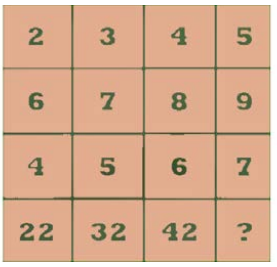
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

16. szám 2020. június



2020. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematika a járványterjedés modellezésében

Mi a számsor következő tagja: 11, 8, 15, 12, 18, 28, 36, 20, 39? Bizonyára sokan emlékszünk matematikaóráinkon hasonló kérdésekre. Az iskolában a számsorozatokat a tanárunk állította össze oktatási céllal, ezért soha nem gondoltuk, hogy gyakorlati haszna lehet ilyen sorozatok szabályán gondolkozni. A fenti sorozat a jelenlegi járvány hazai fertőzötteinek számát tartalmazza az első néhány napon. Így mindjárt komolyabb tartalmat nyer a szabályok, összefüggések felismerésének készsége. *Simon Péter* bevezetője következik a járványterjedés matematikai modellezésébe. Tovább...

2020. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Online Diákolimpia a lányoknak

2020-ban a 9. Európai Matematikai Lány Diákolimpiát (EGMO) a hollandiai Egmond aan Zee-ben rendezték volna, de sajnos a kialakult helyzetben a versenyt csak az online térben sikerült lebonyolítani. A magyarok így is kiváló eredményt értek el, a nemzetek rangsorában a tizedik helyet szerezték meg a hivatalos európai listán. A csapat tagjai: *Hámori Janka*, *Kocsis Anett*, *Nguyen Bich Diep* és *Velich Nóra*, a csapat vezetői: *Fekete Panna Tímea* és *Kiss Melinda Flóra* voltak. Tovább...

2020. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Aczél János élete és munkássága

95. évét betöltve távozott közülünk *Aczél János*, aki 1947-ben doktorált matematikai analízisből Fejér Lipót és Riesz Frigyes vezetésével. Egyike volt a Fejér professzor által "big five"-nak elnevezett öt tanítványnak, akik hosszú életük során mind nagy matematikusokká váltak (rajta kívül Császár Ákos, Gaál István, Horváth János és Fuchs László). Aczél János életéről és függvényegyenletek elméletében elért tudományos eredményeiről szerzőtársa, *Páles Zsolt*, a Debreceni Egyetem tanszékvezető egyetemi tanára írt. Tovább...

2020. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

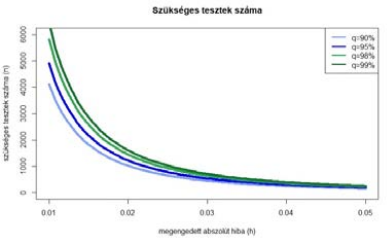
Kitüntetett matematikusok – 2020

Több kiváló matematikusunk sikeréhez gratulálunk: Gödel-díjat nyert *Tardos Gábor*; Széchenyi-díjat *Pálfy Péter Pál* és *Szőnyi Tamás*, Akadémiai Díjat *Buczolich Zoltán*; QP Akadémiai Kiválóság díjat *Röst Gergely*; Gyires Béla-díjat *Csomós Petra;* az Európai Kutatási Tanács (ERC) Advanced Grant pályázatán nyert *Pach János*. Tovább...

2020. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Úton-módon 3.

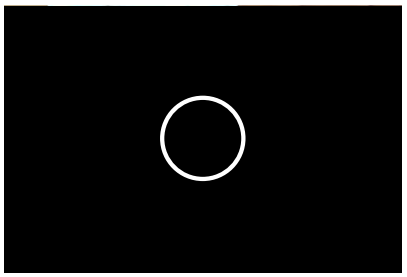
A júniusi számban egy olyan algebra feladatot járunk körbe, amely sokféle témakör között teremt kapcsolatot. Bár leggyakrabban a teljes indukció tanítása során találkozunk vele, ismert algebrai átalakításokat felhasználó megoldása is, megközelíthetjük kombinatorikai eszközökkel és rekurzióval is. Cikkemben ezekre a módszerekre több változatot is be fogok mutatni – írja a sorozat szerzője, *Szoldatics József.* A feladat többek között a KöMaL 2020. márciusi számában is megjelent a „Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire” cikkben. Tovább...



2020. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

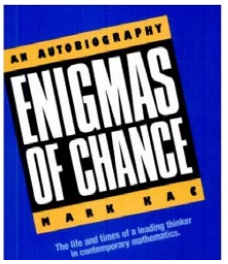
Mennyit teszteljünk? 1. rész

Napjainkban sok szó esik arról, hogy hány tesztet kellene elvégezni ahhoz, hogy kellő pontossággal ismerni lehessen a fertőzöttek vagy fertőzésen átesettek számát egy bizonyos betegség esetén. Ez számos matematikai kérdést felvet. *Backhausz Ágnes* és *Simon Péter* írása arról szól, hogy ideális feltételek mellett a fertőzésen átesettek országos arányát hány teszt elvégzésével lehet biztonságosan megállapítani. Tovább...



2020. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

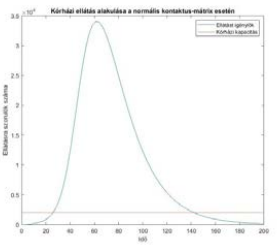
Matematikus portrék: Rásonyi Miklós



2020. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Gondolatok Mark Kac önéletrajzáról

Ellentétben számos excentrikus



2020. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

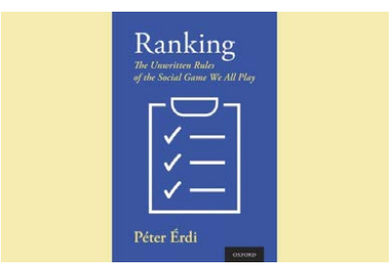
Nemlineáris dinamikai modellek a biológiában: a

A Rényi Alfréd Matematikai Intézetben készült video Rásonyi Miklós tudományos tanácsadót, a Valószínűségszámítás és statisztika osztály vezetőjét mutatja be. Több éves külföldi oktatói, kutatói munkája után itthon az Intézet Pénzügyi matematika kutatócsoportjában vesz részt. Az interjú végére az is kiderül, mi is lehetett volna belőle, ha nem matematikusnak áll.

matematikus önéletrajzával, Mark Kac: Enigmas of Chances (A véletlen rejtélyei) című könyve biztos ízléssel és finom humorral ötvözi a különböző összetevőket: matematikát (beleértve a matematikai fizikát), történelmet, családot és a kollégákat. Simonovits András írása nyomán kicsit bepillanthatunk a 20. század matematikatörténetébe is. Tovább...

kontaktusmátrixos SIR-modell

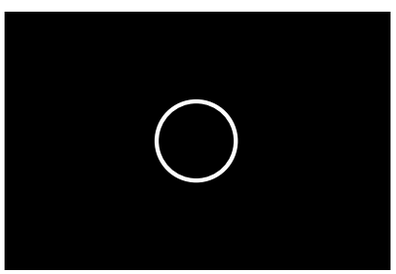
A *Nemlineáris Dinamikai Modellek a Biológiában* minden tavaszi félévben szabadon választható tantárgy a Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információtechnológia Kar bionikus mérnökképzésének BSc hallgatói részére. Közülük *Molnár Zsófia* dolgozatát javasolta közlésre a tantárgy előadója, *Garay Barna*. A téma, egy járvány kontaktusmátrixának korlátozása, meglehetősen aktuális. Tovább...



2020. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Rangsorolás – a társasjáték, amit mindenki játszik

Érdi Péter könyve (német fordítása megjelenőben van, magyar, kínai, koreai és japán fordítása most készül) informatív és szórakoztató. A szerző az összehasonlítással, minősítési besorolással és rangsorolással kapcsolatos gondolatok és történetek kincsestárát gyűjtötte össze a lehető legszélesebb körből: sport, művészetek, tudomány, politika, média és bevásárlás… Miért olyan népszerű és megkerülhetetlen a rangsorolás? Ízelítőt kapunk *Schubert András* recenziójából. Tovább...



2020. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus portrék: Pete Gábor

Pete Gábor már óvodás korában megtapasztalta, milyen örömet okoz az egyszerűsítés, az absztrakció. Ma a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Valószínűségszámítás és statisztika osztályának tudományos főmunkatársa. Több mint tíz éves külföldi kutatásait itthon a Zaj-érzékenység kutatócsoportban folytatja.

2020. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

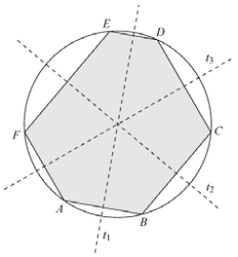
Mi is…a perkoláció?

A perkoláció a statisztikus fizika és a modern valószínűségszámítás egyik legegyszerűbben definiálható, ugyanakkor nagyon mély problémákhoz és általános tanulságokhoz vezető modellje, amiben fázisátmenet történik. A perkolációs modelleknek rendkívül sok változata létezik. Az AMS MathSciNet adatbázisában a „percolation” kifejezés a jelen pillanatban 4273 cikkre illik. Harry Kesten 2006-os Notices of the AMS-beli What is ... percolation? cikke adta a kezdőlökést *Mester Péter* és *Pete Gábor* írásának. Tovább...

2020. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Hopf-fibrálás – A Möbius-szalagtól négydimenziós kitérővel a qubitig

– Egy igazán sokoldalú matematikai jelenséget szeretnék bemutatni: a Hopf-fibrálást. A tárgyalásmód szándékom szerint ismeretterjesztő, matematikai előképzettséget nem igényel. – A Hopf-fibrálás egy topológiai jelenség, a Möbius-szalag és a Klein-kancsó közeli rokona, egy magasabb dimenziós csavarodó nyaláb, amit *Pintér Gergő* látványos képek, videók és animációk segítségével mutat meg az érdeklődőknek. Tovább...



2020. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Hány bőrt lehet lehúzni egy feladatról? – avagy nincs új a Nap alatt?

– Szeretem böngészni a KöMaL-archívumot, és nagyon sok kiváló feladatot találok, amelyeket tanításhoz is tudok használni. Feltűnt, hogy egy-egy már megjelent feladat újra és újra előkerül, esetleg kicsit más köntösben. Már a folyóirat első évtizedében többször előfordult egy nevezetes (nem feltétlenül szabályos) hatszög. Ennek a hatszögnek egyenlőek a szögei, és ebből következően szemközti oldalai párhuzamosak. – Ez a hatszög a kiindulópontja mindazoknak a tanulságos geometriai bizonyítási feladatváltozatoknak, amelyeket *Fried Katalin* összegyűjtött. Tovább...

2020. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Piruett körzővel

Százhárom kosár meggy a raktáron, Meg a tehenek számának négyzete a négyzeten, Összesen kétmillió darab a vidéki piacon. Hány szem meggy van egy kosárban, És mennyi az eladó tehenek száma? Erről a feladványról és egyebekről ír *Tóth János* Korgyemszkíj: Piruett körzővel. Mesés fejtörők nemcsak iskolásoknak c. könyve kapcsán. Tovább...

---

műegyetemi alfa matematika pontgyűjtő verseny

2020. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A tanterem már nem elég!

A fiatalok júniusban sikerélményekkel telve elvégzik a középiskolát, magas

2020. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is...a Wasserstein-tér?

Titkos Tamás írásának elején bemutatja a 2018-ban Fields-éremmel kitüntetett Alessio

2020. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Folytonos dinamikai rendszerek

A feladatgyűjtemény matematikai tartalma szerint pontszámmal felvételt nyernek az áhított felsőoktatási intézménybe, majd szeptember közepén már sokaknak a teljes sikertelenséggel kell birkózniuk… *Lángné Lázi Márta* és kollégái azon dolgoznak, hogy ez ne így legyen. A BME Matematika Intézete idén is megrendezte középiskolásoknak szóló hatfordulós online matematikaversenyét, amelyre induláskor közel 600 versenyző jelentkezett be. Most kivételesen a döntőt is online formában kellett megtartani. Tovább...

Figalli egyik optimális transzportot használó eredményét. A cikk végén pedig kiderül, hogy a transzportelméletnek rengeteg alkalmazása van nem csak az elméleti matematikában, hanem az alkalmazott tudományokban is. Így például a jel- és képfeldolgozásban, az alakfelismerésben, a szín- és textúramodellezésben, vagy a gépi tanulásban – így keletkezett bevezetőnk színes képe is. Tovább...

gazdag és hasznos, messze túlmegy a szokásos bevezető példatárakon, ezért minden alkalmas esetben fogom ajánlani az érdeklődőknek, diákjaimnak, és nagyon remélem, hogy készül belőle további, javított (inkább: szépített) kiadás. *Nágel Árpád*: Folytonos dinamikai rendszerek című feladatgyűjteményéhez (Typotex, Budapest, 2019.) *Tóth János* tesz alapos kritikai megjegyzéseket. Tovább...

2020. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Huszadik alkalommal írják ki a rangos pályázatot pedagógusoknak

Húsz éve ítélik oda a *Rátz Tanár Úr Életműdíjat* a természettudományokat tanító legkiválóbb pedagógusoknak. *2020. október 5-éig* adható be az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért pályázata. Az idei évben a hagyományos iskolai keretek közötti oktató-nevelő munka hiányát és a pedagógusok erőfeszítéseit a digitális oktatásban a gyerekek és a szülők is megtapasztalhatták, így még inkább felértékelődik a díj fontossága. Tovább...

2020. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Az ELTE és a BME egy-egy oktatója kapta a Gács András-díjat

Bérczi-Kovács Erika, az ELTE, valamint *Szeszlér Dávid*, a BME oktatója kapott idén elismerést a matematika oktatásában nyújtott teljesítményéért. A *Gács András-díjat* a hagyományok szerint az ELTE dísztermében tartott Matematikus hangverseny keretében szokták átadni, de az ünnepélyes eseményre idén a járvány miatt nem kerülhetett sor. Tovább...

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet.

A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*

Szerkesztő
2020. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Kitüntetett matematikusok – 2020

Több kiváló matematikusunk sikeréhez gratulálunk: Gödel-díjat nyert *Tardos Gábor*; Széchenyi-díjat *Pálfy Péter Pál* és *Szőnyi Tamás*, Akadémiai Díjat *Buczolich Zoltán*; QP Akadémiai Kiválóság díjat *Röst Gergely*; Gyires Béla-díjat *Csomós Petra;* az Európai Kutatási Tanács (ERC) Advanced Grant pályázatán nyert *Pach János*. Tovább...

Szerkesztő
2020. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Huszadik alkalommal írják ki a rangos pályázatot pedagógusoknak

Húsz éve ítélik oda a *Rátz Tanár Úr Életműdíjat* a természettudományokat tanító legkiválóbb pedagógusoknak. *2020. október 5-éig* adható be az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért pályázata. Az idei évben a hagyományos iskolai keretek közötti oktató-nevelő munka hiányát és a pedagógusok erőfeszítéseit a digitális oktatásban a gyerekek és a szülők is megtapasztalhatták, így még inkább felértékelődik a díj fontossága. Tovább...

A szerk.
2020. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Az ELTE és a BME egy-egy oktatója kapta a Gács András-díjat

Bérczi-Kovács Erika, az ELTE, valamint *Szeszlér Dávid*, a BME oktatója kapott idén elismerést a matematika oktatásában nyújtott teljesítményéért. A *Gács András-díjat* a hagyományok szerint az ELTE dísztermében tartott Matematikus hangverseny keretében szokták átadni, de az ünnepélyes eseményre idén a járvány miatt nem kerülhetett sor. Tovább...

A szerk.
2020. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Online Diákolimpia a lányoknak

2020-ban a 9. Európai Matematikai Lány Diákolimpiát (EGMO) a hollandiai Egmond aan Zee-ben rendezték volna, de sajnos a kialakult helyzetben a versenyt csak az online térben sikerült lebonyolítani. A magyarok így is kiváló eredményt értek el, a nemzetek rangsorában a tizedik helyet szerezték meg a hivatalos európai listán. A csapat tagjai: *Hámori Janka*, *Kocsis Anett*, *Nguyen Bich Diep* és *Velich Nóra*, a csapat vezetői: *Fekete Panna Tímea* és *Kiss Melinda Flóra* voltak. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2020. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Kitüntetett matematikusok – 2020

Gödel-díj 2020

Robin A. Moser és **Tardos Gábor** „A constructive proof of the general Lovász Local Lemma” című, 2010-ben publikált közös cikkükért kapták meg a rangos díjat, amit a legjelentősebb európai elméleti számítástudományi szervezet, a *European Association for Theoretical Computer Science* és az *ACM Special Interest Group on Algorithms and Computation Theory* együttesen ítél oda. Érdemes megemlíteni, hogy korábbi magyar díjazott volt Babai László (1993), Lovász László (2001), Szegedy Mário (2001, 2005) és Tardos Éva (2012).

Tardos Gábor 1988-ban doktorált az ELTE-n, Babai László és Pálfy Péter Pál témavezetésével. 1991 óta a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet munkatársa. Posztdoktori ösztöndíjakat kapott a Chicagoi Egyetemen, a Rutgers Egyetemen, a Torontói Egyetemen és Princetonban az Institute for Advanced Study intézetben. 2005 és 2013 között Kanadában a Simon Fraser Egyetem Szamitógéptudományi Tanszékén volt vezetőkutató, azóta itthon dolgozik a Rényi Intézetben. 2014 óta a Central European Univeristy (CEU) professzora. 2019-ben az MTA tagjává választották.

Széchenyi-díj 2020

Széchenyi-díjat adományoztak Magyarország számára kivételesen értékes tudományos pályája során az algebra, ezen belül a csoportelmélet és az univerzális algebra területén elért nagy hatású kutatási eredményei, valamint a magyar tudomány nemzetközi megbecsültségét erősítő, kiemelkedően eredményes intézményvezetői és tudományszervezői munkája elismeréseként **Pálfy Péter Pál** matematikusnak, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagjának, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet kutatóprofesszorának, az ELTE TTK Matematikai Intézet egyetemi tanárának. Pálfy Péter Pál Debrecenben született 1955-ben, az ELTE-n szerzett matematikus diplomát 1978-ban. Két évvel később védte meg egyetemi doktori disszertációját, ezután az MTA Matematikai Kutatóintézet (ma: MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet), valamint az ELTE algebra és számelmélet tanszéke munkatársa, később igazgatója lett. Emellett 1978 és 1990 között az ELTE algebra és számelmélet tanszékének óraadója volt, 1990-ben kapta meg egyetemi docensi kinevezését, 1997-ben lett egyetemi tanár. 2006-tól részfoglalkozású egyetemi tanárként dolgozik. 1983-ban a Vanderbilt Egyetem, 1986-ban a Hawaii Egyetem, valamint 1991–1992-ben a Darmstadti Műszaki Főiskola vendégprofesszora volt, 1998 és 2001 között Széchenyi professzori ösztöndíjjal kutatott. 2004-ben megválasztották az akadémia levelező, 2010-ben pedig rendes tagjává.

A véges geometriák témakörében folytatott, nemzetközileg is elismert, jelentős hatású kutatói, illetve példaértékű oktatói munkája, valamint széles körű szakmai közéleti szerepvállalása elismeréseként Széchenyi-díjjal tüntetik ki **Szőnyi Tamás** matematikust, a Magyar Tudományos Akadémia doktorát, az ELTE TTK Matematikai Intézete Számítógéptudományi Tanszékének egyetemi tanárát is. Szőnyi Tamás 1957-ben született Budapesten, 1981-ben végzett az ELTE-n matematikusként, 1991-ben az Akadémia a matematika- és számítástudományok kandidátusává, 2001-ben ugyanezen szakterület akadémiai doktorává avatta. Vendégkutatóként dolgozott a Sussex-i Egyetemen, majd Eindhovenben, Gentben, később pedig a Yale-en is. A Bolyai János Matematikai Társulat, az American Mathematical Society és a Magyar Kombinatorikai Iskola tagja és számos szakmai folyóirat szerkesztője. Munkáját SZTAKI Intézeti-díjjal (1988), Erdős Pál-díjjal (1997), a Magyar Érdemrend tisztikeresztjével (2012) és Szele Tibor-emlékéremmel (2013) ismerték el.

Akadémiai Díj 2020

A hagyományok szerint idén is május 4-én, a Magyar Tudományos Akadémia közgyűlésének első napján adták volna át az akadémiai díjakat és elismeréseket, erre azonban a járványhelyzet miatt nem kerülhetett sor. Az MTA Elnökségének határozata szerint azonban a díjazottak nevét az Akadémia honlapján közzétette. A díjakat a kitüntetettek a következő személyes részvétel mellett zajló közgyűlésen veszik majd át.

A Magyar Tudományos Akadémia Elnöksége kiemelkedő tudományos munkássága elismeréseként Akadémiai Díjban részesítette **Buczolich Zoltán**t, az MTA doktorát, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar Matematikai Intézet Analízis Tanszékének egyetemi tanárát a valós analízis, ergodelmélet és dinamikus rendszerek terén elért, nemzetközi szinten is kiemelkedő eredményei, hosszú évek óta nyitott problémák megoldása és kiváló oktatási tevékenysége elismeréseként.

QP Akadémiai Kiválóság díj 2020

A Qualitative Production Gépipari és Kereskedelmi Zrt., valamint a Magyar Tudományos Akadémia 2020-ban QP Akadémiai Kiválóság díjat adományozott **Röst Gergely**nek, a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kar Bolyai Intézet docensének kiemelkedő matematikai eredményeiért, a szegedi matematikai epidemiológiai iskola megteremtéséért, a járványok terjedésének modellezésére és a védekezési stratégiákra kidolgozott, innovatív matematikai módszereiért, valamint a magyarországi alkalmazott és ipari matematika fejlesztéséért.

Gyires Béla-díj 2020

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Tudományok Osztálya 2003-ban − Dr. Gyires Klára és Dr. Gyires Tibor (Gyires Béla gyermekei) kezdeményezésére – Gyires Béla, a magyar matematika kiemelkedő alakja emlékének méltó megörökítésére Gyires Béla-díj alapítását határozta el. A díj a matematikában, elsősorban a Gyires Béla által művelt tudományágak és annak alkalmazásai területén elért kimagasló tudományos eredményekért ítélhető oda 40 évesnél fiatalabb magyar kutató részére.

2020-ban a díjat **Csomós Petra** kapta meg. Tudományos pályájának részletes méltatását az Alkalmazott Matematikai Lapok legfrisebb számában, a 2020. 37/2 számban olvashatják. Csomós Petra 2003-ban kapta megy meteorológus és csillagász diplomáját kitűnő minősítéssel az ELTE TTK-n, ahol elnyerte a Kar Kiváló Hallgatója címet. 2008-ban itt szerzett PhD fokozatot alkalmazott matematikából. Németországi posztdoktori pozíciói után hazatérése, 2013 óta az MTA-ELTE Numerikus Analízis és Nagy Hálózatok Kutatócsoportjában végez kiemelkedően aktív kutatómunkát. 2015-ben nevezték ki az ELTE Matematikai Intézetének adjunktusává.

Európai Kutatási Tanács (ERC) Advanced Grant pályázata 2020

Az ERC 450 millió euro keretösszegből 185 pályázatot támogat idén. **Pach János** a Rényi Alfréd Matematikai Intézet immár tizedik kutatója, akit az ERC támogatásra méltónak talál. „From Geometry to Combinatorics and Back: Escaping the Curse of Dimensionality” című pályázata 2020. szeptember 1.-én indul. A nyertesek teljes listája illetve a természettudományokban díjazottaké az ERC oldaláról érhető el.

Pach János átütő eredményeket ért el a kombinatorikus és algoritmikus geometria számos területén, az epszilon-hálóktól a konvexitáson keresztül a geometriai Ramsey-elméletig. A topológiai (lerajzolt) gráfok elméletének egyik megalapozója. Geometriai metszetstrukturákra, szemialgebrai gráfokra és hipergráfokra vonatkozó vizsgálatai eredményeként körvonalozódni látszik egy új tudományág, az „alacsony dimenziós kombinatorika”.

ERC pályázatának egyik alapgondolata, hogy az extremális kombinatorika klasszikus feladatainak egy része kezelhetővé válik, ha olyan halmazrendszerek vizsgálatára szorítkozunk, melyek geometriai vagy algebrai módszerekkel egyszerűen definiálhatók, például beágyazhatóok egy alacsony dimenziós euklideszi térbe, Vapnik-Chervonenkis dimenziójuk korlátos vagy leirhatók korlátos fokú polinomok segítségével. Ez a megközelítés vezetett több fontos speciális esetben az Erdős-Hajnal sejtés és Schur problémájának megoldásához. Hasonló módszerekkel sikerült hatékony algoritmusokat kidolgozni sűrű gráfok kevés metszéssel való lerajzolására is.

Híreink forrásai az mta.hu, az elte.hu, a renyi.hu honlapjain megjelentek és az AML szerkesztősége voltak.

https://mta.hu/tudomany_hirei/a-csabito-korlatos-dimenziok-pach-janos-erc-advanced-grant-nyertes-110660?fbclid=IwAR2Bdni6I8sApo3uN6zGJMlSdKW-iQady_Qwux-6iwInV04oljZGAoNgoJ8

https://www.elte.hu/content/az-elte-uj-szechenyi-dijasai.t.20672

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2020. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Huszadik alkalommal írják ki a rangos pályázatot pedagógusoknak

Huszadik alkalommal indul a Rátz Tanár Úr Életműdíj pályázati időszaka – az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért idén is kiadta a pedagógus Kossuth-díjként emlegetett pályázatot. Az Életműdíjat és a vele járó 1,5 millió forint anyagi elismerést a közoktatás 5–12. évfolyamaiban biológiát, fizikát, matematikát vagy kémiát tanító pedagógusok közül két-két tanár nyerheti el. A pályázati időszak 2020. október 5-én ér véget.

Az Érintő 2016 óta minden évben beszámol a díjazottakról és a díjátadókról.

A tudományos oktatást rendszeresen és jelentősen támogató három cég – az Ericsson Magyarország, a Graphisoft SE és a Richter Gedeon Nyrt. pontosan 20 évvel ezelőtt alapította a Rátz Tanár Úr Életműdíjat és a mögötte álló Alapítványt a Magyar Természettudományos Oktatásért. Egyedülálló módon immár két évtizede közös céljuk, hogy tisztelettel adózzanak azon pedagógusok előtt, akik kiemelkedő eredménnyel képezik a jövő tehetségeit, kiveszik részüket a hátrányos helyzetű diákok segítéséből, valamint hozzájárulnak az új pedagógusgeneráció szakmai pályájának elindításához is.

A díj 20 éves jubileumának alkalmából elindított Facebook oldalon kiemelt figyelem összpontosul a pedagógus szakma képviselőinek bemutatására az Alapítvány mottóját szem előtt tartva: „…hogy ne csak a világhírű tudósok, hanem a tanáraik nevét is ismerjük…”

Az ez évi pályázati anyagok benyújtásának határideje 2020. október 5. éjfél. A pályázati felhívás, valamint a benyújtás részletei az alábbi linken https://ratztanarurdij.hu/palyazat-2020 találhatók. Az Alapítvány várja az aktív és nyugdíjas éveikben járó pedagógusokról szóló pályázatokat egyaránt. További információ: info@ratztanarurdij.hu

---

Rátz László pályázat

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Erintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A szerk. 2020. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Az ELTE és a BME egy-egy oktatója kapta a Gács András-díjat

A szakmai kuratórium harmadik alkalommal hirdette ki a Gács András-díj nyerteseit. A fiatalon elhunyt matematikus emlékére a díjat családja alapította azzal a céllal, hogy az egyetemi matematikaoktatásban kiemelkedő, sok diákot motiváló fiatal matematikus oktatókat jutalmazzák. 2018-ban az elismerést Röst Gergely, a szegedi SZTE TTIK Bolyai Intézet Matematikai Tanszékcsoport Alkalmazott és Numerikus Matematika Tanszék adjunktusa, valamint Zábrádi Gergely, az ELTE TTK Matematikai Intézet, Algebra és Számelmélet tanszékének adjunktusa vehette át. Tavaly Elekes Márton, az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet kutatója, az ELTE Matematika Doktori Iskola oktatója kapta az elismerést.

A kuratórium idén két oktatót is méltónak ítélt a díjra: Szeszlér Dávidot, a BME Villamosmérnöki és Informatikai Kar Számítástechnikai és Információelméleti Tanszékének docensét, valamint Bérczi-Kovács Erikát, az ELTE TTK Operációkutatási Tanszékének adjunktusát.

Bérczi-Kovács Erika 2007-ben szerzett diplomát az ELTE TTK matematikus szakán, PhD fokozatát 2015-ben nyerte el. Érdeklődésének és fő kutatási területének középpontjában a kombinatorikus optimalizálás gyakorlati problémák által motivált alkalmazásai állnak. Mindeddig több mint húsz dolgozata jelent meg. Az egyetemen folyó oktatásba 2008-tól kapcsolódott be. Az évek során alapjaiban járult hozzá az operációkutatási gyakorlatok anyagának egységes kiépítéséhez. Az elmúlt öt évben húszan készítették az ő vezetése mellett szakdolgozatukat, ami kiemelkedően magas szám és pontosan mutatja, hogy mennyire sikeresen tudja motiválni a hallgatókat. Oktatói munkájának specifikus vonása, hogy szép harmóniába képes állítani az emberek iránti általános´nyitottságát és a mindenre kiterjedő segítőkészségét a hallgatók felé támasztott komoly szakmai elvárásokkal.

A másik díjazott, Szeszlér Dávid 1998-ban kapott kitüntetéses diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karán, doktori fokozatát a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen szerezte 2006-ban, Recski András témavezetésével. A disszertációjában szereplő eredményekért 2006-ban elnyerte a Bolyai János Matematikai Társulat Farkas Gyula emlékdíját. Megkapta a BME Kiváló Oktatója díjat, a BME Villamosmérnöki és Informatikai Karának Kiváló Oktatója díj arany fokozatát pedig három ízben is elnyerte. A magyarországi informatikusképzés egyik kiemelkedően fontos alakja: nem csak előadóként és gyakorlatvezetőként, hanem a kor és a hallgatók igényeinek megfelelő tantervek kidolgozójaként és az azokhoz tartozó kimagasló minőségű jegyzetek szerzőjeként is formálta és formálja a hallgatók matematikai szemléletét. Lenyűgöző előadói stílusa, minden részletre kiterjedő figyelme, jellegzetes humora számtalan hallgatójával szerettette meg a matematikát. Szemlélete, az oktatáshoz és a hallgatókhoz való hozzáállása méltó a díj névadójának szellemiségéhez.

A díj névadójáról, alapításáról és magáról a díjról a http://www.gacsandrasdij.org/ vagy a http://ematlap.hu/index.php/hirek-ujdonsagok-2018-06/741-uj-matematikai-dijat-alapitott-gacs-andras-csaladja oldalakon tudhatnak meg többet az érdeklődők.

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A szerk. 2020. JÚNIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Online Diákolimpia a lányoknak

2020-ban a 9. Európai Matematikai Lány Diákolimpiát (EGMO) a hollandiai Egmond aan Zee-ben rendezték volna, de sajnos a kialakult helyzetben a versenyt csak az online térben sikerült lebonyolítani. Természetesen idén is indult magyar csapat a versenyen, ahogy az összes ezt megelőző nyolc EGMO mindegyikén. A magyarok kiváló eredményt értek el, a nemzetek rangsorában a **tizedik** helyet szerezték meg a hivatalos európai listán. (A versenyen nem csak európai országok vesznek részt, de hivatalosan őket nem számolják bele a rangsorba. Az összes résztvevő országot tekintve a csapat 12. lett.)

A csapat tagjai: ***Hámori Janka*** (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium), ***Kocsis Anett***, ***Nguyen Bich Diep*** és ***Velich Nóra*** (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium).

A versenyen a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiához (IMO) hasonlóan két versenynap van, mindkét nap 3-3 feladatot kell megoldani 4,5 óra alatt. Minden feladat 7 pontot ér.

Janka aranyérmet (26 pont, összesített 14. hely), ***Nóra ezüstérmet*** (20 pont, 31. hely), ***Anett*** (17 pont 45. hely) és ***Diep*** (12 pont, 72. hely) ***bronzérmet*** szerzett.

A részletes eredmények itt találhatók: https://www.egmo.org/egmos/egmo9/scoreboard/

Szeretettel gratulálunk nekik és a felkészítő tanáraiknak!

Az idei EGMO különlegessége, hogy elfogadták Magyarország jelentkezését a 2022-es EGMO szervezésére, így **2022. április 6-12. között Egerben kerül megrendezésre az Európai Matematikai Lány Diákolimpia**.

Az EGMO nemzetközi diákolimpia mindig nagy kihívást jelent, de talán soha nem annyira, mint ebben az évben, tekintettel a koronavírus-járványra. A lányoknak idén nagyfokú bizonytalanságban kellett a versenyre készülniük, hiszen a hivatalos időpont előtt egy hónappal még az sem volt biztos, hogy egyáltalán megrendezésre kerül-e a verseny. Végül 3 héttel a versenynapok előtt az a döntés született, hogy az eredeti időpontban online tartják meg az EGMO-t. A versenyzőknek a nehéz idők ellenére is sikerült a felkészülésre koncentrálniuk, szüleik, barátaik, tanáraik is támogatták őket. A felkészítést a *Morgan Stanley Budapest* és *A Gondolkodás Öröme Alapítvány* támogatta, ezúton is köszönjük a segítségüket!

A verseny maga egészen másképp zajlott, mint a korábbi években. Mindenki a saját országában írta, a csapatvezetők által meghatározott helyen és időben, személyes vagy videó-felügyelet mellett. Emiatt a dolgozatok megírása után nem lettek rögtön publikusak a feladatsorok, hiszen lehetett olyan ország, ahol még nem írták meg a versenyt. A versenyt követően a csapatvezetők és helyetteseik javították a csapatuk dolgozatait a pontozási útmutató alapján, illetve egy erre a célra létrehozott online fórumon tudtunk kérdezni a koordinátoroktól, és itt tudtunk további megoldásokat közzétenni. Számunkra nagy különbséget jelentett, hogy nem volt arra lehetőség, hogy a többi csapatvezetővel beszélgessünk, így nem volt arról sem információnk, hogy a többi ország résztvevőinek hogyan sikerült az olimpia. A feladatsor ezúttal szokatlan volt, két feladat is permutációkról szólt, két másikban pedig rekurzióval adták meg a számsorozatot, és mindössze egy kombinatorika feladat került kitűzésre.

Fekete Panna Tímea csapatvezető

Kiss Melina Flóra csapatvezető-helyettes

Most pedig az olimpikon lányok beszámolója következik:

Az idei EGMO sok szempontból más volt, mint az eddigiek. A verseny Hollandiában lett volna eredetileg, azonban sajnos a járvány miatt kénytelenek voltak a szervezők online lebonyolítani a versenyt. Így nem utazhatott a csapat, amit nagyon sajnáltunk, de a kezdeti csalódottságon és nehézségeken sikerült túllépnünk a csapatvezetőink, Fekete Panna és Kiss Melinda segítségével. A versenyt megelőző tábor helyett online megbeszéléseket tartottunk, ami nagy kihívást jelentett mindnyájunknak, és kicsit a tanáraink helyében érezhettük magunkat.

Az EGMO-t nagyon szerettük volna Budapesten közösen írni, és nem otthon egyedül, mert az előző évekhez hasonlóan szerettük volna megőrizni az EGMO-hangulatot. Ennek érdekében tartottunk sok online megbeszélést, amelyek keretein belül bemutattuk egymásnak a szerencsét hozó talizmánjainkat, a szobánkat, és motiváltuk egymást ebben a nehéz helyzetben. A versenyt magát végül közösen írtuk meg a Budapesti Fazekasban. Lett volna lehetőségünk, hogy online programokon is részt vegyünk, de nem éltünk vele, mert már mindenki nagyon izgult a másnapi verseny miatt. A magyar csapat végül 2 bronz, 1 ezüst és 1 aranyéremmel “tért haza” és az országok listáján 12. (az európaiak listáján 10.) lett. Verseny után pedig néhányan elmentünk a Margitszigetre piknikezni.

Az idei diákolimpia mindenképpen más volt, mint korábban, de a csapatszellem és a pozitív hozzáállás miatt egész jó élmény lett belőle.

Hámori Janka, Kocsis Anett, Nguyen Bich Diep és *Velich Nóra olimpiai csapattagok*

Az Érintő korábbi EGMO híradásai (2019, 2018, 2017):

http://ematlap.hu/index.php/hirek-ujdonsagok-2019-6/880-a-lanyok-a-lanyok-a-lanyok-ermesek

http://ematlap.hu/index.php/hirek-ujdonsagok-2018-06/743-arany-daniel

http://ematlap.hu/index.php/hirek-ujdonsagok-2017-06/513-nagyszeru-eredmenyek-a-vi-egmo-n-elmenyek-az-europai-lany-diakolimpian

---

díjazottak beszámolók diákolimpiák

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

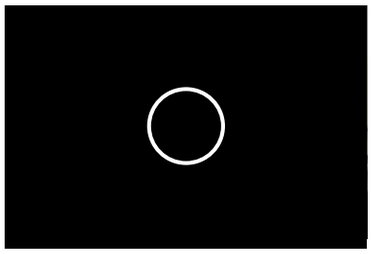
Erintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

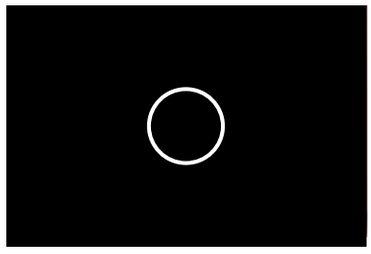
AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)



Szerkesztő
2020. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus portrék: Pete Gábor

Pete Gábor már óvodás korában megtapasztalta, milyen örömet okoz az egyszerűsítés, az absztrakció. Ma a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Valószínűségszámítás és statisztika osztályának tudományos főmunkatársa. Több mint tíz éves külföldi kutatásait itthon a Zaj-érzékenység kutatócsoportban folytatja.



Szerkesztő
2020. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus portrék: Rásonyi Miklós

A Rényi Alfréd Matematikai Intézetben készült video Rásonyi Miklós tudományos tanácsadót, a Valószínűségszámítás és statisztika osztály vezetőjét mutatja be. Több éves külföldi oktatói, kutatói munkája után itthon az Intézet Pénzügyi matematika kutatócsoportjában vesz részt. Az interjú végére az is kiderül, mi is lehetett volna belőle, ha nem matematikusnak áll.

Páles Zsolt
2020. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Aczél János élete és munkássága

95. évét betöltve távozott közülünk *Aczél János*, aki 1947-ben doktorált matematikai analízisből Fejér Lipót és Riesz Frigyes vezetésével. Egyike volt a Fejér professzor által "big five"-nak elnevezett öt tanítványnak, akik hosszú életük során mind nagy matematikusokká váltak (rajta kívül Császár Ákos, Gaál István, Horváth János és Fuchs László). Aczél János életéről és függvényegyenletek elméletében elért tudományos eredményeiről szerzőtársa, *Páles Zsolt*, a Debreceni Egyetem tanszékvezető egyetemi tanára írt. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2020. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus portrék: Pete Gábor

Pete Gábor már óvodás korában megtapasztalta, milyen örömet okoz az egyszerűsítés, az absztrakció. Ma a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet Valószínűségszámítás és statisztika osztályának tudományos főmunkatársa. Több mint tíz éves külföldi kutatásait itthon a Zaj-érzékenység kutatócsoportban folytatja.

Rényi Intézet

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Erintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2020. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus portrék: Rásonyi Miklós

A Rényi Alfréd Matematikai Intézetben készült video Rásonyi Miklós tudományos tanácsadót, a Valószínűségszámítás és statisztika osztály vezetőjét mutatja be. Több éves külföldi oktatói, kutatói munkája után itthon az Intézet Pénzügyi matematika kutatócsoportjában vesz részt. Az interjú végére az is kiderül, mi is lehetett volna belőle, ha nem matematikusnak áll.

Rényi Intézet

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Páles Zsolt 2020. JÚNIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Aczél János élete és munkássága

1. Élete

Aczél János 1924. december 26-án született Budapesten és 2020. január 1-jén hunyt el a kanadai Waterlooban. Tanulmányait Budapesten végezte, matematika-fizika tanárszakon. 1947-ben doktorált matematikai analízisből Fejér Lipót és Riesz Frigyes vezetésével. Első eredményeit a középértékek elméletében érte el. A szegedi egyetem Bolyai Intézetében lett tanársegéd, majd egyetemi docensi és tanszékvezetői kinevezést kapott az új Miskolci Egyetemre. 1952-től a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen a Matematikai Intézet Analízis Tanszékének első vezetője lett.

Aktív tudományos és tudományszervező munkásságának köszönhetően ebben az időszakban itthon és külföldön egyaránt a függvényegyenletek elméletének vitathatatlan szakértőjévé, gyarapítójává vált, és ezt az elismertségét csak fokozta az 1961-ben megjelent „Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen” című monográfiája [4], amelyet később 1966-ban bővítetten angolul is publikált az Academic Press [5]. Az első International Symposium on Functional Equations elnevezésű konferenciát 1962-ben Oberwolfachban szervezte meg. Az ebből a rendezvényből létrejött konferenciasorozat a függvényegyenletek művelőinek évenkénti legfontosabb összejövetele. A debreceni évei alatt ma is létező tudományos iskolát hozott létre. 1968-

ban megalapította az Aequationes Mathematicae folyóiratot, amely a témakör vezető tudományos újságja.

1965. januárjában családjával elhagyta Magyarországot és rövidesen a kanadai Waterloo Egyetemen lett egyetemi tanár. Haláláig professor emeritusként kötődött ehhez az intézményhez. Kanadai évei alatt nem szakadtak meg magyarországi kapcsolatai, továbbra is támogatta és együtt dolgozott volt debreceni tanítványaival és azok tanítványaival. Így született meg Daróczy Zoltánnal közösen írt [15] könyve: „On measures of information and their characterizations” címmel, amelyet az Academic Press adott ki 1975-ben.

Aczél János a függvényegyenletek elméletének csaknem minden kérdésével, azok minden aspektusával foglalkozott. Eredményeket ért el az általános megoldások leírásában, a regularitási tételek igazolásában, az absztrakt struktúrákon értelmezett egyenletek vizsgálatában. Kutatásaira jellemző, hogy a tiszta matematikai problémák vizsgálata mellett mindig törekedett elért eredményeinek az az információelmélet, a valószínűségszámítás, a közgazdaságtan, a viselkedés tudományokbeli alkalmazására. Eredményeit ma is széles körben idézik, a Google Scholar szerint több mint 13 ezren hivatkoztak munkáira. A MathSciNet és Zentralblatt szerint 9 monográfiát írt ([4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [16], [18]), folyóirat közleményeinek száma pedig meghaladja a 260-at. Társzerzőinek száma 80, 5 vagy annál több dolgozata van Daróczy Zoltánnal, Bruno Fortéval, Hosszú Miklóssal, Palaniappan Kannappannal, Duncan Luce-szal, Maksa Gyulával, Anthony Marley-val, Che Tat Ng-vel és Páles Zsolttal.

Aczél János és Fuchs László

Öt egyetem, köztük 2003-ban a Debreceni Egyetem adományozott neki díszdoktori címet. A kanadai Royal Society 1971-ben választotta tagjai sorába. 1988-ban elnyerte a spanyolországi Santiago Ramón y Cajal Medal-t. Az MTA külső tagja 1990-ben lett. 2008-ban a világ legrégebbi matematikai társaságának, a Hamburgi Mathematical Society tiszteletbeli tagjának is megválasztották.

Hihetetlenül nagy kapcsolatrendszerrel rendelkezett és az így létrejött barátságokat, tudományos együttműködéseket lelkesen és rendszeresen ápolta. A konferenciák szüneteiben, az esti beszélgetések, borozások során a fiatal pályakezdő és a már érett kutatókhoz is mindig érdeklődéssel szólt, bátorított, de finoman kritizált is. Az általa szervezett konferenciákon mindig volt „Problem Session”, ahol a résztvevők nyitott problémáikat tették közzé, és ez számos esetben későbbi kooperációhoz vezetett. Életéről és emlékeiről sokat tudhattunk meg a vele való találkozások során. Emberi tulajdonságai közül talán a humorérzékét, a csodálatos vicc és anekdota mesélő képességét érdemes megemlíteni. Egy kedvenc viccét szeretném felidézni, ezt még a 80-as években, az orosz megszállás utolsó éveiben hallottam tőle először.

Kohn elmegy a rabbihoz és kérdi, hogy lehetséges-e az, hogy a szovjet csapatok valahogy elhagyják Magyarországot. A rabbi így válaszol: Igen, ez kétféleképpen is lehetséges: természetes módon, vagy egy csoda bekövetkezésével. Mi lenne a természetes mód kérdi Kohn. Hát Isten leküldi az arkangyalait és azok kiűzik a szovjeteket válaszol a rabbi. És mi lenne csodával határos lehetőség? Hát, hogy maguktól hagyják el az országot.

Aczél Jánossal – többek között – Daróczy Zoltán készített interjút 2004-ben [27]. Ennek angol fordítása [28] 2015-ben jelent meg. Ebben az interjúban Aczél János gyerekkoráról, tanulmányairól, tanárairól, életének meghatározó fordulatairól beszél. Aki tehát további részleteket szeretne megtudni, annak ezeket a forrásokat ajánljuk.

A továbbiakban Aczél János tudományos eredményeiből válogatunk. Szinte lehetetlen lenne a teljes tevékenységét áttekinteni és összefoglalni. Így a cikk írója a neki legfontosabbnak tűnő eredményeket emelte ki, válogatása teljes mértékben szubjektív.

2. Asszociatív műveletek

A valós számok összeadása és szorzása közötti nyilvánvaló de alapvetően fontos az alábbi kapcsolat:

$$x \cdot y = \exp\big(\log(x) + \log(y)\big) \qquad (x, y \in \mathbb{R}_+)$$

Más szóval a szorzás „kifejezhető” az összeadás segítségével. Ez az észrevétel motíválja azt, hogy tekintsük az olyan $*$ binér műveleteket, amelyek az

$$x * y := f^{-1}\big(f(x) + f(y)\big) \qquad (x, y \in I) \tag{1}$$

képlettel értelmezettek, ahol $I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy olyan folytonos és szigorúan monoton függvény, amelynek értékkészlete zárt az összeadásra. Ekkor könnyen látható, hogy a $*$ művelet asszociatív és kommutatív. Az is látható, hogy minden ilyen alakú művelet kancellatív is, ami azt jelenti, hogy minden $x, y, z \in I$ esetén az $x * z = y * z$, illetve $z * x = z * y$ egyenlőségekből $x = y$ következik. Egy 1948-ban megjelent [3] dolgozatában Aczél János a fenti észrevételnek az alábbi megfordítását igazolta:

1. tétel *Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum és $*: I \times I \to I$ egy folytonos asszociatív és kancellatív binér művelet I-n. Ekkor létezik egy olyan $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton függvény, amelynek értékkészlete zárt az összeadásra, hogy (1) teljesül.*

Ennek a tételnek egy azonnali és érdekes következménye, hogy ha $*$ egy folytonos asszociatív és kancellatív binér művelet I-n, akkor egyúttal kommutatív is.

Az 1. tétel bizonyításának vázlata. Aczél eredeti cikkében az f^{-1} függvény került megkonstruálásra és a bizonyításban számos esetet kellett megkülönböztetni. A [26] dolgozatban sikerült egy eset-szétválasztás mentes bizonyítást találni, amelyben közvetlenül az f függvényt konstruáljuk meg. Ennek a dolgozatnak az alapötletét ismertetjük.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy van egy olyan $c \in I$ elem, hogy $c < c * c$. Ha $x \in I$, akkor legyen

$$f(x) := \inf \left\{ \frac{m-n}{k} \in \mathbb{Q} \,\middle|\, n, m, k \in \mathbb{N},\ c^m > x^k * c^n \right\}.$$

Megmutatható, hogy az így definiált $f : I \to \mathbb{R}$ függvénnyel az (1) összefüggés valóban teljesül.

Ha az asszociativitás egyenletében a binér művelet minden elfordulását egy potenciálisan különböző binér műveletre cseréljük, akkor az

$$F(x, G(y, z)) = H(K(x, y), z) \qquad (x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z). \tag{2}$$

függvényegyenlethez jutunk, amit az általánosított asszociativitási egyenletnek nevezünk. Ebben $F : X \times U \to W$, $G : Y \times Z \to U$, $H : V \times Z \to W$ és $K : X \times Z \to V$ az ismeretlen függvények és X, Y, Z, U, V, W nemüres halmazok. Ennek az egyenletnek a megoldásával kapcsolatban Aczél János, V. D. Belousov és Hosszú Miklós 1960-ban publikált [13] dolgozatukban az alábbi eredmény érték el. Ez lényegét tekintve azt állítja, hogy (2) megoldásai egyetlen asszociatív művelet segítségével fejezhetők ki.

2. tétel *Legyenek X, Y, Z, U, V, W nemüres halmazok és legyen $(S, *)$ egy félcsoport. Legyenek továbbá $w : S \to W$, $a : X \to S$, $b : X \to S$, $c : X \to S$ tetszőleges és $g : S \to U$ és $k : S \to V$ pedig bijektív leképezések, valamint legyen $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, $u \in U$, $v \in V$ esetén*

$$\begin{aligned} F(x, u) &= w(a(x) * g^{-1}(u)), & G(y, z) &= g(b(y) * c(z)), \\ H(v, z) &= w(k^{-1}(v) * c(z)), & K(x, y) &= k(a(x) * b(y)). \end{aligned} \tag{3}$$

Ekkor az (F, G, H, K) *fügvénynégyes megoldása a* (2) *általánosított asszociativitási egyenletnek.*

Megfordítva, ha $F\colon X \times U \to W$, $G\colon Y \times Z \to U$, $H\colon V \times Z \to W$, $K\colon X \times Z \to V$ *a* (2) *egyenlet olyan megoldásai, amelyek minden változójukban injektívek (a másik változó tetszőleges rögzitése mellett), akkor létezik egy* $(S, *)$ *egy félcsoport, létezik* $w\colon S \to W$, $a\colon X \to S$, $b\colon X \to S$, $c\colon X \to S$ *injektív továbbá* $g\colon S \to U$ *és* $k\colon S \to V$ *pedig bijektív leképezés, hogy minden* $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, $u \in U$, $v \in V$ *esetén* (3) *teljesül.*

A tétel elegendőségi részének bizonyítása az F, G, H, K függvények (3)-beli alakjából és a $*$ művelet asszociativitásából könnyen következik. A fordított irányú állítás igazolása sokkal trükkösebb, ehhez az eredeti [13] mű tanulmányozását ajánljuk. Az asszociativitás témakörével kapcsolatban még a [11], [24], [41], [39], [40] dolgozatokat ajánljuk az olvasó figyelmébe.

3. Kiterjesztési tételek

A függvényegyenletek elméletében alapvető az additivitás Cauchy-tól származó függvényegyenlete:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}), \tag{4}$$

ahol $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ennek az egyenletnek a megoldásait additív függvényeknek nevezzük. Folytonosság feltételezése mellett könnyű kimutatni, hogy az egyenlet minden megoldása $f(x) = f(1)x$ alakú, azaz lineáris. Másrészt, a valós számok halmazát a racionális számok teste feletti vektortérként felfogva, megmutatható, hogy ennek a vektortérnek bármely Hamel-bázisán értelmezett függvény egyértelműen kiterjeszthető egy additív függvénnyé. Ebből az is következik, hogy az egyenletnek vannak nem lineáris megoldásai, sőt ezek vannak „többségben”.

Amikor függvényegyenletek megoldásáról beszélünk, akkor ez nagyon sokszor azt jelenti, hogy a megoldást egyszerűbb függvényegyenletek megoldásainak és standard, vagy néha tetszőleges függvények segítségével kifejezzük. Ennek a módszernek egy alapvető lépése, hogy néha a megoldás során nyert függvényegyenletek csak egy részhalmazon teljesülnek. Így fontos kérdés, hogy milyen kapcsolat van a leszűkített egyenlet és az eredeti egyenlet között. Példaként tekintsük a (4) egyenlet alábbi leszűkítését:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y > 0), \tag{5}$$

ahol $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Az nyilvánvaló, hogy (4) minden megoldása eleget tesz (5)-nek. A fenti implikáció megfordíthatóságát Erdős és Aczél [17] ismerték fel az alábbi tételben.

3. tétel *Legyen $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amely kielégíti (5)-öt. Ekkor f egyértelműen kiterjeszthető az $\mathbb{R}$ halmazra, úgy hogy a kiterjesztése pedig teljesíti (4)-et.*

Ennek a tételnek a bizonyítása nem különösebben nehéz, de annak felismerése, hogy a kiterjesztési tételek hasznosak és fontosak innen eredeztethető. Ennek a tételnek megszületése óta számos általánosítása és alkalmazása született. A teljesség igénye nélkül az olvasó figyelmét a következő dolgozatokra hívjuk fel: [12], [19], [30], [29], [31], [35], [36], [37], [44], [45], [46].

4. A kváziaritmetikai közepek jellemzése

Egy I intervallumon értelmezett M közép alatt egy olyan $M\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ függvényt értünk, mely teljesíti a

$$\min(x_1,\dots,x_n) \le M(x_1,\dots,x_n) \le \max(x_1,\dots,x_n) \qquad (n \in \mathbb{N},\ (x_1,\dots,x_n) \in I^n)$$

egyenlőtlenséget. Egy M közép n-változós leszűkítését, azaz az $M|_{I^n}$ függvényt atovábbiakban M_n-nel jelöljük.

A közepek egy fontos osztályát, a kváziaritmetikai közepeket a következőképpen értelmezhetjük: Valamely $f\colon I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos függvény esetén legyen

$$A_f(x_1,\dots,x_n) := f^{-1}\left(\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N},\ (x_1,\dots,x_n) \in I^n).$$

Az így értelmezett $A_f\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ leképezést az f *függvény által generált kváziaritmetikai középnek* nevezzük. Az $f(x) = x$, $f(x) = \ln(x)$ és $f(x) = 1/x$ generáló függvényekkel kapott kváziaritmetikai közepekről könnyen látható, hogy ezek a számtani, a mértani, illetve a harmonikus középpel egyenlőek. Ezeknek a közepeknek az elméletét Hardy, Littlewood és Pólya fektette le a múlt század 30-as éveiben [32] monográfiában. Az elmélet egyik legszebb eredménye a következő Kolmogorovtól [34] származó jellemzési tétel.

4. tétel *Legyen* $M\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \to I$. *Ekkor* M *pontosan akkor kváziaritmetikai, azaz* $M = A_f$ *valamely* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *szigorúan monoton és folytonos függvényre, ha* M *rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

(1) M *reflexív, azaz* $M_n(x,\dots,x) = x$ *minden* $n \in \mathbb{N}$ *és* $x \in I$ *esetén.*

(2) *Minden* $n \in \mathbb{N}$*-re az* M *közép* n*-változós leszűkítése szimmetrikus, folytonos és mindegyik változójában szigorúan monoton növekvő az* I^n *halmaz felett.*

(3) M *rendelkezik az alábbi csoportosítási tulajdonsággal: Minden* $n, m \in \mathbb{N}$, $(x_1,\dots,x_n) \in I^n$ *és* $(y_1,\dots,y_m) \in I^m$ *esetén*

$$M_{n+m}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = M_{n+m}(x_1,\dots,x_n,y,\dots,y),$$

ahol $y = M_m(y_1,\dots,y_m)$.

Annak a bizonyítása, hogy bármely kváziaritmetikai közép rendelkezik a fenti tulajdonságokkal egyszerű. A bizonyítás fő nehézsége a fordított irányú implikáció igazolása, ez a [34] dolgozat fő érdeme.

A fenti jellemzés harmadik (a csoportosításra vonatkozó) tulajdonságának egyik jellegzetessége az, hogy az M közép különböző változószámú leszűkítései között állapít meg egy kapcsolatot. Emiatt a rögzített változószámú közepekről ennek a tételnek segítségével nem lehet eldönteni, hogy káziaritmetikai szerkezetűek-e. Ezt a hiányosságot felismerve Aczél János és a rögzített változószámú közepekre bevezette a biszimmetria fogalmát 1947–48-ban megjelent [1], [2] dolgozataiban.

Egy $M_n\colon I^n \to I$ függvényt biszimmetrikusnak mondunk, ha bármely I-beli elemekből álló $(x_{i,j})$ $n \times n$-es mátrix esetén

$$M_n(M_n(x_{1,1},\dots,x_{1,n}),\dots,M_n(x_{n,1},\dots,x_{n,n})) = M_n(M_n(x_{1,1},\dots,x_{n,1}),\dots,M_n(x_{1,n},\dots,x_{n,n})).$$

A [1] dolgozatban ennek a fogalomnak a segítségével az alábbi tételt igazolta.

5. tétel *Legyen $n \geq 2$. Ekkor egy $M_n \colon I^n \to I$ függvény pontosan akkor kváziaritmetikai, azaz M_n egy A_f kváziaritmetikai közép n-változós leszűkítése, ha M_n rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

(1) M_n *reflexív.*

(2) M_n *szimmetrikus, folytonos és mindegyik változójában szigorúan monoton növekvő az I^n halmaz felett.*

(3) M *biszimmetrikus.*

Annak kimutatása, hogy minden n-változós közép eleget tesz a fenti tétel feltételeinek egyszerű. A megfordítás igazolása a következő szép ötleten alapul, amit az egyszerűség kedvéért $n = 2$ esetén mutatunk be. Tegyük fel, hogy M_2 teljesíti a tétel (1), (2), (3) feltételeit és értelmezzük az $M_{2^n} \colon I^{2^n} \to I$ függvénysorozatot az alábbi rekurzióval:

$$M_{2^{n+1}}(x_1, \ldots, x_{2^{n+1}}) := M_2\big(M_{2^n}(x_1, \ldots, x_{2^n}), M_{2^n}(x_{2^n+1}, \ldots, x_{2^{n+1}})\big).$$

Ekkor megmutatható, hogy ez a függvénysorozat eleget tesz a Kolmogorov-tétel összes feltételének, ha az azok megfogalmazásában szereplő n, m számok 2 hatványai. Pl. $M_{2^{n+1}}$ szimmetriája az M_2 szimmetriája és biszimmetriája, valamint M_{2^n} szimmetriája segítségével látható be. Ezután Kolmogorov eredeti bizonyítását adaptálva erre a középsorozatra adódik, hogy $M_2, M_4, M_8, \ldots$ egy kváziaritmetikai közép 2, 4, 8, ...-változós leszűkítései.

A biszimmetria fogalma és ezek különféle általánosításai kulcsfontosságúnak bizonyultak a függvényegyenletek elméletében és ennek közgazdasági, döntéselméleti alkalmazásaiban. Az egyik érdekes és fontos alkalmazási terület az úgy nevezett konzisztens aggregációval kapcsolatos. További tanulmányozásra ajánlva (a teljesség igénye nélkül) megemlítjük a [20], [21], [22], [23], [33], [38], [42], [43], [44] dolgozatokat.

5. A Bajraktarević-közepek homogenitása

Az ötvenes évek végén egy bosnyák matematikus, M. Bajraktarević a kváziaritmetikai közepek következő általánosítását vezette be [25] dolgozatában. Legyenek $f, g \colon I \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, hogy g pozitív és f/g szigorúan monoton I-n. Értelmezzük a $B_{f,g} \colon \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n \to I$ közepet az alábbi képlettel:

$$B_{f,g}(x_1,\dots,x_n) := \left(\frac{f}{g}\right)^{-1}\left(\frac{f(x_1)+\dots+f(x_d)}{g(x_1)+\dots+g(x_d)}\right) \qquad (n\in\mathbb{N},\ (x_1,\dots,x_n)\in I^n). \tag{6}$$

Ha $g\equiv 1$, akkor látható, hogy $B_{f,g}$ az A_f kváziaritmetikai középre egyszerűsödik. Ezekről a közepekről kiderült, hogy a Shannon-entrópia általánosítást jelentő Rényi-entrópiákat ilyen típusú közepek logaritmusaként lehet előállítani. Így fontos kérdéssé vált az olyan Bajraktarević-közepek megtalálása, amelyek homogének, azaz, amelyek teljesítik az alábbi függvényegyenletet:

$$B_{f,g}(tx_1,\dots,tx_n) = tB_{f,g}(x_1,\dots,x_n) \qquad (n\in\mathbb{N},\ t>0,\ (x_1,\dots,x_n)\in\left(I\cap\tfrac{1}{t}I\right)^n).$$

A probléma előtörténeteként Hardy, Littlewood és Pólya [32] könyvéből ekkor már jól ismert volt, hogy a kváziaritmetikai közepek között pontosan a hatványközepek a homogének. Végül a választ a fenti kérdésre Aczél és Daróczy találták meg 1963-ban megjelent [14] cikkében.

6. tétel *Legyen I a pozitív valós számok egy reciprokképzésre nézve invariáns részintervalluma és legyenek $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ olyan folytonos függvények, hogy g pozitív és f/g szigorúan monoton I-n. Ekkor a $B_{f,g}$ közép pontosan akkor homogén, ha léteznek olyan $p,q\in\mathbb{C}$ komplex számok, hogy vagy $p,q\in\mathbb{R}$, vagy $p=\overline{q}$ és $B_{f,g}$ egyenlő a $G_{p,q}\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n\to I$ általánosított Gini-középpel, amely következőképpen van értelmezve:*

$$G_{p,q}(x_1,\dots,x_n) := \begin{cases} \left(\dfrac{x_1^p+\dots+x_n^p}{x_1^q+\dots+x_n^q}\right)^{\frac{1}{p-q}} & \text{ha } p,q\in\mathbb{R},\ p\neq q,\\[2ex] \exp\left(\dfrac{x_1^p\log(x_1)+\dots+x_n^p\log(x_n)}{x_1^p+\dots+x_n^p}\right) & \text{ha } p=q\in\mathbb{R},\\[2ex] \exp\left(\dfrac{1}{b}\arctan\left(\dfrac{x_1^a\sin(\log(x_1^b))+\dots+x_n^a\sin(\log(x_n^b))}{x_1^a\cos(\log(x_1^b))+\dots+x_n^a\cos(\log(x_n^b))}\right)\right) & \text{ha } p=\overline{q}=a+bi\notin\mathbb{R}. \end{cases}$$

Ennek a tételnek fontos alkalmazásai találhatók Aczélnak és Daróczynak az információmértékekről írott [15] monográfiájában, amely a két szerző egyik leghivatkozottabb közös műve. A Google Scholar szerint ez a könyv eddig több mint 1200 hivatkozást kapott.

6. Zárszó

Reméljük, hogy a fenti válogatással felkeltettük a tisztelt olvasó érdeklődését, és tovább folytatja Aczél János eredményeinek megismerését. Ezekből egy kreatív, nagyhatású matematikus képe fog kibontakozni. Emlékét őrzik mindazok, akik ismerték és akik eredményei alapján tisztelik. A nagy öt – a „big five” – negyedik tagja távozott. Sokunknak fog hiányozni.

Irodalomjegyzék

[1] J. Aczél. The notion of mean values. *Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem*, 19(23):83–86, 1947.

[2] J. Aczél. On mean values and operations defined for two variables. *Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem*, 20(10):37–40, 1948.

[3] J. Aczél. Sur les opérations définies pour nombres réels. *Bull. Soc. Math. France*, 76:59–64, 1948.

[4] J. Aczél. *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*. Birkhäuser, Basel, 1961. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, Bd. 25.

[5] J. Aczél. *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, volume 19 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, New York–London, 1966.

[6] J. Aczél. *On Applications and Theory of Functional Equations*. Birkhäuser, Basel, 1969. Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt, Band V.

[7] J. Aczél. *Functional Equations and Inequalities*. Edizioni Cremonese, Rome, 1971. Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), III Ciclo, La Mendola, August 20–28, 1970, Coordinated by B. Forte.

[8] J. Aczél, editor. *Functional Equations: History, Applications and Theory*. Reidel, Dordrecht, 1984.

[9] J. Aczél. *A Short Course on Functional Equations (Based Upon Recent Applications to the Social and Behavioral Sciences)*. Reidel, Dordrecht, 1987.

[10] J. Aczél, editor. *Aggregating clones, colors, equations, iterates, numbers, and tiles*. Birkhäuser, Basel, 1995. Reprint of Aequationes Math. **50** (1995), no. 1–2.

[11] J. Aczél. The associativity equation re-revisited. In G. Erikson and Y. Zhai, editors, *Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering*, page 195–203. American Institute of Physics, Melville–New York, 2004.

[12] J. Aczél, J. A. Baker, D. Ž. Djoković, Pl. Kannappan, and F. Radó. Extensions of certain homomorphisms of subsemigroups to homomorphisms of groups. *Aequationes Math.*, 6:263–271, 1971.

[13] J. Aczél, V. D. Belousov, and M. Hosszú. Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 11:127–136, 1960.

[14] J. Aczél and Z. Daróczy. Über verallgemeinerte quasilineare Mittelwerte, die mit Gewichtsfunktionen gebildet sind. *Publ. Math. Debrecen*, 10:171–190, 1963.

[15] J. Aczél and Z. Daróczy. *On Measures of Information and Their Characterizations*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1975. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 115.

[16] J. Aczél and J. Dhombres. *Functional Equations in Several Variables*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. With applications to mathematics, information theory and to the natural and social sciences.

[17] J. Aczél and P. Erdős. The nonexistence of a Hamel-basis and the general solution of Cauchy's functional equation for nonnegative numbers. *Publ. Math. Debrecen*, 12:253–263, 1965.
[18] J. Aczél and S. Gołąb. *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1960. Polska Akademia Nauk. Monografie Matematyczne, Tom 39.
[19] J. Aczél and L. Losonczi. Extension of functional equations. In *The mathematics of Paul Erdős, II*, page 251–263. Springer, Berlin, 1997.
[20] J. Aczél and Gy. Maksa. Solution of the rectangular $m \times n$ generalized bisymmetry equation and of the problem of consistent aggregation. *J. Math. Anal. Appl.*, 203(1):104–126, 1996.
[21] J. Aczél and Gy. Maksa. Consistent aggregation and generalized bisymmetry. *Trans. Royal Soc. Canada*, 6(6):21–25, 1997.
[22] J. Aczél, Gy. Maksa, and M. Taylor. Equations of generalized bisymmetry and of consistent aggregation: weakly surjective solutions which may be discontinuous at places. *J. Math. Anal. Appl.*, 214(1):22–35, 1997.
[23] J. Aczél and T. L. Saaty. Procedures for synthesizing ratio judgements. *J. Math. Psych.*, 27(1):93–102, 1983.
[24] B. Bacchelli. Representation of continuous associative functions. *Stochastica*, 10(1):13–28, 1986.
[25] M. Bajraktarević. Sur une équation fonctionnelle aux valeurs moyennes. *Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske Ser. II*, 13:243–248, 1958.
[26] R. Craigen and Zs. Páles. The associativity equation revisited. *Aequationes Math.*, 37(2–3):306–312, 1989.
[27] Z. Daróczy. Beszélgetés Aczél Jánossal. *Debreceni Szemle*, XII(3):465–481, 2004.
[28] Z. Daróczy. An interview with János Aczél. *Aequationes Math.*, 89(1):1–16, 2015. Reprint of Debreceni Szemle **3** (2004), no. 12, 465–480.
[29] Z. Daróczy and L. Losonczi. Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additiven Funktionen. *Publ. Math. Debrecen*, 14:239–245, 1967.
[30] Z. Daróczy and Gy. Maksa. Functional equations on convex sets. *Acta Math. Hungar.*, 68(3):187–195, 1995.
[31] R. Ger. On extensions of polynomial functions. *Results Math.*, 26(3–4):281–289, 1994.
[32] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, 1934. (first edition), 1952 (second edition).
[33] I. Kocsis. A bisymmetry equation on restricted domain. *Aequationes Math.*, 73(3):280–284, 2007.
[34] A. N. Kolmogorov. Sur la notion de la moyenne. *Rend. Accad. dei Lincei (6)*, 12:388–391, 1930.
[35] K. Lajkó. Applications of extensions of additive functions. *Aequationes Math.*, 11:68–76, 1974.
[36] L. Losonczi. An extension theorem. *Aequationes Math.*, 28(3):293–299, 1985.
[37] L. Losonczi. An extension theorem for the Levi-Civita functional equation and its applications. In D. Gronau, editor, *Contributions to the Theory of Functional Equations (Graz, 1991)*, volume 315 of *Grazer Math. Berichte*, page 51–68. Karl-Franzens-Univ. Graz, Graz, 1991.
[38] Gy. Maksa. Solution of generalized bisymmetry type equations without surjectivity assumptions. *Aequationes Math.*, 57(1):50–74, 1999.
[39] Gy. Maksa. The generalized associativity equation revisited. *Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat.*, 17:175–180, 2000.
[40] Gy. Maksa. CM solutions of some functional equations of associative type. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 24:125–132, 2004.
[41] Gy. Maksa. Quasisums and generalized associativity. *Aequationes Math.*, 69(1–2):6–27, 2005.
[42] Á. Münnich, Gy. Maksa, and R. J. Mokken. Collective judgement: combining individual value judgements. *Math. Social Sci.*, 37(3):211–233, 1999.
[43] Á. Münnich, Gy. Maksa, and R. J. Mokken. n-variable bisection. *J. Math. Psych.*, 44(4):569–581, 2000.
[44] Zs. Páles. Extension theorem for functional equations with bisymmetric operations. *Aequationes Math.*, 63(3):266–291, 2002.
[45] J. Rimán. On an extension of Pexider's equation. *Zbornik Rad. Mat. Inst. Beograd (N.S.)*, 1(9):65–72, 1976. Symposium en Quasigroupes et Équations Fonctionnelles (Belgrade-Novi Sad, 1974).
[46] L. Székelyhidi. An extension theorem for a functional equation. *Publ. Math. Debrecen*, 28(3–4):275–279, 1981.

Páles Zsolt

Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet,
pales@science.unideb.hu

matematikatörténet nekrológ

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Lángné Lázi Márta
2020. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

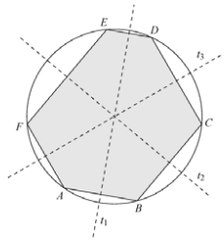
A tanterem már nem elég!

A fiatalok júniusban sikerélményekkel telve elvégzik a középiskolát, magas pontszámmal felvételt nyernek az áhított felsőoktatási intézménybe, majd szeptember közepén már sokaknak a teljes sikertelenséggel kell birkózniuk… *Lángné Lázi Márta* és kollégái azon dolgoznak, hogy ez ne így legyen. A BME Matematika Intézete idén is megrendezte középiskolásoknak szóló hatfordulós online matematikaversenyét, amelyre induláskor közel 600 versenyző jelentkezett be. Most kivételesen a döntőt is online formában kellett megtartani. Tovább...

Szoldatics József
2020. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Úton-módon 3.

A júniusi számban egy olyan algebra feladatot járunk körbe, amely sokféle témakör között teremt kapcsolatot. Bár leggyakrabban a teljes indukció tanítása során találkozunk vele, ismert algebrai átalakításokat felhasználó megoldása is, megközelíthetjük kombinatorikai eszközökkel és rekurzióval is. Cikkemben ezekre a módszerekre több változatot is be fogok mutatni – írja a sorozat szerzője, *Szoldatics József*. A feladat többek között a KöMaL 2020. márciusi számában is megjelent a „Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire” cikkben. Tovább...



Fried Katalin
2020. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Hány bőrt lehet lehúzni egy feladatról? – avagy nincs új a Nap alatt?

– Szeretem böngészni a KöMaL-archívumot, és nagyon sok kiváló feladatot találok, amelyeket tanításhoz is tudok használni. Feltűnt, hogy egy-egy már megjelent feladat újra és újra előkerül, esetleg kicsit más köntösben. Már a folyóirat első évtizedében többször előfordult egy nevezetes (nem feltétlenül szabályos) hatszög. Ennek a hatszögnek egyenlőek a szögei, és ebből következően szemközti oldalai párhuzamosak. – Ez a hatszög a kiindulópontja mindazoknak a tanulságos geometriai bizonyítási feladatváltozatoknak, amelyeket *Fried Katalin* összegyűjtött. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Erintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Lángné Lázi Márta 2020. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A tanterem már nem elég!

Tehetséggondozás és felzárkóztatás a BME Alfa online felületen

A gazdasági, műszaki és természettudományos karok oktatói és hallgatói évek óta azzal szembesülnek, hogy a felsőfokú tanulmányok megkezdésekor a hallgatók nagy része az elvárt szintnél jóval gyengébben teljesít. Ez vonatkozik a matematikára és a fizikára is. Nekünk, egyetemi oktatóknak ez komoly fejfájást okoz. Nem nézhetjük tétlenül, hogy a fiatalok júniusban sikerélményekkel telve elvégzik a középiskolát, magas pontszámmal felvételt nyernek az áhított felsőoktatási intézménybe, majd szeptember közepén már sokaknak a teljes sikertelenséggel és önnön alkalmatlanságuk érzésével kell birkózniuk. A jelenség hátteréről, a gondok enyhítését célzó intézkedésekről, törekvésekről számos beszámoló született: Csákány (2013), Radnóti–Nagy (2014).

Felzárkóztatás

A tanulásszervezés, a tudásszerzés és a tudás alkalmazása a technológiafejlődésnek és a társadalmi változásoknak köszönhetően megváltozott. A digitalizáció, az okos eszközök elterjedése, a hallgatók tudásszintjében és motivációjában meglévő hatalmas különbségek ösztönöztek minket arra, hogy keressünk olyan eszközt, amely nagyfokú önállóságot és egyénre szabott gyakorlási lehetőséget biztosít. Így jött létre 2012-ben a *BME Alfa interaktív gyakorlófelület*. Az ingyenesen elérhető BME Alfa olyan weblap, amely elsősorban a középiskolások és a kezdő egyetemisták önálló tanulását hivatott segíteni. Alapja a Moodle e-Learning keretrendszer, amelyet testre szabtunk a lokális igényeket figyelembe véve. Egy standard Moodle (vagy egyéb ún. Learning Management System, röviden LMS) installációval szemben az a lényeges különbség, hogy a BME Alfa mindenki számára nyitott, tehát a felhasználók jelentős része nem az intézmény hallgatója. Ennél fogva a hangsúly nem azon van, hogy egy-egy kurzus teljesítését nyomon tudja követni az oktató, hanem azon, hogy a felhasználó minél több feladathoz hozzáférjen, az ország bármely településéről vagy külföldről egyaránt.

A rossz kezdés okozta csalódottságon sokan nem tudnak egyedül túljutni. Számukra lényegében már a félév elején kódolva van a sikertelen vizsga matematikából vagy fizikából. Annak érdekében, hogy az elsőéves hallgatók minél hamarabb szembesüljenek azzal, mi az a szükséges matematika- és fizikatudás, ami kell ahhoz, hogy sikeresen teljesítsék az első félévben felvett tárgyakat, a Műegyetem 2010-ben bevezette az ún. *nulladik zárthelyit*, amit az első oktatási héten írnak meg a gólyák (Csákány–Pipek (2010)). Matematikából ez egy 15 kérdésből álló teszt, amely teljes egészében lefedi a középszintű középiskolai tananyagnak azon részét, aminek ismerete az egyetemi tanulmányok megkezdéséhez elengedhetetlen. A nulladik zárthelyin minden kérdéshez öt válaszlehetőség tartozik, minden helyes válasz 4 pontot, a rossz válaszok −1 pontot érnek. A nulladik zárthelyi sikeres teljesítéséhez az összesen megszerezhető 60 pontból 24-et kell elérni, a munkára a hallgatóknak 50 perc áll rendelkezésükre, és semmilyen segédeszköz nem használható. Az eredményességről, tapasztalatokról már korábban születtek cikkek, konferencia-előadások (Csákány (2013)). A félév legelején megírt felmérő és annak az eredménye nagyon hasznos a hallgató számára, de nem elég. Segíteni kell és biztosítani kell a felkészülés lehetőségét is.

Mára a felzárkóztatás, a felsőoktatásba történő zökkenőmentes átlépés elősegítése szinte minden felsőoktatási intézményben elengedhetetlen feladat. A nulladik zárthelyi sikeres teljesítését elősegítendő a BME Matematika Intézet Kecsap néven nyár végi önköltséges *felzárkóztató tanfolyamot* indít az érdeklődő hallgatóknak, általában 250–300 gólya részvételével. Azok számára, akik a nulladik zárthelyin nagyon gyengén teljesítettek, *Bevezető matematika* és *Bevezető fizika* címmel speciális kurzusokat vezettünk be. Az Alfa gyakorlófelületnek ezeken a kurzusokon is nagy szerep jut. A példatárban meglévő nagyszámú feladat és teszt alkalmas arra, hogy az oktató házi feladatokat adjon, illetve a hallgatók a saját igényük szerint gyakoroljanak, tematikus feleletválasztós teszteket oldjanak meg. A hallgatók azonnal kapnak visszajelzést az elért eredményükről, megnézhetik a részletes megoldásokat. Az oktatók folyamatosan nyomon követhetik az Alfa honlapon a házi feladatokkal kapcsolatos hallgatói aktivitást. Látható, hogy melyik hallgató mely feladatokkal foglalkozott, mennyi időt töltött a feladatok megoldásával, és természetesen az is, hogy a feladatban szereplő kérdésre helyes választ adott-e. Ezek fontos információk az oktatónak, mert ez alapján látja, hogy hol tartanak a hallgatók a tananyag elsajátításában, megértésében, és eldöntheti, hogy egy adott anyagrésszel szükséges-e még többet foglalkozni.

Egyes források szerint több tízezer informatikus hiányzik az iparból ma Magyarországon. A hiány enyhítése érdekében 2018-ban a Műegyetemen elindult az ún. BProf (Bachelor Profession) képzés, *informatikus üzemmérnök képzés*. A képzés gyakorlatorientált: a cégeknél, vállalatoknál végzett munkán és tapasztalatszerzésen van a hangsúly. Az alapozó tárgyak szűkre szabott kontaktóra-keretét is hatékonyan, személyre szabottan tudjuk kompenzálni a BME Alfa gyakorlófelület bevonásával.

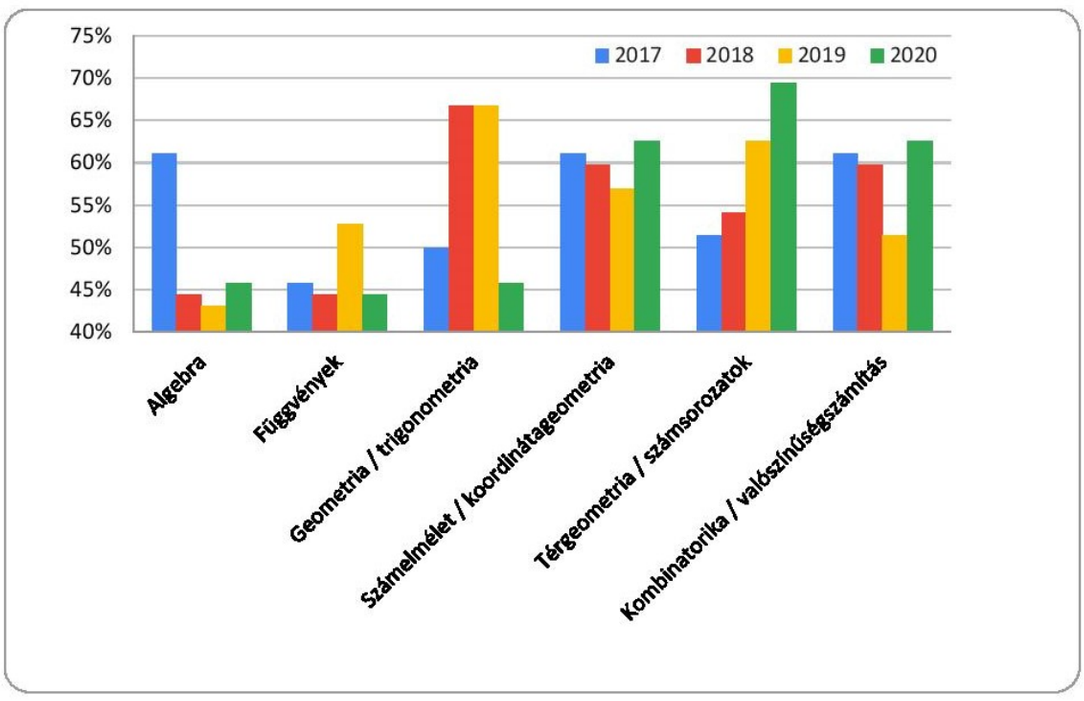
Tehetséggondozás, pályaorientáció

A matematika, a természettudományos és műszaki (Science, Technology, Engineering and Mathematics, röviden STEM) tárgyak tanítása a fejlett országokban is súlyos gondokkal küzd. Tapasztaljuk, hogy a kormányzati intézkedések ellenére, folyamatosan csökken a diákok érdeklődése a természettudományos és műszaki pályák iránt. Ennek leküzdésére a felsőoktatási intézményekben a tehetséggondozás, a felzárkóztatás mellett nagyon komoly erőfeszítéseket tesznek annak érdekében, hogy népszerűsítsék ezeket a pályákat a középiskolások körében. A természettudományok iránti pozitív hozzáállás kialakítása, a természettudományos pályák iránti érdeklődés növelése már általános és középiskolásokra is kiterjed (BME Gyerekegyetem, BME Science Camp).

A Műegyetemi *Alfa Matematika pontgyűjtő verseny* szintén a középiskolásoknak (9–12.-esek) szól. 2015-ben, amikor először meghirdettük a versenyt, tudtuk, hogy rengeteg versenyzési lehetőség érhető el a diákok számára. A létrehívásakor az volt a célunk, hogy minél több diákkal, pedagógus kollégával alakítsunk ki tartós, folyamatos kapcsolatot. Minél több középiskolásnál érjük el azt, hogy külső kényszer nélkül, stresszmentesen, rendszeresen foglalkozzon matematikával. Olyan diákoknak is nyújtson versenyélményt (a kudarcélmény lehetőségének kizárásával), akiket a környezet nem ösztönöz eléggé, akik nem merik vállalni a nyilvános megmérettetést, vagy akiknek a földrajzi távolság, a verseny helyszínére való eljutás is gondot okozhat. A verseny maga, 6 online fordulóból, előre megadott tematikával és az online fordulókon elért eredmények alapján meghívott diákoknak szervezett döntőből áll. Az online fordulók természetesen anonimek és nem derül ki, hogy mely intézményekből valók a diákok. A döntőben való részvételhez viszont személyes megjelenés szükséges. A döntőt, az online fordulókkal megegyező körülmények között, de a BME Matematika Intézet számítógéptermeiben tartjuk. A versenyben két korcsoportot különböztetünk meg: 9−10. osztályosok és 11−12. osztályosok. A nagyobbak két különböző nehézségi szint közül is választhatnak. Az egyik szint nem mutat túl a középszintű érettségi színvonalán, a másik az emelt szintű érettségit célozza meg. Ezzel a bontással azt szerettük volna elérni, hogy bárki sikeres lehessen, és bárki hozzájusson a sikeres feladatmegoldás örömához. A nehézséget nem a példák összetettsége, bonyolultsága jelenti, hanem az, hogy meghatározott számítógépidő felhasználásával kell megoldani az aktuális feladatsort. Egy-egy feladatsor megoldására két hét áll rendelkezésre. A beküldési határidő letelte után a részletes megoldások azonnal felkerülnek a honlapra, hogy ezzel is segítsük az otthoni tanulást, gyakorlást. A gyakorlófelületen meghirdetett verseny másik nagy előnye, hogy a határon túlról is bárki bekapcsolódhat. Ezeknek a diákoknak az arányát – mivel az online fordulók anonimek – nem tudjuk pontosan megmondani, de azt látjuk, hogy a döntő 25–30 versenyzője (tehát a legjobbak) között mindig akad 3–5, aki az országhatáron túlról érkezik, még akkor is, ha maga az utazás is okozhat nehézséget.

Sajnos 2020-ban a koronavírus-járvány miatt a legjobbak számára szervezett döntőt is online formában kellett megtartani. Erre a 25 legjobb eredményt elérő diák kapott meghívást − nagyon sok vidéki és néhány határon túli településről.

Érdekes lehet megnézni, az évek során hogyan alakult a versenyzők átlagos teljesítménye, kategóriákként, az egyes témakörökben.



Demokratizálódás és esélykiegyenlítődés a tanulási folyamatban

Mind a felkészítő kurzusok, mind az új üzemmérnökképzés tanulságokkal szolgál arra nézve, hogy a közép- és felsőoktatás társadalmi háttere és funkciója hogyan változott az utóbbi évtizedekben, és ezek miféle új kihívások elé állítják az oktatásszervezőket. Az általános tankötelezettség társadalmi funkciója ma már nem az, mint 60 évvel ezelőtt volt, amikor a társadalmi mobilitást segítette elő. Nem a magasabb társadalmi státusba kerülés készteti a diákságot a középiskolai évek során a tudomány elsajátítására, a tantárgyak iránti érdeklődés erősen alábbhagyott az utóbbi évtizedekben. Az egyetemre kerülés esetében még megvan az a hajtóerő, hogy a hallgatók felsőbb szaktudás megszerzése révén szeretnének magasabb státusba kerülni, de akkorra a motiváció már kevés, a korábban elmulasztott alapozás komoly nehézséget okoz a továbbhaladásban. A középiskola időszakában a tudomány iránti érdeklődést már nem lehet pusztán az unásig ismételt „ha nem tanulsz, kukás lesz belőled" vagy az „ez van, ezt kell szeretni" szólamokkal kiváltani. Elengedhetetlen, hogy a felsőoktatási intézmények már a felsőbb tanulmányok megkezdése előtt is részt vegyenek a diákok motiválásában. Ennek módja az olyan programok indítása, amibe középiskolások is teljesen akadálytalanul bekapcsolódhatnak. Kétségkívül ilyen kezdeményezés akár a BME Alfa gyakorlófelület, akár a minden évben megszervezett ingyenes BME online matematikaverseny és közös felkészülés az érettségire. A pontversenyben nem csak olyanokat céloztunk meg, akik egyébként is a nagy hagyományokkal rendelkező magyar tanulmányi versenyekre rendszeresen jelentkeznek, hanem azokat is, akik még sosem voltak versenyen, de kipróbálnák magukat egy rendszeres, a középszintű érettségi nehézségének megfelelő feladatmegoldó kurzusban. Nyilván a versenyszerűen matekozó gyerekeknek ez nem kihívás, de azoknak, akik rendszeres külső motiválást igényelnek, azoknak egy kellemes matematika közeli élményben lesz részük.

A diákok önálló tanulásszervezése ma már nem kívülről kikényszerítendő cél, hanem – ha kellő nyitottsággal tekintünk a jelenségre – napi tapasztalat, feltéve, hogy a tudásnak nem a klasszikus forrásait – a tankönyveket és a tanárt – látjuk csak a szemünk előtt. Az 1960-as évek társadalmi-kulturális változásai után a tekintélyelvű oktatási-nevelési kultúra szépen lassan demokratikusabb irányba tolódott el, az intézmények részéről lassabban, a diákság autonóm tevékenysége folytán gyorsabban. Ma már nem a tanár és a tankönyv a tudás kizárólagos forrása. Még kevésbé feladata és lehetősége a tanárnak a fegyelemre és engedelmességre nevelés. Az ennek való megfelelést a diákoktól ma elvárni hiú ábránd, ráadásul távol áll azoktól a céloktól, amit ma a tudomány a pedagógia céljaként értelmez. A tanulás terei már nem korlátozódnak az osztálytermekre, nem azért, mert a közoktatásnak ez ne lenne törekvése, hanem mert a diákok egyszerűen más helyre fókuszálják a figyelmüket. A tudás megszerzésére irányuló figyelem a diákság részéről ma már az online terekre helyeződik át. A diák a saját tanulását ma már önállóan szervezi, vagy nem szervezi, mindenesetre a tanárnak ebben csak a segítő szerepe jut.

A globalizáció és az online terek jelentőségének felerősödése a kisebbségeket és a társadalmi szempontból hátrányosabb helyzetben lévőket is segítheti a korábbi, lokális gyökerű, társadalmi korlátok leküzdésében. Például a határon túli magyaroknak már nem kell Budapestre utazniuk, hogy részesülhessenek a magyarországi természettudományos kultúrából. A gyakorlófelület és az online verseny számukra is elérhető, és élnek is a felajánlott lehetőséggel.

Rendkívül figyelemreméltó fejlemény, hogy a végzős korosztály esetén az országban szinte egyedüliként a BME Alfa matematikaversenyen valósul meg évről évre a lány és fiú résztvevők kiegyensúlyozottsága. A jelentkezés online történik, a feladatok kiértékelését pedig gép végzi, és az Alfa versenyen szinte minden évben ugyanannyi lány kerül be a döntőbe és átlagosan ugyanannyi dobogós lesz, mint fiú. Közkeletű az a nézet, hogy a lányok egyáltalán nem rosszabbak a természettudományokból, mint a fiúk, csak a mérések még nem eléggé megfelelőek arra a célra, hogy ezt a kiegyensúlyozottságot kimutassák. Nos, a BME Alfa online verseny ezt az eredményt majdnem minden évben automatikusan hozza.

Tudástár, feladatbank

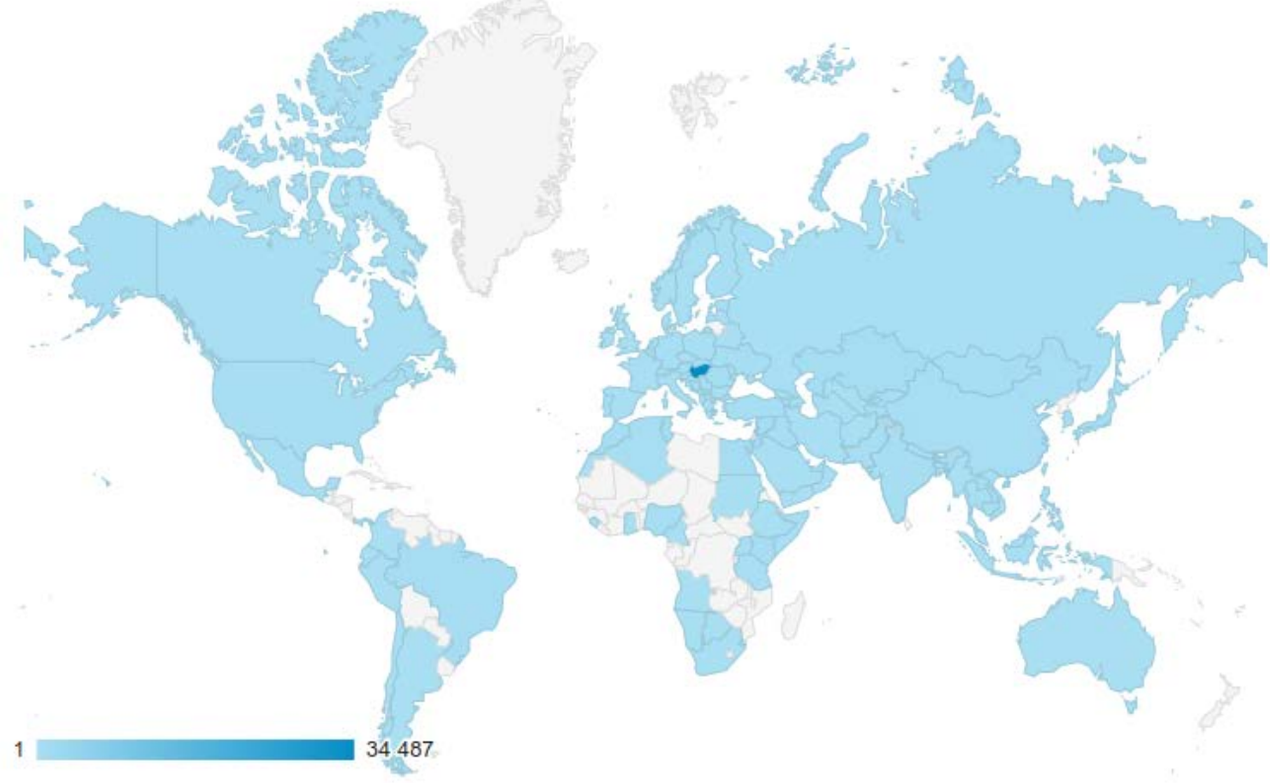
A verseny régebbi feladatai a megoldásokkal együtt megtalálhatók a https://alfa.bme.hu/ oldalon. Ez nem csak a tehetséggondozásban segíti a középiskolai tanárokat, de az átlagos képességű diákok oktatásában is nagy segítség lehet. Ismerünk eseteket, amikor a diákokkal együtt a tanár is belekukkant a versenypéldákba, hogy onnan ötletet nyerjen akár érettségire való felkészítéshez, akár a versenyfelkészítés céljából. A gondosan megválogatott feladatok olyanok, hogy azok a közép- és emelt szintű érettségi követelményeknek megfeleljenek. Emellett olyan példák is bekerültek a feladatok közé, amelyek ma már kimentek a divatból, de a 30–40 évvel ezelőtti felvételiken szívesen adták fel őket. Az Alfa, mint feladatbank, tehát nem csak a jelent tükrözi, hanem a matematikai kulturális örökséget is ápolja. Erre garancia, hogy a feladatokat mind gyakorló tanárok, mind (adott esetben éppen a megfelelő témát kutató) egyetemi oktatók készítik.

Az idei tavasz megmutatta, hogy ez a matematikaverseny nem csupán egy csepp a tengerben, hanem azok közé a kevesek közé tartozik, amelyet meg is lehetett tartani. A rekordszámú jelentkező is igazolja, hogy van létjogosultsága, haszna a versenyünknek.

Nemzetköziesítés

Mind matematikából, mind fizikából a feladatok egy része angol nyelven is elérhető. Jó döntés volt ebbe az irányba is lépéseket tenni, mert így alkalmassá vált a rendszer a Műegyetem iránti külföldi érdeklődők (akik például a Stipendium Hungaricum program keretében jöhetnek Magyarországra) felvételi vizsgára való felkészülésére és a vizsga megszervezésére is.

Az Alfa gyakorlófelület használatának területi eloszlása:



Hivatkozások

Baranyi Máté, Molontay Roland (2019): Effect of Mathematics Remediation on Academic Achievement – A Regression Discontinuity Approach In: 2019 International Symposium on Educational Technology (ISET) Hradec Králové, Csehország : IEEE, (2019) pp. 29–33.

Csákány Anikó (2013): Mit tudnak az elsőéves műegyetemi hallgatók a vektorokról? Acta Carolus Robertus, 3 (1), pp. 189–196. http://epa.niif.hu/02400/02498/00005/pdf/EPA02498_acta_carolus_robertus_2013_1_189-196.pdf

Csákány Anikó és Pipek János (2010): A 2009 szeptemberében a műszaki és természettudományos szakokon tanulmányaikat kezdő hallgatók által írt matematika felmérő eredményeiről. Matematikai Lapok, 16 (1), pp. 1–15.

Radnóti Katalin és Nagy Mária (2014): A matematika szerepe a természettudományos képzésben. Új Pedagógiai Szemle, 64 (5–6), pp. 89–102. http://folyoiratok.ofi.hu/uj-pedagogiai-szemle/a-matematika-szerepe-a-termeszettudomanyos-kepzesben

Molnár Zoltán (2018): Milyen matematikát kell tanítanunk és azt hogyan? *Új Pedagógiai Szemle*, 2018. 5-6., pp. 86-108.

A szerzők az Alfa csapatának tagjai: Gergi Miklós[1], Kiss Sándor[1], Lángné Dr. Lázi Márta[1], Molnár Zoltán[1], Nagy Ilona[1], Pécsi István[2], Péterné Kovács Anikó[1], Rácz Éva[3], Ruppert László[3].

[1] BME TTK Matematika Intézet,

[2] Verseghy Ferenc Gimnázium, Szolnok

[3] Palacky University, Olomouc

A leírt munkákat és a cikket az alábbi pályázatok támogatták:

Bepillantás a jövődbe! – Komplex műegyetemi pályaorientációs és továbbtanulást segítő programok (EFOP-3.4.4-16-2017-00025),

Műegyetemi tehetséggondozás 2019, NTP-FKT-19-0009

---

matematikatanítás BME

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szoldatics József 2020. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Út on-módon 3.

Egy feladat és ami róla az eszembe jutott...

A júniusi számban egy olyan algebra feladatot járunk körbe, amely sokféle témakör között teremt kapcsolatot. Bár leggyakrabban a teljes indukció tanítása során találkozunk vele, ismert algebrai átalakításokat felhasználó megoldása is, megközelíthetjük kombinatorikai eszközökkel és rekurzióval is. Cikkemben ezekre a módszerekre több változatot is be fogok mutatni. A feladat többek között a KöMaL 2020. márciusi számában is megjelent a „Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire” cikkben.

A feladat

Bizonyítsuk be, hogy $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}$; ahol $n\in\mathbb{N}^+$.

Használt összefüggések

A feladat megoldása során a következő ismert algebrai összefüggéseket használom:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)^2}{3}.$$

1. megoldás. Bontsuk fel a $k\cdot(k+1)$ kifejezést,

$$k\cdot(k+1)=k^2+k$$

alakba és használjuk ezt fel a bal oldal összegezésére!

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=$$

$$=1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+\ldots+n\cdot(n+1)=$$

$$=\left(1^2+1\right)+\left(2^2+2\right)+\ldots+\left(n^2+n\right)=$$

$$=\left(1^2+2^2+\ldots+n^2\right)+(1+2+\ldots+n)=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\left[\frac{2n+1}{3}+1\right]=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+4}{3}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2\,(n+2)}{3}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. megoldás. Bontsuk fel ismét a $k\cdot(k+1)$ kifejezést, de most a

$$k\cdot(k+1)=[(k+1)-1]\cdot(k+1)=(k+1)^2-(k+1)$$

alakba és használjuk ezt fel a bal oldal összegezésére!

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=$$

$$=(2-1)\cdot 2+(3-1)\cdot 3+\ldots+[(n+1)-1]\cdot(n+1)=$$

$$=\left(2^2-2\right)+\left(3^2-3\right)+\ldots+\left((n+1)^2-(n+1)\right)=$$

$$=\left(2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2\right)-(2+3+\ldots+(n+1))=$$

$$= \left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n+1)^2\right)-(1+2+3+\ldots+(n+1)) =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\cdot\left[\frac{2n+3}{3}-1\right] =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\cdot\frac{2n}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

3. megoldás. Az ötletet a megoldáshoz ismét a $k\cdot(k+1)$ kifejezés adja. Ezt a kifejezést én már láttam, méghozzá a $(2k+1)^2$-ben:

$$(2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 4\cdot k\cdot(k+1)+1.$$

Tehát

$$k\cdot(k+1) = \frac{(2k+1)^2-1}{4}.$$

Alkalmazva

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1) =$$

$$= \frac{3^2-1}{4}+\frac{5^2-1}{4}+\ldots+\frac{(2n+1)^2-1}{4} =$$

$$= \frac{3^2+5^2+\ldots+(2n+1)^2}{4}-\frac{n}{4} =$$

$$= \frac{1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n+1)^2}{4}-\frac{n+1}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)\dfrac{4n^2+8n+3}{3}}{4}-\frac{n+1}{4} = \frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{12}-\frac{n+1}{4} =$$

$$= \frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{12}-\left[\frac{3(n+1)}{12}\right] =$$

$$= \frac{n+1}{4}\cdot\frac{4n^2+8n}{3} = \frac{n+1}{4}\cdot\frac{4n(n+2)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

4. megoldás. Az ötletet a megoldáshoz ismét a $k\cdot(k+1)$ kifejezés adja. Ezt a kifejezést én már láttam, méghozzá a $(k+1)^3$-ben:

$$(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1 = k^3+1+3\left[k(k+1)\right].$$

Tehát

$$k\cdot(k+1)=\frac{(k+1)^3-k^3-1}{3}.$$

Alkalmazva

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=$$

$$=\frac{2^3-1^3-1}{3}+\frac{3^3-2^3-1}{3}+\ldots+\frac{(n+1)^3-n^3-1}{3}=$$

$$=\frac{2^3+3^3+\ldots+(n+1)^3}{3}-\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{3}-\frac{n}{3}=$$

$$=\frac{(n+1)^3-1^3-n}{3}=\frac{n^3+3n^2+2n}{3}=\frac{n(n^2+3n+2)}{3}=$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

5. megoldás. Az ötletet a megoldáshoz ismét a $k\cdot(k+1)$ kifejezés adja. Itt két egymás utáni szám van összeszorozva, de az ezen számok előtti és utáni két szám különbsége 3, azaz $(k+2)-(k-1)=3$. Használjuk ezt:

$$k\cdot(k+1)=\frac{3k\cdot(k+1)}{3}=\frac{[(k+2)-(k-1)]k\cdot(k+1)}{3}=$$

$$=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}{3}-\frac{(k-1)\cdot k\cdot(k+1)}{3}$$

Ezt az azonosságot alkalmazzuk n-től 2-ig:

$$n\cdot(n+1)=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}-\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3},$$

$$(n-1)\cdot n=\frac{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}{3}-\frac{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{3},$$

$$(n-2)\cdot(n-1)=\frac{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}{3}-\frac{(n-3)\cdot(n-2)\cdot(n-1)}{3},$$

$$\vdots$$

$$3\cdot 4=\frac{3\cdot 4\cdot 5}{3}-\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3},$$

$$2\cdot 3 = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{3} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3},$$

$$1\cdot 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3} - \frac{0\cdot 1\cdot 2}{3}.$$

Összeadva a felírt egyenleteket, a jobb oldalon két kifejezés kivételével minden kétszer szerepel, a két kifejezés egymás ellentettje, ezért kapjuk:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3} - \frac{0\cdot 1\cdot 2}{3},$$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}.$$

6. megoldás. Az ötletet a megoldáshoz ismét egy kifejezés, a $k\cdot(k+1)+(k+1)\cdot(k+2)$ adja. Ezek a bal oldal egymás utáni két tagja.

$$k\cdot(k+1)+(k+1)\cdot(k+2) = (k+1)\cdot[k+(k+2)] = 2\cdot(k+1)^2.$$

Induljunk ki a bal oldalból, legyen $n=2k$ és párosítsunk:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\ldots+(n-1)\cdot n+n\cdot(n+1) =$$

$$= \underbrace{1\cdot 2+2\cdot 3}+\underbrace{3\cdot 4+4\cdot 5}+\ldots+\underbrace{(2k-1)\cdot 2k+2k\cdot(2k+1)} =$$

$$= 8\cdot 1^2+8\cdot 2^2+\ldots+8\cdot k^2 = 8\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = 4\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{3} =$$

$$= \frac{2k(2k+2)(2k+1)}{3} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}.$$

Legyen most $n=2k+1$, ekkor

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+\ldots+(n-1)\cdot n+n\cdot(n+1) =$$

$$= \underbrace{1\cdot 2+2\cdot 3}+\underbrace{3\cdot 4+4\cdot 5}+\ldots+\underbrace{(2k-1)\cdot 2k+2k\cdot(2k+1)}+(2k+1)\cdot(2k+2) =$$

$$= 8\cdot 1^2+8\cdot 2^2+\ldots+8\cdot k^2+(2k+1)\cdot(2k+2) =$$

$$= 8\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(2k+1)\cdot(2k+2) =$$

$$= 4\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{3}+(2k+1)\cdot(2k+2) =$$

$$= \frac{2k(2k+2)(2k+1)}{3} + (2k+1)\cdot(2k+2) =$$

$$= (2k+1)\cdot(2k+2)\cdot\left[\frac{2k}{3}+1\right] =$$

$$= \frac{(2k+1)(2k+2)(2k+3)}{3} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{3}.$$

7. megoldás. Ennyi algebra megoldás után nézzünk most valami mást!

Tekintsük a következő feladatot:

Adott $n+2$ különböző magasságú diák, közülük 3 diákot választunk ki. Hányféleképpen tudjuk ezt megtenni?

Adunk rá 2 megoldást.

I. megoldás

Mivel a diákok különbözőek, kiválasztási sorrendjük nem érdekes, 1 diák csak egyszer választható ki, ezért ez egy ismétlés nélküli kombinációs feladat, aminek a megoldása

$$\binom{n+2}{3}.$$

II. megoldás

Állítsuk a diákokat magassági sorrendbe.

A legkisebb diákot tekintve 2 eset van, vagy szerepel a kiválasztottak között, – ez $\binom{n+1}{2}$ eset – vagy nem.

Ha a legkisebb nem szerepel a kiválasztottak között, akkor vegyük a második legkisebbet. Az ő szemszögéből is most két eset van, vagy szerepel, – ez $\binom{n}{2}$ eset – vagy nem.

és így tovább az utolsó 3 diákig, azaz $\binom{2}{2}$ -ig.

Tehát a lehetséges kiválasztások száma

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}.$$

Két megoldást is adtunk a feladatra, a végeredmény ugyanaz:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n+1}{2}=\binom{n+2}{3},$$

$$\frac{2!}{2!\cdot 0!}+\frac{3!}{2!\cdot 1!}+\frac{4!}{2!\cdot 2!}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2!\cdot(n-1)!}=\frac{(n+2)!}{3!\cdot(n-1)!},$$

$$1+\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 4}{2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3},$$

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

8. megoldás. Ismét egy kombinatorikus megoldást adunk.

Tekintsük a következő feladatot, amit a 7. megoldásánál is néztünk:

Adott $n+2$ különböző magasságú diák, közülük 3 diákot választunk ki. Hányféleképpen tudjuk ezt megtenni?

A feladat megoldása.

Mivel a diákok különbözőek, kiválasztási sorrendjük nem érdekes, 1 diák csak egyszer választható ki, ezért ez egy ismétlés nélküli kombinációs feladat, aminek a megoldása

$$\binom{n+2}{3}.$$

Alakítsuk át kifejezésünket, közben használjuk a binomiális együtthatókra igaz képzési szabályt,

$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}.$$

Kiindulunk a kapott végeredményből és a szabályt használva alakítunk:

$$\binom{n+2}{3}=\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}=$$

$$=\binom{n+1}{2}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$$

$$= \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}$$

$$= \ldots$$

$$= \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} =$$

$$= \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}.$$

Azaz kaptuk, hogy

$$\binom{n+2}{3} = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \ldots + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2}.$$

Most alakítsuk a kapott azonosságot a 7. megoldáshoz hasonlóan!

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3}$$

$$\frac{2!}{2!\cdot 0!} + \frac{3!}{2!\cdot 1!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!} + \ldots + \frac{(n+1)!}{2!\cdot (n-1)!} = \frac{(n+2)!}{3!\cdot (n-1)!}$$

$$1 + \frac{2\cdot 3}{2} + \frac{3\cdot 4}{2} + \ldots + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3}$$

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

9. megoldás. A megoldás a „szokásos”. Teljes indukcióval bizonyítunk!

I. eset

Nézzük meg, hogy teljesül-e a bizonyítandó állítás $n = 1$ esetre:

$$n = 1: \qquad 1\cdot 2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3} = 2.$$

A vizsgált esetre teljesül az állítás.

II. eset

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra tejesül, hogy

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k\cdot(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}{3}$$

III. eset

Nézzük az $n=k+1$ esetet, induljunk ki a bizonyítandó állítás bal oldalából:

$$\begin{aligned}
&1\cdot 2\ +2\cdot 3+\ldots+k\cdot(k+1)+(k+1)\cdot(k+2)=\\
&\quad=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}{3}+(k+1)\cdot(k+2)=\\
&\quad=(k+1)(k+2)\left(\frac{k}{3}+1\right)=(k+1)(k+2)\frac{k+3}{3}=\\
&\quad=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}.
\end{aligned}$$

Azaz

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k\cdot(k+1)+(k+1)\cdot(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3},$$

és ezt akartuk kapni, tehát a bizonyítás kész.

10. megoldás. És végül nézzünk most egy „kemény” megoldást, kezeljük a feladatot rekurzív módon. Legyen

$$f_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)$$

egy sorozat eleme. Ekkor rekurzív módon megfogalmazva a feladatot:

$$f_1=1\cdot 2=2;\qquad f_n=f_{n-1}+n\cdot(n+1);\ n\geq 2.$$

Átírva a sorozatot:

$$f_1=1\cdot 2=2;\qquad n\cdot\frac{f_n}{n}=(n-1)\cdot\frac{f_{n-1}}{n-1}+n\cdot(n+1);\ n\geq 2.$$

Vezessünk be új sorozatot: $g_n=\dfrac{f_n}{n}$. Ekkor a keresett sorozat

$$g_1=2;\qquad n\cdot g_n=(n-1)\cdot g_{n-1}+n\cdot(n+1).$$

A g_n sorozatot keressük $h_n + an^2 + bn + c$ alakban.

$$\begin{aligned} g_1 &= h_1 + a + b + c, \\ g_n &= h_n + an^2 + bn + c, \\ g_{n-1} &= h_{n-1} + a(n-1)^2 + b(n-1) + c. \end{aligned}$$

Ezt használva,

$$\begin{aligned} n \cdot g_n &= (n-1) \cdot g_{n-1} + n \cdot (n+1), \\ n \cdot \left[h_n + an^2 + bn + c\right] &= (n-1) \cdot \left[h_{n-1} + a(n-1)^2 + b(n-1) + c\right] + n \cdot (n+1), \end{aligned}$$

rendezve

$$n \cdot h_n = (n-1) \cdot h_{n-1} + \underbrace{n^2(1-3a) + n(1+3a-2b) + (-a+b-c)}.$$

Ha úgy választjuk meg a, b és c értékét, hogy a megjelölt kifejezés nulla minden n értékére, akkor egyszrű lesz a helyettesítés h_n sorozatra. Mivel a kifejetés másodfokú, ezért ez csak akkor lesz minden értékre nulla, ha az együtthatói nullák, azaz

$$\begin{cases} 1-3a=0 \\ 1+3a-2b=0 \\ -a+b-c=0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{1}{3};\ b = 1;\ c = \frac{2}{3},$$

$$g_n = h_n + \frac{1}{3}n^2 + n + \frac{2}{3}.$$

Tehát a h_n sorozatra

$$h_1 := 0; \qquad n \cdot h_n = (n-1) \cdot h_{n-1}.$$

A képzési szabályt felírva:

$$\begin{aligned} n \cdot h_n &= (n-1) \cdot h_{n-1}, \\ (n-1) \cdot h_{n-1} &= (n-2) \cdot h_{n-2}, \\ &\vdots \\ 3 \cdot h_3 &= 2 \cdot h_2, \\ 2 \cdot h_2 &= 1 \cdot h_1 = 0. \end{aligned}$$

Visszafelé követve az egyenleteket adódik, hogy

$$n \cdot h_n = 0; \qquad \Rightarrow \qquad h_n = 0,$$

$$g_n = h_n + an^2 + bn + c = 0 + \frac{1}{3}n^2 + n + \frac{2}{3},$$

$$\frac{f_n}{n} = g_n = \frac{1}{3}n^2 + n + \frac{2}{3},$$

$$f_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

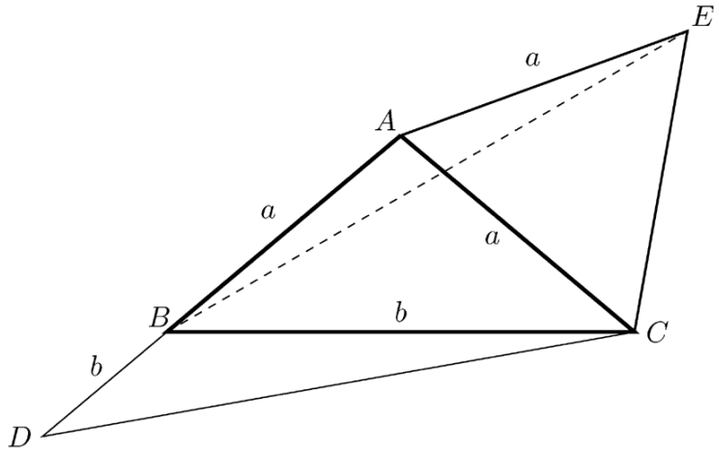
Visszacsatolás

Az Úton-módon 1. cikkében levő feladattal kapcsolatban többen is jelezték, hogy az már kitűzésre került a Matematika Tanítása folyóiratban és az 1986 évi 4. számban jelentek is meg megoldások. Az ott szereplő 4 megoldás közül most Róka Sándor megoldását ismertetem az eredeti leírással. Róka Sándor bemutatása – úgy gondolom – nem szükséges, ismeretterjesztő matematikakönyveiről közismert.

Emlékeztetőül a feladat: Az ABC háromszögben $AB = AC$ és $CAB\sphericalangle = 100°$. Az AB oldal B-n túli meghosszabbításán vegyük fel a D pontot úgy, hogy $AD = BC$ teljesüljön. Számítsuk ki az $ADC\sphericalangle$ nagyságát.

Róka Sándor megoldása

Emeljünk az AC oldalra kifelé ACE szabályos háromszöget.



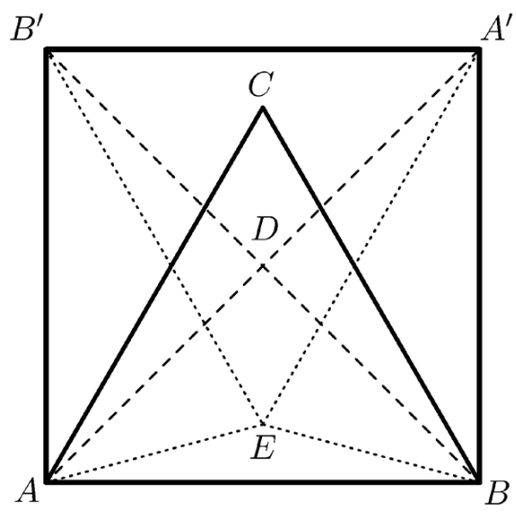
Az $ADC\triangle$ egybevágó a $BCE\triangle$-gel, mert $BC = AD$, $CE = AC$ és $BCE\sphericalangle = CAD\sphericalangle = 100°$. Mivel $BAE\triangle$ egyenlő szárú és szárszöge $160°$, így $AEB\sphericalangle = 10°$, tehát $BEC\sphericalangle = 50°$ és $CDA\sphericalangle = EBC\sphericalangle = 30°$. A $BCD\triangle$ szögei tehát: $140°$, $30°$ és $10°$.

Az Úton-módon 2. cikkében levő feladattal kapcsolatban is érkezett visszajelzés. A levélíró Laborczi Zoltán, aki a Győri Révai Miklós Gimnáziumban érettségizett 1967-ben és azon évben az IMO csapatnak is tagja volt IV. osztályosként és III. díjat nyert. Most matematikus, nyugdíjas informatikus.

Emlékeztetőül a feladat: Az ABC szabályos háromszög AB oldalának felezőpontja F. A CF szakasz azon belső pontja a D pont, amelyre az ADB szög 90 fokos. A CF szakasz azon belső pontja az E pont, amelyre a CD és a DE szakaszok hossza egyenlő. Hány fokos az AEB szög?

Laborczi Zoltán megoldása

A 4. megoldáshoz hasonlóan tükrözzük az ABC háromszöget a D pontra.



Ekkor a C tükörképe E. Az így kapott $ABA'B'$ négyszög négyzet, hiszen átlói merőlegesek és egyenlő hosszúak. Az ABC szabályos háromszög tükörképe az $A'B'E$ háromszög, szintén szabályos. Az $AB'E$ háromszög egyenlő szárú, amelyben az

$$AB'E\sphericalangle = AB'A'\sphericalangle - EB'A'\sphericalangle = 90° - 60° = 30°,$$

így a háromszög alapszögei $75°$-osak, tehát

$$AEB'\sphericalangle = 75°.$$

Az E pontnál lévő szögek összege $360°$, így a keresett szög:

$$AEB\sphericalangle = 360° - AEB'\sphericalangle - BEA'\sphericalangle - B'EA'\sphericalangle = 360° - 2 \cdot 75° - 60° = 150°.$$

Zárszó

Kedves Olvasó! Ha egy másik „szép” megoldást talál, kérem, küldje el nekem a szolda@fazekas.hu e-mail címre. Ezeket az újabb megoldásokat összegyűjtve időnként (terveim szerint) szintén megmutatnám.

Szoldatics József

(A bevezető kép Kelly Lacy fotója a **Pexels** oldaláról.)

KöMaL algebra

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Fried Katalin 2020. JÚNIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Hány bőrt lehet lehúzni egy feladatról? – avagy nincs új a Nap alatt?

Szeretem böngészni a KöMaL-archívumot, és nagyon sok kiváló feladatot találok, amelyeket tanításhoz is tudok használni.

Feltűnt, hogy egy-egy már megjelent feladat újra és újra előkerül – esetleg kicsit más köntösben.

Már a folyóirat első évtizedében többször előfordult egy nevezetes (nem feltétlenül szabályos) hatszög. Ennek a hatszögnek egyenlőek, azaz 120°-osak a szögei, és ebből következően szemközti oldalai párhuzamosak. Egy-egy feladatban egy további adott tulajdonságából kellett egy újabbra következtetni. Ez az újabb adott és a bizonyítandó tulajdonság rendszerint ekvivalens az egyenlőszögű hatszögek körében, de attól függően, hogy melyik tulajdonság van adva, más és más irányba indíthatja el a gondolkodásunkat.

Így keletkezhettek a feladatváltozatok.

Az alábbiakban bemutatok néhány variációt a feladatra úgy, ahogyan a KöMaL-ban megjelentek, illetve hozzáfűzöm a magam változatait is. (A KöMaL kötetei nem a tanévek szerint, hanem a naptári évek szerint szerepelnek. Az oldalhivatkozások minden esetben a KöMaL nyomtatott oldalszámait jelölik.)

1903. szeptember, 26. oldal, 1195. jelű feladat. *Rajzoljunk oly* $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ *hatszöget, melynek szögei egyenlők s melyben* $A_1A_2 = A_3A_4 = A_5A_6$ *és* $A_2A_3 = A_4A_5 = A_6A_1$. *Mutassuk meg, hogy e hatszög köré kör rajzolható. Általánosítsuk e tételt. Számítsuk ki továbbá a hatszög köré írható kör sugarát, ha* $A_1A_2 = a$ *és* $A_2A_3 = b$.

A megoldás az 1904. januári szám 112–113. oldalán olvasható.

(Az általánosításhoz és a számítási részhez nem fogunk hozzászólni.)

Elsőre nem nyilvánvaló, hogy a következő feladat miben hasonlít az előbbire, de hamarosan összekapcsoljuk a feladatokat.

A másik, hasonló feladat:

Matematikai olimpiász Moszkvában, verseny, 1950. év 46–47. oldal, IX.–X. csoport, 5. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatszög szemközti oldalai párhuzamosak és a szemközti csúcsokat összekötő átlók egyenlők, akkor kör írható a hatszög köré.*

(Megoldás ugyanebben a kötetben a 153. oldalon.)

A feladat megjelent az 1958. évi Arany Dániel Matematikai Tanulóversenyen a haladók I. kategóriájában (10. évfolyam, általános tantervű osztály, 1. forduló, 3. feladat) is, amelyet a KöMaL is közölt az 1958. évi kötet 35. oldalán. Két megoldása is megjelent ugyanebben a kötetben a 45–46. oldalon.

Az óráimon a következő feladatot szoktuk tárgyalni és körüljárni:

Igazoljuk, hogy ha egy hatszög szögei egyenlők és a szemközti csúcsait összekötő átlói egyenlő hosszúak, akkor ez húrhatszög.

Világos, hogy az egyenlőszögűségből következik a szemközti oldalak párhuzamossága, így ez a feladat az olimpiász feladatának speciális esete. Az egyenlőszögű hatszögben – mint látni fogjuk – a másodszomszédos oldalak egyenlősége és a szemközti csúcsokat összekötő átlók egyenlősége ekvivalens feltétel, azaz bármelyikből következik a másik.

Azért ebben, az olimpiász feladatánál kicsit egyszerűbb formában adom fel a tanítványaimnak a feladatot, mert éppen úgy kezdődik, mint egy másik, szintén a KöMaL hasábjain (többször is) megjelent feladat, amelyet szintén megbeszélünk.

A másik, sokkal egyszerűbb feladat a **K 31., 2005. február, 96. oldal.**, amely szerint *ha egy hatszög szögei egyenlők, akkor két szomszédos oldal összege egyenlő a velük szemközti két oldal összegével.*

Ha a feladatbeli hatszög csúcsai sorban A, B, C, D, E, F, akkor például $DE+EF=AB+BC$-ből következik $DE-AB=BC-EF$, így világos, hogy ezzel ekvivalens a következő:

Gy. 2618. (1991. március, 126. oldal) és C. 1400. (2017. február, 93. oldal). *Bizonyítsuk be, hogy ha egy konvex hatszög belső szögei egyenlők, akkor a hatszög bármely két szemközti oldalának különbsége ugyanakkora.*

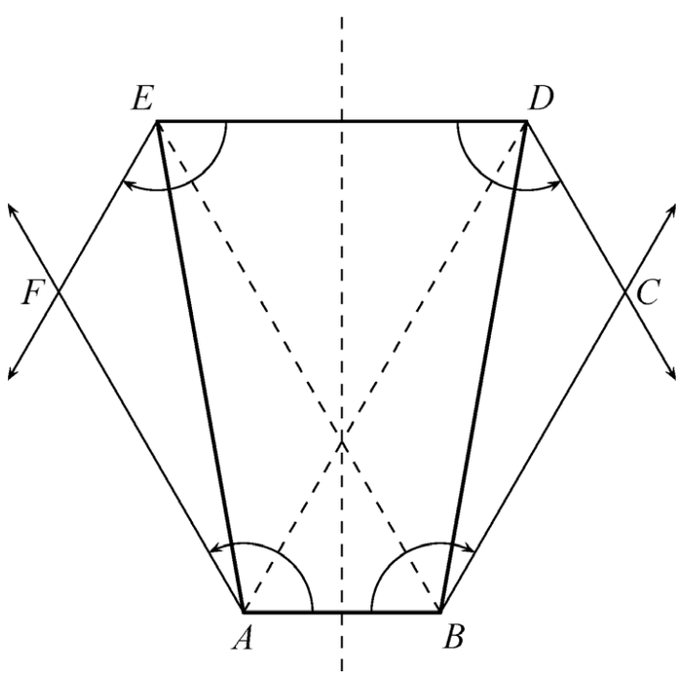
Egy lehetséges megoldás ötlete, hogy emeljünk egy-egy szabályos háromszöget két szemközti oldalra. Így egy paralelogrammává egészítettük ki a hatszöget.

Ez az ötlet még kapóra jöhet az órán tárgyalt feladat megoldáshoz is.

Megoldások és feladatvariációk az órán tárgyalt feladatra

1. megoldás. Ha a hatszög szögei egyenlők, vagyis minden szöge 120 fokos, akkor a szemközti oldalai párhuzamosak. Így például (a szokásos jelöléseket használva) az $ABDE$ négyszög trapéz, mert $AB \parallel DE$, és mivel két átlója, AD és BE ugyanolyan hosszú, így húrtrapéz is; AB és DE szakaszfelező merőlegese a szimmetriatengely.

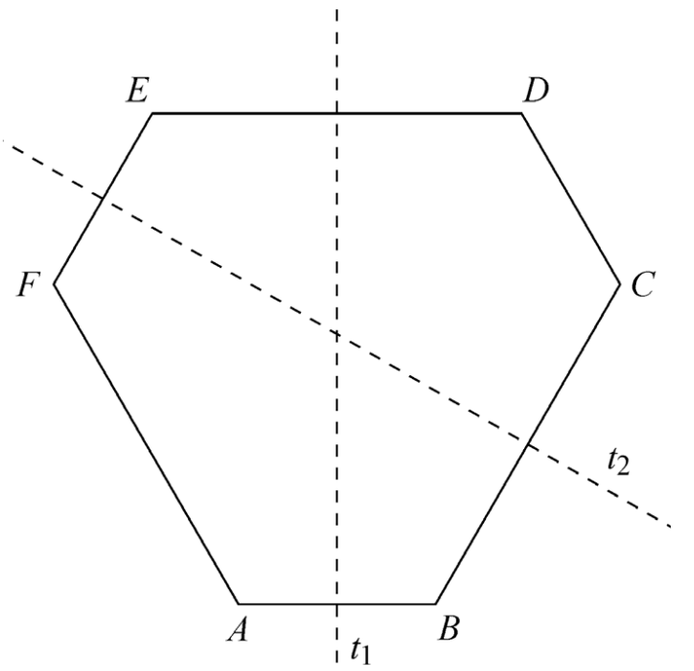
Az AB oldallal B-ben -120°-os és a DE oldallal D-ben 120°-os szöget bezáró félegyenesek metszéspontja C, illetve az AB oldallal A-ban 120°-os és a DE oldallal E-ben -120°-os szöget bezáró félegyenesek metszéspontja F. Mivel az említettek az $ABDE$ szimmetriatengelyére szimmetrikusan elhelyezkedő félegyenesek, a metszéspontjaik is szimmetrikusan helyezkednek el. Ezek szerint a hatszögnek van egy szimmetriatengelye.



Ugyanígy kiválaszthattuk volna a $BCEF$ vagy a $CDFA$ négyszöget is, ezért a hatszögnek három szimmetriatengelye is van.

A befejezésre két lehetőséget mutatunk.

1. lehetőség. Az AB-t merőlegesen felező t_1 és a BC-t merőlegesen felező t_2 szimmetriatengek O metszéspontjára a t_1, t_2 tengelyes szimmetriák miatt fennáll: $AO \overset{t_1}{=} BO \overset{t_2}{=} OC \overset{t_1}{=} OF \overset{t_2}{=} OE \overset{t_1}{=} OD$. Eszerint mind a hat csúcs ugyanolyan távol van O-tól, a hatszög köré kör írható, amelynek középpontja O. Az is látszik ebből a megoldásból, hogy $AOC\sphericalangle = 120^\circ$, mert az AC húrhoz tartozó középponti szög, sőt, $AOC\sphericalangle = COE\sphericalangle = EOA\sphericalangle$ is ennyi, valamint $BOD\sphericalangle = DOF\sphericalangle = FOB\sphericalangle$, ezért a hatszög ráadásul 120 fokos forgásszimmetriával is rendelkezik.



2. lehetőség. Belátható, hogy egy olyan hatszög, amelynek három (oldalközépponton átmenő) szimmetriatengelye van, 120°-os forgásszimmetriával rendelkezik. (Először is tudni kell, hogy két metsző tengelyű tükrözés egymásutánja forgatást eredményez, amelynek szöge a tengelyek által bezárt szög kétszerese. Másodszor be kell látni, hogy a tengelyek csakis egy pontban metszhetik egymást – ellenkező esetben lenne olyan pontja a hatszögnek, amelyet elég sokszor tükrözve a tengelyekre, a kép a hatszögön kívül kerülne. Eszerint A-t 120°-kal elforgatva C-t kapjuk, C-t 120°-kal elforgatva – ugyanazon középpont körül – E-t, E-t 120°-kal elforgatva A-t. Hasonlóan, B-ből D-t, D-ből F-et kapjuk.)

A 120 fokos forgásszimmetriából következik, hogy a másodszomszédos csúcsok szabályos háromszöget határoznak meg, és mivel a hatszög szögei 120 fokosak, azért – például – ACE háromszög szabályos és $ABCE$ húrnégyszög, aminek körülírt körére – a forgásszimmetria miatt – illeszkedik D és F is.

Következésképp a hatszög húrhatszög.

Ebből a megoldásból máris kapunk néhány újabb feladatvariációt:

1. variáció az eredeti feladatra. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatszög szögei egyenlők és szemközti csúcsait összekötő átlói egyenlő hosszúak, akkor forgásszimmetrikus. (KöMaL C. 1570, 2019. november, 483. oldal)

Megfordítva, vagyis abból, hogy egy egyenlőszögű hatszög forgásszimmetrikus, nem következik, hogy a szemközti csúcsait összekötő átlók egyenlő hosszúak. (Hiszen lehet, hogy a forgásszimmetria szöge $180°$.) A 120 fokos forgásszimmetriából viszont már igen.

2. variáció az eredeti feladatra. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatszög szögei egyenlők és szemközti csúcsait összekötő átlói egyenlő hosszúak, akkor a hatszög másodszomszédos oldalai egyenlő hosszúak.

Ez megfordítva is igaz: abból, hogy az egyenlőszögű hatszög másodszomszédos oldalai egyenlő hosszúak, következik, hogy a szemközti csúcsait összekötő átlói egyenlő hosszúak. Sőt, a forgásszimmetria is következik.

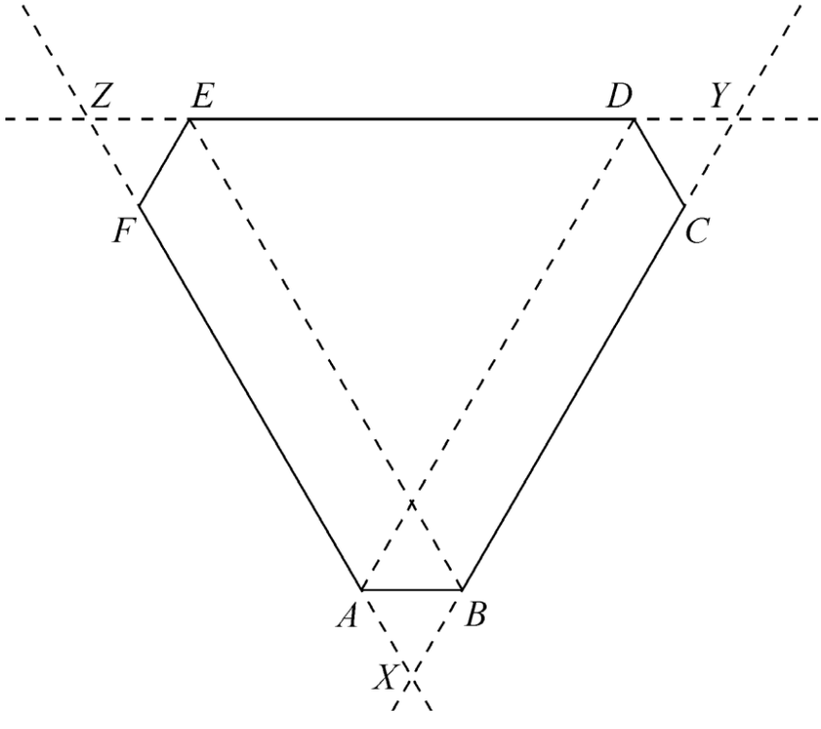
Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a 2. variációban bizonyítandó tulajdonság a korábban említett, 1195. jelű feladat feltétele.

3. variáció az eredeti feladatra. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatszög szögei egyenlők és szemközti csúcsait összekötő átlói egyenlő hosszúak, akkor a hatszög másodszomszédos csúcsai szabályos háromszöget határoznak meg.

Ennek a megfordítottja (ha az egyenlőszögű hatszög másodszomszédos csúcsai szabályos háromszöget alkotnak, akkor a szemközti csúcsait összekötő átlók egyenlő hosszúak) is igaz.

Kiválasztva ugyanis az A, C, E csúcsokat, a szögegyenlőség miatt a B csúcs az ACE köré írható kör rövidebbik AC ívén van (látószög), és ugyanígy a rövidebbik CE íven van D, illetve a rövidebbik EA íven van F. Ezért a hatszög húrhatszög, és mivel ADE és BCF szabályos háromszögek, így forgatással egymásba vihetők, ezért a szemközti csúcsokat összekötő átlók egyenlő hosszúak. (Például az AD-t elforgatva a megfelelő szöggel BE-t, illetve CF-et kapjuk.)

2. megoldás. Húzzuk be minden második oldal egyenesét. Legyen például FA és BC egyenesének metszéspontja X, BC és DE egyenesének metszéspontja Y, DE és FA egyenesének metszéspontja Z. A hatszög minden külső szöge $60°$, és ha egy háromszög két szöge $60°$-os, akkor az szabályos, ezért a három egyenes által közrezárt háromszög, azaz XYZ is szabályos.



A hatszög szomszédos oldalai $120°$-os szöget zárnak be egymással, így (például) $AB \parallel YZ$. Ebből következik, hogy $AX = BX$. Hasonlóan látható, hogy $CY = YD$, $EZ = ZF$.

Mivel pedig $AD = BE$, következésképp $YD = ZE$, mert E és D szimmetrikusan helyezkedik el az AB (azaz YZ) szakaszfelező merőlegesére.

Így nemcsak $EZ = ZF$ és $DY = YC$, hanem $EZ = ZF = DY = YZ$, sőt, $AX = XB$ is ezekkel egyenlő hosszú.

A hatszög tehát úgy kapható, hogy egy szabályos háromszög minden csúcsából ugyanakkora oldalhosszúságú szabályos háromszögeket vágunk le. Eszerint a hatszög csúcsai egyenlő távolságra vannak az XYZ szabályos háromszög középpontjától, a hatszög húrhatszög.

4. variáció az eredeti feladatra. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatszög szögei egyenlők és szemközti csúcsait összekötő átlói egyenlő hosszúak, akkor a hatszög másodszomszédos oldalainak egyenese olyan szabályos háromszöget zár közre, amelynek csúcsaitól egyenlő távolságra vannak a hozzájuk legközelebb eső hatszögcsúcsok.

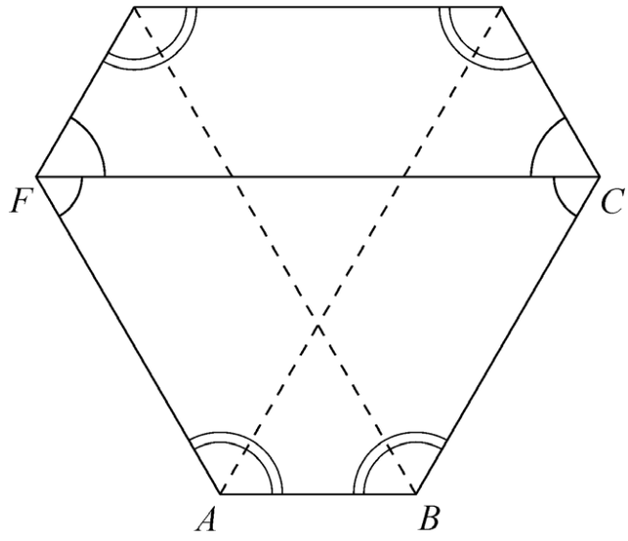
Vegyük észre, hogy az 1903-ban kitűzött 1195. jelű feladatban a hatszög körbe írhatóságát nem a szemközti csúcsokat összekötő átlók, hanem a másodszomszédos oldalak egyenlőségéből kell bizonyítani.

Igazolható, hogy egy egyenlő szögű hatszögben akkor és csak akkor egyenlő a szemközti csúcsokat összekötő átlók hossza, ha a hatszög másodszomszédos oldalai egyenlő hosszúak.

Az egyik irány (ha egyenlő hosszúak az átlók, akkor egyenlő hosszúak a másodszomszédos oldalak) például a fenti bizonyításból következik. A másik irány (ha egyenlő hosszúak a másodszomszédos oldalak, akkor egyenlő hosszúak az átlók) például így igazolható: Írjunk szabályos háromszögeket a másodszomszédos oldalakra kifelé: AXB, CYD, EZF. Ezzel egy XYZ szabályos háromszöget kapunk. Mivel $AX = XB = AB = CY = YD = CD = EZ = ZF = EF$, ebből (például a forgásszimmetriára való tekintettel) következik, hogy $BE = AD = FC$, azaz a szemközti csúcsokat összekötő átlók egyenlő hosszúak.

3. megoldás. Az 1. megoldásból láttuk, hogy (például) $AB \parallel DE$ és C, illetve F egymással szimmetrikusan helyezkedik el az $ABDE$ szimmetrikus trapéz tengelyére. Ebből következik, hogy CF merőleges a szimmetriatengelyre, vagyis párhuzamos AB-vel és DE-vel is. Mivel a $CDEF$ négyszögben D-nél és E-nél ugyanakkora (120°-os) szögek vannak, ebből következik, hogy $CDEF$ húrtrapéz. Hasonlóan nyilván $ABCF$ is húrtrapéz.

E D



Ezt a gondolatmenetet bármelyik szemközti oldalpárra levezethetjük.

Eszerint az A, B, C pontok köré írható körre illeszkedik F is (mert $ABCF$ húrtrapéz), E is (mert $ABEF$ húrtrapéz) és D is (mert $ABDE$ húrtrapéz).

Ebből következik, hogy a hatszög húrhatszög.

5. variáció az eredeti feladatra. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatszög szögei egyenlők és szemközti csúcsait összekötő átlói egyenlő hosszúak, akkor a szóbanforgó átlók párhuzamosak egy-egy hatszögoldallal.

Ennek a variációnak a megfordítása is igaz: Ha az egyenlőszögű hatszög szemközti csúcsait összekötő átlói párhuzamosak egy-egy megfelelő hatszögoldallal, akkor ezek az átlók egyenlő hosszúak.

Na, még egy variáció!

Ezúttal egy másik feladat felől közelítjük meg az eredetit:

Igazoljuk, hogy ha egy KLM szabályos háromszög köré írható körén a rövidebbik KL íven felveszünk egy N pontot, akkor $KN + NL = MN$!

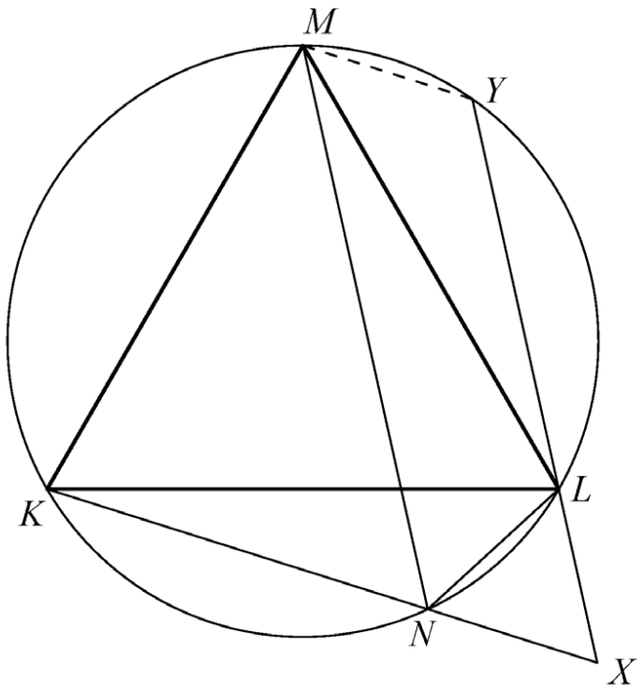
Erre is több (szám szerint két) megoldást adunk.

1. megoldás. Mivel $KNLM$ húrnégyszög, $KNL\sphericalangle = 180^\circ - KML\sphericalangle = 120^\circ$. Az ML húrhoz tartozó MKL és MNL szögek egyenlők, azaz $MNL\sphericalangle = 60^\circ$. Ezért $KNM\sphericalangle$ is 60 fokos.

Rajzoljunk NL-re NXL szabályos háromszöget úgy, hogy X a körön kívülre essen. Mivel MN és XL is 60 fokos szöget zár be KN egyensével, azért $MN \parallel LX$.

Jelölje az LX egyenesének és a körnek a másik metszéspontját Y (az egyik maga az L pont).

A $KLYM$ húrnégyszög, ezért $LYM\sphericalangle = 180^\circ - LKM\sphericalangle = 120^\circ$.



Mivel az $MNXY$ négyszögnek két szemközti szöge, $MNX\sphericalangle = LYM\sphericalangle = XYM\sphericalangle = 120^\circ$ egyenlő, valamint $MN \parallel XY$, így $MNXY$ paralelogramma.

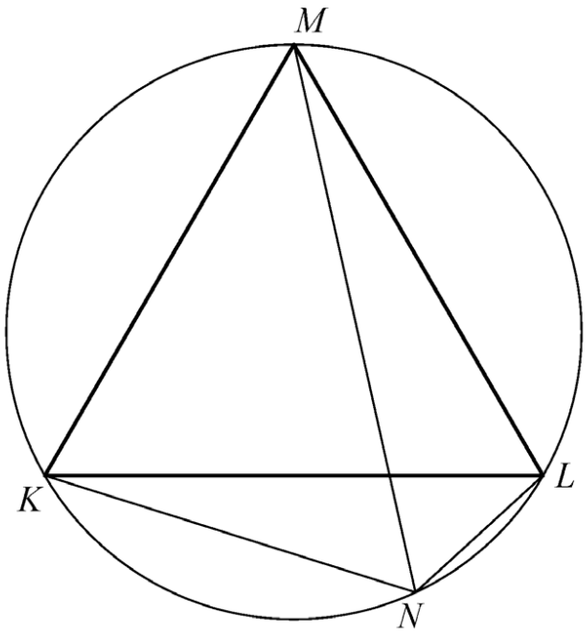
LNK és MYL háromszögek egybevágók, mert két oldaluk ugyanolyan hosszú ($KL = LM$ és $LN = MY$), továbbá a hosszabbik oldallal szemközti szögük egyenlő ($KNL\sphericalangle = NYM\sphericalangle = 120^\circ$).

Ebből következik, hogy $KN = LY$, de az $MNXY$ paralelogrammából, illetve NXL szabályos háromszögből ekkor $MN = LY + XL = KN + NL$ következik, ami éppen a feladat állítása.

2. megoldás. „Ágyúval lövünk verébre”, és alkalmazzuk a Ptolemaiosz-tételt, miszerint egy húrnégyszögben a szemközti oldalak szorzatának összege egyenlő az átlók szorzatával, esetünkben:

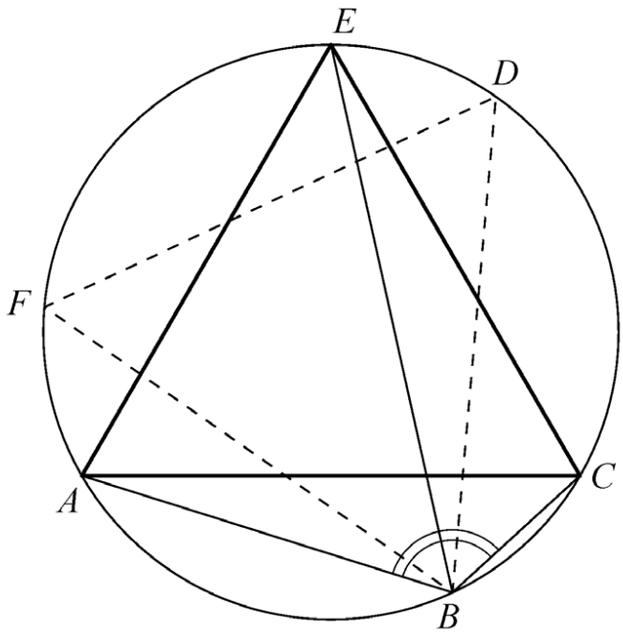
$$KL \cdot MN = LM \cdot KN + MK \cdot LN,$$

amelyet elosztva a háromszög oldalhosszával ($KL = LM = MK$) adódik a bizonyítandó összefüggés.



(Persze, ilyenkor fel szoktam adni a Ptolemaiosz-tétel bizonyítását házi feladatnak.)

Térjünk most vissza az eredeti feladathoz.



Korábban, az első megoldásban bebizonyítottuk, hogy ha egy hatszög szögei egyenlők és a szemközti csúcsait összekötő átlói egyenlő hosszúak, akkor a másodszomszédos csúcsai szabályos háromszöget határoznak meg. Például az $ABCDEF$ hatszögben ACE szabályos háromszög, minden szöge 60°-os. Mivel $ABC\sphericalangle = 120^\circ$, így B is illeszkedik az ACE köré írható körre.

Ezért az előzőekben tárgyalt feladat értelmében fennáll rá, hogy $BE = AB + BC$.

Ez elvezet minket egy újabb feladatvariációhoz:

6. variáció az eredeti feladatra. Bizonyítsuk be, hogy ha egy hatszög szögei egyenlők és szemközti csúcsait összekötő átlói egyenlő hosszúak, akkor a szóbanforgó átló hossza egyenlő két szomszédos oldal hosszának összegével.

Ennek a variációnak a megfordítása is igaz: Ha az egyenlőszögű hatszög szemközti csúcsait összekötő átlói hossza egyenlő két szomszédos oldal hosszának összegével (persze meg kell mondanunk, hogy melyik két szomszédos oldal, ezzel legalább két feladatot kapunk), akkor ezek az átlók egyenlő hosszúak.

Az általánosabb feladat egy megoldása

Következzék végül a moszkvai olimpiász 3. feladatának egy, a KöMaL-ban nem közölt, további megoldása:

Megmutatjuk, hogy az A, B, C pontok meghatározzák a többit, és azok illeszkednek az ABC háromszög köré írt körre.

Korábban beláttuk, ha az $ABCDEF$ hatszög szemközti oldalai párhuzamosak és a szemközti csúcsokat összekötő átlói egyenlő hosszúak, akkor $ABDE$, $BCEF$ és $CDFA$ mindegyike trapéz.

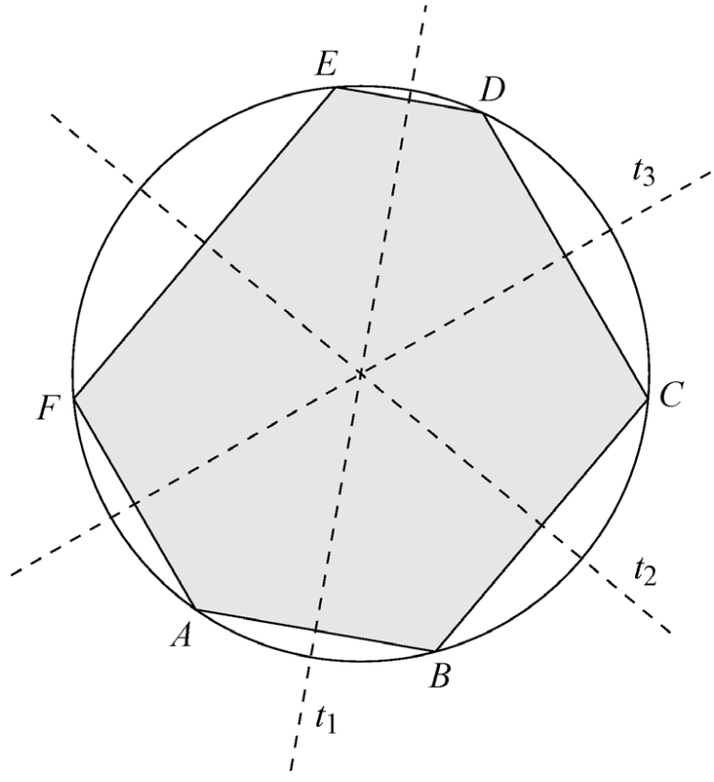
Jelölje AB és DE közös szakaszfelező merőlegesét t_1, BC és EF közös szakaszfelező merőlegesét t_2, CD és FA közös szakaszfelező merőlegesét t_3. Ezek a tengelyek nem lehetnek párhuzamosak, mert a hatszög szomszédos oldalpárjainak szakaszfelező merőlegesei.

A-t tükrözve t_1-re B-t kapjuk, B-t t_2-re C-t, C-t t_3-ra D-t, D-t t_1-re E-t, E-t t_2-

re F-et, végül F-et t_3-ra A-t.

Vagyis A fixpontja a $t_1 \circ t_2 \circ t_3 \circ t_1 \circ t_2 \circ t_3$ tükrözéskompozíciónak.

Ha t_1, t_2 és t_3 nem egy pontban metszi egymást, akkor $t_1 \circ t_2 \circ t_3$ kompozíció egy (olyan) csúsztatva tükrözés lenne, amelynek nincs fixpontja. A $t_1 \circ t_2 \circ t_3 \circ t_1 \circ t_2 \circ t_3$ kompozíció eltolás, ennek sincs fixpontja. Ezért szükséges, hogy a három tükörtengely egy pontban messe egymást.



Ha viszont a három tengely egy pontban metszi egymás, akkor mivel t_1 és t_2 az A, B, C köré írható kör középpontjában metszi egymást, szükségszerűen CD szakaszfelező merőlegese is átmegy a kör középpontján, tehát D illeszkedik a körre (mivel C illeszkedik).

Ebből következik, hogy a hatszög húrhatszög.

Az is látható azonban, hogy az nem szükségszerű, hogy a másodszomszédos oldalak egyenlő hosszúak legyenek, vagy hogy a hatszög minden szöge ugyanakkora legyen.

Hasonló feladatok

Nos, a feladatvariációk tárháza, úgy tűnik, kimeríthetetlen. Miközben ezt a cikket írtam, áttekintettem a KöMaL archívumát, és rengeteg, a fentiekhez hasonló feladatot véltem felfedezni.

Az érdekesség kedvéért kigyűjtöttem néhányat.

CCXCVII. (1934. évfolyam, 212. oldal): *Adva van az* $(ABCDEF)$ *egyenlőszögű hatszög úgy, hogy* $AB = CD = EF$ *és* $BC = DE = FA$. *Legyen e hatszög egy szabályos oktaéder síkmetszete. Szerkesszük meg hozzá az oktaédert!*

1193. feladat és megoldása (1936. évfolyam, 212–213. oldal): *A háromszög magasságainak talppontjából merőlegeseket állítunk a háromszög oldalaira. Bizonyítsuk be, hogy ezek talppontjai (szám szerint 6) egy körön feküsznek.*

A feladat megoldásához (lásd ott) fűzött megjegyzés: *A feladatban tárgyalt kör az úgynevezett Taylor-féle kör. Kimutatható, hogy az* $EGIFDJ$ *hatszög* EF, IJ, DG *átlói egyenlők. Ebből következik, hogy csúcsai egy körön fekszenek.*

Gy. 2867. (1993. évfolyam, 317. oldal) *A körbe írt* $ABCDEF$ *hatszögben* $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$ *és a hatszög területe kétszerese az* ACE *háromszög területének. Mutassuk meg, hogy a hatszög párhuzamos oldalai egyenlő hosszúak.*

Az 1958. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny 3. feladata (1959. évi kötet 70–77. oldal): *Az* $ABCDEF$ *konvex hatszögben az* AB *és* DE, *a* BC *és* EF, *továbbá a* CD *és* FA *oldalak párhuzamosak. bizonyítsuk be, hogy az* ACE *és* BDF *háromszögek területe egyenlő.*

Gy. 2570., 1989. szeptember, 270. oldal *Egy hatszög minden szöge* 120°, *oldalai felváltva 1 és* $\sqrt{3}$ *cm hosszúak. Mekkora a hatszög területe?*

Hálával tartozom a diákjaimnak, akik lelkesen megoldják a kitűzött feladatot, és újabb és újabb ötletekkel állnak elő.

Fried Katalin

ELTE TTK Matematikai Intézet

Matematikatanítás-módszertani Központ

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*

Schubert András
2020. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Rangsorolás – a társasjáték, amit mindenki játszik

Érdi Péter könyve (német fordítása megjelenőben van, magyar, kínai, koreai és japán fordítása most készül) informatív és szórakoztató. A szerző az összehasonlítással, minősítési besorolással és rangsorolással kapcsolatos gondolatok és történetek kincsestárát gyűjtötte össze a lehető legszélesebb körből: sport, művészetek, tudomány, politika, média és bevásárlás… Miért olyan népszerű és megkerülhetetlen a rangsorolás? Ízelítőt kapunk *Schubert András* recenziójából. Tovább...

Tóth János
2020. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Piruett körzővel

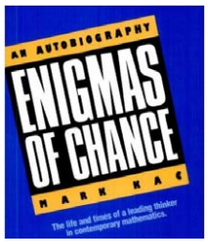
Százhárom kosár meggy a raktáron,
Meg a tehenek számának négyzete a négyzeten,
Összesen kétmillió darab a vidéki piacon.
Hány szem meggy van egy kosárban,
És mennyi az eladó tehenek száma?

Erről a feladványról és egyebekről ír *Tóth János* Korgyemszkíj: Piruett körzővel. Mesés fejtörők nemcsak iskolásoknak c. könyve kapcsán. Tovább...

Tóth János
2020. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Folytonos dinamikai rendszerek

A feladatgyűjtemény matematikai tartalma szerint gazdag és hasznos, messze túlmegy a szokásos bevezető példatárakon, ezért minden alkalmas esetben fogom ajánlani az érdeklődőknek, diákjaimnak, és nagyon remélem, hogy készül belőle további, javított (inkább: szépített) kiadás. *Nágel Árpád*: Folytonos dinamikai rendszerek című feladatgyűjteményéhez (Typotex, Budapest, 2019.) *Tóth János* tesz alapos kritikai megjegyzéseket. Tovább...



Simonovits András

2020. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Gondolatok Mark Kac önéletrajzáról

Ellentétben számos excentrikus matematikus önéletrajzával, *Mark Kac: Enigmas of Chances* (A véletlen rejtélyei) című könyve biztos ízléssel és finom humorral ötvözi a különböző összetevőket: matematikát (beleértve a matematikai fizikát), történelmet, családot és a kollégákat. *Simonovits András* írása nyomán kicsit bepillanthatunk a 20. század matematikatörténetébe is. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

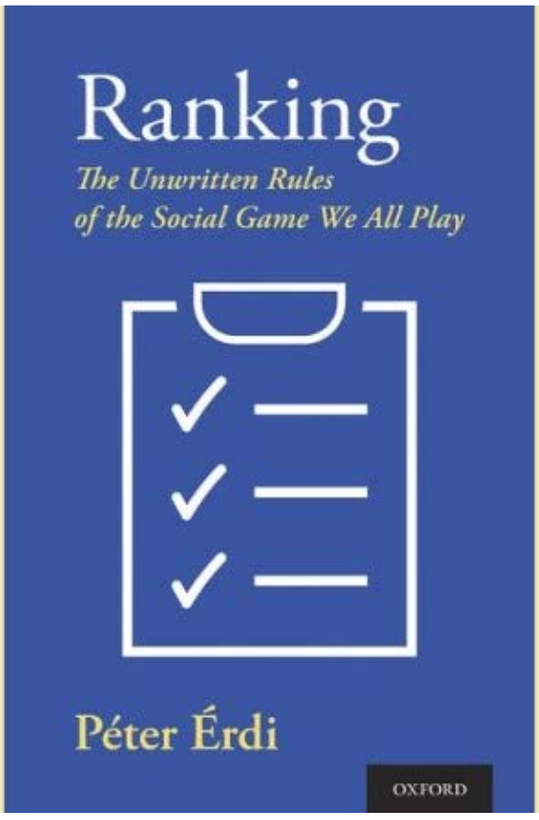
Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Schubert András 2020. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Rangsorolás – a társasjáték, amit mindenki játszik



Péter Érdi: Ranking – The Unwritten Rules of the Social Game We All Play. Oxford University Press, New York, 2019, 256 pages, ISBN-13: 9780190935467. £22.99

Érdi Péter könyve informatív és szórakoztató. Mindenkinek ajánlható, kivéve azokat, akik könnyen alkalmazható recepteket keresnek rangsorolási feladatokhoz. A szerző az összehasonlítással, minősítési besorolással és rangsorolással kapcsolatos gondolatok és történetek kincsestárát gyűjtötte össze a lehető legszélesebb körből: sport, művészetek, tudomány, politika, média és bevásárlás, hogy csak egy néhányat említsünk. A könyv fő problémája nem az, hogy hogyan rangsoroljunk, hanem az, hogy hogyan és milyen mértékben kerülhetjük el a rangsorolást.

Az alapkérdés persze az, hogy miért olyan népszerű és megkerülhetetlen a rangsorolás. A szerző, aki az idegtudományok jeles szakértője, ezt a hajlamot a pszichológiai és társadalmi viselkedés neurokémiai folyamataira vezeti vissza. Ami nagyon fontos, az az, hogy ezt úgy tudja megtenni, hogy az olvasót nem terheli túl tudományos formulákkal és szakmai zsargonnal. Ahogyan előre biztosítja az olvasót: nem kell többet tudni matematikából, mint hogy mi a különbség az algoritmus és a logaritmus között.

A könyv nyitófejezete: *Prológ: Korai találkozásaim a rangsorolással*. Már itt élvezhetjük a szerző személyes stílusát, ami aztán végigkísér minket az egész könyvön. Ez a stílus nagyon sokat segít abban, hogy magunkénak érezzük a felvetett kérdéseket, különösen, ha sikerül visszaemlékeznünk saját tapasztalatainkra hasonló helyzetekben.

Bevallom, hogy amikor a könyvet még kéziratos részletek formájában ismertem meg, aggódtam, hogy a nemzetközi olvasóközönség mennyit lesz képes és hajlandó befogadni a történetek néhol nagyon helyspecifikus, például újlipótvárosi zamatából. Kellemes meglepetésemre a végeredmény a szerzőt igazolta. A történetek ugyan az idegenek számára talán kissé egzotikusak, de általános emberi igazságaik nem ismernek határokat.

Az *Összehasonlítás, rangsorolás, besorolások és ranglisták* fejezet számos alapvető fogalmat vezet be, ismét főként színes történetek és példák segítségével. Itt találkozhatunk például a matematikusok számára jól ismert tudománymetriai besorolással: az Erdős-számmal. (Itt megtudhatjuk, hogy a szerző Erdős-száma 3; hozzáteszem: a recenzensé is.) Nem marad ki természetesen egy másik magyar vonatkozású világsiker, a sakkversenyzők Élő-száma sem.

A *Társadalmi rangsorolás állati és emberi közösségekben* fejezet a kötelező ’csipkedési sorrend’ példájával kezdődik és a komplex társadalmi struktúrák tárgyalásáig terjed. A szerző megkülönbözteti és összehasonlítja a hierarchikus és a hálózati struktúrákat, és a Demokrácia kontra Tekintélyelvűség 2.0 rövid tárgyalásával zárul. Ahogyan a könyv többi részében is, a szerző hozzáállását – a könyv egy korábbi recenzensének megfogalmazásában – az ’óvatos optimizmus’ jellemzi. Rosszabb pillanataimban ezt én inkább naiv ábrándozásnak nevezném.

A *Választások, játszmák, törvények és a Web* fejezet központjában a kognitív torzítás forrásainak (rangsorolt?) listája áll. A felidézési torzítás, a visszatekintési torzítás, a horgonyhatás, a megerősítési torzítás és a veszteség-elkerülési torzítás a fő okai annak, hogy döntéseink nem szigorúan racionálisak, ahogyan azt a klasszikus utilitarizmus feltételezte, hanem inkább egy „korlátozott racionalitás” érvényesül, amelynek szabályai kevésbé szigorúak, de nem kevésbé hatékonyak. Rendkívül fontos, hogy ismerjük ezeket a szabályokat, ha befolyásolni szeretnénk mások döntéseit, vagy ha nem szeretnénk, hogy mások befolyásolják a miéinket.

A rangsorolások nemcsak a döntéshozó kognitív torzításai miatt vezethetnek hibás döntésekhez. Ezt súlyosbíthatja a rangsoroló tudatlansága vagy manipulatív szándéka is.

Erről szól a következő fejezet: *A tudatlanok, a manipulatívak és a társadalmi mérések nehézségei*. Ha a rangsorolásokat vagy egyéb méréseket társadalmi célpontok értékelésére használják, egyfajta 'társadalmi Heisenberg elv' érvényesül (amit a könyv Campbell vagy Goodhart törvényének nevez): az értékelt személy vagy intézmény az érdekei szerint manipulálni próbálja az eredményeket. A kölcsönös manipuláció a mérési folyamat súlyos bizonytalanságát eredményezi. A jelenség illusztrálására a szerző a hitelképességi mutató példáját választotta. Ez főként az Egyesült Államokbeli olvasók számára lehet megvilágító erejű.

A *Rangsorolási játszmák* című fejezet ismét egy tudománymetriai érdekességű témát taglal: az egyetemi rangsorokat. A szerző 1863-ig vezeti vissza az ilyen irányú próbálkozásokat, és sorra veszi a legismertebb rangsorolási rendszereket (ARWU, THE, QS). Széles körképben mutatja be az értékelési folyamat mindkét oldalán működő résztvevők álláspontját, valamint a semleges elemzők véleményét. Több más témához hasonlóan ez a fejezet is egy *Tegyük, vagy ne tegyük?* alfejezettel zárul. A szerző hozzáállását Churchill demokráciáról szóló hírhedt idézetének a parafrázisa tükrözi: „A kvantifikáció az értékelés legrosszabb formája, kivéve az összes többit." A fejezet másik fő témája az országok rangsorolása. A szerző véleménye itt egyértelmű: „Egyetértek azzal a megállapítással, hogy a mutatószámok szerinti nemzetközi rangsorolások veszélyesek. Úgy gondolom azonban, hogy több matematikára van szükség és nem kevesebbre. A korszerű statisztikai eljárások hozzájárulhatnak az értékszámok bizonytalanságának pontosabb jellemzéséhez."

A szerző egy teljes fejezetet szentel a *Harc a hírnévért* témának. A rangsorok és a hírnév nyilvánvalóan szorosan összefonódnak, bár az ember eltűnődhet, hogy vajon a szerző állítása: „a hírnév a rangsorolás kulcseleme", vagy esetleg inkább a fordítottja: „a rangsorolás a hírnév kulcseleme" a találóbb. Valójában a hírnévnek vannak aligha kvantifikálható elemei, amelyek ellenállnak bármiféle rangsorolásnak. Másfelől egy már elnyert hírnév erősen befolyásolhat minden későbbi rangsorolást. (Amint azt a *Rangsorolási játszmák* fejezetben Gladwell története példázza, amelyben jogi szakértők következetesen kiemelkedőnek minősítették elismert egyetemek nemlétező jogi fakultásait.) A *Rangsorolási játszmák, amelyeket kutatók játszanak* alfejezet a tudományos folyóiratok minősítésével és a tudományos hírnév idézettséggel való mérésével foglalkozik az impaktfaktor és a h-index példáján keresztül. A *Tegyük, vagy ne tegyük?* alfejezet következtetése: „A tudománymetriai mutatószámok jóra és rosszra is használhatók. A mérőszámok használatának legnagyobb problémája az, hogy az emberek jól kimutathatóan úgy torzítják saját viselkedésüket, hogy optimalizálják azt, ami könnyen mérhető (például többet publikálnak erősen idézett folyóiratokban) a nem kvantifikálható tényezők rovására." A fejezet további része a Nobel-díjak és az Oscar-díjak összehasonlítását tartalmazza, főként az állítólagos részrehajlások (nemi, faji stb.) szempontjából.

A kívánságlisták által ösztönözve: Hogyan (ne) vegyünk új fűnyírót. Ez a hosszú című rövid fejezet az ajánlási játszmákkal foglalkozik. Bár a szerző főleg kereskedelmi példákat ismertet, a téma egyre nagyobb szerepet kap a tudományos információ és kommunikáció területén. A tudománymetriával foglalkozó folyóiratokban az utóbbi néhány évben száznál is több cikk jelent meg ebben a témában. A szerzői-szerkesztői gyakorlatban sorra jelennek meg a közlésre alkalmas folyóiratokat, idézhető publikációkat, szakértő bírálókat ajánló szolgáltatások.

Az *Epilógus: A rangsorolási játszma szabályai – hol tartunk most?* a korábbi fejezetek fő tételeit összegzi. A szerző hangsúlyozza, hogy a rangsorolások objektivitása gyakran illuzórikus és manipulálható. Mégis a legtöbb rangsorolás – akár emberi vélemény, akár számítógépes algoritmusok alapján készült – egyáltalában nem véletlenszerű, és így a valóság bizonyos elemeit ragadja meg.

A szerző bevallottan nem tudott ellenállni, hogy ne közölje a könyvben az első haikut, amit valaha írt. A recenzens nem tud ellenállni, hogy ne zárja a könyvismertetést saját fordításával:

Három sor – egy rangsor

Az agyunk egy lista.
A tételek száma adott.
Oh, a vég közelg!

Schubert András
Magyar Tudományos Akadémia Könyvtár és Információs Központ

A könyvismertetés a recenzens Scientometrics (2020) 122:1813–1815 (DOI 10.1007/s11192-019-03335-1) forráshelyen megjelent írásának kissé módosított változata.

alkalmazott matematika recenzió

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

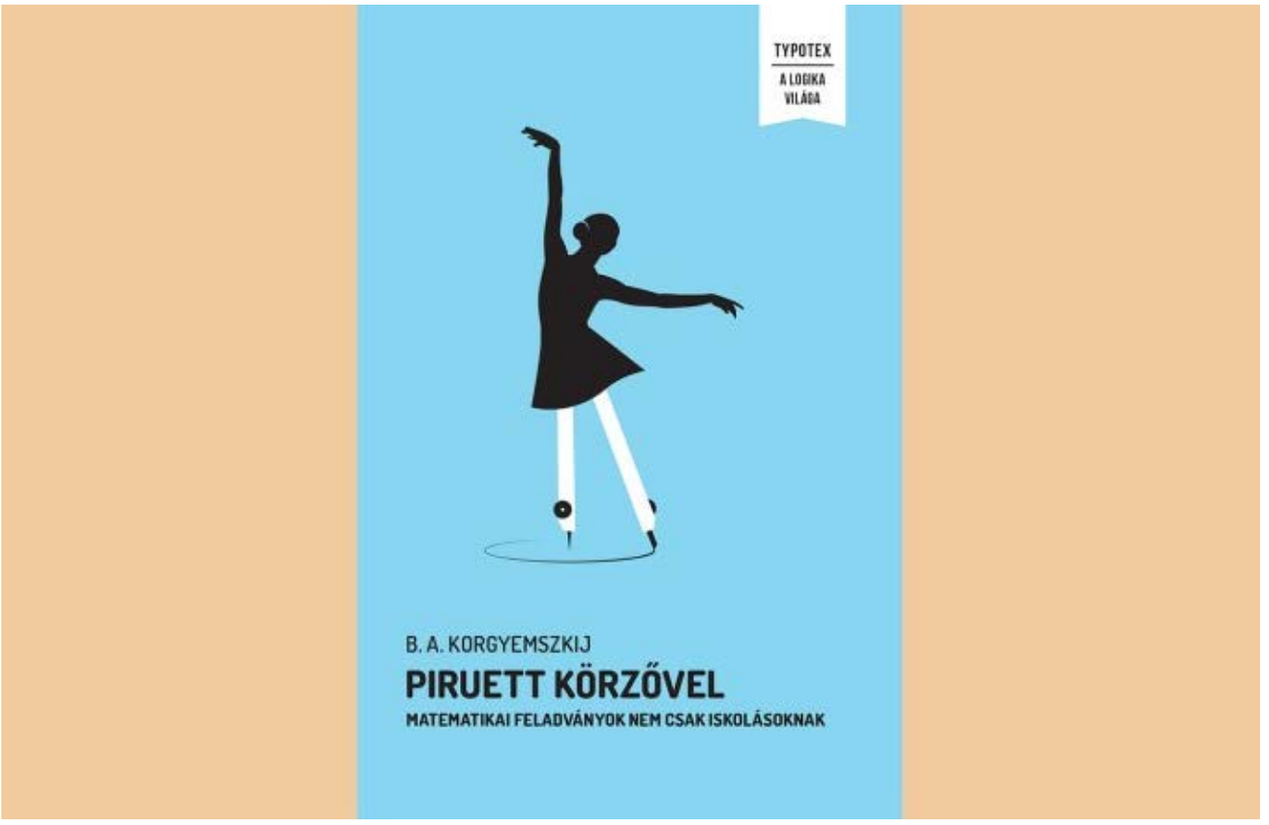
Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

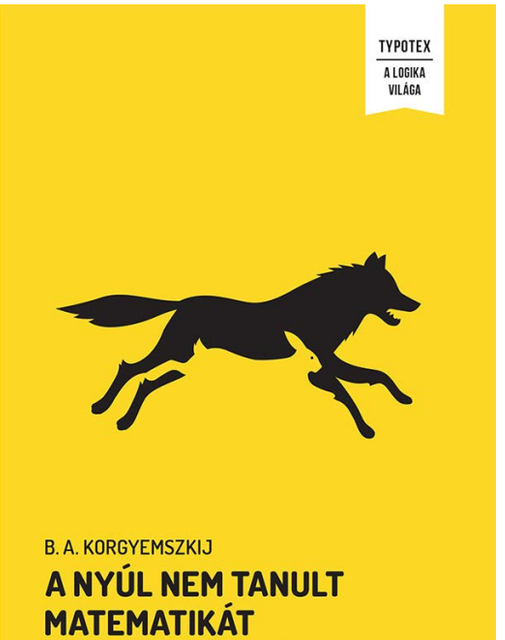
Tóth János 2020. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Piruett körzővel



B. A. Korgyemszkij: Piruett körzővel. Mesés fejtörők nem csak iskolásoknak. Typotex, Budapest, 2019. Fordította: Schultz György, szerkesztette Fried Katalin.

Nyilván az olvasó is emlékszik rá, hogy megígértem Korgyemszkij könyve második részének ismertetését. (Az első részről az előző számban írtam.) Most akkor be is tartom ígéretemet.



Az ismertetendő könyv B. A. Korgyemszkijnek (1907–1999), az orosz nyelvű matematikai ismeretterjesztés legfontosabb alakjának utolsó könyvének a második fele; magyar nyelven ugyanis a munka két kötetben jelent meg. Ennek alapján érthető, hogy a második kötet stílusa, felépítése hasonló az előzőéhez.

Az első fejezet címe *A számok és alakzatok kis titkai*, amiről nyilván rögtön Toeplitz és Rademacher népszerű könyve jut az ember eszébe, de az összehasonlító elemzés az olvasóra marad.

A számok és alakzatok titkai mellett Csajkovszkij, Goethe, Grieg és Rubik titkairól kapunk felvilágosítást. Vegyünk innen egy feladatot.

Tetszőleges háromszög két egyenes vonalú vágással három olyan részre osztható, amelyekből téglalap állítható össze.

A második fejezet a görög-római, orosz és indiai múltba vezet el, természetesen szóba kerül a legkisebb olyan szám is, amely kétféleképpen áll elő két köbszám összegeként. Megtudjuk azt is, hogy a hetes szám végzetszerűen követte Raszkolnyikovot.

A harmadik fejezet központi gondolata a meglepetés, furcsaság, szokatlanság.

Interjú négy Marslakóval, hogy megtudjuk életkorukat.
Marsza: Mirsza 22 éves, Mersza 21.
Mersza: Morsza 19, Mirsza 21.
Mirsza: Marsza 21, Morsza 18.
Vegyük figyelembe, hogy a lények nem egyidősek, és a mai napig megőrizték a marslakók ősi szokását: két állításuk közül csak az egyik igaz, a másik hamis.

A negyedik fejezet elején álló mottó Tatyanyicsevától származik. Bizony, Puskinon, Lermontovon, Ahmatován és Majakovszkijon kívül még más orosz költők is léteznek, még ha nem is nagyon ismerjük őket! Ebből a részből idézek egy feladatot, amelynek eredményét eléggé el nem ítélhető módon a Wolfram nyelv (Mathematica) **FindInstance** függvényével kaptam meg; lesz talán olvasó, aki gép nélkül is van olyan okos, hogy megtalálja a megoldás(oka)t.

Százhárom kosár meggy a raktáron,
Meg a tehenek számának négyzete a négyzeten,
Összesen kétmillió darab a vidéki piacon.
Hány szem meggy van egy kosárban,
És mennyi az eladó tehenek száma?

Azt nem kell bizonygatnom, hogy A. A. Szapozskov művét nem poétikai értékei miatt idéztem, sem azért, hogy a matematika alkalmazásának mintapéldányát mutassam be.

Az ötödik fejezet feladatainak jellegzetessége, hogy megoldásuk szépsége miatt kerültek egy csoportba. Unalmas feladatnak látszik a következő:

Oldjuk meg a $\sqrt{x+5} = 5 - x^2$ egyenletet.

Ehhez képest mindkét megoldás igazán szellemesnek mondható.

Mint látható – a korábbi kötet ismertetésével ellentétben –, most még kísérletet se tettem arra, hogy a fejezeteket matematikai tartalmuk szerint jellemezzem: a legkülönbözőbb feladatok követik egymást.

Említsük meg most is a fordító, Schultz György, és a vele együttműködő szerkesztő, Fried Katalin jó munkáját.

Azt remélem, hogy ez a kötet is örömet okoz néhány érdeklődő iskolásnak és tanáraiknak.

Tóth János

---

recenzió matematikatanítás

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

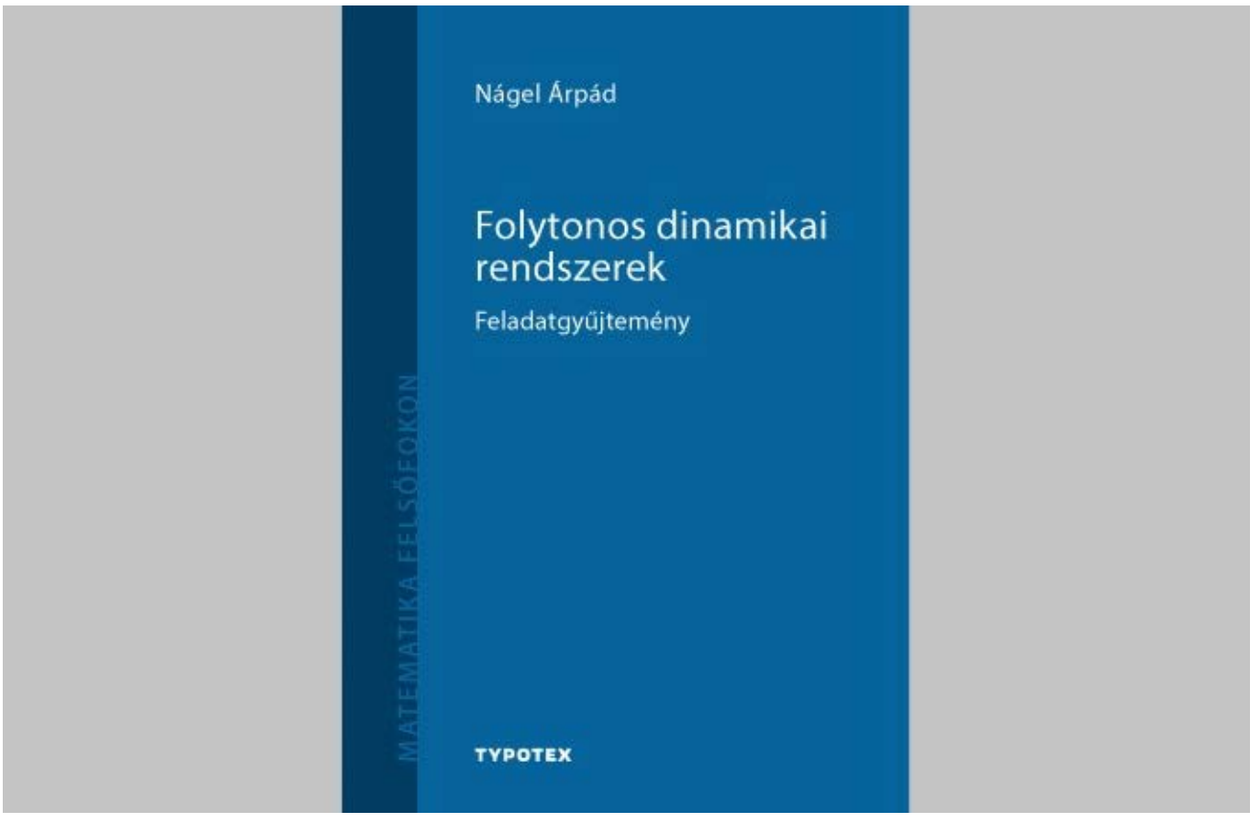
Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tóth János 2020. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Folytonos dinamikai rendszerek



Nágel Árpád: Folytonos dinamikai rendszerek. Feladatgyűjtemény, Typotex, Budapest, 2019.

Kis aggodalommal fogadtam el a rovatvezető felkérését egy olyan könyv recenzálására, amelyről azt gondoltam, saját munkáink [6], [7] konkurenciájának tekinthető. Ki fog derülni, hogy nem erről van szó.

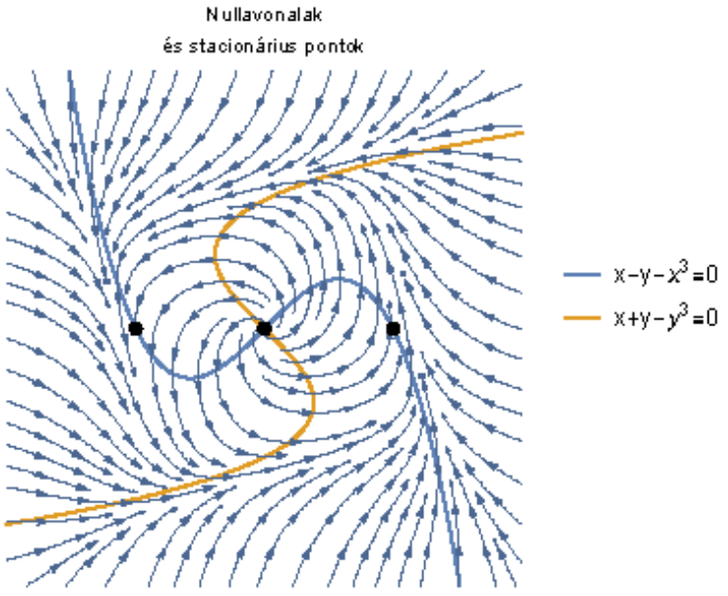
A feladatok tárgya a közönséges differenciálegyenletek kvalitatív elmélete; nem értem, miért nem ezt tükrözi a címe. Persze, a dinamikai rendszer sokkal divatosabbnak hangzik (a differenciálegyenletekkel való foglalkozást pedig mintha szégyelleni kellene ma Magyarországon), de sokan sokféleképp használják, ezért nem informatív. Nem beszélve arról, hogy egy rendszer lehet azért folytonos, mert folytonos időben játszódik le, vagy azért, mert állapottere folytonos. Mindezeken felül a rendszer (vagy a modell) lehet determinisztikus vagy sztochasztikus. Az itteni feladatok folytonos idejű, folytonos állapotterű determinisztikus rendszerek közönséges differenciálegyenlettel leírható osztályával foglalkoznak.

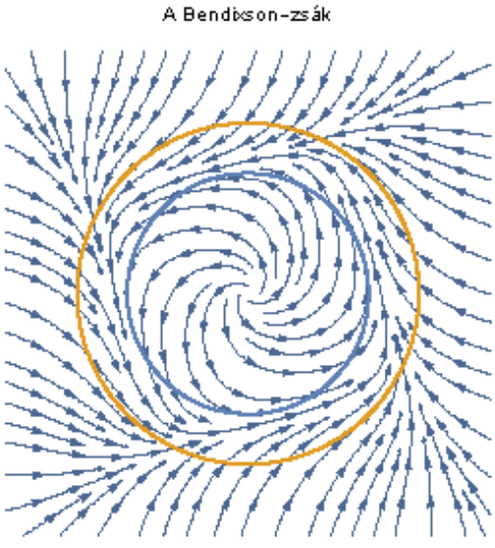
Az egyes fejezetek tartalma a következő. Az első két fejezet lineáris és nemlineáris egyenletek stacionárius (másképp: egyensúlyi) pontjának stabilitásával foglalkozik. A harmadik fejezet témája síkbeli rendszerek periodikus megoldásának létezése, illetve ilyen megoldások létezésének kizárása. Az utolsó két fejezet a trajektóriák lokális és globális vizsgálatát tűzi ki célul. (Ebből a rövid áttekintésből is látszik, hogy kicsiny az átfedés a szokásos példatárakkal, speciálisan a [7] példatárral. Legközelebb hozzá az elméletet és feladatokat is tartalmazó [5] jegyzet áll, amely azonban a feladatok részletes kidolgozását nem közli, csupán az eredményeket.) Az egyes fejezetek a szükséges elmélet összefoglalását adják, ezután következik sok-sok feladat, a könyv második része pedig minden feladat részletes megoldását adja, esetenként több változatban is.

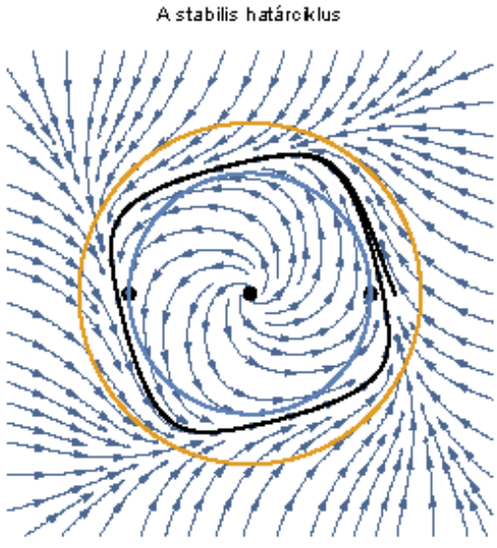
Nem lesz nehéz alább dicsérni a gyűjteményt és szerzőjét, ezért először essünk túl néhány kritikai megjegyzésen. Talán sokan kevésbé tartják fontosnak, engem rendkívüli módon bánt a könyv atavisztikus megjelenése. Valaki a TEX birtokában egyszeres és kétszeres aláhúzással jelöli a vektorokat és mátrixokat?! A tételek, állítások, definíciók kiemelésére is aláhúzás helyett jobb a kurziválás vagy a félkövér szedés. Ugyan a szerző különbséget tesz a függvény és a függvényérték között (bár előfordul a $h(x)$ függvény kifejezés), de én magam nem írnék le ilyenfajta kifejezéseket: $u = y/x$ (ehelyett: $u(x) := y(x)/x$). A képletek szokásos számozása (1.1.) helyett inkább (1.1). A szerző követi azt a rossz szokást, amely szerint a definíció, tétel, stb. egy mondat utolsó szava, például: Ezt mondja ki az alábbi Tétel. A Jordan-normálformáját kifejezés kicsit tömörre sikerült, jobb lenne ez: Jordan-féle normál alakját. Elmondható, hogy a lektor jól dolgozott, mert konkrét matematikai hibát nehéz találni a jegyzetben; ami fájóan hiányzott: egy korrektor.

Azt gondolom, hogy a megcélzott olvasó túl van az elemeken, ezért fölöslegesnek tartom a rengeteg sok egyszerű számolási feladatot az első két fejezetben.

Az eredetiséget feladatgyűjteményen számon kérni botorság lenne. Gondolom, Pólya és Szegő meglehetősen sok saját munkát is befektetett példatárába, a fő érdemük mégis az volt, hogy az aktuális irodalmat feladtok formájában dolgozták fel. Nágel Árpád sok helyről (jó helyekről) gyűjtött feladatokat, épp ez a legfőbb teljesítménye. Néhány (kidolgozott feladatokat tartalmazó) példatár ugyanis még magyar nyelven is ismert Bajcsayétól [1], [2] és a fájdalmasan korán elhunyt Bege Antalétól (https://hu.wikipedia.org/wiki/Bege_Antal) [3], vagy a különösen gazdag klasszikus [4] gyűjteménytől kezdve a szerző által idézetteken keresztül a miénkig, de egyik sem merészkedik el a haladottabb fejezetekig, amelyekkel kapcsolatos feladatok a különféle speciálizált könyvekből csipegethetők össze, ahogyan ez itt örvendetes módon megtörtént.







Jó látni egyszerű példákon konkrétan kiszámolt Poincaré-leképezést, stabilis, instabilis és centrális sokaságokat, topologikus ekvivalenciát – még akkor is, ha ezek gyakorlati esetekben nem számolhatók ki.

A példatárban van néhány ábra, általában iránymezők. Az ábráknál és a megoldásoknál is lehetett volna néhány szót ejteni a számítógépes módszerekről, ugyanis az olvasónak mindenképpen azt javasolnám, hogy gép mellett gondolkozzon a feladatokon. (Lásd például a [8] cikket, amely a Routh-Hurwitz-kritérium fájdalmas kiszámítását van hivatva segíteni.)

Apróbb tartalmi megjegyzések: Nem esik arról szó, hogy a stacionárius pontok kiszámolása még polinomiális egyenleteknél is meglehetősen nehéz feladat, viszont meghatározásukban segít a Gröbner-bázisok több mint félévszázados elmélete. Nem a szerző hibája (hanem az elméleté ☺), hogy a kvalitatív elméletben szereplő egyenletek túlnyomó többsége negatív kereszthatást tartalmaz, s emiatt közvetenül nem alkalmazható. Az alkalmazásoknak egy differenciálegyenletekről szóló könyvben nagyobb súlya kellene, hogy legyen.

Az irodalomjegyzék remek útmutató a további elmélyedéshez. Azt gondolom, hogy ezt a recenziót az az olvasó olvassa, aki érdeklődik a téma iránt, ezért a további előrehaladás érdekében kiválóan összeválogatott irodalomjegyzéket a recenzió olvasója számára még néhány tétellel kiegészítem. (Amit nem szabad hiánylistaként felfogni!)

A feladatgyűjtemény matematikai tartalma szerint gazdag és hasznos, messze túlmegy a szokásos bevezető példatárakon, ezért minden alkalmas esetben fogom ajánlani az érdeklődőknek, diákjaimnak, és nagyon remélem, hogy készül belőle további, javított (inkább: szépített) kiadás.

Irodalomjegyzék

[1] Bajcsay P.: *Közönséges differenciálegyenletek* (Első rész), Műszaki matematikai gyakorlatok **B. VII.*** (Harmadik kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
[2] Bajcsay P., Fazekas F.: *Közönséges differenciálegyenletek* (Második rész), Műszaki matematikai gyakorlatok **B. VII.**** (Második, javított kiadás), Tankönyvkiadó, Budapest, 1969.
[3] Bege A.: *Differenciálegyenletek. Gyakorlatok és feladatok*, Kolozsvári Egyetemi Kiadó, Cluj-Napoca, 2008.
[4] Matvejev, N. M.: *Differencálegyenletek. Feladatok és gyakorlatok* (6. kiadás), Minszk, Vüséjsaja Skola,1977. (oroszul).
[5] Simon L. P.: *Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek*, ELTE Matematikai Intézet, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék, 2012. https://simonp.web.elte.hu/files/dinrendjegyzet.pdf, https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011_0025_mat_11/ar01s02.html
[6] Tóth J., Simon L. P.: *Differenciálegyenletek. Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba* (3. kiadás), Typotex, Budapest, 2020.
[7] Tóth J., Simon L. P., Csikja R.: *Differenciálegyenletek. Feladatgyűjtemény*, edu.interkonyv.hu
[8] Tóth, J., Szili, L., Zachár, A.: Stability of polynomials *Math. Educ. Res.* **7** (2), 5–12.

Tóth János

recenzió matematikatanítás analízis

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

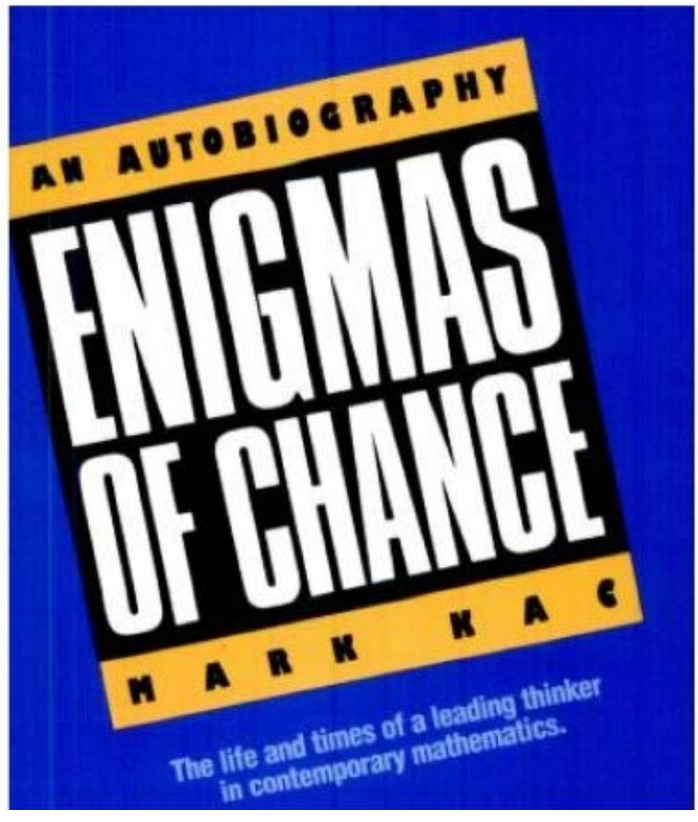
Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Simonovits András 2020. JÚNIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Gondolatok Mark Kac önéletrajzáról



Nemrég kaptam kölcsön Tóth Bálint barátomtól egy nagyszerű könyvet, Mark Kac: Enigmas of Chance, Harper and Row, New York, 1985 (160 oldal, unalmas előszavakkal). A nagy matematikus saját életén végigfutva, a *véletlen rejtélyeivel* ismerteti meg az olvasót. Ellentétben számos excentrikus matematikus önéletrajzával, Kacé biztos ízléssel és finom humorral ötvözi a különböző összetevőket: matematikát (beleértve a matematikai fizikát), történelmet, családot és a kollégákat. Pár nap alatt végigolvastam a könyvet. Minden matematikai érdeklődésű egyénnek ajánlom, de ezt egy rövid ismertetővel szeretném alátámasztani. Érdemes az olvasás előtt a Wikipédián tájékozódni M. Kacról, mert bizonyos dolgokat itt nem ismétlek el.

Kac 1914-ben született egy nyugat-ukrajnai zsidó kisvárosban, Krzemieniecben (pár évvel később Isaac Stern is itt született). A városka Lengyelország egyik felosztása után, még a 18. században Oroszországhoz került. 1918-tól újra Lengyelország, 1939/45-től 1991-ig a Szovjetunió (közben német megszállás), azóta Ukrajna része volt/lett. Kac apja Lipcsében és Moszkvában doktorált filozófiából, de tanítóként, majd kereskedőként tengette életét. Gyerekkorában Mark a jiddis mellett oroszul beszélt, majd a középiskolában megtanult lengyelül és franciául is. 16 éves korában saját bizonyítást adott a Cardano-képletre, amely megjelent a Középiskolai Matematikai Lapok ottani megfelelőjében. Ennek nyomán egy szakfelügyelő rábeszélte, hogy ne mérnök, hanem matematikus legyen.

Matematikusként a szülővárosától 150 km-re nyugatra fekvő Lemberg egyetemén tanult (Lvov, Lwów, Lviv). A város a hosszú 19. században Ausztria, utána Lengyelország stb. része volt. Magyarországhoz hasonlóan, a két világháború között a frissen függetlenné vált Lengyelországban is dúlt az antiszemitizmus: zsidópadok voltak a zsidó egyetemistáknak, s a zöldszalagosok rendszeresen megverték a zsidó diákokat. Míg a Budapesti Tudományegyetemen (akkor Pázmány Péterről volt elnevezve) csak egy nemzetközi hírű matematikus tanított (Fejér Lipót), addig a Lembergi Egyetemen több világklasszis matematikus oktatott: Banach, Steinhaus, Ulam – hogy csak a leghíresebbeket említsem.

Stefan Banach (a funkcionálanalízis egyik atyja, a Banach-terek névadója) igazi bohém volt. Az általa gyakran látogatott, ún. Skót kávéházban egy később nevezetessé vált füzetbe írták bele születő matematikai gondolataikat Banach és társai. (A német megszállás idején az egykori szupersztár egy német biológiai laboratóriumban „tetűetetőként” tengette életét, de még megélte a németek kiűzését.)

Hősünk igazi támogatója, Hugo Steinhaus is világhírű volt, Banachhal együtt ő teremtette meg a lwówi matematikai iskolát. Lebesgue mértékelméletére alapozva létrehozták a funkcionálanalízist, de ortogonális sorokra és valószínűségszámításra is alkalmazták az elvont elméletet. Szűken vett tudományos munkájával szinte egyenrangú volt nevelői munkássága. Egyaránt támogatta az élvonalbeli matematika művelését és a matematika népszerűsítését (Matematikai kaleidoszkóp c. munkája – lengyel első kiadás: 1939 – magyarul is több kiadásban megjelent: pl. 1951, 1984), de II. világháború végén a lengyeltelenített Lvov helyett a lengyelesített Wroclawban szervezte újjá az ottani egyetemet.

Kaccal nagyjából egy időben tevékenykedett Lembergben Stanislaw Ulam, aki matematikusként is kiemelkedő volt: halmaz- és mértékelméleti, valamint topológiai cikkekkel kezdte pályafutását. Jó érzékkel elfogadta Neumann életmentő amerikai meghívását: később Teller Edével együtt a hidrogénbomba feltalálásában játszott vezető szerepet. (Mellesleg Ulam is írt egy lenyűgöző – és Kaccéval párhuzamos – önéletrajzot: Adventures of a Mathematician, 1983, amelyet Kac a Bevezetésben oldalakon át méltányol.)

Kac Steinhaustól tanulta az éppen akkor kibontakozó valószínűségszámítást. Első cikkeit vele írta, és az analízisben alkalmazták az addig empirikusnak tartott Gauss-féle hibatörvényt. Mivel Kac tudományos pályáját végig kísérte a valószínűségszámítás (az önéletrajz címében is szerepel az *esély* szó), egy egész fejezetet szentel a témának. Az utóbbi évtizedek matematikushallgatói (beleértve a recenzenst) már a Kolmogorov-féle axiomatikus megalapozással kezdik, de 1933 előtt volt valami szakadék a valószínűségszámítás és a matematika többi területe között. Bár olyan nevek jelezték a korai valószínűségszámítást, mint Pascal, Fermat, Jakob Bernoulli, de Moivre, Gauss, Laplace, Csebisev, még Hilbert 1900-as programja is megoldandó feladatnak tűzte ki az axiomatikus megalapozást. Ma már tudjuk, hogy ehhez meg kellett születnie a mértékelméletnek (Lebesgue, 1902). Nem véletlen, hogy a nagy számok erős törvényének első változata a mértékelmélet egyik atyjától, Boreltől származik (1909), de a teljes matematikai szabatosságra még várni kellett.

Kac részletesen elmagyarázza Borel gondolatának egyik legfontosabb részletét. Dobjunk föl egymástól függetlenül egy „igazi” (nem hamis) pénzérmét elég sokszor. A törvény azt állítja, hogy mind az Fejek, mind az Írások relatív gyakorisága majdnem biztosan $1/2$-hez tart. (Nyilvánvaló, hogy biztosat nem állíthatunk, hiszen egymás után végtelen sokszor is lehet akár csupa Fej, vagy csupa Írás sorozat – de ennek valószínűsége elhanyagolható.) Ha Fej, akkor 1-et írunk, ha Írás, akkor 0-t. Ezzel egy technikailag bonyolult valószínűségszámítási tételt egy viszonylag egyszerű mértékelméleti feladatra fordítottunk le: tekintsük a $[0,1]$ szakasz valós számait kettes számrendszerben; ekkor a 0 és 1-es számok relatív gyakorisága aszimptotikusan $1/2$ – $1/2$ majdnem minden számra.

De Moivre már 1718 körül belátta, hogy S_n-nel jelölve az 1-esek összegét az első n dobásban, az $2(S_n - n/2)\sqrt{n}$ véletlen változó eloszlása tart a Gauss-féıe haranggörbéhez. Ezen az úton haladt 1923-tól Steinhaus, és ezen az úton indította el Kacot 1935 körül. Egyik közös tételüket Kac szintén részletesen bemutatja az olvasóknak. Legyenek λ_1, ..., λ_n racionálisan lineárisan független valós számok, azaz amelyekhez nincs olyan r_1, ..., r_n egész számok sorozata, amelyre $\lambda_1 r_1 + \ldots + \lambda_n r_n = 0$. Legyen t tetszőleges valós szám (az idő). Ekkor a $\cos\lambda_1 t, \ldots, \cos\lambda_n t$ függvénysorozat valószínűség-számítási értelemben is független, például

$$P(\cos\lambda_1 t < \alpha_1 \text{ és } \cos\lambda_2 t < \alpha_2) = P(\cos\lambda_1 t < \alpha_1)P(\cos\lambda_2 t < \alpha_2)$$

tetszőleges α_1 és α_2 valós számra. Tehát megfelelően skálázott összegükre,

$x_n(t) = c_n(\cos\lambda_1 t + \ldots + \cos\lambda_n t)/\sqrt{n}$-re aszimptotikusan – vagyis elég nagy n-re – érvényes a Gauss-féle hibatörvény: véletlenül választott t-re $x_n(t)$ értéke $\Phi(u)$ valószínűséggel lesz kisebb, mint u, ahol u tetszőleges valós szám és Φ a standard normális eloszlásfüggvény.

Érdekességként megemlítem, hogy Kac nem riad vissza a számítógéppel(?) elvégzett numerikus számításoktól sem, pl. numerikusan szemlélteti két függvény függetlenségét két számértékre: $-150 < t < 50$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$, valamint $P(\cos\lambda_1 t < 1/2) = 0{,}669$, $P(\cos\lambda_2 t < -1/2) = 0{,}337$; és $P(\cos\lambda_1 t < 1/2$ és $\cos\lambda_2 t < -1/2) = 0{,}225$.

Valóban, e két esemény valószínűségének szorzata (legalábbis kerekítve) numerikusan egyenlő az együttes valószínűséggel. A 75. oldalon még egy ábra is mutatja a Brown-mozgás kísérleti ábráját.

A matematikától visszatérve az élethez, a harmincas évek középén anyagi és politikai problémáktól tartva, Kac Lengyelországból biztonságosabb helyre akart kivándorolni, családját és menyasszonyát csak később vitte volna maga után. Az Egyesült Királyságba, majd az Egyesült Államokba pályázott állásokra, anélkül, hogy elfogadhatóan tudott volna angolul. Jellemző, hogy amikor két, angol nyelven írott cikkét egy vezető brit matematikai lap elfogadta közlésre, a nagy Hardy megkérte, hogy írja át őket franciára, mert az angolja menthetetlen.

Végül 1938-ban egyéves postdoc-állást kapott a Johns Hopkins Egyetemen (Baltimore), s a II. világháború kitörésekor nem volt hová visszatérnie. Így családja zömétől eltérően, túlélte a holokausztot. Számomra a legmegindítóbb történetpár a következő. A II. világháború után először csak 1959-ben látogatott vissza Lengyelországba. Ott egy gimnáziumi ismerőse elmesélte, hogy szülővárosuk zsidóit több részletben végezték ki a németek, és Kac apjával még a kivégzés előtt sikerült szót váltania. Később Kac tudományos látogatóként eljutott Kijevbe, ahol nehézségek árán ugyan, de visszautazása előtti estén sikerül találkoznia egy jóval fiatalabb lány-unokatestvérével. Alig ismerik meg egymást, és nem tudnak igazán beszélgetni. A találkozás végén az unokatestvér megkérdezi: „akarod-e tudni, mi történt a mieinkkel a német megszállás alatt?” Mielőtt Kac válaszolhatott volna, a rokon folytatta: „jobb, ha nem tudod meg.”

Képzeletben visszatérve Kaccal Amerikába, 1939-ben találkozott Erdős Pállal, akivel elsők között alkalmazták tudatosan a valószínűségszámítást a számelméletben. (Turán Pál már 1934-ben megtette ezt, de csak ösztönösen: újra felfedezve a Csebisev-féle valószínűségszámítási egyenlőtlenséget. Az Erdős–Wintner (1939) számelméleti cikk címében már szintén szerepelt a statisztikai függetlenség.) Kac kiindulása a következő volt: vegyünk két prímszámot, legyenek ezek p és q, valamint legyen $N = spq$, ahol s természetes szám. Három valószínűségre vagyunk kíváncsiak. Legyen annak a valószínűsége, hogy egy N-nél kisebb vagy vele egyenlő természetes szám osztható p-vel: $w_1 = 1/p$, annak a valószínűsége, hogy egy N-nél kisebb vagy vele egyenlő természetes szám osztható q-val: $w_2 = 1/q$, és annak a valószínűsége, hogy egy N-nél kisebb vagy vele egyenlő természetes szám osztható pq-val: $w_{12} = 1/(pq)$. Ebben az értelemben a p-vel és q-val való oszthatóság független: $w_1 w_2 = w_{12}$. Kac a prímosztók számának eloszlására volt kíváncsi, és sejtette, hogy itt is a Gauss-törvény érvényesül, de nem tudott egy lényeges szakadékon átlépni. Erdős majdnem végigszunyókálta Kac egyik előadását, amely a véletlen számelméletről szólt. A számelméleti résznél azonban felébredt, és az előadás végén megnyugtatta Kacot, hogy ő majd betemeti a szakadékot. Így is lett. 1940-ben megjelent ötoldalas cikkük egy ideig gyenge visszhangot keltett, de aztán világsikert aratott: a számelmélet új ágát teremtve meg.

Kac hamarosan a „világ végén” fekvő, de Borostyán Ligás (elit) Cornell Egyetemen kapott állást: először gyakornok, majd tanársegéd, docens, s végül professzor. Itt lett világhíres kutató. Talán leghíresebb eredménye, amelyet nagyon szerényen ad elő a könyvben, a fizikában központi szerepet játszó Feynman-integrállal kapcsolatos. Biztos nem véletlen, hogy az eredmény kettőjük nevét viseli.

Kiváló ismeretterjesztő volt. Egyik leghíresebb ilyen jellegű cikke: „Hallod-e a dob alakját?” (A találó címet Lipman Bers matematikus javasolta, s ez nagy szerepet játszott a cikk sikerében.) 1963-ban Kac a néhai Hendrik Lorentz holland Nobel-díjas fizikus tiszteletére tartott előadást Leidenben. 1910-ben Lorentz eredetileg azt kérdezte, meg lehet-e határozni a membrán *területét* a felhangjai alapján. Bár David Hilbert nehéznek vélte a kérdést, de a választ hamar megadta Herman Weyl. Fél évszázaddal később Kac a felhangokból a membrán *alakjára* szeretett volna következtetni, de a válasz még az önéletrajz megjelenésekor (1985-ben) sem volt ismert. Aztán az 1990-es évek elején kiderült, hogy a válasz nemleges (lásd Wikipédia).

1961-ben Kacot meghívták az elitintézményként alakuló a NY-i Rockefeller Egyetemre, de onnan részben a megszorítások, részben a kötelező nyugdíjazás miatt 1981-ben Los Angelesbe települt át, s ott is halt meg viszonylag hamar, 1984-ben.

Két visszatérő gondolatát emelem ki.

– *Nehéz összeegyeztetni az elit- és a tömegoktatás igényeit, de muszáj.* Látogatásakor az

Oxford Egyetem olyan kiterjedt tutori rendszert működtetett, hogy a felsőbb éveseknek alig maradt idejük a kutatásra. Ugyanakkor a II. világháború idején a Cornell Egyetemen százával kellett megtanítani a műszaki katonákat trigonometriára, és még a matematikailag képzettebb bölcsészoktatókat is be kellett vonni a matematikatanításba.

– *Nem szabad elnyomni sem a tiszta, sem az alkalmazott matematikát*. Hagyni kell, hogy mindenki azt csinálja, amit szeret. Egyaránt óvakodni kell az öncélú, senkit sem érdeklő matematikától, és a szűklátókörű közvetlen alkalmazások hajszolásától.

Nem folytatom a könyvismertetést. Az egyik legjobb tudományos népszerűsítő könyv, amelyet valaha olvastam. Bölcs, szellemes, időszerű. Le kellene fordítani magyarra!

Köszönetemet fejezem ki Tóth Bálintnak a korábbi változathoz fűzött értékes megjegyzéseiért.

Simonovits András

matematikatörténet recenzió

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

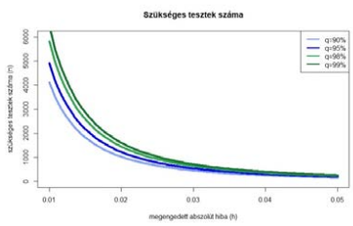
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS ...?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)

Titkos Tamás
2020. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is...a Wasserstein-tér?

Titkos Tamás írásának elején bemutatja a 2018-ban Fields-éremmel kitüntetett Alessio Figalli egyik optimális transzportot használó eredményét. A cikk végén pedig kiderül, hogy a transzportelméletnek rengeteg alkalmazása van nem csak az elméleti matematikában, hanem az alkalmazott tudományokban is. Így például a jel- és képfeldolgozásban, az alakfelismerésben, a szín- és textúramodellezésben, vagy a gépi tanulásban – így keletkezett bevezetőnk színes képe is. Tovább...



Backhausz Ágnes, Simon L. Péter
2020. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mennyit teszteljünk? 1. rész

Napjainkban sok szó esik arról, hogy hány tesztet kellene elvégezni ahhoz, hogy kellő pontossággal ismerni lehessen a fertőzöttek vagy fertőzésen átesettek számát egy bizonyos betegség esetén. Ez számos matematikai kérdést felvet. *Backhausz Ágnes* és *Simon Péter* írása arról szól, hogy ideális feltételek mellett a fertőzésen átesettek országos arányát hány teszt elvégzésével lehet biztonságosan megállapítani. Tovább...

Mester Péter, Pete Gábor
2020. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is…a perkoláció?

A perkoláció a statisztikus fizika és a modern valószínűségszámítás egyik legegyszerűbben definiálható, ugyanakkor nagyon mély problémákhoz és általános tanulságokhoz vezető modellje, amiben fázisátmenet történik. A perkolációs modelleknek rendkívül sok változata létezik. Az AMS MathSciNet adatbázisában a „percolation” kifejezés a jelen pillanatban 4273 cikkre illik. Harry Kesten 2006-os Notices of the AMS-beli What is ... percolation? cikke adta a kezdőlökést *Mester Péter* és *Pete Gábor* írásának. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Titkos Tamás 2020. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is...a Wasserstein-tér?

A Wasserstein-terek olyan speciális metrikus terek, amelynek pontjai valószínűségi mértékek, a pontok közötti távolságot pedig transzport tervek segítségével lehet meghatározni. Ilyen módon ez a cikk az előző számban megjelent „Mi is a... Monge-Kantorovics probléma” című írás folytatása.

Rávilágítandó a transzportelmélet eszközeinek erejére, vázlatosan bemutatjuk a 2018-ban Fields-éremmel kitüntetett Alessio Figalli egyik optimális transzportot használó eredményét. Ezek után néhány motiváló példa érintésével eljutunk az $\mathbb{R}^n$-re épített Wasserstein-terek definíciójáig. Ugyan az $\mathbb{R}^n$-nél komplikáltabb terekre is lehetne építkezni, és a definíciók sem lennének sokkal bonyolultabbak, mi megelégszünk ezzel az általánossággal. A Wasserstein-tér néhány érdekes tulajdonságának bemutatása után a cikket egy alkalmazással zárjuk: vázolunk egy eljárást, aminek segítségével egy képet fel lehet ruházni egy másik kép stílusjegyeivel.

1. Az izoperimetrikus egyenlőtlenség és alkalmazásai

Mielőtt rátérünk Figalli és szerzőtársainak eredményére, röviden felidézünk néhány alapfogalmat. Az $\mathbb{R}^n$ tér bizonyos részhalmazait akarjuk majd megmérni, természetes kívánalom, hogy az olyan egyszerű halmazok, mint a gömbök mérhetőek legyenek. Emlékeztetünk, hogy az $x \in \mathbb{R}^n$ középpontú r sugarú nyílt gömb nem más, mint $G_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < r\}$, ahol $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ és $|x-y| = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}$.

Jelölje $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ a legszűkebb olyan halmazrendszert, amely

– tartalmazza az összes nyílt gömböt,
– zárt a komplementer képzésére, azaz ha tartalmazza A-t, akkor tartalmazza $\mathbb{R}^n \setminus A$-t is,

– ha tartalmazza egy $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat minden tagját, akkor tartalmazza az egyesítésüket is.

Ezt a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ halmazrendszert az $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ metrikus tér Borel σ-algebrájának nevezzük. A $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,1]$ halmazfüggvény egy Borel valószínűségi mérték, ha

a) $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ és

b) ha $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan $\mathcal{B}(M)$-ben haladó halmazsorozat, hogy $j \neq k$ esetén $A_j \cap A_k = \emptyset$, akkor $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Az összes Borel valószínűségi mérték halmazát mostantól $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$-nel jelöljük. Külön kiemeljük a $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ halmaz két fontos részhalmazát: a Dirac-mértékek $\Delta(\mathbb{R}^n)$ halmazát, és azok véges konvex kombinációinak $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ halmazát. Emlékeztetünk, hogy az $x \in \mathbb{R}^{\kappa}$ pontra koncentrált Dirac-mérték definíciója: $\delta_x(A) = 1$ ha $x \in A$, és $\delta_x(A) = 0$ ha $x \notin A$. Ebben a cikkben mindig Borel-mértékekkel dolgozunk, ezért a továbbiakban a Borel szót sem a mértékek, sem pedig a mérhető halmazok elé nem tesszük ki.

Felidézzük a transzportelmélet néhány alapfogalmát is. Tegyük fel, hogy adott egy folytonos $c\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ költségfüggvény, és két valószínűségi mérték $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Olyan $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mérhető függvényt keresünk, amelyre

$$T_{\#}\mu(A) := \mu(T^{-1}(A)) = \nu(A)$$

teljesül minden $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz esetén. Ilyenkor a T-t transzport leképezésnek, ν-t pedig a μ T-szerinti előretoltjának neveztük. Egy ilyen T függvény mentén a teljes transzport költsége

$$\int_{\mathbb{R}^n} c(x, T(x))\ \mathrm{d}\,\mu(x).$$

Ilyen T függvény persze nem feltétlenül létezik. A probléma Kantorovics-féle megfogalmazásában transzport terveket keresünk, azaz olyan π valószínűségi mértékeket az $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ szorzat téren, amelyeknek marginálisai μ és ν. A transzport tervek halmazát $C(\mu, \nu)$-vel jelöljük.

Megjegyzendő, hogy $C(\mu, \nu)$ soha nem üres, ugyanis μ és ν szorzatmértéke megfelel a kritériumnak. Láttuk, hogy egy π transzport terv költsége

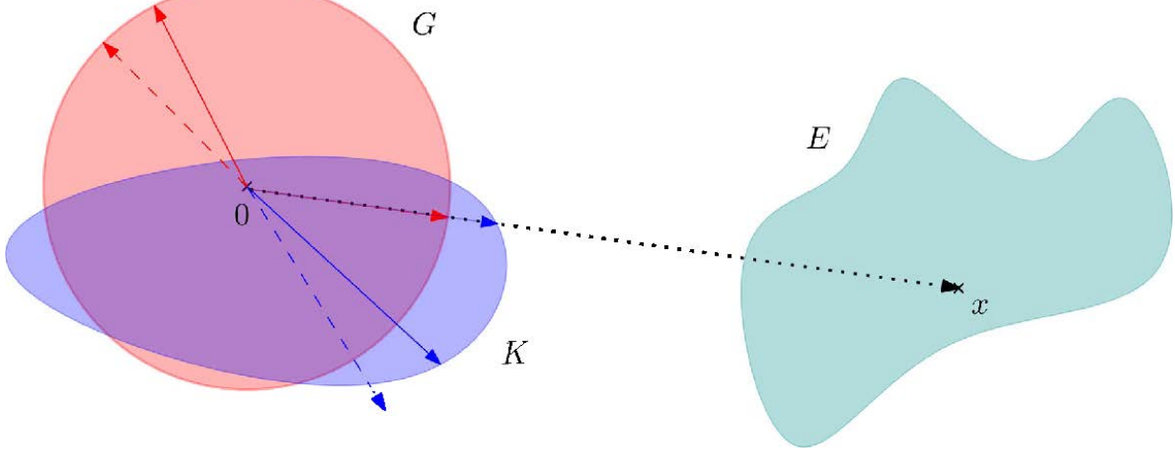
$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} c(x, y)\ \pi(dx, dy).$$

Ki fog derülni, hogy a Wasserstein-tér definíciójához pontosan ezekre a fogalmakra van szükségünk abban a speciális esetben, amikor a c költségfüggvény a távolság egy hatványával egyezik meg.

Most rátérünk Alessio Figalli és szerzőtársainak egy érdekes eredményére. Tudománynépszerűsítő előadásaiban Figalli a problémát Dido legendájával vezeti fel, ezt tesszük mi is. A legenda szerint Iarbás király (Jupiter istenség és Garamantis nimfa fia) annyi területet engedett át országából a Pygmalion zsarnoksága elől menekülő Didónak és követőinek, amennyit egy ökör bőre körülölel. Dido ravasz módon vékony csíkokra vágta a bőrt, és körülkerítette azt a dombot, ahová később Karthago fellegvára épült. De mi köze ennek az izoperimetrikus egyenlőtlenséghez?

Az izoperimetrikus egyenlőtlenség a síkon azt mondja, hogy ha egy egyszerű zárt rektifikálható görbe kerülete κ, az általa körbekerített terület pedig τ, akkor $\kappa \geq 2\sqrt{\pi}\sqrt{\tau}$. Egyenlőség csak akkor teljesül, ha a szóban forgó görbe a körvonal. Hasonló egyenlőtlenség magasabb dimenzióban is felírható a térfogattal és a felülettel.

Mostantól az egyszerűség kedvéért mindig nagyon szép halmazokkal dolgozunk. Ha azt mondjuk, hogy legyen $E \subseteq \mathbb{R}^n$, akkor mindig egy korlátos és egyszeresen összefüggő tartományra gondolunk, aminek sima a határa. A K jelölést olyan korlátos konvex nyílt halmazokra tartjuk fenn, amelyek tartalmazzák az origót. Az origó középpontú egység sugarú nyílt gömböt pedig G-vel jelöljük.



1. ábra

Az E halmaz térfogatát $|E|$-vel, felszínét (periméterét) pedig $P(E)$-vel jelöljük. Az n-dimenziós perimetrikus egyenlőtlenség a következőképp szól:

$$P(E) \geq n|G|^{\frac{1}{n}}|E|^{\frac{n-1}{n}}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha E egy gömb. Ennek az az oka, hogy a tér gömbje egy gömb. Hogy ezt hogy kell érteni, arra hamarosan fény derül. Most egy olyan módszerrel vezetjük be a $P(E)$ mennyiséget, ami egy fontos geometriai megfigyeléshez vezet. Jelölje E_ε az E halmaz ε-nal való felfújtját, azaz minden $x \in E$ köré rakjunk egy ε sugarú gömböt. Minkowski-összegként ezt úgy írhatjuk, hogy $E + \varepsilon G$. Meg lehet mutatni, hogy ekkor

$$|E_\varepsilon| = |E| + \varepsilon P(E) + o(\varepsilon),$$

ahol az utolsó tag olyan kicsi, hogy még ε-nal osztva is eltűnik, és így

$$P(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|E + \varepsilon G| - |E|}{\varepsilon}.$$

Magyarul a $P(E)$ semmi mástól nem függ, mint E-től és G-től. Ez a felírás lehetőséget ad arra, hogy bevezessük az analóg fogalmat olyan terekben, amelyeknek tulajdonságai nem függetlenek az iránytól. Gondolhatunk arra, hogy egy fizikai jelenséget írunk le, és különböző irányokban különböző erők hatnak. A fenti 1. ábra azt mutatja, hogy ha a G gömböt lecseréljük K-ra, akkor az x vektor „hossza” kisebb lesz, hiszen K-t nem kell annyiszorosára fújni mint G-t, hogy az x-et elnyelje. Továbbá előfordulhat, hogy egy origó körüli forgatással lemegyünk a gömbről. Ez azt mutatja, hogy a kék szaggatott nyíllal jelölt irányban máshogy skálázódik át hossz, mint a nem szaggatott kék nyíl irányában.

Mostantól tehát a gömb szerepét egy origót tartalmazó konvex nyílt K halmaz játssza, a K-szerinti perimétert pedig az alábbi formulával definiáljuk:

$$P_K(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|E + \varepsilon K| - |E|}{\varepsilon}.$$

Wulff már 1901-ben megmutatta [16], hogy ebben az anizotróp környezetben is igaz az egyenlőtlenség, persze G helyett K-val

$$P_K(E) \geq n|K|^{\frac{1}{n}}|E|^{\frac{n-1}{n}}.$$

Az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül egyenlőséggel, ha E nagyítástól és eltolástól eltekintve megegyezik K-val, vagyis $E = x + rK$ alkalmas $x \in \mathbb{R}^n$-re és $r > 0$-ra. Tehát az derült ki, hogy az optimális konfigurációkat mindig a tér szerkezetét meghatározó (vagy ha úgy tetszik, a gömb szerepét betöltő) K halmaz adja. Ezt a $P_K(E)$ mennyiséget Wulff a felületi energia leírására alkalmazta kristályok egyensúlyi konfigurációjának tanulmányozásakor. Az egyensúlyi konfigurációt emiatt Wulff-alaknak nevezik. De hogy jön ide az optimális transzport?

Figalliék a [4] cikkben megadták a fenti anizotróp egyenlőtlenségnek egy olyan bizonyítását, amelyik a transzportelmélet néhány nagyon mély eredményét használta. Ehhez először is mértékké kellett változtatni E-t és K-t:

$$\mu_E(A) := \frac{|A \cap E|}{E}, \quad \mu_K(A) := \frac{|A \cap K|}{|K|} \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)).$$

Tulajdonképpen E-n és K-n egyenletesen szétterítettünk egy-egy egységnyi tömeget. Amit kaptunk, az két olyan mérték, amihez Brenier és McCann nagyon szép eredményei (lásd [1,11,12]) szerint létezik $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transzport leképezés, ami átviszi μ_E-t μ_K-ba. Sőt, ez a T előáll, mint egy alkalmas $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex függvény gradiense. Tehát a transzportelmélet segítségével be lehetett hozni a képbe két függvényt T-t és φ-t, majd ezek segítségével meg tudtak becsülni néhány fontos mennyiséget. Így például az egyenlőtlenség két oldala közötti deficitet mérő

$$D(E) := \frac{P_K(E)}{n|K|^{\frac{1}{n}}|E|^{\frac{n-1}{n}}} - 1$$

mennyiséget, és az E és K alakjának eltérőségét mérő aszimmetriaindexet

$$A(E) := \inf \left\{ \frac{|E \ominus (x_0 + rK)|}{|E|} \;\middle|\; x_0 \in \mathbb{R}^n, r^n|K| = |E| \right\}.$$

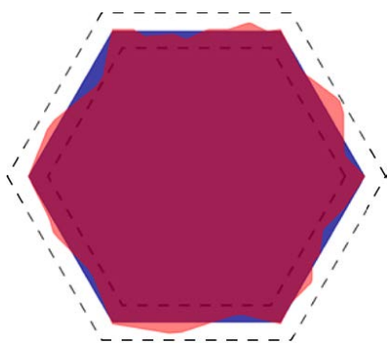
Az $A(E)$ definíciójában lévő $\ominus$ szimbólum a szimmetrikus differencia, tehát

$$U \ominus V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U).$$

Megmutatták, hogy egy alkalmas n-től függő $C(n)$ konstanssal

$$A(E) \leq C(n)\sqrt{D(E)}.$$

Ezeket az eredményeket felhasználva az [5] cikkben azt vizsgálták, hogy egy külső energiaforrás hatására hogyan változik meg egy kristály alakja. A sematikus 2. ábrán K a kék sokszög, amely a kristály egyensúlyi állapotát mutatja, E pedig az a pirossal jelölt alakzat, amit a hevítéssel kapunk. Figalliék megmutatták, hogy E egyenletesen közel van K-hoz, sőt a közelség mértékét egy olyan konstanssal tudták kontrollálni, ami csak a tér dimenziójától, K felületi energiájától, és a rendszerhez hozzáadott energiától függ.



2. ábra

2. Speciális metrikus terek

Röviden emlékeztetünk a metrikus tér fogalmára. Legyen M egy nemüres halmaz, amelyen adott egy $\varrho\colon M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ függvény, amely teljesíti az

i) minden $x, y \in M$-re $\quad \varrho(x, y) = 0 \iff x = y$,

ii) minden $x, y \in M$-re $\quad \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$,

iii) minden $x, y, z \in M$-re $\quad \varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$.

feltételeket. Ekkor a ϱ függvényt metrikának, a ϱ-val ellátott M halmazt (röviden az (M, ϱ) párt) metrikus térnek nevezzük. Mostantól olyan speciális metrikus terekről lesz szó, amelyeknél M szerepét az $\mathbb{R}^n$ tér Borel valószínűségi mértékeinek egy-egy kitüntetett részhalmaza játssza.

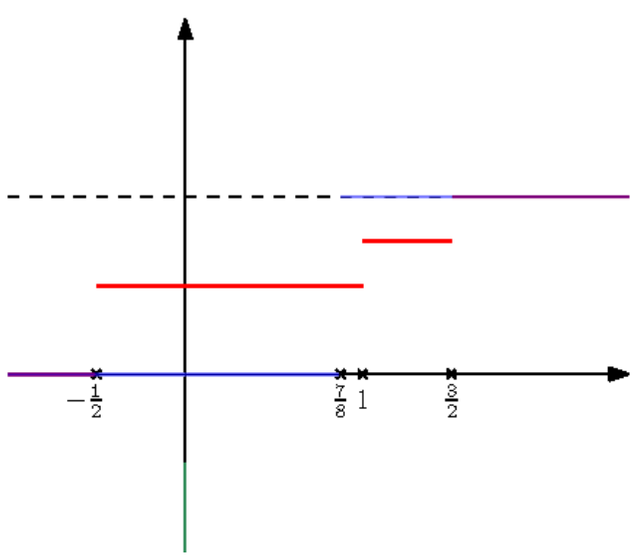
Az egyszerűség kedvéért tegyük fel most, hogy a mértékek a valós számegyenesen élnek, azaz $n = 1$. Ebben a speciális esetben minden $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mérték helyett tekinthetjük az ő eloszlásfüggvényét, azaz az

$$F_\mu \colon \mathbb{R} \to [0,1]; \qquad F_\mu(t) := \mu((-\infty, t])$$

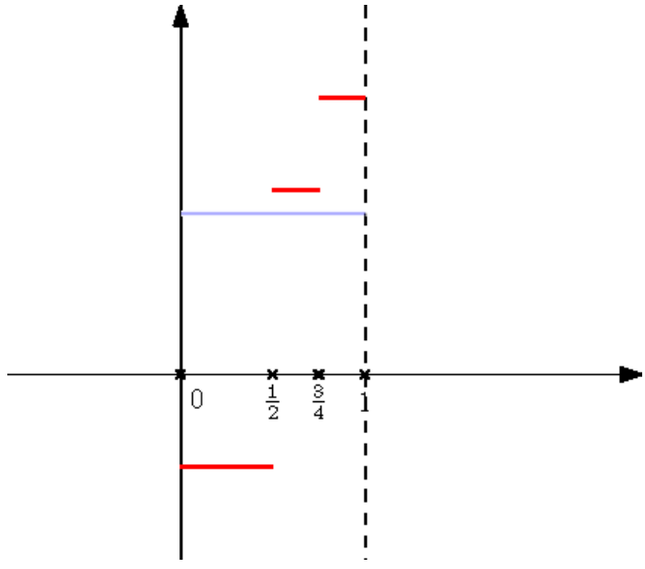
függvényt. A 3. ábrán a $\mu = \frac{1}{2}\delta_{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_{\frac{3}{2}} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ és a $\nu = \delta_{\frac{7}{8}} \in \Delta(\mathbb{R})$ mértékekhez tartozó eloszlásfüggvények láthatók. Egy eloszlásfüggvény általában nem szigorúan monoton, így a hagyományos értelemben vett inverzéről nem beszélhetünk. Ennek ellenére definiálhatunk egyfajta általánosított inverzet:

$$F_\mu^{-1} \colon (0,1) \to \mathbb{R}; \qquad F_\mu^{-1}(s) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid F_\mu(t) \leq s\}.$$

A 4. ábrán a fenti eloszlásfüggvények általánosított inverzei láthatók.



3. ábra



4. ábra

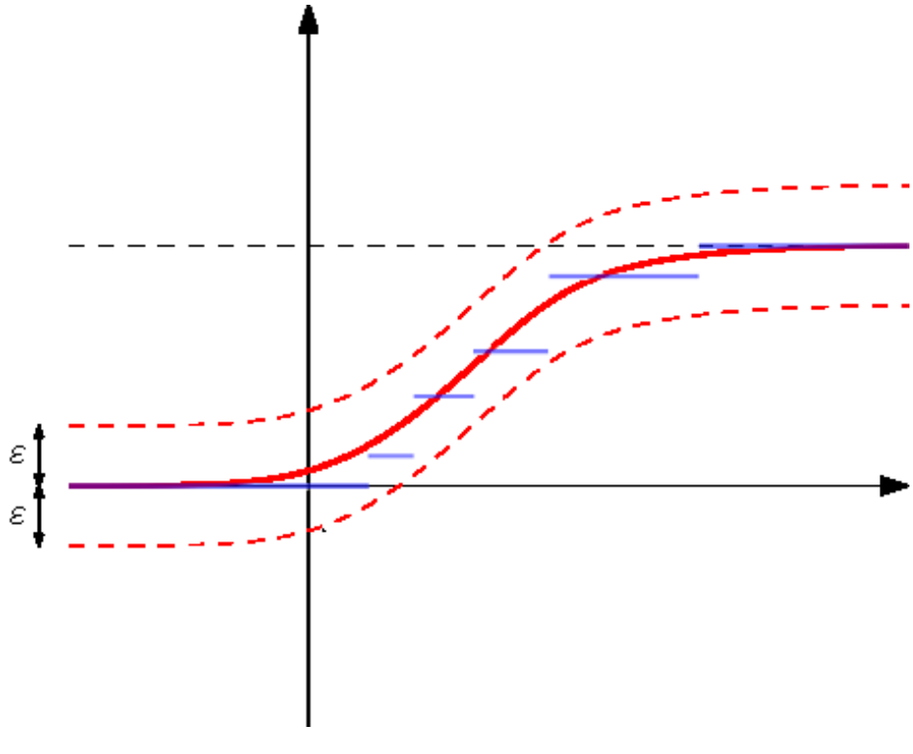
Ismerkedjünk meg három olyan nevezetes metrikával, amelyeket eloszlásfüggvények segítségével definiálnak.

2.1. A Kolmogorov–Smirnov távolság

Két valószínűségi mérték Kolmogorov–Smirnov távolságát a

$$d_{KS}(\mu,\nu) := \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_\mu(x) - F_\nu(x)|$$

formulával definiáljuk. Tehát $d_{KS}(\mu,\nu) < \varepsilon$, ha F_ν az F_μ-re ilesztett ε-sávon belül halad (lásd 5. ábra). Ez a metrika ismerős lehet azoknak, akik már találkoztak a Kolmogorov-Smirnov próbával, amelyet a statisztikában illeszkedésvizsgálatra, illetve homogenitásvizsgálatra használnak.



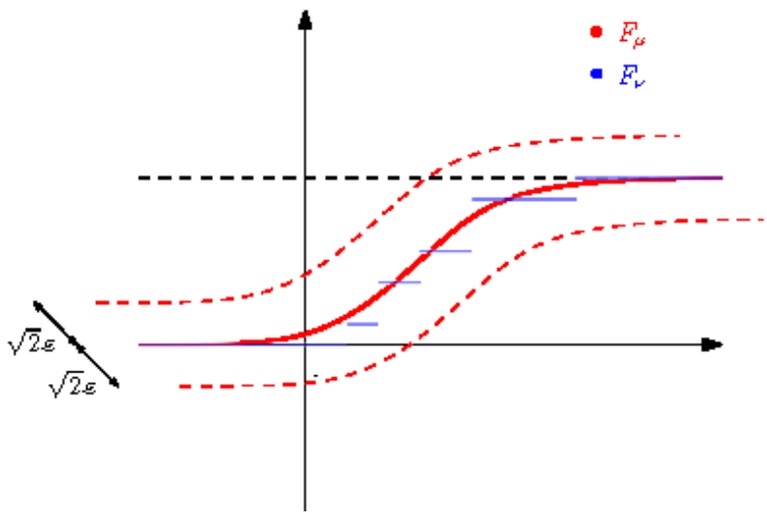
5. ábra

2.2. A Lévy-távolság

Második példánk a Lévy-metrika, az egyik olyan metrika, ami a gyenge konvergenciát metrizálja. Két valószínűségi mérték Lévy-távolságát így definiáljuk:

$$d_L(\mu,\nu) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R}\colon F_\mu(x-\varepsilon) - \varepsilon \le F_\nu(x) \le F_\mu(x+\varepsilon) + \varepsilon\}.$$

Az alábbi 6. ábra azt szemlélteti, hogy egy ε érték mikor elégíti ki a definícióban látható egyenlőtlenség láncot.



6. ábra

Azt látjuk, hogy F_ν-nek az F_μ átlós irányban vett $\sqrt{2}\varepsilon$-nal való eltoltjai között kell haladni. A két ábra első ránézésre elég hasonló, de nem szabad elfelejteni, hogy a Lévy-metrikánál a függvények változójában is történik eltolás. Ezáltal a metrika érzékeny lesz nem csak arra, hogy az F_μ és F_ν egy adott x pontban mennyire tér el egymástól, hanem arra is, hogy a számegyenes x-hez közeli pontjaiban hogyan alakulnak az eloszlások.

Erre a tényre elég jól rávilágít, ha kiszámoljuk két Dirac-mérték távolságát. Ha $x, y \in \mathbb{R}$ két tetszőleges pont, akkor $d_{KS}(\delta_x, \delta_y) = 1$, míg $d_L(\delta_x, \delta_y) = \min\{|x-y|, 1\}$. Azt látjuk, hogy a Kolmogorov-Smirnov metrika semmilyen információt nem ad vissza x és y távolságáról, azaz $|x-y|$-ról. Ezzel szemben a Lévy-metrika segítségével ki tudjuk olvasni a tartó pontok távolságát, amennyiben az kisebb, mint 1.

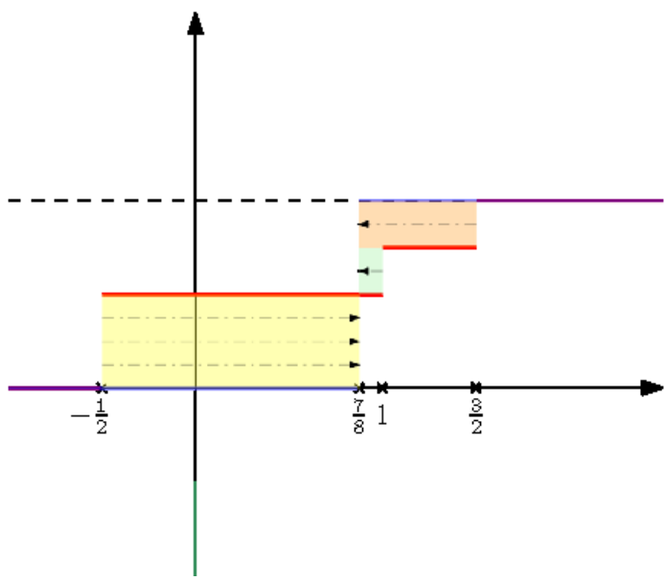
Ezen a ponton rátérhetünk a transzport tervekhez köthető metrikák tárgyalására.

2.3. A Kantorovics-távolság

A Lévy-metrikát általában kicsi mennyiségek becslésére alkalmazzák, így nem okoz gondot, hogy a metrika semmit nem tud mondani azokról a mértékekről, amelyek egymástól távol vannak. Ha olyan problémát akarunk kezelni, ahol nem csak kicsi mennyiségekkel kell dolgozni, akkor másik metrikát kell használnunk. Ahhoz hogy a következő definíció értelmes legyen, meg kell szorítanunk a valószínűségi mértékek $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ halmazát. Vegyük azokat a valószínűségi mértékeket, amelyeknek véges a várható értéke. Ha μ és ν két ilyen mérték, akkor a

$$d_K(\mu,\nu) := \int_{-\infty}^{+\infty} |F_\mu(t) - F_\nu(t)| \, \mathrm{d}t$$

integrál véges. Azt látjuk, hogy egyrészt $d_K(\delta_x, \delta_y) = |x-y|$, másrészt azt is megsejthetjük, hogy ennek a metrikának már köze lesz a szállítási feladatokhoz.



7. ábra

Erre később visszatérünk, sejtésünket egyelőre a 7. ábrával szemléltetjük. Tekintsük megint a 3. ábrán látható mértékeket. A definícióban szereplő integrál értéke éppen a (különböző színekkel jelölt) téglalapok összterülete. Egy-egy téglalap területe pedig nem más, mint a megfelelő súlyok mozgatásának költsége, ha 1 egység x-ből y-ba való mozgatásának költsége $|x-y|$. Valójában amit itt látunk (a véges várható értékű mértékek halmaza a Kantorovics-metrikával ellátva) egy Wasserstein-tér. Hogy pontosan hogyan kell ezt érteni, az a következő fejezetből kiderül.

3. A $\mathcal{W}_p(\mathbb{R}^n)$ Wasserstein-tér

Rátérünk a Wasserstein-tér definíciójára. Legyen $p \geq 1$ egy rögzített szám. Jelölje $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^n)$ a véges p-edik momentumú valószínűségi mértékek halmazát

$$\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^n) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \exists x_0 \in \mathbb{R}^n \colon \int_{\mathbb{R}^n} |x - x_0|^p \, d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Ez a mértékcsalád szolgáltatja a p-Wasserstein-tér alaphalmazát. Noha nem egészen magától értetődő, be lehet bizonyítani, hogy a

$$d_{\mathcal{W}_p}(\mu, \nu) := \left(\inf_{\pi \in C(\mu,\nu)} \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x - y|^p \, d\pi(x, y) \right)^{1/p}$$

kétváltozós függvény metrika a $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^n)$ halmazon. A $d_{\mathcal{W}_p}$ függvényt p-Wasserstein-távolságnak, a $(\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^n), d_{\mathcal{W}_p})$ párt az $\mathbb{R}^n$ feletti p-Wasserstein-térnek nevezzük és röviden $\mathcal{W}_p(\mathbb{R}^n)$-nel jelöljük.

Világos a kapcsolat a metrika és a transzport probléma között: két mérték távolsága nem más, mint az optimális transzport költsége a $c(x, y) := |x - y|^p$ költségfüggvény mellett. Megjegyezzük, hogy Wasserstein-teret bármilyen szeparábilis metrikus térre lehet építeni. Azaz ha (M, ϱ) egy ilyen tér, akkor $\mathbb{R}^n$ helyére M-et, $|x - y|$ helyére $\varrho(x, y)$-t írva és a transzport terv fogalmát értelemszerűen módosítva a $\mathcal{W}_p(M)$ Wasserstein-tér definícióját kapjuk.

Könnyű meggondolni, hogy ha μ és ν közül legalább az egyik egy Dirac-mérték, akkor $C(\mu, \nu)$ halmaz egyetlen eleme a szorzatmérték, és így a távolság könnyen kiszámítható. Egy ilyen egyszerű számítás mutatja, hogy a Wasserstein-távolságból ki lehet olvasni az alul fekvő tér metrikáját:

$$d_{\mathcal{W}_p}(\delta_x, \delta_y) = |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

Azt is mondhatnánk, hogy a Wasserstein-tér alján Dirac-mértékek formájában ott ül az $\mathbb{R}^n$-nek egy másolata. Ezek a Dirac-mértékek a térnek egyfajta építőkövei abban az értelemben, hogy tetszőleges $\mu \in \mathcal{W}_p(\mathbb{R}^n)$-hez és $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\nu = \sum_{j=1}^k \alpha_j \delta_{x_j} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ mérték, amelyre $d_{\mathcal{W}_p}(\mu, \nu) < \varepsilon$.

Felmerülhet a kérdés, hogy különböző p értékekre a $\mathcal{W}_p(\mathbb{R}^n)$ terek mennyire térnek el egymástól. Az egyszerűség kedvéért ismét az $n = 1$ esetet, tehát a számegyenes esetét fogjuk vizsgálni. A p-Wasserstein-metrika

$$d_{\mathcal{W}_p}(\mu,\nu) := \left(\inf_{\pi \in C(\mu,\nu)} \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |x-y|^p \, d\pi(x,y) \right)^{1/p}$$

definícióját látva az embernek az a benyomása támad, hogy amit lát, az az L^p függvénytér mértékelméleti analogonja. Ebben az esetben egy egyszerű analógiánál többről van szó: a $\mathcal{W}_p(\mathbb{R})$ Wasserstein-tér beágyazható az $L^p\big((0,1)\big)$ térbe az általánosított inverzek segítségével. Nevezetesen, minden $\mu, \nu \in \mathcal{W}_p(\mathbb{R})$-re

$$d_{\mathcal{W}_p}(\mu,\nu) = \left(\int_0^1 |F_\mu^{-1}(t) - F_\nu^{-1}(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}} = \|F_\mu^{-1} - F_\nu^{-1}\|_{L^p}.$$

Ha egy pillanatra visszagondolunk az 7. ábrára és a Kantorovics-metrikára, akkor egy egyszerű integrál átalakítással megállapíthatjuk, hogy ott éppen az 1-Wasserstein-távolságot láttuk.

A fenti $\mathcal{W}_p(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p\big((0,1)\big)$ beágyazásnak a létezéséből már sejthető, hogy különböző p értékekre a $\mathcal{W}_p(\mathbb{R})$ terek szerkezete eltérő, és hogy a $p=1$ és a $p=2$ esetek különlegesek. A $p=1$ azért, mert az L^p $(p \geq 1)$ terek közül az L^1 az egyetlen, aminek a normája nem szigorúan konvex, a $p=2$ pedig azért, mert az L^p terek között az L^2 az egyetlen Hilbert tér.

A $\mathcal{W}_2(\mathbb{R})$ tér gazdagságát jól mutatja, hogy a többi $\mathcal{W}_p(\mathbb{R})$ térrel összehasonlítva sokkal több szimmetriája van. Szimmetria alatt olyan bijektív $\Phi\colon \mathcal{W}_p(\mathbb{R}) \to \mathcal{W}_p(\mathbb{R})$ leképezéseket értünk, amelyek megtartják a távolságot, azaz

$$d_{\mathcal{W}_p}(\Phi(\mu),\Phi(\nu)) = d_{\mathcal{W}_p}(\mu,\nu) \qquad (\mu,\nu \in \mathcal{W}_p(\mathbb{R})).$$

Be lehet bizonyítani, hogy a $\mathcal{W}_p(\mathbb{R})$ tér szimmetriái a $p \neq 2$ esetben éppen a számegyenes szimmetriáinak feleltethetők meg (lásd [7]). Azaz Φ pontosan akkor szimmetriája $\mathcal{W}_p(\mathbb{R})$-nek, ha ő az $\mathbb{R}$ egy ϕ szimmetriájának az előretoltja

$$\Phi(\mu)(A) = \mu(\phi^{-1}(A)) \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

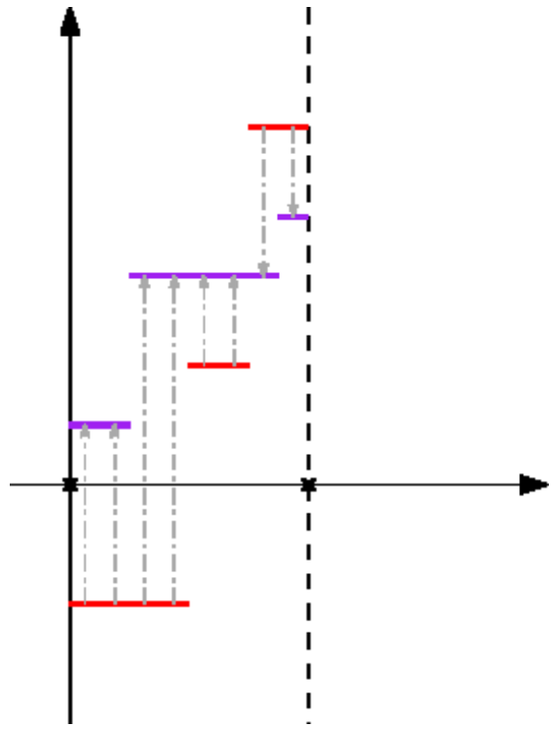
Egy véges tartójú mértéken könnyű is szemléltetni a Φ hatását, mindössze a tartópontokat kell mozgatni:

$$\Phi\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\delta_{x_j}\right)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\delta_{\phi^{-1}(x_j)}.$$

Azt jól tudjuk, hogy mik a számegyenes szimmetriái: eltolások és csúsztatva tükrözések. Innen könnyű meggondolni, hogy ha Φ a $\mathcal{W}_p(\mathbb{R})$-nek $(p\neq 2)$ egy olyan szimmetriája, ami két Dirac-mértéket helyben hagy, akkor minden mértéket helyben hagy. Tehát a tér meglehetősen merev. Ezzel szemben Kloeckner bebizonyította (lásd [9]), hogy a $\mathcal{W}_2(\mathbb{R})$ térnek van egy egész sereg olyan egzotikus szimmetriája, ami minden Dirac-mértéket fixen hagy, de mégsem igaz, hogy $\Phi(\mu)=\mu$ minden $\mu\in\mathcal{W}_2(\mathbb{R})$-re. Általában is igaz, hogy a 2-Wasserstein-terek struktúrája sokkal gazdagabb, emiatt az alkalmazásokban legtöbbször ezekkel a terekkel találkozhatunk.

4. Wasserstein stílustranszfer

Az optimális transzport, illetve a hozzá kötődő metrikák így például a Wasserstein-metrika nagy előnye, hogy nem csak egy számértéket rendelnek a mértékpárokhoz, de arra vonatkozóan is szolgálnak információval, hogy hogyan transzformálható át egyik mérték a másikba. A $\mathcal{W}_p(\mathbb{R})$ esetben ez könnyen látható: az eloszlásfüggvények általánosított inverzeit kell egymásba mozgatni, ahogy az a 8. ábrán látható.



8. ábra

De nem csak a valós számok, vagy $\mathbb{R}^n$ esetén ennyire szép a helyzet. Általánosabban, ha M egy Riemann-sokaság, akkor a $\mathcal{W}_2(M)$ tér nagyon jó geometriai tulajdonságokkal rendelkezik. Emiatt a transzportelméletnek rengeteg alkalmazása van nem csak az elméleti matematikában, hanem az alkalmazott tudományokban is. Így például a jel- és képfeldolgozásban [10], [14], az alakfelismerésben [8], a szín és textúra modellezésben [3], [15], vagy a gépi tanulásban [2], [6]. A cikket egy képmanipuláló eljárás vázlatos bemutatásával zárjuk. A feladat a következő: adott két kép, A és B.

A. ábra

B. ábra

Az A képet akarjuk manipulálni úgy, hogy az eredmény rendelkezzen a B stílusjegyeivel.

A feladatot egy konvolúciós neurális háló végzi el: beazonosítja a két kép jellegzetességeit, és átkódolja őket egy-egy valószínűségi mértékké. Jelölje ezeket a mértékeket $\mu_A, \mu_B \in \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n)$. Innentől kezdve a $\mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n)$ Wasserstein-téren dolgozunk: egy olyan $\nu \in \mathcal{W}_2(\mathbb{R}^n)$ mértéket keresünk, amit ha visszakódolunk, akkor olyan képet kapunk, ami rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Sőt, nem is elégszünk meg ennyivel, a stilizálás erősségét is be akarjuk állítani.

Vegyük szemügyre a következő kifejezést rögzített $t \in [0,1]$ mellett:

$$(1-t)d^2_{\mathcal{W}_2}(\nu, \mu_A) + t d^2_{\mathcal{W}_2}(\nu, \mu_B).$$

Az összeg első tagja arról ad információt, hogy ha ν-t kódoljuk vissza, akkor mennyit vesztünk A-ból, a második tag pedig arról, hogy mennyit vesztünk B-ből. Látjuk, hogy ha t közel van 1-hez, akkor a stilizálás nagyon erős, hiszen a kifejezés értékébe az első tag alig szól bele. Ha pedig t kicsi, akkor a stilizálás gyenge. A t kívánt értékre való beállítása után a fenti kifejezés csak a ν-nek függvénye, a feladat az, hogy minimalizáljuk a veszteségek összegét. Ez a feladat megoldható, sőt egyetlen megoldása van, jelölje ezt ν_t. Ezt a ν_t mértéket dekódolva a kívánt erősséggel stilizált képet kapjuk. Világos, hogy $\nu_0 = \mu_A$ és $\nu_1 = \mu_B$. Az már kevésbé világos, de igaz, hogy a minimalizáló mértékek által alkotott $(\nu_t)_{t\in[0,1]}$ sereg egy μ_A-t μ_B-vel összekötő geodetikus görbét határoz meg. Két mérték ilyen módon való összekötését McCann-interpolációnak nevezik.

Végül megjegyezzük, hogy a transzfer bemutatásánál két nehézséget is átugrottunk: az első, hogy hogyan kódolja és dekódolja a neurális háló a képeket/mértékeket. A másik probléma, hogy technikailag hogyan oldja meg az ember a minimalizálási feladatot, vagy általában, hogyan lehet hatékonyan kiszámolni a 2-Wasserstein-távolságot. Erről az olvasó többet is megtudhat a [13] cikkben.

A cikk az ITM és az NKFIH ÚNKP-19-4-BGE-1 és PD128374 kódszámú projektjeinek, valamint az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíjának támogatásával készült.

Irodalomjegyzék

[1] Y. Brenier, Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, Commun. Pure Appl. Math. 44(4) (1991), 375–417.
[2] N. Courty, R. Flamary, D. Tuia, Domain adaptation with regularized optimal transport, Machine Learning and Knowledge Discovery in Databases, Springer, 274–289.
[3] S. Ferradans, G.S. Xia, G. Peyré, J.F. Aujol, Static and dynamic texture mixing using optimal transport, Springer; 2013.
[4] A. Figalli, F. Maggi, A. Pratelli, A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities, Invent. Math. 182 (2010), no. 1, 167–211.
[5] A. Figalli, F. Maggi, On the shape of liquid drops and crystals in the small mass regime, Arch. Ration. Mech. Anal. 201 (2011), no. 1, 143–207.
[6] C. Frogner, C. Zhang, H. Mobahi, M. Araya, T. A. Poggio, Learning with a Wasserstein loss, Advances in Neural Information Processing Systems, 2015:2044–2052.
[7] Gy. P. Gehér, T. Titkos, D. Virosztek, Isometric study of Wasserstein spaces – The real line, Trans. Amer. Math. Soc., Volume 373, Number 8, August 2020, Pages 5855--5883.
[8] S. Haker, L. Zhu, A. Tannenbaum, S. Angenent, Optimal mass transport for registration and warping. International Journal of Computer Vision. 2004;60(3):225–240.
[9] B. Kloeckner, A geometric study of Wasserstein spaces: Euclidean spaces, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze IX, 2 (2010), 297–323.
[10] S. Kolouri, A.B. Tosun, J.A. Ozolek, G.K. Rohde, A continuous linear optimal transport approach for pattern analysis in image datasets. Pattern Recognition. 2016;51:453–462.
[11] R.J. McCann, Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps, Duke Math. J., 80 (2) (1995), 309–323.
[12] R. J. McCann, A convexity principle for interacting gases, Adv. Math. 128 (1) (1997), 153–179.
[13] Y. Mroueh, Wasserstein Style Transfer, arxiv:1905.12828
[14] S. R. Park, S. Kolouri, S. Kundu, G.K. Rohde GK, The cumulative distribution transform and linear pattern classification, Applied and Computational Harmonic Analysis. 2017.
[15] J. Rabin, S. Ferradans, N. Papadakis, Adaptive color transfer with relaxed optimal transport, Image Processing (ICIP), IEEE 2014.; pp. 4852–4856.
[16] G. Wulff, Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystallflagen, Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie. 34 (5/6) (1901) 449–530.

Titkos Tamás
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
és Budapesti Gazdasági Egyetem

valószínűségszámítás halmazok Fields-érem metrikus terek

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Backhausz Ágnes, Simon L. Péter 2020. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mennyit teszteljünk? 1. rész

Napjainkban sok szó esik arról, hogy hány tesztet kellene elvégezni ahhoz, hogy kellő pontossággal ismerni lehessen a fertőzöttek vagy fertőzésen átesettek számát egy bizonyos betegség esetén. Ez számos matematikai kérdést felvet. Ebben az írásban arról szólunk, hogy ideális feltételek mellett a fertőzésen átesettek országos arányát hány teszt elvégzésével lehet biztonságosan megállapítani.

Egyszerű számpéldával a következőképpen lehet a kérdést megvilágítani. Tegyük fel, hogy a társadalom 10%-a esett át a fertőzésen, de ennek kiderítéséhez természetesen nem szeretnénk 10 millió emberen a tesztet elvégezni, csak kisebb mintán. Például, ha 100 embertől veszünk mintát, akkor, ha szerencsénk van, éppen 10 fertőzésen átesett egyént találunk, ami éppen az országos átlagot adná, de könnyen lehet, hogy 100-ból 8-at vagy 11-et kapunk, és tévesen becsüljük meg a valódi arányt. Ekkor tesztelhetünk újabb száz embert, majd ismét újabbat. A kérdés az, hogy hányszor kell ezt elvégezni, és milyen biztonsággal tudjuk a példa elején említett 10 százalékot megkapni. Ezt a bevezető valószínűségszámítás kurzusokon (közgazdasági, mérnöki szakokon is) elsajátított matematikai eszköztár segítségével magunk is kiszámolhatjuk, ezért örömmel osztjuk meg az Olvasóval ennek egy lehetséges módszerét. A végeredményt még nem áruljuk el, a kíváncsiak előrelapozhatnak és megleshetik. Aki pedig sorban haladva olvassa a cikket, azt elkalauzoljuk olyan témákhoz, mint a Stirling-formula, Gauss-görbe és centrális határeloszlás-tétel, sőt még az is kiderül, hogy nem volt felesleges megismerni analízisből az integrálközelítő összeg fogalmát és megtanulni a helyettesítéses integrálást.

1. A mintavételezés modellje: a binomális eloszlás

Induljon hát a matematikaóra. Ahhoz, hogy egy adott pontossághoz és bizonyossághoz tartozó szükséges tesztek számát meghatározzuk, először azt a kérdést értjük meg alaposabban, hogy adott számú teszt és ismert védettségi arány esetén mennyi a valószínűsége, hogy például legfeljebb $r = 5\%$-ot téved a becslésünk az igazi érték arányában. A számolások során azt feltételezzük, hogy a tesztek egymástól függetlenek, és tökéletes megbízhatósággal mutatják ki a fertőzést, nincs tévedés egyik irányban sem. A kérdés az egyszerű pénzfeldobáshoz (Bernoulli trials) hasonló, az egyének p valószínűséggel átestek a fertőzésen, őket védetteknek fogjuk nevezni, $1-p$ valószínűséggel pedig nem. Ennek a p-nek az értékre leszünk kíváncsiak adott pontossággal. Legyen X azon emberek száma n vizsgált személy közül, akiknél kimutatta a teszt a védettséget. Ennek értéke véletlen, azaz X egy valószínűségi változó. Ekkor a p-t becsülni az X/n-nel, vagyis a védettek relatív gyakoriságával tudjuk a legegyszerűbben és sok szempontból a legjobban (egy ezzel kapcsolatos kérdésre a cikk második részében fogunk kitérni). A becslésre azt a feltételt fogalmaztuk meg, hogy a relatív hibája legfeljebb $r = 5\%$ legyen:

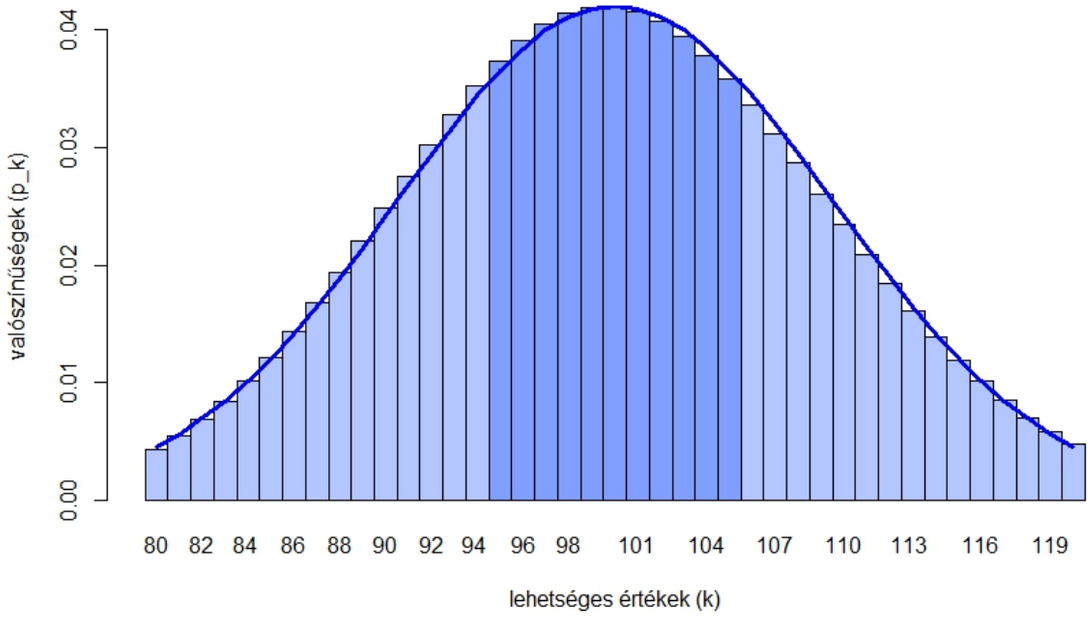
$$\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0{,}05p. \tag{1}$$

Mivel a védettek száma, azaz X értéke 0 és n között tetszőleges lehet, olyan feltételt nem fogunk tudni mondani, amire ez biztosan teljesül, bárhogyan is alakul a mintavételezés. Azt azonban már kitűzhetjük célnak, hogy ez minél nagyobb, például legalább 95% valószínűséggel teljesüljön.

Ehhez pedig először a fenti esemény valószínűségét szeretnénk tehát kiszámítani. Ha n egyént tesztelünk, akkor a középiskolában tanult képlet alapján annak valószínűsége, hogy k védettet találunk:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Ez a jól ismert binomiális eloszlás, ami azt is megadja, hogy ha egy urnában a golyók p -ed része piros, akkor mennyi annak valószínűsége, hogy n-szer visszatevéssel húzva pontosan k pirosat kapunk.



1. ábra. A binomiális eloszlás $n = 1000$ renddel és $p = 0{,}1$ paraméterrel, valamint a közelítő függvény (4) alapján

Már az egyetemi bevezető matematika órára átlépve, tanultuk, hogy ennek várható értéke np, azaz átlagosan ennyi védettet fogunk találni az n tesztelt egyén között. Ha például $n = 1000$ tesztelést végzünk, és az emberek 10 százaléka védett, azaz $p = 0{,}1$, akkor várhatóan 100 védettet fogunk találni. Valójában persze lehet, hogy 95-öt vagy 110-et. Ha 95 védettet találunk, akkor a becslésünk $X/n = 95/1000 = 0{,}095$ lesz, ezzel az igazi p-hez viszonyítva legfeljebb 5%-t tévedtünk, azaz az $r = 5\%$ relatív hibahatáron belül maradunk. Ha viszont $X = 110$, akkor a becslésünk 0,11, ez már 10%-os hibát jelentene. Vagyis az (1) egyenlet alapján annak a valószínűségét szeretnénk kiszámítani, hogy a 95-től 105-ig terjedő intervallumba esik a védettek száma. A (2) képletből ez a valószínűség egyszerűen a

$$p_{95} + p_{96} + \ldots + p_{105}$$

összeg. Az 1. ábrán láthatjuk a binomiális eloszlást $k = 80$-tól $k = 120$-ig, $n = 1000$ és $p = 0{,}1$ esetén. Az oszlopok szélessége 1, a magasságokat a fenti p_k-k adják meg, így a sötétebb rész területét kell meghatároznunk.

Az alábbi octave kód abban lesz segítségünkre, hogy ezt numerikusan kiszámítsuk. Más programokban, például Matlabban vagy R-ben is egy hasonlóképpen megírt algoritmust használhatnánk, illetve ezen programoknak a binomiális eloszlásra vonatkozó beépített függvényeit is (például `binocdf(105, 1000, 0.1)-binocdf(94, 1000, 0.1)` az octave-ban). Ez a hosszabb kód viszont a számítás menetét is illusztrálja. Az

`mv` vektor azokat a lehetséges értékeket tartalmazza, melyek a megengedett tartományba esnek. A `pk` függvény adott n, p számok és k, pozitív egészekből álló vektor esetén egy olyan vektort ad vissza, aminek a $k.$ eleme éppen a fent definiált p_k. A logaritmusra való áttérés oka, hogy nagy n esetén a binomiális együttható értéke is nagyon nagy, p^k pedig nagyon kicsi lehet, és a szorzásnál megbízhatóbb a logaritmusok kiszámítása és összeadása, így kisebb a számítógép kerekítéseiből adódó hiba. Végül a keresett tartományba eső valószínűségeknek, azaz `binmv` elemeinek az összege adja meg a kérdéses valószínűséget.

```
n=1000; p=0.1; hiba=0.05;

mv=[round(n*p*(1-hiba)): round(n*p*(1+hiba))];

binmv=bineloszl(n,p,mv);

function pk=bineloszl(n,p,k)

        bnc=[];

        for j=1:length(k)

                mj=m(j);

                bnc=[bnc bincoeff(n,mk)];

                end

        lpk=log(bnc)+k*log(p)+(n-k)*log(1-p);

        pk=exp(lpk);

endfunction

sum(binmv)
```

Ebből azt kapjuk, hogy $n = 1000$ és $p = 0{,}1$ esetén annak valószínűsége, hogy a becslésünk relatív hibája legfeljebb $r = 5\%$, vagyis az (1) képletben felírt esemény valószínűsége:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \leq 0{,}05p\right) = \mathbb{P}\big(|X-np| \leq 0{,}05\cdot np\big) = \mathbb{P}(95 \leq X \leq 105) = 43{,}79\%. \quad (3)$$

2. A binomiális eloszlás tagjainak közelítése a haranggörbével

Ezzel tehát adott mintaelemszám esetén már tudunk számolni. Ugyanakkor az imént kapott érték azt jelenti, hogy több mint 50% valószínűséggel tévedünk a megengedett 5% relatív hibánál többet. Ennél jobb eredményt szeretnénk elérni, vagyis több mint ezer tesztre van szükség. A fenti közvetlen számolásból azonban nem látszik, hogy pontosan hány darabra, ráadásul nagyobb n esetén a közelítésekből túlságosan sok hiba adódhat (például ha $n = 3000$ és $k = 40$, akkor a binomiális együttható már 91-jegyű, ha $k = 400$, akkor több mint 1200 számjegyből áll). Ennél egyszerűbben és megbízhatóbban számolhatunk, ha a fenti módszer helyett, ahogy az 1. ábra is sugallja, a kapott valószínűséget egy integrálközelítő összegnek tekintjük.

Így ahhoz a kérdéshez jutunk, hogy mi is az a függvény, amit ezek a p_k valószínűségek közelítenek. Mivel a binomiális együtthatókban faktoriálisok szerepelnek, a közelítésre az ezek aszimptotikus viselkedését leíró Stirling-formula ad lehetőséget:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Innen elindulva számos további lépésen keresztül juthatunk el a de Moivre–Laplace-tétel lokális alakjáig, mely szerint

$$p_k \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right), \quad (4)$$

ha a $k-n$ távolság nem több $n^{2/3}$-nál, n megfelelően nagy, illetve p és $1-p$ közül egyik sem túlságosan kicsi. A tétel ennél valójában sokkal erősebbet is állít, és pontosabban is megfogalmazható [4], [8]. Hasonló állítást de Moivre már 1730-ban publikált a $p = 1/2$ esetben [7], Laplace pedig ezt általánosította a XIX. század első felében más p értékekre [6]. Ezzel tehát kapunk egy képletet az 1. ábrán látható tengelyesen szimmetrikus közelítő függvényre. Az ehhez hasonló (ebből eltolással vagy nyújtással megkapható) függvényeket szokták haranggörbének vagy Gauss-görbének nevezni.

Az alábbi octave kód azt számolja, hogy mit kapunk a $\mathbb{P}(95 \leq X \leq 105)$ valószínűségre, ha az előző esethez hasonlóan először meghatározzuk a megfelelő értékek halmazát, mindegyikre kiszámítjuk a p_k-nak a most megadott közelítését, majd ezeket összeadjuk.

```
n=10000; p=0.1; hiba=0.05;

mv=[round(n*p*(1-hiba)): round(n*p*(1+hiba))];

function pkkoz=bineloszlnormkoz(n,p,kv)

        kvu=-1*(kv-n*p).^2/(2*n*p*(1-p));

        pkkoz=exp(kvu)/(sqrt(pi*2*n*p*(1-p)));

endfunction

binkoz=bineloszlnormkoz(n,p,mv);

sum(binkoz)
```

A számolást elvégezve az eredmény $43{,}81\%$ lesz. A (3) egyenlettel összehasonlítva láthatjuk, hogy ez valóban jó közelítést ad a kérdéses valószínűségre.

3. Összegzés helyett integrálás

Az 1. ábra alapján az volt a célunk, hogy a sötétebb rész területét, azaz a $\mathbb{P}(95 \leq X \leq 105)$ valószínűséget a haranggörbe alatti területtel közelítsük. Pontosabban, a (4) egyenlet alapján (figyelve arra, hogy az integrálás is egy 11 hosszú intervallumon történjen):

$$\mathbb{P}(95 \leq X \leq 105) = \sum_{k=95}^{105} p_k \approx \sum_{k=95}^{105} \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)} \right) \approx$$

$$\approx \int_{94,5}^{105,5} \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-np)^2}{2np(1-p)}\right) dy =$$

$$= \int_{94,5-np}^{105,5-np} \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2np(1-p)}\right) dz =$$

$$= \int_{\frac{94,5-np}{\sqrt{np(1-p)}}}^{\frac{105,5-np}{\sqrt{np(1-p)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx,$$

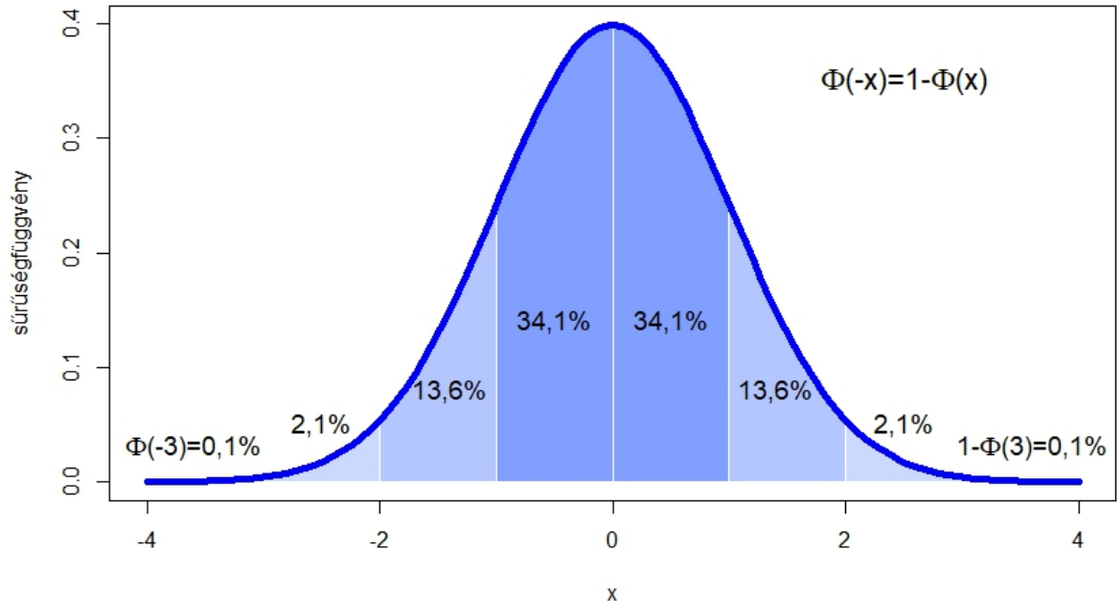
ahol a $z = y - np$, majd az $x = \frac{z}{\sqrt{np(1-p)}}$ változócseréket hajtottuk végre, hogy a függvény mindig ugyanaz legyen, csak a határok függjenek a változó paraméterektől.

A következő lépés az lehetne, hogy az integrálra explicit képletet adjunk az $\exp(-x^2/2)$ primitív függvényének segítségével. Ilyen azonban sajnos nincs, be is lehet bizonyítani, hogy az alapvető műveletek segítségével felírható függvények között nem találhatunk megfelelőt. Ezért az alábbi szokásos jelölést vezetjük be arra, hogy mennyi az integrál t-ig:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Ennek a függvénynek, amit a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének neveznek (erre még később visszatérünk), a t helyen felvett értéke a 2. ábrán a t-től balra eső terület nagysága. Így például az is leolvasható, hogy $\Phi(1) = 0{,}001 + 0{,}021 + 0{,}138 + 0{,}341 \cdot 2 = 0{,}842$. A teljes görbe alatti terület pedig 1 (azt, hogy $t \to \infty$ esetén 1 az integrál, polárkoordinátákra való áttéréssel lehet bizonyítani például, de ezt most nem tesszük meg, erről bővebben például itt lehet olvasni: [7.3. szakasz, 3], a normális eloszlásról pedig a [2] szimulációkat tartalmazó jegyzetben is).

Standard normális eloszlás



2. ábra. Az $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ függvény és az alatta lévő területek

A fenti számolás általánosításával oda jutunk, hogy megfelelő feltételeket teljesítő a_n, b_n számsorozatokra:

$$\mathbb{P}(a_n \leq X \leq b_n) \approx \Phi\left(\frac{b_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \tag{5}$$

hiszen a különbség nem más, mint a két érték közötti integrál. A példában pedig (az octave-ban $\Phi(x)$ a `normcdf(x)` paranccsal kapható meg):

$$\mathbb{P}(95 \leq X \leq 105) \approx \Phi\left(\frac{5{,}5}{\sqrt{90}}\right) - \Phi\left(-\frac{5{,}5}{\sqrt{90}}\right) = \Phi(0{,}58) - \Phi(-0{,}58) = 43{,}74\%.$$

A (3) egyenlettel összehasonlítva látható, hogy továbbra is jó közelítést kaptunk.

4. Kapcsolat a centrális határeloszlás-tétellel és a normális eloszlással

Ezt a közelítő számolást precízzé téve juthatnánk el a de Moivre–Laplace-tétel globális alakjához (vagy annak általánosabb formájához, a centrális határeloszlás-tételhez [2], [3], [4], [8], [9]), és ebből a „megfelelő feltételek” is kiderülnek. A tételből ugyanis az következik, hogy rögzített u, v valós számok és rögzített $0 < p < 1$ esetén, ha X_n binomiális eloszlású n renddel és p paraméterrel, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(np + u\sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + v\sqrt{np(1-p)}) = \Phi(v) - \Phi(u).$$

Ha tehát rögzített u és v mellett

$$a_n = np + u\sqrt{np(1-p)} \quad \text{és} \qquad b_n = np + v\sqrt{np(1-p)},$$

akkor a fenti közelítésben $n \to \infty$ határértéket véve pontos egyenlőséget kapunk. Ebből az is látható, hogy ezzel a módszerrel a várható értéktől való $\sqrt{n}$ nagyságrendű eltérések valószínűségét tudjuk jól meghatározni (ami éppen a binomiális eloszlás szórásának a nagyságrendje). A centrális határeloszlás-tétel abban általánosabb, hogy nem csak a binomiális eloszlásról, hanem tetszőleges független azonos eloszlású, véges szórású valószínűségi változók összegéről szól, és arról látja be, hogy a várható értéktől való $\sqrt{n}$ nagyságrendű eltérések limesze a fentihez hasonlóan a standard normális eloszlásfüggvénnyel írhatók le.

A közelítés hibája is felülről korlátozható, erre többféle lehetőség is van. Ennek egy egyszerű, bár nem a legjobb becslést adó alakja, ami a centrális határeloszlás egy még erősebb változatából, a Berry–Esséen-tételből [4] kapható, azt mondja, hogy a fenti közelítésénél (csak az egyik tagot tekintve) legfeljebb $\frac{0{,}48(p^2+(1-p)^2)}{\sqrt{np(1-p)}}$ hibát követünk el. Ebből az mindenképpen fontos, hogy ha $np(1-p)$ közel van nullához, azaz p vagy $1-p$ túl kicsi az n-hez képest, akkor a közelítés elromolhat. Ezért ennek a módszernek az alkalmazásánál például azt a feltételt szokták előírni, hogy $np(1-p) \geq 10$ teljesüljön [9]. Mivel X várható értéke np, ez nem jelent sokkal többet, mint hogy legyen akkora az n, hogy legalább $10-20$ védett embert találjunk.

Végül röviden arról, hogy mi is a standard normális eloszlás, aminek eloszlásfüggvénye Φ. Ez egy olyan valószínűségi változó, amire az igaz tetszőleges $u < v$ esetén, hogy $\Phi(v) - \Phi(u)$ valószínűséggel esik az u és v számok közé, és ilyen módon $\Phi(v)$ valószínűséggel lesz kisebb v-nél. Ahhoz, hogy egy ilyen Z valószínűségi változót kapjunk, nem kell mást tenni, mint a 2. ábrán látható görbe alatti, 1 nagyságú területről kiválasztani egy pontot „egyenletesen”, véletlenszerűen, majd Z-nek ennek a pontnak a vízszintes tengelyre eső koordinátáját választani. A centrális határeloszlás-tétel pedig úgy is fogalmazható, hogy az $(X_n - np)/\sqrt{np(1-p)}$ valószínűségi változó „hasonlóan viselkedik” a standard normális eloszláshoz.

5. A szükséges tesztek száma

Az előzőek alapján már közelítő választ tudunk adni az alábbi kérdésre.

Kérdés. *Tegyük fel, hogy n embert megvizsgálva mindenki egymástól függetlenül p valószínűséggel védett. Mekkorára válasszuk n-t, hogy annak valószínűsége, hogy az elvégzett tesztek eredménye alapján adott becslésünknek és p-nek a különbsége legfeljebb $h = 1\%$, legalább $q = 95\%$ legyen?*

Legyen továbbra is X az, hogy az n elvégzett teszt közül hány mutat ki védettséget. A becslésünk továbbra is az X/n relatív gyakoriság lesz. A kérdés feltételét a következőképpen fogalmazhatjuk meg, az (1) egyenletből kiindulva:

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0{,}01\right) \geq 0{,}95 \quad \text{minden } 0 < p < 1\text{-re}.$$

A feltétel kicsit más, mint az előző részben, ott ugyanis a relatív hibát adtuk meg (p-nek hányadrésze lehet az eltérés), most viszont az abszolút hibát (legfeljebb milyen messze lehet a becslés p-től). A relatív hiba esetére később még visszatérünk, ahogy érintőlegesen arra az esetre is, ha esetleg p-ről van valamilyen előzetes információnk. A kérdés egyelőre abból indul ki, hogy olyan módszert keresünk, ami az ismeretlen p valószínűség minden értékére jó, holott természetesen nem biztos, hogy ugyanaz a módszer lenne egyformán hatékony egy ezrelékes vagy tízszázalékos védettségi arány esetén.

A fenti valószínűséget alakítsuk át a korábban látott (5) közelítésnek megfelelően (az a_n, b_n-re vonatkozó „megfelelő feltételeket” egyelőre figyelmen kívül hagyva):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0{,}01\right) &= \mathbb{P}(-0{,}01n + np \leq X \leq 0{,}01n + np) \approx \\ &\approx \Phi\left(\frac{0{,}01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\frac{0{,}01n}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\frac{0{,}01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1.\end{aligned} \tag{6}$$

Az utolsó lépés abból adódik, hogy a 2. ábrán látható haranggörbe 0-ra való szimmetriája miatt a $-t$-től balra lévő terület, vagyis $\Phi(-t)$ ugyanaz, mint a t-től jobbra lévő, mivel viszont a teljes görbe alatti terület 1, ez utóbbi nem más, mint $1 - \Phi(t)$.

Tehát azt szeretnénk elérni, hogy minden $0 < p < 1$-re

$$2\Phi\left(\frac{0{,}01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) - 1 \geq 0{,}95 \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{0{,}01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) \geq 0{,}975 \tag{7}$$

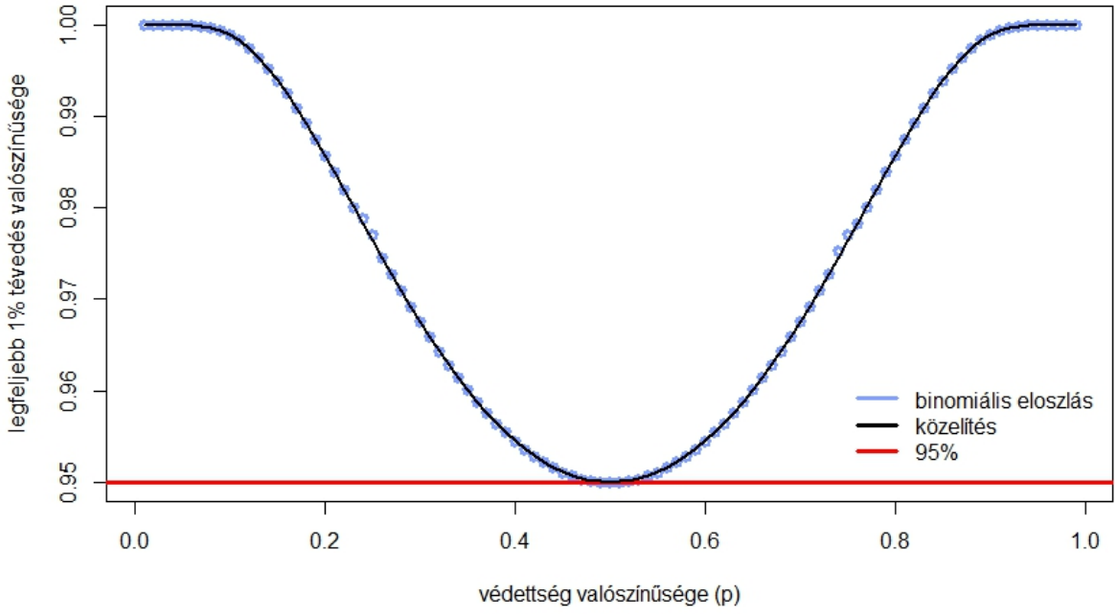
teljesüljön. Vagyis a törtnek olyan értéket kell felvennie, amire igaz, hogy a 2. ábrán a tőle balra eső terület legalább $0{,}975$. Az ábrán azt látjuk, hogy a 2-től balra eső terület éppen 1 – 0,022 = 0,978. Vagyis a 2-nél nagyobb számok biztosan jók, az ennél sokkal kisebbek nem. A pontos határ, amit az octave-ban a `norminv(0.975)` paranccsal számíthatunk ki (az átrendezés pedig azért érvényes, mert Φ monoton növő függvény):

$$\begin{aligned} \frac{0{,}01\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}} &\geq \Phi^{-1}(0{,}975) = 1{,}96 \\ n &\geq \frac{1{,}96^2 p(1-p)}{0{,}01^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Tehát, ha ez a feltétel teljesül, és a közelítések során nem vétettünk túl nagy hibát, akkor ez megadja, hogy legalább hány teszt elvégzésre van szükség. Azonban p-t, ami a védettek valódi aránya, nem ismerjük, pont ezt szeretnénk megbecsülni, így a feltételnek minden p-re teljesülnie kell. Szerencsére $p(1-p)$ nem lehet bármilyen nagy (ez p függvényeként egy parabola, aminek van maximuma), például a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenség alapján $p(1-p) \leq ((p+1-p)/2)^2 = 1/4$, és pontos egyenlőség is van, $p = 1/2$ esetén. Vagyis a szükséges mintaelemszám, amivel a feltételünk már minden p-re teljesül:

$$n \geq \frac{1{,}96^2 \cdot 0{,}25}{0{,}01^2} = \mathbf{9604}.$$

A legfeljebb 1%-os hiba valószínűsége



3. ábra. Annak valószínűsége, hogy legfeljebb 1%-ot téved a becslés, a valós p védettségi arány függvényében, $n = 9604$ teszt esetén

Ezt adja tehát a módszerünk a fent megfogalmazott kérdésre. A közelítés után már csak ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért ha a kiindulás helyes volt, akkor ennél kisebb n nem is lehet jó. Azt is láthatjuk, hogy ha p-ről valamilyen előzetes információnk van, például biztosan tudjuk, hogy legfeljebb 15%, akkor kisebb minta is elég, hiszen ekkor $p(1-p)$-re az $1/4$ helyett jobb felső becslést írhatunk a (8) egyenlőtlenségben.

Viszont a közelítés miatt mindenképpen szükséges valamiféle ellenőrzés. A 3. ábrán az látható, hogy ha a tesztek száma $n = 9604$, akkor a különböző p értékekre mennyi $\mathbb{P}(|X/n - p| \leq 0{,}01)$— vagyis mennyi annak valószínűsége, hogy legfeljebb 1%-ot tévedünk. A binomiális eloszlásból számolt értékek mellett a normális eloszlásból a (7) közelítő képlet eredményét is ábrázoltuk, jól látható, hogy a két görbe egymásra illeszkedik (a binomiális eloszlásnál nem a korábban látott közvetlen számolást, hanem a szoftverek beépített függvényeit alkalmaztuk, ezek a kerekítésekből adódó hibákat a lehető legjobban elkerülik). Az ábra alapján megállapíthatjuk, hogy $n = 9604$ esetén valóban tetszőleges p-re legalább 95% valószínűséggel az előírt hibahatáron belüli a becslésünk, viszont ebben az esetben $p = 1/2$ esetén egyenlőség lenne, ami azt jelenti, hogy kisebb mintaelemszám már nem elegendő ($n = 9603$ teszt és $p = 0{,}5$ esetén annak valószínűsége, hogy legfeljebb 1%-ot tévedünk, „csak” $94{,}9926\%$).

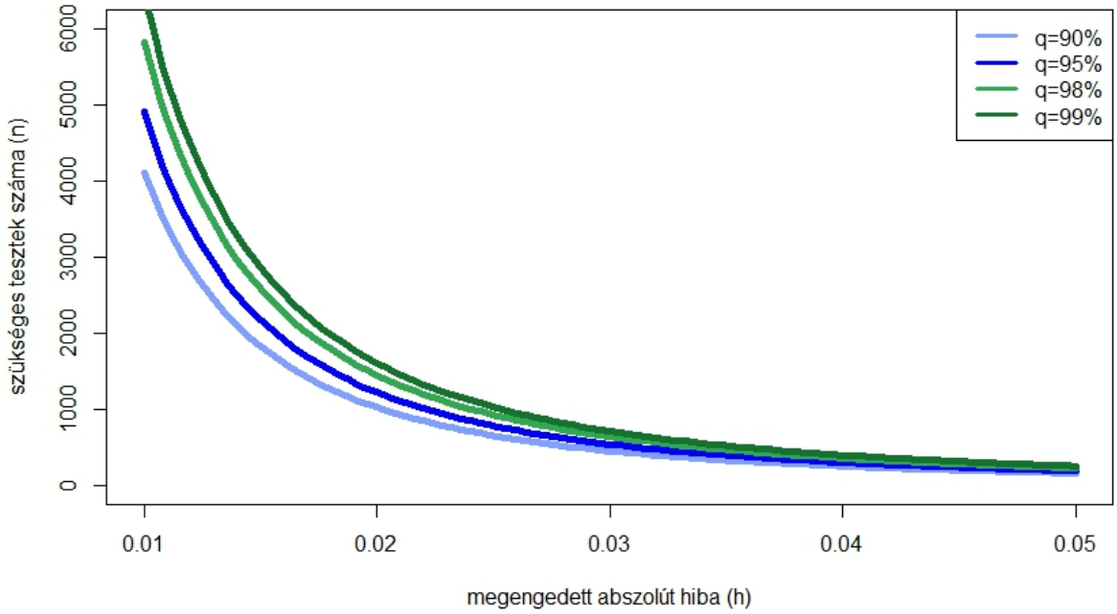
6. A relatív hiba, kis *p* esete és a pontosságtól való függés

Az ábrán azt is érdemes megfigyelni, hogy kicsi vagy egyhez közeli p esetén (ahol pedig egyébként a (4) egyenlet közelítése elromlik), jobbnak tűnik a helyzet, mint amikor p közel van $1/2$-hez (a szimmetria természetes, hiszen mindegy, hogy a védettek vagy a nem védettek arányára vagyunk kíváncsiak). Azonban vegyük észre, hogy az abszolút eltérésre fogalmaztuk meg a feltételt. Vagyis ebbe az is belefér, hogy $p = 0{,}1\%$ helyett a becslésünk 1% legyen – ez legfeljebb 1%-nyi különbség, mégis tízszeres relatív hiba az igazi p-hez képest. Vagyis arra is következtethetünk, hogy kisebb (vagy éppen egyhez közelebbi) p értékeket csak nagyobb mintaelemszámmal tudunk megbecsülni. Ha a p-hez számított relatív hibát adjuk meg, akkor $h = 0{,}01$ helyére $r \cdot p$ kerül, és ha visszatérünk a (8) egyenlethez, akkor $1{,}96^2(1-p)/(r^2 p)$ lesz az alsó becslés n-re. Vagyis a szükséges mintaelemszám a p-vel nagyjából fordítottan arányosan tart végtelenhez. Ezt az alábbi táblázat mutatja néhány konkrét érték esetén (itt tehát mindig csak az látszik, hogy ha az adott p-re teljesíteni akarjuk a feltételt, akkor mekkora n-re van szükség):

relatív hiba (r)	5%	20%	50%
$p = 0{,}1$	$13830\ (+1)$	$864\ (-3)$	$139\ (+5)$
$p = 0{,}01$	$152128\ (-62)$	$9508\ (-9)$	$1522\ (-12)$
$p = 0{,}001$	$1535103\ (-136)$	$95944\ (+90)$	$15351\ (+17)$

A táblázatból jól látszik, hogy a relatív hibát alacsonyan tartani kicsi vagy egyhez közeli p esetén jóval nehezebb lehet, mint $1/2$-hez közelebbi p esetén. A táblázat értékeit a fent bemutatott normális közelítéssel számoltuk, de feltüntettük zárójelben, hogy ez mennyivel tér el a valódi értéktől. Ezzel tehát a közelítésünk pontosságáról is képet kaphatunk. A táblázat és az előző képlet pedig együtt azt is sugallják, hogy ha előzetesen nem tudunk egy biztos alsó becslést p-re (például hogy $p \geq 0{,}01\%$), akkor nem is tudunk megfelelő mintaelemszámot mondani a relatív hiba adott korlát alatt tartásához. Ez persze onnan is látható, hogy minél kisebb a p, annál többet kell várnunk arra, hogy akár csak egyetlen védett embert is találjunk. Amíg pedig ilyen nincs, addig csak felső becslést tudunk adni a védettség valószínűségére, alsó becslésre és pontos értékre nem számíthatunk.

Szükséges tesztek száma



4. ábra. A szükséges tesztek száma normális közelítéssel néhány megbízhatósági szint mellett a megengedett abszolút hiba függvényében

A kapott összefüggést általánosan felírva megvizsgálhatjuk, hogy hogyan függ a szükséges mintaelemszám értéke az előírt feltételektől. Az előző számolással teljesen hasonló módon az adódik, hogy ha azt szeretnénk, legalább q valószínűséggel legfeljebb h-t tévedjünk, akkor a fenti (6) közelítéssel a szükséges tesztek száma (visszatérve a h abszolút hibára):

$$n \geq \frac{\Phi^{-1}\left(\frac{q+1}{2}\right)}{4 \cdot h^2},$$

ahol tehát $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$, és ennek az inverzére van szükség (az octave-ban `norminv`). Az ebből könnyen látszik, hogy **mivel az előírt h hibahatárnak a négyzete szerepel a nevezőben, kétszer akkora pontossághoz négyszer annyi mérés kell**. A 4. ábra ezt az összefüggést mutatja néhány különböző q érték esetén. Az ábrán az is látszik, hogy a megbízhatósági szinttől, q-tól való függés kevésbé erős, 99%-os megbízhatósághoz nem lesz szükség nagyságrendekkel több tesztre, mint 95%-oshoz. Persze, ahogy az ábra alapján is sejthető és a képletből következik, az igaz, hogy ha $q \to 1$, akkor a szükséges tesztek száma végtelenhez tart: $\Phi^{-1}((q+1)/2)$ az a szám, amitől balra a 2. ábrán $(q+1)/2$ terület van. De mivel a teljes görbe alatti terület 1, ez az érték végtelenhez tart, ahogy $q \to 1$. Ezek a jelenségek a cikkünk második részében is előjönnek majd, amikor konfidenciaintervallumot adunk meg, vagyis egy olyan intervallumot, ami nagy valószínűséggel tartalmazza a valódi p-t.

7. Elmélet és gyakorlat

A fentiekben tehát a binomiális eloszlás normális közelítésének segítségével meghatároztuk, hogy ahhoz, hogy adott valószínűséggel adott hibahatáron belül legyen a becslésünk, hány teszt szükséges. Végül azt vizsgáljuk meg, hogy a feltevéseink közül mi az, ami a valóságban is könnyen teljesíthető, és mi az, ami további vizsgálatot igényelne.

- **Függetlenség.** Az egyik feltételezésünk az volt, hogy a tesztek eredménye egymástól független. A vizsgálatba bevont személyek kiválasztásánál ezt könnyű majdnem tökéletesen teljesíteni: ha sorban haladva mindig elfelejtenénk az eddig kiválasztottakat, és úgy választanánk a következő embert, akkor ez teljesülne, ha pedig figyelünk arra, hogy senkit ne válasszunk kétszer, akkor is ez a legtöbb esetben közelítőleg teljesül. Ugyanis mondjuk 2000000 ember közül 10000-t az még könnyen előfordulhat, hogy néhányan többször is szerepelnek, de arra már kevés az esély, hogy valakit olyan sokszor választunk, hogy ettől a mintavételezés eredménye is lényegesen megváltozik a csupa különböző ember esetéhez képest (ez a binomiális eloszlás hipergeometrikus eloszlással való közelítése, [9]). A mérések során ez a feltétel azt jelenti, hogy az egymás után, esetleg párhuzamosan, csoportosítva végzett eljárások eredménye között se legyen összefüggés.

- **Azonos védettségi valószínűség.** Feltételeztük, hogy minden ember azonos p valószínűséggel védett. Ez egyrészt azt jelenti, hogy a védettek aránya a lakosságban ne változzon jelentősen a tesztek elvégzésének időszaka alatt, ami akár egy-két hét is lehet. Másrészt, ha további tulajdonságokat is figyelembe veszünk (például a lakóhelyet, vagy hogy volt-e az illető mostanában beteg), akkor ez természetesen nem teljesül, de ez nem baj, amíg megelégszünk azzal, hogy az átlagos védettségi valószínűséget vizsgáljuk, és nem az egyes csoportokét külön-külön. Annak valószínűsége ugyanis, hogy egy véletlenszerűen választott ember védett, éppen az átlagos védettségi valószínűség.

- **Egyenletes választás**. Itt azonban nagyon nem mindegy, hogy a „véletlenszerűen” és az „átlagos” mire vonatkozik. Ideális esetben az átlagban mondjuk egy ország minden lakosa azonos súllyal szerepel. Azt azonban, hogy úgy végezzük a vizsgálatot, hogy mindenkit azonos valószínűséggel válasszunk, legalább annyira nehéz megvalósítani, mint amilyen könnyű leírni. **Ha az, hogy valaki védett-e, nem függne attól, hogy milyen könnyű őt egy ilyen vizsálatba bevonni, ez sem jelentene problémát – de leggyakrabban ezt nem tételezhetjük fel.** Ennek az úgynevezett mintavételi torzításnak a kiküszöbölésére egy szokásos eljárás az, hogy ha mondjuk a mintában több budapesti ember szerepel, mint amennyi a budapestiek valós aránya, akkor a budapestiek és a vidékiek esetében is külön kiszámítják az átlagot, majd pontosabb

(például népszámlálási) adatok alapján ezeket olyan súlyokkal veszik figyelembe, ami ezeknek a csoportoknak a valódi aránya lenne (bővebben például: [5]).

- **A tesztek megbízhatósága.** Végig úgy számoltunk, hogy a tesztek sosem hibáznak. Ez természetesen a valóságban nincs így, és, főleg kis védettségi valószínűség esetén, még az is nagyon könnyen előfordulhat, hogy a hamis pozitív tesztek száma több, mint valódi pozitívaké. **Hiszen ha mondjuk $n = 10000$ ember közül csak 50 védett valójában, akkor a tesztnek körülbelül 1%-os valószínűségű tévedése is elég ahhoz, hogy legyen majdnem 100 ember, akit hamisan védettnek gondolunk, és hogy a védettség valószínűségét háromszorosan túlbecsüljük.** Ez a bizonytalanság, amit információs vagy mérési torzításnak neveznek, mint minden információhiány, azonban feltehetően csak növelné a szükséges tesztek számát, így ebből a szempontból a fenti értékeket alsó becslésnek tekinthetjük. Ennek a hibának a kiküszöbölése az epidemiológiának fontos témaköre, további hibalehetőségek figyelembevételével együtt [10].

- **A közelítésből adódó hiba.** A fenti levezetésben egy közelítést alkalmaztunk, és nem bizonyítottuk, csak számítógéppel ellenőriztük, hogy a megadott szám valóban elég sok tesztet jelent. Ezen például a már említett Berry–Esséen-tétel vagy ennél is pontosabb becslések alapján lehetne javítani. **Ugyanakkor ezekből állításokból is látszik, hogy a normális eloszlással való közelítés elromlik, ha p közel van nullához vagy egyhez.** Ilyenkor egy másik lehetőség a Poisson-eloszlással való közelítés lenne [3], [9], de az érvényes marad, hogy ha a relatív hibát is alacsonyan akarjuk tartani, akkor jóval több tesztre lehet szükség. Arra bizonyítást adni, hogy egy adott számú minta már elég a megadott pontossághoz, egyszerűbb módszerekkel, például a Csebisev-egyenlőtlenséggel [2], [3], [9] is lehetséges. Ez azt állítja, hogy annak valószínűsége, hogy egy valószínűségi változó legalább t-vel tér el a saját várható értékétől, legfeljebb a szórásnégyzetének és t^2-nek a hányadosa. Ez a megközelítés azonban olyan egyenlőtlenséget használ, ami minden eloszlásra egyaránt érvényes, és ha speciálisan a binomiális eloszlásra alkalmazzuk, akkor nem túl erős. Konkrétan a $h = 1\%$ hiba és $q = 95\%$ megbízhatóság mellett ebből az jönne ki, hogy $n \geq 50000$ elég, ami igaz, de azt láttuk, hogy valójában az ötödénél is kevesebb, 9604 teszt már elég ugyanehhez.

8. Következik: konfidenciaintervallum és maximumlikelihood-becslés

Összességében tehát a fenti matematikai módszerek alkalmazása során egy jól megbízható teszt és a vizsgálatba bevont személyek megfelelően elvégzett kiválasztása mellett számoltunk, közelítő módszerekkel, ahol azonban a közelítés jól működik, amíg a védettek valódi aránya sem nem túl kicsi, sem nem túl nagy a mintaelemszámhoz képest. Ez tehát arra mindenképpen hasznos, hogy lássuk, hogy mi az a szám, aminél semmiképpen nem mehetünk lejjebb az elvégzett tesztek számával adott pontosság mellett. Továbbá azt is megállapíthattuk, hogy a pontosság növelése milyen ütemben növeli a szükséges tesztek számát, és arra is több szempontot láttunk, hogy miért van szükség több tesztre, ha a védettek valódi aránya kicsi, és a relatív hibát akarjuk alacsonyan tartani.

Cikkünk második részében egyrészt arra térünk majd ki, hogy a fenti módszer arra is használható, hogy adott mintaelemszám esetén megfogalmazzuk, hogy mennyire vagyunk biztosak a p-re vonatkozó becslésünkben, amire egy szokásos módszer a konfidenciaintervallum megadása. Ez egy olyan intervallum, ami az ismeretlen p értéket nagy valószínűséggel tartalmazza (bár, mint látni fogjuk, ez nem pontosan azt jelenti, amit elsőre gondolnánk, ugyanis az eddig használt statisztikai felépítést követve p-t továbbra sem tekintjük véletlennek). A fenti módszeren alapuló számításokkal hasonló jelenségeket figyelhetünk majd meg, például hogy megfelelő feltételek mellett fele olyan hosszú konfidenciaintervallumhoz négyszer akkora minta szükséges, vagy hogy kis p esetén a konfidenciaintervallum végpontjainak aránya nagy lehet.

Másrészt egy olyan statisztikai módszert is bemutatunk, amely amellett érvel, hogy minden vizsgált személyhez ugyanazt a p védettségi valószínűséget feltételezve miért az X/n relatív gyakoriság a legjobb becslés, miért nem például $(X+5)/(n+10)$ (amit egy másik módszerrel, a Bayes-becsléssel kaphatnánk, megfelelő előzetes feltételezések mellett). Ezt maximumlikelihood-becslésnek hívják, és a tesztek nyelvén megfogalmazva az alábbi elvből indul ki. Tegyük fel, hogy a laboratóriumban két dobozban vannak tesztek, és arra is emlékszünk, hogy az egyik dobozban a jó tesztek voltak, amik a védettséget 90% valószínűséggel kimutatják, a másikban a rosszak, amik csak 30% valószínűséggel jelzik a védettséget. Csak éppen azt felejtettük el, hogy melyik doboz melyik. Ezért szerzünk néhány biztosan pozitív (védett embertől származó) mintát, és az egyik doboz tíz tesztjével megvizsgáljuk. A tíz mérésből 8 pozitív lett. Biztosak nem lehetünk, de ebben az esetben könnyű megmondani, hogy mire gondolnánk inkább, melyik doboz volt az, amit kipróbáltunk. Ez a gondolat vezet el tehát egy jóval általánosabb statisztikai módszerhez, melyet a következő részben a tesztelés példáján keresztül mutatunk majd be.

Irodalomjegyzék

[1] Douglas Altman, David Machin, Trevor Bryant, Martin Gardner, *Statistics with Confidence: Confidence Intervals and Statistical Guidelines*. Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 2000.

[2] Arató Miklós, Prokaj Vilmos, Zempléni András, Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba: példákkal, szimulációkkal, 2013. `https://ttk.elte.hu/dstore/document/901/zempleni.pdf`

[3] Csiszár Villő, Valószínűségszámítás 1. `http://csvillo.web.elte.hu/mtval/jegyzet.pdf`

[4] William Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. I.*

Third edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968.

[5] David Freedman, Robert Pisani, Roger Purves, Statistics. Fourth edition, W. W. Norton & Company, New York, 2007.

[6] Pierre-Simon de Laplace, *Théorie analytiques de probabilités*. 3ème éd., revue et augmentée par l'auteur, Courcier, Paris, 1820.

[7] Abraham de Moivre, *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*. Lib. 5. J. Tonson & J. Watts, London, 1730.

[8] Rényi Alfréd, Valószínűségszámítás. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

[9] Sheldon Ross, *A first course in probability*. Second edition, Macmillan Co., New York, 1984.

[10] Kenneth J. Rothman, *Epidemiology: An introduction*. Se Oxford University Press, New York, 2012.

Backhausz Ágnes
ELTE, Matematikai Intézet,
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Simon L. Péter
ELTE, Matematikai Intézet,
Numerikus analízis és nagy hálózatok MTA–ELTE Kutatócsoport

–

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

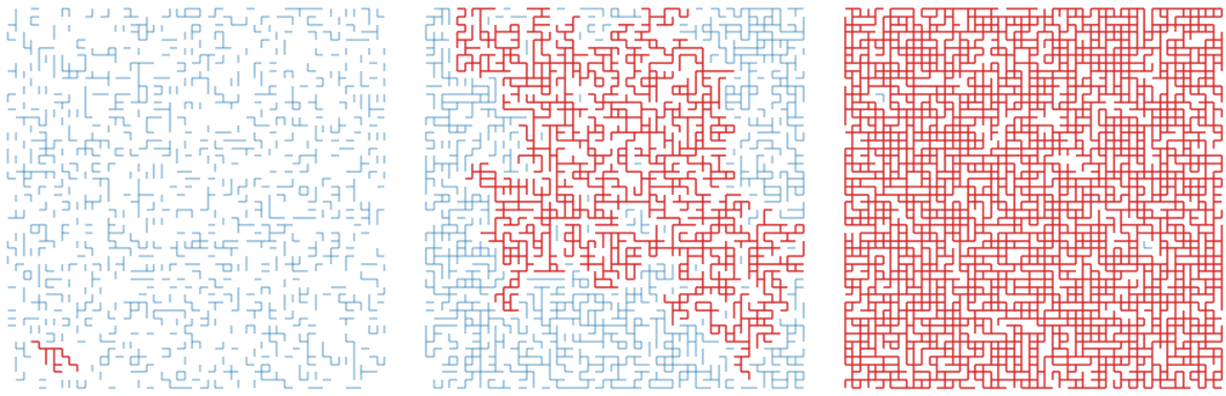
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Mester Péter, Pete Gábor 2020. JÚNIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is…a perkoláció?

A perkoláció a statisztikus fizika és a modern valószínűségszámítás egyik legegyszerűbben definiálható, ugyanakkor nagyon mély problémákhoz és általános tanulságokhoz vezető modellje, amiben fázisátmenet történik; hogy ez mit jelent, hamarosan elmagyarázzuk.

A modell minden véges vagy végtelen gráfon értelmezhető, és két alapváltozata van: élperkolációban a gráf éleit egymástól függetlenül ugyanakkora p valószínűséggel *nyíltnak*, illetve $1-p$-vel *zártnak* sorsoljuk ki; csúcsperkolációban a csúcsokat sorsoljuk nyíltnak vagy zártnak. A két változatban az alapjelenségek ugyanazok, így egyelőre beszéljünk csak az élperkolációról. A zárt élekre úgy gondolunk, mint amiket kitöröltünk, és az érdekel minket, hogy a megmaradó nyílt éleken keresztül honnan hová lehet eljutni, azaz mik a megmaradt véletlen gráf összefüggőségi komponensei, más szóval *fürtjei*.

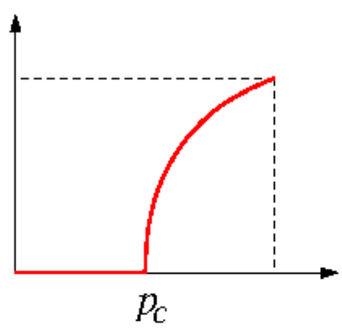


1. ábra (Készítette: Nagy Marcell)

Mind a tárgy története, mind a tanulságok szempontjából egy különösen fontos eset, amikor az alapgráf a $\mathbb{Z}^2$ négyzetrács. (Az ábrán $p=0.25$, 0.5, 0.75 értékekkel; a négyzetben a legnagyobb fürt pirossal kiemelve.) Egy alapvető kérdés: mi a valószínűsége annak, hogy az o origóból vezet az $S_n := [-n,n]^2$ négyzeten kívülre egy nyílt út, azaz olyan út, aminek minden éle nyílt? Ezt a kérdést Broadbent vetette fel 1954-ben egy Monte Carlo-módszereknek szentelt szimpóziumon, majd Hammersleyvel közösen folytatta a kérdés vizsgálatát. Ők egy véletlen közeg modelljeként tekintettek a perkolációra, amiben $\mathbb{Z}^2$ élei mint lehetséges csatornák jelennek meg, amiken keresztül valamilyen folyadék vagy gáz terjedhet, feltéve, hogy az adott csatorna ehhez elég széles (ennek felel meg, hogy a csatornát képviselő él nyitva áll), míg ha egy adott csatorna túl szűk, akkor rajta keresztül nem halad folyadék (ekkor lesz a hozzá tartozó él zárt). Ebben a modellben a folyadék mindenhová eljut, ahova a fenti szabályok engedik, a véletlenszerűség tehát nem a folyadék viselkedésében jelenik meg, hanem a környezetében, amiben mozog.

Ha az S_n négyzetet egyre nagyobbnak vesszük, akkor, ahogy $n \to \infty$, a következő kérdéshez érkezünk: „Mennyi a valószínűsége annak, hogy o-ból indul végtelen nyílt út, azaz, hogy az o fürtje végtelen?” Ezt az eseményt szokás perkolációnak is nevezni; ha arra gondolunk, hogy az angol „percolation” szó hétköznapi jelentése „szivárgás”, ez összhangban is van a fenti folyadékterjedést használó képpel.

A perkoláció eseményének valószínűségét $\theta(p)$-vel jelöljük. Ami igazán érdekes, az nem egy-egy $\theta(p)$ érték valamilyen konkrét p-re, hanem magának a $p \mapsto \theta(p)$ függvénynek a viselkedése. Az világos, hogy $\theta(0) = 0$ és $\theta(1) = 1$, hiszen a $p = 0$ esetben egyáltalán nincsenek nyílt élek, míg a $p = 1$ esetben minden él nyílt. Szemléletesen az is nyilvánvaló, hogy $\theta(p)$ a p-nek növekvő (bár nem szigorúan növekvő) függvénye. Aki először találkozik a témával, esetleg azt is meggyőzőnek érezte volna, ha az előbb „szigorúan növekvőt” mondtunk volna. Ez azonban nincs így: ha p elég kicsi pozitív szám, akkor $\theta(p) = 0$ és azon p-k szuprémuma, amikre $\theta(p) = 0$, a modell legizgalmasabb paramétere, az úgynevezett *kritikus valószínűség*: $p_c := \sup\{p \in [0,1] : \theta(p) = 0\}$.



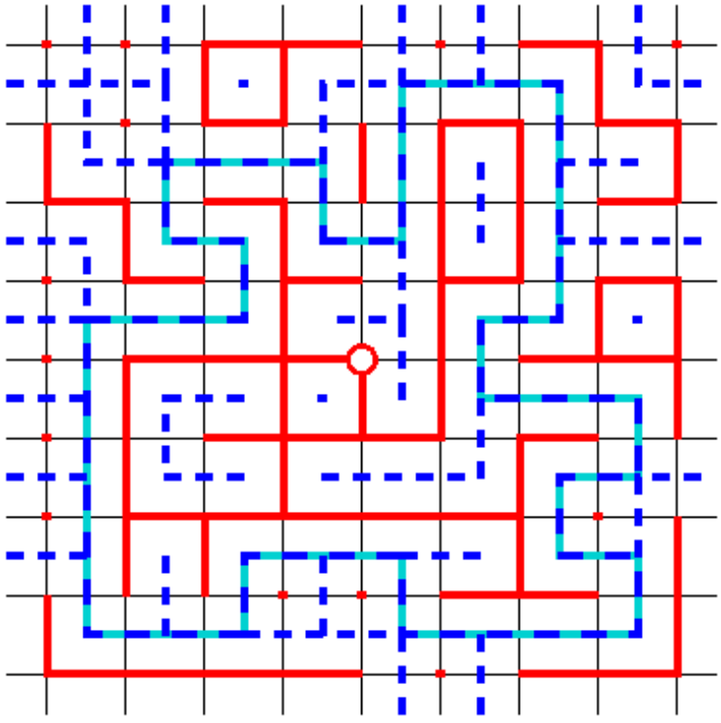
2. ábra.

Nem nehéz igazolni, hogy tetszőleges végtelen összefüggő gráfban, ha egy fix o csúcs fürtje nulla valószínűséggel végtelen, akkor majdnem biztosan minden fürt véges. Másrészt, ha o fürtje pozitív valószínűséggel végtelen, akkor majdnem biztosan lesz valahol a gráfban egy végtelen fürt. (Ez a Kolmogorov 0-1 törvényből következik, miután észrevettük, hogy egy végtelen fürt létezése farokesemény: bekövetkezése független bármely véges sok él állapotától). Tehát, ha $0 < p_c < 1$, akkor a $p \in [0, p_c)$ szubkritikus és a $p \in (p_c, 1]$ szuperkritikus intervallumban teljesen máshogy viselkedik a rendszer – erre mondjuk, hogy *fázisátmenet* történik p_c-ben, és a p_c környékén tapasztalható kritikus jelenségekre vagyunk a legkiváncsibbak.

Ez emlékeztetheti az Olvasót olyan valós fázisátmenetekre, mint hogy a víz megfagy, vagy a vas mágnesezhetővé válik egy bizonyos kritikus hőmérséklet alatt, vagy arra, hogy ha egy vírus reprodukciós rátája 1 fölé kerül, akkor a populáció egy óriási részét megfertőzi. A közös jelenség, hogy ha a *lokális interakciók* elég erősek (pl. a molekulák egymást vonzó hatása legyőzi a hőből származó rezgéseket, vagy elég nagy valószínűséggel fertőzöm meg az ismerőseimet), akkor *globális rend* alakul ki a rendszerben. Egy végtelen fürt megjelenése a globális rend eléggé naiv analógiájának tűnhet, ám kiderült, hogy az analógia rendkívül erős (pl. a mágnesesség Ising modelljének Fortuin-Kasteleyn-féle „véletlen fürt” reprezentációján keresztül), és így a perkoláció tanulságai a teljes statisztikus fizika számára relevánsak.

Egy tetszőleges végtelen gráfon nem mindig igaz, hogy a p_c szigorúan 0 és 1 közé esik, és ha $\mathbb{Z}^2$ helyett az egydimenziós $\mathbb{Z}$-n vizsgáljuk a fenti folyamatot, akkor könnyű látni, hogy ott a kritikus valószínűség 1. Ajánljuk az Olvasónak, hogy ha új neki ez a fogalom, akkor gondolja át, hogy ez miért igaz $\mathbb{Z}$-re, illetve annak bármilyen „véges kiterjesztésére”, mint például a $\mathbb{Z} \times [0, k]$ „sávra”.

A négyzetrácsra valóban teljesül $0 < p_c < 1$, és ezt még Broadbent és Hammersley bizonyították be. A könnyebb irány, hogy ha egy gráfban minden fokszám legfeljebb D, akkor $1/(D-1) \leq p_c$. Ez azért van, mert annak a valószínűsége, hogy van végtelen nyílt út egy o csúcsból, legfeljebb $D(D-1)^{n-1}p^n$ minden n-re, ami 0-hoz tart, ha $p < 1/(D-1)$. A formula onnan jön, hogy ha van végtelen nyílt út, akkor van n hosszú önnemmetsző nyílt út is o-ból, melyeknek a száma az eredeti gráfban legfeljebb $D(D-1)^{n-1}$, és mindegyik út p^n valószínűséggel nyílt. Speciálisan, $1/3 \leq p_c(\mathbb{Z}^2)$.

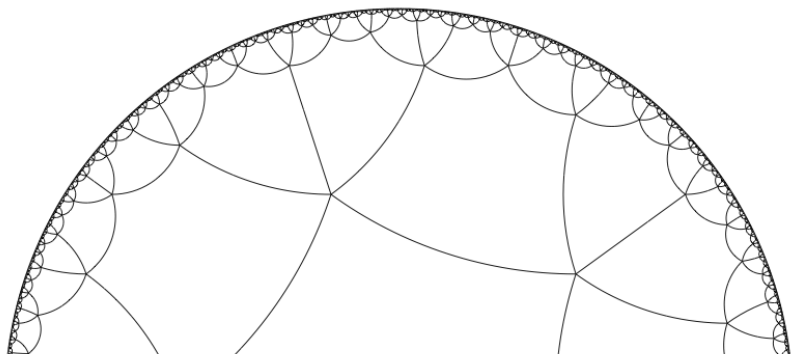


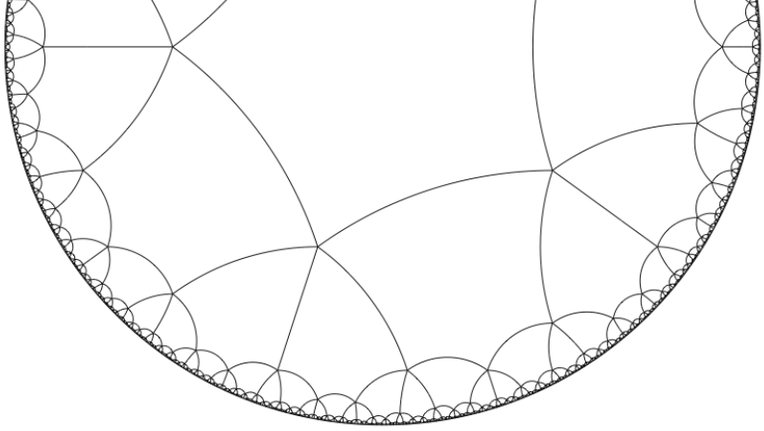
3.ábra

Az érdekesebb egyenlőtlenség a $p_c < 1$, amiről már láttuk az egydimenziós $\mathbb{Z}$ és hozzá hasonló gráfok példáján, hogy nem is teljesül mindig. A $\mathbb{Z}^2$ rácson egy fontos trükk a duális rács és azon egy *duális perkoláció* bevezetése: ha adott egy perkolációs konfiguráció a rácson (a 3. ábrán pirossal a nyílt élek), a duális konfigurációban egy duális él pontosan akkor duális-nyílt (kék szaggatott az ábrán), ha az őt metsző eredeti él zárt volt. Szemléletesen világos (bizonyítani kicsit fáradságos), hogy az eredeti $\mathbb{Z}^2$ konfigurációban az o fürtje pontosan akkor véges, ha a duális konfigurációban van egy duális-nyílt kontúr, ami körbeveszi o-t, és így elzárja őt a végtelentől (türkizzel az ábrán). És így már a kezünkben van a *Peierls kontúr-módszer*, hogy $p_c(\mathbb{Z}^2)$-re fölső becslést adjunk, nagyon hasonlóan az alsó becsléshez: nem nehéz látni, hogy az o-t körbevevő n hosszú duális kontúrok száma legfeljebb $n3^n$; annak a valószínűsége, hogy egy ilyen kontúr duális-nyílt, az $(1-p)^n$; így annak a valószínűsége, hogy van N-nél hosszabb duális-nyílt kontúr, az legfeljebb $\sum_{n \geq N} n3^n(1-p)^n$, ami kisebb, mint 1, ha $p > 2/3$ és N elég nagy. Ebből következik, hogy valahol a $\mathbb{Z}^2$-ben pozitív valószínűséggel lesz végtelen fürt, tehát $p_c(\mathbb{Z}^2) \leq 2/3$.

Ha $d \geq 3$, akkor a $\mathbb{Z}^d$ kockarács tartalmazza a $\mathbb{Z}^2$ rácsot, így $1/(2d-1) \leq p_c(\mathbb{Z}^d) \leq 2/3$ is világos, azaz nemtriviális fázisátmenet van. Azonban Benjamini és Schramm 1996-ban kezdeményezték, hogy a perkolációt nem csak a klasszikus statisztikus fizika $\mathbb{Z}^d$ rácsain kellene vizsgálni, hanem általános gráfokon is, különösképpen tranzitívakon (ami azt jelenti, hogy a gráf bármely két csúcsához létezik olyan gráf-automorfizmus, amely az egyik csúcsot a másikba viszi: a gráf ugyanúgy néz ki minden pontjából, homogén). A korlátos fokú végtelen tranzitív gráfok legfőbb forrása pedig a *végesen generált végtelen csoportok Cayley-gráfjai*: ha Γ egy csoport, egy szimmetrikus véges $S = S^{-1}$ generátor-rendszerrel, akkor a $\mathsf{Cay}(\Gamma, S)$ gráf csúcsai a csoport elemei, élei pedig a $(\gamma, \gamma s)$ párok, ahol $\gamma \in \Gamma$ és $s \in S$. Mivel szimmetrikus generátorrendszert választottunk, ez a gráf valójában irányítatlan: ha $(\gamma, \gamma s)$ egy él, akkor $(\gamma s, \gamma s s^{-1}) = (\gamma s, \gamma)$ is az. A geometriai csoportelmélet alapvetése, hogy a Cayley-gráfok *nagyléptékű geometriai tulajdonságai* (azaz amiket a gráfra „messziről, hunyorítva ránézve" láthatunk) sok csoportelméleti tulajdonságot tükröznek (speciálisan, a konkrét generátor-rendszer sem fog számítani). A nagyléptékű geometriai tulajdonságoktól pedig azt várjuk, alapvetően befolyásolják a gráfon való perkoláció viselkedését.

Először is: igaz-e, hogy csak az „1-dimenziós" gráfokra lesz a fázisátmenet triviális, $p_c = 1$? Ehhez természetesen definiálnunk kellene egy gráf dimenzióját. Valószínűségszámítási szempontból a leghasznosabbnak az izoperimetrikus egyenlőtlenségek fogalma bizonyult. Azt mondjuk, egy korlátos fokú gráf *izoperimetrikus dimenziója* legalább d, ha minden S véges csúcshalmazra $|\partial_E S| > c$, $|S|^{(d-1)/d}$ teljesül valamilyen abszolút $c > 0$ konstanssal, ahol a $\partial_E S$ élhatár azon élek halmaza, amiknek egyik végpontja S-ben, a másik S-en kívül van. Például $\mathbb{Z}$-ben csak annyit tudunk mondani, hogy egy véges csúcshalmaz határa legalább kettő (akármekkora halmazról van is szó), így az izoperimetrikus dimenzió 1. Sokkal kevésbé triviális, de igaz, hogy $\mathbb{Z}^d$ izoperimetrikus dimenziója d; sőt, sokkal általánosabban, ha egy tranzitív gráf nem a $\mathbb{Z}$ egy véges kiterjesztése, akkor izoperimetrikus dimenziója legalább 2 (tehát nem lehet például 1.17). A 3-reguláris $\mathbb{T}_3$ fára pedig akármilyen véges S csúcshalmazra egy lineáris izoperimetrikus egyenlőtlenség, $|\partial_E S| \geq \frac{3}{2}|S|$ teljesül, azaz az izoperimetrikus dimenzió végtelen.





4.ábra

Az utolsó eset különösen fontos: azt mondjuk, egy korlátos fokú gráf *amenábilis*, ha nem teljesül a lineáris izoperimetrikus egyenlőtlenség, azaz ha létezik benne véges F_n csúcshalmazoknak olyan sorozata, amelyre $|\partial_E F_n|/|F_n| \to 0$. Például a $\mathbb{Z}^d$ rácsok, vagy minden szubexponenciális térfogat-növekedésű gráf amenábilis, míg a reguláris fák vagy a hiperbolikus terek csempézései (4. ábra) nem. A fogalom jelentőségét az adja, hogy Følner 1955-ben bizonyította, hogy egy csoport tetszőleges Cayley-gráfja pontosan akkor amenábilis, ha a csoport amenábilis abban az értelemben, ahogyan Neumann János 1929-ben definiálta: van rajta eltolásinvariáns átlagolás. (Az elnevezés is innen ered: az „amenable” azt jelenti, „kezelhető”, ám Neumann egy szóviccet rejtett itt el: „a-mean-able”, azaz „átlagolható”.) Az amenábilis/nem-amenábilis dichotómia a legfontosabb megkülönböztetések közé tartozik a modern matematika számos területén.

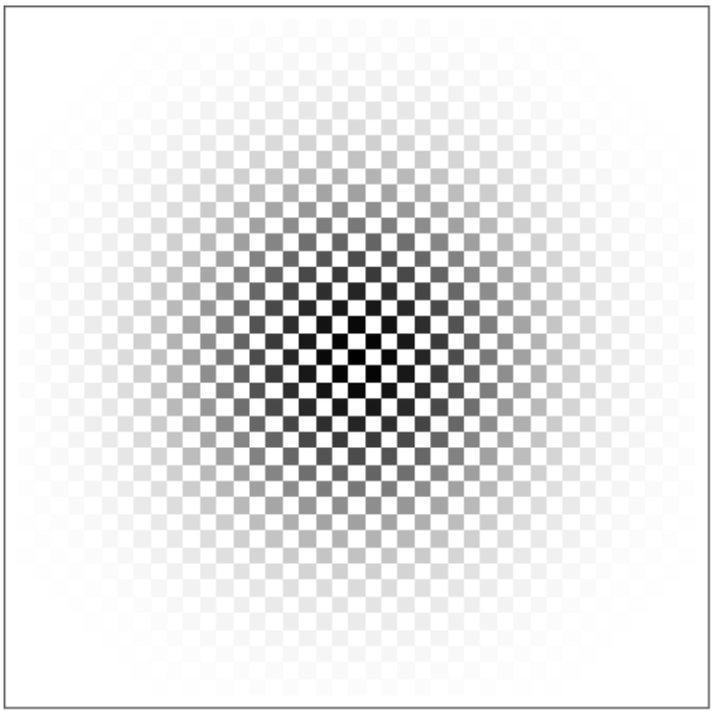
Visszatérve a perkolációhoz, Benjamini és Schramm azt sejtették, hogy ha egy gráf izoperimetrikus dimenziója szigorúan nagyobb 1-nél, akkor $p_c < 1$, és igazolták is ezt nem-amenábilis gráfokra. Babson és Benjamini 1999-ben egy bonyolult algebrai topológiai érveléssel, majd Timár Ádám 2007-ben pár sorban, lineáris algebrával bizonyította, hogy ha egy csoport végesen prezentált (azaz véges sok relációval definiálható), akkor tetszőleges Cayley-gráfjában egy csúcsot a végtelentől elvágó élhalmazokban csak korlátos nagy lyukak lehetnek, amiből következik, hogy a Peierls kontúr-módszer egy általánosítása működik, és így $p_c < 1$. Pár éve igazolta Duminil-Copin, Goswami, Raoufi, Severo és Yadin, a Szabad Gauss Mező nevű véletlen magasságfüggvény segítségével, hogy ha egy korlátos fokú gráf izoperimetrikus dimenziója nagyobb 4-nél, akkor $p_c < 1$. Ezen eredmények együttesen lefedik az összes tranzitív gráfot, de tökéletesen nyitott például az 1 és 2 közötti izoperimetrikus dimenzió esete, amikor a bolyongás rekurrens, így a Szabad Gauss Mezőt nem is lehet definiálni.

Az izoperimetrikus egyenlőtlenségeknek alapvető hatása van a *végtelen fürtök számára*

is. Az minden tranzitív gráfban igaz, hogy a végtelen fürtök száma vagy 0, vagy 1, vagy ∞; ugyanis, ha lehetne például 19, akkor a konfiguráció egy lokális módosításával, tehát még mindig pozitív valószínűséggel, ezekből kettőt össze lehetne ragasztani, így pozitív valószínűséggel 18 végtelen fürt lenne; ám ilyen kevert helyzetet, hogy a végtelen fürtök száma néha ennyi, néha annyi, a perkoláció úgynevezett ergodikussága nem enged meg. Arra, hogy végtelen sok végtelen fürt előfordulhat, egy triviális példa a 3-reguláris fa, minden $p \in (p_c, 1)$-re. (Újabb gyakorlat az Olvasónak). Azonban az derül ki, hogy amenábilis tranzitív gráfokban soha nem lehet végtelen sok végtelen fürt: intuitíven, ezek nem férnének el egymás mellett összeragadás nélkül. Ezt a homályos intuíciót Burton és Keane 1989-ben formálta elegáns bizonyítássá. Az állítás megfordítása Benjamini és Schramm (1996) egy másik híres sejtése: ha egy tranzitív gráf nem-amenábilis, akkor létezik olyan p érték, ahol végtelen sok végtelen fürt van. Az ismert, hogy minden nem-amenábilis csoportnak van olyan Cayley-gráfja, ahol ez bekövetkezik, illetve minden úgynevezett Gromov-hiperbolikus tranzitív gráf is ilyen.

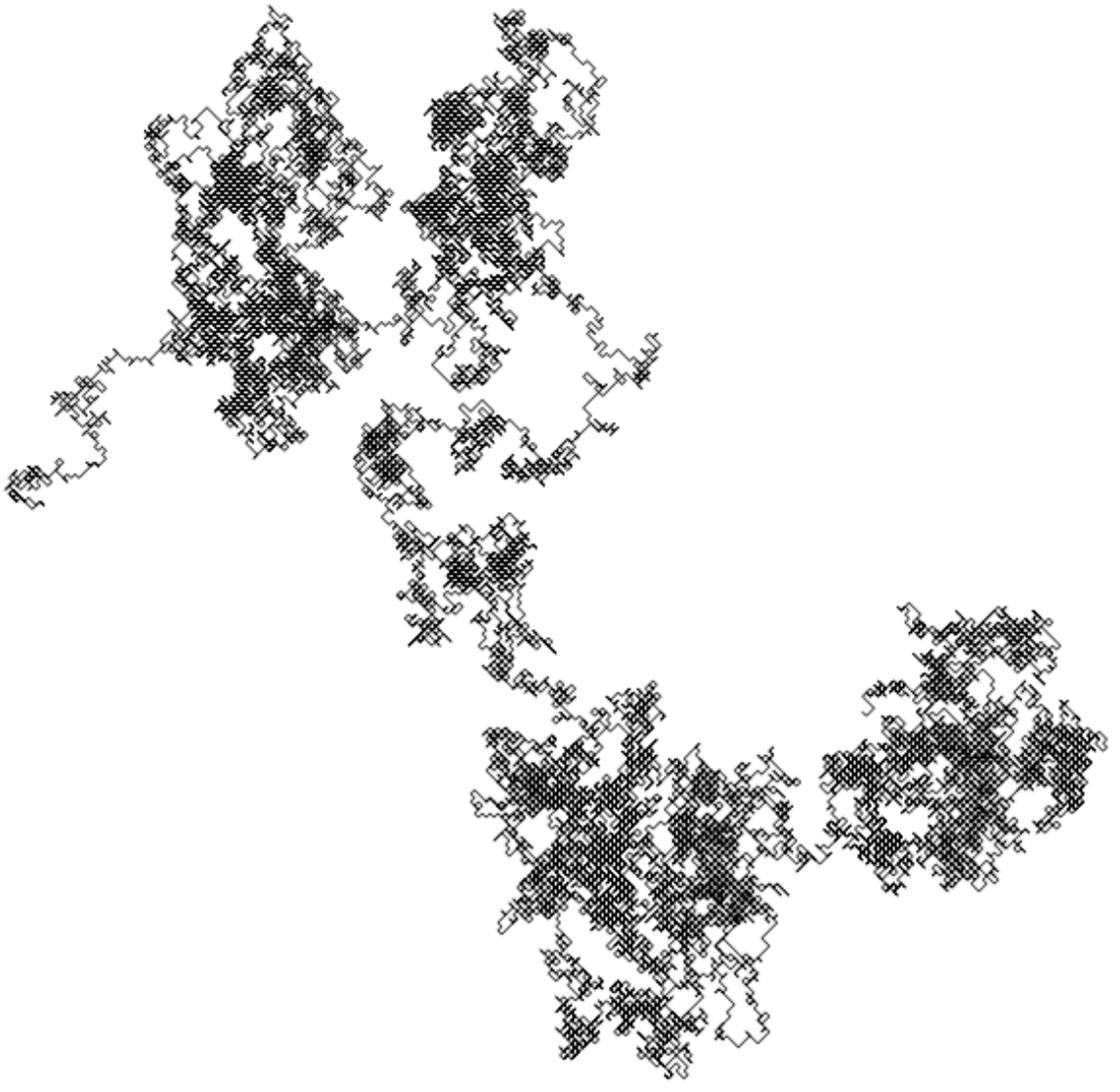
Rátérve a kritikus viselkedés tárgyalására, egy beavatatlan Olvasó úgy gondolhatja, a p_c értéke a legfontosabb, amit a perkolációról egy gráfon tudhatunk; de ez nem egészen van így. Ami igaz, hogy néhány esetben a p_c meghatározása az elmélet legfontosabb tételei között van. A $\mathbb{Z}^2$ rácson élperkolációra Harris 1960-ban igazolta, hogy $p = 1/2$ -en nincs még perkoláció, majd Kesten 1980-ban, hogy minden $p > 1/2$ értéken már van, tehát $p_c(\mathbb{Z}^2, \text{él}) = 1/2$. Itt az $1/2$-es értéket a rács öndualitásából, amit már az $1/3 \leq p_c(\mathbb{Z}^2, \text{él}) \leq 2/3$ bizonyításban láttunk, viszonylag könnyű megjósolni, ám a bizonyítás már jóval nehezebb. Hasonlóképpen, $p_c(\Delta, \text{csúcs}) = 1/2$, ahol Δ a standard 6-reguláris háromszögrács. A $\mathbb{T}_d$ fára $p_c(\mathbb{T}_d, \text{él}) = p_c(\mathbb{T}_d, \text{csúcs}) = 1/(d-1)$, ugyanis itt nem nehéz bizonyítani, hogy az alsó becslés, amit láttunk, éles. Ez egy speciális esete annak, hogy egy elágazó folyamat majdnem biztosan kihal, ha a várható gyerekszám 1-nél kisebb, és pozitív valószínűséggel túlél, ha az 1-nél nagyobb. Viszont a legtöbb gráfra a p_c pontos értékét nem ismerjük, és valószínűleg nem is fogjuk soha. Schramm *lokalitás sejtése*, hogy p_c értéke egy tranzitív gráfban csak a gráf lokális struktúrájától függ: ha két tranzitív gráf, melyekre $p_c < 1$, egy nagy sugarú gömbben megegyeznek, akkor a p_c értékeik közel vannak egymáshoz.

A p_c definíciója önmagában semmit nem mond arról, hogy pont p_c-nél van-e perkoláció vagy nincs. Talán meglepő, hogy p_c értékének ismerete nélkül is tudjuk sok gráfról, hogy $\theta(p_c) = 0$, azaz még nincsen végtelen fürt; az a sejtés, hogy ez minden tranzitív gráfban teljesül, ahol $p_c < 1$. A fő motivációs példák a síkrácsok és a fák: előbbiben segít a síkdualitás, utóbbiban pedig 150 éve ismert, hogy a kritikus elágazó folyamatok még éppen kihalnak. A $\mathbb{Z}^d$ rácson, ha d nagy, egy kritikus fürt olyan sokfelé nőhet, hogy a rövid körök hatása elenyészik, és a fán való perkoláció egy kis perturbációjának fogható föl a modell. Ezt a homályos reményt Hara és Slade 1990-ben az úgynevezett *csipke sorfejtéssel* formalizálni tudta $d \geq 19$-re, amit pár éve Fitzner és van der Hosftad, hatékonyabbá téve a módszert, lehozott $d \geq 11$-re. A sejtés bizonyítása a $\mathbb{Z}^3$ esetre a témakör Szent Gráljának számít. A nem-amenábilis Cayley-gráfokon való perkoláció tanulmányozását is részben ez a kérdés motiválta: a nem-amenabilitás lehetővé teszi fa-szerű struktúrák fölfedezését a gráfban, ami aztán elvezet a $\theta(p_c) = 0$ bizonyításához, ahogy azt Benjamini, Lyons, Peres és Schramm megtette 1999-ben. Ezután pedig reménykedni lehet, hogy a hiperbolikus térben egyre sűrűbb csúcshalmazokon definiált gráfokra alkalmazva ezt, a hiperbolikus tér lokálisan euklidészi volta elvezethet egy bizonyításhoz az euklidészi térben is. Ezt a tervezett stratégiát egyelőre senkinek sem sikerült valóra váltania.



5. ábra

Az *univerzalitás sejtés* azt mondja, hogy a rendszer viselkedése a kritikus ponton, ellentétben magával a p_c értékével, a lokális struktúrától egyáltalán nem, csak a nagyléptékű geometriától függ. Hogyan kell ezt elképzelni? A valószínűségszámítás legalapvetőbb univerzális jelenségét mindenki ismeri, aki egyetemen akár csak egy év matematikát is tanult, például szociológusként: a centrális határeloszlás-tétel szerint független azonos eloszlású változók összege közelítőleg normális eloszlású. Ez akkor is igaz, ha független véletlen vektorokat adunk össze; így például, ha egy tetszőleges síkrácson bolyongunk, azaz minden lépésben a lehetséges szomszédok egyikére ugrunk, mindegyikre ugyanakkora valószínűséggel, korábbi döntéseinktől függetlenül, akkor sok lépés után a helyzetünk eloszlása közelítőleg normális lesz, elfeledve a síkrács diszkrét kombinatorikus részleteit. (Az 5. ábrán az egyszerű szimmetrikus bolyongás eloszlása látható 100 lépés után.)



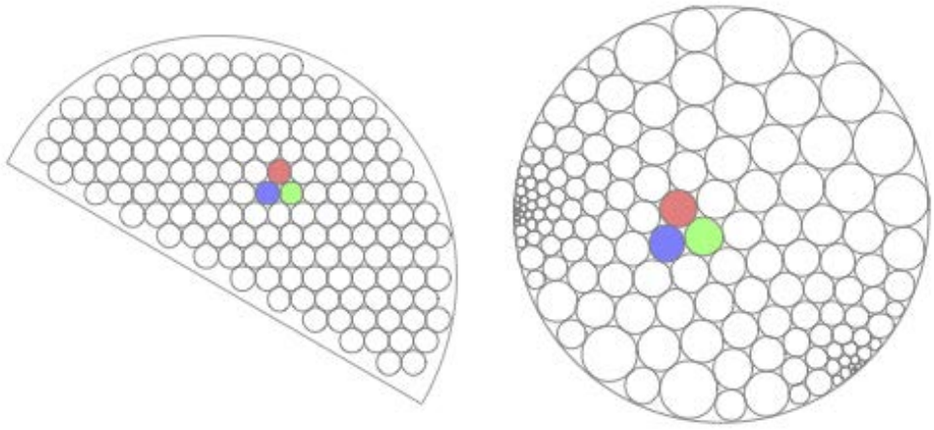
6. ábra (Készítette Nagy Marcell)

Sőt, ha a teljes trajektóriát nézzük n lépésig, akkor az ugrások nagyságát $\sqrt{n}$-nel osztva létezik egy *skálalimesz*: a folytonos síkbeli Brown-mozgás. Ennek a limesznek pedig analitikusan kezelhető tulajdonságai, új szimmetriái vannak, amelyek rendkívül hasznossá teszik. A Brown-mozgásra Lévy 1940-ben bizonyította, hogy *konforminvariáns*: ha egy olyan komplex analitikus függvényt alkalmazunk rá, amelynek a deriváltja sehol nem nulla (így lokálisan mindenütt egy nemdegenerált nyújtás és forgatás), akkor a trajektória képének eloszlása meg fog egyezni az eredeti eloszlással.

A perkoláción nem látszik, hogy bármi köze lenne a bolyongáshoz vagy a normális eloszláshoz. Mégis, a fizikusok általános elképzelése, hogy a kritikus ponton a perkoláció és a hozzá hasonló statisztikus fizikai modellek is teljesítik az univerzalitás sejtést, egy konforminvariáns skálalimesszel. Az univerzalitás bizonyítására és a skálalimesz tulajdonságainak megértésére kidolgozták a *renormalizációs csoport* módszert, és *konform-tér*eleméleti eszközökel nagyon részletes állításokat tettek, hogyan is viselkedik a rendszer a kritikus pont közelében. A bökkenő csak az, hogy ezek a technikák, bár matematikai formulákat és gondolatokat tartalmaznak, egyáltalán nincsenek szigorúan megalapozva, így a matematikusok számára ezek csak előrejelzésekként jelennek meg, amelyek jogosságára a legfőbb bizonyítékot számítógépes szimulációk jelentik.

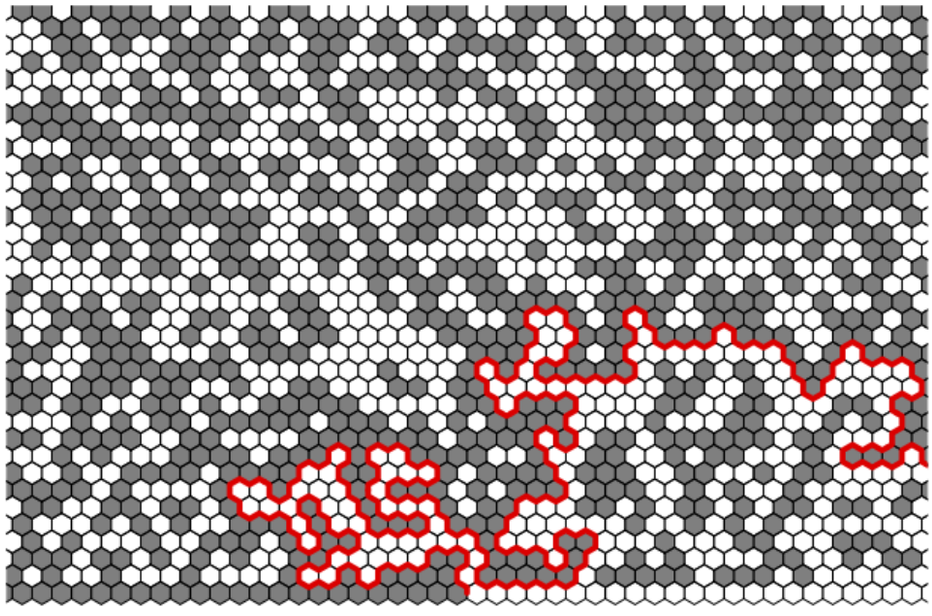
Mit értünk részletes előrejelzések alatt? Például annak a valószínűsége, hogy az o csúcs fürtje legalább R távolságra elér o-tól, szubkritikus perkolációban exponenciális gyorsan cseng le R-ben; szuperkritikus perkolációban R-től függetlenül $\theta(p) > 0$ fölött marad; kritikus perkolációban pedig polinomiálisan cseng le, $R^{-1/\rho+o(1)}$ alakú, ahol a furcsa $1/\rho$ jelölésnek fizikatörténeti okai vannak. Ez az $1/\rho$ kitevő egy tipikus *kritikus exponens*, aminek értéke minden síkrácson $5/48$ kellene, hogy legyen, reguláris fákon és minden nem-amenábilis Cayley-gráfon 1, és a $\mathbb{Z}^d$ rácsokon, minden $d > 6$ esetén, szintén 1. Egy *közelkritikus exponens* pedig $\theta(p_c + \epsilon) = \epsilon^{\beta+o(1)}$, ami persze magában foglalja azt az előrejelzést is, hogy $\theta(p_c) = 0$. Síkrácsokon $\beta = 5/36$, reguláris fákon és a többi „nagy” gráfon $\beta = 1$. Mindebből remélhetőleg megérti az Olvasó a fizikusok kritikus exponensek iránti lelkesedését: ha ennyire univerzális számokat kapunk, a rácsok lokális részleteitől függetlenül, akkor valódi fizikai jelenségekkel kell, hogy szemben álljunk.

Ezekből a grandiózus sejtésekből mi az, amire szigorú matematikai bizonyítás van? Reguláris fákra expliciten számolni lehet a kérdéses valószínűségeket, így minden exponens ismert. A $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 11$, rácsokon a fentebb említett csipke-sorfejtés a kritikus exponenseket is igazolja. Sőt, a módszer működik minden $d > 6$-ra, ha a $\mathbb{Z}^d$-t módosítjuk úgy, hogy extra éleket adunk hozzá, minden olyan csúcsot is összekötve, amiknek a távolsága valamilyen alkalmas $L(d)$-n belül van. Hogy miért pont $d = 6$ körül kezd el úgy viselkedni a $\mathbb{Z}^d$ rács a perkoláció szempontjából, mintha nem lenne nemtriviális geometriája, annak okait most nincs módunk leírni, de mindenesetre a $d = 3, 4, 5$ dimenziók kritikus exponensei mind mások, és pontos értékükről a fizikusoknak sincs elképzelése. A reguláris fákhoz és magas dimenziókhoz tartozó úgynevezett *átlag-tér* (geometria nélküli) exponenseket „nagyon”-nem-amenábilis és hiperbolikus tranzitív gráfokra is igazolták már, de az általános nem-amenábilis eset nyitott.



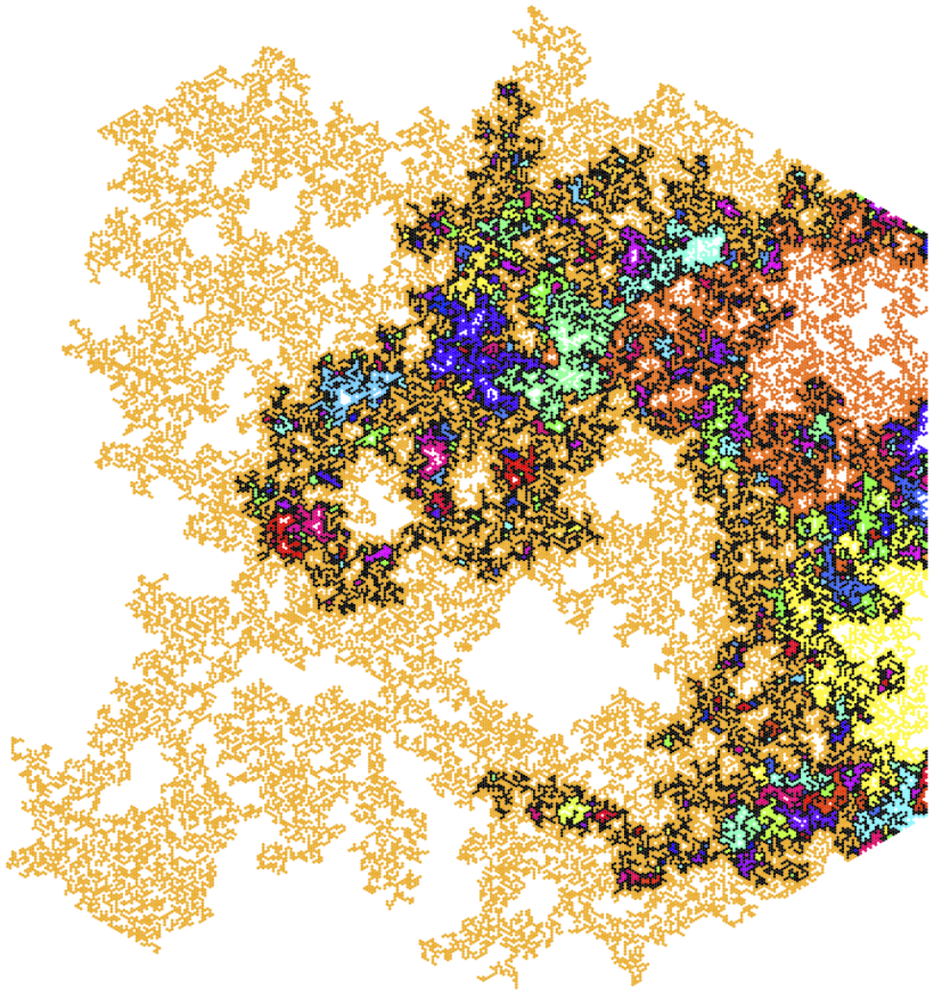
7. ábra. (Készítette: Oded Schramm, Wikipedia)

A másik véglet a kétdimenziós eset. Amögött, hogy itt nagyon sok mindent értünk, egy speciális tulajdonsága van a két dimenziónak. Ez pedig az, hogy a konform leképezések rendkívül gazdagok ebben a dimenzióban, amit a *Riemann leképezési tétel* is mutat: bármely két egyszeresen összefüggő tartomány, ami nem maga az egész sík, átvihető egymásba konform leképezéssel (a 7. ábrán egy ilyen leképezésnek egy körpakolásos közelítését láthatjuk). Ez pedig azt jelenti, hogy ha tudjuk (vagy legalábbis föltesszük) a modell konform-invarianciáját, akkor nagyon sok eszközünk lesz számításokhoz.



8. ábra. (Készítette: Oded Schramm)

Oded Schramm 2000-ben megkonstruálta síkbeli konforminvariáns véletlen görbék egy családját, amit Sztochasztikus Loewner Evolúciónak vagy *Schramm-Loewner Evolúciónak* is neveznek, de mindig SLE-nek rövidítenek. Ennek segítségével bármilyen, a komplex felső félsíkbeli, önelkerülő, konform-invariáns és a térbeli Markov-tulajdonsággal rendelkező véletlen görbét (mint amilyen a Δ háromszögrácson a zárt és nyílt csúcsok közötti határgörbe skálalimesze kell, hogy legyen, ha az létezik és konforminvariáns) elkódolt a félsík határán mozgó egydimenziós Brown-mozgássá. Egy szép költői képpel élve, mintha a Brown-mozgás egy kisgyerek lenne, aki egy papírsárkánnyal fut a szélben, egyre magasabbra engedve és közben ide-oda rángatva azt. A kisfiú mozgását a sárkány mozgásával a Loewner-egyenlet köti össze.



9. ábra. (Készítette: Oded Schramm)

Egy olyan kérdést, hogy egy nagy négyzet két szemközti oldala össze van-e kötve egy fürttel, meg lehet válaszolni úgy, hogy a négyzet egyik sarkából indított határgörbe a négyzet melyik szemközti oldalát találja el először. Vagy az, hogy egy fürt határának dimenziója $2-\delta$, körülbelül azt jelenti, hogy a görbe $\epsilon^{\delta+o(1)}$ valószínűséggel halad el egy tipikus pont ϵ környezetében. Ezeket a kérdéseket pedig a Loewner-egyenlet lefordítja egy egydimenziós sztochasztikus differenciálegyenlet-kérdéssé, így számolhatóvá teszi. (A 9. ábrán a háromszögrácson egy csúcsperkolációs fürt látható feketével, az őt érintő további fürtök különböző színekkel. A határgörbe skálalimeszének dimenziója 7/4.) Ezzel az SLE lehetőséget teremtett a fizikusok által sejtett eredmények matematikai bizonyítására, teljesen más módszerekkel, ugyanis nem valószínűségek, függvények limeszéről beszél, hanem megkonstruál egy folytonos geometriai limesz-objektumot.

A sikerhez persze az is kell, hogy tudjuk a modell konforminvarianciáját. A háromszögrácson való csúcsperkoláció esetén erre Smirnov 2001-ben talált egy gyönyörű bizonyítást. Ez egy kombinatorikus varázslaton alapul, amelyet más síkrácsokra egyelőre nem sikerült átvinni, így a síkbeli kritikus perkoláció univerzalitása továbbra is nyitott.

Természetes kívánság, hogy ne csak egyetlen határgörbének legyen skálalimesze (egy SLE görbe), hanem az egész konfigurációnak. Fölmerülhet ötletként, hogy limeszként a sík minden pontját válasszuk egymástól függetlenül nyíltnak vagy zártnak. Mondjuk kontinuum sok pénzfeldobást kicsit nehéz kivitelezni, nem is egészen világos, hogy pontosan mit jelentene, de végülis a *fehér zaj*, amit a fizikusok gond nélkül használnak, a sztochasztikus differenciálegyenletek elméletében pedig a Brown-mozgás „deriváltjaként”, $\mathrm{d}B_t$-ként a matematikusok is ismernek, lényegében pont ez. Csakhogy a fehér zaj tényleges matematikai értelmezése az integráljaival történik: azt méri, hogy egy intervallumon, vagy kétdimenziós perkoláció esetén egy korlátos síkdarabon az átlaghoz képest mennyivel több nyílt csúcs van. És a kritikus perkoláció leírására ez alkalmatlan. Ugyanis, talán megdöbbentő módon, a makroszkopikus fürtstruktúra, amiről a skálalimesz beszélni kívánna, *független* attól, hogy hol van az átlagnál több vagy kevesebb nyílt csúcs. Másképp mondva, a makroszkopikus fürtstruktúra rendkívül *zajérzékeny*: a csúcsok elenyésző részének véletlen újrasorsolása tipikusan nem változtatja meg lényegesen a nyílt csúcsok számát sehol, ám a fürtstruktúrát teljesen átrendezi. Így a fürtstruktúra skálalimeszének egy helyes és intuitív definíciója az összes fürt határgörbéiből történik, ami zárt folytonos síkgörbék megszámlálható uniója, így egy viszonylag épeszű topologikus tér, amin a kritikus perkoláció skálalimesze egy valószínűségi mérték. A nemrég elhunyt Boris Tsirelson zajelméletének elnevezése szerint pedig ez a skálalimesz a zajérzékenysége miatt egy *fekete zaj*.

A síkbeli kritikus perkoláció zajérzékenységének pontos mértékét a jelen írás második szerzője Garbannal és Schramm-mal együtt értette meg, aminek a következő csinos alkalmazása is van *dinamikus perkolációra*. A végtelen háromszögrácson minden csúcs kapcsolgasson folytonos idejű Poisson-órák szerint, egymástól függetlenül, ide-oda nyílt és zárt között szimmetrikusan. Így minden egyes fix pillanatban minden csúcs 1/2 valószínűséggel nyílt, 1/2-del zárt, tehát kritikus perkolációt látunk, és $\theta(1/2) = 0$ miatt majdnem biztosan nincs végtelen fürt. Csakhogy most számít a nulla valószínűségű és a ténylegesen üres események közötti különbség: kontinuum sok időpont van, és a nulla valószínűséget nem tudjuk ennyiszer összeadni, tehát elvileg lehetséges, hogy vannak véletlen *kivételes időpontok*, amikor kialakul végtelen fürt. És ez valóban be is következik: az olyan kivételes időpontok halmaza, amikor az origó fürtje végtelen, egy $31/36$-dimenziós véletlen Cantor-halmaz.

A $\mathbb{Z}^d$ rácsokon, ha $d \geq 6$, akkor a perkolációs utak már nagyon hasonlítanak független elágazó bolyongás-trajektóriákra, így a skálalimesz $\mathbb{R}^d$-ben az úgynevezett *integrált szuper-Brown-mozgással* írható le, bár ez az állítás nincs minden részletében bizonyítva. Hogy mi lenne a skálalimesz $3 \leq d \leq 5$ esetén, és mi lenne egy tetszőleges tranzitív gráfnál, ahol nincs az $\mathbb{R}^d$-hez hasonló természetes folytonos limesztér, azt a jelen pillanatban teljes homály fedi.

A perkolációs modelleknek rendkívül sok változata létezik, például folytonos alaptéren definiált gráfokra való áttéréssel, vagy a nyílt/zárt döntések függetlenségének a legkülönbözőbb módokon való föladásával. Az AMS MathSciNet adatbázisában a „percolation" kifejezés a jelen pillanatban 4273 cikkre illik.

Írásunknak a kezdőlökést Harry Kesten 2006-os Notices of the AMS-beli What is ... percolation? cikke adta. További olvasnivalónak pedig a kövezkezőket ajánljuk:

Irodalomjegyzék

[1] Hugo Duminil-Copin. Sixty years of percolation. *Proceedings of the ICM 2018, Rio de Janeiro*. http://arxiv.org/abs/1712.04651

[2] Hugo Duminil-Copin, Subhajit Goswami, Aran Raoufi, Franco Severo, and Ariel Yadin. Existence of phase transition for percolation using the Gaussian Free Field. *Duke Math. Journal*, to appear. http://arxiv.org/abs/1806.07733

[3] Hugo Duminil-Copin and Vincent Tassion. A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation on $\mathbb{Z}^d$. *L'Enseignement Mathématique* **62** (2016), 199–206. http://arxiv.org/abs/1502.03051

[4] Christophe Garban and Jeff Steif. *Noise sensitivity of Boolean functions and percolation.* Cambridge University Press, 2014. http://math.univ-lyon1.fr/~garban/Fichiers/book.pdf

[5] Geoffrey Grimmett. *Percolation. Second edition*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 321. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[6] Tom Hutchcroft. Percolation on hyperbolic graphs. *Geometric and Functional Analysis* **29** (2019), 766–810. http://arxiv.org/abs/1804.10191

[7] Russell Lyons and Yuval Peres. *Probability on trees and networks*. Cambridge University Press, 2016. Available at http://mypage.iu.edu/~rdlyons

[8] Gábor Pete. *Probability and Geometry on Groups.* Book in preparation, http://www.math.bme.hu/~gabor/PGG.pdf

[9] Gordon Slade. Scaling limits and Super-Brownian Motion. *Notices of the AMS* **49** (2002), 1056–1067. https://www.ams.org/journals/notices/200209/fea-sladecolor.pdf

[10] Wendelin Werner. *Lectures on two-dimensional critical percolation*, IAS Park City Graduate Summer School, 2007. http://arxiv.org/abs/0710.0856

Munkánkat az ERC Consolidator Grant 772466 „NOISE" támogatta.

Mester Péter
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Budapest
Pete Gábor
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Budapest,
és BME Matematikai Intézet, Sztochasztika Tanszék
http://www.math.bme.hu/~gabor

alkalmazott fizika gráfok valószínűségszámítás

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

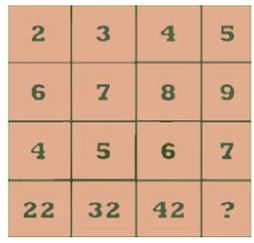
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY.*)

Pintér Gergő
2020. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Hopf-fibrálás – A Möbius-szalagtól négydimenziós kitérővel a qubitig

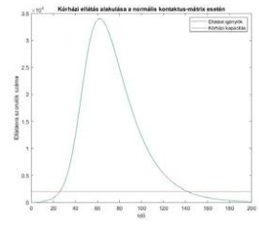
– Egy igazán sokoldalú matematikai jelenséget szeretnék bemutatni: a Hopf-fibrálást.
A tárgyalásmód szándékom szerint ismeretterjesztő, matematikai előképzettséget nem igényel. – A Hopf-fibrálás egy topológiai jelenség, a Möbius-szalag és a Klein-kancsó közeli rokona, egy magasabb dimenziós csavarodó nyaláb, amit *Pintér Gergő* látványos képek, videók és animációk segítségével mutat meg az érdeklődőknek. Tovább...



Simon L. Péter
2020. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematika a járványterjedés modellezésében

Mi a számsor következő tagja: 11, 8, 15, 12, 18, 28, 36, 20, 39? Bizonyára sokan emlékszünk matematikaóráinkon hasonló kérdésekre. Az iskolában a számsorozatokat a tanárunk állította össze oktatási céllal, ezért soha nem gondoltuk, hogy gyakorlati haszna lehet ilyen sorozatok szabályán gondolkozni. A fenti sorozat a jelenlegi járvány hazai fertőzötteinek számát tartalmazza az első néhány napon. Így mindjárt komolyabb tartalmat nyer a szabályok, összefüggések felismerésének készsége. *Simon Péter* bevezetője következik a járványterjedés matematikai modellezésébe. Tovább...



Garay Barna, Molnár Zsófia
2020. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Nemlineáris dinamikai modellek a biológiában: a kontaktusmátrixos SIR-modell

A *Nemlineáris Dinamikai Modellek a Biológiában* minden tavaszi félévben szabadon választható tantárgy a Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információtechnológia Kar bionikus mérnökképzésének BSc hallgatói részére. Közülük *Molnár Zsófia* dolgozatát javasolta közlésre a tantárgy előadója, *Garay Barna*. A téma, egy járvány kontaktusmátrixának korlátozása, meglehetősen aktuális. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

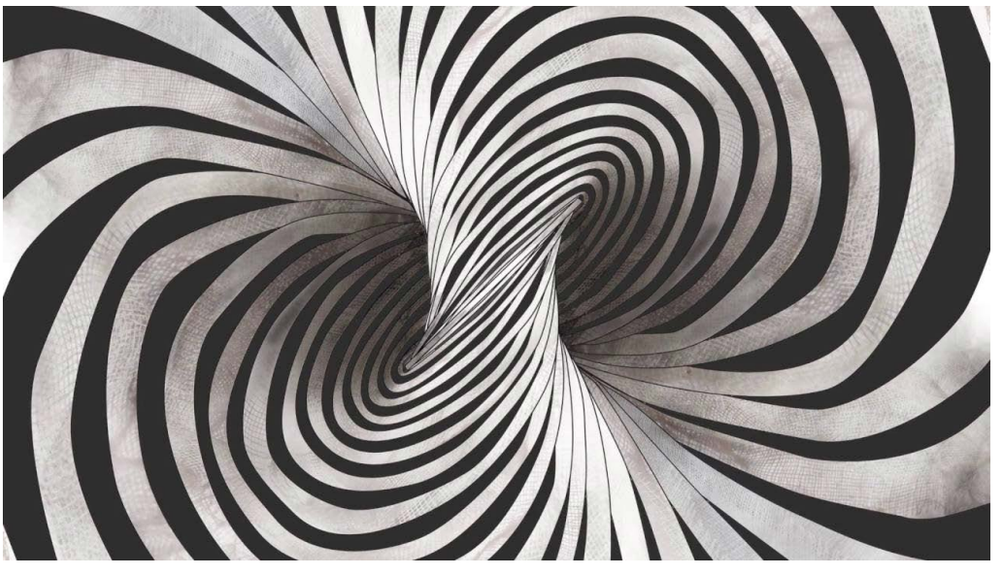
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Pintér Gergő 2020. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Hopf-fibrálás – A Möbius-szalagtól négydimenziós kitérővel a qubitig

Egy igazán sokoldalú matematikai jelenséget szeretnék bemutatni: a Hopf-fibrálást. A tárgyalásmód szándékom szerint ismeretterjesztő, matematikai előképzettséget nem igényel. Ez nem azt jelenti, hogy mindenki ugyanúgy meg fogja érteni, hiszen ezt egy vers, egy színdarab vagy egy film esetén sem várjuk el. Hanem azt jelenti, hogy mindenki számára hordozhat személyes jelentést, mindenkinek mást és mást. Nekem is személyes okaim vannak arra, hogy mindezt leírjam. A Hopf-fibrálás a topológiai jelentősége miatt lett a kedvenc képletem, de ez az aspektusa nehezen átadható. A zenekarom Dinamikus Meditáció c. lemezének borítójához gézből készítettük el a Hopf-köröket a dalszövegekben többször említett titokzatos eredetű szétfutó és becsavaró szálak szimbólumaként. Tavaly ősz óta pedig fizikus kollégáimmal próbáljuk megérteni bizonyos kvantumrendszerek matematikai leírását, ennek során vettük észre a Hopf-fibrálás és a qubit szoros kapcsolatát. Nem újkeletű a gondolat, ennek ellenére sem ők, sem mi matematikusok nem szoktunk így gondolni rá. Idén januárban a Kéregfeszten tartottam egy MateMorfózis ismeretterjesztő előadást erről a témáról, ahhoz írtam ezt az összefoglaló cikket. „Gergő, te úgy gondolod, hogy a qubit megértésének leghatékonyabb módja a Hopf-fibrálás?” – kérdezték a fizikusok. Nem. De a kettő ugyanaz, állapítottuk meg. Tehát ez egy matematikailag is teljesen korrekt, teljes kép, és ehhez képest könnyen befogadható.

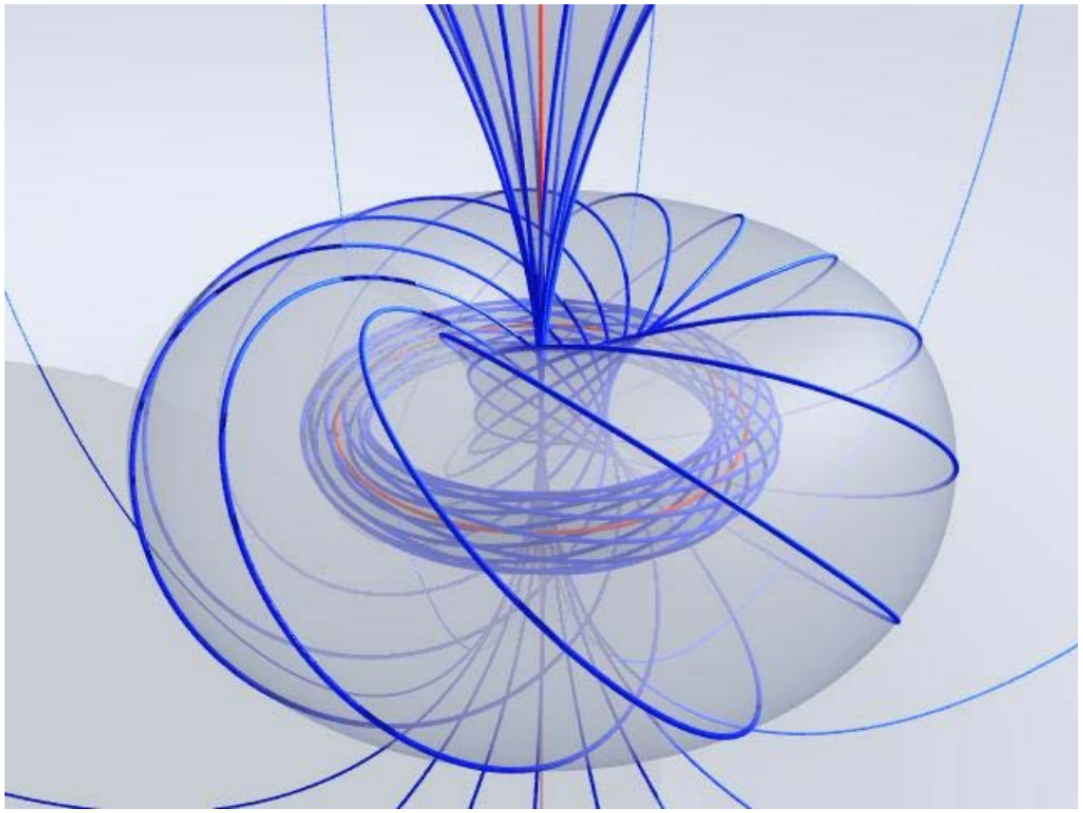


A Dinamikus Meditáció lemezborítója

Hogyan alakulnak át egymásba a címben említett, első hallásra nagyon különbözőnek tűnő minőségek? A *Hopf-fibrálás* egy vetítésekhez, vizuálokhoz gyakran felhasznált csavarodó, örvényszerű mintázat. Ez a mintázat teljes pompájában egymást áthurkoló körökből áll, amelyek összességében (kis híján) kitöltik a teret. Ez az elrendezés valójában egy négydimenziós mintázat vetülete a háromdimenziós térbe. A négydimenziós mintázat sokkal természetesebb és szimmetrikusabb, mint az e világi „árnyéka”, csak nem tudjuk közvetlenül ábrázolni. De több oldalról megközelítve egészen kielégítő képet kaphatunk róla. A négydimenziós kép a *qubit* matematikai modellje. A hagyományos számítógépekben az információ alapegysége a bit, egy két állapotú jel. A bit kvantuminformációs megfelelője egy kétállapotú kvantumrendszer, mint például az elektron spinje vagy Schrödinger macskájának gondolatkísérlete. Egy kvantumbit állapota is 0 vagy 1 lehet, de hogy melyik, az csak a konkrét mérés során derül ki, egyébként a kettő között lebeg valamekkora valószínűséggel. A qubit azonban jóval komplexebb, mint az igen-nem válasz valószínűsége, a teljes állapota a Hopf-fibrálásban van elkódolva. A Hopf-fibrálás egy topológiai jelenség, a *Möbius-szalag* és a *Klein-kancsó* közeli rokona, egy magasabb dimenziós csavarodó nyaláb.

Ezen az úton fogunk hát végighaladni, a látványos vizuálokból kiindulva felgöngyölítjük a szálakat a Möbius-szalagtól négydimenziós kitérővel a qubitig.

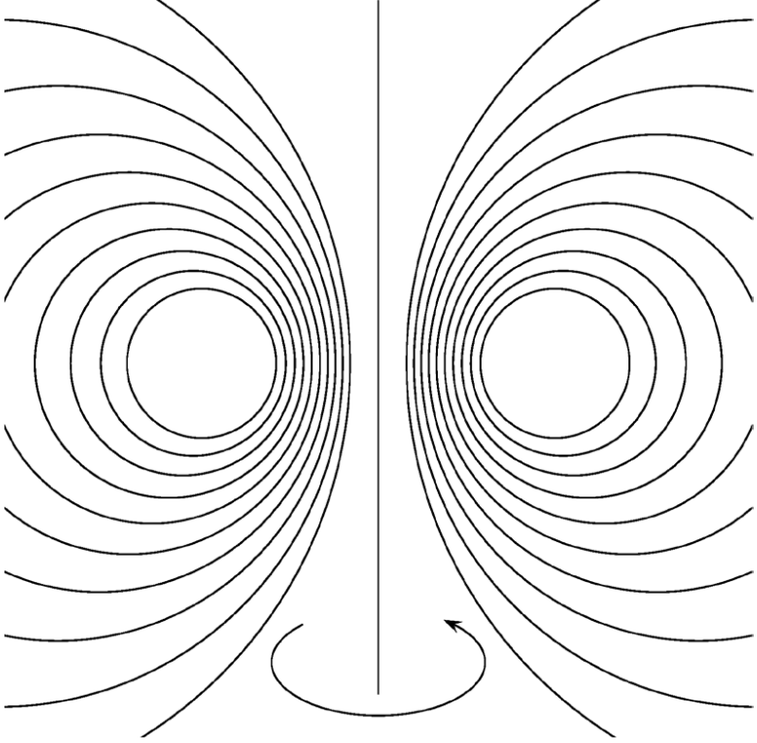
1. Mik ezek a spirálszerűen csavargó vonalak?



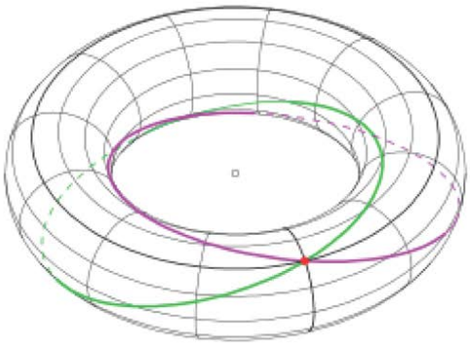
A Hopf-körök (beleértve a középsőt, ami nem kör, hanem egyenes) kitöltik a teret, miközben bármelyik kettő áthurkolódik egymáson, mint két láncszem, ún. Hopf-linket alkotva.

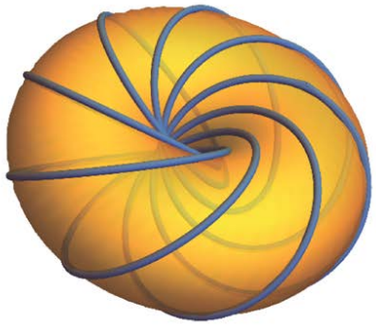
A következőképpen kaphatjuk meg ezt a mintázatot. Induljunk ki a térben egy körből, és a kör síkját a kör középpontjában merőlegesen átdöfő egyenesből – mint egy képzeletbeli búgócsiga határvonala és forgástengelye, az ábrán a kékek között megbúvó piros kör és egyenes. Ha a kört lassan megvastagítjuk a térben, körbezáródó csöveket, ún. tóruszokat kapunk körülötte. Ezek az egyre dagadtabb úszógumi-felületek összességében kitöltik a teret, a kiindulási kör és egyenes kivételével. Amikor már az úszógumi külső fala a végtelenbe dagadva bekebelezi az egész teret, a belső lyuk rászűkül az egyenesre. Így ezek az egyre növekvő, egymást tartalmazó tóruszok a kiindulási körből erednek és az egyenesben végződnek.

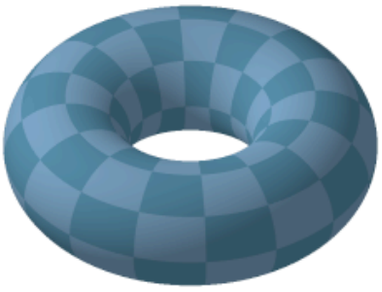
A teret a kiindulási körrel és egyenessel együtt kitöltő tóruszok egy úgynevezett elliptikus vagy másnéven appolóniuszi körsor megforgatásából származnak.

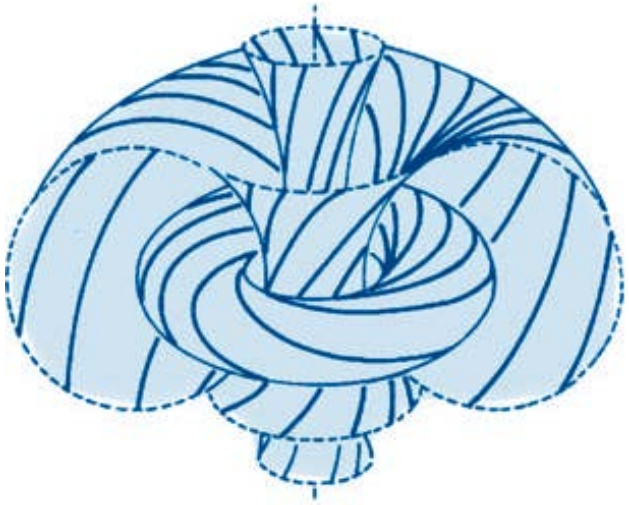


Ezután a teret kitöltő tóruszok felületeire rajzoljuk rá a „ferdén futó” köröket! Egy tóruszon két jellemző irányban tudunk körbemenni, az ún. meridián vagy a longitúdó mentén. (Ezt mutatom a videón is.)









A ferdén futó körök a meridián és a longitúdó irányában is egyszer mennek körbe a felületen, ahogyan azt az ábra mutatja. Minden tórusz felületén két seregnyi van ilyen körökből, ezek közül az egyik irányút ki kell választanunk egyszer és mindenkorra az összes tóruszon. A kiindulási körre rázsugorodó tóruszok ferdén menő körei végül rásimulnak a kiindulási körre, míg az egyre dagadó tóruszok körei a kijelölt tengelyhez egyenesednek. Így a kiindulási kört és egyenest is beleszámítva a Hopf-körök kitöltik a teret. Semelyik kettő nem metszi egymást, azaz nem érnek össze, nincsen közös pontjuk, de szétválaszthatatlanok, mert egymásba láncolódnak.

Terjed mostanában egy játék, ami emlékeztet erre a mintázatra, ez a toroflux. Azonban a toroflux nem Hopf-körökből áll, hanem ő maga egyetlen kör, ami 13-szor, illetve 14-szer kerüli meg a tóruszt a meridián, illetve a longitúdó irányában. A toroflux egy ún. tóruszcsomó.

Az itt vázolt attraktív csavaros kép a Hopf-fibrálás háromdimenziós képe. De pusztán az érzékien összetett szépség még nem lenne elég ok arra, hogy a kedvenc képletemként emlegessem. A Hopf-fibrálás valójában a négydimenziós térben él teljes pompájában. A Hopf-körök a négydimenziós térbeli gömbfelületet töltik ki teljesen szimmetrikus módon. A négydimenziós térbeli körök mind azonos méretűek, és tényleg mind körök, nincsen köztük egyenes. Az eredetileg egyforma körök képei ugyanúgy nyúlnak meg a háromdimenziós térben, mint az árnyékunk naplemente előtt. A képeken valójában a Hopf-fibrálás háromdimenziós árnyékát látjuk. Erről bővebben a következő utáni fejezetben lesz szó.

Magát a fibrálást képlettel így fejezhetjük ki:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^3 \\ & & \downarrow \\ & & S^2 \end{array}$$

A képlet azt mondja, hogy a (négydimenziós térbeli) háromdimenziós gömbfelület kétdimenziós gömbfelületnyi sok egydimenziós gömbfelületre, azaz körvonalra bontható. Az ilyen „rostokra bontásról” szól a most következő fejezet.

2. Fibrált nyalábok

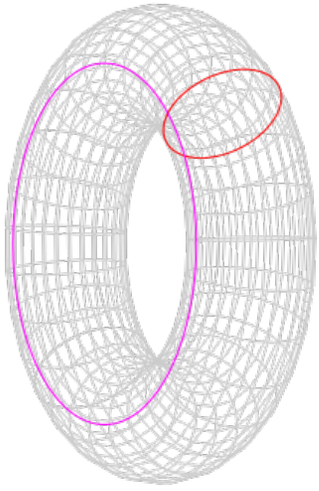
A matematika topológia, illetve algebrai geometria nevű ágaiban a 20. század első felében kicsit elburjánoztak a mezőgazdasági elnevezések, a nyalábok és a kévék az absztrakt matematika – és mint látni fogjuk, valahol mélyen a fizika – kulcsfontosságú struktúrái. A nyalábok egymáshoz simuló fibrumokra (azaz rostokra) bontott, vagy ha úgy tetszik, fibrumokból felépített terek. A hengerpalást például alkotókra bontható, körvonalnyi sok szakasz alkotja. Vagy fordítva: szakasznyi sok körvonal. Ez két különböző nyalábnak felel meg, az első esetben a szakaszok (intervallumok) a fibrumok, és a bázistér a körvonal, aminek minden pontjához tartozik egy alkotó szakasz. A második esetben a körvonalak a fibrumok, és a szakasz a bázis. Mindkét nyaláb esetén az ún. totális tér maga a hengerpalást. Egy nyaláb esetén tehát fibrumokból építünk fel egy totális teret a bázistér szerint.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] & \text{Henger} \arrow[d] \\ & S^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & \text{Henger} \arrow[d] \\ & I \end{tikzcd}$$

$$\text{Henger} = S^1 \times I$$

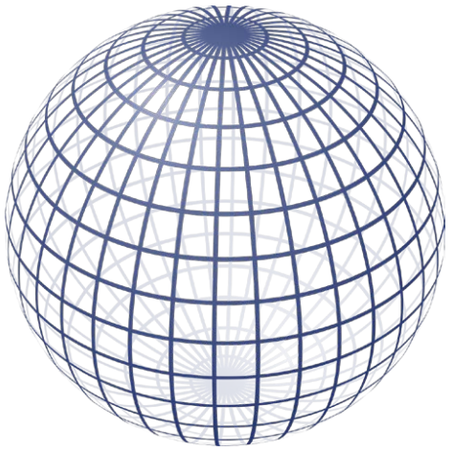
A henger két különböző nézőpontból is nyaláb: körvonalnyi sok szakasz és szakasznyi sok körvonal egyúttal. A hengerpaláston mászkálva a pozíciónkat egyértelműen azonosíthatjuk, ha megmondjuk, hol járunk a körön, illetve a szakaszon. Azaz: a henger egy körvonal és egy szakasz ún. Descartes-szorzata.

Hasonlóképp áll elő a tóruszfelület mint körvonalnyi sok körvonal, kétféleképpen is.
A tórusz tehát két körvonal Descartes-szorzata. A legismertebb Descartes-szorzat a Descartes-féle koordinátarendszer, miszerint a sík két egyenes, a két tengely Descartes-szorzata. Egy pont két koordinátája megadja, hogy hol járunk az x, illetve az y tengely mentén.



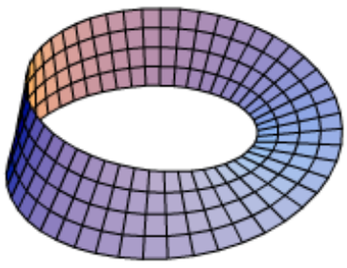
$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & \text{Tórusz} \arrow[d] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

$$\text{Tórusz} = S^1 \times S^1$$



Nézzük meg ellenpéldának a bolygónk felszínét, ami egy térbeli gömbfelület! A gömbfelület jele S^2: „S” mint sphere, és 2, minthogy kétdimenziós. Igen, kétdimenziós, mert a felületi közlekedésünket 2 GPS-koordinátával tudjuk lekövetni. Harmadik koordináta, a magasság csak akkor kell, ha repülünk vagy a Föld mélyére ásunk, de akkor már nem a gömbfelületen vagyunk. A GPS-koordináták alapján azt gondolhatnánk, hogy a gömbfelület is Descartes-szorzat, de ez nem így van. A GPS-koordináták ugyanis elromlanak az északi és a déli sarkon, nem egyértelműen koordinátázzák a gömbfelületet. A gömbfelület nem is nyaláb, ha szakasz vagy kör fibrummal próbálkozunk, a hosszúsági körök például találkoznak a sarkokban, a szélességi körök pedig nem találkoznak egymással, de a sarkokban pontokká zsugorodnak.

De ha csak szorzatként előálló alakzatokat (tereket) vizsgálnánk, azért fölösleges volna nyalábokról beszélnünk. A nyalábok lényegéhez tartozik a csavarodás, amit a hengeren és a tóruszon pont nem látunk, de a Hopf-fibráláson annál szembetűnőbb. Vegyünk egy hosszúkás téglalap alakú papírt, és ragasszuk össze a két szélét, de ragasztás előtt az egyik szélét csavarjuk meg egy fél fordulattal! Így kapjuk a Möbius-szalagot. A Möbius-szalag is körvonalnyi sok szakasz, akárcsak a henger, de szakasznyi sok körvonalként már nem áll elő, éppen a csavarodás miatt. Ennek megvizsgálását az olvasóra bízom, mivel jóval érdekesebb jelenségekről van szó, minthogy csak úgy lelőjem a poént: próbálja csak meg berajzolni a köröket a Möbiuson, esetleg szétvágni a szalagot a középkör mentén!



$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \text{Möbius} \\ & & \downarrow \\ & & S^1 \end{array}$$

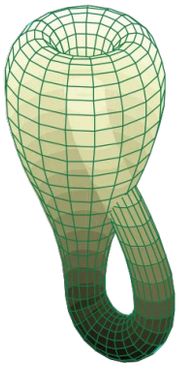
Feladat a kiváncsi olvasónak:

– Készíts papírból egy Möbius-szalagot! Ragaszd jól össze a téglalap széleit!

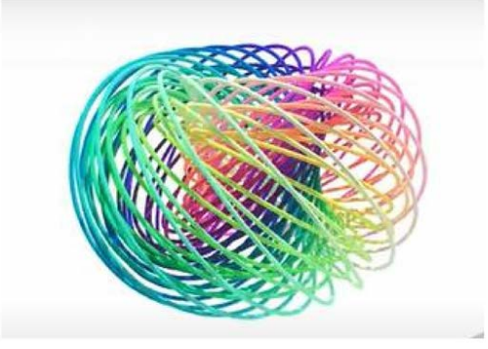
– Rajzold be a Möbius-szalag középkörét! Valami meglepő már ekkor is fog történni...

– Indíts el körben egy másik vonalat a középkör mentén, de attól kijjebb, a széle felé. Hogyan tudnád bezárni, miután egyszer(!) körbeértél?

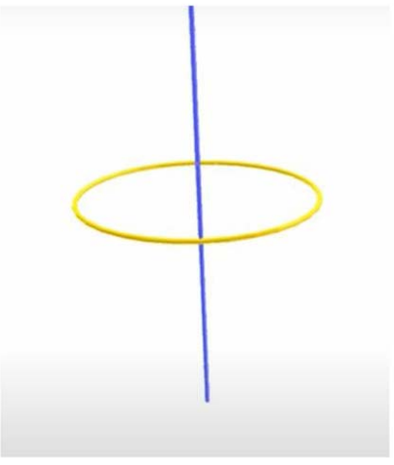
– Ha meguntad, vágd szét a Möbius-szalagot a középkör mentén! Tippeld meg előtte, mi fog történni!



Ahogy a henger csavarodott változata a Möbius-szalag, a tórusznak is van csavarodott testvére. Ez a Klein-kancsó, ami egy cső önmagán keresztül átdugva, majd a két peremköre mentén összeragasztva. Egyféleképpen körvonalnyi sok körvonal, de a Möbius-szalaghoz hasonlóan nem lehet felbontani egymás mellé simuló másik irányú körökre. Ezekről az alakzatokról részletesebben és más megvilágításban szól a Térteremtés c. előadásom.



Ez a két kép egy youtube



animációból való, ami azt mutatja, hogy a Hopf-fibrálás esetén a gömbfelület minden pontjához tartozik egy Hopf-kör. A déli sark az eredetileg kijelölt (vízszintes) kört jelképezi, az északi sark az egyenest. A szélességi körökhöz egy-egy tórusz ferdén álló körei tartoznak. (Ez persze mind a választásunk kérdése: a gömb pólusait, az alapkört és a függőleges egyenest úgy választjuk meg, ahogy akarjuk.) Az egyetlen ami nem stimmel, hogy egy egyenes keveredett a körök közé. De a négydimenziós térben ez is körré záródik, csak az alkonyat az árnyékát egyenessé nyújtja.

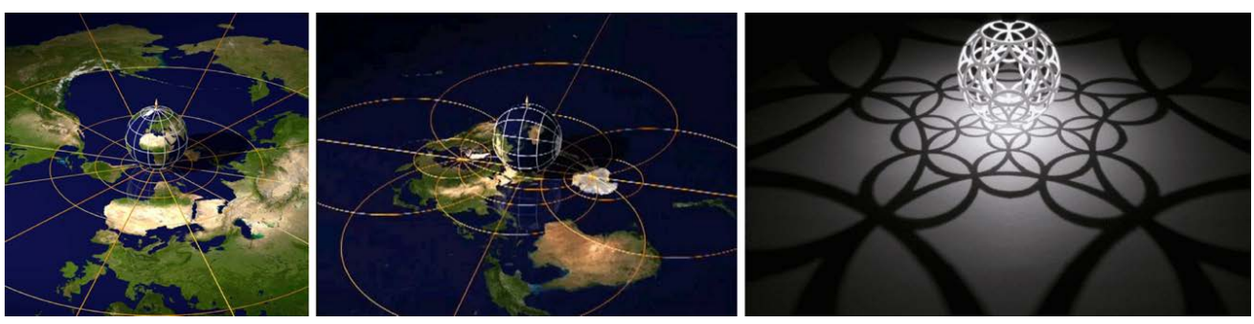
Evvel a cikkel egy időben jelent meg a https://indiecrawford.blog.hu/2020/06/14/pinter_gergo_hopf_fibralas blogon ugyanennek a témának zanzásított, csak a fizikai rész leírására szorítkozó változata, ahol interaktív GeoGebra animációként tudja állítgatni a köröket az olvasó.

3. A négydimenziós térbeli gömb és a háromdimenziós árnyékvilág

Gömbök minden dimenzióban vannak. A síkon a körvonal olyan pontokból áll, amelyek egy adott középponttól egyenlő távol helyezkednek el. A körvonal az egydimenziós gömbfelület, S^1, természetes élőhelye a két dimenziós sík. A térben ugyanezzel a meghatározással gömbfelületet kapunk, az S^2 kétdimenziós gömbfelületet. Ugyanígy egy négydimenziós térben adott ponttól egyenlő távolságra fekvő pontok egy háromdimenziós önmagába forduló alakzatot alkotnak, ez a háromdimenziós gömbfelület, S^3. A háromdimenziós gömbfelület nem tévesztendő össze az általunk ismert gömb belsejével, a golyóval. A golyó egy kétdimenziós gömbfelülettel körbezárt világ: ha egy gumilabda belsejeként gondolunk rá, nem tudunk belőle kilépni, falba ütközünk. A háromdimenziós gömbfelületet nem határolják falak, az egy olyan tér, amelyben akármilyen irányban utazva előbb-utóbb körbeérünk.

Felmerül a kérdés, hogy a mi az a négydimenziós tér. Ez szerintem egy nagyon fontos kérdés, és a hétköznapi életünkben, világszemléletünkben és önmeghatározásunkban is fontos szerepe lehet, ugyanis nem vagyunk bezárva a 3 dimenzióba – főképp nem a gondolkodásunk! A matematikai térfogalom egy teljesen szabad felhasználású modellező eszköz, egy metafóra. A fizikai tér, az idő, a színek vagy akár a zene mind csak példák erre. Bármilyen rendszer vagy jelenség, amit 4 adattal tudunk jellemezni, modellezhető egy négydimenziós térben. A magasabb dimenziók a hamarosan megjelenő Új világok teremtése című könyvemben szerepelnek részletesebben. A Hopf-fibrálás viszont alkalmas arra, hogy segítségével képet kapjunk a négydimenziós tér és az ottani gömb szerkezetéről.

Nézzük meg képeken és animációkon keresztül egy kisebb dimenziós példán, hogyan keletkezik a gömb árnyéka az ún. sztereografikus projekció által!



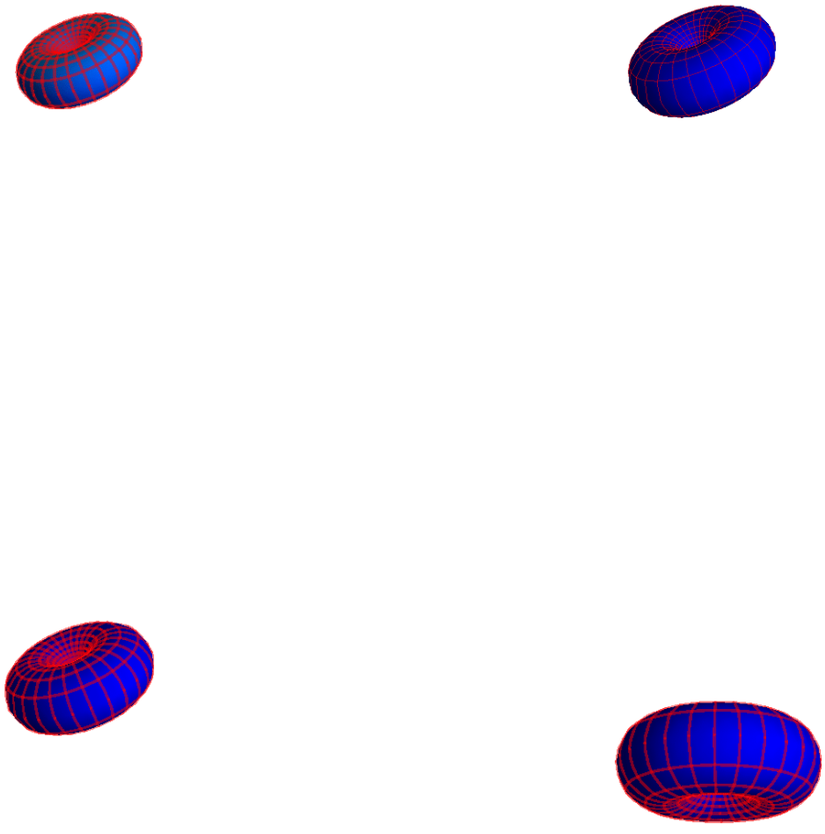
A gömbfelületet egy pontjából (nevezzük ezt északi sarknak) vetítjük az átellenes ponthoz illesztett érintősíkra. Képzeljük a gömböt egy mintás lámpabúrának az északi sarkpontban elhelyezett pontszerű fényforrással! A gömb árnyéka beteríti az egész síkot, és a mintázat eltorzul, az északi sarkhoz közeli minták árnyéka hatalmasra nő. Sőt, ha egy vonal áthalad magán a vetítési ponton, az árnyéka a síkon végtelenné nyúlik. Például az északi és déli sarkon áthaladó hosszúsági kör képe a síkon egyenes lesz. Magát a vetítési pontot a síkon nem látjuk, annak nincs árnyéka, a síkon a végtelennek felel meg. Az egész jelenséget fordítva is szemlélhetjük: a síkot egyetlen végtelen távoli pont gömbbé zárja, mint a boltívet a tetején az ékkő. Ugyanez működik a körvonal és egyenes viszonylatában is: a kört kivetíthetjük egy pontból az egyenesre, vagy fordítva, a kör az egyenes összezárása egyetlen végtelenben.

És ugyanez működik a négydimenziós térben is: az ottani gömböt, az S^3 háromdimenziós gömbfelületet egy háromdimenziós térre vetíthetjük. Ennek eredményét látjuk a térbeli Hopf-fibrálás formájában, a négydimenziós térbeli gömbi Hopf-körök elnyúlt árnyékait. Próbáljunk meg ebből a mintából visszakövetkeztetni az árnyékolóra! Az egyre nagyobb méretű körök valójában nem nagyobbak, csak közelebb vannak a fényforráshoz, a háromdimenziós gömbön kijelölt északi sarkhoz. A kiinduláskor választott egyenesünk a gömbön ugyanolyan kör, mint a többi, csak átmegy az északi sarkon, ezért nyúlik az árnyéka végtelenné. Sőt! A térben egy konkrét tóruszfelület belseje egy úgynevezett tömör tórusz, azaz egy tóruszfelülettel körbezárt véges világ, kiút nélküli körbefutó alagút. A tóruszon kívüli térrész egészen másképpen néz ki, az egy végtelen tér, csak hiányzik belőle egy tórusz alakú darab. De a háromdimenziós gömbfelületben ez a külvilág is tömör tórusz, egy zárt cső! Csak az árnyéka nyúlik végtelenné a vetítés miatt. Miképpen a kiindulási körünk a tórusz belsejében halad, a külvilággá kivetülő tömör tórusz közepén fut az a kör, aminek az árnyéka a térben a kiindulási egyenes. A két tömör tórusz a közös tóruszfelületük mentén összeragasztva, mint két egymás köré dagadt, egymást teljesen körülölelő láncszem kitöltik a három dimenziós gömbfelületet. Ez a tökéletes ölelés.

A tömör tórusz végtelenné nyúlását két lépésben érthetjük meg, mivel magát a négydimenziós jelenséget ábrázolni nem tudjuk.

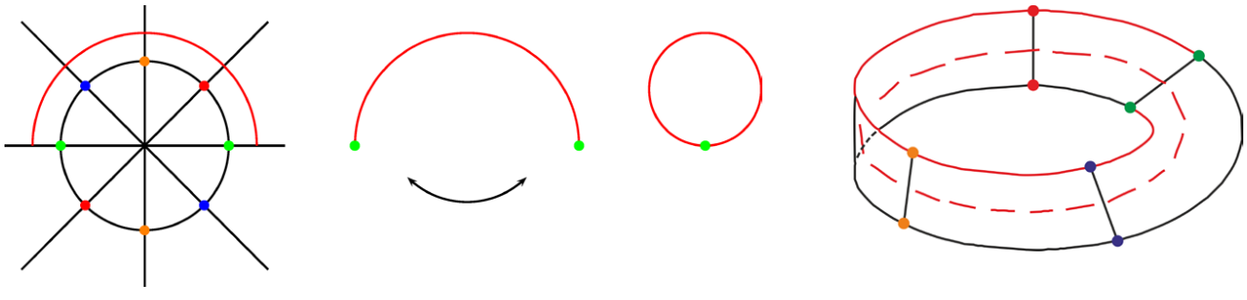
1. Az animación láthatjuk a jelenség eggyel kisebb dimenziós változatát, amin egy négyzet fordul át a külvilágba.

2. A következő animáción (készítette: Márkus Benjámin) a tóruszfelület fordul ki a végtelenen keresztül. A kisebb dimenziós változathoz hasonlóan Itt is annyi történik, hogy a négydimenziós térbeli gömbfelület forog, és amikor éppen átfordul a tórusz a vetítési ponton, akkor nyúlik az árnyéka végtelenné. Csakhogy itt magát a forgó gömböt nem látjuk, csak a térbeli árnyékát.



4. Körök a gömbben

A magas dimenziók után nézzük meg most a Hopf-fibrálás „bébi verzióját”. Vegyünk a síkon egy kört és a középpontján átmenő egyeneseket! Mindegyik egyenesnek két közös pontja van a körvonallal, két átellenes pont a körön. Talán kicsinyesen hangzik, de ez is egy fibrálás: minden fibrum két pontból áll, és a totális tér egy körvonal. És mi lehet a bázis, aminek a pontjaihoz tartoznak a „kétpontok”? Két pontot 180 fokkal elforgatva ismét ugyanezt a két pontot kapjuk, csak felcserélődnek. A bázis úgy állítható elő, hogy a 180 foknak megfelelő félkör két szélét összeragasztjuk. A bázis tehát egy kör. A fibrumot is lehet másképpen nevezni, ha figyelembe vesszük, hogy egy egyenesen egy adott ponttól egyenlő távolságra éppen két pont helyezkedik el. A gömbök meghatározása alapján tehát két pont az éppen a 0 dimenziós gömbfelület, ez tehát a fibrum. Íme hát a Hopf-fibrálás kistesója: a körvonal előáll, mint körvonalnyi sok „kétpont”, azaz nulla dimenziós gömbfelület.



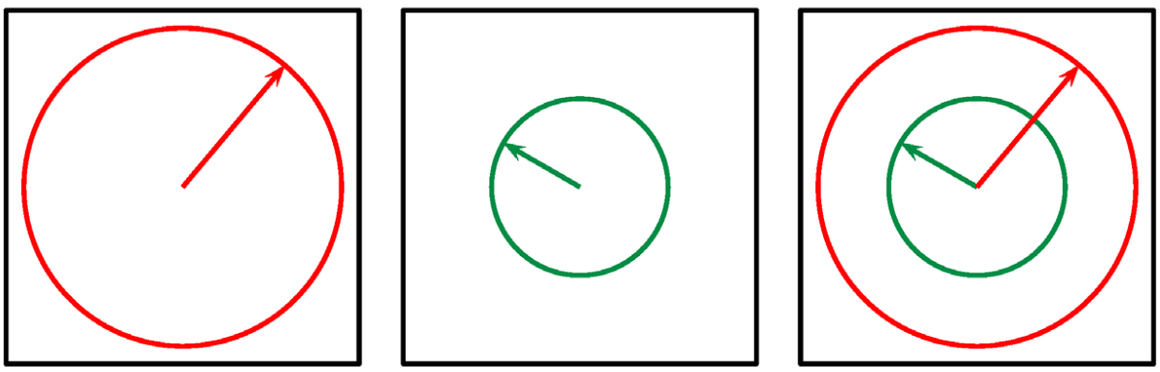
$$\begin{tikzcd} S^0 \arrow[r] & S^1 \arrow[d] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

E nyaláb csavarodása a két pont felcserélődésében mutatkozik meg. Ezen a nyomon elindulva ráismerhetünk a nyaláb szemléletesebb alakjára. A totális tér a Möbius-szalag egyetlen peremköre, ami duplán kerüli meg a szalagot. A fibrumok a Möbius-szalag fibrumszakaszainak határpontjai, a báziskör pedig megfelel a Möbius-szalagot egyszer megkerülő középvonalnak. Ez a körvonal dupla fedése.

Az igazi Hopf-fibrálás pedig ugyanúgy származtatható, mint a kistestvére, csak valós számok helyett komplex számokkal kell csinálni: a Hopf-körök a komplex „síkon” a gömbnek és az origón átmenő komplex „egyeneseknek” a közös körei. A következőkben ezt nézzük meg, anélkül, hogy komplex számokról beszélnénk. Csak körülírjuk őket, szó szerint.

A négydimenziós tér pontjait 4 koordinátával adhatjuk meg. Magát a négydimenziós térbeli pontot ábrázolni nem tudjuk, bár lehetne próbálkozni például színezéssel, az utolsó koordináta az ábrázolt pont színét jelentené valamilyen színskálán. De ennél praktikusabb számunkra, ha két síkbeli pontként, illetve vektorként gondolunk rájuk. Tehát az $(a;b;c;d)$ pontot az $(a;b)$, illetve $(c;d)$ síkbeli pontokkal jeleníthetjük meg, és praktikus mindkét ponthoz berajzolni az origóból egy mutatót is. A két ábrát rajzolhatjuk egymás mellé, vagy akár egy síkon is ábrázolhatjuk a kettőt, ők egy óra két mutatója. A négydimenziós tér pontjait ily módon két mutatóval tudjuk megjeleníteni, amik tudnak körbe forogni és a hosszúságuk is változhat. A négydimenziós térben az ab sík és a cd sík egymásra merőleges síkok, és egyetlen közös pontjuk az origó. Úgy helyezkedik el egymáshoz képest a két sík, mint háromdimenziós térben egy sík és egy rá merőleges egyenes.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$



Mit jelent az, hogy a négydimenziós térbeli háromdimenziós gömbön vagyunk, praktikusan az origó körüli 1 sugarú gömbfelületen? Az $(a;b;c;d)$ pont távolsága az origótól 1, azaz $a^2+b^2+c^2+d^2=1$ a Pitagorasz-tétel szerint, ami rendületlenül működik 4 dimenzióban is. a^2+b^2 éppen az első mutató hosszúságának a négyzete, c^2+d^2 a másodiké. Tehát mindkét mutató hossza 0 és 1 között változhat, és ha az egyiket hosszabbra vesszük, a másik megrövidül éppen annyira, hogy a hosszaik négyzeteinek összege mindig 1 legyen.

Előfordulhat, hogy a második mutató hosszúsága nullává válik. Ekkor az első mutató hossza 1, befuthatja az egységkört, míg a másik mutató az origóban csücsül. És ugyanez fordítva: a második mutató az egységkörön mozoghat, míg az első az origóban kinullázódva pihen. Így kapunk két alapkört S^3-ban, ezek a gömbnek az ab síkon, illetve a cd síkon fekvő körei. Ezek a Hopf-körök felelnek meg vetítés után a kiindulási körnek és a kijelölt egyenesnek a háromdimenziós térben. (A sztereografikus projekciót jellemzően az $(1;0;0;0)$ vagy a $(0;0;0;1)$ pontból szokás indítani, az első esetben az ab, második esetben a cd sík egységkörének az árnyéka nyúlik egyenessé.)

A két alapkört már megtaláltuk, most nézzük, mi van akkor, ha egyik mutató hossza sem 0! Ha az egyik mutató hosszát rögzítjük, az már meghatározza a másikét is. Így mindkét mutató a saját hosszúságának megfelelő sugarú körön tud mozogni egymástól függetlenül. Tehát a két mutató forgatása által bejárható $(a;b;c;d)$ pontok körvonalnyi sok körvonalat alkotnak, kétféleképpen is. Vagyis egy tóruszfelületet.

Megtaláltuk hát a háromdimenziós térbeli ábrán egyre dagadó tóruszok eredetét a gömbben: ezek a rögzített hosszúságú első (és ez által meghatározott hosszúságú második) mutató által elkódolt pontok. Ahogy az első mutató hosszát növeljük, ez által a második mutató hossza csökken, így kapjuk a különböző tóruszokat. Ha az első mutató hossza nullává válik, a tórusz egyetlen körvonallá zsugorodik, míg a másik mutató nullává rövidülése a másik alapkört szolgáltatja. A tóruszok az egyik alapkörből indulnak ki és rászűkülnek a másik alapkörre, amint azt a háromdimenziós térbeli árnyékaikon is láttuk. Olyasmi ez, mint ahogy a kétdimenziós gömbfelület szélességi körei a pólusokban egyetlen ponttá zsugorodnak.

Megtaláltuk a két alapkört és a tóruszokat, keressük meg a többi kört, a tóruszokon ferdén futó köröket! Ha a két mutató egy rögzített állásából (azaz egy rögzített $(a;b;c;d)$ pontból) kiindulva az egyik mutatót körbeforgatjuk, úgy épp a tórusz meridiánját rajzoljuk ki, a másik mutató körbeforgatásával pedig a longitúdót. Hiszen a körvonalnyi sok körvonalként összeálló tórusz egy-egy alkotó körvonalán megyünk végig. (A meridián és a longitúdó a háromdimenziós térbeli tóruszfelületen különböznek egymástól, itt a négydimenziós térbeli gömbben azonban tökéletesen szimmetrikus a szerepük, csak hasraütésszerűen nevezem az elsőt meridiánnak, a másodikat longitúdónak.) Hopf-kört úgy kapunk, ha a meridiánon és a longitúdón is körbemegyünk egyszer, azaz ha mindkét mutatót egyszerre forgatjuk.

Összefoglalva, ha a két mutatót együtt forgatjuk, tehát az általuk bezárt szög nem változik, úgy egy Hopf-kört kapunk. Ha a két mutató egymástól függetlenül foroghat, az egy tórusz. Ha a hosszúságaikat is változtathatjuk úgy, hogy a hosszaik négyzetének összege mindig 1 maradjon, ez a háromdimenziós gömbfelület. Ha pedig bárhogy változtathatjuk mindkét mutató hosszát is, szögét is, a teljes négydimenziós teret kapjuk.

5. Qubit mint Hopf-fibrálás

A klasszikus digitális információ alapegysége a bit, aminek értéke lehet 0 vagy 1. Fizikailag ezt egy kétállapotú rendszer valósítja meg, praktikusan egy áramkörben átfolyik az áram (1) vagy sem (0). A kvantuminformatikában a bit megfelelője a qubit, egy kétállású kvantumrendszer. Ilyen például az elektron spinje, ami állhat egy adott irányban felfelé vagy lefelé. Hogy mi is az a spin, ezzel kapcsolatban egy mémet idéznék: „Képzelj el egy golyót, ami pörög. Csak ez nem golyó és nem pörög.” Hogy akkor mégis mi és mit csinál, arra a legőszintébb válasz a Hopf-fibrálás.

Egy kétállapotú kvantumrendszernek valójában végtelen sok lehetséges állapota van, amíg meg nem mérjük, és csak a mérés után ugrik be két állapot valamelyikébe. Híres hasonlat erre Schrödinger macskája[1], ami egy gondolatkísérlet a kvantumjelenség felnagyítására. Nem tudni, hogy a macska él-e vagy meghalt, amíg fel nem nyitjuk a dobozt. A rendszer állapotát első megközelítésben egy valószínűség írja le, pl. 30% annak valószínűsége, hogy a macska még él (az elektron spinje felfelé áll), és 70% annak, hogy meghalt (a spin lefelé áll). Ha megmérjük, rákérdezünk az állapotára, akkor ugrik csak be a 0 vagy 1 állapotok egyikébe.

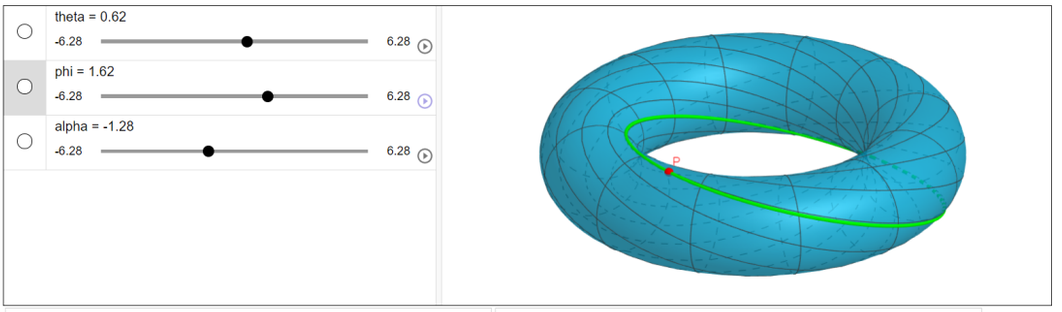
De ez még mindig csak a jéghegy csúcsa! Egy ilyen rendszert teljes egészében két mutatóval lehet leírni, vagyis egy állapot a négydimenziós tér egy $(a;b;c;d)$ pontjával kódolható (ez felel meg a rendszer ún. hullámfüggvényének). A két mérés utáni állapot annak felel meg, amikor egyik vagy másik mutató hosszúsága nullává válik. A mutatók állásaiból kiolvashatjuk a valószínűségeket. A 0 állapot az, amikor a második mutató nullázódik ki, ennek valószínűsége az első mutató hosszának a négyzete, a^2+b^2. Az 1 állapotban az első mutató nullázódik ki, ennek valószínűsége a második mutató hosszának a négyzete, c^2+d^2. De mivel csak ez a két lehetőség van, a két valószínűség összege 1 kell legyen, tehát $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Ez azt jelenti, hogy a rendszer állapotát leíró $(a;b;c;d)$ pontok éppen a háromdimenziós gömbfelület pontjai. Ha az egyik (és így mindkét) mutató hosszát rögzítjük, akkor az egyes állapotok valószínűségei már meghatározottak. A tóruszaink tehát az azonos valószínűségeket elkódoló állapotokat gyűjtik össze.

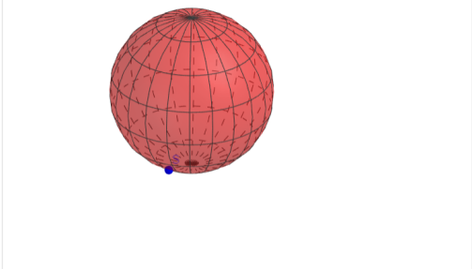
Azonban a globális fázis fizikailag nem releváns: ha a két mutatót együtt elforgatjuk, az állapotból kinyerhető információ nem változik. Így a fizikailag releváns információt a Hopf-körök hordozzák (ezeket írják le az állapotokhoz tartozó ún. sűrűségmátrixok). A Hopf-körök is elkódolják a valószínűségeket (hiszen az mutatók hosszúságát nem változtatjuk, egy tóruszon belül mozgunk), de ezen felül tartalmazzák az ún. relatív fázist is, azaz a két mutató által bezárt szöget (hiszen ez nem változik, ha együtt forgatjuk őket). A relatív fázis már fizikailag releváns, pl. más tengely irányú spin mérésénél nagyon is számít.

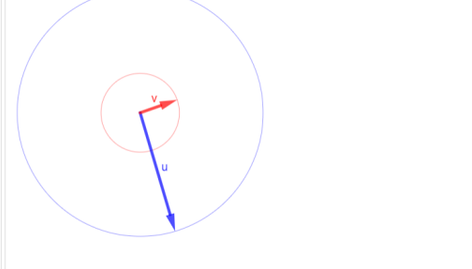
Ezért az állapotok, mint Hopf-körök a kétdimenziós gömbfelület pontjainak felelnek meg, hiszen ez a Hopf-fibrálás bázistere. Ebben a kontextusban az S^2-et Bloch-gömbnek szokták nevezni.

Amíg nem nézünk bele a dobozba, a macska állapota (az elektron spinje, fény polarizáltsága) egy gömbfelületen mozog, és minden állapot megfelel egy négydimenziós térbeli Hopf-körnek, ami fizikai realizálódás nélkül billeg a térben Schrödinger állapotegyenlete szerint. A mérés során a rendszer állapota „összeomlik”, realizálódik, beugrik az északi és a déli pólusnak megfelelő két alapkör egyikébe. Az elektron spinje esetén erre utal a szóhasználat: „felfelé” (azaz az északi pólus felé) vagy „lefelé” (a déli sark felé) áll.

Így függ össze tehát a koncerteken vetített vizuál, a Hopf-fibrálás, és a kvantumszámítógépek alapegységét képező qubit állapottere. Ez a mondat egy Monty Python filmben is elhangozhatott volna, miután tisztázták, hogyan lehet birkavesével földrengést előre jelezni, azonban ez most számunkra a valóság: a Hopf-fibrálás a kvantumbit matematikai modellje. A rövidített cikkben egy GeoGebra animáción lehet állítgatni egy qubit elméleti állapotait, a leírás pedig csak erre a fizikai alkalmazásra fókuszál.







Köszönöm a fizikai rész megértéséhez nyújtott segítséget a BME Topológikus Szigetelők kutatócsoportjának: Palyi András, Asbóth János, Vrana Péter, Oroszlány László, Frank György fizikusoknak és Varjas Dánielnek a delfti egyetemről.

Pintér Gergő

ELTE Matematikai Intézet, Analízis Tanszék

[1] A macska hasonlat többjelentésű, lehet vele illusztrálni a kvantumösszefonódást is. E cikkben szándékosan csak a legegyszerűbb értelmezésével foglalkozom.

alkalmazott fizika topológia geometria

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Simon L. Péter 2020. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Matematika a járványterjedés modellezésében

Mi a számsor következő tagja: 11, 8, 15, 12, 18, 28, 36, 20, 39? Bizonyára sokan emlékszünk matematikaóráinkon hasonló kérdésekre, amelyek egyik pedagógiai célja a számolási készség fejlesztése, de még hangsúlyosabban a szabályok, összefüggések felismerésére nevelés. A matematikaórákon a számsorozatokat a tanárunk állította össze oktatási céllal, ezért soha nem gondoltuk, hogy gyakorlati haszna lehet ilyen sorozatok szabályán gondolkozni. A fenti sorozat a jelenlegi járvány hazai fertőzötteinek számát tartalmazza az első néhány napon. Így mindjárt komolyabb tartalmat nyer a szabályok, összefüggések felismerésének készsége.

Íme néhány más sorozat:

123, 172, 472, 970, 1424, 1535, az okostelefon-eladások millió darabban 2007-től két évenként,

623, 907, 1608, 3018, 4448, 6134, Földünk lakossága millió főben 1700-tól száz évenként,

650, 150, 90, 54, egy antibiotikum mennyisége a vérben milligrammban a gyógyszer bevétele után óránként,

végül 8550, 8640, 8740, 8730, 8750, 8770, 8780, az OTP részvény árfolyama forintban 2017 március 16-án óránként.

Bármelyik sorozat esetében sokan sokat adnának azért, hogy a sorozat következő néhány tagját előre meg tudják mondani. Iskolai emlékeink alapján azt gondoljuk, hogy pusztán a sorozat számainak hosszas „nézegetésével” fel lehet ismerni valami „misztikus” szabályt, amivel a további tagok kiszámolhatók. A matematika azonban ennél összetettebb módszereket dolgozott ki az elmúlt néhány száz év során. Most a járvány foglalkoztat mindnyájunkat, így az első sorozat kapcsán mutatunk be néhány gondolatot arról, hogy a modern matematikai gondolkozás hogyan közelít meg ilyen kérdéseket.

Matematikai modell

Európában a XVII. századra érett meg az áttörés a fizikai folyamatok matematikai modellezése terén, biztos sokan hallottunk Newton almájáról, vagy Galilei kísérletéről a pisai ferde toronyban. Ekkor fedezték fel (egyesek szerint inkább kitalálták) a differenciál- és integrálszámítást (összefoglaló néven kalkulust) elsősorban a fizikai folyamatok leírását lehetővé tevő differenciálegyenletek bevezetése céljából. Ezek olyan egyenletek, amelyekben az ismeretlen nem egy szám, hanem egy függvény, például a toronyból leejtett tárgy helye az idő függvényében, vagy a Föld pályája a Nap körül, hogy az előbbi két tudós kutatásaihoz kapcsolódjunk. A matematika érettségi anyaga a legtöbbek számára a XVII. századi matematika előtt véget ér, néhányan mégis találkoznak a kalkulus elemeivel, ami a természettudományi, mérnöki, informatikai, gazdasági egyetemi képzések bevezető matematika anyagának alapja. A bevezetésben említett számsorok megfejtése differenciálegyenleteken alapszik. Egy híres mondás szerint a matematika megértéséhez „nincs királyi út”.[1] Az egymásra épülő fogalmak és módszerek megismerése fokozatosan történik az iskolában tanult matematikai készségekből kiindulva, a különböző matematikai módszerek (pl. a fent említett kalkulus) használatának elsajátításán keresztül az elvont fogalmak kiépítéséig. Ezeken a lépcsőkön egyre kevesebb embernek van kapacitása, ideje, energiája végigmenni, és egyre kevesebben engedhetik maguknak, hogy a matematika szépségének és mélységének hódoljanak, így a matematikus mire doktorál, egy elég szűk családban találja magát. Amikor a szűk matematikus családon kívül valaki érdeklődik a fenti számsor következő néhány tagja iránt, akkor nehéz dolga van a matematikusnak még akkor is, ha vannak eszközei a számok előrejelzésére. Most mégis megpróbálkozunk néhány szerény lépést tenni ezen az úton, bízva az olvasó kitartásában.

A járványterjedés matematikai modellezése

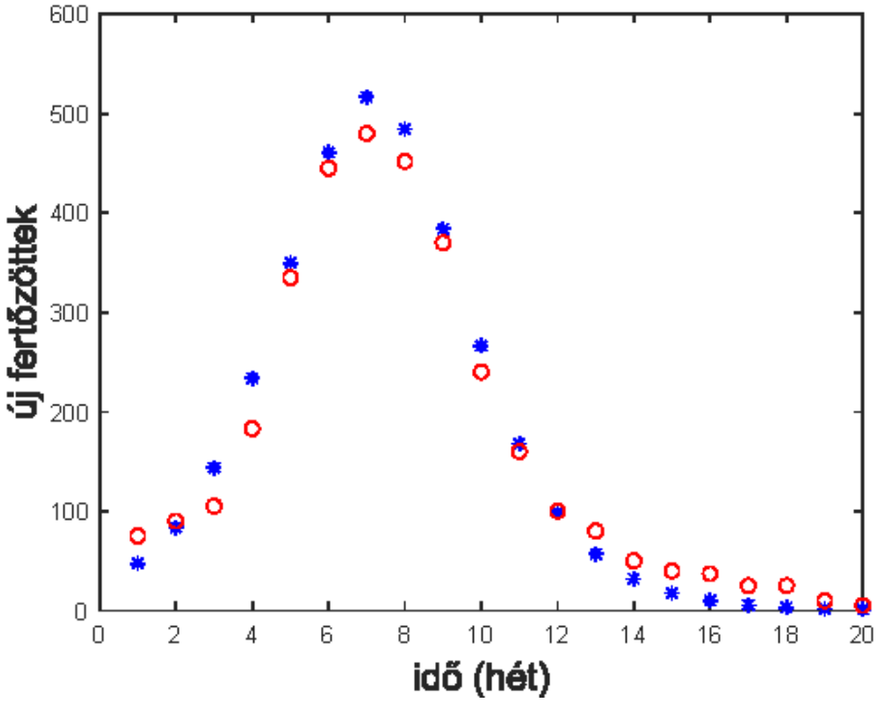
A már említett XVII. századi áttörés óta a fenti típusú számsorok megfejtésének általános kiindulási pontja egy modell létrehozása, ami valójában egy matematikai struktúra, nem a valóság pontos mása. Nézzük, hogy a járványterjedés modellezése milyen alapgondolatból indul el. A XX. század elején kidolgozott modell az egyedeket néhány csoportra osztja a fertőzés állapota szerint. A legegyszerűbb modell három csoportot különböztet meg: fogékonyak (jele S az angol susceptible szóból), fertőzők (I, infectious) és gyógyultak (R, recovered vagy removed). A járvány terjedése előtt az összes egyed fogékony, és a járvány néhány fertőző egyed megjelenésével kezdődik. A kérdés, hogy egy későbbi időpontban mennyi a fertőzöttek száma. Ekkor kerül a képbe a differenciálegyenlet, ami a folyamatot modellezi, azaz összefüggést ad az S, I és R megváltozása és ezek aktuális értéke között. Például egy egyszerű modellfeltevés, hogy az R növekedése arányos az I mennyiségével. Az adatok mutatják meg, hogy ez a feltevés helytálló-e, illetve azokból határozható meg, hogy mekkora az arányossági tényező. Az elszánt Olvasó kedvéért bemutatjuk a három változóra vonatkozó legegyszerűbb differenciálegyenleteket, azaz a legegyszerűbb matematikai modellt.

$$\dot{S}(t) = -\beta \frac{I(t)}{N}$$

$$\dot{I}(t) = \beta \frac{I(t)}{N} - \gamma I(t)$$

$$\dot{R}(t) = \gamma I(t)$$

Ebben a pont jelenti az idő szerinti deriválást, N a populáció egyedszáma, β az úgynevezett fertőzési ráta, γ pedig a gyógyulási ráta. Az egyenlet kifejezi, hogy az S állapotból az egyedek az I-be, az I-ből pedig az R-be kerülhetnek az egyenletekben szereplő rátákkal. Sajnos az egyenletek megoldásának elemzése a „nincs királyi út" kategóriába esik, így ebben az írásban elrejtve marad az olvasó előtt. Az eredményt viszont meg tudjuk mutatni az 1. ábrán.



1. ábra. A 2016-os hazai influenzajárvány új fertőzötteinek száma hetente (piros körök), valamint a modellből kapott értékek (kék csillagok).

Ezen a 2016-os hazai influenzajárvány adatai látszanak (piros körökkel), valamint a modellből kapott értékek (kék csillagok). A vízszintes tengelyen az idő látszik hetekben a járvány januári indulásától számolva, a függőleges tengelyen pedig a hetente jelentett új fertőzöttek száma 100 ezer főre vetítve (tehát a teljes hazai népességben ez a szám százszor ekkora). A modell valamennyire jó közelítést ad a járvány folyamatáról, de láthatjuk, hogy nem tud minden adatot pontosan visszaadni. Elsőként figyeljük meg, hogy a fertőzöttek száma emelkedik egy darabig, majd csökkenni kezd és nagyjából 20 hét alatt a járvány véget ért. Az R értékét is ábrázolva láthatjuk, hogy hányan estek át a betegségen a járvány teljes lefolyása során. Erre itt kb. 3400-at kapunk, az említett 100 ezer főre vetítve, azaz nagyjából a lakosság 3,4 százaléka esett át abban az évben az influenzán (legalábbis a hivatalos orvosi bejelentések alapján).

Mire következtethetünk a matematikai modell segítségével?

A járvány terjedése során három fontos fogalmat szoktak emlegetni, melyeket a matematikai modellek segítségével lehet precízen értelmezni:

- alap reprodukciós szám R_0,
- a fertőzöttek maximális száma $I_{\max}$,
- a fertőzésen átesettek száma R_∞.

Nézzük mit jelentenek ezek, és a modellből hogyan határozhatók meg. Az alap reprodukciós szám, R_0, azt mutatja meg, hogy a járvány kezdetén egy beteg átlagosan hány egészséges egyedet fertőz meg. A differenciálegyenletekből az analízis egyszerű eszközeivel levezethető, hogy

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Az 1. ábrán bemutatott görbén látható, hogy az I függvénynek egy maximuma van. Ez nemcsak a konkrét példában van így, hanem általánosan is igazolható. A függvény maximum értékét jelöli $I_{\max}$. Ez mutatja, hogy az egészségügyi ellátórendszert érő legnagyobb terhelés mekkora, azaz legfeljebb hány ember lesz a járvány folyamán egyszerre az I kategóriában. Szintén egyszerű számolás mutatja, hogy

$$I_{\max} = \frac{N}{R_0}(R_0 - 1 - \ln(R_0)).$$

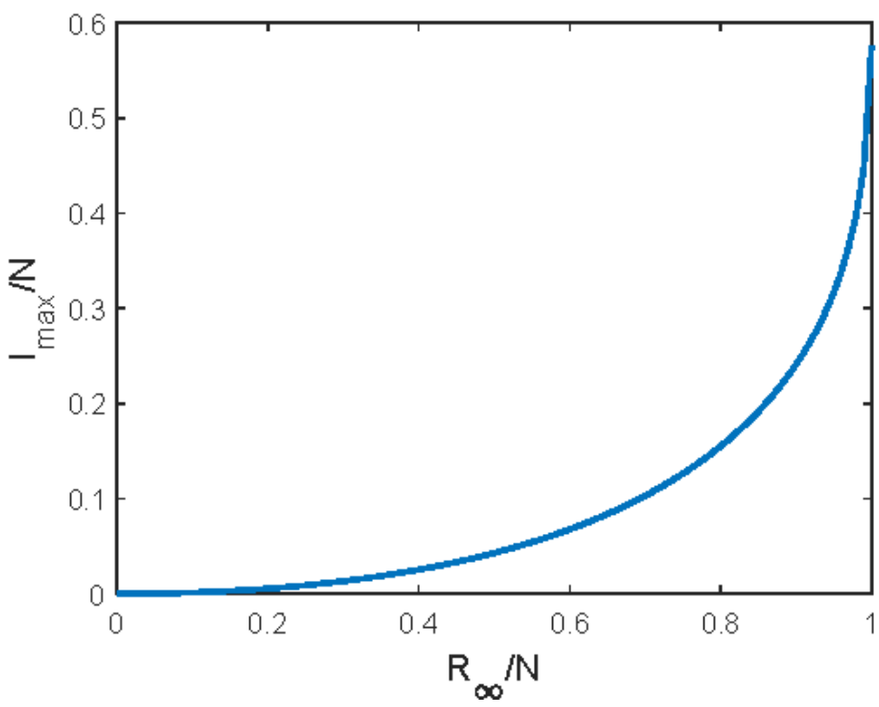
Végül a fertőzésen átesettek száma az R függvény értéke a járvány lefolyása végére (amikor I értéke visszatér nullára). Mivel a járvány lefolyásának idejét nem ismerjük, ennek precíz definíciója: az R függvény határértéke t tart végtelen esetén, amit R_∞ jelöl. Az előbbieknél kicsit bonyolultabb számolással levezethető, hogy az $x = \frac{R_\infty}{N}$

arány teljesíti az

$$1 - x = \mathrm{e}^{-R_0 x}$$

transzcendens egyenletet. Ennek numerikus megoldása egyszerű feladat, így az N, β és γ paraméterek ismeretében könnyen meg lehet mondani, hogy hányan fognak átesni összesen a fertőzésen.

E három fontos járványtani mennyiség összefüggése világos az egyenletekből. Az R_0 értéke meghatározza a másik kettőt. A járvány elleni védekezés fontos módja az egyedek elszigetelése (karantén), azaz a β és ezáltal az R_0 csökkentése. Láthatjuk, hogy ezzel csökken az $I_{\max}$, vagyis az egészségügyi ellátórendszer terhelése, viszont ezzel együtt az R_∞ is, azaz nem alakul ki a nyájimmunitás, a társadalom széles védettsége. A két mennyiség kapcsolatát mutatja a 2. ábra. A vízszintes tengelyen az $\frac{R_\infty}{N}$ arány, a függőlegesen pedig az $\frac{I_{\max}}{N}$ arány van feltüntetve. Ez mutatja például, hogy ha a nyájimmunitáshoz a társadalom 80 százalékának kell átesnie a fertőzésen (azaz $\frac{R_\infty}{N} = 0.8$), akkor a járvány legrosszabb időszakában a társadalom kb. 15 százaléka beteg (azaz $\frac{I_{\max}}{N} = 0.15$).



2. ábra. Az $\frac{R_\infty}{N}$ és $\frac{I_{\max}}{N}$ arányok kapcsolata a legegyszerűbb SIR matematikai modellben.

A modell általánosításai

A modell általánosítását a valósággal való összehasonlítás motiválja. Nézzük meg az 1. ábra alapján a modell pontatlanságából eredő következtetéseket. Azt láthatjuk, hogy az első hetekben a modell nagyobb fertőzöttséget jelez, mint az adatok. Másképp nézve, ha valaki ez első néhány hét adatai alapján határozná meg a modell paramétereit, akkor kisebb járványt jósolna. Ez arra sarkallja az epidemiológiai szakembereket, és a matematikusokat, hogy pontosabb modellt készítsenek. A pontosabb modell rendszerint több csoportra osztja a társadalmat, például korosztályokat hoz létre az S, I és R kategóriákon belül, vagy terület szerint is felbontja a teljes populációt kisebb részekre. (Lásd pl. ebben a számban Garay Barnabás és Molnár Zsófia cikkét.) Ezek a modellek már több egyenletből állnak (ezért tudnak pontosabb előrejelzést adni), viszont emiatt több paramétert is tartalmaznak, amelyeket az adatokból nem könnyű pontosan meghatározni. A legrészletesebb modell a társadalom minden egyes tagját külön kezeli, és valamilyen módon az emberek közötti kapcsolatokat is figyelembe veszi, ezért hálózati modellnek is nevezik, és a hálózattudomány modern eszköztárán alapszik. (A járványterjedés hálózatelméleti megközelítéséről szól a szerző nemrégiben megjelent könyve: [1]).

A jelenlegi járvány leírására is már számtalan modell született, és sokan sokféle módon próbálják előre jelezni a járvány lefolyását, valamint segíteni a döntéshozókat. A hazai stratégia a járványgörbe ún. ellaposítása, ami azt jelenti, hogy a fenti görbe maximuma ne érjen el olyan nagy értéket, ami túlterheli az egészségügyi ellátórendszert. A görbét a modellben szereplő paraméterek módosításával tudjuk befolyásolni, amint azt az előbb a legegyszerűbb modell esetében megvizsgáltuk és a 2. ábrán bemutattuk. Természetesen az összetett modellekben nem egyetlen paraméter szerepel (mint fent az R_0 volt), hiszen a fertőzési ráta különbözhet korosztályonként és területenként, de akár munkahelyenként is. A mostani kutatások tárgya éppen az, hogy ezek a modellek mennyire illeszkednek jól az adatokhoz, és a folyamat irányításában hogyan használhatók, milyen korlátozások bevezetését mutatják leghatékonyabbnak. Ezeken felül, ha az oltóanyag elkészül, akkor annak eldöntésében is segítenek, hogy a társadalom mely csoportjait milyen sorrendben célszerű beoltani, hogy minél hamarabb visszatérhessen az élet a megszokott kerékvágásba. A kérdések látszólag egyszerűek, azonban az egyre összetettebb modellek létrehozása és vizsgálata számos kutatónak jelent kihívást.

Zárógondolat

Végezetül visszatérve a bevezetésben mutatott számsorozatokhoz, mindegyikhez tartozik egy-egy matematikai modell, amely segít a folyamat megértésében, előrejelzésében és irányításában. Ezzel matematikusok ezreinek, akik 5 év egyetemi képzés során végigjárták a fent említett lépcsőket, munkát adva. Mai, technológiai társadalmunk működése így elképzelhetetlen az összetett matematikai modellek használata nélkül. (Érdekes írás ezzel kapcsolatban [2]).

Nem csoda tehát, hogy a matematika szakot végzett hallgatók annyira könnyen el tudnak helyezkedni kiváló munkahelyeken. Örömmel látjuk, hogy ennek híre van a pályaválasztó fiatalok között, idén több mint 10 százalékkal nőtt az ELTE matematika alapszakára első helyen jelentkezett hallgatók száma.

Irodalomjegyzék

[1] https://www.springer.com/gp/book/9783319508047

[2] http://fortune.com/2015/01/22/the-algorithmic-ceo/

Simon L. Péter

ELTE, Matematikai Intézet

Numerikus analízis és nagy hálózatok MTA-ELTE Kutatócsoport

Lábjegyzet

1

A legenda szerint I. Ptolemaiosz egyiptomi király megkérdezte Euklidészt, hogy nincs-e rövidebb és könnyebb módja a geometria megértésének annál, mint amit Euklidész az Elemek című művében leírt. Erre felelte Euklidész azt, hogy „A geometriához nem vezet királyi út”.

alkalmazott matematika járványtan

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Garay Barna, Molnár Zsófia 2020. JÚNIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Nemlineáris dinamikai modellek a biológiában: a kontaktusmátrixos SIR-modell

Molnár Zsófia alábbi írása – minimális változtatásokkal – a félévközi nagy, számítógépes házi feladat egy igazán szép megoldása. A feladat a SIR modell differenciálegyenlet-rendszerének számítógépes megoldása volt, az előre megadott A) $C_{\text{normális}}$ és a hallgató által megállapított és megindokolt B) $C_{\text{korlátozó}}$ kontaktusmátrix mellett, ez utóbbi esetben az egészségügyi ellátórendszer terhelhetőségét is figyelembe véve.

A *Nemlineáris Dinamikai Modellek a Biológiában* minden tavaszi félévben szabadon választható tantárgy a Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információtechnológia Kar bionikus mérnökképzésének BSc hallgatói részére. Idén a tárgyat 14 hallgató választotta és mindenki ugyanazt kapta házi feladatul. A feladat A) részét csak egyféleképpen lehetett kezelni, de a B) rész – egy járvány kontaktusmátrixának korlátozása, hat szabad paraméterrel – tág teret engedett a diákok fantáziája és számítógépes kísérletező kedve számára. A feladat megfogalmazásában tudatosan kerültem a koronavírus és a Magyarország szavakat. Ezáltal is félreérthetetlenné akartam tenni, hogy semmilyen járvány lefutása sem írható le azzal a játékmodellel (toy model), amelynek vizsgálatát a hallgatóktól kértem. A feladat összes konkrét paraméterértéke az én fejemben született meg. Közben persze csak sandítottam a valóságra, de Molnár Zsófia volt az, aki a π megbetegedési tényező általam eredetileg $\pi = 0{,}075$-nek javasolt értékének módosítását kérte tőlem. A közkeletű fertőzési ráta kifejezést is szándékosan nem használtam, már csak azért sem, mert a π paraméter a C kontaktusmátrix elemeivel „összekuszálva jut be” a SIR modell fertőzhető–fertőzött találkozásainak dinamikájába.

Garay Barna (PPKE ITK) a NemlinDinModBiol tantárgy előadója

A járványterjedés SIR-modellje és a kontaktusmátrix korlátozása

A SIR-modell egyike a legegyszerűbb epidemiológiai modelleknek, és sok más modell alapjául szolgál. A modell három tényezőből épül fel: S a fertőzhetők száma (Suspected), I a fertőzöttek száma (Infected) és R a gyógyultak száma (Recovered). A modell segítségével meglehetősen jól előre jelezhető egy járvány terjedése. Az R változó együttesen tartalmazza a valóban gyógyultakat és az elhunytakat. A gyógyulás tartós gyógyulást, immunitást jelent a betegségre nézve. Bemutatom a SIR-modell három korosztályos, kontaktusmátrixos változatát és azt is, hogy a kontaktusmátrix elemeinek csökkentése valóban ellaposítja a járványt, így még a járvány csúcsa is az egészségügyi ellátó-rendszer terhelhetőségi korlátján belül marad.

A) feladatrész

A folytonos idejű korosztályos, kontaktmátrixos SIR modell alatt az alábbi $j = 1, 2, \ldots, K$ differenciálegyenletrendszert értjük (amely tehát $3K$ egyenletből áll):

$$\dot{S}_j(t) = -\pi S_j(t) \sum_{k=1}^{K} \frac{c_{j,k} I_k(t)}{N_k},$$

$$\dot{I}_j(t) = \pi S_j(t) \sum\nolimits_{k=1}^{K} \frac{c_{j,k} I_k(t)}{N_k} - \rho I_j(t),$$

$$\dot{R}_j(t) = \rho I_j(t).$$

Az alsó indexek a korosztályokat jelzik: a teljes populációt felbontottuk K korosztályra, ahol a $k = 1$ indexű jelenti a legfiatalabbat, a $k = K$ pedig a legidősebbet. Az N_k jelöli az egyedszámot a k-adik korosztályban. Feltesszük, hogy a korosztályok között nincsen átmenet (relatíve rövid idő alatt játszódik le), így az egyedszám konstansnak vehető: $S_j + I_j + R_j = N_j$.

A megbetegedési rátát π-vel, a gyógyulási rátát ρ-val jelöljük. Ezek függetlenek az érintett korosztálytól, mindenhol ugyanakkorák.

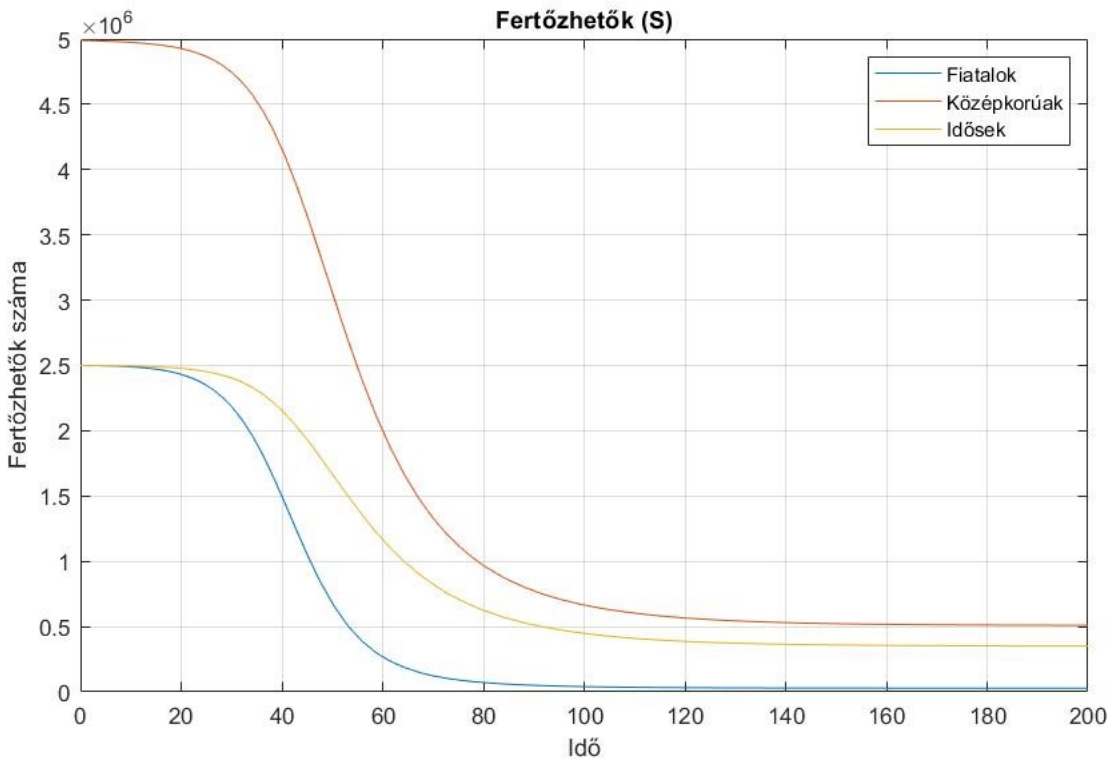
A C mátrixot nevezzük kontaktusmátrixnak, ennek k-adik sorának j-edik eleme azt jelenti, hogy a k-adik korosztályba tartozó egyednek egy nap alatt átlagosan hány kontaktusa van a j-edik korosztályba tartozó egyedekkel. Az A) feladatrészben $C = C_{\text{normál}}$ kontaktusmátrixszal számolunk, ez a betegség megjelenése előtti normális állapot teljes populációjának kontaktusaira vonatkozik.

A feladat során három korosztályt különböztetünk meg, fiatalokat, középkorúakat és időseket, akik egy ország lakosságának rendre negyedét, felét és negyedét teszik ki. A kontaktusmátrix (a betegség felbukkanása előtt):

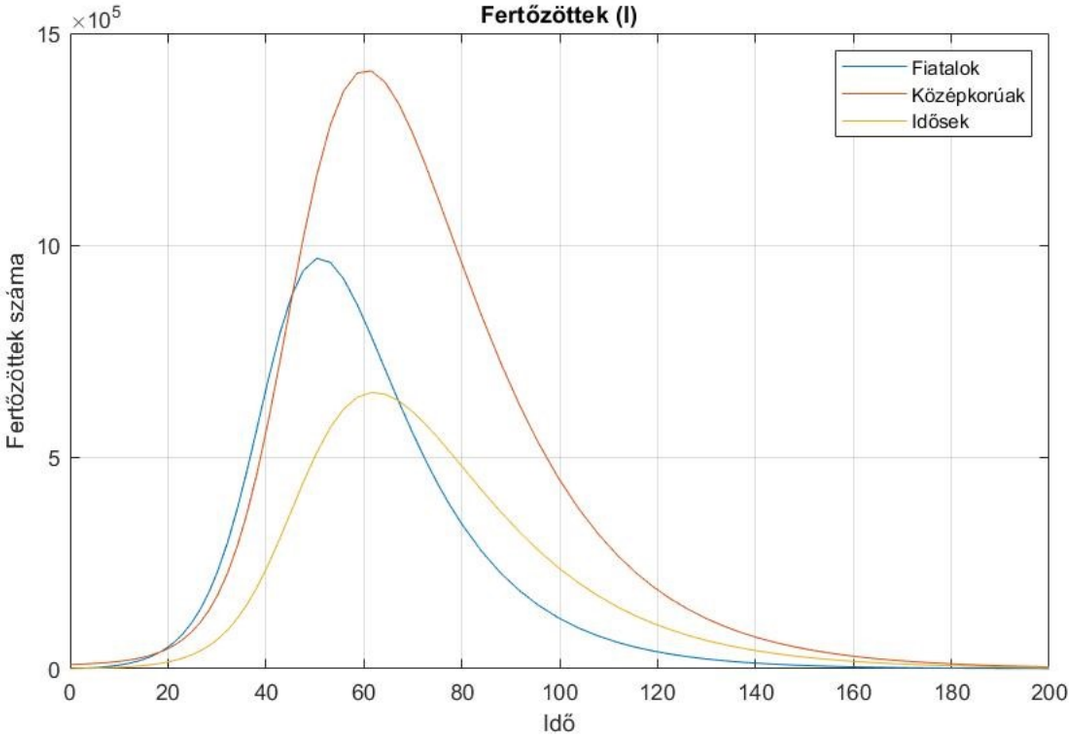
$$C = C_{\text{normális}} = \begin{pmatrix} 40 & 14 & 6 \\ 7 & 21 & 4 \\ 6 & 8 & 14 \end{pmatrix} \qquad (N_k c_{k,j} = N_j c_{j,k}, k, j = 1, 2, 3).$$

A kiindulási feltétel az, hogy a középkorú lakosság egy ezrelékében már jelen van a járvány, de másokban még nincs, és nem is volt. A két járványparaméter: $\pi = 0{,}0046875$ és $\rho = 0{,}06$.

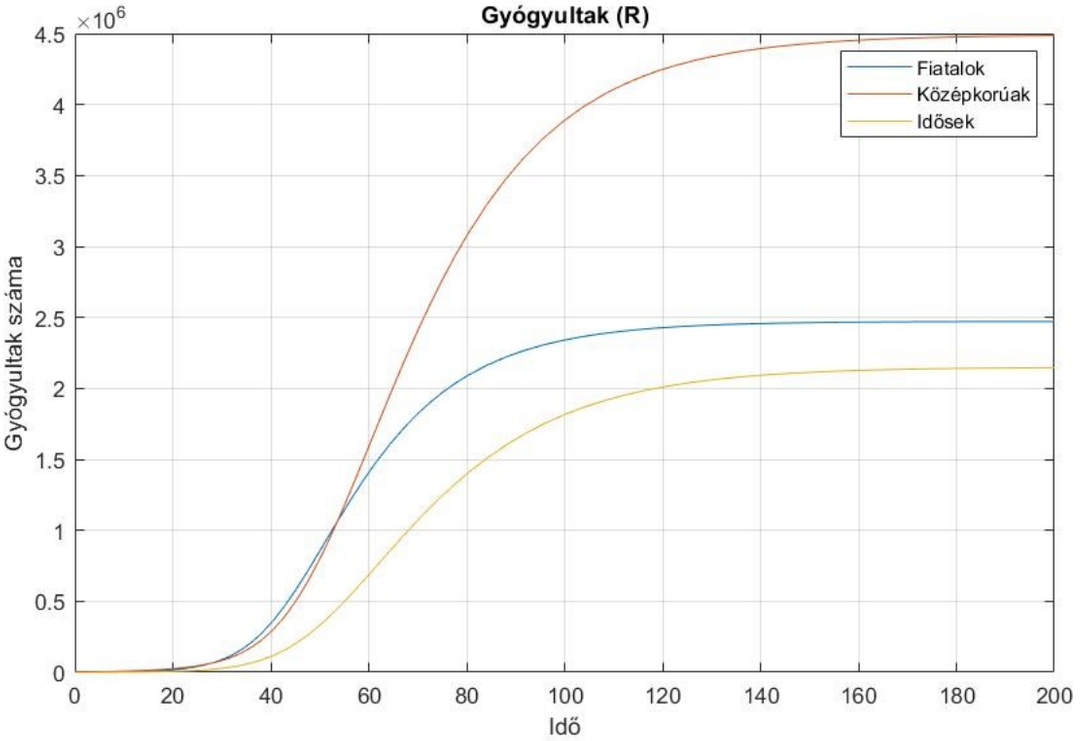
A differenciálegyenletek megoldását MatLab segítségével végeztem, ezen belül is az ode45 eljárással. Az ode45 nem nyílt forráskódú eljárás, a benne használt heurisztikák nem publikusak, annyi viszont biztos, hogy a megoldáshoz alapvetően negyedik és ötödik deriváltakat használ. Az ábrák megjelenítéséhez szintén MatLabot használtam. Az ábrákon szereplő időskála egysége fiktív, nem pedig nap vagy hét.



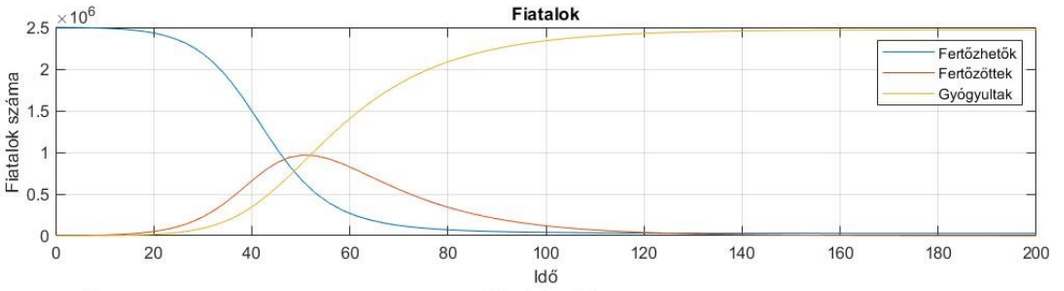
1. ábra. Az S csoportok változása.

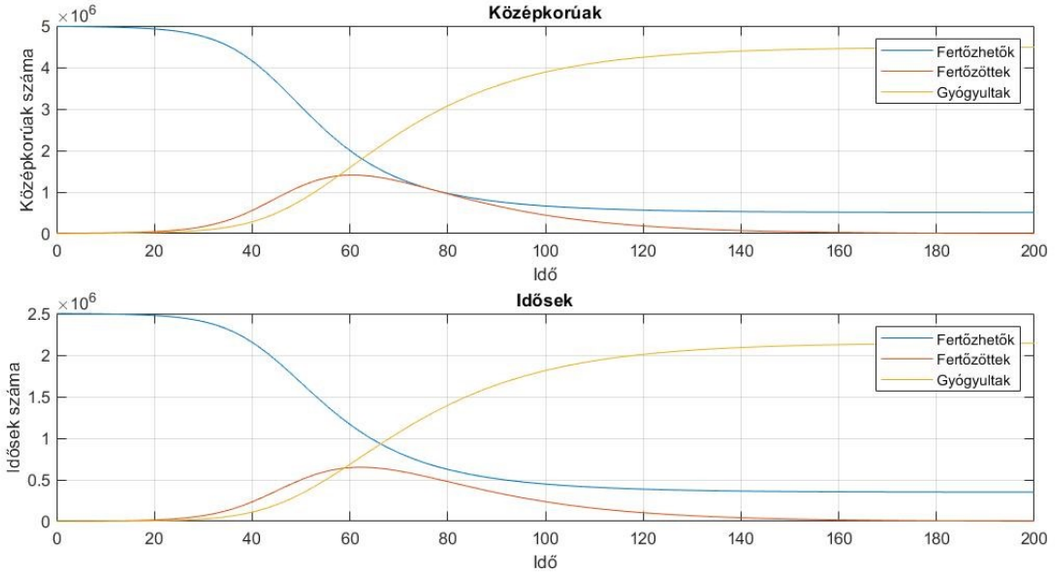


2. ábra. Az I csoportok változása.



3. ábra. Az R csoportok változása.





4. ábra. A járvány alakulása korosztályok szerint.

B) feladatrész

Ebben a feladatrészben bevezetünk korlátozásokat annak érdekében, hogy csökkentsük a járvány terjedésének sebességét, ezáltal ellaposítsuk a járványt. Bevezetünk egy olyan korlátozó kontaktusmátrixot $C = C_{\text{korlátozó}}$, amely elviselhetővé teheti a járványt. Ennek kritériuma a

$$t \to E(t) = 0{,}0001 I_1(t) + 0{,}001 I_2(t) + 0{,}05 I_3(t)$$

függvény maximumának egy adott korlát alá szorítása, ez a korlát az egészségügyi ellátórendszer teherbírása. Tehát akkor tekinthetjük elviselhetőnek a járványt, ha az elviselhetőség függvényének maximuma nem haladja meg az egészségügyi ellátórendszer kapacitását. 10 milliós lakossággal számoltam. És feltételeztem, hogy az egészségügyi ellátórendszer teherbírása 2000, ennyi férőhely, működőképes lélegeztetőgép stb. található egy országban, amelyet a járványban megbetegedett emberek számára különíthetnek el. Ehhez a küszöbhöz pedig ez egy megfelelő korlátozó mátrix, amivel elviselhetővé vált a járvány, és megfelel a kritériumoknak:

$$C = C_{\text{korlátozó}} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 2 \\ 3 & 15 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

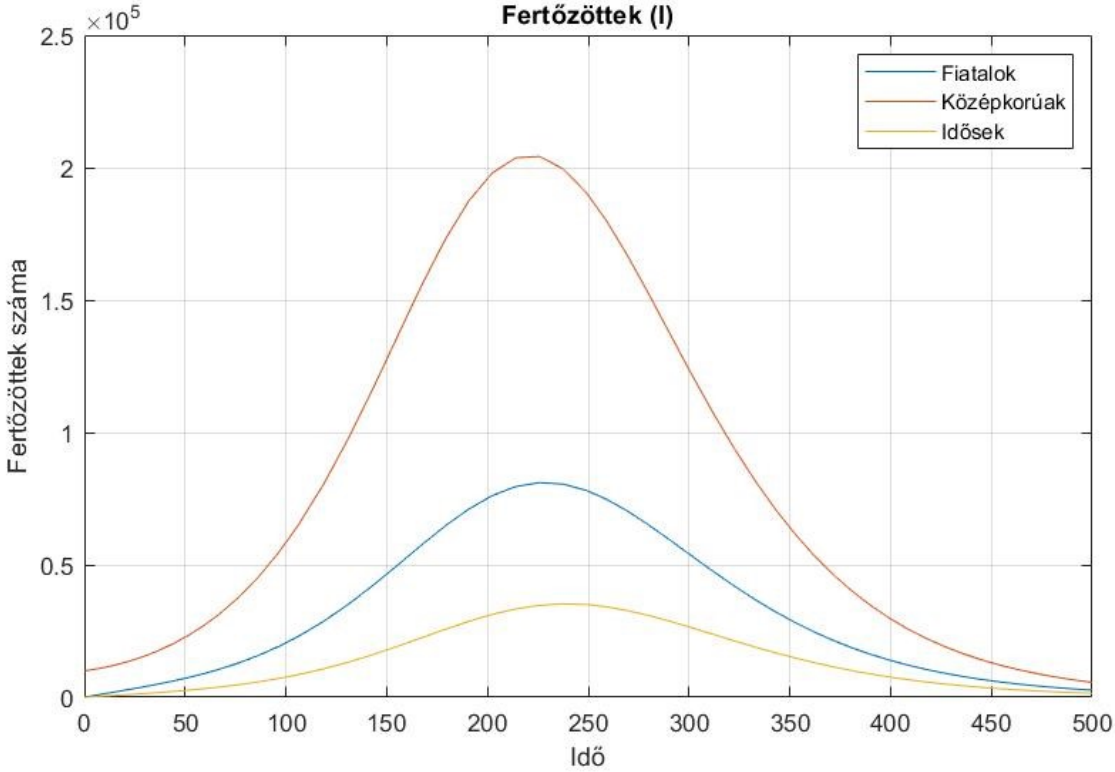
Úgy gondolom, hogy ez a kontaktusmátrix elviselhető egy járványügyi helyzetben. Ez az idős emberekkel a legszigorúbb, ami őket nehezen érintheti, de mint az alábbi képeken látható, hogy annak ellenére, hogy rájuk a legveszélyesebb, nagyon kevesen betegedhetnének meg. És így bőven jut a betegeknek kórházi ágy és megfelelő ellátás, ami elengedhetetlen ahhoz, hogy az orvosok megfelelő odafigyeléssel tudják kezelni a betegeket. Ez a korlátozás a fiatalok számára is meglehetősen szigorú, főleg a normális kontaktusmátrixhoz viszonyítva. Ez azt jelenti, hogy iskolába a megszokott módon nem mehetnek, legfeljebb csak kisebb csoportokban. A felnőttekre nézve a legmegengedőbb az általam felírt mátrix, ők kis odafigyeléssel folytathatják a napi rutinjaikat (a gazdaság érdekében). Az idősektől sokkal több odafigyelés szükséges, mivel a kór rájuk a legveszélyesebb. Nekik jelentősen csökkenteniük kell a személyes kapcsolataikat, hogy megelőzhessék a megfertőződést. Fokozott odafigyeléssel azonban szükség esetén, ha a családjuk nem tudja kisegíteni őket, elmehetnek bevásárolni.

A korlátozó kontaktusmátrixban található konkrét értékeket az előzőekben elmondott szempontok alapján próbáltam felvenni. Először az idősebbek kontaktusainak számát állítottam be. Az eredeti mátrixban a saját korosztályukkal volt a legtöbb találkozásuk és mivel nem akartam radikálisan megváltoztatni az idősebbek szokásait, így nagy csökkentéssel, de meghagytam azt, hogy ugyanúgy a saját korosztályukban lévőkkel találkozhassanak legtöbbet. Ez matematikai szempontból nem jó döntés, de az emberek beállítottsága miatt, és annak érdekében, hogy be is tartsák az intézkedéseket, úgy gondolom, hogy ezt a döntést meg kell hozni. Már volt elképzelésem a többi korosztály kontaktusainak számára is, így azok szerint próbáltam jó kompromisszumot találni az idősek és a másik két korosztály találkozására. Sajnos, ha a felnőttek dolgoznak lehetséges, hogy nem mindenki engedheti meg magának azt, hogy ne a nagyszülőket kérje meg a kisebb gyerekek gondozására (ha ők nem tudnak iskolába, óvodába menni), ezért vettem fel a fiatalabb és idősebb korosztály találkozásainak számát a duplájára, mint a középkorúak kapcsolatait az idősekkel. Ezután a középkorúak kontaktusainak számát próbáltam beállítani. Egyik elsődleges szempontom itt az volt, hogy a gazdaság és ezzel együtt az emberek jóléte érdekében fontos, hogy dolgozhassanak. Nyilván vannak akik tudnak otthonról is dolgozni, ezért csökkentettem a találkozásaik számát a saját korosztályukkal, de vásárolni nekik is el kell menniük. A többi korosztállyal történő találkozások számát is csökkentettem, de itt alapvetően a másik két korosztálytól függtek az értékek (szimmetrikus mátrix, csak a felnőttek kétszer annyian vannak a rendszerben). A fiatalokat hagytam legutoljára, mert úgy gondolom ők a legrugalmasabbak, és nincs is olyan sok kötelezettségük, főleg ha nem kell iskolába járniuk. A fiatalok esetében szóba jöhet akár kisebb csoportos foglalkozás is, ahol ez lehetséges. Az eredeti kontaktusaik számához képest őket szigorítottam meg legjobban, de úgy gondolom, hogy ez egy teljesen betartható korlátozás számukra ilyen helyzetben. A saját korosztályukkal így is sokszor találkozhatnak, a többi korosztállyal viszont csak amennyire elengedhetetlen.

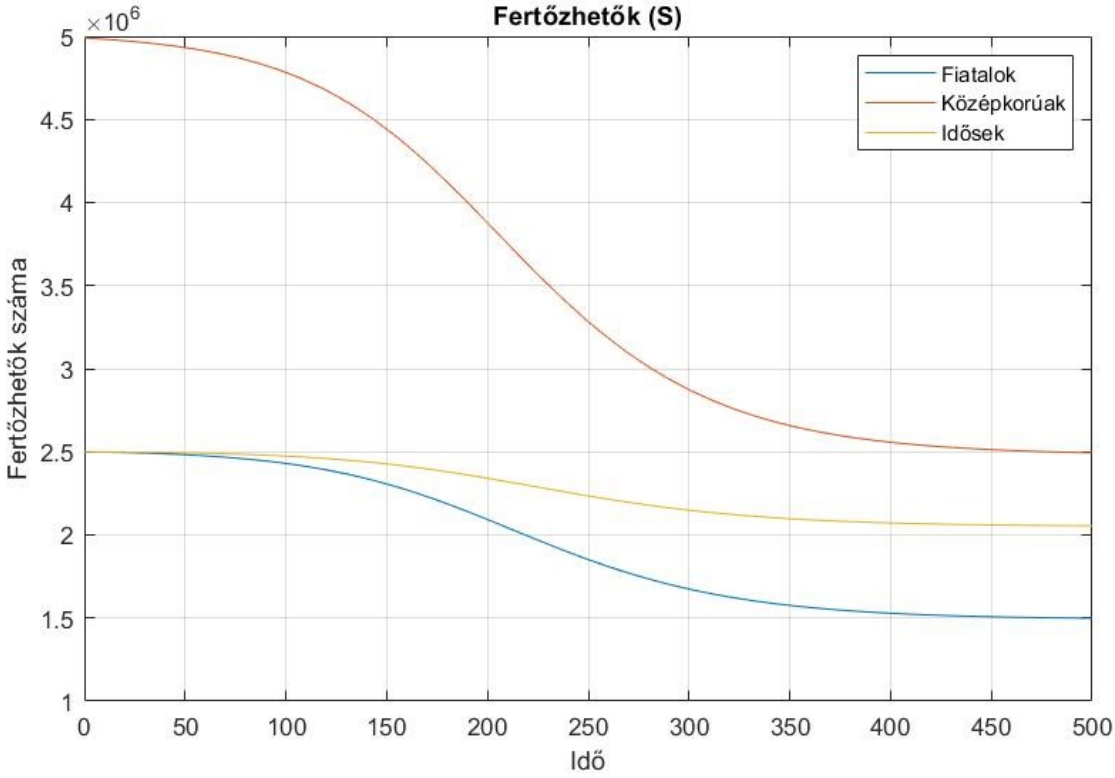
A kontaktusmátrix összes elemének nullát választani szerintem nem megfelelő lépés, ugyanis ez azt jelentené, hogy senki nem találkozik senkivel (családtagok se), ami a valóságban nem kivitelezhető (persze elméletileg megoldaná a problémát).

Ha a gazdasági szempontokat is figyelembe vesszük, akkor egy olyan állapotot kell keresni, ahol nem nyúlik el nagyon a járvány, de nem is annyira gyors, hogy a megbetegedettek száma jóval az egészségügyi ellátórendszer kapacitása fölé essen. Ebből a szempontból a felnőttek korlátozása negatívan hathat a gazdaságra, így náluk érdemes lehet enyhíteni a korlátozó intézkedéseket, és a másik két korosztályt szigorítani.

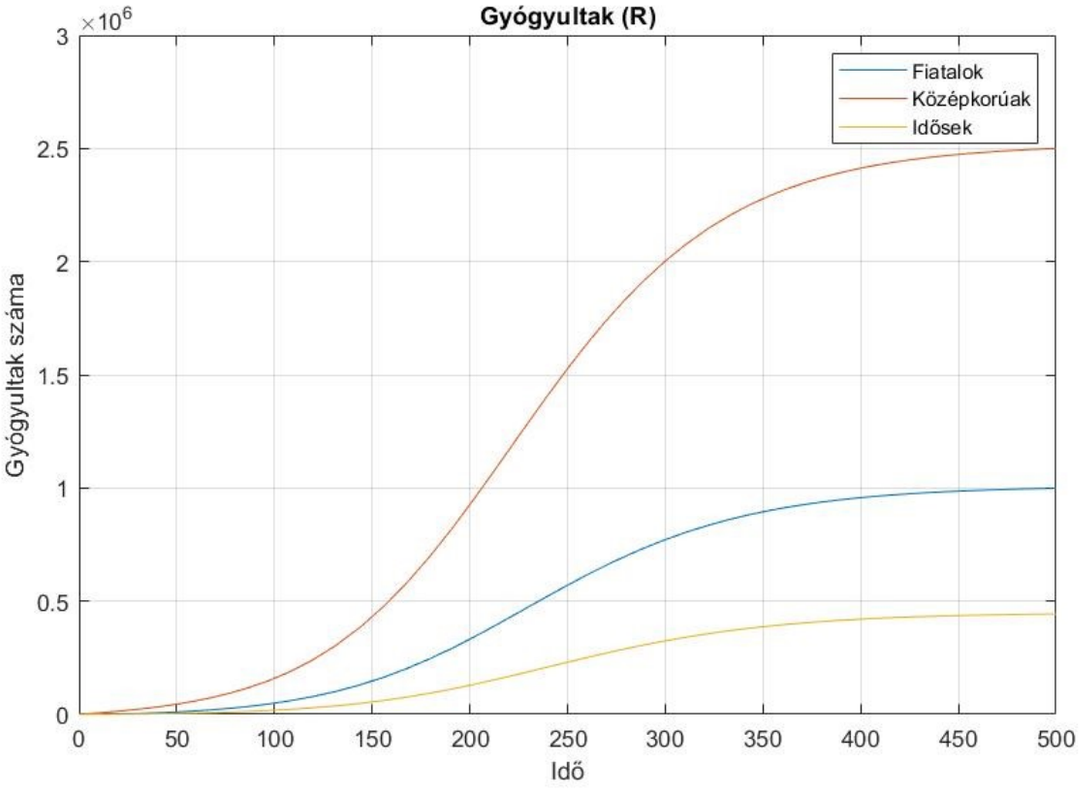
Sokat próbálkoztam az eredeti megbetegedési rátával ($\pi = 0{,}075$), megemlítem evvel kapcsolatos tapasztalataimat. Amikor a megbetegedési ráta még magasabb volt sokkal szigorúbb intézkedéseket kellett bevezetni a korlátozó mátrixra, ez nyilvánvaló hiszen ez a ráta egyfajta gyorsaságot jelent. Azzal, hogy a tizenhatod részét vettük fel, már sokkal jobban ellaposítottuk a járvány terjedését. Az eredeti esetben még olyan gyors volt a járvány, hogy mindenki átesett rajta, nem volt olyan, aki nem betegedett meg (nem volt, akihez nem jutott el). Ezzel ellentétben az új megbetegedési rátával már alap esetben (korlátozások nélkül is) voltak olyanok, akik nem betegedtek meg, és így már nem meglepő, hogy sokkal enyhébb korlátozásokat lehet felvenni az új paraméter esetén. (Az eredeti megbetegedési ráta mellett közel se tudtam volna ennyire megengedő kontaktusmátrixot megadni, tízszer ekkora egészségügyi ellátórendszerrel.) Viszont érdemes foglalkozni azzal a kérdéssel, hogy mikor lehet feloldani a korlátozásokat, ha még vannak, akik nem találkoztak a betegséggel. Főleg az idősek körében lehet nagy probléma, mert a korlátozások miatt közülük sokan nem estek át a betegségen, illetve rájuk nézve a legveszélyesebb, így, ha a korlátozásokat túl gyorsan vonnánk vissza, akkor lehet, hogy sokkal súlyosabb lesz rájuk nézve a járvány utóhatása (ha még nem pusztult ki teljesen). De a többi korosztályban is jelentősen csökkent azoknak a száma, akikhez a járvány eljuthat, így nagyon fontos figyelni arra, hogy hogyan kezdjük enyhíteni a korlátozásokat. Ha túl gyorsan csináljuk, akkor akár kialakulhat egy második járványhullám is. A vakcinán kívül a másik, ami feloldhatja a járványhelyzetet, a nyájimmunitás kialakulása. Így, ha sikerül eljutni abba az állapotba, hogy a nem idős lakosság nagy része már túl van a megbetegedésen, akkor már óvatosabban ki lehetne engedni az időseket is, anélkül, hogy egy második hullámot kockáztatnánk.



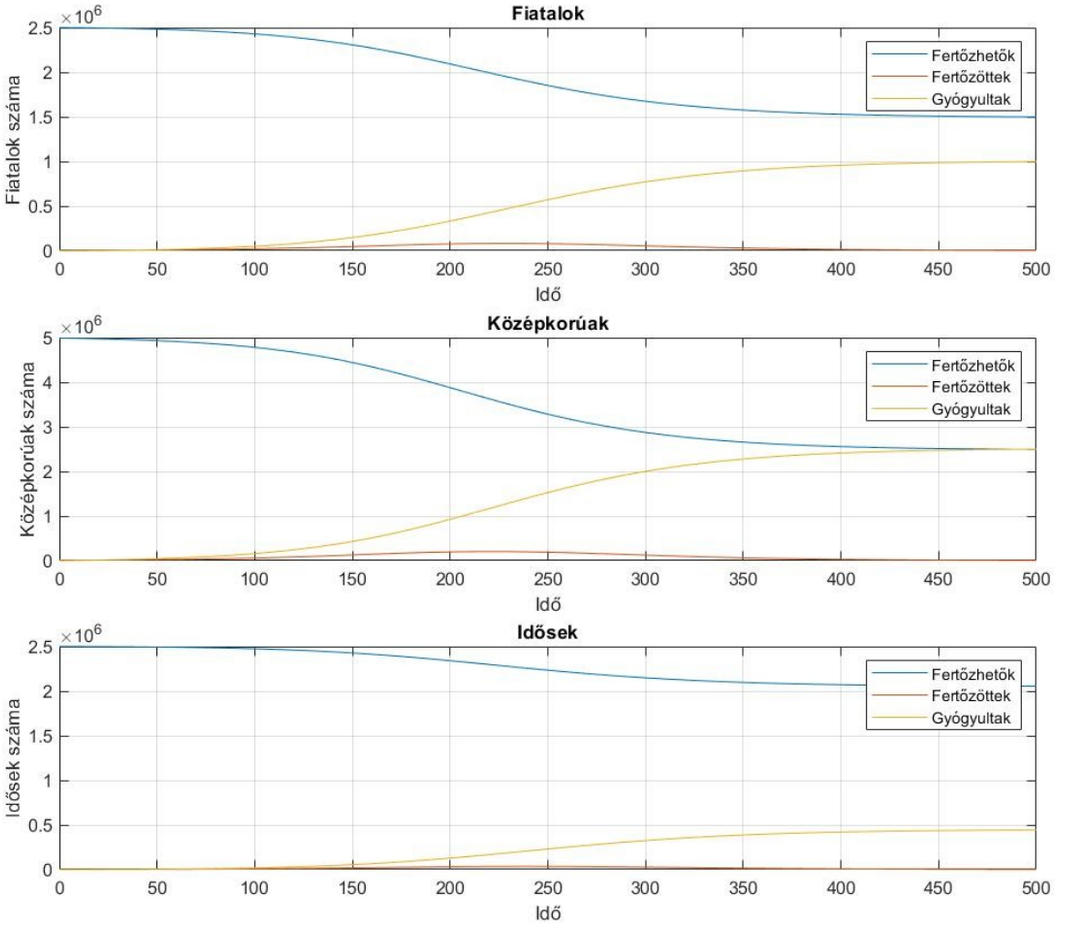
5. ábra. Az S csoportok változása.



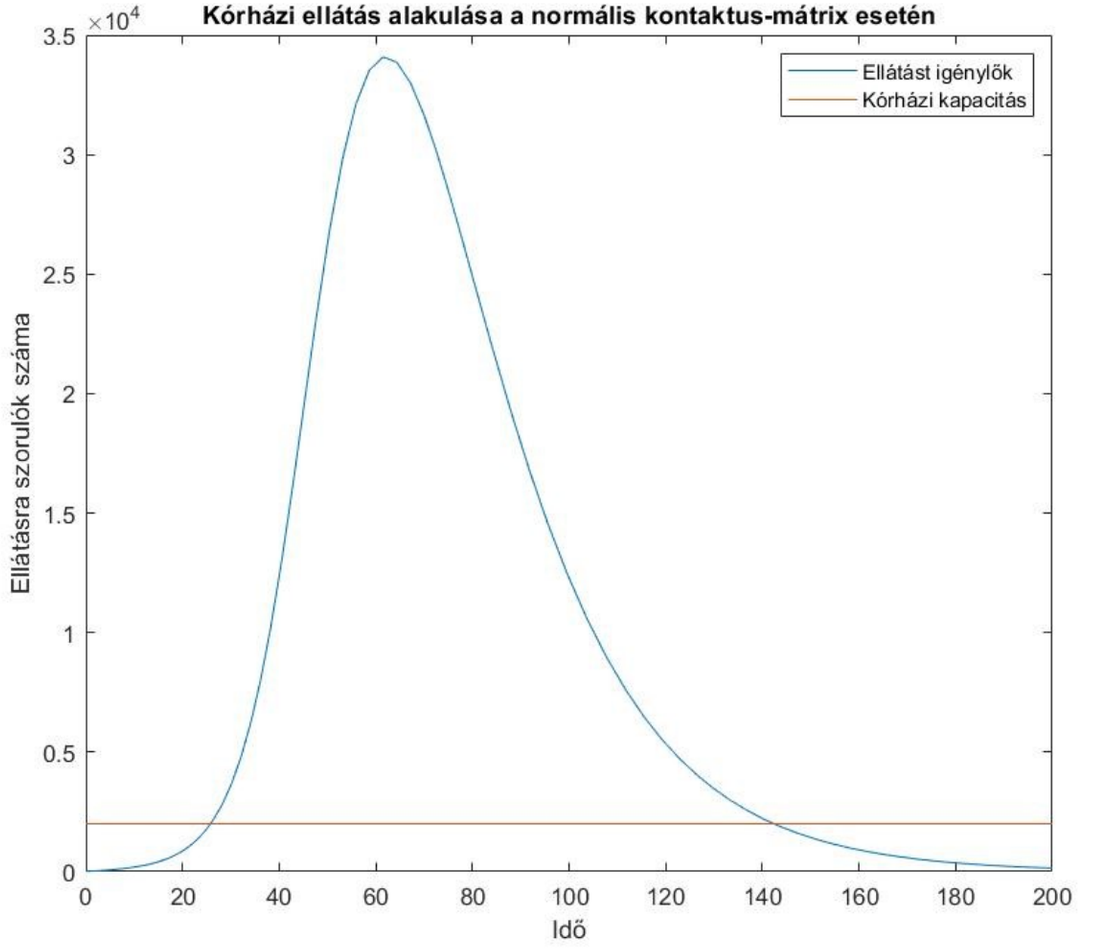
6. ábra. Az I csoportok változása.



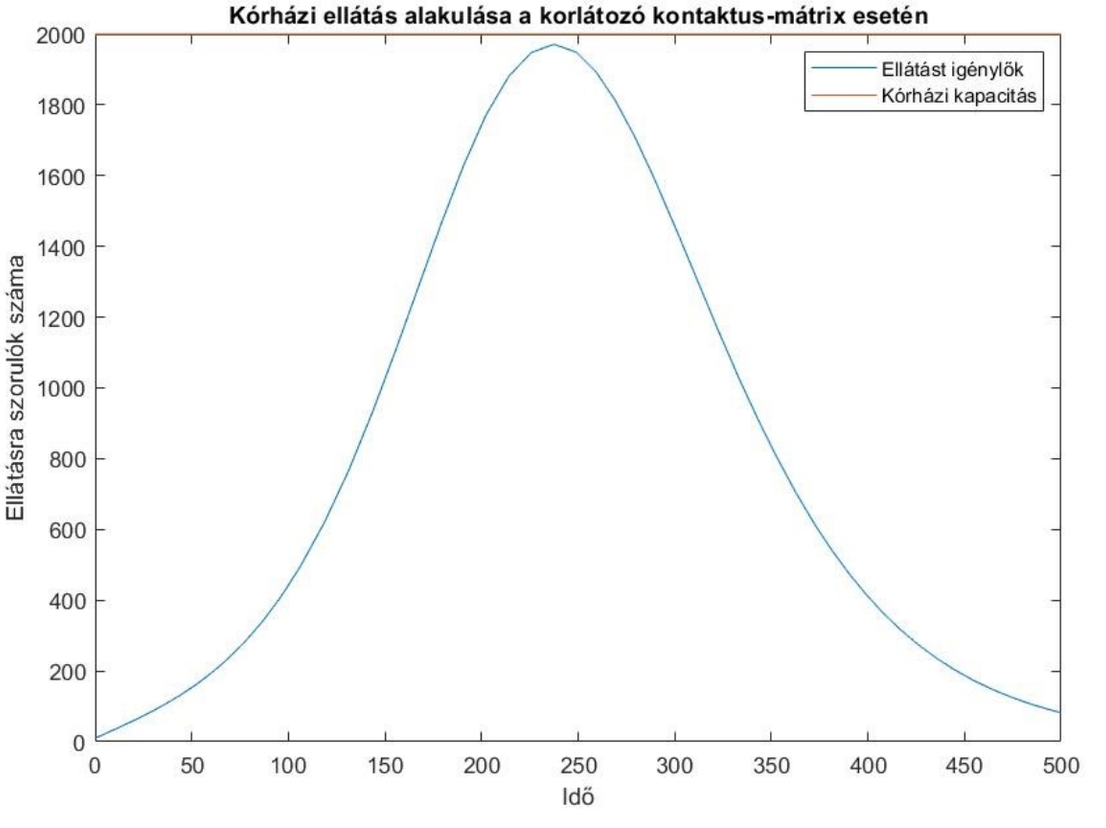
7. ábra. Az R csoportok változása.



8. ábra. A járvány alakulása korosztályok szerint.



9. ábra. Kék: Az egészségügyi ellátást igénylők számának alakulása a $C_{\text{normális}}$ kontaktusmátrix esetén, az ellátást igénylők $E = E(t)$ függvényének maximuma ($t = 61{,}5$): $34\ 090$; Barna: Az egészségügyi ellátórendszer kapacitása (2000).



10. ábra. Kék: Az egészségügyi ellátást igénylők számának alakulása a $C_{\text{korlátozó}}$ kontaktusmátrix esetén, az ellátást igénylők $E = E(t)$ függvényének maximuma ($t = 237{,}5$): 1972; Barna: Az egészségügyi ellátórendszer kapacitása (2000).

Molnár Zsófia
Pázmány Péter Katolikus Egyetem
Információtechnológia Kar, bionika szakos Bsc hallgató

alkalmazott matematika járványtan

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 16. szám 2020. június Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

100

Cím	Szerző
Kitüntetett matematikusok – 2020	Írta: Szerkesztő
Az ELTE és a BME egy-egy oktatója kapta a Gács András-díjat	Írta: A szerk.
Online Diákolimpia a lányoknak	Írta: A szerk.
Huszadik alkalommal írják ki a rangos pályázatot pedagógusoknak	Írta: Szerkesztő
Aczél János élete és munkássága	Írta: Páles Zsolt
Matematikus portrék: Pete Gábor	Írta: Szerkesztő
Matematikus portrék: Rásonyi Miklós	Írta: Szerkesztő
A tanterem már nem elég!	Írta: Lángné Lázi Márta
Úton-módon 3.	Írta: Szoldatics József
Hány bőrt lehet lehúzni egy feladatról? – avagy nincs új a Nap alatt?	Írta: Fried Katalin
Gondolatok Mark Kac önéletrajzáról	Írta: Simonovits András
Piruett körzővel	Írta: Tóth János
Folytonos dinamikai rendszerek	Írta: Tóth János
Rangsorolás – a társasjáték, amit mindenki játszik	Írta: Schubert András
Mi is...a Wasserstein-tér?	Írta: Titkos Tamás
Mennyit teszteljünk? 1. rész	Írta: Backhausz Ágnes, Simon L. Péter
Mi is…a perkoláció?	Írta: Mester Péter, Pete Gábor
Matematika a járványterjedés modellezésében	Írta: Simon L. Péter
Hopf-fibrálás – A Möbius-szalagtól négydimenziós kitérővel a qubitig	Írta: Pintér Gergő
Nemlineáris dinamikai modellek a biológiában: a kontaktusmátrixos SIR-modell	Írta: Garay Barna, Molnár Zsófia

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.