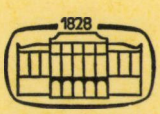
MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

54. KÖTET
1—2. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1977

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

BARTA ISTVÁN, BÖLCSKEI ELEMÉR, GESZTI P. OTTÓ,

HELLER LÁSZLÓ

SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.
KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Négy füzet alkot egy kötetet.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia
Műszaki Tudomány
1383 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó 1363 (Budapest, Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488), külföldi megrendelések a „Kultúra" Külkereskedelmi Vállalat 1389 (Budapest, Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó 3

I. SZILÁRD TESTEK MECHANIKÁJA
SZEKCIÓ

Árvay K.—Györgyi J.—Galaskó Gy.: Véges elemek módszerének alkalmazása síkbeli képlékeny feladatnál 5
Béres E.: A véges alakváltozás elmélete 13
Bosznay Á.: Véges elem módszer alkalmazása a sajátfrekvenciák behatárolására 23
Kaliszky S.—Nédli P.: Az inhomogén képlékeny félsík és féltér egyszerű diszkrét modellje 29
Kovács M.—Richlik Gy.—Takács F.—Tóth Gy.: Egyenes tengelyű, a hossza mentén változó jellemzőkkel bíró, hajlító lengést végző rúd sajátkörfrekvenciáinak javítható közrefogása 37
Páczelt I.—Nándori F.: Hibanégyzet minimum elvre alapozott módosított véges elem módszer alkalmazása a kontinuummechanikában 43
Patkó Gy.: Véges szabadságfokú lineáris rezgőrendszer paraméter változásainak hatása a sajátfrekvenciákra 49
Szeidl Gy.: Becslés heterogén mikropoláris anyagú rúd csavarási merevségére 57
Szekeres A.: Hosszú rúd hőütés feladatának néhány numerikus eredménye 65
Szervánszky Gy.: Periodikus mozgások stabilitása 75
Tassi G.—Rózsa P.: Kétfázisú diszkrét rúdmodell vizsgálata diszkontinuitások és képlékeny alakváltozások figyelembevételével 81
Thamm F.—Gáti R.: Nagyfeszültségű kábelek kifejlesztése során végzett mechanikai vizsgálatok 89
Uj J.: Spline-függvények alkalmazása rugalmasságtani síkfeladatok megoldásában 101

II. SZERKEZETEK MECHANIKÁJA
SZEKCIÓ

Ágoston Gy.: Egy granulálási technológia mechanikai vizsgálata 109
Czeglédi Gy.: Szabadságfokredukció és következményei lineárisan rugalmas szerkezetek analízisében 115
Draskóczy A.: Hajlított vasbeton rúdelem nemlineáris számítása kollokációs módszerrel 125
Gáspár Zs.: Rugalmas rúdszerkezetek állapotváltozásának pontos elemzése 137
Hegedűs I.: Szakaszosan változó peremfeltételű körhenger metszeterői 143
Horváth Gy.: Zavartalan és zavart állapotú finom homok nyírószilárdságának összehasonlító vizsgálata 153
Iványi M.: Nyomott I szelvényű rudak képlékeny lemezhorpadásának kísérleti vizsgálata 165
Kabai I.—Lazányi I.: Módosított szárnyas nyírószonda 171
Kálló M.: Vasúti híd sajátfrekvenciájának meghatározása 179
Köröndi L.: A „nyírófeszültség-különbség"-módszer néhány alkalmazása optikai feszültségmérési kísérleteknél 185
Ludvig Gy.: A köteges vezetőkben ébredő zárlati erőhatások vizsgálata 195
Marczal L.—Soltész P.—Jancsecz S.: Kombinált talajmodellen alapuló számítási eljárás alkalmazása alapgerendák tervezéséhez 203
Ordódy M.: Gépszerkezetek inerciális nemlinearitása 215
Platthy P.: Az átmeneti zóna kritikus fáradási felülete 221
Sebők F.: Kiegészítések a szálerősítésű anyag elemei közti együttdolgozás leírásához 227
Szalai J.: Folytonos alátámasztású körgyűrűk vizsgálata 237
Szatmári I.: Vékony, merevítetlen gerinclemezek teherbírásszámítása 245
Szépe F.: Az erősítő lemez problémája 257
Szilágyi Gy.: A véges sávok módszerének alkalmazása támaszelmozdulások esetén 263
Tomka P.: Normál- és nyíróerővel terhelt I tartó határnyomatéka 271
Vértes Gy.—Tornyos Á.: Vegyes teherviselő szerkezetű épületek vizsgálata vízszintesen működő dinamikus teherre 277

CONTENTS

Foreword 3

SECTION I.
MECHANIC OF SOLIDS

Árvay, K.—Györgyi, J.—Galaskó, Gy.: Application of the Method of Finite Elements in Planar Plastic Problems 5
Béres, E.: The Finite Deformation Theory 13
Bosznay, Á.: Application of the Method of Finite Elements for Eigenfrequency Determination 23
Kaliszky, S.—Nédli, P.: A Simple Discrete Model of the Inhomogeneous Plastic Half-Plane and Half-Space 29
Kovács, M.—Richlik, Gy.—Takács, F.—Tóth, Gy.: Corrigable Delineation of the Eigenfrequencies of a Straight Rod of Variable Characteristics along its Length, and Performing Bending Oscillation 37
Páczelt, I.—Nándori, Fr.: Application of a Modified Method of Finite Elements Based on the Minimum Error Square Principle in Continuum Mechanics 43
Patkó, Gy.: Effect of the Parameter Variation of Finite Degree of Freedom Type Linear Vibration Systems on their Eigenfrequency 49
Szeidl, Gy.: Estimation of the Torsional Rigidity of a Bar of Heterogeneous Micropolar Material 57
Szekeres, A.: Some Numerical Results of the Thermal Impact Problem of Long Bars 65
Szervánszky, Gy.: Stability of Periodic Movements 75
Tassi, G.—Rózsa, P.: Examination of a Two-Phase Discrete Bar Model with the Relevant Discontinuities and Plastic Deformations taken into Consideration 81
Thamm, F.—Gáti, R.: Mechanical Tests Conducted in the Course of High-Voltage Cable Development 89
Uj, J.: Application of Spline Functions to Solve Planar Problems in the Field of Elasticity 101

SECTION II.
MECHANIC OF STRUCTURES

Ágoston, Gy.: Mechanical Examination of a Granulation Technology 109
Czeglédi, Gy.: Degree of Freedom Reduction and its Consequences in the Analysis of Linearly Elastic Structures 115
Draskóczy, A.: Nonlinear Calculation of Beat Reinforced Concrete Bar Elements by Collocation 125
Gáspár, Zs.: Precise Analysis of the Change of State of Elastic Bar Structures 137
Hegedüs, I.: Intermittently Changing Boundary Conditions of the Cross-Section of a Cylinder 143
Horváth, Gy.: Comparative Investigation of Shear Strength of Fine Sand in Undisturbed and Disturbed State 153
Iványi, M.: Experimental Test of the Plastic Plate Indentation of Compressed I-section Bars 165
Kabai, I.—Lazányi, I.: Improved Wing—Type Shearing Probe 171
Kálló, M.: Determination of the Eigenfrequency of Railway Bridges 179
Köröndi, L.: Applications of the Shear Stress Difference Method in Optical Stress Measurement Experiments 185
Ludvig, Gy.: Examination of Short Current Effects in Bunched Conductors 195
Marczal, L.—Soltész, P.—Jancsecz, S.: Application of a Calculation Method Based on a Combined Soil Sample for Designing Foundation Beams 203
Ordódy, M.: Inertial Non-Linearity of Machine Structures 215
Platthy, P.: Critical Fatigue Surface of the Transient Zone 221
Sebők, F.: Contribution to the Description of the Co-operation between the Elements of Fibre Reinforced Materials 227
Szalai, J.: Examination of Continuous Support Type Annuli 237
Szatmári, I.: Calculation of the Load Bearing Capacity of Non-Stiffened Thin Web Plates 245
Szépe, F.: The Problem of Reinforcement Plates 257
Szilágyi, Gy.: Application of the Finite Strip Method in the Case of Support Displacements 263
Tomka, P.: Limit Moment of I-Beams Loaded by Normal and Shear Forces 271
Vértes, Gy.:—Tornyos, Á.: Examination of Mixed Load Bearing Structural Buildings by a Horizontally Acting Dynamic Load 277

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort 3

SEKTION I.

MECHANIK DER FESTKÖRPER

Árvay, K.—Györgyi, J.—Galaskó, Gy.: Anwendung der Methode endlicher Elemente bei ebenen plastischen Aufgaben 5
Béres, E.: Theorie der endlichen Formänderung 13
Bosznay, Á.: Einschachtelung der Eigenfrequenzen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente 23
Kaliszky, S.—Nédli, P.: Das einfache diskrete Modell der Halbebene und des Halbraumes 29
Kovács, M.—Richlik, Gy.—Takács, F.—Tóth, Gy.: Korrigierbare Einschachtelung der Eigenkreisfrequenz eines Biegeschwingungen ausführenden Stabes mit gerader Achse und längs dieser wechselnden Kennwerten 37
Páczelt, I.—Nándori, Fr.: Anwendung der auf dem Prinzip des Fehlerquadratminimums beruhenden veränderten Methode der finiten Elemente in der Kontinuummechanik 43
Patkó, Gy.: Einfluß der Änderung der Parameter auf die Eigenfrequenz von linearen Schwingungssystemen mit endlichen Freiheitsgraden 49
Szeidl, Gy.: Schätzung der Torsionssteifigkeit von Stäben aus heterogenem mikropolarem Stoff 57
Szekeres, A.: Einige numerische Resultate von einen langen Stab betreffenden Wärmestoßaufgaben 65
Szervánszky, Gy.: Stabilität der periodischen Bewegungen 75
Tassi, G.—Rózsa, P.: Untersuchung des zweiphasigen diskreten Stabmodelles unter Berücksichtigung von Diskontinuitäten und plastischen Formänderungen 81
Thamm, Fr.—Gáti, R.: Im Laufe der Entwicklung von Hochspannungskabeln vorgenommene mechanische Untersuchungen 89
Uj, J.: Anwendung der Splineschen Funktionen zur Lösung von ebenen Aufgaben der Elastizitätslehre 101

SEKTION II.

MECHANIK DER KONSTRUKTIONEN

Ágoston, Gy.: Mechanische Untersuchung einer Granulationstechnologie 109
Czeglédi, Gy.: Reduktion der Freiheitsgrade und ihre Folgen in der Analyse der linear elastischen Konstruktionen 115
Draskóczy, A.: Nichtlineare Berechnung eines biegebeanspruchten Stahlbeton-Stabelementes nach der Kollokationsmethode 125
Gáspár, Zs.: Exakte Analyse der Zustandsänderung elastischer Stabkonstruktionen 137
Hegedüs, I.: Schnittkräfte des Kreiszylinders mit abschnittsweise veränderlichen Randbedingungen 143
Horváth, Gy.: Vergleichsuntersuchung der Schubfestigkeit von im ungestörten und im gestörten Zustand befindlichen Feinsand 153
Iványi, M.: Experimentale Untersuchung der plastischen Beulung des Steges druckbeanspruchter Stäbe mit I-Profil 165
Kabai, I.—Lazányi, I.: Verbesserte Flügelschersonde 171
Kálló, M.: Bestimmung der Eigenfrequenz von Eisenbahnbrücken 179
Köröndi, L.: Einige Anwendungen der Methode der »Schubspannungs-Differenz« mit optischer Spannungsmessung 185
Ludvig, Gy.: Untersuchung der in Bündelleitern auftretenden Kraftwirkungen infolge von Kurzschluß 195
Marczal, L.—Soltész, P.—Jancsecz, S.: Anwendung eines Berechnungsverfahrens aufgrund eines kombinierten Modells zum Entwurf von Fundamenträgern 203
Ordódy, M.: Inertiale Nichtlinearität von Maschinenkonstruktionen 215
Platthy, P.: Die kritische Ermüdungsfläche der Übergangszone 221
Sebők, F.: Ergänzung zur Beschreibung der Mitwirkung der Elemente der fadenverstärkten Stoffe 227
Szalai, J.: Untersuchung von kontinuierlich gelagerten Kreisringen 237
Szatmári, I.: Berechnung der Tragfähigkeit dünner, unversteifter Stegbleche 245
Szépe, F.: Das Problem der Verstärkungsplatte 257
Szilágyi, Gy.: Anwendung der Methode finiter Streifen im Falle von Auflagerverschiebungen 263
Tomka, P.: Grenzmoment des durch Schub- und Normalkräften belasteten I-Trägers 271
Vértes, Gy.—Tornyos, A.: Untersuchung von Gebäuden gemischter Tragkonstruktionen bei horizontaler, dynamischer Belastung 277

СОДЕРЖАНИЕ

Введение ... 3

I. СЕКЦИЯ
МЕХАНИКА ТВЁРДЫХ ТЕЛ

Калман Арваи, канд. т. н.—Йожеф Дерди—Дюла Галашко: Применение метода конечных элементов на плоскую задачу пластичности ... 5
Д-р. т. н. Элек Береш: Теория конечных деформаций ... 13
Д-р. т. н. Адам Боснаи: Применение метода конечных элементов для ограничения собственных частот ... 23
Д-р. т. н. Шандор Калиски—Петер Недли: Дискретная модель неоднородных пластичных полуплоскости и полупространства ... 29
Миклош Ковач—Дердь Рихлик—Ференц Такач—Дердь Тот: Двухстороннее, уточняемое ограничение собственных частот прямого стержня, проводящего изгибные колебания, имеющего изменяющиеся характеристики вдоль своей проводольной оси ... 37
Иштван Пацельт—Фридеш Нандори: Модифицированный метод конечных элементов в механике сплошных сред, основанный на методе наименших квадратов ... 43
Дьула Патко: Влияние изменения параметров упругих систем с конечными степенями свободы на собственные частоты ... 49
Дьердь Сеидль: Оценка жесткости кручения стержней, изготовленных из неоднородного микрополярного материала ... 57
А. Секереш: Некоторые цифровые результаты задачи термоудара длинного стержня . 65
Дердь Сербански: Устойчивость периодических движений ... 75
Ф. Тхамм и Р. Гати: Механическое исследование проводов высокого напряжения . 81
Д-р. Геза Таши—Пал Д-р. Рожа: Исследование двухфазовой дискретной модели стержня с учетом разрывов и пластических деформаций ... 89
Йосиф Уй: Применение функций сплайн для решения плоской задачи теории упругости ... 101

II. СЕКЦИЯ
МЕХАНИКА КОНСТРУКЦИЙ

Д. Агоштон: Механическое исследование одного вида грануляционной технологии .. 109
Дюла Цегледи: Редукция степени свободы и её последствия в анализе линейно-упругих конструкций ... 115
Андраш Драшкоци: Нелинейный расчёт изогнутого сталебетонной стержня с коллокационным методом ... 125
канд. т. н. Жолт Гашпар: Точный анализ изменения состояния упругих стержневых систем ... 137
Иштван Хегедюш: Усилия круглого цилиндра при периодически переменных граничных условиях ... 143
Д. Хорват: Сравнительные исследования прочности на сдвиг мелких песков ненарушенного и нарушенного структурного состояния ... 153
Д-р. Миклош Ивани: Экспериментальное испытание местной устойчивости пластинок сжатых стержней двутаврого сечения за упругой стадии ... 165
И. Кабаи—И. Лазани: Видоизмененный крылчатый зонд ... 171
Миклош Калло: Определение собственной частоты железнодорожного моста ... 179
Ласло Керенди: Несколько применений метода «разницы сдвигающего напряжения» при испытаниях фотоупругости ... 185
Д. Людвиг: Исследование сил замыкания, пораждающихся в расщепленной линии .. 195
Л. Марцал—П. Шолтес—Ш. Йанчец: Применение комбинированного расчета для проектирования балок, помещенных на поверхности грунта ... 203
М. Ордоди: Инерционная нелинейность конструкций машин ... 215
Д-р. Пал Платти: Критическая поверхность выносливости переходной зоны ... 221
Д-р. Ференц Шебек: Дополнения к описанию содействия между элементами волокноусиленного материала ... 227
Йанош Салаи: Исследование сплошно опёртых круглых колец ... 237
Д-р. Иштван Сатмари: Расчёт несущей способности тонких стенок без рёбер жёсткости ... 245
Ференц Сепе: Проблема укрепляющей пластинки ... 257
Дердь Силадьи: Применение метода конечных поясов в случае перемещения опора .. 263
Д-р. Пал Томка: Предельный момент балок двутаврого сечения, нагруженных осевыми и поперечными силами ... 271
Канд. т. н. Дердь Вертеш—Арпад Торнёш: Анализ зданий смещанной конструкции под действием горизонтальных динамических нагрузок ... 277

ELŐSZÓ

A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Mechanikai Tanszéki Munkaközösségének II. tudományos ülésszakának kiadványa az akadémiai támogatású kutatóhelyeken a szilárdtestek mechanikája, valamint a szerkezetek mechanikája területén elért kutatási eredményekből kíván szemelvényeket, illetve áttekintést adni.

Kiadványunkban helyet kaptak a Munkaközösséghez tartozó, BME építőmérnökkari Acélszerkezetek, Geotechnikai, Mechanika, Vasbetonszerkezetek, az építészmérnökkari Szilárdságtan és Tartószerkezetek, a gépészmérnökkari Műszaki Mechanikai, a villamosmérnökkari Műszaki Mechanika tanszékek kutatóinak és oktatóinak munkái mellett a miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Mechanika Tanszéke kutatóinak és oktatóinak a tanulmányai is.

A 34 tanulmányt tartalmazó kiadvány természetesen nem fogja és nem foghatja át azt a széles körű és igen aktív tudományos munkát, amelyet a Munkaközösség keretében az első ülésszak óta — 1974 október — végeztünk. Ennek ellenére kiadványunk egy jó áttekintést ad a Munkaközösség keretében folyó kutatásokról, azok jellegéről. A nálunk folyó kutatások hármas tagolásúnak tekinthetők, amelyek az elméleti kutatásoktól a numerikus eljárások és számítástechnikai módszerek, programok kidolgozásán keresztül a kapott eredmények laboratóriumi, illetve helyszíni kísérletekkel való leellenőrzéséig terjednek, hogy elősegítsük a kutatási eredmények felhasználását.

A II. Tudományos Ülésszakunk megszervezésével szeretnénk segíteni szakterületünk hazai tudományos fejlődését, a fiatal tudományos szakemberek nevelését.

Tudományos ülésszakunkhoz kapcsolódóan kerül nálunk megrendezésre a szocialista országok akadémiai mechanikai kutató intézmények vezetőinek soron következő értekezlete. Ez lehetőséget ad arra is, hogy közvetlen tájékoztatást adjunk a nálunk folyó kutatómunkáról, amely számos területen új és jelentős tudományos gondolatokat és eredményeket is tartalmaz.

Befejezésül köszönetet mondok Szalai János tudományos tanácsadónak a kiadvány előkészítésében végzett, és az Akadémiai Kiadó és Nyomda munkatársainak a megjelentetés gondos és gyors munkájáért.

Budapest, 1978. július.

Dr. Petrasovits Géza
a Munkaközösség vezetője

I. SZEKCIÓ

Szilárd testek mechanikája

A VÉGES ELEMEK MÓDSZERÉNEK ALKALMAZÁSA SÍKBELI KÉPLÉKENY FELADATRA

ÁRVAY KÁLMÁN*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

GYÖRGYI JÓZSEF** GALASKÓ GYULA***

A dolgozat képlékeny anyagtörvény alkalmazásával tárgyalt, síkbeli alakváltozási állapotban levő kontinuumfeladat megoldását mutatja be. Az alapösszefüggések ismertetése után a véges elemek módszerével meghatározza, iterációs eljárás segítségével, a rugalmas-képlékeny állapotban levő anyag feszültség-elmozdulás értékeit. A beépített tartószerkezettel történő érintkezésnél, a súrlódás miatt fellépő elválási feladatot is a képlékeny állapotra kidolgozott módszerrel oldja meg. A dolgozat a módszer alkalmazását számpéldán mutatja be.

1. Bevezetés

A mérnöki szerkezetek teher alatti viselkedésének leírásához ismernünk kell a feszültségek és alakváltozások közötti összefüggést megadó anyagtörvényt. A vizsgálatokhoz szükséges lényeges tulajdonságokat leíró anyagmodellek közül a lineárisan rugalmas viselkedés feltételezése biztosítja a legegyszerűbb matematikai megoldást. Az anyagok egy részénél azonban a lineárisan rugalmas viselkedés feltételezése igen durva közelítést jelentene, míg a lineárisan rugalmas — tökéletesen képlékeny anyagmodell alkalmazása pontosabb számítást tesz lehetővé.

A képlékenységtan elméleti alapjait már régebben kidolgozták. Kontinuum-feladatok megoldásakor azonban alkalmazása a legutóbbi időkig — néhány egyszerűbb esetet leszámítva — a határállapot vizsgálatára szorítkozott. A felmerülő matematikai nehézségek nem tették lehetővé a csak részben képlékeny állapotban levő szerkezetek vizsgálatát. Az elektronikus számítógépek megjelenését követően a megfelelő numerikus módszerek kidolgozása megnyitotta az utat az említett anyagtörvényt követő kontinuum-feladatok megoldása előtt. A kidolgozott eljárások közül a véges elemek módszerének alkalmazását mutatjuk be lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny anyagtörvény esetére.

2. Az elméleti alapok összefoglalása

Kontinuum-feladatok megoldásához szükséges összefüggéseket általában parciális differenciálegyenletek alakjában írják fel. Az alapösszefüggések három csoportra bonthatók.

* Dr. Árvay Kálmán, 1016 Budapest, Mészáros u. 18.
** Dr. Györgyi József, 1221 Budapest, Arany J. u. 96/b.
*** Dr. Galaskó Gyula, 1191 Budapest, Marx K. u. 64.

a) Az egyensúlyi egyenletek — Cauchy-féle egyenletek — képlékeny anyagok esetében is változatlan formában érvényesek. Ezek az összefüggések akkor is érvényesek, ha azokban nem a tényleges feszültségeket, hanem növekményeiket szerepeltetjük.

b) Az alakváltozások és elmozdulások közötti összefüggét megadó geometriai egyenletek változatlan formában érvényesek képlékeny anyag esetében akkor is, ha a tényleges alakváltozásokat és elmozdulásokat szerepeltetjük bennük és akkor is, ha csak növekményeiket.

c) Az anyagtörvény felírásához szükséges a képlékenységi feltétel ismerete. Ez egy olyan függvény, amely megadja a feszültségeknek az anyagi minőséget megadó k érték mellett minden olyan kombinációját, amely a rugalmas viselkedés határát jelenti. Ezt az $F(\sigma, k)$ függvényt úgy írjuk fel, hogy

$$F(\sigma, k) < 0 \tag{1a}$$

esetben rugalmas,

$$F(\sigma, k) = 0 \tag{1b}$$

esetben képlékeny állapotban van az anyag. Nullánál nagyobb értékekre a függvény nincs értelmezve.

Ismeretes, hogy a képlékeny állapotban egy pont ϵ alakváltozása két részből tevődik össze, egy ϵ_r rugalmas és egy ϵ_p képlékeny részből:

$$\epsilon = \epsilon_r + \epsilon_p. \tag{2}$$

A rugalmas nyúlást — vagy a nyúlás növekményét — a feszültség függvényében az általános Hooke-törvény segítségével fejezhetjük ki:

$$\Delta\epsilon_r = \mathbf{D}_H \Delta\sigma \,. \tag{3}$$

A képlékenységi feltételből a normalitási elvnek megfelelően az alakváltozások növekménye a

$$\Delta\epsilon_p = \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \tag{4}$$

összefüggésből nyerhetők.

A teljes alakváltozás a fenti két kifejezés összegéből előállítható. Az összevonás után az

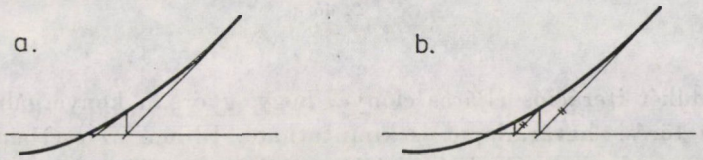
$$\Delta\epsilon = \mathbf{D}_p(\sigma)\Delta\sigma \tag{5}$$

alakú anyagtörvényt nyerhetjük. Ebből az egyenletből sem a nyúlások, sem a feszültségek explicit alakban nem fejezhetők ki, mivel az összefüggés nem lineáris ε és σ között. Ennek következtében az anyagtörvényt az egyensúlyi és összeférhetőségi egyenletekkel nem tudjuk összevonni. A megoldást ezért csak numerikus eljárás segítségével tudjuk megkeresni.

3. Numerikus eljárás

A numerikus eljárások, a nagymennyiségű számítási munka és a nagyméretű egyenletrendszerek miatt elektronikus számítógép alkalmazására épülnek. A közelítő módszerek közül a véges elemek módszere különösen kitüntetett helyet foglal el képlékeny feladatok megoldása során.

Képlékeny feladatok megoldása síkbeli feszültség vagy síkbeli alakváltozási állapot esetében egyszerű. Háromszög alakú elemeket választva, lineáris alakfüggvény alkalmazása esetében ugyanis azokban a feszültségek nem változnak. Így egy elemen belül vagy rugalmas (3), vagy képlékeny anyagtörvényt (5) kell a feszültségektől függően alkalmazni.



1. ábra

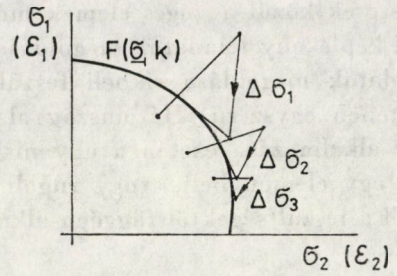
Az elmozdulásmódszerrel történő vizsgálatok esetében szükségünk van a merevségi értékekre. Ezek az anyagtörvény függvényei. Mint hogy az (5) alatti kifejezés explicit formában nem oldható meg, a képlékeny állapothoz tartozó merevségi mátrix sem állítható elő közvetlenül. Ezért, ha valamelyik elemen belül teljesül az (1b) alatti feltétel, a feladatot iterációs úton lehet megoldani. A megoldás a Newton—Raphson-módszer (1a ábra) módosított változata, az állandó érintők módszere (1b ábra) alapján történik.

Az iterációs eljárás alapja, hogy a rugalmas állapothoz tartozó merevségi értékek felhasználásával fokozatos közelítéssel érjük el a képlékenységi feltétel teljesülését. Az iterációs eljárás lépéseit, mechanikai megfontolások alapján kétféle úton végezhetjük el. Mindkét eljárásban a tehernek azt a részét, amely már képlékeny állapot elérése után működik a szerkezetre, több lépcsőben működtetjük. Az egyes teherlépcsőkhöz tartozó megoldást keressük meg a kétféle iterációs eljárás valamelyikével, végül az egyes lépésekben nyert eredményeket összegezzük.

A „kezdeti feszültségek" módszere az adott teherlépcsőhöz a rugalmas állapotnak megfelelő úton kiszámítja a feszültségeket, majd az (5) alapján megállapítja a hiba nagyságát. Ebből a hibából fiktív terhet számít, erre oldja meg a feladatot, és addig ismétli e lépéseket, amíg a hiba tetszőlegesen kicsi nem lesz (2. ábra). Ezután kerül sor a következő teherlépcső alkalmazására.

A „kezdeti alakváltozások" módszere hasonlóan jár el az előzőhöz, de itt az alakváltozások értékéből indul ki, és ezek hibájából számít fiktív terhet.

A kezdeti feszültségek módszerét akkor előnyösebb használni, ha az anyag növekvő feszültségekkel erősebben növekvő alakváltozásokat szenved, míg az utóbbit a keményedő anyagok esetében.



2. ábra

Mindkét iterációs eljárás előnye, hogy gyorsan konvergálnak. Segítségükkel a törési határállapot is kimutatható. Ebben az esetben ugyanis az eljárások nem konvergálnak és ez jelzi az adott teherlépcső esetében bekövetkező törést.

A fenti eljárásokkal analóg megoldást lehet alkalmazni néhány elválási feladat megoldása esetében is. Pl. súrlódás biztosította kapcsolat erő-elmozdulás diagramja azonos egy lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny anyag húzó-diagramjával, így e probléma — és több, hozzá hasonló feladat is — mint képlékenységtani probléma oldható meg.

4. Alkalmazás

Röviden bemutatjuk egy síkbeli alakváltozási állapotban levő feladat megoldását, amely mélyépítési feladatokban kerül alkalmazásra.

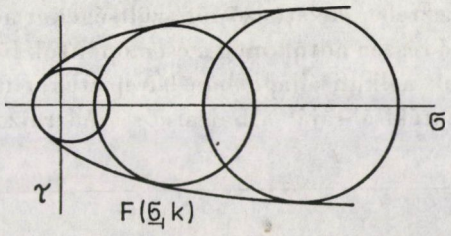
Képlékenységtani feltételként a Coulomb—Drucker félét alkalmaztuk:

$$F(\sigma, k) = \alpha J_1 + \sqrt{J_2} - K = 0\,, \tag{6}$$

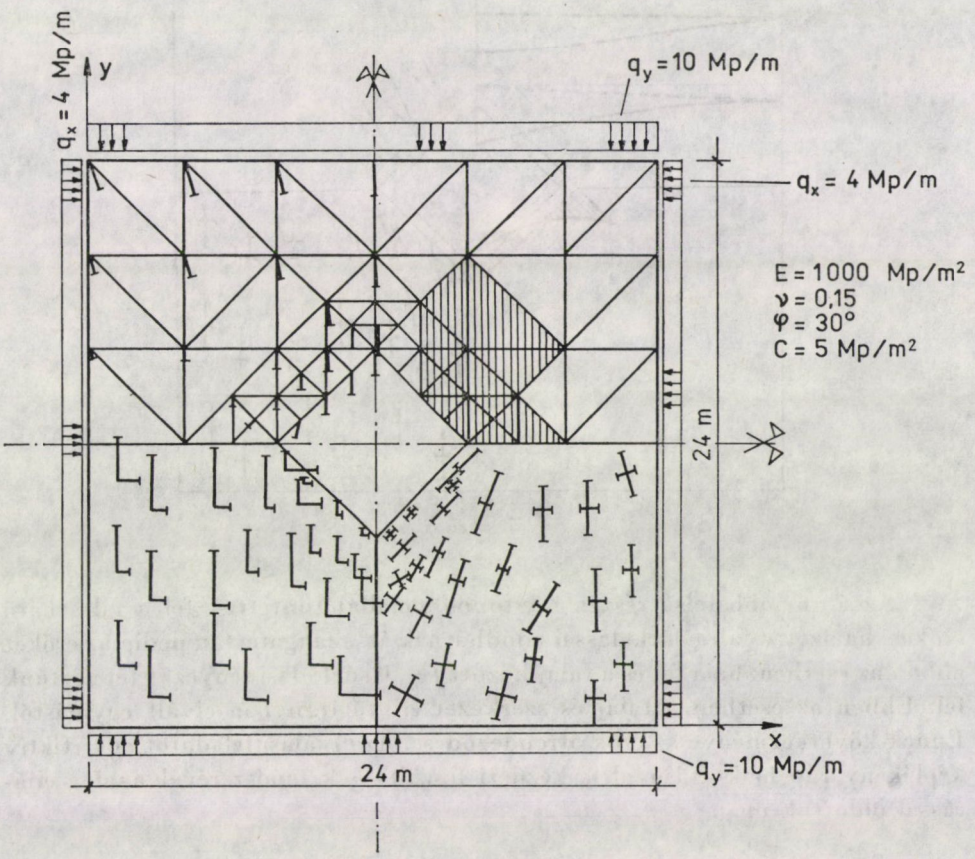
ahol J_1 az első, J_2 a második invariánsa a feszültségtenzornak, α és K pedig a kohéziótól és a súrlódási szögtől függő állandó.

A képlékenységi feltételt a szokásos Mohr-körös ábrázolásban a 3. ábrán rajzoltuk meg.

A mintapélda a 4. ábrán látható. A kétszeresen szimmetrikus, középen lyukat tartalmazó kontinuum hálózata az ábra felső részén látható. Az első példát középen lyukkal oldottuk meg. Az ábra jobb felső részén vonalkázással tüntettük fel azokat az elemeket, amelyekben a képlékeny állapot bekövetke-



3. ábra

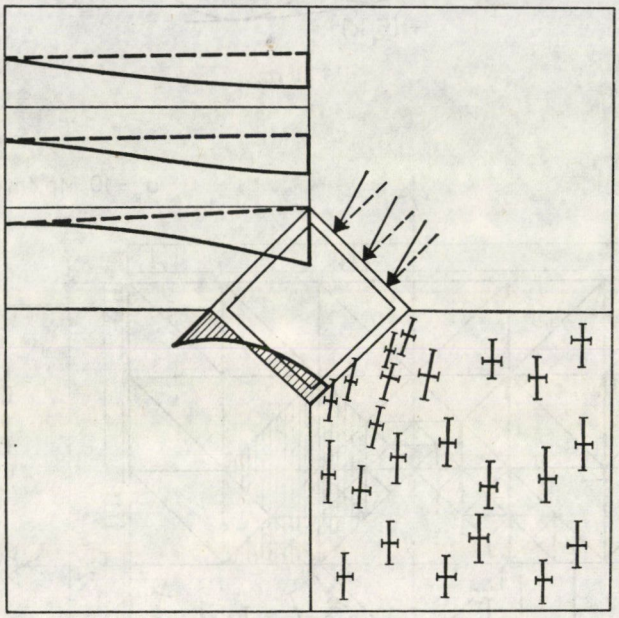


4. ábra

zett. Mellette bal oldalon a hálózat csomópontjainak elmozdulásai szerepelnek. Alul bal oldalon a σ_x és σ_y feszültségeket, jobbra lent a σ_1 és σ_2 főfeszültségeket adtuk meg.

Az 5. ábrán azonos adatok mellett a lyuk körül 25 cm vastag, $E = 2 \cdot 10^7$ Mp/m², $\nu = 0{,}3$ jellemzőkkel adott szerkezetet építettünk be. A fal okozta

megtámasztás következtében keletkező főfeszültségeket a jobb alsó negyedben ábrázoltuk. A bal felső részen adtuk meg a csomópontok függőleges eltolódásait szaggatott, míg a lyuk nélküli állapotban létrejötteket folytonos vonallal kihúzva. A keret nyomatéki ábráját a bal alsó részén rajzoltuk fel.



5. ábra

Az ábra jobb felső részén folytonos vonallal tüntettük fel a falra ható erőket, ha azok a falra súrlódással adódhatnak át, szaggatottan pedig az erőket abban az esetben, ha a fal és a talaj között $f = 0$ súrlódási tényezőt tételeztünk fel. Ebben az esetben a talaj és szerkezet érintő irányban elvált egymástól. Ennek következménye az erők átrendeződése. Az elválási feladatot egy fiktív képlékeny rúd beiktatásával, a kezdeti feszültségek módszerével analóg eljárással oldottuk meg.

5. Összefoglalás

Kontinuumfeladatok vizsgálatakor a képlékeny anyagtörvény alkalmazását a megfelelő numerikus eljárások elterjedése tette lehetővé. Ezek segítségével ma már nemcsak a határállapot elérésekor, hanem általános esetekben is alkalmazhatók a képlékenységtan eredményei. Így egyes anyagok esetében a valóságot lényegesen jobban és pontosabban leíró összefüggések segítségével oldhatók meg különböző mérnöki feladatok. Előnyös az alkalmazása elsősorban

akkor, ha pl. az anyag húzófeszültséget alig tud felvenni, mint talajok és beton esetében is. A képlékeny állapotra alkalmazott összefüggések segítségével elválási feladatok is tárgyalhatók.

A jövőben megkíséreljük a módszert egyéb képlékenységtani feltételekre, illetve térbeli feladatok megoldására is felhasználni.

Application of the method of finite elements in planar plastic problems. The solution by plastic material law of a continuum problem in planar deformation state is presented. After the explanation of the basic correlations, the stress-displacement values of the material in plastic-elastic state are determined by the method of finite elements using iteration. In the case of a contact with a built-in support structure the separation problem due to friction is also solved with the method elaborated for plastic conditions. Finally, application is illustrated by means of a numerical example.

Anwendung der Methode finiter Elemente bei ebenen plastischen Aufgaben. Der Aufsatz zeigt die Lösung der im ebenen Formänderungszustand befindlichen Kontinuumaufgabe mit Anwendung des plastischen Materialgesetzes. Nach Erörterung der grundlegenden Zusammenhänge werden die Spannungs- und Verschiebungswerte nach der Methode der finiten Elemente mit Hilfe des Iterationsverfahrens bestimmt. Das bei der Berührung mit eingebauten Tragkonstruktionen infolge der Reibung auftretende Trennungsproblem wird ebenfalls nach dem für diesen plastischen Zustand ausgearbeiteten Verfahren gelöst. Der Aufsatz enthält auch ein Zahlenbeispiel.

Применение метода конечных элементов на плоскую задачу пластичности. Работа показивает решение плоской задачи с применением закона пластичности. После изложение основных зависимостей с помощю итерационного процесса и методом конечных элементов определяет значения напражения и деформации в упругопластическом состоянии. Задача отделения по фрикции у контакта встроенной конструкции решается тоже методом, выработанном на пластичное состояние. Наконец в работе численный пример показывает применение метода.

A VÉGES ALAKVÁLTOZÁS ELMÉLETE

BÉRES ELEK*

A szerző a véges alakváltozás tárgyalásának olyan módszerét mutatja be, amelyben a tenzorokat mátrixokkal adja meg, és a műveleteket mátrixműveletekként értelmezi. Az ismertetés tartalmazza a Lagrange-, az Euler-, a Cauchy- és a Green-féle alakváltozási tenzorokat. A Descartes-féle koordinátarendszerre vonatkozó összefüggéseket speciális esetként ismerteti.

Rugalmasságtani problémák tárgyalásában lényeges különbség mutatkozik attól függően, hogy az alakváltozásokat kicsinyeknek vagy pedig végeseknek tekintjük. Kis alakváltozásról akkor beszélünk, ha az alakváltozási komponensek az egységhez, szorzataik pedig magukhoz az alakváltozási komponensekhez képest elhanyagolhatók. Ezek az elhanyagolások egyrészt a rugalmasságtan elméletében vonnak maguk után jelentős egyszerűsítéseket, másrészt pedig egyes alapfogalmaknak adnak szemléletes értelmezést. Véges alakváltozások esetében ezekkel az alhanyagolásokkal és a belőlük származó egyszerűsítési lehetőségekkel nem élünk.

Az irodalom egy része, pl. [1] és [4], a véges alakváltozásokat csak a Descartes-féle, koordinátarendszerben tárgyalja és csak a Lagrange-féle értelemben. Az általános tárgyalásnak egy-egy változata található [2], [3] és [5]-ben. Itt a továbbiakban az általános ismertetésnek azt a módját mutatjuk be, amelyben a tenzorokat mátrixukkal adjuk meg és a műveleteket mátrixműveletként kezeljük. Megértése a deriválttenzor fogalmán túlmenő ismereteket nem igényel.

A rugalmas test az alakváltozás előtt a tér B, alakváltozás után pedig b tartományát tölti ki. A test pontjainak a két állapotban való megadása történhetik egyetlen koordinátarendszerben, amikor a B tartomány pontjainak $\mathbf{R}$ helyzetvektorait és a b tartomány megfelelő pontjainak $\mathbf{r}$ helyzetvektorait ugyanarra a koordinátarendszerre vonatkozó összetevőivel adjuk meg, de az $\mathbf{R}$ és $\mathbf{r}$ vektorokat két különböző koordinátarendszerre vonatkoztatva is megadhatjuk. Az első esetet az 1. ábra, a másodikat pedig a 2. ábra szemlélteti. A test ugyanazon pontjainak helyzetvektorai a különböző alakváltozási állapotban $\mathbf{R}$, ill. $\mathbf{r}$, melyek koordinátái X_1, X_2, X_3, ill. x_1, x_2, x_3, azaz, ha a koordinátatengelyekkel párhuzamos egységvektorok $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$, ill. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, akkor

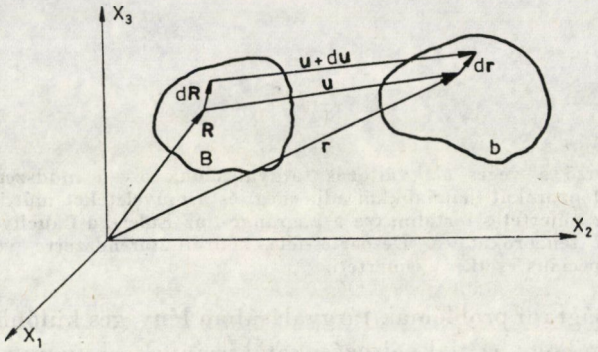
* Dr. Béres Elek, 1011 Budapest, Hunyadi J. u. 11.

$$\mathbf{R} = X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + X_3 \mathbf{E}_3 = X_i \mathbf{E}_i \tag{1}$$

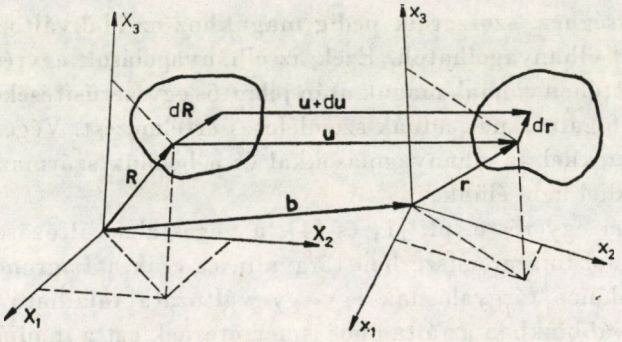
és

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = x_i \mathbf{e}_i \,. \tag{2}$$

Az 1. ábra esetében természetesen $\mathbf{E}_i = \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$.



1. ábra



2. ábra

A test pontjainak **R** és **r** helyzetvektorai között a következő összefüggések állnak fenn. Közös koordinátarendszer esetén az 1. ábrának megfelelően

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{u}, \tag{3}$$

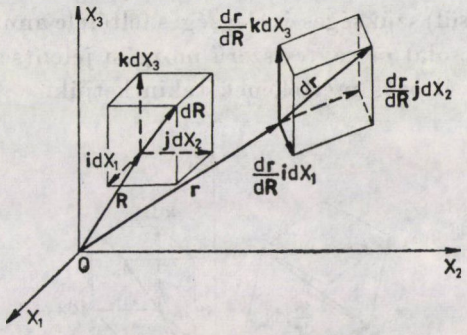
ha pedig az **R** és **r** vektorok különböző koordinátarendszerekben adottak, akkor

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u} - \mathbf{b}, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{b} - \mathbf{u} \tag{4}$$

Ezekben a képletekben **u** vektor a pontnak az elmozdulását jelöli, **b** pedig a két koordinátarendszer kezdőpontjának különbségét megadó vektor.

Különböző koordinátarendszerek esetében sem a **b** vektorra, sem pedig a tengelyek tájolására semmiféle megkötést sem kell tennünk. E koordinátarendszerek tetszőleges görbevonalú koordinátarendszerek lehetnek.

A folytonos közeg alakváltozásának a leírására az előzőkben ismertetetteken belül is két lehetőség kínálkozik, éspedig a Lagrange-féle és az Euler-féle. A Lagrange-féle leírásban a változásokat a kezdeti állapothoz viszonyítjuk. Ekkor a független változó a pont alakváltozás előtti helyzetét megadó **R** helyzetvektor. Az Euler-féle leírásban pedig az alakváltozás utáni állapothoz viszonyítunk, amikor is a független változó a pont alakváltozás utáni helyzetét megadó **r** helyzetvektor.



3. ábra

Ez azt jelenti, hogy a Lagrange szerinti tárgyalás esetében minden változót az **R** vektor függvényében adunk meg, azaz

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{R}) \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{R}), \tag{5}$$

ezzel szemben az Euler-féle értelmezéskor

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r}) \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}) \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}). \tag{6}$$

Természetesen maguk az **u** és **U**, valamint a **b** és **B** vektorok ugyanazok, azaz $\mathbf{u} = \mathbf{U}$ és $\mathbf{b} = \mathbf{B}$, azonban figyelembe kell vennünk, hogy ugyanaz az elmozdulás más-más függvényt jelent attól függően, hogy **R**, ill. **r** függvényében adott. Ezt a függvénykapcsolatban mutatkozó különbséget emeltük ki a kis- és nagybetűvel való jelöléssel. Ennek a megkülönböztető jelölésnek az elmulasztása olyan zavarokhoz vezet, mint amilyen pl. [3] 30—31. oldalain található, ahol ugyanaz az $u_{j,k}$ jel két értelemben szerepel anélkül, hogy arra utalás történt volna. Ennek következtében a (11.4) és (11.6) képletek — adott alakjukban — egyidejűleg nem igazak.

A 3. ábrán az alakváltozás Lagrange-féle értelmezését, a 4. ábrán pedig az Euler-féle értelmezését szemléltetjük egységes, éspedig Descartes-féle koordinátarendszerben.

Tekintsük a folytonos anyag pontjainak azt a halmazát, amely alakváltozás előtt a *G* görbén fekszik. Ez alakváltozás után a *g* görbébe megy át.

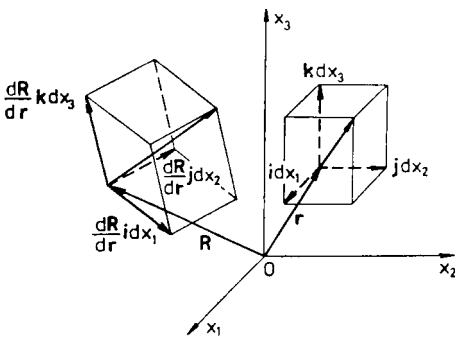
A görbe alakváltozás előtti dR ívelemének hosszát jelölje dS, az alakváltozás utáni dr ívelem hosszát pedig ds, akkor

$$dS^2 = d\mathbf{R}^2 \tag{7}$$

és

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2. \tag{8}$$

Természetes, hogy a dS és ds ívhosszak egyenlősége (ha az minden G görbe minden elemére teljesül) szükséges és elégséges feltétele annak, hogy az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R})$, ill. az $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r})$ kapcsolat merevtestszerű mozgást jelentsen, ezért a $ds^2 - dS^2$ különbséget az alakváltozás mértékének tekinthetjük.



4. ábra

Vegyük előbb az Euler-féle alakváltozási összetevőket. Az $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvény deriválttenzorát jelöljük $d\mathbf{R}/d\mathbf{r}$ módon, akkor $d\mathbf{R} = (d\mathbf{R}/d\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ figyelembevételével írhatjuk hogy

$$ds^2 - dS^2 = d\mathbf{r}^* d\mathbf{r} - \left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}}\,d\mathbf{r}\right)^* \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}}\,d\mathbf{r} = d\mathbf{r}^* \left[\mathbf{I} - \left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}}\right)^* \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}}\right] d\mathbf{r}, \tag{9}$$

amit a

$$2\mathbf{E} = \mathbf{I} - \left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}}\right)^* \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}} \tag{10}$$

jelölés bevezetésével a még tömörebb

$$ds^2 - dS^2 = 2d\mathbf{r}^* \mathbf{E} d\mathbf{r} \tag{11}$$

alakban is írhatunk. A most bevezetett $\mathbf{E}$ tenzort nevezzük Euler-féle alakváltozási tenzornak. Képleteinkben $\mathbf{I}$ az egységtenzor, a * pedig a transzponálás jele.

(4) és (6) figyelembevételével azonban írhatjuk, hogy

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{B} - \mathbf{U}, \tag{12}$$

tehát

$$\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}} = \frac{d}{d\mathbf{r}}(\mathbf{r} + \mathbf{B} - \mathbf{U}) = \mathbf{I} - \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}} \tag{13}$$

és

$$\left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}}\right)^* \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}} = \left(\mathbf{I} - \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}\right)^* \left(\mathbf{I} - \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}\right) = \mathbf{I} - \left(\frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}\right)^* - \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}} + \left(\frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}\right)^* \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}, \tag{14}$$

ezért az Euler-féle alakváltozatási tenzor az elmozdulásvektor deriváltjaival kifejezve

$$2\mathbf{E} = \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}} + \left(\frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}\right)^* - \left(\frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}\right)^* \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}. \tag{15}$$

Az Euler-féle alakváltozási tenzor egy eleme Descartes-féle koordinátarendszer esetén a $\partial U_i/\partial x_j = U_{i,j}$ jelölés és a szummakonvenció alkalmazásával

$$2e_{jk} = U_{j,k} + U_{k,j} - U_{i,j}\, U_{i,k}. \tag{16}$$

Alakilag tekintve azt látjuk, hogy az Euler-féle alakváltozási tenzor az egységtenzornak és egy másik tenzornak a különbsége. Ez utóbbit nevezzük Cauchy-féle alakváltozási tenzornak. Ezt itt a továbbiakban C-vel jelöljük, értelmezése pedig a következő

$$\mathbf{C} = \left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}}\right)^* \frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}}. \tag{17}$$

Egy eleme a Descartes-féle koordinátarendszer esetén

$$c_{jk} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_k}. \tag{18}$$

Az Euler- és a Cauchy-féle alakváltozási tenzorok között tehát a következő összefüggés áll fenn:

$$2\mathbf{E} = \mathbf{I} - \mathbf{C}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{C} = \mathbf{I} - 2\mathbf{E} \tag{19}$$

A Cauchy-féle alakváltozási tenzor is kifejezhető az elmozdulásvektor deriváltjaival. Ekkor a (15) és (16) képletek megfelelői

$$\mathbf{C} = \mathbf{I} - \left(\frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}\right)^* - \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}} + \left(\frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}\right)^* \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{r}}, \tag{20}$$

illetve

$$c_{jk} = \delta_{jk} - U_{j,k} - U_{k,j} + U_{i,j}\, U_{i,k}. \tag{21}$$

Teljesen analóg módon vezethetjük be a Lagrange-féle alakváltozási tenzort. $\mathrm{dr} = (\mathrm{dr}/\mathrm{dR})\ \mathrm{dR}$ figyelembevételével

$$ds^2 - ds^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}}\, d\mathbf{R}\right)^2 - d\mathbf{R}^2 = d\mathbf{R}^* \left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}}\right)^* \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}} - \mathbf{I}\right] d\mathbf{R} \tag{22}$$

illetve a

$$2\mathbf{L} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}}\right)^* \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}} - \mathbf{I} \tag{23}$$

Lagrange-féle alakváltozási tenzor bevezetésével

$$ds^2 - dS^2 = 2d\mathbf{R}^*\, \mathbf{L} d\mathbf{R}\ . \tag{24}$$

Ha ezt követőleg a (4) összefüggést is figyelembe vesszük, akkor

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}} = \mathbf{I} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}} \tag{25}$$

és

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}}\right)^* \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}} = \left(\mathbf{I} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}}\right)^* \left(\mathbf{I} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}}\right) = \mathbf{I} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}}\right)^* + \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}}\right)^* \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}}, \tag{26}$$

tehát a Lagrange-féle alakváltozási tenzor az elmozdulásvektor deriváltjaival kifejezve

$$2\mathbf{L} = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}}\right)^* + \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}}\right)^* \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}}\ . \tag{27}$$

Ennek egy eleme Descartes-féle koordinátarendszer esetében a $\partial u_i/\partial X_j = u_{i,j}$ jelölés bevezetésével

$$2l_{jk} = u_{j,k} + u_{k,j} + u_{i,j}\, u_{i,k}\ . \tag{28}$$

Látható, hogy a Lagrange-féle alakváltozási tenzor is egy tenzorszorzatnak és az egységtenzornak a különbsége. Ezt a deriválttenzorok szorzataként adott tenzort nevezzük a Green-féle alakváltozási tenzornak, melyet itt G-vel jelölünk. A Green-féle alakváltozási tenzor tehát

$$\mathbf{G} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}}\right)^* \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}}\ , \tag{29}$$

illetve elemei a Descartes-féle koordinátarendszerben

$$g_{jk} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}\, \frac{\partial x_i}{\partial X_k}\ . \tag{30}$$

Az elmozdulásvektor deriváltjaival kifejezve pedig

$$\mathbf{G} = \mathbf{I} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}} + \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}}\right)^* + \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}}\right)^* \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{R}}, \tag{31}$$

illetve

$$g_{jk} = \delta_{jk} + u_{j,k} + u_{k,j} + u_{i,j}u_{i,k}. \tag{32}$$

A Lagrange- és a Green-féle alakváltozási tenzorok közötti összefüggés

$$2\mathbf{L} = \mathbf{G} - \mathbf{I}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{G} = \mathbf{I} + 2\mathbf{L}. \tag{33}$$

Descartes-féle koordinátarendszerben — az általános gyakorlatnak megfelelően — a helyzetvektor koordinátáit x, y, z, ill. X, Y, Z, az elmozdulásvektorét pedig u, v, w, ill. U, V, W betűkkel jelölve a Lagrange-féle alakváltozási tenzor elemei:

$$\begin{aligned}
l_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial X}\right)^2\right],\\
l_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Y}\right)^2\right],\\
l_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial Z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial Z}\right)^2\right],\\
l_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}\frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{\partial w}{\partial X}\frac{\partial w}{\partial Y}\right],\\
l_{yz} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Y}\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial Y}\frac{\partial w}{\partial Z}\right],\\
l_{zx} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial Z}\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial X}\frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X}\frac{\partial w}{\partial Z}\right].
\end{aligned} \tag{34}$$

Az Euler-féle alakváltozási tenzor komponensei pedig:

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right],\\
e_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right],\\
e_{zz} &= \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right],\\
e_{xy} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}\right],
\end{aligned} \tag{35}$$

$$e_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial z}\right],$$

$$e_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial z}\right)-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial z}\right].$$

Kis alakváltozás esetében a deriváltak négyzetei és szorzatai, azaz a szögletes zárójelben levő tagok elhanyagolhatók és akkor a Lagrange-féle és az Euler-féle alakváltozási tenzorok közötti különbség eltűnik, mindkettő a kis alakváltozások ismert tenzorára egyszerűsödik. E tenzor komponenseinek szemléletes magyarázatát tudtuk adni. Sajnos erről a véges alakváltozás esetében le kell mondanunk.

Ha a kontinuum egy pontjában az adott v irányt alakváltozás előtt a V egységvektor jelöli, melynek alakváltozás után a v egységvektor által képviselt irány felel meg, akkor ehhez az irányhoz tartozó nyúlásarány

$$\lambda_{(v)}=\Lambda_{(V)}=\frac{ds}{dS}=\sqrt{\frac{d\mathbf{r}^2}{d\mathbf{R}^2}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}}\,d\mathbf{R}\right)^2}{d\mathbf{R}^2}}=\sqrt{\frac{d\mathbf{r}^2}{\left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}}\,d\mathbf{r}\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{d\mathbf{R}^*\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}}\right)^*\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}}\,d\mathbf{R}}{d\mathbf{R}^*d\mathbf{R}}}=\sqrt{\mathbf{VGV}}=\sqrt{\frac{d\mathbf{r}^*d\mathbf{r}}{d\mathbf{r}^*\left(\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}}\right)^*\frac{d\mathbf{R}}{d\mathbf{r}}\,d\mathbf{r}}}=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{v}^*\,\mathbf{Cv}}}, \tag{36}$$

Descartes-féle koordinátarendszerben

$$\lambda_{(v)}=\Lambda_{(V)}=\sqrt{g_{jk}V_jV_k}=\frac{1}{\sqrt{c_{jk}v_jv_k}}, \tag{37}$$

ahol V_i és v_i a V ill. v egységvektor i-edik koordinátája.

A v irányhoz tartozó fajlagos nyúlás pedig

$$E_{(V)}=e_{(v)}=\frac{ds-dS}{dS}=\Lambda_{(V)}-1. \tag{38}$$

Így pl. az x_1 tengely irányához tartozó nyúlásarányok

$$\Lambda_{(1)}=\sqrt{g_{11}}=\sqrt{1+2l_{11}}, \tag{39}$$

$$\lambda_{(1)}=\frac{1}{\sqrt{c_{11}}}=\frac{1}{\sqrt{1-2e_{11}}}, \tag{40}$$

a fajlagos nyúlások pedig

$$E_{(1)} = \sqrt{1 + 2l_{11}} - 1 \tag{41}$$

és

$$e_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2e_{11}}} - 1 \,. \tag{42}$$

Kis alakváltozás esetében $l_{11} = e_{11}$ és kicsinységük miatt sorbafejtés után hatványaik elhanyagolhatók, ezért

$$E_{(1)} = e_{(1)} = l_{11} = e_{11} = \varepsilon_{11},$$

ahol a szokásnak megfelelően ε_{11} kis alakváltozás esetében jelenti az x_1 irányú fajlagos nyúlást.

Vizsgáljuk meg végül, hogy az eredetileg az x_1 és x_2 tengelyekkel párhuzamos, tehát egymásra merőleges egyenesek hajlásszöge milyen mértékben változik meg. Ekkor

$$d\mathbf{R}^*_{(1)} = [dX_1 \quad 0 \quad 0], \quad d\mathbf{R}^*_{(2)} = [0 \quad dX_2 \quad 0] \,.$$

Alakváltozás után ezek a vektorok a $\mathrm{d}\mathbf{r}_1$ és $\mathrm{d}\mathbf{r}_2$ vektorokba mennek át. Az általuk bezárt szöget jelölje Θ_{12}, tehát a szögváltozás

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \Theta_{12}$$

és

$$\sin \gamma_{12} = \cos \Theta_{12} = \frac{d\mathbf{r}_1 \, d\mathbf{r}_2}{ds_1 \, ds_2} \,.$$

Ámde

$$d\mathbf{r}^*_1 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}} \, d\mathbf{R}_{(1)}\right)^* = \left[\frac{\partial x_1}{\partial X_1} dX_1 \quad \frac{\partial x_2}{\partial X_1} dX_1 \quad \frac{\partial x_3}{\partial X_1} dX_1\right],$$

$$d\mathbf{r}^*_2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{R}} \, d\mathbf{R}_{(2)}\right)^* = \left[\frac{\partial x_1}{\partial X_2} dX_2 \quad \frac{\partial x_2}{\partial X_2} dX_2 \quad \frac{\partial x_3}{\partial X_2} dX_2\right],$$

továbbá (39) alapján $\mathrm{d}s_1 = \Lambda_{(1)} \mathrm{d}X_1 = \sqrt{g_{11}} \mathrm{d}X_1 = \sqrt{1 + 2l_{11}} \, \mathrm{d}X_1$, $\mathrm{d}s_2 = \sqrt{1 + 2l_{22}} \, dX_2$, tehát

$$\sin \gamma_{12} = \frac{\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \frac{\partial x_2}{\partial X_1} \frac{\partial x_2}{\partial X_2} + \frac{\partial x_3}{\partial X_1} \frac{\partial x_3}{\partial X_2}\right) dX_1 \, dX_2}{\sqrt{1 + 2l_{11}} \sqrt{1 + 2l_{22}} \, dX_1 \, dX_2} \,.$$

A számlálóban a zárójelben levő kifejezés azonban $g_{12} = 2l_{12}$, ezért a lehetséges egyszerűsítések után

$$\sin \gamma_{12} = \frac{2l_{12}}{\sqrt{1 + 2l_{11}}\sqrt{1 + 2l_{22}}} .$$

Ha az alakváltozások kicsinyek, akkor l_{11}, valamint l_{22} az egységhez képest elhanyagolható, továbbá $2l_{12} = 2\varepsilon_{12}$ és $\sin \gamma_{12} \approx \gamma_{12}$, így az ismert

$$\gamma_{12} = 2l_{12} = 2\varepsilon_{12}$$

eredményre jutunk.

IRODALOM

1. Handbuch der Physik VI. Berlin 1928
2. GREEN, A. F.—ZERNA, W.: Theoretical Elasticity, Oxford 1954
3. SOKOLNIKOFF, I. S.: Mathematical Theory of Elasticity New York—London 1956
4. Филоненко-Вородич, М. М.: Теория утругости, Москва, 1959
5. ERINGEN, A. C.: Mechanics of Continua, New York—London 1967

The Finite Deformation Theory. Finite deformation is discussed by a method where the tensors are given by matrices, and the procedures are interpreted as matrix operations. Explanation contains the Lagrange, Euler, Cauchy, and Green deformation tensors. The relations applying to the Cartesian co-ordinate system are dealt with as special cases.

Theorie der endlichen Formänderung. Der Autor stellt eine Methode zur Behandlung der endlichen Formänderungen dar, bei welcher die Tensoren mit Matrizen angegeben sind und die Operationen als Matrixoperationen aufgefaßt werden. Die Abhandlung enthält die Formänderungstensoren von Lagrange, Euler, Cauchy und Green. Als Spezialfall sind die, das Descartes'sche Koordinatensystem betreffenden Zusammenhänge erörtert.

Теория конечных деформаций. Автор показывает такой метод дискуссии конечных перемещений, в том тензоры даны матрицами и операции толькованы матрицными операциями. Изложение составляет тензоры Лагранжа, тензоры Коши и тензоры Эйлера н тензоры деформации Грина. Формулы относятся к Декартовой системе и излагаются специальними случаями.

VÉGES ELEM MÓDSZER ALKALMAZÁSA A SAJÁTFREKVENCIÁK BEHATÁROLÁSÁRA

BOSZNAY ÁDÁM*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

Szerző legutóbb több előadásban ismertette azt a gondolatát, hogy a véges elem módszer két variánsának (az elmozdulásinak és az egyensúlyinak) megfelelő felhasználásával rugalmas szerkezetek rezgési sajátfrekvenciái hogyan foghatók közre. Ez a dolgozat a gondolatmenet tömör vázlatát adja, és elemzi az irodalomban fellelhető eddigi ilyen kísérletek véletlenszerű numerikus sikerét is.

1. Előzmények. A feladat felvetése

A véges elem módszer ún. (tiszta) elmozdulás eljárása — mint ismeretes — a kontinuumnak modellezett szerkezet előírt számú sajátfrekvenciájára felső korlátot szolgáltat [1]. E felső korlátok az elemszám növelésével és/vagy az elemen belüli elmozdulásmező paramétereinek növelésével javíthatók. Az egyoldali korlátok (numerikus) javíthatósága azonban nem ad hibabecslést. Úgy tűnik, hogy nem rendelkezünk elegendő gyakorlatias hibabecslő formulával sem. Felmerül tehát a hibabecslés olyan megoldásának szükségessége, hogy a javítható felső korlátok mellé javítható alsó korlátokat is tudjunk adni.

Kedvezőnek ígérkeznék, ha ennek az utóbbi feladatnak a megoldására is a véges elem módszert alkalmazhatnánk. Rugalmas kontinuumok bizonyos statikai feladatainak (direkt hatástényezők kiszámítása) megoldása során lehetséges pl. a keresett számérték alulról és felülről történő (javítható) közrefogása a véges elem módszer (tiszta) elmozdulás és (tiszta) egyensúlyi eljárásának egyidejű alkalmazásával [2].

Kísérletek történtek ezért a sajátfrekvenciák hasonló módon történő közrefogására. A kísérleteket illusztráló számpéldák egyes esetekben az előzetesen ismert sajátfrekvenciáknál valóban kisebb értékeket adtak ugyan, de szerzők e jelenség további elméleti vizsgálatát tartották szükségesnek [3, 4].

E dolgozat célja, hogy elemezze a fent említett kísérleteket, majd bebizonyítsa egy olyan eljárás létezését, amely a véges elem módszerrel javítható alsó korlátot is képes adni előírt számú sajátfrekvenciára.

* Prof. Dr. Bosznay Ádám, 1123 Budapest, Győri u. 12.

2. A véges elem módszer egyensúlyi eljárásával dolgozó régebbi kísérletek elemzése

Az elemzésre kerülő kísérletek az e pont címében említett eljárást a következőképpen alkalmazzák. Az egyensúlyi eljárás alapelvének megfelelően a Rayleigh-hányadost feszültségmezők lineáris kombinációjaként előállított feszültségmező függvényében állítják elő, és így jutnak a sajátfrekvencia-approximációkat szolgáltató determináns-egyenlethez. Ezek az approximációk (ugyanúgy, mint a véges elem módszer elmozdulás eljárásánál, vagy a Rayleigh—Ritz módszernél) abból következően, hogy a számítás véges dimenziós altérre való vetítésként is értelmezhető, mindig felső korlátot adnak a sajátfrekvenciákra.

Az említett kísérletek olyan esetekkel voltak kapcsolatosak, amelyekben a zérus is a sajátfrekvenciák közé tartozik.

Más a fizikai jelentése a zérus sajátfrekvenciának az elmozdulásmezővel, és más a feszültségi mezővel dolgozó eljárásnál. Az előbbinél a merev testként, ill. merev tagokból álló mechanizmusként való elmozdulási lehetőséggel jár együtt; a zérus sajátérték multiplicitása ilyenkor mindig véges; egyetlen merev test esetén pl. hat. A feszültségi mezővel dolgozó eljárásnál olyan nem azonosan zérus feszültségmező létezése felel meg zérus sajátfrekvenciának, amely külső erők nélkül egyensúlyt képes biztosítani. Ez a lehetőség statikailag határozatlan szerkezet esetében áll fenn; a zérusnak mint sajátértéknek sokszorossága ebben az esetben már egyszeres határozatlanságnál is végtelen.

Ha a zérus sajátfrekvencia, és így célunk a zérustól különböző sajátfrekvenciák megközelítése, akkor a Rayleigh-hányados számításához felvett (elmozdulás, ill. feszültség) mezőnek (a feladat által kitűzött értelemben) ortogonálisnak kell lennie a zérus sajátfrekvenciának megfelelő valamennyi elmozdulás- ill. feszültség módusokra. Ha ezt nem tartjuk be, akkor eljárásunk értelmezhető a kirótt feltételek lazításaként, így felső korlátok helyett a felső korlátok alsó korlátait kapjuk. Az alsó korlátok esetenként olyan messzire kerülhetnek a felső korláttól, hogy a szóban forgó (pontos) sajátfrekvencia alá is eshetnek, és így azt a benyomást kelthetik, hogy a számítási módszer a sajátfrekvenciákra ad alsó korlátot. A lazítás különösen a feszültségmezővel dolgozó eljárásnál lehet erős, mert itt az előírt ortogonalitás elhagyása végtelen számú feltétel elhagyását jelenti.

Az irodalomból ismert kísérletek a feszültségmezős eljárással születtek. A fentiek tehát megvilágítják a nyert eredmények elméleti hátterét, és egyúttal indítékot adnak olyan módszer kifejlesztésére, amely a véges elem módszerrel a sajátfrekvenciákra ad alsó korlátot.

3. Általános elv alsó korlátok számítására felső korlátok segítségével

A vizsgált sajátértékfeladat legyen

$$(\mathbf{A} - \alpha^2\mathbf{B})\,\mathbf{u} = \mathbf{0},\quad \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

alakú. **A**, **B** és **K** lineáris operátorok; $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ legyen szigorúan pozitív kompakt operátor; **A** a szerkezet rugalmas visszatérítő hatásainak felel meg, **B** pedig a tömeg (tehetetlenségi) hatásoknak; **K** a peremfeltételeket, és amennyiben a szerkezet több részből áll, az illesztési feltételeket fejezi ki. α^2 az ismeretlen sajátfrekvencia négyzete (röviden: sajátérték). A sajátértékek esetünkben pozitívak, és egyenként véges multiplicitásúak; indexezésük az alábbiak szerint szokásos; itt minden sajátérték annyiszor szerepel, amennyi a multiplicitása:

$$\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \ldots \leq \alpha_\nu^2 \leq \ldots\ .$$

Jelöljük az első m számú sajátértéknek (pl. a véges elem módszerrel kiszámított) felső korlátját $\alpha_{f\nu}^2$-vel, $\nu = 1, 2, \ldots, m$. FICHERA szerint $\alpha_{a\nu}^2$-vel jelölhető alsó korlátokat kaphatunk az alábbi formulából:

$$\alpha_{a\nu}^2 = R[I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}), \alpha_{f1}^2, \ldots, \alpha_{fm}^2]. \tag{1}$$

Itt R a szögletes zárójelbe tett számok racionális kifejezését jelenti; $I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ a gömbölyű zárójelbeli operátorhoz rendelt pozitív szám, az ún. s-edrendű, n-edfokú ortogonális invariáns. (1)-ben $s > 0$, $n > 0$, $m \geq s$.

4. A véges elem módszer egyensúlyi eljárásának alkalmazása alsó korlátok számítására

Az (1) formula gyakorlati alkalmazásának akadályát jelenti, hogy $I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ zárt alakban nem állítható elő. Közelítőleg kell kiszámítani; a közelítés csak felülről történhetik, ha (1) alsó korlát adó tulajdonságát meg akarjuk őrizni.

A felső megközelítés megoldására két főbb módszer ismeretes. Az előbbi alkalmazhatóságához olyan különleges követelményeket kell kielégíteni, amiket igen egyszerű szerkezet esetén sikerül csak megtenni. Az utóbbi a szokásos szerkezeteknél akadálytalanul alkalmazható, ezért ebből indulunk ki.

A módszer abból indul ki, hogy az **A**, **B**, **K** operátorokhoz — a Poincaré-féle minimax elv és a közvetlen szemlélet alapján — olyan $\mathbf{A}_{a0}$, $\mathbf{B}_{a0}$, $\mathbf{K}_{a0}$ operátorokat rendelünk hozzá, hogy $\mathbf{A}_{a0}$ állandó együtthatós, pozitív differenciáloperátor, $\mathbf{B}_{a0}$ állandó elemű, pozitív szorzó operátor legyen; az $\mathbf{A} - \mathbf{A}_{a0}$ és $\mathbf{B}_{a0} - \mathbf{B}$ különbségoperátoroknak is pozitívaknak kell lenniük, továbbá

$D(\mathbf{A}_{a0}) \subset D(\mathbf{A})$, $T_{a0} = T$ kell, hogy fennálljon. T_{a0} és T azoknak a térbeli tartományoknak a jele, amelyeket a hozzárendelt és az eredeti szerkezet elfoglalnak. FICHERA egy egyenlőtlenségéből [5]

$$I_s^n(\mathbf{A}_{a0}^{-1}\mathbf{B}_{a0}) > I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}) \tag{2}$$

következik. Az (1)-hez szükséges felső korlát tehát elvben rendelkezésre áll, de sajnos (2) bal oldalát nem tudjuk zárt alakban kiszámítani. E nehézség megkerülésére első lépésben (2) bal oldalát egy „kissé" még tovább növeljük.

A további növelés céljából $\mathbf{A}_{a0}^{-1}$ helyett egy újabb, $\tilde{\mathbf{A}}_{a0}^{-1}$-el jelölt operátort vezetünk be úgy, hogy

$$(\tilde{\mathbf{A}}_{a0}^{-1}\mathbf{r}, \mathbf{r}) \geq (\mathbf{A}_{a0}^{-1}\mathbf{r}, \mathbf{r}) \tag{3}$$

legyen. A gömbölyű zárójel itt skaláris szorzást jelent az

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_T \mathbf{u}^* \mathbf{v} d\tau$$

formula szerint, ahol a * a transzponálás jele. (3)-ból FICHERA említett egyenlőtlensége alapján

$$I_s^n(\tilde{\mathbf{A}}_{a0}^{-1}\mathbf{B}_{a0}) \geqslant I_s^n(\mathbf{A}_{a0}^{-1}\mathbf{B}_{a0}) \tag{4}$$

következik.

(3) kielégítését úgy segítjük elő, hogy $\tilde{\mathbf{A}}_{a0}^{-1}$-et a $\tilde{\mathbf{H}}_{a0}$ Green-féle maggal állítjuk elő

$$\tilde{\mathbf{A}}_{a0}^{-1}\mathbf{r} = \int_T \tilde{\mathbf{H}}_{a0}(\tau, \tau_1)\, \mathbf{r}(\tau_1)\, d\tau_1 \tag{5}$$

alakban.

$\tilde{\mathbf{A}}_{a0}^{-1}$-et úgy értelmezhetjük, mint az $\mathbf{A}_{a0}\mathbf{u} = \mathbf{r}$ statikai feladat közelítő megoldását szolgáló inverz operátort. (Ha például ez a közelítő megoldás véges elem módszer, akkor $\tilde{\mathbf{A}}_{a0}^{-1}$ felépítésében implicite benne van az elemképzés módja, az elemek közötti kapcsolat előírása.). A közelítő megoldási módszerek választása után a (3) egyenlőtlenség kielégítéséről kell gondoskodni úgy, hogy keresni kell az r-eknek olyan tartományát, amelyen belül ez lehetséges. A (3)-mal előírt majorizálás nem hajtható végre akármilyen $\tilde{\mathbf{A}}_{a0}^{-1}$-el, ezért már a közelítő megoldási módszer kiválasztásában is tekintettel kell lenni erre.

(3) bal oldala a közelítő megoldáshoz rendelt közelítő szerkezetben, jobb oldala az eredetihez rendelt szerkezetben felhalmazott alakváltozási energia kétszerese. Ha $\tilde{\mathbf{A}}_{a0}^{-1}$-et az utóbbi szerkezethez rendelt véges elem módszer egyensúlyi eljárásának megfelelően számítjuk, akkor a (3)-mal előírt majorizálás az alakváltozási energiára érvényes felső korlát tétel [6] alapján automatikusan kielégül.

Akárcsak $I_s^n(\mathbf{A}_{a0}^{-1}\mathbf{B}_{a0})$, $I_s^n(\tilde{\mathbf{A}}_{a0}^{-1}\mathbf{B}_{a0})$ sem számítható ki zárt alakban, ezért $I_s^n(\tilde{\mathbf{A}}_{a0}^{-1}\mathbf{B}_{a0})$ és $I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ közé a k_1 és k_2 természetese számoktól függő $I_s^n(\mathbf{A}_{k_1}^{-1}\mathbf{B}_{k_1})$

ún. közbenső ortogonális invariánsokat szerkesztjük úgy, hogy $I_s^n(\mathbf{A}_{k_1}^{-1}\mathbf{B}_{k_1})$-t téve (1)-be $I_s^n(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ helyébe

$$\lim_{m,k_1,k_2\to\infty} \alpha_{av}^2 = \alpha_v^2 \tag{6}$$

legyen.

(6)-ot FICHERA tételei alapján ún. Aronszajn-féle közbenső operátorok szerkesztésével érhetjük el. A megszerkesztés módját és azt, hogy a közbenső ortogonális invariáns hogyan számítható ki zárt alakban, másutt [7] ismertettük. Az ott bemutatottaknak a jelen esetre való alkalmazása az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}_{a0}$, $\mathbf{B}_{a0}$, $\tilde{\mathbf{A}}_{a0}^{-1}$ és $\mathbf{A}_{a0}$ operátorok ismeretét igényli.

IRODALOM

1. STRANG, G.—FIX, G. J.: An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, H. J. 1973, 223. o.
2. SANDER, G.—FRAEIJS DE VEUBEKE, B.: Upper and Lower Bounds to Structural Deformations by Dual Analysis in Finite Elements, Technical Report AFFDL-TR-69-199, January 1967, Air Force Flight Dynamics Laboratory Research and Technology Division Air Force Systems Command Wright-Patterson Air Force Base, Ohio
3. GERADIN, M.: Computational Efficiency of Equilibrium Models in Eigenvalue Analysis, High Speed Computing of Elastic Structures, IUTAM Symposium Liège 1970, B. Fraeijs de Veubeke (szerk.) Universitè de Liège, 1971. 2. kötet, 589. o.—623. o.
4. TABARROK, B.—SODHI, D. S.: Application of Stress Functions to Dynamic Analysis of Shallow Shells, Variational Methods in Engineering, Procedings of an International Conference University of Southampton, 25th September, 1972, Vol. I., 3/46. o.—3/61. o.
5. FICHERA, Gaetano,: Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems, Lecture Notes in Mathematics 8, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1965. 18. V. tétel
6. FLÜGGE, S. (főszerk.): Encyclopedia of Physics Vol. VI/a/2 Mechanics of Solids II (C. Truesdell szerk.) 113. o. (4) tétel
7. BOSZNAY, Á.: Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Mechanik und der Strömungslehre, Techn. Univ. Wien, 1977. Nov. Untere Schranken für die Eigenfrequenzen kontinuierlicher elastischer Systeme mittels der Methode der finiten Elemente.

Application of the method of finite elements for eigenfrequency bracketing. Author has recently explained his idea in several lectures that by the correct use of two variants of the method of finite elements (the displacement and the equilibrium variants) the vibration eigenfrequencies of elastic structures can be readily bracketed. The present paper offers a concise outline of this train of thoughts, as well as the analysis of the random type numerical success of other such experiments referred to in literature.

Einschachtelung der Eigenfrequenzen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. In den in letzter Zeit abgehaltenen Vorträgen hat der Verfasser wiederholt den Gedanken aufgeworfen, wie bei entsprechender Anwendung zweier Varianten (der Verschiebungs- und der Gleichgewichtsvariante) die Eigenschwingungsfrequenzen elastischer Konstruktionen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente eingeschachtelt werden könnten. Der Aufsatz enthält die gedrängte Zusammenfassung dieses Gedankenganges und analysiert die bisherigen zufälligen numerischen Erfolge solcher, in der Literatur enthaltenen Versuche.

Применение метода конечных элементов для ограничения собственных частот. В последних докладах автор высказал мысль о том, как можно ограничить колебательную собственную частоту упругих конструкций при соответствующем использовании двух вариантов метода конечных элементов (сместительного и уравновешивательного). В этой работе дается основная схема и анализуются случайные числовые данные, которые можно было обнаружить в литературе.

AZ INHOMOGÉN KÉPLÉKENY FÉLSÍK ÉS FÉLTÉR EGYSZERŰ DISZKRÉT MODELLJE

KALISZKY SÁNDOR*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

NÉDLI PÉTER**

Szerzők bemutatják, hogy egy új diszkrét modell segítségével egyszerűen elő lehet állítani az inhomogén féltér ill. félsík statikailag lehetséges feszültségmezőit, ezek pedig különböző képlékenységtani feladatok vizsgálatának alapját képezhetik. A numerikus módszer kidolgozásánál feltételezik, hogy az inhomogén féltér, ill. félsík ideálisan képlékeny anyagú, síkbeli alakváltozási ill. feszültségi állapotban van és peremére közvetlenül vagy valamilyen szerkezet közvetítésével csak normál feszültségek adódhatnak át. Az alkalmazás lehetőségét két feladat szemlélteti: a képlékeny ágyazaton nyugvó képlékeny gerendák teherbírásszámítása és optimális tervezése és a merev test közvetítésével terhelt képlékeny féltér vizsgálata. Mindkét feladat megoldása lineáris programozásra vezet.

1. Bevezetés

A közelmúltban az Építőmérnökkari Mechanika tanszéken olyan diszkrét mechanikai modelleket dolgoztunk ki, amelyek a rugalmas ill. képlékeny ágyazat és a reá helyezett szerkezet viszonylag pontos, de pl. a véges elemek módszernél lényegesen kisebb számítási munkát igénylő numerikus vizsgálatára alkalmasak [1, 2, 3, 4]. Az alábbiakban az egyik mechanikai modell, az ún. nyírási modell általánosítását mutatjuk be. Ennek az általánosított modellnek a segítségével elő lehet állítani a képlékeny állapotú inhomogén félsík, ill. féltér statikailag elérhető feszültségmezőit és ezáltal az eddigi numerikus vizsgálatok köre további képlékenységtani feladatokra is kiterjeszthető. A feladatok megoldása lineáris programozásra vezet.

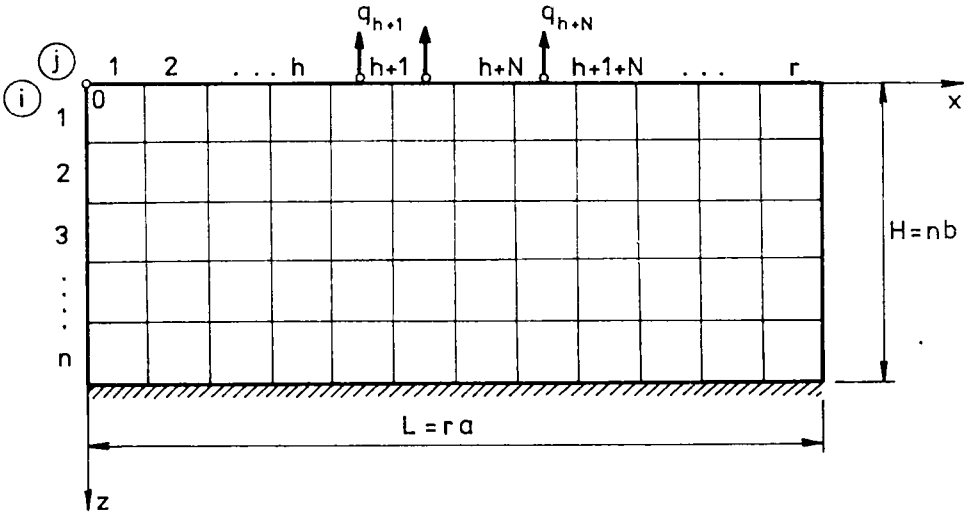
A továbbiakban feltételezzük, hogy az inhomogén félsík, ill. féltér síkbeli feszültség-, ill. síkbeli alakváltozás-állapotban van, anyaga tökéletesen képlékeny és felső vízszintes határoló élére ill. lapjára — közvetlenül vagy más szerkezetek közvetítésével — csak függőleges erők működhetnek.

2. A modell ismertetése

A síkbeli feszültségállapotban levő képlékeny félsík illetőleg a síkbeli alakváltozás-állapotban levő képlékeny féltér javasolt mechanikai modellje olyan azonos méretű, prizmatikus elemekből áll, amelyek egymásra a vízszintes

* Dr. Kaliszky Sándor, 1089 Budapest, Delej utca 6.
** Dr. Nédli Péter, 1118 Budapest, Homoród utca 20.

érintkezési lapok mentén csak normálerőket adnak át, a függőleges lapok mentén pedig normálerők, nyíróerők és nyomatékok ébredhetnek. A továbbiakban — a numerikus vizsgálatoknál szokásos módon — a félsík ill. féltér $L = ra$ és $H = nb$ méretű része képezi vizsgálataink tárgyát (1. ábra).



1. ábra

A tömegerőt elhanyagolva az *ij* elem egyensúlyát az alábbi két egyenlet fejezi ki (2a ábra):

$$(s_{ij} - s_{i+1,j}) + (t_{ij} - t_{i,j+1}) = 0\,, \tag{1}$$

$$(m_{ij} - m_{i,j+1}) + \frac{a}{2}(t_{ij} + t_{i,j+1}) = 0\,, \tag{2}$$

$$n_{ij} - n_{i,j+1} = 0\,.$$

Ezekhez *statikai kerületi feltételek* csatlakoznak. Ha például a félsíkot, ill. félteret $q_{h+1}, \ldots, q_{h+N}$ függőleges erők terhelik, akkor a felső határoló vonalra ill. síkra vonatkozóan az

$$\begin{aligned} &s_{1j} = 0;\ (j = 1, 2, \ldots, h),\ (j = h + 1 + N, \ldots, r) \\ &s_{1j} = q_j;\ (j = h + 1, \ldots, h + N) \end{aligned} \tag{3}$$

feltételek írhatók fel. Ha a függőleges határoló élek ill. síkok *szabadok*, akkor

$$\left.\begin{aligned} &m_{i1} = t_{i1} = 0\,, \\ &m_{i,r+1} = t_{i,r+1} = 0\,, \\ &n_{i1} = n_{i,r+1} = 0\,. \end{aligned}\right\} \quad (t = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

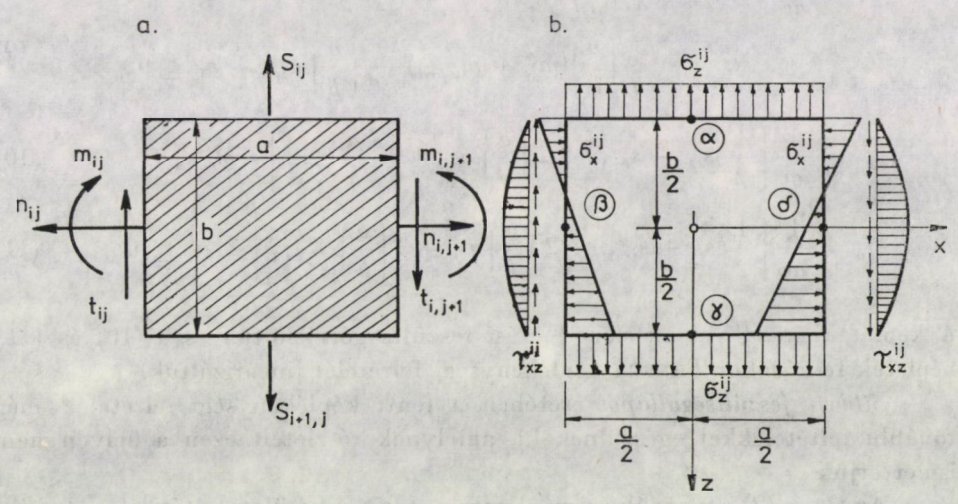
Mozdulatlan függőleges határoló élek ill. síkok mentén statikai kerületi feltételek nincsenek megszabva.

Az elemre működő erők és erőpárok függvényében levezethetők olyan σ_x^{ij}, σ_z^{ij}, σ_{zx}^{ij} feszültségmezők, amelyek egy elem valamennyi pontjában kielégítik a

$$\frac{\partial \sigma_x^{ij}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{ij}}{\partial z} = 0 ,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}^{ij}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z^{ij}}{\partial z} = 0$$

egyensúlyi egyenleteket. Egy ilyen *statikailag lehetséges* feszültségmező az alábbi (2/b ábra):



2. ábra

$$\sigma_x^{ij} = \frac{-12}{b^2 c}\left(\frac{z}{b}\right)\left\{\frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{1}{4}\right](t_{ij} - t_{i,j+1}) + \left(\frac{x}{a}\right)(m_{ij} - m_{i,j+1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{n_{ij}}{bc} - \frac{1}{2}(m_{ij} + m_{i,j+1})\right\}, \tag{5}$$

$$\sigma_z^{ij} = \frac{1}{ac}\left\{6\,(s_{ij} - s_{i+1,j})\left[\frac{1}{3}\left(\frac{z}{b}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{b}\right)\right] + \frac{1}{2}(s_{ij} + s_{i+1,j})\right\}, \tag{6}$$

$$\tau_{xz}^{ij} = \frac{6}{bc}\left[\left(\frac{z}{b}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]\left[\left(\frac{x}{a}\right)(t_{ij} - t_{i,j+1}) - \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{i,j+1})\right]. \tag{7}$$

A képletekben c az elem y irányú méretét jelöli.

A fenti feszültségmező akkor lesz *statikailag elérhető*, ha az elem valamennyi pontjában kielégíti a képlékenységi feltételeket. A továbbiakban a

képlékenységi feltételek teljesülését csak az elem határoló éleinek középpontjaiban biztosítjuk, könnyen belátható azonban, hogy ezáltal az elem $\beta - \delta$ középvonalán fekvő pontokban is kielégülnek a képlékenységi feltételek. TRESCA elméletét alkalmazva ezek a feltételek *síkbeli alakváltozás állapotban* az (5)—(7) feszültségeloszlások felhasználásával az alábbi módon fejezhetők ki:

$$f_\alpha = \frac{1}{ac}\left| s_{ij} + \frac{3}{4}\left(\frac{a}{b}\right)^2 (t_{ij} - t_{i,j+1}) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{b}\left(\frac{a}{b}\right)(m_{ij} + m_{i,j+1}) - \left(\frac{a}{b}\right) n_{ij} \right| - \sigma_0^{ij} \leq 0\,, \tag{8}$$

$$f_\gamma = \frac{1}{ac}\left| s_{i+1,j} - \frac{3}{4}\left(\frac{a}{b}\right)^2 (t_{ij} - t_{i,j+1}) - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{b}\left(\frac{a}{b}\right)(m_{ij} + m_{i,j+1}) - \left(\frac{a}{b}\right) n_{ij} \right| - \sigma_0^{ij} \leq 0\,, \tag{9}$$

$$f_\beta = \frac{1}{ac}\left[\frac{1}{2}\left| s_{ij} + s_{i+1,j} - 2\left(\frac{a}{b}\right) n_{ij}\right| + 3\left(\frac{a}{b}\right)\left| t_{ij}\right|\right] - \sigma_0^{ij} \leq 0\,, \tag{10}$$

$$f_\delta = \frac{1}{ac}\left[\frac{1}{2}\left| s_{ij} + s_{i+1,j} - 2\left(\frac{a}{b}\right) n_{ij}\right| + 3\left(\frac{a}{b}\right)\left| t_{i,j+1}\right|\right] - \sigma_0^{ij} \leq 0\,. \tag{11}$$

A képletekben σ_0^{ij}-vel az elem folyási feszültségét jelöltük és a (10) és (11) képletek felírásakor TRESCA képlékenységi feltételét linearizáltuk.

Síkbeli feszültségállapot esetében a fenti képlékenységi feltételek még további feltételekkel egészülnek ki, amelynek részleteit ezen a helyen nem ismertetjük.

Az (1) és (2) egyensúlyi egyenletek, a statikai kerületi feltételek valamint a (8)—(11) képlékenységi feltételek a teljes képlékeny, félsík ill. féltér statikailag elérhető feszültségmezőinek egyszerű előállítását teszik lehetővé, ezek pedig különböző képlékenységtani feladatok numerikus vizsgálatának alapjául szolgálhatnak. Az alábbiakban bemutatjuk az alkalmazás néhány lehetőségét.

3. Alkalmazások

3.1. *Képlékeny ágyazású, képlékeny gerendák teherbírásszámítása és optimális tervezése*

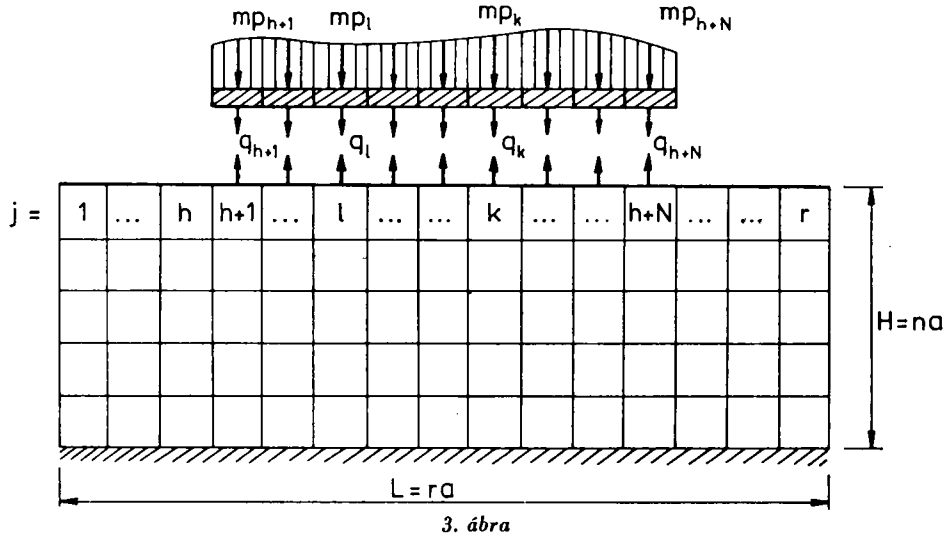
Vegyünk szemügyre egy $m \cdot p_k$ egyparaméteres teherrel terhelt, m_k^0 törőnyomatékokkal bíró $d = Na$ hosszú képlékeny gerendát, amely képlékeny ágyazaton nyugszik (3. ábra). Az ágyazat és a gerenda között q_k érintkezési erők ébrednek, így az ágyazat felső peremére az

$$s_{1k} = 0; \quad (k = 1, 2, \ldots, h), \quad (k = h + 1 + N, \ldots, r)$$
$$s_{1k} = q_k; \quad (k = h + 1, \ldots, h + N) \tag{12}$$

kerületi feltételek írhatók fel. Ha a gerenda az ágyazatról felemelkedhetik, akkor ehhez még a

$$q_k \leq 0 \tag{13}$$

feltétel járul.



3. ábra

A teljes gerenda egyensúlyát két egyenlet fejezi ki:

$$\sum_{k=h+1}^{h+N} (m_s p_k + q_k) = 0\,,$$
$$\sum_{k=h+1}^{h+N} k(m_s p_k + q_k) = 0\,, \tag{14}$$

a keresztmetszetek képlékenységi feltétele pedig

$$a \left| \sum_{l=h+1}^{h+N} (k - l)(m_s p_l + q_l) \right| - m_k^0 \leq 0 \quad (k = h + 1, \ldots, h + N) \tag{15}$$

alakban adható meg. A (14) és (15) képletekben m_s a teher statikailag elérhető intenzitását jelöli.

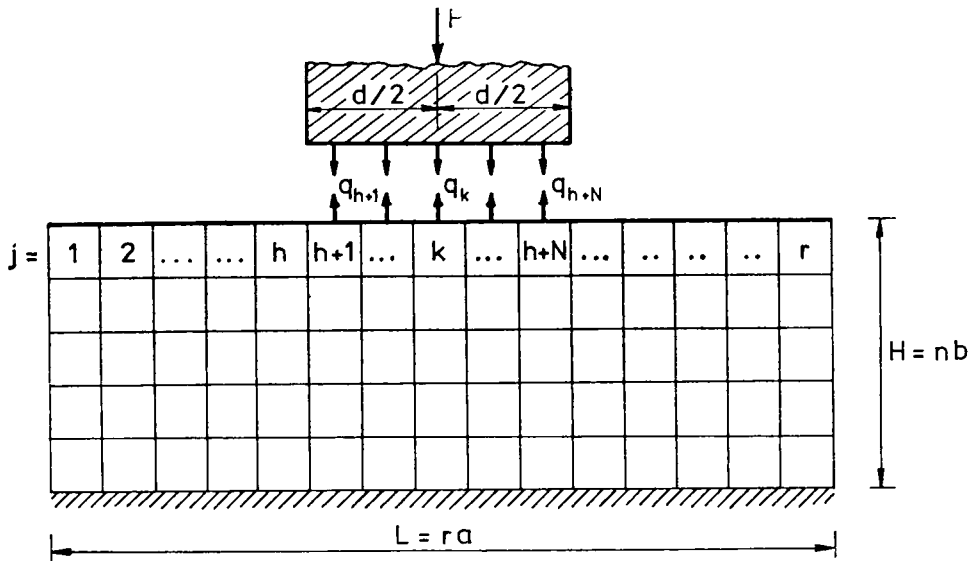
Ha a gerenda *teherbírását* keressük, akkor a képlékeny határállapot-vizsgálat statikai tétele szerint az m_t törőintenzitás az

$$m_t = m_s = \max! \tag{16}$$

feltétel alapján határozható meg. A gerenda *optimális tervezése* esetében viszont az optimum-feltétel

$$\sum_{k=h+1}^{h+N} m_k^0 = \min! \tag{17}$$

alakban fejezhető ki.



4. ábra

Megállapítható, hogy az ágyazat (1), (2) egyensúlyi egyenletei és (8)—(11) képlékenységi feltételei, valamint a gerenda (14) egyensúlyi egyenletei és (15) képlékenységi feltételei a kerületi feltételekkel együtt lineáris egyenlet-, ill. egyenlőtlenségrendszert alkotnak, és a (16), ill. (17) extremumfeltétel ugyancsak lineáris alakú. A képlékeny ágyazaton nyugvó képlékeny gerendák teherbírásszámítása és optimális tervezése tehát egyaránt lineáris programozási feladat.

3.2. Parciálisan terhelt félsík ill. féltér teherbírása

Vizsgáljunk egy képlékeny félsíkot ill. félteret, melynek $d = Na$ hosszúságú szakaszát egy merev test közvetítésével P nagyságú erő terheli (4. ábra). Az ágyazat felső peremére ennél a feladatnál is a (12)-vel kifejezett feltételek írhatók fel, a merev test egyensúlyát pedig az alábbi két egyenlet fejezi ki:

$$\sum_{k=h+1}^{h+N} q_k + P_s = 0,$$
$$\sum_{k=h+1}^{h+N} kq_k + \left(h + \frac{N+1}{2}\right) P_s = 0 . \tag{18}$$

Végül a félsík ill. féltér teherbírását a statikai tétel szerint a

$$P_t = P_s = \max! \tag{19}$$

feltétel szabja meg. Látható, hogy a (18) és (19) egyenletek a félsík, ill. féltér statikailag elérhető feszültségállapotát leíró (1), (2) és (8)—(11) egyenletekkel és a kerületi feltételekkel együtt ennek a feladatnak a megoldásánál is lineáris programozásra vezetnek.

4. Megjegyzések

Az ismertetett modell és számítási eljárás segítségével a képlékeny félsík, ill. féltér inhomogenitása és — a megfelelő elemek szilárdságát (σ_0^{ij}) zérusnak tekintve — nyílások, ill. üregek jelenléte is egyszerűen figyelembe vehető. Annak sincs akadálya, hogy TRESCA képlékenységi feltétele helyett az anyag viselkedését jobban megközelítő képlékenységi feltételeket alkalmazzuk és a félsík, ill. féltér önsúlyát is figyelembe vegyük. Ugyanakkor a modell térbeli általánosítása bonyolultabb feladatok (pl. ágyazaton nyugvó lemezek, tartórácsok, panelvázas szerkezetek) vizsgálatát is lehetővé teszi. Ilyen irányú kutatások folyamatban vannak.

IRODALOM

1. KALISZKY S.—GALASKÓ GY.: A rugalmas ágyazat egy új modellje *Mélyépítéstudományi Szemle* **25** (1975) 298—305
2. KALISZKY S.—GALASKÓ, GY.: Numerical Applications of the Pyramid Model of Subgrade Analysis. *Periodica Polytechnica, Civ. Eng.* **20** (1976), No 3—4
3. KALISZKY S.: A rugalmas ágyazat egyszerű, diszkrét modelljei *Építés-, Építészettudomány* (1978)
4. KALISZKY S.: Simple, Discrete Models of the Elastic Subgrade. *Acta Technica Hung.* (in press)

A simple discrete model of the inhomogeneous plastic half-plane and half-space. The paper describes the simple production of the statically feasible stress fields of an inhomogeneous half-space or half-plane by means of a new type discrete model which, in turn, may render a basis for studies on various plasticity problems. Elaboration of the numerical method has assumed that the inhomogeneous half-space or halfplane of an ideally plastic material would be in planar deformation or stress state, and that its edge would be directly affected, or indirectly via some structure, only by normal stresses. Application possibilities are illustrated by two problems: calculation of the load bearing capacity and optimum design of plastic brams held by plastic support, and the examination of a plastic half-space loaded with the intermediary of a rigid body. The solution of both problems would lead to linear programming.

Das einfache diskrete Modell der Halbebene und des Halbraumes. Der Aufsatz zeigt, daß die statisch möglichen Spannungsfelder des inhomogenen Halbraumes, bzw. der inhomogenen Halbebene mit Hilfe eines neuen diskreten Modells leicht hergestellt werden und diese die Grundlage zur Untersuchung verschiedener Aufgaben im Rahmen der Plastizitätslehre bilden können. Bei der Ausarbeitung der numerischen Methode wurde angenommen, daß der inhomogene Halbraum bzw. die inhomogene Halbebene aus ideal plastischem Stoff besteht, sich im ebenen Formänderungs- bzw. Spannungszustand befindet und auf die Ränder unmittelbar oder durch Vermittlung einer Konstruktion nur Normalspannungen übertragen werden können. Die Anwendungsmöglichkeit veranschaulichen zwei Aufgaben: die Berechnung der Tragfähigkeit und die optimale Planung von, auf plastischer Bettung gelegenen plastischen Balken und die Untersuchung des durch Vermittlung eines starren Körpers belasteten plastischen Halbraumes. Die Lösung beider Aufgaben führt zur linearen Programmierung.

Дискретная модель неоднородных пластичных полуплоскости и полупространства. Работа показывает, что с помощью новой дискретной модели можно просто изготовить статически возможное поле напражения неоднородных полупросиранства или полуплоскости, которое является основом анализа разных задач теории платичности. Во вырабатывании численного метода материал неоднородных полупространства или полуплоскости считается идеальным пластичным в состоянии плоского напражения или плоской деформации и нагружено по краям только нормальными напряжениями.

Возможность применения представляется двумями задачами: рассчет несущей способности и оптимизации пластических балок, лежащие на пластичном упругом основании и анализ пластичного полупространства нагружен через твёрдое тело. Решение обоих задач ведутся на задачу линейного программирования.

EGYENES TENGELYŰ, A HOSSZA MENTÉN VÁLTOZÓ JELLEMZŐKKEL BÍRÓ, HAJLÍTÓ LENGÉST VÉGZŐ RÚD SAJÁTKÖRFREKVENCIÁINAK JAVÍTHATÓ KÖZREFOGÁSA

KOVÁCS MIKLÓS,* RICHLIK GYÖRGY,**
TAKÁCS FERENC,*** TÓTH GYÖRGY****

Jelen tanulmány a címben foglalt feladat megoldására ad számítási módszert. Sajátkörfrekvencia felső korlátok nyerése a Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle finitizálással, alsó korlátok meghatározása a Fichera-féle ortogonális invariánsok elméletének BOSZNAY által javasolt módon történő alkalmazásával lehetséges.

1. Bevezetés

Mint ismeretes [1], az egyenes tengelyű rúd egyszerű hajlító lengését a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI_z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -\varrho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

változó együtthatós, parciális differenciálegyenlet, és a hozzá tartozó peremfeltételrendszer definiálja. Az alkalmazott jelölések:

$E = E(x)$	a Young-féle modulusz,
$A = A(x)$	a keresztmetszeti idom területe,
$\varrho = \varrho(x)$	a rúdanyag sűrűsége,
$I_z = I_z(x)$	a keresztmetszeti síkidom z súlyponti főtengelyére számított másodrendű nyomatéka,
$u = u(x, t)$	a rúdtengely xy fősíkban mutatkozó, „kicsinynek" tekintett eltolódása,
xyz	a rúd „saját koordinátái" [2],
t	az idő.

(1) állóhullámú megoldását keresve,

$$u(x, t) = v(x) \sin \alpha t \tag{2}$$

helyettesítéssel élve, a

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_z \frac{d^2 v}{dx^2}\right) = \alpha^2 \varrho A v \tag{3}$$

* Kovács Miklós, 1116 Budapest, Hengermalom u. 5-3-B-8
** Richlik György, 1204 Budapest, Orsolya u. 1.
*** Takács Ferenc, 1118 Budapest, Szüret u. 27.
**** Tóth György, 1055 Budapest, Szt. István krt. 13.

közönséges differenciálegyenlethez jutunk. Itt

$v = v(x)$ az $u(x, t)$ elmozdulás ún. amplitúdó eloszlás függvénye,
α a sajátkörfrekvencia.

Vezessük be az alábbi definíciókkal az A és B operátorokat:

$$Av \doteq \frac{d^2}{dx^2}\left(EI_z \frac{d^2v}{dx^2}\right), \tag{4}$$

$$Bv \doteq \varrho Av.$$

(4)-gyel a (3) diffrenciálegyenlet

$$(A - \alpha^2 B)\, v = 0 \tag{5}$$

operátoros egyenletéhez jutunk.
A feladat peremfeltételrendszerét

$$Kv = 0 \tag{6}$$

alakba tömöríthetjük, ahol K lineáris operáció [2].

Megjegyezzük, hogy a (4)-gyel definiált A és B operátorok lineárisak, pozitívak, szimmetrikusak, s A egyben önadjungált differenciáloperátor is. Így az (5) és (6) egyenletekkel meghatározott sajátértékfeladatnak megszámlálhatóan végtelen sok izolált sajátértéke van, és ezek a végesben nem torlódhatnak [2]. A sajátértékeket nagyságuk szerint rendezhetjük, a többszörösöket megfelelő sokszor véve:

$$\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \ldots \leq \alpha_\nu^2 \leq \ldots \ . \tag{7}$$

A továbbiakban célul kitűzött problémánk megoldását, azaz az (5), (6) sajátértékfeladat első n számú, (7)-tel jelölt sajátértékeinek közrefogását két lépésben végezzük. Először felső korlátokat nyerünk a Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle finitizálással, majd ezek felhasználásával az ortogonális invariánsok módszerét alkalmazva kapunk alsó korlátokat.

2. Javítható felső korlátok számítása a Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle finitizálással

E módszer alkalmazhatóságának feltétele (a numerikus szempontokat is szem előtt tartva) az önadjungáltság és pozitív definitség esetünkben teljesül, és így viszonylag egyszerűen juthatunk megfelelő számú felső korláthoz.

Ha pl. az első n számú $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ frekvenciához akarunk felső korlátokat meghatározni, akkor találnunk kell n darab

$$\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x) \tag{8}$$

lineárisan független rendszert alkotó, és megfelelő peremfeltételeket kielégítő függvényt. [3] ad útmutatást arra nézve, miként lehet ilyen tulajdonságú függvényrendszert Hermite-polinomok segítségével konstruálni. Mivel (5), (6) önadjungált és pozitív definit, elméletileg vehetjük φ_ν-ket ($\nu = 1, \ldots, n$) megengedett függvényeknek.

Ezekután erre az n-dimenziós altérre történő vetítéssel a

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(A\varphi_i, \varphi_j) - \alpha_f^2 (B\varphi_i, \varphi_j)\right] c_i = 0, \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

finit sajátértékfeladathoz jutunk [4], ahol

$$(A\varphi_i, \varphi_j) \doteq \int_{x=0}^{L} \frac{d^2}{dx^2}\left(EI_z \frac{d^2\varphi_i}{dx^2}\right) \varphi_j dx,$$

$$(B\varphi_i, \varphi_j) \doteq \int_{x=0}^{L} \varrho A \varphi_i \varphi_j dx,$$

L pedig a rúd hossza.

(9) $\alpha_{f\nu}^2$ ($\nu = 1, \ldots, n$) gyökei pozitív valós számok és fennáll, hogy

$$\alpha_\nu^2 \leq \alpha_{f\nu}^2, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_{f\nu}^2 = \alpha_\nu^2, \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Nyilvánvaló tehát, hogy n növelésével javuló felső sajátkörfrekvencia korlátok adódnak. (9) $\alpha_{f\nu}^2$-hez tartozó $w_{f\nu}$ sajátvektora a

$$w_{f\nu} = \sum_{i=1}^{n} c_{i\nu} \varphi_i$$

alakba írható, ahol $c_{i\nu}$ ($i = 1, \ldots, n$) a (9) egyenlet $\alpha_f^2 = \alpha_{f\nu}^2$-nél vett megoldása.

(9) típusú ún. „két mátrixos" sajátértékfeladat sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározására [5] jól használható numerikus eljárás ALGOL programját közli, feltételezve, hogy a mátrixok közül az első pozitív definit. Vizsgálataink azt mutatták, hogy ez az eljárás biztosan csak abban az esetben működik, ha a φ_ν — k ($\nu = 1, \ldots, n$) komparatív függvények. Ez egyben a tényleges megoldás jobb közelítését is jelenti.

3. Javítható alsó korlátok számítása az ortogonális invariánsok módszerével

Az általunk választott, javítható alsó korlátok számítására szolgáló eljárás elméleti megalapozását Bosznay előadásai [6], [7], [8], [9], [10], [11] tartalmazzák, amelyekben módszert adott az ún. Fichera-formulában [12]

előforduló ortogonális invariánsok kiszámítására (ill. becslésére) tetszőleges térbeli rúdszerkezetek vizsgálata esetében. Célunk, a [6] — [11]-ben kidolgozott elvi módszert adott feladatunkra alkalmazni úgy, hogy az egyben algoritmusul szolgálhasson konkrét numerikus számítások végzéséhez. (A bizonyításokat mellőzzük, csak az eljárás tömör vázlatát közöljük.)

Esetünkben — közbenső operátorokkal [2] felírva, $s = m = 1$ helyettesítéssel élve, [8] — a Fichera formula a következő:

$$\frac{1}{\alpha_{av}^2} = \frac{I_1^1(\mathrm{A}_{k1}^{-1}\,\mathrm{B}_{k2}) - I_1^1(\mathrm{P}_n\,\mathrm{A}_{k1}^{-1}\,\mathrm{B}_{k2}\,\mathrm{P}_n)}{I_0^1(\mathrm{P}_n^{(v)}\,\mathrm{A}_{k1}^{-1}\,\mathrm{B}_{k2}\,\mathrm{P}_n^{(v)})} + \frac{1}{\alpha_{fv}^2}, \qquad (v = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

ahol az egyes ortogonális invariánsok a következőképpen számíthatók:

$$I_1^1(\mathrm{A}_{k1}^{-1}\,\mathrm{B}_{k2}) = \int_{x=0}^{L} \varrho_a A_a G_a(x, x)dx + \sum_{l=1}^{k_2+2k_1} \int_{x=0}^{L} \Psi_l(x)\Phi_l(x)\,dx, \tag{13}$$

$$I_1^1(\mathrm{P}_n\,\mathrm{A}_{k1}^{-1}\,\mathrm{B}_{k2}\,\mathrm{P}_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha_{fi}^2},$$

$$I_0^1(\mathrm{P}_n^{(v)}\,\mathrm{A}_{k1}^{-1}\,\mathrm{B}_{k2}\,\mathrm{P}_n^{(v)}) \quad \text{def} \quad 1.$$

(13)-ban

$$\Psi_l(x) = \psi_l^{(1)}(x), \quad \Phi_l(x) = -\varphi_l^{(1)}(x) \qquad (l = 1, \ldots, k_2),$$

$$\Psi_l(x) = \psi_l^{(2)}(x), \quad \Phi_l(x) = -\varphi_l^{(2)}(x), \qquad (l = k_2 + 1, \ldots, k_2 + k_1),$$

$$\Psi_l(x) = \psi_l^{(3)}(x), \quad \Phi_l(x) = \varphi^{(3)}(x), \qquad (l = k_2 + k_1 + 1, \ldots, k_2 + 2k_1),$$

és

$$\varphi_s^{(1)}(x) = \mathrm{G}_a\mathrm{M}_a\zeta_s(x), \qquad (s = 1, \ldots, k_2),$$

$$\psi_s^{(1)}(x) = \sum_{r=1}^{k_2}\left[\int_{x=0}^{L} \mathrm{M}_a\zeta_l(x)\,\zeta_m(x)\,dx\right]_{rs}^{-1} \mathrm{M}_a\zeta_r(x), \qquad (l, m, s = 1, \ldots, k_2),$$

$$\varphi_s^{(2)}(x) = \varphi_s^{(3)}(x) = \sum_{j=1}^{k_1}\left[\int_{x=0}^{L} \mathrm{G}_a\mathrm{A}\eta_r(x)\,\mathrm{C}_a\eta_m(x)\,dx\right]_{js}^{-1} \cdot \mathrm{G}_a\mathrm{C}_a\eta_j(x),$$

$$(r, m, s = 1, \ldots, k_1), \tag{14}$$

$$\psi_s^{(2)}(x) = \mathrm{B}_a\mathrm{G}_a\mathrm{C}_a\eta_s(x), \qquad (s = 1, \ldots, k_1),$$

$$\psi_s^{(3)}(x) = \sum_{r,l=1}^{k_2}\left[\int_{x=0}^{L} \mathrm{M}_a\zeta_l(x)\,\zeta_m(x)\,dx\right]_{rt}^{-1} \mathrm{M}_a\zeta_l(x)\int_{x=0}^{L} \mathrm{M}_a\zeta_r(x)\,\mathrm{G}_a\mathrm{C}_a\eta_s(x)\,dx,$$

$$(l, m = 1, \ldots, k_2),$$

$$(s = 1, \ldots, k_1).$$

(14)-ben az egyes operátorokat az alábbiak definiálják:

$$\mathrm{A}_a v \doteq E_a I_{za} \frac{d^4 v}{dx^4},$$

$$\mathrm{B}_a v \doteq \varrho_a A_a v,$$

$$\mathrm{C}_a v \doteq (\mathrm{A} - \mathrm{A}_a)\, v,$$

$$\mathrm{M}_a v \doteq (\mathrm{B}_a - \mathrm{B})\, v,$$

$$\mathrm{G}_a v \doteq \int_{\xi=0}^{L} G_a(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi\,,$$

ahol az E_a, A_a, ϱ_a, I_{za} állandók az (1)-gyel leírt eredeti feladathoz rendelt ún. „alsó alapfeladat" [2] (1)-nek megfelelő mennyiségei, a $G_a(x, \xi)$ mag pedig az alsó alapfeladat Green függvénye.

$\eta_s(x)$ $(s = 1, \ldots, k_1)$ és $\zeta_t(x)$ $(t = 1, \ldots, k_2)$-a számoló által alkalmasan megválasztott — lineárisan független, komparatív függvényrendszer. Ezek konstruálásánál célszerű felhasználni a már megtalált, és a Poincaré—Rayleigh—Ritz eljárásnál alkalmazott (8) rendszert, valamint a megoldásként kapott (11) rendszert.

Látható, hogy a (12) formula alapján meghatározható α_{av} $(v = 1, \ldots, n)$ alsó sajátkörfrekvencia korlátok kiszámítása gépi úton, viszonylag egyszerű programrendszer elkészítését kívánja meg.

IRODALOM

1. Bosznay Á.: Egyenes rudak egyszerű lengései. II. rész. Hosszirányú, csavaró és hajlító lengések. Mérnöki Továbbképző Intézet előadássorozatából: 3402. Kézirat, 1955
2. Bosznay Á.: Kontinuumnak modellezett rúdszerkezet sajátfrekvenciáinak javítható közrefogása. Doktori értekezés, 1974
3. Falk S.: A műszaki mechanika numerikus módszerei és azok alkalmazása a mérnöki gyakorlatban. II. rész. Budapest 1968
4. Collatz, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. Leipzig 1949
5. Wilkinson, J. H.—Reinsch, C.: Linear Algebra (Handbook for Automatic Computation). Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1971
6. Bosznay, Á.: IX. Conference on Machine Dynamics Smolenice (1974. Sept.): Improvable Bracketing of Eigenfrequencies of Continuous Systems
7. Bosznay, Á.: Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Mechanik und der Strömungslehre, Techn. Hochschule Wien, 1974. Nov.: Verbesserungsfähige Einschließungen der Eigenfrequenzen kontinuierlicher Systeme
8. Bosznay, Á.: 14th Congress of IUTAM, Delft 1976. Improvable Bracketing of Eigenfrequencies of Structures by Fichera's Theory of Orthogonal Invariants
9. Bosznay, Á.: Lectures on the Université de Liège, 1976. Nov. Old and New Methods for Improvable Bracketing of Eigenfrequencies of Structures
10. Bosznay, Á.: Lower Bounds for Eigenfrequencies by the Finite Element Method. Theor. and Appl. Mech. Third Nat. Congr. on Theor. and Appl. Mech. Varna 13—16 Sept. 1977. Proceedings Vol. 1. pp. 315—320
11. Bosznay, Á.: Kolloquium über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Mechanik und der Strömungslehre. Techn. Universität Wien. 1977. Nov.: Untere Schranken für die Eigen-

frequenzen kontinuierlicher elastischer Systeme mittels der Methode der finiten Elemente

12. FICHERA, G.: Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems. Lecture Notes in Mathematics 8, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg— New York, 1965

Corrigable delineation of the eigenfrequencies of a straight rod of variable characteristics along its length, and performing bending oscillation. The paper offers a calculation method for solving the problem referred to in the title. Determination of the angular eigenfrequencies' upper limit is feasible by means of the Poincaré-Rayleigh-Ritz finitization, while that of their lower limit by using the Fichera theory of orthogonal invariants in the manner suggested by **Bosznay**.

Korrigierbare Einschachtelung der Eigenkreisfrequenz eines Biegeschwingungen ausführenden Stabes mit gerader Achse und längs dieser wechselnden Kennwerten. Die vorliegende Studie zeigt ein zur Lösung der im Titel angeführten Aufgabe geeignetes Berechnungsverfahren. Die Bestimmung der oberen Grenzen der Eigenkreisfrequenz ist durch die Poincaré-Rayleigh-Ritz'schen Finitisierung, die Bestimmung der unteren Grenzen durch die von **Bosznay** vorgeschlagenen Anwendung der Fichera'schen Theorie der orthogonalen Invarianten möglich.

Двухстороннее, уточняемое органичение собственных частот прямого стержня проводящего изгибные колебания, имеющего изменяющиеся характеристики вдоль своей проводольной оси. Статья выработает вычислительный метод для решения данной задачи. Расчёт верхних ограничений для собственных частот происходит с помощью метода «Поэнкарэ—Рэли—Ритз», а расчёт нижних ограничений для собственных частот осуществляется с пользованием теории относительности Фикера, (т. наз. ортогональные инварианты, предложенные профессором Боснаи.

HIBANÉGYZET MINIMUM ELVRE ALAPOZOTT MÓDOSÍTOTT VÉGES ELEM MÓDSZER ALKALMAZÁSA A KONTINUUMMECHANIKÁBAN

PÁCZELT ISTVÁN
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

NÁNDORI FRIGYES

A javasolt módszer a hagyományos hibanégyzet minimum elvre alapozott számításoktól [1] eltérően, az ismeretlen függvényt a peremértékfeladat differenciálegyenletét kielégítő, elemenként értelmezett koordinátafüggvények lineáris kombinációjával közelíti. Az ismeretlen állandókat olyan kvadratikus funkcionál minimum feltételből nyeri, amely biztosítja egyik elemről a másikra való átmenetnél a függvénynek és az egymástól független (vagy a mechanikai tartalomtól függő) deriváltjainak integrál értelemben vett folytonosságát, továbbá a peremfeltételek ugyancsak integrál értelemben vett kielégítését.

1. A minimalizálandó funkcionál felépítése

Keressük a V térfogaton az

$$L(\varphi) = 0 \tag{1}$$

parciális differenciálegyenlet megoldását a

$$g_1(\varphi) = \psi_1 \quad \text{az} \quad A_1\text{-en}, \tag{2}$$

$$g_2(\varphi) = \psi_2 \quad \text{az} \quad A_2\text{-n} \tag{3}$$

peremfeltételek mellett, ahol L — differenciáloperátor, g_1, g_2 — algebrai, vagy differenciáloperátorok, φ — ismeretlen skalárfüggvény, ψ_1, ψ_2 — az A_1, A_2 felületeken megadott értékek. A_1 és A_2 együtt a teljes perem.

Az (1)—(3) problémát a következőképpen oldjuk meg.

A V tartományt felosztjuk altartományokra (elemekre) V^e $(e = 1, \ldots, N)$ és elemenként az ismeretlen φ függvényt

$$\varphi^e = \varphi^e(\mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}^{eT}(\mathbf{x})\, \mathbf{a}^e, \quad \mathbf{x} \in V^e \tag{4}$$

alakban approximáljuk, ahol

$$\mathbf{\Phi}^{eT}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}),\ \varphi_2(\mathbf{x}), \ldots, \varphi_k(\mathbf{x})]^e$$

olyan approximációs mátrix (sorvektor)[1], amelyben a φ_i $(i = 1, \ldots, k)$ koordinátafüggvények kielégítik az (1) egyenletet, továbbá

[1] A többdimenziós vektorokat, mátrixokat félkövér betűvel jelöljük; T — a transzponálás jele.

$\mathbf{a}^{eT} = [a_1, \ldots, a_k]^e$ — ismeretlen állandók vektorát, míg $\mathbf{x}$ — a V^e térfogat (x_1, x_2, x_3) koordinátájú pontját jelöli.

Igy az approximált φ folytonossága az elemek határán „a priori" nem biztosítható, mivel az elemenkénti állandók azonosságát nem követelhetjük meg, mert ezzel lemondanánk a lokális approximációról.

Az elemek határán a φ függvénynek és deriváltjainak folytonosságát — jelen esetben — hibanégyzet minimum elv alapján, integrál értelemben teljesítjük. Ezáltal az össz ismeretlenek száma[2] $k \times N$, melyek a fentiek alapján a következő funkcionál minimumából nyerhetők:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N-1} \sum_{j=e+1}^{N} \left\{ \int_{A_c^{ej}} (\varphi^e - \varphi^j)^2 \, dA + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{I} \beta_i \int_{A_c^{ej}} (\mathbf{d}_i(\varphi^e) - \mathbf{d}_i(\varphi^j))^2 \, dA \right\} +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N} \sum_{\alpha=1}^{2} \gamma_\alpha \int_{A_\alpha^e} (g_\alpha(\varphi^e) - \psi_\alpha)^2 \, dA \,, \tag{5}$$

ahol A_c^{ej} az e és j elemek közös határa, A_α^e az A^e elemfelület A_α peremre eső része, $\mathbf{d}_i$ $(i = 1, \ldots, I)$ — differenciáloperátor, β_i $(i = 1, \ldots, I)$ γ_1, γ_2 — felveendő „súly" állandók.

A $\mathbf{d}_i$ operátorok Laplace-egyenlet megoldásakor a grad (φ) és függetlenül felírható másodrendű deriváltakat tartalmazó differenciáloperátorok.

A rugalmasságtani feladatok feszültségfüggvényen keresztül történő megoldásakor (pl. Airy-, Love-féle feszültségfüggvényeknél), φ-nek az illesztése (integrál értelemben) az elemek határán felesleges, elegendő a mechanikai illesztési — dinamikai és kinematikai — feltételek figyelembevétele, azaz

$$\rho_n^e = \rho_n^j, \quad \mathbf{u}^e = \mathbf{u}^j, \quad \mathbf{x} \in A_c^{ej},$$

ahol $\mathbf{u}$ — elmozdulásmező, ρ_n — az A_c^{ej} felületen ható feszültségvektor. Lényeges, hogy a $\mathbf{\Phi}^e(\mathbf{x})$ függvényeknek a merevtestszerű elmozdulást is tartalmazniuk kell.

Az S funkcionál minimumának szükséges feltételéből nyert algebrai egyenletrendszer $\partial S/\partial \mathbf{a} = \mathbf{0}$ együttható mátrixa, az (5)-ben szereplő összegzési szabály alapján, könnyen előállítható. Lineáris g_1, g_2 operátorok mellett az egyenletrendszer szintén lineáris.

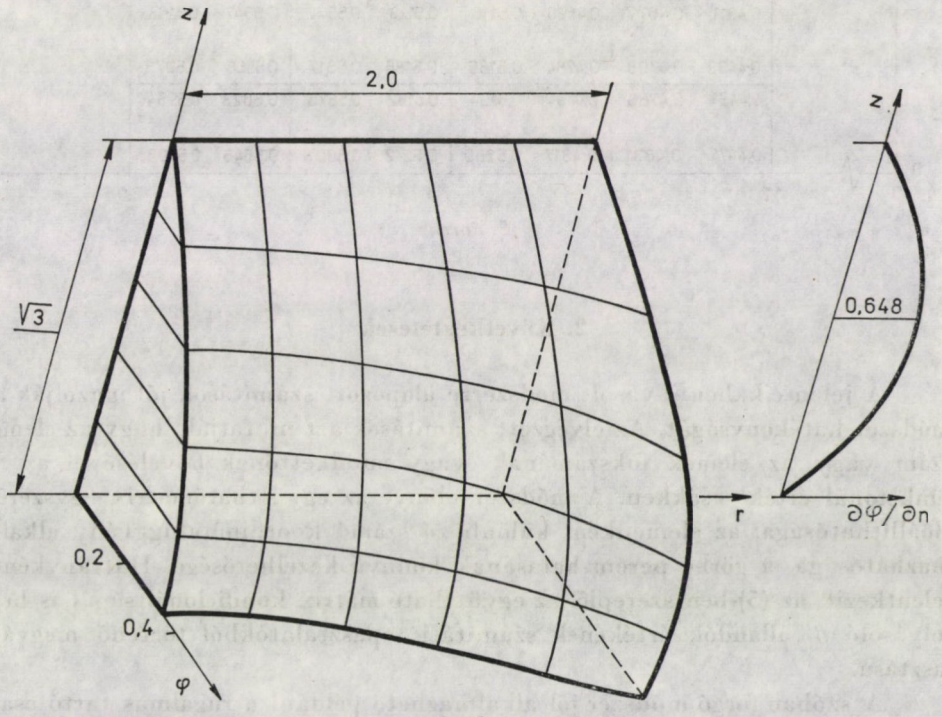
Példa: Keressük az $\mathbf{x} = (r, z)$ henger koordináta-rendszerben az A tartomány felett a $\Delta\varphi = 0$ egyenlet megoldását a Γ_1 és Γ_2 peremeken adott $g_1(\varphi) \equiv \varphi = \psi_1$, illetve $g_2(\varphi) \equiv \partial\varphi/\partial n = \psi_2$ peremfeltételek esetében. Itt Δ —

[2] Feltételezett, hogy minden elemnél a koordinátafüggvények száma k.

Laplace-operátor, $\partial\varphi/\partial n$ — normális derivált. A (4) alapján felvett, hat harmonikus koordinátafüggvényt tartalmazó approximációs mátrix a következő:

$$\Phi^{eT}(\mathbf{x}) = [1, z, 2z^2 - r^2, 2z^3 - 3zr^2,$$
$$8z^4 - 24z^2r^2 + 3r^4, 8z^5 - 40z^3r^2 + 15r^4z]^e.$$

A 1. ábra a $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq z \leq \sqrt{3}$ tartomány felett tünteti fel φ-t $N = 100$ esetében, $\beta_1 = 10$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\mathbf{d}_1 = \nabla$ — nabla differenciáloperátor mellett.

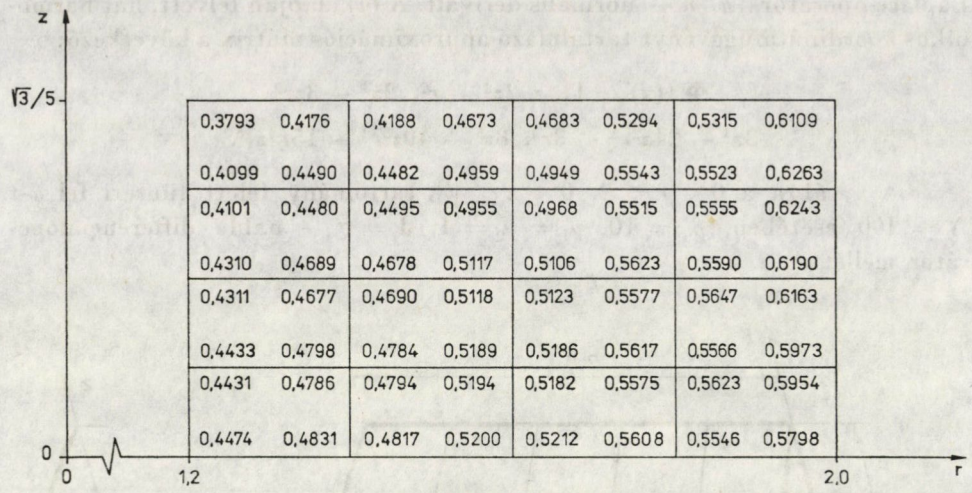


1. ábra

Peremfeltételek:

$$\Gamma_1(z = \sqrt{3}): \quad \varphi = 0\ ,$$
$$\Gamma_2(r = 0): \quad \partial\varphi/\partial r = 0, \quad (z = 0): \quad \partial\varphi/\partial z = 0,$$
$$(r = 2): \quad \partial\varphi/\partial r = 1{,}106993z - 0{,}639123z^2.$$

A kapott eredmények alapján a peremfeltételek kielégítésének maximális hibája 3,0%. Az elemek belső határán φ-ben tapasztalható szakadás az $1{,}2 \leq r \leq 2$, $0 \leq z \leq \sqrt{3}/5$ tartományon a legnagyobb. E tartományon a φ változó különböző elemekhez tartozó csomóponti értékeit tünteti fel a 2. ábra. Látható, a szakadás mértéke elhanyagolhatóan kicsiny.



2. ábra

2. Következtetések

A jelen cikkben javasolt módszerre alapozott számítások jól igazolják a módszer hatékonyságát. Az elvégzett számítások azt mutatják, hogy az elemszám vagy az elemek fokszámának, vagy mindkettőnek növelésével az S funkcionál értéke csökken. A módszer előnye az együtthatómátrix egyszerű előállíthatósága, az elemenként különböző számú koordinátafüggvény alkalmazhatósága, a görbe perem hatásának könnyű kezelhetősége. Hátrányként jelentkezik az (5)-ben szereplő, az együttható mátrix kondicionáltságát is befolyásoló β_i állandók értékének számítási tapasztalatokból történő megválasztása.

A szóban forgó módszer jól alkalmazható például a rugalmas tartó csavarását leíró Laplace-egyenlet Neumann-féle peremértékfeladatánál, ugyancsak a tartó szabad csavarásánál jelentkező Poisson-féle egyenlet megoldásánál, a prizmatikus tartó hajlítási—nyírási feladatánál fellépő Neumann-féle feladat vizsgálatánál [2], a rezgő tartályban elhelyezkedő folyadék hidrodinamikai nyomásának meghatározásánál, továbbá síkrugalmasságtani feladatok biharmonikus egyenlet megoldásán keresztül történő vizsgálatánál, illetve forgástestek feszültségállapotának Love-féle feszültségfüggvényen [2] keresztül történő tisztázásánál.

IRODALOM

1. Ernest, D.—Eason: A Review of Least-squares Methods for Solving Partial Differential Equations, *Int. J. num. Meth. Engng.*, **10** (1976), 1031—1046
2. Lurje, A. I.: T'eorija uprugost'i, „Nauka", M. 1970

Application of a modified method of finite elements based on the minimum error square principle in continuum mechanics. As against the calculations based on the traditional minimum error square principle, the suggested method approximates the unknown function by a linear combination of the co-ordinate functions satisfying the differential equation of the boundary value problem, and interpreted by elements. The unknown constants are obtained from a quadratic functional minimum condition which ensures, in the case of transition from one element to the other, the continuity of the function and its interindependent (or mechanical contents dependent) derivatives in an integral sense, as well as the satisfaction of the boundary conditions similarly in an integral sense, again.

Anwendung der auf dem Prinzip des Fehlerquadratminimums beruhenden veränderten Methode der finiten Elemente in der Kontinuummechanik. Zum Unterschied von den herkömmlichen, auf dem Prinzip des Fehlerquadratminimums beruhenden Berechnungen sucht die vorgeschlagene Methode die unbekannte Funktion mit der die Differentialgleichung der Randwertaufgabe befriedigenden linearen Kombination der als Elemente gedachten Koordinatenfunktionen anzunähern. Die unbekannten Konstanten liefern die Minimumbedingung eines quadratischen Funktionals, das bei Übergang von einem Element zum andern die Kontinuität in integralem Sinne der Funktionen und ihrer voneinander unabhängigen (oder vom mechanischem Inhalt abhängigen) Derivate, ferner die ebenfalls im integralen Sinne aufgefaßte Befriedigung der Randbedingungen enthält.

Модифицированный метод конецных элементов в механике сплошных сред, основанный на методе наименших квадратов. Предлагаемый метод в отличии от основного метода наименших квадратов основан на том, что искомая функция аппроксимируется по элементам линейнонезависящими друг от друга функциями, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям краевой задачи. Неизвестные постоянные определяются из условия минимума некоторого функционала, который построен так, чтобы он обеспечивал непрерывность функции и ёё независящей друг от друга (или зависящей по механическому содержанию друг от друга) производной при переходе с одного элемента на другой, и выполнение граничных условий и интегральном смысле также.

VÉGES SZABADSÁGFOKÚ LINEÁRIS REZGŐ RENDSZER PARAMÉTERVÁLTOZÁSAINAK HATÁSA A SAJÁTFREKVENCIÁKRA

PATKÓ GYULA*

A dolgozatban célunk annak vizsgálata, hogy a véges szabadságfokú csillapításmentes rezgő rendszer rugó- és tömegmátrixának kis megváltozásai milyen hatással vannak a sajátfrekvenciákra. A másodrendűen kis tagokat elhanyagoljuk. A Rayleigh-hányadosra támaszkodva olyan új formula adódik, amely az irodalmi előzményeknél általánosabb, azokat speciális esetekként tartalmazza. Megmutatjuk, hogy a sajátvektorok elsőrendűen kicsiny hibája a sajátértékek másodrendűen kis hibájához vezet.

1. Bevezetés

A véges szabadságfokú lineáris rezgő rendszerekként modellezhető gépek dinamikai vizsgálatának egyik fontos feladata a sajátfrekvenciák, illetve a kritikus fordulatszámok meghatározása. Az ilyen feladatok mátrixok sajátértékeinek meghatározásához vezetnek, amelyekhez a nagyobb számítóközpontokban hatékony programok állnak rendelkezésre.

Gyakori mérnöki feladat egy meglevő konstrukció továbbfejlesztése, és ezzel együtt olyan szerkezet kialakítása, amelynek dinamikai tulajdonságai kedvezőbbek. Ilyenkor a tervező számára egy meglevő változatra elvégzett számítási eredmények ismeretén túl az is fontos, hogy egy konstrukciós változtatás — tömegek, rugóállandók, geometriai paraméterek (súlypontok, csapágytávolságok stb.) megváltozása — milyen hatással van a sajátfrekvenciákra, illetve a kritikus fordulatszámokra. Az is érdekes lehet, hogy egyáltalán milyen változtatásra van lehetőség, hogy a rezonanciákat elkerüljük. A kérdés úgy is jelentkezhetik, hogy miként kell egy rendszer paramétereit megváltoztatni, hogy a szerkezet sajátfrekvenciái a kívánt tartományokba essenek.

Ismeretes, hogy egy gép üzemeltetése során a kényszerek lazulása, a merevségek csökkenése a sajátfrekvenciák csökkenéséhez vezet, és működése ezáltal a veszélyes rezonanciatartományokhoz közel kerülhet. Előfordulhat, hogy ilyen esetben is változtatásra van szükség.

Jelen dolgozat célja annak vizsgálata, hogy egy rezgő rendszer paramétereinek kis változása milyen hatással van a sajátfrekvenciákra. A csillapításokat elhanyagoljuk.

* Patkó Gyula, 3529 Miskolc, Középsor u. 60.

A továbbiakban azt a rezgő rendszert, amelynek dinamikai paramétereit meg kívánjuk változtatni, *régi* rendszernek, a változtatások után létrejött rendszereket *új* rendszereknek nevezzük.

A legfontosabb jelöléseket külön jegyzék tartalmazza (5. pont).

2. Előzmények

A rezgő rendszerek paraméterváltozásainak hatásával több munka foglalkozik (pl. [1], [2], [3], [4]). Az 1. pontban felvetett kérdésekkel kapcsolatos újabb eredményeket [3] és [4] tartalmazza. Ezek az

$$\mathbf{M}_0\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

és

$$\mathbf{D}_0\mathbf{M}_0\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{2.1}$$

alakban felírt mozgásegyenleteket vizsgálják ($\mathbf{D}_0 = \mathbf{C}_0^{-1}$). A két vizsgálat elvben nem különbözik. [3] és [4] feltételezi, hogy $\mathbf{M}_0$ és $\mathbf{C}_0$-ban az m_i és k_i paraméterek csak az első hatványon szerepelnek, azaz $\mathbf{M}_0$ és $\mathbf{C}_0$ az

$$\mathbf{M}_0 = \sum_{j=1}^{P} m_j\mathbf{M}_j \quad \text{és} \quad \mathbf{C}_0 = \sum_{j=1}^{Q} k_j\mathbf{C}_j \tag{2.2}$$

alakban előállíthatók, ahol $\mathbf{M}_j$ és $\mathbf{C}_j$ rendre az $\mathbf{M}_0$ és $\mathbf{C}_0$ mátrixok m_j és k_j paraméterek szerint vett deriváltjai, P és Q pedig az $\mathbf{M}_0$ illetve $\mathbf{C}_0$-ban szereplő paraméterek száma.

A (2.1)-nek megfelelő sajátértékfeladat

$$\omega_{i0}^2\mathbf{M}_0\mathbf{x}_{i0} = \mathbf{C}_0\mathbf{x}_{i0}. \tag{2.3}$$

Ha a régi rendszer paramétereit kis mértékben megváltoztatjuk, akkor az új rendszer sajátfrekvenciáira a (2.3) Taylor-sorának elsőrendű tagjaiból [3] szerint

$$\omega_i^2 \approx \omega_{i0}^2 - \omega_{i0}^2 \sum_{j=1}^{P} \mu_{ij}\Delta m_j + \sum_{j=1}^{Q} \gamma_{ij}\Delta k_j \tag{2.4}$$

adódik, ahol a μ_{ij} és γ_{ij} mennyiségek a

$$\mu_{ij} = \frac{\mathbf{x}_{i0}^T\mathbf{M}_j\mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T\mathbf{M}_0\mathbf{x}_{i0}} \quad \text{és} \quad \gamma_{ij} = \frac{\mathbf{x}_{i0}^T\mathbf{C}_j\mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T\mathbf{M}_0\mathbf{x}_{i0}} \tag{2.5, 2.6}$$

összefüggésekből számíthatók. A (2.4) képlet az [1] 45. oldal (1.6.56) formulája általánosításának tekinthető. [3] megmutatja, hogy a (2.4) formula pontosít-

ható, ha a Taylor-sor magasabb rendű tagjait is figyelembe vesszük. Ennek megfelelően, ha a régi rendszerben csak a tömegmátrix elemeit változtatjuk meg, akkor az új rendszer sajátkörfrekvenciáira közelítőleg

$$\omega_i^2 \approx \frac{\omega_{i0}^2}{1 + \sum_{j=1}^{P} \mu_{ij} \Delta m_j} \tag{2.7}$$

érvényes. Ha pedig csak a rugómátrix elemeit változtatjuk meg, akkor az új rendszer sajátkörfrekvenciája

$$\omega_i^2 \approx \omega_{i0}^2 + \sum_{j=1}^{P} \gamma_{ij} \Delta k_j \tag{2.8}$$

alapján becsülhető.

Könnyen belátható, hogy a (2.7) és (2.8) formulák ellentmondást tartalmaznak. Változtassuk meg ugyanis első lépésben a régi rendszer tömegmátrixát és számoljuk ki (2.7)-ből a megváltozott sajátfrekvenciát. Ezt alapul véve, a második lépésben változtassuk meg a rugómátrixot, és (2.8)-nak megfelelően határozzuk meg az új sajátfrekvenciát. Ha most a sorrendet felcseréljük, azaz először változtatjuk a rugómátrixot és utána a tömegmátrixot, akkor az előzőtől eltérő eredményt kapunk.

Az alábbiak a Rayleigh-hányadosra támaszkodva, az új rendszer sajátfrekvenciáira olyan új formulát állítanak elő, amely a (2.4), (2.7) és (2.8) formulákat speciális esetekként tartalmazza.

3. A paraméterváltozások sajátfrekvenciákra gyakorolt hatásának vizsgálata a Rayleigh-hányados segítségével

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a sajátvektorok normáltak, azaz

$$||\mathbf{x}_{i0}|| = 1 \quad \text{és} \quad ||\mathbf{x}_i|| = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

A differenciálegyenletek elméletéből ismert, hogy a megoldások a paraméterek folytonos függvényei. Ebből viszont az következik, hogy ha a régi rendszer sajátfrekvenciáit elég kis mértékben változtatjuk meg, azaz Δm_j és Δk_j elég kicsiny, akkor a

$$\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i0} \tag{3.1}$$

vektor normája is elég kicsiny, és $\Delta \mathbf{x}_i$ a Δm_j és Δk_j paraméterváltozásokkal együtt a zérushoz tart. Tehát kis paraméterváltozások esetén $||\Delta \mathbf{x}_i|| \ll 1$. Az

$$\mathbf{M}_0\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_0\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

mozgásegyenletű régi rendszer ω_{i0} sajátkörfrekvenciái az $\mathbf{x}_{i0}$ sajátvektorok ismeretében számíthatók az

$$\omega_{i0}^2 = \frac{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i0}} \tag{3.3}$$

Rayleigh-hányados segítségével. A Rayleigh-hányados az új rendszer esetében

$$\omega_i^2 = \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{C} \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_i^T \mathbf{M} \mathbf{x}_i} .$$

A (3.1) és $\Delta\mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{M}_0$, $\Delta\mathbf{C} = \mathbf{C} - \mathbf{C}_0$, $\Delta\omega_i^2 = \omega_i^2 - \omega_{i0}^2$ jelölések bevezetésével

$$\omega_{i0}^2 + \Delta\omega_i^2 = \frac{(\mathbf{x}_{i0} + \Delta\mathbf{x}_i)^T (\mathbf{C}_0 + \Delta\mathbf{C}) (\mathbf{x}_{i0} + \Delta\mathbf{x}_i)}{(\mathbf{x}_{i0} + \Delta\mathbf{x}_i)^T (\mathbf{M}_0 + \Delta\mathbf{M}) (\mathbf{x}_{i0} + \Delta\mathbf{x}_i)} \tag{3.4}$$

adódik. A $\Delta\mathbf{M}$ és $\Delta\mathbf{C}$ elemei, illetve a $\Delta\omega_i^2$ mennyiségek a $\mathbf{C}_0$ és $\mathbf{M}_0$ megfelelő elemeihez, illetve ω_{i0}^2-hez viszonyítva kicsinyek. Ennek értelmében elhanyagolva (3.4)-ben a másod- és harmadrendűen kicsi tagokat, és $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{M}_0$ szimmetriáját figyelembe véve,

$$\omega_{i0}^2 + \Delta\omega_i^2 \approx \frac{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_{i0} + 2\Delta\mathbf{x}_i^T \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_{i0} + \mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{C} \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i0} + 2\Delta\mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i0} + \mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{M} \mathbf{x}_{i0}}$$

adódik, amely más alakra rendezve:

$$(\omega_{i0}^2 + \Delta\omega_i^2)(\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i0} + \mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{M} \mathbf{x}_{i0}) \approx \mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_{i0} +$$
$$+ \mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{C} \mathbf{x}_{i0} + 2\Delta\mathbf{x}^T(\mathbf{C}_0 \mathbf{x}_{i0} - \omega_{i0}^2 \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i0}) - 2\Delta\omega_i^2 \Delta\mathbf{x}_i^T \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i0}.$$

A jobboldalon szereplő

$$\mathbf{C}_0 \mathbf{x}_{i0} - \omega_{i0}^2 \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i0}$$

vektor zérus, mert ω_{i0} a (3.2) rendszernek sajátkörfrekvenciája, $\mathbf{x}_{i0}$ pedig sajátvektora. Így

$$\omega_{i0}^2 + \Delta\omega^2 \approx \frac{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_{i0} + \mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{C} \mathbf{x}_{i0} - 2\Delta\omega_i^2 \Delta\mathbf{x}_i \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i0} + \mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{M} \mathbf{x}_{i0}} .$$

A számlálóban szereplő másodrendűen kicsiny $2\Delta\omega_i^2 \Delta\mathbf{x}_i \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i0}$ tagot is elhanyagolva, végül is az

$$\omega_i^2 \approx \frac{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{x}_{i0} + \mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{C} \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i0} + \mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{M} \mathbf{x}_{i0}} \tag{3.5}$$

eredményre jutunk.

Megmutatjuk, hogy (3.5) speciális esetként tartalmazza a (2.7) és (2.8) formulákat. Az $\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0 \mathbf{x}_{i0}$ mennyiséggel egyszerűsítve, (3.3) figyelembevételével ugyanis

$$\omega_i^2 \approx \left(\omega_{i0}^2 + \frac{\mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{C}\, \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}\, \mathbf{M}_0\, \mathbf{x}_{i0}}\right) \frac{1}{1 + \dfrac{\mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{M}\, \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0\, \mathbf{x}_{i0}}} \tag{3.6}$$

írható. Ha pedig (2.2) -nek megfelelően bevezetjük a

$$\Delta\mathbf{M} = \sum_{j=1}^{P} \Delta m_j \mathbf{M}_j \quad \text{és} \quad \Delta\mathbf{C} = \sum_{j=1}^{Q} \Delta k_j \mathbf{C}_j \tag{3.7}$$

kifejezésekkel értelmezett $\mathbf{M}_j$ és $\mathbf{C}_j$ mátrixokat, és a (2.5), (2.6) jelöléseket, akkor (3.6) az

$$\omega_i^2 \approx \left(\omega_{i0}^2 + \sum_{j=1}^{Q} \gamma_{ij} \Delta k_j\right) \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{P} \mu_{ij} \Delta m_j} \tag{3.8}$$

alakot veszi fel. Ez a kifejezés általánosabb, mint (2.7) és (2.8), mert a tömeg- és rugómátrix egyidejű változtatását is lehetővé teszi. A (3.8) $\Delta k_j = 0$, $(j = 1, 2, \ldots, Q)$ speciális esetben (2.7), a $\Delta m_j = 0$, $(j = 1, 2, \ldots, P)$ esetben pedig (2.8) adódik.

Vegyük észre, hogy a (3.6) kifejezés általánosabb, mint (3.8), mivel (3.8) feltételezi $\Delta\mathbf{M}$ és $\Delta\mathbf{C}$ (3.7) alatti felbonthatóságát. Ezzel szemben a (3.6) kifejezés olyan geometriai paraméterek változásának vizsgálatára is lehetőséget biztosít, amelyektől $\mathbf{M}_0$ és $\mathbf{C}_0$ nemlineárisan függenek.

Ha a $\Delta\mathbf{M}$ elemei elég kicsinyek, akkor a (3.6) kifejezésben szereplő tört az

$$\frac{1}{1 + \dfrac{\mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{M}\, \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0\, \mathbf{x}_{i0}}} = 1 - \frac{\mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{M}\, \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0\, \mathbf{x}_{i0}} + \left(\frac{\mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{M}\, \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0\, \mathbf{x}_{i0}}\right)^2 - + \ldots$$

mértani sor összege. Ezt a (3.6) kifejezésbe helyettesítve, és a szorzás után az

$$\frac{\mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{C}\, \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0\, \mathbf{x}_{i0}} \cdot \frac{\mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{M}\, \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0\, \mathbf{x}_{i0}}$$

mennyiséget és

$$\frac{\mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{M}\, \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0\, \mathbf{x}_{i0}}$$

magasabb hatványait elhanyagolva — lineáris közelítésként —

$$\omega_i^2 \approx \omega_{i0}^2 - \omega_{i0}^2 \frac{\mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{M}\, \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0\, \mathbf{x}_{i0}} + \frac{\mathbf{x}_{i0}^T \Delta\mathbf{C}\, \mathbf{x}_{i0}}{\mathbf{x}_{i0}^T \mathbf{M}_0\, \mathbf{x}_{i0}} \tag{3.9}$$

adódik. Ha ismét bevezetjük a (2.5), (2.6) és (3.7)-ben értelmezett mennyiségeket, akkor (3.9) megegyezik a (2.4) alakkal. Hangsúlyozzuk, hogy (3.9) általánosabb, mint (2.4), mivel a $\mathbf{C}_0$ és $\mathbf{M}_0$ mátrixban nemlineárisan előforduló geometriai paraméterek változásának vizsgálatát is lehetővé teszi. A (3.6) illetve (3.8) és (3.9) formulák alkalmasak az 1. pontban felvetett problémák megoldására.

Ha a rezgő rendszer r számú sajátfrekvenciáját kívánjuk előírt mértékben megváltoztatni, és ehhez r számú paraméter megváltoztatására van lehetőség, akkor a keresett Δm_i és Δk_i mennyiségekre ugyanúgy, mint a (2.7) és (2.8)-ra támaszkodó [4] munkában (3.8) szerint is lineáris egyenletrendszer adódik. Ha olyan geometriai paramétereket változtatunk, amelyek $\mathbf{M}_0$-ban és $\mathbf{C}_0$-ban nemlineárisan szerepelnek, akkor a (3.6) egyenletrendszer sem lesz lineáris.

Ha a változtatható paraméterek száma nagyobb, mint a megváltoztatni kívánt sajátfrekvenciák száma, akkor a (3.6) egyenletrendszerhez mellékfeltételeket kapcsolhatunk (pl. a paraméterek változása, az új szerkezet súlya legyen minimális stb.).

Ha több sajátértéket kell megváltoztatni, mint amennyi paraméter megváltoztatására lehetőség van, akkor a (3.6) nem oldható meg. Ebben az esetben a műszaki feladatra egy megoldást a sajátfrekvenciák hibáját minimalizáló eljárás adhat.

4. A sajátvektorok hibájának hatása a sajátértékekre

A (2.4), (2.7) és (2.8) formulák levezetése során [3] azzal a gyakorlat által igazolt feltevéssel él, hogy a rezgő rendszer paramétereinek megváltozása esetében a sajátvektoroknak a paraméterek szerinti parciális deriváltjai elhanyagolhatóan kicsik. Ezen kérdés további elméleti vizsgálatának szükségességére mutat rá [4]. Belátható (2.3), (2.4) alapján: [3] fenti állítása azzal egyenértékű, hogy elhanyagolható a sajátvektorok (sajátirányok) kis megváltozásának a sajátértékekre gyakorolt hatása. Megmutatjuk, hogy ez a tétel — amely egy, a [2]-ben bizonyított állítás megfordítása — a Rayleigh-hányados segítségével egyszerűen bizonyítható.

Tekintsük a

$$\lambda_i \mathbf{M}\,\mathbf{x}_i = \mathbf{C}\,\mathbf{x}_i \tag{4.1}$$

sajátértékproblémát, ahol $\mathbf{C}$ és $\mathbf{M}$ szimmetrikus mátrixok. A Rayleigh-hányados segítségével

$$\lambda_i = \frac{\mathbf{x}_i^T \mathbf{C}\,\mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_i^T \mathbf{M}\,\mathbf{x}_i} \tag{4.2}$$

írható. Tételezzük fel, hogy az $\mathbf{x}_i$ sajátvektor helyett annak egy közelítő

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + \varepsilon \mathbf{h}_i \tag{4.3}$$

értékével számolunk ($\varepsilon > 0$). Legyen az $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$ és $\mathbf{h}_i$ vektor normája egységnyi. Ha az $\mathbf{y}_l$ az $\mathbf{x}_i$ sajátvektor elég jó közelítése, akkor $\varepsilon \ll 1$. A (4.2)-vel a sajátérték közelítő értékére

$$\lambda_i \approx \frac{(\mathbf{x}_i + \varepsilon\mathbf{h}_i)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{C}(\mathbf{x}_i + \varepsilon\mathbf{h}_i)}{(\mathbf{x}_i + \varepsilon\mathbf{h}_i)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{M}(\mathbf{x}_i + \varepsilon\mathbf{h}_i)}$$

adódik, mely $\mathbf{C}$ és $\mathbf{M}$ szimmetriája miatt

$$\mathbf{x}_i^T\mathbf{C}\mathbf{x}_i + 2\varepsilon\mathbf{h}_i^T(\mathbf{C}\mathbf{x}_i - \lambda_i\mathbf{M}\mathbf{x}_i) + \varepsilon^2\mathbf{h}_i^T\mathbf{C}\mathbf{h}_i - \lambda_i(\mathbf{x}_i^T\mathbf{M}\mathbf{x}_i + \varepsilon^2\mathbf{h}_i^T\mathbf{M}\mathbf{h}_i) \approx \mathbf{0}$$

alakban írható. Ebből (4.1) miatt $\mathbf{C}\mathbf{x}_i - \lambda_i\mathbf{M}\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$, és így λ_i közelítő értéke

$$\lambda_i \approx \frac{\mathbf{x}_i^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{x}_i + \varepsilon^2\,\mathbf{h}_i^T\,\mathbf{C}\,\mathbf{h}_i}{\mathbf{x}_i^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{x}_i + \varepsilon^2\,\mathbf{h}_i^T\,\mathbf{M}\,\mathbf{h}_i} \tag{4.4}$$

alakú lesz. A (4.2), (4.3) és (4.4) formulák egybevetéséből viszont az következik, hogy a sajátvektor ε nagyságrendű megváltoztatása a sajátértékekben ε^2 nagyságrendű hibához vezet. A most bizonyított tételnek olyan módszerek használatakor is jelentősége van, melyeknél a sajátfrekvenciákat tapasztalat vagy becslés alapján felvett rezgésképekből számítjuk.

5. Fontosabb jelölések

$\mathbf{C}$	rugómátrix
$\mathbf{M}$	tömegmátrix
$\mathbf{x}_i$	i-edik sajátvektor
ω_i	i-edik sajátkörfrekvencia
o	index, mely a fenti mennyiségek mellett a régi rendszerre utal
m_j	M_0-ban szereplő j-edik tömeg vagy tömegparaméter
k_j	C_0-ban szereplő j-edik merevség vagy merevségi paraméter
Δm_j	az m_j paraméter megváltozása
Δk_j	a k_j paraméter megváltozása
n	a rezgő rendszer szabadságfoka
$\mathbf{q}$	az általános koordináták vektora

IRODALOM

1. FORBAT, N.: Analytische Mechanik der Schwingungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966
2. MÜLLER, D.: Ein Beitrag zur Variation von Eigenfrequenzspektren, *Maschinenbautechnik* 22 (1973), 12
3. DRESIG, H.: Methode zur Berechnung des Einflusses von Parameteränderungen auf die Eigenfrequenzen von Schwingungssystemen, *Maschinenbautechnik* 26 (1977), 9
4. DRESIG, H.: Beeinflussung der Eigenfrequenzen durch Parameteränderungen, *Textiltechnik* 27 (1977), 9

Effect of the parameter variation of finite degree of freedom type linear vibration systems on their eigenfrequency. The paper attempts to determine what effect would be exerted by slight changes in the spring and mass matrices of finite degree of freedom type non-attenuated vibration systems on their eigenfrequencies. The secondary small terms are neglected. On the basis of the Rayleigh ratio a new formula, much more general in character than the literary background, will be obtained which would contain the former as special cases. It is demonstrated that the primary small error of the eigenvectors will lead to secondary small errors in the eigenvalues.

Einfluß der Änderung der Parameter auf die Eigenfrequenz von linearen Schwingungssystemen mit endlichen Freiheitsgraden. Die Abhandlung prüft die Wirkung kleiner Änderungen der Feder- und Massenmatrizen von ungedämpften Schwingungssystemen mit endlichen Freiheitsgraden. Die kleinen Glieder zweiter Ordnung wurden vernachlässigt. Gestützt auf den Rayleigh-Quotienten ergibt sich eine neue Formel, die allgemeiner ist, als die in der Fachliteratur bisher veröffentlichten, wobei letztere nur als Spezialfälle gelten. Es ist nachgewiesen, daß der kleine Fehler erster Ordnung der Eigenvektoren den kleinen Fehler zweiter Ordnung der Eigenwerte verursacht.

Влияние изменения параметров упругих систем с конечными степенями свободы на собственные частоты. Цель данной работы исследовать влияние маленького изменения элементов матриц массы и жесткости колебательных систем с конечными степенями свободы на собственные частоты. Члены второй степени пренебрегаются. Используя метод Рэлея выводится новая формула, которая общее чем находящиеся в литературе формулы, так как последние являются специальными для нашей формулы. Доказано, что первостепенные ошибки в собственных формах оказывают второстепенные влияние на ошибки в собственных частотах.

BECSLÉS HETEROGÉN MIKROPOLÁRIS ANYAGÚ RÚD CSAVARÁSI MEREVSÉGÉRE

SZEIDL GYÖRGY*

A tanulmány a potenciális energia minimumának elvén alapuló eljárást ismerteti heterogén mikropoláris anyagú rúd csavarási merevségének becslésére. A klasszikus rugalmasságtani általánosításként nyert eljárással a csavarási merevség felső korlátja számítható. A módszer alkalmazását példák illusztrálják.

1. Bevezetés

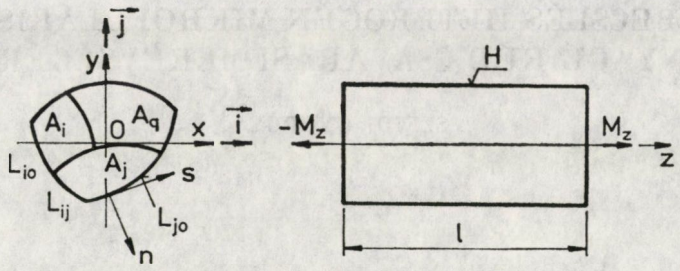
A mikropoláris anyagú testek rugalmasságtanára vonatkozó alapismereteket részletesen ismerteti W. NOWACZKI műve. A tanulmány a csavarási problémával foglalkozó dolgozatok közül C. USIDUS és M. SOKOLOWSKI munkáját használja fel [2]. Homogén mikropoláris anyagú rúd csavarási merevségének becslésével, a [4]-beli klasszikus rugalmasságtani eljárás általánosításával [3] foglalkozik. A jelen tanulmány a [3]-ban bemutatott eljárást alkalmazza heterogén mikropoláris anyagú rúd csavarási merevségének becslésére.

2. Mikropoláris anyagú rúd csavarási problémájára vonatkozó alapvető összefüggések

Alábbiakban röviden ismertetjük [2] alapján a mikropoláris anyagú rúd csavarási feladatának főbb összefüggéseit.

A vizsgált, A_i részei tekintetében is állandó keresztmetszetű ($A = \sum_{i=1}^{N} A_i$, N a részek száma), mikropoláris anyagú rudat az 1. ábra szemlélteti. A rúd anyaga az egyes A_i keresztmetszetű részeken belül homogén és izotróp. Feltételezzük, hogy az A_i részek L_{ij} peremgörbéi (az ij index az érintkező tartományokat jelzi) szakaszonként sima görbék, melyek az L_{i0} görbéhez érintőlegesen nem csatlakozhatnak. A választott jobbsodratú ($x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$) kartéziuszi koordináta-rendszer z tengelye legyen párhuzamos a rúd súlyponti tengelyével.

* Dr. Szeidl György, 3532 Miskolc, Rácz Ádám u. 2.



1. ábra

Jelölésként az [1, 2]-ben alkalmazottakat, valamint az alábbiakat használjuk:

Jelölések

$u_k = (u, v, w)$ — elmozdulásvektor,
ω_k — szögelfordulás vektor,
ε_{krs} — permutációs szimbólum,
$\gamma_{rs} = u_{s,r} - \varepsilon_{rsk}\omega_k$ — nem szimmetrikus alakváltozási tenzor,
$\varkappa_{rs} = \omega_{s,r}$ — nyomaték-csavarási alakváltozási tenzor,
σ_{rs} — feszültségi tenzor,
μ_{rs} — nyomatéki feszültségi tenzor,
μ, λ — Lamé állandók,
$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — további anyagi állandók,
I_p — poláris másodrendű nyomaték,
I_x, I_y — x és y tengelyre számított másodrendű nyomaték.

Görög index értéke 1, 2; latin indexé 1, 2, 3 lehet.

Megjegyezzük, hogy latin indexként kizárólag az r, s és k betűket használjuk.

Megállapodunk abban is, hogy valamely változó A_i tartományon vett értékére a betűjele felett, vagy a betűjele mellett jobbra lent álló i utal.

Mikropoláris test csavarási problémája esetén a nem identikusan teljesülő egyensúlyi egyenletek (térfogati terhelés nincs) és az anyagtörvény

$$\sigma_{\varrho 3,\varrho} = 0; \quad \mu_{\varrho\pi,\varrho} - (\sigma_{3\varrho} - \sigma_{\varrho 3})\,\varepsilon_{3\varrho\pi} = 0; \tag{1}$$

$$\sigma_{rs} = (\mu + \alpha)\,\gamma_{rs} + (\mu - \alpha)\,\gamma_{sr} + \lambda\delta_{sr}\gamma_{kk}$$
$$\mu_{rs} = (\gamma + \varepsilon)\,\varkappa_{rs} + (\gamma - \varepsilon)\,\varkappa_{sr} + \beta\delta_{sr}\varkappa_{kk} \tag{2}$$

alakúak.

Az 1. ábrán vázolt rúd H palástjának terheletlenségéből az

$$n_\varrho^{(i)}\,\sigma_{\varrho 3}^{(i)} = 0; \quad n_\varrho^{(i)}\,\mu_{\varrho\pi}^{(i)} = 0; \quad (x, y \in L_{i0}) \tag{3}$$

dinamikai peremfeltételek következnek, ahol $n_\varrho^{(i)}$ az A_i tartomány külső normálisa.

A fenti dinamikai peremfeltételekhez az

$$n_\varrho^{(i)}\,\sigma_{\varrho 3}^{(i)} + n_\varrho^{(j)}\,\sigma_{\varrho 3}^{(j)} = 0, \quad n_\varrho^{(i)}\,\mu_{\varrho\pi}^{(i)} + n_\varrho^{(j)}\,\mu_{\varrho\pi}^{(j)} = 0, \quad (x, y \in L_{ij}) \tag{4}$$

illesztési feltételek csatlakoznak.

Az elmozdulás- és szögelfordulásmező folytonosságát az

$$u_r^{(i)} = u_r^{(j)}, \quad \omega_r^{(i)} = \omega_r^{(j)}; \quad (x, y \in L_{ij}) \tag{5}$$

egyenletek fejezik ki.

Az elmozdulás- és szögelfordulásmezőt heterogén anyagú rúd esetében az

$$u^{(i)} = -\vartheta yz, \quad v^{(i)} = \vartheta xz, \quad w^{(i)} = \vartheta \Phi^{(i)}(x, y); \tag{6}$$

$$\omega_1^{(i)} = -\frac{\vartheta}{2}(x - \Phi^{(i)}{}_{,y} + \psi^{(i)}{}_{,x}), \quad (x, y \in A_i) \tag{7}$$

$$\omega_2^{(i)} = \frac{\vartheta}{2}(y + \Phi^{(i)}{}_{,x} + \psi^{(i)}{}_{,y}) ,$$

$$\omega_3^{(i)} = \vartheta z$$

módon célszerű felvenni [2, 5]. Itt ϑ a fajlagos szögelfordulás, Φ a keresztmetszet deplanációja és ψ az ún. csavarási függvény [2]. A kinematikai egyenletek, (6, 7) továbbá (2) felhasználásával $\gamma_{rs}^{(i)}$, $\varkappa_{rs}^{(i)}$, $\sigma_{rs}^{(i)}$ és $\mu_{rs}^{(i)}$ számítására

$$\gamma_{\pi\varrho}^{(i)} = \gamma_{33}^{(i)} = 0,$$
$$\gamma_{3\varrho}^{(i)} = \gamma_{3\varrho}^{(i)}(\Phi^{(i)}, \psi^{(i)}), \quad \gamma_{\varrho 3}^{(i)} = \gamma_{\varrho 3}^{(i)}(\Phi^{(i)}, \psi^{(i)}) \tag{8}$$

$$\varkappa_{3\varrho}^{(i)} = \varkappa_{\varrho 3}^{(i)} = 0,$$
$$\varkappa_{\pi\varrho}^{(i)} = \varkappa_{\pi\varrho}^{(i)}(\Phi^{(i)}, \psi^{(i)}), \quad \varkappa_{zz}^{(i)} = \vartheta \tag{9}$$

$$\sigma_{\pi\varrho}^{(i)} = \sigma_{33}^{(i)} = 0,$$
$$\sigma_{3\varrho}^{(i)} = \sigma_{3\varrho}^{(i)}(\Phi^{(i)}, \psi^{(i)}), \quad \sigma_{\varrho 3}^{(i)} = \sigma_{\varrho 3}^{(i)}(\Phi^{(i)}, \psi^{(i)}) \tag{10}$$

$$\mu_{\varrho 3}^{(i)} = \mu_{3\varrho}^{(i)} = 0,$$
$$\mu_{\varrho\pi}^{(i)} = \mu_{\varrho\pi}^{(i)}(\Phi^{(i)}, \psi^{(i)}), \quad \mu_{zz}^{(i)} = \mu_{zz}^{(i)}(\Phi^{(i)}, \psi^{(i)}) \tag{11}$$

alakú összefüggések vezethetők le [2,3].

A (10, 11) szerint számított feszültségek (1)-ből következően akkor megoldások, ha $\Phi^{(i)}$, $\psi^{(i)}{}_{,x}$ és $\psi^{(i)}{}_{,y}$ kielégíti a

$$\Delta\Phi^{(i)} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{2\gamma_i + \beta_i}{2}\Delta\psi^{(i)}{}_{,x} + 2\alpha_i\psi^{(i)}{}_{,x} + \frac{\varepsilon_i - \gamma_i}{2}\Delta\Phi^{(i)}{}_{,y} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{2\gamma_i + \beta_i}{2}\Delta\psi^{(i)}{}_{,y} + 2\alpha_i\psi^{(i)}{}_{,y} + \frac{\varepsilon_i - \gamma_i}{2}\Delta\Phi^{(i)}{}_{,x} = 0 \tag{14}$$

differenciálegyenleteket ($\Delta = \nabla \cdot \nabla$, $\nabla = \mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y$). Megjegyezzük, hogy (12) kihasználásával a (11) összefüggések némileg egyszerűsíthetők.

A (12—14) differenciálegyenletekhez az elmozdulás- és szögelfordulásmező folytonosságát kifejező (5) alatti feltételek, valamint a dinamikai kerületi és illesztési feltételek (3, 4) csatlakoznak. E feltételi egyenletek $\Phi^{(i)}, \psi^{(i)}$-vel kifejezett alakjaira később nem lesz szükség, ezért részletes kiírásuktól eltekintünk.

A [2]-ben leírt gondolatmenet ismétlésével kimutatható, hogy a vizsgált heterogén mikropoláris anyagú rúd véglapjain ébredő erő és erőpárrendszerek egy-egy egymástól csak előjelben különböző z irányú koncentrált nyomatékkal helyettesíthetők, azaz a (12—14), (3—5) kerületiérték feladat megoldásai valóban a csavarási probléma megoldását is jelentik. A rúd jobboldali véglapját véve alapul, (10), (11) és (12) alapján belátható, hogy

$$M_z = \vartheta I_c = \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} [x\sigma_{zy}^{(i)} - y\sigma_{zx}^{(i)} + \mu_{zz}^{(i)}]\, dA, \tag{15}$$

ahol

$$I_c = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \left\{ \int_{A_i} \left[x\Phi^{(i)}{}_{,y} - y\Phi^{(i)}{}_{,x} - \frac{\alpha_i}{\mu_i}(x\psi^{(i)}{}_{,x} + y\psi^{(i)}{}_{,y}) - \frac{\beta_i}{2\mu_i}\Delta\psi^{(i)} \right] dA + 2A_i\gamma_i/\mu_i + I_{pi} \right\} \tag{16}$$

a rúd csavarási merevsége.

3. A csavarási merevség becslése

A csavarási merevség becslésére a potenciális energia minimumának elve biztosít lehetőséget [1, 4]. Az elv szerint a rugalmas rendszer potenciális energiájának, mint a kinematikailag lehetséges elmozdulás- és szögelfordulásmező függvényének, a tényleges megoldásnál minimuma van. Tekintettel feltételezéseinkre (térfogati terhelések nincsenek) a potenciális energia kifejezése

$$U = \frac{1}{2}\int_V (\overset{*}{\sigma}_{rs}\overset{*}{\gamma}_{rs} + \overset{*}{\mu}_{rs}\overset{*}{\varkappa}_{rs})\, dV - \int_{A_p} (p_s\overset{*}{u}_s + m_s\overset{*}{\omega}_s)\, dA$$

alakú [1], ahol a $\overset{*}{\sigma}_{rs}$, $\overset{*}{\mu}_{rs}$ kinematikailag lehetséges feszültségi tenzorok a kinematikailag lehetséges $\overset{*}{u}_s$, $\overset{*}{\omega}_s$ mezőből, a kinematikai egyenletek és az anyagtörvény révén származtathatók (a kinematikailag lehetséges mezők megkülönböztetésére a * jelölés szolgál). A felületi integrált a test azon A_p részére kell kiterjeszteni, ahol a p_j, m_j felületi erő és erőpárrendszer előírt.

A jelen esetben $A_p \equiv 0$, így U fenti kifejezésében csak a térfogati integrál marad meg. A kinematikailag lehetséges elmozdulás- és szögelfordulásmezőt

célszerűen (6), (7) szerint véve fel, $U = U(\overset{*}{\Phi}, \overset{*}{\psi})$. Megmutatjuk, hogy a $J(\overset{*}{\Phi}, \overset{*}{\psi}) = U(\overset{*}{\Phi}, \overset{*}{\psi})/\vartheta^2 l$ függvény értéke a tényleges megoldásnál, azaz a $\overset{*}{\Phi} = \Phi, \overset{*}{\psi} = \psi$, helyen $I_c/2$. Valóban, a tényleges megoldásnál

$$J(\Phi, \psi) = \frac{1}{2\vartheta^2 l} \int_V (\sigma_{3\varrho}\gamma_{3\varrho} + \sigma_{\varrho 3}\gamma_{\varrho 3} + \mu_{\varrho\pi}\varkappa_{\varrho\pi} + \mu_{zz}\varkappa_{zz})\, dV \tag{17}$$

írható, ahonnét z szerinti integrálás és a Gauss-tétel alkalmazása után

$$\begin{aligned} J(\Phi, \psi) = \frac{1}{2\vartheta^2} \Bigg\{ & \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} (\sigma_{3\varrho}^{(i)} u_{\varrho,3}^{(i)} + \mu_{zz}^{(i)} \varkappa_{zz}^{(i)})\, dA_i - \\ & - \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} \left[\sigma_{\varrho 3,\varrho}^{(i)} u_3^{(i)} + [\mu_{\varrho\pi,\varrho}^{(i)} - (\sigma_{3\varrho}^{(i)} - \sigma_{\varrho 3}^{(i)})\, \varepsilon_{3\varrho\pi}]\, \omega_\pi^{(i)}\right] dA_i + \\ & + \oint_{L_e} [n_\varrho \sigma_{\varrho 3} u_3 + n_\varrho \mu_{\varrho\pi} \omega_\pi]\, ds + \\ & + \sum_{L_{ij}} \int_{L_{ij}} [n_\varrho^{(i)} (\sigma_{\varrho 3}^{(i)} - \sigma_{\varrho 3}^{(j)})\, u_\varrho + n_\varrho^{(i)} (\mu_{\varrho\pi}^{(i)} - \mu_{\varrho\pi}^{(j)})\, \omega_\pi]\, ds_i \Bigg\} \end{aligned}$$

következik (az utolsó integrál előtti $\sum_{L_{ij}}$ azt jelzi, hogy az integrált valamennyi L_{ij} mentén számítani kell). A nyert kifejezésben (1, 3, 4)-re tekintettel, az első felületi integrált kivéve, minden eltűnik. Az első felületi integrálból pedig az $u_{1,3}^{(i)} = -y\vartheta$, $u_{2,3}^{(i)} = x\vartheta$, $\varkappa_{zz} = \vartheta$ egyenlőségek helyettesítése és (15, 16)-tal történő egybevetés után valóban a bizonyítani kívánt

$$J(\Phi, \psi) = I_c/2$$

egyenlőség következik.

Ismeretes, hogy a potenciális energia minimumának elvéből leszármaztathatók az egyensúlyi egyenletek és a dinamikai perem- és illesztési feltételek. A csavarási probléma kapcsán ez végső soron azt jelenti, hogy a $\overset{*}{\Phi}, \overset{*}{\psi}$ függvényektől nem kell előre megkövetelni a Φ, ψ-re vonatkozó (12—14) differenciálegyenletek és a hozzájuk tartozó dinamikai perem- és illesztési feltételek teljesítését.

Hangsúlyozzuk, hogy

$$J(\overset{*}{\Phi}, \overset{*}{\psi}) \geq I_c/2, \tag{18}$$

tehát a bemutatott eljárás felső korlát meghatározására ad lehetőséget.

A (8—11) és (17) összefüggések felhasználásával ellenőrizhető a

$$J(\overset{*}{\Phi}, \overset{*}{\psi}) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \int_{A_i} \left[\mu_i (\nabla \overset{*}{\Phi}^{(i)})^2 + 2\mu_i (x \overset{*}{\Phi}^{(i)}_{,y} - y \overset{*}{\Phi}^{(i)}_{,x}) + \right.\right.$$

$$+ \alpha_i (\nabla \overset{*}{\psi}^{(i)})^2 \left] dA_i + \frac{\mu_i I_{pi}}{2} + \gamma_i A_i + \right.$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{A_i} \left[(1 - \overset{*}{\Phi}^{(i)}_{,xy} + \overset{*}{\psi}^{(i)}_{,xx})^2 \gamma_i + (1 + \overset{*}{\Phi}^{(i)}_{,xy} + \overset{*}{\psi}^{(i)}_{,yy})^2 \gamma_i + \right.$$

$$+ \frac{\beta_i}{2} (\Delta \overset{*}{\psi}^{(i)})^2 + \frac{1}{2} \left[(\overset{*}{\Phi}^{(i)}_{,xx} - \overset{*}{\Phi}^{(i)}_{,yy} + 2\overset{*}{\psi}^{(i)}_{,xy}) \gamma_i + \right.$$

$$\left.\left.\left. + \varepsilon_i \Delta \overset{*}{\Phi}^{(i)} \right] (\overset{*}{\Phi}^{(i)}_{,xx} - \overset{*}{\Phi}^{(i)}_{,yy} + 2\overset{*}{\psi}^{(i)}_{,xy}) \right] dA_i \right\} \tag{19}$$

kifejezés helyessége.

Példaként tekintsünk két egyszerű alkalmazást [4]. Először tételezzük fel, hogy $\overset{*}{\Phi} = \overset{*}{\psi} = 0$. Ekkor (18) és (19) egybevetéséből az

$$I_c \leq \sum_{i=1}^{N} (\mu_i I_{pi} + 2\gamma_i A_i) \tag{20}$$

egyenlőtlenség következik.

Másodszorra tételezzük fel, hogy $\overset{*}{\Phi} = Cxy$ és $\overset{*}{\psi} = C/2(x^2 + y^2)$, ahol a C tetszőleges konstans értékét úgy választjuk meg, hogy $J(\overset{*}{\Phi}, \overset{*}{\psi})$ minimális legyen. Az elemi számítást nem részletezve, az

$$I_C \leq \frac{-\left[\sum_{i=1}^{N} \mu_i (I_{xi} - I_{yi} + 2A_i \gamma_i / \mu_i) \right]^2}{\sum_{i=1}^{N} \mu_i [I_{pi}(1 + \alpha_i/\mu_i) + A_i(\beta_i + 2\gamma_i)/\mu_i]} + \sum_{i=1}^{N} (\mu_i I_{pi} + 3A_i \gamma_i) \tag{21}$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

Ellenőrizhető, hogy (20, 21)-ből $\alpha = \beta = \gamma = 0$, $\mu_i = \mu$, $N = 1$ esetén a klasszikus rugalmasságtan ismert egyenlőtlenségei következnek [4, 5].

A (20, (21) egyenlőtlenségek jobboldalán álló kifejezések a koordinátarendszer kezdőpontjától is függenek. Ez további javításra ad lehetőséget.

Végezetül megjegyezzük, hogy abban az esetben, amikor μ, α, β, γ, ε folytonosan változik a keresztmetszeten (20), (21)-ből az

$$I_c \leq \int_A [\mu(x^2 + y^2) + 2\gamma] \, dA, \tag{22}$$

illetve az

$$I_C \leq \frac{-\left[\int_A \{(x^2 - y^2)\mu + 2\gamma\} \, dA \right]^2}{\int_A [(\mu + \alpha)(x^2 + y^2) + (\beta + 2\gamma)] \, dA} + \int_A [\mu(x^2 + y^2) + 3\gamma] \, dA \tag{23}$$

egyenlőtlenségek következnek. Ezek az egyenlőtlenségek a klasszikus rugalmasságtani egyenlőtlenségek általánosításaként tekinthetők [6].

Vegyük észre, hogy (22, 23), (20, 21)-ből nemcsak formálisan származtatható. Ha ui. a (18), (19) összefüggésekhez vezető gondolatmenetet a 2. pont elejétől eleve azzal a feltételezéssel ismételnénk meg, hogy μ, α, β, γ, ε az A tartományon x, y folytonos függvénye, akkor eredményül

$$J(\overset{*}{\Phi}, \overset{*}{\psi}) = \frac{1}{2}\int_A \left\{\mu[(\nabla\overset{*}{\Phi})^2 + (x^2+y^2) + 2(x\overset{*}{\Phi}_{,y} - y\overset{*}{\Phi}_{,x})] + \alpha(\overset{*}{\psi}_{,x}^2 + \overset{*}{\psi}_{,y}^2) + \right.$$

$$+ \gamma\left[2 + \frac{1}{2}(1 - \overset{*}{\Phi}_{,xy} + \overset{*}{\psi}_{,xx})^2 + \frac{1}{2}(1 + \overset{*}{\Phi}_{,xy} + \overset{*}{\psi}_{,yy})^2\right] + \frac{\beta}{2}(\Delta\overset{*}{\psi})^2 +$$

$$\left. + \frac{1}{4}[(\overset{*}{\Phi}_{,xx} - \overset{*}{\Phi}_{,yy} + 2\overset{*}{\psi}_{,xy})\,\gamma + \varepsilon\Delta\overset{*}{\Phi}]\;\;(\overset{*}{\Phi}_{,xx} - \overset{*}{\Phi}_{,yy} + 2\overset{*}{\psi}_{,xy})\right\} dA \geq I_c/2$$

adódnék, ahonnan a (20, 21)-hez vezető úton (22), (23)-hoz jutunk.

IRODALOM

1. Nowaczki, W.: Theory of Micropolar Elasticity, Springer, Udine (1970) 5–49, 167–173
2. Usidus, C.–Sokolowski, M.: Torsion of Cylindrical Shafts Made of Micropolar Material, *Bull. Acad. Polon. Sci.*, Serie Sci. Techn., **21** (1973), 19–23
3. Szeidl Gy.: Egy lehetőség a csavarási merevség becslésére a mikropoláris rugalmasságtanban. *Publications of the Technical University of Heavy Industry*, Series D-Natural Sciences (sajtó alatt)
4. Михлин С. Г.: Вариационные методы в математической физике, Наука, Москва (1970) 138–140.
5. Арутюнян Н. Х. и Абрамян Б. Л.: Кручение упругих тел, Физматид, Москва (1963) 13–88, 393–404.
6. Ecsedi I.: Heterogén anyagú prizmatikus rudak csavarási merevségének becsléséről. *Acta Techn. Hung.* (sajtó alatt)

Estimation of the torsional rigidity of a bar of heterogeneous micropolar material. A method based on the potential energy minimum principle is introduced to estimate the torsional rigidity of a bar of heterogeneous micropolar material. By means of this method, obtained as a generalization of the classical science of elasticity, the upper limit of torsional rigidity can be readily calculated. The application of the method is illustrated by examples.

Schätzung der Torsionssteifigkeit von Stäben aus heterogenem mikoropolarem Stoff. Für die Schätzung der Torsionssteifigkeit eines Stabes aus heterogenem, mikropolarem Stoff bietet die Studie eine auf dem Prinzip des Minimums der potentionellen Energie beruhenden Methode. Die als Verallgemeinerung der klassischen Elastizitätslehre gewonnene Methode eignet sich zur Bestimmung des oberen Grenzwertes der Torsionssteifigkeit. Beispiele veranschaulichen die Anwendung der Methode.

Оценка жесткости кручения стержней, изготовленных из неоднородного микрополярного материала. В настоящей работе даётся основанный на принципе минимума потенциальной энергии метод для оценки жесткости стержней, изготовленных из неоднородного микрополярного материала. При помощи метода, полученного как обобщение классического, определяется верхний предел для жесткости кручения. Представляются примеры для применения метода.

HOSSZÚ RÚD HŐÜTÉS FELADATÁNAK NÉHÁNY NUMERIKUS EREDMÉNYE

SZEKERES ANDRÁS*

A hőrugalmasságtan alapegyenleteiből kiindulva felírtuk a homogén, izotrop kontinuum és rúd összefüggéseit, majd ezek alapján vizsgáltuk a hosszú, egyik végén befogott rúd hőütés feladatát. A megfelelő kezdeti- és peremfeltételek felírása után a megoldást differencia-egyenletek segítségével digitális számológép adta. Numerikus eredményeink megmutatják az ütés sebességének és jellegének hatását a rúd elmozdulás- és hőmérséklet változására.

1. Bevezetés

Ismeretes, hogy hőmérsékletváltozás alakváltozást okoz és fordítva. Ezért a rugalmasságtani vizsgálatokban — szigorúan véve — a termodinamikai hatások nem hanyagolhatók el, az alakváltozási- és hőmérsékletmező kapcsoltan kezelendő. Stacionárius hőrugalmasságtani feladatokban azonban a jelenséget leíró differenciálegyenletrendszer szétesik, és a hőmérsékletmező külön meghatározható, majd ennek ismeretében az alakváltozási mező előállítható. Kvázi-statikus feladatok esetében szokás a megoldás egyszerűsítése érdekében a fenti kapcsolást megvalósító mennyiséget elhanyagolni. Ez természetesen előzetesen jól megbecsülhető pontatlanságot okoz. Bár a szakirodalom megemlíti a nem-kapcsolt dinamikai feladatok körét is, ez azonban pontatlansága miatt várhatóan nem mond többet a jelenségről, mint a kvázi-statikus eset. Mindezek alapján a dinamikai hőrugalmasságtani feladatokat egyben kapcsoltnak is kell tekintenünk. Ez a leíró egyenletek megoldásakor okoz nehézségeket. A továbbiakban ezzel az esettel foglalkozunk.

A hőrugalmasságtan alapegyenleteiből kiindulva, bemutatjuk a homogén, izotrop kontinuum, majd a rúd viselkedését leíró összefüggéseket. Ezután térhetünk rá a hosszú rúd hőütés feladatára. A kiegészítő feltételek ismertetése után röviden a számítási módszer, majd a számítások eredményei, végül az eredmények értékelése következik.

* Dr. Szekeres András, 1036 Budapest, Lajos u. 115.

2. Alapegyenletek

Felhasználva az összegezési és differenciálási konvenciót, a hőrugalmasságtan problémája az alábbi egyenletrendszerrel írható le [1]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,j} + u_{j,i} + u_{l,i}\,u_{l,j}\right], \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkl}\,\sigma_{kl} + \int_0^T \alpha_{ij}\,dT\,, \tag{2}$$

$$\frac{1}{\varrho}\,\sigma_{ij,j} + g_i = \ddot{u}_i\,, \quad \dot{q} = w + (\varkappa_{ij,i}\,T_{,j} + \varkappa_{ij}T_{,ji})\,, \tag{3), (4}$$

$$s = \int_0^T \varrho c\,\frac{dT}{T_1} - \beta_{ij}\,\varepsilon_{ij}, \quad dq \leqq T_1\,ds\,. \tag{5), (6}$$

A fenti összefüggések az elmozdulás és alakváltozás kapcsolatát, az anyagtörvényt, a mozgásegyenletet, a hővezetés egyenletét és a termodinamika első és második főtételét fejezik ki.

ε_{ij}, u_i, σ_{ij}, T_1, q és s az alakváltozás, az elmozdulás, a feszültség, a hőmérséklet, a hő és az entrópia, a hely és az idő függvénye; az a_{ijkl} α_{ij}, β_{ij}, ϱ, c, $\varkappa_{ij}$ anyagjellemzők a hely és a hőmérséklet függvényei; w és g_i a hőforrás sűrűség és a térerő intenzitás; $T_1 = T_0 + T$ alapján pedig T_1 a pillanatnyi, T_0 az egyensúlyi állapot szerinti hőmérséklet.

A továbbiakban kis alakváltozásokat, reverzibilis folyamatokat és kis $\partial T/\partial s$ értékeket feltételezve, (1) és (6) helyett a következő összefüggéseket használjuk:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i})\,, \quad q = T_1 s\,. \tag{1'), (6'}$$

Homogén, izotrop, a hőmérséklettől nem függő anyagjellemzőkkel rendelkező kontinuum esetében a feladat egyszerűbb alakban írható fel. Felhasználva ehhez a szakirodalomból (pl. [2]) ismert összefüggéseket, végül az (1'), (2'), (3), (4'), (5') és (6') egyenletrendszer adódik:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\,\sigma_{kk}\,\delta_{ij}\right) + \alpha_t\,T\delta_{ij}\,, \tag{2'}$$

$$\dot{q} = w + \varkappa T_{,ii}\,, \quad s = c\varrho\,\ln\frac{T_1}{T_0} + \gamma\varepsilon_{kk}\,. \tag{4'), (5'}$$

Itt μ és λ a Lamé-féle állandókat, α_t, $\varkappa$ és c a hőtágulási együtthatót, a hővezetési tényezőt és a fajhőt jelöli, ϱ a sűrűség γ pedig az alábbi

$$\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t\,.$$

Alkalmazzuk a fentieket hosszú rúdra, vizsgáljunk egydimenziós feladatot. Tegyük fel, hogy a térerő elhanyagolható és belső hőforrás nincsen. A helykoordinátát jelöljük x-szel az időt t-vel és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x} = (\ )_x, \frac{\partial(\ )}{\partial t} = (\ )_t, \frac{\partial^2(\ )}{\partial x \partial t} = (\ )_{xt}.$$

Ezzel

$$\varepsilon = u_x, \quad \varepsilon = \frac{1}{E}\sigma + \alpha_t T, \qquad (1''), (2'')$$

$$\frac{1}{\varrho}\sigma_x = u_{tt}, \quad s = c\varrho \ln \frac{T_0 + T}{T_0} + \gamma \varepsilon, \qquad (3''), (4'')$$

$$q_t = \varkappa T_{xx}, \quad q = (T_0 + T)s. \qquad (5''), (6'')$$

Itt E-vel a rugalmassági tényezőt jelöltük.

Alakítsuk át a fenti rendszert úgy, hogy ismeretlen függvényként csak az $u(x, t)$ elmozdulás és a $T(x, t)$ hőmérséklet szerepeljen. Rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{E}{\varrho} u_{xx} - u_{tt} - \frac{E\alpha}{\varrho} T_x = 0, \qquad (7)$$

$$T_{xx} - \left[\frac{c\varrho}{\varkappa}\left(1 + \ln \frac{T_0 + T}{T_0}\right) + \frac{\gamma}{\varkappa} u_x\right] T_t - \frac{\gamma}{\varkappa}(T_0 + T) u_{xt} = 0. \qquad (8)$$

3. Hosszú rúd hőütés feladata

Hosszú rúd hőütés feladatát a (7) és (8) egyenletrendszer írja le, ha ezeket kiegészítjük a kezdeti- és peremfeltételekkel. A kiegészítő feltételek felvételéhez válasszuk az 1. ábra szerinti modellt. Az l hosszúságú hengeres, palástján hőszigetelt, befogott rúd szabad végén adott törvényszerűség szerint hőt közlünk, ennek megfelelően változik a hőmérséklet, illetve a fajlagos nyúlás. Azaz, $x = o$-nál

$$T(0, t) = vt, \quad u_x(0, t) = \alpha_t v t. \qquad (9), (10)$$

Itt v egy arányossági tényező, a hőmérsékletváltozás sebessége.

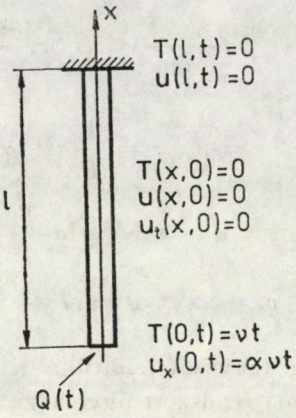
A rúd befogott végén — mivel a befogás végtelen kapacitású hőtartálynak vehető — a hőmérséklet nem változik és természetesen elmozdulás sincsen. Eszerint $x = l$-nél

$$T(l, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \qquad (11), (12)$$

Ezeken felül tegyük fel, hogy a vizsgálat kezdetekor a rúd nyugalomban van, elmozdulása zérus és hőmérséklete T_0, azaz $t = 0$-nál

$$T(x, o) = 0, \ u(x, o) = 0, \ u_t(x, o) = 0. \qquad (13), (14), (15)$$

Homogén, hosszú, egyik végén befogott rúd adott feltételek melletti feladatát a (7)—(15) egyenletrendszer írja le. Ezen egyenletrendszer megoldása alapján következtetést vonhatunk le a rúd viselkedésére nézve.



1. ábra

4. Numerikus eredmények

A fenti rendszert differencia-egyenletekké történt alakítás után numerikus módszerrel, digitális számológép segítségével oldottuk meg.* A következőkben röviden ismertetjük a számítás módját, majd rátérünk a numerikus eredményekre.

Bevezetve a $\Delta x = h$ és $\Delta t = k$ jelöléseket és a szakirodalom (pl. [3]) alapján a megfelelő differenciahányadosokat, rendezés után (7) és (8) helyett az alábbi egyenletek adódnak:

$$\frac{E}{\varrho}\frac{1}{h^2}[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)] - \frac{1}{k^2}[u(x,t+k) -$$

$$- 2u(x,t) + u(x,t-k)] - \frac{E}{\varrho}\alpha_t \frac{1}{h}[T(x+h,t) - T(x,t)] = 0, \qquad (16)$$

$$\frac{1}{h^2}[T(x+h,t) - 2T(x,t) + T(x-h,t)] - \left[\frac{c\varrho}{\varkappa}\left\langle 1 + \ln\frac{T_0 + T(x,t)}{T_0}\right\rangle + \right.$$

$$+ \frac{\gamma}{\varkappa}\frac{1}{h}\langle u(x+h,t) - u(x,t)\rangle \left.\frac{1}{k}[T(x,t+k) - T(x,t)] - \right.$$

$$- \frac{\gamma}{\varkappa}\langle T_0 + T(x,T)\rangle \frac{1}{hk}[u(x+h,t+k) - u(x,t+k) - u(x+h,t) +$$

$$+ u(x,t)] = 0. \qquad (17)$$

* Köszönetet mondok Ágoston Györgynek a program készítése és futtatása során nyújtott segítségért.

A megoldás tehát a 2. ábra alapján úgy történik, hogy a (16)-os egyenletből kiszámítjuk az $u(x, t + k)$ értéket, majd x helyett $x + h$ és akkor $u(x + h, t + k)$ adódik. Végül (17) felhasználásával $T(x, t + k)$ nyerhető.

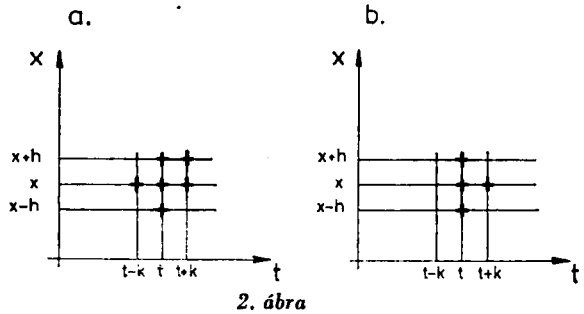
A tartomány két szélén lineárisan extrapolálunk.

$t = 0$-nál $u(x, t + k)$-ra

$$u(x, -k) = u(x, o) - u_t(x, o) \cdot k, \tag{18}$$

$x = h$-nál $u(x - h, t)$-re

$$u(o, t) = u(h, t) - u_x(o, t) \cdot h = u(h, t) - \alpha_t v t h \,. \tag{19}$$



2. ábra

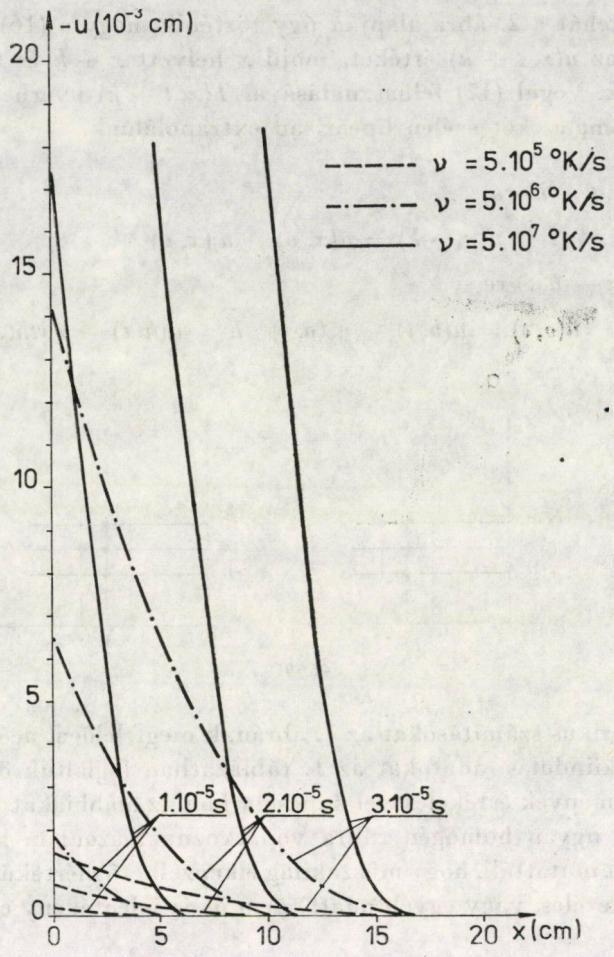
A numerikus számításokat az 1. ábrának megfelelően, acél anyagú rúdra végeztük. A kiindulási adatokat az 1. táblázatban foglaltuk össze.

Az eredmények értékelésével kapcsolatban az alábbiakat jegyezzük meg. Számításaink ugyan homogén rúdra vonatkoznak, azonban korábbi vizsgálataink [4] azt mutatták, hogy műszakilag elképzelhető mértékű inhomogenitás (pl. hibás hőkezelés, vagy egyéb miatt) nem okoz jelentékeny eltérést az eredményekben.

A 3. ábra az $u(x, t)$ és $T(x, t)$ függvényeket mutatja a hőmérsékletváltozás sebességének (v) függvényében. Az eredmények megerősítették azt a korábbi [4] megállapításunkat, hogy a rugalmas és hőmérsékleti hullám terjedési sebes-

1. táblázat

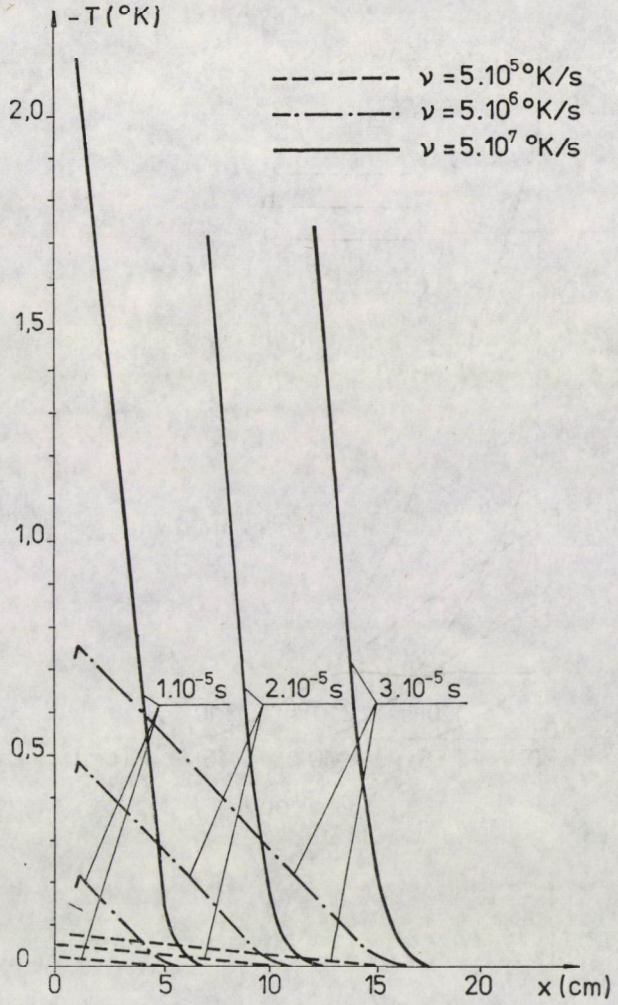
E	2.10^6	$\frac{kp}{cm^2}$	ϱ	8.10^{-6}	$\frac{kps^2}{cm^4}$
ϱ_1	$7{,}8.10^{-3}$	$\frac{kp}{cm^3}$	γ_1	58,4	$\frac{kp}{cm^3 °C}$
γ_1	$14{,}15.10^{-5}$	$\frac{kcal}{cm°C}$	c	0,114	$\frac{kcal}{kp°C}$
α_t	$1{,}17.10^{-5}$	$\frac{1}{°C}$	l	100	cm
T_o	300	°K	v	5.10^6	$\frac{°K}{s}$
h	1	cm	k	1.10^{-6}	s



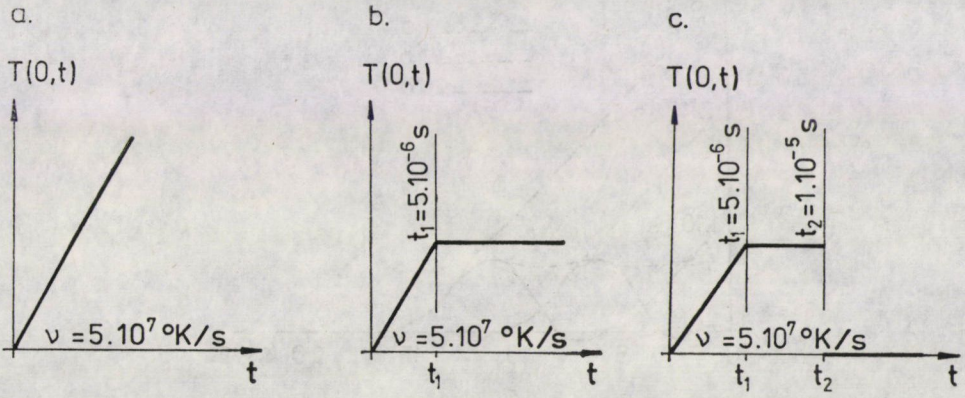
3a. ábra

sége közötti lényeges különbség miatt a rúdvégén bevezetett jelentékeny mennyiségű hő ellenére a rúd az $x = 0$ hely kis környezete kivételével mindenütt lehűl. Ez a megállapítás, természetesen, a vizsgálatok első szakaszára érvényes. Másrészt a számítási eredmények azt mutatják, hogy az u elmozdulás és a T hőmérséklet v-vel megközelítőleg arányosan változik. Mindezen megállapítások a vizsgált — $v = 5 \cdot 10^5 - 10^7$ K°/s — tartományra érvényesek.

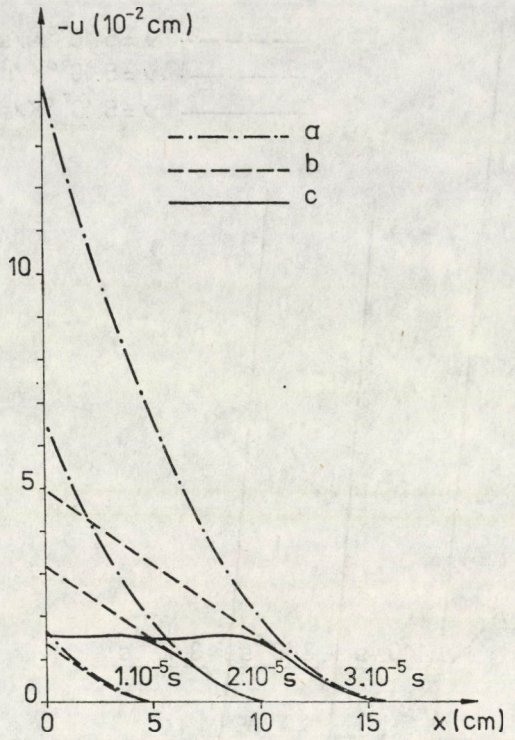
A továbbiakban megvizsgáltuk az ütés jellegének a hatását. A rúdvég hőmérséklete a 4. ábra szerint változott, az eredmény (u és T) az 5. ábrán látható. (Itt a, b és c a 4. ábra megfelelő eseteire való hivatkozás). Az ábrák jól mutatják az ütés jellege és az elmozdulás, valamint a hőmérséklet rúdmenti és időbeli változása közötti összefüggést.



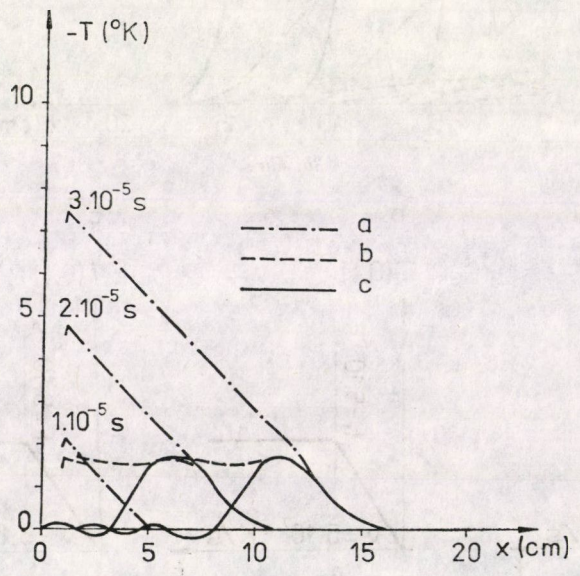
3b. ábra



4. ábra



5a. ábra



5b. ábra

IRODALOM

1. SZEKERES, A.: Some Remarks on the Equations of Thermoelasticity. *ZAMM* **57** (1977), No. 5
2. NOWACKI, W.: Thermoelasticity. Pergamon Press, 1962
3. OBÁDOVICS J. GY.: Gyakorlati számítási eljárások. Gondolat, Budapest 1972
4. SZEKERES, A.: Thermal Shock in a Long Inhomogeneous Rod. Kézirat, a „Nonlinear Deformation Waves — Tallin, 1978" c. szimpoziumon tartott előadás

Some numerical results of the thermal shock problem of long bars. Starting from the basic equations of thermoelasticity the relations of homogeneous isotropic continuum and a bar have been expressed, then, on this basis the thermal shock problem of a long bar fixed at one end was studied. After the expression of the corresponding initial and boundary conditions the solution was obtained from a digital computer by means of difference equations. The numerical results collected show the effect of impact rate and character on the displacement and temperature variation of the bar.

Einige numerische Resultate von einen langen Stab betreffenden Wärmestoßaufgaben Anhand der Grundgleichungen der Wärmeelastizitätslehre wurden die Zusammenhänge des homogenen, isotropen Kontinuums und des Stabes angeschrieben und auf Grund dieser das Problem des Wärmestoßes eines, an einem Ende eingespannten Stabes untersucht. Nach Festlegung der entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen, lieferte mit Hilfe der Differenzgleichungen ein Digitalautomat die Lösung. Die numerischen Ergebnisse zeigen die auf den Stab hinsichtlich Verschiebung und Temperaturänderung ausgeübte Wirkung der Geschwindigkeit und des Charakters des Stoßes an.

Некоторые цифровые результаты задачи термоудара длинного стержня. Исходя из основного уравнения теории термоупругости мы вывели уравнения однородной, изотропной среды и стержня, а затем на основе этих уравнений мы рассматривали задачу термоудара стержня, жестко закрепленного с одного конца. Сформулировав начальные и краевые условия, решение было получено посредством дифференциальных уравнений при помощи ЭВМ. Цифровые результаты показывают влияние скорости и характера удара на изменение сдвига и температуры стержня.

PERIODIKUS MOZGÁSOK STABILITÁSA

SZERVÁNSZKY GYÖRGY*

Jelen munka a mozgásstabilitás — lényegében Ljapunovtól származó — definíciójából kiindulva, a gyakorlat számára jól használható eljárást kíván adni periodikus mozgások stabilitásának eldöntésére. Az eredmény tétel formájában nyer megfogalmazást, amelynek alkalmazására a dolgozat számpéldát (Van der Pol egyenlet) mutat be.

Bonyolultabb rendszerek mozgásának vizsgálatakor gyakran felmerülő probléma, hogy a kialakuló mozgás mennyire érzékeny a kezdeti értékekre. A dolgozat célja jól használható kritériumot adni periodikus tulajdonságokat mutató mozgások stabilitásának eldöntésére.

A vizsgálat alapjai a mozgás stabilitására vonatkozó, lényegében LJAPUNOVTÓL [1] származó definíciók:

1. A mozgást leíró $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ differenciálegyenlet rendszer $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti értékekhez tartozó $\xi = \xi(t, \mathbf{x}_0)$ megoldását stabilisnak mondjuk, ha létezik $\varepsilon > 0$ úgy, hogy bármely $\delta\ (\varepsilon) > 0$ esetében az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0$ $|\Delta\mathbf{x}_0| < \delta$ kezdeti értékhez tartozó megoldás vonatkozásában az

$$|\xi(t, \mathbf{x}_0) - \xi(t, \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül;

2. a mozgást leíró $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ differenciálegyenlet rendszer stabilis $\xi = \xi(t, \mathbf{x}_0)$ megoldását aszimptotikusan stabilisnak mondjuk, ha

$$\lim_{t \to \infty} \xi(t, \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0) = \xi(t, \mathbf{x}_0).$$

Tekintsük ezek után az

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

differenciálegyenlet rendszert. Legyen az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti értékhez tartozó megoldás

$$\xi = \xi(t, \mathbf{x}_0)\,, \tag{2}$$

az $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0$ kezdeti értékhez tartozó megoldás pedig

$$\mathbf{q} = \xi + \eta \tag{3}$$

* Szervánszky György, 1119 Budapest, Allende-park 19.

alakú. (3)-at (1)-be helyettesítve és η szerint sorba fejtve

$$\dot{\xi} + \dot{\eta} = \mathbf{F}(\xi + \eta) = \mathbf{F}(\xi) + \mathbf{F}'(\xi)\eta + \mathbf{Q}(\xi, \eta) , \tag{4a}$$

azaz

$$\dot{\eta} = \mathbf{F}'(\xi)\eta + \mathbf{Q}(\xi, \eta) \tag{4b}$$

adódik. Itt a $'$ az argumentum szerinti deriválást jelenti. Természetesen

$$\lim_{|\eta| \to 0} \frac{|\mathbf{Q}|}{|\eta|} = 0 \tag{5}$$

teljesül.

Bizonyos, későbbiekben látható feltételek teljesülése esetében a stabilitást (4) lineáris részének viselkedése dönti el. Éppen ezért vizsgálatainkat (4) lineáris részére korlátozzuk.

Tegyük fel, hogy ξ T szerint periodikus. Így az $\mathbf{F}'(\xi)$ mátrix, amely a t idő függvényének tekinthető, szintén T szerint periodikus lesz. Bevezetve az $\mathbf{A} = \mathbf{F}'$ jelölést, (4) lineáris részeként az

$$\dot{\eta} = \mathbf{A}(t)\, \eta \tag{6}$$

lineáris differenciálegyenlet rendszer adódik. Továbbá teljesül, hogy

$$\mathbf{A}(t + T) = \mathbf{A}(t).$$

Az (5) differenciálegyenlet rendszerhez rendelhető mátrix differenciálegyenlet

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{7}$$

Ennek megoldása lehet

$$\mathbf{U}(t) = e^{\int_0^t \mathbf{A}(\tau)\, d\tau}\, \mathbf{x}_0 = \mathbf{G}(t)\, \mathbf{x}_0 \tag{8}$$

alakú.

Mivel $\mathbf{A}$ T szerint periodikus,

$$\int_t^{t+T} \mathbf{A}(\tau)\, d\tau = \int_0^T \mathbf{A}(\tau)\, d\tau = \mathbf{Q} \tag{9}$$

teljesül. Ezzel

$$\mathbf{U}(t + T) = e^{\mathbf{Q}} + \int_0^t \mathbf{A}(\tau)\, d\tau \mathbf{x}_0 = \mathbf{M}\mathbf{G}(t)\, \mathbf{x}_0 = \mathbf{M}\mathbf{U}(t). \tag{10}$$

Itt

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}^{\mathbf{Q}} \tag{11}$$

a megoldás ún. főmátrixa ([1], [2]).

Az általánosság különösebb korlátozása nélkül M-et diagonálisnak tekinthetjük, ugyanis ez megfelelő hasonlósági transzformációval mindig biztosítható.

A (7) differenciálegyenlettel ekvivalensnek mondjuk az

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{BY} \tag{12}$$

differenciálegyenletet, ha (12) $\mathbf{V}(t)$ és (7) $\mathbf{U}(t)$ megoldása között nem elfajuló lineáris kapcsolat áll fenn,

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{S}(t)\,\mathbf{V}(t),$$

és

$$\mathbf{S}(t + T) = \mathbf{S}(t) \tag{13}$$

teljesül. A mondott ekvivalencia teljesül, mint ez a differenciálegyenletek elméletéből ismeretes, ha (7) és (12) differenciálegyenletek főmátrixa egy hasonlósági transzformáció erejéig megegyezik.

A (7) egyenlettel ekvivalens (12) egyenlet **B** együtthatója választható időtől függetlennek, ugyanis ekkor

$$\mathbf{V}(t) = e^{\mathbf{B}t}\,\mathbf{Y}_0,$$

azaz egyrészt

$$\mathbf{V}(t + T) = e^{\mathbf{B}T}\,V(t)$$

teljesül, másrészt (10) alapján

$$\mathbf{U}(t + T) = \mathbf{M}\mathbf{U}(t)$$

adódik, és ezzel az ekvivalencia miatt az

$$\mathbf{M} = e^{\mathbf{B}T} \tag{14}$$

összefüggést nyerjük.

Ezzel tehát az (5) differenciálegyenlet megoldása

$$\eta(t) = \mathbf{S}(t)\,e^{\mathbf{B}t}\eta_0 \tag{15}$$

alakban állítható elő, ahol (9), (11) és (14) alapján

$$\mathbf{B} = \frac{1}{T}\mathbf{Q}. \tag{16}$$

Legyenek **B** sajátértékei λ_i-k, ekkor **M** a következő alakban állítható elő:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n T} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Így, ha valamennyi

$$R_e\lambda < 0 ,$$

akkor (15) megoldásra teljesül a

$$\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0$$

egyenlőség. Ezzel, figyelembe véve (4)-et és (5)-öt, az eredeti (1) differenciálegyenlet rendszer $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0$ kezdeti értékekhez tartozó megoldására vonatkozó érvényes a

$$\lim_{t\to\infty} \xi(t, \mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}_0) = \xi(t, \mathbf{x}_0)$$

összefüggés, azaz a megoldás aszimptotikusan, és így közönséges értelemben is stabilis. Megfogalmazhatjuk tehát a következő tételt: az $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ differenciálegyenlet rendszer $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti értékhez tartozó $\xi = \xi(t, \mathbf{x}_0)$ megoldása aszimptotikusan, és így közönséges értelemben stabilis, ha az

$$\dot{\eta} = \left.\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\xi(t)} \eta \tag{18}$$

lineáris differenciálegyenlet rendszerhez rendelhető mátrix-differenciálegyenlet diagonális főmátrixa valamennyi elemének valós része egynél kisebb.

Alkalmazzuk eredményünket a jól ismert Van der Pol-féle egyenletre ([3], [4]). Az egyenlet

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\,\dot{x} + x = 0 \tag{19}$$

alakú. ($\mu > 0$).

A megfelelő egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \mu y - \mu x^2 y. \end{aligned} \tag{20}$$

Legyen (19) megoldása

$$x = h(t),$$

ezzel

$$y = \dot{h}(t).$$

Előállítva (18)-at a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-2\mu h\dot{h} & \mu(1 - h^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} . \tag{21}$$

Ahhoz, hogy tovább léphessünk, h-nak legalább közelítő ismerete szükséges. Tegyük fel, hogy μ kicsi és legalábbis $t \gg 0$ esetében

$$h(t + T) = h(t).$$

(19) alapján látszik, hogy az

$$\int_t^{t+T} h d\tau = 0,$$

$$\int_t^{t+T} h^2 d\tau = N \text{ (konstans)},$$

$$\int_t^{t+T} \dot{h}^2 d\tau = N, \text{ és végül}$$

$$\int_t^{t+T} h^2 \dot{h}^2 = N$$

összefüggések teljesülnek. A megoldást Fourier-sor alakjában keresve, a fentiek miatt $h = h(t)$-re a

$$h = 2 \sin (t + t_0)$$

közelítő megoldás adódik. Ezzel (11) és (16) alapján

$$\mathbf{B} = \frac{1}{T}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{bmatrix}$$

lesz. $\mathbf{B}$ sajátértékeit a

$$\det (\mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = 0$$

egyenlet alapján nyert

$$\lambda^2 + \mu\lambda + 1 = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei szolgáltatják:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 - 1}.$$

Mivel

$$0 < \mu < 1,$$

a sajátértékek valós része negatív, s ezzel a főmátrix elemeinek valós része egynél kisebb. Tehát tételünk alapján megállapíthatjuk, hogy a mondott feltételek teljesülése esetében ($0 < \mu < 1$) a Van der Pol-féle egyenlettel leírt mozgás aszimptotikusan stabilis.

Összefoglalva a dolgozatban mondottakat úgy tűnik, hogy a leírt módszer könnyebbé teszi a problémák numerikus (gépi) kezelését, mivel így elkerülhető — adott esetekben — a sokszor könnyen meg nem található Ljapunov-féle függvény vizsgálata.

IRODALOM

1. PONTRJAGIN, L. Sz.: Közönséges differenciál egyenletek. Akadémiai Kiadó, Budapest 1972
2. PARS, L. A.: A treatise on Analitical Dynamics. Heinemann, London 1965
3. HAHN, W.: Stability of Motion. Springer-Verlag, Berlin 1967
4. FARKAS M.: Nem lineáris rezgések. Differenciál egyenletek és műszaki alkalmazásaik c. nyári iskola. Miskolc-Egyetemváros 1977

Stability of periodic movements. Starting from the definition of movement stability actually created by LYAPUNOV, the present paper attempts to offer a well adaptable method for practical use, suitable for deciding on the stability of periodic movements. The result is defined in the form of a theorem whose application is illustrated by means of a numerical example (Van der Pol equation).

Stabilität der periodischen Bewegungen. Die vorliegende Abhandlung soll von der — im wesentlichen von LJAPUNOW stammenden — Definition der Bewegungsstabilität ausgehend, der Praxis eine gut brauchbare Methode für das Ermessen der Stabilität periodischer Bewegungen darbieten. Das Ergebnis ist eine Formel, für deren Anwendung ein Zahlenbeispiel (Van der Pol-Gleichung) angeführt ist.

Устойчивость периодических движений. Настоящая работа, посвященная устойчивости движений, — используя определение, принадлежащее Ляпунову, — предлагает практический метод для решения устойчивости периодических движений. Результат сформулирован в форме леммы, примененной для рассчёта практической задачи (уравнения Ван дер Поля).

KÉTFÁZISÚ DISZKRÉT RÚDMODELL VIZSGÁLATA DISZKONTINUITÁSOK ÉS KÉPLÉKENY ALAKVÁLTOZÁSOK FIGYELEMBEVÉTELÉVEL

TASSI GÉZA
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

és

RÓZSA PÁL
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

A dolgozat ekvidisztáns közökben egymáshoz kapcsolt koaxiális elemekből álló egydimenziós modell (pl. a legegyszerűbb vasbeton rúd modellje) feszültségi-alakváltozási állapotait tárgyalja. A modell egy-egy rúdjának megfolyása esetében a szerkezet merevségi mátrixát egy-egy diáddal kell módosítani. A módosított mátrix inverzének előállítására vonatkozó tétel, valamint a kontinuáns és egypárú mátrixok sajátosságainak felhasználásával, Csebisev-polinomok segítségével, analitikus úton, zárt formában felírhatók a diszkontinuitások (repedés stb.) egyik oldalán levő kapcsolóelemek képlékeny alakváltozásai esetében az erőjátékra jellemző mennyiségek. A képletek tartalmazzák a diszkrét modell osztásközének jellemzőit, így az analitikus eljárás segítséget nyújt finit módszerek esetében a célszerű hálósűrűség megválasztásához.

1. Bevezetés

A mérnöki gyakorlatban egyre gyakrabban találkozunk olyan problémákkal, amelyek a rugalmas kontinuumfeladatok megoldásakor alkalmazott klasszikus módszerekkel nem oldhatók meg.

A diszkontinuitással kapcsolatos kérdések egyik legjelentősebb területe a törési mechanika. A lineárisan rugalmas testben különféle geometriai elrendezésű repedések, üregek hatásának analitikus úton való vizsgálata lehetséges egyes jellemző alapesetekben (pl. [10]), és számos képlékenységtani feladat megoldására találunk zárt formulákat (l. pl. [5]). Kétfázisú rendszerek (vasalt betonelem stb.) helyi feszültségállapotait a klasszikus vasbetonelmélet művelői is vizsgálták analitikus úton egyes esetekben (pl. [2]). Kétfázisú, diszkontinuitással zavart, rugalmas-képlékeny állapotban levő speciális elem analitikus tárgyalására a hazai gyakorlatban is van példa [9].

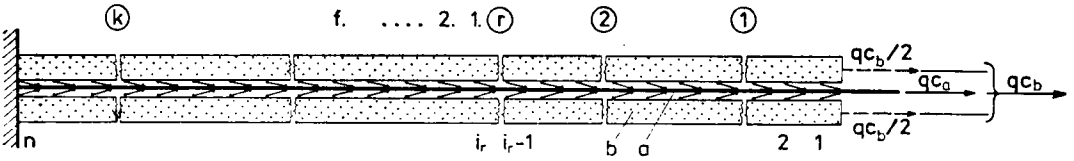
A finit módszerek hazai elterjedése a tárgyalt problémakörbe tartozó számos feladatra hozott megoldást, pl. kétfázisú, képlékeny tartományokkal rendelkező szerkezeti elemekre [1], [4] vagy a diszkontinuitások egyes kérdéseire [3].

A finit módszerek alkalmazása rendszeresen felveti az alkalmazandó véges elemek hálózatának kérdését, hiszen a durva osztást a számítás megbízhatósága sínyli meg, a túl finom pedig megsokszorozza a gépi számítási munkát.

Diszkrét feladatok analitikus úton való megoldása számos műszaki probléma közvetlen megoldása szempontjából jelentős. Leginkább azonban a diszkrét modell felvétele tekintetében kapunk az analitikus megoldással értékes információkat, mivel az eredmények a diszkrét modell jellemzőit (osztásköz stb.) tartalmazzák. Minthogy ilyen jellegű vizsgálatok száma a közelmúltban végzett hazai felmérés szerint [6] igen csekély, indokolt a témakör jellegzetes feladatok megoldása útján való művelése.

2. A modell

Tekintsük az 1. ábrán vázolt, ekvidisztáns közökben egymáshoz kapcsolt két elemből álló összetett rúdmodellt. A rúdmodellre csak axiális erő hat. A b jelű elem merevsége b, az a jelűé vb, a kapcsolóelemeké γb.



1. ábra

3. A diszkontinuitások hatása a rugalmas összetett elemre

A b jelű rúdban k helyen adódó diszkontinuitás hatása, a diszkontinuitások (szakadások, repedések, átvágások) helyén adódó relatív elmozdulások, az egész elem merevségének módosulása a diszkontinuitások következtében, valamint a belső erők (az a és b jelű rúd szakaszaiban és a kapcsolóelemekben ható erők) változása lineárisan rugalmas anyagú rudakból és kapcsolóelemekből álló komplex modell esetén zárt formában felírható [11].

A modell vizsgálatára elmozdulásmódszerrel felírt egyenletrendszer analitikus alakban való megoldását a rendszer együtthatómátrixa sajátosságainak felismerése, valamint a kontinuáns mátrixokra és egypárú mátrixokra vonatkozó tétel [7] alkalmazása tette lehetővé.

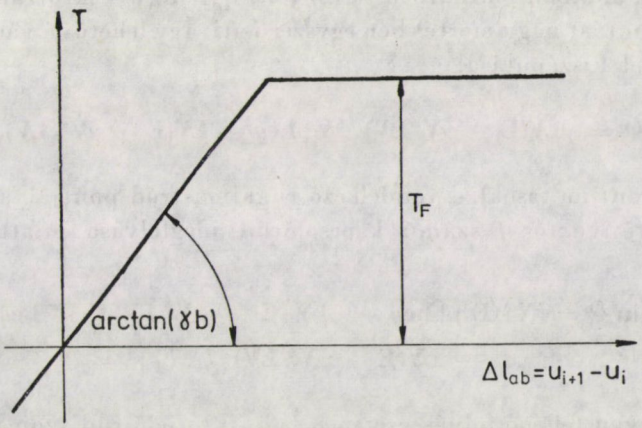
A diszkontinuitásokat, mégpedig tetszőleges, $k > 2$ számú szakadást, az eredeti — diszkontinuitásokat nem tartalmazó — modell **K** merevségi mátrixának k diáddal való módosítása útján lehetett figyelembe venni. A módosított merevségi mátrix

$$\mathbf{K} - \mathbf{W}\mathbf{W}^* \tag{1}$$

(l. [11] 5.3 pont).

4. Képlékeny alakváltozások hatása a diszkontinuitásokkal rendelkező modell erőjátékára

A vázolt rúdmodell elemeinek képlékeny alakváltozását különféle terhelési esetekre nem kísérjük nyomon. Csak azzal a speciális esettel foglalkozunk, amelyben a diszkontinuitások egyikénél, a folytonosság megszakadásának egyik oldalán, azonos előjelű rúderőt kifejtő f számú kapcsolórúdban egyszerre a T_F folyást előidéző rúderő adódik (2. ábra).



2. ábra

Ha a teher egy előző, q_0 — képlékeny alakváltozás nélküli esetre vonatkozó — paramétere q-ra növekszik, és ennek során fellép f helyen a T_F kapcsolati erő, az ehhez tartozó **u** elmozdulásvektorra (melynek elemei a b ill. a rúd diszkrét pontjainak elmozdulásai) a

$$\mathbf{K}''\mathbf{u}^{(f)} = q\mathbf{c} + \mathbf{q}_m = q\mathbf{c} + T_F\mathbf{V}\mathbf{e} \tag{2}$$

egyenlet írható fel. Itt $\mathbf{K}''$ a diszkontinuitások, valamint az f helyen fellépő folyás miatt módosult együtthatómátrix, **c** az egyparaméteres tehervektor (esetünkben csak két eleme nem 0, *l.* 1. ábra). A $\mathbf{q}_m$ vektornak azok az elemei zérustól eltérőek — éspedig T_F ill. $-T_F$ nagyságúak — amelyeknek megfelelő indexű pontokba az f számú megfolyt kapcsolórúd fut be (v.ö. [8]).

Egy-egy rúd megfolyása a további teherre a rúd merevségének elvesztését jelenti, azaz a merevségi mátrixból egy-egy $b\sqrt{\gamma}\mathbf{v}\ \sqrt{\gamma}\mathbf{v}_1^*$ alakú diádot kell levonni, ahol

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{i_r} \\ \hline -\mathbf{e}_{i_r} \end{bmatrix}.$$

Az **e** vektor f számú csupa 1 elemből álló összegező vektor.

A $\mathbf{K}''$ együtthatómátrixot úgy kapjuk, hogy a diszkontinuitások miatt módosult $\mathbf{K} - \mathbf{WW}^*$ mátrixból levonjuk az f kapcsolat megfolyását reprezentáló f diádot:

$$\mathbf{K}'' = \mathbf{K} - \mathbf{WW}^* - \sqrt{\gamma}\mathbf{V}\sqrt{\gamma}\mathbf{V}^*. \tag{3}$$

A feladat a (2) egyenlet megoldása, amelyhez a (3) együtthatómátrix invertálására lenne szükség. A teljes inverz előállítása elkerülhető, ha figyelembe vesszük, hogy a (3) inverzének az (1), már ismert $\mathbf{L}$ (l.[11]) inverzétől való eltérése zárt alakban felírható és a (2) jelű $\mathbf{q}_m$, ill. $\mathbf{c}$ vektorral való szorzás a további számítást nagy mértékben egyszerűsíti. Így lehetővé válik a következő menynyiségek kiszámítása:

$$\mathbf{m}^{(f)} = \gamma\mathbf{LV}(\mathbf{E} - \gamma\mathbf{V}^*\mathbf{LV})^{-1}\mathbf{V}^*\mathbf{L}\mathbf{c}q + \mathbf{LV}(\mathbf{E} - \gamma\mathbf{V}^*\mathbf{LV})^{-1}\mathbf{e}T_F\,, \tag{4}$$

ami a diszkontinuitásokkal rendelkező rugalmas rúd pontjainak az elmozdulásait jelentő vektor f számú kapcsolórúd megfolyása miatti módosulását jelenti;

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{u}^{(f)} = (\mathbf{N}\otimes\mathbf{E}_2)\{&\mathbf{L}\mathbf{c}q + \gamma\,\mathbf{LV}\,(\mathbf{E} - \gamma\,\mathbf{V}^*\,\mathbf{LV})^{-1}\mathbf{V}^*\,\mathbf{L}\mathbf{c}q + \\ &+ \mathbf{LV}(\mathbf{E} - \gamma\,\mathbf{V}^*\,\mathbf{LV})^{-1}\,\mathbf{e}T_F\}\,,\end{aligned} \tag{5}$$

s ez az f helyen fellépő folyás esetében, a b ill. a jelű rúd szomszédos pontjainak relatív elmozdulását, a szakaszok nyúlását adja a q teherparaméter esetében. A kapcsolórudak f kapcsolórúd folyása esetében adódó hosszváltozását a

$$\Delta\mathbf{u}_{ba}^{(f)} = \mathbf{u}_b^{(f)} - \mathbf{u}_a^{(f)} = \mathbf{u}_b^{(k)} + \mathbf{m}_b^{(f)} - \mathbf{u}_a^{(k)} - \mathbf{m}_a^{(f)}$$

összefüggés adja, ahol a $^{(k)}$ felső indexű vektorok a k diszkontinuitással rendelkező rugalmas rúd esetére utalnak.

Az egész rúd merevségének a plasztikus deformációk miatti módosulására a terhelt rúdvég pontjainak elmozdulás-változása jellemző ($m_{b1}^{(f)}$).

Az (5) összefüggésben szereplő műveletek elvégzése hosszadalmas számolást igényel, de a fellépő mátrixok szabályos szerkezete lehetővé teszi, hogy analitikus alakban kapjuk a megoldást. Ehhez mindenekelőtt az

$$\mathbf{E} - \gamma\mathbf{V}^*\mathbf{LV} \tag{6}$$

inverzét kell meghatározni. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbf{V}^*\mathbf{LV}$ egypárú mátrix, amelynek inverze csupán a sarkokban módosított egyenletes kontinuáns mátrix. Így a keresett inverz elemeit hiperbolikus függvények segítségével zárt alakban felírhatjuk.

Az (5) képletben kijelölt különbségképzés elvégzésekor vesszük figyelembe, hogy az $\mathbf{LV}$ mátrix első $i_r - 2$ sorában az elemek kiesnek. A rugalmas,

diszkontinuitásokat tartalmazó esethez képest természetesen csak az $i_r - 1$-től $i_r + 1$-ig terjedő csomópontokon fog a módosulás jelentkezni.

A további műveletek kevésbé bonyolultak, mivel csak viszonylag egyszerű szorzásokat igényelnek. Így pl. a (4) vagy (5) q-val arányos első tagjában a V*Lc szorzatra

$$\mathbf{V^* Lc} = -\frac{q}{\nu}(c_b - c_a)\frac{1}{2\sinh\frac{\vartheta}{2}\cosh(i_{r+1} - i_r)\frac{\vartheta}{2}} \cdot$$

$$\cdot\left[\sinh\left(\frac{i_{r+1} - i_r + 1}{2} - t\right)\vartheta\right];\ t = 1, 2, \ldots, f$$

adódik. A ϑ paramétert a

$$4\sinh^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{1+\nu}{\nu}\gamma$$

kifejezés definiálja (l. [11]). A T_F-fel arányos tagban a (6) inverzének első oszlopa szerepel, amelynek elemei

$$(\mathbf{E} - \gamma\mathbf{V^* LV})^{-1}\,\mathbf{e} = \left\{f^2 2\sinh^2\frac{\vartheta}{2} + f\left(2\sinh^2\frac{\vartheta}{2} - 1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sinh[f - 1 - (i_{r+1} - i_r)]\,\vartheta}{\sinh[f - (i_{r+1} - i_r)]\,\vartheta}\right) + 1\right\}\mathbf{e} +$$

$$+ 2\sinh^2\frac{\vartheta}{2}\{[i]_{(f} - [i^2]_{(f}\};\quad i = 1, 2, \ldots, f.$$

A további szorzásokat is elvégezve pl. a merevségre jellemző mennyiség változását az

$$m_{b_1}^{(f)} = \frac{q\gamma(c_b + c_a)}{4\nu^2\sinh^2\frac{\vartheta}{2}\cosh^2(i_{r+1} - i_r)\frac{\vartheta}{2}}\left\{\cosh\left(i_{r+1} - i_r - f + \frac{1}{2}\right)\vartheta \cdot\right.$$

$$\cdot\tanh(i_{r+1} - i_r - f)\frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{\sinh^2 f\frac{\vartheta}{2}}{\sinh\frac{\vartheta}{2}} + \cosh(i_{r+1} - i_r)\frac{\vartheta}{2} \cdot$$

$$\cdot\left[2(f+1)\sinh(i_{r+1} - i_r - f)\frac{\vartheta}{2} + f\cosh\left(\frac{i_{r+1} - i_r}{2} - f\right)\vartheta -\right.$$

$$- \frac{\sinh f\frac{\vartheta}{2}}{\sinh\frac{\vartheta}{2}} \cosh\left(i_{r+1} - i_r - f + 1\right)\vartheta \Bigg] +$$

$$+ \frac{\sinh f\frac{\vartheta}{2}}{\sinh\frac{\vartheta}{2}} \sinh\left(\frac{i_{r+1} - i_r - 1}{2} - f\right)\vartheta \sinh\left(i_{r+1} - i_r - f\right)\frac{\vartheta}{2} \Bigg\}$$

alakban kapjuk. Hasonló módon nyerhető a (4), ill. (5) q ill. T_F paraméterekkel arányos része.

5. Megállapítások

Bemutattuk, hogy szabályos jellegű, de diszkontinuitásokkal rendelkező rugalmas összetett rúdmodellben fellépő egyes képlékeny alakváltozások hatása a plasztikus deformációkat nem tartalmazó esetek alakváltozási állapotának ismeretében analitikus módon tárgyalható.

Természetesen terjedelmesebbek a formulák, ha nem csak az itt tárgyalt elemek plasztikus deformációjának hatását vizsgáljuk.

Az itt bemutatott eset is alkalmas azonban arra, hogy a diszkontinuitásokkal és képlékeny alakváltozásokkal is rendelkező diszkrét rúdmodell erőjátékáról képet kapjunk. Az ilyen diszkrét szerkezet a gyakorlatban sok esetben a folytonos kétfázisú elem (pl. vasbeton rúd) modellezését szolgálhatja. A diszkrét modellre kapott összefüggések a csomóponti indexeket, vagyis tulajdonképpen az osztásközt mint paramétert tartalmazzák.

Ez lehetőséget ad arra, hogy a kidolgozott eljárás, ill. összefüggések segítségével képet kapjunk a folytonos kétfázisú elemek — a diszkontinuitásokkal és képlékeny alakváltozásokkal is összefüggő — finit modelljeinek célszerű megválasztásáról.

IRODALOM

1. Almási J.: Vasbeton szerkezeti elemek vizsgálata a véges elemek módszerével, *Építés-Építészettudomány* **6** (1974), 279–323
2. Фрайфельд С. Е.: Собственные напряжения в железобетоне. Стройиздат, Москва–Ленинград 1941
3. Kaliszky S.: Feltételes kapcsolatokat tartalmazó szerkezetek vizsgálata, *Építés- Építészettudomány* **6** (1974), 325–340
4. Petrasovits G.–Soltész P.: Kis rugalmas-képlékeny alakváltozások elméletének alkalmazása cölöpök teherbírásának vizsgálatára, MTA Műsz. Mechanikai Tanszéki Munkaközösség I. Tudományos Ülésszaka, Budapest 1974
5. Prager, W.–Hodge, P. G.: Tökéletesen képlékeny testek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1965
6. Roller B.: Műszaki mechanikai kutatásaink a finit módszerek területén, *Műszaki Tudomány*, **51** (1976), 377–389

7. Rózsa P.: Lineáris algebra és alkalmazásai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1974
8. Rózsa P.—Tassi G.: Применение теории матриц к расчету статически неопределимых стержневых систем в упруго-пластической стадии. *Az MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei.* **3** (1958), 43—62
9. Sebők F.—Tassi G.: A szükséges feszítőerő meghatározása termikus terhelésű vasbetontartályok esetében, *Építés- Építészettudomány* **3** (1971), 129—140
10. Sneddon, I. N.—Lowengrub, M.: Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity, Wiley, New York—London—Sydney—Toronto 1969
11. Tassi G.: Contribution to the Analysis of Stiffness and Cracking Conditions of Prestressed Concrete Members, F.I.P. London 1978

Examination of a two-phase discrete bar model with discontinuities and plastic deformations taken into consideration. The stress and strain conditions of a one-dimensional model consisting of coaxial elements interconnected in equidistant intervals (such as the model of the simplest reinforced concrete bar) are discussed. If a bar of the model yields, the stiffness matrix of the structure is modified by one outer product. By making use of the theorem on the inverse of a modified matrix, the properties of the tridiagonal and one-pair matrices, and the Chebishev polynomals, the quantities characteristic of the play of forces can be analytically expressed in a closed form, if the connecting elements at one side of the discontinuities (cracks, etc) have undergone plastic deformation. The formulae contain the mesh characteristics of the discrete model, thus the analytical method described gives assistance for the selection of the most expedient mesh in the case of finite techniques.

Untersuchung des zweiphasigen diskreten Stabmodells unter Berücksichtigung von Diskontinuitäten und plastischen Formänderungen. Die Arbeit behandelt den Spannungs- und Formänderungszustand des aus miteinander in äquidistanten Intervallen verbundenen Elementen bestehenden, eindimensionalen Modells (z. B. das einfachste Modell des Stahlbetonstabes). Wenn einzelne Stäbe des Modells zu fließen beginnen, muß die Steifigkeitsmatrix der Konstruktion jeweils um eine Dyade geändert werden. Mit Hilfe des Satzes bezüglich der Inverse einer geänderten Matrix, sowie durch Anwendung der Eigenschaften der Kontinuanten und der Einpaarigen Matrizen, sowie mit Hilfe der Tschebischewschen-Polynome können im Falle plastischer Formänderungen in analytischer Weise, in geschlossener Form die für das Kräftespiel charakteristischen Werte der auf einer Seite der Diskontinuität (Risse usw.) befindlichen Verbindungselemente aufgeschrieben werden. Die Formeln enthalten die Charakteristiken der Maschenweite des diskreten Modells und so bietet das analytische Verfahren im Falle finiter Methoden die Möglichkeit eine zweckmäßige Maschenweite zu wählen.

Исследование двухфазовой дискретной модели стержня с учетом разрывов и пластических деформаций. В работе рассматриваются напряженно-деформационные состоянии единоразмерной модели состоящей из эквидистантно сцепленных соосных элементов, каковой является и модель простейшего железобетонного стержня. В случае потека одного стержня модели матрицу жёсткости конструкции надо модифицировать по одному диаду. Пользуясь теоремой о получении обратной модифицированной матрицы, а также использованием особенностей Якобиевых и однопарных матриц, при помощи полиномов Чебышева можно написать характеризующие усилия значения, в случае пластических деформаций сцеплительных элементов на одной стороне разрыва (напр. трещины.). Формулы содержат параметры шага дискретной модели так аналитический метод способствует выбору целесообразной величины шага сетки в случае применения конечного метода.

NAGYFESZÜLTSÉGŰ KÁBELEK KIFEJLESZTÉSE SORÁN VÉGZETT MECHANIKAI VIZSGÁLATOK

THAMM FRIGYES* és GÁTI RÓBERT**

Nagyfeszültségű kábelek vezetője és szigetelőcsöve közötti palástnyomás előnyösen befolyásolja a kábel átütési szilárdságát. A palástnyomás ismerete a gyártásellenőrzés szempontjából fontos, de értéke számítással a megkívánt pontossággal nem határozható meg. Kísérleti meghatározására a szerzők kidolgozták a lenyomó-lehúzó vizsgálatot. Az abból áll, hogy a kábel egy levágott szakaszáról a szigetelőcsövet először egy darabon lenyomják, majd ezt követően teljesen lehúzzák a vezetőről, miközben folyamatosan regisztrálják a lenyomó- ill lehúzó erőt. A dolgozat ismerteti a vizsgálat elméletét, levezeti a palástnyomás meghatározásához szükséges képletet és megvizsgálja ingadozó palástnyomás hatását a lenyomó-, ill a lehúzó erő és az elmozdulás közötti összefüggésre. Az elméleti úton kiadódó lenyomó-, lehúzó diagramokat összehasonlítja kísérletileg felvettekkel is.

1. Bevezetés

Nagyfeszültségű erősáramú kábelek többnyire tömör hengeres alumínium vezetőből és az azt körülvevő nagynyomású polietilén szigetelőcsőből állnak. A szigetelőcsövet extrudálással viszik fel a vezetőre. Az extrudálás utáni lehűlés során a szigetelőcső rázsugorodik a vezetőre, a kettő között palástnyomás ébred, amelynek értéke a lehűlési sebességtől, valamint a polietilénben a lehűlés során fellépő anyagszerkezeti módosulásoktól (kristályosodás) függ és számítással a megkívánt pontossággal nem követhető.

Mint már régebben ismeretes [1], [2] a kábelszigetelésben jelentkező minden üreg és hézag erősen rontja a kábel átütési szilárdságát, és ugyanez vonatkozik a kábel és a vezető közötti esetleges hézagokra is. Minthogy a hézagot a vezető és a szigetelőcső közötti palástnyomás tünteti el, fontos a kábelek minőségellenőrzése számára a palástnyomás ismerete, amint erre KARDOS [3] már régebben rámutatott.

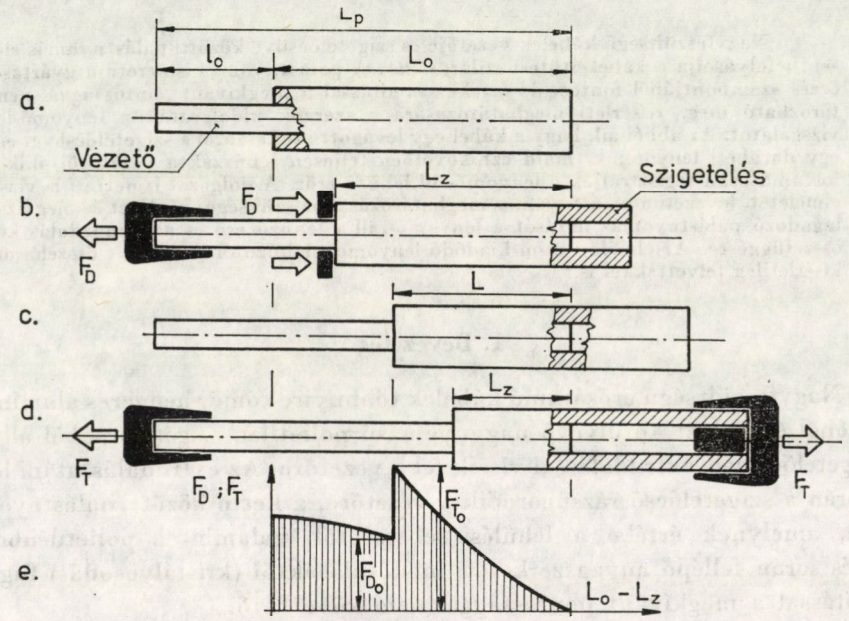
A palástnyomás meghatározására vonatkozó korábbi kísérletek a következő nehézségekbe ütköztek.

a) A szigetelőcső anyagának rugalmassági modulusa $E = 100$ MPa körül van. A szigetelőcső külső felszíne az extrudálási technológia miatt nem eléggé egyenletes. A szigetelőcső átmérőváltozásának mérése a vezető eltávolításakor ezért nem végezhető el a megkívánt pontossággal.

* Dr. Thamm Frigyes, 1026 Budapest, Széplak u. 1.
** Dr. Gáti Róbert, 1125 Budapest, Zalai u. 1/c.

b) A szigetelőcsőnek a vezetőről való lehúzásakor mért erőből a palástnyomás közelítőleg meghatározható ugyan, de csak a — meglehetősen bizonytalan, ingadozó — súrlódási tényező ismeretében.

A fenti nehézségek elkerülésére dolgozták ki a Budapesti Műszaki Egyetem Műszaki Mechanikai Tanszékén a Magyar Kábel Művek felkérésére a szerzők a lenyomó-lehúzó vizsgálatot, amellyel meghatározható a kábel vezetőere és szigetelőcsöve közötti palástnyomás a súrlódási tényező ismerete nélkül. A vizsgálat egyben lehetőséget ad a súrlódási tényező átlagértékének meghatározására is.



1. ábra

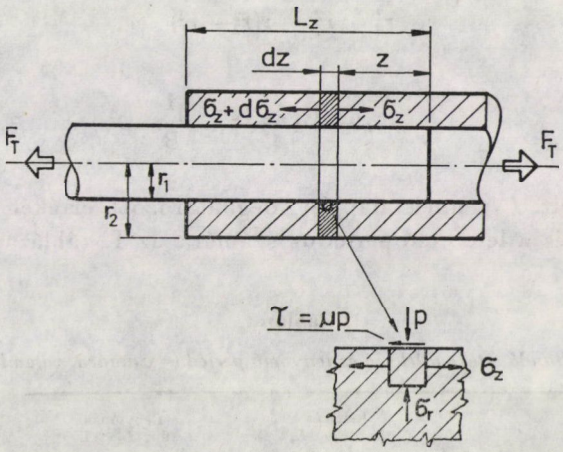
2. A mérési módszer elve

A vizsgálathoz a kábelből L_p hosszúságú szakaszt vágnak le és ennek L_0 hosszúságú részéről eltávolítják a szigetelőcsövet (1a ábra). Az így kapott próbatestet szakítógépbe megfelelően befogva, az 1b ábrának megfelelően adott szakaszon lenyomják a szigetelőcsövet, miközben felveszik az elmozdulás-nyomóerő diagramot. Utána a próbatestet a lehúzott szigetelőcső-szakaszon befogva a szigetelőcsövet lehúzzák a vezetőről (1d ábra), miközben ismét regisztrálják a húzóerőt. A mérés során felvett erő-elmozdulás diagram jellegét az 1e ábra mutatja. A próbatestnek nyomásból húzásba való átfogásakor a lenyomás végén észlelt F_{D_0} erő a nála nagyobb F_{T_0} húzóerőre módosul, amit

a szigetelőcsőben előjelet váltó tengelyirányú feszültség által előidézett eltérő keresztkontrakció okoz. A palástnyomás értéke F_{D_0} és F_{T_0} ismeretében a próbatest geometriai méreteiből meghatározható.

3. A kiértékelő összefüggés levezetése

A próbatestet lehúzás közben a 2. ábra mutatja. Az F_T erő okozta keresztkontrakció miatt a vezető és a szigetelőcső közötti palástnyomás az eredetileg



2. ábra

p_0 értékről $p = p_0 + p^*$ re változik. A dz hosszelemre felírt tengelyirányú erőösszetevők egyensúlyából alábbi összefüggés adódik:

$$-d\sigma_z = 2\,\frac{r_1}{r_2^2 - r_1^2}\,\mu(p_0 + p^*)\,dz\,. \tag{1}$$

Itt μ a súrlódási tényező a cső és a vezető között.

A kábel gyártástechnológiájából következőleg az eredeti p_0 palástnyomáshoz tartozó σ_{z_0} feszültségösszetevő elhanyagolható. A vezető a szigetelőcsőhöz képest gyakorlatilag tökéletesen merev, ezért a szigetelőcső belső átmérője a σ_z hatására nem változhatik. Ebből a feltételből, valamint a vastagfalú csőre vonatkozó ismert összefüggéseket [4] is figyelembe véve, σ_z-re az alábbi összefüggés adódik

$$\sigma_z = p^*\left[\frac{1}{\nu}\,\frac{r_2^2 + r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + 1\right], \tag{2}$$

ahol $\nu = 0{,}5$ a szigetelőcső anyagának Poisson-tényezője. (2)-ből p^*-ot kifejezve és (1)-be helyettesítve az alábbi differenciálegyenletre jutunk

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + B\sigma_z = -A\,, \tag{3}$$

ahol

$$A = \frac{2r_1}{r_2^2 - r_1^2}\,\mu p_0\,,$$

és

$$B = \frac{2r_1\,\mu\nu}{r_2^2 + r_1^2 + \nu(r_2^2 - r_1^2)}\,.$$

Ennek megoldása

$$\sigma_z = C_1 e^{-Bz} - \frac{A}{B}\,. \tag{4}$$

A kerületi feltételt, C_1 ennek alapján meghatározott értékét és a megoldás alakját a lehúzó és a lenyomó periódus számára az I. táblázatban állítottuk össze.

I. táblázat

A C_1 integrációs állandó értéke a lehúzó és lenyomó periódus számára, valamint σ_z kifejezése

	Lehúzás $L < L_z < L_0$	Lenyomás $0 < L_z < L$
Kerületi feltétel	$z = L \to \sigma_z = 0$	$z = 0 \to \sigma_z = 0$
C_1	A/Be^{BL}	A/B
σ_z	$A/B[e^{B(L-z)} - 1]$	$A/B[e^{-Bz} - 1]$

A lehúzó periódus kezdetén

$$F_{T0} = (r_2^2 - r_1^2)\,\pi(\sigma_z)_{z=0} = \frac{A}{B}\,[e^{BL} - 1]\,(r_2^2 - r_1^2)\,\pi\,, \tag{5a}$$

a lenyomó periódus végén

$$F_{D0} = -(r_2^2 - r_1^2)\,\pi(\sigma_z)_{z=0} = \frac{A}{B}\,[1 - e^{-BL}](r_2^2 - r_1^2)\,\pi\,. \tag{5b}$$

Mivel p_0 értéke az (5a) és (5b) képletben azonos, a két egyenletet egymással elosztva és rendezve

$$e^{BL} = \frac{F_{T0}}{F_{D0}} \tag{6}$$

adódik, amit (5a)-ba vagy (5b)-be helyettesítve és bevezetve a $\beta = r_2/r_1$, $\lambda = L/r_1$, $\sigma_{0h} = F_{T0}/(r_1^2\pi)$ és $\sigma_{0ny} = F_{D0}/(r_1^2\pi)$ jelöléseket

$$p_0 = \frac{\nu}{[\nu(\beta^2 - 1) + \beta^2 + 1]\left[\frac{1}{\sigma_{0ny}} - \frac{1}{\sigma_{0h}}\right]}, \tag{7}$$

valamint (6)-ból hasonlóképpen

$$\mu = \frac{\nu(\beta^2 - 1) + \beta^2 + 1}{2\lambda\nu} \ln \frac{\sigma_{0h}}{\sigma_{0ny}} \tag{8}$$

adódik.

4. A levezetett összefüggés kísérleti ellenőrzése

A (7) képlet feltételezi, hogy p_0 értéke a próbatest hossza mentén állandó. Hogy ez a feltétel tényleges kábelszakaszoknál mennyiben teljesül, azt abból lehet megítélni, hogy az elméletileg levezetett húzóerő-elmozdulás ill. nyomóerő-elmozdulás diagram mennyire egyezik a kísérletileg felvett diagramokkal. Ebből a célból az (5a) és (5b) képletbe L helyébe a változó L_z-t helyettesítjük be és az (5a) egyenletből kiadódó F_T húzóerőt $L < L_z < L_0$ szakaszon, az (5b) egyenletből kiadódó F_D nyomóerőt $0 < L_z < L$ szakaszon diagramba rajzoljuk. A 3. ábra A és D része egy-egy ilyen számított lenyomó-lehúzó diagramot mutat a II. táblázatban összefoglalt kiinduló adatok alapján. Az adatokat mindkét esetben ténylegesen legyártott kábeltípusoknak megfelelően vettük fel.

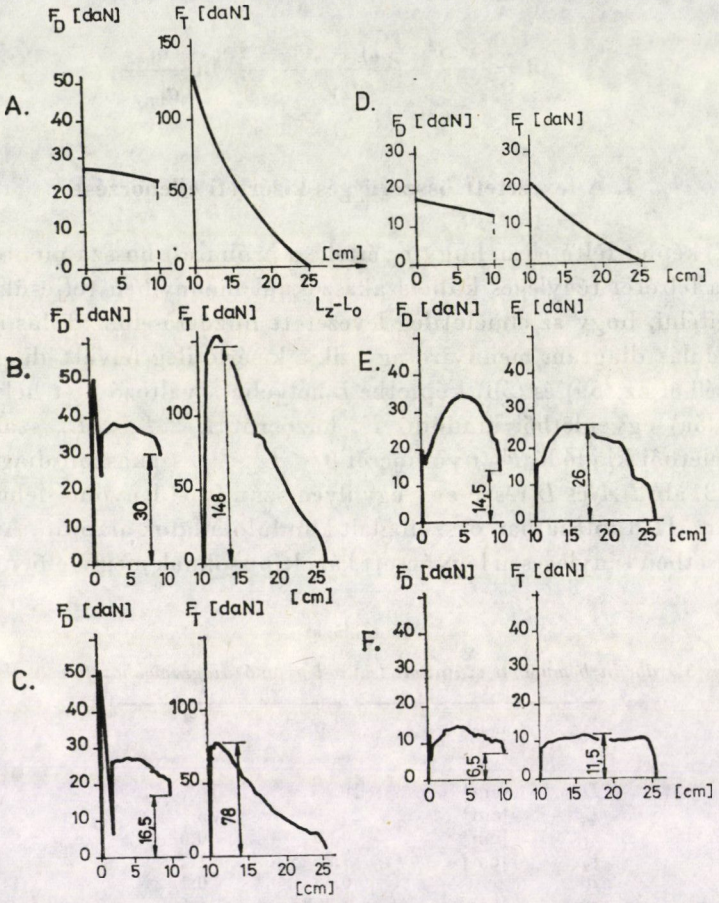
II. táblázat

A 3A és 3D ábrán bemutatott számított lehúzó-lenyomó diagramokhoz felvett alapadatok

Ábra jele		3A	3D
L	[cm]	10	10
L_0	[cm]	25	25
r_1	[cm]	0,69	0,68
r_2	[cm]	1,2	1,2
μ		0,45	0,15
p_0	[bar]	1,868	1,669
B	[1/cm]	0,1136	0,0353

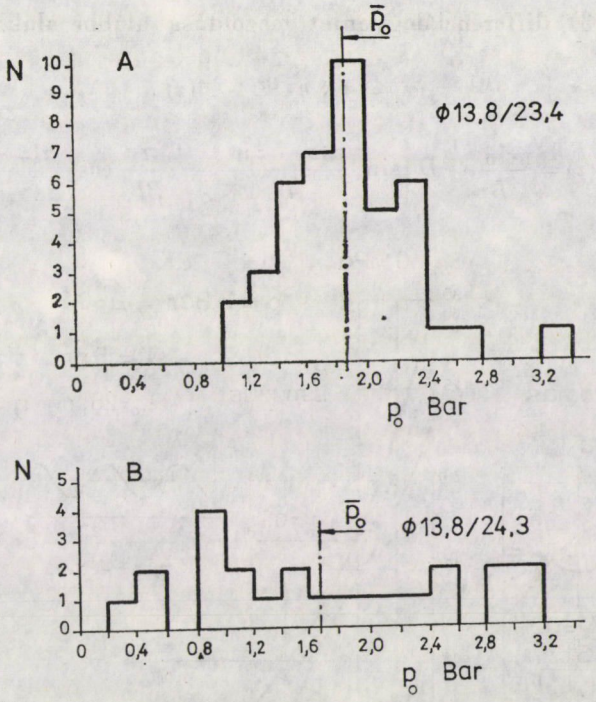
A 3. ábra B és C része az A-résznek megfelelő kábeleken kísérletileg felvett lenyomó-lehúzó diagramokat mutat. A mért görbék a számított görbékkel jól egyeznek. A 3. ábra E és F része a D-rész számított görbéjének felel meg. Itt a mért diagramok a számítottól még jellegben is erősen eltérnek, ami a palástnyomás erősen egyenlőtlen voltára utal.

Mindkét kábeltípusból nagyobb számú próbatesten végeztük el a palástnyomás meghatározását. A palástnyomás-értékek gyakorisági eloszlását a 4. ábra mutatja, ennek *A*-része a 3. ábra *A*, *B*, *C* részeinek, *B*-része a 3. ábra *D*, *F*, *E* részeinek felel meg. Előbbinél jól felismerhető a normáleloszlás, míg utóbbi eloszlása nem mutat szabályszerűséget, a palástnyomás-értékek sok-



3. ábra

kal erősebben szórnak. A 3. ábra *A*, *B*, *C* részei 1974. évi gyártásból, az ábra *D*, *F*, *E*, részei 1969. évi gyártásból származnak. A 3. és 4. ábrák összehasonlítása jól mutatja a két gyártás közötti időben elért fejlődést az egyenletesebb gyártási technológia irányában.



4. ábra

5. Periodikusan változó palástnyomás elméleti vizsgálata

Mivel egyes, az elméletileg levezetettől eltérő lenyomó-lehúzó diagramból arra kellett következtetni (7. ábra), hogy a palástnyomás a próbatest hossza mentén periodikusan változik, ezt az esetet elméletileg is megvizsgáltuk. Ehhez a (3) képlet A állandója helyett az alábbi függvényt vettük fel

$$A(z) = A_0 + A_1 \sin \frac{\pi}{l_h}(z + z_0) . \tag{9}$$

Itt A_1, A_2, l_h és z_0 állandók. Bevezetve még a

$$D = \frac{A_1}{B} \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{Bl_h}\right)^2},$$

$$\Phi = \frac{A_0}{B} + D\left\{\sin \frac{\pi(L + z_0)}{l_h} - \frac{\pi}{Bl_h} \cos \frac{\pi(L + z_0)}{l_h}\right\},$$

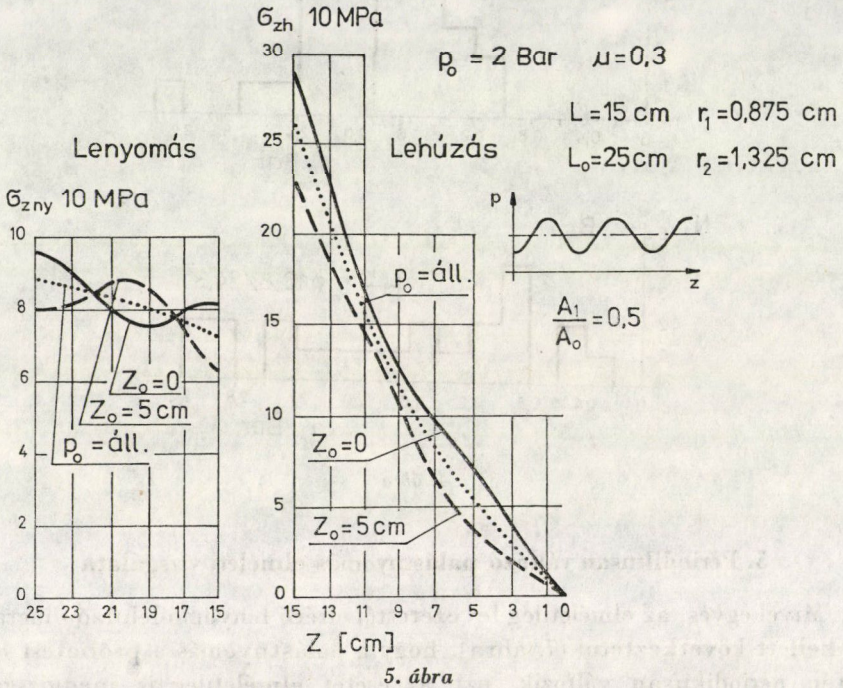
$$\Psi = \frac{A_0}{B} + D\left\{\sin \frac{\pi z_0}{l_h} - \frac{\pi}{Bl_h} \cos \frac{\pi z_0}{l_h}\right\}$$

állandókat, a (3) differenciálegyenlet megoldása alábbi alakban írható fel

$$\sigma_z = C_1^* e^{-Bz} - \Lambda(z), \tag{10a}$$

ahol

$$\Lambda(z) = \frac{A_0}{B} + D\left\{\sin\frac{\pi(z+z_0)}{l_h} - \frac{\pi}{Bl_h}\cos\frac{\pi(z+z_0)}{l_h}\right\}. \tag{10b}$$



5. ábra

A kerületi feltételt húzás és nyomás számára, C_1 értékét és a teljes megoldást a két szakasz esetén a III. táblázatban foglaltuk össze.

III. táblázat

A C_1^* integrációs állandó értéke a lehúzó és lenyomó periódus számára, valamint σ_z kifejezése periodikusan változó palástnyomás esetében

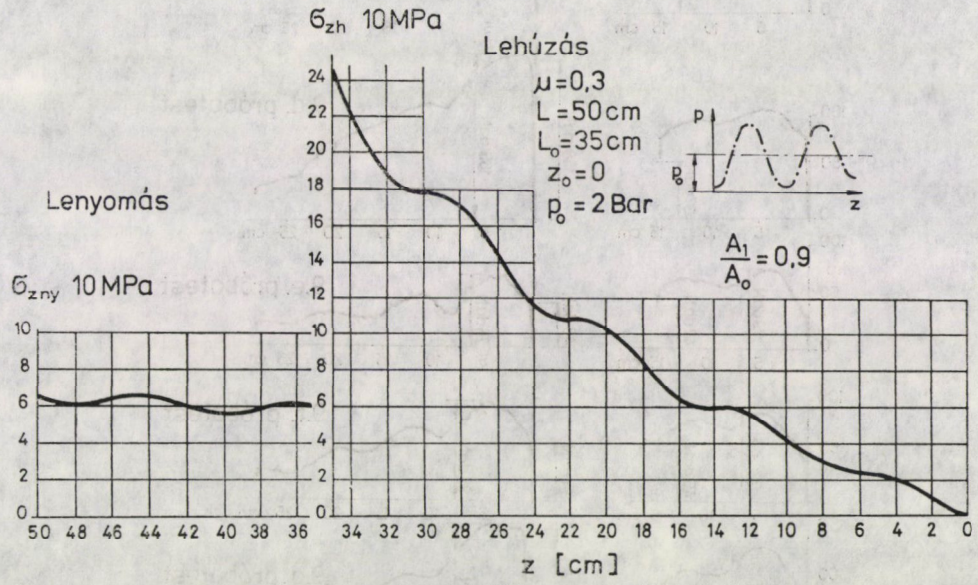
	Lehúzás $L < L_z < L_0$	Lenyomás $0 < L_z < L$
Kerületi feltétel	$z = L \to \sigma_z = 0$	$z = 0 \to \sigma_z = 0$
C_1^*	Φe^{BL}	Ψ
z	$\Phi e^{B(L-z)} - \Lambda(z)$	$\Psi e^{-Bz} - \Lambda(z)$

Az erő a lehúzó periódus kezdetén és a lenyomó periódus végén:

$$F_{T0} = [\Phi e^{BL} - \Psi](r_2^2 - r_1^2)\pi\,, \tag{11a}$$

$$F_{D0} = [\Phi - \Psi e^{-BL}](r_2^2 - r_1^2)\pi\,. \tag{11b}$$

A súrlódási tényezőre ezúttal is érvényes a (8) összefüggés.



6. ábra

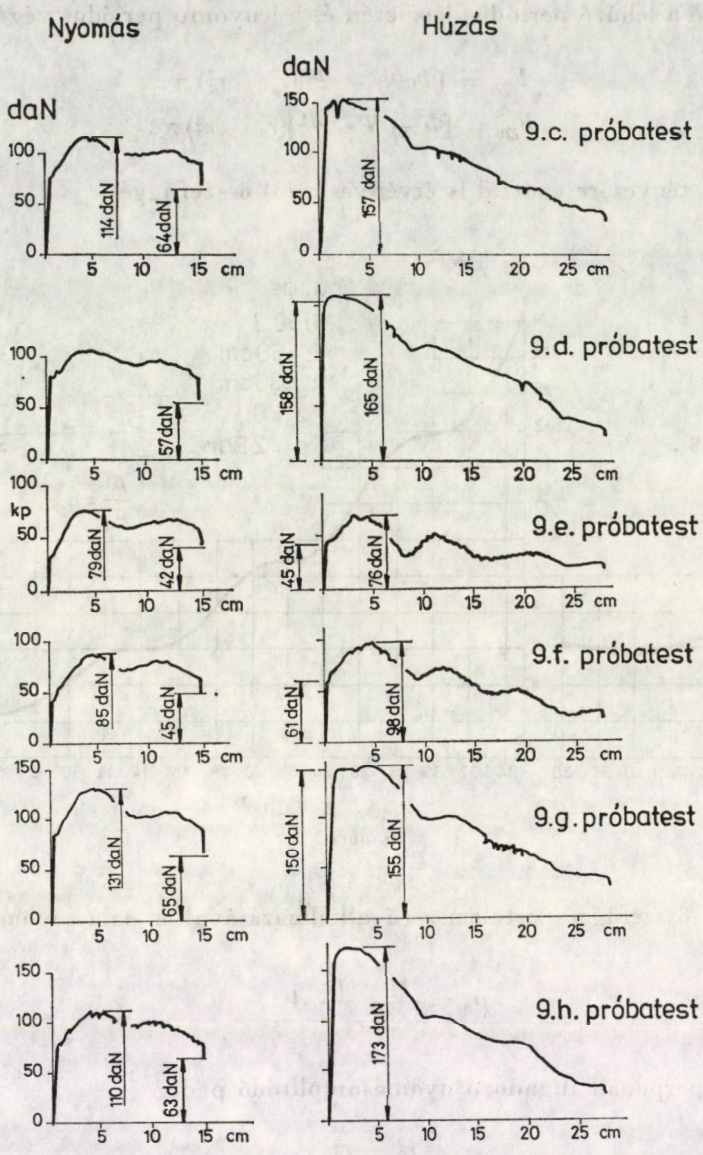
A (3) összefüggés értelemszerű alkalmazásával a palástnyomás középértéke

$$p_0 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2\mu r_1} A_0\,,$$

az erre szuperponált ingadozó nyomásamplitúdó pedig

$$p_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2\mu r_1} A_1\,.$$

A σ_z feszültségösszetevő változását a lenyomó és lehúzó periódus során két különböző mérési sorozatnak megfelelő számértékek esetén az 5. és 6. ábrában foglaltuk össze. Néhány kísérletileg felvett diagramot a 7. ábra mutat, a 6. ábrának megfelelő méretadatok esetében. A 6. ábrából azt olvashatjuk ki, hogy a lehúzó-lenyomó diagram a palástnyomás egyenlőtlenségeit lecsökkentve „kisimítva" képezi le. Ha tehát a 7. ábrán erős hullámvonalakat látunk, ennek



7. ábra

a palástnyomás ingadozásán kívül még más okának is kell lennie. Valóban, azokon a próbatesteken, amelyek diagramjait a 7. ábra mutatja, a kihúzott vezető felületén szakaszosan felragadt műanyagfoltokat találtunk, melyek a palástnyomás ingadozásán kívül a súrlódási tényező ingadozását is okozták.

Ugyanakkor a (8) képlettel számítható súrlódási tényező értéke használható kritériumot szolgáltat arra vonatkozóan, hogy egy mért diagram

adataiból a palástnyomás értéke a (7) képlet segítségével számítható-e. Ha ugyanis a szigetelőcső csak foltokban fekszik fel a vezetőn, a levezetett összefüggések érvényüket vesztik és a (8) összefüggés a ténylegesnél kisebb súrlódási tényezőt ad. Polietilén súrlódási tényezője fémen $\mu = 0{,}21$ körül van. Az a kísérlet, melynél ennél kisebb súrlódási tényező adódik, nyilván nem értékelhető ki a (7) képlet segítségével és egyben arra utal, hogy nem tökéletes a felfekvés a vezető és a szigetelőcső között.

A lenyomó-lehúzó vizsgálatot kábelgyártásunk már sorozatvizsgálatként alkalmazza, amihez a Műszaki Mechanika Tanszék különleges befogófejet is tervezett [5]. A vizsgálati módszert a gyártási technológia egyik legjobban bevált ellenőrzési módszerének tekintik.

IRODALOM

1. Yamauchi H.—Ohada H.—Fuwa M.: Void Distribution in Crosslinked Polyethylene Insulated Cables Made by Conventional and New Processes. Conference Paper C-72-504-9 IEEE. Power Engineering Society Summer Meeting. San Francisco 1972
2. Kardos Gy.: Polietilén szigetelés és alumínium vezető hőtágulás viszonyszámának hatása a polietilén szigetelés üregmentességére. *Műanyag és Gumi.* **10** (1973), 357—359
3. Kardos Gy.: Polietilén kábelszigetelések hasznos zsugorodása. *Műanyag és Gumi.* **5** (1968), 448—452
4. Muttnyánszky Á.: Szilárdságtan. Tankönyvkiadó, Budapest 1956
5. Thamm F.: Egy új vizsgálati módszer nagyfeszültségű kábelek számára. *Műanyag és Gumi.* **13** (1976), 87—90

Mechanical tests conducted in the course of high-voltage cable development. The mantle pressure between the conductor and the insulation conduit of high-voltage cables will favorably influence their dielectric strength. Although mantle pressure data are rather important from the aspects of production control, they cannot be determined with sufficient accuracy by calculation. For experimental determination purposes authors designed a push-pull test in which first the insulation tube is pushed off a cutoff section of the cable, then completely pulled off the conductor, while the compression and tensile forces are continuously recorded. The paper explains the test theory, derives the formula required for the determination of the mantle pressure, and examines the effect of a fluctuating mantle pressure on the correlation between the pressure and/or pull-off force on one hand, and the displacement on the other. The theoretical push-pull diagrams are compared with the experimental results.

Im Laufe der Entwicklung von Hochspannungskabeln vorgenommene mechanische Untersuchungen. Der zwischen dem Leiter und dem Isolationsrohr auftretende Manteldruck wirkt sich günstig auf die Durchschlagfestigkeit des Kabels aus. Die Kenntnis des Wertes des Manteldruckes ist inbezug auf die Fertigungskontrolle von größter Bedeutung, kann aber rechnerisch nicht mit der erforderlichen Genauigkeit ermittelt werden. Zur experimentellen Bestimmung erarbeiteten die Verfasser das Preß- und Abzugverfahren. Dies erfolgt, indem man auf einem Teil des abgeschnittenen Stückes des Kabels das Isolationsrohr erst zusammenpreßt, dann vom Leiter vollständig hearbzieht, wobei die Preß- bzw. Abzugskraft laufend registriert werden. Der Aufsatz behandelt die Theorie der Untersuchung, liefert die zur Bestimmung des Manteldruckes erforderliche Formel und untersucht die Wirkung des schwankenden Manteldrucks auf den Zusammenhang zwischen Preß- bzw. Abzugskraft und Verschiebung. Die theoretisch ermittelten Preß-Abzug-Diagramme werden mit den auf Versuchswege beobachteten verglichen.

Механическое исследование проводов высокого напряжения. Смятение между проводом высокого напряжения и изоляционной трубой выгодно действует на пробивную прочность провода. Знание величины смятения важно с точки зрения учета выработки, но вычислние ее с тербуемой точностью невозможно. Для определения величины смятения авторы выработали сжимающе-стяжной экспериментальный метод. Эксперимент выполняется следующим образом: на отрезке провода изоляционную трубу на некотором участке сжимают, а затем полностью стягивают с провода, причем постоянно регистрируют сжимающую и стягивающую силу. В статье излагается теория исследования, выводится формула, необходимая для определения смятения и исследуется действие переменного смятения на связь между сжимающе-стяжной силой и сдвигом. Диаграммы сжима-стяжения, полученные теоретическим путем сравниваются с экспериментальными результатами.

SPLINE-FÜGGVÉNYEK ALKALMAZÁSA RUGALMASSÁGTANI SÍKFELADATOK MEGOLDÁSÁBAN

ÚJ JÓZSEF*

A tanulmány bonyolult alakú peremgörbével határolt homogén, izotrop, lineárisan rugalmas testekre vonatkozó síkfeladatok egy numerikus megoldási módszerét mutatja be. Az e feladatra megfogalmazott Muskhelishvili-féle integrálegyenlet rendszer numerikus megoldása a keresett függvények és a peremgörbe spline-approximációjával, iterációs eljárással történik. A spline-approximáció lehetővé teszi a műveletek egy részének analitikus elvégzését és a viszonylag nem magas fokszámú polinomok miatt az integrálok elég durva lépésekkel számíthatók. A számítások kis memóriakapacitású (8kB) gépen is elvégezhetők.

1. Bevezetés

Bonyolult peremmel határolt testek esetében a rugalmasságtani síkfeladatok megoldásakor az egyik legnagyobb nehézséget a perem megfelelő pontosságú matematikai leírása jelenti. A vonatkozó szakirodalom általában csak olyan feladatok megoldásával foglalkozik, amelyek peremgörbéje analitikusan egyszerű módon definiálható. Spline-függvények alkalmazásával mód nyílik tetszőleges alakú peremgörbék megfelelő pontos előállítására, és e függvények felhasználhatók a rugalmasságtani feladat megoldásában is. Emellett a spline-approximáció lehetőséget nyújt a Mushelisvili-féle integrálegyenletek egy új megoldási módszerének kidolgozására is. A tanulmány bemutatja e megoldási módszert, és egy feladat megoldásával szemlélteti e módszer alkalmazhatóságát.

2. A feladat megfogalmazása

Legyen adott egy homogén, izotrop, lineárisan rugalmas test x_1, x_2 síkba eső A tartományának g pereme, mely folytonos, sima, zárt görbe. A peremen vagy a terhelés adott (1. peremérték feladat) vagy az elmozdulás van megadva (2. peremérték feladat).

Vegyünk fel a g görbén n számú pontot, azaz adott a $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ pontsokaság ($\tau_j = x_{1j} + ix_{2j}$ komplex helyvektor). A g görbét a G_4 harmadfokú paraméteres polinomspline-nel approximáljuk, melyet a $\{\tau_j\}_{j=1}^n$ pontsokaságon

* Uj József, 2040 Budaörs, Lévai u. 17.

állítunk elő. Legyen a spline-függvény által leírt $\{\gamma_j\}_{j=1}^n$ szegmensek paraméteres egyenlete a komplex számsíkon

$$\underset{(j)}{t}(u) = \sum_{m=0}^{3} (\underset{(j)}{A_{1m}} + \underset{(j)}{A_{2m}})\, u^m; \quad u \in [0, 1]; \quad t = x_1 + ix_2. \tag{1}$$

A γ_j és γ_{j+1} $(j = 1, 2, \ldots, n,\ \gamma_{n+1} \equiv \gamma_1)$ szegmensek folytonos érintővel és görbülettel illeszkedjenek, ezen feltételekből számíthatók az $\underset{(j)}{A_{1m}}$, $\underset{(j)}{A_{2m}}$ együtthatók. E számítással részletesen foglalkozik az [1] előadás. Legyen a g görbét közelítő G_Δ spline által definiált görbe γ, azaz $\gamma = \bigcup_{j=1}^{n} \gamma_j$.

Ha testre térfogati erők nem hatnak, akkor a komplex függvénytan módszereivel a feladat a $\varphi(z)$ és $\psi(z)$ komplex potenciálok meghatározására vezethető, melyeknek a peremen felvett értékeire fennáll [2, 144—145. old.]:

$$\varkappa \overline{\varphi(t)} + t\varphi'(t) + \psi(t) = \overline{f(t)}, \quad t \in \gamma, \tag{2}$$

ahol

$$\varkappa = \begin{cases} 1 \\ \\ 4\nu - 3 \end{cases}, \quad f(t) = \begin{cases} i\int_0^{s(t)} (p_1 + ip_2)\ \mathrm{ds} \text{ az 1. peremfeladatra,} \\ 2G[u(t) + iv(t)] \quad \text{a 2. peremfeladatra.} \end{cases}$$

Ezt a feladatot MUSKHELISHVILI [2, 398—402. old.] másodfajú, Fredholm típusú szinguláris integrál-egyenletrendszerre fogalmazta át:

$$\begin{aligned} p(t_0) - \frac{1}{\pi}\int_\gamma [p(t)(\varkappa + \cos 2\vartheta) + q(t)\sin 2\vartheta]\, d\vartheta &= -a(t_0)\,, \\ q(t_0) - \frac{1}{\pi}\int_\gamma [p(t)\sin 2\vartheta + q(t)(\varkappa - \cos 2\vartheta)]\, d\vartheta &= b(t_0), \end{aligned} \tag{3}$$

ahol

$$\begin{aligned} p(t) &= Re\varphi(t), \quad q(t) = Im\varphi(t), \\ \vartheta &= \arg(t - t_0); \quad t, t_0 \in \gamma, \\ a(t) &= Re\, A(t), \quad b(t) = Im\, A(t), \\ A(t) &= -\frac{1}{2}\overline{f(t)} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f(t)}}{t - t_0}\, dt, \\ i &= \sqrt{-1}. \end{aligned}$$

A (3) megoldása után a $\psi(t)$ az (2)-ből már számítható, a $\varphi(z)$ és $\psi(z)$ holomorf fürggvények pedig Cauchy-integrállal számíthatók:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(t)}{t - z}\, dt, \quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\psi(t)}{t - z}\, dt. \tag{4}$$

Végül pedig a feszültségi koordináták és az elmozdulásmező:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= Re\,[2\varphi'(z) - \bar{z}\varphi''(z) - \psi'(z)]\,,\\
\sigma_{22} &= Re\,[2\varphi'(z) + \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]\,,\\
\tau_{12} &= Im\,[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]\,,\\
2Gu &= Re\,[\varkappa\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]\,,\\
2Gv &= Im\,[\varkappa\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]\,.
\end{aligned} \tag{5}$$

3. A Muskhelishvili-féle integrálegyenlet rendszer numerikus megoldása spline-approximációval

Vegyünk fel a γ görbe γ_j $(j = 1, \ldots, n)$ szegmensein $\{t_j\}_{j=1}^n$ belső pontokat. Tekintsük a $\varphi(t)$ függvényt a γ_j szegmenseken állandóknak, kössük ezen értékeket a $\{t_j\}_{j=1}^n$ pontokhoz. Bevezetve a $p(t_j) \equiv p_j$, $q(t_j) \equiv q_j$, $a(t_j) \equiv a_j$ és $b(t_j) = b_j$ jelöléseket és a (3) egyenleteket a $\{t_j\}_{j=1}^n$ pontokra felírva, az ismeretlen p_j és q_j diszkrét értékekre a következő algebrai egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned}
p_j - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[p_k\int_{\vartheta_{j,k-1}}^{\vartheta_{j,k}}(\varkappa + \cos 2\vartheta)\,d\vartheta + q_k\int_{\vartheta_{j,k-1}}^{\vartheta_{j,k}}\sin 2\vartheta\,d\vartheta\right] &= -a_j\,,\\
q_j - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[p_k\int_{\vartheta_{j,k-1}}^{\vartheta_{j,k}}\sin 2\vartheta d\vartheta + q_k\int_{\vartheta_{j,k-1}}^{\vartheta_{j,k}}(\varkappa - \cos 2\vartheta)\,d\vartheta\right] &= b_j\,,\\
\vartheta_{j,k} &= \arg(\tau_k - t_j)\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Az integrálok kiszámítása és az egyenletrendszer megoldása után az $(x_{1j}, x_{2j}, p_j, q_j)$ számnégyesek által meghatározott alappontokon, mint a 4 dimenziós Euklidesi tér pontjain keresztül előállítjuk a $P_\Delta(t)$ harmadfokú paraméteres polinom-spline-t

$$P_\Delta(t): \left\{\underset{(j)}{p_k}(u) = \sum_{m=0}^{3}\underset{(j)}{A_{km}}\,u^m\right\}_{j=1}^{n}, \quad u \in [0, 1],\ k = 1, \ldots, 4. \tag{7}$$

Ebből a $\varphi(t)$ függvényt approximáló $\Phi_\Delta(t)$ spline

$$\Phi_\Delta(t): \left\{\underset{(j)}{\varphi}(u) = \sum_{m=0}^{3}[\underset{(j)}{A_{3m}} + i\underset{(j)}{A_{4m}}]\,u^m\right\}_{j=1}^{n} \tag{8}$$

Ezt az approximációt a következő iterációs eljárással javíthatjuk: a (3) egyenletekből a (8) felhasználásával újra számíthatjuk a p_j és q_j diszkrét értékeket, majd ezek segítségével állítjuk elő (7)-el a $P_\Delta(t)$ spline-függvényt. Az iterációs ciklust a kívánt pontosságig ismételhetjük.

Az (1) és (8) spline-függvényekkel a $\varphi(z)$ holomorf függvény (4) alapján paraméteres integrálok összegeként numerikusan számítható.

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} \int_{u=0}^{1} \frac{\left[\sum_{m=0}^{3} (A_{3m} + iA_{4m})_{(j)} u^m\right]\left[\sum_{m=1}^{3} m(A_{1m} + iA_{2m})_{(j)} u^{m-1}\right]}{\sum_{m=0}^{3} (A_{1m} + iA_{2m})_{(j)} u^m - z} du. \quad (9)$$

Hasonló módon számítható a $\psi(z)$ függvény, ha (2)-ből a $\psi(t)$ függvényt kifejezzük.

A feszültségek számításához a függvények deriváltjait a

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2} dt \quad \text{és} \quad \varphi''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^3} dt$$

összefüggések alapján (9)-hez hasonlóan paraméteres integrálok összegeként állíthatjuk elő. Végeredményben a feszültségmező (5) alakban történő előállításához az A_{km} $(k = 1, \ldots, 4; m = 0, 1, \ldots, 3; j = 1, 2, \ldots, n)$ együtthatókat kell kiszámítani és tárolni.

4. A rugalmasságtani síkfeladat megoldásának gépi programja

A rugalmasságtani 1. vagy 2. peremértékfeladat megoldásához az alábbi részprogramokat szerkesztettük:

ADAT: Interaktív módon rögzíti a bemenő geometriai és terhelési adatokat, valamint a számítások pontosságát befolyásoló paraméterek értékeit.

ZS 2: a kétdimenziós Euklidesi tér alappontjain definiált spline-függvény együtthatóit számítja.

ZS 4: a 4 dimenziós Euklidesi tér alappontjain definiált spline-függvény együtthatóit számítja.

AB: a (6) egyenletben szereplő p_j és q_j együtthatóit számítja.

LINER: a (6) egyenletrendszert oldja meg Gauss-féle eliminációs eljárással.

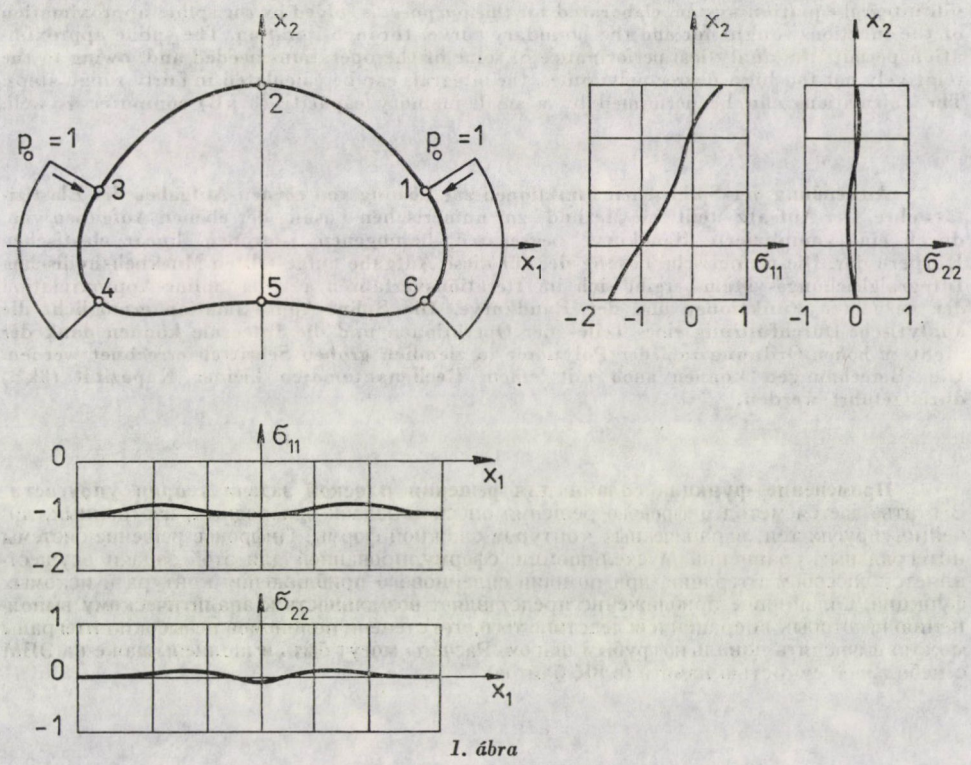
KOJA: a p_j, q_j diszkrét értékeket javító program, amely az $(x_{1j}, x_{2j}, p_j, q_j)$ alappontokon ZS 4-el számított 4 dimenziós spline felhasználásával újra számítja a p_j és q_j értékeit (az integrálás Simpson-formulával történik.)

FEME: (5) alapján tetszőleges belső pontban számítja a feszültségi koordinátákat.

A gépi program WANG 2200 B típusú kis-számítógépre készült BASIC nyelven.

5. Alkalmazási példa

Az ábrán látható test peremgörbéjét $n = 6$ alapponton keresztülmenő zárt spline-görbével közelítettük. A test peremén a 3—4 és 6—1 szegmenseket állandó egységnyi intenzitású felületi nyomás terheli. A spline-approximációk során az előírt szögpontosság 1^0, integráláskor a paraméter lépése 0,1 volt. A $\varphi(t)$ potenciálfüggvény peremértékének előírt 4%-os közelítési pontosságát a 48. iterációs ciklusban érte el a számítás. A számított feszültségi koordinátákat az x_1 és x_2 tengelyek pontjaiban tüntettük fel.



1. ábra

6. Összefoglalás

A tanulmány bonyolult alakú peremgörbével határolt homogén, izotrop, lineárisan rugalmas testekre vonatkozó síkfeladatok egy numerikus megoldási módszerét mutatja be. Az e feladatra megfogalmazott Muskhelishvili-féle integrálegyenletrendszer numerikus megoldása a keresett függvények és a peremgörbe spline-approximációjával, iterációs eljárással történik. A spline-approximáció lehetővé teszi a műveletek egy részének analitikus elvégzését, és a viszonylag nem magas fokszámú polinomok miatt az integrálok elég durva lépésekkel számíthatók. A számítások kis memóriakapacitású (8kB) gépen is elvégezhetők.

IRODALOM

1. ÚJ J.: Spline-függvények alkalmazása a számítógépes geometriai tervezésben. Előadás a Fiatal Oktatók és Kutatók Tudományos Fórumán, BME, Budapest 1977 (nyomtatás alatt)
2. MUSKHELISHVILI N. I.: Some Basis problems of the Mathematical Theory of Elasticity. P. Noordhoff Ltd. Groningen. 1953

Application of spline functions to solve planar problems in the field of elasticity. The numerical solution method of planar problems involving homogeneous, isotropic, linearly elastic bodies enclosed by a sophisticated form boundary curve is presented. The Muskhelishvili integral equation system elaborated for this purpose, is solved by the spline approximation of the functions sought for and the boundary curve, through iteration. The spline approximation permits the analytical performance of some of the operations needed and, owing to the relatively not too high degree polynomes, the integrals can be calculated in fairly rough steps. The calculations can be performed by a small memory capacity (8 kB) computer as well.

Anwendung der Splineschen Funktionen zur Lösung von ebenen Aufgaben der Elastizitätslehre. Der Aufsatz stellt eine Methode zur numerischen Lösung der ebenen Aufgaben von, durch eine komplizierte Randkurve begrenzten, homogenen, isotropen, linear elastischen Körpern dar. Die numerische Lösung des für diese Aufgabe aufgestellten Muskhelishvilischen Integralgleichungssystems ergibt sich im Iterationsverfahren aus der Spline-Approximation der gesuchten Funktionen und der Randkurve. Die Spline-Approximation ermöglicht die analytische Durchführung eines Teiles der Operationen und die Integrale können dank der nicht zu hohen Ordnungszahl der Polynome in ziemlich groben Schritten errechnet werden. Die Berechnungen können auch mit einem Rechenautomaten kleiner Kapazität (8kB) durchgeführt werden.

Применение функций сплайн для решения плоской задачи теории упругости В статье дается метод цифрового решения плоской задачи однородных, изотропных, линейно упругих тел, ограниченных контуром сложной формы. Цифровое решение системы интегральных уравнений Мусхелишвили, сформулированной для этой задачи осуществляется способом итерации, при помощи сплайнового приближения контура и искомых функций. Сплайновое приближение представляет возмощность к аналитическому выполнению некоторых операций и вследствие того, что степени полиномов невысоки интегралы можно вычислять доволь но грубым шагом. Расчеты могут быть выполнены даже на ЭВМ с небольшой емкостью памяти (в 8К байтов).

II. SZEKCIÓ

Szerkezetek mechanikája

EGY GRANULÁLÁSI TECHNOLÓGIA MECHANIKAI VIZSGÁLATA

ÁGOSTON GYÖRGY*

A dolgozatban a feladatot úgy fogalmaztuk meg, hogy a kontinuummechanika egyenleteihez a granulálandó anyag tulajdonságainak megfelelő anyagtörvényt csatoltunk. Az így kapott elsőrendű parciális differenciálegyenlet rendszert olyan kezdeti-, és peremfeltételekkel egészítettük ki, amelyek figyelembe veszik egy konkrét granulálógép szerkezeti megoldását. Végül egy alkalmazási példát mutatunk be, amelyet differencia módszerrel, digitális számológéppel oldottunk meg.

A dolgozat a keverék-takarmánygyártás egyik technológiájával, a gyűrűs-matricás granulálással, és annak tárgyával, a granulálandó anyaggal foglalkozik.

E technológia során különféle takarmányok és adalékok nedvesített őrleményét a gyűrűalakú, forgó fémmatrica belsejébe juttatják, ahol azt két vagy több szabadonfutó görgő a matrica palástjához szorítja, és az ott elhelyezkedő furatokon (fúvókákon) keresztül kipréseli (1. ábra). Eközben a laza, szemcsés halmazból hengeres szilárd darabok keletkeznek, melyeket a matrica külső palástja mentén elhelyezett kések meghatározott hosszúságúra vágnak.

A technológia lényege a tömörítés, amely elsősorban a fúvókákban megy végbe, főképpen a görgők által kifejtett préselőerő és a fúvókák palástján keletkező súrlódási erők hatására. A folyamat során az anyag sűrűsége 1,6—2,5-szörösére növekszik.

A vizsgálatok közvetlen célja az volt, hogy megvizsgáljuk, milyen anyagmodellel írható le a granulált anyag viselkedése.

Két alapfeltevésből indultunk ki:

1. A termodinamikai hatások elhanyagolhatók.

2. A vizsgált közeg kontinuumnak tekinthető.

Az anyagtulajdonságokat a Maxwell-féle anyagtörvénnyel írtuk le, az abban szereplő állandók helyett azonban a sűrűségtől függő anyagjellemzőket alkalmaztunk.

A Maxwell-féle anyagtörvény nagy alakváltozások esetében

$$V_{ij}^{d} = \frac{1}{2G}\dot{\sigma}_{ij}^{d} + \frac{1}{2\eta}\sigma_{ij}^{d} \tag{1}$$

* Ágoston György, 1112 Budapest, Törcsvár u. 36.

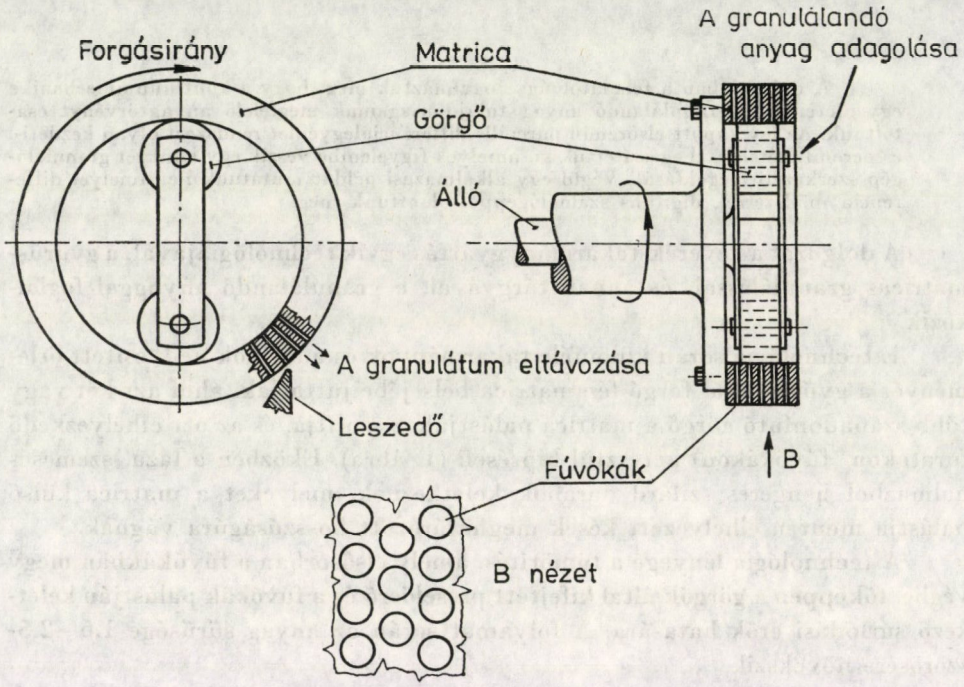
alakú, amihez kiegészítő összefüggésként a

$$\sigma_{kk} = 3\,K\varepsilon_{kk} \tag{2}$$

kifejezést csatoljuk.

Belátható, hogy az (1) egyenlet kis η esetében az összenyomható nyúlós folyadék egyenletébe megy át:

$$V_{ij}^{d} = \frac{1}{2\eta}\,\sigma_{ij}^{d}\,. \tag{3}$$



1. ábra

Ezzel szemben η nagy értékeinél az (1) egyenletben a jobb oldalon az első tag dominál, és (kis alakváltozások esetében) a Hooke törvénnyel azonos alakra hozható.

A granulálási technológiáról fentebb elmondottak alapján összefoglalható, milyen követelményeknek kell eleget tennie az általunk alkalmazandó anyagtörvénynek:

1. Biztosítania kell az átmenetet a folyadékállapotból a szilárd állapotba, és

2. ezt az átmenetet a sűrűség növekedésével párhuzamosan kell létrehoznia úgy, hogy a kezdetben nagymértékben összenyomható anyagnak ez a tulajdonsága csökkenjen.

Belátható, hogy ez a két követelmény együttesen kielégíthető, ha az (1) egyenletben szereplő G és η mennyiségeket nem állandóaknak, hanem a sűrűség függvényeinek tekintjük, oly módon, hogy az egyenlet jobb oldalán szereplő két tag közül kis sűrűségnél az első, nagy sűrűségnél a második legyen meghatározó. Célszerűnek látszik ezt a G/η hányados sűrűségtől függő változtatásával elérni. Figyelembe kell azonban venni, hogy adott és állandó K kompresszió-modulus esetében a G csúsztató rugalmassági modulus nem vehet fel bármilyen értéket, ugyanis a kettejük között fennálló

$$\frac{2G}{3K} = \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} \tag{4}$$

összefüggésben szereplő ν Poisson tényező értéke csak a $0 \leq \nu \leq 0{,}5$ intervallumban mozoghat. Mivel ν nagysága jellemző az anyag összenyomhatóságára, s mert az anyag előírt tulajdonságai között az összenyomhatóság változása is szerepel, kedvezőnek látszik a Poisson tényezőt tenni a sűrűség függvényévé, majd G-t a (4) egyenlet felhasználásával abból számítani, ezután pedig a G/η hányadosra előírt függvényből η-t.

E függvények felvétele csak a konkrét anyag ismerete esetében lehetséges.

Az anyagtörvényen kívül a mozgásegyenletet

$$\sigma_{ij,j} = \varrho \dot{v}_i \tag{5}$$

és a folytonossági egyenletet

$$\dot{\varrho} + \varrho v_{k,k} = 0 \tag{6}$$

fogjuk felhasználni a vizsgált folyamat tanulmányozására.

Mindenekelőtt azonban az anyagtörvényből kiküszöböljük ε_{kk}-t, a fajlagos térfogatváltozást, amely a sűrűséggel így fejezhető ki:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{\varrho_0}{\varrho} - 1 . \tag{7}$$

Ezt a (2) egyenletbe helyettesítve azt találjuk, hogy

$$\sigma_{kk} = 3K \left(\frac{\varrho_0}{\varrho} - 1 \right), \tag{8}$$

és így

$$\dot{\sigma}_{kk} = -3K \frac{\varrho_0}{\varrho} \cdot \frac{\dot{\varrho}}{\varrho}, \tag{9}$$

ami a folytonossági egyenlet felhasználásával

$$\dot{\sigma}_{kk} = 3K \frac{\varrho_0}{\varrho} v_{k,k} \tag{10}$$

alakú lesz.

Ezek után a fentiek felhasználásával a problémát leíró egyenletrendszer az alábbi:

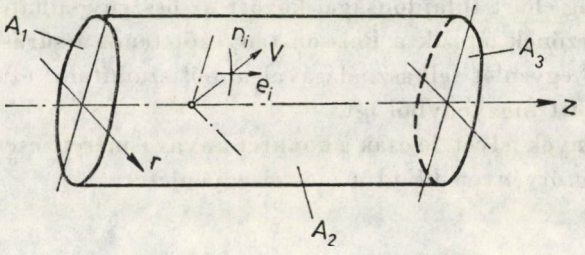
$$\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i})-\frac{1}{3}\left(1-\frac{3K}{2G}\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)v_{k,k}\delta_{ij}=$$

$$=\frac{\dot{\sigma}_{ij}}{2G}+\frac{\sigma_{ij}}{2\eta}+\left(1-\frac{\varrho_0}{\varrho}\right)\frac{K}{2\eta}\delta_{ij}\,, \tag{11/a}$$

$$\sigma_{ij,j}=\varrho\dot{v}_i, \tag{11/b}$$

$$\dot{\varrho}+\varrho v_{k,k}=0. \tag{11/c}$$

A fenti parciális differenciálegyenlet rendszerre épülve, a tényleges folyamat figyelembevételével megfogalmazhatjuk a mellékfeltételeket is. Ezek részben kezdeti-, részben peremfeltételek.



2. ábra

Vizsgálatainkat a fúvókára korlátozva e feltételek a következőek:
Kezdeti feltételek:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ij}&=0\\ v_i&=0\\ \varrho&=\varrho_0\end{aligned}\right\}\ x_k\in V,\ t=0\,, \tag{12}$$

ahol V a fúvóka által határolt térrész (2. ábra).
Peremfeltételek: a perem $A=A_1\ \Lambda\ A_2\ \Lambda\ A_3$

$$v_i=v_i^0(x_k,t)\quad x_k\in A_1 \tag{13}$$

$$\sigma_{ij}=0\quad x_k\in A_3 \tag{14}$$

végül $x_3\in A_2$ esetében súrlódás is fellép.
Így:

$$\textit{if}\ \ |\mu_0\sigma_{ij}n_in_j|>|\sigma_{ij}n_ie_j|\ \ \textit{then}\ \ v_ie_i=0$$

$$\textit{else}\ \ \sigma_{ij}n_ie_j=-\,sgn\,(v_ke_k)\,\mu_1|\sigma_{ij}n_in_j|\,\Lambda\,v_ie_i\neq 0;$$

valamint $v_in_i=0$. (15)

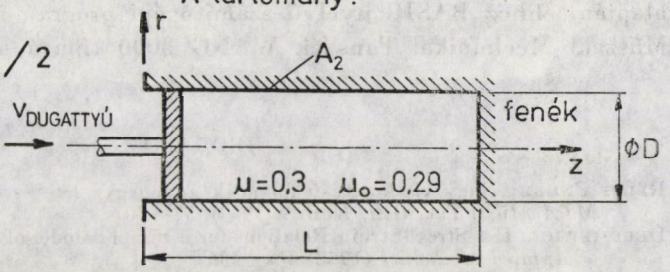
Előírva: v_D

$$\nu = [1-(\varrho_0/\varrho)^2]/2$$

$$\frac{2G}{3K} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}$$

$$\frac{G}{\eta} = \sqrt{\frac{3K}{\varrho_0}} \cdot \frac{10}{R_0} \cdot \left(\frac{2G}{3K}\right)^3$$

A tartomány:



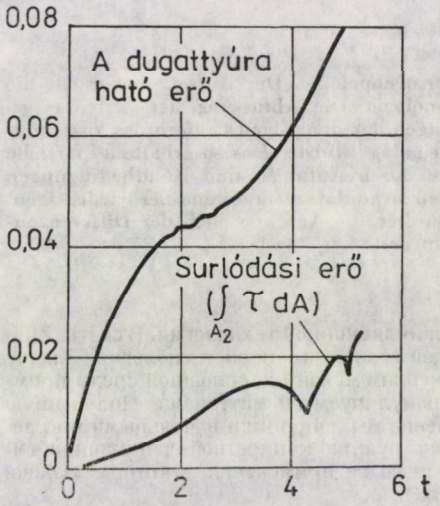
L/D = 3

$$v_D \Big/ \sqrt{\frac{3K}{\varrho_0}} = 0{,}01 = \text{állandó}$$

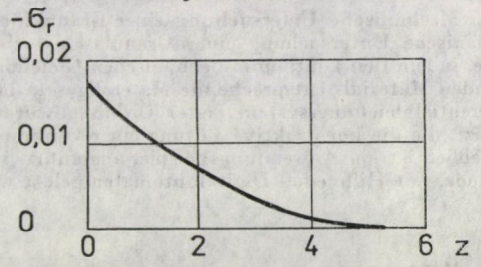
L = 15.Δz R = D/2 = 5.Δr

Δt = 0,1

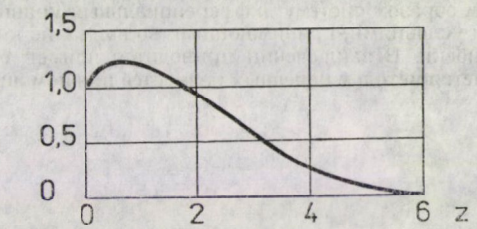
Erőhatások a mozgás kezdeti szakaszában:



Palástnyomás eloszlás (t=5)



v/v_D Sebességeloszlás (t=5, r=0)



3. ábra

A (15) összefüggésben n_i az A_2 felület kifelé mutató normálisa, e_i pedig a felület érintősíkjába eső és a sebességgel párhuzamos egységvektor.

A továbbiakban bemutatjuk a fentiek alapján egy konkrét esetre végzett számítás eredményeit (3. ábra). A példában hengerkoordináta-rendszerre (hengerszimmetikus feladat), valamint dimenzió nélküli mennyiségekre tértünk át.

A numerikus megoldást differenciamódszerrel végeztük explicit formulák alapján, ehhez BASIC nyelvű számítógépi programot készítettünk, s azt a Műszaki Mechanikai Tanszék WANG 2000 típusú számítógépén futtattuk.

IRODALOM

REUSS ENDRE: Nagy viszkozitású folyadék anyagegyenlete és alkalmazása az ultrahangra. *MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl.* 9 (1953), 57—70

DERESIEWICZ, H.: Stress-Strain Relations for a Simple Model of a Granular Medium. *Journal of Applied Mechanics* (1958) 402—406

Mechanical examination of a granulation technology. The paper describes the mechanical testing of a granulation technology. The problem was defined as ordering the equations of continuum mechanics to a material law corresponding to the properties of the material to be granulated. The first order a partial differential equation system thus obtained, was then completed by initial and boundary conditions taking into account the structural design of an actual granulator. Finally an application example is presented which has been solved by using the difference method and a digital computer.

Mechanische Untersuchung einer Granulationstechnologie. Der Aufsatz behandelt die mechanische Untersuchung einer Granulationstechnologie. Die Abfassung der Aufgabe erfolgte, indem den kontinuummechanischen Gleichungen das den Eigenschaften des zu granulierenden Materials entsprechende Materialgesetz beigefügt wurde. Das so erhaltene partielle Differentialgleichungssystem erster Ordnung wurde durch Anfangs- und Randbedingungen ergänzt, die die konstruktive Lösung einer konkreten Granulationsmaschine berücksichtigen. Schließlich ist ein Anwendungsbeispiel angeführt, in dem die Aufgabe nach der Differenzenmethode, mit Hilfe eines Digitalautomaten gelöst wurde.

Механическое исследование одного вида грануляционной технологии. В статье описывается механическое испытание одного из видов грануляционной технологии. Задачу мы сформулировали следующим образом: к уравнениям механики сплошной среды примкнули уравнение, соответствующее свойствам гранулируемого материала. Полученную таким образом систему дифференциальных уравнений мы дополнили начальными и краевыми условиями, принимающими во внимание конструкцию конкретной грануляционной установки. В заключении приводится пример одного из применений, в котором задача решается методом конечных разностей при помощи ЭВМ.

SZABADSÁGFOKREDUKCIÓ ÉS KÖVETKEZMÉNYEI LINEÁRISAN RUGALMAS SZERKEZETEK ANALÍZISÉBEN

CZEGLÉDI GYULA

Lineárisan rugalmas szerkezetek dinamikai analízisében a számítási modell szabadságfokát lehetséges tisztán matematikai eszközökkel csökkenteni. A dolgozat véges szabadságfokú modellek szabadságfokredukciójára két eljárást mutat be, összehasonlítva elemzi előnyeiket és hátrányaikat. Bemutatott tulajdonságaikat egy egyszerű számpéldán szemlélteti. Végezetül kitér a kontinuus modellek esetében a szabadságfokcsökkentés egy nemkívánatos következményére.

1. Bevezetés

Az általános gépészet, a járműipar, a könnyűszerkezetes építésmód, az akusztika különféle szerkezeti rezgési problémáinak megoldása általában a rezgési sajátfrekvenciák és rezgésképek ismeretét igényli. Bizonyos szerkezeteken ezek a mennyiségek analitikus módszerekkel könnyen meghatározhatók. Más esetekben a feladat matematikai megfogalmazása során olyan egyenleteket kapunk, melyek a független változók százait, vagy ezreit tartalmazzák. Ilyen nagyméretű feladat kezelése a rendelkezésre álló modern számítástechnika mellett sem mindig problémamentes. A későbbiekben leírandók mellett ezért is célszerűnek látszik olyan technikák alkalmazása, amelyek segítségével a változók száma csökkenthető. E módszereket összefoglalóan szabadságfokredukciónak (ritkábban szabadságfokkondenzációnak, esetleg sűrítésnek) nevezik (lásd pl. [1]).

Anélkül, hogy a matematikai modellalkotás problémakörével részleteiben foglalkoznánk, megállapíthatjuk, hogy az osztott paraméterű modellek (pl. lemezek, rudak stb.) helyett diszkrét paraméterű modellek választása eleve szabadságfokredukciót jelent, hiszen végtelen szabadságfok helyett véges szabadságfokkal dolgozunk. A modellalkotás során fellépő szabadságfokredukciót — bár ez is igen érdekes probléma — most kizárjuk vizsgálódásunk köréből.

2. Véges szabadságfokú modellek

A vizsgált csillapítatlan, lineárisan rugalmas, koncentrált paraméterű elemeket tartalmazó modell legyen n szabadságfokú. Szabad rezgés esetében a modell mozgásegyenlete az ismert formában

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{C}\mathbf{x},$$

ahol az n elemű $\mathbf{x}$ oszlopmátrix a modell elmozdulás-koordinátáit, a kvadratikus $\mathbf{M}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok a tehetetlenségi — ill. a rugalmassági jellemzőket tartalmazzák. $\mathbf{x} = \mathbf{s} \sin \omega t$ alakú megoldást feltételezve, a

$$\mathbf{C}\mathbf{s} = \omega^2 \mathbf{M}\mathbf{s} \tag{1}$$

jól ismert sajátértékfeladathoz jutunk, ahol az ugyancsak n elemű $\mathbf{s}$ oszlopmátrix az elmozdulás-koordináták s_i $(i = 1, \ldots, n)$ amplitúdóit foglalja magába.

Ha az (1)-ben foglalt sajátértékfeladat méretének csökkentését tűzzük magunk elé célul, akkor — bár csak a tisztán matematikai lehetőségeket tekintve is — több utat követhetünk. E célkitűzést egyébként más és más ok indokolhatja. Lehet például csak kényelmi szempont a magyarázat, vagy bizonyos esetekben a fizikai tartalom jobb kidomborítása a célunk. Ezeknél azonban jóval fontosabb a végeselem módszer alkalmazásánál gyakran fellépő kényszerítő körülmény, amely a feladat óriási méretében nyilvánul meg. Az n olykor több száz vagy ezer. A korlátozott gépi technika mellett bizonyos változók eliminációja, így a szabadságfoknak matematikai úton történő csökkentése elkerülhetetlen.

A szabadságfokredukció lehetséges módjai közül most kettőt emelünk ki. Az egyik az, amely alakilag az (1)-ben felírt lineáris sajátértékfeladathoz hasonló csökkentett rendszámú feladatot eredményez; a másik nemlineáris sajátértékfeladatra vezet. Az elsőt részletesen a 2.1 pontban, a másodikat a 2.2 pontban mutatjuk be. A címekbe foglalt lineáris, ill. nemlineáris szavak a redukció eredményére utalnak. A 2.3 pont e két elvi eljárásra tartalmaz egy egyszerű számpéldát.

2.1 Lineáris szabadságfokredukció [5,6]

A szabadságfok csökkentésének ez a módja lényegében közelítő technika. Sajátja, hogy az eredeti modellhez tisztán matematikai eszközökkel csökkentett szabadságfokú másik modellt rendel hozzá, így matematikai eszközökkel a modell szabadságfokát fizikai értelemben is csökkenti. Ezzel a módszerrel az eredeti feladat alacsonyabb frekvencia-spektrumát felülről közelíti. Ilyen eljárást követett pl. HURTY [2], CRAIG és BAMPTON [3], GERADIN [4]. A leghatásosabbat ANDERSON, IRONS és ZIENKIEWICZ javasolta [5]. Ez azokat az elmozdulásokat küszöböli ki, melyek nem gyakorolnak lényeges befolyást a kinetikus energiára.

Legyenek az eliminálandó elmozdulások az m elemű $\mathbf{v}$ vektorba tömörítve. Alkalmas sor- és oszlopcserék után az (1) egyenlet mindig átírható az alábbi alakba:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

vagy részletezve:

$$\mathbf{C}_{11}\mathbf{u} + \mathbf{C}_{12}\mathbf{v} = \omega^2\mathbf{M}_{11}\mathbf{u} + \omega^2\mathbf{M}_{12}\mathbf{v}, \tag{3a}$$

$$\mathbf{C}_{21}\mathbf{u} + \mathbf{C}_{22}\mathbf{v} = \omega^2\mathbf{M}_{21}\mathbf{u} + \omega^2\mathbf{M}_{22}\mathbf{v} \tag{3b}$$

(3b)-ből

$$\mathbf{v} = (\mathbf{E} - \omega^2\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{22})^{-1}\,\mathbf{C}_{22}^{-1}(\omega^2\mathbf{M}_{21} - \mathbf{C}_{21})\,\mathbf{u}, \tag{4}$$

ahol $\mathbf{E}$ m-edrendű egységmátrix.
A (4) jobb oldalának első tényezője — ha a konvergencia fennáll — az

$$(\mathbf{E} - \omega^2\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{22})^{-1} = \mathbf{E} + \omega^2\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{22} + (\omega^2\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{22})^2 + \ldots \tag{5}$$

alakba írható. (4) és (5) segítségével a (3a) egyenlet a

$$\overline{\mathbf{C}}\mathbf{u} = \omega^2\overline{\mathbf{M}}\mathbf{u} + \omega\text{-ban magasabb kitevőjű tagok} \tag{6}$$

formát ölti, ahol

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_{11} - \mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21} \tag{7}$$

és

$$\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{11} + \mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{22}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21} - \mathbf{C}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{M}_{12}\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21} \tag{8}$$

a redukált rugó, ill. tömegmátrixok.

A (6) kifejezésből az ω-ban magasabb kitevőjú tagok elhagyása után lineáris közelítést kapunk az (1) eredeti feladatra:

$$\overline{\mathbf{C}}\mathbf{u} = \bar{\omega}^2\overline{\mathbf{M}}\mathbf{u}, \tag{9}$$

ahol $\bar{\omega}^2$ a redukált feladat sajátértékét jelenti.

A (9) kifejezésnek az az előnye, hogy egy közönséges kétmátrixos sajátértékfeladatot kell megoldani, amelyre könyvtári programok állnak rendelkezésre.

Kimutatható [6], hogy a (9) redukált feladat $\bar{\omega}_i$ sajátértékei az (1) eredeti feladat ω_i sajátértékeire felső korlátokat adnak mindaddig, amíg az (5) jobb oldala konvergál. Ez igaz, ha

$$\omega_i < \mu_1, \tag{10}$$

ahol μ_1 a

$$\mathbf{C}_{22}\mathbf{v} = \mu^2\mathbf{M}_{22}\mathbf{v} \tag{11}$$

ún. belső sajátértékfeladat első (legkisebb) sajátértéke. Kimutatható továbbá, ha (11) sajátértékei rendre

$$\mu_1^2 \leq \mu_2^2 \leq \cdots \leq \mu_m^2,$$

akkor

$$\omega_1^2 \leq \mu_1^2 \leq \mu_m^2 \leq \omega_n^2,$$

ahol ω_1^2 illetve ω_n^2 az (1) eredeti feladat legkisebb, illetve legnagyobb sajátértéke. A belső feladat sajátértékspektruma tehát az eredetiében helyezkedik el. Az $\omega_1 = \mu_1$ határeset akkor fordulhat elő, ha az ω_1-hez tartozó $\mathbf{s}_1$ sajátvektor mindazon helyein nullák állnak, amelyeket az eliminációs során megtartottunk. Ez viszont azt jelenti, hogy az eredeti rendszer két olyan részrendszerre bontható, amelyek önmagukban is — függetlenül a másiktól — szabadon rezeghetnek. Mivel a gyakorlati szerkezeteken ez csak elvétve fordulhat elő, ezért feltételezhetjük, hogy $\mu_1 > \omega_1$. Egy adott ω_i-re nézve a konvergencia, így a felülről történő közelítés annál jobb, minél kisebb ω_i a μ_1-nél, azaz μ_1 minél nagyobb. Célszerű tehát az eliminálandó elmozdulásokat a szerkezet legkisebb dinamikus rugalmassággal bíró területeiről választani.

2.2 Nemlineáris szabadságfokredukció [1]

A redukciónak ez a módja csak matematikai értelemben csökkenti a fokszámot, azaz az egyenletekben explicit szerepeltetett szabadságfokok száma kisebb, mint n. Ennél a módszernél az eredeti modellhez nem rendelünk hozzá egy újabb, fizikailag is csökkentett fokszámú modellt, mint azt az előző pontban tettük. Jelen eljárással egy nemlineáris sajátérték feladatot kapunk. Megoldása nagyobb időigénnyel jár, de a pontosság növelésének nincs elvi akadálya, ellentétben az előzőekben bemutatott eljárással. Egy, a későbbiekben részletezendő nemkívánatos mellékhatás azonban itt is fellép.

A módszer részletesebb bemutatása céljából induljunk ki ismét az (1) összefüggésből. Átrendezés, és az

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M} \tag{12}$$

jelölés bevezetése után írható, hogy

$$\mathbf{Ss} = \mathbf{0}, \tag{13}$$

ahol S a szerkezet teljes dinamikai merevségmátrixa. Az eliminálandó elmozdulásokat most is a v m-edrendű oszlopmátrixba, a megmaradókat az n-edrendű u-ba gyűjtve, alkalmas sor-, ill. oszlopcserék után a (13) egyenlet az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \tag{14}$$

alakban írható. Részletezve:

$$\mathbf{S}_{11}\mathbf{u} + \mathbf{S}_{12}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{15a}$$

$$\mathbf{S}_{21}\mathbf{u} + \mathbf{S}_{22}\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{15b}$$

Ha det $\mathbf{S}_{22} \neq 0$, a (15b) egyenletből **v**-t kifejezve, és (15a)-ba helyettesítve:

$$(\mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{S}_{21})\,\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Az

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{S}_{11} - \mathbf{S}_{12}\mathbf{S}_{22}^{-1}\mathbf{S}_{21} \tag{16}$$

jelöléssel

$$\bar{\mathbf{S}}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{17}$$

redukált feladatot kapjuk, ahol $\bar{\mathbf{S}}$ a rendszer redukált dinamikai merevségmátrixa. A rendszám n helyett már csak $n-m$.

(16)-ból nyilvánvaló, hogy $\bar{\mathbf{S}}$ elemei a rendszer ω^2 sajátkörfrekvenciájának többé már nem lineáris függvényei, hanem ω^2 polinómjainak hányadosai. Ha $n, m \to \infty$, egyes esetekben $\bar{\mathbf{S}}$ elemei ω^2-nek trigonometrikus és hiperbolikus függvényeiként fejezhetők ki [7].

A számítások során $\bar{\mathbf{S}}$ előállítása a (16)-ban levő invertálás miatt csak számszerű ω értéknél lehetséges. Ez egyben leszűkíti az alkalmazható számolási algoritmusok körét is.

A (17) egyenlet kétféleképp teljesülhet:

$$\det \bar{\mathbf{S}} = 0, \tag{18a}$$

vagy

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{18b}$$

A redukált feladatnál a (18b) összefüggés is lehet értelmes, hiszen a (17) egyenlet az eredeti rendszernek már csak $n-m$ szabadságfokát tartalmazza, és így (18b) fennállása esetén is létezhetik rezgés. Ezek a sajátfrekvenciák — ha ilyenek léteznek — és a hozzájuk tartozó rezgésképek is a (15) egyenletek felhasználásával számíthatók ki. Így tehát a rendszer teljes dinamikai merevségmátrixának ismeretére van szükség.

A (15b) egyenlet alapján egyébként belátható, hogy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ esetén — a $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ triviális esetet kizárva — $\bar{\mathbf{S}}$ nincs értelmezve, a det $\bar{\mathbf{S}}$ frekvencia függvény ezen a helyen szinguláris. A (18b) egyenletet kielégítő sajátkörfrekvenciák tehát csak a (18a)-ból nem számíthatók ki.

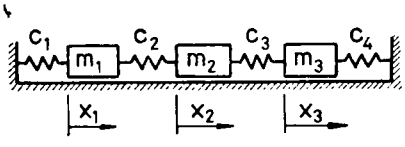
Sok esetben eleve csak a redukált feladat felírására van módunk, így frekvenciaegyenletként csak a (18a) összefüggés áll rendelkezésre. Az e pontban tárgyalt szabadságfokredukciónak viszont van egy speciális következmé-

nye: a (18a) frekvenciaegyenletből nem mindig számítható ki az összes sajátfrekvencia, a frekvenciahalmazban „lyukak" maradhatnak. Amint a következő pontban bemutatásra kerülő egyszerű számpélda is illusztrálja, ez a jelenség akkor következik be, ha a rendszernek létezik olyan sajátkörfrekvenciája, amely egyben sajátkörfrekvenciája valamely részrendszernek (vagy részrendszereknek) is környezetéhez való kapcsolódási pontjaikat rögzítettnek gondolva. Azt várhatnánk, hogy ezeket a sajátkörfrekvenciákat a (18b) egyenlet felhasználásával ki tudjuk számítani. A legtöbb esetben viszont ez is csak a triviális megoldást adja, azaz $\mathbf{u} = \mathbf{0}$-hoz $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ily módon csak azok a sajátfrekvenciák számíthatók ki — a (15) egyenletek ismeretében —, melyekkel való rezgésnél $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, de $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Diszkrét modellnél annak eldöntése, hogy vajon a számítás során nem maradtak-e ki sajátfrekvenciák, viszonylag könnyű. A sajátfrekvenciák számának, figyelembe véve a multiplicitásokat is, meg kell egyezni az eredeti feladat szabadságfokával. Kontinuumok esetén ez már bonyolultabb kérdés.

2.3 Számpélda

Az 1. ábrán ábrázolt egyszerű láncszerű rezgőrendszer segítségével kívánjuk illusztrálni a 2.1 és 2.2 pontokban részletezett redukciós módszereket. A rezgőrendszer tömeg- és rugójellemzőit úgy választottuk meg, hogy a példa alkalmas legyen az eljárások vázolt hiányosságainak szemléltetésére is.



$m_1 = 3$ kps^2 m^{-1} $\quad c_1 = 1 \cdot 10^{-2}$ mkp^{-1}
$m_2 = 2$ kps^2 m^{-1} $\quad c_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ mkp^{-1}
$m_3 = 1{,}5$ kps^2 m^{-1} $\quad c_3 = 2 \cdot 10^{-2}$ mkp^{-1}
$c_4 = 1 \cdot 10^{-2}$ mkp^{-1}

1. ábra

A három szabadságfokkal rendelkező rendszer teljes rugó- és tömegmátrixai:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} & -\frac{1}{c_2} & 0 \\ -\frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} & -\frac{1}{c_3} \\ 0 & -\frac{1}{c_3} & \frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Az 1. ábrán közölt számadatokkal a rendszer sajátkörfrekvenciái: $\omega_1 = 5\ s^{-1}$, $\omega_2 = 10\ s^{-1}$ és $\omega_3 = 10\sqrt{2}\ s^{-1}$. A továbbiakban a második sajátkörfrekvencia különleges jelentőséggel bír, mert a hozzá tartozó sajátvektor: $\mathbf{s}_2^* = [1\ 0\ -2]$, azaz a 2. tömeg nyugalomban van.

Alkalmazzuk először a 2.1 pontban bemutatott lineáris szabadságfokredukciót. Más és más változót eliminálva rendre meghatározzuk a (7) és (8) redukált rugó-, ill. tömegmátrixokat, előállítjuk és megoldjuk a (9) redukált sajátértékfeladatot és a (11) belső sajátértékfeladatot. A részletek elhagyásával eredményeinket az 1. táblázatban foglaltuk össze.

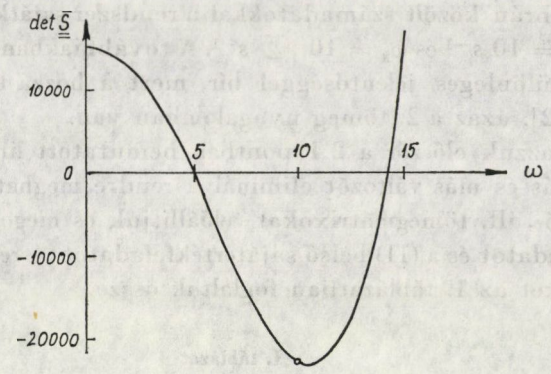
I. táblázat

Eliminált változó sorszáma	Belső feladat 1. sajátértéke, μ_1	Redukált feladat sajátértékei, $\bar{\omega}$	A közelítés jósága, %
1	10	5,2963 (10,3416)	6 —
2	11,1803	5,1988 10,0000	4 0
3	10	5,0305 (13,5051)	0,6 —
1 és 3	10	5,3452	7

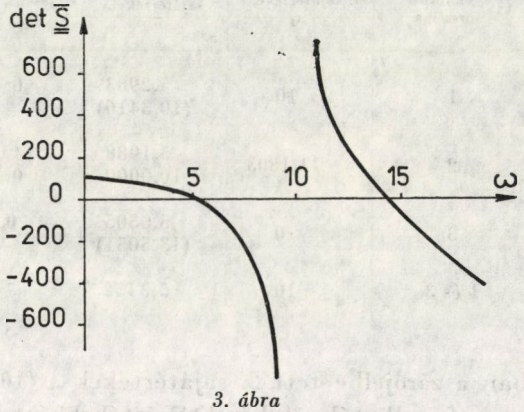
A táblázatban a zárójelbe tett 2. sajátértékek a (10) szerinti korlátok túllépése miatt nem fogadhatók el közelítő értékekként. Látható, hogy 2. változó eliminációja során a 2. sajátérték pontosan kiszámítható, hiszen a hozzá tartozó rezgésalakban a 2. tömeg rezgési amplitúdója nulla, így a redukció a rendszer kinetikus energiáját érintetlenül hagyja, míg más esetekben mindig megváltoztatja.

Ha a 2.2 pontban vázolt nemlineáris szabadságfokredukcióval dolgozunk, a (19) **C** és **M** mátrixaiból előállítjuk a rendszer teljes dinamikai merevségmátrixát, majd változó-eliminációt hajtunk végre. Először az első tömeghez tartozó rezgésamplitúdót küszöböljük ki. A (18a) alatti frekvenciafüggvényt ábrázoltuk a 2. ábrán. További szabadságfokredukcióval a 3. tömeg rezgésamplitúdóját is kiejtve, a 3. ábrán rajzolt frekvenciafüggvényhez jutunk.

Az ábrákból is kitűnik, hogy a nemlineáris szabadságfokredukcióval előállított frekvenciaegyenlet gyökei értékre nézve pontosan megadják az eredeti feladat sajátértékeit, de a frekvenciahalmazban lyukak maradhatnak. Jelen feladatnál az $\omega_2 = 10\ s^{-1}$ sajátkörfrekvenciát a (18a) szerinti összefüggésből nem lehet kiszámítani, a (18b) alapján is csak a 3. ábra esetében (lásd bővebben [1]).



2. ábra



3. ábra

3. Kontinuum modellek

Összetett rendszerek rezgésanalízisének egy lehetséges elvi módja a következő (1. pl. [8]-ban a 3. és 4. pont). A végtelen szabadságfokú szerkezetet csomópontok felvételével olyan részrendszerekre bontjuk, melyek szabad vagy gerjesztett rezgését leíró mezőfüggvényei ismertek. A részrendszereknek a szerkezet csomópontjaihoz kapcsolódó pontjait póluspontoknak nevezzük. A mezőfüggvények segítségével, ω körfrekvenciájú rezgést feltételezve minden egyes részrendszerre előállíthatók a póluspontok $\mathbf{s}_i$ elmozdulásvektorai és a póluspontokra ható — a részrendszer szempontjából külsőnek minősülő — $\mathbf{q}_i$ erőhatásvektorok. Ezek a vektoregyenletek a rezgés paraméteres egyenletrendszerét alkotják, ahol a paraméter a mezőfüggvények tetszőleges konstansait tartalmazó vektor. A paramétereket kiküszöbölve az egyenletekből közvetlen összefüggést nyerünk a póluspontokra ható külső erőhatások és e pontok elmozdulásai közt. Ez a lépés viszont a 2.2 pontban ismertetett nemlineáris

szabadságfokredukciót jelent, hiszen az egyenletekben a továbbiakban szerepeltetett szabadságfok a póluspontok véges szabadságfokainak összegével egyenlő. A fentiek eredményeként nyert összefüggés:

$$\bar{\mathbf{S}}_i \mathbf{s}_i = \mathbf{q}_i, \tag{20}$$

ahol $\bar{\mathbf{S}}_i$ az i-edik részrendszer redukált dinamikai merevségmátrixa. Megjegyezzük, hogy közvetlen fizikai meggondolások alapján rögtön az $\bar{\mathbf{S}}_i$-t írjuk fel, így eleve a redukált dinamikai merevségmátrixból indulunk ki.

E módszer során az $\bar{\mathbf{S}}_i$-ből építjük fel az egész szerkezet $\bar{\mathbf{S}}$ redukált dinamikai merevségmátrixát, így a számítás során a frekvenciahalmaz mindazon eleme kimarad, mely sajátfrekvenciája valamely részrendszernek, ha mereven megfogott pólusokkal rezeg.

Annak a kérdésnek az eldöntésére, hogy vajon valamely ω^* frekvencia alatt nem maradt-e ki sajátfrekvencia, WITTRICK és WILLIAMS [7] egy számítási algoritmust közöl.

A fenti hiányosságok elkerülése miatt célszerűbb olyan módszert választani, amely nem alkalmaz szabadságfokredukciót, így a kimaradó sajátfrekvencia elvileg kizárt. (1. pl. [8] 5. pont).

IRODALOM

1. CZEGLÉDI, GY.: Einige Bemerkungen zur Freiheitsgradreduktion von linear-elastischen mechanischen Modellen, *Periodica Polytechnica Electrical Engineering* **19** (1975), 257—266
2. HURTY, W. C.: Dynamic Analysis of Structural Systems using Component Modes, *AIAA Journal* **3** (1965), 678—685
3. CRAIG, R. R.—BAMPTON, M. C. C.: Coupling of Structures for Dynamic Analysis, *AIAA Journal* **6** (1968), 1313—1319
4. GERADIN, M.: Analyse dynamique de structures complexes par combinaison linéaire de modes statiques, Université de Liège, Rapport VF-5, LTAS (1969)
5. ANDERSON, R. G.—IRONS, B. M.—ZIENKIEWICZ, O. C.: Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements, *Int. Journal of Solids and Structures* **4** (1968), 1031—1055
6. GERADIN, M.: Error Bounds for Eigenvalue Analysis by Elimination of Variables, *Journal of Sound and Vibration* **19** (1971), 111—132
7. WITTRICK, W. H.—WILLIAMS, F. W.: A General Algorithm for Computing Natural Frequencies of Elastic Structures, *Quart. Journ. Mech. and Applied Math.*, XXIV (1971), 263—284
8. CZEGLÉDI. GY.: Näherungsverfahren zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen von Stabwerken, *Periodica Polytechnica Electrical Engineering* **18** (1974), 191—202

Degree of freedom reduction and its consequences in the analysis of linearly elastic structures. In the dynamic analysis of linearly elastic structures the degree of freedom of the calculation model may be reduced by purely mathematical means. Two methods are introduced for the degree of freedom reduction of finite degree of freedom models, completed with a comparison of their advantages and disadvantages. The characteristics thus explained are illustrated by a simple numerical example. Finally, an undesirable consequence of the degree of freedom reduction is pointed out in the case of continuous models.

Reduktion der Freiheitsgrade und ihre Folgen in der Analyse der linear elastischen Konstruktionen. In der dynamischen Analyse linear elastischer Konstruktionen ist es möglich mit rein mathematischen Mitteln den Freiheitsgrad des Rechnungsmodells zu vermindern. Die Abhandlung vermittelt zwei Verfahren zur Reduktion des Freiheitsgrades von Modellen mit endlichen Freiheitsgraden, vergleicht sie und analysiert ihre Vor- und Nachteile. Ihre angeführten Eigenschaften sind an einem einfachen Rechenbeispiel dargestellt. Schließlich weist die Abhandlung auf eine unerwünschte Folge der Verminderung der Freiheitsgrade im Falle von Kontinuummodellen hin.

Редукция степени свободы и её последствия в анализе линейно-упругих конструкций. При динамическом анализе линейно-упругих конструкций степень свободы модели применяеной для расчёта можно редуцировать — только и математически. Статья показывает два метода для редукции степени свободы, у моделей с конечной степенью свободы, сравнивая их, анализирует их преимущества и недостатки. Показанные свойства автор поясняет с помощью простого предмета. В конце концов статья останавливается на одном невыгодном последствии редукции степени свободы у непрерывных моделей.

HAJLÍTOTT VASBETON RÚDELEM NEMLINEÁRIS SZÁMÍTÁSA KOLLOKÁCIÓS MÓDSZERREL

DRASKÓCZY ANDRÁS*

A tanulmány hajlított vasbeton rúdelem nemlineáris közelítő számítására tesz javaslatot. Az eljárás a meggörbült rúdtengelyt hetedfokú polinommal közelíti. A nyomatékok és görbületek egymásnak való megfelelését — bilineárisnak tekintett összefüggés alapján — a rúdtengely négy pontjában írja elő és két pontban a nyomaték- és görbületfüggvény első deriváltját is egyezteti. Az adott rúdvégi elmozdulásoknak megfelelő befogási nyomatékok kétismeretlenes egyenletrendszerből számíthatók. A javasolt eljárás az irodalomból ismert numerikus iteratív közelítő módszerekbe beillesztve, azok hatékonyságát tovább növelheti.

1. Bevezetés

Az utóbbi években számos kutatóhelyen foglalkoznak a vasbeton szerkezetek nemlineáris viselkedését jól követő számítási módszerek kidolgozásával. A probléma vasbetonelméleti és számítástechnikai kérdéseket vet fel. Jelen tanulmány elsősorban számítástechnikai vonatkozású.

2. A „kezdeti feszültségek" módszere

A nemlineáris viselkedés követésére alkalmas egyik iteratív numerikus módszer az ún. „kezdeti feszültségek" módszere (initial stress method).**

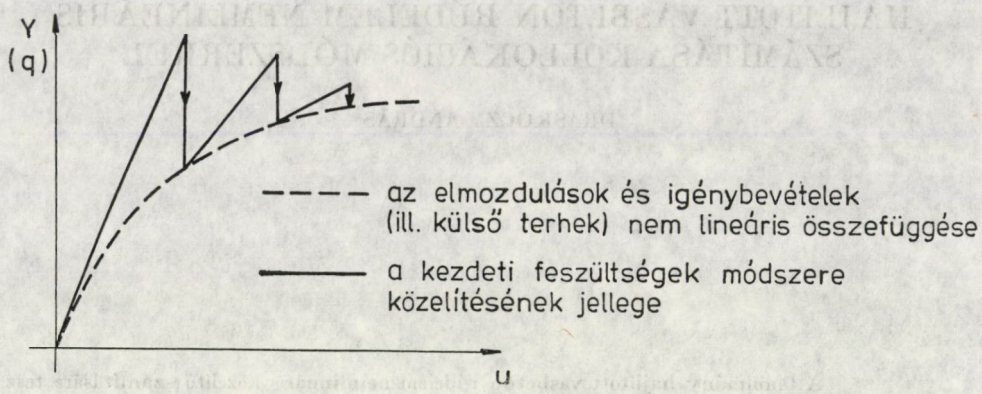
E közelítő módszer lényege, hogy a szerkezet elmozdulásait minden iterációs ciklusban a kezdeti merevségi viszonyokból és a korábbi ciklusok során még ki nem egyensúlyozott terhekből határozzuk meg.

Az elmozdulások és igénybevételek, illetve az elmozdulások és a külső terhek nemlineáris összefüggését a számítás során az 1. ábrán látható séma szerint közelítjük.

A módszer igen jelentős számítástechnikai előnye, hogy elkerülhetővé teszi a változó merevségek lépésenkénti újraszámítását. A szerkezet alakválto-

* Draskóczy András, 1092 Budapest, Erdő u. 80.

** A módszer angol elnevezése kezdeti feszültségként tulajdonképpen azokat a belsőerőket jelöli meg, amelyek az n-edik lépésben lineárisan számított belsőerők és az u_n elmozdulásoknak megfelelő tényleges belsőerők közötti különbségnek felelnek meg.



1. ábra

zási egyenletrendszerének együtthatómátrixát ezáltal csak egyszer kell felállítani és invertálni, ami jelentős gépidő-megtakarítást eredményez, és így a gyakorlati alkalmazhatóság reálisabbá válik.

A „kezdeti feszültségek" módszerének alkalmazása során minden iterációs ciklusban meg kell határozni, hogy a szerkezet az adott elmozdulási állapotban milyen külső terheket képes egyensúlyozni. (Ez a lépés jelenti a lineáris számítás iterációs ciklusonkénti korrekcióját: az 1. ábrán nyíllal jelölt szakaszok.) Az egyensúlyozott külső terheket az adott elmozdulási állapotban a szerkezetben működő igénybevételekből határozhatjuk meg.

3. A tanulmány tárgya, közelítő feltevések

A tanulmány síkbeli vasbeton keretszerkezetek hajlított rúdelemeiben adott rúdvégi elmozdulások mellett ébredő igénybevételek számítástechnikailag kedvező közelítő számítását tárgyalja. A javasolt módszerrel az elemi merevségi mátrixok ciklusonkénti újraszámítása kiküszöbölhető: a rúdvégi nyomatékok egy — max. nyolc kombinációban megoldandó — kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásával számíthatók.

A számítás során az alábbi közelítő feltételezéseket fogadjuk el:

1. A derékerő hatását elhanyagoljuk;

2. A sík keresztmetszetek törvényét érvényesnek tekintjük.

3. A nyomatékok és görbületek közötti összefüggést bilineáris függvénynyel közelítjük, amelynek töréspontja az acélbetétek megfolyásához, második szakaszának végpontja pedig a beton törési összenyomódásának eléréséhez tartozik. (Ezzel egyúttal a keresztmetszetek alulvasalt voltát is feltételezzük.)

4. A 3. ponttal összhangban a beton húzószilárdságát elhanyagoljuk. (A nyomaték-görbület összefüggést egyébként csak trilineáris függvénnyel közelíthetnénk.)

5. Feltesszük, hogy a rúdvégi igénybevételek jó közelítő értékét kapjuk, ha

a) a nyomatékokat és görbületeket a rúdtengely négy pontjában — a két rúdvégen és két belső pontban — a bilineáris nyomaték-görbület összefüggés értelmében egyeztetjük, és

b) a rúdvégeken a görbületfüggvény első deriváltját is előírjuk a

$$\varkappa'(x) = m_i \cdot M'(x) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

összefüggés értelmében, ahol m a hajlékonyságot jelenti. (Korábbi numerikus vizsgálatok azt mutatták, hogy a nyomatékok és görbületek négy pontban való egyeztetése lineáris esetben jó közelítést eredményez, a folyási jelenség követésére azonban ez önmagában nem elegendő.)

6. Az 5. ponttal összhangban a rúdtengely alakját leíró, folytonosnak feltételezett alakváltozási függvényt hetedfokú polinomnak választjuk. Ugyanis a hat kollokációs egyenlet és a négy alakváltozási peremfeltétel tíz független ismeretlen meghatározására elegendő, és mivel a feladat statikailag kétszeresen határozatlan, az alakváltozási függvénynek nyolc ismeretlen paramétere lehet.

Megjegyzendő, hogy másodfokú nyomatékfüggvény és bilineáris nyomaték-görbület összefüggés mellett, az alakváltozott rúdtengely negyedfokú — egymáshoz érintőlegesen csatlakozó — parabolaszakaszokból áll.

A számítási algoritmus emellett arra a speciális esetre vonatkozik, amikor is a rúdtengely mentén egyenletesen megoszló teher működik. Ez a feltevés azonban nem érinti a módszer lényegét és a gyakorlati alkalmazás során általában helytálló.

4. A kollokációs módszer alkalmazása

4.1 A rúdelem viselkedését leíró egyenletek

— A *nyomatékfüggvényt* a két ismeretlen rúdvégi nyomatékkal adjuk meg, egyenletesen megoszló terhelés esetére:

$$M(x) = M_A \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_B \frac{x}{l} - 0{,}5qx(l - x)$$

— *A nyomatékok és görbületek közötti összefüggést* leíró bilineáris függvény:

$$\varkappa(x) = m_i M(x) + k_i \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

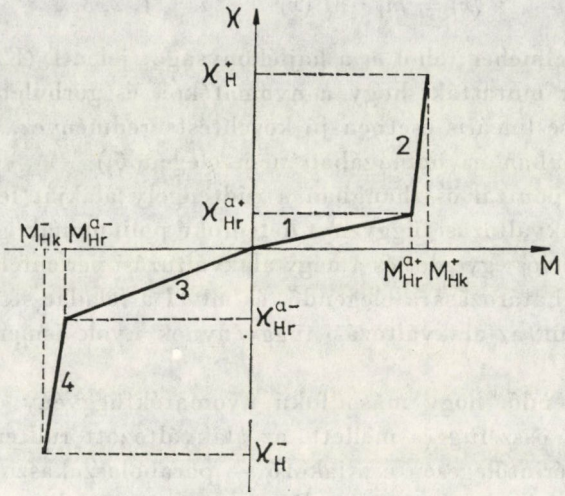
— $i = 1, 3$: berepedt rugalmas állapot: $|M| \leq |M^a_{Hr}|$

$$m_3 = \frac{\varkappa^{a-}_{Hr}}{M^{a-}_{Hr}}; \quad k_3 = 0; \quad m_1 = \frac{\varkappa^{a+}_{Hr}}{M^{a+}_{Hr}}; \quad k_1 = 0$$

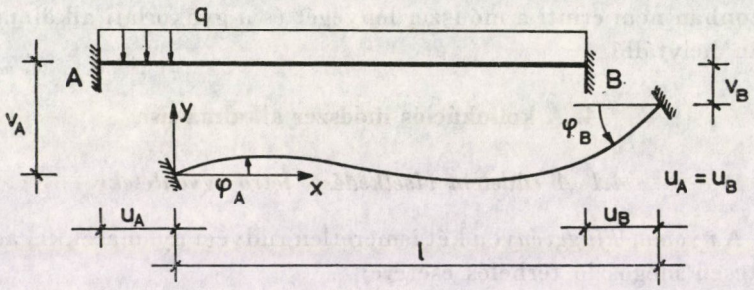
— $i = 2, 4$: berepedt képlékeny állapot: $|M_{Hr}^{a}| < |M| \leq |M_{Hk}|$

$$m_4 = \frac{\varkappa_H^- - \varkappa_{Hr}^{a-}}{M_{Hk}^- - M_{Hr}^{a-}}; \quad k_4 = \varkappa_{Hr}^{a-} - M_{Hr}^{a-} \frac{\varkappa_H^- - \varkappa_{Hr}^{a-}}{M_{Hk}^- - M_{Hr}^{a-}};$$

$$m_2 = \frac{\varkappa_H^+ - \varkappa_{Hr}^{a+}}{M_{Hk}^+ - M_{Hr}^{a+}}; \quad k_2 = \varkappa_{Hr}^{a+} - M_{Hr}^{a+} \frac{\varkappa_H^+ - \varkappa_{Hr}^{a+}}{M_{Hk}^+ - M_{Hr}^{a+}}.$$



2. ábra



3. ábra

— Az *alakváltozásokat közelítő függvényt* egy olyan derékszögű (x, y) koordináta rendszerben adjuk meg, amelynek kezdőpontja az alakváltozott rúdtengely balvégével (A) egybeesik és x tengelyének iránya a rúd kezdeti — egyenes — tengelyvonalával párhuzamos:

$$y(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + ex^3 + fx^2 + gx + h.$$

Ismeretlenek az alakváltozási függvény paraméterei és a két rúdvégi nyomaték (összesen 10 érték).

4.2. Feltételi egyenletek

Az ismeretlenek meghatározására a következő feltételi egyenleteket írhatjuk fel:
Peremfeltételek:

1. $y(x = 0) = 0$
2. $y'(x = 0) = \varphi_A$
3. $y\ (x = l) = v_B - v_A$
4. $y'(x = l) = \varphi_B$

Kollokációs egyenletek:

5. $y''\ (x = 0) = \varkappa_A = m_i^A M_A + k_i^A \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$
6. $y'''(x = 0) = \varkappa'_A = m_i^A M'_A = m_i^A \dfrac{M_B - M_A - 0{,}5ql^2}{l} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$
7. $y''\ (x = \alpha l) = \varkappa(x = \alpha l) = m_i^\alpha M_\alpha + k_i^\alpha \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$
8. $y''\ (x = \beta l) = \varkappa(x = \beta l) = m_i^\beta M_\beta + k_i^\beta \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$
9. $y''\ (x = l) = \varkappa_B = m_i^B M_B + k_i^B \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$
10. $y'''\ (x = l) = \varkappa'_B = m_i^B \dfrac{M_B - M_A + 0{,}5ql^2}{l} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$

4.3 A megoldás lépései

Az 1—10. feltételi egyenletek célszerűen három csoportba sorolhatók:

a) az $x = 0$ helyre vonatkozó egyenletekből az alakváltozási függvény e, f, g, h paramétereit az ismeretlen rúdvégi nyomatékok függvényében közvetlenül számíthatjuk.

b) az $x = l$ helyre vonatkozó egyenletekből az alakváltozási egyenlet további ismeretlen paraméterei — ugyancsak a rúdvégi nyomatékok függvényében — meghatározhatók. A paraméterekre vonatkozóan ezek az egyenletek egy lineáris egyenletrendszert alkotnak.

c) ha végül az $x = \alpha l$ és $x = \beta l$ helyre vonatkozó egyenletekbe behelyettesítjük az alakváltozási függvény előzőek során meghatározott paramétereit, az ismeretlen rúdvégi nyomatékokra egy kétismeretlenes egyenletrendszert nyerünk.

a) A balvégre vonatkozó feltételi egyenletek:

1. $y(x = 0) = h = 0,$
2. $y'(x = 0) = g = \varphi_A$

$$5.\ y''(x=0) = 2f = m_i^A M_A + k_i^A \cdot$$

$$\cdot f = \frac{m_i^A M_A + k_i^A}{2},$$

$$6.\ y'''(x=0) = 6e = m_i^A \frac{M_B - M_A - 0{,}5\,ql^2}{l},$$

$$e = m_i^A \frac{M_B - M_A - 0{,}5\,ql^2}{6l}.$$

b) A jobbvégre vonatkozó feltételi egyenletek:

$$3.\ y(x=l) = al^7 + bl^6 + cl^5 + dl^4 + el^3 + fl^2 + gl = v_B - v_A,$$

$$4.\ y'(x=l) = 7al^6 + 6bl^5 + 5cl^4 + 4dl^3 + 3el^2 + 2fl + g = \varphi_B,$$

$$9.\ y''(x=l) = 42al^5 + 30bl^4 + 20cl^3 + 12dl^2 + 6el + 2f = m_i^B M_B + k_i^B,$$

$$10.\ y'''(x=l) = 210al^4 + 120bl^3 + 60cl^2 + 24dl + 6e =$$

$$= m_i^B \cdot \frac{M_B - M_A + 0{,}5\,ql^2}{l}.$$

A fenti egyenletek az a, b, c, d ismeretlenekre nézve lineáris egyenletrendszert alkotnak.
Mátrixalakban:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j},$$

ahol

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} l^7 & l^6 & l^5 & l^4 \\ 7l^6 & 6l^5 & 5l^4 & 4l^3 \\ 42l^5 & 30l^4 & 20l^3 & 12l^2 \\ 210l^4 & 120l^3 & 60l^2 & 24l \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}^* = [a, b, c, d]$$

és $g = \varphi_A$ helyettesítéssel, valamint a

$$\Delta v = v_B - v_A - \varphi_A l,$$

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$$

jelölések bevezetésével (Δv és $\Delta\varphi$ a rúdvégek relatív elmozdulása és elfordulása):

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} \Delta v - el^3 - fl^2 \\ \Delta\varphi - 3el^2 - 2fl \\ m_i^B M_B + k_i^B - 6el - 2f \\ m_i^B \dfrac{M_B - M_A + 0{,}5\,ql^2}{l} - 6e \end{bmatrix}$$

Célszerű a fenti egyenletrendszer megoldását analitikusan előállítani, hogy információkat szerezhessünk a rúdvégi nyomatékokra — ezen eredmények birtokában — felírható kétismeretlenes egyenletrendszerről.

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -20l^{-7}\Delta v + 10l^{-6}\Delta\varphi + el^{-4} + 4fl^{-5} - 2l^{-5}(m_i^B M_B + k_i^B) + \\ \qquad + l^{-5} m_i^B (M_B - M_A + 0{,}5\, ql^2) \\ 70l^{-6}\Delta v - 34l^{-5}\Delta\varphi - 4el^{-3} - 15fl^{-4} + 6{,}5l^{-4}(M_i^B m_B + k_i^B) - \\ \qquad - l^{-4} m_i^B (M_B - M_A + 0{,}5 ql^2) \\ -84l^{-5}\Delta v + 39l^{-4}\Delta\varphi + 6el^{-2} + 20fl^{-3} - 7l^{-3}(m_i^B M_B + k_i^B) + \\ \qquad + l^{-3} m_i^B (M_B - M_A + 0{,}5 ql^2) \\ 35l^{-4}\Delta v - 15l^{-3}\Delta\varphi - 4el^{-1} - 10fl^{-2} + 2{,}5l^{-2}(m_i^B M_B + k_i^B) + \\ \qquad + l^{-2} m_i^B (M_B - M_A + 0{,}5 ql^2) \end{bmatrix}.$$

Helyettesítsük be ezeket az értékeket a 7. és 8. egyenletbe. (A két egyenlet nagyfokú hasonlósága miatt a részletes behelyettesítést csak a 7. egyenlettel végezzük el, és az egyszerűbb írásmód érdekében egyúttal

$$m_i^B M_B + k_i^B = \varkappa_B$$

$$m_i^B \cdot \frac{M_B - M_A + 0{,}5\, ql^2}{l} = \varkappa'_B$$

helyettesítéseket is végzünk.)

$$-840\,\alpha^5 \frac{\Delta v}{l^2} + 420\,\alpha^5 \frac{\Delta\varphi}{l} + 42\,\alpha^5 el + 168\,\alpha^5 f - 84\,\alpha^5 \varkappa_B + 7\,\alpha^5 l\varkappa'_B +$$

$$+ 2100\,\alpha^4 \frac{\Delta v}{l^2} - 1020\,\alpha^4 \frac{\Delta\varphi}{l} - 120\,\alpha^4 el - 450\,\alpha^4 + 195\,\alpha^4 \varkappa_B - 15\alpha^4 l\varkappa'_B -$$

$$- 1680\,\alpha^3 \frac{\Delta v}{l^2} + 780\,\alpha^3 \frac{\Delta\varphi}{l} + 120\,\alpha^3 el + 400\alpha^3 f - 140\,\alpha^3 \varkappa_B + 10\,\alpha^3 l\varkappa'_B +$$

$$+ 420\alpha^2 \frac{\Delta v}{l^2} - 180\,\alpha^2 \frac{\Delta\varphi}{l} - 48\,\alpha^2 el - 120\,\alpha^2 f + 30\,\alpha^2 \varkappa_B - 2\,\alpha^2 l\,\varkappa'_B +$$

$$+ 6\,\alpha\, el + 2\,f =$$

$$= m_i^\alpha \left[M_A(1-\alpha) + M_B\alpha + 0{,}5\, ql^2(\alpha^2 - \alpha)\right] + k_i^\alpha. \qquad (7')$$

Bevezetve a következő jelöléseket:

$$\alpha_1 = -840\,\alpha^5 + 2100\,\alpha^4 - 1680\,\alpha^3 + 420\,\alpha^2,$$

$$\alpha_2 = 420\,\alpha^5 - 1020\,\alpha^4 + 780\,\alpha^3 - 180\,\alpha^2,$$

$$\alpha_3 = \quad 7\alpha^5 - \quad 20\alpha^4 + \quad 20\alpha^3 - \quad 8\alpha^2 + \alpha,$$
$$\alpha_4 = \quad 84\alpha^5 - 225\alpha^4 + 200\alpha^3 - \quad 60\alpha^2 + 1,$$
$$\alpha_5 = -\ 84\alpha^5 + 195\alpha^4 - 140\alpha^3 + \quad 30\alpha^2$$
$$\alpha_6 = \quad 7\alpha^5 - \quad 15\alpha^4 + \quad 10\alpha^3 - \quad 2\alpha^2,$$
$$\alpha_7 = 1 - \alpha,$$
$$\alpha_8 = \alpha^2 - \alpha,$$

és behelyettesítve az e és f paraméterek értékét, valamint a $\varkappa_B$, $\varkappa_B$ kifejezéseket; rendezés után a következőt kapjuk:

$$M_A(-\alpha_3 m_i^A + \alpha_4 m_i^A - \alpha_6 m_i^B - \alpha_7 m_i^z) + \qquad (7'')$$
$$+ M_B(\alpha_3 m_i^A + \alpha_5 m_i^B + \alpha_6 m_i^B - \alpha m_i^z) =$$
$$= -\alpha_1 \frac{\Delta v}{l^2} - \alpha_2 \frac{\Delta\varphi}{l} - \alpha_4 k_i^A - \alpha_5 k_i^B + 0{,}5\ ql^2(\alpha_3 m_i^A - \alpha_6 m_i^B + \alpha_8 m_i^z) + k_i^z.$$

A 8. egyenlet ehhez hasonlóan:

$$M_A(-\beta_3 m_i^A + \beta_4 m_i^A - \beta_6 m_i^B - \beta_7 m_i^\beta) + \qquad (8'')$$
$$+ M_B(\beta_3 m_i^A + \beta_5 m_i^B + \beta_6 m_i^B - \beta m_i^\beta) =$$
$$= -\beta_1 \frac{\Delta v}{l^2} - \beta_2 \frac{\Delta\varphi}{l} - \beta_4 k_i^A - \beta_5 k_i^B +$$
$$+ 0{,}5\, ql^2(\beta_3 m_i^A - \beta_6 m_i^B + \beta_8 m_i^\beta) + k_i^\beta,$$

ahol β_{1-8} β-tól függő, α_{1-8}-cal egyező alakú és együtthatójú kifejezéseket jelentenek.

4.4 A rúdelem várható viselkedéséből következő egyszerűsítési lehetőségek

A fenti kétismeretlenes egyenletrendszert elvileg $4^4 = 256$ kombinációban kellene megoldani a kollokált keresztmetszetek egymástól független különböző lehetséges állapotának megfelelően. A kollokációs pontok helyére vonatkozóan azonban gyakorlati megfontolások alapján elfogadhatjuk a következő feltevéseket:

1. A rúdvégeken a nyomaték előjele negatív: a negatív nyomatékra érvényes nyomaték-görbület összefüggést használhatjuk (3. és 4. szakasz a 2. ábrán).

Feltehető ugyanis, hogy a gyakorlati esetek túlnyomó részében a csomóponti elmozdulásokból ébredő nyomatékok abszolút értékben kisebbek a terhelésből keletkező nyomatékoknál:

$$|M_A^{v,\varphi}| \leq |M_A^q|; \quad |M_B^{v,\varphi}| \leq |M_B^q|.$$

2. Az $x = \alpha l$ koordinátájú keresztmetszet nyomatéka negatív előjelű és az acélbetétek megfolyása ebben a keresztmetszetben nem következik be. α értékének megfelelő felvételével ez a feltétel biztosítható.

3. Az $x = \beta l$ koordinátájú keresztmetszetben a nyomaték előjele pozitív és itt az acélbetétek megfolyását is megengedjük (1. és 2. szakasz a 2. ábrán).

Gyakorlati esetekben a négy pont közül háromban (a rúdvégeken és az $x = \alpha l$ helyen) ugyanazt a nyomaték-görbület függvényt használhatjuk.

A fenti — a rúd várható viselkedését tükröző — korlátozások mellett az egyenletrendszert csak max. nyolc kombinációban kell megoldani. A helyes eredményt az a kombináció szolgáltatja, amelynél az egyes keresztmetszetek feltételezett állapota és az eredmény összhangban van.

Ha egyik kombináció sem ad jó eredményt és ezen a belső lokációs pontok helyének alkalmas változtatása sem segít, a rúd egyensúlya az adott teherbírási és alakváltozási korlátozó feltételek mellett nem biztosítható.

4.5 Lineáris eset

Ha az acélbetétek megfolyása még egyik keresztmetszetben sem következik be, a (7″, 8″) egyenletrendszer egyszerűsödik, mivel:

$$k_3^A = k_3^\alpha = k_1^\beta = k_3^B = 0,$$

$$\begin{aligned} &M_A(-\alpha_3 m_3^A + \alpha_4 m_3^A - \alpha_6 m_3^B - \alpha_7 m_3^\alpha) + \\ &+ M_B(\alpha_3 m_3^A + \alpha_5 m_3^B + \alpha_6 m_3^B - \alpha m_3^\alpha) = \\ &= -\alpha_1 \frac{\Delta v}{l^2} - \alpha_2 \frac{\Delta \varphi}{l} + 0{,}5ql^2(\alpha_3 m_3^A - \alpha_6 m_3^B + \alpha_8 m_3^\alpha), \end{aligned} \tag{7‴}$$

$$\begin{aligned} &M_A(-\beta_3 m_3^A + \beta_4 m_3^A - \beta_6 m_3^B - \beta_7 m_1^\beta) + \\ &+ M_B(\beta_3 m_3^A + \beta_5 m_3^B + \beta_6 m_3^B - \beta m_1^\beta) = \\ &= -\beta_1 \frac{\Delta v}{l^2} - \beta_2 \frac{\Delta \varphi}{l} + 0{,}5ql^2(\beta_3 m_3^A - \beta_6 m_3^B + \beta_8 m_1^\beta). \end{aligned} \tag{8‴}$$

Ily módon M_A-ra és M_B-re olyan lineáris egyenletrendszert kapunk, amelynek megoldása — állandó rúdkeresztmetszet esetében — kell hogy a lineáris rugalmasságtan ismert összefüggését adja.

Ha a rúdkeresztmetszet állandó

$$m_3^A = m_3^\alpha = m_1^\beta = m_3^B = m.$$

„m”-et kiemelve, majd mindkét egyenletet „m”-mel elosztva:

$$M_A\alpha_9 + M_B\alpha_{10} = -\alpha_1 \frac{\Delta v}{ml^2} - \alpha_2 \frac{\Delta \varphi}{ml} + 0{,}5ql^2\alpha_{11}, \tag{7IV}$$

$$M_A\beta_9 + M_B\beta_{10} = -\beta_1\frac{\Delta V}{ml^2} - \beta_2\frac{\Delta\varphi}{ml} + 0{,}5ql^2\beta_{11}, \qquad (8^{IV})$$

ahol

$$\alpha_9 = -\alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_7 = 10\alpha^2(7\alpha^3 - 19\alpha^2 + 17\alpha - 5)$$

$$\alpha_{10} = \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha = 10\alpha^2(-7\alpha^3 + 16\alpha^2 - 11\alpha + 2)$$

$$\alpha_{11} = \alpha_3 - \alpha_6 + \alpha_8 = 10\alpha^2(-0{,}5\alpha^2 + \alpha - 0{,}5)$$

(β_{9-11} hasonlóan)

Egyszerűen belátható, hogy a (7^{IV}, 8^{IV}) egyenletrendszernek nincs egyértelmű megoldása, ha két kollokációs pont egybeesik ($\alpha = 0$; $\alpha = 1$; $\beta = 0$; $\beta = 1$; $\alpha = \beta$).

Kimutatható, hogy az M_A, M_B nyomatékok α és β értékére nézve invariánsak és az egyenletrendszer megoldása a lineáris rugalmasságtan összefüggéseihez vezet:

$$M_A = 6\frac{\Delta v}{ml^2} - 2\frac{\Delta\varphi}{ml} + \frac{ql^2}{12},$$

$$M_B = -6\frac{\Delta v}{ml^2} + 4\frac{\Delta\varphi}{ml} + \frac{ql^2}{12}.$$

IRODALOM

1. Planning and Design of Tall Buildings. Volume III: Structural Design of Tall Concrete and Masonry Buildings. (Proceedings of the International Conference on Planning and Design of Tall Buildings, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, 1972.)
2. MONNIER, TH.: The Moment-Curvature Relation of Reinforced Concrete. *Heron*, 17 (1970), No. 2

Nonlinear calculation of bent reinforced concrete bar elements by collocation. A recommendation is submitted on a nonlinear approximative calculation of bent reinforced concrete bar elements. The bent bar axis is approximated by a seventh degree polynome. Correspondence of the moments and curvatures are specified at four points of the bar axis on the basis of a relation considered as bilinear, and at two points the first derivatives of the torque and curvature functions are also conformed. The clamping moments corresponding to the given bar end displacements can be calculated from an equation system of two unknowns. Fitted into the numerical iterative approach methods known from literature, the suggested technique might further increase their efficiency.

Nichtlineare Berechnung eines biegebeanspruchten Stahlbeton-Stabelementes nach der Kollokationsmethode. Der Aufsatz enthält einen Vorschlag für die nichtlineare Näherungsberechnung eines biegebeanspruchten Stahlbeton-Stabelementes. Im Verfahren wird die gekrümmte Stabachse mit einem Polynom siebenten Grades angenähert. Die einander zugeordneten Momente und Krümmungen müssen — auf Grund des als bilateral angenommenen Zusammenhanges — in vier Punkten der Stabachse und die ersten Derivate der Momenten- und Krümmungsfunktion in zwei Punkten übereinstimmen. Die den gegebenen Verschiebungen des Stabendes entsprechenden Einspannmomente können aus einem Gleichungssystem

mit zwei Unbekannten errechnet werden. Das vorgeschlagene Verfahren ist in die aus der Literatur bekannten numerischen, iterativen Näherungsverfahren eingereiht und kann die Wirksamkeit dieser weitersteigern.

Нелинейный расчёт изогнутого сталебетонного стрежня с коллокационным методом В статье предлагается приближенный метод на нелинейный расчёт на изгибе железобетонного стержня. Метод приближает загнутую ось стержня с полиномом седьмой степени; предписывает взаимно соответствие моментов и кривизней — на основе двулинейной связи — в четырах местах оси стержня и тоже согласовает первую производную функции моментов и кривизней. Моменты закрепления подходящие заданным перемещениям на крайе стержня могут вымыслить из системы уравнений с двумя неизвестными. Предложенный метод может увеличить эффективность различных итеративных приближенных методов известных из литературы.

RUGALMAS RÚDSZERKEZETEK ÁLLAPOTVÁLTOZÁSÁNAK PONTOS ELEMZÉSE

GÁSPÁR ZSOLT*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

A rugalmas rúdszerkezetek állapotváltozásának meghatározását nagy elmozdulások esetén visszavezetjük egy nemlineáris egyenletrendszer megoldására. A nemlineáris egyenletrendszert a csomópontokra felírt egyensúlyi és a rudakra felírt kompatibilitási egyenletek alkotják. Egy-egy rúd alakját a rúdvégi igénybevételek ismeretében egy hat egyenletből álló differenciálegyenlet rendszerrel meghatározott kezdeti értékfeladat megoldásával kapjuk.

1. Bevezetés

A BME Építőmérnökkari Mechanika Tanszékén a „Rugalmas anyagú rúdszerkezetek és hálók statikai és stabilitási vizsgálata "című altéma keretében folyó kutatások főbb eredményeit a [6] tanulmány ismerteti.

Rugalmas rúdszerkezetek állapotjellemzőinek meghatározására [1] olyan módszert mutat be, amellyel ez tetszőleges pontossággal elérhető. A módszer lényege, hogy az egyensúlyi és kompatibilitási feltételeket nemlineáris egyenletrendszer formájában fogalmazza meg, és ebből deriválással kapja a [2]-ben ismertetettnek megfelelő állapotváltozási differenciálegyenlet rendszert. Egy ismert belső erőkkel terhelt rúd alakjának meghatározását [3], egy rúd érintő merevségi mátrixát [4] mutatja be részletesebben.

Ebben a dolgozatban röviden ismertetjük azokat a változásokat, amelyek a következő célok elérése érdekében történtek:

a) A módszer kiterjesztése olyan rúdszerkezetekre, melyeken a rudak keresztmetszeteinek súlypontja és nyírási középpontja nem feltétlenül esik egybe.

b) A rúd alakját meghatározó kezdeti érték feladat olyan megfogalmazása, hogy azt az eddigi 12 helyett egy 6 egyenletből álló differenciálegyenlet rendszer határozza meg.

c) Az állapotjellemzők oly módon való értelmezése, hogy konzervatív teher esetében minden fizikailag lehetséges állapotban az érintő merevségi mátrix szimmetrikus legyen.

* Dr. Gáspár Zsolt, 1025 Budapest, Kapy u. 40/b.

2. A rúd alakjának meghatározása

A vizsgált rúd általános esetben feszültségmentes állapotban is térgörbe tengelyű, változó keresztmetszetű, a csomópontokhoz excentrikusan kapcsolódik. Feltételezzük, hogy az anyag lineárisan rugalmas, a keresztmetszetek alaktartók és síkok maradnak, valamint a rudak csak végein terheltek.

A terheletlen rúd alakja jellemezhető a tengely mentén változó λ paraméter függvényében egy $\epsilon_0(\lambda)$ fajlagos eltolódás és egy $\gamma_0(\lambda)$ fajlagos elfordulásvektorral (l. [3]). A kinematikai teher, vagyis a nem feszültség miatt létrejövő deformáció is hasonlóképp jellemezhető $\epsilon_k(\lambda)$, $\gamma_k(\lambda)$. A fajlagos rugalmas deformációt az

$$\begin{bmatrix} \epsilon_e(\lambda) \\ \gamma_e(\lambda) \end{bmatrix} = \mathbf{F}_0(\lambda)\,\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{g}(\lambda))\,\mathbf{B}(\mathbf{v}(\lambda))\,\mathbf{s}$$

összefüggéssel számíthatjuk, ahol $\mathbf{s}$ a rúd végpontjának hat igénybevételét tartalmazó vektor, amit a $\mathbf{B}$ átviteli mátrix redukál a λ paraméterű pontra. Az antimetrikus $\mathbf{B}$ a λ paraméterű pont koordinátáit tartalmazza. A helyi igénybevételeket a $\tilde{\mathbf{T}}$ (két forgatómátrixból álló hiperdiagonál) mátrix transzformálja a lokális rendszerbe, amelynek tengelyei a főirányokba mutatnak. A forgatómátrixok a $\mathbf{g}$ elfordulásvektor függvényei, mely vektor a λ ponthoz tartozó lokális koordináta-rendszernek a végponti koordináta-rendszerbe való forgatását adja meg. (A $\mathbf{T}(\mathbf{g})$ kapcsolatot lásd [4] (2) képletében.)

Az $\mathbf{F}_0(\lambda)$ fajlagos hajlékonysági mátrix inverzét [3] (4) képlete mutatja. Jelöljük a keresztmetszet nyírási középpontjának a keresztmetszet lokális koordináta-rendszerében érvényes koordinátáit $\xi_{2S}(\lambda)$-val és $\xi_{3S}(\lambda)$-val. Ezeknek a zérustól való eltérése figyelembe vehető, ha az invertálás előtt a mátrix nyíróerőkhöz tartozó második és harmadik sorának $-\xi_{3S}(\lambda)$-szorosát, ill. $\xi_{2S}(\lambda)$-szorosát hozzáadjuk a csavarónyomatékhoz tartozó negyedik sorhoz.

A fajlagos eltolódásokat vissza kell forgatni a végponti koordináta-rendszerbe, hogy megkapjuk a koordináta-növekményeket. Az elfordulásvektoroknál azok nem additív volta miatt egy további transzformáció is szükséges:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(\lambda) \\ \dot{\mathbf{g}}(\lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \\ & \mathbf{H}(\mathbf{g}(\lambda)) \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^*(\mathbf{g}(\lambda)) \left(\begin{bmatrix} \epsilon_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_k \\ \gamma_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_e \\ \gamma_e \end{bmatrix} \right), \tag{1}$$

ahol $\mathbf{E}$ harmadrendű egységmátrix és $\mathbf{H}$ elemei:

$$h_{ij} = \frac{g_i g_j (1 - A)}{|\mathbf{g}|^2} + A\delta_{ij} - \frac{(-1)^{i+j}\,\mathrm{sign}\,(i-j)}{2|\mathbf{g}|}\, g_{6-i-j}$$

$$A = \frac{|\mathbf{g}|(1 + \cos|\mathbf{g}|)}{2 \sin|\mathbf{g}|}.$$

Az (1) differenciálegyenletrendszerhez a végponti excentrikus kapcsolatot jellemző $\mathbf{e}_b$ és $\mathbf{g}_b$ vektorok adják meg a kezdeti értéket. A kezdeti értékfeladatot megoldva, kapjuk a $\mathbf{v}(l)$ és $\mathbf{g}(l)$ vektorokat. Jelölje $\mathbf{e}_a$ és $\mathbf{g}_a$ a kezdőponti excentrikus kapcsolatokat jellemző vektorokat. Ekkor a

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_w &= -\mathbf{v}(l) - \mathbf{T}^*(\mathbf{g}(l))\,\mathbf{e}_a\,, \\ \mathbf{g}_w &= -\mathcal{F}\left(\mathbf{T}\left(\mathbf{T}^*(\mathbf{g}(l)) \cdot \mathbf{g}_a\right) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{g}(l))\right) \end{aligned} \tag{2}$$

vektorok megadják azokat a koordináta-transzformációkat, amelyek a kezdőponti W koordináta-rendszert a végponti V koordináta-rendszerbe viszik át. (Az $\mathcal{F}$ függvény értelmezését lásd [4] (24) képletében.)

3. Egyensúlyi és kompatibilitási egyenletek

A feladat: egy adott $\mathbf{q}$ vektorral jellemzett csomóponti erőkből álló teher és az $\epsilon_k(\lambda)$, $\gamma_k(\lambda)$ függvényvektorokkal jellemzett kinematikai teher esetében keletkező állapotjellemzők meghatározása.

Legyen ismert az állapotjellemzők egy közelítése, vagyis a következő hipervektorok:

$\mathbf{x}$ melynek elemei a csomópontok helyvektorai,

$\mathbf{f}$ melynek elemei a csomóponti koordináta-rendszerek elfordulását megadó vektorok,

$\mathbf{s}$ melynek elemei a rudak végéhez definiált belső erők vektora.

Az egyensúlyhoz és kompatibilitáshoz Δ eltolódás, φ elfordulás és σ belső erőnövekmény kell. Így a keresett állapotot az $\mathbf{x} + \Delta$ csomóponti koordináták, az $\mathbf{s} + \sigma$ belső erők, valamint az egyes csomóponti koordináta-rendszerek elfordulását az

$$\mathcal{F}(\mathbf{T}(\varphi_j)\,\mathbf{T}(\mathbf{f}_j))$$

összefüggéssel meghatározható forgásvektorok jellemzik. A j. csomópont egyensúlyát a

$$\begin{aligned} &\sum_{(k1)} \mathbf{B}^*\,(\Delta_{kb} - \Delta_{ka})\,\mathbf{B}^*(\mathbf{x}_{kb} - \mathbf{x}_{ka})\,\tilde{\mathbf{T}}^*(\mathbf{f}_{kb})\,\tilde{\mathbf{T}}^*(\varphi_{kb})\,(\mathbf{s}_k + \sigma_k) - \\ &- \sum_{(k2)} \tilde{\mathbf{T}}^*(\mathbf{f}_{kb})\,\tilde{\mathbf{T}}^*(\varphi_{kb})(\mathbf{s}_k + \sigma_k) + \mathbf{q}_j = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3}$$

egyenlet fejezi ki, ahol az első összegzésben azok a rudak szerepelnek, amelyek a kezdőpontjukkal kapcsolódnak a j. csomóponthoz, míg a másodikban azok, melyek a végpontjukkal.

A k. rúdra felírt kompatibilitási egyenletek azt fejezik ki, hogy a rúd beilleszthető a két csomópont elmozdult koordináta-rendszere közé:

$$\mathbf{T}(\varphi_{kb}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{f}_{kb}) \cdot (\mathbf{x}_{ka} + \Delta_{ka} - \mathbf{x}_{ko} - \Delta_{kb}) + \mathbf{v}_{kw}(\mathbf{s}_k + \sigma_k) = \mathbf{0}, \tag{4}$$

$$\mathfrak{F}\left(\mathbf{T}(\mathbf{g}_{kw}) \cdot \mathbf{T}(\hat{\varphi}_{ka}) \cdot \mathbf{T}(\hat{\mathbf{f}}_{ka}) \cdot \mathbf{T}^*(\hat{\mathbf{f}}_{kb}) \cdot \mathbf{T}^*(\hat{\varphi}_{kb})\right) = \mathbf{0}, \tag{5}$$

ahol $\mathbf{g}_{kw}$ a k. rúdnak az $\mathbf{s}_k + \sigma_k$ belső erőkkel a (1) képlettel meghatározott értéke, és a $\hat{}$ jel a rúdvégi koordinátarendszerben való felírást jelöli, tehát például

$$\hat{\mathbf{f}}_{ka} = \mathbf{T}(\mathbf{f}_{kb}) \cdot \mathbf{f}_{ka} .$$

4. Megoldási módszer

A csomópontokra felírt (3), valamint a rudakra felírt (4) és (5) típusú egyenletek együtt egy nemlineáris egyenletrendszert alkotnak.

Az állapotváltozási jellemzők infinitezimális változása, valamint az egyensúlyi és kompatibilitási egyenletek behelyettesítési értékeinek változása között a nemlineáris rendszer Jacobi-mátrixa adja meg a kapcsolatot:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G} \\ \mathbf{L} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\mathbf{e} \\ d\mathbf{c} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{6}$$

ahol de és dc az egyensúlyi és kompatibilitási hiba megváltozása, valamint du a $d\Delta_j$ és $d\varphi_j$vektorokból álló hipervektor. A **D**, **G** és **L** mátrixokban a deriválások képletszerűleg elvégezhetők, az **F** előállításához numerikus deriválásra van szükség.

Az állapotváltozók meghatározása a következő lépésekben történik:

a) Az igénybevételek közelítő értékéből rudanként megoldjuk az (1) kezdeti érték feladatot.

b) Az egzakt (3)—(5) típusú egyenletekkel kiszámítjuk az **e** egyensúlyi és **c** kompatibilitási hibát.

c) Ha a hibák a megengedett értéknél nagyobbak, akkor (6) lineáris összefüggést véges változásra alkalmazva, kiszámítjuk **u** és **σ** értékét.

d) Az **u** és **σ** vektorok alapján módosítjuk az **x**, **f** és **s** közelítő értékeket és az eljárást megismételjük.

IRODALOM

1. GÁSPÁR, Zs.: Large Deflection Analysis of Bar-Structures. *Acta Techn. Hung.* **86.** (Sajtó alatt)
2. SZABÓ, J.: Rúdszerkezetek állapotváltozásai egyenlete. *Építés- Építészettudomány* **3** (1971), 3—18
3. GÁSPÁR, Zs.: The Form of an Ideally Elastic Bar with a Space Curve Axis. *Acta Techn. Hung.* **84** (1977), 293—306
4. GÁSPÁR, Zs.: Establishment of the Tangent Stiffness Matrix of an Ideally Elastic Space Bar. *Acta Techn. Hung.* **84** (1977), 363—378
5. SZABÓ J.—ROLLER, B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971, 268. old.
6. САБО, Я. — ГАШПАР, Ж.: Большие перемещения и посткритические изменения состояния стержневых конструкций. *Успехы механики* №1. 1977 (Sajtó alatt)

Precise analysis of the change of state of elastic bar structures. In the case of major displacements, determination of the change of state of elastic bar structures is reduced to the solution of a nonlinear equation system. This nonlinear equation system consists of equilibrium equations of the junction points, and compatibility equations related to the bars. The form of the individual bars is obtained, if the bar end stresses and load values are known, with the solution of an initial value problem defined by a differential equation system consisting of six equations.

Exakte Analyse der Zustandsänderung elastischer Stabkonstruktionen. Die Bestimmung der Zustandsänderung von elastischen Stabkonstruktionen kann im Falle großer Verschiebungen auf die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems zurückgeführt werden. Das nichtlineare Gleichungssystem besteht aus den für die Knotenpunkte aufgeschriebenen Gleichgewichts- und aus den für die Stäbe aufgeschriebenen Kompatibilitätsgleichungen. In Kenntnis der am Stabende auftretenden Beanspruchungen kann die Form eines Stabes als Lösung eines Anfangswertproblems ermittelt werden, das durch ein aus sechs Gleichungen bestehendes Differentialgleichungssystem bestimmt ist.

Точный анализ изменения состояния упругих стержневых систем. Определение изменения состояния упругих стержневых систем в случае больших перемещений возвращается на решение системы нелинейных уравнений. Система нелинейных уравнений составлена из уравнений равновесия узлов и из уравнений совместности стержней. Зная нагрузки на концах стержни деформацию одной стержни получим из решения задачи начального значения определена системой шести дифференциальных уравнений.

SZAKASZOSAN VÁLTAKOZÓ PEREMFELTÉTELŰ KÖRHENGER METSZETERŐI

HEGEDŰS ISTVÁN

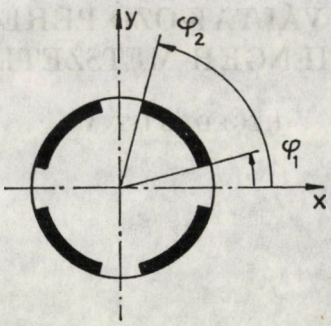
A dolgozat analitikus típusú megoldást mutat be a körszimmetrikus terhelésű, alsó peremén szakaszosan merev alzatra támaszkodó körhengerek metszeterőinek számítására. A megoldás kidolgozásánál nem alkalmazza a szakirodalomban szokásos egyszerűsítéseket, melyek lehetetlenné tennék a támaszkörnyéki metszeterő-eloszlás jellegzetességeinek vizsgálatát, hanem a kényelmetlenebb matematikai kezelhetőségű eredeti peremfeltétel-rendszerrel dolgozik. A szakaszosan váltakozó peremfeltételt első lépésben egységes normálási feltétellel helyettesíti, majd az ennek figyelembevételével számított normált alaprendszereknek hibaminimum-feltétel segítségével megadott lineáris kombinációjával közelíti a keresett megoldást.

1. A probléma ismertetése

Az alsó peremén szakaszonként megtámasztott körszimmetrikus terhelésű körhengerhéj vizsgálata a héjelmélet egy alapfeladat-jellegű problémájának tűnik, a szakirodalomban lelhető megoldások [1—3.] a valóságostól mégis alapvetően eltérő eredményt szolgáltatnak. A legtöbb szerző ugyanis a matematikailag kényelmetlen peremfeltételeket kicsinynek látszó, de nagyon lényeges módosítással úgy közelíti, hogy a megtámasztott és megtámasztatlan peremszakaszokon azonos statikai mennyiségekre lehessen feltételt állítani. Ehhez az ismeretlen megoszlású támaszerőrendszer önkényes felvétele szükséges, a számítás tehát az egyik leglényegesebb sajátosság: a reakcióeloszlás vizsgálatára alkalmatlanná válik.

A dolgozatban ismertetett vizsgálatok célja olyan számítási eljárás kidolgozása volt, amely mentes az említett hiányosságtól, így lehetőséget nyújt a peremfeltételek hatásának egzaktabb figyelembevételére.

Legyen feladatunk egy olyan körszimmetrikus terhelésű körhenger metszeterőinek meghatározása, amelynek alsó pereme az 1. ábrának megfelelő elrendezésű tökéletesen merev támaszrendszerre fekszik úgy, hogy az alátámasztatlan részeken az alkotóirányú peremmozgások szabadon létrejöhetnek. Tételezzük fel az egyszerűbb tárgyalás kedvéért, hogy az alsó peremhez olyan diafragma csatlakozik, mely a síkjába eső eltolódásokon kívül a peremelfordulásokat is meggátolja. Tegyük fel továbbá, hogy a henger a későbbi vizsgálatok szempontjából elegendően hosszú, tehát az alsó és a felső peremekre előírt feltételek egymástól függetlenül kielégíthetők.



1. ábra

2. Az alakváltozások differenciálegyenlet rendszerének általános megoldása

A számítás első lépéseként meg kell határoznunk egy olyan körszimmetrikus metszeterő- és elmozdulásrendszert, amely a körszimmetrikus terhelésű henger egyensúlyi feltételeit és az alakváltozások összeférhetőségének feltételét kielégíti. A számításnak ez a lépése viszonylag közismert, rutin-jellegű feladat ezért nem is foglalkozunk vele részletesen.

A körszimmetrikus metszeterő- és alakváltozásrendszer azonban sérti az alsó peremre előírt szakaszosan váltakozó feltételrendszert. A számítás második lépésében ezért olyan elmozdulás- és metszeterőrendszert kell a körszimmetrikus megoldásrészre halmoznunk, amely nem borítja fel a már kielégített egyensúlyi feltételeket, viszont az alsó perem alakváltozásait és metszeterőit éppen a peremfeltételeknek megfelelően korrigálja. Ennek az elmozdulásrendszernek ki kell elégítenie az alábbi differenciálegyenleteket

$$u_{\xi\xi} + \frac{1-\nu}{2} u_{\eta\eta} + \frac{1+\nu}{2} v_{\xi\eta} - \nu w_{\xi} = 0\,,$$

$$\frac{1+\nu}{2} u_{\xi\eta} + \frac{1-\nu}{2} v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} - w_{\eta} = 0\,, \qquad \text{(1a–c)}$$

$$-\nu u_{\xi} - v_{\eta} + k \cdot \Delta\Delta w + w = 0\,.$$

Az egyenletrendszer a vékony héjak Vlaszov-féle differenciálegyenlet rendszerének homogén alakja, u és v az alkotó- és gyűrűirányú elmozdulások, w a kifelé mutató héjnormális irányába eső elmozdulás és az a hengersugár hányadosa, ξ és η az a-val osztott, dimenziómentes alkotó- és gyűrűirányú felületi koordináták, a lábindexek az ezek szerinti parciális deriválást jelölik, míg — h-val az állandó falvastagságot jelölve —

$$k = \frac{h^2}{12a^2}\,.$$

Kihasználva, hogy a henger hosszú, valamint, hogy az alátámasztási rendszer szimmetrikus alaprajzi elrendezésű (1a—c) megoldását a következő alakban kapjuk:

$$u = u_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{1n} \cdot \psi_{1n} + u_{2n}\chi_{1n} + u_{3n}\psi_{2n} + u_{4n}\chi_{2n}) \cos n\eta,$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} (v_{1n} \cdot \psi_{1n} + v_{2n}\chi_{2n} + v_{3n}\psi_{1n} + v_{4n}\chi_{2n}) \sin n\eta, \qquad (2a—c)$$

$$w = w_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} (w_{1n}\psi_{1n} + w_{2n}\chi_{1n} + w_{3n}\psi_{2n} + w_{4n}\chi_{2n}) \cos n\eta,$$

ahol χ_n és ψ_n lecsengő hullámfüggvények:

$$\begin{aligned} \psi_{1n} &= \sin \beta_{1n}\xi \cdot e^{-\alpha_{1n}\cdot\xi} & \psi_{2n} &= \sin \beta_{2n}\xi \cdot e^{-\alpha_{2n}\cdot\xi} \\ \chi_{1n} &= \cos \beta_{1n}\xi \cdot e^{-\alpha_{1n}\cdot\xi}, & \chi_{2n} &= \cos \beta_{2n}\xi \cdot e^{-\alpha_{1n}\cdot\xi} \end{aligned} \qquad (3)$$

α_n és β_n az (1a—c) karakterisztikus determinánsának kifejtésével adódó

$$k(\lambda^2 - n^2)^4 + (1 - \nu^2)\lambda^4 = 0 \qquad (4)$$

egyenlet komplex gyökeinek valós és képzetes része:

$$\alpha_{1n} = n\left(\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma}{n}\right)^4} + \frac{1}{2}} - \frac{\gamma}{n}\right), \beta_{1n} = n\left(\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma}{n}\right)^4} - \frac{1}{2}} - \frac{\gamma}{n}\right),$$

$$\alpha_{2n} = n\left(\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma}{n}\right)^4} + \frac{1}{2}} + \frac{\gamma}{n}\right), \beta_{2n} = n\left(\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\gamma}{n}\right)^4} - \frac{1}{2}} + \frac{\gamma}{n}\right), \qquad (5)$$

ahol

$$\gamma = \left|\sqrt{\frac{a\sqrt{3(1-\nu^2)}}{4h}}\right|.$$

A (2a) és (2c) kifejezés 0 indexű tagja körszimmetrikus, így az első részmegoldásba beolvasztható, itt tehát nem szükséges szerepeltetni. A további, n-enként 12 együtthatót úgy kell felvennünk, hogy egyrészt az alakváltozáskomponensek közt az összeférhetőség feltételei teljesüljenek, másrészt az alsó peremen állított feltételek a teljes alakváltozás- és metszeterő-rendszerre vonatkozóan kielégüljenek.

Helyettesítsük a (2a—c) alakváltozásfüggvényeket az (1a) és (1b) egyenletekbe, és írjuk elő, hogy a χ és ψ függvények együtthatói tűnjenek el. Ez $\chi_1, \chi_2, \psi_1, \psi_2$ függvényekre két-két feltételt, összesen tehát n-enként nyolc

feltételt jelent. Az (1c) egyenletben szereplő együtthatók eltűnése már nem ad új, független feltételt, ezért a hiányzó, n-enként négy független egyenletet a peremfeltételek szolgáltatják. Ezek közül három előírható úgy, hogy minden n-re vonatkozóan megköveteljük a peremfeltételben szereplő elmozdulás-komponens eltűnését:

$$\begin{aligned} \xi = 0\text{-nál} \quad & v = 0, && v_{2n} + v_{4n} = 0, \\ & w = 0, && w_{2n} + w_{4n} = 0, \\ & w_\xi = 0, && \beta_{1n} w_{1n} - \alpha_{1n} w_{2n} + \beta_{2n} w_{3n} - \alpha_{1n} w_{4n} = 0 . \end{aligned} \tag{6}$$

3. A szakaszosan váltakozó peremfeltétel helyettesítése

A perem-megtámasztás szakaszos volta miatt a hiányzó, egy-egy feltételi egyenlet nem fogalmazható meg az előbbiek mintájára, mert az alkotóirányú elmozdulás nem az egész peremen, csak a megtámasztott részen zérus, ill. csak a megtámasztatlan részen zérus a peremen kilépő normálerő. Matematikailag tehát a feladat jellemző sajátsága, hogy a komponens függvények együtthatóinak meghatározására szolgáló feltételrendszer nem esik szét n-enként 12 ismeretlenes egyenletrendszerekre, hanem — N-nel jelölve n különböző értékeinek számát — egy $12 \times N$ ismeretlenes egyenletrendszer megoldása szükséges az együtthatók kiszámításához.

A módszer alkalmazásakor emiatt előre fel kell venni a megkívánt pontosságot biztosító tagszámot, nincsen lehetőség az eredmények fokozatos pontosítására.

Az alábbi kétlépéses számítással elkerülhetjük a $12 \times N$ méretű egyenletrendszer felállítását és megoldását, N db 12 ismeretlenes, valamint egyetlen N ismeretlenes egyenletrendszer megoldására visszavezetve azt.

Ehhez az eljáráshoz azt a tényt használjuk ki, hogy a 8 kompatibilitási feltétel és a harmonikusonként állítható 3 peremfeltétel minden n-re 11 homogén lineárisan független egyenletet szolgáltat 12 együttható meghatározásához, vagyis a harmonikusonkénti 12 együtthatóból álló értékrendszer $\hat{u}_{1,n}, \ldots \hat{w}_{4,n}$ mindössze egy konstans szorzó erejéig határozatlan. Ha tehát minden harmonikushoz egy önkényesen választott inhomogén egyenlettel egy normálási feltételt állítunk, a feltételrendszer minden n-re határozottá válik, és egy-egy kompatibilis, három peremfeltételt kielégítő és az önkényes feltétel szerint normált alakváltozásrendszert jelöl ki, melyet 12 ismeretlenes egyenletrendszer megoldásával meg is tudunk határozni.

A normált alakváltozásrendszereket alaprendszernek tekintve a probléma megoldását adó alakváltozásrendszert az alaprendszerek olyan lineáris kombinációjaként állíthatjuk elő, melynek feltételi egyenletrendszerét a még kielégítetlen peremfeltétel szolgáltatja.

Legyen az önkényes normálási feltétel az, hogy a peremmenti $\hat{u}_n$ elmozdulásfüggvények amplitúdója minden n-re egységnyi. Az így határozottá váló feltételrendszer az n-edik harmonikusra vonatkozóan a 148. oldalon látható, ahol

$$\mathbf{B}_{1n} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \alpha_{1n} & \beta_{1n} \\ -\beta_{1n} & \alpha_{1n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{2n} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \alpha_{2n} & \beta_{2n} \\ -\beta_{2n} & \alpha_{2n} \end{bmatrix}.$$

Jelöljük az $\hat{u}_{1n} \ldots \hat{w}_{4n}$ alaprendszer együtthatóját a megoldást adó lineáris kombinációban d_n-nel.

Az eredő alakváltozásrendszer u elmozduláskomponense

$$u = u_0(\xi) + \sum_n d_n(\hat{u}_{1n}\psi_{1n} + \hat{u}_{2n}\chi_{1n} + \hat{u}_{3n}\psi_{2n} + \hat{u}_{4n}\chi_{2n}) \cos n\eta$$

Az elmozdulásfüggvény, ill az első deriváltak peremértéke:

$$u(\xi = 0) = u_0 + \sum_n d_n(\hat{u}_{2n} + \hat{u}_{4n}) \cos n\eta = u_0 + \sum_n d_n \cos n\eta,$$

$$u(\xi = 0) = u_0' + \sum_n d_n n(\beta_{1n}\hat{u}_{1n} - \alpha_{1n}\hat{u}_{2n} + \beta_{2n}\hat{u}_{3n} + \alpha_{2n}\hat{u}_{4n}) \cos n\eta\,,$$

$$u(\xi = 0) = -\sum_n d_n \cdot n \cdot \sin \eta\,.$$

Nevezzük a megtámasztott peremszakaszok összességét s_1 tartománynak, az s_1-gyel komplemens, megtámasztás nélküli szakaszok összességét s_2-nek.

Az s_1 tartományon a hiányzó $u(\xi = 0) = 0$ peremfeltétel a nem körszimmetrikus elmozdulásrendszerre vonatkozóan egyenértékűen helyettesíthető az

$$u(\xi = 0)_\eta = 0 \tag{7a}$$

feltétellel, mert a két feltétel közti különbség mindössze egy η-tól nem függő, tehát körszimmetrikus elmozduláskomponens.

Az s_2 tartomány hiányzó peremfeltételének fizikai tartalma: a peremen kilépő alkotóirányú normálerő nagysága zérus. A normálerővel arányos mennyiségekkel a peremfeltételi egyenlet:

$$u(\xi = 0)_\xi + u_0' = 0. \tag{7b}$$

A képletben u_0' a körszimmetrikus alkotóirányú elmozdulásfüggvény első (ξ szerinti) deriváltjának peremértékét jelöli.

$$
\begin{bmatrix}
\mathbf{B}_{1n}^2 - \frac{1-\nu}{2}\mathbf{E} & -\frac{1+\nu}{2}\mathbf{B}_{1n} & \frac{\nu}{n}B_{1n} & & & & & & & & & \\
\frac{1+\nu}{2}\mathbf{B}_{1n} & \frac{1-\nu}{2}\mathbf{B}_{1n} - \mathbf{E} & \frac{1}{n}\mathbf{E} & & & & & & & & & \\
 & & & \mathbf{B}_{2n}^2 - \frac{1-\nu}{2}\mathbf{E} & -\frac{1+\nu}{2}\mathbf{B}_{2n} & \frac{\nu}{n}\mathbf{B}_{2n} & & & & & & \\
 & & & \frac{1+\nu}{2}\mathbf{B}_{2n} & \frac{1-\nu}{2}\mathbf{B}_{2n}^2 - \mathbf{E} & \frac{1}{n}\mathbf{E} & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{1n} & -\alpha_{1n} & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{2n} & -\alpha_{2n} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\hat{u}_{1n} \\ \hat{u}_{2n} \\ \hat{v}_{1n} \\ \hat{v}_{2n} \\ \hat{w}_{1n} \\ \hat{w}_{2n} \\ \hat{u}_{3n} \\ \hat{u}_{4n} \\ \hat{v}_{3n} \\ \hat{v}_{4n} \\ \hat{w}_{3n} \\ \hat{w}_{4n}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1
\end{bmatrix}
$$

4. A szakaszosan váltakozó peremfeltétel feltételi egyenletrendszere

A (7a) és (7b) a következőképpen használható az N számú alaprendszer együtthatóinak határozottá tételére. A perem megfelelően választott N számú pontjában, melyek közül N_1 az s_1 peremszakaszon, N_2 az s_2 szakaszon fekszik, előírjuk a peremszakasznak megfelelő (7a) vagy (7b) peremfeltétel pontos kielégülését. A peremderiváltak helyettesítési értékei N számú határozatlan konstanst: $d_{n1}, \ldots, d_{nN}$ értékeit tartalmazzák, az N különböző pontban teljesülendő peremfeltételi követelmény pedig éppen N db lineáris egyenletet szolgáltat a határozatlan konstansok kiszámításához. Az eljárás hibája az, hogy a pontok tetszőleges kijelölése esetében nincsen garanciánk az egyenletek lineáris függetlenségére, emellett a végeredményül adódó $d_{n1}, \ldots d_{nN}$ értékek nagysága erősen függ a kijelölt pontok elrendezésétől. Az eljárás numerikusan instabil, mert általában igen gyengén meghatározott egyenletrendszerre vezet. Célszerűbb ezért stabilabb, megbízhatóbb közelítést adó módszert alkalmazni. Ilyen módszer vezethető le az egyenletes közelítés elvéből az alábbi módon.

A (7a) és (7b) peremfeltétel egyetlen integrálegyenlettel is megfogalmazható. A matematikailag pontos helyettesítő peremfeltétel:

$$H = \int_{S_1} ||u(\xi = 0)_\eta|| ds + \int_{S_2} ||u(\xi = 0)_\xi + u_0'|| ds = 0, \tag{8a}$$

azaz a peremfeltétel kielégületlenségének normája a perem mentén végigintegrálva zérust kell, hogy adjon. Véges számú komponens-függvénnyel ez a peremfeltétel természetesen nem teljesíthető, előírhatjuk viszont, hogy a hibaintegrál minimumát vegye fel. A normát a későbbiek egyszerűsítése érdekében a hibanégyzettel reprezentálva (8a) helyett a

$$H = \int_{S_1} [u(\xi = 0)_\eta]^2 ds + \int_{S_2} [u(\xi = 0)_\xi + u_0']^2 ds = \text{minimum !} \tag{8b}$$

egyenletes közelítést biztosító peremfeltétel állítható, melyből a d_n együtthatók a

$$\frac{\partial H}{\partial d_{ni}} = 2 \left\{ \int_{S_1} u(\xi = 0)_\eta \frac{\partial}{\partial d_{ni}} u(\xi = 0)_\eta ds + \int_{S_2} [u(\xi = 0)_\xi + u_0'] \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial}{\partial d_{ni}} u(\xi = 0)_\xi ds \right\} = 0$$

inhomogén lineáris egyenletrendszerrel határozhatók meg.

Az 1. ábra szerinti támaszelrendezés két egymásra merőleges szimmetriatengellyel rendelkezik, ezért n csak páros szám lehet. A peremértéket egyszerűbben $u(\xi = 0)_\xi = \bar{u}_\xi$, $u(\xi = 0)_\eta = \bar{u}_\eta$ jelölve:

$$\bar{u}_\xi = u_0' + \sum_{n=2}^{4,6,\ldots} d_n(\beta_{1n}\hat{u}_{1n} - \alpha_{1n}\hat{u}_{2n} + \beta_{2n}\hat{u}_{3n} - \alpha_{2n}\hat{u}_{4n}) \cos n\eta ,$$

illetve az alaprendszerek normálási feltételét kihasználva,

$$\bar{u}_\eta = -\sum_{n=2}^{4,6,\ldots} d_n n(\hat{u}_{2n} + \hat{u}_{4n}) \sin n\eta = -\sum_{n=2}^{4,6,\ldots} d_n \cdot n \cdot \sin n\eta .$$

Legyen a továbbiak egyszerűsítése érdekében $u_0' = 1$. A minimalizálandó hibaintegrál a szimmetriák figyelembevételével

$$H = \int_0^{\pi/2} \bar{u}_\xi^2 \, d\eta - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \bar{u}_\xi^2 \, d\eta + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \bar{u}_\eta^2 \, d\eta + 2\int_0^{\pi/2} \hat{u}_\xi \, d\eta - 2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \bar{u}_\xi \, d\eta = \text{minimum !}$$

Vezessük be az alábbi jelölést:

$$f_k = \frac{k}{n}(\beta_{1k}\hat{u}_{1k} - \alpha_{1k}\hat{u}_{2k} + \beta_{2k}\hat{u}_{3k} - \alpha_{2k}\hat{u}_{4k}), \qquad (k = 2, 4, \ldots, 2N) .$$

$$\frac{\partial H}{\partial d_k} = 2\left\{ f_k \cdot \sum_{u=2,4,\ldots}^{2N} d_n f_n \cdot \left[\int_0^{\pi} \cos n\eta \cdot \cos k\eta \, d\eta - \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \cos n\eta \cdot \cos k\eta \, d\eta \right] + \right.$$

$$\left. + k \sum_{n=2,4,\ldots}^{2N} d_n n \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \sin n\eta \cdot \sin k\eta \, d\eta \right\} +$$

$$+ 2\left\{ f_k \left[\int_0^{\pi} \cos k\eta \, d\eta - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos k\eta \, d\eta \right] \right\} = 0 \quad (k = 1, 4, \ldots, 2N) .$$

Az egyenletrendszert a következő alakban adhatjuk meg:

$$[e_{k,n}] \cdot [d_n] = [e_{k,o}] \qquad (k \neq n = 2, 4, \ldots, 2N) .$$

$[e_{k,n}]$ együtthatómátrix szimmetrikus, mert k és n szerepe felcserélhető:

$$e_{k,n} = -f_k \cdot f_n \left[\frac{\sin(k+n)\varphi_2 - \sin(k+n)\varphi_1}{k+n} + \frac{\sin(k-n)\varphi_2 - \sin(k-n)\varphi_1}{k-n} \right] -$$

$$- k \cdot n \left[\frac{\sin(k+n)\varphi_2 - \sin(k+n)\varphi_1}{k+n} - \frac{\sin(k-n)\varphi_2 - \sin(k-n)\varphi_1}{k-n} \right], \text{ ha } k \neq n$$

$$e_{k,k} = f_k^2 \left[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\sin 2k\varphi_2 - \sin 2k\varphi_1}{2k} \right] + k^2 \left[\varphi_2 - \varphi_1 - \frac{\sin 2k\varphi_2 - \sin 2k\varphi_1}{2k} \right],$$

$$e_{k,o} = \frac{2 f_k}{k}(\sin k\varphi_2 - \sin k\varphi_1).$$

Az egyenletrendszer megoldása után a közelítő alakváltozásrendszer, ill. az erőjáték az ismert összefüggések alapján határozható meg.

IRODALOM

1. FLÜGGE: Stresses in Shells 2. Ed. Springer 1973
2. POZZATI: Costruzioni in Cemento Armato, TCL. Cementi, Bologna 1967
3. RÜDIGER—URBAN: Kreiszylinderschalen. Leipzig 1955

Intermittently changing boundary conditions of the cross-section of a cylinder. Analytical type solution is presented for the calculation of the cross section of cylinders under circular symmetrical load and supported at the bottom edge by an intermittently rigid base. When elaborating the solution the method does not use the simplifications employed in literature which would make studies on the characteristics of the section force distribution in the vicinity of the support impossible, but makes use of the original boundary condition system much more inconvenient, however, from mathematical treatment aspects. In the first step the intermittently changing boundary condition is substituted by a uniform normalization condition, then the solution sought for is approximated by the linear combination of the normalized basic systems thus calculated, as given by their minimum error condition.

Schnittkräfte des Kreiszylinders mit abschnittsweise veränderlichen Randbedingungen. Der Aufsatz führt eine analytische Lösung für die Berechnung der Schnittkräfte von symmetrisch belasteten, am unteren Rand abschnittsweise auf starrer Unterlage ruhenden Kreiszylinder vor. Bei dieser Lösung verwendet der Autor nicht die in der Fachliteratur üblichen Vereinfachungen, da diese die Untersuchung der Charakteristiken der Verteilung der Schnittkräfte in der Umgebung der Stützen verunmöglichen würden, sondern gebraucht das mathematisch schwieriger zu behandelnde ursprüngliche Randbedingungssystem. Im ersten Schritt ersetzt er die abschnittsweise wechselnde Randbedingung durch eine einheitliche Normierungsbedingung und berechnet dann unter Berücksichtigung dieser die Fehlerminimum-Bedingung der normierten Grundsysteme und nähert die gesuchte Lösung mit Hilfe der gegebenen linearen Kombination an.

Усилия круглого цилиндра при периодически переменных граничных условиях. В работе приведено решение аналитического типа для расчёта усилий осесимметрично нагружаемого круглого цилиндра, опёртого по нижней грани на периодически жёстком основании. При разработке решения не применяются упрощения, обычные в литературе но которые в данном случае препятствовали бы исследованию характеристик распределения усилий в зоне упора. Вместо того метод пользуется основной системой граничных условий, что является математически более трудоёмким. Периодически переменное граничное условие заменяется в первом шаге условием единообразного нормирования а потом с помощью условия минимума погрешностей решение определяется как линейное сочетание полученных таким образом нормированных основных систем.

ZAVARTALAN ÉS ZAVART ÁLLAPOTÚ FINOM HOMOK NYÍRÓSZILÁRDSÁGÁNAK ÖSSZEHASONLÍTÓ VIZSGÁLATA

HORVÁTH GYÖRGY*

A tanulmány a zavartalan és zavart állapotú finom homok nyírószilárdságával foglalkozik a fázisos összetétel függvényében. A közvetlen összehasonlító vizsgálatokon felül bemutatja a zavartalan és zavart állapotú minták főfeszültségei, alak- és térfogatváltozásai közötti különbséget, majd részletesen tárgyalja ezek fizikai okait. Meghatározza — tengelyszimmetrikus feszültségállapot esetében — a különböző feszültségpályák mentén a törési mechanizmus során kialakuló kritikus feszültség-, alak- és térfogatváltozásokat, és a különböző törési típusokat. Végül megállapítja a zavartalan szerkezetű minták eredeti feszültségállapotát, majd rámutat arra, hogy a zavartalan homokok nyírószilárdsága, törési mechanizmusa csak a ténylegesen működő feszültségek függvényében határozható meg.

1. Bevezetés

A homok nyírószilárdságával, a törés során bekövetkező alak- és térfogatváltozásokkal a talajmechanika régebbi és új irodalmában egyaránt számos tanulmány foglalkozik. Azt is mondhatnánk, hogy a mindennapos gyakorlat szempontjából a kérdés elintézettnek tekinthető. Általában az a szokás, hogy a vizsgálatokat vagy száraz, vagy vízzel telített zavart talajmintával végzik. Vannak azonban esetek, amikor e vizsgálatok nem elégségesek a természetben előforduló háromfázisú állapotban levő zavartalan homokok nyírószilárdságának meghatározásához.

A szemcsés talajok általános nyírószilárdságának meghatározása, vizsgálata, a fázisos összetétel függvényében már évek óta folyik a Budapesti Műszaki Egyetem Geotechnikai Tanszékén egy átfogó kutatási feladat keretében. Ez a tanulmány az említett vizsgálat újabb eredményeit mutatja be.

2. A kísérleti talaj és a kísérleti berendezés bemutatása

A kísérletek egy iszapmentes finom homok zavartalan és ugyanolyan fázisos összetételre beépített zavart mintáival folytak. A homok fázisos összetétele:

* Horváth György, 2092 Budakeszi, Arany János u. 9., III/1.

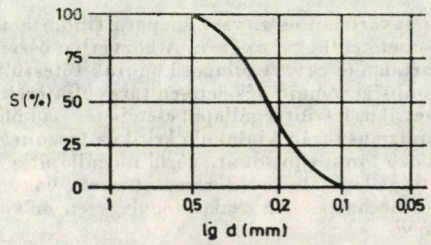
$$s = 52 - 54\%$$

$$v = 5{,}5 - 7{,}2\%$$

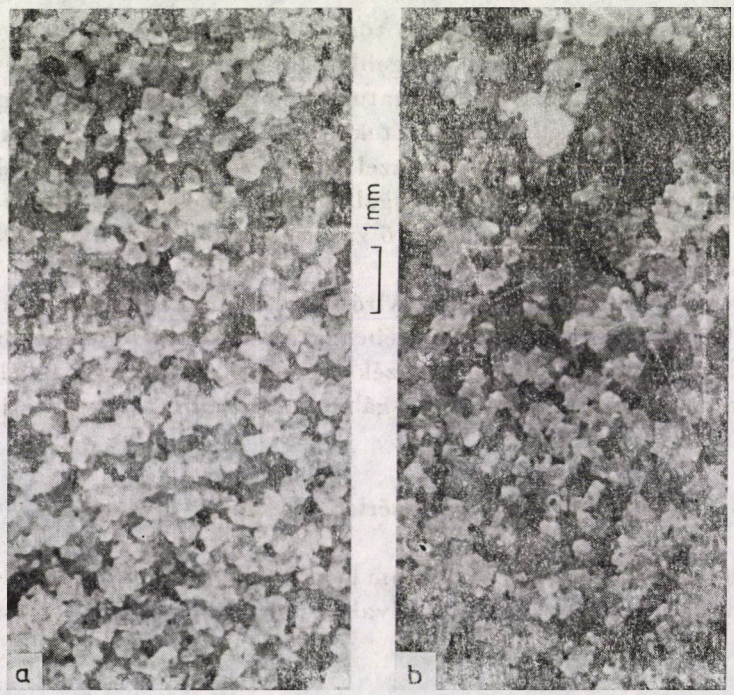
$$l = 38{,}8 - 42{,}5\%,$$

szemeloszlási görbéje az 1. ábrán látható.

A közvetlen összehasonlítás céljából mikroszkópos felvételek készültek ugyanazon homok zavartalan és zavart szerkezetéről. (2. ábra.) A fényképeken látható, hogy a homoktalaj szemcséi zömökek és közel egyenlő nagyságúak.

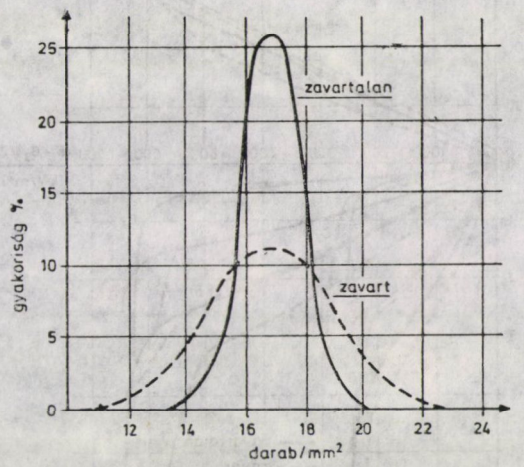


1. ábra. Szemeloszlási görbe



2. ábra a — zavartalan, b — zavart homok mikroszkópos felvétele

A zavartalan szerkezetben a szemcsék szabályos négyzethálóban helyezkednek el, egymástól azonos távolságban. A zavart mintában szabályos négyzethálós szerkezet nem alakult ki, az összeállt szemcsecsoportok mellett nagyobb hézagok is létrejöttek. A zavartalan és zavart homokok közti különbségek számszerű értékeit a 3. ábra mutatja. Az ezen szereplő mérőszámok a fényképek alapján az egységnyi felületre jutó szemcsék megszámlálásával adódtak, és kellőképpen érzékeltetik a zavartalan és zavart homokok szerkezete közti különbséget.



3. ábra. Zavartalan és zavart homokok szemcseszerkezetének eloszlási diagramja

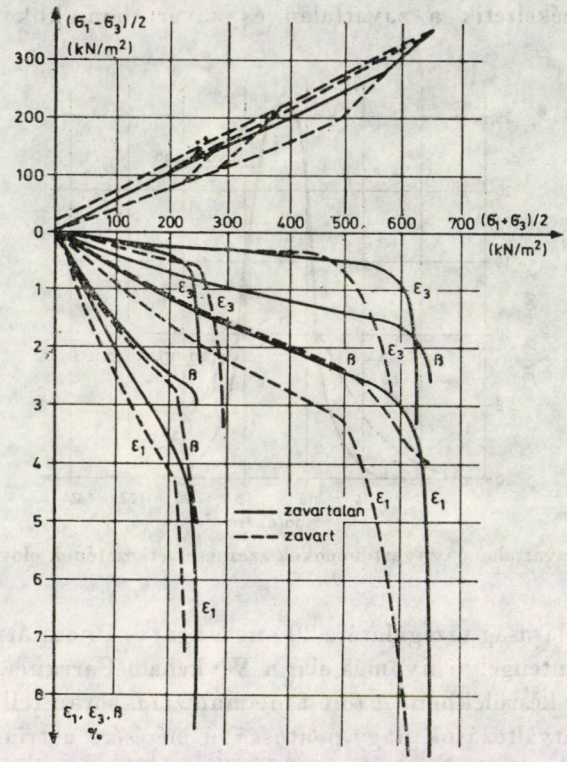
A nyírószilárdság vizsgálatára 20 cm magas és 10 cm átmérőjű mintákat vetettünk háromtengelyű nyomás alá, a Wykeham Farrance Eng. Ltd (England) WF 11001 készülékben. A törési mechanizmus során fellépő feszültségek, alak- és térfogatváltozások nagy pontosságú mérésére a triaxiális készüléket jelentősen átalakítottuk. Módosított alakjában a készülék lehetővé teszi, hogy tengelyszimmetrikus esetben (σ_1; $\sigma_2 = \sigma_3$) tetszőleges feszültségpályák működtetése esetében mérjük a térfogatváltozást, a függőleges és a sugárirányú elmozdulásokat. A nyírószilárdsági vizsgálatok során a feszültségek felhordása, vagy $v =$ konst alakváltozási sebességgel, vagy $\Delta\sigma_1 =$ konst függőleges terhelés növekménnyel történtek.

3. A törési mechanizmus során létrejött feszültségek, alak- és térfogatváltozások vizsgálata

A kísérletek során vizsgáltuk és meghatároztuk a különböző terhelések mellett létrejött feszültségpályákat, alak- és térfogatváltozásokat, majd ezek nyírószilárdságot befolyásoló hatásait.

A törési mechanizmus során a zavartalan és zavart homokminták több jellemző kritikus állapoton mennek át és jutnak el a teljes törésig.

A törési folyamat során kialakuló kritikus állapotokat, a gyakorlatban is a legtöbbször előforduló feszültségpálya mellett elvégzett kísérletek eredményein keresztül a 4. ábra mutatja be.



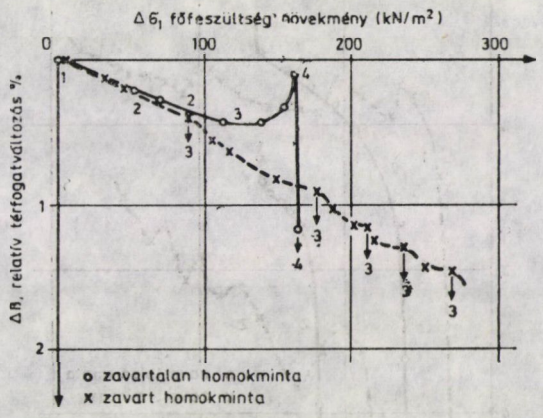
4. ábra. Feszültségpályák, alak- és térfogatváltozások

Nyugalmi feszültségállapotban levő mintát, a függőleges σ_1 főfeszültség folyamatos növelésével a törésig terheltük. Az ábra a teljes törési mechanizmust, a zavartalan és zavart homokminták feszültségpályáit $(p; q)$, a kialakult függőleges (ε_1) és sugárirányú (ε_3) alakváltozásokat, valamint a fajlagos térfogatváltozásokat (β) mutatja.

3.1 A térfogatváltozások vizsgálata

A 4. ábrán bemutatott kísérletek alakváltozásait az 5. ábra felnagyítva mutatja. A zavartalan és zavart homokminták alakváltozásainak jobb összehasonlítása miatt, csak a nyugalmi K_0 feszültségállapotból kiinduló törési

folyamat van ábrázolva, $\Delta\sigma_1$ függőleges főfeszültségnövekmény és a $\Delta\beta$ relatív térfogatváltozás függvényében. Az ábrán nem ábrázolt $\overline{0} - \overline{1}$ szakasz a K_0 feszültségállapotot jelenti. ($\sigma_3 = 290$ kN/m^2). Itt a térfogatváltozás tömörödés, mely a feszültséggel arányosan növekszik. A zavartalan mintát — a folytonos vonalat — vizsgálva látható, hogy tömörödés van a $\Delta\sigma_1$ főfeszültség ~ 90 kN/m^2 értékéig ($\overline{2}$. pont). A fajlagos térfogatváltozás az $\overline{1} - \overline{2}$ szakaszon továbbra is lineáris tömörödés. A $\overline{2}$. ponttól kezdve a σ_1 növelésekor a minta



5. ábra. Zavartalan és zavart homokok térfogatváltozása a 4. ábrán szereplő feszültségpályák esetén

belsejében fellazulások kezdődnek. Zavartalan, szabályos szerkezetű minta esetében egyedi csúszólap kezd kialakulni. Maximális fajlagos térfogatváltozás a $\overline{3}$. pontnál van. Innen kezdve az alakváltozások jelentősen megnőnek, a minta teljesen fellazul, majd tönkremegy. Zavartalan minta esetén a törési folyamat során elért legnagyobb függőleges főfeszültséget tekintjük a törőfeszültségnek ($\overline{4}$. pont).

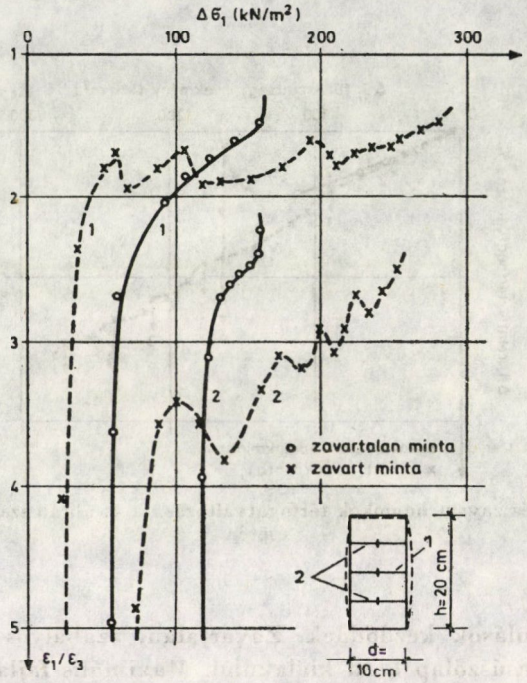
A zavart homok — szakadozott vonal — a törési mechanizmus során folyamatos fellazuláson és tömörödésen keresztül jut el a törési állapotig. Az ábrán feltüntetett kis nyilak, a csúszólapsereg kialakulását, a helyi törések továbbterjedését ábrázolják.

Zavartalan és zavart homokok törési mechanizmusa a tönkremenetel formájában különbözik egymástól. A zavartalan talajmintákon általában a törés egy határozott sík csúszólap mentén alakul ki, zavart homokoknál számtalan csúszólap jön létre ennél a fázisos összetételnél.

A különbség valószínű oka az, hogy a zavartalan minta ép, szabályos szerkezetű és homogénebb, mint a zavart minta, és így az egyetlen sík csúszólap kialakulását nem gátolják tömörebb és lazább gyengített helyek.

3.2 Az alakváltozások vizsgálata

A függőleges ε_1 és a vízszintes ε_3 alakváltozásoknál is — hasonlóan a térfogatváltozási görbékhez —, kialakulnak a kétfajta törési típus folyamatára jellemző kritikus állapotok. Az alakváltozások (különösen a sugárirányúak) alakulása a zavartalan mintán folyamatos, a zavart talaj esetén a tönkremenetel szakaszos.



6. ábra. Törési folyamat a főfeszültségnövekmény és a Poisson-szám függvényében

A 6. ábra a zavartalan és zavart mintán létrejött nyírási folyamatot, a kétfajta törési típus kialakulását érzékelteti a minta teljes magasságában. A vízszintes tengelyen a K_0 állapotból kiinduló függőleges főfeszültségnövekmény ($\Delta\sigma_1$) van. A függőleges tengelyen a hosszirányú fajlagos alakváltozásnak a keresztirányúhoz való viszonya, a rugalmasságtani elmélet Poisson-féle száma ($m = \varepsilon_1/\varepsilon_3$) szerepel.

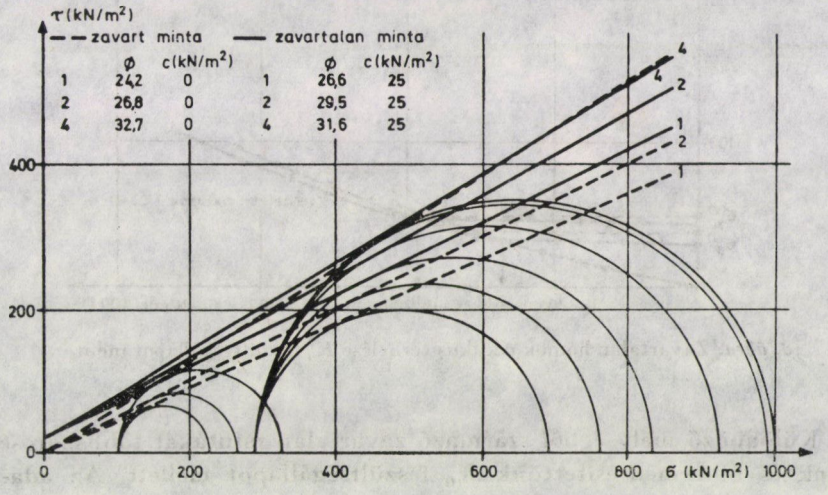
Az ábrából meghatározható az a függőleges feszültségnövekmény, amely a törési folyamat kezdetét, az ε_3 alakváltozások megnövekedését — jelenti. Látható, hogy a nyírási folyamat megindulásáig, a zavartalan minta több feszültséget tud felvenni, — közel kétszer annyit — mint a zavart. Ennek valószínű oka a minták homogenitásában rejlik.

A folytonos vonalú zavartalan minta folyamatos görbéi egyedi csúszólap kialakulását sejtetik. Ez először a minta belsejében, középen jön létre, majd

fokozatosan növekedve az egész mintára kiterjed. A 2. jelű görbe ezt a sík csúszólap kiterjedését ábrázolja a minta magasságának függvényében. A szakadozott vonallal ábrázolt zavart talajok állandó tömörödéssel és fellazulással jutnak el a törés állapotáig. A számtalan csúszólapsereg tovaterjedését, a nyírási zóna mintán belüli kiterjedését a 2. görbe érzékelteti.

3.3 Kritikus állapotok vizsgálata a főfeszültségek függvényében

A homokminták a törési mechanizmus során több jellemző kritikus alak- és térfogatváltozási állapoton mennek át, és jutnak el a teljes tönkremenetelig. A kritikus alak- és térfogatváltozás ($\overline{1}$. — $\overline{2}$. — $\overline{3}$. — $\overline{4}$. jelű pontok) a működ-



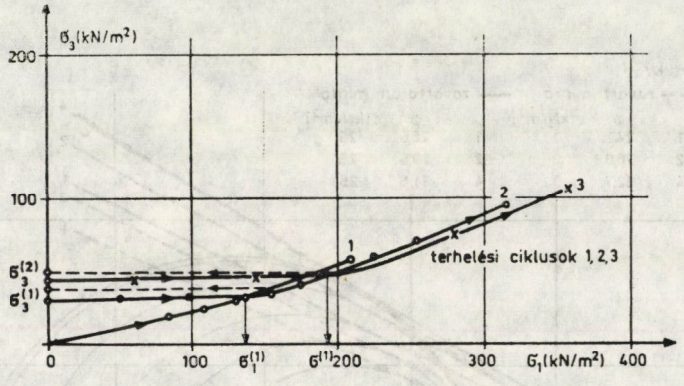
7. ábra. Kritikus feszültségállapotok a σ — τ koordináta-rendszerben

tetett főfeszültségek hatására jöttek létre, tehát az itt kialakult főfeszültségek egyúttal e pontok kritikus feszültségállapotai is. A 7. ábra a kritikus feszültségállapothoz tartozó ($\overline{1}$ — $\overline{2}$ — $\overline{4}$) Mohr köröket és Coulomb egyeneseket ábrázolja, feltüntetve a megfelelő Φ és c nyírószilárdsági paramétereket is.

A zavartalan állapotú talajoknál jelentős kohéziót kaptunk. Ez a kohézió nem valószínű, hogy a 4 ÷ 5%-os víztartalmú homokminta ún. „látszólagos" kohéziója, hiszen akkor az ugyanolyan fázisos összetétellel rendelkező zavart homokminták esetében is jelentkezett volna. Ez a „kötés" valószínűleg a zavartalan talajok szemcséi között fennálló szerkezet, előélet következménye.

4. Zavartalan homokok előélete, maradó feszültségállapotának vizsgálata

Az előzőekben ismertetett nyírószilárdsági kísérletek számos jelensége: a zavartalan állapotú homokok feszültségpályáinak kezdeti elhajlása, a kohézió, a tönkremenetel formája és további eltérések is, a zavartalan homokminták irányítottságára, előéletére utalnak. Ahhoz, hogy a nyírószilárdságot egyáltalán meghatározhassuk, feltétlenül szükséges az előélet, a mintában maradó feszültségállapot ismerete. Ezen „ősfeszültségállapotnak" meghatározására kísérleteket végeztünk.

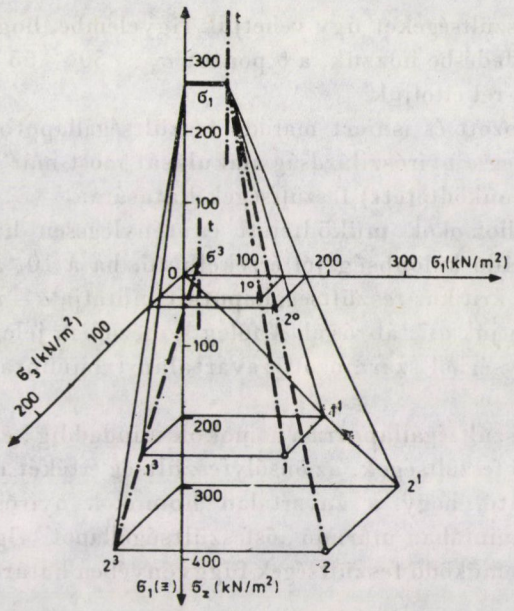


8. ábra. Zavartalan homok ciklikus terhelése K_0 feszültségállapot mentén

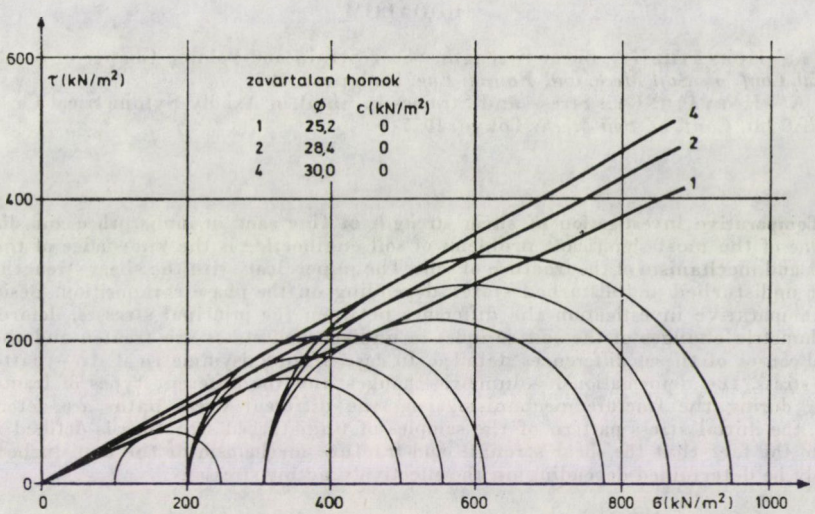
Különböző mélységből származó zavartalan mintákat többszörösen terheltünk és tehermentesítettünk K_0 feszültségállapot mellett. Az oda-vissza terhelések során azt tapasztaltuk, hogy a zavartalan homokok feszültségeinek alakulása eltért a már ismert, és a zavartalan talajmintáinknál is mért értékektől. A zavartalan talajminták függőleges terhelése és tehermentesítése után mindig jelentős σ_3 oldalirányú főfeszültség maradt. Ez a σ_3 feszültség csak akkor alakulhat ki, ha a homok nem „felejtette el" teljes mértékben a mintavétel előtti — az önsúlyból és az esetleges kötésből származó — feszültségállapotát.

A 8. ábra a zavartalan homokminta főfeszültségeinek alakulását ábrázolja a K_0 feszültségállapot mentén végzett ciklikus terhelések hatására.

Az eredeti feszültségállapotból, a mintavétel utáni maradó feszültségek meghatározását a 9. ábra mutatja. A függőleges tengelyen az a σ_z önsúlyfeszültség van, amely a nyugalmi nyomás állapotát létrehozta. A két vízszintes tengelyen, a ciklikus terhelések során működtetett főfeszültségek (σ_1; σ_3) vannak ábrázolva. A kísérlet első — K_0 szerinti terhelés feszültségállapotát — az 1 pont, a tehermentesítés utáni maradó feszültségeket az 1° pont mutatja.



9. ábra. Maradó főfeszültségek ábrázolása térbeli koordinátarendszerben



10. ábra. Zavartalan homokminta kritikus feszültségállapotai $\sigma - \tau$ koordinátarendszerben

A második terhelési ciklust a 2—2° pontok jelzik. Ha feltételezzük, hogy a homoktalaj nyugalmi nyomásának feszültségállapota csak az önsúly hatására alakult ki, akkor az ábrán σ_1 és σ_3-mal jelzett főfeszültségek a 15,6 m mélységből származott zavartalan homokminta megmaradt feszültségállapotát jelentik. Tehát ezzel a maradó feszültséggel rendelkezett a vizsgált talajminta.

A kezdeti feszültségeket úgy vehetjük figyelembe, hogy az ábrán a t-vel jelölt tengelyeket fedésbe hozzuk, a 0 pontot $\sigma_1 \sim 50 \div 55$ kN/m²-rel és $\sigma_3 \sim \sim 20 \div 25$ kN/m²-rel eltoljuk.

A meghatározott és ismert maradó feszültségállapotok figyelembevételével vizsgáljuk meg a nyírószilárdság alakulását most már a ténylegesen működő (maradó + működtetett) feszültségek hatására.

Zavartalan homokok működtetett és ténylegesen ható feszültségállapotai között fennálló különbség jól érzékelhető, ha a 10. ábrát, — amely a zavartalan minta kritikus feszültségállapotait mutatja $\sigma - \tau$ koordináta-rendszerben — összevetjük a 7. ábrával. A főleg kohézióban jelentkező eltérés oka a 15 ÷ 20 m mélységből származott zavartalan talajminták maradó feszültségállapota.

Az eredeti feszültségállapotra a homokok mindaddig „emlékeznek", míg a működtetett külső feszültségek, az önsúlyfeszültség értékét meg nem haladják.

Megállapítható, hogy a zavartalan homokok nyírószilárdsága, törési mechanizmusa, a mintában maradó „ősfeszültségállapot" figyelembevételével, csak a ténylegesen működő feszültségek függvényében határozható meg.

IRODALOM

KÉZDI, Á.—HORVÁTH, GY.: Shear Strength, Shear Strain and Volume Change of Sand. *Proc. 5th Conf. on Soil Mech. and Found. Eng.* Budapest, 1976

KÉZDI, Á.—HORVÁTH, GY.: Stress and Straines in Sand in Axially Symmetrical Case, *Proc. IX. Int. Conf. on Soil Mech.* Tokyo, 1977

Comparative investigation of shear strength of fine sand in undisturbed and disturbed state. One of the most significant problems of soil engineering is the knowledge of the shear strength and mechanism of the fracture of soils. The paper deals with the shear strength of fine sands in undisturbed and disturbed states, depending on the phase composition. Besides the direct comparative investigation the difference between the principal stresses, deformations and volumetric changes of the soil samples in undisturbed states are treated and then, the physical causes of theses differences detailed. In case of an axisymmetrical stress pattern the critical stress, the deformations, volumetric changes and the different types of fracture developing during the fracture mechanism along the different stress paths are determined. Finally, the initial stress pattern of the samples of undisturbed structure is defined and referred to the fact that the shear strength and fracture mechanism of the undisturbed sands may only be determined depending on the effectively acting stresses.

Vergleichsuntersuchung der Schubfestigkeit von im ungestörten und im gestörten Zustand befindlichen Feinsand. Eine der wichtigsten Aufgaben der Geotechnik ist die Kenntnis der Schubfestigkeit und des Bruchmechanismus der Böden. Die Abhandlung erörtert die Schubfestigkeit des im ungestörten und im gestörten Zustand befindlichen Feinsandes in Abhängigkeit von der Phasenzusammensetzung. Außer den unmittelbaren Vergleichsuntersuchungen werden die Unterschiede zwischen den Hauptspannungen, Verformungs- und Volumenänderungen der im ungestörten und im gestörten Zustand befindlichen Bodenproben dargestellt und deren physische Ursachen ausführlich behandelt. Im Fall des achsensymmetrischen Spannungszustandes werden die sich im Laufe des Bruchmechanismus den Spannungswegen entlang entwickelnden kritische Spannung, Verformungs- und Volumenänderungen

und die verschiedenen Bruchtypen ermittelt. Schließlich wird der Ausgangsspannungszustand der Bodenproben von ungestörter Struktur ermittelt und darauf hingewiesen, daß die Schubfestigkeit und der Bruchmechanismus der ungestörten Sande nur in Abhängigkeit von den effektiven Spannungen ermittelt werden kann.

Сравнительные исследования прочности на сдвиг мелких песков ненарушенного и нарушенного структурного состояния. В статье рассматривается прочность на сдвиг мелких песков в нарушенном и ненарушенном структурном состоянии в зависимости от фазового состава. Свыше непосредственных исследований показывается разница между главными напряжениями, деформациями и объемными изменениями образцов в нарушенном и ненарушенном структурном состоянии и обнаруживаются физические причины этих влияний. В случае осесимметричного напряженного состояния определяются критические напряженные, деформационные и объемные изменения и также различные типы разрушения грунта, образующиеся во время механизма разрушения вдоль разных траекторий напряжений. Наконец определяется начальное напряженное состояние ненарушенных образцов и показывается, что определение прочности на сдвиг и механизма разрушения ненарушенных песков возможно только в зависимости от действующих на самом деле напряжений.

NYOMOTT I SZELVÉNYŰ RUDAK KÉPLÉKENY LEMEZHORPADÁSÁNAK KÍSÉRLETI VIZSGÁLATA

IVÁNYI MIKLÓS*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

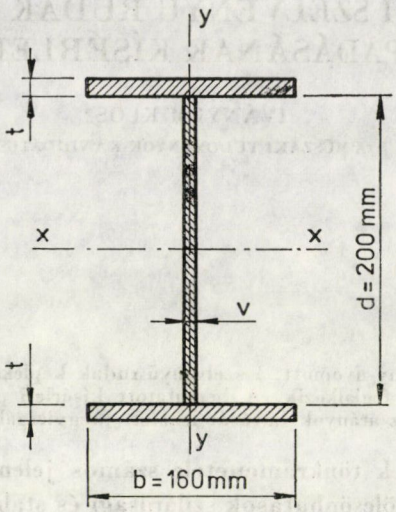
A tanulmány nyomott, I szelvényű rudak képlékeny lemezhorpadásának kísérleti vizsgálatával foglalkozik. A bemutatott kísérleti program keretében különböző gerinc- és övlemez arányok hatását lehetett megvizsgálni.

Tartószerkezetek tönkremenetele számos jelenség kölcsönhatása miatt alakulhat ki, ezen kölcsönhatások szilárdsági és stabilitási jellegűek lehetnek. A méretezési elvek kialakítása során általános törekvés, hogy a sokféle stabilitási kölcsönhatás közül némelyeket ki kell választani úgy, hogy azok létrejöttükkel ne befolyásolják a tartószerkezet tönkremenetelét. Ilyen törekvés az, hogy a lemezhorpadás kizárásával tegyük lehetővé a tartószerkezet lemezhorpadás nélküli tönkremenetelét. A feladat megoldását elméleti és kísérleti módszerekkel lehet megközelíteni, ezek a megoldások eléggé korlátozottak, csak

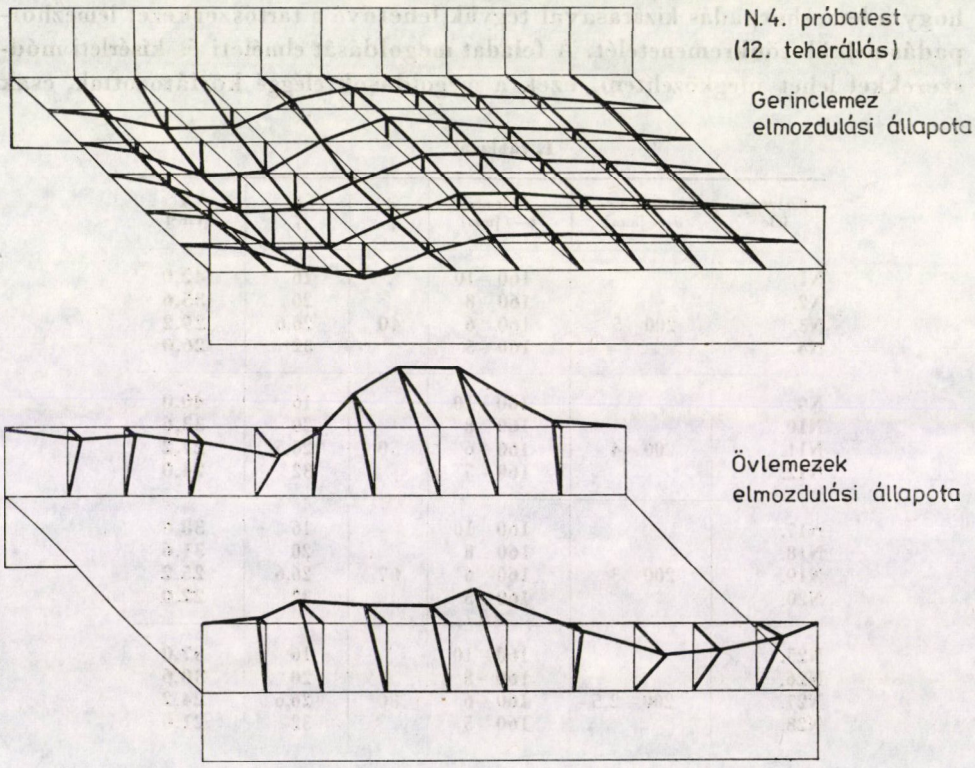
1. táblázat

Szelvény jele	Gerinclemez d—v [mm]	Övlemez b—t [mm]	$\frac{d}{v}$	$\frac{b}{t}$	A [cm²]
N1.		160—10		16	42,0
N2.		160—8		20	35,6
N3.	200—5	160—6	40	26,6	29,2
N4.		160—5		32	26,0
N9.		160—10		16	40,0
N10.		160—8		20	33,6
N11.	200—4	160—6	50	26,5	27,2
N12.		160—5		32	24,0
N17.		160—10		16	38,0
N18.		160—8		20	31,6
N19.	200—3	160—6	67	26,6	25,2
N20.		160—5		32	22,0
N25.		160—10		16	37,0
N26.		160—8		20	30,6
N27.	200—2,5	160—6	80	26,6	24,2
N28.		160—5		32	21,0

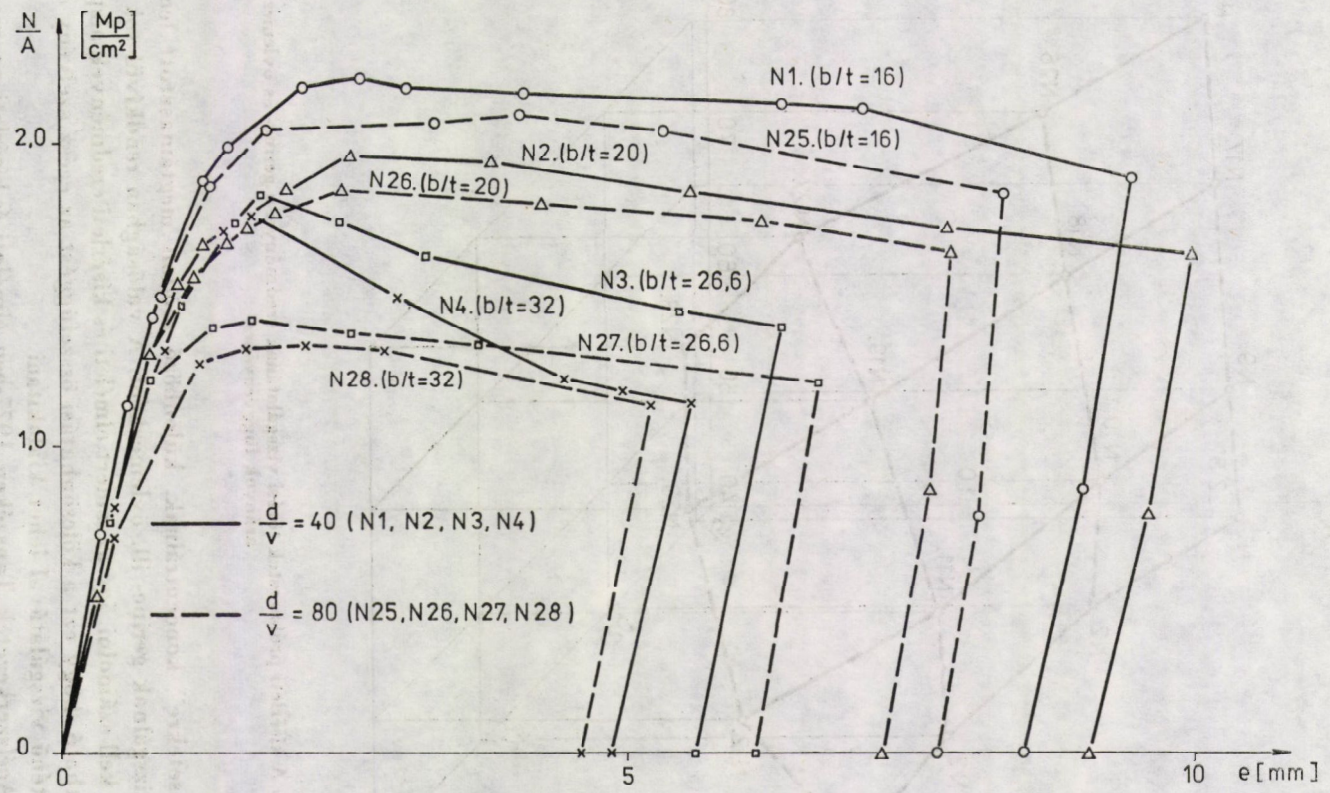
* Dr. Iványi Miklós, 1111 Budapest, Kende u. 18.



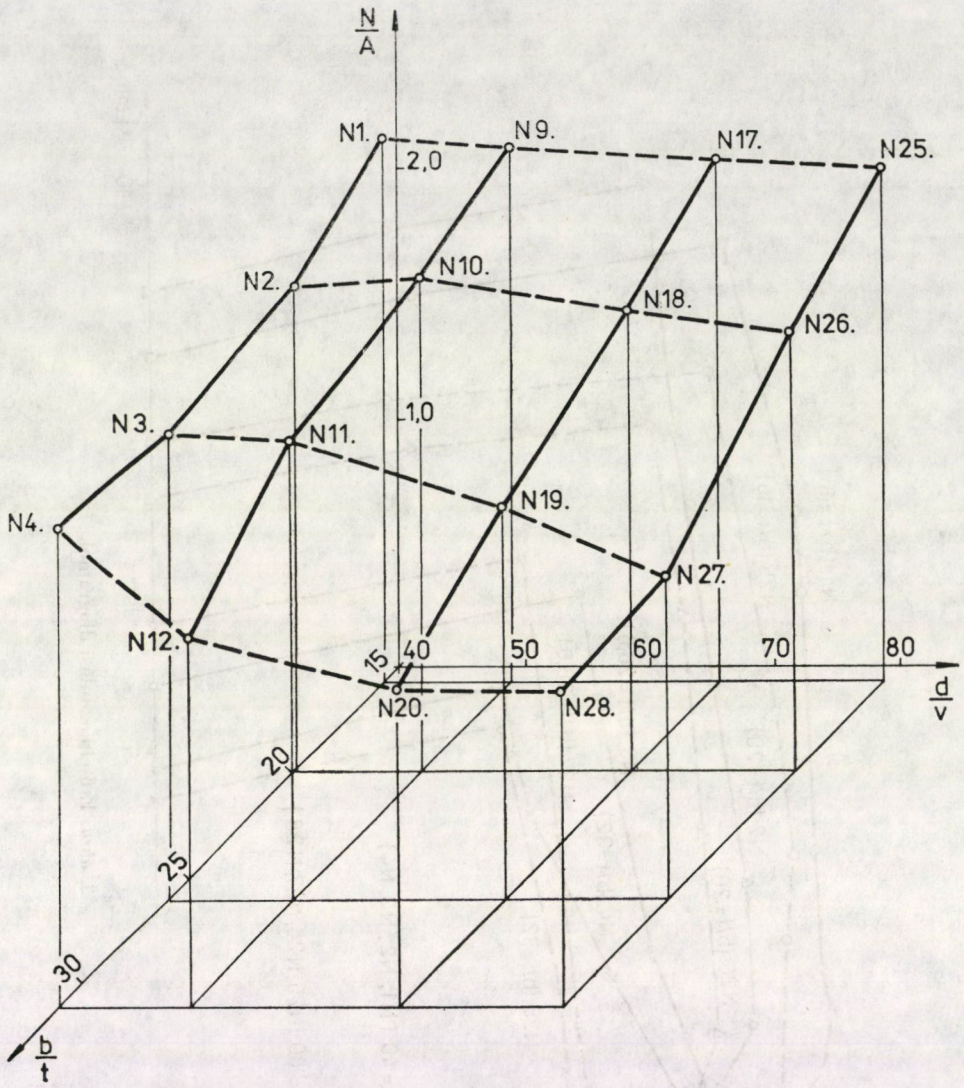
1. ábra. A kísérleti próbatestek szelvénye



2. ábra. N.4 próbatest gerinc- és övlemez deformációi a 12. teherállásnál



3. ábra. **Erő-elmozdulási diagramok**



4. ábra. A kísérleti próbatestek törési vizsgálatának eredményei a gerinc- és övlemez arányok függvényében

az „alapesetekre" koncentrálnak, különböző módon megtámasztott lemezsávokat vizsgálnak gerinc- ill. övlemezként. A valóságban rendkívül sok kötöttséggel kell számolni, így az ismert elméleti és kísérleti eredmények alapján megállapítható, hogy ezt a kölcsönhatási összefüggést az egész szelvény egyszerre történő vizsgálatával lehet kialakítani.

Az Acélszerkezetek Tanszéken 1977-ben elméleti és kísérleti programot állítottunk össze a képlékeny lemezhorpadás elkerülhetőségének vizsgálatára.

A kísérleti program keretében az 1. ábrán bemutatott szelvényt vizsgáltuk, a szelvényt különböző gerinc- és övlemez arányokkal készítettük el (1. táblázat).

A program első fázisában a központosan nyomott szelvények viselkedését vizsgáltuk. A próbatesteket úgy alakítottuk ki, hogy a nyomóerő hatására rúdkihajlás nem következhetett be, csak lemezhorpadások jöhettek létre. A kísérleti vizsgálatoknál mértük az N nyomóerő és a próbatest e összenyomódási értékeit, valamint egyes teherállásoknál a gerinc- és övlemezek elmozdulásait is. Az N 4 próbatest 12. teherálláshoz tartozó elmozdulási állapotát a 2. ábra mutatja.

A 3. ábrában a $d/v = 40$ és 80 gerinclemez arányokhoz tartozó próbatestek N/A = nyomóerő/keresztmetszeti terület valamint az e összenyomódás viszonyát ábrázoltuk.

A 4. ábrában a kísérleti program nyomóerő hatását vizsgáló részének eredményeit ábrázoltuk.

A kísérleti program teljesítése közben a következő megállapításokat lehet tenni:

— Megállapítható, hogy a horpadási jelenség a meglevő kezdeti görbeségek, hegesztési maradó feszültségek miatt nem egyensúly-elágazási probléma, hanem instabilitási probléma. A teherbírás kimerülésének kritériumát az erő-elmozdulási diagram segítségével lehet meghatározni.

— Célszerű olyan modellt felvenni, amely a szelvény végleges viselkedésének leírására alkalmas, figyelembe veszi a kezdeti görbeségek, maradó feszültségek hatását.

Meg kell jegyezni, hogy többfajta modell kialakítására lehet szükség:

— egyrészt olyan modellre, amelynél az erő-elmozdulási görbét csúcspontja után erős visszaesés jellemzi;

— másrészt olyan modellre, amelynél az erő-elmozdulási görbe közel vízszintes „plató"-val rendelkezik;

— harmadszor olyan modellre, amelynél az erő-elmozdulási görbe a folyási szakasz után felkeményedési szakasszal is rendelkezik.

A kísérleti eredmények alapját képezhetik a nyomott I szelvény képlékeny lemezhorpadás hatását is figyelembe vevő optimizálásának.

Experimental test of the plastic plate indentation of compressed I-section bars. The paper describes experimental studies on the plastic plate indentation of compressed I-section bars. Within the framework of the experimental program referred to, it proved to be readily feasible for examining the effect of different web and boom plate ratios.

Experimentale Untersuchung der plastischen Beulung des Steges druckbeanspruchter Stäbe mit I-Profil. Die Studie befaßt sich mit der experimentellen Untersuchung der plastischen Beulung des Steges von druckbeanspruchten Stäben mit I-Profil. Im Rahmen des angegebenen Versuchsprogrammes kann die Wirkung unterschiedlicher Verhältnisse zwischen Steg- und Gurtabmessungen untersucht werden.

Экспериментальное испытание местной устойчивости пластинок сжатых стержней двутаврого сечения за упругой стадии. Исследуется экспериментальным способом местная устойчивость пластинок сжатых стержней двутаврого сечения за упругой стадии. Показана опытная программа, по которой было рассмотрено влияние различных отношений размеров стенки и пояса.

MÓDOSÍTOTT SZÁRNYAS NYÍRÓSZONDA

KABAI IMRE*—LAZÁNYI ISTVÁN**

A tanulmány egy módosított szárnyas nyírószondát mutat be, amely a szálas, tőzeges puha, vízzel telített agyagokban is jól alkalmazható. A módosított szonda könnyen bevihető a talajba, ezért a talajszerkezetre ható zavaró hatása is kisebb. A tanulmány ismerteti a svéd típusú nyírószonda és a módosított nyírószonda összehasonlító kísérleti eredményeit, valamint a nyírószilárdság meghatározásához szükséges összefüggéseket.

1. Bevezetés

Puha kötött talajok nyírószilárdságának a helyszíni meghatározására jól bevált eszköz a szárnyas nyírószonda. A szondát először Svédországban alkalmazták igen kis nyírási ellenállású agyagok vizsgálatára (CARLSON, 1948; CADLING, ODENSTAD, 1950). Alkalmazása azon a feltételezésen alapul, hogy puha, vízzel gyakorlatilag telített kötött talaj zárt rendszerben mért nyírószilárdsága független a normál feszültségtől ($\Phi = 0$ feltétel), és csupán az előterhelés függvénye. A mérés maga abból áll, hogy a kereszt alakban felerősített szárnyakkal kialakított szondafejet egy — rendszerint béléscsövezett — fúrólyuk alján a zavartalan talajba nyomják, majd egyenletes sebességgel elforgatják, és mérik az ehhez szükséges forgató nyomatékot (M). Ebből közvetlenül számítható a szárnyak által elnyírt hengerfelületen meglevő nyírószilárdság (τ = konst). Szerves talajokban, különösen szálas, rostos szerkezetű tőzeges talajokban a szondának a besajtolása, különösen pedig a visszahúzása nehézségekkel jár, és a kapott eredmények is kevésbé megbízhatóak. E nehézségek kiküszöbölésére a Budapesti Műszaki Egyetem Geotechnikai tanszékén új (lesarkított szárnyú) szondatípust alakítottunk ki.

A tanulmány az ezzel kapcsolatos elméleti megfontolásokat, valamint az új és régi szondatípusoknak a gyakorlati összehasonlító vizsgálatát ismerteti.

* Dr. Kabai Imre, 1142 Budapest, Ungvár u. 56.
** Lazányi István, 1016 Budapest, Fém u. 3.

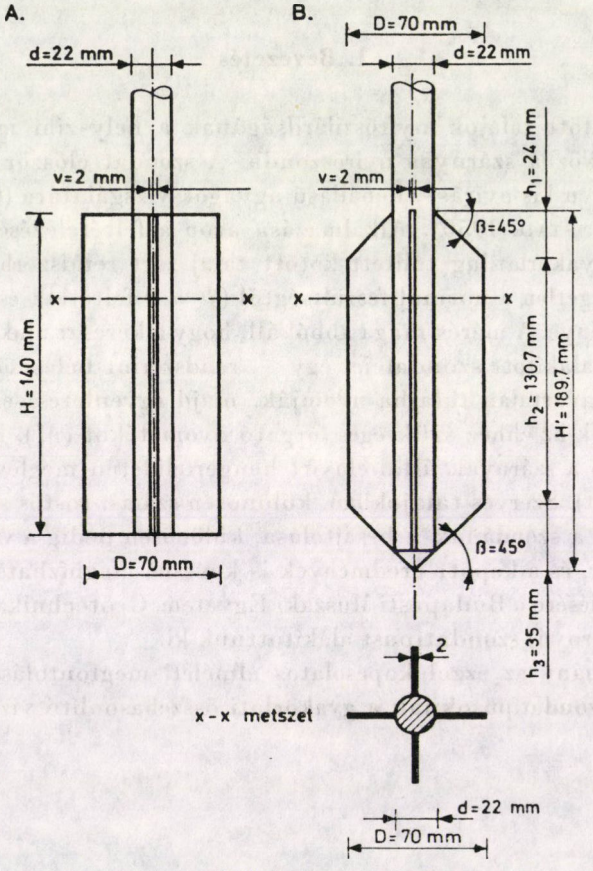
2. A módosított szonda

A puha, folyós állapotú agyagok nyírószilárdságának a helyszíni vizsgálatára az ún. svéd nyírószonda igen jól bevált és a hazai tapasztalatok is kedvezőek. (KÉZDI, 1976.) (Lásd az 1. ábra A típusú szondáját!)

Ezeknek a szondáknak az alkalmazása a rostos tőzegekben, illetve a tőzegszálas puha, laza és telített agyagokban nehézkessé válik. A szonda benyomásakor a szárnyak maguk előtt tolják a tőzegszálakat, erősen megzavarják a vizsgált tartományt, a szonda forgatásakor esetleg oldalirányban is kitérnek és igen nehézzé válhatik a szonda benyomása vagy a kihúzása is.

E nehézségek miatt a tőzegek vizsgálatára ún. kettős, görbült szárnyakkal ellátott szondatípusokat is készítettek (HELENELUND, 1975).

Az említett eszköz helyett egy egyszerűsített típust alakítottunk ki, oly módon, hogy az eredeti svéd szondának a szárnyait lesarkítottuk. (Lásd az 1. ábra B típusú szondáját!)



1. ábra. A Geotechnikai Tanszéken alkalmazott szondatípusok. A — a Svéd Geotechnikai Intézet szondatípusa; B — módosított szondatípus

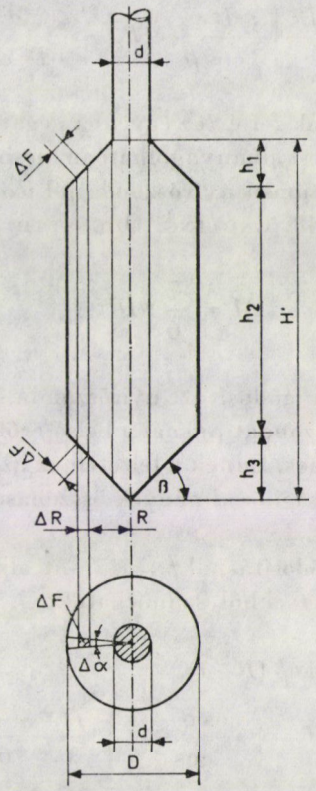
Mivel a nyírószonda a zárt rendszerben érvényes (a derékfeszültségtől független) nyírószilárdságot (τ = konst, $\Phi \simeq 0$) méri, ezért ennek az értéke a külső (forgató) nyomaték és a belső (a talaj nyírási ellenállásából származó) erők nyomatékának az egyensúlyi feltételéből, valamint a szonda geometriai méreteiből határozható meg.

A talaj nyírószilárdságának (τ) a meghatározásához a következő feltételezéseket tesszük:

— a vizsgált agyag homogén és izotróp,
— a talaj tönkremenetele a „szárnyaknak" megfelelő kúp- és hengerfelület mentén következik be,
— a folyási feltétel (τ = konst) a törési felület minden egyes pontjában egyidőben ki van elégítve.

A 2. ábra jelöléseivel a kúpfelület elemi felület részén ható erő nyomatéka a forgástengelyre a következőképpen írható:

$$\Delta M = \tau \Delta F \left(R + \frac{\Delta R}{2} \right),$$



2. ábra. Módosított nyírószonda

ahol

$$\Delta F = R\Delta\alpha\Delta R\frac{1}{\cos\beta}.$$

A ΔM összefüggésében levő másodrendűen kicsiny mennyiségek szorzatát elhanyagolva és a határátmenetet képezve,

$$\lim_{\Delta F\to 0}\Delta M = \frac{\tau R^2}{\cos\beta}\,dR\cdot d\alpha.$$

A 2. ábra jelöléseivel — további részletek mellőzésével — a teljes törési felületen működő belső erők nyomatéka a következő egyenlettel adható meg:

$$M = \frac{\tau}{\cos\beta}\left[\int_0^{2\pi}\int_r^R R^2 dR d\alpha + \int_0^{2\pi}\int_0^R R^2 dR d\alpha\right] + \tau 2\pi R^2 h_2.$$

Az integrálást elvégezve, az integrálási határokat behelyettesítve és az egyenletet rendezve

$$M = \frac{\tau\pi D^2}{2}\left[\frac{D}{3\cos\beta} + h_2 - \frac{d^3}{6D^2\cos\beta}\right].$$

Ha $\beta = 0°$ -ot veszünk fel és az egyenlet negatív előjelű tagját elhagyjuk —, mivel az a többihez képest elhanyagolhatóan kicsiny — és a $H = 2\,D$ arányt vesszük fel, akkor a svéd típusú nyírószonda jól ismert egyensúlyi egyenletét kapjuk (lásd CARLSON, 1948; CADLING, ODENSTAD, 1950):

$$M = \frac{7}{6}\pi D^3\tau.$$

Gyakorlati okokból a módosított nyírószonda méretét abból a feltételből számítjuk ki, hogy a két szondatípusnál a belső erők nyomatéka, a τ = konst feltétel mellett, legyen azonos. Ennek a feltételnek az alkalmazása a két szondatípussal nyert nyírószilárdsági eredmények összehasonlítására ad majd lehetőséget.

Ha a nyírószonda módosításnál $\beta = 45°$ -ot alkalmazunk, akkor a méretek a következő összefüggésekből számíthatók:

$$h_1 = \tan\beta\,(R-r),$$

$$h_2 = H + \left(\frac{\cos\beta - 1}{\cos\beta}\right)\left(\frac{D}{3} - \frac{d^3}{6D^2}\right),$$

$$h_3 = R\tan\beta.$$

A számításokat elvégezve, az 1. ábrán megadott méreteket és elvileg egy azonos nyírási ellenállású szondát kaptunk.

A módosított szondára ható külső és belső erők nyomatéki egyensúlya alapján a talaj nyírószilárdságát a következő összefüggésből lehet számítani:

$$\tau = K' M \simeq K M,$$

ahol

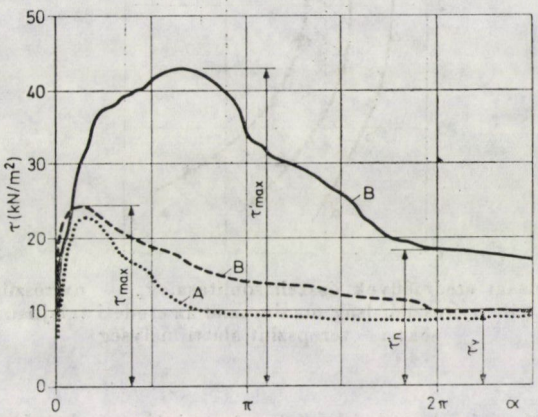
$$K' = \frac{1}{\pi}\left[\frac{D^3}{6\cos\beta} - \frac{d^3}{12\cos\beta} + \frac{D^2 h_2}{2}\right],$$

illetve

$$K = (6/7)\,\pi\, D^3.$$

3. Helyszíni mérések

Az 1. ábrán bemutatott szondákkal tőzeges agyagban ellenőrző méréseket végeztünk. Maguk a mérések a területen épülő magas úttöltés alapozásának a vizsgálatához készültek.



3. ábra. Nyírási diagramok. A, B — szondatípusok; τ_v, τ_{max} — eredeti altalajban mért nyírószilárdsági értékek; τ'_v, τ'_{max} — a töltésépítés után — az összenyomódás hatása után — mért nyírószilárdsági értékek.

A vizsgálat helyén a térszín alatt $\sim$ 4 m mélységig laza, puha, tőzeges, növényi szálas agyag települt.

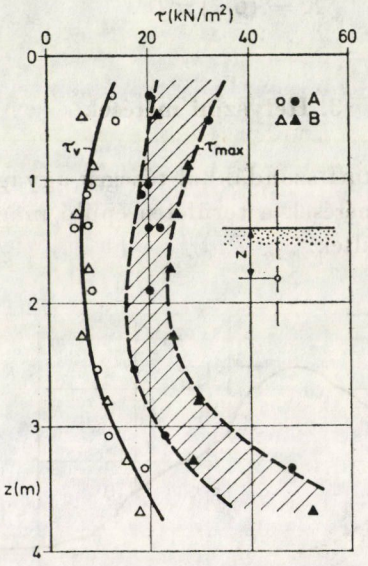
Az ellenőrző vizsgálatok tisztázni óhajtották, hogy:

1. miként változik a mért nyírószilárdság a két szondatípusnál?
2. miként változik a tőzeg nyírószilárdsága a töltésépítés — terhelésnövelés — okozta összenyomódás hatására?

A nyírófeszültség (τ) és szögforgás (α) összefüggését a két szondatípusnál a 3. ábra mutatja be.

Az azonos talajállapothoz — töltésépítés előtti állapothoz — tartozó nyírófeszültségek maximumait (τ_{max}) és végértékeit (τ_v) a 4. ábrán foglaltuk össze.

A kétféle szondázás eredményei meglepően jól egyeznek. A nyírószilárdság végső értékét (τ_v) ábrázoló pontok a mélység függvényében felrakva ugyanazon görbe mentén helyezkednek el. A nyírószilárdság csúcsértékének (τ_{max}) megfelelő pontok is — bár bizonyos szórással — azonos tartományba esnek.



4. ábra. Nyírószilárdsági eredmények összehasonlítása. τ_v — nyírószilárdság végértékei az eredeti talajban; τ_{max} — nyírószilárdság maximumai az eredeti talajban; A, B — szondatípusok; z — terepszint alatti mélység

A szonda típusának tulajdonítható szabályos eltérést tehát nem találtunk. A két típus gyakorlatilag „egyenértékű" hasonló talajtípusokban.

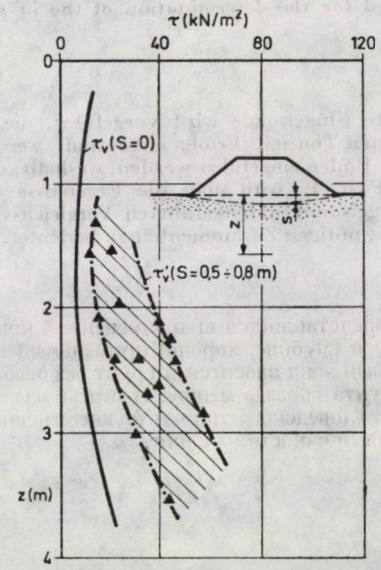
Ugyanakkor a módosított szonda rendkívüli előnye, hogy sokkal kisebb erővel juttatható a talajba és sokkal kisebb az ellenállása kihúzással szemben is. (Az eredeti szondatípus szárnyai ugyanazon talajban többször is eltörtek!)

A módosított szondát alkalmaztuk a töltésépítés hatására bekövetkező nyírószilárdság növekedés ellenőrzésére is. Egy jellegzetes nyírási diagramot a 3. ábra mutat be, ahol a nyírófeszültség maximális értékét (τ'_{max}) és végértékét (τ'_v) is feltüntettük.

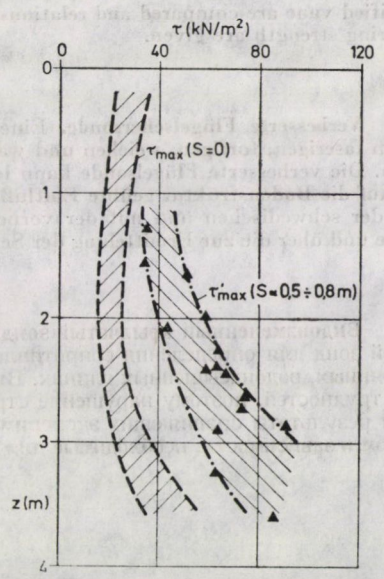
Itt a terhelés hatására bekövetkező süllyedés $s \simeq 0{,}5 \div 0{,}8$ m volt és ez a nyírószilárdságot jelentősen megváltoztatta, hiszen lényegesen megválto-

zott a fázisos összetétel is. Az eredményeket az 5. és 6. ábrán adjuk meg. Az 5. ábra a τ_v és τ'_v, míg a 6. ábra a τ_{max} és τ'_{max} értékeit, illetve azok szórását szemlélteti.

A nyírószondával végzett ellenőrző vizsgálat tehát egyben azt is igazolta, hogy ez a módszer a földműépítések gyors ellenőrzésére, a nyírószilárdság relatív összehasonlítására is kitűnően alkalmazható. A puha altalajra rövid ideig ható előterhelés hatása is egyszerűen, gyorsan ellenőrizhető. Az alkalmazásával kritikus esetekben a földműépítések sebessége — töltésépítés sebessége — jól szabályozható.



5. ábra. Nyírószilárdság változása a süllyedés hatására. τ_v — nyírószilárdság végértéke az eredeti talajban; τ'_v — nyírószilárdság végértéke az összenyomódott talajban; s — terepszint süllyedése a töltés tengelyében



6. ábra. Nyírószilárdság változása a süllyedés hatására. τ'_{max} — nyírószilárdság maximuma az eredeti talajban, τ'_{max} — nyírószilárdság maximuma az összenyomódott talajban

Mint ismeretes, az így meghatározott nyírószilárdsági értékeket az állékonysági és stabilitási vizsgálatokban — a talaj plasztikus indexétől függően — még redukálni kell (lásd BJERRUM, 1972; KÉZDI, 1976).

IRODALOM

BJERRUM, L. (1972): Embankments on Soft Ground. *Proc. Spec. Conf. on Performance of Earth and Earth-supported Structures.* Am. Soc. Civ. Engg., Vol. II. 1—54, New York

CARLSON, L. (1948): Determination in Situ of the Shear Strength of Undisturbed Clay by Means of a Rotation Auger. *Proc. 2nd Int. Conf. Soil Mech. Found. Engg.*, Vol. 1. 265—270, Rotterdam

HELENELUND, K. V. (1975): Geotechnical Peat Investigations. *Proc. First Baltic Conf. Soil Mech. Found. Engg.*, Vol. 1. 105—124, Gdansk

CADLING, L.—ODENSTAD, S. (1950): The Vane Borer. An Apparatus for Determining the Shear Strength of Clay Soils Directily in the Ground. *Royal Swedish Geotechnical Institute, Proc.* No. 2., Stockholm

KÉZDI, Á. (1976): Talajmechanika, Példák és esettanulmányok. Tankönyvkiadó, Budapest

A modified shear vane. An improved shear vane is described which can be advantageously used for field vane tests in fibrous, organic, waterlogged clay and peats. The modified vane can readly be introduced into the soil and thus the disturbance on the soil structure is greatly reduced. The results of test performed with the Swedish type vane and with the modified vane are compared and relationships required for the determination of the *in situ* shearing strength are given.

Verbesserte Flügelschersonde. Eine modifizierte Flügelsonde wird vorgeführt, die in einem faserigen, torfigen, weichen und wassergesättigten Ton mit Erfolg angewandt werden kann. Die verbesserte Flügelsonde kann leicht in den Boden eingeführt werden, weshalb auch der auf die Bodenstruktur geübte Einfluß viel kleiner ist. Es wird über die Ergebnisse der mit der schwedischen und mit der verbesserten Flügelsonde durchgeführten Vergleichsversuche und über die zur Ermittelung der Schubfestigkeit nötigen Zusammenhänge berichtet.

Видоизмененный крылчатый зонд. В статье представляется видоизмененный крылчатый зонд для определения сопротивления сдвигу в глубине, хорошо применимый и в торфянных, водонасыщенных глинах. Видоизмененный зонд вносится в грунт без особенных трудностей, поэтому нарушение структуры грунта гораздо менше. В статье излагаются результаты сравняющих экспериментов зондом шведского типа и видоизмененным зондом и зависимости, необходимые для определения прочности на сдвиг.

VASÚTI HÍD SAJÁTFREKVENCIÁJÁNAK MEGHATÁROZÁSA

KÁLLÓ MIKLÓS*

A dolgozat az algyői vasúti híd háromnyílású szerkezete függőleges sajátfrekvenciáinak meghatározását ismerteti. A számításokhoz a V. KOLOUSEK által háromnyílású, szimmetrikus szerkezetre megoldott módszert aszimmetrikus szerkezetre alkalmazza. Közli a számított sajátfrekvenciákat és az ezekhez tartozó sajátrezgési alakokat, valamint összehasonlítja az elméleti úton nyert eredményeket a szerkezeten mért eredményekkel.

1976-ban az Acélszerkezeti Tanszék azt a megbízást kapta, hogy végezze el az újonnan épülő algyői vasúti híd háromnyílású szerkezetének próbaterhelését, illetve végezzen a hídszerkezet viselkedésére vonatkozó, az egyszerű próbaterhelésen túlmenő vizsgálatokat.

A vizsgálatok megkezdése előtt elméleti úton meghatároztuk a szerkezet sajátfrekvenciáit. Erre kettős okunk volt: egyrészt a dinamikus terhelések programját úgy kívántuk megtervezni, hogy az áthaladó szerelvények sebessége a kritikus sebesség környezetébe essék, másrészt pedig — hazánkban elsőízben — összehasonlítást kívántunk tenni az UIC-ORE ajánlásaiban megadott és a mérhető dinamikus tényezők értékei között.

Az UIC-ORE (Nemzetközi Vasút Egyesület Kutatási Bizottsága) mintegy 20 éven keresztül vizsgálta a vasúti hidakon fellépő dinamikus többletigénybevételek minél pontosabb figyelembevételének módját. Az igen nagyszámú mérési adat gondos statisztikai elemzése kimutatta, hogy a dinamikus tényező nagysága a korábban is feltételezett v áthaladási sebesség és az l támaszköz értékén túlmenően függ a szerkezet sajátfrekvenciájától is, és a legszorosabb korrelációt a kombinált mutatóval adja. Az UIC-ORE ajánlásaiban [1] a dinamikus tényező nagyságát ezen mutató függvényében fejezi ki.

$$k = \frac{v}{2lf}$$

Amennyiben tehát az UIC-ORE ajánlásokat tekintetbe kívánjuk venni, a sajátfrekvencia — legalábbis közelítő — ismeretére már a tervezés fázisában szükség van.

* Kálló Miklós, 1203 Budapest, Baross u. 44.

Az algyői vasúti híd sajátfrekvenciájának meghatározására a Vladimir KOLOUSEK által kidolgozott [2] módszert alkalmaztuk. Ez a módszer állandó keresztmetszetű és tömegeloszlású rúd esetében kimutatja, hogy a valamelyik sajátfrekvencián lengő rúd x helyen levő pontja

$$v(x, t) = v(x) \sin \omega t$$

alakú rezgőmozgást végez, melynek amplitúdójára a

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} - \frac{\mu\omega^2}{EJ} v(x) = 0 \tag{1}$$

differenciálegyenlet írható fel. A jelölések:

$v(x, t)$ az x pont mozgásának időfüggvénye
$v(x)$ a fenti mozgás amplitúdója
μ a rezgő rúd egységnyi hosszra eső tömege
E a rezgő rúd rugalmassági modulusa
J a rezgő rúd tehetetlenségi nyomatéka
ω a saját (kör) frekvencia.

Az (1) differenciálegyenlet megoldása a

$$\lambda = l \left(\frac{\mu\omega^2}{EJ} \right)^{1/4} \tag{2}$$

új változó bevezetésével (melyben l a támaszközt jelenti):

$$v(x) = A \cos \frac{\lambda x}{l} + B \sin \frac{\lambda x}{l} + C \cosh \frac{\lambda x}{l} + D \sinh \frac{\lambda x}{l} . \tag{3}$$

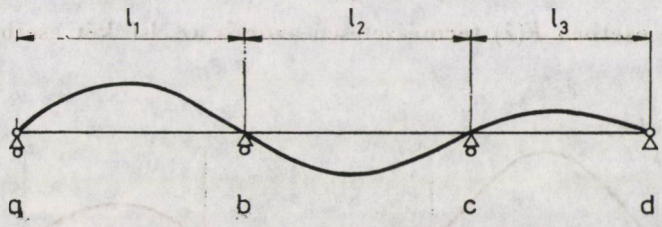
A (3) egyenlet megadja tehát a sajátfrekvenciáján rezgő rúd minden egyes pontjának rezgési amplitúdóját, azaz megadja a sajátfrekvenciához (illetve a különböző sajátfrekvenciákhoz) tartozó rezgési alakot. Az alakfüggvény differenciálásával származtathatjuk a szögelfordulás, a nyomaték és a nyíróerőfüggvényt. Az adott rúdszakasz befogási viszonyainak ismeretében a fenti függvények segítségével a (3) egyenletben szereplő A, B, C és D integrálási állandók meghatározhatók.

A fenti módszernek megfelelően az algyői vasúti híd helyettesítő képe (1. ábra) egy olyan négytámaszú folytatólagos rúd, amelynek

a) támaszközei megegyeznek az eredeti szerkezet támaszközeivel;

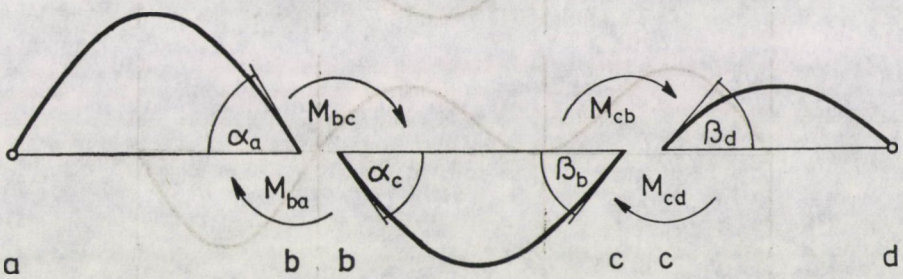
b) egységnyi hosszra jutó tömege megegyezik az eredeti szerkezet átlagosan egységnyi hosszra jutó tömegével;

c) **tehetetlenségi nyomatéka nyílásonként megegyezik annak a rúdnak a tehetetlenségi nyomatékával, mely azonos teherre azonos lehajlást mutat az eredeti szerkezet adott nyílásának lehajlásával.**



1. ábra. Az algyői vasúti híd helyettesítő képe

$l_1 = l_2 = 52{,}48$ m, $l_3 = 42$ m, $I_1 = I_2 = 1{,}10$ m^4, $I_3 = 0{,}78$ m^4, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0{,}347$ Mpm^{-2}s^2



$$v(x=0)=0 \quad v(x=l_1)=0 \quad v(x=0)=0 \quad v(x=l_2)=0 \quad v(x=0)=0 \quad v(x=l_3)=0$$

$$M(x=0)=0 \quad v'(x=l_1)=\alpha_a \quad v'(x=0)=\alpha_c \quad v'(x=l_2)=\beta_b \quad v'(x=0)=\beta_d \quad M(x=l_3)=0$$

2. ábra. Helyettesítő rúdszakaszok

Az előzőekben ismertetett gondolatmenet alapján a kezdeti feltételek ismeretében λ függvényében nyílásonként felírható az alakfüggvény, a végpontokon ható nyomaték és az integrálási állandók értéke. A 2. ábra szerinti jelölésekkel és az ott megadott kezdeti feltételek mellett az egyes rúdszakaszok végpontjain ható nyomatékok:

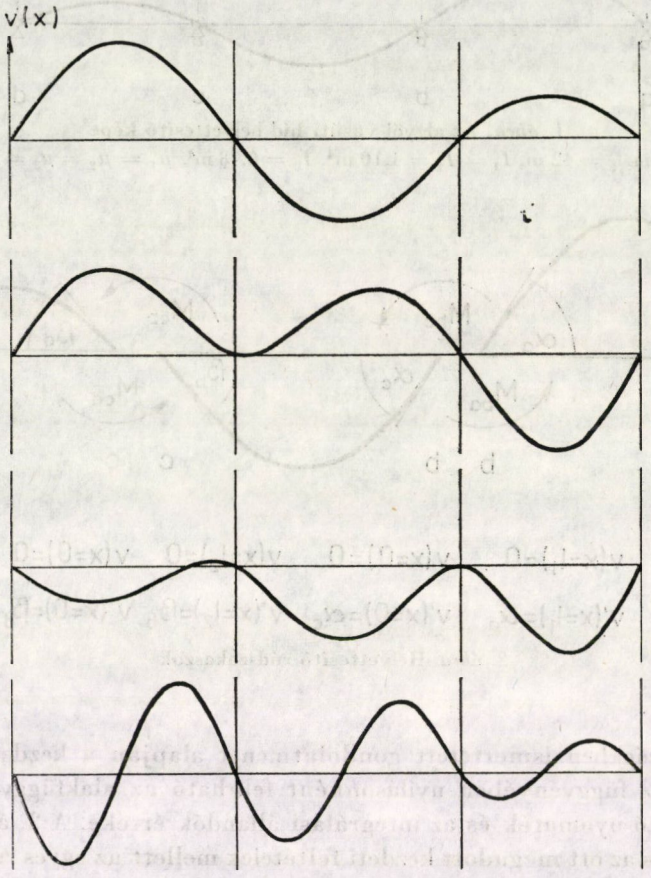
$$M_{ba} = \frac{EJ_1}{l_1}\alpha_a \frac{2\lambda_1 \sinh \lambda_1 \sin \lambda_1}{\sin \lambda_1 \cosh \lambda_1 - \cos \lambda_1 \sinh \lambda_1} = \frac{EJ_1}{l_1}\alpha_a F_7(\lambda_1), \tag{4}$$

$$M_{bc} = \frac{EJ_2}{l_2}\left(\beta_b \frac{\sinh \lambda_2 - \sin \lambda_2}{1 - \cos \lambda_2 \cosh \lambda_2} + \alpha_c \frac{\sinh \lambda_2 \cos \lambda_2 + \sin \lambda_2 \cosh \lambda_2}{1 - \cos \lambda_2 \cosh \lambda_2}\right) =$$
$$= \frac{EJ_2}{l_2}\left[F_1(\lambda_2)\beta_b + F_2(\lambda_2)\alpha_c\right], \tag{5}$$

$$M_{cb} = \frac{EJ_2}{l_2}\left[F_1(\lambda_2)\alpha_c + F_2(\lambda_2)\beta_b\right], \tag{6}$$

$$M_{cd} = \frac{EJ_3}{l_3} F_7(\lambda_3) \tag{7}$$

A két utóbbi esetben $F(\lambda)$ természetesen azonos az első két esetben definiált függvénnyel.



3. ábra. A háromnyílású szerkezet első négy sajátfrekvenciájához tartozó rezgésalak

A *b* és a *c* támaszoknál a következő egyensúlyi egyenleteket írhatjuk fel:

$$M_{ba} + M_{bc} = 0, \qquad M_{cb} + M_{cd} = 0. \tag{8}$$

A (8) egyenletrendszerbe a nyomatékok (4), (5), (6) és (7) szerinti kifejezéseit beírva, az első egyenletből a α/β arányt a másodikba visszahelyettesítve a következő egyenletet kapjuk

$$C_2^2 F_1^2(\lambda_2) - C_2^2 F_2^2(\lambda_2) - C_1 C_3 F_7(\lambda_1) F_7(\lambda_3) - \\ - C_1 C_2 F_2(\lambda_2) F_7(\lambda_1) - C_2 C_3 F_2(\lambda_2) F_7(\lambda_3) = 0, \tag{9}$$

ahol $C_1 = I_1/l_1$ stb.

Ebben a — trigonometrikus és hiperbolikus függvényeket tartalmazó — egyenletben már csak λ szerepel ismeretlenként. A megoldás számítógép segítségével, egyszerű iterációval történt.

A λ-ra való megoldásból a szerkezet sajátfrekvenciái (2) segítségével számíthatók. Az egyes sajátfrekvenciákhoz tartozó rezgésalakok λ-nak az integrálási állandókra kapott (szerkezetileg a nyomatékfüggvényekhez hasonló) összefüggésekbe való visszahelyettesítése után a (3) egyenlet szerint határozhatók meg. Az első négy sajátfrekvenciához (4,87; 6,88; 9,47 és 19,28 Hz) tartozó rezgésalakot a 3. ábrán mutatjuk be.

A szerkezeten folytatott vizsgálatok [3] a fenti számítások eredményeit igazolták: több mérési ponton regisztráltuk a leterhelődő, nyugalmi állapotába sajátfrekvenciás rezgéseken keresztül visszatérő szerkezet 4,5—4,7 Hz körüli sajátfrekvenciáját; két esetben pedig, 6,1 illetve 6,2 Hz frekvenciával a második sajátrezgés is kimutatható volt.

IRODALOM

1. UIC-ORE Determination of Dynamic Effects in Bridges. Final report. Utrecht 1970
2. KOLOUSEK. V.: Dynamics in Engineering Structures, Butterworth, London 1973
3. BME Acélszerkezetek Tanszék: Kutatási jelentés az algyői vasúti Tisza-híd háromnyílású szerkezetének kísérleti vizsgálatáról. Kézirat, 1977

Determination of the eigenfrequency of railway bridges. The paper describes the determination of the vertical eigenfrequency of the three-span structure featured by the Algyő railway bridge. In the calculations the V. Kolousek method elaborated for symmetrical three-span structures has been employed for an asymmetrical three-span structure. The calculated eigenfrequencies and the associated natural vibration forms are published, then the theoretical results are compared to those obtained by the measurements of the structure.

Bestimmung der Eigenfrequenz von Eisenbahnbrücken. Der Aufsatz befaßt sich mit der Bestimmung der vertikalen Eigenfrequenzen der Eisenbahnbrücke bei Algyő. Zu den Berechnungen wurde die von V. Kolousek für dreifeldrige, symmetrische Konstruktionen entwickelte Methode für asymmetrische Konstruktionen angewendet. Es sind die errechneten Eigenfrequenzen, sowie die diesen zugeordneten Schwingungsformen angegeben und die thoretisch ermittelten Werte mit den an der Konstruktion gemessenen Ergebnissen verglichen.

Определение собственной частоты железнодорожного моста. В статьи сообщается определение верикальной собственной частоты конструкции трёхпролётного железнодорожного моста в г. Алдьё. В расчётах автор принял метод, решённый Колоушеком, В. на симметричные конструкции, на асимметрическую конструкцию. Сообщаются вычисленные собственные частоты и принадлежающие к этим формы собственных колебаний, и сравниваются теоретические результаты с измерительными на конструкции.

A „NYÍRÓFESZÜLTSÉG-KÜLÖNBSÉG"-MÓDSZER NÉHÁNY ALKALMAZÁSA OPTIKAI FESZÜLTSÉGMÉRÉSI KÍSÉRLETEKBEN

KÖRÖNDI LÁSZLÓ*

A térbeli teherhordó szerkezetek, ill. szerkezeti elemek erőjátéka bizonyos körülmények között síkbeli feszültségállapotú kísérleti modelleken vizsgálható. Ilyen esetekben gyakran kerül sor a szilárdságtani modellkísérletek között speciális helyet elfoglaló optikai feszültségmérési módszer alkalmazására. A dolgozat a síkbeli optikai feszültségmérésben használatos egyik hatékony kiértékelő eljárásnak, az ún. „nyírófeszültség-különbség"-módszernek általános tárgyalása után két, a magasépítés, ill. az alagútépítés területéről származó gyakorlati alkalmazást mutat be.

1. Bevezetés

Az optikai feszültségmérés az alkalmazott modellanyag, a kísérleti módszer és a mérési eredmények kiértékelése szempontjából is speciális helyet foglal el a szilárdságtani modellkísérletek területén. Az eljárás azon a fizikai jelenségen alapszik, hogy polarizált fényben egyes átlátszó anyagok a bennük — külső terhelés hatására — ébredő feszültségek következtében optikailag kettősen törővé válnak. E kettős törés mértéke arányos a feszültségekkel.

Hosszuk mentén változatlan terhelésű és keresztmetszetű teherhordó szerkezeti elemek erőjátékának optikai feszültségméréssel történő meghatározása során a modell vastagsági léptéke — különböző gyakorlati okokból — általában sokkal kisebb, mint a keresztirányú léptéke. Ez a megengedett közelítés másképpen megfogalmazva azt jelenti, hogy a szerkezeti elem sík alakváltozási állapotú szeletét sík feszültségi állapotú tárcsával képezik le.

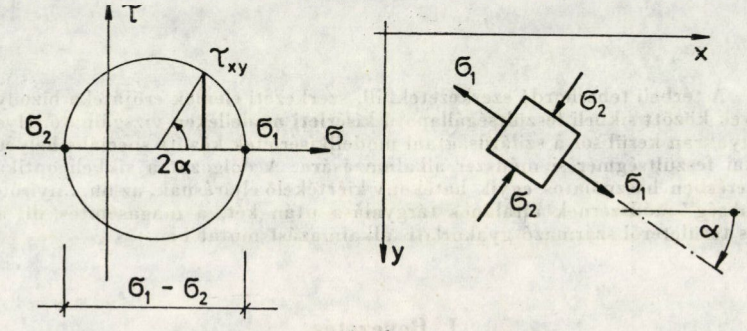
A síkbeli feszültségállapotot három független mennyiség határozza meg egyértelműen: pl. a σ_1 és σ_2 főfeszültség és a húzófőfeszültség irányának egy kitüntetett iránytól (pl. az x-tengelytől) mért α hajlásszöge (1. ábra).

Optikai feszültségméréssel az izoklinák és izokromáták eloszlása felvehető, más szóval α és $\sigma_1 - \sigma_2$ értéke bármely pontban megmérhető, de ezek ismerete a síkbeli feszültségállapot leírásához csak terheletlen perempontokban elegendő. A teljes feszültségállapotot egyes módszerek a már meglevő mérési adatok (α és $\sigma_1 - \sigma_2$) alapján — valamelyik ismert feszültségű pontból kiindulva —, az egyensúlyi differenciálegyenletek segítségével, más módszerek a hiányzó

* Köröndi László, 1113 Budapest, Molnár Erik u. 14/a.

adatok megmérésével határozzák meg. A modell azonos főfeszültségösszegű (vagyis azonos vastagságváltozású) pontjait összekötő ($\sigma_1 + \sigma_2 = \text{konst}$) izopachokat általában kísérleti úton veszik fel, de az izopach-eloszlás — ismert peremfeltételek esetében — számítással is követhető a Lamé—Maxwell-, ill. a Laplace-féle differenciálegyenletek alapján.

A gyakorlatban többnyire a derékszögű koordináta-rendszerben felírt egyensúlyi differenciálegyenletek integrálásával operáló, ún. „nyírófeszültség-



1. ábra

különbség"-módszerrel határozzák meg a teljes sík feszültségi állapotot. Például a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

differenciálegyenlet alapján az ismert feszültségállapotú O pont véges környezetében fekvő és vele azonos y-koordinátájú P pontban ébredő x-irányú normálfeszültség így írható:

$$(\sigma_x)_P = (\sigma_x)_0 + \int_0^P \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\, dx\,. \tag{2}$$

A σ_y normálfeszültségek hasonló módon számíthatók. Az integrált közelítő numerikus eljárással megoldó módszer megfelelő rendezettséggel igen jól használható.

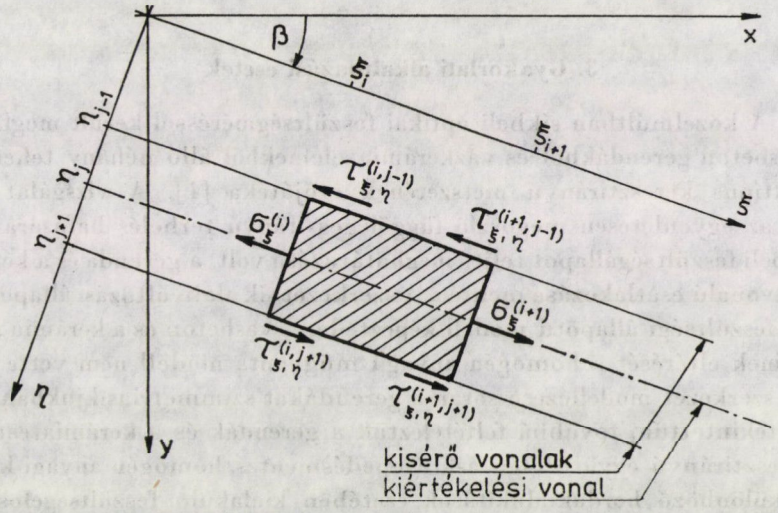
2. Integrálás egyenes szakaszokból álló hosszú törtvonal mentén

A „nyírófeszültség-különbségek" módszerének alkalmazásával ismert feszültségállapotú kezdőpontból induló egyenes, ill. egyenes szakaszból álló, továbbá görbe vonalak mentén is meghatározható a feszültségállapot. Az optikailag mért, pontonkénti két-két adatból ugyanis bármely modellpontban

számítható az x-tengelyhez tetszés szerinti β szöggel hajló ξ irányhoz tartozó nyírófeszültség:

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tan 2(\alpha - \beta). \tag{3}$$

Ha egy modellpontban, pl. a (ξ_i, η_j) koordinátájú pontban (2. ábra), ismert a feszültségállapot, akkor egy hozzá közel fekvő másik pont feszültség-



2. ábra

állapota az alábbiak szerint határozható meg. A (3) összefüggés alapján számítható $\tau_{\xi\eta}$ nyírófeszültségek ismeretében

$$\sigma_\xi^{(i+1,j)} = \sigma_\xi^{(i,j)} + \frac{\tau_{\xi\eta}^{(i,j+1)} + \tau_{\xi\eta}^{(i+1,j+1)} - \tau_{\xi\eta}^{(i,j-1)} - \tau_{\xi\eta}^{(i+1,j-1)}}{2(\eta_{j+1} - \eta_{j-1})} (\xi_{i+1} - \xi_i). \tag{4}$$

Így a (ξ_{i+1}, η_j) koordinátájú pontban is ismertté vált a feszültségállapot. A (4) összefüggés a ξ és az η tengelyek irányában egyaránt linearizált nyírófeszültség-eloszlással számol, és így hibát tartalmaz. Bár a vizsgált elem zsugorításával e hiba elvileg nullára csökkenthető, a gyakorlatban ennek határt szab a leolvasás pontossága.

A kiértékelési vonal irányváltozási pontjaiban a feszültségállapot tenzora — a 2. ábra jelöléseivel — az alábbi ismert összefüggések szerint transzformálható:

$$\sigma_\xi = \boldsymbol{\xi}^* \cdot \mathbf{T}_{xy} \cdot \boldsymbol{\xi}, \qquad \sigma_\eta = \boldsymbol{\eta}^* \cdot \mathbf{T}_{xy} \cdot \boldsymbol{\eta},$$
$$\tau_{\xi\eta} = \boldsymbol{\xi}^* \cdot \mathbf{T}_{xy} \cdot \boldsymbol{\eta},$$

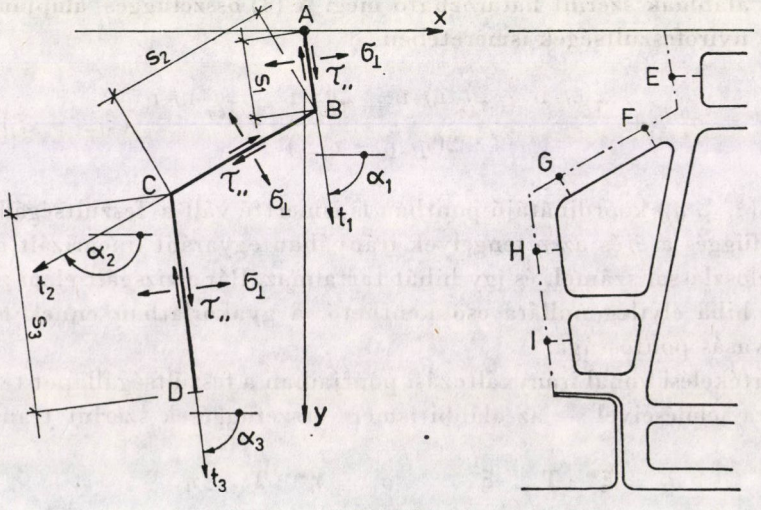
$$\mathbf{T}_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix},$$

$$\xi^* = [\cos\beta \ \sin\beta], \quad \eta^* = [-\sin\beta \quad \cos\beta]. \tag{5}$$

A nyírófeszültség-különbségeknek a kísérleti vonal mentén történő „integrálása" során az említett kis hibák halmozódhatnak. Ismert feszültségi állapotú ponthoz érve az integrálás pontossága ellenőrizhető, ill. a hiba javítható. Az egész számítási eljárás jól gépesíthető.

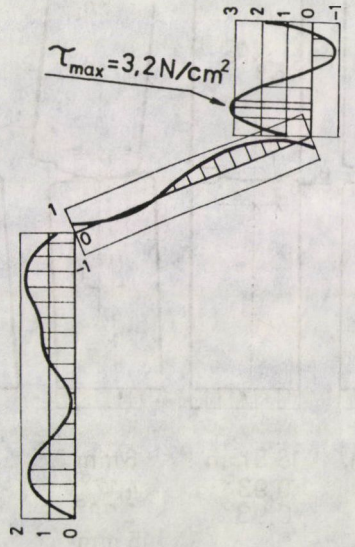
3. Gyakorlati alkalmazási esetek

A) A közelmúltban síkbeli optikai feszültségméréssel került meghatározásra vasbeton gerendákból és vázkerámia elemekből álló néhány teherhordó szerkezettípus keresztirányú metszetének erőjátéka [1]. A vizsgálat egyik feladata az egyenletesen megoszló függőleges irányú terhelés hatására keletkező síkbeli feszültségállapot teljes meghatározása volt, a gerenda és a kerámiaelem törtvonalú csatlakozása mentén. A szerkezet sík alakváltozási állapotú szeletét sík feszültségi állapotú modell képezte le. A vasbeton és a kerámia anyagi jellemzőinek eltérését a homogén anyagú műgyanta modell nem vette tekintetbe. A szerkezet modellezése során a gerendákat szimmetriasíkjukban befogottnak tekintettük, továbbá feltételeztük a gerendák és a kerámiatest tökéletes keresztirányú együttdolgozását (repedésmentes, homogén anyagi kapcsolat). A különböző bordakialakítások esetében kialakuló feszültségeloszlások összehasonlításán túlmenően a bordavastagság csökkentésének hatását is megvizsgáltuk.



3. ábra

A nyírófeszültség-különbség módszer kiértékelési vonala a kerámia és a beton három egyenes szakaszból álló csatlakozási vonalán haladt (3. ábra). A felső szabad peremről induló vonal A kezdőpontjában a feszültségállapot optikailag adott, a metszet mentén pedig a leírt eljárás alkalmazásával vált ismertté. A kerámiaüregek peremétől, a peremre merőleges irányban indított, szintén a nyírófeszültség-különbségek módszerével kiértékelt néhány rövid bemenettel (E, F, G, H és I pontok) a metszet menti viszonylag hosszú integrálás esetleges hibája javítható volt. A csatlakozási metszetre számított nyíró-



4. ábra

és normálfeszültségek ($\tau_{||}$, $\sigma_{\perp}$) eloszlásának helyessége a kerámiaelemre felírt függőleges és vízszintes vetületi egyensúlyi egyenletekkel ellenőrizhető:

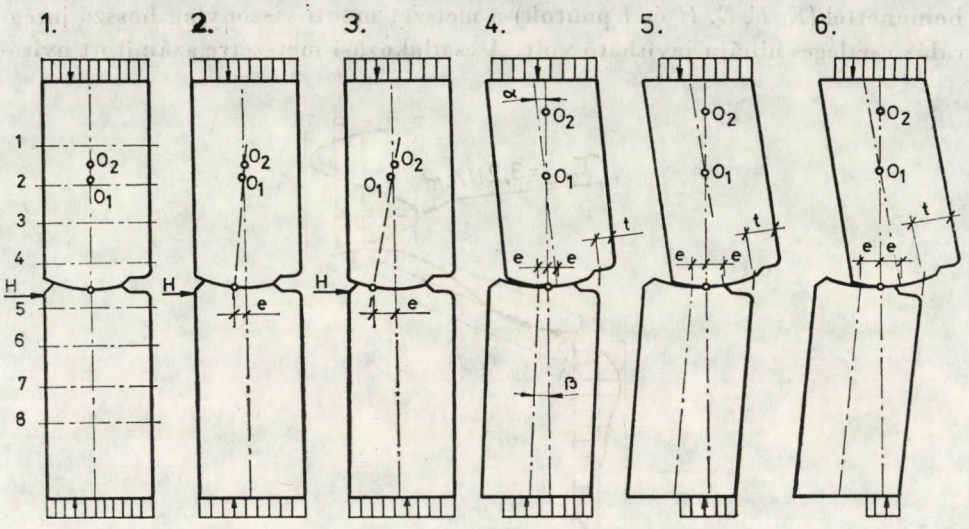
$$\sum_{i=1}^{3} \int_{0}^{s_i} (\sigma_{\perp} \sin \alpha_i + \tau_{||} \cos \alpha_i) \, \mathrm{d}t_i = 0 \,, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{0}^{s_i} (\sigma_{\perp} \cos \alpha_i - \tau_{||} \sin \alpha_i) \, \mathrm{d}t = \frac{Q}{2} \,, \tag{7}$$

ahol Q = a kerámiára jutó összteher.

A kísérleti eredmények alapján egyértelműen megállapíthatók voltak a vizsgált kapcsolat mechanikai igénybevétel hatására keletkező felnyílásra leginkább veszélyes helyei: azok a helyek, ahol jelentős nyírással egyidejű $\sigma_{\perp}$ húzó normálfeszültségek ébrednek. A 4. ábra az egyik modell $\tau_{||\perp}$ nyírófeszültség-eloszlását mutatja a vizsgált metszet mentén.

B) Egy másik kísérletsorozatban [2] azt kellett tisztázni, hogy előregyártott vasbeton tübingekből épülő alagútfalazatokban az egyes elemek csuklós csatlakozásánál fellépő szerelési pontatlanságok (külpontos elhelyezés, iránytörés) milyen mértékben befolyásolják a tübingvégek erőjátékát, illetve azt, hogy mekkora a tübingvégek gyakorlatban még megengedhető külpontossága.



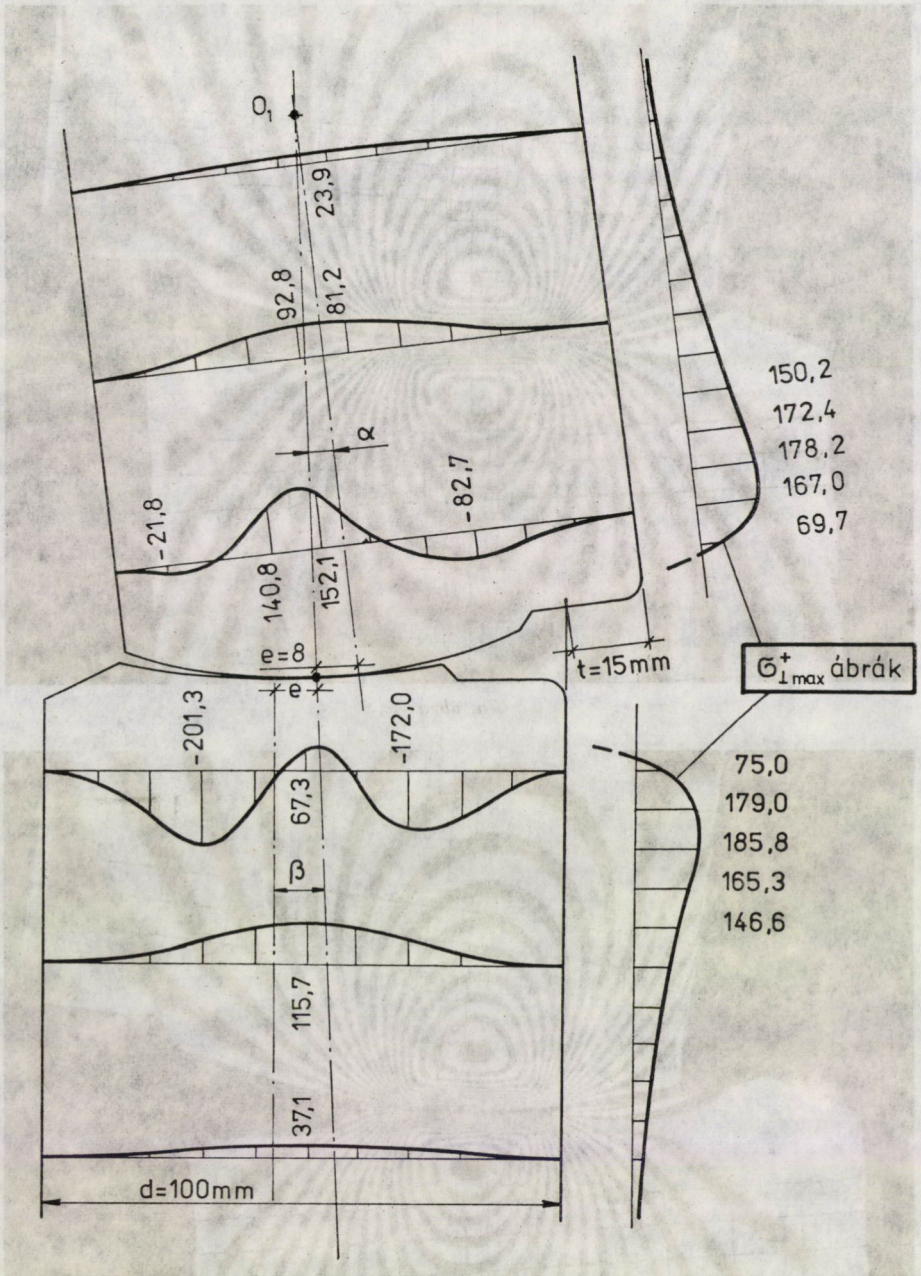
	2.	3.	4.	5.	6.
e = 0	13,5 mm	18,5 mm	8 mm	13,5 mm	18,5 mm
α = 0°	0,65°	0,93°	4,17°	7,05°	9,68°
β = 0°	0,65°	0,93°	2,78°	4,69°	6,44°
t = 0	0	0	15 mm	25 mm	35 mm

5. ábra

A kísérleti program egyik részeként hatféle tübingvég-csatlakozás síkbeli optikai feszültségvizsgálatára került sor (5. ábra). Az egyes modell-variánsok között a terhelő nyomóerő irányában, ill. a külpontosság mértékében volt eltérés. Mivel a tübingekre sugár irányban ható földnyomás modellezésére nem nyílt lehetőség, „kiegyenesített" tübingvégek vizsgálatára került sor.

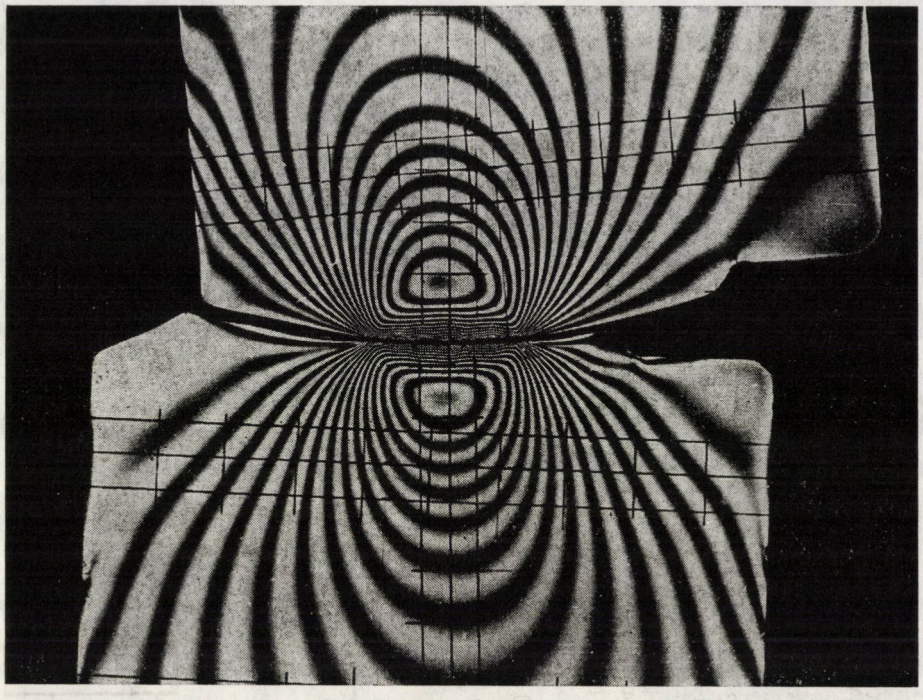
A tárcsák feszültségállapotának meghatározása itt is a nyírófeszültségkülönbségek módszerével történt, tübingenként négy-négy, a tübingtengelyre merőleges irányú, valamint egy-egy tengelyirányú metszet mentén. A keresztirányú metszetek szabad peremről indultak és szabad peremre futottak ki, tehát a végpontokban egyértelmű feszültségkontroll adódott. A hosszirányú metszetek így már négy-négy ismert feszültségállapotú ponton haladnak át. A tengelyirányú normálfeszültségek keresztirányú metszetek menti integrálja a tübingtengellyel párhuzamos nyomóerővel egyenlő:

$$v\int_0^d \sigma_{||}\, ds_{\perp} = N_{||}\,. \tag{8}$$

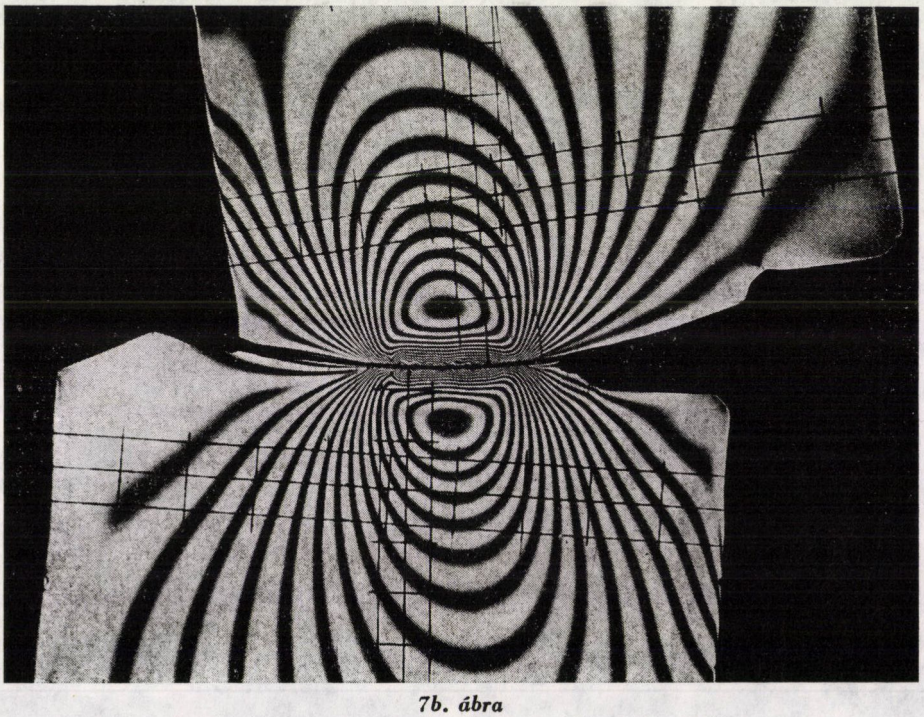


$\sigma_\perp$ keresztirányú normálfeszültségek [N/cm²]
4. modell. $P_m = 3{,}8$ kN

6. ábra



7a. ábra



7b. ábra

A tübingvég acélkengyelezésének megtervezése során igen fontos a tübingvégekre ható „felhasítóerő" nagyságának, ill. a keresztirányú húzófeszültség-maximumok hosszirányú eloszlásának ismerete. Ez a felhasítóerő a maximális keresztirányú húzófeszültségek hossztengely menti integráljaként számítható:

$$H = v \int \sigma^{+}_{\perp,\max} ds_{||} , \tag{9}$$

ahol v a modell vastagsága.

A 6. ábrán egy feszültségeloszlási részlet, a 7. ábrán két, különböző külpontosságú modell izokromátái láthatók.

Köszönetnyilvánítás

Az ismertetett feladatok megoldása során elvi irányítás és gyakorlati közreműködés formájában nyújtott segítségért szerző köszönetét fejezi ki Bruzsa László egy. docensnek, Dr. Müller Miklós egy. adjunktusnak, Dr. Nagy János okl. mérnöknek és Szittner Antal tud. főmunkatársnak.

IRODALOM

1. Bruzsa, L.—Köröndi, L.: Vázkerámia födémelemek erőjátékának vizsgálata síkbeli optikai feszültségméréssel. VII. Anyagvizsgáló Kongresszus, Budapest, 1978
2. Köröndi, L.—Szittner, A.: Feszültségeloszlás vizsgálata tübingcsukló környezetében. VII. Anyagvizsgáló Kongresszus, Budapest 1978

Applications of the shear stress difference method in optical stress measurement experiments. In reality the play of forces in mainly spatial load bearing structures and structural elements under certain conditions can be studied by means of experimental models in plane state of stress. In such cases often the optical stress measurement method, a rather special model test in strength science, is made use of. After discussing, in general, the so-called shear stress difference method, an efficient evaluation technique used in optical stress measurements, the paper reports on two practical applications in the field of building and tunnel constructions, respectively.

Einige Anwendungen der Methode der »Schubspannungs-Differenz« mit optischer Spannungsmessung. Unter gewissen Umständen kann das Kräftespiel von meistens räumlichen Tragkonstruktionen bzw. Konstruktionselementen an Versuchsmodellen untersucht werden, die sich im ebenen Spannungszustand befinden. In solchen Fällen ist es oft erforderlich, die in der Reihe der baustatischen Modellversuche einen besonderen Platz einnehmende optische Spannungsmessung anzuwenden. Nach der allgemeinen Behandlung der in der ebenen optischen Spannungsmessung gebräuchlichen Auswertungsmethode, der sog. Methode der »Schubspannungs-Differenz« sind zwei dem Hochbau bzw. dem Tunnelbau entnommenen praktischen Anwendungen dargestellt.

Несколько применений метода «разницы сдвигающего напряжения» при испытаниях фотоупругости. Работа пространственных несущих конструкций и их элементов при определённых условиях исследуется на моделях, находящихся в плоском напряжённом состоянии. В таких случаях часто применяется метод фотоупругости, имеющей специальное место среди модельных опытов сопротивления материалов. В статьи описана общая характеристика метода «разницы сдвигающего напряжения», одного из эффективных способов обработки измерительных результатов фотоупругости, и показаны два практических применения в области строения зданий и тоннелей.

A KÖTEGES VEZETŐKBEN ÉBREDŐ ZÁRLATI ERŐHATÁSOK VIZSGÁLATA*

LUDVIG GYŐZŐ**

A zárlati áram hatására a köteges vezetők sodronyai összecsapódnak, a térközök hossza látszólag megrövidül. Emiatt növekszik a vezetők húzóereje. Az áram melegítő hatására nyúlik a vezető és ez az erő csökkenését okozza. A dolgozat bemutatja a jelenségeket leíró differenciálegyenleteket és megoldásukat. A levezetett eredmények alapján egy számítógépi program készült, amely a zárlat kezdeti szakaszára jó tájékoztató eredményt ad.

1. Bevezetés

A villamosenergia – termelés egyre növekszik, és ez hatalmas távvezeték-rendszerekben jut el a fogyasztókhoz. Példa erre a most épülő 750 kV-os távvezeték, amely hazánkat a Szovjetunió energiarendszeréhez kapcsolja. A nagy teljesítmény miatt egy-egy fázis áramát 2—4 sodronyból álló vezeték köteg továbbítja. A köteg vezetőit meghatározott távolságban (amit térköznek nevezünk) merevítők kapcsolják egymáshoz. A köteges vezetők elrendezése (mint látni fogjuk) többféle lehet.

A villamos elosztó rendszerekben egy gyakorta előforduló nemkívánatos jelenség a zárlat.

Zárlatkor az üzemi áram többszöröse folyik a vezetőn. Emiatt a köteg sodronyai összecsapódnak és ez a vezetők, valamint a tartószerkezeteik (oszlopok) többletigénybevételét okozza. Erre már a távvezetékek tervezésekor gondolni kell.

A Villamosenergiaipari Kutató Intézet felkérte tanszékünket, hogy velük együttműködve dolgozzunk ki eljárást a köteges vezetők zárlati erőhatásának meghatározására. A következőkben — nagy vonalakban — ismertetjük az eddig elvégzett elméleti vizsgálataink eredményeit.

2. Az összecsapódás folyamatának vizsgálata

A köteges vezető párhuzamosan futó sodronyai, ha I[kA] erősségű áram folyik bennük, akkor p intenzitású megoszló erővel hatnak egymásra:

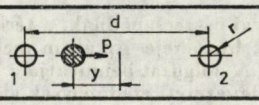
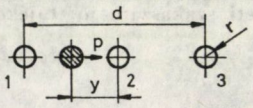
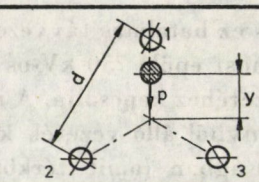
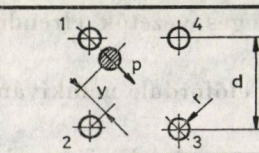
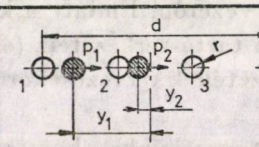
* A vizsgálat az ERŐTERV és a VEIKI közötti hosszútávú együttműködés részeként került kidolgozásra.

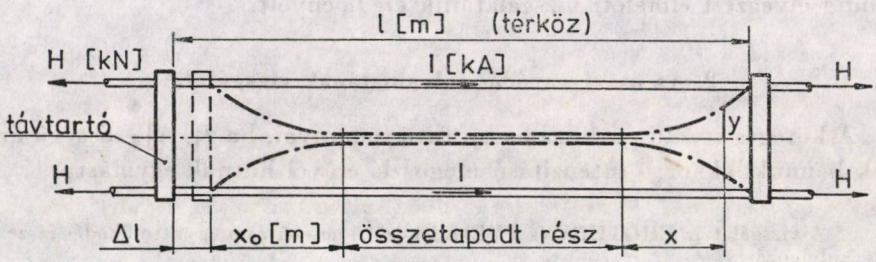
** Dr. Ludvig Győző, 1191 Budapest, Báthory u. 32.

$$p = \frac{I^2}{y} \cdot 100\, k \ [\mathrm{N/m}].$$

Az 1. melléklet megadja, hogy a különböző formájú kötegek esetében mekkora a k tényező értéke és y miként értelmezendő.

1. melléklet

A köteg elrendezése és jelölések		Geometriai adat y_{max} mm	Geometriai adat y_{min} mm	Geometriai adat $\eta = \frac{y_{max}}{y_{min}}$	p számításához k	I_{krit} számításához B
1.		$\frac{d}{2}$	r	$\frac{d}{2r}$	1	76,5
2.		$\frac{d}{2}$	2r	$\frac{d}{4r}$	3	44,2
3.		$\frac{d}{\sqrt{3}}$	$\frac{2r}{\sqrt{3}}$	$\frac{d}{2r}$	2	62,5
4.		$\frac{d}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}\,r$	$\frac{d}{2r}$	3	62,5
5.		$y_1 = \frac{d}{2}$ $y_2 = \frac{d}{6}$	$y_1 = 3r$ $y_2 = r$	$\frac{d}{6r}$	~5,4 ~0,6	32,9

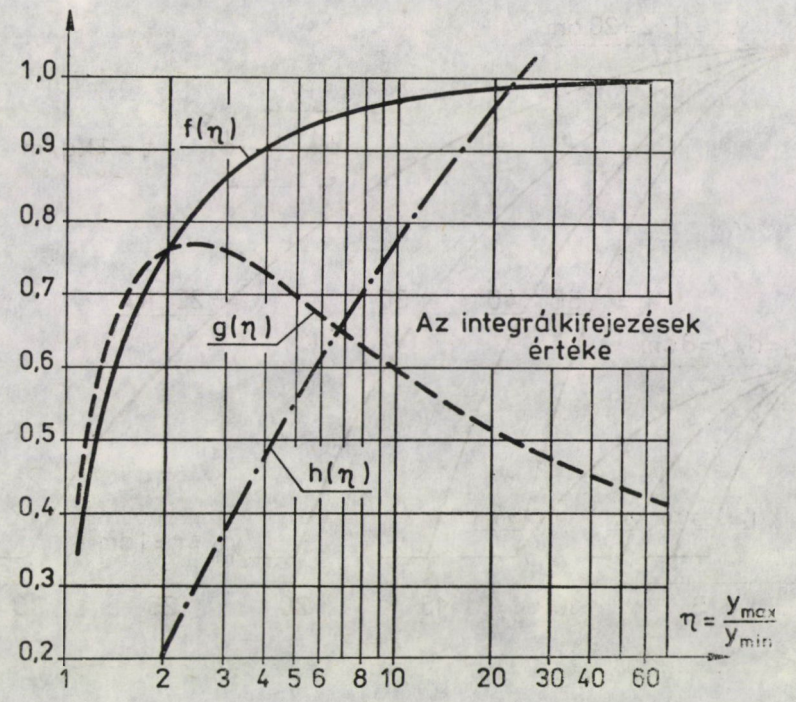


1. ábra

Az itt nem részletezett számításunk végeredménye szerint a zárlati áram kritikus értéke:

$$I_{krit} = B \frac{d}{l} \sqrt{H} \cdot 10^{-3} \text{ [kA]}.$$

Itt H [kN] egy sodrony húzóereje és l[m] a térköz hossza. A köteg formájától függő B tényező értékét és d értelmezését az 1. mellékleten közöljük.



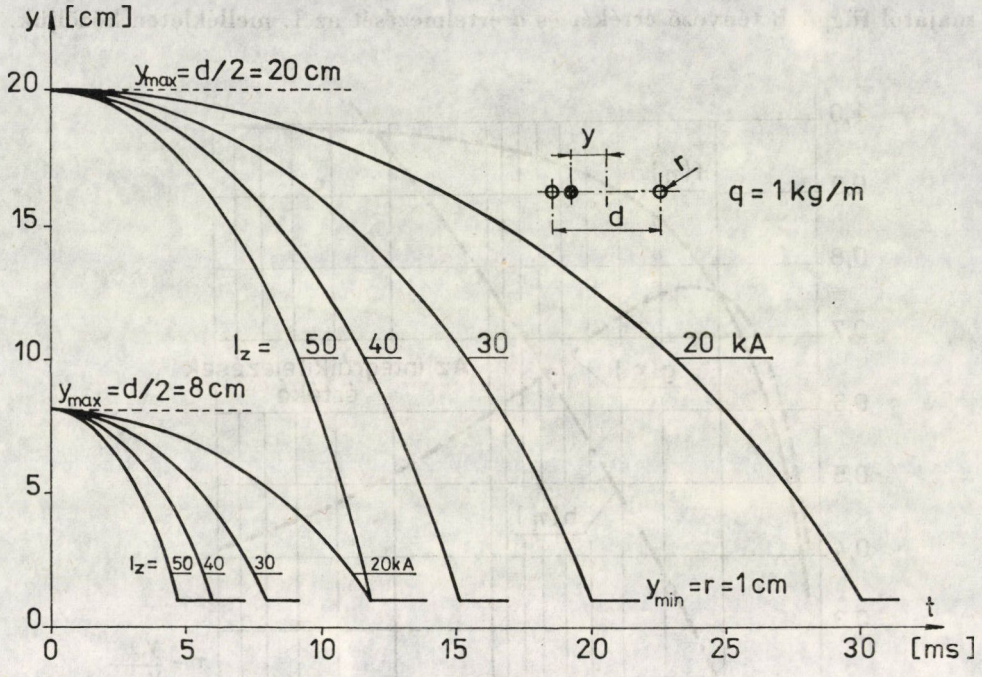
2. ábra

Ha a zárlat árama nagyobb, mint az előzőek szerint meghatározható I_{krit}, akkor a köteg sodronyai összecsapódnak és középső szakaszuk összetapad. Ezt az állapotot mutatja az 1. ábra. Az összecsapódás időbeli folyamatát a

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{kI^2}{q \cdot y} \cdot 10^5$$

differenciálegyenlet írja le. Itt q [kg/m] a sodrony vonalmenti sűrűsége. A differenciálegyenlet analitikus megoldásával meghatároztuk a zárlat kezdetétől a sodronyok összecsapódásáig eltelt időt. Ennek számító összefüggését a 2. mellékleten közöljük. Megjegyezzük, hogy a zárlati áram mindig tartalmaz egy jelentős egyenáramú összetevőt. Ezért — a gyakorlati számításokban — a zárlati áramot az effektív értékével megegyező egyenáramnak tekintik.

Az összecsapódás időbeli folyamatát leíró differenciálegyenletet a Műszaki Mechanikai Tanszék analóg számológépére programoztuk. Egy megoldássorozat eredményeit a 3. ábra szemlélteti. Ebből kitűnik, hogy a sodronyok összecsapódásáig eltelt idő 5—30 ms, ami a zárlatok szokásos időtartamához képest kicsi.



3. ábra

Az 1. ábra szerint a térközök végső (x_0 hosszúságú) szakaszain a távtartók miatt a sodronyok szétválnak egymástól. Meggörbült alakjuk meghatározására a következő differenciálegyenletet vezettük le:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k\frac{I^2}{H}\cdot\frac{100}{y}.$$

2. Melléklet

Az analitikus megoldás eredménye

1. Az összecsapódás ideje ms-ban:

$$t_0 = 3{,}963\,\frac{y_{max}}{I}\sqrt{\frac{q}{k}}\cdot f(\eta),\quad f(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u e^{-z^2}\,dz$$

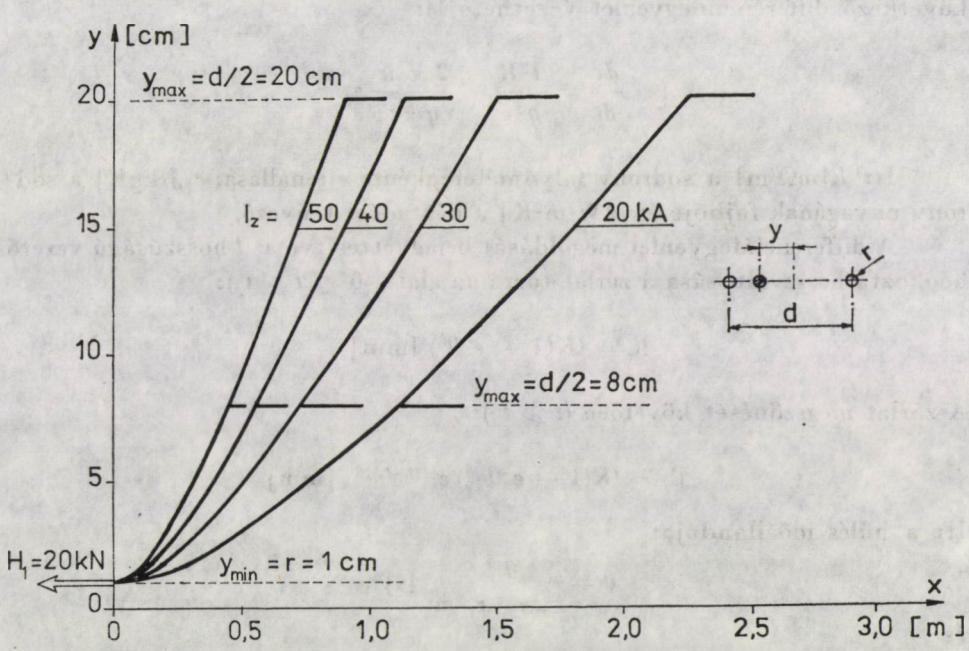
2. A sodronyok szétvált hossza m-ben:

$$x_0 = \frac{y_{max}}{I}\sqrt{\frac{H}{k}}\,g(\eta),\quad g(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\eta}\int_0^u e^{z^2}\,dz$$

3. A térköz látszólagos rövidülése mm-ben:

$$\Delta l = 0{,}02\, y_{max} \cdot I \sqrt{\frac{k}{H}}\, h(\eta), \quad h(\eta) = \frac{\sqrt{2}}{\eta} \int_0^u z^2 e^{z^2}\, dz$$

$$u = \sqrt{\ln \eta}\,; \eta = \frac{y_{max}}{y_{min}}.$$



4. ábra

E differenciálegyenlet analóg számológéppel végzett megoldásának eredményét a 4. ábra szemlélteti. A sodronyok szétvált x_0 hossza az analitikus számítással levezetett végképlettel is meghatározható (2. melléklet).

Vizsgálatunk ezen része a sodronyok rugalmas hosszváltozását nem veszi figyelembe (erre később kerül sor). Így a sodronyok összecsapódásakor a térköz hossza látszólag megrövidül (Δl az 1. ábrán). Erre is készült analóg gépes számítás, de a dolgozat korlátozott terjedelme csupán az analitikusan levezetett végképlet közlését engedi meg (2. melléklet). Az összecsapódás t_0 idejének és a térköz látszólagos rövidülésének gyors meghatározására egy-egy nomogramot készítettünk. Ezeknek közlését is kénytelenek vagyunk mellőzni. A korlátozott terjedelme miatt arra sincs mód, hogy a közös síkban fekvő 3 és 4 sodronyos elrendezés esetén alkalmazandó korrekciós számítást bemutassuk.

A 2. melléklet képleteiben szereplő integrál kifejezések értéke az $\eta = y_{max}/y_{min}$ aránytól függ. Az EMG 666 típusú számológéppel meghatározott értéküket a 2. ábra diagramján közöljük.

3. A vezetők melegedésének hatása

A zarlát tartama alatt az áram melegíti a vezetőt. Emiatt az megnyúlik. A zárlat megszűnését követően hőleadás történik, így a hőokozta nyúlás csökken. A vezető környezetéhez viszonyított τ hőmérsékletének számítására a következő differenciálegyenlet vezethető le:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{I^2 R}{q \cdot c} - \frac{2r\pi \cdot u}{q \cdot c}\,\tau .$$

Itt R[mΩ/m] a sodrony folyóméterenkénti ellenállása; c[J/kgK] a sodrony anyagának fajhője és μ[W/m²K] a hőátadási tényező.

A differenciálegyenlet megoldását behelyettesítve az l hosszúságú vezető hőokozta hosszváltozása a zárlat tartama alatt ($0 \leq t \leq t_z$):

$$\Delta l_\tau = lK(1 - e^{-t/\vartheta}) \text{ [mm]}$$

A zárlat megszűnését követően ($t > t_z$):

$$\Delta l_\tau = lK(1 - e^{-t_z/\vartheta})\, e^{-(t-t_z)/\vartheta} \text{ [mm]}$$

Itt a hűlés időállandója:

$$\vartheta = \frac{q \cdot c}{2\pi \cdot r \cdot u} \text{ [s]} ,$$

és

$$K = 10^3 \frac{\alpha \cdot I^2 \cdot R}{2\pi \cdot r \cdot u} \text{ [mm/m]}$$

α a sodrony anyagának hőtágulási együtthatója.

4. A vezetékrendszer rugóállandóinak meghatározása

Zárlatkor — a sodronyok összecsapódásának következményeként — az l hosszúságú térköz látszólag megrövidül, míg a melegedés hatására megnyúlik. Ha az oszlopköz n darab egyforma térközből áll, akkor a vezető húzóerejének megváltozását okozó hosszváltozás:

$$\Delta = n(\Delta l - \Delta l_\tau).$$

Ha a vezetékrendszer eredő rugóállandóját c_{er}-rel jelöljük, akkor a sodrony húzóerejének megváltozása:

$$\Delta H = \frac{\Delta}{c_{er}} .$$

Az eredő rugóállandó a következő — sorba kapcsolt — részekből áll:

a) Az l [m] hosszúságú, A [mm^2] keresztmetszetű, E [GPa] rugalmassági modulusú sodronyra

$$c_l = 10^3 \frac{l}{AE} \, [\mu\text{m/N}] .$$

b) A köteg vezetői a zárlatot követően összetapadnak. Ha a húzóerő növekszik, akkor az összetapadt rész hossza és ezzel a látszólagos nyúlás is csökken. A 2. mellékleten közölt kifejezés differenciálásával

$$c_t = -\frac{\partial \Delta l}{\partial H} = \frac{\Delta l}{2H} \, [\mu\text{m/N}] .$$

A zárlat megszűnését követően $c_t = 0$.

c) A húzóerő megnövekedése esetében az $a = nl$ hosszúságú oszlopközben kifeszített vezetők belógása csökken. Az ívhossz megváltozása alapján a rugóállandóra a következő közelítő összefüggés vezethető le:

$$c_b = \frac{q^2 g^2 \cdot a^3}{12\,000 \cdot H^3} \, [\mu\text{m/N}] .$$

d) A vezetők tartószerkezetének (oszlop) rugóállandója külön számítandó, és egy vezetőre kell vonatkoztatni:

$$c_0 \; [\mu\text{m/N}].$$

A vezetékrendszer eredő rugóállandója egyforma oszlopok esetén:

$$c_{er} = n(c_l + c_t) + c_b + 2c_0.$$

5. A zárlati erőhatás számító programja

Az előzőekben ismertetett összefüggések alapján számító programot készítettünk a tanszék EMG 666 típusú digitális számítógépére. A gép először beolvassa a kérdéses távvezeték adatait, majd a zárlatra vonatkozó információkat, végül kinyomtatja egy kiválasztott időponthoz tartozó húzóerő értékét. A számító program a zárlat kezdeti szakaszára jó tájékoztató eredményt ad. Hosszú idejű zárlat esetében a hőokozta nyúlás nagy, és így érvényét veszti az a linearizáló feltételezés, amelynek alapján a belógó vezető rugóállandóját meghatároztuk.

A kísérletek során megfigyelték, hogy a hirtelen melegedés hatására a vezetők húzóereje egy rövid időtartamra zérusra csökken. Ekkor a vezető részei a szabadesés gyorsulásával mozognak lefelé, mindaddig, amíg a sodronyok újra megfeszülnek. Ezt a folyamatot — a vizsgálat második szakaszában — analóg számológépes modellezéssel fogjuk elemezni.

Examination of short current effects in bunched conductors. Upon the effect of a short current the wires of bunched cables would impact one another and their spacings might be virtually reduced, whereby their tensile strength could increase. However, by the heating action of the current the leads would strain which, in turn, would decrease this force. The paper presents the differential equations describing these phenomena, and their solution. Based on the results derived, a computer program could be composed which gives satisfactory informative data on the initial stage of the short.

Untersuchung der in Bündelleitern auftretenden Kraftwirkungen infolge von Kurzschluß. Infolge des Kurzschlußstromes schlagen die Seile der Bündelleiter zusammen und scheinbar vermindern sich Abstände. Infolgedessen nimmt die Zugkraft der Leiter zu, während die Wärmewirkung des Stromes die Dehnung des Leiters verursacht, was die Verminderung dieser Kraft zur Folge hat. Der Aufsatz enthält die, diese Erscheinungen beschreibenden Differentialgleichungen und ihre Lösung. Auf Grund der abgeleiteten Ergebnisse wurde ein Rechenmaschinenprogramm aufgestellt, das für die Anfangsphase des Kurzschlußes gute Ergebnisse liefert.

Исследование сил замыкания, пораждающихся в расщепленной линии. Под действием тока замыкания жгуты расщепленных линий сбиваются, длина отступов с виду уменьшается. Из-за этого увеличивается сила тяги проводов. Под нагревающим действием тока провод удлиняется и это уменьшает силу тяги. В статье рассматриваются дифференциальные уравнения, описывающие явление и дается их решение. На основе результатов была написана программа для ЭВМ, которая дает хорошие справочные результаты для начального периода замыкания.

KOMBINÁLT TALAJMODELLEN ALAPULÓ SZÁMÍTÁSI ELJÁRÁS ALKALMAZÁSA ALAPGERENDÁK TERVEZÉSÉHEZ

MARCZAL LÁSZLÓ*—SOLTÉSZ PÉTER**—JANCSECZ SÁNDOR***

Ez a cikk az alapgerendák méretezésére használt eljárások rövid áttekintése után a Repnikov-módszeren alapuló számítást ismerteti részletesen. Az ágyazási tényező és rugalmas féltér kombinációján alapuló eljárás talajfizikai magyarázata után a matematikai modell ismertetése következik. Az egyenletrendszer felírása alapján program készült egy HP 9830 A típusú gépre, amelynek segítségével lehetővé vált a talajfizikai jellemzők, valamint az épület adatainak változtatásával a talpfeszültségeloszlás, a rugalmas vonal- és a nyomatéki igénybevétel tanulmányozása. Befejezésül a cikk néhány ábrát közöl, amelyeken a fent említett változások jól követhetők.

1. A gyakorlatban eddig alkalmazott eljárások

A rugalmas tartónak tekintett alapgerenda tervezésekor a legfontosabb feladat az ismert terhelés következtében a tartó alatt keletkező feszültségek (ún. talpfeszültségek) eloszlásának meghatározása. E talpfeszültség-eloszlás ismeretében a tartó süllyedési és nyomatéki igénybevétele már egyszerűen számolhatók.

A talpfeszültségek számításakor alkalmazott talajmodellek egészen a legutóbbi évtizedig két lényegesen eltérő csoportra oszlottak. Míg az egyik modell a talajt rugók sorozatából álló ún. rugalmas ágyazatnak tekinti, addig a második modelltípusban a talaj mint rugalmas — és általában homogén, izotrop féltér szerepel. Az említett modelleken alapuló számítási eljárások igen ismertek, így csak az alapgondolatok vázlatos bemutatására és néhány kritikai észrevételre szorítkozunk, melyek egyben indokolják az ún. kombinált talajmodellek alkalmazását.

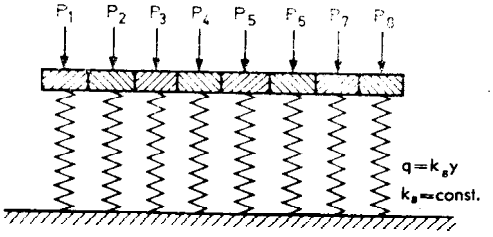
A rugalmas ágyazat modelljét (1. ábra) először WINKLER és ZIMMERMANN alkalmazták, feltételezve, hogy az adott pontban bekövetkező süllyedés arányos az ott működő talpfeszültség értékével:

$$y = \alpha \cdot p = \frac{p}{k_s} .$$

* Dr. Marczal László, 1023 Bp., Apostol u. 13/c.
** Dr. Soltész Péter, 1083 Bp., Tömő u. B/1.
*** Jancsecz Sándor, 1031 Bp., Sóvári u. 36.

Itt a $k_s = 1/\alpha$ állandót nevezték el ágyazási tényezőnek. Ezen egyenlet és a tartó ismert differenciálegyenletének együttes megoldása adta a talpfeszültségeket és a süllyedéseket. Az eljárás továbbfejlesztésének egyik fő irányát az jelentette, hogy a k_s ágyazási tényezőt a hely függvényében változóként vették fel. Így sem küszöbölhető ki azonban a modell alapvető hiányossága, nevezetesen az, hogy a szomszédos elemek (rugók) kölcsönhatásának figyelembevételére nincs lehetőség.

A rugalmas féltér-modellre alapuló eljárások a rugalmasságtan ún. Boussinesque-féle képletein alapulnak, amelyek adott rugalmassági modulusú



1. ábra. Az ágyazási tényezők számítás modellje

és Poisson-tényezőjű talaj süllyedéseinek számítására alkalmazhatók. Noha ezek az eljárások a süllyedéseket nemcsak a közvetlen vizsgált pont terhelése alapján, hanem a teljes terhelt felület figyelembevételével, az egymásrahatás alapján határozzák meg (2. ábra), mégis a rugalmasságtanban adódó végtelen nagy feszültségértékek és egyéb, a tapasztalattól élesen elütő jelenségek a modell lényeges hiányosságait mutatják. E modell alkalmazásakor a számítások technikai kivitelezése szempontjából adnak lényegesen eltérő eljárást pl. a tartót finitizáló Ohde-módszer, vagy a talpfeszültségeket hatványsor, illetve polinom formájában kereső Gorbunov-Poszadov eljárás.

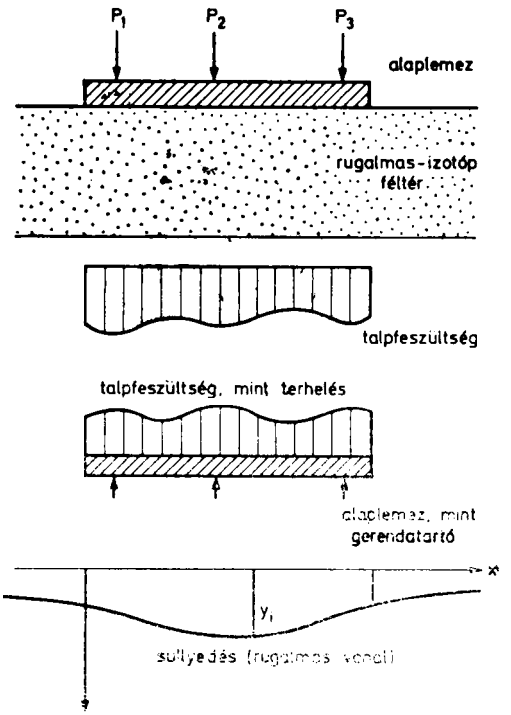
Elsősorban a különböző terhelési pontok kölcsönhatásának, tehát a talaj nyírással, csavarással szemben mutatott ellenállásának figyelembevétele céljából fejlesztette ki PASTERNAK az ún. két-ágyazási tényezős eljárást. Itt az első tényező a talaj függőleges visszahatását jellemzi w elmozdulásra,

$$\sigma = C_1 w,$$

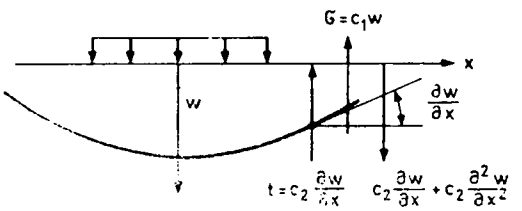
míg a C_1-től független C_2 konstans az elnyíródásból adódó talajreakciót jellemzi (3. ábra):

$$t = c_2 \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Általános vélemény, hogy a kombinált eljárások megjelenéséig talán PASTERNAK modellje közelítette meg legjobban a valóságot.



2. ábra. A rugalmas féltéren alapuló számítás



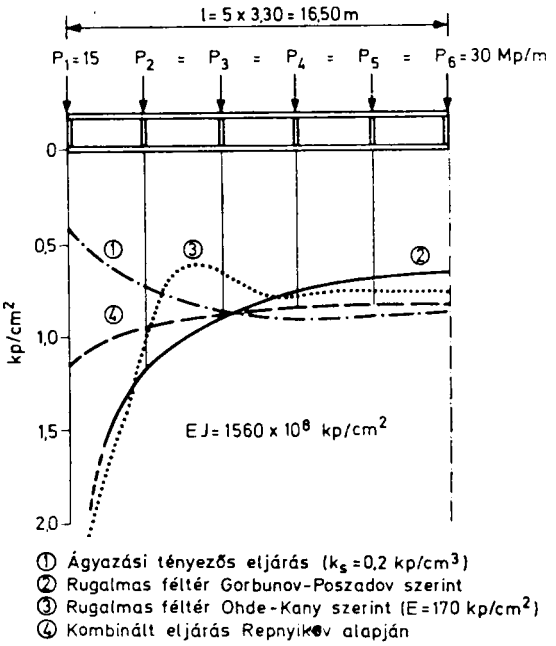
3. ábra. Modell Pasternak számítási eljárásához

2. Repnikov kombinált modellje

2.1 A mechanikai modell bemutatása

Repnikov alapfeltevésében a talajt részben rugalmas (rugós) ágyazatnak, részben pedig rugalmas féltérnek tekinti, azaz modellje az eddig használt két fő talajmodell párhuzamos kapcsolásának tekinthető. A talajra jutó terhelés eszerint két részére oszlik: az egyik rész az ágyazat rugóit terheli λp, a másik $(1 - \lambda)p$ nagyságú része pedig a rugalmas féltérre jut. A λ arány értéke rugalmas tartó esetén a hely függvénye, és meghatározása azáltal válik lehetővé, hogy a részterhelések hatására az egyes ágyazati elemeken bekövetkező süllyedéseknek meg kell egyezniük.

Az ágyazati elemek együtthatóit ismertnek tételezi fel az eljárás. Ezek meghatározási lehetőségeire most nem térhetünk ki. Célunk volt a REPNIKOV által vázlatosan megadott eljárás konkrét esetekre való alkalmazásának kidolgozása, az eredmények értékelése és azok összevetése a hagyományos módszerekkel adódó eredményekkel. Az alábbiakban vázolandó eljárás számítógépes kezelésével kapott eredményeink illusztrálására a 4. ábrán egy ötszintes panelház alapgerendája alatt fellépő talpfeszültségeket mutatjuk be négyféle eljárás szerint. A legelfogadhatóbb a Repnikov-elv alapján számolt eloszlás.



4. ábra. Talpfeszültségeloszlások a különféle számítási eljárások szerint

A matematikai modell bemutatása előtt megemlítjük, hogy eltérő fizikai alapfeltevésekből kiindulva jutott ugyanehhez a talajmodellhez GIBSON. Feltevése szerint a talaj rugalmas féltér, melynek rugalmassági modulusa egy állandó E_{t0} értékről indulva a mélységgel lineárisan nő:

$$E(z) = E_{t0} + 3mz.$$

3 m a növekedés mértéke. Feltéve még, hogy a talaj Poisson-tényezője 0,5, a rugalmassági egyenletek megoldásával megmutatta, hogy modellje ekvivalens egy $k_s = 2$ m ágyazási tényezős rugalmas ágyazatból és egy E_{t0} rugalmassági modulusú rugalmas féltérből álló kombinált modellel. Ez éppen REPNIKOV modellje.

A számítási eredmények mellett ez az első pillanatra meghökkentő egybeesés is arra utal, hogy a kombinált modell alkalmazása a rugalmasan ágyazott tartók számításának elméletében új szintet jelent.

2.2 A módszer matematikai modellje

Noha a módszert különböző típusú terhelések figyelembevételére is átalakítottuk, most csak az egyenletes terhelés esetét vizsgáljuk. Legyen tehát az egyenletes terhelés F_0 (kp/cm²).

A módszer az ismeretlen talpfeszültség-függvényt a Gorbunov – Poszadov eljáráshoz hasonlóan polinom alakban keresi. (A polinom fokszáma jelen esetben 6):

$$q = b_0 + b_2\xi^2 + b_4\xi^4 + b_6\xi^6. \tag{1}$$

(Itt $\xi = x/l$ a dimenzió nélküli koordináta.)
E feszültségpolinom együtthatóinak segítségével felírható a tartó relatív behajlása.

$$y - y_0 = \frac{l^4}{A}\left[\frac{M_0}{2l^2}\xi^2 + \frac{b_0 - F_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\xi^4 + \frac{b_2}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\xi^6\right]. \tag{2}$$

Itt y_0 — a tartó középpontjának ($\xi = 0$) elmozdulása
A — a tartó merevsége, mely gerenda esetén $E_1 I/B$, lemez esetén pedig $E_1 I/[B(1-\mu_1^2)]$
B — a tartó szélessége
μ_1 — a tartó Poisson-tényezője
M_0 — a tartó középpontjában ébredő nyomaték, melyre

$$M_0 = l^2\left[\frac{b_0 - F_0}{2} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_4}{6} + \frac{b_6}{8}\right]. \tag{3}$$

Repnikov modelljének alapgondolata értelmében a q talpfeszültség megoszlik a Winkler-ágyazaton és a rugalmas félsíkon. E megoszlás aránya előre nem ismert, és függvénye a helynek. Ezért a rugalmas félsíkra eső részt újabb ismeretlen együtthatós polinom alakjában keressük:

$$q_E = a_0 + a_2\xi^2 + a_4\xi^4 + a_6\xi^6. \tag{4}$$

Célunk az $a_{0,\ 2,\ 4,\ 6}$ együtthatók meghatározása. A rugalmas félsíknak a (4) talpfeszültség hatására bekövetkező felszínsüllyedése abszolút értékben nem írható fel. A viszonylagos elmozdulások azonban egy határozatlan állandó erejéig felírhatók — pl. az ismert Flamant-formula integrálásaiból. A képleteket összetettségük miatt nem közöljük, annál inkább, mert az eljárás az elmozdulásokat is polinom formában kívánja meg. Ennek érdekében tehát az integrálások után adódó meglehetősen összetett süllyedésfüggvény polinommal közelítendő. Ezzel egyidejűleg itt nem elegendő a viszonylagos elmozdulás, abszolút érté-

kekre van szükség. Ez megkapható pl. ha a felszínsüllyedést a tartó végétől kifelé $l/2$ távolságra ($\xi = 1{,}5$) zérusnak írjuk elő.

E technikai lépéseket nem részletezve a (4) feszültség által előidézett süllyedés a következő formában írható:

$$v = \frac{4l(1-\mu^2_{t0}}{\pi E_{j0}} \left[m_0(a_i) + m_2(a_i)\,\xi^2 + m_4(a_i)\,\xi^4 + m_6(a_i)\,\xi^6\right]. \tag{5}$$

Itt tehát az $m_{0,\ 2,\ 4,\ 6}$ kifejezések már az $a_i - k$ ismert függvényei, μ_{t0}, E_{t0} a rugalmas közeg paraméterei.

Az (5) formula süllyedésfüggvénye meg kell egyezzék a Winkler-ágyazat süllyedéseivel, amit az erre a komponensre jutó $q_k = q - q_E$ feszültség idéz elő. Ha tehát k a Winkler-ágyazat ágyazási tényezője, akkor

$$q_k = -k\,v\,,$$

$$q_k = -k'm_0(a_i) - k'm_2(a_i)\,\xi^2 - k'm_4(a_i)\,\xi^4 - k'm_6(a_i)\,\xi^6\,, \tag{6}$$

ahol

$$k' = k\,\frac{4l(1-\mu^2_{t0})}{\pi E_{t0}}\,.$$

Végül a $q = q_E + q_k$ egyenlőségben az azonos hatványú tagok együtthatóinak összevetéséből

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 - k'\,m_0\cdot(a_i),\\ b_2 &= a_2 - k'\,m_2\cdot(a_i),\\ b_4 &= a_4 - k'\,m_4\cdot(a_i),\\ b_6 &= a_6 - k'\,m_6\cdot(a_i). \end{aligned} \tag{7}$$

Így minden ismeretlent az a_i ismeretlenekkel fejeztünk ki. Ezek számára négy egyenletet kell megadni. Egy egyenlet adódik a tartó statikai egyensúlyából:

$$\int_0^1 (a_0 + a_2\xi^2 + a_4\xi^4 + a_6\xi^6)\,d\xi - k' \int_0^1 \times$$

$$\times \left[m_0(a_i) + m_2(a_i)\,\xi^2 + m_4(a_i)\,\xi^4 + m_6(a_i)\,\xi^6\right] d\xi = F_0.$$

A további három egyenletet úgy kapjuk, ha a tartó (2) alatti relatív elmozdulásait egyenlővé tesszük a talajfelszín (5) szerinti horpadásával:

$$y - y_0 = v - v_0\,.$$

E két polinom megyegyezéséhez az szükséges, hogy minden ξ-hatvány együtthatója megegyezzék. Ez ad három egyenletet az a_i értékekre, ugyanis a b_i, M_0

ismeretlenek (3), ill. (7) szerint kifejezhetők az a_i értékekkel. Az egyenletrendszer megoldása után visszafelé haladva a képleteken megkapható minden kívánt változó.

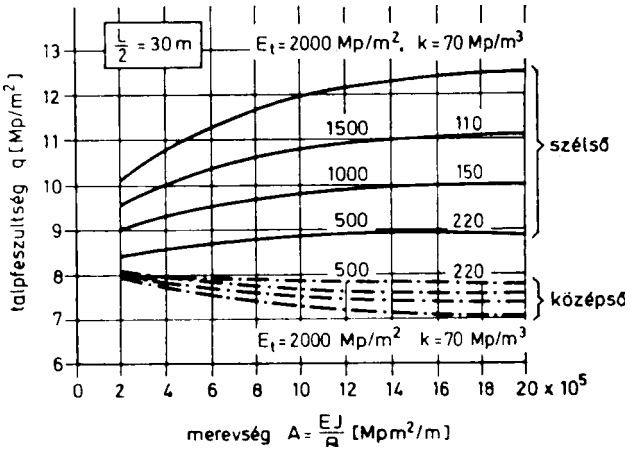
3. A számítás gyakorlati végrehajtása, az eredmények értékelése

A matematikai modell alapján programot készítettünk egy Hewlett—Packard 9830 A típ. számítógépre és a tervezési gyakorlatban előforduló esetekre vizsgáltuk a talpfeszültség-eloszlás, rugalmas vonal és a nyomatéki igénybevétel változását.

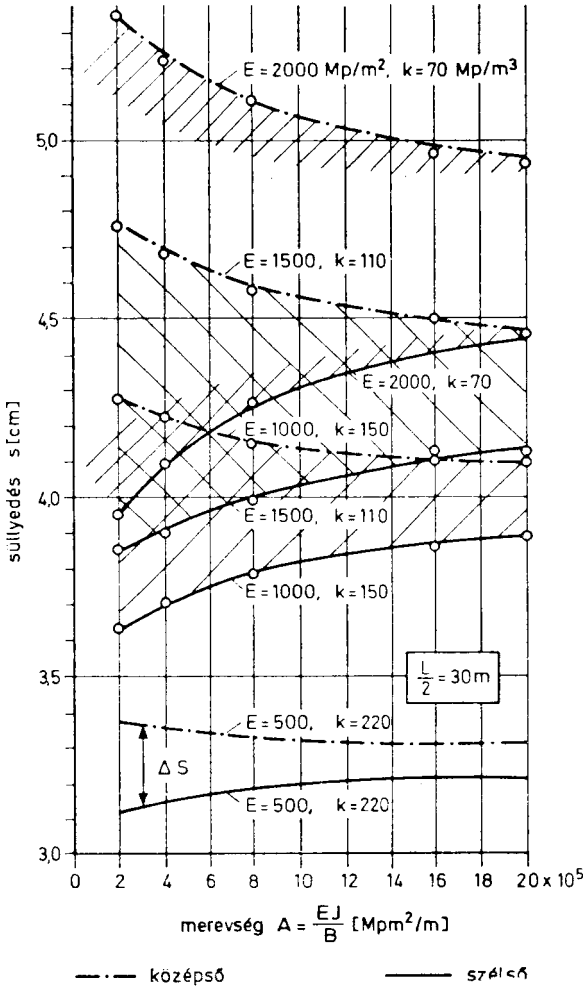
Az 5. ábra a talpfeszültségek alakulását mutatja a merevségi szám függvényében. Az egyes görbék különböző talajjellemzők szerint válnak szét. Legerősebb a változás akkor, ha a rugalmas féltérre jellemző E_{t0} érték a legnagyobb. Ekkor a szélső és középső talpfeszültségérték aránya a legmerevebb alapozású épületnél eléri az 1,8-as értéket.

Csökken a talpfeszültségben mutatkozó egyenetlenség a merevség csökkenésével, akár a talaj, akár az épület merevségét vesszük alapul. Érdemes viszont megjegyezni, hogy a talaj rugalmas alakváltozási jellemzői sokkal jobban befolyásolják a talpfeszültséget, mint az épület minősége. Az 5. ábrán pl. az épület merevségének $^1/_4$ részére kellett csökkenni ahhoz, hogy a talpfeszültség $p = 12{,}5$ Mp/m²-ről 11,0 Mp/m²-re csökkenjen. Ugyanazt az értéket kapjuk akkor is, ha a merevség változatlan, de a talaj E_{t0}- modulusa 2000 Mp/m²-ről 1500 Mp/m²-re csökken, vagyis eredeti értékéhez képest 25%-kal csökkent.

Mindez arra figyelmeztet, hogy a talajjellemzők pontosabb és megbízhatóbb meghatározására nagyobb súlyt kell fektetni.



5. ábra. Talpfeszültségek alakulása a merevség függvényében

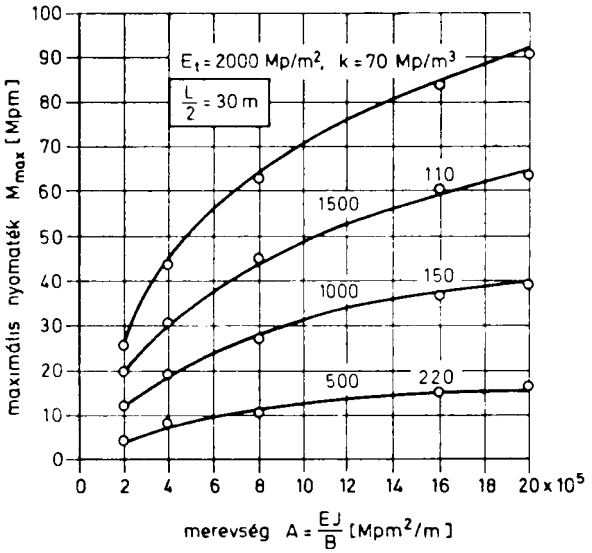


6. ábra. Az alapgerenda süllyedési vonalának alakulása a merevség függvényében

A 6. ábra a besüllyedéseket ábrázolja hasonló paraméterek függvényében. Vizsgáljuk először az épületmerevség hatását. A külső és középső besüllyedések közti különbség, ami meghatározza a tartó görbületét a merevség csökkenésével egyre nagyobb lesz. Az ábra alapján tulajdonképpen meghatározható, meddig szabad az alapozás szempontjából mértékadó merevséget csökkenteni, hogy ne lépjük túl a kritikus áthajlási, ill. görbületi sugárértékeket.

Az ábra kapcsán újra hangsúlyozni kell a talajtól való függőség döntő szerepét. A talajjellemzők függvényében a süllyedés változása jóval nagyobb, mint a szerkezeti merevségből adódó változás.

A 7. ábra a tartóra ható maximális nyomaték változását szemlélteti. Itt már nagyobb szerephez jut a tartó merevsége. Ha pl. a merevség a negyedére csökken, a nyomatékban tapasztalt csökkenés jelentős, az eredetinek kb. a felére csökken az igénybevétel. Továbbra is fennáll a talajjellemzők változásának jelentős hatása, a változás csaknem lineáris. Ez utóbbi megállapítás persze nem vezethet arra, hogy a talaj tulajdonságait valamiféleképpen befolyásolni lehetne, csupán a pontos meghatározás jelentőségét hangsúlyozza.



7. ábra. A nyomatéki igénybevétel alakulása a merevség függvényében

A 8. ábra tulajdonképpen az épület méreteinek hatását érzékelteti. Itt állandó talajjellemzők és adott épületmerevség esetében vizsgáltuk a változást.

$$E_{t0} = 1500 \text{ Mp/m}^2$$

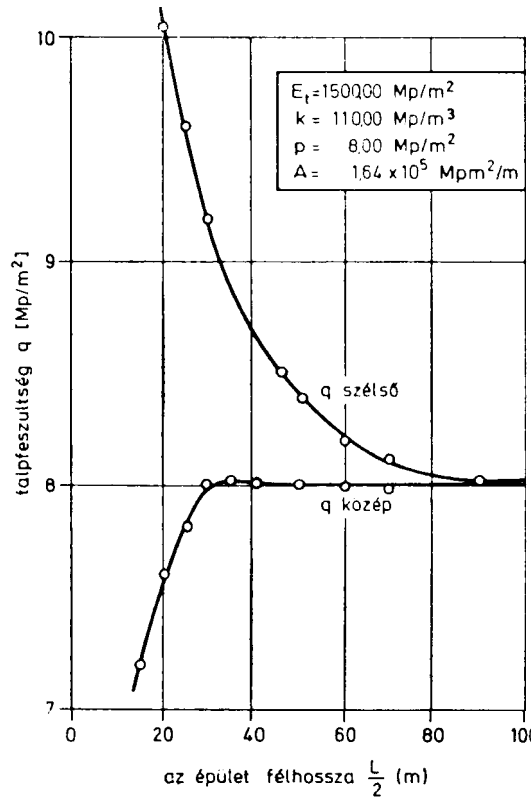
$$k_s = 110 \text{ Mp/m}^3$$

$$A = 1{,}64 \times 10^6 \text{ Mpm}^2\text{/m}$$

adatok mellett jól látható, hogy az *épület hosszának* növekedésével a talpfeszültség $l = 90{,}0$ m, vagyis $2 \cdot l = 180$ m hossz esetében már teljesen egyenletes a talpfeszültség, függetlenül a talaj jellemzőitől.

Végeredményben megállapítható, hogy a számítási eljárás jól alkalmazható a tervezői gyakorlatban. A bemutatott görbék értékes tájékoztatást adnak egyrészt a tervezés fejlesztési szempontjaihoz, másrészt az adatszolgáltatási megbízhatóság fokozására.

Megjegyezzük, hogy a kombinált modellek elméletének továbbfejlesztésében és a modellekhez tartozó ágyazati paraméterek kísérleti meghatározásában szovjet kutatók értek el újabb eredményeket. (PRAHIMOV, UVAROV, BARVASOV.)



8. ábra. A talpfeszültségek alakulása az épület hosszának növekedésével

IRODALOM

1. BARVASOV, B. A.: Kombinirovannüe modeli gruntovovo osznovanija. *Oszn., Fund. i Meh. gruntov*, 1976/1
2. GIBSON, R. E.: Some results concerning Displacements and Stresses in a Non-Homogeneous Elastic Half-Space. *Geotechnique* **17.** (1967), 58—67
3. GIBSON, R. E.: The analytical method in soil mechanics *Geotechnique* **24.** (1974), 115—140
4. GORBUNOV—POSZADOV, M. I.: Raszcset konsztrukcij na uprugom osznovanii. Goszudarsztvennoje Izdatelsztvo literaturü po Sztroitelsztvu i arhitekture, Moszkva 1953
5. Internationales Symposium vom 1 bis 3. November, 1972 Dresden: Sahldruckverteilung unter Flächengründungen bei besonderer Berücksichtigung der Bauwerkssteifigkeit.
6. RAHIMOV, Sz.—REPNIKOV, L. N.: Metod opredelenija deformacionnüh karakterisztik uprugovo osznovanyija, szovmescsajuscsevo uprugoe poluprosztransztvo i osznovanii Winklera. *Oszn. Fund. i. Meh. gruntov*, 1971/4
7. REPNIKOV, L. N.: Raszcset balok na uprugom osznovanyii, objedinjajuscsem deformativnüe szvojsztva osznovanija Winklera i linejno-deformiruemoj szredü. *Oszn. Fund. i Mech gruntov*, 1967/6

8. SCHULTZE, E.: Die Kombination von Bettungszahl- und steifezahlverfahren. *Mitteilungen aus dem Institut für VGB der Technischen Hochschule Aachen*, (1970), Heft 48
9. UVAROV, B. V.: O raszcsete balok na nelinejno deformiruemom osznovanii, predsztavlennom kombinirovannoj modelju. *Oszn. Fund. i Meh. gruntov*, 1971/4

Application of a calculation method based on a combined soil sample for designing foundation beams. After a short survey of the procedures used for the calculation of foundation beams, the calculation based on Repnikov's method is detailed. After explaining, on soil physical basis, the procedure based on the combination of the coefficient of subgrade reaction and of the elastic half-space, the mathematical model will be described. Starting by establishing the set of equations, a program has been established for the application to the computer, type HP 9830 A, which permitted to study the soil's physical characteristics; by changing the building dimensions, the distribution of the base pressure, the elastic line and the stress due to the acting moment may also be studied. Finally some figures are presented in which the changes mentioned above may readily be followed.

Anwendung eines Berechnungsverfahrens aufgrund eines kombinierten Modells zum Entwurf von Fundamententrägern. Nach einer kurzen Übersicht der zur Bemessung von Fundamentträgern benutzten Verfahren wird die Berechnung nach der Repnikovschen Methode ausführlich dargelegt. Nach der bodenphysischen Erklärung des auf der Kombination der Bettungsziffer und des elastischen Halbraums basierten Verfahrens, folgt die Beschreibung des mathematischen Modells. Nach der Ableitung des Gleichungssystems wurde ein Programm für den Rechenautomat Typ HP 9830 A aufgestellt, mit dessen Hilfe die bodenphysischen Kennwerte, und durch die Änderung der Angaben des Gebäudes, die Spannungsverteilung, die elastische Linie und die Momentenbeanspruchung untersucht werden können. Schließlich sind einige Beispiele vorgeführt, an welchen die obenerwähnten Änderungen leicht verfolgt werden können.

Применение комбинированного расчета для проектирования балок, помещенных на поверхности грунта. После короткого обзора разных методов расчета гибких балок на упругом основании, в статье рассматривается более подробно вычислительный метод, основанный на модели Л. Н. Репникова. Комбинированная модель основания, совмещающая деформационные свойства среды Винклера и упругого полупространства, представляется в отношении механики глунтов. Составление программы на ЭВМ дало возможность для изучения влияний деформационных характеристик основания и параметров зданий на реактивное давление грунта, на перемещения и на изгибающие моменты в балке. Результаты, полученные в конкретном случае, изображаются на рисунках.

GÉPSZERKEZETEK INERCIÁLIS NEMLINEARITÁSA

ORDÓDY MÁRTON*

A dolgozat egy négycsuklós mechanizmus lengéstani vizsgálatával foglalkozik. Az általános tömeget lineáris függvénnyel közelíti; ezért a mozgásegyenletben nemlineáris kifejezések jelennek meg. A nemlinearitás mértékének jellemzésére egy ε változó bevezetését javasolja. Végül néhány példát mutat be, melyben a megoldást a Krülov—Bogoljubov-módszerrel állítja elő.

Gépek többségét merev tagokból álló kinematikai láncnak tekintik; e modelleket különböző gerjesztő, visszatérítő, csillapító stb. erőhatások érik. Az egyes szerkezetek kinetikai energiája általában

$$T = \frac{1}{2} m(q)\ \dot{q}^2 ;$$

a q általános koordinátához tartozó általános tömeg tehát q-nak függvénye. Ha a vizsgált mozgás a $q = q_0$ egyensúlyi helyzet környezetében zajló kis amplitúdójú lengés, akkor az

$$m(q) = m(q_0) + \left.\frac{dm}{dq}\right|_{q_0} (q - q_0) + \dots$$

hatványsor helyett a mozgásegyenlet linearizálása érdekében szokás a sor első tagjával számolni, azaz az általános tömeget állandónak tekinteni. E dolgozat egy speciális esetben ennek a közelítésnek néhány következményére mutat rá.

Vizsgáljuk egy négycsuklós mechanizmussal modellezhető szerkezet lengéseit (1. ábra). A lengéseket a q szögelfordulás határozza meg.

A lengésamplitúdóról feltesszük, hogy az a $q_0 = 0$ egyensúlyi helyzet kis környezetében marad, és ezért $m(q)$ hatványsorát az

$$m(q) = m_0(1 + \varepsilon q)$$

lineáris kifejezéssel közelítjük ahol $m_0 = m(q_0)$ és

$$\varepsilon = \frac{1}{m_0} \left.\frac{dm(q)}{dq}\right|_{q_0} .$$

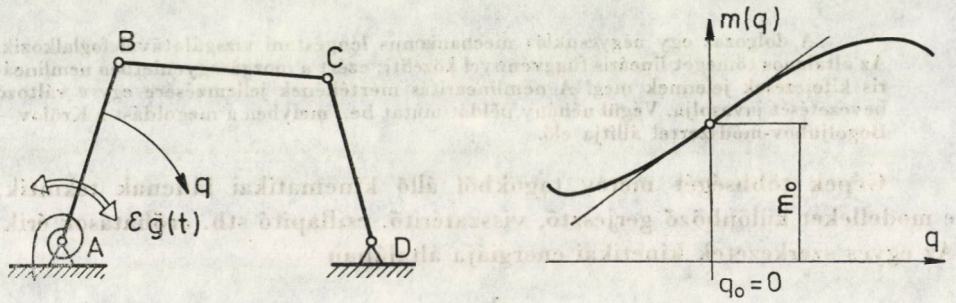
* Ordódy Márton, 1024 Budapest, Szilágyi E. fasor 13—15.

A mozgásegyenlet bal oldala tehát

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = m_0\left[\ddot{q} + \varepsilon\left(q\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^2\right)\right] .$$

Az általános tömeg változásából származik a kerek zárójelbe foglalt nemlineáris kifejezés, melyet ezért inerciális nemlinearitásnak neveztünk el.

Annak érdekében, hogy az inerciális nemlinearitást az egyéb nemlinearitást okozó hatásoktól külön vizsgálhassuk, feltettük, hogy az A csuklóban



1. ábra

lineáris visszatérítő, valamint kismértékű csillapító és gerjesztő erőpárok működnek. A mozgásegyenlet így

$$\ddot{q} + \omega^2 q = -\varepsilon\left[\delta\dot{q} + q\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^2 - g(t)\right] , \tag{1}$$

vagy a második deriváltat kiemelve

$$\ddot{q} + \omega^2\frac{q}{1+\varepsilon q} = -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon q}\left[\delta\dot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^2 - g(t)\right] . \tag{2}$$

Ellensúlyok, lendítőkerekek alkalmazása miatt ε általában kicsi. Mivel $m(q)$ mindig pozitív, ezért az

$$\frac{1}{1+\varepsilon q} \approx 1 - \varepsilon q + 2\varepsilon^2 q^2 + \dots . \tag{3}$$

hatványsort már az első néhány tag is jól közelíti. Ezt felhasználva a mozgásegyenlet a

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \varepsilon f(q, \dot{q}, t, \varepsilon)$$

úgynevezett „standard" alakra vezethető vissza [1].

A megoldás kereshető tehát Krülov—Bogoljubov módszere alapján egy ε hatványai szerinti sor alakjában.

Mivel a mozgásegyenlet csak kevéssé különbözik a lineáristól, ezért a megoldástól is elvárható, hogy közel fog esni a lineáris egyenlet megoldásához; csak a változók bizonyos tartományaiban várható lényeges eltérés a két megoldás között. Az eltérés mértéke ε-től függ, ε nagyságát pedig adott szerkezet esetén a q_0 egyensúlyi helyzet határozza meg.

A továbbiakban néhány speciális esetet vizsgálunk.

1. Mechanizmusok autonóm lengése

Az 1. ábra szerinti modell gerjesztés nélküli mozgását

$$\ddot{q} + \omega^2 q = -\varepsilon \left(\delta \dot{q} + q\ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{q}^2 \right)$$

differenciálegyenlet írja le. [1] szerint a megoldást

$$q = a \cos \psi + \varepsilon u_1(a, \psi) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi) + \dots \tag{4}$$

alakban lehet keresni, ahol az a és ψ mennyiségek az

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots, \\ \dot{\psi} &= \omega + \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \tag{5}$$

differenciálegyenletekből határozhatók meg. A megoldást a mozgásegyenletbe helyettesítve és ε azonos hatványainak együtthatóit összegyűjtve, rekurzíve megoldható egyenletek adódnak.

Az első közelítés alapján

$$u_1 = \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} a^2 \cos 2\psi \, ;$$

ezt felhasználva a második közelítésből

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon \delta a}{2},$$

$$\dot{\psi} = \omega \left(1 - \frac{\varepsilon^2 \delta^2}{8\omega^2} + \frac{\varepsilon^2 a^2}{16} \right).$$

Az inerciális nemlinearitást ε^2 pontosságig véve figyelembe az amplitúdó $a = a_0 \exp [-\varepsilon \delta t/2]$ alakban cseng le, mely megegyezik a linearizált mozgás-

egyenlet alapján nyerhető eredménnyel. A lengések frekvenciája és a lengések középhelyzete azonban függ az amplitúdó nagyságától.

2. Mechanizmusok gerjesztett lengése

A lineáris mozgásegyenlet vizsgálata alapján gerjesztő erőpár hatására állandósult amplitúdójú és frekvenciájú gerjesztett valamint csillapodó szabad lengés várható. Nemlineáris kifejezések figyelembevételével egyszerű $\varepsilon g \cos \nu t$ gerjesztés esetén is egy sor új jelenség lép fel. Az állandósult lengés harmonikusokat illetve felharmonikusokat tartalmazhat; és mozgásstabilitási kérdések is felvetődnek. Az inerciális nemlinearitás sajátossága, hogy a külső gerjesztő hatás egyúttal mindig paraméteres gerjesztést is jelent [2].

A (2) egyenletbe a (3) kifejezést behelyettesítve ugyanis a mozgásegyenlet

$$g(t)(1 - \varepsilon q + 2\varepsilon^2 q^2 + \ldots)$$

alakú taggal bővül. A linearizált egyenletből adódó eredményektől eltérően rezonanciára lehet számítani minden olyan esetben, amikor

$$\nu \approx \frac{p}{q}\,\omega\,, \tag{6}$$

p és q kis egész számok [1].

2.1. Nemrezonáns lengések

Feltesszük, hogy a gerjesztő- és a sajátfrekvencia nem tesz eleget a (6) feltételnek. Ebben az esetben a gerjesztéssel kiegészített mozgásegyenlet megoldását a (4) és (5) sorok alakjában lehet keresni; az $u_1, u_2, \ldots$ függvények azonban az időtől is függenek. Első közelítésben

$$q = a \cos \psi + \frac{\varepsilon g \cos \nu t}{\omega^2 - \nu^2} - \frac{\varepsilon^2 a^2}{6} \cos 2\psi\,,$$

ahol

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon \delta}{2}\, a\,,$$

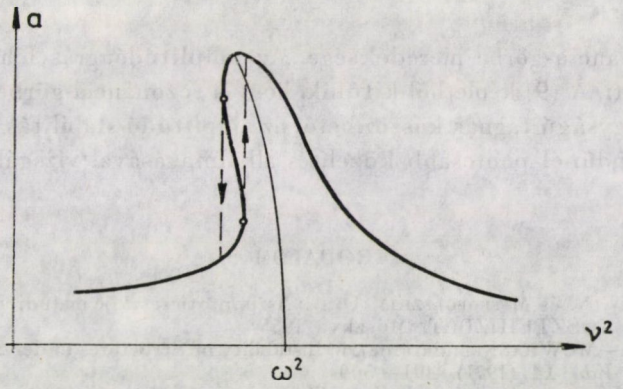
$$\dot{\psi} = \omega\,.$$

A megoldás tehát — nemlineáris kifejezések megtartása esetén is — ω frekvenciájú sajátlengésekből és ν frekvenciájú gerjesztett lengésekből tevődik össze. A sajátlengések a linearizált egyenletből nyerhető megoldáshoz hasonló módon csillapodnak, a gerjesztett lengés pedig első közelítésben megegyezik az inhomogén linearizált egyenlet partikuláris megoldásával.

2.2. *Mechanizmusok alaprezonanciája*

Rezonanciára elsősorban abban az esetben kell számítani, amikor a rendszer sajátfrekvenciája és a gerjesztő frekvencia egymást megközelítik, azaz amikor $p = 1$, $q = 1$. A megoldást ismét lehet a (4) és (5) sorok formájában keresni; u_l-ről, a-ról és ψ-ről azonban fel kell tenni, hogy az időtől explicit módon függenek. Az első közelítés alapján

$$q = a \cos \psi + \varepsilon \left(\frac{1}{4} a^2 - \frac{a^2}{4} \cos 2\psi \right),$$



2. ábra

ahol a második közelítést is figyelembe véve

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon b a}{2} - \frac{\varepsilon g}{\omega + \nu} \sin \Theta, \tag{7}$$

$$\dot{\Theta} = \omega - \nu - \frac{\varepsilon g}{a(\omega + \nu)} \cos \Theta - \frac{a^2 \varepsilon^2 \omega}{4}. \tag{8}$$

$$\psi = \nu t + \Theta.$$

Állandósult lengések esetében $\dot{a} = \dot{\Theta} = 0$. Ezt felhasználva, a rezonanciagörbe (2. ábra):

$$\nu^2 = \omega^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} a^2 \right) \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon g)^2}{a^2} - \delta^2 a^2} \tag{9}$$

Egy mechanizmus gerjesztett lengése tehát harmonikusok sorozatát tartalmazza. Műszermechanizmusok esetében fontos lehet [3], hogy a szerkezet nem az eredeti q_0 egyensúlyi helyzet, hanem a $q_k = q_0 + \varepsilon a^2/4$ középhelyzet körül végzi a lengéseket; a második harmonikus jelenléte pedig torzíthatja a

műszer kimenő jelét. A nullponteltolódás és a torzítások mértéke ε-nal arányos; egy szerkezet munkapontjának kiválasztásakor ezért ε nagysága is szempont lehet.

A (7) és (8) képletekből levezethető a stabilitás feltétele is. Eszerint stabilis az az amplitúdó, melyre fennáll, hogy

$$a_v > 0, \text{ ha } v^2 < \omega^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2 a^2}{4}\right),$$

$$a_v < 0, \text{ ha } v^2 > \omega^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2 a^2}{4}\right).$$

Itt a_v a rezonancia-görbe meredeksége. Az amplitúdóugrás lehetőségét a 2. ábra szemlélteti. A (9) képletből kitűnik, hogy a rezonancia-görbe eldeformálódása egy ε^2 nagyságú tagnak köszönhető; az amplitúdó-stabilitás kérdése tehát csak az elsőrendűnél pontosabb közelítés alkalmazásával vizsgálható.

IRODALOM

1. Bogoljubov, N. N. és Mitropolszkij, U. A.: Aszimptoticseszkije metodi v teorii nelinejnih kolebanij; GOSZTEHIZDAT, Moszkva 1955
2. Barr, A. D. S.—McWhannel: Parametric Instability of Structures under Support Motion; *J. Sound Vib.* **14** (1971), 491—509
3. Sivó János: Műszermechanizmusok dinamikai szintézise optimális tervezési paraméterek megállapítására. Doktori disszertáció, Budapesti Műszaki Egyetem, 1974

Inertial non-linearity of machine structures. The paper deals with the oscillation test of a four-pivot mechanism. The general mass is approximated by a linear function whereby some nonlinear expressions appear in the equation of motion. Introduction of a variable ε is suggested as characterizing the extent of non-linearity. Finally some examples are offered in which the solution is arrived at by using the Krylov-Bogolyubov method.

Inertiale Nichtlinearität von Maschinenkonstruktionen. Der Aufsatz befaßt sich mit der schwingungstechnischen Untersuchung einer Konstruktion mit vier Gelenken und nähert sich dem Problem durch die lineare Gleichung allgemeiner Massen. Daher erscheinen in der Bewegungsgleichung nichtlineare Ausdrücke. Der Verfasser schlägt vor, das Maß der Nichtlinearität mit Einführung der Veränderlichen zu kennzeichnen. Schließlich führt er einige Beispiele vor, in welchen er die Lösung nach der Krülow-Bogoljubowschen Methode erzielt.

Инерционная нелинейность конструкций машин. В статье исследуются колебания четырехшарнирного механизма. Обобщенную массу автор приближает при помощи линейной функции, вследствии чего в уравнении движения появляются нелинейные выражения. В статье предлагается введение переменной, выражающей меру нелинейности. В заключении приводится несколько примеров, решение которых осуществляется способом Крылова—Боголюбова.

AZ ÁTMENETI ZÓNA KRITIKUS FÁRADÁSI FELÜLETE

PLATTHY PÁL*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

Fémszerkezetek elemeinél a fáradt repedés terjedési sebességének empirikus képletéből levezethető a Wöhler-görbe egyenlete. Az így kapott egyenlet a Pellini-féle diagramok és egy idealizált modell segítségével alacsony hőmérsékletek mellett, tehát az átmeneti zónában is alkalmazható, ahol a kritikus értékek egy felületet képeznek. Az átmeneti zóna kritikus fáradási felülete lehetővé teszi a lineáris károsodási elmélettel felállított törési kritériumnál az alacsony hőmérsékletek hatásának figyelembevételét

Két évtizede ismert, hogy a hibákat (feszültségkoncentrációs helyeket) tartalmazó vas-, illetve alumínium-ötvözetű elemekben a lüktetőfárasztás hatására kialakuló repedés terjedési sebessége és a lineáris törésmechanika alapján számítható pillanatnyi $\overline{K}_{max}$ legnagyobb feszültségintenzitási tényező között egy empirikus úton jól megállapítható, viszonylag egyszerű kapcsolat van [1]. Ha a mindenkori hibára (repedésre) jellemző méretet a-val, az igénybevételek ismétlődésének számát N-el jelöljük, akkor kettős logaritmikus rendszerben a da/dN repedésterjedési sebesség a $\overline{K}_{max}$ függvényében az 1. ábra szerint változik, ahol a K_{th} a kifáradási küszöböt, a $\overline{K}_c$ pedig azt a törést előidéző $\overline{K}_{max}$-ot jelenti, amelynél a hibaméret a fárasztáskor használt σ_{max} legnagyobb névleges feszültség mellett éppen az a_c kritikus értékkel egyenlő. Mivel a K_{th} lényegében a lüktetőszilárdságot, illetve előírt túlélési valószínűség és szívós állapot esetén az elem F_l fáradási fokozatát definiálja, egy adott anyagú, kialakítású és a_0 kezdeti hibát tartalmazó elemnél egy adott hőmérsékleten mindig állandó. A $\overline{K}_c$ viszont, ami tulajdonképpen az anyag szívós vagy átmeneti állapotában csupán fizikai tartalmat nélkülöző számítási segédmennyiség, értelmezéséből következően mindig a σ_{max}-nak is függvénye.

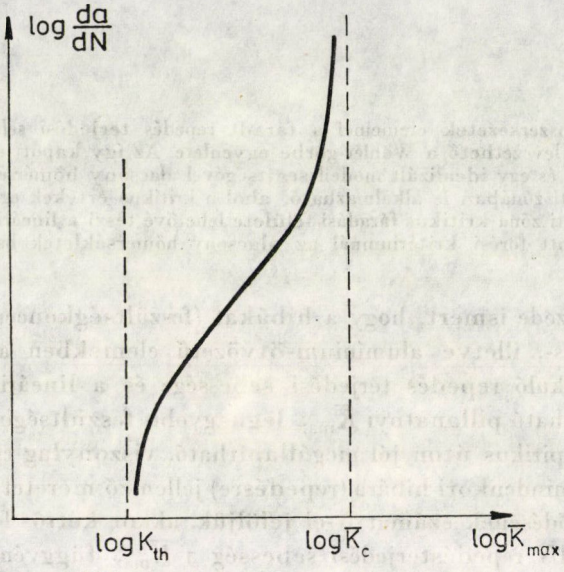
Az említett mennyiségek közül — ha az anyag szívós állapotban van — a K_{th} a kísérleti eredményeken alapuló F_l fáradási fokozatokból és a hozzájuk tartozó a_0 kezdeti hibaméretekből kiszámítható. Ilyenkor a $\overline{K}_c$ az alábbi gondolatmenettel ugyancsak megállapítható.

Szívós állapotban a törés a

$$\sigma_{eff} = \sigma_B \tag{1}$$

* Dr. Platthy Pál, 1114 Budapest, Kanizsai u. 37.

feltétel kielégülésekor következik be, ahol σ_{eff} a tényleges (a hasznos keresztmetszetre vonatkoztatott) átlagfeszültség, míg σ_B a szakítószilárdság. Figyelembe véve, hogy a σ_{eff} tulajdonképpen a σ_{max}-nak és annak a $\Delta\sigma$ többletfeszültségnek az összegével egyenlő, amely a kezdeti a_0 hibaméret Δa nagyságú megnövekedése miatt a maradék hasznos keresztmetszetre szükségszerűen áthárul, az (1) jelű egyenlőségből a Δa kritikus értéke, illetve az a_c kritikus



1. ábra. A repedésterjedési sebesség és a legnagyobb feszültségintenzitási tényező kapcsolata lüktetőfárasztás esetében

repedésméret és a $\bar{K}_c$ az ismert adatokkal kifejezhető. Ez utóbbi kifejezések a műszaki gyakorlat számára vagy egy a_0-tól függő, vagy egy átlagos keresztmetszet feltételezésével általánosíthatók, ami analóg a nyomott rudak kezdeti külpontosságának felvételénél alkalmazott fogással.

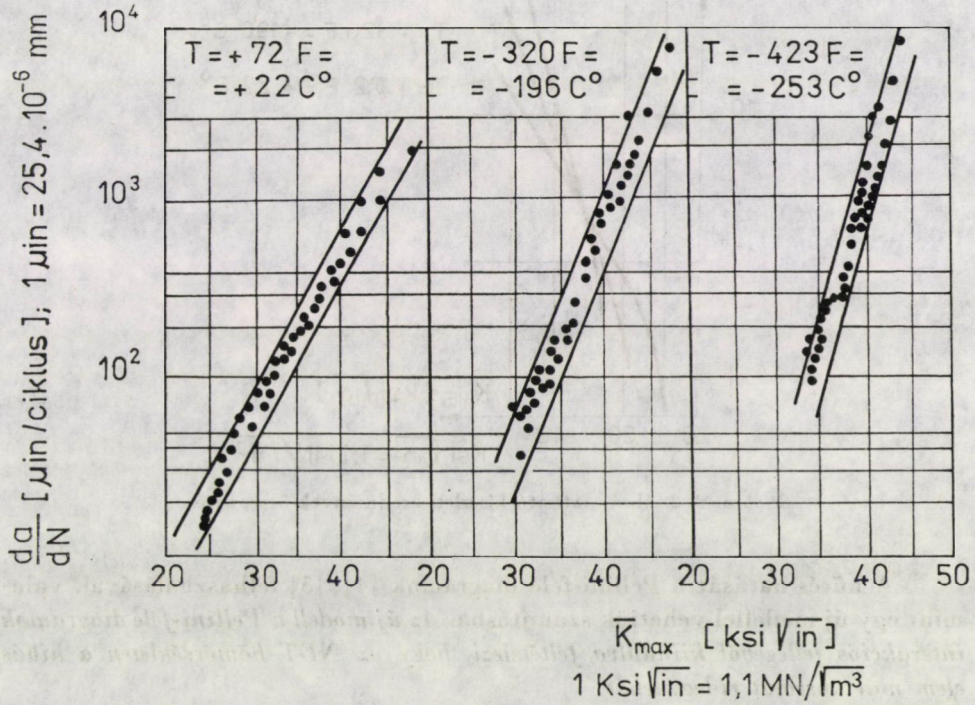
A K_{th} és a $\bar{K}_c$ értékét ismerve az 1. ábra szerinti empirikus görbe a matematikai kezelhetőséget szem előtt tartva egy közelítő függvénnyel megadható, aminek segítségével az egyes σ_{max}-okhoz a törést kiváltó N_c kritikus ismétlési szám, vagyis a lüktetőfárasztásnak kitett elem várható tartamszilárdsága számítható:

$$N_c = \int_{a_0}^{a_c} \frac{dN}{da}\, da\,. \tag{2}$$

Mivel az utóbbi évek kutatásai kimutatták, hogy a gyakorlatilag érdekes tartományban a fáradási szilárdság jó közelítéssel a lüktetőszilárdság és a σ_{min} legkisebb névleges feszültség algebrai összegével egyenlő [2], a (2) jelű

képlet nemcsak lüktetőfárasztáskor, de más esetekben is érvényes, csak a fáradási fokozatot kell megfelelően redukálni.

Az N_c tartamszilárdságok ismerete természetesen azonos az elem Wöhler-görbéjének ismeretével. Az a tény azonban, hogy a Wöhler-görbét törésmechanikai jellemzőkkel írtuk le, lehetőséget nyújt a kevésbé szívós állapotban levő, tehát az alacsonyabb hőmérsékleten üzemelő elem fáradási törvényszerűségeinek számításbavételére is.



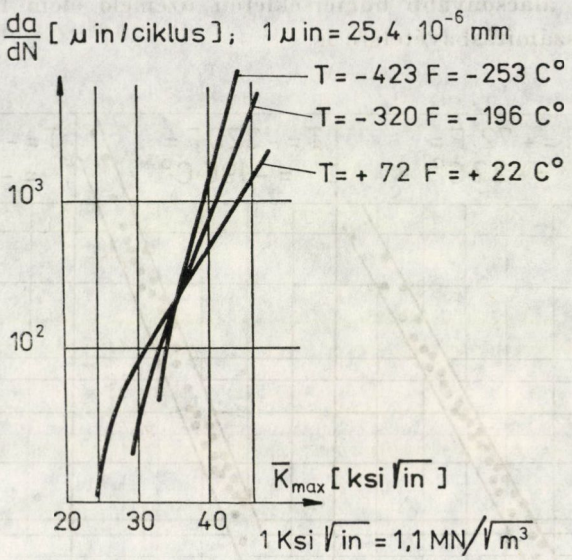
2. ábra. HALL és BIXLER hidegfárasztási kísérleteinek eredményei CAMPBELL ismertetése alapján [5]

Alacsonyabb hőmérsékleteken az anyag ridegebbé válik, és növekszik a σ_F folyáshatár és a σ_B szakítószilárdság. A folyáshatárral nagyjából arányosan növekszik a K_{th} is, míg a hibákat tartalmazó elemek — annak ellenére, hogy anyaguk szilárdsága nő — a repedési hajlam erősödése miatt egy $\sigma_c < \sigma_B$ névleges kritikus feszültségnél már törnek. Ilyenkor tehát a $\bar{K}_c$ számításakor az (1) jelű egyenlet helyett a

$$\sigma_{eff} = \sigma_c \tag{3}$$

egyenletet lehet elfogadni, ami egyben arra is utal, hogy a hőmérsékletsüllyedés a $\bar{K}_c$ értékét csökkenti. A K_{th} növekedése és a $\bar{K}_c$ csökkenése az 1. ábrán bemutatott görbe mozgásával (kisimulásával) jár. Ez látható a 2. és

a 3. ábrán ahol HALL és BIXLER [3] amerikai 2219-T87 jelű alumíniumötvözettel végzett kísérleti eredményeit tüntettük fel. Logikailag is helytálló a mozgás tendenciája, mert a repedéssel bíró abszolút rideg elemnél az 1. ábrán látható görbének egy függőlegessé, a Wöhler-görbének egy vízszintessé kell elfajulnia.



3. ábra. A 2. ábrán látható kísérleti eredmények összevetése

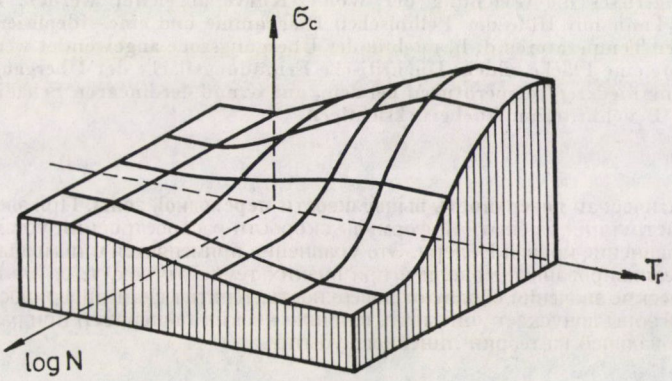
A hűtés hatását a Pellini-féle diagramok [4] [5] felhasználásával, valamint egy új modellel vehetjük számításba. *Az új modell a Pellini-féle diagramok interakciós jellegéből kiindulva feltételezi, hogy az NDT hőmérsékleten a hibás elem már abszolút rideg, tehát*

$$K_{th}(NDT) = \bar{K}_c(NDT). \tag{4}$$

Ez a szélsőséges állapot természetesen kísérletileg teljes mértékben nem igazolható, hiszen az anyag még az *NDT* alatt is mutat csekély képlékenységet. A (4) jelű feltételezés hasonló a képlékenységtanban használt plasztikus csukló fikciójához, ami szigorúan véve ugyancsak irrealitás, de a számítási modellekbe beépítve mégis hasznos és helyes eredményekre vezet, mert úgy egyszerűsít, hogy ugyanakkor jól tükrözi a jelenség domináns tendenciáját és biztosítja annak érvényrejutását.

A fentiek alapján a (3) jelű egyenletben szereplő σ_c-t a Pellini-féle diagramok $\sigma_c(T_r)$ értékeivel helyettesíthetjük, ahol T_r az *NDT*-hez viszonyított relatív hőmérséklet, ami az anyag állapotára jellemző. Így a $\bar{K}_c(T_r)$ értékek megállapíthatók, és ha ehhez még hozzávesszük, hogy a kifáradási küszöb a folyás-

határral arányosan változik, a $K_{th}(T_r)$ értékek is rendelkezésre állnak, tehát lehetővé válik a (2) jelű egyenlet figyelembevételével a T_r relatív hőmérséklethez tartozó $N_c(T_r)$ tartamszilárdságok számítása is. A különböző $\sigma_{max} - T_r$ értékpárokhoz rendelt $N_c(T_r)$ tartamszilárdságok az F_i fáradási fokozatba sorolt elemre vonatkozóan egy olyan törési határfelületet adnak, ami tartalmazza a speciális eseteknek tekinthető statikus szilárdságokat is (4. ábra). Ezt a felületet *az átmeneti zóna kritikus fáradási felületé*nek nevezhetjük.



4. ábra. Az átmeneti zóna kritikus fáradási felülete

Az átmeneti zóna kritikus fáradási felületének figyelembevételével a lineáris károsodási elméletből levezethető törési kritérium a

$$\sum_i \sum N_i \frac{Z_j(T_{rj})}{N_{ci}(T_{rj})} = 1 \tag{5}$$

alakot ölti. Az (5) jelű képletben N_i a P_i teher előfordulását, $Z_i(T_{rj})$ a *NDT*-hez viszonyított relatív hőmérséklet előfordulási hányadát, $N_{ci}(T_{rj})$ pedig a P_i tehernek a T_{rj} relatív hőmérséklethez tartozó kritikus ismétlési számát jelenti.

IRODALOM

1. Platthy, P.: A rideg és a fáradt törés kapcsolata, valamint a fárasztó üzemi teher. *Mélyépítéstudományi Szemle* **25** (1975), 556—560
2. Halász, O.—Csellár, Ö.—Szépe, F.: Méretezés fáradásra. Kutatási jelentés a MÁV részére. Kézirat, Budapest 1974
3. Pellini, S. W.: Principles of Fracture-Safe Design — Part I. *Welding Journal (Supplement)* **50** (1971), 91—110
4. Platthy, P.: Acélszerkezetek rideg törése. BME Acélszerkezetek tanszék kiadványa, Budapest 1973
5. Campbell, J. E.: Fracture Toughness of High-Strength Alloys at Low Temperature. *ASTM Special Technical Publication* **556** (1974), 3—20

Critical fatigue surface of the transient zone. In the case of metal structures the equation of the Wöhler curve can be derived from the empirical formula of the propagation speed of fatigue cracks. The equation thus obtained may be used, by means of the Pellini diagrams and an idealized model, under low temperature conditions as well, that is, in the transient zone where the critical values create a surface. This critical fatigue surface of the transient zone enables the consideration of the effect of low temperatures for the fracture criterion set by the linear damage theory.

Die kritische Ermüdungsfläche der Übergangszone. Bei den Elementen von Metallkonstruktionen kann aus der empirischen Formel der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Erdmüdungsrisses die Gleichung der Wöhler-Kurve abgeleitet werden. Die so ermittelte Gleichung kann mit Hilfe der Pellinischen Diagramme und eines idealisierten Modells auch bei niederen Temperaturen d. h. auch in der Übergangszone angewendet werden, wo die kritischen Werte eine Fläche bilden. Die kritische Ermüdungsfläche der Übergangszone ermöglicht die Wirkung niederer Temperaturen bei dem, auf Grund der linearen Schädigungstheorie aufgestellten, Bruchkriterium zu berücksichtigen.

Критическая поверхность выносливости переходной зоны. При элементах металлических конструкций из опытной формулы скорости распростроения усталой трещины выводится уравнение кривой Вёлера. Это уравнение применяется с помощью диаграмм Пеллини и идеализированной модели и при низких температурах, т. е. и в переходной зоне, где критические значения образуют поверхность. Критическая поверхность выносливости переходной зоны допускает учитывать влияние низких температур при разрушающей критерии, основающей на теории линейного убытка.

KIEGÉSZÍTÉSEK A SZÁLERŐSÍTÉSŰ ANYAG ELEMEI KÖZTI EGYÜTTDOLGOZÁS LEÍRÁSÁHOZ

SEBŐK FERENC
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

A tanulmány a szálerősítésű anyagok mechanikájából meríti tárgyát, és az irodalomban fellelhető elméleteket a nyírási alakváltozás, illetőleg a keresztkontrakció hatásának figyelembevételével egészíti ki. Az ezen alapon végzett levezetés két, határesetként is felfogható kapcsolati típus esetében ébredő belső erőkre szolgáltat összefüggéseket. A szál és az ágyazat tényleges együttdolgozásának bemutatása a vasbetonépítéstanból vett számpéldán történik, amely az ismert, kísérleti adatokkal jó egyezést mutat.

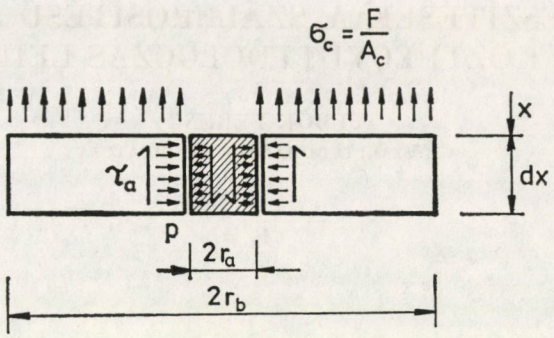
1. Bevezetés

A szálerősítésű anyagok mechanikájának alapkérdése a szál és az azt körülvevő ágyazat közti kapcsolat. A problémakör az építőmérnöki tudományban nem új, kutatása azonban általában közvetlen műszaki feladatok megoldására irányult. A hazai eredmények közül elsősorban PALOTÁS [4], valamint TASSI [6] korábbi vizsgálataira utalunk, akik a jelenséget az acélbetét, illetőleg a feszítőhuzal lehorgonyzódásaként tárgyalták. Ugyanezt a kérdést KÉZDI [2] és PETRASOVITS [5] mint a cölöp és a talaj kölcsönhatását írta le.

A jelen tanulmány célja, hogy a feladatot általános formában kezelve, némiképp egységesítse és kiegészítse a szakirodalomban [1, 3] fellelhető elméleteket. Feltételezzük, hogy mind a szál, mind az ágyazat anyaga követi a lineáris rugalmasságtan törvényeit, amelynek szokásos feltevéseit és elhanyagolásait a továbbiakban külön magyarázat nélkül alkalmazzuk. Ez egyben azt is jelenti,hogy a plasztifikálódás lehetőségét figyelmen kívül hagyjuk. Nem foglalkozunk a szerkezeti elemek esetleges stabilitásvesztésével sem.

2. Jelölések

Az alkalmazott jelöléseket az 1. ábra szemlélteti. A szálra vonatkozó adatokat a, az ágyazatra vonatkozókat b, az összetett anyagot jellemzőket c indexszel láttuk el.



1. ábra

3. Alapösszefüggések

3.1 A nyírási feszültség és alakváltozás

A kirajzolt elem egyensúlya alapján a nyírófeszültség a szál mentén

$$\tau_a = \frac{r_a}{2} \frac{d\sigma_a}{dx}, \tag{1}$$

és egy általános, r koordinátájú helyen

$$\tau_{br} = \tau_a \frac{r_a}{r}\left[1 - \frac{1}{\varrho}\left(\frac{r^2}{r_a^2} - 1\right)\right], \tag{2}$$

ahol

$$\varrho = \left(\frac{r_b}{r_a}\right)^2 - 1. \tag{3}$$

Ezek ismeretében a komponensek nyírási alakváltozása az érintkezési felületen

$$\gamma_a = \tau_a \frac{r_a}{2\,G_a}, \tag{4}$$

illetőleg a

$$d\gamma_{br} = \frac{\tau_{br}}{G_b} dr$$

kifejezést r_a és r_b közt integrálva

$$\gamma_b = \tau_a \frac{r_a}{2G_b}\left[\frac{\varrho + 1}{\varrho} \ln(\varrho + 1) - 1\right]. \tag{5}$$

3.2 A radiális normálfeszültség és az ennek hatására fellépő alakváltozás

Bevezetve a vasbetonszerkezetek számításában használt, a rugalmassági modulusok viszonyát jellemző

$$n = \frac{E_a}{E_b} \tag{6}$$

számot, a nyomás

$$p = C_1 \frac{F}{A_b} - C_2 \sigma_a, \tag{7}$$

ahol F a terhelő derékerő, A_b az ágyazat keresztmetszeti területe; az állandók értéke pedig

$$C_1 = \frac{\mu_b}{1 + \mu_b + \dfrac{1 - \mu_a}{n} + \dfrac{2}{\varrho}} . \tag{8}$$

és

$$C_2 = \frac{\dfrac{1}{n}\mu_a + \dfrac{1}{\varrho}\mu_b}{1 + \mu_b + \dfrac{1 - \mu_a}{n} + \dfrac{2}{\varrho}} . \tag{9}$$

μ a Poisson-féle szám.

A szál felületén ébredő derékfeszültség az ágyazat

$$\varepsilon_{bp} = -2p \frac{\mu_b}{\varrho E_b}$$

nagyságú fajlagos alakváltozását okozza, amelyhez előjelhelyesen hozzáadódik még a külső erő által közvetlenül okozott alakváltozás:

$$\varepsilon_b = \frac{1}{E_b}\left(\sigma_b - 2p\frac{\mu_b}{\varrho}\right) . \tag{10}$$

Ezen mennyiséget ugyancsak F külső erővel és σ_a szálfeszültséggel fejezzük ki

$$\varepsilon_b = \frac{1}{E_b}\left(C_3 \frac{F}{A_b} - C_4\, \sigma_a\right) \tag{11}$$

ahol

$$C_3 = 1 - \frac{2\mu_b}{\varrho} C_1 , \tag{12}$$

és

$$C_4 = \frac{1}{\varrho}(1 - 2\mu_b C_2) . \tag{13}$$

A szálra vonatkozóan, a hidrosztatikus feszültségi állapotból következően az

$$\varepsilon_{ap} = 2p \frac{\mu_a}{E_a}$$

összefüggés adható meg, ami a külső erő által közvetlenül okozott alakváltozással összegezve a következő eredményt adja:

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E_a} \left(\sigma_a + 2p \frac{\mu_a}{E_a} \right) . \tag{14}$$

Az előbbihez hasonlóan a kifejezést itt is F külső erővel hozzuk kapcsolatba és így, átalakítások után

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E_a} \left(C_5 \frac{F}{A_b} + C_6 \sigma_a \right) , \tag{15}$$

ahol

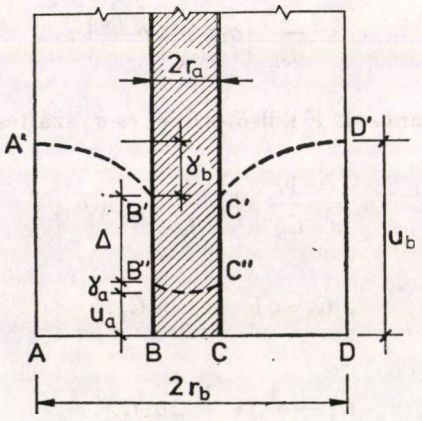
$$C_5 = 2\mu_a C_1 , \tag{16}$$

és

$$C_6 = 1 - 2\mu_a C_2 . \tag{17}$$

3.3. A deformációs vonal differenciálegyenlete

A szálerősítésű anyagon keresztül, terheletlen állapotban felvett $ABCD$ egyenes a terhelés hatására, általános esetben az $A'B'B''C''C'D'$ helyzetbe kerül (2. ábra). A vázlat helyes értelmezésével kapcsolatban rá kell mutatnunk arra, hogy esetünkben nem a szokásos kihúzó-kísérletről van szó; hanem éppen ellenkezőleg, a merevebb szál gátolja az ágyazat szabad alakváltozását.



2. ábra

A diszkontinuitás az ábra szerint

$$\Delta = (u_b - u_a) - (\gamma_b + \gamma_a),$$

és mivel

$$\frac{du}{dx} = -\varepsilon,$$

a deformációs vonal differenciálegyenlete

$$\frac{d\Delta}{dx} = (\varepsilon_a - \varepsilon_b) - \frac{d}{dx}(\gamma_a + \gamma_b), \tag{18}$$

ami az előzőekben levezetett összefüggések felhasználásával

$$\frac{d\Delta}{dx} = C_0 \frac{d^2 \sigma_a}{dx^2} - C_8 \sigma_a + C_7 F, \tag{19}$$

alakban írható, ahol

$$C_7 = \frac{1}{A_b}\left(\frac{C_3}{E_b} - \frac{C_5}{E_a}\right), \tag{20}$$

$$C_8 = \frac{C_4}{E_b} + \frac{C_6}{E_a}, \tag{21}$$

és

$$C_0 = \left(\frac{r_a}{2}\right)^2 \left\{\frac{1}{G_a} + \frac{1}{G_b}\left[\frac{\varrho + 1}{\varrho}\ln(\varrho + 1) - 1\right]\right\}. \tag{22}$$

4. A szál és az ágyazat együttdolgozása különféle kapcsolati típusok esetében

4.1. Tökéletes kapcsolat

A szál és az ágyazat közti együttdolgozás egyik határesete a tökéletes kapcsolat. Ez úgy is megfogalmazható, hogy a két elem kontinuitása deformált állapotban sem szűnik meg. Előbbi levezetésünk differenciálegyenlete ennek értelmében a

$$\frac{d^2 \sigma_a}{dx^2} - \beta_2^2 \sigma_a + \beta_1^2 F = 0 \tag{23}$$

alakra egyszerűsödik, ahol

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{C_7}{C_0}}, \tag{24}$$

és

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{C_8}{C_0}}. \tag{25}$$

A jelölésbeli egyszerűség kedvéért ugyancsak bevezetjük a

$$B = \frac{C_7}{C_8} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 \tag{26}$$

tényezőt.

A differenciálegyenlet megoldása az $F = 0$ peremfeltételekkel az $x = 0$ és $x = l$ helyen

$$\sigma_a = F \cdot B \left[1 - \frac{\cosh \beta_2 \left(\frac{l}{2} - x\right)}{\cosh \beta_2 \frac{l}{2}}\right], \tag{27}$$

a felületi nyomás értéke a korábbi képletekbe való behelyettesítéssel

$$p = F \left\{\frac{C_1}{A_b} - C_2 B \left[1 - \frac{\cosh \beta_2 \left(\frac{l}{2} - x\right)}{\cosh \beta_2 \frac{l}{2}}\right]\right\}, \tag{28}$$

a nyírófeszültség pedig

$$\tau_a = F \cdot \frac{r_a}{2} \beta_2 B \frac{\sinh \beta_2 \left(\frac{l}{2} - x\right)}{\cosh \beta_2 \frac{l}{2}}. \tag{29}$$

Teljesen azonos felépítésű összefüggésekre jutott korábban Cox, Dow és Rosen [1] is, noha az általuk közölt együtthatók értéke eltér. A különbség a keresztkontrakció, illetőleg a felületi normálfeszültség hatásának figyelembevételéből ered.

4.2. Súrlódásos kapcsolat

Az összetett anyag viselkedésének másik határállapota, ha a szál és az ágyazat között kizárólag súrlódóerő működik, vagyis

$$\tau_a = \varrho^* p, \tag{30}$$

ahol ϱ^* a súrlódási tényező. Ez következik be például egy vasbetontartó megrepedése, illetőleg a betét megcsúszása esetében.

A differenciálegyenlet a fentiek szerint a

$$\frac{d\sigma_a}{dx} - \varphi_2 \sigma_a + \varphi_1 F = 0 \tag{31}$$

alakot ölti, ahol a konstansok

$$\varphi_1 = -\frac{2\varrho^*}{r_a} \cdot \frac{C_1}{A_b}, \tag{32}$$

$$\varphi_2 = -\frac{2\varrho^*}{r_a} \cdot C_2, \tag{33}$$

valamint

$$\Phi = \frac{1}{A_b} \cdot \frac{C_1}{C_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \tag{34}$$

A megoldás az előbbi peremfeltételek mellett

$$\sigma_a = F\Phi(1 - e^{\varphi_2 x}). \tag{35}$$

4.3. A lehorgonyzódási hossz

Az előbbiek alapján ugyancsak számítható a tartó végétől mért azon l_0 távolság, amelynél nagyobb koordinátájú pontokban már nem lép fel csúszás, vagyis a különböző rugalmassági tulajdonságokkal rendelkező két anyag megegyező alakváltozását a felületen ébredő feszültség biztosítani képes. Értéke

$$l_0 = -\frac{1}{\varphi_2} \ln \left| \frac{1 - \frac{1}{C_2}\left(\frac{\varphi_2}{\beta_2}\right)^2}{1 - A_b B \frac{C_2}{C_1}} \right|. \tag{36}$$

A fenti méret egyben iránymutatást is ad a minimális szálhossz megválasztását illetően.

5. Számpélda

5.1. Kiindulási adatok

A kapott eredményeket egy vasbeton rúd hosszanti feszültségállapotán szemléltetjük. A választott modellt egyetlen acélszál alkotja, amelyet a beton koncentrikusan vesz körül.

A tartóelemre $F = 2500$ kp nagyságú erő működik. A geometriai és rugalmassági adatokat az I. táblázat tartalmazza. E_b alacsony értékét a teher tartósnak feltételezett jellege indokolja. A súrlódási tényező értékét 0,52-re választottuk.

I. táblázat

Adat	Acél	Beton
r [cm]	1,0	3,0
E [kp/cm²] · 10^6	2,10	0,11
μ [—]	0,300	0,166

5.2. A lehorgonyzódási hossz

A felvett adatokkal a lehorgonyzódási hossz a (36) szerint 49,09 cm-re adódott.

A képlet átrendezésével érdekességképpen megvizsgáltuk, mekkora lenne az a ϱ^* súrlódási tényező, amely a megcsúszás lehetőségét eleve kizárja. A kapott 1,556-os érték arra utal, hogy a szálvég kilazulása elkerülhetetlen.

5.3. Tökéletes kapcsolat

A szálfeszültségre, az érintkezési nyomásra, valamint a nyírófeszültségre vonatkozó számítás eredményeit a II. táblázatban közöljük. A felvett feltételek teljesülése esetében az erőátadás tehát viszonylag igen rövid szakaszon megy végbe. A p előjelváltása a két anyag Poisson-tényezőjének viszonyából következik.

II. táblázat

x [cm]	σ_a [kp/cm²]	p [kp/cm²]	τ [kp/cm²]
0	0	11,41	124,59
1	201,27	6,35	79,96
2	330,47	3,10	51,32
3	413,35	1,01	32,94
4	466,56	—0,32	21,14
5	500,71	—1,18	13,57
6	522,63	—1,74	8,71
7	536,69	—2,09	5,59
8	545,72	— 2,32	3,59
10	555,24	—2,56	1,48
∞	561,90	—2,72	0

5.4. Súrlódásos kapcsolat

A 4.2. pont szerinti súrlódásos kapcsolat esetében az acélszál legnagyobb feszültsége 453,65 kp/cm², vagyis mintegy 20%-kal a tökéletes kapcsolathoz tartozó érték alatt marad. Az erőátadás mintegy ötszörös hosszúságot igényel.

A valóságos helyzet nézetünk szerint a két határérték között van.

5.5. Az acél és a beton együttdolgozása

Feltételezzük, hogy a lehorgonyzódás megtörténte után a tényleges szálfeszültség a két határeset középértéke, vagyis 507,8 kp/cm². Az F erő „maradékát" a beton veszi fel, és benne 36,0 kp/cm² nagyságú feszültséget okoz. A deformációk azonosságából következően ez $n = 14{,}10$ viszonynak felel meg, ami jó egyezést mutat a kísérletek ismert adataival.

A kapott értéket ugyanakkor szembe kell állítani az 5.1 pont szerint számítható $n = 19{,}09$-es viszonnyal. Az összehasonlítás így arra utal, hogy a pontosabb számítás a valóság jobb leírását engedi meg.

IRODALOM

1. Holister, G. S.—Thomas, C.: Fibre Reinforced Materials. Elsevier, Amsterdam 1966
2. Kézdi Á.: Cölöpök és cölöpcsoportok teherbírása. Dissz. Budapest 1958
3. Neville, A.: Fibre Reinforced Cement and Concrete. RILEM Symposium. Construction Press, Hornby 1975
4. Palotás L.: A vasbeton elmélete. Akadémiai Kiadó, Budapest 1973
5. Petrasovits G.: Cölöpök és cölöpcsoportok terhelés alatti viselkedése. Dissz. Budapest 1973
6. Tassi G.: A lehorgonyzódás jelensége feszített betonban. Dissz. Budapest 1956

Contribution to the description of the co-operation between the elements of fibre reinforced materials. The subject matter of the paper is taken from the mechanics of fibre reinforced materials, and supplements the theories found in literature by taking into account the effects of shear deformation and transversal contraction. Derivation on this basis renders relations on the internal forces generated in the case of two connection types which might be regarded as extremes. Co-operation between fibre and matrix is demonstrated by a numerical example from the field of construction with reinforced concrete which showed good agreement with known test data.

Ergänzung zur Beschreibung der Mitwirkung der Elemente der faserversträkten Stoffe. Der Gegenstand des Aufsatzes ist der Mechanik der faserverstärkten Stoffe entnommen und ergänzt die, in der Literatur angeführten Theorien durch die Berücksichtigung der Schubverformung, bzw. der Querkontraktion. Die auf dieser Grundlage vorgenommene Ableitung führt zu zwei Verbindungstypen, die auch als Grenzfälle betrachtet werden können und Zusammenhänge hinsichtlich der inneren Kräfte liefern. Die tatsächliche Zusammenwirkung von Fasern und Bettung wird an einem der Stahlbetonlehre entnommenen Zahlenbeispiel vorgeführt, dessen Resultat mit den bekannten Versuchsergebnissen gut übereinstimmt.

Дополнения к описанию содействия между элементами волокноусиленного материала. Статья берёт свой предмет из механики волокноусиленных материалов и дополняет теории, находящиеся в литературе, учетом влияния деформации сдвига и поперечной контракции. Вывод, проведённый на этой основе, подаёт соотношения для усилий двух типо в сцепления, которые можно считать и предельными случаями.

Показ действительного содействия между волокной и средой производится через примерный расчёт, взятый из тематики железного бетона. Результаты хорошо совпадают с экспериментальными данными.

FOLYTONOS ALÁTÁMASZTÁSÚ KÖRGYŰRŰK VIZSGÁLATA

SZALAI JÁNOS
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

A tanulmány tetszőleges keresztmetszetű, folytonos alátámasztású körgyűrűk állapotjellemzőinek meghatározását mutatja be szimmetrikus és antimetrikus terhek esetében.

1. A tanulmány célja

A dolgozat forgáshéjak (pl. hűtőtornyok) felső peremeit merevítő körgyűrűk állapotjellemzőinek — belső erőinek és alakváltozásainak — meghatározásával foglalkozik. A gyakorlatban közvetlenül alkalmazható összefüggéseket mutat be, amelyek felhasználhatók a peremzavarok vizsgálatakor.

2. Feltevések, jelölések

A rugalmasságtan szokásos feltevéseit alkalmazzuk. A körgyűrű keresztmetszete tetszőleges, de a gyűrű mentén állandó. A keresztmetszet méretei a sugárhoz viszonyítva kicsik. A csavarási középpontot a súlyponttal azonosnak tekintjük.

Mind a külső teher, mind a támaszreakció a keresztmetszet tetszőleges pontjában hathat.

X, Y, Z	a tetszőleges irányú külső teher összetevői, amelyek pozitív előjellel az 1/a ábrán láthatók.
X_X, X_Y, X_Z, X_M	a támaszvonalban fellépő ismeretlen erők (az 1/b ábrán negatív előjelűek, X_M pozitív).

Vizsgálataink során a körgyűrűre ható terheket áthelyezzük a keresztmetszet súlypontjába, ami egyben azt is jelenti, hogy a súlypontba áthelyezett terhekkel egyidejűleg az r, ϑ és z tengelyekre vonatkozó m_R, m_ϑ és m_Z nyomatékokat is figyelembe kell venni. Az

u, v, w	elmozdulások pozitív értelme azonos a koordináta-tengelyek pozitív irányával,
$\varkappa$	a keresztmetszet elfordulása.

További jelölések:

F a körgyűrű keresztmetszeti területe,
J_R, J_Z a tehetetlenségi nyomatékok az r, ill. z tengelyekre,
J_T csavarási tehetetlenségi nyomaték,
$E, G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ rugalmassági tényezők,
$K_R = EJ_R$, $K_Z = EJ_Z$, $C_T = GJ_T$, $\varrho = \dfrac{K_R}{C_T}$, $D = EF$.

3. A feladat differenciálegyenletei

3.1 Egyensúlyi egyenletek

A függőleges, normális és érintő irányú vetületi egyenletek (1/c—1/e ábrák):

$$\frac{dQ_R}{ds} + Y - X_Y = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{dQ_\vartheta}{ds} + \frac{N_\vartheta}{R} + Z - X_Z = 0\,, \tag{3.2}$$

$$\frac{dN_\vartheta}{ds} - \frac{Q_\vartheta}{R} + X - X_X = 0\,. \tag{3.3}$$

Nyomatéki egyenletek, forgatás a ϑ, r és z tengelyek körül (1/c—1/e ábrák):

$$\frac{dM_T}{ds} - \frac{M_R}{R} + m_\vartheta = 0\,, \tag{3.4}$$

$$\frac{dM_R}{ds} + \frac{M_T}{R} + m_R - Q_R = 0\,, \tag{3.5}$$

$$\frac{dM_\vartheta}{ds} - Q_\vartheta + m_Z = 0\,, \tag{3.6}$$

ahol

$$ds = Rd\vartheta\,. \tag{3.7}$$

Bevezetve a

$$\frac{d}{d\vartheta}(\ldots) = (\ldots)' \tag{3.8}$$

jelölést, a nyíró erők kiküszöbölésével az egyensúlyi egyenletek négy egyenletre redukálhatók:

$$M_T' - M_R + Rm_\vartheta = 0\,, \tag{3.9}$$

$$M_R'' = M_T' + Rm_R' + R^2(Y - X_Y) = 0, \tag{3.10}$$

$$N_\vartheta + \frac{1}{R}M_\vartheta'' + R(Z - X_Z) + m_z' = 0\,, \tag{3.11}$$

$$N_\vartheta' - \frac{1}{R}M_\vartheta' + R(X - X_X) - m_Z = 0\,. \tag{3.12}$$

3.2 *A belső erők és alakváltozások közötti összefüggések*

$$N = \frac{D}{R}(u' + w) + \frac{K_Z}{R^3}(w + w'') , \tag{3.13}$$

$$M_R = \frac{K_R}{R^2}(-v'' + R\varkappa), \varkappa_\vartheta M_T = \frac{C_T}{R^2}(R\varkappa' + v'), M_\vartheta = \frac{K_z}{R^2}(w + w''), \tag{3.14}$$

$$Q_R = \frac{C_T}{R^2}(1 + \varrho)\varkappa' + \frac{C_T}{R^3}(v' - \varrho v''') + m_R \tag{3.15}$$

$$Q_\vartheta = \frac{K_Z}{R^3}(w' + w''') + m_Z . \tag{3.16}$$

3.3 *Az alakváltozások differenciálegyenletei*

A belső erők alakváltozásokkal kifejezett értékeit a (3.9)—(3.12) összefüggésekbe behelyettesítve, rendezés után az alábbi differenciálegyenletekre jutunk:

$$v'' = -\frac{R}{1 + \varrho}\left(\varkappa'' - \varrho\varkappa + \frac{R^2}{C_T} m_\vartheta\right), \tag{3.17}$$

$$\varkappa'' = \frac{1}{R(1 + \varrho)}\left[\varrho v'''' - v'' - \frac{R^3}{C_T} m_R' - \frac{R^4}{C_T}(Y - X_Y)\right], \tag{3.18}$$

$$\frac{D}{R}(u' + w) + \frac{K_Z}{R^3}(w'''' + 2w'' + w) = -R(Z - X_Z) - m_Z', \tag{3.19}$$

$$\frac{D}{R}(u'' + w') = -R(X - X_X) + m_Z. \tag{3.20}$$

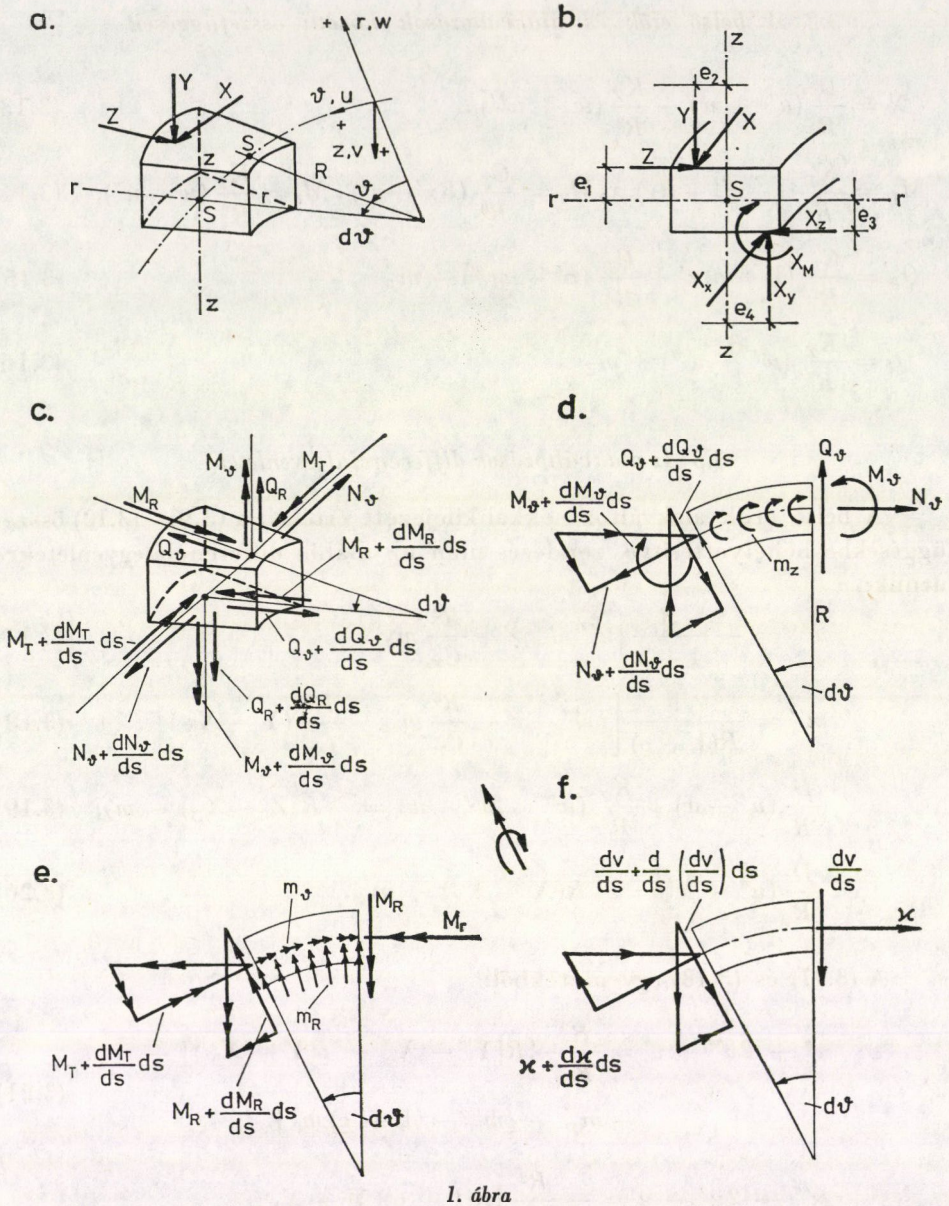
A (3.17) és (3.18) egyenletekből:

$$v'''' + 2v'''' + v'' = \frac{R^3}{K_R}\{R[Y'' - X_Y'' - \varrho(Y - X_Y)] + \\ + m_R'''' - \varrho m_m' - (1 + \varrho) m_\vartheta''\}, \tag{3.21}$$

$$\varkappa'''' + 2\varkappa'' + \varkappa = -\frac{R^2}{K_R}[R(1 + \varrho)(Y - X_Y) + \\ + (1 + \varrho) m_R' + \varrho m_\vartheta'' - m_\vartheta]. \tag{3.22}$$

A (3.19) és (3.20)-ból:

$$w'''' + 2w'''' + w' = \frac{R^2}{K_Z}[-R(Z' - X_Z') + R(X - X_X) - m_Z'' - m_Z], \tag{3.23}$$



1. ábra

$$u' = -w - \frac{K_Z}{R^2 D}(w'''' + 2w'' + w) - \frac{R^2}{D}(Z - X_Z) - \frac{R}{D} m'_Z \,. \tag{3.24}$$

Fenti differenciálegyenletekben

$$\begin{aligned} m_\vartheta &= Ze_1 - Ye_2 + X_Z e_3 - X_Y e_4 + X_M, \\ m_Z &= -Xe_2 - X_x e_4, \\ m_R &= -Xe_1 - X_x e_3 . \end{aligned} \tag{3.25}$$

4. A differenciálegyenletek megoldásai

4.1 Tengelyszimmetrikus terhek

$$\begin{aligned} &X = X_0 = 0, \quad Y_0 - X_{Z0} = 0, \quad m_{R0} = m_{Z0} = 0, \\ &u = 0, \quad v = \text{konst.} \end{aligned} \tag{4.1}$$

A ϑ szerinti deriváltak értéke zérus. A (3.17) és (3.19) differenciálegyenletekből:

$$\varkappa = \frac{R^2}{K_R} m_\vartheta , \tag{4.2}$$

$$w = -\frac{R^2}{D}(Z_0 - X_{Z0}) , \tag{4.3}$$

$$m\vartheta_0 = Z_0 e_1 - Y_0(e_2 + e_4) + X_{Z0} e_3 + X_{M0} , \tag{4.4}$$

$$N_\vartheta = \frac{D}{R} w, \quad M_\vartheta = M_T = 0, \quad M_R = R m_{\vartheta 0} . \tag{4.5}$$

Az X_{Z0} és X_{M0} ismeretlenek értékeit az alátámasztásra felírható alakváltozási követelményekből határozhatjuk meg.

4.2 Antimetrikus terhek

4.21 *A terhekre vonatkozó korlátozások*

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor a körgyűrűre ható terhek — mind a külső terhek, mind a támaszreakciók — összetevői Fourier-polinómokkal megadhatók. Ezek általános tagjai:

$$X = X_n \sin n\vartheta, \qquad Y = Y_n \cos n\vartheta, \qquad Z = Z_n \cos n\vartheta, \tag{4.6}$$

$$X_X = X_{Xn} \sin n\vartheta, \quad X_Y = X_{Yn} \cos n\vartheta, \quad X_Z = X_{Zn} \cos n\vartheta. \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} &m_\vartheta = m_{\vartheta n} \cos n\vartheta, \quad m_Z = m_{Zn} \sin n\vartheta, \quad m_R = m_{Rn} \sin n\vartheta, \\ &X_M = X_{Mn} \cos n\vartheta. \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$
\begin{aligned}
m_{\vartheta n} &= Z_n e_1 - Y_n e_2 - X_{Y n} e_4 + X_{Z n} e_3 + X_{Mn}, \\
m_{Zn} &= -X_n e_2 - X_{Xn} e_4 , \\
m_{Rn} &= -X_n e_1 - X_{Xn} e_3 .
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Az alkalmazások során ilyen esetekben elegendő a differenciálegyenletek egy-egy partikuláris megoldásának az ismerete, amelyeket

$$
\begin{aligned}
&u = u_n \sin n\vartheta, \quad v = v_n \cos n\vartheta, \quad w = w_n \cos n\vartheta, \\
&\varkappa = \varkappa_n \cos n\vartheta
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

alakban kereshetünk.

Az $n > 1$ esetben a körgyűrűre ható külső terhek önmagukban egyensúlyban vannak, míg $n = 1$ esetben nincs egyensúly.

4.22 Partikuláris megoldások $n = 1$ esetben

A körgyűrűre ható terheknek ki kell elégíteniük az alábbi feltételeket: Vetületi egyenlet:

$$
\begin{aligned}
Q = \int_0^{2\pi} R\,(Z_1 - X_{Z1}) \cos^2 \vartheta \, d\vartheta + \int_0^{2\pi} R\,(X_1 - X_{X1}) \sin^2 \vartheta \, d\vartheta = \\
= \pi R(Z_1 - X_{Z1}) + \pi R(X_1 - X_{X1}) = 0 .
\end{aligned}
$$

Ebből az összefüggséből:

$$
Z_1 - X_{Z1} = -X_1 + X_{X1}. \tag{4.11}
$$

Nyomatéki egyenlet:

$$
\begin{aligned}
M = \int_0^{2\pi} R m_{\vartheta 1} \cos^2 \vartheta \, d\vartheta - \int_0^{2\pi} R m_{R1} \sin^2 \vartheta \, d\vartheta - \int_0^{2\pi} R^2 (Y_1 - X_{Y1}) \cos^2 \vartheta \, d\vartheta = \\
= \pi R(m_{\vartheta 1} - m_{R1}) - \pi R^2 (Y_1 - X_{Y1}) = 0 .
\end{aligned}
$$

Ebből a követelményből

$$
m_{\vartheta 1} = m_{R1} + R(Y_1 - X_{Y1}) . \tag{4.12}
$$

Figyelembe véve az egyensúlyi követelményeket, $n = 1$ esetben a (3.21)—(3.23) differenciálegyenletek jobb oldalán álló tagok értéke zérus. A (4.10) alatti megoldások a homogén egyenleteket kielégítik, az állandók azonban határozatlanok maradnak. Értékeiket az alábbi megfontolások alapján számíthatjuk.

A (3.11) és (3.17) egyenletekből:

$$N_\vartheta = -R(Z - X_Z) - m'_Z\,, \tag{4.13}$$

$$v_1 + R\varkappa_1 = \frac{R^3}{C_T(1+\varrho)}\, m_{\vartheta 1}\,, \tag{4.14}$$

és így [lásd a (3.14) összefüggéseket]:

$$M_R = R\frac{\varrho}{1+\varrho}\, m_{\vartheta 1}\cos\vartheta\,. \tag{4.15}$$

Legyenek a merevítetlen héj peremének alakváltozásai a héjra ható terhekből és a még ismeretlen peremterhekből

$$u_{1h}, v_{1h}, w_{1h} \quad \text{és} \quad \varkappa_{1h} = \dot{w}_{1h} = \frac{\partial w_{1h}}{\partial z}\,, \tag{4.16}$$

$$\varepsilon_{\vartheta h} = \frac{1}{R - e_4}(w_{1h}\sin\varphi + u_{1h})\cos\vartheta\,.$$

A gyűrű alakváltozásai:

$$v_1 = \frac{R}{R - e_4}\, v_{1h},\quad \varkappa_1 = \dot{w}_{1h},\quad w_1 = w_{1h}\,. \tag{4.17}$$

Az ismeretlen peremterhekből kettő az egyensúlyi egyenletekből meghatározható. Legyenek ezek X_{X1} és X_{Y1}. Az X_{Z1} és X_{M1} értékei az

$$\frac{1}{R - e_4}\, v_{1h} + \dot{w}_{1h} = \frac{R^2}{C_T(1+\varrho)}\, m_{\vartheta 1}\,, \tag{4.18}$$

$$\frac{1}{R - e_4}(w_{1h}\sin\varphi + u_{1h})\cos\vartheta = \frac{N_\vartheta}{D} + \frac{M_R e_3}{K_R} \tag{4.19}$$

követelményekből adódnak, ahol

$$\begin{aligned} m_{\vartheta 1} = {} & e_1 Z_1 - e_2 Y_1 + e_3 X_{Z1} + \frac{e_4}{R - e_4}\left[(e_1 + e_3)(Z_1 - X_1) - \right. \\ & \left. - (R + e_2) Y_1\right] + \frac{R}{R - e_4}\, X_{M1}\,, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$m_{Z1} = -(e_2 + e_4)\, X_1 - e_4 (Z_1 - X_{Z1})\,. \tag{4.21}$$

X_{Z1} és w_1 ismeretében u_1 a (3.24) összefüggésből számítható. Az alakváltozások értékeivel a belső erők is meghatározhatók.

4.23 Partikuláris megoldások $n > 1$ esetben

A partikuláris megoldások állandóinak meghatározására a differenciálegyenletekből az alábbi összefüggések adódnak:

$$v_n n^2(n^2-1)^2 = -\frac{R^3}{K_R}\left[R(n^2+\varrho)(Y_n - X_{Yn}) - (n^3+n\varrho)\,m_{Rn} + \right. \\ \left. + n^2(1+\varrho)m_{\vartheta n}\right], \tag{4.22}$$

$$\varkappa_n(n^2-1)^2 = -\frac{R^2}{K_R}\left[(R(1+\varrho)(Y_n - X_{Yn}) + (1+\varrho)nm_{Rn} - (1+n^2\varrho)m_{\vartheta n}\right], \tag{4.23}$$

$$w_n n(n^2-1)^2 = -\frac{R^4}{K_Z}\left[n(Z_n - X_{Zn}) + X_n - X_{Xn} + \frac{1}{R}(n^2-1)\,m_{Zn}\right], \tag{4.24}$$

$$nu_n = -w_n - \frac{K_Z}{R^2 D}(n^2-1)^2 w_n - \frac{R^2}{D}(Z_n - X_{Zn}) - \frac{R}{D}nm_{Zn}. \tag{4.25}$$

Az alakváltozások ismeretében a belső erők a 3.2 pontban megadott összefüggésekből nyerhetők.

Az ismeretlen támaszerőket a peremgyűrű és a héj hézagmentés illeszkedésére vonatkozó követelményekből lehet meghatározni.

IRODALOM

ORAVAS, G.: Beitrag zur Berechnung des Kreisringes auf elastischer Unterlage. *Der Bauingenieur* (1956), 177–180

SCHLAICH, J.: Der kontinuierlich gelagerte Kreisring unter antimetrischer Belastung. *Beton und Stahlbetonbau* (1967), 21–23

FLÜGGE, W.: Stresses in Shells. Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1973

Examination of continuous support type annuli. Determination of the state characteristics of continuous support type annuli of optional cross section under symmetrical and antimetric loadings, respectively.

Untersuchung von kontinuierlich gelagerten Kreisringen. Die Studie behandelt die Bestimmung der Zustandskennwerte von kontinuierlich gelagerten Kreisringen bei symmetrischen und antimetrischen Belastungen.

Исследование сплошно опёртых круглых колец. В статье приведено определение характеристик состояния сплошно опёртых круглых колец любого сечения в случае осесимметричной или кососимметричной относительно одного диаметра нагрузки.

VÉKONY, MEREVÍTETLEN GERINCLEMEZEK TEHERBÍRÁSSZÁMÍTÁSA

SZATMÁRI ISTVÁN*

Szerző a vékony, merevítetlen gerinclemezek nyíró-törési teherbírásának meghatározásával foglalkozik. A kísérleti tapasztalatokból kiindulva megállapította, hogy a gerinclemez teherbírása egy olyan statikai modellrendszer segítségével határozható meg, amely képlékenységtani analógiával tárgyalható, és melynél a nyomó „folyási határ" a horpadási kritikus nyomó főfeszültséggel egyenlő. Ezzel a módszerrel visszavezette a feladat megoldását egy speciális, képlékenységtani feladat megoldására.

1. Bevezetés

A BME Acélszerkezetek Tanszékén évek óta kiterjedt kutatómunkát folytatunk — más, külföldi intézményekkel párhuzamosan [1], [2], [3] — a vékony, merevítetlen gerinclemezek teherbírásának meghatározására. A kutatás kísérleti vizsgálatairól már több helyen beszámoltunk [4], [5], e cikkben a nyíró teherbírásszámítás elveit ismertetjük.

2. A feladat megfogalmazása, számítási modell

A vizsgált kéttámaszú, vékonyfalú, hajlított tartóról kikötjük, illetve feltételezzük, hogy

— keresztmetszete két szimmetriatengellyel rendelkezik, és a tartó hossza mentén állandó;

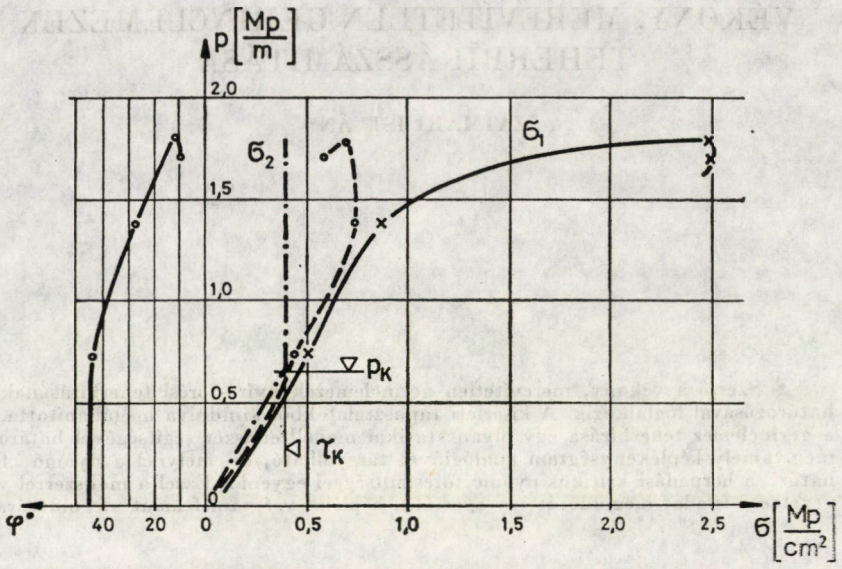
— a gerinclemez teljes hosszában merevítés nélküli, csak a megtámasztások függőlegesében helyezkedik el egy-egy erőteljes merevítőborda;

— anyaga olyan, hogy a folyási határ elérése után jelentős képlékeny alakváltozásra képes,

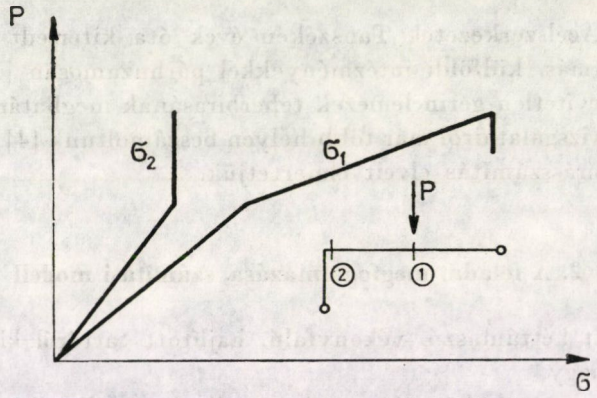
— terhe ún. egyparaméteres teher, amely a tartó középtengelyéhez képest szimmetrikusan helyezkedik el, és a tartó felső nyomott övét terheli;

— erőjátéka olyan, hogy a teherből származó nyomatékot az övek, a nyíróerőt a gerinclemez viseli.

* Dr. Szatmári István, 1118 Budapest, Sasadi köz 1.



1a. ábra. Teher-feszültség görbék a hajlított tartó gerinclemezén



1b. ábra. Teher-feszültség görbék egy kétcsuklós kereten

Kikötjük még, hogy a tartó tönkremenetelét a továbbiakban T_U-val jelölt nyíróerő fellépte jelenti, mely a gerinc nyíró teherbírását kimeríti, és amely legalább eléri a T_K horpadási kritikus nyíróerőt, tehát

$$T_U \geq T_K .$$

További megfontolásaink előtt kísérleti vizsgálatunk anyagából az 1a ábra segítségével bemutatjuk a gerinclemez egy pontjának feszültségállapotát a teher növelése közben. Ha a σ_1 és σ_2 főfeszültségek alakulását bemutató görbéket az 1b ábrán felrajzolt rugalmas-képlékeny anyagú tartómodell

elképzelt jelleggörbéihez hasonlítjuk, könnyen analógiát teremthetünk a két jelenség között.

Más — e helyen nem részletezett [6] — megfontolások is arra a következtetésre vezettek, hogy a gerinclemezt a horpadás utáni állapotban lehetséges egy — a gerinclemez eredeti síkjában — elhelyezkedő — képlékeny anyagú tárcsaként kezelni, amelynek viselkedését a

$$\sigma_{2F} = \sigma_{2K}, \tag{1}$$

$$\sigma_F = \sqrt{\sigma_{1F}^2 + \sigma_{2F}^2 - \sigma_{1F} \cdot \sigma_{2F}} \tag{2}$$

összefüggések írják le, ahol σ_{2K} a horpadási kritikus nyomó főfeszültség és σ_F az anyag (egytengelyű) folyási határa.

A gerinclemezt határoló övek és végbordák egy zárt keretszerkezetet alkotnak, amelyek teherbírása — a későbbiekben említett megszorítást figyelembe véve — képlékenységtani módszerekkel meghatározható.

Bontsuk fel ezek után a tartót a 2a ábra szerint két tartományra, majd a kritikuson túli tartományt a 2b ábra szerint két modell összegére. Az első modell (a továbbiakban jele: K) a gerinclemezből áll és jellemzője, hogy

$$\sigma_{1K} = -\sigma_{2K} = \tau_K = \text{konst},$$

ahol τ_K a horpadási kritikus nyírófeszültség; a második modell (jele: S) jellemzője, hogy az övekből, a végbordákból, a kritikuson aluli gerinclemez tartományból, mint merev tárcsából és a kritikuson túli gerinclemez tartomány tetszőleges darabjából áll. Ez utóbbi gerinclemez darabra a törés pillanatában fenn kell állniuk a

$$(\sigma_{1S}, \sigma_{1K}) = \sigma_{1F}, \tag{3}$$

$$(\sigma_{2S}, \sigma_{2K}) = \sigma_{2K} \tag{4}$$

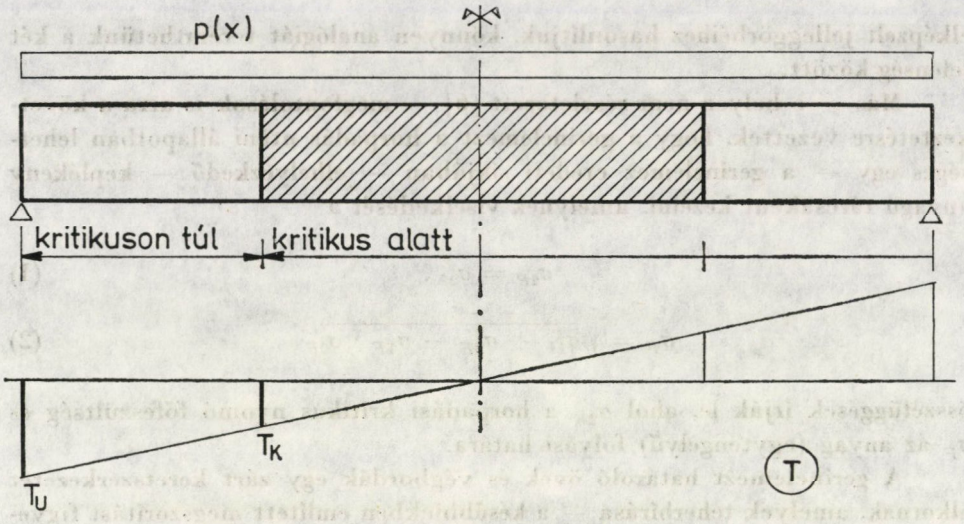
összefüggéseknek. Minthogy az S jelű modell feszültségi főirányai nem esnek szükségképpen egybe a K jelű modell feszültségi főirányaival, a (4) kifejezés nem jelenti a $\sigma_{2S} = 0$ azonosságot. Ha azonban a további munka egyszerűsítésére mégis feltételezzük, hogy

$$\sigma_{2S} = 0,$$

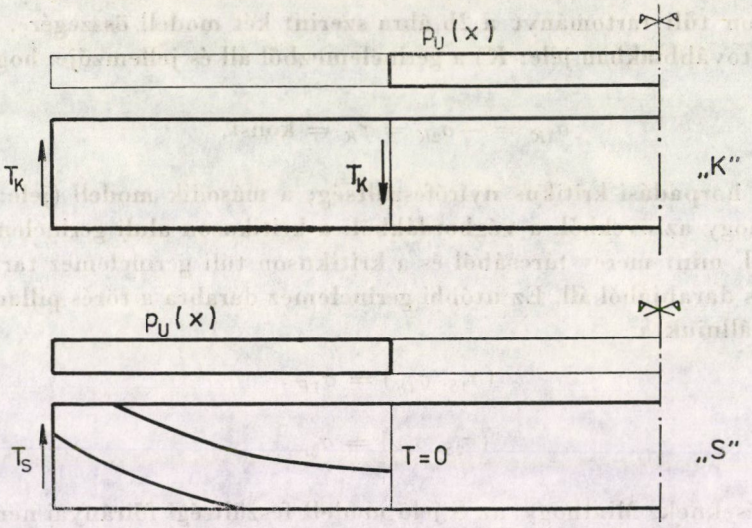
és természetesen

$$\sigma_{1S} > 0, \tag{5}$$

akkor az S jelű modellen a gerinclemez darabot igen szemléletesen egy „kötél"-sávnak tekinthetjük. E két — tárcsa és kötél — modell együttes hatására a ge-



2a. ábra. A hajlított tartó gerinclemezének zónái



2b. ábra. A hajlított tartó gerinclemezének számítási modellje

rinclemezben ébredő σ_{1M} és σ_{2M} főfeszültségek a fenti feltételezés miatt már csak a

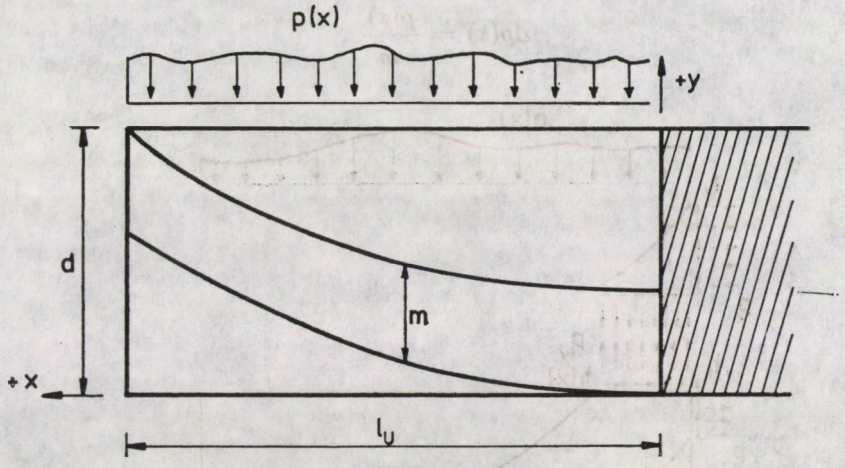
$$\sigma_{1M} = \sigma_{1F},$$
$$|\sigma_{2M}| < |\sigma_{2K}|, \tag{6}$$

vagy a

$$\sigma_{1M} < \sigma_{1F},$$
$$\sigma_{2M} = \sigma_{2K} \tag{7}$$

összefüggés-párok valamelyikét elégíthetik ki a (3) és (4) egyenlőségek helyett. A gyakorlati esetekben mindig a (6) összefüggés a mértékadó.

E megfontolások után a *S* jelű számítási modellünk egy keresztszerkezetből áll, amelynek teherbírását a képlékenységtan statikai tételének felhasználásával oldjuk meg.



3. ábra. A kötélsáv alapesete

3. A „kötélsáv" egyensúlya

Első lépésként tételezzük fel, hogy a kötélsáv elhelyezkedése a 3. ábrának megfelelő, tehát teljes egészében elfér a gerinclemezen. Válasszuk ki a kötélsáv Δm_i magasságú sávját, amelyre működjék a $p(x)$ külső teherből egy $\Delta p_i(x)$ részteher. A kötél alakja a $\Delta p(x)$ teher hatására közismerten

$$y_i = A \iint \Delta p_i(x)\, dx\, dx + Bx + C_i$$

formában írható fel. Figyelembe véve, hogy definíciószerűen $x = 0$ esetén $T = 0$, az következik, hogy fenti összefüggésben $B = 0$, s így a kötél alakja:

$$y_i = A \iint \Delta p_i(x) dx\, dx + C_i\,. \tag{8}$$

Ha a további számításaink egyszerűsítése érdekében Δm értékét az x tengely mentén állandónak tekintjük, és a kötélsávot, egy összefüggő, m magasságú tartománynak vesszük fel, azt találjuk, hogy a Δm_i magassággal jellemzett egyes kötelek egymással párhuzamosak. A (8) összefüggésből következik, hogy ha

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 = \ldots \Delta m_i,$$

akkor

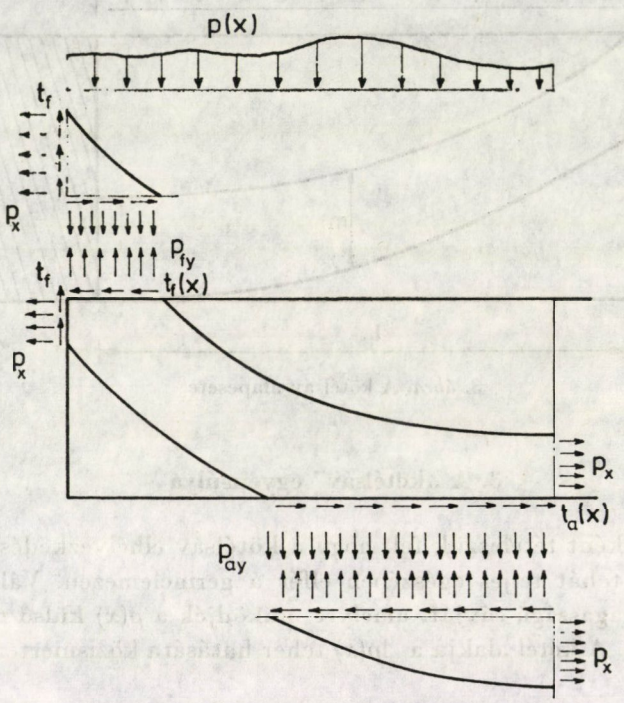
$$\Delta p_1(x) = \Delta p_2(x) = \ldots \Delta p_i(x), \tag{9}$$

és

$$p(x) = \int_0^m \Delta p(x) \mathrm{d}m \,,$$

azaz

$$\Delta p(x) = \frac{p(x)}{m} \,. \tag{10}$$



4. ábra. A kötélsáv általános esete

Fentiekből következik, hogy a kötélsáv x_1 és x_2 közötti szakaszának $m_2 - m_1$ magasságú részére működő teher

$$p_m(x) = \frac{p(x)}{m} (m_2 - m_1) \,,$$

és e teher eredője

$$P_m = \int_{x_1}^{x_2} \frac{p(x)}{m} (m_2 - m_1) \, \mathrm{d}x. \tag{11}$$

Ha ezek után a 4. ábra szerint a keretszerkezettel a kötélsáv egyes részeit levágjuk és eltávolítjuk, az elvágás helyén az öveket két erőhatás eredője tá-

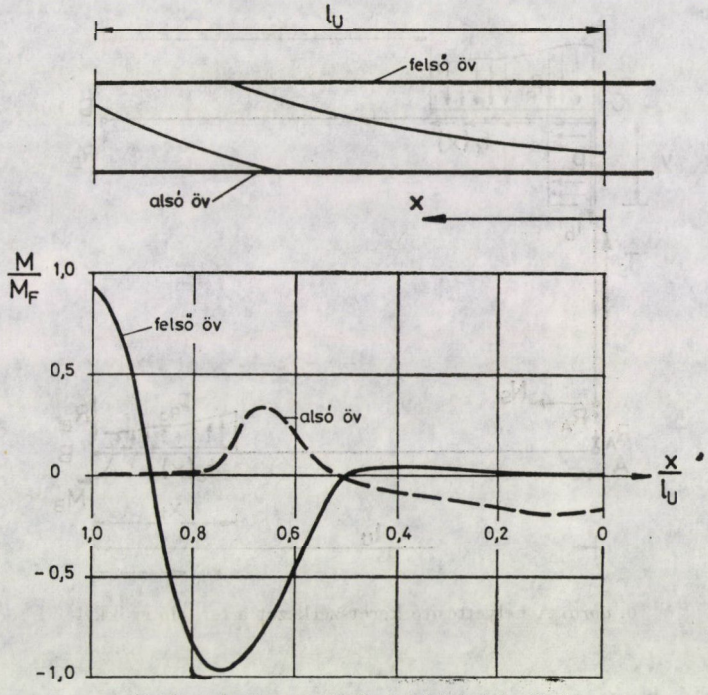
madja, egyrészt a leeső kötélsávdarabra a (11) összefüggéssel definiált $p_m(x)$, valamint a kötelek lehorgonyzásához szükséges

$$p_y(x) = \sigma_y \cdot v = \sigma_{1S} \cdot \sin_2 \delta \cdot v,$$

és

$$t(x) = \tau_{xy} \cdot v = \sigma_{1S} \cdot \sin \delta \cos \delta v \qquad (12)$$

erők eredője.



5. ábra. Az övnyomatékok kísérleti értékei

4. A keretszerkezet egyensúlya

Az övekből és végbordából, valamint a középső kritikuson aluli tartományból álló zárt keret statikailag háromszorosan határozatlan, így elvben a képlékeny mechanizmus kialakulásához 4 képlékeny csukló kialakulása szükséges. Ugyanakkor szemügyre véve a 5. ábrát, amelyen egy kísérleti gerenda övein a törés stádiumában mért nyomatékokat rajzoltuk fel, világosan látható, hogy a nyomaték az A és D pontban közel zérus, és így e helyeken a valóságos helyzetnek közel megfelelően zérus nagyságú nyomatékot, vagy ami ezzel egyenértékű, csuklót tételezünk fel. (A jelenség elméleti magyarázatára e cikk terjedelme nem ad lehetőséget.)

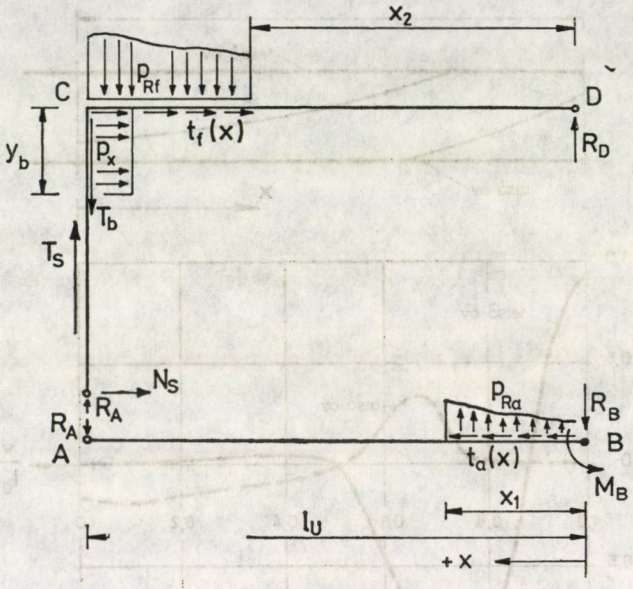
Így keretszerkezetünk a 6. ábra szerint alakul. Az ábrán feltüntettük a keret egyes részeit terhelő erőket is.

Az alsó öv egyensúlyi egyenletei:

$$R_A \cdot l_U + M_B - \int_0^{x_1} p_{Ra}(x) \cdot x \cdot dx = 0\,, \tag{13}$$

ahol

$$p_{Ra} = p_{ya}(x) - p_{ma}(x).$$



6. ábra. A helyettesítő keretszerkezet a terhelő erőkkel

Kimutatható, hogy

$$\int_0^{x_1} p_{Ra}(x)\,dx = 0\,, \tag{14}$$

így

$$R_B = -R_A. \tag{15}$$

A felső keretrész egyensúlyi egyenletei:

$$T_S + R_A - T_b - \int_{x_2}^{l_U} p_{Rf}(x)dx + R_D = 0\,, \tag{16}$$

ahol

$$p_{Rf}(x) = p_{yf}(x) + p_{mf}(x)\,.$$

A kötélsáv egyensúlyából következik, hogy

$$T_b + \int_{x_2}^{l_U} p_{Rf}(x)\,dx - \int_0^{x_1} p_{Ra}(x)\,dx = \int_0^{l_U} p(x)\,dx\,. \tag{17}$$

ámde a bal oldal harmadik tagja a (14) szerint zérus, és figyelembe véve, hogy definíciószerűen

$$T_S = \int_{x_1}^{l_U} p(x)\mathrm{d}x\,,$$

azt kapjuk, hogy

$$R_D = -R_A. \tag{18}$$

A D pontra felírható nyomatéki egyenletből megkapjuk N_S értékét is:

$$(T_S + R_a - T_b)\, l_U - \int_{x_1}^{l_U} p_{Rf}(x) \cdot x \cdot \mathrm{d}x - \frac{p_x \cdot y_b^2}{2} - N_S \cdot d = 0. \tag{19}$$

5. A T_S nyíróerő számítása

Korábbi kikötésünk értelmében a tartóra működő teher ún. egyparaméteres teher, tehát

$$p(x) = \beta \cdot p_0(x).$$

Ha a gerinclemez horpadási kritikus ereje T_K, amely érték természetesen a terhelési folyamat során állandó, írható, hogy

$$T_K = \beta_1 \int_0^{l_{K1}} p_0(x)\,\mathrm{d}x = \beta_2 \int_0^{l_{K2}} p_0(x)\,\mathrm{d}x, \tag{20}$$

és ha

$$\beta_2 > \beta_1,$$

kell, hogy

$$l_{K2} < l_{K1}$$

legyen. A (20) összefüggés mutat rá a számítás alapvető problémájára, arra ti. hogy a 3. és 4. pontban leírt szerkezet méretei a teherintenzitástól függnek. E probléma megoldására az alábbi számítási módszert követjük.

1. Felvesszük becslés alapján a β_{U1} intenzitástényezőt, úgy, hogy az lehetőleg a gerinclemez nyíró teherbírását kimerítse.

2. Felvesszük a c vektor induló értékét. (E vektor négy elemből áll, az első három a kötélsáv helyzetét meghatározó geometriai paraméter, míg a negyedik a B pontban működtetett nyomatékkal arányos statikai paraméter.)

3. Meghatározzuk valamennyi — a maximum szempontjából — szóbajöhető ponton a

$$k = k_N + k_M$$

képlékenységi feltételeket, ahol a szokásos módon $k_N = N/N_F$, ill. a nyomott öv esetében $k_N = N/N_K$, és

$$k_M = \frac{M}{M_F}\,.$$

Természetesen írható, hogy

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}(\mathbf{c}).$$

Definiáljuk ezek után a $k_M(\mathbf{c})$ skalár-vektor függvényt úgy, hogy

$$k_M(\mathbf{c}) = \max \mathbf{k}(\mathbf{c}). \tag{21}$$

Ezek után természetesen a c paraméterek, tehát a „szerkezet" változtatásával megkereshetjük a teherbírás szempontjából legkedvezőbb „szerkezeti kialakítást", tehát a c paraméterek olyan kombinációját, amely mellett

$$k_M(\mathbf{c}) = \min!$$

lesz, úgy, hogy a $\mathbf{c}$ vektor elemei nem lépik túl az értelmezési tartományuk határát, tehát

$$\mathbf{c}_a \leqq \mathbf{c} \leqq \mathbf{c}_f.$$

Ha

$$\min k_M(\mathbf{c}) = 1,0,$$

a β_U törőintenzitás

$$\beta_U = \beta_{U1},$$

ha nem, új β_{U1} felvételével a számítást meg kell ismételni.

IRODALOM

1. ECCS: Manual on Stability of Steel Structures Ch. 6.3. June, 1976
2. HÖGLUND, T.: Livets verkningssätt och bärförmaga HOS tunnväggig I-balk. Meddelande 1971 Nr. 93. Institutionen för Byggnadsstatik Jungl. Tekniska Högskolan, Stockholm
3. FREY, F.: Shera Tests on Unstiffened Plate Girders. Stability of Steel Structures, Liège, April 1977, Preliminary Report
4. BME Acélszerkezetek Tanszék: Vékonyfalú tartók merevítetlen gerinclemezeinek méretezése törési alapon (Kutatási jelentés) Kézirat, Budapest 1976
5. SZATMÁRI, I.: Ultimate Load Tests of Girders with Thin Unstiffened Webs. Stability of Steel Structures, Hungary, 1977 Proceedings
6. SZATMÁRI, I.: Kéttámaszú hajlított tartók vékony, merevítetlen gerinclemezeinek teherbírása. *Mélyépítéstudományi Szemle* **26** (1976), Nr. 9

Calculation of the load bearing capacity of non-stiffened thin web plates. The paper deals with the determination of the shear-fracture load bearing capacity of non-stiffened thin web plates. Starting out from test experiences it was found that the load bearing capacity of web plates could be determined by means of such a static model system that might be treated as an analogy from the science of plasticity, and where the compression yield point would be equal to the critical compressive main stress of indentation. This method will reduce the solution of the problem to that of a special problem of plasticity.

Berechnung der Tragfähigkeit dünner, unversteifter Stegbleche. Der Aufsatz befaßt sich mit der Bestimmung der Scherbruchtragfähigkeit von dünnen, unversteiften Stegblechen. Auf Grund von, aus Versuchen gewonnenen Erfahrungen konnte festgestellt werden, daß die

Tragfähigkeit des Stegbleches mit Hilfe eines statischen Modellsystems ermittelt werden kann, das analog der Plastizitätslehre zu behandeln ist und bei welchem die von Druck herrührende »Fließgrenze« der, infolge von Beulung aufgetretenen kritischen Hauptdruckspannung gleich ist. Mit diesem Verfahren wurde die Lösung der Aufgabe auf die einer speziellen Aufgabe der Plastizitätslehre zurückgeführt.

Расчёт несущей способности тонких стенок без рёбер жёсткости. В статьи исследуется разрушение от среза тонких стенок балок без рёбер жёсткости. По опытам экспериментальных испытаний был установен нами, что несущую способность стенки можно определить с помощью статической системы модели. Систему можно анализировать по аналогии теории пластичности с тем предположением, что «предел текучести» на сжатие равен критического сжимающего на местную устойчивость главного напряжения. Этим способом задача была основана на решении специальной задачи по теории пластичности.

AZ ERŐSÍTŐ LEMEZ PROBLÉMÁJA

SZÉPE FERENC*

Húzott rúddal együttdolgozó erősítő lemez számos, a szerkezettervező gyakorlatban előforduló feladat legegyszerűbb modellje. Egy, az erőjátékban résztvevő elemek alakváltozási jellemzőin alapuló összefüggés egyszerűsíti az erősítő lemez viselkedésének leírását és megértését.

Jelölések

e az alaplemez és az erősítő lemez relatív eltolódása, a kötőréteg eltolódása
τ nyírófeszültség a kötőrétegben
c rugóállandó, a kötőréteg egységnyi eltolódását okozó nyírófeszültség, $c = \tau/e$
σ húzófeszültség, σ_2 az alaplemezben, σ_1 az erősítő lemezben
E rugalmassági modulus
ε fajlagos nyúlás
F az alaplemezt terhelő külső erő
F_1 belső erő az erősítő lemezben
F_2 belső erő az alaplemezben
A keresztmetszeti terület
T_τ a kötőréteg alakváltozási ábrájában meghatározott terület
T_F az alaplemez- és az erősítő lemez alakváltozási ábráiban meghatározott terület
l az átlapolás, azaz a kötőréteg félhossza
τ_l a kötőrétegben ébredő legnagyobb nyírófeszültség (az $x = l$ helyen)

1. Tartószerkezeti kötések elmélete és az erősítő lemez

Tartószerkezetek kötéseinek elméleti vizsgálata a századforduló óta vissza-visszatérő feladat. Az elméleti vizsgálatok elsősorban illesztésekre és bekötésekre irányultak. E kötések jellegzetessége, hogy a külső terhelő erőt a kötés teljes egészében továbbítja, így a kötést terhelő erő nagysága eleve ismert, ismeretlen viszont a kötőréteg igénybevétel-eloszlása, illetve a legnagyobb igénybevétel nagysága.

A nyírásra igénybevett kötőréteg igénybevétel-, ill. feszültségeloszlását, valamint az eloszlást befolyásoló tényezőket — míg a kötést alkotó elemekben a feszültségek az arányossági határt nem haladják meg, már a század elején tisztázták [1, 2]. Az arányossági határon túl a matematikai nehézségek vagy

* Szépe Ferenc, 1113 Budapest, Csetneki u. 7.

hosszadalmas iterációkra [3], vagy emellett még durva közelítésekre is [4], vagy empirikus, kísérleti eredményeken alapuló közelítő formulák alkalmazására [5] kényszerítenek.

A BME Acélszerkezetek Tanszékén a feladatot a megszokottól eltérően, de műszakilag logikusan fogalmazták meg, nevezetesen: tartószerkezetek teherbírása szempontjából az elsődlegesen szükséges ismeret nem a kötések feszültségeloszlása, hanem egy meghatározott teherbírást biztosító kötőelemek száma ill. kötőréteg hossza. Az adott teherbírást biztosító kötőelemek számát, ill. kötőréteg-hosszat tekintve elsődlegesen meghatározandó ismeretlennek, a feladat egyszerűbbé vált és lehetővé vált a kötést alkotó elemek alakváltozási tulajdonságait a törésig figyelembe vevő direkt méretezési módszer kidolgozása [6, 7].

A kötések viselkedésének elméleti vizsgálatait szerényen követik az erősítő lemezre vonatkozó elméletek [1, 4]. Az erősítő lemez problémája legegyszerűbb megfogalmazásában egy közvetlenül terhelt húzott rúddal nyírt kötőréteg révén együttdolgozásra késztetett, de közvetlenül nem terhelt elem erőjátékának vizsgálatát jelenti.

Az erősítőlemez, mint egy húzott rúddal együttdolgozásra késztetett elem, a szerkezettervező gyakorlatban számos esetben előforduló feladat lehetséges legegyszerűbb modellje. A teljesség igénye nélkül mint e feladathoz hasonlót említhetjük a hajlított tartó övlemezének és gerinclemezének, vagy több övlemezének együttdolgozására, az ékelt fatartók erőjátékára, vagy a vasbetonlemezzel együttdolgozó öszvértartók erőjátékára, vagy akár egy híd főtartóinak és a pályaszerkezetnek együttdolgozására vonatkozó feladatokat. A BME Acélszerkezetek Tanszékén a súrlódó réteg tulajdonságainak felderítésére tervezett erősítő lemezes modell igen érzékeny és megbízható eszköznek bizonyult [8].

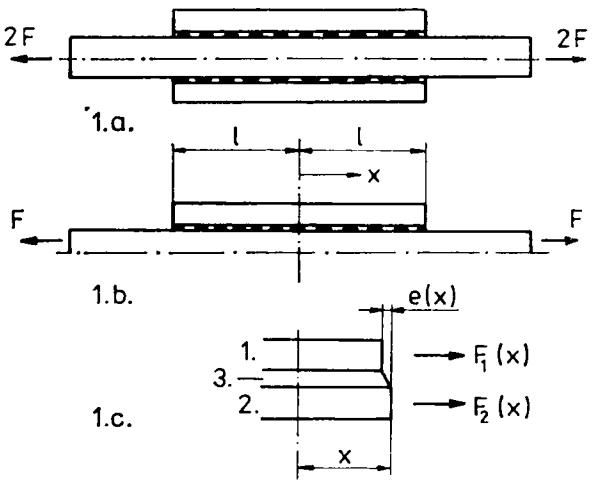
Az erősítő lemez feladatot, míg az erőjátékban résztvevő elemekben keletkező feszültségek az arányossági határt nem haladják meg, ugyancsak ARNOVLEVIC oldotta meg a század elején [1]. A rugalmassági határon túltekintő vizsgálatok azonban önkényes feltevésekre támaszkodva sem hoztak hasznosítható eredményeket [4]. A következő sorok fel kívánják hívni a figyelmet egy olyan, már a nyírt kötésekkel kapcsolatban megismert összefüggésre [6, 7], amely az erősítő lemez viselkedésének szemléletes megismeréséhez vezethet és az erősítő lemez probléma egyszerű megoldásának útját is egyengeti.

2. Egy összefüggés az erősítő lemez problémájának megoldásához

A vizsgálat az 1a. ábrán feltüntetett erősítő lemezes húzott rúdra vonatkozik. Az erősítő lemezeket nyíróerő felvételére alkalmas kötőréteg köti az alaplemezhez. Szimmetria miatt elég az egyik erősítő lemezt és a félvastagságú

alaplemezt figyelembe venni (1b ábra). A kötőréteg 1c ábra szerinti alakváltozása arányos a nyírófeszültséggel:

$$e(x) = \frac{1}{c}\,\tau(x)\,. \tag{1}$$



1. ábra. Erősítő lemezes rúd. *a)* erősítő lemezes rúd vázlata, *b)* vizsgált modell, *c)* egy szakasz alakváltozása

A kötőréteg alakváltozása (1c ábra) az elemek nyúlásainak különbségével is kifejezhető:

$$e(x) = \int_0^x \frac{\sigma_2}{E}\,\mathrm{d}x - \int_0^x \frac{\sigma_1}{E}\,\mathrm{d}x\,, \tag{2}$$

illetve differenciálva:

$$\mathrm{d}e/\mathrm{d}x = \varepsilon_2 - \varepsilon_1. \tag{3}$$

Az egyensúly feltétele:

$$F_1 + F_2 = F. \tag{4}$$

A (2) és (4) alapján — mint ismeretes pl. [1] — felírható differenciálegyenlet megoldása szerint, ha $E_1A_1 = E_2A_2 = EA$ $x = 0$ helyen $\tau = 0$, a legnagyobb nyírófeszültség az $x = l$ helyen keletkezik:

$$\tau_l = \frac{F}{2}\,a\,\tanh al\,, \tag{5}$$

ahol

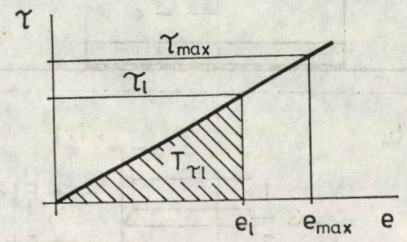
$$a = \sqrt{\frac{2c}{EA}}\,. \tag{6}$$

Az erősítő lemez és az alaplemez együttdolgozásának mennyiségi jellemzésére az erősítő lemezben az $x = 0$ helyen keletkező legnagyobb F_1 erő és az alaplemezt terhelő külső teher hányadosa alkalmas:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\cosh al}\right). \tag{7}$$

A 2. ábra a kötőréteg nyírófeszültség-eltolódási ($\tau - e$) ábráját tünteti fel. Az ábra $T_{\tau l}$ jelzett területe:

$$T_{\tau l} = \frac{\tau_e \cdot e_l}{2}. \tag{8}$$



2. ábra. A kötőréteg nyírófeszültség-eltolódási ábrája

A T_τ terület elérhető legnagyobb területe: $T_{\tau\,max}$. Az (1), (5) és (7) alapján:

$$T_{\tau l} = \frac{F^2}{4EA}\tanh^2 al. \tag{9}$$

A 3a. ábra az alaplemez, a 3b ábra az erősítő lemez erő — fajlagos nyúlási ($F - \varepsilon$) ábráját tünteti fel. Az alaplemezben a kötés félhosszán F és F_2 között, az erősítő lemezben pedig 0 és F_1 között változhatik a belső erő. A két erő — fajlagos nyúlási ábrát egyesíthetjük oly módon (4a ábra), hogy az erősítő lemez erő — fajlagos nyúlását az $F - f_1(\varepsilon)$ egyenes jellemezze. A két lemez fajlagos alakváltozását ily módon leíró két egyenes közti és az ε tengellyel párhuzamos metszék: $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$, a fajlagos alakváltozások különbsége.

Egy ilyen metszék az erőt két szakaszra, F_1-re és F_2-re osztja. A két egyenes metszéspontjában $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0$, ekkor — az alkalmazott feltételek mellett — $F_{1max} = F_{2min} = F/2$. A két egyenes metszéspontjáig határolt terület:

$$T_{F_{1max}} = \frac{F^2}{4EA}. \tag{10}$$

A két egyenes által közrezárt terület F és $F - F_1$ között:

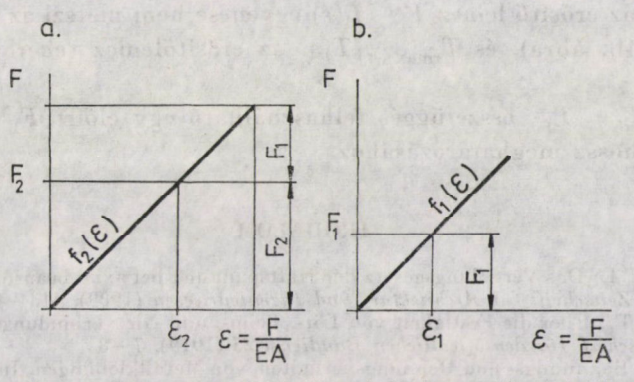
$$T_{F_1} = \frac{F^2}{4EA} \cdot 4\left[\frac{F_1}{F} - \left(\frac{F_1}{F}\right)^2\right].$$

A (7) figyelembevételével:

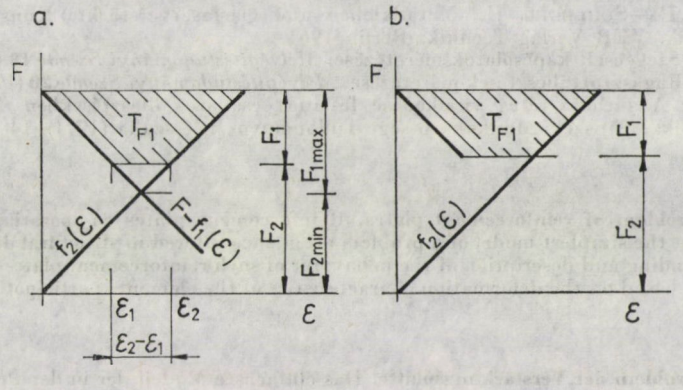
$$T_{F_1} = \frac{F^2}{4EA} \tanh^2 al, \tag{11}$$

vagy (10) alapján:

$$T_{F_1} = T_{F_1 \max} \tanh^2 al\,. \tag{12}$$



3. ábra. Erő — fajlagos nyúlási ábrák: *a)* alaplemez, *b)* erősítő lemez



4. ábra. Erő — fajlagos nyúlási ábrák: *a)* $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = 0$, van metszéspont, *b)* nincs metszéspont

Végül (9) és (11) egybevetésével:

$$T_{rl} = T_{F_1} \tag{13}$$

területegyenlőség áll fenn. E területegyenlőség általános esetre is levezethető.

A területegyenlőség jelen esetben a következő megállapításokhoz használható:

1. Mivel $\tanh^2 al < 1$, $T_{F1} < T_{F1\max}$, a merevségi viszonyoknak megfelelő mértékű együttdolgozás csak megközelítő, de nem érhető el.

2. Ha $T_{\tau max} > T_{F1max}$, a feladat tetszőleges F_1-re megoldható, míg $T_{F1} < T_{F1max}$.

3. Ha $T_{\tau max} = T_{F1}$, a feladat megoldható, de F_1-t a kötőréteg teherbírása korlátozza.

4. Ha $T_{\tau max} < T_{F1}$, a feladat nem oldható meg, a kötőréteg teherbírása kimerül F_1 elérése előtt.

5. Ha az erősítő lemez $F - f_1(\varepsilon)$ egyenese nem metszi az alaplemez $f_2(\varepsilon)$ egyenesét (4b. ábra), és $T_{\tau max} > T_{F1}$, az erősítőlemez teherbírása merül ki (pl. törik).

6. A $T_{\tau l} = T_{F1}$ összefüggés felhasználható egy előírt F_1 biztosításához szükséges l hossz meghatározásához.

IRODALOM

1. ARNOVLEVIC, I.: Das Verteilungsgesetz der Haftspannung bei axial beanspruchten Verbundstäben. *Zeitschrift für Architektur- und Ingenieurwesen* (1909), 413—418
2. FILLUNGER, F.: Über die Festigkeit von Löt-, Leim-, und Nietverbindungen. *Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst* 25 (1919), 7—8
3. JAEGER, F.: Spannungs- und Dehnungsverhalten von Metallklebungen. Juris Verlag, Zürich 1963
4. VOLKERSEN, O.: Schubkraftverteilung in Leim-, Niet-, und Bolzenverbindungen. *Energie und Technik* (1953), 68—71, 103—108, 150—154
5. SCHWARZ, H.—SCHLEGEL, H.: Metallkleben und glasfaserverstärkte Kunststoffe in der Technik. VEB Verlag Technik. Berlin 1961
6. SZÉPE, F.: Szegecselt kapcsolatok méretezése. *Mélyépítéstudományi Szemle* 18 (1968), 49—57
7. SZÉPE, F.: Ragasztott illesztések méretezése. *Mélyépítéstudományi Szemle* 20 (1970), 245—252
8. SZÉPE, F.: A súrlódó réteg viselkedése feszített csavaros illesztésekben. MTA Műszaki Mechnikai Tanszéki Munkaközössége Tudományos Üllésszaka (1974), 140—148

The problem of reinforcement plates. Reinforcement plates co-operating with drawn bars represent the simplest model of a problem often encountered in structural design practice. The understanding and description of the behaviour of such reinforcement plates are facilitated by a formula based on the deformation characteristics of the elements participating in the play of forces.

Das Problem der Verstärkungsplatte. Das einfachste Modell der in der Praxis des Konstrukteurs auftretenden zahlreichen Aufgaben bildet die mit dem Zugstab zusammenwirkende Verstärkungsplatte. Ein auf den Formänderungscharakteristiken der am Kräftespiel beteiligten Elemente beruhender Zusammenhang vereinfacht die Beschreibung und das Verständnis des Verhaltens der Verstärkungsplatte.

Проблема укрепляющей пластинки. Укрепляющая пластинка, работающая совместно растянутым стержнем, является прощей моделью несколько задач, частных в практике конструктора. Формула, основающая на характеристиках деформации элементов, упрощает обрисование и понимание работы укрепляющей пластинки.

A VÉGES SÁVOK MÓDSZERÉNEK ALKALMAZÁSA TÁMASZELMOZDULÁSOK ESETÉN

SZILÁGYI GYÖRGY*

A szerző az előírt elmozdulások figyelembevételét ismerteti derékszögű lemez- ill. tárcsasáv esetén; a tehervektor a (8), a (14) összefüggéssel határozható meg. A tanulmány kéttámaszú lemez egyik támaszának parabolaalakú süllyedésére vonatkozó számszerű példával fejeződik be.

1. Általános ismertetés

A véges sávok módszere a mozaikmódszer (más néven: a véges elemek módszere) és egy analitikus eljárás kombinációjának tekinthető. Míg a mozaikmódszernél a felületszerkezeteket két vagy több vonalsereggel osztjuk elemekre, addig a véges sávok módszerénél egy vonalsereggel osztjuk sávokra. A véges sávok módszere speciális alakú szerkezetek és bizonyos peremfeltételek esetében igen hatékonynak bizonyult [2], [4].

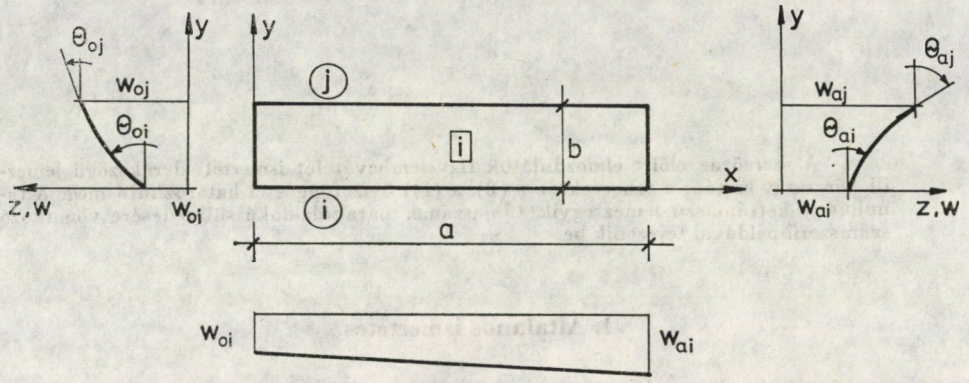
A módszer alkalmazási területeiről jó áttekintést nyújt Y. K. CHEUNG monográfiája [1]. Jelen tanulmányban csak rugalmas anyagú felületszerkezetek számításával foglalkozunk statikus teher és kis elmozdulások esetében. Erre a feladatra a véges sávok módszerét kezdetben olyan, derékszögű négyszög vagy íves alaprajzú, prizmatikus, vékony felületszerkezetekre dolgozták ki, amelyek két szemben fekvő peremükön — a sávok végén — saját síkjukban végtelen merev, arra merőlegesen végtelen hajlékony diafragmára támaszkodnak.

A BME Mechanika Tanszékén mintegy hét éve folynak a peremfeltételek kiterjesztésére irányuló kutatások. Először a sávok végén ható erők és erőpárok figyelembevételét sikerült megoldani, és ezzel lehetővé vált a folytatólagos szerkezetek számítása [3]. Az utóbbi két évben az előírt támaszelmozdulások esetére sikerült kiterjeszteni a módszert. Ennek ismertetése található az alábbiakban, derékszögű lemez- és tárcsasávra vonatkozóan. A vizsgált szerkezetek anyaga ortotróp; a rugalmassági szimmetriasíkok párhuzamosak a koordinátasíkokkal (1. és 2. ábra). Megjegyezzük, hogy az olyan sávokból,

* Dr. Szilágyi György, 1114 Budapest, Bocskai út 21.

amelyek egyidejűleg lemezként és tárcsaként dolgoznak, összeállíthatók a lemezművek, a vékonyfalú tartók és a hengeres héjak.

Az itt bemutatott eljárás alkalmazható íves, valamint kúpos sávokra is, és lehetőséget ad szabad perem figyelembevételére. Ez utóbbi esetben a sávok végének elmozdulásait abból a feltételből kell meghatározni, hogy helyükön ne keletkezzenek támaszerők.



1. ábra

2. Lemezsávok

Az 1. ábrán látható i-edik lemezsávon a következő támaszelmozdulásokat írjuk elő:

— az i-edik csomóvonal $x = 0$, ill. $x = a$ végének lehajlását és elfordulását: w_{0i}, Θ_{0i}, ill. w_{ai}, Θ_{ai},

— ugyanezeket az elmozdulásokat a j-edik csomóvonalon: w_{0j}, Θ_{0j}, w_{aj}, Θ_{aj}.

Ha a sávok elég keskenyek, akkor az előírt elmozdulások által meghatározott peremgörbületeket sávonként állandónak tekinthetjük; ezek az $x = 0$, ill. az $x = a$ támaszon a következők:

$$\varrho_{0y} = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} = \frac{\Theta_{0i} - \Theta_{0j}}{b}, \quad \varrho_{ay} = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} = \frac{\Theta_{ai} - \Theta_{aj}}{b}. \tag{1}$$

A sávoknak az $x = 0$ és az $x = a$ végeire felírható kerületi feltételek tehát a fenti előírt elmozdulások, továbbá az, hogy a peremre merőleges nyomaték zérus:

$$m_x = -D_{11}^{(l)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12}^{(l)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = D_{11}^{(l)} \varrho_x + D_{12}^{(l)} \varrho_y = 0, \tag{2}$$

ahol $D_{11}^{(l)}$ és $D_{12}^{(l)}$: a lemez igénybevételeire vonatkozó merevségi tényezők.

Figyelembe véve az (1) és a (2) összefüggést, az $x = 0$ és az $x = a$ peremre merőleges görbület így írható fel:

$$\varrho_{0x} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}\varrho_{0y}, \quad \varrho_{ax} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}\varrho_{ay}. \tag{3}$$

Az i-edik sáv teljes lehajlásfüggvényét a következő alakban keressük (l. az 1. ábrát):

$$w^{(T)}(x, y) = w(x, y) + w^{(K)}(x, y). \tag{4}$$

Itt $w(x, y)$ a lemezsávoknál szokásos elmozdulásfüggvény [1], [2], [3], $w^{(K)}$ pedig olyan kinematikailag lehetséges lehajlás, amely kielégíti a fenti kerületi feltételeket. Ez utóbbi részletesen:

$$w^{(K)} = w^{(1)}(x, y) + w^{(2)}(x), \tag{5}$$

$$\text{ahol } w^{(1)} = [L_1, L_2, L_3, L_4]\left\{\begin{bmatrix} w_{0i} \\ \Theta_{0i} \\ w_{0j} \\ \Theta_{0j} \end{bmatrix} + x/a \begin{bmatrix} w_{ai} - w_{0i} \\ \Theta_{ai} - \Theta_{0i} \\ w_{aj} - w_{0j} \\ \Theta_{aj} - \Theta_{0j} \end{bmatrix}\right\}$$

$$w^{(2)} = \frac{\varrho_{ax} - \varrho_{0x}}{6a}x^3 + \frac{\varrho_{ax}}{2}x^2 - a\left(\frac{\varrho_{0x}}{3} + \frac{\varrho_{ax}}{6}\right)x.$$

Itt $[L_1, L_2, L_3, L_4] = \mathbf{c}^*(y)$: Hermite-féle interpolációs polinomok vektora [1], [2].

A (4) függvény első tagja tartalmazza a csomóvonali elmozdulásismeretlenek $\mathbf{w}_m$ Fourier-együtthatóit [2], amelyeket a csomóvonalak egyensúlyi feltételéből lehet meghatározni; ezt a virtuális elmozdulások tételével írjuk fel:

$$\int_{(F)} \delta\boldsymbol{\epsilon}^* \, \mathbf{D}^{(l)}(\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^{(K)})\, dF = 0, \tag{6}$$

ahol $\delta\varepsilon^*$ a virtuális alakváltozások vektora,
$\mathbf{D}^{(l)}$ a lemez igénybevételeire vonatkozó merevségi mátrix,
$\boldsymbol{\epsilon}$ a $w(x, y)$ lehajlásból számítható tényleges alakváltozások vektora,
$\varepsilon^{(K)}$ a $w^{(K)}$-nak megfelelő, kinematikailag lehetséges alakváltozások vektora,

az integrálást a sáv egész F területére ki kell terjeszteni.

A sáv egyensúlyi egyenletrendszere ezután a (4) függvényt sorbafejtve, a Fourier-sorok ortogonális tulajdonságainak felhasználásával az m-edik Fourier-tagra vonatkozóan ilyen alakú lesz:

$$\mathbf{K}_m \mathbf{w}_m + \mathbf{t}_m = \mathbf{0}, \tag{7}$$

ahol $\mathbf{K}_m$: a sáv m-edik merevségi mátrixa [2],

$\mathbf{t}_m$: a terhelési tagok vektora.

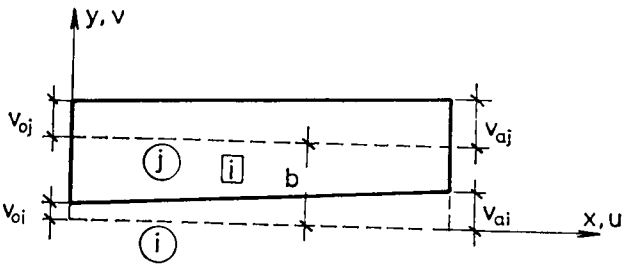
Ez utóbbi a következő összefüggéssel határozható meg:

$$\mathbf{t}_m = \left\{-D_{12}^{(l)} k_m^2 \int_0^b \mathbf{c}\mathbf{c}^{*\prime\prime}\, dy + D_{22}^{(l)} \int_0^b \mathbf{c}''\, \mathbf{c}^{*\prime\prime}\, dy\right\} \mathbf{w}_m^{(1)} + \\ + \left\{-k_m^2 D_{11}^{(l)} \int_0^b \mathbf{c} dy + D_{12}^{(l)} \int_0^b \mathbf{c}''\, dy\right\} \varrho_{xm}, \tag{8}$$

ahol

$$k_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \mathbf{c}'' = \frac{d^2\mathbf{c}}{dy^2},$$

$\mathbf{w}_m^{(1)}$ ill. ϱ_{xm}: a $w^{(1)}$ ill. a $-d^2w^{(2)}/dx^2$ függvény m-edik sinusos Fourier-együtthatója.



2. ábra

Igazolható, hogy ez a tehervektor a merevtestszerű elmozdulásoknak és a sáv tiszta csavarásának megfelelő előírt elmozdulások esetében zérus.

3. Tárcsasávok

A 2. ábrán láthatók a i-edik tárcsasáv előírt eltolódásai: v_{0i}, v_{ai}, v_{0j}, v_{aj}. Ha a sávok elég keskenyek, akkor az előírt eltolódások által meghatározott ε_y fajlagos nyúlásokat a peremeken állandónak tekinthetjük; ezek az $x = 0$ és az $x = a$ támaszon a következők:

$$\varepsilon_{0i} = \frac{v_{0j} - v_{0i}}{b}, \quad \varepsilon_{ay} = \frac{v_{aj} - v_{ai}}{b}. \tag{9}$$

Az x-irányú eltolódásokat az 1. pontban ismertetett megtámasztás miatt nem lehet előírni, mivel az $x = 0$ és az $x = a$ helyen $\sigma_x = 0$. Ez utóbbi feltételt pedig részletesen így írhatjuk fel:

$$\sigma_x = D_{11}\varepsilon_x + D_{12}\varepsilon_y = 0, \tag{10}$$

ahol D_{11} és D_{12}: az általánosított Hooke-törvény merevségi tényezői.

A (9) és a (10) összefüggések alapján az $x = 0$ és az $x = a$ peremekre merőleges ε_x fajlagos nyúlás így írható fel:

$$\varepsilon_{0x} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}\varepsilon_{0y},\quad \varepsilon_{ax} = -\frac{D_{12}}{D_{11}}\varepsilon_{ay}. \tag{11}$$

Az i-edik tárcsasáv teljes elmozdulásfüggvényét az alábbi alakban keressük:

$$\mathbf{u}^{(T)}(x, y) = \mathbf{u}(x, y) + \mathbf{u}^{(K)}(x, y) \tag{12}$$

Itt $\mathbf{u}(x, y)$ a tárcsasávoknál szokásos elmozdulásfüggvény [1], [2], [3], $\mathbf{u}^{(K)}$ pedig kinematikailag lehetséges elmozdulásfüggvény, tehát kielégíti a fenti kerületi feltételeket. Ez utóbbi részletesen felírva:

$$\mathbf{u}^{(K)}(x, y) = \mathbf{u}^{(1)}(x, y) + \mathbf{u}^{(2)}(x), \tag{13}$$

$$\text{ahol } \mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} L_5 & 0 & L_6 & 0 \\ 0 & L_5 & 0 & L_6 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ v_{0i} \\ 0 \\ v_{0j} \end{bmatrix} + x/a \begin{bmatrix} 0 \\ v_{ai} - v_{0i} \\ 0 \\ v_{aj} - v_{0j} \end{bmatrix} \right\},$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon_{ax} - \varepsilon_{0x}}{2a} x^2 + \varepsilon_{0x} x - \dfrac{a}{8}(3\varepsilon_{0x} + \varepsilon_{ax}) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Itt $L_5(y)$ és $L_6(y)$ lineáris interpolációs polinomok [2]. A (12) függvény első tagja tartalmazza a csomóvonali elmozdulásismeretlenek Fourier-együtthatóit. Ezeket a virtuális elmozdulások tétele segítségével az előző pontban vázolt gondolatmenet alapján levezetett, s a (7)-hez hasonló alakú egyenletekből határozhatjuk meg. A terhelési tagok vektora tárcsasávnál:

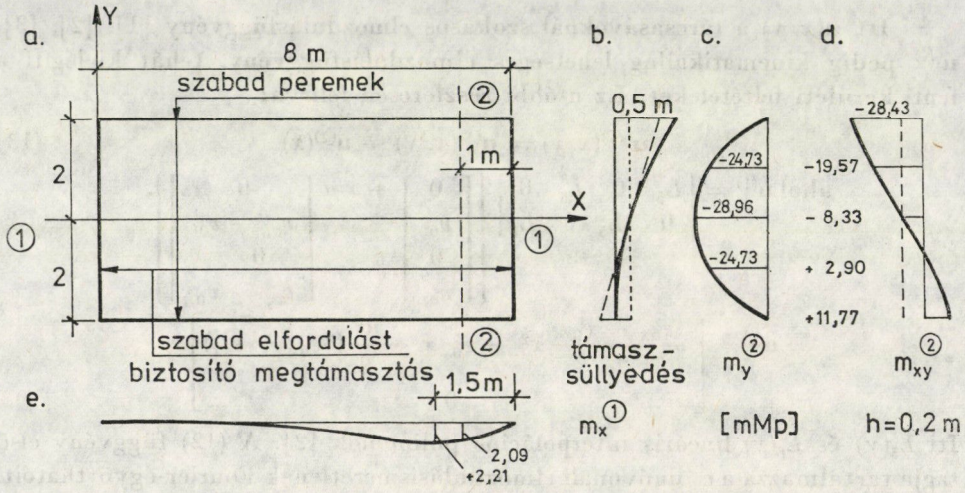
$$\mathbf{t}_m^{(i)} = \frac{h}{a}\{v_{0i} - v_{0j} - (-1)^m(v_{ai} - v_{aj})\} \begin{bmatrix} D_{12} \\ \dfrac{2a}{m\pi b} D_{22} \\ D_{12} \\ \dfrac{-2a}{m\pi b} D_{22} \end{bmatrix} + \tag{14}$$

$$+ \frac{2h}{m\pi}\{\varepsilon_{0y} - (-1)^m \varepsilon_{ay}\} \begin{bmatrix} \dfrac{b}{2} D_{11} \\ -\dfrac{D_{12}}{b} \\ \dfrac{b}{2} D_{11} \\ -\dfrac{D_{12}}{b} \end{bmatrix}.$$

Ez a tehervektor merevtestszerű elmozdulások és tiszta szögváltozás esetén zérus.

4. Számpélda

A 3a. ábrán látható derékszögű izotrop lemez rugalmassági modulusa 100 000 kp/cm², Poisson-féle tényezője 1/5. A lemezt X-irányban nyolc egyenlő szélességű sávra osztottuk. Az $X = 8{,}0$ m helyen levő peremen a 3b ábrán



3. ábra

látható másodfokú parabola alakú eltolódást írtuk elő, amely három részből tehető össze: a támasz egyenletes süllyedéséből (pontozott vonal), az X tengely körüli elfordulásából (szaggatott vonal) és az X tengelyre szimmetrikus parabola alakú süllyedésből (folytonos vonal). Az első rész nem okoz igénybevételt, a második rész pedig az egész lemezben tiszta csavarást okoz. Ezért a ② jelű metszet m_y ábrája (3c) az X tengelyre nézve szimmetrikus, m_{xy} ábrája állandó részből és az X tengelyre nézve ferdén szimmetrikus részből tevődik össze (3d). A 3e. ábrán az ① jelű metszet m_x ábráját mutatjuk be. A közölt eredményeket 40 Fourier-tag figyelembevételével kaptuk. A 20 Fourier-taggal kapott eredmények ezektől legfeljebb 5 százalékkal térnek el.

IRODALOM

1. Y. K. Cheung: Finite strip method in structural analysis. Pergamon Press, 1976
2. Szilágyi György: Speciális felületszerkezetek számítása a véges sávok módszerével. *Építés-Építészettudomány*, Vol. IV. (1973), pp. 395—414
3. Szilágyi György: Quelques application de la méthode des bandes finies. *Mémoires, Association Internationale des Ponts et Charpentes*, Vol. 34-II. (1974), pp. 149—168
4. Szilágyi György—Macz Eszter: Szekrénykeresztmetszetű hidak számítása a véges sávok módszerével. *Mélyépítéstudományi Szemle*, Vol. XXVII. (1977), pp. 159—167

Application of the finite strip method in the case of support displacements. The paper explains how to take into account specified displacements in the case of rectangular plate or plane stress strips. The load vector can be determined by equations (8) and (14), respectively. As a conclusion, a numerical example is given on the parabolic subsidence of one of the supports of a one-span plate.

Anwendung der Methode finiter Streifen im Falle von Auflagerverschiebungen. Der Aufsatz behandelt die Berücksichtigung der vorgeschriebenen Verschiebungen im Falle von rechteckigen Platten- bzw. Scheibenstreifen; der Lastvektor kann mit den abgeleiteten Beziehungen bestimmt werden. Der Aufsatz endet mit einem Zahlenbeispiel, das die parabolische Setzung einer der beiden Stützen einer einfeldrigen Platte zum Gegenstand hat.

Применение метода конечных поясов в случае перемещения опора. В работе излагается учёт предписанных перемещений в случаях прямоугольных поясов плоской задачи или изгибающей плити. Вектор нагрузки определяется с помощью формулы (8) и (14). В конце работы находится численный пример двухопорной плиты, один из опоров снижается по форме параболы.

NORMÁL- ÉS NYÍRÓERŐVEL TERHELT I TARTÓ HATÁRNYOMATÉKA

TOMKA PÁL*

A szerző egyszerűen kezelhető módszert mutat be normál- és nyíróerővel is igénybevett I tartó határnyomatékának kiszámítására. A kölcsönhatási összefüggést befogott keret határállapotának számításánál használja fel. A számított teherbírást kísérleti eredménnyel is összehasonlítja.

A korlátozatlan folyás határállapotán alapuló számítások az egyes keresztmetszetekhez tartozó határnyomatékok meghatározásakor általában eltekintenek az N derékerő és a T nyíróerő hatásától. Nyilvánvaló, hogy ez közelítés, és a szerkezetek teherbíróképességét a ténylegesnél nagyobb értékben állapítja meg. Ezért feltétlenül szükséges

— annak a vizsgálata, hogy az igénybevételek milyen értékeinél engedhető meg az elhanyagolás,

— a derék-, ill. nyíróerő hatásának a gyakorlatban is könnyen alkalmazható módszerrel való figyelembevétele abban az esetben, amikor az elhanyagolás hatása már jelentős.

A továbbiakban a fenti célkitűzésnek megfelelő elméleti- és kísérleti kutatómunkáról számolunk be.

Az adott feladattal foglalkozó irodalom ([1]—[4]) kiinduló feltevései, és így természetesen eredményei is lényegesen eltérőek. A határállapotban levő keresztmetszetekben ébredő feszültségek egyensúlyát kielégítő (alsó határ) megoldások (pl. [3]) egyrészt túlbecsülik a derék-, ill. nyíróerő hatását, másrészt a gyakorlati számítások számára túl bonyolult összefüggéseket eredményeznek. Az egyensúlyt csak részben kielégítő megoldás [2] alkalmazása is komoly számítástechnikai nehézségekbe ütközik. A bonyolult összefüggések helyett javasolt empirikus képletek eltérő keresztmetszeti alakokra való alkalmazhatósága kétséges.

Meg kell jegyezni azt is, hogy a fenti eredmények általában szabad végén terhelt konzoltartóra vonatkoznak, más szerkezeti kialakítású tartóra (pl. keretre) elvileg nem minden további nélkül általánosíthatók.

Ezek figyelembevételével a célkitűzésben szereplő feladat megoldására az alábbi módszer látszik járhatónak:

* Dr. Tomka Pál, 1125 Budapest, Zirzen Janka u. 13.

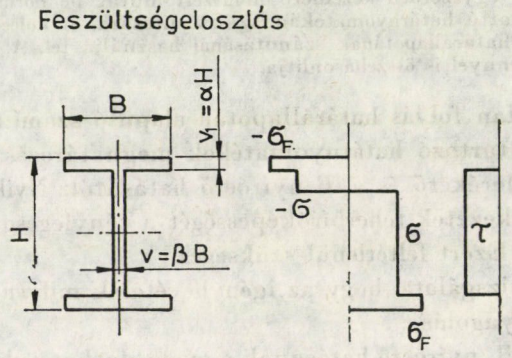
a) A derék- és nyíróerővel igénybevett keresztmetszet határnyomatékának meghatározása egyszerű összefüggéseket eredményező, *közelítő* számítással.

b) Az *a)* pont eredményeinek tetszőleges típusú szerkezeti kialakítású tartóra való általánosítása.

c) Az ily módon számított értékeknek kísérleti eredményekkel való összehasonlításával a közelítés mértékének megállapítása.

Az *a)* pont alatt említett, ún. kölcsönhatási összefüggés meghatározásánál az alábbi egyszerűsítő feltételezéseket tesszük [1]:

— a nyíróerőt a gerinclemez $H-2v_1$ hosszú része veszi fel, a csúsztatófeszültségek eloszlása egyenletes,



1. ábra

— az övlemezekben ébredő csúsztatófeszültségeket elhanyagoljuk,

— a derékerőből keletkező derékfeszültségek eloszlása nem egyenletes, hanem olyan, hogy a vele egyidejű nyomaték a legnagyobb legyen.

A fentieknek megfelelő feszültségeloszlást, kétszer szimmetrikus *I*-szelvényt véve alapul, az 1. ábrán mutatjuk be.

A nyíróerő hatását célszerűen a gerinclemez vastagságának redukálásával vehetjük figyelembe. A Mises-folyási feltételt alkalmazva:

$$v_{\text{red}} = \beta_{\text{red}} B ,$$

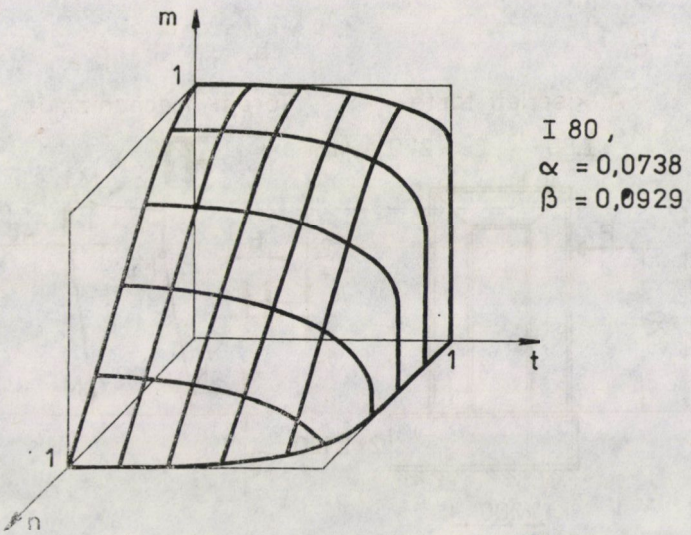
$$\beta_{\text{red}} = (1 - t^2)^{1/2},$$

amely vastagság mentén a folyáshatárral megegyező nagyságú derékfeszültséget tételezzük fel. Így a feladatot visszavezetjük a derékerővel és hajlítónyomatékkal igénybevett keresztmetszet kölcsönhatási összefüggésére. Ez, dimenziótlanított alakban:

$$m = \frac{1}{k}\left[k_{\text{red}} - \frac{(nf)^2}{\beta_{\text{red}}}\right],$$

ha a semleges tengely a gerinclemezben van, egyébként

$$m = \frac{1}{k}[1 - (1 + nf - f_{red})^2].$$



2. ábra

A jelölések:

N, T, M — az összetett terhelési esethez tartozó derék- és nyíróerő, valamint hajlítónyomaték értéke, melyek együttes hatására a keresztmetszet határállapotba kerül,

N_H, T_H, M_H — a tiszta nyomásra, nyírásra, ill. hajlításra igénybevett keresztmetszet határigénybevételei,

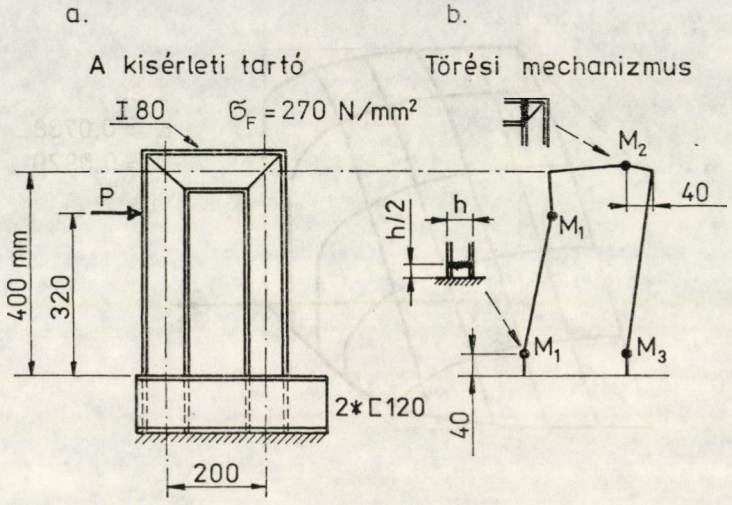
$f = 1 - (1 - \beta)(1 - 2\alpha)$,
$k = 1 - (1 - \beta)(1 - 2\alpha)^2$,
$f_{red} = 1 - (1 - \beta_{red})(1 - 2\alpha)$
$k_{red} = 1 - (1 - \beta_{red})(1 - 2\alpha)^2$,
$n = N/N_H$; $t = T/T_H$; $m = M/M_H$.

A kölcsönhatási összefüggést I 80 hengerelt szelvény esetében a 2. ábra szemlélteti. A számításban állandó vastagságú övlemezt tételeztünk fel, a lekerekítéseket figyelmen kívül hagytuk.

Az eredmények konzoltartó esetében közvetlenül alkalmazhatók. Bonyolultabb tartó (folytatólagos többtámaszú tartó, keret), ahol N és T értéke keresztmetszetenként változó, azonos szelvény esetében is, a képlékeny csuklók nyomatéki teherbírása általában különböző. Ezért a tartó tervezése, vagy teherbírásának számítása (ellenőrzése) explicit módon nem végezhető el.

Az elméleti eredmények ellenőrzésére a BME Acélszerkezetek Tanszékének laboratóriumában kísérleteket végeztünk el. Ezek kiértékelése jelenleg

is folyik (anyagjellemzők meghatározása, számítások). Az egyik kísérleti tartó a 3a. ábrán látható. A törési mechanizmust a 3b. ábra mutatja. Mivel a tartó keresztmetszeti méretei hosszméreteihez képest viszonylag nagyok, a képlékeny csuklók helyének felvételekor mind az [1] által ajánlottakat, mind a tartó tényleges alakváltozásait figyelembe vettük.



3. ábra

A kísérleti tartó teherbírását iterációval számítottuk ki. Az egyes rudak nyomatéki paraméterei a következők:

$$m_1 = 0{,}79;\ m_2 = 0{,}67;\ m_3 = 0{,}84,$$

és a számított törőerő:

$$P_{t,sz} = 65{,}4\ kN.$$

A tényleges törőerőt a kísérlet során felvett $P - \varphi$ görbe kiértékelése adta (φ a bal oldali befogás környezetében kialakuló képlékeny csukló elfordulása):

$$P_{t,\mathrm{eff}} = 68\ kN.$$

A két érték igen jól egyezik. Megemlítjük, hogy a derék-, ill. nyíróerő hatását elhanyagolva ($m_1 = m_2 = m_3 = 1$) a számított törőerő:

$$P'_{t,sz} = 84{,}9\ kN,$$

amely érték azt mutatja, hogy az elhanyagolás ebben az esetben a törőerő 30%-os növekedését jelentené.

A fentieket összefoglalva az alábbi következtetéseket vonhatjuk le:

— A derék-, ill. nyíróerő viszonylag kis értékeinél ($n \sim 0{,}1$; $t \sim 0{,}3$) azok hatása jelentéktelen (2. ábra).

— A normál és nyíróerő nagyobb értékeinél a hatás jelentős lehet. Az idáig kiértékelt kísérletek az ismertetett számítási módszert igazolják, a kérdés megnyugtató módon való tisztázása azonban még további kutatómunkát igényel.

— A képlékeny csuklók viszonylag nagymértékű elfordulása miatt a felkeményedés a tartók teherbírását növeli.

— A problémának gyakorlati jelentősége csak a viszonylag rövid tartóknál van, mivel egyébként más (stabilitási) határállapotok határozzák meg a teherbírást.

IRODALOM

1. Horne, M. R.: The Full Plastic Moments of Sections Subjected to Shear Force and Axial Load. *British Welding Journal*, **5** (1958), No 4
2. Von Klöppel, K.—Yamadá, M.: Fließpolyeder des Rechteck- und I-Querschnittes unter der Wirkung von Biegemoment, Normal-kraft und Quer-kraft. *Der Stahlbau* (1958) No 11
3. Neal, B. G.: Effect of Shear and Normal Forces on the Fully Plastic Moment of an I-Beam, *Journal Mechanical Eng. Science*, **3** (1961) No 3
4. Von Windels, R.: Traglasten von Balkenquerschnitten bei Angriff von Biegemoment, Längs-und Querkraft. *Der Stahlbau* (1970) No 1

Limit moment of I-beams loaded by normal and shear forces. A simple method is demonstrated for the calculation of the limit moment of I-beams loaded by normal and shear forces alike. This relation of interactions is used for the calculation of the critical condition of clamped frames. The calculated load bearing capacity is then compared with experimental results.

Grenzmoment des durch Schub- und Normalkräften belasteten I-Trägers. Der Autor zeigt ein einfaches Verfahren zur Bestimmung des Grenzmomentes von durch Schub- und Normalkräften belasteten I-Trägern. Er benützt den Zusammenhang der Wechselwirkungen zur Berechnung des Grenzzustandes eines eingespannten Rahmens. Die rechnerisch ermittelte Tragfähigkeit vergleicht er mit Versuchsergebnissen.

Предельный момент балок двутаврого сечения, нагруженных осевыми и поперечными силами. В статьи показан автором простой метод на расчёт предельного момента балок, усиленных кроме изгиба осевыми и поперечными силами. Взаимная зависимость принята при расчёте предельного состояния защемлённой рамки. Теоретическая несущая способность была сравнена с результатом эксперимента.

VEGYES TEHERVISELŐ SZERKEZETŰ ÉPÜLETEK VIZSGÁLATA VÍZSZINTESEN MŰKÖDŐ DINAMIKUS TEHERRE

VÉRTES GYÖRGY*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA
és
TORNYOS ÁRPÁD**

A tanulmány számítási módszert közöl, amely alkalmas általánosan kialakított teherviselő szerkezetű épületeken a vízszintes dinamikus teher hatásának megállapítására. A teherviselő szerkezeti elemek alaprajzilag és függőleges irányban is különbözhetnek és méretük is változhatik. A dolgozat a kidolgozott számpélda kapcsán több olyan jelenségre is rámutat, amelynek hatása az épület szempontjából jelentős lehet, és a közölt módszerrel figyelembe vehető.

1. Bevezetés

A jelenlegi építési gyakorlatnak megfelelően azon épületek zöménél, amelyeknél a vízszintesen működő dinamikus teher (széllökések, földrengés stb.) hatásának vizsgálata felmerül, a függőleges teherviselő szerkezetek különböző összetételűek, alaprajzi elrendezés szempontjából nem szimmetrikusak, illetve függőleges irányban változók. Szerkezeti szempontból ez azt jelenti, hogy az épület függőleges teherviselő elemei keretszerkezetek, oszlopok, önálló vagy kapcsolt pengepillérek (panelváz), vagy ezeknek valamilyen kombinációi. Példaképpen említhető egy irodaépület vagy egy szálloda, ahol a legtöbbször nagyobb alapterületű, de általában a felette levőktől különböző alaprajzú (fogadószint, kongresszusi terem, étterem, klubhelyiségek stb.) egy vagy kétemeletes részből emelkedik ki az épület rendeltetését szolgáló további rész, amely természetesen szintenként vagy szintcsoportonként változó méretű tartószerkezettel vagy változó alaprajzi elrendezéssel is épülhet.

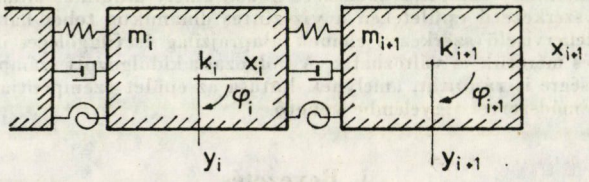
Kutatásaink célja az volt, hogy az említett általános és összetett szerkezetű épületeknél a vízszintes dinamikus teher hatásának vizsgálatára jól alkalmazható módszert dolgozzunk ki. Ennek eredményeiről a következőkben számolunk be.

2. A számítások céljára alkalmazott modell

Tekintve, hogy a függőleges szerkezeti elemek általában nem kétszeresen szimmetrikus elrendezésűek, az egyes szintek a vízszintes síkban csak „kapcsolt" (egyidejű csavaró és hajlító) rezgést képesek végezni. Ennek megfelelően

* Dr. Vértes György, 1075 Budapest, Madách tér 6.
** Tornyos Árpád, 1056 Budapest, Bástya u. 22.

a számítási célokra felvett modell az épület szintjeinek megfelelő számú tömegekből álló rendszernek felel meg, ahol az egyes födémek síkjában (vízszintes síkban) merev tárcsák képezik az egymáshoz rugalmasan kapcsolt tömegeket. Az épületnek az egyes emeleteihez tartozó tömegét, beleértve a födém, a falak és az egyéb tartozékok tömegét is, az illető födémszint síkjában megoszlóként vesszük fel, de magára a tömegeloszlásra nem teszünk megkötést. Vízszintes irányú erőkről lévén szó, feltételezzük, hogy az egyes tömegek csak a saját síkjukban képesek mozgást végezni. A legalsó tömeg a földhöz, a többi pedig az alatta levőhöz rugalmas kényszerekkel kapcsolódik. Az általános síkbeli mozgásnak megfelelően a kényszerek erőt és erőpárt fejtenek ki. Rajtuk kívül



1. ábra

még az eltolódás illetőleg az elfordulás sebességével egyenesen arányos csillapító kényszert is figyelembe vettük, mint ahogy azt két szomszédos (i-edik és $i + 1$-edik) tömegnél az 1. ábrán sematikusan feltüntettük.

3. A mozgás differenciálegyenlet rendszere és megoldása

A lineárisan rugalmas és viszkózus csillapítású rendszereknek megfelelően a mozgás differenciálegyenlet rendszerét kifejező mátrix differenciálegyenlet a következő

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{p}(t) \tag{1}$$

Esetünkben

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & -\mathbf{Y}_S\mathbf{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} & \mathbf{X}_S\mathbf{M} \\ -\mathbf{Y}_S\mathbf{M} & \mathbf{X}_S\mathbf{M} & \mathbf{J}_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{xx} & \mathbf{K}_{xy} & \mathbf{K}_{xz} \\ \mathbf{K}_{yx} & \mathbf{K}_{yy} & \mathbf{K}_{yz} \\ \mathbf{K}_{zx} & \mathbf{K}_{zy} & \mathbf{K}_{zz} \end{bmatrix}$$

hipermátrixok, melyek elemei:

$\mathbf{M} = \langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$ az egyes szintek síkjában koncentrált tömegeket tartalmazó diagonálmátrix.

$\mathbf{J}_0 = \langle J_{01}, J_{02}, \ldots, J_{0n} \rangle$ az egyes szintek síkjában koncentrált tömegeknek a koordináta-rendszer kezdőpontjára vonatkozó tömegtehetetlenségi nyomatékait magába foglaló diagonálmátrix,

$$\mathbf{Y}_s = \langle y, y_2, \ldots, y_n \rangle;$$
$$\mathbf{X}_s = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$$

a súlyponti (tömegközépponti) koordinátákat tartalmazó diagonálmátrix.

A K hipermátrix elemei az egységnyi elmozdulások hatására fellépő erőket és erőpárokat tartalmazó ún. merevségi mátrixok. A merevségi mátrixok elemeinek meghatározásához szükséges az elfordulási középpontok és az eltolódási főirányok ismerete. Ezek meghatározása általános szerkezetű épületen az [1] alattiak alapján történhetik.

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix}$$ $3n$ dimenziójú hipervektor, összetevői

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ stb. elmozdulás-ordináták

C a csillapítási mátrixokat foglalja magába.

$$\mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_x \\ \mathbf{p}_y \\ \mathbf{m}_0 \end{bmatrix} f(t)$$

az egyes szinteken működő erő illetőleg annak a koordináta-rendszer kezdőpontjában való helyettesítéséből származó összetevők
$f(t)$ — az erő változásával arányos függvény.

A rendszer sajátkörfrekvenciáit és a normális rezgésalakokat az (1) egyenlet homogén részének megoldásából nyerjük. A csillapításnak az önrezgésszámra való hatását elhanyagolva, a homogén rész megoldásaként felírható, hogy

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{A})\, \mathbf{d}_0 = 0. \qquad (2)$$

Ebből a mátrixegyenletből a sajátértékek ($\omega_{01}, \omega_{02}, \ldots, \omega_{0n}$) és a sajátvektorok ($\mathbf{d}_{01}, \mathbf{d}_{02}, \ldots, \mathbf{d}_{0n}$) adják a sajátkörfrekvenciákat illetőleg a normális rezgésalakokat. Ezek meghatározására vonatkozó algoritmust és a gépi számítás programját is elkészítettük.

A dinamikus (időben változó) erő hatására bekövetkező elmozdulások válaszfüggvényeit az (1) egyenlet megoldásai szolgáltatják. A megoldáskor azt feltételeztük, hogy a csillapítási mátrix hasonló felépítésű, mint a merevségi mátrix, és ekkor az egyes csillapítási tényezők a

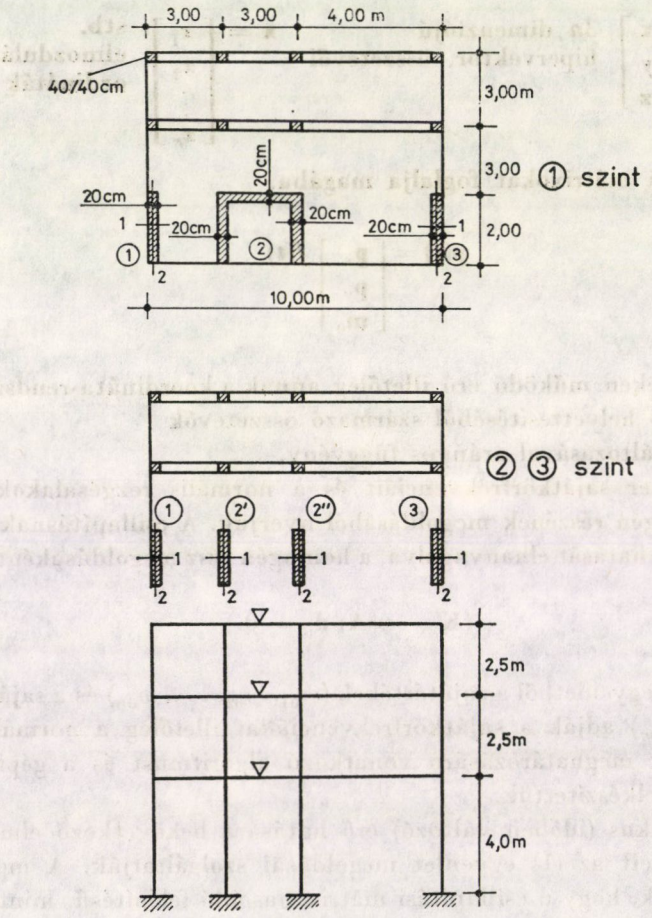
$$c_j = \alpha_k k_j + \alpha_m m_j \quad (j = 1, 2, \ldots, 3n)$$

összefüggéssel fejezhetők ki. Így a csillapítási mátrix a

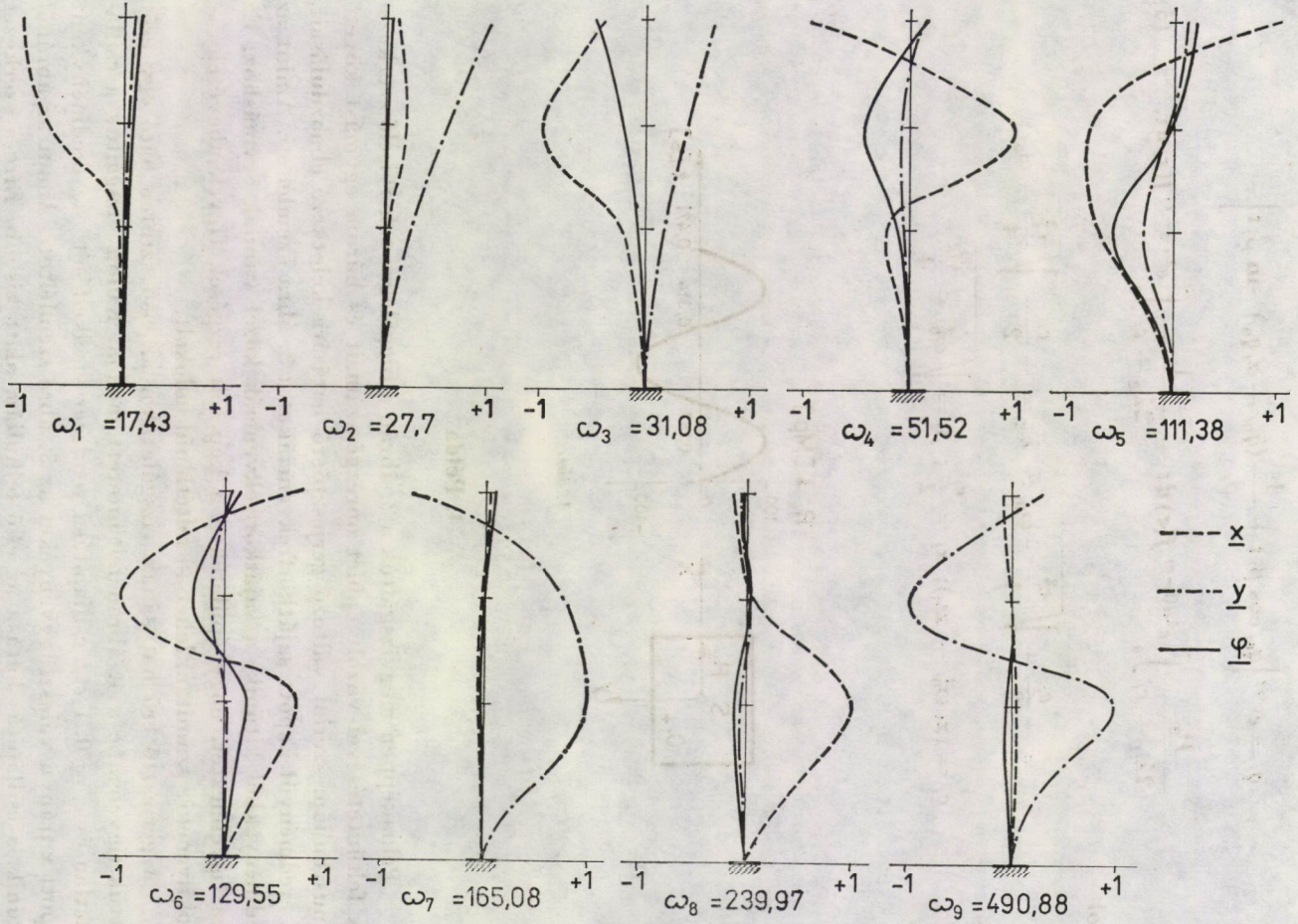
$$\mathbf{C} = \alpha_k \mathbf{K} + \alpha_m \mathbf{M} \tag{3}$$

alakot ölti. Ekkor megfelelő $d = Zq$ transzformáció elvégzése után az (1) jelű $3n$ kapcsolt tagot tartalmazó differenciálegyenlet rendszer $3n$ következő alakú kapcsolatlan differenciálegyenletté esik szét:

$$\ddot{q}_i - (\alpha_k \omega_{0i}^2 + \alpha_m)\, \dot{q}_i + \omega_{0i}^2 q_i = P_{0i} f(t). \tag{4}$$



2. ábra


-1
+1
ω1 =17,43
ω2 =27,7
ω3 =31,08
ω4 =51,52
ω5 =111,38
ω6 =129,55
ω7 =165,08
ω8 =239,97
ω9 =490,88
x
y
φ

3. ábra

Az egyenlet megoldása:

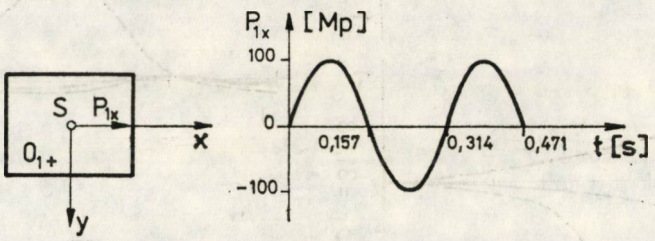
$$q_i = e^{-\alpha t}\left[q_{0i}\cos\beta_i t + \frac{1}{\beta_i}(\dot{q}_{0i} + \alpha_i q_{0i})\sin\beta_i t\right] +$$

$$+ \frac{P_{0i}}{2\lambda_{i1} + c_i}\int_0^t e^{\lambda_{i1}(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2\lambda_{i2} + c_i}\int_0^t e^{\lambda_{i2}(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau, \qquad (5)$$

ahol

$$\lambda_{i1} = -\frac{c_i}{2} + \sqrt{\frac{c_i^2}{4} - \omega_{0i}}; \quad \lambda_{i2} = -\frac{c_i}{2} - \sqrt{\frac{c_i^2}{4} - \omega_{0i}};$$

$$c_i = (\alpha_k \omega_{0i}^2 + \alpha_m); \; \alpha_i = \frac{c_i}{2}; \; \beta_i = \sqrt{\omega_{0i}^2 - \frac{c_i^2}{4}}.$$

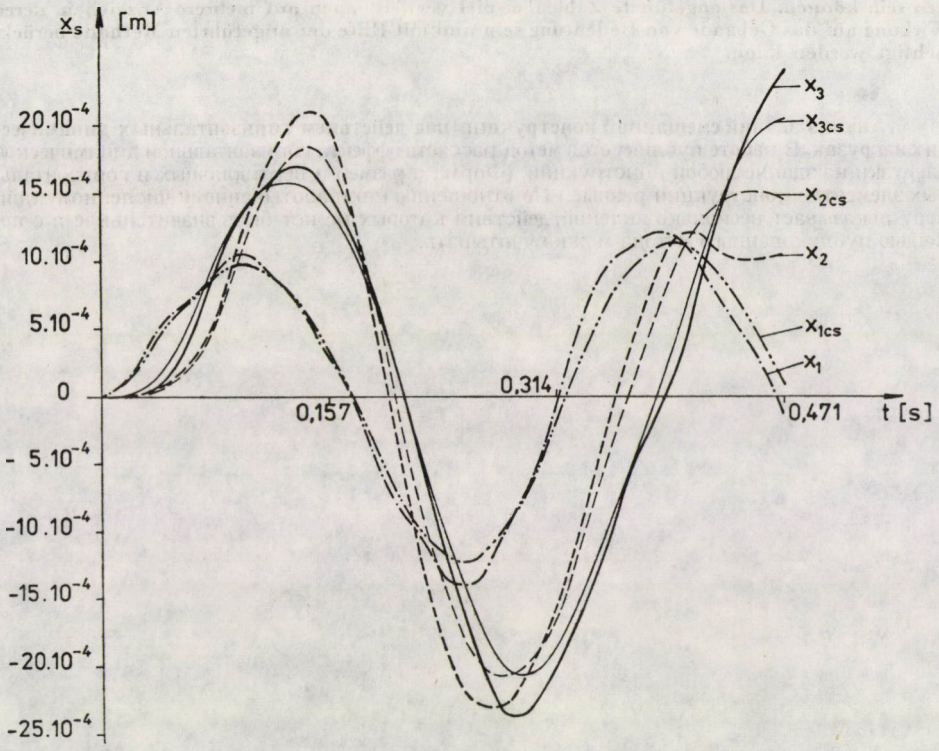


4. ábra

4. Példa

Példaképpen megvizsgáltuk a 2. ábrán a függőleges teherviselő szerkezetek feltüntetésével vázolt épület önrezgésszámait és három egymást követő szinuszhullám szerint változó gerjesztőerő hatására keletkező elmozdulásait. Az eredményül kapott sajátkörfrekvenciákat a 3. ábra szemlélteti. Amint az eredményekből kitűnik, a sajátkörfrekvenciák közel vannak egymáshoz. Ez arra figyelmeztet, hogy épületeken a kapcsolt rezgések figyelembevétele — ahol ilyenekre számítani lehet — feltétlenül indokolt.

A gerjesztő erő hatásának vizsgálatakor az első szinten ható egy erőt vettük figyelembe a 4. ábrán feltüntetett módon. Külön vizsgáltuk a csillapítatlan és $c_i = 0,1\, c_{kri}$ csillapítású rendszer viselkedését. Az eredményként kapott x irányú válaszfüggvényeket az 5. ábra szemlélteti. Amint az ábrából kitűnik, a csillapítás hatása az első félhullám alatt kisebb. Erre a szerkezet vizsgálatakor figyelemmel kell lenni, mivel sok esetben ez lehet az egész szerkezetre a mértékadó.



5. ábra

IRODALOM

1. VÉRTES GY.: Építmények dinamikája. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1976
2. VÉRTES GY.—TORNYOS Á.: Vegyes teherviselő szerkezetű magasházak vízszintes önrezgésszámának meghatározása. *Építés-Építészettudomány.* (1976) 3—4.
3., 4., 5. Többszintes keretváz dinamikai vizsgálata. Kutatási jelentés. 1975, 1976, 1977. (Készültek a BME Mechnikai Tanszékén)

Examination of mixed load bearing structural buildings by a horizontally acting dynamic load. A calculation method is published for the determination of the effect of a horizontal dynamic load on buildings of general load bearing structure (the load bearing structural elements may differ in both their ground plan and vertical direction and their dimensions, too, may vary). In connection with the elaborated numerical example the paper points out certain phenomena whose effects might be rather important from the viewpoint of the building, but could be readily reckoned with according to the method described.

Untersuchung von Gebäuden gemischter Tragkonstruktionen bei horizontaler, dynamischer Belastung. Der Aufsatz vermittelt ein Verfahren, das zur Bestimmung der Wirkung der horizontalen, dynamischen Belastung bei Gebäuden mit allgemein gestalteten Tragkonstruktionen gebraucht werden kann, wobei die lasttragenden Konstruktionselemente, sowohl grundrißmäßig, als auch in vertikaler Richtung, sowie in ihren Abmessungen verschie-

den sein können. Das angeführte Zahlenbeispiel verweist auch auf mehrere Anzeichen, deren Wirkung auf das Gebäude von Bedeutung sein und mit Hilfe der angeführten Methode berücksichtigt werden kann.

Анализ зданий смещанной конструкции под действием горизонтальных динамических нагрузок. В работе публикуется метод рассчета эффекта горизонтальной динамической нагрузки на здание любой конструкции. (Форма и размер и вертикальных и горизонтальных элементов конструкции разные.) По отношению к выработыванному численному примеру показывает несколько явлений, действия которых может быть значительное и с помощью публикованного метода можно учитывать.

54,- Ft

INDEX: 25.499
ISSN 0375 9423

1828—1978

MEGJELENT
AZ AKADÉMIAI KÖNYVKIADÁS
150. ÉVÉBEN

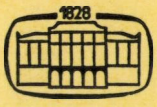
Megjelent: 1978. X. 10.

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

54. KÖTET
3—4. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1977

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:
GESZTI P. OTTÓ, HELLER LÁSZLÓ, KÉZDI ÁRPÁD, VÁMOS TIBOR

SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.
KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Négy füzet alkot egy kötetet.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia
Műszaki Tudomány
1383 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó 1363 (Budapest, Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488), külföldi megrendelések a „Kultúra" Külkereskedelmi Vállalat 1389 (Budapest, Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.

CSÁKI FRIGYES

1921—1977

1977. augusztus 29-én, 57. életévében, hosszan tartó betegség után meghalt Csáki Frigyes egyetemi tanár, a BME Automatizálási Tanszékének vezetője, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja és alelnöke, a Magyar Elektrotechnikai Egyesület elnöke.

1921. március 11-én született Budapesten. Kitűnően érettségizett. Egyetemi tanulmányait a Budapesti Műszaki Egyetemen 1945-ben kezdte és 1949-ben fejezte be kitűnő minősítésű gépészmérnöki oklevéllel. Ezután a BME Villamosmérnöki Karának Villamosművek és Vasutak Tanszékén tanársegédként dolgozott 1950-ig. 1951 és 1954 között a Villamos Gépek Üzemtana Tanszéken volt tanársegéd, majd aspiráns. 1955-ben nyerte el a műszaki tudományok kandidátusa fokozatot. 1955. május 1-től 1956. február 1-ig a Villamos Energetikai Kutató Intézet tudományos osztályvezetője, 1956. február 1-től a Különleges Villamosgépek Tanszék adjunktusa, majd docense lett. 1960-ban szerezte meg a műszaki tudományok doktora fokozatot és ugyanebben az évben nevezték ki egyetemi tanárrá. 1961-ben az akkor megalakult Automatizálási Tanszék vezetésével bízták meg, és ezt a tisztséget haláláig betöltötte.

Egyetemi tevékenységével párhuzamosan egészen 1966-ig az MTA Automatizálási Kutató Intézet igazgatóhelyettese és elméleti osztályának vezetője, 1967-től 1970-ig a Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Osztályának osztályvezetőségi tagja, 1970-től a Magyar Tudományos Akadémia elnökségi tagja volt.

Csáki Frigyes eredményekben rendkívül gazdag oktatói, kutatói és tudósi pályát járt be. Kutatói munkája kezdetben az erősáramú ipar időszerű kérdéseihez kapcsolódott. Az erősáramú hálózatokban alkalmazott soros kondenzátorok üzemével, a szinkron generátorok aszinkron üzemével, a gyorsrágerjesztés kérdéseivel foglalkozott és ezen munkássága alapján nyerte el a „doctor technicus" címet, a műszaki tudományok kandidátusa, illetve doktora fokozatot. Érdeklődése ezután mindinkább az erősáramú ipari elektronika, az automatizálás, a folyamatszabályozás, az irányításelmélet területére tevődött át. Akadémiai székfoglalóját (1965) már az egy- és többváltozós szabályozási rendszerek statisztikus szintézismódszereiről tartotta.

Pályafutása során 170 tudományos és műszaki cikke, tanulmánya, illetve előadása jelent meg magyar, orosz, német, angol és francia nyelven. Jegyzetei, könyvei nagymértékben elősegítették és ma is elősegítik a hallgatók képzését, a végzett szakemberek és kutatók tevékenységét az ipari elektronika, a teljesítményelektronika, a digitális technika, a vezérléstechnika, az automatika és a szabályozáselmélet területén. A szerzői, társszerzői és szerkesztői közreműködésével megjelent könyvek közül néhány több nyelven, több kiadásban is megjelent és nemcsak a hazai, hanem nemzetközi elismerést is szerzett. A „Korszerű szabályozáselmélet" c. művével a Minisztertanács 1008/1973. (IV. 1.) számú határozata alapján elnyerte az Állami Díj I. fokozatát. Ez a könyv egyébként rövidített változatban 1975-ben szovjet kiadásban is megjelent.

Csáki Frigyest, tudományos munkássága elismeréseként 1965-ben a Magyar Tudományos Akadémia levelező, 1976-ban pedig rendes tagjának és alelnökének választotta meg.

Rendkívül sokat tett az oktatás korszerűsítéséért és sokrétű oktató munkát végzett. A Budapesti Műszaki Egyetemen az ipari elektronika, az automatika, a vezérléstechnika, a digitális technika és a szabályozástechnika tantárgyakból és különböző fakultatív tantárgyakból tartott előadásokat. E tárgyak nagy részét önállóan dolgozta ki, és ezeknek szinte mindegyikét könyvei, jegyzetei és útmutatásai alapján adják ma is elő. Elősegítette a számítástechnikai oktatás fejlesztését, a Budapesti Műszaki Egyetem számítógépes ellátását is.

A Budapesti Műszaki Egyetem rektorhelyettese volt 1963-tól, 1964 és 1969 között pedig rektorként vett részt az egyetem vezetésében. Ez időszak alatt egyesült ismét az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem a BME-vel. A 60-as évek közepén végrehajtott oktatási reform során nevéhez fűződik a gépesítési és automatizálási ágazat létrehozása, az új tantervek kidolgozása.

Számos hazai és nemzetközi testület, bizottság munkájában vett részt és több magyar és nemzetközi szakfolyóirat szerkesztő bizottságának volt tagja. Így az Automatizálási és Számítástechnikai Bizottság elnöke, a Rendszerkutatási Komplex Bizottság társelnöke, a szakmailag illetékes TMB-bizottság elnöke, az OMFB Számítástechnikai Alkalmazási Bizottság tagja, az Állami és Kossuth-díj Bizottság tagja, az Országos Béketanács Tudományos Bizottságának tagja, a Magyar Elektrotechnikai Egyesület elnöke, a MATE Irányításelméleti Szakosztályának elnöke, az IFAC Elméleti Bizottságának tagja, a WOGSC és a PUGWASH Magyar Nemzeti Bizottságnak elnöke, Borisz Nyikolajevics PETROV akadémikussal együtt az „Irányítás és információelmélet problémái" c. szovjet–magyar közös folyóirat főszerkesztője volt. Emellett az *Elektrotechnika* és *Magyar Tudomány* szerkesztő bizottságának elnöke, illetve tagjaként is tevékenykedett.

Közéleti és tudományos munkásságáért többek között az Állami Díj I. fokozatával, a Munka Érdemrend arany fokozatával, az Oktatásügy Kiváló Dolgozója kitüntetéssel, Zipernovszky-díjjal, Felszabadulási és Kruspér István Emlékéremmel tüntették ki.

CSÁKI Frigyes munkásságára, rendkívüli tehetsége mellett, nagy pontossága volt jellemző. Személyében a hallatlan szorgalom szinte páratlan akaraterővel és munkabírással párosult. Emberségéért, szerénységéért közvetlenségéért munkatársai és hallgatói nagyra becsülték és szerették. Életében sok egyetemi és felsőbb szintű pártmegbízatást kapott és teljesített. Előadásait, műveit átszőtte a marxista világnézetéből, a kommunista tudós és szakember mivoltából adódó szemlélete.

Tudományos munkásságának legfőbb értékét az adja meg, hogy az általa művelt hallatlanul széles tudományterületeken felbecsülhetetlen rendszerező, feldolgozó és kiegészítő munkát végzett. E munkáival hazai és nemzetközi elismerést vívott ki, és magas színvonalon álló, korszerű oktatás alapjait teremtette meg.

CSÁKI Frigyes munkássága, kiváló tudományos tevékenysége, irányító és meghatározó szerepe műveiben marad fenn.

Derűs egyéniségét munkatársai és tanítványai szeretettel és tisztelettel őrzik meg emlékezetükben.

Bognár Géza

Csáki Frigyes munkássága

Szakcikkek, előadások, tanulmányok

1. CSÁKI F.: Soros kondenzátorok alkalmazásának kérdései. Elektrotechnika, 45. évf. 9. sz. (1952.) 274–290 (magyarul)
2. —: 400 000 Volt feszültségű távvezetékek a Szovjetunióban. Magyar Technika, 8. évf. 3. sz. (1953), 140–143 (magyarul)
3. —: Szinkron gépek állandói hirtelen üzemállapotváltozáskor. Elektrotechnika, 46. évf. 7. sz. (1953) 194 l.

4. CSÁKI F.—TUSCHÁK R.: Szinkron generátorok állandóinak mérése I. Jelentés a Sztálinvárosi Erőmű I. generátorán végzett mérésről. Villamos Energetikai Kutató Intézet (VILLENKI) — Villamosgépek Üzemtana Tanszék Közleményei, 23. sz. (1954), 1—24 (magyarul)
5. CSÁKI F.: Jelentés a 3,3 kV-os, 10 kVA-es nagyfeszültségű kondenzátorok méréséről. VILLENKI Közlemények, 51. sz. (1954), 1—17 (magyarul)
6. CSÁKI, F.: Influence of Series capacitors on the operation of synchronous maclines. Acta Technica, Vol. 12, No. 1—2 (1955), pp. 49—84
7. CSÁKI F.: Szinkron generátorok gyorsrágerjesztése I. Mérés a Komlói Erőmű II. generátorán. VILLENKI Közlemények, 71. sz. (1955), 1—20 (magyarul)
8. CSÁKI F.: 3,3 kV-os 10 kVA-es nagyfeszültségű kondenzátorok rövidzárlati próbái. VILLENKI Közlemények, 75. sz. (1955), 1—8 (magyarul)
9. CSÁKI F.: Szinkron generátorok önszinkronozása. Beszámoló a Bánhidai Erőműben végrehajtott mérésekről. VILLENKI Közlemények, 82. sz. (1955), 1—34 (magyarul)
10. CSÁKI F.: Szinkron generátorok gyorsrágerjesztése II. A VILLENKI gyorsrágerjesztő berendezése. VILLENKI Közlemények, 84. sz. (1955), 1—21 (magyarul)
11. —: Turbogenerátorok aszinkron üzeme I. VILLENKI-Villamosgépek Üzemtana Tanszék, Közlemények 92. sz. (1955), 1—44 (magyarul)
12. —: Szikraközök soros kondenzátor védelmére. Elektrotechnika, 48. évf. 9. sz. (1955), 261—269 (magyarul)
13. CSÁKI, F.: Influence of Series Capacitors on the Operation of Synchronous Machines. Synchronizing and Damping Torques. Acta Technica, Tom. XV. No. 3—4. (1956), pp. 457—476
14. CSÁKI F.: Szinkron generátorok önszinkronozása. Elektrotechnika, 49. évf. 2. sz. (1956), 36—45 (magyarul)
15. CSÁKI F.: Hozzászólás Jedovszky J.: „Fázisjavító kondenzátoros vezetékhálózat vizsgálata kördiagram segítségével" c. cikkéhez. Elektrotechnika, 49. évf. 5. sz. (1956), 144 (magyarul)
16. CSÁKI F.: 44 000 kVA-es turbógenerátor aszinkron üzeme. Elektrotechnika, 49. évf. 8. sz. (1956), 229—239 (magyarul)
17. CSÁKI F.: A visszatérő feszültség vizsgálata villamos hálózatokban I. VILLENKI Közlemények, 102. sz. (1956) 37. (magyarul)
18. CSÁKI F.: A visszatérő feszültség vizsgálata villamos hálózatokban II. VILLENKI Közlemények, 108. sz. (1956), 18 (magyarul)
19. CSÁKI F.—SZABÓ-BAKOS R.: Átmeneti jelenségek vizsgálata, üresenjáró transzformátoron be- és kikapcsoláskor. VILLENKI Közlemények, 128 sz. (1956), 1—29 (magyarul)
20. CSÁKI F.: A ceglédi soros kondenzátortelep. VILLENKI Közlemények, 139. sz. (1956), 1—23 (magyarul)
21. CSÁKI F.: A magyarországi szinkron generátorok néhány üzemmódjának vizsgálata. „Elektricsesztvo", Moszkva, 12. sz. (1957), 44—49 (oroszul)
22. CSÁKI F.—KOVÁCS K. P.: A turbogenerátorok aszinkron üzeme, Technische Rundschau, Vol. 49. No. 44. (1957), p. 3, 5, 7. (német)
23. CSÁKI, F.: Short-circuit currents in circuits containing series capacitors. Periodica Polytechnica, Elektrical Engineering, Vol. 1. No. 2. (1957), pp. 155—171
24. CSÁKI, F.: Effect of the Spark-Gap Working Time upon the short-circuit currents in circuits containing series capacitor. Periodica Polytechnica, Elektrical Engineering, Vol. 1. No. 3. (1957), pp. 223—242.
25. —: Szinkron generátorok gyorsgerjesztése. Elektrotechnika, 50. évf. 5—6. sz. (1957), 167—179 (magyarul)
26. CSÁKI F.—FRIGYES A.: Klasszikus kapcsolású mágneses erősítők. Elektrotechnika, 50. évf. 8—9. sz. (1957), 294—308 (magyarul)
27. —: A ceglédi soros kondenzátortelep és üzembehelyezési próbái. Villamosság, 5. évf. 1—2. sz. (1957), 15—21 (magyarul)
28. —: A soros kondenzátor hatása a szinkron gép üzemére. MTA Műsz. Tud. Oszt. Közleményei, XXI. köt. 1—4. sz. (1957), 157—161 (magyarul)
29. —: Szinkron generátorok állandóinak mérése II. Szubtranziens gépállandók mérése 26 MVA-es turbógenerátoron álló állapotban. VILLENKI Közlemények, 148. sz. (1957), 1—9 (magyarul)
30. —: A VILLENKI gyorsrágerjesztő berendezésének üzembehelyezési próbái. VILLENKI Közlemények, 161. sz. (1957), 1—9 (magyarul)
31. —: Turbógenerátorok aszinkron üzeme II. VILLENKI-Villamosgépek Üzemtana Tanszék Közleményei, 179. sz. (1957) 1—11 (magyarul)

32. —: Bogatürjev, O. N. „Modifikacija formuli Heviszajda" c. cikkének diszkussziója. Elektricsesztvo, Moszkva, 3. sz. (1958), 87 l. (oroszul)
33. Csáki, F.—Kovács, K. P.: Marche asynchrone des turbos-alternateurs. CIGRE, Paris, 1958.
34. Csáki, F.: Some remarks Concerning the quick-response over excitation of synchronous generators. Periodica Polytechnica, Elektrical Engineering, Vol. 2, No. 2, (1958), pp. 111—129
35. —: Szinkron generátorok üzemének néhány kérdése. Elektrotechnika, 51. évf. 4—6. sz. (1958), 204—222 (magyarul)
36. Csáki F.—Szendi K.: A CIGRE 1958. évi 17. ülésszaka Párizsban. Elektrotechnika, 51. évf. 7—9. sz. (1958), 402—406 l. (magyarul)
37. Csáki F.—Tuschák R.: Szinkron generátorok állandóinak mérése III. 44 MVA-es turbogenerátorok rövidzárlati próbái. VILLENKI-Villamosgépek Üzemtana Tanszék Közleményei, 191. sz. (1958) 1—12 l. (magyarul)
38. Csáki F.: Erőművi szinkron generátorok gyorsrágerjesztése, aszinkron üzeme, önszinkronozása. VILLENKI Közlemények, 211. sz. (1958), 1—45 l. (magyarul)
39. Csáki, F.—Kovács, K. P.: Asynchronous trunning of turbo-alternators. Periodica Polytechnica, Electrical Eng., Vol. 3. No. 1. (1959), pp. 1—19
40. Csáki, F.—Fekete, I.—Borka, J.: Experimental Test on the Voltage Regulating Autodyne 20 kW. Pre-prints of Papers Presented on the IFAC Congress at Moscow, 27 June—7 July, 1960. London Butterworths Scientific Publications 1960. pp. AM 116—AM 121
41. —: Theoretical methods concerned with the asynchronous operation of turbo-generators. Periodica Polytechnica, El. Eng., Vol. 4, No. 2. (1960), pp. 117—144
42. —: Linear Approximation of Admittance Diagrams for the Theoretical Examination of Turbogenerators in Asynchronous Operation. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 4, No. 3. (1960), pp. 145—186
43. Quadratic Approximation of Admittance Diagrams for the Theoretical Examination of Turbogenerators in Asynchronous operation. Periodica Polytechnica, El. Eng., Vol. 4. (1960), No. 4. pp. 259—274
44. —: Complex-plane charts for obtaining closed-loop frequency responses in linear control systems. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 4, No. 4. (1960), pp. 361—378
45. —: Gyakorlati módszer turbógenerátorok aszinkron üzemének vizsgálatára. Elektrotechnika, 53. évf. 2—3. sz. (1960), 62—68 l. (magyarul)
46. A változó szlip meghatározása turbogenerátorok aszinkron üzemében. VILLENKI Közlemények, 320. sz. (1960) (magyarul)
47. —: Graphical procedure for the examination of turbo-generators in asynchronous operation. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 5, No. 1. (1961), pp. 5—41
48. Csáki, F.—Kelemen, T.: Démarrage Automatique d'un Groupe Auxiliare d'Alimentation. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 5, No. 4. (1961), pp. 315—340
49. Csáki F.—Kelemen T.: Tartalék áramforrás-gépcsoport önműködő indítása. Elektrotechnika, 54. évf. 6. sz. (1961), 223—233 l. (magyarul)
50. Csáki F.—Borka J.—Fekete J.: A 25 kW-os feszültségszabályozó autodin és kísérleti vizsgálata. Elektrotechnika, 54. évf. 5. sz. 1961. 241—249 (magyarul)
51. —: Simplified derivation of optimum transfer functions in the Wiener-Newton sense. Transaction of the third Prague Conference on Information Theory. Statistical Docision Functions, Random Processes, Publishing House, of the Czechoslowak Academy of Sciences, Prague (1964), pp. 51—61
52. —: Néhány megjegyzés szabályozó rendszerek analíziséről és szintéziséről. III. Országos Automatizálási Konferencia 1962. I. kötet. 47—69 l. (magyarul)
53. —: I. Magyar Automatizálási Kollokvium, 1962. március 14—15. MTA Műszaki Tudományos osztályának Közleményei 31. kötet 1—4. szám (1962) 45—54 l. (magyarul)
54. —: Badanie niektrorych problemow elektrycznyeh w hutnictwie droga Modelowania ulitadow. Problemy Projektowe Hutnictwa i Przemyslu Maszynowego. Gliwice-Listopad, No. 11. (1963) Vol. 11
55. —: Simplified Derivation of Optimum Transfer Functions for Multivariable Systems. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 7. No. 3. (1963), pp. 171—183
56. —: Immediate Determination of Standarol Forms of Boolean Functions from one Truth Map. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 7. No. 4. (1963) pp. 253—266
57. —: Függvénytranszformációk alkalmazása a szabályozástechnikában. Mérés és Automatika, 4—5. szám (1963), 105—112 l. (magyarul)
58. —: Jelfolyam ábrák. Elektrotechnika, 56. évf. 5. sz. (1963), 185—191 l. (magyarul)
59. —: Többváltozós rendszerek optimális átviteli függvényének egyszerűsített levezetése. II. Automatizálási Kollokvium Anyagai, Bp. 1963. 19—35. l. (magyarul)

60. —: Separable Nonlinear Differential Equations of First Order in the Theory of Synchronous Machines in Asynchronous Operation. Acta Technica, Tom. 48. No. 1—2. (1964), pp. 163—181
61. CSÁKI, F.—GESZTI, P. O.: Syncronizing Methods. Acta Technica, tom. 46. No. 1—2. (1964), pp. 197—217
62. —: Simplified Derivation of the Optimum Multipole Cascade Controller for Random Processes. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 8. No. 1. (1964), pp. 1—10
63. —: Simplified Derivation of the Optimum Multipole Cascade Controller for Multivariable Systems With Constraints. Periodica Polytechnica, El. Eng., Vol. 8. No. 2. (1964), pp. 117—131
64. —: Die Untersuchung einiger elektrischer Probleme des Hüttenwesens an Analogiemodellen. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 8. No. 3. (1964), pp. 211—225.
65. CSÁKI F.—KOCSIS F.: Metodika raszeseta impal'sznüh regulirovanija. Periodica Polytechnica, El. Eng., Vol. 8. No. 4. (1964), pp. 295—304
66. —: Optimális átviteli függvények egyszerűsített levezetése. Mérés és Automatika, 7. szám (1964), 205—210 l. (magyarul)
67. —: Gegenwärtige Haupttendenzen in der Regelungstheorie. III. Konferenz über Nichtlineare Schwingungen. Abhandlungen d. Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin Klasse f. Mathematik, Physik und Technik, No. 2. (1965), pp. 353—362
68. —: Übergangsprozesse in einfachen nichtlinearen Regelsystemen. III. Konferenz über Nichtlineare Schwingungen. Abhandl. d. deutscher Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Klasse f. Mathematik, Physik u. Technik 2. (1965), 404—416
69. —: Gegenwärtige Haupttendenzen der nichtlinearen Regelungstheorie. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 9. No. 1. (1965), pp. 1—13
70. —: Lage und Zielsetzungen des elektrotechnischen Unterrichts, der perspektivischen Forschung und der technischen Entwicklung in Ungarn. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 9. No. 2. (1965), pp. 161—171
71. —: Simplified derivation of optimum transfer functions for digital stochastic processes. Periodica Politechnica, El. Eng. Vol. 9. No. 3. (1965), pp. 237—258
72. —: Optimum pulse-transfer functions for multivariable digital stochastic processes. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 9. No. 4. (1965), pp. 353—375
73. —: Optimális kaszkád szabályozó egyszerűsített levezetése. Mérés és Automatika, 13. évf. 2—3. sz. (1965), 33—39 l. (magyarul)
74. —: Nemlineáris problémakörök a szabályozástechnikában. Mérés és Automatika, 13. évf. 7. szám (1965), 206—211. l. (magyarul)
75. —: Irányított szakaszok vizsgálata statisztikus módszerekkel. Mérés és Automatika, 13. évf. 12. szám (1965), 360—366 l. (magyarul)
76. —: Egy- és többváltozós szabályozási rendszerek statisztikus szintézisének módszerei. Akadémiai székfoglaló, 1966. MTA VI. oszt. Közleményei 37. (1966) 33—55 l. (magyarul)
77. —: Entwurf vermaschter Regelungssysteme mit Begrenzungen bei determinierten Eingangssignalen unter Verwendung des Kriteriums des mittleren quadratischen Fehlers. Messen, Steuern, Regeln, 9. évf. 12. szám (1965), pp. 430—433
78. A tudós utánpótlás. Beszélgetés . . ., Közli Szluka Emil. Népszabadság, 23. 1965. 174. p. 7.
79. —: Gegenwärtige Haupttendenzen in der nichtlinearen Regelungstheorie. III. Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, Berlin, 1966. Akademie Verlag, 1966. pp. 353—363
80. —: Übergangsprozesse in einiger einfachen nichtlinearen Regelungssystemen. III. Konferenz über Nichtlineare Schwingungen, Berlin, 1966. Akademie Verlag, 1966. pp. 404—416
81. —: Optimum cascade controllers for multivariable continuous data and pulsed-data control systems, with constraints. Acta Technica Hungariae, Tom. 56. No. 3—4. (1966), pp. 363—382
82. —: Analytical design of multivariable control systems with constraints for deterministic inputs applying the integral of sum of errors squared criterion. Acta Technica Hungariane, Tom 54. No. 3—4. (1966), pp. 403—411
83. —: Die Untersuchung der Übergangsprozesse in einigen einfachen nichtlinearen Regelungssystemen mit Hilfe des Analogrechners. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 10. No. 1. (1966), pp. 1—30
84. CSÁKI, F.—KÁRPÁTI, A.: Some remarcks on the construction of phase trajectorics. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 10. No. 3. (1966), pp. 215—223
85. CSÁKI F.—LEHOCZKY J.: Rendszerelemzés statisztikus módszerekkel. Mérés és Automatika, 14. évf. 6. szám (1966). 161—165 l. (magyarul)

86. —: Beszámoló az IFAC 3. kongresszusáról. (International Federation of Automatic Control Congress, 3. London, 1966. jul.) Elektrotechnika, 56. évf. 11—12. szám (1966), 540—543 l. (magyarul)
87. —: Egy- és többváltozós szabályozási rendszerek statisztikus szintézisének módszerei. MTA Műszaki Tudományos Osztályának Közleményei, 37. évf. 1—2. szám (1966), 33—35 l. (magyarul)
88. —: Többváltozós szabályozási rendszerek optimális statisztikus méretezése. Automatizálási Kollokvium, Budapest, 1966. I. rész 257—268 l. (magyarul)
89. —: Racionális törtfüggvény mátrixok spektrum faktorizációja. MTA Automatizálási Kutató Intézet Közleményei, 4. szám (1966) (magyarul)
90. CSÁKI, F.—GYÜRKI J.: Some questions of the system identification by stochastic signals. IFAC Konferencia, Prága, 1967.
91. CSÁKI, F.—LEHOCZKY, J.: Comment on „A remark on Routh's Array" IEEE Trans. on Automatic Control, AC-12, No. 4. (1967), pp. 462—463
92. CSÁKI, F.—FISCHER, P.: On the spectrum factorization. Acta Technica Hungariae, Tom. 58. No. 1—2. (1967), pp. 145—168
93. —: Statistical synthesis methods of single and multivariable control systems. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 11. No. 1—2 (1967), pp. 111—134.
94. CSÁKI, F.—KÁRPÁTI, A.: Fehler der Leistungsmessung in Stromkreisen mit Gleichrichtern. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 11. No. 4. (1967), pp. 317—325
95. CSÁKI F.—KÁRPÁTI A.: Teljesítménymérési hibák egyenirányító körökben. Elektrotechnika, 60. évf. 3. szám (1967), 105—108 l. (magyarul)
96. CSÁKI F.—KÁRPÁTI A.: Néhány megjegyzés a fázistrajektóriák szerkesztéséhez. Elektrotechnika, 60. évf. 5. szám (1967), 227—230 l. (magyarul)
97. —: Optimális kaszkádszabályozók többváltozós, folyamatos és szaggatott működésű, korlátozásos szabályozási rendszerekre. MTA Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei. 38. évf. 1—2. szám (1967), 173—190 l. (magyarul)
98. —: Szovjet kutatók hozzájárulása a szabályozáselmélet fejlődéséhez. A Budapesti Műszaki Egyetem Tudományos Ülésszaka 1967. október 31—november 4. III. kötet, Tankönyvkiadó, 1967, (magyarul)
99. CSÁKI, F.—GYÜRKI, J.: Some questions of the system identification by stochastic signals. Acta Technica Hungariae, Tom. 61, No. 1—2 (1968), pp. 227—238
100. CSÁKI, F.—MAGYAR, P.—BARS, R.: Determination of transfer functions of direct current machines with the aid of signal-flow graphs. Acta Techn. Hung., 62., 4 (1968), pp. 267—284.
101. —: A short survey of deterministie optimization technique based on integral criteria. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 12, No. 1. (1968), pp. 1—15.
102. —: Beitrag sowjetischer Forscher zur Entwicklung der Regelungstheorie. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 12, No. 2. (1968), pp. 129—143
103. CSÁKI, F.—HÁBERMAYER, M.: Stability test of linear control systems with dead time. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 12. No. 3. (1968), pp. 311—318
104. —: Limit-cycle analysis of relay control systems. Periodica Polytechnica, El. Eng. Vol. 12, No. 3. (1968), pp. 319—334
105. CSÁKI F.—MAGYAR P.—BARS R.: Egyenáramú villamosgépek átviteli függvényének meghatározása jelfolyam ábrák segítségével. Elektrotechnika, 61. évf. 4. szám (1968), 129—136 l. (magyarul)
106. CSÁKI F.—KIS P.: A folyamatidentifikáció egy mérnöki módszere. Mérés és Automatika, 16. évf. 12. szám (1968), 473—478 l. (magyarul)
107. CSÁKI, F.—KOVÁCS, T.: Some remarks on the inverse describing functions. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, 65 (1969) 1/2 pp. 7—16
108. CSÁKI F.—KOVÁCS T.: Néhány megjegyzés az inverz leíró függvény feladathoz. Műszaki Tudomány 41. (1969) 3/4 pp. 185—195. l. (magyarul)
109. CSÁKI, F.—KIS, P.: A engineering method for process identification. Periodica Polytechnica, El. Eng. 13. (1969) 1/2, pp. 73—89
110. —: GESZTI P. OTTÓ, az MTA levelező tagja. Műszaki Tudomány, 41 (1969), 3/4 163—165 l. (magyarul)
111. —: Néhány gondolat az Akadémiáról. Magyar Tudomány, 14. (1969) 12. 746—749 (magyarul)
112. —: Oszonovü variantü metoda sztatiszticseszkogo raszcseta. Avtomatika i telemechanika, 33 (1969), 9. sz. pp. 37—48
113. —: Az Automatizálási Tanszék tevékenysége a műszaki fejlesztés szolgálatában. Budapest Műszaki Egyetem Jubileumi Ülésszaka (Bp. 1970. ápr. 23—24.) 7. kötetében. Bp. 1970, ÉTI szaksz.

114. CSÁKI, F.—FISCKER, P.: On the spectrum factorization. 2. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae 60 (1970) 1/2 pp. 9—14
115. CSÁKI F.—HABERMAYER Istvánné: Lineáris, holtidős szabályozások stabilitásvizsgálata. Mérés és Automatika 18 (1970) 6. 161—164 l. (magyarul)
116. —: Szabályozások analízise és szintézise. Mérés és Automatika 18. (1970) 12. 444—454 l. (magyarul)
117. —: A concise proof of Sylvester's theorem. Periodica Polytechnica, El. Eng. 14 (1970) 2 pp. 105—112
118. CSÁKI, F.—KOVÁCS T.: Evaluating the inverse Laplace transforms from the pole-zero configuration by digital computer. Periodica Polytechnica, El. Eng. 14 (1970) 2 pp. 173—180
119. —: On evaluation of statistical characteristics of stochastic signals. International Measurement Confederation Congres. 5. Versailles, 25—30. May 1970. Bp. 1971. MTESZ
120. CSÁKI, F.—KEVICZKY, L.—KOVÁCS, T.: Optimum synthesis of linear control systems by digital computers. 1—2. Act. Techn. Hung. 71. (1971) 1/2. pp. 1—22
121. —: Some remarks about recent notations in matrix analysis. Periodica Polytechnica, El. Eng. 15 (1971) 3. pp. 157—165
122. CSÁKI, F.—KEVICZKY, L.—KOVÁCS, T.: Diagrams of the optimum setting of controls. Periodica Polytechnica, El. Eng. 15. (1971) 3. pp. 241—253
123. —: Nykotorüe problemü metoda prosstransztva szosztojanij. Periodica Polytechnica, El. Eng. 15 (1971) 3. pp. 295—303
124. —: Vizsgálódások a számítástechnika köréből. Automatizálás, 4, (1971), 10. 13—16 l. (magyarul)
125. —: Az állapotmódszer alapjai. Elektrotechnika 64 (1971), 1—3. 26—38 l. (magyarul)
126. —: A számítástechnika szerepe a korszerű kutatásban. Magyar Tudomány 16 (1971), 2. 91—97 l. (magyarul)
127. —: A kétlépcsős oktatás kezdetei a műszaki szakemberképzésben. Felsőoktatási Szemle 20 (1971) 7/8. 385—391 l. (magyarul)
128. —: Application of statistical techniques in science and technology. Posebri Otisak Predovanja objevijenog u zborniku radova JUREMA (Zagreb) 1971
129. —: Control and Regulation in the Human Organism. Medicor News 4. (1972) pp. 20—22
130. CSÁKI F.—KEVICZKY L.—KOVÁCS T.: Lineáris szabályozások optimális szintézise digitális számítógépen 1—2. Műszaki Tudomány 45 (1972), 1/2. 35—56 l. (magyarul)
131. —: Az állapotegyenletek meghatározása fizikai és kémiai megfontolások alapján. I—III. Elektrotechnika, 65 (1972), No. 1—2, 1—9 l., No. 3. 65—70 l., No. 4. 113—196 l. (magyarul)
132. CSÁKI F.—KEVICZKY L.: Holtidős szabályozási körök tervezése az időtartományban. Műszaki Tudomány 45 (1972), 1/2. 71—91. l. (magyarul)
133. —: Some Recent Trends in Control Engineering. Proceedings of the JUREMA, 1972. International Symposium on Cybernetics in Modern Science and Society. Zagreb. 1972
134. —: Some remarks on modul transformation. Periodica Polytechnica, El. Eng. 16 (1972), 4. pp. 333—346
135. —: A survey of previous and recent trends in control engineering. Periodica Polytechnica, El. Eng. 17 (1973), 2. pp. 99—119
136. CSÁKI, F.—KEVICZKY, L.: Design of control systems with dead time in the time domain. Act. Techn. Hung. 74 (1978), 1/2, pp. 63—84
137. —: Korszerű módszerek az irányítástechnikában. Mérés és Automatika, 21 (1973) 12. 457—466 l. (magyarul)
138. —: Optimization of NOR and HAND switehing circuits for available variables. Act. Techn. Hung. (1973) 75. pp. 93—110
139. —: The possibilities of European co-operation in science and technology. Seventeenth PUGWASH Symposium, Varna, 18—21 ápr. 1973
140. CSÁKI, F.—MAGYAR, P.—IPSITS, I.: Impulsgenerator mit Thyristoren für Erzeugung specieller Impulsreihe. 2. Konferenz über Leistungselektronik. 3. Sec. Stromrichtung. 3. 9. 1—19. 1973
141. CSÁKI F.—KÁRPÁTI A.—HERMANN J.: Reverzáló tirisztoros kapcsoló háromfázisú aszinkrongépek vezérlésére. Elektronika 66 (1973) 718. pp. 298—301
142. CSÁKI, F.—KEVICZKY L.—KOVÁCS T.—KOCSIS J.: Some algorithmic models for production lines. Periodica Polytechnica, El. Eng. 17 (1973), 2. pp. 169—178
143. CSÁKI, F.—SZÜCS, B.—MAGYAR, P.—TIMÁR, P.—JÁNOSDEÁK, E.: Szravnitel'nüj analiz avtomobil'nüh amortizatorov szatiszticseszkim metodom. Act. Techn. Hung. 74 (1973) 314. pp. 253—262

144. CSÁKI F.—IPSITS I.—MAGYAR P.: Tirisztoros impulzusgenerátor speciális inpulzus sorozat előállítására. Elektrotechnika, 66 (1973) 9—10, 376—379. l. (magyarul)
145. —: Bioautomatizmus, szabályozás, vezérlés. Biofizika. Szerk. Ernst Jenő. Bp. 1974 Akad. K. 296—316 l. (magyarul)
146. Számítógépek. Biofizika. Szerk. Ernst Jenő, Bp. 1974. Akadémiai Kiadó 317—330 l. (magyarul)
147. —: Az MTA Műszaki Tudományok Osztályának új tagjai. Lukács József. Műszaki Tudomány, 48 (1974), 1—2. 19—21 l. (magyarul)
148. —: A szovjet és a magyar tudományos iskolák munkakapcsolatainak fejlesztése a szabályozás és információelmélet területén. Mérés és Automatika, 22 (1974), 12. 449—456. l. (magyarul)
149. —: Nekotorüe problemü razvitija teorii mnogomernüh szisztem. Periodica Polytechnica, El. Eng. 18 (1974) 1. pp. 3—26
150. —: Transformation methods from phase-variable from to canonical forms. Problems of Control and Information Theory, 3. (1974) 3. pp. 209—226
151. —: Conversion methods from phase-variable to canonical forms. Periodica Polytechnica, El. Eng. 18 (1974) 4. pp. 341—379
152. —: Introduction to State'-Space Methods. International Symposium on Cybernetics in Modern Science and Society, Zagreb 1974
153. —: A short introduction to state-space methods. Periodica Polytechnica, El. Eng. 18 (1974) 3. pp. 219—234
154. KIS P.—CSÁKI F.: Néhány megjegyzés a közvetlen digitális irányítási rendszerek tervezéséhez és kialakításához. Mérés és Automatika, 22. (1974) 3. 81—88 l. (magyarul)
155. GILLEMOT, L.—CSÁKI, F.: Technical sciences. Science and scholarship in Hungary. Ed. by: Tibor Erdey-Grúz, Kálmán Kulcsár, Bp. 1975. Corvina pp. 158—186
156. —: The role of truncated polynomials in some state-space techniques. Act. Techn. Hung. 80 (1975). 3—4. pp. 327—342
157. —: Erősáramú elektronika. Magyar Tudomány, 20 (1975), 1. 9—11 l. (magyarul)
158. —: A magyar és szovjet tudományos iskolák munkakapcsolatainak fejlesztése a szabályozás és információelmélet területén. Műszaki Tudomány, 50 (1975) 1—2. 3—19. l. (magyarul)
159. —: The development of the work connections between the Sowiet and the Hungarian research schools in the field of control and information theory. Problems of Control and Information Theory, 1975, Jubilee Number, pp. 33—49
160. CSÁKI, F.—HAMADA, El. Said: Method for design of linear optimal systems in frequency domain. Problems of Control and Information Theory, 4 (1975) 2. pp. 103—120
161. —: A systematization of canonical transformations. Periodica Polytechnica, El. Eng. 19 (1975) 12. pp. 71—91
162. CSÁKI F.—SZEPESSY S.: Hetvenöt éves a Magyar Elektrotechnikai Egyesület. Villamosság, 23 (1976) 6. 161—163 l. (magyarul)
163. —: Some Notes on the Inversion of Confluent Vandermonde Matrices. IEEE Transactions on Automatic Control, Febr. 1975. AC-20 (1975) 1. pp. 4
164. VAJTA, M.—CSÁKI, F.—KEVICZKY, L.—GÁL, T.—HABER, R.—IVÁNCSI, Sz.—LAKATOS, L.—KOVÁCS, T.: Procedured Oriented Program System for Computer-Aided Teaching of Automatic Control Theory in High level Education. Proc. 2. rd. IFIP World Conference „Computer in Education". North Holland Publishing Comp. Marsaille. France 1975.
165. SZÜCS, B.—CSÁKI, F.—MONOS, E.: New Aspects of Blood Pressure Control. IFAC 6th World Congress Boston. Cambridge 1975
166. CSÁKI, F.—REMZSŐ, G.—KOVÁCS, T.: Computerized production control of processes in machine industry. Periodica Polytechnica, El. Eng. 20 (1976) 1. pp. 3—14
167. CSÁKI F.—KIS P.—HILGER M.—KEVICZKY L.—KOLOSTORI J.: Egy megoldás zárthurkú malmok szélsőérték szabályozására. Mérés és Automatika, 25 (1977) 1. 10—13 l. (magyarul)
168. —: Automatizálás. Múlt, jelen, jövő. Automatizálás, 10 (1977), 5. 4—9 l. (magyarul)
169. —: The role of truncated polynomials in some discrete-time state-space techniques. Act. Techn. Hung. 84 (1977), 1—2. pp. 1—16
170. —: Transformation from phase-variable form to canonical form in discrete-time systems. Problems of Control and Information Theory, 6 (1977), 2. pp. 93—109

Értekezések

1. CSÁKI F.: Soros kondenzátorok alkalmazásának néhány kérdése. 1—2 rész. Kandidátusi értekezés Budapest, 1954. 1. rész szöveg 213 l.; 2. rész táblák 47 melléklet
2. —: Változó szlip meghatározása turbógenerátorok aszinkron üzemében. Doktori értekezés Budapest, 1960. Kézirat, 143 l. 75 különálló ábra és 13 táblázat

Jegyzetek

1. Csáki F.: Villamos vasutak. Verebély László előadásai nyomán. Budapest, 1949, 1953, 1955, Műszaki Egyetem jegyzete
2. —: Komplex számok és vektorok elektrotechnikai alkalmazása. Közoktatási jegyzetellátó, Budapest, 1952. (A Mérnöki Továbbképző Intézet előadássorozatából.)
3. —: Komplex számok és vektorok elektrotechnikai alkalmazása. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Bp. 1952, 1954. (Mérnöki Továbbképző Intézet előadássorozatából.)
4. Csáki F. és a Villamosgépek Üzemtana Tanszék munkaközössége. Villamosgépek Üzemtana. Példatár, Műszaki Egyetemi Jegyzet, Budapest, 1952/53.
5. —: Rövidzárlati áramok gyakorlati számítása. Előreszámított görbék alkalmazása. Felsőoktatási Jegyzetellátó, Bp. 1954. (Mérnöki Továbbképző Intézet 1954—55. évi előadássorozatából.)
6. Csáki F.—Dr. Benedikt Ottó vezetésével a Különleges Villamosgépek Tanszék oktatóival közösen: Különleges Villamosgépek 1. 1—6. rész. jegyzet, Bp. 1957, 1960, 1961
7. Csáki F.—Ganszky K.—Ipsits I.—Kelemen T.—Vitályos L.: Áramirányítók és ipari elektronika példatár. Felsőoktatási Jegyzetkiadó, Bp. 1958
8. —: Szabályozástechnika. — Bp. Tankönyvkiadó. 2/1 1962. jav. utánnyomás 1965. Felsőoktatási Jegyzetellátó; 2/2 Folyamatszabályozási szakmérnökök számára 1962. jav. utánnyomás, 1965. Felsőoktatási Jegyzetellátó. (Mérnöki Továbbképző Intézet kiadványa V. 6, 12.) A Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Kar, szakmérnöki tagozat jegyzete
9. Csáki F.—Barki K.—Szilágyi B.: Bevezetés az irányítástechnikába. Tankönyvkiadó, Budapest, 1962. (Budapesti Műszaki Egyetem, Villamosmérnöki Kar)
10. Csáki F.:—Vezérléstechnika. Jegyzet. Tankönyvkiadó, Bp. 1963, 1964, 1965, 1967, 1969. (Budapesti Műszaki Egyetem, Villamosmérnöki Kar, Szakmérnöki tagozat). Szakmérnöki Továbbképző Intézet kiadása. Vill. 27.)

Könyvek

1. Csáki F.—Barki K.—Ganszky K.—Ipsits I.: Ipari elektronika, Tankönyvkiadó
2. Csáki F.: Szabályozások dinamikája, Akadémiai Kiadó, 1966, 1970, 1973
3. Csáki F.—Bars R.: Automatika, Tankönyvkiadó, 1969, 1972, 1974
4. Csáki F.: Korszerű szabályozáselmélet. Akadémiai Kiadó, 1970
5. Csáki F.—Ganszky K.—Ipsits I.—Marti S.: Teljesítményelektronika. Műszaki Könyvkiadó, 1971, 1973
6. Csáki F.: Fejezetek a szabályozástechnikából, Állapotegyenletek. Műszaki Könyvkiadó, 1973
7. Csáki F.—Barki K.: Vezérléstechnika. Tankönyvkiadó 1973, 1975
8. Csáki F.: Bevezetés az Automatikába. Akadémiai Kiadó, 1973
9. Csáki F.—Hermann I.—Ipsits I.—Kárpáti A.—Magyar P.: Teljesítményelektronika. Példatár, Műszaki Könyvkiadó, 1975
10. Csáki F. (szerk.): Lineáris szabályozási rendszerek analízise. Műszaki Könyvkiadó, 1976.
11. Csáki F.: Bevezetés a digitális technikába. Akadémiai Kiadó 1977
12. Csáki F. (főszerk.): Irányítástechnikai Kézikönyv. Műszaki Könyvkiadó, 1977
13. Csáki F. (szerk.): Lineáris szabályozási rendszerek szintézise. Műszaki Könyvkiadó (sajtó alatt)
14. Csáki, F.: Modern Control Theories, Nonlinear, optimal and adaptive systems. Akadémiai Kiadó, 1972
15. Csáki, F.: Die Zustandsraum-Methode in der Regelungstechnik. Akadémiai Kiadó — VDI Verlag, 1973
16. B. N. Petrov—Csáki, F. (Editors): 2nd International Symposium on Information Theory. Akadémiai Kiadó 1973
17. Csáki, F.—Ganszki, K.—Ipsits, I.—Marti, S.: Power Electronics. Akadémiai Kiadó, 1975
18. Csáki, F.: State-space Methods for Control Systems, Akadémiai Kiadó 1976
19. Csáki, F.: Szovremennaja teorija upravlenyije. Izd. Mir. Moszkva 1975
20. Csáki F.—Hermann I.—Ipsits I.—Kárpáti, A.—Magyar S.: Teljesítményelektronika. Példatár, angol nyelvű kiadás (sajtó alatt)

MEGEMLÉKEZÉS

Dr. Dr. h. c. GELEJI SÁNDORról 80. SZÜLETÉSNAPJA ALKALMÁBÓL

Kivételesen sokoldalú tevékenységnek, elméleti és gyakorlati eredményekben gazdag, elismerésben sem szegény, tartalmas életnek szakadt vége, amikor Geleji Sándor akadémikust súlyos betegsége 1967. november 3-án elragadta az élők sorából. Műszaki tudományos munkássága a fémeket alakító műveletek elméletének, az ipari fémalakítást végző gépek tervezésének és termelő képességének fejlesztésére, a kohómérnökhallgatók egyetemi oktatásának korszerűsítésére, a laboratóriumi és ipari kutatómunkára, a tudományos tevékenység szervezésére és irányítására egyaránt kiterjedt. Munkájának sok maradandó alkotás az eredménye, élete, magatartása pedig példaképül szolgálhat.

Haladó gondolkodású szülők harmadik fiaként, 1898. május 17-én, Nagykikindán született. Atyja tíz éven át itt volt tanító, majd 1901-ben Sopronba hívták s az evangélikus iskola tanítója lett. Ettől kezdve a család itt élt és Geleji Sándor itt végezte iskoláit, 1917-ben érettségivel zárva le

azokat. Ez év őszén a Budapesti Műszaki Egyetem gépészmérnöki karára iratkozott be, de tanulmányait két év múlva félbe kellett szakítania. A Tanácsköztársaság összeomlása után édesapját, 1919-ben végzett tevékenységéért, két és fél évi börtönre ítélték, két bátyjának pedig emigrálnia kellett. Édesanyjáról, akit szolgálati lakásukból is elköltöztettek, gondoskodnia kellett; szerény tisztviselői állást vállalt egy soproni malomban. Néhány év múlva beiratkozhatott a Sopronba költözött Bányamérnöki és Erdőmérnöki Főiskola kohómérnöki karára, a Főiskola egyik haladó szellemű professzorának, FEHÉR Dánielnek határozott közbenjárására. 1926 őszén kitűnő minősítésű vaskohómérnöki oklevelet szerzett.

Ezután tizenkét éven át ipari üzemekben dolgozott; először a Magyar Rézhengerművekben, majd Csepelen a Fémműben. Mindkét üzemben tevékenyen bekapcsolódott a termelő műhelyek berendezéseinek korszerűsítési munkájába. Bár Csepelen metallurgiai feladatot is sikerrel oldott meg, legszívesebben a fémalakító gépekkel, a hengerművekkel, a rúd- és dróthuzó gépekkel foglalkozott. Munkájával mindkét üzemben elég rövid idő alatt tekintélyre tett szert, egyre magasabb beosztást kapott. Sokáig a Fémmű főmérnöke, végül, 1948-ig, igazgatója volt.

Mielőtt azonban lemondott volna erről a beosztásáról, a soproni Kohómérnöki Kar megválasztotta, a Magyar Népköztársaság elnöke pedig 1946. április 18-án kinevezte a kohógéptani tanszék vezetőjévé. Itt találta meg igazi munkahelyét, ahol kitűnő matematikai képességét és felkészültségét, valamint két évtizedes üzemi tapasztalatait értékesíthette. Első teendőjének az elavult tananyag korszerűsítését és az egyoldalúan gépészeti ismeretanyagnak az alakítóműveletek technológiájának elméleti és gyakorlati vonatkozásaival való kiegészítését tartotta. Ennek a törekvésének gyümölcse volt a technológus kohómérnöki ágazat megszervezése 1949-ben.

Még mint üzemi mérnököt 1934-ben *A hengerlés erőszükségletének kiszámítása* című értekezése alapján a kohómérnöki tudományok doktorává avatták, 1939-ben pedig egyetemi magántanári képesítést szerzett. Ettől kezdve rendszeresen nemcsak előadásokat tartott, felhasználva addig végzett elméleti és gyakorlati munkájának eredményeit, hanem a Bánya- és Kohómérnöki Kar idegen nyelvű Közleményeiben írásait rendszeresen közzétette.

1945 után lázas tevékenység évei következtek. Még három évig a csepeli Fémmű igazgatója volt és irányította az üzem súlyos háborús kárai megszüntetésének munkáját, hogy a nagyon is szükséges fémgyártmányok termelése megindulhasson. Hetenként két-három napra pedig Sopronba utazott, hogy megtartsa előadásait és megkezdje a tanszék szegényes és elavult berendezéseinek kiegészítését korszerű mérőeszközök beszerzésével. Tanszéki elődeitől nagyon keveset örökölt, a háború ebben is sok kárt okozott. Sopronban a fejlesztésnek súlyos akadálya volt, hogy a tanszék két-három helyiségben, szűkösen volt elhelyezve, amikor aztán 1952-ben átköltözhetett Miskolcra, az 1949-

ben alapított Nehézipari Műszaki Egyetem korszerűbb és jóval tágasabb épületébe, a tanszék fejlődése meggyorsult. Létre lehetett hozni az alakító kísérletekre is alkalmas műhelyt, bővíteni lehetett a mérőműszerek állományát, volt helye a tanszéki könyvtárnak és mindenekelőtt, a tanszék dolgozóinak létszámát is növelni lehetett.

Tanszékét és ott végzett munkáját nagyon szerette. Jellemző, hogy amikor 1967-ben kórházi ágyánál meglátogattam, egy szóval sem panaszkodott a betegségére, de mély sóhajjal mondta: Nem látom többé Miskolcot, a tanszékre többé nem jutok el.

Az üzemi és tanszéki fejlesztés éveiben jutott ideje a tudományos munkára is; 1945 és 1952 között négy könyve és harmincnál több tanulmánya jelent meg, az utóbbiak közül több nagy tekintélyű külföldi szaklapban. Lelkes és kitartó tudományos munkásságát a Magyar Tudományos Akadémia azzal ismerte el, hogy 1950-ben levelező, 1954-ben pedig rendes tagjává választotta, 1956-tól 1964-ig pedig az osztálytitkárává. Ezekben az években az akadémiai osztályoknak nem volt elnökük, a munka irányítása és szervezése az osztálytitkárra hárult.

Osztálytitkári teendőit ugyanolyan lendülettel, magát és egészségét nem kímélve látta el, mint minden egyéb feladatát. Fontos és sürgős feladatnak tekintette a Műszaki Tudományok Osztálya akadémiai kutatóbázisának megteremtését. Szívügye volt a Műszaki Alaptudományi Intézet létrehozása; a tudomány jövőjébe vetett hiten kívül meggyőző érvekkel bizonyította az ilyen akadémiai kutatóhely szükségességét, annak megvalósítására azonban anyagi okokból nem kerülhetett sor.

A tervezett intézet előkészítése céljából 1959-ben javasolta a rokon szakmájú egyetemi tanszékeknek akadémiai munkaközösségekben való összekapcsolását. Az ilyen, akadémiai szintű kutatásokon dolgozó munkaközösségek közül az elsők között a Nehézipari Műszaki Egyetem öt, később pedig hat tanszékét egybefoglaló Kohászati Akadémiai Munkaközösség alakult; ennek vezetői tisztségét haláláig viselte. A munkaközösség tevékenységéről szóló jelentésekben a Geleji-tanszék mindig kiemelkedő eredményekről tudott számot adni.

A Műszaki Tudományok Osztályának első osztálytitkárától, Hevesi Gyula akadémikustól néhány kötet megjelenése után átvette az Osztály két kiadványának, az idegen nyelvű Acta Technica-nak és a magyar nyelvű Osztályközleményeknek főszerkesztői tisztségét. Fáradhatatlanul buzdította az arra érdemes szerzőket, hogy írjanak, de maga is sokat írt az Osztály két folyóiratába.

Kezdeményezte és megindította a Vaskohászati Enciklopédia címet viselő akadémiai könyvsorozat kiadását. Az eredetileg 15—16 kötetre tervezett sorozat tematikai tervét elkészítette, aztán felkutatta az egyes kötetek megírására legilletékesebb szerzőket. A sorozatból haláláig 14 kötet készült el, de

úgy, hogy több cím egy helyett két kötetben jelent meg. A sorozat sajnos csonka maradt.

Miközben ellátta az akadémiai és egyetemi teendőit, az utóbbiak kedvéért hetenként kezdetben Sopronba, majd Miskolcra utazva a hazai és külföldi folyóiratokban sorra publikálta az újabb kutatásait ismertető közleményeket, valamint a külföldi szerzők eredményeit is figyelembe vevő, de jórészt a saját eredményeit rendszerbe foglaló könyveit. Az utóbbiak egy része idegen nyelven, de hazai kiadó gondozásában, jelentős részük pedig külföldi kiadónál jelent meg. Idegen nyelven írott könyveiről a legnagyobb tekintélyű külföldi szakmai folyóiratokban mindig elismerő hangú recenziók jelentek meg. Nem magyar nyelvű könyvei közül egyet-egyet cseh, orosz, japán nyelvre is lefordítottak és kiadtak.

Tudományos kutatómunkájának célja a fémek hideg- és melegalakító műveleteinek, erő- és energiaigényének kísérleteken és mért adatokon alapuló, számítással végezhető meghatározása volt. Arra is ügyelt, hogy eredményeit az alakítógépeket tervezők és a termelő berendezéseket ellenőrző üzemi mérnökök is felhasználhassák. Bár úgyszólván minden alakítóművelet mechanikájával eredményesen foglalkozott, legtöbbet a hengerlés elméletének fejlesztésén és gyakorlatának tökéletesítésén dolgozott. Ennek oka a következő lehetett. A hengerlés bonyolult műveletének alapegyenleteit KÁRMÁN Tódor 1925-ben ismertette és evvel megadta a hengerlés erő- és munkaszükségletének számításához a kiindulási alapot is. A Kármán-féle egyenletek megoldása azonban mindig olyan végső képletekhez vezetett, amelyekben két, kísérleti módszerekkel, méréssel nehezen meghatározható érték szerepel, nevezetesen a darab anyagának alakítási ellenállása és a darabnak a hengerekkel érintkező felületén érvényesülő súrlódás tényezője. Mind a két érték számos körülménytől függ. Amint ezeknek az értékeknek meghatározását a méréstechnika fejlődése egyre pontosabbá tette, a számításhoz levezetett képletek helyességét is egyre megbízhatóbban lehetett ellenőrizni, úgy, hogy a számított eredményt az üzemi berendezéseken végzett mérések adataival összehasonlították. GELEJI Sándornak a hengerléssel foglalkozó tanulmányain is felismerhetjük, hogy a Miskolcra települt tanszék felszerelésének korszerű mérőeszközökkel való bővülése révén az üzemi mérések eredményét a számított adatok egyre jobban megközelítik.

24 könyvében és 125 tanulmányában a hengerlésen kívül úgyszólván valamennyi használatos fémalakító művelet erőviszonyaival foglalkozott, mindig szem előtt tartva a képlékenységtan és a technológia követelményeit.

A külföld nemcsak idegen nyelvű könyvei és tanulmányai révén ismerte meg GELEJI Sándor nevét. Mint különböző szintű delegációk vezetője vagy tagja gyakran megfordult külföldön, de nagyon gyakran megjelent külföldön rendezett konferenciákon és egyéb tudományos tanácskozásokon is. Az utóbbiakon sokszor tartott előadást kutatásainak újabb eredményeiről, de élénken részt vett szakmabeli kollégáinak előadását követő vitákban is.

Külföldi kapcsolatai főként a baráti államok tudományos akadémiáival és felsőoktatási intézményeivel alakultak ki. 1955 őszén vele voltam Moszkvában, hogy négyhetes tanulmányutunkon megismerjük a moszkvai akadémiai kutatóintézeteket és a kohómérnökképzéssel foglalkozó oktató intézményeket. A meglátogatott intézmények munkájáról rendkívül tájékozottnak bizonyult és jól ismerte, legalább névről, az ott dolgozó tudósokat és azok munkásságát, elsősorban persze azokét, akik szakterületét művelték.

Leggyakrabban olyan tudományos tanácskozásokon jelent meg, ahol német nyelvtudását hasznosíthatta. Kezdettől fogva gyakori és megbecsült vendége volt a freibergi Berg- und Hüttenmännische Tagungnak, ottani pályatársai pedig gyakran megfordultak a tanszékén. A szoros kapcsolat gyümölcseként a freibergi Bergakademie, fennállásának 200. évfordulóján honoris causa doktorává avatta. Ezt megelőzően a berlini Tudományos Akadémia felkérésére az Abteilung für Bergbau, Hüttenwesen und Montangeologie Sitzungsberichte sorozatának egyik számában 51 nyomtatott oldalon áttekintést adott a képlékeny alakítás területén végzett munkásságáról.

Első tanulmánya 1928-ban jelent meg, utolsó műve, a *Bildsame Formgeburg der Metalle — Versuch, Theorie und Anwendung* címmel már halála után a berlini Akademie Verlag kiadásában. A közben eltelt négy évtizedet szakadatlan tudományos és oktatómunkával töltötte ki, de széles körű társadalmi tevékenységre is tudott időt szakítani. Számtalan akadémiai és egyetemi bizottságnak volt tevékeny tagja, de neves nemzetközi testületek munkájában is részt vett. Haláláig elnöke volt az International Union of Theoretical and Applied Mechanics magyar nemzeti bizottságának, tagja az International Institution for Production Engineering-nek és a hazai UNESCO-bizottságnak.

Tanszékének bőséges és korszerű felszerelése, dolgozóinak egyre gyűlő tapasztalata és elméleti tudása azt is lehetővé tette, hogy nagyobb szabású üzemi méréseket vállaljon, azok eredményét felhasználva, javaslatokat dolgozzon ki elavult berendezések újakkal való kicserélésre, valamint olyan technológiák bevezetésére, amelyek révén a drága hengersorok termelése növekedett, termékeik minősége, méretpontossága pedig javult. Ilyen célból a Lenin Kohászati Művek blokksorán, a Dunai Vasmű félig folytatólagos szélesszalag hengersorán, a Lőrinci Hengermű ugyancsak régi Lauth-triosorán, a Salgótarjáni Kohászati Üzemek hideghengerművében végzett mérések eredményének felhasználása mindig hasznot hozott a népgazdaságnak. Több éves elméleti kutatásai eredményeinek felhasználásával a Csepeli Tervező Irodának és a vele kapcsolatot tartó gépgyáraknak adott segítség olyan csőgyártó gépek tervezését és gyártását indította el, amelyek a színvonaluk révén a világpiacon is keresett hazai termékek.

Geleji Sándornak 22 éves ipari üzemi és hároméves átfedéssel 21 éves egyetemi oktatói, valamint az egész időszak alatt végzett kutatói és irodalmi tevékenysége majdnem teljes egészében műszaki jellegű. Érdeklődésének köre

azonban ennél szélesebb volt. Szívesen hallgatta a komoly zenét, szűk baráti körben népszerű operaáriákat énekelt. A világirodalom remekeit szívesen olvasta, hosszabb üléseken pedig jellegzetes karikatúrákat rajzolt a vele együtt unatkozókról.

Időrendben felsorolva, a következő nagyobb kitüntetésekben részesült: 1942-ben megkapta a Magyar Mérnök- és Építész Egylet aranyérmét; 1948-ban a Köztársasági Érdemérem arany fokozatát, 1950-ben az Országos Magyar Bányászati és Kohászati Egyesület Wahlner Aladár aranyérmét, 1951- és 1955-ben a Kossuth-díjat; 1958-ban Munka Vörös Zászló Érdemrendjét. Utolsó kitüntetésként a Lengyel Tudományos Akadémia 1966-ban tiszteleti tagjává választotta de betegsége miatt nem vállalhatta a Varsóba utazást, s így a kitüntetésről szóló okiratot Budapesten vette át Lengyelország nagykövetétől.

Világnézete, családi hagyományként, haladó szellemű volt. Budapesti műegyetemi hallgató korában tagja a Galilei-körnek, de tagja volt a Szocialista Diákok Országos Szövetségének is. Ez a Szövetség 1919 márciusában Sopronba küldte, hogy a diákok előtt ismertesse a Szövetség programját, szabályzatát. A gyűlés résztvevői megválasztották a bizalmikat és mintegy százan be is léptek a Szövetségbe.

Még az üzemben, fiatal mérnök korában hozzászokott a munkafegyelem szigorú betartásához és betartatásához. Beosztottjai, munkatársai tevékenységét keményen bírálta ugyan, de mindig segítő szándékkal. Lobbanékony természetű volt, de haragot nem tartott. Szigorúnak tűnő természete meleg szívet, mély humanizmust takart. Talán a saját ifjúságának nehéz évei jutottak eszébe, amikor nehézségekkel küzdő pályatársain segíteni törekedett és amikor pályakezdő tanítványainak kezdeti tevékenységét éber szemmel figyelte, örült minden sikerüknek és bátorította őket további munkájukban.

Ha még itt járna közöttünk, ez év májusában ünnepelhetnők GELEJI Sándor nyolcvanadik születésnapját. Ehelyett immár több mint tíz éve csak emlékezhetünk rá, színes egyéniségére, kellemes hangjára és jellegzetes arcvonásaira, amely utóbbiakat a miskolci egyetem parkjában álló szobra is felidéz bennünk. Munkásságára, annak elméleti és gyakorlati eredményeire azonban nemcsak emlékezünk; azok tovább élnek és közvetlen tanítványain kívül még az utánuk következő nemzedékek is gyakran hallják majd a nevét és látják hasznát mindannak, amit ércnél maradandóbb emlékműként itt hagyott maga után.

Verő József

A ROBOTTECHNIKA TUDOMÁNYOS PROBLÉMÁI*

IVAN IVANOVICS ARTOBOLEVSZKIJ

A Szovjetunió Tudományos Akadémiájának rendes tagja

Ez a tanulmány ismertetni szeretné a gépgyártás egy új ágának, a robottechnikának néhány alapvető tudományos problémáját. Ez a mai gépszerkesztés fiatal hajtása, megjelenését és fejlődését több tényező diktálja. Elsősorban — mondhatni — szociálpolitikai szempontok. Mint ismeretes, vállalatainknál még igen sok olyan művelet van, amelyeket dolgozó emberek végeznek, olyan nehéz technológiai műveleteket teljesítenek, amelyek nehéz fizikai munkát kívánnak, e dolgozók gyakran igen nehéz feltételek között — magas hőmérséklet, gázszennyeződés — dolgoznak. Például a Togliatti-gyár felszereltségét és elhelyezését illetően elsőosztályú, és mégis, több üzemben a munka 30—40%-a még kézi jellegű.

Ezenkívül, a folyamatos gyártósorokon és az automatikus sorokon végzett munka komoly nehézségeket támaszt abból a szempontból, hogy a munkásokat nehezen tudják bevonni az egyhangú, monoton munka végzésébe. A Volgai Autógyár vezérigazgatója szerint jelenleg nagy nehézséget jelent munkásokat találni e nehéz, fárasztó és nagyon unalmas műveletek végzésére, olyan feltételekkel kénytelenek a dolgozókat felvenni, hogy egy hónap múltán áthelyezik őket előnyösebb munkafeltételek közé. Ez az első probléma, aminek nemcsak technikai, de szociálpolitikai vonatkozásai is vannak.

A második probléma abban áll, hogy nagyon sok olyan folyamat van, amelyekben az ember közreműködése igen bonyolult. Ilyenek a radioaktív környezetben, több vegyiműben különleges feltételek között végzett tevékenységek, amelyek például nagyfokú gázszennyeződéssel stb. járnak, ahonnan a dolgozók közreműködését ki kellene küszöbölni, vagy munkafeltételeiket meg kell könnyíteni.

Ugyancsak figyelmet kell fordítanunk arra a körülményre, hogy még mindig az intenzív demográfiai robbanás határán vagyunk. Mindazon előrejelzések szerint, amelyek rendelkezésünkre állanak, a munkaerő-probléma már a közeli évtizedben igen kiélezetté válik, nem lesz munkás, nem lesz olyan ember,

* A Magyar Tudományos Akadémián 1977. június 30-án elhangzott előadás

aki elvégezne ilyen vagy hasonló műveleteket. Ezért a munkaerő kiválasztásának és a demográfiai problémának szintén bonyolult szociálpolitikai vonatkozásai vannak. A fent elmondottak igazolják, hogy olyan új gépek alkotásának, amelyek a robot-nevet kapták, nemcsak technikai, hanem komoly szociálpolitikai vonatkozásai is vannak. Természetesen, a robottechnika területén dolgozó mérnökök és tudósok számára a tudományos és technikai szempontok a leglényegesebbek. Új technológiai folyamatok keletkeznek, és velük együtt új követelmények automatizálásukat, megbízhatóságukat és pontosságukat illetően. És itt megjegyzendő, hogy e követelmények vonatkozásában a különböző technológiai műveletek teljesítése során az ember reakciója gyakran késik a kapott információkhoz viszonyítva. Például, néhány japán üzemben a tranzisztorok beforrasztásánál és szerelésénél 4 különböző színű kivezetést kell bizonyos helyekre rögzíteni. E műveleteket rendszerint kézzel végzik. Ezt munkásnők csinálják. Bebizonyosodott, hogy 1,5—2 óra múltán a nők összekeverik a kivezetések színeit, és e munkát 1,5—2 órára abba kell hagyniuk és csak ezután kezdhetik újra. Ezért fellép a tisztán technikai kérdés: hogyan fokozzák a tranzisztoros rendszerek szerelésének megbízhatóságát és pontosságát.

A legközelebbi ötéves tervben igen fontos probléma a megbízhatóság és pontosság. Természetesen, a kézzel tevékenykedő ember a saját biológiai és fiziológiai korlátai között nem biztosíthatja ezt a megbízhatóságot és pontosságot.

Ezenkívül most különösen lényeges — amit a párt XXV. kongresszusának határozatai is megerősítettek — az automatikus rendszerek manőverezhetőségének, kezelhetőségének kérdése, vagyis annak biztosítása, hogy a rendszerek bizonyos műszaki paramétereik megváltozása esetén átállíthatók legyenek.

És végül, ami nagyon lényeges, szükségszerű, hogy napjainkban a külön-külön működő automatikus gépekről áttérjünk az automatikus működésű géprendszerekre. A párt XXV. kongresszusának határozatai világosan rögzítették, hogy az automatizálás és gépesítés olyan probléma, amelynek új ugrást kell biztosítania országunk fejlesztésének eljövendő magas műszaki színvonalára. A határozatok ugyancsak világosan tartalmazzák, hogy a különálló gépről, még ha automatizált is, az automatikus működésű géprendszerekre kell áttérni. És végül, ott határozottan megfogalmazták, hogy tovább kell fejleszteni az automatikus manipulátorok, vagyis a programvezérlésű manipulátorok gyártását, amelyeket a továbbiakban robotoknak nevezünk.

Ily módon a robottechnika problémáját a párt XXV. kongresszusának programja is előirányozza.

Ez a tanulmány alapvetően a robottechnika tudományos problémáival kíván foglalkozni, de természetesen egyben érinteni fogja a robotok tervezésének tisztán technikai és tisztán mérnöki problémáit is.

A robottechnika mint új tudományág nem két tudomány határán született, hanem háromén: a biomechanika és bionika, a gépek mechanikája vagy a mechanizmusok elmélete és az irányítástechnika határán. Összességében e tudományok szimbiózisából született az új tudományág.

Ha az első kérdést tekintjük, vagyis a biomechanika kérdését, akkor itt szerfölött sok tudományos probléma merül föl, amelyek abban állnak, hogy milyen mértékben ismételjük meg az emberi mozgásokat, az ember munkamozdulatait, amelyeket akkor végez, amikor valamilyen technológiai műveletet kell végeznie. Ha a kezet tekintjük: a kéznek — a szakemberek szerint — 27 szabadságfoka van, vagyis tudósaink és mérnökeink számára új ez a mechanizmus, aminek szélsőségesen nagy szabadságfoka van. Természetesen, nincs arról szó, hogy ilyen szabadságfokú robotokat építsünk. Nem is szükséges, minthogy ezt nem írják elő sem a technológiai folyamatok, sem a gazdasági, sem egyéb tényezők. Ezenkívül szükséges, hogy az emberi kéz mozgását másoló rendszerek jól szerkeszthetők legyenek. De e rendszerek megszerkesztéséhez nélkülözhetetlen az emberi kéz mozgásának vizsgálata, hogy hogyan mozog ezzel a kézzel, hogy irányítja azt és így tovább. Az emberi kéz mozgásának mechanikája és e mozgásokkal vezérelt rendszerek igen bonyolultak. Hisz mindeddig nem tanulmányozták azt a kérdést, hogy milyen a kéz manőverezhetősége, hogy ez a 27 szabadságfok milyen mértékben teszi lehetővé a kéz manőverezését ilyen vagy olyan irányban. Egyáltalán nem vizsgálták azt a kérdést, hogy az ember egy poharat megfogva és áttéve egyik helyről a másikra, épp ilyen vagy olyan mozgásokat végez. Vajon ez a mozgás optimális-e a mechanika és az egész rendszer vezérlése szempontjából, vagy tisztán egyéni sajátossága egyik vagy másik embernek? A biomechanika terén végzett első kutatások megmutatták, hogy itt meghatározott törvények hatnak, amelyek korlátai között működik az ember, meghatározott tartományokban funkcionálnak végtagjai, és ezenkívül itt meghatározott irányító rendszer funkcionál az összes mozgással. Tanulmányozni kell a biológiai irányítási rendszereket. Hisz egyáltalán nem világos, illetve mindeddig nem minden esetben volt világos, hogy mikor elegendő — mondjuk — valamilyen, ujjakkal történő megfogási művelethez ilyen vagy olyan izomerőket alkalmazni a művelet által kívánt irányítás elérésére. Nem beszélünk az agyi irányításról, ami azt az információs jelet adja, hogy működtetni kell-e az összes egymás után következő izomelemet, vagy egy és ugyanazon izomelemek egyidejűleg biztosítják az egyik és másik működést. Ily módon az a probléma, hogy hogyan megy végbe az irányítás a kézben, igen bonyolult műszaki probléma, és a vezérlés szempontjából nagy érdeklődésre tart számot. Eddig a vezérlés kérdését így oldottuk meg: van bizonyos szabadságfok és minden szabadságfoknak saját vezérlőrendszere, vagyis vezérlőrendszerek halmazatához jutottunk. Ha mélyebben tanulmányozzuk e rendszerek biomechanikáját, akkor a tapasztalatok szerint a vezérlőrendszerek lényegesen egyszerűsödhetnek, nem kell halmozott

vezérlőrendszereket alkalmaznunk, amelyek minden szabadságfokra autonóm módon hatnának.

Ugyancsak figyelembe kell venni, hogy robotok alatt a gépek terjedelmes osztályát értjük. Ezek nemcsak gépek, amelyek — tegyük fel — az embernek vagy kezének és lábának mozgását, az ember helyváltoztatását reprodukálják, de azok is robotok, amelyek az állatok mozgását reprodukálják, például a lépegető gépek, a csúszó-mászó mozgást reprodukáló gépek és mások, amelyeknek szintén van irányító rendszerük. Eme élőlények tanulmányozása nagy érdeklődésre tart számot és felhasználhatók a mi — már technikai — vezérlőrendszereink felépítésére. A bionika problémáit csak megemlítjük, ezekről nem kívánunk beszélni, de ezek fontos tényezők a bionikai jelenségek helyes megközelítése szempontjából.

A második probléma: a robotok mechanikájának problémája. Ez a megfelelő kinematikai láncok előállításának problémája, amely láncok reprodukálnák ezeket a mozgásokat. Itt rögtön meg kell említeni, hogy nem mindig szükséges az emberi kéz, láb, illetve más szerv által végzett mozgások teljes reprodukciója. Bebizonyosodott, hogy a technikának némely esetben vannak előnyei az élő szervezetekkel szemben. Nagyon gyakran jelentkezik nálunk olyan vélemény, hogy mindaz, amit a természet csinált, lényegesen jobb, mint amit az ember csinált. Ez helytelen álláspont, mert megvannak annak a technikai lehetőségei, hogy olyan rendszereket építsünk, amelyeknek lényegesen nagyobb kinematikai lehetőségei vannak, mint az élő embernek. Vegyük a következő példát, az emberi kezet. Ez hengeres és gömbcsuklók kombinációjából áll, az ilyen rendszerek elérhetik a kívánt 27 szabadságfokot. Ugyanakkor, adott esetben, ha meg kell fognunk egy távolabbi poharat, lépnünk is kell, közelednünk kell e pohárhoz. Ebben az esetben a kinematikai láncok felépítésére prizmatikus párt alkalmazhatunk, amelyik eltolható és így elérhető a pohár.

Ha egy automatikus vagy folyamatos soron valamilyen szerkezetet szerelünk és — tegyük fel — kézzel húzunk meg egy anyát, akkor a kulcsnak van üresjárata és munkajárata. Senki sem akadályoz meg abban, hogy olyan mechanikus kezet készítsünk, amelyiknek kinematikai láncában olyan forgató pár lesz, amelyik egy menetben elvégzi az anya rácsavarását. Meg kell mondani, hogy az ilyen és ehhez hasonló munkafolyamatokat teljesítő kinematikai láncok szerkezeti problémái igen nagy jelentőségűek, nagy és széles lehetőségek vannak az összetett technológiai feladatok megoldására. Természetes, hogy e rendszerek mozgása során nagyon pontosan kell a mozgástörvényeket, vagyis e rendszerek kinematikáját ismernünk. Itt a következő érdekes szituáció keletkezett. Azok a rendszerek, amelyekkel a robotok bizonyos műveleteket végeznek, azok működő szervei, a térbeli mechanizmusok osztályához tartoznak, vagyis olyan mechanizmusok, amelyek három dimenzióban működnek. A szovjet iskolák még a harmincas években kezdtek foglalkozni a térbeli

mechanizmusok kinematikájával és dinamikájával. Többek között szerző egyike volt azoknak, akik megalapították a mechanizmusok elméletének ezt az ágát. A térbeli mechanizmusok elméletéről szóló monográfiája első volt a világon. Ez századunk harmincas éveiben történt. De a mechanizmusok elméletének ilyen irányzatához és könyvemhez úgy viszonyultak, mint valami akadémikus műhöz, vagyis senki se fordított rá különösebb figyelmet. És csak most került napvilágra ez a — már elvégzett — munka, ami nagyszámú cikkel gazdagodott, amelyek mind a szovjet, mind az amerikai és más országok folyóirataiban is megjelentek. Például az ASME folyóirata $^2/_3$-részben a térbeli mechanizmusok kinematikájáról és dinamikájáról szóló cikkeket tartalmaz. Ez természetesen nemcsak akadémikus érdeklődés, ez a probléma hirtelen feltámadt, amikor a robottechnikai rendszereket kezdtük tervezni. Elsősorban, természetesen, a kinematika munkálandó ki, ami nélkül nem vizsgálhatók a dinamikai kérdések, a robottechnika dinamikai kérdései pedig igen bonyolultak és érdekesek. Ha megszemléljük az első szovjet robotokat, amelyeket nemrégen az Irányítástechnikai Intézet kiállításán mutattak be, akkor észre kellene vennünk, hogy azok nem működnek túl folyamatosan, kissé reszketnek, mint a Parkinson-kórban szenvedő beteg, minthogy e rendszerekben a rezgési folyamatok egész skálája keletkezik. Emellett, minthogy a rendszer megváltoztatja saját pozicionális programját, e rezgések amplitúdói és frekvenciái teljesen különbözőek és a rezonanciabeli rezgésekig juthatnak, illetve a rendszer különböző mozgási körülményei mellett káros rezgések keletkezhetnek. Következésképp, a robotok dinamikájának legfontosabb problémáit e rendszerek rezgéstani viselkedése és ama tevékenységek összessége jelenti, amelyekkel megakadályozhatók e rezgések.

Továbbá fontos a robotrendszerek stabilitásának problémája, a mozgás stabilitása, úgyszintén a pozicionálás problémája, vagyis hogy a robot kezének szorítása mindig a kívánt helyen következzék be igen kis tűrésekkel, tekintettel a tárgy megfogásának pontosságára. Fellép a tehetetlenségi erők kiegyensúlyozásának problémája is. Épp ama robotok egyikén, amelyeket a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának ülésszakán mutattak be, működik egy kiegyensúlyozó rendszer, ami lehetőséget adott a robot nyugodtabb mozgására. Tehát ki kell emelni, hogy a robotok megalkotása során a nagyon érdekes mechanikai problémák egész osztályát kell megoldani, mindezek nagy erőfeszítéseket követelnek a tudósoktól.

Itt fel kell hívni a figyelmet arra, hogy e feladatok nagy matematikai nehézségekkel járnak.

Hisz mindeddig a tudósok és műszakiak alapvetően egyszabadságfokú mechanizmusokkal foglalkoztak. Néha vizsgáltak kétszabadságfokú mechanizmusokat, amikor pedig 6—7 szabadságfokról van szó, ez már rendkívül bonyolult probléma, a feladat egész matematikai megfogalmazása bonyolultabb lesz, ezenkívül fokozódnak a rendszer optimalizálásának kérdései, mint-

hogy a rendszerek többszabadságfokúak és sok kritériumnak kell eleget tenniük. Következésképpen a mozgás optimalizálása igen nehézkessé válik. Ezenkívül figyelembe kell venni, hogy a rendszerekben különböző hajtástípusok vannak. Ezek mechanikusak, hidraulikusak, pneumatikusak vagy valamilyen kombinált hajtások lehetnek.

Következésképpen, a robotok mechanizmusainak tervezésébe be kell vonni a hidromechanika, aerodinamika, elektronika, elektrotechnika szakembereit, minthogy azok a hajtások, amelyeket a robotok működési körülményeitől függően, a működés közegétől függően és a kívánt megbízhatóságtól függően be kell építeni, igen különbözőek. És végül, a robotok mechanikája szempontjából igen fontos az elemek tömegváltozásának problémája, hisz amikor a robot megfogja a tárgyat, majd elengedi azt, ugrásszerűen vagy kevésbé ugrásszerűen megváltozik az egész rendszer tömege és tehetetlenségi nyomatéka, vagyis megváltozik a robot egész dinamikája. Változó tömegű rendszert kaptunk sok esetben, amidőn a robot egyszerűen felemelt, vagy kiszórt valamilyen szemcsés vagy folyékony anyagot, bekövetkezett a tömeg megváltozása, vagyis megváltoztak a tehetetlenségi együtthatók, ami arra indít, hogy az úgynevezett változó tömegű mechanikát kell használni, ami nagyon bonyolítja e rendszerek dinamikai méretezésének problémáit.

A következő kérdés — és ez a legfontosabb, ami a robottechnikában felmerül — a robotok érzékelőképességének problémája. Nyilvánvalóan és könnyen belátható, hogy ez a probléma a robottechnika fontos és aktuális kérdése.

Természetesen, itt igen differenciáltan kell megközelítenünk azt, hogy milyen technológiai folyamatok közepette kell biztosítanunk a robotok érzékelőképességét. Legtöbbször és elsősorban legfontosabb a robotok tapintó érzékelőképessége. A robotoknak működési folyamatukban meg kell fogniuk bizonyos tárgyakat, vagy alkatrészeket, át kell helyezni azokat, vagy a kívánt helyzetbe kell hozni. Következésképpen a tapintás az első érzékelőképesség, amivel a robot megközelíti az értelmes embert. Ez igen jó minőségű jeladókat kíván, amelyek a vezérlőprogramnak megfelelő vagy az adott robot által irányított rendszernek megfelelő helyes információkat adnak.

Az érzékelés problémája az első manipulátorok megjelenésével kezdődött. Körülbelül az ötvenes években, amikor megindult az atomipar fejlődése, megjelentek a radioaktív zónában működő manipulátorok. Ekkor ezek másoló manipulátorok voltak, két, teljesen azonos szerkezet közül az egyik — tegyük fel — zárt térben volt, a másikon az operátor ilyen vagy olyan mozgásokat végzett és megkapta e mozgások másolatát, a megfelelő léptékben, nagyobb erővel vagy a mozgás nagyobb amplitúdójával.

Ezek másoló manipulátorok voltak és már itt találkoztunk az operátor—manipulátor kapcsolat egész sor igen fontos kérdésével. Az operátor nem tanulta meg könnyen a manipulátorral végzendő munkát. Például, felléphet a következő probléma. Ha abban a rendszerben, aminek mozgását irányítja, nincs

semmilyen terhelés a kézen, akkor ennek megfelelően nem irányíthat, vagyis szükség van valamilyen fordított kapcsolatra az operátor és a manipulátor között, hogy az operátor kezére hasson valamilyen terhelés, amely mellett különféle mozgásokat végezhet és vezérelheti a rendszert. Sok más, az irányított rendszer és az irányító ember kölcsönhatására vonatkozó kérdés is létezik.

Ennyit az úgynevezett másoló manipulátorokról. Körülbelül a hetvenes évektől kezdve — természetesen néhányan már korábban is foglalkoztak e kérdésekkel — kezdték kidolgozni a programozott robotokat, azokat, amiket most ipari robotoknak nevezünk, tehát a programvezérlésű robotokat. Ezeket gyakran a robotok első nemzedékének nevezzük. A programozott robotok merev program alapján működnek, a programot mágnesszalagon vagy lyukszalagon rögzítik. Általában merev vagy tanuló program alapján működnek. Ebben az esetben a robot munkaszervét például kézzel lehet vezetni a megfelelő mozgással, mintegy megtanítani azt és a szalagra beírt mozgásokat a robot tetszőleges számban ismételve teljesíti az adott műveletet.

Mint a számítógépeknél, itt is beszélhetünk a robotok nemzedékeiről. Azt mondhatom, hogy a másoló manipulátorok a nulladik nemzedékhez tartoznak. Az ipari robot az első nemzedékhez. Amint már említettem és amint azt a technológiai feladatok sokasága mutatta, az ipari robotoknak szükségük van tapintó érzékelőkre. Különösen fontos ez olyan robotok számára, amelyek a tenger fenekén dolgoznak, a felszínen úszó egységnek megfelelően gyakran önállóan változtatják helyüket, a különböző tárgyakba ütközve ki kell kerülniük az akadályokat, illetve keresztül kell mászniuk azokon. Ezek a radar elvén működhetnek, lézerrel — letapogató sugár gyanánt — felszerelt berendezések ugyancsak használhatók. Alkalmazhatók a „mechanikus halak", amelyek az akadályhoz érkezve és információt adva megkérdezik az operátort, merre menjenek, előre vagy kerülő úton.

A második probléma az érzékelő szem, vagyis a látás megvalósítása a szó legszélesebb értelmében. Mint ismeretes, a látás nyújtja a legtöbb információt az embernek. A látás szervével felszerelt robotokkal kísérletezni — ez igen érdekes és nehéz feladatot jelent. Itt rögtön felmerül az az elképzelés, hogy a látás megvalósítására valamilyen formában teljes televíziós rendszert alkalmazzunk. Ezen dolgoznak az amerikaiak, dolgozunk mi és dolgoznak a japánok.

Több esetben az ilyen látás segítségével, felhasználva a tárgy és az árnyék közötti kontrasztot, a robot a tárgyról kapott árnyékra reagálva megfogja ezt vagy azt az objektumot. Bizonyos esetekben a robotnak színérzékelő szeme van, akkor a tárgyakat színük szerint különböztetheti meg.

Meg kell mondani, hogy a „látás" kifejezést idézőjelbe kell tenni, ez nem feltétlenül jelent televíziót. Lehet „akusztikus szem", vagyis akusztikus információs csatorna. Előállítható úgy, hogy megfelelő, különböző frekvenci-

ákra hangolt akusztikus jeladókat alkalmazunk, amelyek teljes információt adnak a tárgy helyzetéről, helyes vagy helytelen állásáról, arról, hogy át kell-e helyezni valamelyik objektumot.

Sok esetben nem lenne előnytelen a hangérzékelés alkalmazása. Ilyen kísérleteket végeztek Grúziában a Kibernetikai Intézetben. Ott létezik ilyen robot, amelyik egyes emberi parancsszavakat — „előre", „hátra", „balra", „jobbra", „állj" — megért. Ezek rövid parancsok. Amikor szerzőt megkérték, hogy tegyen próbát, nem járt sikerrel. Meglehet, nem beszél grúz tájszólásban és rosszul ejti az „r" hangot. Ettől függetlenül érdekesek a tudomány szempontjából, de gyakorlati jelentőségük még nincsen. Nagyon gondosan kell e robotokat tanulmányozni, de nagyon bonyolultak is.

Említést nyert, hogy emberi érzékelőképességgel akarjuk felszerelni a robotokat. Most már, ami nagyon érdekes, az az, hogy felszerelhetjük a robotokat olyan érzékekkel, amikkel az ember nem is rendelkezik, például az elektromágneses mező érzékelésével, olyan hangfrekvenciák érzékelésével, amelyeket az ember nem hall, a sugárzás érzékelésével és így tovább. Vagyis ezek már olyanok, amikkel az ember nem rendelkezik, de a robot igen. Íme ezek azok a robotok, amelyeket mi, a robottechnika területén dolgozó szakemberek, második generációs robotoknak nevezünk.

Természetesen, az érzékelő robotoknál nagy jelentősége van a robottól kapott információk feldolgozásának. Az ilyen anyagok feldolgozása elektronikus számítógépeken, megfelelő modellező eljárásokkal történik. Elektronikus számítógépek és modellezés nélkül, más eljárásokkal nem juthatunk elég közel a feladatok megoldásához, ez természetes.

A következő probléma, amiről néhány szót kell szólni, a mesterséges intelligencia problémája.

Ismeretes, hogy ez igen széles körben vitatott kérdés, vitatják a népszerű tudományos folyóiratokban, előadásokon, még a napilapokban is. Meg kell mondani, hogy szerző nemcsak a mechanikával foglalkozó tudós, hanem mérnök is, és tökéletesen látja azokat a nehézségeket, amelyek a mesterséges intelligencia megépítése elé tornyosulnak, jóllehet még csak a szerkesztő munka kezdetén vagyunk.

Szerző mint műszaki, mint mérnök beszél ezekről a nehézségekről. Természetesen, valamilyen mesterséges agyvelő előállításáról, az emberi agy teljes felváltásáról csak fantaszták és matematikusok ábrándoznak és beszélnek. Nekünk, mérnököknek, a mesterséges intelligencia elemeinek előállításáról kell beszélnünk. Mi a teendőnk e problémával kapcsolatban és hogy lehet azt meghonosítani a mai gyakorlatban?

Feladatunk a formafelismerés módjának kidolgozása, azzal a céllal, hogy leírjuk a környező világot és modell formájában fogalmazzuk meg azt a robot megfelelő memóriájában. Ez a legfontosabb probléma a mesterséges intelligencia elemeinek megteremtésében.

A következő probléma az, hogy a robot az optimális megoldást állítsa elő. Továbbá, kell valamilyen kapcsolat az ember és a robot között. Ez speciális nyelv kidolgozását követeli meg abból a célból, hogy megvalósítható legyen az említett kapcsolat. Itt már bizonyos lingvisztikai problémák is előtérbe kerülnek.

És végül a mesterséges intelligencia előállításának egy további feladataként olyan adaptáló rendszereket kell építeni, amelyek a mesterséges intelligencia megfelelő rendszereivel alkalmazkodnak a környezet állapotához.

Ha ilyen robotokat fogunk építeni, a mesterséges intelligenciának akár csak részegységeivel is, akkor ezeket a robotok harmadik nemzedékének fogjuk nevezni.

Fel kell hívni a figyelmet arra, hogy a robotok harmadik nemzedéke elsősorban tudományos kutatásokra szolgáló tulajdonságokkal fog rendelkezni, amely kutatásokat különböző közegekben kell végezni, továbbá, hogy a robotok mechanikáját és a robotok vezérlésének elméletét nem lehet két különálló részre osztani. Ez egységes egész. Csak a mechanika és irányítástechnika szimbiózisában lehet valóban ésszerű és optimális rendszereket építeni. A technológiai folyamatokat végrehajtó mechanizmusok és a vezérlőrendszerek közötti kapcsolat folyamatos, és természetesen itt nagy szerepet kap a gépeket irányító elektronikus számítástechnika.

Azokból a vizsgálatokból, amelyeket szerző tanítványaival együtt végzett, kiderült, hogy ha az egész rendszer dinamikáját tekintjük, figyelembe kell vennünk a robotok egész mechanikájára ható vezérlő hajtások tehetetlenségét. A robotok végrehajtó szerveinek mechanizmusai és a vezérlés rendszerei szorosan és kölcsönösen összefüggnek és már nem is határolhatók el. Nagyon fontos az, hogy e feladatok megoldásában az optimalizálás problémájának különös jelentősége van. A robottechnikában igen fontos tudományos probléma az optimalizált vezérlés előállítása, az optimalizált vezérlési séma megteremtése a legkevesebb számú elemből, a legkevesebb számítógép, elem és blokk és a legpontosabban, legmegbízhatóbban működő elemek felhasználásával.

És végül kidolgozandók egész komplexumokat irányító rendszerek, vagyis nem különálló vezérlőrendszerek, hanem e rendszerek olyan csoportja, amely a különböző technológiai műveleteket végző robotoknak mintegy egész seregét irányítja.

Nagyon fontos az ember-operátor és a robot közötti kölcsönhatás kérdése. Minden vezérlőberendezés és minden elektronikus számítógép mellett feltétlenül szükség van az operátorra, minthogy néha olyan nehéz eseteket kell megoldani, amelyeket nem tartalmaz a program vagy a robot adaptációs rendszere, és ekkor kell az ember. Itt van a kapcsolat az emberi reakció és a gép által végrehajtott bizonyos művelet között, és az emberhez eljutó információknak igen nagy jelentőségük van. Ezekben az esetekben lehetséges autonóm és nem autonóm vezérlés, kézi és nem kézi vezérlés stb.

E problémákhoz tartozik természetesen a robotok távvezérlése különböző kísérleti feltételek között, különböző fizikai elvek alapján kidolgozott új elemek segítségével. Egészében ennyi a robot és az ember kölcsönhatásának problémája.

A robotok egyik családjához tartoznak az úgynevezett önjáró rendszerek, vagyis az állatok mozgását utánzó rendszerek. Ezeket rendszerint lépegető gépeknek nevezik, de nemcsak lépegetők lehetnek, hanem csúszó-mászó gépek, ugráló gépek, bármilyenek, amelyek az élő természetben meglevő valamilyen mozgást valósítanak meg. Úgy tűnt, hogy ezek a gépek a technikának csak szűk területén fognak elterjedni.

Most kiderült, hogy e kérdések iránt igen érdeklődik a mezőgazdaság abból a célból, hogy lejtős területeket műveljenek meg, az erdőgazdaság, hogy elszállítsa a fát a kitermelés helyéről és a népgazdaság más ágai. Ezek kerekeskaros rendszerek, lépegető mechanizmusok, vázszerkezetek, vagyis olyan rendszerek, amelyek hasonlóak az emberi csontvázhoz. Például a világűrben megfelelő pótlólagos energiaforrások mellett több mint tízszeresét képesek kifejteni az ember erejének.

A csúszó-mászó robotok kidolgozásán kitartóan fáradoznak a japánok, és már készen vannak az első fémből készült modellek.

Mik a robotok fejlesztésének és gyakorlati alkalmazásának távlatai?

Már most nagyon gondosan meg kell határozni a robotok racionális alkalmazási területeit. Nem szabad előállnia annak a helyzetnek, ami a számítógépekkel kapcsolatban alakult ki, amikor olyan esetekben alkalmazták azokat, amikor nélkülük is célt lehetett volna érni. Helyes műszaki eljárás kell a robotok ésszerű alkalmazási területének meghatározásához.

Meg kell vizsgálni és gondosan ki kell dolgozni azt a kérdést, hogy menynyiben függ a robotok alkalmazása a termelő folyamatok automatizálásának általános kérdésétől, vagyis a robotok alkalmazását szorosan össze kell kapcsolni mindennel, ami az automatikus termelő láncba tartozik.

Például a nagy sorozat- és tömeggyártásban, ahol automatikus termelősorok vannak, amelyek merev program szerint dolgoznak, előfordulhat, hogy nem is kell robotokat alkalmazni, használhatók 2—3 szabadságfokkal rendelkező egyszerű kezek is, amelyek teljesítik a kívánt műveleteket. A meglevő adatok szerint a Szovjetunióban 20—25%-ban található ilyen termelés. A többi sorozat- és kissorozat- gyártás. Itt merev programmal ellátott automata sorok vannak, amelyek már nem felelnek meg a korszerű termékszerkezetnek. Szükséges a géprendszerek átállíthatósága. És íme, a robotoknak itt igen széles körben kell alkalmazást nyerniük. A termelés minden ágának komplex automatizálása és gépesítése során meg kell vizsgálni a robotok alkalmazásának kérdését, nem szabad kifelejteni a mezőgazdaságot sem, ahol mint ismeretes, rendkívül sok kézi művelet van. Természetesen a speciális rendeltetésű — például a világűrben, az óceánok és a föld mélyén végzett — munkákban és kutatásokban magasabb intelligenciájú robot szükséges.

Nem feledhetünk el egy igen fontos kérdést, ez pedig a gazdaságosság kérdése. Még messze nem világos, hogy milyen esetekben adja a robot alkalmazása a kívánt gazdasági hatást. Például az, ami az atomipar kialakulásakor, 10—12 évvel ezelőtt gazdaságtalan volt, napjainkban magas fokon vált gazdaságossá.

Itt igen rugalmas gazdasági megközelítés szükséges, és minden attól függ, mik a feladatok, és hogy fogalmazzuk meg azokat. Ha például tovább folytatjuk a robotoknak az automatikus rendszerekbe való beépítését, akkor szükségessé válik a gyártási folyamatok technológiájának lényeges megváltoztatása.

Ha például rendelkezésükre áll egy esztergapad, rajta szegnyereg, és könyökös tengelyt kívánnak esztergálni, akkor meg kell fogni a könyökös tengelyt és el kell helyezni — nem akármilyen magasságban, hanem — mellmagasságban. A szegnyereg, a befogóberendezés, a késszán stb. az emberi kézzel végzett műveletek szempontjából kényelmes.

A robotnak viszont közömbös, hogy hová helyezi a könyökös tengelyt vagy más alkatrészt. Ahelyett, hogy azt az ember mellmagasságába emelné, lényegesen alacsonyabbra is helyezheti. Akkor minek a nagy gépállvány? Felesleges az a nagytömegű fém, amit a gépágyhoz felhasználtunk.

Ez az egyszerű példa megmutatja, hogy magának a technológiának kell megváltoznia az új és korszerű technika, a robotok bevezetésének mértékében. Ezért a robotoknak a korszerű termelésben játszott szerepük értékelésekor óvatosságra van szükség.

Elmondható, hogy külföldön több mint 200 ipari robotmodell létezik, amelyek konstrukciójukat tekintve igen különbözőek.

Nem teljes adatok szerint az USA-ban, Japánban és Nyugat-Európában ipari robotok fejlesztésével és gyártásával most 140 cég foglalkozik.

A Szovjetunióban az ipari robotok kidolgozása körülbelül a 70-es években kezdődött, mindazonáltal a napjainkig elkészült robotok és manipulátorok száma néhány tucatra tehető.

Végeredményben az ipari robotpark a világon 1975-ben ötezer darabból állt.

Most néhány szó az előrejelzésről.

Az előrejelzés igen fontos és nehéz dolog. Több érv van, amelyek szerint feltételezhető, hogy 1980-ig a robotpark harmincezer egységre szaporodik. Megjegyzendő, hogy a robotok bevezetésének nehézségeivel kapcsolatban külföldi szakemberek ma ezt a számot kissé szerényebben értékelik. Korábban ugyanis feltételezték, hogy az Egyesült Államokban a robotok száma 1975-ben ötvenezer egységet ér el. No ez természetesen nem ugyanaz a szám, lényegesen kevesebb.

Azt kell mondani, hogy az ilyen előrejelzések — amik minden nemzetközi fórumon és konferencián hallhatók — igen mobilisak, mindig változnak. Most igen gyorsan fejlődik a robottechnika, és igen nehéz jósolni.

Igen lényeges, hogy a robottechnika kérdéseinek vizsgálatához — a robottechnika tudományos problémáit figyelembe véve — a mechanika szakemberei, az irányítástechnikusok, a bimechanika tudósai, a fizikusok, vagyis a tudósok igen széles táborának együttműködésére van szükség.

A szocialista tábor országainak többségében folytatnak robottechnikával kapcsolatos kutatásokat. Itt az ideje, hogy koordináljuk ezt a munkát.

Az alapkutatások kérdéseit a szocialista országok tudományos akadémiáinak együttműködési szerződéseiben célszerű koordinálni. A műszaki, mérnöki problémákat pedig a megfelelő KGST és állami tudományos és műszaki bizottságok szerződéseinek keretein belül kell összefogni.

The Scientific Problems of Robot Technique. — In industry there occur many monotonous operations demanding great force and carried out under dangerous conditions. At the same time reliability and accuracy requirements increase, which man is unable to satisfy within his own biological limits. A new class of machines must be created, the robots. For their design one must study the movement of live beings and theirs system of movement control. As a result the technical science of the examination of spatial mechanisms with several degrees of freedom is revided. The robots must be equipped with the senses of touch, sight, hearing and with sensores for the electromagnetic field. Scientific problems are the creation of models, data processing, artificial intellingence, the questions of interaction between man and robot. The work done so far requires already the coordination of robot technique within COMECON.

Die wissenschaftlichen Probleme der Robottechnik. — In der Industrie gibt es viele eintönige, große Kraftanstrengung erfordernde, unter gefährlichen Umständen durchgeführte Operationen; gleichzeitig steigen die Anforderungen an Verläßlichkeit und Genauigkeit, denen der Mensch wegen seiner eigenen biologischen Schranken nicht imstande ist zu genügen. Eine neue Klasse von Maschinen muß geschaffen werden: die Robote. Zu ihrem Entwurf müssen die Bewegungen der Lebewesen und die Steuersysteme dieser Bewegungen studiert werden. Als Konsequenz lebt in unseren Tagen die technische Wissenschaft der Analyse von räumlichen Mechanismen wieder auf. Die Robote müssen mit den Sinnesorganen für Tasten, Sehen, Hören ausgestattet werden und mit der Fähigkeit, das elektromagnetische Feld wahrzunehmen. Wissenschaftliche Probleme sind auch die Fragen der Modellschaffung, der Datenverarbeitung, der künstlichen Intelligenz, der Wechselwirkung zwischen Mensch und Robot. Die geleistete Arbeit verlangt bereits eine Koordinierung der robottechnischen Forschungen im Rahmen des RGW.

ÚJ ELVEK ÉS MÓDSZEREK A GEOTECHNIKÁBAN*

KÉZDI ÁRPÁD**
AZ MTA RENDES TAGJA

Bevezetés

A „*geotechnika*" szó használata az építőmérnöki tudományok körében csak néhány esztendeje vált általánossá. Korábban talajmechanikáról, földművekről, alapozásról beszéltünk s beleértettük a talajfizikát is a talajmechanika fogalmába. E korábbi elnevezésekhez képest a geotechnika név, értelmezésem szerint, átfogóbb, általánosabb, mert magában foglalja az alkotó, az építő ember dinamikus, a természetet átalakító tevékenységét, s megadja azokat az ismereteket, melyek építményeinknek az altalajjal való kapcsolatát feltárják és annak gazdaságos és biztonságos kialakítását lehetővé teszik. Ebben az értelemben szeretnék a következőkben e tudományág mai fejlődési fokán jelentkező új elvek és módszerek közül néhányat ismertetni és példákon bemutatni.

A geotechnika területe azonban, mint minden tudományé, ma egyre jobban bővül és ágazódik. Ezért nem vállalkozhatom arra, hogy minden korszerű irányzatot sorra vegyek és értékeljek, még kevésbé arra, hogy mindezeket fejlődésükben mutassam be. Így egyrészt azokat szeretném megemlíteni, amelyek véleményem szerint a legfontosabbak közé tartoznak, másrészt pedig azokat, ahol saját eredményeimre hivatkozhatom.

Remélem, hogy az elvek és a módszerek vizsgálata a jövőben várható fejlődés irányának megvonásához is nyújt majd bizonyos lehetőséget.

Elvek és módszerek

Előadásomban tehát elvekről és módszerekről lesz szó. Az elvek vonatkozásában arra fogok törekedni, hogy olyan objektív alapelveket emeljek ki, melyek ma a tudományág minden művelőjének cselekvésére iránymutatók lehetnek.

Módszeren azt a többé-kevésbé tervszerű eljárást fogom érteni, mely egy

* 1977. március 9-én elhangzott székfoglaló előadás.
** Prof. Dr. Kézdi Árpád, 1012 Budapest, Logodi u. 9.

meghatározott cél elérésére szolgál, utat ad a célhoz, egy meghatározott módot a cselekvéshez. A tudományban a megismerés útja a módszer; a filozófia pedig megadja az eszközöket ahhoz a vizsgálathoz, hogy a választott módszer alkalmas-e a kitűzött cél elérésére, s hogy következetes-e a módszer használata. Ma már nem hisszük azt, hogy valaha is sikerülni fog egyetlenegy módszert találni, mely mindenütt alkalmazható volna, nincs „egyetemes" módszer, minden tárgy és minden kérdésfeltevés sajátos módszert kíván.

A módszer fontosságára a tudományos kutatásban először DESCARTES R. (1637) mutatott rá. Filozófiája, racionális rendszere mindmáig hat, az egész modern technika adósa lángelméjének. Ez a technika úgy jött létre, hogy DESCARTES az embert olyan helyzetbe hozta a természettel szemben, amelyből egyáltalán lehetővé vált az átfogó, természet fölötti uralom; DESCARTES tanította meg először az embert úgy gondolkozni, hogy meg tudta alkotni a technikát. Műve, a „*Discours de la méthode pour bien conduire la raison et chercher la vérité dans les sciences*", a tudományos gondolkozásnak biztos alapokat és szárnyakat adott.

Ha egy tudományban sikerült a sokféleséget egy egységes és jól tagolt egésszé összefogni, amelyben az egyes az egészhez és a többi részhez való viszonyában a neki megfelelő helyet foglalja el, akkor létrejön a rendszer, mely minden tudománynak fontos törekvése. Úgy érzem, a geotechnikában is jelentős mértékben előrehaladtunk a rendszer kialakításában. Rá kell azonban mutatnunk az ún. rendszerveszélyre is: ha egy kutató eleve egy rendszerre törekszik, akkor hajlik arra, hogy a valóságot konstruálja és stilizálja; ahelyett, hogy megragadná.

Azt hiszem, a talajmechanika, illetve a geotechnika eddig vallott elveinek és a történelmi fejlődés során kialakult és alkalmazott módszereinek áttekintésétől ezúttal eltekinthetek, annál is inkább, mert erre a közelmúltban többször is volt alkalmam. (L. például KÉZDI Á., 1975 és 1976a.) Nem térek ki a geotechnika helyes alkalmazásának feltételeire és az alkalmazás terén mutatkozó visszásságokra sem. A tárgyalás megkezdése előtt viszont még azt a kérdést szeretném felvetni, hogy egyrészt mi tette szükségessé új elvek és módszerek alkalmazását, másrészt pedig mi tette ugyanezt lehetségessé.

Az igény, mint köztudott, a rendkívüli módon megnövekedett feladatokból született. Az építési volumen megsokszorozódása, a méretek, az erők, a hatások növekedése hozta ezt magával; a gazdaságosság egyre fontosabbá válása pedig az építőanyagok és a talaj szilárdságának jobb kihasználását igényelte. Az új feladatok megoldásához pedig a korábbi módszerek sokszor nem bizonyultak kielégítőnek. Új módszerek kifejlesztésére az indítékot és a lehetőséget azután az adta meg, hogy a még oly bonyolult elméleti eljárások is hozzáférhetővé és felhasználhatóvá váltak a *számítógépek* megjelenése révén; a valóság jobb megismerésére pedig a *mérőműszerek* fejlődése adta meg a lehetőséget.

További fejlesztést tettek szükségessé azután a korábban ismeretlen új feladatok, mint például a Hold és a bolygók felszínét borító szemcsés anyagok — most már nem „geo"-technikai — vizsgálata, az óceánok fenekének hasznosítása, a hatalmas dinamikus erőket szenvedő talajtömegek viselkedésének kutatása stb.

Ezek tehát a mozgató rugók; ezek azután kölcsönhatásaikban egymást erősítették és megnyitották a további fejlődés útját; ezek birtokában lehetett — és kellett — az új elveket és módszereket kidolgozni.

Nézzük most már a következőkben, milyen elvek irányítják ma — vagy kellene, hogy irányítsák — a geotechnika elméletét és gyakorlatát.

Az egységes talajfizika elve

Első helyen említem meg az egységes talajfizikai szemlélet kialakítását. A talajfizika három alapkérdésének, a szemcsés közegek szilárdságának, alakváltozásának és az azokban lezajló fázismozgásoknak egységes elvek alapján való tárgyalása roppant nagy fejlődés lehetőségét rejti magában. A szemcsés közeg mint az anyagnak egyik lehetséges halmazállapota, jellegzetes törvényszerűségekkel leírható, melyek sok esetben közel vannak a folyadékok viselkedését leíró törvényekhez. Ha ezen a területen eredményeket érünk el — és ilyen eredmények már felmutathatók —, akkor ki fogjuk tudni küszöbölni eljárásainkból azokat a vizsgálatokat, melyek önkényesen, sokszor nagyon is erőltetett módon határoznak meg olyan mutató számokat, melyeknek a talaj tényleges viselkedésével való kapcsolatát — több áttételen keresztül — csak a tapasztalat adja meg.

Az egységes talajfizikai szemléletre vonatkozóan most csak néhány példát szeretnék bemutatni, hiszen ebben a témakörben legutóbb egy könyvet adtam közre (KÉZDI, Á., 1976b) s az „új talajfizika" néhány kérdését talajmechanikai kézikönyvem első kötetében is bemutattam. (KÉZDI Á., 1974.)

Az első példa homokok megfolyósodásával kapcsolatos.

Ha egy tömör állapotú, szemcsés közegből indulunk ki, mely a közeg szilárd halmazállapotának felel meg, akkor nyírófeszültségek hatására, ha erre mód van, térfogatnövekedés jön létre. Ez a folyamat tehát azt jelenti, hogy a szemcsék vándorolnak, a halmazban „lyukak" jönnek létre, ezek helye azonban állandóan változik. A közegben fluktuáció lép fel, ami a tömörség helyi változásait hozza létre. Ezért a halmaz korábbi homogenitása megszűnik, heterofázisos fluktuáció jelentkezik s a halmazban, mely korábban szilárd test tulajdonságokkal rendelkezett, egy új — folyékony — fázis alakul ki. A folyamatot, mint ismeretes, a semleges feszültségek változása is kíséri, s ezzel együtt a hatékony feszültségek is változnak.

Ez a lyukképződés, ez a heterofázisos fluktuálás azonban csak viszonylag kis zónára terjed ki a folyamat kezdetén. A szomszédos részecskék közötti távolságok a kezdeti megfolyósodás zónáján kívül változatlanok maradnak, a zónán belül azonban jelentősen megnövekednek, itt lyukak képződnek, melyek szabadon mozognak, a részecskék szabályos elrendeződése megszűnik. Ha a halmaz nagy hidrosztatikus feszültségek alatt áll, vagy eleve nagyon tömör, akkor ez az állapot nem képes létrejönni.

A fentiekkel a folyadékok viselkedésének egyik törvényét alkalmaztuk ismét a talajokra. A folyadékanalógia alapján annak mennyiségi megfogalmazást is adhatunk. Egy V térfogatú, telített szemcsehalmazban a szilárd szemcsék által elfoglalt térfogat legyen V_0 (ez a van der Waals-egyenlet b állandójának felel meg). A szabad térfogat $V - V_0$. Lyukak képződéséhez a megfolyósodási zónában egy bizonyos minimális E energiára van szükség. Ha a lyukat úgy tekintjük, mint a szemcsehalmazban mindenképpen jelenlevő hézagok nagyságában bekövetkező fluktuációt és feltesszük, hogy egy gömb alakú hézag minimális sugara r_0, akkor a járulékos aktivációs energia értéke $E = 4\pi r_0^2 T_s$, ahol T_s a felületi feszültség. Ekkor az előbb említett szabad térfogat értéke:

$$V - V_0 = Ne^{-E/kT} \Delta v . \tag{1}$$

Itt N a lyukak száma, Δv pedig az üreg legkisebb térfogata (ez az érték a felületi feszültség segítségével kiszámítható). Ha a folyadékot most már p feszültség hatásának tesszük ki, akkor az E aktivációs energia értéke

$$E = E_0 + p\Delta v . \tag{2}$$

Így tehát a halmaz állapotegyenlete:

$$V = V_0 [1 + n\Delta v e^{-(E_0 + p\Delta v)/kT}], \tag{3}$$

ahol $n = N/V$, a szemcsék száma az egységnyi térfogatban, $p = 0$ esetén. Az összenyomhatóságot a

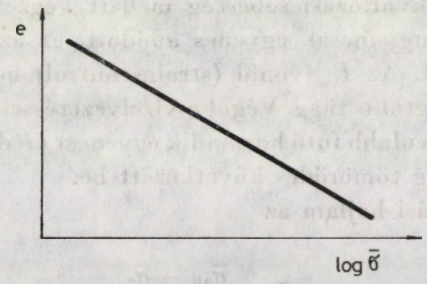
$$\varkappa = -\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \tag{4}$$

egyenlet adja meg. Ha az összenyomódás nem tud bekövetkezni, akkor a p feszültség mint semleges feszültség megnövekszik és ez megszünteti a halmaz nyírószilárdságát; a megfolyósodás bekövetkezik.

Ha most már a fenti összefüggésből egy $\Delta V = V_1 - V_2$ felvett térfogatcsökkenéshez és egy kezdeti n-értékhez (mely a fentiek szerint, adott szemcsenagyság mellett a tömörséggel nő) kiszámítjuk a szükséges feszültségnövekményt, akkor, ha a térfogatváltozás nem tud bekövetkezni, és csak tömörö-

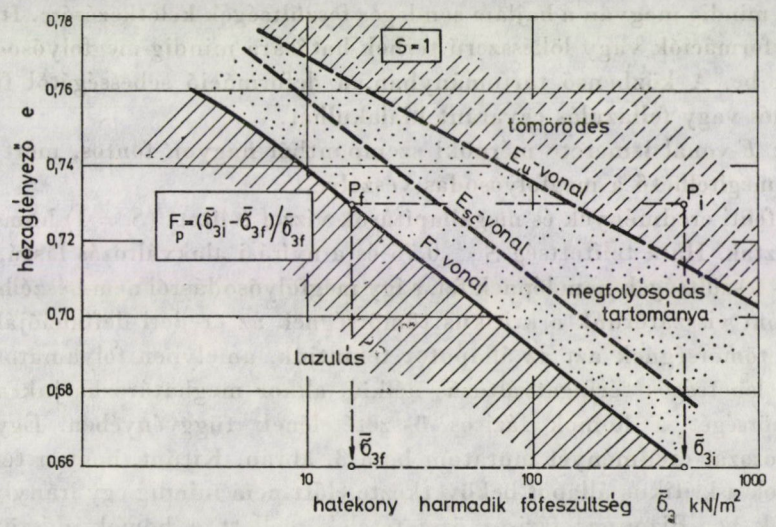
dési tendencia van, a létrejövő semleges feszültség és a hatékony feszültség csökkenése kiszámítható. Minél kisebb a kezdeti tömörség, annál nagyobb lenne egy adott feszültségnövekmény mellett a tömörödés, tehát annál nagyobb lesz a kialakuló semleges feszültség. Ez pedig azt vonja maga után, hogy annál kisebb lesz az a hatékony feszültség, amely mellett a megfolyósodás be tud következni.

A (3) összefüggést ábrázolva, a tömörségre a hézagtényezőt használva, a hatékony feszültséggel való összefüggésre az 1. ábrán feltüntetett vonalat kapjuk.



1. ábra. Összefüggés a folyás állapotában a hatékony feszültség és a hézagtényező között

Összehasonlítva a kapott eredményt CASTRO, G. (1969, 1975) adataival, ki CASAGRANDE, A. professzor irányításával számos triaxiális kísérlettel vizsgálta a megfolyósodás bekövetkeztét, azt találjuk, hogy a törvényszerűség jellege ugyanaz (2. ábra). A triaxiális kísérleteket részben konszolidált — nem



2. ábra. A térfogatváltozások tartományainak határolása; Casagrande-féle megfolyósodási vonalak (*F*-vonal)

drénezett, részben konszolidálatlan — nem drénezett állapotban hajtotta végre. A kísérletek feldolgozása során a hézagtényezőt és a relatív tömörséget a hatékony harmadik főfeszültség törési állapothoz tartozó értéke logaritmusának függvényében ábrázolta. Kitűnt, hogy a mért értékek a kísérlet végrehajtásától függetlenül egyenes vonalon helyezkednek el. Ez az ún. F-vonal (folyási vonal, 2. ábra), mely megadja a kritikus tömörség értékeit. Ebben az állapotban kialakul a folyási szerkezet és létrejön a megfolyósodás. Ha egy földtömeg állapotát ebben a koordináta-rendszerben egy, az F-vonal alá eső pont ábrázolja, akkor megfolyósodás nem lép fel.

Az állandó alakváltozási sebesség mellett végzett kísérleteket hasonló módon feldolgozva, ugyancsak egyenes adódott, ez az egyenes valamivel az F-vonal fölött halad. Az E_{sc} vonal (strain-control) helyzete az alkalmazott alakváltozási sebességtől is függ. Végül a vízelvezetéssel végzett kísérletek egy, az F-vonaltól még távolabb futó harmadik egyenest eredményezték; az e fölötti tartományban mindig tömörödés következett be.

A megfolyósodási hajlam az

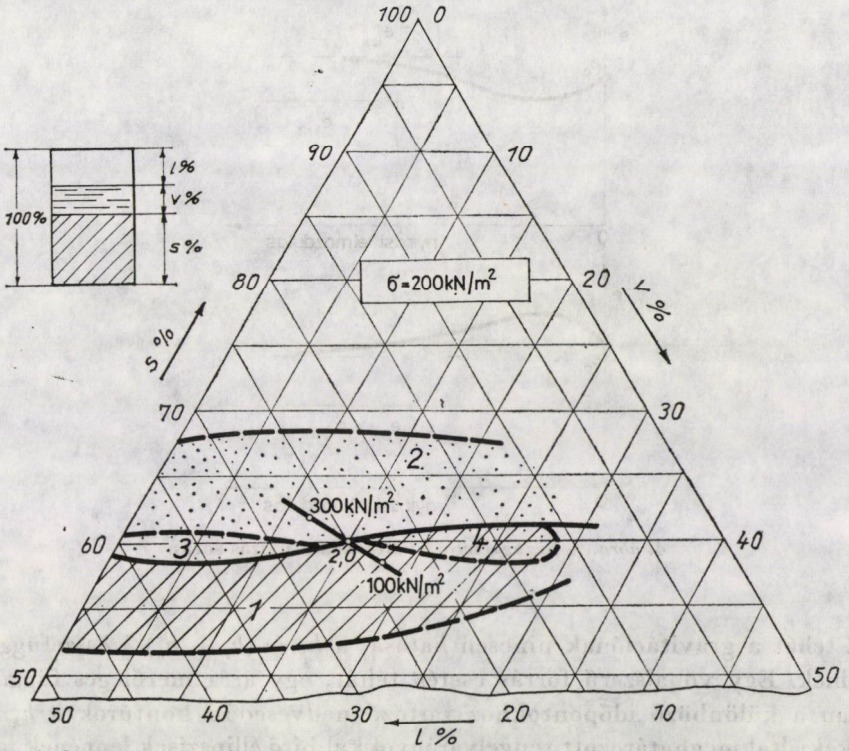
$$L = \frac{\bar{\sigma}_{3k} - \bar{\sigma}_{3f}}{\bar{\sigma}_{3f}} \tag{5}$$

viszonyszámmal jellemezhető, ahol $\bar{\sigma}_{3k}$ a harmadik hatékony főfeszültség kezdeti értéke, $\bar{\sigma}_{3f}$ pedig ugyanannak a folyáshoz tartozó értéke.

Az F-vonalon levő pontokban $L = 0$; a vonal alatti pontokban L negatív. Ez a tartomány a fellazulás tartománya, itt megfolyósodás nem lép fel. Az E vonal felett, mint említettem, tömörödés jelentkezik, illetve, zárt rendszerben, mindig megvan a hajlam semleges feszültségek keletkezésére. Itt tehát gyors deformációk vagy lökésszerű terhek hatására mindig megfolyósodás következik be. A közbenső tartományban, a deformáció sebességétől függően tömörödés vagy fellazulás egyaránt kialakulhat.

Az F-vonal ismerete mérnöki szempontból nagyon fontos, mert ennek alapján megítélhető a megfolyósodás veszélye.

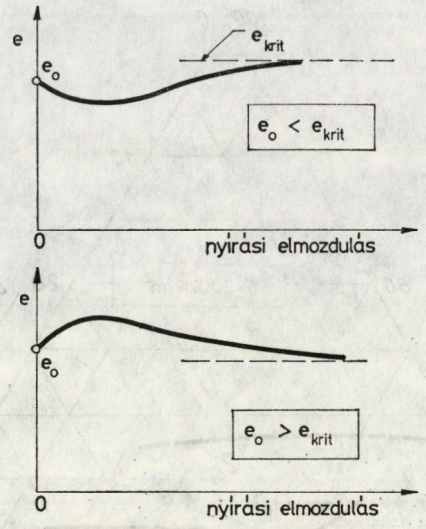
A fenti eredmények és megállapítások vízzel telített ($S = 1$) homokokra vonatkoztak. Ha a telítettség $S < 0{,}75$ és a nyírási alakváltozás lassú, akkor semleges feszültségek nem lépnek fel, s így megfolyósodásról nem beszélhetünk. Ha viszont visszatérünk a kritikus tömörségnek az eredeti definíciójához, és kritikus tömörségnek azt az állapotot tekintjük, amelyben folyamatos alakváltozás lehetséges térfogatváltozás nélkül, akkor meghatározhatjuk a kritikus tömörségét a homok fázisos összetételének függvényében. Egy ilyen kísérletsorozat eredményét mutatom be a 3. ábrán. Kitűnt, hogy a térfogatváltozások a kritikus állapot bekövetkezte előtt nem mindig egy irányban következnek be. Bizonyos fázisos összetételek mellett a homok először kissé tömörödik, majd a kritikus állapot eléréséig fellazul. Más esetekben a kezdeti



3. ábra. A fázisos összetétel változásainak tartományai egy finom homok nyírása esetén, a kiindulási állapot függvényében. *1* — tömörödés; *2* — fellazulás; *3* — lazulás után tömörödés; *4* — tömörödés után fellazulás

térfogatváltozás fellazulás, amit tömörödés követ. Két példát a hézagtényező változására a 4. ábra mutat be; a 3. ábra háromszögdiagramja egy finom homok fázisos összetételének azokat a tartományait határolja le, amelyekben a változás jellege azonos.

A *következő példa* a talajban való vízmozgás egy egyszerű esetére vonatkozik. Kísérleti úton meghatározható az, hogy egy függőleges talajoszlopban az idő függvényében milyen magasságra emelkedik fel a víz és milyen lesz a telítettség értéke az idő és a szabad vízfelszín feletti magasság függvényében. A talajmechanikában, de sok más területen is fontos gyakorlati kérdés ez. Egy iszapra vonatkozó saját kísérleti eredményt az 5. ábra mutat be. Itt feltüntettem a fázisos összetételnek a változását, a „felületi forrás" fölötti magasság függvényében, a mozgás megindulása utáni különböző időtartamok elteltével. A kapilláris emelkedés és a függőleges irányú beszivárgás között a különbséget első pillanatra csak a nehézségi erő 180°-kal eltérő iránya okozná, s így, mérve a t időponthoz tartozó h_i infiltrációs mélységet, s az ugyanahhoz az időponthoz tartozó h_k kapilláris emelkedést, a vízszintes szivárgási hossz,



4. ábra. A hézagtényező változása a nyírás során

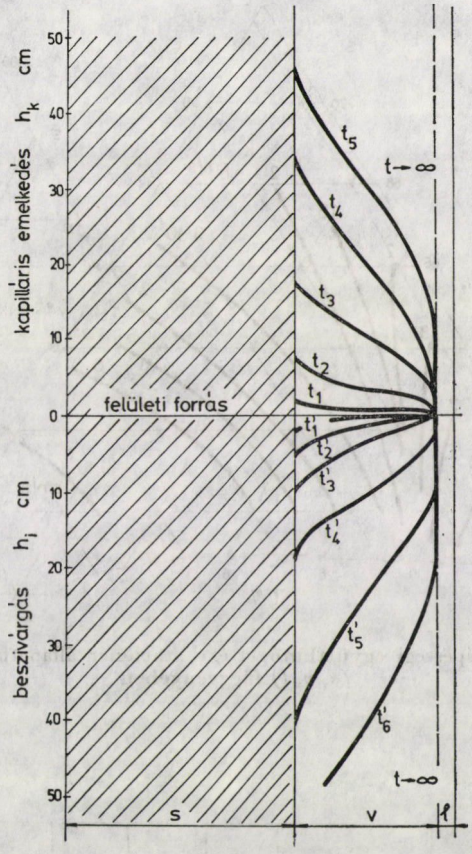
ahol tehát a gravitációnak nincsen hatása, a $h_x = (h_i + h_k)/2$ összefüggésből adódnék. Egy vonalszerű forrás esetén tehát, egy arra merőleges függőleges síkban a különböző időpontokhoz tartozó nedvesedési kontúrok a h_k és h_i értékek által meghatározott tengelyarányokkal bíró ellipszisek lennének, amint azt a 6. ábra mutatja.

A kísérletek azonban rámutattak arra, hogy ez nincsen így: a tengelyarányok másképpen alakultak. Ennek az az oka, hogy az áteresztőképességi együttható nem állandó, hanem a telítettség függvénye; a telítettségi profil pedig a vízmozgás irányának a függvénye. A 7. ábra bemutatja egy közepes homok áteresztőképességi együtthatójának változását háromszögdiagramban, a fázisos összetétel függvényében. Ha a telítettség egy kritikus értéknél nagyobb, akkor a homok kvázi-telítetten viselkedik. A kritikus állapotban értéke minimum, ha a víztartalom ez alá csökken, értéke újból nő. Ezt a törvényszerűséget szemléletesen mutatja a 8. ábra, ahol az áteresztőképességi együttható értékét a megváltozott telítettség függvényében ábrázoltuk, a hézagtényezőt használva paraméterként.

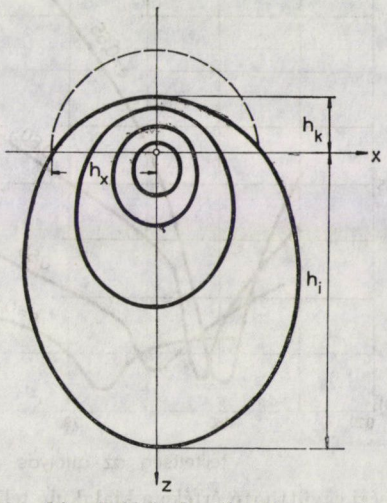
Visszatérve az alapvető problémához, a beszivárgás és a kapilláris emelkedés együttes jellemzésére a

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial S}\left[\frac{D}{\partial z/\partial S}\right] = \frac{\partial k}{\partial S} \tag{6}$$

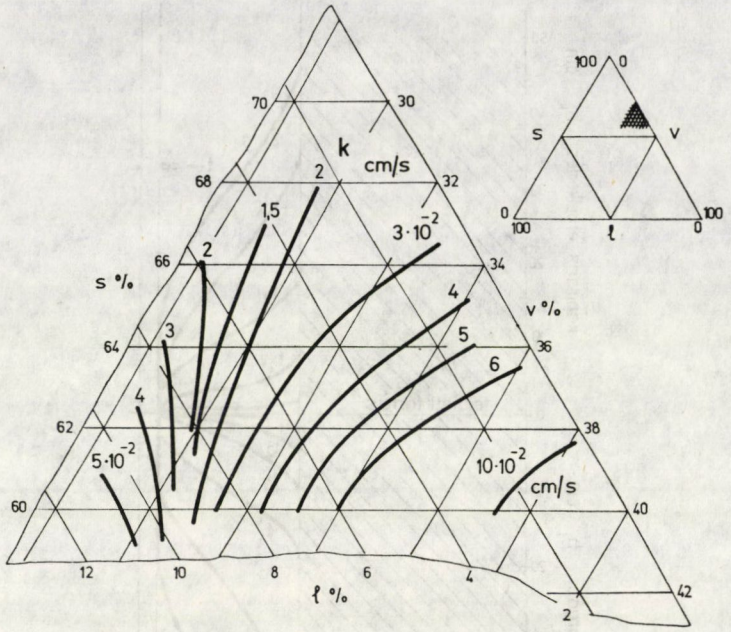
differenciálegyenlet használható. Az egyenletben z a mélységet jelenti, itt a vízmozgás kezdetétől számított t idő elteltével a telítettség értéke S; k az



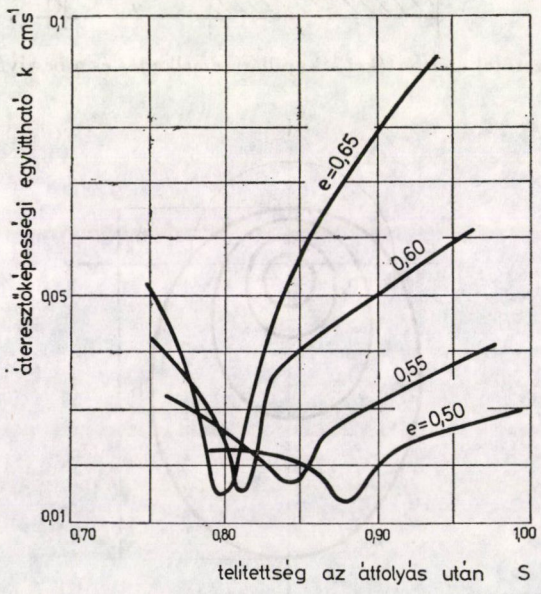
5. ábra. A fázisos összetétel mért értékei a kapilláris emelkedés és a beszivárgás tartományában



6. ábra. A nedvesített tartomány kiterjedésének változása vízszintes vonalszerű forrás esetén

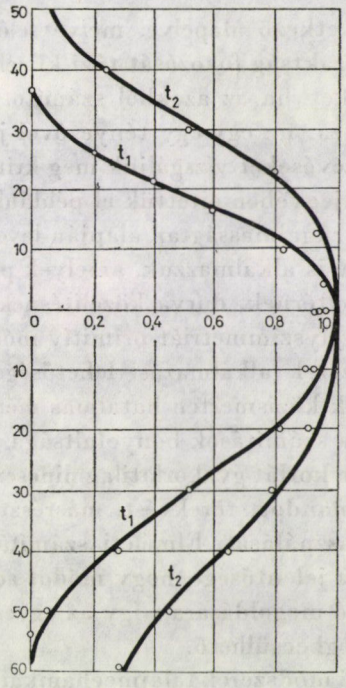


7. ábra. Az áteresztőképességi együttható értéke stacionér állapotban, a fázisos összetétel *(s, v, l)* függvényében



8. ábra. Az áteresztőképességi együttható értéke a kialakuló telítettség függvényében, állandó értékű hézagtényező mellett

áteresztőképességi együttható, D pedig a diffúziós együttható. Ha $t = 0$ és $z > 0$, $S = 0$; és $t \geq 0$, $z = 0$ esetén $S = 1$. Iterációs eljárással az egyenlet megoldható; erre egy példát a 9. ábra mutat, feltüntetve két adott időponthoz a kapilláris emelkedés és a beszivárgás telítettségi profilját. A megadott pontok a mért értékeket adják; a számított értékekkel jól egyező eredmények adódtak.



9. ábra. A kapilláris emelkedés és a beszivárgás telítettségi profilja; számított és mért értékek

Utolsó példaként a talajfizikai kutatás eredményeinek egyik gyakorlati alkalmazását mutatom be. Az átmeneti talajok szilárdságának kutatása kimutatta, hogy az ilyen talajok egyirányú nyomószilárdsága a

$$\log \sigma_{ny} = As + Bv + C \tag{7}$$

összefüggéssel jól leírható. Hasonló összefüggést mutatott ki legutóbb HUBÁČEK (1977) az alakváltozási jellemzők (alakváltozási és rugalmassági modulus) és a fázisos összetétel között. Megadható természetesen a kohézió és súrlódási tényező is a fázisos összetétel függvényében. Ilyen összefüggések alapján meghatározható egy adott rézsű, illetve egy adott alaptest esetén annak töréssel

szembeni biztonsági tényezője a fázisos összetétel függvényében. Homogén anyagú, de heterogén állapotú altalaj esetén egy ilyen diagram elkészítése kitűnő segédeszköz a teherbírásról való tájékozódáshoz (10. ábra).

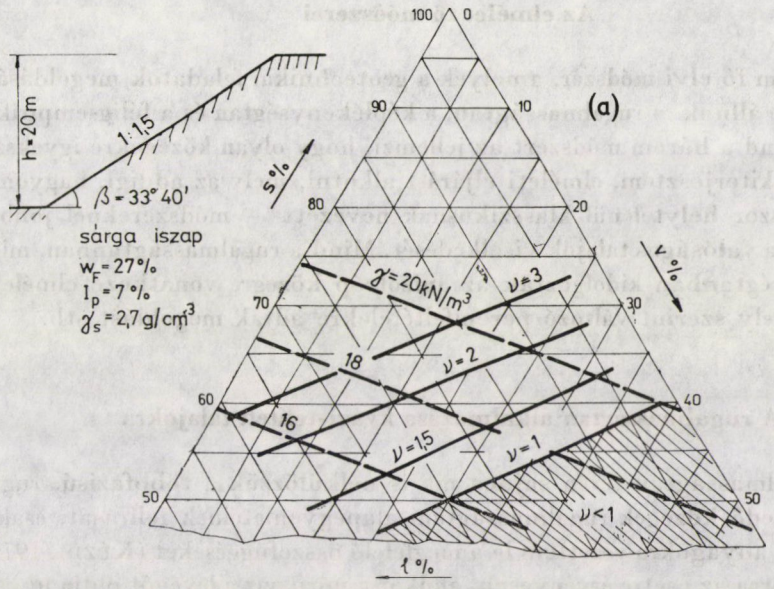
Az elméleti egzaktság fokozása

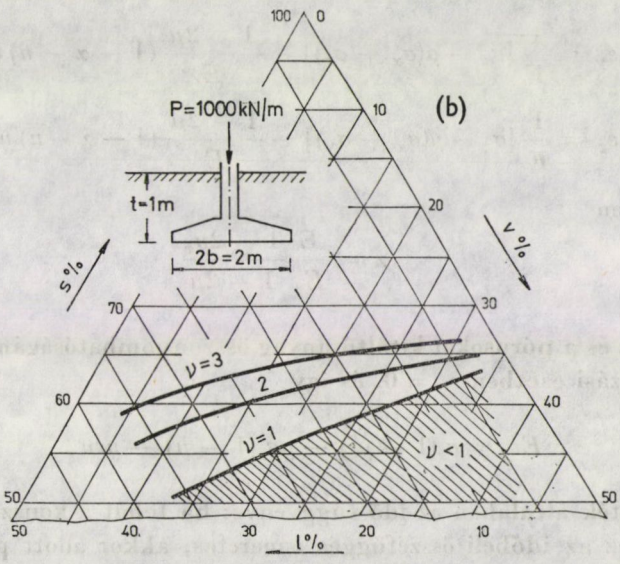
A geotechnika következő alapelve, melyet előadásomban hangsúlyozni szeretnék, az elméleti egzaktság fokozását tűzi ki célul és arra törekszik, hogy az elméleti összefüggéseket, ha az azokból számított eredmények a valóságot nem híven tükrözik vissza, ne egy-egy tényezővel javítgassuk és igazítsuk a valósághoz, hanem a feltevéseket vizsgáljuk meg kritikusan és azokat javítsuk meg. Ennek az elvnek a jegyében ejtettük el például a cölöpverési képleteket, kifogásoljuk azt, hogy a rugalmasságtan alapján levezetett feszültségszámítási képleteket olyan esetekre is alkalmazzuk, amelyek peremfeltételei a levezetésben alapul vett esettől eltérnek, durva közelítésnek tekintjük a Dupuit-féle kútképletet, mely a tengelyszimmetriát primitív módon veszi figyelembe stb.

Az elméleti módszerek alkalmazási lehetőségeit a korszerű numerikus eljárások, a számítógépek közismerten hatalmas mértékben megnövelték. Míg korábban a képletek és a számítások bonyolultsága valójában gátat szabott a felhasználásnak, ma ilyen korlát gyakorlatilag nincsen. Ez egyrészt alátámasztja és igazolja az előbb mondott törekvést, másrészt szinte kötelezővé teszi a korszerű elméletek felhasználását. Elméleti számításokban a számítógépnek, véleményem szerint, az a jelentősége, hogy módot ad bonyolult feladatok változó paraméterekkel való megoldására s így az egyes paraméterek relatív szerepe és fontossága jól megbecsülhető.

A modern számítási módszerek talajmechanikai alkalmazásához az utóbbi években igen nagy reményeket fűztek. Hamarosan be kellett látni azonban, hogy a talajmechanikai problémáknak még oly pontos számítási eljárásokkal való, tisztán formális kezelése valójában alig jelent előrehaladást. Az elmélet korlátolt alkalmazhatóságának oka azonban nem az elmélet hiányában van, hanem a talajok komplex viselkedésében, amelyet sok esetben ma sem tudunk teljesen áttekinteni. Számítási eljárásaink, mint az már régóta ismeretes, a talaj viselkedéséhez képest részben túl érzéketlenek, részben pedig túl érzékenyek. Ebből már következik az, hogy az elméleti analízis eredményeit nem mint végső igazságokat kell tekinteni, hanem egy eszköznek, mely az építmény várható viselkedésének megítélését segíti. Azt is be kell látnunk, hogy minden számítási eljárás egy bizonyos határon túl elveszti érvényét. E határokat rögzíteni és a talajoknak a határ túllépése esetén megváltozott viselkedésére magyarázatot adni — ez a geotechnika egyik legfontosabb feladata.

A következőkben nézzünk egy-két példát az elméleti eljárások geotechnikai alkalmazására.





10. ábra. Háromszögdiagramok a biztonsági tényező meghatározására iszapban. *a* — egy 20 m magas, 1 : 1,5 hajlású rézsű biztonsági tényezője a fázisos összetétel függvényében; *b* — sávalap biztonsági tényezője. (Talajnem: sárga iszap, $w_f = 27\%$, $I_p = 7\%$, $\gamma_s = 2{,}7$ p/cm³)

Az elmélet fő módszerei

A három fő elvi módszer, amelyek a geotechnikai feladatok megoldására rendelkezésre állnak, a rugalmasságtan, a képlékenységtan és a félig-empirikus eljárások. Mind a három módszert az jellemzi, hogy olyan közegekre igyekszik az elméletet kiterjeszteni, elméleti eljárást alkotni, mely az addigi, hagyományos — sokszor helytelenül klasszikusnak nevezett — módszereknél jobban közelíti meg a valóságos talajok viselkedését. Mind a rugalmasságtanban, mind a képlékenységtanban kidolgozták az anizotróp közegre vonatkozó elméleteket, idő és hely szerint változó peremfeltételekre adtak megoldást stb.

A rugalmasságtan alkalmazása kvázi-telített talajokra

A rugalmasságtan terén sajnos ma is nélkülözzük a többfázisú, rugalmasan viselkedő közegek rugalmasságtani alapegyenleteinek felírását, csak a kvázi-telített anyagokra vezettem le a megfelelő összefüggéseket (KÉZDI, 1970), ezek is csak arra az esetre érvényesek, amikor a pórusvíz a levegőt oldja ugyan, de az oldott levegő mennyisége a nyomástól függetlenül állandó. E levezetés szerint a teljes fajlagos alakváltozások a teljes feszültségek komponenseinek függvényében a következő összefüggésekből számíthatók:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] - \frac{1-2\mu}{E}(1-\alpha-n)\,u \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] - \frac{1-2\mu}{E}(1-\alpha-n)\,u \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] - \frac{1-2\mu}{E}(1-\alpha-n)\,u .
\end{aligned} \tag{8}$$

Az egyenletben

$$\alpha = \frac{E}{E_v}\frac{1-2\mu_v}{1-2\mu} \tag{9}$$

a porózus váz és a pórusokat kitöltő anyag összenyomhatóságának a viszonya. Sík alakváltozási esetben $\varepsilon_y = 0$, és így

$$E\varepsilon_z = \sigma_z(1-\mu^2) - \mu\sigma_x(1-\mu) - \mu c u\,. \tag{10}$$

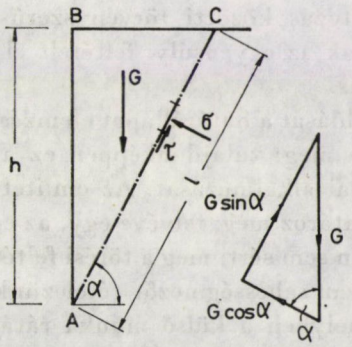
Az u érték általában az idő függvénye; ha tehát a konszolidáció törvénye, vagyis ez az időbeli összefüggés ismeretes, akkor adott peremfeltételek esetén meghatározható pl. egy alaptest süllyedésének időbeli lefolyása egy, az eddiginél elfogadhatóbb elméleti alapon.

Ismerünk továbbá a rugalmasságtan terén exakt megoldásokat, melyek a mélységgel növekvő rugalmassági modulust vagy vízszintes és függőleges irányban eltérő értékű E modulust tételeznek fel. Áttekintve ezeket, megállapítható, hogy nem túl erős anizotrópia esetén a számított feszültségekre az anizotrópia csak elhanyagolható mértékben hat ki, a süllyedésekre ellenben nagy a hatás.

A képlékenységtan alkalmazása

Térjünk át a képlékenységtan alkalmazására, mely a geotechnika elméleti vizsgálataiban hosszú múltra tekinthet vissza, hisz már a Coulomb-féle földnyomáselmélet is a képlékeny törés Coulomb-féle feltételén alapult. Az elmélet azóta is állandóan fejlődött; elegendő itt csak néhány nevet megemlíteni: PRANDTL, CAQUOT, SOKOLOVSKI, JÁKY neve ma is sokat szerepel a használatos elméletek megjelöléseként. A legutóbbi húsz-huszonöt évben azonban a fejlődés jelentősen meggyorsult, az elmélet hallatlanul kibővült s az alkalmazás lehetőségei megnőttek. Természetesen nem vállalkozhatom arra, hogy a teljes színképet bemutassam, ez nem is lehet feladatom. Csak rámutatok arra a nagy fejlődésre, amit az ötvenes években DRUCKER és PRAGER működése jelentett a határ-teorémák terén, a rendszerstabilitás kérdésében és a normalitás fogalmában; ezek a felfedezések teremtették meg a képlékenységtan szigorú elméletének alapjait. A következőkben mindössze egy példát szeretnék bemutatni a határállapot elemzésének módszerére, elsősorban azért, mert ez az elemzési módszer hazánkban a geotechnika terén még nincs elterjedve, másrészt azért, mert legutóbb sikerült a módszert egy új alkalmazási lehetőséggel gazdagítani.

A bemutatott példa rézsűk állékonyságának vizsgálata lesz, az új alkalmazás pedig a mélységgel növekvő kohézió esete. Ismeretes (11. ábra), hogy a határegyensúlyi módszer szerint, a függőleges földfal állékonysági vizsgálata sík csúszólap felvétele esetén, ha húzási repedések kialakulását nem tételez-



11. ábra. Függőleges földfal határegyensúlya

zük fel, a következőképpen alakul. Legyen a csúszólap hajlásszöge α, a törési feltétel $\tau = \bar{\sigma} \tan \Phi + c$. σ és τ eloszlását a csúszólapon nem ismerjük, csak annyit írhatunk fel, hogy az l hosszúságú felületen

$$\int \tau \, dl = \int \sigma \tan \Phi \, dl + \int c \, dl = \tan \Phi \int \sigma \, dl + cl .$$

Ha egyensúly van,

$$\int \sigma \, dl = G \sin \alpha ; \quad \int \tau \, dl = G \cos \alpha .$$

Behelyettesítve

$$G \cos \alpha = c \frac{h}{\cos \alpha} + G \sin \alpha \tan \Phi$$

és

$$G = \frac{h^2 \gamma}{2} \cot \alpha .$$

Ha megkeressük α-nak azt az értékét, mely h-ra minimumot ad, akkor

$$\alpha_{kr} = 45° + \frac{\Phi}{2}$$

és

$$h_{kr} = \frac{4c}{\gamma} \tan \left(45° + \frac{\Phi}{2}\right) . \tag{11}$$

Logaritmikus spirális csúszólapot feltételezve, FELLENIUS szerint a módszer, mint ismeretes,

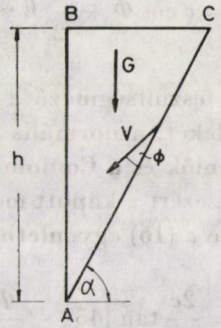
$$h_{kr} = \frac{3{,}85 \, c}{\gamma} \tan \left(45° + \frac{\Phi}{2}\right) \tag{12}$$

eredményre vezet.

A vizsgálatban a Coulomb-féle törési feltétel kielégítését csak a felvett csúszólapon kötöttük ki. Nem tudjuk, hogy mi a helyzet a többi pontban. Egy megoldás azonban csak akkor fogadható el, ha az egyensúly, az összeférhetőség és a feszültség-alakváltozás közötti törvényszerűségek egyaránt ki vannak elégítve. Itt viszont csak az egyensúlyi feltételt elégítettük ki, ez tehát csak egy lehetséges megoldás.

A probléma megoldását a határállapot elemzése alapján először DRUCKER és PRAGER (1952) adta meg; tulajdonképpen ez a tanulmány indította el a módszer talajmechanikai alkalmazását. Az említett megoldás a határmagasságra egy alsó határt határoz meg, felvéve egy, az egyensúlyt kielégítő feszültségmezőt és egy pontban sem sérti meg a törési feltételt. A felső határ úgy kapható meg, hogy egy olyan sebességmezőt tételezünk fel, amelyik a folyási feltétellel összefér, és amelyben a külső munka rátája egyenlő vagy nagyobb a belső energia felemésztődésének rátájával.

Tételezzük fel a törési mechanizmust — a sebességmezőt — a 12. ábra szerint. Az ABC földék sík csúszólapon mozog lefelé az α hajlású csúszólapon. Ha $\Phi > 0$, akkor az eredő sebesség a csúszólappal Φ szöget zár be és az ék egy $v \sin \Phi$ sebességgel távolodik a diszkontinuitási felületként szereplő csúszólaptól. Mint azt egy 1953-ban tartott akadémiai előadásomban a Mises-féle folyási potenciál alapján bemutattam, $\Phi > 0$ esetén a plasztikus deformációt térfogat-növekedésnek, dilatációnak kell kísérnie.



12. ábra. A határállapot analízise

A külső erők munkavégzésének rátáját — az időegység alatt végzett munkát — megkapjuk, ha a sebesség függőleges komponensét megszorozzuk a földék súlyával; a felemésztett energia a csúszólapon pedig úgy adódik, ha a $h/\sin \alpha$ nagyságú felületet megszorozzuk c-vel és a felületen érvényesülő sebesség-komponenssel. A két munkavégzési rátát egyenlítve:

$$\frac{1}{2} h^2 \gamma \cot \alpha \, v \sin (\alpha - \Phi) = \frac{ch}{\sin \alpha} v \cos \alpha . \tag{13}$$

A fenti egyenletből

$$h = \frac{2c}{\gamma} \frac{\cos \Phi}{\cos \alpha \sin (\alpha - \Phi)} . \tag{14}$$

Szélső értéket keresve $\alpha_{kr} = 45° + \Phi/2$ adódik és

$$h_{kr} = \frac{4c}{\gamma} \tan \left(45° + \frac{\Phi}{2}\right). \tag{15}$$

A kapott érték ismét megegyezik a Coulomb—Rankine-elméletből adódóval, vagyis ez a közismert megoldás egy felső határ. Alsó határ úgy kapható, hogy egy egyszerű, diszkontinuus feszültségmezőt szerkesztünk, amely nem sérti meg a törési feltételt. A lehető legegyszerűbb feszültségeloszlás egyensúly

esetén a 13. ábra szerint vehető fel (*a* ábrarész): az I. és II. zónák között egy vízszintes, a II. és a III. zónák között egy függőleges síkon van diszkontinuitás. Az I. zónában egyirányú nyomás, a II. zónában kétirányú nyomás, a III. zónában pedig a hidrosztatikus nyomás feszültségállapota uralkodik. A *b* jelű ábrarész a megfelelő Mohr-köröket ábrázolja. A Coulomb-féle törési feltétel teljesül, ha az I. zónához tartozó Mohr-kör érinti a Coulomb-egyenest, vagyis

$$\frac{1}{2} h\gamma = c \cos \Phi + \frac{1}{2} h \gamma \sin \Phi . \tag{16}$$

A felvett diszkontinuus feszültségmező a talajtömeg minden pontjában kielégíti az egyensúlyi feltételeket, a normális és a nyírófeszültségek minden szabad felületen zérussal egyenlők és a Coulomb-féle törési feltételt a feszültségállapot sehol sem sérti meg, ezért a kapott megoldás feltétlenül egy alsó határt eredményez. Ennek értéke a (16) egyenletből

$$h''_{kr} = \frac{2c}{\gamma} \tan \left(45° + \frac{\Phi}{2}\right). \tag{17}$$

Ismeretes, hogy a függőleges földfal határmagassága TERZAGHI szerint (TERZAGHI, 1943) a határegyensúly-elmélet szerint

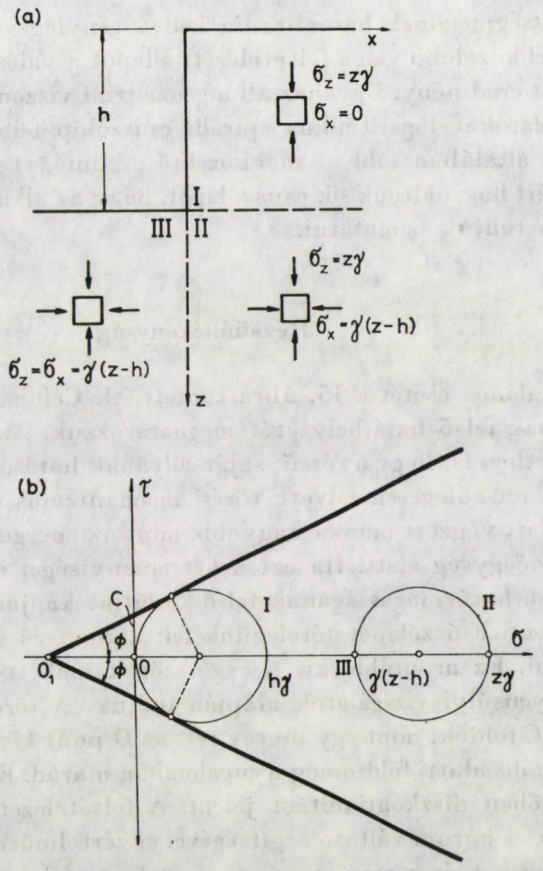
$$h'_{kr} = \frac{2{,}67c}{\gamma} \tan \left(45° + \frac{\Phi}{2}\right), \tag{18}$$

akkor, ha feltételezzük, hogy a talajtömegben a magasság feléig leérő húzási repedések keletkezhetnek. Ha ilyen repedések a teljes magasságig létrejöhetnek — s ez a feltételezett feszültségmezővel összefér —, akkor a határegyensúly-elmélet szerinti kritikus magasság megegyezik a (17) értékkel, amit a határállapot elemzésével kaptunk, kinematikai alapon. Ez azt jelenti, hogy a felső és az alsó határ egybeesik, vagyis a

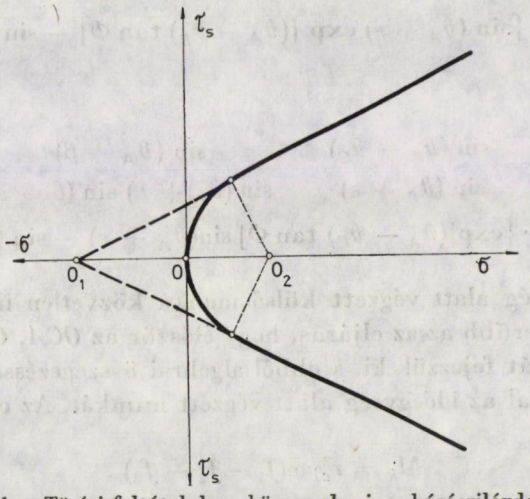
$$h_{kr} = \frac{2c}{\gamma} \tan \left(45° + \frac{\Phi}{2}\right)$$

érték exakt eredmény akkor, ha a talaj húzószilárdságát elhanyagoljuk, vagyis a törési feltételt a 14. ábra szerintinek tételezzük fel.

Hangsúlyozni kell azonban, hogy az a tény, hogy a felső és alsó határértékek, melyeket a sebességmező és a feszültségmező alapján levezettünk, azonosak, egybeesnek, egyáltalán nem jelenti azt, hogy ez a két diszkontinuus mező adja a tényleges megoldást. A határállapot elemzésének (limit-analízis) módszerében nincs olyan elméleti követelmény, hogy a feltételezett sebesség-



13. ábra. Egyszerű feszültségmező szerkesztése. *a* — feszültségállapot a térnegyedekben; *b* — a feszültségállapotok ábrázolása a Mohr-körökkel



14. ábra. Törési feltétel, ha a közegnek nincs húzószilárdsága

vagy feszültségmezőnek hasonlítania kell a tényleges állapothoz. Általában persze, minél közelebb van a feltételezett állapot a valósághoz, annál reálisabb lesz a kapott eredmény. Ugyanez áll a geometriai viszonyokra is; így például a fenti vizsgálatokat logaritmikus spirális csúszólap feltételezésével elvégezve, a valóságot általában jobban megközelítő eredményt kapunk. A fenti vizsgálathoz azért használtunk sík csúszólapot, hogy az alkalmazott módszert egyszerű eseten tudjuk bemutatni.

Rézsűállékonyság

Az általános esetet a 15. ábra tünteti fel. Célunk az lesz, hogy a rézsű egyensúlyának felső határhelyzetét meghatározzuk. Az alapelv az lesz, mint az előbbi esetben is, hogy a rézsű, saját súlyának hatására akkor megy tönkre, ha bármely tetszőlegesen felvett törési mechanizmus esetén a súly által az időegység alatt végzett munka nagyobb, mint az energia belső felemésztődése, szintén az időegység alatt. Ha ezt a két mennyiséget egymással egyenlítjük, akkor a rézsű határmagasságának felső korlátját kapjuk meg.

Talpponti csúszólapot tételezünk fel; alámetsző csúszólap esetét külön kell vizsgálni. Ez az utóbbi kis β és Φ szögek mellett veszélyes, mint azt a szokásos egyensúlyi vizsgálatok alapján tudjuk. A törés úgy következik be, hogy az ABC földék, mint egy merev test az O pont körül forog s az AC logaritmikus spirális alatti földtömeg nyugalomban marad. Ez az AC felület tehát a sebességmezőben diszkontinuitást jelent. A feltételezett törési mechanizmus — csúszólap — három változó segítségével egyértelműen leírható. Erre a célra a ϑ_C, ϑ_A szögeket és a rézsű h magasságát használjuk fel. A h/r_C és az l_l/r_B viszonyszámok geometriai úton kifejezhetők:

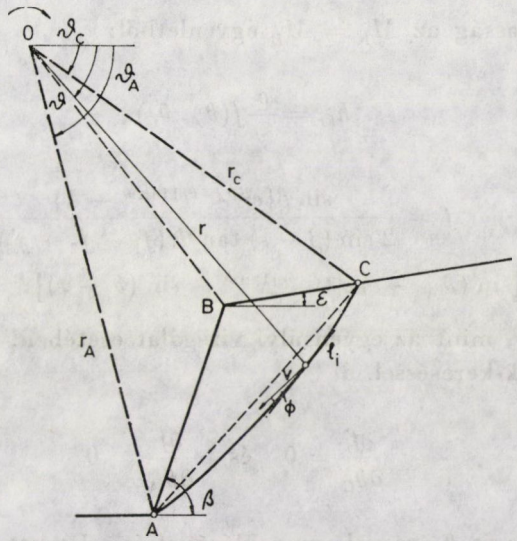
$$\frac{h}{r_c} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\left\{\sin(\vartheta_A+\varepsilon)\exp\left[(\vartheta_A-\vartheta_B)\tan\Phi\right]-\sin(\vartheta_C+\varepsilon)\right\} \tag{19}$$

és

$$\frac{l_l}{r_c} = \frac{\sin(\vartheta_A-\vartheta_C)}{\sin(\vartheta_A+\varepsilon)} - \frac{\sin(\vartheta_A+\beta)}{\sin(\vartheta_A+\varepsilon)\sin(\beta-\varepsilon)} \cdot$$
$$\cdot\left\{\exp\left[(\vartheta_A-\vartheta_C)\tan\Phi\right]\sin(\vartheta_A+\varepsilon)-\sin(\vartheta_C+\varepsilon)\right\} \tag{20}$$

Az időegység alatt végzett külső munka közvetlen integrálása nagyon bonyolult; egyszerűbb az az eljárás, hogy először az OCA, OBC és OAB földtömegek munkáját fejezzük ki, s ebből algebrai összegezéssel kapjuk az ABC földtest súlya által az időegység alatt végzett munkát. Az eredmény:

$$M_k = r_c^3\gamma\omega(f_1 - f_2 - f_3)\,,$$



15. ábra. A vizsgált rézsű metszete; a csúszólap felvétele és jellemzése

ahol r_C a C pont rádiusvektora, γ a térfogatsúly, ω a mozgás szögsebessége, f_1, f_2 és f_3 pedig az r_A és r_C rádiusvektoroktól függő dimenzió nélküli mennyiségek. Az ezeknek számítására szolgáló összefüggések:

$$f_1 = \frac{1}{3(1 + 9\tan^2 \Phi)} \left\{ (3 \tan \Phi \cos \vartheta_A + \sin \vartheta_A)\, e^{3(\vartheta_A - \vartheta_C)\tan \Phi} - \right.$$
$$\left. - (3 \tan \Phi \cos \vartheta_C + \sin \vartheta_C) \right\}, \tag{21}$$

$$f_2 = \frac{1}{6} \frac{l_i}{r_c} \left(2 \cos \vartheta_C - \frac{l_i}{r_c} \cos \alpha \right) \sin (\vartheta_C + \varepsilon)\,, \tag{22}$$

$$f_3 = \frac{1}{6} e^{(\vartheta_A - \vartheta_C)\tan \Phi} \left[\sin (\vartheta_A - \vartheta_C) - \frac{l_i}{r_c} \sin (\vartheta_A + \varepsilon) \right] \cdot$$
$$\cdot \left\{ \cos \vartheta_c - \frac{l_i}{r_c} \cos \alpha + \cos \vartheta_A\, e^{(\vartheta_A - \vartheta_C)\tan \Phi} \right\}. \tag{23}$$

Az energia az AC diszkontinuitási felületen emésztődik fel. Az időegység alatt felemésztődő energia differenciálját úgy kapjuk, hogy az $rd\vartheta/\cos \Phi$ elemi területet megszorozzuk c-vel és a sebesség érintőirányú komponensével. A teljes munka integrálás útján kapható. Tehát a belső energia felemésztődése:

$$M_B = \int_{\vartheta_C}^{\vartheta_A} c(V \cos \Phi) \frac{rd\vartheta}{\cos \Phi} = \frac{cr_c^2 \omega}{2 \tan \Phi} \left\{ e^{2(\vartheta_A - \vartheta_C)\tan \Phi} - 1 \right\}. \tag{24}$$

A kritikus magasság az $M_K = M_B$ egyenletből:

$$h_{kr} = \frac{c}{\gamma} f(\vartheta_A, \vartheta_C) , \tag{25}$$

ahol

$$f = \frac{\sin \beta \{ e^{2(\vartheta_A - \vartheta_C) \tan \Phi} - 1 \}}{2 \sin (\beta - \varepsilon) \tan \Phi \, (f_1 - f_2 - f_3)}$$
$$\left[\sin (\vartheta_A + \varepsilon) \, e^{(\vartheta_A - \vartheta_C) \tan \Phi} - \sin (\vartheta + \varepsilon) \right]. \tag{26}$$

Ugyanúgy, mint az egyensúlyi vizsgálat esetében, a mértékadó magasságot szélsőérték-kereséssel, a

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta_C} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial f}{\partial \vartheta_A} = 0 \tag{27}$$

egyenletek ϑ_C-re és ϑ_A-ra való megoldásával és a kapott értékeknek h egyenletébe való behelyettesítésével kapjuk meg. A szokásos módon itt is bevezethető egy állékonysági tényező $[N_s = \min f(\vartheta_C, \vartheta_A)]$ és végül

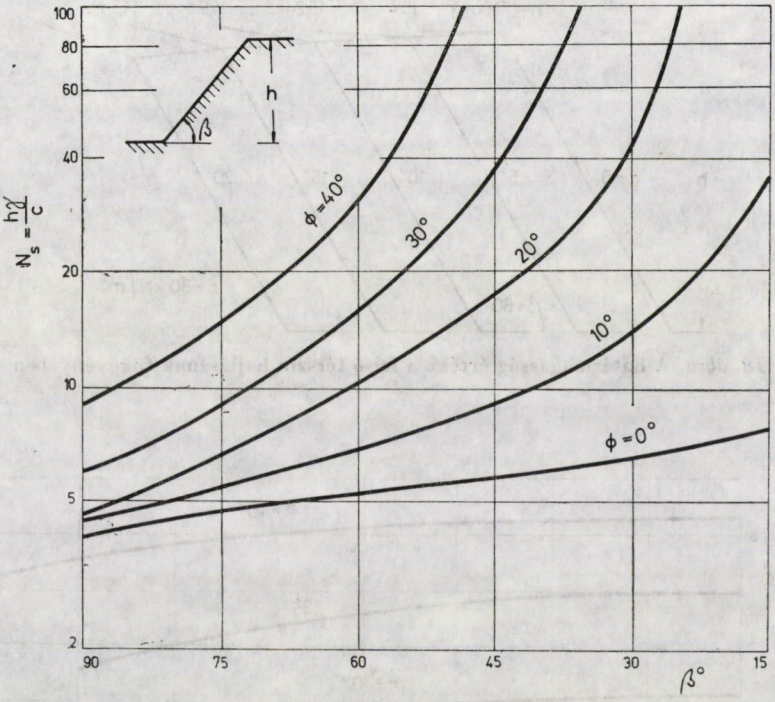
$$h_{kr} = \frac{c}{\gamma} N_S . \tag{28}$$

Az N_s állékonysági együttható értékei a 16. ábrán láthatók.

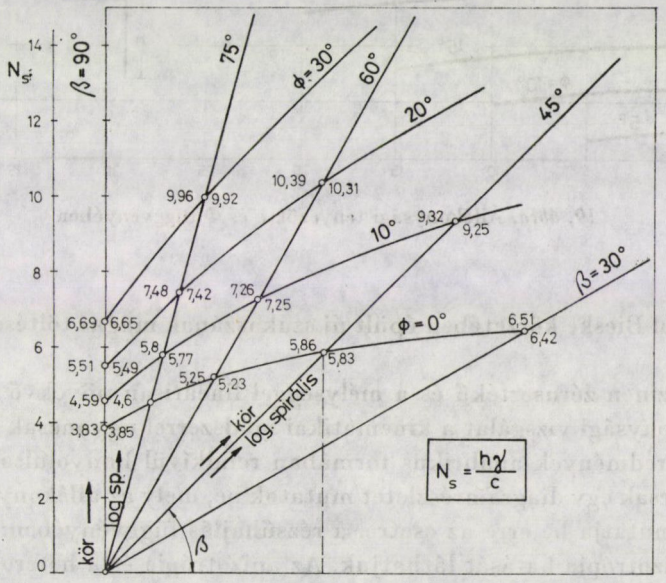
Megállapítható, hogy a kapott értékek nem különböznek lényegesen a súrlódási körös, Jáky-féle eljárással kapott értékektől. (L. 17. ábra). Az összehasonlítás természetesen csak az $\varepsilon = 0$ esetre vonatkozhatott, hisz ferde térszínre vonatkozó vizsgálatokat azzal a módszerrel nem végeztek. Éppen ezért érdeklődésre tarthat számot a 18. ábra, mely a határmagasság értékét egy adott számpélda esetében a felső térszín hajlásának függvényében ábrázolja. Általános használatot tesz lehetővé erre a célra a 19. ábra, mely az állékonysági tényező értékét több Φ értékre a térszínhajlás függvényében mutatja be.

A kapott eredményeket két irányban célszerű általánosítani. Az egyik annak a figyelembevétele, hogy kohézió szempontjából a talaj általában nem izotróp, függőleges irányban a kohézió általában nagyobb, mint vízszintes irányban.

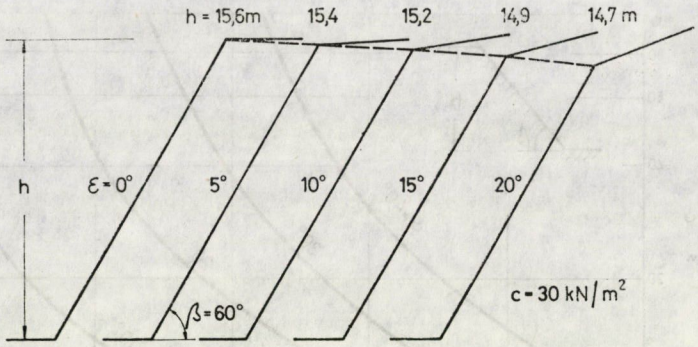
A másik általánosítás: a kohézió a mélységgel sok esetben változik, rendszerint nő. Ez az eset ma számos közúti és vasúti töltés talajában: 1976 ősze óta a szokatlanul sok csapadéknak a talajba szívódott része a rézsű felszínének közelében duzzadást, felázást idézett elő; s a kohézió kisebb lett. Ez a hatás természetesen a mélységgel egyre jobban csökken, a felszínen viszont a kohézió csaknem zérussá vált. Ez az eset a Salgótarjánba vezető 21. sz. közút töltésrézsűin, a godisa—abaligati vasútvonalon, a Budapest—Hegyeshalom



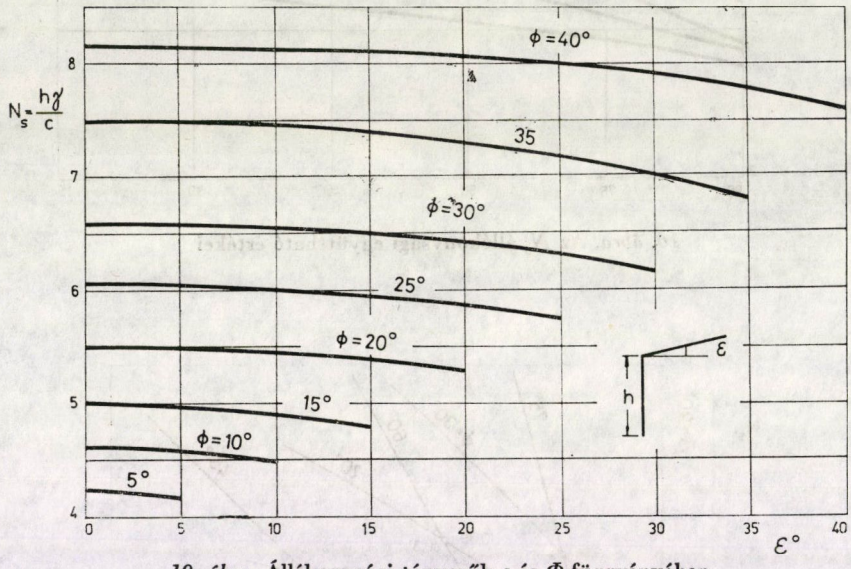
16. ábra. Az N_s állékonysági együttható értékei



17. ábra. Az állékonysági együtthatók összehasonlítása talpponti csúszólap esetén



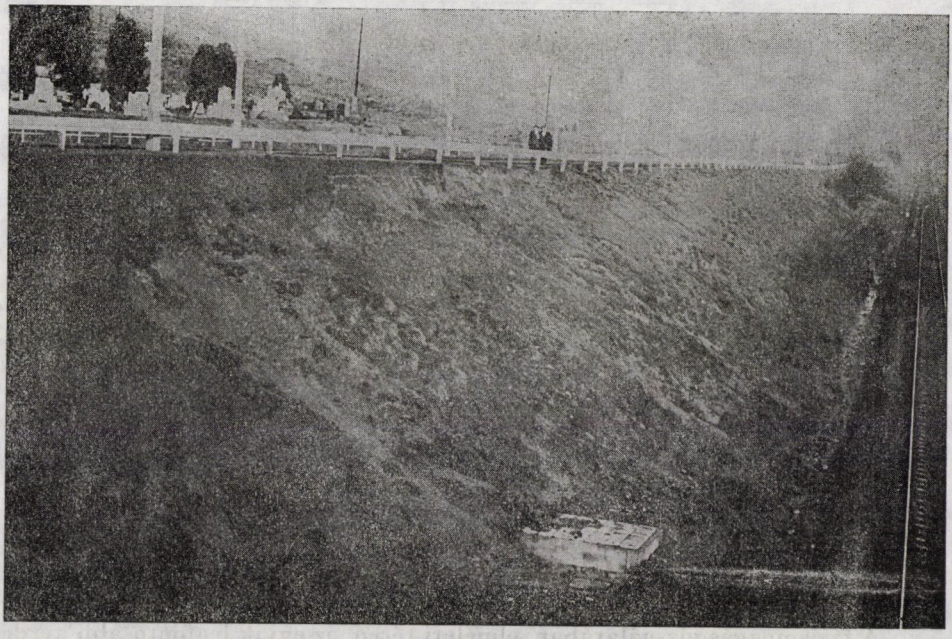
18. ábra. A határmagasság értéke a felső térszín hajlásának függvényében



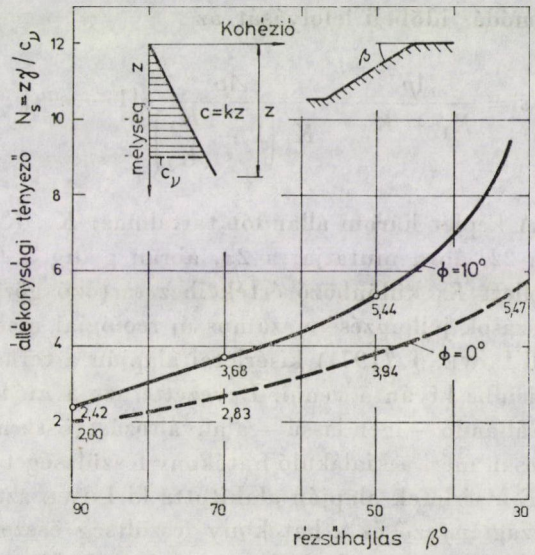
19. ábra. Állékonysági tényezők ε és Φ függvényében

közötti vonal Bicske körzetében épült új szakaszának magas töltésein s másutt. (1. kép.)

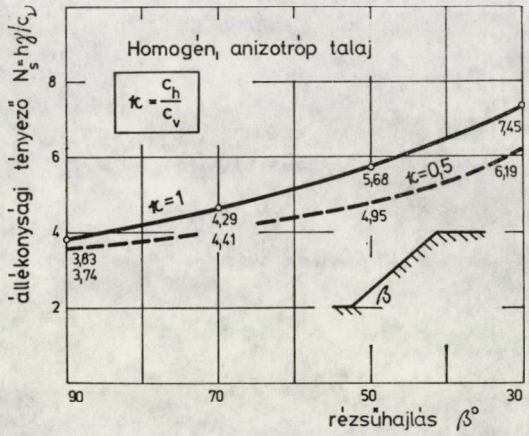
A felszínen zérusértékű és a mélységgel lineárisan növekvő kohézió esetén az állékonysági vizsgálat a kinematikai módszerrel ugyancsak elvégezhető; sajnos, az eredmények analitikus formában rendkívül bonyolultak. Ezért itt, a 20. ábrán csak egy diagramrészletet mutatok be, mely az állékonysági tényező változását mutatja be erre az esetre, a rézsűhajlás függvényében; a 21. ábrán pedig az anizotrópia hatását láthatjuk. Az anizotrópia és a heterogenitás általános vizsgálata itt túl messze vezetne.



1. kép. A rézsű felszínén egy viszonylag vékony réteg a kohézió csökkenése miatt lecsúszott



20. ábra. Rézsű állékonysági tényezői a mélységgel lineárisan növekvő kohézió esetén



21. ábra. Átázott rézsű egyensúlyának vizsgálata

A konszolidáció elmélete

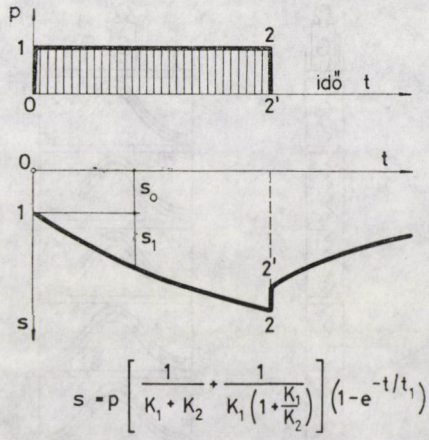
A fázismozgás vizsgálatában, elméleti téren, az egyik legfontosabb kérdés a konszolidáció elmélete. Itt három irányban volt fejlődés tapasztalható az elmúlt években. Az első, amit magam is követtem, az összenyomódás folyamatának egy, a korábbitól teljesen eltérő fogalmazása. (KÉZDI, 1966.) Ez a módszer reológiai megközelítést használ s alkalmas arra, hogy az azonnali, az elsődleges és a másodlagos konszolidációt egyetlenegy összefüggés keretében vegye figyelembe.

Az összenyomódás időbeli lefolyását az

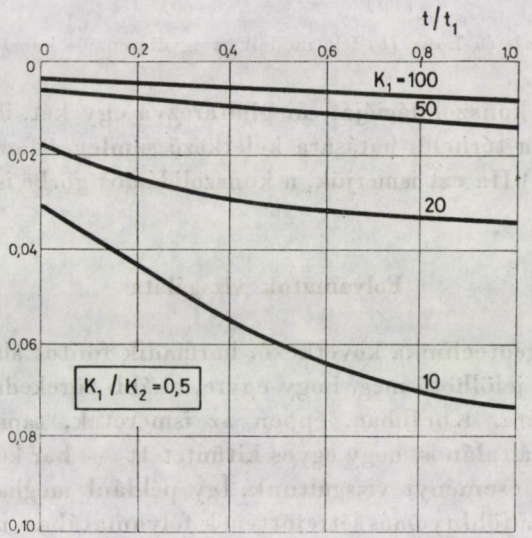
$$s = \frac{\Delta p}{K_1 + K_2} + \frac{\Delta p}{K_1\left(1 + \frac{K_1}{K_2}\right)}\left[1 - e^{t/t_1}\right] \tag{29}$$

összefüggés adja. A képlet három állandót tartalmaz: K_1, K_2 és t_1 értékeket. A görbe alakját a 22. ábra mutatja; a 23. ábrán pedig a K_1/K_2 paraméter állandó értéke mellett K_1 különböző értékeihez tartozó görbéket látunk.

Az alakváltozások jellemzésére számos új reológiai modell is javaslatba került. Így például LOWE, J. (1971) kísérletei alapján a terhelés sebességének a hatását is figyelembe kívánta venni. Bevezette azt a módszert, melyben a készülék a mintára állandó — igen lassú — alakváltozást (összenyomódást) kényszerít és folyamatosan méri a kialakuló hatékony feszültséget és meghatározza a hézagtényezőt. E kísérletek alapján alakította ki LOWE azt az alapvető felfogást, hogy a hézagtényező és a hatékony feszültség összefüggését megadó görbe a hatékony feszültség növekedési sebességének is függvénye, s az össze-



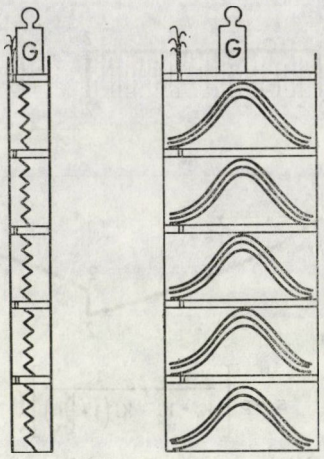
22. ábra. Makromeritikus folyadék konszolidációs görbéje terhelés és azt követő tehermentesítés esetén



23. ábra. Konszolidációs görbék a K_1/K_2 paraméter adott és K_1 különböző értékei mellett

függést csak egy görbesereggel lehet megfelelőképpen leírni. Egy másik módosítás abból áll, hogy a Terzaghi-féle konszolidációs modell spirálrugóit lemezrugókkal helyettesítette (24. ábra); az ennek viselkedését leíró differenciálegyenlet az összenyomódási modulus terheléstől függő — azzal növekvő — voltát is figyelembe tudja venni, a valóságnak jobban megfelelő módon.

A harmadik fejlesztési irány, melyre ismét a számítógép adott lehetőséget, az alapvető egyenletnek bonyolult kezdeti és peremfeltételekre való alkalmazása. Erre csak egyetlen példát hozok fel. SÁNDOR Istvánnal kidolgoztuk a

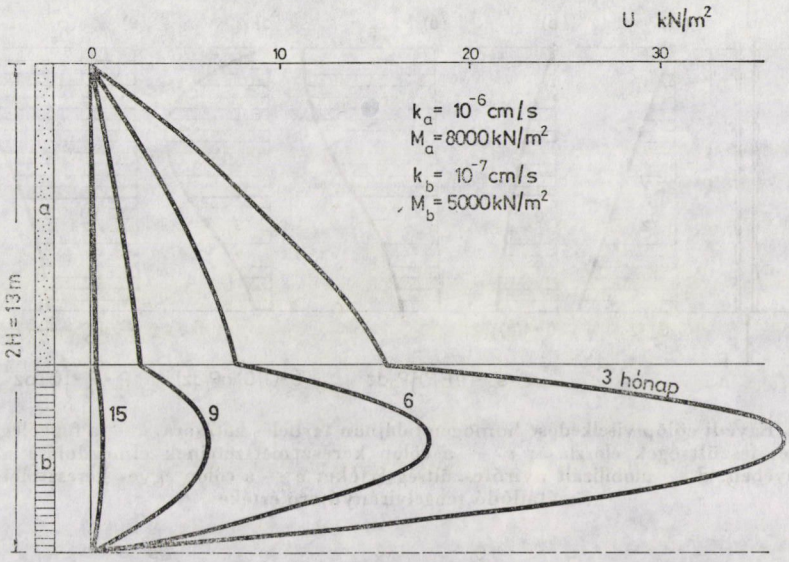


24. ábra. Terzaghi *(a)*- és Lowe *(b)*-féle modell az egydimenziós konszolidáció jelllemzésére

rétegzett talajok konszolidációját, meghatározva egy két, ill. három rétegből álló rendszerben a térhelés hatására keletkező semleges feszültségek izokrónjait. (L. 25. ábra.) Ha ezt ismerjük, a konszolidációs görbe is meghatározható.

Folyamatok vizsgálata

Rátérek a geotechnika következő, harmadik fontos alapelvének tárgyalására. Ez abban jelölhető meg, hogy egyre inkább törekednünk kell a folyamatok vizsgálatára. Korábban, éppen az ismeretek, tapasztalatok hiánya miatt, az volt az általános, hogy egyes kitüntetett — bár kétségtelenül lényeges — állapotot, eseményt vizsgáltunk. Így például meghatároztuk a törési határállapotokat a földnyomás létrejöttének folyamatában, meghatároztuk rézsűk és alaptestek határegyensúlyát, cölöpök ún. határteherbírását. A fejlődés során azután vagy az derült ki, hogy ilyen határérték nincsen — mint számos cölöpterhelési folyamat során vagy laza talajra épített alaptestek esetén —, vagy pedig az, hogy az építmény szempontjából elsősorban nem a törési határérték, hanem a még tűrhető alakváltozáshoz tartozó érték a lényeges. Az ún. második határállapot meghatározásának feladatként való kitűzése volt a következő lépés; ma, ha egyelőre nem sok eredménnyel is, a teljes folyamatot keressük. Így volt meghatározható cölöpök terhelés alatti viselkedése; lehetségessé vált annak kimutatása, hogy a súlytámfalakra ható földnyomás a fal önsúlyának is függvénye, s így lehetett követni magas súlypontú épületek elferdülésének folyamatát. Az ilyen feladatok megoldásához természetesen a



25. ábra. A semleges feszültség izokrón vonalai rétegzett talaj egydimenziós konszolidációja esetén

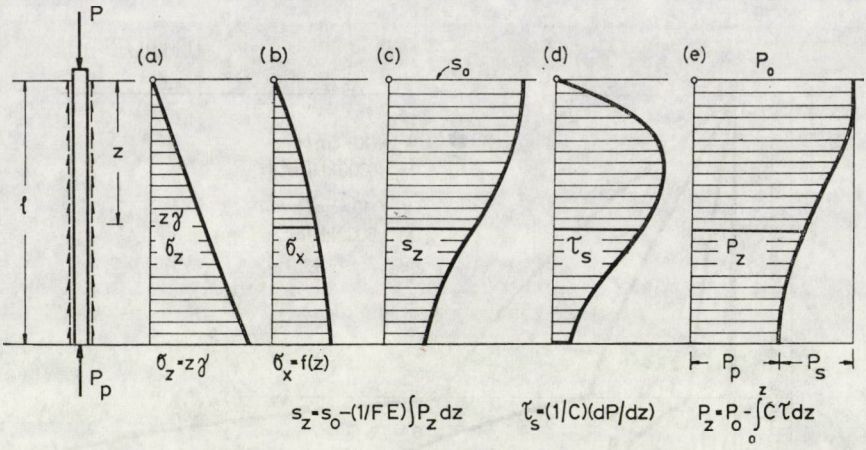
valóság pontosabb és alaposabb megfigyelése és mennyiségi vizsgálata szükséges.

Az említett három példa közül most csak az elsővel fogok foglalkozni. A kérdést, cölöpök terhelési-süllyedési folyamatának vizsgálatát tulajdonképpen már húsz esztendővel ezelőtt kidolgoztam (KÉZDI, 1957), legutóbb azt az ún. mikrocölöpök speciális esetére terjesztettem ki. (KÉZDI, 1976a.) Ezt kívánom most bemutatni. A második problémát, súlyfalak viselkedését, első székfoglalómban tárgyaltam, a harmadik vizsgálat eredményeit a pisai harangtorony egyelőre nem publikálható anyaga tartalmazza.

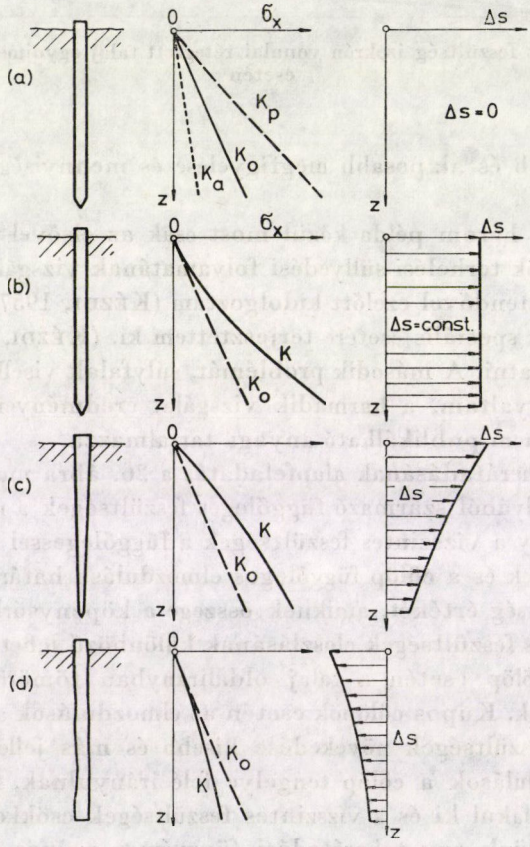
Cölöpök teherátadásának alapfeladatát a 26. ábra mutatja. Feltesszük, hogy a föld önsúlyából származó függőleges feszültségek a mélységgel lineárisan nőnek, s hogy a vízszintes feszültségek a függőlegessel arányosak. A vízszintes feszültségek és a cölöp függőleges elmozdulása határozza meg a mobilizált nyírófeszültség értékét, amiknek összege a köpenysúrlódás.

A vízszintes feszültségek eloszlásának különböző lehetőségeit a 27. ábra mutatja. Vert cölöp esetén a talaj oldalirányban tömörödik, a vízszintes feszültségek nőnek. Kúpos cölöpök esetén az elmozdulások a mélységgel csökkennek, így a feszültségek növekedése kisebb és más jellegű. Fúrt cölöpök esetén az elmozdulások a cölöp tengelye felé irányulnak, így a cölöp körül boltozati hatás alakul ki és a vízszintes feszültségek csökkennek.

Ha bevezetünk egy teherátadási függvényt, vagyis konstruálunk egy félig empirikus összefüggést a cölöp egy adott pontjának függőleges elmozdu-

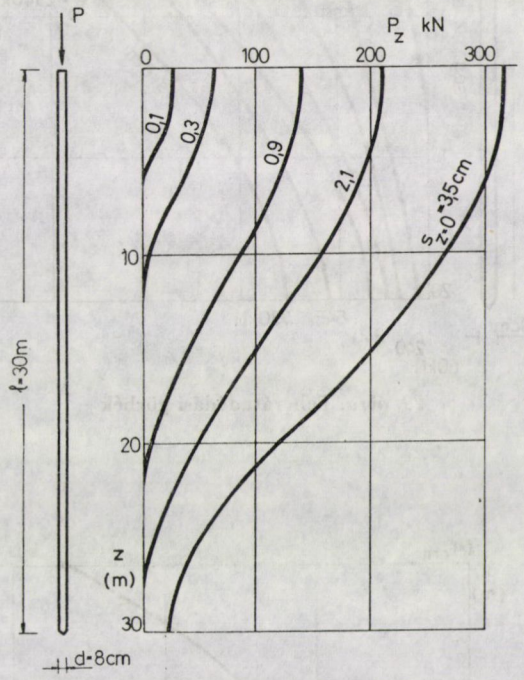


26. ábra. Egyedi cölöp viselkedése homogén talajban terhelés hatására. *a* — a függőleges, *b* — a vízszintes feszültségek eloszlása; *c* — a cölöp keresztmetszeteinek elmozdulása a mélység függvényében; *d* — mobilizált nyírófeszültség értéke; *e* — a cölöp egyes keresztmetszeteiben átadódó tengelyirányú erő értéke



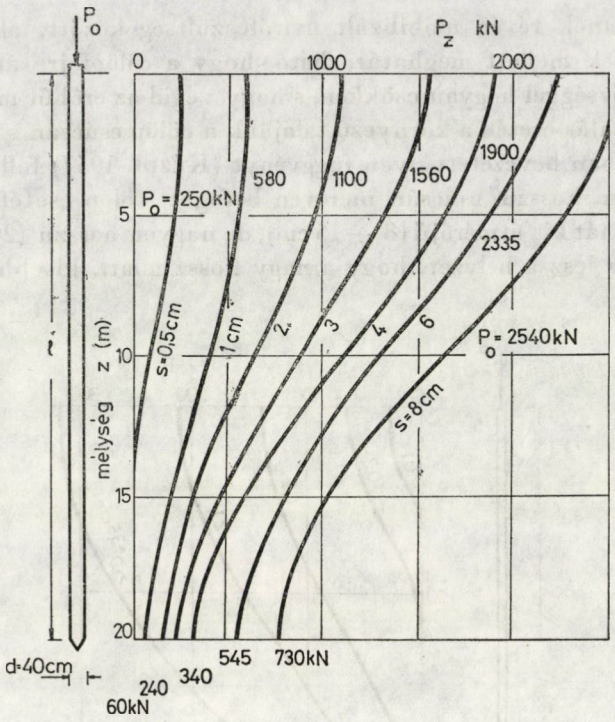
27. ábra. A vízszintes feszültségek eloszlása a cölöp köpenyfelületén. *a* — a földtömegben nincs elmozdulás; *b* — vert hengeres cölöp; *c* — vert kúpos cölöp; *d* — fúrt cölöp

lása és az ennek révén mobilizált nyírófeszültség között, akkor különböző peremfeltételek mellett meghatározható, hogy a cölöpfejre átadódó függőleges erő a mélységgel hogyan csökken, s hogy végül az erőből mi adódik át egy adott elmozdulás esetén a környező talajnak a cölöp csúcsán s mi a köpenyén. A már korábban bevezetett ilyen függvényt (KÉZDI, 1957) felhasználva, a 28. ábra egy 20 m hosszú, csúcsán mereven befogott cölöp esetét mutatja. Mikrocölöpök, tehát kis átmérőjű (8 ÷ 15 cm), de nagyon hosszú (20 ÷ 30 m) cölöpök esetén az lesz a helyzet, hogy a nagy hossz miatt, kisebb terhek mellett

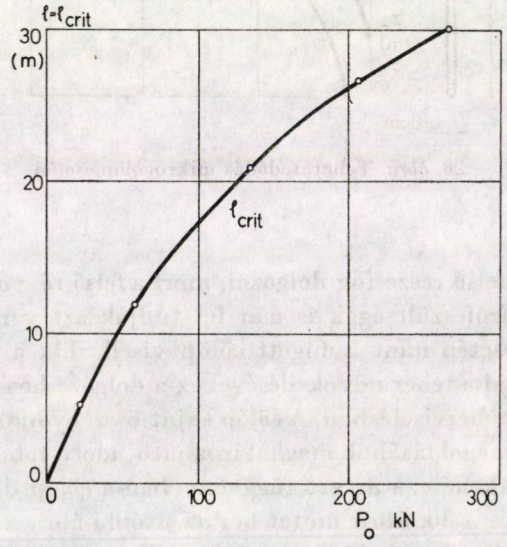


28. ábra. Teherátadódás mikrocölöp esetén

a cölöpnek csak a felső része fog dolgozni, mert a felső rész összenyomódása révén mobilizált nyírófeszültségek is már fel tudják azt venni. Az ilyen cölöp tehát kis terhek esetén mint befogott cölöp viselkedik, a hossznak csak egy része dolgozik, majd a teher növekedésével ez a dolgozó hossz nő, végül a teljes hossz részt vesz a teherviselésben. A cölöp saját összenyomódása alapján a differenciálegyenlet megoldásából meghatározható adott teher mellett annak a cölöpben való csökkenése, s az erő függvényében a cölöp dolgozó hossza. Egy számpéldát a 29. és a 30. ábra mutat be; az utóbbi ábra a dolgozó hossz változását mutatja. A teherátadódás leírására, illetve a felszíni nyírófeszültség

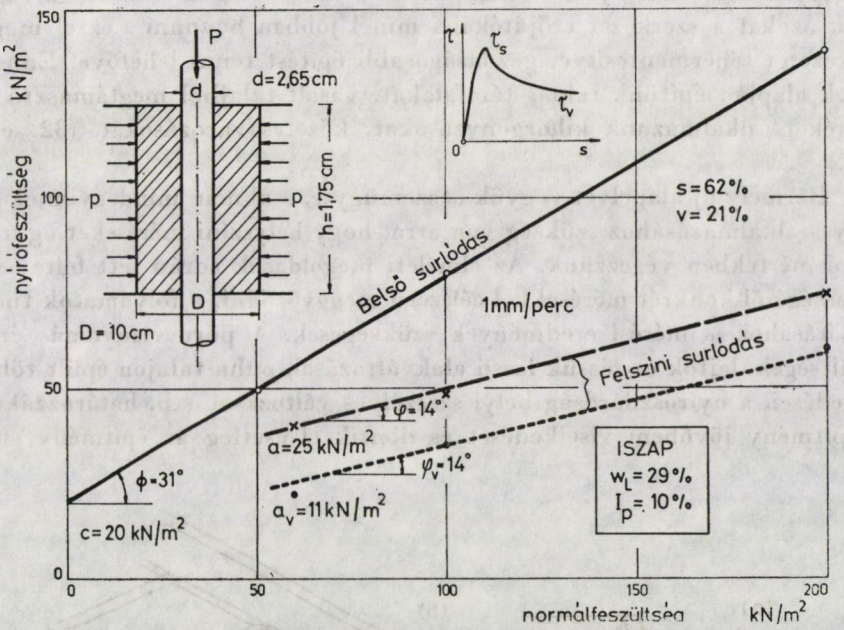


29. ábra. Teherátadódási görbék



30. ábra. A cölöp dolgozó hossza a cölöpre jutó erő függvényében

és az elmozdulás összefüggésére a 31. ábrán feltüntetett kísérleti módszer szolgált; az ábra egy mérési eredményt is feltüntet. Itt jegyzem meg, hogy a pisai harangtorony konszolidálására benyújtott javaslatok egyike a tornyot mikrocölöpökkel kívánta alátámasztani.



31. ábra. Kísérleti módszer a felszíni nyírófeszültség és az elmozdulás összefüggésének meghatározására

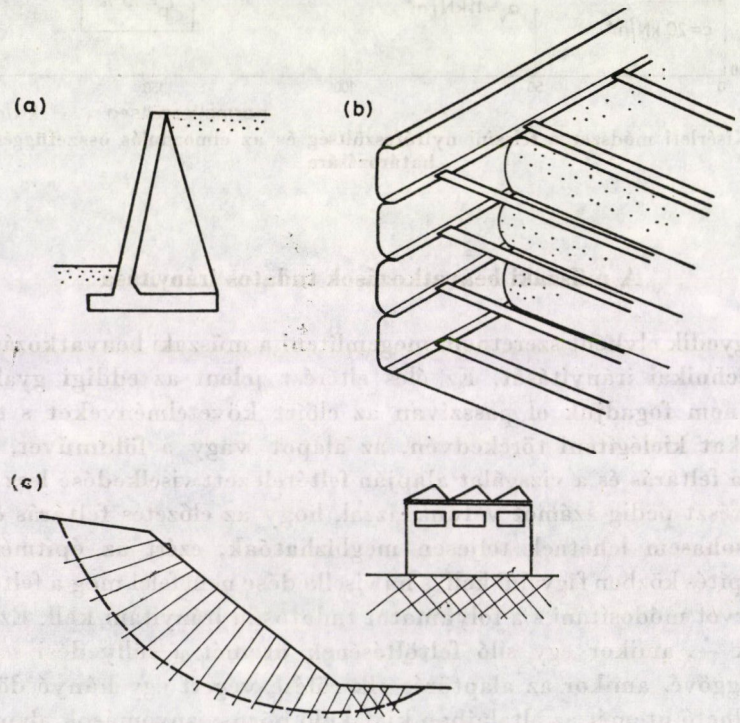
A műszaki beavatkozások tudatos irányítása

Negyedik elvként szeretném megemlíteni a műszaki beavatkozások tudatos geotechnikai irányítását. Ez éles eltérést jelent az eddigi gyakorlattól: egyrészt nem fogadjuk el passzívan az előírt követelményeket s tervezzük meg, azokat kielégíteni törekedvén, az alapot vagy a földművet, hanem a talajnak a feltárás és a vizsgálat alapján feltételezett viselkedése lesz az irányadó, másrészt pedig számot vetünk azzal, hogy az előzetes feltárás és a vizsgálatok sohasem lehetnek teljesen megbízhatóak, ezért az építmény viselkedését építés közben figyelni kell, s ha viselkedése nem felel meg a feltételezettnek, a tervet módosítani s a folyamatot tudatosan irányítani kell. Ezt tesszük — tettük —, amikor egy siló feltöltésének ütemét a süllyedési sebességtől tettük függővé, amikor az alaptörés elkerülése végett egy hányó döntésének megengedhető ütemét az altalajban kialakuló pórusvíznyomások alapján határoztuk meg, vagy amikor a cölöpöket körülvevő talaj előzetes megterhelése

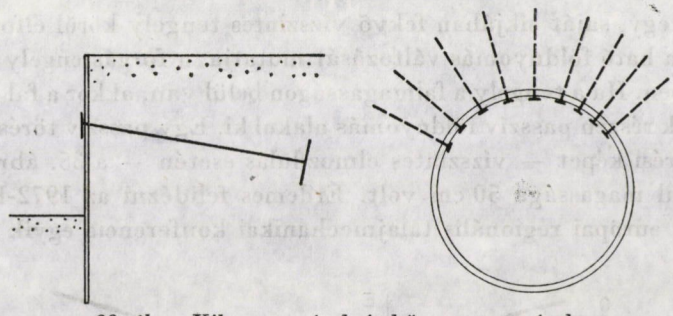
útján növeltük meg a cölöpök köpenyfelületre ható normálfeszültségeket és ezzel a cölöp teherbírását. Ezekre az esetekre most nem térek ki, mert az irodalomban már ismertettem őket. (KÉZDI, 1969; 1971; 1972.)

Egy további, ötödik alapelv a gazdaságosságot szolgálja. Lényege az, hogy igyekszünk minél jobban kihasználni a talajtömegek szilárdságát, igyekszünk azokat a szerkezet erőjátékába minél jobban bevonni s ezzel magát a szerkezetet tehermentesítve, gazdaságosabb építést tenni lehetővé. Ennek az elvnek alapján építünk talpas támfalakat, vasalt talajból megtámasztó szerkezeteket, alkalmazunk kihorgonyzásokat, kőzetcsavarozásokat. (32. és 33. ábra.)

Bármely új alapelvet vegyük is szemügyre, csaknem mindegyiknek eredményes alkalmazásához szükség van arra, hogy helyszíni méréseket egyre növekvő mértékben végezzünk. Az elméleti megoldások során tett feltevéseink helyességéről konkrét mérésekkel célszerű meggyőződni, a folyamatok tudatos irányításához is mérési eredmények szükségesek. A pórusvíznyomás értéke, feszültségek, lejtők és rézsűk lassú alakváltozásai, puha talajon épült töltések süllyedései, a nyírószilárdság helyi szeszélyes változásai stb. határozzák meg az építmény jövőbeni viselkedését és döntik el esetleg az építmény sorsát.



32. ábra. A talajtömegek bevonása a szerkezetek erőjátékába; *a)* talpas támfal, *b)* vasalt talaj és *c)* szögelt talaj



33. ábra. Kihorgonyzások és kőzetcsavarozások

Különösen ki szeretném emelni a mérések jelentőségét azokkal az új eljárásokkal, alapozási módszerekkel kapcsolatban, melyek az említett új elvet követve a geotechnika fejlődése révén jöttek létre. Ilyenek a már említett vasalt talaj, a résfal, a kihorgonyzások, egyes újabb cölöpözési módszerek, talajszilárdítások. Így ötvöződik elmélet és tényleges viselkedés, így tudjuk a geotechnika eredményeit igazán hasznosítani. Egyet azonban a mérésekkel kapcsolatban sem szabad elfelejteni, s pedig azt, amit Ralph PECK 1974-ben Mexicóban tartott előadásában mondott (PECK, R., 1974):

„*I find that the best instrument is the human eye with a good brain behind it.*"

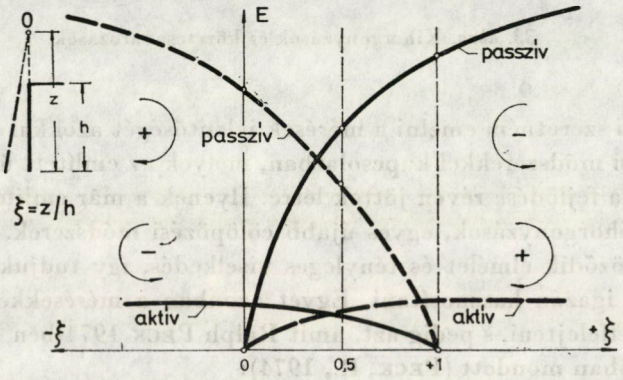
és moszkvai megállapítása szerint (PECK, R., 1973):

„*Instrumentation is no substitute for adequate design.*"

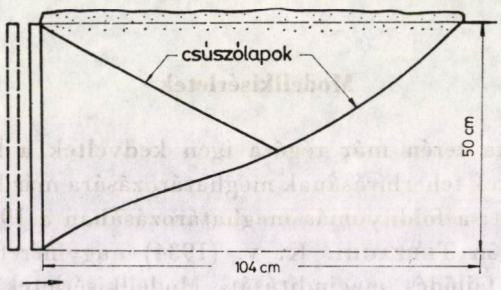
Modellkísérletek

A geotechnika terén már régóta igen kedveltek a különböző modellkísérletek. Alaptestek teherbírásának meghatározására már KURDJÜMOV (1889) végzett kísérleteket; a földnyomás meghatározásában a 19. század geometrikus vizsgálatai után TERZAGHI, K. v. (1934) nagyméretű modellkísérletei jelentették az új fejlődés megindítását. Modellkísérletek laboratóriumban, ellenőrzött körülmények között végezhetők, mód van a lényeges tényezők változtatására, a kísérletek megismétlésére, s nem utolsósorban nem igényelnek túl nagy költségeket. Értékük azonban természetesen korlátozott, hisz a modelltörvény jórészt ismeretlen. A modellkísérletek módszere az említett előnyök miatt azóta is széles körben kerül alkalmazásra; néhány évvel ezelőtt KÉRISEL, J. (1972) adott a kérdésről átfogó ismertetést. Nem lévén célom ezúttal a modellezés alapvető kérdéseit tárgyalni, sem pedig korábban végzett modellkísérleteim eredményét bemutatni, hisz ezek közül több már szerepelt az irodalomban (KÉZDI, 1972; KÉZDI, 1971), csupán néhány ábrát mutatok be a még Magyarországon nem közölt földnyomási modellkísérletek eredményeiből.

A 34. ábra egy, saját síkjában fekvő vízszintes tengely körül elforduló merev diafragmára ható földnyomás változását mutatja, a forgástengely helyzetének függvényében. Ha a tengely a falmagasságon belül van, akkor a fal egyik részén aktív, másik részén passzív földnyomás alakul ki. Egy passzív törési állapotban létrejött törési képet — vízszintes elmozdulás esetén — a 35. ábra mutat be. A modell-fal magassága 50 cm volt. Érdemes felidézni az 1972-ben Madridban tartott európai regionális talajmechanikai konferencia egyik ülését, ami-

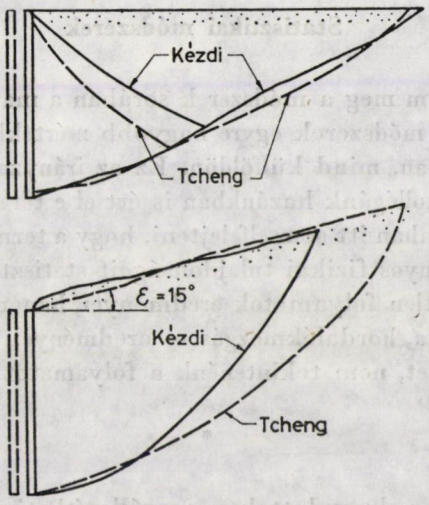


34. ábra. Merev diafragmára ható földnyomások a forgástengely magassági helyzetének függvényében

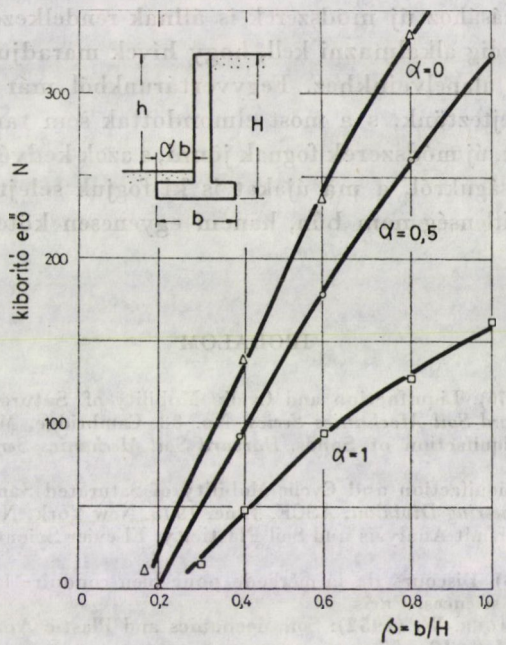


35. ábra. Törési kép passzív törési állapotban; a fal önmagával párhuzamosan mozdult el

kor TCHENG (1972) bemutatta a $h = 3$ m magas fallal végzett hasonló kísérleteinek eredményeit és összehasonlította azokat saját kísérleteimmel. Mint az a 36. ábrán látható, a törési képek gyakorlatilag azonosak voltak. A 37. ábra talpas és súlytámfalakkal végzett modellkísérletek eredményeit mutatja. A talpas támfalak nagyon gazdaságosak, de nem rendelkezünk olyan méretezési eljárással, mely a hátlapon fellépő földnyomást és a talpon jelentkező ellenállást egyidejűleg megfelelően figyelembe tudná venni. A kísérletek során mér-



36. ábra. Törési kép TCHENG és KÉZDI kísérleteiben



37. ábra. Modellkísérletek talpas- és súlytámfalakkal. A kiborító erő nagysága az α és β jellemzők függvényében.

tük a támfal kiborításához szükséges erőt; ezt az ábrán definiált α és β együtthatók függvényében ábrázolva kaptuk a bemutatott görbéket. Az L alakú falak stabilitása egyéb körülmények azonossága mellett jóval nagyobb, mint a súlyfalaké.

Statisztikai módszerek

Utoljára említem meg a módszerek sorában a matematikai statisztikát. A fejlett statisztikai módszerek egyre nagyobb mértékben kerülnek alkalmazásra mind hazánkban, mind külföldön. Ez az irányzat feltétlenül helyes és támogatandó, több kollégánk hazánkban is ért el e téren jelentős eredményeket. Nem szabad azonban itt sem elfelejteni, hogy a természetes talajlerakódások, melyeknek bizonyos fizikai tulajdonságait statisztikai módszerekkel feldolgoztuk, nem véletlen folyamatok eredményei, hanem egzakt fizikai törvények — pl. hidraulika, hordalékmozgás — eredményei. Ha meg tudtuk volna figyelni keletkezésüket, nem tekintenénk a folyamatot véletlennek.

*

Végigtekintve az elmondottakon, megállapíthatjuk, hogy számos új elv érvényesülését, illetve jelentkezését figyelhetjük meg a geotechnikában, s hogy az elvek alkalmazásához új módszerek is állnak rendelkezésre. Az új elveket és módszereket pedig alkalmazni kell, hogy hívek maradjunk hivatásunkhoz, hívek maradjunk alapelveinkhez. Fegyvertárunkból már számos régi elvet és módszert kiselejteztünk, s a most elmondottak sem tartanak igényt örök érvényre. Új elvek, új módszerek fognak jönni, s azok kedvéért, ha meggyőződtünk használhatóságukról, a ma újakat is ki fogjuk selejtezni. Mert ez az a terület, ahol a hűtlenség nem bűn, hanem egyenesen kötelesség.

IRODALOM

CASAGRANDE, A. (1976): Liquifaction and Cyclic Mobility of Saturated Sands. A Critical Review. *Harvard Soil Mechanics Series*, No. 88. Cambridge, Massachusetts

CASTRO, G. (1969): Liquifaction of Sands. *Harvard Soil Mechanics Series* No. 81. Cambridge, Massachusetts

CASTRO, G. (1975): Liquifaction and Cyclic Mobility of Saturated Sands. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, ASCE, June, 1975, New York, N. Y.

CHEN, W. F. (1975): Limit Analysis and Soil Plasticity. Elsevier Scientific Publ. Co., Amsterdam

DESCARTES, R. (1673): Discours de la méthode pour bien conduire la raison et chercher la vérité dans les sciences. Paris

DRUCKER, D. C., PRAGER, W. (1952): Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design. *Quart. Appl. Math.* **10**, 157

FRENKEL, J. (1955): Kinetic Theory of Liquids. Dover Publications, Inc., New York

KÉRISEL, J. (1972): Le langage des modèles en mécanique des sols. Proc. 5th Eur. *Conf. on Soil Mech. and Found. Engg.* Vol. 2. Madrid

KÉZDI, Á. (1957): Bearing Capacity of Piles and Pile Groups. Proc. 4th *Int. Conf. Soil Mech. Found. Engg.* Vol. II. pp. 46—51, London

KÉZDI, Á. (1966): Grundlagen einer allgemeinen Bodenphysik. *VDJ-Zeitschrift*, S. 161—166, Düsseldorf

KÉZDI, Á. (1969): Increasing the Bearing Capacity of Floating Piles. Spec. Session 8, 7th *Int. Conf. Soil Mech. Found. Engg.* Buenos Aires

KÉZDI, Á. (1970): Spannungen in Zweiphasen'systemen. *Acta Techn. Hung*, **69**, 1—2

KÉZDI, Á. (1971): Increasing the Bearing Capacity of Floating Piles; Settlement Observation on a Large Silo on Pile Foundation. *Proc. of the Conf.: Behaviour of Piles.* London: Inst. Civil Engrs.
KÉZDI, Á. (1971): Earth Pressure Model Tests. Nové poznaty v mechanice zemin. Vol. I. pp. 125—141. Československá Vedecko technická Spolecnost Stavebni, Praha, 1971
KÉZDI, Á. (1972a): Earth Pressure Measurements. *Proc. Fifth Eur. Conf. on Soil Mech. and Found. Engg.* Vol. I. Madrid
KÉZDI, Á. (1972b): Egy siló alapozásának története. *Mélyépítéstudományi Szemle*, **22**, 3. sz.
KÉZDI, Á. (1974): Handbook of Soil Mechanics. Vol. 1. Soil Physics. Elsevier Scientific Publishing Co., Amsterdam
KÉZDI Á. (1975): A talajmechanika szerepe az építõipari feladatok megoldásában. *Mûszaki Tervezés*, **15**, 7. sz, Budapest
KÉZDI, Á. (1976a): Philosophy of Deep Foundations. Third Nabor Carrillo Lecture. Sociedad Mexicana di Mecanica de Suelos, Mexico
KÉZDI, Á. (1976b): Fragen der Bodenphysik. VDJ-Verlag, Düsseldorf
КУРПЮМОВ, В. И. (1889): Краткий курс оснований и фундаментов, изп. 3. спб.
LOWE, J. (1971): New Concepts in Consolidation and Settlement Analysis. The Eighth Terzaghi Lecture. In: Terzaghi Lectures 1963—1972. Published by ASCE, 1974, New York, N. Y.
PECK, R. B. (1974): The Selection of Soil Parameters for the Design of Foundations. Second Nabor Carrillo Lecture. Sociedad Mexicana de Mecanica de Suelos, Mexico
TCHENG, Y. (1972): Panel discussion, Session II, *Proc.* 5th *Eur. Conf. Soil Mech. Found. Engg.* Vol. 2. Madrid
TERZAGHI, K. v. (1934): Large Retaining-Wall Tests. *Engg. News Record*, 112.
TERZAGHI, K. v. (1943): Theoretical Soil Mechanics. J. Wiley & Sons, New York, N. Y.

New Principles and Methods in the Geotechnics. — In the introduction of the paper the field of science of geotechnics is determined, then it is explained what is to be understood under the principles and new methods and for what reason the application of these principles and methods became necessary. Then, author discusses these and presents examples for their application. The uniform aspect of soil physics considers the soils as macromeritic liquids and describes their behaviour on the basis of uniform laws. The paper shows as examples for this, the extension of the laws of the phase movement and the flow of soils. The increase of the theoretical exactness also required new theoretical methods; here are also to be mentioned the extension of the rules of the theory of elasticity to quasi-saturated soils and the application of the theory of plasticity to the analysis of the limiting state. An important principle is that instead of investigating of each preferred limiting state, the analysis of the processes yields new results. The conscious control of the technical interferences, the better use of the own strength of soil masses, the more conscious application of the model tests and the utilisation of statistics are finally mentioned.

Neue Prinzipien und Methoden in der Geotechnik. — In der Einleitung des Vortrags wird der Wissenschaftsbereich der Geotechnik definiert und erklärt, was man unter den Prinzipien und Methoden verstehen soll und warum die Anwendung von neuen Prinzipien und Methoden erforderlich geworden ist. Sodann werden dieselben behandelt und durch Beispiele erklärt. Die einheitliche bodenphysische Anschauung betrachtet die Böden als makromeritische-Flüssigkeiten und beschreibt das Verhalten derselben aufgrund von einheitlichen Gesetzmäßigkeiten. Darauf folgt die Bekanntmachung des Fließens der Böden und die Erweiterung der Gesetzmäßigkeiten der Phasenbewegung. Auch die Steigerung der theoretischen Exaktheit beanspruchte neue theoretische Methoden, wozu auch die Erweiterung der Gesetzmäßigkeiten der Elastizitätslehre auf die quasigesättigten Böden, sowie die Anwendung der Regeln der Plastizitätslehre zur Analyse des Grunzzustandes gehören. Ein wichtiger Grundsatz ist, daß anstatt der Untersuchung von einigen bevorzugten Zuständen die Analyse der Prozesse neue Resultate ergibt. Die bewußte Weisung der technischen Interventionen, die bessere Ausnutzung der Eigenfestigkeit der Bodenmassen, die Entwicklung der bewußten Anwendung der Modellversuche und der Gebrauch der Statistik werden schließlich kurzgefaßt erwähnt.

AZ ANYAGTUDOMÁNY SZEREPE ÉS NÉHÁNY EREDMÉNYE A KOHÁSZATBAN*

STEFÁN MIHÁLY**

AZ MTA LEVELEZŐ TAGJA

A szerző a fémekben és ötvözetekben kis mennyiségben jelenlevő idegen elemek, amelyek szennyezők vagy tudatosan adagolt mikroötvözők lehetnek, hatását vizsgálta a fizikai és mechanikai tulajdonságokra. Részletesebben szól az olvasztás során kialakuló fém—gáz rendszerek egyensúlyi viszonyairól és ezeknek a végtermék tulajdonságait befolyásoló hatásáról, valamint a mikroötvöző elemek különböző hatásmechanizmusairól, amelyeken keresztül a fémek alakíthatóságát befolyásolhatják. Végül bemutatja, hogy a kutatás eredményei hogyan valósulnak meg az ipari termelésben.

Az előadás címét olvasva, sokakban felmerülhet a kérdés, mi lehet a kapcsolat az anyagtudomány és a kohászat között. Mint iparfejlesztéssel és ipari kutatással foglalkozó szakember, hadd kezdjem a választ gazdasági megfontolásokkal.

Napjainkban az egész világon a gazdaság fejlesztés ütemét elsődlegesen az energia és az alapanyag előteremtése szabja meg. A tudományos-technikai forradalom eredményei mutatják, hogy egy új vagy tökéletesebb tulajdonságú anyagnak milyen nagy jelentősége van a műszaki haladás, mint az össztársadalmi haladás egy részterületének a fejlődésében. Elég csak utalni a félvezetőkre, a nagyenergiájú ritkafém mágnesekre, a sziliciumkarbid hőálló ötvözetre, a szuperkemény anyagokra, mint a bórnitridre vagy mesterséges gyémántra, az üvegfémekre.

Az alapanyag felhasználás népgazdasági hatását az anyagok tulajdonságai, az előállításukra és megmunkálásukra áldozott ráfordítás és a tulajdonságaiknak az alkalmazás során elért kiaknázottsági foka együttesen határozzák meg. Az alap- és szerkezeti anyagok területén, ahol az átmenet alapanyagból félgyártmányon át alkatrészbe egy állandó folyamatot képez, az elért tudományos felismerések a legtágabb értelemben nyernek alkalmazást és hoznak hasznot az alapanyaggyártó, feldolgozó- és felhasználó iparágakban. Ezáltal a nemzeti jövedelem egy jelentős részét az alapanyagkérdés szabja meg.

A jövő kutatók a fémes szerkezeti anyagokra vonatkozóan a következő évtizedekben nem számolnak sok új effektus vagy ismeretlen alapanyag felfe-

* Akadémiai székfoglaló előadás. Elhangzott 1977. március 16-án.

** Dr. Stefán Mihály, 1022 Budapest, Mák u. 6.

dezésével. Ezért a gazdasági fejlődés objektív feltételévé válik az anyagokra vonatkozó ismeretek bővítése, az optimális tulajdonságokat biztosító tényezők — kémiai összetétel és a szerkezeti átalakulások — összefüggéseinek mélyebb feltárása, az előre megtervezhető tulajdonságok kialakításához szükséges feltételek megteremtése, az anyag és energia takarékosságra optimalizált technológiák kidolgozása és bevezetése.

Már a gyakorlatban is régóta ismert, hogy egy anyag tulajdonságait az elektronszerkezet, a makroszerkezet és a mikroszerkezet határozza meg, de nem tehető túl régre az a felismerés, hogy a három közül a döntő befolyásoló tényező éppen a néhány atomtávolságtól, ~10Å-tól, a néhány ezer Å-ig terjedő mikrotartományok szerkezete. Több mint 4 évtizede ismert a kristályhibák (vakanciák, diszlokációk, szemcsehatárok) hatásának jelentősége a szilárdtestek elektromos, mágneses, optikai és mechanikai tulajdonságaira, azonban az elméleti jóslatok és a kísérleti eredmények közötti egyezés csak kvalitatív jellegű volt. A szilárdanyag tulajdonságainak tényleges megismerése akkor gyorsult fel, amikor sikerült extrém tisztaságú és gyakorlatilag hibamentes egykristályokat előállítani és tulajdonságaikat összehasonlítani az ismert, közönséges tisztaságú, polikristályos anyagokéval. Ezek a kutatások hozták meg azt a felismerést, hogy a szilárdtestek tulajdonságait döntően a kristályhibák, azaz az anyag mikroszerkezete határozza meg. Ez az az időszak, amikor a kohászatban új korszak kezdődik a szilárdtest fizika eredményeinek felhasználásával. A Nobel-díjas W. SCHOCKLEY [1], a tranzisztor egyik felfedezőjének szavaival, aki „A szilárdtestek fizikája az elektronikában és a kohászatban" c. tanulmányában azt írja: „Az összehangoló alapelv, amelynek alapján az elektronikát és a kohászatot mint a szilárdtestek fizikájához szorosan kapcsolódó tárgyköröket együttesen tárgyaljuk, az, hogy mindkét esetben az anyagok fontos tulajdonságai a kristályhibákból származnak." Elindul az olyan rendszerű anyagkutatás, amelyben cél a kémiai összetételtől, az elektron-, makro- és mikroszerkezettől a tulajdonságokig terjedő elméleti összefüggések és ezeknek a gyártási műveletekkel, valamint a felhasználással való kapcsolatának a feltárása.

Az anyagok előállítása során felhasznált gyártási műveletek alapvetően megváltoztatják az anyagok mikroszerkezetét és ezáltal a tulajdonságaikat. Az 1. ábrán a fémes szerkezeti anyagok tulajdonságait meghatározó tényezők és a gyártási műveletek közötti összefüggések láthatók. Az olvasztásnál használt betétanyagok, a kemence bélés (vagy tégely) összetétele, a salak és dezoxidálás rendszere és az olvasztási tér gázösszetétele együttesen szabják meg a tulajdonságokat alapvetően meghatározó kémiai összetételt, amelybe az alapösszetételen kívül beleértendő a mikroötvözők, szennyezők mennyisége, a gáz- és zárványtartalom is. A félkész termékké való feldolgozás során alkalmazott hőkezelések hőmérséklete, ideje és atmoszférája, a képlékeny alakítás mértéke és hőmérséklete befolyásolják a szennyező tartalom

1. ábra. A fémes szerkezeti anyagok tulajdonságait meghatározó tényezők és a gyártási műveletek összefüggései

mennyiségét és eloszlását, a diszlokáció szerkezetet, a textúrát, a fizikai-kémiai rendállapotot: az atomi rendezettséget és a fázisszerkezetet, amely magában foglalhatja kiválások létrehozását vagy feloldását nemesíthető ötvözetekben és diszperz fázisok kialakítását (pl. belsőoxidációval). Ahhoz, hogy a gyártás folyamán a kémiai összetétel és a mikroszerkezet változásokat megismerjük, nyomon kövessük és az elérni kívánt fizikai vagy mechanikai tulajdonságok kialakításához definiáltan létrehozzuk, a kohászatban alkalmazott fizikai-kémiai, pirometallurgiai, fémtani és az üzemi gyakorlathoz kapcsolódó műszaki ismeretek mellett szükség van még sok olyan ismeretre, vizsgálati módszerre és mérőberendezésre, amelyeket pl. kvantumkémikusok, atomfizikusok vagy szilárdtestfizikusok esetleg alapkutatások elvégzésére dolgoztak ki, vagy alkalmaztak.

Az anyagok tulajdonságaiban rejlő lehetőségeket jobban kihasználni, új tulajdonság kombinációkat létrehozni vagy már ismert anyagok tulajdonságait tökéletesíteni hatékonyan csak olyan rendszerű kutatással lehet, amelyben a kutatási program a gondolat felvetésétől kiindulva egészen a népgazdasági hasznosításig terjed, azaz egyidejűleg fogja át az elméletet, a technológiát és alkalmazást. Az ilyen típusú kollektív kutatás révén művelhető az anyagtudomány, amelynek egységes kutatási tárgya maga a szilárdanyag, felépítésével, reakcióképességével és változékonyságával együtt.

Ha végigtekintünk a kohászat közel 6000 éves múltján, rá kell jönnünk, hogy az anyagtudomány sugallta szemlélet a kohászattól nem idegen. Az anyagtudománnyal a kohászok régi vágyálmának a megvalósulása kezdődött el, hogy a kívánt vagy megadott tulajdonságú anyag előállításához tudatos tervezéssel lehessen az összetételt és a technológiai műveleteket megválasztani, amelyek végrehajtásával valóban az előretervezett tulajdonságú anyag lesz a végeredmény. Ma már az elektromos és mágneses tulajdonságok tervezésében elért sikereken túl a W. HUME-ROTHERY elektron/atom hányadosok szerepére vonatkozó felfedezése nyomán 6 ÷ 10-féle ötvöző elemet tartalmazó Ni alapú szuperötvözetek összetétel—szerkezet—hőállóság összefüggésének megtervezését számos laboratóriumban alkalmazzák. A számítógéppel irányított metallurgiai folyamatokkal, a fémes szerkezeti anyagok összetétele, mikroszerkezete, fizikai és mechanikai tulajdonságai közötti mennyiségi összefüggések feltárásával a kohászatban valóban egy új korszak kezdődött el.

Az anyag- és energiahiánnyal küzdő és hulladékfelesleggel elárasztott korunkban az új korszakát élő kohászat jelentősége az elkövetkező évtizedekben egyre nagyobb mértékben fog növekedni.

Az utóbbi két évtized kutatásainak a gyakorlat szempontjából egyik legfontosabb kérdése, hogy a kis mennyiségben jelenlevő idegen elemek — amelyeket a legtöbb esetben szennyezőként vagy tudatosan adagolva mikroötvözőként emlegetnek — milyen hatással vannak a tiszta fémek és ötvözetek fizikai és mechanikai tulajdonságaira. A kohászatban a szennyezők által okozott nehézségek már igen régóta ismertek és bár hatásuk kiküszöbölésére számos mikroötvözési módszer ismert, még sok esetben nem elég mélyen feltártak azok a folyamatok, amelyeken keresztül az idegen elemek, szennyezők vagy mikroötvözők kifejtik hatásukat.

A hazai ipar, elsősorban a finomkohászat követelményeiből kiindulva kutató- és fejlesztő munkánk egyik fontos célja volt — és marad a következő évekre is — az anyagokban kis mennyiségben jelenlevő idegen elemek szerepének mélyebb megismerése és hatásuk kiaknázásának megfelelő gyártási eljárások kidolgozása.

Ennek a célnak megfelelően kutatásaink fém—gáz rendszerek vizsgálatára, a szennyezők és mikroötvözők fizikai tulajdonságokra és az alakíthatóságra kifejtett hatásának a feltárására, valamint a program megvalósításához szükséges mérőberendezések és vizsgálati módszerek fejlesztésére irányulnak.

1. Fém—gáz rendszerek

A fémes szerkezeti anyagok, acél és színesfém félgyártmányok előállításánál a kiinduló gyártási művelet leggyakrabban az olvasztás, amely döntő mértékben befolyásolja az anyagok kémiai összetételét, szennyező, gáz- és

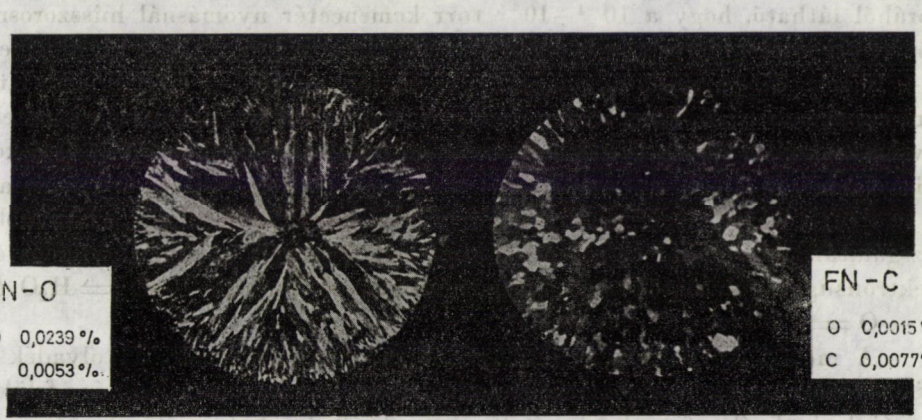
zárvány tartalmát és ezáltal az elérni kívánt tulajdonságokat. A kémiai összetétel nemcsak olvasztással, hanem a hőkezeléskor végbemenő folyamatok eredményeként is jelentősen megváltoztatható (pl. belsőoxidáció, dekarbonizálás).

Az iparban alkalmazott olvasztási és hőkezelési folyamatokban a H, C és O az az elem, amely „hasznosan vagy károsan", de mindig jelen van.

A hidrogén hasznos, amikor oxigénnel, kénnel vagy szénnel végbemenő reakcióját kihasználva tisztító hatást fejt ki, elég megemlíteni a Cu- és Ni-ötvözetek dezoxidációját vákuumolvasztásnál vagy a dekarbonizálást és kéntelenítést H_2-atmoszférában végzett hőkezeléssel. Káros a hidrogén azonban, amikor önállóan vagy oxigénnel reagálva gázhólyagok formájában van jelen és ezáltal az anyag ridegségét és törékenységét okozza.

A szén hasznos, amikor pl. az acélgyártásban szilárdságnövelő ötvöző elemként adagoljuk, az oxigén is, amikor diszperziós fázisok létrehozásáért diffundáltatjuk pl. egyes Cu-ötvözetekbe a mechanikai tulajdonságok javítása céljából. A szén és oxigén káros pl. egy lágymágneses ötvözet mágneses tulajdonságai szempontjából, de alkalmas mágnesteres lágyítás után ugyanaz az O- és C-mennyiség a mágneses jellemzők jelentékeny javulását is okozhatja. A szén és az oxigén egyértelműen káros, ha a fémek vagy ötvözetek kristályhatárai mentén dúsul fel, mert képlékeny alakításra alkalmatlanná teszi az anyagot. Példaként említjük a 0,0082%-nyi szenet a tiszta vas vagy a 0,003% oxigént a Mo, W, V alakíthatóságának megakadályozására. A 2. ábra két, azonos alapösszetételű, csupán oxigén- és széntartalomban különböző FeNi ötvözetünk igen eltérő makro-szövetszerkezetét mutatja, a két ötvözet közül a 0,0239% oxigéntartalmú egyáltalán nem alakítható. Elmondható, hogy a H, C és O döntő mértékben képes megváltoztatni az anyagok fizikai és kémiai tulajdonságait.

Műszaki-gazdasági szempontok alapján éppen ezen intersztíciós szilárdoldatokat képező elemeknek az olvadt vagy szilárd fémekkel és egymással



2. ábra. Két FeNi 58% ötvözet makro-szövetszerkezete, amelyek csupán oxigén- és széntartalomban különböznek egymástól

való kölcsönhatásai a jelen és a jövő kohászata számára alapvetően fontosak.

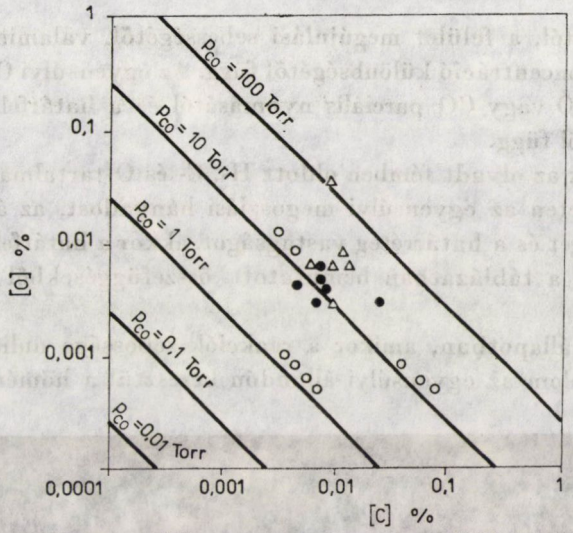
Az 1960-as évek végén a színesfémkohászat fejlesztésében jelentős esemény volt a nagytisztaságú oxigénmentes rézolvasztás és folyamatos öntés bevezetése. A feladat megoldásához szükség volt az olvasztókemencében a gáztér—olvadtfém kölcsönhatásának, a kristályosodáskor lejátszódó folyamatoknak, a szilárd réz szennyezői kölcsönhatásának mélyebb megismerésére. Ennek érdekében széles körű kutatómunkát szerveztünk.

A kutatómunkák során többek között vizsgáltuk az olvadt rézben oldott H és O egyensúlyi viszonyait és a kristályosodáskor gázbuborékok képződésével járó folyamatokat.

A nagy jelentőségű Fe és Fe—Ni alapú lágymágneses anyagok fejlesztése a C és O káros vagy hasznos szerepének a megismerését igényelte és a hatásuknak megfelelően megalapozott gyártási eljárások kidolgozását. Ezen kutatómunka keretében vizsgáltuk a C- és O- tartalom változását olvasztásnál, hőkezelésnél és a gyakorlatilag C- és O-mentes Fe és Fe—Ni ötvözetek előállítási lehetőségeit. Ennek a két feladatnak (a nagytisztaságú O-mentes réz olvasztása és folyamatos öntése, a C- és O-mentes vagy meghatározott C- és O-tartalmú Fe és Fe—Ni alapú lágymágneses anyagok gyártása) a megoldása az Me—H—O rendszerekben lejátszódó folyamatok egyensúlyának és sebességének a vizsgálata alapján közösen tárgyalható.

A Fe—Ni ötvözeteken végzett kísérleteink eredménye, az ismételt elektronsugaras olvasztásokkal, H_2-ben és vákuumban végzett hőkezelésekkel elért legkisebb C- és O-tartalom vonatkozásában, összhangban van G. Ogiermann és társai [2] a Degussa, H. Hinze [3] a Leybold Heraeus kutatója által közölt eredményekkel, azaz a $C+O \rightleftharpoons CO$ reakció egyensúlya alapján várható C- és O-tartalomtól a tényleges C- és O-tartalom jelentősen eltér. A vákuumindukciós és elektronsugaras olvasztások eredményeit bemutató 3. ábrából látható, hogy a $10^{-4} \div 10^{-5}$ torr kemencetér nyomásnál hússzorosra növelt olvasztási idő esetén is olyan C- és O-tartalmak alakulnak ki, amelyek $1 \div 10$ torr CO parciális nyomásnál tekinthetők egyensúlyi értékeknek. Különösen szembetűnő, hogy a 20 ppm C- és 90 ppm O-tartalom esetén ismételt olvasztásoknál a tömegspektrométerrel nem észleltünk CO képződést és a kémiai elemzések is változatlan C- tartalomról tanúskodtak. A C- és O-tartalmak és az olvasztási tér parciális nyomásviszonyai ellentmondásosságának a további vizsgálatára quadrupol tömegspektrométerrel felszerelt vákuumindukciós és elektronsugaras olvasztókemencékben tanulmányoztuk a $2H + O \rightleftharpoons H_2O$ és $C + O \rightleftharpoons CO$ reakciók kinetikáját.

A mérési és elemzési eredményeket az olvadék—gáztér, az olvadék—szilárd fázis határokon végbemenő reakciók transzport folyamatainak és a felület megújulási elmélet figyelembevételével analizáltuk. A levezetések végeredményét az 1. táblázatban összefoglalva közöljük. A reakciók sebessége az O



3. ábra. **A vákuumindukciós és elektronsugaras olvasztásoknál kialakuló C- és O-tartalmak az olvasztási tér parciális nyomásviszonyai függvényében (○ jelzésű pontok saját méréseink, a •, △ jelzésűek G. OGIERMANN [2]-ben közölt eredményei)**

I. Táblázat

A fém—hidrogén—oxigén és fém—szén—oxigén rendszerekre vonatkozó összefüggések

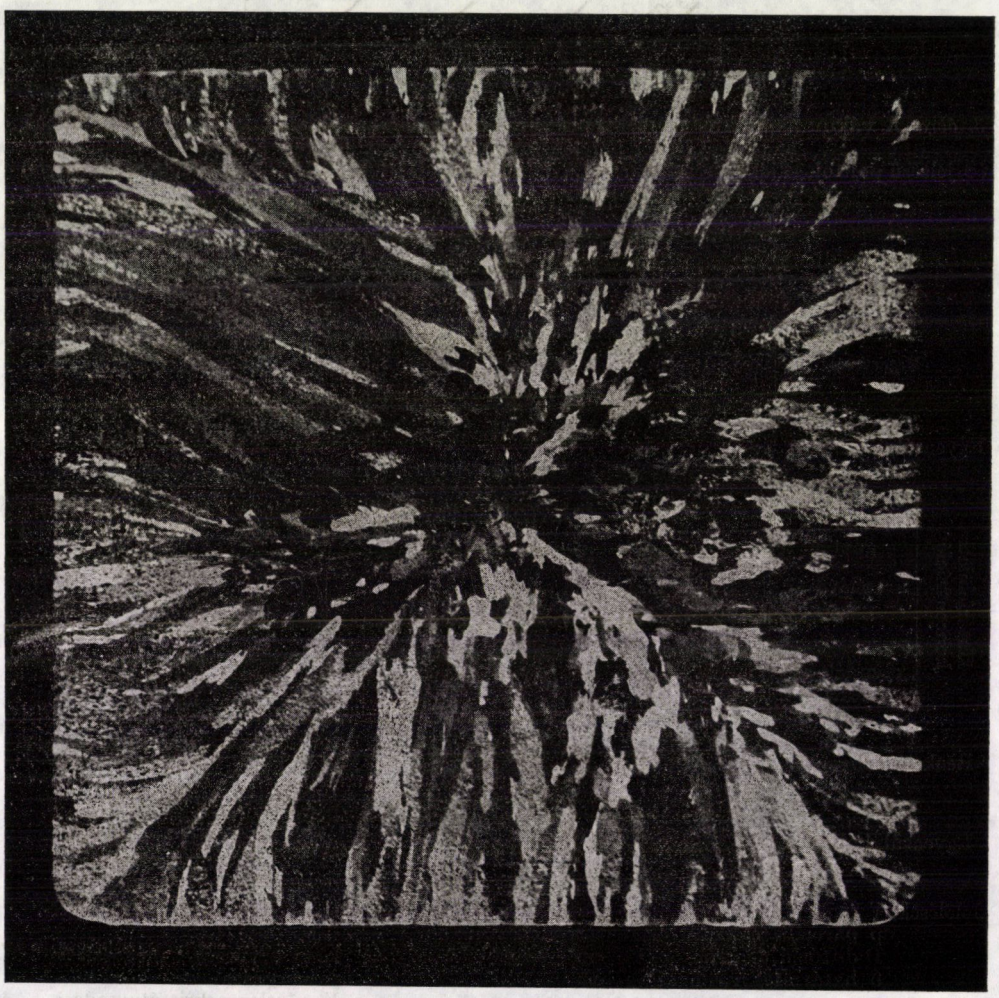
Megnevezés		Rendszer: Me—H—O $2[H] + [O] \rightleftarrows (H_2O)$	Rendszer: Me—C—O $[C] + [O] \rightleftarrows (CO)$
Egyensúlyi állandó		$K = \frac{[H]^2 \cdot [O]}{p_{H_2O}}$	$K = \frac{[C] \cdot [O]}{p_{CO}}$
Határfelületi koncentráció	olvadék-gáztér szilárd-gáztér	$[H^*] = \sqrt{K p_{H_2O}} \left[\sqrt{\frac{(A[O]-[H]^2)^2}{4AKp_{H_2O}} + 1} - \sqrt{\frac{(A[O]-[H]^2)^2}{4AKp_{H_2O}}} \right]$, $A = \sqrt{\frac{D_0}{D_H}}$	$[C^*] = \sqrt{K p_{CO}} \left[\sqrt{\frac{(B[O]-[C])^2}{4BKp_{CO}} + 1} - \sqrt{\frac{(B[O]-[C])^2}{4BKp_{CO}}} \right]$, $B = \sqrt{\frac{D_0}{D_C}}$
	olvadék-szilárd	$[H^*] = \frac{[H]}{k_0} e^{-\bar{V} \cdot \frac{\delta}{D_H}}$	$[C^*] = \frac{[C]}{k_0} e^{-\bar{V} \cdot \frac{\delta}{D_C}}$
Reakció sebesség		$V_{H_2O} = \sqrt{D_0 s} \left([O] - \frac{K \cdot p_{H_2O}}{[H^*]^2} \right)$	$V_{CO} = \sqrt{D_0 \cdot s} \left([O] - \frac{K \cdot p_{CO}}{[C^*]} \right)$
Egyensúlyi állapot		$V_{H_2O} = 0 \quad [O] = \frac{K \cdot p_{H_2O}}{[H^*]^2}$	$V_{CO} = 0 \quad [O] = \frac{K \cdot p_{CO}}{[C^*]}$

Jelölések: V reakció sebesség, g-mol · cm^{-2} · sec^{-1}
p parciális nyomás, torr
D diffúzió állandó cm^2 · sec^{-1}
δ határréteg vastagság cm
s = felület megújulási sebesség, sec^{-1}
k_0 = egyensúlyi megoszlási hányados
$\bar{V}$ = átlagos kristályosodási sebesség, cm · sec^{-1}

diffúzió állandójától, a felület megújulási sebességétől, valamint a tényleges és egyensúlyi O koncentráció különbségétől függ. Az egyensúlyi O koncentráció pedig a gáztér H_2O vagy CO parciális nyomásától és a határfelületi H* vagy C* koncentrációtól függ.

Ha ismerjük az olvadt fémben oldott H-, C- és O-tartalmat, az olvadék-szilárd határfelületen az egyensúlyi megoszlási hányadost, az átlagos kristályosodási sebességet és a határréteg vastagságot, akkor a határfelületi H* vagy C* koncentrációt a táblázatban bemutatott összefüggésekből lehet meghatározni.

Egyensúlyi állapotban, amikor a reakciók sebessége nulla, az elérhető minimális O-tartalom az egyensúlyi állandón keresztül a hőmérséklet, a gáz-



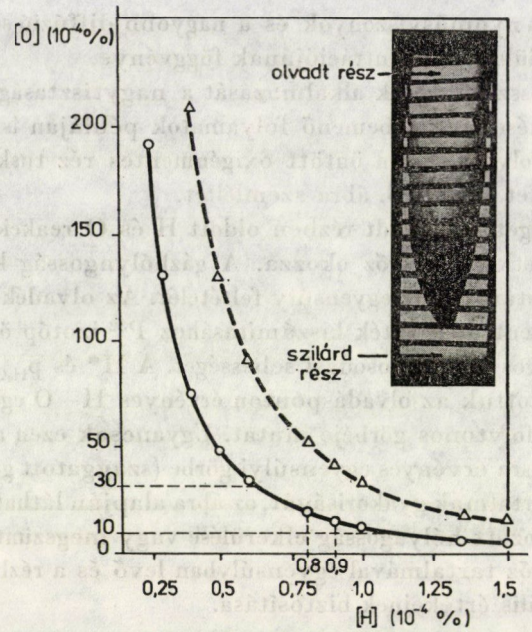
4. ábra. Egy folyamatosan öntött gázhólyagos réztuskó makro-szövetszerkezete

fázisban a parciális nyomásviszonyok és a nagyobb diffúzió sebességű elem, a H vagy C, határfelületi koncentrációjának függvénye.

A felismert összefüggések alkalmazását a nagytisztaságú oxigénmentes réz folyamatos öntésekor végbemenő folyamatok példáján ismertetjük. Gyakori hibaforrás a folyamatosan öntött oxigénmentes réz tuskókban is a gázhólyagosság, amelyet a 4. és 5. ábra szemléltet.

Ezt a jelenséget az olvadt rézben oldott H és O reakciójából a megszilárdulás során keletkező vízgőz okozza. A gázhólyagosság kiküszöböléséhez szükség volt meghatározni az egyensúly feltételét. Az olvadék-szilárd fázis határfelületi H* koncentráció érték kiszámításához P^{32} izotóp ötvözésével meghatároztuk az átlagos kristályosodási sebességet. A H* és p_{H_2O} értékeket meghatározva kiszámítottuk az olvadásponton érvényes H—O egyensúlyi görbét, amelyet a 6. ábra folytonos görbéje mutat. Ugyancsak ezen az ábrán látható az olvadék-gáz fázisra érvényes egyensúlyi görbe (szaggatott görbe). Figyelembevéve a H- és O- tartalmak gyakoriságát, az ábra alapján látható, milyen lényeges a H_2O által okozott hólyagosság elkerülése vagy megszüntetése érdekében az olvasztótér vízgőz tartalmával egyensúlyban levő és a rézben oldott H- és O-tartalom minimális értékeinek biztosítása.

5. ábra. A 4. ábrán látható makro-szövetszerkezeti kép részlete



6. ábra. A folyamatos rézöntésnél az olvadék-szilárdfázisban (az olvadásponton) és az olvadék-gáz fázisban (szaggatott görbe) érvényes H—O egyensúlyi görbék

A közeljövőben bevezetésre kerülő rákristályosító-alakító nagytisztaságú oxigénmentes rézhuzal gyártó eljárásnál, az olvadék-szilárd határfelületen a folyamatos öntésnél feltárt törvényszerűség érvényesül, azaz H_2O buborékok képződnek az olvasztó kemence gázterének vízgőz tartalma függvényében. Ha ez bekövetkezik, teljesen megszakadhat a rákristályosodás folyamata.

Természetesen a Cu—H—O rendszer, illetve a réz folyamatos öntésekor lejátszódó folyamat modelljét kiterjeszthetjük az Fe—C—O rendszerre, illetve az acél folyamatos öntésére is.

2. Idegen elemek hatása az alakíthatóságra

Az utóbbi 20 év fémfizikai kutatásainak a gyakorlat szempontjából egyik legérdekesebb kérdése, hogy milyen hatással vannak a kis mennyiségben jelenlevő idegen elemek (fémes, nem-fémes szennyezők, mikroötvözők) a fémek és ötvözetek tulajdonságaira. A fémek mechanikai tulajdonságai szempontjából elsőrendű fontosságú az a forma, amelyben a szennyezők jelen vannak: gáz vagy szilárd állapotban, intermetallikus vagy nem-fémes vegyületek alakjában, egyenletes eloszlásban vagy a szemcsehatárok mentén szegregálódva.

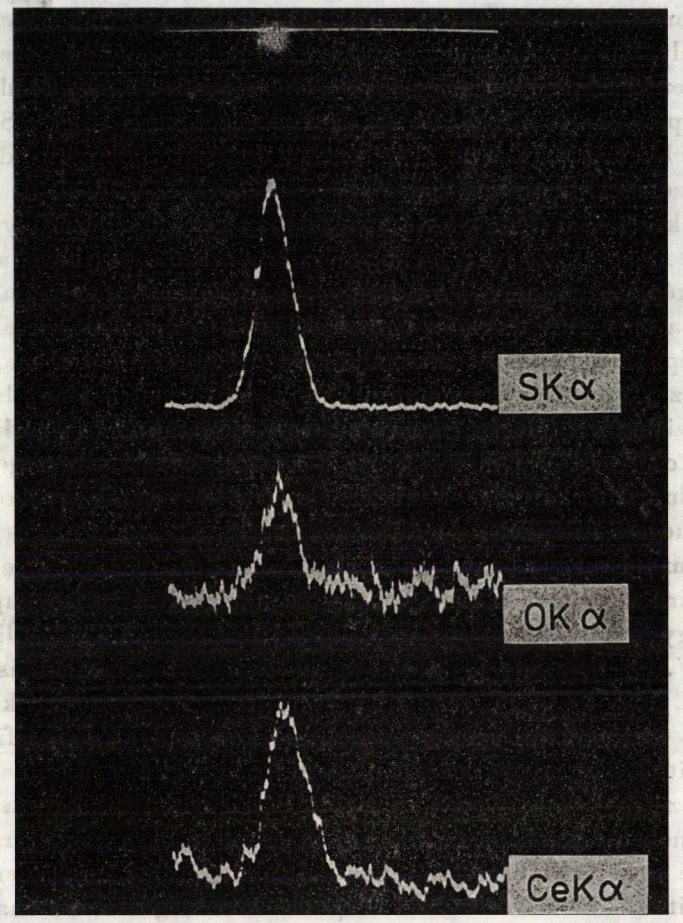
A fémek alakíthatósága szempontjából különösen azok a szennyezők károsak, amelyek a szemcsehatárokon eutektikumok formájában szegregálódnak és ezek az eutektikumok a melegalakítási hőmérsékleten megolvadnak. A legismertebb példák erre a Bi és Pb réz és rézötvözetekben vagy a S vas- és nikkelötvözetekben. Ezeknek az elemeknek a hatását többnyire adalék elemek mikroötvözésével ellensúlyozzák.

A mikroötvöző elemek hatását általában két különböző folyamattal magyarázzák. Az egyik azon alapul, hogy a mikroötvöző elem a káros szennyezővel zárványt képezve megnöveli a kristályosodási középpontok számát és ezáltal csökkenti a szemcsék méretét. Ebben az esetben az adalékelemek igen erős vegyületképződési hajlamát használják fel a finomító hatás magyarázatára. A másik az adszorpciós folyamaton alapul, amely azt a tényt használja fel, hogy a fázishatár felületén adszorbeálódott felületaktív (a fázishatár felületi energiáját csökkentő) elem csökkenti a kristályosodási sebességet és ezáltal fejti ki finomító hatását. Mindkét elméletnek vannak gyakorlati példái, amelyek megerősítik őket, de általános érvénnyel nem rendelkeznek. Egyik elmélet sem ad magyarázatot az adalékelemből szükséges nagyon kis mennyiség okára vagy arra a tényre, hogy az adalékelem javító vagy módosító hatását egy határkoncentráció értékig fejti ki, további adagolás felesleges. Újabban V. Sz. CSERNOV [4] próbálta a két elmélet ellentmondásait feloldani oly módon, hogy az adalékelemek módosító hatását egyszerűen koncentrációs túlhűléssel magyarázta, amely szemléletes képet ad a szemcsefinomodásról, de az alakíthatóság megváltozását nem tudja kielégítően jósolni.

Hosszú évek óta végzett mikroötvözési kísérleteink tapasztalatai részben egyeznek a fentiekkel, részben új megfontolásokra kényszerítenek.

A Fe és FeNi ötvözetek mechanikai tulajdonságai kedvezően befolyásolhatók a ritkaföldfémek erős kén megkötő képességének a felhasználásával. 0,02% Ce adagolás hatására az oszlopos kristályszerkezet finom szemcsévé változik és a szemcsehatárokon nem mutatható ki szulfid kiválás. A szemcsékben véletlenszerű eloszlásban ritkaföldfém-szulfidok és ritkaföldfém-oxi-szulfidok mutathatók ki mikroszondával (7. ábra). A ritkaföldfém adagolás esetében a szemcsehatáron feldúsuló kén megkötésén kívül az is fokozza a mechanikai tulajdonság javulást, hogy az alakíthatóság szempontjából a gömbszerű ritkaföldfém-szulfidok és -oxi-szulfidok kedvezőbbek, mint például a szálas mangán-szulfid kiválások a szokásos Mn-kéntelenítésnél.

A rézötvözetekben végzett mikroötvözési kísérleteink a technológiai képlékenység és a makroszerkezet összefüggésében érdekes eredményt adtak. A 8. ábra Zr és Ce mikroötvözés eredményét mutatja Monel ötvözetben. A Zr kiváló szemcsefinomítónak bizonyult, míg a Ce adagolás hatására nem változott meg a kedvezőtlen szemcseszerkezet. A két ötvözet mechanikai tulajdonságaiban jelentős különbség volt. Ugyanakkor α-sárgarézben a cirkonadalék a nagyfokú szemcsefinomodás ellenére sem változtatta meg a melegalakítható-



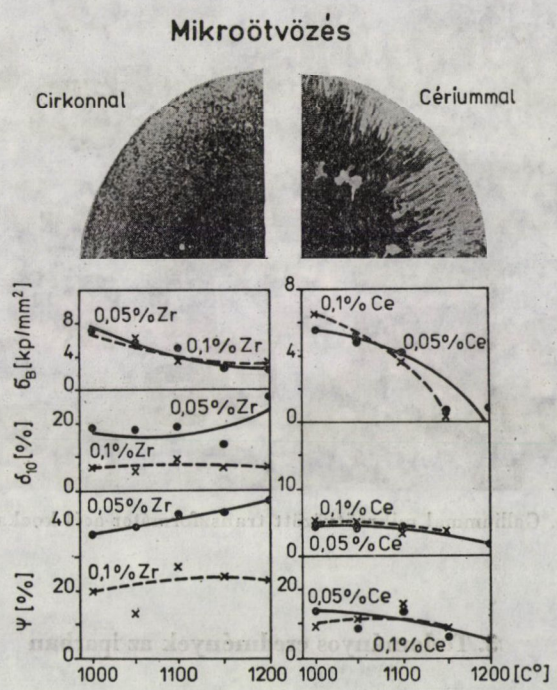
7. ábra. FeNi ötvözetben egy ritkaföldfém-oxi-szulfid kiválás visszavert elektronképe és a megfelelő vonal menti intenzitás görbék

sági tulajdonságokat, míg az oszlopkristályos makroszerkezetű cérium tartalmúé jelentősen javult.

A különböző mikroötvöző és szennyezőtartalmú ötvözetek makroszerkezete és alakíthatósága közötti összefüggések részletes vizsgálata azt mutatta, hogy a technológiai képlékenységet nagymértékben a szemcsehatár összetétele és állapota befolyásolja.

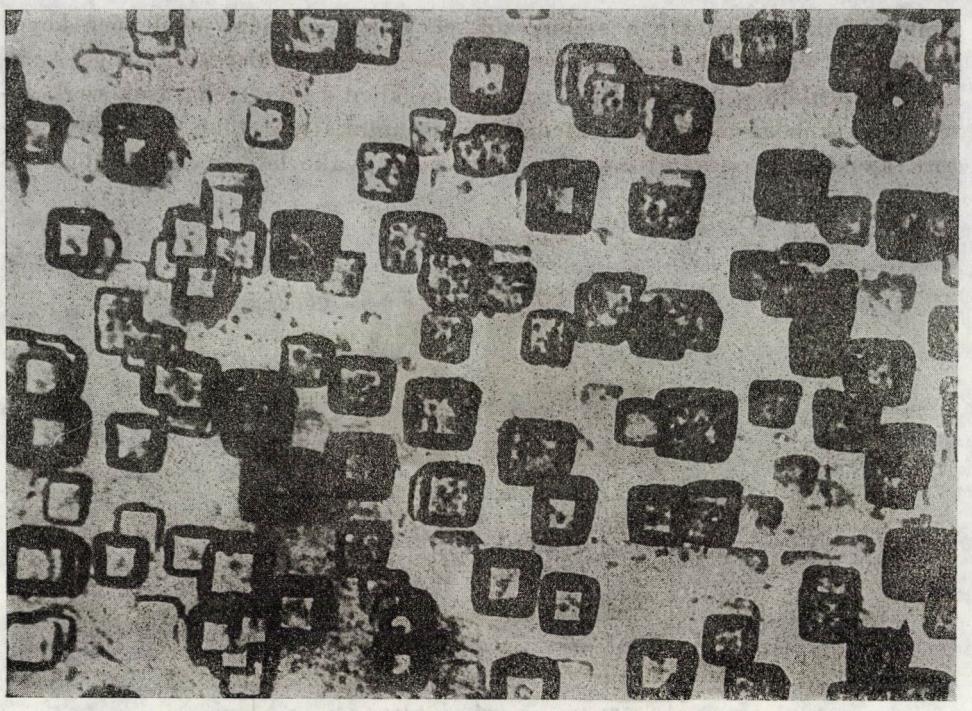
Ennek a megfigyelésnek különös jelentőségét az adja, hogy felhívja a figyelmet a szemcsehatárra, mert a gyakorlatban számos tulajdonságot a szemcseméretttel hoznak összefüggésbe, pedig ismert, hogy a képlékeny tulajdonságokat elsősorban a kristályhibák: vakanciák, interszticiós atomok (Frenkel-hiba), diszlokációk, rétegződési hibák és szemcsehatárok szabják meg, vala-

mint ezek kölcsönhatása a szennyezőkkel. Ennek ellenére meglepően kevés ismeretünk van a szemcséket elválasztó belső határfelületek tényleges szerkezetéről, tulajdonságairól. Bár az utóbbi években a szemcsehatárok szerkezetére vonatkozóan megindult intenzív kutatómunka már több eredményt hozott. Ezeknek a vizsgálatoknak az egyik nagy gyakorlati értéke a különböző



8. ábra. Cirkonnal és céríummal mikroötvözött Monel-ötvözet makro-szövetszerkezete és melegalakíthatósági tulajdonságai (a makroszerkezet a 0,05% adalékmennyiséghez tartozik)

textúrák kialakulásának megértésében és megfelelő kiaknázhatóságában rejlik. Ugyanis jól választott mikroötvözéssel és hőkezeléssel szabályzott szennyező tartalom kialakítással és kellő mértékű alakítással elérhető, hogy bizonyos orientációjú szemcsehatárok mozgékonnyá váljanak és a többi szemcse kárára növekedve megfelelő textúrát hozzanak létre. Pl.: a mágneses tulajdonságok szempontjából kedvező kockatextúrát tudunk előállítani Ga mikroötvözéssel (9. ábra). Más feltételek mellett viszont meg tudjuk akadályozni a kedvezőtlen kockatextúra kialakulását oxigénmentes nagytisztaságú rézben vagy 50%-os Fe—Ni ötvözetekben.



9. ábra. Galliummal mikroötvözött transzformátor acél kockatextúrája

3. Tudományos eredmények az iparban

A hosszú évek kutató- és fejlesztő munkájának vázolt tudományos eredményei részben már megvalósultak a Csepel Művek ipari termelésében, részben folyamatosan valósulnak meg az új beruházások során. Néhányat ezek közül érintőlegesen felsorolunk:

— oxigén- és gázhólyagmentes, folyamatosan öntött tuskó, rákristályosító-alakító eljárással készülő huzal, irányított kristályosítással és intenzív alakítással hengerelt szalag gyártási feltételeinek a biztosítása a nagytisztaságú rézolvasztó és hőntartó kemencék gázterének folyamatos elemzése és automatikus szabályozása útján.

— vákuumindukciós olvasztó, valamint vákuumív átolvasztó és irányított kristályosító berendezésekben végbemenő metallurgiai folyamatok szabályozásával optimális interszticiós tartalmú finomkohászati anyagok előállítása.

— mikroötvözéssel és irányított kristályosítással intenzív alakításra alkalmas kiinduló anyagok előállítása, anyag- és energia-takarékos technológiák alkalmazása.

Köszönetnyilvánítás

A szerző ezúton fejezi ki hálás köszönetét mindazoknak, akik célkitűzéseinek megvalósításában segítették, támogatták, egyes kísérletek elvégzésével munkáját előrevitték. Elsődlegesen köszönet illeti a Csepel Művek vezetőségét a támogatásért, a Csepel Művek Fémművének munkatársait a kísérletek végzésében nyújtott segítségért, a közreműködő intézetek — MTA KFKI Szilárdtest Fizikai Intézet, NME Fémkohászati Tanszék, ELTE Szilárdtestfizikai Tanszék és az ALUTERV-FKI — kutatóit számos kísérlet elvégzéséért.

IRODALOM

1. SHOCKLEY, W.: Solid State Physics in Electronics and in Metallurgy. *Journal of Metals* **4** (1952), 829—849
2. OGIERMANN, G.—SCHMIDTMANN, E.—SCHENCK, H.: Reinheitsgrad, Gefügeausbildung und mechanische Eigenschaften von im Electronenstrahlofen geschmolzenem Reineisen. *Archiv für das Eisenhüttenwesen* **36** (1965), 423—436
3. HINZE, H.: Vakuumerschmelzung hochlegierter Stähle und Superlegierungen. *Haus der Technik* Heft **285** (1972), 1—15
4. CSERNOV, V. Sz.—BUSZOL, F. I.: O mehanize modificirovanija metallov. *Metallü* **2** (1975), 71—75

The Role of Material Science in Metallurgy and Some Results. — The author investigates the effect of small quantities of foreign elements on metals and metal alloys, which may be impurities or intentionally added microelements, on the physical and mechanical characteristics. More detailed he discusses the equilibrium conditions of the metal—gas systems developing during smelting and of their influence on the qualities of the final product, as well as the various action mechanisms of the microelements which are suitable for influencing the ductility of the metals. Finally, he shows how the results of research can be realized in industrial production.

Rolle und einige Ergebnisse der Werkstoffwissenschaft im Hüttenwesen. — Der Verfasser untersuchte den Einfluß von kleinen Mengen von Fremdelementen — Verunreinigungen oder bewußt zugesetzte Mikrolegierungen — auf die physikalischen und mechanischen Eigenschaften von Metallen und Legierungen. Die Gleichgewichtsbedingungen der während des Schmelzens sich entwickelnden Metall-Gas-Systeme sowie deren Einfluß auf das Endprodukt werden eingehend besprochen. Ebenso werden die verschiedenen Wirkungsmechanismen der Mikro-Legierungselemente untersucht, durch welche die Formarbeit der Metalle beeinflußt werden kann. Schließlich wird gezeigt, wie die Forschungsergebnisse sich in der industriellen Produktion realisieren.

AZ ACÉL ZÁRVÁNYOSSÁGÁNAK VIZSGÁLATA ÉS MINŐSÍTÉSE*

— HELYZETKÉP —

HAUSZNER ERNŐ—TARDY PÁL
és
VERŐ JÓZSEF
AZ MTA RENDES TAGJA

1. Az acél zárványosságának eredete és következményei

1.1. *Az acél zárványosságának eredete*

Az acél nemfémes zárványain vasnak és ötvözőelemeinek nemfémes elemekkel alkotott és a kristályos vasban kevéssé vagy egyáltalán nem oldódó vegyületeit értjük. A zárványképző elemek közül leggyakoribb a kén és az oxigén. A kénnel rokon foszfor és arzén mennyisége rendszerint nem elegendő zárványok képzéséhez. A karbon vegyületei, a karbidok, a legtöbb acélfajtának hasznos, szükséges alkotórészei; ezeket csak akkor tekinthetjük zárványnak, ha az acél szövetében kedvezőtlenül helyezkednek el, például szerszámacélban hálósan vagy erős sorosságban. A nitrogén vegyületei közül zárványnak tekintendő a TiN és ZrN, de már az AlN és a Nb(N, C) csak kivételesen minősíthető zárványnak, olyankor, ha a mennyiségük szokatlanul nagy és helyenként csoportosulnak. Az AlN és a Nb(N, C) jelenléte többnyire hasznos, megfelelő hőkezelés után növelik az acél teherbíró képességét.

Ha az acél zárványait említjük, rendszerint csak az oxidokra és szulfidokra gondolunk. Szűkebb értelemben csak ezeket minősítjük zárványnak. A következőkben is ezekkel foglalkozunk.

A két jelentős zárványképző elem, a kén és az oxigén, a metallurgiai műveletek során kerül az acélba. A kén főleg a tüzelőanyagokból származik; az acélgyártáshoz használt féltermék, az acélnyersvas jórészt már a nagyolvasztóból hozza magával. Az acélgyártás lényegében oxidáló művelet, célja a felesleges ötvözőelemek eltávolítása a nyersvasból. Az oxidáló anyag lehet oxidos vasérc — lehetőleg tiszta hematit vagy vasreve — vagy oxidáló gáz, például tiszta oxigén. Az oxidáló művelet, a frissítés végén bizonyos mennyiségű oxigén az acélban oldva marad.

* Készült az MTA Műszaki Tudományok Osztályvezetőségének 1974. február 5-i határozata értelmében. Megvitatta és jóváhagyta a Fémszerkezeti Bizottság 1977. november 8-án .

Kénből az olvadt színvas jelentős mennyiséget, többször tíz százalékot is oldhat. Az acél ötvözőelemei, elsősorban a karbon, ezt a mennyiséget csökkentik. A C% karbontartalmú acélban oldva maradó kén mennyisége megközelítően a

$$[C\%]\ [S\%] \cong 0{,}011 \tag{1}$$

összefüggésből számítható ki.

További kéntelenítés céljából az acélt olyan salakkal hozhatjuk lehetőleg benső érintkezésbe, amely sok ként képes magába venni, vagyis amelynek lehetőleg nagy a

$$\delta = \frac{(S\%)}{[S\%]} \tag{2}$$

megoszlási hányadosa. Kerek zárójelben a salak, szögletes zárójelben a fémolvadék összetételét jellemző adatot szokás írni. Ha $[S\%]_k$ kezdeti kéntartalmú acélt a tömegének 100b százalékával egyenlő mennyiségű, δ megoszlási hányadosú salakkal kezeltünk, akkor az $[S\%]_v$ végső kéntartalom

$$[S\%]_v = \frac{[S\%]_k}{1 + b\delta}\,. \tag{3}$$

A kész acél kéntartalma akkor lehet kevés, ha csekély volt az $[S\%]_k$ kezdeti kéntartalma és lehetőleg nagy δ-jú salakkal kezeltük. A tiszta kalcium-aluminát salak δ-ja több száz értékű, a gyakorlati salakoké ennél jóval kisebb. A salak mennyisége, vagyis b értéke nem növelhető mértéktelenül, mert a salak megolvasztása sok hőenergiát kíván. Ha csekély $[S\%]_k$ kéntartalmú acélt jól kéntelenítő salakkal kezeltünk, a végső $[S\%]_v$ kéntartalom 0,01, sőt 0,005%-nál is kevesebb lehet.

Oxigénből az olvadt színvas mintegy 0,2%-ot old, az ötvözőelemeket is tartalmazó acél oldott oxigéntartalma ennél kevesebb. A folyékony acél oldott oxigéntartalmát dezoxidáló művelettel kell még tovább csökkenteni. Evégett olyan D dezoxidáló elemet kell juttatnunk az acélba, amelynek oxidja lehetőleg állandó és ezért kevéssé oldódik az olvadt acélban. Az

$$x[D] + y[0] \rightleftharpoons D_x0_y \tag{4}$$

általános alakban írható dezoxidáló reakciók megfordíthatók és egyensúlyhoz vezetnek, amelyet a

$$K = \frac{a_{D_xO_y}}{a_D^x a_0^y} \approx \frac{1}{[D\%]^x\,[O\%]^y}, \tag{5}$$

vagy az ugyancsak használatos alakban a

$$K' = \frac{1}{K} = [\mathrm{D\%}]^x\,[\mathrm{O\%}]^y \tag{6}$$

kifejezés számértéke határoz meg. Az a aktivitások helyett a szögletes zárójelben álló súlyszázalékos értékekkel számolhatunk, mert kis koncentrációkról van szó. A fontosabb dezoxidáló reakciók egyensúlyára jellemző adatok eléggé ismertek [1, 2]; a $[\mathrm{D\%}]^x[\mathrm{O\%}]^y$ szorzat számértéke 10^{-2}—10^{-10} nagyságrendű, aszerint, hogy a D elem Mn, C, Cr, vagy pedig Si, Al, Ca. A szorzat számértéke zérusnál mindig nagyobb, az acél oxigéntartalma dezoxidálással teljesen nem távolítható el.

A dezoxidáló reakciók egyensúlya a hőmérséklettel is változik a

$$\lg K' = -\frac{A}{T} + B \tag{7}$$

általános alakú összefüggés szerint; A és B reakciónként különböző állandók. A $[\mathrm{D\%}]^x[\mathrm{O\%}]^y$ szorzat számértéke és evvel az olvadt acélban oldott oxigén mennyisége a T hőmérséklet csökkenésével szintén csökken. A dezoxidáló reakciók a hőtermelő folyamatok módjára az acél hűlése közben tovább folytatódnak; az acél kristályosodásának megindulásakor sem szakadnak félbe. A dezoxidáció termékének képződése csak a szolidusz hőmérsékletén ér véget. Utolsó része már kristályok vagy azok dendritágai közé zárt, olvadékkal töltött apró terekben jön létre. Az itt képződő reakciótermék nagyon apró oxidzárványok alakjában természetesen a helyén marad.

A dezoxidáló reakciók termékei a folyékony acélban csak kevéssé oldódnak, ezért szilárd (például Al_2O_3), folyékony (például $MnSiO_3$) vagy gáz alakú (például CO) idegen fázisként kiválnak a fémolvadékból. Részecskéik, cseppjeik vagy gázbuborékjaik sűrűsége kisebb az olvadt acélénál, ezért abban felfelé emelkednek a

$$v = \frac{2g}{9} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \Delta\varrho \cdot r^2 \ \mathrm{cm\,s^{-1}} \tag{8}$$

Stokes-képletből kiszámítható sebességgel. Behelyettesítve a $g = 981\ \mathrm{cm\,s^{-2}}$, a folyékony acél viszkozitásának $\eta = 0{,}023 \div 0{,}028\ \mathrm{g\,cm^{-1}s^{-1}}$ adatát, valamint az acél és a dezoxidáció termékeinek sűrűségkülönbségét $\Delta\varrho = 2{,}5 \div 5\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$ értékkel, azt találjuk, hogy az $r = 10^{-1} \div 10^{-10}$ cm méretű lebegő részecskék közül csak az $r = 10^{-3}$ cm sugarúak emelkednek percenként legalább 1 cm sebességgel. Az ennél kisebb méretű részecskék emelkedésének sebessége rohamosan csökken olyan kicsiny értékekre, hogy a számításba vehető idő alatt nem juthatnak a fémolvadék felszínére; ezek az apró zárványok túlnyomó részükben az acélban maradnak.

Az (1)—(8) kifejezések egyensúlyra vonatkoznak. A zárványképző elemek mennyiségét akkor határoznák meg, ha az egyensúly valóban létrejöhetne. Ezt azonban legfeljebb laboratóriumi körülmények között sikerül elérni. A gyakorlatban a kéntelenítés és dezoxidálás reakciói az egyensúly megközelítése előtt meglassulnak és el is akadnak. Az olvadékban lebegő dezoxidációs termékek sem a (8) kifejezésnek megfelelő sebességgel emelkednek; ebben a csapolással, öntéssel, majd a hűléssel járó áramlások jelentenek akadályt, végül pedig a kristályosodás zárja el a felfelé irányuló útjukat.

Azt, hogy az elérhető eredmény mennyire különbözhetik az egyensúlytól, talán a karbonnal való dezoxidálás példája érzékeltetheti a legjobban. A reakció terméke ebben az esetben gáz alakú CO, amelynek buborékjai könnyen eltávozhatnak az olvadékból. A reakció egyensúlyát kifejező adatokból számítva, a 0,1% C-tartalmú acélban a CO képződése, az acél fővése akkor szűnnék meg, ha az oldott oxigéntartalma 0,022%-ra csökkent. A 0,1% C-tartalmú acél fővése azonban már akkor megszűnik, amikor az oxigéntartalma kétszer-háromszor, a salakkal érintkező rétegben négyszer-ötször ennyi. Hasonló a helyzet akkor is, ha más dezoxidálószert, szilíciumot, alumíniumot használunk.

Ezek szerint ként és oxigént, illetve szulfid- és oxidzárványokat minden acél feltétlenül tartalmaz még akkor is, ha a metallurgiai folyamatok az egyensúly eléréséig mentek végbe; a gyakorlati körülmények között a zárványok mennyisége többször annyi, mint amennyinek az egyensúlyra érvényes adatok értelmében lennie kellene.

1.2. *A zárványok mennyisége és eloszlása*

A zárványok mennyiségét rendszerint térfogatszázalékban mérjük és így is fejezzük ki; a zárványképző elemek mennyiségét, koncentrációját analitikai módszerekkel, súlyszázalékban szokás meghatározni. A kétféle adat között egyszerű összefüggés érvényes [3], amely oxidokra vonatkozóan

$$\text{oxid, térf. \%} = K_0 \cdot (0, \text{súly\%}), \tag{9}$$

ahol

$$K_0 = \frac{100\varrho_a}{O_z \varrho_z} \tag{10}$$

A (10) kifejezésben $\varrho_a = 7{,}85\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$ az acél sűrűsége, ϱ_z a zárványok anyagának sűrűsége, O_z pedig azok oxigéntartalma súlyszázalékban. A fontosabb oxidfajtáknak a számításhoz szükséges adatait az 1. táblázatban találjuk meg. A szulfidzárványok anyaga egységesebb összetételű, ezért

$$\text{szulfid, térf. \%} = 5{,}4(\text{S. súly\%} - 0{,}005\%) \tag{11}$$

1. táblázat

Az oxidzárványok anyagainak adatai

A zárványok anyaga	sűrűsége ϱ_z g cm^{-3}	O-tartalma O_z súly %	K_0
Al_2O_3	4,0	47	4,3
$3MnO-Al_2O_3-3SiO_2$	4,2	39	4,9
$MnO-Al_2O_3$	4,2	37	5,0
$3Al_2O_3-2SiO_2$	3,2	49	5,0
$MnO-SiO_2$	3,7	37	5,7
MnO	3,5	23	6,2
SiO_2	2,3	53	6,4

A közölt adatok felhasználásával kiszámíthatjuk valami adott kén- vagy oxigéntartalmú acél zárványainak összes térfogatát. Ha ezenkívül még a zárványok átlagos mérete is ismeretes, a zárványok számát is kiszámíthatjuk. 100 ppm = 0,01% oxigéntartalmú, alumíniummal dezoxidált acél egy tonnájában 10^5 egy mm átmérőjű Al_2O_3 zárványra kell számítanunk, ezek átlagos távolsága egymástól 1.1 cm. Ha viszont ugyanennyi Al_2O_3 0,1 μm átmérőjű zárványokat alkot, egy tonna acélban a zárványok száma 10^{17} és ezek egymástól 1,1 μm távolságban helyezkednek el.

Bergh [4] mikroszkópos és elektronmikroszkópos vizsgálattal határozta meg egy szilíciummal dezoxidált acél zárványainak számát. Vizsgálatai szerint egy tonna acél $10^{12} \div 10^{15}$ zárványt tartalmaz, egy cm^3 acélban tehát $10^7 \div 10^{10}$ zárvány van. Ennek a nagyon sok zárványnak túlnyomó többsége 0,1 μm-nél is kisebb és az általános felfogás szerint ártalmatlan.

Régóta ismeretes, hogy a két zárványképző elem nagyon hajlamos a dúsulásra [5]. Ennek lényegében az az oka, hogy a kén és az oxigén az acélnak csak folyékony fázisában oldódik számottevő mértékben, annak kristályos fázisában pedig nem. A kristályosodás megindulása után mindkét elem a még folyékony részben marad és abban fokozatosan felszaporodik. Ha aztán a kristályok közt elhelyezkedő olvadék valami okból elmozdul a helyéről, a benne felszaporodott elemeket is magával viszi. Ott, ahová az olvadék áramlik, az átlagosnál nagyobb mennyiségű dúsuló elemet, pozitív dúsulást találunk, ott pedig, ahonnan az olvadék elmozdult, a dúsuló elemek koncentrációja kisebb, a dúsulás negatív.

A makrodúsulás az egy tömegként kristályosodó acéldarab méretével arányos, több cm távolságban okoz koncentrációkülönbséget, a mikrodúsulás pedig a kristályok méretével arányos, legfeljebb mm távolságban. A mikrodúsulás következtében a zárványok a vaskristályok, illetve azok dendritágainak határán gyűlnek össze (1. ábra). A dúsulásnak mindkét változata annál nagyobb mértékű, minél lassúbb lehűlés közben kristályosodott az acél. Nagy acéltuskóban a pozitív dúsulás helyén mind a kén-, mind az oxigéntartalom

1. ábra. Öntött állapotú acél csiszolata. A tiszta felületek a vaskristályok dendritágainak metszete, a zárványok ezek határán jelennek meg: mikrodúsulás. N.: 500×

ötször annyi is lehet, mint a negatív dúsulás helyén. Ennek megfelelően szulfid- és oxidzárványok mennyisége ugyanabban az acéldarabban hasonló arányban változhatik. A zárványok eloszlása az acélban mindig egyenlőtlen.

Ezt állapították meg [6] szerzői, amikor közel 100 egyforma módon gyártott és öntött acéladag kén- és oxigéntartalmának a szulfid- és oxidzárványok mennyiségével való összefüggését vizsgálták. Húsz egyforma oxigéntartalmú adag anyagában 0,020 ÷ 0,100 térfogatszázalék oxidzárványt, ugyanennyi egyforma kéntartalmú adag anyagában pedig 0,010 ÷ 0,055 térfogatszázalék szulfidzárványt állapítottak meg.

A zárványok egyenlőtlen eloszlása nagyon megnehezíti a zárványtartalom megbízható megállapítását, főleg a vizsgálat céljából veendő próbadarabok helyének kijelölését, azok számának és nagyságának előírását. A dúsulás lehetőségét a próbavételkor feltétlenül figyelembe kell venni.

1.3. *A zárványok alakja öntött, valamint alakított acélban*

A kristályosodó acélban létrejövő zárványok alakját elsősorban a zárványképző elemek, főleg pedig az oxigén helyi aktivitása határozza meg [38]. Ha az oxigéntartalom nagy, a dezoxidálószer koncentrációja pedig kicsiny, megközelítően gömb alakú oxid- és szulfidzárványok jönnek létre (2. és 13. ábra); közepes nagyságú oxigéntartalom ágas-bogas, dendrites zárványok (3. és 4. ábra) képződésével jár, ott pedig, ahol az oxigéntartalom kicsiny, ill.

a dezoxidálószer koncentrációja pedig nagy, szögletes, kristály alakú zárványok jelennek meg.

A különböző alakú zárványok közül a dendrites alakúak a legkellemetlenebbek, mert nagy terjedelműek; a hatásuk az acél tulajdonságaira erősebb, mint a kompaktabb alakú, gömb- vagy kristályszerű zárványoké. A zárványok alak szerinti típusait számozni is szokás: a kompakt alakúak I és III, a szerteágazó, dendrites zárványok pedig II jelet kaptak, például MnS II.

2. ábra. Gömb alakú zárványok öntött acélnak részleges izolálással szabaddá tett felületén. N.: 1000×

Az öntött állapotú acél zárványainak alakját megszabó aktivitás főleg a zárványképző elemek és a dezoxidáló elemek koncentrációjától függ.

Az öntött állapotú acél zárványainak két gyakori típusát bemutató 2., 3., 4. és 13. ábra különböző módon készült. A 4. ábra törésfelületnek pásztázó — scanning — elektronmikroszkópon készült felvétele, a 2. és 3. ábra részleges izolálás után szintén elektronmikroszkópon készült, a 13. pedig csiszolatnak optikai mikroszkópon készült felvétele.

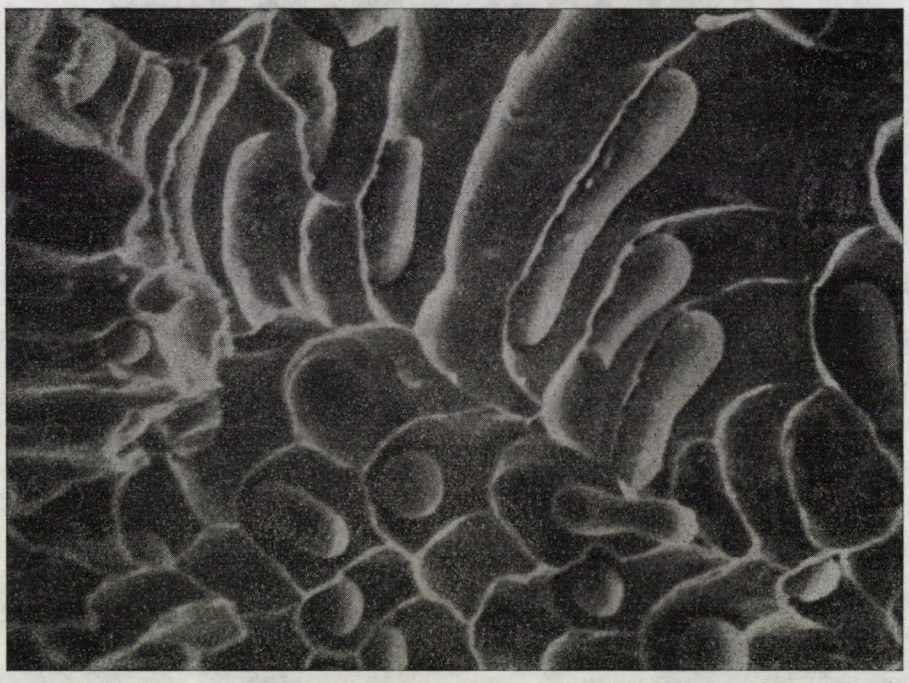
Hidegen minden zárvány kemény és rideg, alakváltozásra egyáltalán nem képes, szilárdságuk pedig gyakorlatilag nincsen; ezek a zárványok az acél igénybevételekor vagy hidegalakításakor legfeljebb darabokra törnek.

Az acél melegalakításának 800÷1300 °C hőmérsékletén a zárványok egy része, nevezetesen a mangánszulfid [7] és a legtöbb szilikát [8] képlékeny lesz, az acéldarab alakváltozását követi. Ezek a zárványok rúdhengerléskor a nyújtás irányában megnyúlt szivarszerű alakulattá vagy vékony hosszú szállá deformálódnak (5. ábra), lemez hengerlésekor pedig a lemez felületével párhu-

3. ábra. Dendrites szulfidzárvány öntött acélnak részleges izolálással szabaddá tett felületén. N.: 2000×

zamosan elhelyezkedő lencse vagy vékony lepény lesz belőlük (6., 7. ábra). Az alumíniumoxid-zárványok a melegalakítás hőmérsékletén is ridegek, darabokra törnek, különösen, ha ágas-bogas alakúak, a törmelékük pedig a nyújtás irányában elnyúló zárványláncot alkot (8. ábra). A gömb alakú vagy pontszerű (Mn, Fe) O és a SiO_2-zárványok csak kevéssé vagy egyáltalán nem deformálódnak és darabokra sem törnek (9. ábra).

Ridegségük és elhanyagolhatóan csekély szilárdságuk következtében a zárványok az acél mechanikai tulajdonságait, annak szívósságát, kifáradási határát csökkentik. Az acéltermékek legnagyobb részének adott körülmények között meghatározott mechanikai igénybevételt kell törés nélkül viselnie. Az acél zárványosságát ezért többnyire avval a céllal vizsgálták, milyen mértékű



4. ábra. Dendrites szulfidzárvány részei öntött acél törésfelületén. N.: 2000×

és jellegű lehet az adott felhasználásra szánt acél zárványossága. Az ilyen vizsgálatok eredményéből arra következtethetünk, hogy az acél mechanikai tulajdonságai szempontjából jelentős adatok a következők:

a zárványok mennyisége, mérete és alakja,
a zárványok eloszlása és
azok fizikai tulajdonságai, főleg a rugalmassági és hőtágulási együtthatói.

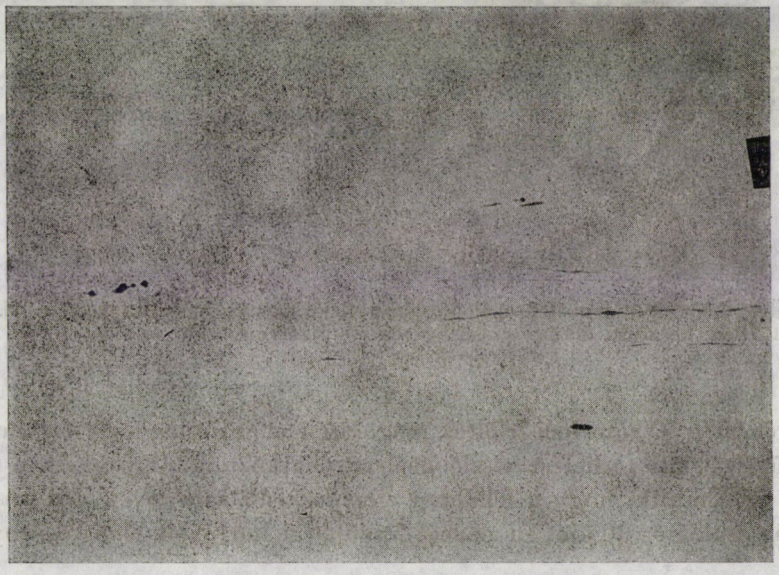
Ezek a vizsgálatok vezettek a kritikus zárványméret fogalmának bevezeteséhez és kritikus méretűnek azokat a zárványokat tekintjük, amelyek adott igénybevétel esetén az acél lényeges mechnikai tulajdonságait észrevehetően rontják.

5. ábra. Hengerelt rúd szulfidzárványai a keresztmetszetének részleges izolálással szabaddá tett részén. N.: 2000×

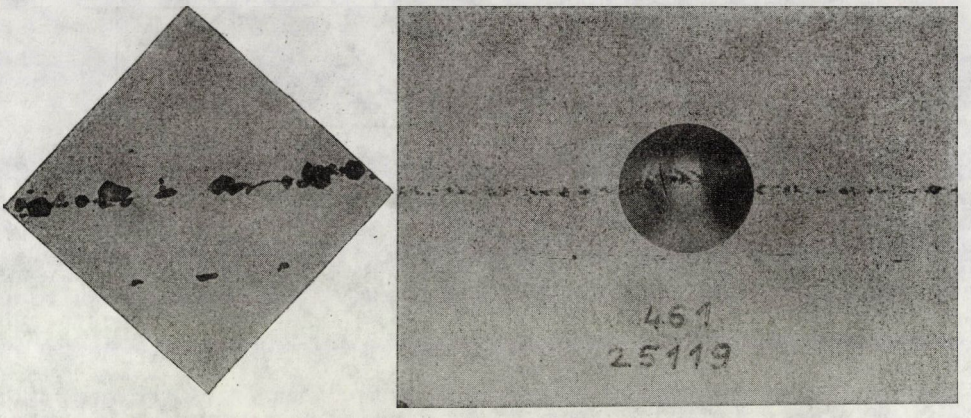
A kritikus zárványméret fogalma mintegy két évtizede merült fel CUMMINGS és munkatársai [39] vizsgálatainak eredményeképpen. Rugóacélból készült próbatesteket forgó-hajtogató fárasztó vizsgálattal törésig terhelték, aztán fraktográfiai vizsgálattal kiválogatták azokat, amelyeknek törése határozottan zárványtól indult ki. A törést okozó zárványok sohasem voltak 10 μm-nél kisebbek; a kritikus zárványméret ebben az esetben tehát $10 \div 15$ μm-re tehető.

KIESSLING és NORDBERG [9] abból a feltételezésből indult ki, hogy a zárvány helyén nincsen teherbíró anyag. Öntött acél zárványait megközelítően gömb alakú üregnek tekintették és törésmechanikai számítással azok kritikus méretét 2 mm-ben vagy ennél is nagyobbnak állapították meg. Alakított acélból készült késztermék felületén elhelyezkedő nyújtott zárványok kritikus

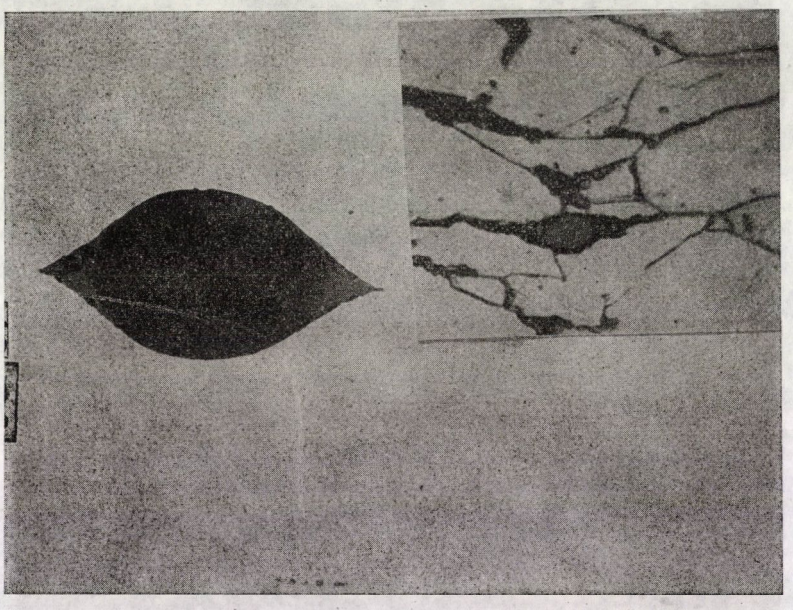
6. ábra. Képlékeny zárványok melegen tízszeresen nyújtott lemez anyagában. N.: 600×



7. ábra. Képlékeny zárványok melegen 80-szorosan nyújtott acél anyagában. N.: 500×



8. ábra. Bal oldali kép: Al_2O_3-törmeléksor, melegen hengerelt lemezben. N.: 300×. Jobb oldali kép: zárványsor okozta felületi hiba finomlemezen. N.: 1×



9. ábra. Üreg képződése nem deformálódó gömb alakú zárványhoz csatlakozóan. N.: 500× A betétképen: bezárult, de össze nem hegedt rés a zárvány előtt és mögött. N.: 200×

mélységét 50 ÷ 500 μm-ben jelölték meg. Ezek az aránylag nagy értékek egytengelyű, statikus terhelést viselő acélra vonatkoznak. Ugyanezek a szerzők [3]-ban megemlítik, hogy a felületen elhelyezkedő zárványok kritikus mélysége már csak 5 ÷ 40 μm, ha az acél feszültségi korróziót okozó környezetbe kerül.

KLEVEBRING [10] a kevéssé deformálódó (Fe, Mn)O és SiO_2 zárványok közvetlen közelében melegalakításkor bekövetkező jelenségeket vizsgálta elméleti és kísérleti módszerrel. Az ilyen zárványok mellett térfogat deficit adódik a zárvány és az acél alakváltozásának különbsége folytán. A térfogat hiány a zárvány előtt és mögött, de a zárványhoz illeszkedő üreg alakjában figyelhető meg (9. kép). A kis térfogatú, de bemetszésnek minősíthető rések kifáradási törés kiinduló helyei lehetnek. Kritikusnak azt a zárványméretet tekintette, ahol ilyen üreg képződése megkezdődött. Vizsgálatai szerint a (Fe, Mn)O-zárványok kritikus átmérője $4 \div 7\ \mu m$, a SiO_2-zárványoké pedig mintegy fele ekkora.

A rúddá hengerelt acél zárványai a nyújtás irányában, a lemezek lapított zárványai pedig a nyújtás irányában és keresztirányban is a kritikusnál nagyobb méretűek. Ennek következtében az alakított acéltermékek mechanikai tulajdonságait feltétlenül rontják, még pedig a zárványok helyzete szerint különböző mértékben. A hengerelt rudak szívóssága a nyújtás irányában például kedvezőbb, mint keresztirányban, a lemezek szívóssága, kifáradási határa pedig a lemez felületére merőleges irányban a legkisebb. Más szóval, a zárványok fokozzák az alakított acélgyártmányok anyagának mechanikai anizotrópiáját.

A zárványok kritikus méretéről egyelőre még elég kevés megbízható ismeretünk van. Az már bizonyosnak látszik, hogy a zárványok kritikus mérete sok körülménytől függ: az acél minőségétől, főleg a szilárdságától, a zárvány anyagának fizikai tulajdonságaitól, a zárványok alakjától, az acéldarabban elfoglalt helyzetétől, de még attól is, hogy az acélgyártmány milyen körülmények között kerül felhasználásra. A kutatásra ezen a téren még sok feladat vár.

1.4. *A zárványosság és az acél mechanikai tulajdonságai*

A zárványosság hatását az acél mechanikai tulajdonságaira bő irodalom tárgyalja. Szemléltetés céljából az utóbbi néhány év irodalmából kell egy-két példát kiválasztanunk; a régebbi irodalom megállapításait nem tekinthetjük megbízhatónak, mert a zárványosság mértékét, megfelelő vizsgáló módszerek hiányában, nem határozhatták meg a kívánatos pontossággal és megbízhatósággal [24., 28]. Abban egyébként a régebbi és a mai szerzők egyetértenek, hogy a zárványok a mechanikai tulajdonságok szempontjából károsak és hogy főleg az acél szívósságát és kifáradási határát csökkentik.

Szulfidzárványoknak durvalemez vastagsági irányában mérhető szívósságára gyakorolt hatását [11] vizsgálta újabban. Két, különböző kéntartalmú, de egyébként egyforma minőségű, 30 mm vastag lemezből nagyszámú, vastagság irányú mikroszakító próbatestet készített és vizsgált meg. Az egyik lemez kéntartalma 0,01% volt, az ebből származó próbatestek kontrakciója

30 ÷ 80% volt, a másik, 0,03% kéntartalmú lemezből vett próbatesteké pedig 0 ÷ 25%. Hasonló különbséget mutatott a két lemez anyagának kifáradási határa.

Kovácsolt acélgyártmányoknak szálakká nyújtott zárványai okozta mechanikai anizotrópia főleg akkor nem kívánatos, ha az acélból például kovácsoló süllyeszték készül; ezt a használatban több irányú igénybevétel terheli. Az ilyen termék élettartama lényegében attól függ, hogy a nyújtott zárványokra merőleges irányban mekkora az anyagának kifáradási határa. A zárványok hatását ilyen szempontból [12] vizsgálta süllyeszték készítésére használatos, 0,4% C-t, 0,4% Mn-t, 1,0% Si-ot, 5% Cr-ot, 1,4% Mo-t és 1% V-ot tartalmazó acélon. Egy ilyen acéladag egyik felét, hagyományos módon, levegőn öntötte tuskóvá, a másik felét pedig elektrosalakosan ugyanolyan méretű tuskóvá átolvasztotta. A két tuskót egyforma méretűre kovácsolta, aztán mintegy 1500 N mm^{-2} szilárdságúvá hőkezelte. Végül mindkét kovácsolt darabból hossz- és keresztirányú próbatesteket véve, azokat húzó-nyomó igénybevétellel fárasztó vizsgálatnak vetette alá. Az utóbbiak eredményét a 2. táblázat foglalja össze.

2. táblázat

Kovácssüllyeszték anyagának kifáradási határa

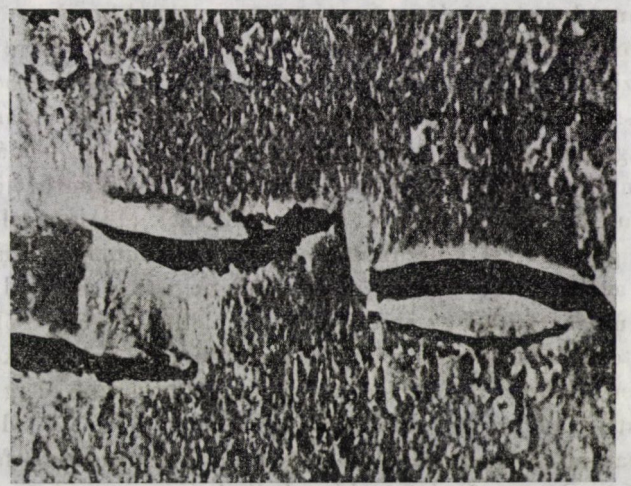
A próbatestek		10^6	10^7	10^8
anyaga	helyzete	ciklushoz tartozó kifáradási határ		N mm^{-2}
öntött	hossz	816	727	681
	kereszt	462	373	349
átolv.	hossz	856	747	694
	kereszt	638	528	478

Az elektrosalakosan átolvasztott anyagból vett keresztirányú próbatestek kifáradási határa mintegy 40%-kal nagyobb, mint a hagyományos módon öntött anyagé, a hosszirányú próbatestek kifáradási határa viszont az átolvasztás következtében alig változott meg. A kifáradási határ anizotrópiája, a hosszirányú próbák kifáradási határának és a keresztirányúak hasonló értékének hányadosa, az átolvasztás következtében 1,95-ről 1,35-re csökkent. Ez a változás egy süllyeszték szempontjából feltétlenül kedvező, mert csökkenti a nyújtott zárványokkal párhuzamos repedések létrejöttének lehetőségét.

Az elektrosalakos és egyéb átolvasztó műveletek ilyen kedvező hatása lényegében onnan ered, hogy az átolvasztott acél cseppenként kerül a helyére és cseppenként szilárdul meg. Ilyen körülmények között a zárványképző ele-

mek dúsulására nincs lehetőség. Az átolvasztott acél zárványai ennek következtében egyenletesen oszlanak el és apróbbak is. Megfelelő salakkal ezenkívül a zárványképző elemek részben el is távolíthatók az acélból.

A zárványok anyagának tágulási együtthatója, rugalmassági tényezői és szilárdsága az acél mátrixától különbözik. Ezt a körülményt a zárványok hatásának magyarázatakor elméletek megfogalmazására többen is felhasználták. Mikroszkópos megfigyelés a zárványos acél törésének, szakadásának bekövetkezéséről egyszerű, világos képet adott. A szakadás avval kezdődik, hogy a zárvány és a körülötte elhelyezkedő acélmátrix között a kohézió megszakad, a zárvány határán rés, hézag jön létre (10. ábra). A terhelés növekedésekor az



10. ábra. A zárványok és mátrix kohéziója igénybevételkor megszakad; a törés folyamatának kezdete. N.: 500×.

ilyen hézagok szaporodnak, az egymáshoz közel esők pedig egyesülnek. Evvel a rések nagyobbodnak, az ép, teherbíró keresztmetszet pedig egyre kisebb. Amikor az ép keresztmetszet kellően meggyengült, bekövetkezik a törés.

A törés kiinduló helyeként működő belső rések [10] vizsgálatai szerint a kevéssé deformálódó oxidzárványok mellett már a melegalakításkor létrejönnek (9. ábra). Ha pedig igaznak fogadjuk el [9] feltételezését, hogy a zárványok üres térnek, üregnek tekintendők, akkor az alakított acélban mindig éles élben végződő, erősen deformált szulfid- és szilikátzárványok éles belső bemetszésnek, vagyis feszültséggyűjtő helynek megfelelően hatnak. A végül törést okozó repedés a zárványoktól indul ki és azok mentén növekszik. Ezt bizonyítja, hogy a törésfelületen mindig sok a zárvány. A szögletes, éles élű darabokra töredező Al_2O_3 zárványoknak, főként az ilyenek alkotta zárványsoroknak hasonló következménye van.

1.4. *A zárványok hatásának csökkentése*

A zárványok mindenképpen ártalmas következményeinek csökkentése állandó feladata, törekvése mind az acél gyártóinak, mind a felhasználóinak. A cél elérésének lehetőségeit vagy inkább a feltételeit [13] a következőképpen fogalmazta meg:

1. a zárványok mennyisége legyen minél kisebb,
2. az eloszlásuk legyen lehetőleg egyenletes,
3. az acél öntött állapotában legyenek lehetőleg kompakt alakúak,
4. melegalakításkor ne deformálódjanak, aminek az a feltétele, hogy az alakítás hőmérsékletén a keménységük legalább kétszerese legyen az acélénak.

A zárványok mennyisége természetesen csak akkor lehet kevés, ha az acél kén- és oxigéntartalmát sikerült kellően csökkenteni. Erre számos lehetőség kínálkozik. A kéntartalom csökkentése végett kénteleníthetjük a nagyolvasztóból csapolt nyersvasat kalciumkarbiddal, kalciumciánamiddal, újabban pedig magnéziummal is. A metallurgiai módszerekkel, például salakkezeléssel már kéntelenített acél kéntartalmát tovább csökkenthetjük a MnS-nál stabilisabb szulfidot alkotó elemek: ritka földfémek (14) adagolásával. Újabban semleges gázsugárral kalciumot vagy magnéziumot fúvatnak a fűthető üstbe csapolt acélba [15]; ez a két elem a kén megkötésén kívül jól dezoxidál is. A felsorolt módszerekkel az acél kéntartalma 0,005%-ra is csökkenthető.

Az acél oxigéntartalma erélyes dezoxidálószerekkel csökkenthető a kívánt mértékben. Célszerű, ha az acél a szokásosnál hosszabb ideig állhat, például fűthető üstben, hogy az oxidok eljuthassanak a fémolvadék felszínére. Az oxigéntartalom csökkentésének legeredményesebb módja a folyékony acél vákuumkezelése. Ezt a műveletet akkor kell elvégezni, amikor az oxigén még oldott állapotban van és reagálhat az acél karbontartalmával.

A zárványok egyenletes eloszlását a zárványképző elemeknek a dúsulásra való hajlamossága miatt csak úgy érhetjük el, ha a folyékony acél minél kisebb részletekben jut el a végső helyére. Vagyis az elektrosalakos, fogyóelektródás, elektronsugaras átolvasztó módszerek valamelyikéhez kell folyamodnunk. Átolvasztott acélban a zárványok egyenletesen oszlanak el és apróbbak is más módon öntött acélénál.

Az öntött acélban kompakt, gömb vagy csepp alakú zárványok a melegalakítással járó deformálódásuk után nem különösen nagy kiterjedésű zárványok maradnak; viszont az ágasbogas, dendrites zárványok, amilyen a MnS II, már öntött állapotban is nagy terjedelműek, még inkább ilyenek a melegen alakított acélban. Ezek a zárványok az acél szívósságát erősebben csökkentik, mint az eredetileg kompakt zárványok. A MnS II zárvány típus főleg az alumíniummal teljesen csillapított acélban szokott megjelenni vékony rudacskák alakjában az eutektikus szigetekben (4. ábra). Melegalakításkor, különösen pedig lemezhengerléskor az ilyen MnS-zárványok csoportja ellapul és nagy kiter-

jedésű, a lemezt rétegessé tevő zárványréteggé lesz. A MnS II zárványok a csillapított acélból hengerelt lemezek rétegességének gyakori okozói. Ellenszerként olyan elemek, elsősorban cirkon adagolását javasolják, amelynek szulfidja állandóbb a MnS-nál, illetve, amelynek atomjai beépülve a szulfidzárványokba, azokat kompakt alakúvá teszik [16].

A negyedik feltétel, hogy a zárványok az alakítás hőmérsékletén jóval keményebbek legyenek az acélnál, a zárványokra vonatkozó ismereteinkkel nem minden tekintetben egyeztethető össze; ellentmondásban van például [10] megfigyeléseivel. Az kétségtelen, hogy a kompakt alakú és melegalakításkor nem deformálódó zárványok csak kevéssé növelik az acél mechanikai anizotrópiáját [16].

Azok a módszerek, amelyek a zárványok hatásának mérséklésére alkalmasak, akár valami különleges ötvözőelem adagolását, akár az acél valamilyen kezelését, átolvasztását, vákuumozását kívánják, kivétel nélkül költségesek, az acél önköltségét tehát növelik. Alkalmazásuk ezért nem mindig lehet indokolt, hanem csak olyankor, amikor a zárványosság következményeinek mérséklése, az acél mechnaikai tulajdonságainak javulása, a termékek élettartamának meghosszabbodása vagy a váratlan törés veszélyének csökkenése révén a költségtöbblet legalább megtérül. Az acéllal mint szerkezeti anyaggal szemben egyre fokozódó követelményeket támasztunk, ezeket ki kell elégíteni, ezért az acél minőségének javítása állandóan napirenden levő feladat. Megoldásként egyre újabb módszereket fejlesztenek ki. A siker érdekében azonban az is szükséges, hogy a zárványosság, különösen pedig a kritikusnál nagyobb méretű zárványok mennyiségét és eloszlását megbízhatóan megállapíthassuk és a pontosan ismert zárványosság várható következményeit is értékelhessük.

2. A zárványosság mértékének meghatározására használatos módszerek és azok értékelése

Az acél és acélgyártmányok zárványosságának kvalitatív és kvantitatív vizsgálata céljából az elmúlt fél évszázadban elég sokféle módszer fejlődött ki. Ez is jelzi, hogy a legfeljebb egy-két tized százaléknyi zárványtartalom meghatározása nem könnyű feladat.

A kialakult és elterjedt vagy terjedőben levő módszereket az alábbiak szerint csoportosíthatjuk:

elemzés jellegű és egyéb kémiai módszerek,
makroszkópos módszerek és
mikroszkópos módszerek.

A vizsgáló módszerek értékét lényegében négy szempont határozza meg.

Ezek a következők:

a) mennyire jellemző a vizsgálat céljából vett próbadarab a minősítendő acél egész mennyiségére,

b) mennyire pontos és megbízható a használt mérőmódszer,

c) mennyi és milyen adatot szolgáltat a zárványosság következményeinek megítélése céljából és

d) mennyi a vizsgálat idő- és munkaigénye, költsége.

2.1. *Elemzés jellegű és egyéb kémiai módszerek*

Ide elsősorban a két legfontosabb zárványképző elemnek, *a kénnek és oxigénnek kvantitatív meghatározására* alkalmas módszerek tartoznak. Az oxigént 10 g tömegű kompakt próbadarabból, a ként pedig legfeljebb 1 g forgácsból határozzuk meg; a kéntartalom meghatározása céljából a bemérés többszörösének megfelelő tömegű forgácsot készítünk. Ilyen tömegű acélban legalább 10^6 darab zárvány van, ezért a vizsgálathoz vett próba tömege elég nagy; az esetleges mikrodúsulás az eredményen nem változtat, a makrodúsulás azonban feltétlenül érezteti a hatását.

Oxigénmeghatározás céljából a próbadarabot széntégelyben 1800 ÷ ÷ 2000 °C-on beolvasztják, hogy a tégely anyaga az oxidokat redukálja, a kéntartalmú forgácsot pedig 1200 ÷ 1400 °C-on oxigénáramban elégetik. Az oxigén-, ill. kéntartalmat a felszabaduló szén-, ill. kénoxidok térfogata alapján határozzuk meg. Az olvasztás, elégetés műveletét az acélművekben ma már mindenütt megtalálható, készen vásárolt, könnyen kezelhető és megbízhatóan működő, betanított személyzetre bízható berendezésekben végzik. A meghatározás gyors és pontos, mind a kén-, mind az oxigéntartalmat legalább ezred tömegszázalék pontosan szolgáltatják.

Az elemzés eredménye természetesen nem árulja el, hogy a két zárványképző elem milyen oxid- és szulfidzárványok alakjában van jelen az acélban és azt sem, hogy milyen alakúak, milyen nagyok ezek a zárványok.

A kén- és oxigéntartalom meghatározása elég általános vélemény szerint a zárványosság értékelésének megbízható, sőt talán legmegbízhatóbb kvantitatív módszere. A valóban megvizsgált próba tömege elég nagy, ezért a makrodúsulás esetleges következményeit nem számítva, jó átlagértékhez jutunk. Ha a kéntartalom és a szulfidzárványosság összefüggésének vizsgálatakor az összetartozó értékpárokat feltüntető pontok nem egyenes vonalon, hanem szórásra utaló sávban helyezkednek el, a szórás okát mindig a zárványok mennyiségének meghatározásában szokás keresni.

A kén- és oxigéntartalom meghatározása a mai acélművekben rutinvizsgálat számba megy. Minden készülő acéladag kéntartalmát többször is meghatározzák, hiszen a legtöbb acélfajta szabványa a kéntartalomnak még

megengedett felső határát szigorúan előírja. Az oxigéntartalomra vonatkozó előírás a szabványokban rendszerint nem szerepel ugyan, a készülő acél oxigéntartalmát azonban az acél gyártójának ismernie kell, hogy értékelhesse a metallurgiai műveletek, főleg a dezoxidálás eredményét.

A két legfontosabb zárványképző elem mennyiségének elemzéssel való meghatározása ezek szerint megbízható és hasznos, de a zárványosság következményeinek megítélése céljából még további vizsgálatokra is szükség van.

A zárványok elkülönítése (izolálása) az elemző kémiában használatos elválasztó műveletek közé sorolható. 10÷15 mm átmérőjű acélpróba felületéről citrát vagy tartarát oldatban mintegy 10 g anyagot anódosan leoldunk. Az oldatban a próbának csak a fém állapotú része oldódik, a zárványok az anódiszapban gyűlnek össze. Szűrés, mosás után a zárványokat mintegy 300° C-on klórgáz áramban még meg kell tisztítani a rajtuk tapadó fémrészektől. Ezután a zárványok mérlegelhetők és mennyiségük az oldatba ment acél tömegének százalékában kifejezhető. Ezt követően a zárványok alakja, nagysága és nagyság szerinti megoszlása mikroszkópos vizsgálattal, kristályszerkezetük röntgensugárral, térfogatuk piknométeresen, összetételük pedig mikrokémiai elemzéssel határozható meg.

A zárványok elkülönítése és utólagos vizsgálata sok olyan adatot is szolgáltat, amelyek a kén- és oxigéntartalom meghatározásának eredményei közül hiányoznak. 25 ÷ 30 évvel ezelőtt nagy volt a jelentősége, ma azonban a közben kifejlesztett módszerek már eléggé háttérbe szorítják. Ennek okát a módszer következő gyengéiben jelölhetjük meg.

A vizsgálat eredménye semmit sem mond arról, hogy a zárványok az acél szövetében milyen elrendezésben és hol helyezkednek el. A mikrodúsulás a vizsgálat eredményén feltehetően nem változtat, a makrodúsulás azonban igen. A vizsgálathoz olyan elektrolizáló és klórozó berendezés kell, amely nem költséges ugyan, de más célra nem használható. A klórgázzal töltött palackot a laboratóriumban nem látják szívesen, balesetet okozhat. Az elkülönítés műveletei és az utána következő vizsgálatok hosszadalmasak és egy részük csak szakképzett személyzettel végeztethető el. Még a módszer pontosságához, megbízhatóságához is férhet némi kétség: a legkisebb, nm méretű zárványok egy része az elektrolizáláskor oldódhatik, vagy a további műveletek, a szűrés és mosás közben veszendőbe mehetnek.

Gyengéi ellenére a zárványok elkülönítésének módszere ma is hasznos szolgálatot tehet olyan laboratóriumban, ahol a szükséges eszközök megvannak. A zárványok alakja az izolátum vizsgálata révén ismerhető meg a legrészletesebben. A nem rozsdásodó és saválló acélfajták kristály közti korrózióját okozó kiválott karbidkristályok vizsgálatának ma is használatos módszere az elkülönítés.

A módszer gyengéinek egy részét *részleges elkülönítéssel* és pásztázó elektronmikroszkópos vizsgálattal kiküszöbölhetjük. A vizsgálandó acéldarab

felületéről elektrolízissel csak vékony réteget oldunk le; a zárványok részben az acélba ágyazva a helyükön maradnak, de kiállnak a felületből (3., 5. ábra). Az elektronmikroszkópon a zárványokról térhatású képeket készíthetünk [40]. Ezeken a képeken a zárványok térbeli alakja és az acélmátrixszal való összefüggése jól felismerhető; mikroelemzéssel még az összetételük is megállapítható. Ilyen módon készültek a 2., 3. és 5. ábra felvételei.

A leírt módszereken kívül még további, kémiai jellegű módszerek ismeretesek, amelyek valahogyan a zárványosság vizsgálatához kapcsolódnak ugyan, de nem céljuk olyan adatok megállapítása, amelyek az acél tulajdonságai szempontjából jelentősek. Ide sorolhatjuk a Baumann-féle kénnyomat készítését brómezüst papíron, a meleg savas oldatban végezhető mélymaratást vagy az acélnak a zárványképző elemek sugárzó izotópjaival való ötvözését. Ide sorolhatjuk a mikroszondával végezhető vizsgálatot is, amelynek eredményeképpen az acélpróba csiszolatán kiszemelt, legalább néhány μm méretű zárvány kvalitatív és kvantitatív összetételét ismerhetjük meg; a zárványok mikroszondás vizsgálata főleg metallurgiai beavatkozások következményeiről tájékoztat (l. a 4. fejezetet).

A most röviden felsorolt vizsgálati lehetőségek a céljukat tekintve nem tartoznak ennek a tanulmánynak a témakörébe, velük ezért bővebben nem foglalkozunk.

2.2. *Makroszkópos vizsgáló módszerek*

*Ultrahang*gal főleg 10—150 mm vastag lemezeket vizsgálunk zárványosság és egyéb belső hibák felderítése céljából. Kényesebb felhasználásra, például atomerőművek egyes tartozékainak, kazánoknak és nyomástartó edényeknek, valamint vastagfalú hegesztett szerkezetek készítésére szánt lemezek vizsgálatára használatos, sok országban szabványos, kötelező módszer.

A szabványok kötelező erővel előírják a vizsgálat elvégzésének minden lényeges részletét: a vizsgálandó lemez előkészítését, az ultrahang készülék jelentős adatait, a vizsgálat elvégzésének módját, a kimutatott belső hibák helyének megjelölését. A kijelölt lemezeket mindig egész terjedelmükben kell végigvizsgálni.

Az ultrahang a nagyobb zárványszigeteken kívül egyéb olyan belső hibákat, repedéseket, hengerléskor létrejött rálapolódást is kimutat, amelynek felületéről visszaverődik. Ezeknek a hibáknak a lemez használhatósága szempontjából ugyanaz a következménye, ezért a lemez minősítésekor nem is szokás köztük különbséget tenni. Azt, hogy az ultrahang jelezte belső hiba milyen természetű, további vizsgálattal állapíthatjuk meg.

Az ultrahang vizsgálat minden fontos részletének előírásán kívül (17) a szabványok gyakran még minőségi osztályokat is megállapítanak, hogy valami adott kényes célra szánt lemezben mennyi lehet a kimutatható belső hiba.

Az erre vonatkozó adatok országonként eléggé különböznek egymástól. Az ASTM 17435—67 számú minőségi előírás értelmében például a felsorolt célokra szánt lemezek közül mindazokat selejtezni kell, amelyekben akár csak egyetlen 4538 mm²-es vagy ennél is nagyobb hiba van. A német és az angol előírások az egyes minőségi osztályokban (l. a 3. táblázatot) eléggé különböző mértékű belső hibát engednek meg.

3. táblázat

Durvalemezben ultrahanggal kimutatott hibák megengedhető mértéke

Minőségi osztály	A megengedett hibák legnagyobb értékei		
	mérete mm²	gyakorisága db/m²	összes hiba mm²/m²
német előírás, V. D. E. 07269			
0	100	külön megállapodás szerint	
1	100	4	400
2	100	15	1500
3	1000	5	5000
4	1000	>5	>5000
angol előírás, B. S. C.—H. S. W. C. 1969			
A	3225	3,5	11513
B	6450	3,5	23025
C	9675	3,5	34540

Az ultrahangos vizsgálat nagy előnye, hogy igen gyors és lehetővé teszi az egész termékmennyiség átvizsgálását. Beilleszthető és bele is avatkozhatik a gyártás menetébe, „on line" módszerré fejleszthető. Ennek köszönhető, hogy a vizsgáló eszközök és módszerek ma is gyorsan fejlődnek. Korszerű eszközzel és módszerrel a zárványok mennyisége és mérete legalább félkvantitatív jelleggel határozható meg [41]; az ilyen vizsgálat eredménye elég jó összhangba hozható a mikroszkópos mérőmódszerek eredményével is.

A lépcsős próba elsősorban nagyobb mennyiségű acél, főleg sok tonna tömegű adagok előzetes vizsgálatára és minősítésére használható módszer. Ahol ez a módszer szabványos, részletesen leírják, milyen méretű, állapotú termék vizsgálható, hány adott méretű próbatest készítendő, milyen legyen azok felülete, hogyan kell a próbatestek hengerpalástját szabad szemmel vagy kézi nagyítóval végigvizsgálni, az eredményt kiszámítani és jegyzőkönyvbe foglalni.

A lépcsős próbatesteken végzett vizsgálat eredménye nagy, rendszerint $3 \div 4$ dm² nagyságú felületen és a próbatestnek különböző mélyen fekvő felületein szabad szemmel látható, a kritikus méretnél feltétlenül nagyobb zárvá-

nyok számáról, méretéről tájékoztat. Legalább hozzávetőleges képet ad az esetleges makrodúsulásról is. Ezért alkalmas arra, hogy előzetes válogatás céljából minősíthessük a kényesebb gyártmányok készítésére szánt acéltuskókat, esetleg egész adagokat. Főleg olyan gyártmányok nyersanyagáról lehet szó, amelyeket teljesen kész állapotukban, költséges alakító és forgácsoló műveletek elvégzése után a felületükön észlelhető zárványosság szempontjából meg kell vizsgálni [18, 19].

A lépcsős próba nagyon egyszerű, sőt kezdetleges vizsgáló módszernek tűnhetik, mégis nagyon megbízhatóan tájékoztat a szabad szemmel látható, a kritikusnál jóval nagyobb, nagyon veszélyes zárványok számáról és eloszlásáról [20]. Ennek a látszólagos ellentmondásnak a magyarázata a következő lehet. Az összes zárványok zöme nagyon apró, szabad szemmel nem láthatók. A legnagyobb, jól látható zárványok a legveszélyesebbek, ezeknek a száma csekély és egymástól nagyobb távolságban helyezkednek el. Annál megbízhatóbban vehetjük ezeket számba, minél nagyobb felületet teszünk szabaddá a vizsgálat céljából A lépcsős próba palástjának felülete több dm^2; ennél nagyobb felületet csak a durvalemezek ultrahangos vizsgálatakor pásztázunk végig.

A lépcsős próbatest készítéséhez és vizsgálatához szükséges eszközök az acélt gyártó és a nagyobb felhasználó üzemekben megvannak. A költségek legnagyobb hányada a próbatest, esetleg próbatestek megmunkálásának költsége. Ez az aránylag mérsékelt költség bőven megtérülhet, mert megtakaríthatjuk azoknak a késztermékeknek alakítására és megmunkálására fordítandó költségeket, amelyeket a végső vizsgálatkor kellene zárványosság miatt selejtezni.

A csészepróba úgy készül, hogy 60 ÷ 80 mm átmérőjű bugából 5 ÷ 10 mm vastag tárcsát vágunk és azt a kovácsolás szokásos hőmérsékletén csésze alakúvá kovácsoljuk. A csésze húzott oldalán a nagyobb zárványok helyén repedések keletkeznek. Ezt az oldalt a reve eltávolítása végett megcsiszoljuk, aztán mélymaratással a zárványokat és az egyéb anyaghibákat jobban láthatóvá is tehetjük. Főleg a buga tengelyvonala közelében levő zárványok, szivacsosság kimutatására alkalmas módszer. Kisebb felület vizsgálatára kerül sor, ezért a lépcsős próbánál kevésbé megbízható; eredménye számszerűen nem fejezhető ki [20].

Töretpróba készítése céljából 60 ÷ 80 mm átmérőjű bugából 10 ÷ 15 mm vastag tárcsát vágunk, lemezből pedig mintegy 15 × 50 mm szelvényű, 150 ÷ ÷ 200 mm hosszú csíkot. Néhány mm mély bemetszést készítve, hidegen vagy mintegy 300 °C-on a próbadarabot kettétörjük. Célszerű, ha a próbadarabokat törés előtt eddzük és kisebb hőmérsékleten nem túlságosan szívósra megeresztjük. A törés a zárványsorok mentén következik be, a törésfelületen a zárványok tehát megjelennek. A felületen levő zárványok közül legjobban a fehér színű Al_2O_3 tűnik fel, különösen akkor, ha a próbadarabot melegen törjük el, hogy a törésfelület kékre futtatódhassék. Ezt a vizsgálati módszert ezért leg-

inkább az alumíniummal dezoxidált, megnyugtatott acélból hengerelt termékek minősítése céljából használjuk.

A töret zárványosságának értékelése céljából töret mintasorozatot szokás készíteni, amelyben a még megengedhető mértékben és az annál szennyezettebb töreteknek kell szerepelniük. Négy-hat töretből álló sorozat elegendő lehet. A felület egységére eső zárványok számának megállapításával kvantitatív eredményt is állapíthatunk meg.

A töretpróba csak eléggé hozzávetőleges képet ad a vizsgált acél zárványosságáról. Főleg az acélművekben használatos, szinte technológiai vizsgálatként, annak eldöntése céljából, hogy a megvizsgált acélt milyen termékké lehet feldolgozni vagy milyenné nem célszerű.

2.3. *A mikroszkópos módszerek*

2.3.1. Közös jellemzőik

A zárványosság vizsgálatának mikroszkópos módszereit kétségtelenül az teszi vonzóvá, hogy a próbadarab nagyított képén azokat a zárványokat is felismerjük és számba vehetjük, amelyeket szabad szemmel vagy kézi nagyítóval nem észlelhetünk. Már 100-szorosan nagyított képen is felismerhetők a mintegy 1 μm méretű zárványok is, feltéve, hogy a mikroszkóp objektívjének feloldó képessége elegendő. Jelenlegi ismereteink szerint a zárványok kritikus mérete 1 μm-nél nagyobb. A 100-szorosan nagyított képen tehát valamennyi kritikus méretű vagy annál nagyobb zárványt elvben számba vehetünk.

Másrészt azonban minden mikroszkópos vizsgálat csak nagyon kis térfogatú és tömegű acél zárványait veheti számba. A szokásos méretű, 80 mm átmérőjű, 100-szorosan nagyított kép a próbadarab felületének 0,5 mm^2 nagyságú részét jelenti. Azokat a zárványokat látjuk, amelyek ezen a kis felületen felszínre kerülnek, tehát azokat, amelyek a felület alatti vékony rétegből eredetileg kiállottak. Ennek a rétegnek a vastagságát a még jelentős számban előforduló legnagyobb zárványok méretének $^2/_3$-részére, mintegy 0,06 mm-re becsülhetjük. Egy látótér kivetítése és az abban megjelenő zárványok számbavétele tehát csupán $0{,}5 \times 0{,}06 = 30 \cdot 10^{-3}$ mm^3, kereken 0,25 mg acél tényleges vizsgálatát jelenti. Bár a zárványosság szempontjából minősítendő tételből, nemritkán 100 t vagy még nagyobb tömegű acélból több próbadarabot szokás venni és azok mindegyikét legalább 100, de esetleg 800 $\div$ 1000 látótér kivetítésével vizsgáljuk meg, valamennyi zárványvizsgáló módszer közül éppen a mikroszkóposak járnak a legkisebb próbamennyiség tényleges vizsgálatával. Egy 100 t tömegű adagból vett próbák tényleg megvizsgált része az egész tételnek $10^{-8} \div 10^{-10}$ része (4. táblázat). Ismerve a zárványok egyenlőtlen, sokszor szeszélyes eloszlását, ezt a körülményt a mikroszkópos módszerek és a velük végzett vizsgálatok eredményének értékelésekor nem szabad szem elől tévesztenünk.

2.3.2. Az összehasonlító-becslő módszerek

Ezeknek a módszereknek az a közös alapja, hogy melegen alakított acélból vett próbadarabnak a nyújtás irányát is magában foglaló csiszolatán a leggyakoribb zárványfajták a színük és alakjuk révén rátekintéssel megkülönböztethetők. A szulfidzárványok ugyanis világosszürkék és nyújtottak, az oxidzárványok pedig sötétszürkék-feketék; az utóbbiak közül a mangán-vas oxid pontszerű, a szilikátok nyújtottak, az alumíniumoxid zárványok szögletes darabokra töredezettek és a nyújtás irányában sorokba rendezettek.

A vizsgálat céljából a minősítendő tételből a javasolt vagy előírt módon vett, kellő számú és méretű próbadarabnak egy-egy lapját lehetőleg tökéletesen sík csiszolattá kell megmunkálni; a csiszolást, fényesítést leghelyesebb gyémántporral végezni, hogy a zárványok a csiszolat síkjából ne emelkedjenek ki. A csiszolat síkja foglalja magában a nyújtás irányát. Az elkészült csiszolatot további kezelés, maratás nélkül a mikroszkóp tárgyasztalára helyezzük; az optikát úgy választjuk, hogy a homályos üvegen 100-szoros lineáris nagyítást kapjunk; a kép átmérője 80 mm legyen.

A csiszolatnak a homályos üvegen megjelenő képét, az abban látszó zárványokat további segédeszközök igénybevétele nélkül össze kell hasonlítani egy rajzolt sorozat képeivel, megkeresve közülük azt, amelyik legjobban hasonlít a csiszolat kivetített képén látszó zárványokhoz, azok alakjához, méretéhez és mennyiségéhez. Minden csiszolatnak több pontját vetítjük ki, mindannyiszor megismételve a mintakép-sorozattal való összehasonlítást. A kivetített látótérben levő zárványokhoz legjobban hasonlító mintakép jele a kérdéses látótér értékelése; ezt a jelet feljegyezzük.

Az összehasonlításhoz szükséges mintakép-sorozatok a 30-as években kezdtek az irodalomban megjelenni. Közülük egyik-másik ma is használatos. Közülük a [21]-ben leírt képsorozat alapján végzett vizsgálatot Fox-félének nevezik, főleg Angliában terjedt el. A svéd JERNKONTORET megbízásából [22] szerzői készítettek egy 40 darab 80 mm átmérőjű mintaképből álló sorozatot. Ez a sorozat a továbbiakban igen sok országban szabványosított mikroszkópos vizsgálat alapja lett. A [23]-ban leírt Diergarten-féle mintakép sorozatot eredetileg golyóscsapágy acélok minősítésére szánták; később azonban egyéb acélfajták minősítésére is felhasználták és főleg Németországban ma is használatos. A legújabb, szemléletében is korszerű mintakép sorozatot 1971-ben szabványosították az NSZK-ban [42]. A szemlélet korszerűsége abban nyilvánul meg, hogy a sorozat képeit kvantitatív mérőszámokkal is jellemezték. Az egymást követő képek között meghatározott, egyszerű összefüggés van, például a zárványok területe képről képre megkétszereződik, de a hosszúságuk, vastagságuk is szabályszerűen változik. Így a vizsgálat eredményeképpen kapott jelzőszámok elvben jól összefüggésbe hozhatók a legkorszerűbb mikroszkópos mérőmódszer eredményével is.

A zárványvizsgáló képsorozatok képeinek száma elég tág határok közt változik: a Fox-féle sorozat képeinek száma 12, az NSZK legújabb képsorozatáé pedig 90. Egy-egy látótér besorolása nyilván annál biztosabb, minél jobban különböznek egymástól a képsorozat képei, vagyis minél kevesebb az összehasonlító kép; az eredmény megbízhatósága, reprodukálhatósága ezzel együtt javul. A vizsgálat eredménye viszont annál pontosabb és részletesebb, minél nagyobb a képek száma.

A vizsgálat elvégzésének valamennyi lényeges részletét a szabványok pontosan előírják, beleértve a próbadarabok számát, méretét, a kivetítendő és a mintaképekkel összehasonlítandó látóterek számát és az eredmény kiszámításának menetét.

A mikroszkópos összehasonlító módszereknek a pontosságukat és megbízhatóságukat meghatározó, lényeges mozzanata a mikroszkóp homályos üvegére kivetített képnek a mintaképekkel való összehasonlítása. Ez a művelet a vizsgálatot végző személy megfigyelő készsége, szemmértéke és gyakorlata szerint különböző eredménnyel járhat. A szemmértékre alapozott készség ezenkívül a vizsgálatot végző személy fáradtsága következtében is rosszabbodhatik. Több száz kivetített látótér összehasonlítása a mintaképekkel elég fárasztó tevékenység, fárasztja a szemet is, lankasztja a figyelmet is. A vizsgálatnak ebből származó szubjektív volta jogos kétséget támasztott az összehasonlító-becslő módszerek megbízhatóságát illetően. 1960 táján egy sor alapos kísérleteken alapuló tanulmány ezeket a kétségeket kellően igazolta is. [25] Szerzői bebizonyították, hogy a legelterjedtebb összehasonlító módszerek mindegyikének eredménye nagyon rosszul reprodukálható, ezért nem is lehet megbízható; [27] szerzőinek vizsgálata értelmében viszont a zárványos és az aránylag tiszta adagoknak egymástól a kívánatos biztonsággal való megkülönböztetése lényegesen több próba vizsgálata alapján lehetséges, mint ahány próba vizsgálatát a különböző országok szabványai előírják.

Számos gyengéje ellenére a mikroszkópos—becslő—összehasonlító módszer ma is használatos, sőt sok országban szabványos, kötelező. Ennek oka az lehet, hogy legrégebben ismeretes, a szükséges felszerelés, elsősorban a fémmikroszkóp ma minden acélműben megtalálható. A vizsgálat további betanított személyzetre bízható, a költsége tehát elég csekély. Az ilyen vizsgálat eredményét mindenesetre óvatosan kell kezelni, különösen akkor, amikor egy-egy adag selejtezése a tét.

2.3.3. A mikroszkópos módszer szubjektivitásának csökkentésére irányuló javaslatok

Ezeknek a javaslatoknak az volt a céljuk, hogy a mikroszkópos vizsgálat fő hibaforrását, a mintaképekkel való összehasonlítást kiküszöböljék. Az egyik ilyen javaslat szerint a kivetített képen át megadott hosszúságú jelzővonalat kell húzni és meg kell számolni azokat a zárványokat, amelyeket a jelzővonal

— lineal traverse — metsz vagy érint [29]. Ezeknek a zárványoknak legnagyobb méretét is meg kell mérni. Ez a módszer hosszadalmas és fárasztó, ezért nem terjedt el. BERGH S. pontszámlálásos módszerének [30] az a lényege, hogy a próba kellő számú kivetített vagy fényképen rögzített képére meghatározott méretű négyzetes hálót helyezünk és összeszámláljuk a hálónak azokat a kereszteződési pontjait, amelyek zárványba esnek. A módszer jó tájékoztatást ad a zárványok számáról és térfogattörtben kifejezett mennyiségéről, ha a zárványba eső keresztezések számát a keresztezések összes számával viszonyba állítjuk.

A pontszámlálásos módszer, nem számítva az automatikus mérőmódszereket, a legjobb mikroszkópos vizsgálatnak minősíthető. Ennek ellenére inkább csak kísérleti célból készített acélpróbák zárványosságának összehasonlítása céljából használatos. A zárványosság vizsgálatának japán szabványa [43] azonban ezt írja mikroszkópos módszerként, más országokban pedig alternatív vagy kiegészítő módszerként szerepel a megfelelő szabványokban [44, 45].

2.3.4. Az automatikus televíziós mérőműszer

1960 után az addig ismert és használt mikroszkópos vizsgáló módszerek gyengéire fény derült. Ugyanakkor a szerkezeti anyagokkal szemben egyre fokozódó igényeket támasztottak. Kívánatos lett a szerkezeti acélfajták zárványtartalmának megbízható, pontos ismerete és ezúton annak csökkentése, az acél tisztaságának fokozása. Ebből a célból új vizsgáló eszközök kifejlesztése volt szükséges, amelyekkel a kritikusnál nagyobb méretű zárványok lényeges adatait megbízhatóan, mennyiségi mérőszámokban kifejezve, az összehasonlító módszereknél kevesebb fáradsággal és rövidebb idő alatt állapíthatjuk meg. A feladat megoldását az elektronika fejlődése tette lehetővé.

Az 1960-as években először néhány olyan eszköz kísérleti példányai váltak ismeretessé, amelyek a kitűzött célt megközelítették, de nem érték el egészen, végül aztán 1968-ban már a kereskedelemben is megjelent a televíziós automatikus képelemző készülékek első típusa [31]. Ezt a típust, amelyet azóta számos részletében tökéletesítettek és amelyeknek már számos változata van, ma a célnak legjobban megfelelő eszköznek tekintjük.

A készülékbe tartozó mikroszkóp objektívje a kifogástalanul sík, maratlan csiszolt megnagyított képét televíziós kamerába vetíti; a látótér képe a televíziós képernyőn valamelyest még megnagyítva jelenik meg. A képernyőn a képet tudvalevően vezérelt elektronsugár rajzolja meg, amely mintegy 2 mm távolságban másodpercenkint 50-szer végigságuld a képernyőn vízszintes irányban. Amikor a képet rajzoló elektronsugár a fényes fémfelület képéből zárványnak szürke vagy fekete képébe lép át, a fényesség csökkenését egy detektor érzékeli és számba veszi az elektronsugárnak az árványképében megtett útjának hosszúságát. Ezeket az útadatokat egy számítógép összegezi

és viszonyba állítja az elektronsugárnak a képernyő bejárása közben megtett egész útjával. Ez a viszonyszám a látótérben levő zárványok terület- és egyben térfogatszázalékos mennyiségével egyenlő. Mindenegyes látótérben elvégzett mérés eredménye digitálisan leolvasható, vagy nyomtatott formában azonnal megjelenik. A televíziós készülékek alapjában véve a régóta ismert Rosiwal-féle lineáris képelemzés elvét hasznosítják.

A zárványfajták közül a készülékek a világos szürke szulfidok és a sötétebb szürke vagy fekete oxidok megkülönböztetésére és mérésére is alkalmasak. Ebből a célból a detektorra ható szürkeség küszöbértékét kell megfelelően beállítanunk.

A televíziós készülékek újabb változatai a zárványok mennyiségén kívül további értékes adatok meghatározására is alkalmasak. Megfelelő program kiválasztásával meghatározhatjuk a zárványok számát, azok átlagos méretét, a méretük szerinti eloszlását tetszőleges határok közt; mérhetjük a zárványok kerületét, a vízszintes metszékek számát, a zárványok vízszintes és függőleges vetületét is. Ezekből az adatokból a matematikai statisztika segítségével kiszámíthatjuk a zárványok nyújtottságát és az alakjuknak egyéb jellemzőit. A legújabb készülékek tartozékaként kapcsolt számítógép ezeket az adatokat mind értékeli.

Az optikai felszerelésbe $4 \div 6$, különböző feloldóképességű objektív tartozik, hogy a vizsgálandó zárványok méretétől függően kisebb-nagyobb nagyítást használhassunk. Az elektronikus képátvitel korlátait is figyelembe véve, az elérhető legjobb feloldóképesség 2 μm lehet; ez a méret jól egyezik a zárványok legkisebb kritikus méretével [10].

Az automatikus televíziós zárványvizsgáló készülékek jellemző vonásai elvben a következők: A vizsgált objektív, az összehasonlító módszereket jellemző szubjektivitástól mentes. Az eredményt számszerűen, terület-, illetve térfogatszázalékban adja, a kívánatos, összehasonlításra alkalmas módon. A mérés nem fárasztó, gyors, egy látótér kivetítése és végigmérése másodperc nagyságrendű időbe telik; ezért nincs akadálya akár több száz látótér mérésének sem, ami szükséges lehet, ha erősebb nagyítást kell használnunk. Gondosan kiválasztott próbatesteken végzett mérések eredménye továbbá igazolta, hogy azok oxigéntartalma és az oxidzárványok, valamint a kéntartalmuk és a szulfidzárványok mennyiségének aránya a zárványok mennyiségétől függetlenül csekély szórással állandó [36].

Ilyen látványosan jó eredményt az automatikus televíziós mérés is csak akkor adhat, ha a próbadarabok kiválasztásakor és előkészítésekor, valamint a mérőkészülék beállításakor bizonyos szabályokat szem előtt tartunk. Ezeket a szabályokat a BISRA — British Iron and Steel Research Association — kutatói számára MELFORD [31] fogalmazta meg. Hasonló célból a svéd Jernkontoret is létrehozott egy kutatócsoportot, amely szintén kialakított egy célszerű mérőmódszert. Ennek részleteiről MARTENSSON [32] számolt be.

A televíziós készülékkel való mérés helyes módszere évek óta ismeretes, ennek ellenére a mérések ezt a módját még sehol se szabványosították. Az üzemi alkalmazásának sokáig az állt az útjában, hogy a korábbi készülékekkel való mérés elég lassúnak bizonyult: egy szokásos méretű, 400 mm^2 nagyságú csiszolat teljes letapogatása 2 ÷ 3 óráig is eltarthat, ha többféle adat meghatározásáról van szó. Ennek a hátránynak kiküszöbölése céljából fejlesztették ki Angliában a Quantimet 360 készüléket, amely több nagyságrenddel gyorsabban végzi a letapogatást. 100 mm^2 nagyságú területet, ami 1300-nál több látótér vizsgálatát jelenti, a Quantimet 360 körülbelül egy perc alatt vizsgál végig. A készülék gyors működése következtében menet közben nem lehet beavatkozni, például előkészítés hibájának vagy szennyeződésnek kijavítása céljából. A jó mérés egyik legfontosabb előfeltétele a csiszolat kifogástalan előkészítése. A készülék az oxidzárványokat az alakjuk szerint meg is különbözteti, és ha van a zárványosságnak előre megadott határértéke, azt is jelzi, hogy a próbatest zárványossága nem haladja-e meg ezt az értéket.

Az angol állami vaskohászat üzemi laboratóriumaiban 1973-ban három Quantimet 360 készüléket helyeztek üzembe, hogy megvizsgálják ennek az eszköznek üzemi használhatóságát. A tapasztalatokról több közleményben számoltak be. [34] szerzői méréseket végeztek a Fox-, valamint a Jernkontoret-féle zárványvizsgáló képsorozat képein és ezek alapján nomogramba foglalták a Quantimet 360 készülékkel mért mennyiségek és a Fox-, illetve JK-féle fokozatszámok közötti összefüggést. Ezt csiszolatok vizsgálatával is megerősítették. A Quantimet 360 készülékkel meghatározható számadatokat a [42] szabvány is tartalmaz.

A leírt eredmények feltehetően megkönnyítik a Quantimettel végzett mérés üzemi felhasználását is, ami a módszer szabványosításának fontos előfeltétele. A jelenlegi szabványokban előírt zárványossági adatok ugyanis gyakran több évtizedes gyártói és felhasználói tapasztalatokon nyugszanak és mélyen beépültek a szakmai köztudatba; ezért nehéz lenne azokat figyelmen kívül hagyni. Az említett vizsgálatok alapján azonban a hagyományos és az automatikus zárványvizsgálat eredményeit össze lehet hangolni.

Ha figyelembe vesszük, hogy az automatikus zárványvizsgálat mennyire pontos, megbízható, hogy nem fárasztó és hogy sok értékes adatot képes szolgáltatni, biztosra vehetjük, hogy egy-két makroszkópos vizsgálaton kívül ez lesz előbb-utóbb az egyetlen szabványos zárványvizsgáló módszer.

2.4. *A zárványvizsgáló módszerek összehasonlítása*

A zárványosságot vizsgáló módszerek leírásának befejezéseképpen a 4. táblázatban még áttekinthetően összefoglaljuk a jelenleg használatos módszerek legfontosabb jellemző vonásait. A táblázathoz az egész 2. fejezet ismeretében magyarázó szövegre nincsen szükség. A táblázat I. rovatában az egyes

módszerek megbízhatóságának megítélésére alkalmas adatokat állítottuk össze, a II. rész négy oszlopában pedig a módszerrel megkapható adatok jellegére vonatkozó utalásokat jelöltük meg.

4. táblázat

Módszer	I				II		
	Vizsgált acél tömege g	Megbízhatóság	Költség	Alak	Mennyiség	Méret	Típus
Ultrahang	korlátlan	közepes	drága eszköz	—	×	×	—
Lépcsős pr.	10^2—10^3	jó	kevés	—	×	×	—
Töret pr.	10^2—10^3	közepes	kevés	—	×	×	—
Csésze pr.	10—10^2	közepes	kevés	—	×	×	—
O- és S-elemzés	10—10^2	jó	drága eszköz	—	××	—	—
Z. izolálás	10—10^2	közepes	drága	×	××	×	××
Összehasonl. mikroszkópos	10^{-2}—10^{-1}	gyenge	kevés	×	×	×	×
Mikroszk. mérő	10^{-3}—10^{-2}	közepes	drága, lassú	××	××	××	×
Automatikus (Quantimet 360)	10—10^2	jó	drága eszköz	××	××	××	×

—: nem szolgáltat adatot
×: félkvantitatív adatok
××: kvantitatív adatok

3. A zárványosság vizsgálatának hazai helyzete

Három szempontot, körülményt kell feltétlenül figyelembe vennünk: a tárgyra vonatkozó szabványokat, az acélt gyártó és felhasználó üzemek felszereltségét, valamint azt, ezek az üzemek a rendelkezésükre álló lehetőséget milyen mértékben használják vizsgálatok elvégzésére.

A zárványosság vizsgálatával foglalkozó legrégibb szabványunk a MSZ 2668—53 volt. Ez lényegében a JK-féle mikroszkópos összehasonlító módszert tette kötelezővé, a hozzátartozó, 40 képből álló mintaképsorozattal együtt. Ezt a szabványt 1967-ben a KGST Szabványügyi Állandó Bizottságának RSZ 95—63 számú ajánlásába leírt, ugyancsak összehasonlító-becslő módszerrel helyettesítette a MSZ 2668—67-ben. Ma is ez az utóbbi van érvényben. „E szabvány tárgya a 3 mm vagy ennél nagyobb szelvényvastagságú, ill. átmérőjű hengerelt, kovácsolt, sajtolt vagy húzott acélok nemfémes zárványainak metallográfiai meghatározása."

Az új szabvány a régitől elsősorban abban különbözik, hogy a csiszolat kivetített képét 40 helyett 85 mintaképpel kell összehasonlítani és értékelni. Ez természetesen nem teszi könnyebbé a vizsgálat elvégzését. A mintaképek nagyobb száma részben abból származik, hogy 25 kép a titán- és cirkonnitrid

és az alumíniumnitrid zárványok értékelését szolgálja. Ezenkívül a szilikátzárványok három típusát is megkülönbözteti: a képlékeny, a töredezett és a nem képlékeny fajtákat. A szabvány az oxidzárványok néhány típusának együttes értékelését is megengedi; ha ezenkívül a nitridzárványokat figyelmen kívül hagyhatjuk és a megengedett könnyítéseket is igénybe vesszük, akkor a régi és az újabb szabvány szerint végzett vizsgálat eredménye többnyire megegyezik egymással vagy legfeljebb fél fokozatnak megfelelő mértékben különbözik egymástól [37].

A MSZ 2668—67-ben leírt módszert a mikroszkópos összehasonlító eljárások gyengéi természetesen szintén terhelik. A szabvány tételenkint 6, kényesebb termékből 9 vagy 12 próbadarab kivételét és vizsgálatát írja elő; ennél több, de legfeljebb 36 próbadarab vizsgálata kísérleti-kutató munkában lehet szükséges. 12 próbadarab vizsgálata alapján azonban [27] megállapítása értelmében a nagyon zárványos adagot az átlagosnál tisztább acéltól 55% valószínűséggel különböztethetjük meg. Ez nem látszik nagyon megnyugtatónak.

A MSZ 7864—64, tehát már 13 éves szabványunk durvalemezek ultrahang vizsgálatára vonatkozik. A lemezen 10×10 cm-es négyzetes hálót kell kijelölni; a rezgőfejet a háló vonalainak minden kereszteződési pontjában kell a revétől megtisztított lemez felületére illeszteni. Ha valahol hiba mutatkozik, akkor pontról pontra végzett vizsgálattal a hiba terjedelmét meg kell állapítani és annak határvonalát a lemezen körül kell rajzolni. A rezgőfejet a hengerlés irányával párhuzamos, egymástól legfeljebb 10 cm távolságban húzott vonalakon is végigvezethetjük.

A szabvány a különböző célra szánt lemezekben megengedhető belső hibák számáról és nagyságáról nem tesz említést és minőségi osztályokba való besorolásra sem tesz javaslatot. Ilyen adatot a MSZ 40—70, a 3 mm-nél vastagabb lemezek méreteit, alakját, mechanikai tulajdonságait, valamint ezeknek megengedett eltéréseit összefoglaló szabványunk sem tartalmaz. A kényesebb célra szánt lemezekre vonatkozó MSZ 1741—69 szabványunk kazán és nyomástartó edény készítésére alkalmas lemezek belső hibáiról csak annyit mond, hogy azok vágott vagy törési felületén szabad szemmel látható hiba — zárvány, rétegesség, durva kristályos rész — nem lehet. A még megengedhető nagyságú és számú belső hibákat illetően a megrendelőnek talán külön kell megállapodnia a gyártó művel.

Az egyéb makroszkópos vizsgálatok közül eddig négyre vonatkozó szabványunk jelent meg. A MSZ 2638/1—70 a lépcsős próba, a MSZ 2638/2—70 a kéktöret próba készítésének és értékelésének részleteit ismerteti. Az utóbbi a töreten megjelenő zárványok sűrűsége és mennyisége szerint rendezett, öt képből álló sorozatot is közöl az értékelés céljából. A MSZ 2638/3—73 és a MSZ 2638/4—74 szabványok a kénnyomat készítésének és a mélymaratásnak elvégzését ismerteti; ezek szigorúan véve zárványosságot meghatározó módszernek alig tekinthetők.

A zárványosság vizsgálatával foglalkozó hazai szabványaink fő vonásaikban elég hűen tükrözik a külföldön is fennálló helyzetet. A külföldi szabványok némelyike részletesebb ugyan és egyes részletekben különböznek is a magyar szabványoktól, alapjában véve azonban ugyanazokat a lényeges előírásokat: a próbatestek kivételének módját, azok számát, méretét és előkészítést, a vizsgálat elvégzésének szükséges részleteit, az eredmény megállapítását és jegyzőkönyvbe foglalását rögzítik. A vizsgálatokra vonatkozó külföldi szabványok sem tájékoztatnak arról, hogy a kohászati termékekben milyen mértékű és típusú zárványosság engedhető meg. Ezek az adatok nem is tartoznak a vizsgálat módszereit tárgyaló szabványokba, főleg azért, mert nagyon sokféle termékről van szó, amelyekben nagyon különböző mértékű zárványosság engedhető meg. Erre vonatkozó adatoknak ezért inkább a termékek minőségével foglalkozó szabványokban lehet helye vagy pedig a felhasználóknak az acél gyártójával kötött szállítási szerződésében.

Ami az üzemeinknek a zárványosság vizsgálatára való felkészültségét és felszereltségét illeti, az acélt gyártó és a nagyobb felhasználó üzemek laboratóriumai valamennyi szabványos vizsgálathoz szükséges eszközzel el vannak látva. Valamennyi üzemben van mikroszkóp, az egyikben elektronmikroszkóp is. A lemezt hengerlő üzemeinkben van ultrahangkészülék, és természetesen minden üzemben van lehetőség makroszkópos vizsgálatok elvégzésére is. Jelenleg még nélkülözik a nagy összegű kemény valutáért beszerezhető vizsgáló eszközöket, a televíziós képelemző készüléket, a mikroszondát, bár két üzemünknek van meglevő mikroszkóphoz csatlakoztatható, hazai gyártmányú képelemző készüléke. Az iparág kutató intézete az automatikus televíziós készülék (Quantimet 360) kivételével minden eszközzel el van látva, amely a zárványosság vizsgálata céljából szükséges lehet és ezek az eszközök az iparág vállalatainak, de az acélt felhasználó vállalatoknak is rendelkezésére állnak, szerződés alapján azokon vizsgálatokat végeztethetnek.

Az 5. táblázat a nagyobb vállalatainktól kapott információk alapján arról tájékoztat, hogy az acélt gyártó és felhasználó vállalatok milyen módon és milyen gyakran vizsgáltatják a termékeiket a zárványosságuk szempontjából. A legtöbb vállalat a szabványos vizsgálatokat veszi igénybe, főleg a mikroszkópos összehasonlító módszert és a lemezek ultrahangos vizsgálatát. Ez természetes, mert ezekre a vizsgálatokra fel vannak készülve és azok általában kötelezők is. A csak „elvétve" használt vizsgálatokat nagyrészt az iparág kutatóintézetében végeztették el.

A vaskohászati iparág laboratóriumaiban elvégzett zárványvizsgálatok eredményéről és következményeiről (a reklamációkról) érthető módon csak kevés kerül nyilvánosságra. Azok a jelentések, amelyek ilyen vizsgálatokról számolnak be, és a zárványosságnak az acél tulajdonságaira, többek között a feldolgozás nehézségeit fokozó nem kívánatos következményeire is rámutatnak, általában a vállalatok irattárában rejtőznek.

5. táblázat

A hazai üzemekben használatos zárványvizsgáló módszerek

A módszer megnevezése	A módszert		
	rendszeresen	szúró-próbaként	elvétve
	használó üzemek száma		
Mikroszkópos, MSZ 2668	4	2	1
Ultrahang, MSZ 7864	4	1	2
Lépcsős próba, MSZ 2638/1	1	3	1
Kéktöret, MSZ 2638/2	3	3	—
Izolálás	—	1	3
Televíziós mérés	—	—	1
Mikroszondás vizsgálat	—	—	—

Az adatokat szolgáltató üzemek száma 7.

Hazai szerzőknek nyilvánosságra került munkái közül bővebben érdemes foglalkoznunk a [35] előadással és az annak folytatásaként készült [46] értekezés megállapításaival, mert a leglényesebb gyártmányok egyikének, a gördülőcsapágyak élettartamának a zárványossággal való összefüggéséről és a vizsgáló módszerek értékéről figyelemre méltó adatokat tartalmaznak.

A vizsgálatot 30, különböző módon kikészített, 15 ÷ 50 tonnás G03 minőségű adagon végezték el. A kísérleti adagok zárványosságát többféle módon is meghatározták: szabványos mikroszkópos összehasonlító módszerrel a hazai és a szovjet mintaképsorozat felhasználásával, az oxigén-és kéntartalom meghatározásával, televíziós képelemző készülékkel (Quantimet 720), a zárványtípusok (oxidon, szulfidok, oxiszulfidok) arányának becslésével 500 ÷ 800-szoros nagyításban, végül a zárványok összetételének mikroszondás meghatározásával. A kísérleti anyagok várható élettartamát a golyóscsapágy igénybevételét modellező felületi fárasztással határozták meg; az élettartam jellemzésére azt az időt, illetve fordulatszámot használták fel, amely a próbatestek 10, ill. 50%-án az első kipattogzást előidézte (L_{10} és L_{50}).

A szabványos mikroszkópos összehasonlító módszer eredményei sem az oxigén- és kéntartalommal, sem az élettartam adatokkal elfogadható összefüggést nem mutattak. Ez megerősítette a módszer megbízhatóságáról már régebben ismert kedvezőtlen tapasztalatokat.

Külön-külön vizsgálva a két zárványképző elem koncentrációjának és az élettartamnak összefüggését, kiderült, hogy az oxigéntartalom növekedése csökkenti, a kéntartalom növekedése azonban a várakozással ellentétben, inkább növeli az élettartamot. A legjobb összefüggés akkor adódott, amikor az élettartam adatokat az oxigén- és kéntartalom hányadosának függvényeképpen tüntették fel.

A zárványtartalom mérését az aránylag lassan működő Quantimet 720 készülékkel, adagonként 3 ÷ 400 látótér vizsgálatával végezték. A mérés

eredményének az élettartam adatokkal való összefüggése kevésbé jó volt, feltehetően azért, mert a valóban megvizsgált anyag mennyisége nem volt elég nagy ahhoz, hogy átlagértéket adhasson.

Megfigyelték, hogy a nagyobb kéntartalmú, ill. kisebb 0/S hányadosú acélokban az oxidzárványokat többnyire szulfidburok veszi körül. Az ilyen zárványok simább felületűek, alakténye zőjük kedvezőbb, mint a szögletes oxidzárványoké.

A nagyarányú kísérletsorozatnak eléggé általánosítható tanulságait a következőképpen foglalhatjuk össze:

a) a szabványos, mikroszkópos, zárványvizsgálat sokszor nem elég megbízható ahhoz, hogy az eredményéből az acél felhasználhatóságára következtethessünk; kizárólagos használata ezért nagy kockázattal járhat;

b) a zárványoknak a szokásos, hagyományosan vizsgált kvantitatív adatain, azok mennyiségén, méretén kívül gyakran jelentős szerepe lehet a zárványok egyéb, pl. fizikai tulajdonságainak; ilyenkor nem fogadható el az a megközelítés, amely a zárványokat hasonló alakú, méretű üregnek tekinti;

c) a felhasználás körülményeit is figyelembe vevő, sokoldalú vizsgálattal megtalálhatjuk a zárványosság és az adott termék felhasználhatósága között fennálló összefüggést; ennek figyelembevételével kiválaszthatjuk a legkedvezőbb, a termelő üzemben is használható minősítő módszert.

Némelykor a zárványosság vizsgálati módszerének kiválasztása sok munkát és csak évek alatt összegyűjthető gyakorlati tapasztalatot is kíván. Mégis érdemes a feladattal állandóan foglalkoznunk és az utóbbi négy évtized tapasztalatait is felhasználnunk, mert a kelleténél zárványosabb acél a gyártó üzemeknek jelentős költséget, veszteséget okozhat, annak felhasználása pedig nagy kárt okozó, váratlan törésekkel és egyéb hibákkal járhat.

4. A zárványosság vizsgálata a technológiai fejlesztés szolgálatában

A zárványosság vizsgálatának korszerű módszerei nemcsak arra alkalmasak, hogy készgyártmányok tisztaságát, várható tulajdonságait és felhasználhatóságát értékeljük. Eredményei segítségével adott célra szánt acél gyártásának, dezoxidálásának, öntésének módját is alakíthatjuk, hogy biztosan felhasználható termékhez jussunk. Ezt a lehetőséget ötvözetlen lágy acél példájával szemléltetjük, amelyből melegen, aztán hidegen lemezt hengerelnek.

Ötvözetlen acél dezoxidálására a karbonon kívül csak mangán, szilícium és alumínium használatos. Közülük az alumínium a leghatásosabb; az acél oxigéntartalmát 10 ÷ 50 ppm-re csökkenti, az acélban pedig csak kevés marad belőle oldva: 0,015% fémes alumíniumtartalom az acélban már teljes dezoxidálásnak a jele. A szilíciumból dezoxidálás után 0,25%, a mangánból ennél is több marad vissza. Ez nem mindig kívánatos.

A felhasználás céljának megfelelően a lemezzé hengerlendő acélt csillapítatlan, csillapított és félig csillapított minőségben gyártják. Ezeket az oxigéntartalmuk és az oxidzárványaik különböztetik meg egymástól.

A csillapítatlan acél egyetlen dezoxidálószert, karbont tartalmaz; szilícium, alumínium legfeljebb nyomokban van benne, a mangántartalma pedig főleg a kén megkötésére való. Az acél 400 ÷ 700 ppm oxigéntartalma a karbonnal reagál CO fejlődése közben, úgy hogy a megszilárdult acél oxigéntartalma már csak 200 ÷ 300 ppm; ez gömb alakú mangánoxid és mangánszilikát zárványok alakjában található az acélban. Ezenkívül a CO-fejlődés eredményeként gázhólyagkoszorú is van, amelyet 15 ÷ 30 mm vastag ép kéreg borít.

Az öntés közben alumíniummal kezelt csillapítatlan acél kisebb, 100 ÷ ÷ 200 ppm oxigéntartalmú. A csillapítatlan minőségben csapolt acél sugarába 0,2 ÷ 0,3 kg/t alumíniumot adagolnak, amikor a tuskó tömör kérge már kialakult. Az alumínium megszakítja a CO-fejlődést, a tuskó belseje ezért csillapított acél módjára szilárdul meg. A tömör kérgen belül gázhólyagkoszorú van, a zárványok pedig gömb alakú oxidok és oxiszulfidok.

A mangánnal és szilíciummal dezoxidált, csillapított acélfajták 380 ÷ ÷ 650 N mm^{-2} szilárdságú szerkezeti acélok. Alumíniumot szemcsefinomítás és a nitrogén megkötése céljából adagolnak. Oxigéntartalmuk az összetételük szerint 100 ÷ 200 ppm, a legalább 0,020% Al-tartalmúaké 10 ÷ 50 ppm. A zárványok gömb alakú mangán-, szilíciumoxidok, az alumíniumtartalmúakban azonban megjelenik a mangán-alumíniumoxid és az Al_2O_3 is.

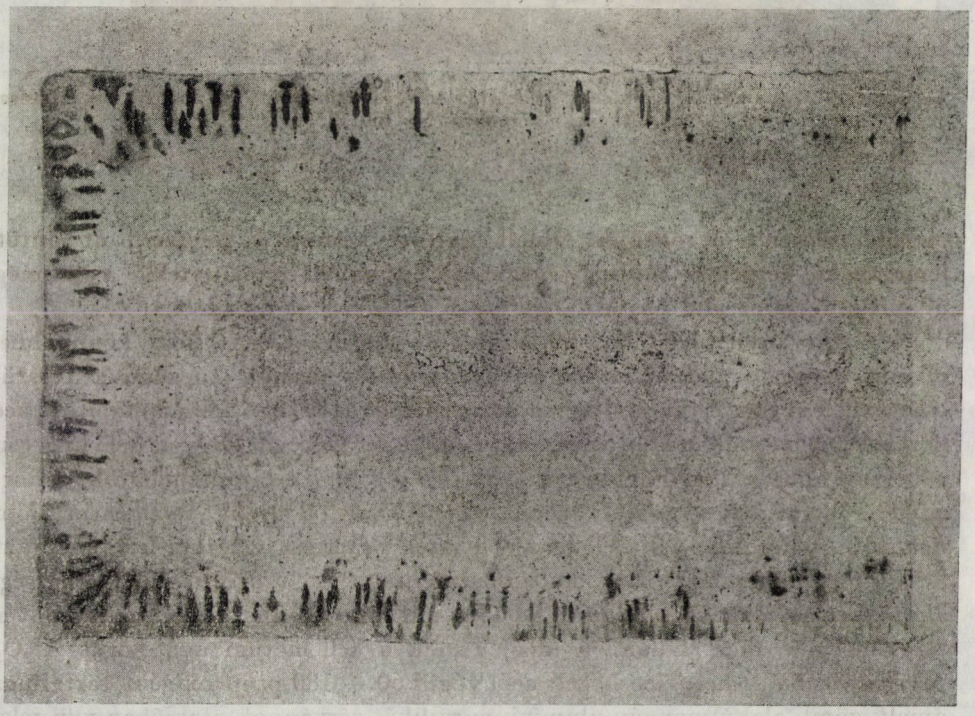
Csillapított minőségűek a kiválóan mélyhúzható acélok is, ezeknek ötvöző-fémtartalma azonban csak kevés lehet: karbon legfeljebb 0,1%, szilícium nyom, mangán 0,25 ÷ 0,45%. Ilyen acélt 2,5 ÷ 3,0 kg/t alumíniummal kell dezoxidálnunk. A dezoxidálószer adagolását követően az oxigéntartalom már 100 ppm-nél kevesebb és ez a mennyiség az acél megszilárdulása után még tovább csökken, 10 ÷ 50 ppm-re. Ez a kevés oxigén kedvezőtlen alakú, ágas-bogas Al_2O_3 zárványok alakjában található. Ezek az árványok rendszerint nem egyenletesen oszlanak el az acéltuskóban, hanem főleg annak kérgében helyenként felhalmozódva kiterjedt zárványfelhőket (12. ábra) alkotnak; ezek a felhők a hidegen hengerelt finomlemez felületén súlyos hibákat okoznak (8. ábra). Ilyen acélból öntött tuskók előnyújtásával hengerelt bugák felületét hideghengerlés előtt tisztítanunk kell.

A félig csillapított acélok főleg 380 ÷ 540 N mm^{-2} szilárdságú szerkezeti acélok; legalább 0,20% karbont, 0,15% szilíciumot és 0,50 ÷ 1,0% mangánt tartalmaznak. Dezoxidálásuk céljából az üstbe csapolt acélba ferromangánt, kevés ferroszilíciumot vagy kalciumszilíciumot szokás adagolni. A dezoxidálásnak olyan mértékűnek kell lennie, hogy öntés közben CO ne fejlődhessék; ez a feltétel akkor teljesül, ha az acél oxigéntartalma az öntés kezdetén 100 ÷ 300 ppm-nél nem több. A gázfejlődés megakadályozása céljából a ferrosztatikai nyomást is fel kell használnunk; ebből a célból az öntést gyorsan kell végezni.

A ferrosztatikai nyomás a tuskó fejrészében a legkisebb, ezért itt némi gáz mégis fejlődik. Az acél sikeres öntése kényes egyensúlyon múlik, ezért az ilyen acélt kiegyensúlyozottnak is nevezik.

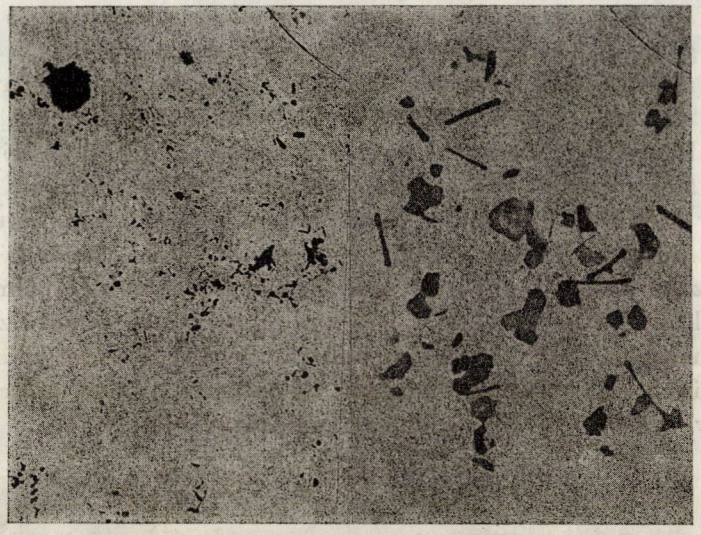
A csillapítatlan és félig csillapított acél zárványképző folyamatára jellemző, hogy a CO-fejlődéssel járó reakciót annál inkább helyettesíti a MnO képződése, minél kisebb az acél karbontartalma és minél nagyobb a mangántartalma. Kis C és nagy Mn-tartalmú acélban ezért kevesebb a gázhólyag, helyettük gömb alakú MnO-zárványok jelennek meg.

A lemeztuskók folyamatos öntése jelentős gazdasági előnyökkel jár: jobb a kihozatal, a tuskó felülete kiváló, ezenkívül pedig főleg előnyújtó hengerlési kapacitás szabadul fel, mert a folyamatosan öntött tuskó vékonyabb a hagyományos módon álló kokillába öntöttnél. Viszont éppen a lemeznek szánt lágy acélfajták folyamatos öntése nehézségekkel is jár. A tuskó kisebb vastagsága miatt nehezebb a gázhólyagkoszorút borító tömör kéreg vastagságának szabályozása. Ha ez a kéreg kelleténél vékonyabb (11. ábra), akkor a lemez felülete nagyon rossz lesz, a lemez pedig használhatatlan. Ezen a nehézségen avval segíthetünk, hogy a félig csillapított acélt 40 ÷ 60%-kal lassabban öntjük, mint a csillapítottat; ez megint az öntőszerelvények erősebb, hosszasabb igénybevételével és gyorsabb elhasználódásával jár.



11. ábra. Nem kellően dezoxidált acélból folyamatosan öntött buga: gázhólyagkoszorú a felülethez közel, középütt jelentős mértékű kéndúsulás. Baumann-nyomat fényképe

Mélyhúzható lemezek gyártására szánt acélt csillapított minőségben kell öntenünk folyamatos öntőgépen is. A teljes csillapítás ekkor sem végezhető szilíciummal, mert ebből legalább 0,25% marad az acélban, de alumíniummal sem, a zárványfelhők (12. ábra) megjelenése miatt. Ezen a nehézségen nem teljesen, de nagyrészt túljuthatunk, ha kedvező áramlási helyzetet teremtő



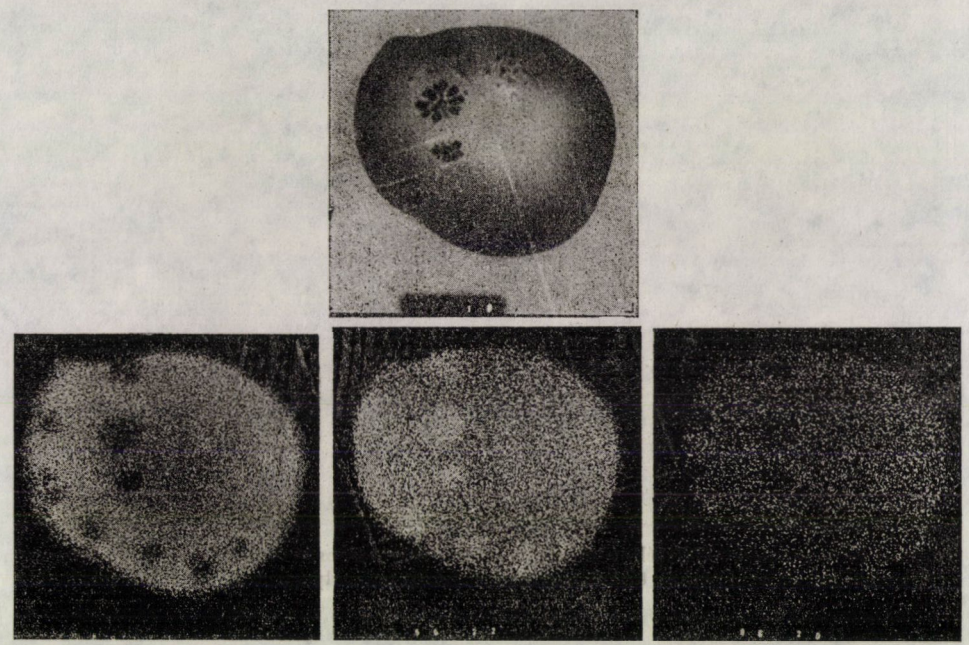
12. ábra. Al_2O_3-zárványok felhője a kelletténél több alumíniumot tartalmazó folyamatosan öntött tuskó kérgében. N.: 100, ill. 300×

merülő tölcséren át öntünk. Oldalt nyitott kétfuratú tölcséren át öntött lemeztuskó kérgében mintegy negyed-ötöd annyi zárványfelhő volt megállapítható, mint alul nyitott, egyfuratú tölcséren át öntöttben.

A zárványfelhők teljes kiküszöbölése úgy lehetséges, hogy könnyebben olvadó, cseppek alakjában lebegő dezoxidációs termék képződését tesszük lehetővé. Ezt úgy érjük el, hogy a dezoxidálást az üstben félig csillapított acél kezeléséhez hasonló módon végezzük. A módszer lényege, hogy az acél kiegyensúlyozott állapotát legfeljebb 0,08% Si- és 0,4% Mn-tartalommal érjük el; hogy a 0,4 ÷ 0,6 m/perc sebességű öntés közben CO ne fejlődjék, az oxigéntartalomnak 150 ÷ 300 ppm-nek kell lennie. Ennek beállítása céljából ferromangánt, kevés ferroszilíciumot vagy kalciumszilíciumot és a szükséges mennyiségű alumíniumot adagolunk. Az acél 0,015%-nál több fémállapotú alumíniumot ne tartalmazzon, mert különben megjelennek a kellemetlen ágas-bogas Al_2O_3-zárványok is. A helyesen kezelt acél végül 60 ÷ 180 ppm oxigént tartalmaz, amely gömb alakú mangán-alumínium-szilikát zárványok alakjában van jelen az acélban. Az így dezoxidált acélok folyamatosan öntött tuskóiban csak 50 ÷

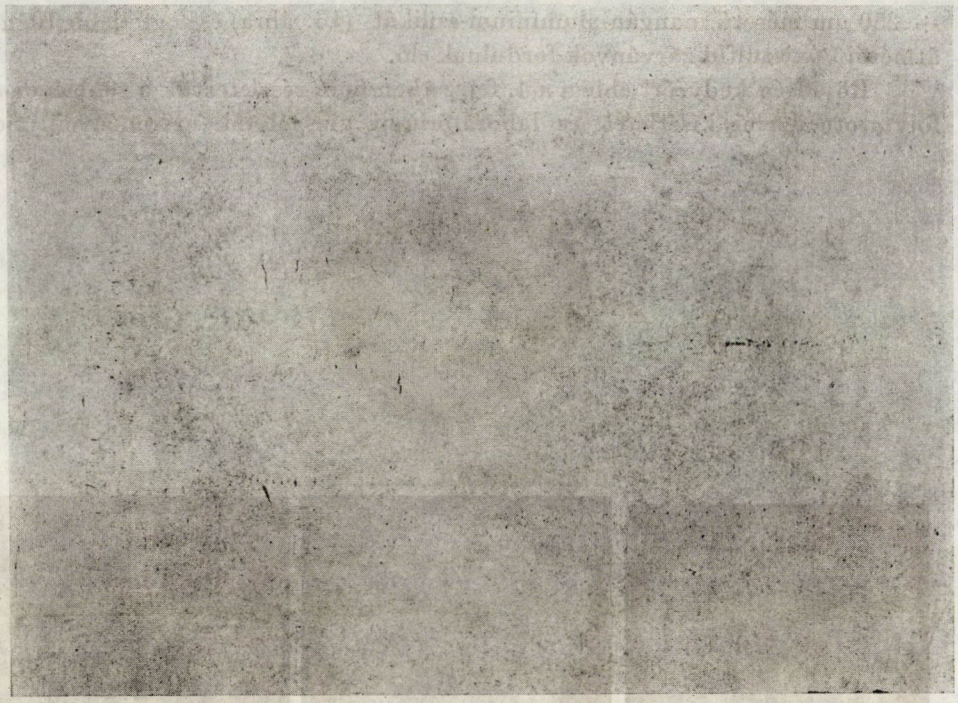
÷ 250 μm méretű mangán-alumínium-szilikát (13. ábra) és legfeljebb 10 μm átmérőjű oxiszulfid zárványok fordulnak elő.

Rövidség kedvéért ebben a 4. fejezetben nem részleteztük a több éven át folytatott üzemi kísérletek és laboratóriumi vizsgálatok eredményeit. Sok



13. ábra. Kiegyensúlyozott, kevés alumíniummal dezoxidált félig csillapított acélból öntött lemeztuskó gömb alakú zárványtípusa, alatta sorjában a mangán, a szilícium és az alumínium jelenlétét bizonyító mikroszonda-felvételek. Valamennyi N.: 1200×

kísérleti adag gyártására és alapos vizsgálatára volt szükség, mire az utolsóként leírt dezoxidáló módszer kialakult [47]. Ez a módszer a legjobbnak látszik mindazok között, amelyeket az üzem adott körülményei között jelenleg még meg lehet valósítani. A leírt mdon dezoxidált acélból folyamatosan öntött lemeztuskó mentes minden makroszkópos hibától: nincsenek benne gázhólyagok, a kéndúsulás csekély mértékű (14. ábra), az oxidzárványai kedvező alakúak (13. ábra) és a kihengerelt lemezt kevésbé teszik rétegessé, mint a dendrites zárványok. Mélyhúzó művelettel kitűnően feldolgozható acél előreláthatóan majd néhány év múlva lesz biztonsággal gyártható, amikor majd termelni kezdenek a jelenleg épülő oxigénes konverter üzemek.



14. ábra. Helyesen dezoxidált félig csillapított acélból folyamatosan öntött lemeztuskó Baumann. nyomatának fényképe. A tuskó peremén nincsen gázhólyag, a kéndúsulás minimális

5. Következtetések, javaslatok

A zárványok vizsgálatának kérdése most azért időszerű, mert előre látható, hogy talán nem is a távoli jövőben a vizsgálat módszere lényegesen meg fog változni. A zárványoknak az acél teherbíró képességét és egyéb tulajdonságait rontó hatása miatt ugyanis kívánatos, hogy az acélgyártmányaink ilyen szennyezettségét minél pontosabban és megbízhatóbban ismerjük, beleértve a zárványok mennyiségét, minőségét és egy sor további jellemző adatát. Másrészt viszont a világ acéltermelő országaiban sok helyütt a mikroszkópos összehasonlító-becslő módszerek valamelyike szabványos és ezért kötelező. Ezeknek a módszereknek az eredménye nem pontos és nem is megbízható. A makroszkópos vizsgálat módszerei, például a lemezek ultrahangos vizsgálata és a lépcsős próba megbízhatók ugyan, de nem adhatnak teljes képet a zárványok mibenlétéről, még az oxid- és szulfidzárványok megkülönböztetésére sem alkalmasak.

Mintegy tíz éve a televíziós mérőkészülékek egész sora jelent meg a piacon, négy-öt éve pedig azoknak gyorsan működő, automatizált változatai is ismeretesek. Ezekkel számos vizsgálatot végeztek, amelyeknek eredménye meg-

győzően bizonyítja, hogy azokkal az értékelendő tételből vett próbadarabok zárványossága a kívánt pontossággal és megbízhatóan állapítható meg. Ezeknek a készülékeknek megjelenése lényeges fejlődést jelent. Kívánatosnak látszik, hogy a zárványosság vizsgálatára ezek használata legyen általános és kötelező az összehasonlító mószerek helyett. Egyelőre azonban az automatikus mérés módszere még egyetlen országban sem szabványos, aminek valószínű okait korábban már említettük.

A igazság kedvéért azt is megemlítjük, hogy a zárványképző elemeknek a dúsulásra való hajlamossága miatt az automatikus mérés eredménye is csak a kiválasztott próbadarab zárványosságát adja meg pontosan. Semmiképpen sem lehetünk biztosak abban, hogy a minősített és kellően tisztának talált tétel más részében nincsen többször annyi zárvány, mint a próbadarabokban. Ha a dúsulás folytán az átlagosnál vagy a megengedettnél jóval több vagy nagyobb zárvány a késztermléknek erősen igénybevett részébe kerül, annak súlyos következménye lehet. Ha többször tíz, esetleg száz tonna acél egy tömegben kristályosodott, a dúsulásnak annyiféle változata jöhet létre a tuskóban, hogy a vizsgálat céljából vett próbadarabok alapján valamennyi dúsulásos hely számbavételére nem is számíthatunk.

Az automatikus mérőkészülékkel végzett vizsgálat szerint kellően tisztának talált acélban csak akkor bízhatunk meg teljesen, ha a dúsulás lehetőségét a legkisebb mértékre szorítottuk, vagyis ha az acélt valamelyik átolvasztó módszerrel, nem csekély költség árán nagyon kis részletekben juttattuk a helyére, és az ott cseppenként szilárdul meg.

A reprezentatív próbavétel nehézségei ellenére a televíziós automatikus mérőeszközök az acél tisztaságának ellenőrzése terén olyan jelentős előrehaladást jelentenek, hogy ennek a mérőmódszernek szabványosítására valahol előbb-utóbb sor fog kerülni. Valószínű, hogy az első erre vonatkozó szabvány olyan országban jön majd létre, ahol nagyobb mennyiségű acélt gyártanak és esetleg még ilyen készülékeket is hoznak forgalomba, meg a mérés módjának tökéletesítésével is foglalkoznak. Ezek az országok Anglia, a NSZK, Svédország. Nekünk magyaroknak ezen a téren egyelőre nincsen teendőnk. Meg kell várnunk, amíg külföldi, esetleg nemzetközi — ISO, KGST — szabvány készül, ezt kell majd az igényeinkhez mérten átvennünk. Ajánlatos azonban, hogy néhány nagyobb üzemünket szélesebb körű tapasztalat szerzése céljából televíziós zárványvizsgáló készülékkel ellássuk. Az országban levő egyetlen, nem is legkorszerűbb ilyen készülék nem lehet elegendő a felmerülő igények kielégítésére. Elegendő számú, korszerű készülék hiányában a vállalataink laboratóriumai híjával lesznek azok kezelésének legszerényebb gyakorlati ismereteinek; ilyenekre pedig szükségük lesz, ha a mérőmódszer szabványosítása megtörténik.

Az acélszabványaink átvizsgálása során még egy további teendőnk is felmerült. Ezekben elég sok olyan szabványos acélfajta szerepel, amelynek

kéntartalma 0,04% is lehet, az oxigéntartalmuk pedig egyáltalán nincs előírva. Az ilyen mértékben szennyezett acél nem mondható korszerűnek, hiszen fejlett vaskohászat jól felszerelt üzemeiben nehézség nélkül gyártanak 0,01, sőt 0,005% kéntartalmú acélt is, megfelelően csekély oxigéntartalommal. Bármilyen gondosan vizsgáljuk is a 0,04% kéntartalmú acélt, azt mindig eléggé zárványosnak fogjuk találni. Vaskohászati üzemeinket el kell látnunk a hatékony kéntelenítés és dezoxidálás legfontosabb lehetőségeivel és eszközeivel, hogy azokat az üzemeink igénybe vehessék, amikor jó minőségű acélok gyártására kerül sor. Csak ez vethet véget azoknak a panaszoknak, amelyek főleg a hengerelt, kovácsolt termékek zárványosságára, a lemezek rétegességére vonatkoznak. Azt kell remélnünk, hogy a vaskohászatunknak már megindult korszerűsítése során minderre sor fog kerülni, és vaskohászatunk az ötödik-hatodik ötéves tervünk sikeres befejeztével valóban tiszta acélt szállíthat majd a felhasználó iparágaknak, vállalatoknak.

IRODALOM

1. Samarin, A. M.: Fémötvözetek dezoxidálásának fizikai kémiája. *Int. Conf. Clean Steel.* Balatonfüred, 1970. A 1 sorszámú előadás
2. Simon S.: Az acélgyártás fizikai és kémiai folyamatainak elmélete a Simon S.—Sziklaváry J.—Szőke L.-nak az „Újabb technológiai megoldások az acélgyártásban" c. könyvben. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1974, 7—121
3. Kiessling, R.: A zárványok hatása az acél mechanikai tulajdonságaira. A zárványok kritikus nagysága. Mint [1], D 1 sorszámú előadás
4. Bergh, S.: Az oxidzárványok mennyiségének összefüggése az acél oxigéntartalmával. *Jernk. Ann.* **146** (1962), 748
5. Oberhoffer, P.: Ötvözőelemek dúsulása acéltuskókban. *St. u. E.* **47** (1927), 1782
6. Ichinoe, M.—Mori, H.—Kojioka, H.—Kokube, J.: A Yawata acélművek tapasztalatai tiszta acél gyártásában. Mint [1], C 4 sorszámú előadás
7. Baker, T. J., Charles, J. A.: A MnS-zárványok deformálódása acélban. *JISI* **210** (1972), 680
8. Ekerot, S.: A szilikátzárványok magatartása az acél melegalakításakor. *Scand. J. Metallurgy* **3** (1974), 21
9. Kiessling, R.—Nordberg, H.: A zárványok hatása az acél mechanikai tulajdonságaira. „Production and Application of Clean Steel" c. ISI kiadvány, London 1972, 179
10. Klevebring, B.—I.: Képlékeny zárványok kritikus nagyságának meghatározása tekintettel üregek képződésére melegalakítás közben. *Scand. J. Metallurgy* **5** (1976), 63
11. Bernard, G.—Grumback, M.—Molicke, T.: Acéllemezek zárványossága és mechanikai anizotrópiája. *Metals Technology* **2** (1975). 512
12. Philip, T. V.: Az elektrosalakos átolvasztás javítja a keresztirányú szívósságot. *Metals Technology* **2** (1975), 554
13. Baker, T. J.—Gore, G. B.—Charles, J. A.: A zárványok deformálódása és a szívósság anizotrópiája. *Metals Technology* **3** (1976), 183
14. Konovalov, R. P. és mások: Acél kéntelenítése ritka földfémekkel. *Csern. Met.* **9** (1966), 144
15. Spetzer, E.—Wendorff, J.: Földalkáli fémek befuvatása olvadt acélba és annak hatása az acél hasznos tulajdonságaira. *Radex Rdschau* (1976) 595
16. Mihelich, J. D.—Bell, J. R.: A zárványok alakjának hatása a ferrites acél szívósságára. *JISI* **209** (1971), 464
17. Clark, E. E.: Acél tisztaságának vizsgálata ultrahanggal. Mint [1], Eő előadás
18. Németh, E.: Fokozottan igénybevett motoralkatrészek anyagának vizsgálata és minősítése. *BKL Kohászat* **102** (1969) 427
19. Verő J.: A zárványosság vizsgálatának szabványai az adagminősítés szempontjából. Mint [1], E7 előadás

20. ECKSTEIN, H.—J.—SCHNEIDER, K.: A nemfémes zárványok vizsgálatára használatos módszerek értékelése. *Neue Hütte* **5** (1960), 607
21. BOLSOVER, G. K.: Az acél zárványosságának vizsgálata mikroszkópos módszerrel. *Metallurgia* **12** (1935), 83
22. RINMANN, B.—KJERRMAN, H.—KJERRMAN, B.: Az acél nemfémes zárványainak mikroszkópos vizsgálata. *Jernk. Ann.* **121** (1936), 199
23. DIERGARTEN, H.: Golyóscsapágy-acél minősítése a zárványossága alapján. *Arch. Ehwesen* **10** (1936), 197
24. VERŐ J.: Az ipari vasötvözetek metallográfiája. Akad. Kiadó Budapest 1964, 2. kötet 583—603
25. HARDY, J. V.—ALLSOP, R. T.: A nemfémes zárványok meghatározása acélban. *JISI* **195** (1960), 302
26. VERŐ J.: A mikroszkópos zárványvizsgáló módszerek értékelése. *BKL Kohászat* **98** (1962), 9
27. MIHALJEV, M. Sz.—MIRONOV, L. V.: Az acél nemfémes zárványainak mikroszkópos vizsgálata. *Szálj* **20** (1960), 647
28. ATKINSON, M.: A nemfémes zárványok hatása a nagy szilárdságú acélfajták kifáradási hatására. *JISI* **194** (1960), 63
29. WOODHEAD, J.—GLADMAN, T.: Objektív mikroszkópos zárványvizsgáló módszer. *JISI* **194** (1960), 189
30. BERGH, S.: Zárványosság meghatározása pontszámlálással. *Jernk. Ann.* **138** (1962), 862
31. MELFORD, D. A.: Automatikus módszerek az acél zárványosságának vizsgálatára. Mint [1], E1 előadás
32. MARTENSSON, H.: A Jernkontoret-nek az automatikus zárványvizsgálattal foglalkozó munkacsoportjának jelentése. Mint [1], E2 előadás
33. FRANKLIN, G.: A próbavétel nehézségei és a zárványok nagyság szerinti eloszlásának jelentősége. Mint [1], E3 előadás
34. RUDDLESTONE, H.—THORNTON, J. R.—BOWERS, M. S.: Az acél zárványosságának vizsgálata a Quantimet 360 műszerrel. *Metals Technology* **3** (1976), 422
35. ÉNEKES S.: Néhány metallurgiai tényező hatása a golyóscsapágyacél élettartam tulajdonságaira. Mint [1], D5 előadás
36. BLANK, J. K.—ALLMAND, T. R.: A zárványképző elemek és a zárványok mennyiségének összefüggése. Automatic Assessment of Steel Cleanness c. ISI kiadvány, (1968), 1
37. SOMOSI M.-NÉ—LESZL B.-NÉ: Nemfémes zárványok korszerű vizsgálata. *Dunai Vasmű* **31.** szám, 1976, 15
38. STEINMETZ, R.—LINDENBERG, K. O.: Vas-mangán-szulfidok és oxiszulfidok morfológiája. Arch. Ehw., 47 (1976), 527.
39. CUMMINGS, H. N.—STULEN, F. B.—SCHULTE, W. C.: A zárványok hatása a SAE 4340 acél kifáradási hatására. Tr. ASM 49 (1957), 482
40. TARDY P.—RÓNASZÉKI L.-NÉ: Előadás a IX. Kohászati Anyagvizsgáló Napokon. Balatonaliga, 1977
41. HAUSER, J. J.—WELLS, M. G. H.: *Metals Techn.* **1** (1974), 86
42. Stahl-Eisen-Prüfblatt 1570. 2. kiadás, 1971
43. JIS G 0555 sz. japán szabvány
44. ASTM Des. E 45—74 sz. USA-szabvány
45. IS 4163—1967 sz. indiai szabvány
46. TARDY P.: Összefüggés a csapágyacélok gyártástechnológiája, zárványossága és élettartamtulajdonságai között. Kand. értekezés, Budapest 1973
47. RÉPÁSI G.: A részleges dezoxidáció elmélete, gyakorlata és társadalmi hasznosítása. Kand. értekezés. Budapest 1976
48. CHARPENTIER, P. L. és mások: Fekete vonalszerű hibák alumíniummal csillapított acélon. *Metals Techn.* **2** (1975), 52

Assessment of Non-metallic Inclusions in Steel. — Beginning with the fundamental rules governing the formation of non-metallic inclusions in steel, the pecularities of their distribution, size, and shape, their effect on mechanical properties and the means of diminishing their harmful effects are dealt with. Then follows a description of analytical and other chemical methods, the macroscopic and microscopic methods used to determine the amount of inclusions; these are characterised with respect to their reliability, to the time and costs of their performance. Based on the Hungarian standards the methods used in the Hungarian Steelworks to examine the cleanness of their products are then discussed. Finally, it is proposed to instal at

least in our major steelworks modern automatic television instruments, otherwise there will be no experience with handling these when in the coming years the automatic assessment of steel cleanness will be the only standardised microscopic method for this purpose.

Untersuchung und Bestimmung der nichtmetallischen Einschlüsse in Stahl. — Im Anschluss an die fundamentalen Regeln, welche die Entstehung von Einschlüssen bestimmen, werden die ungleichmässige Verteilung derselben, ihre Größe und Gestalt, ihr Einfluß auf die Zähigkeit und die Möglichkeiten der Verminderung ihres schädlichen Einflusses geschildert. Dann folgt eine Schilderung der analytisch-chemischen, makroskopischen und mikroskopischen Verfahren, welche die Erfassung der Einschlußmenge und weiterer wichtiger Einzelheiten ermöglichen. Unter Berufung auf die gültigen ungarischen Normen werden dann die in den einheimischen Stahlwerken ausgeübten Prüfmethoden der Stahlreinheit erwähnt. Endlich wird vorgeschlagen, wenigstens unsere grösseren Stahlwerke mit modernen automatischen Messinstrumenten zu versehen, damit die notwendige Erfahrung in der Handhabung dieser Einrichtungen zur Vefügung steht, wenn in den kommenden Jahren des automatische Messen als einziges mikroskopisches Verfahren weltweit genormt sein wird.

MINŐSÉGVÉDELEM A VÍZÉPÍTÉSBEN*

— HELYZETKÉP —

IVICSICS FERENC**
és
MIKLÓS KÁROLY***
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

A vízépítésben is, más építőipari tevékenységhez hasonlóan egyre nagyobb jelentősége van kiváló minőségben végzett munkának. A tanulmány a minőségvédelem érvényben levő szabályaiból indul ki és tájékoztatást ad a Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Központ (VITUKI) e téren végzett tevékenységéről. A szerzők ismertetik a vízépítésben használt újfajta anyagok, termékek, építési módok vizsgálatát, alkalmazásuk engedélyezését, a gépek és gépi berendezések biztonsági és üzemegészségügyi vizsgálatát. A vizsgálatok tudományos alapjainak taglalása, a vizsgálatok módszerei és a műszerezettség foka, továbbá gyakorlati példák teszik teljessé a tanulmányt.

1. A minőségvédelem helyzete és szabályozó rendszere a vízépítésben

A minőségvédelem helyzetének elemzésével azt a célt kívánjuk elérni, hogy egy valós, előremutató anyag álljon rendelkezésre a minőség alakulásáról a vízépítésben. Ez alapján egyértelműbbé válhatik a szabályozó rendszer fejlesztése, a meglevő hiányosságok könnyebben kiküszöbölhetők.

Az anyagban elsősorban a hibákra hívjuk fel a figyelmet, de ez nem jelenti azt, hogy nincsenek kedvező jelenségek. Nem rosszabb a helyzet, mint az építőipar egyéb területén.

A minőség alakulását több tényező befolyásolja. Ezek között vannak a felhasznált anyagok tulajdonságai, a munkák előkészítettsége, a tervszerűség, a szakértelem, a munkafegyelem és még sok más tényező.

De emellett a szabályozó rendszer az, ami meghatározó a minőségre. A szabályozó rendszernek két fő része van. Egyrészt szükség van egyértelmű, szabatos műszaki szabályozásra (országos és ágazati szabványokra, műszaki előírásokra, szabályzatokra), másrészt szükséges a szabályok betartásának ellenőrzése, vagyis folyamatos minőségellenőrzési tevékenységet kell végezni.

Az általános minőségfejlesztési politika irányvonalát a Minisztertanács 2001/1974. (I. 9.) számú határozata szabja meg. A határozat a többi között

* Elhangzott és jóváhagyást nyert a Vízgazdálkodástudományi Bizottság Vízépítési Albizottságának ülésén.
** Dr. Ivicsics Ferenc, 2132 Felsőgöd, Lehel u. 6.
*** Dr. Miklós Károly, 1013 Budapest, Attila u. 4.

kimondja, hogy a minőségfejlesztés az ágazat fejlesztési politikájának része kell hogy legyen.

Ahhoz, hogy a vízügyi ágazat szabályozó rendszere a szabványosítási tevékenység, az új termékek és építési módok vizsgálata mellett teljes legyen, szükség van még a központi minőségellenőrzési feladatok megszervezésére, a minőségvédelem hatékonyabbá tételére a vízügyi igazgatóságokon, vállalatokon belül.

A minőségellenőrzés igen szoros kapcsolatban van a műszaki szabályozással, mivel az ellenőrzés során elsősorban az Országos Építésügyi Szabályzat, az Építő- és Kivitelezési Szabályzat, a felhasznált anyagokra, termékekre vonatkozó szabványok, műszaki előírások, engedélyek követelményeinek betartását kell ellenőrizni.

A minőségvédelem elemzésénél a műszaki szabályozást adottnak tekintjük, mivel azok nagy részét más szervezetek (ÉVM, MSZH) dolgozzák ki. Foglalkozunk azonban az előírások betartásával, a minőségvédelem, minőségellenőrzés gyakorlatával, anyagok, termékek, építési módok vizsgálatával.

1.1. *A minőségvédelem jogszabályai*

A minőségvédelmi teendők szabályozására a vízépítésben az OVH nem minden esetben rendelkezik külön jogszabállyal, hanem egyes kérdéseket olyan ÉVM rendeletek szabályoznak, amelyeket az OVH elnökével egyetértésben adtak ki. Ez így helyes is, mert elkerüli a kettős szabályozást és egy-egy rendelet módosításánál nincs szükség egy másik rendelet megváltoztatására.

Jelenleg a minőségvédelemmel kapcsolatban a következő jogszabályok vannak hatályban:

— A Minisztertanács 2001/1974. (I. 9.) számú határozata a minőségszabályozás rendszerének fejlesztéséről, a szabályozórendszer hatékonyságának növeléséről.

— Az Országos Vízügyi Hivatal elnökének 1/1971. (IV. 25.) OVH számú rendelkezése a vízügyi felügyelet gyakorlásáról.

— A Magyar Forradalmi Munkás-Paraszt Kormány 20/1971. (V. 25.) számú rendelete az építésfelügyeletről.

— Az építésügyi és városfejlesztési miniszter 21/1971. (VII. 7.) ÉVM számú rendelete az építésfelügyeletről szóló 20/1971. (V. 25.) Korm. számú rendelet végrehajtásáról.

— Az építésügyi és városfejlesztési miniszter 6/1969. (II. 12.) ÉVM számú rendelete az újfajta termékek és építési módok építőipari alkalmazásának engedélyezéséről.

— Az Országos Vízügyi Hivatal elnökének 3/1973. (VII. 31.) OVH számú rendelkezése az újfajta termékek és építési módok alkalmazásának engedélyezéséről.

— Az építésügyi és városfejlesztési miniszter 1/1976. (I. 8.) ÉVM számú rendelete az építésügyi ágazatba tartozó minőségellenőrző szervek dolgozói képesítési feltételeinek megállapításáról.

A rendeletek egyértelműen határozzák meg a feladatokat. Hiányosságok a rendeletek nem kellő ismeretéből vagy az azokban foglalt előírások be nem tartásából adódnak.

A rendeletek között nem szerepel az OVH minőségellenőrzésére vonatkozó végrehajtási utasítása. Ennek kibocsátása azért is indokolt, hogy összefoglalóan jelenjen meg a gazdasági vezetők feladata a minőségvédelem területén. Ilyen utasítás esetén könnyebb a minőségvédelmi követelmények kitűzése is. Az utasítás kiadását az OVH tervbe vette.

1.2. *Minőségvédelem a vízügyi szerveknél*

A hatvanas évek közepét megelőző időszakban a vízügyi szervezeteknél is — a minőségvédelem területén — a szokásos építőipari gyakorlat alakult ki. Ez azt jelentette, hogy az építésvezetőségek szakmai ismereteiknek megfelelően végezték munkájukat, de célirányos minőségvizsgálat csak nagyobb létesítmények építése esetén történt.

Az 1965-ös árvíz után a földmunkák minőségében változás következett be. A hidromechanizáció és a gépi technológia a régebbi kordélyos munkákhoz képest jó tömörséget adott. Ez időben vezették be az izotópos-tömörségmérést és tervbe vették mozgó laboratóriumok felállítását is. Ez utóbbi azonban csak néhány helyen valósult meg.

A Vízügyi Építő Vállalatnál a 60-as évek végén vált általánossá a beton próbakocka-készítés. Acélcsövekből készült vezetékeken röntgensugárral vizsgálták a hegesztési varratokat. Gondot fordítottak a kőbányákban termelt kövek minőségére is.

A szervezett minőségvédelem kialakítására jelentős hatással volt a 2001/74 MT határozat, amely alapján a *Vízépítőipari Tröszt* 1976-ban kidolgozta a minőségellenőrzési és minőségvédelmi rendszerét. Azonban ez előbb is, 1975-ben megtörténhetett volna.

A *Vízügyi Igazgatóságokon* a minőségvédelmi tevékenység az esetek többségében a következők szerint alakult. A saját tervezésben és kivitelezésben végzett kisebb munkáknál a szakaszmérnökségek adnak műszaki ellenőrt, míg a nagyobb munkáknál az igazgatóság jelöl ki felelős személyt a műszaki ellenőri teendők ellátására. Az ellenőrzés eredményeit éppenúgy az építési naplóban rögzítik, mintha külső ellenőrök lennének.

A Vízügyi Igazgatóságok többségének saját talajmechanikai laboratóriuma van, de ott csak egyszerűbb vizsgálatokat végeznek.

Gyakori problémát jelent, hogy az építési anyagokról nem kapnak minőségi bizonylatot a szállítótól.

Gondot okoz, hogy a bank a pénzügyi ellenőrzés során még azzal is foglalkozik, hogy honnan szállítják a homokos-kavicsot, és nagyobb távolság esetén észrevételt tesz. Pedig azért rendelnek esetleg messzebbről, mert onnan jobb minőségű anyagot kapnak. A közelebbi adalékanyag osztályozása többe kerülne, mint a plusz szállítási költség.

Ez évben — némely esetben — gondot okoz, hogy már tavasszal megkapták a teljes évi cementmennyiséget. Jóllehet szakszerűen tárolják, mégis félő, hogy félév múlva a felhasználáskor nem lesz teljes értékű.

Kiemelt létesítmények beruházását és műszaki ellenőrzését is az OVIBER végzi. Nagyobb munkáknál helyszíni műszaki ellenőr képviseli a beruházót. Tapasztalatok szerint az ellenőrzés főleg méretellenőrzésre, illetve pénzügyi kollaudálásra terjed ki.

Hiányolható, hogy a tervezés minőségellenőrzése a beruházó részéről nincs megoldva, és néha hiányzik a generál-tervezési tevékenység. Ez a körülmény sok szakmai problémát okozott.

A munkák nem a kívánt minőségben történő végzésének emberi okai a következőkben foglalhatók össze: kevés a szakmunkás, ezért segédmunkásokkal kénytelenek szakmunkát végeztetni, nem kielégítő a munkafegyelem. Ez utóbbi főleg a létszámhiánnyal magyarázható, de feltétlenül vezetési hiányosságok is vannak.

A minőségvédelem vonatkozásában szemléletváltozásra van szükség. Ez alatt az értendő, hogy következetesebbé kell tenni a munkák ellenőrzését, előírásoknak megfelelő mértékben kell végezni a számszerűsíthető ellenőrzéseket (tömörségmérés, próbakockatörés), ki kell javítani a minőségi hibákat, illetve értékcsökkenést kell alkalmazni.

1.3. *A VITUKI jelenlegi ellenőrzési tevékenysége*

A VITUKI, az Építésügyi Minőségellenőrző Intézet megbízásából 1970 óta foglalkozik minőségellenőrzéssel. 1975-ig kétféle munkanem, a földmunka és a résfalépítés ellenőrzése volt feladat.

Földmunka-ellenőrzések során tömörségméréseket végeztünk s a mért értékeket összehasonlítottuk a tervben előírt tömörségekkel. A munka meggyorsítása érdekében izotópos tömörségmérő berendezést alkalmaztunk. Az ellenőrzések többségében a földmű minősége megfelelt a követelményeknek.

A *résfalak* minőségellenőrzése során a résiszap és a résfal minőségét ellenőriztük. A munka során meghatároztuk a résiszapkészítéshez felhasznált bentonit jellemző paramétereit, a kész résiszap minőségét mutató adatokat és a résfal anyagából készített próbakockák törőszilárdságát.

Az eredmények tanúsága szerint, a résiszap minősége az esetek többségében nem volt megfelelő. Ez a körülmény — elsősorban — a kereskedelemben

kapható bentonit gyenge minőségével magyarázható. A résfal anyagának minősége általában kielégítő volt.

A VITUKI 1976-ban *alapozásoknál* végzett minőségellenőrzést. Az első ellenőrzések adatai még korántsem elégségesek az általánosítható következtetések levonására. Az alapozások ellenőrzését 1977-ben folytatjuk.

Az ellenőrzések eredményét a VITUKI minden év végén összefoglaló jelentésben közölte az ÉMI-vel. Amennyiben az ellenőrzést végzők, a munkájuk során számottevő hiányosságot fedeztek fel, arról értesítették az építő vállalat vezetőségét, a beruházót és az OVH-t is.

Az egész vízügyi szolgálat területére kiterjedő *minőségellenőrzés rendszerének* kidolgozása folyamatban van. Ennek a munkának az alapja a Magyar Forradalmi Munkás-Paraszt Kormány 20/1971. (V. 25.) számú — az építésfelügyeletről szóló — rendelete és az ennek a rendeletnek a végrehajtására, az ÉVM által kiadott 21/1971. (II. 7.) rendelet.

1.4. *A minőségellenőrzés tervezett rendszere*

A minőségellenőrzés ágazati rendszerének kialakításakor figyelemmel kell lenni a vállalatok vagy vállalati tevékenységet folytató szervek (igazgatóságok) jogszabályokból adódó, megfelelő minőségű munkavégzési kötelezettségére. Ezért az ellenőrzési rendszer alapját a vállalati belső ellenőrzés kell hogy képezze.

A felügyeleti szerv — az OVH — részéről az ellenőrzést két irányban kell végezni. Először vizsgálnia kell, hogy a felügyelete alá tartozó vállalatok, intézetek helyesen alakították-e ki belső ellenőrzési rendszerüket és az élőnek tekinthető-e. Másodszor szúrópróbaszerűen kell ellenőrzést gyakorolnia, és gondoskodnia kell a minőségi hiányra vonatkozó bejelentések kivizsgálásáról. Természetesen az OVH minőségellenőrzési kötelezettségét megfelelő intézményei útján gyakorolja. Ezért ezt *külső* ellenőrzési tevékenységnek is nevezzük.

Az ellenőrzési tevékenységnek ki kell terjednie a felhasznált anyagokra, kész létesítményekre, technológiai eljárásokra, gépészeti berendezésekre, továbbá a beruházásra, tervezésre, építésre és üzemeltetésre vonatkozó rendelkezések és előírások betartására, a műszaki megoldás színvonalára, valamint a rendelkezésre álló pénzek célszerű és gazdaságos felhasználására.

Az elképzelések szerint az OVH a VITUKI IV. Műszaki Fejlesztési Intézetét bízza meg az ellenőrzési tevékenység gyakorlati lebonyolításával és koordinálásával. Ez nem jelenti azonban a Vízépítőipari Tröszt vagy az OVIBER alapfeladatairól következő ellenőrzési feladatok átvállalását.

Vállalati belső minőségellenőrzés. Belső minőségellenőrzési tevékenységet az ágazathoz tartozó valamennyi szervezetnek kell végeznie. Ezért a Működési és Szervezeti Szabályzatban, a munkaköri leírásokban is egyértelműen rögzíteni kell a minőségvédelmi feladatokat.

A Vízépítőipari Tröszt központi és munkahelyi minőségvédelmi megbízottak útján képzeli megoldani a vállalati, belső minőségellenőrzést. Egyben központi és munkahelyi vizsgáló laboratóriumok felállítását is tervezi.

Véleményünk szerint elegendő egy központi betontechnológiai és talajmechanikai laboratórium, a munkahelyeken elég gyors munkahelyi vizsgálatokra lehetőséget teremteni. Betonvizsgálatok vonatkozásában jobban ki kell használni az Építésügyi Minőségellenőrző Intézet vidéki laboratóriumait.

A minőségvédelmi megbízottak rendszerét nem tartjuk szerencsésnek. A minőség a termék, létesítmény szerves része, ezért a termék, létesítmény elkészítésére irányuló munkákhoz is szorosan hozzátartozik a jó minőségben végzett munka. Így minden munkakörben munkaköri kötelesség kell hogy legyen a minőséggel való törődés.

Ágazati, külső minőségellenőrzés. Az ágazati, külső minőségellenőrzést minden esetben csak OVH által jóváhagyott terv alapján lehet végezni. Ha terven kívül merül fel ellenőrzési szükséglet, akkor ahhoz OVH utasítás szükséges.

A minőségellenőrzés tárgyának megfelelően az OVH jelöli ki az ellenőrzést végző intézményt. Az intézmény megválasztása elsősorban annak vizsgálati felkészültségétől függ.

Ellenőrzési tervben nem szereplő minőségellenőrzésre akkor kerülhet sor, ha

— a vállalatnál vagy igazgatóságnál ismételt panaszok merültek fel a minőségre;

— fontos vagy újszerű nagy létesítmény készült;

— minőségi hiányosságból baleset vagy anyagi kár keletkezik.

A külső minőségellenőrzéskor mindig jegyzőkönyvet kell felvenni, feltüntetve benne az észlelt hiányosságokat, a kijavítás módját, intézkedéseket a hibák megelőzésére.

Az észlelt hiányosságok megszüntetésére az illetékes szerveknek haladéktalanul meg kell tenniök az intézkedéseket és ezekről az ellenőrző szervet, továbbá az OVH-t tájékoztatniuk kell. Az OVH szignalizációval is élhet, mellyel ismételten előforduló hibákra hívja fel a figyelmet.

2. Anyagok, termékek és építési módok vizsgálata a vízépítésben

2.1. *Újfajta termékek és építési módok alkalmazásának engedélyezése*

Az újfajta termékek és építési módok engedélyezésének több célja van. Először biztonsági, illetve egészségvédelmi célokat szolgál. Az engedélyezési eljárások során végzett vizsgálatok egyértelműen választ adnak ilyen kérdésekre. Másodszor gazdasági jelentősége is van. Nem kap engedélyt az a termék,

melynek előállítója olyan tulajdonságot (szilárdsági vagy minőségi) mond termékének, amely azzal nem rendelkezik. Végül, harmadszor az engedély az újfajta termék első szabályozási iratának minősül, amely ismerteti a terméket, építési eljárást, az alkalmazási lehetőségeket, a tervezésre, építésre, üzemeltetésre vonatkozó előírásokat. Ez előírások részben az engedély mellékletében, részben pedig az engedélyhez tartozó „Műszaki Feltételek"-ben találhatók.

A vízépítésben alkalmazott hagyományos anyagoknál, termékeknél a követelmény a szabványoknak, műszaki előírásoknak való megfelelés. Ennek az ellenőrzését elsősorban az Építésügyi és Városfejlesztési Minisztérium végzi megfelelő szervezetei útján, de ilyen ellenőrzést kell végezni vízügyi szerveknek is.

Más a helyzet azonban újfajta anyagok, termékek alkalmazása esetén, amelyek minőségét, összetételét még nem szabályozzák szabványok, műszaki előírások. Ez esetben minden *újfajta termék* tömeges alkalmazásához *engedély* szükséges. Ezt írja elő a 6/1969. (II. 12.) ÉVM sz. rendelet, továbbá az Országos Vízügyi Hivatal elnökének 3/1973. (VII. 31.) OVH számú rendelkezése.

A két rendelet szoros összefüggésben van egymással. Az Országos Vízügyi Hivatal 1973-ban kiadott rendelkezésének megalkotásánál figyelemmel voltak a már érvényben levő ÉVM rendelet előírásaira, illetve hivatkoznak is azokra.

A két rendelet véleményünk szerint helyesen szabályozta, illetve szabályozza az újfajta termékek és építési módok építőipari alkalmazásának engedélyezését. Módosításra, főként az OVH rendelkezés vonatkozásában, inkább az egységes értelmezés miatt van szükség.

A továbbiakban a rendeletek főbb pontjait ismertetjük, és egyben észrevételeket is teszünk a rendeletek érvényesülésére.

A rendelet az újfajta termék és az újfajta építési mód fogalmát a következők szerint határozza meg:

újfajta termék: (építési anyag, szerkezet, épületgépészeti berendezés és szerelvény, továbbá előregyártott épület, épületrész): az, amelyet a hazai építéstervezési vagy építőipari kivitelezési tevékenység során még nem alkalmaztak, vagy alkalmaztak ugyan, de az eredeti tulajdonságait lényegesen befolyásoló változásokat hajtottak rajta végre, s amelyre állami szabványt, műszaki előírást vagy típustervet még nem bocsátottak ki;

újfajta építési mód: az, amely az építmény térbeli kialakítása, szerkezeti rendszere, szerkezetei építőipari kivitelezési tevékenységgel történő előállításának vagy összeszerelésének alapvető módja tekintetében a hazai építéstervezési, illetőleg építőipari kivitelezési tevékenység során eddig alkalmazott műszaki megoldásoktól eltér.

Az előzőek értelmében, az újfajta termékek és az újfajta építési módok meghatározása egyértelműnek tekinthető. Gyakorlatilag jól tudják a gyártók, forgalmazók, felhasználók, hogy mikor kell alkalmazási engedélyt kérni.

Az alkalmazási engedély kérésének feltétele még a *tömeges* alkalmazás. Ezt a rendelet úgy definiálja, hogy tömeges az újfajta termék alkalmazása, ha

azt nyilvánosságra hozott, a termékre jellemző tulajdonságokat ismertető műszaki adatok alapján rendszeresen felhasználják.

E fogalommeghatározás nem tekinthető teljesen szabatosnak, ugyanis a rendszeres felhasználás kifejezésében is bizonytalanság van. A kérelmezők, illetve a kérelmezésre kötelezettek kis része éppen erre hivatkozva, hogy nincs rendszeres felhasználásról szó, nem kérnek alkalmazási engedélyt.

A rendelet *alkalmazási engedélyt* ír elő, ha a tömeges alkalmazás az egészséges és biztonságos munkavégzés, illetőleg használat követelményeit sértheti. Ugyancsak alkalmazási engedély szükséges újfajta építési mód bevezetéséhez is.

Ha a fenti követelmények nem állnak fenn, de az újfajta termék felhasználása az érintett építményrész költségvetés szerinti építési költségének kétszeresét meghaladó anyagi károsodást idézhet elő, akkor *alkalmassági bizonyítvány* szükséges.

Az engedély és bizonyítvány megadásának módszerei, feltételei hasonlóak azzal a különbséggel, hogy az alkalmazási engedély kiadásáról az OVH dönt az ÉVM-mel egyetértésben, míg az alkalmassági bizonyítványról vízügyi vonatkozásban a VITUKI dönt.

Az engedélyezés menete a következőkben foglalható össze. Az engedély megadására irányuló kérelmet a Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Központhoz kell benyújtani csatolva hozzá mindazon dokumentációt, anyagokat, amelyeket a 6/1969. (II. 12.) ÉVM sz. rendelet melléklete, továbbá a 3/1973. (VII. 31.) OVH rendelkezés előírt.

Az engedélyt vagy bizonyítványt az első ízben forgalomba hozónak, a tervezés vagy kivitelezés során először felhasználónak, illetőleg a terméket első ízben előállítónak vagy külföldről behozónak kell kérnie. Az engedélyezés menetét a következő vázlat szemlélteti:

Az engedélyezési eljárás menetének vázlata

1. A kérelem benyújtása a VITUKI-hoz.
2. Szerződéskötés az engedélyezési eljárás lebonyolítására.
3. Az eljárás lefolytatása.
4. A VITUKI javaslatának felterjesztése az OVH-hoz.
5. Az ÉVM egyetértő nyilatkozatának megszerzése.
6. Az engedély aláírása.
7. Az engedély kiadmányozása.

A VITUKI a kérelem és mellékletei birtokában szerződést köt a kérelmezővel. A szerződés megkötése után az intézet véleményének és javaslatának kialakításához szükséges vizsgálatok következnek. Ezek vízépítéssel kapcsola-

tos részét a VITUKI, építésügyi részét az ÉMI, esetleg más intézet végzi. Statikai vagy egyéb számítás, alkalmazási technológiák értékelése, vízügyi-műszaki szabványokkal, irányelvekkel való egyeztetés elvégzése a Vízügyi Tervező Vállalat feladata. A generál vizsgáló szerv minden esetben a VITUKI. Így válik lehetővé, hogy az összes adat birtokában megfelelő döntést előkészítő anyag készüljön az OVH számára.

Az engedélyezési eljárás gyakorlati lebonyolításánál mind az engedélyezésben részt vevő intézmények, mind a kérelmező között szoros együttműködés van. A kérelmezőnek például azért kell megadnia az újfajta termékek kutatása, kísérlete és egyedi alkalmazása során nyert tapasztalatokat, összefoglaló tájékoztatóját és kutatási zárójelentését, hogy egyrészt lehessen látni az előzményeket, másrészt pedig, hogy ne kelljen ismételt vizsgálatokat végezni. Ugyanis mind vállalatok, mind kutatóintézetek által jegyzőkönyvileg dokumentált vizsgálatokat az engedélyezési eljárásra kijelölt intézet elfogad. Természetesen szükséges, hogy a vizsgálat módszere feleljen meg az érvényes szabványok, műszaki előírások követelményeinek.

A vizsgálóintézetek között összhangot a generál vállalkozói (VITUKI), illetve az alvállalkozói (pl. ÉMI) szerződéses kapcsolat biztosítja. A munka megindításakor közösen alakítják ki a vizsgálati tervet, kölcsönösen részt vesznek az egyes vizsgálatokon és együttesen értékelik a vizsgálati eredményeket.

Gyakori eset, hogy a kérelem nem tartalmazza azokat az ÉVM és OVH által előírt mellékleteket, melyek alapján a vizsgálatokat el lehetne kezdeni. Vagy ha mégis megküldték azokat, akkor azok tartalmilag nem felelnek meg az engedélyezési rendeletben foglaltaknak. E hiányosságok azután nagyon elnyújtják az engedélyezési eljárást, mert meg kell várni, míg például az adott termékre vonatkozó Műszaki Feltételek elkészülnek.

Másik gyakori hiba, hogy a kérelmezők terméküket vagy építési módjukat tulajdonképpen az engedélyezési eljárás során akarják kikísérletezni. Ez megint csak az engedélyezési eljárás elhúzódásához, illetve nem egy esetben annak meghiúsulásához vezet. Természetesen ilyen célra szívesen állnak rendelkezésre a vizsgálóintézetek, de nem az engedélyezési eljárás keretében.

Az elmúlt időszakban probléma volt még, hogy nem történt visszajelzés az alkalmazási engedély vagy alkalmassági bizonyítvány alkalmazásával kapcsolatban. Erre csak legfeljebb akkor került sor, amikor az engedély lejárt és így annak meghosszabbítását kérelmezték.

Az engedély és a bizonyítvány meghosszabbítására csak egy alkalommal van lehetőség. Ezután a termékre vagy műszaki előírást vagy típustervet bocsátanak ki, vagy pedig kivonják a terméket a forgalomból.

Újfajta építési módra vonatkozó engedélyt az OVH eddig nem adott ki.

A folyamatban levő engedélyezési eljárások közül is csupán egy — a Dywidag-rendszerű medence — vonatkozik újfajta építési módra.

A Fővárosi Vízművek által meghonosítani tervezett medencét az építése során olyan módon feszítik meg, hogy ezáltal a beton vízzáró legyen, tehát nem szükséges vízzáró vakolat vagy egyéb vízzáró bevonat. Hazai újdonságnak számít a medence alakja és a víz fölötti tér szellőztetésének a megoldása is. A medence engedélyezési eljárása során vizsgáljuk az építési módot, a medence hidraulikai viszonyait és a medencének az ivóvíz minőségére gyakorolt hatását. Az építésre vonatkozó vizsgálatok befejeződtek, az eredmények értékelése is már a vége felé tart. Hasonló a helyzet a hidraulikai vizsgálatnál is. A vízminőségi ellenőrzést is megkezdtük.

8.2. *Gépek és gépi berendezések biztonsági és üzemegészségügyi vizsgálata*

Az újfajta termékek és építési módok engedélyezési eljárásához szorosan hozzátartozik a gépek és gépi berendezések biztonsági és üzemegészségügyi vizsgálata. E tevékenység jogi alapját az OVH elnökének 6/1968. (V. É. 9.) számú, illetőleg az azt módosító 20/1971. (V. É. 20.) számú utasítása képezi. Ezen utasítás szerint a vízgazdálkodás területén alkalmazott (az utasításban részletezett) gépekhez és gépi berendezésekhez biztonsági és üzemegészségügyi bizonyítványt kell beszerezni. A minősítés a Vízügyi Tervező Vállalat és a Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Központ feladata.

A minősítésről bizonyítványt állítanak ki, mely igazolja, hogy a vizsgált gyártmány megfelel-e a munkavédelmi és egészségügyi előírásoknak.

A rendeletben meghatározott gépek körében az import útján beszerzetteket is minősíteni kell.

A minősítési tevékenység célja, a hibás berendezések és gépek működéséből eredő balesetek megelőzése, továbbá egészségügyi szempontból is kifogástalan működésű gépek üzemeltetési feltételeinek megteremtése.

A munkavédelmi minősítések eddigi tapasztalatai alapján megállapítható, hogy a gépek és gépi berendezések — egy-két kisebb hibától eltekintve — biztonságosan üzemeltethetők. Csupán elvétve fordul elő olyan berendezés minősítése, amelynek alkalmazása biztonsági és üzemegészségügyi szempontból lényegesen kifogásolható. Ilyen esetben természetesen a minősítési bizonyítványt nem adjuk ki mindaddig, amíg a szükséges módosításokat a berendezésen el nem végzik.

2.3 *A minősítő intézetek gyakorlati tevékenysége*

Az alkalmazási engedélyek és az alkalmassági bizonyítványok kiadását a kérelemben foglalt tulajdonságoknak megfelelő vizsgálatok előzik meg. A vizsgálatok módjáról, a próbadarabok mennyiségéről az érvényben levő műszaki szabályozások szerint a generál vizsgáló intézet, a VITUKI dönt a kérelmező és az alvállalkozói intézetek véleményének meghallgatásával.

A vizsgálatok az adott témában legjobban felszerelt intézetben folynak. Így csövek esetén az érdességi tényezőt vagy habarcsok esetén az áteresztőképességet a VITUKI határozza meg, az élterhelési vizsgálatok rendszerint az ÉTI szentendrei telepének törőgépén folynak, szilárdsági vizsgálatokat az ÉMI végez, speciális műanyagokat a Műanyagipari Kutató Intézet szakvéleményez. Vegyészeti vizsgálatokat a felsorolt intézetek vegyi laboratóriumai végeznek.

Eddig ritkábban, de későbbiek folyamán gyakoribb lesz, hogy bizonyos vizsgálatokat maguk a gyártó vállalatok végeznek el. Természetesen ebben az esetben is követelmény, hogy a vizsgálat módszere feleljen meg az érvényes szabványoknak, továbbá, hogy a vizsgálati tervet az engedélyezési eljárás lebonyolítására kijelölt intézet jóváhagyja. Az ilyen vizsgálatokról is hiteles jegyzőkönyvet kell felvenni. Kellő időben küldött meghívóval kell biztosítani a vizsgálóintézetek képviselőinek jelenlétét.

Az engedélyezés menetének meggyorsítására a VITUKI elfogadja mind hazai, mind ismert külföldi állami intézetek vizsgálati jegyzőkönyvét, ha azok egy évnél (kivételes esetben két évnél) nem régebbiek. Ilyenre akkor kerül sor, ha a termék újbóli vizsgálata nagy költséget igényelne, vagy az adott célra hazai vizsgáló berendezés kifejlesztése vagy átalakítása hosszú időbe kerülne.

Minden engedélyezési eljárásnál szükséges, hogy az engedély megadására javaslatot tevő intézet, az engedélyben, illetőleg a bizonyítványban szereplő terméknek (építési módnak) a gyakorlatban történő eredményes alkalmazásáról meggyőződjön.

2.4. *A vizsgálatok módszerei és a műszerezettség foka*

A vizsgálatok módszerei korszerűek, tekintettel arra, hogy az adott témában legjobban felszerelt intézet végzi a vizsgálatot. Az intézeteknek pedig megvan a lehetőségük a vizsgáló berendezéseik korszerűsítésére.

Természetesen egy-egy vizsgálatra csak meghatározott számú intézmény van felkészülve. Így csövek élterhelési vizsgálatát az Építéstudományi Intézet, a Budapesti Műszaki Egyetem és újabban a Mélyépítő Vállalat tudja végezni. Gyakorlatilag nincs is többre szükség, mert a jelenlegi vizsgálati mennyiség mellett van szabad kapacitás is.

A műszerezettség is megfelelőnek mondható. Tekintettel arra, hogy az intézeteknek alapfeladata a vizsgálat, időben gondoskodnak a korszerű és hiteles műszerekről. A vizsgálatok szakszerűségét bizonyítja, hogy a kérelmezők részéről egyetlenegy esetben sem érkezett észrevétel, mely a vizsgálatok módszerét vagy a műszerek pontosságát kifogásolta volna.

A szélesebb körű, tervszerű minőségellenőrzési tevékenység megindításához a meglevő felszerelés megfelelőnek tűnik. Az első néhány ellenőrzés tapasz-

talata azonban várhatóan majd felhívja a figyelmet egy-két felszerelésbeni hiányosságra is.

A vizsgálatok szinte kivétel nélkül elvégezhetők hazánkban. Problémát jelent azonban az olyan nagy átmérőjű csövek élterhelési vizsgálata, ahol viszonylagosan nagy deformáció következik be. Ilyen termék volt az üvegszálerősítésű, szendvicsszerkezetű, poliészterből készült, Hobas-gyártmányú csatornacső. Ennek vizsgálatára a Müncheni (Bajor) Egyesült Vizsgáló Intézetben került sor.

Jóllehet a vizsgálati módszereket és berendezéseket korszerűnek tekinthetjük, ez nem jelenti azt, hogy bizonyos fejlesztés nem szükséges. Így elterjedtebbek lehetnének a roncsolásmentes vizsgálatok, például az ultrahangos vizsgálati módszer. Fejlesztési feladatok vannak a műanyagok vizsgálatánál vagy a szigetelések jóságának megállapításánál. De a fejlesztési kérdések helyileg is megoldhatók, ha azok a tervszerű, rendszeres minőségellenőrzés tevékenység megindítását nem akadályozzák, legfeljebb csupán nehezítik

2.5. *A vizsgálatok tudományos alapjai*

A vizsgálóintézetek alapfeladatukat tekintve az Építésügyi Minőségellenőrző Intézet kivételével mind kutatóintézetek. De az ÉMI-ben is kutatói besorolás van és a munkájuk is ennek megfelelő.

Így kutatóintézeti tevékenységgel biztosított a vizsgálatok tudományos háttere. Ez egyaránt kedvező a vizsgálati módszerek megválasztására, a vizsgálatok gyakorlati lebonyolítására is.

A kutatóintézetek nem egy esetben szabványosítási bázisok is, ami eleve lehetővé teszi a szabványos vizsgálatok végzését. Ugyanakkor ha olyan vizsgálat merül fel, amelyre nincs szabvány, lehetőség van kikísérletezni a helyes módszert.

Hiányosság viszont, hogy nincs kellő ismeret az új anyagok, termékek és építési módok más országokban történő engedélyezésének, alkalmazásbavételének eljárásáról. Ennek irodalmi feldolgozását a VITUKI tervbe vette, de sokat adna e téren neves külföldi vizsgálóintézetek munkájának tanulmányozása is.

Ugyancsak jó volna ismerni az új anyagok, termékek fejlesztési irányait is. Talán jobban fel kellene tárni a vízépítés igényeit, hogy annak alapján fejlesztési feladatokat lehessen megfogalmazni.

Ennek elvégzéséhez jó segítséget nyújtanak majd a távlati ágazati fejlesztési tervek és az OMFB által készített koncepciók is.

3. A tapasztalatok összefoglalása és javaslatok a minőség javítására

Az anyag összeállítása során nem volt lehetőség a vízügy területén tételes vizsgálatot folytatni. Így nem vizsgáltuk részleteiben a tervező munka minőségellenőrzését, vagy egy-egy vállalat, igazgatóság minőségvédelmi tevékenységét meglevő vagy épülő műtárgyak vonatkozásában. A VITUKI-ban összegyűlt tapasztalatok vagy vízügyi szakemberek tájékoztatása szolgált a Minőségvédelem a vízépítésben című téma alapjául. Ily módon a következő pontokban foglalhatók össze a tapasztalatok:

1. A szervezett ágazati minőségellenőrzés hiánya miatt a vízügyi szervek az elvárhatónál kisebb gondot fordítanak a minőségvédelemre. Ha a felelős vezetők prémiumfeladatában nem vagy csak kis mértékben szerepelnek minőségi követelmények, akkor érthető, hogy kisebb figyelmet fordítanak a minőségre.

2. Az ágazati minőségellenőrzés megindításához a felszereltség lényegében adottnak tekinthető, de természetesen szükség lesz más tárcákhoz tartozó szerveknek a bevonására is.

3. A minőségellenőrzés gyakorlati lebonyolítására alapot szolgáltat a VITUKI, illetve ÉMI által végzett építésfelügyeleti tevékenység. A VITUKI Műszaki Fejlesztési Intézetének Minősítési és Minőségellenőrző Osztálya révén az ellenőrzés megindításához adott a szervezeti forma.

4. A vállalatok, igazgatóságok belső minőségvédelmi tevékenysége nem eléggé hatékony. A minőségi munkavégzésre kevés a szakképzett dolgozó és nem elég általános a munkások, szakemberek továbbképzése.

5. Vállalatoknál, igazgatóságoknál működő talajmechanikai laboratóriumok nem eléggé korszerűek. Nincs hatékony kapcsolat a területileg illetékes építési minőségellenőrző állomásokkal.

6. Az újfajta termékek alkalmazási engedélyét a gyártók, forgalomba hozók késedelmesen kérik, illetőleg a lejárt engedély meghosszabbítását elhanyagolják. A kérelmekhez nem vagy hiányosan csatolják a rendeletben előírt mellékleteket. Ez az engedélyezési eljárás indokolatlan elhúzódásához vezet.

7. Előfordul, hogy a termék még csupán a kifejlesztés állapotában van, máris benyújtják az alkalmazási engedélyre a kérelmet. Ez rendszerint az engedélyezés meghiúsulásához vezet. Gyakori jelenség a Műszaki Feltételek hiányos elkészítése. Az engedélyezési eljárás elsősorban műszaki tevékenység, ezt néha nem veszik figyelembe a forgalomba hozók.

Javasoljuk, hogy a fenti hét pontban összefoglalt következtetésekre vonatkozólag az Országos Vízügyi Hivatal tegyen intézkedéseket. Ennek érdekében:

— a VITUKI Műszaki Fejlesztési Intézete kapjon megbízást a minőségellenőrzési, építőipari felügyeleti tevékenység ellátására az OVH által jóváhagyott terv alapján;

— erősítsék, illetve ahol kell, szervezzék át a vízügyi szervezetek belső minőségellenőrző tevékenységét úgy, hogy nagyobb gondot fordítsanak az előírások betartására is;

— a VITUKI Műszaki Fejlesztési Intézete végezzen rendszeresen feltáró munkát más tárcáknál, továbbá a külföldön folyó minőségellenőrzési tevékenység megismerésére.

Quality Protection in the Hydraulic Engineering. — As is the case in the activities of other building industries, also in the hydraulic engineering, the high quality of work has always greater significance. The paper proceeds from the rules concerning the quality protection and reports on the activity of the Research Institute for Water Resources Development performed in this domain. The authors introduce the methods of investigation of the new kinds of materials used in the hydraulic engineering and the methods of construction, and the authorization of their application as well as the safety and hygienic investigation of machines and mechanical installations. The content of the paper is completed by the scientific discussion of the bases of the investigations, of the investigation methods and the standard of instrumentation, and finally, by presentation of practical examples.

Qualitätsbewährung im Wasserbau. — Wie in allen industriellen Bautätigkeiten, so auch im Wasserbau, kommt der hochqualifizierten Arbeit immer größere Bedeutung zu. Die Abhandlung geht von den gültigen Regeln des Güteschutzes aus und berichtet über die Tätigkeit der Forschungsanstalt für Wasserwirtschaft (VITUKI), die dieselbe in diesem Bereich entfaltet hat. Die Autoren schildern die Untersuchung der im Wasserbau gebräuchlichen neuesten Materialien, Produkte und Bauverfahren, deren Genehmigung, die sicherheits- und betriebshygienische Untersuchung der Maschinen und mechanischen Einrichtungen. Die Abhandlung wird durch die Darlegung der wissenschaftlichen Gründe der Untersuchungen, durch die Besprechung der Methoden derselben, des Grades der Instrumentierung und durch die Mitteilung von praktischen Beispielen ergänzt.

A CSIGAKEREKEK ANALITIKAI VIZSGÁLATA, AZ ALÁMETSZÉS MEGHATÁROZÁSA

LIPKA ISTVÁN*

[Beérkezett: 1977. szeptember 20-án]

Szerző a hengeres csigahajtás csigakerekének a lefejtésére, a fogprofil felületének analitikus előállítására egy aránylag egyszerű módszert ismertet, amely a determinánsos eliminációs módszeren alapul. Ez a módszer a csigakerék fogoldalfelületén fekvő, síkmetszetek által nyert görbék összességével állítja elő a fogoldalfelületet. Ezek a síkgörbék a Hewlett-Packard 9830. A számítógép rajzoló készülékével felrajzoltathatók, amely rajzokból azután a fogak alámetszésének értékei közvetlenül kiolvashatók.

A csigával kapcsolódó csigakerék profilfelületének analitikus tárgyalása eléggé bonyolult feladat. Ezért ennek a munkának éppen az a célja, hogy a csigakerék profilfelületének analitikus előállítására egy olyan módszert mutasson be, amely könnyen kezelhető s aránylag rövid úton szolgáltatja a kívánt analitikus előállítást.

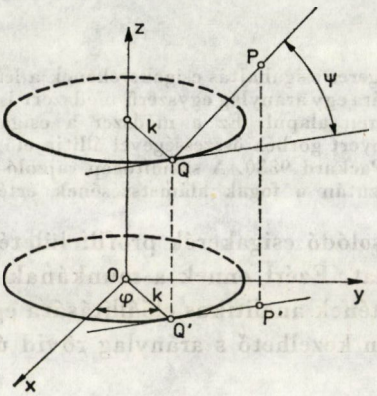
A hordkép lokalizáció nélkül készített csigakerék lefejtése olyan csigamaróval történik, amelynek alakja geometriai szempontból pontosan megegyezik annak a csigának az alakjával, amely a csigakerékkel kapcsolódik [1], [2]. A helyesen beállított csigamaró a csigakerék fogait szabályosan lefejti és azt a kerékprofilt alakítja ki, amely pontosan megfelel a csigával kapcsolódó csigakerék profiljának. A csiga és csigakerék kapcsolódási folyamatát az ún. „funkcionális" szemlélet alapján tekintjük. Ebben a szemléletben a csigát nem forogni, hanem tengelye irányában tovább tolódni képzeljük. Itt a csigának bármely a tengelyével paralel síkmetszete egyéni profilú fogaslécnek tekinthető, amely a csigakerék valamelyik síkmetszetével (a kerék tengelyére merőleges metszettel) kapcsolódik. A csigának a tengelyével paralel síkok által nyert metszetei nem egyenes, hanem görbe vonalú lécprofilok, amelyeknek alakja metszősíkról metszősíkra változik. Minden ilyen lécprofil a csigakerék lefejtő generálásánál a csigakerék osztókörén legördül és ezáltal görbesereg keletkezik, amelynek burkolója a csigakeréknek egy síkmetszetét szolgáltatja, a kerék tengelyére merőleges valamely síkban. Ezek a kerék összes paralel síkmetszeteiben generált görbék összességükben a csigakerék profilfelületét szolgáltatják. Ezzel előállítottuk a csigakerék profilfelületét, mint a kerék tengelyére merőleges síkokban fellépő metszés görbéknek az összességét.

* Lipka István, 1119 Budapest, Szakasits Á. u. 43. sz.

1. A csiga, tengelyével paralel síkmetszeteinek meghatározása

Tekintsük az egyenes vonalú csavarfelület (a csiga felületének) paraméteres egyenletrendszerét (1. ábra):

$$x = k \cos \varphi - t \cos \psi \sin \varphi - a,$$
$$y = k \sin \varphi + t \cos \psi \cos \varphi,$$
$$z = r \cdot \varphi + t \sin \psi,$$



1. ábra

ahol k a csiga (csavarfelület) torokhengerének sugara, ψ a csavarfelület alkotó szöge, vagyis az a szög, amelyet a felület egyenes alkotója a felület tengelyére merőleges síkkal bezár. Továbbá:

$$r = \frac{S}{2\pi},$$

ahol S a csavarfelület emelkedése; a a csigakerék tengelyének távolsága a csiga tengelyétől, amely a két tengely normáltranszverzálisa. Az (x, y, z) derékszögű koordináta-rendszer O origója a csigakerék centrumával esik egybe, a csiga tengelye párhuzamos a z-tengellyel φ és t a felület kétparaméteres egyenletrendszerében fellépő két paraméter [3]; $t = QP$.

A csiga felületének azokat a síkmetszeteit fogjuk vizsgálni, amelyek párhuzamosak a csigahajtás szimmetriasíkjával. (A csigahajtás szimmetriasíkjának azt a metszősíkot nevezzük, amely a csiga tengelyén fekszik és a csigakerék tengelyére merőleges.)

* Ha $k = r_a$ (alaphenger-sugár), akkor a felület evolvens csiga; ha $k = 0$, akkor archimedesi, különben pedig konvolut csiga.

Ha egy ilyen síkmetszetnek a paraméteres egyenletrendszerét akarjuk megkapni, akkor a csigafelület fenti egyenletrendszerében az y-koordinátát valamilyen állandó: h értéknek kell vennünk, vagyis

$$h = k \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cdot t.$$

Az utóbbi egyenletből a t paramétert kifejezve:

$$t = \frac{h - k \sin \varphi}{\cos \psi \cos \varphi} ,$$

amelyet x és z koordináták fenti kifejezésében írva nyerjük, hogy:

$$x = \frac{k - h \cdot \sin \varphi}{\cos \varphi} - a , \tag{1}$$

$$z = r\varphi + \operatorname{tg} \psi \frac{h - k \sin \varphi}{\cos \varphi} .$$

Ha ebben az egyparaméteres egyenletrendszerben (φ a paraméter) különböző h értékeket tekintünk, akkor a csigának a csigahajtás szimmetriasíkjával párhuzamos különböző paralel síkmetszeteit nyerjük. Pl.: $h = 0$-ra:

$$x = \frac{k}{\cos \varphi} - a ;$$

$$z = r\varphi - k \tan \psi \cdot \tan \varphi .$$

Ez a csiga tengelymetszete, amely paralel az előbbi síkmetszetekkel.

Az (1) alatti egyenletrendszer azoknak a lécprofiloknak az egyparaméteres egyenletrendszere, amelyek a csigakereket származtató lefejtő mozgásnál a csigakerék osztókörén legördülnek és azokat a görbeseregeket írják le, amelyeknek burkolói a csigakerék paralel síkmetszeteit szolgáltatják.

2. A csigakerék tengelyére merőleges síkmetszeteknek a meghatározása

Az (x, z) síkban fekvő (1) alatti metszésgörbe: „lécprofil" az O origo körüli elforgással és a z irányban való eltolódással generál az (x, z) síkban egy ellenprofilt, amely a csigakerék fogainak az (x, z) síkkal való metszésgörbéje.

Amikor az (1) alatti metszésgörbe az O pont körül valamilyen Φ-szöggel elforog, ugyanakkor a z irányban $(\Phi\, r_0)$-darabbal eltolódik, ahol r_0 a csigakerék osztókörének sugara. Eszerint az (x, z) síkban a kétféle generáló mozgás által előálló görbeseregnek következő lesz a paraméteres egyenletrendszere:

$$\xi = x \cos \Phi - (z + r_0 \Phi) \sin \Phi , \tag{2}$$

$$\zeta = x \cdot \sin \Phi + (z + r_0 \Phi) \cos \Phi .$$

Ennek a görbeseregnek a burkoló görbéje lesz a generált csigakeréknek az a metszésgörbéje, amelyet a csigakerék felületéből az $y = h$ sík metsz ki. A burkoló meghatározásához szükséges elimináció függvénydeterminánsa a következő másodrendű determináns:

$$\begin{vmatrix} \xi_\Phi & \zeta_\Phi \\ \xi_\varphi & \zeta_\varphi \end{vmatrix} .$$

Ha kiszámítjuk ebben a determinánsban fellépő parciális differenciál hányadosokat, akkor a következő kifejezéseket kapjuk (az indexbe írt változó, e változó szerinti parciális differenciálást jelent):

$$\begin{aligned} \xi_\varphi &= -(x + r_0) \sin \Phi - (z + r_0\Phi) \cos \Phi , \\ \zeta_\varphi &= (x + r_0) \cos \Phi - (z + r_0\Phi) \sin \Phi , \\ \xi_\varphi &= x_\varphi \cos \Phi - z_\varphi \sin \Phi , \\ \zeta_\varphi &= x_\varphi \sin \Phi + z_\varphi \cos \Phi . \end{aligned}$$

Ezekkel az eliminációs determináns:

$$\begin{vmatrix} \xi_\Phi & \zeta_\Phi \\ \xi_\Phi & \zeta_\Phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(x + r_0) \sin \Phi - (z + r_0\Phi) \cos \Phi & (x + r_0) \cos \Phi - (z + r_0\Phi) \sin \Phi \\ x_\varphi \cos \Phi - z_\varphi \sin \Phi & x_\varphi \sin \Phi + z_\varphi \cos \Phi \end{vmatrix}$$
$$= -(x + r_0)\, x_\varphi - z_\varphi (z + r_0 \Phi) .$$

A burkolási feltételnek megfelelően e függvénydeterminány értéke nulla

$$0 = -(x + r_0)\, x_\varphi - (z + r_0\Phi)\, z_\varphi ,$$

ahonnan a φ és Φ változók közül az egyiket a másikkal kifejezve:

$$\Phi = -\frac{(x + r_0)\, x_\varphi + z\, z_\varphi}{r_0 z_\varphi} .$$

Φ-nek ezt a, már csak a φ-változótól függő kifejezését a (2) alatti egyenletrendszerbe írva, egy egyparaméteres egyenletrendszert kapunk, amely a keresett burkoló görbe előállítása paraméteres alakban.

Tehát a csigakeréknek az $y = h$ síkkal való metszésgörbéjét a következő egyparaméteres egyenletrendszer szolgáltatja:

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \Phi - (z + r_0\Phi) \sin \Phi , \\ \zeta &= x \sin \Phi + (z + r_0\Phi) \cos \Phi , \end{aligned} \qquad (3)$$

ahol

$$\Phi = -\frac{(x + r_0)\, x_\varphi + z\, z_\varphi}{r_0 z_\varphi} ,$$

továbbá:

$$x = \frac{k - \mathrm{h}\sin\varphi}{\cos\varphi} - a,$$

$$z = r\varphi + \tan\psi\frac{h - k\sin\varphi}{\cos\varphi},$$

$$x_\varphi = \frac{k\sin\varphi - h}{\cos^2\varphi},$$

$$z_\varphi = r + \tan\psi\frac{h\sin\varphi - k}{\cos^2\varphi}, \tag{3'}$$

Az x_φ és z_φ-nek ebből a kifejezésből látható, hogy a Φ fenti előállítása is csak a φ paramétertől függ és így ξ és ζ is csak a φ-nek a függvényei, konstans h-ra.

Ezzel analitikusan előállítottuk a csigakerék felületét úgy, hogy a csigakerék tengelyére merőleges metszősíkokban fellépő metszésgörbéknek az analitikus előállítását vezettük le. Ezeket a metszésgörbéket tulajdonképpen olyan „lécprofilok" generálják, amelyek a csigának paralel síkmetszetei, ahol a metszősíkok merőlegesek a csigakerék tengelyére.

A csigakeréken fekvő, a lécprofilok által generált görbék, amelyek a csigakerekek paralel síkmetszeteinek felelnek meg, a körevolvenssel semmiféle kapcsolatban sem levő, attól különböző görbék, azért mert a generáló léc profilja nem egyenes, hanem attól különböző valamilyen görbe. E tény részletesebb elemzéséhez először a csiga tengelymetszeteit kell meghatároznunk.

3. A csiga tengelyével párhuzamos síkmetszeteknek a vizsgálata

A csigának a csigahajtás szimmetriasíkjával párhuzamos síkmetszeteit az (1) alatti egyenletrendszer állítja elő. Ha ebben az egyparaméteres egyenletrendszerben különböző h-értékeket tekintünk, akkor a csigának különböző paralel síkmetszeteit nyerjük. Most azt kérdezzük, hogy ez a csiga tengelyével párhuzamos síkmetszet milyen esetben lesz egyenes. Eszerint azt kérdezzük, hogy az dz/dx differenciálhányados, mely esetben konstans. Ha az (1) alatti x és z φ paraméter szerinti differenciálhányadosát ponttal jelöljük, vagyis (1) szerint:

$$\dot{x} = \frac{k\sin\varphi - h}{\cos^2\varphi}\ ; \qquad \dot{z} = r + \tan\psi\frac{h\sin\varphi - k}{\cos^2\varphi},$$

akkor azt kívánjuk, hogy a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{r\cos^2\varphi + \tan\psi(h\sin\varphi - k)}{k\sin\varphi - h}$$

differenciálhányados a φ változó minden értékére állandó legyen. Ez csak abban az esetben következik be, amikor sin φ együtthatói: h és k nullával egyenlők, amikor is

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \frac{r\cos^2\varphi}{0} = \infty, \qquad (\varphi \neq 90°).$$

Ez (mivel $k = 0$) először is azt jelenti, hogy a csiga archimedesi, mert torokkörének k sugara nullával egyenlő, továbbá, mivel $y = h = 0$, a tekintetbe vett síkmetszet a csiga tengelymetszete. Tehát arra az eredményre jutottunk, hogy csakis az archimédesi csigának a síkmetszete éspedig a csiga tengelymetszete lesz egyenes. Mivel ez az egyenes párhuzamos a z-tengellyel, vagyis 90°-os szöget zár be az x-tengellyel, azért e szög tangense (ha $\varphi \neq 90°$) megegyezésben a fentebbi eredménnyel.

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = \tan 90° = \infty.$$

4. A csigakerék homlokmetszeteinek (a kerék tengelyére merőleges síkmetszeteknek) vizsgálata

A csigakerék tengelyére merőleges sík a csiga tengelyével párhuzamos és így a csigát az (1) alatt megadott valamilyen h értékhez tartozó görbében (lécprofilban) metszi. Ez, az (x, z) síkkal párhuzamos síkban fekvő metszésgörbe („lécprofil") a z-irányban való eltolódással egy görbesereget ír le a $h = \text{konst}$ síkban, amelynek paraméteres egyenletrendszere a következő:

$$x = \frac{k - h\sin\varphi}{\cos\varphi} - a_0, \qquad (4)$$

$$z = r\cdot\varphi + \tan\psi\frac{h - k\sin\varphi}{\cos\varphi} + r_0\varphi.$$

Itt φ és Φ a paraméterek. Ebből a görbeseregből az O origó körüli elforgás a másik generáló mozgás származtatja azt a görbesereget, amelynek burkolója a csigakeréknek, a $h = \text{konst}$ síkkal való metszésgörbéje. Az általunk már régebben levezetett evolvens-kritérium [4] segítségével a (4) alatt felírt görbesereg-egyenletrendszerből eldönthető az, hogy a csigakerék $h = \text{konst}$ síkban fekvő metszésgörbéje körevolvens-e, vagy valamely attól eltérő görbe. Ha a (4) alatti kétváltozós:

$$x \equiv x(\varphi, \Phi); \qquad z \equiv z(\varphi, \Phi)$$

függvények parciális differenciálhányadosaiból képezzük a következő egyenletet:

$$\begin{vmatrix} x_\varphi(\varphi, \Phi) & z_\varphi(\varphi, \Phi) \\ x_\varphi(\varphi, \Phi) & z_\varphi(\varphi, \Phi) \end{vmatrix}^2 - r_a^2[x_\varphi(\varphi, \Phi)^2 + z_\varphi(\varphi, \Phi)^2] = 0,$$

akkor ennek az egyenletnek a teljesülése szükséges ahhoz, hogy az előbbi kétféle generáló mozgással származtatott görbe körelvolvens legyen (r_a a körevolvens alapkörének sugara).

Mostani esetünkben (4) szerint:

$$x_\Phi(\varphi, \Phi) = \frac{\partial x(\varphi, \Phi)}{\partial \Phi} = \frac{\partial}{\partial \Phi}\left(\frac{k - h \sin \varphi}{\cos \varphi} - a\right) = 0,$$

$$z_\Phi(\varphi, \Phi) = \frac{\partial z(\varphi, \Phi)}{\partial \Phi} = r_0,$$

továbbá (3')-szerint:

$$x_\varphi = \frac{k \sin \varphi - h}{\cos^2 \varphi}, \quad z_\varphi = r + \tan \psi \frac{h \sin \varphi - k}{\cos^2 \varphi}.$$

Ezekkel az evolvens-kritérium fenti kifejezésében fellépő függvénydeterminánsértéke:

$$\begin{vmatrix} x_\Phi(\varphi, \Phi) & z_\Phi(\varphi, \Phi)^2 \\ x_\varphi(\varphi, \Phi) & z_\varphi(\varphi, \Phi) \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x_\varphi(\varphi, \Phi) & z_\Phi(\varphi, \Phi) \\ 0 & r_0 \end{vmatrix}^2 = r_0^2 \, x_\varphi(\varphi, \Phi)^2;$$

és ezzel az evolvens-kritérium kifejezése:

$$r_0^2 \, x^2(\varphi, \Phi) - r_a^2[x_\varphi^2(\varphi, \Phi) + y_\varphi^2(\varphi, \Phi)] = 0.$$

Tegyük fel, hogy ez a kritérium teljesül, vagyis fennáll a most felírt egyenlet és osszuk az utóbbi kifejezést

$$[x_\varphi^2(\varphi, \Phi) + y_\varphi^2(\varphi, \Phi)]$$

összeggel, akkor azt kapjuk, hogy:

$$r_0^2 \frac{x_\varphi^2(\varphi, \Phi)}{x_\varphi^2(\varphi, \Phi) + y_\varphi^2(\varphi, \Phi)} - r_a^2 = 0. \tag{5}$$

Itt, ha az r_0^2 mellett álló törtkifejezésből négyzetgyököt vonunk, a

$$\frac{x_\varphi(\varphi, \Phi)}{\sqrt{x_\varphi^2(\varphi, \Phi) + y_\varphi^2(\varphi, \Phi)}}$$

kifejezéshez jutunk. Ez utóbbi törtkifejezés a differenciálgeometria elemei szerint az $(x(\varphi, \Phi); z(\varphi, \Phi))$ görbe (lécprofil) érintőjének iránykoszinusza, éspedig annak az α-szögnek a koszinusza, amely a görbeérintő az x-tengellyel zár be. Tehát

$$\cos\alpha = \frac{x_\varphi(\varphi, \Phi)}{\sqrt{x_\varphi^2(\varphi, \Phi) + z_\varphi^2(\varphi, \Phi)}},$$

amelynek értéke ezután az (5) alattiból:

$$\cos\alpha = \frac{r_a}{r_0}, \quad (\alpha = \text{konst}).$$

Eszerint a görbeérintő állandó nagyságú α-szöget zár be az x-tengellyel, ami azt jelenti, hogy most az (1) alatti görbe egyenes, mert $\tan\alpha = dz/dx = c$ állandó és így $z = cx + b$ egyenesnek felel meg az (1) alatti paraméteres előállítás. Ezek szerint az előbbi 3. fejezet értelmében arra az eredményre jutottunk, hogy a csigakerék tengelyére merőleges síkmetszet, azaz a csigakerék homlokmetszete csak abban az esetben lesz körevolvens, ha a generáló mozgást végző (1) alatti fogasléc profilja egyenes és ezért a generáló fogasléc egy archimedesi csigának a tengelymetszete (síkmetszete). Ezzel bebizonyítottuk, hogy a csigakeréknek a tengelyére merőleges síkmetszetei általában nem körevolvensek, és csakis egy speciális esetben, amikor a csiga archimedesi, lesz a csigakerék tengelymetszete körevolvens.

5. A csigakerék profilfelületének a vizsgálata. A kerékfogak alámetszésének a meghatározása

A csigakerék profilfelületének a meghatározása, a 2. fejezet szerint a csigakerék tengelyére merőleges síkmetszetek alapján történhetik. A kerékfog oldalán fekvő metszésgörbék paraméteres egyenletrendszerét a (3) alatti egyenletrendszer szolgáltatja, ha abban a φ-szögparaméter bizonyos változási intervallumot befut, miközben az x és z kifejezésben a h értéke állandó. Változó h értékekre a fogoldal különböző síkmetszeteit nyerjük.

A kerékfog oldalfelületének ezt a vizsgálatát egy *konkrét példa* keretében mutatjuk be.

Tekintsünk egy *evolvens csigát* (ennek homlokmetszete közönséges hegyes körevolvens). A csiga bekezdéseinek száma legyen: $z_1 = 1$, a vele kapcsolódó csigakerék fogszáma: $z_2 = 20$; modulus: $m = 5$ mm. Az átmérőhányados $q = 10$; tengelytáv: $a = 75$ mm (normál transzverzális); szerszám osztóhenger átmérője: $qm = 10.5$ mm $= 50$ mm.

Alkotó szög: $\Psi = 20°\ 44'\ 14''$; [1] 44. old. Az alapkör sugara: $r_a = 6{,}59275$ mm. A csigakerék osztókör sugara

$$r_0 = 50 \text{ mm}.$$

Mivel a csiga evolvens csiga, azért a torokkör azonos az alapkörrel azaz:

$$k = r_a = 6{,}592\,75 \text{ mm},$$

továbbá a (3) alatti képletében z kifejezésében fellépő r faktor az

$$r = r_a \tan \Psi$$

képletből nyerhető, ahol:

$$\tan \Psi = 0{,}378\,611\,1.$$

r egy olyan kör sugara, amelynek kerülete egyenlő a csavarfelület emelkedésével.
Ezekkel az adatokkal a csigakerékre a (3) alattiból:

$$x = \frac{6{,}592\,75 - h \sin \varphi}{\cos \varphi} - 75 \text{ [mm]}$$

$$z = 0{,}378\,611\,1 \left[6{,}592\,75\,\varphi + \frac{h - r_a \sin \varphi}{\cos \varphi} \right] \text{[mm]}$$

$$x_\varphi = \frac{6{,}592\,75 \sin \varphi - h}{\cos^2 \varphi};$$

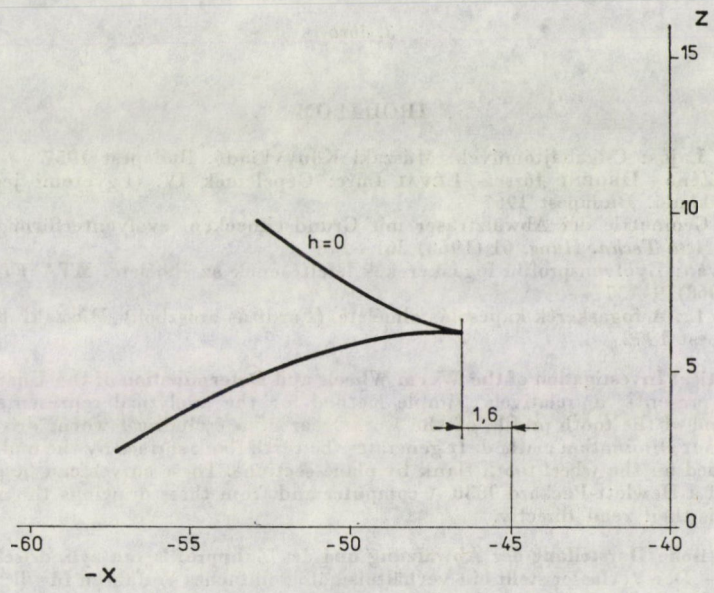
$$z_\varphi = 0{,}378\,611\,1 \left[6{,}592\,75 + \frac{h \sin \varphi - 6{,}592\,75}{\cos^2 \varphi} \right] \text{[mm]}.$$

Mivel az utóbbi értékekkel, adott φ és h esetében a

$$\Phi = - \frac{(x + r_0)\, x_\varphi + z \cdot z_\varphi}{r_0\, z_\varphi}; \qquad (r_0 = 50 \text{ mm})$$

szög értéke kiszámítható, a (3) alattiból nyerjük ξ és ζ keresett értékét. Ha a $h = 0$-nak megfelelő tengelymetszetet tekintjük, akkor a fogoldalon kapott metszési görbét a mellékelt 2. ábra mutatja, amelyet úgy nyerünk, hogy a φ — paraméter a

$$-80^\circ\,12'51'' < \varphi \leqq -57^\circ 17'45''$$



2. ábra

áltozási intervallumot befutja. Mivel a csigakerék osztókörének sugara: $r_0 = 50$ mm, a modulus $= 5$ mm, a fogmagasság pedig $2\,m = 10$ mm, azért amint a 2 ábrából látható, a lábmagasság em éri el a $m = 5$ mm értéket, hanem abból még az ábra szerint kb. 1,6 érték hiányzik. Tehát

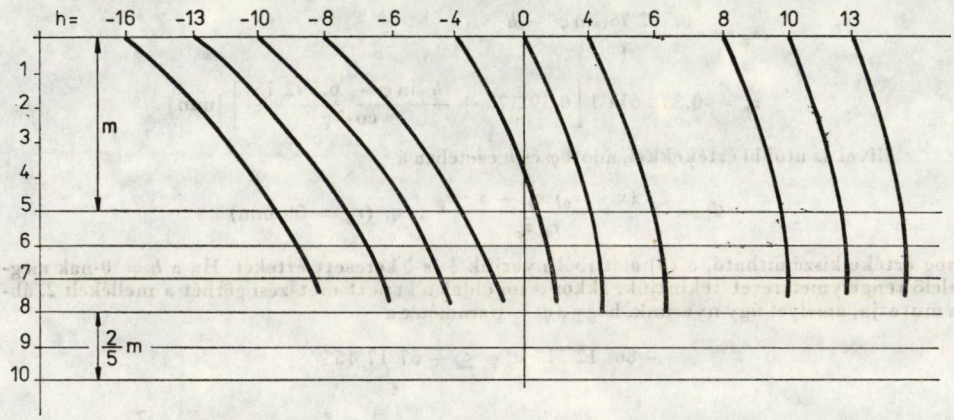
itt *alámetszés* lép fel, és így a lefejtésnél nem kapjuk meg a teljes fogmagasságot. A szóban forgó csigakerékre a fogoldal síkmetszeteit a Hewlett-Packard 9830A elektronikus számítógép rajzoló készülékével MAKLÁRY Zoltán kutató mérönk felrajzoltatta, éspedig a

$$h = 0; 4; 8; 10; 13$$

értékeknek megfelelő metszősíkokra, valamint a

$$h = -4; -8; -10; -13; -16$$

értékeknek megfelelő metszősíkokra, amelyekre a 3. ábrán feltüntetett metszésgörbék adódtak. Ezekből a görbékből látható, hogy a 2 *m* értékű (*m* = modulus) fogmagasságból a lábmagasságnak megfelelő rész kisebb a modulusnak megfelelő *m* értéknél, éspedig kb. 0,4 *m* értékkel kisebb, mint *m*. Tehát a lábmagasság az alámetszés folytán csak 0,6 *m* értékű, és így az aktív fogmagasság kb. 1,6 *m*.



3. ábra

IRODALOM

1. SZENICZEI Lajos: Csigahajtóművek. Műszaki Könyvkiadó. Budapest 1957
2. TERPLÁN Zénó—DROBNI József—LÉVAI Imre: Gépelemek IV. (Egyetemi jegyzet) Tankönyvkiadó. Budapest 1967
3. LIPKA I.: Geometrie der Abwälzfräser mit Grundschnecken evolventerförmiger Ausführung. *Acta Techn. Hung.* **61** (1968) 261—276
4. LIPKA István: Evolvensprofilú fogaskerekek lefejtésének az elmélete. MTA *VI. Oszt. Közl.* **40** (1968) 9—37
5. LITVIN, F. L.: A fogaskerék kapcsolás elmélete. (Fordítás oroszból.) Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972

Analytical Investigation of the Worm Wheels and Determination of the Undercutting. — The author presents a relatively simple method for the analytical representation of the generation and of the tooth profile of the worm gear of a cylindrical worm drive, based on the determinant elimination method. It generates the totth flank surface by the multitude of the curves obtained on the wheel tooth flank by plane sections. These curves can be plotted with the plotter of a Hewlett-Packard 9830 A computer and from these drawings the undercutting of the teeth is then read directly.

Analytische Darstellung der Abwälzung und des Zahnprofils von zylindrischen Schneckenrädern. — Der Verfasser stellt ein verhältnismäßig einfaches Verfahren für die analytische Darstellung der Abwälzung und des Zahnprofils von zylindrischen Schneckenrädern vor, welches auf der Eliminationsmethode der Determinanten beruht. Diese Methode stellt die Zahnflankenfläche durch die Gesamtheit der auf den Zahnflanken des Rades liegenden, durch ebene Schnitte gewonnenen Kurven dar. Diese ebenen Kurven können mit dem Zeichengerät des Rechners Hewlett-Packard 9830 A aufgezeichnet werden und aus diesen Zeichnungen können dann die Werte des Zahnunterschnitts direkt abgelesen werden.

RENDSZERTECHNIKA*

— HELYZETKÉP —

JÁNDY GÉZA**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

Jelen tanulmány a rendszertechnika létrejöttének körülményeit, a rendszerfogalom, a kibernetika, az operációkutatás és az általános rendszerelmélet itteni szerepét, a rendszertechnika főbb vonásait, munkafázisait és rendszertípusait (vagyis a dologi, a cselekvési és a célrendszereket) tárgyalja.

1. Bevezetés

Az utóbbi évtizedekben a műszaki feladatok és a mérnöki munka sok új vonással gazdagodtak. Közismertek az olyan változások, mint pl.

— a műszaki fejlődés gyorsulása,

— a műszaki alkotások, termékek összetettebbé, bonyolultabbá válása,

— új alkalmazási területek megjelenése,

— az automatizálás és az elektronika terjedése,

— az ökológiai-műszaki és a társadalmi-műszaki kölcsönhatások kikerülhetetlensége,

— a nagy, heterogén műszaki komponensekből összetevődő rendszerek tervezése, működtetése, irányítása,

— az egyre mélyülő szakosodás és az interdiszciplináris együttműködés szükségessége,

— a tudomány fokozódó behatolása a műszaki munkába,

— a cél és az értékelés gondjainak előtérbe kerülése,

— a munka tervezésével és irányításával, általában a műszaki vezetéssel és szervezéssel szemben támasztott növekvő követelmények

— stb.

Mind gyakrabban hozunk létre olyan komplex műszaki rendszereket, amelyek különböző szakterületekről származó alkotórészekből, vagyis heterogén komponensekből állnak. Ezért a műszaki rendszerképzésnek egyik kulcsproblémájává vált a kompatibilitás, az összeillés, ami szükségszerűvé teszi a különböző funkciókat ellátó szakmák interdiszciplináris együttműkö-

* Elhangzott a Műszaki Tudományok Osztályának 1977. november 21-i felolvasó ülésén.

** Prof. Dr. Jándy Géza, 1111, Budapest, Lágymányosi u. 28.

dését. A megoldandó feladatok gyakran teljesen újszerűek és a hiányzó tapasztalatokat a rendelkezésre álló idő rövidsége miatt tudatos módszerekkel kell pótolni.

Minél kiterjedtebb és bonyolultabb a megvalósítandó műszaki rendszer, minél erősebbek a társadalommal és a természeti környezettel való kölcsönhatásai, annál inkább van szükség már az objektum alkotásának folyamatában is a tervezés mellett az organizációra és a működés szervezésének és irányításának (vagyis az orgware*-nek) a tervezésére. Így a mérnöki munka már nem korlátozódhat csupán a műszaki alkotásra (a hardware-re és a software-re), hanem előtérbe kerül az ugyancsak műszaki szakértelmen alapuló szervezés és irányítás.

A műszaki feladatokban és a mérnöki munka módszereiben kialakult eme változások és új vonások kezdték kikényszeríteni egy új műszaki elméleti és gyakorlati terület létrejöttét, amelynek kifejlődését számos tényező is segítette, így a 40-es évek végéig elsősorban a műszaki management vagy más néven a szervezéstechnikának (industrial engineering, project management) a mérnöki munkaerőt egyre növekvő mértékben lekötő gyakorlata, majd a rendszerfogalom és a kibernetikai szemlélet térhódítása, valamint új lehetőségek és eszközök (mint pl. a műszaki prognosztika, a számítógépes szimuláció, az operációkutatás módszerei és ezen belül a hálótechnika stb.) megteremtése. A változások, köztük az új követelmények növekvő mennyisége új minőséget hozott létre. A kezdetben különálló, de nagyrészt azonos problémamegközelítési módszerekre támaszkodó és rokon vonásokat felmutató követelmények és funkciók összeötvöződéséből az új műszaki terület valóban létrejött. Korai formájában — a műszaki kutatás és fejlesztés célkitűzéseinek és koordinálásának konkrét kérdéseivel kapcsolatosan — a Bell Telephon Laboratories-ben már a 40-es években felismerték jelentőségét és megjelölésére a *rendszertechnika* elnevezést kezdték használni.

1962-ben megjelent könyvében HALL a rendszertechnika fő törekvését abban látja, hogy csökkentse az időközt a tudományos felfedezések, az igények jelentkezése, valamint az igényeket kielégítő rendszerek megvalósítása és használatba vétele között. Így a rendszertechnika először az összetartozó és egymáshoz kapcsolódó műszaki fejlesztésnek, az általános és az előzetes tervezés, valamint a megvalósítás koordinációjának, ellenőrzésének és irányításának tudatos módszertanává lett.

E fő funkciójának a rendszertechnika a következő munkafázisokban tesz eleget:

1. feladatelemzés (rendszerelemzés),

* Lásd Prof. G. M. DOBROV „Systems Assessment of New Technology Decision-making in Government and Industry" című előadását, amely a MTESZ Tudományok Tudománya Körének a rendezésében 1977. szeptember 8-án hangzott el.

2. rendszertervezés: *a)* előzetes tervezés,
b) részletes tervezés,
3. a rendszer felhasználásának (bevezetésének, alkalmazásának, fenntartásának) és működése irányításának tervezése,
4. a teljes rendszertechnikai folyamatra kiterjedő rendszerszervezés.

Szadovszkij, az ismert szovjet rendszerteoretikus magyarul is megjelent könyvében így ír a rendszertechnikáról: újabban „a műszaki rendszert olyan rendkívül bonyolult alkotásként jellemezzük, amely tartalmazza a létrehozandó gépi komponenseket, az azokat működtető embert, továbbá a kialakított konstrukció létezéséhez nélkülözhetetlenül szükséges külső feltételek sokaságát, és végül bizonyos mértékig az ilyen bonyolult komplexum létrehozásának megtervezését is. Ilyen formán a modern technika a nagyrendszerek technikájaként jelenik meg. Ami pedig ennek elméleti leírását illeti, ma a rendszertechnika és a vele összefüggő tudományágak keretében a fő figyelmet a következő problémákra összpontosítják: az irányítás, az optimálás, a rendszer gépi és emberi összetevői között a funkciók elosztása, a műszaki megoldás megválasztása, a rendszerek dinamikájának leírása stb."

2. Rendszerfogalom, kibernetika és operációkutatás a rendszertechnikában

A kutatók, tervezők mindig jól tudták, hogy a feladatukat világosan el kell határolni, mert hiszen csaknem minden mindennel összefügg, és a világ egészével nem küzdhetnek meg. Az összetartozónak tekintett vizsgált elemek, tulajdonságok és relációk számát azért korlátozni kell. Az *elhatárolás* és ugyanakkor a vizsgált elemek aggregációs fokának, a probléma megfogalmazásában a tovább már nem osztandó egységeknek a megállapítása végső soron a kutatás-fejlesztés céljaitól és az elemzést végző vagy irányító ember érdeklődésétől függ.

A konstruktőr, különösen a terméket intézeti, nagyüzemi keretek között tervező és megvalósító mérnök számára az elhatárolást már a műszaki cél meghatározza. A vizsgált rendszer itt önmagában a műszaki objektum. Azonban ez az objektum felhasználása során kapcsolódik más műszaki objektumokhoz, megvalósításában, működtetésében, fenntartásában, karbantartásában, fejlesztésében, felhasználásában emberek vesznek részt, megvalósítása, bevezetése, élettartama a gazdasági körülményektől függ, és mind e mellett kölcsönhatásba kerül a társadalommal, valamint a természeti környezettel. Ha ezeket figyelmen kívül hagyjuk, abból sok meglepetés, kényelmetlenség, kudarc, kár, sőt katasztrófa is következhetik. Ha viszont figyelembe vesszük az ilyen kapcsolódásokat, kölcsönhatásokat, akkor a vizsgált rendszer bővülni kezd. Ilyenkor beszélhetünk a feladat *rendszermegközelítéséről*. Az objektummal összetartozó emberi tényezők átgondolt számbavételének eredményeként az 50-es évek

közepén megjelent a „komplex ember–gép rendszer" fogalma, amelynek határait azonban továbbra is a kívülről adott rendszercél határozta meg. A 60-as évek közepétől a rendszertechnikai módszereket már a műszaki projektek kifejlesztési, megvalósítási munkálataira kezdték átvinni. Ezeknek rendszercélját pedig egyértelmű műszaki követelmények helyett, előzetesen csak lazábban megfogalmazott társadalmi célelképzelésekkel írják körül, és a feladat elemzése (a rendszerelemzés) során kell azt konkretizálni és pontosítani. Itt jelentkezik a rendszerfogalom igazi problémája: a rendszer és a környezete, valamint a releváns és a nem releváns környezet között a határvonalak meghúzása, ehhez a környezet alapos elemzésének szükségessége, és a kívánatos, valamint a nem kívánatos mellékhatások (ill. az aktív és passzív hatások) felismerésével a rendszer releváns környezetének fokozatos kitágítása. A környezetelemzésből nyert információk befolyásolják a műszaki elképzeléseket, vagyis a feladat értelmezését, az időtervet, az alternatívák megítélését és egyebeket, így sok szempontból visszahatnak a projektre.

A rendszertechnika alkalmazásának a kezdeti fázisában a rendszerformálás hagyományos kiinduló feltételei a következők:

— a rendszer célja, értelme adott és állandó,

— e változatlan rendszerértelmezés következményeként állandóak a rendszer határai is,

— a rendszerelemzés feladata, hogy a rendszer célját (az elvárásokat) konkretizálja és pontosítsa, struktúráját megtervezze és a — rendszerelemzés során fokozatosan bővülő — releváns környezettel való kölcsönhatásait felismerje és figyelembe vegye.

Ezt nevezik *célorientációjú rendszerfogalomnak.*

Azonban az alkalmazások fejlettebb fázisában a rendszertechnikának már egyre gyakrabban szembe kell néznie olyan feladatokkal is, amikor csupán a műszaki újdonság, a műszaki fejlesztési probléma, a keresleti-kínálati szituáció vagy a társadalmi-műszaki funkció adott. Ilyenkor a műszaki és gazdasági prognosztika fontos szerephez jut. Ugyanis meglehetősen bizonytalanul megfogalmazott problémából és célelképzelésekből kiindulva kell a rendszert fokozatosan elhatárolni és felépíteni vagy a döntéshozatalt előkészíteni. Ezt nevezik *problémaorientációjú rendszerfogalomnak.*

A *kibernetika* a 40-es, 50-es években a közlésnek és az irányításnak a gépekre és az élő szervezetekre egyaránt érvényes, egységes elméletét jelentette. Lényeges összetevői: az információ, a vezérlés és a szabályozás, a dinamika (ami itt a vizsgált rendszerek időfüggőségét, változékonyságát és viselkedését, vagyis az ok-okozati áramlatokat, összefüggéseket jelenti) és a dinamikával együtt a tehetetlenség és a késés. Jellegzetességei: az interdiszciplinaritás, a modellezés és a szimuláció, a grafikai és a matematikai formalizálás, valamint a kapcsolatteremtésre törekvés az elmélet és a gyakorlat között. A kibernetikai szemlélet sajátossága az, hogy a vezérlési láncra és a szabályozási körre vonat-

kozó elképzeléseket általánosítja, így alkalmazhatóvá teszi azokat a műszaki projekteket kifejlesztő, megvalósító, együttműködő vezetett szervezetekre is.

A 60-as évek kibernetikája — elsősorban a Szovjetunióban — már a bonyolult dinamikus rendszer egyes elemei között az információs kapcsolatokat, az információfeldolgozás folyamatait, az irányítási rendszereket, azok szerkezetét, az irányítás különböző törvényszerűségeit, így entrópiacsökkentő hatását, az irányítási rendszerek felépítésének és tervezésének elveit és a hasonlókat tanulmányozza.

Az *operációkutatás* néven elterjedt és kifejlődött tudományos irányzat vizsgálódásának tárgya a meghatározott céllal szervezett és irányított, integrált (ember-gép) rendszerek struktúrája és jellegzetes viselkedése, vagyis a konkrét szituációban megkívánt eredmény eléréséhez szükséges (tervezett vagy várható) és egymástól kölcsönösen függő ténykedéseknek (aktusoknak) összessége. Ez utóbbit, vagyis az ember-gép rendszernek egy meghatározott és ismétlődhető feladat elvégzésére irányuló cselekvésmódját nevezik itt *operáció*nak. Az operációkutatás célja a döntéshozatal segítése, tudatosabbá tétele, a szervezett rendszer operációinak — többnyire szimbolikus — *modellben* elvégzett elemzése, optimum-meghatározása vagy (számítógépes) szimulációja útján. Azonban az „operációkutatás" mint kulcsszó nemcsak az ilyen irányú cselekvést fémjelzi, hanem ezt a címet használják a *döntési*, *irányítási* problémák megoldását szolgáló sajátos matematikai modellek, módszerek, diszciplínák (a lineáris és a nem-lineáris programozás; az egészértékű programozás; a sorrendprogramozás; a játékelmélet; a dinamikus programozás és a folyamatirányítási elmélet; a gráfelmélet és a hálózati áramlások elmélete; a szervezési hálózatok és a hálós irányítási rendszerek elemzése; a sztochasztikus folyamatok elmélete; a tömegkiszolgálási elmélet; a készletgazdálkodás; valamint — mindezekre kiterjedően — heurisztikus módszerek és a rendszerszimuláció) gyűjtőneveként is.

Mind e módszerek, mind az operációkutatás rendszerszemléletű probléma-megközelítési gyakorlata szerves alkotóeleme lett a rendszertechnikának, sőt Hall arról ír, hogy az operációkutatás olyan közeli kapcsolatban áll a rendszertechnikával, hogy néha össze is tévesztik vele. Mindenesetre az 50-es évek vége felé az USA több vezető egyetemén meghirdették az „Operációkutatás és rendszertechnika" c. tantárgyat.

Az *általános rendszerelmélet* fogalmazta meg szabatosan az olyan fogalmakat, mint a rendszer környezete; az attribútumai (különösen a rendszer és a környezete közötti input és output kapcsolatok és a rendszerállapotok); a rendszer általánosan értelmezett függvénykapcsolatai (két vagy több attribútum közötti összefüggések kifejezései); a rendszer funkcionális aspektusa (az attribútumok és a függvények halmaza); az alrendszerek és a közöttük levő relációk; a rendszerleírás strukturális aspektusa (amely kifejezi, hogy az egész a relációkkal több mint a részek összege); a rendszerhierarchia (vagyis ha

újabb alrendszerek attribútumait kapcsoljuk a rendszerhez, akkor egy magasabb rangú rendszert kapunk); valamint a rendszerfogalom relativitása.

A rendszerleírás a halmazalgebra eszközeivel formalizálható. A funkcionális aspektusban a rendszert még „fekete doboz"-nak tekintjük és elsősorban viselkedési módjait vizsgáljuk. Csak ezután térünk át a strukturális aspektusra, a rendszer összetettségének, az alrendszerek közötti relációknak a vizsgálatára. Az alrendszerek éppen a közöttük felismert relációk, vagyis attribútumaik egymáshoz kapcsolódásai révén képezhetők, egyesíthetők rendszerré.

A rendszer tehát magában foglalja:

a) az attribútumok halmazát,

b) a kölcsönhatásban levő attribútumok mutatóit (mérőszámait, logikai értékeit) egymáshoz rendelő függvények halmazát,

c) a környezettől elhatárolt alrendszerek halmazát és

d) az alrendszerek között fennálló és a rendszer struktúráját kifejező relációk halmazát.

A kibernetika, az operációkutatás és a rendszerelmélet elsősorban az időben létező, *dinamikus* rendszerekkel foglalkoznak, amelyhez egy T rendezett időhalmaz, attribútumaikhoz pedig a t időparaméter is társul.

A rendszerek morfológiai rendszerezésének lehetőségei

Ismérvek	Ismertető jelek		
A rendszer önmagában	konkrét	absztrakt	
Keletkezésének módja	természetes	mesterséges	
Környezetéhez való viszonya	zárt	viszonylag izolált	nyitott
Az időtényező figyelembevétele	statikus	dinamikus	
Állapotváltozásának időérzékenysége	idő-független	idő-függő	
Attribútumainak értékkészlete	folytonos	diszkrét	
Függvénytípusa	lineáris	nem-lineáris	
Attribútumainak meghatározottsága	determinisztikus	sztochasztikus	bizonytalan
Struktúrájának alkalmazkodóképessége	merev	rugalmas	
Alrendszereinek száma	kevés	sok	nagyon sok
Relációinak sokasága	egyszerű	komplex	nagyon komplex
...			

A matematikai (vagy más néven általános) rendszerelmélet dinamikus, nem zárt rendszerekkel foglalkozik, amelyek folyamatosan a $t \in T$ időpillanatban az $z(t) \in Z$ állapotban vannak, az $u(t) \in U$ inputot veszik fel és az $y(t) \in X$ outputot bocsátják ki. Anélkül, hogy a részletekbe belemennénk, az ilyen rendszerek az alábbi axiómákkal határozhatók meg:

1. adott a T *időhalmaz*, amely valós számoknak rendezett részhalmaza;

2. adott az *input értékek U halmaza* és a megengedett *input függvények Ω halmaza*, ahol $\Omega = \{ \omega : T \to U \}$;

3. adott az *Z állapothalmaz* és az *állapotátmenet* φ *függvénye*: $\varphi : T \times \times T \times Z \times \Omega \to Z$, amelynek értéke a $z = z(\tau) \in Z$ *kezdeti állapotból* (ahol a $\tau \in T$ a *kezdet időpontja)* az $\omega \in \Omega$ input hatására a $t \in T$ időpontban bekövetkező $z(t) = \varphi(t; \tau, z, \omega) \in Z$ állapot;

4. adott az *output értékek Y halmaza* és az *output függvények Γ halmaza*, ahol $\Gamma = \{ \gamma : T \to Y \}$, valamint az $\eta : T \times Z \to Y$ *kiolvasó leképezés*, amely meghatározza az $y(t) = \eta(t, z(t))$ outputot.

Ezt a rendszerfogalmat a rendszertechnikában még ki kell egészítenünk a rendszer irányításának a fogalmával és a céllal, pontosabban — általában — a célokkal, hiszen a mérnöki tevékenység mindig bizonyos célok kitűzésére, ill. elérésére irányul.

Az irányításelmélet BELLMANtól származó alapelve szerint az *irányítási szabály* egy

$$k : T \times Z \to U$$

leképezés, amely a t időpontban a $z(t)$ állapothoz hozzárendeli az input

$$u(t) = k\big(t, z(t)\big)$$

értékét, vagyis valamely pillanatban az input értéke csak az időponttól és az akkori állapottól függ. A rendszer többi paramétere a k függvény szerkezetében érvényesül. Ez egyben a *visszacsatolás* alapgondolata is.

Az *irányítás döntési problémája* a következő: egy adott $[0, T]$ időintervallumban az állapot folyamatát kifejező $z(t)$ irányított változó értékét úgy tervezzük módosítani az $x(t)$ irányítási változóval, hogy a pillanatnyi $q(t)$ eredmények összege, vagyis a célfüggvény, pontosabban funkcionál értéke optimális, tehát maximum vagy minimum, általánosabb esetben szuprémum vagy infimum legyen. Ennek általános modellje:

$$z(0) = a$$

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = f\big(z(t), x(t)\big) \qquad 0 \leq t \leq T$$

$$x(t) \in I_x = \{x(t) : x_j(t)_{\min} \leq x_j(t) \leq x_j(t)_{\max}\}$$

$$j = 1, \ldots, n$$

$$\int_0^T q(z(t), x(t), t)\, \mathrm{d}t \to \sup,$$

ahol az $x(t)$ irányítási, vagyis döntési változó n-dimenziós vektor és a tégla alakban rendezhető I_x függvényhalmaz egy intervallum. A $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ differenciál-

egyenlet a kiinduló állapot figyelembevételével az alábbi integrálegyenletben is leírható:

$$z(t) = z(0) + \int_0^t f(z(\tau), x(\tau)) \, d\tau .$$

A rendszertechnika feladataiban az $x(t)$ néha részben vagy teljesen az $u(t)$ inputtal azonos. A zárt hatásláncú, vagyis visszacsatolásos irányítás esetében alapjelként adott lehet a $w(t)$, a *kívánt állapot vektora*. Ekkor

$$x(t) = x(z, w, t) .$$

Meg kell jegyezni, hogy a jelenség észlelésének és a beavatkozásnak az az elméleti egyidejűsége, amely az irányításnak ezekben az alapmodelljeiben megfigyelhető, elhanyagolja az irányítás folyamatában bekövetkező késleltetéseket, amelyeket konkrét esetekben külön be kell illeszteni a modellbe. Vagyis a késleltetés miatt

$$x(t) = x\big(z(t - \Delta), w(t - \Delta)\big) ,$$

és bonyolultabb esetben az irányítási változó még a folyamat közelmúltjának valamilyen kifejezésétől is függhet. Egyszerűbb struktúrájú zárt, dinamikus rendszerekben éppen a késleltetésnek hatását képes elemezni. a differenciaegyenleteken alapuló és FORRESTER nevéhez fűződő *ipari dinamika*, amely mint minden rendszerszimuláció a kezdeti állapotból kiindulva az összes további állapotváltozás nyomonkövetésével határozza meg a rendszerre jellemző információkat.

Még tovább lépve elérkezünk a *tanuló rendszerek*, ill. a *tanulási folyamatok* fogalmához. Ezen azt értjük, hogy a nem teljesen ismert környezetben a rendszer maga szerzi meg működése közben a döntésekhez szükséges információkat és ezek felhasználásával javítja saját teljesítményét. Ehhez — a matematikai statisztika módszereinek a segítségével — meg kell oldani egy funkcionál ismeretlen mennyiségeinek becslési vagy szukcesszív approximálási problémáját, ahol a funkcionált a tervező (vagy maga a tanuló rendszer) választja meg a tanulmányozott folyamat reprezentálására.

Eddigi jelöléseinket alkalmazva a szukcesszív approximáció célja a várhatóan leghatékonyabb beavatkozás, az x^* meghatározása:

$$f(z, x^*) = \max_x \{f(z, x); x \in I_x\} ,$$

ahol az $f(z, x)$ pl. a beavatkozás hatékonyságának a várható értéke, vagyis

$$f(z, x) = E[q \mid z, x] = \int_{-\infty}^{+\infty} q p(q \mid z, x) \, dq .$$

3. A rendszertechnika főbb vonásai

A mérnöki munka végső soron és alapvetően a műszaki alkotások, vagyis szerszámok, készülékek, műszerek, berendezések, gépek, járművek, robotok, erőművek, műtárgyak, építmények, közlekedési pályák, települések, ipari létesítmények, irányítási rendszerek, információrendszerek, számítástechnikai hálózatok, távközlési hálózatok és hasonlók létrehozására irányul. Ezek a dolgok, objektumok (pl. németül: Sachsysteme) képezik a rendszertechnikai rendszerek egyik osztályát. Azt is mondhatjuk, hogy ez a rendszertechnika tárgya. Azonban a műszaki alkotások komplex szervezetek keretei között, ún. cselekvési rendszerekben (pl. németül: Handlungssysteme) jönnek létre, ezek képezik a rendszertechnika második rendszerosztályát, más szóval alanyát. A mérnököknek egy jelentős része ez utóbbival van elfoglalva.

A rendszertechnika irányait, vizsgálódási területeit a következő két nagy osztályba is összefoglalhatjuk

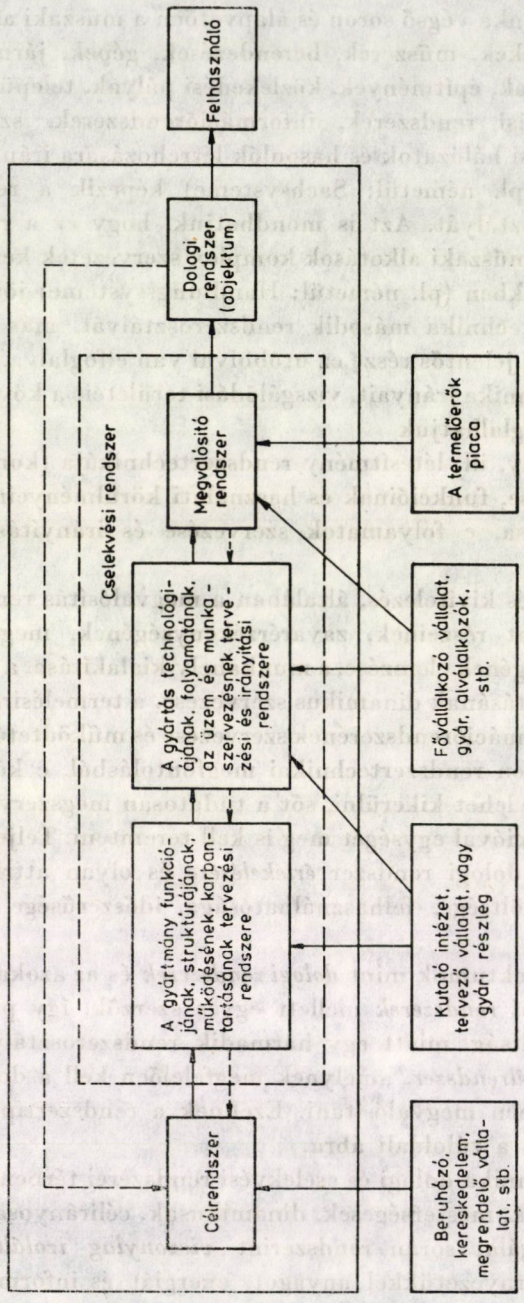
I. a gyártmány, ill. létesítmény rendszertechnikája (komplex tervezése, értékelése, fejlesztése, funkcióinak és használati körülményeinek elemzése, új megoldások kutatása, e folyamatok szervezése és irányítása, informatikai bázisa stb.);

II. a gyártás és kivitelezés, általában a megvalósítás rendszertechnikája (a termelő folyamat részeinek, zavarérzékenységének, megbízhatóságának, ráfordítás-igényességének elemzése, a munkahely kialakítása, a termelőrendszer anyagi-műszaki ellátásának dinamikus szervezése, a termelésirányítás, a tervezés és irányítás információrendszerének szervezése és működtetése és hasonlók).

Azonban, éppen rendszertechnikai megfontolásból, e két ág dinamikus kölcsönhatását nem lehet kikerülni, sőt a tudatosan megszervezett kommunikációval és kooperációval egységét meg is kell teremteni. Teljesen nyilvánvaló ez akkor, amikor a dologi rendszer *értékelésére* és olyan attribútumaira gondolunk, mint pl. költsége, felhasználhatósága, időszerűsége vagy értékesíthetősége.

A műszaki objektumok mint *dologi rendszerek* és az azokat létrehozó vagy működtető *cselekvési rendszerek* mellett egyes szerzők, így pl. ROPOHL, fontossága és bonyolultság miatt egy harmadik rendszerosztályt is megkülönböztetnek és ez a *célrendszer*, amelynek megfelelően kell a dologi rendszert a cselekvési rendszerben megvalósítani. Ezeknek a rendszertípusoknak a kapcsolódásait mutatja a túloldali ábra.

A rendszertechnika dologi és cselekvési rendszerei térben és időben léteznek, tehát konkrétak, mesterségesek, dinamikusak, célirányosak és alapvetően nyíltak, de a vizsgálat során rendszerint *viszonylag izolált* rendszereknek tekintjük őket. Környezetükkel anyagot, energiát és információt cserélnek. Így input-, output- és állapotattribútumaik jellegzetes kategóriái az anyag, az energia, az információ, a tér és az idő. Ezeken kívül a cselekvési rendszerek

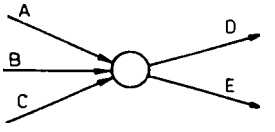


A rendszertechnika rendszertípusainak kapcsolódási vázlata

inputkategóriái még a munkaerő, a pénz és az állóeszközök (amelyek szintén dologi rendszerek), outputkategóriái közé pedig odatartozik az új dologi rendszer (a termék) vagy valamilyen teljesítmény (szolgáltatás). Konkrét esetben a cél szempontjából lényeges input, állapot és output attribútumokat és függvénykapcsolataikat kell kiemelni, minőségi és mennyiségi specifikációkkal pontosítani.

A *rendszerelemzés* dolga, hogy a probléma és a rendszercélok ismeretében (vagy meghatározásuk után) a rendszert és környezetét elhatárolja, ehhez vizsgálja meg a felhasználó követelményeit és körülményeit, mérlegelje a korlátozó feltételek hatását, majd elemezze a rendszer funkcióit és a hozzájuk tartozó attribútumokat. A cselekvési rendszerek elemzésekor a funkcióelemzés az elvégzendő részfeladatoknak, tevékenységeknek, azok inputjainak, outputjainak és kapcsolódásaiknak felismerését, felsorolását jelenti. Hasznos segédeszközök ebben a folyamatábrák, kapcsolódási vázlatok és a tevékenységi hálók. Az operációkutatási hálókban a funkciók, részfolyamatok, tevékenységek kapcsolódásai logikai műveletekkel* modellezhetők. A jól ismert PERT, CPM és egyéb tevékenységélű munkaszervezési hálókban például az egy csomópontban befutó (pl. A, B, C) és abból kiinduló (pl. D, E) élek ábrarészlete azt jelenti, hogy

$$(A \wedge B \wedge C) \Leftarrow (D \wedge E),$$



vagyis csak az A, B, és C tevékenységek befejezése után kezdhető meg a D és E. De leírhatók más szituációk is, pl.

$$(A \vee B \vee C) \Leftarrow (D \wedge E)$$

(jelentése: ha az A, B és C részfolyamat közül legalább az egyik befejeződik, akkor a D és E részfolyamatot meg lehet kezdeni);

$$(A \vee B) \Leftarrow (D \not\equiv E)$$

(jelentése: ha az A vagy B befejeződött, akkor a D és az E közül az egyik megkezdődhet).

Az ún. GERT** típusú, sztochasztikus hálószerkesztés többféle csomóponti szimbólum alkalmazásával már lehetővé teszi a különböző logikai

* A példákban alkalmazott logikai műveletek: $\wedge$: „és" művelet, logikai szorzás, konjunkció; $\vee$: megengedhető „vagy", logikai összeadás, diszjunkció; $\not\equiv$ „vagy a, vagy b" művelet, kizáró „vagy", tagadott ekvivalencia; $\Leftarrow$: az implikáció („ha a, akkor b") fordított irányú jelével itt logikai relációt, pontosabban lehetőséget fejezünk ki. „b csak akkor lehet igaz, ha a igaz", vagyis a bal oldal igazságának meg kell előznie a jobb oldal igazságát. Ez tehát itt *megelőzési relációt*, sorrendiséget jelent.

** Graphical Evaluation and Review Technique.

kapcsolódásokat, sőt a hálón belüli visszacsatolásokat, korlátokat, így a matematikai kifejezések változói közötti összefüggések ábrázolását is.

A rendszerelemzés körébe tartozik még a rendszer tényleges jellemzőinek, vagyis használhatósági mutatóinak kialakítása, a használható alternatívák leírása és a struktúra részleteire is kiterjedő értékelése.

Az elemzést követő *rendszertervezés* legfontosabb feladata, hogy a funkciók, így az attribútumok és függvénykapcsolataik ismeretében azonosítsa az alrendszereket és relációikat. A relációk között különösen fontosak a kapcsolatok, csatlakozások, amikor az egyik alrendszer outputja egyidejűleg inputja egy másik alrendszernek, de lényeges szerepet játszanak a térbeli és időbeli viszonyok is. A rendszertervezésnek különösen nagy a jelentősége a dologi rendszerek megalkotásában.

A rendszerkutatás és -tervezés két útja a kívülről befelé haladás (angolul: giant-step-approach), vagy a részekből való kiindulás (piecemeal-approach). Az utóbbi esetben pl. egy gyártórendszer kialakításának kiindulópontját az egyedi szerszámgépek adottságai képezik, majd lépésenként, kiegészítő illesztési szabályok segítségével haladnak a gyártórendszer felé. A kívülről befelé haladás esetében viszont a rendszertervezés elsőrendű tárgya a magasabb rangú rendszer struktúrája és abból vezeti le az alrendszerek szükséges specifikációit. Ehhez hozták létre a jól bevált *építőkockaelvet*. A mai rendszertechnikának egyik figyelemre méltó törekvése az, hogy az építőkockaelv segítségével a dologi rendszert *dinamikus struktúrájúvá*, flexibilissé alakítsa ki.

Bonyolultabb rendszerek esetében a többszörös visszacsatolású tervezésre a *rendszerszimuláció* kínál reális lehetőséget. De egyébként is megvan a jelentősége az operációkutatásnak ebben a fázisban is a preferált megoldások kiválasztásánál, a működési folyamat fenntartásának, irányításának tervezésénél.

A cselekvési rendszer már ember-gép rendszer vagy újabban találóbb elnevezéssel társadalmi-műszaki rendszer. A rendszertechnika természetesen csak az olyan cselekvési rendszerekkel foglalkozik, amelyeknek feladata műszaki dologi rendszerek tervezése, megalkotása, bár néha tágabb értelmezésekkel is találkozunk. Előállításuk és felhasználásuk összefüggéseiben már a dologi rendszerek is cselekvési rendszerek alrendszereivé válnak. A rendszertechnika harmadik munkafázisát jelentő *üzemeléstervezés*, vagyis az üzembehelyezés tervezése, a javíthatóság és karbantarthatóság elemzése, gondoskodás a meghibásodások közléséről és az alkatrészellátásról, hibakereső eljárások kidolgozása és hasonlók, újabb szóval az orgware, a dologi rendszert már a cselekvési rendszerbe illeszti be.

A cselekvési rendszerek a már említett tulajdonságaikon kívül erősebben függnek a véletlentől, ezért mindig sztochasztikusak és többé-kevésbé önirányítók és önszervezők is. A *műszaki* és a *természeti* környezet mellett a *társadalmi* és a *gazdasági* környezetnek itt fokozott jelentősége van.

A *rendszerszervezés* nem a negyedik munkafázisa a rendszertechnikának, hanem a dologi rendszer teljes életpályájának folyamatára — a rendszerelemzésre, a tervezésre, a megvalósításra, a bevezetésre, a működtetésre, a fenntartásra, a módosításra stb. — kiterjedő és a cselekvési rendszerben megvalósuló szervező, irányító tevékenység. A rendszerszervezés leggazdagabb területe a *termelésirányítás*. Ide tartozik a „project-management" fogalma is. Mindez jellegzetes tevékenysége az „industrial engineering"-nek vagy nálunk, a szocialista országokban a szervező és a gazdasági mérnöki szakmáknak.

Külön kell szólni a *célokról*, a rendszertechnika irányítási jeleiről, támpontjairól, amelyeket mindig bizonyos — általában véges — időhorizonton értelmezünk és figyelembe vesszük időállandóságukat, időfüggőségüket is. Itt meg kell különböztetnünk a rendszerrel szemben támasztott külső követelményeket, elvárásokat, előírásokat mint környezeti adottságokat, ezek keretei között a rendszer által pontosított vagy a maga számára kialakított célokat és esetleg az ezek közül kiemelt *optimum-kritériumot*, az operációkutatás célfüggvényét.

A rendszertechnikai munkában, a tervezésben, irányításban, rendszeroptimálásban konkrét esetben különböző, részben egymással kölcsönhatásban álló célokat kell érvényesíteni. Ezek rendezett halmazát szokták *célrendszer*nek nevezni, amely az előzőekkel ellentétben absztrakt rendszer, de szintén mesterséges és dinamikus is, hiszen a cél- és az eszköz-, valamint a környezetelemzés előrehaladtával terjedelmében és tartalmában újra és újra változik. A célrendszernek szintén van saját környezete, amely az e célrendszeren kívül maradt célokat tartalmazza. A célrendszer egyes tételei elvárt tárgyi tulajdonságokat írnak le és ahhoz követelményt rendelnek. A célelemzés feladata az is, hogy a célok közötti hierarchiát feltárja. Amint a célhierarchiában lefelé haladunk, a kívánt dologi viselkedésnek mindig pontosabb leírásához jutunk. A legalsóbb rangú célrendszerek egyes tételei már az operatív irányítás mérhető támpontjai. A *célérték* lehet kvalitatív vagy kvantitatív, diszkrét vagy bizonyos tartományban folytonos. A követelmény a célértéknek alsó és felső korlátot szabhat.

A rendszertechnika négy környezettípusának megfelelően osztályozva a célokat beszélhetünk *műszaki* célokról, *gazdasági* célokról, *társadalmi* és *ökológiai* célokról. A célnak mint szónak itt nagyon általános jelentése van, lehet norma, valamilyen számérték alsó, ill. felső korlátja, a tárgy vagy a folyamat jellegzetes tulajdonsága, leírással alátámasztott követelmény stb. A műszaki tervezésben és irányításban oly gyakran hiányolt *ökonómiai* szemlélet érvényesítése helyesen, a többi célosztállyal összehangoltan a rendszertechnika keretei között valósulhat meg. Az egyoldalú ökonómiai szemléletnek megvan az a veszélye, hogy az árak objektivitását túlbecsüli és figyelmen kívül hagyja, hogy gyakran a legfontosabb társadalmi és emberi célokat nem lehet pénzben kifejezni. Azonkívül a gazdasági optimum mindig nagyon érzékeny a vizsgált rendszer elhatárolására. Az olyan — kétségkívül igen fontos — gazdasági célok,

mint a költségminimálás, a nyereségmaximálás, a forgalommaximálás és hasonlók a teljes célhierarchiában rendszerint nem a legmagasabb rangú alcélok. De ha a magasabb rangúak követelményeit alsó, ill. felső korláttal már előírtuk, akkor az alrendszerek tervezendő, releváns attribútumait, operációit joggal optimálhatjuk ilyen optimumkritériumok szerint.

A célrendszeren belül különböző relációk lehetségesek. Ezek közül a legfontosabbak a következő struktúratípusokat hozzák létre:

indifferens célok,

egymásnak ellentmondó, konkurráló célok,

egymást kiegészítő vagy erősítő célok,

és a sorrendiség, vagyis a preferencia-relációk.

A *legjobb megoldás matematikai meghatározása* akkor jöhet szóba, ha a lehetséges megoldások halmazának számossága igen nagy, pontjainak felsorolása és értékelése gyakorlatilag nem is kivihető, de ez a halmaz matematikai feltételrendszerrel leírható, és a cél, vagyis a halmaz pontjainak (a lehetséges megoldásvektoroknak) értékelése egy függvényben kifejezhető. A feltételes szélsőérték egzakt meghatározásának lehetősége vagy megközelítésének módja ezután már elsősorban a feltételrendszer és a célfüggvény struktúrájától függ.

Az optimális (matematikai) programozás absztrakt megfogalmazása:

$$\text{opt } Q(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in L \subseteq R^n,$$

vagyis itt egy n dimenziós L konvex tartományon értelmezett egyetlen Q célfüggvénynek a globális szélsőértékét (maximumát vagy minimumát) és azzal együtt szélsőértékhelyét, az ún. optimális megoldást kell meghatároznunk. Az $\mathbf{x}$ vektor komponensei az egyes tevékenységekre, a tervezendő attribútumokra vonatkozó döntési, ill. irányítási változók, amelyeknek számértékei a kívánt tevékenységi szintet mutatják. A kiemelt céltétel, vagyis az optimumkritérium kivételével az összes többi cél most követelményként az L konvex tartomány leírásában vesz részt. Azonban a célrendszer mindenegyes céltételéhez nem mindig tudunk előre adott számértékkel követelményt rendelni, különösen nem akkor, amikor azok között egymásnak ellentmondó célok is vannak és a követelmények megadásával a feltételrendszer könnyen ellentmondásossá válhat.

Ha viszont a célrendszer tételei, köztük az egymásnak ellentmondó célok összefoglalhatók egy *vektorcélfüggvényben*, akkor a célérték egy skalár helyett egy vektor, és a szélsőértékhely nem az optimális megoldás, hanem az ún. *efficiens megoldáshalmaz*. Ilyenkor a célrendszer elemzése, a követelmények összehangolása a *többcélú programozással* válik lehetségessé.

A többcélú programozás absztrakt megfogalmazása (maximumfeladat esetében):

$$v\text{-max } \mathbf{q}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in L \subseteq R^n,$$

ahol $\mathbf{q}(\mathbf{x}) = (Q_1(\mathbf{x}), Q_2(\mathbf{x}), \ldots, Q_k(\mathbf{x}))$ a vektorértékű célfüggvény, más szóval célvektor.

Tehát keressük a $\mathbf{q}$ vektor maximumát, elterjedt elnevezéssel *Pareto-maximumát* az L halmaz felett. A $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ egy vektorértékű célfüggvény és az L a lehetséges $\mathbf{x}$ megoldások konvex halmaza. A feladat a Pareto-optimális pontoknak, ill. az E efficiens halmaznak a meghatározása. Ez a *vektormaximum-probléma*, amelynek alapgondolata az, hogy egy $\mathbf{x}^0 \in E \subset L$ pont akkor Pareto-optimális (efficiens), ha nincs olyan $\mathbf{x} \in L$ pont, amelyben

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{q}(\mathbf{x}^0), \qquad \mathbf{q}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{q}(\mathbf{x}^0),$$

vagyis bármely összetevő célérték már csak úgy lenne növelhető, ha azáltal legalább egy másik célérték csökkenne. Ilyenkor az irányításnak az a feladata, hogy az irányított tevékenységi szinteket az E halmazban tartsa.

Azonban a *különböző célok kielégítésének* összehangolásában az optimális programozás is sokat segíthet, ha a kérdéses, ellentmondó követelményeket szisztematikusan, egyenként kiemelt céltételként vizsgáljuk, majd ennek alapján egy korláttal visszahelyezzük a feltételrendszerbe és a következőre térünk át. A követelmények elemzése még alaposabbá tehető a megoldások érzékenységének vizsgálatával és a parametrikus programozással.

Sztochasztikus döntési-irányítási szituációkban az optimális stratégiát, ill. a lehetséges stratégiák efficiens halmazát, vagyis egy esetleges, alkalmazkodóképes döntési tervet kell kidolgozni.

Az operációkutatás előre kidolgozott modelljei és algoritmusai önmagukban a levegőben lógnak. Gyakorlati sikerük nagyrészt azon múlik, hogy jól ismerjük-e a tényleges problémát, meg tudjuk-e ragadni releváns attribútumait és relációit egy alkalmas és használható modellben anélkül, hogy az absztrakció károsan torzítaná a vizsgált valóságot, és hogy jól ismerjük-e a modellnek és az azt kezelő módszernek a képességbeli korlátait, de azt a tervezési és irányítási rendszert is, amelyben a modellt felhasználjuk. Ugyanis a mi esetünkben a legtöbbször nagyon fontos kérdés, hogy a rendszer ritmusával összehangoltan, a változásokat figyelembe véve dinamikusan tudjuk-e az operációkutatás modelljét működtetni, vagyis szervesen be tudjuk-e illeszteni a modellt az irányítási rendszerbe úgy, amint egy számítógépi szubrutint a főprogramba illesztünk. Természetesen az egészen kis méretű feladatoktól eltekintve az irányítási vektor rendszeres újraszámításához, ill. a dinamikus tervezéshez közvetlenül hozzáférésű, párbeszédes üzemmódban használható számítógépre van szükség.

Az optimumszámítási modellekben gyakran célszerű egy egyetlen optimum helyett a „mi lesz akkor, ha" kérdésekre választ keresni, vagyis azok az elemzés fázisában is jól használhatók. Az egzakt módszerek elméleti és gyakorlati korlátai miatt pedig gyakran heurisztikus algoritmusok kifejlesztésével kell a problémát megközelítenünk.

A tényleges rendszer vizsgált viselkedésének valósághű megragadására, absztrakt rendszerbe történő leképezésére gyakran egy olyan folyamatábraszerű, számítógépi *algoritmikus modell* megszerkesztése a legcélszerűbb, amely lehetővé teszi a kezdeti állapotból kiindulva a valóság eseményeinek, vagyis az összes további állapotváltozásnak a megfelelő pontosságú nyomonkövetését. (Az ilyen numerikus eljárást nevezik *rendszerszimulációnak.)* Bonyolultabb esetekben az adekvát absztrakt rendszer számítógépi modelljét *tanuló algoritmusok* segítségével próbálhatjuk meg kifejleszteni. *De nagyon sok gyakran ismétlődő esetben, döntési szituációban a jóval egyszerűbb (pl. grafikai) eszközök célravezetőbbek.*

Ha a megoldási alternatívák, pl. a műszaki objektum tervváltozatai vagy a cselekvési rendszer folyamatait irányító beavatkozás lehetőségei ismertek és felsorolhatók, akkor a *többcélú*, más szóval a többdimenziójú *értékelés* (vagyis a komplex hatékonyságelemzés) a különböző minősítési, ill. értékmérő skálájú céltételek súlyozott összegeként kapott szintetizált célértékek összehasonlításával végezhető el. A különböző skálán mért célértékek súlyozásában a szubjektív megítélés a céltételek érzékenységvizsgálatával és a delphi-módszerrel (vagyis a szakértői vélemények módszeres szintézisével) ellensúlyozható.

Mi hát a rendszertechnika? Összefoglalóan erre a kérdésre ma a következő választ adhatjuk:

A rendszertechnika mint elmélet kiterjed az összetettebb műszaki tárgyi és megvalósítási rendszerek, valamint a műszaki létesítményeken, alkotásokon, ill. folyamatokon alapuló *nagy* (termelési, szolgáltatási, környezeti, irányítási) *rendszerek* funkciói, struktúrája, dinamikája, értékelési szempontjai előretekintő elemzésének, tervezésének, működtetésének és rendszerszervezésének (ezen belül a vállalkozás szervezésének-irányításának és a termelésirányításnak) *összetartozó elméletére és diszciplínáira.* Mindebben érvényesíti a rendszerszemléletet és felhasználja a *kibernetika* problémamegközelítését, az *operációkutatás* módszertanát, a szervezéselméletet, az informatikát, a műszaki prognosztikát, a komplex értékelemzést és más tudományos elméleteket. Ilyen értelemben *műszaki rendszerelméletnek* is szokták nevezni. Mint ennek az elméletnek *gyakorlati alkalmazása*, az anyagi tevékenységet megelőző, kísérő és követő szellemi folyamatként, a rendszertechnika — az ökológiai-műszaki és társadalmi-műszaki összefüggéseket szem előtt tartva — modellekkel, módszerekkel és szervezeti formákkal segíti az ilyen rendszerek tervezését, megalkotását, üzemeltetését, fejlesztését vagy legalábbis az elért körülmények és tulajdonságok fenntartását. Törekvéseiben különös hangsúlyt kap az idővel való jobb gazdálkodás. Elterjedésében az egyes gyártmányoktól a bonyolultabb objektumokon keresztül az egyre komplexebb létesítmények és gyártórendszerek, a sok ember-gép alrendszerből összefonódó társadalmi-műszaki rendszerek felé haladás a jellemző.

IRODALOM

1. AFANASZJEV, V. G.: Irányítás, képzés. A tudományos-technikai forradalom; Kossuth Kiadó, Budapest, 1973
2. BELLMANN, R.—KALABA, R.: Dynamic Programming and Modern Control Theory, Academic Press, New York 1965
3. BUSZLENKO, N. P.: Bonyolult rendszerek szimulációja; Műszaki Kiadó, Budapest, 1972
4. CHESTNUT, H.: Systems Engineering Methods; John Wiley, New York, 1967
5. CLELAND, D. I.—KING, W. R.: Systems Analysis and Project Management; McGraw-Hill Book Company, New York, 1975 (1968)
6. CSÁKI F.: Bevezetés az automatikába; Akadémiai Kiadó, Budapest 1973
7. FORRESTER, J. W.: Industrial Dynamics; The M. I. T. Press, Massachusetts, 1961
8. HALL, A. D.: A Methodology for Systems Engineering; D. Van Nostrand Comp., Princeton 1962
9. JÁNDY G.: Műszaki-gazdasági rendszertechnika, Helyzetkép; *Műszaki Tudomány* 47, 1973
10. JÁNDY G.: A számítógépes termelésirányítás elméleti és módszertani bázisa; *Magyar Tudomány*, 1975. 2. sz.
11. JÁNDY G.: Rendszerelemzés és irányítás, Statisztikai Kiadó, V., Budapest 1975
12. JÁNDY G.: A termelés tervezésének és irányításának számítógépes rendszere; *Műszaki Tudomány* 51 (1976), 301—323
13. JÁNDY G.: A szervező szakmérnökképzés; *Felsőoktatási Szemle*, (1976) 151—155
14. KALMAN, R.—FALB, P.—ARBIB, M.: Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill, New York 1969
15. KARGER, D. W.—MURDICK, R. G.: New Product Venture Management; Gordon and Breach, New York 1972
16. KREKÓ B.: Optimumszámítás, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest 1972
17. MAYNARD, H. B. (editor): Industrial Engineering Handbook; McGraw-Hill, New York 1971
18. RINZA, P.: Projektmanagement, VDI, Düsseldorf 1976
19. ROPOHL, G.: Systemtechnik — Grundlagen und Anwendung; Carl Hanser Verlag, München, Wien 1975
20. SCSERDIN, N. I.: A gazdasági kibernetika alapjai, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest 1971
21. SZADOVSZKIJ, V. N.: Az általános rendszerelmélet alapjai; Statisztikai Kiadó V., Budapest 1976
22. VÁMOS T.: Nagy ipari folyamatok irányítása. A számítógépes irányítás kezdő lépései. Akadémiai Kiadó, Budapest 1970
23. WHITEHOUSE, G. A.: Systems Analysis and Design Using Network Techniques; Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1973
24. ZADEH, L. A.—POLAK, E.: Rendszerelmélet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972
25. MTA Műszaki Tudományok Osztálya 1974. évi termelésirányítási ankétjának előadásai, MTESZ, Budapest, 1975 (sokszorosított kiadvány)
26. MTA Műszaki Tudományok Osztálya 1975. évi Számítógépes Rendszerszimuláció szimpózium előadásai, Budapest, 1975 (sokszorosított kiadvány)
27. Technische Prognosen in der Praxis, VDI-Verlag, Düsseldorf 1972

Systems Engineering. — The present paper deals with the circumstances for creating the systems engineering, the role of the concept of system, the cybernetics, the operation research and the general system theory, the main characteristics of systems engineering, its work phases and the types of systems (i.e. the system of object, the system of action and the system of goals).

Systemtechnik. — Die vorliegende Arbeit behandelt die Umstände des Zustandekommens der Systemtechnik, die einheimische Rolle des Begriffs System, der Kybernetik, der Operationsforschung und der allgemeinen Systemtheorie, die hauptsächlichsten Züge und Arbeitsphasen und Systemtypen der Systemtechnik (d. h. die Sach-, Handlungs- und Zielsysteme).

A VÁLTOZÓ RÉSZCSATORNA SZÉLESSÉGŰ RÁCSÁRAMLÁS FELADATÁNAK VISSZAVEZETÉSE A SÍKRÁCS PROBLÉMÁRA

HIDASI JÁNOS*

[Beérkezett 1976. november 4-én]

A változó részcsatorna szélességű rácsáramlás nem harmonikus potenciál és áramfüggvénye kifejezhető harmonikus függvények segítségével. Ezzel a módszerrel olyan összefüggést kapunk, amely alkalmas a sebességkomponensek meghatározására. A módszer alkalmazhatóságának feltétele az, hogy a részcsatorna kellő pontosan approximálható legyen a két szabad konstansú parabolikus vagy hiberbolikus görbével

Jelölések:

c_x, c_y — abszolút sebességkomponensek
φ, Φ — sebességpotenciálok
ψ, Ψ — áramfüggvények
c_1, c_2, c_3 — approximációs konstansok
$b(x)$ — részcsatorna szélesség
f_1, f_2 — $b(x)$-től függő transzformációs függvények

1. Bevezetés

Az áramlástechnikai gépek járó és vezetőkerekeinek tervezésére szolgáló számítási eljárások elvi alapját a valóságban kialakuló háromdimenziós áramlás minél pontosabb analízise képezi. Számítások során feltételezik, hogy az áramló közeg súrlódásmentes és összenyomhatatlan. A lapátozás terében kialakuló áramlás áramfelületei a gép forgástengelyével koaxiális áramfelületek. Forgásfelületeken a két szomszédos forgásfelülettel határolt részcsatorna középső áramfelületén a kétdimenziós áramlásra kapják az abszolút áramlást leíró differenciálegyenleteket. Alkalmasan választott leképző függvény segítségével síkra leképezve a síkon ez kétdimenziós rácsáramlást jelent.

A síkáramlás egyenleteiben az örvénymentesség továbbra is teljesül, viszont forrásos lesz, amelynek forrásai a részcsatorna szélességének változásából következően folytonosan eloszló felületi forráseloszlást jelentenek.

Az alapegyenleteket tekintve két csoportra osztható a feladatok jellege. Az állandó részcsatorna szélesség esetén a felületi forráseloszlás eltűnik, a feladat megoldása a Laplace-egyenlet megoldását jelenti. A másik az általános

* Hidasi János, 1053 Budapest, Királyi Pál u. 10.

eset, amikor is a részcsatorna szélesség változó, a Laplace-egyenlethez pótlólagos tagként a

$$-\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \text{ illetve a } +\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

mennyiségek kerülnek.

Ha a részcsatorna szélesség változására bizonyos feltételeket előírunk, akkor transzformációs kapcsolat áll fenn a két eset között, a változó részcsatorna szélességű rácsfeladat visszavezethető a Laplace-egyenlet megoldására.

Ez véghezvihető, ha a szélességeloszlás két szabad konstansú parabolikus vagy hiperbolikus görbével kellő pontosan approximálható.

2. A változó részcsatorna szélességű rácsáramlás alapegyenletei a síkon

A forgási áramfelületeken kialakuló kétdimenziós abszolút áramlás egyenleteit [2] szerint konformisan síkra leképezve kapjuk a kontinuitás

$$\frac{\partial}{\partial x}[b(x)\,c_x] + \frac{\partial}{\partial y}[b(x)\,c_y] = 0,$$

vagy másképp

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = -\frac{1}{b}\frac{db}{dx}c_x \tag{1}$$

és az örvénymentesség

$$\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

feltételi egyenleteit. (Függelék 1)

Az örvénymentesség feltétele teljesül, viszont jelen van

$$-\frac{1}{b}\frac{db}{dx}c_x$$

nagyságú felületi forráseloszlás.

Az áramlás örvénymentes volta miatt definiálható a φ potenciálfüggvény, hogy

$$c_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad c_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{3}$$

Definiálható továbbá egy ψ áramfüggvény tulajdonságokat mutató függvény is (ahogy a Függelék 2-ben bizonyítjuk)

$$c_x = \frac{1}{b}\frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad c_y = -\frac{1}{b}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{4}$$

A φ és ψ -re pedig a következő egyenletek kaphatók:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0\,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial x}=0\,. \tag{6}$$

Az egyenletek mindkét felírási módja képezheti a vizsgálatok menetét.

A feladat peremfeltételi egyenleteit a sebességtér rács előtti és utáni nagysága határozza meg.

3. A változó részcsatorna szélességű rácsáramlás feladatának visszavezetése a Laplace-egyenletre

Az (5), (6) egyenletek elliptikus típusú parciális differenciálegyenletek. Keressük azokat a feltételeket az [1] szerinti módon, amikor

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{1}{b}\frac{db}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$$

és

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0$$

egyenletek között a

$$\varphi=f_1(b)\,\Phi \tag{7}$$

transzformációs kapcsolat írható.

A (7). alapján képezzük a következő mennyiségeket:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{df_1}{db}\frac{db}{dx}\Phi+f_1(b)\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\left[\frac{d^2f_1}{db^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\frac{df_1}{db}\frac{d^2b}{dx^2}\right]\Phi+2\frac{df_1}{db}\frac{db}{dx}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+f_1(b)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=f_1(b)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\,.$$

A visszahelyettesítés és rendezés után

$$f_1\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right]+\Phi\left[\frac{d^2f_1}{db^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\frac{df_1}{db}\frac{d^2b}{dx^2}+\frac{1}{b}\left(\frac{db}{dx}\right)^2\frac{df_1}{db}\right]+$$

$$+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\left[2\frac{df_1}{db}\frac{db}{dx}+\frac{1}{b}\frac{db}{dx}f_1\right]=0.$$

Vagyis kapjuk a

$$\underbrace{\Phi\left[\frac{d^2f_1}{db^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\frac{df_1}{db}\frac{d^2b}{dx^2}+\frac{1}{b}\left(\frac{db}{dx}\right)^2\frac{df_1}{db}\right]}_{B_1(x)}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\underbrace{\left[2\frac{df_1}{db}\frac{db}{dx}+\frac{1}{b}\frac{db}{dx}f_1\right]}_{B_2(x)}=0$$

feltételi egyenletet.

A fenti feltétel két esetben teljesíthető. Az első, amikor

$$\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\Phi}=-\frac{B_1(x)}{B_2(x)}=f(x) \text{ vagy, const}$$

ami a Φ-re erős megszorítást jelent. (Függelék 3)

A második esetben:

$$2\frac{df_1}{db}\frac{db}{dx}+\frac{1}{b}\frac{db}{dx}f_1=0, \tag{8}$$

$$\frac{d^2f_1}{db^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\frac{df_1}{db}\frac{d^2b}{dx^2}+\frac{1}{b}\left(\frac{db}{dx}\right)^2\frac{df_1}{db}=0. \tag{9}$$

A (8), (9) egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszer megoldása adja az f_1 és b függvényeket.

A (8) egyenlet f_1-re megoldható függetlenül a (9) egyenlettől.

$$\frac{db}{dx}\left[2\frac{df_1}{db}+\frac{1}{b}f_1\right]=0,$$

$$\int\frac{df_1}{f_1}=-\frac{1}{2}\int\frac{db}{b}$$

$$\ln f_1=ln\frac{1}{\sqrt{b}}+\ln c_3,$$

$$f_1=\frac{c_3}{\sqrt{b}}, \tag{10}$$

$$\frac{df_1}{db}=-\frac{c_3}{2b\sqrt{b}}\quad;\quad\frac{d^2f_1}{db^2}=\frac{3c_3}{4b^2\sqrt{b}}.$$

Visszahelyettesítve (9) egyenletbe a fentieket

$$\frac{3c_3}{4b^2\sqrt{b}}\left(\frac{db}{dx}\right)^2-\frac{c_3}{2b\sqrt{b}}\frac{d^2b}{dx^2}-\frac{c_3}{2b^2\sqrt{b}}\left(\frac{db}{dx}\right)^2=0,$$

az összevonásokat és egyszerűsítéseket elvégezve a

$$2b\left(\frac{d^2b}{dx^2}\right) - \left(\frac{db}{dx}\right)^2 = 0 \tag{11}$$

másodrendű nem lineáris differenciálegyenletet kapjuk b-re.

A (11) egyenlet

$$\frac{db}{dx} = u\,[b(x)]\,; \quad \frac{d^2b}{dx^2} = \frac{du}{db}\frac{db}{dx} = \frac{du}{db}u$$

helyettesítéssel

$$2b\frac{du}{db}u - u^2 = 0 \tag{12}$$

transzformált alakra megy át.

Megoldva:

$$\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{db}{b}$$

$$\ln u = \ln \sqrt{b} + \ln c_1\,,$$

$$u = c_1\sqrt{b}\,.$$

Így

$$\frac{db}{dx} = c_1\sqrt{b} \tag{13}$$

$$\int \frac{db}{\sqrt{b}} = c_1\int dx,$$

$$2\sqrt{b} = c_1x + c_2,$$

$$b = (c_1x + c_2)^2. \tag{14}$$

Tehát a részcsatorna szélességnek elegendő pontosan közelíthetőnek kell lennie (14) szerinti függvénnyel, ahol c_1, c_2 approximáxiós konstansok.

A sebességtér (3) szerint képezhető:

$$c_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{1}{2b\sqrt{b}}\frac{db}{dx}\Phi + \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \tag{15}$$

$$c_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,. \tag{16}$$

A gyakorlati alkalmazhatóság tekintetében jelentősebb esetként a

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{1}{b}\frac{db}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 0$$

egyenletekre a

$$\psi = f_2(b)\, \Psi \tag{17}$$

transzformáció lehetőségét vizsgáljuk meg.

Az előzőekhez hasonlóan képezve a $\partial\psi/\partial x$ és $\partial^2\psi/\partial x^2$ mennyiségeket és visszahelyettesítve (6)-ba az

$$f_2\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right]+\Psi\left[\frac{d^2f_2}{db^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\frac{df_2}{db}-\frac{1}{b}\left(\frac{db}{dx}\right)^2\frac{df_2}{db}\right]+$$
$$+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left[2\frac{df_2}{db}\frac{db}{dx}-\frac{1}{b}\frac{db}{dx}f_2\right]=0$$

egyenletet kapjuk. A b és f függvényekre a

$$2\frac{df_2}{db}\frac{db}{dx}-\frac{1}{b}\frac{db}{dx}f_2=0\,, \tag{18}$$

$$\frac{d^2f_2}{db^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2+\frac{df_2}{db}\frac{d^2b}{dx^2}-\frac{1}{b}\left(\frac{db}{dx}\right)^2\frac{df_2'}{db}=0 \tag{19}$$

feltételi differenciálegyenlet-rendszer írható. A (18) egyenletet függetlenül (19)-től megoldhatjuk:

$$\frac{db}{dx}\left[2\frac{df_2}{db}-\frac{1}{b}f_2\right]=0,$$

$$\int\frac{df_2}{f_2}=\frac{1}{2}\int\frac{db}{b}$$

$$\ln f_2=\ln\sqrt{b}+\ln c_3\,,$$

$$f_2=c_3\sqrt{b}, \tag{20}$$

$$\frac{df_2}{db}=\frac{c_3}{2\sqrt{b}}\,;\quad \frac{d^2f_2}{db^2}=-\frac{c_3}{4b\sqrt{b}}\,.$$

Visszahelyettesítve a fentieket (19) egyenletbe és elvégezve az összevonásokat a

$$2b\frac{d^2b}{dx^2}-3\left(\frac{db}{dx}\right)^2=0 \tag{21}$$

másodrendű nem lineáris differenciálegyenletet kapjuk b-re.

Az előzőekhez hasonlóan megoldva

$$b=\frac{1}{(c_1x+c_2)^2}\,. \tag{22}$$

Ebben az esetben az x függvényben szűkülő részcsatorna szélességre nyílik vizsgálati lehetőség, ha c_1, c_2 konstansokkal pontosan tudunk approximálni (1. ábra). A (4) szerint a sebességtér képezhető

$$c_x = \frac{1}{b}\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\partial \psi}{\partial y}, \tag{23}$$

$$c_y = -\frac{1}{b}\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{b}}\left[\frac{1}{2b}\frac{db}{dx}\Psi + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right]. \tag{24}$$

A $b(x)$ függvényt nem kell az egész $-\infty < x < +\infty$ tartományon közelíteni, csak a rácstartományon. Rácstartományon kívül a részcsatorna szélességet állandónak tekinthetjük. Így ezeken a helyeken

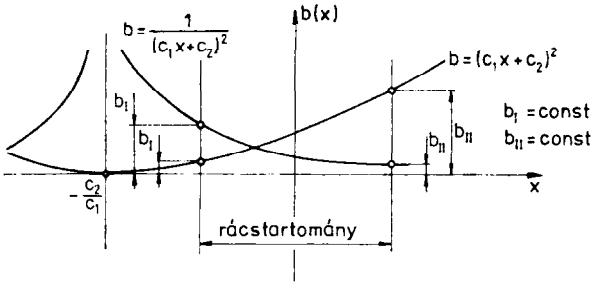
$$-\frac{1}{2b\sqrt{b}}\frac{db}{dx}\Phi \equiv 0 \quad \text{és} \quad -\frac{1}{2b\sqrt{b}}\frac{db}{dx}\Psi \equiv 0.$$

Az állandó részcsatorna szélességű rácsáramlás levezethető mint speciális esete a fentieknek. Ugyanis a (7), (10), (14), illetve a (17), (20), (22) egybevetése alapján, mivel $b = \text{const}$

$$f_1 = \frac{c_3}{\sqrt{b}} \equiv 1 \quad \text{és} \quad f_2 = c_3\sqrt{b} \equiv 1$$

legyenek. Így a (7), illetve (17) szerint

$$\varphi = \Phi \qquad \text{és} \qquad \psi = \Psi.$$



A fenti közelítések használhatóságát minden esetben az dönti el, hogy a két konstanssal történő approximáció elegendő egybeesést tud-e biztosítani a tényleges részcsatornával. A parabolikus és hiperbolikus jellegű részcsatornáknál az egybeesés mértéke nyilvánvalóan jobb.

A gyakorlatban szűkülők a részcsatornák, ezért az áramfüggvények közötti összefüggéseket feltáró (17), (20), (22) és az ebből származtatott sebességek közötti (22), (23) összefüggéseknek van nagyobb jelentőségük.

Ennek alapján mutatjuk be a Függelék 4-ben a rácstól nem megzavart áramlás harmonikus Ψ_1 áramfüggvényének az értelmezését.

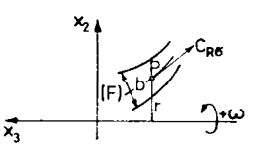
FÜGGELÉK

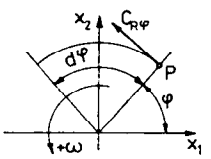
1. Az (F) áramfelületen a kontinuitás egyenlete

$$\frac{\partial C_{R\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{1}{r}\frac{\partial C_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \left[\frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma} + \frac{1}{b}\frac{db}{d\sigma}\right] C_{R\sigma} = 0 .$$

Az örvénymentesség egyenlete

$$\frac{\partial C_{R\varphi}}{\partial \sigma} - \frac{1}{r}\frac{\partial C_{R\sigma}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}\frac{dr}{d\sigma} C_{R\varphi} = 0 .$$



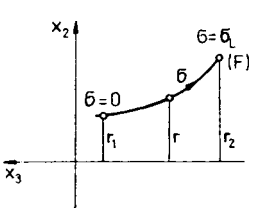


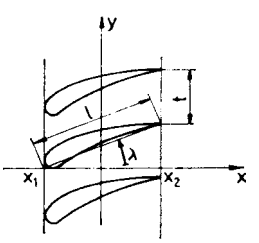
Az (F) áramfelület konformisan leképezhető az (x, y) síkra.

A leképző függvények

$$x = \frac{Nt}{2\pi}\left[-\frac{a_L}{2} + \int_0^{\sigma}\frac{d\sigma}{r}\right] = l\cos\lambda\left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{a_L}\int_0^{\sigma}\frac{d\sigma}{r}\right],$$

$$y = \frac{Nt}{2\pi}\varphi = l\cos\lambda\frac{\varphi}{a_L}, \qquad \text{ahol:} \quad a_L = \int_0^{\sigma_L}\frac{d\sigma}{r} .$$





Az (F) áramfelület (C_R) sebessége és a síkon a (c) sebesség között a

$$c = \frac{2\pi}{Nt} rC_R$$

összefüggés van.

2. Az áramvonal feltétel alapján:

$$\frac{dx}{c_x} = \frac{dy}{c_y},$$

$$-c_y dx + c_x dy = 0,$$

a (4) egyenletbe behelyettesítés után

$$\frac{1}{b}\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{1}{b}\frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0,$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

ψ = const. áramvonalon.

A φ, ψ rendszer ortogonális rendszert képez.

Ugyanis

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ alapján}$$

$$\frac{1}{b}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{b}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,$$

ami az ortogonalitás feltétele.

3. A

$$\nabla \Phi = 0$$

$$B_1(x)\,\Phi + B_2(x)\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$$

egyenletek közös megoldását csak Fourier-alakban kaphatjuk.

$$\Phi = p(x)\,q(y).$$

A p, q függvényekre a

$$\frac{d^2p}{dx^2} - C^* p = 0,$$

$$\frac{d^2q}{dy^2} + C^* q = 0$$

egyenletek állnak fenn. Így az (1), (2) egyenletek közös megoldása

$$\Phi = (Ae^{kx} + Be^{-kx})\,(C\sin ky + D\cos ky)$$

vagy

$$\Phi = (A\sinh kx + B\cosh kx)\,(C\sin ky + D\cos ky)$$

ahol: A, B, C, D, $k = \sqrt{C^*}$ konstansok.

4. A lapátprofilon a kontúrsebesség a [3], [4], [5] szerint előállítható mint két szuperponált áramlás eredménye, a kontúrprofilon folytonosan eloszló γ örvény indukálta sebesség a tulajdonképpeni rácshatás és a rácsprofiltól nem megzavart áramlás összegeként. Határozzuk meg az utóbbit.

Mivel a sebesség nem függ az y koordinátától

$$bc_x = c_{x0} = \text{const}, \qquad c_y = c_{y0} = \text{const}.$$

A Ψ_1 áramfüggvényt két tag összegeként írjuk fel

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12}\,.$$

ahol a

$$\text{A} \quad \Psi_{11} \quad a \quad c_x = \frac{c_{x0}}{b} \quad \text{és} \quad c_y = 0 \tag{1}$$

$$\Psi_{12} \quad a \quad c_x = 0 \qquad \text{és} \quad c_y = c_{y0}$$

áramlásokkal legyenek meghatározottak.

A (23) és (24) értelmében a Ψ_{11}-nek ki kell elégítenie a

$$\frac{\partial \Psi_{11}}{\partial y} = c_x\sqrt{b} = \frac{c_{x0}}{\sqrt{b}}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \Psi_{11}}{\partial x} = -\frac{1}{2b}\frac{db}{dx}\Psi_{11} \tag{3}$$

parciális differenciálegyenlet-rendszert.

A (2) egyenlet integrálásával

$$\Psi_{11} = \frac{c_{x0}}{\sqrt{b}}y + F(x). \tag{4}$$

A (4) visszahelyettesítésével (3) egyenletbe

$$-\frac{c_{x0}}{2b\sqrt{b}}\frac{db}{dx}y + \frac{dF}{dx} = -\frac{1}{2b}\frac{db}{dx}\left[\frac{c_{x0}}{\sqrt{b}}y + F(x)\right].$$

Rendezve és az összevonások elvégzése után F-re a

$$\frac{dF}{dx} + \frac{1}{2b}\frac{db}{dx}F = 0 \tag{5}$$

feltételi differenciálegyenletet kapjuk. Megoldva:

$$\int \frac{dF}{F} = -\frac{1}{2}\int \frac{db}{b},$$

$$\ln F = \ln \frac{1}{\sqrt{b}} + \ln K_2.$$

Tehát

$$F = \frac{K_2}{\sqrt{b}}, \tag{6}$$

$$\Psi_{11} = \frac{c_{x0}}{\sqrt{b}} y + \frac{K_2}{\sqrt{b}}. \tag{7}$$

Az előzőekhez hasonlóan a Ψ_{12}-re kapjuk

$$\frac{\partial \Psi_{12}}{\partial y} = 0, \quad \text{így} \quad \Psi_{12} = \Psi_{12}(x), \tag{8}$$

$$\frac{d\Psi_{12}}{dx} + \frac{1}{2b}\frac{db}{dx}\Psi_{12} = -c_{y0}\sqrt{b} \tag{9}$$

a (9) inhomogén differenciálegyenletet.

A (9) egyenlet azonos alakú (5)-tel, így a homogén egyenlet megoldása

$$\Psi_{12\text{Hom}} = \frac{K_3}{\sqrt{b}}. \tag{10}$$

Partikuláris megoldást a

$$\Psi_{12\text{part}} = -\frac{c_{y0}}{\sqrt{b}}\int_{x_k}^{x} b\,dx \tag{11}$$

alakban kaphatjuk, ahol x_k tetszőleges a rácstartományba eső kiindulási pont. Így

$$\Psi_{12} = \Psi_{12\text{Hom}} + \Psi_{12\text{part}},$$

$$\Psi_{12} = \frac{K_3}{\sqrt{b}} - \frac{c_{y0}}{\sqrt{b}}\int_{x_k}^{x} b\,dx. \tag{12}$$

A rácsprofiltól nem megzavart áramlás áramfüggvénye:

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{b}}\left[K_1 + c_{x0}y - c_{y0}\int_{x_k}^{x} b\,dx\right] \tag{13}$$

K_1, K_2, K_3-integrálási konstansok.

Köszönetnyilvánítás

Ezen a helyen szeretném a volt tanítvány őszinte hálájával megköszönni Dr. CZIBERE Tibornak, a Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem tanszékvezető professzorának a munkám során tett értékes útmutatásait és tanácsait.

IRODALOM

1. CZIBERE, T.: Über die Berechnung der ebenen Untershallströmmung von kompressiblen Medien. *Acta Techn. Hung* **79.** (1974), 93—99
2. CZIBERE, T.: Über die Berechnung der Schaufelprofile von Strömungsmaschinen mit halbaxialer Durchströmung. *Acta Techn. Hung.* **44.** (1963), 149—193
3. KOTSCHIN, N. J.—KIBEL, I. A.—ROSE, N. W.: Theoretische Hydromechanik. Berlin, Akadémia Verlag 1954—1955
4. MARTENSEN, E.: Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmschen Integralgleichung. *Arh. Ration. Mach. Analysis* **3** (1959)
5. ISAY, W. H.: Beitrag zur Potentalströmung durch axiale Schaufelgitter. *ZAMM* **33** (1953)

Reduction of the Cascade Flow Problem of a Part-channel of Varying Width to the Plane Cascade Problem. — The non-harmonic potential and stream function of a cascade flow of a part-channel of varying width can be expressed with the aid of harmonic functions. This method provides relations which are suitable for the determination of the velocity components. The precondition for its application is that the part-channel can be approximated with sufficient accuracy by a parabola or a hyperbola with two free constants.

Züruckführung der Aufgabe über Gitterströmung mit veränderlicher Teilkanalbreite auf das Problem des ebenen Gitters. — Die nichtharmonischen Potential- und die Stromfunktionen einer Gitterströmung mit wechselnder Teilkanalbreite können mit Hilfe von harmonischen Funktionen ausgedrückt werden. Mit diesem Verfahren wird ein geeigneter Zusammenhang zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten erhalten. Bedingung für Anwendung der Methode ist, daß der Teilkanal mit der nötigen Genauigkeit durch eine Parabel oder eine Hyperbel mit zwei freien Konstanten angenähert werden kann.

A KÖTÖTT TALAJOK RUGALMAS JELLEMZŐINEK MEGHATÁROZÁSÁRÓL

SOMOSVÁRI ZSOLT*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1977. március 30.]

A tanulmány bemutatja, hogy kötött talajok triaxiális vizsgálatainál kapott eredmények kiértékelésére, a rugalmassági modulus, Poisson-szám, ill. Poisson-tényező meghatározására alkalmasak a Hooke-modellből közvetlenül levezetett egyszerű összefüggések. Továbbá bemutatja a tanulmány, hogy a kompresszió feszültségállapotában a terhelés kezdeti szakaszán kötött talajok rugalmas alakváltozást szenvednek. A rugalmas alakváltozások tartománya sokszor az egész vizsgált tartományt kiteszi. Ebben a tartományban az összenyomódási modulus rugalmas jellemző (ha nem is anyagállandó). Végül meghatározza a tanulmány a rugalmassági modulus és összenyomódási modulus közötti összefüggést.

Szemcsés és kötött talajok, valamint szilárd kőzetek alakváltozásának leírására igen sok műszaki feladat megoldásánál szükség van mind a kőzetmechanika, mind a talajmechanika hagyományosan kialakult tárgyköreiben. A kőzetmechanika nagyobb súllyal szilárd („sziklás") kőzetekkel foglalkozik, a rugalmassági modulust (E) és Poisson-számot (m), illetve Poisson-tényezőt ($\mu = 1/m$) általánosan alkalmazza mint rugalmas jellemzőket. A talajmechanika nagyobb súllyal szemcsés és kötött talajokkal foglalkozik, általánosan az összenyomódási modulust (M) használja az alakváltozások leírására, csak ritkábban alkalmazza a rugalmassági modulust és Poisson-számot, illetve Poisson-tényezőt.

1. Rugalmassági modulus és Poisson-szám meghatározása triaxiális nyomókísérletek eredményeiből

A triaxiális kísérlet feszültség-alakváltozási [$\sigma(\varepsilon)$] görbéinek hosszabb-rövidebb kezdeti szakasza rendszerint kötött talajoknál is jó közelítéssel egyenesnek tekinthető [2]. Ebben a terhelési, illetve alakváltozási tartományban alkalmazható a lineáris rugalmasságot leíró Hooke-modell.

Egyelőre tekintsünk el attól, hogy a hengeres mintatest összenyomása során a nyomólapok a mintatestvéglapok sugárirányú alakváltozását — a súr-

* Dr. Somosvári Zsolt, 3531 Miskolc, Báthori u. 36.

lódás miatt — akadályozzák, hordósítják a mintatestet. Az általános Hooke-törvény felhasználásával a mintatest alakváltozásai:

tengely irányú alakváltozás

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \frac{2\sigma_3}{m}\right)$$

sugár irányú alakváltozás

$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \frac{1}{m}(\sigma_3 + \sigma_1)\right],$$

ahol: σ_1 — tengely irányú feszültség (főfeszültség);
σ_3 — sugár irányú feszültség (főfeszültség);
E — rugalmassági modulus;
m — Poisson-szám ($m \geqq 2$).

Ha $\sigma_3 = 0$, azaz egytengelyű az igénybevétel, akkor

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}; \quad E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\sigma_1}{Em} = -\frac{\varepsilon_1}{m}; \quad m = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3};$$

$$\mu = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}.$$

Ha $\sigma_3 \neq 0$, azaz triaxiális az igénybevétel, akkor a Poisson-szám:

$$m = \frac{\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\left(2 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\right) - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}\frac{\sigma_3}{\sigma_1}} = \frac{1 - \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\left(2\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} - 1\right)}{\frac{\sigma_3}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}}; \quad \begin{matrix}\varepsilon_1 \geqq 0 \\ \varepsilon_3 \leqq 0\end{matrix} \tag{1}$$

a Poisson-tényező:

$$\mu = \frac{\frac{\sigma_3}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}}{1 + \frac{\sigma_3}{\sigma_1}\left(1 - 2\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\right)}, \tag{2}$$

a rugalmassági modulus:

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} - 2\mu\frac{\sigma_3}{\varepsilon_1}. \tag{3}$$

A hordó alakúvá deformálódott hengeres mintatest rugalmas feszültségállapotával BALLA Árpád foglalkozott [2]. Elmélete nehezen kezelhető matematikai kifejezésekkel írható le, ezért nomogramokat adott a μ és E meghatá-

rozására [2]. Ezekre a nomogramokra összehasonlítás céljából most felrajzoljuk a Hooke-modellből — a hordósodás figyelembevétele nélkül — kapott eredményeket is.

Ehhez a (2) összefüggést

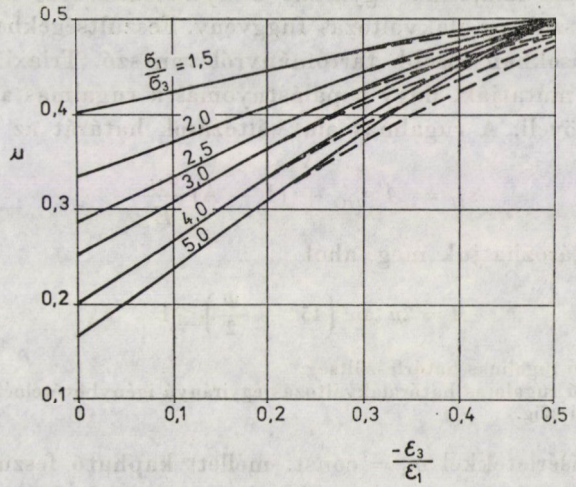
$$\mu = \frac{1 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\frac{\sigma_1}{\sigma_3}}{1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_3} - 2\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}}$$

alakra, a (3) összefüggést pedig

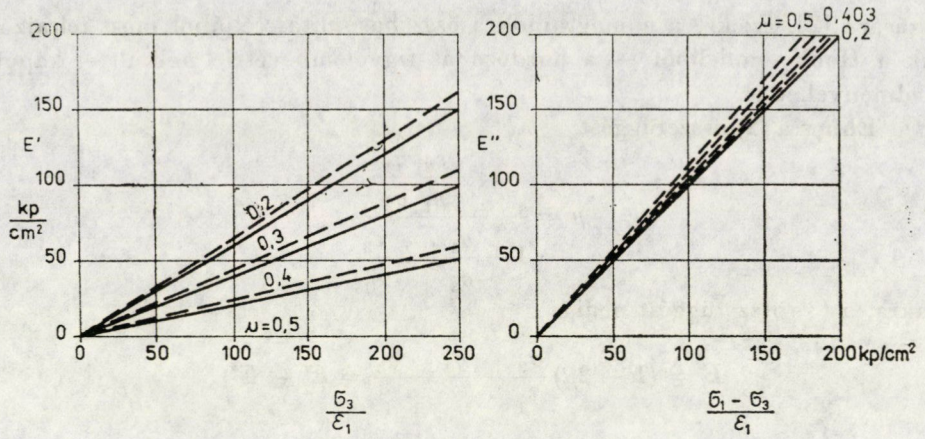
$$E = (1 - 2\mu)\frac{\sigma_3}{\varepsilon_1} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varepsilon_1} = E' + E'',$$

$$E' = (1 - 2\mu)\frac{\sigma_3}{\varepsilon_1}; \quad E'' = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varepsilon_1}$$

alakra kell hoznunk. A Poisson-tényező értékeit az 1. ábrán, a rugalmassági modulus értékeit a 2. ábrán látjuk. A folytonos vonalak a Hooke-modellből közvetlenül kapott értékek, a szaggatott vonalak a Balla-elméletből kapott értékeket ábrázolják. Az ábrákról leolvasható, hogy a folytonos és szaggatott görbék — különösen a Poisson-tényezőnél — csaknem teljesen fedik egymást, azaz az eredményekben lényegtelen az eltérés. A jó egyezőség szükségszerű, mert a Balla-elméletben figyelembe vett csúsztató feszültségek hatása a mintatest közepén — ahol a deformációkat meghatározzuk — már elenyészik. Ez azt jelenti, hogy a Hooke-modellből közvetlenül kapott eredmények megfelelnek a Poisson-szám, ill. Poisson-tényező és rugalmassági modulus meghatározására.



1. ábra. Diagram a Poisson-tényező meghatározásához



2. ábra. Diagram a rugalmassági modulus meghatározásához

Triaxiális kísérlet alkalmával a kezdeti rugalmas feszültség-alakváltozási tartományban a tengely irányú főfeszültség:

$$\sigma_1 = E\,\varepsilon_1 + 2\mu\,\sigma_3\,. \tag{4}$$

Triaxiális kísérletnél a palástnyomást $\sigma_3 = \text{const.}$ értéken tartják, ezért a rugalmas tartományban a $\sigma_1(\varepsilon_1)$ függvény lineáris, azaz

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = E = \text{const.}$$

A rugalmas tartomány kiterjedésével foglalkozunk az alábbiakban. A tapasztalat azt mutatja, hogy egyirányú igénybevételek hatására szilárd kőzeteknél és kötött talajoknál egyaránt a nyomószilárdság mintegy $^2/_3$-áig közel lineáris a feszültség-alakváltozás függvény. Feszültségekben teháti elég nagy, alakváltozásokban kisebb tartományról van szó. Triaxiális kísérletek tapasztalatai azt mutatják, hogy a palástnyomás a rugalmas alakváltozások tartományát is növeli. A rugalmas alakváltozások határát az

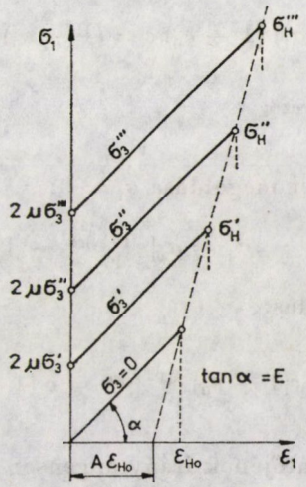
$$\varepsilon_H = A\,\varepsilon_{HO} + (1 - \mathrm{A})\frac{\sigma_H}{E}$$

összefüggéssel határozhatjuk meg, ahol

$$A = 2\mu \tan^2\left(45° - \frac{\Phi}{2}\right) \leqq 1$$

σ_H — tengely irányú rugalmas határfeszültség;
ε_{HO} — tengely irányú rugalmas határalakváltozás egyirányú igénybevételnél;
Φ — belső súrlódási szög.

Triaxiális kísérletekkel $\sigma_3 = \text{const.}$ mellett kapható feszültség-alakváltozás függvények kezdeti szakaszainak képét a 3. ábrán látjuk.



3. ábra. Triaxiális kísérletekkel kapható feszültség-alakváltozás görbék kezdeti szakaszai

Ha triaxiális kísérlet alkalmával a σ_3 palástnyomást nem tartjuk állandó értéken, hanem a $\sigma_3(\varepsilon_1)$ nem lineárisan változik, akkor a $\sigma_1(\varepsilon_1)$ függvény sem lineáris, azaz

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = E + 2\mu \frac{d\sigma_3(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1}. \tag{5}$$

Tehát annak ellenére, hogy lineárisan rugalmasan viselkedő anyagról beszélünk, a $\sigma_1(\varepsilon_1)$ függvény nem lineáris. Ezek után vizsgáljuk meg a kompresszió feszültségállapotát.

2. A kompressziós kísérlet eredményeinek értékelése

Mint ismeretes, kompressziós kísérlet alkalmával a mintatest oldal irányú (sugár irányú) kitérése, deformációja teljes mértékben akadályozott, azaz $\varepsilon_3 = 0$. A tengely irányú feszültség (σ_1) az alakváltozás (ε_1) növekedésével progresszíve növekszik. A rugalmassági modulus mintájára a

$$M = \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1}$$

differenciálhányadost összenyomódási modulusnak nevezik, amely tehát a terheléssel változik. Általános talajmechanikai felfogás szerint ez az egyik leglényegesebb különbség a rugalmas anyagok és talaj között [1].

A kompressziós görbét analitikus úton először Terzaghi határozta meg [1]. Mérési eredmények alapján abból a feltevésből indult ki, hogy az összenyomódási modulus a terheléssel lineárisan változik, azaz

$$\frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = M = (\sigma_0 + \sigma_1)(1 + e_0)\, c = (1 + e_0)\, c\, \sigma_1 + (1 + e_0)\, c\, \sigma_0 ,$$

ahol: e_0 — kezdeti hézagtényező;
c, σ_0 — állandók.

A differenciálegyenlet megoldása $\sigma_1 = 0$; $\varepsilon_1 = 0$ kezdeti feltétel mellett

$$\sigma_1 = \sigma_0[e^{(1+e_0)c\varepsilon_1} - 1] . \tag{6}$$

Az összenyomódási modulus:

$$M = \frac{d\sigma_1}{d\varepsilon_1} = \sigma_0 c(1 + e_0)\, e^{(1+e_0)c\varepsilon_1} = c\,(1 + e_0)\,(\sigma_1 + \sigma_0) . \tag{7}$$

A $\sigma_1(\varepsilon_1)$ görbe kezdeti érintőjének iránytangense:

$$M(\varepsilon_1 = 0) = c\,\sigma_0(1 + e_0) = M_0 , \tag{8}$$

azaz

$$M = M_0 + \frac{M_0}{\sigma_0}\sigma_1 = M_0\left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right). \tag{9}$$

A σ_0 paraméter a kompressziós görbéből most már meghatározható:

$$\sigma_0 = \frac{M_0}{M(\varepsilon_1) - M_0}\,\sigma_1(\varepsilon_1) . \tag{10}$$

Ezekkel a paraméterekkel

$$\sigma_1 = \sigma_0(e^{M_0\varepsilon_1/\sigma_0} - 1) , \tag{11}$$
$$M = M_0\, e^{M_0\varepsilon_1/\sigma_0} .$$

A (11)-es és (4)-es egyenlet egyenlővé tételével

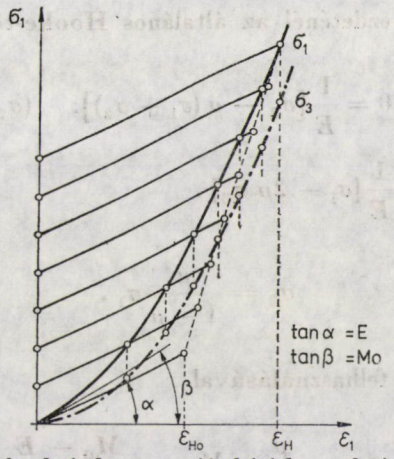
$$\sigma_0\,(e^{M_0\varepsilon_1/\sigma_0} - 1) = E\,\varepsilon_1 + 2\mu\sigma_3 .$$

Ebből az ödométerben ébredő sugár irányú feszültség (a rugalmas tartományban):

$$\sigma_3 = \frac{1}{2\mu}[(e^{M_0\varepsilon_1/\sigma_0} - 1)\,\sigma_0 - \mathrm{E}\,\varepsilon_1] = \frac{1}{2\mu}(\sigma_1 - E\,\varepsilon_1) . \tag{12}$$

A kompressziós kísérletnél a sugár irányú feszültségnek ez a változása eredményezi a kezdeti rugalmas tartományban a lineáristól eltérő progresszív kompressziós görbét $[\sigma_1(\varepsilon_1)]$.

A 4. ábrán az összefüggések bemutatására egy diagramon ábrázoljuk a triaxiális kísérletek és a kompressziós kísérlet eredményeit. Az ábráról leolvasható az összefüggés, a σ_3 sugár irányú feszültség kiadódik.



4. ábra. Triaxiális kísérletek és kompressziós kísérlet eredményeinek kapcsolatai

Kompressziós kísérlet alkalmával kötött talajokban tehát a terhelés kezdeti szakaszán ugyanúgy rugalmas alakváltozás játszódik le, mint triaxiális kísérlet alkalmával. A kompressziós görbe lineáristól eltérő progresszív változását a sugár irányú feszültség lineáristól eltérő, progresszív változása okozza.

A rugalmas alakváltozások tartománya a kompresszió feszültségállapotában a paraméterek ismeretében meghatározható, az mindig nagyobb, mint az egyirányú igénybevételnél jelentkező rugalmas alakváltozások tartománya. Sokszor kompressziós vizsgálataink egész tartományában rugalmasak az alakváltozások.

3. Az összenyomódási és rugalmassági modulus kapcsolata

A fentiek alapján a terhelés kezdeti szakaszában az összenyomódási modulus is rugalmas jellemző, hiszen a kompresszió feszültségállapotában rugalmas alakváltozásokat jellemez. Ezért kapcsolat kell legyen a rugalmassági modulus és összenyomódási modulus között.

Helyettesítsük a kompressziós görbét az $\varepsilon_1 = 0$ hely kis környezetében az érintőjével, azaz

$$\sigma_1 = M_0 \, \varepsilon_1 .$$

Tegyük ugyanezt a σ_3 feszültségnél is:

$$\left.\frac{d\sigma_3}{d\varepsilon_1}\right|_{\varepsilon_1=0} = \frac{1}{2\mu}(M_0 - \mathrm{E}) .$$

Ezért

$$\sigma_3 = \frac{M_0 - \mathrm{E}}{2\mu} \varepsilon_1 .$$

Továbbá a terhelés kezdeténél az általános Hooke-törvény:

$$\varepsilon_3 = 0 = \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \quad (\sigma_2 = \sigma_3),$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - 2\mu\sigma_3].$$

Ebből

$$\sigma_3 = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_1.$$

Az előbbi egyenletek felhasználásával

$$\sigma_3 = \frac{\mu}{1-\mu} M_0 \varepsilon_1 = \frac{M_0 - E}{2\mu}\varepsilon_1.$$

Ebből a rugalmassági modulus:

$$E = M_0\left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu}\right) = M_0\left[1 - \frac{2}{(m-1)\,m}\right].$$

4. Megállapítások

— A Hooke-modellből közvetlenül levezetett összefüggések alkalmasak kötött talajok triaxiális vizsgálatánál kapott eredmények kiértékelésére, a rugalmassági modulus, Poisson-szám, illetve Poisson-tényező meghatározására.

— Kötött talajok a kompresszió feszültségállapotában — általános talajmechanikai felfogással ellentétben — a terhelés kezdeti szakaszán rugalmas alakváltozást szenvednek. Ebben a tartományban az összenyomódási modulus rugalmas jellemző, ha nem is anyagállandó. A rugalmas alakváltozások tartománya sokszor az egész vizsgált tartományt teszi ki.

— A szóban forgó kezdeti rugalmas alakváltozások tartományában határozott kapcsolat van az összenyomódási modulus és rugalmassági modulus között.

IRODALOM

1. Kézdi Árpád: Talajmechanika I. Tankönyvkiadó, Budapest 1972
2. Balla Árpád: Talajok rugalmassági modulusának meghatározása *Az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Tudományos Közleményei* **13**, 5. sz.

On the Determination of Elasticity Characteristics of Cohesive Soils. — It is demonstrated that for estimating the results obtained by the triaxial compression tests — for the determination of Young's modulus, Poisson's ratio — the simple relationship directly deduced from

Hooke's model may be used. Furthermore, it is pointed out that in the stress state of compression at the initial period of loading, cohesive soils are subjected to elastic deformation. The region of the elastic deformations frequently extends over the whole investigated region. In this region the modulus of compressibility is a characteristic of elasticity (even in the case if it is not a constant of material). Finally, the relationship between the modulus of elasticity and that of the compressibility will be determined.

Über die Ermittelung der Elastizitätskennwerte der bindigen Böden. — Es wird nachgewiesen, daß zur Bewertung der Ergebnisse der Triaxialversuche von bindigen Böden, zur Ermittlung des Elastizitätsmoduls und der Poissonschen Konstante, die aus dem Hookschen Modell unmittelbar abgeleiteten einfachen Abhängigkeiten geeignet sind. Weiters wird demonstriert, daß im Spannungszustand der Kompression in der Anfangsperiode der Belastung die bindigen Böden elastische Verformungen erfahren. Der Bereich der elastischen Verformungen erstreckt sich oft auf den ganzen untersuchten Bereich. In diesem Bereich ist der Zusammendrückungsmodul ein Elastizitätskennwert (wenn er auch nicht eine Materialkonstante ist). Schließlich wird die Abhängigkeit zwischen dem Elastizitätsmodul und dem Zusammendrückungsmodul festgelegt.

HELYREIGAZÍTÁS

A *Műszaki Tudomány* 52 (1976), 383–395. oldalain Csonka Pál „Parabola vezérgörbéjű álló konoidhéj" című cikkében a (3) képlet helyesen

$$6\frac{ha^2}{b^2}\cdot\frac{y^2}{x^4}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+8\frac{ha^2}{b^2}\cdot\frac{y}{x^3}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x\cdot\partial y}+2\frac{ha^2}{b^3}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\bar{p}=0\,.$$

Ennek megfelelően a 2. táblázat a következőképpen módosítandó:

$\bar{p}=x^m y^n$	F_{mn}
y^2	$-\frac{b^2}{100ha^2}\,\frac{(a^{-5}-a_1^{-5})(x^{-10}-a_1^{-10})-(a^{-10}-a_1^{-10})(x^{-5}-a_1^{-5})}{a^{-10}a_1^{-5}-a^{-5}a_1^{-10}}\,x^4y^2$
$\frac{y^2}{x}$	$-\frac{b^2}{72ha^2}\,\frac{(a^{-4}-a_1^{-4})(x^{-9}-a_1^{-9})-(a^{-9}-a_1^{-9})(x^{-4}-a_1^{-4})}{a^{-9}a_1^{-4}-a^{-4}a_1^{-9}}\,x^3y^2$
$\frac{y^2}{x^2}$	$-\frac{b^2}{48ha^2}\,\frac{(a^{-3}-a_1^{-3})(x^{-8}-a_1^{-8})-(a^{-8}-a_1^{-8})(x^{-3}-a_1^{-3})}{a^{-8}a_1^{-3}-a^{-3}a_1^{-8}}\,x^2y^2$
$\frac{y^2}{x^3}$	$-\frac{b^2}{28ha^2}\,\frac{(a^{-2}-a_1^{-2})(x^{-7}-a_1^{-7})-(a^{-7}-a_1^{-7})(x^{-2}-a_1^{-2})}{a^{-7}a_1^{-2}-a^{-2}a_1^{-7}}\,xy^2$
$\frac{y^2}{x^4}$	$-\frac{b^2}{12ha^2}\,\frac{(a^{-1}-a_1^{-1})(x^{-6}-a_1^{-6})-(a^{-6}-a_1^{-6})(x^{-1}-a_1^{-1})}{a^{-6}a_1^{-1}-a^{-1}a_1^{-6}}\,y^2$
$\frac{y^2}{x^5}$	$-\frac{b^2}{10ha^2}\left(-\frac{x^{-5}-a_1^5}{a^5-a_1^5}\,a^5\ln a-\frac{a^5-x^5}{a^5-a_1^5}\,a_1^5\ln a_1+x^5\ln x\right)\,x^{-6}y^2$
$\frac{y^2}{x^6}$	$-\frac{b^2}{8ha^2}\,\frac{(a-a_1)(x^{-4}-a_1^{-4})-(a^{-4}-a_1^{-4})(x-a_1)}{a^{-4}a_1-a\,a_1^{-4}}\,x^{-2}y^2$
y^4	$-\frac{b^2}{224ha^2}\,\frac{(a^{-7}-a_1^{-7})(x^{-16}-a_1^{-16})-(a^{-16}-a_1^{-16})(x^{-7}-a_1^{-7})}{a^{-16}a_1^{-7}-a^{-7}a_1^{-16}}\,x^4y^4$
$\frac{y^4}{x}$	$-\frac{b^2}{180ha^2}\,\frac{(a^{-6}-a_1^{-6})(x^{-15}-a_1^{-15})-(a^{-15}-a_1^{-15})(x^{-6}-a_1^{-6})}{a^{-15}a_1^{-6}-a^{-6}a_1^{-15}}\,x^3y^4$
$\frac{y^4}{x^2}$	$-\frac{b^2}{140ha^2}\,\frac{(a^{-5}-a_1^{-5})(x^{-14}-a_1^{-14})-(a^{-14}-a_1^{-14})(x^{-5}-a_1^{-5})}{a^{-14}a_1^{-5}-a^{-5}a_1^{-14}}\,x^2y^4$
$\frac{y^4}{x^3}$	$-\frac{b^2}{104ha^2}\,\frac{(a^{-4}-a_1^{-4})(x^{-13}-a_1^{-13})-(a^{-13}-a_1^{-13})(x^{-4}-a_1^{-4})}{a^{-13}a_1^{-4}-a^{-4}a_1^{-13}}\,xy^4$
$\frac{y^4}{x^4}$	$-\frac{b^2}{72ha^2}\,\frac{(a^{-3}-a_1^{-3})(x^{-12}-a_1^{-12})-(a^{-12}-a_1^{-12})(x^{-3}-a_1^{-3})}{a^{-12}a_1^{-3}-a^{-3}a_1^{-12}}\,y^4$
$\frac{y^4}{x^5}$	$-\frac{b^2}{44ha^2}\,\frac{(a^{-2}-a_1^{-2})(x^{-11}-a_1^{-11})-(a^{-11}-a_1^{-11})(x^{-2}-a_1^{-2})}{a^{-11}a_1^{-2}-a^{-2}a_1^{-11}}\,x^{-1}y^4$
$\frac{y^4}{x^6}$	$-\frac{b^2}{20ha^2}\,\frac{(a^{-1}-a_1^{-1})(x^{-10}-a_1^{-10})-(a^{-10}-a_1^{-10})(x^{-1}-a_1^{-1})}{a^{-10}a_1^{-1}-a^{-1}a_1^{-10}}\,x^{-2}y^4$

TARTALOMJEGYZÉK

Csáki Frigyes 1921—1977 289
Megemlékezés Dr. Dr. h. c. *Geleji Sándorról* 80. születésnapja alkalmából *(Verő József)* . 299
Artobolevszkij, I. I. A robottechnika tudományos problémái 305
Kézdi Árpád: Új elvek és módszerek a geotechnikában..... 317
Stefán Mihály: Az anyagtudomány szerepe és néhány eredménye a kohászatban 357
Hauszner Ernő—Tardy Pál—Verő József: Az acél zárványosságának vizsgálata és minősítése 373
Ivicsics Ferenc—Miklós Károly: Minőségvédelem a vízépítésben 415
Lipka István: A csigakerekek lefejtésének elmélete. A csigakerék alámetszésének meghatározása 429
Jándy Géza: Rendszertechnika 439
Hidasi János: A változó részcsatorna szélességű rácsáramlás feladatának visszavezetése a síkrács problémára 457
Somosvári Zsolt: A kötött talajok rugalmas jellemzőinek meghatározásáról 469

INHALTSVERZEICHNIS

Csáki F. 1921—1977 289
Erinnerung an Dr. Dr. E. h. *S. Geleji*, anläßlich seines 80-sten Geburtstages *(J. Verő)* .. 299
Artobolevszkij, I. I. Die wissenschaftlichen Probleme der Robot technik 305
Kézdi, Á.: Neue Prinzipien und Methoden in der Geotechnik 317
Stefán, M.: Rolle und einige Ergebnisse der Werkstoffwissenschaft im Hüttenwesen 357
Hauszner, E.—Tardy, P.—Verő, J.: Untersuchung und Bestimmung der nichtmetallischen Einschlüsse in Stahl 373
Ivicsics, F.—Miklós, K.: Qualitätsbewahrung im Wasserbau 415
Lipka, I.: Analytische Darstellung der Abwälzung und des Zahnprofils von zylindrischen Schneckenrädern 429
Jándy, G.: Systemtechnik 439
Hidasi, J.: Zurückführung der Aufgabe über Gitterströmung mit veränderlicher Teilkanalbreite auf das Problem des ebenen Gitters 457
Somosvári, Zs.: Über die Ermittelung der Elastizitätskennwerte der bindigen Böden 469

CONTENTS

Csáki F. 1921—1977 289

In commemoration of Pr. Dr. h. c. S. *Geleji* on the 80th anniversary of his birth (*V. Verő* 299

Artobolevszkij, I. I. The Scientific Problems of Robot Technique 305

Kézdi, Á.: New Principles and Methods in the Geotechnics 317

Stefán, M.: The Role of Material Science in Metallurgy and Some Other Results 357

Hauszner, E.— Tardy, P.— Verő, J.: Assessment of Non-Metallic Inclusions in Steel 373

Ivicsics, F.— *Miklós, K.:* Quality Protection in the Hydraulic Engineering 415

Lipka, I.: Analytical Investigation of the Worm Wheels and Determination of the Undercutting 429

Jándy, G.: System Technique 439

Hidasi, J.: Reduction of the Flow through Sectional Channels with Varying Width to the Problem of a Plane Grid 457

Somosvári, Zs.: On the Determination of Elasticity Characteristics of Cohesive Soils 469

Printed in Hungary

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat nyomdába érkezett: 1978. V. 4. — Terjedelem: 16,8 (A/5) ív

78.5807 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

36,— Ft

INDEX: 26.499
ISSN 0375—9423

1828—1978

MEGJELENT
AZ AKADÉMIAI KÖNYVKIADÁS
150. ÉVÉBEN

Megjelent: 1978. XI. 20.