MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

47. KÖTET
1–2. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1973

MŰSZ. TUD.

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG
BARTA ISTVÁN, BÖLCSKEI ELEMÉR, GESZTI P. OTTÓ,
HALLA LÁSZLÓ

SZERKESZTŐSÉG: BUDAPEST 1383 MÜNNICH FERENC UTCA 7.
KIADÓHIVATAL: BUDAPEST 1363 ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Négy füzet alkot egy kötetet.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia
Műszaki Tudomány
Budapest 1383 Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó (Budapest 1363 Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat (Budapest 1389 Fő utca 32., Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.

TARTALOM

Mándi Andor 1891—1972 1
Tarján Gusztáv: Módosított Schuhmann-Gaudin-függvény alkalmazása a Tromp-görbékre 5
Kézdi Árpád: A 4. Budapesti Talajmechanikai és Alapozási Konferencia 17
Brodszky Dezső—Kalmár István: Motormunkafolyamatok szimulációjának kérdései..... 79
Horváth Zoltán: A metallurgiai tudományterület helyzete és fejlődésének irányai 105
Jándy Géza: Műszaki-gazdasági rendszertechnika 115
Mihálffy Loránd—Müller Ferenc—Weber György: Számítógépek használata az építészeti tervezésben 125
Singer Dénes: Új algoritmus gáz és- folyadékhálózatok számítására 139
Patkó János—ifj. Vajta Miklós: Labilitási feszültség megállapítása egyen- és váltakozó feszültségen 151
Balázs Tibor, Paláncz Béla, Parti Mihály: Matematikai modellek abszorpciós folyamatok leírására 179
Tarnai Tibor: Négyszög alaprajz fölé szerkesztett, másodrendű, lapos transzlációs héjak peremzavarai 207

CONTENT

Mándi, A. 1891—1972 1
Tarján, G.: Anwendung der modifizierten Schuhmann-Gaudin-Funktion für die Tromp-Kurven 5
Kézdi, Á.: The 4th Budapest Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering .. 17
Brodszky, D.—Kalmár, I.: Questions of Engine Working Cycles Simulation 79
Horváth, Z.: The Situation of Metallurgical Sciences and their Trends 105
Jándy, G.: Technical-Economic Systems Engineering 115
Mihálffy, I., Müller, F.—Weber, Gy.: The Use of Computers in Architectural Project Work 125
Singer, D.: A New Algorith for the Calculation of Gas and Fluid Networks 139
Patkó, J.—Vajta, M., jun.: Determination of the Thermal Breakdown Voltage for D. C. and A. C. Voltage 151
Balázs, T.—Paláncz, B.—Parti, M.: Mathematical Models for the Simulation of Absorption Processes 179
Tarnai, T.: Edge Disturbances of Second Order Shallow Translational Shells on a Rectangular Base 207

INHALTSVERCEICHNIS

Mándi, A.; 1891—1972 1
Tarján, G.: Modified SG-(Schuhmann—Gaudin)-Fu nctions Applied to Tromp-Curves ... 5
Kézdi, A.: Die 4. Budapester Konferenz über Boden mechanik und Grundbau 17
Brodszky, D.—Kamár, I.: Fragen der Nachbildung von Arbeitsvorgängen in Motoren .. 79
Horváth, Z.: Lage und Entwicklungsrichtungen des metallurgischen Wissenschaftsgebiets 105
Jándy, G.: Die technische-wirtschaftliche Systemtechnik 115
Mihálffy, I.— Müller, F.— Weber, Gy.: Verwendung von Rechnern in der Bauplanung ... 125
Singer, D.: Ein neuer Algorithmus zur Berechnung von Gas- und Flüssigkeitsnetzen 139
Patkó, J. — *Vajta, M. jr.:* Bestimmung der Labilitätsspannung für Gleich- und Wechselspannung 151
Balázs, T.— Paláncz, B.— Parti M.: Mathematische Modelle zur Simulation von Absorptions-Vorgängen 179
Tarnai, T.: Randstörungen der flachen Translationsschalen zweiter Ordnung über einem Viereckgrundriß 207

СОДЕРЖАНИЕ

Манди, А. (1891—1972) 1
Тарьян Г.: Применение модифицированной кривой функции Шумана-Гаудина к кривым Промпа 5
А. Кезди: 4-ая Будапештская Конференция по механике грунтов и фундаментированию 17
Д. Бродски, И. Кальмар: Вопросы симуляции процессов работы двигателей 79
З. Хорват: Положение металлургической науки и натравления ее развития 105
Г. Янди: Технико-экономическая системотехника 115
Л. Михайфи, Ф. Мюллер, Д. Вебер: Использование вычислительных машин при строительном проектировании 125
Д. Зингер.: Новый алгоритм для исчисления газовых и жидкостных сетей 139
Я. Патко, *М. Вайта мл.:* Определение напряжение нестабильности при переменном и постоянном токах 151
Т. Балаж и сотр.: Математические модели для описания абсорбционных процессов 179
Т. Тарнаи: Краевые возмущения плоских трансляционных оболочек второго порядка, построенных над прямоугольным планом 207

MÁNDI ANDOR
1891—1972

Nagy veszteség érte MÁNDI Andor halálával az erősáramú elektrotechnika és különösen a villamos gépek tudományát. MÁNDI Andor a Bláthy, Déri, Zipernowsky triász után a második generáció egyik legkiválóbb képviselője volt Műszaki kontrukciói, elméleti fejtegetései, a nehéz problémák zseniális megoldásai a kiváló műszaki tudós arcvonását mutatják. De nem voltak hátrábbvalók emberi tulajdonságai sem. Közvetlen munkatársai, barátai és tisztelői benne az igaz embert szerették meg.

MÁNDI Andor Budapesten született 1891. szeptember 23-án. Főiskolaitanulmányait a Berlin-Charlottenburgi műszaki egyetemen végezte, ahol 1914-ben gépészmérnöki oklevelet szerzett.

Az első világháború kitörésekor bevonult, 1914-ben sebesülten szerb hadifogságba került, ahonnan 1916-ban szabadult. 1918. végén szerelt le mint híradó főhadnagy.

1919-ben a Tanácsköztársaság idején távíró előadó volt a Kerületi Parancsnokságon, majd egy tekercselő műhelyt vezetett.

Az 1920. év folyamán a csepeli Weiss Manfréd Gyárban dolgozott mint szerkesztő, 1921-ben lépett a Ganz Villamossági Gyár kötelékébe, ahol 1959-ig működött; először az erőátviteli, majd a gépszámítási és gépszerkesztési osztályon dolgozott. Ezeknek lett 1933-tól kezdve vezetője, főmérnöki, végül igazgatói címmel. Gyári munkájával párhuzamosan a Budapesti Műszaki Egyetemen 1950 óta a legutóbbi évekig előadta a „Nagy villamosgépek" tantárgyat.

Tervezői tevékenysége mindenfajta villamosgép számítására és szerkesztésére kiterjedt és mindegyikben újat alkotott. Ganz-gyári működése idején új gépsorozatokat létesítését, illetve kifejlesztését irányította,í gy pl. a középteljesítményű indukciós motorok és az ezekből kialakított hengeres forgórészű szinkron generátorok és szinkronozott aszinkron motorok sorozatait. Az egyenáramú gépek kommutációs feltételeiből elsőként vezette le a gép teljesítményének arányosságát a forgórész átmérőjével. Kidolgozta az

egyarmaturás konverterek méretezési szabályait. Ezek alapján készültek a BSZKRT 1000—1500 kW-os, részben még ma is üzemelő egységei.

Egészen önállóan megoldott olyan elméleti problémákat, amelyekre sem idehaza, sem a külföldön nem volt még támpont. Így pl. feldolgozta és közzétette az „Aszimmetriák és felharmonikusok villamos gépekben" című tanulmányát, amelyben akkor még ismeretlen szabályokat adott bizonyos géptípusok tekercselési módjaira. 1930-ban Scherbius-szabályozású szivattyúmotorok vizsgálatával és különleges kapcsolás alkalmazásával a gépek lengését megszüntette.

1940-ben módosította a régi, rossz kihasználású Dahlander-kapcsolást, és új 1 : 2 arányú pólusátkapcsolást hozott javaslatba. Ezt a bel- és külföldi folyóiratokban részletesen ismertetett megoldást Nürnberg és Sequenz világszerte ismert könyvekben is részletesen ismertetik és méltatják, kiemelve a megoldásnak jobb kihasználást nyújtó előnyét. NÜRNBERG könyvének még az előszavában is külön megemlékezik MÁNDI Andorról.

1929-ben bekapcsolódott a vasútvillamosítás fejlesztésébe. A Ganz-gyár ez időben megbízta BLÁTHY Ottót a fázisváltó, MÁNDI Andort a főhajtómotor számításának felülvizsgálatával. Módosító javaslatát KANDÓ Kálmán elfogadta, a motorok e változtatásokkal készültek el. Későbbi mozdonytípusoknál egyes tengelyhajtást alkalmaztak és a két kísérleti mozdonynál a motorok kalickás forgórészűek voltak, ahol nehéz problémát okozott a vontatómotorok kis frekvenciával történő indítása; ezt a körülményt MÁNDI Andor már a tervezésnél felismerte és sikeresen megoldotta.

A felszabadulás után szabadalma szerint csúszógyűrűs vontatómotorokkal és a fázisváltóval közvetlenül kapcsolt, külön hajtómotor nélküli frekvenciaváltóval készültek a MÁV mozdonyai.

1930 óta BLÁTHY Ottó tanítványa és közvetlen munkatársa volt a szinkron gépek, főleg a turbógenerátorok számításánál és konstrukciójánál. BLÁTHY Ottó halála után 1938-ban fölmerült a nagy üzembiztonságú, párhuzamos horonyrendszerű turbóforgórészekkel elérhető határteljesítmény növelésének, ezzel együtt a jobb kihasználásnak a szükségessége. MÁNDI Andor új javaslatával, a keresztttekercses forgórész megoldással a teljesítményhatárt 50 MW-ra sikerült emelni, a Bláthy-féle párhuzamos hornyú forgórész minden előnyének megtartásával; a gép kihasználását pedig 25—40%-kal növelte. A Ganz-gyár 50 MW-ig ma is így gyártja a turbógenerátorokat. A keresztttekercses rendszer az *Elektrotechnika* c. folyóiratban 1946-ban ismertette, és e közleményét a Magyar Elektrotechnikai Egyesület a Zipernowszky jubileumi díjjal tüntette ki. Az *Engineers Digest* folyóirat 1947-ben ismertette MÁNDI Andor turbórendszerét.

1959-ben kivált a Ganz-gyárból és az Egyesült Villamosgép Gyárban folytatta tevékenységét. Itt főként nagyobb zárt motorok melegedésével foglalkozott, és ezzel kapcsolatban egészen új mérési módszert dolgozott ki.

E módszer igen komoly elismerést aratott, mert a szinkron gépeknél általában alkalmazott közvetett (üresjárási és rövidzárási) módszert indukciós motorokra is kiterjeszti, rövidzárás helyett csökkentett feszültségű mérés felhasználásával. Ezzel a próbaterem kapacitását többszörösen meghaladó teljesítményű motorokon is elvégezhető lett a melegedésmérés, ami mellett a járulékos veszteség nagy pontosságú megállapítására is mód kínálkozott.

Az MTA Automatizálási Kutató Intézete számára tanulmányokat írt az autodin méretezési kérdéseiről.

A műegyetemi előadásaihoz készült „Nagy Villamosgépek" tárgyú jegyzetének két kiadása jelent meg. Ennek a munkának a melegedéssel foglalkozó fejezetét átvette LISKA József „Villamos Gépek" c. könyvébe.

1969-ben az OMFB megbízásából átfogó tanulmányt készített a „Hőálló szigetelőanyagok adta lehetőségek a villamos gépgyártásban" címmel.

Tagja volt haláláig az MTA Erősáramú Villamos Bizottságnak, 1966-ban történt nyugalomba vonulása óta is a legutóbbi hónapokig munkálkodott a Műegyetemen, részt vett a melegedés-kérdés újabb vizsgálataiban.

A hosszú élet kimagasló munkássága és elért eredményeinek elismeréseként a következő kitüntetésekben részesült: Kiváló Munkás jelvény, Sztahanovista jelvény, Magyar Népköztársasági Érdemrend V. fokozata, Kossuth-díj II. fokozata, Munka Vörös Zászló Érdemrend.

Nyolcvanadik születésnapja alkalmából meleg ünneplésben részesítette őt a Műszaki Egyetem Villamosgépek Tanszéke, a Ganz-gyári és Egyesült Villamos Gyári munkatársainak, barátainak, tanítványainak és tisztelőinek tág köre. A Magyar Elektrotechnikai Egyesület vezetősége az Egyesület tiszteletbeli Díszelnökévé választotta MÁNDI Andort.

A születésnapi ünneplések folyamán még töretlenül tartott jó kedélye és régi humora, erős akarattal igyekezett palástolni a pusztító betegség okozta gyötrelmes szenvedések jeleit; de érezhette már akkor a közeledő véget.

1972. augusztus 28-án kísértük utolsó útjára a Farkasréti Temetőbe. Sírjánál a Magyar Elektrotechnikai Egyesület, az Egyesült Villamos Gépgyár, a Ganz Villamos Művek, és a Villamosgépek Tanszék búcsúzott MÁNDI Andortól, méltatva pályafutását, alkotó tevékenységét és kivételes emberi tulajdonságait.

Kovács Károly Pál

Dr. Mándi Andor tudományos közleményei

1. Pólusátkapcsolás 1 : 2 arányban. (Módosított Dahlander-kapcsolás.) *Elektrotechnika* 1940, 4. sz.
2. Újabb fejlődés a turbogenerátorok szerkezetében. *Elektrotechnika* 1946., 1—5. sz.
3. Villamos vasúti vontatás időszerű kérdései. *Elektrotechnika* 1947., 1. sz.
4. Az alumínium alkalmazása villamosgépekben, transzformátorokban és készülékekben. (Gohér Mihállyal, közösen M. T. I. — Alumínium Kézikönyv, 1948.)
5. Aszimmetriák és felharmonikusok villamos gépekben. M. T. I. 1952—53. évi előadássorozatából; 2080. sz.

6. Szinkron gépek melegedése és hűtése. (Liska József; Villamos gépek III. kötet XXV. fejezete, 1955.)
7. Aszimmetriák és felharmonikusok villamos gépekben. *VI. Oszt. Közl.*, **23**[6] 1959, 3—4. sz.
8. Megemlékezés Bláthyról. *VI. Oszt. Közl.*, **28** 1961, 1—4. sz.
9. In Memory of Otto Titus Bláthy. *Acta Techn. Hung.*, **34** 1961.
10. Új módszer indukciós motorok vizsgálatára. *Elektrotechnika* 1961., 1—2. sz.
11. Indukciós motorok melegedésmérése közvetett módszerrel. *V. K. Közlemények* 2. sz., 1962, december
12. Különleges mérések villamos gépeken. *V. K. Jubileumi Évkönyv:* A Villamosgép és Kábelgyár 50 éve és szerepe a magyar villamosipar fejlődésében. 1913—1963.
1. Indukciós motorok járulékos veszteségeinek mérése. *EVIG Közlemények* 1964, 1. sz.
14. Korszerű motorok lemeztestének felépítése. *Elektrotechnika* 1965, 2—3. sz. és *EVIG Közlemények* 1965, 2. sz.
15. Darumotorok fordulatszabályozása fékezőgéppel. *Elektrotechnika*, 1963, 11—12. sz.
16. Autodin méretezésének elvi kérdései. *MTA Aut. Kut. Intézet Közleményei*, 1965, 7. sz.
17. A négypólusú autodyn-sorozat kialakítása. *MTA Aut. Kut. Intézet Közleményei*, 1965, 9. sz.
18. Szinkron gépek melegedése és hűtése. 1966. A 6. tétel alatti XXV. fejezet átdolgozott 2. kiadása. (Liska J.: Villamos gépek, III. kötet.)
19. Nagy Villamosgépek. (Kézirat. Tankönyvkiadó, Budapest 1968.) Szerző műegyetemi előadásaihoz készült jegyzet átdolgozott 2. kiadása. 148. o. (1. kiadás: 1951.-ben)
20. Hőálló szigetelőanyagok adta lehetőségek a villamosgépgyártásban. *Elektrotechnika* 1969., 2—3. sz. (Részlet az OMFB hasonló tárgyú tanulmányából.)
21. Az 1. alatti 1 : 2 arányú pólusátkapcsolást ismerteti az EuM 1941. évfolyama.
22. New Development in Dsign of High-Speed-Turboalternators. *Engineers Digest* 1947., 1.
23. Wicklung für Polumschaltung 1 : 2 nach Mandi. Nürnberg; Die Asynchronmaschine. Springer-Verlag 1952, S. 316—318.
24. Schaltung von Ganz u. Co. nach Andor Mándi. Sequenz: Die Wicklungen elektrischer Maschinen, III., S. 48—49., Springer-Verlag 1954.
25. Folyadékhűtésű forgórész villamosgépekhez *CIGRY-Közlemény*. 1956. (L.: 3. o. 5. pont).
26. Ein Vorschlag zur Bestimmung des Wirkungsgrades und der Erwärmung von Induktionsmotoren. *EuM* 1962, August.
27. Hozzászólás Dr. Seidner Mihály: „Vízhűtéses turbogenerátorforgórészek" című cikkéhez" *Elektrotechnika* 1955, 4. sz.
28. Dr. Mándi Andor: Dr. Seidner Mihály *Elektrotechnika* 1968., 12. sz.

Dr. Mándi Andor szabadalmai

1. Pólusátkapcsolás 1 : 2 arányban. (Módosított Dahlander-kapcsolás) 123828. sz. szab., 1939. febr. 3.
2. Kereszttekercses turbógenerátor. 131868. sz. szab., 1941. dec. 27.
3. Villamos mozdony mechanikusan kapcsolt fázis- és periódusváltóval. 142132. sz. szab., 1946. márc. Ismertetései az *Elektrotechnika*, a *Magyar Technika* és a *Nehézipar* 1947. évfolyamaiban.
4. Villamosgép p : 2p : 3p arányban átkapcsolható pólusszámú tekercseléssel. Az 1. alatti szabadalom továbbfejlesztése, 1954. szeptember 27.
5. Folyadékhűtésű forgórész villamosgépekhez, szabadalom 1954. november 20. (Új elrendezés a hőátadás javítására, a fázisváltóban alkalmazva.) Ismertetés az 1956. évi *CIGRY* ülésen; Essais d'amélioration du refroidissement des turbo-alternateurs" címen.

Gohér Mihály—Dr. Kovács K. Pál

MÓDOSÍTOTT SCHUHMANN—GAUDIN-FÜGGVÉNY ALKALMAZÁSA A TROMP-GÖRBÉKRE

TARJÁN GUSZTÁV*

AZ MTA LEVELEZŐ TAGJA

[Beérkezett 1972. július 21-én]

A szemcseeloszlási függvények $F = f(y)$ alakról $F = f(b)$ alakra hozhatók, ahol $b = y/y_{50}$. Az $F = b^m/2$ Schuhmann—Gaudin (SG-) függvényt $b > 1$-nél ($F > 50\%$-nál) $F = 1 - b^{-m}/2$ alakúra változtatva, e könnyen kezelhető „módosított" függvény és a Kolmogorov (K) vagy Rosin—Rammler (RR) függvények között gyakorlatilag elhanyagolható lesz a relatív eltérés. A szemcsehalmazok granulometriáját kifejező szemcseeloszlási függvények analogonjai az ásványelőkészítés számos más területén is fellépnek; ezek közül a módosított SG-függvénynek a Tromp-görbékre való alkalmazhatósága kerül részletesebb ismertetésre.

Az „eredeti"

$$F_K = \Phi[\ln (y/a)^m] \text{ (Kolmogorov)},$$
$$F_{RR} = 1 - e^{-(y/a)^m} \text{ (Rosin—Rammler)},$$
$$F_{SG} = (y/a)^m \text{ (Schuhmann—Gaudin)}$$

szemcseeloszlási függvényekben F az y szemcsenagyságnál finomabb szemek súlyszázalékát jelenti, m kitevő a szórás paramétere és

$$a_K = y_{50}, \qquad a_{RR} = y_{63,2}, \qquad a_{SG} = y_{100}$$

az egyes függvények szemnagyság paramétere: az 50, 63,2, ill. 100% F értékhez tartozó szemcsenagyság.

E függvények $F = f(y)$ alakról $F = f(b)$ alakra hozhatók, ahol $b = y/y_{50}$, dimenzió nélküli szám:

$$F_K = \Phi(\ln b^m), \qquad F_{RR} = 1 - e^{-b^m \ln 2}, \qquad F_{SG} = b^m/2.$$

Az SG függvénynek $F = 50 \div 100\%$ ordinátaszakaszon, ill. $b > 1$ abszcissza-értéknél

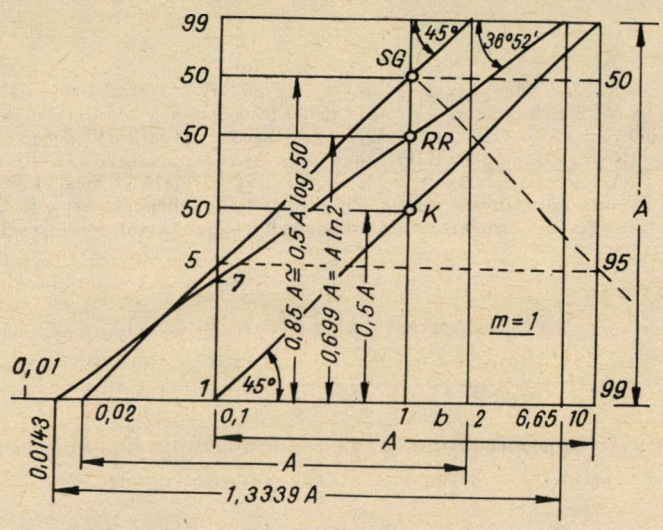
$$F = 1 - 0{,}5b^{-m}$$

alakra módosításával az $\overline{SG}$ függvény — az RR és K függvényekkel egyezően — $F = 100\%$-hoz aszimptotikusan simuló s a tényleges szemcseeloszlásoknak jobban megfelelő lesz. A függvényeket $\log b$ (vagy az „eredeti" $\log y$) abszcisszán ábrázolva m hajlású egyeneseket kapunk, ha az ordinátatengely beosztása K-nál a Gauss-valószínűségi összegskála, RR-nél $\log \log[1/(1 - F)]$ és SG-nél $\log F$ szerinti. A K, RR és „módosított" $\overline{SG}$ $F = f(b)$ függvények

* Prof. Dr. Tarján Gusztáv, Nehézipari Műszaki Egyetem, 3515 Miskolc.

relatív eltérése nem nagy és gyakorlatilag bármelyik helyettesítheti a másikat. S mivel a három közül az $\overline{SG}$ függvény kezelhető a legkönnyebben, ennek a használata indokolt elsősorban [1].

Az egyes $F = f(y)$, ill. $F = f(b)$ „szemcseeloszlási" függvényekkel analóg függvényekkel találkozunk az ásványelőkészítés számos más területén is. Például a K-függvény jelentkezik a „szabályos" Tromp-görbék, ill. a frakcióhatásfokok területén, az RR függvény az őrlés kinetikájában (adott szemcsenagyságnál finomabb rész képződése az idő függvényében) és — $m = 1$ kitevő-



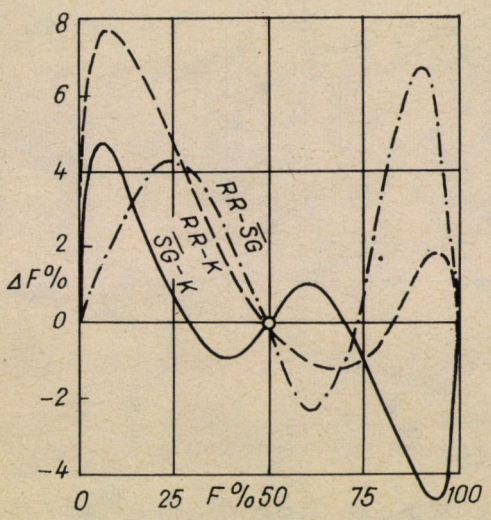
1. ábra

vel — a flotálás vagy a szitálás kinetikájában (ásványkihozatal, ill. finomrészkihozatal az idő függvényében), a szűrőtömlők és elektrofilterek frakcióhatásfokának képleteiben; az SG függvény pl. az őrlőtestek kopásakor előálló golyónagyság-megoszlás képletében stb. Csupán az F, ill. y és a „jelentése" lesz ilyenkor más és más (pl. F ásványkihozatal vagy porkihozatal, y és a idő), de a képletek alakja tökéletesen megfelel a szemcseeloszlási függvények valamelyikének. A technika- és természettudományok egyéb (az ásványelőkészítéstől távoleső) területein is találkozunk a szemcseeloszlási függvények egyikmásikával analóg függvényekkel. (Pl. igen gyakran a lognormális valószínűségi K-függvénnyel.)

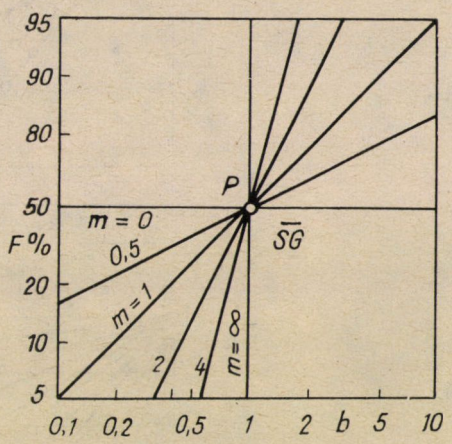
Mindezeken a területeken javasolható az egyszerűen kezelhető „módosított" $F_{\overline{SG}} = f(b)$ függvény bevezetése, ill. alkalmazása a bonyolultabb F_K vagy F_{RR} függvények helyett.

Az 1. ábra a három (K, RR és SG) $F = f(b)$ egyenes $F = 1$—99% közti szakaszát együtt ábrázolja $m = 1$ mellett a „megfelelő" ordináta-beosztások-

nál. (Az RR-függvény $m = 1$ egyenesének hajlásszöge 45°-tól eltér, mert a beosztás jellege miatt itt A ordinátához 1,3339A abszcissza-érték tartozik.) A 2. ábra két-két $F = f(b)$ függvény $\Delta F = f(F)$ eltérését mutatja. Kitűnik ebből, hogy a maximális ΔF eltérés (az $F = 0$—100% közötti teljes spektrumban) RR—K között 8%-nál, RR—$\overline{SG}$ között 7%-nál, $\overline{SG}$—K között 5%-nál kisebb, s az elsősorban „érdekes" $F = 25$—75% közötti területen RR—K között ~5%, RR—$\overline{SG}$ között ~4%, $\overline{SG}$—K között ~1% mindössze.



2. ábra



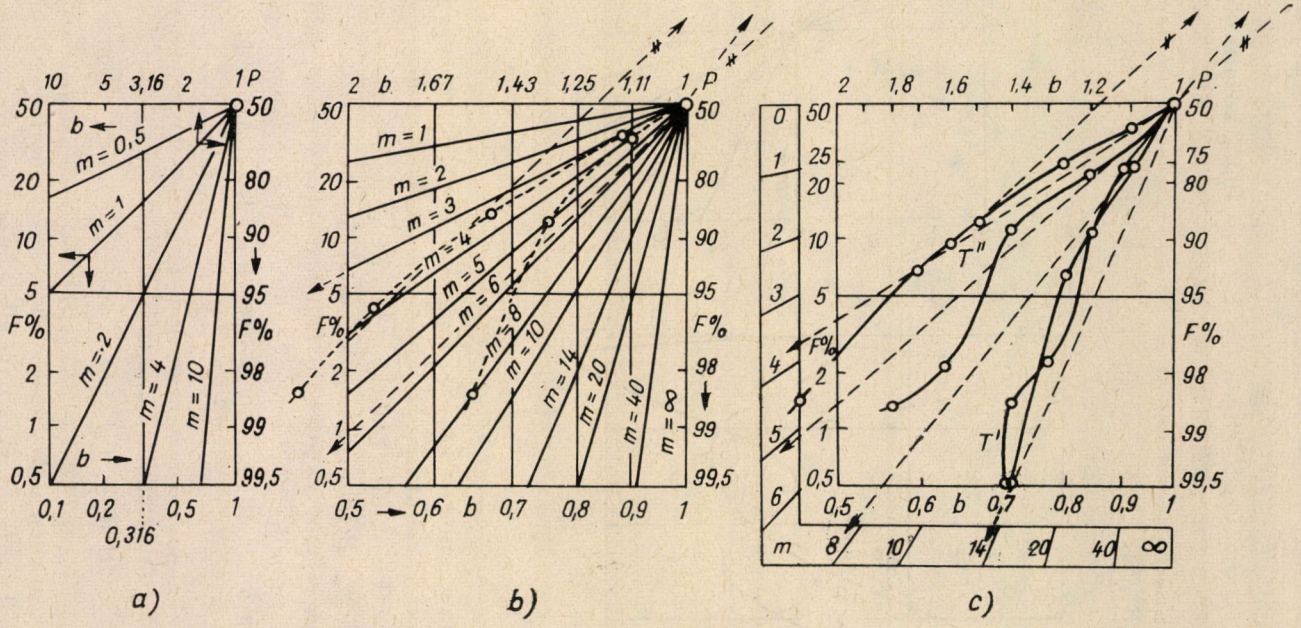
3. ábra

A 3. ábra a „módosított" $\overline{SG}$ függvény $F = f(b)$ egyeneseinek $F = 5$—95% közti szakaszát mutatja különböző m értékeknél. A $b = y/y_{50}$ abszcissza-tengely is és az F ordináta tengely is logaritmikus beosztású, az egyenesek a ($b = 1$, $F = 50\%$) P pólusponton haladnak át.

A 4. ábra rajzain az $\overline{SG}$ háló P póluspontja a rajzok jobb felső sarkán van s a különböző m hajlású egyenesek $b < 1$, ill. $F < 50\%$ értékei a háló alsó és bal oldali, a $b > 1$, ill. $F > 50\%$ értékek a felső és jobb oldali skálákon olvashatók le. Az a) rajz $b = 0{,}1$—10, a b) és c) rajz $b = 0{,}5$—2 abszcissza-szakaszon mutat különböző m-egyeneseket $F = 0{,}5$—99,5% közti ordinátaszakasz mellett. (A b) rajzon az m-egyenesek be vannak rajzolva, a c) rajzon „szegélyskálán" láthatók a P póluspontból kiinduló m-sugárnyaláb irányvonalai.)

A következőkben a Tromp-görbék „korrekciójával" s a módosított $\overline{SG}$ függvénynek a Tromp-görbékre való alkalmazási lehetőségeivel foglalkozunk.

A 4. ábra b) rajzán — példaképpen — az 5. ábra, c) rajzán a 6. ábra T' „korrigált" Tromp-görbéi vannak berajzolva, a hozzájuk tartozó m vonalak

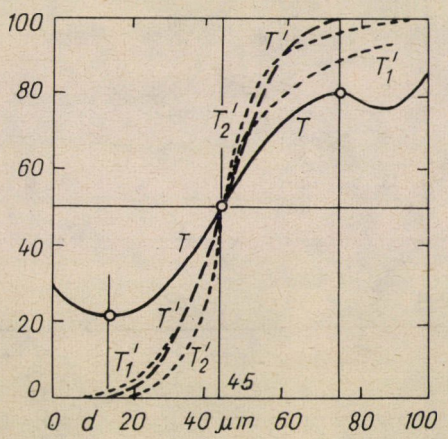

10 5 3,16 2 1 P
50 20 10 5 F% 2 1 0,5
b
m = 0,5
m = 1
m = 2
m = 4
m = 10
b
0,1 0,2 0,316 0,5 1
50 80 90 95 F% 98 99 99,5
a)
2 b 1,67 1,43 1,25 1,11 1 P
m = 1
m = 2
m = 3
m = 4
m = 5
m = 6
m = 8
m = 10
m = 14
m = 20
m = 40
m = ∞
0,5 0,6 b 0,7 0,8 0,9 1
b)
2 1,8 1,6 1,4 b 1,2 1 P
0 1 2 3 4 5 6
50 25 20 10 5 F% 2 1 0,5
75 80 90 95 F% 98 99 99,5
T''
T'
0,5 0,6 b 0,7 0,8 0,9 1
m 8 10 14 20 40 ∞
c)

4. ábra

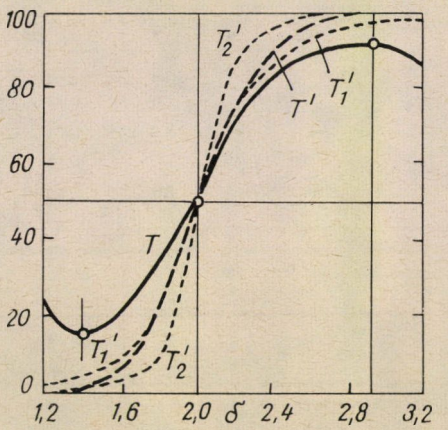
megjelölésével. Az 5. és 6. ábrák teljes vonallal kihúzott „szabálytalan" T Tromp-görbéi „önkényesen" vannak rajzolva; az 5. ábrán d szemcsenagyság, a 6. ábrán δ fajsúly abszcisszával. Az I. és II. táblázatok közlik az ábrákról leolvasott számszerű adatokat. Szaggatott vonallal van az ábrákon a megfelelő T' „korrigált" Tromp-görbe megrajzolva, amely már az osztályozó vagy dúsító készülék jóságának megítélésére közvetlenül alkalmas.

T és T' között a

$$T' = (T - T_{min})/(T_{max} - T_{min})$$



5. ábra



6. ábra

összefüggés érvényes. Az 5. ábrán (1. táblázatban) $T_{min} = 20$, $T_{max} = 80$, vagyis itt

$$T' = (T - 20)/60,$$

a 6. ábrán (és 2. táblázatban) $T_{min} = 15$, $T_{max} = 91$, vagyis itt

$$T' = (T - 15)/76$$

képlettel számítandó ki a korrigált T'. A táblázatok a $b = y/y_{50}$ értékeket is tartalmazzák (y_{50} az ábrák $T' = 50\%$ értékéhez tartozó abszcissza-érték) s a 4. ábra b) rajzán az 5. ábra (ill. I. táblázat), c) rajzán a 6. ábra (II. táblázat) T' görbéi is láthatók (a táblázatok összetartozó b és T' értékei által meghatározott pontokon áthúzva).

A 4. ábra c) rajzán

$$b = \delta/\delta_{50} \text{ és } b = (\delta - 1)/(\delta_{50} - 1)$$

abszcisszákhoz tartozó korrigált T' és T''' görbék egyaránt szerepelnek; a fajsúly alapján dúsító gépek anamorf ábrázolású (= Kolmogorov-függvény szerinti) Tromp-görbéi ui. $\log(\delta - \gamma)$ abszcissza mellett adnak — rendszerint —

I. táblázat

y	T	T'	b	$m = 3$	5,7
				T_1'	T_2'
0	27				
10	21		0,222	0,5	
20	21	1,7	0,445	4	0,5
30	28	13,3	0,666	15	4,8
40	41	35,0	0,89	35	24
50	58	63,4	1,11	64	70
60	73	88,4	1,33	79	90
70	79	98,4	1,555	87	95,5
80	79	100	1,778	91	98,4
90	76		2,00	93,8	99
100	85				
15	20	0	0,333	min	
75	80	100	1,67	max	

II. táblázat

	T	T'	b'	$m = 1,7$	13,6	$\frac{(\delta-1)}{b'}$	$m = 3,7$	5,1
				T_1'	T_2'		T_1'	T_2'
1,2	24		0,6			0,2		
1,4	15	0	0,7	3,5	0,4	0,4	2	
1,6	20	6,6	0,8	9	2	0,6	7	<3
1,8	34	25,0	0,9	24	10	0,8	22	14
2,0	53	50	1,0	50	50	1,0	50	50
2,2	72	76,4	1,1	76	85	1,2	72	80
2,4	82	88,1	1,2	85	95	1,4	84	91
2,6	89	97,5	1,3	93	98,6	1,6	91	95,5
3,0	90	100	1,5	97				
3,2	86	100	1,6	98,5				
1,3	15	min						
2,9	91	max						

egyeneseket. (Víz közegben $\gamma = 1$, levegőben $\gamma = 0$). [Mások (VISSAC) $\log(\delta - \delta_{\min})$ vagy $\log \delta^{0,6}$ (Tromp) abszcissza-beosztásnál kaptak egyeneseket.] Szitáknál rendszerint $\log d$ abszcissza-beosztásnál kapunk az anamorf Tromp-görbékre egyeneseket.

A „szabályos" Tromp-görbékre

$$E_p = (y_{75} - y_{25})/2$$

és

$$I = E_p/(y_{50} - \gamma)$$

összefüggések érvényesek. [E_p (écart probable) a 75 és 25%-os kvartilis középértéke; I (imperfekció) E_p és a médián viszonyszáma.] Vagyis nedves dúsításnál, ahol $b = (\delta - 1)/(\delta_{50} - 1)$:

$$I = (b_{75} - b_{25})/2$$

és

$$E_p = (\delta_{50} \quad 1)I = (\delta_{50} \quad 1)(b_{75} \quad b_{25})/2\,,$$

míg száraz dúsítógépek vagy sziták esetében, ahol $b = y/y_{50}$:

$$E_p = y_{50}(b_{75} \quad b_{25})/2$$

és

$$I = (b_{75} - b_{25})/2\,.$$

Mint látható, a 4. ábra $\overline{SG}$-hálóin a T' görbék egyike sem „egyenes", úgyhogy a hozzájuk tartozó m-érték meghatározása is bizonytalan.

Az $\overline{SG}$-hálón mindegyik T' görbéhez két-két m-egyenes van behúzva; egyik (T_1') a $25 \div 75\%$ közötti szakaszhoz, a másik (T_2') a T'-spektrum két legszélső pontjához tartozik. (Az utóbbit az egyik „szélső" pontot a másik szélső pontnak a P ($b = 1$, $T' = 50\%$) pólusponton átmenő egyenesen levő tükörpontjával összekötő egyenessel a pólusponton áthúzott párhuzamos szolgáltatja.) A T_1' és T_2' egyeneseknek adott b értékekhez tartozó (a 4. ábráról leolvasott) számértékeit is közli az 1. és 2. táblázat, s maguk e görbék az 5. és 6. ábrán pontozott vonallal bejelölve láthatók.

$I = (b_{75} - b_{25})/2$ kifejezés b_{75} és b_{25} értéke az $\overline{SG}$ függvénynél az

$$F_{25} = 0{,}25 = 0{,}5\, b_{25}^m$$

ill.

$$F_{75} = 0{,}75 = 1 - 0{,}5/b_{75}^m$$

képletekből adódó

$$b_{75} = \sqrt[m]{2} \quad \text{és} \quad b_{25} = \sqrt[m]{0{,}5}$$

lesz, vagyis

$$I_{\overline{SG}} = \left(\sqrt[m]{2} - \sqrt[m]{0{,}5}\right)/2\,.$$

Egyes m értékeknél e képlettel adódó $I_{\overline{SG}}$ értékeket közöl a III. táblázat. A kiszámított értékeket a logaritmikus koordinátájú 7. ábrán bejelölve, a pontokhoz 45° hajlású I' egyenes simul; ennek egyenlete tehát $I' = C/m$. (Az ábrán $C = 0{,}70$.) A III. táblázat az

$$I' = C/m, \quad 100\,\Delta I = (I_{\overline{SG}} - I')\% \quad \text{és} \quad 100\Delta I/I_{\overline{SG}}\%$$

III. táblázat

m =	1	2	3	4	5	7	10
$I_{\overline{SG}}$ =	0,75	0,353	0,2325	0,174	0,139	0,0995	0,0696
C = 0,70	0,70	0,350	0,233	0,175	0,140	0,100	0,0700
0,695 I'	0,695	0,3475	0,23167	0,17375	0,139	0,0993	0,0695
0,69	0,69	0,345	0,230	0,1725	0,138	0,0986	0,0690
C = 0,70	−5	−0,3	+0,05	+0,1	+0,1	+0,05	+0,04
0,695 ΔI %	−5,5	−0,55	−0,133	−0,025	0	−0,02	−0,01
0,69	−6	−0,8	−0,3	−0,15	−0,10	−0,09	−0,06
C = 0,70	−6,67	−0,85	+0,21	+0,57	+0,72	+0,50	+0,57
0,695 $\frac{\Delta I}{I}$ %	−7,33	−1,56	−0,57	−0,14	0	−0,20	−0,14
0,69	−8,00	−2,26	−1,29	−0,86	−0,72	−0,90	−0,86

m =	15	20	30	40	50
$I_{\overline{SG}}$ =	0,04615	0,03465	0,02256	0,01725	0,01405
C = 0,70	0,0466	0,0350	0,0233	0,0175	0,0140
0,695 I'	0,04633	0,03475	0,023167	0,017375	0,0139
0,69	0,0460	0,0345	0,0230	0,01725	0,0138
C = 0,70	+0,045	+0,035	+0,074	+0,025	−0,005
0,695 ΔI %	+0,013	+0,010	+0,0607	+0,0125	−0,015
0,69	−0,015	−0,015	+0,044	0	−0,025
C = 0,70	+0,97	+1,01	+3,28	+1,45	−0,36
0,695 $\frac{\Delta I}{I}$ %	+0,29	+0,29	+2,69	+0,73	−1,07
0,69	−0,33	−0,43	+1,95	0	−1,78

értékeket $C = 0{,}70—0{,}695 — 0{,}69$ tényező mellett is közli. A $\Delta I/I$ „relatív %-os eltérést" m függvényében — közönséges beosztású ordinátával — a 7. ábra is feltünteti.

I' és m kölcsönös átszámításánál az

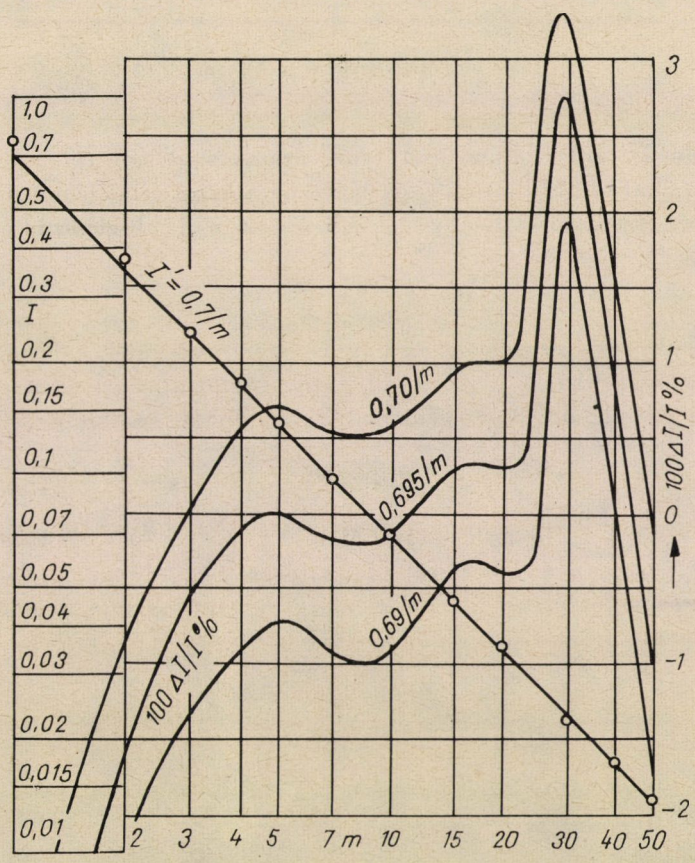
$$I'm \cong 0{,}7$$

összefüggést használhatjuk. (Pl. $C = 0{,}69$ értékkel számolva $C = 0{,}70$ helyett ö/0,7 = 1,43%-kal kisebb relatív értékeket kapunk, vagyis az eltérés elhanyagolható.)

Különböző I értékekhez tartozó m értékek eszerint az alábbiak lesznek:

I =	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
m =	35,0	17,5	11,7	8,75	7,00	4,66	3,50	2,80	2,33	2,00	1,75

Szenek mosására szolgáló néhány készülék I imperfekciójának kb. nagysága:



7. ábra

Statikus nehézszuszpenziós kád (+10 mm): 0,02÷0,05
Nehézszuszpenziós hidrociklon (—10 mm): 0,03÷0,07
Ülepítőgép, durva (+10 mm): 0,10÷0,18
Ülepítőgép, finom (—10 mm): 0,14÷0,20
Utóülepítőgép (—10 mm): 0,20÷0,30
Szér (—10 mm): 0,10÷0,20
Rheo-csatorna, durva (+10 mm): 0,16÷0,25
Rheo-csatorna, finom (—10 mm): 0,30÷0,40
Humphreys spirális (—3 mm): 0,30÷0,40

A 4. ábra b) rajzán (I. táblázat) a 25÷75% közötti szakaszra érvényes T_1' egyeneséhez $m_1 = 3{,}0$ és $I_1 = 0{,}7/3 = 0{,}233$; a szélső pontokra érvényes T_2' egyeneséhez $m_2 = 5{,}7$ és $I_2 = 0{,}123$ értékek tartoznak. $y_{50} = d_{50} = 45\ \mu$m; vagyis az 5. ábra „szitájára"

$$E_{p_1} = 45 \cdot 0{,}233 = 105\ \mu\text{m}\,,$$

ill.

$$E_{p_2} = 45 \cdot 0{,}123 = 55\ \mu\text{m}$$

érvényes.

Ha nem szitáról, hanem osztályozó áramkészülékről (pl. hidrociklonról vagy mechanikai osztályozóról, vagy légszeparátorról stb.) lenne itt szó, ezek Tromp-görbéi „szigorúan véve" $y = v_0$, ill. $b = v_0/v_{050}$ abszcisszán érvényesek, ahol

$$v_0 = C'd^p$$

a szemcsék süllyedési végsebessége. Vagyis az áramkészülékek Tromp-görbéjét $y = d$ „szemcsenagyság", ill. $b = d/d_{50}$ abszcisszán ábrázolva, a valóban helyes értékek $d^{1/p}$ ill. $b^{1/p}$ korrekció mellett adódnak, amikor is

$$m_{v_0} = m_d^p$$

lesz.

$Re = v_0 d/\nu \lesssim 1$ Reynolds-számnál $p = 2$, $Re = 30$—300 között $p \cong 1$; $Re = 1$—30 között p értéke 2-ről fokozatosan 1-ig csökken. ($Re \gtrsim 600$-nál $p = 0{,}5$, de áramkészülékeknél $Re > 200$ gyakorlatilag már nem fordul elő.)

Pl. $d = 45\ \mu$m kvarc ($\delta = 2{,}65$) esetében

$$v_0 = \frac{d^2(\delta - \gamma)}{18\eta} = \frac{0{,}0045^2 \cdot 1{,}65}{18 \cdot 10^{-5}} = 0{,}186\ \text{cm/s},$$

$Re = 0{,}186 \cdot 0{,}0045/0{,}01 = 0{,}083$, vagyis $p = 2$, ill. $m_{v_0} = m_d^2$ lesz, azaz

$$m_{v_{01}} = 3^2 = 9 \quad (I_1 = 0{,}078)$$

és

$$m_{v_{02}} = 5{,}7^2 = 32{,}5 \quad (I_2 = 0{,}0215)$$

„helyes" áramkészülék-adatokhoz jutunk.

A 4. ábra c) rajzán (II. táblázat) — $b = \delta/\delta_{50}$ esetében — T_1'-re

$$m_1 = 7{,}7 \quad (I_1' = 0{,}091)$$

és T_2'-re

$$m_2 = 13{,}6 \quad (I_2' = 0{,}0515),$$

míg $b = (\delta - 1)/(\delta_{50} - 1)$ esetében T_1''-re

$$m_1 = 3{,}7 \quad (I_1'' = 0{,}189)$$

és T_2''-re

$$m_2 = 5{,}1 \quad (I_2'' = 0{,}137)$$

értékeket kaptunk. Itt $\delta_{50} = 2{,}0$ volt, vagyis száraz dúsításnál (ahol $b = \delta/\delta_{50}$ és $E_p = \delta_{50} I$):

$$E'_{p1} = 0{,}182, \text{ ill. } E'_{p2} = 0{,}103;$$

nedves dúsításnál [ahol $b = (\delta - 1)/(\delta_{50} - 1)$ és $E_p = (\delta_{50} - 1)I$]:

$$E''_{p1} = 0{,}189, \text{ ill. } E''_{p2} = 0{,}137$$

értékekhez jutunk.

IRODALOM

1. TARJÁN G.: A szemcseeloszlási függvények összehasonlítása — alkalmazásuk a Tromp-görbékre. *BKL Bányászat* 106 (1973), 2—6.

Modified SG-(SCHUHMANN—GAUDIN)-Functions Applied to TROMP-Curves. Grain distribution functions $F = f(y)$ can be transformed into the form $F = f(b)$ where $b = y/y_{50}$. For the assumed range $b > 1$, respectively, $F > 50\%$, the SCHUHMANN—GAUDIN-SG-function takes the form: $F = 1 - b^{-m}/2$. Doing so, the relative deviation between this new formula and the Kolmogorov-K-formula, respectively, the Rosin—Rammler-RR-formula is practically negligible. Functions which are analogous to grain distribution functions as expressions by the granulometry of grain-sets frequently occur in many other fields of ore preparation technology. In this paper, the application of the modified SG-function to TROMP-curves is discussed in detail.

Anwendung der modifizierten SCHUHMANN—GAUDIN-Funktion für die TROMP-Kurven. Man kann die Kornverteilungsfunktionen der Form $F = f(y)$ auf eine andere Form $F = f(b)$ abändern, wobei $b = y/y_{50}$. Die SCHUHMANN—GAUDIN (SG) Funktion $F = b^m/2$ kann bei $b > 1$ d. h. $F > 50\%$ auf eine modifizierte Form: $F = 1 - b^{-m}/2$ bringen; nun ist die relative Abweichung zwischen dieser abgeänderten, leicht anwendbaren Funktion und der Kolmogorow-K-Funktion (bzw. der Rosin—Rammler-RR-Funktion) praktisch vernachlässigbar. Es treten Funktionen, die den Kornverteilungsfunktionen betreffs Granulometrie von Korngruppen analog sind auch in manchen anderen Gebieten der Aufbereitungstechnologie auf. Diesbezüglich wird hier die Anwendbarkeit der abgeänderten SG-Funktionen für die Tromp-Kurven ausführlich besprochen.

A 4. BUDAPESTI TALAJMECHANIKAI ÉS ALAPOZÁSI KONFERENCIA

KÉZDI ÁRPÁD*

AZ MTA LEVELEZŐ TAGJA

[Beérkezett; 1973. március 5.]

A közlemény a Magyar Tudományos Akadémia által 1971. októberében megrendezett konferencián elhangzott főelőadói és korreferensi jelentések kivonatát, egyes felszólalások anyagát és a konferencia határozatait ismerteti.

A Magyar Tudományos Akadémia által 1971 októberében a *4. Budapesti Talajmechanikai és Alapozási Konferencia* címen megrendezett konferencia egyben a dunai államok *3. Dunai-Európai Konferenciája* is volt.

A konferencia rendező bizottságának elnöki tisztét e közlemény szerzője töltötte be. A konferencia munkája három szekció keretében bonyolódott le. Az 1. szekció a talajok fizikai tulajdonságait tárgyalta, a 2. szekció a földművek és útalapok kérdésével foglalkozott, a 3. szekció pedig a sík- és mélyalapok problémakörét ölelte fel.

A konferenciára 87 tanulmányt nyújtottak be. Ezeket az Akadémiai Kiadó még a konferencia megtartása előtt „*Proceedings of the 4th Budapest Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*" címen (Edited by Á. KÉZDI, Budapest 1971) nyomtatásban jelentette meg.

Magán a konferencián a tanulmányokat egy-egy *főelőadó* ismertette. Az 1. szekció főelőadója jelen sorok szerzője, a 2. szekció főelőadója MARKÓ Iván, a 3. szekció főelőadója PETRASOVITS Géza volt. A főelőadók feladata a benyújtott dolgozatok ismertetésén túlmenően arra is kiterjedt, hogy az illető szekció tárgykörében *általános áttekintést* is nyújtsanak, értékeljék az utóbbi években elért fejlődést és ismertessék az újabb eredményeket.

Az alábbiak a főelőadói, valamint korreferensi jelentések kivonatát tartalmazzák és néhány, a vita során elhangzott felszólalást ismertetnek. Sajnos, több érdekes előadás szöveg- és ábraanyaga nem állt rendelkezésre, így azok nem voltak ismertethetők.

1. szekció. Talajok fizikai tulajdonságai

KÉZDI ÁRPÁD FŐELŐADÓ:

Ma már általános az a felismerés, hogy a mérnöki létesítmények és az altalaj közötti kölcsönhatás megismerése terén csak akkor érhetünk el előrehaladást, ha egyre jobban tisztázzuk a fizikai alapokat, egyre jobban meg-

* Prof. Dr. Kézdi Árpád, 1012 Budapest, Logodi u. 9.

ismerjük a talajok viselkedését meghatározó fizikai törvényeket. Ezek ismeretében alkothatjuk meg azután azokat a szemléleti modelleket, melyek ugyan egyszerűsítik a valóságot, de mégis arányaikban helyesen igyekeznek a legfőbb tényezők hatását tükrözni. Mindaddig, míg ez meg nem történik, a korábbi, rendkívül egyszerű modelleken (mint amilyen például a Hooke-törvény, a Coulomb-féle törési feltétel, a Darcy-törvény stb.) alapuló elméletek továbbépítése nem indokolt.

A mérnöki tervezés és építés természetesen felhasználja s a jövőben is fel fogja használni a műszaki jellegű empirikus vizsgálatokat, modell-kísérleteket és a kész építmények viselkedéséből levont tapasztalatokat, hisz egyrészt az igen változatos geológiai hatások révén létrejött „*szemcsés közeg*" — a talaj — heterogenitása, másrészt a mérnöki létesítmények igen sokféle igényei a makroszkópos és empirikus megközelítést nélkülözhetetlenné teszik.

Általános megjegyzések; a talajok csoportosítása

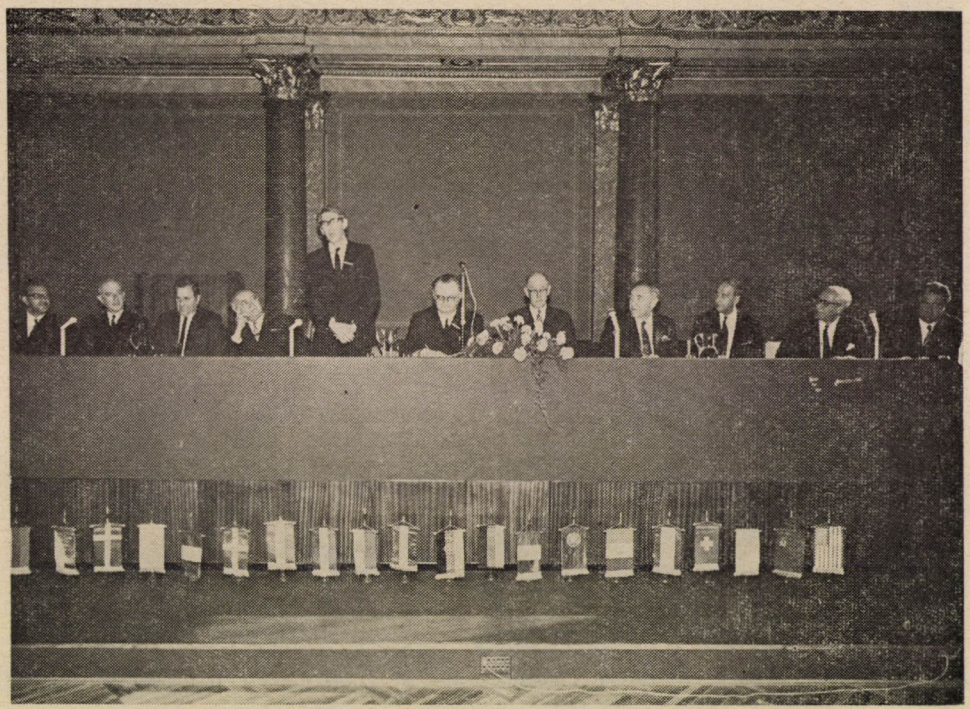
A szemcsés közegek fizikai tulajdonságai közül mérnöki szempontból a következők a legfontosabbak:

— a nyírószilárdság;
— az alakváltozás;
— a fázismozgás.

Ma még ezt a három tulajdonságot kénytelenek vagyunk egymástól elkülönítve, önállóan tárgyalni, pedig voltaképpen egyetlen egységes folyamatról van szó: a szemcsés közeg terhelés vagy egyéb hatások — pl. hőmérséklet, fagy, vagy elektromos áram — alatti viselkedéséről. A teher hatására a közeg a teher jellegének és saját tulajdonságainak megfelelően deformálódik és térfogatát változtatja, míg végül elérünk egy törési vagy alakváltozási határállapothoz. Az egész folyamat során azonban a talajt alkotó — általában három — fázis relatív és abszolút mozgásokat végez. A szemcsés közeg viselkedéséről akkor lesz igazán képünk, ha az alakváltozási-törési folyamat alatti *fázismozgásokat* matematikailag le tudjuk írni. Ez a talajfizikai kutatás igazi — bár ma még meglehetősen távoli — célja.

Az elméleti talajmechanikában általában szokásos az „*ideális homok*" és az „*ideális agyag*" absztrakciós használata; ezeket elsősorban a törés feltételezett — egyszerűsített — módja alapján definiáljuk. E két talajfajtának a nyugati irodalomban való szinte kizárólagos szereplése minden bizonnyal geológiai okokkal függ össze. Németországban a *homok* a legelterjedtebb talaj, Angliában és az Egyesült Államokban pedig az *agyag* a túlnyomó. Magyarországon és még több államban, köztük éppen a dunai államokban azonban a felszín túlnyomó részét a homok és az agyag közötti *átmeneti talajok* borítják, iszapok, homoklisztek, iszapos finom homok stb., ezek *viselkedése* azonban már nem tekinthető a két szélsőséges talajfajta visel-

kedése közötti átmenetnek. E talajféleségek főleg vízzel szembeni viselkedés szempontjából foglalnak el különleges helyzetet: felszíni vízmozgás hatására erős *erózió* lép fel, víz alatt a meglevő kicsiny kohézió hamar megszűnik és a talaj *szétesik*, vizelárasztás hatására a megterhelt talaj *roskad*. Talaj-



1. ábra. A konferencia megnyitó ülésének elnöksége. Nash, J. K. T. L., a Nemzetközi Talajmechanikai és Alapozási Egyesület főtitkára üdvözli a konferenciát

teherbírás, összenyomódás, tömörítés, fagyveszély, földnyomás, stb. szempontjából is különleges módon viselkedik ez a talaj, így érdemes harmadik nagy csoportként megkülönböztetni a homok és az agyag mellett.

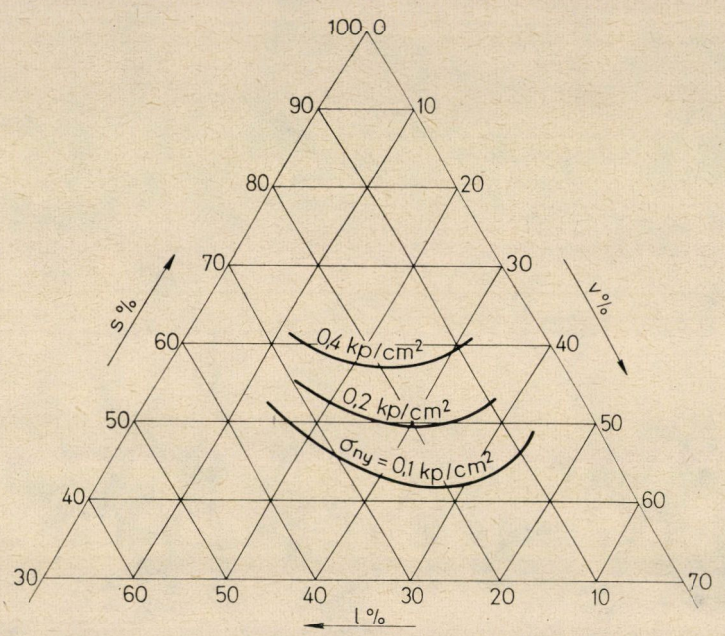
Homok esetében a víznek csak akkor van hatása a talaj tulajdonságaira, ha a pórusvízben pozitív, vagy negatív semleges feszültségek lépnek fel; agyagban a víz hatására bekövetkező változások lassúak. A vízzel szembeni érzékenység így elsősorban az átmeneti talajoknál jelentkezik.

Vegyük tehát sorba e három talajtípus tulajdonságait.

Homokok néhány fizikai tulajdonsága

A homokról azt szokás feltételezni, hogy nyírószilárdsága csak surlódásból származik, az esetleg jelentkező kohéziót elhanyagoljuk, azzal az indoklás-

sal, hogy az kiszáradás, ill. vízzel való elárasztás hatására teljesen megszűnik. Sok esetben azonban ilyen hatás nem léphet fel, a nyirkos homokban pedig kohézió, főleg tömörített állapotban, mindig van, ezért gazdaságtalan ennek elhanyagolása. A 2. ábrán az egyirányú nyomószilárdság értékét a fázisos összetétel függvényében ábrázoltuk. A kohézió gyakorlati jelentőségét a 3.

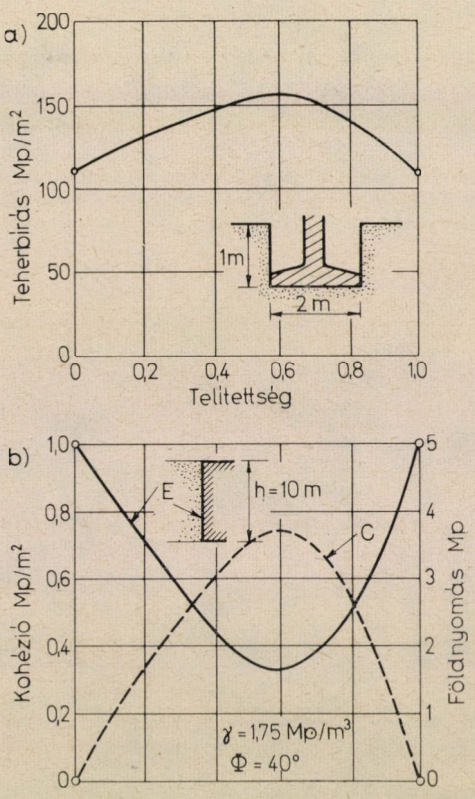


2. ábra. Homok egyirányú nyomószilárdsága a fázisos összetétel függvényében

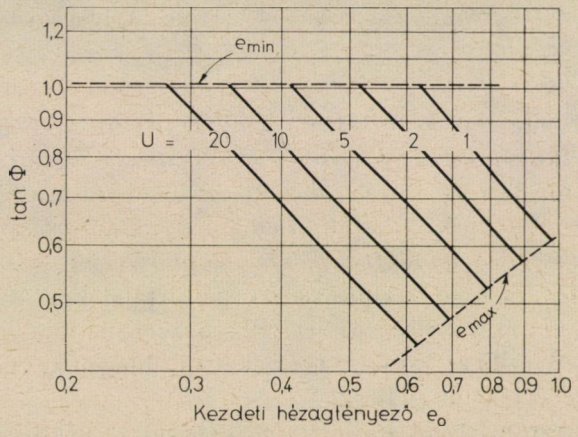
ábrán láthatjuk, ahol feltüntettük modellkísérletek alapján egy homok teherbírását a telítettség függvényében *(a)*, másrészt viszont egy függőleges falra ható E földnyomás nagyságát, ugyancsak a telítettség függvényében *(b)*, a kísérlettel meghatározott c kohézió figyelembevételével.

A homok súrlódási szöge, mint ismeretes, elsősorban *tömörségének* a függvénye. Az összefüggés meghatározására már igen sok vizsgálatot végeztek. Itt csak egy ábrát mutatunk be (4. ábra), mely a szemeloszlás szerepét szemlélteti, megadva a surlódási szöget a kezdeti hézagtényező és az egyenlőtlenségi együttható függvényében.

A gyakorlati talajmechanikai számításokban, mikor pl. egy alaptest esetében a talaj törőterhét, vagy a támfalra ható földnyomást számítjuk, akkor rendszerint feltesszük, hogy a „*törés*", a csúszólap kialakulása térfogatváltozás nélkül megy végbe. Már pedig ez a feltevés csak akkor áll fenn, ha $\Phi = 0$, különben pedig térfogatállandóság csak az ún. *kritikus hézagtényező* állapotában tételezhető fel, különben a nyírást mindig *térfogatváltozás* kíséri.

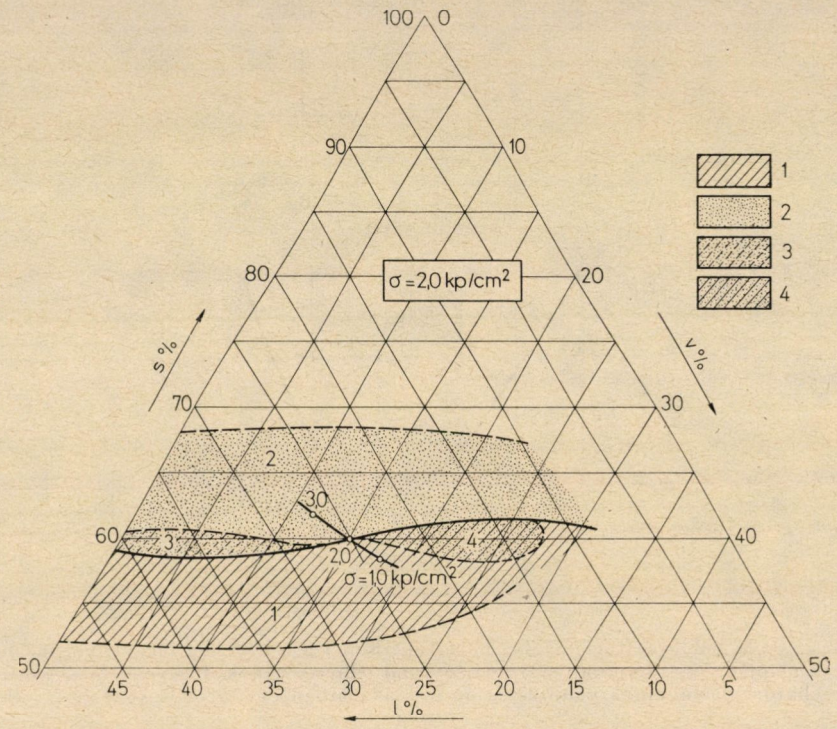


3. ábra. a, — homokra épített sávalap határteherbírása a telítettség függvényében, modellkísérletek alapján: *b,* — homok kohéziója a talaj telítettségének függvényében, valamint a támfalra ható *E* földnyomás változása a nedves állapotban érvényesülő kohézió figyelembevételével



4. ábra. Homokok súrlódási tényezője a kezdeti hézagtényező és az egyenlőtlenségi együttható függvényében

Ezt a kérdést vizsgálja dolgozatában KAMENOV [1], és kimutatja, hogy a nyírószilárdságra a fajlagos térfogatváltozás és a pórusvíznyomás változás gradiense hat ki; talajfizikai állandónak az e mennyiségek zérus értékéhez tartozó adat tekinthető.



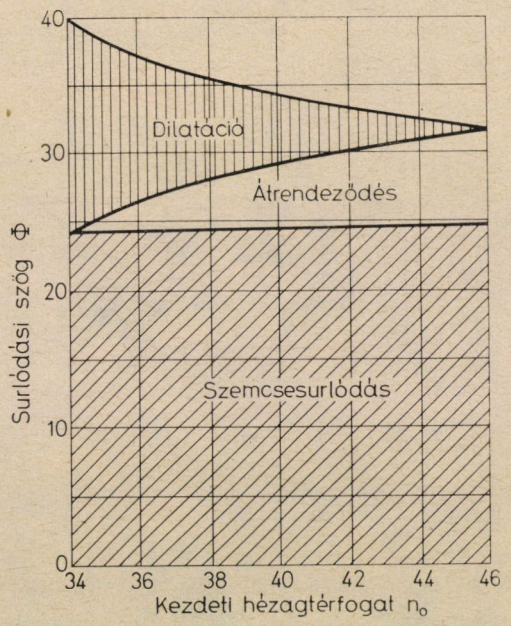
5. ábra. Homok térfogatváltozása nyírás során, a kezdeti fázisos összetétel függvényében *1* — a homok tömörödik: *2* — a homok fellazul: *3* — a homok a nyírás kezdetén tömörödik majd fellazul: *4* — a homok előbb fellazul, majd tömörödik

Saját vizsgálataink kimutatták, hogy a „*kritikus hézagtényező*" helyett helyesebb „*kritikus fázisos összetételről*" beszélni. Az is kitűnt, hogy igaz ugyan az, hogy a tömör talajok nyírási alakváltozások hatására fellazulnak, a laza talajok pedig tömörödnek, vannak azonban olyan kezdeti állapotok, melyeknél egymást követően *mindkét változás* bekövetkezik: szárazabb talajoknál előbb tömörödés, azután lazulás, nedvesebb talajoknál fordítva. A megfelelő tartományokat a fázisos összetételt ábrázoló háromszögdiagramban az 5. ábra mutatja be. Ez az ábra azt is érzékelteti, hogy a kritikus állapot a normális feszültség értékétől is függ.

A nyírás során fellépő térfogatváltozásokat tárgyalja TATSUOKA tanulmánya [2], mely a térfogatváltozás folyamatát szintén két részre, térfogat-

csökkenésre és növekedésre osztja, s egyben empirikus összefüggéseket is javasol az egyes görbe-ágakra.

Homokok nyírószilárdságával kapcsolatban fontosak azok a kutatások, amleyek a *szilárdság eredetére* kívánnak fényt deríteni. A nyírószilárdság



6. ábra. A homok nyírószilárdságára jellemző paraméter a súrlódási szög komponenseinek alakulása a kezdeti hézagtérfogat függvényében

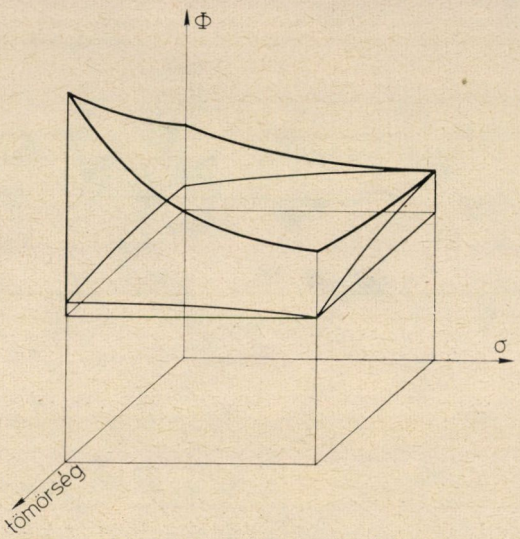
komponenseire saját kísérletek alapján a 6. ábra vet fényt: a tömörségtől csak a szemcsék közötti súrlódás független. A szemcsék *átrendeződése* annál jelentősebb hatású, minél lazább a homok, hiszen a mozgás annál könnyebben bekövetkezhetik, s létrehozása energiát igényel, tehát nyírószilárdságot növelő hatású a térfogatváltozás; a fellazulás létrehozásához szükséges energia miatti szilárdságnövekedés pedig annál nagyobb, minél tömörebb a kezdeti állapot. Az ábra közepes normálfeszültséghez tartozik, kicsiny és nagy σ értékek mellett az arányok mások, s valószínűleg a 7. ábra szerint alakulnak.

A vízáteresztőképességi vizsgálatok átvisznek már a *fázismozgások* témakörébe. Az egyes frakciók áteresztőképessége azok fajlagos felületére ad felvilágosítást, s a két vizsgálat együttes eredménye a nyírószilárdság eredetét tisztázhatja. Az előírt módon előállított minták tömörsége is a keverési arány függvénye; mindezek a hatások a nyírószilárdságban jelentkeznek, és így az összefüggés meghatározható.

További fázismozgási jelenség a homokok vízfelvétele és vízleadása. Ez utóbbi kérdéssel foglalkozik SEYČEK [3] tanulmánya: meghatározza

azt a hézagtérfogatot, melyet a gravitációnak engedelmeskedő víz tölt ki, amit tehát a talaj le tud adni. Értéke SEYČEK kísérletei szerint a teljes hézagtényezővel lineáris kapcsolatban van.

Itt említjük meg azokat a vizsgálatainkat, amelyek homokok alakváltozását a fázisos összetétel függvényében határozták meg; egy eredményt a 8.

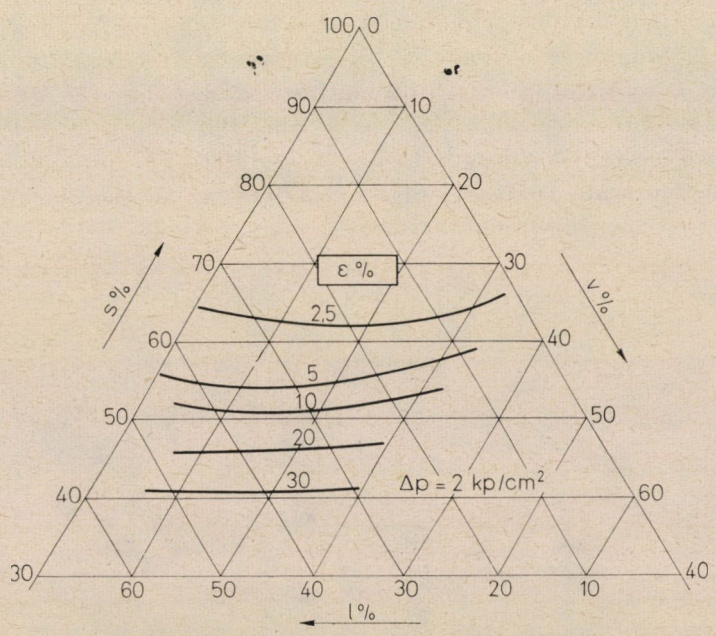


7. ábra. A 6. ábrán szereplő komponensek alakulása, a nyírási síkon működő normálfeszültség hatását is figyelembe véve

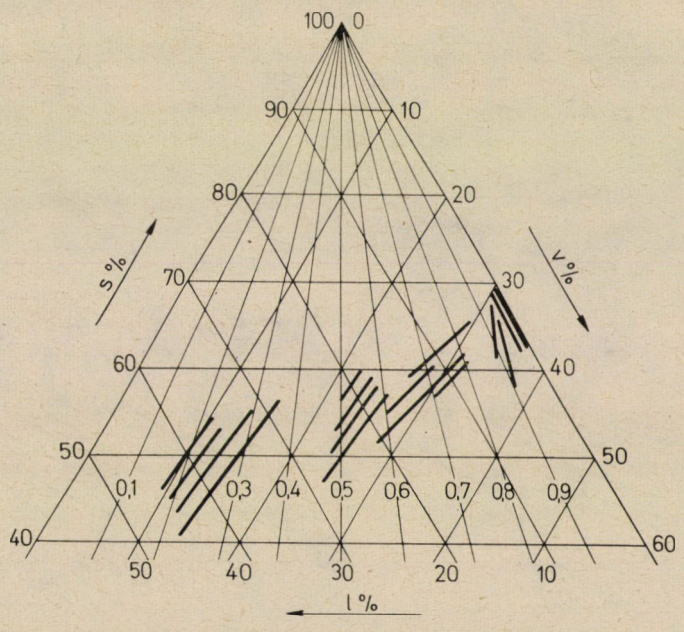
ábra mutat be. Itt is a más tulajdonsággal kapcsolatban ismert sajátosság jelentkezik: összenyomódás szempontjából is van egy optimális fázisos összetétel. Ezt tapasztalhatjuk különben az egyirányú nyomószilárdság, a tömöríthetőség, a fejtéskor jelentkező fellazulás, a nyírószilárdsági paraméterek vizsgálata során is. A jelenség magyarázata a háromfázisú homokok szerkezetével kapcsolatos: egy bizonyos telítettség mellett a homok kvázi-telítetté válik, és itt vált át a fenti tulajdonságok változásának jellege. Ez a telítettség a talajfajtától, a homok szemeloszlásától függ, de csak viszonylag szűk határok között változik.

Átmeneti talajok fizikai tulajdonságai

A talajoknak ezt a harmadik nagy csoportját a Duna-medence geológiai adottságai miatt kellett részletesebb vizsgálat alá vennünk. A *Geotechnikai Tanszék* a *Központi Földtani Hivatal* megbízásából az iszapok, iszapos homoklisztek számos fizikai tulajdonságát határozta meg, arra törekedve, hogy ezek általános törvényszerűségei leszűrhetők legyenek. E vizsgálatok kiegészítik a más országban végzett kutatásokat, mint amilyenek például a Szovjetunió

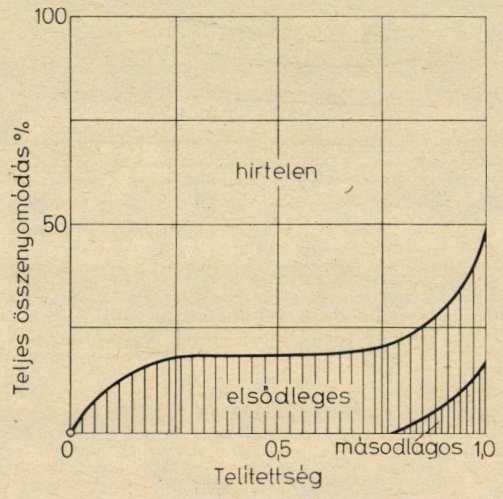


8. ábra. Homok fajlagos összenyomódása ödométerben $\Delta p = 2$ kp/cm² terhelés hatására, a kezdeti fázisos összetétel függvényében

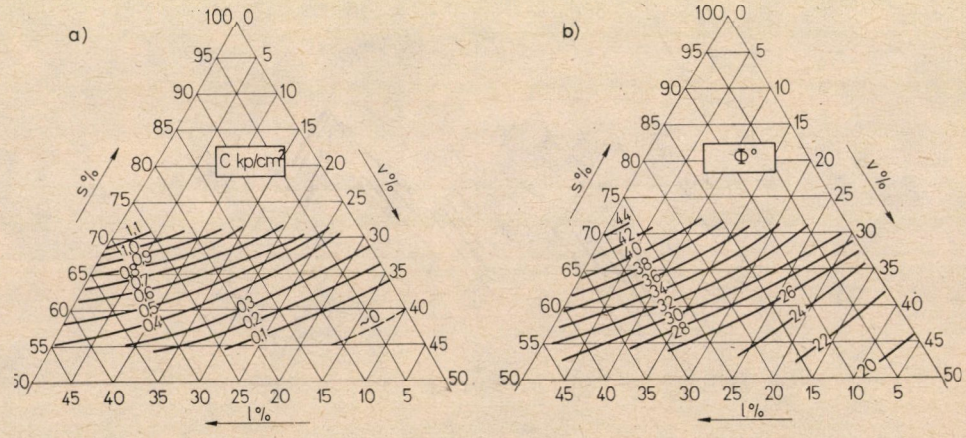


9. ábra. $\Delta p = 2$ kp/cm² sztatikus teher hatására bekövetkező változások iszapban, a kezdeti fázisos állapottól függően

löszkutatásai, az aacheni egyetemen az iszap tulajdonságainak vizsgálata a román, a bolgár és a jugoszláv kutatások. Saját vizsgálatainkról a konferenciára benyújtott három tanulmány számol be [4—6], így ebből csak három ábrát emelünk ki. A 9. ábra az adott terhelés hatására bekövetkező összenyomódást a fázisos összetétel változásának bemutatásával szemlélteti. Mindaddig, amíg a talajból a konszolidációs folyamat alatt nem kell vizet kisajtolni, a változást feltüntető vektor átmegy a háromszögdiagram $s = 0$ pontján; ha a víztartalom változik, akkor a vektor ehhez az irányhoz képest elfordul. A 10. ábra az elsődleges és másodlagos konszoli-



10. ábra. A teljes összenyomódás összetevőinek százalékos megoszlása a telítettség függvényében



11. ábra. Iszap nyírószilárdsági paramétereinek értékei $v = 2$ mm/perc nyírási sebesség mellett közvetlen nyírókísérletben, a kezdeti fázisos összetétel függvényében. *a* — kohézió: *b* — belső súrlódási szög

dáció során bekövetkező összenyomódás százalékos megoszlását a telítettség függvényében mutatja be. Végül a 11. ábra a nyírószilárdsági paramétereket adja a fázisos összetétel függvényében.

A benyújtott tanulmányok közül löszök nyírószilárdságával foglalkozik még STEFANOFF—IVANOV dolgozata [7]. Ebből azt emeljük ki, hogy a nyírószilárdságot a roskadási folyamat alatt és után is meghatározták, s így vizsgálhatóvá tették a teherbírás változását is.

Agyagok

Érdekes megfigyelni az irodalomban azt, hogy a kutatók mindig sokkal szívesebben foglalkoznak a szemcsés talajokkal, mint agyagokkal. Ha egy kutató új készüléket szerkeszt, akkor először mindig homokkal végez kísérleteket. Az ok nyilvánvaló: a homokok sokkal könnyebben vizsgálhatók, sokkal „türelmesebb" kísérleti alanyok. Valójában pedig agyagok tulajdonságaival kellene foglalkoznunk, hiszen e talajok viselkedése sokkal kevésbé ismert, annak ellenére, hogy világszerte sok erőfeszítés történt a vitás kérdések tisztázására.

Agyagok szilárdságának vizsgálatához a törési feltétel helyes rögzítése a leglényegesebb.

Ha csak *telített* agyagokra szorítkozunk, a következő három törési feltétel adható meg.

(1) *Valódi törés*: ezt a hatékony feszültségek függvényében határozzuk meg, adott hézagtényező mellett, függetlenül az anyag feszültségi előéletétől. A

$$\tau_s = c_r + \bar{\sigma}_{nf} \tan \Phi_r \tag{1}$$

összefüggésben a c_r és Φ_r paramétereket a törési állapothoz tartozó hézagtényező egyértelmű függvényének tekintjük.

(2) *Tényleges törés*: ezt a hatékony feszültségek függvényében határozzák meg, változó víztartalom mellett. Egyenlete:

$$\tau_s = c' + \bar{\sigma}_{nf} \tan \Phi' \tag{2}$$

itt a hatékony feszültségek függvényében megadott c' és Φ' paraméterek a minta korábbi feszültségállapotainak is függvényei.

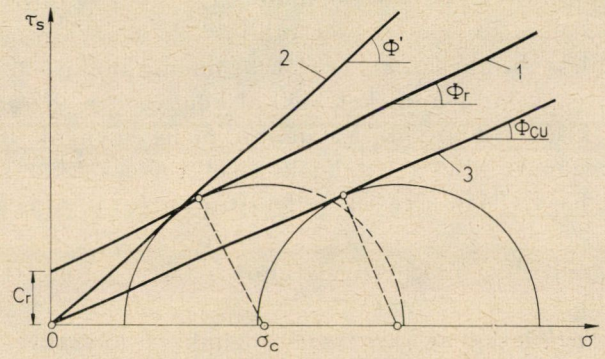
(3) *Látszólagos törés*: ezt a teljes feszültségek függvényében határozzuk meg:

$$\tau_s = c + \sigma_{nf} \tan \Phi \tag{3}$$

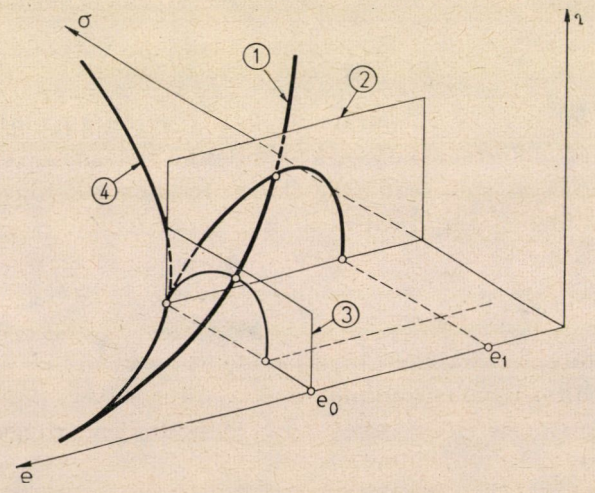
A c és Φ paraméterek, többek között a korábban már működött feszültségeknek és a vízelvezetési lehetőségeknek függvényei.

A három törési típust a 12. ábra mutatja be.

A nyírószilárdság kérdését ROSCOE [8] sokkal általánosabban fogalmazta, felhasználva a „kritikus állapot" fogalmát. Ha feltesszük azt, hogy valamely talajminta „állapotát" három változó határozza meg, mégpedig a hatékony normálfeszültség, a nyírófeszültség és a hézagtényező, akkor kell lennie egy olyan „*kritikus vonalnak*", melynek pontjai a (σ', τ, e) koordinátarendszerben olyan állapotot jelentenek, amelyben a minta folyamatos alakváltozást végez térfogatváltozás bekövetkezte nélkül. Másszóval, ez a kritikus állapot a képlékeny állapot egy fajtájának felel meg. A 13. ábra bemutatja az



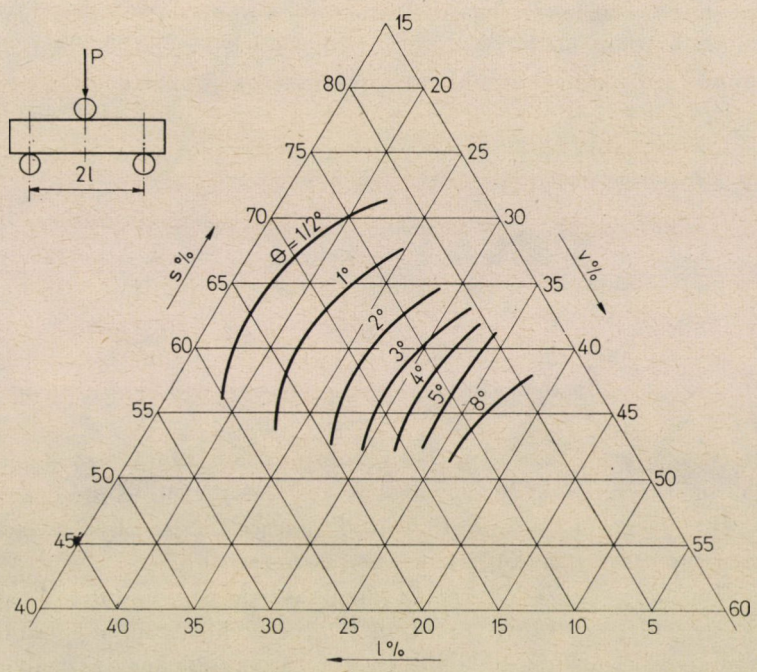
12. ábra. A három alapvető törési típus Coulomb-féle egyenesei. 1 — valódi törés: 2 — tényleges törés: 3 — látszólagos törés



13. ábra. A talajállapot változásának bemutatása telített talajra a hatékony normálfeszültség, a nyírófeszültség és a hézagtényező függvényében. *1* — a kritikus állapot vonala: *2* — a (τ, σ) síkban a változás vízelvezetés mellett megy végbe: *3*—a (τ, σ) síkban térfogatváltozás s így vízelvezetés nincs: *4*—a (σ', τ) koordinátasíkban a talaj első terhelés hatására vonatkozó kompressziós görbéjét kapjuk meg

említett koordinátarendszerben az ezt a kritikus állapotot jellemző vonalat. A két feltüntetett sík a vízelvezetéssel, ill. anélkül végzett kísérletek síkja.

A nyírószilárdság mellett egyes földgát-szilárdsági kérdésekben felmerült az anyagok hajlító-húzó szilárdsága vizsgálatának a szükségessége is. Ennek



14. ábra. A repedést okozó kritikus szögforgás (δ/l) értékei a fázisos összetétel függvényében (budaörsi iszap, $w_f = 30\%$, $I_p = 10\%$)

főleg a gátakban keletkező húzófeszültségek, s a fellépő húzási repedések szempontjából van jelentősége. Ezért a *Geotechnikai Tanszék* laboratóriumában kísérleteket végeztünk a hajlítószilárdság meghatározására, s megvizsgáltuk a szögforgásnak azt az értékét is, amely már repedést okoz. E kritikus értékeket egy talaj esetében a fázisos összetétel függvényében a 14. ábra mutatja be [9].

Arra a kérdésre, hogy a nyírószilárdság kérdése a jövőben vajon hogyan fog alakulni, ma nem lehet válaszolni. Rengeteg az egymással sajnos össze nem vethető kutatási eredmény, nagyon sok különböző felfogás jelentkezik. Mégis azt hisszük, hogy a fizikai-kémiai viszonyoknak, a talaj szerkezetének és szilárdságának kapcsolatára fog egyre jobban fény derülni; ha ennek eredeteit ismerjük, akkor a szilárdság növelésére, a fizikai tulajdonságok javítására is találunk majd módszert.

STEPKOWSKA, EWA T., (GDANSK):

A talajmechanika jelenlegi helyzetében gyakran kell revideálnunk néhány korábbi felfogást. Példa erre egyes nagy víztartalmú telített agyagok nyírószilárdsága. Ha a feszültséget zárt rendszerben növeljük, akkor csak a pórusvíznyomás nő. A triaxiális kísérletben sokszor azt tapasztaljuk, hogy — a Coulomb-féle törési feltétellel ellentétben — a deviátorfeszültség maximuma nagyobb oldalnyomás mellett kisebb értékű. Ennek vagy az az oka, hogy a pórusvíznyomás növekedése csökkenti a szemcsék közötti erőket, vagy az, hogy a nyírási sík hajlása különböző. Ugyanezt a jelenséget lehetett megfigyelni kaolinit minták közvetlen nyírásakor, amikor az alkalmazott nyírófeszültség a részecskék orientációs irányára merőleges.

Fontos kérdés, hogy vajon a nyírószilárdsági paramétereket a hatékony, vagy a teljes feszültségek függvényében kell-e kifejezni. Gyakorlati szempontból a hatékony feszültség a célszerűbb; fizikai szempontból viszont úgy látszik a teljes feszültségek használata a helyes, hiszen az agyagrészecskék között működő fizikai erők (kettős réteg-taszítás — van der Waals-vonzás) számított összege a teljes feszültségek függvényében meghatározott kohézióval egyenlő.

A fentiek miatt az anyagok fizikai tulajdonságait jól tükröző paramétereket s azok mérésére szolgáló eszközöket kell bevezetni. Ebben az irányban fejt ki tevékenységet a *Gdanski Vízépítési Intézet* talajszerkezeti laboratóriuma. Néhány eredményt a következőkben ismertetünk.

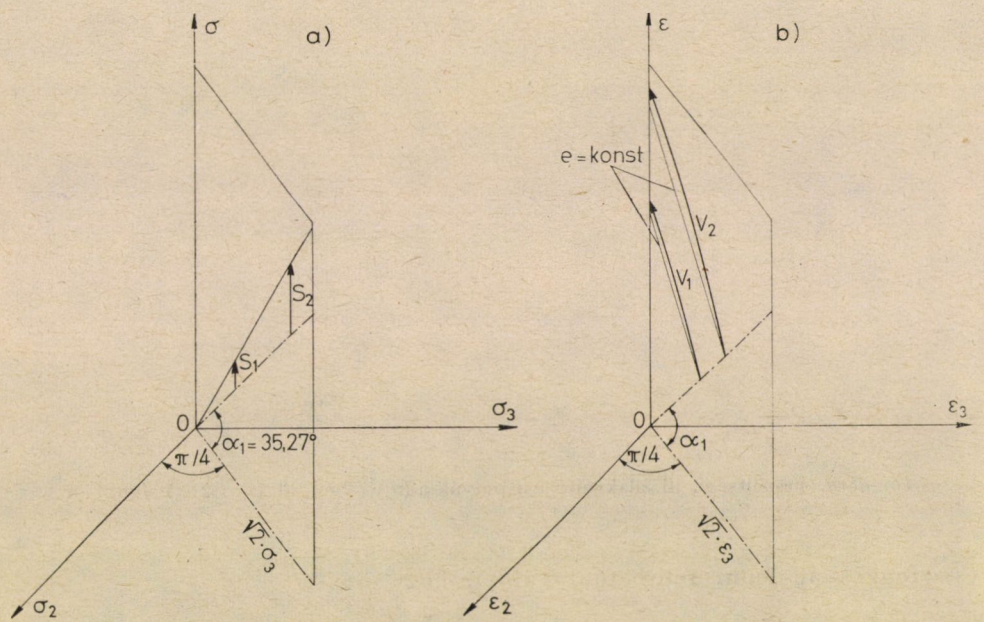
Számításokat végeztek a kettős réteg-taszítás és a van der Waals vonzás értékének a szemcsék közötti távolság függvényében való meghatározására. Ha ismerjük az agyag fajlagos felületét s az agyag ásványi fázisához tartozó víztartalmat, s a víztartalom és a szemcsék közötti távolság összefüggését lineárisnak vesszük, akkor az agyag-víz rendszerben működő erők meghatározhatók. A mérési eredményekkel összevetve kitűnt, hogy ez a két erő hozza létre a teljes feszültség függvényében kifejezett kohéziós komponenst. A húzószilárdság a van der Waals vonzás következménye.

A részecskék közötti erők meghatározása természetes agyagokban lehetőséget ad az agyag külső fajlagos felületének és a szilárd fázisú víz mennyiségének meghatározására [10]. Ha egy meghatározott vízgőznyomás mellett meghatározzuk az adszorbeált víz mennyiségét, ebből kiszámítható a külső fajlagos felület, a teljes agyagásványtartalom, a montmorillonit + vermikulit-tartalom, és az agyag duzzadóképessége. Az agyagtartalom és a külső fajlagos felület összefügg az agyag víztartalmával és folyási határával.

DR. PREGL, O., BÉCS:

A triaxiális nyomókísérlet során a mintára az első fázisban σ_3 hidrosztatikus nyomás hat; majd a 2. fázisban a $(\sigma_1 - \sigma_3)$ deviátorfeszültséget törésig

növeljük. A kísérlet során mért fizikai mennyiségeket diagramokban ábrázoljuk: megadjuk a függőleges fajlagos összenyomódást és a térfogatváltozást, ill. a hézagtényezőt a deviátorfeszültség függvényében. Ha a feszültség-alakváltozás összefüggést általános formában akarjuk kifejezni, akkor a főfeszültségek kordinátarendszerében a feszültségi pályákat, a főnyúlások



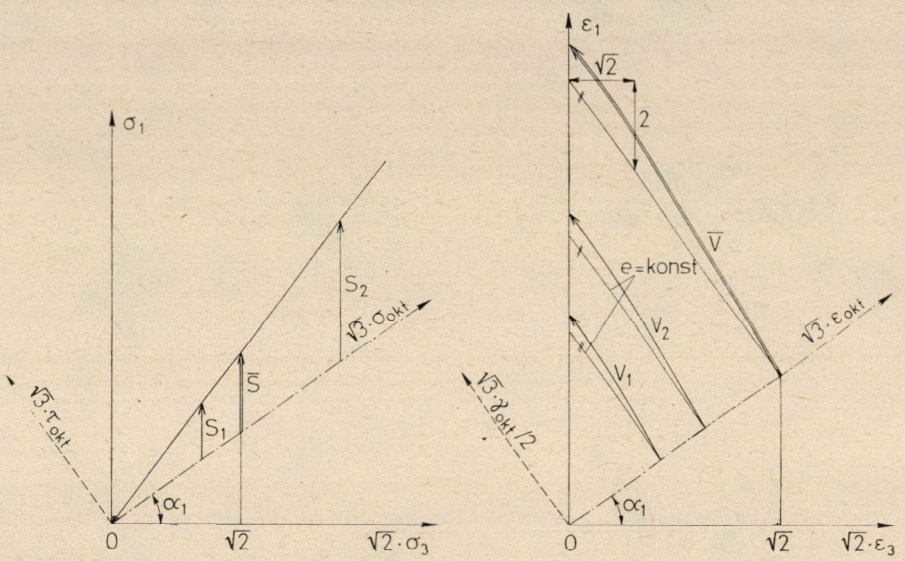
15. ábra. Feszültségi — ill. alakváltozási pályák a főfeszültségek, ill. a főnyúlások koordináta rendszerében

koordinátarendszerében az alakváltozási pályákat kell ábrázolni (15. ábra). Minthogy mind a feszültségi, mint az alakváltozási állapot tengelyszimmetrikus, vagyis $\sigma_2 = \sigma_3$ és $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, a feszültségi pályák a $(\sqrt{2}\,\sigma_3, \sigma_1)$, az alakváltozási pályák a $(\sqrt{2}\,\varepsilon_3, \varepsilon_1)$ síkban vannak. A görbe alakváltozási pályák mentén, konszolidált gyors kísérlet esetében, a hézagtényező állandó.

Az ábrázolás alapján az oktaéderes normál- és nyírófeszültség, valamint a megfelelő alakváltozás is kiszámítható (16. ábra). Egy adott tartományban a feszültségi ill. alakváltozási pályák hasonlóak egymáshoz. Ezért, ha a feszültségeket a $\sigma_3 = \sigma_{\text{okt. 1}}$, s az alakváltozásokat az $s_1' = \varepsilon_{\text{okt, 1}}$ egyenletes nyúlásra (1. fázis) vonatkoztatjuk, akkor minden feszültségi ill. alakváltozási pálya a kettős vonallal rajzolt $\bar{S}$ és $\bar{V}$ vonalba megy át. A feszültségeket ill. az alakváltozásokat tehát az 1. fázisban fellépő oktaéderes normálfeszültségre, ill. az 1. fázisban fellépő oktaéderes nyúlásra vonatkoztatjuk.

A feszültségek és alakváltozások között a hidrosztatikus feszültségállapotban az

$$\varepsilon_{\text{okt.},1} = f_1(\sigma_{\text{okt},1}) \tag{4}$$



16. ábra. Feszültségi, ill. alakváltozási pályák a (σ_1, $\sqrt{2}\sigma_3$), ill. (ε_1, $\sqrt{2}\,\varepsilon_3$) síkokban

összefüggés áll fenn, felírható továbbá, hogy

$$\bar{\varepsilon}_{\text{okt.}} = f_2(\bar{\tau}_{\text{okt.}}), \tag{5}$$

$$\gamma_{\text{okt.}}/2 = f_3(\tau_{\text{okt}}) \tag{6}$$

Konszolidált kísérlet esetében a

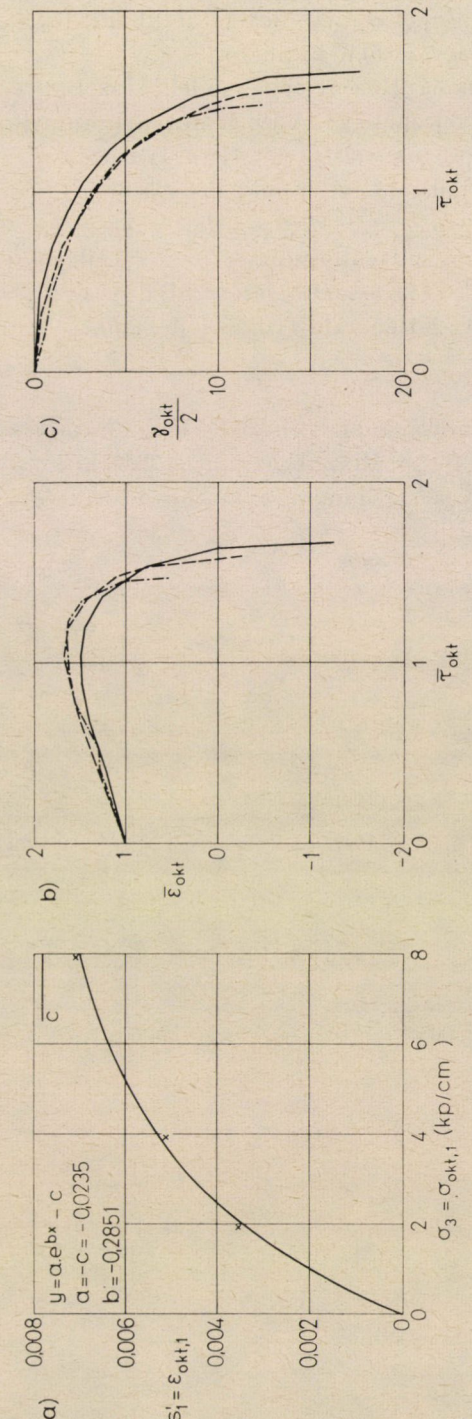
$$\bar{\sigma}_{\text{okt.}} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \bar{\tau}_{\text{okt.}}$$

összefüggés érvényes.

Konszolidált kísérletben tehát a feszültségek és alakváltozások összefüggése három függvénnyel írható le; egy példát a 17. ábra mutat be.

A (4) összefüggés (17. a. ábra) egy exponenciális függvénnyel írható le.

Talajtömegek törési állapotának vizsgálatához elegendő a nyírószilárdság ismerete. A törési határállapotot vagy a deviátorfeszültség legnagyobb értéke, vagy 10%-os fajlagos összenyomódás alapján határozhatjuk meg. A törési határállapotot a (σ_1, σ_3) főfeszültségi koordinátasíkban ábrázolva, a több kísérlet alapján behúzott kiegyenlítő vonal (18. ábra) megadja a Coulomb-



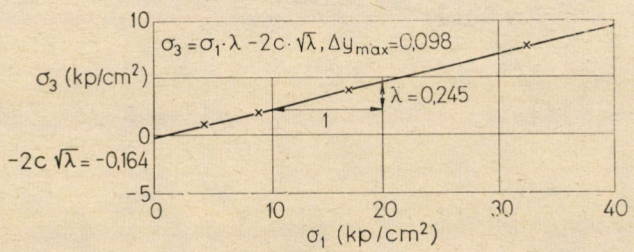
17. ábra. a — példa a (4), b — az (5) és c — a (6) egyenletre

féle törési egyenest, a $\sigma_3 = \sigma_1 \lambda_a - 2c\sqrt{\lambda_a}$ alakban; ($\lambda_a = \tan^2(\pi/4 - \Phi/2)$, ennek alapján Φ és c egyszerűen kapható.

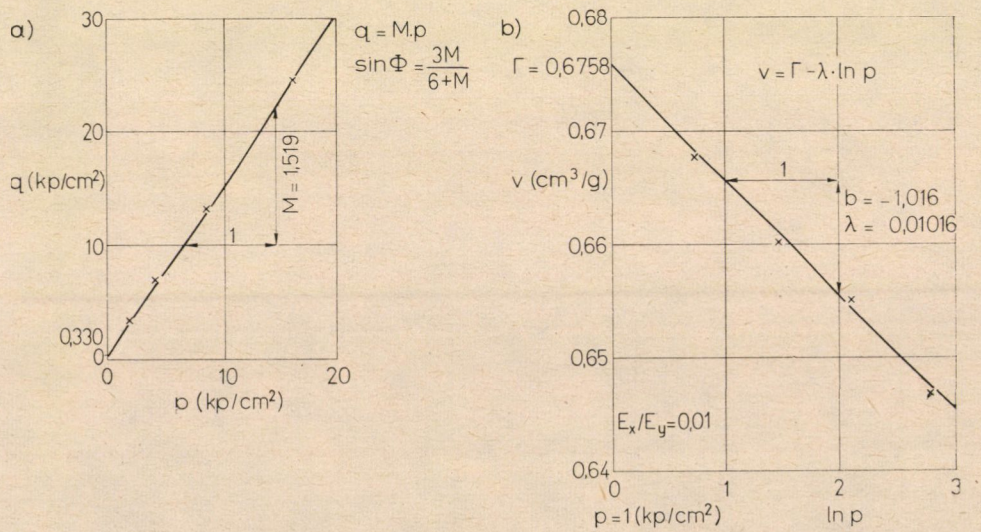
A cambridge-i iskola Roscoe-féle modellje szerint egy talaj kritikus állapota két egyenlettel fejezhető ki. A 19. a. ábra azt mutatja, hogy a deviátorfeszültség q és a középső normálfeszültség p között a $q = Mp$ összefüggés áll fenn, ahol M talajállandó. A Coulomb-egyenessel való összehasonlítás alapján felírható, hogy $\sin \Phi = 3M/(6 + M)$. A másik összefüggés a kritikus állapot esetére az átlagos normálfeszültség és a v fajlagos térfogat (a száraz térfogatsúly reciprok értéke) összefüggését adja, a $v = \Gamma - \lambda \ln p$ alakban (19. b. ábra). Γ és λ itt szintén talajfizikai jellemzők.

FEDA, J., PRÁGA:

Talajok nyírószilárdságának kísérleti meghatározása során többször tapasztalható, hogy a törési állapothoz tartozó Mohr-körök burkolója nem ad teljes hosszban egyenest, hanem a kisebb feszültségek tartományában

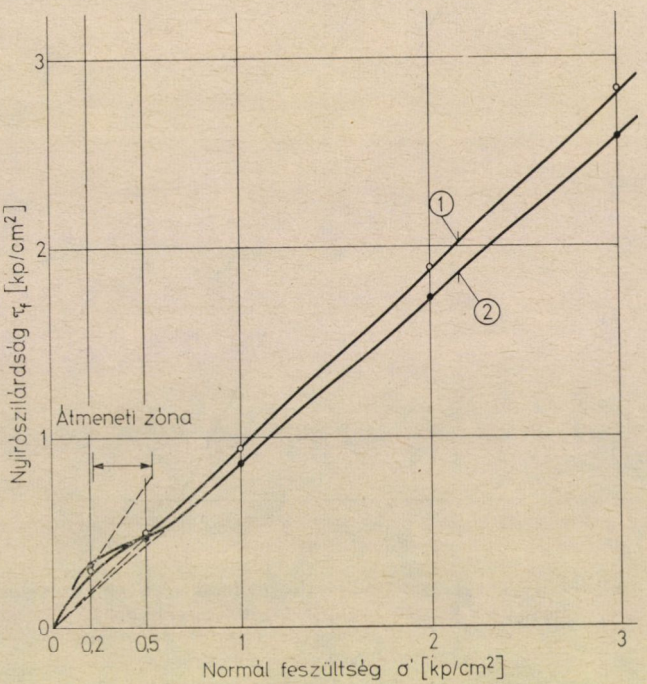


18. ábra. Coulomb-féle törési egyenes ábrázolása a (τ_1, τ_3) főfeszültségi síkban



19. ábra. Példa a kritikus állapot vonalának vetületeire, ROSCOE szerint

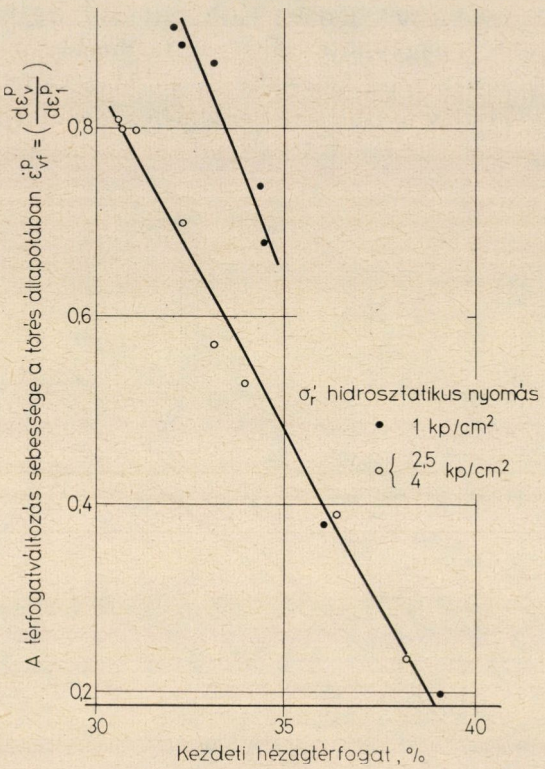
a vonal görbe, s itt érintőjének hajlása — a súrlódási szögként értelmezett mennyiség — nagyobb, a nagyobb feszültségek tartományában pedig kisebb. A két értéket egy átmeneti zóna köti össze. A 20. ábra kétféle száraz, tömör homokkal végzett közvetlen nyírókísérlet eredményeit mutatja; a Φ értéknek a feszültségtől függő volta a $\sigma < 0{,}5$ kp /cm²-nél kisebb normálfeszültségek



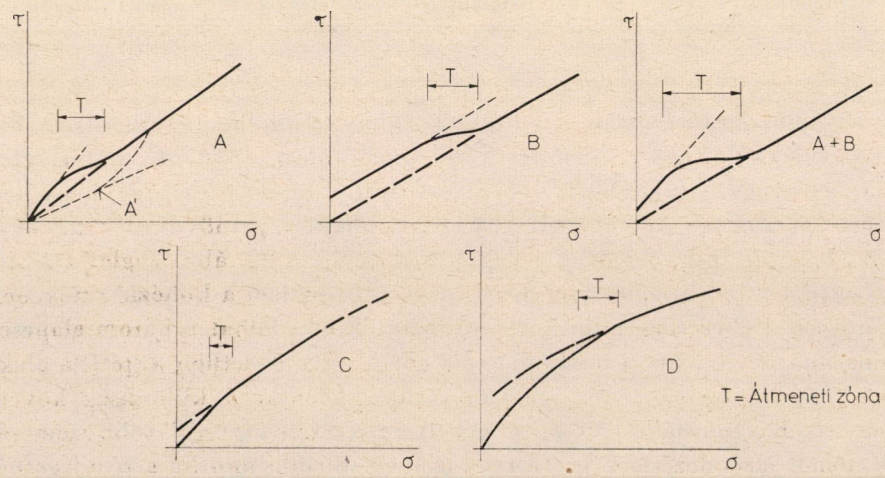
20. ábra. Homokkal végzett közvetlen nyírókísérletek eredményei. *1* — száraz „Zbraslav"-homok, $T_{re} = 0{,}97$; *2* — száraz „Zatec"-homok $T_{re} = 0{,}92$

tartományában határozottan jelentkezett. Az egyik homokkal, triaxiális nyomókészülékkel végzett kísérletekben meghatározható volt a térfogatváltozás sebessége is (21. ábra), s ez egyértelműen rámutatott arra, hogy a Φ értékében jelentkező különbségnek a nagyobb térfogatnövekedés az oka.

A Mohr-féle burkológörbe jellegzetes alakjait a 22. ábra foglalja össze. Az *A* esetre a Φ érték változása a jellemző, a *B*-esetben a kohézió értékében van változás, a *C* esetben mindkettő változik. Előfordulhat e három alapeset kombinációja is, és lehet a burkoló végig görbe. Az *A*-esetben a kétféle alakváltozási mechanizmus a térfogatváltozásban jelentkező különbség következménye is. Kis normálfeszültségek mellett a „*szerkezeti egység*" több szemcséből áll, tömör elrendezésben, így a talaj úgy viselkedik, mintha a ténylegesnél jóval durvább szemcsékből állna, és ezért azután a térfogatváltozás nagyobb



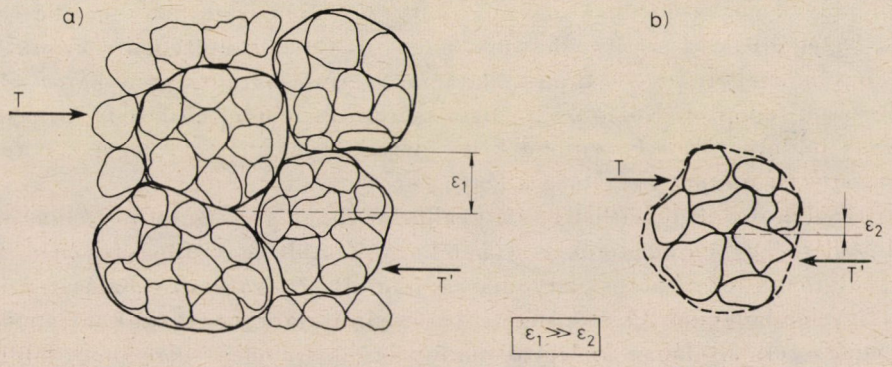
21. ábra. „Zbraslav" homokkal végzett triaxiális nyomókísérletek: a térfogatváltozás sebessége a kezdeti hézagtérfogat függvényében



22. ábra. A Coulomb-féle törési burkoló kezdeti szakaszának különböző alakjai

lesz. (23. ábra). Nagy normálfeszültségek mellett viszont az eredeti szemcsenagyság lesz mértékadó, és így a törés során létrejönni kényszerülő térfogatnövekedés, és ezzel együtt a nyírószilárdsági Φ paraméter is kisebb lesz.

A *B*-típusú burkoló akkor jelentkezik, ha a talaj szerkezeti egységei között jelentkező cementáló kötések a nagyobb feszültségek tartományában



23. ábra. A szerkezeti egység nagyságának hatása a nyírás során fellépő térfogatváltozásra

tönkremennek. Az $A + B$ típus túlkonszolidált agyagok esetében adódik. *C*-típusú burkolót repedezett agyagok vagy repedezett szilárd kőzetek esetében kapunk.

A bemutatott Mohr-féle burkolók tehát arra mutatnak, hogy a normálfeszültségtől függően az egyes tartományokban *eltérő alakváltozási mechanizmusok* érvényesülnek; e tartományokat átmeneti zónák kapcsolják össze. Az átmeneti zóna viszonylag szűk; de a mérnöki problémákban jelentkező feszültségek több tartományra is kiterjedhetnek. A gyakorlati számítások azonban az egész feszültségi tartományban szükségszerűen egyféle deformációs mechanizmust tételeznek fel, s így alkalmazási tartományuk eléggé szűk.

A belső súrlódási szög értékét az alakváltozások-térfogatváltozások figyelembevételével vizsgálva kimutatható, hogy csak a súrlódási szög Φ_r végértéke talajfizikai jellemző, a $\Phi - \Phi_r$ különbséget a térfogatváltozás okozza.

2. szekció. Földművek és útalapok

MARKÓ IVÁN FŐELŐADÓ:

Földművek esetében ugyanúgy, mint bármely más építménynél, két alapvető műszaki követelményt kell a tervezés és a kivitel során kielégítenünk:

1. a földműnek biztonsággal kell rendelkeznie *töréssel* szemben, és
2. a fellépő *alakváltozások*nak nem szabad elérniök olyan értéket, amely a földmű rendeltetésszerű használatát akadályozza.

Földművek törését és alakváltozásait általában igen összetett erő- és hatásrendszer hozza létre; a közvetlen terhelésen és az önsúlyon kívül jelentkezik a víz számos különböző hatása, továbbá a hőmérséklet és egyéb klímahatások: amellett építőanyaguk, a talaj szintén rendkívül összetett, a különböző hatásokra változatosan reagál, s tulajdonságai térben és időben eléggé változnak. E két körülmény egyelőre csaknem lehetetlenné teszi, hogy a földművek várható alakváltozásait a tervezés során számítással meghatározzuk, legfeljebb arra szorítkozhatunk, hogy pl. töltések esetében előírunk egy olyan tömörséget, amely tapasztalataink szerint meggátolja a káros alakváltozások felléptét. Különben pedig a méretezés mindig csak arra törekszik, hogy a földmű töréssel szemben kellő biztonsággal állékony legyen; e téren tehát a *törési állapot* vizsgálata a lényeges.

Kialakultnak tekinthető az a gyakorlat, hogy a vizsgálathoz felhasznált nyírószilárdsági paramétereket a hatékony feszültségek függvényében kell meghatározni, és a pórusvíznyomás, valamint a vízáramlás hatását külön kell figyelembe venni. A biztonsági tényező számítására vonatkozó konvencionális módszerek általában kielégítő pontosságúak, mindenesetre pontosabbak, mint amilyen pontosság elérését a nyílószilárdság meghatározásában egyáltalán elérhetünk. A fejlődés lehetősége itt elsősorban ott jelentkezik, hogy miként tudjuk figyelembe venni és számítással követni a törésmechanizmust akkor, amikor a törés, a csúszás nem hengeres csúszólap mentén következik be. Ez az eset akkor forog fenn, amikor a rézsű talaja rétegezett, vagy altalaja a rézsű anyagánál gyengébb, ha egyes rétegekben kedvezőtlen pórusvíznyomások lépnek fel és így tovább. Ha sikerül a valóságos geológiai viszonyoknak megfelelően felvenni a törési képet és a törési mechanizmust, akkor a vizsgálat számszerű eredménye — attól függően természetesen, hogy a nyírószilárdsági paramétereket helyesen állapítottuk-e meg — közel lesz a valósághoz.

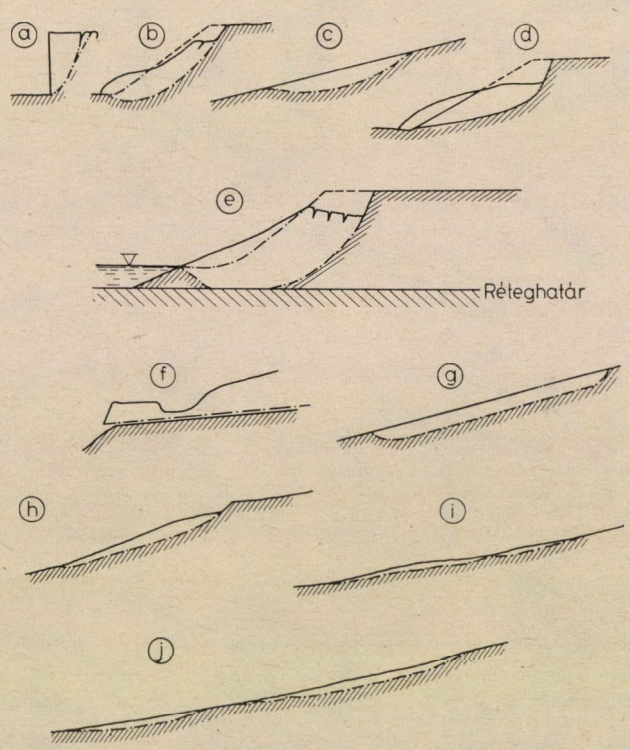
Ebben a vonatkozásban érdemes felidézni SKEMPTON-nak a VII. Nemzetközi Talajmechanikai Konferencián tartott főelőadói jelentéséből (11) két ábrát (24. és 25. ábra), amelyekben az egyszerű és összetett felszíni mozgások legfontosabb változatait, módjait tüntette fel. Viszonylag kevés az a típus, ahol megbízható számítási módszer áll rendelkezésünkre.

A körcsúszólappal nem kezelhető felszínmozgási esetek számszerű statisztikai vizsgálatára számos példát mutatott be talajmechanikai kézikönyvében (12) KÉZDI (1970); a javasolt eljárások közül több már gyakorlati kipróbálásra is került. Egy ilyen összetett vizsgálatra a 26. ábra mutat KÉZDI újabb anyagából példát; azt kellett eldönteni, hogy egy, a külszíni szénfejtéssel kapcsolatban létesítendő hányó állékonyságát a hányóban bekövetkező hengeres felületen való csúszás, vagy pedig alaptörés fenyegeti-e.

A feltüntetett csúszólapok feltételezése mellett, a súrlódási tényező és a kohézió egységnyi biztonsági tényezőt szolgáltató összefüggő értékeit

mutatja az ábra: kitűnt, hogy a legkisebb biztonsági tényezőt a 2. jelű csúszólap esetében kapjuk.

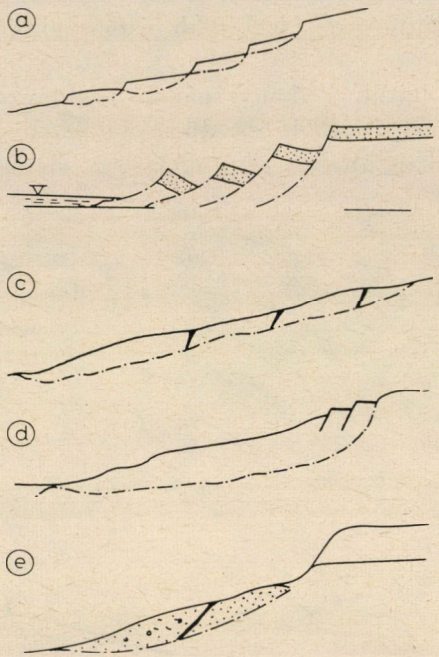
A természetes lejtők állékonyságának meghatározása általában nehézségekbe ütközik, mivel nagyobb összefüggő területen az altalaj-viszonyok és a talajvíz áramlások szabatos, pontos és egyértelmű feltárása gazdasági



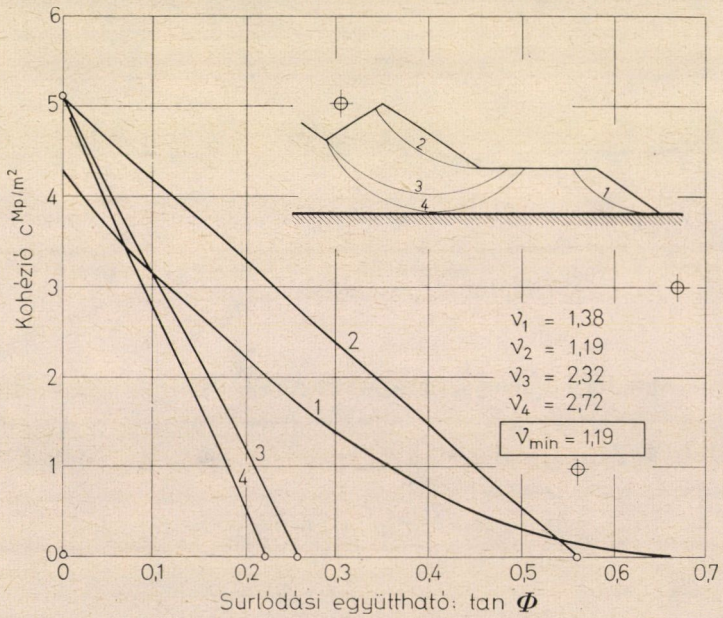
24. ábra. Agyagos lejtők mozgásának főbb típusai. *a* — függőleges földfal rogyása: *b* — hengeres suvadás: *c* — kagylósodás: *d* — deformálódott körhenger, mint csúszólap: *e* — réteghatáron kialakult csúszólap: *f* — tömbcsúszás: *g* — lemezes csúszás: *i* — hosszan elnyúló iszapfolyás: *j* — rétegszakadások

okokból nem mindig lehetséges. Ennek következtében az egzakt állékonysági számítások végrehajtására nincs mód. Ilyenkor jó hasznát vehetjük a PREGL által ajánlott közelítő módszernek [13], amely bizonyos feltételezett körülmények közepette a lejtővel párhuzamos csúszófelületek esetére érvényes, vagyis ez az eljárás is egy lépés a nem körhengeres felszínmozgások stabilitási vizsgálatainak gazdagításában.

Az állékonysági vizsgálatok mellett azonban egyre inkább tért nyernek az *alakváltozási* vizsgálatok is, azoknak a nehézségeknek ellenére, amelyeket a bevezetőben vázoltunk. Elsősorban a *kúszás* jelenségét kísérik a kutatók

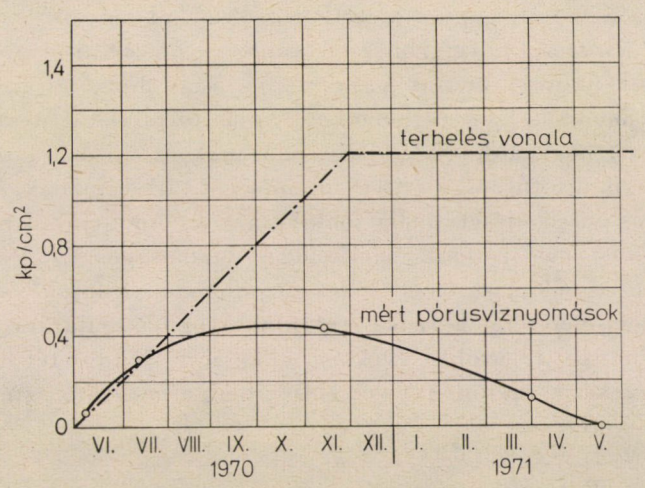


25. ábra. Többszörös és összetett mozgástípusok. *a* — egymás után bekövetkezett suvadások: *b* — ismétlődő suvadások: *c* — omlásos földfolyás: *d* — suvadás és csúszás: *e* — törmelék-lejtőben keletkezett másodlagos csúszólap



26. ábra. Diagram egy külszini szénfejtéssel kapcsolatban létesített hányó biztonsági tényezőjének számítására különböző csúszólapok feltételezése mellett

egyre nagyobb érdeklődéssel. Voltaképpen minden rézsű végez lassú alakváltozást, ez azonban a legtöbb esetben annyira lassú, hogy gyakorlatilag észrevehetetlen. Vannak azoban esetek, amikor a mozgás sebessége idővel növekszik, és ez végül töréshez vezet; ilyen esetben a helyszíni méréseknek jut nagy szerep a veszély időben való felismerésében. A lassú alakváltozások elméleti



27. ábra. A pórusvíznyomások mért értékei külszini fejtés hányója alatti földtömegben, ha a hányóképzés a vizsgálat függőlegesén egyenletes sebességgel halad túl

és kísérleti vizsgálata terén SUKLJE professzornak vannak jelentős érdemei: könyvében részletes útmutatást ad e jelenség vizsgálatához [14].

Örömmel kell regisztrálnunk azt, hogy a közeljövőben megkezdődik *Magyarország* felszínmozgások szempontjából veszélyes területeinek komplex feltárása és kataszterbe foglalása; a *Központi Földtani Hivatal* megbízásából jelentős kutatói kollektíva foglalkozik a kérdéssel.

A rézsűállékonysági vizsgálatok terén külön csoportot alkot az *árvédelmi töltések* stabilitásának vizsgálata: ezzel a kérdéssel a hozzászólások foglalkoznak.

Itt említjük meg, hogy a *külszíni szénfejtés* számos talajmechanikai — rézsűállékonysági kérdésével évek óta foglalkozik a *Budapesti Műszaki Egyetem Geotechnikai Tanszéke*: számos új vizsgálati módszer került kidolgozásra. Részletes vizsgálat alá vették a közvetlen visszatöltéses technológia talajmechanikai vonatkozásait, a hányók állékonysági kérdéseit. Megindult a helyszíni pórusvíznyomásmérés is: egy érdekes eredmény a 27. ábrán látható. Az ábra azoknak a pórusvíznyomásoknak időbeli változását tünteti fel, amelyek egy hányó altalajában lépnek fel, miközben a hányó túlhaladt a pont függőlegesén.

Földművek építése gyakran kapcsolódik támasztószerkezetek, támfalak, rézsűburkolatok létesítéséhez. A megtámasztó szerkezetre ható földnyomás meghatározása a mélyépítés régi problémája.

A földnyomás vizsgálata — mint KÉZDI megállapította — évszázadokon át a támfalakra működő erők meghatározását jelentette, a fogalom kiterjesztése újabb keletű. De maga a támfal-probléma is élő, lényeges feladat még ma is, amit az is mutat, hogy sok esetben kell foglalkoznunk bedőlt támfalak vizsgálatával. Érdemes felfigyelni arra, amit egy amerikai statisztika mutat: a feldőlt, kibillent támfalaknak vagy alapja, vagy háttöltése, vagy mind a kettő *agyag*: homokon álló és homokot támasztó falakkal nem történt baj. Ez arra mutat, hogy a homok földnyomásának számítására szolgáló módszereink valószínűleg túl nagy rejtett biztonságot tartalmaznak, így gazdaságtalanok; agyag viselkedését pedig földnyomás szempontjából nem ismerjük eléggé, számítási módszereink nem eléggé biztonságosak. A biztonság és gazdaságosság egyidejű kielégítéséhez azonban a talajok viselkedésének pontosabb megismerésére, a fizikai tulajdonságok vizsgálatára van szükség. Ez a kutatómunka az utóbbi években világszerte lendületet vett: a hazai kutatás is igyekszik eredményeivel elősegíteni a megtámasztó szerkezetek gazdaságos méretezését.

GÁSPÁR LÁSZLÓ KORREFERENS:

Az útpályaszerkezetek állékonysága és gazdaságossága — a forgalom függvényében szükséges aszfalt vagy betonburkolat mellett — jelentős mértékben függ a burkolatalapok szakszerű kialakításától.

A pályaszerkezetek tervezéséhez legújabban több ország — a várható forgalom és a helyi adottságok függvényében — különböző felépítésű *típuspályaszerkezetek* katalógusát állítja ösze.

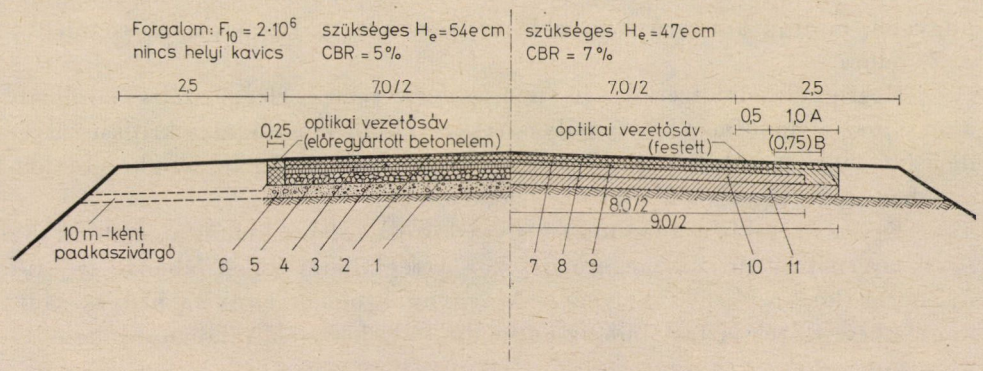
Az új magyar utasítás méretesési diagramja lényegében megegyezik az amerikai *Asphalt Institute* 1969. évi zdiagramjával. Ez főleg a nagyon könnyű, könnyű és közepes forgalmi osztályban lényegesen vastagabb pályaszerkezetet ad, mint az 1965. évi első magyar utasítás. A diagram a nehéz és nagyon nehéz forgalmú osztályban szabályozza a melegen kevert aszfaltrétegek szükséges legkisebb vastagságát is. A pályaszerkezetek tervezési irányelveiben típuspályaszerkezetek is szerepelnek.

A pályaszerkezet terve előírja a kész pályán és a burkolatalap felületén megengedhető behajlást, valamint az úttükör szükséges teherbírását. Az utóbbit tárcsás vizsgálattal vagy a nálunk kidolgozott tárcsás behajlásméréssel rendszeresen ellenőrizzük.

Fővárosunk — főleg a forgalmas utakon — kedvező tapasztalatokat szerzett a tárcsás vizsgálatnak és a behajlásmérésnek az autóbuszmérőkocsi belsejéből való végzésével, amint arról a Konferencia anyagában GOMBKÖTŐ Miklós tanulmánya [15] részletesen és szakszerűen beszámolt.

Újabban számos országban kezdenek elterjedni a teherbírás vizsgálatának dinamikus módszerei is.

A régebbi zúzottkőalapokat fokozatosan kiszorítják a kötőanyagos keverékek: egyrészt a meleg bitumenes alapok és a sovány betonok, másrészt pedig a kötőanyagokkal stabilizált talajok. Ezek műszaki és gazdasági szem-



28. ábra. Nehéz forgalmú út hagyományos keskenyebb (*a*) és korszerű, szélesebb (*b*) pályaszerkezeteinek összehasonlítása.

1. — AB-12, 3 cm × 2,2 = 6,6 ccm
2. — K-70, 4 cm × 2,2 = 8,8 ccm
3. — U-35, 5 cm × 1,0 = 7,0 ccm
4. — It- 7, 7 cm × 1,0 = 7,0 ccm
5. — 7 65/100
   20 cm × 0,7 = 14,0 ccm
6. — Hom. kav.
   18 cm × 0,5 = 9,0 ccm

   Σ' 57 cm He = 54,4 ccm
7. — AB-12, 3 cm × 2,2 = 6,6 ccm
8. — K-20, 4 cm × 2,2 = 8,8 ccm
9. — U-35, 5 cm × 1,8 = 9,0 ccm
10. — Cem. stab.
    iszap 14 cm × 1,0 = 14,0 ccm
11. — iszap 13 cm × 0,07 = 9,1 ccm

    Σ' 40 cm He = 47,5 ccm

A — 1,0 m széles gépben kevert cem. stab. iszap, 4 cm jav. U-35 lezárással
B — 0,75 m széles gépben kevert stab. fel. bevonás — zárással

pontból egyaránt kedvezőbbek a hézagos zúzottkőrétegeknél, mert utólag nem tömörödnek, a vizet nem engedik át és terhelosztó hatásuk, vagyis egyenérték-tényezőjük nagyobb, továbbá gyakran helyi anyagok felhasználásával gazdaságosan és jól gépesítve építhetők meg.

Újabban — főleg Franciaországban — előnyösen alkalmazzák a viszonylag lassabban kötő és kevésbé merev granulált kohósalakköves kavicsot és homokot, valamint a hideg és nedves időben készíthető bitumen-emulziós kavicsot.

Magyarországon újabban előnyben részesítjük a szélesebb aszfaltburkolatot, azon felfestett vezetősávot és a padka megerősítését. A munkaigényes szegély-fektetés helyett a pályaszerkezet alsó — rendszerint stabilizált —

rétegei szélesebbre épülnek és kizárják a földmű felülről történő elnedvesedését. A jól víztelenített korszerű széles pályaszerkezet alatt rendszerint biztosítható a földmű 7%-os CBR-értékű tervezési teherbírása. Ezzel szemben a hagyományos keskenyebb, szegélyezett zúzottkő alapú pályaszerkezeteket csak 5%-os CBR-értékű teherbírásra lehet tervezni. Gazdasági összehasonlítás szerint az utóbbi keskenyebb pályaszerkezet építési költsége kb. 20%-kal nagyobb, mint a korszerű szélesebb pályaszerkezeté. Ilyen példát szemléltet a 28. ábra.

Megfigyeléseink szerint a jó minőségben készült és eléggé széles stabilizált alap a megfelelően méretezett pályaszerkezetek állékonyságát a kritikus olvadási időszakban is biztosítja. A hagyományos felépítésű pályaszerkezetekben azonban gyakran olvadási károk keletkeznek.

Egyes esetekben állandóan nedves kötött talajra kell utat építeni. Az egyik árvédelmi gátunk megerősítésekor a régi töltés külső lábánál az utat új agyag-töltésre kellett helyezni. Az agyag azonban annyira nedves volt, hogy a kész töltés víztartalma az optimális 15% helyett általában meghaladta a 30%-ot.

Az eredeti terv az aszfaltbetonburkolat és a meleg bitumenes alap alatt 20 cm durva zúzottkőalapot és 20 cm vastag homokos kavicsréteget irányzott elő. A nedves töltés miatt ezt a két alsó réteget a következő felépítésű szerkezettel helyettesítettük:

— az agyagföldmű felső legnedvesebb részeinek meszes kezelése;
— 15 cm vastag cementtel stabilizált iszapos finom homokréteg, telepen keverve és vibrátorral tömörítve;
— 15 cm vastag sovány betonalap.

A betonalapon a behajlás (az 5 tonnás kerék alatt) 0,4 ÷ 0,5 mm-nél nem volt nagyobb. A kész pályaszerkezet az út nehéz forgalmát már második éve kedvezően viseli.

A helyi talajok stabilizálása — megfelelő szervezés esetében — nagyon termelékenynek és gazdaságosnak bizonyult.

HERZOG HENRIK:

Földgátak és árvédelmi töltések kérdéseivel kapcsolatban először azokat a követelményeket kell megvizsgálni, amelyeket a homogén gát építőanyagának ki kell elégítenie. A gát anyagának megfelelő vízzáróképességgel és telített állapotban is megfelelő szilárdsággal kell rendelkeznie. Ismeretes, hogy e kettős követelmény természetes talajokkal általában nehezen, csak bizonyos — aránylag szűk — határok között elégíthető ki. Azok a talajféleségek, melyek mindkét feltételt egyaránt kielégítik, a durvaszemcsés és a nagy plaszticitású talajok közötti átmenetben keresendők.

A mindkét szempontból megfelelő — tehát homogén gát építésére alkalmas — talajok szemeloszlási tartományának szélességére természetesen

a vízmagasság, a rézsűhajlások, valamint az átszivárgó víz tűrhető mennyisége is kihat. Minél merészebbek a gátméretek, minél magasabb a tartandó vízmagasság, annál nagyobb szilárdságra, minél fontosabb szerepet játszik az átszivárgó vízmennyiség, annál kisebb vízvezetőképességre van szükség.

Ha nem áll rendelkezésre olyan építőanyag, amely a két követelményt — gazdaságos méretek mellett — egyaránt kielégíti, le kell mondani a homogén szerkezetről; *összetett gátszerkezetet* kell építeni. A magyarországi adottságokra az jellemző, hogy általában a vízzáró anyagok beszerzése a könnyebb, a vízáteresztő durvaszemcsés anyagok biztosítása a körülményesebb, költségesebb.

Kérdés: mennyiben tekinthetők a „homogén" gátak szivárgás tekintetében is izotrópnak, a bennük létrejövő szivárgások milyen megbízhatósággal írhatók le a homogén gátakra vonatkozó elméletekkel. Kizárólag a tapasztalatokra támaszkodva általános érvényű egyértelmű válasz erre a kérdésre aligha adható, mert a tünetek — melyekből következtetni lehet — sok esetben ellentmondóak. Talán elegendő utalni azokra az azonos méretű és látszólag azonos anyagú árvédelmi gátszakaszokra, melyek helyenként kifogástalanul, helyenként csak intenzív védelmi beavatkozás mellett látják el feladatukat. Miből erednek ezek az anomáliák?

A szivárgást jellemző ún. szivárgási görbe meghatározásával számos kutató foglalkozott, akik ha különböző módon is, de közel azonos eredményekre jutottak. Az eredmények egyezéséből, valamint abból a tényből, hogy a különböző egyenletekben a gátanyag szivárgási tényezője nem szerepel, téves volna arra következtetni, hogy ezek az elméletek akkor is érvényesek, ha a gát építőanyagának minőségére és állapotára vonatkozó feltételeket csak igen tág határok között szabjuk meg. Az elméletek ui. csak olyan *homogén izotróp* anyagra vonatkoznak, melyben a szivárgás a gravitációs potenciálos áramlás törvényeit követi. Ennek első feltétele a gátanyag homogén izotróp volta, a gyakorlatban alig teljesíthető kritérium. Ismeretes, hogy *szemcsés talajok szivárgási tényezője* nagymértékben függ a bennük levő finom frakció arányától. Nagy szerepet játszhat a tömörség is, a Koženy-féle képletben a hézagtényező a köbön szerepel. Ha mindezekkel számolunk, könnyen kimutatható, hogy a homogenitás tekintetében viszonylag kedvező szemcsés anyagok esetében is *véletlen jelleggel* egy-két nagyságrendnyi anizotrópia is előfordulhat. Attól függően, hogy a jobban vagy kevésbé vízvezető tartományok hogyan helyezkednek el a gát szelvényében, torzul a szivárgási görbe.

Elkerülhetetlenül anizotrópiát okoz a *rétegenkénti beépítés* is. Ha az egyes rétegeket a vízoldal felé ejtjük — a véleményünk szerint felülvizsgálandó hagyománynak megfelelően —, akkor a szivárgási görbe megemelkedik; az alvíz felé ejtett rétegekkel a szivárgási görbét leszorítjuk. Minél vastagabb rétegekben épül a gát, annál inkább érvényesül a rétegek lejtéséből származó

anizotrópia. Ha a „homogén" gátba, a fejtett anyag minőségének ingadozása folytán szeszélyesen elhelyezkedő vízzáróbb és vízvezetőbb lencsék épülnek be, a szivárgási görbe torzulása kiszámíthatatlan lesz.

A bemutatott anomáliák érvényesülése annál valószínűbb, minél terjedelmesebb a gát, minél nagyobb a beépített tömeg, minél tágabb határok között ingadozik az építőanyag minősége.

A *kohéziós talajból* épített homogén gát szivárgási viszonyait a már elmondottakon kívül, az elméleteknek másik — a gravitációs szivárgásra vonatkozó — feltételének kielégítetlensége is torzítja. Közismert, hogy az agyagokban létrejövő vízmozgást, a gravitáción kívül, az ásványi szemcsék és az adszorbeált víz közötti elektromos vonzás, kapilláris hatás, a talajszerkezet rendezettségi foka, stb. is nagymértékben befolyásolja. Tudjuk, hogy a tömörített agyagok áteresztőképessége a hézagtényezőn kívül a beépítési víztartalomnak, a tömörítés során elért telítettségi foknak is függvénye. Szabad szemmel is érzékelhető anizotrópiát okoz az ún. kéregképződés: azok a kiszáradt morzsalékos vékony rétegek, melyek munkaszünetek nyomaként még aránylag gondos kivitelezés esetén is létrejönnek. Mindezekből az következik, hogy kohéziós talajból épített gátakban a szivárgási anomáliák érvényesülése fokozottabb, az elméleti szivárgási görbe kialakulásával számítani gyakorlatilag nem lehet.

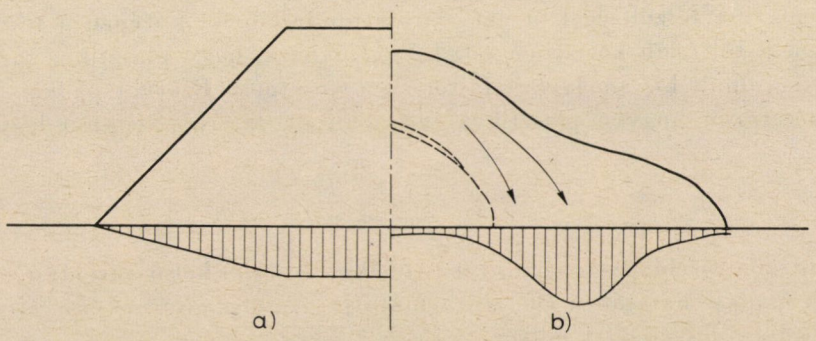
Összefoglalóan megállapítható, hogy a tervszerű szerkezet nélkül épített gátjaink *nem homogének*, hanem *véletlen jelleggel heterogének*, véletlen jelleggel *anizotrópok*. A véletlen jelleg mindennemű számítás, méretezés megbízhatóságát illuzórikussá teszi.

S ha most azt kérdezzük, hogy a ma építendő gátaknál hogyan lehet az ismertetett anomáliákat elkerülni, a válasz nyilván az lesz, hogy ki kell küszöbölni a véletlen jelleget. Egynemű anyagból épített gátak elkerülhetetlen anizotrópiáját „*irányítani*" kell, tervszerűen kell előállítani, mégpedig úgy, hogy az anizotrópiából előnyök és ne hátrányok származzanak.

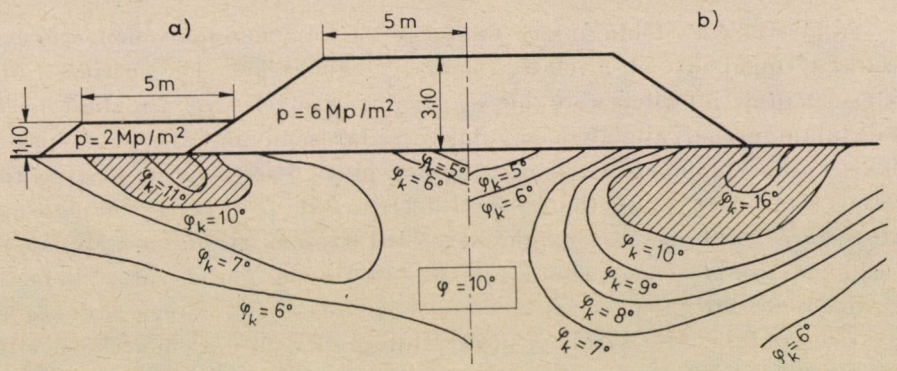
Ennek a tervszerű „irányított" anizotrópiának előállítása nem okoz különösebb nehézséget. Ha az építőanyag minősége egyenletes, elegendő a gát vízoldalát vékonyabb rétegekben, gondosabban tömöríteni, mint a mentett gátoldalt. Ha az építőanyag minősége tágabb határok között ingadozik, akkor a vízoldal és a mentett oldal tömörsége közötti különbségen kívül feltétlenül gondoskodni kell arról, hogy a vízoldalra kerüljenek a viszonylag vízzáróbb, a mentett oldalra a vízvezetőbb anyagok.

Tervszerű anizotrópiát biztosíthatunk természetesen célszerűen elhelyezett szivárgórétegekkel, szivárgótestekkel is, ezek a szerkezeti megoldások már átmenetet képeznek a szerkezetekhez, gátakhoz.

A meglevő — véletlen jelleggel heterogén — gátak anizotrópiáját tervszerűvé tenni, kedvező irányban befolyásolni már nehezebben megoldható feladat. Az egyik mód, és ez különösen akkor javasolható, ha a gát vízzáró-



29. ábra. Függőleges feszültségek eloszlása töltéstest alatt *a* — egyszerű feltételezés szerint, *b* — gyenge altalajon, az egyenlőtlen süllyedés miatt kialakuló boltozati hatás esetében



30. ábra. A φr kritikus szög értékei töltéstest alatt. *a* — padka esetén, *b* — padka nélkül

sága nem kielégítő, a gát belsejét, magját valamilyen módon utólagosan vízzáróbbá tenni.

Ha a meglevő gáton átszivárgó vízmennyiség nem számottevő, a véletlen anizotrópia csupán a mentett gátoldal állékonyságát veszélyezteti. Ekkor utólag beépített szivárgó elemek nyújthatnak megfelelő megoldást.

Az elmondottakat összefoglalva megállapítható, hogy a homogén gátak állékonyságát, terhelés alatti megbízható viselkedését csak úgy lehet biztosítani, ha az elkerülhetetlen anizotrópiájukat nem a véletlenre bízzuk, hanem tervszerűen irányítjuk.

STEFANOFF, G. (SZÓFIA):

Puha altalajon épült töltés stabilitását többnyire alaptörés veszélyezteti. Az alaptörés elleni biztonság *padkák* építésével növelhető. A padkák $\Phi = 0$ feltételezés mellett KÉZDI (1970) szerint méretezhetők.

Elképzelhető azonban egy más megoldás is. A gát alatti gyenge altalaj összenyomódása nem lesz egyenletes (29. ábra). A gát merevebb mint az altalaj, ezért az altalaj süllyedését nem tudja teljesen követni, és így a boltozat-

hatás miatt a feszültségek a gát alatt átrendeződnek, középen a feszültség csökken, a töltésláb közelében nő. Ez azt okozza, hogy plasztikus tartományok alakulnak ki, amelyek talajtöréshez vezetnek. Ezért a padkákat úgy kell méretezni, hogy e plasztikus tartományok kiterjedése kicsi legyen: a

$$\varphi_k = \arcsin \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_3 - 2c \cot \Phi}$$

kritikus szög kisebb legyen, mint a rendelkezésre álló belső súrlódási szög.

A padka hatását a 30. ábra mutatja. φ_k meghatározására MINKOFF (1971) analitikus eljárást dolgozott ki.

A két említett eljárás egymást kiegészíti.

LAZÁNYI ISTVÁN:

A mesterséges földmunkák minőségét a kész földmű tömörségével — a száraz térfogatsúly, ill. a relatív tömörség számértékeivel — *mérjük*. Ebben a felfogásban az jut kifejezésre, hogy a tömörség növelésével a földmű mechanikai tulajdonságai általában javulnak: szilárdsága nő, áteresztőképessége csökken, stb. Valójában azonban a kérdés jóval összetettebb, s egyre több megfigyelés mutat rá a tömörítéssel létrehozott szerkezeti tulajdonságok fontosságára. SEED és CHAN munkássága [16] nyomán pl. ma már általánosan elfogadott felismerés, hogy azonos értékű, de a Proctor-görbe száraz, ill. nedves oldalán tömörített anyagok viselkedése (szilárdsága, alakváltozása, duzzadása vagy zsugorodása, áteresztőképessége, stb.) egymástól nagymértékben eltérő lehet.

A BME Geotechnikai tanszékén e témában végzett kutatás eredményeiből két megállapodás emelendő ki.

Az első a tömörített talaj ún. másodlagos hézagtényezőjét definiálja. Ha rögös, nehezen aprítható talajt pl. hengerléssel tömörítünk, előfordul, hogy a 31. ábrán látható szerkezet jön létre. Beszélhetünk egy-egy homogén rög hézagtényezőjéről (elsődleges hézagtényező), ill. egy nagyobb talajtömb hézagtényezőjéről, amely a rögök közti nagyobb üregeket, hézagokat is magában foglalja (másodlagos hézagtényező). Ennek megfelelően kétféle talajmodellt állíthatunk fel (31. ábra; b. és c.,) különválasztva bennük a talajalkotó fázisokat: szilárd rész s, víz — v, levegő — l.

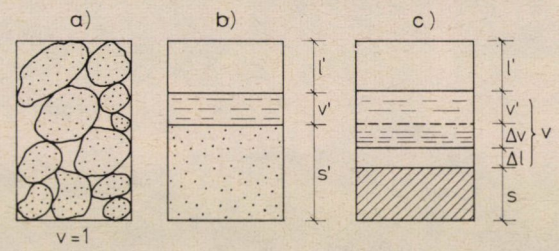
Összevetve a két modellt, a másodlagos hézagtényezőből származtatható különbség könnyen megállapítható, és azok gyakorlati számítására egyszerű képletek vezethetők le. A másodlagos porozitás mérőszámaként KÉZDI az

$$\eta = \frac{1 - s'}{1 - s}$$

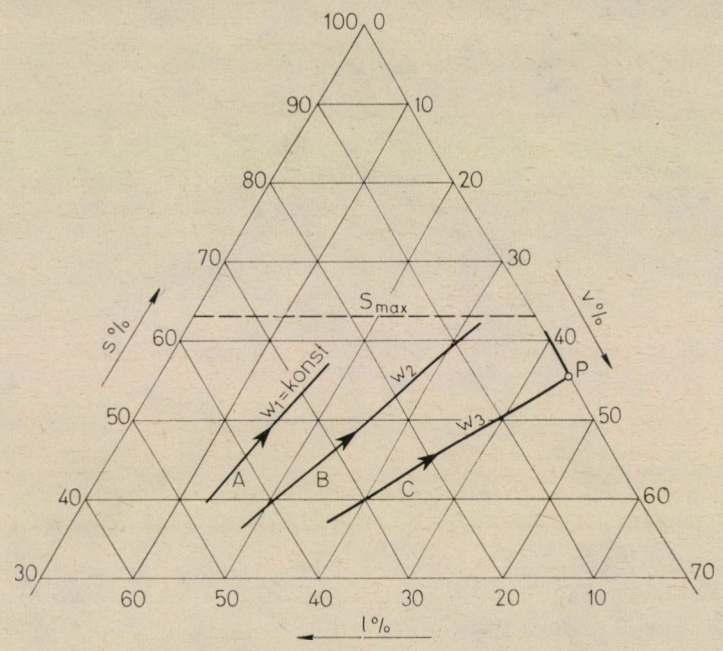
arányszámot vezette be. Ha ez 5%-nál nagyobb, akkor a talajfizikai tulajdonságok számottevő megváltozásával kell számolnunk.

E kérdés vizsgálatának különösen a víz hatásának kitett földművek (árvédelmi töltések és földgátak) szivárgási és állékonysági problémáiban, valamint külfejtési meddőhányók mozgásjelenségeinek tanulmányozásában van jelentősége.

Egy további megjegyzés a tömörítés mechanizmusával kapcsolatos. A tömörítés a talaj fázisos összetételének a mesterséges megváltoztatását jelenti. A folyamat háromszögdiagramban ábrázolható (32. ábra). A $w =$ konstans értéknél végzett tömörítést itt egyenesek (vektorok) írják le. Az A-vektor viszonylag száraz talajnak, a B vektor az optimális tömörítési víztartalom állapotának felel meg: a vektorok a fizikailag lehetséges legtömörebb állapot felé tartanak. A C vektor nedves talaj tömörítését írja le: a talaj telítetté válik, még mielőtt a maximális tömörséget elérhette volna (P). További



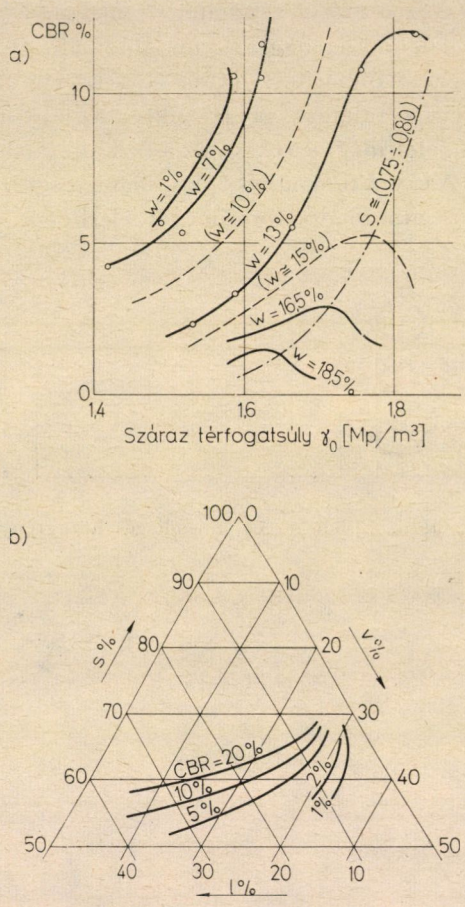
31. ábra. Elsődleges és másodlagos hézagtényező



32. ábra. A talaj fázisos összetételének változása a tömörítés során

tömörítés csak a fölös víz kisajtolásával érhető el, és így a tömörítés során a víztartalom (w) csökken.

Tapasztalat szerint a legnagyobb tömörség és a legkedvezőbb mechanikai-szilárdsági tulajdonságok nem szükségképpen esnek egybe. Ha pl. állandó



33. ábra. A talaj teherbírására jellemző CBR-érték *a* — a száraz térfogatsúly és *b* — a fázisos összetétel függvényében

víztartalmú talajt fokozódó mértékben tömörítünk, a teherbírás egyik mérőszáma, a *California Bearing Ratio*, a száraz térfogatsúly növekedésével egy ideig nő, majd hirtelen csökkenni kezd (33. ábra).

A látszólagos ellentmondás okát a tömörítés okozta fázisos állapotváltozásban kereshetjük. Döngöléssel tömörített mintákon 3 jellegzetes állapot különböztethető meg.

I. A *szabad háromfázisú* állapot, kis víztartalmak mellett. Ekkor az egyes fázisok relatív elmozdulásai szabadon létrejöhetnek. A tömörített talaj rugalmasan viselkedik.

II. A *kvázi-kétfázisú* állapot. A talaj ekkor még nem telített, de a levegő bezárt buborékok formájában van jelen. Ez az állapot kb. 0,70÷0,75 telítettségnél következik be. A talaj ekkor nagymértékben összenyomható folyadékok módjára viselkedik, és a pórusvíznyomás és póruslégnyomás szerepe megnő.

III. A *telített kétfázisú* állapot. A talaj ekkor összenyomhatatlan térfogatállandó anyagként írható le.

A felsoroltak közül különösen figyelmet érdemel a kvázi-kétfázisú állapot, amely magyarázatot ad talajok — különösen átmeneti talajok — gyors terhelés alatti viselkedésének sajátosságaira (tranziens képlékeny folyás, assú felpuhulás ismétlődő terhelések hatására, stb.).

E kérdések további vizsgálata főleg az útburkolatok alatti altalaj, valamint a lökésszerű ütőhatásnak, vagy ismétlődő terheknek kitett talajok viselkedésének megértését segítheti elő.

GYŐRY IMRE:

Az M-7 autópálya építése — mely a magyar útépítés történetében eddig a legnagyobb feladat volt — 8,5 millió m^3 föld megmozgatását kívánta meg. Ennek 60%-át kotróval, 40%-át földnyesővel termelték ki. A töltésbe beépített talajból a tömörség vizsgálatára 5100 mintát vettek ki. A megkövetelt tömörségi fok a betonburkolatú pályaszerkezet alatt a földmű felső 0,5 m

I. táblázat

Az M-7 autópálya földmunkája tömörségének adatai

Év	A vizsgált minták összes száma	Ebből nem felelt meg %	$T_{a\gamma}^{min} = 85\%$ alsó réteg		$T_a^{min} = 95\%$ ső réteg	
			összes minta	nem felelt meg	összes minta	nem fele t meg
1963—66	2236	21,6	1727	20,4	509	26,4
1967—71	2869	4,2	2345	2,8	524	10,7
Összesen	5105	11,7	4072	10,2	1039	18,5

vastag rétegében $T_{r\gamma} = 95\%$ volt, a mélyebben fekvő rétegekben pedig $T_{r\gamma} = 85\%$. A vizsgálatok eredményét az I. táblázat mutatja. Itt különválasztva szerepelnek az 1966 előtt és után épített szakaszból vett minták, mert 1967-ben a tömörítés minőségében ugrásszerű változás következett be: ekkor új tömörítő eszközöket, köztük vibrációs eszközöket szereztek be nagyobb számban. Az adatok jól mutatják a bekövetkezett minőségi fejlődést.

RÓZSA LÁSZLÓ:

Tőzeges, szerves altalajok vagy puha agyagtalajok fölött építendő töltések esetében, rendszeresen felmerül az a kérdés, hogy milyen mélységig, illetve egyáltalán végrehajtsanak-e *talajcserét*. A talajcsere elvégzése rendkívül költséges, hosszadalmas, jelentősen megnyújtja az építési időt. Az utóbbi években úttervezések során többször kellett ilyen feladatokat megoldani. A megoldás a legtöbb esetben a *talajcsere nélküli* építés volt. Az altalaj konszolidációs körülményeit, a töltés altalajának összenyomódását folyamatosan mérték és így a burkolat-elhelyezés időpontjában a süllyedések lefolyása már ismert volt.

Például az 1. sz. út 130—132 km szelvényében náddal benőtt, 6 m vastag szerves talajra 2 m magas töltést építettek, talajcsere nélkül. Utólagos fúrásokkal ellenőrízték a homokos kavics töltésanyag benyomódását és azt találták, hogy a töltéstengelyben mintegy 60—80 cm benyomódás állt elő. Az útszakaszt 1968-ban nyitották meg és azóta sem észleltek zavaró körülményt vagy károsodást.

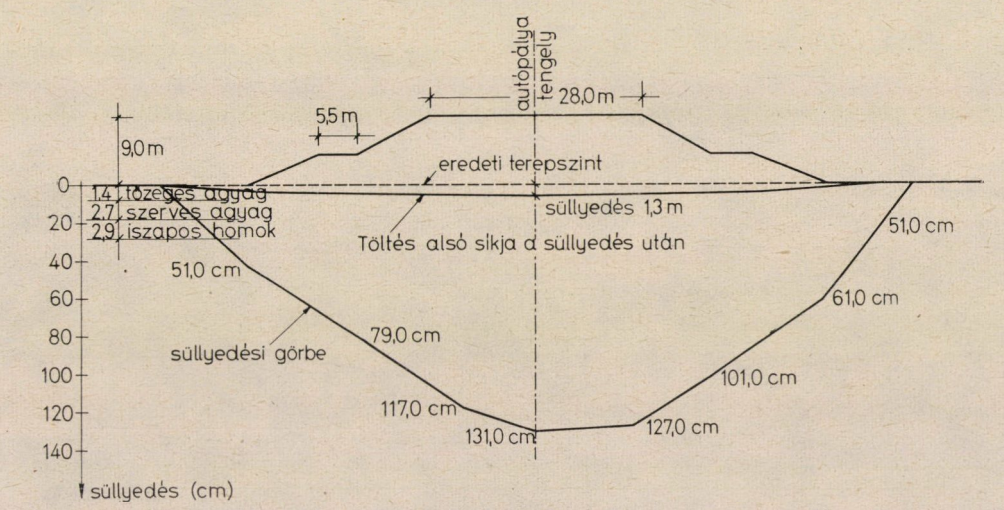
Ugyanezen út 134—135 km közötti szakaszán 4 m magas töltést készítettek 4 ÷ 5 m magas tőzegen, illetve szerves agyagon. A homokos kavics töltésanyag benyomódását fúrással ellenőrízték, és azt találták, hogy az 1,2 m mértékű. Az építés alatt a töltés egyes szakaszain talajtörés következett be, a szerves altalaj a töltés lába alól kitért, oldalirányban felpúposodott, ezzel egyidejűleg a töltésrézsű is lecsúszott. A lecsúszott töltésanyag eltávolítása után a töltést lelépcsőzték. A hatnegyedes rézsűt helyreállították a töltés 1 ÷ 1,5 m-es szélesítésével.

A 3-as út kisbagi szakaszán 1,5 ÷ 2,0 m magas töltést helyeztek közvetlenül 2,5 m-es tőzeges altalajra. A teljes süllyedés mintegy 50 cm volt.

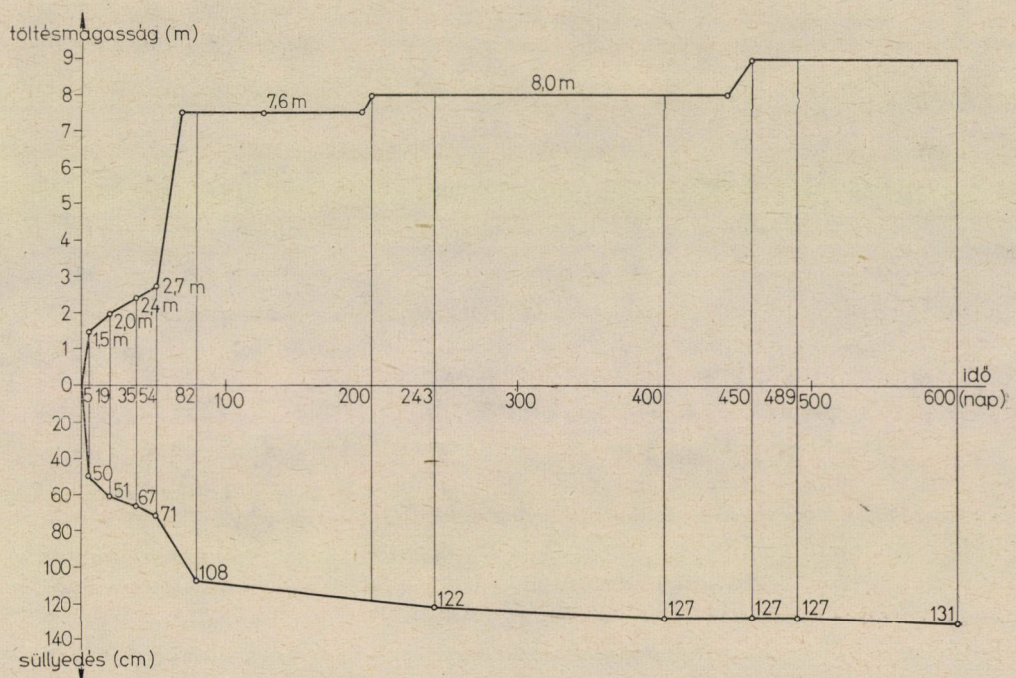
VIDACS LÁSZLÓ:

A töltések süllyedésének mérésére javaslatunkra új módszert alkalmaztak. A töltés megépítése alatt 1 ×2 m alapterületű, 3 mm vastag acéllemezeket helyeznek el a keresztszelvény teljes szélességében. A lemezek magassági helyzetét szintezéssel rögzítették. Ezután építették meg a lemezek fölött a töltést. A töltés süllyedését, azaz az elhelyezett acéllemezek helyzetét fúrással állapították meg. Bár ez a módszer a fúrások miatt hosszadalmas, de rendkívül egyszerű és az építés alatt sem igényel semmiféle gondos körültekintést. Ezzel a módszerrel az M-7-es autópályán a 109 ÷ 500 — 109 + 800, illetve a 110 + 650 — 111 + 450 km szelvényeken végeztünk a töltéseknél összenyomódásmérést. (34. ábra). A meglehetősen sűrűn végzett mérések lehetővé tették a süllyedési sebesség tanulmányozását és a konszolidációs görbék felrakását.

A mérések alapján felrakható konszolidációs görbét a 35. ábra mutatja.



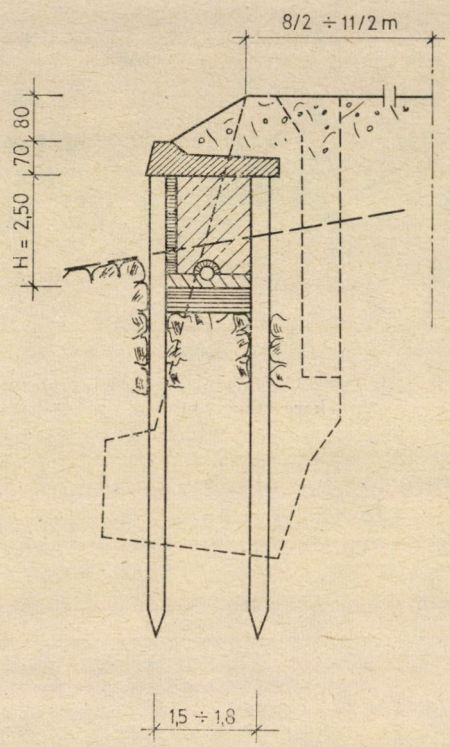
34. ábra. Az M-7 autópálya 109 + 676 kmsz süllyedésvizsgálata: süllyedések eloszlása a keresztszelvényben



35. ábra. Az M-7 autópálya 109 + 676 kmsz süllyedésvizsgálata: a süllyedések időbeli lefolyása

BAŽANT, Z. (PRÁGA):

Nagyobb közettömeg állékonyságát heterogenitásuk miatt nem lehet statikailag elemezni. Szabályos rétegződésű és elválási rendszerű kőzetekbe vágott munkagödrök rézsűinek állékonysága már megbízhatóbban vizs-



36. ábra. Megtámasztó fal két sorban levert vb. cölöpökből

gálható. A kőzet elválásai, pados kialakulása és anizotrópiája miatt természetesen itt is nehéz az erők valódi eloszlását meghatározni; nehéz megválasztani a számításban felhasználandó anyagállandók értékét is. Ezért célszerű bekövetkezett kőzetomlások adatait felhasználni Φ és c meghatározására. Ezt a módszert alkalmazták egy, a prágai földalatti vasút munkagödrében bekövetkezett omlás vizsgálata során. A munkagödör 16 m mély volt. A felszíni kavicsréteg 8 cm vastag, ez alatt 8 m-es agyagpala-réteg van; felszíne 10°-os hajlással a munkagödör felé esik. A kőzettömeget függőleges elválási felületek szabdalják szét. A statikai vizsgálat azzal a feltevéssel volt elvégezhető, hogy veszélyes helyzetben egy olyan kőzettömb van, amelyet alulról a réteghatár, oldalról és hátulról pedig függőleges hasadékok határolnak. A kőzettömeg előtt egy levert cölöpökhöz rögzített vb. fal ad támasztó hatást. A statikai számításban a következő erőket vették figyelembe: az agyagpala-kőzet-

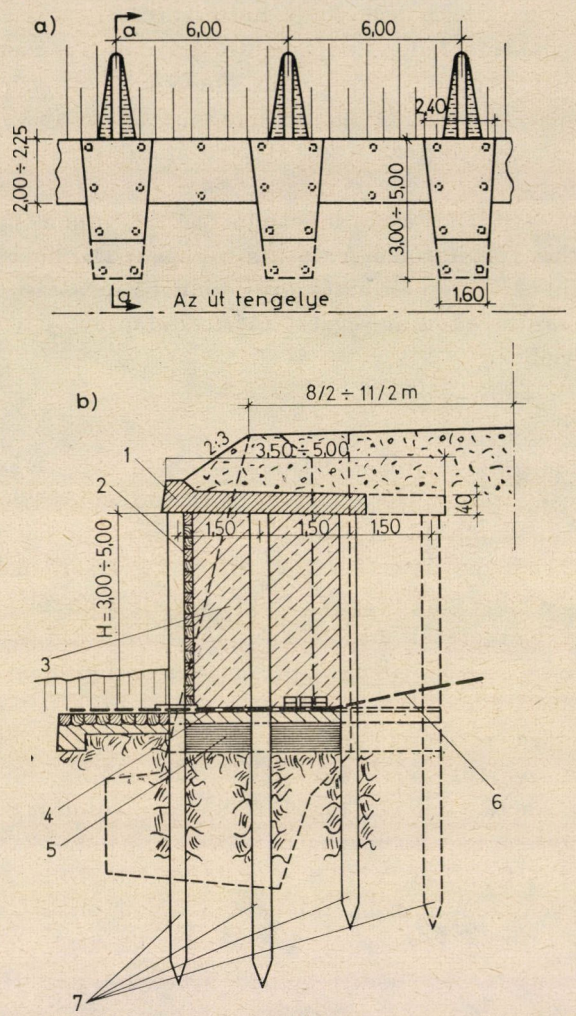
tömeg önsúlyát, a hasadékban levő víz hidrosztatikus nyomását; a vasbeton fallal lezárt réteghatáron fellépő teljes hidrosztatikai nyomást. Kitűnt, hogy az egyensúly szempontjából a víznyomás döntő hatású; már maga a kőzetomlás is egy erősen csapadékos időjárás után, 1971 május—júniusában jött létre. Világosan megmutatkozott a talajvíz áramlási nyomásának hatása, mikor szeptember végén a 45°-os rézsű, amelyet a függőleges fal helyett alakítottak ki, 25 ÷ 30° hajlásúra laposodott. A hegyomlás után a felaprózódott kőzet kavicshoz volt hasonló. A statikai vizsgálat a súrlódási szögre $\Phi = 35°$ értéket adott, mint az agyagpala hatékony reziduális súrlódási szögét. Kohéziót — SKEMPTON hosszú éveken át végzett mérései alapján — nem vettek a számításban figyelembe.

TODEA, F. (BUKAREST):

Csúszásra hajlamos lejtők megtámasztására, vagy már bekövetkezett csúszások helyreállításához előregyártott vasbeton cölöpökből épített támfalszerkezet is felhasználható. A bemutatott példában a fal négyzet keresztmetszetű (30 · 30 cm²), az út szélén két, illetve négy sorban levert vasbeton cölöpökből áll. Kisebb magasságok, vagy kisebb csúszólapmélység esetén a 36. ábrán, nagyobb méretek mellett a 37. ábrán bemutatott megoldás alkalmazható. A cölöpsorok közötti részt porózus kavicsbetonnal töltik ki, mely egy folyókával ellátott alaplemezre kerül, ez alatt stabilizált agyagréteg van. Az alaplemez minden esetben a csúszólap alá kerüljön. A víztelenítést szolgáló kavicsbetont előregyártott vasbeton pallók támasztják meg. A cölöpökre helyben készült vasbeton fejlemez kerül. Az első két cölöpsorból álló megoldás 1,5 ÷ 2,5 m magasságig alkalmazható, ekkor a cölöpök szükséges hossza 5 ÷ 8 m, távolságuk 1 ÷ 2 m. A másik megoldásnál, mely 3 ÷ 6 m magasságig alkalmazható, 6 ÷ 8 cölöpből álló csoportokat — cölöpbakokat — alakítanak ki, egymástól 6 ÷ 10 m távolságra, közbenső szakaszokkal, melyeket két-három cölöp támaszt. A cölöpök befogása a csúszólap alatti földtömegben legalább 2 ÷ 3 m legyen. A 38. ábra egy, a 11. sz. úton megépült támasztószerkezetet mutat. A megtámasztó rendszer nehéz terepviszonyokhoz jól alkalmazható. Egy elvégzett vízszintes próbaterhelés során két, acéljárommal összefogott cölöp teljes vízszintes elmozdulása ~ 16 t erő hatására 21,5 cm volt, a maradó elmozdulás pedig 7,5 cm-re adódott. A gazdasági vizsgálat azt mutatta, hogy a cölöpös megtámasztószerkezet a súlytámfalas megoldásnál 25%-kal olcsóbb és 60—85%-kal kevesebb az anyagfelhasználás. Maga az építés jól gépesíthető, növekszik a munka termelékenysége és rövidül az építési idő.

STEFANOFF, G. (SZÓFIA):

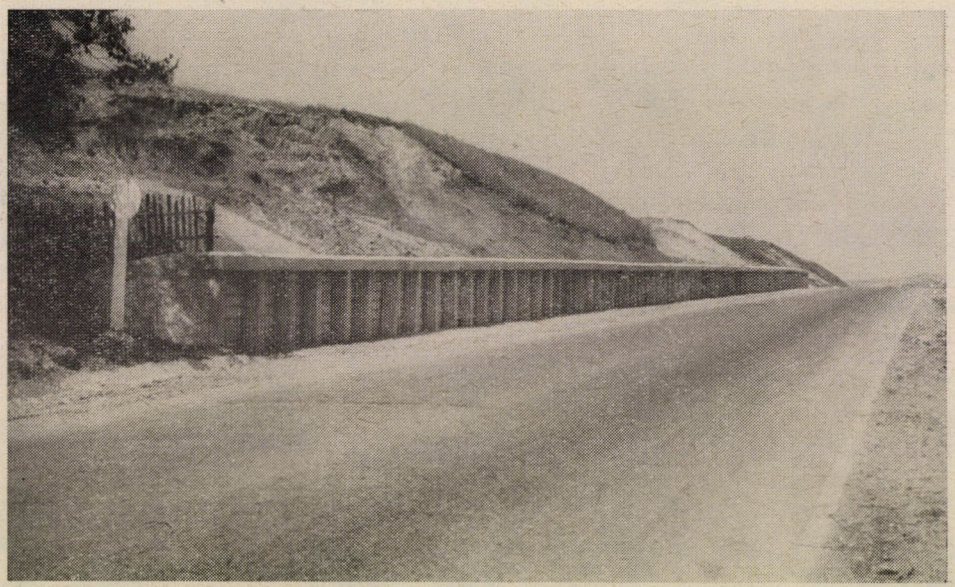
A talajállapot változásának hatását vizsgálva arra törekszünk, hogy az útalapokba a talajokat optimális víztartalom mellett építsük be, ez az



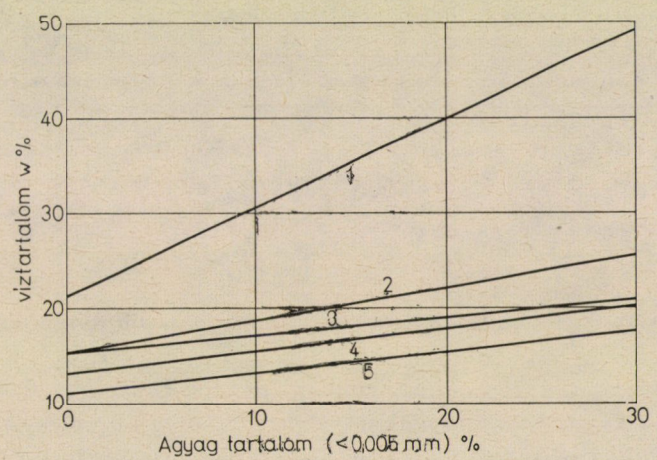
37. ábra. Megtámasztás négy sorban levert cölöpökkel és támpillérekkel. *1* — fejlemez; *2* — betonlapok; *3* — egyszemcsés beton; *4* — alaplemez; *5* — stabilizált agyag; *6* — csúszólap; *7* — cölöpök. *a* — alaprajz, *b* — a—a metszet

réték azonban a fajlagos tömörítő munka függvénye. Ezért kívánatos egy olyan optimum megkeresése, amely talajfizikai szempontból is a legkedvezőbb, de egyúttal a legnagyobb állékonyságot és teherbírást biztosítja. Ennek az állapotnak a meghatározására Boidev, V. adott eljárást. Javaslata szerint az optimumot a legnagyobb molekuláris vízkapacitás adja, amely mellett csak a szemcsék körüli kötött vízfilm adja a víztartalmat. Értékét úgy határozhatjuk meg, hogy egy nedves talajmintát 10 percig 10 ÷ 15 kp/cm² nyomás alatt tartunk, úgy, hogy ez alatt a víz minden irányban eltávozhatik.

Minthogy a káros tixotróp hatások csak akkor jelentkeznek, ha a pórusokban szabad víz van, amely a nyírószilárdságot is csökkenti, $w_{opt.}$ nem lehet w_m-nél nagyobb. Másfelől a duzzadás káros hatása annál erősebb, minél szárazabb a talaj. Ha $w > w_m$, a duzzadás kicsiny. Ezért $w_{opt.}$ nem lehet w_m-nél kisebb, vagyis $w_{opt.} = w_m$.



38. ábra. Kivitelezett cölöpös megtámasztó fal a román állami úthálózat 11. sz. útján



39. ábra. Összefüggés a talaj agyagtartalma és különböző víztartalmai között. *1* — folyási határ; *2* — az egyszerű Proctor-kísérlet optimális víztartalma; *3* — sodrási határ; *4* — maximális molekuláris vízfelvevőképesség; *5* — a módosított Proctor-kísérlet optimális víztartalma

A talaj agyagtartalma és a különböző víztartalmak között korrelációs összefüggést lehetett megállapítani (39. ábra).

3. szekció. Sík- és mélyalapok

PETRASOVITS GÉZA, FŐELŐADÓ:

Ismeretes, hogy az utóbbi egy-két évtizedben végbement gyors műszaki-tudományos fejlődés eredményeképpen az építés olyan ipari jellegű tevékenységgé vált, amelyben a kézi munka szerepe erősen háttérbe szorult.

Az előregyártott elemek alkalmazása az építőipar számos területén már általánossá vált, amely a *tömeges* és *gyors* építés egyik fontos feltétele. Azt azonban nem mondhatjuk, hogy az alapozás területén is ilyen gyors fejlődés következett volna be, annak ellenére, hogy itt is előtérbe kerültek azok az alapozási módok, amelyek jól gépesíthetők és a munkának az időjárási viszonyoktól függetlenül gyorsan és jó minőségben való elvégzését teszik lehetővé.

Nem kívánatos, ha bárkiben is olyan gondolatok ébrednének, hogy az alapozás kérdésének egyedüli és legfontosabb problémája a helyes és műszaki szempontból is megbízható technológiai eljárások kialakítása.

Általános tendencia, hogy a különböző rendeltetésű mérnöki létesítmények méretei növekednek, egyre merészebb szerkezeti megoldásokat alkalmaznak, amelyek a talajra *nagyobb fajlagos terhet* hárítanak és ugyanakkor — a korábbi szerkezetekhez képest — *kisebb süllyedéskülönbség* elviselésére képesek. Ez egyben azt is jelenti, hogy az alapozási problémák elméletileg egyre nehezebbek és összetettebbek lesznek.

A különböző alapok terhelés alatti viselkedésének helyes megítéléséhez a talajviszonyok sokoldalú mérlegelése mellett az alapok készítésének módját, tehát technológiai problémákat is mérlegelni kell. Ez azt is jelenti, hogy függetlenül attól, hogy egy mérnöki létesítmény terepszint feletti része teljes egészében előregyártott elemekből készül, ugyanennek az építménynek az alapozási problémáit *egyedileg* az adott konkrét talajviszonyok figyelembevétele mellett lehet csak műszakilag-gazdaságilag helyesen megoldani.

A talajviszonyok rendkívül sokfélesége miatt tehát nem várható, hogy műszakilag-gazdaságilag optimális, uniformizálható megoldásokat találjunk.

A mélyalapozás terén ma két fő típusról beszélhetünk, a *cölöpözésről* és a *résfalalapozásról.*

A cölöpözés kategóriájába azonban nemcsak azok a hagyományos méretű cölöpök tartoznak, amelyeknek átmérője 20 ÷ 40 cm közötti, hanem ide kell sorolnunk azokat az 1 ÷ 6 m átmérőjű, előregyártott cölöpkutakat is, amelyeket a felszínről juttatnak a talajba olykor nagyon jelentős, 20 ÷ 30 m vagy annál nagyobb mélységbe.

A cölöpözés nagy gyakorlati jelentősége miatt nagyon indokolt, hogy a kutató, tervező és kivitelező szakemberek nagy csoportja foglalkozzék a cölöpözés elméleti és gyakorlati kérdéseinek tisztázásával. Az elmúlt egy-két évben szakterületünkön rendezett konferenciák anyagának áttekintése alapján megalapozottan mondhatjuk, hogy a cölöpözésnek egy jó évtizede megindult erőteljes térhódítása tovább tart. Arra azonban nehéz volna választ adni, hogy melyek azok a cölöptípusok, amelyek legelterjedtebbek, mert erre különböző országok szakembereitől erősen eltérő válaszokat kaptunk.

Az egyes cölöptípusok egyik vagy másik országban való elterjedtségét nyilvánvalóan több tényező befolyásolja, amelyek közül kiemelkednek a *talajviszonyok* és az *építésgépesítettség* foka.

A cölöpök terhelés alatti viselkedésének mechanizmusát eredményesen vizsgálni és tanulmányozni csak a technológiai kérdések figyelembevételével lehet, és ha ehhez még hozzávesszük a talajviszonyok rendkívül bonyolult voltát, akkor érthetővé válik, hogy a számtalan cölöpteherbírási képlet ismerete ellenére miért folyik ma is intenzív kutatómunka ezen a területen.

Annak ellenére, hogy a cölöpök a gyakorlatban valójában alig szerepelnek mint önálló egyedi cölöpök, hanem mindig csoportosan terhelik őket, a szakirodalomban, a cölöpcsoportok teherbírásával foglalkozó tanulmányok száma kevés, és még nem adható végleges válasz arra a kérdésre, hogy vajon *egy egyedi cölöp teherbírásával jellemezhető-e a cölöpcsoport teherbírása* és van-e, illetve található-e olyan átszámítási tényező, amelynek segítségével egy tetszőleges nagyságú cölöpcsoport teherbírását megbízható módon állapíthatjuk meg.

A cölöpcsoport terhelés alatti viselkedésére megbízható megállapításokat az egyedi cölöp terhelés alatti viselkedéséből tenni nem lehet. A teherviselésbe bevont talajrétegek vastagsága közötti lényeges különbség, a cölöpök közötti talajtartomány tömörödésének bonyolult folyamata azt a meggyőződést erősítette meg bennünk is, hogy a cölöpcsoport teherbírását az egyedi cölöpöktől elkülönítve, függetlenül kell vizsgálni, amely persze nem jelenti, hogy az egyedi cölöpök vizsgálata során szerzett ismeretek nem volnának itt hasznosíthatók.

A *Budapesti Műszaki Egyetem Geotechnikai Tanszékén* több év óta folytatott cölöpcsoport teherbírási kísérletek alapján megállapítható volt, hogy

— egy meghatározott cölöphosszon túl a cölöpcsúcson átadódó terhelés nagysága konstans marad;

— a cölöpcsoporton belül az egyes cölöpök teherbírása merev terhelőfej esetében a cölöpcsoportban elfoglalt helyzetüktől függően erősen különböző, a különbség elérte a 30 ÷ 40%-ot is. A nagyobb cölöpcsoportok azonos süllyedés mellett kisebb teherbírási értéket mutatnak, ami azonban nem jelenti azt, hogy a talajtöréssel szembeni biztonsági tényező a kisebb és a nagyobb cölöpcsoportnál azonos érték lenne. Vagyis a nagyobb cölöpcsoport

nagyobb süllyedés után éri csak el a kisebb cölöpcsoporttal megegyező leterheltségi fokot. A cölöpöknél a cölöpcsúcs és a cölöpköpeny elkülönített módon való vizsgálata ezt szemléletessé is teszi.

A cölöpcsoportok teherbírásának elméleti vizsgálatánál széles körű alkalmazást kapott a rugalmasságtan elmélete. MINDLIN elméletére támaszkodva számos cölöpteherbírási képlet született. Az utóbbi időben ugyancsak rugalmasságtani alapon a véges elemek módszerének alkalmazásával foglalkoznak a cölöpteherbírás, az egyedi és a cölöpcsoportok teherbírásának meghatározásával. A véges elemek módszere lehetővé teszi, hogy a talaj heterogenitását, valamint a cölöp körüli tömörödési zónák tömörségváltozásának figyelembevételével az összenyomódási modulus változását a korábbi módszereknél megbízhatóbban vegyük figyelembe.

A *résalapozással* kapcsolatos elméleti problémák két főbb csoportra oszthatók:

— a résiszapok falmegtámasztó hatását befolyásoló tényezők vizsgálata,
— a résalapok terhelés alatti viselkedése, teherbírásának mechanizmusa.

A résiszapok megtámasztó hatását növelő tényezők vizsgálatával több vezető tudós, VEDER, NASH, MORGENSTERN, ELSON, behatóan foglalkoztak. Elmondható, hogy az eddigi kutatások jórészt feltárták azokat a tényezőket, amelyek a résfal megtámasztásában szerepet játszhatnak. Az egyes kutatók között azonban jelentős véleménykülönbségek vannak abban a vonatkozásban, hogy melyek azok a tényezők, amelyeknek a szerepe kiemelkedő.

A kutatók túlnyomó többsége megegyezik abban, hogy a résfal stabilizálása szempontjából legfontosabb szerepet a résiszap *hidrosztatikus nyomása* játszik, amelyet a résfalon képződött kocsonyás vízáteresztő hártya segítségével tud érvényesíteni, leküzdve a talajban fellépő hidrosztatikus nyomást anélkül, hogy a talaj pórusvíz feszültségét növelné.

További segítő tényezőként tekinthetők a résiszapba került szuszpenzált talajszemcsék, amelyek a résiszap sűrűségét növelik, továbbá a résfalon képződött kocsonyás vízáteresztő iszaphártya ellenállása, az iszappal átitatott talajtartomány nyírási ellenállásának változása, a résiszap passzív ellenállása és végül az elektroozmotikus erők, amelyek a negatív töltésű résiszap és a talaj között hatnak.

E tényezőket a kutatók jelentős csoportja kísérletileg is mérte, de ezen utóbbi tényezők nagysága sem külön-külön, sem pedig együtt nem olyan jelentős, hogy annak értéke elérné az oldalfalon fellépő földnyomás és annak megtámasztásaként működő résiszap hidrosztatikus nyomása közötti különbséget.

Újabban SCHNEEBELI [17] a résiszapban bekövetkezett átboltozódás figyelembevételével a korábbiaknál elfogadhatóbb megoldást ad a résiszapok

oldalfal megtámasztó szerepéről. Módszere segítségével meghatározza, hogy melyek azok az optimális hosszúságú falszakaszok, amelyekben az átboltozódás jól kialakul és a fal átadódó nyomások értéke a földnyomás értékét meghaladja. Módszerének felhasználását néhány a gyakorlatban kivitelezett példán is bemutatja, köztük olyanokon is, ahol az építés időszakában falomlás következett be.

SCHNEEBELI módszeréből következően az alábbi megállapítások tehetők:

Megfelelő biztonsággal a résfal szakaszok 4 ÷ 5 m hosszúságban emelhetők ki; a résiszap falmegtámasztó nyomása kisebb mélységű résfalaknál 6 ÷ 8 m mélységig a talajvízszint elhelyezkedésének függvényében a talajfelszín közelében alatta maradhat a talajnyomás értékének.

A *Budapesti Műszaki Egyetem Geotechnikai Tanszékén* folytatott kísérletek alapján megállapítható volt, hogy a résiszap fajsúlyának növelése a résfal állékonyságára nincs jelentős hatással.

A kutatások másik központi problémája a résalapozás területén a résalapok teherbírása, a teherviselés mechanizmusa.

A kérdés tárgyalását nehezíti az a körülmény, hogy az építéstechnológiától függően a résalapoknál számos zavaró tényező jelentkezhetik.

A legfőbb problémát a talpon átadható terhelések meghatározása jelenti.

A résfal betonozása közben a résfalon kialakult bentonit kéreg ugyancsak megbomlik, amelynek eredményeképpen nem valószínű, hogy a valóságban a talaj és a betonfal közötti súrlódási ellenállás értékének csökkenése nagyobb volna, mint amit laboratóriumi körülmények között mértünk.

A résalapok talpellenállására viszont csak akkor számíthatunk megbízhatóan, ha onnan betonozáskor a bentonit-zagy kiszorul.

Minthogy a mélyalapokkal szemben támasztott egyik alapvető követelmény, hogy kicsiny süllyedést, különösen pedig nagyon kicsiny süllyedéskülönbséget adjanak egy-egy építmény alatt, különös gondot kell fordítani arra, hogy a résalapok talpa tömör talajra kerüljön. Itt minden építéstechnológiai hiányosság a tervezőt rendkívül gazdaságtalan megoldásra kényszeríti, mivel teherbírás szempontjából ilyen esetekben megbízható módon csak az oldalfalon fellépő köpenysúrlódás vehető figyelembe. Ezért a résfalak alkalmazása általában akkor tekinthető gazdaságosnak és célszerűnek, ha a résfalak a teherviselés mellett ideiglenesen vagy állandó jelleggel térelhatároló szerepet is betöltenek.

VARGA LÁSZLÓ KORREFERENS:

Ismeretes, hogy építményeink alapjaitól a következőket követeljük meg:

— legyenek alaptöréssel, billenéssel, elcsúszással szemben kellően biztonságosak;
— biztosítsák, hogy a süllyedések, illetve süllyedéskülönbségek az

építmény által károsodás nélkül elviselhető határok között maradjanak;
— az alapok — mint szerkezeti elemek — legyenek kellően szilárdak;
— lehetőleg minél egyszerűbben, gyorsan, gépesítve és így gazdaságilag optimális eredménnyel készülhessenek el.

Nem kétséges, hogy ezeket az igényeket *műszakilag* kifogástalanul azok a nagy teherbírású mélyalapok elégíthetik ki, amelyeket a főelőadó már kellően méltatott. A mélyalapok gazdaságossága azonban nyilván egyedileg bírálandó el, mert ez a helyszíni adottságokon kívül számos további tényezőtől is függ, mint pl.:

a rendelkezésre álló gépek minősége és mennyisége;
az építőipari anyagellátás színvonala;
az építőipari munkaerőhelyzet, stb.

Valószínű, hogy a következő évtizedeket a gépi kapacitás állandó bővülése és az anyaggal való kielégítő ellátottság fogja jellemezni, míg az egyszerű fizikai tevékenység területén a munkaerőkínálat fokozatosan szűkülni fog. Ezért nyilvánvaló, hogy a ma értelmezhető műszaki-gazdasági optimum nem azonos a néhány évtized múlva várhatóval. Feltehető, hogy a jövőben az optimumot a viszonylagos „anyagpazarlás" és a maximális munkaerőtakarékosság fogja jellemezni. Csak idő kérdése, mikor következik be ez az állapot minden országban.

Mai adottságaink mellett azonban — különösen ha az altalaj kellően teherbíró, víztelenítési és szigetelési problémák pedig nincsenek — nagyon sokszor a *síkalapozás* jelenti a műszaki-gazdasági optimumot; a mélyalapozási módszerek — elsősorban a cölöpök — térhódítása mellett is változatlanul igen nagy marad a síkalapok jelentősége.

Ismeretes, hogy a rugalmas ágyazású alapok méretezése iránt világszerte nagy az érdeklődés és szakadatlanul gyarapodnak erre vonatkozó elméleti ismereteink. Bizonyos vonatkozásban akár túltermelésről is beszélhetnénk, hiszen a rugalmas ágyazású gerendák vagy körlemezek irodalma hovatovább áttekinthetetlenül gazdaggá válik. Ugyanakkor a mindennapos gyakorlati feladatok közben mégis minduntalan felbukkannak olyan terhelési esetek, olyan speciális kerületi feltételek, amelyekre nem találunk gyakorlatilag használható megoldást. Legfeltűnőbben jelentkezik ez a hiány a nemszimmetrikusan terhelt lemezalapok esetében. Igen hasznos volna, ha e tárgyban kellően korrekt, rendszeres és feldolgozott mű — vagy művek — látnának napvilágot. *Korrekten* azt értem, hogy az elmélet kiinduló feltevései legyenek megalapozottak, és ne csak arról essék szó, hogy a Winkler-féle hipotézis mennyire érvényes vagy érvénytelen, hanem a deformációk számításában minden fontos hatás vétessék figyelembe. A *rendszerességre* azt a kívánságot jelenti, hogy ne csak speciális terhelési esetre (pl. csuklósan átadódó függőleges, állandó nagyságú koncentrált erőre) legyenek megoldások, hanem a gyakorlati igények többségét elégítsék ki. A „*feldolgozott*" kifejezés pedig

a tervezőknek azon óhaját tolmácsolja, hogy ne csak elvi differenciálegyenleteket kapjanak, melyeket minden esetben újra meg újra meg kell oldani, hanem kapják kézhez az ezek alapján készült táblázatokat, grafikonokat is.

További kérdésként említendő a síkalapok alatti altalaj töréssel szembeni biztonságának kérdését. Egy előadásán KÉZDI professzor megjegyezte: talajteherbírási összefüggések tekintetében az elmélet úgyszólván többet nyújtott már, mint amennyit a gyakorlat igényel. Nem csak a számos teherbírást befolyásoló tényezőt tudjuk figyelembe venni, hanem már az is nyilvánvaló, hogy minden esetre érvényes, egzakt megoldás valószínűleg a jövőben sem várható. Így hát a kérdés súlypontja az elméleti alaposságtól inkább a megbízhatóság irányába tolódik, és ezen a téren a tapasztalat, a nagymodellkísérletek jelentik a döntő szót. Kínálkozik mégis két, elmélyült kutatásra érdemes terület. Egyrészt — tudomásunk szerint — még ma sincs elvileg korrekt megoldás a *rétegzett rendszerek* teherbírásának számítására, másrészt még várat magára a töréssel szembeni biztonságnak és a számításokhoz használt talajfizikai adatok szórásának összehangolása. Mindkét irányban mutatkozik ugyan haladás, ilyen kutatásoknak magunk is részesei voltunk, mégis távolinak tűnik még az idő, amikor ezek letisztult eredményei bevonulhatnak a mindennapi gyakorlatba.

A teherbírási kérdések kapcsán feltétlenül szükségesnek tartjuk érinteni a stabilitási kérdéseket is. Meggyőződésünk ugyanis, hogy — legalábbis szemcsés altalajon álló, ferde erőkkel terhelt alapok, műtárgyak esetében — a billenési és elcsúszási biztonság mértékét nem — illetve nem csak — a nyomatékok hányadosa vagy az eredő erő függőleges és vízszintes komponenseinek egymás közötti aránya determinálja, hanem — talán döntő mértékben — az altalaj teherbírása is. Ez megint olyan kérdéscsoport, amelyben még sok — esetleg meglepő eredményre vezető munka várat magára.

Végül — de nem utolsósorban — hálás kutatási területnek kínálkozik az építmény és az altalaj együttdolgozása. Újabb építményeink anyaga, készítésének módja, statikai jellege, méretei mind sürgetőbben vetik fel eddigi süllyedésszámítási módszereink teljes felülvizsgálatát. Különös hangsúlyt kapott ez a feladat a nagypanelek, bokkok, tehát házgyári elemek gyors térhódításával.

Közismert, hogy az ilyen építmények nagy merevségük — és viszonylag kisebb szilárdságuk — folytán úgyszólván alig képesek károsodás nélkül deformálódni.

Sajnálatos, hogy az alakváltozási folyamatot — a maga teljességében — egyelőre még alig tudjuk számítással követni, hiszen a paneles építmények merevségével kapcsolatos nézetek szélsőségesen ellentmondóak. A keretvázas építmények esetében még legalább közelítő érvénnyel megadható mennyiségek itt már alig értelmezhetők. Fokozza még a bonyodalmat az emeletszám növekedése közben egyidejűleg zajló konszolidáció is.

Közismertek a mért és számított süllyedések közötti eltérések is, amelyek okát egyesek a talajmechanikai adatszolgáltatás sajátos hibaforrásaiban keresik, mások az olykor indokolatlanul leegyszerűsített számítások matematikai részleteiben keresik a hibát, vagy esetleg a süllyedések mérésében találnak kifogásolható körülményeket. Feltehető az is, hogy a jelenlegi — nem egészen kifogástalan — helyzetért ezek együttesen felelősek.

Mindezek a bizonytalanságok azután — érthetően — arra ösztönzik a tervezőt, hogy már az alapokkal elhárítsák a lehetséges károkat. Vitatható, hogy ez-e a legjobb megoldás, sőt az is, hogy e károk ilymódon való megelőzése teljes mértékben lehetséges-e.

Épület és altalaj kölcsönhatásainak mélyreható kutatása adhat csak választ a nap nap után felmerülő kérdésekre és ennek a kutatásnak az eredményei alapján vehet új lendületet elméleti és gyakorlati téren egyaránt az alapozás is.

KOVÁCSHÁZY FRIGYES KORREFERENS:

A Batthyány-téri nagy mélyépítési munkahely néhány jellegzetessége általános érdeklődésre tarthat igènyt. Ezeket a jellegzetességeket a konferencia kiadványa [18] részletesen ismerteti. A korreferensi jelentés a következőkben a 3. szekció témakörében benyújtott és föld alatti műtárgyakkal foglalkozó tanulmányokról szól.

GABOS GYÖRGY:

Az országszerte rohamosan növekvő urbanizáció és az egyre intenzívebb beépítettség következménye, hogy az építésre kiválóan alkalmas vagy akár csak alkalmas területek is az utóbbi évtizedekben a világ számos részén, így hazánkban is, elfogytak vagy elfogyóban vannak.

Növeli a talajmechanikával és az alapozással foglalkozók gondját, hogy a felszerkezet egyre magasabb, és az alapokra jutó terhek egyre nagyobbak lesznek. Ugyanakkor mozgáskülönbségekre érzékenyebbek, mint a régiek.

Jellegzetes példaképpen a nagy elemekből előregyártott, nálunk *házgyári* építési módnak nevezett épületek igen erős mozgásérzékenysége emelendő ki, amely össze sem hasonlítható hagyományos téglaszerkezetű vagy monolit vasbeton épületekével.

Ugyancsak növeszik a mélyebb létesítmények aránya is. Egyre jobban terjednek a földalatti garázsok, parkolóhelyek, alagutak és más hasonló építmények.

A felszerkezet korszerű méretezési módszerei azt eredményezik, hogy annak anyaga egyre jobban ki van használva, a tartalékok minimálisak, ami viszont megint szigorítja az alapozással szemben támasztott követelményeket.

Mindez általában a szintalatti költségek, elsősorban az alapozási költségek emelkedését eredményezi.

Az előrelátó, gazdaságos tervezéshez már a városrendezés, illetve telepítéstervezés folyamán rendelkezésre kell állniuk azoknak a természeti adottságokat tükröző mérnökgeológiai, építésföldtani térképeknek, amelyek segítségével már a telepítéskor fokozottan figyelembe lehet venni a természeti adottságokat. Ezért a *Földmérő és Talajvizsgáló Vállalat* kifejlesztette az építésföldtani, mérnökgeológiai térképezés rendszerét és metodikáját. E térképek természetesen segítséget jelentenek a konkrét műszaki tervezéshez, megmutatva egy-egy terület stabilitását vagy csúszásveszélyességét, sík- vagy mélyalapozásra való alkalmasságát, az alkalmazandó korrózióvédelmi rendszabályokat.

Az építkezések bizonyos mértékű központosított irányítása és az illetékes állami szervek segítése lehetővé tette, hogy a talajmechanikai és hidrológiai jellegű feltárási adatokat a Vállalat központosan gyűjthesse és fel is dolgozza. Így az Építésügyi és Városfejlesztési Minisztérium Talajmechanikai és Mérnökgeológiai Nyilvántartásában kb. 40 000 db talajmechanikai, mérnökgeológiai, hidrológiai vizsgálatból származó, kb. 300 000 fúrás, összesen $2 \div 2{,}5$ millió folyóméter hosszban került fedolgozásra és nyilvántartásra.

A kutatás és fejlesztés terén a Vállalat arra törekedett, hogy az egyes alapozási módok és eljárások méretezési és technológiai részleteinek kutatásával és kialakításával egyidejűleg az *alapozási tapasztalatok gyűjtésével* olyan adatgyűjteményt állítson össze, amelynek segítségével az egyes építményfajták szerkezeti követelményeinek, a geológiai és talajmechanikai adottságok figyelembevételével az alkalmazott alapozási módok és a várható költségek előre meghatározhatók.

E tevékenység keretében a kivitelező vállalatokkal közösen összesen kb. 280 cölöppróbaterhelés készült.

A vállalat mintegy 400 épület *süllyedését méri*, egyeseken teljes deformáció mérést, erre a célra kifejlesztett geodéziai és más módszerekkel. Néhány épület alá feszültségmérő berendezéseket is beépítettek.

Kb. *20 résfalas alaptest* teherbírásának utólagos ellenőrzését végezte el, részben a Vállalatnál kifejlesztett radióaktív izotópos betontömörségmérő ellenőrzési módszerrel, részben próbaterheléssel és feldolgozták a mások által végzett hasonló tevékenység eredményeit is.

Megemlítésre méltó, hogy az alapozások műszaki kérdéseinek vizsgálatával párhuzamosan a kapcsolódó gazdasági kérdések is elemzésre kerülnek. Így például megvizsgálták a különböző mélyalapozási rendszerek gazdasági hatékonyságát, megállapították a kivitelezési költséget, a kivitelezési időt, stb.

EGRI GYÖRGY:

A Földmérő és Talajvizsgáló Vállalat már 1951-ben külön süllyedésmérő részleget állított fel, amely eddig több mint 400 létesítmény süllyedését figyelte

meg. A mérésekbe bevont csapok száma több mint 15 000, ezeken mintegy 150 000—160 000 észlelés volt. A mért építmények zömét az ország nagylétesítményei, mint pl. az LKM, a tiszapalkonyai, pécsi, ajkai, gyöngyösi és még sok erőmű, számos cementgyár, valamint süllyedéskülönbségre igen érzékeny panelszerkezetű és blokkos lakóépület teszi ki. Nem elhanyagolható számban végeztek méréseket gabonasilóknál a változó terhelések hatásának vizsgálatára, valamint repedt, károsodott épületek mozgásának megfigyelésére. Ez utóbbiaknál a megerősítéssel kapcsolatos teendőket a mérési eredmények alapján lehetett helyesen meghatározni.

A mért építmények alapjai kb. 75%-ban kötött talajon állnak, ebből mintegy 20÷22% lösztalajon. A legtöbb épület (93%) síkalapozással készült; eddig viszonylag kevés mélyalapozású létesítmény süllyedését mérték.

A mérési eredmények megegyeznek az általános tapasztalattal; a számított süllyedések nagyobbak a mért, ténylegesen bekövetkezett értékeknél. A legnagyobb eltérések a nagyfelületű alaptesteknél mutatkoztak. Löszön alapozott épületek sáv, illetve 10 m^2-nél nem nagyobb pilléralapjainak teljes süllyedése csak kivételes esetben haladta meg a 20 mm-t $\sigma = 1{,}6 \div 2{,}0$ kp/cm^2 talpfeszültség mellett.

A süllyedés-, valamint az egyre nagyobb számban történő talajfeszültségmérések megbízható segítséget adnak mind az elméleti, mind a gyakorlati talajmechanikának és jelentősen elősegítik a gazdaságos alapozást.

RÉV ENDRE:

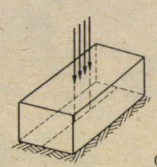
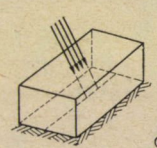
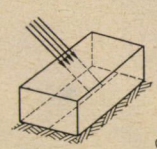
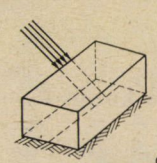
A Franki-cölöpök süllyedése hasonló átmérőjű fúrt cölöpökhöz képest jelentősen kisebb. A cölöp csúcsán fellépő talpfeszültség minden cölöptípus esetében a csúcs alatt a mélységgel igen gyorsan csökken és 1,5 D méységben a csúcson átadott talpfeszültségnek alig 1/10-ét éri el. A vert cölöpöknél fellépő tömörítő hatás ezt a rétegvastagságot annál hatásosabban tömöríti, minél nagyobb az ütőmunka. Franki-cölöpöknél a 3 Mp-os kos és a 8 ÷ 10 m-es ejtési magasság igen nagy ütőmunkát képvisel, ezenkívül a cső alján történik a verés, így nagyobb a verés hatásfoka, mint más cölöpnél; az ütőmunkából kisebb rész fordítódik az energiaveszteségekre. A csúcson döngöléssel kiképzett betontalp készítése során a talajt helyéről kiszorítjuk és így a talp környékén jelentős mértékű talajtömörödés áll elő. Ez legnagyobb mértékű a talp közelében, ahol az igen jelentős ütőmunka miatt a legtömörebb állapotot, vagyis minimális hézagtérfogatot tételezhetünk fel, majd attól távolodva a talaj eredeti hézagtérfogatát érjük el. Magyarországon jelenleg 13 Franki-cölöpözőberendezés dolgozik. Ezt a gépparkot 1964 óta folyamatosan fejlesztették fel a jelenlegi szintre. Az elmúlt, viszonylag hosszú időszakban a cölöpözési mód bevált és csak kevés hiba vagy probléma adódott Franki-cölöpözésekkel kapcsolatban. Ennek egyik oka éppen az, hogy a talpkiképzés nagyságával rugalmasan lehet igazodni a talajok tömörségváltozásához. Más cölöp-

alapozási módszernél ez az előnyös hatás nem jelentkezik, sőt fúrt cölöpalapozásnál ellenőrizhetetlen mértékű fellazulás is előállhat a cölöptalpon, ami a talaj inhomogenitásából eredő bizonytalanságot még tovább fokozza és a cölöpök süllyedését, illetve süllyedéskülönbségét növeli.

WEISS, K. (BERLIN):

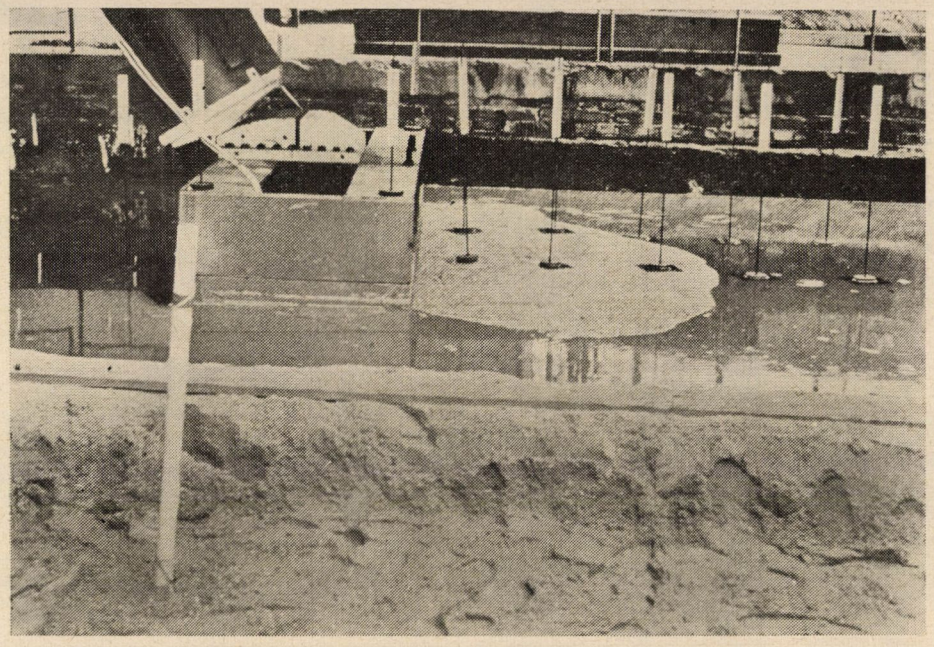
Homokokra helyezett síkalapok teherbírásával a Degebo (Deutsche Gesellschaft für Erd- und Grundbau, Berlin) hosszú évek óta foglalkozik. Ferde és külpontos erővel terhelt, 0,5 m széles és 2,0 m hosszú alapok törőterhéről első ízben 1969-ben számoltak be [19]. Azóta újabb eredményeket értek el annak a kísérleti berendezésnek a segítségével, amellyel 350 Mp függőleges és 100 Mp vízszintes erőt lehetett átadni. A külpontosság és a ferdeség az alap hosszirányában jelentkezett (40. ábra).

Összesen 22 kísérlet készült, $\delta = 0°$, $10°$, $20°$ és $30°$ alatt működő erővel, $/eb = 0$, $1/6$ és $1/3$ külpontossággal. Az eredmények azt mutatták, hogy a

A terhelés módja	Töröerő P_v [t]	$\varepsilon = (1-\tan\delta)^{\alpha}$	α
 $\delta = 0°$	205,6-225,6	1	
 $\delta = 10°$	168,1-173,0	0,75-0,77	1,34-1,47
 $\delta = 20°$	99,5-104,2	0,44-0,46	1,70-1,80
 $\delta = 30°$	31,7-36,0	0,14-0,16	2,11-2,26

40. ábra. Próbaterhelés ferde irányú erővel (Degebo)

hajlás és a külpontosság a határteherbírásra egymástól függetlenül hat. Ennek következtében, összetett terhelési esetben a két tényező egyszerűen szuperponálható. A hatások ε csökkentő tényezőkkel vehetők figyelembe, melyekkel a függőlegesen, központos erővel terhelt alap határteherbírását meg kell szo-



41. ábra. Talajtörés $\delta = 30°$ hajlás és $t = 0{,}20$ m alapozási mélység mellett

rozni. ε és δ valamint ε és e összefüggése tapasztalati függvényekkel adható meg, nagyságuk *0* és *1* között változik. Ha nincs kohézió, függőleges és központosan ható erő esetében a törőerő

$$P_t = (\gamma b\, \lambda_b\, \nu_b + \gamma t\, \lambda_t\, \nu_t)b = P_{bb} + P_{bt}. \tag{7}$$

Ferde és külpontos erő esetében:

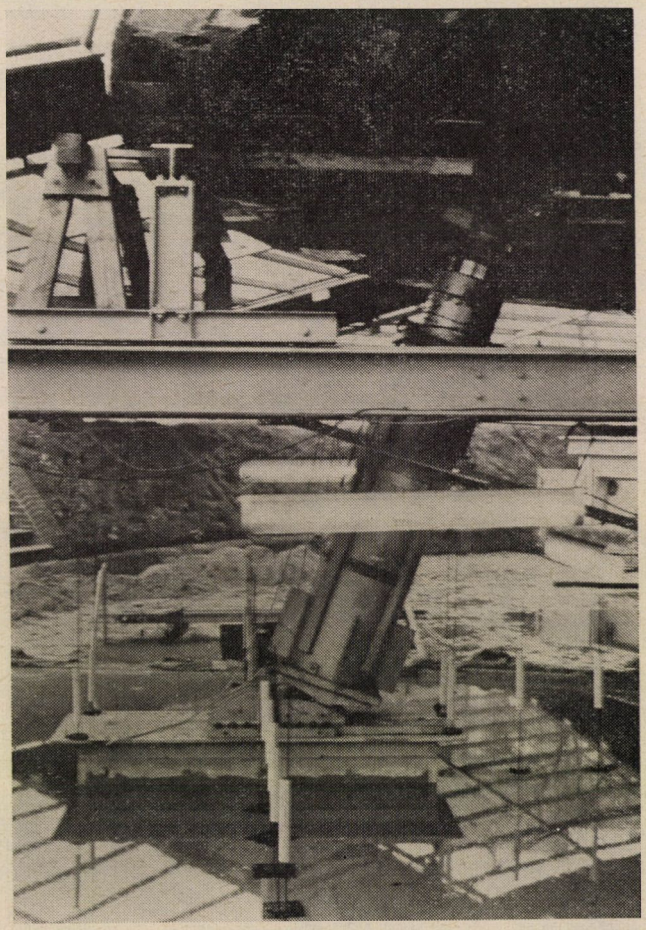
$$P_{t\delta} = P_{bb}\, \varepsilon_b\, \varepsilon_b + P_{bt}\, \varepsilon_t\, \varepsilon_\delta\,. \tag{8}$$

Az ε_δ csökkentő tényező a kísérletek szerint jó közelítéssel az

$$\varepsilon_\delta = 1 - \tan\delta \tag{9}$$

összefüggésből számítható.

$e/b = 1/6$ külpontosság mellett a törőerő a központosan terhelt alap törőterhének 73%-a, $e/b = 1/3$ esetén annak 51%-ka. Az ε_b és ε_t értékek nehezebben adhatók meg, mert az alaptest alakjának is függvényei.

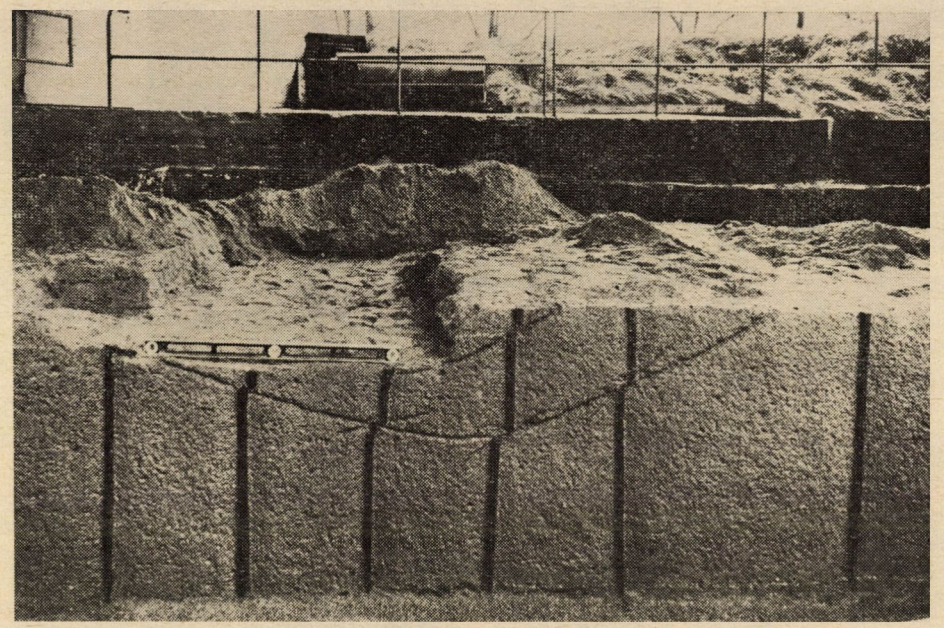


42. ábra. A törőerő függőleges komponense ($t = 0{,}20$ m)

A csökkentő tényezők általános alakját homokon alapozott pilléralapokra, elméleti és kísérleti vizsgálatok alapján Muhs—Weiss (1969b) [19] tették közzé. Az értékek nagyobbak, mint amekkorát De Beer (1963) közelítő eljárása ad [20].

A ferde erő esetére vonatkozó elméleti és a kísérleti eredmények közötti különbségek oka minden bizonnyal az, hogy az elméleti csökkentő ε_δ tényezők sík alakváltozási állapotra vonatkoznak, ahol az erő vízszintes összetevője az alap rövidebb oldalának irányában hat. Ennek az esetnek a vizsgálatára

kilenc kísérletet végeztek, olyan hosszú alaptestekkel, hogy a sík alakváltozás feltétele legalább az alap közepén közelítőleg teljesítve legyen. A terhelő erő hajlása $\delta = 0°$ és $30°$ között változott. A 41. ábra a $\delta = 30°$ hajlás és $t = 0{,}20$ m alapozási mélység mellett kialakult talajtörést mutatja.



43. ábra. A talajtörés során kicsúszó földtömeg ferde terhelő erő esetén

A kísérletek feldolgozása még folyik, de annyi máris megállapítható, hogy az erő ferdesége miatti teherbíráscsökkenés a korábbi kísérletekhez képest eltérő. A 42. ábra mutatja az előzetes eredményeket. Kitűnik, hogy a redukciós tényező a korábbihoz képest lényegesen kisebb, és az

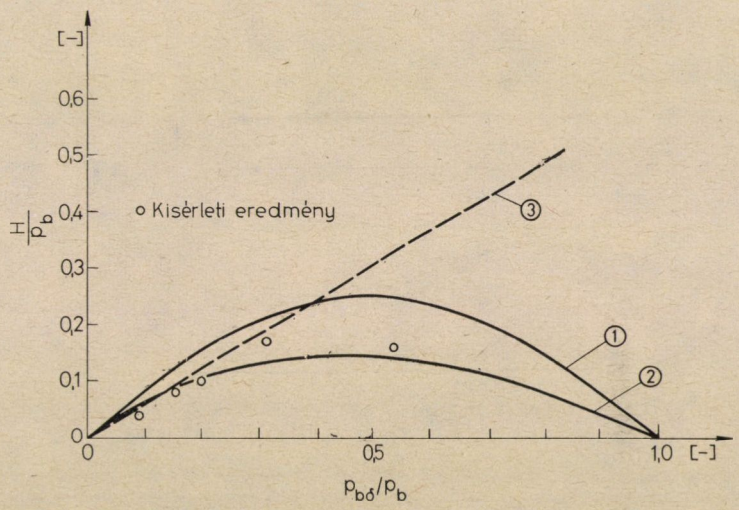
$$\varepsilon r = (1 - \tan \delta)^{\alpha} \tag{10}$$

összefüggésből számítható, ahol $\alpha = 1{,}34 \div 2{,}26$ közötti értékre adódott. A korábbi kísérletekben, amikor ferde erő síkja az alap hosszabbik oldalával volt párhuzamos, $\alpha = 1$ érték adódott, most viszont $\alpha = 2$-nél nagyobb értékek is előfordultak. A két esetben tehát a törőteher eltérő törvényszerűséget követ.

Ferde erővel terhelt alapoknak elcsúszással szembeni biztonságát is meg kell vizsgálni. Ennek szokásos módja abból áll, hogy meghatározzuk az erő vízszintes és függőleges komponensének hányadosát s ezt összehasonlítjuk az alap és a talaj közötti súrlódási tényezővel. A teherbírással kapcsolatban fel-

vetődik az a kérdés, hogy vajon ilyen elcsúszás valóban létrejöhet-e, vagy pedig a teherbírást alaptörés alakjában már korábban elérjük. Néhány elvégzett kísérlet arra utal, hogy ez utóbbi eset áll fenn (43. ábra). A kísérleti eredményeket a 44. ábra tünteti fel. A ferde erő esetén mértékadó törőteher a

$$P_{b\delta} = P_b\,(1 - \tan\delta)^{\alpha} = P_b\left(1 - \frac{H}{P_{b\delta}}\right)^{\alpha} \tag{11}$$



44. ábra. A vízszintes erő határértéke az elcsúszás és az alaptörés kritériuma alapján. *1* — a (12) egyenlet szerint számított görbe; *2* — $\alpha = 2$ érték alapján számított görbe; *3* — az elcsúszási kritérium összefüggése

összefüggésből számítható. Ha az erő az alap hosszabbik oldalával párhuzamos függőleges síkban hat, $\alpha = 1$ és így a felvehető horizontális komponens:

$$H = P_{b\delta}\left(1 - \frac{P_{b\delta}}{P_b}\right). \tag{12}$$

Ezt az egyenletet a 46. ábrán az 1. görbe ábrázolja. Az $\alpha = 2$ feltételezéssel a 2. jelű görbét kapjuk, melynek egyenlete

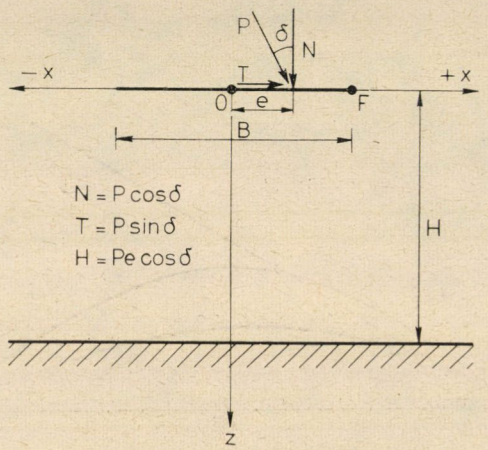
$$\frac{H}{P_b} = \frac{P_{b\delta}}{P_b}\left(1 - \sqrt{\frac{P_{b\delta}}{P_b}}\right) \tag{13}$$

Az öt kísérleti eredményt ábrázoló pontok e körül a görbe körül helyezkednek el: mindegyikben egyértelműen *alaptörési* jelenségek léptek fel. A homok felszínén elhelyezett alap esetén tehát *mindig az alaptörés a mértékadó*

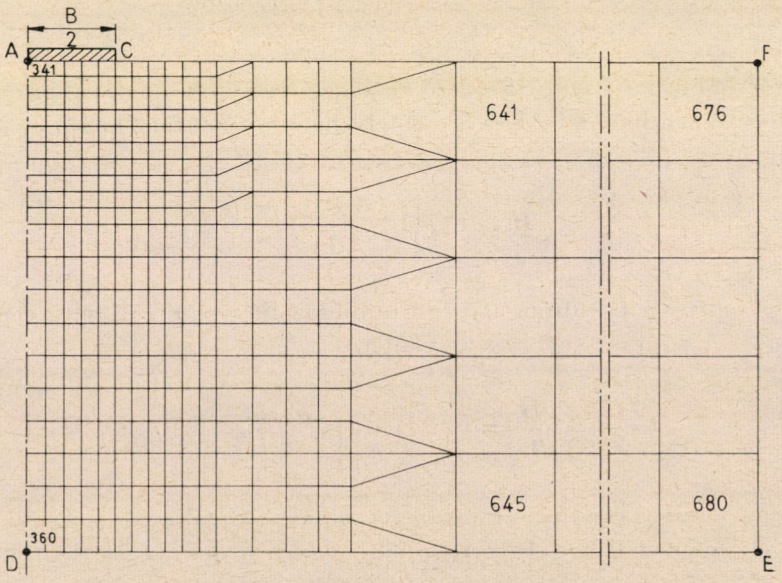
az alap méretezése szempontjából; a pontok a $H = V \tan \alpha$ egyenes *alatt* helyezkednek el.

MILOVIĆ, D. M. (BELGRÁD):

A többrétegű rugalmas rendszerekben keletkező feszültségek számítására különféle elméleti összefüggések állnak rendelkezésre. Ezekre támaszkodva egy véges kiterjedésű, tökéletesen merev alsó réteggel határolt rugalmas ré-

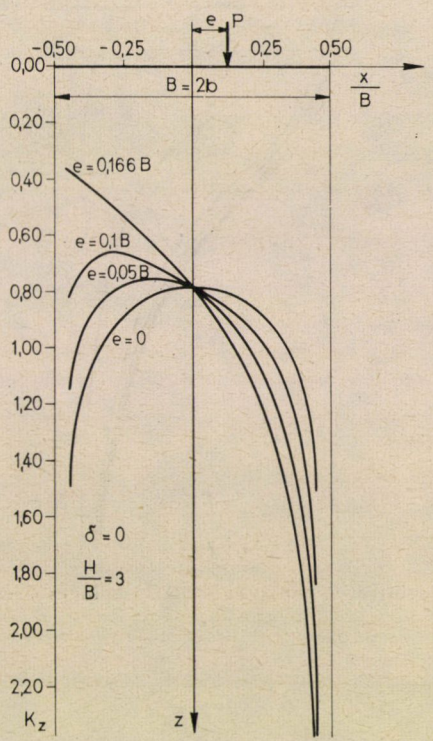


45. ábra. A félteret terhelő erőrendszer



46. ábra. A féltér beosztása véges elemekre. *D* és *E* rögzített pontok, *C* és *F* mozgó pontok

tegben keletkező feszültségek meghatározásával foglalkoztunk, abban az esetben, amikor a réteg felszínén ferde, külpontos erővel terhelt merev sávalap van (45. ábra). A számítást a véges elemek módszerével végeztük; a felvett beosztás a 46. ábrán látható. A 47. ábra a függőleges feszültségek elosz-

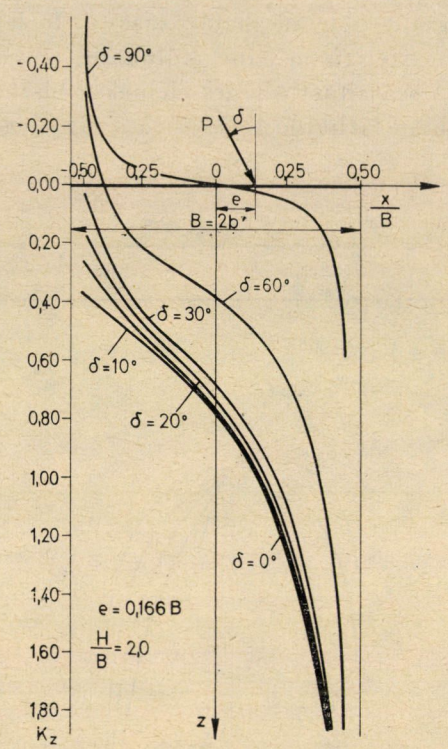


47. ábra. A függőleges feszültségek eloszlása különböző külpontosságok esetén

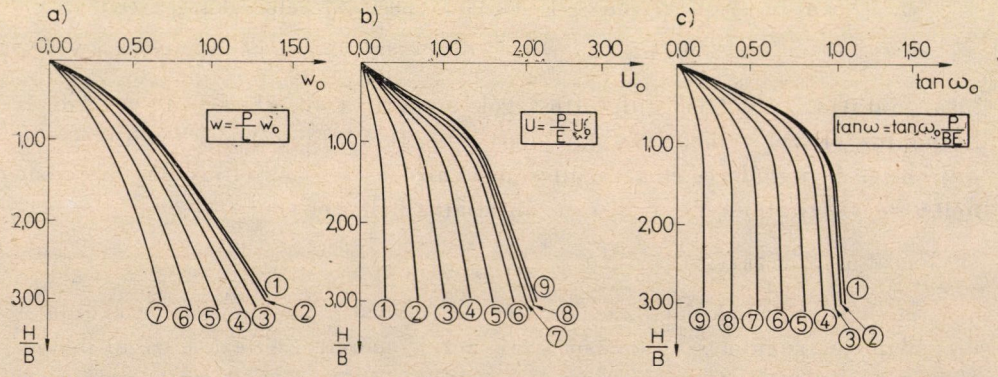
lását mutatja, különböző külpontosságok mellett, a 48. ábra pedig a ferde és külpontos erővel terhelt sávalap alatt jelentkező függőleges feszültségeket adja meg. A függőleges és vízszintes alakváltozások és az elfordulás dimenzió nélküli együtthatói a 49. a, b, és c. ábrában találhatók.

GRASSHOFF, H. (WUPPERTAL-ELBERFELD):

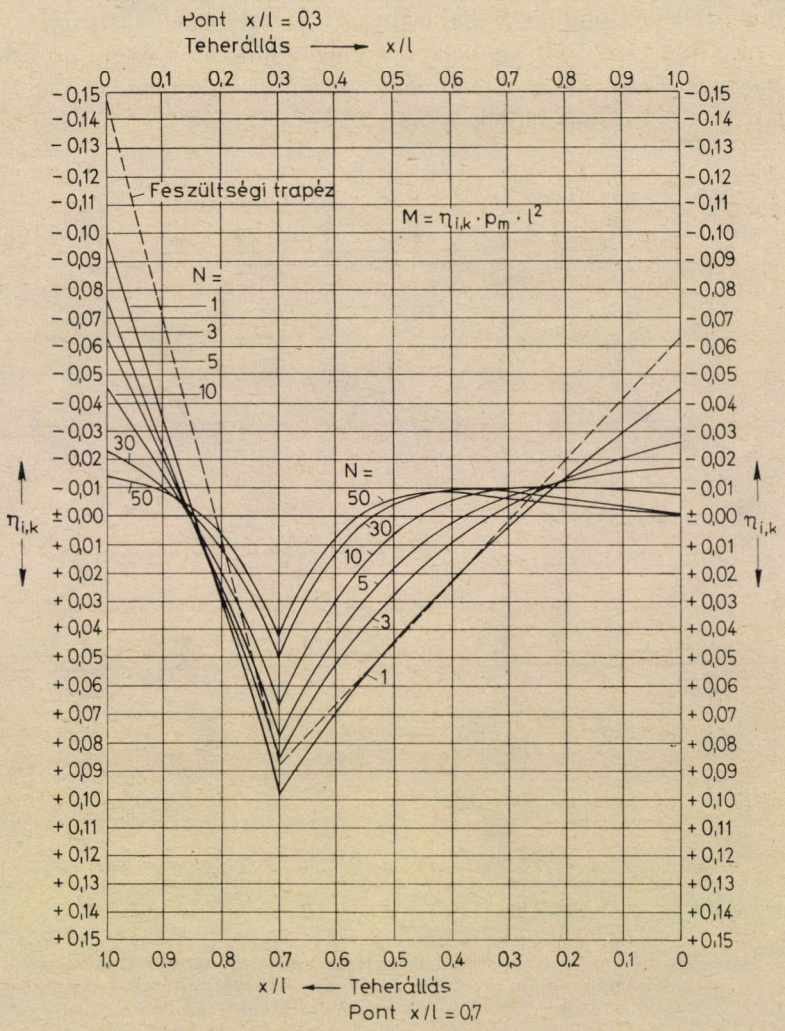
A hatásábrák kidolgozása, miként azt VARGA László korreferátuma is megállapítja, rugalmas ágyazású szerkezetek méretezéséhez, a számítógépes eljárások mellett is fontos. A méretezésre három eljárás áll rendelkezésre: a *feszültségi trapézt*, az *ágyazási együtthatót* és *a merevségi számot* felhasználó eljárás. A tapasztalat azt mutatja, hogy a három eljárás néha eléggé eltérő eredményeket ad, és a tervezőnek gondot okoz, hogy melyik mellett döntsön.



48. ábra. Függőleges feszültségek eloszlása ferde és külpontos erővel terhelt sávalap alatt



49. ábra. a — függőleges alakváltozások dimenzió nélküli együtthatói. 1) $\delta = 0°$, 2) $\delta = 10°$, 3) $\delta = 20°$, 4) $\delta = 30°$, 5) $\delta = 40°$, 6) $\delta = 50°$, 7) $\delta = 60°$. *b* — vízszintes alakváltozások dimenzió nélküli együtthatói. 1) $\delta = 10°$, $\delta = 20°$, 3) $\delta = 40°$, 5) $\delta = 50°$, 6) $\delta = 60°$, 7) $\delta = 70°$, 8) $\delta = 80°$, 9) $\delta = 90°$. *c* — az elfordulások dimenzió nélküli együtthatói. 1) $\delta = 0°$, 2) $\delta = 10°$, 3) $\delta = 20°$, 4) $\delta = 30°$, 5) $\delta = 40°$, 6) $\delta = 50°$, 7) $\delta = 60°$, 7) $\delta = 70°$, 8) $\delta = 80°$

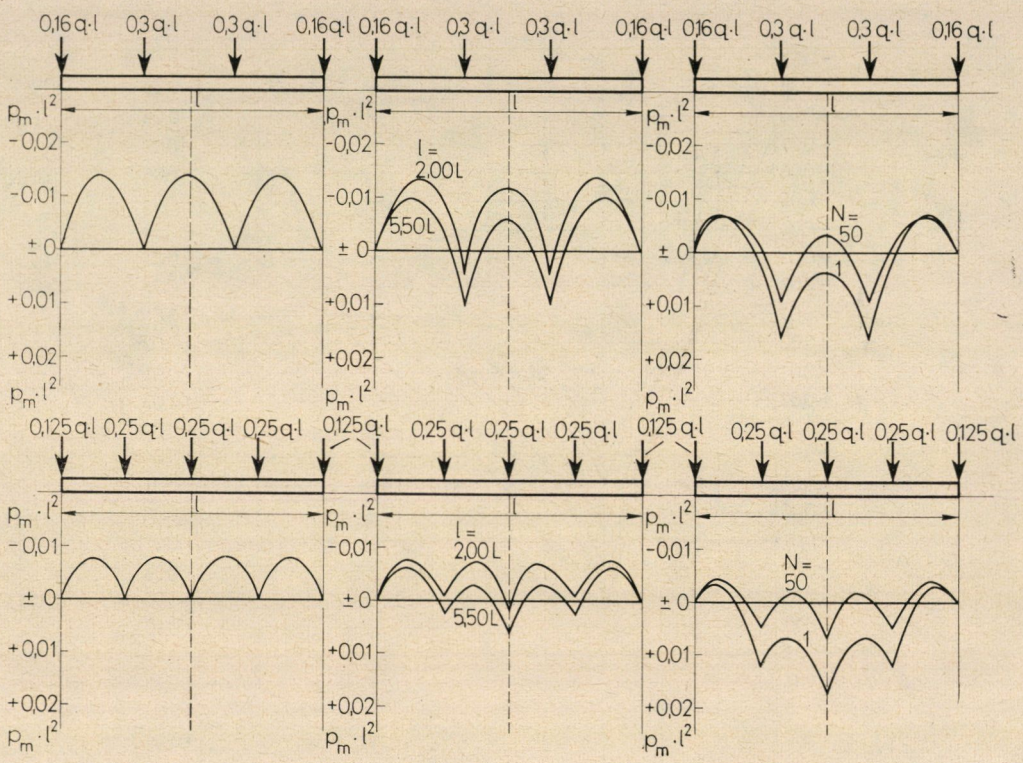


50. ábra. Nyomatéki hatásábrák ($\eta_{i,k} = M/\mathrm{P}ml^2$ értékek) a merevségi viszonyszám függvényében

Egyes eljárások nehezen programozhatók, és így gyakran időtrabló dolog összehasonlító számítások végzése, főként, ha még a tartóméreteket, teherállásokat és talajadatokat is változtatni kell. Ilyen esetekben jó segítséget adnak a *hatásábrák.*

A feszültségi trapéz és az ágyazási együttható módszeréhez már kidolgozásra kerültek ilyen táblázatok; a merevségi szám eljárásához jelenleg dolgozzák ki a talpfeszültség, a hajlító nyomaték és a nyíró erő meghatározására a hatásábrákat. Az 50. ábra például egy keskeny alapgerenda 0,3 l, ill. 0,7 l

pontjaiban fellépő nyomaték hatásábráját szemlélteti. A tíz részre osztott gerenda mindenegyes osztáspontjára kidolgoztunk már ilyen hatásábrát. Az N-értékek a gerenda és az altalaj merevségének viszonyát adják. Merev gerendánál $N = 1$, erősen hajlékonynál 50.



51. ábra. Négy, ill. öt koncentrált erővel terhelt gerenda nyomatéki hatásábrái. *a* — a „feszültségi trapéz" módszere alapján; *b* — az ágyazási együtthatót feltételező eljárással számítva; *c* — a merevségi tényező eljárásával számítva

Ilyen hatásábrák segítségével került kidolgozásra egy négy, ill. egy öt koncentrált erővel terhelt gerenda nyomatéki ábrája, mindhárom említett eljárással. Az eredményeket az 51. ábra mutatja. A különbségek olyan nagyok, hogy a tervező első pillanatra megrémül. Ha csak a biztonságot akarja szem előtt tartani, akkor a számítást mindhárom eljárás szerint elvégzi s a legkedvezőtlenebb eredmény alapján méretez. Ez a módszer azonban nyilván nem lesz gazdaságos. A gazdaságosság figyelembevételéhez pedig arra van szükség, hogy a tervező minden esetben mérlegelje, hogy a kiválasztott altalaj-modell hogyan vihető át a meglevő altalajra. Az ehhez szükséges összehasonlító számítások a hatásábrák segítségével viszonylag gyorsan elvégezhetők.

A konferencia határozatai

1. szekció

a) Fokozni kell azokat a kutatásokat, melyek szemcsés és kötött talajok állapotegyenletének meghatározásához vezethetnek;

b) meg kell határozni az egyidejű víz és szemcsemozgás törvényszerűségeit;

c) foglalkozni kell a törési jelenségek során fellépő fázismozgások meghatározásával;

d) fokozni kell szemcsés és kötött talajok szerkezetének számszerű jellemzésére vonatkozó kutatásokat.

2. szekció

a) Tökéletesíteni kell a földművek kiviteli előírásait;

b) foglalkozni kell átmeneti talajok tömörítésének kérdéseivel;

c) kutatásokat kell végezni a pályaburkolatok alsó rétegének kialakítására, tisztázni kell szemcsés védőréteg szükségességét;

d) meg kell honosítani a dinamikus vizsgálatot burkolatok és burkolatalapok vizsgálatára;

e) foglalkozni kell a hazai felszínmozgások mechanizmusával.

3. szekció

a) Fokozni kell cölöpcsoportok teherbírásának kutatását;

b) meg kell vizsgálni cölöpök csúcsellenállásának és köpenysúrlódásának vizsgálatában elért eredmények gyakorlati hasznosítását;

c) fokozni kell a gépi számítás alapozási alkalmazását;

d) vizsgálni kell résalapok térelhatároló alkalmazását s a kihorgonyzás lehetőségét;

e) fokozni kell a síkalapok alatti talajtörés mechanizmusának vizsgálatát.

IRODALOM

1. Kamenov, B.; Relationships between Volume and Pore-water Change and Shear Stress in Granular Soils. *Proc. 4th Budapest Conf. SMFE*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971, 143. o.
2. Tatsuoka, F.—Ishihara. K.; Stress Dilatancy Characteristics of Sand in Triaxial Tests. *Proc. 4 th. Budapest Conf. SMFE*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971, 337. o.
3. Seyček, J.; Yield Porosity of Sands. *Proc. 4 th Budapest Conf. SMFE*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971, 291. o.
4. Kézdi, Á.—Marczal. I.—Biczók, E.—Kabai, I.; Behaviour of Transition Soils under the Effect of Water. *Proc. 4 th. Budapest Conf. SMFE*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971, 165. o.
5. Kézdi, Á.—Lazányi, I.—Kabai, I.; Compaction of Transition Soils. *Proc. 4th. Budapest Conf. SMFE*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971., 177. o.
6. Kézdi, Á.—Varga, L.—Timár, A.; Strength of Transition Soils. *Proc. 4th. Budapest Conf. SMFE*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971, 187. o.
7. Stefanoff, G.—Ivanov, I. P.; Bestimmung der Scherfestigkeit von Löss. *Proc. 4th. Budapest Conf. SMFE*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971, 315. o.

8. ROSCOE, K. H.—SCHOFFIELD, A. N.—WROTH, C. P.; On the Yielding of Soils. London; *Géotechnique*, 8 (1958), 1. o.
9. KÉZDI Á.—HORVÁTH GY.; Kötött talajok húzó- és hajlító szilárdsága. *Mélyépítéstudományi Szemle*, 22 (1972), 7. sz.
10. STEPKOWSKA, E. T.; Interparticle Forces in Marine Clays. *Proc. 4 th. Budapest Conf. SMFE*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971, 325. o.
11. SKEMPTON, A. W.; Stability of Natural Slopes and Embankment Foundations. General Report, Session 5, *7 th. Int. Conf. Int. Soc. Soil Mech. Found. Engg., Proceedings* 3_1 151. o. Mexico City 1969.
12. KÉZDI, Á.; Handbuch der Bodenmechanik, Bd. 2. Verlag für Bauwesen, Ber lin 1970.
13. PREGL, O.; Ein Beitrag zur Standsicherheitsberechnung von Hängen. *Proc. 4 th. Budapest Conf. SMFE*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971, 479. o.
14. SUKLJE, L.; Rheological Aspects of Soil Mechanics. Wiley Interscience, London/New York 1969.
15. GÖMBKÖTŐ, M.; Load Test on City Roads. *Proc. 4 th. Budapest Conf. SMFE*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971, 415 o.
16. SEED, H. B.—CHAN, C. K.; Compacted Clays. *Proc. ASCE, J. Soil Mech. Found. Div.* Proc. 2216.
17. SCHNEEBELI, G.; La stabilité des tranchées profondes forées en presence de boue. *Houille blanche*, No. 7. (1964.) 815 o.
18. KOVÁCSHÁZY, F.—PAÁL, T.; Gründungsfragen beim Bau der unterirdischen Strecke der Vorortbahn Budapest—Szentendre. *Proc. 4 th Budapest Conf. SMFE*, Akadémiai Kiadó, Budapest 1971, 687. o.
19. MUHS, H.—WEISS, K.; Die Grenztragfähigkeit und Schiefstellung ausmittig — lotrecht belasteter Einzelfundamente im Sand nach Theorie und Versuch. *Berichte aus der Bauforschung*, Heft 59 (1969, b.).
20. DE BEER, E. E.; Grundbruchberechnungen schräg und aussermittig belasteter Flachgründungen. *VDI*-Zeitschrift **105** (1963), 372, 453 és 625 o.

The 4th Budapest Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. — This paper contains the outline of general reports, contributions and adds some comments, as well as includes the resolutions of the Conference organized in October 1971 by the Hungarian Academy of Sciences.

Die 4. Budapester Konferenz über Bodenmechanik und Grundbau. — Diese Mitteilung enthält den Auszug der Generalreferate, Korreferate und einzelner Berichte, sowie die Beschlüsse der von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften im Oktober 1971 veranstalteten Konferenz.

MOTORMUNKAFOLYAMATOK SZIMULÁCIÓJÁNAK KÉRDÉSEI*

HELYZETKÉP

BRODSZKY DEZSŐ[1] ÉS KALMÁR ISTVÁN[2]

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSAI

[Beérkezett; 1973. III. 26-án]

A cikk a belsőégésű motor szimulációja és optimálása alapproblémáinak megvilágítása után a „digitális motor" számításához használt módszereket tekinti át az orosz, az angol és a németnyelvű irodalom alapján, majd beszámol az ez irányú hazai kutatásokról. Ismerteti a munkafolyamat szimulációjával nyert érdekesebb külföldi és hazai eredményeket, végül ezeket kiegészíti azokkal az általános előnyökkel, amelyek a szimuláció használatát indokolják, s meghatározza azokat a területeket, ahol ismereteink hiányosak és kiegészítésre szorulnak.

1. A szimuláció és optimálás általános kérdései

Munkafolyamaton a motorban végbemenő fizikai folyamatok összességének valóságos lefolyását értjük. A vizsgált fizikai folyamatok egészen a végcélig: az effektív munka eléréséig terjednek. A következőkben ezt *teljes munkafolyamatnak* nevezzük.

A fizikai folyamatok követését hamarabb is le lehet zárni: az indikált munkánál ill. az indikátordiagramnál. Ezt a következőkben *belső munkafolyamatnak* nevezzük.

Az effektív munka eléréséig a belső munkán kívül a súrlódási munkát is számításba kell venni. Az indikátordiagram (belső munka) és a súrlódási munka elméleti számítása különbözőképpen történik, az indikátordiagramé forgattyúszögelfordulásonként, vagy még kisebb lépésenként egyidejűleg minden fizikai folyamat figyelembevételével, a súrlódási munkáé mindjárt a teljes munkafolyamatra.

Munkafolyamat *optimálásán* annak olyan kialakítását értjük, amely adott feltételek között valamely jellemzőjének (pl. a legnagyobb hatásfoknak, a legnagyobb középnyomásnak stb.) optimumát adja. Már a példaképpen választott két jellemző megmutatja, hogy ezek egyidejűleg nem érhetők el,

* Az *Áramlás- és Hőtechnikai Gépek Akadémiai Bizottság* megbízásából 1972. februárban készült jelen tanulmányt a Bizottság 1972. október 30-i ülésén megvitatta. Opponens SITKEI György, a műszaki tudományok doktora volt. A közlemény az opponensi vélemény és a bizottsági ülésen elhangzott vita figyelembevételével készült.

[1] Budapesti Műszaki Egyetem Kalorikus Gépek Tanszék, Budapest. (Az 1. és a 2.2 pontok)

[2] Budapesti Műszaki Egyetem Kalorikus Gépek Tanszék, Budapest. (A 2; 2.1; 2.3 és 3 pontok).

az egyikből engedni kell a másik javára. Az optimálás így a legkedvezőbb *kompromisszum* megalkotásává válik.

A munkafolyamat jellemzőinek optimumait nem öncélúan keressük, hanem összefüggésben a motorral szemben támasztott követelményekkel. Ezek az összefüggések a legegyszerűbbektől a legbonyolultabbakig terjednek. A legbonyolultabbak az összefüggések a motor üzembiztossága, valamint élettartama és a munkafolyamat között. Összefüggésnek kell lennie, hiszen a munkafolyamat nemcsak a motorban működő erőket, hanem a motor hőállapotát is meghatározza, és az ezekből származó mechanikai és hőigénybevételek mind az üzembiztosságra, mind az élettartamra kihatnak. Nem törekedvén teljességre, a legbonyolultabbról a legegyszerűbbre ugrunk át, mert ennek példáján az optimálás fejlődése jól követhető.

A legegyszerűbb összefüggés: maximális hatásfok minimális fajlagos tüzelőanyagfogyasztást jelent. A gyakorlatban a legfontosabb az effektív hatásfok, amivel az effektív teljesítményre vonatkoztatott tüzelőanyagfogyasztás függ közvetlenül össze.

Az effektív teljesítmény és ugyanígy az effektív hatásfok régebben kizárólag fékezési kísérletekkel volt meghatározható, mégpedig elméleti alátámasztás nélkül. Pusztán kísérleti úton optimálni nem lehet, csak az adódó szélső értékeket kikeresni, bizonytalanságban maradva, nem lehetne-e ennél jobbat is elérni. Ezt a bizonytalanságot csak valamennyi folyamat mélyreható megismerése szüntetheti meg.

Akkor mondhatjuk, hogy valamennyi folyamatot mélyrehatóan megismertük, ha azokat matematikailag is meg tudjuk fogalmazni, más szavakkal matematikailag modellezni tudjuk. Ha ez sikerül, akkor a valóságos motorral végzett kísérleteket felválthatják a matematikai modellel „digitális motorral" végzett kísérletek, amelyeknek eredményeiből már nemcsak kikeresni lehet az adódó szélső értékeket, hanem ténylegesen lehet optimálni, hiszen a folyamatok mélyreható ismerete megszünteti a fentebb említett bizonytalanságot és megtalálhatók azok az optimumok, amelyeknél jobbakra már nem érdemes törekedni, mert túlságosan nagy áldozatokkal járna.

A motor valóságos munkafolyamatának számítással követése azért nehéz, mert a folyamatok időben instacionáriusan mennek végbe. Ezért eddig egyszerű elméleti összehasonlító folyamatokra voltunk utalva és csak az elektronikus számítógép tette lehetővé a valóságos viszonyok pontos követését.

Optimálásról már az egyszerű elméleti összehasonlító folyamatoknál is volt szó, ezek jellemzői és a motorral szemben támasztott követelmények közötti összefüggések azonban nagyon lazák voltak. A legegyszerűbb példát, a hatásfokot nézve, az összehasonlító körfolyamatokból csak ezek hatásfokát kaphattuk meg, és nem a motor effektív hatásfokát. A kettő közötti űrt a jósági fok és a mechanikai hatásfok szorzata töltötte ki, melyek közül különösen az első nem annyira a motor jóságát jellemzi, mint inkább ismereteink hiányosságait, hasonlóan a biztonsági tényezőhöz, amely akkor nagy, ha nem tudunk pontosan számolni.

A motorban végbemenő bonyolult folyamatoknak megismerése igen sok kutatómunkát igényelt és továbbiakat igényel még ma is. Számítással követésük is olyan sok műveletet tesz szükségessé, amit csak az elektronikus számítógép tett lehetővé. A digitális számítógép adta lehetőségek gyökeresen megváltoztathatják a szemléletet, ahogyan a munkafolyamatot számítjuk. Egyre kevesebb az eszményesítés és egyre hívebb a valóság követése. Olyan eszményi

folyamatok, amelyek a valóságban nem léteznek, nem szerepelnek a számításban. Így például nem számolunk adiabatákkal, minthogy régen tudjuk, hogy a motorban ilyen nincs. Tudomásul kell vennünk, hogy a motorban mindig hőcsere történik a munkaközeg és a fal között és ennek számítással való követésére meg is van a lehetőség, ha a hőátadási összefüggéseinket finomítjuk. Dieselmotornál tudomásul kell venni, hogy tüzelőanyag idő nélkül nem jut a hengerbe és csak az a tüzelőanyag éghet el, amely már bent van és az elégéshez is idő kell. A belső veszteségeket mindjárt keletkezésükkor vesszük számításba, így a jósági fok fogalma eltűnik.

Ha a számítógépbe beprogramozzuk azt a matematikai modellt, amely az idő vagy annak megfelelő más változó (forgattyú-szögelfordulás) függvényében a függő változóknak a valóságos motoron mérhető lefolyását adja eredményül, *szimulációról* beszélünk. A motor ill. munkafolyamatának előre ismert jellemzői bemenő adatként szolgálnak.

A bemenő adatok változtatásával olyan rendszereket vizsgálhatunk, amelyekben lejátszódó folyamatokat ugyanaz a matematikai modell írja le, más szavakkal: üzemeltethetjük a csak számokban létező „digitális motor"-t.

Az optimálás és a szimuláció fogalmának meghatározása után e kettő kapcsolata a következőképpen fogalmazható: *Magasabb szintű* (a valóságot hívebben követő) *optimálás csak szimuláció segítségével hajtható végre.*

Szimulálni lehet a motor belső munkafolyamatát és/vagy a teljes munkafolyamatát. Ha a motor belső munkafolyamatát szimuláljuk, akkor az indikátordiagramot és az ezzel összefüggő jellemzőket kapjuk végeredményül. Ez nagy eredmény, hiszen a számítás során a gázhőmérsékletek és a falakon távozó hő is szükségszerűen számításra kerülnek. Így a nyert eredmények nemcsak az indikált középnyomásról, a csúcsnyomásról és a nyomásnövekedési sebességről, hanem a falakon átáramló hőmennyiségről is képet nyújtanak.

Mindazonáltal az indikátordiagramnak önmagában történő optimálása kisebb értékű, mert ennek jellemzői és a motorral szemben támasztható követelmények közötti összefüggések még nem elég szorosak. Megint a legegyszerűbb példát választva, hiába maximális az indikált termikus hatásfok, ha a hozzá tartozó effektív hatásfok nem az.

Mégis úgy tűnik, hogy a külföldi irodalomban található optimálási törekvések a belső folyamat (indikátordiagram) optimálását célozzák.

Teljes értékű optimáláshoz a teljes munkafolyamat szimulálása szükséges, tehát nem szabad megállni az indikált középnyomásnál és indikált termikus hatásfoknál, hanem el kell jutnunk az effektív középnyomásig és effektív hatásfokig. Ezek már szoros kapcsolatban állnak a motorral szemben támasztható követelményekkel (optimális tüzelőanyagfogyasztás, kis fajlagos súly és térfogat, stb.)

A teljes munkafolyamat szimulálásának nincs akadálya, csak ki kell bővíteni a matematikai modellt a mechanikai hatásfoknak matematikai megfogalmazásával.

Az indikátordiagram számítása a teljes munkafolyamat szimulációjához is szükséges. Ez fel is rajzolható akár kézzel, akár elektronikus szerkezettel, bár csak a számadatok szükségesek. Ez az indikátordiagram nem végeredmény ilyenkor, végeredmény az effektív középnyomás, stb.

A szimuláció fordított sorrendben adja az eredményeket, mint a valóságos motorral végzett kísérlet. Valóságos motorkísérletek legfontosabb eszköze a fékezés, amellyel az effektív középnyomás közvetlenül meghatározható, a

gyakorlatban fontos további effektív értékekkel együtt. A motor belső teljesítménye már csak a folyamatok mélyrehatóbb megismerése végett érdekel. E célra használjuk az indikátort is, a belső folyamatok megismerésének legfőbb eszközét. Az indikátordiagram mélyreható elemzése már a folyamatok számítással való követéséhez szolgáltat sok adatot [31].

Ezeket kiegészítve más kísérleti adatokkal, megkezdődhetik a munkafolyamat szimulációja. Ezután már nemcsak a motorból kaphatunk indikátordiagramot minden meglevő üzemállapotra, hanem a számítógépből, a „digitális motor"-ból is, amely a meglevő motor meglevő és meg nem levő üzemállapotához képes indikátordiagramot felrajzolni, sőt a valóságban nem létező motor minden üzemállapotához is. A szimuláció azonban tovább folytatódik, meg kell még kapnunk az effektív középnyomást ill. effektív teljesítményt is, hiszen erre vonatkoztatjuk azokat a fajlagos értékeket, amelyeket optimálni óhajtunk.

Optimálni a munkafolyamatnak azokat a jellemzőit lehet, amelyek matematikailag megfogalmazható kapcsolatban vannak a motorral szemben támasztható valamely követelménnyel. Ilyenek: hatásfok, tüzelőanyagfogyasztás; középnyomás, teljesítmény, nyomásnövekedési sebesség, zajszint stb. A legbonyolultabb összefüggések, mint élettartam és üzembiztosság kapcsolatai a munkafolyamat jellemzőivel még nem fogalmazhatók meg egyértelműen matematikailag. Mindazonáltal igyekeznek egyes jellemző hőterhelések kiszámítására, a gyakorlati tapasztalatokra támaszkodva, hogy az égéstér mely részeinek milyen fajtájú hőigénybevételeinek korlátozása növeli az üzembiztosságot és élettartamot.

A szimuláció elsősorban olyan motorfejlesztési feladatok megoldásához nyújt segítséget, amelyeknél egy meglevő motor munkafolyamatának változását (pl. középnyomás növelés feltöltéssel) kell figyelemmel kísérni.

Ilyen esetben a következőképpen lehet a szimulációt reálissá tenni. A meglevő motor indikátordiagramjának és az ebből nyerhető adatok ismeretében a számítóprogram bemenő adatait célszerűen úgy választjuk, hogy a „digitális motor" indikátordiagramja és hőmérsékletdiagramja jó közelítéssel megegyezzék a mért diagramokkal. Az így „illesztett digitális motor" már reálisan alkalmazható a kérdéses változtatások hatásának megítéléséhez és már nemcsak minőségi, hanem mennyiségi következtetésekre is lehetőség nyílik.

2. A „digitális motor" számításához használt módszerek

A részletes, nagyobb pontossági-igényű szimulációnál lehetőség szerint minden fizikai jelenséget, változást figyelembe szükséges venni. Ezeknek a matematikai leírása azonban csak korlátozott pontosságú, mert maguknak a jelenségeknek az ismerete is erősen hiányos. Ez a szimuláció alapproblémája, nem pedig a számítás módszere. Mindenesetre a módszerekben eltérés van, elsősorban az alapegyenletek felírásában, valamint ezek megoldási sorrendjében, ill. egymáshoz való kapcsolódásukban. Az alapegyenletek között mindig szerepel a termodinamika első főtétele ill. az energia-egyenlet, a gáz állapotegyenlet, az adiabata-egyenlet és a tömegmegmaradást kifejező egyenlet. A szimulációval foglalkozó irodalomban nem indokolják a szerzők a használt egyenleteket, nem tesznek összehasonlítást a lehetséges számítási módszerek közt és nem is értékelik a számítás módszeréből adódó hibákat a különböző lehetőségek alkalmazása esetében.

Az alapegyenletek három felírási módját érdemes megemlíteni, amelyek az orosz-, az angol- és a német-nyelvű irodalomban találhatók és az adott nyelvterületen jellemzőek is az alkalmazott módszerre. Megemlítjük, hogy jelen munkához felhasznált „digitális motor"-unk a szovjet irodalomban használt számítási módszer alapján került kifejlesztésre, mert ez a fejlesztés kezdetekor, 1960-ban — mint kézi számítási módszer — már ismert volt. A gépi számítás adta lehetőségek kihasználásával, az első hazai eredmények már a hőbevezetés, ill. az égés és a hőátadás forgattyúszögtől függő törvényszerűségét figyelembe vevő számítási módszer alapján születtek. Ez nemcsak az alapirodalmi módszer lényegbeli továbbfejlesztése volt, hanem megelőzte mind az európai, mind az amerikai irodalmi közleményeket. Ez is magyarázza, hogy mindkettőtől eléggé különböző eljárásokat használ.

A német nyelvű irodalomban megjelent közlemények a fejlett szimuláció terén WOSCHNI munkái [1; 2]. Ezek az augsburgi MAN motorgyár kutatási osztályán végzett munkák eredményei, amelyeknél az egyes programrészleteket külön csak erre összpontosult kutatással foglalkozó mérnökök dolgozták ki. Az adatokat a nagyszámú kísérletek alapján vihették a számítógépbe, az eredményeket pedig — a cikkek tanúsága szerint — erre a célra végzett kiterjedt kísérletekkel ellenőrizték.

Az angol nyelvű irodalom sokkal kiterjedtebb, az egyszerűbb számításoktól [5] a fejlett szimulációig [6; 7; 8] minden fokozatot magában foglal. Ezek közül legfejlettebb MCAULEY és szerzőtársainak munkája [6], akik az International Harvester Co. és a University of Wisconsin együttműködésében dolgoztak 1960 óta, több egyetemi szakember bevonásával. Az első program után már az Army Tank Automotive Center és a Continental Aviation and Engineering Co. támogatta munkájukat, aminek során több doktori dolgozat is kidolgozásra került. Az 1965-ben megjelent publikáció beszámol a szimulációval nyert eredményekről és ezek kísérleti ellenőrzéséről.

Az említett munkák annyira jellegzetesen képviselik az amerikai ill. az európai motor-szimulációs irodalmat, hogy módszereik rövid áttekintésével az egész külföldi szakterületről képet kaphatunk.

MCAULEY és társai az energiaegyensúlyt írják fel általános alapegyenletként:

$$\dot{U} = \dot{G}\dot{U} = -p\dot{V} + \Sigma \dot{Q}_i + \Sigma i_i \dot{G}_i ,$$

ahol a ponttal jelölt mennyiségek idő szerinti differenciálhányadosok és az i index az egyes folyamatrészletekre — mint pl. kiáramlás és beáramlás — utal.

Mivel a fajlagos belső energia

$$\dot{U} = \frac{\partial u}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial u}{\partial P}\dot{P} + \frac{\partial u}{\partial m}\dot{m} ,$$

ahol a jobboldal középső tagja a dieselmotoroknál fellépő maximális hőmérsékleteknél, a disszociáció elmaradása miatt nullával tehető egyenlővé, az állapotegyenlet felhasználásával felírható a hőmérsékletre, hogy

$$\dot{T} = \frac{-\frac{RT}{V}\dot{V} + \frac{1}{G}[\Sigma \dot{Q}_i + \Sigma i_i \dot{G}_i - u\dot{G}] - \frac{\partial u}{\partial m}\dot{m}}{\frac{\partial u}{\partial T}} .$$

Az m légviszony, a $\dot{G}$ gázmennyiségváltozás, a $\dot{Q}$ hőmennyiség- és a $\dot{V}$ térfogatváltozás számítására további egyenletek szolgálnak. Ezek megoldása után nyerhető a $\dot{T}$, és az állapotegyenlet segítségével a nyomásváltozás egy vizsgált elemi időintervallumra.

Az előzőekkel csaknem teljesen megegyezőek WOSCHNI kiindulási egyenletei, amelyek közül először a termodinamika első főtétele alapján a belső energia változását írja fel:

$$\frac{\mathrm{d}(G.U)}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}Q_{\acute{e}}}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{\mathrm{d}Q_f}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}G_{sz}}{\mathrm{d}\varphi} i_{sz} - \frac{\mathrm{d}G_k}{\mathrm{d}\varphi} i_k - AP\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi},$$

majd ebből az állapotegyenlet és a belső energiának a hőmérséklettől és a gázösszetételtől való függését kifejező egyenlet felhasználásával a hőmérsékletváltozást fejezi ki:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{G\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}}\left[\frac{\mathrm{d}Q_{\acute{e}}}{\mathrm{d}\varphi} - \frac{\mathrm{d}Q_f}{\mathrm{d}\varphi} + \frac{\mathrm{d}G_{sz}}{\mathrm{d}\varphi}(i_{sz} - U) - \frac{\mathrm{d}G_k}{\mathrm{d}\varphi} ART - AP\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\varphi} - \right.$$
$$\left. - \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\varphi} U - G\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\varphi}\right].$$

Az egyenlet jellegzetes tagjai mellett — mint az égéssel felszabaduló hő, a falakon távozó hő, a szívócsatornán beáramló közeg teljes lefékeződés utáni energiája, a kiáramló közeggel elvitt energia, a dugattyúnak leadott munka — szerepel utolsó két tagként a belső energiának a gázmennyiség és a gázösszetétel miatt beálló változása.

A vázlatosan ismertetett két igen sokban egyező eljárástól erősen különbözik az a módszer, amelyet *saját motorszimulációnkhoz* alkalmaztunk. Ezeknek alapjai GLAGOLJEV harkovi professzor munkáiban találhatók [9, 10]. Az ő módszerével még a gépi számítás megjelenése előtt végeztek kézi sorozatszámításokat új motortípusok alapjellemzőinek kiválasztására. A gázcsere számításának vonatkozásában ez a módszer igen közel áll LIST [11] eljárásához.

Az első alapegyenlet saját digitális motorunk matematikai modelljéhez [12; 13] a forgattyústengely egy kis elemi $d\varphi$ szöggel való elfordulására jutó nyomásváltozást fejezi ki. Felírásához a forgattyús tengely $d\varphi$ szögelfordulásának megfelelő dV hengertérfogatváltozás során lejátszódó fizikai jelenségeket időben szétválasztottaknak képzeljük. Így az elemi politropikus változás egy adiabatikus változásnak és az egyéb jelenségek következtében állandó nyomáson előálló változásoknak összegeként fogható fel. A munkafolyamat során a hengerben lejátszódó fizikai folyamatok közül a számítás a következőket veszi figyelembe (zárójelben megjelöltük a képleteknél használt indexeket is):

1. a henger térfogatváltozását a dugattyúmozgás következtében (d),
2. a hengerben levő gáz mennyiségének és összetételének változását a szívószelepen való beáramlás (sz); a kiáramlás (k) és az égés miatti molváltozás (M) következtében,
3. a hőközlési folyamatokat: az égés során felszabaduló hőt ($\acute{e}$), a falakon történő hőleadást (f), a sebességi energia hőenergiává alakulását a beáramlás során,

4. osztott égéstér esetén a 2. és 3. pont alattiakat a kamrára vonatkozóan is (*á*).

Mindezeket a jelenségeket elemi térfogatváltozásokra vezetjük vissza, mely utóbbiak fajtérfogatváltozás, vagy mennyiségváltozás, vagy mindkettő következtében jönnek létre.

A fajtérfogatváltozások összege és a nyomásváltozás között az adiabata egyenlet differenciális alakja

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\varkappa \frac{\mathrm{d}v}{v}$$

adja meg az összefüggést. Így az első alapegyenlet:

$$\mathrm{d}p = \frac{\varkappa p}{V}(-\mathrm{d}V_d - \partial V_k + \partial V_{sz} + \partial V_é + \partial V_f + \partial V_M + \partial V_á)$$

A második alapegyenlet a hengerben levő gáz mennyiségének változását fejezi ki:

$$dM = \partial M_{sz} - \partial M_k + \partial M_é + \partial M_á.$$

A parciális differenciálok azt kívánják kifejezni, hogy a kérdéses változás nemcsak a szögelfordulás függvénye. Továbbá meg kell említeni, hogy $\partial V_á$ és ∂V_f, valamint $\partial M_á$ előjele, valamint bizonyos esetekben (szívóvezetékbe való visszaáramlásnál) ∂V_{sz} és ∂M_{sz} előjele negatív is lehet, amelyet számítás közben kell eldönteni.

Mindegyik említett számítási eljárásnál a differenciál egyenletek szimultán megoldását csak közelítő módszerrel lehet végrehajtani. Ezek az egyenleteknek elemi kis változásokra való numerikus megoldásából állnak, amikor a megoldás érdekében több feltételezést is kell tenni. A szimuláció sajátosságát éppen a feltételezések, ill. az ezek alapján felírt egyenletek adják. A nagyon sokféle feltétel leglényegesebbjeit a különböző szimulációs rendszereknél egy áttekintő táblázatba foglaltuk össze, amely egyáltalán nem törekszik teljességre, de bizonyos időbeli fejlődésre utal.

2.1. A főmunkafolyamat számítása osztatlan és osztott égésterű dieselmotoroknál

A főmunkafolyamat számítása során az első alapegyenletben a dugattyúmozgásnak megfelelő tagon kívül az égés- és a falveszteségtagok dominálnak, valamint osztott égésterű motornál a két térrész közötti átáramlást kifejező tag. Ezeknek a számítása igen sokféle megoldásban lehetséges, célszerű ezért különválasztott tárgyalásuk.

2.1.1. Hőfejlődési függvények az égésfolyamat számításához

A legegyszerűbb számítást a két egyenessel határolt „hőfejlődési függvény" teszi lehetővé, amely a maximumig lineárisan növekvő, majd ugyanígy nulláig csökkenő szakaszból áll. Az ilyen különböző arányú *háromszögű függvény* szerint számították a munkafolyamatokat Austen és Lyn [5], valamint Woschni is egyenes szakaszokból — összetett háromszögekből — álló függvényt használt erre a célra.

Az egyes fizikai jelenségek figyelembevételének módjai és azok megjelenési ideje az alapul választott szerzők szimulációs rendszerében

		Mc Auley	*Woschni*	*Saját*
Molhő	Lineáris empirikus formula	—	1963	1963
	A pillanatnyi légviszonyból m = 1 és m = ∞-nek megfelelő gázok keveréke	1965	—	1967
Égés számítása		—	1963 1965	—
	Háromszög, vagy kettős háromszög alakú égéstörvény	1965	—	—
	Tetszőlegesen felvett égéstörvény	1965	—	1968
	Kísérletileg nyert égéstörvény	—	—	1963
	Vibe-féle függvény	—	—	1971
	Befecskendezésből számított égéstörvény			
Hőveszteség számítása	Konvektív hőátadási tényező	An. Ei. 1965	Pfl. 1963; Wo. 1965	Ei, Pfl. 1963; Wo. Si. 1969
	Annand, Eichelberg, Pflaum, Woschni, Sitkei szerint	An. 1965	—	—
	Konvektív + lángsugárzásos hőátadás	—	—	Si. 1971
	Konvektív + lángsugárzásos hőátadás kísérleti lángelnyelési tényezővel		1963	1963
	Az egész égéstérre egybevont falveszteség	1965	1965	1971
	Különválasztott hőveszteségek a hengerfejre, dugattyúra, perselyre	1965	—	—
	Különválasztott hőveszteségek még a gázvezetékekre is, számított falhőmérsékletekkel			
Osztott égéstér		—	—	1967
	Külön hőfelszabadulás a két térben, az eff. átáramlási keresztmetszet állandó	—	—	1970
	U.a. de az eff. átáramlási keresztmetszet a nyomásviszony függvénye	1965	1963	1963
Gázcsere számítása	Állandó szívó- és kipufogóoldali nyomás	1965	—	—
	Állandó szívóoldali és előírt változású kipufogóoldali nyomás	1965	1965	—
	Akusztikai elven, egyedi hengerre számított kipufogóoldali nyomás	—	—	1971
	Kvázistacionárius kipufogó oldali nyomás, öblítés, turbófeltöltés, visszahűtés számítása	1965	—	—
Mech. veszteség számítása	Empirikus lineáris formulával	—	—	1967
	A mech. veszteség változása egy alap-állapothoz képest terhelés és ford. sz. szerint			

Az ilyen függvények egyszerűségük miatt könnyen használhatók, közelítésre alkalmasak lehetnek, de fizikai tartalmuk nincs és a fejlettebb szimulációhoz nem megfelelőek.

Lényegesen jobb módszer a McAuley és társai által használt eljárás, amely — mérési adatokból visszaszámolt elégési függvény alapján számítja a hőfelszabadulást. Természetesen ez feltételezi, hogy a mérés ugyanolyan égésterű motor hasonló üzemállapotában történt, ami csak az esetek kis számában valósítható meg. Itt gyakorlatilag az adatok között, összetartozó forgattyúszög — hőmennyiség értékpárokkal kell közölni a függvényt a számítógéppel, ezért ezt *„adatpáros"-égésfüggvénynek* neveztük a saját szimulációnknál. Ugyanis bizonyos esetekben — különösen összehasonlításkor és teszteléskor — mi is használtuk ezt a módszert az égés szakaszának számítására. Mivel az égésfüggvényt meglehetősen költséges mérésekkel és számításokkal nyerhetjük, általában csak kis számban állnak rendelkezésre, ha pedig nem éppen a szimuláció körülményeinek felelnek meg, akkor alkalmazásuk értelmét veszti.

A háromszögű égésfüggvényeknél sokkal haladottabb és jobb Vibe [14] függvénye, amely reakciókinetikai és kísérleti alapokon álló empirikus formula. Ez a dimenziónélküli elégési idő (y) függvényében adja meg az égéskezdettől felszabadult hő hányadát (x):

$$x = 1 \exp\left(- a y^{m+1}\right)$$

ahol a és m az égésrendszertől függő állandók.

A Vibe-féle függvénnyel igen sok égésfüggvény-változat előállítható és így segítségével egyszerűen vizsgálható az égés jellegének és időzítésének hatása a motor jellemzőire. Használatakor meg kell adni a bemeneti adatok közt a konstansok értékeit, az égés kezdetét és hosszát. A kísérleti adatokból és Vibe ajánlásai alapján az egyes motor-égéstér típusokhoz megkereshetők a legvalószínűbb adatok, azonban itt is meglehetősen sok bizonytalanság marad a választáskor. Megmarad az az ellentmondás, hogy először mérni kellene, majd a mért adatokkal végrehajtani a szimulációt. Leginkább itt, az égés számításánál jelentkezik a szimuláció korlátja, mert az égést befolyásoló jelenségek összefüggése jelenleg még mennyiségileg alig ismeretes. Ezért különösen az égés változatait illetően csak relatív értékelésre szabad törekedni és *csak ezt* lehet elvárni a szimulációtól.

Még a relatív értékeléshez sem nyújtanak elegendő lehetőséget az eddig ismertetett hőfejlődési-égési-függvények, hiszen a motor üzemállapotának változását alapvetően jellemző terhelés és fordulatszám nem szerepel az összefüggésekben. Ez alól csak elvileg kivétel az adatpáros égésfüggvény, mert gyakorlatilag nem áll rendelkezésre annyi kísérleti adat, mint amennyi szimulációs változatra van szükség.

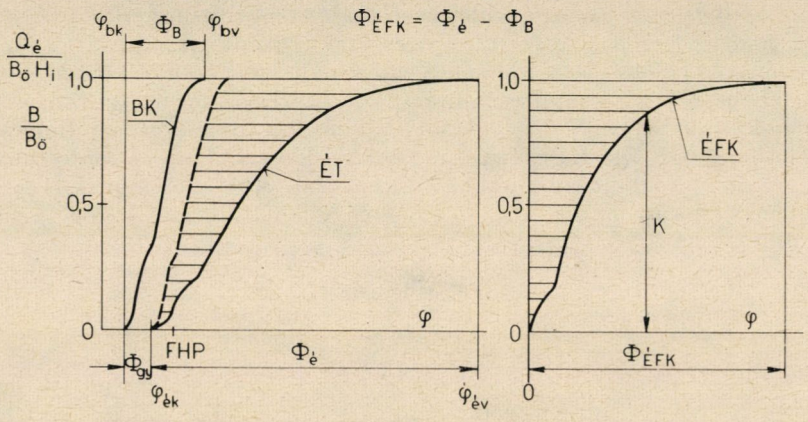
Ezen alapvető számítási problémának a megoldását segítik elő azok a kísérletsorozatok, amelyeket a *befecskendezés és az égés közötti kapcsolat* megismerése céljából Csepel dieselmotoron végeztünk [15]. Ezen igen komplex mérési feladat során a befecskendezés jellemzésére a befecskendezési karakterisztikát, az égés jellemzésére az égésfüggvényt (égéstörvényt) használtuk.

A befecskendezési karakterisztika és az égésfüggvény közötti kapcsolat számszerű kimutatására az az alkalmazott dimenzió nélküli ábrázolásmód nyújt lehetőséget, amelyet az 1. ábra szemléltet. A tüzelőanyag-befecskendezés és az azt mintegy változó fáziskéséssel követő égés között forgattyúszögben

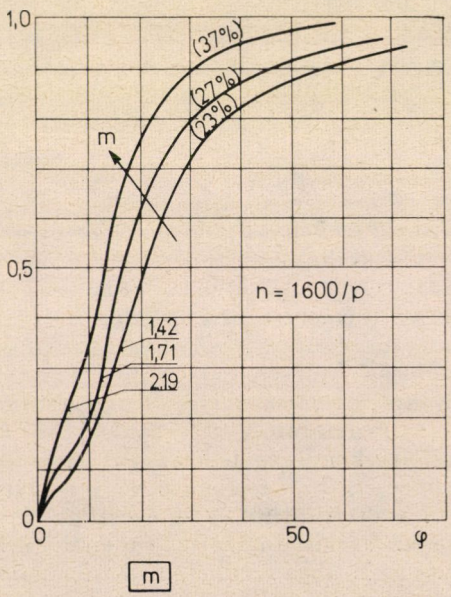
mérhető különbségek mutatkoznak. Az ábra szerint ebből képzett görbét ill. függvényt *égési fáziskésés*-nek nevezzük és *ÉFK*-val jelöljük.

Példaképpen a 2. ábrán az előkamrás Csepel motor *ÉFK* görbéi láthatók állandó fordulatszám és változó légviszony ill. terhelés mellett, a 3. ábra pedig a fordulatszám ill. dugattyú középsebesség hatását mutatja állandó légviszonynál.

A nagyszámú mérési adat — mintegy 3600 információ — lehetővé tette, hogy az *ÉFK*-ra vonatkozó eredményeket általánosított alakban, számítások-



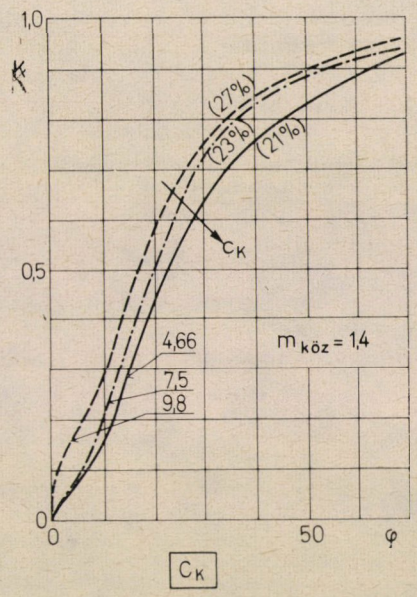
1. ábra



2. ábra

hoz is felhasználhatóan dolgozzuk fel. Az $ÉFK$-függvény leírására a következő formula alkalmas:

$$K = K_1 \frac{B_1}{B_{\delta}} + K_2 \frac{B_2}{B_{\delta}} = K(\varphi) ,$$



3. ábra

ahol:

K — az $ÉFK$ függvény inverze
B_1 — a gyúlási késedelem alatt befecskendezett tüzelőanyag mennyisége
B_{δ} — a ciklusba befecskendezett összes tüzelőanyag mennyisége

és

$$B_1 + B_2 = B_{\delta} .$$

Ebből kitűnik, hogy az $ÉFK$ kettős jellegű; a gyúlási késedelem ideje alatt akkumulálódott tüzelőanyag mennyiségre a K_1 függvényösszetevő, a továbbira a K_2 érvényes. A két függvényösszetevőre a mérési eredmények alapján a következő képletek adhatók meg:

$$K_1 = 1 - \exp\left[-f_1(C_K)\, I_1\right]^{b_1/m} \quad \text{és} \quad K_2 = 1 - \exp\left[-f_2(C_K)\, I_2\right]^{b_2/m^2}$$

ahol:

$f_1(C_K)$ és $f_2(C_K)$ — a dugattyú középsebesség egyszerű függvényei; esetünkben $f_1(C_K) = f_2(C_K) = a + d\, C_K$, ahol $a = 5$ és $d = 0{,}5$;

$I_1 = \dfrac{\varphi - \varphi_{ék}}{\Phi_{EFK}}$; $I_2 = \dfrac{\varphi - \varphi_{ék} - \alpha}{\Phi_{EFK} - \alpha}$ ahol $I_1 \geqq 0$ és $I_2 \geqq 0$ esetére értelmezett

m = a légviszony

$b_1 = 1 \sim 3$ és $b_2 = 2 \sim 5$ — a keverékképzés rendszerétől függő állandók

α = 1 ~ 4 fok — értéke a $C_{K\,névl}/C_K$ és $m/m_{névl}$ viszonyszámok szorzatától függ, de nulla is lehet. Ekkor $I_1 = I_2$.

A K függvény segítségével lehetővé válik a szimuláció során a fordulatszám és a terhelés figyelembevétele. Ezzel szemben a Vibe-féle függvények nem utalnak ezek hatására, és nem veszik számításba a gyúlási késedelem ideje alatti tüzelőanyag-akkumulációt követő gyorsabb égési szakaszt sem. Természetesen a K függvény meghatározásához a továbbiakban is sok mérési eredmény feldolgozása szükséges, mert az égésrendszertől függően az állandókban elég nagy változások adódhatnak. Azt az alapkövetelményt azonban, hogy a fizikai jelenséget jobban leíró és legalább relatíven helyes értékelésre alkalmas legyen, ez az égés számítására szolgáló függvény kielégíti.

Számítóprogramunk fejlesztésére jelenleg folyamatban van az égési fáziskésés függvényeinek bevitele a programba, amikor az égési szakasz számítása a befecskendezésből indulhat ki. A befecskendezés és az égés kezdete közötti gyúláskésedelmet ekkor szintén célszerű számítani, hiszen ez nem állandó. Ezáltal viszont szintén jobban figyelembe vehető az üzemállapotváltozás, ami a szimuláció lényeges követelménye. A gyúlási késedelmet LISEVSZKIJ [25] vagy ARAMA [26] empirikus formulái alapján számítjuk.

2.1.2. Hőveszteségi függvények a főmunkafolyamatnál

Bár a szimulációhoz használt hőveszteségi függvényeknél sokkal jobbnak látszanak a fizikai alapok, mint az égésfüggvényeknél, mégis a számítási változatok száma rendkívül nagy. A változatok alapvetően három problémakör megoldási módszereiben különböznek:

a) a gáz és a határoló falak közötti *hőátadási tényezőkre* vonatkozó egyenlet;

b) a *fal-felület* nagyságának és ezzel együttjáró *átlaghőmérséklet* változásának figyelembevétele;

c) a *lángsugárzás* figyelembevétele és számítási módja.

A *konvektív hőátadást* MCAULEY és társai EICHELBERG [16] és ANNAND [17] hőátadási tényezőjével számítják, WOSCHNI [18] először PFLAUM [19] formuláját, majd saját képletét használta. Mi PFLAUM, EICHELBERG és SITKEI [20] egyenleteit egyaránt használtuk szimulációs programunkban, a választási lehetőséget egy, a bemeneti adatok közt szereplő utasítás biztosította.

A hőveszteségi függvények számításánál az egyes *falfelület-részeken* átmenő hőmennyiség különválasztása is szokásos. Ezt indokolja egyrészt a felületrészek eltérő átlaghőmérséklete, másrészt — mint az a Pflaum-féle formulából kitűnik — az eltérő hőátadási viszonyok. Ezzel a formulával számítva, a perselynél harmadakkora hőátadási tényező adódik, mint a hengerfejnél, vagy a dugattyúnál. Érdekes, hogy PFLAUM erre vonatkozó logikus indokolása ellenére is jóformán csak WOSCHNI említett első cikkében szerepel ennek a formulának a használata. Mi is úgy találtuk, hogy az ezzel kapott eredmények túl nagy hőveszteségeket mutatnak még feltöltött motornál is és ezért csak néhány esetben alkalmaztuk.

A falveszteségeket mi is — hasonlóan a többi említett szerzőhöz — a dugattyútetőn, a hengerfejen és a perselyen átmenő hőt különválasztva számítottuk, ahol a mindenkori felületeket és ezek helyi és időbeli középhőmérsékleteit vettük figyelembe.

Lényegesen jobban részletezik a falveszteségek megoszlását McAuley és társai, akik öt hőátadási felülettel dolgoznak: szívószelep, kipufogószelep, a hengerfej megmaradó része, a gázzal pillanatnyilag érintkező perselyfelület és a dugattyú. Ezeken a felületeken a hőmérséklet állandónak feltételezett, de felületenként eltérő, és mindegyikre vonatkozó hőátadási tényező ugyanaz. Erre a megosztásra azért is van szükség, mert a ciklus számításának végén a gázból a falakra átmenő hő összmennyiségének és a hűtővíz által felvett hőnek egyenlőségét külön vizsgálják. Ezáltal lehetővé válik, hogy a falfelület hőmérsékleteket a gázoldalon ellenőrizzék és összehasonlítsák a számítás elején feltételezett hőmérsékletekkel, majd eszerint korrigáljanak. Egy empirikus formula révén figyelembe veszik a perselyen súrlódásból keletkező hőt is, valamint a szívó- és kipufogócsatorna hőmérlegét. A hűtővíz és a gáz közötti hőátmenet számítására négy külön alprogramot használnak.

A *lángsugárzás* figyelembevétele a hőátadás számításakor egy nem elhanyagolható hőmennyiséget eredményez, mivel az egyes szerzők szerint [22] a teljes hűtővízbe menő hőmennyiség 15÷20%-át is kiteheti.

McAuley és társai az alkalmazott Annand-féle hőátadási tényezővel a lángsugárzás hatását is számították, amely szerint

$$\alpha = C_1 \frac{k}{D} (R_e)^{0,7} + C_2 \frac{T^4 - T_i^4}{T - T_i}$$

ahol

C_1 = 0,17 és az égés során
C_2 = $4{,}96 \cdot h \cdot (1 - e^{-KL})$
Itt a hengerfejre és a dugattyúra sugárzott hő számításakor
h = 0,9
L a dugattyú és a hengerfej közti pillanatnyi távolság,
a hengerperselyre sugárzott hő számításakor pedig
h = 0,25
L = D (hengerátmérő).
K = $4 \cdot 10^4 \cdot \varrho$.

ahol

ϱ = a henger térfogategységében elégett tüzelőanyag mennyisége.

A K tényező a sugárzó szénrészecskék számára jellemző és a hasonló képletek emissziós tényezőjét van hivatva helyettesíteni. A számítás közben — amikor is az Eichelberg- és Annand-féle képletet egyaránt alkalmazták — mindig a nagyobb értéket adó összefüggést vették figyelembe.

Lényeges előrehaladást jelent a lángsugárzás számíthatósága tekintetében Sitkei [21] és Ramanaiah [29] munkája, akik a láng elnyelési tényezőjének mérésével meghatározták egy kísérleti dieselmotor égésterében a láng emisszió tényezőjét, amelyre a következő összefüggés érvényes:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 - e^{-kpl})$$

ahol

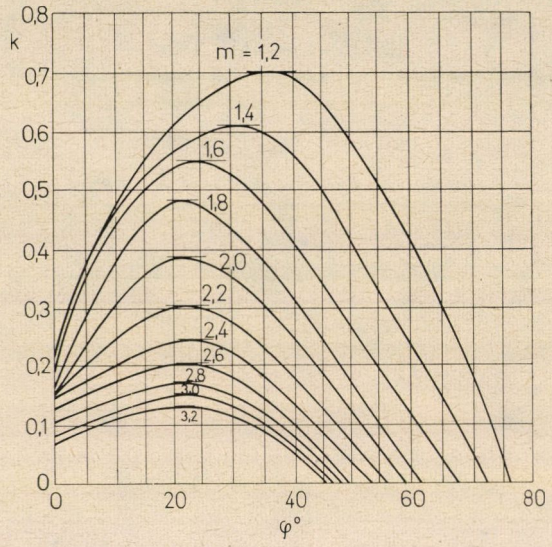
ε_0 = a végtelen vastag lángréteg emisszió tényezője, és értéke gázolaj lángokra 0,8
k = a láng elnyelési tényezője
p = a henger pillanatnyi nyomása (atm.)
l = a sugár közepes úthossza a hengertérben

$$l = 3{,}6 \frac{V}{F}$$

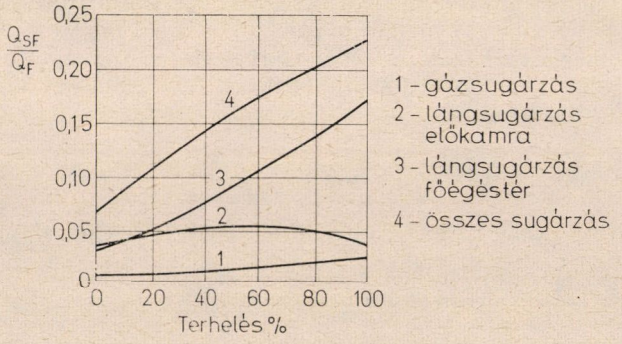
A k tényező értékét, amely a tulajdonképpeni kísérleti adat, a forgattyústengely szögelfordulása függvényében a légfelesleg tényező paraméterrel a 4. ábra mutatja. Érdekes összehasonlítást láthatunk ugyanezen kísérleti motorral kapcsolatban a sugárzás útján átadott hőmennyiségek hányadáról az 5. ábrán, amelyből kitűnik, hogy 100%-os terheléskor az összes sugárzás a teljes hőátadásnak 23%-át teszi ki.

Szimulációs programunkba — éppen SITKEI említett munkái alapján — újabban beépítettük a lángsugárzásnak megfelelő hőmennyiség számítását is. A pillanatnyi hőveszteségeket egy ilyen számítás alapján ábrázolva (6. ábra) szembetűnő, hogy a lángsugárzás milyen jelentős mértékben növeli a vesztett hőt, ill. a határoló falak hőterhelését.

A hőveszteségi függvények pontossága tekintetében nem lehetnek nagy igényeink. A szakirodalomban világszerte elismert viszonylag nagy hibalehe-

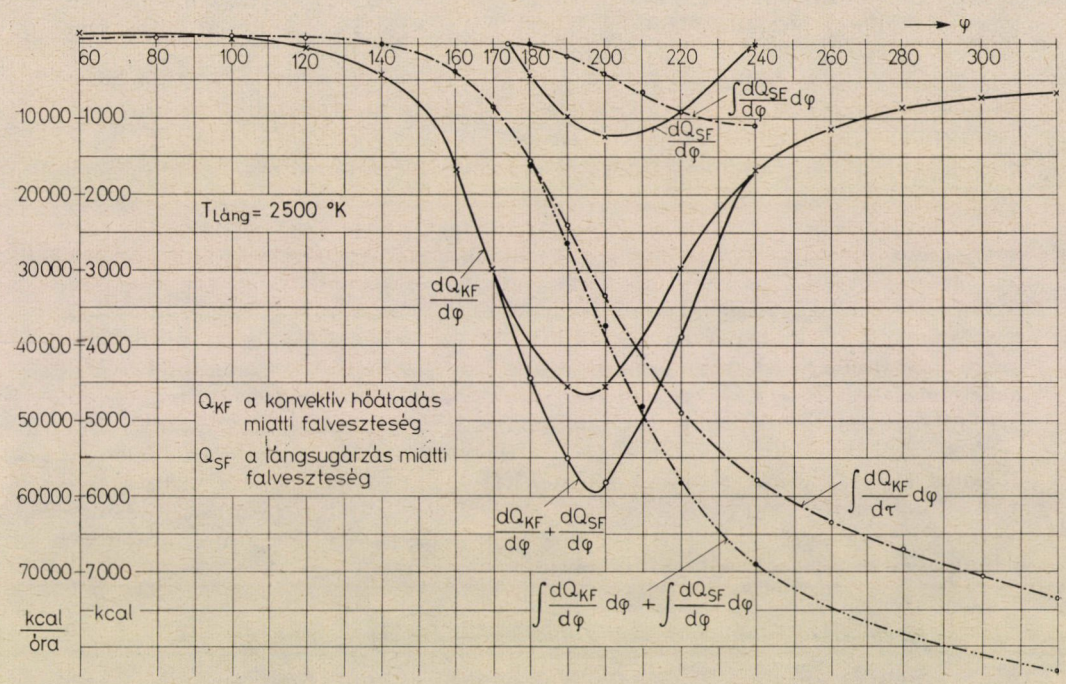


4. ábra



5. ábra

tőségek hatásait egyedül McAuley és társainak sikerült módszerük segítségével kompenzálni, mint azt az előzőekben ismertettük. Woschni a hőátadási tényező helyességére bízza a szimuláció realitását a hőveszteségeknél. Mindkét esetben csak a vesztett hő integrál értékében lehet egyeztetni kísérleti eredményekkel a számított értékeket.



6. ábra

Az előzőekkel ellentétben mi a szimuláció realitásának megítélésekor nem az integrál értékekkel való egyeztetést tartottuk szem előtt, hanem — a korábban említett „illesztés" segítségével — a pillanatnyi nyomás és hőmérséklet értékek egyezését tekintettük a helyes szimuláció ismérvének. Ilyen meggondolásokból javasoltunk *a konvektív hőátadási tényező pillanatnyi értékének* pontosabb meghatározására egy módszert [23]. Tudomásunk szerint ez az egyetlen módszer a szakirodalomban, amely az energiaátalakulási függvények kísérleti úton való felvételét használja a hőátadási tényező pillanatnyi értékeinek meghatározására.

Ugyancsak a pillanatnyi hőátadás számításának pontosítását lehet elérni véleményünk szerint a fent említett közleményben javasolt és a hőátadási tényező kifejezésében a gázsebességre vonatkozó összefüggés alkalmazásával. Ebben a dugattyú középsebesség helyett egy olyan összetett sebességgel jellemezzük a gázsebességet, amelyben az égés tömegsebessége is szerepel. Woschni [4] szintén összetevőkkel adja meg a sebességet legújabb erre vonatkozó munkájában. Ezek az összetevők azonban csak az azonos üzemállapotban végzett mérésekből állapíthatók meg, így használatuk a szimulációnál nehéz-

kesnek tűnik. Ezzel szemben az általunk javasolt összetevők a számítás bemenő adataiban szerepelnek ill. azokból számíthatók.

A pillanatnyi hőátadás helyesebb számítását segíti elő a lángsugárzás figyelembevétele is és hozzájárul a *szimuláció pontosságának* növeléséhez.

Az égésteret határoló falak felületi hőmérsékletének is befolyása van a számítás pontosságára. Ez már csak amiatt is nehéz kérdés, hiszen a munkafolyamat, illetve a gázhőmérséklet és a falhőmérséklet kölcsönösen befolyásolják egymást. Vizsgálatot végeztünk a falhőmérséklet becslésében elkövetett hiba hatásának megállapítására és azt találtuk, hogy +10% falhőmérséklet eltérésnél a falveszteségben kb. 3%, az indikált középnyomásban kb. 1%, a maximális nyomásban 1% alatti eltérés mutatkozik. Ezért a továbbiakban megelégedtünk a falhőmérséklet-változásnak mérési adatok alapján való becslésével.

A lángsugárzás révén adódó hőveszteségek számításakor pontatlanság két bizonytalanságból is adódhat. Az egyik a láng emissziós-tényezőjének, feketeségi fokának számértéke, amelyre vonatkozó kísérleti eredmények SITKEI [21] munkájának megjelenéséig teljesen hiányoztak a szakirodalomból. Ennek révén ma már azonban a számítások az emisszió-tényező tekintetében megbízhatóbban hajthatók végre. Pontatlanságot adhat még a lánghőmérséklet helytelen felvétele is, bár értéke a sugárzás tartama alatt gyakorlatilag állandó. SITKEI említett munkájához a lánghőmérsékletet BELINKIJ [22] munkájából vette. Ettől azonban némileg eltér PETRICSENKO [24] cikkében megadott, ill. mért érték. BELINKIJ a lánghőmérsékletre 2400÷2600 fokot, PETRICSENKO pedig 2300 fokot ad meg. Ez a különbség nem jelentéktelen, mert számításaink szerint a lánghőmérséklet értékében 5%-os eltérés 15% hibát eredményez a lángsugárzás okozta falveszteségek nagyságában.

2.1.3 A mechanikai veszteségek számításának módszerei

A belsőégésű motorok mechanikai-súrlódási veszteségei nagyságrendben azonos értékűek a motor belső veszteségeivel, tehát a különböző természetű összes veszteségek egyik legjelentősebb csoportját alkotják. A mechanikai-súrlódási veszteségek jellemzésére a megfelelő középnyomás, teljesítmény, ill. munka, vagy a mechanikai hatásfok használatos.

A mechanikai-súrlódási középnyomás kísérleti meghatározásának komoly nehézségei vannak. Egzakt módon csak mint az indikált és az effektív középnyomások különbsége számítható. A méréstechnikai nehézségek miatt az egzakt eljárástól eltérő több eljárás alakult ki a mechanikai veszteségek meghatározására. Pl. a Willans-féle eljárás, Morse-féle eljárás, idegenhajtás, kifuttatás stb. Ezek az eljárások közismerten csak közelítő értéket adnak a mechanikai hatásfok, vagy a súrlódási középnyomás nagyságára, mivel az ezekkel kapcsolatos veszteségeket a munkafolyamattól függetlennek feltételezik. Minthogy azonban a súrlódási veszteség nem független a motor belső munkafolyamatától, a helyes szimulációhoz ismernünk kell, hogy a motor belső folyamatának mely jellemzőitől, hogyan függ a súrlódási veszteség.

A mechanikai veszteségek két fő csoportba sorolhatók. Egyik részük a motor funkcionális alkatrészeinek súrlódásával, másik részük a segédberendezések teljesítményfelvételével kapcsolatos. Előbbiek mind a motor terhelésétől, mind a fordulatszámtól függenek, ezzel szemben az utóbbiak gyakorlatilag csak a fordulatszám következtében változnak. A segédberendezések teljesít-

ményfelvétele elég egyszerűen számítható a konkrét motor berendezéseinek ismeretében. Nem ilyen egyszerű azonban a motor alkatrészeinek súrlódásával kapcsolatos hányad számítása. Bizonyára ennek tudható be, hogy az irodalomban a súrlódási veszteségeket a szimulációnál általában nem veszik figyelembe. Külföldön egyedül McAuley és társai használnak egy empirikus formulát abból a célból, hogy a szimulációnál a motor effektív mutatóira is eredményeket kaphassanak. Ez az empirikus formula a csúcsnyomás és a dugattyú középsebesség lineáris függvénye, és konstansainak meghatározásához az indikátor diagram ismerete szükséges.

Igen értékesek különösen szimulációban való alkalmazásuk szempontjából Pásztor [27; 28] kísérletei és megállapításai. Ezekből látható, hogy a súrlódási veszteségek keletkezésének folyamatát össze kell kapcsolni a motor munkafolyamatával, elsősorban annak legfontosabb termikus jellemzőivel. *Vizsgálatai szerint a súrlódási középnyomás elsősorban a munkafolyamat átlagnyomásának függvénye.* A mérések során megállapította, hogy a dp_s/dp_a differenciálhányados értéke típustól és konstrukciótól viszonylag független állandó érték. Itt p_s a súrlódási középnyomás p_a pedig az átlagnyomás. Ezek a megállapítások a szimuláció szempontjából igen fontosak, mert az átlagnyomás a számítás során könnyen meghatározható.

Szerzők saját szimulációs programjukban a mechanikai veszteségek tekintetében is abból a többször említett alapgondolatból indultak ki, hogy a szimuláció során elsősorban relative helyes értékek nyerése fontos. Ezért a mechanikai veszteségeknek empirikus formula alapján történő számításával ellentétesen, Pásztor eredményére támaszkodva más módszert alkalmaztak. Ezzel kapcsolatos közleményük McAuley és társai cikkével egy időben jelent meg.

A súrlódási veszteségeket hengernyomástól függő és attól független — állandó — részre bontották és Pásztor kísérleti eredményei alapján a függő rész változását a munkafolyamat átlagnyomásával vették arányosnak (állandó fordulatszámon). Ha a mechanikai veszteségeket valamely üzemállapotban ismertnek vehetjük (pl. kísérleti eredmények alapján), akkor ugyanazon fordulatszámon *a terhelés szerint* meghatározható a változott üzemállapot mechanikai vesztesége, a következőképpen:

$$p_m = (p_{m0} - p_{mA}) \frac{p_{á}}{p_{á0}} + p_{mA}$$

Itt a „0" index az ismert kiinduló állapotra, a „*Á*" index pedig a mechanikai veszteségeknek állandó, nyomásoktól független részére utal (segédberendezések + ventilláció). Bevezetve a $p_{mA}/p_{m0} = Y$ jelölést, továbbá felhasználva a mechanikai hatásfok definitív kifejezését, a mechanikai hatásfoknak az átlagnyomások szerint redukált értékére a következő kifejezést kapjuk:

$$\eta_{m\,\mathrm{red}} = 1 - \frac{p_{i0}}{p_i}(1 - \eta_{m0})\left[(1 - Y)\frac{p_{á}}{p_{á0}} + Y\right]$$

A mechanikai veszteségeknek a Y szerinti szétválasztásával igen érdekes lehetőség nyílt arra, hogy a mechanikai veszteségeket *a fordulatszám szerint* is számítani tudjuk. Kísérleti eredmények kiértékelésével ugyanis igen egyértelmű

összefüggést sikerült találni a dugattyú középsebessége (fordulatszám) és az Y viszonyszám között. Ugyancsak megállapítható volt, hogy az Y a középnyomástól gyakorlatilag független. Számértéke elsősorban a hengerszámtól, valamint a segédberendezések teljesítményfelvételétől függ, tehát a motor egyedi jellemzője.

A fentiekben vázolt kísérleti eredményekkel, valamint a mechanikai veszteségeknek említett különválasztásával sikerült olyan lehetőséget teremteni a szimuláció számára, amelynek révén, viszonylag csekély kiinduló adatigényre támaszkodva, a változó üzem hatását a mechanikai veszteségekre figyelembe lehet venni. Ezzel a szerzők végeredményben elérték azt a célt, hogy a motor effektív jellemzőinek szimulációját is relative helyesen végre lehessen hajtani. Ilyen jellegű számítástechnikai eredményekre a szerzők az irodalomban ez ideig nem találtak utalást.

2.2. A gázcserefolyamat számításának módszerei különböző alkalmazási igények esetén

A gázcserefolyamat számításának feltételeit alapvetően a szívó és a kipufogócsatornák kialakítása szabja meg, elsősorban az, hogy fellépnek-e ezekben hullámjelenségek, amelyeknek hatását a megfelelő nyomásokra figyelembe kell venni.

A töltéscserefolyamat számítása természetesen akkor a legegyszerűbb, ha figyelembe veendő hullámjelenségek nem lépnek fel. Ekkor a számítás módszere megegyezik a főmunkafolyamat számításának módszerével, amelyet előző pontban tárgyaltunk. Ilyenkor a főmunkafolyamat és a töltéscsere folyamat számítási programja egyesíthető, a szívószelep előtt és a kipufogó szelep mögött állandó nyomásokkal számolunk. A számítást ilyenkor nem kell a szívással kezdeni, célszerűbb a kompresszióval kezdeni. A szívószelep zárásakor egy becsült p_h T_h gázállapottal mindjárt a főmunkafolyamattal kezdhető a számítás, ennek a végére kerül a töltéscsere számítása, amely a szívással végződik. A szívás végén ismét elérjük a számítás kiindulási pontját, s így az eredetileg becsült kiindulási értékek ellenőrizhetők és nagyobb eltérés esetén egy második számítás fűzhető hozzá, amely általában már kielégítő.

A motor geometriai méreteit ismertnek tekintjük. Adott a furat D, a löket s, a kompresszióviszony, a hajtórúdviszony r/l, a vezérlési idők, tehát a szívó és a kipufogó szelep nyitásának és zárásának szögelfordulásai, továbbá az effektív szelepkeresztmetszetek $F_{e\,sz}$ illetve F_{ek} kísérletileg kapott átömlési együtthatók figyelembevételével a forgattyú szögelfordulásától függően.

Ha a szívó és a kipufogó vezetékben keletkezhetnek hullámjelenségek, amelyeket figyelembe kell venni, a számítás annál bonyolultabbá válik, mennél hívebben követjük a valóságot.

A számítás alprogramban történhet, amely a főprogramhoz (körfolyamatszámítás) csatlakoztatható, amihez a töltéscsereszámítás minden lépéséhez kell az alprogramot számítanunk.

A számítás viszonylag egyszerű, ha kis amplitúdókról van szó és a hőmérséklet állandó [2, 11, 32, 35, 36]. Ilyen feltételekkel is legegyszerűbb a számítás elkülönített vezetésű hengerek, vagy egyhengeres motorokra. Ha több hengert közös szívó vagy kipufogóvezetékkel vizsgálunk — ami többnyire a legérdekesebb eset — akkor több körfolyamatszámítást párhuzamosan kell elvégezni a gyújtási sorrend időbeli fáziseltolódásának figyelembevételével, az egyes

számítások kapcsolása ekkor az elkülönített vezetékeknek a közös gyűjtőcsőbe torkolásnál a visszaverődési feltételeken át történik. Ez tetemesen növeli a megkívánt tárolókapacitást.

A kis amplitúdókra és állandó hőmérsékletre alapított számítás a kipufogó vezetékre nem talál. Ott egyrészt az előkipufogás alatt nagyobb a nyomásesés, az amplitúdók nagyobbak, másrészt a kipufogási hőmérséklet a hengerben történő expanzió miatt időben változó. Ebben az esetben hullámterjedési sebességként — minthogy a kipufogógáz abszolút sebessége a hangsebességgel szemben már nem hanyagolható el, a $\pm w$ értéket kell alkalmazni. A nyomáshullámok maximumai tehát gyorsabban haladnak, mint minimumai, a hullámok a csövön átfutva deformálódnak. Deformálódnak továbbá azáltal is, hogy a hőmérséklet változása folytán a hangsebesség folyamatosan változik. A hullámok szuperpozíciója programtechnikailag nehezebbé alakul, a csövet szakaszokra kell osztani, aztán minden helyen, minden időpontban vagyis minden töltéscsere számítási lépésnél megállapítani, hogyan szuperponálódnak a hullámrészek, milyen a gázállapot és mekkora a hullámterjedési sebesség a vizsgált szakaszban, azaz hol lesznek a hullámdarabok a következő számítási lépéskor. Ez a probléma a MAN gyár rendelkezésére álló IBM 1620 számítógéppel, amelynek csak 40 000 magtárolóhelye van, nem oldható meg, a tárolóhelyszükséglet ennél tetemesen nagyobb. Ezért a MAN számításprogramjában a kipufogó vezetékben is az akusztikai elmélet szerint, azaz állandó kipufogógáz hőmérséklettel és a hullámok deformálódásának elhanyagolásával számolnak. A motor töltéscseréjének számításához ez jobb közelítés, mintha a szelepnél állandó nyomással számolnának, nem elegendő közelítés azonban a kipufogógáz időben változó energiájának megítéléséhez pl. turbotöltőhöz.

Hazánkban a kipufogási folyamat számításának problémájával az AUTÓKUT (JÁFI) foglalkozik. Egyszerű kipufogócsővel ellátott egyhengeres motor kipufogási folyamatának számítása végső soron olyan számítási eljárás kidolgozását célozta, amely lehetővé tenné a hathengeres MAN-licenc motorok kipufogási folyamatának számítását. Az egyhengeres motor kipufogási folyamatának számítási módszerét tartalmazó algoritmus és az ennek alapján megírt program elkészült. Ezek alapján, továbbá a hathengeres MAN-motorok szívási folyamatára vonatkozó program számítástechnikai tapasztalatainak birtokában egyértelműen megállapítható volt, hogy a két program bonyolultsági foka kb. egyforma, eredményes kipróbálásához kb. 32K operatív memóriakapacitással és legalább 10^5 lebegőpontos összeadás/sec műveleti sebességgel jellemezhető számítógép volna szükséges, 6 hengeres motorokhoz kb. 64K operatív memóriakapacitással és legalább $5 \cdot 10^5$ lebegőpontos összeadás/sec. Minthogy ilyen gép jelenleg részükre nem hozzáférhető, a munkát felfüggesztették, és folytatásra akkor kerül sor, ha a szükséges jellemzőkkel bíró gép hozzáférhető lesz.

A szívási folyamat elméleti számítására vonatkozó JAFI kutatások első célkitűzése a töltéscsere folyamatok és a dinamikus feltöltés alapvető törvényszerűségeinek feltárása. A vizsgálatok alapvető jellegére való tekintettel a szívócsőben lejátszódó hullámjelenségeket a *gyenge hullámokra* (akusztikai hullámokra) vonatkozó elmélet alapján tárgyalták, s ez a kívánt célra alkalmasnak is bizonyult. Már ezeknek a vizsgálatoknak a kapcsán kiderült azonban, hogy a gyengehullámok elmélete nem szolgáltat mennyiségileg megbízható eredményeket, és hogy a gyenge hullámok elmélete az alapvető törvényszerűségek feltárásán túlmenő célkitűzések elérésére nem alkalmas. Minthogy a

dinamikus feltöltéssel kapcsolatos kutatások végső soron konkrét szerkezeti megoldások kialakítását célozták, a hullámjelenségek számítására pontosabb eljárást kerestek, majd ennek birtokában megvizsgálták, hogy a dinamikus feltöltésnek van-e hatékonyabb eszköze az egyszerű rezonancia csőnél, és ennek révén a továbbfejlesztésnek milyen lehetőségei vannak.

Ha a szívócsőben lejátszódó folyamatokat nem akusztikai összefüggések alapján, hanem az Euler-féle és a kontinuitási egyenletek konvektív tagjainak elhanyagolása nélkül kívánjuk tárgyalni, akkor az egyenletek lépésről lépésre történő megoldásának következő két módszere között választhatunk: 1. *A karakterisztikák módszere* (csaknem kizárólag szerkesztő módszer használatos). 2. *Rácsmódszer*, amely nem a kiindulási egyenletek, hanem a karakterisztikákra transzformált egyenletek alapján teszi lehetővé a numerikus megoldást.

Jafi az utóbbi, kifejezetten digitális számítógépre készült és jól programozható második módszert alkalmazta [40]. Ez a módszer újabb keletű, még csak kevéssé terjedt el, publikációjára 1962-ben került sor [33, 37—39].

A számítási eljárás — adott motor, szívórendszer, fordulatszám és atmoszferikus állapotjelzők esetében — a szívási folyamat numerikus végigszámítását teszi lehetővé, lényegében tehát ugyanazokra az eredményekre vezet, mint a laboratóriumi kísérlet, de nem a tényleges motor, hanem a motor matematikai modelljének vizsgálata útján.

A kutatások egy olyan digitális töltéscsere-számítási program létrehozását eredményezték, amely a szelepellenállásra vonatkozó adatok kísérleti úton való meghatározása után lehetővé teszi a szívási folyamat valóságot igen jól megközelítő követését az instacionárius gázdinamika differenciálegyenleteinek megoldására szolgáló, irodalomban található legkorszerűbb numerikus eljárás felhasználásával. A program hengerenként különválasztott, változó keresztmetszerű szívócsövek esetére érvényes. (Ez a program az égéstérkutatás szempontjából is jól használható, mert csekély kiegészítéssel lehetővé teszi a hengerbe egy szívási ciklus alatt jutott levegő perdületének számítását). A programmal feltárták továbbá az állandó keresztmetszetű rezonanciacsővel való dinamikus feltöltéskor jelentkező alapvető törvényszerűségeket stb.

2.3. Osztott égésterű motorok szimulációja

Hazánkban a Ganz és a Csepel motorok is előkamrás égésrendszerűek. Ez indított arra minket, hogy az osztott égéstérrel is részletesebben foglalkozzunk a motorszimulációval kapcsolatban. Ezzel kapcsolatos eredményeink is jóval korábbiak és lényegesen haladottabb szintűek, mint az irodalomban megjelent hasonló tárgyú közlemények.

A számításkor az egyenletek száma megkétszereződik, és az alapegyenletek egy-egy taggal bővülnek, továbbá a kamra és a főégéstér egyenleteit egyidejűleg — szimultán — kell megoldanunk. A program azonban nemcsak emiatt lesz bonyolultabb, hanem lényegesen nehezebb a gázösszetétel változásának mind a két térben való folyamatos követése, valamint a belső energiának a mennyiségek és hőmérsékletek változását figyelembevevő interpolációs számítása is. Ezek során sok belső ciklusban kell iterálni. A két tér közötti áramlás sebességének számításakor a nyomásviszonytól függően négyféle számítási mód közt kell dönteni a programnak.

A kamra és a főégéstér közötti effektív áramlási keresztmetszet nagysága természetesen a szimulációnál is rendkívüli fontos jellemző. A keresztmetszet

nagysága igen erősen befolyásolja a két térben lejátszódó nyomásfolyamatokat, ezért a szerzők kísérleteket végeztek mind a Reynolds-szám, mind a nyomásviszony függvényében megadott szűkítési tényezők megállapítására. Ezeket indikátor diagramok analízisével ellenőrizték és ezzel a lehetséges hibát igen szűk határok közé sikerült szorítaniok. Megállapítható volt, hogy osztott égésterű motornál ugyanúgy csak kísérleti úton meghatározott effektív áramlási keresztmetszetekkel lehet eredményes szimulációt elérni, mint pl. a gázcserefolyamat számítását is az effektív szelepkeresztmetszetek helyes meghatározása teszi csak lehetővé.

Az indikátordiagram említett analíziséhez természetesen nemcsak mérések, hanem megfelelő elemző számítóprogram is szükséges volt, hiszen a számítások mennyisége az osztatlan égésterű motor analíziséhez képest sokszoros. Csóka [41] és Szekeres [30] módszert dolgozott ki az osztott égésterű motorok indikátordiagramjainak analízisére. Ezek megelőzve a külföldi szakirodalmat, egyedülállóak abból a szempontból, hogy a kamra hőközléstörvényét is külön számítják és így a nyert eredmények osztott égésterű motorok szimulációjánál is felhasználhatók.

3. Munkafolyamat-szimulációval nyert érdekesebb eredmények

Mennyiségileg a legtöbb eredményt McAuley és társai említik. Igen részletes és sokoldalú vizsgálatot végeztek digitális motorjukkal és minden lényeges számítási változónak a hatását értékelték. Különösen sok vizsgálatot végeztek a töltési fok számértékének alakulására, különösen a szelepméretek, a szelep előtti állapotok és a fordulatszám hatásának kimutatására. A kipufogóoldali ellennyomást időben állandónak vették, ami utal arra, hogy ezt a kérdést megnyugtatóan szimulálni nem tudták. Kihasználták a szimuláció lehetőségeit és olyan tényezőket változtattak, amelyek kísérletileg egymagukban nem változtathatók. Így a kérdéses tényezők hatását más változóktól függetlenül tudták vizsgálni. Például a sugárzási hőmérsékletet 30%-kal megnövelték. Ennek következménye volt pl. a teljes ciklus hőátmenetének százalékos növekedése, ill. az egyes alkatrészek hőmérsékleteinek hasonló nagyságú megnövekedése. Ugyancsak érdekesek pl. a szívó vagy a kipufogó szelepek méreteinek vagy vezérlési időinek megváltoztatása következtében előálló eredmények, továbbá a szívóoldalon állandó, vagy változó nyomással történő számítás összehasonlítása. Megvizsgálták a hőátadási tényező, továbbá a fal felületi hőmérsékletek befolyását. Számítási módszerükkel összefüggésben ez utóbbit az egyenértékű falvastagságok megválasztásával érték el. Eredményeik a szerzők által tett megállapítással megegyezőek és azt mutatják, hogy a falhőmérsékletek a motorjellemzőkre lényeges hatást nem gyakorolnak.

Woschni az általa végzett szimulációval egy MAN-hajómotoron azt vizsgálta, hogy a különböző szelepátfedéseknek milyen hatása van a kipufogószelep hőmérsékleteire. A szelep hőmérlegének felírását elvégezve az egyes felületrészeken áramló hő nagyságát a munkafolyamat-szimuláció eredményeiből nyerte. Megállapította a számítások alapján, hogy növekvő szelepátfedéskor milyen mértékben csökken a kipufogógáz hőmérséklet, továbbá hogyan csökken a kipufogó szelep hőmérséklete. Érdekes megállapítás volt, hogy a kipufogógáz hőmérséklete lényegesen gyorsabban csökkent növekvő szelepösszenyitásnál, mint a szelepé. Ugyanakkor a dugattyú hőmérséklete alig

változott. Mindezeket a vizsgálatokat természetesen csak úgy lehetett elvégezni, ha rendelkezésre álltak nemcsak a hengerben levő gáz állapotjelzői a munkafolyamat során, hanem természetesen a kipufogógáz mennyiségének időszerinti változása is.

A teljes munkafolyamatszimulációt alkalmazták az új Sulzer nagy motorok kísérleteinél is. Erről számolnak be METZ, URBEN és STEIGER [34] cikkükben. Összehasonlító adatokat közölnek a motor mérési és számított adatairól, amelyek érdekessége, hogy a számított értékek átlagosan 1%-on belül megegyeznek a mértekkel. A legnagyobb eltérés 5%. Mint cikkükben említik a számított értékek nagy segítséget jelentettek a kísérleti munka és az azzal kapott eredmények értékelésekor.

Szerzők *saját szimulációs programuk*kal elsősorban a feltöltésnek és a feltöltés körülményeinek hatását vizsgálták a motor jellemzőire. Így pl. a feltöltőnyomás növelését vizsgálva, állandó légviszony betartásával azt találták, hogy a hőterhelés és a csúcsnyomás jobban növekszik, mint a középnyomás. Ha viszont a ciklusonkénti tüzelőanyag mennyiséget állandónak tartjuk, ez a feltétel a digitális motornál azt mutatta, hogy növekvő töltőnyomásnál a légviszony növekedése és a gázhőmérsékletek csökkenése ellenére sem csökken a hőterhelés. Természetesen ez az eredmény az égésre vonatkozó számítási feltételektől kissé módosulhat, mégis általános következtetésül az adódott, hogy feltöltőnyomás révén a légviszonyt növelni célszerűtlen.

Különösen érdekesen volt használható a szimuláció a levegővisszahűtés hatásának vizsgálatakor. Míg visszahűtés nélkül egy alapul választott kiindulási állapothoz képest 53%-kal több tüzelőanyagból 48%-os effektív középnyomásnövekedés jött létre, addig visszahűtéssel 87%-kal több tüzelőanyagból 98%-kal nagyobb középnyomás adódott. Ennél a számításnál igen hasznos volt, hogy a szerzők a mechanikai hatásfok változását is a már említett módon figyelembe tudták venni a szimulációnál. Ugyancsak a mechanikai hatásfok szimulációja tette lehetővé, hogy egy példaképpeni esetben az effektív fajlagos tüzelőanyagfogyasztás javulásának összetevőit is meg tudták határozni. Így pl. 9 g/Leó fajlagos tüzelőanyagfogyasztás javulás úgy jött létre, hogy a belső hatásfok javulásából 5,5, a mechanikai hatásfok javulásából 3,5 g/Leh fogyasztásjavulás adódott.

A szimuláció további eredményeként számszerűleg egyértelműen bebizonyítható volt, hogy középnyomásnöveléskor a levegővisszahűtés a motor minden jellemző mutatóját kedvezően befolyásolja. A hőterhelés és a fogyasztás csökkenése még kiegészül azzal az előnnyel, hogy a vesztett hő nagyobb hányada kerül a kipufogógázba, ami turbófeltöltéskor az energia-hasznosítás javítására nyújt lehetőséget.

Szerzők rendkívül sok vizsgálatot végeztek arra vonatkozólag, hogy az égés paramétereinek milyen hatása van a munkafolyamatra és a digitális motor illesztésekor milyen égési paraméter intervallumban, milyen hatást sikerül elérni egy kísérleti eredmény szimulációjára. Ha pl. az égés hosszát változatlan törvényszerűség mellett 50 forgattyútengely fokról 90 fokra növelték, akkor a falveszteségek csökkenése 13,5%, az indikált középnyomás csökkenése 7%, a maximális nyomás csökkenése 23,5% és a nyomásnövekedés legnagyobb sebességének csökkenése 50% volt. Ennek alapján jól bizonyítható, hogy bizonyos esetekben az égés hosszának növekedése a mechanikai és hőterhelések csökkenésével ellensúlyozza a középnyomás csökkenésének hátrányos hatását.

Érdekes számszerű eredményeket mutatott a kompresszióviszony hatásának vizsgálata. $\varepsilon = 11$ kompresszióviszonyhoz képest figyelve a motor jellemzőit $\varepsilon = 18$ kompresszióviszony esetében szerzők azt találták, hogy az indikált középnyomás 3%-kal, az effektív középnyomás 1,2%-kal növekedett. Ezen előnyök mellett a falveszteségek 8%-os növekedése, míg a maximális nyomás 68%-os növekedése adódott. A fajlagos tüzelőanyagfogyasztás ugyan csökkent 97,8%-ra, de az előnyök és hátrányok összevetéséből adódott a nagyobb kompresszióviszonyhoz tartozó változat elvetése.

A munkafolyamat szimulációval nyert konkrét eredményeket végül célszerű kiegészíteni azokkal az *általános előnyök*kel, amelyek a motor szimuláció használatát indokolják:

— lehetővé teszi, hogy bizonyos vizsgálati paramétereknek a motor jellemzőire gyakorolt hatását jobban megérthessük és figyelemmel kísérhessük,

— a számítóprogram elkészítése szükségessé teszi, hogy a fizikai jelenségeket részleteiben is matematikailag megfogalmazzuk és ezáltal a folyamatokba mélyebb betekintést nyerjünk,

— összefüggő rendszerbe foglalja a sokoldalú és széleskörű motorvizsgálatok során nyert ismereteket,

— egyetlen motor-paraméter hatását külön is lehet vizsgálni, ami a motor-próbapadi vizsgálatok során nem mindig lehetséges, így a szimulációval sok olyan információ is nyerhető, amely kísérletileg nem volna meghatározható,

— csökkenthető a szükséges vizsgálatok száma, mert a kérdéses optimáláshoz már számított adatokból lehet kiindulni,

— igen gyorsan adja az eredményeket,

— meghatározza azokat a területeket, ahol ismereteink hiányosak és kiegészítésre szorulnak.

Ámbár a szerzők a szimulációval kapcsolatos problémákat az előzőek során eléggé részletesen érintették, mégis az előnyök és a korlátozó tényezők alapján azt mondhatják, hogy a motor-szimuláció jól felhasználható eszköz, még akkor is, ha nem lehet képes a motor munkafolyamatával kapcsolatos minden problémára választ adni.

IRODALOM

1. Woschni, G.; Einfluss des Brenngesetzes auf den Druckverlauf und die Wärmebelastung in Dieselmotoren. *MAN Forschungsheft* Nr. 11. 1963/64.
2. Woschni, G.; Elektronische Berechnung von Verbrennungsmotor-Kreisprozessen. *MTZ.* **26** (1965), 439—446.
3. Woschni, G.; Elektronic calculation of the Time Curve of Pressure, Temperature and Mass Flow Rate in the Cylinder of a Diesel Engine. *Proc. I. M. E.* **182** (1967—68), Paper 8.
4. Woschni, G.; An Universally Applicable Equation for the Instataneous Heat Transfer Coefficient in the Internal Combustion Engine. *SAE Trans.* (1967), No. 670931.
5. Austen, A. E.—Lyn, W. T.: Relation Between Fuel Injection and Heat Release in a Direct-Injection Engine and Nature of Combustion Process. *Proc. I. M. E.* (1961), No. 1., 47—62.
6. Mc Auley, K. I. és társai: Development and Evaluation of Simulation of the Compression-Ignition Engine. *SAE Trans.* **74** No. 650451, 560—593.
7. Borman, G. L.: Mathematical Simulation of I.C.E. Processes and Performance Including Comparisons with Experiment. Ph. D. Thesis, Univ. of Wisc. 1964.
8. Whitehouse, N. D. és társai; Method of Predecting Some Aspects of Performance of a Diesel Engine Using Digital Computer. *Proc. I. M. E.*, **176** (1962), 195—221.

9. GLAGOLJEV, NY. M.; Rabocsije processzi v dvigatyeljah vnutrennevo szgoranyija. *Masgiz.* Kiev 1950.
10. GLAGOLJEV, NY. M.; Raszcsot rabocsevo processza dvigatyelej vnutrennevo szgoranyija. Kézirat. Harkov 1958.
11. LIST, H.; Der Ladungswechsel der Verbrennungskraftmaschine, J. Springer, Wien 1949.
12. KALMÁR I.; Dieselmotor munkafolyamatának számítása és számítógép alkalmazása ilyen számításokhoz. Dieselmotor Konferencia. Budapest 1965.
13. KALMÁR I.; Munkafolyamatok elektronikus számításával nyert néhány eredmény. *BME. Tud. ülésszak.* 1967.
14. VIBE, I. I.: Raszcsot rabocsevo cikla dvigatyelja sz ucsotom szkorosztyi szgoranyija. *Avtomobilnaja i Traktornaja Promislennoszty* (1957), Nr. 1.
15. KALMÁR I.; A befecskendezés az égés és a hőterhelés összefüggése dieselmotornál. *II. Gépjárműtechnikai Konf.* Sopron 1971.
16. EICHELBERG, G.; Some new Investigations on Old Combustion Engine Problems. *Engineering.* London. **148** (1939), 603.
17. ANNAND, W. J. D.; Heat Transfer in the Cylinders of Reciprocating Internal Combustion Engines. Inst. Mech. Eng. 1962.
18. WOSCHNI, G.; Beitrag zum Problem des Wärmeüberganges im Verbrennungsmotor. *MTZ.* **26** (1965) 128–133.
19. PFLAUM, W.; Der Wärmeübergang bei Dieselmaschinen mit und ohne Anfladung. *Jahrbuch der Schiffbautecrhn. Ges.*, **54** (1960).
20. SITKEI, GY.; Beitrag zu Theorie des Wärmeüberganges im Motor. Konstruktion **14** (1962), 64—71.
21. SITKEI, GY.; Einige Berechnungsprobleme des Wärmeüberganges und der Wärmebelastung in Vorkammer-Dieselmotoren. *Acta Technic. Hung.*, **58** (1967).
22. BELINKIJ, L. M.; Tyeploizmerenyija v kamere büsztrohodnovo d. v. sz. *Szbornyik trudov NILD.* No. 1. Masgiz 1955.
23. KALMÁR, I.; Monentanwerte der Wärmeübergangszahl in Motoren, ICE Conference Bucharest, 1970.
24. PETRICSENKO, P. M.; Novaja zaviszimoszty dlja ocenki lucsisztovo tyeploobmena v cilindre d. v. sz. *Energomasinosztrojenyije* (1969), 429—430.
25. LISEVSZKIJ, A. Sz.; Opregyelenyije zagyerzski voszplamenyenyija topliva v dvigatyeljah sz voszplamenyenyijem ot zsatyija. *Avtomobilnaja promislennoszty* (1958), 19—22.
26. ARAMA, C., GRÜNWALD, B.; Motoare cu ardere interna. Bucuresti, Editura technica, 1966.
27. PÁSZTOR, E.; Über die Bestimmung der Reibungsarbeit und des mechanischen Wirkungsgrades bei Verbrennungsmotoren. *MTZ.* **29** (1968), 57—64.
28. PÁSZTOR, E.: Über die Möglichkeit zur Bestimmung von Beziehungen zwischen dem Arbeitprozess und dem mechanischen Wirkungsgrad von Verbrennungsmotoren. *Periodica Polytechnica* **11** (1967).
29. RAMANAIAH. G. V.; A lángsugárzás vizsgálata Dieselmotorban. Kandidátusi Értekezés. Budapest 1970.
30. SZEKERES A.; Az osztott égésterű motorok munkafolyamatának elemzése. Doktori diszszertáció, Budapest 1970.
31. LANGE, W.—WOSCHNI. G.; Thermodinamische Auswertung von Indikatordiagrammen, elektronisch gerechnet. *MTZ.* **25** (1964), Heft 7.
32. CSER. GY.—JÁNOSDEÁK, E.: Über einige Fragen der dynamischen Aufladung von Dieselmotoren. *Acta Techn. Hung.* **58** (1967), 203–244.
33. SEIFERT, H.; Instationäre Strömungsvorgänge in Rohrleitungen an Verbrennungskraftmaschinen. Springer-Verlag, Wien 1962.
34. METZ J. R. és társai; Contribution to the Investigation of the Diesel Cycle the Aid of Digital Computers. *Proc. I. M. E.* **182** (1967—68), 79.
35. LIST, H.; Der Ladungswechsel der Verbrennungskraftmaschine. Der Viertakt. Springer Verlag, Wien 1952.
36. BLAHÓ M.; Válogatott fejezetek a folyadékok mechanikája és a gázdinamika tárgyból. Szakmérnök jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest 1962.
37. BRANDSTETTER. W.; Charakteristische Parameter für periodische Schwingungvorgänge in Rohrleitungen. *Automobil Industrie* **3** /67.
38. BENSON, R. S.—GARG, R. D.—WOLLATT. D.: Unstady Flow in Pipes with Gradual or Sudden Area Charges. *Thermodynamics and Fluid Mechanics Convention.* Paper 16. Cambridge 9—10 th April 1964. Published by the Institution of Mechanical Engineers
40. — Zárójelentés a dieselmotorok dinamikus feltöltése tárgyában végzett elméleti vizsgálatokról (J-929).

41. CSÓKA J.; Osztott égésterű motorok hőközlési folyamatának vizsgálata. MTA. VI. Oszt. Közl. **28** (1961).

Questions of Engine Working Cycles Simulation. After discussing the basic problems of the simulation and optimization of IC engines, the methods for the calculation of the „digital engine" are reviewed on the base of the literature in Russian, English and German language, and then the Hungarian research is presented. The more interesting foreign and Hungarian results obtained by simulation of the working cycle are discussed and finally they are completed by the general advantages justifying the use of simulation. The fields are outlined where our knowledge is deficient and call for completion.

Fragen der Simulation der Motor-Arbeitsprozesse. Nach Übersicht der Grundprobleme über die Simulation und Optimierung von Verbrennungsmotoren werden auf Grund der russisch-, englisch- und deutschsprachigen Literatur die Methoden für die Berechnung des „Digitalmotors" besprochen, danach wird über die diesbezüglichen ungarischen Forschungen berichtet. Es werden die interessanten in- und ausländischen Ergebnisse bekanntgegeben, die durch Simulation der Arbeitsprozesse erreicht wurden. Schliesslich werden die allgemeinen Vorteile besprochen, welche die Anwendung der Simulation begründen. Es werden auch die Gebiete festgelegt, auf welchen unsere Kenntnisse noch lückenhaft sind und Ergänzung benötigen.

A METALLURGIAI TUDOMÁNYTERÜLET HELYZETE ÉS FEJLŐDÉSÉNEK IRÁNYAI

HELYZETKÉP

HORVÁTH ZOLTÁN*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett; 1973. február 16-án]

Napjainkban a metallurgiára az jellemző, hogy az ipar egyre több, egyre jobb minőségű fémeket és egyre újabb tulajdonságú fémes anyagokat igényel. Ezt a megállapítást igazolja a termelt fémek mennyiségének évről évre való növekedése, ezt támasztja alá a tisztasággal szemben támasztott követelmények állandó fokozódása, és ezt bizonyítja a fokozott követelményeknek megfelelő acélfajtáknak, a titánnak, a nátriumnak, a sugárzó és ritkafémeknek, a kristálysörétekkel erősített szerkezeti anyagoknak a térhódítása. A fejlődés elemzésénél feltétlenül figyelembe kell venni a műanyagoknak az előretörését és a környezet egyre jobb védelmét.

I. A technológiai eljárások fejlődése

A bevezetőben említett fejlődést több módon próbálták biztosítani.

1. Az egyik lehetőség az volt, hogy a *régi berendezések* működésének *alapelveit* megtartották. A termelékenységet és a gazdaságosságot elsősorban a méretek növelésével iparkodtak növelni. A nagyobb méretű kemencében ugyanis kisebb lett a fajlagos hőveszteség, kisebb lett a fajlagos munkaerőszükséglet, és lehetőség nyílt a nehéz fizikai munkát igénylő folyamatok gépesítésére és automatizálására, sőt ezen túlmenően az egyes berendezésekben lejátszódó folyamatok matematikai modellezésére és számítógépes irányítására is.

Ennek az elvnek a felhasználásával építenek egyre nagyobb méretű pörkölő és zsugorító berendezéseket, nagyolvasztókat, vas- és fémkohászati konvertereket, nagyobb teljesítményű timföldgyárakat és aluminiumkohókat.

11. A méretek növelésével párhuzamosan az újabb energiagazdálkodási lehetőségek között mód nyílott a kemencékben a *tüzelés módjának* a megváltoztatására is.

111. Ez azt jelentette, hogy ahol csak lehetett, szilárd tüzelőanyag helyett *gázt vagy olajat* használtak tüzelésre. Ez a megoldás nemcsak azzal járt, hogy a tüzelést könnyebben kézben lehetett tartani, könnyebben lehetett automatizálni, hanem pl. azzal is, hogy aknáskemencéknél szénhidrogéneknek

* Prof. Dr. Horváth Zoltán, Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc

a fúvósíkba való befújtatásával lényegesen lehetett csökkenteni a kokszfogyasztást. Ez az utóbbi gazdasági szempontból rendkívül előnyös, mert a világ minden országában azt tapasztalhatjuk, hogy a koksz ára évről évre nő.

112. A tüzelésnél fejlődést jelentett a *levegő előmelegítésének*, ill. *oxigénben* dúsított levegő felhasználásának a terjedése. Aknáskemencébe ezen az elven olcsó tüzelőanyag-felhasználással tudunk bevinni hőenergiát, az oxigénben való dúsítással nő a folyamatok sebessége, az exotermás reakciókban az időegység alatt több hő termelődik, és a ballasztnitrogén elmaradása miatt csökken a gázok által elvitt hő mennyisége. Mindezek eredményeképpen nemcsak a hőtechnikai hatásfok lesz nagyobb, hanem megnő az egyes berendezések teljesítőképessége is. Ilyen módon lehetett pl. SM-, ill. elektromos kemencében való oxigén-befúvatással az adagidőt lényegesen csökkenteni, a levegő előmelegítése, ill. oxigénben dúsított levegő felhasználása tette lehetővé a réz, ólom és nikkel kohászatában a röptében való olvasztás megvalósítását, és ugyanezeknek a fogásoknak a felhasználásával lehetett közvetlenül konverterekben rézszínporokat feldolgozni.

113. A hőenergia előállításánál az *elektromos tüzelés* lassú előretörése figyelhető meg. És ha az atomerőművek elterjedésével és az erőmű-technika fejlődésével sikerül az előrebecsléseknek megfelelően a villamosenergia egységárát 2—3 évtizeden belül a jelenleginek kb. a tizedrészére csökkenteni, akkor az elektromos kemencéknek a kohászatban való nagymértékű elterjedése várható. Ez a megállapítás nemcsak azt jelenti, hogy a vaskohászatban a szilárd halmazállapotban előredukált anyagot közvetlenül elektromos kemencében tudják feldolgozni acéllá, hanem azt is, hogy a nem-vasfémek kohászatában is iparkodnak majd kihasználni azokat az előnyöket, amelyeket az elektromos kemencében való olvasztásnál elsősorban a nagyobb munkahőmérséklet és a füstgáz elmaradása jelent (Brixlegg-eljárás).

2. A metallurgiában tapasztalható fejlődés második szakaszát azok az új technológiák alkotják, amelyeknél *régi alapelveken működő korszerűbb* berendezésekben dolgoznak. Ezekben a kémiai folyamatok lejátszódására és a hőátadásra a lehető legjobb feltételeket iparkodnak biztosítani azzal, hogy a berendezésekben a gáz körüláramolja a még szilárd halmazállapotban levő anyagrészeket, és gondoskodnak a hőenergia nagymértékű koncentrálásáról. Ezekre a berendezésekre tipikus példa a fémes anyagok (nyersvas, réz, alumínium) olvasztására kifejlesztett *Asarco-féle* aknáskemence, a vas- és a fémkohászatban újabban egyre inkább terjedő *átfúvásos zsugorító berendezés*, a *fluidizáló* kemence, az *oxigén-lándzsával* működtetett vaskohászati és fémkohászati konverter, ill. a folyékony fürdőn oxigénben dúsított levegőt vagy oxigént átfúvó berendezés.

Az ebbe a csoportba tartozó eljárások közül fontosságot tekintve messze kiemelkedik az *LD-eljárás*. Igen nagy termelékenysége és jó hőenergia-gazdálkodása miatt ma már lassan kiszorítja az SM-eljárást és vele, ill. ennek legújabb válfajával az OBM-eljárással csak az elektroacélgyártás versenyezhet.

Az LD-acélgyártás aránya évről évre nő, de még nagyobb arányú fejlődés várható az *OBM-eljárástól*. Az OBM-konverterek ugyanis kisebb építési magasságot igényelnek (SM-csarnokokba is befémek), szénhidrogénbontással hűtött fúvókáin keresztül a fürdőbe fuvatják az oxigént, ezért füstképződésük kisebb, porleválasztójuk egyszerűbb és olcsóbb. Előnyük még az is, hogy több hulladékot képesek feldolgozni, mint az LD-konverterek.

Egyre nagyobb szerepet kap az *elektroacélgyártás*. A nagy teljesítményű transzformátorokkal épített ívkemencék (UHP) üzeme nagyon gazdaságos. Az ívkemencék betétjét oxigénezik; újabban szénhidrogének oxigénes elégetésével is gyorsítják az olvasztást. Terjed a betét berakás előtti felmelegítése is.

Az ívkemencék üzemében jelentős fejlődést hozott a *vasszivacsos betét*. Aránylag gyorsan terjed, pedig a vasszivacs még drágább, mint a hulladék, és nagyobbak az olvasztási költségei. Lehetséges, hogy e téren döntő fejlődést hoz a SKF-ikerkemence, amelyet elsősorban a nagy ívkemencék villamosteljesítmény-igényének a csökkentésére dolgoztak ki: két kemencét közös transzformátorral járatnak, cserélhető boltozatokkal.

3. A technológiában a fejlődés harmadik állomását azok az új eljárások jelentik, amelyeknél *több munkafolyamatot* valósítanak meg egy *berendezésben*.

31. Az ide sorolható *röptében való olvasztást* elsősorban rézércek feldolgozására használják úgy, hogy a szulfidos ércet előmelegített vagy oxigénben dúsított levegővel fújtatják be a pörkölőtérbe. Itt a levegővel behozott, ill. a pörkölésnél lejátszódó exotermás reakciókban fejlődő hő hatására a munkahőmérséklet az anyag olvadáspontja felé emelkedik úgy, hogy a pörkölőtérből az anyag alul már folyékony halmazállapotban kerül ki. Ezt gyűjtik össze a pörkölőtérhez alul csatlakozó lángkemencében, ahol elkülönül egymástól a fémes fázis és a salak.

Ennél a munkamódnál rézszínporból egy lépésben csaknem tiszta Cu_2S-ből álló fehér kéneskövet állítanak elő. Ilyen körülmények között természetesen elég nagy lesz a keletkező salaknak a réztartalma. Régebben ezt a salakot konvertersalakkal együtt pirit jelenlétében elektromos kemencében réztelenítették. Újabban azonban a salakot az aránylag nagy kristályok keletkezésének elősegítése végett lassan hűtik, a szilárd anyagot több fokozatban őrlik és flotálják.

Az egy berendezésben több munkafolyamatot megvalósító kohósító eljárások közül megemlítem még a Worcra-, a Morgan- és a Torco-eljárást.

32. A *Worcra-eljárást* elsősorban rézérceknek konverterrézre való feldolgozására fejlesztették ki, de ugyanezt az alapelvet, hasonló berendezésekben az acélgyártásnál is próbálják hasznosítani. Vaskohászati szakemberek arra számítanak, hogy az ezredfordulóra a folyamatos, teljesen automatizált acélgyártás lesz az egyeduralkodó.

33. A *Morgan-eljárásnál* komplex ólom- és cinkércet dolgoznak fel aknáskemencében úgy, hogy a kemencéből alul ólmot csapolnak, a felül távozó gázokból pedig cinket kondenzáltatnak. A cink aknáskemencében való előállíthatóságának egyik sarkalatos pontja az, hogy az aknáskemencében még a toroknál is nagyobb legyen a munkahőmérséklet, mint a cinknek a harmatpontja, a másik pedig az, hogy a kondenzáló berendezésben a cink visszaoxidálódását ólompermet segítségével történő hűtéssel akadályozzák meg.

34. A *Torco-eljárást* a rezet oxid- vagy szilikátalakban tartalmazó, rézben szegény ércek feldolgozására dolgozták ki.

4. A kohászat fejlődésében új fejezetet jelentenek a *folyamatos* eljárások, mert ezeknek kisebb az anyag-, energia- és munkaerő-szükségletük, jóval nagyobb a teljesítményük, és igen jó fémkihozatalt biztosítanak, mert a folyamatos munkamód az egyes lépcsők végtelenszeres ismétlését jelenti.

41. Tulajdonképpen a folyamatos eljárások közé tartozik a már említett *Worcra-eljárás* és ennek különféle változatai, valamint az *ólom réztelenítésére*, *nemesfémtelenítésére* és cinktelenítésére kidolgozott folyamatos eljárás. Feltét-

lenül ide kell sorolni a *Bayer-eljárásban* a fejlődés során már megvalósított folyamatos munkameneteket. Ide tartoznak a folyamatos *öntő* és a folyamatos *öntve hengerlő* eljárások is.

5. A fejlődésnek egészen új csoportját alkotják azok a munkamódok, amelyeknél *teljesen újszerű eljárásokat* használnak az ércek előkészítésére, ill. fémek előállítására.

51. Az egyik ilyen munkamód a *plazmakemence* felhasználása. Ebben újabban nemcsak nagy hőmérsékleten olvadó fémeket olvasztanak, hanem pörkölnek is, sőt felhasználásával egykristályt is állítanak elő.

52. Nagyon jelentős az a fejlődés, amely az acél finomításának különféle eljárásaiban tapasztalható. A *vákuumindukciós*, *vákuumívkemencés*, *elektronsugaras* és elektrosalakos átolvasztás mellé újabban a *vákuum-ívkemencés és elektrosalakos* átolvasztás *kombinációja*, sőt az *elektrosalakos átolvasztás és folyamatos öntés kombinációja jelent meg.* Több tucat olyan finomító módszert kísérleteztek ki, amelyek a vákuumozás, argonátfuvatás vagy salakreakciók segítségével javítják az acélok tulajdonságait, de más-más technikai megoldással. A fejlődésre nemcsak az üzemben levő berendezések egyre nagyobb száma a jellemző, hanem az átolvasztással finomított acéltuskók méreteinek növekedése is; tömegük ma már elérheti a 30 tonnát, átmérőjük pedig 1 m-t, tehát nagyméretű kovácstuskók acéljai is finomíthatók bennük.

Az acél *vákuumos utókezelése* nagyüzemi technológiává fejlődött. Évi több százezer tonna kapacitású berendezések épülnek, és a vákuumozás rövid időn belül a hagyományos eljárások közé lesz sorolható. Erre jellemző példa az, hogy csupán Japánban több mint 50 gáztalanító egység dolgozik. A vákuumos kezelés alapvető módszerei (vákuumtartályos, RH-, DH- ASEA-SKF) megtartották vezető pozíciójukat. A legújabb nagy teljesítményű (225 és 300 Mp-os) vákuumozók RH-rendszerűek. Kavaszakiban pedig ASEA-SKF-eljárású berendezés épült 110 Mp-os adagra, évi 265 000 Mp kapacitással.

Az acélok leöntésének technológiájában a *folyamatos öntés* alapvető megoldás lett nemcsak a tömegacélok, hanem a nemesacélok öntéséhez is. Terjedését nem korlátozzák sem az acél minőségi, sem a felhasználás alaki és méreti követelményei. Az öntési hőmérséklet és sebesség, valamint a hűtés intenzitásának összehangolásával bármely acélfajta kifogástalan belső szerkezettel és felülettel leönthető rajta. Fejlődését nagymértékben gyorsították azzal, hogy megteremtették az acélszál vízszintesbe futtatásának technológiai feltételeit a *szálhajlítással*, illetve az *ívelt kristályosításával.*

53. Az új eljárások között külön fejezetet jelent a *halogénmetallurgia.* Ennek a segítségével fémhalogenideket lehet előállítani, ill. fémeket lehet raffinálni. Az előzőhöz tartozik pl. a Torco-eljárás, azután az $MgCl_2$, $TiCl_4$ előállítása oxidból redukáló anyag jelenlétében. A halogénmetallurgát raffinálásra használják pl. az ólom cinktelenítésénél, az alumínium szubhalidos eljárással való finomításánál.

6. Az új eljárások között különösen gyorsan fejlődnek a *hidrometallurgiai* munkamódok. Ennek a nagyarányú előretörésnek az egyik oka az, hogy a hidrometallurgiai eljárásokkal fémben szegény érceket is gazdaságosan lehet feldolgozni, a második az, hogy a végtermék elektrolízissel való leválasztás után tiszta állapotban áll rendelkezésünkre, a harmadik pedig az, hogy hidrometallurgiai eljárásokkal való dolgozás esetén a levegő nem szennyeződik.

A régebben használt nedves eljárások nagymértékű előretörése mellett új munkmódszereket is fejlesztettek ki. Ilyen pl. a nyomás alatti lúgzás és kiejtés, a baktériumos lúgzás, az ioncserének, ill. az oldószeres extrakciónak a felhasználása.

61. Az előzőleg említett lehetőségek közül a *baktériumos lúgzásnak* egyre nő a jelentősége, mert különféle és pontosan a lúgzás céljára kitenyésztett baktériumok jelenlétében a lúgzás sebessége és a fémkihozatal nagymértékben növelhető. Baktériumok közreműködésével vagy magában a bányában vagy a külszínen létesített igen nagy méretű halmokban szoktak lúgozni. Az eljárás előnye még, hogy nagyon kicsi a munkaerő- és energiaszükséglete, továbbá olcsó lúgzószerrel is lehet lúgozni, és ezt a körforgásban a baktériumok regenerálják.

62. Az *ioncserét* és az *oldószeres extrakciót* üzemi méretekben először az urán kohászatában használták, újabban azonban más fémek kohászatában is kezdenek tért hódítani. Így pl. a kobalt elektrolitos raffinálásánál az anód- és katódteret az idáig használt diafragmák helyett olyan műgyantából készített ioncserélő membránokkal választják el, amelyek az anolitból csak a kobaltionokat engedik át a katódtérbe.

7. A *rézkohászatban* rézben szegény oldatok réztartalmának a hasznosítására fejlesztették ki azt a munkamódot, amelyikben az oldatból a rezet valamilyen *LIX* extrahálószernek petróleumban való oldatával extrahálják, majd az extraktumból a rezet a rézelektrolízis véglugával reextrahálják, és az így kapott oldatot elektrolizálják.

Érdekességként említem meg, hogy timföldet is lehet előállítani $AlCl_3 \cdot H_2O$-n keresztül oldószeres extrakció segítségével.

71. A hidrometallurgiával együtt a *vizes oldatokból* való *elektrolízis* is nagyon sokat fejlődött. Egyre több helyen használnak az elektrolit tisztítására ioncserés, ill. oldószeres extrakciós eljárásokat. Sok helyen készítik az elektródokat titánból, a kádakat pedig műanyagból. Iparkodnak a termelékenység növelése érdekében mindenütt az eddiginél nagyobb áramsűrűséggel elektrolizálni, és az ilyenkor fellépő nagyobb koncentrációs polarizációt az elektrolit fluidizálással való keverésével a lehető legkisebb értéken tartani. Sok helyen gazdaságosan állítanak elő elektrolízissel a porkohászat céljaira alkalmas fémporokat.

72. Az *olvadékból* való *elektrolízis* is korszerűbb lett. Itt elsősorban a méreteket iparkodtak növelni. Így pl. az alumíniumkohászatban régebben szokásos 20—30 kA-es kemencék helyett újabban 100—150 kA-es kádakat építenek. Ezekben a fajlagos energiafogyasztás kb. fele akkora, mint a régebben használtakban.

Az alumíniumkohászatban a kloridos olvadékból való elektrolízis technológiáját is kipróbálták. Az eljárás előnye, hogy nagyobb lehet az áramsűrűség, az NaCl és KCl olcsóbb, mint a kriolit, az alumínium tisztább és fluor nem kerül a levegőbe. Hátránya, hogy az elektromos áramot titán- vagy cirkondiborid-elektródok segítségével kell a fürdőhöz vezetni.

8. A kohászat fejlődésében külön csoportot alkotnak azok az eljárások, amelyek *nagyon tiszta fémek* előállítására alkalmasak. Általában nagyon tiszta fémeket két lépésben állítunk elő. Először kémiai, elektrokémiai úton, ioncserés vagy oldószeres extrakciós eljárással, ill. desztillálással előtisztítjuk a fémet, azután desztillálással vagy zónás olvasztással, ill. egykristály-előállítással készítjük a kész terméket.

9. A fejlődést a magyar kohászatban fontos fémek szerint csoportosítva összefoglalásképpen a következőket állapíthatjuk meg.

91. A *vaskohászatban* a *nagyolvasztóba* adandó elegy minél jobb előkészítésére, tehát mágneses szeparálással való dúsításra, nagy fajlagos felületű és mégis elég szilárd, vasban dús zsugorítmány vagy pellet előállítására, esetleg előredukálásra törekednek, a több ezer m^3-es nagyolvasztó fúvósíkjába nagymértékben előmelegített, esetleg oxigénben dúsított levegőt fujtatnak be, és ugyanitt szénhidrogéneket is, újabban elsősorban bontott földgázt juttatnak a kemencébe.

92. Az *acélgyártásnál* az SM-acélgyártás ma már korszerűtlennek mondható. Ezt egyre jobban kiszorítja az LD-acélgyártás, és a jövőben várható, hogy először az LD-, ill. az OBM-eljárás jelentősége fog növekedni, de ezekkel párhuzamosan az acélgyártásban egyre nagyobb szerepet fog játszani az elektroacélgyártás, ill. a teljesen automatizált folyamatos acélgyártás. Az utóbbi két esetben a vasércből a nagyolvasztó megkerülésével állítanak majd elő acélt.

Természetesen az így vázlatosan felsorolt fejlődési irányok mellett feltétlenül kell számítani a folyamatos öntéssel és a mikroötvözéssel előállított acélfajták térhódítására is. Föltétlenül nagy szerepet fog a jövőben játszani a vákuumban való olvasztás, vákuumban való kezelés és az elektrosalakos eljárás is.

93. Az *alumíniumkohászatban* a *timföldgyártásnál* még hosszú ideig a Bayer-eljárás lesz az egyeduralkodó. Az várható, hogy a jövőben évenként millió tonnás nagyságrendben termelő timföldgyárakat építenek, ezekben az üzemekben iparkodnak részben az eddigi technológia tökéletesítésével (csőfeltárás, kalcinálás fluidizáló kemencében), teljesen folyamatossá tételével, a melléktermékek (V, Ga, Fe) minél nagyobb mértékű hasznosításával, részben a Bayer- és Pirogén-eljárás kombinálásával az eddiginél rosszabb minőségű bauxitokat is gazdaságosan feldolgozni.

94. Az *alumíniumkohászatban* az várható, hogy a jövőben 100—150 kA-es kádakból évenként 100 000 tonnás nagyságrendben alumíniumot előállító alumíniumkohókat építenek, ezekben a munkálatokat messzemenően gépesítik, és a kis fajlagos munkaóra-felhasználással termelt, jóminőségű alumínium jelentős részét öntve hengerelő eljárással dolgozzák fel. Mindenütt általános lesz a szilícium-egyenirányítónak a használata, és minden üzemben nagy gondot fognak fordítani a környezet védelmére.

95. A *rézkohászat*ban az valószínű, hogy a flotálással előállított, rézben dús színporból az elektrolitrezet a hagyományosnak minősíthető 5 lépésből álló eljárással szemben 3 vagy 4 lépésben fogják úgy előállítani, hogy kohósítás közben minél kevesebb kén kerüljön a levegőbe. Az elektrolitréz egy részéből védőgázatmoszférában, indukciós vákuumkemencében vagy elektronsugaras kemencében nagy tisztaságú rezet állítanak elő, másik részéből pedig a legkülönfélébb igényeket kielégítő rézötvözeteket állítanak elő. A rézkohászatban is egyre nagyobb szerepet fognak játszani a különféle öntve hengerlő eljárások és azok a munkamódok, amelyeknek a segítségével az olvadékból közvetlenül félkész terméket lehet előállítani (ilyen pl. a *Dip forming* eljárás).

96. A *ritkafémek* kohászatában nemcsak az urán jelentőségének megmaradása várható, hanem a még kevésbé ismert ritkaföldfémeké, a wolframé, vanádiumé, galliumé, titáné is, sőt az ipar minden bizonnyal egyre inkább fog igényelni a ritkafémek közé sorolható nagyon tiszta fémeket is.

II. A jelentősebb hazai kutatási eredmények

1. A Vasipari Kutató Intézetben, a KFKI-ben, az NME Vaskohászattani Tanszékén és az üzemi kutatóhelyeken elért eredmények közül kiemelkednek az optimális minőségű vasérc- és mangánérc-zsugorítvány előállítására irányuló vizsgálatok, a *nagyolvasztó* salakok szerkezetének és a kohászati folyamatokban betöltött szerepének a kutatása, a nagyolvasztóban lejátszódó anyag- és energiaátadási folyamatok tisztázására indított kutatások, szénhidrogén-befújtatással dolgozó nagyolvasztóban a metallurgiai és hőtechnikai folyamatok vizsgálata, a nagyolvasztók munkájának ellenőrzése, később számítógépes irányítására szolgáló matematikai modell készítése, végül a különféle kiinduló anyagokból vasszivacsot előállító eljárások kidolgozása.

2. Az *acélgyártás* területén idáig végzett kutatásokból nagy jelentőségűek az SM-acélgyártásnál az oxigén-befujtatással kapcsolatos vizsgálatok, acélgyártás közben gyors neutronaktivációs elemzés megvalósítása, oxigénes acélgyártásnál a kénoxidáció mechanizmusának vizsgálata radioaktív izotópok segítségével, az endogén és exogén zárványok eredetének kutatása, az acélok komplex dezoxidálószeres vizsgálata, az ötvözés optimális körülményeinek radioaktív izotópok segítségével való meghatározása és az öntőtápfej hőmérlegének a felvétele.

3. *Timföldgyártás* területén jelentősek azok a Fémipari Kutató Intézetben, ALUTERV-ben, üzemi kutatóhelyeken és egyetemi tanszékeken végzett vizsgálatok, amelyeknek a segítségével a Bayer-eljárás egyes részfolyamatait folyamatossá tudták tenni, jelentősen csökkentették a timföldgyártás fajlagos anyag-, energia- és munkaerőszükségletét, amelyek során a Bayer-eljárással egyre rosszabb minőségű bauxitokat is gazdaságosan tudnak feldolgozni. Igen jelentős a Bayer-eljárás technológiai és tervezési matematikai modelljének az elkészítése, az egyes folyamatoknál használt berendezések korszerűsítése, a melléktermékek közül a vanádium és a gallium részleges hasznosításának a megoldása, és nagyon figyelemre méltóak azok a vizsgálatok, amelyek során rosszabb minőségű bauxitokat a kombinált eljárással úgy próbáltak feldolgozni, hogy közben a bauxitban levő vasat is hasznosították.

A timföldgyártással kapcsolatban kiemelkedőek azok a kutatások, amelyeknek eredményeképpen a Mosonmagyaróvári Timföld- és Műkorundgyárban igen jó minőségű kádköveket és alumínium-szulfátot állítanak elő.

4. Az *alumíniumkohászatban* a sikeres kutatások eredményeképpen igen jó fajlagos anyag- és energiafogyasztással tudunk a világszínvonalnak megfelelő minőségű alumíniumot előállítani. A fajlagos energiafogyasztás, a hőmérleg és az önköltség elemzésével sikerült az anódok és a katódok szerkezetét olyan mértékben korszerűsíteni, hogy jelenleg a világszínvonalat elérő fajlagos energiafogyasztás a 20 évvel ezelőttinek kb. a fele.

5. A *rézkohászat* területén említésre méltóak azok a vizsgálatok, amelyek részben a Csepeli Fémműben, részben az egyetemi tanszékeken folytak, és amelyek a réz tűzi és elektrolitos úton való raffinálásának a részleteit tanulmányozták. Ezek során megállapíthatták a változó minőségű réz-hulladékok tűzi raffinálásának optimális feltételeit, és vizsgálták azt, hogy az elektrolit ioncserés és oldószeres extrakciós tisztításával, ill. az elektrolízis paramétereinek a szabályozásával milyen körülmények között lehet biztonsággal 4 N-es elektrolitrezet előállítani.

6. A *ritkafémek* előállításával kapcsolatos vizsgálatok közül jelentős a Mecseki Ércbányászati Vállalatnál az uránban szegény ércek gazdaságos feldolgozására is alkalmas halomban való lúgzás technológiájának és a kólai apatit kettős műtrágyára való feldolgozásánál keletkező melléktermék ritkaföldfém-oxidtartalmának a kinyerésére alkalmas módszerek kidolgozása.

A ritkafémek előállításával kapcsolatban kiemelkedő az a Fémipari Kutató Intézetben végzett munka, melynek eredményeképpen nagy laboratóriumi méretekben tudtak előállítani desztillálással nagyon tiszta kadmiumot, antimont, tellurt, szelént és cinket, zónás olvasztással nagyon tiszta alumíniumot, bizmutot és ólmot, a Kroll-eljárással pedig nagyon tiszta tantált, vanádiumot és nióbiumot.

A Csepeli Fémműben példamutató módon vizsgálták a réz elektronsugaras vákuumkemencében való dezoxidációját, és ugyanitt nagyon eredményesen foglalkoztak a mikroötvözés egyes technikai kérdéseivel és az előállított mikroötvözetek tulajdonságainak a vizsgálatával.

III. A tervezett kutatások

1. A *nyersvas-gyártás* témakörében különféle kiindulóanyagok zsugorításának, előredukciójának, a nagyolvasztóban lejátszódó folyamatok részletesebb megismerésének a kutatását, a nagyolvasztó matematikai modelljének további tökéletesítését és a nagyolvasztó salakok szerkezetének további vizsgálatát tervezik.

2. *Acélgyártásnál* az SM-acélgyártás további intenzifikálása, az acélfürdő és a gázfázis között lejátszódó folyamatok egyensúlyának és kinetikájának a meghatározása, az acélban előforduló endogén- és exogén-zárványok eredetének izotópos vizsgálata és különféle acélötvözetek, közöttük mikroötvözéssel előállított acélötvözetek, optimális gyártástechnológiájának megállapítása a kitűzött cél.

3. A *timföldgyártásban* a mennyiségi fejlesztéssel együtt meg kell oldani a 7,5—8-as moduluszú bauxitok gazdaságos feldolgozását, csökkenteni kell a fajlagos anyag- és energiafelhasználást, növelni kell a termelékenységet elsősorban az automatizálás és a gépesítés további fejlesztésével, biztosítani kell azt, hogy a termelt timföld minősége megfeleljen a világpiac igényeinek. Növelni kell a timföldipari melléktermékek (V_2O_5, gallium) hasznosított mennyiségét, és törekedni kell a bauxitok vastartalmának az értékesítésére. Fejleszteni kell a különleges minőségű timföldek, alumínium-szulfát és kádkövek gyártását.

4. Az *alumíniumkohászatban* elsősorban az elektrolízis technológiáját és az elektrolizáló berendezéseket kell tovább tökéletesíteni azért, hogy csökkenjen a fajlagos anyag-, energia- és munkaerőszükséglet. Továbbá ki kell fejleszteni az új, korszerű, 100 kA feletti áramerősséggel dolgozó kádtípust. Ezen a területen egyre sürgetőbb feladat az alumíniumkohóknál a környezet védelmét biztosító légtisztító berendezések építése.

5. A *rézkohászatban* a tűzi és elektrolitos raffinálás vizsgálatának a folytatása mellett nagyon fontos a különféle rézötvözetek optimális gyártástechnológiájának a kidolgozása és a felkészülés a Mátrában található rézérc hazai kohósítására.

6. A *ritkafémek* kohászatában tovább kell fejleszteni az urán előállításának a technológiáját, és fel kell készülni a kólai apatitból a magyarországi feldolgozás során keletkező melléktermék ritkaföld-oxidtartalmának kinyerésére. További teendő még a hazai ritkafém, ritkafémvegyület, ill. ritkafémötvözet egy részének hazai forrásokból való fedezésével kapcsolatban felmerülő kutatási problémák megoldása.

IV. Összefoglalás

Napjainkban a metallurgiára az jellemző, hogy ennek a tudományágnak a segítségével évről évre egyre több, egyre jobb minőségű és egyre újabb igényeknek is megfelelő fémes anyagokat kell biztosítani. Ezt a feladatot a termelőberendezések méretének a növelésével, egyes munkafolyamatok folyamatossá tételével, teljesen új eljárások alkalmazásával, gépesítéssel és automatizálással iparkodnak megoldani.

Magyarországon a kutatás területén megoldott problémák közül kiemelkedőnek tartom a *nyersvasgyártásban* a vas- és mangánércek jobb zsugorítástechnológiájának a megoldását, a nagyolvasztóban lejátszódó folyamatok vizsgálata során elért eredményeket, a szénhidrogén-befújtatással dolgozó nagyolvasztó munkafolyamatának az ellenőrzésére és figyelemmel kísérésére alkalmas matematikai modell elkészítését; az *acélgyártásnál* az SM-kemencékben lejátszódó folyamatok oxigén-befújtatással való intenzifikálását, a gyártás folyamán az acél oxigéntartalmának gyors neutron-aktivációs elemzéssel való meghatározását, az acélban levő endogén és exogén zárványok izotópos vizsgálatát, a különféle acélötvözetek optimális gyártástechnológiájának izotópos vizsgálattal való meghatározását, a kénoxidáció mechanizmusának radioaktív izotópok segítségével végzett kutatását, az acéltuskó-tápfej hőmérlegének az elkészítését, az acélok komplex dezoxidálószerrel való kezelését, a nemesacélok gyártásának oxigénes SM-kemencében való megoldását, időjárásnak ellenálló (korell) acélok gyártásának kifejlesztését, valamint a kiválóan forgácsolható szerkezeti és nemesíthető acélok gyártástechnológiájának a kidolgozását.

A *timföldgyártás* területén kiemelkedőek azok a vizsgálatok, amelyekkel a Bayer-eljárás egyes részfolyamatait folyamatossá tudták tenni, jelentősen csökkentették a fajlagos anyag-, energia- és munkaerőszükségletet. Nagyon jelentős a Bayer-eljárás technológiai és tervezési matematikai modelljének elkészítése, az egyes folyamatoknál használt berendezések korszerűsítése, a melléktermékek közül a vanádium és gallium részleges hasznosításának a megoldása és a rosszabb minőségű bauxitok kombinált eljárással való feldolgozásának kísérleti vizsgálata. Kiemelkedőek a jó minőségű kádkövek és alumínium-szulfát előállításával kapcsolatos kísérletek.

Az *alumíniumkohászatban* a sikeres kutatások eredményeképpen igen jó fajlagos anyag- és energiafogyasztással tudunk a világszínvonalnak megfelelő minőségű alumíniumot előállítani. Kiemelkedőek a fajlagos energiafogyasztás, a hőmérleg és az önköltség elemzésével kapcsolatos kutatások.

A *rézkohászatban* jelentősek azok az eredmények, amelyeket a réz tűzi és elektrolitos raffinálásánál értek el azokkal a vizsgálatokkal, amelyekkel különféle helyekről származó hulladékokból biztonsággal iparkodtak 4 N-es elektrolitrezet előállítani.

A *ritkafémek* kohászatában nagy jelentőségű az uránban szegény ércek urántartalmának a gazdaságos kinyerésére alkalmas halomban való lúgzás technológiájának a kidolgozása, a kólai apatitból származó melléktermék ritkaföldfém-oxidtartalmának a kinyerését lehetővé tevő kutatások és a nagyon tiszta réz, ill. egyéb fémek előállítását megoldó vizsgálatok.

The Situation of Metallurgical Sciences and their Trends.. To-day Metallurgy is characterized by the fact that industry requires ever more metals of ever-improving quality, with always new characteristics. This statement is confirmed by the yearly increase of the quantity of produced metals, this is supported by the permanent increase of the purity requirements and is proved by the spreading of the steels, of titanium, of natrium, of radiating and rare earth metals, of structural materials reinforced by crystal particles responding to the increased requirements. When analyzing the future developments it is indispensable to take into consideration the spreading of synthetic materials and the better protection of the environment.

Lage und Entwicklungsrichtungen des metallurgischen Wissenschaftsgebiets. Zur Zeit ist die Metallurgie dadurch gekennzeichnet, daß die Industrie immer mehr und immer bessere Metalle, und metallische Werkstoffe mit immer neueren Eigenschaften anfordert. Diese Feststellung wird durch die von Jahr zu Jahr steigende Menge der produzierten Metalle bestätigt, durch die ständige Steigerung der Anforderungen an die Reinheit unterstützt und als Beweis dient das Vordringen der den gesteigerten Anforderungen entsprechenden Stahlsorten, des Titans, des Natriums, der strahlenden und der seltenen Metalle, der mit Kristallschrot verstärkten Werkstoffe. Bei der Analyse der Entwicklung müssen unbedingt das Vordringen der Kunststoffe und der immer wirksommere Umweltschutz berücksichtigt werden.

MŰSZAKI-GAZDASÁGI RENDSZERTECHNIKA

HELYZETKÉP

JÁNDY GÉZA*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1973. május 16]

„Fel kell figyelnie az Akadémia tudományos testületeinek az itthon és külföldön újonnan megfogalmazott tudományos gondolatokra, a még csak csíraként mutatkozó új irányzatokra is, és igyekezniök kell idejekorán véleményt alkotni életképességükről, a hazai viszonyok közötti jelentőségükről, valamint meghonosításuk személyi és tárgyi lehetőségeiről."

Erdey-Grúz Tibor (1972)

A Műszaki Tudományok Osztálya 1972-ben egy munkabizottsággal** nagyvonalúan feltáratta a szervezett, bonyolult (nagy, integrált) rendszerek struktúrájával, viselkedésével, szervezésének és irányításának mechanizmusával és technikájával komplexen foglalkozó fiatal tudományos irányzatot. Ez a tanulmány a műszaki-gazdasági rendszertechnika tudományos irányzatának főbb jellemzőit és vázlatos helyzetképét a munkabizottság jelentésének felhasználásával ismerteti.

1. A műszaki-gazdasági rendszertechnika tudományos irányzatának főbb jellemzői

A rendszertechnika (angol nevén Systems Engineering) a bonyolult műszaki, műszaki-gazdasági rendszerek átfogó tervezésének és irányításának követelményeként és több fiatal tudományos irányzatnak mérnöki vetületű eredőjeként alakul ki. A legfontosabbak e tudományos irányzatok közül a kibernetika, az operációkutatás és a rendszermegközelítés. Ezeknek az irányzatoknak és így a rendszertechnikának diszciplináris kifejlődése, gyakorlati érvényesülése szorosan kapcsolódik a számítógépek által kínált, néhány évtizeddel ezelőtt még nem is álmodott lehetőségekhez.

A *rendszertechnika vizsgálódásának tárgya* valamely *rendszer*, célkitűzése a bonyolult rendszerek elemzése és tervezése, működésük szervezése és irányítása.

Rendszeren kölcsönhatásban, *dinamikus* kapcsolatban levő *elemeknek*, dolgoknak valamilyen *együttesét* értjük, amit — vizsgálódásunk céljától függően — bizonyos határvonal és működési egység jellemez. A rendszertechnika konkrét elemekből felépülő és aktivitás kifejtésére képes (ún. *viselkedési*)

* Prof. Dr. Jándy Géza 1117 Budapest, Schönherz Z. u. 27.

** A munkabizottság tagjai voltak; Bach Iván (titkár), Bényei András, Gerle György, Jándy Géza (elnök), Lajtha György, Petz Ernő, Tajnafői József.

rendszerekkel foglalkozik. A rendszer határa: az elemei, részei, változói köré húzható zárt vonal, amellyel — a vizsgálat szempontjából hozzá nem tartozó — *környezetétől* kívánjuk elválasztani, és amelyre az jellemző, hogy rajta keresztül az anyag-, energia-, kommunikáció-, stb. csere jól megfigyelhető, meghatározható. A határvonal fizikai létezése nem szükségszerű, hiszen a rendszerbe beleérthetünk olyan kevésbé kitapintható komponenseket, változókat is, mint a feladatkörök, cselekedetek, elvárások, hírközlések, befolyási és hatásköri viszonyok, amelyekre pedig figyelmünket éppen összpontosítani akarjuk. Így a rendszer (és azon belül az endogén hatások) elhatárolása nagymértékben függ a vizsgálódó ember szempontjaitól. A rendszer a saját *inputja* (bemenete) és *outputja* (kimenete) közötti összefüggés szerint lehet *determinisztikus* és *stochasztikus*. Attól függően, hogy a változások túlnyomóan egyenletesen vagy szakaszosan mennek végbe, a rendszer *folytonos* vagy *diszkrét*.

A tudomány a történelem folyamán újból és újból kénytelen rádöbbenni, hogy a komplexitás bizonyos szintjein olyan váratlan tulajdonságok tűnnek elő, amelyeket a kiemelt részletek kisebb komplexitású szintjeinek elszigetelt tanulmányozásával (az ún. analitikus vagy mechanisztikus módszerekkel) nem lehet megjósolni. Korunk is újra felismerte ezt az igazságot. Így került előtérbe a *rendszermegközelítés* tudományos irányzata.

A rendszermegközelítés elsősorban egy magas absztrakciós szintű szemléletmód, és így természetszerűen filozófiai kérdéseket is felvet. Előfeltétele, hogy a világot mások szemeivel is nézni tudjuk. Célja igen egyszerű és jószándékú: a tévedések és csalódások minél gondosabb elkerülése a vizsgált tárgy, folyamat vagy probléma (entitás) külső és belső összefüggéseinek, és valamennyi lényeges aspektusának megismerése útján. Eszköze az egésznek és részeinek folyamatos ellenőrzése. Vizsgálati módszereihez számos jellegzetes fogalmat (nyílt rendszer, zárt rendszer, környezet, entrópia stb.) a modern termodinamikából vett át. Egyes szerzők ezt az irányzatot ma *általános rendszerelmélet*nek szokták nevezni, bár újabban ezt az elnevezést már egyre gyakrabban a rendszerelemzés, operációkutatás, irányítástechnika stb. szimbolikus modellépítésében hasznosnak igérkező a *matematikai rendszerelmélet* számára foglalják le.

A *rendszerelmélet matematikai irányzata* a rendszert az input, output és az állapotváltozók, ill. az állapotváltozást leíró egyenletek alapján, input-output (bemenet-kimenet) párok és azok közötti kapcsolatok halmazaként értelmezi. Ettől az irányzattól kap segítséget a rendszertechnika a maga reális objektumai, konkrét rendszerei viselkedésének tanulmányozásához, a rendszer általános struktúrájának, az elemei közötti belső kapcsolatainak és a környezettel való kölcsönhatásainak, valamint önszabályozásának elemzéséhez.

A *kibernetika* tudományos irányzata adta a rendszer önszabályozását szolgáló közlés és irányítás általános elméletét, az *információs folyamatok*nak és *visszacsatolások*nak ma már jól ismert fogalmát.

Az *operációkutatás* néven elterjedt és kifejlődött tudományos irányzat vizsgálódásának tárgya a meghatározott céllal szervezett és irányított, integrált *(ember-gép)* rendszerek jellegzetes viselkedése, vagyis a konkrét szituációban megkívánt eredmény eléréséhez szükséges (tervezett vagy várható) és egymástól kölcsönösen függő ténykedéseknek (aktusoknak) összessége. Éppen ez utóbbit, vagyis az ember-gép rendszernek egy meghatározott és ismétlődhető feladat elvégzésére irányuló cselekvésmódját nevezzük itt *operáció*nak. Az operációkutatás célja a döntéshozatal segítése, tudatosabbá tétele, a szervezett rendszer operációinak többnyire szimbolikus matematikai *modellben* történő

elemzése, optimum-meghatározása vagy (számítógépes) szimulációja útján. Az operációkutatást a *döntési, irányítási* problémák megoldását szolgáló sajátos matematikai modellek, módszerek, diszciplínák (a lineáris és a nem-lineáris programozás; az egészértékű programozás; a sorrend-programozás; a játékelmélet; a dinamikus programozás és a folyamatirányítási elmélet; a gráfelmélet és a hálózati áramlások elmélete; a szervezési hálózatok, hálós irányítási rendszerek elemzése; sztochasztikus folyamatok elmélete; a tömegkiszolgálási elmélet; a készletgazdálkodás; valamint mindezekre kiterjedően heurisztikus módszerek és rendszer-szimulációk, stb.) gyűjtőneveként is használják. Mind e módszerek, mind az operációkutatás rendszerszemléletű probléma-megközelítési gyakorlata szerves alkotóeleme lett a rendszertechnikának, a műszaki tudományok és a mérnöki gyakorlat eme új irányzatának.

A *rendszertechnika* a mérnök kompetenciájába tartozó célirányos és működőképes rendszereket és azok viselkedését a maguk komplexségében, *térbeli, időbeli* és *társadalmi-gazdasági* összefüggéseiben vizsgálja, kiemelve a műszaki rendszerek általános struktúrájának hasonlatosságát, valamint a célok és megoldások változatosságát. Az *információk* rendezett cseréjével összekapcsolja a rendszert használó és előállító, üzemeltető érdekeit, követelményeit, értékelését. A társadalmi, gazdasági és műszaki összefüggések elemzéséhez méri a költségeket, megbecsüli a végső nyereséget és mindehhez felhasználja a matematikai közgazdaságtan, ill. ökonometria eszközeit.

A rendszertechnika irányait, vizsgálódási területeit a mérnöki tevékenységek két főirányával egybeesően ma két nagy osztályba foglalhatjuk össze.

I. Az egyik főág érdeklődése a bonyolult *műszaki* eszközök, berendezések, (gépi, villamossági, elektronikai rendszerek), szerkezetek, műtárgyak, távirányítási rendszerek stb. (hardware orientációjú) komplex tervezésére, folyamatos *fejlesztésére* irányul.

II. A másik főág a termelés (kutatás, fejlesztés, tervezés, gyártás stb.), szállítás, szolgáltatás stb. *folyamatai* irányításának és (elsősorban munkahelyi, üzemi, vállalati szintű) szervezetei igazgatásának tökéletesítési lehetőségeit vizsgálja. E szervezetek általánosságban adaptív és önszervező *ember-gép rendszerek.**

A rendszertechnikának ez utóbbi főágát nevezzük mi *műszaki-gazdasági rendszertechnikának.* Azonban a szemléletmódot és a vizsgálati módszereket illetően a két főág között igen nagy a rokonság. Azonosak vagy hasonlóak a rendszertechnika munkafázisai, ill. főterületei is:

1. rendszerelemzés (analízis),
2. rendszertervezés (szintézis),
3. a rendszer felhasználásának (bevezetésének, alkalmazásának, fenntartásának) és működése irányításának tervezése,
4. a teljes rendszertechnikai folyamatra kiterjedő rendszerszervezés.

Mérnöki vonatkozásban ezeket szokták a rendszermegközelítés fő feladatköreinek is tekinteni. Az alábbiakban a rendszertervezést és a működéstervezést (2. és 3. főterület) a rövidség kedvéért összevontan tárgyaljuk.

A *rendszerelemzés* minden rendszerszemléletű megközelítésnek alapvető módszere. Természetesen magának a rendszerelemzésnek is mindig van célja,

* Az ember-gép rendszereknek, a meghatározott célú, integrált szervezeteknek mindig egyik lényeges alrendszere az *információrendszer*, és annak alrendszere az *adatfeldolgozási rendszer*. Természetesen az alábbi megállapítások ezekre a rendszerekre is érvényesek.

amit a *probléma felvetése*, meghatározása jelöl ki és ami konkrét esetben segíti megkülönböztetni a lényegest a lényegtelentől. A rendszerelemzés feladata a műszaki-gazdasági rendszertechnikában a teljes rendszer

céljainak, teljesítménymértékének
környezetének, határvonalának, korlátozó feltételeinek, és a felhasználói elvárásoknak, körülményeknek
saját termelési tényezőinek, eszközeinek
tevékenységeinek, azok kapcsolódó folyamatának és struktúrájának
kommunikációs és döntési-irányítási alrendszereinek
és a használható probléma-megoldó alternatíváknak

feltárása, elemzése, értékelése.

Az így kialakított rendszer esszenciáját a rendszertechnikus *modellben* igyekszik ábrázolni, amelyen keresztül — kísérletezés útján — megfigyelheti a rendszer tulajdonságait. A meghatározott céllal szervezett, integrált (ember-gép) rendszerek elemzésére a fizikai modellekkel szemben inkább a matematikai modellek, vagy bonyolultabb esetekben a folyamatábraszerűen megformázott *algoritmikus* (számítógépi szimulációs) modellek nyújtanak lehetőséget. Ha a *matematikai modellben* keresett információ *analitikai* eljárásokkal nem származtatható le, akkor *numerikus* számítástechnikai eljárásokhoz folyamodhatunk. A probléma-megoldás célszerű szimbolikus modellje gyakran egy irányított gráf is lehet, amely lehetővé teszi a preferált megoldás szisztematikus nyomozását. A *számítógépi szimulációval* használható numerikus eljárás alakítható ki az analitikai eljárásokkal nehezen kezelhető dinamikus matematikai modellek esetében is.

A rendszerelmezésnek a korlátozó feltételek, a környezet és a visszacsatolások mellett a rendszer elemeinek változásait, a rendszer *dinamikáját* és *érzékenységét* is tanulmányoznia kell. Mindebben az operációkutatásnak oly nagy a szerepe, hogy a két kifejezést gyakran szinonímaként használják, egyes szerzők pedig az operációkutatást úgy értelmezik mint meglevő komponensekből álló konkrét rendszerek elemzését.

A fentiekben tömören vázolt rendszerelemzés módszertana sikeresen használható számos egyéb területen, így pl. a hidrológiai, vagy a légköri kutatásokban is.

A *rendszertervezés* a rendszerelemzésre támaszkodva és az előírt rendszerkövetelményeket szem előtt tartva foglalkozik az ember-gép rendszer teljesítőképességének, működési hatékonyságának, struktúrájának, irányításának, vagyis pl. a vállalat hierarchikus tervezési, irányítási rendszerének, vagy a műhelyszintű termelési folyamat irányítási rendszerének tervezésével, illetve fejlesztésével, valamint a fejlesztés megvalósításának optimális tervezésével, szervezésével, figyelembe véve az időtényező hatását, az erőforrásokat és a költségeket is. Szűkebb értelemben néhány szerző — főleg hardware vonatkozásban — csupán ezt a tevékenységi kört nevezi rendszertechnikának. Ha a rendszer valamilyen eszköz, berendezés, létesítmény, vagy más hasonló alkotás, a rendszerszervezésnek akkor is ki kell terjednie a szűkebb értelmű műszaki tervezés két fázisán (előzetes és részletes tervezésen) túl a rendszer üzemének, vagyis bevezetésének, működésének, használatának, karbantartásának stb. tervezésére is.

Ha a rendszeren önmagán folytathatunk kísérleteket, az abból visszacsatolt információk viszonylag gyorsan lehetővé teszik az elért eredményt jellemző paraméterek és a kitűzött cél összehasonlítását és ezek alapján a

rendszertervezés teljes folyamatának javítását. Ilyenkor pl. a rendszertervezés az alábbi lépésekre bontható:

— a rendszerelemzés alapján a probléma és a rendszerkövetelmények megfogalmazása;
— a szintetikus rendszerterv (önszabályozásra is kiterjedő) elkészítése;
— a tervezési részfeladatok meghatározása, kiosztása és e munkák koordinálása;
— a terv kivitelezése (kísérleti példány);
— az elért teljesítményi, megbízhatósági stb. tulajdonságok és a kitűzött cél kísérleti összehasonlítása;
— a kísérlet kiértékelt eredményei alapján az előbbi lépések javítása;
— javított tervek és kivitelezés után a kísérlet nagyobb szabású megismétlése üzemeltetés, működés alatt, és a rendszer (típus) végleges kialakítása;
— a rendszer bevezetésének, üzembe helyezésének megszervezése;
— a rendszer fejlesztése.

Bonyolultabb rendszerek esetében az ilyen, többszörös visszacsatolású tervezésre inkább a *rendszerszimuláció* kínál reális lehetőségeket.

Az operációkutatásnak, általában a különböző szélsőértékszámítási eljárásoknak ebben a fázisban is nagy a jelentősége a preferált megoldások kiválasztásánál, optimum-számításoknál, a működési folyamat fenntartásának, irányításának tervezésénél.

A rendszerelemzés és -tervezés (ezeken belül a döntés-előkészítés és irányítás) bizonyos információbázison, egy konkrét információrendszerben megy végbe. Ezért ezeknek a szervezet *kommunikációjára*, *információrendszerére* mindig ki kell terjednie.

Buszlenko [5] tömör megfogalmazásával a *rendszeranalízis* azt vizsgálja, hogy ha a rendszer struktúrája és paraméterértékei előre adottak, akkor ezekből kiindulva hogyan állapítható meg a rendszer viselkedése és tulajdonságai; és a *rendszerszintézis* azzal foglalkozik, hogy a rendszertől megkövetelt tulajdonságokból kiindulva hogyan kell a rendszer struktúráját kialakítani és paramétereinek értékét meghatározni.

A *rendszerszervezés* (rendszer-„management") nem soron következő fázisa a rendszertechnikának, hanem a teljes folyamatra kiterjedő szervező, irányító tevékenység. Magába foglalja a meglevő rendszerek folytonos működtetéséhez és esetenkénti módosításához, vagy az új rendszerek kifejlesztéséhez szükséges feladatköröket és eljárásokat. A rendszerszervezés feladata a teljes vállalkozás (rendszerelemzés, tervezés, megvalósítás, bevezetés, működtetés, fenntartás) koordinálása, összehasonlítása, megfigyelése, előrelátása, ellenőrzése és irányítása a tervdokumentáció alapján, a csatlakozások folyamatos felülvizsgálatával és a változások keresztülvezetésével.

Az ember-gép rendszerek vonatkozásában helyesnek látszik az elemzés, tervezés és szervezés mérnöki tevékenységi köreit műszaki-gazdasági rendszertechnika néven egységbe foglalni. Pl. az angolszász irodalomban és egyetemi oktatási tervekben a „Systems Engineering" kifejezést legtöbbször ebben a szélesebb értelemben használják. A műszaki-gazdasági jelzővel mi itt csupán világosabbá kívánjuk tenni a fogalomkört.

Összefoglalva: a műszaki-gazdasági rendszertechnika a mérnök kompetenciájába tartozó különböző termelő, szolgáltató stb. rendszerek, mint pl.

— ipari és építőipari termelő, kivitelező rendszerek,
— energiaellátási,
— híradástechnikai,
— közlekedési és szállítási,
— települési, vagy
— vízgazdálkodási rendszerek

elemzésének, tervezésének és szervezésének közös megközelítési, modellezési, megoldáskeresési, irányítási, számítási és szimulációs módszereivel foglalkozik, figyelembe véve azok céljait, külső és belső összefüggéseit, lehetőségeit és korlátait.

2. Vázlatos helyzetkép

A műszaki-gazdasági rendszertechnika a mérnök szervezési, irányítási tevékenységében az elmélet és a gyakorlat egyik legfontosabb pillére.

A hardware-re (gépekre, berendezésekre, műszerekre, épületekre, műtárgyakra stb.) orientált műszaki tervezéstől és fejlesztéstől, a mérnöki tevékenységek és ambíciók e kiemelkedően gazdag és elismert területétől lényegesen eltér az a mérnöki tevékenység, amelynek jelentőségére korunk tudományos-technikai forradalma és a szocializmus építésének követelményei igen határozottan figyelmeztetnek. E tevékenységi körhöz ma már többek között a szervezett ipari, építőipari, közlekedési, települési rendszerek működési céljainak, környezetének, saját eszközeinek, és funkcionális összetevőinek, valamint szervezésének és irányításának elemzése, döntési és viselkedési folyamatainak modellezése, a modellben a rendszer operációinak analitikus vagy numerikus elemzése, lehetőség szerint a leghatékonyabb terv meghatározása, vagy a vizsgált, itt többnyire diszkrét folyamatok rendszerszimulációja és a döntési-irányítási rendszer, majd ehhez az információ-előállítási rendszer megszervezése tartozik.

Az egyetemi végzettségű szervező mérnök fogalma, képzésének elvei nálunk ma alakulóban vannak. Példaként a XIX. század tudományos munka- és üzemvezetési irányzatból kifejlődött amerikai „Industrial Engineering" fogalmára hivatkozhatunk, amit magyarul *szervezéstechnikának* nevezhetünk és amit természetesen a mi szocialista társadalmi-gazdasági viszonyaink síkjára vetítve kell értékelnünk.

Az „ipari mérnökség", vagyis a szervezéstechnika ma is elfogadott (1955-ből származó) amerikai definíciója [16] szerint:

„A szervezéstechnika az emberekből, anyagokból és felszerelési tárgyakból integrált rendszerek tervezésével, tökéletesítésével és bevezetésével foglalkozik. E rendszerekből nyerhető eredmények részletezésére, előrelátására és értékelésére a műszaki elemzés és tervezés elveivel és módszereivel együtt igénybe veszi a matematika, fizika és társadalomtudományok speciális ismereteit és az azokban szerzett jártasságot is."

A szervezéstechnika önálló egyetemi szakmává csak a II. világháború után lett, amikor a gyors technikai fejlődés azt már számos területen fokozottan igényelte, de ugyanakkor új eszközökkel, diszciplínákkal és szempontokkal gazdagította is. Ilyen vonatkozásban a legjelentősebbek:

a számítógép,
a rendszerelemzés és az operációkutatás kifejlődése,
a matematikai és statisztikai módszerek alkalmazása,

a hálótechnikai módszerek alkalmazása,
az elektronikus adatfeldolgozás,
a komplex gazdasági hatékonyság,
és az emberi tényezők előtérbe kerülése.

Számos egyetem ad lehetőséget a mérnökök operációkutatási, rendszerelemzési irányú specializálódására, ill. továbbképzésére. Amint azt Gvisianyi szovjet akadémikus újabb könyvében [11] fejtegeti, az alakuló-formálódó irányításelmélet (szervezéstudomány) egyre inkább egzakt tudománnyá válik.

A környezetükbe illeszkedő, bonyolult, összetett (ember-gép) rendszerek elemzésének és tervezésének, szervezésének és irányításának mérnökspecilistái, hazai mérnöktovábbképzésünket tekintve elsősorban a szervező és a gazdasági mérnökök, joggal várnak komoly segítséget a rendszertechnikától. De a rendszertechnika oktatása ma már a tervezési irányú mérnökképzésben is helyet kapott. Az utóbbi években ez megtörtént vagy éppen kialakulóban van hazai műszaki egyetemeink számos karán is.

A rendszertechnika tudományos irányzatából, szakmai-gyakorlati helyzetéből, a szakirodalomból* tükröződően is, arra a következtetésre juthatunk, hogy a rendszertechnika mindkét fő ágával elméletileg a műszaki tudományokhoz tartozik és mérnöki gyakorlati tevékenység.

Ugyanígy hivatkozhatunk több hazai műszaki tudományos egyesületünk és társaságunk számos, rendszertechnika vonatkozású konferenciájára és ankétjára, amelyeknek sorát a Közlekedéstudományi Egyesület 1959., majd 1964. évi közlekedéskibernetikai konferenciája nyitotta meg, és amelyek közül újabban különösen a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Operációkutatási Szakosztályának konferenciái, kisebb ankétjai (pl.: Operációkutatás a gyakorlatban '72, vagy Digitális szimuláció) és a Gépipari Tudományos Egyesület „Compcontrol" (számítógépes irányítás) konferenciái emelkednek ki. Szoros az együttműködés ezen a téren a Bolyai János Matematikai Társulat Matematika Alkalmazási Szakosztályával is.

A rendszertechnika irányzatának hazai feltárásával kapcsolatban hivatkozhatunk az OMFB 1966-ban készült egyik tanulmányára, amely az elméleti alapoktól a gyakorlati megvalósulásig áttekintette a rendszertechnika híradástechnikai vonatkozásait.

A rendszertechnika nemzetközi fórumaiként említhetjük meg az International Federation of Automatic Control, International Federation of Operational Research Societies, International Federation for Information Processing konferenciáit, amelyek főprofiljuk mellett mindig több szekcióban adnak helyet a jellegzetes rendszertechnikai témaköröknek. Ezeken kívül különböző szervezésekben rendszeresen ismétlődnek egyes szűkebb témakörökkel (pl. hálótechnikán alapuló irányítási rendszerekkel, számítógépi szimulációval, stb.) foglalkozó nemzetközi szimpóziumok.

A műszaki-gazdasági rendszertechnika akadémiai gondozásának előzményeként hivatkozhatunk pl. az „Operációkutatás az építőiparban és közlekedésben" szakértő bizottságára, amelyet a Műszaki Tudományok Osztálya 1965. elején, a Mérnöki, Építészeti és Közlekedési Tudományok Szakcsoportja keretében hozott létre, és amely az 1970. évi közgyűlésig működött. Ez a Szakértő bizottság 1967-ben közre adta az operációkutatás hazai helyzetképét

* A cikk végén felsorolt irodalmi hivatkozásokkal csupán ezt kívántuk érzékeltetni.

az építésben, közlekedésben és a területi tervezésben, 1968-ban az „Építőipari vállalatok irányításának számítástechnikai megalapozása", 1969-ben pedig „Operációkutatás" címmel sikeres konferenciát rendezett.

A Szovjetunióban az Irányítási (Automatizálási és Telemechanikai) Problémák Intézete mellett 1970-ben Nemzetközi Tudós Kollektíva alakult, az irányításszervezés, a kibernetika és az operációkutatás terén való tudományos együttműködés céljából.

Munkabizottságunk adatgyűjtés céljából kérdőívvel keresett meg 20 olyan mérnök-kutatót, akiknek rendszertechnikai érdeklődésére főleg csak disszertációjuk címéből következtethetett. A visszaérkezett 16 kérdőív válaszai szerint a megkérdezettek (közöttük 2 tudományok doktora és 11 kandidátus) saját *mérnöki*, szakmai vagy tudományos tevékenységükben (ami publikációikban is tükröződik) az alábbi rendszertechnikai részterületeket, feladatcsoportokat jelölték meg:

1. komplex ipari irányító rendszerek tervezése és elemzése; bonyolult, integrált rendszerek elmélete; a számítógépes folyamatirányítás; energiahálózatok optimális fejlesztése; erőművek telepítése, kapacitásbővítése; nagy technológiai rendszerek vizsgálata; anyagáramlat-rendszerek dinamikája; gázellátórendszer elemzése, fejlesztése;

2. az ipari rendszerelmélet és rendszerelemzés módszertana; számítógépes termelésirányítás; operációkutatás a gyártástervezésben és irányításban, gyártási rendszerek zavarérzékenységének elemzése és karbantartásuk optimálása; a termelésirányítás modulrendszere; a matematikai rendszerelmélet és az operációkutatás műszaki alkalmazása az integrált vállalat-irányításban; építőipari rendszerelemzés és termelésirányítás; beruházási folyamatok szervezése; optimum-számítások az előregyártott épületelemek rendszerszemléletű tervezésében;

3. urbanisztikai rendszerelmélet és telepítési operációkutatás; rendszerelmélet az emberi környezet modellezésében; urbanizációs folyamatok előrejelzése, tervezése, irányítása; településhálózatfejlesztés; területfelhasználás és városrendezés;

4. a közúti forgalom rendszerelemzése és előrebecslése szimulációval; közutak teljesítőképességének minősítése, a közúti közekedés hatékonyságának elemzése; vasúti és közúti forgalomirányítás; úthálózatfejlesztés; a közlekedés tervezésével, szervezésével és irányításával kapcsolatos rendszertechnikai kérdések;

5. rendszer-szimuláció a vízépítési kutatásban, a vízgyűjtőterületeken végbemenő jelenségek vizsgálata.

A kisminta-vételből kapott témáknak ez az illusztratív felsorolása megfelelően támasztja alá jelentésünk állításait. Felsorolhatnánk itt több tanszék, kutatóintézet és tervezővállalat rendszertechnikai alap-, vagy alkalmazott kutatását (pl. a BME Automatizálási Tanszékén folyó gyártásirányítási kutatásokat, vagy az ERŐTERV erőmű- és hálózattervezéssel kapcsolatos ilyen munkáit) is.

E tevékenységekben, céljaik nagy változatossága mellett is kidomborodik a közös elméleti, módszertani bázis és probléma-megközelítési szemlélet, vagyis a műszaki-gazdasági rendszertechnika.

Közös a felsorolt tevékenységekben a *műszaki-gazdasági rendszerek*

— szimbolikus modellezése,

— paramétereinek meghatározása és verifikálása,

— matematikai, statisztikai, operációkutatási módszerekkel történő elemzése,
— számítógépi szimulációja,
— tevékenységeik költségeinek, operációik gazdasági hatékonyságának elemzése,
— célirányos viselkedésük, munkafolyamataik tervezése, tevékenységeik ütemezése,
— optimális operációinak numerikus meghatározása,
— folyamataik irányítási rendszerének modellezése,
— az irányítás információrendszerének tervezése,
— az irányítási rendszer hatékonyságának ellenőrzése számítógépi szimulációval,
— az irányítási rendszer fejlesztésének tervezése,
— a rendszertechnika általános módszertanának fejlesztése, stb.

A kérdőíven kapott válaszok szerint a megkérdezetteknek egységesen az volt a véleményük, hogy a rendszertechnikai „diszciplínák, elméletek a különböző szakirányú, speciális mérnöki gyakorlatból általánosíthatók", és nem szorul bizonyításra, hogy az ilyen általánosítások a tudományt és ezáltal a termelő munkát is előre viszik. Ugyanakkor ez a felismerés a különböző műszaki, műszaki-gazdasági rendszereket elemző és tervező mérnökök között még meglehetősen újszerű, sőt néhol idegen. Ennek oka elsősorban az ide tartozó diszciplínák, tudományos irányzatok fiatalságában és tervszerű oktatásuk viszonylag késői bevezetésében, kari elszigeteltségében kereshető.

A látható érdeklődés és a megvalósult kezdeti eredmények ellenére a műszaki-gazdasági rendszertechnika megfelelően felkészült, hazai kutatói háttere ma már érezhetően elmarad az igényektől.

Ugyanis a számítástechnika terjedése, az egyre nagyobb kapacitású, komplex és bonyolult műszaki-gazdasági rendszerek kifejlődése, alkalmazása, a magasabb színvonalú szervezés és irányítás követelménye egyre határozottabban igénylik a műszaki-gazdasági rendszertechnika elméletét ismerő és gyakorlatában jártas mérnököket. Ez is indokolja, amit egyébként a megkérdezettek is egyhangúan szükségesnek ítéltek, hogy a Műszaki Tudományok Osztálya foglalkozzék e tudományos irányzat, tudományterület gondozásával. Ezt a feladatot az 1973—76-os akadémiai ciklusban az Osztály vezetősége a korábbi munkabizottságnál lényegesen nagyobb létszámú Műszaki-Gazdasági Rendszertechnikai Albizottságra bízta.

IRODALOM

1. Ackoff, R. L.—Sasieni, M. W.: Fundamentals of Operations Research, New York 1968.
2. Archibald, R. D.—Villoria, R. L.; Hálós irányítási rendszerek, Budapest 1971 (New York 1967).
3. Beer, St.; Decision and Control, London 1966.
4. Blauberg, I. V.—Gelman, O. Ja.—Zincsenko, V. P.: Rendszerkutatás (Évkönyv) Moszkva 1969, Izdatelsztvo Nauka.
5. Buszlenko, N. P.; Bonyolult rendszerek szimulációja, Budapest 1972 (Moszkva 1966).
6. Chestnut, H.; Systems Engineering Methods, New York 1967 .
7. Churchman, C. W.; The Systems Approach, New York 1968.
8. Csáki F.; Korszerű szabályozáselmélet, Budapest 1970.
9. Forrester, J. W.; Industrial Dynamics, Cambrige MIT, 1961.
10. Gordon, G.; System Simulation, New Jersey 1969.

11. GVISIANYI, D.; Szervezés és irányítás — A polgári elméletek kritikai elemzése, Budaepst 1972 (Moszkva 1970).
12. HALL, A. D.; A Methodology for Systems Engineering, Princeton 1962.
13. JÁNDY, G.; Optimale Transport- und Verkehrsplanung, Anwendung der mathematischen Programmierung, Berlin 1968 (Budapest 1960).
14. JÁNDY G.; Operációkutatás a kapacitások tervezésében és irányításában, Budapest 1970.
15. MALCOLM, G.—ROWE, A. J. (szerk.) Management Control Systems, New York 1962.
16. MAYNARD, H. B. (szerk.); Industrial Engineering Handbook, New York 1956, 1963, 1971.
17. PAPP O.; A hálós programozási módszerek gyakorlati alkalmazása, Budapest 1969.
18. PONTRJAGIN— BOLTYANSZKIJ—GAMKRELIDZE—MISCSENKO; Optimális folyamatok elmélete, Budapest 1968 (Moszkva 1961).
19. SCHODERBEK, P. P. (szerk.); Management Systems, New York 1971.
20. SZŰCS E.; Hasonlóság és modell, Budapest 1971.
21. VÁMOS T.; Nagy ipari folyamatok irányítása, A számítógépes irányítás kezdő lépései, Budapest 1970.
22. ZADEH, L. A.—POLAK, E.; Rendszerelmélet, Budapest 1972 (New York 1969).

Technical-Economic Systems Engineering. In 1972, by a working party, the Department of the Technical Sciences had, on a large scale, the new scientific trend dealing with the organized complex (great, integrated) structure of systems, their behaviour, mechanism and technique of organization and control explored in a complex way. The principal characteristics and outlines of the present day development of the scientific trend in the technical-economic Systems Engineering are dealed with in this paper by making use of the report of the working party.

Die Technisch-Wirtschaftliche Systemtechnik. Die Abteilung der Technischen Wissenschaften liess in 1972, durch eine Arbeitsgruppe grosszügig aufklären die neue wissenschaftliche Tendenz, die sich mit der Struktur und Benehmen, mit dem Mechanismus und der Technik der Organisat:on und Steuerung der organisierten, verwickelten (grossen, integrierten) Systeme in einer komplexen Art behandelt. Es wird, in dieser Abhandlung, die Hauptcharakteristiken und ein schematisches Bild vom heutigen Stand der wissenschaftlichen Tendenz der technisch-wissenschaftlichen Systemtechnik durch Benützung des Berichts der Arbeitsgruppe dargelegt.

SZÁMÍTÓGÉPEK HASZNÁLATA AZ ÉPÍTÉSZETI TERVEZÉSBEN*

HELYZETKÉP

MIHÁLFFY LORÁND[1]

MÜLLER FERENC[2]

WEBER GYÖRGY[3]

[Beérkezett; 1972. szeptember 10-én]

A tanulmány történeti és rendszertechnikai elvek szerint vizsgálja a témát. Megállapításai így elsősorban arra vonatkoznak, hogy mikor, milyen előfeltételek mellett, mit és hogyan célszerű a számítástechnika felhasználásával végezni.

1. Visszatekintés és helyzetkép

Az építészeti tervezés feladata évezredek óta, hogy a megrendelő igényét az adott anyagok és műszaki lehetőségek f gyelembevételével művészi intuícióval épületté, épületegyüttessé fogalmazza.

A történelem folyamán ez a feladat egyre bonyolultabbá válik. A megrendelő személyes igényei mellett egyre jobban előtérbe kerül a társadalmi igény. A műszaki fejlődés, az anyagválaszték bővülése, új szerkezetek, berendezések, építési technológiák alkalmazását teszi lehetővé.

A tapasztalat útján szerzett ismeretek mellett döntő szerepet kapnak a tudomány fejlődésével kialakuló számítási-méretezési eljárások, makro- és mikrokörnyezeti követelmények. Mindezek azonban nem csökkentik az építészeti tervezés művészi intuíciójának fontosságát.

A felszabadulás előtti Magyarország lassan fejlődő kapitalista társadalmában a társadalmi igények, a létesítmények felszereltsége, a társszakmák és a műszaki szabályozás követelményei nem igényeltek oly mértékű és széles körű együttműködést a társtervezőkkel, hatóságokkal stb. az építész tervezőtől alkotó munkájában, mint napjainkban és ezért az építészeti tervezés nem volt tudatosan szervezett tevékenység. Az építésztervező képes volt követni a társszakmák lassú fejlődését és azok eredményeinek alkalmazásához szükséges ismeretekkel általában rendelkezett. Különösebb szervezési tanulmányok nélkül, egyéni adottságai alapján művészi és műszaki koncepciójával betöltötte a sokat emlegetett karmesteri szerepet.

A felszabadulás után az állami tervező vállalatok megalakulásakor a helyzet lényegében nem változott. A magánirodák helyett a tervezőket többszáz fős vállalatokba csoportosították, de a tervezési módszerek, a tervezési

* A tanulmányt az MTA Építészettudományi Bizottságának felkérésére készítették a szerzők.

[1] Mihálffy Loránd 1016 Budapest, Krisztina krt. 99.

[2] Dr. Müller Ferenc 1126 Budapest, Hertelendy u. 4/b.

[3] Weber György 1113 Budapest, Sollner u. 26/a.

technológia és a tervezés technikai felszereltsége nem változott, csupán az építésztervező karmesteri szerepe körüli vita indult meg, egyelőre csupán szakmai féltékenységből.

A szakemberhiány sok esetben a tervezők, különösen a társtervezők egysíkú felkészültsége, a tervezési és kivitelezési tevékenység helytelen elhatárolása a fejlődést a túlszakosodás irányába vitte. A túlszakosodás együttjárt a társszakmák túlzott követelményeivel, ami már konkrét alapot adott az építész irányító szerepe körüli vitának.

Az 50-es években ezek a fejlődési hibák, továbbá a lassú tervezési és kivitelezési technológia fejlesztés, szervezettség — korszerű munkaszervezés alkalmazása — helyett elbürokratizálta a tervezést.

A tervezés menete lelassult, folyamata horizontálissá vált, az egyes szakmák nem közösen, hanem egymást követően oldották meg a feladatból rájuk eső részt és elkülönülésüknek megfelelően általában a saját részfeladatuk megoldására és nem a szakmák közti optimális kompromisszumra törekedtek.

Az 50-es évek végén és a 60-as években az építőipar technikai és technológiai fejlődése lényegesen felgyorsult, az építéstechnológia országos szinten kétszer változott meg 10 év alatt.

A technológia-váltással együtt jelentkezett a felszereltségi igény növekedése, azonban annak kielégítésére szolgáló épületgépészeti és egyéb berendezések fejlesztése messze elaradt a kívánalmaktól.

Az új építési technológiák bevezetése, az építőipar iparosításának megindítása indokolttá tette a szakosodást, a tervezők specializálódását, mert az új építési módok a korábbi általános gyakorlattól eltérő tömegalakítási, alaprajz szervezési, szerkezetméretezési, hőtechnikai, hangtechnikai, világítástechnikai stb. követelményeket támasztanak.

Az építés iparosítása, mint a tervezési tevékenységet befolyásoló tényező az ipari tartószerkezetek és a blokkos lakóépületek üzemi előregyártásának bevezetésekor jelentkezett. Hatására a típustervezés, mely a hagyományos építési technológia következtében lényegében az alaprajzi funkció és a fesztávok tipizálására terjedt ki és így építmény tipizálás volt, helyesen a szerkezettipizálás irányába tolódott el. Komplex modulrendszerek kialakítására került sor, melyek alapján olyan épületszerkezetek üzemi sorozatgyártása vált lehetővé, melyekből az épületek tartószerkezetei összeszerelhetők.

A házgyári program megvalósítása lehetővé tette az elemek készregyártási fokának növelését és azt eredményezte, hogy a lakóépületek és egyes közösségi épületek építése szerelő jellegűvé, az épületek pedig gyártmány jellegűvé váltak. A típustervezés gyártmánytervezés jellegűvé válik, mely az üzemben gyártott épületek, épületrészek elemeinek gyártásához, gyártási technológiájához, tárolásához, szállításához és szereléséhez, valamint a teljes folyamat szervezéséhez szükséges tervek elkészítésére terjed ki. Hasonló jellegű módosulást eredményezett a tervezésben a korszerű zsaluzatok alkalmazása és fokozott mértékű változással kell számolni a könnyűszerkezetes építési mód bevezetésekor.

Az előzőekből kitűnik, hogy a társadalmi igények, különösen a felszereltségi igény növekedése, valamint az építőipar iparosítása lehetővé, illetve szükségessé teszi, hogy a tervezés tudatosan szervezett tevékenységgé váljék.

Ez a felismerés indította el a tervező szervezetekben a szervező munkát, melynek során megvizsgálták és elemezték a tervezési műveletet, az azt befolyásoló kapcsolatokat, módszereket és technikai lehetőségeket. Ezek a

vizsgálatok elsősorban csak a tervező szervezeten belüli folyamatra terjedtek ki és általában a belső szervezet, technológia és információ, mint egymással szervesen összefüggő rendszerek kialakítását és fejlesztését célozták.

A tervezés és ezen belül az építészeti tervezés a beruházási folyamat szerves része és szervezetten csak akkor végezhető, ha az abban közreműködő szervezetek munkája szervezetté válik és azok is kapcsolódó rendszerekként működnek.

A beruházási folyamatban számos szervezet vesz részt, mint meghatározó, ellenőrző-véleményező és megvalósító. Ezek a szervezetek a következő főbb típusokba sorolhatók:

hatóságok;
beruházók;
tervezők;
gyártók;
kivitelezők.

Ezek működési sebessége lényegesen eltérő egymástól. A hatóságok eljárási sebessége több évtizede nem változott, ugyanakkor pl. a lakásépítés az utóbbi 10 évben lényegesen felgyorsult a korszerű építési technológiák bevezetése után. A kielégítetlen beruházási igények meg fogják követelni egyrészt a beruházási folyamatot lassító szervezetek működési sebességének gyorsítását, másrészt a résztvevők jól ütemezett és hatékony együttműködését.

Az építészeti tervezés szerepe a beruházási folyamatban meghatározó jellegű a következőkben:

telepítés;
városszerkezeti — infrastrukturális szerkezetbe illesztés;
tömeg és téralakítás;
építési technológia;
funkcionális, alaprajzi szervezés;
anyag-szerkezet, felszereltség megválasztása;
minőség, igényszint;
gazdaságosság.

Mindezek a meghatározások koncepcionálisan a beruházási programban, részletesen a kiviteli és részlettervekben kerülnek rögzítésre.

A meghatározások döntések sorozata útján jönnek létre, melyeket szerteágazó információk figyelembevételével kialakított változatok előznek meg.

Az építésztervező megalapozott döntéseihez szükséges információk egyik csoportja a szakmai tájékozottságot szolgáló információk, így különösen a szakirodalomban, a műszaki szabályozásban közreadott információk, továbbá az anyagokra, termékekre, gyártmányokra, építési technológiákra vonatkozó információk, beleértve az ipari háttér adatait is. Az egyre gyorsuló tudományos és műszaki fejlődés következtében ezeknek az információknak a mennyisége egyre fokozottabb mértékben növekszik és oly tömegben árasztja el a tervező szervezeteket, hogy a konkrét esetre vonatkozó információk gyakorlatilag hozzáférhetetlenné válnak.

Az információk másik csoportja a beruházási folyamatban résztvevő szervezetek közötti kapcsolatokból, együttműködéséből és azok tevékenységéből ered, így különösen a véleményezések, jóváhagyások, engedélyezések, ellenőrzések adatai, valamint a szervezetek és a társtervezők feladataival és megoldásaival kapcsolatos és az építészeti tervezést megoldásában és átfutásában befolyásoló követelmények.

Utaltunk arra, hogy az építés iparosítása módosította a tervezés jellegét. Az egyedi tervezés mellett kialakult a típustervezés, majd napjainkban a gyártmánytervezés jelleg. Ez a módosulás az említett új feladatok esetében lényegesen fokozta a tervezési és különösen az építészeti tervezési műveletben az információs, elemző, egységesítő munkát, továbbá egyre fokozottabb mértékben szükségessé teszi a gyártás követelményeinek, gazdaságosságának ismeretét. Az egyedi feladatok csökkenésével az építészeti tervezés egyre inkább a települések városszerkezeti és infrastrukturális problémáinak megoldása irányában tolódik el. Egyes egyedi tervezésű épületek kialakítása és üzemben készre gyártott épületekből, épületrészekből komplex település komponálása lesz a feladata.

Az építészeti tervezés jellegének változása felveti a homogén tervező szervezet jövőbeli szerepének és kapcsolatainak kérdését, mely a gyártást és a gyártmányfejlesztés korszerű elveit figyelembe véve az együttműködés jelenleginél lényegesen nagyobb mértékű kiterjesztését teszi szükségessé.

A tudományos és műszaki fejlődés, a társszakmák követelményei, a tervezés komplexitásának fokozódása, az építés iparosítás lehetőségei és kívánalmai, a tervezés jellegének változása nem csökkenti az építészeti tervezés döntő szerepét a beruházási folyamatban. Ezek a tényezők azonban olyan feladat elé állítják az építészeti tervezést, mely a hagyományos tervezési módszerekkel hatékonyan nem végezhető el. Ezért igénylik a tervező szervezetek a korszerű módszerek között a számítástechnika bevezetését.

A számítástechnika alkalmazása lehetővé teszi a szakmai tájékozottságot szolgáló információk tömegének-információs rendszerbe foglalását, mely biztosítani tudja a keresett adatok gyors visszakeresését. Egyszerűsíti a típus- és gyártmánytervezést megelőző egységesítő, a lényeges paramétereket meghatározó adatfeldolgozást. Segítséget nyújthat tervmegoldások, változatok kialakításában, felrajzolásában, továbbá azok anyagszükségletének és költségvetésének kidolgozásában. Az elkészült koncepcionális tervek objektív értékelését lehetővé teszi és így egyszerűsíti a döntéseket, jóváhagyásokat.

Megoldhatóvá válik egyrészt a tervező szervezet belső munkájának, másrészt a beruházási folyamatban résztvevő szervek munkájának, mint együttműködő rendszereknek a programozása. Összhangba hozható a beruházások előkészítése, a hitelek felhasználása és a gyártás, építés.

2. Számítástechnika a beruházási folyamatban

Ha végigpillantunk a modern élet fejlődéstörténetén, azzal a figyelemre méltó jelenséggel találkozunk, hogy a különböző részeknél egymáshoz hasonló általános problémák és szempontok merülnek fel. Ugyanakkor a gondolkodás kezdettől fogva elementarista (analizáló — egyre kisebb dolgokról egyre többet tudunk meg) típusú elvek irányították. Ez természetes, hisz ez a legegyszerűbb gondolkodási mód. Ma azonban a fejlődés valamennyi területén nem elementalisztikus, hanem szintetikus típusú problémák keletkeznek. Ez a szemléletmód egy igen fontos vonatkozásban különbözik a mechanikus szemlélettől, nevezetesen abban, hogy a valóság különböző szintjein önálló, egymástól független, de kapcsolódó törvények működnek. A probléma egyetemes természetű, ezért az egész és annak szervezete kiált elméletért vagyis rendszerért. A modern életet rendkívül magas fokú specifikáció jellemzi. Szellemében ez ellentétes

a rendszertechnikával. Ez a megnemértés alapja, továbbá természetesen nem fejlődtek ki azok a módszerek, amelyekkel egyértelműen, hatásosan és közérthető módon lehetne megoldani és leírni a rendszer dilemmákat.

Rendszeren elemek olyan együttesét értjük, ahol az együttes más viselkedést képes mutatni, mint ami pusztán az egyes elemek viselkedéséből magyarázható.

A rendszer minden egyes időben sajátos körülmények között sajátos állapotban van. A rendszer állapotát valamely időpontban a rendszert alkotó elemek állapota határozza meg. Az elemek állapotának leírására az elemek tulajdonságai szolgálnak, amelyek bizonyos értékeket vehetnek fel. A rendszerállapot leírásán egy adott időpontban a rendszer állapotleírását, vagyis elemi állapotainak leírását értjük. Ha a rendszer viselkedését kronologikus állapotainak leírása révén adjuk meg, akkor a rendszerállapot történetét írjuk le az idő függvényében. Hangsúlyoznunk kell, hogy az állapottörténet nem árulja el a rendszerben végbemenő változások okát, csak rögzíti a változások lefolyását.

A tervezőintézetek és a kivitelező vállalatok tisztában vannak a műszaki tevékenység fontosságával, de a rendszertechnikai feladatok megoldásának sajátos jellegét a legtöbb esetben nem látják ilyen egyértelműen és világosan. Először is rögzíteni kell azt, hogy rendszertechnikai szempontból teljesen érdektelen és műszaki értéke zérus annak a feladatmegoldásnak, amely a tervezést kiemelve környezetétől elszakítva függetlenül vizsgálja és nem veszi figyelembe azt. Rendszertechnikai szempontból elsősorban a tervezőiroda helyét, szerepét és funkcióját kell meghatározni, magában a beruházási folyamatban.

Az építőipari rendszereket célszerű három vonatkozásban bemutatni és leírni.

Az első a meglevő vagy a kialakítandó szerveket írja le, amelyek a beruházási folyamat részesei. Ennek a modellnek továbbá tartalmaznia kell a szervek funkcióinak körülhatárolását.

A második az egyes szervek funkcióit írja le, illetve ezen részek algoritmusát, amelyeket számítógépes módszerekkel lehet célszerűen, gazdaságosan megoldani. E modellnek tartalmaznia kell a programok és kapcsolódó egyéb számítógépes eljárások összefüggéseit is. Ez alapvető feltétel, mivel automatikusan nyert eredményeket, azok részletezettsége miatt célszerű továbbiakban automatikusan feldolgozni. Külön megfontolás tárgyát képezi az, hogy hol, mikor, milyen mértékben szükséges és célszerű az emberi (tervezői) beavatkozás. Nyilvánvaló, hogy egyes programokat csak egy szervezethez lehet hozzárendelni és ennek révén definiálni a szervezet profilját.

A harmadik az egyes szervezetekben elhelyezett vagy elhelyezendő hardware modelleket írja le, amelyek szoros kapcsolatban állnak a szervezet által használt programokkal.

A második modell az építési tevékenység egészét írja le, illetve a lehető legcélszerűbben próbálja számítógépes eljárások segítségével megoldani azt, amit manuálisan is el kell és lehet végezni. (Nem tévedés!) A második modellnek ki kell terjednie a telepítési, gazdasági, műszaki tervezési, anyagraktározási, gyártásszervezési és szállítási feladatok elvégzésére.

A beruházási folyamatban elsősorban az épület megvalósítására, telepítésére vonatkozó elemzéseket kell elvégezni. Ilyen és ehhez hasonló vizsgálatok végzésének előfeltétele, hogy rendelkezésre álljon három közigazgatási adattár:

— telek kataszter;
— épület kataszter;
— mérnöki előtervezési adattár.

Mindhárom adattár létrehozása nem építőipari feladat, annak ellenére, hogy szerepük elvitathatatlan az építési és tervezési folyamat előkészítésénél.

A beruházási folyamat egy másik része a konkrét, minden részletre kiterjedő tervezési program. Ismeretes, hogy az egyes épülettípusok funkcióit, berendezési tárgyait különböző szakkönyvek részletesen tárgyalják. Amennyiben egy-egy területen ezek számítógépes feldolgozása megtörténnek pl. lakóépületek esetében, jelentős mértékben lehetne egyszerűsíteni a tervezést.

A komplex tervezési folyamat néhány megoldási algoritmusával külön is foglalkozunk, ezért itt csak a tervezési algoritmusok használatának előfeltételeit ismertetjük. Ezek:

— a beruházási program egyértelmű, szabatos megfogalmazása;
— a kivitelező vállalat műszaki felkészültségének, eszköz-állapotának ismerete;
— az építőipari, ipari háttér által biztosított lehetőségek ismerete.

Természetesen ezeknek a számítógép háttértáróin kell rögzítve lenniök.

A kivitelezési folyamatban a számítógépek használata lényegében négy téma köré csoportosítható:

— a tervezésből érkező adatok számítógépes fogadása;
— az adatok feldolgozása vállalatgazdálkodási szempontok szerint;
— az építési folyamat operatív irányítása (diszpécser szolgálat) a bekövetkező zavaró hatások figyelembevételével;
— banküglyletek.

Értelemszerűen a beruházási, tervezési és kivitelezési folyamat egységes modelljében különösen fontos szerepet kap a megrendelési és realizálási események regisztrálása. Ezt nyilvánvaló módon a szervezeteknek kell elvégezniök, míg a feldolgozás és értékelés feladatát az építésügyi tárcának kell ellátni, ami már minisztériumi feladat.

Szemléltetés céljából vizsgáljuk meg a jelenlegi paneles építési módot, amely formájában és végrehajtási szervezetében követi a hagyományos eljárást. A kivitelezés igényei megváltoztak, mert a paneles építkezés végrehajtási tempója lényegesen nagyobb, mint kb. ötven évvel ezelőtt megalkotott előkészítési és engedélyezési folyamat, amely viszont a mai napig semmit sem változott.

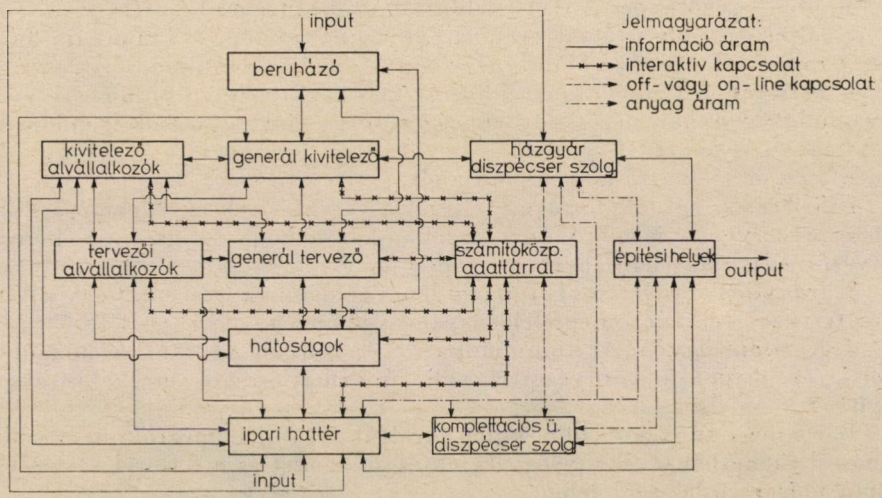
Hogy ezt az ellentmondást megszüntessük, a rendszertechnikai elvek értelmében célszerű vizsgálat tárgyává tenni a paneles építés módszerét, hogy annak eredményeképp a folyamatok sebességnívója azonos legyen.

Az interaktív paneles építési mód egy durva szervezeti modelljének közlése csak azt a célt szolgálja, hogy felhívja egy ilyen vagy ehhez hasonló modell(-ek) kidolgozásának szükségességére az érdekeltek figyelmét.

A modell az alábbi szervek interaktív, információs és anyag áram kapcsolatát tételezi fel egységes rendszerben az 1. ábra szerint:

— beruházó;
— felhasználó (üzemeltető);
— generálkivitelező;
— generálkivitelező alvállalkozói;
— generáltervező;
— generáltervező alvállalkozói;

— hatóságok;
— ipari háttér;
— házgyár;
— kompletációs üzem;
— építési helyek;
— számítóközpont adattárral.



1. ábra

Az 1. ábrán közölt modell erősen egyszerűsített durva vázlata több szempontból nem tekinthető teljesnek. A modell csak a lakásépítési folyamatot tartalmazza, nem foglalja magába a házgyári beruházás elemzését és a kommunális létesítmények megvalósítását. Mindezek alapján szükségesnek tartjuk a vitaalapnak szánt modell tökéletesítését, alternatívák kidolgozását stb., és a különböző modellek kritikai elemzése alapján kell kialakítani a végleges elképzelést.

Az építészet sajátossága miatt a modellnek egy alapvető vonatkozásában különböznie kell a már megszokott ipari modellektől. Végső cél nem a házgyári termelés minden áron történő fokozása, hanem a végtermékkel, vagyis az épülettel szemben támasztott követelmények (gazdasági, esztétikai stb.) legcélszerűbb kompromisszumos megvalósítása. Tehát nem optimalizálásról van szó, hanem elsősorban reális lehetőségeink kompromisszumáról.

A könnyűszerkezetes építési rendszer esetében a beruházás, tervezés, kivitelezés folyamatait kell egységgé ötvözni. Ennek alapján funkcionálisan az alábbi feladatokat kell ellátni:

— beruházási igények és feladatok;
— tervezési feladat;
— építőipari és ipari háttér szállítási lehetőségei;
— raktár állapotok;
— gyártási feladat;
— gyártóüzem be- és kiszállítási feladatai;

— kommunikáció;
— szerelés;
— befejező munkák.

A rendszer induló adata a beruházási igények pontos és szabatos megfogalmazása, továbbá az ipari háttér lehetőségei. A tervezési feladat a két lehetőség ismeretében az épület megtervezése. A kivitelezés és így a rendszer záró eredménye a műszaki átadás-átvétel.

Minden egyéb kapcsolattól eltekintve, csak a tervező-építész szemszögéből vizsgáljuk tovább a témát. Ahhoz, hogy a tervező-építész munkája önmagában hatékony legyen, az alábbi négy funkciónak kell működnie:

1. Tervezés. E funkció keretei között kell hogy megvalósuljon a tervezési cél, valamint az annak eléréséhez szükséges programok, eljárások és módszerek kialakítása. A tervezés lényegében az integrált döntések kerete és létfontosságú minden terv megvalósítása szempontjából.

2. Szervezés. E funkció révén teljesül a tervezőknek és a lehetőségeknek rendszerré szervezése és működésük összehangolása, hogy a végzett tevékenység a tervezés céljainak eléréséhez vezessen.

3. Irányítás ellenőrzése. E funkció lényegében arra irányul, hogy a rendszer a tervezés tervének megfelelően valósuljon meg.

4. Kommunikáció. A kommunikáció elsősorban a döntési központok közötti, ezenkívül a környezettel való információ-csere megvalósítása és irányítása.

Bár e négy funkciót külön-külön soroltuk fel és jellemeztük, nem szabad egymástól független tevékenységnek tekinteni ezeket és a felsorolás még egyértelmű idősorrendet sem jelent.

A közölt példák alapján látható, hogy az építésztervezővel szemben támasztott követelmények lényegesen megváltoztak. Az új követelményeket az alábbiakban foglaljuk össze:

— komplex funkciókat (épületfizika, technológia, esztétika stb.) kielégítő elemeket kell tervezni, amelyeket nagy szériában, ipari módszerekkel gyártanak;
— ipari módszerekkel és megfontolások alapján készült elemekből kell az épületeket összeállítani, komponálni;
— az építészeti tervezésnek ki kell terjednie magára a tervezésre, a szervezésre, az ellenőrzésre és a kommunikációs feladatok megoldására is.

Lényegében a felsorolt szempontok eddig nem tartoztak az építésztervező feladatához, vagy csak periferikusan érintették azt. Ez a tervezés helyzete és egyben ellentmondása is.

3. Számítógépek használata az építészeti tervezésben

Az építészeti tervezési tevékenységnek, mint műveletnek az elemzésére az utóbbi években számos kísérlet történt. Ezen elemzésekre több aspektusból, más és más céloktól vezetve került sor. Ezek értékeik és hiányosságaik mellett egyben mindig közösek voltak és lesznek. Ez a közös vonás az elemzésre váró tevékenység nagymértékben összetett voltában rejlik. Az összetettség olyan sokoldalú és szempontjaiban olyan sokrétű, hogy maga a tevékenység maradéktalanul egyetlen elemzés keretein belül nem írható le. Ezt támasztják alá azok a közzétett tanulmányok is, amelyek nem is magával a tevékenységgel,

hanem csupán annak problémastruktúrájával foglalkoznak. A legalaposabb elemzés is csak kompromisszumok és feltételezések közepette képes az építészeti tervezési folyamat egymástól távol eső összetevőit egymással vonatkozásba hozni. Ilyen összetevők a tervezésnek kutatási-fejlesztési oldala — az ipari háttérre részben vagy teljesen ráépített tervezés, vagy a napjainkban egyre inkább hangsúlyozott szervezés.

Itt emlékeztetünk a ma már naívnak tűnő próbálkozásokra, amelyekre a számítógépek térhódításának első szakaszában került sor. E próbálkozások lényege az volt, hogy a számítógépek alkalmazását úgy igyekeztek elérni, hogy a tervezési tevékenységet a szokásos és hagyományos tervezőirodai aspektusok alapján elemezték. Az elemzés eredményeképpen a folyamatot ugyancsak hagyományos módon nem az alkalmazni szándékozott technikának megfelelő összetevőkre bontották. Az elemekre bontott tevékenységláncokat igyekeztek pontról-pontra a számítógépek által nyújtott „szolgáltatásokkal" lefedni. Az eredmény közismert: nincs tudomásunk ilyen alapon szervezett működőképes rendszerről.

Magáról a számítógépre orientált elemzésről is meg kell jegyeznünk, hogy két állapotra építve folytatható le. Ez a két állapot egyrészt lokális, azaz kizárólag a tervezési műveletről van szó, másrészt globális, amikor a teljes beruházási folyamatot vesszük alapul, amelyben a tervezés csak egy láncszem. Nyilvánvaló, hogy mindkét elemzés részleteiben más eredményekhez vezet. Nem véletlen, hogy tanulmányunk, mint kompakt rendszert elsődlegesen a paneles építési módot vizsgálja, hiszen jelen hazai körülményeink között, — ha nem is egyedülállóan, de ez a rendszer jelentheti a vizsgálati bázist. A beruházó, a tervező, az építő, üzemeltető-fenntartó szervezetek elkülönülése e rendszeren belül a legkevésbé drasztikus. Valószínű, hogy ez az a terület, ahol az olyan sokat vitatott gátló ellentmondások először lesznek feloldhatók.

A továbbiakban kísérletet teszünk arra, hogy a már említett lokális és globális alapon történő elemzést összefogva végezzük el. A számítógépre orientáltság azt jelenti, hogy nem egy új technikai segédeszköz alkalmazásáról van szó. Az új és megváltozott körülmények között nem csak egy tevékenység több-kevesebb elemét kell más technológiára átállítani, hanem gyökeresen meg kell változtatni a teljes folyamat struktúráját is.

A tervezési tevékenység úgy is mint önálló lokális rendszer — és úgy is mint egy tágabb globális rendszer része, három síkra bontható szét. Ezek:

1. A megnövekedett és minőségükben megváltozott relációk a tervező-apparátus információfolyamainak soha eddig nem látott, de ugyanakkor igényelt növekedéséhez vezetett. A szóban forgó információfolyam úgy az apparátuson belüli elemek között, mint pedig a beruházási-építési rendszer többi része felé és felől jelentkezik. Így az első szóbanforgó síkot a vállalati információs rendszer alkotja. E rendszer feladatkörébe úgy az információszolgáltatás, továbbadás, gyűjtés és feldolgozás mint raktározás beletartozik.

2. A fenti információs rendszerre épülve külön síkot alkotnak a konkrét tervezési tevékenység elemei. Ezek az elemek, tekintettel a közöttük levő ismétlődésekre és sorrendi változásokra, az alábbiak: Előkészítés — Koncepcióalkotás és alternatívák készítése — Döntések — Feldolgozás — Dokumentálás.

3. A harmadik síkon zajlik a mindenkori tervezési tevékenység hol lokális, hol pedig a teljes beruházási rendszerre épülő globális ellenőrzése és dinamikus szervezése.

Az előkészítés fázisa egyrészt a probléma megfogalmazását, másrészt a problémákat alkotó elemek struktúrájának meghatározását jelenti. Ezek ismeretében történik a rendelkezésre álló információk előkészítése kiegészítése, majd első feldolgozása. E stádiumban a koncepcióalkotás kerül megalkotásra. Az alternatívák a megoldandó feladat karakterétől függően változóak azok a tényezők is, amelyekre alapozva az alternatívákat lehet képezni.

Külön fejezetet jelentenek a ma már egyre inkább alkalmazásra kerülő ún. *szimulációs módszerek*. Ezek segítségével a várható eredmény körvonalainak, ill. egyes részleteinek megközelítése válik lehetővé.

Attól függően, hogy mely alapon történik a megoldásváltozatok képzése, változhat azok száma. A szóban forgó feladatok karakterétől függően úgy a cél, mint a feladat elemeinek, mint a korlátozó feltételeknek és a megvalósítás eszközeinek kombinálása és megváltoztatása elvezet a megoldáshoz.

Ha a feladat és cél megfogalmazása egyértelművé válik, a korlátozó tényezők és a megvalósítás eszközei a lehetőségekhez képest határozottak, felállítható egy kritériumrendszer. Ennek segítségével redukálható az alternatívák száma, szükség esetén egészen az emberi ítélőképesség minőségi és mennyiségi határáig. A redukálás történhetik egy vagy több lépcsőben.

Nem vitatható, hogy a döntési szakasz a legvégső soron minden technikai és módszerbeni segédeszköz ellenére teljesen nem tehető objektívvá. Az ember alkotó döntőképességének szerepe továbbra is megmarad. Feladatonként váltakozva egy sor olyan döntési kritériumra kell tekintettel lenni, amelyek egyáltalán nem, vagy csak durva megközelítéssel fogalmazhatók meg egzakt formában.

A döntési szakasz végén, többszöri modifikálás után a megoldásoknak olyan formában kell rendelkezésre állniok, hogy lehetővé váljék a feldolgozás. A szóban forgó részfolyamat a gyakorlatban az előírásoknak megfelelő kivitelezési tervek elkészítését jelenti. Ez a részfolyamat információi, mint más jellegű kapcsolatai révén messzemenően összefüggésben áll a komplex beruházási rendszer elemeivel, ill. a vonatkozó ipari háttérrel.

Az előzőektől időben szinte szét nem választható módon zajlik le végül a dokumentálással megjelölt részfolyamat. Kizárólag rutinjellegű, nagymértékben szabványosítható, racionalizálható és gépesíthető folyamatszakasz a kiviteli tervek készítésének formai oldalát jelenti.

Az alábbiak szerint alakulhat a fenti résztevékenységek köre, amelyek számítógépek gyakorlati alkalmazásával segíthetők.

A tervezési munka előkészítő szakaszában a megoldandó feladat megfogalmazása, valamint az elérendő cél meghatározása a döntő. Mindkét esetben vagy a vállalati, vagy a teljes beruházási folyamat információs rendszerére kell támaszkodni. Ez csak úgy lehetséges, ha rendelkezésre áll egy egyértelműen megfogalmazott értelmezési rendszer. Enélkül az egyes információk átvitele, értékelése és beépítése olyan problémát jelent, amit egyrészt technikailag, másrészt ökonómiai szempontból feloldani szinte lehetetlen. Az előkészítés szakaszában zajlik le a megoldás feltételeinek analízise. E feltételek alatt térbeli, időbeni, műszaki-technológiai színvonalbeli, financiális, gazdaságpolitikai, településpolitikai stb. korlátokat értünk. A korlátok egyben arra is szolgálnak, hogy kiküszöböljék egy kérdés megoldásánál a feleslegesen nagyszámú megoldási lehetőség felvetődését.

A szóban forgó korlátozó tényezők egyrészt a megvalósítandó cél elemeit, másrészt a cél elérésének eszközeit határolják le. Ez a lehatároltság mennyiségi

és minőségi tekintetben azzal ellenőrizhető, ha mód volna a kapcsolódó informáltság mérésére. Így merül fel magának az információs rendszernek a felépítése. Ha az merev, az informáltság mérése kizárólag a tervezést végzők szubjektív megítélésére van bízva. Ha sikerülne egy dinamikus, a felmerülő kérdéseket részben önállóan analizálni képes információs rendszer megalkotása, e gond a tervezőt csak törtrészében terhelné.

Az alternatívák képzése a koncepcióalkotás fázisán belül a tervezési munka eszközeinek, azaz a szóban forgó módszereknek analízisével kell hogy kezdődjék. Ez az analízis a mai napig egyéni megítélés alapján történik. Ebben nyilvánvalóan közrejátszik az is, hogy ez ideig az egyes módszerek gépi reprezentálása főként a rendelkezésre álló eszközállomány technikai színvonala miatt nehézkes és gazdaságtalan. A szóban forgó nehézségekhez hozzájárul a már említett közös értelmezési rendszer hiánya. Nincsen lehetőség ez ideig komplett „módszer-csomagok" alkalmazására. Ugyancsak lehetetlen ilyen körülmények között egy módszertől, ill. a hozzátartozó eszköztől egy másik felé való átmenetre. Ez vonatkozik úgy a deduktív mint pedig az induktív módszerekre.

A deduktív módszer elsősorban a modellezés. Külön tanulmányt jelentenének a képi vagy ikonikus, az analóg, ill. a szimbolikus modellek alkalmazásai. Elsődlegesen komplementer szerepük jelentős a tervezési metódusok körében. Gépi reprezentálásuk elvben megoldottnak tekinthető, gyakorlati alkalmazásuknak elsősorban technikai korlátai vannak.

Az induktív módszerek keretein belül egyes konkrét esetek megfigyelése, majd analizálása és feldolgozása útján igyekezünk eredményre jutni. Külön utat jelent az analóg részmegoldások, ill. a több kevesebb vonatkozásban hasonló megoldások, részmegoldások feldolgozása. Lényeges előrelépés volna az egyes megoldások, ill. megoldássorok, sőt megoldásrendszerek egymáshoz, ill. a feladatokhoz viszonyított relációinak felállítása. Ezek részben hierarchikus rendet, másrészt közgazdasági és más szempontokat vehetnek figyelembe. Összehasonlítási rendszerek gépi reprezentálására más, fejlettebb iparágak már szolgáltattak példákat. Átvételük alapja elsődlegesen a már említett ipari háttérre épített tervezési folyamat.

A döntési folyamatok problémaköre akkor jelentkezik, ha nem lehet egységes módszert követni. Ez egyrészt váltakozik a feladatok karaktere függvényében, másrészt abban is különbözik, hogy a tervezés folyamata mely stádiumában kerülnek alkalmazásra.

A műszaki tervezés más szféráiból ismeretesek a modern matematikára támaszkodó döntési, ill. döntést segítő módszerek. Ezek átültetése az építészeti tervezési gyakorlatba szinte alig történt meg, önálló módszerek kidolgozására is alig került sor.

Elősegítené meglevő módszerek adaptálását és újak kidolgozását, ha sor kerülne az egyes tervezési folyamatok döntési pontjainak feltérképezésére, ill. ezek szerepének és súlyának meghatározására. Ugyancsak analizálásra várnak a döntés szakági vonatkozásai és összefüggései. Az egyes feladattípusok jellegének megfelelő mérőrendszer lehetővé tenné egy megoldás, vagy megoldássor értékelését. Külön kérdés egy döntési rendszeren belül az emberi döntések szerepe úgy súlyuk, mint időbeni elhelyezkedésük tekintetében.

Ismét más kérdés a már meghozott döntések átvitele és beépítése a folyamatba. Ismeretesek kutatási eredmények a döntésátvitel pontjainak meghatározására, ezek azonban az építészeti tervezői tevékenység körétől távol

esnek. Hiányzik az egyes feladattípusokra jellemző visszacsatolási rendszer. A tervezői gyakorlat ma még a hagyományokra építve jár el. Elhanyagolja a döntési-visszacsatolási folyamatelemek hierarchiáját, feladatonként változó karakterét, merev vagy rugalmas voltát stb. A tervezőirodák érthetően ezt a kérdést adminisztratív úton igyekeznek megoldani. Ha más nem, de legalább ez a kérdés maga is egyértelműen világít rá a jelenlegi szervezeti rendszer struktúrájának ellentmondására a tervezés automatizálás akár csak kezdeti keretei között is.

4. A számítástechnika bevezetésének előfeltételei és lehetőségei

A számítástechnika alkalmazásának bármely területen előfeltétele
— a tervezési művelet racionalizálása;
— a munka szervezetté tétele;
— a probléma megoldások korszerűsítése és
— a felhasználók ismereteinek bővítése, szemléletének az új módszerek és a számítástechnika elfogadására alkalmassá tétele.

A tervezési művelet racionalizálásához szükséges a teljes tervezési folyamat részletes elemzése, szervezeti, technológiai és információs követelményeinek meghatározása, melyek figyelembevételével alakítható ki egy racionális tervezési rendszer.

A tervező szervezet technikai felszereltsége igen szűkre szabott lehetőségeket biztosított az információs, méretezési, értékelési, döntéselőkészítési feladatok megoldásához, segédletek, táblázatok, ökölszabályok használata vált általánossá. A korszerű számítástechnika alkalmazása nagymértékben kiterjeszti a megoldási lehetőségek körét és lehetővé teszi olyan módszerek és elméletek gyakorlati alkalmazását, amely a korábbi technikai felszereltséggel nem volt megoldható. Ugyanakkor a mai gyakorlatban alkalmazott módszerek, méretezések stb. számítástechnika alkalmazásával rendkívül gazdaságtalan.

A korszerűbb módszereknek kialakítása és a számítástechnika széles körű bevezetése csak akkor lehet eredményes, ha szakembereink továbbképzését, új szakembereink oktatását úgy szervezzük meg, hogy a feladatra felkészülten tudjanak vállalkozni és megértsék, hasznosnak ítéljék a számítástechnika alkalmazását. Ez az ismeretbővítés és szemléletváltozás csak türelmes oktató, nevelő munkával érhető el és hosszabb időt igényel.

A számítástechnika alkalmazásának eddigi módszere, szervezetlensége miatt igen költséges és nem célravezető. Szükségesnek tartjuk egységes fejlesztési koncepció kialakítását, mely módszeres vizsgálatok alapján meghatározza az elérendő célt, feltárja a megoldási lehetőségeket és biztosítja lépésről lépésre a fokozatos fejlesztést. A fejlesztési koncepció kialakításánál abból célszerű kiindulni, hogy alapvető célkitűzés a beruházások színvonalas, korszerű és gazdaságos megvalósítása. A tervező szervezeteknél alkalmazandó számítástechnikai rendszereket és programokat a beruházások gazdasági tervezésével, az anyag- és szerkezetgyártással és a kivitelezéssel kapcsolatos számítástechnikai rendszerekkel és programokkal összefüggésben kell kialakítani, mint azt a rendszertechnikával foglalkozó részben is kifejtettük.

A számítástechnika alkalmazásával kapcsolatos feladatokat az építészeti tervezés szempontjából a következőkben lehet körvonalazni:

— a követelmények, mint információk gyűjtése, tárolása, rendszerezése, visszakeresése az adott feladathoz;
— változatok kialakítása és ábrázolása az adott feladathoz tartozó követelmények fontosságának és azok összefüggésének figyelembevételével;
— a változatok intuitív korrekciós lehetősége;
— a változatok értékelése, elemzése;
— a megoldás adatainak feldolgozása.

Ezek az általános kívánalmak utalnak arra, hogy a jövőben a tervezési művelet lényegesen megváltozik, mint azt a házgyárak gyártásprogramozásával kapcsolódó tervezési művelet módosulása, továbbá a könnyűszerkezetes programmal kapcsolatos elképzelések is bizonyítják.

A fejlesztési koncepcióban javasoljuk kidolgozni a programkészítés, gépbeszerzés és a bevezetés ütemezését.

A számítástechnika alkalmazása a több éves és költséges előkészítő munka mellett lényeges beruházást is igényel, ezért az ütemezésnél javasoljuk figyelembe venni az anyagi lehetőségeket és a fokozatosságot olyan szempontból, hogy egyes műveletrészek már korábban bevezethetők legyenek, de oly módon, hogy a teljes rendszer kiépülésekor az egyes műveletrészek gazdaságosan folyamattá legyenek összekapcsolhatók.

A feladat ütemezésének sorrendjére javaslatunk a következő:
— meglevő programok összegyűjtése, vizsgálata, a megfelelőek átvétele és beillesztése a rendszerbe;
— információs adattár létrehozása, célra visszakereső rendszerrel;
— elemző, értékelő, költségelő programok kialakítása és alkalmazása;
— tervváltozatokat kialakító és felrajzoló programok kialakítása és bevezetése;
— optimalizáló programok kialakítása és bevezetése.

A számítástechnika alkalmazása mint korábban is említettük költséges és jelenlegi bérszintünket figyelembe véve kétséges, hogy mikor válik gazdaságossá. A technikai haladás viszont megköveteli a számítástechnika alkalmazását, ezért a fejlesztési koncepcióban foglalkozni kell a gazdasági kérdésekkel és azok elemzése alapján kell meghatározni az előkészítés, bevezetés és alkalmazás módszereit, és javaslatot kell tenni azokra a feltételekre, amelyek biztosítják azok fedezetét.

Az eddigi tapasztalatok alapján is látható, hogy a szervezetlenül, kellő előkészítés nélkül sok helyen beszerzett eltérő típusú és nagyságrendű gépek beszerzése igen sok ráfordítást igényelt. Ugyanakkor a gépek nagy része áll, kapacitásuk nem hasznosítható.

Az egyes műveletek gépre vitelével a témát nem ismerő együttesek foglalkoznak és így az előkészítő munka a reálisnak többszörösét emészti fel munkaráfordításban, időben és anyagiakban egyaránt. Mindezek megtérítését a számítástechnikai intézetek a felhasználóra hárítják, így az ösztönzés helyett, mely sokszor szóba kerül, inkább elrettentő hatás jelentkezik az anyagi oldalon.

Mindezek figyelembevételével javasoljuk az előkészítő munka szervezett és központosított elvégzését megfelelő szakemberek bevonásával.

Az előkészítő munka bizonyos fázisában lehet meghatározni a legmegfelelőbb központi és vállalati géptípusokat. Ekkor kerülhet sor azok beszerzésére és azoktól eltérő típusok beszerzését javasoljuk megakadályozni.

Összefoglalva hangsúlyozni kell, hogy a tervezéstechnológia fejlesztése ma még történhetik számítógépek nélkül is, de a számítógépes módszerek előkészítésében ma már lemaradásban vagyunk.

The Use of Computers in Architectural Project Work. In the paper the subject has been investigated according to historical and systems engineering principles. Hence the results concern mainly the questions of when, under what circumstances, for what and how it is suitable to use computer techniques.

Verwendung von Rechnern in der Bauplanung. In der Arbeit wurde das Thema nach historischen und systemtechnischen Gesichtspunkten untersucht. Die Feststellungen der Verfasser beziehen sich so in erster Linie darauf, wann und unter welchen Voraussetzungen was und wie zweckmäßigerweise unter Verwendung der Rechentechnik gelöst werden kann.

ÚJ ALGORITMUS GÁZ- ÉS FOLYADÉKHÁLÓZATOK SZÁMÍTÁSÁRA

SINGER DÉNES* ÉS KOLTAI TAMÁS**

[Beérkezett, 1973. február 19-én.]

Az algoritmus a hálózati egyenletek csomóponti alakjából indul ki és az egyenletek megoldásához a Newton-Raphson módszert használja. A Jakobi-féle mátrix ehhez szükséges inverziója helyett az invertált mátrixot a hálózat egyes ágainak lépésről-lépésre való hozzáadásával, közvetlenül állítja elő. A tanulmány röviden leírja az algoritmus felhasználásával szerkesztett programot és annak értékelését adja.

1. Bevezetés

A nemlineáris villamos hálózatoktól eltérően a gáz- és folyadékhálózatok számításánál a Newton-Raphson és az ebből kifejlesztett módszerek csak a legutóbbi időben kezdenek a mind ez ideig általánosan használt H. CROSS módszerrel szemben polgárjogot nyerni [1], [2], [3], [4]. Ennek magyarázata, hogy ezen utóbbi módszer divergenciára való hajlamosságát és munkaigényességét ellensúlyozza egyszerűsége és kicsiny memóriaszükséglete.

A Newton-Raphson típusú módszerek használatát elsősorban ezek kisebb érzékenysége indokolja az iteráció induló értékeinek helyes megválasztásával szemben. A hálózati egyenletek vektoriálisan

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

alakba írhatók. Ha x_0 a becsült induló értékek vektora, a Newton-Raphson módszer az x megoldás vektor első közelítéseként

$$x_1 = x_0 - \mathbf{H}^{-1} F(x_0) \tag{2}$$

adódik. Az x (i+1)-edik közelítése

$$x_{(i+1)} = x_i - \mathbf{H}_i^{-1} F_i . \tag{3}$$

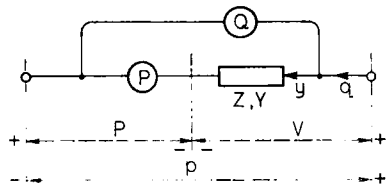
$\mathbf{H}_i$ az F_i vektorfüggvény Jakobi-féle mátrixa. Ennek H_{jk} eleme

$$H_{jk} = \frac{\partial F_j}{\partial x_k} , \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n . \tag{4}$$

* Dr. Singer Dénes, 1021 Budapest, Furulya u. 5.
** Koltai Tamás, 1055 Budapest, Néphadsereg u. 22.

A Cross-féle algoritmus lényegében véve a (3) egyszerűsítéseként fogható fel, amennyiben a **H** mátrix nemdiagonális elemeit figyelmen kívül hagyjuk. Vagyis ennél

$$H_{jk} = \begin{cases} \partial F_j / \partial x_k & \text{for } j = k \\ 0 & \text{for } j \neq k \end{cases} \tag{5}$$



1. ábra

Ezen elhanyagolás következménye az utóbbi módszer nagyobb érzékenysége az x_0 induló értékek helyes megválasztásával szemben.

A (3) algoritmus előnyeit minden esetre azon munkatöbblettel kell megvásárolni, amit éppen a nemdiagonális **H**-mátrix invertálása jelent. A Newton—Raphson-módszerből leszármaztatott módszerek éppen ezen hátrányt igyekeznek megkerülni [5].

A továbbiakban leírt speciálisan gáz- és folyadékhálózatok számítására kidolgozott algoritmus is hasonló célokat követ. Ezenkívül számot vet a hálózat topológiai struktúrája és a **H** mátrix szerkezete között fennálló összefüggéssel, ami lehetőséget nyújt a $\mathbf{H}^{-1}$ mátrix viszonylag egyszerű módon való előállítására.

2. A hálózati egyenletek

A hálózat passzív elemeit, vagyis a csöveket, szelepeket, stb. illetően azon feltételezésből indulunk ki, hogy ezek p nyomás esései és q térfogatáramai között

$$p = k\, q^m \tag{6}$$

típusú összefüggések állanak fenn, ahol k és m a kérdéses ágra jellemző állandók. Az általánosság kedvéért tételezzük továbbá fel, hogy minden ágban ideális nyomás, ill. áramforrások is működnek, melyek nyomásai legyenek P, ill. Q (1. ábra).

Az 1. ábrán alkalmazott előjelkonvenció alapján a hálózat egyes ágaira vonatkozólag

$$p + P = k\,[q + Q]^m \tag{7}$$

típusú egyenletek írhatók fel. A

$$p + P = V_i \quad q + Q = J \tag{8}$$

jelöléssel a (7) a

$$V = k\, J^m \tag{9}$$

alakot veszi fel, mely formálisan azonos a passzív ágelem (6) egyenletével.

A (9) alapján felírható a hálózat primitív admittancia mátrixa **Y**. Az ág admittancia definíciószerűleg

$$Y = J/V\,. \tag{10}$$

A (9)-et J-re explicit alakba írva

$$J = k^{=1/m}\ V^{1/rn} \tag{11}$$

az Y közvetlenül adódik

$$Y = k^{-1/m}\ V^{(1/m-1)} \tag{12}$$

Az Y admittancia ebben az esetben, mint látható a V függvénye. Az egyes ágakra vonatkozó (12) kifejezéseket egyetlen diagonális mátrixban egyesítve, a hálózat $\mathbf{Y}(V)$ primitív admittanciamátrixa adódik.

A hálózat topológiai viszonyait jellemezzük az **A** ág-csomópont mátrixszal. A csomóponti áramokra vonatkozó alaptétel így az

$$\mathbf{A}^t q\ = O \tag{13}$$

alakba írható; lásd ehhez pl. a [6]-ot.

A hálózat (9) ágegyenleteit az $\mathbf{Y}(v)$ primitív admittancia mátrix ssegítségével az

$$J = \mathbf{Y}\,(V) \cdot V \tag{14}$$

alakba írva, a (8) figyelembevételével a

$$q + Q - \mathbf{Y}\,(V)\,[p + P] = O \tag{15}$$

kifejezés adódik. A (15)-öt $\mathbf{A}^t$-vel végigszorozva, a (13) figyelembevételével a következő egyenletet nyerjük:

$$\mathbf{A}^t\,\{\mathbf{Y}\,(V)\,[p + P] - Q\} = O \tag{16}$$

A p ágnyomásesés és Q ágforrásáram helyett vezessük be változóként a p' csomóponti nyomásokat, ill. Q' csomóponti forrásáramokat. Mivel

$$p = \mathbf{A}\,p'\,, \tag{17}$$

$$Q' = \mathbf{A}^t\,Q\,, \tag{17'}$$

a (16) kifejezés a következőképpen írható:

$$F\,(p') = \mathbf{A}^t\,\mathbf{Y}\,(V)\,[\mathbf{A}\,p' + P] - Q = O \tag{18}$$

Itt az $Y(V)$ nemlineáris admittancia mátrix, mivel a V a

$$V = \mathbf{A}\,p' + P \tag{19}$$

kifejezésből folyik, szintén a p' függvénye.

3. A hálózati egyenletek megoldásának algoritmusa

A (18) kifejezés hálózati egyenletünk csomóponti alakja. Ennek megoldására alkalmazzuk a (4) alatti Newton—Raphson-algoritmust. Állítsuk elő ehhez elsősorban az $F(p')$ függvény **H** Jakoby-féle mátrixát. Ennek jk indexű elemét a (18) differenciálásával nyerhetjük [7]

$$\frac{\partial F_j}{\partial p'_k} = (A \cdot j)^t \left[\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial p'_k} V + \mathbf{Y}(V) \frac{\partial V}{\partial p'_k} \right], \tag{20}$$

ahol $A \cdot j$ az **A** ágcsomópont mátrix j-edik oszlopát jelenti. A $\partial V/\partial p'_k$ vektor j-edik eleme a (19) szerint:

$$\frac{\partial V_j}{\partial p'_k} = \frac{\partial [\mathbf{A}p']_j}{\partial p'_k} = \frac{\partial (\mathbf{A}_j \cdot p')}{\partial p'_k} = a_{jk} . \tag{21}$$

Itt $A_j \cdot$ az **A** mátrix j-edik sora és a_{jk} ezen sor k-adik eleme. Az egész $\partial V/\partial p'_k$ vektor tehát az **A** mátrix k-adik oszlopával $\mathbf{A}_{.k}$-val egyenlő:

$$\frac{\partial V}{\partial p'_k} = A \cdot k . \tag{22}$$

A (20) kifejezésben szereplő másik differenciálhányados a (21)-re való ekintettel a következőképpen írható:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}(v)}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^{b} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial V_j} \frac{\partial V_j}{\partial p'_k} = \sum_{j=1}^{b} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial V_j} a_{jk} , \tag{23}$$

ahol b az ágak száma. Az egyenletben előforduló $\partial \mathbf{Y}/\partial V_j$ differenciálhányados kifejezhető a hálózat ágainak (15) egyenleteivel. Az **Y** mátrix $\mathbf{Y}_{jk}$ eleme

$$Y_{jk}(V_k) = \frac{J_j}{V_k}; \quad V_l = 0 , \quad l \neq k . \tag{24}$$

A $\partial \mathbf{Y}/\partial V_j$ mátrix elemei így a j-edik oszlopot kivéve nullák. Ha $Y_{.k}$-val jelöljük, az **Y** primitív admittancia mátrix k-adik oszlopát a (23) helyett ezt írhatjuk:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}(V)}{\partial p'_k} = \left[a_{1k} \left(\frac{\partial Y_{.1}}{\partial V_1} \right), a_{2k} \left(\frac{\partial Y_{.2}}{\partial V_2} \right) \ldots a_{bk} \left(\frac{\partial Y_{.b}}{\partial V_b} \right) \right] \tag{25}$$

A (24)-et V_k szerint deriválhatjuk

$$\frac{\partial Y_{jk}}{\partial V_k} = \frac{\partial (J_j/V_k)}{\partial V_k} = \frac{\partial J_j/\partial V_k}{V_k} - \frac{J_j}{V_k^2} . \tag{26}$$

A $\partial I_j/\partial V_k$ differenciálhányados nyilvánvalóan felfogható, mint egy differenciális admittancia; vesd össze a (24)-gyel. Ha ezt $\overline{Y}_{jk}$-val jelöljük a (26)-ot a következőképpen írhatjuk

$$\frac{\partial Y_{jk}(V_k)}{\partial V_k} = \frac{\overline{Y}_{jk} - Y_{jk}}{V_k} . \tag{27}$$

A (20) kifejezés jobboldali zárójelében szereplő első tag a (25) és (27) alapján így írható:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}(V)}{\partial p'_k} V = \left[a_{1k}\left(\frac{\partial Y_{.1}}{\partial V_1}\right), a_{2k}\left(\frac{\partial Y_{.2}}{\partial V_2}\right) \ldots a_{bk}\left(\frac{\partial Y_{.b}}{\partial V_b}\right)\right] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ V_b \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{b} a_{jk}\,[Y_{.j} - Y_{.i}] = [\overline{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}]\,A_{.k} \tag{28}$$

A (22)-nek és (28)-nak a (20)-ba való helyettesítésével a **H** mátrix *jk* elemére a következő kifejezés adódik:

$$\frac{\partial F_j}{\partial p'_k} = (A_{.j})^t\,[(\overline{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y})\,A_{.k} + \mathbf{Y}\,A_{.k}] = (A_{.j})^t\,\overline{\mathbf{Y}} A_{.k} . \tag{29}$$

Az egész mátrix így a

$$\frac{\partial F}{\partial p'}\ \mathbf{A}^t\,\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{A} \tag{30}$$

alakba írható.

A Newton—Raphson-algoritmus a nemlineáris hálózat csomóponti egyenletére alkalmazva tehát a következő alakot nyeri; lásd a (3)-at

$$p'_{(i+1)} = p'_i - [\mathbf{A}^t\,\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{A}]_i^{-1}\,F_i \tag{31}$$

ahol F_i a (18) hálózati egyenlet baloldalát jelenti.

A (31) kifejezés ebben az alakjában nem volna gazdaságos, mivel minden egyes iterációs ciklusban az $\mathbf{A}^t\,\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{A}$ mátrix invertálását igényli.

Mint látható, az $\mathbf{A}^t\,\overline{\mathbf{Y}}\mathbf{A}$ mátrixszorzat formálisan azonos a lineáris hálózat nodális admittancia mátrixával

$$\mathbf{Y}_N = \mathbf{A}^t\,\mathbf{Y}\mathbf{A} \tag{32}$$

azzal a különbséggel, hogy ebben az **Y** primitív admittancia mátrix helyett az $\overline{\mathbf{Y}}$ differenciális admittancia mátrix szerepel. A (31)-et a következőképpen irhatjuk

$$\Delta p'_i = -\,[\overline{\mathbf{A}}^t\,\mathbf{Y}\mathbf{A}]^{-1}\,F_i\ , \tag{33}$$

ahol

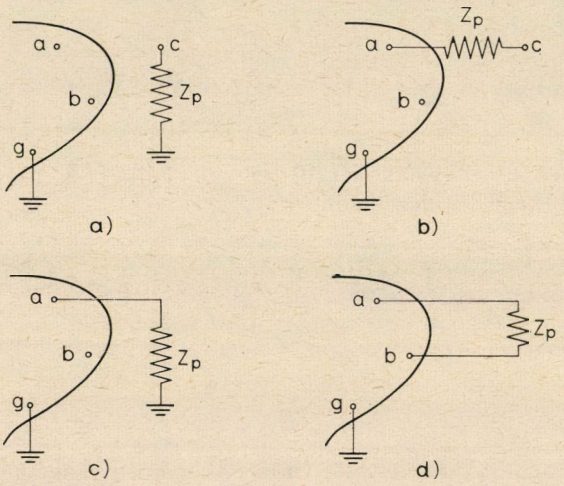
$$\Delta p'_i = p'_{(i+1)} - p'_i \tag{33'}$$

jelölést vezettünk be.

A (33) egyenletre úgy tekinthetünk, mint egy a nemlineáris hálózattal topológiailag azonos *lineáris* hálózat csomóponti egyenletére, melynél az F_i forrásfüggvény hatására egy Δp_i csomóponti feszültség keletkezik.

A lineáris hálózat csomóponti admittancia-mátrixának inverze előállítható az inverzió tényleges végrehajtása nélkül diakoptikai megfontolások alapján is [8].

A módszer lényege abban áll, hogy egy részhálózatból kiindulva, melynek csomóponti impedancia mátrixa $\mathbf{Z}_N = \mathbf{Y}_N^{-1}$ ismert, kiszámítjuk az *egy* ág hozzáadásával nyerhető *kibővített* részhálózat $\mathbf{Z}_N$ mátrixát. A kiinduló részhálózat lehet egyetlen ág is, melynek $\mathbf{Z}_N$-je egyszerűen az *ágadmittancia* reciprók értékével egyenlő. Itt első lépésben egy második ág hozzáadásával



2. ábra

nyerhető kétágú hálózat $\mathbf{Z}_N$ mátrixát számítjuk. Ezután újabb ág hozzáadásával a három ágból álló hálózat $\mathbf{Z}_N$-jét számítjuk és így tovább, míg az utolsó ághoz el nem jutunk. Az ágak hozzáadásának sorrendje tetszőleges lehet. A módszer előnye, hogy viszonylag könnyen programozható algoritmust ad.

Válasszunk kiindulópontként egy olyan részhálózatot (ágat), melynek egyik csomópontja a bázispont, azaz az a pont, melyre a hálózati nyomásokat vonatkoztatjuk. Egy ág hozzáadásánál négy eset lehetséges:

1. eset: Az új ág egyik végpontja a *g* bázispont, míg a másik egy olyan *c* csomópont, mely a kiinduló hálózatban nem szerepel (2a. ábra);

2. eset: Az új ág egyik végpontja a kiinduló hálózat egyik *a* csomópontjával azonos, míg a másik egy ebben nem szereplő *c* csomópont (2b. ábra);

3. eset: Az új ág egyik végpontja a *g* bázispont, míg a másik a kiinduló hálózat *a* csomópontja (2c. ábra);

4. eset: Az új ág mindkét csomópontja a kiinduló hálózat egy-egy csomópontjával azonos, (*a* és *b* csomópontok), melyek közül egyik sem azonos a bázisponttal (2d. ábra).

Meg lehet mutatni, hogy mind a négy esetben az új h álózat csomópont egyenlete a következő alakban írható:

$$\begin{bmatrix} p' \\ p'_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{11} \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} \mathbf{Z}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ q_p \end{bmatrix} . \qquad (34)$$

e_0 és e_p kiinduló hálózatot, ill. az új ág csomóponti nyomásainak vektora; Q_0 a kiinduló hálózat áramainak forrásvektora, q_p az új ág árama. A hipermátrix elemei közül $\mathbf{Z}_{11}$ a kiinduló hálózat csomópont impedancia mátrixa, egy $n \times n$ dimenziós mátrix; n a csomópontok száma. $\mathbf{Z}_{12}$ $n \times 1$ dimenziós mátrix (oszlopvektor), $\mathbf{Z}_{21}$ $1 \times n$ dimenziós mátrix (sorvektor), $\mathbf{Z}_{22}$ 1×1 dimenziós (skalár).

A $\mathbf{Z}_{12}$, $\mathbf{Z}_{21}$, $\mathbf{Z}_{22}$ részmátrixok kifejezhetők a $\mathbf{Z}_{11}$ és az új ág $\mathbf{Z}_p$ impedanciája, valamint a kiinduló hálózat és az új ág kapcsolatát kifejező A_k topológiai mátrix segítségével;

$$\mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{11} \mathbf{A}_k, \qquad (35)$$

$$\mathbf{Z}_{21} = \mathbf{A}_k^t \mathbf{Z}_{11} ,$$

$$\mathbf{Z}_{22} = \mathbf{A}_k^t \mathbf{Z}_{11} \mathbf{A}_k + \mathbf{Z}_p .$$

Az $\mathbf{A}_k$ hasonlóan az előzőekben szereplő $\mathbf{A}$ ágcsomópont mátrixhoz az eredeti hálózat csomópontjai és az *új ág* között fejez ki kapcsolatot az 1, —1 és 0 elemek segítségével.

Az új ág kapcsolódásánál lehetséges négy esetnek különböző $\mathbf{Z}_{12}$, $\mathbf{Z}_{21}$, $\mathbf{Z}_{22}$ kifejezések felelnek meg.

$$\begin{aligned} &1.\ \text{eset} \quad \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}^t = O;\ \mathbf{Z}_{22} = Z_p; \\ &2.\ \text{eset} \quad \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}^t = Z_a;\ \mathbf{Z}_{22} = Z_{aa} + Z_p; \\ &3.\ \text{eset} \quad \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}^t = Z_a;\ \mathbf{Z}_{22} = Z_{aa} + Z_p; \\ &4.\ \text{eset} \quad \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_{21}^t = Z_a - Z_b;\ \mathbf{Z}_{22} = Z_{aa} + Z_{bb} - 2\,Z_{ab} + Z_p . \end{aligned} \qquad (36)$$

Itt a következő jelölést vezettük be: Z_a, Z_b a $\mathbf{Z}_{11}$ mátrix a, ill. b csomópontjának megfelelő oszlopvektorok, Z_{aa} a $\mathbf{Z}_{22}$ mátrix a sorának és a oszlopának megfelelő elem; Z_{bb} a $\mathbf{Z}_{22}$ b sorának és oszlopának megfelelő elem; Z_{ab} a $\mathbf{Z}_{22}$ a sorának és b oszlopának megfelelő elem.

Esetünkben a lineáris hálózat $\mathbf{Y}_N$ csomópont admittancia mátrixa helyébe a nem-lineáris hálózat

$$\bar{\mathbf{Y}}_N = \mathbf{A}^t \bar{\mathbf{Y}} \mathbf{A} \qquad (37)$$

differenciális csomóponti admittancia mátrixa lép. Ennek megfelelően a (34), (35) és (36) egyenletekbe a megfelelő $\bar{\mathbf{Z}}_{jk}$

$$\bar{\mathbf{Z}}_{jk} = \bar{Y}_{jk}^{-1}; j, k = 1, 2 \qquad (38)$$

csomóponti impedancia mátrixok helyettesítendők.

A (33) helyébe így a

$$\Delta p_i' = \overline{\mathbf{Z}}_{Ni} - F \tag{39}$$

egyenletet írhatjuk, ahol a $\overline{\mathbf{Z}}_{Ni}$ előállítására szolgáló rekurziós algoritmus:

$$\overline{\mathbf{Z}}_{Ni}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Z}}_{11}^{(l+1)} & \overline{\mathbf{Z}}_{12}^{(l+1)} \\ \overline{\mathbf{Z}}_{21}^{(l-1)} & \overline{\mathbf{Z}}_{22}^{(l+1)} \end{bmatrix}; \quad l = 1, 2, \ldots (b - b_1)$$

$$\overline{\mathbf{Z}}_{11}^{(l+1)} \left[\overline{\mathbf{Z}}_{Ni}^{(l)}\right]^t;$$

$$\overline{\mathbf{Z}}_{12}^{(l+1)} = \left[\overline{\mathbf{Z}}_{21}^{(l+1)}\right]^t = 0; \quad \overline{\mathbf{Z}}_{22}^{(l+1)} = \overline{\mathbf{Z}}_{p}^{(l+1)} \qquad \text{if. 1.)}$$

$$\overline{\mathbf{Z}}_{12}^{(l+1)} = \left[\overline{\mathbf{Z}}_{21}^{(l+1)}\right]^t = \overline{\mathbf{Z}}_{a}^{(l+1)}; \quad \overline{\mathbf{Z}}_{22}^{(l+1)} = \overline{\mathbf{Z}}_{aa}^{(l+1)} + \overline{\mathbf{Z}}_{p}^{(l+1)} \qquad \text{if. 2.)}$$

$$\overline{\mathbf{Z}}_{12}^{(l+1)} = \left[\overline{\mathbf{Z}}_{21}^{(l+1)}\right]^t = \overline{\mathbf{Z}}_{a}^{(l+1)}; \quad \overline{\mathbf{Z}}_{22}^{(l+1)} = \overline{\mathbf{Z}}_{aa}^{(l+1)} + \overline{\mathbf{Z}}_{p}^{(l+1)} \qquad \text{if. 3.)}$$

$$\overline{\mathbf{Z}}_{12}^{(l+1)} = \left[\overline{\mathbf{Z}}_{21}^{(l+1)}\right]^t = \overline{\mathbf{Z}}_{a}^{(l+1)} - \overline{\mathbf{Z}}_{b}^{(l+1)} \qquad \text{if. 4.)}$$

$$\overline{\mathbf{Z}}_{22}^{(l+1)} = \overline{\mathbf{Z}}_{aa}^{(l+1)} + \overline{\mathbf{Z}}_{bb}^{(l+1)} - 2\overline{\mathbf{Z}}_{ab}^{(l+1)} + \overline{\mathbf{Z}}_{p}^{(l+1)}$$

$$\overline{\mathbf{Z}}_{Ni} = \overline{\mathbf{Z}}_{Ni}^{(b-b_1)}$$

ahol l a $\overline{\mathbf{Z}}_{Ni}$ előállításánál a lépés sorszáma, b a *teljes* hálózat ágainak száma, b_1 azon hálózat ágainak száma, melynek $\overline{\mathbf{Z}}_{Ni}$ mátrixa már eleve rendelkezésre állt (amennyiben nem egyetlen ágból indulunk el), i az iteráció sorszáma a nemlineáris egyenlet megoldásánál. Mint látható, az algoritmus két egymásba beskatulyázott ciklussal dolgozik: az l-ciklusban számítja a $\overline{\mathbf{Z}}_{Ni}$-t, az i-ciklusban újabb e_i' közelítéseket szolgáltat.

Az eljárásnál bizonyos hátrányt jelent, hogy minden iterációs lépésnél úgy az $\mathbf{Y}$ primitív admittancia mátrix, mint a $\overline{\mathbf{Z}} = \overline{\mathbf{Y}}^{-1}$ differenciális impedancia mátrix elemeit újra kell számítani (kivéve a lineáris elemeknél). Esetünkben azonban ez nem jelent komoly nehézséget, mivel az ágegyenletek (7) alakja miatt az $\overline{\mathbf{Y}}$ elemei az $\mathbf{Y}$-ből könnyen nyerhetők.

A *differenciális* ágadmittancia a (11) deriválásával nyerhető

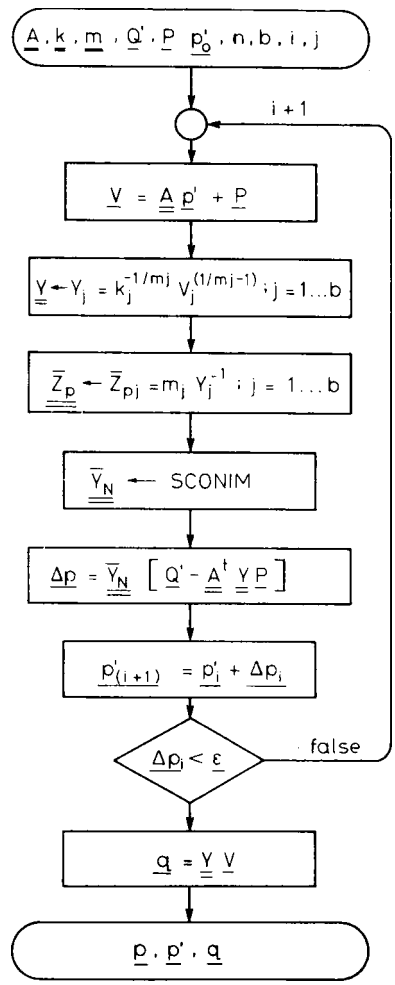
$$\overline{Y} = \frac{\partial J}{\partial V} = \frac{1}{m} k^{-1/m} V^{(1/m-1)} = \frac{1}{m} Y, \tag{41}$$

vagyis az $\overline{\mathbf{Y}}$ az $\mathbf{Y}$-tól (1/m) konstanssal való egyszerű szorzással adódik.

4. Néhány szó a kidolgozott programról*

Az ismertetett algoritmus képezi alapját a NEST 12 (CDC 3300 FORTRAN) programnak. A programséma a 3. ábrán látható. Bemenő adatok a hálózatelemek k és m állandói, a Q' csomóponti áramok vektora, valamint az ág-

* A program végső alakjában Stiglmajer Mária munkája.



3. ábra

forrásnyomások P vektora. Meg kell továbbá adni a csomóponti nyomások becsült értékeit, ill. ezek p'_0 vektorát.

A Jakoby-féle mátrix előállítására szolgáló (40) algoritmus külön eljárásként van a programba beépítve (SCONIM-eljárás). A program kimenő adatai a p' csomóponti nyomások és a q ágáramok. Ez utóbbiak a (11) kifejezés alapján kerülnek kiszámításra.

5. Záró megjegyzések

Az eljárás konvergenciájára vonatkozólag azonos kritériumok érvényesek, mint az eredeti Newton—Raphson-eljárásnál. Az eljárás konvergál, amennyiben

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j(p')}{\partial p'_k}\bigg|_{p' = p'_0} < 1;\ k = 1, 2 \ldots n \qquad (42)$$

ahol $F_j(p')$ a (18) vektorfüggvény j-edik komponensét jelenti 9 ; p_0 a p' vektor becsült induló értékeit jelenti. A konvergencia biztosítva van, amennyiben a becsült p'_0 értékekre a (42) egyenlőtlenség kielégítést nyer.

Az eredeti Newton — Raphson-módszer alkalmazásánál a hálózati egyenlet csomóponti alakjának megoldásához szükséges lépések száma közelítőleg n^3-nel viszont itt b^2-tel arányos; n és b a csomópontok, ill. az ágak száma. Mivel:

$$c = b - n + l$$

ahol c a független hurkok száma, az új algoritmust elsősorban akkor célszerű alkalmazni, midőn:

$$b^2 < n^3$$

vagyis, midőn a hálózat hurkainak száma a csomópontok számához viszonyítva kicsiny. Ebben a vonatkozásban tehát a módszer hasonló előnyöket biztosít, mint a hálózati egyenletek hurokalakja. A hurokmódszerrel szemben viszont azzal az előnnyel rendelkezik, hogy a konvergencia és a számítási idő szempontjából lényeges p'_0 induló értékek általában könnyebben megbecsülhetők, mint az előbbinél szükséges q_0 ágáram értékek.

A módszer a hálózat számításánál továbbá a következő előnyökkel bír:

a) Mivel a $\overline{Z}_{Ni}$ differenciális csomóponti admittancia mátrixot, gáz- és folyadékhálózatoknál áganként építi fel, automatikusan figyelembe véve az **A** ágcsomópont mátrix üresség ét.

b) Amennyiben a hálózat nem minden ága áll nemlineáris elemekből, nem szükséges minden i ciklusban a $\overline{Z}_{Ni}$ számítását teljesen újra kezdeni. Ebből a célból a $\overline{Z}_{Ni}$ előállítását egy lineáris elemmel kezdjük és ehhez mindaddig lineáris elemeket adunk hozzá, amíg ezek készlete el nem fogyott. Ezután adjuk hozzá a nemlineáris elemeket. Ha b_1 a lineáris elemek száma a $\overline{Z}_{Ni}$ differenciális csomóponti admittancia mátrix $\overline{Z}_{Ni}$ részmátrixa állandó és így az $(i + l)$-edik iterációs ciklusban újra felhasználható: az l-ciklus itt pusztán $(b - b_1)$ lépésből fog állni; lásd a (40) kifejezést.

c) A módszer abban az esetben is előnyös, ha a már kiszámított nemlineáris hálózatot utólag új ágakkal egészítjük ki, pl. a hálózat fejlesztésnél. Ugyanez a helyzet a hálózat egyes ágai impedanciájának megváltoztatásának pl. a hálózat valamelyik szabályozó szelepének állításánál.

IRODALOM

1. Cross, H.; Analysis of Flow in Networks of Conduits or Conductors 1936. University of Illinois, *Bull.* p. 286.
2. Singer, D.—Bognár, G.—Czoch, Á.—Németh, I.; Számológép alkalmazása gázhálózatok irányításában. COMPCONTROL 70 Conference, Preprints, Miskolc 1970, július.
3. Hamam, Y. M.—Brameller, A.; Hybrid Method for the Solution of Piping Networks, *Proc. IEEE* **118** (1971), 1607—1611.
4. Singer, D.—Koltai, T.—Bognár, G.; Újabb módszerek gáz és folyadékhálózatok számítására. *Magyar Kémikusok Lapja*, **6** (1972), 299—305.

5. BROYDEN, G. G.; A Class of Methods for Solving Nonlinear Simultaneous Equastions. *Math. of Comp.* **19** (1965), 577—593.
6. KUO, F. F.; Network Analysis and Synthesis. J. Wiley and Sons, New York 1966.
7. BRANIN, F. H.—WANG, H. H.; A Fast Reliable Method for dc Analysis of Non-linear Networks. *Proc. IEEE* **55** (1967), 1819—1826.
8. BROWN, H. E.—PEARSON, C. E.—KIRCHMAYER, L. K.—STAGG, G. W.; Digital Calculation of 3-phase Short Circuits by Matrix Methods. *Trans. AIEE*, P3 (1966), 1277—1282.
9. SCARBOROUGH, I. B.; Numerical Mathematical Analysis, *J. Hopkins, Baltimore* (1962), 219—221.

A New Algorithm for the Calculation of Gas and Fluid Networks. The algorithm starts from the nodal form of the network equations and solve them by the Newton-Raphson method. Instead of inverting the Jacobian, the inverse matrix is set up directly by adding the branches of the network step by step. The paper presents the short description of the programme worked out on the basis of the algorithm above and gives the evaluation of this.

Ein neuer Algorithmus zur Berechnung von Gas- und Flüssigkeitsnetzen. Der Algorithmus benutzt die Knotenpunktform der Netzgleichungen und löst sie mit Hilfe des Newton-Raphson Verfahrens. Anstatt der Inversion der Jacoby-Matrix wird dieser direkt durch schrittweisen Aufbau erzeugt. Im weiteren wird das entsprechende Programmschema kurz erleutert und die Methode bewertet.

LABILITÁSI FESZÜLTSÉG MEGÁLLAPÍTÁSA EGYEN- ÉS VÁLTAKOZÓ FESZÜLTSÉGEN

PATKÓ JÁNOS

és

IFJ. VAJTA MIKLÓS*

[Beérkezett 1972. május 25-én]

A cikk a hővillamos átütés és hőinstabilitás fogalmának ismertetése után rövid irodalmi összefoglalást ad a hővillamos átütési elméletek kialakulásáról. Egyenfeszültségre az általános labilitási egyenletek felírása után adott fajlagos ellenállás hőfokfüggésre származtatják a labilitási feszültség kifejezését, majd ehhez hasonlóan váltakozófeszültségű esetre is levezetik a labilitási feszültség kifejezését. Mindkét esetben az egyes hőfokeloszlásokat is számítják, a kapott eredményeket számítógéppel tabellázták és megvizsgálták a labilitási feszültség nagyságát befolyásoló néhány paraméter hatását.

Jelölések

ϑ — hőmérséklet [C°]
ϑ^0 — referencia hőmérséklet [C°]
ϑk — környezeti hőmérséklet [C°]
ϑ_1 — dielektrikum hőmérséklete az $x = h$ helyen [C°]
ϑ_2 — elektróda külső hőmérséklete [C°]
Θ — hőmérséklet relatív egységben
$2 \cdot U_0$ — dielektrikumra kapcsolt feszültség [V]
U_{lab} — labilitási feszültség [V]
U_{labm} — labilitási feszültség maximális értéke [V]
v — labilitási feszültség relatív egységben
$p'(\vartheta)$ — térfogati veszteségi szám ϑ hőmérsékleten [W/mV²]
b — $p'(\vartheta)$ hőfokfüggésének hőfokkoefficiense [1/C°]
E — villamos térerősség [V/m]
α — hőátadási tényező [W/m²C°]
λ_1 — dielektrikum hővezetési tényezője [W/mC°]
λ_2 — elektróda hővezetési tényezője [W/mC°]
F — hőátadási felület [m²]
q_b — fajlagos belső hőforrás [W/m³]
Q — dielektrikumban keletkező veszteség [W]
Q_{dc} — környezetnek átadható hőmennyiség [W]
c_{γ} — dielektrikum fajhője [Ws/kpC°]
γ_f — dielektrikum fajsúlya [kp/m³]
t — idő [s]
$2 \cdot h$ — dielektrikum vastagsága [m]
m — elektróda vastagsága [m]
J — áramsűrűség a dielektrikumban [A/m²]
g — geometriai tényező
c — geometriai aadtok és hőátadási viszony paramétere
$\gamma(\vartheta)$ — fajlagos vezetőképesség [1/Ωm]
$\varrho(\vartheta)$ — fajlagos ellenállás [Ωm]
T — $\gamma(\vartheta)$ hőfokfüggésének hőfokkoefficiense [K°]
φ — potenciál [V]
ξ (kszi), β (béta) — segédparaméterek

* Ifj. dr. Vajta Miklós, 1041 Budapest, Dessewffy u. 41.

1. Bevezetés

A hővillamos átütés problémája a növekvő névleges feszültségek, valamint a növekvő üzemi hőmérsékletek miatt egyre inkább előtérbe kerül. A névleges feszültségek és a szigetelőanyagok üzemi hőmérsékletének növelésének szükségességét a gazdaságosság indokolja.

A szigetelőanyagok alkalmazhatóságát, a sok villamos és nem villamos paraméter közül leginkább az átütő térerősség vagy adott elrendezés esetében az átütő feszültség határozza meg. Az átütő feszültség, eltérően a többi villamos jellemzőtől, nem egy integrált érték, hanem minden esetben a szigetelés vagy a szigetelőanyag leggyengébb pontjának átütő feszültsége.

Az átütési folyamatok általában csak kvalitatív írhatók le. A makroszkópikus és a mikroszkópikus jellemzők közötti összefüggés sok esetben jó közelítéssel leírható, főleg kristályos szerkezetű és homogén anyagokra. A gyakorlatban leginkább előforduló amorf, nem homogén struktúrájú anyagok esetében azonban csak mérések alapján felállított empirikus összefüggések állnak rendelkezésre [1—8]. Szilárd anyagok átütésének három fajtáját szokás megkülönböztetni.

a) a tisztán villamos átütést

b) a belső vagy felületi ionizáció okozta átütést

c) a hővillamos átütést.

Az egyes átütési fajták nem különülnek el élesen egymástól, vagy pedig a teljes átütés folyamán két vagy esetleg mindhárom fajtája előfordulhat. Az első két átütési fajtát csak röviden tekintjük át, részletesebben lásd az irodalomban.

a) Tisztán villamos átütésről akkor beszélünk, ha a szigetelőanyagra történő feszültség rákapcsolása és az átütés bekövetkezése között eltelt idő alatt a szigetelőanyag hőmérséklete nem növekedett meg jelentős mértékben, továbbá részleges letörés, ionizáció nem lépett fel. Ezért ezt az átütés fajtát alacsony hőmérsékleti átütésnek (low-temperature range) is szokás nevezni. A villamos átütésre jellemző, hogy az átütő feszültség jelentős mértékben függ a tér homogenitásától de csak kismértékben a dielektrikumra kapcsolt feszültség időtartamától, és ugyancsak kismértékű az átütőfeszültség hőmérsékletfüggése. Már itt megjegyezzük, hogy az eddigiekkel ellentétes tulajdonságokat mutat a hővillamos átütésre jellemző átütő feszültség. A villamos átütés lokális jelenség. Jelenleg az átütési jelenségek leírására FRÖHLICH és HIPPEL elmélete a leginkább elfogadott [9], [10], [11].

b) Az ionizálással kapcsolatos átütés alapja, hogy szilárd szigetelőanyagoknál az átütési feszültségnél kisebb ún. villogási kezdőfeszültségen kisülések indulnak meg, amelyek az anyag szerkezetében elváltozásokat okozhatnak, csökkentve ezáltal az átütő feszültséget. Ez a folyamat hosszú ideig tarthat, ezért bizonyos fokig hasonlíthat a hővillamos átütésre. Megjegyezzük,

hogy a kisülések jelentős mértékben öregíthetik is a szigetelőanyagot. A kisülések részben a szigetelőanyag határfelületén (felületi kisülések) részben az anyag belsejében (belső kisülések) jöhetnek létre [12—15].

c) A hővillamos átütések bekövetkezésekor jelentős szerepet játszanak a szigetelőanyagban mindig keletkező veszteségek, amelyek következtében az anyag felmelegszik. Így a hőmérsékletnek döntő befolyása van az átütésre. Ezért szokásos a hővillamos átütést magas hőmérsékletű (high-temperature range vagy high-temperature brekdown) átütésnek is nevezni. Hővillamos átütésnél definiálható egy átütési feszültség, az ún. labilitási feszültség, amelynek a legjellemzőbb tulajdonságai a következők [16]: 1. az átütő feszültség a tér homogenitásától csak kismértékben függ; 2. az átütő feszültség jelentős mértékben függ a feszültség rákapcsolásának időtartamától; 3. igen nagymértékben függ a környezeti hőmérséklettől ill. a melegedéstől és a hőátadási viszonyoktól.

Bár a felsorolt tulajdonságok alapján a hővillamos átütés a villamos átütéstől megkülönböztethető, fontosnak tartjuk, hogy rámutassunk az átütő feszültség vastagságfüggésében mutatkozó igen lényeges eltérésre. Villamos átütés esetében az anyagokra az átütő térerősséget adják meg anyagjellemző értékként, és ebből adott elrendezés esetében mindig azonos módon számítható az átütő feszültség. Homogén tér esetében az átütő feszültség és a dielektrikum vastagsága között lineáris kapcsolat van. Ez a kapcsolat alapvetően módosul hővillamos átütés esetében, ui. növekvő vastagságok esetében az átütő feszültség a lineárisnál kisebb mértékben nő és egy határértékhez tart. Igen fontosnak tartjuk ezen eltérés hangsúlyozását, mivel a hővillamos átütési elméletek egyik alapvető célja éppen a feszültség vastagságfüggésének tisztázása volt

2. Hőinstabilitás, labilitási feszültség fogalma

Az eddigiekből kitűnik, hogy a nagy hőmérsékletnek (a villamos anyagjellemzők nemlineáris hőfokfüggése következtében) döntő szerepe van a hővillamos átütésben. Mivel a keletkező veszteség hőfokkoefficiense pozitív, ez a hőmérséklet függvényében monoton növekvő értéket eredményez. A dielektrikumban keletkező veszteség (váltakozófeszültségen) mennyiségi számítására bevezetett ún. térfogati veszteségi szám hőfokfüggése a következőképpen fejezhető ki [17], [18]:

$$p'(\vartheta) = p'(\vartheta_0) \cdot e^{b(\vartheta-\vartheta_0)} = p'_0 \cdot e^{b(\vartheta-\vartheta_0)} \tag{1}$$

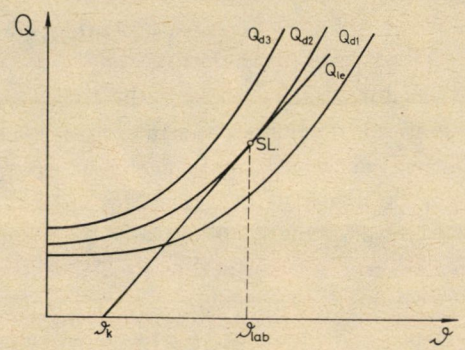
Ennek segítségével a dielektrikumban keletkező összes veszteség:

$$Q_d = \int_v p'(\vartheta)\, E^2 dV = \int_v p'_0 E^2 e^{b(\vartheta-\vartheta_0)}\, dV \tag{2}$$

Ez a hőmennyiség láthatóan exponenciálisan emelkedik a hőmérséklet növelésével, míg a környezetnek átadható hőmennyiség:

$$Q_{le} = \alpha \cdot F \cdot (\vartheta - \vartheta_k) \tag{3}$$

csak lineárisan változik. Rögtön következik ebből, hogy léteznie kell egy határállapotnak, amelyen túl több hőmennyiség keletkezik, mint amennyi eltávozhat, és így hőinstabilitás lép fel. Ennek feltételét elvileg könnyű megállapítani. Az 1. ábrán a keletkező és a leadható hőmennyiségeket tüntettük fel a hőmér-



1. ábra. A dielektrikumban keletkező ($Q_{d3} > Q_{d2} > Q_{d1}$) és a környezetnek átadható (Q_{le}) hőmennyiségek a hőmérséklet függvényében.

séklet függvényében. Ebből a hőinstabilitás feltételét az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$Q_d = Q_{le} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial Q_d}{\partial \vartheta} = \frac{\partial Q_{le}}{\partial \vartheta}. \tag{4}$$

Bár ezek a feltételek triviálisnak tűnnek, számításuk rendkívül bonyolult, különösen ha figyelembe vesszük a (2) egyenletben a hőmérséklet vastagságtól való függését is. A villamos potenciál és térerősség között egyértelmű kapcsolat van [19], amely matematikailag sokszor bonyolult lehet. E kapcsolat segítségével minden feszültségértékhez számíthatunk egy $Q_d(\vartheta)$ görbét. Definíciószerűen azt a feszültséget nevezzük labilitási feszültségnek, amely éppen a labilitásnak megfelelő Q_d hőmennyiséget hozza létre. Hővillamos átütéskor átütő feszültségként mindig a labilitási feszültséget értjük, annak ellenére, hogy a labilitási feszültségnél elvileg végtelen idő után következnek be a hőátütés, de ennél nagyobb feszültségeken mindenképpen véges idő eltelte után.

3. Differenciálegyenlet, modell

A labilitás feltételéből kitűnik, hogy ennek számításához ismernünk kell a dielektrikumban kialakuló hőfokeloszlást adott peremfeltételek esetében. Belső hőforrással rendelkező anyagok általános hőállapotát az ún. Kirchhoff–Fourier-differenciálegyenlet írja le [21]:

$$\operatorname{div}(\lambda_1 \operatorname{grad} \vartheta) + q_b(\vartheta) = \gamma_f \cdot c_f \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}. \tag{5}$$

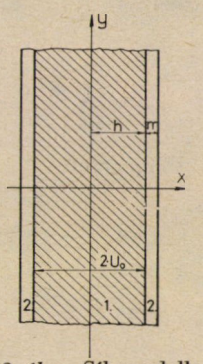
Az egyenletnek általános megoldása nem létezik. Esetünkben stacioner esetet vizsgálunk, és célszerűnek tűnik olyan modell alkalmazása, amelyben csak egydimenziós hőáramlás lép fel. (A háromdimenziós megoldással kapcsolatban BELLMANN tett értékes megállapításokat [20]). Sík modellünket a 2. ábrán láthatjuk. Az elrendezés pl. egy olyan tekercsszigetelésnek felel meg, amelynél a tekercs hossza nagyságrendekkel nagyobb, mint a vastagsága. Differenciálegyenletünk alakja így lényegesen egyszerűsödik:

$$\operatorname{div}(\lambda_1 \operatorname{grad} \vartheta) + q_b(\vartheta) = 0, \tag{6}$$

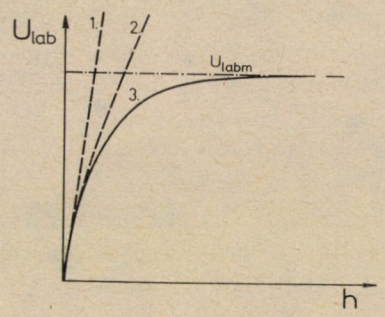
ill. amennyiben a hővezetési együttható nem függ a hőmérséklettől:

$$\frac{\mathrm{d}^2\vartheta}{\mathrm{d}x^2} + \frac{q_b(\vartheta)}{\lambda_1} = 0. \tag{7}$$

Az egyenletben szereplő fajlagos belső hőforrás kifejezése eltér aszerint, hogy a dielektrikumra egyen- vagy váltakozófeszültséget kapcsolunk. Az eltérés a dielektrikumban keletkező veszteségekkel függ össze, mivel ezt egyenfeszült-



2. ábra. Sík modell:
1. — dielektrikum,
2. — elektród



3. ábra. Labilitási feszültség a vastagság függvényében. 1. Wagner elmélete szerint. 2. Közbenső elméletek szerint. 3. Pontos elmélet szerint

ségen főleg a fajlagos vezetőképesség, míg váltakozófeszültségen a térfogati veszteségi szám határozza meg. Belső hőforrásunk alakja tehát

egyenfeszültségen: $$q_b(\vartheta) = \gamma(\vartheta)\,(\mathrm{grad}\,\varphi)^2, \tag{8}$$

váltakozófeszültségen: $$q_b(\vartheta) = p'(\vartheta) \cdot E^2. \tag{9}$$

A (7) differenciálegyenlet megoldásához szükséges peremfeltételeket a következők alapján írhatjuk fel. Az $x = 0$ tengely szimmetria-tengely, így itt alakul ki a maximális hőmérséklet, és ebben a síkban a hőfluxus zérus. Az elektróda és dielektikum határfelületén ($x = h$) a hőmérséklet megegyezik, viszont a hőfluxus folytonosságából következően a hőfeloszlásban töréspont van. A külső elektróda felületén feltételezzük, hogy hőátadás történik az állandó hőmérsékletű környezetbe (a sugárzástól eltekintünk). Ezek alapján [22]:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = 0\,, \tag{10}$$

$$\lambda_1 \cdot F \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x}\right)_{x=h-0} = \lambda_2 \cdot F \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x}\right)_{x=h+0}, \tag{11}$$

$$\vartheta(x = h-0) = \vartheta(x = h + 0) = \vartheta_1, \tag{12}$$

$$-\lambda_2 \cdot F \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x}\right)_{x=h+m} = \alpha \cdot F \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_k)\,. \tag{13}$$

Az egyes hővillamos átütési elméletek fejlődése egyértelműen összefügg a (7) differenciálegyenlet egyre pontosabb megoldásával. A következőkben az időrendi fejlődés két első elméletét ismertetjük, majd az alkalmazott modellhez rendelhető pontos elméleteket. A kutatások elsőrendű célja a labilitási feszültség kifejezése a dielektrikum paramétereinek függvényeként. A kísérletek szerint a labilitási feszültség a vastagságtól a 3. ábrán látható módon függ. Az egyre pontosabbá való elméletek azt a fejlődést tükrözik, ahogy a lineáris közelítéstől a pontos függvényig eljutottunk.

4. K. W. Wagner „átütési csatorna" elmélete

A hővillamos átütés jelenségére a századforduló idején figyeltek fel, s az átütéssel kapcsolatos első észrevételek és megfigyelések is ez időből származnak. Legelsők között M. Walker [23], K .W. Wagner [24], és E. H. Rayner [8] vizsgálták behatóbban a jelenséget, de elméleteik nem egyeztek jól a kísérleti eredményekkel. Különösen K. W. Wagner állított fel érdekes elméletet az átütési jelenséggel kapcsolatban. Abból a tapasztalati tényből

indult ki, hogy a hővillamos átütés (és az egyéb átütési fajták is) tulajdonképpen nem az egész anyagban, hanem csak egy kis csatorna mentén történik. Amikor a dielektrikumra egyenfeszültséget kapcsolunk, akkor a keletkező veszteség következtében az anyag melegedni kezd, de az anyag inhomogenitása miatt biztosan lesz olyan hely, amely a többinél jobban melegszik, tehát itt gyengül le legjobban a dielektrikum, és egy idő után az átütési csatorna kialakulásával bekövetkezik az átütés. WAGNER erre a jól ismert tapasztalati tényre alapozta elméletét, néhány egyszerűsítő feltétellel, amelyek a következők:

a) az átütési csatorna az elektródokra merőleges r sugarú henger,

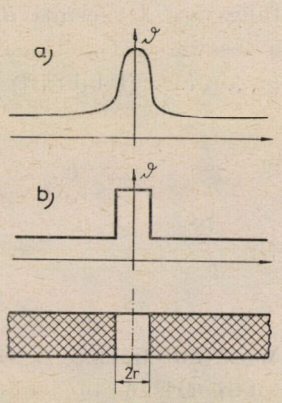
b) a csatornán kívül a dielektrikum többi részének ellenállása független a dielektrikumra kapcsolt feszültségtől és a hőmérséklettől (lásd a 4. ábrát);

c) kizárólag a csatorna ellenállása változik, mégpedig az alábbi hőmérsékletfüggvények szerint:

$$R(\vartheta) = R_0 \cdot e^{-b(\vartheta - \vartheta_0)},$$

$$R(\vartheta) = R_0 \cdot \left(1 - \frac{\vartheta}{T}\right)^n, \qquad (14)$$

$$R(\vartheta) = R_0 \cdot \left(\frac{T}{T + \vartheta}\right)^n.$$



4. ábra. Hőfokeloszlás az „átütési csatorna" keresztmetszetében. a) — valóságos hőfokeloszlás; b) — idealizált hőfokeloszlás Wagner elmélete szerint

Az 5. ábrán a három ellenállás-hőfokfüggést láthatjuk,

d) a csatornában keletkező hőmennyiség csak radiális irányban tud a környező dielektrikumba távozni;

e) a környező dielektrikumba távozó hőmennyiség hőátadással távozik (ez igen támadható feltevés, ui. szilárd anyagok határfelületén többnyire hővezetéssel adódik át a hő).

A következőkben csak (14) alakú ellenállás hőfokfüggésre mutatjuk be a levezetés menetét, a másik két törvény esetében minőségileg hasonló eredményt kapunk [24].

A keletkező és eltávozó hőmennyiségek egyenlősége:

$$U \cdot I = \alpha \cdot F \cdot (\vartheta - \vartheta_0).$$

Az Ohm-törvényt felírva:

$$\frac{I}{U} = \frac{1}{R(\vartheta)} = \frac{1}{R_0} \cdot e^{b(\vartheta - \vartheta_0)}.$$

A két egyenletet rendezve megkapjuk a 6. ábrán látható feszültség-áram karakterisztika egyenletét:

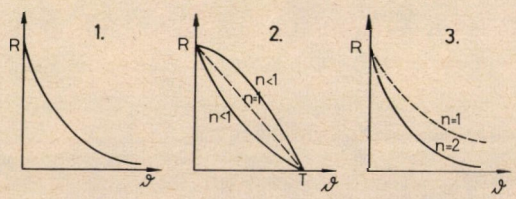
$$f(I, U) = \frac{I}{U} - \frac{1}{R_0} \cdot e^{\frac{b \cdot U \cdot I}{\alpha \cdot F}} = 0 . \tag{15}$$

A feszültség-áram karakterisztikának ott van szélsőértéke, ahol az $f(I,U)$ függvény I szerinti parciális deriváltja zérus. Ebben a pontban maximális a feszültség (labilitási feszültség). A differenciálást elvégezve, kifejezhető a maximális (labilitási) feszültség illetve térerősség:

$$U_m = \sqrt{\frac{R_0 \cdot F \cdot \alpha}{e \cdot b}} = h \sqrt{\frac{2 \cdot \varrho_0 \cdot \alpha}{r \cdot e \cdot b}} = \text{const.} \cdot h , \tag{16}$$

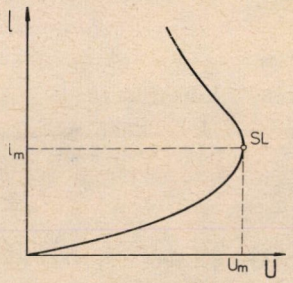
$$E_m = \sqrt{\frac{2 \cdot \varrho_0 \cdot \alpha}{r \cdot e \cdot b}} . \tag{17}$$

WAGNER elmélete szerint tehát a maximális (labilitási) feszültség a vastagságtól lineárisan függ, ebből következően homogén villamos tér esetében a labilitási térerősség független a vastagságtól. Ez az eredmény igen meglepő és gyanútkeltő, hiszen a térerősségnek vagy a feszültségtől vagy a geometriai viszonyoktól valamilyen módon függenie kell. A másik szembetűnő tény, hogy (16) és (17) kifejezések tartalmazzák az átütési csatorna sugarát. Ennek nagyságára vonatkozóan semmi biztosat sem tudunk mondani az átütés statisztikus jellegéből következően. Ez a tény minőségileg annyiban befolyásolja a kapott eredményeket, hogy gyakorlatilag kiértékelhetetlenné teszi a maximális (labilitási) feszültség értékét. Az átütési csatorna vastagsága több tényezőtől függ, teljesen bizonytalan valószínűségi változó és ugyanabban az anyagban is különböző vastagságú átütési csatorna alakulhat ki. Ha kísérleti eredményeket helyettesítünk a (16) és (17) kifejezésekbe, a csatorna sugarára irreális



5. ábra. Különböző ellenállás hőfokfüggvények

1. $R(\vartheta) = R_0 \exp [b(\vartheta - \vartheta_0]$
2. $R(\vartheta) = R_0 \cdot \left(1 - \frac{\vartheta}{T}\right)^n$,
3. $R(\vartheta) = R_0 \cdot \left(\frac{T}{T + \vartheta}\right)^n$.



6. ábra. Dielektrikumban kialakuló áram-feszültség jelleggörbe; SL stabilis-labilis határhelyzet

értéket kapunk, amelyek ellentétben vannak a kísérleti tényekkel. KÁRMÁN számításai szerint [25] üvegre az átütési sugárnak és a dielektrikum vastagságának aránya:

$$\frac{h}{r} > \frac{U_{lab}^2}{14 \cdot \lambda_1 \cdot \varrho_0} \approx 10^{-4}.$$

Ez láthatóan teljesen elképzelhetetlen eredmény.

Összefoglalva az eddigieket, leszögezhetjük, hogy WAGNER elmélete nem mutat kellő egyezést a tapasztalati tényekkel, sok önkényes feltételezést és közelítést tartalmaz. Az anyag inhomogenitásából indul ki, de nem veszi figyelembe az elektródák hatását stb. Eredményét több bizonytalan értékű paraméter teszi kétessé. Elméletének mégis nagy jelentősége volt, hiszen a hővillamos átütési elméletnek alapjait teremtette meg, és az elsők között mutatott rá a tisztán villamos és hővillamos átütés közötti különbségekre, ill. a labilitási feszültség elvileg korlátos voltára. Ez utóbbi tény következtében egy adott szigetelésre megengedhető feszültség nem növelhető egyenes arányban a szigetelőanyag vastagságának növelésével.

5. K. W. Wagner elméletének továbbfejlesztése

WAGNER elméletét többen is bírálták és megpróbáltak a tapasztalati tényekkel nagyobb összhangban levő elméleteket kidolgozni . Alapvetően más úton próbálták a mennyiségek közötti kapcsolatokat feltárni, ui. elméleteik közös vonása, hogy egységesen homogén anyag feltételezéséből és a (6), ill. (7) differenciálegyenletekből indultak ki. Csak a legismertebb kutatók neveit említjük, mint pl.: ROGOWSKY, DREYFUS, KÁRMÁN, GEMANT, WHITEHEAD [26—31]. Még nem dolgoztak ki egységes elméletet a labilitási feszültség számítására, de sikerült elméletileg meghatározniuk két szélső esetre:

a) a vastagság növekedésével a labilitási feszültség egy maximális értékhez tart, azaz

$$\lim_{h \to \infty} U_{lab}^{=}(h) = U_{labm}^{=};$$

b) kis vastagságok esetén a labilitási feszültség és vastagság között négyzetgyökös összefüggés van. Ez jól egyezik a tapasztalattal az ún. Fischer—Hinnen-kifejezéssel és a későbbiekben levezetendő általános összefüggés kezdeti szakaszát adja (lásd a 3. ábrát).

A (7) differenciálegyenletet nem sikerült egzaktul megoldaniuk, az elektródok hatását nem tudták figyelembe venni, csak az említett két határesetre származtatták az eredményt. Feltételezték, hogy a dielektrikum fajlagos ellenállásának hőfokfüggése az alábbi alakú:

$$\varrho(\vartheta) = \varrho_0 \exp(-\vartheta/T). \tag{18}$$

A két szélső esetre levezethető eredmény pedig:

$$\begin{aligned} &a) \quad U_{\overline{lab}\,\mathrm{m}} = \sqrt{2\lambda_1 R_0 T} \qquad h \to \infty\,; \\ &b) \quad U_{\overline{lab}} = \sqrt{h}\cdot\sqrt{\frac{R_0 \alpha T}{2e}} \qquad h \to 0\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Megállapíthatjuk tehát, hogy a wagneri elmélet bírálói — homogén dielektrikum feltételezésével — helyes feltételből indultak ki, két szélső esetben sikerült a wagneri elméletnél pontosabb — és a tapasztalati eredményekkel jobban egyező — elméletet felállítaniuk, de nem tudták pontosan megindokolni eredményeiket és közbeeső vastagságokra pedig eredményeik érvényüket vesztették.

6. Általános labilitási egyenletek egyenfeszültségre

A hővillamos átütési elméletekben akkor következett be ugrásszerű változás, amikor V. A. Fok szovjet fizikusnak sikerült (7) differenciálegyenletet az adott peremfeltételekhez megoldania, és ezt illeszteni a labilitási feltételekhez [32]. Fokkal egyidőben többen is hasonló eredményeket értek el, de senkinek nem sikerült általános ellenállásfüggvényre levezetni a labilitási egyenleteket. Mivel egyenfeszültségű esetet vizsgálunk, a hővezetés differenciálegyenlete (6) és (8) alapján:

$$\operatorname{div}(\lambda_1 \operatorname{grad} \vartheta) + \gamma(\operatorname{grad} \varphi)^2 = 0. \tag{20}$$

A villamos potenciálra felírható egyenletünk:

$$\operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad} \varphi) = 0. \tag{21}$$

Ezen utóbbi egyenlet azt fejezi ki, hogy a vizsgált térrészben (a dielektrikumban) nincsen sem forrás, sem nyelő, azaz az áram folytonosságának matematikai megfogalmazása. Vezessük be az alábbi változót:

$$u = -\int^{\vartheta} 2\lambda_1(\vartheta)\,\varrho(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,, \tag{22}$$

ahol $\lambda_1(\vartheta)$ és $\varrho(\vartheta)$ teljesen általános hőfokfüggvények lehetnek! (20) egyenletünket $(\varphi - \varphi_0)$-lal szorozva és (22)-öt figyelembe véve:

$$\operatorname{div}\left\{\gamma \operatorname{grad}\left[u - (\varphi - \varphi_0)^2\right]\right\} = 0,$$

ennek egy partikuláris megoldása:

$$u - (\varphi - \varphi])^2 = 0.$$

Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a potenciálnívók egybeesnek az izotermikus felületekkel. Annak ellenére, hogy bizonyos többdimenziós esetben ez nem teljesül, egydimenziós problémáknál teljesül az említett feltétel. Egydimenziós esetre (20) és (21) egyenletünk lényegesen egyszerűsödik:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \gamma\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right) = 0\,, \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\gamma \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right) = 0\,. \tag{24}$$

A hőtani peremfeltételek mellé villamos potenciálra a következő feltételek adhatók:

$$\varphi = +U_0, \quad \text{ha } x = +h \quad \text{és} \quad \varphi = -U_0, \quad \text{ha} \quad x = -h. \tag{25}$$

A (24) egyenletből integrálással közvetlenül a J áramsűrűséget kapjuk. (22) segítségével definiálhatjuk az alábbi integrált:

$$\varphi^2 = -\int_{\vartheta}^{\vartheta_m} 2\,\lambda_1(\vartheta)\varrho(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = u(\vartheta) - u(\vartheta_m). \tag{26}$$

A (23) egyenletet integrálva, a potenciált (26) segítségével kifejezve, és újra integrálva, $x = h$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$J \cdot h = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_m} \frac{\lambda_1(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{u(\vartheta_1) - u(\vartheta_m)}} \tag{27}$$

Az elektródban (mivel nincs belső hőforrása) kialakuló hőmérsékleteloszlás lineáris lesz, és a peremfeltételeket figyelembe véve az alábbi alakra írható:

$$\vartheta = \vartheta_1 - g \cdot \frac{x - h}{h}(\vartheta_1 - \vartheta_k) \quad h \leq x \leq h + m, \quad \text{ahol } g = \frac{h\alpha}{\lambda_2 + \alpha.m} \tag{28}$$

A határfeltételeket figyelembe véve, és az ismeretlen áramsűrűséget (27)-ből kiküszöbölve, az alábbi két egyenletet kapjuk:

$$F_1(\vartheta_1, \vartheta_m) \equiv \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_m} \frac{\lambda_1(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{u(\vartheta) - u(\vartheta_m)}} - g\frac{\lambda_2}{U_0}(\vartheta_1 - \vartheta_k) = 0\,, \tag{29}$$

$$F_2(\vartheta_1, \vartheta_m) \equiv u(\vartheta_1) - u(\vartheta_m) - U_0^2 = 0. \tag{30}$$

Ezen két egyenletünkkel sikerült ϑ_1 és ϑ_m paraméterekkel kifejeznünk a dielektrikum hőfok- és potenciáleloszlási viszonyait. Az egyenletekből kitűnik,

hogy növekvő feszültség mellett (ha a többi paraméter változatlan értékű), ϑ_1-nek és ϑ_m-nek nőnie kell. Abban az esetben, amikor már nem adható meg a (29) és (30) egyenletekre reális megoldás, akkor beszélünk kritikus feszültségről és ezt definiáltuk labilitási feszültségként (átütő feszültségként). A végső cél természetesen ezen labilitási feszültség meghatározása adott elrendezés mellett. Az egyenletek reális megoldása eltűnésének matematikai feltétele a megfelelő Jacobi-determináns eltűnése, azaz:

$$\det \mathrm{Jac} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \vartheta_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \vartheta_m} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \vartheta_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \vartheta_m} \end{vmatrix} = 0 .$$

Ez az egyenlet tulajdonképpen a (4) labilitási feltétel más alakban való matematikai megfogalmazása. A determinánst kifejtve, és a differenciálhányadosokat kiküszöbölve [32], [33], kapjuk a labilitási feltételi egyenletet:

$$g \frac{\lambda_2}{U_{lab}} - \varrho(\vartheta_1)\,\lambda_1(\vartheta_1) \cdot \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_m} \frac{\dot{\gamma}(\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{u(\vartheta) - u(\vartheta_m)}} = 0 , \qquad \text{ahol} \qquad \dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\vartheta} \quad (31)$$

A (29), (30) és (31) egyenletek alapján a labilitási feszültség a geometriai és hűtési viszonyok ismeretében ϑ_1 és ϑ_m paraméterek kiküszöbölésével számítható. Az eredmény rendkívül nagy érdeme, hogy az adott modellhez képest általános fajlagos ellenállás hőfokfüggésre és hővezetőképesség hőfokfüggésre érvényes. A gyakorlatban a kifejezések egyszerűsödnek, mivel a dielektrikum hővezetési tényezője bizonyos hőfoktartományban hőfokfüggetlennek tételezhető fel [22].

7. Labilitási feszültség számítása egyenfeszültségre

Az általános labilitási egyenletekből könnyen származtathatjuk a labilitási feszültség kifejezését, amennyiben a fajlagos ellenállás hőfokfüggését az alábbi függvénykapcsolattal jellemezzük [11], [12]:

$$\gamma(\vartheta) = \gamma_0 \exp(\vartheta/T). \quad (32)$$

A (22) integrálást elvégezve

$$u = 2 \cdot \lambda_1 \cdot \varrho_0 \cdot T \mathrm{e}^{-\frac{\vartheta}{T}} \exp(-\vartheta/T) .$$

bevezetjük a következő dimenzió nélküli mennyiségeket:

$$\Theta = \frac{\vartheta}{T} , \qquad v = \frac{U_{lab}}{\sqrt{2\lambda_1 \varrho_0 T}} , \qquad c = g \frac{\lambda_2}{\lambda_1} . \quad (33)$$

E jelölésekkel a (29,) (30) és (31) egyenletek a következő alakra hozhatók:

$$\begin{gathered}\int_{\Theta_1}^{\Theta_m} \frac{\mathrm{d}\Theta}{\sqrt{e^{-\Theta}-e^{-\Theta_m}}} - \frac{c}{v}(\Theta_1-\Theta_k)=0\,,\\ e^{-\Theta_1}-e^{-\Theta_m}-v^2=0\,,\\ \int_{\Theta_1}^{\Theta_m} \frac{e^{\Theta}\cdot\mathrm{d}\Theta}{\sqrt{e^{-\Theta}-e^{-\Theta_m}}} - \frac{c}{v}\cdot e^{\Theta_1}=0\,.\end{gathered} \tag{34}$$

Fenti integrálok, bár elvileg elvégezhetők [33], számításukhoz mégis célszerűbbnek látszik egy új paraméter bevezetése:

$$\cos^2\xi = e^{\Theta_1-\Theta_m}\,, \qquad 0\leqq\xi\leqq\frac{\pi}{2}\,, \tag{35}$$

amelynek segítségével az integrálásokat elvégezve és az egyenleteket rendezve kifejezhetjük a labilitási feszültséget:

$$U_{\overline{lab}} = \sqrt{2\lambda_1\varrho_0 T}\,\Psi(c)\cdot\exp\left[-\vartheta_k/(2T)\right], \tag{36}$$

ahol

$$c = \sin\xi\cdot\exp\left(-\xi\cdot\tan\xi/c\right),$$

és

$$c = \frac{\sin\xi}{\cos^3\xi}\left(\xi+\sin\xi\cdot\cos\xi\right). \tag{38}$$

A (37) függvényt első levezetőjéről Fok-féle függvénynek nevezzük. Könnyen megállapíthatók a függvények értelmezési tartományai:

$$0\leqq c\leqq\infty\,, \qquad 0\leqq\xi\leqq\frac{\pi}{2}\,, \qquad 0\leqq\Psi(c)\leqq 1\,.$$

(36), (37) illetve (38) eredményeink értelmében sikerült a labilitási feszültséget kifejeznünk ξ segédparaméteren keresztül kizárólag a dielektrikum geometriai és hőátadási viszonyainak függvényeként. A (36) kifejezés összhangban van az eddig elmondottakkal, vagyis növekvő vastagság esetén (c nő) a labilitási feszültség egy maximális értékhez tart:

$$U_{\overline{labm}} = 1{,}414\sqrt{\frac{\lambda_1 T}{\gamma(\vartheta_k)}}\,. \tag{39}$$

A $\psi(c)$ és $c(\xi)$ függvények táblázatba foglalását digitális számítógéppel végeztük el. Az eredményeket a 7. és 8. ábrákon tüntettük fel az alábbi talál-

I. táblázat

A Fok-féle függvény egyenfeszültségre

ξ [°]	c	ψ (c)	$\Theta_m = \frac{1}{T}(\vartheta_m - \vartheta_k)$
0,0	0,000000	0,000000	1,000000
0,5	0,000152	0,005293	1,000025
1,0	0,000609	0,010586	1,000102
1,5	0,001372	0,015881	1,000229
2,0	0,002440	0,021176	1,000406
2,5	0,003815	0,026473	1,000635
3,0	0,005498	0,031772	1,000915
3,5	0,007491	0,037074	1,001247
4,0	0,009695	0,042378	1,001630
4,5	0,012413	0,047686	1,002064
5,0	0,015348	0,052997	1,002551
5,5	0,018600	0,058312	1,003090
6,0	0,022175	0,063632	1,003681
6,5	0,026075	0,068956	1,004325
7,0	0,030303	0,074286	1,005023
7,5	0,034864	0,079621	1,005774
8,0	0,039763	0,084962	1,006579
8,5	0,045002	0,090310	1,007439
9,0	0,050589	0,095665	1,008354
9,5	0,056527	0,101026	1,009325
10.0	0,062823	0,106396	1,010352
10,5	0,069482	0,111773	1,011435
11,0	0,076512	0,117159	1,012576
11,5	0,093919	0,122553	1,013776
12,0	0,091709	0,127957	1,015033
12,5	0,099892	0,133370	1,016351
13,0	0,108474	0,138793	1,017729
13,5	0.117465	0,144226	1,019168
14,0	0,126874	0,149670	1,020668
14,5	0,136710	0,155125	1,022232
15,0	0,146982	0,160592	1,023860
15,5	0,157702	0,166071	1,025552
16,0	0,168881	0,171561	1,027310
16,5	0,180531	0,177064	1,029134
17,0	0,192662	0,182581	1,031027
17,5	0,205290	0,188110	1,032938
18,0	0,218426	0,193653	1,035020
18,5	0,232085	0,199210	1,037123
19,0	0,246283	0,204782	1,039298
19,5	0,261034	0,210368	1,041548
20,0	0,276355	0,215969	1,043872
20,5	0,292263	0,221586	1,046274
21,0	0,308777	0,227218	1,048753
21,5	0,325914	0,232867	1,051312
22,0	0,343696	0,238532	1,053952
22,5	0,362142	0,244214	1,056675
23,0	0,381276	0,249913	1,059482
23,5	0,401118	0,255629	1,062375
24,0	0,421695	0,261363	1,065356
24,5	0,443030	0,267115	1,068427
25,0	0,465150	0,272885	1,071589
25,5	0,488083	0,278674	1,074845
26,0	0,511859	0,284482	1,078196
26,5	0,536507	0,290309	1,081645

II. táblázat

A Fok-féle függvény váltakozó feszültségre

β	c	φ (c)	$\Theta_m = b(\vartheta_m - \vartheta_k)$
0,0000	0,000000	0,000000	1,000000
0,0050	0,000050	0,003033	1,000008
0,0100	0,000200	0,006065	1,000033
0,0150	0,000450	0,009098	1,000075
0,0200	0,000800	0,012130	1,000133
0,0250	0,001250	0,015162	1,000208
0,0300	0,001801	0,018193	1,000300
0,0350	0,002451	0,021224	1,000408
0,0400	0,003202	0,024255	1,000533
0,0450	0,004053	0,027285	1,000674
0,0500	0,005004	0,030314	1,000832
0,0550	0,006056	0,033342	1,001006
0.0600	0,007209	0,036370	1,001197
0,0650	0,008462	0,039397	1,001405
0,0700	0,009816	0,042423	1,001628
0,0750	0,011271	0,045447	1,001868
0,0800	0,012828	0,048471	1,002125
0,0850	0,014485	0,051493	1,002397
0,0900	0,016244	0,054514	1,002686
0,0950	0,018105	0,057534	1,002991
0,1000	0,020067	0,060553	1,003312
0,1050	0,022132	0,063570	1,003649
0,1100	0,024299	0,066585	1,004003
0,1150	0,026568	0,069599	1,004372
0,1200	0,028941	0,072611	1,004756
0,1300	0,033994	0,078630	1,005573
0,1400	0,039462	0,084641	1,006453
0,1500	0,045347	0,090644	1,007394
0,1600	0,051651	0,096638	1,008396
0,1700	0,058376	1,102624	1,009459
0,1800	0,065528	0,108599	1,010581
0,1900	0,073107	0,114565	1,011761
0,2000	0,081119	0,120520	1,013000
0,3100	0,089567	0,126464	1,014295
0,2200	0,098455	0,132397	1,015646
0,2300	0,107787	0,138318	1,017052
0,2400	0,117569	0,144226	1,018512
0,2500	0,127806	0,150122	1,020024
0,2600	0,138503	0,156005	1,021589
0,2700	0,149665	0,161874	1,023203
0,2800	0,161300	0,167730	1,024867
0,2900	0,173413	0,173572	1,026578
0,3000	0,186012	0,179399	1,028337
0,2100	0,199105	0,185212	1,030141
0,3200	0,212699	0,191010	1,031988
0,3300	0,226803	0,196793	1,033879
0,3400	0,241426	0,202561	1,035811
0,3500	0,256578	0,208313	1,037782
0,3600	0,272269	0,214050	1,039793
0,3700	0,288510	0,219770	1,041840
0,3800	0,305313	0,225475	1,043922
0,3900	0,322690	0,231164	1,046039
0,4000	0,340654	0,236837	1,048187
0,4100	0,359220	0,242493	1,050367

ξ [°]	c	ψ (c)	$\Theta_m = \frac{1}{T}(\vartheta_m - \vartheta_k)$	β	c	φ (c)	$\Theta_m = b(\vartheta_m - \vartheta_k)$
27,0	0,562060	0,296155	1,085193	0,4200	0,378402	0,248133	1,052576
27,5	0,588552	0,302021	1,088843	0,4300	0,398216	0,253757	1,054813
28,0	0,616018	0,307907	1,092597	0,4400	0,418679	0,259365	1,057075
28,5	0,644496	0,313813	1,096458	0,4500	0,439810	0,264957	1,059362
29,0	0,674024	0,319740	1,100427	0,4600	0,461626	0,270532	1,061672
29,5	0,704644	0,325688	1,104508	0,4700	0,484149	0,276091	1,064003
30,0	0,736400	0,331656	1,108703	0,4800	0,507400	0,281634	1,056353
30,5	0,769336	0,337645	1,113014	0,4900	0,531403	0,287162	1,068721
31,0	0,803501	0,343656	1,117445	0,5000	0,556181	0,292673	1,071105
31,5	0,838946	0,349688	1,121998	0,5100	0,581761	0,298169	1,073503
32,0	0,875723	0,355742	1,126675	0,5200	0,608172	0,303649	1,075914
32,5	0,913889	0,361817	1,131481	0,5300	0,635442	0,309114	1,078336
33,0	0,953503	0,367915	1,136418	0,5400	0,663604	0,314563	1,080767
33,5	0.994627	0,374035	1,141488	0,5500	0,692692	0,319998	1,083206
34,0	0,037327	0,380177	1,146697	0,5600	0,722742	0,325418	1,085650
34,5	1,081672	0,386341	1,152046	0,5700	0,753793	0,330824	1,088099
35,0	1,127736	0,392528	1,157539	0,5800	0,785887	0,336216	1,090550
35,5	0,175596	0,398737	1,163181	0,5900	0,819068	0,341594	1,093002
36,0	1,225334	0,404969	1,168974	0,6000	0,853383	0,346958	1,095452
36,5	1,277036	0,411223	1,174922	0,6100	0,888885	0,352309	1,097900
37,0	1,330794	0,417501	1,181030	0,6200	0,925627	0,357647	1,100344
37,5	1,386704	0,423800	1,187301	0,6300	0,963669	0,362973	1,102782
38,0	1,444869	0,430123	1,193740	0,6400	1,003075	0,368287	1,105211
38,5	1.505397	0,436468	1,200351	0,6500	1,043912	0,373589	1,107632
39,0	1,568404	0,442836	1,207138	0,6600	1,086255	0,378880	1,110041
39,5	1,634010	0,449226	1,214106	0,6700	1,130182	0,384160	1,112438
40,0	1,702347	0,455639	1,221289	0,6800	1,175779	0,389429	1,114820
40,5	1,773549	0,462074	1,228603	0,6900	1,223139	0,394689	1,117187
41.0	1,847765	0,468531	1,236143	0,7000	1,272362	0,399939	1,119536
41,5	1,925148	0,475010	1,243883	0,7100	1,323557	0,405180	1,121866
42,0	2,005863	0,481511	1,251830	0,7200	1,376842	0,410413	1,124175
42,5	2,090086	0,488033	1,259988	0,7300	1,432345	0,415637	1,126462
43,0	2,178003	0,494577	1,268364	0,7400	1,490206	0,420855	1,128726
43,5	2,269814	0,501142	1,276963	0,7500	1,550577	0,426065	1,130964
44,0	2,365729	0,507728	1,285792	0,7600	1,613624	0,431268	1,133176
44,5	2,465976	0,514334	1,294856	0,7700	1,679531	0,436466	1,135359
45,0	2,570796	0,520960	1,304163	0,7800	1,748496	0,441659	1,137513
45,5	2,680447	0,527606	1,313718	0,7900	1,820739	0,446846	1,139636
46,0	2,795205	0,534271	1,323530	0,8000	1,896503	0,452030	1,141727
46,5	2,915364	0,540955	1,333604	0,8100	1,976053	0,457210	1,143784
47,0	3,041241	0,547658	1,343950	0,8200	2,059686	0,462386	1,145807
47,5	3,173174	0,554378	1,354573	0,8300	2,147728	0,467561	1,147792
48,0	3,311526	0,561115	1,365483	0,8400	2,240543	0,472733	1,149741
48,5	3,456687	0,567868	1,376687	0,8500	2,338538	0,477905	1,151651
49.0	3,609076	0,574638	1,388195	0,8600	2,442167	0,483075	1,153520
49,5	3,769141	0,581423	1,400014	0,8700	2,551938	0,488246	1,155349
50,0	3,937367	0,588222	1,412154	0,8800	2,668426	0,493417	1,157135
50,5	4.114276	0,595034	1,424625	0,8900	2,792277	0,498589	1.158878
51,0	4,300429	0,601860	1,437436	0,9000	2,924227	0,503763	1,160576
51,5	4,496433	0,608697	1,450598	0,9050	2,993495	0,506351	1,161408
52,0	4,702943	0,615546	1,464121	0,9100	3,065111	0,508940	1,162229
52,5	4,920666	0,622404	1,478016	0,9150	3,139197	0,511529	1,163038
53,0	5,150370	0,629271	1,492294	0,9200	3,215885	0,414120	1,163835
53,5	5,392882	0,636147	1,506968	0,9250	3,295318	0,516711	1,164620
54,0	5,649105	0,643028	1,522049	0,9300	3,377647	0,519303	1,165394
54,5	5,920016	0,649916	1,537551	0,9350	3,463037	0,521896	1,166155
55,0	6,206676	0,656807	1,553486	0,9400	3,551664	0,524491	1,166904

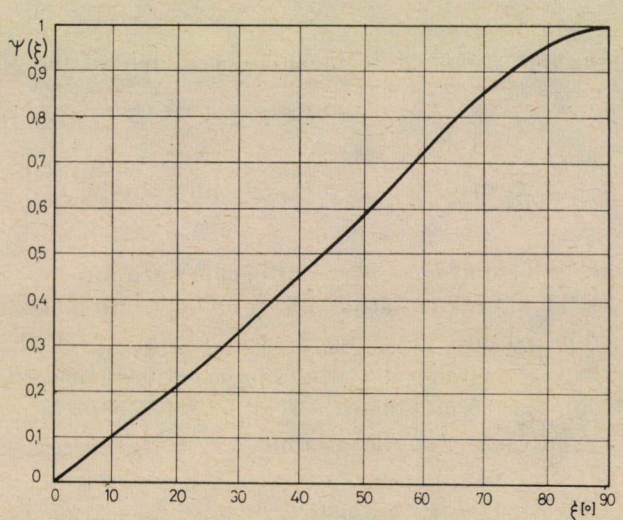
ξ [°]	c	ψ (c)	$\Theta_m = \frac{1}{T}(\vartheta_m - \vartheta_k)$	β	c	φ (c)	$\Theta_m = b(\vartheta_m - \vartheta_k)$
55,5	6,510241	0,663702	1,569869	0,9450	3,643719	0,527087	1,167644
56,0	6,631972	0,670598	1,586713	0,9500	3,739407	0,529684	1,168360
56,5	7,173243	0,677494	1,604034	0,9550	3,838951	0,532282	1,169074
57,0	7,535554	0,684389	1,621847	0,9600	3,942592	0,534882	1,169776
57,5	7,920547	0,691281	1,640169	0,9650	4,050592	0,537483	1,170465
58,0	8,330020	0,698168	1,659017	0,9700	4,163235	0,540086	1,171131
58,5	8,765945	0,705049	1,678407	0,9750	4,280831	0,542691	1,171744
59,0	9,230487	0,711922	1,698360	0,9800	4,403718	0,545298	1,172079
59,5	9,726030	0,718784	1,718893	0,9850	4,532265	0,547906	1,174195
60,0	10,255197	0,725636	1,740027	0,9900	4,666878	0,550517	1,173603
60,5	10,820885	0,732473	1,761783	0,9950	4,808001	0,553129	1,173435
61,0	11,426295	0,739294	1,784184	0,000	4,956122	0,555744	1,174896
61,5	12,074970	0,746098	1,807252	1,0050	5,111782	0,558360	1,176054
62,0	12,770839	0,752881	1,831012	1,0100	5,275575	0,560979	1,175477
62,5	13,518271	0,759642	1,855489	1,0150	5,448163	0,563601	1,176593
63,0	14,322125	0,766378	1,880710	1,0200	5,630280	0,566224	1,177136
63,5	15,187823	0,773087	1,906704	1,0250	5,822744	0,568851	1,177660
64,0	16,121424	0,779766	1,933499	1,0300	6,026469	0,571479	1,178171
64,5	17,129713	0,786413	1,961127	1,0350	6,242482	0,574111	1,178668
65,0	18,220307	0,793024	1,989622	1,0400	6,471937	0,576745	1,179151
65,5	19,401774	0,799598	2,019017	1,0450	6,716138	0,579382	1,179620
66,0	20,683774	0,806132	2,049351	1,0500	6,976561	0,582022	1,180075
66,5	22,077229	0,812622	2,080661	1,0550	7,254890	0,584665	1,170515
67,0	23,594514	0,819065	2,112989	1,0600	7,553048	0,587311	1,180941
67,5	25,249691	0,825459	2,146379	1,0650	7,873242	0,589960	1,181352
68,0	27,058785	0,831800	2,180877	1,0700	8,218022	0,592612	1,181749
68,5	29,040107	0,838085	2,216534	1,0750	8,590347	0,595267	1,182132
69,0	31,214646	0,844311	2,253401	1,0800	8,993669	0,597926	1,182499
69,5	33,606538	0,805475	2,291537	1,0850	9,432041	0,600588	1,182852
70,0	36,243628	0,856572	2,331000	1,0900	9,910260	0,603254	1,183191
70,5	39,158156	0,862600	2,371856	1,0950	10,434034	0,605923	1,183515
71,0	42,387587	0,868554	2,414174	1,1000	11,010219	0,608595	1,183823
71,5	45,975621	0,874432	2,458029	1,1050	11,647120	0,611272	1,184118
72,0	49,973448	0,880229	2,503501	1,1100	12,354891	0,613952	1,184397
72,5	54,441278	0,885941	2,550679	1,1150	13,146089	0,616636	1,184661
73,0	59,450261	0,891565	2,599635	1,1200	14,036419	0,619324	1,184910
73,5	65,084873	0,897097	2,650533	1,1250	15,045793	0,622016	1,185144
74,0	71,445922	0,902532	2,703424	1,1300	16,199839	0,624712	1,185364
74,5	78,654353	0,907867	2,758449	1,1350	17,532110	0,627412	1,185568
75,0	86,856103	0,913097	2,815743	1,1400	19,087403	0,630117	1,185757
75,5	96,228341	0,918218	2,875450	1,1450	20,926900	0,632825	1,185931
76,0	106,987547	0,923226	2,937733	1,1500	23,136416	0,635538	1,186090
76,5	119,400084	0,928118	3,002770	1,1550	25,840179	0,638256	1,186234
77,0	133,796132	0,932887	3,070759	1,1600	29,225033	0,640977	1,186362
77,5	150,588271	0,937530	3,141921	1,1650	33,585583	0,643704	1,186475
78,0	170,296496	0,942044	3,216502	1,1700	39,414960	0,646435	1,186573
78,5	193,582324	0,946422	3,294781	1,1750	47,605939	0,649170	1,186656
79,0	221,295834	0,950661	3,377072	1,1800	59,958651	0,651911	1,186724
79,5	254,541484	0,954757	3,463734	1,1850	80,725944	0,654656	1,186776
80,0	294,771533	0,958705	3,555175	1,1900	122,948784	0,567406	1,186814
80,5	343,920835	0,962500	3,651867	1,1905	129,701059	0,657681	1,186816
81,0	404,504786	0,966138	3,754358	1,1910	137,231354	0,657957	1,186819
81,5	480,415793	0,969615	3,863286	1,1915	145,682361	0,658232	1,186822
82,0	576,377016	0,972926	3,979409	1,1920	155,233938	0,658507	1,186824
82,5	699,653840	0,976067	4,103627	1,1925	166,116053	0,658783	1,186826
83,0	860,700200	0,979034	4,237027	1,1930	178,627540	0,659058	1,186829
83,5	1075,163120	0,981822	4,380935	1.1935	193,163966	0,659334	1,186831

ξ [c°]	c	ψ (c)	$\Theta_m = \frac{1}{T}(\vartheta_m - \vartheta_k)$	β	c	φ (c)	$\Theta_m = b(\vartheta_m - \vartheta_k)$
84,0	1367,159708	0,984427	4,536997	1,1940	210,260213	0,659610	1,186832
84,5	1775,147509	0,896845	4,707287	1,1945	230,657736	0,659885	1,186834
85,0	2362,945624	0,989071	4,894469	1,1950	255,414945	0,660161	1,186835
85,5	3241,603582	0,991103	5,102054	1,1955	286,096829	0,660437	1,186837
86,0	4615,772752	0,992936	5,334791	1,1960	325,119230	0,660713	1,186838
86,5	6890,348918	0,994566	5,599337	1,1965	376,418037	0,660988	1,186839
87,0	10942,014960	0,995989	5,905439	1,1970	446,867860	0,661264	1,186840
87,5	18908,291320	0,997202	6,268207	1,1975	549,654228	0,661540	1,186841
88,0	36930,895700	0,998201	6,712948	1,1980	713,672445	0,661816	1,186841
88,5	87540,815650	0,998984	7,287100	1,1985	1016,849398	0,662092	1,186842
89,0	295451,812800	0,999547	8,097158	1,1990	1766,767918	0,662369	1,186842
89,5	2363618,452000	0,999886	9,482925	1,1995	6714,610780	0,662645	1,186842
90,0	végtelen	1,000000	végtelen	1,2000	végtelen	0,662743	1,186851

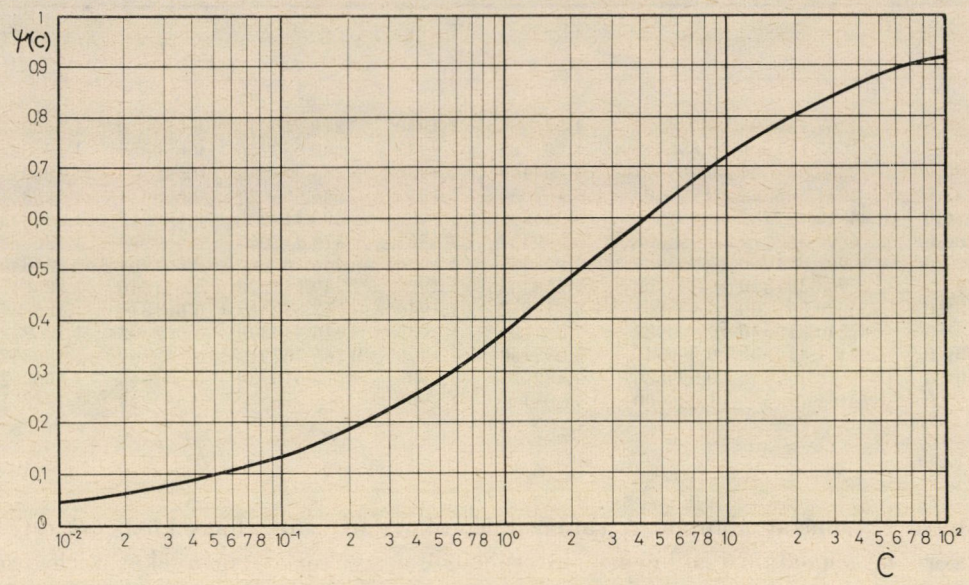
ható I. táblázat alapján. A táblázat lépésköze oly sűrű, hogy közbeeső értékére megengedhető a lineáris interpoláció a gyakorlati igényeket kielégítő pontossággal. A 7. ábrán ξ segédparaméter függvényében láthatjuk $\psi(\xi)$ függvényt, a 8. ábrán c paraméter függvényében a $\psi(c)$ függvényt. Az utóbbi ábrából jól kitűnik $\psi(c)$ telítődő, azaz korlátos jellege.

A dielektrikumban kialakuló hőfokeloszlások is számíthatók. A (35) kifejezésből közvetlenül kifejezhető a dielektrikumban létrejövő relatív labilitási hőfokesés:

$$\Theta_m - \Theta_1 = \frac{1}{T}(\vartheta_m - \vartheta_1) = -2 \ln \cos \xi . \tag{40}$$



7. ábra. A $\Psi(\xi)$ függvény egyenfeszültségre



8. ábra. A $\Psi(c)$ függvény egyenfeszültségre

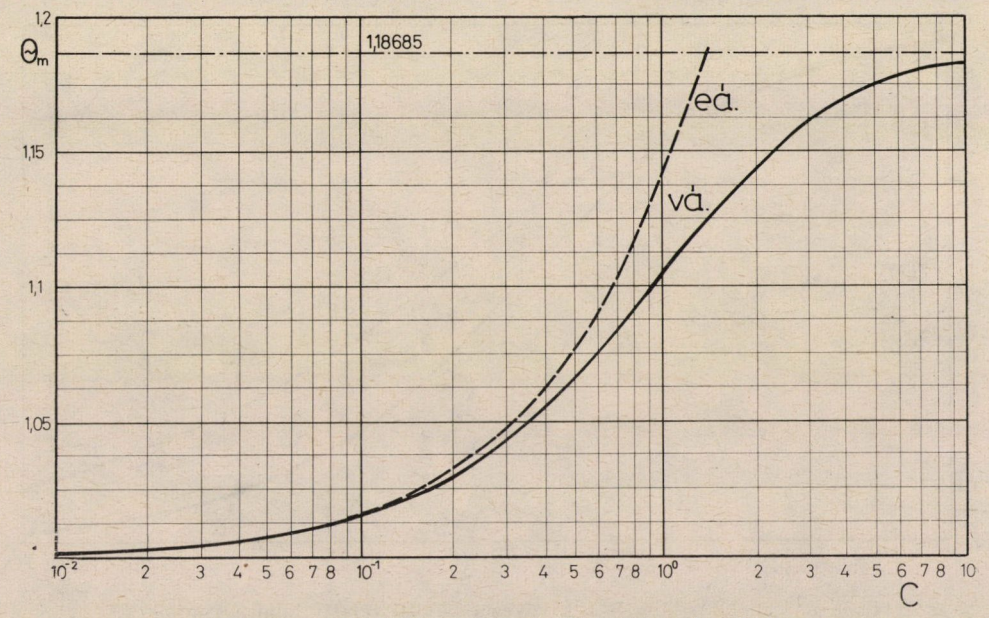
A (34) egyenletekből az integrálás elvégzése után kifejezhetjük az elektród és a környezet közötti relatív hőfokesést:

$$\Theta_1 - \Theta_k = \frac{1}{T}(\vartheta_1 - \vartheta_k) = 2\frac{\xi \cdot \tan \xi}{c}. \tag{41}$$

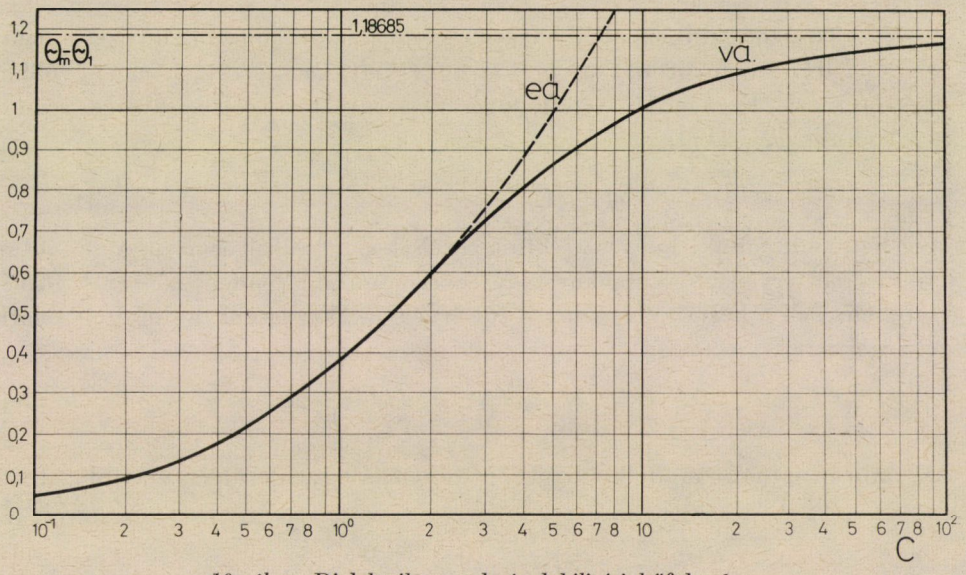
Fentiek alapján már könnyen kifejezhető a dielektrikum relatív labilitási melegedése:

$$\Theta_m - \Theta_k = \frac{1}{T}(\vartheta_m - \vartheta_k) = 2\frac{\xi \cdot \cos^2 \xi}{\xi + \sin \xi \cdot \cos \xi} - 2 \ln \cos \xi. \tag{42}$$

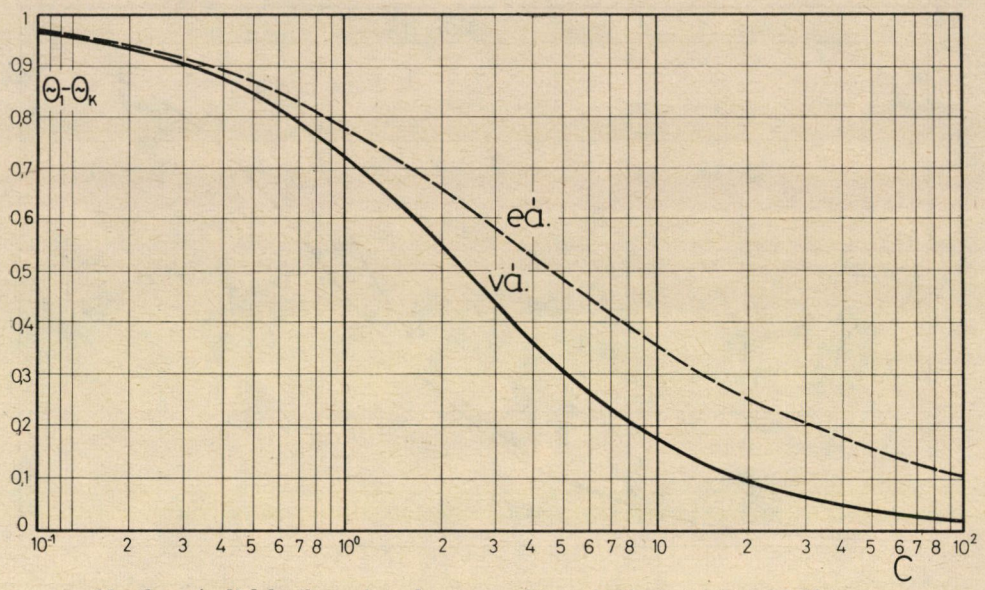
Az egyes hőfokeloszlásokat most is számítógéppel számítottuk, az eredményeket a 9, 10. és 11. ábrákon láthatjuk. Mint a 9. ábrából kitűnik, egyenfeszültségen a labilitási melegedés korántsem korlátos, sőt elvileg végtelenig nőhet, ellentétben a váltakozófeszültségen érvényes melegedéssel. Ez összhangban van több szerző megállapításával [11, [12], [18]. Ennek egyrészt az az oka, hogy egyenfeszültségen a villamos téreloszlást elsődlegesen a fajlagos vezetőképesség, míg váltakozófeszültségen a permittivitás határozza meg, másrészt egyenfeszültségen az áramsűrűség folytonosságát tételeztük fel, míg váltakozófeszültségen a térerősség folytonosságát fogjuk.



9. ábra. Dielektrikum relatív labilitási melegedése
_ _ _ _ _ _ _ _ egyenfeszültségen
———— váltakozófeszültségen



10. ábra. Dielektrikum relatív labilitási hőfokesése
_ _ _ _ _ _ _ _ egyenfeszültségen
———— váltakozófeszültségen



11. ábra. A dielektrikum és a környezet közötti relatív labilitási hőfokesés
— — — „egyenfeszültségen" ——— váltakozó feszültségen

8. Labilitási feszültség váltakozófeszültségre

Váltakozófeszültség alkalmazása esetében az alkalmazott levezetés némiképpen eltér az előzőtől. Ennek oka, hogy váltakozófeszültségen nagyobbak a veszteségek. Ezek együttes jellemzésére az ún. térfogati veszteségi számot vezették be [9], [17]:

$$p'(\vartheta) = p'(\vartheta_0) \cdot e^{b(\vartheta - \vartheta_0)} = p'_0 \cdot e^{b(\vartheta - \vartheta_0)} = p'_k \cdot e^{b(\vartheta - \vartheta_k)}. \tag{43}$$

Meg kell említenünk, hogy ez a kifejezés csak nem túlságosan nagy hőfoktartományban érvényes, valamint helyi maximummal rendelkező tan δ görbék esetében csak a helyi extrémumon túl érvényes. Vezessünk be most is relatív egységeket:

$$\Theta = b(\vartheta - \vartheta_k), \qquad z = \frac{x}{h}. \tag{44}$$

A 2. ábrán látható modellünkre így differenciálegyenletünk az alábbi alakú:

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}z^2} + B \cdot e^{\Theta} = 0, \tag{45}$$

ahol

$$B = \frac{p'_k \cdot b \cdot h^2 \cdot E^2}{\lambda_1}.$$

Az egyenletet integrálva, az integrálási állandót a (10) peremfeltételből meghatározva, majd újra integrálva, a $\Theta = f(z)$ függvény egy inverz $z = g(\Theta)$ függvényét kapjuk. Bevezetve a:

$$\beta = \sqrt{\frac{B}{2}} \cdot \exp(\Theta_m/2) \tag{46}$$

segédparamétert, ennek segítségével és a $z = 0$ hely hőmérsékletével (maximális hőmérséklet), mint paraméterrel kifejezhető a hőfokeloszlás:

$$\Theta(z, \Theta_m) = \Theta_m - 2 \ln \operatorname{ch}(z\beta). \tag{47}$$

$z = 1$ helyettesítéssel ebből meghatározható az elektród és a dielektrikum határfelületének relatív hőfoka. Az elektródban kialakuló lineáris hőfokeloszlást figyelembe véve a (11), (13) peremfeltételeket is kielégítve, a következő implicit függvénykapcsolatra jutunk a villamos térerősség (E) és a maximális labilitási hőmérséklet között:

$$F(E, \Theta_m) \equiv 0{,}5 \cdot \ln\left(\frac{2\beta^2}{B}\right) - \ln(\cosh\beta) - \frac{\beta \cdot \tanh\beta}{c} = 0. \tag{48}$$

A labilitási feltételt az $F(E, \Theta_m)$ függvény létezése és differenciálhatósága esetében átfogalmazhatjuk. A rendszer egyensúlyi állapotában $\mathrm{d}\Theta_m/\mathrm{d}E > 0$, a stabilitás-labilitás határállapotában viszont $\mathrm{d}\Theta_m/\mathrm{d}E \to \infty$. Ez jelenti azt tulajdonképpen, hogy a térerősség (amely homogén tér esetében csak egy konstanssal tér el a feszültségtől) növelésével elérünk egy olyan kritikus térerősségértékig, amelynél a dielektrikum hőfoka monoton növekszik és elvileg végtelenné válhatik, azaz a dielektrikumban több veszteség keletkezik időegység alatt, mint amennyi a környezetbe távozhatik. Ezt a feltételt a 12. ábrán szemléltetjük. A labilitási kritériumot a következőképpen is megfogalmazhatjuk: $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\Theta_m = 0$. Miután E és Θ_m között $F(E, \Theta_m)$ jelenti a kapcsolatot és E-t β segédparaméteren keresztül tartalmazza, belátható, hogy $\mathrm{d}E/\mathrm{d}\Theta_m = 0$ feltétellel egyenértékű a $\mathrm{d}F/\mathrm{d}\beta = 0$ feltétel. A differenciálást elvégezve, c és β között a következő függvénykapcsolatra jutunk:

$$c = \beta \frac{\beta + \sinh\beta \cdot \cosh\beta}{\cosh^2\beta \cdot (1 - \beta \cdot \tanh\beta)}. \tag{49}$$

(48)-ból kifejezhetjük a labilitási térerősséget, ill. homogén tér esetén a labilitási feszültséget:

$$E_{lab}^{\sim} = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2\lambda_1}{b \cdot p_k'}} \cdot \varphi(c), \tag{50}$$

$$U_{\widetilde{lab}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda_1}{b \cdot p'_k}} \cdot \varphi(c), \tag{51}$$

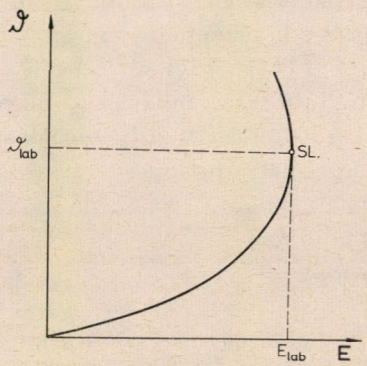
ahol

$$\varphi(c) = \frac{\beta}{ch\,\beta} \cdot \exp\left[-(\varphi \tanh \beta)/c\right]. \tag{52}$$

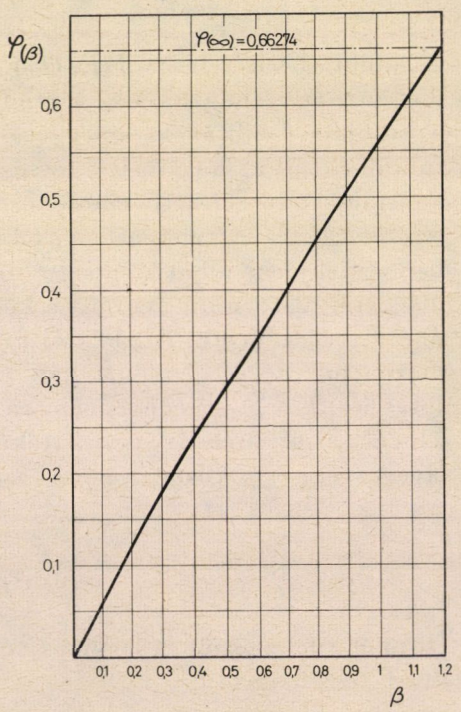
A $\varphi(c)$ függvényt az egyenfeszültségű esethez hasonlóan Fok-féle függvénynek nevezzük. β segédparaméter értelmezési tartományának megállapításához szükség van az $1 - \beta \cdot \tanh\beta = 0$ egyenlet megoldására. Az egyenletet digitális számítógéppel a Newton-féle módszerrel oldottuk meg [33], eredményül $\beta_\infty = 1{,}19967864$ adódott. Ennek alapján az értelmezési tartományok:

$$0 \leq c \leq \infty, \qquad 0 \leq \beta \leq 1{,}19967864, \qquad 0 \leq \varphi(c) \leq 0{,}6627434.$$

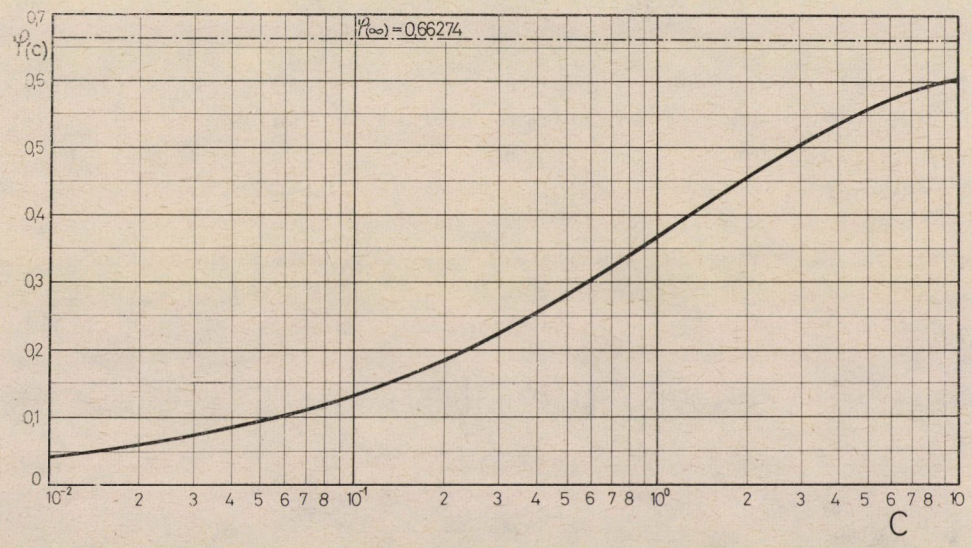
Az értelmezési tartományok ismeretében a függvények táblázatba foglalását számítógéppel végeztük el. Az eredményeket a *Függelék en* kívül a 14. és 15. ábrákon is feltüntettük. Igen érdekes, hogy az egyenfeszültségű esethez hason-



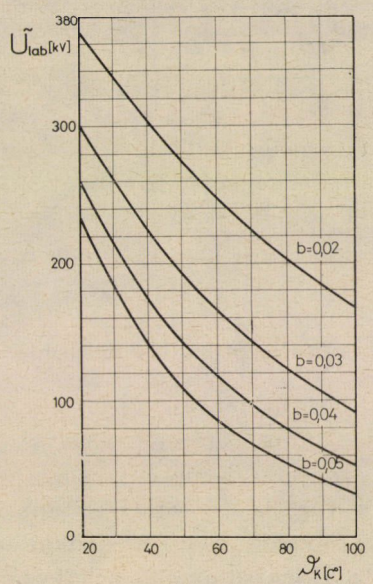
12. ábra. Dielektrikum hőmérséklete a térerősség függvényében; SL. — labilitási pont



13. ábra. A $\varphi(\beta)$ függvény váltakozófeszültségre



14. ábra. A $\varphi(c)$ függvény váltakozófeszültségre



15. ábra. Labilitási feszültség a környezeti hőmérséklet függvényében *b* paraméterrel

lóan a labilitási feszültség c növelésével most is egy maximális értékhez tart:

$$U_{labm}^{\sim} = 0{,}93726 \sqrt{\frac{\lambda_1}{b \cdot p_k'}} \,. \tag{53}$$

Ez az eredményünk igen figyelemre méltó hiszen azt tükrözi, hogy a labilitási feszültséget nem lehet egyértelműen (és egyenletesen) növelni a szigetelőanyag vastagságának növelésével, vagy a hűtés nagymértékbeni növelésével (ez az α hőátadási tényező növelését jelentené). A gyakorlatban ez azért igen lényeges, mert rámutat a labilitási feszültség növelésének lehetséges és gazdaságos módjaira: pl. a szigetelés felosztására és hűtőcsatorna közbeiktatására stb.

Természetesen váltakozófeszültségen is számíthatók az egyes hőfokkülönbségek, amelyeket a részletes levezetés mellőzésével [33] közlünk:

$$\Theta_m = b(\vartheta_m - \vartheta_k) = 2 \ln (\cosh \beta) + 2 \frac{\beta \tanh \beta}{c} \,, \tag{54}$$

$$\Theta_m - \Theta_1 = b(\vartheta_m - \vartheta_1) = 2 \ln (\cosh \beta), \tag{55}$$

$$\Theta_1 = b(\vartheta_1 - \vartheta_k) = 2 \frac{\beta \cdot \tanh \beta}{c} \,. \tag{56}$$

A 9., 10. és 11. ábrákon feltüntettük az egyes relatív hőfokeloszlásokat. Az eredményeket most is számítógéppel számítottuk. Igen érdekes és figyelemre méltó tény, hogy az (54) kifejezés szerint a relatív labilitási melegedésnek határértéke van, mégpedig:

$$\Theta_m(c = \infty) = 1{,}186851.$$

A láthatóan kis értékű melegedések korántsem azt jelentik, hogy ilyen kis értéken következik be az átütés, hanem azt, hogy ezen melegedés értékeken van a dielektrikum a stabilis-labilis határhelyzetben. Mint már láttuk egyenfeszültségen ettől lényegesen eltérő helyzet alakul ki, ennek indoklását már megadtuk.

9. Az egyen- és váltakozófeszültségű eset összehasonlítása

A fentiekben röviden ismertetésre került levezetések eredményeként két kifejezést definiáltunk, (36)-ot és (51)-et, amelyek segítségével a labilitási feszültségeket számítani tudjuk. Kapott eredményeinket összehasonlítva, meglepő — bár korántsem váratlan — egyezést tapasztalunk. Természetesen ez nem véletlen, hiszen a folyamat alapvető fizikai tartalmában lényegében megegyezik, eltérés csak a dielektrikumban keletkező veszteségek eredetéből fakad. Jellegét tekintve a két kifejezés megegyezik, hiszen a veszteség hőfokfüggésére jellemző hőfokkoefficiens egyenfeszültségű esetben $1/T$ s ennek váltakozófeszültségen b felel meg. Hasonló a helyzet az egyenfeszültségen

keletkező veszteségeket meghatározó fajlagos vezetőképesség és a váltakozófeszültségen használatos térfogati veszteségi szám kapcsolatában. A környezeti illetve a referencia hőmérséklet mindkét labilitási feszültség kifejezését azonos módon befolyásolja. Eredményeink igen érdekesek abból a szempontból is, hogy eltérő matematikai apparátussal jutottunk — a mélyebb fizikai okokon alapuló — hasonló eredményre.

A (36) és (51) kifejezések legjobban a $\psi(c)$ és $\varphi(c)$ szorzótényezőként szereplő függvényekben különböznek. Ha azonban összehasonlítjuk a 8. és 14. ábrákat, kitűnik, hogy $c \geqq 2$ értékig a két függvény gyakorlatilag megegyezik egymással (természetesen ez még nem jelenti azt, hogy a labilitási feszültségek is megegyeznek!). $c = 2$ esetében azonban a két függvény egyre jelentősebben eltér egymástól és határértékük is különbözik.

A hőátadási viszonyt, valamint a geometriai elrendezés adatait együttesen a c tényező foglalja magába. Érdemes megvizsgálni az egyes tényezők változásának hatását c paraméter értékében. Legérdekesebb természetesen a hőátadási szám változásának hatása. Szemléletesen mutatja ezt az alábbi táblázat:*

α [W/m²C°]	5	10	20	30	50	100	500	∞
c	0,31249	0,62493	1,2497	1,8774	3,1232	6,243	31,077	5625

Rendkívül figyelemre méltó tény, hogy $\alpha = \infty$ esetében, azaz ideális hőátadási viszonyok mellett (ekkor az elektród és környezet hőmérséklete megegyezik) c értéke véges szám:

$$c(\alpha = \infty) = \frac{\lambda_2 \cdot h}{\lambda_1 \cdot m}, \tag{57}$$

és ez éppen a dielektrikum és elektród hőellenállásának hányadosa. Mivel $\psi(c)$ és $\varphi(c)$ is korlátos függvény, ez azt jelenti, hogy ideális hűtési viszonyok esetében is bekövetkezhetik hővillamos átütés!

A dielektrikum hővezetési tényezőjével fordítottan arányos a c paraméter értéke. Az elektród vastagságának hatása csak igen nagy ($\alpha > 5000$) tényezők mellett válik észrevehetővé. Az elektród hővezetési tényezőjének hatását az alábbi táblázat mutatja:

λ_2 [W/mC°]	75	100	125	150	175	200	225	250
c	0,6235	0,6237	0,6240	0,6242	0,6243	0,6244	0,6245	0,6245

* A dielektrikum főbb adatai: $\lambda_1 = 0{,}16$ [W/mC°], $\lambda_2 = 180$ [W/mC°], m = 0,002 [m], $\alpha = 10$ [W/m²C°], h = 0,01 [m], $\vartheta_0 = 20$ [C°].

A c paraméter vizsgálatából kitűnt, hogy igen erősen változik α és h változására, míg λ_1, λ_2 és m változására érzéketlenebb.

Nézzük meg a környezeti hőmérséklet és b hőfokkoefficiens változásának együttes hatását. Legyen a térfogati veszteségi szám 20 [C°]-on $p_0' = 11{,}12 \cdot 10^{12}$ [W/mV²]; a fent megadott dielektrikum adatokkal $c = 0{,}625$, ehhez a Függelék II. táblázatából a $q(c) = 0{,}308$ érték tartozik. Ezeket az adatokat az (51) kifejezésbe behelyettesítve:

$$U_{lab}(b, \vartheta_k) = \frac{\text{áll.}}{\sqrt{b}} e^{-\frac{b}{2}(\vartheta_k - \vartheta_0)} = \frac{52{,}3}{\sqrt{b}} e^{-\frac{b}{2}(\vartheta_k - 20)} \qquad (kV)$$

Számításaink eredményét a 15. ábrán láthatjuk. Az ábrából kitűnik, hogy mind a ϑ_k, mind a b paraméter változására igen nagymértékben megváltozik a labilitási feszültség értéke. Megemlítjük, hogy egyenfeszültségen T és ϑ_k változásának hatása hasonló lefolyású, csak számértékben különbözik a fentiektől.

10. Összefoglalás

A labilitási feltételből kiindulva két kifejezést származtattunk a labilitás feszültség számítására aszerint, hogy az alkalmazott feszültség egyen- illetve váltakozófeszültség. Bár a kapott két kifejezés minőségileg megegyezik egymással, számértékre különböző értéket ad. Mivel váltakozó feszültségen a veszteségek mindig nagyobbak a megfelelő egyenfeszültségű esethez képest, ezért $U_{lab}^{\sim}$ számértéke mindig kisebb lesz $U_{lab}^{=}$ számértékénél. Mindkét esetben számítottuk a jellemzőbb hőfokeloszlásokat, amelyekben alapvető eltérés van a két esetben. Megvizsgáltuk a labilitási feszültség értékét befolyásoló néhány tényezőt. Ismételten hangsúlyozni szeretnénk azt az igen fontos és érdekes tényt, hogy hővillamos átütés ideálisan hűtött dielektrikumban is létrejöhet! Az egyes paraméterek hatását a labilitási feszültség növelésénél tudjuk figyelembe venni, pl. kisebb hőfokkoefficiensű szigetelőanyag választásával stb.

Végezetül szeretnénk megemlíteni, hogy az átütési elméletekben alapvető fontosságú hővezetési differenciálegyenlet digitális számítógéppel megoldható különböző peremfeltételek esetére. A fent említett peremfeltételeken kívül igen könnyen figyelembevehető esetleges járulékos külső melegbeáramlás is, sík geometriájú elrendezésekre a (45) alakú differenciálegyenlet megoldásának egyik módja [34]-ben található. Számítógép segítségével a labilitási feszültség számítására a fentieknél általánosabb algoritmus is megadható; egy ilyen algoritmus kidolgozása [35]-ben található. Fenti levezetések mégis értékesek, mert sok gyakorlati esetben igen gyors becslést tesznek lehetővé a labilitási feszültség nagyságára vonatkozóan.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők ezúton is köszönetet mondanak Dr. EISLER János professzornak a kézirat gondos átnézéséért és értékes megjegyzéseiért.

IRODALOM

1. GÜLLNER, G.: Zum Durchschlag fester Isolatoren. *Archiv f. Elektr.* **21** (1928), 267—288.
2. HALBACH, K.: Untersuchungen über den Durchschlag und die Verluste einiger fester Isolierstoffe. *Archiv f. Elektr.* **21** (1928), 535—563.
3. INGE, L.—WALTER, A.: Durschschlag von festen Isolatoren bei Hochfrequenz. *Archiv f. Elektr.* **21** (1928), 209—227.
4. INGE, L.—WALTER, A.: Durchschlag von Isolatoren bei nohen Temperaturen. *Zeitsch. f. Phys.* **34** (1925) 15.
5. INGE, L.—WALTER, A.: Über den Durchschlag fester Isolatoren. *Zeitsch. f. Phys.* **32** (1925), 273.
6. INGE, L.—WALTER, A.: Durchschlag von Glas. *Zeitsch. f. Phys.* **37** (1926), 292.
7. INGE, L.—SEMENOFF, N.—WALTER, A.: Über den Durchschlag fester Isolatoren. *Archiv f. Elektr.* **17** (1927), 453.
8. RAYNER, E. H.: High-voltage Test and Energy Losses in Insulating Materials. *J.I.E.E.* **49** (1912).
9. EISLER, J.: Bevezetés a nagyfeszültségű technikába. Akadémiai Kiadó, 1966 Budapest.
10. VAJDA, GY.: Szigetelések romlása és romlásuk vizsgálata. Akadémiai Kiadó, 1964.
11. WHITEHEAD, S.: Dielectric Breakdown of Solids. Clarendon Press. Oxford 1951.
12. JACKSON, W.: The Insulation of Electrical Equipment. Chapman and Hall Ltd. London 1954.
13. QUINN, G. E.: A Method for Detecting the Ionization Point on Electrical Apparatus. *Trans. A.I.E.E.* **59** (1940), 680.
14. AUSTEN, A. E. W.—WHITEHEAD, S.: Discharges in Insulation under Alternating Current Stresses. *J.I.E.E.* **88** (1941), 62.
15. WHITEHEAD, J. B.—SHAW, M. R. jr.: The Detection of Initial Failure in High-voltage Insulation. *Trans. A.I.E.E.* **60** (1941), 267—272.
16. MOON, P. H.—NORCROSS, A. S.: Three Regions of Dielectric Breakdown. *Trans. A.I.E.E.* **49** (1930), 755—762.
17. CSERNÁTHONY, H. A.—HORVÁTH, T.: Nagyfeszültségű technika. Tankönyvkiadó, Budapest 1969.
18. SZKANAVI, G. I.: Fizika dielektrikov (oblaszti szilnüh polej). Moszkva 1958.
19. SIMONYI, K.: Elméleti villamosságtan. Tankönyvkiadó, Budapest 1967.
20. BELLMAN, R.: On the Existance and Boundness of Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations of Parabolic Type. *Trans. Am. Math. Soc.* No. 2 (1948).
21. CARSLAW, H. S.—JAEGER, J. C.: Conduction of Heat in Solids. Clarendon Press. Oxford 1959.
22. MIHEJEV, M. A.: A hőátadás gyakorlati számításának alapjai. Tankönyvkiadó, Budapest 1956.
23. WALKER, M.: Theory of Machine Design. *J.I.E.E.* **52** (1913), 51.
24. WAGNER, K. W.: The Physical Nature of the Electrical Breakdown of Solid Dielectrics. *J.I.E.E.* **41** (1922), 1034—1044.
25. KÁRMÁN, T.: Über das thermisch-elektrische Gleichgewicht in festen Isolatoren. *Archiv f. Elektr.* **13** (1924), 174—180.
26. ROGOWSKY: Der Durchschlag fester Isolatoren. *Archiv f. Elektr.* **13** (1924), 153—174.
27. GEMANT, A.—WHITEHEAD, S.: Thermal Instability of Dielectrics for Alternating Voltages. *Phil. Mag.* **27** (1939), 582—595.
28. GÄNGER, B.: Der Wärmeelektrische Durchschlag. *Archiv f. Elektr.* **32** (1938) 346—348.
29. WHITEHEAD, S.—NETHERCOT, W.: The Breakdown of Dielectrics under High Voltage with Particular Reference to Thermal Instability. *Proc. Phys. Soc.* **47** (1935) 974.
30. WHITEHEAD, J. B.: The Dielectric Losses in Impregnated Paper. *A.I.E.E.* **52** (1933), 667.
31. WHITEHEAD, S.: The Thermal Stability of a Cylindrical Stratified Dielectric. *Phil. Mag.* **27** (1939), 276—285.
32. FOK, V. A.: Zur Wärmetheorie des elektrischen Durchschlages. *Archiv f. Elektr.* **19** (1927—28), 71—81.
33. VAJTA, M. ifj.: Diplomaterv. B.M.E. Nagyfeszültségű Technika és Villamos Készülékek Tanszék, 1971.

34. VAJTA, M. ifj.: Sík dielektrikumok stacioner hőfok-, potenciál- és térerősségeloszlásának számítása digitális számítógéppel. *Számológép* **2** (1972) (közlés alatt).
35. VAJTA, M. jr.: Digital Computer Analysis of Thermal Breakdown Voltage in Solid Dielectrics. *Periodica Polytechnica* **16** (1972), 281–300

Determination of the Thermal Breakdown Voltage for D.C. and A.C. Voltages. After the definition of the conceptions "thermal breakdown" and "thermal instability" a short survey of the history of the thermal breakdown theories is given. After writing up the general instability equations for D.C. voltages the expression of the thermal breakdown voltage for a specified temperature dependence of the resistivity is derived, then the same derivation for A.C. voltages is performed in a similar way. The individual temperature distributions are calculated for both cases, the obtained results tabulated by a computer are presented and the effects of some parameters on the value of the thermal breakdown voltage are investigated.

Bestimmung der Wärmekippspannung für Gleich- und Wechselspannung. Nach Definition der Begriffe Wärmedurchschlag und Wärmeinstabilität bringt die Arbeit einen kurzen Überblick über die Literatur, die sich mit der Theorie des thermoelektrischen Durchschlags beschäftigt. Für Gleichspannung wird der Ausdruck für die Wärmekippspannung nach Anschreiben der allgemeinen Labilitätsgleichungen auf die Temperaturabhängigkeit eines gegebenen spezifischen Widerstands angewendet, und dann wird in ähnlicher Weise der Ausdruck für die Wärmekippspannung auch für den Fall der Wechselspannung abgeleitet. In beiden Fällen wurden auch die einzelnen Temperaturverteilungen berechnet, die Ergebnisse tabelliert und die Wirkung von einigen die Wärmekippspannung beeinflussenden Parametern wurde untersucht.

MATEMATIKAI MODELLEK ABSZORPCIÓS FOLYAMATOK LEÍRÁSÁRA

BALÁZS TIBOR*
PALÁNCZ BÉLA**
PARTI MIHÁLY***

[Beérkezett 1971. december 8-án]

Az egyik leggyakrabban alkalmazott vegyipari művelet az abszorpció, melynek során két- vagy több komponensű gázelegyből egy vagy több komponenst távolítanak el folyadékfázissal (a szokásos elnevezés: könnyű-, illetve nehézfázis). A műveletet főleg tornyos berendezésekben valósítják meg, s a műveleti méretezés fő célja az abszorpciós oszlop főméreteinek meghatározása úgy, hogy az adott mértékű koncentráció változás létrejöjjön. E cikk az adszorpciós folyamat néhány kérdésével foglalkozik, s a nyert összefüggések számítógépi megoldásával számpéldákat közöl.

Jelölések

Latin betűk

a, b, c	együtthatók
d, e, f, g	együtthatók
k [kmól/(m² h)], [m/h]	anyagátadási tényező
$\bar{k}$ [kcal/(m² h °C)]	hőátbocsátási tényező
k_{II} [m³/(kmól h)]	reakciósebességi állandó
n [kmól]	mólszám
q_x [kcal/kmól oldat]	integrális oldáshő
q_X [kcal/kmól oldószer]	integrális oldáshő
r [kcal/(kg)]	párolgáshő
s [m²]	anyagátadó felület
$\bar{s}$	dimenzionélküli helykoordináta
t [°C]	a folyadékfázis hőmérséklete
x [kmól oldott/kmól oldat]	móltört folyadékfázisban
y [kmól oldott/kmól elegy]	móltört gázfázisban
z [m]	hosszúság
A [m²]	hőátadó felület
C [kcal/kmól °C]	mólhő
D [kmól/(m h)]	molekuláris diffúziós tényező
G [kmól/h]	a gázfázis moláris sebessége
I [kcal/kmól]	moláris entalpia
K [kmól/(m² h)]	anyagátbocsátási tényező
$\bar{K}$	egyensúlyi állandó
L [kmól/h]	a folyadékfázis moláris sebessége
M [kg/kmól]	molekulasúly
N [kmól/m² h]	anyagáram
P [kp/m²]	össznyomás a gázfázisban
R [mkp/°C kmól]	általános gázállandó
Q [kcal]	hőmennyiség
S [m²]	anyagátadó felület
T [°C]	a gázfázis hőmérséklete
X [kmól oldott/kmól oldószer]	mólarány folyadékfázisban
Y [kmól oldott/kmól inert]	mólarány gázfázisban

* Balázs Tibor, 1119 Budapest, Csurgói út 39/A.
** Palánczy Béla, 1085 Budapest, Salétrom u. 9.
*** Parti Mihály, 1111 Budapest, Kende u. 18.

Görög betűk

α [kcal/(m² h °C)]	hőátadási tényező
δ [m]	koncentrációhatárréteg vastagsága
ϑ [°C]	hőmérséklet
Θ [kmól/(m h)]	diffuzivitás
φ	együttható
Φ [kcal/kmól oldott]	differenciális oldáshő
$\overline{\Phi}$ [kcal/kmól oldott]	közbenső oldáshő
Φ_r [kcal/kmól oldott]	reakcióhő
ψ [m²/m²]	felületarány

Indexek

A	abszorpciós (hőeffektus)
A, B	illető komponensre vonatkozó
E	elvont
G	gázfázisra vonatkozó
L	folyadékfázisra vonatkozó
P	állandó nyomáson vett érték
i	az i-edik komponensre vonatkozó
l	az l-edik komponensre vonatkozó
il	az i-ediknek l-ediken keresztül
s	inertre vonatkozó
"	oldószerre vonatkozik a gázfázisban egyensúlyi érték

1. Abszorpciós folyamat termikus hatásokkal

Az abszorpciós folyamat tárgyalásakor általában feltételezik, hogy a folyamat izotermikus, azaz: mindkét fázis hőmérséklete minden pontban azonos. Ez az esetek jelentős részében nem áll fenn, de a számítási módot igen leegyszerűsíti. Igen sok esetben nem lehet az abszorpciós folyamatok tárgyalásakor a hőhatást elhanyagolni, az abszorpció tehát nem szükségképpen izotermikus.

A hőmérséklet változása az alábbi hatásokat gyakorolja a folyamatra:

— megváltoztatja az egyensúlyi görbe és a munkavonal helyzetét, s ezzel megváltoztatja a szükséges érintkező felület nagyságát,

— a fázisokban meglevő koncentrációgradienseken kívül hőmérséklet gradiens is jelentkezik, s így együttes hő- és anyagátadási folyamat játszódik le

1.1. A matematikai modell

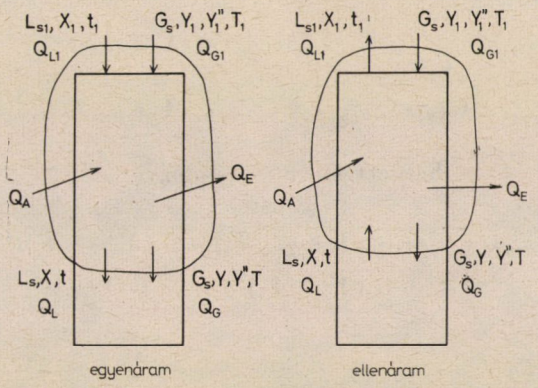
Az abszorpciós oszlop főméreteinek meghatározását szolgáló összefüggések leszármaztatásához fel kell írnunk az oszlop hő- és anyagmérlegét, amelyeket az 1. ábra alapján integrális és differenciális formában írunk fel.

A mérlegek felírása előtt el kell dönteni az alkalmazandó koncentrációegységeket.

Az összetételt mólaránnyal fejezzük ki:

$$X = \frac{n_A}{n_s} = \frac{n_A}{L_s}; \qquad Y = \frac{n_A}{n_s} = \frac{n_A}{G_s}; \qquad Y'' = \frac{n_B}{n_s} = \frac{n_B}{G_s},$$

ahol Y az oldott anyag, Y'' az oldószer koncentrációját jelöli a gázfázisban (utóbbi változhatik a hőmérsékletváltozás következtében).



1. ábra

Integrális mérlegek:

Anyagmérleg az oldott anyagra:

$$L_s X \mp G_s Y_1 = L_{s1} X_1 \mp G_s Y.$$

Anyagmérleg az oldószerre:

$$L_s \mp G_s Y_1'' = L_{s1} \mp G_s Y'',$$

amely összefüggésekben a felső előjel egyenáramra, az alsó pedig ellenáramra vonatkozik.

A fentiekből meghatározható az oszlop munkavonala:

$$Y = \mp \frac{L_s}{G_s} X \pm \frac{L_s}{G_s} X_1 + Y_1 - (Y_1'' - Y'') X_1. \qquad (3)$$

Az "L_s/G_s" menyiség a görbe helyi meredeksége, s (3)-ból látható, hogy a görbe mólarány koncentrációegységek használata esetén sem egyenes az utolsó járulékos tag következtében.

Hőmérleg:

$$\mp Q_L + Q_{G1} + Q_A = \mp Q_{L1} + Q_G + Q_E. \tag{4}$$

A (4) egyenlőség kifejezéséhez definiáljuk a könnyű és nehéz fázis entalpiáját

$$I_L = (XC_A + C_B)t = C_l t, \tag{5}$$

$$I_G = (C_{PGS} + YC_{PAG} + Y''C_{PBG})T + Y''M_B r_{Bo} + YM_A r_{Ao}, \tag{6}$$

$$I_G = C_G T + Y''M_B r_{Bo} + YM_A r_{Ao},$$

ahol

$$C_G = C_{PGS} + YC_{PAG} + Y''C_{PBG}.$$

Az (5)-t és (6)-t a (4)-be helyettesítve és rendezve:

$$\mp L_s(C_l t - C_{L1}t_1) + Q_A = G_s(C_G T - C_{G1}T_1) + G_s(Y'' - Y_1'')(M_B r_{Bo} - C_{L1}t_1) + \\ + G_s(Y - Y_1)M_A r_{Ao} + Q_E. \tag{7}$$

Differenciális mérlegek.

A (3) és (7) összefüggések differenciálásával nyerjük a megfelelő differenciális mérlegeket. Anyagmérleg:

$$L_s \mathrm{d}X + X\mathrm{d}L_s = \mp G_s \mathrm{d}Y,$$

de

$$\mathrm{d}L_s = \mp G_s \mathrm{d}Y'',$$

így

$$L_s \mathrm{d}X = \mp G_s \mathrm{d}Y \pm G_s X \mathrm{d}Y''. \tag{8}$$

Hőmérleg:

$$\mp (L_s C_A t \mathrm{d}X + L_s C_L \mathrm{d}t) + \mathrm{d}Q_A = G_s C_G \mathrm{d}T + G_s(C_{PAG}T + M_A r_{Ao})\mathrm{d}Y + \\ + G_s(M_B r_{Bo} + C_{PBG}T - C_L t)\mathrm{d}Y'' + \mathrm{d}Q_E,$$

amelyet az alábbi integrálási hőmérleg (a (4)-ben kifejtett alakja) differenciálásával és a differenciálok behelyettesítésével kaptunk:

$$\mp L_s I_L + G_s I_{G1} + Q_A = \mp L_{s1} I_{L1} + G_s I_G + Q_E.$$

Ezt és differenciálva:

$$\mp L_s \mathrm{d}I_L \mp I_L \mathrm{d}L_s + \mathrm{d}Q_A = G_s \mathrm{d}I_G + \mathrm{d}Q_E.$$

Itt

$$\mathrm{d}Q_A = \mathrm{d}n_A \Phi = -G_s G_s \mathrm{d}Y \Phi,$$

és a hőcserélő készülékek alapegyenlete szerint

$$\mathrm{d}Q_E = \bar{k}(t - \vartheta)\,\mathrm{d}A = \bar{k}(t - \vartheta)\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s,$$

ahol

$$\Psi = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\mathrm{m}^2 \text{ külső hűtőfelület}}{\mathrm{m}^2 \text{ belső érintkező felület}}\right],$$

$$dQ_E = \bar{k}(t - \vartheta)\psi ds.$$

A dQ_A, dQ_E összefüggést, valamint $L_s dX$-et behelyettesítve és rendezve:

$$\mp L_s C_L dt = G_s C_G dT + G_s(M_A r_{A0} + C_{PAG} T - C_A t + \Phi)dY + G_s(M_B r_{B0} + C_{PBG} T - C_B t)dY'' + \bar{k}(t - \vartheta)\psi ds,$$

azaz

$$L_s C_L dt = G_s C_G dT + G_s \Phi' dY + G_s \Phi'' dY'' + \bar{k}(t - \vartheta)\psi ds,$$

ahol

$$\Phi' = \Phi + C_{PAG} T + M_A r_{A0} - C_A t,$$

és

$$\Phi'' = M_B r_{B0} + C_{PBG} T - C_B t.$$

Az átadási egyenletek figyelembevételével [3, 5]:

$$-G_s dY = K_y(Y - Y^*)ds,$$

$$G_s dY'' = K_y''(Y''^* - Y'')ds,$$

$$G_s C_G dT = \alpha(t - T)ds,$$

amelyekből

$$-\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} = \frac{K_Y}{G_s}(Y - Y^*),$$

$$-\frac{\mathrm{d}Y''}{\mathrm{d}s} = \frac{K_Y''}{G_s}(Y''^* - Y''), \qquad (9)$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \frac{\alpha}{G_s C_G}(t - T).$$

Így:

$$\mp \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{G_s}{L_s C_L}\left[C_G \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \Phi' \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} + \Phi'' \frac{\mathrm{d}Y''}{\mathrm{d}s}\right] + \frac{\bar{k}\Psi}{L_s C_L}(t - \vartheta). \qquad (10)$$

Az utóbbi összefüggések felírásakor feltételeztük, hogy az "A" és "B" komponensek egymástól függetlenül diffundálnak, amelynek feltétele a kis koncentráció [1, 2, 3].

Abszorpciós folyamatok osztályozása

A fenti általános összefüggések bizonyos esetekben egyszerűsíthetők, amelyeket csoportokba foglalunk:

Izotermikus abszorpció: $t = T = \text{konst}$ és $Y'' = \text{konst}$,
Adiabatikus abszorpció: $dQ_E = 0$; $Q_E = 0$,
Politropikus abszorpció: $dQ_E \neq 0$; $t \neq \text{konst}$.

Az egyes csoportokat részletesen tárgyaljuk az alábbiakban.

Izotermikus abszorpció. Ebben az esetben

$$dt = dT = dY'' = 0,$$

$$t = T,$$

amellyel a differenciális anyagmérleg

$$L_s dX = \mp G_s dY,$$

Integrális formában átrendezve

$$Y = \mp \frac{L_s}{G_s} X \pm \frac{L_s}{G_s} X_1 + Y_1,$$

tehát a munkavonal egyenes, amelynek meredeksége az inert fázisok mennyiségének hányadosa. A főméretek meghetározásával kapcsolatban az irodalomra utalunk [4].

Az izotermikus abszorpció feltételi egyenlete a (10) hőmérleg, amely jelenleg

$$0 = G_s \Phi' \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} + k\Psi (t - \vartheta).$$

Ebből a szükséges hűtőfelület nagysága:

$$A = \frac{G_s}{k} \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{\Phi'}{t - \vartheta} \mathrm{d}Y. \tag{11}$$

Adiabatikus abszorpció. Ilyenkor

$$dQ_E = 0,$$

$$Q_E = 0,$$

így

$$L_s dX = \mp G_s dY \pm G_s X dY'', \tag{8}$$

$$L_s C_L dt = \mp G_s C_G dT \mp G_s \Phi' dY \mp G_s \Phi'' dY''. \tag{12}$$

Ebben az esetben az összes felszabadult hőmennyiség a közegek melegítésére, illetve elpárologtatásra fordítódik.

Politropikus abszorpció. Most a hőmérleget a (10), az anyagmérleget a (8) összefüggés adja. Az előbbiben szereplő ψ hányadost a geometriai viszonyok határozzák meg, s a környezeti hőmérséklet általában állandónak vehető az oszlop mentén.

A főméretek meghatározását szolgáló egyenletrendszert összefoglaljuk:

$$L_s dX = \mp G_s dY \pm G_s X dY'', \tag{8}$$

$$-\frac{dY}{ds} = \frac{K_Y}{G_s}(Y - Y^*),$$

$$\frac{dY''}{ds} = \frac{K_Y}{G_s}(Y''^* - Y''), \tag{9}$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\alpha}{G_s C_G}(t - T),$$

és

$$\mp \frac{dt}{ds} = -\frac{G_s}{L_s C_L}\left[C_G \frac{dT}{ds} + \Phi' \frac{dY}{ds} + \Phi'' \frac{dY''}{ds}\right] + \frac{k\Psi}{L_s C_L}(t - \vartheta). \tag{10}$$

Az egyenletrendszerhez vegyük még hozzá az egyensúlyt kifejező összefüggéseket:

$$Y^* = (a + bt)X, \tag{13}$$

és

$$Y''^* = \varphi(t). \tag{14}$$

Így tehát a (8), (9), (10), (13) és (14) egyenletek adják a főméretek meghatározásához megoldandó egyenletrendszert.

1.2. A peremfeltételek meghatározása

A fenti egyenletrendszer egyértelműsége érdekében szükséges a peremfeltételek megadása is, amelyek a következők:

$$Y(0) = Y_1$$

$$Y(S) = Y_2$$

$$X(0) = X_1 \text{ (ellenáramnál: } X(S) = X_2)$$

$$T(0) = T_1$$

$$t(0) = t_1 \text{ (ellenáramnál: } t(S) = t_2)$$

$$Y''(0) = Y_1''$$

és amennyiben az inert folyadékfázis mennyisége nem rögzített, akkor

$$X(S) = X_2 \text{ (ellenáramnál: } X(0) = X_1).$$

Ezek a feltételek egyenáramnál rendszerint ismeretesek, ellenáramnál azonban t_1, a folyadékfázis kilépő hőmérséklete ismeretlen — egyébként természetesen meghatározott érték (helyette $t(S) = t_2$ adott). A következőképpen járhatunk el: először feltételezzük, hogy

$$T_2 = t_2,$$

azaz a belépő folyadékfázis hőmérséklete megegyezik a kilépő gázfázishőmérsékletével, s ekkor az integrális hőmérlegből t_1 — a kilépő folyadékfázis hőmérséklete — már meghatározható, ha még azt is feltételezzük, hogy a gázfázis az oldószergőzöktől valamilyen mértékben telítetten lép ki az oszlopból, s így:

$$Y_2'' = \varphi Y_{tel_2}'' = \varphi Y_2''.$$

1.3. Numerikus megoldás

Adott peremfeltételek esetében a (8), (9), (10), (13) és (14) egyenletekből álló egyenletrendszer számítógépi úton megoldható. Feladat azon $s = S$ felület meghatározása, amelynél

$$Y(s) = Y(S) = Y_2,$$

amely előírt érték.

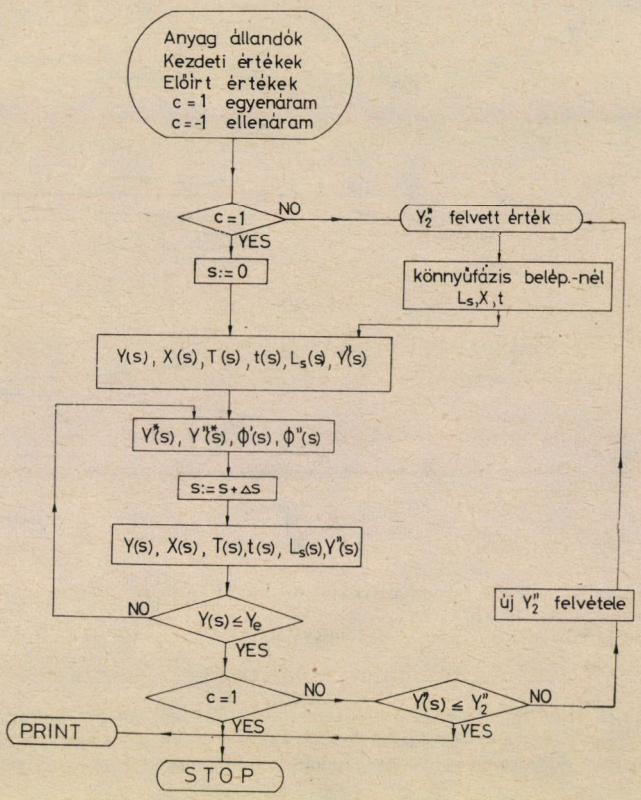
Ellenáramú oszlop számításakor esetleg próbálkozásra van szükség mindaddig, amíg Y_2'' és t_1 előírt értéket helytelenül vesszük fel.

A számításokat Hewlett—Packard 9100 B típusú számítógépen végeztük. A számítás $\Delta s = 0{,}1$ m²-ként történt, s a számított eredmények kiiratása 20 m²-ként.

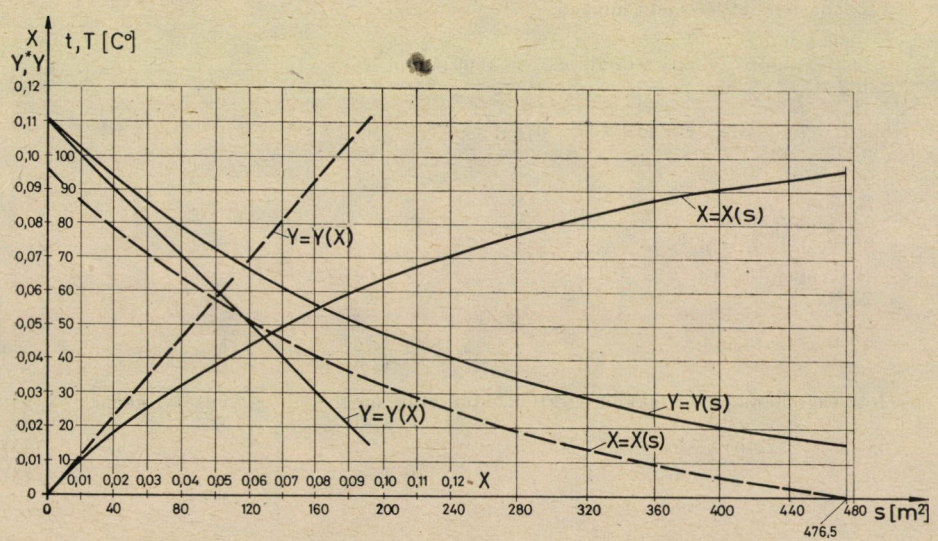
A számítás menetét a 2. ábra mutatja.

1.4. Számpélda

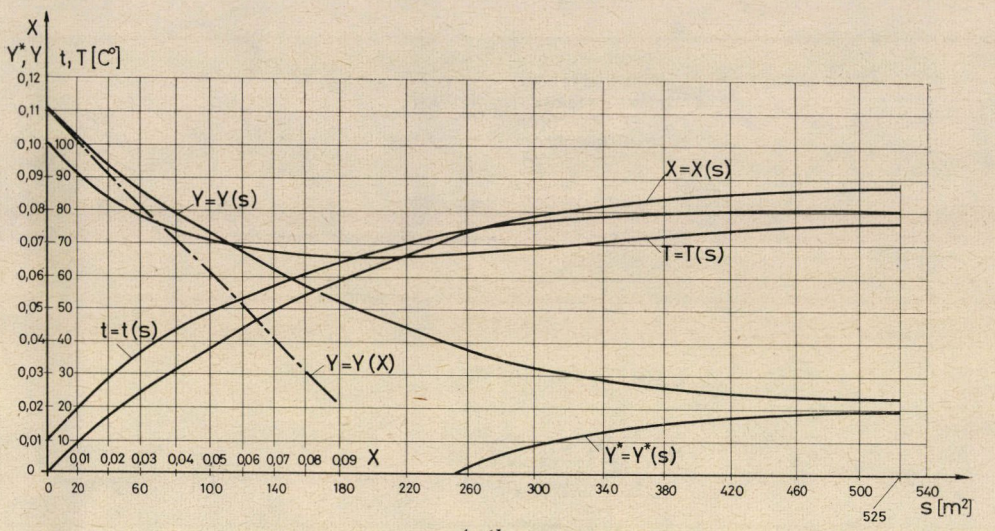
A számítási módszer alkalmazására számpéldaként sósavgázt adszorbeáltatunk vízzel egyen-, illetve ellenáramban az alábbi variációkban:


Anyag állandók
Kezdeti értékek
Előírt értékek
c = 1 egyenáram
c = -1 ellenáram
c = 1
NO
YES
Y_2^* felvett érték
s := 0
könnyűfázis belép.-nél
L_s, X, t
Y(s), X(s), T(s), t(s), $L_s(s)$, $Y'(s)$
$Y^*(s)$, $Y''^*(s)$, $\phi'(s)$, $\phi''(s)$
s := s + Δs
Y(s), X(s), T(s), t(s), $L_s(s)$, $Y''(s)$
$Y(s) \leq Y_e$
NO
YES
új Y_2'' felvétele
c = 1
NO
YES
$Y''(s) \leq Y_2''$
NO
YES
PRINT
STOP

2. ábra


X
Y*,Y
t,T [C°]
0,12
0,11
0,10
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0,01 0,02 0,03 0,04 0,05 0,06 0,07 0,08 0,09 0,10 0,11 0,12 X
0 40 80 120 160 200 240 280 320 360 400 440 480 s [m²]
476,5
Y=Y(X)
X=X(s)
Y=Y(X)
Y=Y(s)
X=X(s)

3. ábra



4. ábra

1. Izotermikus abszorpció zérus abszorpcios hővel oldószer bepárolgás nélkül egyen- és ellenáramú toronyban (3. ábra).

2. Izotermikus abszorpció nem zérus abszorpciós hővel. Az elvonandó hőmennyiség:

$$Q_A = 1{,}0912 \cdot 10^6 \text{ kcal/h}$$

3. Adiabatikus abszorpció oldószer bepárolgás nélkül egyen- és ellenáramú toronyban (4. és 5. ábra).

4. Adiabatikus abszorpció oldószer bepárolgással egyen- és ellenáramú toronyban (6. és 7. ábra).

5. Politropikus abszorpció oldószer ;bepárolgással egyen- és ellenáramú toronyban (8. és 9. ábra).

A feladathoz felhasznált adatok:

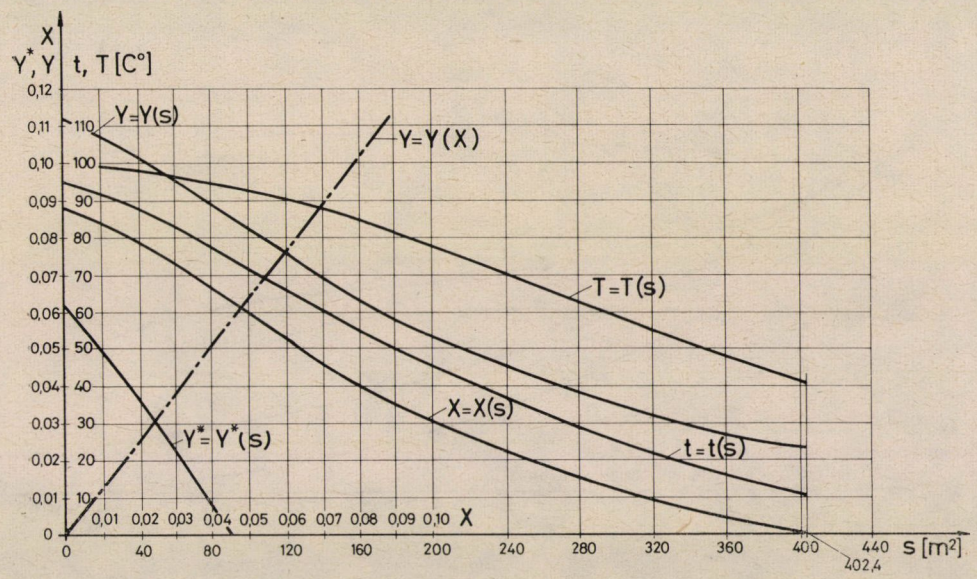
G_S = 1000 kmól/h
L_{S1} = 1000 kmól/h (ellenáramnál: $L_{S2} = 1000$ kmól/h)
T_1 = 100 °C
t_1 = 10 °C (ellenáramú eset: $t_2 = 10$ °C)
X_1 = 0 (ellenáramú eset: $X_2 = 0$)
Y_1 = 0,111
Y_1'' = 0,01
K_Y = 4,2 kmól/(m² h)
K_Y'' = 6,2 kmól/(m² h)
α = 40 kcal/m² h °C)
$\bar{k}$ = 10 kcal/(m² h °C)
ϑ = 20 °C
Ψ = 0,01
Φ = 12 400 kcal/kmól

Az egyéb anyagjellemzőket szakkönyevkből határoztuk meg, és az egyensúlyi görbék [2, 6]:

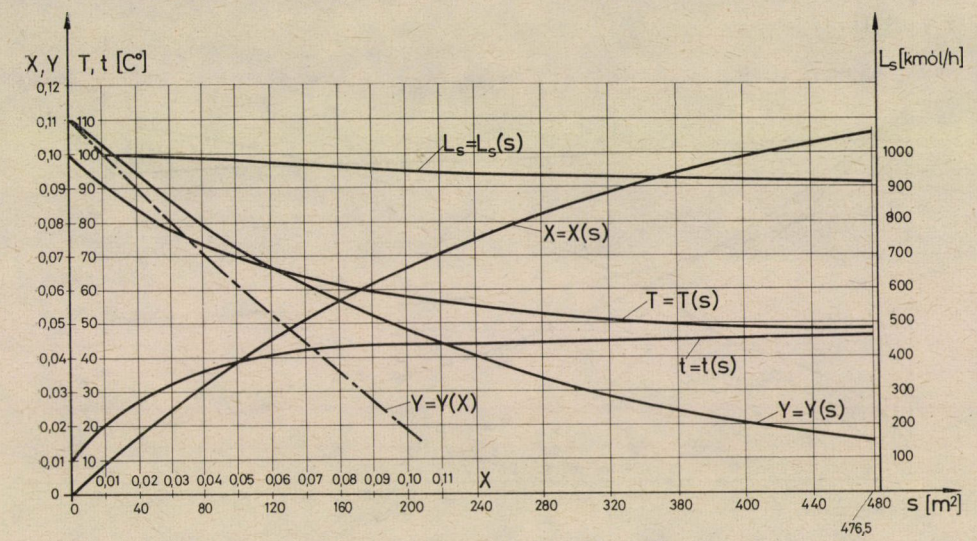
$$Y^* = (0{,}0333\ t - 2{,}46)X, \quad \text{ha } t > 74 \text{ °C}, \tag{13}$$
$$Y^* = 0 \quad \text{ha } t < 74 \text{ °C}, \tag{13}$$

és

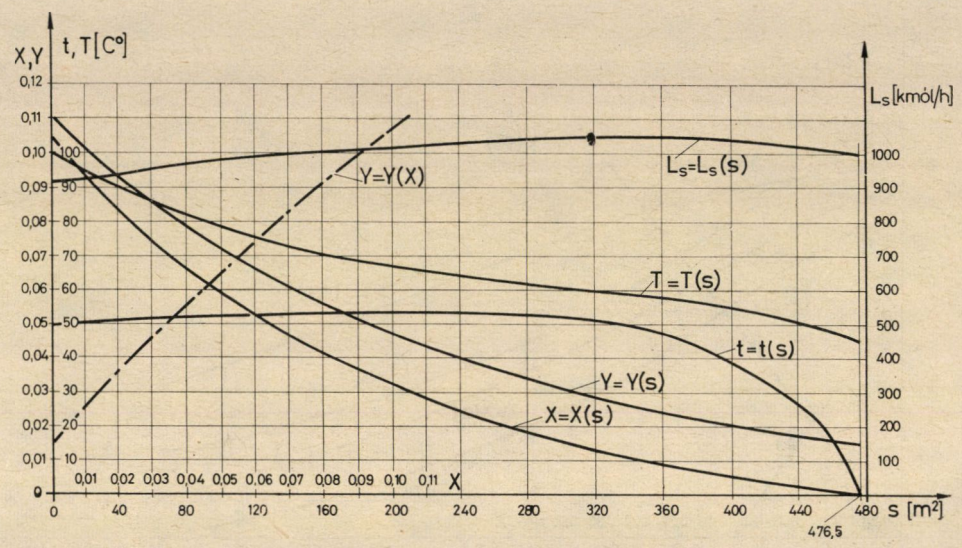
$$Y''^* = a + bt, \tag{14}$$


X
Y*, Y
t, T [C°]
Y=Y(s)
Y=Y(X)
T=T(s)
X=X(s)
t=t(s)
Y*=Y*(s)
X
s [m²]
402,4

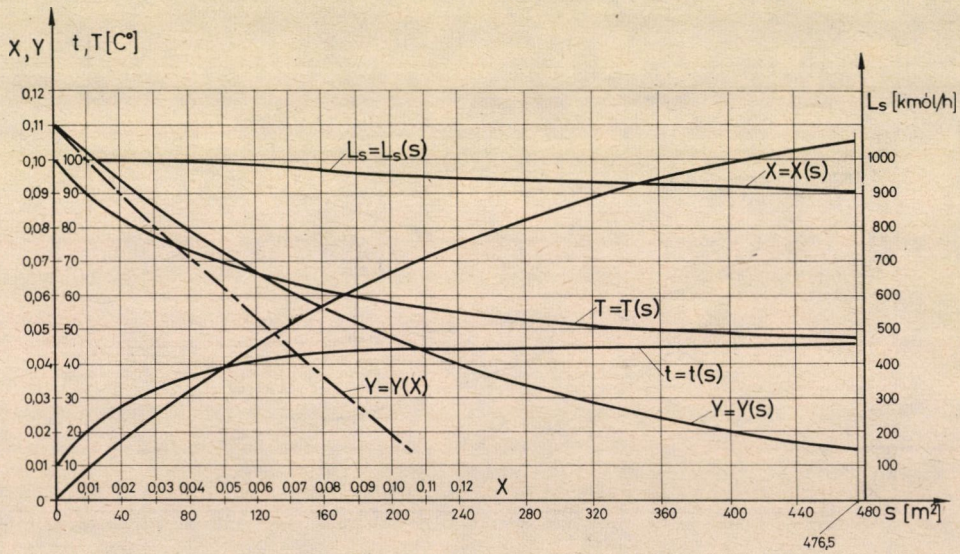
5. ábra


X, Y
T, t [C°]
Ls [kmól/h]
Ls=Ls(s)
X=X(s)
T=T(s)
t=t(s)
Y=Y(X)
Y=Y(s)
X
s [m²]
476,5

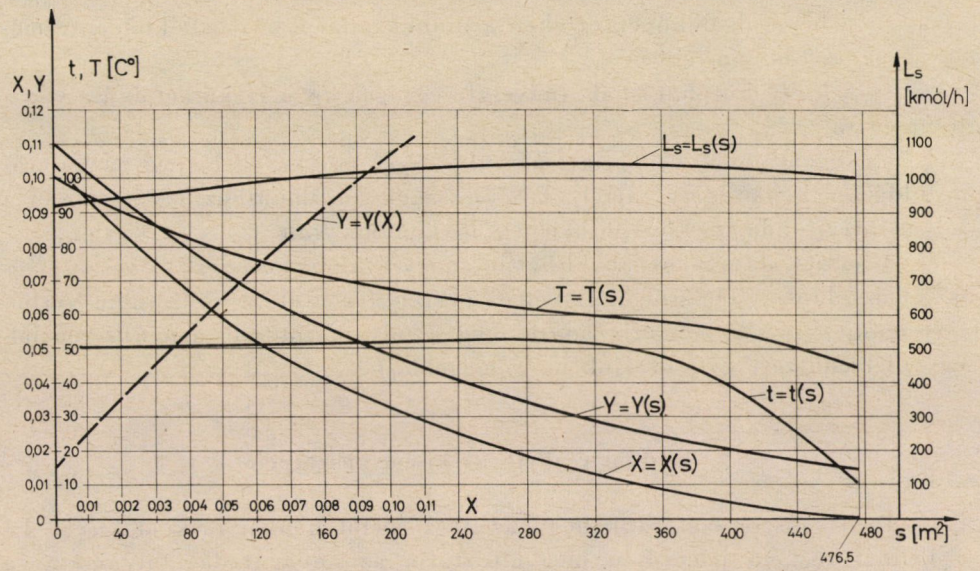
6. ábra


X,Y
t,T[C°]
Ls[kmól/h]
Ls=Ls(s)
Y=Y(X)
T=T(s)
t=t(s)
Y=Y(s)
X=X(s)
X
S [m²]
476,5

7. ábra


X,Y
t,T[C°]
Ls [kmól/h]
Ls=Ls(s)
X=X(s)
T=T(s)
t=t(s)
Y=Y(X)
Y=Y(s)
X
S [m²]
476,5

8. ábra



9. ábra

10 C°-os intervallumokban egyenessel közelítet-ük (tapasztalatunk szerint legpontosabb módszer ilyen széles hőmérséklet-intervallumban), amelyek:

t	a	b
$10 < t < 20$ —	0,001	0,0011
$20 < t < 30$ —	0,016	0,0020
$30 < t < 40$ —	0,062	0,0035
$40 < t < 50$ —	0,161	0,0060
$50 < t < 60$ —	0,392	0,0106
$60 < t < 70$ —	0,955	0,0200
$70 < t < 80$ —	2,636	0,0440
$80 < t < 90$ —	9,964	0,1358
$90 < t < 95$ —	46,460	0,5418

A számpéldából levonható következtetések:

— az abszorpciós hő igen jelentős hatással van a folyamatra, a szükséges érintkező felület nagyságát jelentősen megváltoztatja (különösen így van ez rosszabbul abszorbeálódó anyagoknál),

— a hőmérsékletváltozás hatására az oldószer egy része (kb. 10%) bepárolog a gázfázisba, s így a hőmérséklet lényegesen kisebb mértékben emelkedik, mint oldószer bepárolgás nélkül,

— a bepárolgás következtében a munkavonal a használt koncentrációegységek esetén sem egyenes,

— a külső hűtőhatásnak (hőveszteség) igen kismértékű befolyása van a folyamatra,

— ellenáramnál a folyamat alakulása igen érdekes: a belépő gázba erős az oldószer bepárolgása, amely később kikondenzálódáshoz vezet, mivel a folyadékfázis hőmérséklet görbéjének maximuma van.

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy általában célszerű az abszorpciós hő és az oldószer bepárolgás figyelembevétele (ez utóbbit eddig nem vették figyelembe). A cikkben erre adjuk meg a folyamatot jellemző differenciálegyenletrendszert és mutatjuk be a megoldást.

2. Kémiai reakcióval kísért abszorpció

Igen sokszor előfordul, hogy az abszorpciót kémiai reakció kíséri. Ez a kémiai reakció jelentősen megváltoztatja az anyagátadás folyamatát a nehézfázis oldalán. Egyrészt megváltozik a koncentráció profil közvetlenül a reakciótermék hatására, másrészt a reakció során keletkező hő hasonló módon befolyásolja az abszorpciót, mint adiabatikus esetben.

A kémiai reakciókat elsősorban rendűségükkel jellemezhetjük. Az elsőrendű kémiai reakció esetében a diffúziót leíró differenciálegyenlet zárt alakban megoldható. Ekkor szokás bevezetni az ún. Hatta-féle számot, amely a folyadékoldali anyagátadási tényezők hányadosa a kémiai, illetve fizikai abszorpció során.

Problématikusabb feladat másodrendű reakció esetén előállítani a megoldást. Az alábbiakban másodrendű kémiai reakcióval kísért abszorpció esetére mutatunk be egy olyan matematikai modellt, amelynek numerikus megoldása kimondottan számítógéppel célszerű.

A modell alapján lehetővé válik kémiai reakcióval kísért abszorpciónál az előírt anyagátadás mértékét megvalósító érintkeztetési felület meghatározása.

2.1. *A matematikai modell*

A matematikai modell meghatározására, mint eddig is, a fizikai folyamatot leíró mérleg és vezetési egyenletek szolgálnak. Az első összefüggést a 10. ábra alapján a gázfázisra felírt hőmérlegből nyerhetjük:

$$C_G G_s T = C_G G_s (T + \mathrm{d}T) + (\bar{k}T - t)\,\mathrm{d}s,$$

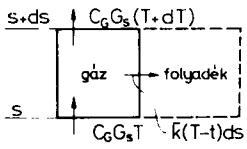
azaz

$$-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \frac{\bar{k}}{C_G G_s}(T - t). \tag{15}$$

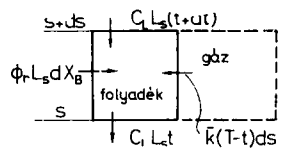
A második egyenletet a 11. ábra alapján a fázisok közötti hőátadást leíró vezetési egyenlet adja:

$$C_L L_s(t + \mathrm{d}t) + \bar{k}(T - t)\mathrm{d}s + \Phi_r L_s \mathrm{d}X_B = C_L L_s t,$$

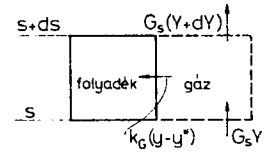
$$\pm \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\bar{k}}{L_s C_L}(T - t) \mp \frac{\Phi_r}{C_L} \frac{\mathrm{d}X_B}{\mathrm{d}s}, \tag{16}$$



10. ábra



11. ábra



12. ábra

Ebben az összefüggésben a felső előjel egyenáramra, az alsó ellenáramra vonatkozik.

A következő mérleg egyenlet az anyagátadásra vonatkozna, azonban a szokásos anyagmérleg itt nem írható fel, azaz

$$L_s \mathrm{d}X_A \neq + G_s \mathrm{d}Y,$$

hiszen a $G_s \mathrm{d}Y$ anyagmennyiség egy része a kémiai reakció során átalakul, így

$$|L_s \mathrm{d}X_A| < |G_s \mathrm{d}Y|.$$

Ezért a 12. ábra alapján a további összefüggést az anyagátadásra vonatkozó vezetési egyenlet szolgáltatja:

$$G_s(Y + \mathrm{d}Y) + k_G(Y - Y^*)\mathrm{d}s = G_s Y,$$

$$-\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} = \frac{k_G}{G_s}(Y - Y^*). \tag{17}$$

A fázishatáron levő koncentrációk közötti kapcsolatot az egyensúlyi görbe adja:

$$y^* = y^*(x_A^*, t). \tag{18}$$

Feltételezzük, hogy a folyadékfázisban levő hőfokgradiens nem jelentős, ui. elvileg a fázishatáron található hőmérsékletre volna szükség.

Ezután vizsgáljuk a folyadékfázisban történő anyagátadást a kémiai reakció figyelembevételével.

A reakciót leíró sztöhiometriai egyenlet:

$$aA + bB = cC + dD.$$

Ha az anyagátadás stacioner és konduktív, a diffúziót a következő egyenletek írják le másodrendű reakció esetében [2]:

$$\Theta_{AL} \frac{\mathrm{d}^2 \bar{x}_A}{\mathrm{d}z^2} = k_{II} \bar{x}_A \bar{x}_B ,$$

$$\Theta_{BL} \frac{\mathrm{d}^2 \bar{x}_A}{\mathrm{d}z^2} = \frac{b}{a} k_{II} \bar{x}_A \bar{x}_B .$$

A folyadékfázisban két komponens van jelen, A és B, valamint a reakciótermék. A további tárgyalás egyszerűsítése érdekében vezessük be a következő dimenzió nélküli változókat:

$$\eta = \frac{z}{\delta_L}; \qquad \beta = \frac{\bar{x}_A}{x}; \qquad \gamma = \frac{\bar{x}_B}{x_B}$$

Ezekkel, valamint a

$$\delta_L = \frac{\Theta_A}{k_L},$$

felhasználásával a fenti egyenletek könnyebben kezelhető alakra hozhatók. Ezt figyelembe véve, foglaljuk össze a kapott összefüggéseinket:

$$-\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = \frac{\bar{k}}{C_G G_s}(T - t), \tag{15}$$

$$\pm \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\bar{k}}{L_s C_L}(T - t) \mp \frac{\Phi_r}{C_L} \frac{\mathrm{d}X_B}{\mathrm{d}s}, \tag{16}$$

$$-\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} = \frac{k_G}{G_s}(Y - Y^*), \tag{17}$$

$$y^* = y^*(x_A^*, t), \tag{18}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 \beta}{\mathrm{d}\eta^2} = \frac{\Theta_{AL}}{k_L^2} k_{II} x_B \beta\gamma, \tag{19}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 \gamma}{\mathrm{d}\eta^2} = \frac{\mathrm{d}^2 \beta}{\mathrm{d}\eta^2} \frac{\Theta_{AL}}{\Theta_{BL}} \frac{b}{a} \frac{x_A}{x_B}. \tag{20}$$

A móltört és mólarány között a következő egyszerű kapcsolat van:

$$y = \frac{Y}{1 + Y},$$

illetve pl.

$$x_A = \frac{X_A}{1 + X_A + X_B}.$$

2.2. A peremfeltételek meghatározása

A fenti modell egyértelműsége érdekében a következő peremfeltételek szükségesek.

Egyenáram esetén ismernünk kell a beléőp értékeket:

$$x_A(0) = x_{A1},$$

$$x_B(0) = x_{B1},$$

$$y(0) = y_1,$$

$$t(0) = t_1,$$

$$T(0) = T_1,$$

valamint az átadott anyagmennyiség mértékére jellemző kilépő gázkoncentrációt:

$$y\ (S) = y_2.$$

Ellenáram esetében a változók következő értékei állnak rendelkezésünkre:

$$x_A(S) = x_{A2},$$

$$x_B(S) = x_{B2},$$

$$y(0) = y_1,$$

$$t(S) = t_2,$$

$$T(0) = T_1,$$

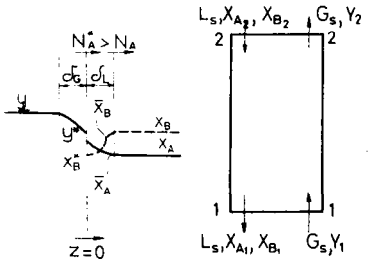
és az előírt kilépő koncentráció:

$$y(S) = y_2.$$

A (19) és (20) diffúziós egyenletekhez a 13. ábra alapján a következő peremfeltételek tartoznak:

$$z = 0\,; \qquad \bar{x}_A = x_A^*\,; \qquad \frac{\mathrm{d}\bar{x}_B}{\mathrm{d}z} = 0\,,$$

$$z = \delta_L; \qquad \bar{x}_A = x_A; \qquad \bar{x}_B = x_B\,,$$



13. ábra

azaz dimenziótlan alakban:

$$\eta = 0; \qquad \beta = \frac{x_A^*}{x_A}; \qquad \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\eta} = 0\,,$$

$$\eta = 1;\ \beta = 1;\ \gamma = 1.$$

A numerikus megoldás érdekében azonos keresztmetszetben kell ismerni az összes változó értékét. Most célszerű kiindulási helyzetnek a 2-jelű keresztmetszetet tekinteni, ez a megoldás szempontjából nehézséget nem okoz, persze előre fel kell venni

$$T(S) = T_2$$

értékét.

2.3. Numerikus megoldás

Első lépésként az x_A^* értékét kell meghatároznunk a kiinduló keresztmetszetben. A $0 \leq \eta \leq 1$ intervallumot felosztjuk megfelelő finomságú $\Delta\eta$ részintervallumokra, majd $\gamma'(1)$ és $\beta'(1)$ értékeit felvéve, a (19) és (20) egyenletekkel meghatározzuk $\gamma''(1)$ és $\beta''(1)$ értékeit. Ezekkel viszont

$$\gamma'(1 - \Delta\eta) = \gamma'(1) - \gamma''(1)\Delta\eta,$$

valamint

$$\gamma(1 - \Delta\eta) = \gamma(1) - \gamma'(1 - \Delta\eta)\Delta\eta,$$

és hasonlóan β is. Addig folytatjuk az eljárást, míg $\eta = 0$ nem lesz. Ekkor a β definíciója alapján:

$$x_A^* = \beta(0) x_A,$$

a fázishatáron az A komponens koncentrációja ismertté válik.

Ezután ellenőrizzük a felvett értékek helyességét. Egyrészt $\gamma'(0) = 0$ kell, hogy adódjék a peremfeltétel alapján, másrészt a gáz- és a folyadékoldalról számolt anyagáramok értékeinek kell egyezniük a fázishatáron, vagyis

$$-\Theta_{AL} \frac{\mathrm{d}\bar{x}_A}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=0} = k_G (y - y^*),$$

azaz

$$-\beta'(1) x_A k_L = k_G [y - y^*(x_A^*, t)]$$

kell, hogy igaz legyen.

A fenti egyenlet bal és jobb oldala a rendelkezésre álló adatokkal, illetve a (18) egyenlet alapján meghatározható, így a felvétel helyes vagy helytelen volta eldönthető. Természetesen a két feltétel egyidejű teljesülése szükséges.

Ha a fenti feltétel kielégül, a (17) egyenlet alapján meghatározható a kiindulási keresztmetszetben a dy/ds értéke, ugyanis a móltört és mólarány közötti kapcsolat alapján:

$$\mathrm{d}Y = \frac{\mathrm{d}y}{(1-y)^2},$$

és így a következő keresztmetszetben a gázfázis főtömegében a koncentráció y meghatározható. Hátra van még az x_A és x_B értékeinek meghatározása. A folyadék főtömegben az A komponens koncentrációját a következő módon határozhatjuk meg. Mivel

$$N_A = -\Theta_{AL} \frac{\mathrm{d}\bar{x}_A}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=\delta_L},$$

és

$$L_s \mathrm{d}X_A = N_A \mathrm{d}s = -\beta'(1) x_A k_L \mathrm{d}s,$$

ezért

$$\frac{\mathrm{d}X_A}{\mathrm{d}s} \frac{k_L}{L_s} \beta'(1)\, x_A,$$

ahol a felső előjel egyen-, az alsó ellenáram esetében igaz. Ennek alapján a következő keresztmetszetben X_A, illetve x_A számítható.

A B komponens koncentrációját a sztöchiometriai egyenlet felhasználásával számíthatjuk, azzal a feltételezéssel, hogy a koncentráció határréteg-

ben levő anyagmennyiség elhanyagolható mértékű a főtömegben levő anyagmennyiséghez képest.
Ekkor

$$G_s \mathrm{d}Y = \mp L_s \left(\mathrm{d}X_A - \frac{b}{a} \mathrm{d}X_B \right),$$

azaz

$$\frac{\mathrm{d}X_B}{\mathrm{d}s} = \mp \frac{G_s}{L_s} \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}X_A}{\mathrm{d}s},$$

melyből a következő ketesztmetszetben X_B, illetve x_B meghatározható.

Ezekután az új keresztmetszetben a (15) és a (16) egyenletek alapján adódnak a könnyű- és nehézfázis főtömegének hőmérsékletei.

A továbbiakban a fenti eljárást addig folytatjuk, míg a kívánt kilépő gázkoncentrációt $y(S)$ el nem értük. A független változó S értéke adja a szükséges felület mértékét.

A fenti méretezési módszert egy számpéldán ismertetjük.

2.4. Számpélda

A kémiai reakció hatásának szemléletessé tétele érdekében egy egyenáramú érintkeztetést vizsgálunk a következő adatok esetében:

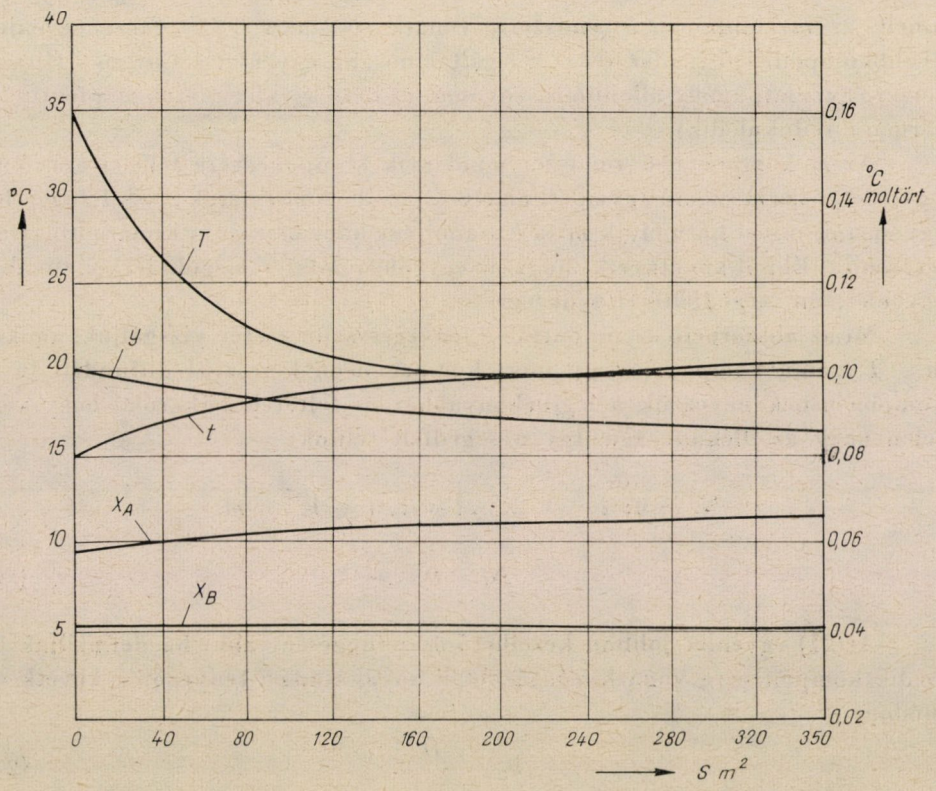
$x_{A1} = 0{,}059,$
$x_{B1} = 0{,}042,$
$y_1 = 0{,}10,$
$y_2 = 0{,}07,$
$T_1 = 35\ ^\circ\mathrm{C},$
$t_1 = 15\ ^\circ\mathrm{C},$
$\Theta_{AL} = 0{,}048$ kmól/(m h),
$\Theta_{BL} = 0{,}0685$ kmól/(m h),
$\bar{k} = 6$ kcal/(m² h °C),
$k_G = 6$ kmól/(m² h),
$k_L = 12$ kmól/(m² h),
$k_{II} = 300$ l/h,
$G_s = 1200$ kmól/h,
$L_s = 2000$ kmól/h,
$C_G = 0{,}3$ kcal/kmól °C,
$C_L = 1$ kcal/kmól °C,
$\Phi_r = 4900$ kcal/kmól.

Az egyensúlyi görbe közelítésére az

$$y^* = (0{,}8 + 0{,}02t)x_A^*,$$

összefüggést alkalmaztuk.

A kapott eredményt, az egyes koncentrációk és hőmérsékletek változását az érintkeztető felület mentén a 14. ábra szemlélteti.



14. ábra

3. Abszorpció többkomponensű rendszerből

A vegyiparban technológiák során igen gyakran többkomponensű elegyből kell eltávolítani több diffundáló komponenst. A továbbiakban az ilyen abszorpciós oszlop főméreteinek meghatározására szolgáló összefüggéseket határozzuk meg izotermikus esetre, s számpéldát közlünk.

3.1. A matematikai modell

A matematikai modell meghatározásához szükséges összefüggések meghatározásához célszerű a könnyűfázisban valamely i-edik komponens diffúzióját az $1, 2 \ldots i-1, i+1, \ldots m$-edik komponens elegyén keresztül leíró egyenletből kiindulni [2]:

$$-\frac{P}{RT}\frac{dy_i}{dz} = \sum_{j=1}^{m} \frac{N_i y_j - N_j y_i}{D_{ij}}; \qquad i = 1, \ldots m, \tag{21}$$

amely az m komponensű rendszerre vonatkozó Maxwell—Stefan-e egyenlet. (Többkomponensű rendszerekre a legáltalánosabb egyenlet a Curtiss—Hirschfelder-egyenlet, amely állandó össznyomás és hőmérséklet esetében a fenti (21) formára redukálódik).

Az m komponensű rendszer mindegyik komponensére felírható a fenti egyenlet, azaz m számú egyenlet, amelyek közül azonban csak $m - 1$ független egymástól, mivel bármelyik $m - 1$ számú egyenlet összege a kimaradt egyenletet adja. Ebből következik, hogy az egyenletrendszer megoldásához további egyenlet, ún. segédfeltétel szükséges.

Mi az abszorpció szempontjából lényeges azon esetet vizsgáljuk, amikor $m - 1$ számú komponens egy inert komponensen keresztül diffundál. Inert komponensnek nevezzük a legillékonyabbat és feltételezzük róla, hogy végtelen nagy az illékonysága. Így a segédfeltételünk:

$$N_i \neq 0; \; i = 1, 2 \ldots l - 1, \; l + 1, \ldots m,$$

$$N_l = 0. \tag{22}$$

A (21) egyenlet jobban kezelhető összefüggéssé válik, ha definiáljuk az i-edik komponensre vonatkozó gázoldali anyagátadási tényezőt a következő módon:

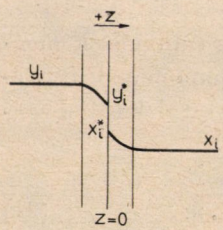
$$k_{Gi} = \frac{D_{il}}{\delta_{Gi}}. \tag{23}$$

Így a (21) egyenlet:

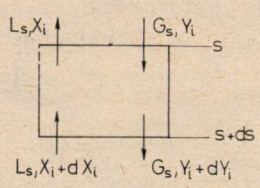
$$-\frac{P}{RT}\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\bar{s}}\frac{k_{Gi}}{D_{il}} = \sum_{j=1}^{m}\frac{N_i y_j - N_j y_i}{D_{ij}}; \quad i = 1 \ldots l-1, \; l+1 \ldots m, \tag{24}$$

ahol $\bar{s}$ dimenzió nélküli helykoordináta:

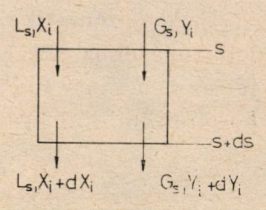
$$\bar{s} = \frac{z}{\delta_{Gi}}; \quad 0 \leq \bar{s} \leq 1.$$



15. ábra



16. ábra



17. ábra

A továbbiak egyszerűbb követése érdekében tekintsük a 15. ábrát. Az i-edik komponens anyagárama felírható a folyadékoldali anyagátadási tényező segítségével:

$$N_i = k_L(x_i^* - x_i). \tag{25}$$

Feltételezzük, hogy a fázishatáron a könnyű- és nehézfázis egyensúlyban van. Ez az i-edik komponensre a következőt jelenti:

$$y_i^* = \bar{K}\, x_i^* . \tag{26}$$

További összefüggést eredményez az i-edik komponensre a 16. és 17. ábrák alapján felírt anyagmérleg:

$$L_s(X_i + \mathrm{d}X_i) + G_s Y_i = L_s X_i + G_s(Y_i + \mathrm{d}Y_i),$$

$$L_s \mathrm{d}X_i = \mp G_s \mathrm{d}Y_i. \tag{27}$$

Az alsó előjel az ellenáram esete.

Felírható továbbá az átadott anyagmennyiség az i-edik komponensből a ds érintkezési felületen:

$$G_s \mathrm{d}Y_i = -N_i \mathrm{d}s. \tag{28}$$

Foglaljuk össze tehát a kapott egyenleteket:

$$-\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}\bar{s}} = \frac{D_{il}}{k_{Gi}} \frac{RT}{P} \sum_{\substack{j=1 \\ \not=}}^{m} \frac{N_i y_i - N_j y_i}{D_{ij}}; \quad i = 1 \ldots l-1, \quad l+1 \ldots m, \tag{24}$$

$$N_i \neq 0; \; N_l = 0; \qquad i = 1 \ldots l-1, \; l+1 \ldots m, \tag{22}$$

$$N_i = k_L(x_i^* - x_i), \tag{25}$$

$$y_i^* = \bar{K}_i x_i^*, \tag{26}$$

$$\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}s} = \mp \frac{G_s}{L_s} \frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}s}, \tag{27}$$

$$-\frac{\mathrm{d}Y_i}{\mathrm{d}s} = \frac{N_i}{G_s}, \tag{28}$$

3.2. A peremfeltételek meghatározása

Fentebb ismertetett egyenletrendszer megoldásához a következő peremfeltételeket szükséges ismernünk.

A koncentrációkat, belépéskor
egyenáramnál:

$$X_i(0) = X_{1i};\ i = 1, \ldots m,$$

$$Y_i(0) = Y_{1i};\ i = 1, \ldots, m,$$

ellenáramnál:

$$X_i(S) = X_{2i};\ i = 1, \ldots, m,$$

$$Y_i(S) = Y_{1i};\ i = 1, \ldots, m,$$

az i-edik komponens kilépő koncentrációját általában gázfázisban:

$$Y_i(S) = Y_{2i}.$$

A megfelelő nehézfázisbeli koncentrációk a (27) egyenlet alapján kiszámíthatók.

3.3. Numerikus megoldás

Az ismertetett (22)—(28) egyenletrendszer a következő módon oldható meg. Felvesszük N_i értékét $i = 1, \ldots l-1,\ l+1, \ldots, m$ komponensre. A $0 \leq \bar{s} \leq 1$ intervallum megválasztott finomságú felosztásán az Y_{i1} ismeretében a (24) egyenletrendszer alapján az Y_{i1} értékei kiszámíthatók. A (26) egyenlet segítségével x_i értékei meghatározhatók.

A (25) egyenlet alapján folyadékoldalról is kiszámíthatók az N_i-k. Ha az így kapott értékek egyeznek a felvett értékekkel, akkor a következő keresztmetszetben ds értékkel odébb a (23), ill. a (27) egyenletek alapján a főtömeg koncentrációk meghatározhatók.

Ellenáram esetében a helyzet valamivel bonyolultabb, mivel az X_{li} értékeit a változatlan X_l és valamely előírt Y_{2k} ismeretében számítható X_{1k} értékén kívül, előre fel kell venni.

3.4. Számpélda

Három komponensű gázelegy izotermikus abszorpcióját vizsgáljuk ellenáramú érintkeztetés esetében a következő adatokkal:

$$Y_{11} = 0{,}2 \text{ azaz } y_{11} = 0{,}14,$$
$$Y_{12} = 0{,}22857,\ y_{12} = 0{,}16.$$

Az előírt kilépő gáz koncentráció

$$Y_{22} = 0{,}126,\ y_{22} = 0{,}10.$$

A belépő folyadékkoncentrációk:

$$X_{21} = 0{,}0716;\ x_{21} = 0{,}065$$
$$X_{22} = 0{,}0209;\ x_{22} = 0{,}019$$

További adatok:

$D_{12} = 0{,}06$ m²/h,
$D_{23} = 0{,}07$ m²/h,
$D_{13} = 0{,}08$ m²/h,
$k_{G1} = 17{,}7$ m/h,
$k_{G2} = 12{,}1$ m/h,
$R = 848$ mkp/°K kmól,
$P = 10330$ kp/m²,
$t = 30$ °C,
$\bar{K}_1 = 1{,}5$,
$\bar{K}_2 = 2{,}3$,
$k_{L1} = 22$ kmól/m² h,
$k_{L2} = 13$ kmól/m² h,
$G_S = 110$ kmól/h,
$L_S = 1155$ kmól/h.

A számítás során kapott eredmények:

A szükséges érintkezési felület: $S = 221$ m²
$Y_{21} = 0{,}13410$; $y_{21} = 0{,}10642$,
$Y_{11} = 0{,}077605$; $x_{11} = 0{,}07$,
$X_{12} = 0{,}031042$; $x_{12} = 0{,}028$.

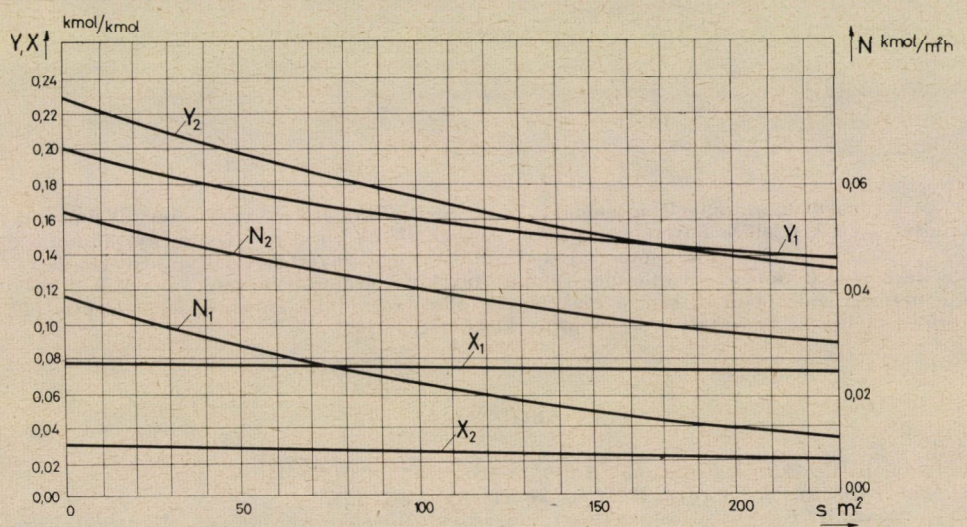
A koncentrációk és az anyagáram változását az érintkezési felület mentén a 18. ábra mutatja.

Az előző két számpéldával kapcsolatos megjegyzések:

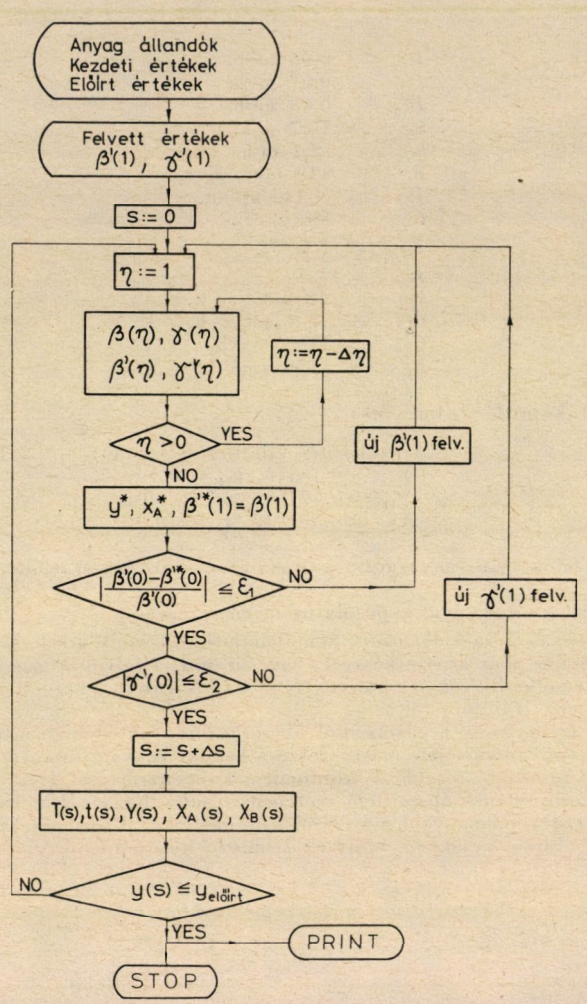
— a kémiai reakcióra kidolgozott példában látható, hogy a keletkező reakcióhő miatt a gázfázis hőmérséklete, bár az érintkeztetés egyenáramú, a folyadékfázis hőfoka alá csökken, majd azzal együtt emelkedik vagyis a konvektív hőátadás iránya a kezdeti gáz–folyadék irány helyett folyadék–gáz irányúra változik,

— kitűnik az is, hogy a gázfázisból abszorbeálódó .A komponensnek csak egy része növeli a folyadék koncentrációját, másik része a kémiai reakció során átalakul, csökkentve a folyadékfázisban található reagáló *B* komponens koncentrációját,

— a több komponensű abszorpció esetében látható, hogy a 2 indexű komponens koncentrációja, bár kezdetben nagyobb a gázfázisban, nagyobb diffúziós sebessége miatt az abszorpció során ez jobban lecsökken, mint az 1 indexű komponensé,



18. ábra



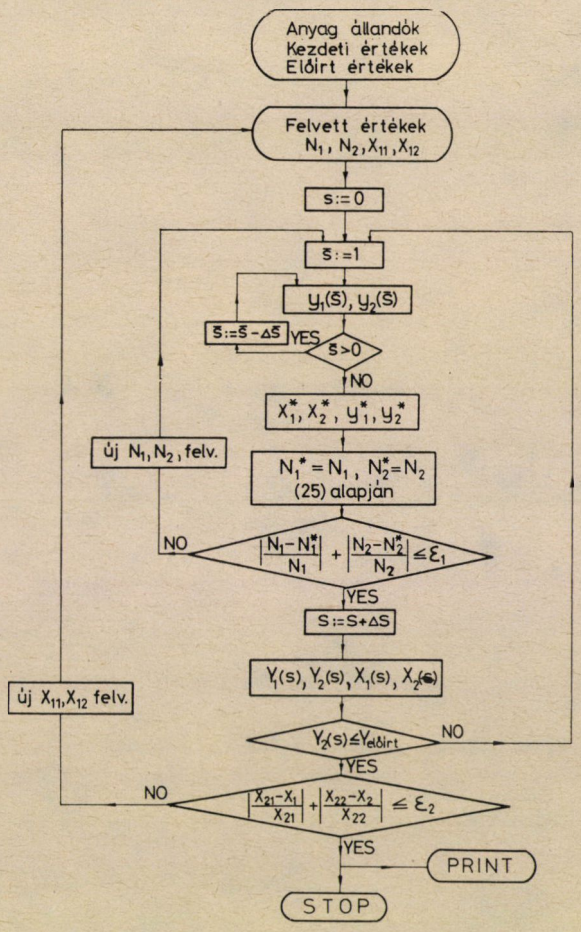
19. ábra

— mindkét számpélda megoldásánál az intervallum felezés módszerét alkalmaztuk' kiindulva két-két, előre felvett értékpárból, melyek ellenkező előjelű eredményt adtak,

— az iterációt 5%-os pontossággal végeztük, a függvényértékeket 1 m²-ként Hewlett—Packard 9100 B típusú számítógépen számítottuk ki. A számítás menetét, annak jobb áttekinthetősége érdekében, a kémiai reakció (19. ábra) és a többkomponensű adszorpció (20. ábra) esetében is bemutatjuk a számítás blokkdiagramján.

IRODALOM

1. Toor, H. L.: *A.I.Ch.E. Journal.* **3** (1957), 198—207.
2. Szentgyörgyi, S.—Parti, M.: *Gép* **20** (1968), 346—353.
3. Treybal, R. E.: Diffúziós vegyipari műveletek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1961.
4. Perry, J. H.: Vegyészmérnökök kézikönyve. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1968.
5. Hobler, T.: Mass Transfer and Absorbers. Pergamon Press, London etc. 1966.



20. ábra

Mathematical Models for the Simulation of Absorption Processes. The solution of equations by which physical phenomena are described, can now be found by means of electronic computers without any neglection of certain realtions that are usually disregarded for the purpose of finding results by analytical means. The establishment of a mathematical model for the simulation of absorption processes is based on differential equations relating to material balance and heat balance and on the determined boundary conditions. There are some numeric examples expounded in order to show the deviations generated by the usual omissions. The methods made known are suitable for finding the main dimensions of absorber devices.

Mathematische Modelle zur Simulation von Absorptions-Vorgängen. Mit Hilfe von elektronischen Komputern kann man Gleichungen, die gewisse physikalische Erscheinungen beschreiben, numerisch lösen, ohne dabei die Vernachlässigungen gelten zu lassen, die man sonst für eine analytische Lösung üblicherweise zulässt. Durch Aufstellen der Differentialgleichungen des Materialgleichgewichts und der Wärmebilanz, durch Bestimmung der Randbedingungen, wird hier die Aufstellung des mathematischen Modells für Fälle von Absorptions-Vorgängen beschrieben. Es werden einige numerische Beispiele angeführt, an denen die Auswirkung der üblichen Vernachlässigungen erfasst werden kann. Durch Anwendung der hier dargelegten Methoden können die Hauptmaße von Absorptions-Einrichtungen ermittelt werden.

NÉGYSZÖG ALAPRAJZ FÖLÉ SZERKESZTETT MÁSODRENDŰ, LAPOS TRANSZLÁCIÓS HÉJAK PEREMZAVARAI

TARNAI TIBOR*

[Beérkezett 1971. november 24-én]

A dolgozat a négyszög alaprajzú, másodrendű transzlációs héjak peremzavarait tárgyalja a lapos héjak hajlításelmélete alapján. Meghatározza a befogott peremek mentén ébredő zavaró hajlítónyomatékok nagyságát és csillapodási görbéjét. A kapott eredményeket összehasonlítja HRUBAN jól ismert közelítő eljárásával.

1. Bevezetés

A terhelés hatására a héjszerkezetben membrán-állapot alakul ki, ha a héj membránként egyensúlyban lehet, ill. ha a megtámasztási kényszerek fel tudják venni a héjról leadódó membránerőket, és a héj membrán-alakváltozásai szabadon lejátszódhatnak. Ha azonban a peremtartók gátolják a héj membrán-alakváltozásait, akkor a peremek mentén a membrán-állapotot zavaró hajlítónyomatékok lépnek fel, amelyek a héj belseje felé haladva általában gyorsan csökkennek.

A hajlítónyomatékokat kétféleképpen lehet meghatározni. Vagy úgy, hogy a felületén terhelt, hajlított héjak parciális differenciálegyenlet-rendszerének a megoldásából állítjuk elő, ahogyan ezt pl. [1]-ben tették, vagy úgy, hogy a terheletlen (csak a peremeken terhelt) hajlított héjak egyenletrendszerét oldjuk meg, és ebből számítjuk a hajlítónyomatékot. Így jártak el pl. [6]-ban.

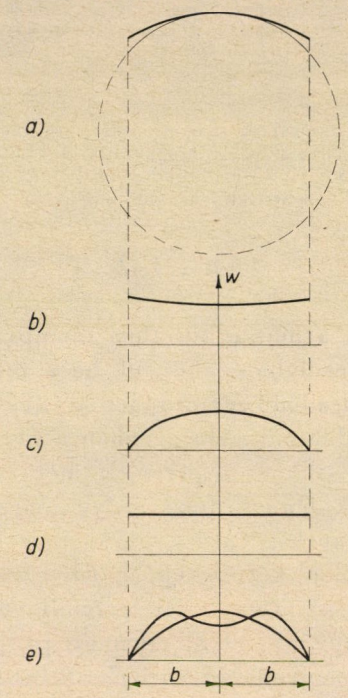
A kör vezérvonalú dongahéjak peremzavarával több kutató foglalkozott. A pontos hajlításelmélet alapján álló, részletes tárgyalás található pl. [2]-ben és [4]-ben.

A torznégyszög alakú lapos hiperbolikus paraboloidhéj peremzavarait KOLLÁR és SZŐTS [6] vizsgálta.

A téglalap alakú tartomány feletti, másodrendű felületű lapos transzlációs héjak peremzavar-jelenségével többek között BOUMA [1] és HRUBAN [5] foglalkozott. BOUMA a lapos héjak hajlításelmélete alapján arra keresett választ, hogyan változik egy, a peremei mentén megtámasztott, egyenletesen terhelt, másodrendű felületű héj erőjátéka, ha a héjfelület egyik főgörbületét változtatjuk, miközben a héj többi adata változatlan marad. HRUBAN az elliptikus és hiperbolikus paraboloid felületű membránhéjak peremzavarait vizsgálta. Fejtegetései során feltételezte, hogy a héj alakváltozási állapota

* Tarnai Tibor, 1114 Budapest, Eszék utca 7/b.

a zavart perem síkjával párhuzamos metszetekben nem változik. A héjat helyettesítette egy, a zavart perem csúcspontjában a héjhoz simuló teljes körhengerrel (1a. ábra), amelyet körszimmetrikusan terheltnek tekintett. Ennek következtében a hengerhéjban gyűrűirányban állandó gyűrűerők keletkeznek. Ez annak felel meg, hogy a valódi héjnak a zavart peremre merőleges peremei-



1. ábra. a) a héj simuló körhengerrel való közelítése, b), c) a héj normális irányú elmozdulásgörbéi, d), e) az elmozdulásgörbék közelítései

ről minden esetben oldalnyomás adódik le. Már pedig a vizsgált héj többnyire oldalnyomásmentes.

Ha egy oldalnyomásmentes, peremein megtámasztott elliptikus paraboloidhéj egymásra merőleges síkú peremeinek peremzavarait egymástól függetlenül vizsgáljuk, akkor bizonyos feltételezések és megfontolások mellett az egyik irányú zavaró hajlítónyomatékokhoz a peremen — a sarokpontok kis környezetének kivételével — az 1b. ábra szerinti, a héj belsejében, a peremmel párhuzamos síkmetszet mentén az 1c. ábra szerinti, a héjfelületre merőleges elmozdulások tartoznak. Igaz ugyan, hogy ezekhez az elmozdulásokhoz a HRUBAN-féle közelítő elmozdulások nagyon hasonlók (1d. ábra), de mivel a HRUBAN-féle héj oldalnyomásos, az eredeti héj pedig nem, ezért meg kell vizsgálni, hogy ez mennyiben befolyásolja a peremzavar kialakulását.

A hajlítónyomatékokat a hajlított lapos héjak homogén parciális differenciálegyenlet-rendszerének megoldásából fogjuk előállítani, szemben BOUMA-val, aki a nyomatékokat az inhomogén egyenletrendszer megoldásából kapta. Vizsgálataink során az alakváltozási állapotot a zavart perem mentén változónak, magát a héjat pedig oldalnyomásmentesnek fogjuk tekinteni, ellentétben HRUBAN feltételezéseivel. A perem elmozdulásfüggvényét trigonometrikus polinommal fogjuk megközelíteni (1e. ábra).

A jelen dolgozatban az elliptikus paraboloid, a parabola-donga és a nyereg alakú hiperbolikus paraboloid héjak peremzavaraival foglalkozunk. Célul tűzzük ki, hogy megállapítsuk:

1. mekkora hajlítónyomatékok ébrednek a különböző görbületű héjakban, ha az egyik peremnél — nyúlások révén — egy adott függvény szerint változó terhelő elmozdulást idézünk elő;

2. a keletkező hajlítónyomatékok hogyan csillapodnak a különböző görbületű héjaknál, mekkora a nyomatékra vasalandó sáv szélessége;

3. mennyire megbízható HRUBAN közelítő módszere.

Eljárásunk elveiben [6]-ot fogja követni.

2. Jelölések

x, y	derékszögű koordináták
$z(x, y)$	a héj középfelületének ordinátája
a, b	a héj alaprajzi vetületének féloldalhosszai
f_a, f_b	a vezérgörbék nyílásmagasságai
r_1, r_2	a vezérgörbék csúcsponti görbületi sugarai
h	a héj vastagsága
N_x, N_y	membrán-normálerők
$N_{xy} = N_{yx}$	membrán-nyíróerő
Q_x, Q_y	hajlítási nyíróerők
M_x, M_y	hajlítónyomatékok
$M_{xy} = M_{yx}$	csavaró nyomaték
u, v	az xz, yz síkkal párhuzamos, érintőirányú elmozdulások
w	a héj középfelületére merőleges elmozdulás
E	rugalmassági modulus
e	a természetes logaritmus alapszáma
i	$(i^2 = -1)$ imaginárius egység
$\alpha_n = n\pi/(2b)$	$(n = 1, 3, 5, \ldots)$
$'$	az x szerinti differenciálás jele
$\cdot$	az y szerinti differenciálás jele

3. A lapos héjak alapegyenletei

A peremzavar vizsgálata a hajlított héjak pontos elmélete alapján rendkívül bonyolult lenne, ezért a jóval egyszerűbb *laposhéj-elméletet* [3] fogjuk alkalmazni.

Fejtegetéseinkben a harántnyúlási együtthatót elhanyagoljuk ($\nu = 0$).

A terheletlen héj egyensúlyi egyenletei:

$$N_x' + N_{xy}^{\cdot} = 0\,, \tag{1a}$$

$$N_{xy}' + N_y^{\cdot} = 0\,, \tag{1b}$$

$$N_x z'' + 2N_{xy} z'^{\cdot} + N_y z^{\cdot\cdot} + Q_x^{\cdot} + Q_y^{\cdot} = 0\,, \tag{1c}$$

$$M_x' + M_{xy}^{\cdot} - Q_x = 0\,, \tag{1d}$$

$$M_{xy}' + M_y^{\cdot} - Q_y = 0\,. \tag{1e}$$

A metszeterők és az elmozdulásfüggvények a következőképpen függenek össze:

$$N_x = Eh\,(u' - z''\,w)\,, \tag{2a}$$

$$N_y = Eh\,(v^{\cdot} - z^{\cdot\cdot}\,w)\,, \tag{2b}$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{2}\,(u^{\cdot} + v' - 2\,z'^{\cdot}\,w)\,, \tag{2c}$$

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12}\,w''\,. \tag{2d}$$

$$M_y = -\frac{Eh^3}{12}\,w^{\cdot\cdot}\,, \tag{2e}$$

$$M_{xy} = -\frac{Eh^3}{12}\,w'^{\cdot}\,. \tag{2f}$$

Fejezzük ki az (1d) és (1e) egyenletekből a Q_x és Q_y nyíróerőket, majd helyettesítsük be az (1c)-be. Ha az így megmaradó három egyenletbe beírjuk a (2a—f) kifejezéseket, akkor az u, v, w elmozdulásokra a következő parciális differenciálegyenlet-rendszert kapjuk:

$$2u'' + u^{\cdot\cdot} + v'^{\cdot} - 2z''w' - 2z'^{\cdot}w^{\cdot} - 2(z''' + z'^{\cdot\cdot})w = 0\,, \tag{3a}$$

$$2v^{\cdot\cdot} + v'' + u'^{\cdot} - 2z^{\cdot\cdot}w^{\cdot} - 2z'^{\cdot}w' - 2(z^{\cdot\cdot\cdot} + z''^{\cdot})w = 0\,, \tag{3b}$$

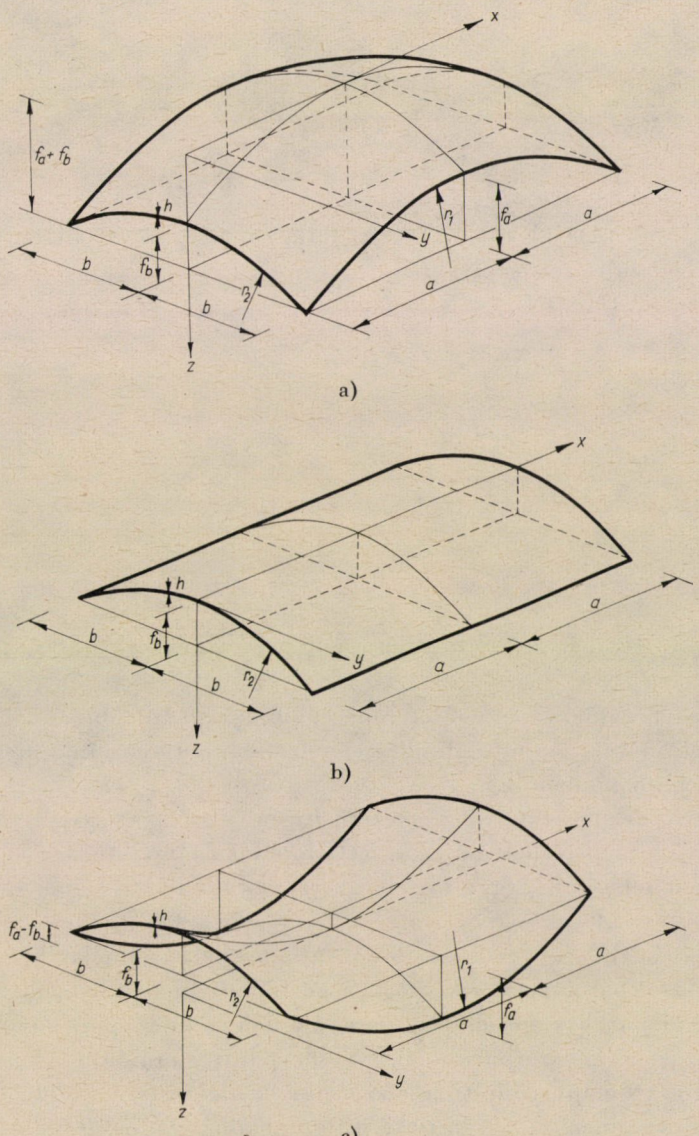
$$z''\,u' + z'^{\cdot}\,(u^{\cdot} + v') + z^{\cdot\cdot}\,v^{\cdot} - (z''^2 + 2\,z'^{\cdot 2} + z^{\cdot\cdot 2})\,w - \frac{h^2}{12}\,(w'''' + 2\,w''^{\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot\cdot\cdot}) = 0\,. \tag{3c}$$

Adott peremfeltételek esetén e három differenciálegyenletből a három elmozdulásfüggvény és (2a—f) révén az igénybevételfüggvények egyértelműen meghatározhatók.

4. Az egyenletek alakulása másodrendű transzlációs héjak esetén

Háromféle másodrendű transzlációs felületet akarunk vizsgálni. Ha a koordinátarendszer kezdőpontját a héj peremén, a héj szimmetriasíkjában, a tetőponttal egy magasságban vesszük fel, akkor a háromféle felület közös egyenlete:

$$z = \frac{f_a}{a^2}(x-a)^2 + \frac{f_b}{b^2}y^2 . \tag{4}$$



2. ábra. a) elliptikus paraboloid, b) parabola donga, c) hiperbolikus paraboloid

Ebből az egyenletből a következőképpen nyerhető a három speciális felület egyenlete: Tekintsük f_a-t előjeles mennyiségnek. Ha $f_a > 0$, akkor elliptikus paraboloidról (2a. ábra), ha $f_a = 0$, akkor parabola vezérgörbéjű dongafelületről (2b. ábra), ha $f_a < 0$, akkor hiperbolikus paraboloidról (2c. ábra) van szó.

A közös felületfüggvény második deriváltjai:

$$z'' = \frac{2f_a}{a^2} = \frac{1}{r_1},$$

$$z'\cdot = 0,$$

$$z\cdot\cdot = \frac{2f_b}{b^2} = \frac{1}{r_2}.$$

Ezek segítségével (3a—c) a következő állandó együtthatós parciális differenciálegyenlet-rendszert eredményezi:

$$2u'' + u\cdot\cdot + v'\cdot - \frac{2}{r_1}w' = 0, \tag{5a}$$

$$2v\cdot\cdot + v'' + u'\cdot - \frac{2}{r_2}w\cdot = 0, \tag{5b}$$

$$\frac{1}{r_1}u' + \frac{1}{r_2}v\cdot - \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)w - \frac{h^2}{12}(w'''' + 2w''\cdot\cdot + w\cdot\cdot\cdot\cdot) = 0. \tag{5c}$$

5. Hruban közelítő eljárása a peremzavar számítására

Jóllehet az (5a—c) egyenletrendszer sokkal egyszerűbb annál az egyenlet. rendszernél, melyet a pontos hajlításelmélet alapján kapnánk, megoldása még mindig nagyon bonyolult.

A gyakorlati számítás egyszerűsítésére HRUBAN [5] tett javaslatot Ő az összefüggéseit terhelt héjra vezette le. Hogy elméletét a mi eljárásunkka összhangban lehessen tárgyalni, módszerét a terheletlen héjak esetére ismertetjük.

Legyen a zavart perem $x = 0$-nál. A lapos héjak elméletében alkalmazott elhanyagolásokból következik, hogy a görbületi sugár a középfelület koordinátasíkokkal párhuzamos metszetparaboláinak minden pontjában azonosnak vehető, azaz a metszetparabolák a csúcsponti simulókörükkel helyettesíthetők. HRUBAN alapvető feltevése az, hogy *az alakváltozási állapot y-tól független.* Ezért valamennyi y szerinti differenciálhányados 0 lesz. Integráljuk (5a)-t, ill. (5b)-t 0-tól x-ig, egyszer, ill. kétszer, figyelembe véve, hogy $x = 0$

esetén $N_x = 0$, ill. $N_{xy} = 0$ és $v = 0$, majd (5a) integrálját helyettesítsük be (5c)-be. Ekkor az (5a—c) egyenletrendszer a következő alakra egyszerűsödik:

$$u' - \frac{1}{r_1} w = 0\,, \tag{6a}$$

$$v = 0\,, \tag{6b}$$

$$w'''' + \frac{12}{h^2 r_2^2} w = 0\,. \tag{6c}$$

A (6c) egyenlet a terheletlen körhenger-tartályok egyenlete.
Alkalmazzuk a következő jelölést:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3}{r_2^2 h^2}}\,. \tag{7}$$

Legyen a héj a perem mentén elfordulásmentes (befogott), és szenvedjen a peremen körben állandó w_0 elmozdulást, továbbá tekintsük a héjat végtelen hosszúnak. Ekkor a peremfeltételek:

az $x = 0$ peremen: $\quad w = w_0$,

és $\quad w' = 0$.

Ilyenkor a zavaró hajlítónyomaték:

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12} w_0 2\beta^2 e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x)\,, \tag{8}$$

amely $4/\beta$ távolság után gyakorlatilag zérusnak vehető.

Ennek a módszernek nagy előnye, hogy a bonyolult egyenletekre igen egyszerűen számítható alakban kapunk közelítő megoldást.

HRUBAN eljárásában tehát feltételeztük, hogy a metszeterők és az elmozdulások y-tól függetlenek. Egyrészt ennek a feltételnek, másrészt a héj lapos voltának a következtében a peremzavarok szempontjából a héj középfelületét egy zárt körhengerrel helyettesíthettük, amelynek sugara a peremgörbe csúcsponti görbületi sugarával egyenlő. A zárt körhengerhéj úgy viselkedik, mint egy rugalmasan ágyazott gerenda, lévén a (6c) lényegében azonos a rugalmasan ágyazott gerenda egyenletével. A rugalmas ágyazást a körhengerhéj w elmozdulásaival kapcsolatos N_y membrán-gyűrűerők biztosítják. Minthogy körszimmetrikusan terhelt körhengerhéjról van szó, w és N_y is körszimmetrikusak, azaz rögzített x esetén a metszetkör mentén állandók.

Ez azt jelenti, hallgatólagosan feltételeztük, hogy az eredeti héjon az $y = b$ és $y = -b$ peremek mentén a zárt körhengerhéj feszültségi és alakváltozási állapotával megegyező peremfeltételeket biztosítottunk, azaz meggátolva v-t, felvettük az N_y oldalnyomást és lehetővé tettük a w alakváltozás kialakulását.

HRUBAN elmélete tehát nem veszi figyelembe az eredeti héj $y = b$ és $y = -b$ peremei mentén a tényleges peremfeltételeket, és az $x = 0$ perem mentén a zavaró hajlítónyomatékot állandónak adja. Nem veszi figyelembe továbbá az eredeti héj x irányú görbültségét sem. Elliptikus és hiperbolikus paraboloid felület esetén is ugyanazt az M_x nyomatékábrát szolgáltatja. A legtöbb esetben azonban az $y = b$ és $y = -b$ peremeknél olyan peremtartókat alkalmazunk, amelyek igen nagy merevségűek a perem síkjában, de arra merőleges irányban nagyon lágyak („félmerev" peremtartók). Ezeknél a peremeknél tehát matematikailag is biztosítanunk kell az oldalnyomásmentességet.

Ezek után a következő kérdések merülnek fel: A HRUBAN-féle közelítéssel mekkora hibát követünk el egy pontosabb megoldáshoz képest? Milyen mértékben függ a zavaró hajlítónyomaték nagysága a héj adott peremfeltételeitől és görbületi viszonyaitól?

A továbbiakban ezekre a kérdésekre keressük a választ. Vizsgálatainkhoz az (5a—c) egyenletrendszert fogjuk felhasználni.

6. A peremfeltételek

A differenciálegyenlet-rendszer megoldása

Feltételezzük, hogy a héj $x = 0$ pereménél a peremtartó hajlítás szempontjából merev befogást jelent a héjra nézve, viszont oldalnyomásmentességet biztosít. Erről a peremtartóról feltesszük még, hogy a saját síkjában végtelenül merev, és hogy meggátolja a héjnak a peremtartón való elcsúszását az yz síkban. A héj $y = +b$ és $y = -b$ peremei pedig olyan peremtartókkal vannak alátámasztva, amelyek nem vesznek fel oldalnyomást és lehetővé teszik a héjperem elfordulását, de nem teszik lehetővé a perem lehajlását és a peremtartón való, xz síkkal párhuzamos elcsúszását.

Képzeljük most oly mértékig feloldva a héj és a peremtartó kényszerkapcsolatait, hogy a külső terhelés hatására szabadon kialakulhassanak a héj membrán-alakváltozásai. Ezután egyeztessük a héj és a peremtartó nyúlásait, ill. elmozdulásait.

Legyen a vizsgált zavart perem $x = 0$-nál. Mivel itt a peremtartót a saját síkjában merevnek tételeztük fel, ezért nincsenek w elmozdulásai. Következésképpen az elvágott héjperemen olyan mértékű nyúlásokat kell előidézni ellenkező irányban, mint amekkora nyúlások az elvágás után a terhelés hatására keletkeztek.

A héjperem elmozdulásait trigonometrikus sorba fejtjük, és tagonként állapítjuk meg a nyúlás-egyeztetés során keletkező hajlítónyomatékokat.

Feltesszük, hogy a héjat szimmetrikus teher terheli. Ezért az alakváltozás is szimmetrikus lesz. Tehát a w lehajlás Fourier-sora csupa koszinuszos tagból fog állni.

Végezetül feltételezzük, hogy a zavart perem hatása a szemközti peremig elenyészik, ezért a számítás szempontjából a héjat végtelen hosszúnak vehetjük, és így nem kell foglalkoznunk az $x = 2a$ helyen érvényes peremfeltételekkel, ill. itt nem lehetnek végtelen nagy igénybevételek.

A fenti feltételezések tehát a következő peremfeltételeket jelentik:

Az $x = 0$ peremen:

$$N_x = 0\,, \quad \text{azaz} \quad u' - \frac{1}{r_1} w = 0\,, \tag{9a}$$

$$v = 0, \tag{9b}$$

$$w' = 0, \tag{9c}$$

$$w = -w_0 \cos n \frac{\pi}{2b} y\,. \tag{9d}$$

Az $y = b$ és $y = -b$ peremeken:

$$w = 0, \tag{9e}$$

$$M_y = 0, \quad \text{azaz} \quad w'' = 0, \tag{9f}$$

$$N_y = 0\,, \quad \text{azaz} \quad v' - \frac{1}{r_2} w = 0\,, \tag{9g}$$

$$u = 0. \tag{9h}$$

Megjegyezzük, hogy a (9d) összefüggésben azért indokolt egytagú sor alkalmazása, mert így — a tárgyalásban szereplő trigonometrikus függvények ortogonalitása miatt — az igénybevétel függvények y változó szerinti sora is csak egyetlen tagból fog állni. Ezzel biztosítható, hogy tetszőleges szimmetrikus peremlehajlás függvény esetén a függvény sorát tagonként véve számításba, az igénybevétel függvények sorának egyes tagjait megállapíthassuk.

Az (5a—c) parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldásfüggvényeit az alábbi alakban vesszük fel:

$$u = \sum_{n=1,3,5,\ldots} u_n(x) \cos \alpha_n y\,, \tag{10a}$$

$$v = \sum_{n=1,3,5,\ldots} v_n(x) \sin \alpha_n y\,, \tag{10b}$$

$$w = \sum_{n=1,3,5\ldots} w_n(x) \cos \alpha_n y\,, \tag{10c}$$

ahol

$$\alpha_n = n\frac{\pi}{2b}, \qquad n = 1, 3, 5, \ldots \tag{11}$$

A (10a—c) elmozdulásfüggvényekre a (9e—h) feltételek automatikusan teljesülnek. A (10a—c) függvénysorok n-edik tagját az (5a—c) egyenletrendszerbe behelyettesítve, és a megfelelő trigonometrikus faktorokkal egyszerűsítve a következőket kapjuk:

$$2u_n'' - u_n\alpha_n^2 + v_n'\alpha_n - \frac{2}{r_1}w_n' = 0\,, \tag{12a}$$

$$-u_n'\alpha_n + v_n'' - 2v_n\alpha_n^2 + \frac{2}{r_2}w_n\alpha_n = 0\,, \tag{12b}$$

$$\frac{1}{r_1}u_n' + \frac{1}{r_2}v_n\alpha_n - \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right)w_n - \frac{h^2}{12}(w_n'''' - 2w_n''\alpha_n^2 + w_n\alpha_n^4) = 0\,. \tag{12c}$$

Ez már közönséges differenciálegyenlet-rendszer, hiszen benne csak x-től függő függvények és deriváltjaik szerepelnek. Mivel a (12a—c) differenciálegyenlet-rendszer állandó együtthatós, a megoldást

$$u_n(x) = U_n e^{\beta_n x}\,, \tag{13a}$$

$$v_n(x) = V_n e^{\beta_n x}\,, \tag{13b}$$

$$w_n(x) = W_n e^{\beta_n x} \tag{13c}$$

alakban kereshetjük, ahol U_n, V_n, W_n és β_n egyelőre ismeretlen állandók. A (13a—c) összefüggéseket a (12) egyenletcsoportba behelyettesítve az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert nyerjük az U_n, V_n, W_n ismeretlenekre:

$$(2\beta_n^2 - \alpha_n^2)U_n + \alpha_n\beta_n V_n - \frac{2}{r_1}\beta_n W_n = 0\,, \tag{14a}$$

$$-\alpha_n\beta_n U_n + (\beta_n^2 - 2\alpha_n^2)V_n + \frac{2}{r_2}\alpha_n W_n = 0\,, \tag{14b}$$

$$\beta_n\frac{1}{r_1}U_n + \frac{1}{r_2}\alpha_n V_n - \left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{h^2}{12}(\beta_n^4 - 2\alpha_n^2\beta_n^2 + \alpha_n^4)\right]W_n = 0\,. \tag{14c}$$

A (14a—c) egyenletrendszernek akkor és csakis akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az egyenletrendszer determinánsa nullával egyenlő.

A rendszer determinánsát kifejtve és egyenlővé téve nullával, megkapjuk a karakterisztikus egyenletet β_n-re:

$$\beta_n^8 - 4\alpha_n^2\beta_n^6 + \left(6\alpha_n^4 + \frac{12}{h^2 r_2^2}\right)\beta_n^4 - \left(4\alpha_n^6 + \frac{24}{h^2 r_1 r_2}\alpha_n^2\right)\beta_n^2 + \frac{12}{h^2 r_1^2}\alpha_n^4 + \alpha_n^8 = 0\,. \tag{15}$$

Ez az egyenlet a következő alakra hozható:

$$(\beta_n^2 - \alpha_n^2)^4 + \frac{12}{h^2}\left(\frac{1}{r_2}\beta_n^2 - \frac{1}{r_1}\alpha_n^2\right)^2 = 0\,. \tag{16}$$

Ebből az alakból látszik, hogy a nyolcadfokú karakterisztikus egyenlet megoldása négyzetgyökvonások segítségével explicite megadható [1].

A héj végtelen hosszú voltának feltételezése miatt a kiadódó nyolc gyök közül csak a negatív valós részű gyököket (az ún. „nagy" gyököket) kell figyelembe venni, mert ezek adnak a zavart peremtől távolodva csökkenő igénybevételeket. Ez a négy gyök a következő:

$$\beta_{n_1} = -\gamma_{n_1} + i\delta_{n_1}\,, \tag{17a}$$

$$\beta_{n_2} = -\gamma_{n_1} - i\delta_{n_1}\,, \tag{17b}$$

$$\beta_{n_3} = -\gamma_{n_2} + i\delta_{n_2}\,, \tag{17c}$$

$$\beta_{n_4} = -\gamma_{n_2} - i\delta_{n_2}\,, \tag{17d}$$

ahol γ_{n_k} ill. δ_{n_k} a komplex szám valós ill. képzetes részének abszolút értékét jelöli.

A (10a—c) elmozdulásfüggvények a „nagy" gyökök segítségével a következők lesznek:

$$u = \sum_{n=1,3,5,\ldots}\left(\sum_{j=1}^{4} U_{n_j} e^{\beta_{n_j} x}\right)\cos\alpha_n y\,, \tag{18}$$

$$v = \sum_{n=1,3,5,\ldots}\left(\sum_{j=1}^{4} V_{n_j} e^{\beta_{n_j} x}\right)\sin\alpha_n y\,, \tag{19}$$

$$w = \sum_{n=1,3,5,\ldots}\left(\sum_{j=1}^{4} W_{n_j} e^{\beta_{n_j} x}\right)\cos\alpha_n y\,. \tag{20}$$

A (18—20) összefüggésekben már csak az U_{n_j}, V_{n_j}, W_{n_j} konstansok ismeretlenek. Ezeket a (14a—c) egyenletekből és a peremfeltételekből kell meghatározni.

Minden n-re 12 ismeretlenünk van. A (14a—c) homogén egyenletrendszerből következik — mivel a rendszer determinánsa nulla —, hogy a három

egyenletből csak kettő független egymástól. Ezért közülük egy elhagyható. A megoldást bármely kettő (célszerűen a (14a) és (14b)) előállítja. Ezzel minden j-re két egyenletet, összesen nyolc egyenletet kapunk. A (9e—h) peremfeltételek az $y = -b$ és $y = b$ perem mentén automatikusan teljesülnek. Ezek tehát nem adnak egyenleteket az U_{n_j}, V_{n_j}, W_{n_j} ismeretlenekre. Az $x = 0$ peremhez tartozó (9a—d) peremfeltételek azonban négy egyenletet szolgáltatnak. Így megtaláltuk azt a 12 egyenletet, amelyből az U_{n_j}, V_{n_j}, W_{n_j} állandók egyértelműen meghatározhatók.

Az U_{n_j}, V_{n_j}, W_{n_j}, $(j = 1, 2, 3, 4)$ konstansok komplex számok. A (16) egyenlet (17a—b) és (17c—d) gyökei konjugált komplexek, vagy kétszeres valós gyökök. Az $u_n(x)$, $v_n(x)$, $w_n(x)$ pedig valós értékű függvények. Ezért a (13a—c) és (18—20) összefüggésekből szükségképpen következik, hogy U_{n_1}, U_{n_2}; U_{n_3}, U_{n_4}; V_{n_1}, V_{n_2}, V_{n_3}, V_{n_4}; W_{n_1}, W_{n_2} és W_{n_3}, W_{n_4} konjugált komplex gyökpárok.

A konjugált komplex számpárok valós számok kifejezéseként megadhatók. Ezt a 12 valós állandót a következő alakban állítjuk elő:

$$A_{n_{j+4}} = A_{n_j} + A_{n_{j+1}}, \tag{21a}$$

$$A_{n_{j+2}} = i\,(A_{n_j} - A_{n_{j+1}}), \tag{21b}$$

ahol $A = U$, V, W és $j = 1,3$.

Az U_{n_j}, V_{n_j}, W_{n_j} $(j = 1, 2, 3, 4)$ komplex állandókat, mint az őket előállító (21a, b) valós állandók kifejezéseit be fogjuk helyettesíteni a (14a) és (14b) egyenletekbe, a β_{n_j}-t pedig a (17) szerinti alakban fogjuk beírni.

Végezzük el ezt a helyettesítést $j = 1$ esetén. Ekkor a (14a) egyenlet a következő alakot ölti:

$$[2\,(-\gamma_{n_1} + i\delta_{n_1})^2 - \alpha_n^2]\,\frac{U_{n_5} - iU_{n_6}}{2} + \alpha_n\,(-\gamma_{n_1} + i\delta_{n_1})\,\frac{V_{n_5} - iV_{n_6}}{2} -$$

$$- \frac{2}{r_1}\,(-\gamma_{n_1} + i\delta_{n_1})\,\frac{W_{n_5} - iW_{n_6}}{2} = 0. \tag{22}$$

Egy komplex kifejezés azonban akkor és csakis akkor egyenlő nullával, ha a kifejezésnek mind a valós, mind a képzetes része nulla. A (22) komplex egyenlet tehát a következő két valós egyenlettel ekvivalens:

$$\left(\gamma_{n1}^2 - \delta_{n1}^2 - \frac{\alpha_n^2}{2}\right) U_{n_5} - 2\,\gamma_{n_1}\,\delta_{n_1}\,U_{n_6} - \frac{1}{2}\,\alpha_n\,\gamma_{n_1}\,V_{n_5} + \frac{1}{2}\,\alpha_n\,\delta_{n_1}\,V_{n_6} +$$

$$+ \frac{\gamma_{n_1}}{r_1}\,W_{n_5} - \frac{\delta_{n_1}}{r_1}\,W_{n_6} = 0, \tag{23a}$$

$$-2\gamma_{n_1}\delta_{n_1}U_{n_5}-\left(\gamma_{n1}^2-\delta_{n1}^2-\frac{\alpha_n^2}{2}\right)U_{n_6}+\frac{1}{2}\alpha_n\delta_{n1}V_{n_5}+\frac{1}{2}\alpha_n\gamma_{n_1}V_{n_6}-$$

$$-\frac{\delta_{n_1}}{r_1}W_{n_5}-\frac{\gamma_{n_1}}{r_1}W_{n_6}=0\,. \tag{23b}$$

$j=2$ esetén a (22) egyenlet konjugáltját kapjuk. Ez az egyenlet azonban érdektelen, mert ugyanazt a két valós egyenletet, (23a, b)-t eredményezi, mint (22).

Ha a helyettesítéseket a (14b) egyenletben végezzük el, akkor a következő két valós egyenlet adódik:

$$\frac{1}{2}\alpha_n\gamma_{n_1}U_{n_5}-\frac{1}{2}\alpha_n\delta_{n_1}U_{n_6}+\frac{1}{2}(\gamma_{n1}^2-\delta_{n1}^2-2\alpha_n^2)V_{n_5}-\gamma_{n_1}\delta_{n_1}V_{n_6}+$$

$$+\frac{\alpha_n}{r_2}W_{n_5}=0\,, \tag{23c}$$

$$-\frac{1}{2}\alpha_n\delta_{n_1}U_{n_5}-\frac{1}{2}\alpha_n\gamma_{n_1}U_{n_6}-\gamma_{n_1}\delta_{n_1}V_{n_5}-\frac{1}{2}(\gamma_{n1}^2-\delta_{n1}^2-2\alpha_n^2)V_{n_6}-$$

$$-\frac{\alpha_n}{r_2}W_{n_6}=0\,. \tag{23d}$$

Ha $j=3$, akkor a (23a—d)-vel teljesen azonos alakú egyenleteink lesznek, melyekben γ_{n_1}, δ_{n_1}, U_{n_5}, U_{n_6}, V_{n_5}, V_{n_6}, W_{n_5}, W_{n_6} helyett γ_{n_2}, δ_{n_2}, U_{n_7}, U_{n_8}, V_{n_7}, V_{n_8}, W_{n_7}, W_{n_8} fog szerepelni. A (23e—h) egyenleteket a (23a—d) egyenletekkel való alaki megegyezés miatt nem írjuk fel. A $j=4$ esete ismét érdektelen.

Ezek után vizsgáljuk meg a peremfeltételeket az $x=0$ peremnél.

A (9a) feltétel a következő egyenletet adja:

$$U_{n_1}\beta_{n_1}+U_{n_2}\beta_{n_2}+U_{n_3}\beta_{n_3}+U_{n_4}\beta_{n_4}-\frac{1}{r_1}(W_{n_1}+W_{n_2}+W_{n_3}+W_{n_4})=0\,,$$

azaz valós alakban:

$$-\gamma_{n_1}U_{n_5}+\delta_{n_1}U_{n_6}-\gamma_{n_2}U_{n_7}+\delta_{n_2}U_{n_8}-\frac{1}{r_1}W_{n_5}\quad\frac{1}{r_1}W_{n_7}=0\,. \tag{23i}$$

A (9b) feltételnek megfelelő egyenlet:

$$V_{n_1}+V_{n_2}+V_{n_3}+V_{n_4}=0\,,$$

valós alakban:

$$V_{n_5}+V_{n_7}=0\,. \tag{23j}$$

A (9c) feltételből a következőt kapjuk:

$$W_{n_1}\beta_{n_1} + W_{n_2}\beta_{n_2} + W_{n_3}\beta_{n_3} + W_{n_4}\beta_{n_4} = 0\,,$$

valós alakban

$$-\gamma_{n_1} W_{n_5} + \delta_{n_1} W_{n_6} - \gamma_{n_2} W_{n_7} + \delta_{n_2} W_{n_8} = 0\,. \tag{23k}$$

Végül a (9d) feltételből:

$$W_{n_1} + W_{n_2} + W_{n_3} + W_{n_4} = -w_0\,,$$

valós alakban:

$$W_{n_5} + W_{n_7} = -w_0. \tag{23l}$$

Ez az egyenlet akkor áll fenn, ha a (9d) feltételben szereplő n megegyezik a (10) elmozdulásfüggvényekben szereplő valamelyik n futóindexszel. Más n-ekre (23l) helyett a

$$W_{n_5} + W_{n_7} = 0 \tag{23m}$$

egyenletet kapjuk.

Ezek után a (21a, b) szerinti 12 konstans meghatározható a (23a—l) 12 ismeretlenes lineáris egyenletrendszerből. A (23a—l) és (23m) egyenletekből kitűnik, hogy csak a (9d) feltételben rögzített n-re kapunk megoldást, hiszen a többi n-re a (23l) helyett a (23m) egyenletet kell venni. Mivel azonban a (23a—l) egyenletrendszer determinánsa nem nulla, következik, hogy a (23a—k, m) homogén egyenletrendszernek sem nulla a determinánsa, és ezért csak a triviális megoldása létezik.

Ennek a ténynek az a következménye, hogy a (10a—c) elmozdulásoknak és a (2a—f) metszeterőknek a sora csak egyetlen tagból fog állni.

Végül a (21a, b) állandók ismeretében, (20) és (2d) alapján felírható a keresett hajlítónyomaték:

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12}\{e^{-\gamma_{n_1}x}[((\gamma_{n1}^2 - \delta_{n1}^2)W_{n_5} - 2\gamma_{n_1}\delta_{n_1}W_{n_6})\cos\delta_{n_1}x +$$

$$+ (2\gamma_{n_1}\delta_{n_1}W_{n_5} + (\gamma_{n1}^2 - \delta_{n1}^2)W_{n_6})\sin\delta_{n_1}x] + e^{-\gamma_{n_2}x}[((\gamma_{n2}^2 - \delta_{n2}^2)W_{n_7} -$$

$$- 2\gamma_{n_2}\delta_{n_2}W_{n_8})\cos\delta_{n_2}x + (2\gamma_{n_2}\delta_{n_2}W_{n_7} + (\gamma_{n2}^2 -$$

$$- \delta_{n2}^2)W_{n_8})\sin\delta_{n_2}x]\}\cos n\frac{\pi}{2b}y\,. \tag{24}$$

7. Numerikus vizsgálatok

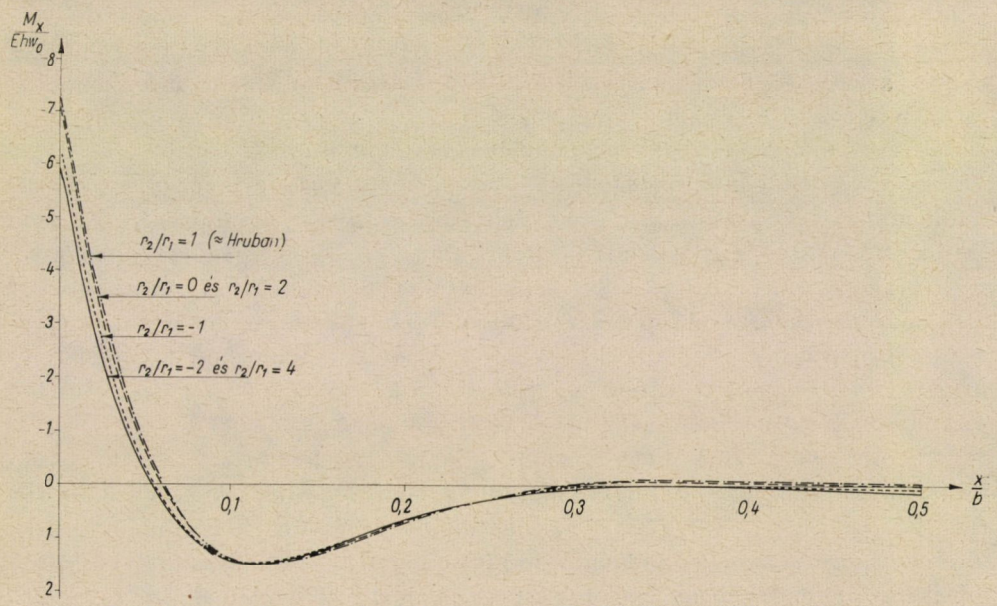
A (16) karakterisztikus egyenlet és (23a—l) lineáris egyenletrendszer megoldását, ill. a (24) nyomatékfüggvény meghatározását a NIMIGÜSZI Számítóközpontja elektronikus számítógéppel végezte el.

A számítás az r_2/b, r_2/h, r_2/r_1 dimenziótlan paraméterek segítségével egy x/r_2, y/b relatív koordinátarendszerben történt.

Először $n = 1$ (5. ábra) esetén az $r_2/b = 2$ és $r_2/h = 400$ paraméterekre számoltuk ki a hajlítónyomatékokat, miközben az r_2/r_1 paraméter -2 és $+4$ közötti kerek egész értékeket vett fel, és $y/b = 0$ volt. A gyakorlatban előforduló héjszerkezeteknél ugyanis az r_2/r_1 paraméter általában -2 és $+4$ között van [7].

A HRUBAN elméletéből adódó, (8) szerinti nyomatékot az r_2/h dimenzió nélküli paraméter segítségével az x/r_2 relatív koordinátában határoztuk meg.

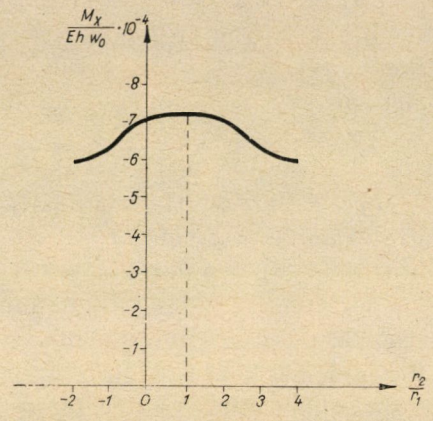
A (24)-re vonatkozó számítás a 3. ábrán látható nyomatéki görbéket eredményezte. Kiszámítottuk a (8) nyomatékfüggvény ordináta-értékeit is. Azt találtuk, hogy $r_2/r_1 = 1$ esetén a (24) és a (8) nyomaték igen jó egyezést mutat. A befogás keresztmetszetében az eltérés mindössze 0,003%. A közbülső helyeken a legnagyobb differencia is kisebb, mint 0,12%. Ezért a 3. ábrán nem is tudtuk külön vonallal ábrázolni a HRUBAN -féle (8) nyomatékfüggvényt. Ha $r_2/r_1 \neq 1$, akkor (8) a befogás helyén nagyobb nyomatékot ad, mint a (24). A különbség a 20%-ot is elérheti (pl.: $r_2/r_1 = 4$ esetén). A tényleges befogási nyomaték annál kisebb, minél jobban különbözik az r_2/r_1 paraméter 1-től.



3. ábra. Különböző r_2/r_1 paraméterű héjak nyomatéki ábrája egy fél cos. hullám alakú w elmozdulás és $r_2/b = 2$, $r_2/h = 400$ paraméterek esetén. Az ábrán a nyomatékok 10^4-szeresei vannak ábrázolva

Ha a befogási nyomatékokat az r_2/r_1 függvényében ábrázoljuk, akkor a 4. ábrán feltüntetett görbét kapjuk. Ennek a görbének az az érdekessége, hogy szimmetrikus az $r_2/r_1 = 1$ ordináta-egyenesre.

A HRUBAN-féle közelítés az első nyomatéki nullpontnak a peremtől mért távolságát nagyobbnak adja a ténylegesnél (pl.: $r_2/r_1 = 4$ ill. $r_2/r_1 = -2$ esetén 13%-kal (0,0071 b-vel)). Ennek következtében x irányban az első null-



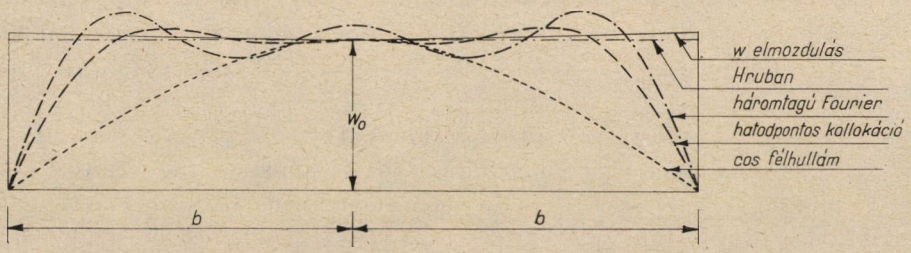
4. ábra. Befogási nyomatékok egy fél cos hullám alakú w elmozdulás és $r_2/b = 2$, $r_2/h = 400$ paraméterek esetén

pontot követően egy átlagosan 0,07 b hosszúságú szakaszon a közelítéssel számított pozitív nyomatékok kisebbek a (24)-ből számítottaknál. Előfordulhat, hogy ez az eltérés a befogási nyomaték 6%-át is eléri. Ennek a tényneknek azonbanl csak elvi jelentősége van, mivel ez a differencia a gyakorlat szempontjáb ó lényegtelen, hiszen a jelzett szakaszon a nyomatékok kicsik.

A továbbiakban azt vizsgáltuk, hogy a legjobb egyezést mutató $r_2/r_1 = 1$ paraméter esetén megmarad-e az egyezés, ha az r_2/b és r_2/h paramétert változtatjuk. A számítást a gyakorlatban előforduló legkisebb és legnagyobb paraméter értékekre: $r_2/b = 1{,}5$ és 2,5; $r_2/h = 200$ és 600 értékekre [7] végeztük el. A számszerű eredményekből kiderült, hogy a befogás keresztmetszetében (24) a (8)-nál nem egészen 0,1%-kal nagyobb nyomatékot ad. A kétféle elmélettel nyert nyomaték közötti differencia a közbülső helyeken a 2%-ot is elérte, de ezeken a helyeken a nyomaték maga kicsi volt.

Ezután megnéztük, hogy magasabb Fourier-tagokra ($n = 3, 5$) a középső keresztmetszetben ($y = 0$) hogyan alakulnak a hajlítónyomatékok. A számítást $r_2/b = 2$, $r_2/h = 400$ és $r_2/r_1 = 1$ paraméterekre végeztük el. Eredményül azt kaptuk, hogy a befogás helyén a hajlítónyomatékok n növekedtével kissé nőnek, a nyomatékábrák pedig kissé gyorsabban csillapodnak. A befogási nyomaték $n = 3$ esetén 0,2%-kal, $n = 5$ esetén 1,6%-kal volt nagyobb annál a nyomatéknál, melyet $n = 1$ esetén kaptunk.

Végül közelítő módon meghatároztuk az $r_2/b = 2$, $r_2/h = 400$, $r_2/r_1 = 1$ paraméterekkel jellemzett, oldalnyomásmentes, membránállapotú elliptikus paraboloid $x/r_2 = 0$ peremének w elmozdulását egyenletes teherre (5. ábra), majd a lehajlásfüggvényt Fourier-sorba fejtettük. Vettük a Fourier-sor első három



5. ábra. Elliptikus paraboloid peremének w elmozdulásgörbéje és közelítései

tagját (5. ábra) és ebből kiszámítottuk a nyomatékokat. A Fourier-sornak ez a közelítő összege a lassú konvergencia miatt nem ad kellő felvilágosítást a nyomatékok nagyságáról, de a nyomatékok csillapodásának mértékét elég jól jellemzi. A háromtagú részletösszegre azt kaptuk, hogy a nyomatékábra valamelyest gyorsabban ugyan, de gyakorlat szempontjából lényegében ugyanúgy csillapodik, mint a körhengerhéj nyomatékábrája. Hogy a keletkező befogási nyomaték nagyságáról is képet alkothassunk, a Fourier-sorban szereplő tagokat nem Fourier-együtthatókkal láttuk el, hanem kollokáció révén nyert konstansokkal. Előírtuk, hogy a közelítő trigonometrikus polinom helyettesítési értékei a $2b$ támaszköz hatodoló pontjaiban egyezzenek meg a w elmozdulásfüggvénnyel (5. ábra). Az így kiadódó befogási nyomaték $y/b = 0$-nál csupán 0,08%-kal volt nagyobb a (8)-ból számítottnál. A megegyezés (24) és (8) között $y = 0$-ban valamennyi esetben szembetűnő.

8. Összefoglalás

Az eddigiekből látszik, hogy forgásparaboloidra a héj tetőpontján áthaladó síkmetszet mentén a zavarónyomaték meghatározására a HRUBAN-féla közelítő eljárás a gyakorlati igényt bőven kielégítő pontosságot biztosít. Ha e héjfelület két főgörbülete nem azonos, akkor a lapos héjak elméletével kapott pontosnak tekinthető nyomatékok kisebbek lesznek a HRUBAN-féle elmélette számítottnál.

A közelítő nyomatékgörbék lefutása tendenciájában azonos a laposhéjelméletből nyert nyomatékgörbékével, ezért a közelítő és a pontos eljárás a zavart, tehát hajlítónyomatékra vasalandó peremzóna szélességét (a perem és a második nyomatéki nullpont közötti szakaszt) kis különbséggel ugyanannyinak adja. A zavartnak tekinthető sáv szélessége a héj paramétereitől függően $0{,}2b$ és $0{,}4b$ között változik.

A gyakorlatban előforduló geometriai paraméterekre tehát a HRUBAN-féle közelítés $r_2/r_1 = 1$ esetén pontosnak tekinthető, $r_2/r_1 \neq 1$ esetén pedig a biztonság javára téved. A pozitív nyomatékok szempontjából korrekcióra csak egy szűk intervallumban szorul. Ezért megállapíthatjuk, hogy a négyszög alaprajz fölé szerkesztett másodrendű lapos héjak közül az elliptikus paraboloid, a parabola donga és a nyereg alakú hiperbolikus paraboloid héjaknál a peremzavar jelenségét a HRUBAN-féle elmélet a gyakorlati számítás céljára jól írja le.

Végezetül még megjegyezzük az alábbiakat:

HRUBAN a héjperem w elmozdulásgörbéjét konstans függvénnyel közelítette, míg mi — a teljes héj oldalnyomásmentességét biztosítva — trigonometrikus sorral. Az 5. ábrán látható, hogy a héj sarkának közelében a konstans függvény jobban közelít mint a trigonometrikus sor valamely részletösszege. Ennek a ténynek azonban nincs jelentősége, mert a gyakorlatban a peremtartó a sarokpontokban úgyis felvesz valamekkora oldalnyomást.

A HRUBAN-féle körhengerhéj közelítésben az alkotó irányú peremen leadódó oldalnyomás hatását úgy is lehetne vizsgálni, hogy magára a körhengerhéjra alkalmazzuk a jelen dolgozatban ismertetett módszert. Tudniillik körhengerre is elérhető, hogy oldalnyomásmentes legyen a héj (ha a w elmozdulás a hengerhéj gyűrűs pereme mentén cosinus-hullám alakú, akkor ennek zérushelyein a gyűrűerő zérus). Ekkor azonban figyelmen kívül marad az eredeti héj hosszirányú görbültsége.

IRODALOM

1. BOUMA, A. L.: Some Applications of the Bending Theory Regarding Doubly Curved Shells. *Proceedings of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1960 (202—234. old.).
2. Design of Cylindrical Concrete Shell Roofs. *ASCE Manuals of Engineering Practice* No. 31. ASCE, New York 1952.
3. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen, 3. Aufl. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962.
4. HOLAND, I.: Design of Circular Cylindrical Shells. Oslo University Press, Oslo 1957.
5. HRUBAN, K.: Transzlációs felületek hajlításelmélete és alkalmazása a csarnoképítkezésben. *VI. Oszt. Közl.* 11 (1953), 165—202.
6. KOLLÁR L.—SZŐTS M.: Torznégyszög alakú lapos hiperbolikus paraboloidhéj peremzavarai. *Műszaki Tudomány* 42 (1970), 341—355.
7. RÜHLE, H.: Schalenkatalog. Entwurfsbüro für Typung des Ministeriums für Aufbau. Sachwort-Verzeichnis 73.71 Dresden, Jan. 1955.

Edge Disturbances of Second Order Shallow Ttranslational Shells on a Rectangular Base. Edge disturbances of the second order translational shells on rectangular base are dealt with on the basis of the elastic bending theory of shallow shells. The magnitude and attenuation curve of the disturbing bending moments caused at the clamped edges are determined. The results thus obtained are compared with those found by using HRUBAN's familiar approximate procedure.

Randstörungen der flachen Translationsschalen zweiter Ordnung über einem Viereckgrundriß. Randstörungen der Translationsschalen zweiter Ordnung über viereckigem Grundriß werden aufgrund der Biegetheorie der flachen Schalen behandelt. Die größe und Abklingungskurve der am eingespannten Rand entstehenden störenden Biegemomente werden ermittelt. Die erhaltenen Ergebnisse werden denen des wohlbekannten Näherungsverfahrens von Hruban gegenübergestellt.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója. Műszaki szerkesztő: Sós Attila
A kézirat nyomdába érkezett: 1973. VI. 26. — Terjedelem: 19,60 (A/5) ív

73.75183 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

42,– Ft

Megjelent 1973. XII. 20.

Index: 26.499

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

47. KÖTET
3—4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1973

MŰSZ. TUD.

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG
BARTA ISTVÁN, BÖLCSKEI ELEMÉR, GESZTI P. OTTÓ,
HELLER LÁSZLÓ

SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.
KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Négy füzet alkot egy kötetet.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia
Műszaki Tudomány
1383 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó 1363 (Budapest, Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat 1389 (Budapest, Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.

KÜLÖNBÖZŐ MEREVSÉGGEL BÍRÓ ALSÓ-FELSŐ ÖVSÍKÚ, KÉTRÉTEGŰ TÉRRÁCSOK SZÁMÍTÁSA A KONTINUUM-MÓDSZERREL

KOLLÁR LAJOS*

a műszaki tudományok doktora

[Beérkezett 1971. július 23-án]

A dolgozat általános módszert közöl olyan kétrétegű térbeli rácsszerkezetek egyenértékű kontinuumának meghatározására, amelyeknek két övsíkja egymástól eltérő, tetszőleges hálózatból áll. Levezeti az egyenértékű kontinuum differenciálegyenlet-rendszerét és peremfeltételeit. Megállapítja, hogy a lemezek alakváltozását jellemző lehajlásfüggvényen kívül még egy feszültségfüggvényre is szükség van a helyettesítő kontinuum erőjátékának jellemzésére, hasonlóan a bordázott lemezek esetéhez.

1. Bevezetés

A kétrétegű térbeli rácsos szerkezetek kontinuum-módszerrel történő számítása megoldott probléma abban az esetben, ha a két övsík merevségi jellemzői azonosak, vagy csak egyetlen közös szorzótényezőben különböznek egymástól [7], [3]. Ha azonban a két övsík merevségi jellemzői különböző mértékben vagy minőségileg térnek el egymástól (pl. az egyiknek van nyírási merevsége, a másiknak nincs stb.), akkor a feladat lényegesen bonyolultabbá válik, és hasonló lesz az egyik oldalán kétirányban bordázott lemez erőjátékához [1].

Egy korábbi dolgozatban [4] egy speciális szerkezet-fajtára mutattunk be megoldást: az alsó övsíknak nem volt nyírási merevsége, a felsőnek viszont volt, de x és y irányban csak egyenlő nagyságú derékerőt tudott felvenni. Most egy általános érvényű módszert mutatunk be, amellyel fel tudjuk írni bármilyen merevségi tulajdonságokkal bíró alsó és felső övsíkú térrács kontinuum-egyenletét.

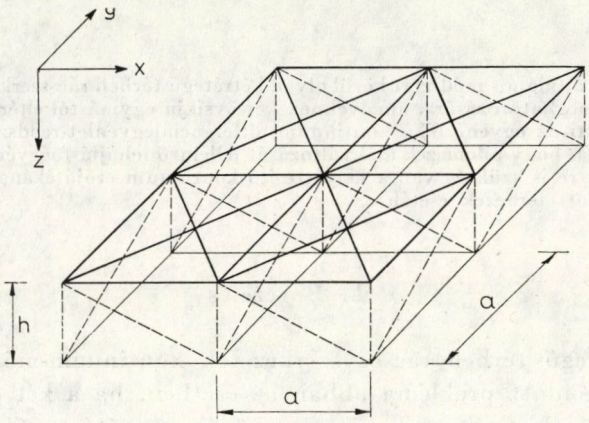
2. A feladat kitűzése. Feltevések

Legyen adva egy kétrétegű, egymástól h távolságban levő párhuzamos övsíkokból álló térrács. Az övsíkokról csak azt kötjük ki, hogy *homogének* legyenek, azaz merevségi jellemzőik mindenütt legyenek azonosak, és ezenkívül kölcsönösen egyértelmű, lineáris összefüggés álljon fenn az alakválto-

* Dr. Kollár Lajos, 1122 Budapest, Karap u. 9.

zás- és metszeterő-komponensek között. Az övsíkok merevsége egyébként teljesen általánosan anizotróp *(aeolotróp)* lehet. Az őket összekötő rácsozástól pedig azt kívánjuk meg, hogy akadálytalanul tegye lehetővé az övsíkok deformációját. Az 1. ábrán tüntettünk fel egy példát a fenti feltételeknek megfelelő térrácsra.

Megemlítjük még, hogy a módszer *inhomogén* (változó merevségű) övsíkok esetén is használható, csak a felírandó differenciálegyenlet együtthatói fognak helyről-helyre változni.



1. ábra

Az övsíkokat statikai szempontból a saját síkjukban bekövetkező alakváltozásokkal szemben tanúsított nyúlási és nyírási merevségeik jellemzik. Ezeket az alapul választott x,y koordinátarendszerben az

$$\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{1a}$$

azaz röviden az

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon} \tag{1b}$$

mátrix-összefüggés definiálja. Itt **n** a vizsgált övsík (membrán-) metszeterőinek vektora, $\boldsymbol{\epsilon}$ az alakváltozási vektor, **A** pedig a merevségi mátrix. Ez utóbbi a külső idegen munkák tétele miatt mindig szimmetrikus.

Jelöljük a következőkben az alsó övsíkra vonatkozó mennyiségeket „*a*" ndexszel, a felsőre vonatkozókat pedig „*f*" indexszel.

3. A módszer ismertetése

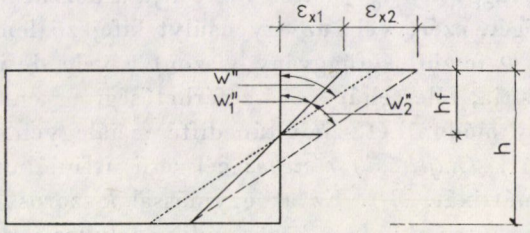
Bontsuk fel az egyik, pl. a felső övsík merevségi mátrixát két részre:

$$\mathbf{A}^f = \mathbf{A}_{\mathrm{I}}^f + \mathbf{A}_{\mathrm{II}}^f. \tag{2}$$

Az $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^f$ részt válasszuk meg úgy, hogy elemei az alsó övsík merevségeinek „k"-szorosai legyenek:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^f = k \cdot \mathbf{A}^a \tag{3}$$

Ily módon az $\mathbf{A}_{\mathrm{II}}^f$ „különbség"-merevségi mátrix tulajdonképpen a felső övsík merevségének az alsóétól való minőségi eltérését fejezi ki.



2. ábra

A szerkezet teljes alakváltozását és erőjátékát is két részre fogjuk bontani. 1. résznek tekintjük az $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^f$ merevségű felső és a vele arányos $\mathbf{A}^a$ merevségű alsó övsík *tiszta hajlítási deformációját* (w_1) és belső erőit. Ezek közül az alsó övsík belső erői a végleges értéküket veszik fel. A felső övsíkban azonban az ebből a w_1 hajlítási deformációból keletkező ϵ_{I}^f alakváltozások a valóságban nemcsak az $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^f$ merevségnek megfelelő belső erőket hozzák létre, hanem az $\mathbf{A}_{\mathrm{II}}^f$ merevségeknek megfelelőket is. Ezek viszont általában nem alkotnak önmagukban egyensúlyi erőrendszert. Így a felső övsík még egy kiegészítő (2. jelű) *síkbeli alakváltozásra* kényszerül, hogy az ennek során ébredő belső erőkkel egyensúlyozza ki az 1. (hajlítási) alakváltozás-rész kiegyensúlyozatlan erőit. Ennek a kiegészítő alakváltozásnak természetesen összeférhetőnek is kell lennie.

E két erőjáték-részt természetesen nem lehet külön-külön meghatározni, mivel egyik sem alkot önmagában egyensúlyi erőrendszert, hanem csak egyszerre egy lépésben.

A 2. jelű síkbeli alakváltozásból az alsó övsík nem szenved a saját síkjában semmiféle deformációt (mivel az összekötő rácsozás — korábbi feltevésünknek megfelelően — akadálytalanul lehetővé teszi az egyik öv alakváltozását), de az egész szerkezet további hajlítási alakváltozást végez (w_2, lásd a 2. ábrát). Az ennek megfelelő nyomatékokat (az 1. alakváltozás-rész kiegyensúlyozatlan erőinek nyomatékaival együtt) a felső övsík megfelelő membrán-

erőinek a semleges tengelyre vett nyomatéka szolgáltatja. Ezek a nyomatékok azonban nem vesznek részt a függőleges teher viselésében, mivel egyensúlyban levő erőrendszerből származnak, és így zérus lesz a belőlük kapható nyomatékokkal képezett lemezegyenletnek a jobb oldala is.

4. Az alapegyenletek levezetése

Az alakváltozás és az erőjáték ismertetett két részre bontásának megfelelően az 1. részt a w_1 hajlítási lehajlásfüggvénnyel fogjuk jellemezni, a 2. részt pedig a kiegészítő síkbeli erőrendszert definiáló Φ feszültségfüggvénnyel. Mivel a w_1 lehajlásfüggvény bevezetése biztosítja a hozzátartozó alakváltozások összeférhetőségét, ezért vele az egyensúlyt kifejező lemezegyenletet kell kielégítenünk. Az Φ feszültségfüggvény viszont a vele definiált síkbeli erők egyensúlyát biztosítja, tőle tehát az összeférhetőségi egyenlet teljesítését kell megkívánnunk. Ily módon két szimultán differenciálegyenlethez jutunk.

Az erőjáték 1. *(hajlítási) részéhez* célszerű definiálnunk a térrács hajlítási merevségi mátrixát, B-t. Ez az egymással k-szoros arányban álló $\mathbf{A}^a$ és $\mathbf{A}_1^f$ övmerevségi mátrixoknak a közös súlyvonalukra vett inercianyomatékával egyenlő. E közös súlyvonal távolsága a felső övsíktól:

$$h^f = h\frac{1}{1+k}, \tag{4}$$

a hajlítási merevségi mátrix tehát:

$$\mathbf{B} = h^2\frac{k}{1+k}\mathbf{A}^a. \tag{5}$$

E hajlítási merevségi mátrix biztosítja az összefüggést a w_1 hajlítási alakváltozás második deriváltjai, azaz a görbületek és a (kétszeres) csavarodás, valamint a teljes térrácsra ható fajlagos nyomatékok között:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1'' \\ \ddot{w}_1 \\ 2w_1'\cdot \end{bmatrix} \tag{6a}$$

(vesszővel az x szerinti, ponttal az y szerinti differenciálást jelöljük), azaz

$$\mathbf{m} = -\mathbf{B}\cdot L_1 w_1, \tag{6b}$$

ha L_1-gyel jelöljük a következő differenciáloperátort:

$$L_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Ezek után *a lemez egyensúlyát* kifejező ismert [6]

$$m_x'' + m_y'' + 2m_{xy}'' = -p \tag{8a}$$

differenciálegyenletet is a rövidebb

$$L_1^* \mathbf{m} = -p \tag{8b}$$

alakban írhatjuk fel. Behelyettesítve ide (6b)-t, megkapjuk a hajlítási w_1 alakváltozás differenciálegyenletét az általánosan anizotróp lemez merevségével kifejezve:

$$L_1^* \mathbf{B} L_1 w_1 = p\,. \tag{9}$$

A *kiegészítő síkbeli alakváltozás*nak, vagyis az erőjáték 2. *részének* vizsgálatához először is azt kell meggondolnunk, hogy a felső övsík kiegészítő

$$\boldsymbol{\epsilon}_2 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x2} \\ \varepsilon_{y2} \\ \gamma_{xy2} \end{bmatrix} \tag{10}$$

síkbeli alakváltozásából keletkező

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} n_{x2} \\ n_{y2} \\ n_{xy2} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^f \cdot \boldsymbol{\epsilon}_2 \tag{11}$$

erőrendszer nem önmagában lesz egyensúlyban, hanem az 1. (hajlítási) alakváltozásból származó erők $\mathbf{n}_{1\,II}$ kiegyensúlyozatlan részével együtt. Eme $\mathbf{n}_{1\,II}$ kiegyensúlyozatlan erőket az elmondottak értelmében úgy állíthatjuk elő, hogy a felső övsíknak a w_1 hajlítási alakváltozásból származó

$$\boldsymbol{\epsilon}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x1} \\ \varepsilon_{y1} \\ \gamma_{xy1} \end{bmatrix} = h^f \cdot L_1 w_1 \tag{12}$$

nyúlási alakváltozásait ([3], 2. ábra) megszorozzuk az $\mathbf{A}_{II}^f$ „különbség"-merevségi mátrix megfelelő elemeivel:

$$\mathbf{n}_{1\,II} = \begin{bmatrix} n_{x1\,II} \\ n_{y1\,II} \\ n_{xy1\,II} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{II}^f \cdot \boldsymbol{\epsilon}_1\,. \tag{13}$$

A Φ feszültségfüggvényt tehát úgy kell megválasztanunk, hogy az $\mathbf{n}_{1\,II}$ és $\mathbf{n}_2$ erők *összegének* egyensúlyát biztosítsa, azaz:

$$\begin{aligned} \Phi'' &= n_{x1\,II} + n_{x2}\,, \\ \Phi'' &= n_{y1\,II} + n_{y2}\,, \\ -\Phi'' &= n_{xy1\,II} + n_{xy2}\,, \end{aligned} \tag{14a–c}$$

vagyis, bevezetve az

$$L_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{15}$$

differenciáloperátort:

$$L_2\Phi = \mathbf{n}_{1\,II} + \mathbf{n}_2. \tag{16}$$

Eme előkészítés után rátérhetünk *a síkbeli alakváltozás összeférhetőségi* egyenletére, amely, mint ismeretes [5], a következő alakú:

$$L_2^*\boldsymbol{\epsilon} = \varepsilon_x'' + \varepsilon_y'' - \gamma_{xy}'' = 0\,. \tag{17}$$

Elvben csak az ϵ_2 kiegészítő alakváltozástól kellene megkövetelnünk e (17) összeférhetőségi egyenlet teljesítését, mivel a w_1-ből származó ϵ_1 alakváltozás (12) amúgyis összeférhető. A (14) ill. (16) egyenletekből azonban látszik, hogy ϵ_2-t nem tudjuk önmagában kifejezni Φ-vel, mivel Φ tartalmazza az ϵ_1 alakváltozásból származó erők egy részét is. Kiegészítjük tehát a (16) egyenletet az 1. erőjáték-rész hiányzó $\mathbf{n}_{1\,I}$ erőivel, és a belőle származó teljes (1.+2.) alakváltozásra írjuk fel az összeférhetőség teljesülését.

E hiányzó $\mathbf{n}_{1\,I}$ erők tulajdonképpen a hajlítási erőjátékból származó öv-erőkkel egyenlők:

$$\mathbf{n}_{1\,I} = -\frac{\mathbf{m}}{h}, \tag{18a}$$

azaz (6b) alapján:

$$\mathbf{n}_{1\,I} = \frac{1}{h}\,\mathbf{B}\cdot L_1 w_1\,. \tag{18b}$$

A felső övsíkban keletkező teljes erőrendszer tehát, (16)-ot is figyelembe véve:

$$\mathbf{n}_{1\,I} + \mathbf{n}_{1\,II} + \mathbf{n}_2 = \frac{1}{h}\,\mathbf{B}L_1 w_1 + L_2\Phi\,. \tag{19}$$

Az ennek megfelelő teljes $\epsilon_1 + \epsilon_2$ alakváltozást az (1) egyenletrendszer invertálása szolgáltatja:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = (\mathbf{A}^f)^{-1} \cdot (\mathbf{n}_{1\,\mathrm{I}} + \mathbf{n}_{1\,\mathrm{II}} + \mathbf{n}_2) = (\mathbf{A}^f)^{-1} \left(\frac{1}{h} \mathbf{B} L_1 w_1 + L_2 \Phi \right). \quad (20)$$

Behelyettesítve ezt (17)-be, megkapjuk a térrács erőjátékát leíró másik differenciálegyenletet:

$$L_2^*(\mathbf{A}^f)^{-1} \left(\frac{1}{h} \mathbf{B} L_1 w_1 + L_2 \Phi \right) = 0 . \quad (21)$$

A (9) és (21) egyenletekből álló rendszer — a peremfeltételekkel együtt — meghatározza a w_1 és Φ függvényeket és ezzel együtt a teljes erőjátékot. A peremfeltételeket azonban nem w_1-re, hanem csak a *teljes* w lehajlásra tudjuk megadni. Át kell tehát írni az egyenleteket úgy, hogy w_1 helyett w-t tartalmazzák. Ez a teljes w lehajlás az 1. (hajlítási) erőjátékrészből származó w_1 lehajlásnak, valamint a 2. (kiegészítő síkbeli) alakváltozásból származó w_2 lehajlásrésznek az összege:

$$w = w_1 + w_2. \quad (22)$$

A w_1 lehajlás — mivel az alsó övsík a 2. alakváltozás során nem deformálódik — a 2. ábrának megfelelően kifejezhető az ϵ_2 alakváltozással:

$$w_2'' = \frac{\varepsilon_{x2}}{h} ,$$

$$w_2'' = \frac{\varepsilon_{y2}}{h} , \quad (23a)$$

$$2w_2' = \frac{\gamma_{xy2}}{h} ,$$

azaz

$$L_1 w_2 = \frac{1}{h} \epsilon_2 . \quad (23b)$$

(22) segítségével kifejezzük a (9) és (21) egyenletekben szereplő $L_1 w_1$-et w-vel és ϵ_2-vel:

$$L_1 w_1 = L_1 w - \frac{1}{h} \epsilon_2 . \quad (24)$$

Most még ϵ_2-t kell kifejeznünk Φ-vel és w-vel. A (20) egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk $\mathbf{A}^f$-fel, majd (12) segítségével felírjuk ϵ_1-et w_1-gyel, ezt pedig (24) alapján w-vel és ϵ_2-vel. Ily módon az egyenletben ϵ_2-n kívül csupán a w és

Φ függvények fognak szerepelni, ϵ_2-t tehát meg tudjuk velük határozni:

$$\mathbf{A}^f\left[h^f\left(L_1 w - \frac{1}{h}\epsilon_2\right) + \epsilon_2\right] = \frac{1}{h}\mathbf{B}\left(L_1 w - \frac{1}{h}\epsilon_2\right) + L_2\Phi\,, \tag{25}$$

amiből átrendezéssel és figyelembe véve (5) alapján a

$$\frac{h - h^f}{h}\mathbf{A}^f + \frac{1}{h^2}\mathbf{B} = \frac{k}{1+k}(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)$$

azonosságot, a következő kifejezést kapjuk ϵ_2-re:

$$\epsilon_2 = hL_1 w + \frac{1+k}{k}(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}(L_2\Phi - h\mathbf{A}^f L_1 w)\,. \tag{26}$$

Behelyettesítve ezt (24)-be, megkapjuk $L_1 w_1$-nek w-vel és Φ-vel felírt alakját:

$$L_1 w_1 = \frac{1}{h}\frac{1+k}{k}(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}(h\mathbf{A}^f L_1 w - L_2\Phi)\,. \tag{27}$$

Ha (27)-et beírjuk (9)-be és (21)-be (és még az egyöntetűség kedvéért **B**-t is kifejezzük (5) alapján $\mathbf{A}^a$-val), előállítottuk a teljes w lehajlást és a Φ feszültségfüggvényt tartalmazó differenciálegyenlet-rendszert:

$$hL_1^*\mathbf{A}^a(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}(h\mathbf{A}^f L_1 w - L_2\Phi) = p\,. \tag{28a}$$

$$L_2^*(\mathbf{A}^f)^{-1}\left[\mathbf{A}^a(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}(h\mathbf{A}^f L_1 w - L_2\Phi) + L_2\Phi\right] = 0\,. \tag{28b}$$

(28a–b)-t nevezhetjük tehát *az általános kétrétegű térrács viselkedését leíró kontinuum-differenciálegyenlet-rendszernek.*

E differenciálegyenlet-rendszerből kiesett a (3)-ban definiált k arányossági tényező, ami azt jelenti, hogy k-t tetszőlegesen vehetjük föl.

A (28a–b) differenciálegyenlet-rendszer természetesen feltételezi az $\mathbf{A}^f$ és az $(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)$ mátrixok invertálhatóságát. Egy másik alkalommal kívánunk foglalkozni azokkal az esetekkel, amikor ez a feltétel nem teljesül.

Abban a speciális esetben, ha a két övsík merevségei *arányosak* egymással ($\mathbf{A}^f = k\mathbf{A}^a$), akkor

$$\mathbf{A}^a(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1} = \frac{1}{1+k}\mathbf{E}$$

és

$$(\mathbf{A}^f)^{-1}\,\mathbf{A}^f = \mathbf{E}$$

miatt (28a)-ban Φ, (28b)-ben pedig w szerepel az $L_1 L_2$ operátorokkal szorozva, amely viszont zérust ad. Így a (28a–b) egyenletrendszer két önálló egyen-

letre esik szét: az első a

$$\mathbf{B} = h^2 \frac{k}{1+k} \mathbf{A}^a$$

hajlítási merevség-mátrixú lemez w lehajlását határozza meg, a második pedig a kiegészítő Φ feszültségfüggvény alakváltozási összeférhetőségét biztosítja, de a felső övsík síkjában terheletlen peremek esetében $\Phi = 0$ adódik.

A helyettesítő kontinuumnak a (28a—b) egyenletek — peremfeltételeket is figyelembe vevő — megoldásával kapott metszeterőit az Irodalom rovatban [7], [2], illetve [3] alattiak szerint számíthatjuk át rúderőkké.

5. Peremfeltételek

A következőkben a szabadon támaszkodó (csuklós) perem feltételi egyenleteit írjuk fel, az egyszerűség kedvéért csak az x tengellyel párhuzamos peremre:

zérus a lehajlás:	$w = 0,$	(29a)
zérus a peremre merőleges hajlítónyomaték:	$m_y = 0,$	(29b)
a felső övsíkban zérus a peremre merőleges vízszintes (membrán)-erő:	$n_y = n_{y1} + n_{y2} = 0,$	(29c)
a felső övsíkban zérus a (membrán-)nyíróerő:	$n_{xy} = n_{xy1} + n_{xy2} = 0.$	(29d)

(29b)-ből (18a) segítségével $n_{y1\,I} = 0$ adódik, így (29c) a (14b) képlet figyelembevételével így írható:

$$\Phi'' = 0. \qquad (29c^*)$$

A (29b)-hez szükséges nyomatékot úgy fejezhetjük ki w-vel és Φ-vel, hogy (27)-et behelyettesítjük (6b)-be. Figyelembe véve még az (5) összefüggést is, a következőt kapjuk:

$$\mathbf{m} = -h\mathbf{A}^a(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}(h\mathbf{A}^f L_1 w - L_2\Phi)\,. \qquad (29b^*)$$

E nyomatékvektornak kell zérussal egyenlővé tenni a peremre merőleges (a jelen esetben m_y) komponensét.

Végül a (29d)-hez szükséges $\mathbf{n}_{1\,I}$ metszeterő-vektort a (18b) és (5) összefüggéseket felhasználva az

$$\mathbf{n}_{1\,I} = \frac{hk}{1+k} \mathbf{A}^a L_1 w_1$$

alakban írhatjuk fel. Behelyettesítve ebbe (27)-et, a következőképpen fejezhetjük ki $\mathbf{n}_{1\,I}$-et w-vel és Φ-vel:

$$\mathbf{n}_{1\,I} = \mathbf{A}^a(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}(h\mathbf{A}^f L_1 w - L_2\Phi)\,. \tag{29d*}$$

Ennek $n_{xy1\,I}$ komponensét véve és hozzáadva (14c) értelmében $-\Phi''$-t, felírhatjuk a (29d) peremfeltételt.

6. Alkalmazási példa

Írjuk fel az 1. ábrán vázolt, az x és y irányokban azonos szilárdsági tulajdonságokkal rendelkező térrács kontinuum-differenciálegyenleteit a (29a—b) általános egyenletekből.

Ezt a térrácsot az jellemzi, hogy az alsó öv merevségi mátrixa

$$\mathbf{A}^a = \begin{bmatrix} A_a & 0 & 0 \\ 0 & A_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alakú, a felső övé pedig (lásd [2]-t):

$$\mathbf{A}^f = \begin{bmatrix} A & \nu A & 0 \\ \nu A & A & 0 \\ 0 & 0 & A_{xy} \end{bmatrix}.$$

A (3) egyenlet szerint:

$$k = \frac{A}{A_a}\,.$$

Képeznünk kell még az $(\mathbf{A}^f)^{-1}$ és az $(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1}$ mátrixokat:

$$(\mathbf{A}^f)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A(1-\nu^2)} & \dfrac{-\nu}{A(1-\nu^2)} & 0 \\ \dfrac{-\nu}{A(1-\nu^2)} & \dfrac{1}{A(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{A_{xy}} \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{A}^f + \mathbf{A}^a)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{(A_a + A)}{(A_a + A)^2 - \nu^2 A^2} & \dfrac{-\nu A}{(A_a + A)^2 - \nu^2 A^2} & 0 \\ \dfrac{-\nu A}{(A_a + A)^2 - \nu^2 A^2} & \dfrac{(A_a + A)}{(A_a + A)^2 - \nu^2 A^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{A_{xy}} \end{bmatrix}.$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, a (28a—b) egyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$\frac{h}{(1+k)^2-k^2\nu^2}\{hkA_a[(1+k-k\nu^2)w^{IV}+2\nu w'''+(1+k-k\nu)w'']+$$

$$+[k\nu(\Phi^{IV}+\Phi'')-2(1+k)\Phi''']\}=p$$

és

$$\frac{h}{(1+k)^2-k^2\nu^2}[-k(w^{IV}+w'')+2(1+k)w''']-$$

$$-\frac{1}{[(1+k)^2-k^2\nu^2]k(1-\nu^2)A_a}\{[1+k(1+\nu^2)](\Phi^{IV}+\Phi'')-2\nu(1+2k)\Phi'''\}+$$

$$+\frac{1}{k(1-\nu^2)A_a}(\Phi^{IV}+\Phi''-2\nu\Phi''')+\frac{\Phi'''}{A_{xy}}=0.$$

Ha pedig elhanyagoljuk a felső övsík harántkontrakcióját ($\nu=0$), akkor az egyenletek a következőképpen egyszerűsödnek:

$$h^2\frac{k}{1+k}A_a\left(w^{IV}+w''-\frac{2\Phi'''}{hkA_a}\right)=p$$

és

$$\frac{2h}{1+k}w'''+\frac{1}{(1+k)A_a}(\Phi^{IV}+\Phi'')+\frac{\Phi''}{A_{xy}}=0.$$

A peremfeltételek pedig — $\nu=0$ és szabad támaszkodás esetében — az alábbi egyszerű alakban adódnak:

(29a): $$w=0,$$

(29c*): $$\Phi''=0,$$

A (29b*) peremfeltétel a

$$hAw''-\Phi''=0$$

alakot öltené, de (29c*) miatt tovább egyszerűsödik:

(29b*): $$w''=0,$$

és végül ($A_1^f=kA^a$ 33-as eleme zérus lévén) $n_{xy1\,I}=0$, így (29d) a következőképpen alakul:

(29d): $$\Phi'=0.$$

Megjegyezzük azonban, hogy a harántkontrakció elhanyagolása mindenképpen közelítést jelent, mivel [2] szerint nem létezik olyan — két irányú húzási és nyírási merevséggel bíró — rácsozat, amelynek szabatosan 0 lenne a harántkontrakciós tényezője.

IRODALOM

1. GIENCKE, E.: Die Grundleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen. *Der Stahlbau* **24** (1955), 128—129.
2. HEGEDÜS I.: Négy vagy több irányú rudazatból álló hálózat számítása folytonos számítási modellal. (Megjelenés alatt)
3. KOLLÁR L.—HEGEDÜS I.: Kétrétegű, általános háromszög hálózatú rácsszerkezet megoldása folytonos számítási modellal. *Műszaki Tudomány* **46** (1973), 65—82
4. KOLLÁR L.: Kétrétegű, alaprajzban átlós—négyzetes térrácsok számítása a kontinuum-módszerrel. *Műszaki Tudomány* **46** (1973), 191—209
5. TIMOSHENKO, S.—GOODIER, J. N.: Theory of Elasticity. McGraw-Hill, New York—Toronto—London 1951.
6. TIMOSHENKO, S.—WOINOWSKI-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York—Toronto—London 1959.
7. WRIGHT, D. T.: A Continuum Analysis for Double Layer Space Frame Shells. *Publ. Int. Assoc. Bridge Struct. Eng.* Zurich, **26** (1966).

Continuum Method of Analysis for Double-Layer Space Trusses with Upper and Lower Chord Planes of Different Rigidities A general method has been presented for determining equivalent continua of double-layer space trusses with two different, arbitrary chord plane meshes. Differential equation system and boundary conditions of the equivalent continuum are derived. In addition to the deflection function describing the plate deformation, a stress function is still needed to describe the internal force system of the substituting continuum, similarly as for ribbed plates.

Berechnung zweischichtiger Raumfachwerke mit unteren und oberen Gurtebenen von verschiedenen Steifigkeiten mit dem Kontinuumverfahren. Ein allgemeines Verfahren wird angegeben für die Bestimmung des gleichwertigen Kontinuums von zweischichtigen Raumfachwerken, deren beiden Gurtebenen aus unterschiedlichen, beliebigen Netzwerken bestehen. Differentialgleichungssystem und Randbedingungen des gleichwertigen Kontinuums werden abgeleitet. Ausser der Durchbiegungsfunktion, die die Plattenverformung beschreibt, ist noch eine Spannungsfunktion nötig für die Kennzeichnung des Kräftespiels des Ersatzkontinuums, ähnlich dem Fall der Rippenplatten.

BELSŐÉGÉSŰ MOTOROK SZÍVÁSI VÉGHŐMÉRSÉKLETÉNEK MEGHATÁROZÁSA A KOMPRESSZIÓ ÉS EXPANZIÓ FOLYAMATOK KIIKTATÁSÁNAK SEGÍTSÉGÉVEL

PÁSZTOR E.*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett 1972. szeptember 7-én]

A tanulmány eljárást és kísérleti eredményeket mutat be belsőégésű motorok szívási véghőmérséklete, ill. a szívás alatti hőátadási tényező megállapítására. A kidolgozott új eljárás lényege, hogy a motor munkafolyamatából kiiktatjuk a kompresszió-expanzió folyamatot, így a szívási és kipufogási ütemek alatti együttes közegfelmelegedés a valóságos viszonyok igen jó megközelítése mellett kísérletileg meghatározható. A motort a kísérletek alatt kívülről forgatni kell és gondoskodni arról, hogy a hengerfal és hengerfej üzemi hőmérsékleten legyenek. A teljes (kompresszió-expanzió) hőátadási folyamatra felírt differenciálegyenlet segítségével a mérési eredmények felhasználásával, a hőátadási tényező, ill. a szívási véghőmérséklet közvetlenül meghatározható. A módszer négyütemű belsőégésű motorok esetében igen jól alkalmazható, kétütemű motoroknál bizonyos megfontolások szükségesek.

1. Bevezetés

A belsőégésű motorok munkafolyamatát, annak indikált középnyomását a szívási végállapot jelentősen befolyásolja. A munkaközeg szívási ütem alatt történő felmelegedése csökkenti a henger levegőtöltését, így az elégethető tüzelőanyag mennyiségét is. A sűrítéshez felhasznált munka, valamint a kompresszió véghőmérséklet adott kompresszióviszony mellett elsősorban a kompresszió kezdeti hőmérsékletének függvénye. A kompresszió folyamata alatt, a munkaközeg és a hűtőközeg között, a hengerfalban kialakuló hőáram irányát és nagyságát is jelentős mértékben befolyásolja a szívási véghőmérséklet. Egyébként azonos feltételek (kompresszióviszony, légviszony, égéskezdet stb.) mellett az égési véghőmérséklet, így nem utolsó sorban a motor hőterhelése is a szívási véghőmérséklet függvénye. Jelentőségének megfelelően már eddig is sokan foglalkoztak a szívási véghőmérséklet meghatározásának problémájával, azonban méréseiket legtöbb esetben nem tényleges motoron végezték, hanem a valóságot többé-kevésbé jól utánzó kísérleti modelleken. Ennek megfelelően a kísérleti méréseknél egyenes és görbe, viszonylag nagy átmérőjű csövekben fellépő hőátadási viszonyokat tanulmányozták és ezekből a kísérleti eredményekből vontak le következtetéseket a motorba kerülő munkaközeg szívás alatti felmelegedésére vonatkozólag.

* Dr. Pásztor E., 1026 Budapest, Bimbó u. 171/b.

E tanulmányban kidolgozott eljárás tényleges motoron történő méréseket kísérel meg oly módon, hogy a kompresszió és expanzió ütemek kiiktatásával a motorban csak a szívás és kipufogás folyamata maradt. A teljes (szívás-kipufogás alatti) közegfelmelegedésből leválasztva a kipufogási folyamat alatti felmelegedést, meghatározható a szívás alatti hőmérsékletváltozás.

2. A szívás alatti közegfelmelegedés meghatározásának nehézségei, az eddig kidolgozott eljárások analízise

A szívási folyamat alatti közegfelmelegedés, ill. az ezzel kapcsolatos hőátadási tényező meghatározásának legfőbb nehézsége abban áll, hogy tényleges üzemi körülmények között működő motoron a szívási véghőmérséklet csak olyan rendkívül kis hőtehetetlenségű hőmérő segítségével határozható meg, mely a hengerben uralkodó pillanatnyi hőmérsékletek méréséhez is képes. Az ilyen hőmérőnek azonban a hengertérben uralkodó égési véghőmérsékletet és végnyomást, valamint az égéssel együttjáró igen nagy mechanikai igénybevételt is ki kell bírnia, legalább egy méréssorozat lefolytatásához szükséges ideig. Ezeket a súlyos követelményeket a kis hőtehetetlenségű hőmérők általában nem tudják teljesíteni, ill. ezek teljesítése csak a pillanatnyi hőmérséklet mérése pontosságának rovására történhet, mivel az élettartam növelése a hőtehetetlenség szükségszerű növekedésével jár együtt.

A szívási véghőmérséklet a kompresszió kezdetén uralkodó nyomás és a hengerben maradó közegmennyiség ismeretében is meghatározható. A szívási végnyomás indikálással történő meghatározása viszonylag megoldott probléma, azonban a hengerben maradó közegmennyiség pontos meghatározása legalább olyan súlyos feladat, mint a szívási véghőmérséklet mérése. A szívó és kipufogó szelepek összenyitásának ténye, a szívó és kipufogócsőben, valamint a hengertérben együttesen lejátszódó bonyolult lengési folyamatok rendkívüli mértékben megnehezítik a hengerben maradó közegmennyiség pontos meghatározását. A helyzet általában fordított: a szívási véghőmérséklet és végnyomás ismeretében határozzák meg a hengerek tényleges töltését.

A szívási véghőmérséklet meghatározásának fentiekben vázolt nehézségei következtében közelítő eljárások fejlődtek ki, melyeknek közös jellegzetessége, hogy a motor szívási folyamatát valamilyen módon utánzó modell segítségével végezték méréseiket. A kísérleti modellekben folyamatos közegáramlást valósítottak meg, így elmaradt az alapvető nehézségeket okozó, pillanatnyi hőmérsékletet mérő kis hőtehetetlenségű hőmérők alkalmazása.

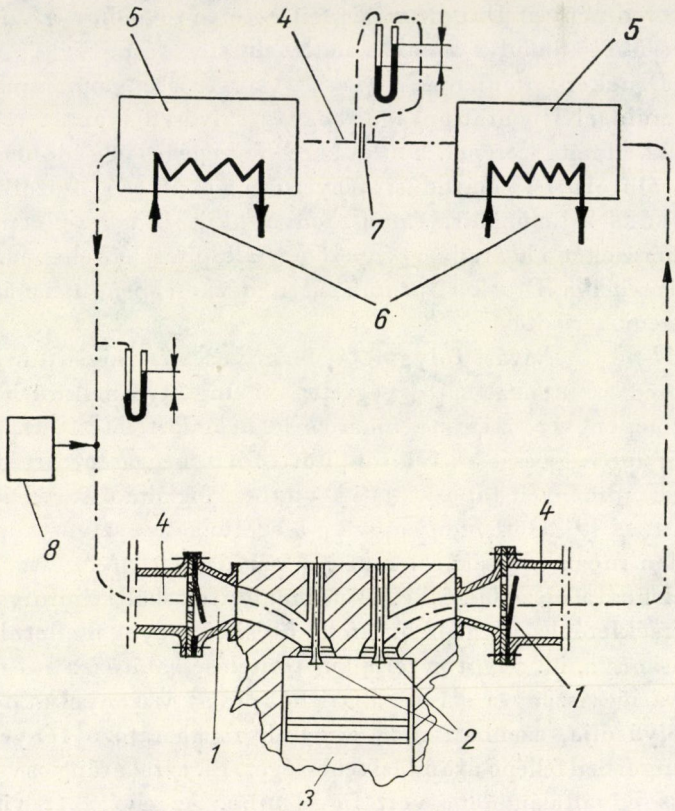
A feldolgozott irodalmi adatok szerint először MERKEL [1] állított fel összefüggést NUSSELT kísérleti eredményeit felhasználva a szívás alatti hőátadási tényezőre. MERKEL formulája eredetileg egyenes és görbe csövekben fellépő hőátadási tényezőre vonatkozott, majd kissé átalakítva a szívás alatti hőátadási tényező meghatározására is felhasználta.

MERKEL eredményeit DRUCKER [2] fejlesztette tovább, s a szívás alatti hőátadási tényezőből kiindulva a szívás alatti felmelegedésre végképletet adott meg, melyet Drucker-formulának nevezve, most is alkalmaznak [3—5]. A Drucker-formula elvi pontatlansága, hogy a szívási folyamat töltési foka az összefüggésekben nem szerepel. DRUCKERrel lényegében egy időben NIEDERMAYER [6] is állított fel hőátadási tényezőre vonatkozó összefüggéseket, NUSSELT és JÜRGES [7] munkáira támaszkodva, akik sík fal melletti légáramban végeztek méréseket a hőátadási tényező megállapítása érdekében. NIEDERMAYER összefüggései a Drucker-formulánál nehézkesebben használhatók, a gyakorlatban nem terjedtek el.

Dugattyús motor szívási folyamatát bizonyos mértékig utánzó modellkísérletet először STAMBULEANU [8] végzett, aki dugattyú nélküli hengeren a nyitott szívószelepen keresztül stacionárius légáramlást létesített, s közben mérte a levegő felmelegedését a kívülről fűtött, forró hengeren történő keresztüláramláskor. Eredményeit tapasztalati képletben foglalta össze. Dieselmotorok esetében KRESS [9] adott igen egyszerű összefüggést a szívás alatti felmelegedés közvetlen meghatározására. KRESS a szívás alatti felmelegedést csak a légviszonnyal hozta összefüggésbe, azon megfontolásból kiindulva, hogy a hengerfal hőmérsékletét az eléggé behatárolt hűtési viszonyok mellett leginkább a keverék légviszonya, ill. a motor termikus terhelése határozza meg. Az kétségtelen, hogy a légviszony a szívás alatti hőátadási viszonyokat feltétlenül jelentősen befolyásolja, azonban nem egyedüli meghatározó tényező, pl. a szívás alatti, hengerben fellépő áramlási sebességet, ill. azzal arányos valamilyen tényezőt KRESS egyáltalán nem vett figyelembe. Az elvégzett vizsgálatok szerint KRESS összefüggése a gyakorlatban nehezen használható. BROSINSKY [10] részben elméleti, részben kísérleti módszert dolgozott ki, melynek eredményeképpen a hőátadási tényező kiszámítására alkalmas formulát és a levegőnek szívás alatti felmelegedését meghatározó összefüggést adott meg. BROSINSKY elmélete kidolgozásánál figyelembe vette, hogy a levegő szívás alatti felmelegedési viszonyait meghatározó egyes jellemzők, így elsősorban maga a hőátadási folyamat az idő, ill. a löket függvényében jelentősen változik. Ennek megfelelően eljárása bonyolult, számítástechnikailag nehezen követhető, azonban a valóságos folyamatot már jobban megközelíti.

3. A kidolgozott új eljárás és a kísérleti berendezés ismertetése

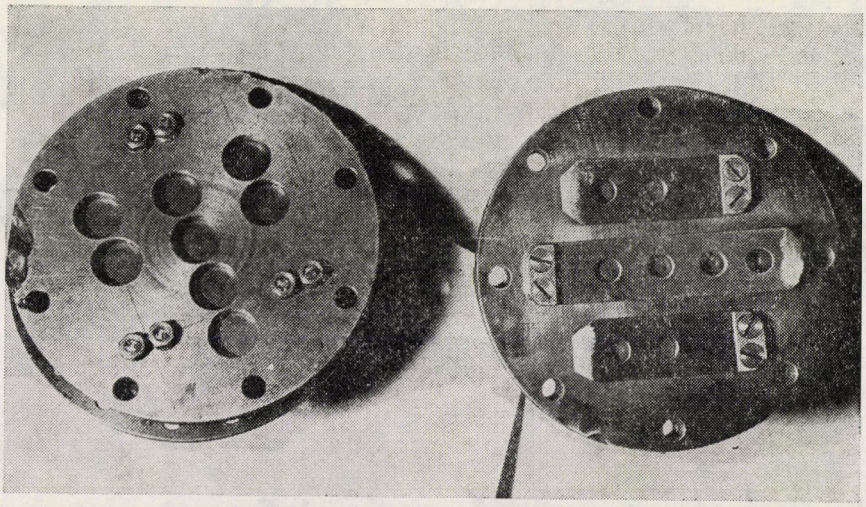
Az eddigiekből is kitűnik, hogy a munaközeg szívás alatti felmelegedési folyamatát vizsgáló eljárások felfogásában, a valóság megközelítésében, pontosságban egymástól jelentősen eltérnek, érvényességi határuk általában nem ismeretes. E munka keretében ezért a szívási véghőfok meghatározására olyan kísérleti-elméleti eljárás kidolgozására került sor, mely az eddigieknél talán



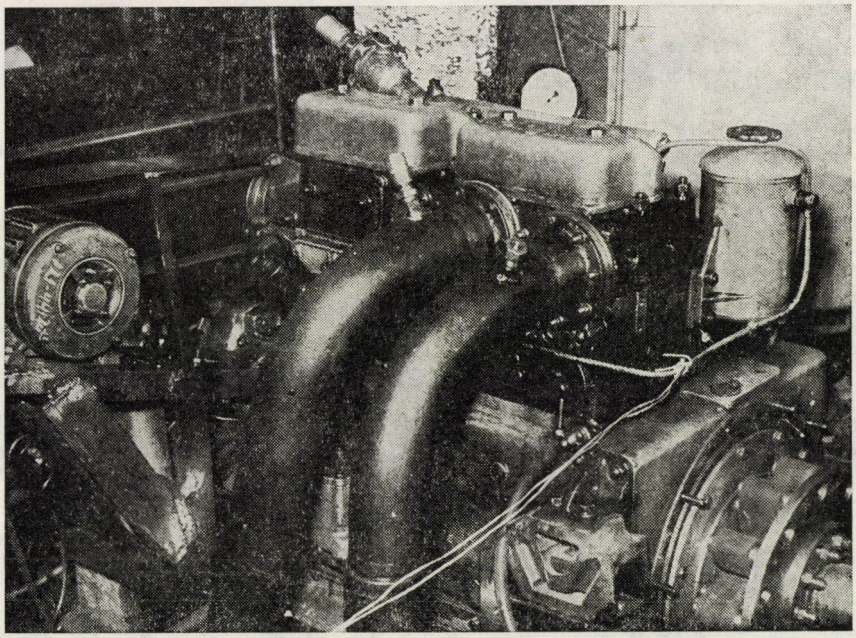
1. ábra. — A kísérleti berendezés vázlata
1. Visszacsapó szelep, 2. Szelep utánzat, 3. Dugattyú, 4. Termoelem, 5. Légtartály, 6. Visszahűtés, 7. Mérőperem, 8. Kompresszor

jobban megközelíti a valóságot, s a probléma további vizsgálatának alapját képezheti. Az eljárás először a Pl-406-JAFI típusú dieselmotor vizsgálatánál került felhasználásra [11].

Az eljárás lényege a következő. A motor egy hengerét zárt ciklus szerint (1. ábra) üzemeltettük, a hengerfej és hengerfal megfelelő hőmérsékletéről külön fűtőberendezéssel gondoskodtunk. A vizsgált henger szívó és kipufogó csonkjai elé visszacsapó szelepek (2. ábra) kerültek. A hengerfejből a szelepeket kiszerelve azok helyére olyan mozdulatlan, állandóan nyitva levő szeleputánzatokat helyeztünk (1. ábra), amelyek megközelítően utánozzák a szívási és kipufogási folyamatok alatt fellépő áramlási viszonyokat. *Ily módon a kompressziót és expanziót kiiktatva, csak a szívási és kipufogási folyamat maradt meg.* A kompresszió és expanzió folyamatok kiiktatása érdekében az eredeti szelepek felhasználása esetén, a motor vezérlési rendszerét kellett volna megváltoztatni, más bütyökelrendezésű vezértengely beépítésével, amely lehetővé teszi, hogy úgy a szívó, mint a kipufogó szelepek fordulatonként nyissanak.

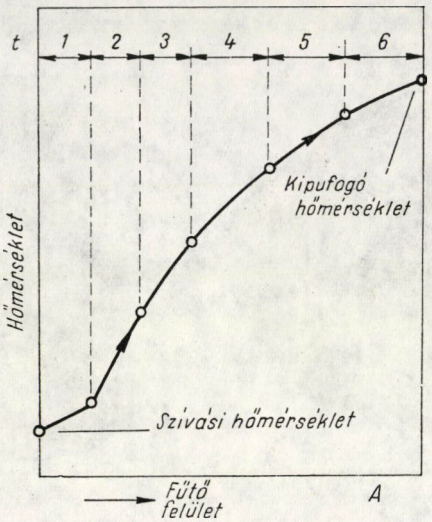


2. ábra. — A visszacsapó szelep szeleptányérja elöl- és hátulnézetben



3. ábra. — A megépített kísérleti berendezés. (Jól megfigyelhetők a hengerfej és a szívó, ill. kipufogó csővezetékek közé szerelt visszacsapószelepek)

Ilyen jelentős konstrukciós átalakítás a rendelkezésre álló anyagi lehetőségek mellett nem volt lehetséges, így alakult ki a visszacsapószelepes megoldás. A kísérleti berendezés fényképét a 3. ábra mutatja. A munkaközeg szívási és



4. ábra. — A munkaközeg hőmérsékletváltozásának jellege a gázcsere folyamat alatt. 1. Szívócsonk, 2. Szívócsatorna, 3. Szívóütem, 4. Kipufogóütem, 5. Kipufogócsatorna, 6. Kipufogócsonk

kipufogási folyamat alatti hőmérsékletváltozását a visszacsapó szelepek előtt elhelyezett termoelemek segítségével mértük.

Az 1. ábrán vázolt kísérleti berendezéssel a munkaközeg ezen össz-felmelegedését határoztuk meg, mely a munkaközegnek a szívócső-csonk belépő keresztmetszetétől a kipufogó-csonk kilépő keresztmetszetéig történő áramlása közben jött létre. A folyamat jellege a 4. ábrán látható. A munkaközeg felmelegedése a fűtőfelület függvényében folyamatosan csökken, mivel a munkaközeg hőmérséklete egyre inkább megközelíti a fűtőfelületek hőmérsékletét. A szívás kezdetétől a kompresszió kezdetéig fellépő munkaközeg felmelegedés meghatározása érdekében a mért összfelmelegedésből le kell vonni a kipufogási folyamat alatti, valamint a dugattyú által a munkaközegnek átadott technikai munka hatására fellépő hőmérsékletváltozást. A mérések kiértékelésével kapcsolatos számítási munkák bővebben a [12] hivatkozásban találhatók meg. A kipufogás alatti felmelegedés számítását jelentősen megnehezíti az, hogy a kipufogócsonk után elhelyezett termoelem egy időbeli integrálátlagot mutat, mivel a kiömlő munkaközeg hőmérséklete változik az idő függvényében, annak következtében, hogy a hengerbe bekerülő munkaközeg egyes részecskéi különböző ideig tartózkodnak a hengerben. Ezenkívül a termoelemek beépítési helyén állandóan változik a munkaközeg áramlási sebessége is, így változik a munkaközeg és a termoelemek közötti hőátadási tényező is.

A kipufogási folyamat alatti közegfelmelegedés meghatározása érdekében a hengerben fellépő, szívás és kipufogás alatti hőátadási folyamat differenciálegyenletéből indultunk ki, a következő egyszerűsítő feltételezések figyelembevételével.

A hengerben lezajló nyomásváltozás elhanyagolásával, a hengerben uralkodó nyomást a tartálynyomással vettük egyenlőnek. A hőátadási tényezőt a folyamat alatt változatlannak tekintettük és feltételeztük, hogy a munkaközeg hőmérséklete a hengerben egy adott időpontban mindenütt ugyanaz.

A differenciálegyenlet felírásakor az volt az alapgondolat, hogy a $d\tau$ idő alatt a falak által leadott hőt a hengerben tartózkodó levegő veszi fel.:

$$\alpha A(T_w - T)d\tau = c_p \cdot MdT \text{ [kcal]}, \tag{1}$$

ahol:

α a gázcserefolyamat alatti átlagos hőátadási tényező [kcal/m²h °K].
A a τ; $\tau + d\tau$ [h] idők közötti átlagos hőátadó felület, amely az A_a állandó és az A_v változó felületek összege [m²].
c_p izobár fajhő [kcal/kp °K].
M a munkaközeg adott időköz alatti átlagos mennyisége [kp].
dT a munkaközeg felmelegedése $d\tau$ idő alatt [°K].
T a munkaközeg pillanatnyi hőmérséklete [°K].
T_w a motor hengertere belső felületének átlagos hőmérséklete [°K]. Értéke, első közelítésben a felület hőmérsékleteloszlása ismeretében, a hőmérséklet szerint képzett felületi integrál segítségével határozható meg.

A hengerbe bekerülő levegő tömege az általános gázegyenletből:

$$M = \frac{pV}{RT}, \qquad \text{[kg]} \tag{2}$$

ahol:

V a henger adott időközhöz tartozó átlagos térfogata [m³].

Behelyettesítés után:

$$\alpha(A_a + A_v)(T_w - T)d\tau = c_p \frac{pV}{RT} dT =$$

$$\alpha[A_a + K_d S(\varphi)](T_w - T)d\tau = c_p \frac{p}{RT}[A_d S(\varphi) + V_c]dT, \tag{3}$$

ahol:

K_d ill. A_d a dugattyú kerülete [m], ill. felülete [m²].
$S(\varphi)$ az adott időközhöz (főtengely szögelforgáshoz) tartozó átlagos löket [m].
V_c kompressziótérfogat [m³].

A változókat szétválasztva:

$$\frac{A_a + K_d S(\varphi)}{A_d S(\varphi) + V_c} d\tau = \frac{c_p p}{\alpha R} \cdot \frac{dT}{T(T_w - T)}. \tag{4}$$

A szívás és kipufogás üteme alatt fellépő hőátadási folyamat differenciálegyenletének megoldásakor azonban még kapcsolatot kell létesíteni a főtengely φ szögelforgása és a hozzátartozó τ idő között.

Figyelembe véve a $d\tau = d\varphi/\omega$, (ahol: ω a forgattyús tengely szögsebessége), valamint a forgattyús mechanizmusra érvényes

$$S(\varphi) = r\left[1 - \cos\varphi + \frac{\lambda}{2}\sin^2\varphi\right] \tag{5}$$

összefüggéseket, a kapcsolat egyértelműen felállítható.

Az így előállított, különböző szögfüggvényeket tartalmazó differenciálegyenlet hosszadalmas megoldását nem ismertetjük, csupán azt, hogy a megoldott differenciálegyenlet segítségével hogyan határozható meg a szívási folyamat alatt fellépő hőmérséklet-növekmény.

A munkaközegnek a szívó és kipufogócsonkokban, ill. a hengerfejben elhelyezkedő és szívó kipufogócsatornákban történő felmelegedése a görbe csövekre érvényes hőátadási tényezők, valamint az áramlástani és geometriai adatok birtokában jól számítható. Az összfelmelegedés és az egyes elemekben történő részfelmelegedések ismeretében meghatározhatók a 4. ábra vázolt sematikus felmelegedési görbe kitüntetett pontjai a szívási ütem végén keletkező hőmérséklet kivételével. A megoldott differenciálegyenlet segítségével a mérési eredmények felhasználásával azonban már számítható a hengerben fellépő hőátadási folyamat. A probléma meg is fordítható. Milyen nagyságú α-t kell felvenni ahhoz, hogy a mért felmelegedést érjük el a hengerben lejátszódó szívási és kipufogási folyamatok alatt. Ezzel azonban ismertté vált a munkaközeg hengerben történő felmelegedési folyamata a főtengely szögelforgása, ill. a löket függvényben, *így megállapítható a szívási folyamat végén, az alsó holtpontban fellépő közeghőmérséklet is.*

A differenciálegyenlet megoldásával a közeg felmelegedése és a főtengely φ szögelforgása között az alábbi összefüggés állítható fel:

$$\frac{T_w - T}{T} = \frac{T_w - T_0}{T_0}\exp\left\{-\frac{T_{fal}\cdot\alpha\cdot R}{\omega\cdot p\cdot c_p}\left[978{,}87\arctan\left(4{,}48\tan\frac{\varphi}{2}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 43{,}4\arctan\left(0{,}894\tan\frac{\varphi}{2}\right) + 66{,}3\frac{\varphi}{2}\right]\right\}, \tag{6}$$

ahol:

T_0 [°K] a szívási folyamat kezdeti hőmérséklete.

Az egyenletben szereplő konstansok értékei meghatározásánál a Pl-406 JAFI típusú motor geometriai adatait vettük figyelembe.

A munkaközeg hőmérséklete a hengerből történő kiáramláskor a $\varphi = 2\pi$ helyettesítéssel számítható. A kitolási véghőfok ismeretében (mérési eredményekből ismert) a 6. egyenletből az α meghatározható. A szívási folyamat végén fellépő közeghőmérséklet az α ismeretében ugyancsak a 6. egyenletből állapítható meg, azonban most $\varphi = \pi$ helyettesítést kell végrehajtani.

A mérési eredmények pontosítása érdekében figyelembe vettük a munkaközegnek a kipufogási folyamat alatt fellépő nyomásváltozásából adódó $\Delta t'$ hőmérsékletváltozását is.

A közelítő eljárás alapgondolata az, hogy a kipufogás alatt fellépő nyomásváltozás politrópikus kompresszió folyamatnak fogható fel. Az így definiált kompresszió nyomásviszonyát a kipufogási folyamat indikátor diagramból meghatározott löket szerinti átlagnyomása ($\bar{p}$), valamint a motor előtti tartálynyomás (p_{01}) hányadosa segítségével számítottuk:

$$\Delta t' = T_{01}\left[\left(\frac{\bar{p}}{p_{01}}\right)^{\frac{n-1}{n}} - 1\right], \qquad [°C] \tag{7}$$

ahol:

T_{01} a p_{01} tartálynyomáshoz tartozó hőmérséklet
n a munkaközeg adott összetételéhez és hőmérsékletéhez tartozó politróp kitevő ($n \approx 1{,}35$).

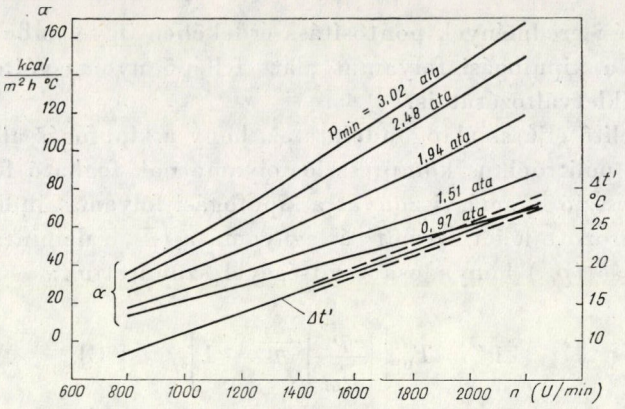
4. Kísérletek leírása és az eredmények ismertetése

A kísérletsorozat alatt változtatott paraméterek a következők voltak: fordulatszám, hengerfalhőfok, tartálynyomás.

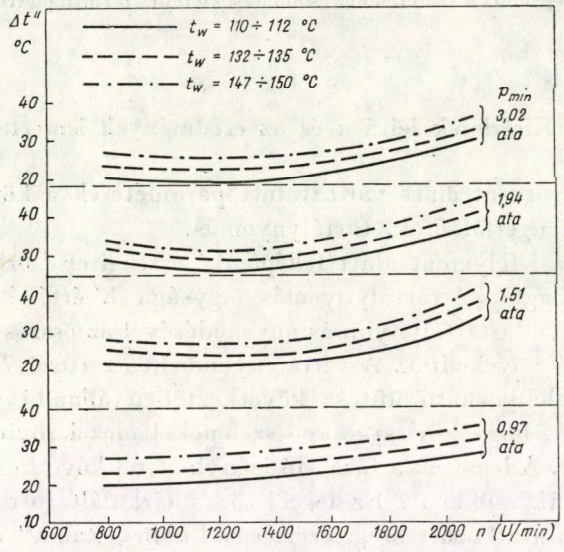
A kipufogási folyamat alatt fellépő $\Delta t'$ értékei elsősorban a motor fordulatszámától függtek. A tartálynyomás nagysága $\Delta t'$ értékét lényegében nem befolyásolta, mivel a tartálynyomás növekedésével az összes nyomások közelítően arányosan növekedtek. A tartálynyomáshoz tartozó T_{01} hőmérséklet a légtartályok szabályozható hűtése következtében állandó volt. A mérések végzését zavarta, hogy a visszacsapó szelepek lemezei rövid élettartamúaknak bizonyultak. A lemezek a fárasztó igénybevétel következtében kitöredeztek, szelephatásuk csökkent. Ez legelőször a cirkuláltatott közegmennyiség csökkenésében mutatkozott meg, ezért egy külön „etalon" mérést iktattunk be a tényleges mérések megkezdése előtt, a szelepek működésének ellenőrzésére.

A mérési eredményeket az 5. ábra mutatja. $\Delta t'$ értékei a tartálynyomás változása következtében (a maximális tartálytúlnyomás 1500 Hg.o.mm. volt) a szaggatott vonallal jelölt határokon belül mozogtak, a tartálynyomás növelésekor $\Delta t'$ értékei valamelyest csökkentek, a legnagyobb különbség maximális fordulatszámok körül $2 \div 3$ °C volt.

A gázcserefolyamat alatti (szívás-kipufogás) α értékek a fordulatszámtól jelentősen, a tartálynyomástól kevésbé, a hengerfalhőfoktól pedig minimális mértékben függtek. Nagyobb fordulatszámok felé a hengerfalhőfok növekedésével az α értékek bizonyos mértékű csökkenését tapasztaltuk. Ez az eredmény megegyezik az e téren elért újabb kutatási eredményekkel [13—15].



5. ábra. — A gázcserefolyamat alatti α hőátadási tényező, valamint $\Delta t'$ értékének változása a fordulatszám és a tartálynyomás függvényében a Pl-406 JAFI típusú motoron



6. ábra. — A szívás alatt bekövetkező közegfelmelegedés ($\Delta t''$) változása a fordulatszám, a hengerfalhőfok és a munkafolyamat (tartálynyomás) kezdőnyomása függvényében

A szívás alatt, a szívócsonktól az alsó holtpontig bekövetkező hőmérsékletnövekedés értékei ($\Delta t''$) a 6. ábrában láthatók. Megfigyelhető, hogy a fordulatszám függvényében $\Delta t''$ értékei először minimális mértékben csökkennek, s csak közepes fordulatszámokon túl tapasztalható jelentősebb hőmérsékletnövekedés. E folyamatot két egymással ellentétes tendencia alakítja ki. A fordulatszám növekedésével ugyan értelemszerűen nő az α hőátadási tényező, azonban a hőátadásra rendelkezésre álló idő egyre csökken és így a fordulatszámnövekedéskor fellépő α növekedés csak nagyobb fordulatszámoknál érezteti hatását. A tartálytúlnyomás növekedésével a munkaközeg felmele-

gedésének mértéke alig változott, kezdeti növekedés után, nagy tartálynyomásnál ismét csökkenő tendenciát tapasztaltunk. A folyamatot itt is két egymással ellentétes hatás alakítja ki. A tartálynyomás növekedésével növekszik α értéke, azonban ugyancsak növekszik a folyamatban résztvevő munkaközeg mennyisége is. A hengerfalhőfok növekedésével, ha kismértékben is, de $\Delta t''$ értéke egyértelműen növekszik.

E kísérletből kapott eredmények tendenciában és az értékek nagyságrendjében a Drucker-formulából kapott eredményeknek felelnek meg leginkább. A Brosinsky-féle összefüggéssel meghatározott szívási véghőmérséklet e mérési eredményekhez viszonyítva nagyobbra adódott.

A tanulmányban kidolgozott módszer, valamint az alkalmazásával kapott eredmények jól felhasználhatók jármű-dieselmotorok szívási véghőmérsékletének megállapításakor. A szerző ezeket az eredményeket használta fel doktori értekezése [16] kidolgozásakor, ahol belsőégésű dugattyús motorok hőközléssel egybekötött és anélküli munkafolyamat-számításakor szüksége volt a munkafolyamat kezdeti állapotjelzőire. Minthogy a munkafolyamat kezdőpontjának nyomása indikálás segítségével jól megállapítható, a számítandó munkafolyamathoz tartozó lökettérfogat figyelembevételével a hengerben maradó közegmennyiség is meghatározható.

A tanulmányban ismertetett módszer bármilyen négyütemű belsőégésű motorra alkalmazható, egyes kétütemű motorok esetében azonban a módszer alkalmazása bizonyos megfontolásokat kíván, mivel ilyenkor a kompresszió-expanzió folyamat kiiktatása körülményesebb és a szívási folyamat jellege is bizonyos mértékig megváltozhatik.

IRODALOM

1. MERKEL: Die Grundlagen der Wärmeübertragung 1927.
2. DRUCKER, E.: Der Liefergrad Schnellaufender Vergasermotoren *ATZ* **37** (1934).
3. BRODSZKY, D.: Feltöltött dieselmotorok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1968.
4. LIST, H.: Die Verbrennungskraftmaschine, Band 4. Teil 3. 1952. 31—330. Die Aufheizzahl.
5. HINZE, W.: Zur Bestimmung des Gaszustandes beim Beginn des Verdichtungshubes in Verbrennungsmotoren. *Wiss. Zeitschrift der Hochschule für Schwermaschinenbau.* Magdeburg 1958, Nr. 1.
6. NIEDERMAYER, E.: Untersuchung des Spülvorganges an Zweitaktdieselmaschienen. *Fosch.—Ing.—Wes.*, **7** (1936).
7. NUSSELT, W.—JÜRGES W.: Die Kühlung einer ebenen Wand durch einen Luftstrom. *Gesundheit—Ing. Wes.* **7** (1936).
8. STAMBULEANU, A.: Beitrag zur Frage des Wärmeüberganges in der Ansaugsperiode. Diss. T. H. Berlin, 1935.
9. KRESS, H.: Untersuchungen über den Liefergrad bei Überladung. *MTZ.* **4** (1942).
10. BROSINSKY, H. J.: Berechnung des Ladungsendzustandes in Dieselmotoren. *VDI. Forschungseft* **440** (1953), 21—39.
11. A Pl-406 JAFI típusú dieselmotor mechanikai súrlódási veszteségeinek vizsgálata. BME. Kalorikus Gépek Tanszék Kézirat 1966. Témavezető PÁSZTOR Endre.
12. Belsőégésű motorok szívási véghőfokának meghatározása. Diplomaterv. Kézirat 1967. Készítette: GARBAI László. Témavezető: PÁSZTOR Endre.
13. SITKEI, G.: Beitrag zur Theorie des Wärmeüberganges im Motor. *Konstruktion* **14**, (1962), 64—71.

14. SITKEI, G.: Hőátadás és hőterhelés belsőégésű motorokban. Akadémiai Kiadó. Budapest 1962.
15. WOSCHNI, G.: Beitrag zum Problem des Wärmeüberganges im Verbrennungsmotor. *MTZ.* **26** (1965), 128—133.
16. PÁSZTOR E.: Belsőégésű motorok munkafolyamata és mechanikai hatásfoka közötti kapcsolat vizsgálata. Akadémiai doktori értekezés. Kézirat, 1970.

Determination of the Final Suction Temperature of I. C. Engines by Switching off Compression and Expansion The paper presents a method for determining the final suction temperature of I. C. engines and the heat transfer coefficient during suction, as well as experimental results. Essentially the new method consists in eliminating the compression-expansion process, thus the combined temperature rise of the medium during the suction and exhaust strokes can be determined experimentally, approaching reality conditions very satisfactorily. It is necessary to drive. the engine during the tests and the cylinder wall and the cylinder head must be kept at operational temperature. With the aid of the differential equation for the heat transfer during the complete process (compression and expansion) and making use of the measuring results, the heat transfer coefficient and the temperature at the end of suction can be determined directly. The method is suited very well for four-stroke engines, while for two-stroke engines certain considerations are required.

Bestimmung der Ansaugtemperatur in Verbrennungsmotoren durch Ausschaltung der Verdichtungs- und Expansionsvorgänge. Die Arbeit bringt ein Verfahren für die Bestimmung der Ansaugendtemperatur von Verbrennungsmotoren, bzw. die Bestimmung der Wärmeübergangszahl während des Ansaugvorgangs, sowie diesbezügliche Versuchsergebnisse. Das Wesentliche des neuen ausgearbeiteten Verfahrens ist, daß aus dem Arbeitszyklus des Motors die Kompression und die Expansion ausgeschaltet werden, und so die Gesamterwärmung des Arbeitsmediums während des Ansaug- und des Auspufftakts mit sehr guter Näherung experimentell bestimmt werden kann. Während der Versuche muß der Motor von außen angetrieben werden und es muß dafür gesorgt werden, daß die Zylinderrand und der Zylinderkopf auf Betriebstemperatur sind. Mit Hilfe der für den ganzen Wärmeübertragungsvorgang (Kompression-Expansion) angeschriebenen Differentialgleichung und unter Verwendung der Meßergebnisse können die Wärmeübergangszahl und die Ansaugendtemperatur unmittelbar bestimmt werden. Für Viertakt-Verbrennungsmotoren ist das Verfahren sehr gut verwendbar, für Zweitaktmotoren sind gewisse Erwägungen notwendig.

HŐEGYENSÚLYON KÍVÜLI FOTOIONIZÁCIÓ FÜSTGÁZ-KÁLIUM MHD MUNKAKÖZEGBEN

ANTAL KÁLMÁN*—BOLLA ISTVÁN**

[Beérkezett 1971. dec. 8-án]

1. Bevezetés

Mint ismeretes a tűztérben megfelelő hőfokra hevített füstgáz-kálium munkaközegben kielégítő ionizációs fok érhető el [1]. A gáz adiabatikus kiterjedés közben nagy sebességgel az MHD csatornába jut, miközben a hőmérséklete erősen lecsökken. Így az említett munkaközegben nagyfokú elektron-ion térfogati rekombináció lép fel, amely az alábbi egyenlettel jellemezhető:

$$\frac{dn_e}{dt}\,[\text{térfogati rekombináció}] = -\alpha n_e^2, \tag{1}$$

ahol:

n_e — az elektronsűrűség
t — az idő
α — a rekombinációs tényező (térfogati)

Az [1] javaslat szerint a rekombinációs folyamat nagy hőmérsékletű izzó szénszemcsék csatornába való juttatásával késleltethető (esetleg ellensúlyozható). A szénszemcsék késleltető hatásukat az általuk kibocsájtott hőmérsékleti sugárzás keltette fotoionizáció útján fejtik ki. A javasolt eljárás alkalmazhatóságához az alábbi feltételeknek kell teljesülniük:

1. Az izzó szénszemcséknek olyan hőmérsékletet kell elérniük, hogy a kibocsájtott hőmérsékleti sugárzás képes legyen a kálium atomok ionizálására — s ellensúlyozza a rekombinációs veszteségeket.

2. A bejuttatott szénszemcsékben felhalmozódott oxidációs hőenergiának elegendőnek kell lennie az ionizációs energiamérleg fenntartásához, amíg a munkaközeg az MHD csatornában tartózkodik.

* Antal Kálmán, 1204 Budapest, Vecsey lakótelep 20
** Bolla István, 1073 Budapest, Kertész u. 43.

2. A szénszemcsék kritikus hőmérsékletének meghatározása

Az első feltétellel kapcsolatosan vizsgáljuk meg a szénszemcse fotoionizációt előidéző hőmérsékleti sugárzását. Feltételezzük, hogy a sugárzás az abszolút fekete test sugárzással, azaz a Planck-féle összefüggéssel jellemezhető. A fotoionizáció sebességét az alábbi összefüggés adja meg általános alakban:

$$\frac{dn_e}{dt}\,[\text{fotoionizáció}] = \sum_i n_i Q_i \Phi_i \Omega_i, \tag{2}$$

ahol:

n_i — az ionizálandó atomok koncentrációja
Q_i — a fotoionizációs hatáskeresztmetszet
Φ_i — a foton fluxus (az egységnyi felületre egységnyi térszögben beeső ionizáló fotonok száma)
Ω_i — a térszög

Az abszolút fekete test spektrális energiasűrűségéből kiindulva:

$$dE_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu, \tag{3}$$

ahol:

h — a Planck-féle állandó
c — a fénysebesség
ν — a frekvencia
T — az abszolút hőmérséklet
k — a Boltzmann állandó

illetve felírva a spektrális intenzitást:

$$dI_\nu = \frac{c}{4\pi} dE_\nu, \tag{4}$$

$kT \ll h\nu_0$ esetében a $\nu > \nu_0$ frekvenciákra a fotonfluxus a következő alakban írható fel:

$$\Phi = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{dI_\nu}{n\nu} = \frac{2}{c^2} \int_{\nu_0}^{\infty} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \nu^2 d\nu, \tag{5}$$

ahol:

ν_0 — az ionizációs energiának megfelelő frekvencia.

Amennyiben a hatáskeresztmetszetet energia (hullámhossz)-függőnek tekintjük és az alábbi általános alakban adjuk meg:

$$Q = Q(\lambda) = \bar{a}\lambda^2 + \bar{b}\lambda + \bar{c}, \tag{6}$$

ahol:

λ — a hullámhossz,

akkor a fotonfluxussal együtt az integrál alatt kell azt figyelembe vennünk. A (2) egyenlet felírásához tehát az alábbi kifejezést kell részletesen elemezni:

$$\langle Q\Phi \rangle = 2\int_{\nu_0}^{\infty} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \frac{Q(\lambda)}{\lambda^2}\, d\nu\,. \tag{7}$$

Az integrál megoldása az alábbi formában adható meg (a megoldás során még nem alkalmaztunk elhanyagolásokat):

$$\langle Q\Phi \rangle = 2\nu_0 \frac{e^{-x_0}}{x_0}\left[\Theta - \frac{1}{x_0}\lambda_0\frac{d\Theta}{d\lambda_0} + \frac{1}{x_0^2}\frac{d}{d\lambda_0}\lambda_0^2\frac{d\Theta}{d\lambda}\right], \tag{8}$$

ahol:

x_0 — az abszolút fekete test hőmérsékletének ionizációs energiához való viszonyát jellemző dimenzió nélküli „nagy" paraméter:

$$x_0 = \frac{\varepsilon_i}{kT}$$

ε_i — ionizációs energia,
Θ — dimenzió nélküli paraméter,

$$\Theta = \frac{Q(\lambda_0)}{\lambda_0^2},$$

Q — az ionizációs keresztmetszet $\lambda = \lambda_0$ értéknél,
λ_0 — az ionizációs potenciának megfelelő hullámhossz,
c — a fénysebesség.

A továbbiakban feltételezzük, hogy a szénszemcsék hőmérséklete az MHD csatornában való tartózkodás alatt nem változik, ami azt jelenti, hogy a szénszemcséket folyamatosan elégetjük. Ily módon a fentiek figyelembe vételével az ionizációs és rekombinációs folyamatokat jellemző mérleget az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\frac{dn_e}{dt}\,[\text{ionizáció}] = [\text{fotoion.}] + [\text{lépcsős ion.}] + [\text{termikus ion.}], \tag{9}$$

$$\frac{dn_e}{dt}\,[\text{rekombináció}] = [\text{térfogati rek.}] + [\text{felületi rek.}]\,. \tag{10}$$

A fotoionizáció a (2) formulával jellemezhető. A fotonok kölcsönhatásba lépnek a munkaközeg összes komponensével, ezek közül azonban csak a legkisebb ionizációs potenciálú (adott esetben kálium) ionizációját vesszük figyelembe. A fotonok okozta disszociációs és gerjesztési folyamatok fotonveszteséghez, míg a munkagáz egyéb komponenseinek ionizációja elektronnyereséghez vezet. Ezen jelenségek hatását azonban elhanyagoljuk.

A (9) összefüggésben a lépcsős ionizáció hatását ugyancsak figyelmen kívül hagyjuk — ez azonban további nyereséget, ionizációs hatásfok javulást eredményezhet. A termikus jellegű ionizáció, a kiterjedés után a csatornában

uralkodó viszonylag kis hőmérsékletek miatt nem ad jelentős járulékot. A (10) összefüggésben a térfogati rekombinációt az (1) összefüggés értelmében vizsgáljuk. A felületi rekombináció, mint ismeretes két komponensből tevődik össze. A generátor szigetelőfalán létrejövő rekombináció, valamint a csatornatérben az ionizációs veszteségek pótlására bejuttatott szénszemcsék felületén jelentkező „fali" rekombináció. Mivel célunk a szénszemcsékkel történő fotoionizáció lehetőségének vizsgálata, így az előbbit nem vizsgáljuk, az utóbbi rekombinációs lehetőség pedig a szén nagy kilépési munkája miatt első közelítésben elhanyagolható. A fentiek értelmében tehát az ionizációs mérlegre jellemző egyenlet a következőképpen alakul:

$$n_i < \Phi Q > \Omega = \alpha n_e^2 \,. \tag{11}$$

A térszög értéke függ a térbe bejuttatott részecskék méreteitől és eloszlásától. Pontos értékét minden egyes feladat esetében konkrétan meg kell vizsgálni. Az irodalmi adatok szerint 0,1-től a teljes értékig, azaz 4π-ig változhat.

Az ily módon felírt mérleg megadja a szénszemcsék kritikus hőmérsékletét. A hőmérséklet meghatározásánál további korreláció vezethető be — ez a szénszemcse és az abszolút fekete test hőmérsékleti sugárzása közötti különbségből ered, s egy emisszivitási tényezővel jellemezhető.

A (8) egyenletet két konkrét esetben vizsgáljuk:

a) a Q hatáskeresztmetszetre a [2] dolgozatban található kísérleti energiafüggést figyelembe véve a [3] egy aproximációs formulát ad:

$$Q(\lambda) = \bar{a}\lambda^2 + \bar{b}\lambda + \bar{c} \,, \tag{12}$$

$$[Q] = \mathrm{cm}^2; \quad [\lambda] = \mathrm{cm} \,,$$

ahol:

$\bar{a} = 1{,}504 \cdot 10^{-9}$,
$\bar{b} = -\,8{,}37 \cdot 10^{-14}$ cm,
$\bar{c} = 1{,}173 \cdot 10^{-18}$ cm^2.

Ezt figyelembe véve, az x_0-ra a következő transzcendens egyenletet nyerhetjük:

$$e^{x_0} = \frac{2v_0 n_i \Omega}{\alpha n_e^2} \frac{1}{x_0} \left[\bar{a} + \frac{\bar{b}}{\lambda_0} + \frac{c}{\lambda_0^2} + \frac{1}{x_0} \left(\frac{\bar{b}}{\lambda_0} + \frac{2\bar{c}}{\lambda_0^2} \right) + \frac{1}{x_0^2} \frac{2\bar{c}}{\lambda_0^2} \right]. \tag{13}$$

Különböző α, n_e, n_i, Ω értékeknél nyert — iterációs módszerrel meghatározott — eredményeinket az I. Táblázatban közöljük.

b) a hatáskeresztmetszetet energiafüggetlennek, azaz állandónak tekintve az x_0-ra vonatkozó transzcendens egyenlet az alábbi formában írható fel:

$$e^{x_0} = \frac{2v_0 n_i \Omega Q}{\alpha n_e^2 \lambda_0^2} \left[\frac{1}{x_0} + \frac{2}{x_0^2} + \frac{2}{x_0^3} \right]. \tag{14}$$

A különböző α, n_e, n_i, Ω, Q értékekkel, ugyancsak iterációs módszerrel kapott megoldásokat a II. Táblázatban foglaljuk össze.

I. táblázat

γ	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6
x_0	19,2	17,1	15,1	13,1	11,2	9,3	7,6
τ	2620	2950	3340	3850	4490	5420	6630
η	$5{,}8\times10^{-6}$	$3{,}4\times10^{-5}$	$1{,}8\times10^{-4}$	$0{,}9\times10^{-3}$	$3{,}9\times10^{-3}$	$1{,}5\times10^{-2}$	$5{,}1\times10^{-2}$

Megjegyzés. A táblázatban szereplő T hőmérsékleteket °K-ben adtuk meg, s az iterációs lépéseket ± 5 °K pontosságig végeztük. Az x_0 és η értékeinél a harmadik, ill. a negyedik számjegyre kerekítettünk.

II. Táblázat

γ	0	−1	−2	−3	−4
x_0	25,6	23,4	21,2	19,0	16,9
τ	1960	2150	2380	2650	2980
η	$2{,}2\times10^{-8}$	$1{,}5\times10^{-7}$	$1{,}1\times10^{-6}$	$6{,}9\times10^{-6}$	$4{,}1\times10^{-5}$
γ	−5	−6	−7	−8	
x_0	14,7	12,6	10,5	8,5	
τ	3430	3990	4790	5930	
η	$2{,}5\times10^{-4}$	$1{,}3\times10^{-3}$	$6{,}6\times10^{-3}$	$2{,}8\times10^{-2}$	

3. A szénszemcsék szükséges mennyiségének meghatározása

A 2. feltétel kielégítéséhez megvizsgáljuk a bejuttatott szénszemcsék energiatartalmát, amelynek alapján megadható az ionizációs egyensúly esetleges fenntartásához szükséges szénszemcse mennyiség. Legyen egy szénszemcse tömege:

$$m = \frac{\pi d^3}{6} \varrho \,,$$

ahol:

d — a szemcse átmérője,
ϱ — a szén sűrűsége.

1 kg szén levegőben történő elégetésekor p nyomáson, T hőmérsékleten V térfogatú füstgáz keletkezik. Legyen a szénszemcsék száma

$$n = \frac{M}{m} \,,$$

akkor az egy részecskére jutó térfogat

$$V' = \frac{V}{n}.$$

Az előző pontban foglaltak értelmében egy sec alatt a munkagáz 1 cm^3-nyi térfogatában αn_e^2 elektron-ion pár rekombinálódik. Ezt az energiaveszteséget kell tehát pótolnunk. Nézzük meg, hogy az egy szénszemcsére eső elemi térfogatban a rekombinációs veszteségek pótlására a munkagáz csatornában való tartózkodási ideje alatt mekkora energiamennyiség szükséges:

$$E = \alpha n_e^2 V' \tau \varepsilon_i, \tag{15}$$

ahol:

τ — a közeg csatornában való tartózkodásának ideje

$$\tau = \frac{L}{v},$$

L — a csatorna hosszúsága,
v — a közeg áramlási sebessége,

Az m tömegű szénszemcse teljes mértékű elégetésekor

$$E_{\text{eff}} = m \varkappa \eta \tag{15'}$$

ionizáció szempontjából hasznosítható hőmennyiség keletkezik,

ahol:

$\varkappa$ — a szén fajhője,
η — hatásfok

A (15') összefüggésben η a hőmérsékleti sugárzás ionizációs energiában való realizálódását jellemzi, s értékét az alábbiakban fogjuk meghatározni. Az elemi térfogatra vonatkozó energiamérleg — a munkaközeggel együtt mozgó koordináta rendszerben — a következőképpen alakul:

$$\alpha n_e^2 V \frac{m}{M} \varepsilon_i \tau = m \varkappa \eta . \tag{16}$$

Az energiamérleg alapján megadható tehát az 1 kg elégetett szén fűtőanyagra eső szükséges szénszemcse mennyiség:

$$M = \frac{\alpha n_e^2 \tau \varepsilon_i}{\varkappa \eta} V. \tag{17}$$

Térjünk vissza a η koefficiens meghatározásához. Feltételezve, hogy a szemcsék fekete testként sugároznak a (3) összefüggés integrálját nulla és végtelen

frekvenciatartományra felírva és az integrálást elvégezve a következő kifejezést kapjuk:

$$E = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{8\pi k^4 T^4}{c^3 h^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} T^4. \tag{18}$$

Ez a kifejezés nem más, mint a fekete test T hőmérsékleten kibocsájtott teljes energiaspektruma. A kálium ionizációja szempontjából a számunkra érdekes energiatartomány ε_i-től ∞-ig terjed. A teljes kisugárzási energia ionizáció szempontjából hasznos hányada tehát:

$$\eta = \frac{\int_{x_0}^\infty x^3 e^{-x}\,dx}{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}\,dx}. \tag{19}$$

A két integrál kiszámítása, és a megfelelő átalakítások elvégzése után η-ra az alábbi végformulát kaphatjuk meg:

$$\eta = \frac{15}{\pi^4} e^{-x_0}(x_0^3 + 3x_0^2 + 6x_0 + 6). \tag{20}$$

4. Számítási eredmények

Az alábbiakban néhány irodalmi adat behelyettesítésével számszerűleg is elemezzük a kapott formulákat.

a) A (13) formulában a kálium atomok fotoionizációs hatáskeresztmetszetét a (12)-ben megadott számadatok alapján vesszük figyelembe. Az egyéb paraméterek értékei, illetve értékhatárai kálium esetében a következők:

$\nu_0 = 1{,}04935 \times 10^{15}$		sec^{-1}
$\lambda_0 = 2{,}85694 \times 10^{-5}$		cm
$n_e = 10^{12}$		cm^{-3}
$n_i = 10^{19}$	$- 10^{16}$	cm^{-3}
$\alpha = 10^{-9}$	$- 10^{-8}$	$\mathrm{cm}^3\ \mathrm{sec}^{-1}$
$\Omega = 4\pi$	$- 10^{-2} \times 4\pi$	—

A fenti számadatokat behelyettesítve, az iterációs módszer alapján nyert eredményeinket az I. Táblázatban foglaljuk össze. A táblázat első sorában álló γ paraméter egy, az iterációs formula jobb oldalára beírható tízes faktor egész számú kitevője, s értékének helyes megválasztásával a fenti adattáblázatban szereplő bármely kombináció előállítható. A $\gamma = 0$ esetnek az adatsor első oszlopában szereplő számadatok behelyettesítése felel meg.

b) Amennyiben a kálium atom fotoionizációs hatáskeresztmetszetét állandónak tételezzük fel, a (14)-es iterációs formulát kell alkalmaznunk, és ez esetben az adatsor kiegészül a

$$Q = 10^{-17} \quad - 10^{-19} \text{ cm}^2$$

értékkel. A γ paraméter most is az összes kombinációs lehetőség egyszerű áttekintésére szolgál.

c) A (17) formula alapján számítható a tűztérben elégetett 1 kg szénre vonatkoztatva, az MHD csatornába a fotoionizációs hatás biztosítására belövendő szénszemcsék összsúlya. Ennek becslésére az [1] irodalomból példaként az alábbi számértékeket helyettesítjük be:

$\alpha = 10^{-9}$	$\text{cm}^3\text{sec}^{-1}$	
$n_e = 10^{12}$	cm^{-3}	
$\tau = 5 \times 10^{-2}$	sec	
$\varepsilon_i = 4{,}34$	eV	
$\varkappa = 8{,}1$	kcal gr^{-1}	
$V = 19{,}6$	m^3	(1 kg szén elégetésekor keletkező füstgáz térfogata 1 at. nyomáson 600 °K-nél)
$\eta = 2{,}5 \times 10^{-4}$		($T = 3430$ °K-nél)

figyelembe véve az alábbi, mértékegységek közötti viszonyszámokat:

$$1 \text{ eV} = 1{,}6 \times 10^{-12} \text{ erg}; \qquad 1 \text{ kcal} = 4{,}187 \times 10^{10} \text{ erg}.$$

A (17) formula alapján a számítást elvégezve:

$$M = 51{,}6 \text{ gr}$$

össztömeget kapunk, ami körülbelül 0,41 súlyszázaléknak felel meg, amennyiben 1 kg szén levegőben történő elégetésekor 12,49 kg füstgáz keletkezik.

5. Összefoglalás

A fenti elhanyagolások mellett az MHD generátort jellemző paraméterek egy viszonylag szűk tartományában, az MHD csatornában lejátszódó rekombinációs folyamat késleltetésére, illetve ellensúlyozására az [1] alatt javasolt módszer megvalósítható.

A dolgozatban közölt mérlegformulák alapján ezek a paraméterek megadhatók, s lehetőség nyílik az optimális üzemmód meghatározására.

Köszönetnyilvánítás

Szerzők köszönetüket fejezik ki Dr. SZENDY Károlynak, a Magyar Tudományos Akadémia levelezőtagjának a téma felvetéséért, valamint értékes észrevételeiért, továbbá BITO Jánosnak, a műszaki tudományok doktorának a témával kapcsolatos hasznos diszkussziókért.

IRODALOM

1. HALÁSZ D.—SZENDY K.: Fotoionizáció az MHD működéséhez (kézirat).
2. D. R. BATES: Proc. Roy. Soc. A. 188, 350 (1947).
3. SZABÓ J.: Az MHD generátor munkagáza vezetőképességének megváltoztatása BaO—K sózás hatására. (Kézirat).
4. R. J. ROSA: Proc. IEEE, 774 (1963. máj.).

Photo-Ionization without Thermal Equilibrium in Combustion Gas-Potassium Working Medium. The paper analyses the possibility of maintaining the required ionization degree of the working gas in the channel of the MHD generator after the adiabatic expansion, by injection of incandescent coal grains. On the basis of the ionization equation and the energy balance, the authors state for different possible MHD-parameters the critical temperature and the quantity of the incandescent coal grains necessary for maintaining the ionization.

Photoionisation außerhalb des termischen Gleichgewichts in Rauchgas-Kalium Arbeitsmedien. Die Verlasser untersuchen die Möglichkeit für die Aufrechterhaltung des notwendigen Ionisationsgrades des Arbeitsgases im Kanal des MHD-Generators durch Zugabe von glühenden Kohlekörnern. Auf Grund der Ionisationsgleichung und der Energiebilanz werden die kritische Temperatur und die zur Aufrechterhaltung der Ionisation notwendige Menge der glühenden Kohlekörner bei verschiedenen möglichen MHD-Parametern angegeben.

ORTOGONÁLISAN ANIZOTROP HENGERES HÉJAK ELTOLÓDÁSFÜGGVÉNYEI

VARGA LÁSZLÓ*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1971. december 20-án]

A dolgozat homogén anizotropia feltételezésével az ortotrop hengeres héjak feszültségi állapotát jellemző eltolódásfüggvények vizsgálatával és meghatározásával foglalkozik. Az eltolódásfüggvények bevezetésével ismerteti az egyensúlyi feltételekből adódó differenciálegyenletrendszer pontos és közelítő jellegű megoldásait. Részletesen tárgyalja a homogén rész általános megoldásait jelentő és az inhomogén rendszer partikuláris megoldásait jelentő eltolódások és az eltolódásfüggvények közötti kapcsolatot. Közli továbbá az eltolódásfüggvények meghatározására szolgáló differenciálegyenleteket. Végül ismerteti a membránerők okozta eltolódások és az eltolódásfüggvényeket tartalmazó differenciálegyenletet és annak megoldását.

Jelölések

s — héjvastagság [cm]
$u, u_0, u_p, u_1, u_2, u_3$ — alkotóirányú eltolódások [cm]
$v, v_0, v_p, v_1, v_2, v_3$ — kerületirányú eltolódások [cm]
$w, w_0, w_p, w_1, w_2, w_3$ — sugárirányú eltolódások [cm]
x_1 — alkotóirányú koordináta [cm]
x_2 — kerületirányú koordináta [cm]
x_3 — sugárirányú koordináta [cm]
$\bar{x}_1 = x_1/R$, $\bar{x}_2 = x_2/R$ — méretnélküli koordináták
B_1 — az alkotóirányra vonatkozó hajlítási merevség [kp cm]
B_2 — a kerületirányra vonatkozó hajlítási merevség [kp cm]
B_3 — csavarási merevség [kp cm]
D_1 — az alkotóirányra vonatkozó nyúlási merevség [kp/cm]
D_2 — a kerületirányra vonakozó nyúlási merevség [kp/cm]
D_3 — nyírási merevség [kp/cm]
E_1 — az alkotóirányra vonatkozó rugalmassági modulus [kp/cm²]
E_2 — a kerületirányra vonatkozó rugalmassági modulus [kp/cm²]
$\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_p, \mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ — eltolódásfüggvények [cm]
G — nyírási rugalmassági modulus [kp/cm²]
M_1, M_2 — fajlagos hajlítónyomatékok [cm kp/cm]
M_{12}, M_{21} — fajlagos csavarónyomatékok [cm kp/cm]
N_1, N_2 — normálerők [kp/cm]
N_{12}, N_{21} — nyíróerők [kp/cm]
R — a középfelület görbületi sugara [cm]
Q_1, Q_2 — sugárirányú nyíróerők [kp/cm]
X_1, X_2, X_3 — a héjfelületre ható megoszló külső erők [kp/cm²]

* Dr. Varga László, 1026 Budapest, Gábor Á. u. 42.

ε_{11} — alkotóirányú fajlagos nyúlás
ε_{22} — kerületirányú fajlagos nyúlás
ε_{12}, ε_{21} — fajlagos szögelfordulások
ν_{12}, ν_{21} — Poisson tényezők (az első index az alakváltozás irányát, a második az erő irányát jelzi)
σ_{11}, σ_{22} — normálfeszültségek [kp/cm²]
σ_{12}, σ_{21} — nyírófeszültségek [kp/cm²]

A további jelölések értelme a szöveg között található.

1. Bevezetés

A héjak feszültségi állapotának meghatározására szolgáló vizsgálati alapok lerakása LOVE [1] nevéhez fűződik. A hengeres héjakra vonatkozólag ugyancsak alapvetőknek tekinthetők; TIMOSHENKÓ [2], FLÜGGE [3], WLASSOW [4], DONNEL [5], NOVOZHILOV [6], és GOL'DENVEIZER [7] munkái is, amelyek közül tárgyalásmódját tekintve külön figyelmet érdemel [4] és [7]. Ezekben találhatók ugyanis az izotrop hengeres héjak feszültségi állapotának közelítő megoldásait tartalmazó feszültségfüggvények, amelyekhez hasonló — ortotrop héjakra vonatkozó — kifejezéseket e sorok írója eltolódásfüggvényeknek nevez.

A hengeres héjak feszültségi állapotának meghatározása a középfelület eltolódásait tartalmazó eltolódásfüggvény bevezetésével különösen előnyösnek ígérkezik a nyomástartó edények vizsgálatakor. Ezek hengeres köpenyéhez ugyanis különböző alakú és merevségű szerelvények (a végeket határoló zárófelületek, az erőbevezetésre szolgáló támaszszerkezetek stb.) csatlakoznak. A csatlakozás helyén és környékén uralkodó feszültségi állapot meghatározása az illesztési feltételek biztosítása útján történik. Az alakváltozások azonosságát leíró illesztési feltételek pedig közvetlenül kifejezhetők az eltolódásfüggvényekkel. Az eltolódásfüggvények birtokában természetesen a belső erők is egyszerűen számíthatók.

Kezelhetőség és áttekinthetőség szempontjából további előnyökkel jár az eltolódásfüggvények bevezetése olyan héjak vizsgálatakor, amelyek homogén anizotrop szerkezeteknek tekinthetők. Ilyen szerkezetek például az üvegszállal erősített (üvegszál-vázas) műanyag héjak, amelyek — a műanyagba ágyazott végtelen sok elemi szál egyenletesnek tekinthető eloszlása következtében — homogén anziotrop anyagként kezelhetők. Rugalmas tulajdonságaik — a biztosági okokból megengedhető alakváltozási tartományban — jó közelítéssel Hooke törvényét követik.

Az ilyen szerkezeti anyagból készült hengeres héjakra is jellemző, hogy falvastagságuk a többi mérethez és a görbületi sugárhoz képest kicsi. Így vizsgálatuk során a vékony héjakra szokásos következő feltevések és elhanyagolások tehetők:

1. A héj középfelületére merőleges egyenesek alakváltozás után is egyenesek maradnak és merőlegesek lesznek az alakváltozott héj középfelületére.

2. A középfelületre merőleges irányban ébredő feszültségek elhanyagolhatók a középfelület síkjában és azzal párhuzamos rétegekben ébredő feszültségek mellett.

3. A középfelületre merőleges irányú fajlagos alakváltozások figyelmen kívül hagyhatók.

Az előzőek értelmében, a héj valamely $P(x_1, x_2, x_3)$ pontjában ébredő feszültségek és alakváltozások a következő szimmentikus tenzorokkal jellemezhetők:

$$\begin{aligned} \Sigma &= (\sigma_{ik}), \\ \mathfrak{D} &= (\varepsilon_{ik}). \end{aligned} \qquad (i, k, = 1, 2) \qquad \text{(a)}$$

A feltételezéseket kielégítő vékonyfalú szerkezeteknek [2] és [3] szerint az $s/R \leq 1/10$, [6] szerint az $s/R \leq 1/20$ méretviszonyú hengeres héjak tekinthetők. A feltételezések következtében a hengeres héj ortogonálisan anizotrop homogén szerkezetként vizsgálható. Az ortotropia főirányainak a héj alkotó- és kerületiránya tekinthető. A főirányokra vonatkozó rugalmassági jellemzők mérhetők vagy számíthatók.

Ortogonálisan anizotrop homogénnak tekinthető hengeres héjak eltolódásfüggvényei, legegyszerűbben az egyensúlyi feltételeket leíró differenciálegyenletrendszer operátor módszerrel történő megoldása útján származhathatók. A dolgozat tartalmazza az egyenletrendszer pontos és közelítő megoldásait jelentő eltolódások és az eltolódásfüggvények közötti tényleges függvénykapcsolatokat különböző terhelések eseteiben. Közli az eltolódásfüggvények meghatározására szolgáló — az egyenletrendszereket megoldó — differenciálegyenleteket. Ezek megoldását azonban nem tárgyalja. Ez utóbbival a szerző egy előző dolgozatában [10] foglalkozik, amelyben a homogén egyenletrendsze közelítő megoldásait tartalmazó eltolódásfüggvény bevezetése és meghatározása található.

2. A belső erők és alakváltozások közötti összefüggések

Az ortotrop héj merevségi főirányaiban ébredő feszültségek és a fellépő fajlagos alakváltozások közötti összefüggések — Hooke törvénye alapján — a következő alakban írhatók:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{11} + \nu_{12}\varepsilon_{22}), \\ \sigma_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_{22} + \nu_{21}\varepsilon_{11}), \qquad \text{(1a—c)} \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} = G\varepsilon_{12} = G\varepsilon_{21}. \end{aligned}$$

A fajlagos alakváltozásokat a középfelület eltolódásaival kifejezve adódik:

$$\varepsilon_{11} = \frac{u^{\mathrm{I}}}{R} - x_3 \frac{w^{\mathrm{II}}}{R^2},$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{v^{\cdot}}{R} - \frac{x_3}{R} \frac{w^{\cdot\cdot}}{R + x_3} + \frac{w}{R + x_3}, \tag{2a–c}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{u^{\cdot}}{R + x_3} + \frac{R + x_3}{R^2} v^{\mathrm{I}} - \frac{w^{\mathrm{I}\cdot}}{R} \left(\frac{x_3}{R} + \frac{x_3}{R + x_3} \right).$$

A deriválást jelző jelölések értelme:

$$\frac{\partial( )}{\partial \frac{x_1}{R}} = \frac{\partial( )}{\partial \bar{x}_1} = ( )^{\mathrm{I}}$$

$$\frac{\partial( )}{\partial \frac{x_2}{R}} = \frac{\partial( )}{\partial \bar{x}_2} = ( )^{\cdot}$$

Az (1a–c) és (2a–c) összefüggések felhasználásával előállíthatók a metszeterők és nyomatékok az eltolódások függvényében. Az 1. ábra jelöléseit használva:

$$N_1 = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{11} \left(1 + \frac{x_3}{R} \right) dx_3 = \frac{D_1}{R} (u^{\mathrm{I}} + \nu_{12} v^{\cdot} + \nu_{12} w) - \frac{B_1}{R^3} w^{\mathrm{II}},$$

$$N_2 = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{22} dx_3 = \frac{D_2}{R} (\nu_{21} u^{\mathrm{I}} + v^{\cdot} + w) + \frac{B_2}{R^3} (w^{\cdot\cdot} + w),$$

$$N_{12} = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{12} \left(1 + \frac{x_3}{R} \right) dx_3 = \frac{D_3}{R} (u^{\cdot} + v^{\mathrm{I}}) + \frac{B_3}{R^3} (v^{\mathrm{I}} - w^{\mathrm{I}\cdot}),$$

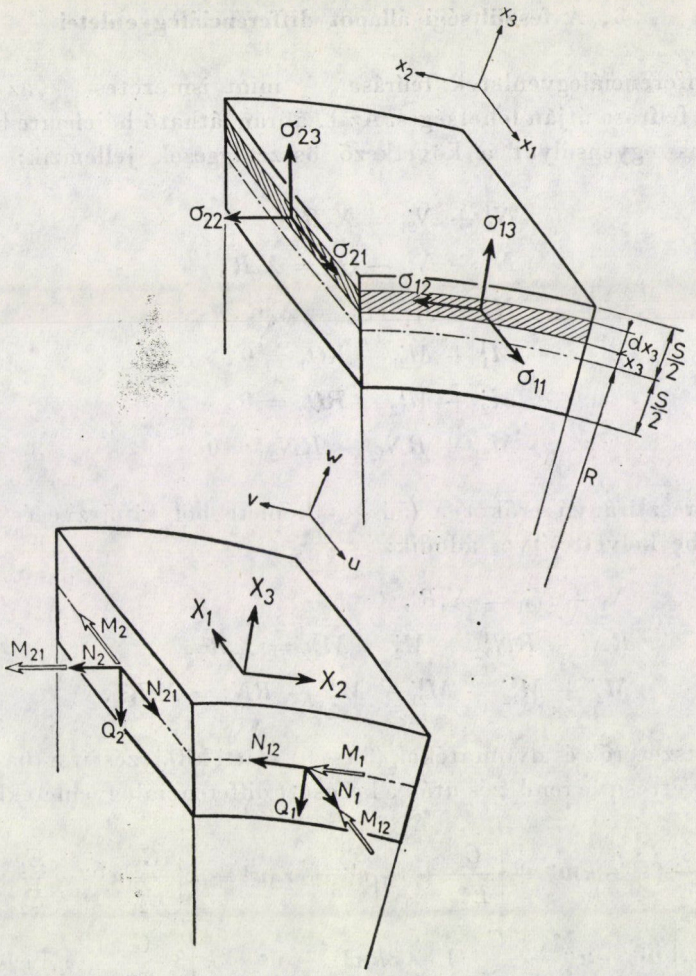
$$N_{21} = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{21} dx_3 = \frac{D_3}{R} (u^{\cdot} + v^{\mathrm{I}}) + \frac{B_3}{R^3} (u^{\cdot} + w^{\mathrm{I}\cdot}), \tag{3a–h}$$

$$M_1 = -\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{11} \left(1 + \frac{x_3}{R} \right) x_3 dx_3 = \frac{B_1}{R^2} (w^{\mathrm{II}} + \nu_{12} w^{\cdot\cdot} - u^{\mathrm{I}} - \nu_{12} v^{\cdot}),$$

$$M_2 = -\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{22} x_3 dx_3 = \frac{B_2}{R^2} (w^{\cdot\cdot} + \nu_{21} w^{\mathrm{II}} + w),$$

$$M_{12} = -\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{12} \left(1 + \frac{x_3}{R} \right) x_3 dx_3 = 2 \frac{B_3}{R^2} (w^{\mathrm{I}\cdot} - v^{\mathrm{I}}),$$

$$M_{21} = -\int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} \sigma_{21} x_3 dx_3 = 2 \frac{B_3}{R^2} \left(w^{\mathrm{I}\cdot} + \frac{u^{\cdot}}{2} - \frac{v^{\mathrm{I}}}{2} \right),$$



1. ábra.— A feszültségek, a metszeterők és a nyomatékok, valamint a külső terhek értelmezése

ahol:

$$D_1 = \frac{E_1 s}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \qquad B_1 = \frac{E_1 s^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})},$$

$$D_2 = \frac{E_2 s}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \qquad B_2 = \frac{E_2 s^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \qquad \text{(4a–f)}$$

$$D_3 = Gs, \qquad B_3 = \frac{Gs^3}{12}$$

a merevségi főirányokra vonatkozó nyúlási és hajlítási merevségek.

3. A feszültségi állapot differenciálegyenletei

A differenciálegyenletek felírása — mint ismeretes — az egyensúlyi egyenletek felírása útján lehetséges. Az 1. ábrán látható héjelemre ható erők és nyomatékok egyensúlyát a következő összefüggések jellemzik:

$$\begin{aligned} &N_1^{\mathrm{I}} + N_{21}^{\cdot} = X_1 R\,, \\ &N_2^{\cdot} + N_{12}^{\mathrm{I}} - Q_2 = X_2 R\,, \\ &N_2 + Q_1^{\mathrm{I}} + Q_2^{\cdot} = X_3 R\,, \\ &M_1^{\mathrm{I}} + M_{21}^{\cdot} - RQ_1 = 0\,, \\ &M_2^{\cdot} + M_{12}^{\mathrm{I}} - RQ_2 = 0\,, \\ &M_{21} + RN_{12} - RN_{21} = 0\,. \end{aligned} \tag{5a–f}$$

A keresztirányú erőket a (5d–e) képletekből kifejezve és az (5b–c) egyenletekbe helyettesítve, adódik:

$$\begin{aligned} &N_1^{\mathrm{I}} + N_{21}^{\cdot} = X_1 R\,, \\ &RN_2^{\cdot} + RN_{12}^{\mathrm{I}} - M_2^{\cdot} - M_{12}^{\mathrm{I}} = X_2 R^2\,, \\ &M_2^{\cdot\cdot} + M_{12}^{\mathrm{I}\cdot} + M_{21}^{\mathrm{I}\cdot} + M_1^{\mathrm{II}} + RN_2 = X_3 R^2\,. \end{aligned} \tag{6a–c}$$

A metszeterők és nyomatékok (3a–h) alatti kifejezéseit a (6a–c) egyenletekbe helyettesítve rendezés után a keresett differenciálegyenletekhez jutunk:

$$\begin{aligned} &\frac{E_1}{E_2} u^{\mathrm{II}} + \frac{G}{E_2^*}(1+k)u^{\cdot\cdot} + \left(\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21}\right) v^{\mathrm{I}\cdot} + \nu_{21} w^{\mathrm{I}} + k\left(\frac{G}{E_2^*} w^{\mathrm{I}\cdot\cdot} - \frac{E_1}{E_2} w^{\mathrm{III}}\right) = X_1^*\,, \\ &\left(\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21}\right) u^{\mathrm{I}\cdot} + v^{\cdot\cdot} + \frac{G}{E_2^*}(1+3k) v^{\mathrm{II}} + w^{\cdot} - k\left(3\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21}\right) w^{\mathrm{II}\cdot} = X_2^*\,, \\ &\nu_{21} u^{\mathrm{I}} + v^{\cdot} + w + k\left[\frac{G}{E_2^*} u^{\mathrm{I}\cdot\cdot} - \frac{E_1}{E_2} u^{\mathrm{III}} - \left(3\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21}\right) v^{\mathrm{II}\cdot} + \frac{E_1}{E_2} w^{\mathrm{IV}} + \right. \\ &\qquad \left. + 2\left(2\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21}\right) w^{\mathrm{II}\cdot\cdot} + w^{\cdot\cdot\cdot\cdot} + 2w^{\cdot\cdot} + w\right] = X_3^*\,, \end{aligned} \tag{7a–c}$$

ahol

$$E_i^* = \frac{E_i}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}\,, \qquad k = \frac{B_i}{R^2 D_i} = \frac{1}{12}\frac{s^2}{R^2}\,, \qquad X_i^* = \frac{R^2}{D_2} X_i\,,$$

A feszültségi állapotot jellemző (7a–c) differenciálegyenletrendszer megoldása a következő fejezet szerint történik.

4. A differenciálegyenletek megoldása az eltolódásfüggvény bevezetésével

Az ortotrop hengeres héj feszültségi állapotát leíró (7a—c) egyenletek inhomogén lineáris egyenletrendszerként kezelhetők, amelynek megoldásai — mint ismeretes — a homogén rész általános megoldásaiból és az inhomogén rendszer partikuláris megoldásaiból tevődnek össze. A megoldást jelentő eltolódások tehát;

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_p\,, \\ v &= v_0 + v_p\,, \\ w &= w_0 + v_p \end{aligned} \qquad (8a-c)$$

alakban írhatók.

A megoldásokhoz viszonylag egyszerűen az

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \qquad (9)$$

eltolódásfüggvény bevezetésével juthatunk oly módon, hogy az eltolódásokat

$$\begin{aligned} u &= U(\mathfrak{F})\,, \\ v &= V(\mathfrak{F})\,, \\ w &= W(\mathfrak{F}) \end{aligned} \qquad (10a-c)$$

alakban keressük.

Célravezető és ésszerű az eltolódásfüggvényt ugyancsak két részre bontani, illetve az

$$\mathfrak{F}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \mathfrak{F}_0(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \mathfrak{F}_p(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \qquad (11)$$

összegként előállítani úgy, hogy a homogén rész megoldásait az $\mathfrak{F}_0$, az inhomogén rendszer partikuláris megoldásait pedig az $\mathfrak{F}_p$ függvény tartalmazza. Az áttekinthetőség és kezelhetőség érdekében az $\mathfrak{F}_p$ eltolódásfüggvényt ugyancsak célszerű

$$\mathfrak{F}_p(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \mathfrak{F}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \mathfrak{F}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \mathfrak{F}_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \qquad (12)$$

összegként értelmezni ahol:

$\mathfrak{F}_1$ *első eltolódásfüggvény* az X_1 terhelésből adódó u_1, v_1 és w_1, az

$\mathfrak{F}_2$ *második eltolódásfüggvény* az X_2 terhelésből adódó u_2, v_2 és w_2, az

$\mathfrak{F}_3$ *harmadik eltolódásfüggvény* az X_3 terhelésből adódó u_3, v_3 és w_3 eltolódásokat tartalmazza.

Végeredményben tehát az eltolódások

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = U_0(\mathfrak{F}_0) + U_1(\mathfrak{F}_1) + U_2(\mathfrak{F}_2) + U_3(\mathfrak{F}_3)\,, \\ v &= v_0 + v_1 + v_2 + v_3 = V_0(\mathfrak{F}_0) + V_1(\mathfrak{F}_1) + V_2(\mathfrak{F}_2) + V_3(\mathfrak{F}_3)\,, \\ w &= w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = W_0(\mathfrak{F}_0) + W_1(\mathfrak{F}_1) + W_2(\mathfrak{F}_2) + W_3(\mathfrak{F}_3) \end{aligned} \qquad (13a-c)$$

alakban írhatók.

Az eltolódások és az eltolódásfüggvények közötti tényleges kapcsolat meghatározását a következő fejezet tárgyalja.

5. A középfelület eltolódásai és az eltolódásfüggvények közötti kapcsolat

A középfelület eltolódásai és az eltolódásfüggvények közötti kapcsolat meghatározása az operátor módszer alkalmazásával történhetik. A (7a—c) alatti összefüggéseket algebrai egyenletrendszerként kezelve, a keresett u, v és w eltolódások együtthatóiból képzett determináns

$$\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \tag{14}$$

alakban írható. Az d_{ij} együtthatók értelmét az I. táblázatban foglalt differendiáloperátorok adják.

A (7a—c) egyenletrendszer megoldásait a következő alakban keressük:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_p = \mathfrak{D}_{11}(\gamma_1^0 + \gamma_1^p) + \mathfrak{D}_{12}(\gamma_2^0 + \gamma_2^p) + \mathfrak{D}_{13}(\gamma_3^0 + \gamma_3^p), \\ v &= v_0 + v_p = \mathfrak{D}_{21}(\gamma_1^0 + \gamma_1^p) + \mathfrak{D}_{22}(\gamma_2^0 + \gamma_2^p) + \mathfrak{D}_{23}(\gamma_3^0 + \gamma_3^p), \\ w &= w_0 + w_p = \mathfrak{D}_{31}(\gamma_1^0 + \gamma_1^p) + \mathfrak{D}_{32}(\gamma_2^0 + \gamma_2^p) + \mathfrak{D}_{33}(\gamma_3^0 + \gamma_3^p). \end{aligned} \tag{15a—c}$$

I. Táblázat

Az eltolódások együtthatóit jelentő operátorok

d_{11}	$\frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{G(1+k)}{E_2^*}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_2^2}$
$d_{12} = d_{21}$	$\left(\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21}\right)\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2}$
$d_{13} = d_{31}$	$\nu_{21}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1} + k\left(\frac{G}{E_2^*}\frac{\partial^3}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2^2} - \frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^3}{\partial \bar{x}_1^3}\right)$
d_{22}	$\frac{G(1+3k)}{E_2^*}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_2^2}$
$d_{23} = d_{32}$	$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2} - k\left(3\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21}\right)\frac{\partial^3}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2}$
d_{33}	$1 + k\left[1 + \frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_1^4} + 2\left(2\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21}\right)\frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_2^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_2^2}\right]$

A megoldásokat a (7a–c) differenciálegyenletrendszerbe helyettesítve, — a lineáris algebrai egyenletek elmélete alapján — a következő homogén és inhomogén egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\gamma_1^0 &= 0\,, \\ \mathfrak{D}\gamma_2^0 &= 0\,, \\ \mathfrak{D}\gamma_3^0 &= 0\,, \end{aligned} \tag{16a–c}$$

valamint:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}\gamma_1^p &= X_1^*\,, \\ \mathfrak{D}\gamma_2^p &= X_2^*\,, \\ \mathfrak{D}\gamma_3^p &= X_3^*\,. \end{aligned} \tag{17a–c}$$

A homogén egyenletrendszer általános megoldását tartalmazó megoldó egyenlet levezetéséhez a gyököket

$$\gamma_1^0 = \gamma_2^0 = 0 \quad \text{és} \quad \gamma_3^0 = \frac{E_2^*}{G}\,\mathfrak{F}_0 \tag{18a–c}$$

alakban célszerű választani. Így a megholdásokat az

$$\mathfrak{D}^*\mathfrak{F}_0 = 0 \tag{19}$$

egyenértékű differenciálegyenlet tartalmazza,
ahol

$$\mathfrak{D}^* = \frac{E_2^*}{G}\,\mathfrak{D}\,. \tag{20}$$

Az inhomogén rendszer partikuláris megoldásai

$$\begin{aligned} \gamma_1^p &= \frac{E_2^*}{G}\,\mathfrak{F}_1\,, \\ \gamma_2^p &= \frac{E_2^*}{G}\,\mathfrak{F}_2\,, \\ \gamma_3^p &= \frac{E_2^*}{G}\,\mathfrak{F}_3 \end{aligned} \tag{21a–c}$$

alakban állíthatók elő. A megoldásokat tartalmazó eltolódásfüggvények az

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^*\mathfrak{F}_1 &= X_1^*\,, \\ \mathfrak{D}^*\mathfrak{F}_2 &= X_2^*\,, \\ \mathfrak{D}^*\mathfrak{F}_3 &= X_3^* \end{aligned} \tag{22a–c}$$

differenciálegyenletek partikuláris megoldásaként adódnak. Az előzőek értelmében az eltolódások és az eltolódásfüggvények közötti kapcsolatot az

$$\begin{aligned} u &= \mathfrak{D}_{11}^{*}\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{D}_{12}^{*}\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{D}_{13}^{*}(\mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_0)\,, \\ v &= \mathfrak{D}_{21}^{*}\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{D}_{22}^{*}\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{D}_{23}^{*}(\mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_0)\,, \\ w &= \mathfrak{D}_{31}^{*}\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{D}_{32}^{*}\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{D}_{33}^{*}(\mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_0) \end{aligned} \qquad (23a-c)$$

egyenletek írják le.

A közöltek szerint az eltolódásfüggvények potenciálfüggvényeknek tekinthetők, amelyekre vonatkozó részletesebb vizsgálatok a következő fejezetben találhatók.

6. A homogén rendszer megoldásait tartalmazó eltolódásfüggvény

Az előző fejezetben levezetett (23a–c) összefüggések alapján – figyelembevéve az operátorok I. táblázatban foglalt kifejezéseit, továbbá a (20) alatti értelmezést – a homogén rendszert megoldó eltolódások és az eltolódásfüggvény közötti tényleges függvénykapcsolat a következők szerint alakul:

$$\begin{aligned} u_0 &= U_{01}\mathfrak{F}_0^{III} + U_{02}\mathfrak{F}_0^{I:} + k(U_{03}\mathfrak{F}_0^{III} + U_{04}\mathfrak{F}_0^{V} + U_{05}\mathfrak{F}_0^{III:} + U_{06}\mathfrak{F}_0^{I::}) + \\ &\quad + k^2(U_{07}\mathfrak{F}_0^{V} + U_{08}\mathfrak{F}_0^{III:})\,, \\ v_0 &= V_{01}\mathfrak{F}_0^{II'} + V_{02}\mathfrak{F}_0^{::} + k(V_{03}\mathfrak{F}_0^{::} + V_{04}\mathfrak{F}_0^{IV'} + V_{05}\mathfrak{F}_0^{II:'}) + \\ &\quad + k^2 V_{06}\mathfrak{F}_0^{II:'}\,, \qquad (24a-c) \\ w_0 &= W_{01}\mathfrak{F}_0^{IV} + W_{02}\mathfrak{F}_0^{II:} + W_{03}\mathfrak{F}_0^{::} + k(W_{04}\mathfrak{F}_0^{IV} + W_{05}\mathfrak{F}_0^{II:} + W_{06}\mathfrak{F}_0^{:::}) + \\ &\quad + k^2 W_{07}\mathfrak{F}_0^{II:}\,. \end{aligned}$$

Az együtthatók kifejezései a II. táblázatban találhatók.

Az eltolódásfüggvény meghatározására szolgáló (19) differenciálegyenlet pedig az alábbi alakot ölti:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{F}_0^{VIII} + a_{01}\mathfrak{F}_0^{VI:} + a_{02}\mathfrak{F}_0^{IV::} + a_{03}\mathfrak{F}_0^{II:::} + a_{04}\mathfrak{F}_0^{::::} + a_{05}\mathfrak{F}_{50}^{VI} + \\ &+ a_{06}\mathfrak{F}_0^{IV:} + a_{07}\mathfrak{F}_0^{II::} + a_{08}\mathfrak{F}_0^{:::} + a_{09}\mathfrak{F}_0^{IV} + a_{010}\mathfrak{F}_0^{II:} + a_{011}\mathfrak{F}_0^{::} = 0\,. \end{aligned} \qquad (25)$$

Az együtthatók a III. táblázatban közölt összefüggések szerint alakulnak.

Az $\mathfrak{F}_0$ eltolódásfüggvény – adott peremfeltételek esetén – a (25) egyenlet általános megoldásaiból számítható.

A vizsgálatok tárgyát képező vékony héjak eseteiben $R/s > 10$; tehát $k < 0{,}001$ így k az egység mellett indokoltan elhagyható. Az elhanyagolás következtében a gyakorlat számára elfogadható pontossággal, a IV. táblázatban közölt együtthatókkal számolhatunk.

II. Táblázat

A homogén megoldások együtthatói

j	U_{0j}	V_{0j}	W_{0j}
1	$-\nu_{21}$	$\nu_{21}-\frac{E_1}{G}$	$\frac{E_1}{E_2}$
2	1	-1	$\frac{E_1}{G}-2\nu_{21}$
3	$-3\nu_{21}$	-1	1
4	$\frac{E_1}{E_2}$	$2\frac{E_1}{E_2}$	$3\frac{E_1}{E_2}$
5	$\frac{E_1}{G}-4\left(\frac{G}{E_2^*}+\nu_{21}\right)$	$2\left(2\frac{G}{E_2^*}+\nu_{21}\right)$	$4\frac{G}{E_2^*}$
6	-1	$3\frac{G}{E_2^*}+\nu_{21}$	1
7	$3\frac{E_1}{E_2}$		$3\frac{G}{E_2^*}$
8	$-3\frac{G}{E_2^*}$		

További jelentős egyszerűsödést jelent, ha az előző megfontolások alapján

$$(1+k)u'' \approx u''$$
$$(1+3k)v^{II} \approx v^{II} \qquad (26a-b)$$

közelítéssel élünk. Ebben az esetben ugyanis a

$$U_{03} = U_{07} = U_{08} = 0\,,$$
$$V_{03} = V_{06} = 0\,,$$
$$W_{04} = W_{05} = W_{06} = W_{07} = 0$$

együtthatók adódnak. Így a (24a–c) egyenletek a következő alakot öltik:

$$u_0 = U_{01}\mathfrak{F}_0^{III} + U_{02}\mathfrak{F}_0^{I:} + k(U_{04}\mathfrak{F}_0^{V} + U_{05}\mathfrak{F}_0^{III:} + U_{06}\mathfrak{F}_0^{I::})\,,$$
$$v_0 = V_{01}\mathfrak{F}_0^{II'} + V_{02}\mathfrak{F}_0^{:} + k(V_{04}\mathfrak{F}_0^{IV'} + V_{05}\mathfrak{F}_0^{II::})\,, \qquad (27a-c)$$
$$w_0 = W_{01}\mathfrak{F}_0^{IV} + W_{02}\mathfrak{F}_0^{II:} + W_{03}\mathfrak{F}_0^{::}\,.$$

III. Táblázat

Az együtthatók pontos meghatározására szolgáló kifejezések

a_0	$k\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^2(1+2k-3k^2)$
a_{01}	$\frac{k}{a_0}\frac{E_1}{E_2}\left[\frac{E_1}{G}+4\frac{G}{E_2^*}-k\left(\frac{E_1}{G}-15\frac{G}{E_2^*}-8\nu_{21}\right)+9k^2\frac{G}{E_2^*}\right.$
a_{02}	$\frac{k}{a_0}\left[6\frac{E_1}{E_2}+2\nu_{21}\frac{E_1}{G}-8\nu_{21}\frac{G}{E_2^*}-8\nu_{21}^2+k\left(6\frac{E_1}{E_2}-6\nu_{21}\frac{G}{E_2^*}-3\nu_{21}^2\right)-k^2\nu_{21}^2\right]$
a_{03}	$\frac{k}{a_0}\left[\frac{E_1}{G}+4\frac{G}{E_2^*}+k\left(7\frac{G}{E_2^*}+2\nu_{21}\right)+3k^2\frac{G}{E_2^*}\right]$
a_{04}	$\frac{k}{a_0}(1+k)$
a_{05}	$2\frac{k}{a_0}\frac{E_1}{E_2}\nu_{21}(1+3k)$
a_{06}	$\frac{k}{a_0}\left[6\frac{E_1}{E_2}+2\nu_{21}\frac{E_1}{G}-8\nu_{21}\frac{G}{E_2^*}-8\nu_{21}^2+6k\left(\frac{E_1}{E_2}-\nu_{21}\frac{G}{E_2^*}\right)\right]$
a_{07}	$\frac{k}{a_0}\left[8\frac{G}{E_2^*}+2\frac{E_1}{G}-2\nu_{21}+k\left(14\frac{G}{E_2^*}+2\nu_{21}\right)+6k^2\frac{G}{E_2^*}\right]$
a_{08}	$2\frac{k}{a_0}(1+k)$
a_{09}	$\frac{k}{a_0}\left(4\frac{E_1}{E_2}-3\nu_{21}^2+3k\frac{E_1}{E_2}\right)+\frac{1}{a_0}\left(\frac{E_1}{E_2}-\nu_{21}^2\right)$
a_{010}	$\frac{k}{a_0}\left(\frac{E_1}{G}+4\frac{G}{E_2^*}-2\nu_{21}+7k\frac{G}{E_2^*}+3k^2\frac{G}{E_2^*}\right)$
a_{011}	$\frac{k}{a_0}(1+k)$

Az eltolódásfüggvény meghatározására szolgáló (19) differenciálegyenlet pedig az alábbiak szerint írható:

$$\mathfrak{F}_0^{\mathrm{VIII}}+a_{01}\mathfrak{F}_0^{\mathrm{VI}:}+a_{02}\mathfrak{F}_0^{\mathrm{IV}::}+a_{03}\mathfrak{F}_0^{\mathrm{II}:::}+a_{04}\mathfrak{F}_0^{:::::}+a_{05}\mathfrak{F}_0^{\mathrm{VI}}$$

$$+a_{06}\mathfrak{F}_0^{\mathrm{IV}:}+a_{07}\mathfrak{F}_0^{\mathrm{II}::}+a_{08}\mathfrak{F}_0^{:::}+a_{09}^*\mathfrak{F}_0^{\mathrm{IV}}+a_{010}^*\mathfrak{F}_0^{\mathrm{II}:}+a_{011}\mathfrak{F}_0^{::}=0\,. \quad (28)$$

IV. Táblázat

Az együtthatók közelítő meghatározására szolgáló kifejezések

a_0	$k\left(\frac{E_1}{E_2}\right)^2$
a_{01}	$4\left(\frac{G}{E_1^*}+\frac{1}{4}\frac{E_2}{G}\right)$
a_{02}	$6\frac{E_2}{E_1}\left(1+\frac{1}{3}\frac{E_2}{G}\nu_{21}-\frac{4}{3}\frac{G}{E_2^*}\nu_{12}-\frac{4}{3}\nu_{12}\nu_{21}\right)$
a_{03}	$4\frac{E_2}{E_1}\left(\frac{G}{E_1^*}+\frac{1}{4}\frac{E_2}{G}\right)$
a_{04}	$\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2$
a_{05}	$2\nu_{12}$
a_{06}	$6\frac{E_2}{E_1}\left(1+\frac{1}{3}\frac{E_2}{G}\nu_{21}-\frac{4}{3}\frac{G}{E_2^*}\nu_{12}-\frac{4}{3}\nu_{12}\nu_{21}\right)$
a_{07}	$2\frac{E_2}{E_1}\left(4\frac{G}{E_1^*}+\frac{E_2}{G}-\nu_{12}\right)$
a_{08}	$2\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2$
a_{09}	$\frac{1}{k}\frac{E_2}{E_1^*}+\frac{E_2}{E_1}(4-3\nu_{12}\nu_{21})$
a_{010}	$\frac{E_2}{E_1}\left(4\frac{G}{E_1^*}+\frac{E_2}{G}-2\nu_{12}\right)$
a_{011}	$\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^2$

Az együtthatók a IV. táblázat szerint és az

$$a_{09}^* = \frac{1}{k}\frac{E_2}{E_1^*}+\frac{E_2}{E_1},$$

$$a_{010}^* = \frac{E_2}{E_1}\left(\frac{E_2}{G}-2\nu_{12}\right)$$

összefüggésekből számíthatók.

7. Az inhomogén egyenletek partikuláris megoldásait tartalmazó eltolódásfüggvény

Az inhomogén differenciálegyenletrendszer partikuláris megoldásai — mint ismeretes — a héjfelületre ható megoszló erőrendszer hatását képviselik. Meghatározásuk során egyszerűsítő feltevések tehetők [5] a következő elhanyagolások útján:

A metszeterők (N_1, N_2, N_{12}, N_{21}) kifejezésében szereplő B_i-vel szorzott tagok elhagyhatók a D_i-vel szorzott tagok mellett.

A nyomatékok (M_1, M_2, M_{12}, M_{21}) kifejezésében, a w eltolódás második deriváltjai w^{II}, $w^{\cdot\cdot}$, $w^{I\cdot}$) mellett az u és v eltolódások első deriváltjai (v^I, $v^{\cdot}$, u^I, $u^{\cdot}$) elhanyagolhatók.

Az erők kerületirányú egyensúlyát leíró egyenletben a viszonylag kis Q_2 keresztirányú erő még kisebb kerületirányú komponense elhagyható.

Az elhanyagolásokból származó hiba nagysága a k tényező függvénye. A szokásos héjaknál ($k < 0{,}001$) a hiba figyelmen kívül hagyható [8], [9].

Az elhanyagolások következtében a (7a—c) differenciálegyenletrendszer az alábbi alakot ölti:

$$\frac{E_1}{E_2}u^{II} + \frac{G}{E_2^*}u^{\cdot\cdot} + \left(\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21}\right)v^{I\cdot} + \nu_{21}w^I = X_1^*,$$

$$\left(\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21}\right)u^{I\cdot} + v^{\cdot\cdot} + \frac{G}{E_2^*}v^{II} + w^{\cdot} = X_2^*, \qquad (29a-c)$$

$$\nu_{21}u^I + v^{\cdot} + w + k\left[\frac{E_1}{E_2}w^{IV} + 2\left(2\frac{G}{E_2^*} + \nu_{21}\right)w^{II:} + w^{::}\right] = X_3^*.$$

A (29a—c) inhomogén rendszer partikuláris megoldásait tartalmazó kifejezések bevezetése az 5. fejezetben közölt módszer szerint történhetik az eltolódások együtthatóiból képzett

$$\mathfrak{D}^p = \begin{bmatrix} d_{11}^p & d_{12}^p & d_{13}^p \\ d_{21}^p & d_{22}^p & d_{23}^p \\ d_{31}^p & d_{32}^p & d_{33}^p \end{bmatrix} \qquad (30)$$

determináns figyelembevételével. Az d_{ij}^p együtthatók értelmét most az V. táblázatban foglalt differenciáloperátorok adják.

A (20), (22a—c) és (23a—c) összefüggések alapján, az eltolódásfüggvények meghatározására, valamint az eltolódások és az eltolódásfüggvények közötti kapcsolat kifejezésére az alábbi összefüggések szolgálnak:

$$\mathfrak{D}^{p*}\mathfrak{F}_1 = X_1^*,$$

$$\mathfrak{D}^{p*}\mathfrak{F}_2 = X_2^*, \qquad (31a-c)$$

$$\mathfrak{D}^{p*}\mathfrak{F}_3 = X_3^*,$$

V. Táblázat

Az eltolódások együtthatóit jelentő közelítő operátorok

d_{11}^{p}	$\frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1^2}+\frac{G}{E_2^*}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_2^2}$
$d_{12}^{p}=d_{21}^{p}$	$\left(\frac{G}{E_2^*}+\nu_{21}\right)\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1 \partial \bar{x}_2}$
$d_{13}^{p}=d_{31}^{p}$	$\nu_{21}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_1}$
d_{22}^{p}	$\frac{G}{E_2^*}\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}_2^2}$
$d_{23}^{p}=d_{32}^{p}$	$\frac{\partial}{\partial \bar{x}_2}$
d_{33}^{p}	$1+k\left[\frac{E_1}{E_2}\frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_1^4}+2\left(2\frac{G}{E_2^*}+\nu_{21}\right)\frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_1^2 \partial \bar{x}_2^2}+\frac{\partial^4}{\partial \bar{x}_2^4}\right]$

valamint

$$u_p = u_1 + u_2 + u_3 = \mathfrak{D}_{11}^{p*}\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{D}_{12}^{p*}\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{D}_{13}^{p*}\mathfrak{F}_3\,,$$
$$v_p = v_1 + v_2 + v_3 = \mathfrak{D}_{21}^{p*}\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{D}_{22}^{p*}\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{D}_{23}^{p*}\mathfrak{F}_3\,, \qquad (32a-c)$$
$$w_p = w_1 + w_2 + w_3 = \mathfrak{D}_{31}^{p*}\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{D}_{32}^{p*}\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{D}_{33}^{p*}\mathfrak{F}_3\,.$$

A (32a—c) összefüggések alapján — figyelembe véve az operátorok V. táblázatban foglalt kifejezéseit — az egyes eltolódások a következők szerint írhatók:

$$u_1 = U_{11}\mathfrak{F}_1^{II} + k(U_{12}\mathfrak{F}_1^{VI} + U_{13}\mathfrak{F}_1^{IV:} + U_{14}\mathfrak{F}_1^{II::} + U_{15}\mathfrak{F}_1^{:::})\,,$$
$$v_1 = V_{11}\mathfrak{F}_1^{I\cdot} + k(V_{12}\mathfrak{F}_1^{V\cdot} + V_{13}\mathfrak{F}_1^{III:\cdot} + V_{14}\mathfrak{F}_1^{I:::})\,, \qquad (33a-c)$$
$$w_1 = W_{11}\mathfrak{F}_1^{III} + W_{12}\mathfrak{F}^{I:}\,,$$

továbbá

$$u_2 = U_{21}\mathfrak{F}_2^{I\cdot} + k(U_{22}\mathfrak{F}_2^{V\cdot} + U_{23}\mathfrak{F}_2^{III:\cdot} + U_{24}\mathfrak{F}_2^{I:::})\,,$$
$$v_2 = V_{21}\mathfrak{F}_2^{II} + V_{22}\mathfrak{F}_2^{\cdot\cdot} + k(V_{23}\mathfrak{F}_2^{VI} + V_{24}\mathfrak{F}_2^{IV:} + V_{25}\mathfrak{F}_2^{II::} + V_{26}\mathfrak{F}_2^{:::})\,, \qquad (34a-c)$$
$$w_2 = W_{21}\mathfrak{F}_2^{II\cdot} + W_{22}\mathfrak{F}_2^{:\cdot}\,,$$

valamint,

$$u_3 = U_{31}\mathfrak{F}_3^{III} + U_{32}\mathfrak{F}_3^{I:}\,,$$
$$v_3 = V_{31}\mathfrak{F}_3^{II\cdot} + V_{32}\mathfrak{F}_3^{:\cdot}\,, \qquad (35a-c)$$
$$w_3 = W_{31}\mathfrak{F}_3^{IV} + W_{32}\mathfrak{F}_3^{II:} + W_{33}\mathfrak{F}_3^{::}\,.$$

VI. Táblázat

Az inhomogén megoldások együtthatói

j	U_{1j}	$V_{1j}=U_{2j}$	$W_{1j}=U_{3j}=U_{0j}$	V_{2j}	$W_{2j}=V_{3j}=V_{0j}$	$W_{3j}=W_{0j}$
1	1	-1	$-\nu_{21}$	$\frac{E_1}{G}$	$\nu_{21}-\frac{E_1}{G}$	$\frac{E_1}{E_2}$
2	$\frac{E_1}{E_2}$	$-\left(\frac{E_1}{E_2}+\nu_{21}\frac{E_1^*}{G}\right)$	1	1	-1	$\frac{E_1}{G}-2\nu_{21}$
3	$\frac{E_1^*}{G}+4\frac{G}{E_2^*}+2\nu_{21}$	$-\left(4\frac{G}{E_2^*}+2\nu_{21}^2\frac{E_2^*}{G}+6\nu_{21}\right)$		$\frac{E_1^*}{G}\frac{E_1}{E_2}$		1
4	$2\nu_{21}\frac{E_2^*}{G}+5$	$-\left(1+\nu_{21}\frac{E_2^*}{G}\right)$		$5\frac{E_1}{E_2}+2\nu_{21}\frac{E_1^*}{G}$		
5	$\frac{E_2^*}{G}$			$\frac{E_1^*}{G}+4\frac{G}{E_2^*}+2\nu_{21}$		
6				1		

Az U_{ij}, V_{ij} és W_{ij} együtthatók a VI. táblázatban közölt összefüggésekből számíthatók.

Az eltolódásokat kifejező eltolódásfüggvényeket a (31a–c) összefüggések alapján felírható

$$\mathfrak{F}_i^{\mathrm{VIII}} + a_{01}\mathfrak{F}_i^{\mathrm{VI}:} + a_{02}\mathfrak{F}_i^{\mathrm{IV}::} + a_{03}\mathfrak{F}_i^{\mathrm{II}:::} + a_{04}\mathfrak{F}_i^{::::} + a_{09}^{**}\mathfrak{F}_i^{\mathrm{IV}} = \\ = a_{09}^{**}\frac{E_2^*}{E_1}X_i^* \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{36}$$

differenciálegyenletek partikuláris megoldásai szolgálják.

Az együtthatók a IV. táblázat szerint és az

$$a_{09}^{**} = \frac{1}{k}\frac{E_2}{E_1^*}$$

összefüggésből számíthatók.

Említést érdemel még az a megállapítás [8], [9], [10], hogy a peremterhelések hatására ébredő feszültségállapot sok esetben elfogadható pontossággal vizsgálható a (29a–c) egyenletrendszer homogén részének megoldása útján is. Ilyen jellegű vizsgálatok — ortotrop hengeres héjra vonatkozólag — a szerző előző dolgozatában [10] találhatók.

8. A membránfeszültségi állapotra vonatkozó eltolódásfüggvények

A gyakorlati számítások során különös fontossággal jelentkezik a hengeres héjakban ébredő membránfeszültségek és ezek hatására fellépő alakváltozások meghatározása. Nem érdektelen tehát a membránfeszültségi állapothoz tartozó eltolódásfüggvények ismertetése.

A vizsgálatok teljes egészében a már közölt összefüggések felhasználásával történhetnek a membránfeszültségi állapotra jellemző $B_i = 0$ és $k = 0$ feltételezésével. Így a membránerők okozta eltolódások a (33a–c), továbbá a (34a–c), valamint a (35a–c) összefüggések felhasználásával a következők szerint írhatók:

$$\begin{aligned} u_{1M} &= U_{11}\mathfrak{F}_{1M}^{\mathrm{II}}, \\ v_{1M} &= V_{11}\mathfrak{F}_{1M}^{\mathrm{I}\cdot}, \\ w_{1M} &= W_{11}\mathfrak{F}_{1M}^{\mathrm{III}} + W_{12}\mathfrak{F}_{1M}^{\mathrm{I}:}, \end{aligned} \tag{37a–c}$$

továbbá,

$$\begin{aligned} u_{2M} &= U_{21}\mathfrak{F}_{2M}^{\mathrm{I}\cdot}, \\ v_{2M} &= V_{21}\mathfrak{F}_{2M}^{\mathrm{II}} + V_{22}\mathfrak{F}_{2M}^{\cdot\cdot}, \\ w_{2M} &= W_{21}\mathfrak{F}_{2M}^{\mathrm{II}\cdot} + W_{22}\mathfrak{F}_{2M}^{:\cdot}, \end{aligned} \tag{38a–c}$$

valamint,

$$u_{3M} = U_{31}\mathfrak{F}_{3M}^{III} + U_{32}\mathfrak{F}_{3M}^{II},$$
$$v_{3M} = V_{31}\mathfrak{F}_{3M}^{II} + V_{32}\mathfrak{F}_{3M}^{\cdot\cdot}, \qquad (39a-c)$$
$$w_{3M} = W_{31}\mathfrak{F}_{3M}^{IV} + W_{32}\mathfrak{F}_{3M}^{II} + W_{33}\mathfrak{F}_{2M}^{\cdot\cdot}.$$

Az eltolódásfüggvény meghatározására szolgáló (36) differenciálegyenlet pedig a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathfrak{F}_{iM}^{IV} = \frac{E_2^*}{E_1} X_i^*, \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (40)$$

Bevezetve a

$$J_{4i} = \frac{E_2^*}{E_1} X_i^* \qquad (41)$$

terhelésfüggvény értelmezését a (40) differenciálegyenlet megoldása;

$$\mathfrak{F}_{iM} = J_{0i} + \sum_{n=1}^{4} C_n(\bar{x}_2)\bar{x}_1^{n-1} \qquad (42)$$

alakban írható, ahol J_{0i} az

$$J_{(k-1)i} = \int J_{ki} d\bar{x}_1 \qquad (k = 1, 2, 3, 4,) \qquad (43)$$

összefüggés alapján számítható.

Az eltolódásfüggvények ismeretében az eltolódások mellett természetesen a membránerők is meghatározhatók.

IRODALOM

1. LOVE, H.: The Mathematical Theory of Elasticitiy. Univ. Press, Oxford 1952.
2. TIMOSHENKO, S.: Theory of Plates and Shells. Mc Graw-Hill, New York 1959.
3. FLÜGGE, W.: Stresses in Shells. Springer—Verlag, Berlin 1960.
4. WLASSOW, S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag, Berlin 1958.
5. DONNEL, H.: Stability of Thin—walled Tubes under Torsion. *NACA, Tech. Rep.* 1933.
6. NOVOZHILOV, V.: The Theory of thin Shells. Noordhoff 1959.
7. GOL'DENVEIZER, L.: Theory of Elastic Thin Shells. Pergamon Press, Oxford 1961.
8. HOFF, J.: The Accuracy of DONNEL's Equations. *J. Appl. Mech.* **22** (1955), 329—334.
9. KEMPNER, J.: Remarks on DONNEL's Equations. *J. Appl. Mech.* **22** (1955), 117—118.
10. VARGA, L.: Discussion of the Bending Theory of Cylindrical Shells of Orthogonally anisotropic Structural Material, by Introducing the Displacement Function. *Acta Techn. Hung.* **73** (1972), 175.

Displacement Functions of Orthogonally Anisotropic Cylindrical Shells. Displacement functions describing the stress state of orthotropic, anisotropic cylindrical shells are analysed and determined on the assumtion of homogeneous anisotropy. By introducing the displacement functions, the exact and approximate solutions of the set of differential equations derived from the equilibrium conditions are presented. The relation between the displacements and displacement functions rendering general solutions to the homogeneous part and performing particular solutions to the non-homogeneous system are detailed. The differential equations furnishing the establishment of the displacement functions are reported. Last, the relations existing between the displacements caused by the membrane forces and the displacement functions, as well as the differential equation including the displacement functions and their solution are shown.

Verschiebungsfunktionen von ortogonal-anisotropischen zylindrischen Schalen. Behandelt werden die Untersuchung und Ermittlung zylindrischen Schalen kennzeichnenden Verschiebungsfuntionen unter der Voraussetzung der Anisotropie. Durch Einführung der Verschiebungsfunktionen werden sowohl die exakten als auch die Näherungslösunghengen des Differentialgleichungssystems dargestellt, das sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ergibt. Der Zusammenhang zwischen den Verschiebungen, die die allgemeninen Lösungen des homogenen Teils und die partikularen Lösungen des inhomogenen Systems bedeuten, und den Verschiebungsfunktionen wird eingehend erörtert. Ferner werden die Differentialgleichungen zur Ermittlung der Verschiebungsfunktionen vorgelegt. Abschließend werden die Zusammenhänge zwischen den durch die Membrankräfte hervorgerufenen Verschiebungen und Verschiebungsfunktionen, sowie die, eine Verschiebungsfunktionen enthaltende Differentialgleichung und deren Lösung erörtert.

EZÜST (I) OXID (Ag_2O) FÁZISBAN MŰKÖDŐ LÉGMENTESEN LEZÁRT EZÜST-CINK AKKUMULÁTOR

HAJDU LÁSZLÓ*

és

ZAHORÁN JÁNOS**

[Beérkezett 1972. március 24-én]

A közlemény röviden összefoglalja a légmentesen lezárt, miniatűr ezüst-cink rendszerű akkumulátorok tulajdonságait, külön kiemelve azokat a problémákat, amelyek elsősorban a légmentes lezárásból adódnak. Részletesen foglalkozik a gázképződés kérdésével légmentesen lezárt ezüst-cink akkumulátorokban, külön kiemelve azokat a tényezőket, amelyekkel a gázképződés mértékét befolyásolni lehet. Elemzi az ezüst struktúra befolyását a töltés közben kialakuló Ag_2O (ezüstmonoxid) fázis nagyságára, majd azt a konstrukciós, kísérleti munkát, amellyel sikerült tisztán Ag_2O fázisban működő légmentesen lezárt miniatűr ezüst-cink akkumulátorokat kialakítani. Tájékoztatást nyújt az ilyen akkumulátorok villamos, élettartam és tárolási tulajdonságairól, végül összehasonlítást közöl egyéb akkumulátorokkal, kiemelve, hogy az eddigi nagyon pozitív eredmények alapján milyen irányban szükséges további kutató-fejlesztőmunka.

1. Bevezetés

A miniatűr hordozható műszerek és híradástechnikai készülékek alapproblémája a táplálásukra szolgáló áramforrások viszonylag nagy súlya és térfogata. A nagy fajlagos energiatárolóképességű légmentesen lezárt miniatűr ezüst-cink akkumulátorok, — amelyeket a magyar Medicor Művek már évek óta sorozatban gyárt, és amelyeknek gyártását a közelmúltban az angliai Medicharge közös angol—magyar vállalat is megkezdte — már rendelkeznek azokkal az előnyökkel, amelyet az ezüst-cink rendszer éppen a nagy fajlagos energiatárolóképesség vonatkozásában lehetővé tesz.

Szerzők korábbi publikációi [1], [2] az ezüst-cink akkumulátorrendszer lényegéről, fejlődéséről részletesen számot adnak. Ezen a helyen csupán a fajlagos energiatárolóképesség összehasonlítására szolgáljon az I. táblázat, amelyből világosan érzékelhetők az ezüst-cink rendszer adta lehetőségek. Az ezüst-cink rendszer további nagy előnye a rövid ideig tartó nagy terhelhetőség (starter jelleg).

A két, előzőekben említett előny ma már a felhasználás számtalan területén egyeduralkodóvá tette az ezüst-cink akkumulátorokat, mint áramforrásokat. A Medicor Művek fémházban, légmentesen lezárt miniatűr ezüst-cink gombakkumulátorai emellett éppen a légmentes lezárás révén tetszőleges

* Hajdu László, 1026 Budapest, Szilágyi E. fasor 107.
** Dr. Zahorán János, 1204 Budapest, Sajó u. 6.

I. Táblázat

A hagyományos és a korszerű ezüst-cink akkumulátorok energiasűrűségének összehasonlítása

Sorsz.	Rendszer	Aó/kg	Wó/kg	Aó/dm³	Wó/dm³
1.	Savas ólomakkumulátor	10÷15	20÷30	20÷30	40÷60
2.	Lúgos nikkel-kadmium akkumulátor	15÷20	18÷24	30÷50	36÷60
3.	Ezüst-cink akkumulátor	40÷60	60÷75	80÷100	120÷150

helyzetben helyezhetők be a fogyasztókészülékekbe akár, mint egyedi cellák, akár mint a cellákból összeépített telepek.

Az ezüst-cink akkumulátoroknak azonban előnyös tulajdonságaik mellett bizonyos hátrányaik is vannak, amelyekről beszélni kell.

Az egyik ilyen tulajdonság, hogy a pozitív elektród alapanyagát képező ezüst világpiaci ára, és ezzel az akkumulátorok ára is, viszonylag nagy. Igaz ugyan, hogy elméletileg 1 Aó előállításához csak, 2,02 gr ezüstre van szükség, de a gyakorlatban ennek többszörösét használják fel. Az ezüst az akkumulátor tönkremenetelével nem semmisül meg, és kis veszteséggel vissza is nyerhető színezüst formájában, mégis a felhasználó szempontjából az új akkumulátor beszerzési ára az érdekes.

A viszonylag magas árhoz párosul még az a tulajdonság, hogy még a legjobb minőségű ezüst-cink akkumulátorok ciklusélettartama is csak 60÷100 ciklusra tehető [3], minden ciklusban teljes kisütést és ezt követően teljes feltöltést feltételezve. Így egy ezüst-cink akkumulátorból teljes élettartama során visszanyerhető összes Aó-k, vagy helyesebben Wó-k figyelembevételével is magas az 1 Wó-ra eső költség.

Kezelhetőségüket tekintve, ha a használati előírásokban foglaltakat megtartják, lényegileg nincs különbség az ezüst-cink és egyéb (ólom, nikkel-kadmium) akkumulátorok között. Arra azonban fel kell hívni a figyelmet, hogy az ezüst-cink akkumulátorok mind a túltöltéssel, mind — sorbakapcsolt cellákból kialakított telepek esetében — az átpolarizálódással szemben fokozottan érzékenyek.

Szerzők irányítása alatt álló kutató csoport éppen ez utóbbi tények alapján állította munkája középpontjába első lépésként az átpolarizálódást kiküszöbölő kutatási-fejlesztési tevékenységet, amelynek eredményéről a már hivatkozott helyen [1], [2] részletesen be is számoltak. Ugyanezen közlemény 6. fejezetében már olyan lehetőségről számolnak be, amely azzal a reménnyel kecsegtet, hogy sikerülni fog olyan légmentesen lezárt miniatűr ezüst-cink akkumulátort előállítani, amelybe változatlan ezüst-súly felhasználás mellett a névleges kapacitásnak megfelelő töltésmennyiséget az ezüst (I) oxidnak (Ag_2O) megfelelő potenciálszinten lehet betölteni. Az ilyen töltési karakterű ezüst-cink akkumulátor előnyei egy normál kivitelűhöz mérten elvitathatatlanok [1], [2]. Nyilvánvaló volt, hogy a feltárt lehetőség gyakorlati megvaló-

sítása érdekében szisztematikus kutatást — fejlesztést kellett megvalósítani, amely a problémakör minden kérdésének tisztázására ki kellett, hogy terjedjen. Jelen közleményben szerzők részletesen beszámolnak a tisztán ezüst (I) oxid fázisban működő légmentesen lezárt miniatűr ezüst-cink akkumulátor előállítására irányuló kutató-fejlesztő tevékenységről, amelynek alapján már sorozatgyártásban folyik az ilyen jellegű miniatűr ezüst-cink akkumulátorok előállítása.

2. Gázképződés a légmentesen lezárt ezüst-cink akkumulátorokban

Azok a folyamatok, amelyek az akkumulátorok működését jellemzik és az energia felhasználása (tárolása) valamint az energiaszolgáltatás során végbemennek, és amelyeket a már hivatkozott publikációkban [1], [2] részletesen ismertettünk, lényegében olyan kémiai reakciók, amelyek során elméletileg semmilyen gáz nem fejlődhet. Már ott történt azonban utalás arra, hogy a rendszert működés közben nagyon sok mellékfolyamat is jellemzi. Ezek a folyamatok, amelyek egy része gázfejlődéssel jár, a hermetikus rendszerre nézve igen károsak. A mellékreakciók közül ezen a helyen csak gázképződéssel járó folyamatokat tárgyalunk. Ezek lényegében két okra vezethetők vissza: 1. Az alapanyagok tulajdonságaira és 2. Az akkumulátor működésének körülményeire.

1. *Az alapanyagok tulajdonságaira* visszavezethető gázképző mellékfolyamatok általában a legkárosabbak, mivel ún. „spontán" folyamatok, nem szükséges az akkumulátort működtetni, az összeszerelés után tárolás közben is végbemennek és extrém esetben a hermetikus lezárás teljes destruálásához vezethetnek.

Ezüst-cink akkumulátorokban (de úgy gondoljuk ez minden elektrokémiai áramforrásra is érvényes) a feltöltött állapot aktív anyagainak vizsgálata a kritikus, nemcsak azért, mert a használatnak alapvető feltétele, hogy az aktív anyagok ebben az állapotban tartósan stabilak legyenek, hanem azért is, mert lényegében azonos elektrolitban valamilyen — többé-kevésbé tökéletes szeparációval — két energetikailag nagyon különböző állapotú anyag van jelen: az ezüst oxidjainak keveréke és a fémcink.

Az ezüstoxidok stabilitása lúgos elektrolitokban sok kutatónak volt az utóbbi években témája [4], [5].

Az oldhatóság általában nem jár gázfejlődéssel és az ezüstoxidok általában kolloid oldatot képeznek. Ha elegendő redukálóanyag van jelen az elektrolitban (pl. cellofánszeparátorok többértékű alkohol lágyítói), akkor az oxidok redukálódnak és az ezüst mint fémkolloid oldódik.

Gázképződés ez esetben sincs, hiszen a redukáló anyag az oxigént megköti.

Más a helyzet akkor, ha az ezüst lehető maximális kihasználása érdekében az akkumulátorok pozitív elektródjait úgy méretezik, hogy a névleges kapacitáson történő üzemeltetéshez mindig az ún. peroxidfázist (AgO) is használni kell. Ez esetben ugyanis az ezüstoxid-keverék jelentős mennyiségben tartalmazhat olyan, magasabb oxidokat is, amelyek spontán bomlás során adnak le oxigént, pl.

$$Ag_2O_3 = 2AgO + 1/2\ O_2\,. \qquad (1)$$

Ez a jelenség összefüggésben van az ezüst alapanyag tisztaságával is. Ha az ezüst olyan szennyezéseket tartalmaz, melyek csökkentik az oxigénleválás túlfeszültségét az aktív anyagon, akkor a megfelelő fajlagos töltést el sem lehet érni az ezüsttel (nem lehet megfelelő arányú AgO/Ag_2O keveréket előállítani), hiszen az oxid-keverék előállítása rendszerint anódos oxidációval történik és már ezen folyamat közben tapasztalható oxigénfejlődés.

Tvarusko [4] szerint ezek a fémszennyezések főként a következők: Co, Ni, Zr, Ce, Pd, W.

A felsorolás sorrendje tükrözi az oxigéntúlfeszültség csökkentésének sorrendjét is. Bizonyos esetekben előfordulhat (szennyezőkoncentráció és anódos áramsűrűség megfelelő értékeinél) hogy az AgO elő sem állítható, hanem csak az alacsonyabb oxid (Ag_2O).

A pozitív hatóanyag viselkedését illetően nem vonatkoztathatunk el a működtetés (töltés, kisütés) körülményeitől sem, amire később visszatérünk.

A cinkelektród viselkedése KOH elektrolitban kedvezőtlenebb az ezüstnél is, ennél az anyagnál komoly mértékű gázfejlődéssel kell számolni. A közismert

$$Zn + 2KOH + 2H_2O = K_2Zn(OH)_4 + H_2 \qquad (2)$$

reakció szerint a cink oldódik az elektrolitban. A folyamat tulajdonképpen a felhasznált cink szennyezéseivel van összefüggésben. Az abszolút tiszta cink nem oldódik. A szennyezések, amelyek a cinknél általában elektropozitívabbak, a cinkelektródon belül rövidrezárt galvánelemet képeznek a cinkkel, ahol a szennyezés viselkedik katódként és a cink oldódik anódosan. Lényegében a cink elektrokémiai korróziójáról van szó. A folyamat sebessége függ a szennyezések minőségétől. Minél elektropozitívabb a szennyezés a cinkhez képest ebben az oldatban, annál nagyobb a folyamat sebessége. Az oldódási sebességek különbségének szennyezésektől függő mértékét egyszerű kísérlettel vizsgáltuk:

Anódalapanyagként használatos 4 különféle vastartalmú (de közelítően azonos egyéb szennyezőtartalommal rendelkező) cinklemez azonos geometriájú és súlyú darabját helyeztük el az elektrolitban és azonos idő eltelte után mértük az oldóedény fölött elhelyezett hidrogéngázgyűjtő bürettában felfogott gáz térfogatát. A kísérlet közben a hőmérséklet állandó volt, a nyomást pedig a barometrikus nyomásnak megfelelően korrigáltuk.

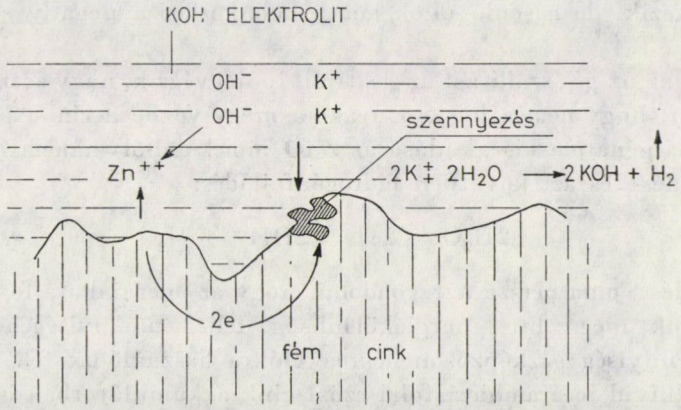
Vasszennyezés (%)	Azonos idő alatt fejlődött H_2(mm³)
0,0004	80
0,001	155
0,0018	195
0,0025	280

A H_2 gáz könnyebb leválása szempontjából egy másik tényező is káros hatású, amit feltétlenül ki kell hangsúlyozni. A szennyezések nagy részének az a tulajdonsága, hogy csökkentik a H_2 leválás túlfeszültségét a cinken. Az előforduló leggyakoribb szennyezések közül alig van ez alól kivétel.

Ez a folyamat tehát kötelezően előírja az anódalapanyagok lehető legnagyobb tisztaságát. A szennyezések közül általában a cinknél elektropozitívabbak mind károsak, így pl. Fe, Cr, Na, Cu, Pt, C.

Néhány kivétel van ez alól, amelyek a H_2 leválás potenciálját növelik a cinken.

Így különleges a higany szerepe, amely a fenti hatáson kívül az elektropozitív szennyezésekkel amalgámot képezve azokat eloszlatja az aktív anódban, ezzel az 1. ábra jellegzetességével ellentétben (ahol is a szennyező koncentrált) diszpergálja a szennyezést, elősegítve azonos potenciálú felület létrehozását. Ily módon a potenciálhomogenitás fokozásával a folyamat csökkenthető. A higanyt ezért a legtöbb cinkanódot alkalmazó áramforrásnál céltudatosan alkalmazzák a szennyezések hatásának kompenzálására. Ez a lehetőség azonban sohasem csökkentheti a nagytisztaságú anód anyagok iránti követelményeket. Példaként elmondhatjuk, hogy a hermetikus ezüst-cink akkumulátorok cinkanódjainak kritikus szennyező koncentrációi nem haladják meg a 10^{-3}%-ot, emellett 2÷4% higannyal történik a bennmaradó szennyezés amalgámozása.



1. ábra. A szennyezés káros hatása a cinkelektródban

2. *Az akkumulátorok működésének körülményeivel* kapcsolatos mellékfolyamatok ugyancsak vezethetnek gázfejlődéshez. A működés körülményein itt elsősorban a töltés-kisütés mikéntjét kell érteni.

Ha feltételezzük, hogy az alapvető áramtermelő vagy akkumuláló folyamat a szerzők korábbi publikációiban [1], [2] leírtak szerint megy végbe, akkor ez azzal a fenntartással érvényes csak, hogy mind a töltésnél, mind a kisütésnél a villamos és kémiai energiák közötti átalakulás hatásfoka az áramsűrűség csökkenésével növekszik. Mivel pedig az áramsűrűség vég nélkül nem csökkenthető hiszen ez az áramforrás jellegének megszűnésével járna, mindenképpen kompromisszumra van szükség a hatásfokot illetően. Az ezüst-cink rendszer hatásfoka egyike a legjobbaknak, mégis a hatásfok által meghatározott energiakülönbség egy része gázképződéshez vezető mellékfolyamatokra használódik el.

Töltésnél és kisültésnél is — mint erről korábban szó volt — az aktív anyagok oxidációjáról és redukciójáról beszélünk. Ráadásul — az alapfolyamatokból láthatóan — a redukált állapotú aktív anyag (Ag) oxigénfelvétele közvetett úton, (az elektrolit közvetítésével) az oxidált aktív anyagból (ZnO) származik. Pl. a töltés folyamatában a cinkoxid (áttételes folyamatokon keresztül) az ezüstnek adja át oxigénjét (kapjuk az ezüstoxidot és cinket) és fordítva történik a kisütés folyamatában. Extrém kis áramsűrűséggel végezve a töltést, a keletkezett ezüstoxidokban levő oxigén mennyisége pontosan megfelel a töltésre felhasznált coulombok számának. Ha a töltés valamilyen véges (de a gyakorlat számára elfogadható) áramsűrűséggel történik, akkor a hasznos

$$ZnO + 2Ag = Ag_2O + Zn \tag{3}$$

folyamat mellett egy gázt, méghozzá oxigéngázt fejlesztő

$$2OH^- = H_2O + 1/2\ O_2 + 2e^- \tag{4}$$

folyamat is lejátszódik.

A diffúziós és határfelületi gátlások miatt ez elsősorban a pozitív elektródon jelentkezik, de hasonló okok miatt keletkezhet a negatív elektródon a hidrogén.

Mivel az oxigén szállítást az elektrolit ionjai végzik, nagy áramsűrűségnél előfordulhat, hogy nem a hasznos reakció megy végbe a cinkoxidelektródon (tehát az oxigénatom kiszakadása az ZnO molekulából) hanem a K^+ ionok semlegesítődése és azt követően hidrogénfejlődés:

$$2H_2O + 2e^- = 2OH^- + H_2 \tag{5}$$

Tévedés volna persze azt gondolni, hogy az energiahatásfok, de még az áramhatásfok megszabta energiakülönbség teljes mennyiségének megfelelő töltésmennyiség gázképző mellékreakciókra használódik fel. Ez ugyanis még a rendkívül jó áramhatásfokú ezüst-cink akkumulátorban is olyan gázmennyiségeket eredményezne, ami kizárttá tenné a hermetizálást.

További, a használat körülményeivel kapcsolatos gázképző folyamattal jár minden olyan használati mód, amikor az aktív anyagok túltöltéséről vagy mélykisütéséről beszélhetünk. A túltöltésen és mélykisütésen e fejezetben azt értjük, hogy az aktív anyagok a kívánt reakció irányában mennyiségileg már teljesen átalakultak, nincs több átalakítható (oxidálható v. redukálható) aktív anyag, ezért gázfejlesztéssel járó mellékfolyamat (vízbontás) játszódik le.

Ennek elkerülésére minden akkumulátorrendszernél az aktív anyagok mennyiségét nagyobbra méretezik, mint az akkumulátor névleges kapacitása, továbbá a töltés és kisütés körülményeit olyan feltételekhez kötik (végfeszültségek), ami áramsűrűségtől függően lehetőséget teremt arra, hogy az akkumulátorban „feltöltött" és „kisütött" állapotban is megfelelő mennyiségű, az ellentétes állapotnak megfelelő aktív anyagtartalékok maradjanak. Ezek a technikai fogások különösen hermetikus rendszereknél fontosak.

A gázfejlődés hermetikus rendszereknél nemcsak azért kerülendő el feltétlenül, mert a nyomásnövekedés következtében mechanikus sérülések, deformálódás és a hermetikus zárás megszűnése következik be, hanem azért is, mert ha mindezen hatásoknak a konstrukció képes is ellenállni, a keletkező gázok zárványokat képeznek az aktív, rendszerint igen nagy porozitású anyagban. Ezek a működő felületek egy részét „árnyékolják" oly módon, hogy a felületekről kiszorítják az elektrolitot. Ennek az a további következménye, hogy a ténylegesen működő felület csökken és a használat feltételeként szereplő előírásos áramerősség a csökkent felületen áramsűrűség növekedést okoz. Ez fokozza mindazokat a következményeket amit a működés körülményei közt létrejövő gázképző folyamatokról az előzőekben leírtunk.

Ezért a gázfejlődés az akkumulátorok tönkremenetelét hatványozott mértékben sietteti.

Mindazon lehetőségek (anyagtisztaság, működés körülményének pontotos rögzítése, méretezés), amelyek a gázképző folyamatok lehető minimálisra csökkentésére rendelkezésre állnak, (a gázképződést teljesen megszüntetni nem lehet) a Medicor Művek hermetikus ezüst-cink gombakkumulátorainál alkalmazást is nyernek.

Az [1], [2] publikációkban ismertetett, az átpolarizálást megakadályozó kettős depolarizátor alkalmazásakor egyik feltétel volt olyan anyagot választani, amely (ha nem is ez az iránta támasztott legfontosabb követelmény) lehetőség szerint csökkenti a pozitív elektródon a gázfejlődést. Ezt az ott alkalmazásra kerülő kadmiumoxid valóban elősegíti.

Tvarusko [4] mérései szerint a teljesen tiszta (99,99%) ezüstből készült ezüstoxid elektród gázfejlesztése 23 μl/g/nap, ugyanakkor a 0,1% fém kadmiummal ötvözött ezüstből készített elektródon 16 μl/g/nap.

Érdekes módon a fenti spontán gázfejlődés csökkenés mellett csökkent gázfejlődést észleltünk a működtetett akkumulátorokban is. Hasonlóképpen a gázfejlődés további csökkentését sikerült elérni egy olyan anyaggal, amely

II. Táblázat

Hagyományos, kettős depolarizátoros és ólomadalékos akkumulátorokban keletkező gázmennyiségek összehasonlítása

Kivitel	Állapot	Gázmennyiség (mm^3)	
		+elektród	—elektród
I. Hagyományos	Végtöltés után	150	50
	60 ciklus után	200	500
II. Kettős depolarizátoros	Végtölt. után	50	50
	100 cikl. után	200	200
III. Ólomadalékos	Végtöltés után	35	35
	150 cikl. után	35	50

Megjegyzés: A táblázatban szereplő adatok min. 6—6 db cella bontásából származó átlagok. A cellák kezdeti deformálódása (néhány $\times$ 0,1 mm^3) kb. $5 \div 600$ mm^3 gázmennyiségnél kezdődik el.

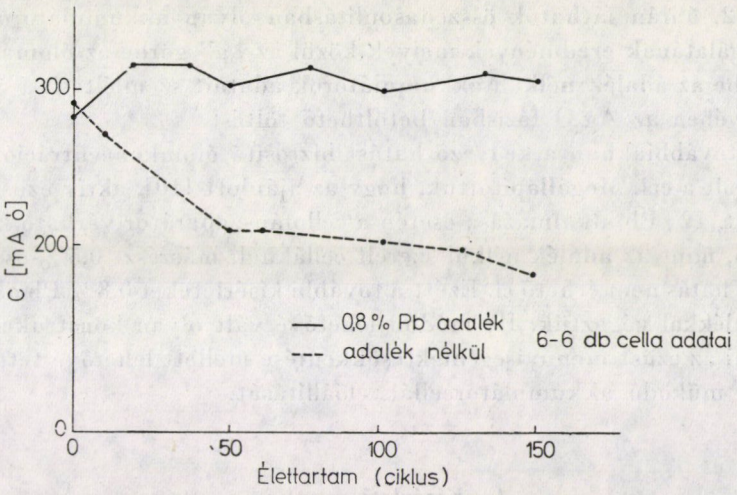
elsődlegesen ugyancsak nem ezt a célt szolgálta, hanem az ezüst jobb kihasználását, ez pedig az ólomadalék. A hermetikus akkumulátorban keletkező gázok csökkentését szemléltetően mutatja a II. táblázat melyben hagyományosan, kettős depolarizátorral és ólomadalékkal készült akkumulátorok adatait (6—6 db cella átlaga) hasonlítjuk össze. Az eredmények értékét csak növeli, hogy a felsorolás sorrendjében növekvő ciklusszámokat lehetett elérni.

A negatív elektródban az elektrokémiai raffinálás, az amalgámozás, továbbá a kiindulási anyagok nagy tisztasága azok a tényezők, melyek a gázfejlődést elfogadható szintre szorítják vissza. E téren azonban nem állítható, hogy a további kutatások feleslegesek volnának, annak ellenére, hogy nem várható látványos, nagyságrendeket befolyásoló eredmény.

3. Az ezüst struktúra befolyása az Ag_2O fázis nagyságára

Irodalmi adatok és saját tapasztalatok is azt igazolták, hogy ha az ezüst aktív anyag szemcseméretét az elektródporozitás szükséges értékének ($50 \div 60\%$) fenntartása mellett csökkenteni lehet, akkor az Ag_2O fázisban betölthető töltésmennyiség nő azonos áramsűrűség alkalmazásával. Ez természetes következménye annak, hogy a tényleges áramsűrűség az aktív szemcsék nagyságának csökkenésével (felületnövekedés) csökken.

Azt tapasztaltuk azonban, hogy az ezüstpor szemcseméretének csökkentésével nem arányosan nő az Ag_2O-ban betölthető töltésmennyiség, hanem az átlagos szemcseméret $40 \div 50\%$-ra való csökkentése csak $10 \div 15\%$-kal nagyobb töltésmennyiség betöltését eredményezte az Ag_2O fázisban.



2. ábra. **A pozitív elektródban ólomadalékos és adalék nélküli akkumulátorok töltésének összehasonlítása**

Ennek megfelelően aktivitásvizsgálataink során a jó minőségű ezüstporokra szemcsemérettől csak kismértékben függően 140 mAó/g körüli értékeket kaptunk az Ag_2O fázisban betölthető töltésmennyiség vonatkozásában. A próbaelektródok sajtolási körülményei állandóak voltak.

Nem ez a helyzet az intakt ezüsthuzalmagon kialakított aktív ezüstnél [6], [7], ahol az aktív anyag nincsen önsajtolva, hanem a kialakulásnak (klórozási folyamat) megfelelő sűrűségű. Az így kialakított aktív ezüstre vonatkozó Ag_2O fázisban tölthető fajlagos töltés 157 mAó/g, tehát lényegében nagyobb a por Ag_2O-ban mutatkozó fajlagos töltési értékénél.

Ezüst-cink rendszernél közismert, hogy az ezüstelektród ciklusok során bekövetkező ezüst (I) oxid kapacitás csökkenését nagymértékben az aktív szemcsék agglomerálódása (fajlagos felület csökkenése) okozza.

Ez a folyamat áramsűrűségfüggő [8], de függ az adalékanyagoktól is. Ólomtartalmú ezüst vizsgálatakor kiderült, hogy többszöri ciklusvizsgálat során az Ag_2O fázisban kezdetben betölthető töltésmennyiség aktív porból sajtolt elektródnál nem volt fenntartható, csökkent, ugyanakkor a huzalelektródon kialakított aktív ezüstnél sok ciklus elvégzése után sem változott a kezdeti értékhez képest. Az irodalom [9] ezt a jelenséget azzal magyarázza, hogy már a formálás során ezüstplumbátok keletkeznek az ezüstszemcsék felületén, amelyek mint valami „védőhártya" a szemcsék agglomerálódását megakadályozzák és hosszú időn keresztül biztosítják az állandó fajlagos felületet.

A jelenség érdekessége az, hogy kezdetben az ólomadalék nem feltétlenül javítja a fajlagos értékeket, sőt úgy tűnik, hogy a formálási ciklusokban kismértékben rontja (vesd össze a 2. ábrán az a. és b. görbét!)

A 2. ábrán láthatók összehasonlításban olyan akkumulátorok élettartamvizsgálatának eredményei, melyek közül az „a" görbe az ólomadalékos, a „b" görbe az adalék nélküli akkumulátorok adatait szemlélteti, a ciklusszám függvényében az Ag_2O fázisban betölthető töltést.

A továbbiakban a kedvező hatást biztosító ólomkoncentráció meghatározása volt a cél. Megállapítottuk, hogy az ajánlott [10], aktív ezüstre vonatkoztatott, 1% Pb alkalmazása esetén a cellofánszeparátor várható károsodása nagyobb, mint az adalék nélkül szerelt celláknál, másrészt 0,5%-os adalékkal a kívánt hatás nem érhető el. Ezért a további kísérleteket 0,8% Pb aktív ezüstsúly adalékkal végeztük. Ily módon lehetővé vált olyan konstrukció kialakítása, ami az ezüst mennyiségeinek csökkentése mellett lehetővé tette az Ag_2O fázisban működő akkumulátorcellák előállítását.

4. Kísérleti munka

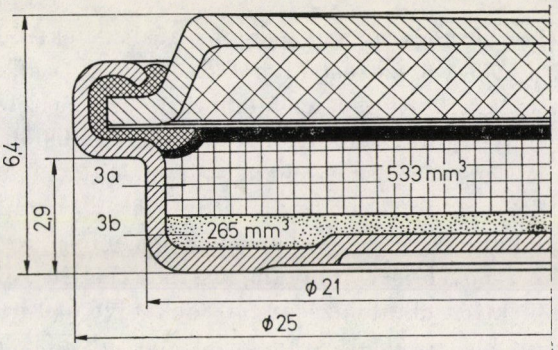
A kísérleti munka megkezdése előtt, az előző fejezetekben ismertetett elveknek megfelelően ki kellett dolgozni azokat a konstrukciós alapelveket, amelyek alapján kilátás nyílt arra, hogy a tisztán ezüst (I) oxid fázisban működő miniatűr ezüst-cink akkumulátorokat biztonsággal sorozatban lehessen gyártani. Az alapelvek a következők voltak:

a) Ne legyen szükség olyan *alapvető* konstrukciós módosításra, amely az évek óta sorozatban gyártott akkumulátorokhoz mérten jelentős változást jelent. Ez vonatkozik mind az egyes cellatípusok főalkatrészeinek (ház, fedél, tömítőgyűrű, szeparátor stb.) változatlanságára, mind a fő technológiai folyamatokra.

b) A konstrukciós módosítás ne okozzon a termék előállítása során többletköltséget. Ez elsősorban a felhasznált ezüstmennyiségre vonatkozik, mert a beépített ezüstmennyiség növelésével — bizonyos határok között — az ezüst(I)-oxid fázis aránya természetesen növekszik, de az jelentős költségtöbbletet is eredményez.

c) A konstrukciós módosítás ne csak azt eredményezze, hogy az akkumulátorokban a névleges kapacitásuknak megfelelő törtésmennyiséget valóban ezüst (I) fázisba lehessen betölteni és az akkumulátorok ezt a kedvező tulajdonságukat gyakorlatilag egész élettartamuk során megtartsák, hanem — lehetőséghez mérten — egyéb paramétereik is javuljanak. Vonatkozik ez mind a ciklus élettartamra, mind az akkumulátorok tárolhatóságára.

d) A konstrukciós módosítás ne befolyásolja a korábbi fejlesztések során elért igen kedvező eredményeket (ezüstelektród egyedülálló konstrukciója és technológiája, a cinkelektród kedvező sajátosságai, a másodlagos depolarizátor átpolarizálódást kiküszöbölő hatása stb.) amelyek a módosítás előtti akkumulátorokat a maguk területén egyedülállókká tették.



3. ábra. Az ólomadalékos B300 DP tip. gombakkumulátor metszeti rajza

Ezen alapelvek figyelembevételével a konstrukció kialakítása a már másodlagos depolarizátorral ellátott akkumulatárok konstrukciós elveinek felhasználásával, de a megvalósítandó célt szolgáló kiegészítésekkel történt. Most — éppen a szisztematikus kutatómunka eredményeinek a gyakorlatban való jó alkalmazhatóságát bizonyítandó — kissé részletesebben foglalkozunk a konstrukció kialakításának gyakorlatibb jellegű kérdéseivel is.

Minden (ezüst-cink) akkumulátornak jellegzetessége, hogy a működéshez elméletileg szükséges hatóanyagok mennyiségét lényegesen túlméretezik. Ez az elv valósult meg gyakorlatilag a Medicor Művek ezüst-cink akkumulátoraiban is. Itt az aktív anyagok túlméretezése még annál is inkább indokolt, mert a légmentesen lezárt állapotban való üzemeltetés megkívánja, hogy az elektródokon számottevő gázfejlődés semmilyen körülmények között ne jöhessen létre (lásd a 2. fejezetet).

A konstrukció részleteit egy 300 mAó névleges kapacitású gombakkumulátor cellán mutatjuk be (3. ábra). Az ábrán látható sematikus konstrukció — ahol azonban jól láthatók a főméretek, a két elektródtér térfogata is jelölve van — már a tiszta ezüst(I)oxid fázisban működő cella konstrukciója. A normál kivitelű cellában a 3/a, és a 3/b jelzésű pozitív elektródtér 2,95 g tiszta ezüst súlyú *d* 0,14 mm ezüsthuzalból készített [11] és aktivált [6], [7] ezüstelektródot tartalmaz. Az ezüstelektród általagos porozitása redukált állapotban:

$$P_{red} = \frac{1 - \gamma_{\text{látszólagos}}}{\gamma_{\text{valóságos}}} = \frac{1 - 3{,}7}{10{,}4} = 0{,}645 = 64{,}5\% \,,$$

ahol:

$$\gamma_{\text{látszólagos}} = \frac{2{,}95}{0{,}8} = 3{,}7 \text{ g/cm}^3 \,,$$

$$\gamma_{\text{valóságos}} = 10{,}4 \text{ g/cm}^3$$

az ezüstanyag fajsúlya.

Meg kell jegyezni, hogy az átlagos porozitás az elektród beszerelési állapotában, amikor a 2,95 g összezüstsúlyból kb. 56% AgO állapotban oxidálva van kb. 57%-ra csökken. Ebben az állapotban az ezüstelektródból visszanyerhető töltésmennyiség kb. 780 mAó. A másodlagos depolarizátor beépítése révén lehetővé vált, hogy az ezüstelektród túlkapacitáltságát a cinkelektródhoz képest meg lehetett szüntetni. Így lehetővé vált a huzalelektród súlyának csökkentése, ami a kutatási munkával párhuzamosan folytatott, az ezüst fajlagos kihasználásának növelésére irányuló kísérletekkel [6], [7] együtt 2,05 g súlyú ezüsthuzal elektród alkalmazását tette lehetővé 650 mAó átlagos kapacitással (kb. 65%-os kihasználás). A huzalelektród súlyának csökkentése lehetővé tette, hogy gyakorlatilag változatlan porozitás mellett azt kisebb térfogatra lehessen összesajtolni és ilyen módon helyet biztosítani a másodlagos depolarizátor számára.

A másodlagos depolarizátor szükséges mennyiségeinek meghatározásánál a korábbi kutatómunkánál már részletesen vizsgált [1], [2] szempontokat kellett szem előtt tartani, nevezetesen azt, hogy a beépített CdO hatóanyag olyan mennyiségű legyen, hogy az $3 \div 4$ órán keresztül képes legyen biztosítani a 0,4 V körüli feszültséglépcsőt, és hogy a vezetői adalékként alkalmazott aktív ezüstpor mennyisége annyi legyen, hogy a kellő vezetőképesség biztosítása mellett, mint Ag_2O-ban is tölthető ezüst, egészítse ki a huzalelektród Ag_2O fázisát a cella névleges kapacitásáig.

A cella névleges kapacitásának 1/3 részét (100 mAó) minimálisan biztosító CdO mennyiség, a CdO redukciója során általában ismert kb. 75% elektrokémiai hatásfok figyelembevételével:

$$\frac{0{,}100}{0{,}75 \cdot 0{,}418} = 0{,}32 \text{ g},$$

ahol a 0,418 Aó/g a CdO elméleti egyenértéke. Biztonsági okokból a CdO mennyiséget felfelé kerekítve 0,35 g-ra választottuk, ami gyakorlatilag 110 mAó-nak felel meg.

A korábbi munka során már igazolódott, hogy a CdO-hoz 30 : 70%—40 : 60% arányban vezetői adalékanyagként aktív ezüstport keverve, az a szükséges vezetőképességet már biztosítja. Az adott esetben tehát az volt a feladat, hogy fenti szóbajöhető arányok között olyan mennyiségű aktív ezüstpor kerüljön alkalmazásra, hogy azzal a töltések során a huzalelektród Ag_2O fázisa a névleges kapacitásra egészüljön ki. Korábbi vizsgálataink, amelyeket ezüsthuzal elektródokkal végeztünk, az irodalmi adatokkal jól megegyezően azt mutatták, hogy az elektródba, annak teljes kapacitása kb. 1/3 része, pontosabban átlagosan 31,4%-a volt az első ciklusok során Ag_2O fázisban betölthető. Az ezüsthuzal elektród teljes kapacitására vonatkoztatott 31,4% átlagosan

$$0{,}314 \cdot 650 = 205 \text{ mAó}$$

Ag_2O fázisban visszatölthető kapacitást jelent a 650 mAó teljes kapacitású huzalelektródra vonatkoztatva.

Az aktív ezüstporba ezüst (I) oxid fázisban betölthető kapacitás kismértékben ugyan függvénye az Ag:CdO aránynak, de a szóbajöhető arányok környékén 140 mAó/g körüli érték.

Ismét csak a biztonság irányába kerekítve 0,75 g ezüstport választottunk, amely elméletileg

$$0{,}75 \cdot 140 = 105 \text{ mAó}$$

Ag_2O fázist biztosít. Így elméletileg az összes ezüst (I) fázisban betölthető kapacitás:

$$Ag_2O = 205 + 105 = 310 \text{ mAó}.$$

Az így kialakult porkeverék 68% ezüstöt és 32% CdO-t tartalmaz. Ennek a porkeveréknek számított fajsúlya: 9,5 g/cm³. Ezzel a fajsúllyal az adott térfogatba (2b) összesajtolt második depolarizátor porozitása:

$$P_{\text{másodl.}} = 1 - \frac{\gamma_{\text{látsz.}}}{\gamma_{\text{val.}}} = 1 - \frac{4{,}15}{9{,}5} = 0{,}565 = 56{,}5\%,$$

ahol

$$\gamma_{\text{látszólagos}} = \frac{G_{\text{másodl.}}}{V_{\text{másodl.}}} = \frac{1{,}1}{0{,}265} = 4{,}15 \text{ g/cm}^3.$$

Látható, hogy a másodlagos depolarizátor porozitása gyakorlatilag megegyezik az oxidált huzalelektród porozitásával. Ezzel a pozitív elektródtér átlagos porozitása is változatlan maradt az eredeti konstrukcióhoz képest.

A módosított konstrukcióhoz azonban a cink elektród hatóanyag tartalmát is módosítani, mégpedig növelni kellett olyan mértékben, hogy az elektród fémcink tartalma lehetővé tegye mind az oxidált formába épített ezüsthuzal elektród, mind a CdO hatóanyag teljes redukcióját. Az alkalmazásra kerülő cinkelektród [12] redukciója során annak elektrokémiai hatásfoka a korábbi vizsgálataink alapján min. 95%, így

$$\frac{650 + 110}{0{,}95} 1{,}22 = 975 \text{ mg}$$

átlagos cinktartalmú cinkelektródot valósítottunk meg. Az összes cinkmennyiségnek a cellák gyártását követő úgynevezett „nullkisütése" során, amikor csak az oxidált állapotban beépített ezüsthuzalelektród kapacitását sütik ki, csak mintegy 85%-a alakul át $Zn(OH)_2$-vé, 15%-a fémcink formájában marad meg. Ez a megmaradó fémcink a következő töltés során, mint visszaválási mag szerepel és a tapasztalatok szerint javítja a cinkelektród működését.

Az előzőekben ismertetett konstrukció alapján előállított kisérleti cellák már a „nullkisütést" követő — még a gyártási folyamat szerves részét képező első — formáló töltés során 280÷290 mAó töltést vettek fel Ag_2O fázisban, ami egyes celláknál az ezt követő néhány ciklusban 300÷310 mAó-ra növekedett, a további ciklusok során azonban valamennyi cellánál jelentős csökkenés következett be az Ag_2O fázisban betölthető töltésmennyiséget illetően (2. ábra „b" vonal). A kísérlet egyértelműen igazolta, hogy ésszerűen kialakított konstrukcióval el lehet érni, hogy kettős depolarizátoros celláknál gyakorlatilag a névleges kapacitás ezüst (I) oxid fázisban legyen betölthető, de ugyanezen cellák azt is bizonyították, hogy a ciklusok során, a 3. fejezetben részletezett ezüststruktúra változás következtében szükségszerűen csökkent az Ag_2O fázisban betölthető töltésmennyiség.

Viszont az ólomadaléknak a 3. fejezetben ismertetett az ezüststruktúrára gyakorolt hatása kézenfekvővé tette, hogy a ciklusok során bekövetkező előnytelen struktúraváltozást megfelelően megválasztott ólomadalék hatásával kíséreljük meg úgy kompenzálni, hogy a kezdeti kedvező Ag_2O fázis gyakorlatilag a cella teljes élettartama során fenntartható legyen. A szükséges ólomadalék mennyiségének meghatározása és az ólomadalék pozitív elektródba való bevitelének módja már a 3. fejezetben közreadottakból ismert.

Miután a szóbajöhető ólomadalék mennyiségek esetén az ólom az elektrolitban biztosan oldható és struktúra-befolyásoló hatását az oldatból az ezüst felületén kiváló ólom okozza, technológiai szempontból célszerű volt a szükséges mennyiségű ólmot ólomoxid (PbO) formában a másodlagos depolarizátor porkeverékéhez adagolni és ezzel homogén módon elkeverni. A mennyiség meghatározása a huzalelektród aktivált részének és a másodlagos depolarizátor aktív ezüstjének arányában történt, és a mennyiség gyakorlatilag az összes aktív ezüst 0,8%-a. Az így adalékolt cellák „nullkisütést" követő formáló ciklusánál érdekességként azt tapasztaltuk, hogy az adalék nélkül készített cellákhoz mérten az Ag_2O fázisba betölthető töltésmennyiség csökkent (2. ábra) és az ezt követő ciklusok során is lassabban érték el a névleges kapacitásnak megfelelő Ag_2O fázist, de a későbbi ciklusok során betölthető Ag_2O fázis a névleges kapacitás körüli értéken stabilizálódott, és nem következett be az a lényeges csökkenés, amely a korábbi adalék nélküli celláknál már 20÷30 ciklus után csak 200÷220 mAó közötti Ag_2O fázisú töltésmennyiséget tett lehetővé.

Ennek igazolására szolgáljon a III. táblázat, mely összehasonlításban tartalmazza a hagyományos, kettős depolarizátoros és ólomadalékos cellák Ag_2O fázisban betölthető kapacitását a ciklusok függvényében. A táblázatból jól látható, hogy a hagyományos akkumulátorokban az Ag_2O kihasználása amiatt igen alacsony, mert a hermetikus lezárás eredményessége érdekében a cellát ezüstben kellett nagyobb kapacitásúra méretezni.

Lényegesen jobb a kihasználás a kettős depolarizátorral szerelt celláknál, mivel itt a negatív (cink) elektród kapacitása meghaladja az ezüstét, ily

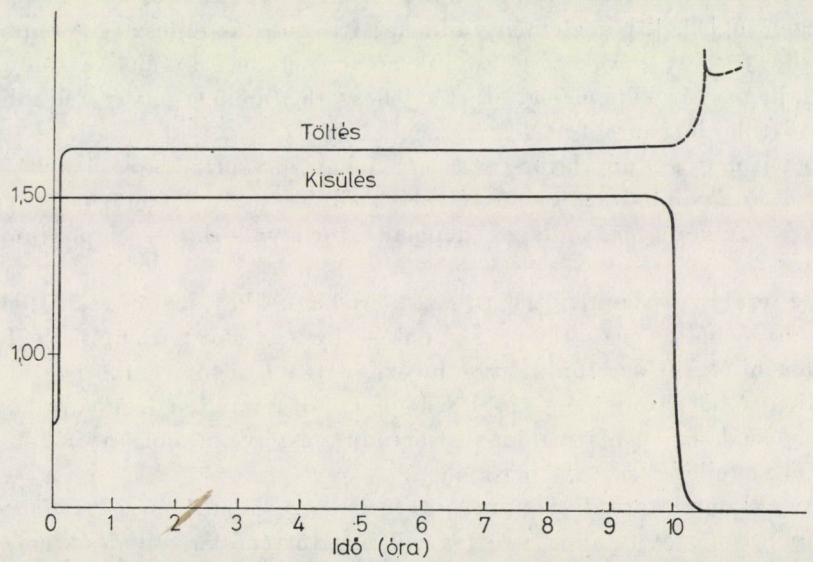
III. Táblázat

Az Ag_2O fázisban betölthető töltésmennyiség hagyományos, kettős depolarizátoros és ólomadalékos B300 tip. akkumulátorokba, a ciklusok függvényében

Ciklus	Hagyományos	Kettős depolarizátoros	Ólomadalékos
1	130	290	280
10	125	247	273
20	125	229	293
30	115	234	281
40	105	235	304
50	100	192	290
60	80	205	293
70		204	290
80		195	305
90		193	304
100		194	290
130			291
150			300

módon az ezüst mindig teljesen kisül, töltéskor pedig a teljes Ag_2O fázis működik. Ez önmagában jelentős többletkapacitást eredményezett az Ag_2O fázisban. Az agglomerálódás okozta kapacitáscsökkenés azonban itt is jelentős.

Egészen más a helyzet az ólomadalékot is tartalmazó akkumulátoroknál, mivel itt a kezdeti néhány ciklusban kialakult nagy Ag_2O fázis az egész élettartam során állandó marad. A 4. ábra mutatja az ezüst (I) oxid fázisban működő akkumulátor töltési és kisütési jelleggörbéit.



4. ábra. **Az ólomadalékos akkumulátorok karakterisztikái**

3. Az ezüst (I) oxid fázisban működő ezüst-cink akkumulátorok villamos, élettartam és tárolási tulajdonságai

Az előző fejezetben részletesen ismertetett kutatási-fejlesztési munka eredményeként ma már a magyar Medicor Művek és angliai székhelyű Medicharge közös magyar—angol vállalat a légmentesen lezárt miniatűr gombakkumulátorok egész sorát gyártja.

A IV. sz. táblázat tájékoztatásul közli ezt a sort, a legfontosabb villamos és mechanikai adatokkal.

IV. Táblázat

A Medicor Művekben gyártott hermetikus ezüst-cink gombakkumulátorcsalád

Típus	Névl. fesz. V	Névleges kapac. mAó	Átmérő mm	Magasság mm
B300	1,5	300	25,0	6,4
B200	1,5	200	20,0	7,0
B150	1,5	150	20,0	6,3
B80	1,5	80	15,5	7,0
B50	1,5	50	11,5	6,4

A gombakkumulátor cellákból a gyártó vállalatok különféle — nagyobb feszültségű és nagyobb kapacitású — akkumulátortelepeket is összeépítenek. Figyelemmel ezek nagy választékára, részletes ismertetésüktől ezen a helyen eltekintünk.

A légmentesen lezárt miniatűr ezüst-cink gombakkumulátorok a jelen és ezt megelőző [1], [2] közleményünkben leírt kutatás-fejlesztési eredmények gyártásba történt bevezetése következtében eredeti kiváló tulajdonságaik (nagy fajlagos tárolóképesség, starter jelleg stb.) mellett egy sor újabb rendkívüli jó tulajdonságra tettek szert.

A bármely akkumulátor-rendszerre jellemző a sorba kapcsolt cellák révén kialakított nagyobb feszültségű telepek kisütése során létrejövő — átpolarizálódás veszélyét a másodlagos depolarizátor gyakorlati szempontból megszüntette.

Ez természetesen nem jelenti azt, hogy ha — akár szándékosságból, akár feledékenységből — egy telepet, annak teljes (az előírt kisütési végfeszültségig történő) kisütése után nagyon hosszú ideig a kisütő áramkörben hagyják, ne kelljen a telep rongálódásával számolni. Mint minden légmentesen lezárt áramforrásnál az átpolarizálódás elsőrendű veszélye a meg nem engedhető mértékű gázfejlődés a cella belsejében.

Az akkumulátornak tisztán Ag_2O fázisban való működése a 2. fejezetben részletesen ismertetett okok miatt a cellában történő gázfejlődés szempontjából is rendkívül jelentős. Miután a kutatás alapján megvalósult akkumulá-

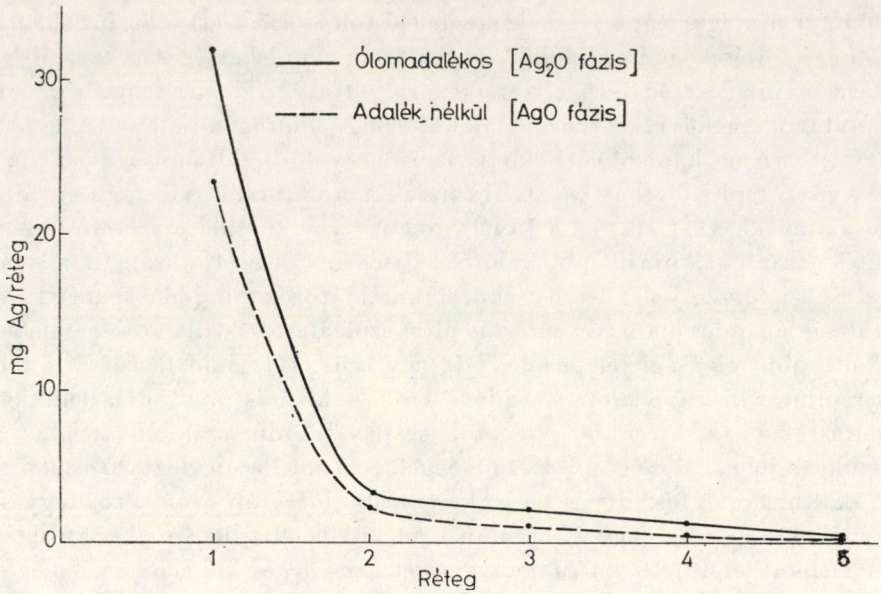
torokba a névleges kapacitásnak megfelelő töltés ezüst (I) oxid fázisban tölthető be, a töltések során gázfejlődés egyáltalán nem lehetséges az ezüstelektród térben, a cinkelektród térben is csak korlátolt a gázfejlődés lehetősége a cink higanytartalma következtében kialakuló nagy hidrogén túlfeszültség miatt.

A névleges kapacitásnak Ag_2O fázisban való betölthetősége egy sor villamos üzemtani előnyt is jelent. Ha az akkumulátor töltése során egyáltalán nem alakul ki ezüst (II) oxid (AgO), akkor az akkumulátor a töltést követő kisütés során gyakorlatilag állandó feszültségen sül ki (4. ábra). Ez a sajátossága csak az ilyen jellegű ezüst-cink akkumulátorok tulajdonsága. A kapocsfeszültség állandósága az áramforrás által szolgáltatott villamos energia egyik legfontosabb minőségi jellemzője. Míg egy ezüst (II) oxid fázisban is töltött akkumulátor kisütése során — különösen ha a kisütés rövid időn belül követi a töltést — a kisütési idő első szakaszában mindig számolni kell az AgO vegyületre jellemző nagyobb feszültséggel. Ezt a cella névleges feszültségénél 20%-kal nagyobb feszültséget a legkorszerűbb integrált áramkörös fogyasztókészülékek nehezen, vagy egyáltalán nem viselik el. Miután sikerült az ezüst (I) fázisban betölthető töltés mennyiséget a névleges kapacitásnak megfelelő töltésmennyiség környezetébe beállítani, és a cellák ezt a tulajdonságukat gyakorlatilag teljes élettartamuk során megtartják, lehetővé vált olyan töltőkészülékek kialakítása, amelyekbe beépített egyszerű automatika érzékeli a cella kapcsofeszültségének az ezüst (I) oxid és ezüst (II) oxid fázis határán bekövetkező kb. 0,3 V-os ugrást és ekkor a töltőáramot megszünteti. Miután a két fázis határa gyakorlatilag a cella névleges kapacitása, lehetséges az akkumulátor szempontjából legkedvezőbb üzemmódot ilyen fajta töltő alkalmazása esetén úgy beállítani, hogy az akkumulátort a kisütési üzemben (fogyasztókészülékbe helyezve mint áramforrás) a felhasználási körülményektől függően használják és függetlenül attól, hogy mekkora töltésmennyiség került kisütésre, ismét töltésre kapcsolják.

Ekkor a töltő ismét feltölti az akkumulátort névleges kapacitásra és az a következő kitűzési periódusra ilyen állapotban áll rendelkezésre. Az ilyen üzemmód a fogyasztókészülékhez helyesen megválasztott akkumulátor esetén az optimális üzemmódot jelenti.

Kissé részletesebben kell foglalkozni a ciklusélettartamban elért eredmények kérdésével. Eddig a legjobb minőségű ezüst-cink akkumulátorok [3] ciklusélettartama is $60 \div 100$ ciklusra volt tehető, teljes töltést és kisütést feltételezve. Az összes ismert irodalmi adat és szerzők saját tapasztalata is az, hogy az ezüst-cink akkumulátorok tönkremenetelének legjellegzetesebb oka az alkalmazott szeparátor tönkremenetele. Ezért az élettartam eredmények ismertetése előtt foglalkozni kell az ezüst-cink akkumulátorok szeparációjának problémáival általában is.

Mint már korábban jeleztük [1], [2], azt tapasztaltuk, hogy a különféle ezüst oxidációs fokozatokra feltöltött akkumulátorok szeparátorának visel-



5. ábra. Ezüstbehatolás a szeparátorrétegekbe 140 ciklus után

kedése lényegesen eltérő képet mutat. Számtalan irodalmi tanulmányból, valamint sok hazai előkísérletből, megállapíthattuk, hogy a jelenleg ismert fóliák közül legalkalmasabbak és a legnagyobb mennyiségben azok használtak, amelyek lágyítómentes cellofánok, acetátcellulózfóliák és bennük a cellulózlánc a leghosszabb, vagyis legnagyobb a polimerizációs fokuk.

A Medicor Művek lágyítómentes cellofánt használ. Ennek oka az, hogy számtalan kísérlet során beigazolódott, bármely egyéb, különösen műanyagbázisú fóliák használata — azok tömörsége, kis porozitásának lényeges, meg nem engedhető növekedéséhez vezetett anélkül, hogy az élettartamban számottevő az előbbi hátrányt kompenzáló javulás következett volna be.

Ezek után kézenfekvőnek látszott feltételezni, hogy amennyiben az akkumulátor üzemmódjában egy állandó alacsonyabb oxidációs fokú ezüst biztosítható, ennek kedvező hatásúnak kell lennie a szeparátorok állékonyságára is és ezen keresztül az újfajta akkumulátoroktól jelentős élettartamnövekedés várható. Ez a feltevésünk az alábbiak szerint realizálódott.

Hosszú idő óta a szeparátorok meghibásodási mérőszámául a bizonyos ciklusszám után a szeparátorrétegekben redukálódott ezüst mg-jait alkalmazzuk rétegenkénti analízis útján. A mérőszám realitását két dolog támasztja alá:

1. A szeparátorban redukált állapotban jelentkező ezüst a szeparátor anyagait oxidálva a cellulózmolekula szaccharóz gyűrűit felnyitja és láncszakadásokat, depolimerizációt idéz elő.

V. Táblázat

Szeparátorrétegek ezüsttartalma a tárolási idő függvényében (mg. Ag/réteg)

Tárolási idő	Rétegek					Összesen:
	1	2	3	4	5	
Friss cellák	0,06	0,01	∅	∅	∅	0,07
2 hónap után	2,50	0,20	0,20	0,01	∅	2,72
4 hónap után	9,00	0,50	0,15	0,05	0,01	9,71
6 hónap után	9,40	0,37	0,09	0,05	0,01	0,01
9 hónap után	8,10	1,90	0,14	0,03	0,01	10,17
150 ciklust teljesített, zárás után ciklusvizsgált cellák	15,70		2,15	0,14	0,05	18,04

2. Az ezüstelektródtól távolodva a többi rétegben megjelenve fokozza az átvezetési zárlatok (lassú zárlatok) lehetőségét, mivel az ezüsttel telítődött szeparátor fémes vezetőként szerepel, szeparáló hatását elveszti.

A vizsgálatokat a különböző élettartamot elért akkumulátorok és különböző ideig tárolt akkumulátorok felbontásával és szeparátorrétegeik analízisével végeztük (5. ábra). A diagramból látható, hogy az Ag_2O fázisban működtetett akkumulátorokban a szeparátor minden rétege nagyobb ezüstmennyiséget tartalmaz, mint azok, amelyek az AgO fázisban is töltve voltak. Mégis a cellák felbontása során beigazolódott, hogy ezek a szeparátorok mechanikailag stabilabbak, nem roncsolódtak és ami a legfontosabb, nagyobb élettartamot teljesítettek.

Általában a tönkremenetel szempontjából kedvező „átvezetésessé válás"-t idézték elő gázfejlődés és a cella deformálódása nélkül, általában 120–150 ciklus környezetében.

A tárolási vizsgálatok során 2, 4, 6, 9 hónap tárolás után bontottunk fel akkumulátorokat, melyek szeparátoraiban talált ezüsttartalmakat az V. táblázat tartalmazza. Ezekből az adatokból egyrészt az állapítható meg, hogy a tárolás során az ezüstbehatolás lényegesen kisebb, mint a működés során, másrészt pedig az, hogy az egyes rétegek ezüsttel való „telítődése" időfolyamat és a második réteg károsodása csak az első réteg telítődése után következik be. Az első rétegben való jelentős ezüstfeldúsulás a $2 \div 4$ hónap közötti, míg a második rétegben való feldúsulás a $6 \div 9$ hónap közötti tárolási időszaban következik be.

A szeparátorok vizsgálatával tapasztaltakat tehát úgy összegezhetjük, hogy a magasabb oxidációs fokú ezüstoxid (AgO) kiküszöbölésével kismértékben ugyan nőtt az ezüstmigráció veszélye (ez az Ag_2O nagyságrendekkel jobb

VI. Táblázat

Teljesített ciklus tönkremenetelig

Friss cellák	156
2 hónap tárolás után	159
4 hónap tárolás után	147
6 hónap tárolás után	162
9 hónap tárolás után	151

Megjegyzés: A ciklusszámok minden tárolási fázisban 6—6 db B300 DP tip. cella átlagértékei.

kolloid oldhatóságának a következménye lehet) ugyanakkor lényegesen csökkent a szeparátorok oxidatív károsodása, ami egyértelműen jelentős élettartamnövekedést eredményezett, nyilvánvalóan azért, mert az Ag_2O roncsoló hatása a szeparátorra lényegesen kisebb, mint az AgO hatása.

Az Ag_2O fázisban tölthető akkumulátorok tárolási paraméretei igen kedvezőek. A teljesített ciklusszámok tekintetében frissen vizsgált és 9 hónapig tárolt akkumulátorok élettartam eredményei nem különböznek számottevően egymástól (VI. táblázat).

6. Összefoglalás

Az ismertetésre került kutatási-fejlesztési munka eredményeként sikerült olyan légmentesen lezárt miniatűr (gomb) ezüst-cink akkumulátor típussort kialaktíani, amely eddig világszínvonalt jelentő [3] ezüst-cink akkumulátorokhoz mérten is egy sor jelentős fejlődést mutat.

A fajlagos tárolóképesség nagyságának érzékeltetésére szolgáljon az alábbi kis összehasonlítás: a Yardney amerikai cég LR 2 típusú 1,5 V 2 Aó kapacitású — nem légmentesen lezárt — műanyagházas cellájának névleges méretei a kivezető szorítókkal együtt: $15 \times 43{,}5 \times 64$ mm. Ezekkel a méretekkel a befoglaló térfogat 41,66 cm^3. Az egy cm^3-re vonatkoztatott fajlagos névleges töltéstárolóképesség pedig:

$$\frac{2000}{41{,}66} = 48 \text{ mAó/cm}^3$$

(Kivezető szorítók nélkül a méretek: $15 \times 43 \times 55$ mm, a térfogat: 35,89 cm^3 és a fajlagos tárolóképesség: 56 mAó/cm^3) A Medicor gyártmányú B 300 DP típusú, 1,5 V, 0,3 Aó kapacitású gombakkumulátor névleges méretei $\varnothing$ $25 \times 6{,}4$ mm (befoglaló méretek). Az ennek megfelelő térfogat: 3,14 cm^3. Az egy cm^3-re vonatkoztatott fajlagos névleges tárolóképesség:

$$\frac{300}{3{,}14} = 95{,}5 \text{ mAó/cm}^3 .$$

A gyakorlatilag kétszeres fajlagos tárolóképesség különösen figyelemre méltó ha meggondoljuk, hogy egy 0,3 Aó kapacitású akkumulátor belső működő térfogatához képest a tokozat aránya feltétlenül nagyobb, mint egy 2 Aó kapacitású akkumulátornál. A légmentes lezárásnak az a kritériuma, ami szerint sem a töltések, sem a kisütések során gázfejlődés nem jöhet létre, a hatóanyagok kisebb mértékű kihasználását indokolják a nyitott kivitelű akkumulátorokhoz mérten. E két tény tükrében még nagyobb jelentőségűnek látszik a miniatűr akkumulátornál elért nagy fajlagos tárolóképesség.

A légmentes lezárás egy sor felhasználási területen különlegesen nagy előnyt biztosít. A légmentes lezárás azonban azt is megköveteli, hogy a beépített aktív anyagok már „felformált" állapotban kerüljenek beépítésre és az akkumulátorba a működéshez szükséges elektrolit mennyiség is már a gyártás során belekerüljön. Ez viszont azzal az előnnyel jár, hogy ha egy ilyen akkumulátort használatba kívánunk venni, nem kell az elektrolittal való feltöltés és formáló ciklusokkal járó sok kellemetlen, kényelmetlen munkát elvégezni, hanem az akkumulátor a kicsomagolás után azonnal használható. Mivel a gyártó az akkumulátorokat feltöltve szállítja, azok használata rögtön a fogyasztó készülékbe helyezve kisütéssel (áramtermelő folyamattal) kezdődik.

A másodlagos depolarizátor gyakorlatilag megoldja soros telepek esetén az átpolarizálódás problémáját, ami a kezelési tevékenységet nagymértékben egyszerűsíti. Az ezüst (I) oxid fázisnak gyakorlatilag a névleges kapacitásig való kiterjesztése különösen nagy előnyökkel jár:

a) megakadályozza, hogy a névleges kapacitásig való töltés esetén az ezüstelektródon gázfejlődés *egyáltalán* létrejöhessen.

b) az ezüst (II) oxid kialakulásának teljes elmaradása következtében csökken a szeparátor igénybevétele, ami a ciklusszám növekedésén túl a tárolhatóság idejét is megnöveli.

c) lehetővé teszi, olyan egyszerű automata töltőkészülékek alkalmazását, amelyek segítségével az akkumulátorokat ill. telepeket abszolút túltöltés biztosan lehet közel névleges kapacitásukig feltölteni, függetlenül attól, hogy a töltést megelőzően, azok milyen töltöttségi állapotban voltak.

A sorozatgyártás megindulása óta rendkívül nagy darabszámú akkumulátoron elvégzett különféle vizsgálatok alapján szerzők meggyőződése, hogy megfelelő hatékony további kutatás megteremtheti az elért jelenlegi előnyökön túl azoknak a kutatók elé már régen kitűzött céloknak a megvalósítását, ami röviden az ezüst-cink akkumulátorok ciklusélettartamának több száz ciklusig való kiterjesztését jelenti.

Ehhez azonban rendkívül kiterjedt és szívós munkát végezni kell a szeparáció, és a cinkelektród reverzibilitásának javítása vonatkozásában. Ezeken a területeken sok helyütt folyik jelenleg is kutatómunka, de ezek hatékonysága végül is kizárólag a ciklusélettartam jelentős emelése révén lesz lemérhető.

IRODALOM

1. HAJDU—dr. ZAHORÁN: Újabb kutatási eredmények légmentesen lezárt miniatűr ezüst-cink akkumulátorok terén. Műszaki Tudomány 1972. 45. 3—4.
2. HAJDU—dr. ZAHORÁN: Recent Research Results in the Field of Hermetically Sealed Miniature Zinc-Silver Storage Batteries. Acta Technica 1972. 73. 1—2.
3. Service and Operating Instructions for the Yardney Silvercel Yardney Electric Corp. (N. Y. 1970).
4. A. TVARUSKO: The Decomposition of AgO in Alkaline Solution Journ. of the El. Chem. Soc. 116. No. 8. 1070 08 1969.
5. L. GAINES: Secondary Silver-Zinc Battery Technology. Journ. of the El. Chem. Soc. 116. No. 2. 61 02 1969.
6. HEGYESSY: Akkumulátorok ezüstelektródjának aktíválása I. Magyar Kémikusok Lapja 1970. 3.
7. HEGYESSY: Akkumulátorok ezüstelektródjának aktíválása II. Magyar Kémikusok Lapja 1970.
8. T. P. DIRKSE: The Cathodic Behavior of AgO in Alkaline Solution. Journ. of the El. Chem. Soc. 9. 1969.
9. P. RUETSCHI: 3.085. 186 sz. USA szabadalom.
10. 905.603. sz. angol szabadalom.
11. HA 1386 és 1459. sz. magyar szabadalom.
12. HA 662 sz. magyar szabadalom.

Hermetically Sealed Silver-Zinc Storage Battery Operating in the Silver(I) Oxide (Ag_2O) Phase. The paper briefly reviews the characteristics of the hermetically sealed miniature silver-zinc storage battery, enhancing the problems which are due in the first order to the hermetical sealing. It deals in detail with the problem of gas development in hermetically sealed silver-zinc batteries, pointing out the factors which permitit to influence the amount of gas formation. It analyzes the influence of the silver structure on the size of the Ag_2O (silver monoxide) phase developing on charging, then discusses the design and experimental work which has resulted in hermetically sealed silver-zinc storage batteries operating purely in the Ag_2O phase. The paper gives information on the electrical, life and storage characteristics of such batteries. Finally it compares them with other storage batteries, insisting on the direction in which further research and development work, based on the very positive results obtained so far, is needed.

Hermetisch verschlossener, in der Silber(I)-oxyd (Ag_2O) Phase arbeitender Silber-Zink-Akkumulator. Die Arbeit faßt kurz die Eigenschaften des hermetisch verschlossenen Miniatür-Silber-Zink-Akkumulators zusammen und hebt besonders diejenigen Probleme hervor, die sich in erster Reihe aus dem luftdichten Abschluß ergeben. Eingehend werden die Fragen der Gasbildung in luftdicht verschloßenen Silber-Zink-Akkumulatoren besprochen, unter besonderer Berücksichtigung der Faktoren, die das Ausmaß der Gasbildung beeinflußen können. Weiterhin werden der Einfluß der Struktur des Silbers auf die Größe der während des Ladens sich bildenden Ag_2O (Silbermonoxyd)-Phase untersucht und die konstruktive und experimentelle Arbeit besprochen, durch die erreicht wurde, ausschließlich in der Ag_2O-Phase funktionierende, luftdicht verschloßene, Miniatür Silber-Zink-Akkumulatoren zu entwickeln. Die Verfasser informieren über die elektrischen Eigenschaften, die Lebensdauer und die Lagerfähigkeit solcher Akkumulatoren. Zum Schluß werden diese mit sonstigen Akkumulatoren verglichen, wobei hervorgehoben wird, in welcher Richtung eine weitere Forschungs- und Entwicklungstätigkeit erforderlich ist.

A SZILÁRD SZEM ÉS A LÉGBUBORÉK TAPADÁSA ALKALMÁVAL FELLÉPŐ SZABAD ENERGIACSÖKKENÉSRŐL

PETHŐ SZILVESZTER

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1972. július 20-án]

A felületi energiák és a nehézségi erők figyelembevételével a szilárd szem és a légbuborék összetapadása alkalmával fellépő szabad energiacsökkenés meghatározására olyan egyszerű összefüggések vezethetők le, amelyek segítségével néhány észrevétel tehető a határszögmérés végrehajtására ill. a flotálás technológiájára.

A légbuborék és a szilárd szem összetapadása akkor következik be, ha az összetapadás után a rendszer szabad energiája csökken. Az ún. *adhéziós munka* nagyságát sok szakkönyvben $A = E_{v1}(1 - \cos\vartheta)$ szerint írják fel, — E_{v1} a víz–levegő határréteg felületi energiája, ϑ a határszög, ezért A dimenziója erg/cm^2, — vagyis nem veszik figyelembe sem a határrétegeknek a tapadással bekövetkező változását, sem a nehézségi erő ellenében végzett munkát.

A felvetett problémához alkalmazott modell az 1., ill. az 5. ábrán található meg.

A légbuborék gömb, az összetapadás után gömbszelet. Az 1. ábrán az összetapadás a buborékhoz képest nagy szemcséhez történik, az 5. ábrán a szemcse a kisebb és hengeralakú, így a vonatkozó összefüggések sokkal egyszerűbbek lesznek.

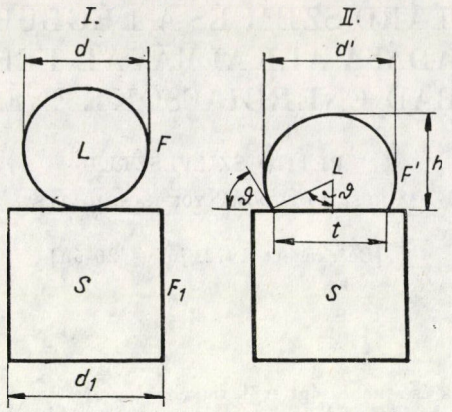
A felületi energiák összege (E_{I}) az 1. ábra I-gyel jelölt helyzetében:

$$E_{\mathrm{I}} = d^2\pi E_{VL} + F_1 E_{SV} \tag{1}$$

Itt E_{VL} a víz és levegő, E_{SV} a szilárd test és víz határrétegében jelentkező felületi energia F_1 a d_1 nagyságú ásványszem felülete, d az F felületű légbuborék átmérője. Ha az ásványszem határszöggel (ϑ) rendelkezik, akkor összetapadás után a légbuborék az 1. ábra II.-bel jelölt részén látható gömbszelet alakot veszi fel. (F' a légbuboréknak a vízzel, $t^2\pi/4$ az ásvánnyal érintkező határfelülete). Ebben a helyzetben a felületi energiák összege:

$$E_{\mathrm{II}} = F' E_{VL} + \frac{1}{4} t^2\pi E_{SL} + \left(F_1 - \frac{t^2\pi}{4}\right) E_{SV}\,. \tag{2}$$

Prof. Dr. Pethő Szilveszter, Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc, Egyetemváros.



1. ábra

(2)-ben szerepelnek F' és $t^2\pi/4$ határfelületek, amelyek a légbuborék d átmérőjével és a ϑ határszöggel a következőképpen fejezhetők ki:

$$F' = \frac{d^2\pi}{2}\left(\frac{4}{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}\right)^{2/3}(1 + \cos\vartheta)\,, \tag{3}$$

$$\frac{1}{4}t^2\pi = \frac{d^2\pi}{4}\left(\frac{4}{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}\right)^{2/3}\sin^2\vartheta\,. \tag{4}$$

A II.-vel jelölt állapotban az összetapadás után a felületi energiák összege kisebb, ezért a rendszernek a felületi energiákból adódó szabad energiacsökkenése (ΔE) (2)-nek (1)-ből való kivonása után nyerhető [(3)-nak és (4)-nek (2)-be való behelyettesítése után]:

$$\Delta E = E_{\mathrm{I}} - E_{\mathrm{II}} = d^2\pi E_{VL}\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2 + 3\cos\vartheta - \cos^2\vartheta}\right)^{2/3}(1 + \cos\vartheta)\right] +$$

$$+ \frac{d^2\pi}{4}(E_{SV} - E_{SL})\left(\frac{4}{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}\right)^{2/3}\sin^2\vartheta \tag{5}$$

Elvégezve az

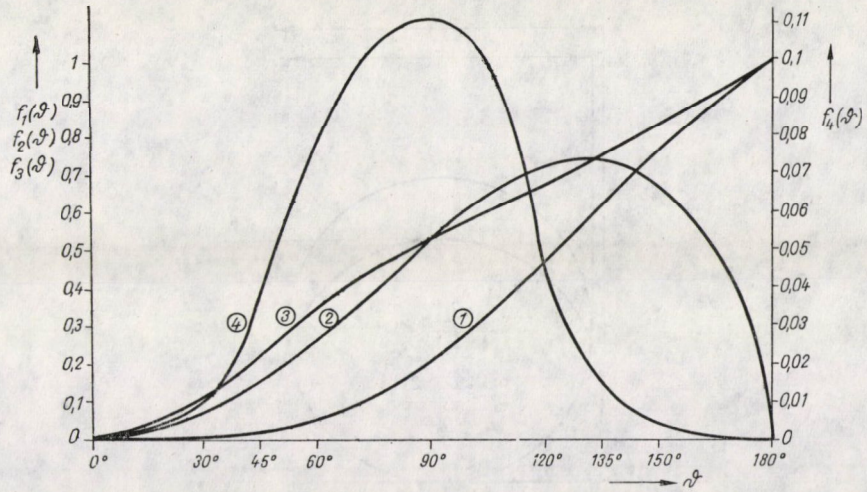
$$E_{SL} = E_{SV} + E_{VL}\cos\vartheta \tag{6}$$

behelyettesítést, a szabad energiacsökkenés

$$\Delta E = d^2\pi E_{VL}\left[1 - \left(\frac{4}{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}\right)^{2/3}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cos\vartheta - \frac{1}{4}\cos^3\vartheta\right)\right], \tag{7}$$

amelyet még tovább alakítva, az

$$\Delta E = d^2\pi E_{VL}\left[1 - \left(\frac{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}{4}\right)^{1/3}\right] = d^2\pi E_{VL} f_1(\vartheta) \tag{8}$$



2. ábra

összefüggés vezethető le. (8) szerint a légbuborék és a szilárd szem összetapadásával előálló szabad energiacsökkenés arányos a légbuborék $d^2\pi$ felszínével, a víz—levegő határrétegében jelentkező E_{v1} felületi energiával és a határszöggel a szögletes zárójelen belüli kifejezés szerint. A határszögtől függő ezen rész értéke 0°-nál, 90°-nál 0,207 és a maximum helyen $\vartheta = 180°$-nál 1; a 2. ábra (1) görbéjén szemlélhető a szögletes zárójelen belüli kifejezés értéke.

A felületi energiákból adódó szabad energiacsökkenésre [1]-ben polírozott ásványfelületet feltételezve a

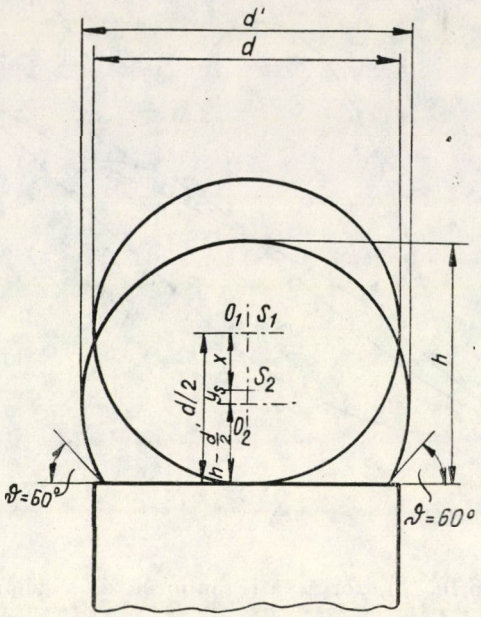
$$\Delta W = d^2\pi E_{VL}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}\right)^{2/3}(1 + \cos\vartheta) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\left[\frac{4}{(1 - \cos\vartheta)^2(2 - \cos\vartheta)}\right]^{2/3}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\right\} = d^2\pi E_{VL} f_{KI}(\vartheta) \qquad (9)$$

összefüggés vezethető le, amely az összehasonlítás érdekében némiképpen át van alakítva és ezen közleményben használatos jelölésekkel bemutatva (ΔE kivételével, melynek jelölésére az [1] szerzője ΔW-t használ). 90°-os határszögnél a (9)-ben szereplő $f_{K1}(\vartheta)$ értéke 0,209, tehát jól megegyezik a (8)-ban található $f_1(\vartheta)$-val, más határszögeknél $f_{K1}(\vartheta)$ és $f_1(\vartheta)$ között különbség tapasztalható. A (9) összefüggés több szakcikkben is megtalálható, pl. [3]-ban. (8) és (4) arányba állításával megadható a fajlagos szabad energiacsökkenés is:

$$\Delta e = \frac{\Delta E}{\frac{1}{4}t^2\pi} = \frac{4E_{VL}}{\sin^2\vartheta}\left[\left(\frac{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}{4}\right)^{2/3} - \frac{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}{4}\right] =$$

$$= Ef_2(\vartheta)\,, \qquad (10)$$



3. ábra

amely csak a víz—levegő határréteg felületi energiájának és a határszögnek függvénye, de független a légbuborék nagyságától. Az $f_2(\vartheta)$ képét a 2. ábra 2 görbéje mutatja, amelyről megállapítható, hogy a fajlagos szabad energiacsökkenésnek 135°-nál maximuma van. A különböző határszögeknél adódó $f_2(\vartheta)$ értékek nagyjából megegyeznek az [1]-ben táblázatban megadott fajlagos energiacsökkenésekkel.

A nehézségi erő az ásványszem és a légbuborék kapcsolódását relatív helyzetüktől függően elősegíti, ill. hátráltatja. A 3. ábrán felrajzolt helyzetben — a légbuborék az ásványszem felett van —, a légbuborék és az ásványszem kapcsolódása csak akkor történik meg, ha a felületi energiák különbsége egyenlő, vagy nagyobb a felhajtó erő ellenében végzendő munkánál.

Az I. helyzetben a légbuborék középpontja (O_I), és súlypontja (S_I) egybeesik; II. helyzetben y_s a gömbszelet alakot felvett légbuborék súlypontja (S_{II}) és középpontja (O_{II}) közötti távolság. A légbuborék felhajtó ereje ellenében végzett munka úthossza l, a légbuborék két helyzete súlypontjának távolsága. Az l távolság a 3. ábra jelöléseivel a következőképpen írható fel:

$$l = \frac{d}{2} - \left(h - \frac{d'}{2} + y_s\right) = \frac{d}{2} - \left[h - \frac{d'}{2} + \frac{3}{4}\,\frac{(d'-h)^2}{\frac{3}{2}d' - h}\right]. \qquad (11)$$

A d' és h értékek a légbuborék nagyságának és a határszögnek figyelembevételével a következőképpen határozhatók meg:

$$d' = d\left(\frac{4}{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}\right)^{1/3} \tag{12}$$

$$h = \frac{d}{2}\left(\frac{4}{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}\right)^{1/3}(1 + \cos\vartheta)\,. \tag{13}$$

A (12) és (13) összefüggés figyelembevételével és a szükséges egyszerűsítések elvégzésével az l távolság:

$$l = \frac{d}{2}\left[1 - \left(\frac{4}{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}\right)^{1/3}\frac{3 + \cos\vartheta\,(2 - \cos\vartheta)}{4(2 - \cos\vartheta)}\right] = \frac{d}{2}f_3(\vartheta)\,. \tag{14}$$

A szögletes zárójelen belüli kifejezés változását a határszög függvényében a 2. ábra 3 görbéje mutatja.

A légbuborék felhajtó erejével szemben végzett munka

$$A = \frac{d^3\pi}{6}\gamma' g l = \frac{d^4\pi}{12}\gamma' g f_3(\vartheta) \tag{15}$$

erg (γ' a zagy fajsúlya)

A felhajtó erő ellenében végzett munka felületegységre jutó része (15) és (4) arányba állításával határozható meg:

$$a = d^2\gamma' g\,\frac{1}{3\sin^2\vartheta}\left[\left(\frac{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}{4}\right)^{2/3} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}{4}\right)^{1/3}\frac{3 + \cos\vartheta(2 - \cos\vartheta)}{4(2 - \cos\vartheta)}\right] = d^2\gamma' g f_4(\vartheta)\,. \tag{16}$$

A (16) szerinti fajlagos munka tehát arányos a buborékátmérő négyzetével, a közeg γ' fajsúlyával és a határszöggel $f_4(\vartheta)$ szerint, amelynek képe a 2. ábra 4 jelű görbéje.

A rendszer összes szabad energiájának csökkenése ($\Sigma\Delta E$) a felületi energiák különbsége és a nehézségi erőtér jelenlétének [tehát a (8) és (15) egyenletek] figyelembevételével, $\pi E_{VL} = 230$ és $\pi\gamma' g/12 = 290$ behelyettesítésével:

$$\Sigma\Delta E = 230\,d^2\left[1 - \left(\frac{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}{4}\right)^{1/3}\right] \mp$$

$$\mp\, 290\,d^4\left[1 - \left(\frac{4}{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}\right)^{1/3}\frac{3 + \cos\vartheta(2 - \cos\vartheta)}{4(2 - \cos\vartheta)}\right] \tag{17}$$

Ha a légbuborék a szilárd szem felett van, mint ahogyan a 3. ábrán is látható, a negatív előjel érvényes; fordított helyzetben a nehézségi erő a szilárd szem és a légbuborék kapcsolódását elősegíti, a (17) egyenletben a pozitív előjel érvényes.

Ha a (17) egyenletet 0-val tesszük egyenlővé és csak a negatív előjelet vesszük figyelembe, akkor

$$d_{E=0} = \left(\frac{230 f_1(\vartheta)}{290 f_3(\vartheta)}\right)^{1/2} = 0{,}892 \left(\frac{f_1(\vartheta)}{f_3(\vartheta)}\right)^{1/2} = 0{,}892 f_5(\vartheta) \tag{18}$$

szerint számítható az a buborékátmérő, amelynél nagyobb légbuborék esetén nincsen tapadás. A maximális szabad energiacsökkenéshez tartozó buborékátmérő a

$$\frac{\partial \Sigma \Delta E}{\partial d} = 0 = 460\, d f_1(\vartheta) - 1160\, d^3 f_3(\vartheta) \tag{19}$$

egyenletből számítható:

$$d_{E\max} = \left(\frac{(460 f_1(\vartheta)}{1160 f_3(\vartheta)}\right)^{1/2} = 0{,}630 f_5(\vartheta)\,. \tag{20}$$

A maximális szabad energiacsökkenés

$$\Sigma \Delta E_{\max} = \frac{1}{4} \frac{230^2}{290} \frac{f_1^2(\vartheta)}{f_4(\vartheta)} = 45{,}6 f_6(\vartheta)\,. \tag{21}$$

A 4. ábrán megtalálható $f_5(\vartheta)$ és $f_6(\vartheta)$ képe (1-gyel és 2-vel jelölve), továbbá a (18) és (20) egyenletek szerinti $d_{E=0}$ és $d_{E\,\max}$ buborékátmérők értékeinek változása a határszög függvényében (3-mal és 4-gyel jelölve).

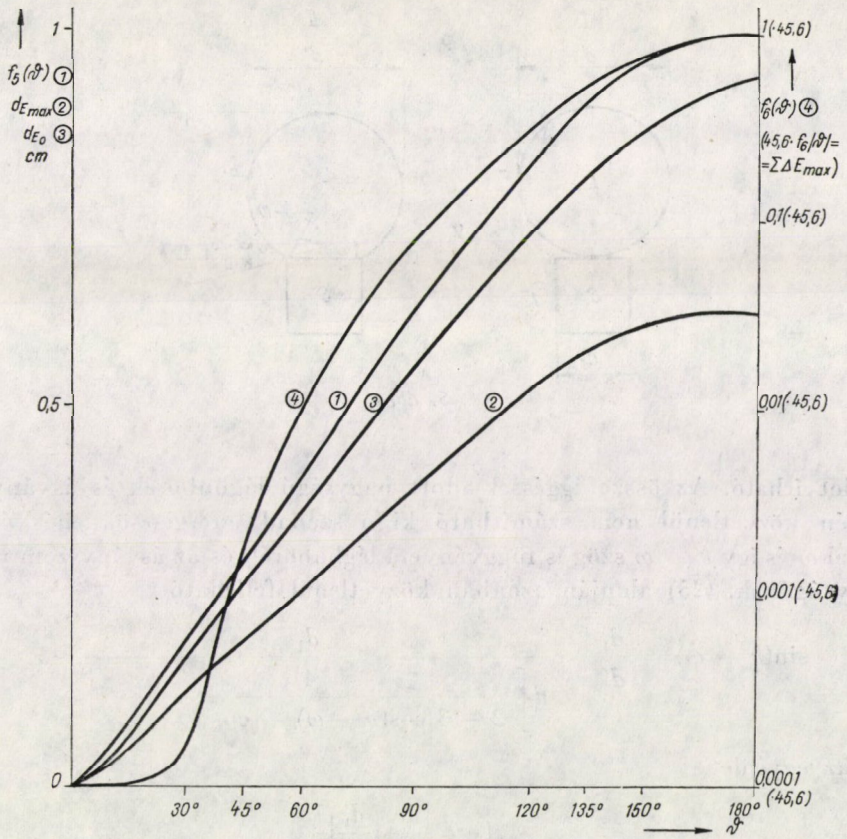
Az ábrából is megállapítható, hogy a két buborékátmérő között nincs nagy különbség, hányadosuk (0,892/0,630 =) 1,4.

Ha

$$\frac{d^2\pi}{4} \left(\frac{4}{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta}\right)^{2/3} \sin^2\vartheta > \frac{d_1^2\pi}{4}\,, \tag{22}$$

vagyis a légbuborék által a polírozott felületen elfoglalható felszín ($t^2\,\pi/4$, a gáz-szilárd határréteg) az ásvány keresztmetszeténél ($d_1^2\,\pi/4$) nagyobb, akkor a buborék és az ásvány összetapadása az 5. ábra szerint következik be. Az ábrán a II-vel jelölt állapotban a határszög olyan síkhoz van viszonyítva, amely a vízszintessel ω szöget zár be, vagyis a három fázis érintkezési pontjaihoz $\vartheta - \omega$ hajlásszögű érintők húzhatók. A felületi energia csökkenésére felírható a

$$\Delta E_\varphi = E_{VL}(d^2\pi - F') + \frac{d_1^2\pi}{4}(E_{SV} - E_{SL}) \tag{23}$$



4. ábra

összefüggés, amelyben F' (3) analógiájára

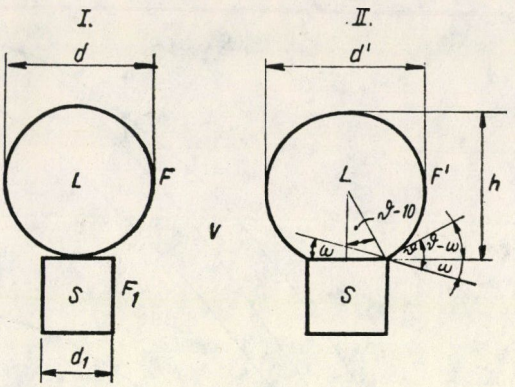
$$F' = \frac{d^2\pi}{2}\left[\frac{4}{2+3\cos(\vartheta-\omega)-\cos^3(\vartheta-\omega)}\right]^{2/3}[1+\cos(\vartheta-\omega)]\,. \quad (24)$$

Felhasználva (6)-ot, illetve az 5. ábra II. részéről leolvasható

$$d_1 = d'\sin(\vartheta-\omega) = d\left[\frac{4}{2+3\cos(\vartheta-\omega)-\cos^3(\vartheta-\omega)}\right]^{1/3}\sin(\vartheta-\omega) \quad (25)$$

összefüggést, a felületi energiacsökkenésre a

$$\Delta E_e = d^2\pi E_{VL}\left\{1-\left[\frac{4}{2+3\cos(\vartheta-\omega)-\cos^3(\vartheta-\omega)}\right]^{2/3}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{2+3\cos(\vartheta-\omega)+\cos\vartheta-\cos^2(\vartheta-\omega)\cos\vartheta}{4}\right\} = d^2\pi E_{VL}\,t_7(\vartheta) \quad (26)$$



5. ábra

képlet írható. Az összefüggéssel adott nagyságú légbuborék és ásványszem esetén közvetlenül nem számítható ki a szabad energiacsökkenés értéke, mivel ω és így $\vartheta - \omega$ szög is függvénye a légbuborék és az ásványszem relatív nagyságának. (25) alapján azonban közvetlenül felírható

$$\sin(\vartheta - \omega) = \frac{d_1}{d'} = \frac{d_1}{d\left[\dfrac{4}{2 + 3\cos(\vartheta - \omega) - \cos^3(\vartheta - \omega)}\right]^{1/3}}. \tag{27}$$

Ez az egyenlet

$$A' = \frac{1}{2^4}\left(\frac{d_1}{d}\right)^6 \tag{28}$$

jelölés bevezetésével átlalakítható,

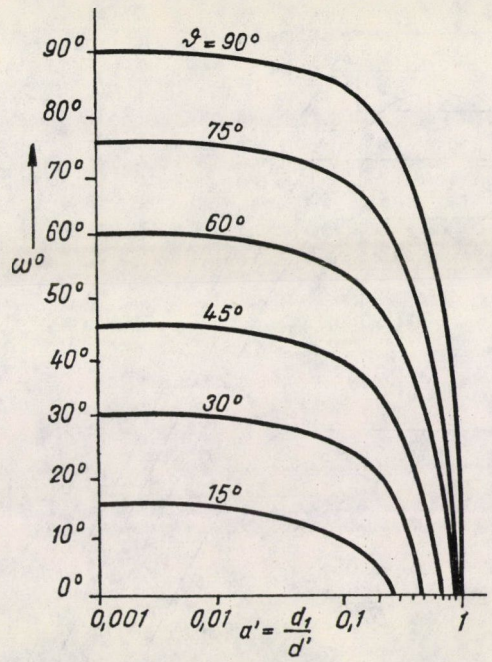
$$(A' + 1)\cos^6(\vartheta - \omega) - 3(2A' + 1)\cos^4(\vartheta - \omega) - 4A'\cos^3(\vartheta - \omega) + \\ + 3(3A' + 1)\cos^2(\vartheta - \omega) + 12A'\cos(\vartheta - \omega) + (4A' - 1) = 0 \tag{29}$$

szerint és számítógép segítségével A' számbajöhető értékeire $\cos(\vartheta - \omega)$ megadható, így ΔE_ω is kiszámítható.

Igen hasznos következtetések vonhatók le ω ill. $\vartheta - \omega$ változásaira vonatkozóan a $\sin(\vartheta - \omega) = d_1/d'$ egyenletnek

$$\cos\omega = \frac{d_1}{d'}\sin\vartheta \pm \cos\vartheta\left[1 - \left(\frac{d_1}{d'}\right)^2\right]^{1/2} \tag{30}$$

szerinti megoldásával. A 6. ábra görbéiről ezen összefüggéssel kiszámított ω szög értékei olvashatók le a d_1/d' arány függvényében az ábrán látható határszögeknél (90°, 75°, 60°, 45°, 30° és 15°). A (30) jelű összefüggés alapján megállapítható, hogy $d_1/d' = \sin\vartheta$ esetén $\omega = 0°$; a 6. ábra görbéi ennek megfelelően indulnak ki a vízszintes tengelytől. Ha tehát a (22) egyenlőtlenség fenn-



6. ábra

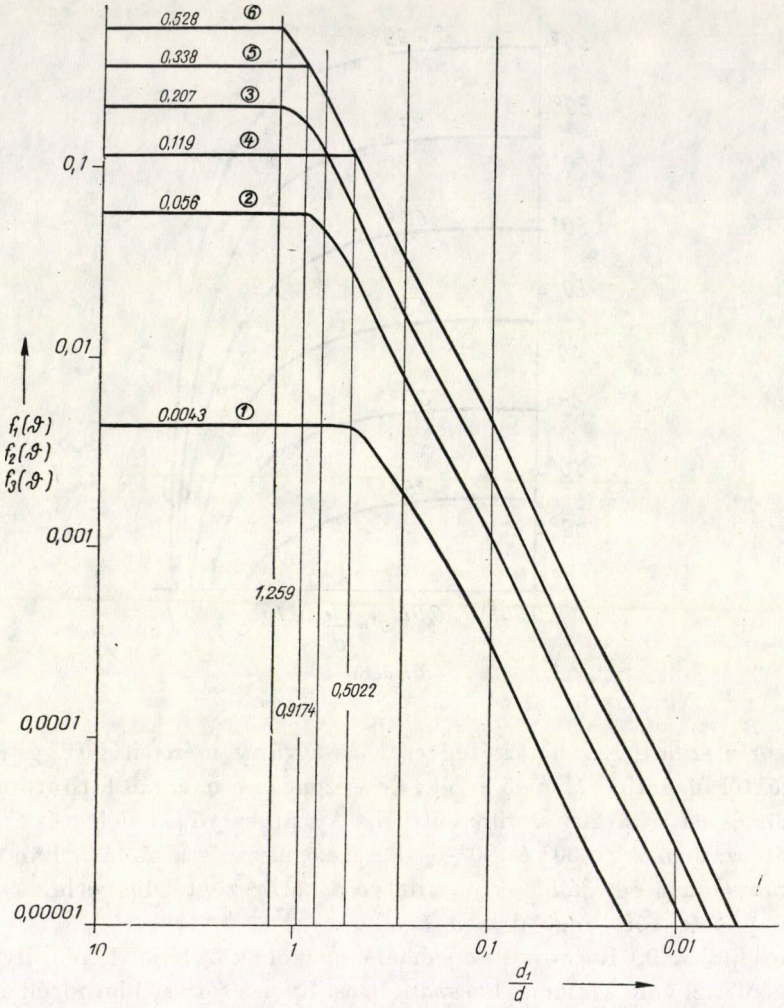
áll, akkor a szilárd-gáz határréteg csak az ásvány méreteitől függ, $\vartheta - \omega$ a határszögtől független állandó érték, de viszont ω a 6. ábrán látható módon a határszög és a d_1/d' arány szerint változik. A számszerű szemléltetés érdekében az I. táblázatban 30°, 60° és 90°-os határszögekre és a táblázatban szereplő d_1/d' arányokra megtalálhatók ω, illetve a határszögtől független és csak a d_1/d' hányadosoktól függő $\vartheta - \omega$ értékek.

Ha $d_1/d' \leqq 0{,}01$, $\cos(\vartheta - \omega)$ értéke nagyon közel van 1-hez, ilyenkor a (26) egyenlettel való számolás hosszadalmas. Ilyen esetben a buborék átmérője a tapadás után gyakorlatilag nem változik meg, vagyis a szabad energiacsökkenés tulajdonképpen a buborékkal érintkező felület és a határszög függvénye ([4]):

$$\Delta E_\omega \cong \frac{d_1 \pi}{4}(E_{SV} + E_{VL} - E_{SL}) = \frac{d_1^2 \pi}{4} E_{VL}(1 - \cos\vartheta)\,. \qquad (31)$$

A (31)-gyel számított érték a (26)-tal számítottal nagyságrendben megegyezik. A nehézségi erő ellenében végzett munka kis d_1/d arány fennállása esetén is (15) segítségével számítható, csak $f_3(\vartheta)$-ban ϑ helyére $\vartheta - \omega$ helyettesítendő.

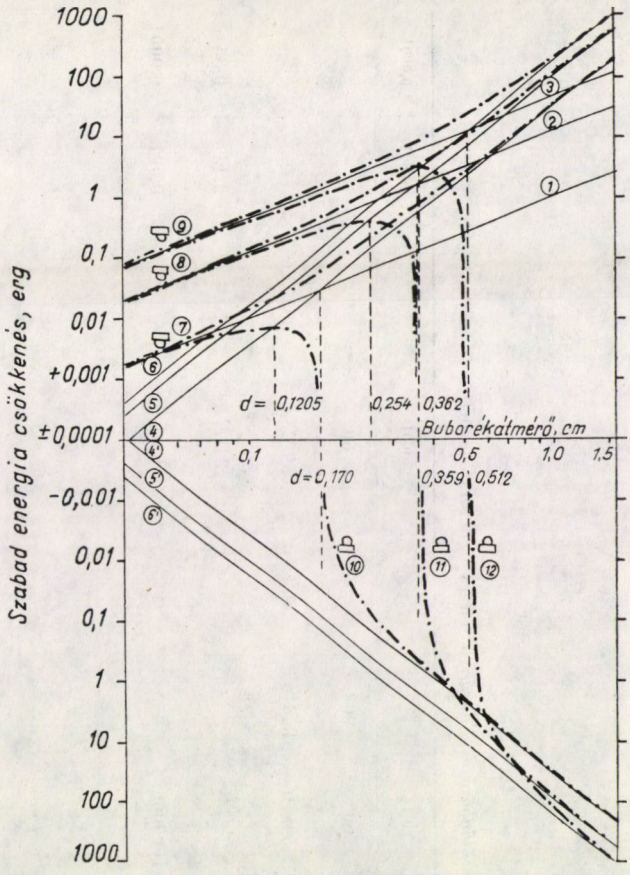
Eddigi eredményeink összefoglalása a 7., 8., és 9. ábrákon találhatók meg. A 7. ábrán (mindkét tengely logaritmikus léptékű) 30°, 60° és 90°-os határszögek esetében láthatók a felületi energiacsökkenéssel arányos — 1, 2 és



7. ábra

3-mal jelölt görbék, — és a nehézségi erő ellenében végzett munkákkal arányos értékek, az előbbi határszögeknél a 4, 5 és 6 görbék segítségével. — Az 1, 2 3-mal jelölt görbék vízszintes szakaszain az értékek kiszámítása a (8) összefüggés $f_1(\vartheta)$-val jelölt része szerint történt (30°, 60° és 90°-nál 0,0043, 0,056, és 0,207 a vízszintes szakaszok számszerű értéke). A vízszintes egyenesek azt jelentik, hogy adott határszögnél a légbuborék és az ásványszem relatív nagyságának nincsen befolyása a felületi energiákból adódó szabad energiacsökkenésre. $f_1(\vartheta)$-val való számítás (22) alapján

$$\frac{d_1}{d} \geqq \left(\frac{4}{2 + 3\cos\vartheta - \cos^3\vartheta} \right)^{1/3} \sin\vartheta \tag{32}$$



8. ábra

arányok esetén helyénvaló (vagyis az említett határszögek esetében 0,502, 0,917 és 1,259), ennél kisebb ásványszem és buborék arányok esetében a (26) összefüggés, ill. ennek $f_7(\vartheta)$ része alkalmazandó. A görbéknek a vízszintes rész után görbült része van, majd $d_1/d \leq 0{,}01$-nél az energiacsökkenést logaritmikus ábrázolásban ferde egyenesek adják és ilyen tartományban a (21)-gyel való számítás az egyszerűbb. — A nehézségi erő ellenében végzett munkákkal arányos értékeket (15) $f_3(\vartheta)$ részre adja. Ha az arány (32) szerinti, akkor vízszintes egyenesek adják a (15) függvény képét (0,119, 0,338 és 0,528 a megfelelő vízszintes szakaszok számszerű értékei), kisebb arányok esetében pedig a határszögtől függetlenül, $\vartheta - \omega$ állandósága miatt (I. táblázat) ugyanazon ferde egyenes jelzi a nehézségi erő ellenében végzett munka változását. Ezen utóbbi egyenes hajlásszöge megegyezik az előbbi három (1-gyel, 2-vel ill. 3-mal jelölt) görbe ferde szakaszainak hajlásszögével, vagyis a szemnagyság csökkenésével az energiaváltozások a szemnagyság négyzetével arányosak.

I. Táblázat

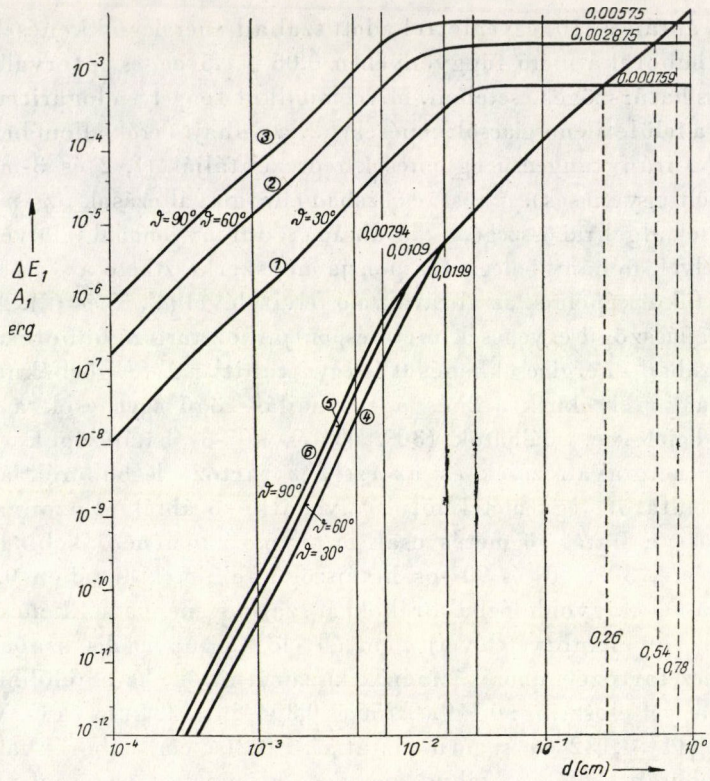
ω és $\vartheta - \omega$ értékei különböző d_1/d' arányoknál és ϑ határszögeknél

d_2/d'	0,5			0,1			0,01			0,001	0,0001
ϑ	30°	60°	90°	30°	60°	90°	30°	60°	90°	—	—
ω	0°	30°	60°	24°16'	54°16'	84°16'	29°15,6′	59°25,6'	89°25,6′	—	—
$\vartheta - \omega$	30°			5°44'			34°4'			3,43	0,36
d_1/d	0,5022			0,100000624			0,01			0,001	0,0001

A 8. ábrán a (16) egyenlettel adott szabad energiacsökkenések változása látható a buborékátmérő függvényében 0,05÷1,5 cm-es intervallumban 30, 60 és 90°-os határszögek esetében. Mivel mindkét tengelyen logaritmikus lépték van, ezért a felületi energiacsökkenéseket 2, a felhajtó erők ellenében végzendő munkákat 4 iránytangensű egyenesek reprezentálják (1, 2 és 3-mal, ill. 4, 5 és 6-tal jelölt egyenesek). Az összes szabad energiaváltozások az említett energiaváltozások algebrai összege, — az ábrán eredményvonallal jelölve [(7), (8) és (9)], — melyek néhány jellegzetes pontja megszerkeszthető a — 4 hajlásszögű egyenesek tükörképeinek az ábrára való felvitelével (4', 5' és 6'). A megfelelő 2 és 4-es hajlásszögű egyenesek metszéspontjaihoz tartozó buborékátmérőknél az összes szabad energiacsökkenés 0 és egyúttal itt a $\Sigma\Delta E$ görbéknek inflexiós pontjuk van, melyeknek a 2 és a —4 hajlásszögű egyenesek a végérintői. Az ábrán bejelölve találhatók (30°, 60° és 90°-os határszögek esetében) a maximális energiaváltozások és az ezekhez tartozó légbuborék átmérők is.

A bemutatott egyenletekből és a vonatkozó ábrákról azonnal megállapítható, hogy a határszögmérés csak bizonyos átmérőnél kisebb buborékkal hajtható végre. 30°, 60° és 90°-os határszögű felületek esetében 0,170, 0,362 és 0,558 cm-nél nagyobb légbuborékoknál szabad energiacsökkenés (a választott modell figyelembevételével) nem áll elő (a maximális szabad energiacsökkenéshez tartozó buborékátmérők kiszámíthatók, ha az előbbi értékeket kereken 1,4-gyel elosztjuk: 0,119, 0,256 és 0,394 cm). J. Leja és G. W. Poling méréseiket [11] 0,132 cm sugarú (az átmérő 0,262 cm) buborékkal végezték. Ilyen légbuborék esetében szabad energiacsökkenés a tapadással nem áll elő, ha azt 44°-os, vagy kisebb határszögű ásványfelülethez közelítjük; 62°-os határszögű felületekhez tartozik a maximális szabad energiacsökkenés, melynek értéke (21) szerint 0,78 erg.

A 9. ábrán 0,01 cm-es szemnél fellépő szabad energiaváltozások és a nehézségi erő ellenében végzett munkák láthatók a vízszintes tengelyen feltüntetett buborékátmérők mellett (10^{-4} — 1 cm intervallumban) az előbbi határszögeknél. E felületi energiaváltozásokat (a 9. ábrán 1, 2 és 3-mal jelölve) kis légbuborékoknál a logaritmikus ábrán 2-es iránytangensű egyenesek adják; 30°-os határszögnél (0,01/0,502 =) 0,0199, 60°-osnál (0,01/0,917 =) 0,0109 és 90°-os határszögű ásványszem esetében (0,01/1,259 =) 0,00794 cm átmérőjű és ezeknél kisebb buborékok esetében, ha a buborék 0,1 cm-nél nagyobb, akkor az energiaváltozások a buborékátmérő függvényében állandó értékek: 0,000759, 0,002875 és 0,00575 erg az előbbi határszögeknél. A nehézségi erő ellenében végzett munkát kis buborékok esetén (tehát 0,0199, 0,0109 és 0,00794 cm-nél kisebb buborékoknál) 4-es, 0,1 cm-nél nagyobb buborékok esetén pedig a határszög nagyságától függetlenül 2-es iránytangensű egyenesek reprezentálják. Ez utóbbi ferde egyenes és a $\Sigma\Delta E$ változásokat adó vízszintesek metszéspontjai 0,26, 0,54 és 0,78 cm buborékátmérőknél van; ilyen buborékoknál és 0,01 cm-es 30°, 60° és 90°-os határszögű szemek esetén az energiaváltozások



9. ábra

azonosak. A számszerű eredményekből egyértelműen megállapítható, hogy flotálásnál az összetapadás érdekében nagy légbuborékokra nincsen szükség: ha a légbuborék a szemnagyság tízszeresénél is nagyobb, a tapadási hajlam már nem növekszik.

Az elméleti eredmények igazolására a *Henkel International GMBH* 6, 8 és 10 szénatomszámú, Edenor C6, Edenor C8 és Edenor C10 elnevezésű

II. Táblázat

Súlykihozatalok változása a zsírsavak szénatomszáma függvényében

Termék	Flotálási idő, perc	Súlykihozatal, %		
		Edenor C6	Edenor C8	Edenor C10
1	2	3	4	5
Konc. I.	11	17,5	60,0	91,6
Konc. II.	9	7,4	2,9	5,6
Flotálási maradék	—	75,1	37,1	2,8
		100,0	100,0	100,0

zsírsavaival 1,5 l-es cellában flotálási kísérleteket végeztünk. Mindegyik kísérletnél a flotált ásvány 60—160 μm-es tiszta mészkő, a zagysűrűség 400 g/l, a gyűjtőreagens 2 kg/t, a kondicionálási idő 3 perc volt. Ilyen kísérleti feltételekkel a súlykihozatalok változása jól reprezentálja a zsírsavak szénatomszámával arányos határszög változását. Az eredmények összefoglalása a II. táblázatban található meg.

IRODALOM

1. KLASSEN, V. I.: Vvedenie v teoriju flotacii. str. 80 *Metallurgizdat* Moszkva 1953.
2. KLASSEN, V. I.: Voprosy teorii i flotácii. *Goschizizdat*, 1949. Moskva.
3. DOBIAS, B.—SPURNY, T.: Teorie flotace. *Puvodni referaty Chem. listy* 209—243.
4. SCHUBERT, H.: Aufbereitung fester mineralischer Rohstoffe. Band II. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1967.
5. PETHŐ Sz.: A szabad energia és az adhéziós erő számítása az ásványszem és légbuborék összetapadása alkalmával. *VI. Oszt. Közl.*, **34** (1964), 273—292.
6. PETHŐ, Sz.: Calculation of the Decrease in Free Energy Caused by the Adhesion of Air Bubbles to Mineral Particles. *Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei.* **22** (1962). 63—79..
7. NUTT C. W.: The Adhesion of Solid Particles to Flat Interflaces and Bubbles. *Chemical Engineering Science*, **12** (1962), 133—141
8. SCHELUDKO, A.—RADOEV, B.—FABRIKANT, A.: On the Theory of Flotation II. Adhesion of Particles to Bubbles. Kézirat.
9. TARJÁN G.: Ércelőkészítés. Tankönyvkiadó, Budapest, 1955.
10. SMITH, N. G.—DUCKMANTON, B.: Further Contact Angle Studies at Coal Surfaces. *Second Symposium on Coal Preparation*, University of Leeds, 1957.
11. LEJA, T.—POLING, C. W.: On the Interpretation of Contact Angle. *International Mineral Processing Congress*, London 1960.

On the Reduction of the Free Energy Arising at the Adhesion of a Solid Particle to an Air Bubble. Simple relations for determining the reduction of free energy arising at the adhesion of a solid particle to an air bubble can be deduced, taking into account the surface energy and the gravitational force. With their aid some remarks can be made on limit angle measurements and on flotation methods.

Über die Verringering der beim Aneinanderhaften von festen Teilchen und Luftblasen auftretenden freien Energie. Für die Bestimmung der Verringerung der beim Aneinander haften eines festen Teilchens und einer Luftblase auftretenden freien Energie können unter Berücksichtigung der Oberflächenenergie und der Schwerekraft einfache Zusammenhänge abgeleitet und mit deren Hilfe einige Bemerkungen bezüglich der Durchführung der Grenzwinkelmessung, bzw. der Technologie der Flotation gemacht werden.

DISZKRÉT ARGUMENTUMÚ FÜGGVÉNYEK ALKALMAZÁSA PRIZMATIKUS RUDAK RUGALMAS SZABAD CSAVARÁSÁNAK ELEMZÉSÉRE

ECSEDI ISTVÁN*

[Beérkezett 1972. július 20-án]

A tanulmány ortogonális görbevonalú koordinátarendszer koordinátavonalai által határolt tömör keresztmetszetű prizmatikus rudak rugalmas szabad csavarási feladatának megoldásával foglalkozik. Diszkrét argumentumú függvények alkalmazásával zárt alakban előállítja a vizsgált keresztmetszetek csavarási tehetetlenségi ellenállását.

Jelölések

T = x, y síkbeli, egyszeresen összefüggő, rektifikálható határgörbéjű tartomány, a csavart prizmatikus rúd keresztmetszete,
γ = a T tartomány határgörbéje,
Φ = a keresztmetszet Prandtl-féle feszültségfüggvénye,
u, v = ortogonális görbevonalú koordináták,
x, y = Descartes-féle koordináták,

$$\left[\begin{array}{l} H_u^2 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 \\ \\ H_v^2 = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 \end{array}\right] \text{ Lamé együtthatók,}$$

$\left[\begin{array}{l}\vec{i}\\ \vec{j}\\ \vec{k}\end{array}\right]$ = az xyz koordinátarendszer egységvektorai,

$\left[\begin{array}{l}\cdot\\ \times\end{array}\right]$ = két vektor $\left[\begin{array}{l}\text{skaláris}\\ \text{vektorális}\end{array}\right]$ szorzatának jele,

$\left[\begin{array}{l}\vec{e}_u\\ \vec{e}_v\end{array}\right]$ = az u, v görbevonalú koordinátarendszer bázis vektorai

$$(\vec{e}_u^2 = \vec{e}_v^2 = 1, \qquad \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v = 0),$$

$\left[\begin{array}{l}\tau_{uz}\\ \tau_{vz}\end{array}\right]$ = az xy sík P pontjában ébredő $\left[\begin{array}{l}u\\ v\end{array}\right]$ irányú feszültség (lásd 1. ábra),

M_c = a rúd egy tetszőleges keresztmetszetét terhelő csavarónyomaték,
I_p = a keresztmetszet csavarási ellenállása,
G = a rúd anyagának csúsztató rugalmassági együtthatója,
ϑ = a hosszegységre eső relatív elcsavarodás,
$I = \sqrt{-1}$ = képzetes egység,

* Ecsedi István, 3528 Miskolc, Franklin u. 17.

f, g = komplex változós függvények,
a, b = a keresztmetszet határához rendelt görbevonalú koordináták,
$\begin{bmatrix} h_u \\ h_v \end{bmatrix}$ = a lépéstávolság $\begin{bmatrix} u\text{-ban} \\ v\text{-ben} \end{bmatrix}$,
$u_i = ih_u$, $(i = 0,1,2,\ldots,M)$
$v_j = jh_v$, $(j = 0,1,2,\ldots,N)$

$$M = \frac{a}{h_u}, \qquad N = \frac{b}{h_v},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \text{illetve} \qquad \Delta^x = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2},$$

$P_{i,j}$ = az u_i, v_j görbevonalú koordinátájú pont az x, y síkon,

$$L[\Phi_{i,j}] = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{h_u^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{h_v^2}$$

a Laplace féle differenciaoperátor,

$$\Theta' = \Theta'' = \frac{1}{12},$$

$$\nabla\Phi = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\vec{e}_v\right),$$

$$M_i' = \left.\frac{\partial^4\Phi}{\partial u^4}\right|_{\substack{u=u_i+u'h_u \\ v=v_j}} + \left.\frac{\partial^4\Phi}{\partial u^4}\right|_{\substack{u=u_i-\nu'h_u \\ v=v_j}},$$

$$M_i'' = \left.\frac{\partial^4\Phi}{\partial v^4}\right|_{\substack{u=u_i \\ v=v_j+\mu''h_v}} + \left.\frac{\partial^4\Phi}{\partial v^4}\right|_{\substack{u=u_i \\ v=v_j-\nu''k_v}},$$

$$0 \leq \nu', \quad \mu', \nu'', \quad \mu'' \leq 1,$$

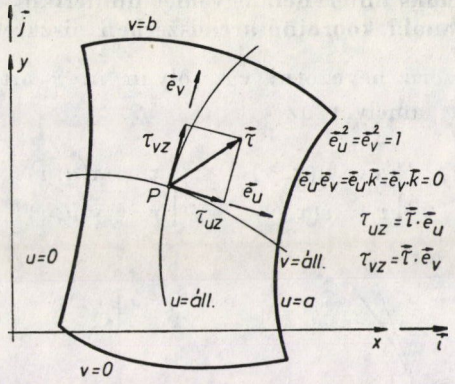
$\Phi_{i,j} = \Phi(ih_u, jh_v)$, $\varphi_{i,j}^{(m,n)}$ ... diszkrét argumentumú függvények,
$\lambda_{i,j}$ = a $\varphi_{i,j}^{(m,n)}$ sajátfüggvényhez tartozó sajátérték,
$dT_{i,j}$ = területelem,
$C_{m,n}(m = 1,2,\ldots,M-1, \quad n = 1,2,\ldots,N-1)$ = együttható a „sajátfüggvények szerinti sorfejtésnél" (lásd (28) összefüggést,)
$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ = a Jacobi-féle függvénydeterminánsz,
Egyéb mennyiségeket, változókat a szövegben értelmezünk.

1. Bevezetés

Tömör, állandó keresztmetszetű prizmatikus rudak rugalmas szabad csavarása, — mint ismeretes, — az alábbi peremérték feladat megoldására vezet:

Meghatározandó az a T tartományban és a T tartományt határoló γ görbe mentén folytonos olyan $\Phi = \Phi(x, y)$ függvény, amely a T tartományban a

$$\Delta\Phi = -2 \tag{1}$$



1. ábra

Poisson-féle parciális differenciálegyenlet, a γ görbe mentén pedig a

$$\Phi = 0 \tag{2}$$

homogén peremfeltételt elégíti ki.

A $\Phi = \Phi(u,v)$ feszültségfüggvény ismeretében már számolni tudjuk a keresztmetszet síkjának egy tetszőleges P pontjában ébredő τ_{uz}, τ_{vz} feszültségeket, valamint a keresztmetszet csavarási tehetetlenségi ellenállását (lásd pl. [1]):

$$\tau_{uz} = \frac{G\vartheta}{H_v}\frac{\partial\Phi}{\partial v}, \tag{3}$$

$$\tau_{vz} = -\frac{G\vartheta}{H_u}\frac{\partial\Phi}{\partial u}, \tag{4}$$

$$\tau = \tau_{uz}\vec{e}_u + \tau_{vz}\vec{e}_v = G\vartheta\nabla\Phi\times\vec{k}, \tag{5}$$

$$I_p = 2\int_{(T)}\Phi dT. \tag{6}$$

A vizsgált keresztmetszetet az 1. ábrán vázoltuk.

A keresztmetszetet terhelő csavarónyomaték és a fajlagos elcsavarodás szöge között

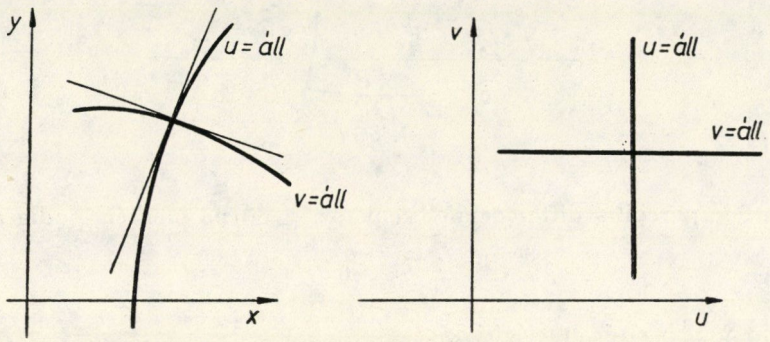
$$\vartheta = \frac{M_c}{I_p G} \tag{7}$$

alakú összefüggés érvényes. A tanulmány az (1), (2) által kijelölt peremérték feladat numerikus megoldását — diszkrét argumentum függvények felhasználásával — ortogonális görbevonalú koordinátarendszer koordinátavonalai által határozott T tartomány felett adja meg.

2. Poisson-féle parciális differenciálegyenlet numerikus megoldása ortogonális görbevonalú koordinátarendszerben diszkretizálással

Gyakran célszerű bevezetni egy olyan u, v ortogonális görbevonalú koordinátarendszert, amelyet az

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \qquad \left(\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \right) \tag{8}$$



2. ábra

konform leképezés határoz meg az x, y síkon, az u, v sík u = állandó, v = állandó ortogonális egyenesseregének képeként (2. ábra). E leképzést az

$$u + Iv = f(x + Iy), \ (x + Iy = g(u + Iv), \ (I = \sqrt{-1}) \tag{9}$$

analitikus egyértékű komplex függvény segítségével is megadhatjuk. A (9) által meghatározott görbevonalú koordinátarendszer izometrikus, azaz

$$H_u = H_v \,. \tag{10}$$

Izometrikus ortogonális görbevonalú koordinátarendszer H_u, H_v Lamé együtthatóit a

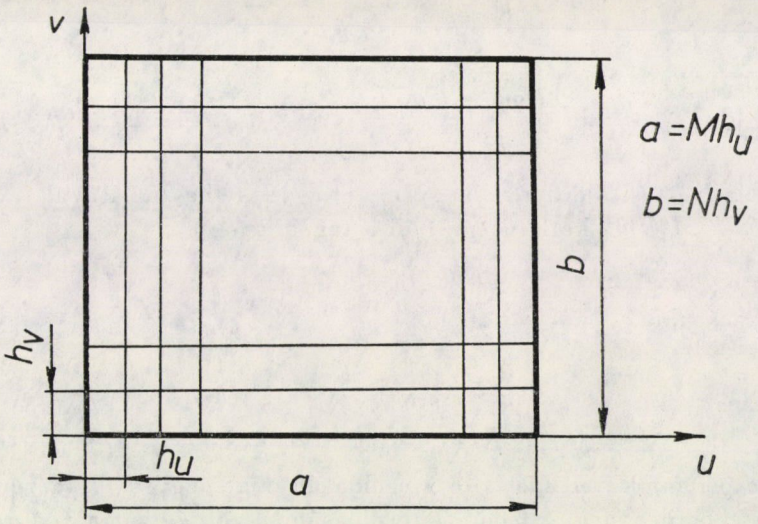
$$H_u^2 = H_v^2 = H^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = |g'(u + Iv)|^2 \tag{11}$$

egyenletből számítjuk (lásd pl. [2]). Transzformáljuk az (1) parciális differenciálegyenletet az x, y Descartes-féle koordinátarendszerből az u, v ortogonális görbevonalú koordinátarendszerbe: A transzformáció a (lásd [2])

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} = -2H^2(u, v) \tag{12}$$

alakú Poisson-féle parciális differenciálegyenletet adja. A fenti parciális differenciálegyenletet — a (2) peremfeltétel mellett — az $u = 0$, $v = 0$, $u = a$, $v = b$ koordinátavonalak által határolt T tartomány felett fogjuk megoldani. A T tartomány képe az u, v síkon az

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq a \\ 0 \leq v \leq b \end{cases} \tag{13}$$



3. ábra

egyenlőtlenségek által meghatározott — 3. ábrán vázolt — téglalap. A (12)-es egyenlet diszkretizált változata a

$$(\Delta^* \Phi)_{P_{ij}} = -2(H^2)_{P_{ij}}, \tag{14}$$
$$P_{ij} \in T$$

egyenletrendszer, amelynek tényleges előállítása a differenciálhányadosok differenciahányadosokkal való közelítése útján valósul meg. Legyen

h_u u-ban
h_v v-ben a lépéstávolság,

$$\left.\begin{aligned} a &= Mh_u, \\ b &= Nh_v, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\Phi_{ij} = \Phi(ih_u, jh_v), \tag{16}$$

$$H_{ij}^2 = H(ih_u, jh_v)^2, \tag{17}$$

$$i = 0, 1, \ldots, M;$$
$$j = 0, 1, \ldots, N.$$

A Laplace operátort — centrális differenciahányadosok alkalmazásával — u-ban h_u, v-ben h_v lépéstávolság esetén az alábbi alakban tudjuk előállítani (lásd pl. [4]):

$$(\Delta^*\Phi)_{i,j} = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{h_u^2} +$$

$$+ \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{h_v^2} + M_4'\Theta' h_u^2 + M_4''\Theta'' h_v^2 . \tag{18}$$

Legyen

$$L[\Phi_{i,j}] = \frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{h_u^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{h_v^2} . \tag{19}$$

A (14)-et helyettesítő differenciaegyenletet a (19) felhasználásával — elhagyva az $M_4'\Theta_u'^2 + M_4''\Theta'' h_v^2$ korlátos maradék tagokat —

$$L[\Phi_{i,j}] = -2H_{i,j}^2 \tag{20}$$

alakban írhatjuk fel.

A

$$\Phi_{i,0} = \Phi_{i,N} = \Phi_{0,j} = \Phi_{M,j}, \tag{21}$$

$$(i = 0, 1, \ldots M;\ j = 0, 1, \ldots, N)$$

homogén peremfeltételt kielégítő megoldását sajátfüggvények szerinti haladó sorfejtéssel oldjuk meg. A feladat megoldásához szükség van a 3. ábrán vázolt téglalap alakú tartomány csomópontjain értelmezett

$$L[\varphi_{i,j}^{(m,n)}] = -\lambda_{m,n}^2 \varphi_{i,j}^{(m,n)} \tag{22}$$

parciális differenciaegyenletet és a

$$\varphi_{i,0}^{(m,n)} = \varphi_{i,N}^{(m,n)} = \varphi_{0,j}^{(m,n)} = \varphi_{M,j}^{(m,n)} = 0 \tag{23}$$

homogén peremfeltétel által meghatározott sajátérték probléma $\lambda_{m,n}$ sajátértékeire és $\varphi_{i,j}^{(m,n)}$ sajátfüggvényeire.

Közvetlen behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a (22), (23) által kijelölt sajátérték probléma megoldásai a

$$\lambda_{m,n}^2 = \frac{4}{h_u^2} \sin^2 \frac{m\pi}{M} + \frac{4}{h_v^2} \sin^2 \frac{n\pi}{N} , \tag{24}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, M-1;\ n = 1, 2, \ldots, N-1)$$

sajétértékek és a hozzájuk tartozó

$$\varphi_{i,j}^{(m,n)} = \sin \frac{m\pi}{M} i \sin \frac{n\pi}{N} j \tag{25}$$

$$(i, m = 1, 2, \ldots, M-1,\ j, n = 1, 2, \ldots, N-1)$$

sajátfüggvények. A (20), (21) által kijelölt peremérték feladat megoldását — $\varphi_{i,j}^{(m,n)}$ és λ_{mn} ismeretében —

$$\Phi_{i,j} = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{c_{m,n}}{\lambda_{m,n}^2} \varphi_{i,j}^{(m,n)} \tag{26}$$

$$(i, m = 1, 2, \ldots, M; j, n = 1, 2, \ldots, N)$$

alakban próbáljuk előállítani. E diszkrét argumentumú függvény bármilyen $c_{m,n}$ $(m = 1, \ldots, M-1;\ n = 1, \ldots, N-1)$ együtthatórendszer esetén kielégíti a (21) peremfeltételeket. A (20) parciális differenciálegyenletet — mint arról közvetlen behelyettesítéssel meggyőződhetünk — akkor, és csakis akkor elégíti ki, ha

$$\sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} c_{mn} \varphi_{i,j}^{(m,n)} = 2H_{i,j}^2, \tag{27}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, M-1; j = 1, 2, \ldots, N-1).$$

Szorozzuk meg a (27) egyenlet mindkét oldalát a $\sin k\pi i/M$ mennyiséggel, s a kapott egyenleteket összegezzük i szerint $(i = 1, \ldots, M-1)$, továbbá ha alkalmazzuk a trigonometria

$$\sum_{i=1}^{M-1} \sin \frac{m\pi}{M} i \sin \frac{k\pi}{M} 1 = \begin{cases} 0, & \text{ha } m \neq k, \\ \dfrac{M}{2}, & \text{ha } m = k \end{cases} \tag{28}$$

azonosságát, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\frac{M}{2} \sum_{n=1}^{N-1} c_{mn} \sin \frac{n\pi}{N} j = 2 \sum_{n=1}^{M-1} H_{ij}^2 \sin \frac{m\pi}{M} i. \tag{29}$$

A (29)-et ismét megszorozva a $\sin k\pi j/N$-nel és a kapott egyenleteket összegezve j szerint $(j = 1, \ldots, N-1)$, továbbá alkalmazva a (28)-as azonosságot, az alábbi összefüggésre jutunk:

$$\frac{M \cdot N}{4} c_{mn} = 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} H_{ij}^2 \sin \frac{m\pi}{M} i \sin \frac{n\pi}{N} j, \tag{30}$$

azaz

$$c_{mn} = \frac{8}{M \cdot N} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} H_{ij}^2 \sin \frac{m\pi}{M} i \sin \frac{n\pi}{N} j, \tag{31}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, M-1; n = 1, 2, \ldots, N-1).$$

Igy előállítottuk a (20), (21) által meghatározott peremérték feladat megoldását, hiszen a (31) által meghatározott c_{mn} együtthatórendszer esetén a (20) parciális differenciálegyenlet is ki van elégítve, ha a Φ függvényt a (26) egyenlettel állítjuk elő.

3. Diszkrét argumentumú függvények alkalmazása a τ_{uz}, τ_{vz} és I_p számítására

A (3), (4) egyenletek diszkretizálásából kapott összefüggésekből már tudjuk számítani — diszkrét argumentum értékeknél — a τ_{uz} és a τ_{vz} feszültségeket:*

$$(\tau_{uz})_{i,j} = \frac{G\vartheta}{H_{i,j}} \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}}{2h_v} =$$

$$= \frac{G\vartheta}{H_{ij}h_v} \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{c_{mn}}{\lambda_{mn}^2} \sin\frac{m\pi}{M} i \sin\frac{n\pi}{N} \cos\frac{n\pi}{N} j,$$

$$(i = 0, 1, \ldots, M;\ j = 0, 1, \ldots, N) \tag{32}$$

$$(\tau_{vz})_{i,j} = -\frac{G\vartheta}{H_{ij}} \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2h_u} =$$

$$= -\frac{G\vartheta}{H_{ij}h_u} \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{c_{mn}}{\lambda_{mn}^2} \sin\frac{m\pi}{M} \sin\frac{n\pi}{N} j \cos\frac{m\pi}{M} i, \tag{33}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, M;\ j = 0, 1, \ldots, N).$$

Téglány szabály alkalmazásával a (6)-os egyenlet alapján írhatjuk, hogy

$$I_p \approx \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} 2\Phi_{ij} dT_{ij} = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} 2\Phi_{ij} H_{ij}^2 h_u h_v, \tag{34}$$

hiszen

$$dT_{ij} = \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]_{i,j} h_u h_v = H_{ij}^2 h_u h_v. \tag{35}$$

Helyettesítsük (34)-be a Φ_{ij} (26)-os alakját, majd az így kapott egyenletben cseréljük fel az i, j és m,n szerinti összegezés sorrendjét, azaz először összegezzük az i,j változói szerint. Ha a továbbiakban a

$$\varphi_{m,n}^{(i,j)} = \varphi_{i,j}^{(m,n)} = \sin\frac{m\pi}{M} i \sin\frac{n\pi}{N} j \tag{36}$$

összefüggést alkalmazzuk, az alábbi egyenletet kapjuk I_p-re:

$$I_p = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{c_{mn}}{\lambda_{mn}^2} \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} 2H_{i,j}^2 \varphi_{m,n}^{(i,j)} h_u j_v. \tag{37}$$

* Egyszerű számolással meggyőződhetünk róla, hogy (32), (33) alakú τ_{uz} és τ_{vz} esetén az $u = 0$ és $u = a$ peremen $\tau_{vz} = 0$, valamint az $v = 0$ és $v = b$ peremen a $\tau_{uz} = 0$.

A (30) felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-1} 2H_{i,j}^2\varphi_{m,n}^{(i,j)} = \frac{M\cdot N}{4}\, c_{m,n}\,. \tag{38}$$

A (38) (37)-be helyettesítésével I_p-re az

$$I_p = \frac{M\cdot N}{4} h_u h_v \sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{d_{mn}^2}{\lambda_{mn}^2} = \frac{ab}{4}\sum_{m=1}^{M-1}\sum_{n=1}^{N-1} d_{mn}^2 \tag{39}$$

összefüggést írhatjuk fel. Itt bevezettük a

$$d_{mn} = \frac{c_{mn}}{\lambda_{mn}}\,, \tag{40}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, M-1;\ n = 1, 2, \ldots, N-1)$$

jelölést.

4. Néhány speciális keresztmetszet

a) Körgyűrűcikk keresztmetszetű prizmatikus rúd

Transzformáció egyenlete (lásd 4. ábra):

$$\begin{cases} x = r_b e^u \cos v \\ y = r_b e^u \sin v\,. \end{cases} \tag{41}$$

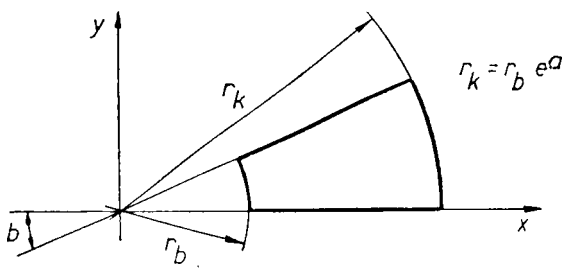
A Lamé együtthatók:

$$H_u^2 = H_v^2 = H^2 = r_b^2 e^{2u}\,, \tag{42}$$

A $C_{m,n}$ együtthatók kifejezése:

$$C_{m,n} = 4r_b^2\frac{1-(-1)^2}{M\cdot N}\cot\frac{n\pi}{2N}\sum_{i=1}^{M-1} e^{2hui}\sin\frac{m\pi}{M}\,i\,, \tag{43}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, M-1;\ n = 1, 2, \ldots, N-1).$$



4. ábra

b) ellipszis és hiperbola ívek által határolt keresztmetszetű prizmatikus rúd

A transzformáció egyenlete (5. ábra):

$$\left.\begin{aligned} x &= c \sin(u-\alpha)\cosh(v-\beta) \\ y &= c \cos(u-\alpha)\sinh(v-\beta), \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

$$0 \leq u \leq 2\alpha = a$$
$$0 \leq v \leq 2\beta = b,$$

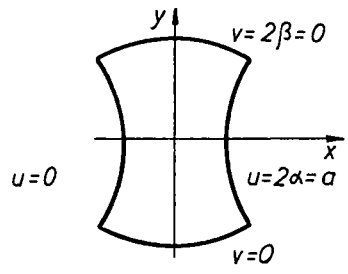
A Lamé együtthatók:

$$H_u^2 = H_v^2 = H^2 = c^2\left[\cos^2(u-\alpha) + \sinh^2(v-\beta)\right] = \\ = \frac{c^2}{2}\left[\cos 2(u-\alpha) + \cosh 2(v-\beta)\right], \tag{45}$$

a $c_{m,n}$ együtthatók kifejezése:

$$C_{mn} = \frac{4}{MN} c^2 \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} \cos 2(ih_u - \alpha) + \cosh 2(jh_v - \beta) x \cdot \\ x \sin\frac{m\pi}{M} 2 \sin\frac{n\pi}{N} j, \tag{46}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, M-1;\ n = 1, 2, \ldots, N-1).$$



5. ábra

c) Másodfokú parabolaívek által határolt keresztmetszetű prizmatikus rúd

A transzformáció egyenlete (6. ábra):

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(u+\alpha)(v-\beta)}{c} \\ y &= \frac{(u+\alpha)^2 - (v-\beta)^2}{2c} \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

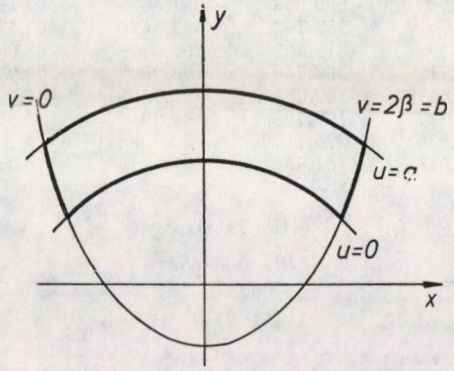
$$0 \leq u \leq a$$
$$0 \leq v \leq 2\beta = b,$$

A Lamé együtthatók:

$$H^2 = H_u^2 = H_v^2 = \frac{(u+\alpha)^2 + (v-\beta)^2}{c^2}, \tag{48}$$

a $c_{m,n}$ együtthatók kifejezése:

$$c_{m,n} = \frac{4}{MN} c^2 \left\{ \left[1 - (-1)^n\right] \cot \frac{n\pi}{2N} \sum_{i=1}^{M-1} (ih_v + \alpha)^2 \sin \frac{m\pi}{M} i + \right.$$
$$\left. + \left[1 - (-1)^m\right] \cot \frac{m\pi}{2M} \sum_{j=1}^{N-1} (jh_v - \beta)^2 \sin \frac{n\pi}{N} j \right\}. \qquad (49)$$



6. ábra

5. Számpélda I_p számítására

Az alábbi geometriai adatokkal rendelkező körgyűrűcikk csavarási tehetetlenségi ellenállását határozzuk meg a (39)-es képlet segítségével (lásd 4. ábra)

$$a = \ln 2, \qquad b = \frac{\pi}{3} \qquad \left(\frac{r_k}{r_b} = 2\right).$$

Legyen

$$M = 10, \qquad N = 10.$$

Ezekkel az értékekkel

$$h_n = \frac{\ln 2}{10}; \qquad h_v = \frac{\pi}{30}$$

lesz. λ_{mn}^2 és c_{mn} értékeit az I. és II. táblázatba foglaltuk. (c_{mn} meghatározása a (43) egyenlet segítségével történt). λ_{mn}^2 értékeit a III. táblázatban adjuk meg. Végül I_p-re az

$$I_p = \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} d_{mn}^2 = 0{,}2315\, r_b^4$$

eredményt kapjuk. A fenti szelvényre az [1]. mű 306. oldalán levő 42. táblázat szerint az

$$I_p = 0{,}2704\, r_b^4$$

vezethető le.

I. Táblázat

λ_{mn}^2 sajátértékek

m \ n	1	2	3	4	5
1	114,332	205,521	318,237	409,426	444,257
2	322,469	413,658	526,374	617,563	652,394
3	579,741	670,930	783,646	874,835	909,666
4	787,877	879,067	919,782	108,297	111,780
5	867,379	958,568	107,128	116,247	119,730

II. Táblázat

A 10^3 c_{mn} együtthatók

m \ n	1	3	5	7	9
1	6662,54	2071,030	1055,24	537,673	167,134
2	−2219,94	−690,060	−351,603	−179,151	−55,6885
3	2421,74	752,792	383,567	195,437	60,7510
4	−1028,49	−319,703	−162,897	−83,0001	−25,8003
5	1250,71	388,780	198,093	100,934	31,3749
6	−546,447	−169,861	−86,5488	−44,0988	−13,7080
7	639,527	198,795	101,291	51,6104	16,0429
8	−244,873	−76,1179	−38,7884	−19,7614	−6,14279
9	199,018	61,8642	31,5214	16,0610	4,99250

III. Táblázat

A 10^7 d^2_{mn} értékek

m \ n	1	3	5	7	9
1	3882490	134779	25065,1	9084,17	2443,21
2	152824	9046,47	1894,94	609,737	96,1706
3	101163	7231,53	1617,33	487,409	63,6609
4	13425,9	1030,57	237,389	69,4610	8,44874
5	18034,6	1410,93	327,745	95,0972	11,3490
6	3789,99	290,920	67,0126	19,6082	2,38500
7	7054,79	504,303	112,787	33,9903	4,43950
8	1859,48	110,073	23,0566	7,41896	1,17015
9	3464,31	120,262	22,3654	8,10572	2,18005

A táblázatban nem szereplő λ^2_{mn} értékek a

$$\lambda^2_{mn} = \lambda^2_{pn} = \lambda^2_{mq}\,, \quad p = 10 - m, \quad q = 10 - n \qquad (m,n = 1,2,\ldots 8,)$$

összefüggés felhasználásával tudjuk meghatározni.

A II. és III. táblázatban nem szereplő c_{mn} és d^2_{mn} értéke zérus.

IRODALOM

1. Арутюнян Н. Х. и Абрамян Б. Л.: Кручение упругях тел, Москва 1963.
2. Neuber H.: Kerbspannungslehre, Springer Verlag, Berlin (Gattingen) Heidelberg 1958.
3. Pan H. H.: Torsion of Cylinder with Cross-sectional Area Bounded by Segments of Ellipss and Hyperboles, *ZAMM* **43** (1962), 508—509.
4. Michlin S. G.—Smoliczki H. L.: Näherungsmethoden zur Lösung von Differential- und Integralgleichungen, Leipzig 1969.

The Use of Functions with Discrete Arguments for the Analysis of the Free Elastic Torsion of Prismatic Bars. The paper deals with the problem of the elastic free torsion of full-section prismatic bars which are limited by the co-ordinate lines of an orthogonal curvilinear system of co-ordinates. By using functions with discrete arguments the torsional resistance of the examined sections is produced in a closed form.

Anwendung von Funktionen mit diskretem Argument auf die Untersuchung der freien elastischen Verdrehung von prismatischen Stäben. Die Arbeit befaßt sich mit der Lösung der Aufgabe, die elastische freie Verdrehung von durch Koordinatenkurven eines orthogonalen krummlinigen Koordinatensystems begrenzten Stäben mit vollem Querschnitt zu bestimmen. Durch Anwendung von Funktionen mit diskretem Argument wird der Verdrehungswiderstand der untersuchten Querschnitte in geschlossener Form dargestellt.

FOGASKERÉK—VILLÁMHŐMÉRSÉKLET

II. VILLÁMHŐMÉRSÉKLET-KIEGYENLÍTÉS FERDE EVOLVENSFOGAZATON

KOLONITS FERENC*

[Beérkezett: 1972. október 24]

A dolgozat tanulmányozza a BLOK-féle villámhőmérséklet-csúcsok legkisebb értékre való korlátozásának módszerét ferdefogú homlokkerekek esetében. Bár a kapcsolódás kezdő- és végpontjain kiegyenlített villámhőmérséklet-csúcsok mellett felléphet egyes esetekben a szélsőpontiakat meghaladó érték is, ez a túllépés nem jelentős. Ha az elméletileg legkisebb értékre kívánnánk korlátozni a villámhőmérsékleteket, bonyolult számítás árán alig kapnánk valamivel kedvezőbb viszonyokat, mint szélsőponti kiegyenlítéssel.

Jelölések

(1. index kiskerékre, 2. nagykerékre utal, a jellemzők általában a homlokmetszeti evolvens-kapcsolódásra érvényesek.)

Θ — BLOK-féle villámhőmérséklet-csúcs
p_n — vonalnyomás
z — fogszám
Σz — fogszámösszeg: $z_1 + z_2$
ϱ — evolvensprofil homlokmetszeti görbületi sugara
p — p_n méretnélküli alakja
T — Θ méretnélküli alakja
F — T ϱ-tól függő részének négyzete
β — fogferdeségi szög
β_a — alaphengeri fogferdeségi szög
ν — p helyfüggését jellemző állandó: 0,4 cos $2\beta_a$
φ — kapcsolópont helyzetét jellemző szög $\overline{AE}$ $(0 \ldots 2\pi)$ szakaszon
A,E — kapcsolószakasz kezdete és végpontja
C — főpont
M — kapcsolószakasz felezőpontja
N — kapcsolóvonal és alapkör érintkezési pontja
P — helyi szélsőérték kapcsolópontja
a — tengelytáv
α_0 — szerszámkapcsolószög
α_h — homlokkapcsolószög
α_g — futó kapcsolószög
r — viszonylagos görbületi sugár: $\varrho/a\sin\alpha_g$
ϑ — villámhőmérséklet-vizsgálófüggvény: $2 \ln T$
R — A kapcsolópont helyzetjellemzője: $r_A(u+1)$
X — fejponti viszonylagos görbületi sugarak
$\varkappa$ — viszonylagos kapcsolószakaszhossz
δ — $A-P$ kiegyenlítést jellemző függvény: $\vartheta_A - \vartheta_P$
r_f — fejkörsugár
h_k — elméleti közös fogmagasság
q_2 — elosztószám: f_2/h_k (f_2 fejmagasság)

Egyéb jelöléseket megfelelő helyen értelmeztünk.

* Dr. Kolonits Ferenc, 1116 Budapest, Mohai u. 100.

1. Elméleti alapok

A nagy sebességű, erősen terhelhető fogaskerékhajtások kifejlődése és a kapcsolatos károsító tényezők elleni biztonság megalapozása a kutatások előterébe állította a berágódást. A berágódásos károsodás fizikai elmélete és a különböző tényezők befolyása máig sem lezárt kérdés. A szakemberek nagy része az érintkezési nyomsávon fellépő legnagyobb hőmérsékletet tekinti irányadónak BLOK szerint és számításra az általa javasolt közelítést alkalmazza [1—4], bár ezt mások vitatják [14]. Ezen kérdés közelebbi vizsgálata azonban meghaladja jelen tanulmány kereteit.

Általános evolvensfogazatok tervezésénél szokás szerint a főméretek meghatározása után kiadódó profileltolás-összeget úgy osztják fel a két kerékre, (illetve úgy határoznak meg ezzel egyenértékű más mennyiségeket, pl. a fejkörsugarakat, vagy a q_2 elosztószámot, egyszóval a helyesbítést), hogy ezzel valamilyen károsító hatást előnyösen befolyásoljanak [5]. BOTKA javasolta, hogy ezt a beavatkozási lehetőséget a berágódás elleni biztonság növelésére hasznosítsák [6], [15].

BLOK szerint a keréktest közepes hőmérsékletéhez érintkezéskor egy pillanatnyi hőmérsékletemelkedés: villámhőmérséklet adódik. Ennek legnagyobb értéke (homlokmetszeti görbületi sugarakkal)

$$\Theta_{\max} = \bar{C} p_n^{3/4} \left| \left(\frac{u \varrho_1}{\varrho_2} \right)^{1/4} - \left(\frac{\varrho_2}{u \varrho_1} \right)^{1/4} \right| . \tag{1}$$

A $\bar{C}$ szorzó a súrlódási tényezőt, továbbá olyan geometriai és egyéb jellemzőket foglal magában, amelyek a kapcsolódás lefutása során nem változnak.

BOTKA számításaiban feltételezi, hogy a surlódási tényező sem változik a kapcsolódás során és a közepes hőmérséklet, amihez (1) hozzáadódik, nem függ a profileltolások összegének felosztásától. Ekkor, ha (1)-ben a görbületi sugarak hatását mutató függvény négyzetét F-el jelöljük, továbbá bevezetjük a közepes p_n-nel képzett

$$p = \frac{p_n}{p_{n,k}}, \qquad T = \frac{\Theta_{\max}}{\bar{C} p_{n,k}^{3/4}} \tag{2}$$

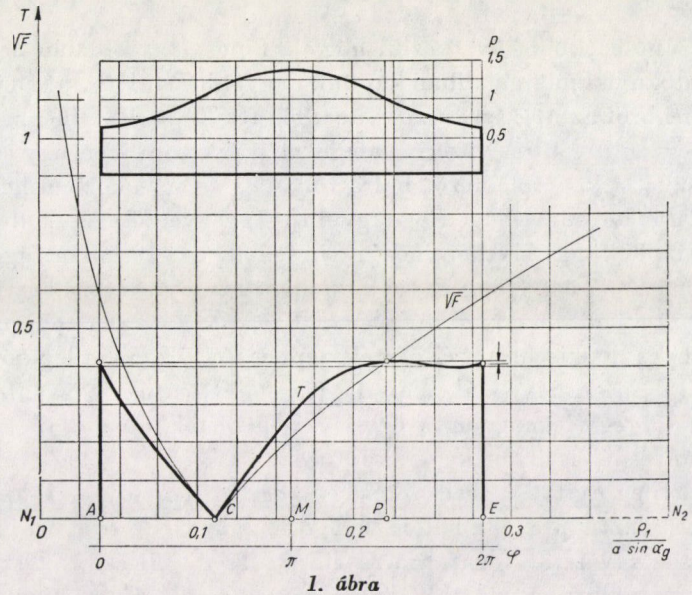
méretnélküli számokat, a hőmérsékletek változását

$$T = p^{3/4} \sqrt{F} \tag{3}$$

függvénnyel jellemezhetjük. NIEMANN szerint [7]

$$p = 1 - 0{,}4 \cos 2\beta_a \cos \varphi = 1 - \nu \cos \varphi , \tag{4}$$

ahol φ (a homlokmetszetben értelmezett) A-tól E kapcsolópontig 0 és 2 π közt változik. A viszonyokat az 1. ábra mutatja.



1. ábra

Ha a profileltolások felosztását változtatjuk, akkor (bár a kapcsolóhossz is változik egy keveset) a vonalnyomás-görbe minden pontja egy irányba tolódik a kapcsolószakasszal együtt. A főpont eltolás irányába eső oldalán az előbbihez képest azonos p-hez nagyobb, a másik oldalon kisebb F tartozik (kivéve a főpont és AE felezőpontja közötti szakaszt, de ezeknél mindig vannak nagyobb T-k az illető oldalon).

Belátható, hogy a legkisebb T-ket olyan helyzetben kapjuk, amikor „a kapcsolószakasz főpont által elválasztott két szeletén bármilyen oknál fogva maximális értékek megegyeznek" — ez a Ganz—Botka-féle fogazatrendszer helyesbítési alapelve [8].

2. A villámhőmérséklet-csúcs változása a kapcsolódás során

A továbbiakban minden vizsgálatot a homlokmetszetre vonatkoztatunk. A (3) szerinti villámhőmérséklet-képet 1. ábra mutatja.

$\sqrt{F}$ ágai kétfelé mindenkor szigorúan nőnek. Bebizonyítható, hogy azonos T mellett a jobboldali görbeág érintői sosem meredekebbek, mint a baloldali megfelelő pontban (előjelkülönbségtől eltekintve). Emellett értelmezésszerűen C, ahová a görbeágak befutnak, mindenkor balra fekszik az M középponttól, amelyre p értékei tükrösek. Ha $A-E$ kiegyenlített fogazatot vizsgálunk és $F_A = F_E$-től indulva tekintjük az azonos F-hez C két oldalán tartozó pontokat, mivel jobboldalt sosem kell kisebbet lépni kis csökkentéskor C felé, mint baloldalt, a jobboldali pontoknál a figyelembe veendő p-k gyorsabban nőnek, mint balfelől, egészen M eléréséig. Ekkor viszont a p-görbe A-tól M-ig mindenkor szigorúan növekvő jellege miatt beláthatóan nagyobbak a jobb-

oldali p-k. Mindezekből következik, hogy a főpont két oldalán azonos F-hez tartozó pontoknál a jobboldaliban kapunk nagyobb T-t. Ha tehát a jobboldalon (vagy közelebbről az $\overline{ME}$ szakaszon) nem lép fel $T_A = T_E$-t meghaladó hőfokvillám, a kiegyenlítés BOTKA szerint megfelel. Ha viszont igen, úgy a helyesbítés változtatásával a kapcsolómezőt balra tolva T_A és a — közben helyzetét változtató — P pontban fellépő (legnagyobb) T_P egyenlőségét kell biztosítani.

A szereplő függvények minőségi vizsgálatával, a szorzatfüggvény deriváltjára vonatkozó összefüggést felhasználva, bizonyítható, hogy T mind M, mind E pontokban növekvő függvény. Ezért $\overline{ME}$ szakaszon páros számú (legnagyobb és legkisebb) szélsőérték léphet fel. Elméletileg nem sikerült bizonyítani, de a görbék sajátságai alapján feltételeztük, hogy M-től indulva E felé pontosan egy legnagyobb s egy legkisebb érték létezhet (néhány szúrópróba-ellenőrzésnél is ilyen képet kaptunk).

Elméletileg nyitva marad a kérdés, hogy $A-E$-ről $A-P$-kiegyenlítésre áttérve vajon nem lép-e fel a baloldali T-k megnövekedésével ott is belső helyi szélsőérték, és így ferde fogazatnál is három kiegyenlítési eset szerepelne az egyenes fogazatokhoz hasonlóan [9]. Számszerű vizsgálatokkal szigorúan igazolni lehet, hogy ilyen eset nem állhat elő, de ez jelen tanulmány eredményeiből minőségi megfontolásokkal is valószínűsíthető.

A vizsgálatok és számítások lebonyolításában kihasználjuk a tényt, hogy a leíró függvényekben $a \sin \alpha_g$ számszerű értéke nem játszik szerepet, ezért $r = \varrho/a \sin \alpha_g$ fajlagos görbületi sugarakkal számolhatunk (külön jelzés híján mindenkor N_1 ponttól értendő). Célszerűségi szempontok alapján (3) helyett négyzetének logaritmusával számolunk:

$$\vartheta = 1{,}5 \ln p + \ln F \,. \tag{5}$$

Számításainkban, ahol ez felmerül, mindig 20°-os szerszámkapcsolószöget és állandó (elemi) fejhézagot tételezünk fel.

3. A fogazattartomány általános vizsgálata

A megfontolásokat rögzített u és β (vagy egyenértékű ν) mellett végezzük, a változó pedig R: a vizsgált $A-E$ kiegyenlített fogazat $\overline{N_1A}$ profilgörbületi sugár és $\overline{N_1C}$ viszonya ($0 < R < 1$). A kiskerék láb-, ill. mindkét kerék fejköri (fajlagos) profilgörbületi sugarai és a kapcsolószakasz hossza

$$r_A = \frac{R}{u+1}\,,$$

$$X_2 = 1 - r_A, \quad X_1 = \frac{1}{u^2\left(\dfrac{1}{X_2} - 1\right) + 1}\,, \tag{6}$$

$$\varkappa = X_2 + X_1 - 1.$$

Először megkeressük, fellép-e egyáltalán $\overline{ME}$ szakaszon helyi szélsőérték; evégből M pontból indulva Newton-féle módszerrel megkeressük $d\vartheta/dr$ zérushelyét. A szükséges összefüggések (vessző mindenkor r szerinti deriválást jelöl)

$$\vartheta' = \frac{3}{2}\frac{p'}{p} + \frac{F'}{F} = \frac{3}{2}\frac{2\pi}{\varkappa}\frac{\nu \sin\varphi}{1-\nu\cos\varphi} + \frac{1}{2r(1-r)}\frac{1+\sqrt{d}}{1-\sqrt{d}}, \tag{7}$$

ahol

$$d = \frac{1-r}{ur}; \tag{8}$$

$$\vartheta'' = \frac{3}{2}\left[\frac{p''}{p} + \left(\frac{p'}{p}\right)^2\right] + \frac{F''}{F} - \left(\frac{F'}{F}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{2\pi}{\varkappa}\right)^2 \frac{\nu(\cos\varphi - \nu)}{(1-\nu\cos\varphi)^2} + \\ + 2\frac{(2r-1)(1-d) - \sqrt{d}}{(1-\sqrt{d})^2}. \tag{9}$$

A zérushely fokozatos megközelítésére

$$r_{P,n+1} = r_{P,n} \left.\frac{\vartheta'}{\vartheta''}\right|_n. \tag{10}$$

Megjegyezzük, hogy nagy fogszámviszony és kis fogferdeség esetén a számítás összetartása gyenge; ezen különféle gyorsító fogásokkal kellett segíteni.

A kiadódó szélsőértékek és az A-ponti érték összevetésére képezzük a

$$\delta = \vartheta_A - \vartheta_P \tag{11}$$

függvényt. Az előbbi számítást többször alkalmazva másodlagos Newton-féle számítással r_A-t úgy módosítjuk, hogy δ zérussá váljék. Felírható, hogy

$$\frac{d\delta}{dr_A} = \frac{d\vartheta_A}{dr_A} - \frac{\partial\vartheta_P}{\partial r_A} - \frac{\partial\vartheta_P}{\partial\varkappa}\frac{d\varkappa}{dr_A}. \tag{12}$$

A vizsgálatot — mint az egyenes fogazatokra [9] — itt is célszerű állandó (homlok) kapcsolószám mellett végezni; legyen $\varkappa$ állandó, mégpedig a kiinduló R-hez $A-E$ kiegyenlítés mellett adódó érték. Ez esetben (12), (7) és (4) figyelembevételével

$$\frac{d\delta}{dr_A} = \left.\frac{F'}{F}\right|_A - \left.\frac{F'}{F}\right|_P < 0, \tag{13}$$

a sorozatos közelítések pedig

$$r_{A,n+1} = r_{A,n} - \frac{\delta_n}{\left.\dfrac{d\delta}{dr_A}\right|_n}. \tag{14}$$

Így végül is az $A-P$ kiegyenlítéshez tartozó r_A(v. $1 - r_A = X_2$) értéket kapjuk, ami a rögzített $\varkappa$ kapcsolóhossz helyzetét meghatározza.

Hogy a másodlagos közelítéssorozatot M helyett jobb közelítésből indíthassuk, vegyük tekintetbe, hogy (7) szélsőértékhelyen zérus voltából következik esetünkre

$$\frac{dr_P}{dr_A} = \frac{\vartheta''_{p,P}}{\vartheta''_P}, \tag{15}$$

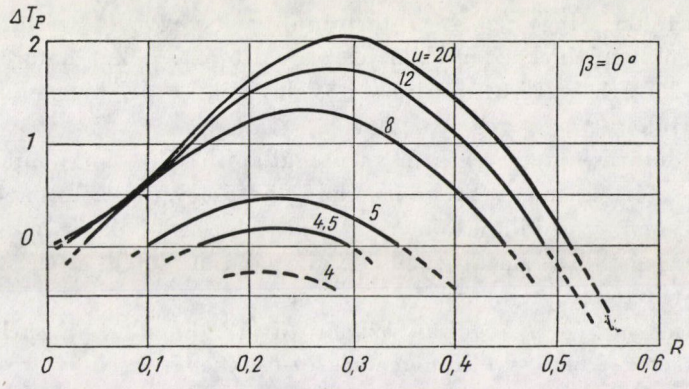
ahol a számláló (9) első tagját jelöli. Ezzel a (14) szerint számított r_A-változáshoz közelítőleg heghatározhatjuk r_P megváltozását, amivel az előző (10) sorozatban kapott szélsőértékhelyet helyesbítjük kiinduló értéknek.

Különféle fogferdeségek és fogszámviszonyok mellett sorozatosan vettük fel R-t az értelmezési tartományban, és elvégeztük az előbbiek szerint az $A-P$ kiegyenlítést [zérus fogferdeség mellett (4) nem az egyenes fogazat ismert vonalnyomásképét adja, a számítás célja a kis fogferdeségek viszonyaira elvi interpolálhatóság biztosítása]. A 2.—4. ábrán feltüntettük, hogy az $A-E$-ről A$-P$-kiegyenlítésre történő áttérés hány százalékkal javítja (csökkenti) T_P-t. Kis R-nél $A-E$ a megfelelő; $A-P$ ront a helyzeten. Bizonyos R érték felett egyideig növekvő (csekély) javulást tapasztalunk, majd a javulás csökken és egy másik R-határértéken túl újra $A-E$ kiegyenlítéssel kapjuk a legkisebb villámhőmérsékleteket. A javulás legnagyobb értéke és a tartomány szélessége u-val nő: bizonyos fogszámviszony alatt $A-E$ kiegyenlítés végig megfelelő. Ez a legkisebb u, ahol az $A-P$ kiegyenlítés szerephez jut, a fogferdeséggel együtt nő: 0°-nál kb. 4,29, 10°-nál 4,98, 20°-nál 8,23; 30° esetében még $u =$ $= 20$-nál is végig megfelel az $A-E$ kiegyenlítés.

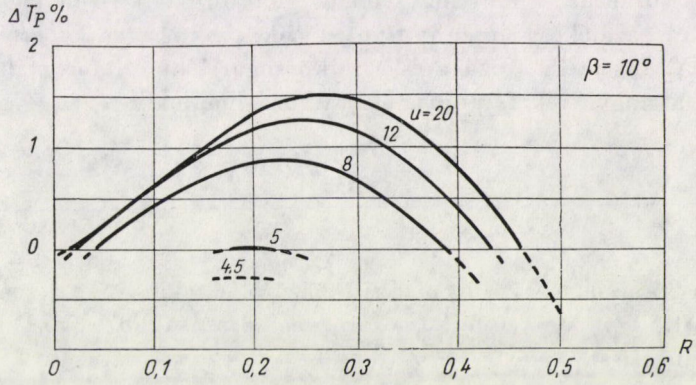
Kísérjük végig a viszonyok változását a lehetséges kiegyenlített fogazatokon. Kis R kis r_A-t, nagy $\varkappa$-t jelent; ha R-t (r_A-t) növeljük $A-E$ kiegyenlítés mellett, $\varkappa$ állandóan csökken. Első határhelyzetben egyszerre $A-E$ és $A-P$ kiegyenlített fogazatot kapunk. Az $A-P$ tartományt ne R (vagyis az $A-E$ kiegyenlítéshez tartozó r_A) szerint járjuk végig, hanem r_A további növelése mellett határozzuk meg úgy $\varkappa$-t, hogy az $A-P$ kiegyenlítés fennmaradjon, ezen r_A-nak (6) szerint feleljen meg R^*. Bebizonyítható, hogy ilyen feltételek mellett

$$\frac{d\varkappa}{dR^*} = (u+1)\frac{2\pi}{\varphi_P}\left[\frac{\left.\frac{F'}{F}\right|_A}{\left.\frac{F'}{F}\right|_P} - 1\right] < 0, \tag{16}$$

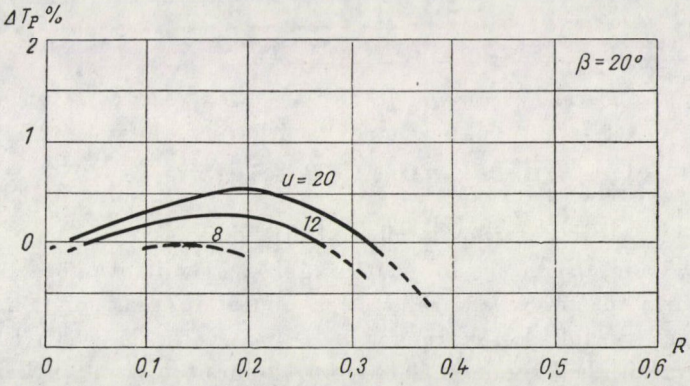
ahol φ_P a szélsőérték helye (4)-beni értelmezés szerint. A $\varkappa$ érték r_A további növelésével állandóan csökken, végül is r_A eléri a második R-határhelyzetnek



2. ábra



3. ábra



4. ábra

megfelelő értéket. Hogy az $A-P$-tartományt R vagy R^* szerint járjuk be, csupán $\varkappa$ csökkenésének ütemében jelent változást; a két határon $R^* = R$. A második határhelyzet után újra R növelésével, $A-E$ kiegyenlítés mellett csökkenthetjük $\varkappa$-t.

A gondolatmenetet megfordítva megállapíthatjuk, hogy minden relatív kapcsolóhossz-értékhez egyértelműen rendelhető egy helyzet, amelyben — és csakis amelyben — a villámhőmérsékletek a legkisebbek és ezt vagy $A-E$ vagy $A-P$ kiegyenlítés határozza meg: vizsgálatunk lefedi a teljes számításba jövő fogazattartományt.

A számszerűségek azonban azt mutatják, hogy $A-E$ helyett $A-P$ kiegyenlítéssel elérhető villámhőmérséklet-csökkenés csekély, a számítások pedig bonyolultak. Az elmélet önmagában is tartalmaz olyan elhanyagolásokat, amelyek mellett ekkora változások már nem érvényesülnek.

Az 5.—7. ábrákon feltüntettük, hogy az $A-E$-ről $A-P$ kiegyenlítésre való áttérés során az A pont helyzetét meghatározó X_2 viszonylagos görbületi sugár értéke százalékosan mennyit növekszik: ezek is igen kis értékek. Adott fogazaton X_2 kis megváltozása és a fejkörsugár kapcsolt megváltozása közt fennáll (α_f a nagykerék fejpontjához tartozó homlokmetszeti evolvensszög):

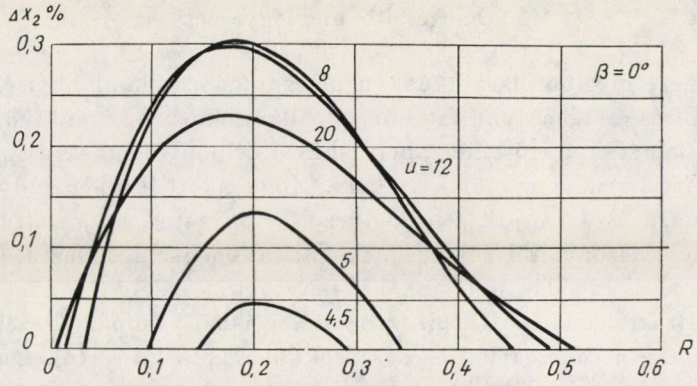
$$\frac{\Delta r_{f2}}{r_{f2}} = \sin^2\alpha_f \frac{\Delta X_2}{X_2}. \tag{17}$$

Ha a kapcsolóhossz kis megváltozásától eltekintünk, a számított X_2-változásokat ily módon a fejkörsugár megváltozásában követhetjük. Az α_f szögre felülbecslést ad

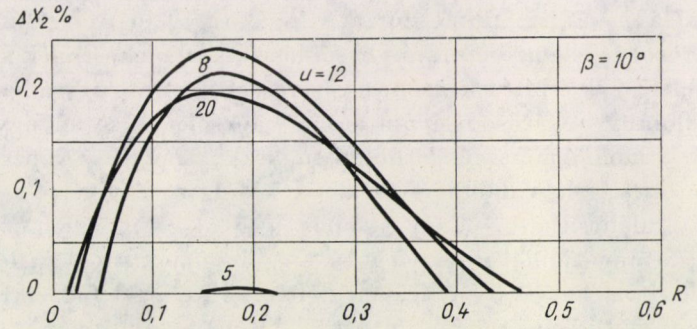
$$\sin^2\alpha_f \sim \frac{1}{1+\dfrac{1}{\left[\dfrac{u+1}{u}\tan\alpha_h\right]^2}}. \tag{18}$$

$u = 4{,}3$, $\alpha_h = 30°$-kal számolva (18) 0,336-ot ad, ezt összevetve az 5.—7. ábrákon feltüntetett értékekkel, megállapíthatjuk, hogy a kiegyenlítésben döntő szerepet játszó A pont helyzetét megszabó r_{f2} legfeljebb kb. 0,1%-kal módosul.

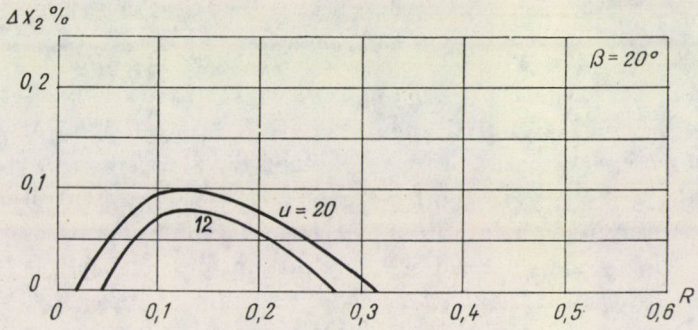
Bódi kiegyenlítési vizsgálataiban [10] felhívja a figyelmet arra, hogy felesleges a számításban olyan pontosságú kiegyenlítésre törekedni, ami a gyakorlatban a tűrések és elkerülhetetlen pontatlanságok miatt nem valósítható meg. Ha egyedül a kerékátmérő tűréseit vizsgáljuk meg (KGF 24.4226-67 szerint), kérgesítetlen kerekeknél 80 mm, kérgesítetteknél (hőkezelés előtt) 315 mm kerékátmérő alatt 0,1%-nál nagyobb bizonytalanság adódik. A 0,1%



5. ábra



6. ábra



7. ábra

azonban felső határ, a kerékátmérő tűrésén kívül pedig egyéb bizonytalansági tényezők is vannak, magában az elméletben is.

Összefoglalóan: bár elméletileg a megállapított tartományban az $A-P$ kiegyenlítés csökkenti a villámhőmérsékleteket a legkisebbre, a különbség csekély és bizonytalan volta miatt gyakorlatilag szükségtelen eltérni az $A-E$ kiegyenlítéstől.

4. Kiegészítő megjegyzések

Elvégzett megfontolásainknak nem csupán a villámhőmérsékletre történő helyesbítés esetében van értelme. A villámhőmérsékleten kívül több más károsodásjellemző mutató lehet „helyesbítési célpont", ennek alapján különféle helyesbítési rendszerek alakultak ki. Hogy adott esetben milyen helyesbítés alkalmazásával kapjuk a legkedvezőbb fogazatot, az a hajtás igénybevételi és üzemviszonyaitól függ [4]. A villámhőmérséklet-kiegyenlítés akkor célszerű, ha a berágódás a leginkább fenyegető veszély — nagysebességű, erősen terhelt kerekeknél. Ha pl. nyitott hajtásnál a kopással szembeni biztonság növelése a cél, a relatív csúszásokkal kapcsolatos fajlagos súrlódási munkát [11]csökkenthetjük kiegyenlítéssel a legkedvezőbb értékre. BOTKA hármas kiegyenlítési elve(villámhőmérséklet, relatív csúszás — illetve fajlagos súrlódási munka [11] — és az ALMEN-szorzat vizsgálata [5], [6]) megmutatta, hogy bizonyos károsodásjellemző mutatók hasonló szerkezetűek. Ennek következtében a megfelelő helyesbítések azonos vezérelvek szerint vizsgálhatók.

Ha valamilyen károsodási mutató a kapcsolódás során úgy változik, hogy csupán a homlokmetszeti görbületi sugarak $a \sin \alpha_g$-hez képesti viszonylagos értékétől függ, a villámhőmérsékletre kidolgozott elmélet kellő változtatásokkal általánosítható. Ezért — bár a gyakorlati villámhőmérséklet-helyesbítés szempontjából érdektelen — megvizsgáljuk, hogyan lehet a fentebb megállapított határhelyzetnek megfelelő pontokat a fogazattartományban megkeresni és hogyan lehet adott $(u, \beta, \Sigma z, \alpha_g)$ fogazaton $A-P$ kiegyenlítést végezni, továbbá táblázatot szerkeszteni.

4.1 *A határgörbék*

Jellemezzék adott u és β mellett a vizsgált határhelyzetet X_1 és X_2 viszonylagos fejponti görbületi sugarak ($A-E$ — $A-P$ határon (6) szerint R mindkettőt meghatározza). Ezen értékeknek α_g — Σz síkon folytonos vonal felel meg, amelyet α_g sorozatos felvételével [12] szerint pontról-pontra számíthatunk. A számítás vázlata (a képleteket ν-re vonatkoztatva is megadjuk, mivel sok esetben β-nál célszerűbben alkalmazható; az átszámítás (4) értelmezés szerint

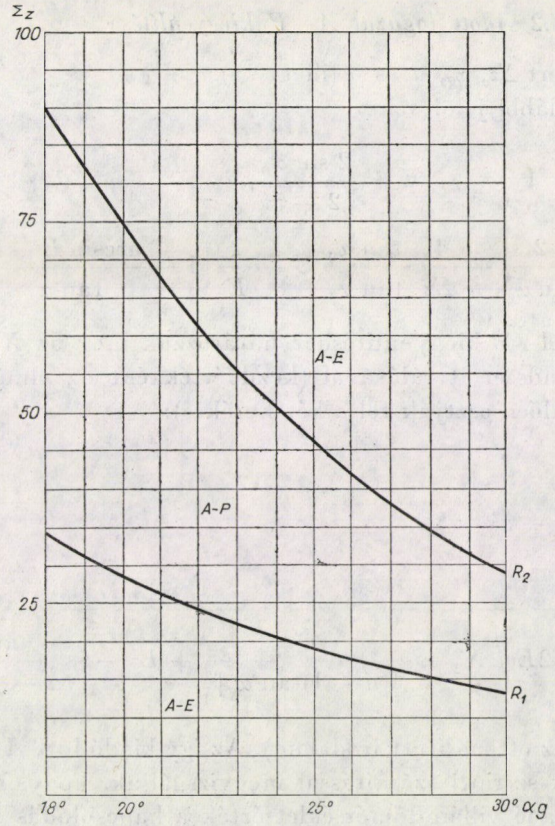
$$\nu = 0{,}4(1 - 2 \sin^2 \beta \cos^2 \alpha_n) \tag{19}$$

képlet alapján lehetséges).

Legyen (állandó, elemi fejhézaggal számolunk)

$$F = \sin \alpha_g \left\{ \sqrt{X_1^2 + \frac{1}{[(u+1)\tan \alpha_g]^2}} + \sqrt{X_2^2 + \frac{u^2}{[(u+1)\tan \alpha_g]^2}} \right\},$$

$$C = \frac{1}{2 \cos \alpha_g \sqrt{\cos^2 \beta + \tan^2 \alpha_0}} = \frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_g \sqrt{2 + 5\nu}}, \tag{20}$$



8. ábra

$$D = \frac{\tan \alpha_g - \alpha_g + \arctan \dfrac{\tan \alpha_0}{\cos \beta}}{2 \tan \alpha_0} = \frac{\tan \alpha_g - \alpha_g + \arcsin \dfrac{2 \sin \alpha_0}{\sqrt{2 + 5\nu}}}{2 \tan \alpha_0}.$$

Ezeket α_g felvételével meghatározva,

$$\Sigma z = \frac{2}{D + C(F - 2)}. \tag{21}$$

Az összetartozó értékeket ábrázolva, a határgörbe kiadódik. A számítást asztali mini-számítógépbe (HEWLETT—PACKARD 9100B, 32 rekesz, amelyekben vagy egy szám, vagy 14 elemi utasítás helyezhető el) programoztuk és $\beta = 0°$, $u = 5$ mellett a számításba jövő fogazattartományban kellőszámú pontot határoztunk meg mind a két határgörbén ($R_1 = 0{,}09925$, $R_2 = 0{,}34616$, l. a 2. ábrán) — a görbéket a 8. ábra mutatja. Nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy a különböző kiegyenlítési tartományokat hogyan korlátozzák egyéb jelenségek (interferencia stb.) — e tekintetben az irodalomra utalunk [5], [11].

4.2 *Adott fogazat A—P kiegyenlítése*

Legyen ismert Σz, α_g, u és β (illetve ν).
Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$E = \frac{2 \sin \alpha_0}{\sqrt{2 + 5\nu}},$$
$$G = \frac{2}{\sin \alpha_g} + \frac{4}{\Sigma z} \frac{\tan \alpha_0}{\tan \alpha_g} E - \frac{1}{E}\left(1 + \frac{\arcsin E - \alpha_g}{\tan \alpha_g}\right). \tag{22}$$

Először az $A—E$ kiegyenlítéshez határozzuk meg az $X_{1,2}$ értékeket az alábbi egyenletrendszer iterálásával (kezdőértékként az elméleti közös fogmagasságot egyenlően osztjuk fel a két kerékre):

$$X_2 = \frac{u^2}{\frac{1}{X_1} + u^2 - 1},$$
$$X_1 = \sqrt{X_2^2 - 2E\sqrt{X_2^2 + \frac{u^2}{[(u+1)\tan \alpha_g]^2}} + E^2 + \frac{u-1}{(u+1)\tan^2 \alpha_g}}. \tag{23}$$

(L. [13] és az ott említett irodalom). Az így kiadódott $A—E$ fogazatot a (6)—(10) képletek szerinti számítással megvizsgáljuk, hogy fellép-e a szélsőpontiakat meghaladó villámhőmérséklet-érték a kapcsolódás során. Ha igen, $A—P$ kiegyenlítést kell alkalmazni, ami másodlagos iterációval számítható. Nem alkalmazhatjuk azonban változatlanul a (11)—(15) képleteket, mert jelen esetben X_1 és X_2 összetartozó értékeit, vagyis az $r_A - \varkappa$ kapcsolatot nem a kapcsolószakasz állandó hosszúsága, hanem

$$G = \sqrt{X_1^2 + \frac{1}{[(u+1)\tan \alpha_g]^2}} + \sqrt{X_2^2 + \frac{u^2}{[(u+1)\tan \alpha_g]^2}} \tag{24}$$

jelenti. Igazolható, hogy emiatt (13) megfelelő alakja

$$\frac{d\delta}{dr_A} = \frac{F'}{F}\bigg|_A - \frac{F'}{F}\bigg|_P \left[1 - \frac{\varphi_P}{2\pi}(1 - I)\right] < 0, \tag{25}$$

ahol φ_P a szélsőérték helye, és

$$I = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{[X_1(u+1)\tan \alpha_g]^2}}{1 + \frac{u^2}{[X_2(u+1)\tan \alpha_g]^2}}}; \tag{26}$$

továbbá (15) módosított formája

$$\frac{dr_P}{dr_A} = \frac{\vartheta''_{p,P}}{\vartheta''_P}\left[1 - \frac{\varphi_P}{2\pi}(1 - I)\right]. \tag{27}$$

A másodlagos számítás lépései: az $A-E$ fogazaton meghatározott szélsőérték adataival (25), (26) és (14) segítségével meghatározzuk a helyesbítő r_A-változást: ez X_2 változásának negatívja. A módosított X_2-höz (24) (illetve (23) második képlete) alapján geometriailag összetartozó X_1-t számolunk, (27)-el módosítjuk az előbbi számításban kapott szélsőértékhelyet (az előző lépés adataival, nem az újonnan kapott $X_{1,2}$-vel számolunk) és (6)—(10) szerint megkeressük a változtatott fogazaton a szélsőértékeket. Megfelelő számú lépés után kellő pontossággal kapjuk az $A-P$ kiegyenlítést jellemző $X_{1,2}$ értékeket, amelyből az alapadatokkal bármilyen fogaskerékjellemző számítható.

Példaként bemutatjuk két adott fogazat fenti módszerrel meghatározott, $A-P$ kiegyenlítéshez tartozó jellemzőit (egységnyi modul mellett)

Adat \ Fogazat	1	2	Adat \ Fogazat	1	2
β	10°	10°	ν	0,378699	0,378699
u	8	8	Σz	90	117
α_0	20°	20°	α_g	21°	21°
R_{A-E}	0,343831	0,413399	$\Delta X_2\%$	0,059853	−0,035776
X_1	0,281999	0,245224	X_2	0,962372	0,953725
ϑ_P	−1,771482	−2,191878	T_P	0,412408	0,334226
T_A	0,412408	0,334225	T_E	0,406085	0,337409
$\varphi_P/2\pi$	0,746919	0,765620	$\Delta T_P\%$	0,277203	−0,216720
a	45,90995	59,68293	h_k	1,99633	1,99523
r_{f1}	6,64873	8,11405	r_{f2}	41,25755	53,56411
q_2	0,224766	0,256921			

Látható, hogy a 2. fogazatnál az $A-P$ kiegyenlítés szükségtelen, $A-E$-hez képest a villámhőmérsékletcsúcsok növekszenek.

Az 1. ábra az 1. fogazat adatai szerint készült.

4.3 *Táblázatszerkesztés*

Vizsgálataink szerint a fogazatok teljes tartományában legkisebb értékre tudjuk csökkenteni a villámhőmérsékletet, ha $A-E$ vagy $A-P$-kiegyenlítést alkalmazunk (egyéb károsodásjellemzőre alkalmazva a módszert, számításba kell venni, hogy esetleg $A-C$ szakasz belsejében is felléphet helyi szélsőérték — ennek vizsgálata meghaladja jelen dolgozat keretét). Az előbbi pont módszerével bármilyen fogazaton meghatározhatjuk a kiegyenlített állapot kellő jellemzőit; ha azonban nagyobb tartományban sűrűn kell kiegyenlített fogazat-

jellemzőket előállítani (táblázatszerkesztés vagy valamilyen tulajdonság vizsgálata céljából), a számítási munkát célszerű elrendezéssel csökkenthetjük.

$A-E$ kiegyenlítési eset egyszerű összefüggést jelent X_1 és X_2 között; valamelyiküket felvéve az összetartozó értékpár könnyen meghatározható. Egy $X_{1,2}$ értékpárhoz az $\alpha_g - \Sigma z$ értékpárok sorozata tartozik, a számítás módszerét 4.1-ben ismertettük. A számításokat rögzített u és β mellett végezzük. Így végül is kiegyenlítés szerint összetartozó u, β, $X_{1,2}$, α_g, Σz értékeket kapunk, amelyek egy-egy fogazatot jellemeznek, és ennek ismeretében tetszőleges fogazatjellemző (pl. q_2) számítható. A kiadódó jellemzők a számítás során természetesen nem szükségképp kerek értékek: táblázatszerkesztéshez interpolálnunk kell.

A 3. pontban ismertetett vizsgáló számítás (felvett R_{A-E} értékből kiindulva) tulajdonképpen $A-P$ kiegyenlítés szerint összetartozó $X_{1,2}$ értékeket képez. Ugyanis R_{A-E} egyrészt meghatározza (6) szerint $\varkappa$-t, amit a vizsgálat során változatlannak tekintünk, másrészt a számított $r_{A,A-P}$-ből kiadódó X_2-ből (6) 3. képletével X_1-et számíthatjuk. Ezen összetartozó $X_{1,2}$ értékpárokra az előbbi gondolatmenet változatlanul alkalmazható: így $A-P$ kiegyenlített fogazatok sorozatát képezhetjük.

5. Az eredmények áttekintése

Ferde fogazatoknál a Blok-féle hőmérsékletcsúcs változása a kapcsolódás során a homlokmetszetben vizsgálható. A villámhőmérsékletek nagysági viszonyait az A és E pontok elhelyezkedése $\overline{N_1N_2}$ szakaszon egyértelműen megszabja, annak hosszától függetlenül. Az $\overline{AE}/\overline{N_1N_2}$ viszonylagos kapcsolóhossz minden értékére egy és csakis egy helyzet létezik, amikor a villámhőmérsékletek a legkisebbek: ez bizonyos tartományban $A-P$, másutt $A-E$ kiegyenlítésnek felel meg. Az $A-P$ kiegyenlítéssel viszont $A-E$ alkalmazásához képest csak kevéssé csökken a legnagyobb villámhőmérséklet, a számítás pedig bonyolult. Az $A-E$ és $A-P$ kiegyenlített helyzet között továbbá kicsi a különbség, a gyártási tűrések és elkerülhetetlen üzemi pontatlanságok miatt a javulás nemigen érvényesül. Ezért gyakorlatilag az $A-E$ kiegyenlítés a teljes fogazattartományban megfelel.

Mivel más károsodásjellemző mutatók kiegyenlítéses csökkenésénél elvileg hasonló lehet a helyzet, az esetleges alkalmazhatóság miatt kiegészítettük a megfontolásokat. Egy A és E helyzet, u és β adatnégyesnek az $\alpha_g - \Sigma z$ síkon egy görbe felel meg: ily módon a kiegyenlítési esetek határaira, vagy más jellegzetes esetekre a kapcsolóvonalon viszonylagos értékek melletti vizsgálattal kapott eredményekhez megkereshetjük a megfelelő fogazatok adatait (ez a módszer táblázatszerkesztésnél is használható). Kidolgoztuk továbbá β, Σz, α_g, u jellemzőkkel adott fogazat $A-P$ kiegyenlítésének módszerét is.

IRODALOM

1. BLOK, H.: The Surface Temperatures under Extreme Pressure Lubricating Conditions. Szerző kiadása, Delft (Hollandia) 1937.
2. THEYSE, F. H.: Die Blitztemperaturhypothese nach BLOK und ihre praktische Anwendung bei Zahnrädern, *Schmiertechnik*, **14** (1967), 22–29.
3. NIEMANN, G.—SEITZINGER, K.: Die Erwärmung einsatzgehärteter Zahnräder als Kennwert für ihre Fresstragfähigkeit, *VDI–Z.* **113**, (1971), 97–102.
4. ERNEY GY.: A fogazatrendszerekről, *Járművek, Mezőgazdasági Gépek*, **18**, (1971), 59–61.
5. VÖRÖS I.: Gépelemek III. (Fogaskerekek), Tankönyvkiadó, Budapest 1961.
6. BOTKA I.: Fogaskerékméretezés kiegyenlített kontakthőmérsékletre, *Gép* **16** (1964), 425–430.
7. NIEMANN, G.: Maschinelemente, Bd. II. Springer, Berlin 1961.
8. GANZ–BOTKA fogazatrendszer magyar (143169/1954. sz.), USA (2943509/1960. sz.), svájci (362274/1962. sz.) szabadalmi leírása.
9. KOLONITS F.: Kiegyenlítési esetek a GANZ–BOTKA fogazatrendszerben, *Gép*, **19** (1967), 339–343.
10. BÓDI J.: Kiegyenlítési feltételek biztosítása hengereskerekeknél. BME doktori értekezés, Budapest 1971.
11. Кудрявцев, В. Н.—Державец, Ю. А.—Глухарев, Е. Г.: Конструкции и расчет зубчатых передачов, изд. Машиностроение, Ленинград, 1971.
12. KOLONITS F.: Elosztószám-táblázat készítése a GANZ–BOTKA fogazáshoz, *MTA VI. Oszt. Közl.*, **39** (1967), 227–232.
13. KOLONITS, F.: Calculation of Gear Correction by Iteration, *Acta Techn. Hung.*, **56** (1966), 3–20.
14 FLECK, W.: Beitrag zur Klärung der Fresstragfähigkeit bei Wälzgleiten. *Maschinenbautechnik* **12** (1963) 209–216., 438–444.
15. TERPLÁN Z.—LÉVAI I.: Gépelemek IV. (Fogaskerekek), Felsőoktatási Jegyzetellátó, Budapest 1962.

Flash Temperature of Gears. II. Flash Temperature Equalization on Helical Involute Toothing. The paper investigates the methods for minimizing BLOK's flash temperature equalized the case of helical spur gears. Although in some cases of flash temperature peaks in the beginning and at the end of the engagement there may arise temperatures exceeding those, this excess is not important. If the flash temperatures were to be limited to the theoretical minimum values, slightly better results would be obtained then with the equalization for the extreme points, but at the price of complicated calculations only.

Blitztemperaturen von Zahnrädern. II. Blitztemperatur-Ausgleich an schrägen Evolventenverzahnungen. In der Arbeit werden die Methoden für die Begrenzung der bei schrägverzahnten Stirnrädern auftretenden BLOK'schen Blitztemperaturspitzen auf ein Mindestwert untersucht. Obwohl bei für Blitztemperaturspitzen in den Anfangs- und Endpunkten des Eingriffs ausgeglichenen Verzahnungen in einigen Fällen höhere Temperaturen als diejenigen an den Grenzstellen auftreten können, ist diese Überschreitung nicht bedeutend. Sollen die Blitztemperaturen auf die theoretischen Mindestwerte beschränkt werden, so können auch durch komplizierte Berechnungen kaum bessere Verhältnisse erzielt werden, als beim Ausgleich für die Grenzstellen.

GÖRDÜLŐCSAPÁGYAK ELASZTIKUS REZGÉSE*

I. RÉSZ: A FORGÓ TÖMEG SAJÁT TENGELYÉRE VONATKOZÓLAG KI VAN EGYENSÚLYOZVA

SZŐKE BÉLA**

a műsz. tud. kandidátusa

[Beérkezett 1969. szeptember 29.]

A dolgozat azt tárgyalja, milyen mozgást végez különböző üzemi körülmények közt a forgó tengelynek a csapágy síkjában fekvő középpontja azon a területen belül, amelyet a hézag és a terhelésből eredő deformációk engednek számára. Kimutattuk, hogy egyetlen olyan erőközéppontból hat az erő, amely magában foglalja a gördülőcsapágy geometriai adatait és a legfontosabb üzemi viszonyok paramétereit. Stribeck számításait kiegészítettük a stabilis golyóelhelyezkedés esetére. Kimutattuk, hogy a külső futópálya egy bizonyos fordulatszámhatárig meghatározott helyen a fordulatszámnál szaporább kalapálást szenved. Ezen a billegő mozgáson kívül a tengelyközépnek ringó mozgási lehetősége is van, amelynek szöge meghatározható. Egyszerű mechanikai és geometriai szemlélet alapján meghatároztuk azokat az üzemi adatokat, melyeknél a legnagyobb dinamikus hatások várhatók.

I. Bevezetés***

A gördülő csapágyak *rezgésének* vizsgálatakor külön figyelmet érdemel annak kutatása, hogy ezt a jelenséget mi okozza. JÜRGENSMEYER [2] főképpen a gyártási, vagy szerelési *hibák okozta* rezgésekkel foglalkozik. PERRET [3, 7] és MELDAU [9] a terhelés folytán bekövetkező *alakváltozásokban* is rezgést keltő ok után kutatnak, SZŐKE [10], [25—28] rámutatott arra, hogy a deformációmentesnek képzelt teljesen hibátlan csapágynál is felléphetnek „*kinetikus*" rezgések. Miután a gördülőcsapágyak elméleti vizsgálatában STRIBECK [1] fejtegetései óta a deformáció fogalmának bevezetése különösen fontos szerepet játszik és a valóságban az alakváltozás a terhelés függvényeként mindig fellép, érdemes e rezgést keltő okkal behatóbban foglalkozni annál is inkább, mivel az e kérdéssel foglalkozó fent említett két szerző csupán az ilyen csapágyaknál

* A Magyar Tudományos Akadémia 1958. évi pályázatán „Mikroszkóp" jeligével díjat nyert tanulmány átdolgozása.

** Dr. Szőke Béla c. egyet. docens, 1182 Budapest, Batthyány L. u. 139.

*** Az irodalomjegyzék a dolgozat II. részének végén található.

legritkábban előforduló egész kis fordulatszámok (nulla fordulat) esetét tárgyalja, és fejtegetéseik eredményeire vonatkozólag nincsenek egy véleményen [8].

A kérdés lényege ezek szerint tisztázandó és a vizsgálat az összes üzemi viszonyokra kiterjesztendő.

E mikrogeometria világában végbemenő jelenségek leírásának feladatát kívánja az alábbi fejtegetés arra az általános esetre megoldani, melynél a gördülő csapágy szerkezetének és az üzemi viszonyoknak összes jellemző paraméterei figyelembe vehetők.

II. Kiindulási feltételek

A gördülő testek méretezésére vonatkozó vizsgálatokban a golyóscsapágyat hézagmentesnek képzelik és ilyenkor némi számítási könnyebbséget jelent, ha egy golyót a külső erő hatásvonalába képzelnek. A gyakorlati esetekben azonban úgyszólván mindig van kisebb-nagyobb radiális csapágyhézag és ilyenkor a tengely csak akkor van stabilis helyzetben a külső gördülő pályához képest, ha legalább *két* görgő, nagyobb terhelésnél pedig általában *páros* számú görgő érintkezik a gördülő pályával (1. ábra). Századunk elején végzett klasszikus elméleti vizsgálatokhoz híven egyelőre (a XI. fejezetig) feltételezzük, hogy a Hertz-féle benyomódások folytán a gördülőtestek szenvedik az alakváltozást a külső és belső gördülő pályák pedig köralakúak maradnak.

Feltételezzük továbbá, hogy a gördülő testek (amiket a következőkben röviden görgőknek, vagy golyóknak nevezünk tekintet nélkül arra, hogy a csapágyhézagnak görgőscsapágyaknál nagyobb a jelentősége, mivel a golyók amúgyis jobban deformálódnak) terheletlen állapotban a belső gördülő pályával érintkeznek és a hézag a golyók külső burkoló köre és a gördülő pálya között jelentkezik.

Ilyen feltételek mellett a forgásban levő tengely O középpontja a golyó kosárral együtt a külső gördülőkör K középpontja körül olyan keringő mozgást végezhet, amelynél a pálya excentricitása terheletlen állapotban kisebb, terhelt állapotban pedig a golyók belapulása folytán nagyobb.

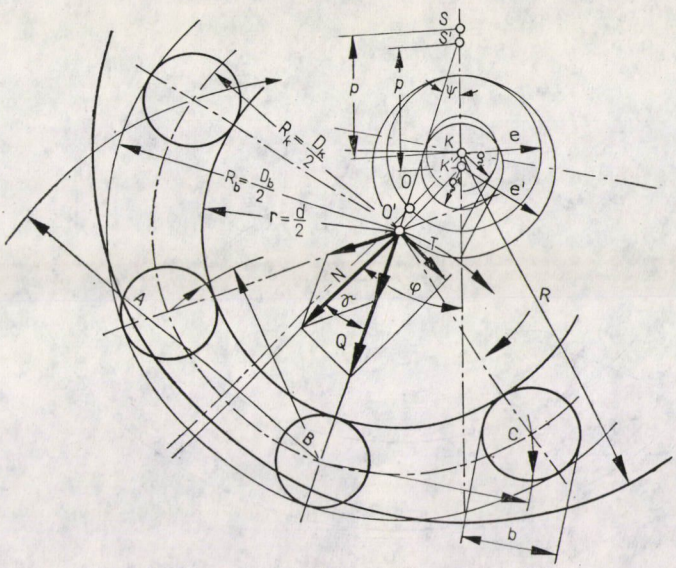
Áttekinthetőség kedvéért a 2. ábrában külön feltüntettük azt a geometriai összefüggést, ami akkor jelentkezik, amikor a golyók külső burkoló körének középpontját a külső gördülőkör K középpontjából sugárirányban abba az O helyzetbe toljuk el, ahol már két golyó érinti a külső gördülő pályát.

Az ábrából látjuk, hogy ebben a helyzetben

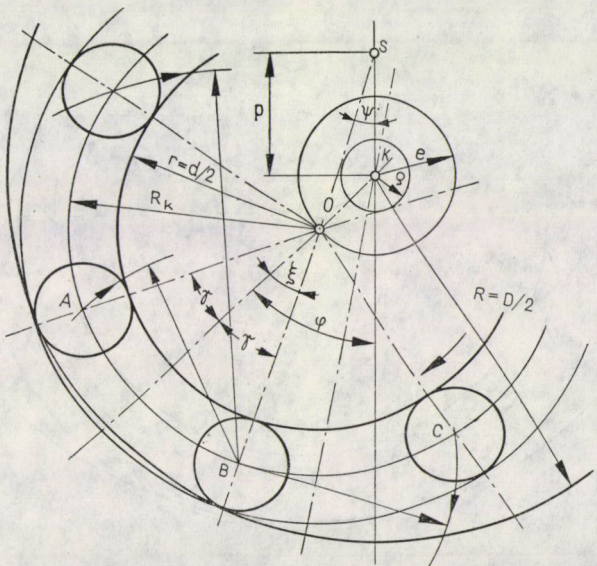
$$KO = e = \frac{h}{\cos \gamma} \tag{1}$$

excentricitás jelentkezik, ahol

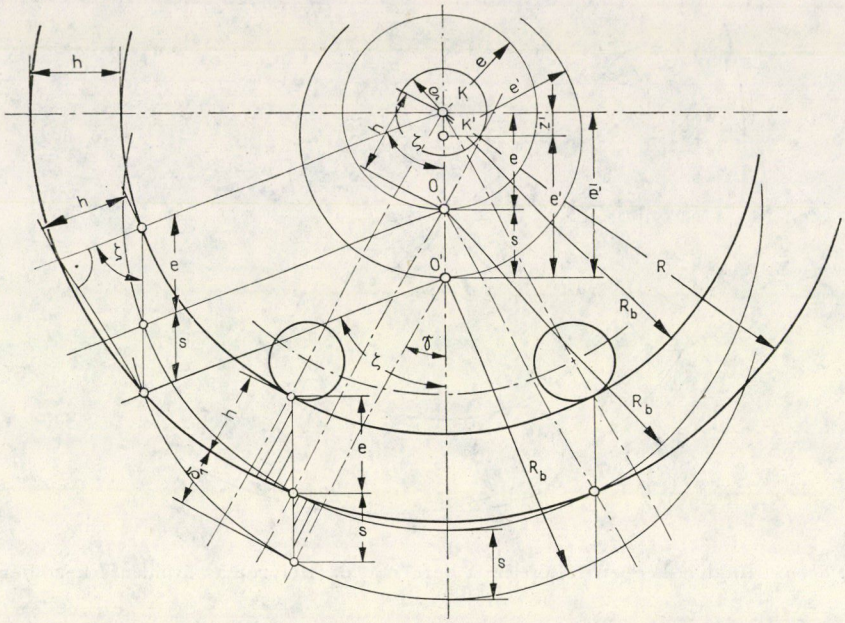
$$h = e \cos \gamma$$



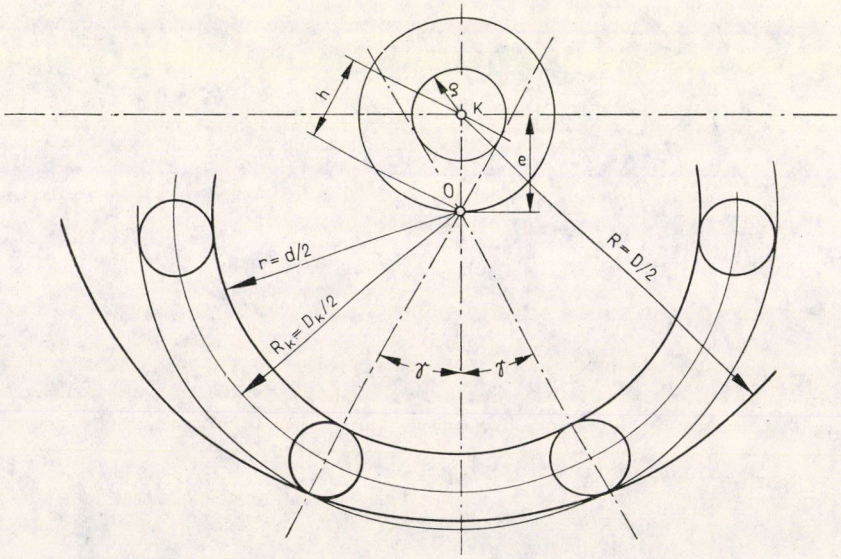
1. ábra. Kiindulásképpen feltételezett deformáció. (Helyzet az átbillenés kezdetének pillanatában)



1a. ábra. Átbillenés kezdete deformációmentes esetben



2. ábra. A deformáció folytán létrejött geometriai összefüggések



2a. ábra. Geometriai összefüggések deformációmentes esetben

a terheletlen csapágynak az a radiális hézaga, amely az érintkező golyóknál eltűnik.

Ha ezután terhelés folytán ennél az első golyópárnál fellépő δ_1 golyódeformáció következtében a tengely O pontja s távolsággal süllyed O'-be, akkor az ábra jelöléseivel

$$KO' = \bar{e}' = e + s = \frac{h + \delta_1}{\cos \gamma}, \tag{2}$$

és (1) tekintetbe vételével

$$\delta_1 = s \cos \gamma . \tag{3}$$

Az s süllyedés mellett valamely tetszőleges $\xi = 2(n + 1)\gamma$ $\sphericalangle$-höz tartozó δ deformációnál

$$e + s = \frac{h + \delta}{\cos \xi}. \tag{2a}$$

Az ábra alapján közvetlenül megállapítható a golyók burkoló körének az a 2ζ szögnyílása, amely s deformációs tengelysüllyedés mellett a gördülőpályával érintkező golyókat magában foglalja.

A (2a) szerint ugyanis azt a szöget kell keresnünk, amelynél a golyó deformációja nulla, vagyis

$$e + s = \frac{h}{\cos \zeta},$$

ahonnan (1) tekintetbevételével

$$\cos \zeta = \frac{h}{e + s} = \frac{e \cos \gamma}{e + s} = \frac{\cos \gamma}{1 + \frac{s}{e}}. \tag{4}$$

A felírt összefüggések olyan közelítő értékekre vonatkoznak, amelyek azzal a feltevéssel fogadhatók el, hogy a valóságban $e' = e + s - z'$ távolság a külső gördülő pálya sugarához képest nagyon kicsiny, ami fejtegetésünk folyamán mindvégig igaz marad.

III. A fontosabb fogalmak jelölése

Az alábbiakban 1., 1a., 2., 2a. ábra szerint a következő betüjeleket vezetjük be:

$d = 2r$ = az alaktartó és a golyó-koszorút belülről mindig burkoló belső gördülőpálya átmérője;
b = a bolygó mozgást végző golyók átmérője;
$D_k = 2R_k = d + b$ = a golyókoszorú (kosár) középátmérője;
$D_b = 2R_b = D_k + b = d + 2b$ = a terheletlen golyók külső burkoló körének átmérője;
h = sugárirányú csapágyhézag terheletlen állapotban, amely páratlan golyó számnál közvetlen nem mérhető;

$D = 2R = d+2b+2h = D_k+b+2h = D_b+2h$ = az alaktartó és csak a terhelési íven belül levő golyókkal érintkező külső gördülőkör átmérője;
z = a golyók száma;
$\gamma = 180/z$ = a golyók fél osztási szöge;
$e = h/\cos\gamma$ a külső gördülőpálya K középpontjának és a hozzátolt *terheletlen* golyókoszorú O középpontjának mindig mérhető távolsága (excentricitása);
s = az O tengelyközépnek a terhelési ív szögfelezőjén mért süllyedése, amely a terhelt golyók deformációja folytán keletkezett;
$\bar{e}'$ = excentricitás K körül terheléskor;
e' = a deformáció folytán megnagyobbodott „excentricitás" K' pont körül, ahol $KK' = z' =$ az e' sugarú simuló-kör középpontjának eltolódása
$\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots$ = a terhelési ív szögfelezőjéhez szimmetrikusan elhelyezkedő első, második, harmadik ... golyópár deformáció folytán keletkezett belapulásának *Hertz* szerint számított értéke;
ζ = a terhelési ív félszöge;
ξ = a terhelési íven belül levő hordozó golyók fél központi szöge, ahol ξ mindig γ egész számú többszöröse (fél terhelési szög);
$\varrho = h\tan\gamma = e\sin\gamma =$ annak az alapkörnek a sugara, amelyet a *terheletlen*, de a gördülő pályával érintkező két szomszédos golyó vezérsugara érint, gördülés közben pedig e vezérsugarak burkolják;
$\varrho' = e'\sin\xi$ a terhelési ívben levő két szélső hordozó golyóhoz tartozó alapkör sugara;
n = az O középpont körül forgó tengely percenkénti fordulatszáma;
$\omega = n\pi/30$ = ugyanennek a tengelynek szögsebessége;
$n_k = n\,d/(D+d) \approx n\,d/2D_k$ = a golyókosár percenkénti fordulatszáma, mely azonos az O tengelyközép e' excentricitású keringő pályán végzett keringési számával;
$\omega_k = \omega\,d/(D+d) \approx \omega\,d/2D_k$ = a golyókosár (és O tengelyközép keringésének) szögsebessége;
G = az O tengelyközép körül n fordulatszámmal forgó, a tengelyközépre nézve kiegyensúlyozott m tömeg súlya;
g = a nehézségi gyorsulás;
F = a külső erőnek (pl. szíjhúzás, fognyomás) a csapágyra ható változatlannak feltételezett komponense;
$\overline{P} = \overline{G} + \overline{F}$ az önsúly és a külső erő csapágyra eső terhelésének eredője;
m = a tengelyközépbe redukált, a tengelyre nézve kiegyensúlyozott tömeg;
$\bar{a} = P/m$ = tömeggyorsulás;
$C = me\omega_k^2$ = a keringő mozgás folytán fellépő centripetális erővel ellentétes centrifugális erő terheletlen csapágynál;
$C' = me'\omega_k^2$ = ugyanaz terhelési excentricitású csapágynál;
$\bar{c} = e\omega_k^2$ = centrifugális gyorsulás terheletlen csapágy esetén;
$\bar{c}' = e'\omega_k^2$ = ugyanaz terhelési excentricitású csapágynál;
$\overline{Q} = \overline{P} + \overline{C}$ = eredő erő, ha a golyók deformálását nem vesszük tekintetbe;
$\overline{Q}' = \overline{P} + \overline{C}'$ = eredő erő deformálódott golyók esetén;
$\bar{\imath} = Q/m$ = eredő gyorsulás, ha a golyók alakváltozását nem vesszük tekintetbe;
$\bar{\imath}' = Q'/m$ = eredő gyorsulás deformálódott golyók esetén;
$p = KS = \bar{a}/\omega_k^2$ = az S pólus (erőközéppont) távolsága a külső gördülőpálya K középpontjától;
ψ = a billenés és ringó mozgás fázis szöge,
φ = Az O tengelyközép fázisszöge K középpont körül történő keringésénél
$\bar{n}$ = az O tengelyközéppontba redukálva képzelt m tömeg $\bar{\imath}$ gyorsulásának K középponton keresztülmenő normális komponense;
$\bar{\imath}$ = ugyanennek tangenciális komponense;
$N = m\bar{n}$ = a terhelési ív szimmetria vonalán áthaladó *normális* erő, mely a golyók deformációját idézi elő;
$T = m\bar{\imath}$ = az O pontban egyesítve képzelt keringő tömegre ható *tangenciális* erő, mely a billentő és a ringató mozgást idézi elő;
$D_T = 2R_T$ = az átbillenés idejét meghatározó Thales-kör átmérője (23. ábra),
y = a lejtő hossza a Thales-körben (tangenciális vagy ütközési amplitúde);
x = a billenő rezgés sugárirányú kilengése (radiális vagy tetőponti amplitúdó, (21. ábra));
α_0 = a billenési pályát helyettesítő lejtőnek az erő irányával bezárt hajlásszöge „nulla fordulat" esetében mozdulatlan golyótámasztéknál;
α = ugyanaz mozgó támasztéknál;
$u = y\cos\alpha$ = „esési magasság" a Thales-körben;

$+k$ = arányossági tényező a belső gördülőpálya és a golyó átmérője között a Hertz-féle belapulási sugár számításához;
$-K$ = ugyanaz a külső gördülő pálya és a golyó átmérő között;
μ = súrlódási tényező a golyó és a gördülő pályák között;
μ_1 = ugyanaz a golyók és a kosár között;
$\bar{\varrho}$ = a gördülő csapágy súrlódási szöge;
M = a golyók gördülő súrlódásának nyomatéka;
f = a golyó gördülő súrlódásának nyomatéki karja;
ϑ = a golyó belapulási körének átmérője.

IV. A gördülőcsapágy, mint bolygómű

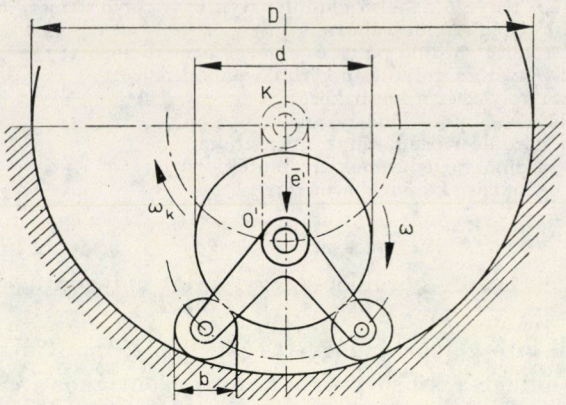
A hézaggal bíró golyóscsapágy O tengelyközéppontja bármely irányban szabadon elmozdulhat a külső gyűrű K középpontjához képest; *terhelés alatt* azonban *stabilis helyzetnél* a szimmetria folytán úgy képzelhetjük, mintha a D átmérőjű külső gyűrű K középpontját az $\bar{e}'$ excentricitás hosszával egyező csuklós kar kötné össze a d átmérőjű belső gyűrű O' középpontjával. Az összefüggések világosan kitűnnek a torzított méretekkel felrajzolt 3. ábrából, amelyen két b átmérőjű görgő befogási ágyazatának O' pontja képviseli a golyókoszorút, illetőleg annak súlypontját.

Tekintve, hogy O' tengelyre nézve a körülötte ω szögsebességgel forgó tömegek ki vannak egyensúlyozva, az $\bar{e}'$ sugáron fellépő centrifugális erő számításakor az m tömeg O' súlypontjának ω_k keringő szögsebességét kell figyelembe vennünk. Az $\bar{e}'$ kar (és a golyókosár) keringési fordulatszámát kiszámíthatjuk azzal a meggondolással, hogy előbb az egész, egymáshoz képest reteszeltnek képzelt alkatrészekből álló rendszert 1 fordulattal körülforgatjuk, majd a reteszelés oldása után D átmérőjű külső gyűrűt visszaforgatjuk eredeti helyzetébe.

	Fordulatszámok			
	$\bar{e}'$ képzelt kar	$\varnothing d$ belsőgyűrű	$\varnothing b$ golyó	$\varnothing D$ külső gyűrű
Az egész rendszer egyszer körülforgatva	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$
D eredeti helyzetébe visszaforgatva mozdulatlan $\bar{e}'$ karral	0	$+\frac{D}{d}$	$-\frac{D}{b}$	-1
Fordulatszám arány, mint eredmény	$+1$	$1+\frac{D}{d}$	$1-\frac{D}{d}$	0

Tehát a d gyűrű egy fordulatára az $\bar{e}'$ kar (és a golyó-kosár)

$$\frac{1}{1+D/d}=\frac{d}{D+d}$$



3. ábra. A sugárirányú csapágyházaggal biró gördülőcsapágyat magyarázó „bolygómű"

fordulatot végez és d gyűrű n fordulatára az $\bar{e}'$ kar és kosár fordulatszáma

$$n_k = n \frac{d}{d + D}. \tag{5}$$

A képlet ebben a formájában akkor is érvényes, ha O' távol esik K-tól. Golyóscsapágyaknál azonban $(d + D)$ helyett bevezethetjük a golyókoszorú kétszeres középátmérőjét, amivel az $\bar{e}'$ elhanyagolásával nyert közelítő érték

$$n_k \approx n \frac{d}{2D_k}, \tag{6}$$

és a koszorú keringésének szögsebessége

$$\omega_k = \frac{n_k \pi}{30} = \frac{n\pi}{30} \frac{d}{d + D} = \omega \frac{d}{d + D} \approx \omega \frac{d}{2D_k}. \tag{7}$$

Hasonlóképp d gyűrű n fordulatszámánál a golyók fordulatszáma

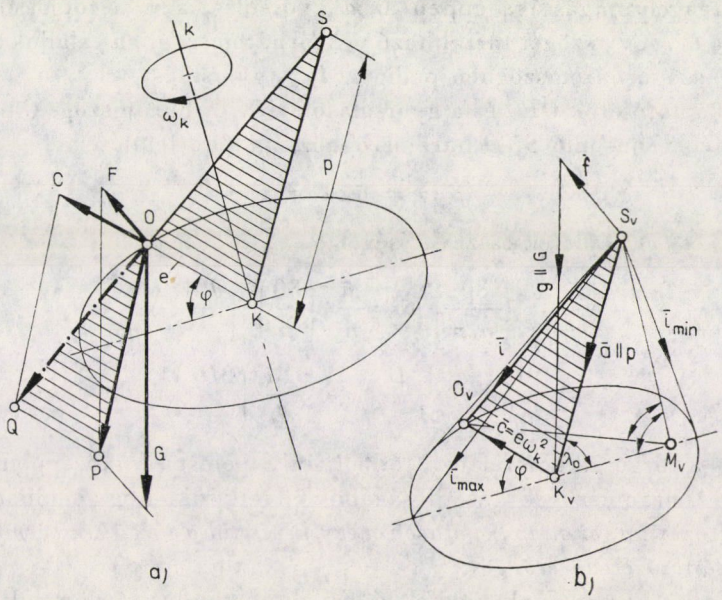
$$n_b = n \frac{1 - (D/b)}{1 + (D/d)} = - n \frac{d}{D + d} \cdot \frac{D - b}{b} =$$

$$= - n_k \cdot \frac{D - b}{b} \approx - n \frac{d}{2D_k} \cdot \frac{D - b}{b}. \tag{6a}$$

V. Segédtétel

E segédtétel olyan merev anyagi pontrendszerre vonatkozik, amely tetszőleges irányú homogén erőtérben, tetszőleges irányú tengely körül forog.

A tér valamely tetszőleges k tengelye körül a reá merőleges sík ω_k szögsebességgel forog (4a ábra). E sík K forgásközéppontjától e távolságra helyez-



4a. ábra. A tetszőleges *k* tengely körül forgó reá merőleges sík tömegpontjainak erőközpontja (pólusa)
4b. ábra. Vektorábra

kedik el az *m* tömeg *O* pontja, amelyre a *G* önsúlyon kívül még *F* változatlan irányú erő is hat. Ez az önsúllyal az ugyancsak változatlan irányú *P* erőt eredményezi.

A változatlan irányú *P* erőn kívül az *O* pontra hat még a *C* centrifugális erő, aminek következtében a $\bar{P} + \bar{C} = \bar{Q}$ eredő erő a sík forgása közben irányát és nagyságát változtatni fogja.

Rajzoljuk fel a vektorábrát (4b ábra) a tömegegységre ható erőkre, vagyis a

$$\frac{P}{m} = \bar{a} \left(\text{mely } \frac{G}{m} = g \quad \text{és} \quad \frac{F}{m} = \bar{f} \text{ gyorsulások eredője} \right),$$

$$\frac{C}{m} = e\omega_k^2 = \bar{c}$$

és

$$\frac{Q}{m} = \bar{\iota}$$

gyorsulásokra. Miután a vektor ábrában az $\bar{a}$ vektor iránya és nagysága változatlan, $\bar{c}$ pedig a *k* tengely irányára merőleges síkban $\bar{c}$ sugarú kört ír le K_v középpont körül, az $\bar{\iota}$ eredő gyorsulást olyan ferde körkúp alkotói szolgáltatják,

amelynek tengelymagassága éppen az $\bar{a}$ gyorsulás, ami a forgássíkjával λ_0 szöget zárja be. A λ_0 szöget tartalmazó vektorháromszögben találjuk az $\bar{i}_{\min}$, a $(180° - \lambda_0)$ szögű háromszögben pedig az $\bar{i}_{\max}$ gyorsulást.

Mivel a ható erők OPQ és a gyorsulások $S_vK_vO_v$ háromszöge O pont minden helyzetében hasonló SKO háromszöghöz, az ábra jelöléseivel

$$p : e = \bar{a} : e\omega_k^2 ,$$

tehát az (5) és (7) képletek összevetésével

$$p = \frac{\bar{a}}{\omega_k^2} = \left(\frac{30}{n_k\pi}\right)^2 \bar{a} = \frac{\bar{a}}{n_k^2}\left(\frac{30}{\pi}\right)^2\left(\frac{d+D}{d}\right)^2 =$$

$$= \frac{91\bar{a}}{n_k^2}\left(\frac{d+D}{d}\right)^2 \approx \frac{91\bar{a}}{n_k^2}\left(\frac{2D_k}{d}\right)^2 \tag{8}$$

összefüggés a forgó síkhoz tartozó térbeli fix S pólust (erőközéppontot) meghatározza. A háromszögek hasonlóságából következik, hogy mindaddig, míg $\bar{a}$ és ω_k változatlan, *ezen az S póluson megy keresztül a forgó sík bármely tömegpontjához tartozó eredő erő.*

Válasszuk az $\bar{i}_{\max}$-nak megfelelő helyzetet kiindulási pontnak, és határozzuk meg valamely φ fázisszöghöz tartozó $\bar{i}$ gyorsulás nagyságát.

Az $S_vM_vO_v$ háromszögben S_vM_v oldal a forgó síkra emelt merőleges, és így

$$S_vM_vO_v \sphericalangle = 90° ,$$

$$\overline{S_vO_v^2} = \bar{i}^2 = \overline{S_vM_v^2} + \overline{O_vM_v^2} .$$

az $S_vM_vK_v$ derékszögű háromszögből

$$S_vM_v = \bar{a} \sin \lambda_0 ,$$

és az $O_vM_vK_v$ általános háromszögből

$$\overline{O_vM_v^2} = \bar{c}^2 + \overline{K_vM_v^2} + 2\bar{c}\overline{K_vM_v} \cos\varphi ,$$

tehát

$$\bar{i}^2 = \bar{a}^2 \sin^2 \lambda_0 + \bar{c}^2 + \overline{K_vM_v^2} + 2\bar{c}\overline{K_vM_v} \cos\varphi ,$$

mivel

$$K_vM_v = \bar{a} \cos \lambda_0 ;$$

$$\bar{i}^2 = \bar{a}^2 \sin^2 \lambda_0 + \bar{c}^2 + \bar{a}^2 \cos^2 \lambda_0 + 2\bar{a}\bar{c} \cos \lambda_0 \cos\varphi ,$$

vagyis

$$\bar{i}^2 = \bar{a}^2 + \bar{c}^2 + \bar{a}\bar{c} \cos \lambda_0 \cos\varphi . \tag{9}$$

Miután a φ fázisszög kiindulási helyzetét a λ_0 szöget tartalmazó szimmetria síkban vettük fel, a (9) összefüggés mindkét forgásirányra érvényes.

Pusztán az önsúllyal terhelt függőleges tengelyű tárcsás csapágyaknál (talpcsapágyak)

$$\lambda_0 = 90°$$

és

$$\bar{i}^2 = \bar{a}^2 + \bar{c}^2 . \tag{10}$$

Vízszintes tengelyű radiális csapágyaknál (nyakcsapágy) a tengelyre merőleges csapágy-reakció esetében

$$\lambda_0 = 0$$

és

$$\bar{i}\bar{c}^2 = \bar{a}^2 + \bar{c}^2 + 2\bar{a}\bar{c}\cos\varphi . \tag{11}$$

Miután a gyakorlatban ez utóbbi eset fordul elő legsűrűbben, a következőkben csak ezzel kívánunk foglalkozni.

A tárgyalt törvényszerűség fontosságára való tekintettel a (8) és (11) összefüggések lényegét a következőkben foglaljuk össze:

1. A k tengely körül forgó sík összes pontjaihoz a térben egyetlen S erőközéppont (pólus) tartozik, a pólus távolsága a sík forgásközéppontjától $\bar{a}/\omega^2$, iránya pedig párhuzamos az $\bar{a}$ gyorsulás vektoréval;

2. Párhuzamos síkokhoz tartozó pólusok a forgási tengellyel párhuzamos egyenesen sorakoznak;

3. Az $\bar{a}$ gyorsulás végtelenhez közeledő növekedésekor vagy az ω_k szögsebesség nullához közeledő csökkenésekor az S erőközéppont (8) szerint a végtelenbe tart és iránya megegyezik $\bar{a}$ gyorsulás irányával;

4. Ha a forgás síkjában O tömegpont helyét változtatja, de a forgástengely helyben marad, akkor az e excentricitás változása az S pólus helyét nem befolyásolja, de ha k forgástengely mozdul el önmagával párhuzamosan, akkor p pólustáv is önmagával párhuzamosan tolódik el;

5. Ha egy körülfordulás alatt a szögsebesség változik, de az $\bar{a}$ gyorsulás változatlan marad, akkor a pólustáv egyenese helyben marad, de nagysága a *szögsebesség négyzetével* fordított arányban változik;

6. Radiális csapágy tengelyre merőleges fősíkjában érvényesülő erőhatásoknál a pólus is a fősíkban marad, és S pólus távolsága (8) szerint a legjellemzőbb üzemi viszonyokon kívül a csapágy legjellemzőbb adatait is magában foglalja;

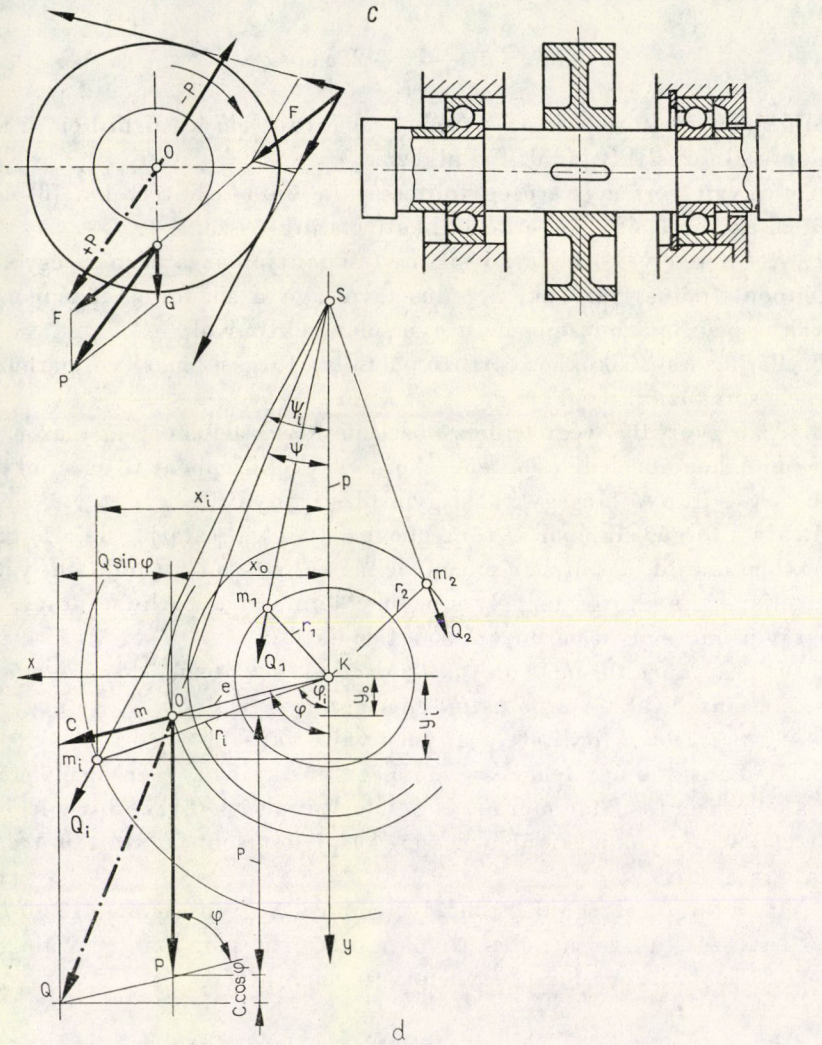
7. Ha a forgó tömeg saját tengelyére nincs kiegyensúlyozva (amiről a II. részben lesz szó), akkor p pólus távolság számításakor nem a keringés ω_k, hanem a forgás ω szögsebessége veendő figyelembe és

$$p = \frac{a}{\omega^2} . \tag{12}$$

VI. A csapágyközépsíkba képzelt forgó rendszer tengelybeli súlypontjára ható normális és tangenciális erők

Bár a 4. ábrával kapcsolatban bevezetett segédtétel bepillantást nyújt az egész általános esetekre is, a következőkben csakis azt a gyakorlatban legáltalánosabban előforduló esetet vesszük tekintetbe, amikor a k tengely vízszintes, a reá ható térbeli külső erő pedig merőleges a tengelyre.

Egyszerűség kedvéért a 4c ábrán vázolt szimmetrikus elrendezéssel mutatjuk be a csapágyra ható erőket, mert ilyenkor a két csapágy terhelése egyforma, és így elegendő az egyik vizsgálata.



4c. ábra. A csapágy középsíkjában ható erő
4d. ábra. A forgó rendszert helyettesítő tömegpont

Hézagmentes csapágynál a [27] és [28] közleményekben említett, a görgők véges számából eredő rezgésektől eltekintve, a tengely ω szögsebességű egyenletes körforgásával számolhatunk. Működés közben a laza és feszült szíjágak húzásának eredője a tengelyre merőleges kitérő egyenesben hat a szíjkerékre, és a normáltranzverzális a keletkező nyomaték karja. A tengely és a vele együtt forgó szíjkerék, a tengelyvégeken levő két tengelykapcsoló valamint a két gördülőcsapágy belső gyűrűje, kosara és görgőinek önsúlyai a rendszer középsíkjában a tengelyt metsző függőleges egyenesben hatnak. A G önsúly és az F működő szíjhúzás P eredője a tengelyhez képest ugyancsak kitérő egyenesben hat. Ha az O pontban ezzel az egyenessel párhuzamosan vesszük fel az egyensúlyban levő két erőt, akkor látjuk a belső gyűrűkre ható külső erőket, valamint az egy-egy tengelykapcsoló által átviendő nyomatékot. Az ábrán ugyanis csak az egyik csapágyoldalra ható erők vannak feltüntetve. Hézagmentes csapágyazáskor ilyképpen a csapágy középsíkjában redukált m tömegre ható P erő egyenesén van az erőközpont S pólusa. Mivel most az m tömeg súlypontja benne van a forgási középpontban, a rendszer anyagi pontjaira ható centripetális erők forgás közben egyensúlyban vannak.

Ha van csapágyhézag, de nincs akkora terhelés, amely a görgőkön számításba vehető deformációt okozzon, akkor a csapágy középsíkjába képzelt ω szögsebességgel forgó rendszer súlypontja, az O tengelyközéppont, az 1a ábra szerint már a külső gyűrű K középpontja körül KO sugarú körön ω_k szögsebességgel keringeni is igyekezni fog.

Segédtételünket a merev forgó rendszernek csak egyes anyagi pontjaira vezettük le. Most be fogjuk bizonyítani, hogy e tétel akkor is érvényes, ha e tételt a forgó rendszer tömegközéppontjára vonatkoztatjuk. A bizonyítást csak az általunk bevezetett különleges esetre végezzük el, amikor a forgó rendszer síkja a K forgási középponthoz illeszkedő egyenesre merőleges.

A 4d ábra jelöléseivel m_1, m_2 ... m_i tömegpontokból álló merev forgó rendszer K középpont körül forog; kimutatjuk, hogy az egyes tömegpontokra ható erők geometriai összege

$$\Sigma \bar{Q}_i = \bar{Q}$$

az O tömegközéppont és az S erőközépponthoz illeszkedő egyenesben van, és nagyságát a $\Sigma m_i = m$ tömeg nagysága és $\bar{i} = \bar{a} +$ gyorsulása szabja meg.

Felírjuk a ható erők x irányú és y irányú vetületeinek összegét, majd kifejezzük e két vetületösszeg eredőjét.

$$\Sigma Q_i \sin \psi_i = \Sigma P_i + \Sigma C_i \cos \varphi_i = a\Sigma m_i + \omega_k^2 \Sigma m_i r_i \cos \varphi_i \,.$$

Az ábra jelöléseivel fenti egyenlőségből következik, hogy

$$\Sigma m_i = m \,,$$

és

$$\Sigma m_i r_i \cos \varphi_i = \Sigma m_i y_i = m y_0$$

bevezetése után

$$\Sigma Q_i \sin \psi_i = ma + \omega_k^2 m y_0 .$$

Hasonlóképp felírható az x irányú erők vetületeinek összege

$$\Sigma Q_i \sin \varphi_i = \omega_k^2 \Sigma m_i r_i \sin \varphi_i = \omega_k^2 m x_0 .$$

Az eredő Q erő tehát

$$Q = \sqrt{m^2(a + \omega_k^2 y_0)^2 + m^2(\omega_k^2 x_0)^2} ,$$

vagyis

$$Q = m \sqrt{a^2 + 2a y_0 \omega_k^2 + \omega_k^4 y_0^2 + x_0^2 \omega_k^4} .$$

Bevezetve az m tömeg O súlyponti helyzetére az e excentricitás

$$e^2 = x_0^2 + y_0^2$$

értékét,

$$Q = m \sqrt{a^2 + 2a y_0 \omega_k^2 + e^2 \omega_k^4} .$$

Az ábra jelöléseivel

$$y_0 = e \cos \varphi ,$$

tehát

$$Q = m \sqrt{a^2 + 2ae\omega_k^2 \cos \varphi + (e\omega_k^2)^2} .$$

Ezzel állításunkat be is bizonyítottuk, mert a zárjel alatti ($e\omega^2$) tag valóban az

$$OPQ\Delta \sim SKO\Delta$$

hasonlóság folytán az eredő gyorsulásokat adja, és így a hasonlóság alapján a forgórendszer súlypontjára is felírható a (8) kifejezés alapjául szolgáló

$$p : e = \bar{a} : e\omega_k^2$$

aránylat.

A görgőkre a belső csapágy-gyűrű külső felülete átadja a külső terhelést, a külső csapágy-gyűrű belső felülete pedig a reakció erőt, miáltal a görgők deformálódnak, és a tengelyközép O' helyzetbe jutva, az előbb említettől eltérő pályán fog mozogni (1. ábra). Tételünk szerint azonban a tengelyközépre, mint tömegközéppontra ható erők eredőjét az O' minden helyzetében meg tudjuk állapítani.

A csapágyra ható erők számításakor a görgők saját tengelyük körüli forgásától egyelőre eltekintünk, és úgy vesszük, mintha az egész görgőkosár a tengellyel együtt (6) szerint n_k fordulatszámú keringést végezne (sikló mozgással történő görgő-elmozdulások stroboszkóppal végzett vizsgálatok szerint egyes esetekben ki is mutathatók).

A II. részben tárgyalt fejtegetés szerint a görgők saját tengelyük körüli forgása is tekintetbe vehető volna, tömegük azonban oly csekély a forgó rendszeréhez képest, és annyira bizonytalan, hogy a kenőanyag fékezése mellett képesek-e a (6a) képletben kifejezett fordulatszámot felvenni, hogy a saját fordulatszám figyelembevétele csak feleslegesen bonyolítaná a számításokat.

Ha egyelőre a súrlódástól eltekintünk, akkor a külső csapágy-gyűrű belső felülete mint kényszerpálya által az egyes görgőkre gyakorolt reakció erői keresztülmennek a görgők középpontjain. Az egyes görgőkre ható erők eredője tehát egyensúlyt tart a ható Q erőnek a K forgási középponton átmenő N normális komponensével. Keringés közben a T tangenciális erő is kifejti hatását, amint látni fogjuk a következőkben.

A 3. ábrából kitűnik, hogy az O tengelyközép erőhatás alatt kényszerpálya következtében a külső gyűrű K középpontja körül keringő KO' sugarú mozgást végezhet. Vizsgálatunk lényege annak megállapításában rejlik, hogy a golyók deformációját is tekintetbe véve milyen körülmények között mozog a tengelyközép ezen a keringő pályán, milyen körülmények között és hogyan hagyja el ezt a keringő mozgást. Evégből szükséges, hogy a keringőnek képzelt O pontra ható erő normális összetevőjét, mely az alakváltozás okozója és tangenciális összetevőjét, mely a létrejövő pillanatnyi elmozdulás előidézője, a keringési pálya minden helyén ismerjük.

Az 5a ábra az O súlypontra ható $\bar{i}$ gyorsulások és $\bar{n}$ normális valamint $\bar{t}$ tangenciális komponenseit tünteti fel $\varphi = 0$ helyzettől $\varphi = \pi$ helyzetig, az 5b ábra pedig a további $\pi \ldots 2\pi$-vel határolt félfordulatra. Az ábrából kitűnik, hogy *a keresett összetevők megszerkesztésére nagyon jól használható az $\bar{a}$ vektorra, mint átmérőre rajzolt Thales-kör.*

Az $\bar{a}$ és $\bar{c}$ vektorok aránya szerint a következő eseteket különböztetjük meg.

1. *eset*: $\bar{a}/\bar{c} > 1$; $p > e$; *S pólus a végesben*

Az 5a ábrából közvetlenül kitűnik, hogy az $\bar{i}$ gyorsulás φ fázis szöghöz tartozó normális komponense

$$\bar{n} = \bar{a} \cos \varphi + \bar{c} , \tag{13}$$

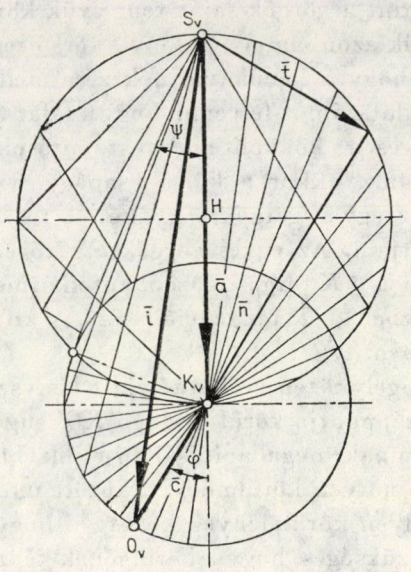
és tangenciális komponense

$$\bar{t} = \bar{a} \sin \varphi . \tag{14}$$

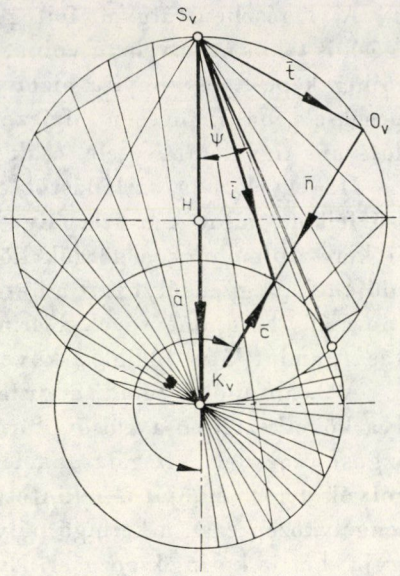
A másik félfordulatnál az $S_v K_v$ szimmetria tengelyre vonatkoztatott megfelelő értékeket nyerjük (5b ábra).

A gyorsulások változását az egyenesbe fejtett φ szög függvényében az 5c ábra szemlélteti.

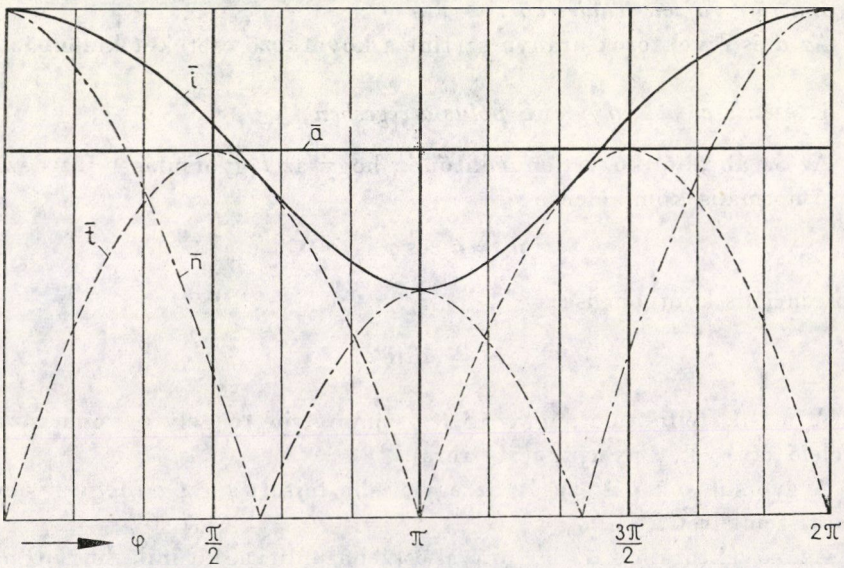
Az 5a vektorábrát az 1. ábrával összehasonlítva, kitűnik, hogy O pontra akkor hat a legnagyobb deformációt okozó erő, amikor az SK sugáron halad



5a. ábra. Az $\bar{i}$ gyorsulás és egymásra merőleges összetevőinek vektorábrája az első félfordulatban. Pólus a végesben



5b. ábra. Ugyanaz a második félfordulatban



5c. ábra. A gyorsulások φ függvényében egyenesbe fejtve

Különleges esetek

φ	$\cos\varphi$	$\bar{\imath}$	$\bar{n}$	$\bar{t}$
0°	1	$\bar{a}+\bar{c}$	$\bar{a}+\bar{c}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	$\sqrt{\bar{a}^2+\bar{c}^2}$	$\bar{c}$	$\bar{a}$
$\bar{c}+\bar{\imath}$	$-\frac{\bar{c}}{\bar{a}}$	$\sqrt{\bar{a}^2-\bar{c}^2}$	0	$\bar{\imath}$
π	−1	$\bar{a}-\bar{c}$	$\bar{a}-\bar{c}$	0

keresztül, és ha az S pontból az e sugarú körhöz vont érintő érintési pontjáig eljuthatna, akkor ott már csakis tangenciális erő érvényesülne.

2. *eset*: $\bar{a}/\bar{c} > 1$; $p = \bar{a}/\omega_k^2 \to \infty$

Ez a feltétel akkor teljesül, amikor a keringési fordulatszámhoz képest az $\bar{a}$ gyorsulás igen nagy, vagy az $\bar{a}$ gyorsuláshoz képest az ω_k igen kicsiny. Így pl. ha csak a nehézségi gyorsulás hat és $\bar{a} = g$, továbbá

$$p = \frac{g}{\omega_k^2} = \frac{895}{n_k^2} \tag{8a}$$

akkor $n_k = 1/4$/perc esetén

$$p = 895 \cdot 16 = 14{,}32 \text{ km}.$$

Ha ugyanekkor az e excentricitás esetleg csak 49 μ, akkor $p/e = 3 \cdot 10^8$. Ilyenkor az $\bar{a}$ vektorra rajzolt „Thales-kör" a K_v ponton átmenő $\bar{a}$-ra merőleges egyenessé fajul és az $\bar{a}$, $\bar{c}$ és $\bar{\imath}$ vektorok elnyúlt háromszögéből következik, hogy $\bar{c}$ centrifugális gyorsulás $\bar{a}$ mellett elhanyagolható (nulla fordulat esete) és így

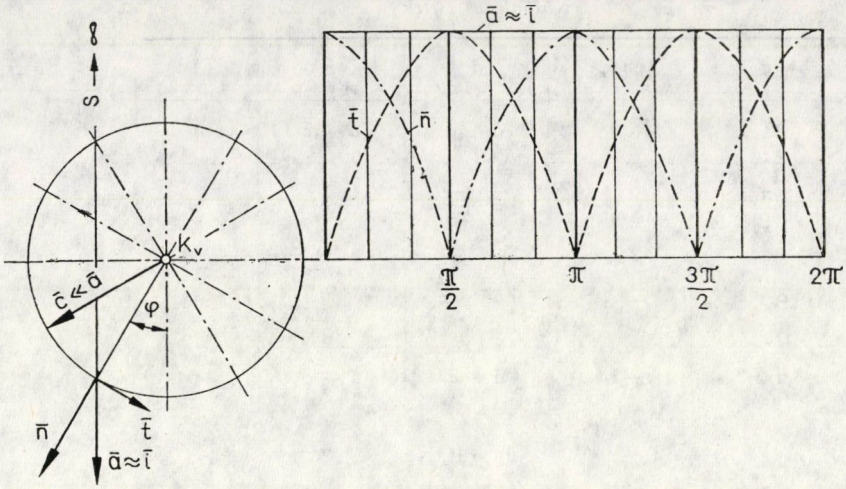
$$\bar{\imath} \approx \bar{a}\,.$$

A φ elfordulási szöghöz tartozó gyorsulás normális összetevője (6a ábra)

$$|\,\bar{n}\,| = |\,\bar{a}\cos\varphi\,|\,, \tag{13a}$$

és a tangenciális összetevő

$$\bar{t} = \bar{a}\sin\varphi.$$



6a. ábra. Gyorsulások, pólus a végtelenben
6b. ábra. Gyorsulások φ függvényében egyenesbe fejtve

Különleges esetek

φ	$\bar{n}$	$\bar{\imath}$
0	$\bar{a}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	$\bar{a}$
π	$\bar{a}$	0

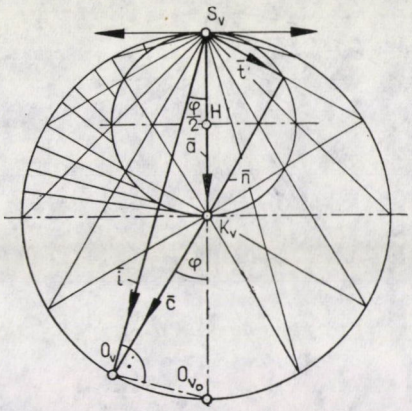
Az egyenesbe fejtett φ függvényében a 6b ábra tünteti fel a ható erőket.

3. *eset*: $\bar{a}/\bar{c} = 1$; $p = e$; *S pólus a keringési körön.*

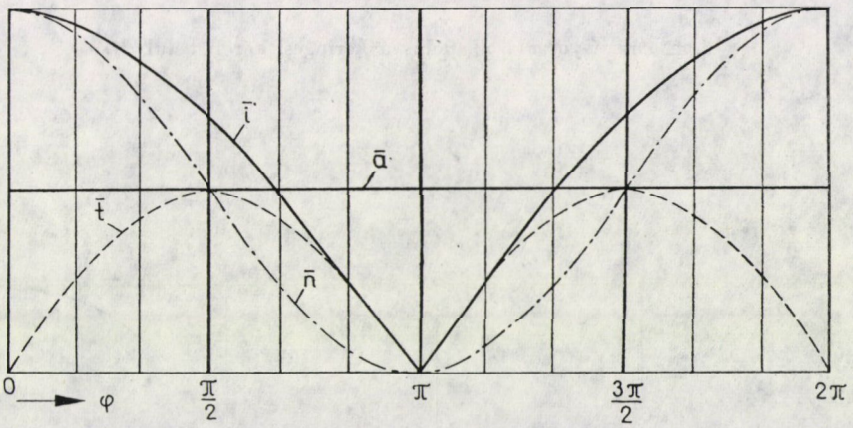
A 7a. ábrából kitűnik, hogy az $\bar{a}$ gyorsulás H felezőpontjából rajzolt Thales-kör belül érinti a $\bar{c}$ sugarú kört S_v pontban. Az $\bar{\imath}$ gyorsulásra vonatkozó (11) egyenlet így módosul:

$$\bar{\imath}^2 = 2\bar{a}^2(1 + \cos\varphi)\,;$$

$$\bar{\imath} = 2\bar{a}\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = 2\bar{a}\cos\frac{\varphi}{2}\,, \tag{15}$$



7a. ábra. Gyorsulások; pólus a keringési körön



7b. ábra. Gyorsulások φ függvényében egyenesbe fejtve

ami egyébként a 7a vektorábra $S_v O_v O_{v_0}$ derékszögű háromszögéből is látható.

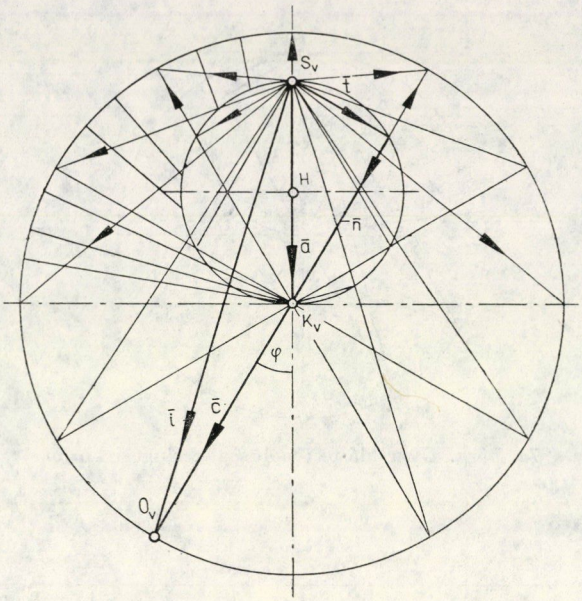
Az $\bar{\imath}$ gyorsulás normális komponense

$$\bar{n} = \bar{a} + \bar{a}\cos\varphi = \bar{a}(1 + \cos\varphi)\,, \tag{16}$$

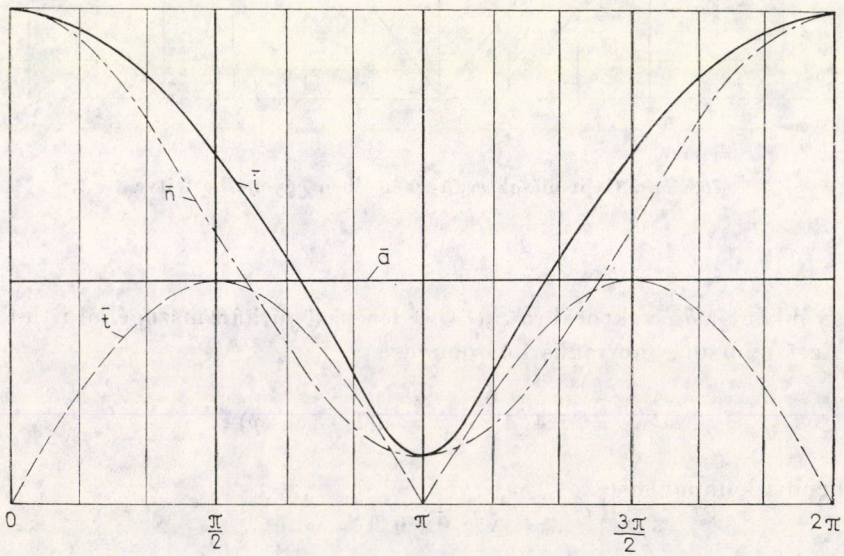
tangenciális komponense

$$t = \bar{a}\sin\varphi\,.$$

A kifejtett diagramot a 7b ábra szemlélteti,



8a. ábra. Gyorsulások, pólus a keringési körön belül



8b. ábra. Gyorsulások φ függvényében egyenesbe fejtve

Különleges esetek

φ	$\cos\varphi$	$\bar{\imath}$	$\bar{n}$	$\bar{t}$
0	1	$2\bar{a}$	$2\bar{a}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	$\bar{a}\sqrt{2}$	$\bar{a}$	$\bar{a}$
π	-1	0	0	0

4. *eset.* $\bar{a}/\bar{c} < 1$; $p < e$; *S pólus az e sugarú körön belül foglal helyet.*

Az 5a ábra esetében az $\bar{\imath}$ gyorsulás csak a síknak 2ψ szögén belül helyezkedhetett el, a 7a ábránál már $2\psi = \pi$, a most tárgyalandó 8a ábránál pedig az $\bar{\imath}$ gyorsulás már teljes 2π körül fordulást végezhet.

Az $\bar{\imath}$ gyorsulás normális komponense

$$\bar{n} = \bar{c} + \bar{a}\cos\varphi\,, \tag{17}$$

tangenciális komponense

$$t = \bar{a}\sin\varphi\,.$$

Különleges esetek

φ	$\cos\varphi$	$\bar{\imath}$	$\bar{n}$	$\bar{t}$
0	1	$\bar{a}+\bar{c}$	$\bar{a}+\bar{c}$	0
$\frac{\pi}{2}$	0	$\sqrt{\bar{a}^2+\bar{c}^2}$	$\bar{c}$	$\bar{a}$
π	-1	$\bar{c}-\bar{a}$	$\bar{c}-\bar{a}$	0

A kifejtett diagramot a 8b ábra tünteti fel. A fordulatszám növelésével S pólus egyre jobban közeledik K ponthoz, de a K középponti pólusnak a végtelen nagy keringési fordulatszám felelne meg.

Ebben a fejezetben szereplő vektorábrákban a szimmetria kedvéért az $\bar{a}$ vektort a rajz-sík függélyesébe forgattuk, és ezt fogjuk követni az erők hatásvonal ábráinál is, de megjegyezzük, hogy a tényleges üzemi viszonyoknak megfelelően a $KS = p$ pólustávolság a rajz-síkban bármilyen irányú lehet.

VII. A terhelési ív meghatározása

Azok a mozgásjelenségek, melyek az O tengelyközépbeli súlypontú forgó tömegnél érvényesülnek, szoros összefüggésben vannak a pólustávolsággal és a deformáció által létrehozott terhelési ívvel. Míg a pólustávolság a forgásban résztvevő m tömegtől teljesen független, és (8) szerint csupán a fordulatszámtól, az $\bar{a}$ gyorsulástól, a belső és külső gördülő pálya átmérőjétől függ, addig ζ terhelési ív (4) szerint az e excentricitás, a $z = 180°/\gamma$ golyószám és az s besüllyedés, vagyis végeredményben az ezt létrehozó $Q_{max} = m\bar{\imath}$ erő függvénye, ami már a forgó m tömeget is tartalmazza.

Az e excentricitást csakis méréssel, az s süllyedést pedig méréssel vagy számítással határozhatjuk meg.

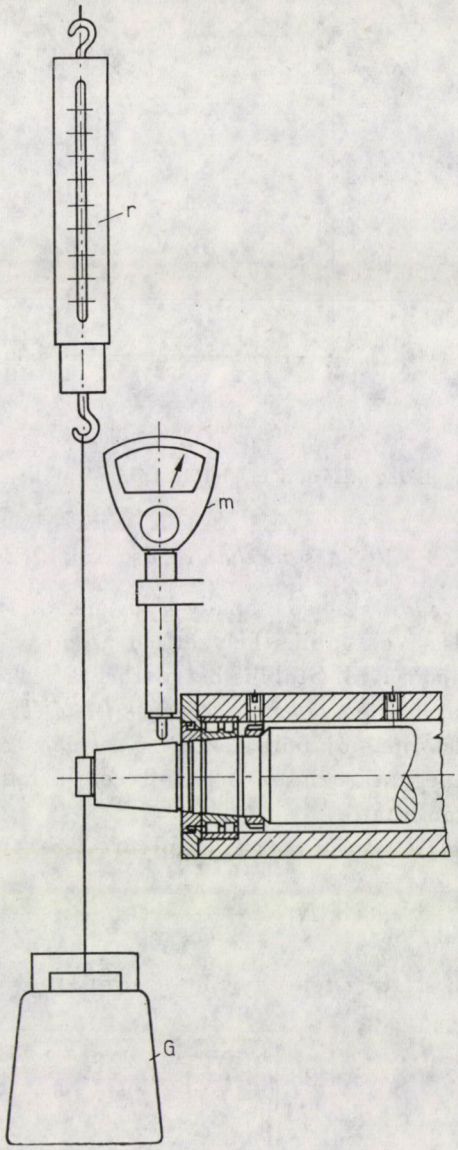
1. *A csapágyhézag meghatározása mérés útján*

A csapágyhézag mérés útján pl. azzal az eljárással határozható meg amelyet az *SKF Die Kugellager Zeitschrift* 1949 évf. 2. számának 32—3. oldalán ajánl [18].

E módszer pontosság szempontjából teljesen megfelelő. A berendezés a 9. ábra szemlélteti. A tengely végére G súlyt helyezünk, amely a tengely-önsúly egy részével együtt a gördülőcsapágyat *lefelé* irányban terheli. Az m ezredes-mérőórát úgy rögzítjük a csapágyházhoz, hogy tapintója lehetőleg a csapágyhoz minél közelebb érintse a tengelyt, és a mutató állását leolvassuk. Az r rugósmérleg segítségével a tengelyt *fokozatosan* mentesítjük a terheléstől és a mérőóra állását a tehermentesítés minden fokán feljegyezzük. A *felfelé* irányuló terhelést addig fokozzuk, amíg nagysága körülbelül a legnagyobb lefelé irányuló terhelésnek felel meg.

A mérőóra állásait a rugós mérlegen leolvasott terhelés függvényében felrajzoljuk és ennek alapján a csapágyhézag már megállapítható. Pl. a 9a ábrabeli kihúzott vonalú függvénygörbe szerint a tengely $0 \div 30$ kp-ig lefelé, $35 \div 60$ kp-ig felfelé rugózik. A görbe e két szakaszát egymással csaknem pontosan párhuzamos egyenesek képezik, melyek az itt szereplő kis terheléseknél pusztán a tengelyrugózásra vonatkoznak. A $30 \div 35$ kp terhelésnél (ami tulajdonképpen a G súlynak és a tengely-önsúly csapágyat terhelő részének felel meg) a golyóscsapágy teljesen tehermentes és a függvénygörbének e helyen látható ugrását a csapágyhézag okozza. Ha nem volna csapágyhézag, akkor a függvénygörbe 0 és 60 kp terhelés között egyenes vonal maradna. A terhelési görbe felső egyenes szakaszát az ordináta tengelyig (az ábrában szaggatott vonallal) meghosszabbítva, közvetlenül leolvashatjuk a csapágyhézag méretét.

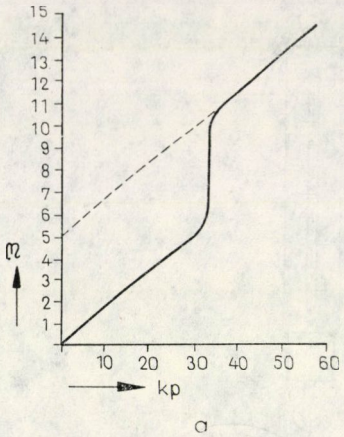
Ez a mérési mód megfelel az MSZ. 7980 értelmezésének, mely szerint: „A gyűrűscsapágy radiális hézagán azt a távolságot értjük, amivel a belsőgyűrű a külsőgyűrűhöz képest adott nagyságú ellenkező irányban felváltva



9. ábra. Berendezés a csapágyhézagnak mérés útján való meghatározására

működő két radiális mérőterhelés hatására sugárirányban elmozdítható, az egyik szélső helyzettől a másik szélső helyzetig mérve".

Értelmezésünk szerint ez a mérési mód *páros golyószám esetében* az osztásszög felezőirányában történő elmozdításkor $2e$ kétszeres excentricitást, *páratlan golyószám esetén* pedig az $e + h = e(1 + \cos \gamma)$ távolságot szolgáltatja. Természetes, hogy mérés közben a tengely elfordulását meg kell akadályozni.



9a. ábra. A csapágyhézag kísérleti meghatározásának terhelési függvényábrája

2. *A süllyedés meghatározása számítással*

Az s süllyedés, vagyis a belső csapágy-gyűrűnek az N normális erő irányában mért elmozdulása csak labilis helyzetben azonos a terhelési ív közepén levő golyó δ benyomódásával. Stabilis helyzetben a terhelési ív közepe és így s süllyedés is *két szomszédos golyó osztás szögének felezőjébe* esik, de (3) összefüggés szerint a golyó deformációjából és az illető *golyónak* a terhelési ív felezőjével bezárt szögéből meghatározható. A besüllyedés ismerete után a $2\,\zeta$ terhelési ív (4) szerint számítható.

a) *Két terhelt golyó esetében* az egy golyóra eső terhelés

$$N_1 = \frac{N}{2\cos\gamma} \tag{18}$$

és a golyó belapulása a Hertz-féle egyenlet szerint [16]

$$\delta_1 = 1{,}23 \sqrt[3]{\left(\frac{N_1}{E}\right)^2 \frac{b/2 + d/2}{b/2 \cdot d/2}}$$

vagyis

$$\delta_1 = s\cos\gamma = 1{,}23 \sqrt[3]{\left(\frac{N_1}{E}\right)^2 \frac{2}{b}\left(\frac{1+k}{k}\right)}, \tag{19}$$

ahol b = a golyó átmérője és $+\,k = d/b$ a belsőgyűrű és a golyóátmérő aránya.

N_1 fenti értékét tekintetbe véve

$$\delta_1 = s\cos\gamma = 1{,}23 \sqrt[3]{\left(\frac{N}{2\cos\gamma \cdot E}\right)^2 \frac{2}{b}\left(\frac{1+k}{k}\right)}.$$

A (13) szerint valamely φ fázis szöghöz tartozó

$$N = m\bar{n} = m\bar{a}\cos\varphi + m\bar{c} = P\cos\varphi + me\omega^2 = P\cos\varphi + C\,,$$

tehát a φ $\sphericalangle$-höz tartozó belapulás

$$\delta_1 = s\cos\gamma = 1{,}23\sqrt[3]{\left(\frac{P\cos\varphi + C}{2\cos\gamma\cdot E}\right)^2 \frac{2}{b}\left(\frac{1+k}{k}\right)}\,. \tag{19a}$$

Legnagyobb a belapulás $\varphi = 0°$-nál, ahol

$$N_{\max} = Q_{\max} = P + C;$$

$$\delta_{1\max} = s\cos\gamma = 1{,}23\sqrt[3]{\left(\frac{Q_{\max}}{2\cos\gamma\cdot E}\right)^2 \frac{2}{b}\left(\frac{1+k}{k}\right)}\,, \tag{19b}$$

és

$$s = \frac{1{,}23}{\cos\gamma}\sqrt[3]{\left(\frac{Q_{\max}}{E\cos\gamma}\right)^2 \frac{(1+k)}{2kb}}\,; \tag{20}$$

és valamely φ szöghöz tartozó N normális erőnél

$$s_i = s\left(\frac{N}{Q_{\max}}\right)^{2/3}. \tag{20a}$$

Nagy fordulatszámnál $Q_{\max}$ az $\bar{e}' = e + s$ excentricitással számítva helyesbítendő és (4) szerint

$$\cos\zeta_{\max} = \frac{e\cos\gamma}{e + \dfrac{1{,}23}{\cos\gamma}\sqrt[3]{\left(\dfrac{Q'_{\max}}{E\cos\gamma}\right)^2 \dfrac{1+k}{2kb}}}\,. \tag{21}$$

Mindaddig, amíg az így számított terhelési félívre azt nyerjük, hogy

$$\gamma < \zeta_{\max} < 3\gamma\,,$$

csak két golyó van terhelve, de amikor már

$$\zeta_{\max} > 3\gamma$$

akkor már két golyópár veszi át a terhelést.

b) *Tetszőleges páros számú hordozó*

golyó esetére végzett számítás némiképp módosul ahhoz képest, amit STRIBECK a hézagmentesnek feltételezett gördülő csapágynál páratlan számú golyókra végzett [1]. Hézagmentes állapotban ugyanis a páratlan számú hordozó golyó

is stabilisnak tekinthető, a hézag jelenlétekor azonban „keringésnél" a páros számú hordozó golyó teszi a „stabilis" helyzetet valószínűbbé, ennélfogva indokolt, hogy főképpen a páros golyószámra legyünk tekintettel.

Több golyópár esetén a deformációt létrehozó derékerő

$$N = 2(N_1 \cos\gamma + N_2 \cos 3\gamma + N_3 \cos 5\gamma + \ldots), \tag{22}$$

ahol N_1, N_2, N_3 ... sorra az egyes golyópárok golyóira ható erők. (3) szerint, ahol $\gamma = 180°/z$ szöget jelentett

$$\delta_1 = s\cos\gamma;$$
$$\delta_2 = s\cos 3\gamma;$$
$$\delta_3 = s\cos 5\gamma;$$

és

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\cos 3\gamma}{\cos\gamma},$$
$$\frac{\delta_3}{\delta_1} = \frac{\cos 5\gamma}{\cos\gamma},$$

de (19) szerint

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{\frac{2}{3}};$$
$$\frac{\delta_3}{\delta_1} = \left(\frac{N_3}{N_1}\right)^{\frac{2}{3}};$$

tehát

$$N_2 = N_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{\frac{3}{2}} = N_1\left(\frac{\cos 3\gamma}{\cos\gamma}\right)^{\frac{3}{2}},$$
$$N_3 = N_1\left(\frac{\delta_3}{\delta_1}\right)^{\frac{3}{2}} = N_1\left(\frac{\cos 5\gamma}{\cos\gamma}\right)^{\frac{3}{2}},$$

és így

$$N = 2N_1\left[\cos\gamma + \left(\frac{\cos 3\gamma}{\cos\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}\cos 3\gamma + \left(\frac{\cos 5\gamma}{\cos\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}\cos 5\gamma + \ldots\right],$$

vagyis

$$N = 2N_1\cos\gamma\left[1 + \left(\frac{\cos 3\gamma}{\cos\gamma}\right)^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{\cos 5\gamma}{\cos\gamma}\right)^{\frac{5}{2}} + \ldots\right]. \tag{23}$$

Ebből

$$N_1 = \frac{N}{2\cos\gamma\left[1+\left(\frac{\cos 3\gamma}{\cos\gamma}\right)^{\frac{5}{2}}+\left(\frac{\cos 5\gamma}{\cos\gamma}\right)^{\frac{5}{2}}+\ldots+\left(\frac{\cos(2n-1)\gamma}{\cos\gamma}\right)^{\frac{5}{2}}\right]}. \quad (24)$$

Az előbbiek szerint N_1 értékével a többi golyópárok golyóinak a terhelése is kifejezhető. A (24) egyenlet nevezőjének zárjeles többtagúját A_{ng}-vel, a terhelt golyópárok számának indexével jelölve, négy hordozó golyó esetén az egy külső golyóra eső terhelés

$$N_2 = \frac{N\left(\frac{\cos 3\gamma}{\cos\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}}{2\cos\gamma\cdot A_{2g}}, \quad (25)$$

és általában $2n_g$ hordozó esetén az n_g-edik golyópárnál az egy golyóra eső terhelés

$$N_n = \frac{N\left[\frac{\cos(2n_g-1)\gamma}{\cos\gamma}\right]^{\frac{3}{2}}}{2\cos\gamma\cdot A_{ng}}, \quad (26)$$

ami úgy értendő, hogy

$$(2n-1)\gamma < \zeta < (2n+1)\gamma\,.$$

A $\zeta \measuredangle$ megállapítása céljából elegendő csupán az N_1-et (24) szerint fokozatosan növekvő golyópárokra kiszámítanunk, hogy a hozzátartozó ζ_{max}-ot és ezzel a valóban terhelt golyópárok számát a (20) és (21) szerint megállapíthassuk. A számítás akkor helyes, amikor a (24)-ben felvett terhelési ív nagysága egyezik a (21)-ből kiadódóval.

A számítás könnyebb elvégzése céljából az

$$\frac{N}{N_1} = 2\cos\gamma\cdot A_{ng} \quad (24a)$$

arány értékeit a különböző z golyószámok és különböző n_g hordozó golyópárok esetére táblázatban állítottuk össze.

A táblázat adatait a 10. ábra szemlélteti. Figyelemre méltó, hogy kevesebb golyót tartalmazó csapágy középső golyópárja akkor is erősebben van terhelve, mint a több golyót tartalmazóé, ha egyébként a terhelési ívben mindkét csapágynál ugyanannyi a golyók száma. Így pl. amikor 6 golyó vesz részt a terhelésben, akkor a 15 golyót tartalmazó csapágynál a középső golyópár golyóira az N normál erő 1/3,54-ed része jut, míg $z = 30$ golyószám esetében $N_1 = N/5{,}09$. Ez azért van így, mert $z = 15$ összes golyószámnál a terhelési íven belül levő 6 golyó középponti szöge 120°, míg $z = 30$-nál csak 60°, tehát a nagyobb golyószámú csapágy 6 hordozó golyója között egyenletesebben oszlik meg a terhelés, mivel az N normál erőhöz a szélső golyók reakció erői kisebb szög alatt hajlanak.

Az A_{ng} és N/N_1 értékek táblázata $2n_g$ függvényében

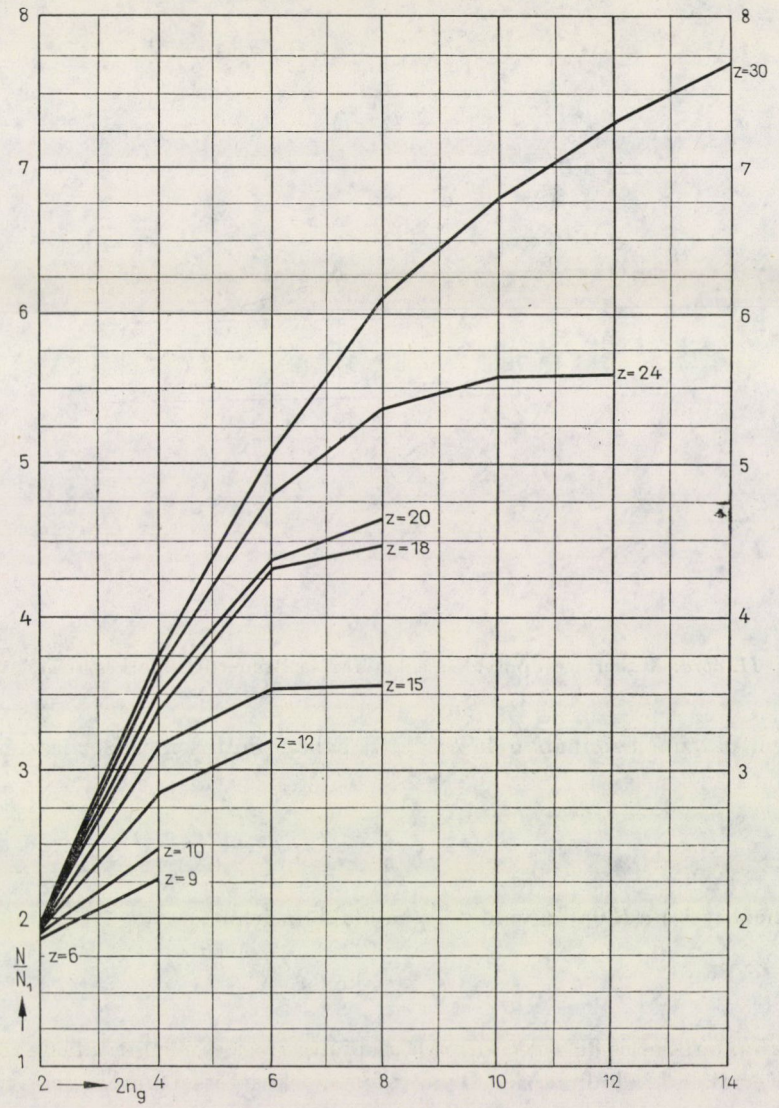
$A_{ng} = \left[1 + \left(\frac{\cos 3\gamma}{\cos \gamma}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\cos 5\gamma}{\cos \gamma}\right)^{\frac{5}{2}} + \ldots\right]$ a terhelt golyópárok szerint;

N = A terhelés normális komponense, mely $\varphi = 0°$-nál $= Q_{max}$;

N_1 = A középső terhelt golyópár egy golyójára eső nyomás.

Golyók száma z	Fél osztásszög γ	Terhelt golyók száma $2n_g$	Az erők aránya $\frac{N}{N_1}$	A_{ng}	Félterhelési ív ξ
6	30°	2	1,73	1	30°
9	20°	2	1,88	1	20°
		4	2,27	1,335	60°
10	18°	2	1,9	1	18°
		4	2,48	1,305	54°
		2	1,94	1	15°
12	15°	4	2,85	1,457	45°
		6	3,2	1,648	60°
		2	1,96	1	12°
15	12°	4	3,18	1,622	36°
		6	3,54	1,807	60°
		8	3,55	1,810	84°
		2	1,97	1	10°
18	10°	4	3,42	1,735	30°
		6	4,33	2,196	50°
		8	4,47	2,267	70°
		2	1,976	1	9°
20	9°	4	3,5	1,777	27°
		6	4,38	2,214	45°
		8	4,65	2,355	63°
		2	1,98	1	7°30'
		4	3,65	1,842	22°30'
24	7°30'	6	4,79	2,418	37°30'
		8	5,38	2,717	52°30'
		10	5,57	2,808	67°30'
		12	5,58	2,814	82°30'
		2	1,99	1	6°
		4	3,76	1,89	18°
		6	5,09	2,594	30°
30	6°	8	6,11	3,074	42°
		10	6,8	3,342	54°
		12	7,3	3,367	66°
		14	7,7	3,387	78°

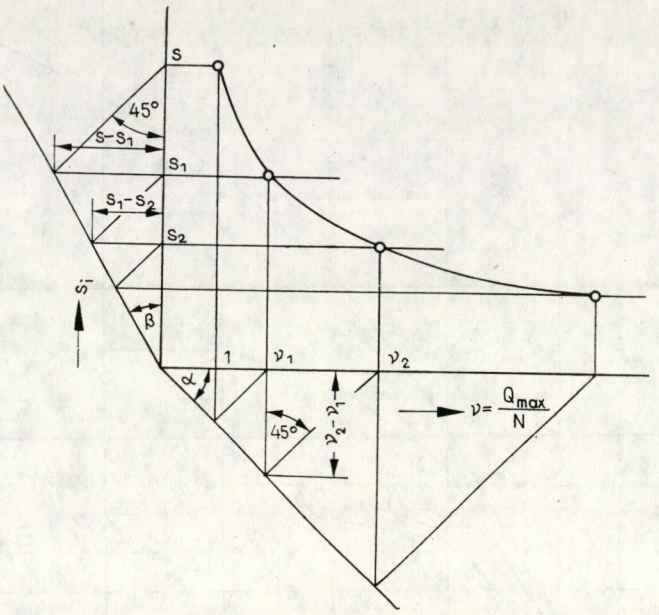
A következőkben látni fogjuk, hogy a hordozó golyók középponti szögének nagysága nemcsak a legjobban terhelt két középső golyó igénybevételét szabja meg, hanem lényeges szerepet játszik abban is, hogy a létrejövő rezgésjelenségek miképp folynak le.



10. ábra. A terhelés normális komponensének aránya a középső golyópár egyik golyójára eső nyomáshoz a hordozó golyók függvényében különböző összgolyószámoknál

VIII. A tengelyközép képzelt keringő pályája

A (20a) egyenlet minden φ szöghöz tartozó N normál erőre megadja az s_i süllyedés értékét. Ha elképzeljük, hogy valamilyen kényszer vezeték (pl. a K körül forgó kulissza) folytán O tengelyközép valóban a φ fázis szög szerint teljesen körül is keringene, és közben az N normális nyomás az O tömegpontra szabadon érvényesülne, akkor (20a) szerint a keringő pálya alakját egész pontosan meg lehetne állapítani.



11. ábra. A „keringési pálya" meghatározása Brauer-féle szerkesztéssel

Nem okozna azonban nehézséget a pálya pontos megszerkesztése sem. Ugyanis a

$$\frac{Q_{\max}}{N} = \nu$$

jelölést bevezetve a (20a) egyenlet ilyen alakban írható

$$s = s_i \nu^{\frac{2}{3}} = \text{konst.} \tag{20b}$$

Az 5a, 6a, 7a, és 8a vektorábrák alapján az egyes φ elfordulási szögekhez tartozó ν értékek kiadódnak és a Brauer-féle szerkesztéssel a megfelelő s értékek meghatározhatók.

E célból a 11. ábrában α segédszöget 45°-nak felvéve az

$$(1 + \tan \beta) = (1 + \tan \alpha)^{\frac{2}{3}}$$

egyenlet szerint β meghatározására kapjuk

$$1 + \tan \beta = 2^{\frac{2}{3}} = 1{,}5874,$$

és

$$\tan \beta = 0{,}5874; \quad \beta = 30°26' .$$

Az ábrából látható szerkesztésből kitűnik, hogy

$$\frac{s_1 - s_2}{s_2} = \tan \beta = \frac{s_1}{s_2} - 1,$$

és

$$\frac{v_2 - v_1}{v_1} = \tan \alpha = \frac{v_2}{v_1} - 1,$$

tehát

$$\frac{s_1}{s_2} = 1 + \tan \beta = (1 + \tan \alpha)^{2/3},$$

és

$$\frac{v_2}{v_1} = (1 + \tan \alpha),$$

vagyis a (20b) egyenletet a szerkesztés kielégíti, mert

$$\frac{s_1}{s_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{2/3},$$

azaz

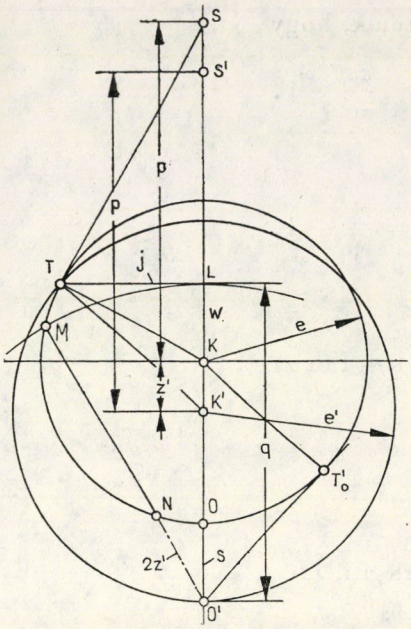
$$s_1 v_1^{2/3} = s_2 v_2^{2/3} = \ldots = s = \text{konst.}$$

Az így meghatározott s_i értékeket a K középponton áthaladó φ fázis szögű sugárra az e excentricitás körétől az n normális gyorsulás irányában felmérve, nyerjük a keringési pályát. (Természetes, hogy a K ponthoz való közeledésnek csak előfeszítésnél van fizikai értelme.) A szerkesztéshez elegendő az egyetlen s kiszámítása, mivel az n gyorsulások a vektorábrákból kiadódnak.

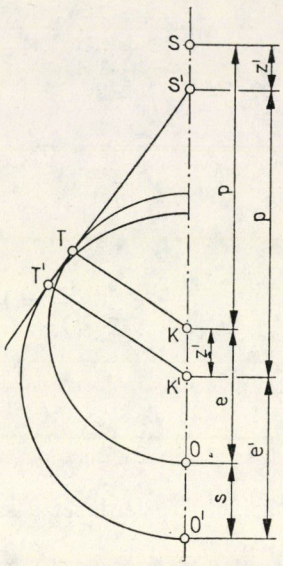
Felesleges azonban a keringési pályának ily módon való megszerkesztése, mert általánosságban — amint ezt a következő fejezetben már látni fogjuk — az O tömegpont nem követheti ezt a pályát, hanem annak csak egy egész kis ívét. Éppen ezért ezt az elméletileg pontos keringési pályát olyan körrel helyettesítjük, mely az elméleti pályához a jellegzetes pontokban tökéletesen simul. A tengely rezgő mozgásának jellemzéséhez ennek a simuló körnek kell az e' sugarát és K' középpontját ismernünk, a *p pólus távolság nagysága* (mivel az (8) szerint csak $\bar{a}$ gyorsulástól, *n fordulatszámtól*, továbbá a d belső és D külső gördülő pályától függ) *változatlan marad, de saját egyenesén eltolódik K'S'-be.*

1. *eset.* $\bar{a}/c > 1$; $p > e$; *S pólus a végesben.*

A 12. ábra K középponttal bíró e sugarú köre a terhelés nélküli (deformáció nélküli) keringő pályát, a hozzátartozó S pólust és az ebből vont érintő T érintési pontját, valamint a deformáció folytán támadt s süllyedést tünteti fel, mint kiindulást. Ezekből az adatokból úgy kívánjuk meghatározni a defor-



12. ábra. A „keringési pálya" simuló köre (*O'* és *T* pont közös)



13. ábra. A „keringési pálya" simuló köre (*O'* pont és *S'T'* érintő közös)

máció folytán létrejövő keringési pálya körének e' sugarát és K' középpontját, hogy ez a kör keresztülmenjen O' ponton, valamint a T érintési ponton, mert akkor eleget teszünk az 5*a* vektorábrában kifejezésre jutó követelménynek, hogy az O' pontban legyen a legnagyobb az s süllyedés és fokozatosan kisebbedve T pontnál már tűnjék el a deformáció.

Az ábra jelöléseivel $KK' = z'$ ismeretlent igyekszünk meghatározni, mert ezzel

$$e' = e + s - z'$$

már kiadódik.

LTK' derékszögű háromszögből

$$j^2 + (w + z')^2 = \overline{K'T}^2 = \overline{K'O}^2 = (e + s - z')^2 ;$$

$$j^2 + w^2 + 2wz' + z'^2 = e^2 + 2es + s^2 - 2ez' - 2sz' + z'^2 ;$$

$$2z'(w + e + s) = (e + s)^2 - (j^2 + w^2) ,$$

mivel az ábra szerint

$$j^2 + w^2 = e^2$$

és

$$w + e + s = q ,$$

továbbá az $O'T_0'$ érintő hossza

$$(e + s)^2 - e^2 = \overline{O'T'}^2 ,$$

azért

$$2z'q = (e + s)^2 - e^2 = O'T'^2 ,$$

amiből az a rendkívül egyszerű szerkesztés adódik, hogy O'-ből $O'L = q$ sugárral körívet vonva és ennek e sugarú körrel való M metszés pontját O'-vel összekötve, kapjuk az N pontot, amelyre nézve

$$z' = \frac{O'N}{2} ,$$

a számított érték pedig fenti egyenletből

$$z' = \frac{(e + s)^2 - e^2}{2q} = \frac{2es + s^2}{2(w + e + s)} , \tag{27}$$

ahol SKT derékszögű háromszögből

$$w = \frac{e^2}{p} , \tag{28}$$

és

$$e' = e + s - z' . \tag{29}$$

Egyszerű geometriai megfontolás szerint pedig az $O'T$ felező merőlegese metszi ki K' középpontot $O'S$ egyenesből.

A tárgyalt simulókör nagy fordulatszám és kis deformáció esetére alkalmas. Kis *fordulatszám* és nagy deformáció esetén használható a 13. ábrában feltüntetett simulókör is. Ez a kör szintén keresztülmegy O' ponton és S' pólusból vont érintője érinti az e sugarú kört is.

Az ábrában feltüntetett geometriai vonatkozásokból a K' pontot meghatározó z' eltolódás a következőképp adódik:

$$S'O' : S'K' = S'O : S'K ,$$

vagyis

$$(s + e + p - z') : p = (e + p - z') : (p - z') ,$$

ahonnan

$$z'^2 - z'(p + e + s) + sp = 0 .$$

Az O' ponton két olyan kör megy keresztül, melyeket az S'-ből az e sugarú körhöz vont érintők érintenek, ezek közül megoldásunkat a kisebbik z' érték szolgáltatja.

$$z' = \frac{(p + e + s) - \sqrt{(p + e + s)^2 - 4ps}}{2(p + e + s)} \tag{30}$$

az

$$e' = e + s - z'$$

értéknek $s = 0$ esetén a (30) kifejezés szerint is $z' = 0$, vagyis $e' = e$ felel meg.

2. *eset* $\bar{a}/\bar{c} > 1$, $p = \bar{a}/\omega_k^2 \to \infty$

Ebben az esetben a normális erő abszolút értéke úgy $\varphi = 0°$-nál, mint pedig $\varphi = 180°$-nál egyformán P, tehát az e sugarú excentricitás köre *önmagával párhuzamosan* eltolódik.

3. *eset* $\bar{a}/\bar{c} = 1$; $p = e$; *S pólus a keringési körön.*

A keringési görbét

$$e' = \frac{2e + s}{2} \tag{31}$$

sugarú simuló körrel helyettesíthetjük, amelynél az eltolódás

$$z' = \frac{s}{2}. \tag{32}$$

Itt azonban kitűnik, hogy a simuló körrel való helyettesítés már kifogásolható, ha s nagy az e-hez képest, mert a keringési pálya görbületi sugarának a felső tetőpontban éppen e-nek kellene lenni, mivel a p pólustáv változatlan. A helyes pályaalak (20b) szerint adódik.

4. *eset* $\bar{a}/\bar{c}_{if} < 1$; $p < e$; *S pólus az e sugarú körön belül foglal helyet.*

Ebben az esetben a képzelt keringési pálya a felső tetőpontban is távolodik az e sugarú körtől s_{if}-el, tehát (20a) szerint

$$s_{if} = s\left(\frac{P - C}{P + C}\right)^{\frac{2}{3}}$$

alapján meghatározzuk a felső tetőpontban fellépő s_{if}-t is, és ennek alapján

$$e' = \frac{2e + s + s_{if}}{2}, \tag{33}$$

és a keringési középpont eltolódása

$$\overline{KK'} = z' = \frac{s - s_{if}}{2}. \tag{34}$$

Megismételjük, hogy a képzelt keringési pályának simuló körrel való helyettesítése azért engedhető meg, mert általában ennek csak egy ív részlete játszik szerepet.* A következetesség kedvéért meg kell azonban említenünk, hogy az ovális keringési pálya változó görbületi sugarakat tartalmaz. Tudjuk, hogy a pólustáv mindig a görbületi kör középpontján megy keresztül. Elméleti

* Nagy pólustávnál és $\varphi = 0$ környezetében $\bar{e} = e + s$ is tekinthető simuló körnek.

szigorúsággal tekintve K középpont változását, azt kell kijelentenünk, hogy a normális erők változása által a fázisszöggel együtt változó deformóció ovális keringési pályát is eredményezhet, ami a pólustávnak nemcsak saját vonalában, hanem önmagával párhuzamos eltolódását is eredményezheti a pálya különböző sugarú görbületi körei miatt. A pólustáv nagysága ilyenkor is változatlan marad. De látni fogjuk, hogy általában e jelenség fellépését megelőzhetik más rezgés jelenségek és a görbületi sugár változása következtében fellépő pólus „táncolásra" csak igen nagy terheléseknél és *fordulatszámoknál* van eshetőség.

IX. A ható erők működési képe (konfigurációja)

Az előzőek szerint a saját tengelyére tökéletesen kiegyensúlyozott forgó rendszernek hézaggal bíró gördülőcsapágyban való forgásakor nemcsak a tengelyközéppontra ható erőket, hanem a tengelyközéppontnak a deformálódó golyók folytán keletkezett pályáját és az ezt megközelítő kört is ismerjük.

Vizsgáljuk meg most azt, hogy az elfordulás szögével változó *erőtér* hatása alatt milyen elmozdulások jöhetnek létre. Kétféle esetet kell megvilágítanunk: Milyen elmozdulás jöhet létre a súrlódástól függetlenül, és milyen az elmozdulás akkor, ha a görgőknek a csapágy-gyűrűkkel való súrlódását is figyelembe vesszük.

1. *eset. A pólustáv nagyobb, mint az excentricitás*

$$\frac{\bar{a}}{\bar{c}} > 1, \quad p > e; \quad S \text{ pólus a végesben}$$

A 14a ábra $\varphi = 0$ helyzetben 4 hordozógolyót tüntet fel. Az ennek megfelelő fél középponti szög $\xi = 3\gamma$ és $e' = e + s - z'$ érték szerint az A és B szélső golyók vezérsugarai a

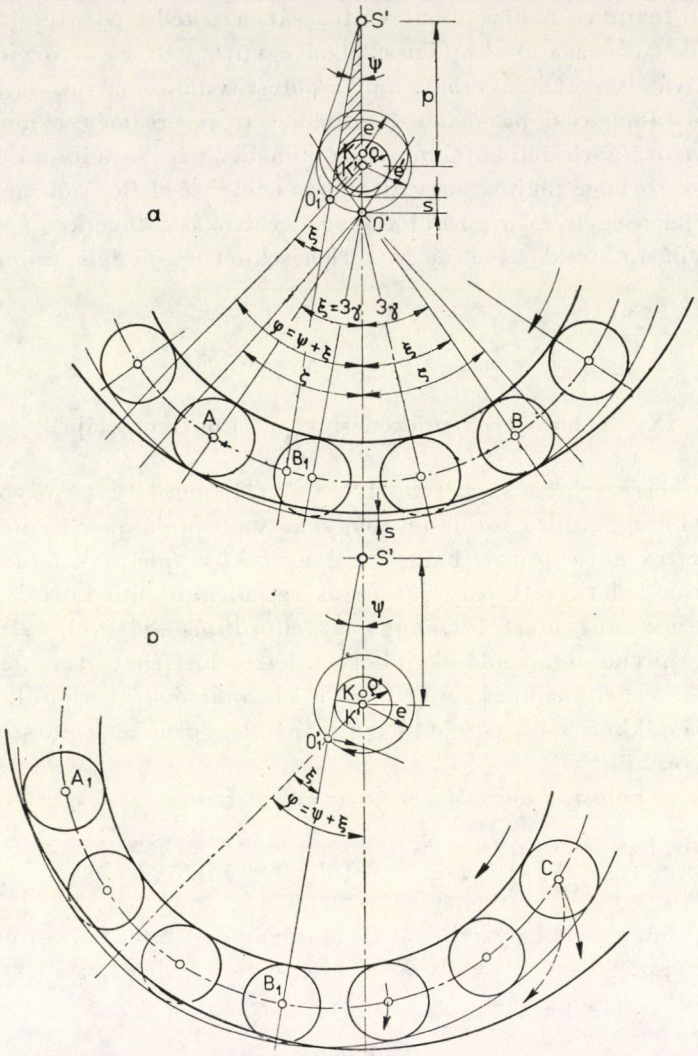
$$\varrho' = e' \sin \xi \tag{35}$$

sugarú kört érintik.

A négy hordozó golyó gördülésekor az O' helyzetű tengelyközép az e' excentricitási görbén mozdul el. Az O' helyzetű tengelyközépnek K' körüli keringési pályán történő elmozdulása közben a normális komponens csökkenése folytán előfordulhat, hogy a terhelési ív kisebb lesz és két szélső golyó felszabadul a terhelés alól, ami maga után vonja ϱ' alapkörsugár azonnali kisebbedését. Az alapkörsugarának nagysága ugyanis szoros összefüggésben van a terhelés folytán bekövetkező deformációval és a hordozó golyók számával.

Elhanyagolhatóan kis terheléskor két érintkező golyó esetében

$$\varrho = e \sin \gamma \tag{35a}$$



14a. ábra. Hordozó golyócsoport $\varphi = 0$ helyzetben véges pólustávnál
14b. ábra. Ugyanaz $\varphi = \psi + \xi$ billenési helyzetben

A (35) képlet szerint ϱ' a sin ξ értékkel arányosan növekszik és $2\xi = 180°$ esetében, amikor a szélső hordozógolyók vezérsugarai az e' sugarú kör érintőibe mennek át,

$$\varrho'_{max} = e' \sin \frac{\pi}{2} = e' . \tag{35b}$$

A 14a ábrában felvázolt esetben a következő mozgásjelenségek léphetnek fel:

a) A belső gyűrűnek a 4 hordozó görgőn való gördülése közben az O' tengelyközép e' sugarú körön keringő mozgást végez mindaddig, amíg a felvett fordulatirány mellett az „utolsó" B hordozó görgő vezérsugara keresztül nem megy az S' erőközépponton. A golyónak ezt az új B_1 helyzetét egyszerűen úgy szerkeszthetjük meg, hogy S' pontból ϱ' sugarú alapkörhöz érintőt vonunk és ez a golyókoszorú középköréből az új B_1 golyóhelyzetet, e' sugarú excentricitás köréből pedig az új O_1' tengelyhelyzetet metszi ki.

A 14b. ábra az új helyzetet szemlélteti az A és B golyók új A_1 és B_1 helyzetével. Ebből látható, hogy az eddigi 4 hordozó golyó nem maradhat tovább terhelés alatt, miután „utolsó" B golyója is kilép az erő $S'O_1'$ hatásvonalából és a tengelyközép O_1' helyzetéből B_1 körül hátrafelé „billen". E billenő mozgásban résztvesz az egész golyókosár és a következő négyes golyócsoport C golyója billenését B_1 középpontú körívvel kezdi, de eltér a körtől, mivel B golyó közben tovahalad. Ugyancsak körívvel kezdi billenését az O_1' tengelyközép is, de pályáját ugyancsak befolyásolja a B billenési középpont elmozdulása, annyit azonban már most is láthatunk, hogy a billenés befejezésekor O tengelyközép újra az e' sugarú excentricitás görbéjére kerül.

A billenés kezdő helyzetét számítással is egyszerűen megállapíthatjuk: Az $S'K'O_1'$ háromszögben a 14b. ábra jelöléseivel

$$\varphi = \psi + \xi \tag{36}$$

és

$$\varrho' = p \sin \psi \,, \tag{37}$$

ahonnan a φ elfordulási szöget meghatározó ψ szög (8) és (35) tekintetbevételével

$$\sin \psi = \frac{e'}{p} = \frac{(e + s - z')\sin \xi \cdot n^2}{91\bar{a}} \left(\frac{d}{D + d}\right)^2 . \tag{38}$$

A (19a) alapján megállapítható, hogy az adott terhelés mellett elfordulás közben szabadulnak-e fel golyók a terhelés alól. Ha a terhelés csökkenésekor golyók válnak tehermentessé, akkor ez s kisebbedése (38) szerint ψ szög kisebbedésével és ξ szög hirtelen kisebbedése folytán a φ fázis szög kisebbedésével jár, tehát a billenés a kiindulásul vett közép helyzettől számítva hamarább bekövetkezik.

A billenés befejezése után az O tengelyközép keringése az e' sugarú pályán ismétlődik.

b) Lehetséges olyan terhelés, amikor a hordozó golyók ξ fél középponti szöge már közel 90°, és az O' tengelyközép keringő mozgása közben az „utolsó" hordozó golyó már nem léphet ki a ható erő mezejéből. Ilyenkor mint már említettük az alapkör ϱ' sugara megközelíti az excentricitás e' sugarát és ennélfogva ilyen terhelésnél billenés nem következhetik be.

Hézaggal bíró csúszó csapágynál [19] a tengelyközép forgás közben nyugalmi helyzetéhez képest a „keringési pályán" a forgással ellentétes irányban elfordul oly módon, hogy a hatóerő érintőleges összetevője egyenlő a súrlódási erővel [20]. Hézaggal bíró *gördülő* csapágynál a tengelyközépnek ez az elfordulása a görgők következtében a *forgásiránnyal egyértelmű* és a terhelés ingadozásakor *„ringó"* mozgás okozója.

Az olyan terhelési esetekben, mikor „billenés" felléphet, ez az elősietés befolyásolja a billenés kezdetét, illetőleg ringó mozgás vezetheti be a billenést.

Azt a $\bar{\varphi}$ szöget, *melynél a visszaringás kezdődik*, kiszámíthatjuk a (13) és (14) egyenletek alapján, ha felvesszük a golyók és gördülőpálya közötti μ súrlódási tényezőt, melynek e fejezetben képletes jelentőséget tulajdonítunk és az egyes esetek összehasonlítására alkalmazzuk. (Részletesebb tárgyalása a XI. fejezetben található.)

Abban a pillanatban, amikor

$$\mu N \leq T\,,$$

a tengelyközép visszaringhat, tehát határesetben

$$\mu m(\bar{a}\cos\bar{\varphi} + e'\omega_k^2) = m\bar{a}\sin\bar{\varphi}\,,$$

vagyis

$$\bar{a}\sin\bar{\varphi} - \mu\bar{a}\cos\bar{\varphi} = \mu\, e'\,\omega_k^2\,,$$

ahonnan

$$\frac{\sin\bar{\varphi} - \mu\cos\bar{\varphi}}{\mu} = \frac{e'\omega_k^2}{\bar{a}}\,.$$

Bevezetve $\bar{\varrho}$ súrlódási szöget és a $\mu = \tan\bar{\varrho}$ összefüggést, (8) tekintetbevételével

$$\frac{\sin\bar{\varphi}\cdot\cos\bar{\varrho} - \cos\bar{\varphi}\cdot\sin\bar{\varrho}}{\sin\bar{\varrho}} = \frac{\sin(\bar{\varphi}-\bar{\varrho})}{\sin\bar{\varrho}} = \frac{e'\omega_k^2}{\bar{a}} = \frac{e'}{p}\,. \tag{39}$$

Ebből következik, hogy esetünkben $\bar{\varphi} - \bar{\varrho} < \bar{\varrho}$, vagyis

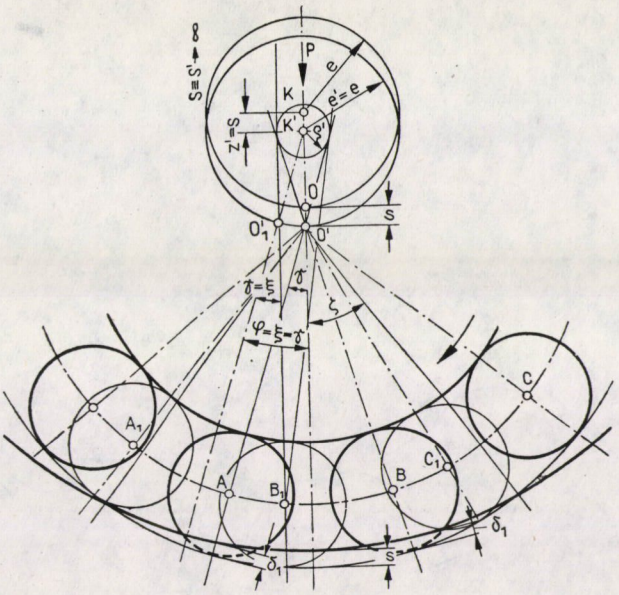
$$\bar{\varphi} < 2\bar{\varrho}\,,$$

és (7) tekintetbevételével $\bar{\varphi}$ meghatározására a következő képletet nyerjük:

$$\sin(\bar{\varphi}-\bar{\varrho}) = \frac{\sin\bar{\varrho}}{91}\,\frac{e'}{\bar{a}}\,n^2\left(\frac{d}{D+d}\right)^2, \tag{39a}$$

ahol e' (29)-ből z'-nek (27)-ből, vagy (30)-ból adódó értékével számítható.

Érdemes megemlíteni, hogy egyes megfigyelések szerint a „ringó" mozgáshoz hasonló „visszazökkenések" felléphetnek lassújáratú sikló csapágyakban is [11], és bizonyos körülmények között kellemetlen rezgéseket keltenek.



15. ábra. Egy hordozó golyópár $\varphi = 0$ középhelyzetben és $\varphi = \gamma$ billenési helyzetben végtelen pólustávnál

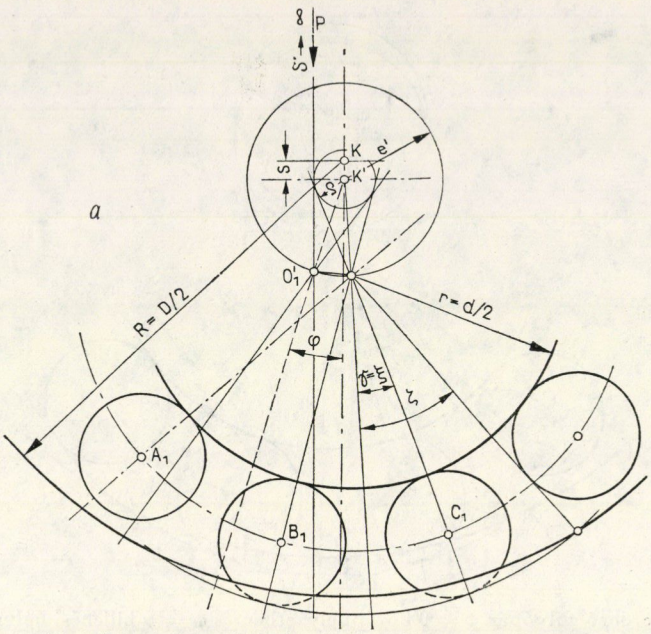
2. *eset. Erőközéppont a végtelenben,* $\bar{a}/\bar{c} > 1$; $p = \bar{a}/\omega_k^2 \to \infty$

Az olyan üzemviszonyok, amelyeknél a terheléshez képest igen kicsi a fordulatszám, az előző pont különleges eseteként tekinthetők. A végtelenben fekvő pólus azt jelenti, hogy P erő önmagával párhuzamosan eltolódva követi az O tengelyközepet ennek minden elmozdulásában.

a) A 15. ábra két terhelt golyót tüntet fel ennek következtében a *fél terhelési szög* $\xi = \gamma$. A végtelenben levő $S \equiv S'$ pontból az e sugarú körhöz vont érintők csak akkor érinthetik a K' középpontú e' sugarú kört, ha az eredeti *excentricitás körét* a P erő irányában *önmagával párhuzamosan* s süllyedési távolsággal eltoljuk. A deformáció folytán O'-be került tengelyközép csak addig keringhet B terhelt golyón, míg a golyó a tengelyközéppel együtt a P erő irányába nem esik, illetve ezt el nem haladja. A tengelyközép O_1' és a golyó B_1 helyzetében (a jelzett fordulatirány mellett) B_1 *körül billen* az egész golyókoszorú a tengellyel együtt. Billenés után az A_1 helyzetbe jutott A golyó vezérsugara nem érinti többé a ϱ' sugarú alapkört, ennek helyébe lép B_1 golyóé. B vezérsugara helyett pedig a hordozóvá vált C_1 helyzetű C-golyó vezérsugara (15a ábra). Miután közvetlen az átbillenés után a C golyó is deformálódik, *a fellépő elmozdulásokra* nem a ζ fél terhelési ív, hanem a ξ *fél terhelési szög a jellemző.*

Miután az üzemi viszonyoknak ennél az eseténél

$$\psi = 0\,,$$



15a. ábra. A következő hordozó golyópár átváltás után

a (36) szerint az átbillenés kezdetének a fázisszöge

$$\varphi = \xi \,. \tag{40}$$

b) Azt a $\bar{\varphi}$ szöget pedig, melynél a *visszaringás* kezdődik $\bar{\varrho}$ súrlódási szög és a (13a)-ban kifejezett normális gyorsulás, továbbá a (14)-ben kifejezett, de erre az esetre is érvényes tangenciális gyorsulás tekintetbevételével számíthatjuk. A

$$\mu \bar{n} \leqq \bar{t} \,,$$

határesetben

$$\mu \bar{a} \cos \bar{\varphi} = \bar{a} \sin \bar{\varphi} \,,$$

ahonnan

$$\tan \bar{\varphi} = \mu = \tan \bar{\varrho}$$

és

$$\bar{\varphi} = \bar{\varrho} \,. \tag{41}$$

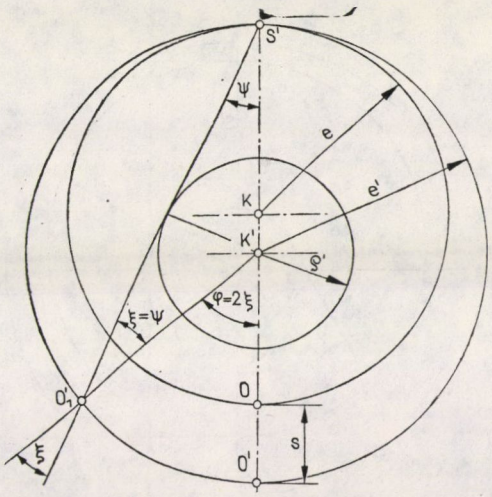
3. *eset.* $\bar{a}/\bar{c} = 1$; $p = e$; *S pólus a keringési körön*

A 16. ábrában csupán a terhelés nélkül deformációmentesen érvényesülő e sugarú keringési kört, továbbá az ehhez és a keringési pályához simuló deformáció esetére érvényes e' sugarú simuló kört, valamint a ϱ' sugarú alapkört tüntettük fel.

a) *Az átbillenés* kezdetének φ fázisszöge az $S'K'O_1'$ egyenlőszárú háromszögből egyszerű szemlélettel megállapítható; ugyanis ebben az esetben

$$\xi = \psi \,;$$

$$\varrho' = e' \sin \psi = e' \sin \xi \,, \tag{42}$$



16. ábra. Keringési pálya $\varphi = \psi$ esetén (Pólus a keringési-körön)

és az átbillenés kezdetének fázisszöge

$$\varphi = 2\xi\,. \tag{43}$$

b) *A visszaringás* kezdetének fázisszöge a (16) és az ennél az esetnél is érvényes (14) összefüggésekből számítható az előző meggondolás alapján:

$$\mu\bar{a}(1 + \cos\bar{\varphi}) = \bar{a}\sin\bar{\varphi}\,,$$

ahonnan

$$\frac{\sin\bar{\varphi} - \mu\cos\bar{\varphi}}{\mu} = 1\,.$$

Bevezetve a

$$\mu = \tan\bar{\varrho}$$

jelölést

$$\frac{\sin\bar{\varphi}\cdot\cos\bar{\varrho} - \cos\bar{\varphi}\cdot\sin\bar{\varrho}}{\sin\bar{\varrho}} = 1,$$

ahonnan

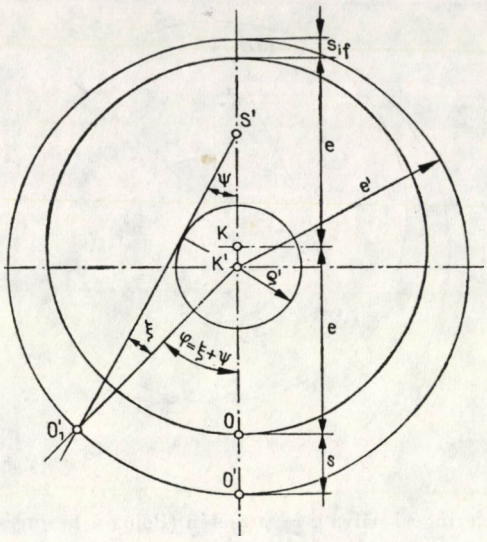
$$\sin(\bar{\varphi} - \bar{\varrho}) = \sin\bar{\varrho}\,,$$

amiből

$$\bar{\varphi} = 2\bar{\varrho}\,. \tag{44}$$

4. *eset.* $\bar{a}/\bar{c} < 1$; $p < e$; *S pólus az e sugarú körön belül foglal helyet.*

Ennek a fejezetnek első három pontjában azokat az üzemi viszonyokat vettük tekintetbe, melyeknél az S erőközéppont a végtelentől az excentricitás



17. ábra. Keringési pálya (pólus a keringési körön belül)

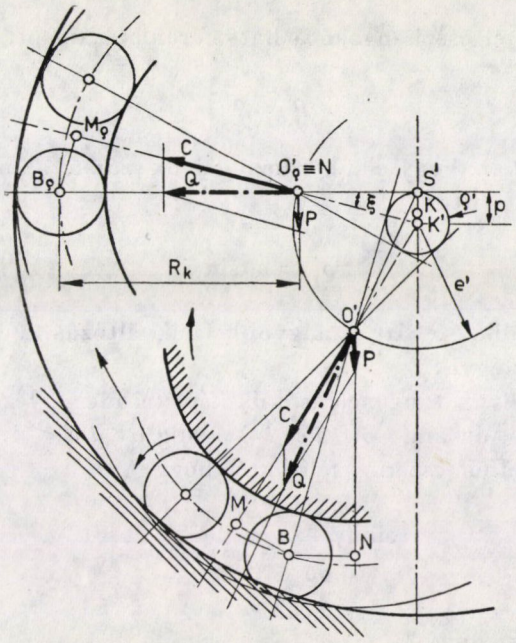
köréig vándorol. Amikor az üzemi viszonyok meghatározó adatai szerint az erőközéppontnak olyan az elhelyezkedése (konstellációja), hogy belép az e sugarú excentricitás körébe, avagy a ϱ' sugarú alapkör belsejébe, a jelenségek a legnehezebben követhetők, pedig az üzembiztonság szempontjából esetleg éppen a legfontosabb megállapításokra volna szükség, annál is inkább, mivel a melegedés miatt éppen nagy fordulatszámoknál fontos az elegendő nagy hézag.

Talán különösnek tűnik, hogyan lehet S pólus utolsó tized mm „útjának" nagyobb jelentősége, mint a nulla-fordulatnak megfelelő végtelen helyzettől az excentricitás köréig „megtett" útjának. Gondoljuk meg azonban, hogy a golyóscsapágy működő felületeinek simaságára vonatkozó tűrések mikron nagyságrendűek, míg a sugárirányú csapágyhézag már középnagyságú csapágyaknál tized mm is lehet [14], vagyis százszor akkora mint a felületek egyenetlensége. Szinte említésre kívánkozik az a hasonlat, mintha a terepjáró kocsinak 8—10 cm-es göröngyökön kívül 8—10 méretes üregek jelenlétével is kellene számolnia.

a) *A pólus változatlan külső terhelés mellett a fordulatszám növelésekor* közeledik K középponthoz (17. ábra) és a billenés szükséges feltétele, hogy

$$\varphi = \xi + \psi ,$$

ahol φ értéke a (21), (35) és (37) összefüggésekből kiszámítható. Az eddig tárgyalt 3 esetben mindig volt a keringési pályának olyan pontja, ahol a Q ható erő normális komponense eltünt (5c, 6b, 7b ábrák), ebben az esetben a normális komponens nem tűnik el (l. 8b. ábrát), és így felvetődik a kérdés, hogy melyik az a határhelyzet, melynél a fenti szükséges feltétel semmiképpen sem



18. ábra. A határfordulatszám esete (pólus a ϱ' alapkör kerületén)

elegendő a billenés bekövetkezéséhez. Kimutatjuk, hogy ez a határhelyzet akkor következik be, amikor a pólus éppen a ϱ' sugarú alapkör kerületére esik.

A 18. ábrán a terhelt golyócsoportot feltüntettük a tengely O' helyzetében, amikor P külső erő nyomatéki karja a billenési pontnak tekinthető B golyóra BN, a C centrifugális erőé pedig BM. A további forgás folyamán a centrifugális erő karja változatlan marad, P erőé pedig nagyobbodik és annál a B_ϱ helyzetnél lesz a legnagyobb, amikor a $B_\varrho O_\varrho$ sugár merőleges P-re.

Ha P erőnek ez a legnagyobb nyomatéka sem nagyobb a centrifugális erő nyomatékánál, akkor a billenő mozgás nem jöhet létre. Ennél a helyzetnél az ábra jelöléseivel a nyomatékok egyenlőségét kifejező egyenlet:

$$PR_k = CR_k \sin \xi \,.$$

Ebbe behelyettesítve

$$P = m\bar{a} \,,$$

és

$$C = me'\omega_k^2 = me' \frac{n^2}{91} \left(\frac{d}{D+d} \right)^2$$

értékeit, kifejezhetjük azt az n_h *határfordulatszámot*, amelynél már a billenés nem következhetik be:

$$n_h = 9{,}55 \frac{D+d}{d} \sqrt{\frac{\bar{a}}{e' \sin \xi}} = 9{,}55 \frac{D+d}{d} \sqrt{\frac{\bar{a}}{\varrho'}} \,. \tag{45}$$

A (8) képlettel összhangban a határfordulatszám ott lép fel, ahol

$$p = \varrho' .$$

Nyilvánvaló azonban, hogy ϱ' a hordozó golyók számával, illetőleg lényegében a deformációval együtt

$$\varrho' = e' \sin \xi \tag{46}$$

szerint nagyobbodik, tehát a nagyobb alakváltozás a határfordulatszám kisebbedésével jár együtt.

b) A normális és tangenciális erők képletei megegyeznek az 1. eset (13) és (14) képleteivel, de amíg ott $\bar{a}/\bar{c} > 1$ addig itt $\bar{a}/\bar{c} < 1$.

A (39) képletből eszerint felírható, hogy

$$\frac{\sin(\bar{\varphi} - \bar{\varrho})}{\sin \bar{\varrho}} = \frac{e'}{p} > 1,$$

amiből következik, hogy

$$\bar{\varphi} > 2\bar{\varrho} . \tag{47}$$

Nézzük, mi történik akkor, amikor $p = \varrho'$. A (35) tekintetbevételével (39) így írható $p = \varrho'$ esetén

$$\frac{\sin(\bar{\varphi} - \bar{\varrho})}{\sin \bar{\varrho}} = \frac{e'}{p} = \frac{\varrho'}{p \sin \xi} = \frac{1}{\sin \xi} .$$

A ξ szög értéke γ-tól 90°-ig terjedhet, tehát

$$\sin(\bar{\varphi} - \bar{\varrho}) = \sin \bar{\varrho} \ldots \frac{\sin \bar{\varrho}}{\sin \gamma} .$$

A $\xi = 90°$ határ esetnek $\bar{\varphi} = 2\,\bar{\varrho}$ felel meg, ami összhangban van (44)-el, mivel $\xi = 90°$ esetén (35) szerint $e' = \varrho'$. A $\xi = \gamma$ határesetben $\bar{\varphi}$ egyértelműleg meghatározható és értéke (47) szerint nagyobb $\bar{\varrho}$ kétszeresénél, ami összhangban van azzal, hogy p további kisebbedésével egyre valószínűbbé válik a *keringés*.

A saját tengelyére vonatkozólag kiegyensúlyozott, hézaggal bíró gördülőcsapágyban forgó tömegnek eddig háromféle rezgő mozgásával találkoztunk: a *billenés*, a *ringás* és a pólusnak az alapkörbe való „bevonulása" után fellépő *keringés*. Az eddigi vizsgálatok alapján az ilyenkor fellépő keringésről semmi közelebbit nem mondhatunk. A XI. fejezetben kíséreljük megállapítani, hogy ilyenkor a golyók gördülésével, vagy siklásával kell-e számolnunk.

X. A rezgési út

1. *Ringási szög*

Kis sugárirányú terhelésnél, avagy *pusztán forgatónyomaték átvitelekor* a deformáció elhanyagolható és ilyenkor az alapkör sugara az 1. és 2. ábrák szerint

$$\varrho = e \sin \gamma = h \operatorname{tg} \gamma = p \sin \psi .$$

Ha a súrlódásra sem vagyunk tekintettel, akkor a ringó kilengés is elmarad és csupán a *billenő mozgás lép fel* mindaddig amíg a fordulatszám növekedése következtében a pólustávolság a ϱ sugarú alapkör kerületére nem kerül. Az egyszerű geometriai szemléletből is következik, hogy *a billenő mozgás már nem jelentkezhetik, amikor a pólus-táv kisebb az alapkör sugaránál*, mert a billenési helyzet megszerkesztése azonos feladat azzal, hogy a dott S pontból érintőt húzunk a ϱ sugarú körhöz, már pedig a körön belül fekvő S pont esetében nem kaphatunk valós megoldást.

A radiális terhelés fellépésekor a *deformáció* fogalmát is be kellett vezetnünk és amint láttuk, az első sorban az e sugaró keringési kör helyett az e' sugarú simulókör bevezetését tette szükségessé, *az alapkör sugara pedig megnagyobbodott*

$$\varrho' = e' \sin \xi$$

értékűre, ahol ξ *kis terhelésnél* még γ *is lehet*, nagy terhelésnél pedig $\xi \approx 180°/2$. Ez utóbbi esetben

$$\varrho'_{\max} \approx e' .$$

A súrlódás fogalmának bevezetésével pedig megjelenik a $\bar{\varphi}$ *ringási* kilengés, mely végeredményben azt jelenti, hogy a *billenés* nem az előzőekben kiszerkesztett helyzetben *kezdődik*, hanem a *ringási* szöggel eltolódik. Amint az előzőekben láttuk ez a ringási szög a pólustáv függvénye és amíg a pólus a végtelentől a tengelyközép keringési pályájáig vándorol, a ringási szög $\bar{\varrho}$-tól $2\bar{\varrho}$-ig nő, majd a pólustávnak további csökkenésekor a ringási szög tovább növekszik.

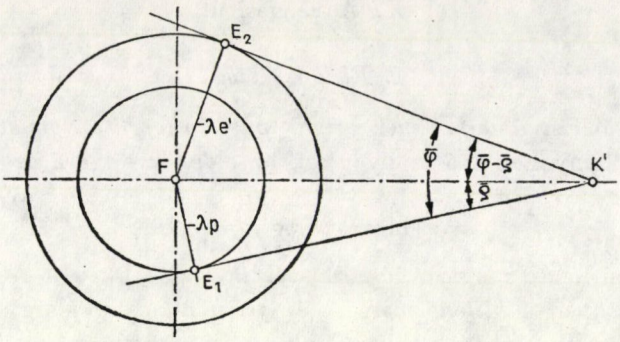
A (39) összefüggést a 19. ábra szemlélteti: A K' pontból kiinduló $\bar{\varrho}$ szög egyik szárának tetszőleges F pontjában FE_1 sugarú érintő kört rajzolunk a másik szögszárhoz majd

$$\frac{FE_1}{FE_2} = \frac{\lambda p}{\lambda e'} = \frac{p}{e'}$$

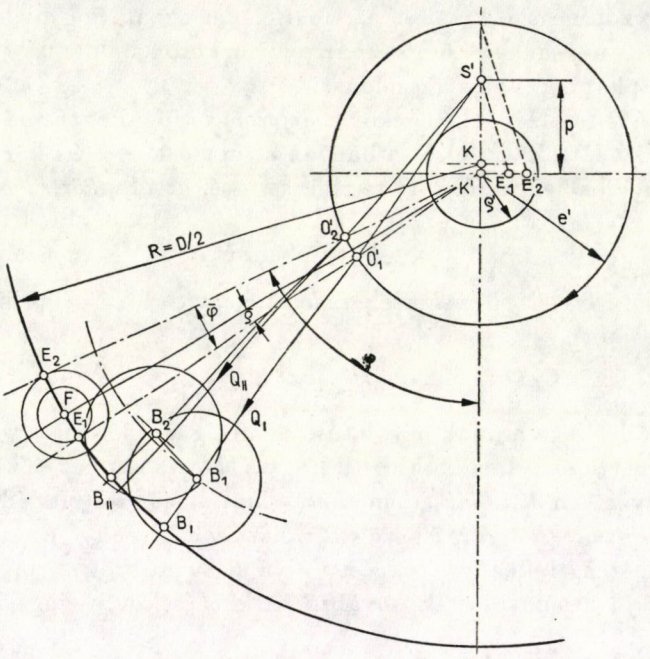
arány betartásával FE_2 sugarú kört rajzolva és ehhez K' pontból érintőt vonva, megkapjuk az

$$E_1 K' E_2 = \bar{\varphi}$$

ringási szöget.



19. ábra. A súrlódási szög és ringási szög összefüggése különböző pólustávoknál



20. ábra. A ringás fázisszögének meghatározása

A ringási szög helyzetének a golyóscsapágyban való megszerkesztését a 20. ábra tünteti fel: Az S' pontból a ϱ' körhöz vont érintő, mely az e' sugarú kört O_1'-ben, a külső gördülő kört B_I-ben metszi, a súrlódás nélküli billenő helyzetnek felel meg. Ennél a helyzetnél a hordozó golyócsoport középvonala $K'O_1'$, mely a külső gördülő kört E_1-ben metszi. $\bar{\varrho}$ szög másik szárának F pontjából megrajzoljuk az FE_1 és FE_2 sugarú köröket úgy, hogy

$$FE_1 = K'E_1'$$

és

$$FE_2 = K'E_2'$$

legyen.

Az ábra feltünteti azt a két párhuzamos vonalat is, amellyel a

$$K'E_2' : K'E_1' = e' : p$$

arány betartását elértük. $K'E_2$ az e' sugarú körből kimetszi O_2' pontot.

Most már $K'O_2'$ az új billenési helyzetnél a hordozó golyócsoport középvonala,

$$E_1K'E_2 \sphericalangle = O_1'K'O_2' \sphericalangle = \bar{\varphi} ,$$

a ringási szög és a B golyónak a külső gördülő pályával való B_{II} új érintési pontját az ábra jelzéseivel

$$E_2B_{II} = E_1B_I$$

távolságok egyenlősége alapján kapjuk meg.

Az ábrából kitűnik az is, hogy míg az S' pólusból kiinduló és az O_1' tömegponton áthaladó Q_1 erő áthalad a golyó B_1 középpontján, addig az $S'O_2'$ egyenesben ható erő nem halad át a B_2 helyzetű golyó középpontján és emiatt olyan forgató nyomaték keletkezik, mely éppen a súrlódási erők nyomatékával tart egyensúlyt.

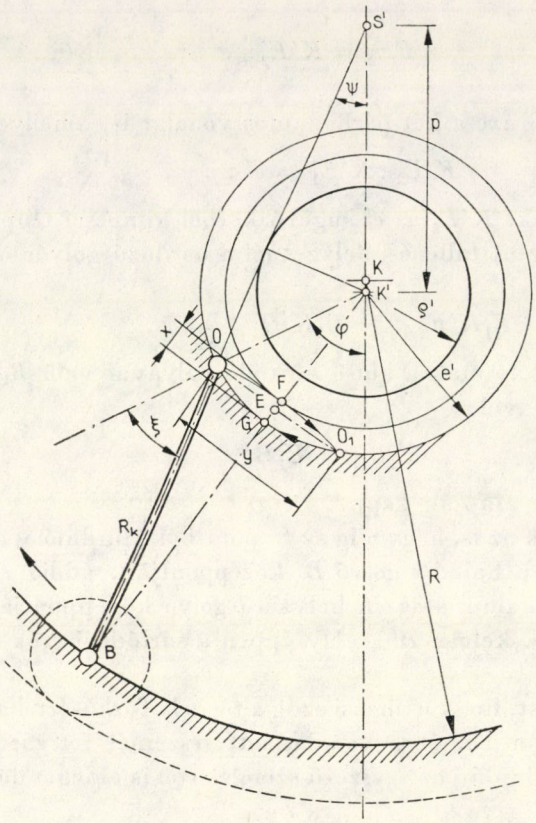
Azt a megállapítést, hogy e ringási szög a tengely forgásértelmével egyező értelemben keletkezik, a 18. ábra vonalkázott részeinél feltüntetett forgási irányokat jelző nyilak alapján az egyszerű szemlélettel is el lehet dönteni.

2. *Billenési pálya*

A csapágyhézag által megengedett térségen belül a gördülő csapágy tengelyének legjellegzetesebb elmozdulása a billenő pálya, mivel ez mind a deformáció mellett, mind anélkül, továbbá mind a kis, mind a nagy fordulatszámoknál fellép. Ha eltekintünk a ringó mozgástól és pusztán a billenést kívánnók leírni, akkor is bonyolult és kevéssé áttekinthető számítási eredményekre jutnánk, aminek oka abban rejlik, hogy e rezgés billenési szakaszának útgörbéjét az üzemi adatok csoportosulásának változásával más és más görbék jellemzik.

A kérdés úgy fogalmazható, hogy leírandó a súlytalan rúd egyetlen O tömegpontjának útja, amikor a rúd B pontja R sugarú körön ω_k szögsebességgel forog és az S' erőközéppont helyzete változatlan (21. ábra). Kis terhelésnél, 2 hordozó görgő esetén $\xi = \gamma$ és általában a billenés kezdetén (36) szerint $\varphi = \psi + \xi$. Az OFO_1 „*billenő szakasz*" után az e' sugarú körön O_1GO „*vonszolási szakasz*" zárja le a rezgési utat. Ha B billenési középpontot a billenés tartamára mozdulatlannak tekintjük, akkor a zárt rezgési útnak

$$OO_1 = y$$



21. ábra. A billenési pálya

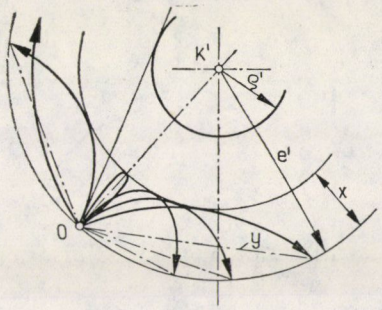
kilengésére merőleges

$$FG = x$$

kilengés F tető pontja B pontnak abban a helyzetében jelentkezik, amikor O pont együttállásban (opposicióban) van B és K' ponttal. A 23. ábrával kapcsolatban figyelembe vesszük a billenési középpont elmozdulását is.

A rezgés kezdetének φ fázis szöge pontosan meghatározható a (36) és (38) összefüggések szerint. Miután változatlan terhelés és változatlan fordulatszám mellett az S' erőközéppont sem változtatja helyét, az OFO_1 billenő szakasz minden hordozó golyócsoport váltáskor azonos görbe, tehát a szaporán következő ütések a gördülő pályának ugyanazt a helyét érik, ami a „*pikkelyesedés*" okozója lehet deformáció esetén éppúgy, mint kis terhelésnél a deformáció elhanyagolásakor.

Amikor B szögsebessége kicsi, a billenő szakasz B középponttal bíró körívnek tekinthető; ha ω_k szögsebesség nő (a p pólustáv csökken), akkor az y



22. ábra. Az egy kezdőpontba forgatott billenő görbék

amplitúdó előbb kisebbedik, sőt el is tűnhet, majd ellenkező irányban jelentkezik folyton nagyobbodva, míg végül a billenés helyett létrejön a *keringés*.

Az x amplitúdó előbb megtartja állandó nagyságát, még akkor is amikor y eltűnik, majd y irányváltása után fokozatosan csökken és közeledik a nullához (keringésnél).

Ha a különböző fázisszögnél keletkező képzelt billenő görbéket összehasonlítás kedvéért K' pont körül *egy kezdőpontba forgatjuk*, akkor a 22. ábrát kapjuk. Az ábra szerint x-et tetőponti y-t *ütközési* amplitúdónak nevezhetjük.

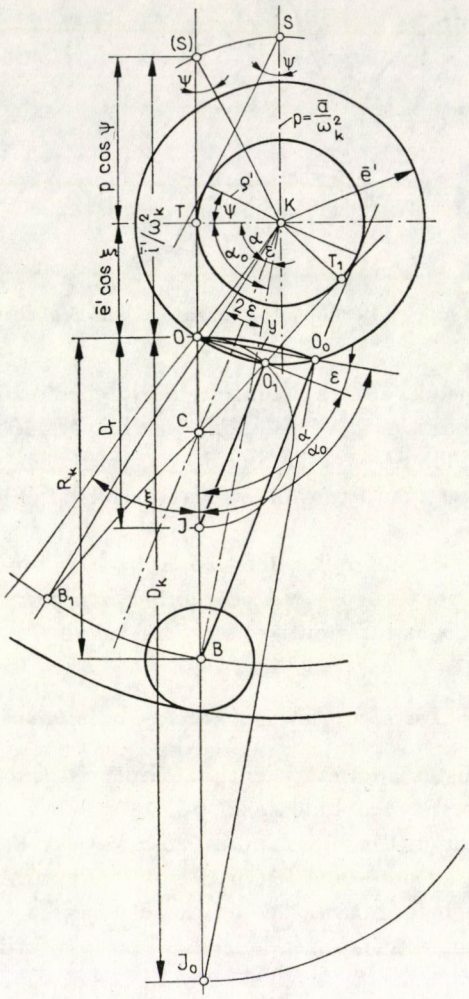
3. *Az ütközési amplitúdó közelítő számítása*

A különböző pólustáv mellett jelentkező billenési kezdőpontok erőit K körül egy egyenesbe forgatva a különböző pólustávoknak megfelelő ütközési amplitúdókat az SO irányú Q erőhöz különböző α szögek alatt hajló lejtőknek tekinthetjük. A 23. ábrán a ∞-ben fekvő S pont billentő erejének vonalába történt a beforgatás. A beforgatás szöge az illető pólushoz tartozó $\psi \sphericalangle$. Egyszerűsítésképp az $\bar{e}'$ sugarú kör középpontját K-ba helyeztük.

Végtelen nagy pólustávnál a billenő szakasz ideje alatt B pontot állónak képzelve, az OO_0 *lejtő szakaszon megtett út ideje* azonos azzal az idővel, ami az S pontból kiinduló gyorsulás hatására *szabad esésnél* az $OI_0 = D_k$ Thales-kör átmérő hosszának megtételéhez szükséges. Mivel véges nagyságú p pólustávnál ω_k lényegesen eltér a nullától, B billenési pont nem marad egy helyben, ennek folytán az ütközési amplitúdó is és a billenő szakasz ideje is csökken a végtelen pólustáv esetéhez képest. Megoldásra akkor jutunk, ha valamely tetszőleges pólustávolsághoz meghatározzuk a hozzá tartozó Thales-kör átmérőjét illetőleg a lejtő α hajlásszögét.

Valamely tetszőleges pólustáv mellett a billenés középpontjául szolgáló golyó a saját billenési BK sugárhoz képest a billenőszakaszt t tartalma alatt a 23a. ábra szerint

$$\omega_k t = 2\varepsilon = BKB_1 \sphericalangle$$

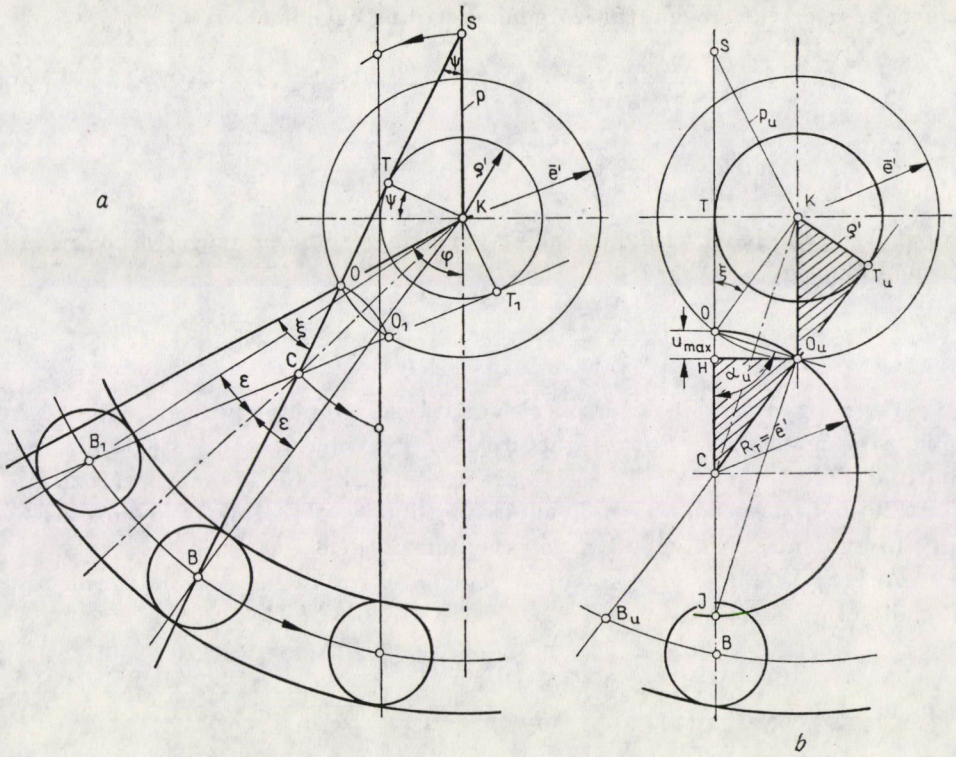


23. ábra. Az ütközési amplitúdót helyettesítő lejtő a Thales-körben

szögelfordulást végzi, ami abból következik, hogy billenés kezdetén T pontban, a végén pedig T_1 pontban érinti ϱ' kört a golyó vezérsugara. A merőleges szárú szögekre vonatkozólag a 23. ábra szerint

$$BKC \sphericalangle = O_0OO_1 \sphericalangle = \varepsilon = \alpha_0 - \alpha \,.$$

Feladatunk tehát abban áll, hogy az adott pólustávhoz tartozó $\bar{i}'$ billentő gyorsulás hatása alatt $t = 2\,\varepsilon/\omega_k$ idő alatt megtett szabadesési útat meghatározzuk, mivel ez lesz a pólustávhoz tartozó $D_T = OJ$ Thales-kör átmérő,



23a. ábra. Az ütközési amplitúdó keletkezése a billenési középpont elmozdulásakor
23b. ábra. A legnagyobb dinamikus hatás konfigurációja

vagyis

$$t = \sqrt{\frac{2D_T}{\bar{i}'}} = \frac{2\varepsilon}{\omega_k} = \frac{2(\alpha_0 - \alpha)}{\omega_k}$$

és

$$D_T = \frac{2\bar{i}'(\alpha_0 - \alpha)^2}{\omega_k^2} . \tag{48}$$

De *KTC* derékszögű háromszögből

$$CT = \frac{D_T}{2} + \bar{e}' \cos \xi = \varrho' \tan \alpha ,$$

ahonnan

$$D_T = 2\varrho' \tan \alpha - 2\bar{e}' \cos \xi . \tag{49}$$

(48) és (49) szerint és $\varrho' = \bar{e}' \sin \xi$ figyelembevéltelével

$$\frac{\bar{i}'}{\omega_k^2}(\alpha_0 - \alpha)^2 = \varrho' \tan \alpha - \bar{e}' \cos \xi = \bar{e}' \sin \xi \cdot \tan \alpha - \bar{e}' \cos \xi ,$$

vagyis az α értékét meghatározó goniometrikus egyenlet

$$\alpha^2 - 2\alpha\alpha_0 - \frac{\omega_k^2}{\bar{i}'} \sin \xi \cdot \tan \alpha + \frac{\omega_k^2}{\bar{i}'} \bar{e}' \cos \xi + \alpha_0^2 = 0 \; ; \tag{50}$$

$$\tan \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2}{3}\frac{\alpha^5}{5} + \frac{17\alpha^7}{3^2 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots$$

sorbafejtett alakjának első két tagját véve figyelembe, α szöget a következő harmadfokú egyenlet határozza meg

$$\alpha^3 - \frac{3\bar{i}'\alpha^2}{\omega_k \varrho'} + \left(\frac{6\alpha_0}{\varrho'}\frac{\bar{i}'}{\omega_k^2} + 3\right)\alpha - \left(\frac{3\bar{e}'}{\varrho'} \cos \xi + \frac{3\alpha_0^2 \bar{i}'}{\varrho' \omega_k^2}\right) = 0 . \tag{51}$$

Az α együtthatóinak értékére vonatkozólag megjegyezzük, hogy a p pólustávolságot (8) szerint meghatározó $\bar{a}$ gyorsulást és ω_k szögsebességet adottnak tekintjük, ξ szög (21) alapján γ tekintetbevételével meghatározható, $\bar{e}'$ a (20)-ból, ϱ' pedig (35)-ből határozható meg. Kiszámítandó még az $\bar{i}'$ billentő gyorsulás és a végtelen pólustávnak megfelelő α_0 szög.

Az $(S)KO$ háromszög oldalai ω_k^2-val szorozva a vektor háromszög oldalait adják,

$$\bar{i}' = \overline{(S)O} \cdot \omega_k^2 ,$$

$$(S)O = (S)T + TO = \sqrt{p^2 - \bar{e}'^2 \sin^2 \xi} + \bar{e}' \cos \xi ,$$

tehát

$$\bar{i}' = \omega_k^2(\bar{e}' \cos \xi + \sqrt{p^2 - \bar{e}'^2 \sin^2 \xi}) . \tag{52}$$

Az α_0 szög KTB derékszögű háromszögből határozható meg, melynek átfogója

$$BK = \sqrt{\bar{e}'^2 + R_k^2 + 2\bar{e}' R_k \cos \xi} \approx \sqrt{R_k^2 + 2R_k \bar{e}' \cos \xi}$$

és

$$\cos \alpha_0 = \frac{TK}{BK} = \frac{\bar{e}' \sin \xi}{\sqrt{R_k^2 + 2R_k \bar{e}' \cos \xi}} . \tag{53}$$

A lejtő α hajlásszögének ismeretével (48)-ból vagy (49)-ből a Thales-kör átmérője, az y ütközési amplitúdó hossza, az y útnak az $\bar{i}'$ gyorsulás irányába eső vetülete, ennek alapján pedig az ütközési sebesség meghatározható.

Legnagyobb az y ütközési amplitúdója a végtelen pólustáv esetén és pedig OO_0J_0 derékszögű háromszögből (53) tekintetbevételével

$$y = D_k \cos \alpha_0 = \frac{2R_k \bar{e}' \sin \xi}{\sqrt{R_k^2 + 2R_k \bar{e}' \cos \xi}} = \frac{2\bar{e}' \sin \xi}{\sqrt{1 + \dfrac{2\bar{e}' \cos \xi}{R_k}}} . \tag{54}$$

A billentő erő irányára eső vetület

$$u = y \cos \alpha_0 = D_k \cos^2 \alpha_0 . \tag{55}$$

Miután a VI. fejezet 2. pontja szerint végtelen pólustávnál

$$\bar{\imath}' \approx \bar{a} ,$$

a végsebesség (55) figyelembevételével

$$v_2 = \sqrt{2\bar{\imath}' \cdot u} \approx \cos \alpha_0 \cdot \sqrt{2\bar{a} D_k} \tag{56}$$

és az „esési idő" illetőleg a billenési idő

$$t = \sqrt{\frac{2D_k}{\bar{\imath}'}} \approx \sqrt{\frac{2D_k}{\bar{a}}} . \tag{57}$$

4. *A legnagyobb dinamikus hatás*

Bár az (50) és (51) egyenletek a billenőszakaszra a különböző üzemi viszonyok között érvényesülő mennyiségi vonatkozásokat tartalmazzák, a jellegzetes esetek számítás nélkül a Thales-kör alapján felismerhetők.

A 23. ábrából kitűnik, hogy a legnagyobb y ütközési kilengésre az egész lassú ún. nullfordulatnál számíthatunk (54) összefüggés szerint.

A 23. és 23a. ábrából az is látható, hogy a Thales-körök között lesz egy olyan, amelynél az α_u szögű lejtőnek a billentő erőre eső u vetülete a legnagyobb, és ennél jelentkezik a legnagyobb v_2 végsebesség. Az ábra szerint ez akkor következik be, amikor a lengési amplitúdó végpontját K középponttal összekötő egyenes párhuzamos a billentő erő irányával.

A 23a ábra szerint ilyen esetben

$$CHO_u \Delta \simeq KT_u O_u \Delta ,$$

mivel

$$HO_u = TK = KT_u = \varrho'$$

és szögeik egyformák.

Ezért a Thales-kör sugara

$$CO = KO_u = R_T = \bar{e}'$$

és

$$u_{\max} = \bar{e}' - \bar{e}' \cos \xi = \bar{e}'(1 - \cos \xi) . \tag{58}$$

A

$$D_T = 2\bar{e}'$$

Thales-kör átmérőhöz (48) szerint

$$\bar{\imath}' = \frac{\bar{e}' \omega_k^2}{(\alpha_0 - \alpha_u)^2} \tag{59}$$

billentő gyorsulás tartozik, melyből ω_k^2-val való osztás után a ható erők háromszögének SO oldala kiadódik

$$SO = \frac{\bar{\imath}'}{\omega_k^2} = \frac{\bar{e}'}{(\alpha_0 - \alpha_u)^2}$$

és az SKO háromszögből

$$SK = p_u = \frac{\bar{a}}{\omega_k^2} = \frac{\bar{a}}{\left(\frac{n\pi}{30}\right)^2 \left(\frac{d}{D+d}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\bar{e}'^2 + \frac{\bar{e}'^2}{(\alpha_0 - \alpha_u)^4} - 2\frac{\bar{e}'^2}{(\alpha_0 - \alpha_u)^2} \cos \xi}\,, \tag{60}$$

ahol HOO_u derékszögű háromszögből (58) értékével

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{HO_u}{HO} = \frac{\varrho'}{u_{\max}} = \frac{\bar{e}' \sin \xi}{\bar{e}'(1 - \cos \xi)}\,,$$

vagyis

$$\operatorname{tg} \alpha_u = \frac{\sin \xi}{1 - \cos \xi} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\xi/2)}\,. \tag{61}$$

Az OO_uC egyenlőszárú háromszögből

$$u_{\max} = \bar{e}' - \sqrt{\bar{e}'^2 - \varrho'^2}\,, \tag{62}$$

vagyis

$$u_{\max} = \bar{e}' \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho'}{\bar{e}'}\right)^2}\right) = \bar{e}'(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \xi}) = \bar{e}'(1 - \cos \xi)\,,$$

amivel a legnagyobb ütközési sebesség (59) értékével

$$v_{2\max} = \sqrt{2\bar{\imath}' u_{\max}} = \sqrt{\frac{2\bar{e}'\omega_k^2}{(\alpha_0 - \alpha_u)} \cdot \bar{e}'(1 - \cos \xi)}\,,$$

vagyis

$$v_{2\max} = \frac{\bar{e}'\omega_k \sqrt{2(1 - \cos \xi)}}{(\alpha_0 - \alpha_u)} = \frac{2\bar{e}'\omega_k}{(\alpha_0 - \alpha_u)} \sin \frac{\xi}{2}\,. \tag{63}$$

A kiindulási feltételek folytán természetes, hogy a Thales-körrel való közelítő számítás annál helytállóbb, mennél nagyobb a pólustáv és amikor a Thales-kör átmérője nullához közeledik, akkor e számítási mód elveszti jelentőségét.

XI. A csúszás esete

1. *Egy hordozó golyó*

A VII. fejezetben tárgyalt számítási mód, mellyel a stabilis helyzetet elfoglaló golyó-koszorú egyes golyópárjaira ható erőket meghatároztuk, módot nyújt arra is, hogy a gördülés és csúszás körülményeibe mélyebben betekinthessünk.

A 24. ábra egyetlen golyó és a gördülő pályák deformációját annak feltüntetésével szemlélteti, hogy a deformáció körén nem egyenletes a terhelés eloszlás, hanem a ráfutási félkörön nagyobb, mint a lefutásin. A *hasonlóság elve alapján* feltehető, hogy minden egyes hordozó golyó belapulási körének ϑ átmérője ugyanazzal a $\varkappa$ konstanssal szorzandó, hogy a gördülő súrlódás f karját megkapjuk, vagyis

$$f = \varkappa\vartheta ,$$

ahol $\varkappa$ az érintkező anyagok rugalmasságától függ. Ha feltesszük, hogy a terhelés egyenletesen oszlik el a belapulás félkörén, akkor $\varkappa$ tényező a terhelt félkör súlypontjának karja, vagyis

$$\varkappa = \frac{2\vartheta}{3\pi} .$$

Mivel a felületi nyomás a közép felé nagyobb és az érintkező anyagok rugalmassági tulajdonságaitól függően a lefutó *félkör* tehermentesítő hatása is érvényesül, a valóságban $\varkappa < 0{,}2\ \vartheta$.

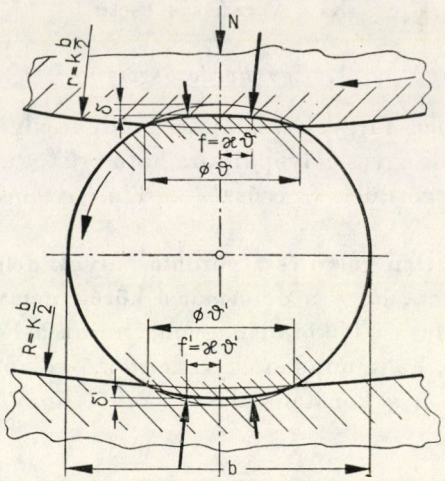
Hengeres felületek súrlódási tényezőjére a Hertz-féle egyenletek és az ebből következő geometriai vonatkozások alapján Vidéky [15] az

$$f = f_0 + 0{,}38 \sqrt{\frac{P'}{E}\frac{1}{r_1 + r_2}} \cdot \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{r_1 r_2}}$$

összefüggést adta meg, ahol P' a hengerhossz folyó cm-ére eső nyomás f_0 pedig a rendes értelemben vett súrlódási tényező. Bár ez az összefüggés henger és kúpgörgős csapágyaknál változatlanul átvehető, golyós csapágyakra vonatkozó vizsgálatainknál, azonban elegendő annak a feltételezése, hogy az egyes hordozó golyók súrlódása arányos a belapulás átmérőjével.

Hertz egyenlete szerint a belapulás következtében keletkezett kör átmérője [16] az ábra jelöléseivel

$$\vartheta = 2{,}22 \sqrt[3]{\frac{N}{E}\frac{(b/2)r}{b/2 + r}} ,$$



24. ábra. A golyó és a görbülő pályák deformációja egyetlen golyónál

és

$$\vartheta' = 2{,}22 \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{(b/2)R}{b/2 + R}}.$$

Bevezetve a két domború érintkező felületnél az

$$r = (+k)\frac{b}{2};$$

és a domború és homorú felületnél az

$$R = (-K)\frac{b}{2}$$

jelölést, és tekintetbe véve, hogy

$$R_k = 2r + b = d + b = 2R - b = D - b,$$

a belapulás átmérője

$$\vartheta = 2{,}22 \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{b}{2} \left(\frac{k}{1+k}\right)} = 1{,}76 \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{bd}{R_k}} \tag{64}$$

és

$$\vartheta' = 2{,}22 \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{b}{2} \left(\frac{K}{K-1}\right)} = 1{,}76 \sqrt[3]{\frac{N}{E} \frac{bD}{R_k}}. \tag{64a}$$

A gördülő súrlódás karja

$$f = 1{,}76\varkappa \sqrt[3]{\frac{N}{E}\frac{bd}{R_k}} = C\sqrt[3]{\frac{Nbd}{R_k}}, \tag{65}$$

$$f' = 1{,}76\varkappa \sqrt[3]{\frac{N}{E}\frac{bD}{R_k}} = C\sqrt[3]{\frac{NbD}{R_k}}, \tag{65a}$$

ahol

$$C = 2{,}22\sqrt[3]{\frac{1}{2E}}$$

az anyag-állandó.

2. *Egy hordozó golyópár*

Vizsgáljuk meg nlőszög *egy* hordozó golyópár esetén a csúszás feltételét (25. ábra).

Az ábra jelöléseit és a (18) alattiakat tekintetbe véve, továbbá a csúszási súrlódás tényezőjét μ-nal jelölve, a B golyóra ható

$$\mu N_1 = \mu \frac{N}{2\cos\gamma}$$

súrlódási erő akkor képes a golyót gördíteni, ha a golyó átellenes felfekvő pontjára vonatkozó forgató nyomatéka nagyobb, mint ugyanarra a pontra vonatkozó

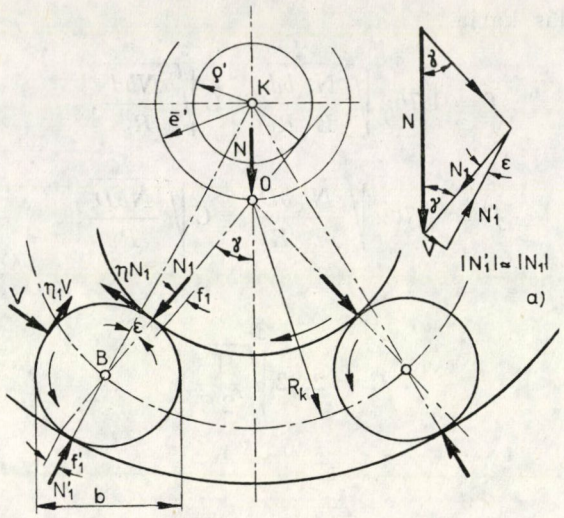
$$f_1 = C\sqrt[3]{\frac{N_1 bd}{R_k}} = C\sqrt[3]{\frac{Nbd}{2\cos\gamma R_k}}$$

és

$$f_1' = C\sqrt[3]{\frac{NbD}{2\cos\gamma R_k}}$$

karokon érvényesülő gördülési ellenállás, és a μ_1 súrlódási tényezővel számított kosársúrlódás $(\mu_1 v)b/2$ nyomatéka. Mindkét golyó terhelését tekintve

$$M = 2N_1\mu b \geq 2N_1 f_1 + 2N_1 f_1' + 2V\mu_1\frac{b}{2},$$



25. ábra. A csúszás feltétele egy hordozó golyópárnál
25a. ábra. Vektorábra

ahol (25a ábra)

$$V = N_1 \sin \varepsilon = N_1 \frac{\varrho'}{BK} = \frac{N_1 \bar{e}' \sin \gamma}{\sqrt{\bar{e}'^2 + R_k^2 + 2\bar{e}' R_k \cos \gamma}} \approx \frac{N_1 \bar{e}' \sin \gamma}{\sqrt{R_k^2 + 2\bar{e}' R_k \cos \gamma}},$$

vagyis (65) (65a) és (18) figyelembevételével

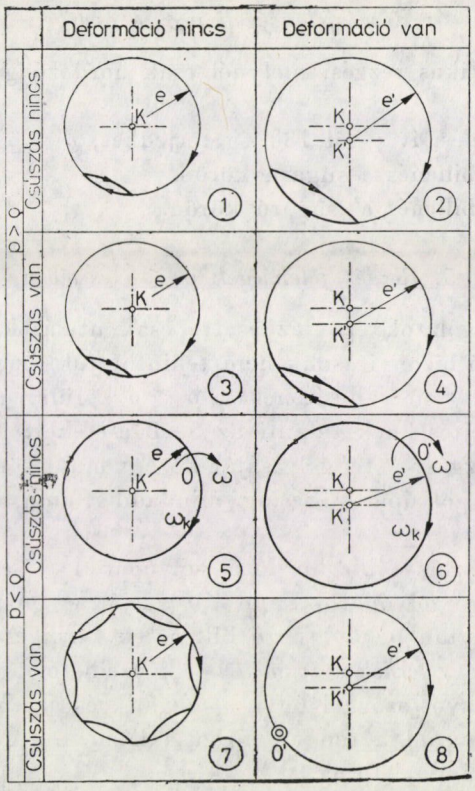
$$\frac{\mu N}{2 \cos \gamma} \geq \frac{N}{2 \cos \gamma} \frac{C}{b} \sqrt[3]{\frac{Nbd}{2 \cos \gamma R_k}} + \frac{N}{2 \cos \gamma} \frac{C}{b} \sqrt[3]{\frac{N}{2 \cos \gamma} \frac{bD}{R_k}} +$$

$$+ \frac{N \mu_1 \bar{e}' \sin \gamma}{2 \cos \gamma \cdot \sqrt{R_k^2 + 2\bar{e}' R_k \cos \gamma}}.$$

Tehát a gördülés feltétele

$$\mu \geq \frac{C}{b} \sqrt[3]{\frac{Nb}{2 \cos \gamma R_k}} (\sqrt[3]{d} + \sqrt[3]{D}) + \frac{\bar{e}' \sin \gamma \cdot \mu_1}{R_k \sqrt{1 + \frac{2\bar{e}' \cos \gamma}{R_k}}}. \qquad (66)$$

Ha pedig μ kisebb ennél az értéknél, akkor már csúszás is fellép.



26. ábra. A rezgésjelenségek különböző esetei

3. *Több hordozó golyópár*

Több golyópár esetén kell hogy

$$\mu(N_1 b + N_2 b + \ldots) \geq N_1(f_1 + f_1') + N_2(f_2 + f_2') + \ldots +$$

$$+ \frac{N_1 \bar{e}' \sin \gamma \mu_1}{\sqrt{R_k^2 + 2R_k \bar{e}' \cos \gamma}} + \frac{N_2 \bar{e}' \sin 3\gamma \mu_1}{\sqrt{R_k^2 + 2R_k \bar{e}' \cos 3\gamma}} + \ldots ,$$

legyen, ahol a megfelelő N értékek (26)-ból, vagy a megadott táblázat segítségével számíthatók. A kissé hosszadalmas számítás csak azt bizonyítja, hogy a csúszási határ az anyag rugalmassági tulajdonságain, és a μ, μ_1 súrlódási tényezőkön kívül a csapágy szerkezeti adataitól és a terheléstől függ.

A csúszási határ jelenlétével számot vetve, a saját tengelyére vonatkozólag kiegyensúlyozott, hézaggal bíró csapágyban forgó tömeg tengelyközepének rezgésjelenségeinél a tárgyaltak alapján a 26. ábrában feltüntetett 8 főesetet különböztethetjük meg.

4. *Rezgésjelenségek $p > \varrho$ esetében*

1. Tiszta kinetikus rezgés, melynél csak hordozó golyópárok váltogatják egymást.

2. A fél terhelési ív γ-tól 180°-ig terjedhet, $\varrho < \varrho' < e'$.

3. Ringás és billenés e sugarú körön.

4. Ringás és billenés e' sugarú körön.

5. *Rezgés jelenségek $p < \varrho$ esetében*

Az előző vizsgálatok erre az esetre csak utalásokat tartalmaznak és elméletileg helytálló bizonyításnak nem tekinthetjük, ezért a szerző — addig, amíg kísérletek fényt nem derítenek a $p < \varrho$ körülmények között történő forgásra — csak sejtéseknek tekinti az 5—8 eseteket:

5. Bolygó mozgás: A tengely saját középvonala körül forogva e sugarú körön ugyanazon a golyópáron kering, mindaddig, amíg a fordulatszám nem csökken.

6. Bolygó mozgás több hordozó golyópáron $e' > e$ sugarú keringési görbén, de a hordozó golyópárok nem váltogatják egymást.

7. Csúszás folytán bekövetkező billenések keringés közben.

8. *Elegendő nagy terhelési ív mellett* elképzelhető, hogy a tengely a forgásirányában „bizonyos szöggel felviszi magát", és a tengely középvonala e labilis helyzetben marad a tengely forgása közben. (A koszorú esetleg fél keringési fordulatszámmal forog.)

XII. A deformáció sebességének befolyása

Az előzőekben az egyszerűbb szemlélet és a tárgyalás egysége kedvéért hallgatólagosan feltételeztük, hogy az átbillenés egyformán megy végbe minden ξ szögnél. Ez azonban csak akkor lesz így, amikor a deformáció sebessége nem képes követni a ható erő változását. A valóságban csak kevés hordozó golyópár, nagy hézag és nagy fordulatszám esetén számíthatunk az ilyen „*éles*" átbillenésre.

Kis hézag, nagy terhelés és lassú fordulat esetén annak a golyónak, amelyik körül az átbillenés történne, van ideje, hogy a reá nehezedő terhelés hatására annyira belapuljon, hogy a következő golyó még az egész terhelt szakasz átváltása előtt részt vegyen a hordozásban. Ilyenkor az egész hordozó szakasz átbillenéséről nem is beszélhetünk, hanem csupán olyan „*lebegés*"-ről, mely az egyes golyóknak a terhelési szögbe való belépésével jár.

Általánosan ismert azonban az anyagnak az a sajátossága, hogy minél hirtelenebbül érik az erőhatások, annál inkább jelentkeznek a ridegség jellegzetességei. Ennélfogva várható, hogy azonos terhelés és azonos hézag mellett is „*élesebbé*" válik a billenés, amikor a fordulatszámot emeljük.

Elastic Vibrations in Rolling Bearings. Part I. The Rotating Mass is Balanced with Respect to its Centre Line. In the I. Part of this paper, author intends to describe to probable additional movement of the shaft centre in the meridional plane during rotation. It is remarked that the possible displacement of the shaft is limited by the clearance and by the actual deformation of both the raceway and the rolling elements. It is demonstrated that the rotating mass being balanced with respect to its centre line underlies to the action of a force that acts in a single centre. Dealing with the acceleration and forces and their components axial and tangential acting into the rotating mass, their values, for acting into the rotating mass, their values, for any phase angle, are also determined. The calculation as derived by STRIBECK for a bearing without clearance is applied to a bearing only when the loaded ball is in an unstable position. In this paper, this calculating method is extended to bearings having some loaded balls in a stable position. It is demonstrated further that the so-called „Punktlast" viz. a single point load is non-existing neither with a simplest load arrangement. On the contrary, there is a „hammering" load, acting into the outer raceway at a spot the location of which depends, up to a certain speed limit, on the phase angle determined by the instantaneous speed; the frequency of this hammering is higher than the r.p.m. of the shaft. On the other hand, the inner raceway underlies to another hammering force being in rotation the point of application of which changes round about in rapid succession, at a frequency that corresponds to the speed. It follows the description of how the tilting movement of the ball gives rise to the hammering action and also to another rocking movement to-and-fro the probability of which depends, besides, on the relative magnitude of the pole-distance as compared to the eccentricity.

Elastische Schwingungen in Wälzlagern I Teil: Die Rotierende Masse ist auf die eigene Rotationsachse ausgewuchtet. In diesem Teil der Arbeit verfolgt der Verfasser das Ziel, aufzuklären, welcher Art die verschiedenen Bewegungen sind, die *unter verschiedenen Betriebszuständen* vom Mittelpunkt der rotierenden Welle in der Lagerebene binnen jenen Grenzen durchgeführt werden können, die einerseits durch das Lagerspiel und andererseits durch die unter der Belastung entstehenden Verformungen bestimmt werden. — Er erbringt hier den Nachweis, daß — unter Voraussetzung einer auf die eigene Achse ausgeglichenen rotierenden Masse — der Angriffspunkt der wirkenden Kraft sich in einem einzigen Kräftemittelpunkt befindet. Da die Berechnungen von STRIBECK bei einem Lager mit Spiel nur im Falle einer Kugel in labilen Zustand anwendbar sind, hat der Verfasser diese durch enen Rechnungsgang für den Fall von Kugeln in stabilem Zustand ergänzt. Auf dieser Grundlage konnte er nachweisen, daß die sogenannte Punktlast selbst beim einfachsten Belastungsfall nicht existiert; sondern die äußere Rollbahn, bis zu einer gewissen Drehzahlgrenze, an einer durch den von der momentanen Drehzahl abhängigen Phasenwinkel *bestimmten Stelle* eine Hämmerung erleidet, deren Frequenz höher als die Drehzahl ist und an der inneren Rollbahn einer umlaufenden Hämmerung mit einer Drehzahl entsprechenden Frequenz ausgesetzt ist. Es wurde auch der Beweis erbracht, daß außer der die Hämmerung erregenden Schwenkbewegung des Wellenmittelpunktes auch noch eine Schaukelbewegung desselben auftreten kann, deren Phasenwinkel vom Verhältnis des Polabstandes zur Exzentrizität abhängt.

ELLIPTIKUS PARABOLOIDHÉJ EGYENLŐSZÁRÚ HÁROMSZÖG ALAPRAJZ FÖLÖTT

CSONKA PÁL*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett 1973. szept. 4-én]

A dolgozat a címbeli feladatnak a membránelmélet keretében történő megoldására közelítő eljárást ismertet. Felteszi, hogy a héj peremívei csak saját síkjukba eső erőhatásoknak állnak ellent és a héjat hatványsorral jellemezhető függőleges megoszló erők terhelik. Szerző a feladat megoldását két részből: a feladat inhomogén és homogén differenciálegyenletének olyan partikuláris megoldásaiból rakja össze, amelyek az alaprajzi háromszög egyenlő hosszúságú oldalai fölött álló peremívek mentén pontosan kielégítik az oldalerőmentesség feltételét. A harmadik peremív mentén kollokációval biztosítja, hogy a kilépő kiegyensúlyozatlan derékerő az érintőleges derékerőhöz képest kicsiny legyen. Az ismertetett eljárás alkalmazását számpélda világítja meg.

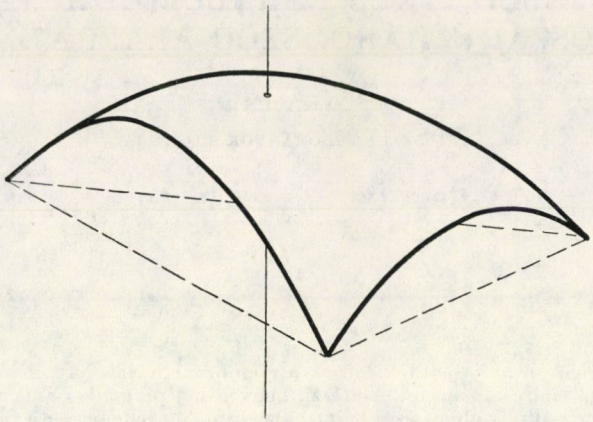
1. Bevezetés

Az egyenlőszárú háromszög alaprajz fölé szerkesztett függőleges tengelyű elliptikus paraboloidhéjakat az építő gyakorlat kétféle változatban alkalmazza. Az első változat három sarokpontja közös vízszintes síkon helyezkedik el (1. ábra). Ezt a változatot csarnokterek lefedésére használják. A második változatnak a szimmetriasíkba eső sarokpontja az egyenlő magasságban elhelyezkedő másik két sarokponthoz képest megemelt helyzetű (2. ábra). Ezt a változatot előregyártott cikkelyekből épített kupolák építésekor alkalmazzák.

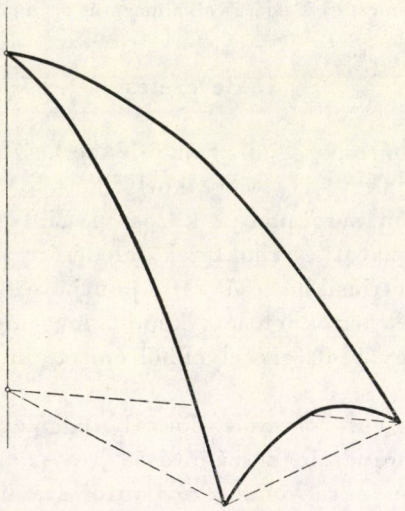
Az egyenlőszárú alaprajz fölé épített függőleges tengelyű elliptikus paraboloidhéjak membránerőinek számításával a szakirodalom csak elvétve foglalkozik. Ezekre a héjakra vonatkozó pontos számítás és pontos képletek csak két különlegesen egyszerű esetre ismeretesek. Az egyik ilyen eset az egyenletesen megoszló függőleges erőkkel terhelt *egyenlőoldalú háromszög alaprajzú forgásparaboloidhéj* esete. Ennek feszítőerői zárt képletekkel fejezhetők ki [1—4]. A másik egyszerű eset az egyenletesen megoszló függőleges erőkkel terhelt *egyenlőszárú derékszögű háromszög alaprajzú forgásparaboloid héj* esete. Utóbbinak belsőerői végtelen sorok segítségével határozhatók meg [1], [5].

Egyéb pontos megoldások híján érdeklődésre tarthat számot a függőleges megoszló erőkkel terhelt, egyenlőszárú háromszög alaprajz fölé szerkesztett

* Prof. Dr. Csonka Pál, 1114 Budapest, Bartók B. u. 31.



1. ábra. Függőleges tengelyű elliptikus paraboloidhéj egyenlőszárú háromszög alaprajz fölött (1. változat)



2. ábra. Függőleges tengelyű elliptikus paraboloidhéj egyenlőszárú háromszög alaprajz fölött (2. változat)

függőleges tengelyű elliptikus paraleloidhéjak membránerőinek számítására alkalmas, alant ismertetendő közelítő eljárás. A szóban forgó eljárást függőleges tengelyű *elliptikus paraboloidhéjak* helyett itt csak függőleges tengelyű *forgásparaboloidhéjak* esetében mutatjuk be, mert a szóban forgó két héjalak egymásnak *affin* változata és feszítőerőik is affin vonatkozásban állnak egymással. Ha tehát az egyik héj membránerői ismertek, a másik héj membránerői szintén ismerteknek tekinthetők.

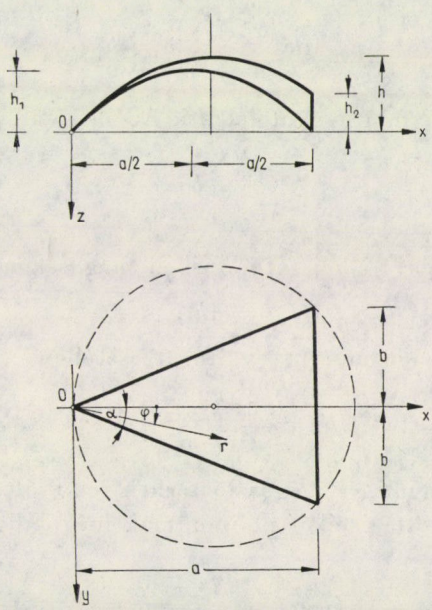
2. Alapismeretek

Tárgyalásainkat a membránhéjak elméletére alapozzuk. Feltesszük, hogy a héjra csak függőleges, megoszló erők hatnak, a héj peremét pedig függőleges síkú olyan ívtartók (peremívek) támasztják alá, amelyek csak saját síkjukba eső erőhatásokkal szemben fejtenek ki ellenállást. A peremívek és a héj csatlakozásánál a membránszerű feszültségi állapotot zavaró, a membránelmélettel nem követhető hatásokat figyelmen kívül hagyjuk.

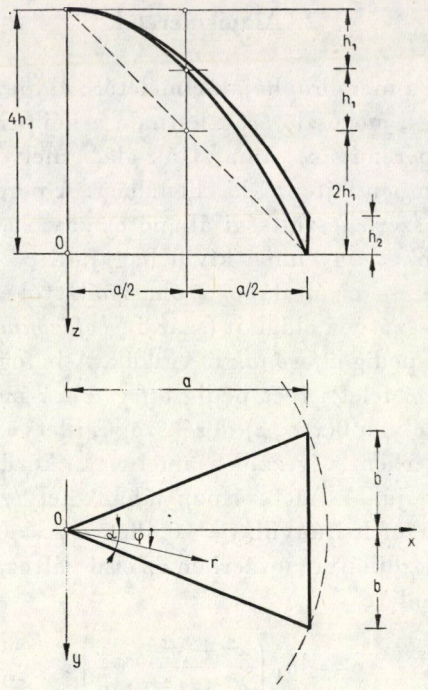
Tárgyalásainkban — az általános szóhasználattól eltérően — az alaprajzi háromszög egyenlő hosszúságú oldalait (szárait) *befogóknak*, az alaprajzi háromszög harmadik oldalát pedig *átfogónak* nevezzük. A befogók feletti peremíveket *befogóíveknek*, az átfogó feletti ívet pedig *átfogóívnek* mondjuk.

Vizsgálatainkat olyan $0(x, y, z)$ derékszögű, illetve olyan $0(r, \varphi, z)$ hengeres koordinátarendszerben végezzük, amelynek kezdőpontja az alaprajzi háromszög két befogójának metszéspontjában helyezkedik el, z tengelye függőleges, pozitív ága lefelé irányul, $y = 0$, illetve $\varphi = 0$ síkja pedig az átfogót felezi. Az $(0(x, y, z)$ koordinátarendszerben az első változat szerinti héj (3. ábra) középfelületének egyenlete

$$z = 4h_1 \left(\frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2} - \frac{x}{a} \right), \tag{1a}$$



3. ábra. Függőleges tengelyű forgásparaboloidhéj egyenlőszárú háromszög alaprajz fölött



4. ábra. Függőleges tengelyű forgásparaboloidhéj egyenlőszárú háromszög alaprajz fölött

a második változat szerinti héj (4. ábra) középfelületének egyenlete pedig

$$z = 4h_1 \frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2} - 4h_1 , \tag{1b}$$

ahol h_1 a befogó ívek ívmagasságát jelenti. Az első változat szerinti héj tetőpontbeli magassága

$$h = \frac{a^2 + b^2}{a^2} h_1 , \tag{2a}$$

a második változat szerinti héj tetőpontbeli magassága pedig

$$h = 4h_1 . \tag{2b}$$

Az átfogó ív ívmagassága mindkét változat esetében

$$h_2 = \frac{4b^2}{a^2 + b^2} h_1 . \tag{3}$$

A héjra ható függőleges megoszló terhek redukált (az alaprajz területegységére vonatkoztatott) értékét polinommal, mégpedig a terhelés módjától függően vagy

$$\bar{p} = \bar{p}_0 + \bar{p}_1 \frac{r}{a} + \bar{p}_2 \frac{r^2}{a^2} + \ldots + \bar{p}_i \frac{r^i}{a^i} + \ldots + \bar{p}_m \frac{r^m}{a^m} \tag{4.1}$$

alakú, vagy pedig

$$\bar{p} = \bar{p}_{00} + \bar{p}_{10}\frac{x}{a} + \bar{p}_{01}\frac{y}{b} + \bar{p}_{20}\frac{x^2}{a^2} + \bar{p}_{11}\frac{xy}{ab} + \bar{p}_{02}\frac{y^2}{b^2} + \dots$$

$$\dots + \bar{p}_{ij}\frac{x^i y^j}{a^i b^j} + \dots + \bar{p}_{mn}\frac{x^m y^n}{a^m b^n} \tag{4.2}$$

alakú *teherfüggvénnyel* adjuk meg.

A héj feszültségi állapotának leírására olyan F *feszültségfüggvényt* vezetünk be, amely a héj x, y irányú $\bar{N}_x, \bar{N}_{xy}, \bar{N}_{yx}, \bar{N}_y$ redukált feszítőerőivel a következő kapcsolatban áll:

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \bar{N}_{xy} = \bar{N}_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}, \qquad \bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \tag{5}$$

A z, $\bar{p}$ és F függvények nem függetlenek egymástól, kapcsolatukat a Pucher-féle [6]

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \bar{p} = 0 \tag{6}$$

differenciálegyenlet fejezi ki.

Feladatunk esetében

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{8h_1}{a^2 + b^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8h_1}{a^2 + b^2},$$

úgyhogy a

$$c \equiv \frac{a^2 + b^2}{8h_1} = \frac{b^2}{2h_2},$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{7}$$

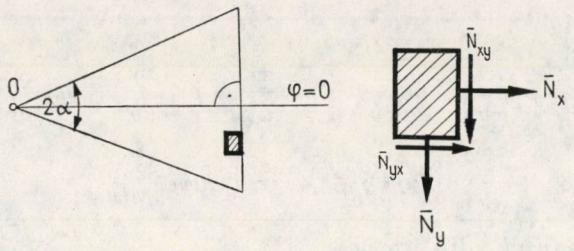
jelöléssel a (6) differenciálegyenlet így írható:

$$\Delta F = -c\bar{p}. \tag{8}$$

A héj redukált feszítőerőinek meghatározásához ezt az egyenletet kell a héj támasztási viszonyait kifejező *peremfeltételek* figyelembevételével F-re megoldani.

Minthogy a héj peremívei oldalirányú erőhatásokkal szemben semmiféle ellenállást sem tudnak kifejteni, *pontos* megoldás esetében azt kell megkövetelnünk, hogy a feszültségfüggvény értéke valamennyi peremív mentén

$$F = 0 \tag{9}$$



5. ábra. Az átfogó ív mentén működő redukált feszítőerők

legyen. Ezt az ideális követelményt — sajnos — általában nem tudjuk mindhárom peremív mentén egyidejűleg teljesíteni, úgyhogy meg kell elégednünk azzal, hogy a (9) feltételt csak két peremív mentén, mégpedig a két befogó ív mentén elégítjük ki pontosan. Az átfogó ív mentén a (9) feltétel helyett csupán azt írjuk elő, hogy a kilépő, tehát kiegyensúlyozatlan $\bar{N}_x$ derékerők az érintőleges irányú $\bar{N}_y$ derékerőkhöz viszonyítva kicsinyek legyenek (5. ábra).

3. A feladat megoldása

A kitűzött feladat megoldását jelentő F feszültségfüggvényt két részből állítjuk elő: az *inhomogén*

$$\Delta F = -c\bar{p} \tag{10}$$

differenciálegyenlet egy F^{I} partikuláris megoldásából és a *homogén*

$$\Delta F = 0 \tag{11}$$

differenciálegyenletnek egy alkalmasan meghatározandó F^{II} partikuláris megoldásából. A keresett F függvény az F^{I} és F^{II} függvények összege:

$$F = F^{\mathrm{I}} + F^{\mathrm{II}}. \tag{12}$$

Az F^{I} *függvényt* a teherfüggvény egyes tagjainak megfelelő olyan részekből tesszük össze, amelyek mindegyike külön-külön is kielégíti a (9) peremfeltételt. Aszerint, hogy a teherfüggvényt a (4.1) illetve (4.2) polinommal fejezzük ki, az F^{I} függvény alakja

$$F^{\mathrm{I}} = F^{\mathrm{I}}_0 + F^{\mathrm{I}}_1 + F^{\mathrm{I}}_2 + \ldots + F^{\mathrm{I}}_l + \ldots + F^{\mathrm{I}}_m, \tag{13}$$

illetve

$$F^{\mathrm{I}} = F^{\mathrm{I}}_{00} + F^{\mathrm{I}}_{10} + F^{\mathrm{I}}_{01} + F^{\mathrm{I}}_{20} + F^{\mathrm{I}}_{11} + F^{\mathrm{I}}_{02} + \ldots + F^{\mathrm{I}}_{ij} + \ldots + F^{\mathrm{I}}_{mn}. \tag{14}$$

Az egyes tehertagoknak megfelelő függvénytagok — legfeljebb negyedfokú teherfüggvényt feltételezve — az I., illetve II. táblázatból vehetők ki.

I. Táblázat

Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásai

$$\bar{p}_i \frac{r^i}{a^i}$$

alakú teherfüggvények esetében

$\bar{p}$	α	F_i^1
$\bar{p}_0$	$\neq 45°$	$-\frac{\bar{p}_0 c r^2}{4\cos 2\alpha}(\cos 2\alpha - \cos 2\varphi)$
	$45°$	$-\frac{\bar{p}_0 c r^2}{4\pi}\left[\pi + 4\left(\ln\frac{r}{a}\cos 2\varphi - \varphi \sin 2\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_1 \frac{r}{a}$	$\neq 30°$	$-\frac{\bar{p}_1 c r^3}{9a\cos 3\alpha}(\cos 3\alpha - \cos 3\varphi)$
	$30°$	$-\frac{\bar{p}_1 c r^3}{9\pi a}\left[\pi + 6\left(\ln\frac{r}{a}\cos 3\varphi - \varphi \sin 3\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_2 \frac{r^2}{a^2}$	$\neq 22{,}5°$ $\neq 67{,}5°$	$-\frac{\bar{p}_2 c r^4}{16a^2\cos 4\alpha}(\cos 4\alpha - \cos 4\varphi)$
	$22{,}5°$	$-\frac{\bar{p}_2 c r^4}{16\pi a^2}\left[\pi + 8\left(\ln\frac{r}{a}\cos 4\varphi - \varphi \sin 4\varphi\right)\right]$
	$67{,}5°$	$-\frac{\bar{p}_2 c r^4}{48\pi a^2}\left[3\pi - 8\left(\ln\frac{r}{a}\cos 4\varphi - \varphi \sin 4\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_3 \frac{r^3}{a^3}$	$\neq 18°$ $\neq 54°$	$-\frac{\bar{p}_3 c r^5}{25a^3\cos 5\alpha}(\cos 5\alpha - \cos 5\varphi)$
	$18°$	$-\frac{\bar{p}_3 c r^5}{25\pi a^3}\left[\pi + 10\left(\ln\frac{r}{a}\cos 5\varphi - \varphi \sin 5\varphi\right)\right]$
	$54°$	$-\frac{\bar{p}_3 c r^5}{75\pi a^3}\left[3\pi - 10\left(\ln\frac{r}{a}\cos 5\varphi - \varphi \sin 5\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_4 \frac{r^4}{a^4}$	$\neq 15°$ $\neq 45°$ $\neq 75°$	$-\frac{\bar{p}_4 c r^6}{36a^4\cos 6\alpha}(\cos 6\alpha - \cos 6\varphi)$
	$15°$	$-\frac{\bar{p}_4 c r^6}{36\pi a^4}\left[\pi + 12\left(\ln\frac{r}{a}\cos 6\varphi - \varphi \sin 6\varphi\right)\right]$
	$45°$	$-\frac{\bar{p}_4 c r^6}{108\pi a^4}\left[3\pi - 12\left(\ln\frac{r}{a}\cos 6\varphi - \varphi \sin 6\varphi\right)\right]$
	$75°$	$-\frac{\bar{p}_4 c r^6}{180\pi a^4}\left[5\pi + 12\left(\ln\frac{r}{a}\cos 6\varphi - \varphi \sin 6\varphi\right)\right]$

II. Táblázat

Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásai

$$\bar{p}_{ij}\frac{x^i y^j}{a^i b^j}$$

alaká teherfüggvények esetében

$\bar{p}$	α	F_{ij}^{I}
$\bar{p}_{00}$	$\neq 45°$	$-\frac{\bar{p}_{00}cr^2}{4\cos 2\alpha}(\cos 2\alpha - \cos 2\varphi)$
	$45°$	$-\frac{\bar{p}_{00}cr^2}{4\pi}\left[\pi + 4\left(\ln\frac{r}{a}\cos 2\varphi - \varphi \sin 2\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_{10}\frac{x}{a}$	$\neq 30°$	$-\frac{\bar{p}_{10}cr^3}{8a\cos 3\alpha}(\cos\varphi\cos 3\alpha - \cos\alpha\cos 3\varphi)$
	$30°$	$-\frac{\bar{p}_{10}cr^3}{8\pi a}\left[\pi\cos\varphi + 6\cos\alpha\left(\ln\frac{r}{a}\cos 3\varphi - \varphi\sin 3\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_{01}\frac{y}{b}$	$\neq 60°$	$-\frac{\bar{p}_{01}cr^3}{8b\sin 3\alpha}(\sin\varphi\sin 3\alpha - \sin\alpha\sin 3\varphi)$
	$60°$	$-\frac{\bar{p}_{01}cr^3}{8\pi b}\left[\pi\sin\varphi + 3\sin\alpha\left(\ln\frac{r}{a}\sin 3\varphi + \varphi\cos 3\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_{20}\frac{x^2}{a^2}$	$\neq 22{,}5°$ $\neq 67{,}5$	$-\frac{\bar{p}_{20}cr^4}{96a^2\cos 4\alpha}\left[(4\cos 2\varphi + 3)\cos 4\alpha - (4\cos 2\alpha + 3)\cos 4\varphi\right]$
	$22{,}5°$	$-\frac{\bar{p}_{20}cr^4}{96\pi a^2}\left[\pi(4\cos 2\varphi + 3) + 8(4\cos 2\alpha + 3)\left(\ln\frac{r}{a}\cos 4\varphi - \varphi\sin 4\varphi\right)\right]$
	$67{,}5°$	$-\frac{\bar{p}_{20}cr^4}{288\pi a^2}\left[3\pi(4\cos 2\varphi + 3) - 8(4\cos 2\alpha + 3)\left(\ln\frac{r}{a}\cos 4\varphi - \varphi\sin 4\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_{11}\frac{xy}{ab}$	$\neq 45°$	$-\frac{\bar{p}_{11}cr^4}{24ab\sin 4\alpha}(\sin 2\varphi\sin 4\alpha - \sin 2\alpha\sin 4\varphi)$
	$45°$	$-\frac{\bar{p}_{11}cr^4}{24\pi ab}\left[\pi\sin 2\varphi + 4\left(\ln\frac{r}{a}\sin 4\varphi + \varphi\cos 4\varphi\right)\right]$

II. táblázat folytatása

$\bar{p}$	α	F_{ij}^{I}
$\bar{p}_{02}\dfrac{y^2}{b^2}$	$\neq 22{,}5°$ $\neq 67{,}5°$	$-\dfrac{\bar{p}_{02}cr^4}{96b^2\cos 4\alpha}\left[-(4\cos 2\varphi-3)\cos 4\alpha+(4\cos 2\alpha-3)\cos 4\varphi\right]$
	$22{,}5°$	$-\dfrac{\bar{p}_{02}cr^4}{96\pi b^2}\left[-\pi(4\cos 2\varphi-3)-\right.$ $\left.-8(4\cos 2\alpha-3)\left(\ln\dfrac{r}{a}\cos 4\varphi-\varphi\sin 4\varphi\right)\right]$
	$67{,}5°$	$-\dfrac{\bar{p}_{02}cr^4}{288\pi b^2}\left[-3\pi(4\cos 2\varphi-3)+\right.$ $\left.+8(4\cos 2\alpha-3)\left(\ln\dfrac{r}{a}\cos 4\varphi-\varphi\sin 4\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_{30}\dfrac{x^3}{a^3}$	$\neq 18°$ $\neq 54°$	$-\dfrac{\bar{p}_{30}cr^5}{64a^3\cos 5\alpha}\left[(\cos 3\varphi+2\cos\varphi)\cos 5\alpha-\right.$ $\left.-(\cos 3\alpha+2\cos\alpha)\cos 5\varphi\right]$
	$18°$	$-\dfrac{\bar{p}_{30}cr^5}{64\pi a^3}\left[\pi(\cos 3\varphi+2\cos\varphi)+\right.$ $\left.+10(\cos 3\alpha+2\cos\alpha)\left(\ln\dfrac{r}{a}\cos 5\varphi-\varphi\sin 5\varphi\right)\right]$
	$54°$	$-\dfrac{\bar{p}_{30}cr^5}{192\pi a^3}\left[3\pi(\cos 3\varphi+2\cos\varphi)-\right.$ $\left.-10(\cos 3\alpha+2\cos\alpha)\left(\ln\dfrac{r}{a}\cos 5\varphi-\varphi\sin 5\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_{21}\dfrac{x^2y}{a^2b}$	$\neq 36°$ $\neq 72°$	$-\dfrac{\bar{p}_{21}cr^5}{192a^2b\sin 5\alpha}\left[(3\sin 3\varphi+2\sin\varphi)\sin 5\alpha-\right.$ $\left.-3(\sin 3\alpha+2\sin\alpha)\sin 5\varphi\right]$
	$36°$	$-\dfrac{\bar{p}_{21}cr^5}{192\pi a^2b}\left[\pi(3\sin 3\varphi+2\sin\varphi)+\right.$ $\left.+5(3\sin 3\alpha+2\sin\alpha)\left(\ln\dfrac{r}{a}\sin 5\varphi+\varphi\cos 5\varphi\right)\right]$
	$72°$	$-\dfrac{\bar{p}_{21}cr^5}{384\pi a^2b}\left[2\pi(3\sin 3\varphi+2\sin\varphi)-\right.$ $\left.-5(3\sin 3\alpha+2\sin\alpha)\left(\ln\dfrac{r}{a}\sin 5\varphi+\varphi\cos 5\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_{12}\dfrac{xy^2}{ab^2}$	$\neq 18°$ $\neq 54°$	$-\dfrac{\bar{p}_{12}cr^5}{192ab^2\cos 5\alpha}\left[-(3\cos 3\varphi+2\cos\varphi)\cos 5\alpha+\right.$ $\left.+(3\cos 3\alpha+2\cos\alpha)\cos 5\varphi\right]$
	$18°$	$-\dfrac{\bar{p}_{12}cr^5}{192\pi ab^2}\left[-\pi(3\cos 3\varphi+2\cos\varphi)-\right.$ $\left.-10(3\cos 3\alpha+2\cos\alpha)\left(\ln\dfrac{r}{a}\cos 5\varphi-\varphi\sin 5\varphi\right)\right]$

II. táblázat folytatása

$\bar{p}$	α	F_{ij}^{I}
$\bar{p}_{12}\frac{xy^2}{ab^2}$	54°	$-\frac{\bar{p}_{12}cr^5}{576\pi ab^2}\left[-3\pi(3\cos 3\varphi+2\cos\varphi)+10(3\cos 3\alpha+2\cos\alpha)\left(\ln\frac{r}{a}\cos 5\varphi-\varphi\sin 5\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_{03}\frac{y^3}{b^3}$	$\neq 36°$ $\neq 72°$	$-\frac{\bar{p}_{03}cr^5}{64b^3\sin 5\alpha}\left[-(\sin 3\varphi-2\sin\varphi)\sin 5\alpha+(\sin 3\alpha-2\sin\alpha)\sin 5\varphi\right]$
	36°	$-\frac{\bar{p}_{03}cr^5}{64\pi b^3}\left[-\pi(\sin 3\varphi-2\sin\varphi)-5(\sin 3\alpha-2\sin\alpha)\left(\ln\frac{r}{a}\sin 5\varphi-\varphi\cos 5\varphi\right)\right]$
	72°	$-\frac{\bar{p}_{03}cr^5}{128\pi b^3}\left[-2\pi(\sin 3\varphi-2\sin\varphi)+5(\sin 3\alpha-2\sin\alpha)\left(\ln\frac{r}{a}\sin 5\varphi+\varphi\cos 5\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_{40}\frac{x^4}{a^4}$	$\neq 15°$ $\neq 45°$ $\neq 75°$	$-\frac{\bar{p}_{40}cr^6}{960a^4\cos 6\alpha}\left[(6\cos 4\varphi+15\cos 2\varphi+10)\cos 6\alpha-(6\cos 4\alpha+15\cos 2\alpha+10)\cos 6\varphi\right]$
	15°	$-\frac{\bar{p}_{40}cr^6}{960\pi a^4}\left[\pi(6\cos 4\varphi+15\cos 2\varphi+10)+12(6\cos 4\alpha+15\cos 2\alpha+10)\left(\ln\frac{r}{a}\cos 6\varphi-\varphi\sin 6\varphi\right)\right]$
	45°	$-\frac{\bar{p}_{40}cr^6}{2800\pi a^4}\left[3\pi(6\cos 4\varphi+15\cos 2\varphi+10)-12(6\cos 4\alpha+15\cos 2\alpha+10)\left(\ln\frac{r}{a}\cos 6\varphi-\varphi\sin 6\varphi\right)\right]$
	75°	$-\frac{\bar{p}_{40}cr^6}{4800\pi a^4}\left[5\pi(6\cos 4\varphi+15\cos 2\varphi+10)+12(6\cos 4\alpha+15\cos 2\alpha+10)\left(\ln\frac{r}{a}\cos 6\varphi-\varphi\sin 6\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_{31}\frac{x^3y}{a^3b}$	$\neq 30°$ $\neq 60°$	$-\frac{\bar{p}_{31}cr^6}{640a^3b\sin 6\alpha}\left[(4\sin 4\varphi+5\sin 2\varphi)\sin 6\alpha-(4\sin 4\alpha+5\sin 2\alpha)\sin 6\varphi\right]$
	30°	$-\frac{\bar{p}_{31}cr^6}{640\pi a^3b}\left[\pi(4\sin 4\varphi+5\sin 2\varphi)+6(4\sin 4\alpha+5\sin 2\alpha)\left(\ln\frac{r}{a}\sin 6\varphi+\varphi\cos 6\varphi\right)\right]$
	60°	$-\frac{\bar{p}_{31}cr^6}{1280\pi a^3b}\left[2\pi(4\sin 4\varphi+5\sin 2\varphi)-6(4\sin 4\alpha+5\sin 2\alpha)\left(\ln\frac{r}{a}\sin 6\varphi+\varphi\cos 6\varphi\right)\right]$

II. táblázat folytatása

$\bar{p}$	α	F^1_{ij}
$\bar{p}_{22}\dfrac{x^2y^2}{a^2b^2}$	$\neq 15°$ $\neq 45°$ $\neq 75°$	$-\dfrac{\bar{p}_{22}cr^6}{1440a^2b^2\cos 6\alpha}\left[-(9\cos 4\varphi-5)\cos 6\alpha+\right.$ $\left.+(9\cos 4\alpha-5)\cos 6\varphi\right)\Big]$
	$15°$	$-\dfrac{\bar{p}_{22}cr^6}{1440\pi a^2b^2}\left[-\pi(9\cos 4\varphi-5)-\right.$ $\left.-12(9\cos 4\alpha-5)\left(\ln\dfrac{r}{a}\cos 6\varphi-\varphi\sin 6\varphi\right)\right]$
	$45°$	$-\dfrac{\bar{p}_{22}cr^6}{4320\pi a^2b^2}\left[-3\pi(9\cos 4\varphi-5)+\right.$ $\left.+12(9\cos 4\alpha-5)\left(\ln\dfrac{r}{a}\cos 6\varphi-\varphi\sin 6\varphi\right)\right]$
	$75°$	$-\dfrac{\bar{p}_{22}cr^6}{7200\pi a^2b^2}\left[-5\pi(9\cos 4\varphi-5)-\right.$ $\left.-12(9\cos 4\alpha-5)\left(\ln\dfrac{r}{a}\cos 6\varphi-\varphi\sin 6\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_{13}\dfrac{xy^3}{ab^3}$	$\neq 30°$ $\neq 60°$	$-\dfrac{\bar{p}_{13}cr^6}{640ab^3\sin 6\alpha}\Big[-(4\sin 4\varphi+5\sin 2\varphi)\sin 6\alpha+$ $+(4\sin 4\alpha+5\sin 2\alpha)\sin 6\varphi\Big]$
	$30°$	$-\dfrac{\bar{p}_{13}cr^6}{640\pi ab^3}\left[-\pi(4\sin 4\varphi+5\sin 2\varphi)-\right.$ $\left.-6(4\sin 4\alpha+5\sin 2\alpha)\left(\ln\dfrac{r}{a}\sin 6\varphi+\varphi\cos 6\varphi\right)\right]$
	$60°$	$-\dfrac{\bar{p}_{13}cr^6}{1280\pi ab^3}\left[-2\pi(4\sin 4\varphi+5\sin 2\varphi)+\right.$ $\left.+6(4\sin\alpha+5\sin 2\alpha)\left(\ln\dfrac{r}{a}\sin 6\varphi+\varphi\cos 6\varphi\right)\right]$
$\bar{p}_{04}\dfrac{y^4}{b^4}$	$\neq 15°$ $\neq 45°$ $\neq 75°$	$-\dfrac{\bar{p}_{04}cr^6}{960b^4\cos 6\alpha}\Big[(6\cos 4\varphi-15\cos 2\varphi+10)\cos 6\alpha-$ $-(6\cos 4\alpha-15\cos 2\alpha+10)\cos 6\varphi\Big]$
	$15°$	$-\dfrac{\bar{p}_{04}cr^6}{960\pi b^4}\Big[\pi(6\cos 4\varphi-15\cos 2\varphi+10)+$ $+12(6\cos 4\alpha-15\cos 2\alpha+10)\left(\ln\dfrac{r}{a}\cos 6\varphi-\varphi\sin 6\varphi\right)\Big]$
	$45°$	$-\dfrac{\bar{p}_{04}cr^6}{2880\pi b^4}\Big[3\pi(6\cos 4\varphi-15\cos 2\varphi+10)-$ $-12(6\cos 4\alpha-15\cos 2\alpha+10)\left(\ln\dfrac{r}{a}\cos 6\varphi-\varphi\sin 6\varphi\right)\Big]$
	$75°$	$-\dfrac{\bar{p}_{04}cr^6}{4800\pi b^4}\Big[5\pi(6\cos 4\varphi-15\cos 2\varphi+10)+$ $+12(6\cos 4\alpha-15\cos 2\alpha+10)\left(\ln\dfrac{r}{a}\cos 6\varphi-\varphi\sin 6\varphi\right)\Big]$

Az F^{II} *függvényt* a III. táblázat szerint vesszük fel. Ebben a táblázatban a k tényező jelentése:

$$k \equiv \frac{90°}{\alpha°}. \tag{15}$$

A táblázatban szereplő kifejezések minden egyes tagja külön-külön is megfelel a befogó ívek mentén teljesítendő (9) feltételnek. A táblázat első sorában közölt függvény a $\varphi = 0$ síkra szimmetrikus, tehát akkor alkalmazandó, ha a héj terhe a $\varphi = 0$ síkra nézve szimmetrikus megoszlású. A táblázat második sorában szereplő függvény viszont a $\varphi = 0$ síkra nézve antimetrikus, és ezért akkor használható, ha a teher is antimetrikus.

Az F^{II} függvény képletében szereplő A_i együtthatókat nem vehetjük fel szabadon. Ezeknek az együtthatóknak olyan értékeket kell tulajdonítanunk,

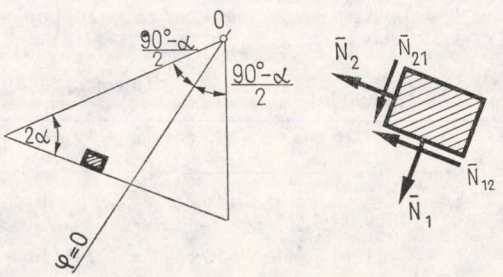
III. Táblázat

A homogén differenciálegyenlet partikuláris megoldásai

	F^{II}
1	$A_1 \frac{r^k \cos k\varphi}{k(k-1)a^{k-2}} + A_3 \frac{r^{3k} \cos 3k\varphi}{3k(3k-1)a^{3k-2}} + A_5 \frac{r^{5k} \cos 5k\varphi}{5k(5k-1)a^{5k-2}} + \dots$
2	$A_2 \frac{r^{2k} \cos 2k\varphi}{2k(2k-1)a^{2k-2}} + A_4 \frac{r^{4k} \cos 4k\varphi}{4k(4k-1)a^{4k-2}} + A_6 \frac{r^{6k} \cos 6k\varphi}{6k(6k-1)a^{6k-2}} + \dots$

hogy az átfogó ív mentén a (12) feszültségfüggvénynek megfelelő $\bar{N}_x$ derékerők az érintőleges $\bar{N}_y$ derékerőhöz viszonyítva lehetőleg kicsinyek legyenek. Ezt a célt legegyszerűbben kollokációval érhetjük el. Kiválasztunk az átfogó ív mentén s-számú alkalmas pontot és azt a követelményt írjuk fel, hogy ezekben a pontokban a kilépő $\bar{N}_x$ derékerő értéke zérus legyen. Ekként eljárva, az ismeretlen A_i együtthatók kiszámításához s-számú lineáris egyenletet kapunk, és ezeket az ismeretlen együtthatókra megoldjuk.

Olyankor, amidőn az I—II. táblázatokban szereplő kifejezések nevezője zérushoz közelálló érték, a fent vázolt eljárás módosításra szorul. Ilyen esetekben a koordinátarendszer kezdőpontját a befogók metszéspontja helyett a



6. ábra. A befogó ív mentén működő redukált feszítőerők

háromszög egy másik sarokpontjába kell áthelyezni (6. ábra), és a számítást az ekként felveendő új koordinátarendszerben kell elvégezni. A számításnak ezzel a változatával — amely lényegében véve az itt ismertetettekhez hasonlóan hajtható végre — e közlemény keretében nem foglalkozunk.

4. A redukált feszítőerők

Az I—II. táblázatokban a héj feszültségfüggvényét poláris koordinátarendszerben adtuk meg, viszont a héj feszítőerőit az (5) képletek segítségével csak akkor számíthatjuk ki egyszerűen, ha a héj feszültségfüggvényét derékszögű koordinátákkal fejezzük ki.

Ha ezt a kényelmetlenségeit el akarjuk kerülni, akkor az (5) képletek helyett az alábbi képletekkel kell dolgoznunk [6]:

$$\begin{aligned}
\bar{N}_x &= +\Delta F \cos^2\varphi - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\cos 2\varphi + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)\sin 2\varphi\,,\\
\bar{N}_{xy} &= -\frac{1}{2}\Delta F\cdot\sin 2\varphi + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\sin 2\varphi + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)\cos 2\varphi\,, \qquad (16)\\
\bar{N}_y &= +\Delta F\cdot\sin^2\varphi + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\cos 2\varphi - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)\sin 2\varphi\,.
\end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy a héj egyes különleges pontjaiban a feszítőerők vagy azok egy része közvetlenül is kiszámítható [7]. Ilyen pontok a héj sarokpontjai, valamint a héj peremvonalainak a pontjai. Pl. az $x = a$, $y = \pm b$ sarokpontokban a feszítőerők *pontos* értéke

$$\begin{aligned}
\bar{N}_x &= 0\,,\\
\bar{N}_{xy} &= \mp\frac{\bar{p}\cot\alpha}{2(\partial^2 z/\partial y^2)} = \mp\frac{\bar{p}c\cot\alpha}{2}\,, \qquad (17)\\
\bar{N}_y &= -\frac{\bar{p}}{\partial^2 z/\partial y^2} = -\bar{p}c\,,
\end{aligned}$$

az $x = a$ peremvonal, mentén pedig:

$$\begin{aligned}
\bar{N}_x &= 0,\\
\bar{N}_y &= -\frac{\bar{p}}{\partial^2 z/\partial y^2} = -\bar{p}c\,. \qquad (18)
\end{aligned}$$

5. A feladat megoldása egyenletes megoszló teher esetében

A gyakorlatban a héjak számításakor általában megelégszünk az egyenletesen megoszló $\bar{p} = \bar{p}_0 = \text{konst}$ teher esetének vizsgálatával. Ebben az egyszerű terhelési esetben a 4.1. teherpolinom egyetlen egy tagból áll és ennek

megfelelően az F^{I} függvénysor is csak egyetlenegy függvénytagot tartalmaz. A számítás során α értékétől függően három esetet kell megkülönböztetni.

5.1. eset: $\alpha < 45°$

Ebben az esetben F^{I} függvényként az I. táblázat első sorában levő

$$F^{I} = -\frac{\bar{p}_0 c r^2}{4\cos 2\alpha}(\cos 2\alpha - \cos 2\varphi) \tag{19}$$

kifejezést, F^{II} függvényül pedig a III. táblázat első sora szerinti négyparaméteres

$$F^{II} = A_1 \frac{r^k \cos k\varphi}{k(k-1)a^{k-2}} + A_3 \frac{r^{3k}\cos 3k\varphi}{3k(3k-1)a^{3k-2}} + \\ + A_5 \frac{r^{5k}\cos 5k\varphi}{5k(5k-1)a^{5k-2}} + A_7 \frac{r^{7k}\cos 7k\varphi}{7k(7k-1)a^{7k-2}} \tag{20}$$

kifejezést választjuk. Az ezeknek megfelelő $\bar{N}_x$ erők a (16) képlet szerint számíthatók. A héj tetszőleges pontján

$$\bar{N}_x^{I} = -\frac{\bar{p}_0 c}{2\cos 2\alpha}(1+\cos 2\alpha),$$

$$\bar{N}_x^{II} = -A_1 \frac{r^{k-2}}{a^{k-2}}\cos(k-2)\varphi - A_3 \frac{r^{3k-2}}{a^{3k-2}}\cos(3k-2)\varphi - \\ - A_5 \frac{r^{5k-2}}{a^{5k-2}}\cos(5k-2)\varphi - A_7 \frac{r^{7k-2}}{a^{7k-2}}\cos(7k-2)\varphi,$$

az átfogó ív mentén, vagyis az $r = a/\cos\varphi$ helyen pedig:

$$\bar{N}_x^{I} = -\frac{\bar{p}_0 c}{2\cos 2\alpha}(1+\cos 2\alpha), \tag{21}$$

$$\bar{N}_x^{II} = -A_1 \frac{\cos(k-2)\varphi}{\cos^{k-2}\varphi} - A_3 \frac{\cos(3k-2)\varphi}{\cos^{3k-2}\varphi} - \\ - A_5 \frac{\cos(5k-2)\varphi}{\cos^{5k-2}\varphi} - A_7 \frac{\cos(7k-2)\varphi}{\cos^{7k-2}\varphi}. \tag{22}$$

A kilépő derékerő az átfogóív pontjaiban a (21) és (22) alatti értékek összege:

$$\bar{N}_x = \bar{N}_x^{I} + \bar{N}_x^{II} = -\frac{\bar{p}_0 c}{2\cos 2\alpha}(1+\cos 2\alpha) - \\ - A_1 \frac{\cos(k-2)\varphi}{\cos^{k-2}\varphi} - A_3 \frac{\cos(3k-2)\varphi}{\cos^{3k-2}\varphi} - \\ - A_5 \frac{\cos(5k-2)\varphi}{\cos^{5k-2}\varphi} - A_7 \frac{\cos(7k-2)\varphi}{\cos^{7k-2}\varphi}. \tag{23}$$

A fenti kifejezésben szereplő A_1, A_3, A_5, A_7 ismeretlen együtthatókat kollokációval határozzuk meg. Kollokációs pontokul az átfogóívnek a

$$\varphi = 0{,}2\alpha, \quad 0{,}5\alpha, \quad 0{,}8\alpha, \quad 0{,}95\alpha$$

pontjait választjuk és azt a követelményt írjuk fel, hogy ezekben a pontokban $\bar{N}_x$ értéke zérus legyen. Végül az így nyert négy lineáris egyenletből A_1, A_3, A_5, A_7 értékét kiszámítjuk. Ezt a számítást egyes α szögekre elvégezve, az

IV. Táblázat

A négyparaméteres megoldás A_1, A_3, A_5, A_7, együtthatói egyenletesen megoszló teherrel terhelt héjak esetében

	$A_1/\bar{N}_x^{\mathrm{I}}$	$A_3/\bar{N}_x^{\mathrm{I}}$	$A_5/\bar{N}_x^{\mathrm{I}}$	$A_7/\bar{N}_x^{\mathrm{I}}$
15°	+1,0607	−0,1271	−0,0363	−0,0902
18°	+1,0532	−0,0837	−0,0053	−0,0363
20°	+1,0426	−0,0608	−0,0012	−0,0209
22,5°	+1,0303	−0,0393	+0,0016	−0,0091
24°	+1,0212	−0,0303	−0,0028	−0,0132
30°	+1,0000	0	0	0
36°	+0,9849	+0,0165	−0,0040	−0,0022
45°	+0,5031	−0,0469	−0,0012	+0,0001

A_1, A_3, A_5, A_7 együtthatókra a IV. táblázat felső hét sorában szereplő értékeket kaptuk.

5.2 eset: $\alpha = 45°$

Ebben az esetben F^{I} függvényül az I. táblázat második sorában levő

$$F^{\mathrm{I}} = -\frac{\bar{p}_0 c r^2}{4\pi}\left[\pi + 4\left(\ln\frac{r}{a}\cos 2\varphi - \varphi \sin 2\varphi\right)\right] \tag{24}$$

kifejezést választjuk. Az ennek megfelelő $\bar{N}_x$ erő a (16) képlet szerint a héj tetszőleges r, φ pontján

$$\bar{N}_x^{\mathrm{I}} = -\frac{\bar{p}_0 c}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 3 + 2\ln\frac{r}{a}\right),$$

az átfogóív mentén, vagyis az $r = a/\cos\varphi$ helyen pedig

$$\bar{N}_x^{\mathrm{I}} = -\frac{\bar{p}_0 c}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 3 + 2\ln\cos\varphi\right). \tag{25}$$

Ha F^{II} függvényül ebben az esetben is a (20) kifejezést vezetjük be, az átfogóív pontjaiban az $\bar{N}_x^{\mathrm{II}}$ erőkre a (22) alatti értékeket kapjuk. Az átfogóív mentén

kilépő $\bar{N}_x$ erő a (22) és (25) alatti értékek összege:

$$\bar{N}_x = \bar{N}_x^{\mathrm{I}} + \bar{N}_x^{\mathrm{II}} = -\frac{\bar{p}_0 c}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 3 + 2\ln\cos\varphi\right) -$$

$$- A_1 - A_3\frac{\cos 4\varphi}{\cos^4\varphi} - A_5\frac{\cos 8\varphi}{\cos^8\varphi} - A_7\frac{\cos 12\varphi}{\cos^{12}\varphi}. \qquad (26)$$

A fenti képletben szereplő A_1, A_3, A_5, A_7 együtthatókat ugyanúgy határozhatjuk meg, mint az 5.1. esetben. Ha kollokációs pontokul ebben az esetben is ugyanazokat a pontokat választjuk, mint az 5.1. esetben, az A_1, A_3, A_5, A_7 együtthatókra a IV. táblázat legalsó sorában szereplő értékeket kapjuk. Ezekkel az együtthatókkal számítva, az átfogó ív mentén abszolút értékre legnagyobb kilépő $\bar{N}_x$ erő

$$|\bar{N}_x|_{\max} = 0{,}00899\ \bar{p}_0 c,$$

ami az átfogó ív mentén működő $|\bar{N}_y|$ értéknek csupán 0,899%-a.

V. Táblázat

Az átfogó ív mentén kilépő $\bar{N}_x$ derékerő ($\alpha = 45°$)

φ/α	$\bar{N}_x/\bar{p}_0 c$
0,0	+0,000 118
0,1	+0,000 101
0,2	+0,000 056
0,3	0,000 000
0,4	−0,000 045
0,5	−0,000 059
0,6	−0,000 038
0,7	0,000 000
0,8	+0,000 021
0,9	+0,000 027
1,0	0,000 000

Még pontosabb eredményre jutunk, ha kollokációs pontokul az átfogó ívnek a

$$\varphi = 0{,}3\alpha,\ 0{,}7\alpha,\ 0{,}9\alpha,\ 1{,}0\alpha$$

pontjait választjuk. Ebben az esetben

$$A_1 = 0{,}406\,625$$

$$A_2 = 0{,}046\,976$$

$$A_3 = 0{,}001\,114$$

$$A_4 = 0{,}000\,004$$

és az abszolút értékre nézve legnagyobb kilépő $\bar{N}_x$ erő

$$|\bar{N}_x|_{max} = 0{,}000\,12\ \bar{p}_0 c.$$

Ez az érték az átfogó ív mentén működő $|\bar{N}_y|$ értéknek mindössze 0,012%-a. Az $\bar{N}_x$ erő értékét az átfogó ív egyes pontjaiban az V. táblázat tartalmazza.

5.3 eset: $\alpha > 45°$

Ez az eset ugyanúgy kezelhető, mint az 5.1 eset, de kollokációs pontokul nem túl nagy α szög esetében az átfogó ív

$$\varphi = 0{,}3\alpha,\ 0{,}7\alpha,\ 0{,}9\alpha,\ 1{,}0\alpha$$

pontjait célszerű választani.

6. Számpélda

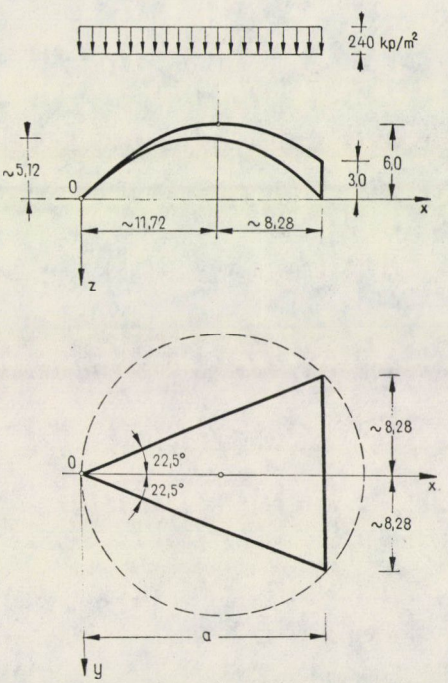
Alkalmazzuk a fentiekben ismertetett számító eljárást a 7. ábrán feltüntetett függőleges tengelyű forgás-paraboloidhéjra.

A szóban forgó héj geometriai adatai a következők:

$$\alpha = 22{,}5°,$$

$$a = 20{,}0\ \text{m},$$

$$h = 6{,}0\ \text{m}.$$



7. *ábra.* Függőleges tengelyű forgásparaboloidhéj $\alpha = 22{,}5°$-os egyenlőszárú háromszög alaprajz fölött

A héjat egyenletesen megoszló függőleges erőrendszer terheli és ennek fajlagos értéke:

$$\bar{p} = \bar{p}_0 = 240 \text{ kp/m}^2.$$

A tárgyalandó esetben $\alpha < 45°$, tehát a feladatot az 5.1 alatt leírt módon oldhatjuk meg. A megadott értékekkel számolva

$$b = a \tan \alpha = 20{,}0 \tan 22{,}5° \cong 8{,}28 \text{ m},$$

továbbá

(2) $$h_1 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} h = \frac{20{,}0^2}{20{,}0^2 + 8{,}28^2} 6{,}0 \cong 5{,}12 \text{ m},$$

(3) $$h_2 = \frac{4b^2}{a^2 + b^2} h_1 = \frac{4 \cdot 8{,}28^2}{20{,}0^2 + 8{,}27^2} 5{,}12 = 3{,}0 \text{ m},$$

(7) $$c = \frac{a^2 + b^2}{8h_1} = \frac{20{,}0^2 + 8{,}28^2}{8 \cdot 5{,}12} \cong 11{,}44 \text{ m},$$

(15) $$k = \frac{\pi}{\alpha} = \frac{90°}{22{,}5°} = 4,$$

(18) $$\bar{N}_y = - \bar{p}_0 c = 240 \cdot 11{,}44 \cong - 2746 \text{ kp/m},$$

(21) $$\bar{N}_x^{\text{I}} = - \frac{p_0 c}{2 \cos 2\alpha} (1 + \cos 2\alpha) \cong - 3314 \text{ kp/m}.$$

Végül a IV. táblázat 4. sora szerint:

$$A_1 = + 1{,}0303 \; \bar{N}_x^{\text{I}} = - 3414{,}5 \text{ kp/m},$$
$$A_3 = - 0{,}0393 \; \bar{N}_x^{\text{I}} = + 130{,}3 \text{ kp/m},$$
$$A_5 = + 0{,}0016 \; \bar{N}_x^{\text{I}} = - 5{,}3 \text{ kp/m},$$
$$A_7 = - 0{,}0091 \; \bar{N}_x^{\text{I}} = + 30{,}0 \text{ kp/m}.$$

Ezzel minden adat rendelkezésünkre áll az F^{I} és F^{II} függvényrészletek megszerkesztéséhez:

$$F^{\text{I}} = - \frac{240 \cdot 11{,}44}{4 \cdot 0{,}7071} (0{,}7071 - \cos 2\varphi),$$

$$F^{\text{II}} = - \frac{3414{,}5 \cdot r^8 \cos 8\varphi}{56a^6} + 130{,}3 \frac{r^{12} \cos 12\varphi}{132a^{10}} -$$

$$- 5{,}3 \frac{r^{20} \cos 20\varphi}{380a^{18}} + 30{,}0 \frac{r^{28} \cos 28\varphi}{756a^{26}}.$$

Az F^{I} és F^{II} függvényeket ismerve, a kitűzött feladatot megoldottnak tekinthetjük, a keresett F feszültségfüggvény ui. e két függvényrészlet összege.

VI. Táblázat

Az átfogó ív mentén kilépő $\bar{N}_x$ derékerő ($\alpha = 22{,}5°$)

φ/α	$\bar{N}_x$[kp/m]
0,0	+54,5
0,1	+38,0
0,2	0
0,3	−32,0
0,4	−33,0
0,5	0
0,6	+39,8
0,7	+44,8
0,8	0
0,9	−33,5
0,95	0
1,00	+100,1

Az alkalmazott számító eljárás pontossági fokának megítéléséhez megállapítottuk az átfogó ív néhány pontján a kilépő, tehát kiegyensúlyozatlan $\bar{N}_x$ erőket. A számítást a (23) képlet szerint elvégezve, eredményül a VI. táblázatban közölt $\bar{N}_x$ értékeket kaptuk. Mint látható, az abszolút értékű legnagyobb $\bar{N}_x$ erő mintegy 100 kp/m nagyságú. Ez az érték az átfogó ív mentén működő

$$\bar{N}_x = -\bar{p}c = -240 \cdot 11{,}44 \simeq -2746 \text{ kp/m}$$

derékerőhöz viszonyítva jelentéktelen, és mint ilyen figyelmen kívül hagyható.

IRODALOM

1. Polónyi, S.: Schalen in Beton und Kunststoff. Entwurf. Bemessung. Ausführung. Bauverlag GmbH, Wiesbaden und Berlin 1970, 61—96. o.
2. Csonka, P.: Membranschalen. *Bauingenieur Praxis.* Heft 16. Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin—München 1966, 26—31. o.
3. Beleş A. A.—Soare, M. V.: Das elliptische und hyperbolische Paraboloid im Bauwesen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1971, 209 o.
4. Beleş, A. A.—Soare, M. V.: Berechnung von Schalentragwerken. Bauverlag GmbH Wiesbaden und Berlin 1972, 82 o.
5. Csonka, P.: Kappenschalen über einem rechtwinkligen Dreieckgrundriß. *Bauplanung-Bautechnik* 17 (1963), 231—234
6. Pucher, A.: Über den Spannungszustand in doppelt gekrümmten Flächen. *Beton und Eisen* 33 (1934), 298—304
7. Csonka, P.: Formulae for Controlling Stress Calculations of Calotte Shells. *Acta Techn. Hung.* 29 (1960), 355—368

Calculation of Elliptic Paraboloid Shells Isosceles Triangle in Projected Form — Paper presents an approximate method for solving the problem in the frame of the so-called membrane theory. It is assumed that the edge arches of the shell do not resist lateral forces, further that the shell is subjected to distributed loads acting in vertical direction. The solution of the problem is set up of two parts, namely of a particular solution of the homogeneous and the inhomogeneous differential equations. Both of these exactly satisfy the boundary conditions along two edge arches. Along the third edge arch it is ensured by simple collocation that the unbalanced direct forces acting in normal direction should be insignificant in relation to the direct force acting in tangential direction. The application of the presented method is illustrated by a numerical example.

Elliptische Paraboloidschale über einem gleichschenkligen Dreieckgrundriß. — Der Aufsatz beschreibt ein Annäherungsverfahren zur Lösung des Titelproblems. Es wird vorausgesetzt, da der Schalenrand Seitenkräften gegenüber keinen Widerstand leistet und daß die Schale durch ein vertikales Kraftsystem belastet ist, das durch eine Potenzreihe charakterisiert werden kann. Die Lösung des Problems wird aus zwei Teillösungen zusammengesetzt, nämlich aus Partikularlösungen der homogenen und der inhomogenen Differentialgleichungen der Aufgabe. Diese Teillösungen befriedigen die Radbedingungen entlang der Schenkelbögen genau, während dem dritten Randbogen entlang es durch Kollokation erreicht wird, daß die normale Längskraft gegenüber der tangentialen Längskraft womöglich gering sei. Die Anwendung des beschriebenen Verfahrens wird durch ein Zahlenbeispiel erläutert.

A SZILÁRD TESTEK ANYAGTÖRVÉNYEI*

HELYZETKÉP

BÉDA GYULA**

(Beérkezett 1972. október 18-án]

A 20-as évektől kezdődően elsősorban a képlékenységtan kialakulása az anyagtörvények kutatására erőteljesebben ráirányította a figyelmet. A dolgozat ezeknek a kutatásoknak a során kialakult legjellemzőbb elméleteket foglalja össze.

1. Bevezetés

A technikai fejlődés folytán a gépészmérnöknek olyan gépek és gépszerkezetek megtervezésével és előállításával kell foglalkoznia, amelyek magas hőmérsékleten, nagy nyomáson, nagy mozgási sebességgel működnek és működésük során egyéb fizikai hatásoknak is, mint például elektromágneses tér, radioaktív sugárzás stb. vannak kitéve. Ezeknek a gépeknek és gépszerkezeteknek megfelelő működését, többek között bizonyos mechanikai számítások elvégzése után lehet megtervezni, illetve megítélni. A mechanikai számítások elvégzéséhez az általános mechanikai egyenletek mellett az anyag viselkedését kifejező, úgynevezett *anyagtörvény* ismeretére is szükség van.

A mechanika kialakulásával egyidőben felmerült az a kérdés, hogy az anyag egyes részeinek milyen a kölcsönhatása és ez miként befolyásolja az anyag által kitöltött test mozgását. Az anyag részecskéi közötti kölcsönhatás ismerete teszi lehetővé, hogy a test tulajdonságait megállapítsuk, vagyis az anyagtörvényt előállítsuk. Az anyagszerkezeti vizsgálatok feltárták azokat a részecskéket, amelyekből az anyagi test felépül. Az atomok, molekulák vizsgálata lehetővé teszi, hogy az anyagtörvényét előállítsuk, de ez a kölcsönhatásuk alaposabb megismerését és olyan matematikai számítást vet fel, amely a legegyszerűbb esetben is igen bonyolultnak ígérkezik. Ezért az anyagtörvény felépítésének egy másik útja alakult ki. Eszerint a test anyagát végnélkül oszthatónak gondoljuk el. Vagyis a testet részecskékből álló olyan alakzatnak tekintjük, amely egy geometriai térre bármely időpillanatban kölcsönösen egyértelműen leképezhető. Az ilyen testet *kontinuumnak* szokás nevezni.

* az MTA Gépszerkezettani Akadémiai Bizottság 1972. május 29-i ülésén tartott előadás.

** Prof. Dr. Béda Gyula, 1021 Budapest Budenz u. 4/a

Előfordul, hogy a mozgás során ebben a kontinuumban a leképzés szempontjából szinguláris felületek keletkeznek. A következőkben a test olyan mozgásával foglalkozunk, amely során ezek a szingularitások nem jelentkeznek. Ez a kontinuum elképzelés lehetővé teszi, hogy a testnek egy olyan részét válasszuk ki, és *részecskének* nevezzük el, amelyen belül a szükséges fizikai mennyiségek homogén eloszlásúaknak tekinthetők. Az anyagtörvény megalkotása során tehát ezeknek a részecskéknek a kölcsönhatását vizsgáljuk.

Azt a nagyszámú javaslatot, amely egyetlenegy anyag esetében is az anyagtörvényre vonatkozóan született, nehézvolna egyetlenegy helyzetkép keretében összefoglalni és megismertetni. Ezért a következőkben itt csak a legfontosabbakra szorítkozunk.

A század elejéig viszonylag kevés anyagtörvény volt ismeretes. A 20-as évektől kezdődően elsősorban a képlékenységtan kialakulása a mechanika kutatók nagy számát fordította az anyagtörvény kutatására. Ettől kezdődően igen sok elképzelés és elmélet látott napvilágot. Ennek következtében olyan helyzet alakult ki, hogy majdnem minden kísérlet külön-külön megfogalmazott anyagtörvényhez vezetett. A mechanikával szemben támasztott technikai igények, a már felsorolt fizikai hatások és a megjelenő műanyagok, az anyagtörvény általános megfogalmazását vetették fel. Az 50-es évektől kezdődően több átfogó elképzelés jelent meg az anyag mechanikai tulajdonságainak kifejezésére, és ezek az elmúlt 20 évben átalakították a kontinuum-mechanika szemlétetét, a kutatás irányát és tartalmát.

2. Az anyagtörvényről általában

A kontinuum-mechanika néhány alapfogalma tehát elkerülhetetlenül szükséges az anyagtörvények áttekintéséhez. A test részecskéinek az időtől függő χ leképző függvényét a geometriai térre a test mozgástörvényének nevezzük. A részecskék közötti kölcsönhatást, az adott részecske esetében annak a felületén működő megoszló erőrendszerrel fejezzük ki. Ez az erőrendszer állhat megoszló erőből (feszültség) és megoszló erőpárból (feszültségpár). Ebben az esetben *poláris anyagról* szokás beszélni. Ha az erőrendszer csak feszültségből áll, akkor *nem poláris anyagról* szokás beszélni. Ez az elterjedtebb, s mi is csak ezzel foglalkozunk. A feszültségvektor a felület normálisának függvénye, ezért ehelyett a Φ feszültségtenzor alkalmas ennek a belső erőrendszernek a kifejezésére.

A test mozgástörvényének hely szerinti deriváltja az $\mathbf{F}$, a test alakváltozását jellemzi.

Az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzor az $\mathbf{F}$ tenzor meghatározott függvénye. Kis alakváltozás esetében például $\mathbf{A} = (\mathbf{F} + \mathbf{F}^*)/2$ ($\mathbf{A}^*$ transzponálást jelent).

A χ mozgástörvény idő szerinti deriváltja a részecskék v sebességét adja, ennek hely szerinti deriváltjának szimmetrikus része az alakváltozási sebesség, a V. Kis alakváltozás esetében $\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{V}.\mathbf{A}$ az idő szerinti deriváltat jelenti.

A test pontjaiban az abszolút hőmérséklet, mint az idő függvénye, legyen T.

Az elektromos térerősség vektora legyen E. (Sorolható még más fizikai vagy kémiai hatásra jellemző mennyiség is). Az anyagtörvény megszerkesztése rendszerint az itt felsorolt mennyiségek közötti kapcsolat megállapítását jelenti

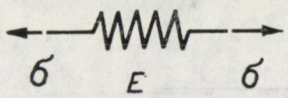
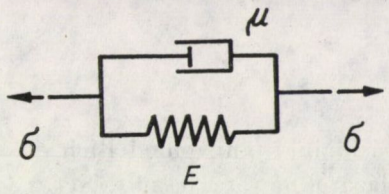
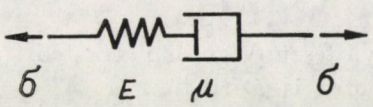
3. Anyagmodellek

Az anyagtörvény felépítésének egyik kialakult útja a reológiai anyagmodell-elemek felhasználásával összeállított testek megszerkesztése. A legfontosabb anyagmodell-elemek egytengelyű feszültségi állapot esetében a következők:

Az anyag három alapvető tulajdonságát fogadjuk el és ezeket a tulajdonságokat egyenként egy-egy ideális testnek tulajdonítjuk. Ez a három tulajdonság a *rugalmasság*, a *viszkozitás* és a *képlékenység*. Ezeknek megfelelő modellelemek a *Hooke-féle* test, *Newton-féle* test és a *Saint-Venant-féle* test. Az ideális testek anyagmodelljét és anyagtörvényeit az I. táblázat, az ideális testek

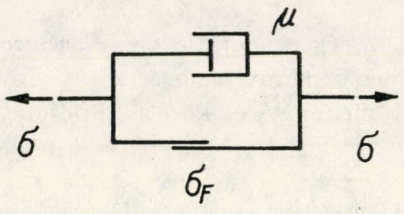
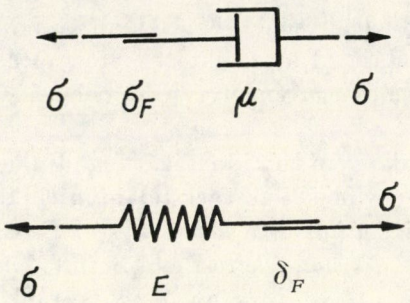
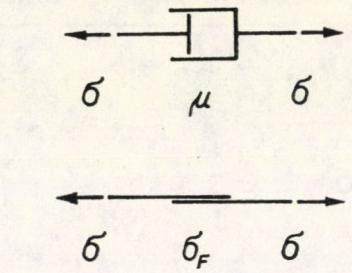
I. Táblázat

Ideális testek

Megnevezés	Anyagmodell	Anyagtörvény
Hooke-féle test		$\sigma = E\varepsilon$
Newton-féle test		$\sigma = \mu\dot{\varepsilon}$
Saint-Venant-féle test		$\sigma < \sigma_F$, $\sigma = \sigma_F$ $\varepsilon = 0$, $\varepsilon \neq 0$

II. Táblázat

Ideális testek kombinációi

Megnevezés	Anyagmodell	Anyagtörvény
Rugalmas-képlékeny test		$\sigma < \sigma_F, \quad \sigma = \sigma_F,$ $\sigma = E\varepsilon, \quad \varepsilon \neq 0.$
Viszkoelasztikus test *a)* Kelvin test *b)* Maxwell-féle test		$\sigma = E\varepsilon + \mu\varepsilon,$ $\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{\mu}.$
Viszkoplasztikus test *a)* Bingham-féle test *b)* Kúszóképlékeny test		$\sigma < \sigma_F, \; \sigma < \sigma_F,$ $\varepsilon = 0, \quad \sigma = \sigma_F + \mu\varepsilon.$ $\sigma \leq \sigma_F, \quad \sigma = \sigma_F,$ $\sigma = \mu\varepsilon, \quad \varepsilon \neq 0.$

néhány fontosabb kombinációjának anyagmodelljeit és anyagtörvényeit a II. táblázat tünteti fel. E táblázatokban σ a feszültséget, ε a fajlagos nyúlást, E a rugalmassági tényezőt, μ pedig a viszkozitási tényezőhöz hasonló anyagállandót jelent.

Az imént egytengelyű feszültségi állapotra felírt anyagtörvények többtengelyű feszültségi állapotra is átírhatók.

Ezek közül legfontosabbak:

a) az izotróp, homogén lineáris rugalmas testre vonatkozó *általános Hooke-féle törvény*

$$\Phi = 2G\left(\mathbf{A} + \frac{1}{m-1}\mathbf{I}A_I\right),$$

ahol G a csúsztató rugalmassági modulusz, m a Poisson szám, A_1 az $\mathbf{A}$ tenzor első skalár invariánsa és $\mathbf{I}$ az egységtenzor.

b) Az izotróp, homogén képlékeny testre vonatkozó *Prandtl—Reuss-féle egyenlet*

$$\delta\mathbf{A}_d = \frac{1}{2G}\delta\Phi_d,$$

ahol

$\mathbf{A}_d = \mathbf{A} - \frac{1}{3}A_1\mathbf{I}$ az alakváltozási deviátor,

$\Phi_d = \Phi - \frac{1}{3}\Phi_1\mathbf{I}$ — a feszültségi deviátor

ψ — megfelelően választott függvény

δ — az utána következő mennyiség megváltozását jelenti.

c) Az *izotróp homogén viszkoelasztikus test*

$$\Phi_d = 2G\mathbf{A}_d + 2\mu\mathbf{V}_d.$$

A Prandtl—Reuss-féle egyenlethez és a viszkoelasztikus test egyenletéhez még kiegészítő egyenletek tartoznak a feszültség és alakváltozási tenzor első invariánsai között és a feszültségi tenzor második skalár invariánsára vonatkozóan.

d) Végül a valamennyinél általánosabb, Truesdell által javasolt *hipoelasztikus test*

$$\Phi^{\nabla} = \mathbf{f}(\mathbf{V}, \Phi),$$

ahol Φ^{∇} a feszültségi tenzor megfelelő képzési módon előállított idő szerinti deriváltja.

4. Iljusin elmélete

A század 40-es és 50-es éveiben kialakult általános elméletek közül elsőnek az A. A. Iljusintól származót említhetjük. Iljusin elméletének megfogalmazásához bizonyos matematikai jelöléseket kell bevezetni. A feszültség és alakváltozási deviátorok 5—5 független skaláris adatot tartalmaznak, ezeket a deviátor koordinátákat egy megfelelő lineáris transzformációval egy 5 méretű euklideszi tér vektor koordinátáivá transzformáljuk. Legyenek a test egy pontjában, az 5 méretű térben az $\mathbf{A}_d$ alakváltozási deviátorhoz rendelt vektor ε alakváltozási vektor koordinátái

$$\varepsilon_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5).$$

a feszültség deviátorhoz (Φ_a) rendelt vektor a σ feszültségi vektor koordinátái pedig

$$\sigma_\alpha, \ (\alpha = 1, \ldots, 5).$$

A lineáris transzformáció legyen olyan, hogy
$|\varepsilon| = \varepsilon_i$ az alakváltozási intenzitás és
$|\sigma| = \sigma_i$ a feszültségi intenzitás
legyen.

Egy terhelési folyamat alatt az alakváltozási vektor az 5 méretű térben egy görbét ír le, ezt a görbét *alakváltozási trajektoriának* szokás nevezni. Az alakváltozási trajektoria mentén egy kísérő ötös vektort állíthatunk elő. Ezek a kölcsönösen merőleges egységvektorok legyenek

$$p_\alpha, \ (\alpha = 1, \ldots, 5),$$

Ezért így számíthatjuk:

$$p_\alpha = \frac{1}{k_\alpha} \frac{d^\alpha \varepsilon}{ds^\alpha}, \qquad (\alpha = 1, \ldots, 5)$$

ahol

$$k_\alpha = \left| \frac{d^\alpha \varepsilon}{ds^\alpha} \right|$$

a trajektoria görbületei és torziói, az s az ívkoordináta. A $\varkappa_1 = 1$.

Ha minden trajektoria ponthoz hozzárendeljük a megfelelő ε-hoz tartozó σ-t, akkor σ-t a p_α bázisban így írhatjuk fel:

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{5} f_\alpha p_\alpha .$$

Az Iljusin-féle elmélet az úgynevezett *izotropitási posztulátumban* foglalható össze. Az izotropitási posztulátum kimondja, hogy az alakváltozási trajektoria elforgatása és tükrözése esetében, amikor a $\varkappa_\alpha$-ák változatlanok, az f_α-ák is változatlanok maradnak.

Ebből következik, hogy az f_α csak s-től és a $\varkappa_\alpha$-áktól függ. (Ha a test mozgása során más fizikai hatások is jelentkeznek, akkor az eddig felsorolt változók kiegészülnek pl. a T abszolút hőmérséklet, az E elektromos térerő, a B mágneses indukáció stb. változókkal). Általános esetben az $f\alpha$, s és $\varkappa_\alpha$-ák közötti kapcsolatot funkcionálókkal fejezhetjük ki.

Az izotropitási posztulátumot kiegészítve, a kontinuum-mechanikában szokásos vagy alkalmas más egyszerűsítő feltevéssel az összes eddig felvetett anyagtörvényt megkapjuk.

5. Termodinamikai összefüggések

Az anyagtörvény felépítésének egyik legelterjedtebb módja a termodinamikai törvények révén nyerhető megszorítások felhasználása. Ezek a meggondolások minden elméletnél megjelennek.

A termodinamika *első főtétele*

$$\varrho r - \varrho \dot{U} + \mathbf{\Phi} \cdot \cdot \mathbf{V} - \operatorname{div} q = 0 ,$$

ahol ϱ a sűrűség, r a test belsejében levő hőforrás erősségfüggvény, U a belső energia és q a hőáram vektor. A $\mathbf{\Phi}$ és $\mathbf{V}$ között a ... jel a két tenzor kettős skalár szorzatát jelenti.

A *második főtétel* ilyen alakban írható

$$\varrho T \dot{S} - \varrho r + \operatorname{div} q - \frac{q \cdot \operatorname{grad} T}{T} \geq 0 ,$$

ahol S az entropia sűrűség.

A két képletből küszöböljük ki a ϱ r-et és vezessük be az $U - TS = H$ Helmholtz-féle függvényt, akkor

$$- \varrho(\dot{H} + S\dot{T}) + \mathbf{\Phi} \cdot \cdot \mathbf{V} - \frac{q \cdot \operatorname{grad} T}{T} \geq 0 .$$

Nézzük milyen képletekhez vezet ez az egyenlőtlenség, ha az állapotfüggvények az $\mathbf{A}$ és T. Ekkor $H = H(\mathbf{A}, T)$ és az egyenlőtlenség:

$$\left(\mathbf{\Phi} - \varrho \frac{\partial H}{\partial A} \right) \cdot \cdot \mathbf{V} - \varrho \left(S + \frac{\partial H}{\partial T} \right) \dot{T} - \frac{q \cdot \operatorname{grad} T}{T} \geq 0 .$$

Most, noha nem feltétlenül kis alakváltozásról van szó, $\dot{\mathbf{A}} - \mathbf{V}$, mert az $\mathbf{A}$ a Lagrange-féle koordináták függvénye.

Az utóbb felírt egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\mathbf{\Phi} = \varrho \frac{\partial H}{\partial A} ,$$

$$S = - \frac{\partial H}{\partial T} .$$

és

$$- q \operatorname{grad} T \geq 0.$$

Ezek az egyenletek a hőrugalmasságtan anyagtörvényei nagy alakváltozás esetében.

Hasonló megoldásokkal vezethető le megfelelő feltételezések rögzítésével a többi ismert test anyagtörvénye is.

Az anyagtörvény ilyen származtatása az egyéb feltevések mellett még attól is függ, hogy a második főtételt milyen alakban fogalmazzuk meg.

6. Szedov elmélete

Az előző anyagtörvény szerkesztési mód általánosításának tekinthetjük az L. J. Szedov által javasolt elméletet. Szedov, mint mások is, a termodinamikai kölcsönhatások mellett más fizikai és kémiai kölcsönhatásokat is számításba vesz, és ezenfelül elméletét úgy fogalmazza meg, hogy az egyaránt alkalmas legyen mind a newtoni, mind a relativisztikus mechanikában. Ennek megfelelően az alapegyenlet variációs feladat formájában jelentkezik, mégpedig:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V L dV dt + \delta W^* + \delta W = 0 ,$$

ahol L a test fajlagos Lagrange-féle függvénye, V a test pillanatnyi elhelyezkedési tartománya, amelyet az A felület határol. A δW^* a V tartományban és annak A felületén működő különböző, az irreverzibilis folyamatokkal kapcsolatos kölcsönhatásból származó mennyiségek megváltozása. Pl. a nem konzervatív térfogati és felületi erők virtuális munkája vagy a hőfolyamatok esetében a $\sigma T \delta S$ térfogati és idő integrálja.

A δW mennyiség egy olyan felületi és időintegrál, amely a

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V L dV dt \quad \text{és} \quad \delta W^*$$

kifejezésből a megfelelő átalakítás után megmaradt felületi és időintegrálokkal nullát ad. A δW a test határoló felülete mentén a vizsgált időszakaszban működő külső hatásokat is tartalmazza.

Ha a δ-val jelölt variációt általános értelemben alkalmazzuk, akkor a variációs egyenlet megadja a testre vonatkozó összes olyan egyenletet, amelyek módot adnak az anyagtörvény előállítására is.

Nézzük azt az egyszerű esetet, amikor csak mechanikai kölcsönhatások vannak, és a test adiabatikus reverzibilis állapotváltozást végez. Legyen az L függvény a ϱ sűrűségnek, a v sebességnek és az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzornak a függvénye:

$$L = \frac{1}{2} \varrho v^2 - \varrho U(\mathbf{A}) .$$

A variációs egyenlet:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \int_V \left[\frac{1}{2} \varrho v^2 \quad \varrho U \right] dV dt + \delta W^* = 0 .$$

Ha kis alakváltozásról van szó, akkor

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\nabla_0 u + u_0 \nabla) \quad \text{és} \quad v = \frac{\partial u}{\partial t} .$$

Itt u az elmozdulás vektor.

Ezzel

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{V}\left[\varrho v\cdot\delta v-\varrho\frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}}\cdot\cdot\frac{1}{2}(\nabla_0\delta u+\delta u_0\nabla)\right]dVdt+\delta W^*+0\,,$$

azaz

$$\int_V \varrho v\cdot\delta u\Big|_{t_0}^{t_1}dV-\int_{t_0}^{t_1}\int_V\varrho\frac{\partial v}{\partial t}\cdot\delta u dVdt-\int_{t_0}^{t_1}\oint_A n\cdot\left(\varrho\frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}}\right)\cdot\delta u dAdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_V\nabla\cdot\left(\varrho\frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}}\right)\cdot\delta u dVdt+\delta W^*=0\,.$$

(n az A felület normális egységvektora).

A térfogati és idő szerinti integrál akkor nulla, ha

$$\varrho\frac{\partial v}{\partial t}=\nabla\cdot\left(\varrho\frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}}\right)$$

mozgásegyenlet teljesül, amelyből a

$$\varrho\frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}}=\Phi$$

anyagtörvény következik. A felületi és időintegrálok a δW^*-gal nullát adnak. Ez a kezdeti és peremfeltételekhez vezet.

7. Az anyagtörvényeket rendszerező axiómarendszer

Végül egy elterjedt axioma rendszert ismertetünk, amely az anyagtörvényre vonatkozik. Az axióma rendszer kidolgozása elsősorban Truesdell, Noll, Coleman, Eringen munkáinak eredménye. A következőkben itt csak a mechanikai kölcsönhatások tárgyalására korlátozódunk. Ekkor tulajdonképpen 3 axiómát kell ismertetni. Az axiómák meghatározott mennyiségek közötti kapcsolatot állapítanak meg és ezt funkcionál fejezi ki. A funkcionált a következőkben írott $\mathcal{F}$ betűvel jelöljük.

a) Az első axiómát a *determinizmus axiómájának* nevezik, és azt mondja ki, hogy a test Φ feszültségi állapotát a test χ mozgástörvénye és annak lefutása meghatározza, azaz az X részecske számára a t időpillanatban

$$\Phi(X,t)=\mathbf{F}[\chi(Z,\tau);\ X,\ t],$$

ahol Z a test többi részecskéje és $\tau<t$.

b) A második a *helyi hatás axiómája*. Eszerint, ha két χ és χ' mozgástörvény a t időpillanatban az X részecske $N(X)$ környezetében megegyezik,

azon kívül viszont különbözik, akkor az X részecskére vonatkozóan a t időpillanatban a két mozgástörvényhez ugyanaz a feszültségállapot tartozik, azaz, ha

$$\tau \leq t \quad \text{és} \quad ZfN(X)$$

akkor

$$\mathbf{F}(\chi;\ X,\ t) = \mathbf{F}(\chi';\ X,\ t)\,.$$

c) A harmadik az anyagi *invariancia axiómája.* Ha két megfigyelő egy testnek ugyanazt a mozgását figyeli meg, akkor ugyanazt a feszültségi állapotot találja. Ez matematikai formában így írható. Legyen $\mathbf{Q}$ egy, csak az időtől függő ortogonális tenzor, akkor a két megfigyelő által észlelt mozgástörvény közötti kapcsolat:

$$\chi'(X, t') = \mathbf{Q}\chi(X, t) + c \quad \text{és} \quad t' = t - a.$$

Itt c az időtől függő vektor, a pedig állandó szám.

Az egyik megfigyelő Φ' a másik Φ feszültségi tenzort figyel meg. Az axióma szerint

$$\Phi' = \mathbf{Q} \cdot \Phi \cdot \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}(\chi;\quad X, t) \cdot \mathbf{Q}^*\,.$$

Az F funkcionál, tehát kielégíti az

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q} \cdot \chi + c;\quad X, t - a) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}(\chi;\quad X, t) \cdot \mathbf{Q}^*$$

függvényegyenletet.

Ezek az axiómák a legkülönbözőbb anyagtörvények előállítását és rendszerbe foglalását teszik lehetővé. Az axiómarendszer egyéb fizikai vagy kémiai kölcsönhatások figyelembevételére is kiegészíthető.

IRODALOM

PRAGER, W.: Einführung in die Kontinuumechanik Birkhäuser Verlag 1961
GREEN, A. E.—NAGHDI, P. M.: *Arch. Rational Mechn. Anal.*, **18**, (1965), 251—281
TRUESDELL, C.: Six Lectures on Modern Natural Philosophy Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1966
KACSANOV, L. M.: Osznovü teorii plaszticsnoszti, Izd. Nauka, Moszkva 1969
LENSZKIJ, V. Sz.: Vvedénie v teoriju plaszticsnoszti, M. G. U. Moszkva 1968
OLSZAK, W.—MROZ, Z.—REZZYNA, P.: Recent Trends in the Development of the Theory of Plasticity Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris 1963
SZEDOV, L. I.: *Uszpehi matematicseszkih nauk*, **20** (1965), 124

Material Laws of Solids. Beginning with the twenties, mainly the development of the theory of plasticity drew the attention more strongly to the research in the laws of material. The paper summarizes the most characteristic theories developed during these researches.

Materialgesetze der festen Körper. Von den Zwanzigerjahren an wird die Aufmerksamkeit vor allem infolge der Entwicklung der Plastizitätstheorie mehr auf die Erforschung der Materialgesetze hingelenkt. Der Aufsatz faßt die im Laufe dieser Forschungen entwickelten Theorien zusammen.

KÖNYVISMERTETÉS

Gáspár Istvánné—Spányi Balázsné:

ÉPÍTÉSZETI SZAKIRODALOM-KUTATÁS

Tankönyvkiadó, Budapest 1972, 320 oldal, 80 ábra

A Budapesti Műszaki Egyetem Központi Könyvtára Dr. HÉBERGER Károly könyvtárigazgató szerkesztésében könyvsorozatot bocsájtott ki *„A Szépirodalom-Kutatás Segédkönyvei"* címen. Ez a könyvsorozat a műszaki tudományok különböző területein való szakirodalomkutatás módszereivel, a könyvtárak használatához szükséges alapvető ismeretekkel, a dokumentációs kiadványok típusaival és rendeltetésével foglalkozik, ezzel segítve az egyetemi hallgatóságot, valamint a mérnököket és technikusokat a szakterületeiken szükséges információk beszerzésében és feldolgozásában. Az itt ismertetendő mű e közhasznú kiadványsorozat hetedik, egyben befejező kötete.

A könyv a tárgyalandó anyagot nyolc fejezetbe foglalja. Az *első* fejezet a műszaki könyvtárt mint a műszaki irodalom gyűjtésének és feltárásának intézményét mutatja be, ismertetvén a katalógusok rendszerét, a katalógus cédulák jelzéseit, az egyetemes tizedes osztályozási rendszert és a különféle könyvtári szolgáltatásokat. A *második* fejezet a szakirodalmi kutatás segédeszközeit, az építészettel kapcsolatos dokumentációs kiadványtípusokat sorolja fel és azok rendeltetéséről tájékoztat. A *harmadik* fejezet a szakirodalmi dokumentumok különböző fajtáival ismerteti meg az olvasót. A *negyedik* és egyben legterjedelmesebb fejezet részletes címjegyzékét tartalmazza az építészet tárgykörébe vágó lexikonoknak, enciklopédiáknak, szakszótáraknak, közleményeknek, szak- és tankönyveknek, disszertációknak, szabványoknak stb. Ez a 117 oldalra terjedő bibliográfiai összeállítás, mely értékes és hasznos címjegyzéke a szakma alapvető, tanulmányozásra javasolható műveinek, főleg a kezdő kutató tudományos munkájához kíván segítséget nyújtani. Az *ötödik* fejezet három konkrét példa kapcsán azt mutatja be, miként lehet valamely megoldandó feladatra vonatkozó irodalmi anyagot felkutatni. Ennek a fejezetnek a tárgyalásmódja és szemléletes ábrái kitűnő pedagógiai érzékre utalnak és követésre csábítanak. A *hatodik*, *hetedik* és *nyolcadik* fejezet a szerzői munka módszereire, technikájára vonatkozó irodalmi anyagot, valamint a hazai és külföldi építészképzéssel foglalkozó irodalmat ismerteti, majd érdekes összeállítást ad az építészmérnöki vonatkozású művek kiadásával foglalkozó hazai és külföldi vállalatokról.

A szóban forgó mű a Budapesti Műszaki Egyetem Építészmérnöki Karán fokozatosan bevezetésre kerülő szakirodalom-oktatás igen sikerült segédkönyve, amelyet az egyetem építészmérnök hallgatóin kívül a kutató munkával, valamint a gyakorlati tervezéssel és kivitellel foglalkozó szakemberek is célszerűen használhatnak.

Dr. Csonka Pál

Troels Broendum-Nielsen:

STRUCTURAL CONCRETE

Structural Research Laboratory, Technical University of Denmark, Polyteknisk Forlag, Lyngby, Denmark, 136 oldal, 40 ábra, 3 táblázat, irodalomjegyzék, név- és tárgymutató.

Troels BROENDUM-NIELSEN professzor angol nyelvű legújabb könyve a CEB és FIP védnöksége alatt tartott a Laboratório Nacional de Engenharia Civil által rendezett 1973-as lisszaboni Nemzetközi Betonszerkezeti Konferencia részére íródott. Célja a statikailag határozott és határozatlan szerkezetek vizsgálatára egyszerű olyan eljárások ismertetése, amelyek tekintetbe veszik a beton pillanatnyi és lassú alakváltozását, zsugorodását, valamint az acélanyag relaxációját.

A könyv részletesen foglalkozik a feszített és nem feszített huzalokkal vasalt, továbbá a vegyesen vasalt szerkezetek erőtani viselkedésével, az elő- és utófeszítés hatásával, a feszítés okozta feszültség átrendeződéssel, a különböző határállapotokkal, a feszültségveszteségek és alakváltozások kérdésével, valamint a fáradás jelenségével.

Dicsérendő, hogy a könyv mindenütt csak a lényeges kérdések tárgyalására szorítkozik és a tárgyalás során — kevés kivételtől eltekintve — a CEB—FIP-féle ajánlásokra támaszkodik. A könyv anyaga jól áttekinthető, okfejtése világos és példaszerűen egyszerű. Ez a megállapítás a könyvben szereplő új tételekre, így pl. a lineáris transzformáció általánosításával foglalkozó fejezetnek a tárgyalására is vonatkozik. Itt és egyéb kérdések tárgyalásakor is a teljes megértést kevés vonallal megrajzolt — csak a lényeget feltüntető — ábrák és célszerűen megválasztott, részletesen kidolgozott számpéldák világítják meg.

A könyv, bár a vasbetonszerkezetek tárgykörének csak egyes fejezeteit öleli fel, egyszerűségénél és közérthetőségénél fogva a vasbetonszerkezetek problémáival foglalkozó szak- és tankönyvek versenyében igen előkelő helyezésre tarthat igényt.

Dr. Csonka Pál

Sven R. Hed:

ENTSCHEIDUNGSHELFER COMPUTER

WIE AUS KONVENTIONELLER DATENVERARBEITUNG EIN INFORMATIONSSYSTEM ENTSTEHT

VDI Verlag Düsseldorf 1972. 418 oldal, 210 szöveg közti ábra 58 DM

Ez a könyv a kiváló svéd szakember által eredetileg svéd nyelven írt „Informationssystem och datamaskiner" című munkák német nyelvű fordítása. Nem kétséges, hogy napjainkban a számítógépek egyre fontosabb szerepet töltenek be a tudományos számításokban, a folyamatszabályozásokban és az adatfeldolgozásban. Ez a könyv fő céljának azt tekinti, hogy a vállalati irányítás megvalósításához, a döntéshozatalhoz a digitális számítógépet hatékonyan fel lehessen használni. Ennek a célkitűzésnek megfelelően az információs rendszerek kiépítésével kapcsolatos anyagot négy részben tárgyalja meg.

Az *első rész* az információs rendszerekkel foglalkozik. Egy rövid rendszertechnikai áttekintés után megtárgyalja az információ és az adatok, az információ feldolgozás és az adatfeldolgozás, az információs rendszer és az adatfeldolgozó rendszer, a döntési rendszer legfontosabb fogalmait. Kitér az információs rendszerek feladataira és az információ feldolgozás segédeszközeire mind emberi, mind gépi vonatkozásban. Megvizsgálja a nem integrált és az integrált információ rendszerek előnyeit és hátrányait.

A *második rész* az elektronikus adatfeldolgozó berendezés működési elvét tisztázza. Egy rövid áttekintés után bemutatja a számítógép „software" és „hardware" oldalát, tehát a programok és a gépi berendezések alapelveit. Majd rátér az elektronikus adatfeldolgozó berendezések fontosabb feladataira, rámutat a „tárolt program" jelentőségére, összehasonlítja a digitális és analóg számítógépet, bemutatja az adatok digitális előállítását, a különböző kódolási módokat továbbá a tárolók különféle megoldásait, mint például a ferrit tárolót, a dobtárolót, a lemeztárolót és a mágnesszalagot. Ezután a vezérlés módozatait mutatja be. Kitér a bemeneti és a kimeneti egységekre a szokásos lyukszalag, lyukkártya mágnesszalag berendezések mellett megemlékezik a mágneses és az optikai olvasóberendezésekről is. Röviden foglalkozik az adatállományokkal (terminálokkal) is. Végül a különbféle konfigurációkra, az időbeli szempontokra, a multi-programozásra és az egyidejű feldolgozásra tér ki. Rövid történeti áttekintés zárja be a második részt.

A *harmadik rész* elsősorban a vállalati adatok feldolgozásának módjait ismerteti. Itt említés történik az üzleti tranzakciók időszerinti véletlenszerű és regiszter szerinti feldolgozási módjairól. Kitér a folyamattervekre és a döntési táblázatokra is. Részletesen foglalkozik a gépi nyelvekkel, előnyeikkel és hátrányaikkal. Ezután az elektronikus adatfeldolgozó berendezések programozási rendszereinek (assemblereknek, a kompilereknek, a program generátoroknak, a szimulátoroknak stb.) ismertetése következik, majd az üzemviteli programokra és az ellenőrző programokra tér ki. Végül pedig a vezérlő programok egyes részletkérdéseit ismerteti. Rámutat arra, hogy az egyes feladatok végrehajtása milyen személyi feltételek teljesítését követeli meg.

A *negyedik rész* az információs rendszerek megvalósításának lépéseivel foglalkozik a célkitűzéstől kezdve az előzetes analízisen keresztül egészen a műszaki kifejlesztésig, rátér a

beruházás előkészítésére, a vizsgálatokra és az ellenőrzésekre, az üzemvitelre és a rendszer karbantartására. Mindezeket a tevékenységeket részletes folyamatábrák szemléltetik. Ezután a szabványokra, a dokumentációkra, a szervezési kérdésekre, a tervezésre és az irányításra, valamint a kiképzésre és a tovább tanulásra tér ki. Ezután a beruházási döntés variációit ismerteti, majd a segédeszközök megválasztásának a szempontjait ismerteti mind az emberi oldal, mind a gépi oldal tekintetében. Végül az információs rendszer munkájának szervezeti irányelveit adja meg. A könyv áttekinthetőségét a bőséges tárgymutató, valamint a tartalomjegyzék segíti elő.

A szóban forgó munka semmiféle előzetes ismeretet nem tételez fel olvasójától, sem az elektrotechnika, sem a matematika, sem a statisztika vagy egyéb tudományágak vonatkozásában. Ilyen körülmények között egyszerű fogalmakra építve világosan fejti ki szempontjait. Mindezek a körülmények alkalmassá teszik a munkát arra, hogy olvasóját megismertessék az elektronikus adatfeldolgozás és az elektronikus számítógépek alkalmazásának alapvető módszereivel és eljárásaival. Bár a könyv elsősorban az információs rendszerek (adatbankok) megteremtését tekinti fő célkitűzésének, sokat meríthetnek belőle azok is, akik a számítógépek egyéb jellegű felhasználásával foglalkoznak. Különösen vonatkozik ez a berendezések megválasztásának, üzemeltetésének és karbantartásának szempontjaira.

Az ábrák világosak és jól segítik elő a szöveg megértését. Itt talán csak azt lehet kifogásolni, hogy jó lett volna az áttekintést ábraaláírásokkal és magyarázatokkal elősegíteni.

Dr. Csáki Frigyes

Kollár Lajos:

STATIK UND STABILITÄT DER SCHALENBOGEN UND SCHALENBALKEN

Akadémiai Kiadó, Budapest 1973, 211 oldal 100 ábra, 13 táblázat

Az előregyártott héjívekből összeépített héjtetők széleskörű alkalmazása, azok méretezésével kapcsolatos új statikai problémák megoldását tette szükségessé. A könyv célja e problémák megfogalmazása, megoldása és a megoldások terjedelmes számítással előállított paramétereinek grafikus és táblázatos összeállítása.

A könyv majdnem kizárólag a szerző saját kutatási eredményeit tartalmazza. Erre azért volt szükség, mert a héjívek stabilitásvizsgálatára a tömör keresztmetszetű ívek esetében szokásos eljárás — amint azt a szerző megállapítja — nem alkalmas, mert azzal kritikus teherként a valóságos kritikus tehernél jóval nagyobb értéket kapunk. Ezért a héjívek kihajlásszámítására új eljárást dolgozott ki. Ez mind elméleti, mind gyakorlati szempontból értékes és hasznos tudományos eredmény.

A szerző a héjív méretezését a tömör keresztmetszetű ív méretezésére vezeti vissza. Kimutatja, hogy az elemi ívekből összetettnek képzelt héjív elemi ívei síkjukban különböző alakváltozást végeznek. Ezt úgy veszi figyelembe, hogy az ív keresztmetszetének inercianyomatékát egy egynél kisebb γ tényezővel szorozva veszi számításba. E csökkentő tényezőket és tiszta hajlításnál a nyomatékok nemlineáris változását, valamint a tengelyirányú feszültségeket négy, gyakorlatilag fontos keresztmetszetalak esetén grafikonokkal és táblázatokkal megadja. Kimutatja továbbá, hogy az ívek kritikus terhét a véletlen vagy tervezett külpontosság lényegesen csökkenti és eljárást mutat be ennek figyelembevételére.

Részletesen foglalkozik az energiamódszer segítségével az ív síkjára merőleges irányú kihajlással, és a felfüggesztett egyenes héjtartó kibicsaklásával, a tárgyalt négy keresztmetszet alakú héjív, illetve héjtartó esetében. Foglalkozik ezenkívül a héjívek lokális horpadásával, valamint a lassú és plasztikus alakváltozásnak a stabilitásra való kihatásával.

A könyvet gondosan kidolgozott részletes számpéldák, és jól dokumentált meggyőző modellkísérletek egészítik ki.

A könyv eredetisége abban van, hogy a szerző a tárgyalt bonyolult problémát nem a héjstabilitás szokásos eljárása szerint, mint egy nemlineáris differenciálegyenlet rendszer sajátértékfeladatát vizsgálja, hanem azt — az elméleti precizitás fenntartásával — az ívstatika egyszerűbb módszerével oldja meg. E szerencsés tárgyalásmóddal egyrészt elkerüli a terjedelmes számításokat, másrészt azokat a közölt grafikonok és táblázatok segítségével leegyszerűsíti.

A könyv teljes monográfia olyan értelemben, hogy a vizsgált héjstatikai feladatok minden részletét kimerítően tárgyalja, és nem teszi szükségessé más irodalmi anyag használatát. Ezért kitér olyan kérdésekre is, amelyekkel az elméleti könyvek általában nem foglalkoznak, mint például a lassú és plasztikus alakváltozás hatására, és a méretezés számítás-

technikai részleteire. A könyv megértése nem kíván különleges előtanulmányokat, a rugalmasságtan és héjstatika egyetemi tanulmányi szinten való ismerete elegendő az olvasásához.

Dr. KOLLÁR Lajos könyve a statika tudományának új és korszerű eredményeivel hozzá fog járulni a héjívek tervezésének hazai és nemzetközi fejlesztéséhez.

A szakszerű fordítás, az áttekinthető összeállítás, és a szép tipográfia, a fordító, a szerkesztő, és az Akadémiai Kiadó gondos munkáját dicséri.

Dr. Szmodits Kázmér

Pfannkoch E.:

ARBEITSMAPPE FÜR DEN KONSTRUKTEUR

3. Aufl. VDI-Verlag, Düsseldorf. 1972. 11 táblázatcsoport 86 oldalon

A tervező-szerkesztő gépészmérnök számára készült segédtáblázatos könyv sikerét bizonyítja, hogy 1957-ben jelent meg az első, 1962-ben a második kiadás, és ez az 1972-es már a harmadik javított kiadás. Idő közben, 1959-ben lefordították svéd, majd 1966-ban francia nyelvre is. E harmadik kiadás az előző kiadásúakkal felépítésben megegyezik, a sajtóhibákat természetesen kijavították benne, és első sorban a fogaskerékszámításokkal kapcsolatos néhány táblázatot dolgoztak át, a pontosságot egy-egy újabb tizedes megadásával fokozva.

A segédtáblázatok felépítése olyan, hogy adott képletet többváltozós nomogrammal ábrázol a könyv szerzője, benne a használatot mintapélda könnyíti meg, a táblázatok hátoldalán pedig részletes leírás olvasható a nomogram lényegéről, használatáról, és a kidolgozott mintapéldáról.

Az 1-es jelű táblázatok gyűjtő címe: *általános nomogramok*, amelyeken belül a teljesítmény—forgatónyomaték—fordulatszám—kerületi sebesség; forgatónyomaték—teljesítmény—fordulatszám; fordulatszám—átmérő—kerületi sebesség; teljesítmény—erő—kerületi sebesség; centrifugális erő; súly (acélhengerre); tengely (háromtámaszú támasztóerőkre; segédkerék tengelytávjára); áramlási sebesség; áramlási teljesítmény; csavarkötés számítások nomogramjai találhatók meg.

A 2-es jelű táblázatok a *gördülőcsapágyak* közismert kiválasztási nomogramjai külön a golyós- ill. külön a görgőscsapágyakra, a számításokhoz szükséges tényezők táblázatos összefoglalásával.

A 3-as jelű táblázatok a *fékezési jelenségek* nomogramjait tartalmazzák: a mozgási energia és a fékezési idő számítását haladó és forgó mozgásokra, továbbá az acélhenger tehetetlenségi nyomatékának nomogramját.

A 4-es jelű táblázatok a *rugó*-számítások nomogramjait adják meg, a körszelvényű hengeres nyomócsavarrugóra (rugóállandó, csúsztató feszültség), húzócsavarrugóra, betétdarabos húzócsavarrugóra (mindhárom esetben számítási táblázattal, a sokszorosítás érdekében pausz-papiroson is).

Az 5-ös jelű táblázatok az *ékszíjhajtások* számításait szolgálják. Az első táblázat összefoglalja a jelöléseket és a képleteket, majd nomogramot találunk az ékszíjszelvény megválasztásához, táblázatokat és diagramokat a számításhoz szükséges tényezők felvételéhez, végül nomogramokat az ékszíjhossz, tengelytáv, ékszíjtárcsa közepes átmérője vagy az áttétel gyors meghatározásához.

A 6-os jelű táblázatok a *fogaskerékhajtómű* alapadatainak gyors meghatározására valók: adott áttételhez és adott tengelytávhoz a fogszámokra; a százalékos áttételhibára, nagypontosságú cserekerékszámításra, végül a gördülőkör-átmérő és a rávonatkozó kerületi erő számítására.

A 7-es jelű táblázatok bevezető öt táblázata a *fogaskerekek geometriai és szilárdsági számításaira* vonatkozó általános alapelveket foglalja össze G. NIEMANN 1960-ban megjelent nevezetes könyve (Maschinenelemente II) szerint, ismerteti a használt jelöléseket—mértékegységeket, fogalmakat (mint az osztókör, gördülőkör, alapprofilszög, kapcsolószög, fogmagasság, kapcsolószám, relatív csúszás, korrigált fogazat, alámetszés, fogkihegyesedés, fajlagos tengelytávnövekmény, interferencia, többfogméret, golyósmérés, belsőfogazat, fogtő- és felületi igénybevételre, kigödrösödés elleni méretezés, berágódásra ellenőrzés fogalmakat), fogalakokat a profileltolási tényező függvényében, ill. példákat.

A továbbiakban az *általános fogazat* főtételére nomogramot, a profileltolásra héttizedes pontosságú táblázatokat; korrekciós nomogramot a profileltolási tényező minimális értékére; fejcsonkítási, kapcsolószám, relatív csúszás, fejszalag vastagság; a kerületi erő tényezői, a tengelyirányú erő; a hajlító igénybevétel, a felületi igénybevétel (kigödrösödés) nomogramo-

kat találunk egyenes és ferde fogazatra, a méretezés során megadva a biztonsági tényezőt és az élettartamot is. E rész a fogaskerék-anyagok jellemzőinek összefoglalásával zárul.

A 11-es jelű táblázatok a *fogaskerekek mérésére* vonatkoznak. A többfogméret közrefogott fogainak darabszámára nomogramokat, a többfogméret öttizedes pontosságú értékeire táblázatot, a fogazathibákra táblázatokkal kombinált nomogramot, a golyósméréshez héttizedes pontosságú táblázatot ad a könyv. Az utolsó táblázat a számítás sorrendjét elősegítő nyomtatvány.

Amint a tartalmi ismertetőből kivehető, a szerző a gépelemek számításaiból kiválogatta a leggyakrabban előforduló egyszerű és bonyolultabb számításokat, és azokat nomogramokban, ill. táblázatokban dolgozta fel. E nomogramokból leolvasható értékek logarlécpontosságúak, de előnyösebbek annál, mert a nomogramok tartományhatárai eleve eligazítják a rendszerint ismétlődő számításra kötelezett tervező-szerkesztő gépészmérnököket.

A bonyolultabb ékszíjhajtás- és fogaskerék-számítások (amelyek a könyv terjedelmének kétharmadát töltik ki) tudományos értékű összefoglalások.

Külön ki kell emelni a könyv praktikus kivitelét, könnyű használhatóságát. A könyvet elsősorban kellő gyakorlattal rendelkező tervező-szerkesztő gépészmérnökök használhatják gazdaságosan.

Dr. Terplán Zénó

Imre Perényi:

TOWN CENTRES

PLANNING AND RENEWAL

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973, 199 oldal

A magyar műszaki irodalom és ezen belül az urbanisztika megbecsülése tükröződik az Akadémiai Kiadó elhatározásában, amellyel PERÉNYI Imre: *A város központja* c. művét reprezentatív módon, nagy formátumú kötetben, kitűnő minőségű papíron, gazdag és szép illusztrációs anyaggal angol nyelven kiadta. Ebben az elhatározásában nyilván döntő szerepet játszott az a feltételezés, hogy a magyar urbanisztikai szakemberek körében általánosan ismert és megbecsült mű hazánk határain túl is érdeklődésre tarthat számot.

Ez a feltételezés mindenképpen jogosult. A városközpontok problémaköre világszerte a szakemberek érdeklődésének homlokterében áll. Mindinkább általánossá válik az a felismerés, hogy városaink korszerű fejlesztéséhez, lakosságuk fizikai, közérzeti, társadalmi igényeinek kielégítéséhez a tömeges lakásépítés, az ipartelepítés, a közlekedés még oly nagyvonalú megoldása sem elegendő. Ha mindezek fejlesztésével nem jár együtt a város központjának felújítása, rekonstrukciója, megépítése, akkor az ilyen településben csupán lakni, dolgozni és közlekedni lehet, de kultúrált, urbánus igényekkel *élni* nem. A városközpontok problémaköre a történelem során kialakult városoknál és új városoknál vagy városrészeknél egyaránt súlyosan jelenkezik. Előbbi vonatkozásban csaknem általános jelenség a régi városközpont leromlása; forgalmi csődje és szlömösödése. Új központok esetében az alapvető probléma abban áll, hogy számos, többé-kevésbé sikerült kísérlet ellenére legtöbbjük még híján van azoknak a hangulati elemeknek, amelyek a folyamatosan kialakult központokat oly vonzóvá teszik. Hogyan lehet a meglevő központot az új igények számára megfelelővé tenni, kiegészíteni, bővíteni, tehermentesíteni; hogyan lehet az új központokat funkcionálisan megoldani úgy, hogy egyben barátságosak „lakályosak" legyenek? Olyan alapvető kérdések ezek, amelyek világszerte foglalkoztatják a magukat a városok jövőjéért felelősnek érző szakembereket.

PERÉNYI Imre műve nem csupán azért jelentős, mert mindezeket a kérdéseket részletesen, elméleti fejtegetésekkel és számos gyakorlati példával tárgyalja, hanem azért is, mert az első olyan összefoglaló mű, amely a szocialista és kapitalista országoknak a városközpontok tervezése, fejlesztése terén elért eredményeit és fennálló problémáit együttesen ismerteti, ily módon a világ egészének ilyen irányú fejlődéséről törekszik átfogó képet nyújtani.

Messzire vezetne, ha a mű nyomán a társadalmi rendszereknek a városépítésre gyakorolt hatását kívánnánk részletezni. Első pillantásra nem a különbségek, hanem a hasonlóságok szembeötlők.

Úgy tűnik, a technikai fejlődés különböző kiindulások esetében is hasonló műszaki, sőt hangulati megoldásokat eredményez. Ebből a szempontból a könyv alkalmas arra, hogy az angol nyelvű olvasók körében eloszlassa az olyan tévhitet, mintha a „vasfüggöny" mögött az urbanisztika fejlődése elmaradott, valamely lépcsőfoknál megmerevedett volna. De emellett a rendezés lehetőségeinek és megoldásainak különbségei is feltárulnak PERÉNYI Imre műve

nyomán. A szocialista tábor országaiban az egységes koncepció lehetőségei elvileg inkább állnak fenn. A valóságban azonban — egészen a legutóbbi időkig — a termelés fokozásának és a lakásviszonyok közvetlen javításának primér érdekei a városközpontok nagyszabású, színvonalas és változatos kialakítását — kevés kivételtől eltekintve — ugyanúgy nem tették lehetővé, mint a kapitalista országokban a telek- és a tulajdonviszonyok. Kivételek itt is, ott is akadnak, ezek bemutatása, ezzel összehasonlításuk lehetősége a könyv igen nagy értéke.

A könyv beosztása, terjedelme, sorrendje, az eredeti magyar könyvével azonos. A célját ismertető előszó és történelmi vázlatot nyújtó bevezetés után a városközpontnak a településrendszerben és a városszerkezetben fennálló jelentőségét, a központ kialakításának városszerkezeti kérdéseit tárgyalja, ezután a városközpont rekonstrukciója, a történelmi városközpontok megőrzésének és a metropolisok központrendszerének problémái kerülnek sorra. A művet a magyar városközpontok építését és rekonstrukcióját tárgyaló fejezet zárja le. A logikus sorrendet a magyar anyag külön tárgyalása némileg megbontja. A magyar nyelvű könyvben indokolt volt, hogy a művet olvasó szakemberek és közönség problémáinak ilyen módon részletesebben megismerjék, angol nyelvű közönség számára azonban nézetem szerint ez a különválasztás nem indokolt. Ha a könyv átdolgozása és kiegészítése során (amelyet a szerző — legújabb eredményekre kiterjedően végzett) a magyar anyag rövidebben, de a megfelelő fejezetekbe beágyazottan jelentkezett volna, ez sokkal kedvezőbb benyomást keltett volna. Saját megoldásaink bővebb tárgyalása ugyanis elkerülhetetlenül oda vezetett, hogy jelentéktelen, gyenge megoldások is bemutatásra kerülnek.

Külön dicséretet érdemel Perényi Imre könyvének szép nyomdai kiállítása és korszerű tördelési módja. A szerző a magyar könyv anyagát számos szép új illusztrációval bővítette. Kitűnő ezek csoportosítása és a szöveggel való kapcsolata. A mű önmagában is, de urbanisztikai tevékenységünk és könyvkiadásunk nemzetközi propagandájaként is jelentős.

Dr. Preisich Gábor

K. Simonyi:

PHYSIKALISCHE ELEKTRONIK

Akadémiai Kiadó—B. G. Teubner Verlag, Budapest 1972, 462 ábra, 17 táblázat, 723 oldal.

1969-ben jelentette meg a Tankönyvkiadó a szerző „Elektronfizika" c. könyvének második kiadását — az első kiadás 1957-ben jutott el az olvasókhoz – amelynez felhasználásával készült el az Akadémiai Kiadó és a stuttgarti B. G. Teubner Verlag közös munkájaként a „Physikalische Elektronik".

A szerzőt mind tudományos tevékenysége, mind pedig oktatómunkája már korábban nemzetközileg elismertté tette. Tankönyvei hazai és nemzetközi viszonylatban egyaránt igen keresettek. Az „Elektronfizika" jelenlegi, német nyelvű kiadása is a könyv iránti rendkívül nagy érdeklődést bizonyítja.

Ahhoz, hogy a mű igazi értékeire rámutathassunk, mindenekelőtt meg kell jegyeznünk annak eredeti célját. A szerző az 1957-ben megjelent (Akadémiai Kiadó) Villamosságtan II. című könyvének első részében foglalkozott a makro- és mikrofizika kapcsolatával. Ezt követően célszerűnek látszott mindazon jelenségekkel, amelyekben az elektron játssza a fő szerepet egy külön tankönyv keretében foglalkozni. Igy született meg az „Elektronfizika", s ez egyik kötete annak a villamosmérnöki tudományok megalapozását szolgáló könyvsorozatnak, amely az alábbi részekből áll: Villamosságtan, Elektronfizika, Elméleti villamosságtan, Elméleti villamosságtani példatár.

Amíg a sorozat első tagja — Villamosságtan — a légritka térben vagy anyag jelenlétében végbemenő villamos jelenségek makroszkópikus jellemzését és ezen jelenségek jellegzetes törvényszerűségeit ismerteti, addig a második rész — Elektronfizika — a mikrorendszerek törvényszerűségeit leírva foglalkozik a makrojelenségekkel. A mostani, német nyelvű kiadás jellemzését a sorozat két említett tagjának összehasonlításával is megközelíthetjük.

A villamos jelenségek makroszkópikus értelmezésénél és leírásánál az anyag és az elektromágneses tér kölcsönhatását az anyagra jellemző makroparaméterek — elektromos vezetőképesség, dielektromos állandó, mágneses permeabilitás — segítségével végzi a szerző. A most megjelent könyv, ezen megalapozás birtokában már mélyebbre nyúl a jelenségek értelmezésénél. Az egyes makro- és mikroparaméterek közötti kvantitatív kapcsolatokat tárja fel mindazon karakterisztikus folyamatoknál, amelyeknél a tekintett rendszer energiájának megváltozása az elektron állapotának változásával hozható összefüggésbe.

Amint arra a szerző a magyar kiadás előszavában utal, csak látszólagos átfedés mutatkozik az atomfizikai témakörrel. Az atomfizikai ismeretanyaggal való kapcsolat nyilvánvaló és szükséges, de ennél lényegesen többet és specializáltabbat nyújt a könyv. Foglalkozik az áramvezetés törvényeivel légritka térben, gázokban, félvezetőkben, jellemzi a szabad elektronok és az atomtörzzsel laza kapcsolatban álló elemi töltéshordozók mozgását, energetikai kölcsönhatásait, azonban mindezt a gyakorlati alkalmazások értelmezése és indoklása érdekében teszi. Ennek megfelelően nemcsak az alkalmazások szempontjából számításba jövő kísérleti és elméleti eredményeket ismerteti, hanem rámutat a kutatási és fejlesztési lehetőségekre, valamint az esetleges, perspektivikus alkalmazási területekre is.

A könyv felépítésénél a szerző rendkívüli tudományos és pedagógiai tapasztalata érződik. Egyetlen témakörnél sem bocsátkozik a történelmi előzmények ismertetésébe, kerüli a tudománytörténeti részek beiktatását. Ezzel szemben megalapozott, reális előremutatást nyújt minden fejezetben, s ezzel mintegy gondolkodásra készteti az olvasót, a tudományterület további fejlődését illetően.

A könyv kilenc fejezetből, két függelékből (A fizika alapállandói és Az elemek periódusrendszere), az irodalmi forrásmunkák felsorolásából, valamint a tárgymutatóból áll.

Az *első fejezet* a töltött részecskék elektromágneses terekben, vákuumban történő mozgásával foglalkozik, sztatikus, időben változó, homogén és inhomogén terekkel történő kölcsönhatás esetén. Az alapösszefüggések bemutatását követően kerül sor a relativisztikus sebességtartományban való mozgás és a centrális erőterekben történő elmozdulások leírására. A fejezet második részében, az elektron és ionoptika elemeinek rövid ismertetését követően a részecskegyorsítók jellemzését adja meg a szerző. Igen szerencsés a fejezet zárórésze, amely a klasszikus elektrodinamika sugárzó elektronjával foglalkozik. Ebben a részben kerül sor egy, az előzőekben szándékosan figyelmen kívül hagyott hatás leírására: a mozgó elektrontérre való visszahatásának bemutatására.

A *második fejezet* a mikrorendszerek törvényszerűségeit foglalja össze, a Bohr-féle atommodellből kiindulva, a kvantummechanika alapjainak, alapegyenletének bemutatásával, valamint a Schrödinger-egyenlet legegyszerűbb megoldásainak jellemzésével. Mindezek felhasználásával jut el az olvasó a periódusos rendszer értelmezésén keresztül, az atomi energiaállapotok megismerésével a molekulaszínképekig, rádióspektroszkópiáig. A fejezetet a kvantummechanikai számítási módszerek, a perturbációszámítás, többtestprobléma és az atommag rövid leírása zárja.

Az anyag különböző halmazállapotaiban egymáshoz különböző erősséggel illeszkedő mikrorendszerek alkotják a fenomenologikusan összefüggő, folytonosnak látszó anyagot. A *harmadik fejezet* a makroszkópikus anyag felépítését tárgyalja, az előző két fejezetben megadott, mikrorendszerekre vonatkozó törvények felhasználásával. A klasszikus statisztika, termodinamikai valószínűség, Maxwell-eloszlás ismertetése után a kvantumstatisztikákról kapunk korrekt képet és összehasonlítást. Ezen összefüggések alkalmazására kerül sor a klasszikus gáz, elektrongáz és fotongáz törvényeinek ismertetésénél, majd pedig a szilárdtestfizika alapjainak bemutatásánál. A fejezetet a statisztikus ingadozások és a nem-egyensúlyi rendszerek viselkedésének leírása zárja.

A *negyedik fejezet* az elektronok fémekből való gyakorlati szempontból alapvetően fontos kilépésével foglalkozik, törvényszerűségek és jelenségek leírását adja. A termikus, tér- és szekunder-emisszió leírása után — a gyakorlati felhasználások fontosságának megfelelően — az elektroncsövek főbb típusai mellett még a jellegzetesebb csőkapcsolásokkal is megismerkedhetünk. A fejezet a felületi fényelektromos jelenség ismertetésével zárul.

Az *ötödik fejezet* a félvezetőkkel foglalkozik, s felépítésük, vezetési mechanizmusuk, energianívóik ismertetésével kezdődik. Indokolt az átmenetek — különösképpen a $p-n$ átmenet — alaposabb vizsgálata, s ez, valamint a fejezet előzményei együttesen lehetővé teszik, hogy a rétegdiódákkal, p n p tranzisztorokkal való megismerkedés zavartalan és alapos bepillantást nyújtson a napjainkban igen fontos, félvezető eszközökre jellemző alapösszefüggésekbe. A fejezet zárórésze, a félvezetőkkel kapcsolatos fotoeffektusok rövid összefoglalása teszi teljessé a félvezetőtechnika elektronfizikai alapjaival való ismerkedésünket.

A *hatodik fejezet* a gázokban végbemenő villamos jelenségekkel foglalkozik. A gázkisülésekben kialakuló elemi folyamatokból (töltéshordozók keletkezése és eltűnése, ütközési jelenségek stb.) kiindulva kerül sor a töltött részecskék mozgásának elemzésére, majd mindezek birtokában a gázkisülések osztályozására. A teljesség kedvéért mindezt a plazmafizika rövid ismertetése követi, amely kitér a függetlenrészecske egy- és kétfolyadékos-modell leírására, a plazma mikrofizikai jellemzőire, annak kinetikus elméletére, a rendkívül változatos hullámjelenségekre, s röviden foglalkozik az MHD-generátorok jellegzetességeivel.

A *hetedik fejezet* az elektrodinamika alapegyenleteiben szereplő anyagi jellemzők mikrofizikai értelmezését adja meg, az alábbi bontásban: elektromos vezetőképesség, dielektromos állandó, mágneses permeabilitás. Mindhárom anyagi jellemző mikrofizikai értelmezésénél az

elméleti ismeretanyag és a gyakorlati vonatkozások harmonikus ötvözését figyelhetjük meg; az igen alapos elméleti bevezetés, az összefüggések feltárása kifejezetten a gyakorlati ismeretanyag értelmezését szolgálja.

A *nyolcadik fejezet* az elektromágneses tér és a részecskék energetikai kölcsönhatását írja le. Az általános összefüggések bemutatása után részletesebben foglalkozik a klisztronnal, a haladóhullámú csövekkel és a magnetronnal. A fejezetet a részecskeszámlálásnál is használatos Cserenkov-sugárzás rövid, kvalitatív magyarázata zárja.

A *kilencedik fejezet* az alkalmazott elektronfizika birodalmába vezeti el az olvasót. A spontán és indukált emisszió törvényeinek jellemzése után áttekintést kapunk a maser- és laser-típusokról és az azok alkalmazását indokló előnyökről.

A könyv felépítése, tartalmi szekvenciája, az egyes okfejtések, gondolatmenetek mély logikája, tudományos értékei tovább fogják öregbíteni korábbi kiadásainak már eddig is meglevő nemzetközi hírét és elismertségét.

Dr. Bitó János

H. Schneider:

AUSWUCHTTECHNIK

(VDI Taschenbücher, T 29) VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf 1972, 168 oldal, 103 ábra és 39 tábl.

A *tömegkiegyensúlyozás* fontos problémája a Mechanika, vagy a Mechanizmusok c. tárgykörben gyakran szerepel. A magyar vagy a külföldi e tárgyú könyvek azonban nem mennek túl a probléma általános feltevésén, a megoldási lehetőségek elvi bemutatásán, esetleg egyszerűbb kiegyensúlyozó gépek vázlatának közlésén. Talán az orosz nyelvű gyűjteményes könyvekben találunk részletproblémákat megoldó tanulmányokat. Két ilyen könyv ismertebb: Teorija i konsztrukcija balanszirovocsnüh masin (Masgiz, Moszkva, 1963) és Uravnovesivanie masin i proborov (Masinosztroenie, Moszka, 1965).

A jelen könyv — amelyet Dr. Ing. Batto SCHNEIDER írt, aki jelenleg a darmstadti egyik gépgyár kiegyensúlyozó gépeket gyártó részlegének tervező vezetője — a címével a *kiegyensúlyozás technikájára* utal. Ez azt jelenti, hogy nemcsak elméleti összefoglalót ad a kiegyensúlyozás kérdéséről, hanem a kiegyensúlyozás gyakorlati megvalósítását és az üzem közben megvalósítandó kiegyensúlyozás problémáját is összefoglalja.

Ma már minden forgó, nagyobb tömegű vagy nagyobb fordulatszámú gépelemet ki kell egyensúlyozni, nehogy káros lengések, rezgések keletkezzenek, és hogy a gépek élettartama növekedjék. Ehhez a szerző még hozzáteszi, hogy a „nyugodt járású" gépek könnyebben eladhatók. Annak ellenére, hogy ezt a tényt az iparban általában elismerik, a kiegyensúlyozás nem kapta meg szerepkörét a gyártás folyamatában, költséges függeléknek tekintik.

Ennek a magatartásnak az egyik oka az, hogy e tárgykör utolsó évtizedes fejlődése nem ismert. Ezt az is bizonyítja, hogy a tervező-szerkesztő mérnök ma már gépgyártástechnológiailag helyes rajzokat készít, ez alól azonban a forgó gépelemek kiegyensúlyozására vonatkozó előírás talán az egyetlen kivétel.

Másik okként megemlíthető, hogy nem eléggé ismert a kiegyensúlyozó gépek kínálata, és az sem, hogyan lehet kiegyensúlyozási kérdéseket megoldani.

E könyv ezeket a hiányosságokat akarja megszüntetni. Felépítésében a rövid bevezetés után a kiegyensúlyozás elméletét foglalja össze tömören, kezdve a legszükségesebb mechanikai törvények átismétlésétől a kiegyensúlyozandó modelleken át a kiegyensúlyozás elvi megvalósítási lehetőségeinek bemutatásáig, amely közben szó van a megengedett kiegyensúlyozatlanság mértékéről a tömegre ill. a fordulatszámra vonatkozóan az ún. minőségi fokozat függvényében, továbbá a merev forgóelemeken kívül a képlékeny és rugalmas alakváltozásos forgóelemek kiegyensúlyozásáról.

A kiegyensúlyozás gyakorlati megvalósításáról szóló fejezetben a horizontális és a vertikális kiegyensúlyozó gépek összefoglalása található vázlatokkal, szerkezeti ábrákkal, fényképekkel, adatokkal, merőberendezésekkel, a kiegyensúlyozás lefolytatásának leírásával. Röviden szó van a súlypont-mérlegről és a kiegyensúlyozási hibákról is.

Külön fejezet tárgyalja az üzem közben végrehajtandó kiegyensúlyozás problémáit, kitérve e kérdés elméletére, gyakorlati megvalósítására és a merőeszközökre.

A könyvet rövid szakirodalmi összefoglalás és bő, főleg a számításokat megkönnyítő nomogram sorozatokat tartalmazó függelék zárja.

A könyvnek külön érdeme, hogy jelöléseiben az ISO ajánlatot használja; hogy SI mértékrendszert használ; hogy összefoglalja az ISO (ill. a DIN) fogalmakat a kiegyensúlyozás részleteire vonatkozóan; ezeket külön is összefoglalja a függelék előtt, megadva a német mellett az angol és a francia kifejezéseket; és végül, hogy nagyon sok gyakorlati vezérfonalat nyújt az érdeklődőknek.

Dr. Terplán Zénó

ZEMENTTASCHENBUCH 1972/1973

Verein Deutscher Zementwerke e. V., Düsseldorf, 550 oldal

A Cement-zsebkönyv, mint az 1911-ben először megjelent Cement-naptár utódja és folytatása, mindig figyelemmel kíséri a cement és a beton tulajdonságainak és legújabb alkalmazási lehetőségeinek folytonos fejlődését. És éppen ezért időnkénti (általában kétévenkénti újabb kiadása (ez a 12. kiadás 1950 óta) mindig hézagpótló a szakember számára. Az érdeklődés oly élénk a Cement-zsebkönyvvel kapcsolatban, hogy több mint százezres példányszámban szükséges kihozni.

Ez az új kiadás rendszerében eltér az eddigi kiadásoktól s tartalmábanis, követve a fokozatos fejlődést az iparban, a kutatásban és a szabványosításban, igen sok újat ad. 9 fejezetre oszlik. Ezek: I. A cement és a hidratációs termékek kémiája, II. Az adalékanyag, III. A betonadalékszerek, IV. A beton, V. A könnyűbeton, VI. A cementfelhasználás különleges területei, VII. Áttekintés az 1962 óta a Cement-zsebkönyvben tárgyalt különleges területekről, VIII. A fontos építési szabványok, irányelvek, emlékeztetők, IX. Általános és építéstechnikai táblázatok. Ezeken túlmenően kiegészül egy tárgymutatóval, a cementipar szervezetére, az NSzK cementgyáraira vonatkozó tájékoztatóval. Az egyes fejezeteket jól megszerkesztett ábrák, táblázatok, bőséges, korszerű irodalomjegyzékek teszik a szakember számára még használhatóbbá.

A szép kiállítású, jó papírra nyomott, gondosan szerkesztett könyv szerkesztői és szerzői a szakágazat kiváló ismerői és így minden bizonnyal a Cement-zsebkönyv ki tudja elégíteni mindazokat a várakozásokat, amelyeket vele szemben mind a kiadó, mind a felhasználó támasztott.

Dr. Palotás László

Wolfgang Wehrmann:

EINFÜHRUNG IN DIE STOCHASTISCHERGODISCHE IMPULSTECHNIK

R. Oldenburg, Wien—München 1973

Ez a könyv a korszerű impulzustechnika sztochasztikus módszereinek hasznos és jól érthető tárgyalását nyújtja, kapcsolódva ahhoz az érdekes — és ipari eredményekkel járó — méréstechnikai kutatáshoz, amelyet évek óta e tárgykörben a bécsi műegyetem Kisfrekvenciás Intézetében folytattak. A könyv első fele a szükséges matematikai segédeszközöket tárgyalja. Az 1. fejezetben (Matematikai alapok) a szerző röviden összefoglalja a későbbiekben használt valószínűségszámítási alapfogalmakat: valószínűség, eloszlás-, sűrűségfüggvény, Markov láncok. A 2. fejezet (Jelelméleti alapok) a sztochasztikus folyamatok leírása. Ismerteti a sztochasztikus folyamatok különböző fajtáit (stacionárius, ergodikus, Markov pontfolyamatok), azok jellemző paramétereit, tulajdonságait és analízisét. Ezeket a módszereket a 3. fejezetben a sztochasztikus impulzusgenerátorok leírására használja, majd a 4. fejezetben a méréstechnikai vonatkozások találhatók.

Györfi László

A. A. Beleș—M. V. Soare:

BERECHNUNG VON SCHALENTRAGWERKEN

Bauverlag GmbH, Wiesbaden und Berlin 1972. 622 oldal, 244 ábra és diagram, 108 címszót tartalmazó irodalomjegyzék

Ez a könyv a bukaresti Editura Technica által 1969-ban „Calcul plăcilor curbe subțiri" címen román nyelven kiadott mű némiképpen bővített német nyelvű kiadása, mely hat fejezetben foglalja össze az igen kiterjedt héjirodalomnak a gyakorlat számára fontossággal bíró ismeretanyagát.

Az első fejezet a héjelmélet alapvető összefüggéseit tárgyalja, egyszerű, világos fogalmazásban.

A második fejezet a membránhéjak feszültségi viszonyait ismerteti, részletesen elemezve a szimmetrikusan és antimetrikusan terhelt forgáshéjak, a háromszög-, rombusz- és ellipszis alaprajzú héjak, a négyszöghéjak, valamint a konoidhéjak különböző terhelési eseteit.

A harmadik fejezet a membránhéjak alakváltozási kérdéseit taglalja. A tárgyalás a szimmetrikusan és antimetrikusan terhelt forgáshéjak, valamint különböző alaprajzú forgásparaboloidhéjak alakváltozási viszonyainak vizsgálatára szorítkozik.

A negyedik fejezet a héjak hajlításelméletét tárgyalja. Ez az igen terjedelmes fejezet a henger-, kúp- és gömbhéjak hajlítási problémáin kívül a négyszögalaprajz fölé szerkesztett forgásparaboloidhéjak és hiperbolikus paraboloidhéjak hajlítási problémáival foglalkozik és behatóan tárgyalja a dongahéjak hajlításelméletét.

Az ötödik fejezet a szimmetrikusan terhelt forgáshéjaknak, főképpen a körhengerhéjaknak a támasztó-, ill. befogószerkezethez való csatlakozásánál jelentkező illesztési problémái tárgyalja.

A hatodik fejezet az előfeszítésnek, a hőmérséklet-változásoknak, kúszásnak és zsugorodásnak a héjak feszültségi állapotára gyakorolt hatását vizsgálja és a héjak rugalmas stabilitási problémáit elemzi.

Mint a fenti felsorolásból is kitűnik, a könyv a héjelméletnek a gyakorlat szempontjából jelentőséggel bíró szinte valamennyi problémáját felöleli. A tárgyalás mindenütt a gyakorló mérnök igényeihez igazodik. Számos szakkönyvtől eltérően nem a levezetésekre, hanem a gyakoratban közvetlenül hasznosítható adatokra helyezi a fő súlyt, és a könnyebb megértést számos ábrával, számítási példával segíti elő. Számos terhelési esetre kész képleteket közöl, sok más esetben viszont zárt képletek helyett diagramokkal szemlélteti a héj alakváltozási-feszültségi állapotát.

Nem vitás, hogy a neves szerzők jelen műve, miként korábbi könyveik is, szakmai körökben kedvező fogadtatásra fog találni.

Dr. Csonka Pál

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója. Műszaki szerkesztő: Sós Attila
A kézirat nyomdába érkezett: 1973. IX. 21. — Terjedelem: 19,95 (A/5) ív

74.75493 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

TARTALOMJEGYZÉK

Kollár Lajos: Különböző merevséggel bíró alsó-felső övsíkú, kétrétegű térrácsok számítása a kontinuum-módszerrel 225
Pásztor Endre: Belsőégésű motorok szívási véghőmérsékletének meghatározása a kompresszió és expanzió folyamatok kiiktatásának segítségével 237
Antal Kálmán—Bolla István: Hőegyensúlyon kívüli fotoionizáció füstgáz-kálium MHD munkaközegben 249
Varga László: Ortogonálisan anizotrop hengeres héjak eltolódásfüggvényei 259
Hajdu László—Zahorán János: Ezüst (I) oxid (Ag_2O) fázisban működő légmentesen lezárt ezüst-cink akkumulátor 279
Pethő Szilveszter: A szilárd szem és a légbuborék tapadása alkalmával fellépő szabad energia csökkenésről 301
Ecsedi István: Diszkrét argumentumú függvények alkalmazása prizmatikus rudak rugalmas szabad csavarásának elemzésére 217
Kolonits Ferenc: Fogaskerék villámhőmérséklet. II. Villámhőmérséklet-kiegyenlítődés ferde evolvensfogazaton 329
Szőke Béla: Gördülőcsapágyak elasztikus rezgése. I. A forgó tömeg saját tengelyére vonatkozólag ki van egyensúlyozva 345
Csonka Pál: Elliptikus paraboloidhéj egyenlőszárú háromszög alaprajz fölött 407
Béda Gyula: A szilárd testek anyagtörvényei 427

KÖNYVISMERTETÉS

Gáspár Istvánné—Spányi Balázsné: Építészeti Szakirodalom-Kutatás (Csonka P.) 437
Broendum-Nielsen T.: Structural Concrete (Csonka P.) 437
Hed, S. R.: Entscheidungshelfer Computer. Wie aus konventioneller Datenverarbeitung ein Informationssystem entsteht (Csáki Fr.) 438
Kollár L.: Statik und Stabilität der Schalenbogen und Schalenbalken (Szmodits K.) 439
Pfannkoch, E.: Arbeitsmappe für den Konstrukteur (Terplán Z.) 440
Perényi I.: Town Centres. Planning and Renewal (Preisich G.) 441
Simonyi, K.: Physikalische Elektronik (Bitó J.) 442
Schneider, H.: Auswuchttechnik (Terplán Z.) 444
Zementtaschenbuch 1972/1973. (Palotás L.) 445
Wolfgang Wehrmann: Einführung in die stochastischergodische Impulstechnik (Győrfi L.) 445
A. A. Beleş—M. V. Soare: Berechnung von Schalentragwerken (Csonka P.) 445

CONTENT

Kollár, L.: Continuum Method on Analysis for Double-Layer Space Trusses with Upper and Lower Chord Planes of Different Rigidities 225
Pásztor, E.: Determination of the Final Suction Temperature of I. C. Engines by Switching off Compression and Expansion 237
Antal, K.—Bolla, I.: Photo-Ionization without Thermal Equilibrium in Combustion Gas-Potassium Working Medium 249
Varga, L.: Displacement Functions of Orthogonally Anisotropic Cylindrical Shells 259
Hajdu, L.—Zahorán, J.: Hermetically Sealed Silver-Zinc Storage Battery Operating in the Silver(I) Oxide (Ag_2O) Phase 279
Pethő, Sz.: On the Reduction of the Free Energy Arising at the Adhesion of a Solid Particle to an Air Bubble 301
Ecsedi, I.: The Use of Functions with Discrete Arguments for the Analysis of the Free Elastic Torsion of Prismatic Bars 317
Kolonits, F.: Flash Temperature of Gears, II. Flash Temperature Equalization on Helical Involute Toothing 329
Szőke, B.: Elastic Vibrations in Rolling Bearings. Part I. The Rotating Mass is Balanced with Respect to its Centre Line 345
Csonka, P.: Calculation of Elliptic Paraboloid Shells Isosceles Triangle in Projected Form 407
Béda, Gy: Material Laws of Solids 427

BOOK REVIEW

Gáspár Istvánné—Spányi Balázsné: Építészeti Szakirodalom-Kutatás (Csonka P.) 437
Broendum-Nielsen, T.: Structural Concrete (Csonka P.) 437
Hed, S. R.: Entscheidungshelfer Computer. Wie aus konventioneller Datenverarbeitung ein Informationssystem entsteht (Csáki Fr.) 438
Kollár, L.: Statik und Stabilität der Schalenbogen und Schalenbalken (Szmodits K.) ... 439
Pfannkoch, E.: Arbeitsmappe für den Konstrukteur (Terplán Z.) 440
Perényi, I.: Town Centres (Planning and Renewal) (Preisich G.) 441
Simonyi, K.: Physikalische Elektronik (Bitó J.) 442
Schneider, H.: Auswuchttechnik (Terplán Z.) 444
Zementtaschenbuch 1972/1973. (Palotás L.) 445
Wolfgang Wehrmann: Einführung in die stochastischergodische Impulstechnik (Győrfi L.) 445
A. A. Beleş—M. V. Soare: Berechnung von Schalentragwerken (Csonka P.) 445

INHALTSVERZEICHNIS

Kollár, L.: Berechnung zweischichtiger Raumfachwerke mit unteren und oberen Gurtebenen von verschiedenen Steifigkeiten mit dem Kontinuumverfahren 225

Pásztor, E.: Bestimmung der Ansaugtemperatur in Verbrennungsmotoren durch Ausschaltung der Verdichtungs- und Expansionsvorgänge 237

Antal, K.—Bolla, I.: Photoionisation außerhalb des termischen Gleichgewichts in Rauchgas-Kalium Arbeitsmedien 249

Varga, L.: Verschiebungsfunktionen von orthogonal-anisotropischen zylindrischen Schalen 259

Hajdu, L.—Zahorán, J.: Hermetisch verschlossener, in der Silber(I)-Oxyd (Ag_2O) Phase arbeitender Silber-Zink-Akkumulator 279

Pethő, Sz.: Über die Verringerung der beim Aneinanderhaften von festen Teilchen und Luftblasen auftretenden freien Energie 301

Ecsedi, I.: Anwendung von Funktionen mit diskretem Argument auf die Untersuchung der freien elastischen Verdrehung von prismatischen Stäben 317

Kolonits, F.: Blitztemperaturen von Zahnrädern. II. Teil: Blitztemperatur-Ausgleich an schrägen Evolventen-Verzahnungen 329

Szőke, B.: Elastische Schwingungen in Wälzlagern. I. Teil: Die rotierende Masse ist auf die eigene Rotationsachse ausgewuchtet 345

Csonka, P.: Elliptische Paraboloidschale über einem gleichschenkligen Dreieckgrundriß 407

Béda, Gy.: Materialgesetze der festen Körper 427

BUCHBESPRECHUNG

Gáspár Istvánné—Spányi Balázsné: Építészeti Szakirodalom-Kutatás (Csonka P.) 437

Broendum-Nielsen, T.: Structural Concrete (Csonka P.) 437

Hed, S. R.: Entscheidungshelfer Computer. Wie aus konventioneller Datenverarbeitung ein Informationssystem entsteht (Csáki Fr.) 438

Kollár, L.: Statik und Stabilität der Schalenbogen und Schalenbalken (Szmodits K.) ... 439

Pfannkoch, E.: Arbeitsmappe für den Konstrukteur (Terplán Z.) 440

Perényi, I.: Town Centres (Planning and Renewal) (Preisich G.) 441

Simonyi, K.: Physikalische Elektronik (Bitó J.) 442

Schneider, H.: Auswuchttechnik (Terplán Z.) 444

Zementtaschenbuch 1972/1973. (Palotás L.) 445

Wolfgang Wehrmann: Einführung in die stochastischergodische Impulstechnik (Győrfi L.) 445

A. A. Beleş—M. V. Soare: Berechnung von Schalentrogwerken (Csonka P.) 445

СОДЕРЖАНИЕ

Л. Коллар: Расчет методом континуума двухслойных пространственных решеток с нижним и верхним поясными плоскостями и различной жесткостью 225
Э. Пастор: Определение конечной температуры всасывания двигателей внутреннего сгорания с помощью исключения процессов сжатия и разряжения 237
К. Антал, И. Болла: Фотоионизация вне теплового равновесия в МГД рабочей среде из дымовых газов и калия 249
Л. Варга: Функции сдвига ортогональных анизотропных цилиндрических оболочек 259
Л. Хайду, Я. Захоран: Герметизированные серебряноцинковые аккумуляторы, работающие в фазе окиси серебра(I) (Ag_2O) 279
С. Петэ: О снижении энергии, возникающей в случае слипания твердого зерна и воздушного пузыря 301
Ф. Колонич: Температура молнии зубчатого колеса, II. Уравнивание температуры молнии в случае косозбого звольвентного зацепления 329
В. Секе: Эластичные колебания подшипников качения, I. Вращающаяся масса уравновешена в отношении своей собственной оси .....
П. Чонка: Эллиптические параболоидные оболочки над планом в виде равнобедренного треугольникай 407
Д. Вева: Материальные законых твердых тел 427

ОБЗОР КНИГ

И. Гашпар, Б. Шпани: Изыскания в области специальной литературы по архитектуре (Пал Чонка) 437
Т. Броендум-Нильсен: (Пал Чонка) 437
С. Р. Ход: ЭВМ — помощник в вынесении решений. Как возникает система информации из конвенциональной обработки данных (Ф. Чаки) 438
Л. Коллар: Статика и устойчивость оболочечных арок и оболочечных балок (К. Смодич) 439
Е. Пфанкох: Рабочая папка для конструктора (К. Терплан) 440
И. Перени: (Г. Прейсих) 441
К. Шимони: Физическая электроника (Я. Бито) 442
Х. Шнейдер: Техника уравновешивания (З. Терплан) 444
Справочник по цемену 1972/1973 (Л. Палоташ) 445

MŰSZAKI TUDOMÁNY

47. KÖTET

INDEX

Mándi Andor 1891—1972 1

Antal Kálmán—Bolla István: Hőegyensúlyon kívüli fotoionizáció füstgáz-kálium MHD munkaközben ... 249
Balázs Tibor, Paláncz Béla, Parti Mihály: Matematikai modellek abszorpciós folyamatok leírására ... 179
Béda Gyula: A szilárdtestek anyagtörvényei ... 427
Brodszky Dezső—Kalmár István: Motormunkafolyamatok szimulációjának kérdései ... 79
Csonka Pál: Elliptikus paraboloidhéj egyenlőszárú háromszög alaprajz fölött ... 407
Ecsedi István: Diszkrét argumentumú függvények alkalmazása prizmatikus rudak rugalmas szabad csavarásának elemzésére ... 317
Hajdú László—Zahorán János: Ezüst (I) oxid (Ag_2O) fázisban működő légmentesen lezárt ezüst-cink akkumulátor ... 279
Horváth Zoltán: A metallurgiai tudományterület helyzete és fejlődésének irányai ... 105
Jándy Géza: Műszaki-gazdasági rendszertechnika ... 115
Kézdi Árpád: A 4. Budapesti Talajmechanikai és Alapozási Konferencia ... 17
Kollár Lajos: Különböző merevséggel biró alsó-felső, kétrétegű térrácsok számítása a kontinuum-módszerrel ... 225
Kolonits Ferenc: Fogaskerék villámhőmérséklet. II. Villámhőmérséklet-kiegyenlítődés ferde evolvensfogazaton ... 329
Mihálffy Loránd—Müller Ferenc—Weber György: Számítógépek használata az építészeti tervezésben ... 125
Patkó János—ifj. Vajta Miklós: Labilitási feszültség megállapítása egyen- és váltakozó feszültségen ... 151
Pásztor Endre: Belsőégésű motorok szívási véghőmérsékletének meghatározása a kompresszió és expanzió folyamatok kiiktatásának segítségével ... 237
Pethő Szilveszter: A szilárd szem és a légbuborék tapadása alkalmával fellépő szabad energia csökkenésről ... 301
Singer Dénes: Új algoritmus gáz és folyadékhálózatok számítására ... 139
Szőke Béla: Gördülő csapágyak elasztikus rezgése. I. A forgó tömeg saját tengelyére vonatkozólag ki van egyensúlyozva ... 345
Tarján Gusztáv: Módosított Schuhmann—Gaudin függvény alkalmazása a Trompgörbékre ... 5
Tarnai Tibor: Négyszög alaprajz fölé szerkesztett, másodrendű, lapos transzlációs héjak peremzavarai ... 207
Varga László: Ortogonálisan anizotrop hengeres héjak eltolódásfüggvényei ... 259

KÖNYVISMERTETÉS

Gáspár Istvánné—Spányi Balázsné: Építészeti Szakirodalom-Kutatás (Csonka P.) ... 437
Broendum-Nielsen, T.: Structural Concrete (Csonka P.) ... 437
Hed, S. R.: Entscheidungshelfer Computer, Wie aus konventioneller Datenverarbeitung ein Informationssystem entsteht (Csáki Fr.) ... 448
Kollár L.: Statik und Stabilität der Schalenbogen und Schalenbalken (Szmodits K.) ... 439
Pfannkoch, E. Arbeitsmappe für den Konstrukteur (Terplán Z.) ... 440
Perényi I.: Town Centres. Planning and Renewal (Preisich G.) ... 441
Simonyi, K.: Physikalische Elektronik (Bitó J.) ... 442
Schneider, H.: Auswuchttechnik (Terplán Z.) ... 444
Zementtaschenbuch (1972/73. (Palotás L.) ... 445
Wolfgang Wehrmann: Einführung in die stochastischergodische Impulstechnik (Győrfi L.) 445
A. A. Beleş—M. V. Soare: Berechnung von Schalentragwerken (Csonka P.) ... 445

44,– Ft

Megjelent 1974. V. 6.

Index: 26.499