerű viszonyok felismerését, leírását és ábrázolását (*Wittmann és Müller*, 2007. 42. o.) segíthetik az előbbi feladatok.



5. ábra: Segítség a „bűvös" hármas hatszögtábla kitöltéséhez

Befejező gondolatok

Ha beletekintünk a NAT-ban megfogalmazott matematikán belüli fejlesztési feladatokba, akkor elmondható, hogy a jelzett 7 fő területből 6 esetében (tájékozódás, megismerés, az ismeretek alkalmazása, problémakezelés és megoldás, alkotás és kreativitás, matematikai tapasztalatszerzés, a matematika épülésének elvei) szerepelnek tevékenységek a méhekkel kapcsolatos példaként bemutatott feladatok megoldása során. Ha a feladatok megoldásának osztálytermi szervezését tekintjük, az előbbiekben nem szereplő 6. fő fejlesztési feladat tevékenységeiből (kommunikáció, együttműködés, motiváltság, önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás) is megjelenik néhány.

Nemcsak a természettudományok tanulása kapcsolódik össze a matematika tanulásával, hanem a matematika esetében előírt fejlesztési feladatok teljesítéséhez is fontos a természettel kapcsolatos témák különféle feldolgozása. Ez nem is olyan különös, ha meggondoljuk, hogy a matematika fejlődéséhez hogyan járultak hozzá a természettudományok (vö. *Sain,* 1986). Az oktatási dokumentumokban megfogalmazott követelmények teljesítésén túl fontos kiemelni, hogy a gyerekek élményszerű ismeretszerzéshez és alkalmazásképes tudásához juthatnak a nem matematikai témán alapuló feladatok feldolgozása során.

Irodalom

Ambrus Gabriella (2010): *A hétköznapok matematikája, munkafüzet 4. osztályosoknak*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Ambrus Gabriella (2007): *Valóságközeli matematika (munkafüzet és tanári segédkönyv CD).* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Ambrus Gabriella (1996): Újabb eredmények hatszögtáblán, *A Matematika Tanítása*, **I**. 14–21.

Blankenagel, Jürgen (1983a): Schätzen, Überschlagen, Runden. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe*, **8**. 278–284

Blankenagel, Jürgen (1983b): Schätzen, Überschlagen, Runden. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe*, **9**. 315–322.

Csíkos Csaba és Verschaffel, Lieven (2011): A matematikai műveltség és a matematikatudás alkalmazása, In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.) *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 59–95.

Franke, Marianne (2003): *Didaktik des Sachrechnens*. Spektrum, Heidelberg, Berlin.

Gerstner, Sabine, Heyne, Thomas és Renninger, Lioba (2012): Live aus dem Bienenstock. Multimedialer Biologieunterricht mit echten Bienen. *Praxis Schule*, **4**. 11–17.

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport (2004): *Bildungsplan Grundschule*, Ditzingen, Baden-Württemberg.

Nunes, Terezinha, Csapó Benő (2011): A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése, In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.) T*artalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 17–57.

Renkl, Alexander (1996): Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird. *Psychologische Rundschau*, **47**. 78–92.

Sain Márton (1986): *Nincs királyi út.* Gondolat Kiadó, Budapest.

Tautz, Jürgen (2013): A *természet csodája a mézelő méh*. Apiliteratura Hungarica Kiadó.

Tautz, Jürgen, Ruppert, Markus és Wörler, Jan (2013): Die Mathematik der Honigbiene. In: Ruppert, M. és Wörler, J. (Hrsg.) T*echnologieeinsatz im Mathematikunterricht*. Springer, Heidelberg, Berlin. 201–216.

Tóth Sándor (1994): Ismét a hatszögtábláról. *A Matematika Tanítása*, **4**. 10–15.

Vancsó Ödön (2012, szerk.): *Matematika körülöttünk*, 5–8. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Wittmann, Erich Christian és Müller, Gerhard (2007): Muster und Strukturen. In: *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* 42–65.

NAT 2013, 2012. június 4., *Magyar Közlöny* http://www.magyarkozlony.hu/

ABACUS folyóirat, 2008 októbere.

Gyermeknevelés
2. évf. 2. szám 18–22. (2014)

Játékok a számelméletben

Óra-aritmetika

Árokszállási Eszter
Vak Bottyán Gimnázium, Paks

A tapasztalatok azt mutatják, hogy sok gyerek fél a matematikától, habár a gyerekek szívesen játszanak matematikai játékokat. Bemutatunk egy játékot, amely lehetőséget nyújt a tanulók ismereteinek bővítésére. A számelméletből a maradékos osztás témakörét választjuk. Három reprezentációs szint használatával eljutunk a matematikai szabályok felismeréséig. A szerepjáték segíti a gyerekeket (10–12 év) abban, hogy örömmel vegyenek részt a felfedezésben. A játékot a gyerekek ajándékba kapják, így közelebb kerülnek a közös tudáshoz és ennek segítségével nem eltaszítjuk, hanem bevonjuk őket a matematikába.

***Kulcsszavak**: matematika, játék, játékos oktatás, sejtés szerepe, flow*

„Próbáljátok meg a játékokat lejátszani." (Szendrei Julianna,1987)

Bemutatás

A számítógépen az egyik keresőprogramba beírjuk a „Félelem a matematikától." mondatot és bármely kereső programmal nagyon sok találatot jelez a monitor. Tanári munkám során fontosnak tartom, hogy megértsem ezt a félelmet, helyette a matematika szépségeire összpontosítsak és segítsek abban, hogy a diákok a matematikát szívesen tanulják, a „szeretem" tantárgyak közé sorolják.

Ebben az írásban egy olyan matematikai játékot mutatok be, amely alkalmas arra, hogy a gyerekeknek a *flow (*áramlat*)* élményét nyújtsa. A játékot 6. osztályos tanulóknak szánom és azt szeretném bizonyítani, hogy a maradékos osztást lehet játékos formában is tanítani. Csíkszentmihályi Mihály használta először és írta le a *flow (áramlat)* kifejezést. A flow olyan élmény, amikor annyira belemerülünk abba, amit csinálunk, hogy észre sem vesszük mennyire telik az idő, mint amikor az áramló folyó sodor bennünket. Áramlattevékenység közben a játék igazi öröméért tevékenykednek a tanulók, próbálgathatnak, kérdezhetnek, lehetőséget kapnak, hogy a szabályokat saját maguk fedezzék fel (*Csíkszentmihályi,* 2000.). Miközben hűek maradunk a magyar matematikus Pólya György hitvallásához is, aki három pontban gyűjti össze tanítási attitűdjének lényegét. 1. *Mi a tanítás? A tanítás az, hogy lehetőséget adunk a tanulóknak arra, hogy a dolgokat saját maguk fedezzék fel.* 2. *Először találgass, azután bizonyíts!* A harmadik pontban egy matematikával kapcsolatos hiedelemről (*belief*) beszél: 3. Úgy tűnik, hogy a matematika a bizonyításokból áll, de ez nem egészen van így. A kész *matematika bizonyításokból áll, de a matematika művelése találgatások összessége* (*Pólya*, 1966.).

A találgatásokhoz és a szabályok felfedezéséhez három reprezentációs szintet használunk (*Bruner*, 1966). Ezzel is segítünk abban, hogy az átlagos képességű tanulók könnyebben léphessenek be a szimbólumok világába. A három reprezentációs szintet az alábbiak szerint használjuk. A materiális (enaktív) síkon, az ismeretszerzéshez a játékhoz szükséges órát a gyerekek készítik el. Játék közben a gyerekek az óra mutatóját a megfelelő számra forgatják. Az ikonikus síkon, a szerepjátékban a gyerekek magukat egy elképzelt világba helyezik. Az órákat lerajzolják a füzetükbe. A szimbolikus síkon, a felismert szabályokat hangosan elmondják, megbeszélik társukkal, megértik. A tanár segítségével matematikai szimbólumokká alakítják. A matematikai szimbólumok legtömörebb formái a matematikai nyelvnek. A matematikusok közös megegyezésén alapulnak, ezért sem várhatjuk el, hogy a tanulók minden nehézség nélkül azonnal alkalmazzák azokat.

A játék bemutatása

a) Maradék ország leírása

A gyerekeket bevezetjük egy elképzelt országba, ahol ők is szerepelhetnek. Nevezzük ezt az országot *Maradék országnak*! *Maradék országban Maradék városok* vannak, ahol csak a maradékok számítanak. Az órák is ennek megfelelően működnek. A *Nulla* maradékvárosban nem mérik az időt. Ez a *Marad*ék főváros itt a Király vagy Királynő lakik. Az *Egyes* maradékvárosban egy hosszú szalagot használnak, amelyen beosztások vannak: 0; 1; 2; 3; 4… m-1; m… Ha a szalag elfogyna, egyszerűen hozzáragasztanak még.

A *Kettes maradékvárosban* körlapot használnak, amelyen 0 és az 1-es jel van. Ezen forog az óra mutatója pozitív irányban. Hasonlóan a *Hármas maradékvárosban* az óra körlapjára a 0, az 1 és a 2-es jelet festik.

Az m-es maradékvárosban a körlapra a 0, 1, 2… m-1 jeleket festik. Az órákat a király parancsára összehangolják. Az *Egyes-, Kettes-, Hármas-… m-es maradékvárosban* is, egy óra ugyanannyi ideig tart. *Maradék ország* az EGÉSZEK birodalma. Itt minden városban csak egészekben mérik az időt. Ezekbe a városokba elutazhatunk és ott az aktuális időszámítás szerint mérjük az időt.

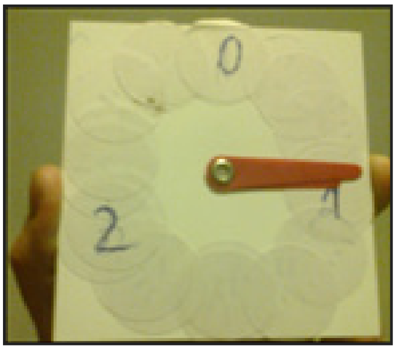
b) A játék szereplői és feladatuk

A játék szereplői a Király vagy Királynő, a Nagy utazók és a Bölcsek. A játék elején egy Királyt vagy Királynőt kijelölünk, először ez a játékos a tanár. Később a gyerekek is szívesen vállalják ezt a szerepet. A játékot párban játsszuk. A padban egymás mellett ülő gyerekek közül az egyik a Nagy utazó a másik a Bölcs.

- A Király vagy Királynő feladata: A Nulla Maradék fővárosban élő Király vagy Királynő annak a Nagy utazónak adja fele királyságát és Nulla királylányát (király fiát), aki a legtöbb kérdésre tud válaszolni. A kérdések a maradékokkal kapcsolatos műveletekre, az új matematikai környezetre, szabályok megsejtésére vonatkoznak.
- A Nagy utazó feladata: Elutazik a megfelelő Maradék városba és megkéri a városban lakó Bölcset, hogy segítsen. A Nagy utazó is tehet fel kérdéseket, ha szeretne.
- A Bölcs feladata: Segít a Nagy utazónak válaszolni.

Egy-egy játékrész után, ami kb. 20–25 percig tart, közösen megbeszéljük a válaszokat és a gyerekek leírják a füzetükbe. Ez utóbbi elemző részhez is szükségünk van kb. 20–25 percre. A 45 perces tanítási óra gyorsan eltelik, ezért az osztályhoz, csoporthoz igazítjuk, hogy meddig jutunk el a feladatokban. A játékot a gyerekek nagyobb iskolai szünet előtt ajándékként kapják (pl. karácsonyi ajándékként).

c) Az órák elkészítése



1. ábra: Az egymutatós óra

A Maradék városok óráit a gyerekek készítik el. Az óra számlapját a kivágják, és irattűző kapoccsal rögzítik a mutatót (*Szendrei,* 1987). A számokat ceruzával írjuk rá az óra számlapjára, így könnyen átírhatjuk azokat, ha másik Maradék városba utazunk. Választhatjuk azt is, hogy a kereskedelemben kapható óra számlapját leragasztjuk és az egyik mutatót hagyjuk meg. Mindegyik gyerek kezében van egy óra, amit játék közben használ (lásd *1. Ábra*)

A feladatok

Manipulatív tevékenységgel kezdjük az ismeretszerzést. A *Hármas maradék város* óráit próbáljuk ki. Most nullán áll a mutató.

A Király vagy Királynő kérdései:

Hol áll majd a mutató 1 óra, 2 óra, 3 óra, 18 óra, 22 óra, 59 óra múlva?

Megoldás: 1 óra múlva az 1-esen, 2 óra múlva a 2-esen, 3 óra múlva a 0-án, 22 óra múlva az 1-esen, 59 óra múlva a 2-esen.

Hol állt 1 órával, 2 órával, 3 órával, 18 órával, 22 órával, 59 órával ezelőtt?

Megoldás: 1 órával ezelőtt a 2-esen, 2 órával ezelőtt az 1-esen, 3 órával ezelőtt a 0-án, 18 órával ezelőtt a 0-án, 22 órával ezelőtt a 2-esen, 59 órával ezelőtt az 1-esen.

Mondjátok meg a mellettetek ülő Bölcsnek, hogy hány óra telt el! *(Most szabadon választanak a gyerekek időpontot.)* Lássuk, hol áll a mutató?

Hány órával ezelőtt történt? *(Most szabadon választanak a gyerekek időpontot.)* Lássuk, hol áll a mutató?

Fordítsátok meg a szerepeket, és a társatok is mondjon nektek feladatot!

Milyen esetekben állnak együtt a mutatók a párotokéval? (Milyen esetekben áll a mutató például mindkettőtök óráján az 1-esen?)

Megoldás: A két órán a mutatók akkor mutattak ugyanarra a számra, ha hárommal osztva ugyanazt a maradékot adták a mért idők, vagy a két órán mért idők különbsége osztható hárommal. Például: egyik eltelt idő 4 óra, a másikon 22 óra akkor 4=1•3+1 és 22=7•3+1. A **+1** *mutatja, hogy az 1-esen állnak a mutatók. A különbséggel pedig 22-4 = 18, létezik a 6, hogy 18=3·6, így 3* osztója a 18-nak*, nincs maradék, nulla a maradék.*

Nagyon nagy számoknál hogyan érdemes megvizsgálni, hogy együtt állnak-e a mutatók?

Például 347738 óra után, 347707 óra után?

Megoldás: Nagyon nagy számoknál inkább a két órán lévő különbség alapján érdemes dönteni. 347738-347707=31 a 3 nem osztója a 31-nek, így az órák nem mutatják ugyanazt az időt a Hármas maradék városban.

Találjunk ki, rögzítsünk le szabályokat, hogy mit lehet, és mit nem lehet itt, a Hármas maradék városban csinálni? Mit gondoltok a Hármas maradékvárosban lehet-e összeadni, kivonni, szorozni, hatványozni, osztani a mért időket? Milyen műveleteket

és hogyan lehet elvégezni? (*Freud-Gyarmati*, 2006; *Pintér,* 2012.) Először játsszunk el néhány példát, adjunk fel padtársunknak is hasonlót, majd cseréljünk szerepet!
A Király vagy Királynő kérdései lehetnek például:

Hármas maradék városban, ha eltelik 7óra, akkor az óra mutatója ugyanott áll, mint amikor eltelik 16 óra. Ugyanez a helyzet, ha eltelik 5 óra és eltelik 23 óra. Mit gondoltok az eltelt 7+5 óra és eltelt 16+23 óra esetén is ugyanazon a számon állnak az óra mutatói? Magyarázzátok meg a válaszotokat!

Megoldás: 7 órakor és 16 órakor mindkét órán az 1-esen állnak a mutatók. 16-7=9 és 3 osztója a 9-nek. Az 5-ös és a 23-as esetében mindkét óra a 2-esen áll. 23-5=18 és 3 osztója a 18-nak. Az összeadás után 7+5=12 és 16+23=39, mindkét óra mutatója 0-án ál, együtt állnak. 39-12=27 és 3 osztója a 27-nek, nulla a maradék.

A Hármas maradékvárosban az eltelt 11 óra és az eltelt 2 óra után ugyanott állnak a mutatók, és az eltelt 9 óra és az eltelt 6 óra után ugyanez a helyzet, akkor az eltelt (11–9) óra és a (2–6) óra után vajon együtt állnak-e a mutatók? Miért?

Megoldás: 11 órakor és 2 órakor a 2-esen állnak a mutatók. 9 és 6 órakor a nullán. Most a kivonás után 11-9=2 és 2-6=-4 negatív számot kapunk. Ez csak annyit jelent, hogy ellenkező irányban forgattuk a mutatót 4 órával. -4 -2= -6 és 3 osztója a -6-nak. (Kijöhetnek negatív számok is. Nem baj, megbeszéljük.)

A Hármas maradékvárosban az eltelt 7 óra után ugyanott áll a mutató, mint az eltelt 4 óra után. Az eltelt 17 óra és az eltelt 5 óra után is együtt állnak a mutatók, akkor az eltelt 7·17 óra és az eltelt 5·4 óra után vajon ugyanott állnak-e a mutatók? Miért?

Megoldás: 7 és 4 óra után az 1-sen, 17 és 5 óra után a 2-esen állnak a mutatók, akkor 7·17 és 5·4óra után is ugyanott fognak állni, mert 119-20=99 és 3 osztója 99-nek, nulla a maradék.

A Hármas maradékvárosban az eltelt 7 óra után ugyanott áll a mutató, mint az eltelt 13 óra után, akkor az eltelt (7:2) óra után ugyanott áll-e a mutató, mint az eltelt (13:2) óra után? Miért?

Megoldás: Az eredmények nem egészek. Az egészek birodalmában vagyunk, ezért itt nincs ilyen idő.

A Hármas maradékvárosban a mutató kezdetben a 0-án állt. Ketten figyelik, az eltelt időt Anna azt mondja, hogy 4 óra telt el, Barnabás azt mondja, hogy 7. Nem tudnak megegyezni az óra mutatója az 1-esen áll. Abban biztosak, hogy 4 többszöröse telt el. Vajon mi lehet a megoldás a Hármas maradék városban? Mit gondoltok, a 4-et mely számokkal lehet megszorozni, hogy ugyanott álljanak a mutatók?

Próbálgatással a megoldások: A lehetséges értékek, ha 0-ról indulunk pozitív irányban.

4	7	10	13	16	19	22	25	28	…

A hármas maradékvárosban tapasztaltak alapján milyen sejtéseink lehetnek?

A sejtés vizsgálata a feltételek változtatásával

Utazzunk el más Maradék városokba is például az Egyes vagy a Tizenkettes maradékvárosban! Próbáljuk végig szabályainkat és kérdezzük meg a városban lakó bölcset (pad társunkat), hogy jól következtettünk-e? (Utána közös megbeszélés.) Az Egyes Maradék városban papírszalagot használunk.

Nagy utazónk szerint előfordult az is, hogy a Tizenkettes maradékvárosban a 20 óra és 56 óra elteltével ugyanott állnak a mutatók. Azonban, ha mindkét számot elosztotta 4-gyel, akkor az eredmény már nem volt helyes a Tizenkettes maradékvárosban, ahhoz át kellett utaznia a Hármas maradékvárosba és ott már igaz lett az állítás. Mit gondolsz, ezt a szabályt érvényesíteni lehet az összes maradékvárosra?

Konklúzió

A gyerekek hozzáállása pozitív a játékhoz. 7. osztályban és felsőbb évfolyamokon továbbfolytathatjuk, fejleszthetjük a játékot (*Pappné Kovács,* 2012.). A játékban őszintén megnyilatkoznak a tanulók: „Tanár néni mi csak óra végén vettük észre, hogy nem kell egyesével tekerni a mutatót!” A feladatokat végig megoldotta a két gyermek és az óra végére megérett a gondolat, hogy összevonásokat, egyszerűsítéseket lehet tenni. Tehát hasznos tapasztalatokat gyűjthetünk a gyerekek matematikai képességeiről. Ezen tapasztalatok birtokában hatékonyabban tudjuk segíteni őket. A gyerekek figyelmét meg tudjuk ragadni és ébren tudjuk tartani, ami az első és legfontosabb feltétele a tanulásnak.

Irodalom

Bruner, J. (1974). *Új utak az oktatás elméletéhez.* Budapest: Gondolat
Csíkszentmihályi, M. (2000). Budapest: Akadémia.
Freud R.-Gyarmati E. (2006). *Számelmélet.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
Pappné Kovács, K. (2012. december 12). konzultáció; (ELTE).
Pintér, K. (2012). *Számoljunk a maradékokkal; 0641 modul.* Forrás: www.sulinet.hu/tanar/.../2.../3.../2.../amat_0641__tanar.pdf
Pólya, G. (1966). George Pólya in teaching US a lesson. http://vimeo.com/48768091, USA.
Szendrei Julianna, R. G. (1987). *A játék matematikája.* Budapest: Tankönyv Kiadó.
Szendrei Julianna, R. G. (1987). *MATEK-JÁTÉK Napköziben és otthon.* Budapest: Tankönyv Kiadó.

Gyermeknevelés
2. évf. 2. szám 23–27. (2014)

Játék és matematika másfél órában

Dályay Zsuzsanna
SZTE JGYPK TÓKI Matematika Szakcsoport

A Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Pedagógusképző Karának Tanító- és Óvóképző Intézetében néhány éve bevezetésre került a választható tantárgyak között egy Játékos matematika kurzus, mely igen népszerű a hallgatók körében. A kurzus célja megismertetni a hallgatókkal a játék szerepét a matematikai gondolkodás fejlesztésében, matematikai tehetséggondozásban, és nem mellékesen megtapasztaltatni velük az önfeledt játék, a játékhelyzetekben történő gondolkodás örömét. A félév során a hallgatók különböző logikai, stratégiai és egyéb olyan gondolkodtató játékokkal ismerkedhetnek meg, melyek eredményesen használhatóak a matematikai gondolkodáshoz szükséges képességek kialakításában, fejlesztésében. A kurzus teljesítésének több feltétele van: témába illeszkedő (társas)játékot találni, és azzal játékot vezetni, – a szakirodalomban önállóan keresve – valamilyen matematikai témájú eszköz vagy modell készítését ismertetni órán, valamint saját ötleten alapuló, saját készítésű játékot bemutatni, tesztelni. Jelen írásban a kurzus tapasztalatairól szeretnék beszámolni, kitérve a hallgatók által leginkább kedvelt játékokra és azok matematikai vonatkozásaira.

Kulcsszavak: *matematikai játékok, logikai játékok, Panic Lab, SET, Qwirkle*

A Játékos matematika kurzus teljesítéséhez alapvető elvárás a hallgatók aktív jelenléte, szerepvállalása. Miközben kezdetben, óráról órára egyre több (oktató által bemutatott) játék megismerésében, kipróbálásában és elemzésében vehetnek részt a hallgatók, fokozatosan egyre nagyobb szerepet kap az ő önálló munkájuk is. Első feladataik közé tartozik behozni, bemutatni és játékot vezetni egy olyan (társas)játékkal, amely illeszkedik a kurzus tárgyához, azaz játszása alapvetően logikus, elemző gondolkodást igényel. Néha már ennek a megítélése is nehézséget okoz számukra, de ahogy a félév során egyre több játékot ismernek meg, egyre fogékonyabbakká és kreatívabbakká válnak. Második feladatuk valamilyen matematikai tartalommal is bíró játékos tevékenység szervezése (pl. gyufaátrakásos feladatok, hajtogatások stb.), majd a félév második felében saját ötletet is tartalmazó játékot kell készíteniük. Ezeket a játékokat az órán bemutatják, majd teszteljük is őket, így az elhangzó ötleteket, megjegyzéseket, beépíthetik a játékba vagy a játék (eszközének) egy új változatába.

A következőkben néhány olyan játékot ismertetünk, melyek a hallgatók által leginkább kedveltek közé tartoznak, és amelyeknek közös jellemvonása, hogy maga az eszköz logikaikészlet-jellegű. A Dienes Zoltán nevéhez fűződő logikai készlet Magyarországon legelterjedtebb változata műanyag lapokból áll, melyek *színük* szerint lehetnek kékek, zöldek, pirosak vagy sárgák, *alakjuk* szerint négyzetek, háromszögek vagy körök, *méretük* szerint kicsik vagy nagyok, *felületük* szerint pedig lyukasak vagy simák, és a lapok között minden lehetséges verzió szerepel. Így a készlet elemeinek száma: 4•3•2•2=48. A logikai készlettel számos olyan játékos tevékenység is szervezhető, mely kiváló alapot nyújthat a halmazokkal és logikával kapcsolatos tapasztalatszerzéshez. Ahhoz, hogy a játékok, tevékenységek kapcsán felmerülő gondolatok elválhassanak az eszköztől, nagyon fontos a reprezentációk váltogatása. Ezt a logikai készlet mintájára készíthető különböző készletek használatával is elérhetjük, de választhatunk a különböző játékkiadók logikai készlet hátterű játékaiból is. A továbbiakban ezek közül mutatunk be néhányat.

Panic Lab (Dominique Ehrhard ötlete alapján; Gigamic):
A játék egy történet köré épül, mely szerint a játékosoknak különböző laboratóriumokból megszökött, szellőzőrácsok mögött bujkáló és menekülésük során különböző átalakulásokon áteső amőbákat kell megtalálniuk. Az amőbák formájuk szerint egy- vagy kétszeműek lehetnek, mintájuk alapján csíkosak vagy pöttyösek, a színük pedig piros vagy kék. Így 2•2•2•2=8 különböző amőbánk van, és a játékban mindegyik két példányban jelenik meg. A játék tartalmaz további lapokat is: 3 labor-, 3 mutációsszoba- és 3 szellőzőrácskártyát, valamint négy dobókockát. A laborkártyák (piros, kék, sárga) egyetlen szerepe a kiindulás helyének megjelölése. A mutációs szobák mindegyikében egy-egy átalakuláson esik át az amőba: megváltozik a formája (szemeinek száma), a mintája vagy a színe. A szellőzőrácskártyák egyformák, és a pálya bizonyos szakaszait iktatják ki a keresés során (lásd az 1. ábrát[1]).

1. ábra: Panic Lab

A játék menete a következő: a 25 lapkát összekeverés után körberakjuk, ez alkotja a mindig változó „játéktáblát”, majd a dobókockákkal kidobjuk a keresendő amőbát – melyet a három kockával kidobott forma, minta és szín határoz meg –, valamint a kiindulás helyét jelölő labor színét, a szökés irányával együtt – mindkettőt a negyedik kocka határozza meg. (Például, az illusztráción látható kidobás szerint a kétszemű piros pöttyös amőbát kell keresni, amelyik a kék laborból szökött meg a – laborkártyán is feltüntetett – fehér nyíl irányában.) A játék lényege az amőba mielőbbi megtalálása, az átalakulások helyes nyomon követésével, figyelembe véve a szellőzőrácsok szerepét is. A játékos tehát megkeresi a kiindulási pontként szolgáló labort, és innen elindul a pályán a kidobott irány szerint, egyenként megfigyelve a kártyákat: ha megtalálja a keresendő amőbát, készen van, ha azonban ezt megelőzően mutációs szobába botlik, akkor a továbbiakban már a mutálódott amőbát keresi, hiszen a történet szerint az amőba a menekülés során áthaladt ezen a szobán. (Előző példánkban, ha a kék laborból fehér nyíl irányában indulva, a kétszemű piros pöttyös amőba megtalálása előtt egy színmutációs szobába botlunk, akkor ezentúl kétszemű kék pöttyös amőbát keresünk, mindaddig, amíg meg nem találjuk, vagy más mutáció miatt másmilyen formában nem keressük.) Ha az amőba megtalálása előtt szellőzőrácsba botlunk, akkor innen a következő szellőzőrácsig tartó szakaszt át kell ugornunk, és csak az ezt követő szakaszon folytathatjuk a keresést (majd a következő szellőzőrácstól megint kihagyunk egy szakaszt, és így tovább, felváltva keresünk, kihagyunk).

A játékot 2–10 fő játszhatja, a játékosok egyszerre vannak játékhelyzetben: noha a soron következő játékos dob a kockákkal, mégis mindenki egyszerre keresi a szökött amőbát, és aki a leggyorsabban megtalálja, rámutat. Pontot akkor kap, ha megindokolta és a többiek el is fogadták a válaszát. A játékot az nyeri, aki a legtöbb pontot gyűjti össze. (Természetesen a játék egyszemélyes verzióban is játszható.)

1 Kép forrása: http://jatek.origo.hu/gigamic-panic-lab-tarsasjatek.html

A játékszabályok összetettek ugyan, de játék közben könnyen megérthetőek. A fokozatosság érdekében, bevezető játék lehet az, ha kihagyjuk a szellőzőrácsokat a játékból. Noha a kiadó 8 éves kortól ajánlja, kisebbekkel is játszható, és könnyedén olyan gyerekekkel, akik ismerik a logikai készletet. A játékszabályok összetettsége elemzésre ad lehetőséget a hallgatók számára is. Általában a következő kérdések szoktak felmerülni:

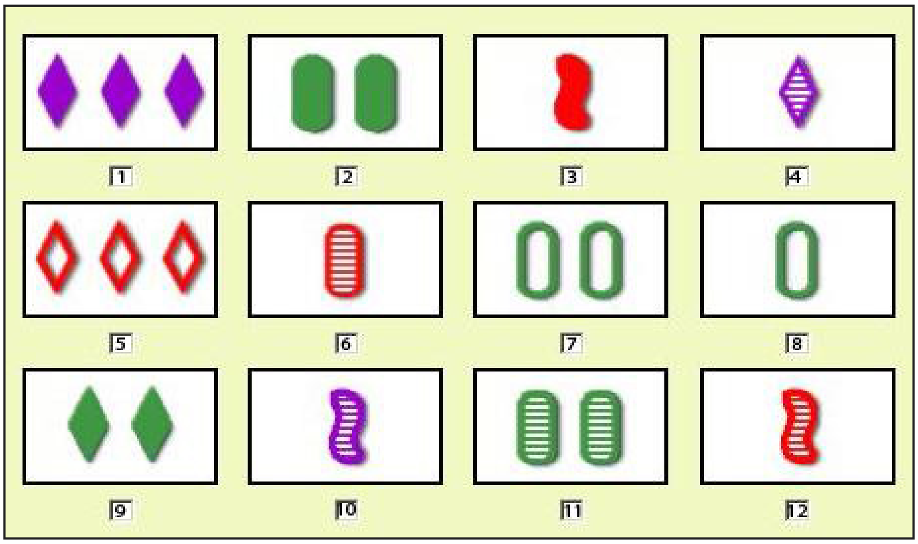
- *Megtörténhet-e, hogy a „szellőzőrácsszabály" pályaszakaszokat kiiktató tulajdonsága miatt nem találjuk meg a keresett amőbát?* Nem! A páratlan számú szellőzőrács páratlan számú ívre osztja a pályát, így a pálya azon szakaszai, amelyek első körben kimaradnak, a második körben bejárhatóak, és fordítva.
- *Mi a jelentősége a „szellőzőrácsszabálynak", ha végül mégis bejárhatunk minden szakaszt (kivéve, ha már első körben előkerülne a szökött amőba)?* Elsősorban a mutációs szobák sorrendjének meghatározásában, esetleg az amőba ideiglenes elrejtésében van szerepe.
- *Előfordulhat-e az amőba útja során ugyanaz a mutációs szoba kétszer is?* Előfordulhat, de ez csak az amőba harmadik körében történhet meg (az első teljes bejárás után), ami azt jelenti, hogy mindhárom mutációs szobán átjutott már, tehát ez a negyedik ilyen helyzete. Ekkor a játékszabály szerint az amőba végleg eltűnik.
- *Hány különböző sorrendben találkozhat amőba mutációs szobával, és mi az eredmény? 3+6+6=15* de az átalakulások eredménye nem függ a sorrendtől, csak attól, hogy hány mutációs szobán megy át az amőba, és melyek ezek. (Ez pedig 3+3+1=7 különböző lehetőség. Az átváltozások eredményeként végül is csak a másik 7 állapotba mutálódhat az amőba, és ez egybeesik azzal, amit az előbb megállapítottunk.)

SET (Marsha J. Falco, SET Enterprises):
A készlet olyan kártyákból áll, melyek rendelkeznek a következő tulajdonságok mindegyikének valamely lehetséges verziójával: *szám* (egy, kettő, három), *szín* (lila, zöld, piros), *forma* (ovális, rombusz, hullámos), *kitöltés* (üres, vonalkázott, teli), összesen 3•3•3•3= 81 kártya. A játék során 12 kártyát helyezünk az asztalra, és ha bármelyik játékos felvesz közülük néhányat, újra 12-re egészítjük ki a táblát. A játék célja olyan kártyahármasok gyűjtése (ezeket nevezzük SET-nek), melyek minden egyes tulajdonságot tekintve (tulajdonságon belül) vagy azonosak, vagy háromfélék. A játékosok egyszerre vannak játékhelyzetben: mindenki egyszerre keres SETet, és aki a leghamarabb talál egyet, felveheti, majd az a játékos nyer, aki a játék végéig a legtöbb kártyát gyűjtötte össze. Habár nagyon egyszerűen megfogalmazható a játékszabály, mégis gondot szokott okozni az értelmezése, a kártyahármasok gyűjtögetése pedig valóban komoly figyelmet igényel. Ennek megkönnyítése érdekében érdemes néhány egyszerűbb játékkal kezdeni.

Logikai készlettel ismert tevékenység az egykülönbséges (két-, három- vagy négykülönbséges) sorozat alkotása: a logikai lapokat úgy rakjuk sorba, hogy bármely két egymást követő lap pontosan egy (illetve kettő, három vagy négy) tulajdonságban különbözzék. Ezeket bevezetésképpen a SET kártyáival is játszhatjuk, segítve ezzel a játékosokat a kártyák megismerésében és összehasonlításában. (Mivel a SET is logikai készlet, nagyon sok más olyan játékot is végigjátszhatunk vele, amelyet logikai készlettel lehet játszani.)

Másik egyszerűbb kezdőjáték lehet, ha csak a kártyapakli egy részével játszunk a SET szabályai szerint, mondjuk a teli kártyákkal (27 db), és így csak három tulajdonságot (szám, szín, forma) kell figyelnünk. Ebben a játékban csak 9 kártyát helyezünk az asztalra.

Próbáljuk most értelmezni a SET jelentését az alábbi kirakásban! Például az 1, 2, 3 kártyák SET-et alkotnak, mert számuk háromféle, színük háromféle, formájuk háromféle, kitöltésük pedig azonos. Az 1, 11, 12 kártyák azonban nem alkotnak SET-et: habár a számuk háromféle, színük háromféle, formájuk háromféle, a kitöltésük azonban kétféle. Találjuk most meg az összes SET-et az adott kirakásban! Ezek a következők: (1, 2, 3); (1, 7, 12); (2, 5, 10); (2, 7, 11); (3, 4, 8); (4, 5, 9).



2. ábra: SET[2]

A hallgatókkal a következő kombinatorikai kérdések is elemezhetőek:

- *A SET kártyáinak egykülönbséges sorozatba rendezése esetén, hány kártya kerülhetne egy adott kártya után?* (8) Ugyanezt megkérdezhetjük két-, három- vagy négykülönbséges sorozat esetén is.
- *Lehetséges-e, hogy a 12 letett kártya között ne legyen SET?* Igen! Elszántabbak megpróbálkozhatnak ilyennek a kirakásával is.
- *Hány különböző SET-ben lehet benne egy adott kártya?* (40)
- *Hány különböző SET lehet a játékban?* (1080)

Természetesen az előbbi kérdések némelyike nehéz lehet egy-egy hallgató számára, de volt már olyan csoport, amelyben felmerültek, és szívesen foglalkoztak velük.

A játék szerzője egyébként genetikai kutatásokat végzett Cambridge-ben, az epilepszia öröklődésének tényezőit vizsgálva kutyákon, és a könnyebb áttekinthetőség kedvéért ábrákkal jelölte az egyes információblokkokat, melyeket kártyákra jegyzett le. A kártyákat kiterítve az asztalon, azonosságokat és különbözőségeket keresett az ábrák között. Innen származik a játék ötlete, melyet később tökéletesítve, kiadott. A SET az egyik legtöbb díjat nyert bezsebelt játék.

Qwirkle (Susan McKinley Ross):
A készlet különböző négyzet alakú falapokból áll (nevezzük ezeket köveknek), melyek *mintájuk* szerint hatfélék, *színük* szerint pedig szintén hatfélék lehetnek (tehát összesen 36-féle kő van), és mindegyik kő három példányban (tehát összesen 108 kő) található a készletben (lásd a 3. ábrát[3]).

[2] Kép forrása: http://www.nordinho.net/vbull/puzzles/10863-set-enterprises-daily-puzzles.html
[3] Kép forrása: http://www.educatief-speelgoed.com/qwirkle-travel.html

3. ábra: Qwirkle

A játékszabály hasonló a Scrabble játékszabályához: egyszerre egy követ vagy sorozatot játszhatunk ki úgy, hogy annak már letett kőhöz (esetleg kövekhez) kell kapcsolódnia valamint vízszintesen és függőlegesen is illeszkednie kell azokba a sorozatokba, amelyekhez hozzáér. Egy sorozat vagy azonos színű és különböző formájú köveket tartalmaz, vagy azonos formájú és különböző színűeket. (Tehát egy sorozat legalább 2, és legfeljebb 6 kőből állhat.) A pontozás is hasonló a Scrabble pontozásához: egy kő kijátszásakor annyi pontot kap a játékos, ahány kőből áll az a sorozat, amelyhez kapcsolódik (beleértve a már korábban lerakott köveket is). Ha a lerakott kő több sorozathoz is kapcsolódik, akkor minden ilyen sorozatnak megfelelően kap pontot. Ha a játékos sorozatot játszik ki, akkor a kijátszott sorozatért is kap pontot (a sorozat hosszúságának megfelelően), továbbá az általa lerakott kövekkel folytatott minden egyes sorozatért is. Ha egy játékos befejez egy sorozatot (Qwirkle-t hoz létre), akkor a sorozat hosszúságának megfelelő 6 pont mellé 6 bónuszpontot is kap. (Tehát egy Qwirkle 12 pontot ér.)

A kiadó 6 éves kortól ajánlja a játékot. Ekkora gyerekekkel érdemes bevezető játékként úgy játszani, hogy kiosztjuk az összes követ a játékosok között, és az nyer, akinek leghamarabb elfogynak a kövei. Így csak a helyes illeszkedésekre kell figyelni, és a pontok számolása, a minél több pontot eredményező kombinációk megtalálása fokozatosan építhető be a játékba.

A hallgatók nagyon hamar átlátják a szabályokat, és legtöbben gyorsan rájönnek a stratégiai lehetőségekre is. Néhány ezek közül:

- Gyakran több pont szerezhető egyetlen kő jól megválasztott elhelyezésével, mint egy hosszabb sorozat lerakásával.
- Öt kőből álló sorozat létrehozása kockázatos, hiszen felkínálja a többi játékos számára a Qwirkle könnyebb létrehozásának lehetőségét.
- Tudva, hogy minden kőből összesen három van a játékban, figyelhetjük, hogy bizonyos pozícióba várható-e még megfelelő elem, vagy egy nálunk lévő kő jó lerakásának lehetőségét elronthatja-e másik játékos. (Az utóbbi gondolat inkább a játék vége felé értelmezhető.)

Érdemes megjegyezni, hogy a Spiel des Jahres zsűrije 2011-ben a Qwirkle-t választotta meg az év játékának.

Irodalom

Bagota Mónika, *Játékok a tanítóképzésben*, (2014.04.08) http://www.nyme.hu/fileadmin/dokumentumok/atfk/apaczainapok/2010/Apaczai_napok_2009_tanulmanykotet_110216.pdf

Deme–Farkas Rita: *Variációk a Set témájára*, (2014.04.08) http://www.komal.hu/cikkek/2008-02/SET.h.shtml

http://en.gigamic.com/game/panic-lab(2014.04.08)

http://www.setgame.com/set (2014.04.08)

http://www.mindware.com/p/Qwirkle/32016 (2014.04.08)

Gyermeknevelés
2. évf. 2. szám 28–36. (2014)

A szorobán értékei Magyarországon

Mátyásné Kokovay Jolán
Magyar Szorobán Egyesület

Magyarországon a szorobán használatának elindításában jelentős szerepe volt Szendrei Julianna szakmai döntésének, segítségnyújtásának bátorításának.

Neki köszönhető, hogy 1992-től a fővárosi tanítóképzésbe is bekerült a szorobán alkalmazásának oktatása. Az ő bizalma, féltő, óvó szeretete, folyamatos érdeklődése lendületet adott az eszköz használatának fejlesztésére, új szemléltetési módok kutatására.

Ő szorgalmazta és segítette, hogy megalakuljon a Magyar Szorobán Társaság, amely feladata a szorobánt használó tanítók összefogása.

***Kulcsszavak**: szorobán, matematikaoktatás, transzferhatás, japán kapcsolatok, tanterv*

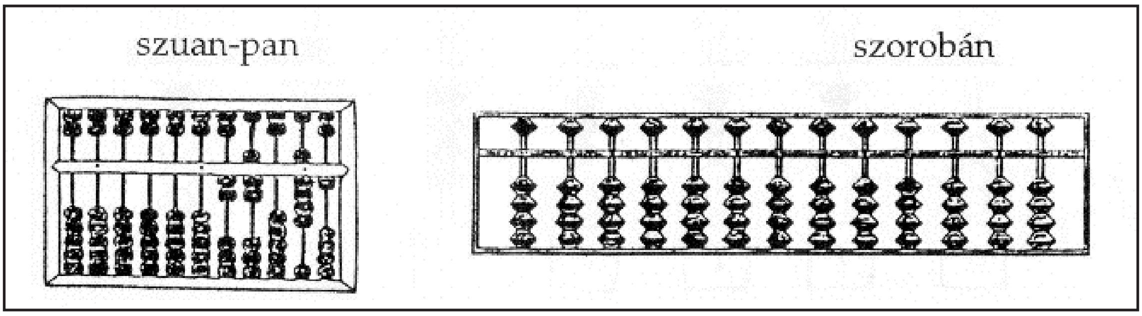
1. Hogyan került a szorobán Magyarországra?

Érdekes úton került hozzánk a japán abakusz, mert Lukács András geofizikus egy eszperantókonferencián hallott a szorobánról. Szendrei Juliannától kért szakmai véleményt, hogy a kínai számolótábla vagy a japán szorobán illeszkedik-e jobban a mi matematikaoktatásunkba. Szendrei Julianna a japán szorobánt javasolta. Így Lukács András az általa alapított Talento Iskolába meghívta tanítani az eszperantóul is beszélő japán előadót Kimie Markariant és lehetőséget adott arra, hogy az érdeklődő fővárosi iskolákban előadásokat is tartson a japán szorobántanár. Ő a pedagógusoknak szóló előadására egy 1. osztály részvételét kérte. Meghatározó élményt jelentett számunkra, hogy az előadása végén kipróbálhattuk az eszközöket és láttuk, hogy a gyerekek azonnal szakaszerűen és nagyon szívesen számoltak vele, mi felnőttek még csak próbáltunk eligazodni a sok golyó között.

1. ábra: Szorobán

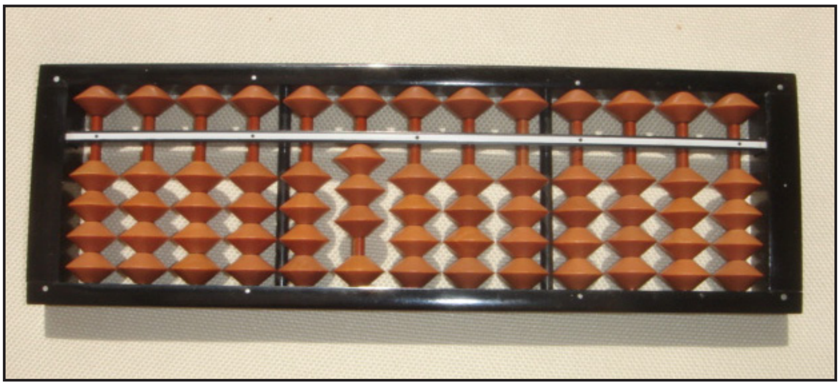
2. A szorobán bemutatása

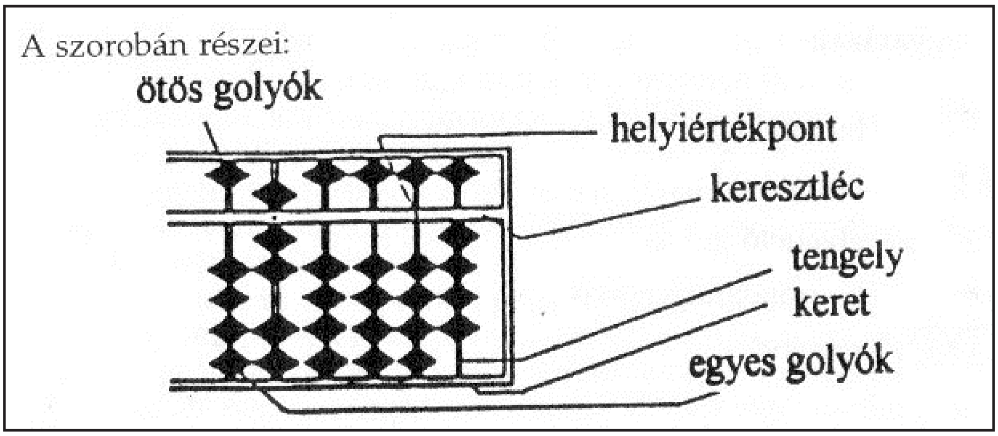
A japán szorobán évszázadok alatt alakult ki a kínai szuan-panból, amit magyarul számolótáblának nevezünk.



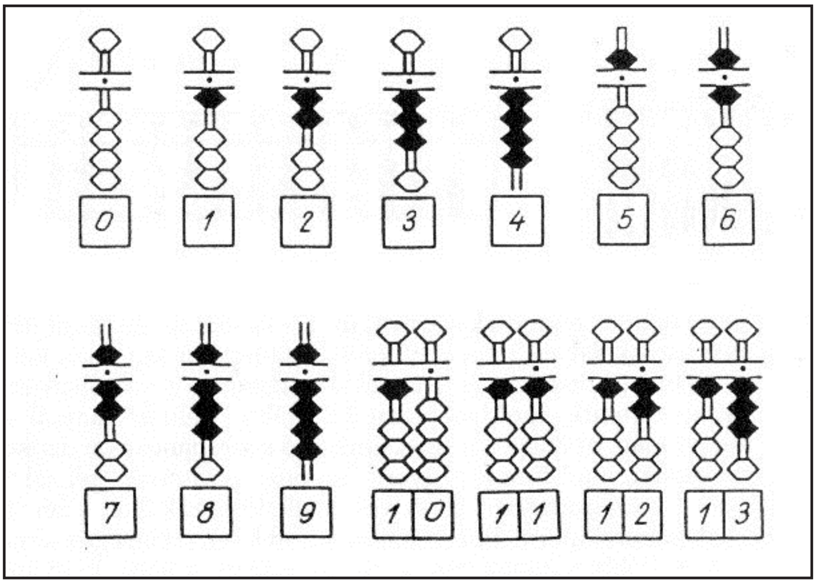
2. ábra: A szuan-pan és a szorobán

A tízes számrendszerre épülő, helyiérték-táblázathoz hasonlító eszköz használata könnyen megérthető, mert a pénzváltás logikájával működtethető. A különböző oszlopszámú eszközön az értékléchez érintett golyókkal számolunk. Ez a keresztülfutó léc osztja két részre az eszközt. Itt az alsó négy sorban minden golyó egyet, a felső sorban levők mindegyike pedig ötöt ér a saját helyi értékén. (*Mátyásné*, 1999)



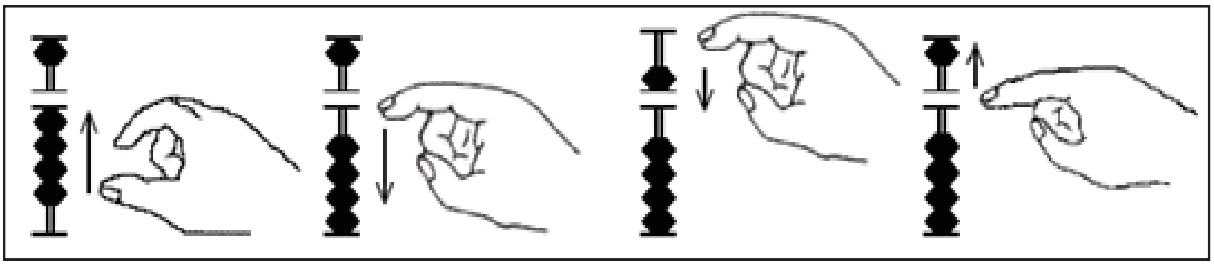


3. ábra: A szorobán részei



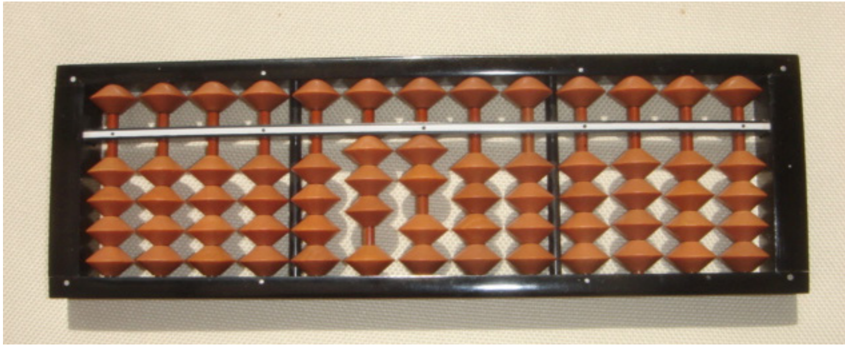
4. ábra: Számképek a szorobánon:

Általában a jobb kéz mutató-, és hüvelykujjaival mozgatjuk a golyókat, bal kézzel pedig átfogjuk a keretet és a számoszlopon vezetjük a szorobánt. Tehát munka közben mindkét kezünket használjuk. Balkezesek az író kezükkel mozgatják a golyókat (lásd: alábbi kép).



5. ábra: Ujjmozgások szabályai

A helyiértékes tájékozódást a keresztlécen található pontok segítik. Pl.: ha szeretnénk kirakni a 32-t, akkor a tízeseknél felhúzunk 3 golyót és tőle jobbra az egyesek oszlopában 2 golyót. Ilyenkor tapasztalják a kicsik, hogy a 32 áll 3 db tízesből és 2 db egyesből.



1000	100	10	1		
E	SZ	T	E		
		3	2	= 32	30+2=32
	3	2	4	= 324	300+20+4=324

6. ábra: Számolás a szorobánnal

Ahhoz, hogy a hallott számot a szorobánon meg tudjuk jeleníteni, minden esetben tudni kell az adott szám helyi érték szerinti bontását.

Mi – a japánoktól eltérően – az egyeseket a középső helyiérték-ponthoz helyezzük, hogy a kicsik tapasztalhassák, hogy a törtszámokból is nagyon sok lesz.

Arra törekszünk, hogy a gyerekek soha ne érezzék fárasztónak, unalmasnak a szorobán használatát, ezért úgy vezettük be, hogy minden matematikaórán csak 5–10 percet használhatják a tananyag megértéséhez, gyakorlásához. Nincs hozzá külön követelmény, sem tankönyv, sem házi feladat. (Ebben az összes, abakuszt használó országtól eltérünk, mert mindenütt adnak otthoni gyakorlásra külön feladatokat.)

A szorobán minkét agyféltekét fejleszti, mert számolás közben több érzékszervünket is használjuk egyszerre.(*Czeizel*, 1984). Mivel az írást is kiváltja, ezért a kicsik lényegesen gyorsabban tudnak számolni vele. Különösen nagy segítséget jelent azoknak a tanulóknak, akik számára az új ismeretek elsajátításakor az érzékszervek közül a tapintás fontosabb, mint a látás vagy a hallás. A gyerekeket örömmel tölti el, hogy a számfeladatok megoldása során rövid idő alatt sok jó eredményt érnek el. Ez a sikerélmény további erőt ad nekik a gyakorlásra.

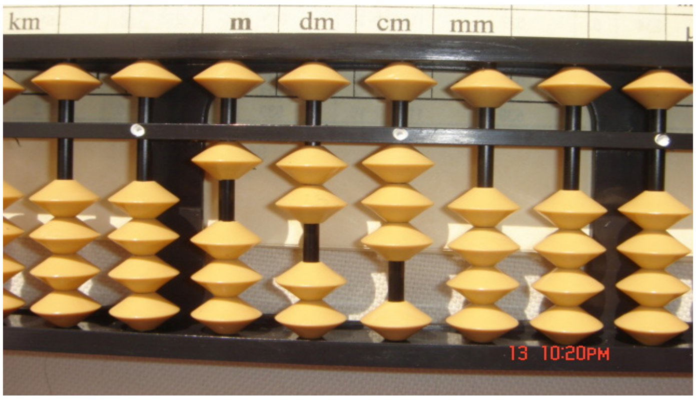
3. A szorobán szerepe a matematikaoktatásában

3.1. Tantervi követelmények teljesítése

Japánban a szorobán használatával a minél gyorsabb, minél nagyobb számokkal fejben történő számolás elérése a cél. Nálunk *a matematika tanításában a sokoldalú* *szemléltetést és a tantárgy megkedveltetését tűztük ki célul*. Ehhez folyamatosan kutatjuk a lehetőségeket (*Szendrei*, 2005).

A számfogalom kialakítása és erősítése mellett a bontások szemléltetéséhez, a mértékváltások gyakorlásához és a logikus gondolkodás fejlesztéséhez találtunk új felhasználási módokat. A gondolkodtató feladatok megoldásával a divergens gondolkodást és ezek alkotásával a kreativitást fejlesztjük.

Mértékváltás segítése szorobánnal Pl. 123cm = 1m+23cm vagy 123cm = 12dm+3cm stb…



km			m	dm	cm	mm
	hl		l	dl	cl	ml
kg		dkg	g			

7. ábra. Mértékváltást segítő szalag

Az egyes matematikai fogalmak kialakulását megelőzik a szorobán használata közben szerzett tapasztalatok. Például az elsősök tapasztalják, hogy ha egy számhoz hozzá kell adni valamennyit, akkor a golyókat hozzátolom az értékléchnél levőkhöz, ha pedig el kell venni valamennyit, akkor a golyókat elhúzom. Közben tapasztalják, hogy hozzáadásnál több lesz, elvételnél kevesebb marad.

A matematika tantárgyra vonatkozó továbbhaladás feltételeit eddig minden szorobánt használó 1–4. osztályos tanulónak sikerült teljesíteni. Ez az oktatásban nagy hangsúllyal szereplő *Számtan, számelmélet, algebra* témakör tananyagának tanításához használt taneszközök megkedveltetésének is köszönhető. A számfogalom alakítása, erősítése, az alapműveletek tanítása, gyakorlása, a nyitott mondatok, szöveges feladatok megoldása során segítségül hívható a szorobán.

A helyi tantervi követelmények teljesítésében a négy alapművelet elsajátítása rövidebb idő alatt eredményesebben történik szorobánnal, így sokkal több idő marad a geometria, valószínűség, statisztika témaköreinek tanítására. *(II. Helyi tanterv 2013. Kimle, Nemzetiségi Általános Iskola*)

A különböző országos szintű matematikaversenyek legjobbjai a szorobánt használó tanulók közül kerülnek ki.

3.2. Miért kedvelik a gyerekek?

A tanulók szívesen használják a szorobánt, mert sikerélményt, biztonságérzetet ad számukra.

Úgy érzik, hogy csak játszanak a szorobánnal, miközben sok számfeladatot gondolkodva, figyelmesen és fegyelmezetten oldanak meg. Örömet jelent a számukra, hogy a fárasztó és lassú írás helyett csak a golyókat kell mozgatni ahhoz, hogy sok hibátlan megoldásuk legyen (*Radnainé et. al*, 1994).

8. ábra: 1. osztályosok matematikaórán

Mivel csak 5–10 percet használják a gyerekek a szorobánt, ezért nem fáradnak el és nem unják meg. Így érjük el, hogy hosszú éveken keresztül ébren tudjuk tartani az érdeklődésüket, lelkesedésüket, ezért mindig szívesen oldanak meg egyre nehezebb és több feladatot. A tanulók számára örömöt jelenthet az is, hogy ők valami olyan ismerettel rendelkeznek, amit az okos felnőttek közül sokan nem ismernek. Ez is motiválhatja őket arra, hogy részt vegyenek délutáni szakkörökön.

9. ábra: Szorobánszakkörön

Az ellenőrzés tapintatos módját a japánoktól vettük át. A visszajelzés formája szerint a diktált láncszámolás után közösen bemondják az eredményt. A hallottakból kiderül, hogy a következő feladatsort gyorsabban lehet-e diktálni vagy esetleg nehezebb feladatsor következhet. A gyerekek hibájuk esetén hallják, hogy az ő eredményük eltér a többitől, de a másodperceken belül a következő feladatnál igyekeznek sokkal jobban figyelni. Hibás megoldás esetén nem szégyenülnek meg a társaik előtt. A kórusban bemondott eredmény őszinteségre szoktatja őket és nem kell aggódniuk semmiféle elmarasztalástól. Itt az ellenőrzésnél nem alkalmazzuk az egyébként gyakran használt „tettenérő" számonkérést, pl.: *Tegye fel a kezét, akinek egy hibája van, tegye fel a kezét, akinek két hibája van* stb. A tanár-diák között a visszacsatolás azonnali és a gyakorlás közben szabad téveszteni (*Radnainé et al*, 1994).

Ha a tanulók úgy érzik, hogy már fejben is képesek megoldani a feladatot, akkor önállóan dönthetnek arról, hogy eszköz nélkül számoljanak. Ez a bizalom az önértékelésüket is fejleszti.

3.3. Hogyan segíti a pedagógusok munkáját?

Nincs szükség külön motivációra (*Mérei-Binét*, 2003) még az unalmasnak tűnő számfeladatok gyakorlásánál sem, mert az eszköz használata sikerélményt nyújt a tanulóknak, ezért a lassabban haladók is szívesen dolgoznak vele. Itt nem leírjuk, hanem kirakjuk a számokat és így minimálisra csökken a leírható számjegyek száma, ezért rövidebb idő alatt több feladat oldható meg és még javítani sem kell. Mivel a négy alapműveletet lényegesen kevesebb idő alatt eredményesebben tudják tanítani, ezért sok idő felszabadul. Ezt kihasználva például több időt fordíthatnak a számjegyek írásának gyakorlására vagy a problémák matematikai szakkifejezésekkel történő megfogalmazására. Jó szokásokat lehet kialakítani a tanulóknál, amikor egy bonyolultabb szövegezésű gondolkodtató feladatnál – a máskor az olvasást vagy gondolkodást elhárító tanulók is – szívesen próbálkoznak a helyes megoldások keresésével. Pl.: 2. osztályos feladat: *„Olyan 50-nél nagyobb, 7 golyóval kirakható kétjegyű számokat keresünk, amelyekben a tízesek és az egyesek száma között 3 a különbség (69, 74. 96)*." 3. osztályos feladat: *„Olyan 380-nál nagyobb, 540-nél kisebb, 7 golyóval kirakható számokat keresünk, amelyek oszthatók maradék nélkül 3-mal (456, 465, 519, 528, 537).*"
A matematikaórán könnyen szervezhető munkaformákat is alkalmazhatnak, például frontális, egyéni vagy páros munkát.
A pedagógusoknak könnyebb a munkájuk a fegyelmezetten, csendben dolgozó elégedett tanulókkal. Amíg szorobánnal számolnak, csend, béke, nyugalom van az osztályban, amire nagy szükségük van a tanulóknak is, hogy megtapasztalják, milyen jó dolog a saját munkájukra koncentrálni és elmélyülten, figyelmesen dolgozni.

4. A szorobán alkalmazásának transzferhatása az egyéb tantárgyak tanulására

Minden tantárgy tanulásánál fontos, hogy a tanulók figyelmesen, fegyelmezetten, az adott feladatra koncentrálva, pontosan dolgozzanak (*Mérei-Binét*, 2003) A várható sikerélmény elérése érdekében a szorobán használatánál az ilyen munkavégzést gyakorolhatják és sajátíthatják el. A helyes eredmény elérése érdekében a golyókat a szabályoknak megfelelően kell mozgatniuk. Mindezt belső indíttatásból teszik a máskor figyelmetlen, fegyelmezetlen tanulók is, mert tapasztalták, hogy nekik is sikerülhet hibátlanul számolni.

A 6–10 éves korosztálynál különböző automatizmusokat alakítunk ki, melyek hosszú évekre meghatározóak a számukra. Az olvasás, írás, számolás mellett ilyen például a jól végzett munka után érzett öröm vagy a folyamatos önellenőrzés kialakítása (*F. Várkonyi*, 2013).

Mivel a hüvelyk- és mutatóujj használható a golyók mozgatásához, így közben a finommozgások is fejlődnek. A finommotorika fejlesztése fontos például az írás tanításánál is.

A szorobán használatát általában ujjgyakorlatokkal kezdjük. Ennél a látás, hallás, ujjmozgás, beszéd együttes használatával oldják meg a feladatokat.

A formaemlékezet megfelelő fejlettségi szintje szükséges például az olvasás, írás és az idegen nyelvek tanulásánál.

A fejben történő számolás gyakorlásánál a maguk elé képzelt szorobánon számolva oldják meg a feladatsorokat. Mielőtt az elvont eszközt maguk elé képzelik, könnyítésként egy jól ismert tárgyat kell maguk elé képzelniük. A konkrét gondolkodású 6–10 éveseknek például kezdetben a legkedvesebb játékukat kell felidézni. Ha a tanuló ezt képes könnyen, gyorsan elképzelni, akkor a gyakorlás után könnyebb lesz egy idegen nyelven tanult kifejezést is felidéznie.

A vizualizáció gyakorlása és a vizuális memória fejlesztése hozzájárul a többi tantárgy sikeresebb tanulásához, a kreativitás fejlesztéséhez.

5. További tervek, japán kapcsolataink

Célul tűztük ki, hogy a leendő és fiatal tanítókat jobban bátorítjuk az eszköz használatára, fokozottabban bekapcsoljuk őket a kyúvizsgák és hazai szorobánversenyek lebonyolításába, mert a 90-es évek elején főleg a tapasztalt tanítók kezdték használni a szorobánt. Szeretnénk meggyőzni a felső tagozatban matematikát tanítókat is, hogy számukra is sok segítséget jelent az eszköz használata. A Magyar Szorobán Társaság tagjai továbbra is tartanak bemutatóórákat és vállalják az érdeklődő végzős és leendő hallgatók szakmai felkészítését és segítését. Az ELTE TÓK Matematika Tanszéke évtizedek óta minden szemeszterben sok hallgató számára teszi lehetővé, hogy szabadon választható kurzus keretében elsajátítsa a szorobánnal való számolási tevékenységet.

10. ábra: Szorobánfakultáció, ELTE TÓK

11. ábra: Szabályos eszközhasználat, ELTE TÓK

A Japán Szorobánoktató Szövetséggel 1997-től tartjuk a kapcsolatot. A kyúvizsgákhoz ők küldik a feladatokat és a sikeresen vizsgázott tanulóknak a japán okleveleket. Ezt évente 900–1000 fő veheti át. A különböző szintű vizsgák mellett versenyeket is szervezünk. A területi versenyek győztesei az országos szorobánversenyen mérhetik össze tudásukat. Évente 400 fő méretteti meg magát.

Folyamatos kapcsolatot tartunk az Kelet-osakai Szorobán Szövetség elnökével Suzuki Iwao Úrral, aki három alkalommal látogatott el hozzánk. Az utóbbi két alkalommal több szorobántanár is elkísérte, hogy részt vegyenek az országos szorobánversenyeinken, konferenciánkon, bemutató óráinkon.

Hálásak vagyunk a tőle kapott eredeti szorobánokért és a sok szakmai kiadványért, valamint vizuális anyagokért.

Az ő kitartó, rendszeres szakmai érdeklődése munkánk iránt mindig új lendületet ad számunkra. Talán ő az, aki – bár nem ismerte Szendrei Juliannát – mégis mintha egy kicsit pótolni szeretné számunkra.

Irodalom

Czeizel Endre (1984): *Az érték bennünk van.* Gondolat Kiadó, Budapest.

Domján Károly (1974): *Oksági összefüggések megértése 6–10 éves korban.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

F. Várkonyi Zsuzsa (2013): *Már 100x megmondtam.* Háttér Kiadó, Budapest.

Mátyásné Kokovay Jolán (1999): *Feladatgyűjtemény 1–3. szint.* Jokoma Kft, Budapest.

Mérei Ferenc–V. Binet Ágnes (2003): *Gyermeklélektan.* Medicina Könyvkiadó, Budapest.

Osmanné Sági Judit – Erdélyi Alisza (1982): *Mi a neuropszichológia?* Magvető Kiadó, Budapest.

Piaget J. (1993): *Az értelem pszichológiája.* Gondolat Kiadó, Budapest.

Radnainé dr. Szendrei Julianna, Makara Ágnes, Mátyásné Kokovay Jolán, Pálfy Sándor (1994): *Tanulási nehézségek a matematikában.* IFA-BTF-MKM (Tanítók kiskönyvtára 6.), Budapest.

Selye János (1973): *Életünk és a stress.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Szabó László Tamás (1988): A „rejtett tanterv”. Magvető Kiadó, Budapest.

Szendrei Julianna (2005): *Gondolod, hogy egyre megy?* Typotex Elektronikus Kiadó, Budapest.

II. Helyi tanterv (2013): (10.2.) Kimle, Nemzetiségi Általános Iskola.

Gyermeknevelés
2. évf. 2. szám 37–44. (2014)

Sakk és matematika
Játéktól a valóságig

Misetáné Burján Anita
Karádi Általános Iskola

Napjainkban az érdeklődés középpontjába került a sakkoktatás. Egyre több helyen vezetik be a „királyi játék” oktatását Magyarországon. Húsz éve tanítok matematikát és sakkot egy általános iskolában. A pedagógusmunka egy igen összetett, komplex feladat. Egy életre szóló hivatás. A pedagógus számára igazi öröm, amikor többéves nevelő munkájával (osztályfőnökként és szaktanárként) hozzájárul a gyerekek fejlődéséhez, átadja szakmai tudását, és ami talán a legfontosabb, hogy hozzásegíti tanítványait képességeik és készségeik kibontakoztatásában, személyiségük kialakulásában. A pedagógusok komplex munkájának egyik fokmérője, hogy tanítványaik hogyan teljesítenek vizsgaszituációkban. A cikkben néhány tapasztalatomat szeretném bemutatni, hogyan realizálódhat a korai sakkoktatás és versenyzés előnye a középiskolai központi matematikai felvételi vizsgán[1].

***Kulcsszavak**: sakk, geometria, tájékozódás, játék, logika*

Ez a feladatsor egy szakértők által összeállított országos mérés. A gyermek, a szülő, a tanár és az iskola közös célja, hogy a diákok ebben a kétszer 45 percben önmagukhoz mérten tudásuk legjavát nyújtsák. A most végzős nyolcadik osztályomban már első osztályos koruktól tanítottam sakkot (szakkör) és ötödik osztályos koruktól matematikát (tanóra és szakkör). Összehasonlítottam a sakkozó gyerekek és az összes tőlünk felvételiző gyerek eredményét és jelentős különbséget találtam.

A 8. évfolyamosok országos eredményei 2014-ben[2] átlagosan matematikából 20,7 pont, magyarból 33,3 pont, az összesített 54,0 pont.

Iskolánkban, ebben az évben matematikából az átlag: 25,18 pont, magyarból 35,97 pont, összesen 61,15 pont.

Osztályomban az átlag matematikából 29,09 pont, magyarból 37,50 pont, összesen 66,59 pont.

A megyei „amatőr” sakk-diákolimpián részt vett tanulók átlaga matematikából 39,8 pont, magyarból 42,4 pont, összesen 82,2 pont.

Mivel ezekeket a gyerekeket matematikából (4 évig), sakkból (7–8 évig) és osztályfőnökként (4 évig) figyelemmel kísértem, a statisztikai adatok mellé a tapasztalataimat is összegyűjtöttem.

A gyerekek közül többen is tanultak sakkot alsó tagozatban, azonban az idei évben az új típusú „amatőr” sakkversenyen öten vettek részt. Az évfolyamban hatan lettek kitűnő tanulók (tanulmányi eredmény) félévkor, a sakkozók közül pedig ketten.

Csoportbontásban dolgozunk ezen az évfolyamon, csoportomban a 20 tanuló ugyanazt a felkészítést kapta. 30 komplett feladatsort oldottunk meg matematikából (szeptembertől januárig), mindegyiket 45 perc alatt, majd közösen kijavítottuk a hibá-

---

[1] http://www.oktatas.hu/kozneveles/kozepfoku_felveteli_eljaras/kozponti_feladatsorok
[2] http://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/beiskolazas/felveteli_eredmenyek_2007_2014.pdf

kat. A félévben háromszor (szeptember eleje, december vége, január eleje) mértük az egyéni eredményeket és összehasonlítottuk a fejlődést. Mindenki a saját egyéni fejlődését figyelhette és a végén már a saját hiányosságait tudta pótolni. Közben megtanultak a gyerekek gazdálkodni az idővel. Míg az elején nem tudták megoldani az összes feladatot, a végén már néhány percük maradt az ellenőrzésre is.

Tehát a pontokban való jelentős eltérést más okokban kell keresni. Úgy gondolom, hogy ezeknél a gyerekeknél a korai sakkoktatás és a versenyzés egyaránt hozzájárult a sikerhez.

Összegyűjtöttem azokat a tapasztalatokat, sakkbeli feladatokat, amelyeket már alsó tagozatban megismertek a gyerekek, és amelyek a felső tagozatos matematikai feladatoknál előnyt jelentettek számukra.

Először a geometriai feladatok „gyökereit" kerestem, amelyekkel ők már kisdiák korukban is találkozhattak a sakkjátékban.

Pierre M. van Hiele és *Dina van Hiele-Geldof* a geometriai gondolkodás fejlődésének öt szintjét különböztetik meg. Kutatásaikban megállapították, hogy ezek a szintek nem léphetők át, viszont a szintek elsajátításához szükséges idő eltérő lehet.

A geometriai ismeretek a sakkban is különböző szinteken jelennek meg. Alkalmazásuk a sakkparti folyamán nélkülözhetetlen. A téri tájékozódás, a térelemek a sakktáblán, a koordináta-rendszer, a síkbeli alakzatok, a geometriai transzformációk egyaránt előkerülnek a sakk tanítása során már alsó tagozatban vagy akár fiatalabb gyerekeknél is.

A sakk tanítását a legtöbben a sakkfigurák megismertetése után a sakktáblával és részeivel folytatják (*Asztalos és Bán*, 2001; *Fekete*, é.n.; *Mészáros*, 2007; *Polgár*, 2013).

A sakktábla segítségével sok geometriai fogalmat játékos formában ismernek meg a gyerekek. A síkidomok, sokszögek közül a *négyzet* fogalmával tapasztalatszerzés alapján: A sakktábla négyzet alakú. Mutasd meg a határoló vonalait! (kerület) A sakktáblán 64 mező (terület 8*8) található. Ezek is négyzet alakúak (hasonló síkidomok, a kisebb–nagyobb fogalma). Mutasd meg az e4, e5, d4, d5 mezőt! Ezek alkotják a centrumot. A centrum is egy négyzetet alkot a sakktáblán (kívül–belül, rész–egész). A négyzet fogalma a gyalogbevitel szabályainál (négyzetszabály) is előkerül. Ebben az esetben már a gyerekeknek absztrakt módon, a képzeletükben kell megalkotniuk a négyzete(ke)t.

- Téglalap: világos térfél, sötét térfél, királyszárny, vezérszárny
- Nyolcszög, trapéz: A huszár menetmódjának megtanítása során

Ezeket a gyerekeknek életkori, gondolkodási szintjüknek megfelelő időben, de mindenképpen az iskolai matematikai tananyagban való megjelenése előtt (*Herendiné*, 2005) már megtaníthatjuk.

Thurstone (1951, 1952) az intelligencia-kutatása során a faktoranalízis módszerét használva hét csoportfaktort ír le (verbális fluencia, verbális jelentés, számolás, perceptuális sebesség, tér, gondolkodás, memória). Ezek közül a térszemlélet az egyik legkomplexebb intelligenciafaktor, amely három részfaktorral jellemezhető (térbeli relációk, vizualizáció, térbeli tájékozódás). *Linn és Petersen* (1985, 1986) az ő kutatásait továbbfejlesztve 5 részfaktort különböztet meg (térbeli relációk, vizualizáció, térbeli tájékozódás, térbeli észlelés és mentális forgatás). A téri képesség a két- és háromdimenziós alakzatok észlelését és a velük való mentális műveleteket jelenti, amely a kognitív funkciók kapcsolatrendszerét feltételezi. *Maier* (1999) az objektumok térbeli viszonyainak megváltozása (statikus, dinamikus), illetve a megfigyelő helyzete (az objektumon belül, kívül) alapján hat részfaktort különböztet meg (térbeli relációk, térbeli észlelés, képzeletbeli mozgatás, vizualizáció, mentális forgatás, térbeli tájékozódás). *Hegarty* (2010) szerint a vizuális intelligencia „alkalmazkodó téri gondolkodás”, amelynek két komponensét különbözteti meg (meta-reprezentációs képességek, flexibilis stratégiai választás a gondolkodásnak a mentális szimuláció és az analitikus formája között).A statikus gondolkodási folyamatok közül a térbeli relációk észlelése és létesítése már az egyszerű matt állások felismerésekor és létrehozásakor előkerül. A képzeletbeli mozgatás a sakkfigurák alapállásba való elhelyezésekor játékosan fejleszthető.

A dinamikus gondolkodási folyamatok közül a vizualizáció a sakkjáték folyamán folyamatosan jelen van. A mentális forgatás a sakkparti minden egyes lépése után új szituációként fordul elő. A schnell-partik ezt a képességet még jobban fejlesztik. A térbeli tájékozódás fejlesztésére is sok lehetőség van a sakk segítségével.

A koordinátarendszer az 5. osztályos matematikai tananyagban szerepel. A mezők jelölésének megtanítása is ezeket az ismereteket készíti elő. Az élő sakkjátszma folyamán a gyerekek egyik mezőről a másikra mennek. A sakkpartiban a sakkfigurákat mozgatják (cselekvéses tanulás). A mattfeladványokban, -kombinációkban több lépést előre kell kiszámolni, melynek során képzeletben kell megalkotni a lépések után kialakult állásokat. A vaksakk már egy sokkal magasabb szintet követel meg, amikor a játékos a tábla nélkül, a képzeletbeli térben eligazodik és tudja követni a tér dinamikus változását. Egy sakkjátszma során ezek a részfaktorok komplex módon fejlődnek.

1. ábra: A sakktábla és a koordináta-rendszer kapcsolata (balra),
Élősakk-bemutató, Balatonlelle 2009 (jobbra)

A sakkjátszma lejegyzése is a koordináták segítségével történik. Mivel már alsó tagozatos gyerekeknek is rendeznek olyan versenyeket, ahol a játszmák írása kötelező, ezért nekik már készség szinten tisztában kell lenniük mezők jelölésével, vagyis a koordinátákkal.

A 2014-es felvételi vizsga 7. feladatában a koordinátarendszerben megadott 3 pont segítségével paralelogrammát kellett előállítaniuk, ahol ez a 3 pont a paralelogramma 3 csúcsa és a 4. pontot nekik kellett megtalálniuk.

Ennek a feladatnak a megoldása során a legtöbb gondot tanítványaimnak a teljes megoldás megtalálása okozta. Sokan eljutottak az egyik paralelogrammáig, de a második és a harmadik paralelogrammát már nem keresték. A sakkozóknál előnyt jelentett, hogy a figurák lépéseinek vizsgálatakor nekik mindig több irányban kell gondolkodniuk (pl. a futó 4 irány, a vezér 8 irány, a huszár esetében ez az elhelyezkedéstől függően 2–8 irány).

A figurák lépéseinek megtanítása elősegíti a vektorok és az elmozdulás fogalmának tapasztalati úton, kicsiknél cselekvéssel (végig próbálják a lépéseket), nagyobbaknál gondolkodással (fejben végigszámolva, absztrakt módon) való megtanítását.

- A sakkfigurák lépései egy adott vektor melletti elmozdulásnak is tekinthetők.
- A huszárlépéseknél egyenlő nagyságú, de más irányú vektorok mutathatók meg (vektorok összege is előkerülhet).
- A bástyalépéseknél, futólépéseknél egyező irányú, ellentétes irányú, merőleges, egyenlő és különböző nagyságú vektorok mutathatók meg.
- A vezérlépések a legbonyolultabbak, itt az előzőeken kívül a vektorok által bezárt szög is megmutatható.
- A sakkjátékban két ismert fogalom a támadás és a védés.
- Hány figura támadja a huszárt? (Keresd meg az összes olyan vektort, ami az adott pontba mutat és az ellenfél bármelyik figurájából, mint pontból indul ki!)
- Hány figura védi a huszárt? (Keresd meg az összes olyan vektort, ami az adott pontba mutat és bármelyik saját figurából, mint pontból indul ki!)
- Ellentett vektorok (például amikor két gyalog, vagy két huszár kölcsönösen támadja egymást).

A geometriában a cselekvéses tanulás nem csak a sakk segítségével érhető el, de kiváló módszer a játék segítségével a kisgyerekek ismereteinek fejlesztésére.

Osztályomban a sakkozók a geometriai feladatokban 20, 19 és 33%-kal jobban teljesítettek.

A legnagyobb eltérés a 10. feladatnál fordult elő (55%), amely egy arányossággal megoldható feladatnál bonyolultabb összefüggések felismerését igényelte. A térfogatszámítással megoldható feladatnál (9.) 33%-kal jobb teljesítmény nyújtottak az átlaghoz képest, sőt egymástól különböző hibátlan megoldást is adtak (átdarabolás, kiegészítés, részekre bontás). A számolási készséget és pontosságot igénylő példánál (1.) 27%-kal, a kombinatorika segítségével megoldhatónál (3.) pedig 25%-kal múlták felül társaik teljesítményét.

A matematikai gondolkodásmódra való képességek (absztrakciókészség, logikus következtetés, önbizalom, fantázia, emlékezőképesség, türelem, kitartás, önkontroll, önkritika) és a sakkozó pszichogramja 14 pontban hasonlóságot mutat. A sakk általános képesség- és készségfejlesztő hatása ismert és több kutatással alátámasztott felismerés. Ezt erősíti meg az is, hogy a sakkozó gyerekek nem csak a matematika, hanem a magyar felvételi vizsgán is jobban teljesítettek.

A jobb eredmény legfontosabb okai a gyerekek elmondása szerint, hogy ők nem ijedtek meg az új feladatoktól és az idővel is nagyon jól tudtak gazdálkodni. A sakkozó gyerekeknek életében az idő nagyon fontos szerepet játszik (egy játszmában meghatározott idő alatt meghatározott lépésszámot kell megtenni, például 2 óra alatt negyven lépést vagy 5–5 perc alatt egy teljes partit) Egyrészt a gondolkodási idejüket be kell tudniuk osztani a sakkparti folyamán. Másrészt minden lépésükkor döntést kell hozniuk. A lépésekkor felhasznált idő ezért nagyon eltérő lehet. Ezt már gyakran óvodás, illetve kisiskolás korban elsajátítják.

A középiskolai központi matematikaírásbeli-vizsgán 45 perc alatt kell 10 feladatot megoldani. Tehát átlagosan 4,5 perc jut egy feladat megoldására. Azonban a gyerekek nem ilyen egyenletesen oldják meg a feladatokat, hanem a számukra könnyebb feladatokat gyorsabban, a nehezebb feladatokat lassabban. Itt azonban lehetőség van egy feladat kihagyására is, illetve a feladatok megoldási sorrendjének megváltoztatására, amire a sakkban nincs lehetőség.

Összegzés

A sakkjáték korai megtanítása, tanulása tehát jelentősen elősegíti a gyerekek geometriai ismereteinek fejlődését. Az idővel való gazdálkodásuk is fejlettebb társaiknál. A pontosságuk fejlesztését szolgálja, hogy a sakkpartiban minden egyes megtett lépésnek következménye van (ez gyakran a játszma elvesztése vagy megnyerése is lehet). A sok megtehető lépés közül nekik kell kiválasztani az adott állásban a legjobb lépést, mégpedig úgy, hogy legtöbbször nincs lehetőségük (például idő hiányában) az összes lehetőség megvizsgálására.

A jelenlegi Z-generációnak éppen az egyik legnagyobb problémája, hogy a rá zúduló óriási információmennyiségből hogyan tud válogatni, hogyan tudja alkalmazni a megszerzett ismereteket. A gondolkodás, a kreativitás és a pontosság fejlesztésében pedig a matematika és a sakk is óriási szerepet játszik.

Irodalom

Asztalos Lajos - Bán Jenő (2001): *A sakkjáték elemei*. Kossuth Kiadó, Budapest.

Fekete József (é.n.): *Sakk munkatankönyv I–IV*. Kiadja a Magyar Sakkszövetség Ifjúsági Bizottsága, Budapest.

Hegarty M. (2010): *Components of spatial intelligence*. Psychology of Learning and Motivation

Herendiné Kónya Eszter (2007): *Kisiskolások térbeli tájékozódó képességének fejlesztési lehetőségei.* PhD-értekezés Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematikai és Számítástudományok Doktori Iskola, Debrecen.

Linn, M. C., Peterson, A. C. (1985): Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A meta-analysis. *Child Development*, **56** (6), 1479–1498.

Maier, P, H (1999): *Raumliches Vorstellungsvermögen*. Auer Verlag, Donauwörth.

Mészáros András (2007): *Sakk-matt I*. G. L. Újvilág BT, Eger.

Polgár Judit (2013): *Sakkjátszótér*, Magánkiadás.

Thurstone, L., L. (1951): Primary Mental Abilities. In: *American Association for the Advancement of Science*, Centennial.

Thurstone, L., L. (1950): Some Primary Abilities in Visual Thinking. *Proceedings of the American Philosophical Society*

Tosev, Jurij (1974): *A sakkozó pszichogrammja,* Magyar Sakkélet, **13**. 1. szám, 12. o)

http://www.oktatas.hu/kozneveles/kozepfoku_felveteli_eljaras/kozponti_feladatsorok
http://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/beiskolazas/felveteli_eredmenyek_2007_2014.pdf

			MATEMATIKA	MAGYAR	ÖSSZESEN			
A.	Barnabás	1999	42	39	81		s	5
B.	Nikolett	1999	7	30	37			
Cs.	Gergő	1999	19	33	52			
E.	Renáta	2000	42	41	83			
F.	Kristóf András	2000	18	20	38			
G.	Dániel	1999	36	41	77			
H.	Réka	1999	10	33	43			
H.	Bence	2000	31	43	74			
K.	Andrea	1999	47	47	94		s	1.
K.	Fanni	1999	42	48	90			
K.	Beatrix	1999	17	28	45			
M.	Szabina	1999	22	32	54			
M.	Boglárka Katalin	1999	22	36	58			
M.	Mercédesz	2000	32	47	79			
N.	Martin	1999	33	31	64			
Ó.	Buda	1999	34	35	69			
O.	Károly Áron	1999	32	42	74			
Sz.	Donát	1999	40	48	88		s	3.
Sz.	András	1999	35	37	72		s	
T.	Liliána Krisztina	2000	31	40	71			
T.	Martin	1999	35	41	76		s	
V.	Vivien	2000	13	33	46			
			29,09	37,50	66,59			

A 8.b osztály eredménye matematikából feladatonként (2014. évi központi írásbeli felvételi vizsga)

		1. (4p)	2. (4p)	3. (5p)	4. (6p)	5. (5p)	6. (4p)	7. (6p)	8. (6p)	9. (5p)	10. (5p)	elért pont		
A.	Barnabás	4	4	5	6	5	4	2	6	2	4	42	s	2.
B.	Nikolett	2	0	1	2	0	2	0	0	0	0	7		
Cs.	Gergő	2	4	4	6	0	2	0	0	0	1	19		
E.	Renáta	4	4	5	6	5	4	2	6	4	2	42		2.
F.	Kristóf	0	4	1	6	2	4	1	0	0	0	18		
G.	Dániel	4	3	5	6	4	4	2	6	2	0	36		4
H.	Réka	0	1	2	4	0	1	2	0	0	0	10		
H.	Bence	0	4	5	4	5	3	2	5	1	2	31		
K.	Andrea	4	4	5	6	5	4	6	6	5	2	47	s	1
K.	Fanni	4	2	5	6	5	4	4	6	4	2	42		2.
K.	Beatrix	3	1	5	3	1	3	0	0	1	0	17		
M.	Szabina	3	2	3	4	4	4	0	0	0	2	22		
M.	Boglárka	3	4	3	4	3	2	2	1	0	0	22		
M.	Mercédesz	4	4	1	6	3	4	2	6	1	1	32		
N.	Martin	3	3	3	6	5	3	4	5	1	0	33		
O.	Buda	4	4	5	6	5	3	0	5	0	2	34		
O.	Károly	4	4	3	6	4	4	2	1	1	3	32		
Sz.	Donát	4	4	5	6	5	4	4	6	0	2	40	s	3.
Sz.	András	4	4	5	6	2	3	2	2	5	2	35	s	5.
T.	Liliána	4	3	5	4	5	3	6	0	0	1	31		
T.	Martin	4	4	5	6	5	4	2	0	3	2	35	s	5.
V.	Vivien	0	2	1	6	2	2	0	0	0	0	13		
		2,91	3,14	3,73	5,23	3,41	3,23	2,05	2,77	1,36	1,27	29,09		

A 8.b osztály eredménye matematikából feladatonként (2014. évi központi írásbeli felvételi vizsga)

		1. (4p)	2. (4p)	3. (5p)	4. (6p)	5. (5p)	6. (4p)	7. (6p)	8. (6p)	9. (5p)	10. (5p)	elért eredmény		
A.	Barnabás	100%	100%	100%	100%	100%	100%	33%	100%	40%	80%	84%	s	2.
B.	Nikolett	50%	0%	20%	33%	0%	50%	0%	0%	0%	0%	14%		
Cs.	Gergő	50%	100%	80%	100%	0%	50%	0%	0%	0%	20%	38%		
E.	Renáta	100%	100%	100%	100%	100%	100%	33%	100%	80%	40%	84%		
F.	Kristóf	0%	100%	20%	100%	40%	100%	17%	0%	0%	0%	36%		
G.	Dániel	100%	75%	100%	100%	80%	100%	33%	100%	40%	0%	72%		
H.	Réka	0%	25%	40%	67%	0%	25%	33%	0%	0%	0%	20%		
H.	Bence	0%	100%	100%	67%	100%	75%	33%	83%	20%	40%	62%		
K.	Andrea	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	100%	40%	94%	s	1.
K.	Fanni	100%	50%	100%	100%	100%	100%	67%	100%	80%	40%	84%		
K.	Beatrix	75%	25%	100%	50%	20%	75%	0%	0%	20%	0%	34%		
M.	Szabina	75%	50%	60%	67%	80%	100%	0%	0%	0%	40%	44%		
M.	Boglárka	75%	100%	60%	67%	60%	50%	33%	17%	0%	0%	44%		
M.	Mercédesz	100%	100%	20%	100%	60%	100%	33%	100%	20%	20%	64%		
N.	Martin	75%	75%	60%	100%	100%	75%	67%	83%	20%	0%	66%		
Ó.	Buda	100%	100%	100%	100%	100%	75%	0%	83%	0%	40%	68%		
O.	Károly	100%	100%	60%	100%	80%	100%	33%	17%	20%	60%	64%		
Sz.	Donát	100%	100%	100%	100%	100%	100%	67%	100%	0%	40%	80%	s	3.
Sz.	András	100%	100%	100%	100%	40%	75%	33%	33%	100%	40%	70%	s	
T.	Liliána	100%	75%	100%	67%	100%	75%	100%	0%	0%	20%	62%		
T.	Martin	100%	100%	100%	100%	100%	100%	33%	0%	60%	40%	70%	s	
V.	Vivien	0%	50%	20%	100%	40%	50%	0%	0%	0%	0%	26%		
		73%	78%	75%	87%	68%	81%	34%	46%	27%	25%			

A 8.b osztály eredménye matematikából feladatonként (2014. évi központi írásbeli felvételi vizsga)

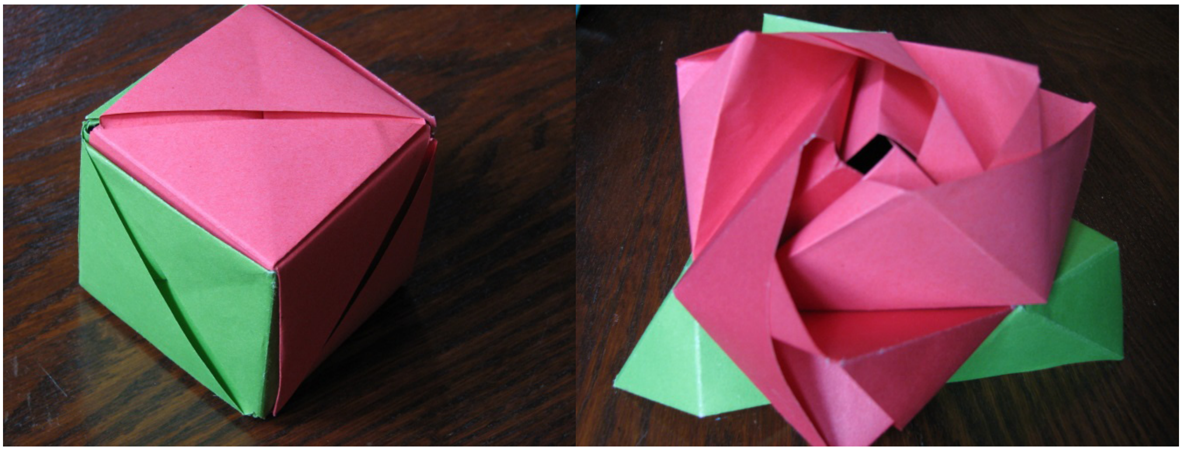
Gyermeknevelés
2. évf. 2. szám 45–50. (2014)

Te is lehetsz bűvész!
Fedezzük fel a bűvészmutatványok matematikai titkait!

Pintér Klára
SZTE JGYPK TÓKI Matematika Szakcsoport

Miközben sokan negatív emlékeket őriznek a matematika tanulásáról, lelkesen próbálják kitalálni bűvészmutatványok titkait, szívesen játszanak gondolkodást igénylő játékokat, és nem gondolják, hogy ezek alapja gyakran a matematika. Ha sikerül a játékokat, trükköket beépíteni a matematika tananyagba, változhat a tanulók hozzáállása a matematikához és aktívabban vehetnek részt a tanulási folyamatban, ami hatékonyabb ismeretszerzést, képességfejlesztést eredményezhet. A matematika ilyen csábító köntösbe való felöltöztetését szimbolizálja az a papírból hajtogatott kocka, amelyet néhány mozdulattal rózsává alakíthatunk[1].

Kulcsszavak: *bűvészmutatvnyok, kártyatrükkök, algebra, számrendszerek, térszemlélet*



1. ábra: A bűvésztrükkök alkalmazásának módszere

A trükkök bemutatásakor a pedagógus a bűvész. A mutatvány többszöri ismétlése közben a közönség megpróbálja utánozni a bűvészt, kitalálni a trükköt. Fontos, hogy se a bűvész ne árulja el a titkát, se az ne tegye közzé a gondolatait, aki sejti a trükk nyitját. Úgy ellenőrizheti sejtésének helyességét, hogy vállalja a bűvész szerepét. Így a sok kísérlet eredményeként minden tanulónak van esélye megtalálni a magyarázatot, illevte a tanulók maguk dönthetnek az esetleges tévutak feladásáról. Végül összegezzük a mutatvány lényegét, magyarázatát, matematikai hátterét. Így a problémák feldolgozásának módja nagyban segíti a problémamegoldó képesség, az induktív gondolkodás fejlődését, hiszen a motiváló problémafelvetés után a kísérletezések eredményeként a diákok sejtéseket fogalmaznak meg, azokat ellenőrzik és indokolják, gyakorolják a döntést, hogy egy ötlet mellett meddig érdemes kitartani, mikor célszerű új gondolatot keresni. Ebben a folyamatban a pedagógus szerepe a problémafelvetés, a felfedezés lehetőségének biztosítása, és nem az ismeretközlés a megoldások helyességének

1 Vann, Valerie *Origami magic rose cube*

kinyilatkoztatása. A diákok pedig megtapasztalják a felfedezés örömét, és szívesen gondolkodnak a matematikai problémákon. A továbbiakban a matematika különböző területeihez kapcsolódó bűvészmutatványokat mutatok be, amelyek az általános iskolai matematika órákon is bemutathatók.

Bűvésztrükkök

1. Trükkök számítógépen
A bűvészmutatványok egy része az irányított figyelemre épül. A körülmények véletlenszerű változtatását a számítógépes szoftver biztosítja elfedve a trükk lényegét. Ezek megfejtése fejleszti a tanulók megfigyelőképességét, szélesíti látókörüket.

1.1. Három kártya trükk
A trükk:
A képernyőn megjelenik hat kártya, és a közönségnek választani kell egy lapot, és erősen gondolni kell erre a lapra. A lapok eltűnnek, és amikor újra megjelennek, nem lesz köztük az a lap, amelyikre a közönség gondolt (urbanlegends.about.com/library/bl_card_trick1.htm).

A titok:
Kezdetben teljesen misztikusnak tűnik, honnan tudhatta a gép, hogy mire gondoltunk. A trükk többszöri ismétlésekor jobban megfigyeljük a körülményeket. A mutatott hat lap közül három piros, három fekete, két jumbó (J), két dáma (Q) és két király (K), mindegyikből egy piros, egy fekete. Az egy lap eltüntetése után mutatott öt lap között ugyanilyen figurás lapok vannak, mindegyikből legfeljebb egy piros, egy fekete, csak éppen a másik piros és a másik fekete, vagyis egyetlen olyan lapot sem mutat a gép másodszorra, mint amit először mutatott, így nem csoda, hogy nem lesz a képernyőn az a lap, amire gondoltunk. A lapok szélesebb körű megfigyelése teszi lehetővé a trükk megfejtését. A számítógép azért hasznos, mert minden játék alkalmával más lapokat dob fel a gép, és könnyen el tudja tüntetni az először mutatott lapokat, hogy újakat mutasson. Ezt kézben levő lapokkal jóval nehezebb megvalósítani.

1.2. Varázsgömb
A trükk:
A mutatvány széles körben ismert, a megoldása már kevésbé. A közönség gondol egy kétjegyű számra. Kivonja belőle a számjegyek összegét. A különbséget megkeresi a számítógép által mutatott táblázatban, ahol 1-től 99-ig minden számhoz tartozik egy jel, ami sokszor elég kacifántos. Ezt a jelet kell megjegyezni, erősen gondolni rá, és amikor rákattintunk a varázsgömbre, csodák csodája éppen ez a jel fog megjelenni (*Naughton*, é.n.).

A titok:
A táblázatot alaposan megfigyelve észre lehet venni, hogy a 9-cel osztható számok mellett a 90 és a 99 kivételével ugyanaz a jel áll. A helyi értékes felbontás alapján már alsó tagozatos gyerekeknek is meg lehet mutatni, hogy a különbség mindig 9 többszöröse lesz. Nagyobbaknak magyarázhatjuk úgy, hogy a természetes számok 9-es osztási maradéka megegyezik számjegyeik összegének kilences osztási maradékával, így különbségük osztható lesz 9-cel. Ellenőrizzük, hogy különbségként nem kaphatunk se 99-et, se 90-et (a lehető legnagyobb különbség a 81), így mindegy me-

lyik 9-cel osztható különbséget kaptuk, ugyanarra a jelre gondoltunk. A számítógép alkalmazása azért szerencsés, mert a trükk egymás utáni ismétlésekor más-más jelet kapunk, ugyanis a program cserélgeti a táblázatban a számokhoz tartozó jeleket ezzel elfedve a trükköt.

A trükköt némi gyakorlással számítógép nélkül is bemutathatjuk. Egy gyufaskatulyába a közönség rakjon gyufaszálakat, számolják meg, hogy hány darabot, majd ezekből a gyufaszálakból rakják ki a gyufák darabszámát úgy, hogy kitesznek annyi gyufát, amennyi a darabszám tízeseinek száma és annyit, amennyi az egyeseké. A megmaradt gyufákat a skatulyába téve átadják a bűvésznek, aki megrázogatja azt, és megmondja, hogy hány szál gyufa van benne. A gyakorlás azért szükséges, hogy meg tudjuk különböztetni a 9, a 18 és a 27 szál gyufa hangját a rázogatás során. A trükk a megfigyelőképesség fejlesztése mellett alkalmas arra, hogy tapasztalatot szerezzenek a tanulók a 9-cel való oszthatóságról.

2. Logika: Hummer-féle három tárgy kitaláló

A trükk:
A bűvész kitesz három plüssállatot az asztalra az 1-gyel, 2-vel, 3-mal jelölt helyekre és hátat fordít. A közönség soraiból választott segítő felcserél két állatot, és hangosan kimondja azoknak a helyeknek a számát, amelyeken ezek az állatok álltak. Ezt folytatja, amíg akarja. Ezután gondol az egyik állatra, a másik kettőt megcseréli, de ezt a cserét nem mondja ki – ez a titkos csere. Majd tovább folytatja a cseréket, amíg akarja. Végül a bűvész megfordul, köröz a varázspálcájával és rámutat a gondolt állatra (*Gardner*, 1956, 63. o.).

A titok:
A bűvész az elején kiszemel egy állatot, megnézi melyik helyen van. Ezután ennek az állatnak a helyét követi az ujjain a bemondás alapján úgy, hogy a mutatóujj az 1-es, a középső- a 2-es, a gyűrűsujj a 3-as pozíció. Ezt folytatja akkor is, amikor a titkos csere után tovább cserélgetnek. Amikor megfordul, megnézi, hogy az általa kiszemelt állat azon a helyen van-e, ahol az ujjai szerint lennie kell. Ha ott van, akkor az azt jelenti, hogy nem vett részt a titkos cserében, vagyis ő a gondolt állat. Ha nincs ott, akkor részt vett a titkos cserében, mégpedig azzal az állattal cserélt helyet, amelyik végül azon a helyen áll, ahol a bűvész ujjai szerint az általa kiszemelt állatnak kellene állni. Így egyikük sem lehet a gondolt állat, csak a harmadik. A trükk megoldásának felfedezése nem egyszerű, de többszöri bemutatás után azért lehetséges. A gyerekek sokszor az összes állatot próbálják követni, de a titkos cserénél rendszerint megakadnak.

3. Számrendszerek: Pakolós kitaláló

A trükk:
A bűvész kirak sorban hat tálcát, egy kosár kupakot, és elfordul. A közönség soraiból választott segítő kiszór az első tálcára néhány kupakot és megszámolja hány darab van. Ezután mindkét kezével megfog egy-egy kupakot, az egyiket átrakja a következő tálcára, a másikat visszadobja a kosárba. Ezt folytatja, amíg lehet, majd ugyanezt sorban a többi tálcával is végrehajtja. Végül mindegyik tálcán legfeljebb egy kupak lehet. Ekkor a bűvész megfordul, köröz a varázspálcájával, és megmondja, hogy hány kupak volt eredetileg az első tálcán.

A titok:
A segítő mindkét kezével egy-egy kupakot fog meg, így valójában kettesével csoportosítja a tálcán levő kupakokat, és annyi kupakot rak át a következő tálcára, ahány kettes csoport a tálcán volt. Így a csoportosítással, beváltással a kettes számrendszerbeli alakját kapjuk az eredetileg kirakott kupakok számának, az első tálca felel meg az 1-es, a második a 2-es, a harmadik a 4-es, a negyedik a 8-as helyi értéknek, és így tovább. Egy tálcán, azaz helyi értéken levő kupak az 1, a kupak hiánya a 0 számjegyet jelenti. A trükköt bemutathatjuk más számrendszerre is. A tízes számrendszeres változatnál 10 kupakot kellene egyszerre kivenni, 1-et továbbrakni és 9-t visszadobni a kosárba, ami elég sok számolást és nagy mennyiségű kupakot igényel, így esetleg feladatként lehet kitűzni a problémát.

4. Algebra: Hány érme van a jobb kezedben?

A trükk:
A bűvész kiszórja a pénztárcájában levő aprópénzt az asztalra. A közönség soraiból választott segítőnek az a feladata, hogy vegyen a bal kezébe valamennyit az érmék közül, a maradékot a jobb kezébe, majd szorozza meg 4-gyel a bal kezében levő érmék számát, és 5-tel a jobb kezében levőkét, végül adja össze a két szorzatot. A bűvész az összegből kitalálja, hogy hány érme van a jobb kezében és hány a balban.

A titok:
A bűvész tudja, hogy hány érme volt eredetileg a pénztárcájában, így a $4b+5j = 4\cdot(b+j)+j$ összeget és $4\cdot(b+j)$-t ismerve j majd b is adódik. A szimbolikus magyarázat jól alkalmazható 7. osztályban az algebrai kifejezések tanításakor. Azonban akár alsó tagozatosoknak is megmagyarázható a trükk, hiszen már 2. osztályban a szorzásnál tanulják a gyerekek, hogy egy szám ötszöröse a számmal nagyobb a négyszeresénél, így a kapott összeg az összes érme számának 4-szeresének és a jobb kézben levő érmék számának összege.

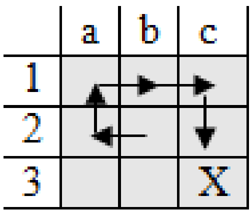
5. Térszemlélet: Súgnak a kockák

A trükk:
A közönség soraiból választott segítő feldob három szabályos dobókockát, és összeadja a dobott számokat. Ezután kiválasztja az egyik kockát, és ennek az alsó lapján levő számot is hozzáadja a korábbi összeghez. Ezzel a kockával még egyszer dob, és az újonnan dobott számot is hozzáadja az összeghez. A bűvész ekkor megfordul, kézbe veszi a kockákat, megrázogatja, és a kockák megsúgják neki a kapott összeget.

A titok:
A bűvész látja, hogy az utolsó dobás után milyen számok állnak a kockák felső lapján. Ezek összegén kívül a kapott összegben még a kiválasztott kockával történt első dobás utáni felső és alsó lapon álló számok összege szerepel. Mivel egy szabályos dobókocka szemközti lapjain levő számok összege 7, így a látott összeghez 7-et adva a bűvész megkapja a végső összeget. Ezzel a trükkel a gyerekek maguk fedezik fel, tudatosítják, hogy a szabályos dobókocka szemközti lapjain álló számok összege 7.

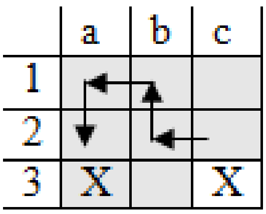
6. Probléma-megoldási stratégiák: David Copperfield kártyatrükkje

A trükk:
A közönség tagjai kiraknak 9 kártyát 3x3-as négyzet alakban. Ezeken a kártyákon kell lépkedni. A középső kártyáról indulva lépnek szomszédos kártyára lefelé, felfelé, balra vagy jobbra tetszőleges irányba haladva annyit, amennyit a bűvész mond. Egy ilyen lépéssor után a bűvész megmondja, hogy melyik kártyát vegyék el. Átlósan lépni vagy üres helyet átugrani nem szabad, de visszafele lehet lépni. A bűvész megint megmondja, hogy hányat lépjenek, illetve hogy a lépéssor után melyik kártyát vegyék el, és így tovább:



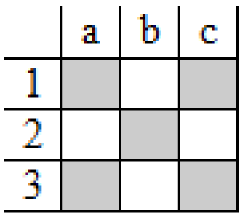
Tedd az ujjad a középső kártyára!
Lépj 5-öt és vedd el a c3 kártyát!

Az ábra egy lehetséges útvonalat mutat. A következő lépéssor onnan indul, ahova az előzőben érkeztek.
Lépj 4-et, és vedd el az a3 kártyát!



Hasonlóképpen kell lelépni a következő lépéssorokat:
Lépj 3-at, és vedd el az c2 kártyát!
Lépj 4-et, és vedd el a b3 kártyát!
Lépj 5-öt, és vedd el a c1 kártyát!
Lépj 4-et, és vedd el az a1 kártyát!
Lépj 3-at, és vedd el az a2 kártyát!

A csoda az, hogy bármerre is lépkedtek a közönség tagjai, senki sem áll azon a kártyán, amelyet a bűvész elvesz. Így végül a „gondolatátvitel” eredményeként mindenki ugyanazon a kártyán fog állni.



A titok:
Képzeljük el, hogy sakktáblaszerűen két színnel színezzük a kártyákat, így láthatjuk, hogy páros számú lépéssel mindig ugyanolyan színű kártyára lépünk, mint ahonnan indultunk, páratlan számú lépéssel pedig ellentétes színűre. Ez alapján a bűvész tudja, hogy ha a középső kártyáról indul a közönség, akkor az egyes lépések után milyen színű kártyán fognak állni, és ellentétes színű kártyát vesz el. Végül kénytelen mindenki a középső kártyára lépni. A trükk segít felfedezni a színezés és a paritás alkalmazásának stratégiáját, ugyanis a gyerekek rájönnek, hogy a kártyák kétfélék lehetnek, és mindenki ugyanarra a fajtára lép, a bűvész pedig a másik fajtából bármelyiket elveheti. Ezek a problémamegoldási stratégiák sok feladat megoldásánál hasznosak.

A trükk még hatásosabb, ha a közönség monitoron tudja követni az ujjával a lépéseit, és a „gondolatátvitel” következtében mindenki ugyanarra a kártyára fog mutatni.

Összegzés

A bemutatott bűvésztrükkök akár alsó tagozatos gyerekeknek is előadhatók megadva a lehetőséget a gyerekeknek, hogy maguk jönnek rá a titokra. Reméljük ezzel a néhány példával sikerült kedvet csinálni további mutatványok kereséséhez, alkalmazásához.

Irodalom

Gardner, Martin (1956): Mathematics Magic and Mystery, Dover Publications, Inc., New York.
Naughton, Andy: Mindreader:
www. flashlightcreative.net/swf/mindreader/
Vann, Valerie Vann: Origami magic rose cube,
www.youtube.com/watch?v=A8EyLFWXV_0
urbanlegends.about.com/library/bl_card_trick1.htm

Gyermeknevelés
2. évf. 2. szám 51–58. (2014)

Algoritmikus játékok matematikaórán

Sarbó Gyöngyi
Eötvös Loránd Tudományegyetem

„… az »algoritmus« fogalma nemcsak a szellemi műveletek révén megvalósuló tevékenységre alkalmazható, hanem a gyakorlati, fizikai cselekvésekben végbemenő tevékenységre is.”[1]

Kulcsszavak: *fejtörők, feladatok, matematikai játékok, logikai játékok, algoritmusok*

Mindennapi életünk szerves részeként nap mint nap hozunk létre olyan ismétlődő eljárásokat, melyeket meghatározott sorrendben, lépésenként hajtunk végre. Az esetek többségében észre sem vesszük, de gyakorlatilag algoritmizációt végzünk. Az algoritmusok az oktatásban is fontos szerepet töltenek be, mivel átalakíthatják a gondolkodási tevékenységek stílusát, rendszerezetté, szervezetté tehetik azt. A most bemutatandó algoritmikus játékok segítségével ösztönözhetjük a gyerekeket a közös okoskodásra, a problémamegoldásra, az alkotó vizsgálódásra, az erőfeszítésre a megoldás megtalálása érdekében. Tapasztalataim szerint ezek a feladatok szokatlan jellegüknek és újszerűségüknek köszönhetően motiváló hatással vannak a gyerekekre.

A fejtörők által nyújtott lehetőségek

A hagyományos fejtörő-irodalomban létezik egy speciális fejtörőtípus, melynek megoldása nem egy egyszerű szám, hanem egy megoldáshoz vezető „recept”, lépések meghatározott sorrendje, vagyis más néven algoritmus. Az fejtörők e típusát a kanadai származású matematikus, számítógéptudós és filozófus A. K. Dewdney nevezete el algofejtörőknek (*Dewdney*, 1987).

A megoldandó probléma természetétől függően az algofejtörőket több csoportba sorolom:

- Átkeléses feladatok
- Irányítási feladatok
- Méregetős feladatok
- Ősi algofejtörők

Átkeléses feladatok

Ebbe a feladatcsoportba sorolom azokat a feladványokat, melyekben valamilyen összetett feltételrendszernek megfelelően kell egy átkelési problémát megoldani. Minden algofejtörőnél az első feladat a feltételek tisztázása, ellenkező esetben a gyermeki fantázia érdekesebbnél érdekesebb megoldásokkal rukkol elő.

Az átkeléses feladatok kritériumrendszere általában a szereplők társaságára vonatkozik. Például nem lehet a kecske együtt a káposztával, a fegyverhordozó nem lehet idegen lovag társaságában a saját gazdája nélkül, vagy nem lehet több kannibál a parton, mint misszionárius. Ez a feltétel egy hibajelenséget idézhet elő a gyerekeknél,

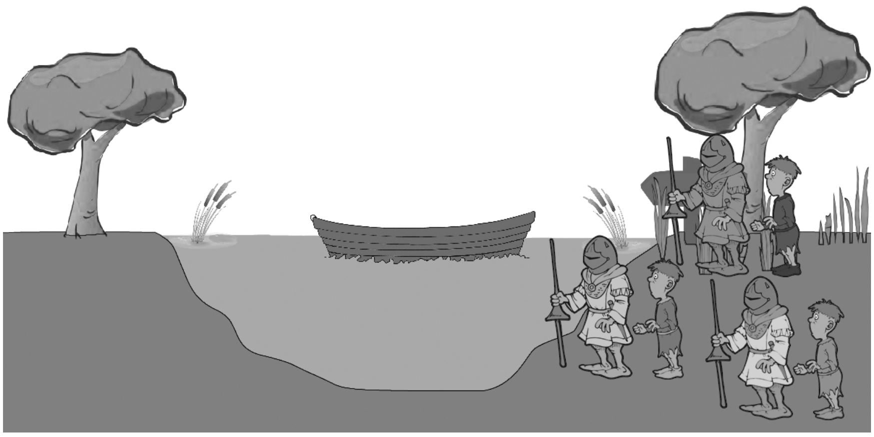
[1] Landa, L. N. (1969): *Algoritmizálás az oktatásban.*Tankönyvkiadó, Budapest.

ugyanis nem mindenki számára egyértelmű, hogy mikor mondhatjuk azt, hogy két szereplő egymás társaságban tartózkodik. A most következő feladatot negyedik osztályos tanulókkal oldottuk meg.

> *„Történt egyszer, hogy három lovag találkozott a folyóparton, mindegyiket a fegyverhordozója kísérte. Át akartak kelni a folyón a túlsó partra. A nádasban találtak egy kicsi, kétszemélyes csónakot. Az átkelés könnyűnek ígérkezett, hiszen a lovak át tudják úszni a folyót. Egy akadály azonban majdnem meghiúsította a vállalkozást. Az összes fegyverhordozó – mintha csak megállapodtak volna – kereken elutasította, hogy ismeretlen lovagok társaságában maradjon a saját gazdája nélkül. Sem rábeszélés, sem fenyegetés nem segített, a gyáva fegyverhordozók makacsul kitartottak álláspontjuk mellett. Végül az átkelést mégis megvalósították, mind a hat ember szerencsésen átjutott a túlsó partra egy kétszemélyes csónak segítségével. Az átkelés közben betartották a feltételt, amelyhez a fegyverhordozók ragaszkodtak.*

Hogyan keltek át a folyón, ha a kétszemélyes csónakon kívül más eszközük nem volt, és a lovak segítségét sem vették igénybe?” (*Ignatyev*, 1982)

Segítségképpen az alábbi képet vetítettem ki a táblára.



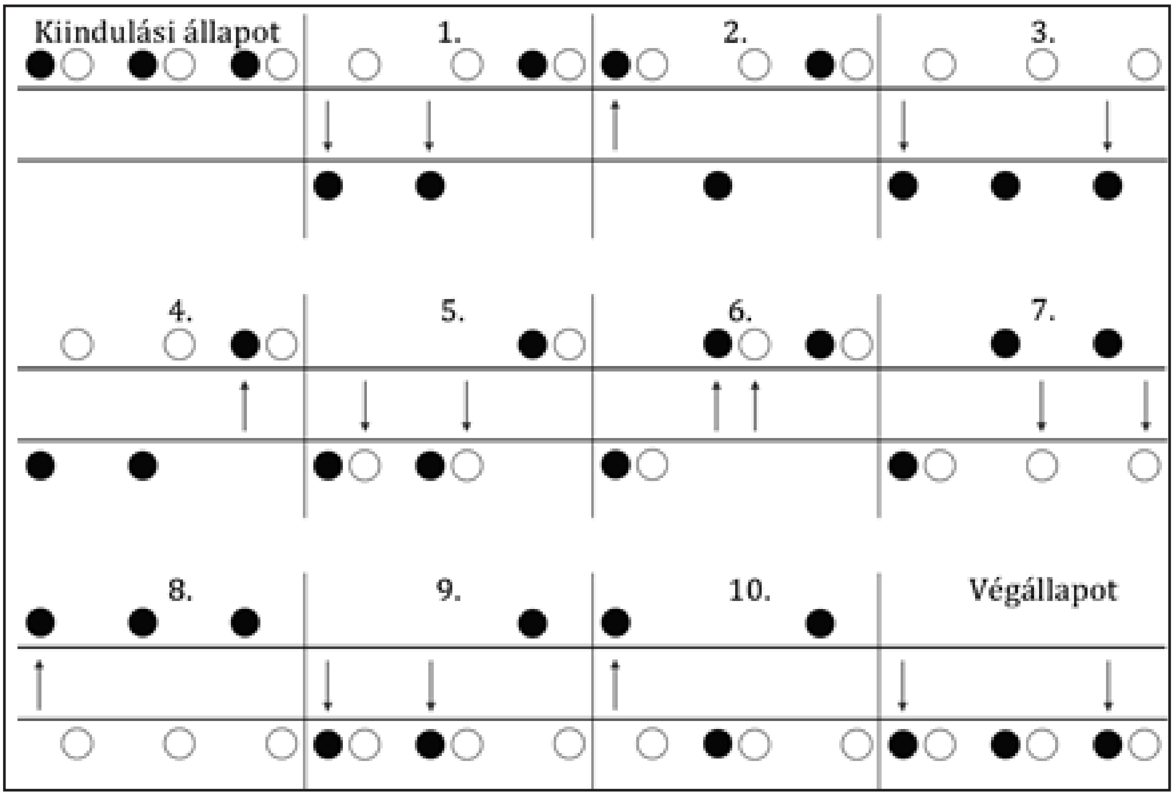
1. ábra: Lovagok és fegyverhordozóik

A képen látható lovagokat és fegyverhordozókat mágneses papírra nyomtattam, ezáltal a sablonos korongok helyett valami újat, a feladat világához közelebb álló szemléltetőeszközt adtam a gyerekek kezébe. A lovak szándékosan nem szerepelnek a mintaképen, mert nagyon megzavarják a tanulókat. Ugyanis ha a lovakat is látják, hajlamosak azok úszótudására támaszkodni. A megoldás elkezdése előtt érdemes tisztázni a következőket:

- az átkeléshez a lovak segítségét nem lehet igénybe venni,
- sem kötelük, sem más segédeszközük nincs,
- mikor kerül a fegyverhordozó idegen lovag társaságába.

Megfigyeltem, hogy először a tanulók azonos személyeket raknak össze a csónakba – fegyverhordozót fegyverhordozóval, és lovagot lovaggal – majd elakadtak a megoldásban. A folytatáshoz csak annyi segítség kellett, hogy tisztázzuk, mit jelent az idegen lovag társasága.

A feladat megoldásának rögzítése nehezen ment. A gyerekek szerint túl sokat kell írni, ezért ennek elkerülése érdekében inkább rajzolnak. A végeredmény átláthatatlan, összenyilazott, kesze-kusza rajz lett, melynek megfejtése még a készítőnek is okozott némi fejtörést. Rajzos megoldásokhoz a következő módszer alkalmazását javaslom (*Lukács és Tarján* 1958 alapján):



2. ábra: Javaslat az átkeléses feladatok megoldásának rögzítésére

Fekete körök jelzik a fegyverhordozókat, fehérek a lovagokat és a nyilak mutatják az átkelés irányát. Az ábra megkönnyíti az aktuális állapot áttekintését, segít a feladat megoldásának folytatásában, továbbá egyértelműen leolvashatóak a megoldási lépések.

Az interneten is fellelhetők algofejtörő feladatatok flashjátékok formájában. Sok közülük interaktív táblán is tökéletesen használható. A fentebb említett misszionárius és kannibálok fejtörő a következő linken érhető el: http://www.novelgames.com/en/spgames/missionaries/

Irányítási feladatok

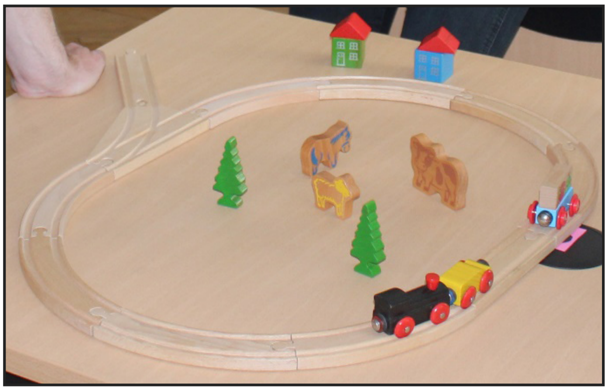
Ebbe a feladatcsoportba sorolom azokat a feladványokat, melyekben különféle közlekedési problémákból kell megtalálni a kiutat. Többségében vasúti feladatokról van szó, ahol vagy vonatok közlekednek különféle sínpályákon, vagy egy leleményes mozdonyvezetőnek kell a vagonokat elrendezni, de találkozhatunk hajókkal és autókkal kapcsolatos feladványokkal is. Talán a terepasztalnak és a kisvonatokkal való játéknak köszönhetően ez az a feladatcsoport, mely a legközelebb áll a gyerekekhez.

Ezeknél a feladatoknál célszerű tisztázni, hogy a mozdony hogyan tudja a vagonokat mozgatni. Favasút segítségével modelleztük a következő feladványt.

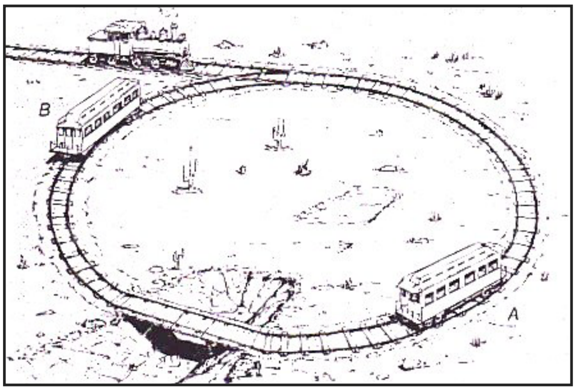
„Egy magányos mozdony önmagába visszatérő sínhurokhoz ér, amelyre állítható váltón át lehet behajtani. A hurokszakaszon két üres kocsi áll, amelyek közt egy híd található. A híd egy kocsit elbír, de a mozdonyt már nem, és nem hosszabb egy vasúti kocsinál. A mozdonyvezetőnek meg kell cserélni a két kocsit úgy, hogy a munka végeztével el tudja hagyni a körpályát.

A feladat megoldásának feltétele: a mozdony és a kocsik mindkét végén kapcsoló berendezés van. A vonatokat fékezők kísérik, akik a szükséges szét- és összekapcsolásokat utasításainknak megfelelően elvégzik (csak álló szerelvény esetén). A vasúti járműveket kímélni kell, ezért a kocsikat a mozdony *ütközéssel nem guríthatja el, csak vonatással lehet helyet változtatni.” (Dewdney, 1987)*

Hogyan oldja meg a feladatot a mozdonyvezető?



5. ábra: Favasút a projekt héten



6. ábra: A feladat eredeti ábrája

A feladatban nem a két kocsi megcserélése okozott problémát, hanem az, hogy utána a mozdonynak el kellett hagynia a körpályát. Gyakran ragadt be a mozdony a híd és az egyik kocsi közé. Sokan nem gondoltak arra a lehetőségre, hogy a vagont, nemcsak az egyenes szakaszon, hanem a hídon is lehet hagyni. Ezáltal át tudjuk vinni a mozdonyt a vagon egyik oldaláról a másikra, így elkerülve a mozdony beragadását.

Megoldás

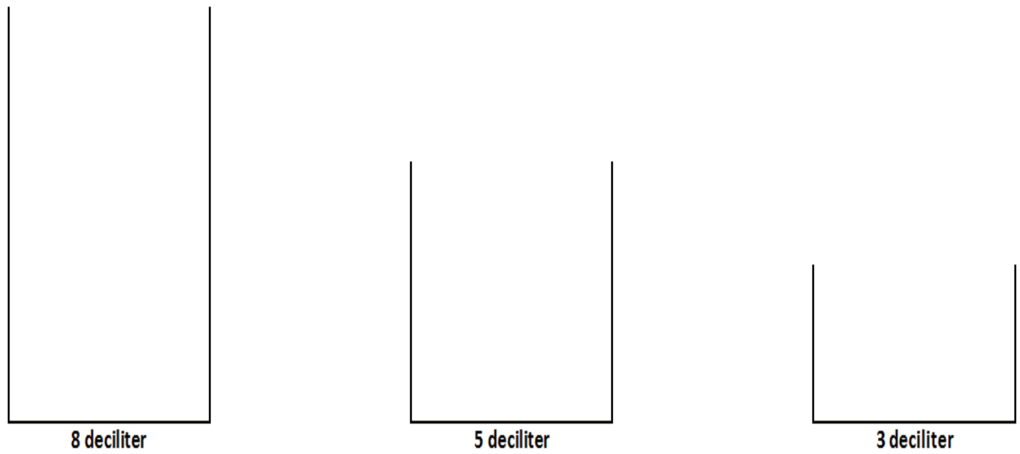
1. A mozdony összekapcsolódik az A kocsival, és rátolja a hídra. Itt szétkapcsolódnak.
2. A mozdony elpöfög a B kocsiig, összekapcsolódnak, és eltolja B-t az A kocsiig, majd összekapcsolódnak.
3. A mozdony kiviszi a két kocsit az egyenes szakaszra (sorrend: ABM)
4. Az A kocsit lekapcsolják.
5. A mozdony a B kocsit rátolja a hídra, itt lekapcsolják.
6. A mozdony kimegy az A kocsiért, és betolja a helyére, itt lekapcsolják.
7. A mozdony elpöfög a B kocsiig, aki még mindig a hídon áll, hozzákapcsolják a mozdonyhoz, és behúzza a helyére. Lekapcsolják a B kocsit a mozdonyról.
8. A mozdony elhagyja a körpályát.

Méregetős feladatok

Ebbe a feladatcsoportba sorolom azokat a feladványokat, melyekben vödrök, kancsók, homokórák és mérlegek segítségével kell a megoldást megtalálni. Például különböző űrtartalmú vödrök segítségével kell adott mennyiségű vizet hozni a folyóból, különböző homokórákat forgatva kell időt mérni, vagy egy kétkarú mérleg segítségével kell a csak a súlyában különböző, hamis pénzérmét megtalálni.

Ennél a feladattípusnál találkoztam a legkevesebb félreértéssel. Általában nincs probléma a feladat értelmezésével, csak a megoldás rögzítésével. A következő feladatot negyedik osztályos tanulókkal oldottuk meg. A tanulók hatfős csoportokban dolgoztak.

Van egy 8 deciliteres kancsód tele tejjel. Ezen a kancsón kívül van még egy üres 5 és egy üres 3 deciliteres kancsód is.



7. ábra. A kancsókat szimbolizáló ábra, melyekbe elhelyezhetjük az egybevágó téglalapokat

„Hogyan tudsz a kancsók segítségével 4 deciliter tejet kimérni, ha a tej nem folyhat ki a kancsókból, nem lehet kiborítani, és a kancsókon kívül más eszközt vagy mérőedényt nem használhatsz?” (Katona, 2007)

A munka elkezdése előtt fel kell hívni a gyerekek figyelmét arra, hogy a 8 deciliteres kancsó tele van, a tejet nem lehet kiönteni és nem folyhat ki a kancsókból. A megoldást segítheti, ha egybevágó téglalapok segítségével szemléltetjük az egyes edényekben lévő tej mennyiségét. A tanulók között sétálva feltűnt, hogy mindenki annál a lépésnél akadt el, amikor mindhárom kancsóban van valamennyi tej. Megkérdeztem tőlük, hogy két kancsó tartalmát össze lehet-e önteni. Ennek hatására megszülettettek az első jó megoldások.

A megoldások rögzítésekor a legnagyobb problémát az okozta, hogy a tanulók mindig kiradírozták, hogy előzőleg mennyi tej volt a kancsókban. Keveseknek jutott eszébe, hogy a különböző állapotokat külön rajzokon ábrázolja. Célszerű egy üres táblázatot készíteni a megoldások rögzítésére.

Megoldás

	8 deciliteres	5 deciliteres	3 deciliteres
1. átöntés	5	0	3
2. átöntés	5	3	0
3. átöntés	2	3	3
4. átöntés	2	5	1
5. átöntés	7	0	1
6. átöntés	7	1	0
7. átöntés	4	1	3
A 4 deciliter tej a 8 deciliteres kancsóban lesz.			

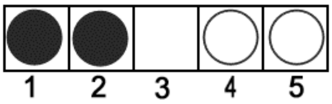
Ősi algofejtörők

Itt az olyan régi fejtörőkre gondolok, mint a Hanoi tornyai, de Brahma tornyai vagy Világvége feladvány néven is találkozhatunk vele. Valamint ide sorolom a dámajá-

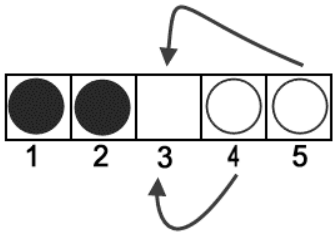
ték által ihletett algofejtörőket, melyekben a korongok egy meghatározott sorrendjéből különféle lépési szabályokat betartva a korongokkal lépkedve el kell jutni egy adott végállapotba.
A dámás játékoknál érdemes a lépési szabályokat ábrával is szemléltetni. A dámás játékok közti különbségek a dámák számában, az elérendő mintában, a lépések szabályaiban és a lépések számban nyilvánulnak meg. Kiköthetjük például, hogy az adott feladatot négy lépésben kell megoldani.

Nézzünk példát a dámajátékra.

> *’Két fekete és két fehér dámafigurát az ábrának megfelelően helyezünk el. Az a feladatod, hogy a fekete és fehér korongokat felcseréld (tehát az 1, 2 jelű mezőkön álló korongok kerüljenek a 4, 5 jelű mezőkre), az alábbi szabályi betartásával:*
>
> *1. Fehér figurával kell kezdeni az áthelyezést.*
> *2. Mindegyik figurát csak szomszédos mezőre lehet tenni, vagy egy mezőt lehet átugrani (többet nem).*
> *3. Egyik figurát sem lehet visszatenni olyan helyre, ahol már volt.*
> *4. Egy mezőn csak egy figura állhat.*
>
> *Hogyan oldanád meg a feladatot?” (Ignatyev,* 1982)

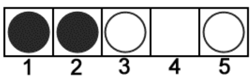
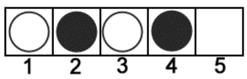
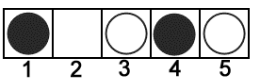
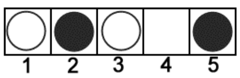
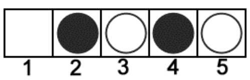
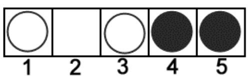
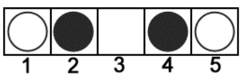
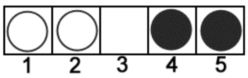


KIINDULÁSI ÁLLAPOT



A JÓ KEZDÉS

Megoldás

1. lépés: 4-es a 3-as helyre		5. lépés: 5-ös a 3-as helyre	
2. lépés: 2-es a 4-es helyre		6. lépés: 4-es az 5-ös helyre	
3. lépés: 1-es a 2-es helyre		7. lépés: 2-es a 4-es helyre	
4. lépés: 3-as az 1-es helyre		8. lépés: 3-as a 2-es helyre	

A Bee-Bot által nyújtott lehetőségek

A Bee-Bot egy kifejezetten gyerekek számára fejlesztett padlójáró robotméhecske. Gyerekbarát dizájn és könnyű kezelhetőség jellemzi.

Ez a kis robot képes előre és hátra menni egy egységet – ezek 15 cm-es lépések –, jobbra és balra fordulni 90°-ot, valamint villogó szemmel és hanggal jelzi, ha egy utasítást végrehajtott, vagy végére ért a kiadott utasítássorozatnak. A méhecske memóriájában egyszerre 40 lépés tárolható. A lépések hosszának ismeretében könnyen tudunk különféle pályákat készíteni a robothoz, és a gyerekeket is bevonhatjuk ebbe a munkába.

A Bee-Bot használatba vétele előtt fontos tisztázni a gyerekekkel, hogy a robot hogyan működik. A mozgás gyakorlásához – későbbiekben az útvonal megtervezéséhez – elhelyezhetünk a pályára nyilakat, melyek segítségével előre megtervezhetővé válik a méhecske útvonala. Utána már csak annyi a dolgunk, hogy ugyanolyan sorrendben megnyomjuk a gombokat és leellenőrizzük, hogy a robot tényleg az általunk megtervezett pályát járja-e be. A gyerekek viselkedésére az elején jellemző, hogy minden gomb lenyomása után pakolgatják a robotot a megfelelő mezőre és irányba.

8. ábra. Nyilak a pályán

Különböző nehézségű feladatokat tudunk megvalósítani a pályák segítségével:

- jussunk el egyik mezőről a másikra,
- haladjunk végig a mezőkön egy adott sorrenden, például különböző tevékenységek lépései vannak összekeveredve a pályán, meg kell keresni az összetartozókat és a jó sorrendben megállni rajtuk,
- jussunk el egyik mezőről a másikra, de közben bizonyos mezőkre nem léphetünk,
- jussunk el egyik mezőről a másikra, de közben érintsünk bizonyos mezőket, akár az érintendő mezők sorrendjét is megadhatjuk,
- jussunk el egyik mezőről a másikra, de a tiltott mezők elzárják előlünk a célt, viszont ha egy másik mezőre rálépünk, olyan „képességet” szerezhet a méhecskénk, mellyel át tud haladni a tiltott mezőkön is.

A feladatok megoldása közben, ha a gyerekek csoportban dolgoznak megfigyelhető, hogy felosztják egymás között a munkát, például mindenki egy gombot nyom le a méhecske hátán és így mennek körbe. Észreveszik az útvonalak közti különbségeket és közösen tervezik meg a megoldást (*Pasaréti és Sarbó*, 2013).

A logikai játékok által nyújtott lehetőségek

A *ThinkFun* nevű cég 1985-ben alapult és piacvezető a logikai játékok gyártásában. Az évek során több díjnyertes játékot is kifejlesztettek. A cég ikonikus játéka a *Rush Hour*, amit ma már mobilalkalmazásként is elérhetünk. Csak néhány algoritmikus játékot emelnék ki a hatalmas kínálatból. A játékok mindegyikére jellemző, hogy a kezdőtől a haladóig mindenki számára találhatunk feladatokat.

Rush Hour (Csúcsforgalom) és annak különböző változatai

- Rush Hour Junior
- *Rush Hour Safari*
- *Railroad Rush Hour*

River Crossing

TipOver

Hoppers

Összességében elmondható, hogy a kisiskolás korosztály tanulói kifejezetten szeretik az algofejtörő feladatokat, és egy feladattal átlagosan 10–15 percet foglalkoznak. Döntésüket azzal indokolják, hogy ezeken a feladatokon lehet gondolkodni, és rossz vagy hiányzó lépés esetén nem jutnak el a megoldáshoz. Élő tanórai alkalmazásban a megoldást segítik a makettek, korongok, bábuk alkalmazása vagy a szerepek eljátszása.

A gyerekekkel való fogalkozások során egyértelművé vált számomra, hogy az algofejtörők használata jelentős pedagógiai hatással voltak a tanulókra.

1. Rájöttek, hogy a módszer működik, meg tudták oldani a kezdetben nehéz feladatokat.
2. A megoldás *sikerélményt* nyújtott nekik.
3. Kialakult az *igény egy újfajta gondolkodási módszerre*: a későbbiekben, ha elakadtak a megoldásban, nem kértek segítséget, nem kezdték elölről a feladatot, hanem egy-egy lépést módosítottak.

Irodalom

Dewdney, A. K. (1987): Számítógépes észjáték. *Tudomány*,, 8. sz.

Ignatyev, Jemeljan Ignatyevics (1982): *A találékonyság birodalmában.* Tankönyvkiadó, Budapest.

Iványi Antal (2005): *Párhuzamos algoritmusok*.ELTE Eötvös Kiadó, Budapest. http://compalg.inf.elte.hu/~tony/Elektronikus/Parhuzamos/P1H.xml

Hvorecký, Jozef, Kelemen, Jozef (1978): Ötlettől az algoritmusig.Tankönyvkiadó, Budapest.

Katona Renáta (2007, szerk.): *Logikai egypercesek.*DFT-Hungária Kft, Budapest.

König Dénes (1992): *Matematikai mulatságok II.*Typotex Kiadó, Budapest.

Landa, L. N. (1969): *Algoritmizálás az oktatásban*. Tankönyvkiadó, Budapest,.

Lukács Ernőné – Tarján Rezsőné (1958): *Tarkabarka matematika*.Bibliotheca Kiadó, Budapest.

Pasaréti Otília – Sarbó Gyöngyi (2013): *Robotika műhely: Bee-Bot gyakorlati tapasztalatok kisgyermekkorban.* Konferenciaelőadás (INFO Éra), Zamárdi, 2013.

Róka Sándor (2007): *Hány éves a kapitány?*Typotex Kiadó, Budapest.

Vassné Varga Edit (1992): Algofejtörők – egy eszköz a gondolkodás fejlesztésére. In: Lengyelné Dr. Szilágyi Ágnes (1992, szerk.) *Budapesti Tanítóképző Főiskola Tudományos közleményei XII*. Budapest, 1992, 71–86.

Gyermeknevelés
2. évf. 2. szám 59–64. (2014)

Segítsen-e, illetve hogyan segítsen a szülő a nyitott mondatok (egyenletek, egyenlőtlenségek) megoldásában alsó tagozaton?

Szilágyiné Szinger Ibolya
Eötvös József Főiskola, Matematikai és Informatikai Szakcsoport, Baja

A nyitott mondatok (egyenletek, egyenlőtlenségek) tanítása során gyakran tapasztalhatják a tanítók, hogy a kisiskolásoknak – elsősorban a házi feladatok megoldásában – nyújtott szülői segítség visszalépést okozhat a már elért eredményekben. A szülők megoldási módszerei általában nem azonosak az alsó tagozaton alkalmazott módszerekkel, feltehetőleg ez a probléma forrása.

Ennek szemléltetésére bemutatok egy negyedik osztályos esettanulmányt, amelyben a szülők segíteni próbáltak a gyermeküknek a házi feladatként feladott nyitott mondat megoldásában. A szülők – beszámolójuk alapján – teljes kudarcként élték meg ezt a szituációt, ezért tanácsot kértek abban, hogyan tudnának a későbbiekben segíteni a gyermeküknek.

***Kulcsszavak**: nyitott mondatok, egyenletek, fogikai függvények, általános iskola, próbálgatás*

A nyitott mondat a logikai függvény1 alsó tagozatos elnevezése, mellyel többnyire egyenletek, egyenlőtlenségek formájában találkozunk az 1–4. osztályban. Természetesen a nyitott mondat általánosabb fogalom, mint az egyenlet, egyenlőtlenség, gondoljunk például a „□ osztója a 36-nak." típusú nyitott mondatokra. Az egyenlet, egyenlőtlenség elnevezések helyett alsó tagozaton a nyitott mondatok kifejezést használjuk, felső tagozaton térünk át az egyenlet, egyenlőtlenség elnevezésekre. A nyitott mondatok megoldása során a nyitott mondatokat igazzá tevő elemeket keressük, amelyek az ún. igazsághalmazt, a megoldások halmazát alkotják. Alsó tagozaton az egyváltozós egyenletek, egyenlőtlenségek értelmezési tartománya (alaphalmaza) a természetes számok halmaza, illetve annak bármilyen részhalmaza lehet. Mivel a megoldások halmaza az alaphalmaz részhalmaza, így törtszám, illetve negatív szám nem szerepelhet a megoldások között.

A nyitott mondatok alsó tagozatos tanításának célja a fogalom kialakításán túl a tanulók ítélőképességének, valamint számolási készségének fejlesztése, továbbá fontos szerepet játszanak a modellalkotás területén, a szöveges feladatok megoldásában, illetve a szabályjátékok szabályának leírásában.

A nyitott mondatok megoldása alsó tagozaton többféle módszerrel történhet, így az egyváltozós egyenleteket megoldhatjuk:

- próbálgatással,
- tervszerű próbálgatással („túl kicsi – túl nagy" módszer),
- műveletek közötti kapcsolat alapján,
- következtetéssel, az eltérés változásának megfigyelésével,
- szakaszos rajz segítségével.

[1] A logikai függvény egy adott „nyitott", – azaz csak az „állítmányt" tartalmazó, nem „teljes" – mondat szerint minden egyes behelyettesített „alanyhoz" hozzárendeli az „igaz" vagy a „hamis" logikai értéket. A szóba jöhető alanyok alkotják az ún. alaphalmazt. A megoldást az alaphalmaz azon elemeinek összessége adja, amelyekhez az „igaz" érték tartozik.

A *próbálgatás* a számok egymás utáni behelyettesítésével kapott állítások logikai értékének (igaz vagy hamis) meghatározását jelenti.

A próbálgatásnak magasabb szintű formája a *tervszerű próbálgatás*. A tervszerű jelző arra utal, hogy itt már mérlegelünk, mit érdemes kipróbálni, megjelenik egyfajta tudatosság a véletlenszerű próbálgatással szemben. A módszer alkalmazásával fokozatosan jutunk el a nyitott mondat megoldásához. Általános iskola 3–4. osztályában ez a leggyakrabban alkalmazott módszer.

Az egy műveletet tartalmazó nyitott mondatokat megoldhatjuk a műveletek közötti kapcsolatok alapján, mely esetekben egy alkalmas művelettel számítjuk ki a megoldást. Ennek a módszernek az alkalmazását számos próbálgatással, illetve tervszerű próbálgatással történő nyitott mondat megoldása előzi meg.

Nézzünk erre egy második osztályos példát! A következő egyműveletes nyitott mondat megoldását keressük: $\lozenge - 27 = 35$. A probléma szóbeli megfogalmazása megkönnyítheti a megoldást, ezért fogalmaztassuk meg a gyerekekkel, hogy azt a számot keressük, amelyikből ha 27-et kivonunk, 35-öt kapunk. Ha kipróbálják például a 30-at, észrevehetik, hogy így túl kicsi a különbség. A különbség növelését úgy érhetjük el, hogy a változó helyére nagyobb számot helyettesítünk be. Ha behelyettesítik például a 90-et, akkor túl nagy lesz a különbség, ezért ennél kisebb számot kell keresnünk. Tegyük fel, hogy behelyettesítik például a 60-at, akkor a különbség 33 lesz. Innen már könnyen adódik a 62 mint megoldás. Kellő számú ilyen típusú nyitott mondat próbálgatással, illetve tervszerű próbálgatással történő megoldásával megszerezhetik a tanulók azt a tapasztalatot, hogy a hiányzó kisebbítendőhöz eljuthatunk úgy is, hogy a különbséget éppen a kivonandóval növeljük, azaz a különbség és a kivonandó összeadásával. Hangsúlyozzuk, hogy ez nem a mérlegelv alkalmazását jelenti, ugyanis nem arról van szó, hogy mindkét oldalt egyenlően változtattuk, azaz mindkét oldalhoz hozzáadtunk 27-et.

Ha a szülő otthon úgy próbál segíteni a gyerekének egy ilyen jellegű nyitott mondat megoldásában, miszerint magyarázat nélkül közli, hogy itt a 35-höz hozzá kell adni a 27-et, akkor ő a *mérlegelv* alkalmazásán keresztül teszi azt. A mérlegelvet azonban – mint az egyenletek általános megoldási módszerét – alsó tagozaton még nem tanítjuk. Ennek, valamint a *lebontogatás* módszerének tárgyalására csak 6. osztályban kerül sor. A lebontogatás előkészítésével matematika-szakkörön, vagy differenciált foglalkoztatás keretében azonban már foglalkozhatunk.

Az egyenlőtlenségek megoldása alsó tagozaton próbálgatással vagy tervszerű próbálgatással (3−4. osztályban) történhet. A tervszerű próbálgatásnál először a legnagyobb jó és a legkisebb jó megoldást[2] kerestetjük a tanulókkal, a közbülső számokat – a megfelelő tapasztalatok megszerzése után – már behelyettesítés nélkül, egyszerűen a megoldások közé sorolják.

A két- vagy háromváltozós nyitott mondatok megoldási módszere szintén a próbálgatás.

A nyitott mondatok (egyenletek, egyenlőtlenségek) tanítása során gyakran tapasztalhatják a tanítók, hogy a kisiskolásoknak – elsősorban a házi feladatok megoldásában – nyújtott szülői segítség visszalépést okozhat a már elért eredményekben. A szülők megoldási módszerei többnyire nem azonosak az alsó tagozaton alkalmazott módszerekkel, feltehetőleg ez a probléma forrása.

---

[2] Itt a „megoldás” szót abban az értelemben használjuk, amit mondhatnánk „egy jó” számnak (egy gyöknek). Tehát a legkisebb, illetve legnagyobb jó számról, a legkisebb, illetve legnagyobb igazzá tevő számról van szó.

Ennek szemléltetésére bemutatok egy negyedik osztályos esettanulmányt, amelyben a szülők segíteni próbáltak a gyermeküknek a házi feladatként feladott nyitott mondat megoldásában.

Réka: Anya, apával csináltam tegnap a leckémet, és nem volt jó. Nem is értem.
Anya: Mit nem értesz? Mutasd!
Réka: Matek.
Ötszáztizenegy nagyobb, mint valamennyiből ötven.
511 > □−50 (Sokszínű matematika Számolófüzet 4, 10/1. feladat)
Anya: Mi itt a kérdés?
Réka: ????
Anya: Mennyiből kell kivonni 50-et, hogy az eredmény kisebb legyen 511-nél. Ugye?
Réka: Ühüm. És ezt hogy kell megoldani?
Anya: Másoljuk le egy lapra! Én csak úgy tudom megcsinálni, ahogy mi tanultuk. *Kínosan ügyeltem, hogy ki ne ejtsem az egyenlet szót: egyrészt, mert még nem tanulták, másrészt, mert ez épp egy egyenlőtlenség. Gyorsan írtam:*
511 > □−50
Írjuk le fordítva, mert úgy egyszerűbb!
□−50 < 511
Ez ugyanazt jelenti, igaz?
Réka: Ühüm.
Anya: Arra kell törekedni, hogy a „valamennyi" egyedül maradjon az egyik oldalon, mert az a kérdés. Most nekünk útban van a mínusz ötven. Ami az egyik oldalon mínusz, azt pluszként lehet átvinni a másik oldalra, pont az ellenkező művelettel. *Rájöttem, hogy nem mínusznak és plusznak mondják, ezért javítottam:* A kivonásból összeadás lesz, az összeadásból kivonás a másik oldalon. Nézd!
□−50 < 511 /+50
□ < 511+50
□ < 561
Réka: De anya, mi ezt nem így tanultuk. Én ezt nem is értem. *Réka már sírt.*
Anya: Hát itt az 561-nél kisebb számok lesznek a jó megoldások.
A füzetbe fordítva írd le: 561>□, mert emlékszel, egyszer megfordítottuk.
Réka: 560, 559, 558, …, 0 – írta alá sírva.
Anya: Csak az egész számokat tanultátok?
Réka: Mindig így írjuk a megoldást.
Anya: Nulláig?
Réka: Ühüm.

Hasonlóan oldották meg a következőt nyitott mondatot is:
⌂+100 ≥ 409 /−100
⌂ ≥ 409−100
⌂ ≥ 309

Az édesanya – látva gyermekük kétségbeesését, sírását a házi feladat megoldása során – megkeresett és elmesélte, hogy teljes kudarcként élte meg ezt a szituációt, majd megkérdezte, hogy hogyan kellett volna megoldani ezt a nyitott mondatot, illetve hogyan tudnának a későbbiekben segíteni a gyermeküknek.

Az édesanya következő mondatait érdemes részletesen elemezni: *„Arra kell törekedni, hogy a „valamennyi" egyedül maradjon az egyik oldalon, mert az a kérdés.*

Most nekünk útban van a mínusz ötven. Ami az egyik oldalon mínusz, azt pluszként lehet átvinni a másik oldalra, pont az ellenkező művelettel. A kivonásból összeadás lesz, az összeadásból kivonás a másik oldalon.”

Rékának ezek a mondatok valószínűleg teljesen értelmetlennek tűntek. A következő kérdések kavaroghattak a fejében: Mit jelent az, hogy a „valamennyi” egyedül maradjon? Mit jelent az, hogy pluszként át lehet vinni a másik oldalra? Hogyan lesz a kivonásból összeadás, amikor ő csak kivonást lát a nyitott mondatban? Réka egy sor értelmetlen szabállyal találta magát szemben a szülői instrukciókban, hiszen ő eddig a tanítójától – feltehetőleg – a tervszerű próbálgatás módszerét látta. Meg kellett oldania egy nyitott mondatot úgy, hogy a valamennyi egyedül maradjon, átvinni a mínusz 50-et pluszként a másik oldalra.

Richard R. Skemp matematikus-pszichológus az ilyesfajta utasításokat az értelem sorozatos megsértésének nevezi: *„Ha valaki megpróbál megérteni valamit, ez együtt jár szkémáinak az akkomodációjával. Ha ilyen esetben a küldő fél értelmetlen dolgokat közöl, akkor a befogadó megpróbálja szkémáit az értelmetlenséghez asszimilálni. Ez pedig egyenértékű e szkémák lerombolásával, ami a testi sértés szellemi megfelelője”* (*Skemp*, 1975. 56. o.).

Réka elsírta magát, mert nem volt képes értelmet találni abban, amit az édesanyja nyújtott a számára, de nem ismerte fel, hogy a hibát nem ő követte el, hanem a szülő, még ha csupán tudatlanságból is. Az elhangzott párbeszédből egyértelműen kiderül, hogy a szülő megoldási módszerként a mérlegelvet alkalmazta, mert úgy tudja megcsinálni, ahogy tanulta. Ez azonban a kislánya számára ismeretlen módszer, ezért nem egyeztethető össze saját értelmével. Az édesanyával folytatott beszélgetés során igyekeztem átadni a tervszerű próbálgatás módszerének lényegét, egyúttal rámutatni arra, hogy a mérlegelv nem a 4. osztályos gyermekeknek megfelelő módszer, ezért nem jutottak ők sem egyről a kettőre. Néhány példán keresztül bemutattam neki, hogyan oldhatunk meg nyitott mondatokat ezzel a módszerrel. Két-három héttel később hasonló problémával fordult Réka édesanyjához.

Réka: Anya, tudsz segíteni a nyitott mondatos feladatnál? Az a feladat, hogy egy számból elvettem 5800-at, a különbség 3900-nál kisebb lett, és ezt leírom egy nyitott mondatba.
$\Delta - 5800 < 3900$ (Sokszínű matematika Számolófüzet 4, 38/2. feladat)
És akkor most nem tudom, hogy ezt hogyan kellene kiszámolnom.

Anya: Van egy tipped rá?

Réka: Úgy, hogy a 3900-at ki kell vonni az 5800-ból?

Anya: Lehet, hogy az is jó, de próbáljuk meg találgatással. Jó? Keressünk egy szá mot, és arra próbáljuk ki! Itt ilyen ezres meg százas nagyságrend van. Tehát akkor?

Réka: Nyolcezer valamennyi.

Anya: 8000-rel próbáljuk meg!

Réka: 8000-ből 5800 az 2200.

Anya: Tehát a 8000 esetén tényleg…

Réka: …kisebb.

Anya: Kisebb lett a különbség, …

Réka: …, mint 3900.

Anya: Igen. Akkor most próbáljunk ki egy másikat!

Réka: Mondjuk a 7000-et, nem, inkább a 8900-at.

Anya: Jó, próbáljuk ki a 8900-at!

Réka: 8900-ból 5800 az egyenlő 3100.
Anya: Tehát még jó a 8900 is.
Réka: Igen.
Anya: Az előbb próbáltuk a 8000-et, most a 8900-at. Akkor még fölfelé vagy lefelé érdemes próbálkozni?
Réka: Még fölfelé. És ha mondjuk, azt nézem, hogy a 8900-hoz adok 100-at, az 9000 lesz, akkor a különbség 3200 lesz. Ha még a 9000-hez hozzáadok …
Anya: Na, hány százat?
Réka: 700-at még.
Anya: Igen.
Réka: Az már nem jó.
Anya: Próbáljuk ki vele!
Réka: 9700-ból 5000, az 4700, 4700-ből 800 egyenlő 3900.
Anya: Igen, tehát akkor…
Réka: A 9700 már nem jó. Attól kisebbek jók nekünk ugye?
Anya: Igen.
Réka: Ezt leírom. Valamennyi egyenlő, nem, kettőspont.
Anya: Miért kettőspontot teszel?
Réka: Így szoktuk, és utána felsoroljuk.
Anya: Melyik az első jó szám?
Réka: 9699, utána a 9698, a 9697, és pont, pont, pont 0-ig.
Anya: A 0-ig?
Réka: Igen, mert a mínuszokat még nem tanultuk igazán.
Anya: Akkor így jó.

Látványos fejlődés figyelhető meg a szülői kérdéskultúrában, a szaknyelvi pontatlanságok ellenére. A mérlegelv korábbi alkalmazása azonban hagyott némi nyomot a kislányban, ezért akart helytelenül az 5800-ból 3900-at kivonni.

Réka és anyukája figyelmét – ahogy az előző feladatban is – elkerülte az a tény, hogy ha 5800-nál kisebb számot helyettesítünk be, akkor a kivonás műveletét – legalábbis alsó tagozaton – nem tudják elvégezni, mert pl. 5000-ből nem tudnak 5800-at elvenni. A kisiskolások nem tudják meghatározni a különbséget abban az esetben, ha egy természetes számból egy nála nagyobb természetes számot kell kivonni. Éppen ezért a legkisebb jó szám az 5800, és nem a 0.

A kiinduló kérdésünkre visszatérve, úgy válaszolhatunk, hogy természetesen segítsen a szülő a nyitott mondatok (egyenletek, egyenlőtlenségek) megoldásában, amennyiben a gyermeke igényli, de – amint láthattuk a fenti példákban − egyáltalán nem mindegy, hogy hogyan teszi. Nem mérlegelvvel. Így célszerű lenne szülői értekezlet keretében bemutatni a 6−10 éves gyerekek életkori sajátosságainak megfelelő próbálgatás, illetve tervszerű próbálgatás módszerét, hogy alkalmas módszerekkel segíthessenek a gyermekeiknek, amennyiben szükséges.

A kisiskolásoknak megfelelő matematikai nyelvezetre, szóhasználatra is mutathatunk példákat, mert a nyelv a tanulás fontos része. A szakszerű, módszertanilag kifogástalan tanítást természetesen csak a tanítóktól várjuk el, de a szülőket annyiban segítenünk kell, hogy a gyermekek gondolkodásának fejlődését előre, és ne visszafelé mozdítsák, zűrzavart okozva ezzel a gyerek gondolati világában.

Zárásként *Szendrei Julianna* gondolatait idézem: *„A dolgok értelmének feltárásához viták, beszélgetések, a tanulók közös munkája szükséges. Ezek együttese eredményezheti azt, hogy valakinek az osztályában sokan értik a matematikát.”*

Irodalom

Árvainé Libor Ildikó – Lángné Juhász Ildikó – Szabados Anikó (2013): *Sokszínű matematika* Számolófüzet 4. Mozaik Kiadó, Szeged.

Skemp, Richard R. (1975): *A matematikatanulás pszichológiája*. Gondolat, Budapest.

Szendrei Julianna (2005): *Gondolod, hogy egyre megy?* Typotex Kiadó, Budapest.

Szerencsi Sándor – Papp Olga (1987): *A matematika tanítása II*. Tankönyvkiadó, Budapest.

Török Tamás (2013): Nyitott mondatok. In: Herendiné Kónya Eszter (szerk.) *A matematika tanítása az alsó tagozaton* Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó, Budapest.

Gyermeknevelés
2. évf. 2. szám 65–72. (2014)

Only the raisins or all the pie?

The implementation of the Varga-Neményi[1] method in Finnish schools

Anni Lampinen – Kirsi Puumalainen
Matikkamaa/ Kirstin koulou, Espoo – Turengin koulou, Espoo

At the beginning of a course held at Helsinki University in 2000, Julianna Szendrei asked us, Finnish teachers the question: Who do we want to get to the finish line with – the few best pupils, „the average" or every single pupil, even if there will be some who will have to wear roller skates to get there. According to Eszter C. Neményi, who introduced all her courses with this, the teachers are driven by two kinds of love in their work: the love of children and the love of mathematics. Now, these thoughts are important and familiar to us, Finnish teachers as well. It is exactly the similar values, the similar view on teaching that aroused our interest: How do you teach here in Hungary? What novelties could we learn from you? This was the situation in 2000. Now we are here to tell you about Finnish mathematics teaching and about what we learnt from you, apart from the fact that our school culture is somewhat different from yours, how we are proceeding in the direction you set for us, and how we have formed the seven principles of Varga-Neményi to „our image".

***Keywords**: mathematics, tools in teaching, foundation of mathematics, Varga-Neményi method, Finnland*

1. Experience based on reality

„Playing is the work of a child" – this popular Finnish saying is especially valid when it comes to learning mathematics. In order to make our young pupils understand the basics of mathematics, we have to make abstract mathematics accessible for their lives through their personal experience. The purpose of teaching is to give „mathematical googles" to the children. The Finnish Core Curriculum has long emphasized concretisation and activity as the starting points of teaching, yet there are multiple opinions on what it means in practice.

The central issue of the Varga-Neményi method is the personal and direct experience of children. It is not enough for them to hear or read that somebody somewhere once experienced this or that; or that this or that happened. If the pre-school personal experience is missing, it needs to be made up for in the school. We now have plenty of experience of the primal importance of personal experience in two learning groups. When teaching immigrant children, it is essential to be specific and let them experi-

[1] Developing the primary school curriculum and teaching methods, Eszter C. Neményi was one of the closest associates of Tamás Varga. Many Hungarian approaches of mathematics teaching allude to Tamás Varga in their publications, yet many of these are quite far from his original intellectual heritage. That is why, as Julianna recommended, in the title of the authentic curriculum and teaching method presented in Finland we include Neményi.

ence, for many of them do not speak Finnish or speak poorly. We construct our common language learning together in the course of the schooldays. They have to learn to express their lives and activities using words of a language new to them. On the other hand, in the Ruskeasuo-school, which develops teaching methods for physically handicapped children, we experience continually and palpably how indispensable experience is in the learning process; due to their disability, these children could not extract enough experience and knowledge from and about their surroundings. There are some teachers in our postgraduate courses who are working with mentally handicapped children as well.

During our own postgraduate courses, primary school teachers have the opportunity to experience playing and activities from a child's perspective. It partly helps them to reconsider and reform their own work, and partly to perceive what children experience through this kind of teaching method. The experience gained during the course can be transferred into their own classroom almost without change. Oftentimes, a sigh can be heard coming from many participants of our courses: „I wish mathematics had been taught to me this way!"

2. Using tools widely

The usage of tools is traditionally restricted to the first two classes in Finland, and even in those classes tools rather mean aids, helping mechanical calculation. These, of course, have to be left behind as soon as possible, therefore students who need them longer can soon find themselves in the „weak student" category. Which student would want this? For the average Finnish primary school teacher it is an aha-experience to discover that the tools of various activities are for everyone! Even for the brightest prodigy! And that these tools are instruments of conceptualization and thinking development. That we can differentiate with tools – even upwards!

It is not a secret that this method requires a lot of tools, and so the teacher has to prepare many objects and written materials. In order to help their work, we comprised various ready-made materials apart from the coursebook and workbook (for example flesh cards), which can be purchased. Moreover, we organize DIY gatherings, where teachers can prepare tools and teaching materials together. The same can be a pleasant and useful evening program during seminars. Teachers' imagination, creativity and dexterity is fascinating. Time flies when they work together and discuss relevant issues. The students' parents can also be asked to help with this or that, there are always some who volunteer. With all these we want to ensure that being skillful would not be a requirement, neither would the lack of technique be a hindrance in the application of the method.

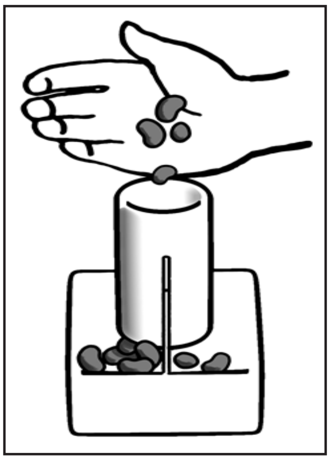


Figure 1.: Number splitter

Learning in nature: Finland is the country of woods and lakes, where we find it important to educate children in relation to nature.

Arts, architecture and culture draws on nature and its proximity. In the latest years, we have developed our pedagogy in general following the „out of the classroom" principle, and within this we developed Varga-Neményi method as well: we took it to the schoolyard and the nearby woods, where tools and materials are literally on hand.

Number splitter: We can make children practice splitting numbers 0-10 into two with the help of this game.

For example, take 7, we drop 7 beans into the funnel, and before that, every player has to jot down what they think will come out of the machine. Those who are right, get a point each. We can also write the sums into a bingo-table and play splitter bingo this way.

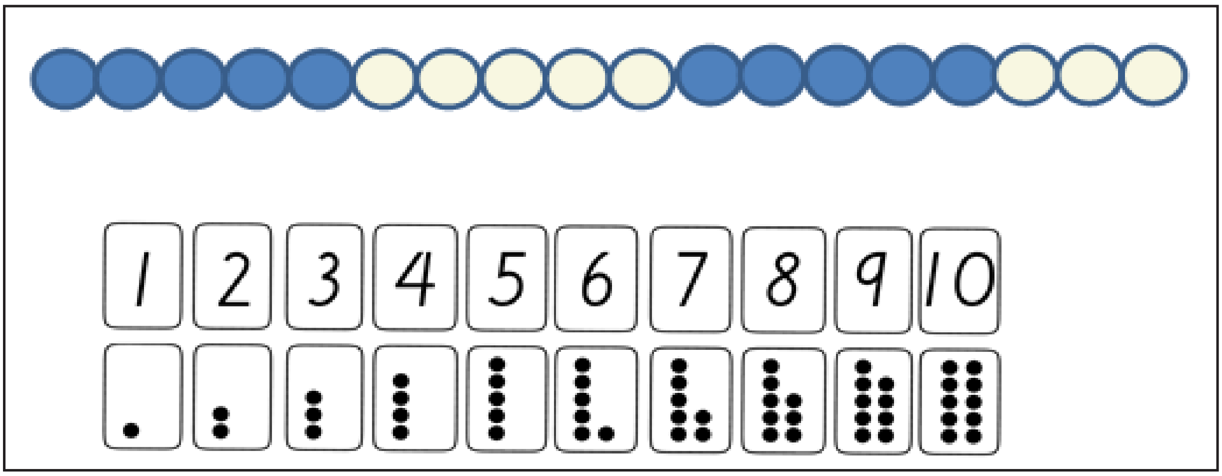


Figure 2.: The power of fives

The power of fives: The improvement of visual recognition of quantities, as well as benefiting from this ability has an important role in the Varga-Neményi method. As it is difficult to estimate the number of more than five things at one glance, we may use the power of fives as a possible visual model: we group quantities in fives, for example, we build up ten from two fives.

We can estimate even larger numbers with fives, for example 18 beads will be three groups of fives and three individual beads.

Children learn to name and show the amount of beads without actually counting them by one. This cannot happen without a sort of visual structuring.

Nuts and bolts boxes and snakes of balls: We make children practice number sequences 0-10 and the quantity a number expresses with various tools. Children experience by touching when they have to line boxes up in order of their weight or they are asked to count the balls in a snake of balls; the speciality of these tools is that they cannot be opened, therefore, children cannot estimate quantities by looking.

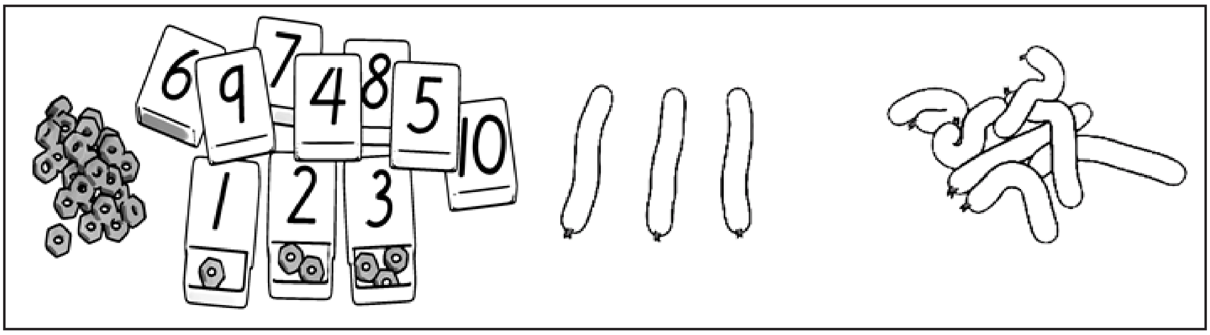


Figure 3.: Boxes and snakes

Story telling: Stories include long processes. Learning to exchange tens to ones by number splitting requires a variety of skills and knowledge. To make these skills and knowledge build up in a way that supports memory, we tell tales and play. Egg boxes for ten eggs are used in Finland as well. The game is set in the hen house: the farmer collects fresh eggs every morning and evening and puts them into the boxes always the same way – left to right and up from down. This game helps pupils visualize and memorize what happens. In the bookkeeping section they learn the notations of the calculations with the help of arrows showing the exchange.

New and ready-made games: Hally-Gally, Super Farmer and Chocolate fix.

3. Considering personality and age

Pre-school curriculum is only briefly and roughly worked out in Finland. It does not guide pre-school teaching well enough and it does not support teachers in awakening interest in children whose skills have to be improved, who did not receive important inputs of mathematical experience in early childhood. The Varga-Neményi method is a complete system which supports the multiple improvement of children. This method requires a new way of thinking from us, teachers. Therefore, we in the Varga-Neményi Company put the greatest emphasis on improving pre-school teaching. Our colleague, Minna Salminen is developing a new, extensive and structured pre-school curriculum. Pre-school teachers attending our courses are very enthusiastic about these new thoughts as they extend their knowledge and improve the quality of their work. In their opinion, they did not receive enough and good enough training to ensure successful mathematical education of young children.

MAVALKA: Finnish children begin school in the year they become 7, which means that the age difference between the youngest and eldest students in a class can be almost a year. Most children attend pre-school, but up to this year we have paid little attention to the profound differences in knowledge between children beginning school. In the latest few years, we have been trying to help children start school and find the ones who may, sooner or later, have learning difficulties. For this purpose, Anni Lampinen, Hannele Ikäheimo and Marja Dräger developed a method, recommended in pre-school and the first semester of the first class, to realize children's mathematical condition. It consists of number concepts, number line and invariant quantities.

We offer regular help to children who are likely to have learning difficulties in the future, preferably from pre-school, but surely in the first two schoolyears. The form of our help is the so-called Noppa club (noppa=dice), where children can acquire the missing skills and basic knowledge necessary for learning mathematics. This is progress, compared to the recent past, and partly today as well, unfortunately, when we began to deal with mathematics learning difficulties seriously only from the third form, where there are already multiple problems.

AbacoMath: Some modules for pre-school and home practice (numbers 0-20) can be found at the webpages of the Educational Authority by Marja Dräger and Anni Lampinen. http://www.edu.fi/verkko.oppimateriaalit/matematiikan

4. The way to abstraction

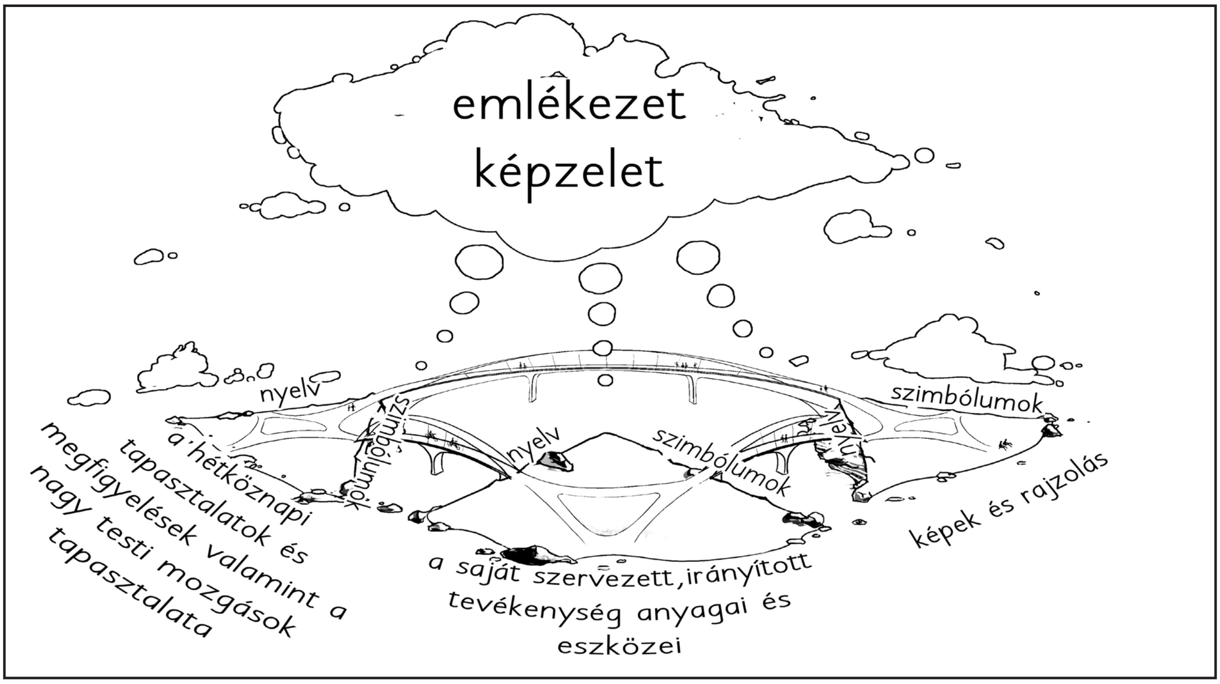


Figure 4. The way to abstraction

We have been thinking what clear, yet rich image of abstraction we shall give primary school teachers, which would help them planning. Finally we dropped anchor by this triangular island (there are three islands in the vertices, and they are interconnected).

- The first island is home to controlled games, like window-shopping, buying ice cream, doing everyday housework and so on. Finnish people like baking different pies and cakes, which they freeze and take to different charity fairs. Playing „birthday game" would certainly excite all children, etc. Gross motor skills, moving in space and using their own body as a tool belong to this island.
- On the second island, we put tools in front of each child, and they can explore the new topic by detecting it manually. Among the tools, naturally, there are logic shapes, Cuisenaire rods and many other hand-made or purchased tools.
- On the third island, the children get acquainted with the topics using pictures they get or prepare in advance.

We talk a lot on every island, and we may use the symbols of mathematics everywhere. The islands are interconnected by bridges. The children are enriched with a lot of memories and logical-mathematical experience on each island. These mental images, stored in their imagination together with their verbal representation make a firm base for further mathematical thinking and abstraction.

5. A broad and unified foundation of mathematics

At the first school year, traditional Finnish mathematics teaching begins with writing numbers and some rather short exercises on number concept: quantity, linking numbers and what they represent, relations like more or less, and over all, practising addition and subtraction. Counting strategies are hardly mentioned. Pupils are expected to calculate up to a hundred by the end of the first school year, and up to a thousand by the second. Teaching written addition and subtraction, as well as teaching the multiplication table consumes a lot of time in the second form. This shows that mathematical thinking was thought to be developed by improving computational techniques.

For primary school teachers, who are used to the traditional method, it is new that there is a slow initiation; that they first have to make sure that all children have the basis for learning mathematics on the level of skills; they need to teach children make observations, think diversely, and they have to improve children's concentration span and memory. Instead of quickly turning to a written routine, we first have to establish the number concept of children, we have to make them do a sum in their heads regularly, and we have to deal with other fields of mathematics at the same time. At our teacher training courses, we use a simile: In Finland, we are used to knitting neat stripes of mathematics – we use only one colour at a time and make students only imitate our technique so that they will be able to use it skillfully, and we think they have learnt it. On the contrary, the Varga-Neményi method knits a multi-coloured pattern with various colours at the same time. Teachers have to know colours and patterns in a way that they become able to help children „knit their own mathematics". This way, the method, which first may seem to be confusing, becomes clear and consistent, while it teaches children mathematics and elaborates learning strategies in them.

These are the reasons why Finnish teachers can initially be taken aback by the method. „Why are we doing this? What is it good for? This rather belongs to pre-school, doesn't it?" We answer these questions with the question: Do we want to teach mathematics or calculating techniques? If we opt for teaching mathematics, our teaching practice will become varied and richer. Our primary aim at teacher training courses is to introduce teachers to the structure of the curriculum.

The Finnish National Curriculum does not spend a word on combinatorics, logics or sets at all among topics necessary to deal with in the first two years of school. To be honest, logics and sets as words do not occur in the curriculum of upper forms either. In the 70s, sets were part of the curriculum, moreover, learning mathematics began with learning sets. We had to give it up quickly, as teaching methods were too abstract and the teaching material itself was too formal then. Bad teaching, which followed partly from the poor mathematical education of the teachers at the time, made sets discredited in teaching mathematics for years. Apart from this unfortunate failure, teaching division was inconsistent, properties of operations have never been incorporated into the curriculum, not to mention numeral systems. They were invisibly there by the discussed contents, and there were some pupils and teachers who noticed them. But teaching has always been a rush, and there was no time to estimate the significance of the shortcomings of the foundation work or the effect of these shortcomings on building the „Fortress of Mathematics". The motto of this constant hurry was: „We have to finish everything that next year we won't have time to do."

Omission of important mathematical topics from the national curriculum also means that Finnish lower primary teachers do not have personal experience from their childhood about learning these topics, nor have they sufficient professional knowledge to teach them. Therefore, during our teacher training courses besides making teachers acquainted with an innovative pedagogical approach, we broaden and refine their knowledge of mathematics. Teaching the topics above requires more time, greater expertise and more thorough work.

6. The right to be wrong, to dispute and to be delighted

How many mistakes, how much fun can be in a single lesson or a day of a course! Look, learning mathematics is not silent drudgery, not even a job for the bright only. This is where Finnish teachers have the most to learn. But it is exactly this what makes learning enjoyable and fun!

7. The teacher and teaching mathematics

The sixth and the seventh principles are inextricably intertwined.

One of the most important purposes of our teacher training courses is to evoke mutual interest and trust among teachers. It is not only that teachers have the opportunity to talk, it is rather a condition of successful work. This way, even unsure questions and presuppositions, whatever awkwardly they are verbalised, can be set before the whole group to think about them. When someone dares to ask a question, there are probably many who have already been considering asking it.

During the courses, the growth of teachers' courage and confidence in teaching mathematics is gratifying to see, not only for the participants themselves, but for instructors of Varga-Neményi Company as well. We find those moments especially fruitful when a statement of the instructor is challenged; discussing pros and cons shows that teachers are about to be freed from their former wrong concepts that only thinkers who produce one true answer quickly can be valued, even as a person. At this point they are on the way to value a proof or justification of a statement, as well as the diversity of our thinking as our common treasure. These moments make the instructor believe that the participants are becoming better teachers, in the sense of both mathematics and personal wisdom.

Due to the trusting, benevolent and tolerant atmosphere during the meetings, teachers make friends with each other, and keep in touch after the course as well. There are schools all over the country where mathematics is taught exclusively with the Varga-Neményi method in pre-school and the first two grades. Thus, having participated in our courses is an advantage for the teacher when applying to these schools. This is the nicest appreciation of our work!

By increasing teacher's professional knowledge, their self-confidence also increases, as they realize how important it is to make the foundations in pre-school and the first two years to be able to build mathematics on it later. It is no longer their greatest concern what mark they should give for a test, according to the table of marks. When finding an error, they don't just say „it is inattention"; they want to know exactly what and to what extent children know at that moment, what deficiencies hinder them in learning the next topics and how to make each and every student capable of progress. They ponder how much time, resource and professional knowledge is available which can be rearranged to solve learning difficulties even in the present difficult economical situation. We are obliged to do it by the 2013 SEN legislation, which introduced a three-step model to arrange helping students according to their special needs. The theoretical background of the Varga-Neményi method is great help for us in understanding lesson management and the structure of teaching mathematics.

The new syllabi are to be implemented on 1st August 2016. This March, professional groups prepared their plans which are going to be revised and modified as recommended. There was special attention paid to the syllabus of the first two forms. We think these changes are leading us to the right direction. Many teachers applying the Varga-Neményi method will take part in these developments in local groups. At the moment, we are excited to see the preparations of the basis of the national curriculum. What makes our work increasingly interesting is the fact that according to the international agreement of children's rights, their opinion will have to be consulted in each phase of the preparation of the syllabus.

The description of the method, bibliography, reports on the Company's activities and events, as well as information on seminars and courses can be found at our webpage: www.varganemenyi.fi. There we also provide teachers with ideas and photocopiable materials for free.

After finishing the schoolyear we are going to hold the traditional two-day seminar of the Company in Kuopio – it is going to be the eighth this year! There are going to be lectures and free discussion, opportunities for teachers to meet other teachers teaching the method, brainstorm, exchange ideas and experience, take part in DIY, swimming and sauna – the best beginning for the well-deserved summer holiday!

Finland is the country of great distances: the greatest distance between two teachers of the Varga-Neményi method can be up to 1200 km. We not always find an appropriate teaching partner in our schools, but social media, especially Facebook have been a very suitable forum where we can share the joy and difficulties of teaching, load up photos, ask and give advice freely. Our Facebook group already counts about 800 members.

Educational issues attract the attention of the media as well, especially when the results of PISA assessments are released. In recent years, mainly in local newspapers, many articles have been published on schools and teachers using the Varga-Neményi method. Radio and TV interviews with the President of the Company have created a nationwide audience for this important issue. From the very beginning we enjoy an enthusiastic and positive attitude from the media.

One of the greatest tasks for the future is to stimulate research work which analyses the method. Pirjo Tikkanen wrote her dissertation on this topic in 2008 - „It is easier and more entertaining than I have thought. Finnish and Hungarian fourth graders about mathematics". Some theses appear every year as well, but still there are many exciting topics to discover. And, let's not forget about this, the third and fourth grade teaching materials will have to be reformed to our Finnish way. The work has begun, and there's an atmosphere of great expectations.

We would like to express our sincerest gratitude to the Finnish General Education Authority for the moral and financial help which have made the dissemination and teaching of the Varga-Neményi method possible for years. Without training teachers, we would not get anywhere. Here in Hungary, we would like to thank you all, individuals and institutions alike, what we have got from you; that you enrich our thinking and that you have introduced us to this magical world of teaching and learning mathematics. We could visit your schools and observe your lessons where we have always been most welcomed. You came to visit us in Finland to teach us, putting off your other important jobs. Apart from sharing your knowledge and experience with us, you also became true friends with us. You are always in our hearts and minds, when we teach, talk and prepare teaching materials and tools. You can't even imagine what celebrities you are in our Finland!

With respect and gratitude, in memoriam Julianna Szendrei.
Varga-Neményi Company
Anni Lampinen and Kirsi Puumalainen

Gyermeknevelés
2. évf. 2. szám 73–83. (2014)

Egy ötlet: hogyan lehet sudokuval játszani a matematikaórán

Bagota Mónika
ELTE TÓK

Az írás ötlete Ronit Bird: Száz játék és fejtörő a számolási nehézségek leküzdésére c. könyvéből származik. A szerző a könyvben olyan gyakorlatokat és játékokat mutat be, amelyek lekötik és ösztönzik a diákokat. A könyvben található játékok és gyakorlatok úgy készültek, hogy „a diákok megbarátkozzanak a számokkal, használják őket, és a matematikára úgy tekintsenek, mint izgalmas próbatételre, mozgalmas és örömteli tevékenységre.”

A könyvben bemutatott játékok közül számomra a népszerű sudoku rejtvényeken alapuló fejtörők voltak a legizgalmasabbak. A „sudoku pótlással” lehetőséget biztosít az összeadás és a kivonás gyakorlására a húszas számkörben. A „sudoku szorzással és osztással” pedig a szorzótábla gyakorlására ösztönöz 10·10-ig.

Az alábbiakban *Ronit Bird* Száz játék és fejtörő a számolási nehézségek legyőzésére (2012) című könyvét szeretném a szerző szavaival röviden bemutatni.

„Ez a könyv a számolási nehézségekkel küzdő diákok, valamint az őket tanító pedagógusok és szülők számára készült” (i. m. 9. o.). „A számolási nehézségekkel küzdő diákokat tanító pedagógusok általános tapasztalata szerint nem elég egyszer vagy kétszer elmagyarázni valamit. Nagyon fontos az ismeretek közlésének módja, és az is, hogy mennyire lelkesek, szorgalmasak a gyerekek. A leglényegesebb az állandó ismétlés, illetve a kis lépésekben való haladás, a fejlesztés lépéseinek gondos megtervezésével. Minden új tudáselemnek biztos alapokon, a korábban tanult és elsajátított ismereteken kell nyugodnia. Ugyanakkor, bár a gyakorlás kulcsfontosságú, az egyszerű, mechanikus ismételgetés rettentően unalmassá válhat, és elveheti a gyerekek kedvét a tanulástól. Arra kell törekednünk, hogy minden egyes témát újszerűen, a korábbiaktól eltérő módon közelítsünk meg” (i. m. 9. o.).

A könyv számos fejtörőt tartalmaz, amelyek egy része gyakoroltatja az összeadás és a kivonást azzal a céllal, hogy a diák túllépjen az egyesével történő számláláson, és megtanuljon fejben számolni. Azok a feladványok pedig, amelyek a szorzást és az osztást gyakoroltatják, azzal a céllal készültek, hogy a diák megértse a szorzótáblát, és megtanulja levezetni a szorzások és osztások eredményeit. A könyv rengeteg fejtörőt és játékot vonultat fel, melyek által személyre szabott, differenciált foglalkozások szervezhetők.

„A könyvben szereplő fejtörők a népszerű sudoku rejtvényeken alapulnak. Ebből a típusból két sorozatnyi feladatot adunk közre. Az egymás után következő fejtörők mindkét sorozaton belül egyre nehezebbek. A huszonöt »sudoku pótlással« lehetőséget biztosít az összeadás és a kivonás gyakorlására a húszas számkörben (számok összetevőkre bontására, kiegészítésére stb.), a másik huszonöt »sudoku szorzással és osztással« pedig a szorzótábla gyakorlására (10·10-ig). Mindkét sorozat egyúttal a logikus gondolkodást is fejleszti. A gyerekeknek egyik feladvány megoldása során sem kell találgatniuk, próbálgatniuk – így hibázni sem fognak„ (i. m. 11. o.).

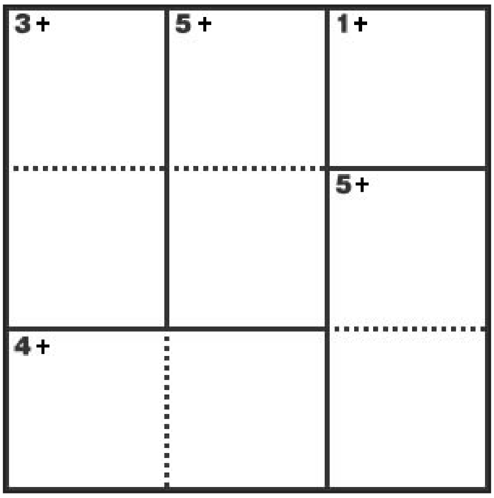
Bevallom, hogy már első ránézésre is nagyon izgalmasnak találtam a könyvben előforduló sudokurejtvényeket. Úgy gondoltam, hogy ezek a rejtvények nemcsak azok számára lehetnek érdekesek, akik számolási nehézségekkel küzdenek, hanem nagyon izgalmas számolási-logikai fejtörők lehetnek bármely alsó tagozatos diák számára is. Mivel nem vagyok szakértője a diszkalkuliának, így természetesen nem tudom megítélni azt, hogy a diszkalkuliás gyermekek esetében a sudokurejtvények hogyan alkalmazhatók, de abban biztos vagyok, hogy ezek a feladványok kiválóan alkalmasak arra, hogy a gyerekekkel játékosan gyakoroljuk az összeadást, kivonást, szorzást, osztást. Éppen ezért az volt a véleményem, hogy az ilyen jellegű fejtörőkkel feltétlenül érdemes megismertetni a tanító szakos hallgatókat is. Itt azonban azzal a problémával szembesültem, hogy bár szerettem volna a hallgatók számára minél több ilyen feladatot megmutatni, a fenti könyvben az ilyen jellegű feladványok száma korlátozott. Nagy örömmel tapasztaltam azonban azt, hogy az interneten nagyon sok hasonló típusú rejtvény található KenKen[1] elnevezéssel. Egy-két KenKen rejtvényt mintaként ki is próbáltam óvodapedagógus és tanító szakos hallgatókkal, továbbá gyakorló tanítókkal is. Bizony több hallgató is akadt, akiknek nehézséget okoztak a fejtörők, bár nem a számolási problémák, hanem a KenKen rejtvényekre jellemző logikai tulajdonságok miatt. Végül azonban több-kevesebb idő alatt mindenkinek sikerült megoldani a feladványokat. Ami számomra érdekes volt, hogy több hallgató is könnyebben oldotta meg a csak összeadást tartalmazó KenKen feladatot, mint a csak szorzást tartalmazót. Azt gondoltam, hogy éppen fordított lesz a helyzet, hiszen az általunk kipróbált szorzásos KenKennél jóval kevesebb volt a lehetőségek száma. A gyakorló tanítóknak az volt a véleménye a rejtvények kipróbálása után, hogy 2. osztályos gyerekek számára már fel lehet adni a feladványokat (természetesen azt követően, hogy előzőleg a sudoku szabályait megismerték és konkrét fejtörőkön keresztül begyakorolták).

A KenKen (vagy CalcuDoku[2]) játék rövid bemutatása.

A legegyszerűbb változata az a játéknak, amikor a táblázatban csak egy művelet szerepel (az itt bemutatott változatban az összeadás, ezt jelzik a számok melletti kis összeadásjelek). Ebben a feladványban egy olyan négyzet szerepel, amelynek 3 sora és 3 oszlopa van, ez azt jelenti, hogy a négyzet minden sorában és minden oszlopában az 1, 2, és 3 számoknak kell szerepelnie úgy, hogy mindegyik szám mindegyik sorban és oszlopban csak egyszer szerepelhet. További feltétel ennél a rejtvénynél az, hogy a vastagabb vonallal megrajzolt téglalapba tartozó számok összege megegyezik a téglalap bal felső sarkába írt számmal.

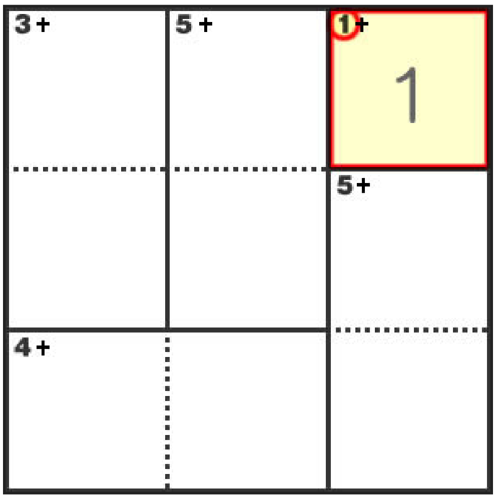
Nézzük tehát a feladványt!

[1] http://www.kenken.com/
[2] http://www.conceptispuzzles.com/index.aspx



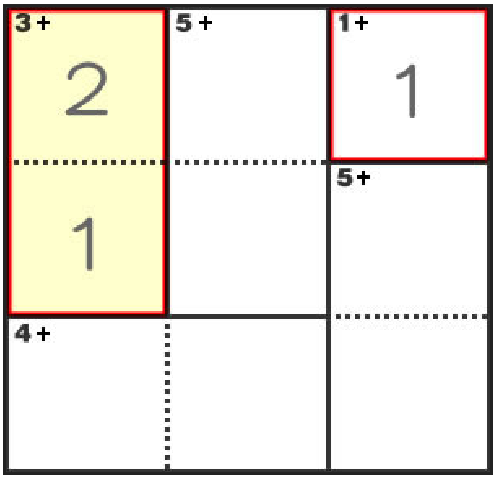
1. ábra

A fenti magyarázat szerint azonnal látható, hogy a jobb felső sarokban levő négyzetbe az 1-es számot kell írni.



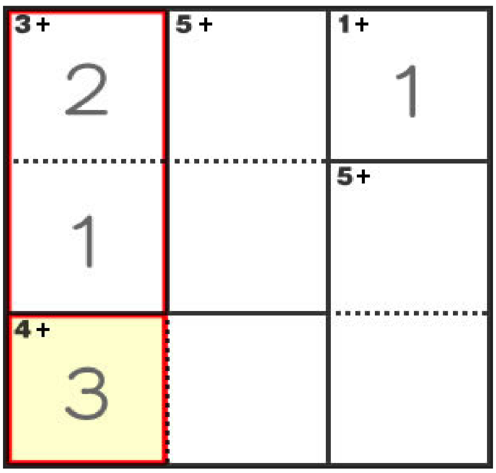
2. ábra

Az 1. oszlop 1. téglalapjában levő számok összegének 3-mal kell megegyeznie (ez a rendelkezésre álló számokkal csak 1+2 vagy 2+1 módon lehetséges), s mivel az 1. sorban már van 1-es számjegy, így azonnal látható, hogy a számokat az alábbi módon kell beírnunk.



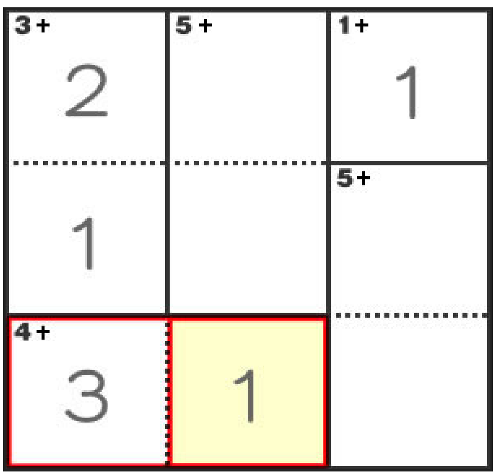
3. ábra

Innen már azonnal adódik, hogy az 1. oszlop utolsó helyére csak a 3-as szám kerülhet (természetesen itt lehetne tovább folytatni a megoldást az 1. sor kitöltésével is).



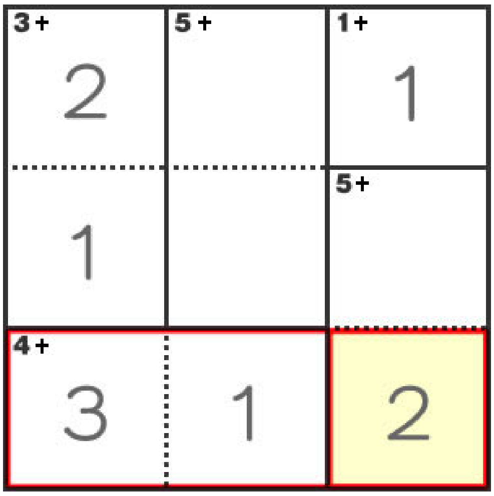
4. ábra

Mivel a 3. sor 1. téglalapjában levő számok összegének 4-gyel kell megegyeznie, így azonnal látható, hogy a 3. sor 2. helyére 1-et kell írnunk.



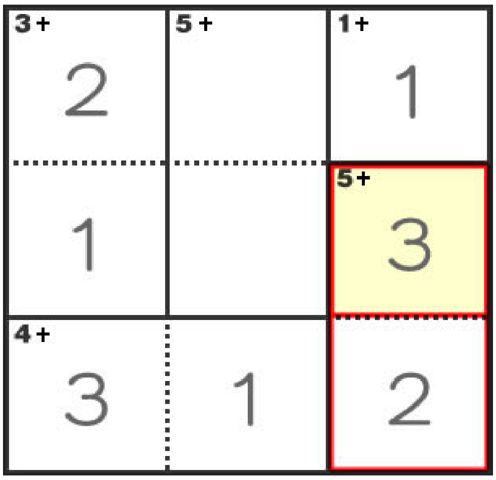
5. ábra

Most már azonnal kapjuk, hogy a 3. sor utolsó helyére 2-t kell írnunk.



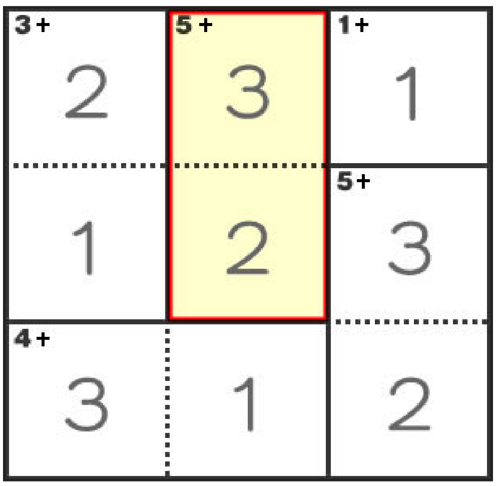
6. ábra

Így nyilván a 3. oszlop második négyzetébe a 3-as szám kerül.



7. ábra

Amiből azonnal következik, hogy a kitöltött táblázat az alábbi lesz.

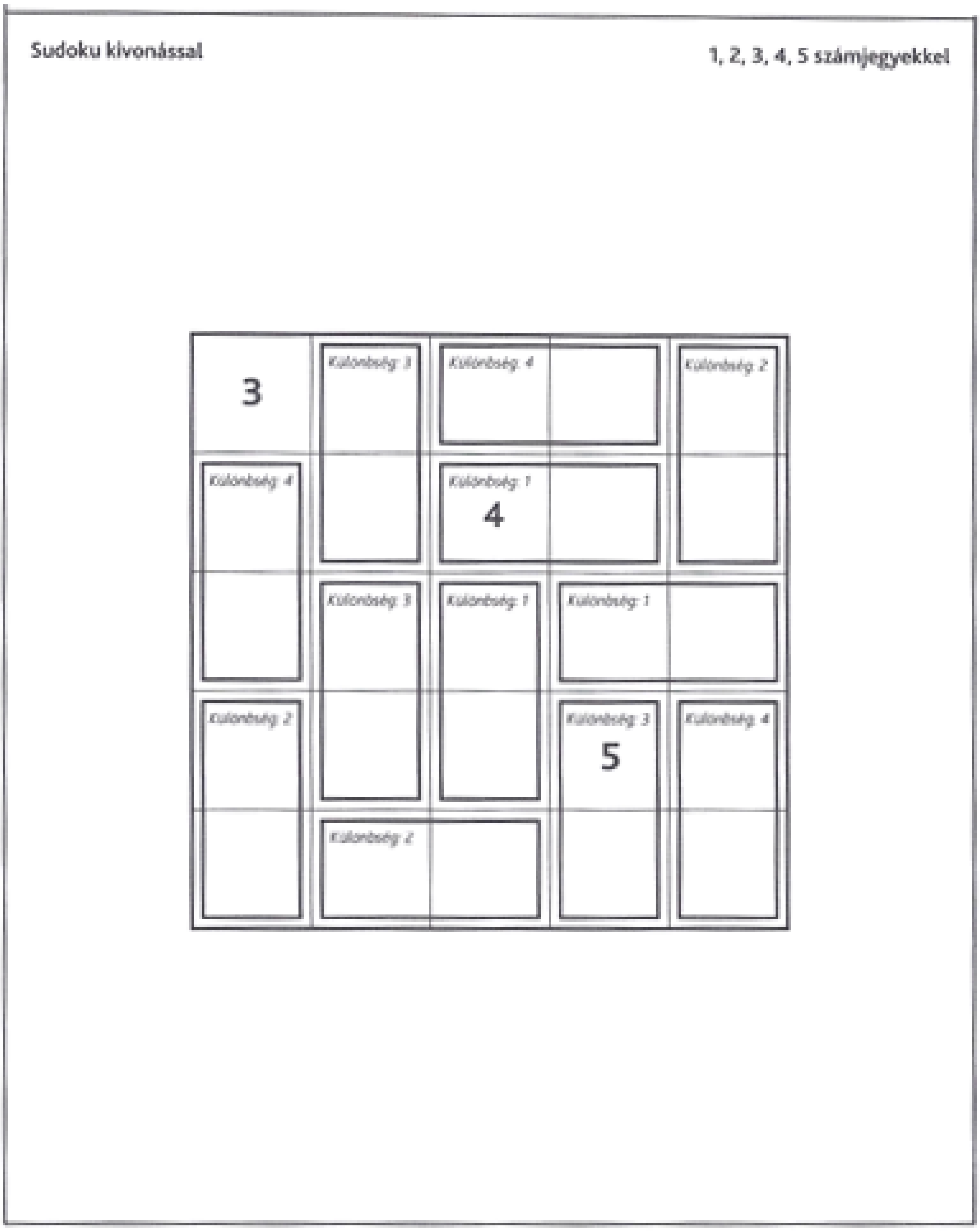


8. ábra

Sudoku kivonással

Az alábbi (csak kivonást tartalmazó) rejtvény *Ronit Bird* Száz játék és fejtörő a számolási nehézségek legyőzésére (2012) című könyvéből származik. A szabályok az előző feladványhoz hasonlóan:

„Útmutató a játékosnak: Az alábbi sudoku fejtörőt úgy kell kitöltened, hogy az 1 és 5 közötti számok mindegyike pontosan egyszer szerepeljen minden sorban és minden oszlopban. A vastagabb vonallal megrajzolt téglalapokban szereplő két szám különbsége egyezzen meg a bal felső sarokba írt értékkel" (i. m. 107. o.).

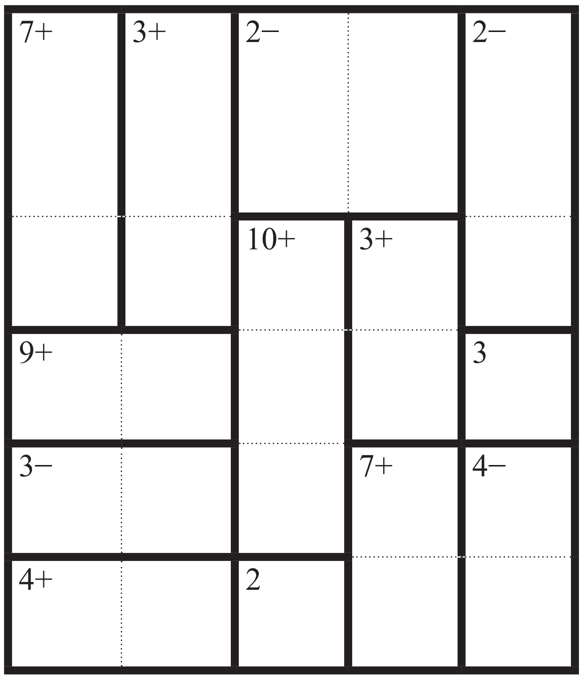


9. ábra

Az interneten nem találtam olyan KenKen (vagy ehhez hasonló elven működő) rejtvényt, amely egyetlen műveletként csak kivonást tartalmazott volna. Az ilyen rejtvényekből néhányat, Ronit Bird könyvében találhatunk (a legegyszerűbb változat található meg a 9. ábrán).

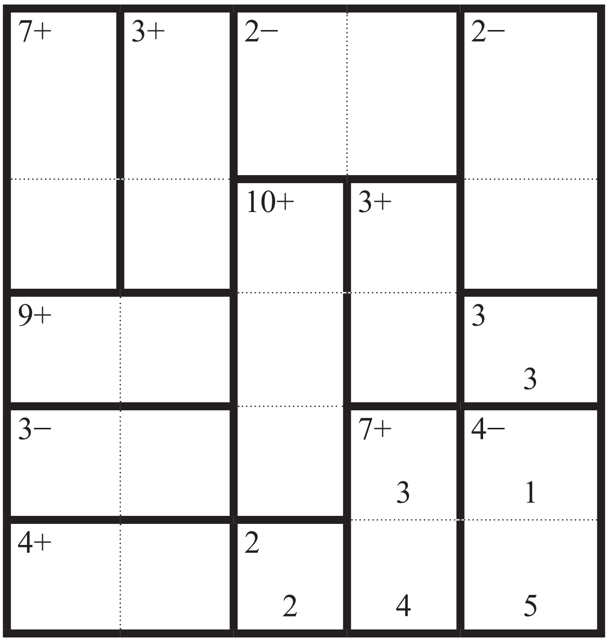
KenKen összeadással és kivonással

Az alábbi rejtvényben már két művelet (összeadás és kivonás) szerepel. Mivel ebben a feladványban egy olyan négyzet látható, amelynek 5 sora és 5 oszlopa van, ez azt jelenti, hogy a négyzet minden sorában és minden oszlopában az 1, 2, 3, 4 és 5 számoknak kell szerepelnie úgy, hogy mindegyik szám mindegyik sorban és oszlopban csak egyszer szerepelhet. Továbbá a vastagabb vonallal megrajzolt téglalapba tartozó számok összege (ahol + jel látható), illetve különbsége (ahol – jel látható) megegyezik a téglalap bal felső sarkába írt számmal.



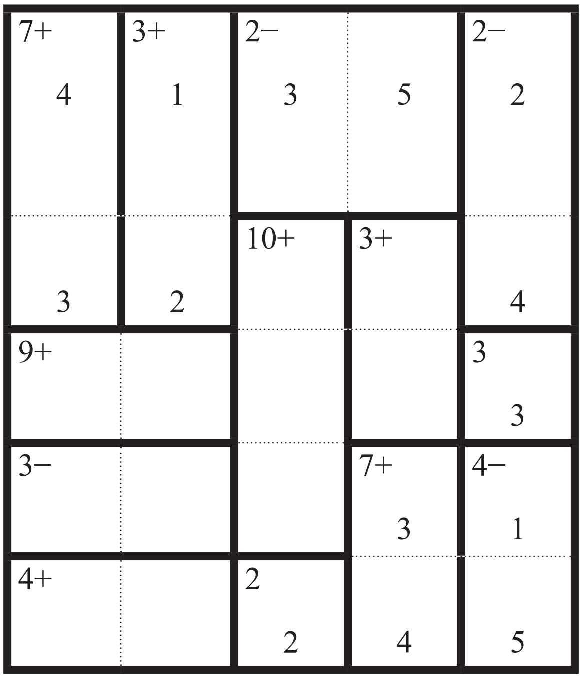
10. ábra

A KenKen feladványt például az alábbi módon tölthetjük ki. Nyilván azonnal beírhatjuk a 3-ast a 3. sor utolsó helyére, a 2-est pedig a 3. oszlop utolsó helyére. Mivel az 5. oszlop utolsó téglalapjában a különbség 4, így ebbe a téglalapba csak az 1, 5 számok kerülhetnek. Azonban vegyük észre, hogy az 5. sor első téglalapjában az összeg csak úgy lehet 4, ha az 1, 3 számok kerülnek valamilyen sorrendben ebbe a téglalapba, így viszont már adódik az 5. oszlop utolsó téglalapjába írt számok sorrendje (felül 1, alul 5). Ebből már látható, hogy a 4. oszlop utolsó téglalapjába nem kerülhet 2, 5 a kikötések miatt, továbbá mivel 3-at nem írhatunk az utolsó sorba, így a lehetséges kitöltési sorrend csak 3, 4 lehet.



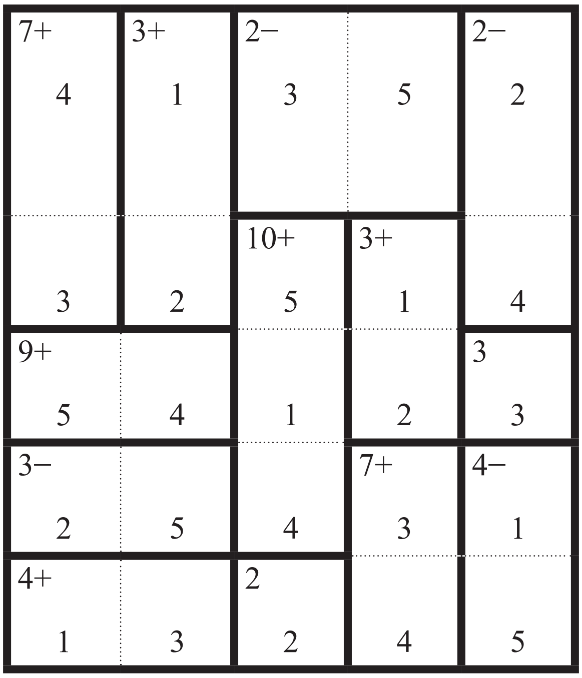
11. ábra

Folytassuk tovább a feladvány kitöltését! Mivel az utolsó oszlopban már csak a 2, 4 számok maradtak, így az 1. sor 3. téglalapjába csak a 3, 5 számok kerülhetnek, ebben a sorrendben. (Az 1. sor 3. téglalapjába a 3, 1 számok nem kerülhetnek az 1. oszlop 1. téglalapja miatt.) Innen már kapjuk, hogy a 2. oszlop 1. téglalapjába 1, 2 kerül (ebben a sorrendben, szintén az 1. oszlop 1. téglalapja miatt). Ebből már adódik az 5. oszlop 1. téglalapjának (2, 4) és az 1. oszlop 1. téglalapjának kitöltése is (4, 3).



12. ábra

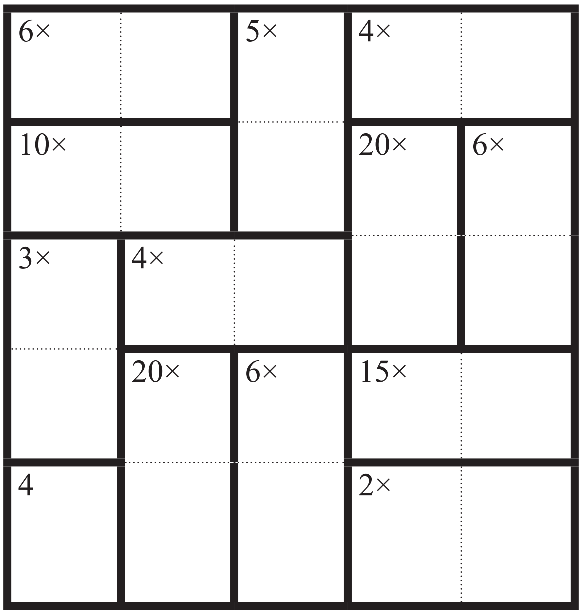
Nyilván a 3. sor 1. téglalapjába csak 5, 4 kerülhet (ebben a sorrendben), és a 4. oszlop 2. téglalapjába csak 1, 2 kerülhet (ebben a sorrendben). Innen már a 3. oszlop hiányzó helyei azonnal kitölthetők (5, 1, 4), továbbá az is azonnal látható, hogy az utolsó sor 1. téglalapjába az 1, 3 számok kerülnek, a hiányzó két hely innen pedig már azonnal adódik.



13. ábra

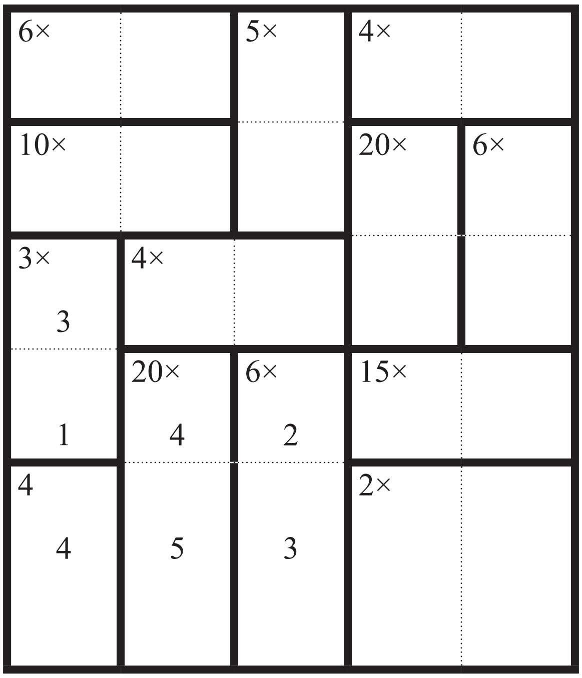
CalcuDoku szorzással

Az alábbi rejtvényben ismét egy művelet (szorzás) szerepel. Mivel ebben a feladványban is egy olyan négyzet látható, amelynek 5 sora és 5 oszlopa van, ez azt jelenti, hogy a négyzet minden sorában és minden oszlopában az 1, 2, 3, 4 és 5 számoknak kell szerepelnie úgy, hogy mindegyik szám mindegyik sorban és oszlopban csak egyszer szerepelhet. Továbbá a vastagabb vonallal megrajzolt téglalapba tartozó számok szorzata egyezik meg a téglalap bal felső sarkába írt számmal.



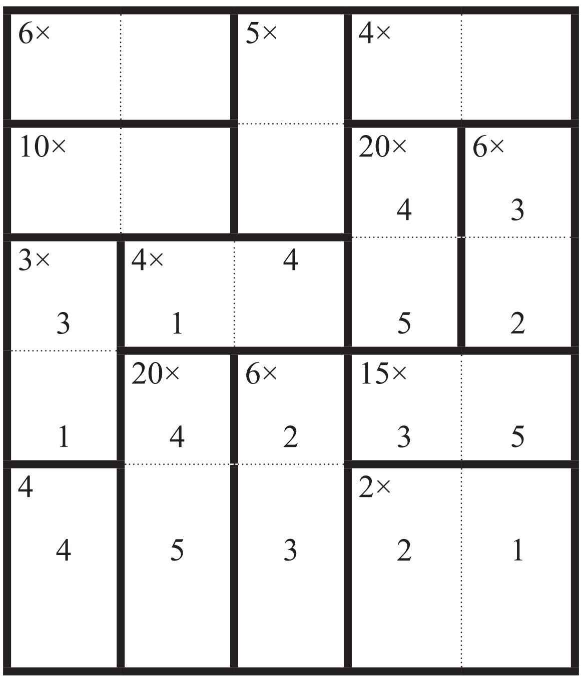
14. ábra

Először a bal alsó négyzetbe írjuk be a 4-et, majd a 2. oszlop utolsó téglalapjába írjuk be a 4, 5 számokat (ebben a sorrendben). Mivel az 5. sor utolsó téglalapjába az 1, 2 számoknak kell kerülniük, így a 3. oszlop utolsó téglalapjába a 2, 3 számok kerülnek (ebben a sorrendben). Ebből azonnal adódik, hogy az 1. oszlop 3. téglalapjába a 3, 1 számok kerülnek (ebben a sorrendben).



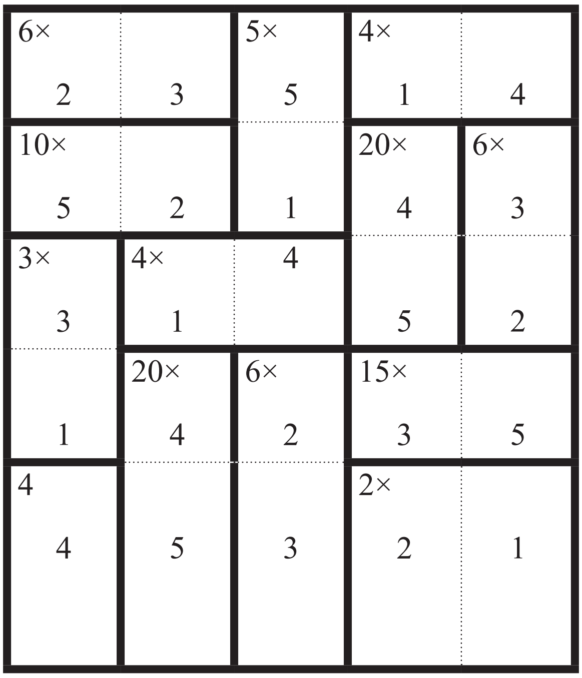
15. ábra

Azonnal látható, hogy a 3. sor 2. téglalapjába az 1, 4 számok kerülnek (ebben a sorrendben), és a 4. oszlop 2. téglalapjába a 4, 5 számok írhatók (ebben a sorrendben). Így viszont azonnal adódik, hogy az 5. oszlop 2. téglalapjába a 3, 2 számok, a 4. sor utolsó téglalapjába a 3, 5 számok, míg az 5. sor utolsó téglalapjába a 2, 1 számok kerülhetnek (ebben a sorrendben).



16. ábra

Innen pedig már azonnal adódik a feladvány befejezése: Az 1. sor 1. téglalapjába a 2 és 3 számokat kell beírni, a 3. téglalapba pedig az 1 és 4 számokat (ebben a sorrendben). Nyilván az 5 és 2 számokat kell beírnunk a 2. sor első téglalapjába, és az 5 és az 1 számokat a 3. oszlop első téglalapjába (ebben a sorrendben).



17. ábra

Összegezés

Természetesen az általam bemutatott fejtörőkkel csak ízelítőt tudtam mutatni az ilyen típusú feladványokból. Ronit Bird könyvében számos pótlásos és kivonásos, illetve szorzásos és osztásos sudoku rejtvényt találhatunk. A könyvben egy-egy rejtvényen belül mindig csak egy művelet fordul elő, viszont itt több olyan feladvány is található, amelyik nem négyzet, hanem téglalap alakú (így egy kicsit megváltozik a beírás szabálya), továbbá számos fejtörőben nem egytől indulnak a számok, hanem például 2-től vagy 3-tól (természetesen ekkor a szerző pontosan megadja a beírandó számokat). Az interneten található KenKen (vagy CalcuDoku) játékokban pedig beállítható a kívánt négyzet mérete (akár 9×9-es is lehet), az alkalmazandó művelet (összeadás, összeadás-kivonás, szorzás, szorzás-osztás, összeadás-kivonás-szorzás-osztás) és a feladvány nehézsége, így akár több száz feladványból válogathat az érdeklődő.

Irodalom

Ronit Bird (2012) *Száz játék és fejtörő a számolási nehézségek legyőzésére.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

http://www.ronitbird.com/ (2014. 04. 10.)

http://www.kenken.com/ (2014. 04. 10.)

http://www.conceptispuzzles.com/index.aspx (2014. 04. 10.)

ELTE TANÍTÓ- ÉS ÓVÓKÉPZŐ KAR 1869 EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM