A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI
GELEJI SÁNDOR

XXX. KÖTET 1—4. SZÁM

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST
1962

VI. OSZT. KÖZL.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI

GELEJI SÁNDOR

XXX. KÖTET 1—4. SZÁM

SZERKESZTŐSÉG: BUDAPEST V., NÁDOR UTCA 7.
KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V., ALKOTMÁNY UTCA 21.

A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg. Négy füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia
Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei
Budapest V., Nádor utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Megjelent munkájáért minden szerzőt száz különnyomat illet meg. Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó (Budapest V., Alkotmány utca 21. Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat (Budapest I., Fő utca 32., Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának kiadványa az

Acta Technica

című idegen nyelvű folyóirat.

E lap hivatott a magyar műszaki tudományok eredményeinek legjavát a külföld felé tolmácsolni. A cikkek német, angol, francia vagy orosz nyelven jelennek meg, lehetőleg a szerző kívánsága szerint, összefoglaló pedig a cikk nyelvén és azonkívül a másik három nyelven. A cikkeket magyar vagy a szerző választotta idegen nyelven a következő címre kell beküldeni:

Acta Technica szerkesztősége, Budapest V., Nádor utca 7.

TARTALOMJEGYZÉK

Faller Jenő : Kövesi Antal 1876—1961 3
Szidarovszky János : Tengelyirányú erővel terhelt rúd sajátrezgése a forgási tehetetlenség figyelembevételével 5
Dulácska Endre : Vasbeton dongahéjak számítása 19
Szidarovszky János : Statikai lineáris differenciálegyenlet megoldására szolgáló fokozatosan közelítő eljárás és alkalmazása függőhidakra 39
Balogh Artúr : A torziószlengés karakterisztikus egyenletével kapcsolatos táblázatok szerkezete 65
Csonka Pál : Toronyházak vázszerkezetének számítása szélterhelésre 85
Csonka Pál : A membránhéjak peremabroncsáról 89
Csonka Pál : Állandó vagy folyamatosan változó falvastagságú elliptikus paraboloidhéj ellipszis alaprajz felett 93
Korach Marcell : Vasbeton lemezszerkezetek gazdaságosságának számítása 97
Csonka Pál : A csavarási probléma néhány zárt alakú megoldása 121
Harkányi István : A saruscsapágy résgeometriájának változásai 127
Hoffmann Andor : Hosszú hengeres testek hevítési folyamatának vizsgálata változó kemencehőmérséklet és hőátadási tényező esetén 157
Szántó István : Acélok folyáshatárjelenségének vizsgálata a rácstorzulások indikálásának új módszerével 171
Erney György : Egyenes fogú evolvensfogazatú hengeres kerekek fogfejlenyesésének számítása és ellenőrzése 185
Terplán Zénó : A súrlódó tengelykapcsolók indítása 197
Balogh Artúr : Torziószlengéssel kapcsolatos continuáns determináns néhány tulajdonsága 209
Winter Ernő, Budincsevits Andor és *Bíróné Frigyes Éva :* A földalkálikarbonátok szilárd oldatainak képződésére vonatkozó vizsgálatok 215
Balogh Artúr : Függvények ábrázolásának új módszere. (Geometrográfia) 233
Halmos Ferenc : A hosszméréses hálózatok kiegyenlítéséhez 243
Haszpra Ottó : Előírt pontosságú vonalsereges nomogramok tervezése. Vonalsereges nomogramok alkalmazása a hidraulikában 261
Bardócz Árpád : Elektronikus vezérlésű 40 000 Voltos nagypontosságú spektroszkópiai szikragerjesztő 275
Hankó Géza : A radiális háromszögelés geodéziai rendszerhez való illesztése 299
Halmos Ferenc : A hibaellipszis és a talpponti görbe jellemzői 317
Hoffmann Pál : A gyémánt dróthúzókövek optimális fúrási irányának meghatározása 327
Szőke Béla : A kinetikus golyóscsapágyrezgés alapjelenségei 341
Bendefy László : A levéltári kutatás a műszaki tudománytörténet és a népgazdaság szolgálatában 365
Schleicher Aladár : Adatok a kohászat magyarországi történetéhez. VIII. A kislődi vashámor története, II. r. 393
Zambó János : Bányaüzemek telepítésének legfőbb paraméterei 407
Balogh Artúr: Torziószlengéseknél keletkező tehetetlenségi nyomatékok redukciója 417

Könyvszemle

Horváth Aurél: Kohászati Fizikai Kémia — Mika Józseftől 457
Vörös Imre: Gépelemek II. — Dékány Istvántól 457
Keith Swainger: Analysis of Deformation. Vol. IV. Waves and Vibrations — Barta Györgytől 458

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK

KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI

GELEJI SÁNDOR

XXX. KÖTET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

1962

VI. OSZT. KÖZL.

DR. KÖVESI ANTAL

1876—1961

1961. november 1-én elhúnyt Dr. KÖVESI Antal nyugalmazott egyetemi tanár. Halálával bányászati, kohászati és erdészeti felsőoktatásunk országosan ismert kiválóságát vesztettük el, ki több mint félszázados tanárkodása alatt a mérnökgenerációk hosszú sorát nevelte a hazai bánya-, kohó- és erdőiparnak.

Dr. KÖVESI Antal ny. egyetemi tanár, a műszaki tudományok kandidátusa, az Országos Magyar Bányászati és Kohászati Egyesület tiszteletbeli-, az egykori Magyar Mérnök- és Építész Egylet nagyválasztmányi- s még számos műszaki és társadalmi egyesület dísztagja, 1876. aug. 31-én született a Pest megyei Tápiószőgön. 1898-ban a József Nádor Műegyetem gépészmérnöki karán oklevelet kapott. 1901-ben Selmecbányán, a Bányászati és Erdészeti Akadémián a bányagépészeti tanszéken találjuk HERMANN Emil professzor oldalán, mint tanársegédet. Pályája innentől gyorsan emelkedik és 1904-ben rendkívüli, 1907-ben a mechanikai tanszék rendes tanárává nevezik ki. Mint ilyen több ízben — először az első világháború alatt — a főiskola rektora, majd prorektora, 1919-ben a főiskolával Sopronba távozik, hol 1934-ben, amikor a főiskolát egyetemi rangra emelték, a József Nádor Műegyetem bánya-, kohó- és erdőmérnöki tagozatán egyetemi tanárrá nevezik ki.

Öt évtizedes tanárkodása alatt tanította a mechanikát, szilárdságtant, gépészeti iparműtant, vasszerkezeteket, erdészeti géptant, fémkohógéptant s két éven át a kohógéptani tanszék teendőit is ellátta. Emellett mint szakíró is kiváló volt s előadásai tárgyköréből számos könyvet és autografiát írt hallgatói számára. Főbb munkái: „Triplex expanziós gépek számítása" (1906), „Erdészeti géptan" (1907), „Grafosztatika és vasszerkezetek" (1910), „Szilárdságtan" (1927), „Hidraulika" (1946). Ezenkívül még több mint 100, a technika legkülönbözőbb ágazataiba tartozó, kisebb-nagyobb tanulmányt írt a hazai és külföldi szaklapokban.

Példás és örökké tiszteletre méltó lesz az a férfias kiállása, hogy a nyilas rémuralom idejében, amikor internálták — mint maga mondta —, a halál árnyékában is lankadatlan szorgalommal írta munkáit.

Érdemeit kormányzatunk 1946-ban a Magyar Népköztársasági Érdemrend tisztikeresztjével, 1950-ban a Magyar Népköztársasági Érdemrend IV. fokozatával jutalmazta, 1956-ban, 50 éves értékes munkásságáért a Budapesti Műszaki Egyetem aranyoklevéllel tüntette ki.

1954-ben sok évtizedes tanárkodása után nyugalomba vonult, de tudományos munkásságát tovább folytatta, míg betegsége ágyba nem döntötte s hosszú szenvedés után 1961. november 1-én elhunyt.

Dr. Faller Jenő

TENGELYIRÁNYÚ ERŐVEL TERHELT RÚD SAJÁTREZGÉSE A FORGÁSI TEHETETLENSÉG FIGYELEMBEVÉTELÉVEL

SZIDAROVSZKY JÁNOS
UVATERV

[Beérkezett 1959. július 21-én]

Bevezetés

Nyomott rúd sajátrezgésének vizsgálatakor általában elhanyagolják a nyíróerő és forgási tehetetlenség hatását. Mind a két hatás kicsi, mint ezt azok nagyságrendjére vonatkozó vizsgálatok mutatják [1]. Állandó merevségű rúd példájában a nyíróerő hatásának számszerű figyelembevétele nem jelent különösebb nehézséget [2].

Az alábbiakban a kéttámaszú állandó szelvényű nyomott rúd sajátrezgését határozzuk meg a nyíróerő és a forgási tehetetlenség hatásának figyelembevételével. A módszer más kerületi feltételek esetére is alkalmazható.

A tehetetlenségi erő és nyíróerő meghatározásánál a hajlítónyomaték és a nyíróerő okozta együttes alakváltozásból indulunk ki, vagyis a számítást a véglegesen deformált tartón végezzük el.

A forgási tehetetlenség meghatározásánál viszont a hajlítónyomaték okozta alakból indulunk ki, mert a nyíróerő eltolódást idéz csupán elő, szögforgást nem okoz.

1. A belső erők és alakváltozások közti összefüggések

A rúd a rá ható erők hatására alakváltozást szenved. A nyomóerő okozta

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}$$

normál hosszváltozás igen kicsi a rúd hosszához képest, annak hatását elhanyagoljuk. Hasonlóképpen nem vesszük figyelembe a tengely elemi hosszának a tengelyirányú elmozdulásából származó hatást sem. Vizsgálatunk ugyanis csak kis mozgásokra vonatkozik, amikor ennek a mozgásnak a hatása elhanyagolhatóan kicsi.

Határozzuk meg a nyugalmi tengelyekre merőleges irányú elmozdulást.

A hajlítónyomaték okozta elmozdulás

$$\eta = -\iint \frac{M}{EI} dx\,dx, \tag{1,1}$$

a nyíróerő okozta elmozdulás

$$\eta_T = \int \frac{T}{EA}\, dx. \tag{1,2}$$

Itt

$$T = \frac{\partial}{\partial x} M \tag{1,3}$$

és az egyenértékű terület a tömörtartó esetében

$$A = \frac{GF}{\varrho E}\,.$$

Itt G a nyírási rugalmassági tényező, ϱ alaki tényező, F a teljes keresztmetszeti terület.

Ha a tartó osztott szelvényű, A értékére hasonló összefüggés vezethető le.

A hajlítás és nyírás együttes hatása folytán keletkező teljes elmozdulás pedig

$$y = \eta + \eta_T = -\iint \frac{M}{EI}\, dx\, dx + \int \frac{T}{EA}\, dx. \tag{1,4}$$

2. Egyensúlyi helyzet

A tömegerőket a D' ALEMBERT elv alapján, mint külső erőket kezeljük, s ennek alapján írjuk fel az egyensúlyi állapotot. Ezen elv felhasználása után a tartó elemi hosszán ható külső erők függőleges vetületének és a nyíróerő változásának összege zérus.

A tartó keresztmetszeti területe F, sűrűsége γ, így a dx hosszra eső tömegerő

$$dr_\mu = -\gamma F \frac{\partial^2}{\partial x^2} y dx\,. \tag{2,1}$$

Ha a tartó keresztmetszetének tehetetlenségi nyomatéka I, akkor a dx hosszon a forgási tehetetlenségi nyomatékból származó nyíróerő változás [1]

$$dr_\varphi = \gamma I \frac{\partial^4}{\partial x^2 \cdot \partial t^2} \eta\, dx\,. \tag{2,2}$$

Ugyanis a szögforgás változása, vagyis a szögsebesség: $\dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial t}\, \eta$, a szöggyorsulás: $\dfrac{\partial^3}{\partial x\, \partial t^2}\, \eta$, a forgási tehetetlenség okozta nyomaték a dx hosszon

$$\gamma I \frac{\partial^3 \eta}{\partial x \cdot \partial t^2}\, dx\,,$$

s ennek x szerinti deriváltja a fenti dr_φ.

Az M belső nyomatékból számítható nyíróerő változás a dx hosszon

$$dr_M = \frac{\partial^2}{\partial x^2} M\,dx\,. \tag{2,3}$$

A P nyomóerő okozta hajlítónyomatékból számítható nyíróerő változás a dx hosszon

$$dr_P = -P\frac{\partial^2}{\partial x^2} y\,dx\,. \tag{2,4}$$

A tartó dx hosszára ható erők összege zérus, így

$$dr_\mu + dr_\varphi + dr_M + dr_P = 0$$

Az (1,1) — (2,4) alatti értékek behelyettesítése és dx-el való osztás után a

$$\gamma F\frac{\partial^2}{\partial t^2} y - \gamma I\frac{\partial^4}{\partial x^2 \cdot \partial t^2}\eta - \frac{\partial^2}{\partial x^2} M + P\frac{\partial^2}{\partial x^2} y = 0 \tag{2,5}$$

differenciálegyenletet kapjuk.

3. A differenciálegyenlet megoldása

Tételezzük fel, hogy γ, F, P, I és A a tartó hosszán állandó, úgy a (2,5) alatti differenciálegyenlet az állandók szétválasztásával megoldható. E célból vezessük be a

$$z = EI\eta = -\int\int M dx dx = w(x)\cdot v(t) = w\cdot v \tag{3,1}$$

jelölést. Itt w csak az x, v csak a t független változó függvénye.

Az (1,1), (1,3) és (3,1) alatti összefüggéseket (2,5)-be helyettesítve a

$$w^{IV} v\left(1 - \frac{P}{EA}\right) + \frac{P}{EI} w^{II} v + \frac{\gamma F}{EI} w v^{II} - \frac{\gamma}{E}\left(\frac{F}{A} + 1\right) w^{II} v^{II} = 0 \tag{3,21}$$

differenciálegyenletet kapjuk.

A változók szerint szétválasztva a

$$\frac{w^{IV}\left(1 - \frac{P}{EA}\right) + \frac{P}{EI} w^{II}}{\frac{\gamma F}{EI} w - \frac{\gamma}{E}\left(\frac{F}{A} + 1\right) w^{II}} = -\frac{v^{II}}{v} = \omega^2 \tag{3,22}$$

összefüggésre vezet.

Itt ω^2 constans, mert az összefüggés első tagja t-től második tagja x-től független, így ω^2 egyiktől sem függhet, vagyis állandó.

Ebből két differenciálegyenletet írhatunk fel:

$$v'' + \omega^2 v = 0 \tag{3,31}$$

és

$$w^{IV}\left(1 - \frac{P}{EA}\right) + w^{II}\left(\frac{P}{EI} + \frac{\gamma\omega^2}{E}\,\frac{F+A}{A}\right) - w\,\frac{\gamma F\,\omega^2}{EI} = 0\,. \tag{3,41}$$

A (3,31) alatti differenciálegyenlet általános megoldása

$$v = a \sin(\alpha + \omega t), \tag{3,32}$$

ahol ω a tartó sajátrezgésének körfrequenciája, a és α integrálási állandók.

A (3,41) alatti differenciálegyenlet általános megoldása pedig

$$w = b_1 \mathrm{sh}\varkappa_1 x + b_2 \mathrm{ch}\,\varkappa_1 x + b_3 \sin \varkappa_2 x + b_4 \cos \varkappa_2 x\,.$$

Ennek a [4] alatti irodalom alapján kapott egyik alakja

$$w = c_1 \,\mathrm{sh}\,(\varphi_1 + \varkappa_1 x) + c_2 \sin(\varphi_2 + \varkappa_2 x), \tag{3,42}$$

ahol c_1, c_2, φ_1 és φ_2 állandók.

Itt

$$\varkappa_1 = \sqrt{\sqrt{c^4 + k^4} - c^2} \tag{3,43}$$

$$\varkappa_2 = \sqrt{\sqrt{c^4 + k^4} + c^2} \tag{3,44}$$

továbbá

$$2c^2 = \frac{\dfrac{P}{EI} + \dfrac{\gamma\omega^2}{EA}(F+A)}{1 - \dfrac{P}{EA}} \tag{3,45}$$

$$k^4 = \frac{\gamma F\,\omega^2}{EI\left(1 - \dfrac{P}{EA}\right)} \tag{3,46}$$

(3,42.) és (3,1.), valamint (3,32.) alapján

$$-\iint \frac{M}{EI}\,dx\,dx = -\frac{w}{EI}\,a \sin(\alpha + \omega t) = \left[-\frac{ac_1}{EI}\,\mathrm{sh}\,(\varphi_1 + \varkappa_1 x) - \right.$$

$$\left. - \frac{ac_2}{EI} \sin(\varphi_2 + \varkappa_2 x)\right] \sin(\alpha + \omega t)$$

és

$$\int \frac{M'}{EA}\,dx = \frac{M}{EA} = \frac{w''}{EA}\,a\sin(\alpha+\omega t) = \left[\frac{ac_1\varkappa_1^2}{EA}\,\mathrm{sh}\,(\varphi_1+\varkappa_1 x) - \right.$$

$$\left. - \frac{ac_2\varkappa_2^2}{EA}\sin(\varphi_2+\varkappa_2 x)\right]\sin(\alpha+\omega t)$$

s így (1,3.) és (1,4.) alapján a tartót leíró függvény

$$y(x,t) = \left\{-\iint \frac{M}{EI}\,dx\,dx + \int \frac{M'}{EA}\,dx\right\} = \left\{\frac{w}{EI} - \frac{w''}{EA}\right\} a\sin(\alpha+\omega t)$$

$$= \left[D_1\left(-\frac{1}{EI}+\frac{\varkappa_1^2}{EA}\right)\mathrm{sh}\,(\varphi_1+\varkappa_1 x) + \right.$$

$$\left. + D_2\left(-\frac{1}{EI}+\frac{\varkappa_2^2}{EA}\right)\sin(\varphi_2+\varkappa_2 x)\right]\sin(\alpha+\omega t), \tag{3,5}$$

ahol

$$D_1 = c_1 a$$

és

$$D_2 = c_2 a.$$

Az iránytangens

$$y'(x,t) = \left[D_1\varkappa_1\left(-\frac{1}{EI}+\frac{\varkappa_1^2}{EA}\right)\mathrm{ch}\,(\varphi_1+\varkappa_1 x) + \right.$$

$$\left. + D_2\varkappa_2\left(-\frac{1}{EI}-\frac{\varkappa_2^2}{EA}\right)\cos(\varphi_2+\varkappa_2 x)\right]\sin(\alpha+\omega t). \tag{3,61}$$

Keretek és folytatólagos tartók számításához megadjuk a véglap szögelfordulását

$$\bar{y}'(x,t) = -\frac{1}{EI}\left[D_1\varkappa_1\,\mathrm{ch}\,(\varphi_1+\varkappa_1 x) + D_2\varkappa_2\cos(\varphi_2+\varkappa_2 x)\right]\sin(\alpha+\omega t). \tag{3,62}$$

A hajlítónyomaték a (3,1), (3,32) és 3,42) összefüggések alapján

$$M(x,t) = \left[D_1\varkappa_1^2\,sh\,(\varphi_1+\varkappa_1 x) - D_2\varkappa_2^2\sin(\varphi_2+\varkappa_2 x)\right]\sin(\alpha+\omega t). \tag{3,7}$$

És végül a nyíróerő

$$R(x,t) = \left[D_1\varkappa_1^3\,ch\,(\varphi_1+\varkappa_1 x) - D_2\varkappa_2^3\cos(\varphi_2+\varkappa_2 x)\right]\sin(\alpha+\omega t). \tag{3,8}$$

A (3,5) — (3,8) alatti összefüggés alapján tetszőleges határfeltételek esetében meghatározhatók az integrálási állandók, továbbá, — ha a határ-

feltételek homogének, — az a $\varkappa_1$ és $\varkappa_2$ érték is, amely mellett a (3,5) képlet adta alakváltozási függvénynek a triviálistól eltérő megoldása van. Ennek alapján ω értéke is meghatározható.

4. Kéttámaszú rúd sajátrezgése

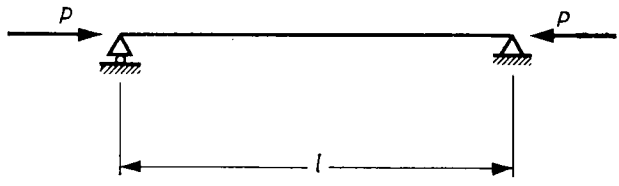
Kéttámaszú rúdnál az $x = 0$ és $x = l$ helyen sem hajlítónyomaték, sem y irányú elmozdulás nincs, így a határfeltételek (1. ábra)

$$y(0, t) = 0 , \tag{4,11}$$

$$M_1(0, t) = 0 ,$$

$$y(l, t) = 0 ,$$

$$M(l, t) = 0 . \tag{4,12}$$



1. ábra

A (4,11) feltételeket (3,5) és (3,7)-be helyettesítve a

$$\frac{D_1}{D_2} = -\frac{A + I\varkappa_2^2}{A - I\varkappa_1^2}\frac{\sin\varphi_2}{\operatorname{sh}\varphi_1} = \frac{\varkappa_2^2 \sin\varphi_2}{\varkappa_1^2 \operatorname{sh}\varphi_1} \tag{4,2}$$

összefüggést kapjuk. Mivel $A \neq 0$, s így

$$-\frac{A + I\varkappa_2^2}{A - I\varkappa_1^2} = \frac{\varkappa_2^2 + \dfrac{A}{I}}{\varkappa_1^2 - \dfrac{A}{I}} \neq \frac{\varkappa_2^2}{\varkappa_1^2} ,$$

ezért a (4,2) alatti összefüggés csak akkor elégül ki, ha

$$\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1} = 0 .$$

De ugyancsak az említett két határfeltétel alapján

$$\operatorname{sh} \varphi_1 \neq \infty$$

s így

$$\sin \varphi_2 = \varphi_2 = 0. \tag{4,31}$$

A hajlítónyomaték (3,7) alapján $x = 0$ helyen zérus, ha vagy

$$\operatorname{sh} \varphi_1 = \varphi_1 = 0$$

vagy

$$D_1 = 0.$$

Az első esetben, vagyis, ha $\varphi_1 = 0$, a (4,12) alatti határfeltételekből

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\varkappa_2^2 + \dfrac{A}{I}}{\varkappa_1^2 - \dfrac{A}{I}} \frac{\sin \varkappa_2 l}{\operatorname{sh} \varkappa_1 l} = \frac{\varkappa_2^2 \sin \varkappa_2 l}{\varkappa_1^2 \operatorname{sh} \varkappa_1 l}. \tag{4,32}$$

A fenti meggondoláshoz hasonlóan a

$$\sin \varkappa_2 l = 0$$

eredményre jutunk. Ezt (4,32)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$D_1 = 0. \tag{4,33}$$

Vagyis D_1 értéke mindenképpen zérus.

De ha

$$D_1 = 0,$$

úgy a (3,7), (4,12) és (4,32) alapján

$$\sin \varkappa_2 l = 0, \tag{4,32}$$

amiből

$$\varkappa_2 = \frac{\nu \pi}{l}. \tag{4,35}$$

Ez utóbbit (3,44)-be helyettesítve

$$k_\nu^4 = \frac{\nu^4 \pi^4}{l^4} - 2c_\nu^2 \frac{\nu^2 \pi^2}{l^2}, \tag{4,36}$$

majd (3,45) és (3,46) behelyettesítése után

$$\frac{\gamma F \omega_\nu^2}{EI\left(1-\frac{P}{EA}\right)} = \frac{\nu^4\pi^4}{l^4} - \left[\frac{P}{EI\left(1-\frac{P}{EA}\right)} + \frac{\gamma\omega_\nu^2}{EA\left(1-\frac{P}{EA}\right)}(F+A)\right]\frac{\nu^2\pi^2}{l^2}. \tag{4,37}$$

A ν lábindex a ν-dik sajátrezgésre utal.

A fenti összefüggésből a ν-ik sajátrezgés körfrekvenciája

$$\omega_\nu = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\gamma}}\sqrt{\frac{\frac{\nu^2\pi^2 EI}{l^2} - P\left[1+\frac{\nu^2\pi^2 EI}{l^2}\right]}{F\left[1+\frac{\nu^2\pi^2 EI}{EA\,l^2}\right]+\frac{\nu^2\pi^2 I}{l^2}}}. \tag{4,41}$$

Ugyanezen tartó kritikus ereje ha a nyíróerő hatását is figyelembe vesszük ([3], 140—141. l.)

$$P_{cr,\nu} = \frac{\nu^2\pi^2}{l^2}\frac{E}{1+\frac{\nu^2\pi^2 EI}{EA\,l^2}}. \tag{4,51}$$

Ez utóbbit (4,41)-be helyettesítve

$$\omega_\nu = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\gamma}}\sqrt{\frac{P_{cr,\nu}-P}{F+\frac{P_{cr,\nu}}{E}}}. \tag{4,42}$$

Ha a tartó hosszegységének tömegét μ-vel jelöljük,

$$\mu = \gamma F \tag{4,52}$$

és

$$\omega_\nu = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\mu}}\sqrt{\frac{P_{cr,\nu}-P}{1+\frac{P_{cr,\nu}}{EF}}}. \tag{4,43}$$

De a kritikus erő hatására keletkező normál feszültség

$$\sigma_{cr,\nu} = \frac{P_{cr,\nu}}{F}, \tag{4,53}$$

s így a körfrekvencia

$$\omega_\nu = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{P_{cr,\nu} - P}{1 + \frac{\sigma_{cr,\nu}}{E}}} . \tag{4,44}$$

Ha a nyíróerők hatását elhanyagolják, akkor (4,43) érvényes, és mert a kritikus erő

$$P_{E,\nu} = \frac{\nu^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

és így

$$\bar{\omega}_\nu = \frac{\nu\pi}{l^2\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{P_{E,\nu} - P}{1 + \frac{P_{E,\nu}}{EF}}} , \tag{4,61}$$

de

$$\sigma_{E,\nu} = \frac{P_{E,\nu}}{F} = \frac{\nu^2 \pi^2 E}{\lambda^2}$$

s a körfrekvencia képlete:

$$\bar{\omega}_\nu = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{P_{E,\nu} - P}{1 + \frac{\nu^2\pi^2}{\lambda^2}}} . \tag{4,62}$$

Ha a nyíróerő hatását vesszük figyelembe és a forgási tehetetlenség hatását hanyagoljuk el, [2] szerint

$$\omega_\nu^* = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\mu}} \sqrt{P_{cr,\nu} - P} . \tag{4,7}$$

Ha a forgási tehetetlenség és nyíróerő hatását is elhanyagoljuk, ([1] 375. o.) alapján

$$\omega_\nu = \frac{\nu^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \left(\sqrt{1 - \frac{Pl^2}{\nu^2\pi^2 EI}} ! \right)$$

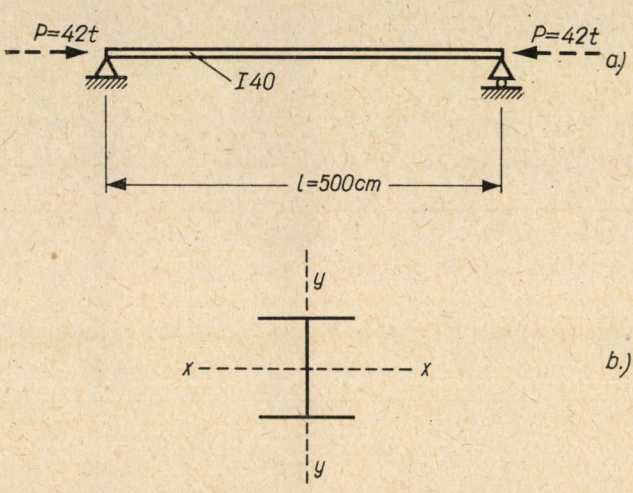
$$\bar{\omega}_\nu^* = \frac{\nu\pi}{l\sqrt{\mu}} \sqrt{P_{E,\nu} - P} . \tag{4,8}$$

Ez utóbbi (4,8) alatti esettel szemben (4,43) és (4,7) világosan rámutat arra, hogy a körfrekvenciák nem az egész számok négyzetével arányában növekednek, hanem azok sűrűsödnek (II. táblázat).

5. Példa

Határozzuk meg egy 40-es I vas sajátrezgését. A kétcsuklós gerendát, melynek támaszköze 5,00 m, 42 t tengelyirányú nyomóerő terheli. A tartó szerkezeti szempontból csak az $y - y$ síkban rezeghet.

Adatok : $\mu = 0{,}944$ gr cm^{-2} sec^{-2}
$l = 500$ cm
$F = 118$ cm^2
$I = If = 29210$ cm^4
$A = 22{,}1$ cm^2



2. ábra

A kritikus erő, ha a nyírás hatását is figyelembe vesszük (4,51) alapján

$$P_{cr,\nu} = \frac{\nu^2 \pi^2 EI}{l^2 \left(1 + \frac{\nu^2 \pi^2 I}{Al^2}\right)} = 2420 \frac{\nu^2}{1 + 0{,}052\nu^2}\ t.$$

Továbbá

$$\frac{\pi}{el\sqrt{\mu}} = \frac{3{,}14}{500.\sqrt{0{,}944}} = 6{,}47.\ 10^{-3}\ gr^{-1}\ cm\ sec^{-2}.$$

(4,53-)-ból

$$\frac{\sigma_{cr,\nu}}{E} = \frac{P_{cr,\nu}}{EF} = \frac{2420}{2100{,}118} \frac{\nu^2}{1 + 0{,}052\nu^2} = 0{,}976\ 10^{-2} \frac{\nu^2}{1 + 0{,}052\nu^2}.$$

Ezeket (4,43)-ba helyettesítve, a sajátrezgés körfrekvenciája, ha a nyomóerő is hat

$$\omega_{\nu p} = 6{,}47\ 10^{-3}\ \nu \sqrt{\frac{2420 \frac{\nu^2}{1 + 0{,}052\nu^2} - 42}{1 + 0{,}00976 \frac{\nu^2}{1 + 0{,}052\nu^2}}}.$$

Az I. táblázat 2. oszlopában tüntettük fel az első tíz körfrekvenciát.
Ha nyomóerő nem hat

$$\omega_\nu = 6{,}47\ 10^{-3}\,\nu \sqrt{\frac{2420\,\dfrac{\nu^2}{1+0.052\nu^2}}{1+0{,}00976\,\dfrac{\nu^2}{1+0{,}052\,\nu^2}}} =$$

$$= 6{,}47\ 10^{-3}\,\nu^2 \sqrt{\frac{2420}{1+0{,}06176\,\nu^2}} = 0{,}318\,\nu^2 \sqrt{\frac{1}{1+0{,}062\,\nu^2}}\ .$$

A körfrekvenciák számértékét az I. táblázat 3 oszlopa tünteti fel.
A II. táblázat tünteti fel a különböző sajátrezgések frekvenciáinak és az elsőnek a viszonyát. Ezek lényegesen eltérnek az egész számok négyzeteitől.
Ha a nyírás hatását elhanyagoljuk, (4,61) szerint

$$\overline{\omega}_\nu = 6{,}47\ 10^{-3}\,\nu \sqrt{\frac{2420\,\nu^2}{1+0{,}00976\,\nu^2}} \approx 0{,}318\,\gamma^2 \sqrt{\frac{1}{1+0{,}00976\,\nu^2}}\ ,$$

mivel

$$P_{E,\nu} = \frac{\nu^2\,\pi^2\,E\,I}{l^2} = 2420\,\nu^2\,t.$$

I. táblázat

	Sajátrezgés körfrekvenciája							
	Nyomottrúd	Nem nyomott rúd						
	Nyírás és forgási tehetetlenség figyelembevételével		Nyírás hatásának elhanyagolásával		Forgási tehetetlenség elhanyagolásával		Nyírás és forg. teh. elhanyagolásával	
ν	$\omega_{\nu P}$	ω_ν	$\overline{\omega}_\nu$	$100\,\frac{\overline{\omega}_\nu-\omega_\nu}{\omega_\nu}$	ω_ν^*	$100\,\frac{\omega_\nu^*-\omega}{\omega\nu}$	$\overline{\omega}_\nu^*$	$100\,\frac{\overline{\omega}_\nu^*-\omega_\nu}{\omega_\nu}$
1	0,306	0,309	0,316	2	0,310	0,3	0,318	3
2	1,138	1,140	1,254	10	1,156	1	1,272	12
3	2,295	2,298	2,778	21	2,360	2	2,862	28
4	3,608	3,612	4,88	35	3,76	4	5,09	41
5	4,98	4,98	7,55	51	5,25	5	7,95	59
6	6,37	6,37	10,80	69	6,75	6	11,45	86
7	7,79	7,79	14,62	87	8,27	6	15,58	100
8	9,16	9,16	19,02	107	9,78	7	20,35	122
9	10,54	10,54	24,00	128	11,24	7	25,76	144
10	11,84	11,84	29,55	149	12,82	8	31,8	169

Az I. táblázat 4. oszlopa mutatja a számszerű eredményt és az 5. oszlop a nyíróerő hatásának elhanyagolásából származó százalékos hibát.

Ha a nyíróerő hatását figyelembe vesszük, de a forgási tehetetlenséget nem, úgy (4,7) szerint

$$\omega^*_\nu = 6{,}47\ 10^{-3}\ \nu^2 \sqrt{\frac{2420}{1 + 0{,}052\ \nu^2}} \approx 0{,}318\ \nu^2 \sqrt{\frac{1}{1 + 0{,}052\ \nu^2}}\ .$$

Az I. táblázatban a 6. oszlop mutatja a számszerű eredményt és a 7. oszlop az elhanyagolás hatását.

II. táblázat

ν	$\frac{\omega_\nu}{\omega_1}$
1	1
2	3,69
3	7,45
4	11,7
5	16,1
6	20,6
7	25,2
8	29,6
9	34,2
10	38,4

Végül, ha mind a nyírás, mind a forgási tehetetlenség hatását elhanyagoljuk, a (4,8) egyenletből a frekvencia

$$\overline{\omega}^*_\nu = 6{,}47\ 10^{-3}\ \nu^2 \sqrt{2420} = 0{,}318\ \nu^2.$$

A sajátfrekvencia számított értékét az I. táblázat 8. sora tünteti fel, míg a 9. sor adja meg az elhanyagolásból származó százalékos eltérést.

Ezek a számszerű eredmények világosan bizonyítják, hogy a sajátrezgés magasabbrendű körfrekvenciáinak számításánál a nyíróerő és a forgási tehetetlenség hatása már nem hanyagolható el.

IRODALOM

1. TIMOSHENKO, S.: Vibration Problems in Engineering, Van Nostrand, New-York, 1954.
2. SZIDAROVSZKY, J.: Natural Vibration of a Bar under Effect of Shear, Acta Technica, Tom. XXXI. Fasc. 1—2., Budapest.
3. TIMOSHENKO, S.: Theory of Elastic Stability, Mc Graw-Hill, New-York, 1936.
4. EMDE, F.: Tafeln elementarer Funktionen, Teubner, Leipzig, 1948.

ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmány a nyomott rúd sajátrezgésének a nyíróerő és forgási tehetelenség hatását is figyelembe vevő alapdifferenciálegyenletét vezeti le, majd azt állandó szelvény esetére megoldja s végül a kétcsuklós rúd sajátrezgésére egyszerű képletet vezet le.

A bemutatott számpéldán bemutatja, hogy a nyíróerő, illetve forgási tehetetlenség hatásának elhanyagolása milyen hibát jelent (I. táblázat). A számpélda szerint ezek a hatások magasabbrendű rezgések meghatározásánál már egyáltalán nem hanyagolhatók el.

VASBETON DONGAHÉJAK SZÁMÍTÁSA

DULÁCSKA ENDRE

BUDAPESTI VÁROSÉPÍTÉSI TERVEZŐ VÁLLALAT

[Beérkezett 1959. október 29-én]

1. Bevezetés

A dongahéj a lefedendő négyszög alaprajzú tér hossztengelye irányában egyedül, vagy arra merőlegesen egymás mellé sorozva alkalmas térlefedésre. Rendszerint vasbetonból készül, olyan kialakításban, mely a membránmegoldás statikai és alakváltozási peremfeltételeit nem tudja kielégíteni, és így hajlítónyomatékok figyelembevétele is szükséges a valóságot megközelítő erőjáték meghatározásához.

E héjfajta rugalmasságtani alapon való, úgynevezett „pontos" statikai számítása, — bár néhány éve a számítást megkönnyítő táblázatokat tartalmazó könyv jelent meg [1] — igen hosszadalmas, időtrabló munka.

E számítás pontossága nincs arányban a reáfordított munkával, mert a számítási mód sajátosságai miatt a betont húzást-nyomást egyaránt bíró anyagként kénytelen kezelni. Ezzel szemben a homlokfalakra felfekvő héj a peremtartóval együtt nagyjából mint kéttámaszú, íves keresztmetszetű vasbetontartó viselkedik, melynek alsó, húzott öve bereped és az összes húzóerő a vasbetétekre hárul.

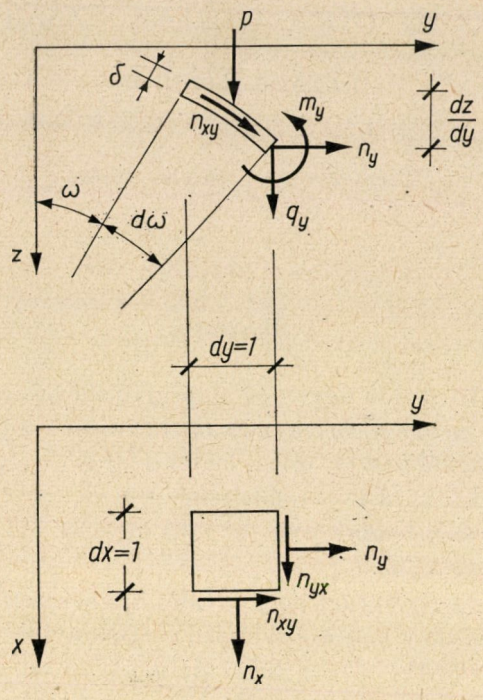
Kifogásolható az is, hogy a „pontos" számítás az egyenletes terhet Fourier-sorba fejti, s a lassú konvergencia ellenére a sornak csak egy vagy két tagját veszi számításba.

Így az úgynevezett „pontos" számítás, bár matematikailag és elvileg pontosnak tekinthető, a gyakorlatban mégis tetemes, 20—30%-nyi hibát tartalmazhat.

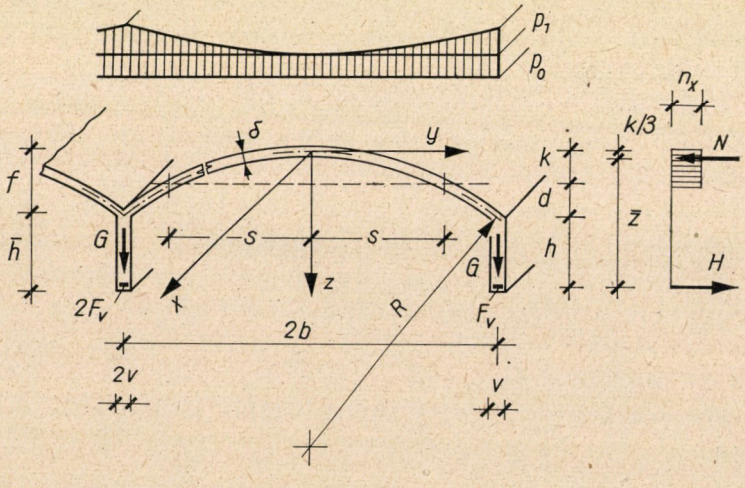
Ezenkívül a számítás ellenőrző jellegű, s csak a hosszadalmas számítás elvégzése után derül ki, hogy a héj alakját egyáltalán jól választottuk-e meg.

A következőkben [2] és [3] alapján elindulva, olyan *közelítő* számításmódot ismertetünk, amellyel a héj ellenőrzése igen rövid idő alatt elvégezhető. Minthogy ez az eljárás figyelembe veszi a vasbeton heterogén tulajdonságait, az ún. „exakt" eljárásnál pontosabb.

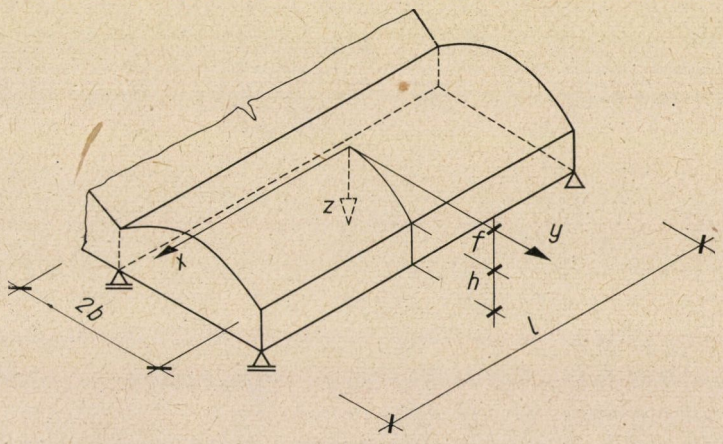
A metszeterők jelöléseit az 1. ábrán, a többi jelölést a 2*a*. és 2*b*. ábrán szemléltetjük.



1. ábra



2a. ábra



2b. ábra

2. Alapfeltevések

1. Feltesszük, hogy az y irányú dongaív középvonala lapos parabola, illetve olyan lapos más görbe, mely parabolának tekinthető, és az ívhossz a vetületével helyettesíthető.

Így:

$$ds \approx dy, \frac{dz}{dy} \approx \frac{y}{R}, \text{ valamint } \frac{d^2z}{dy^2} \approx \frac{1}{R}.$$

2. A héjlemez *terhét* a $p = p_0 + p_1 \cdot y^2/b^2$ összefüggéssel közelítjük meg, ahol p_0 a héjlemez terhe az $y = 0$ helyen, p_1 pedig az önsúly-teher y irányú növekedésétől függően meghatározható állandó.

3. Kizárólag „*hosszú*", azaz olyan dongát vizsgálunk, melynél $h + b < l/3$. Ilyenkor a héj m_x hajlító és m_{xy} csavarónyomatékai az egyensúlyi egyenletekből elhanyagolhatók. A hosszú donga hosszirányban, az l támaszközön a peremtartóival együtt, mint kéttámaszú tartó dolgozik. Rövidebb dongáknál az m_x, illetve m_{xy} hajlító, illetve csavarónyomatékok, valamint az n_{xy} nyírás okozta alakváltozások hatásai már nem hanyagolhatók el.

4. *A beton alkotóirányú húzófeszültségeket nem vesz fel.* A peremtartó és esetleg a héj alsó széle is bereped és így az összes alkotóirányú „n_x" húzóerő az F_v fővasalásra hárul.

5. *A nyomott övben az n_x metszeterők megoszlását* számítási egyszerűsítés céljából *egyenletesnek vesszük.* Ez megengedhető, mert *a)* a többi metszeterő maximális értékének képletében csak az n_x metszeterők *N eredőjének helye* fordul elő; *b)* a héjlemez kihajlását (horpadását) az n_x metszeterő olyan átlagértéké-

vel számolhatjuk, melynek eredője és az eredő helye megegyezik a pontos n_x-évei [4]; *c)* az alakváltozási munka számításánál az egyenletesen megoszló n_x alakváltozási munkája csak egy állandó szorzóban különbözik valamely más adott megoszlású n_x alakváltozási munkájától. Ez a szorzó szélső esetben (z szerint lineárisan változó n_x) is csak 15% különbséget ad. Tekintve, hogy a gyakorlati esetekben az n_x metszeterők alakváltozási munkája az összes alakváltozási munkának 20%-a körül mozog, a teljes alakváltozási munka összmennyiségében az egyenletes n_x felvétele miatt mintegy 3% eltérésünk lesz. Ez az eltérés azonban az alakváltozási munka függvényének későbbiekben szükséges minimum helyét alig befolyásolja.

6. A nyomott öv $2s$ szélességét a tartó teljes hosszán állandónak tekintjük. Ezt a szélességet úgy vesszük fel, hogy a *teljes donga és peremtartók együttes alakváltozási munkája minimális legyen.*

7. Feltesszük, hogy a hajlítás semleges tengelye nem metszi a bordát.

3. Egyensúlyi egyenletek

A 2/1. pont, valamint az 1. ábrán magyarázott jelölés figyelembevételével a feladat egyensúlyi egyenletei a következők:

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + p = 0, \tag{3}$$

$$n_y \frac{dz}{dy} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - q_y = 0. \tag{4}$$

A reciprocitási tétel értelmében természetesen $n_{xy} = n_{yx}$.

Az (1—4) egyenletekben öt ismeretlen van, és csak négy egyenlet. Az ötödik egyenletet az alakváltozási munka minimum feltétele adja.

Az egyensúlyi egyenletek megoldására először felvett s értékkel a dongát mint vasbetontartót számítjuk, és így sorba megoldhatók az (1—4) egyenletek. A különböző s értékkel számított erőjátékok közül a valóságban az következik be, amely mellett az alakváltozási munka minimális lesz.

A számítás során először a 2/3—5. és 2/7. pontban tárgyalt feltevésekkel és egy alkalmasan felvett s értékkel az n_x és n_{xy} metszeterőket határozzuk meg, mégpedig a kéttámaszú vasbetontartó esetében szokásos módon. Ezzel kielégítettük az (1) egyensúlyi egyenletet.

Mostmár n_{xy} birtokában a (2) egyenletből n_y értékei meghatározhatók. A (2) egyenlet szerint n_y metszeterő y irányú változását $y = 0$-tól s-ig parabola, s-től b-ig a parabolához húzott érintő egyenes határolja. A továbbiakban (a képletek egyszerűsége céljából) ezt a diagramot közelítően olyan parabolával helyettesítjük (3. ábra), melynek területe megegyezik az említett diagram területével, és a $y = b$ helyen a pontos n_y értékkel. Ezzel a (2) egyenletet csak közelítően elégítjük ki.

A helyettesítő parabola egyenlete tehát:

$$n_y = n_{y0}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) + n_{y1},$$

ahol n_{y0} és n_{y1} határozatlan.

Az n_{y0} meghatározása céljából differenciáljuk n_y-t

$$\frac{\partial n_y}{\partial y} = -\frac{2n_{y0} \cdot y}{b^2},$$

és $\frac{\partial n_y}{\partial_y}$ értékét a (2) egyenletbe téve a

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial_x} = n_{y0} \cdot \frac{2y}{b^2}$$

összefüggést kapjuk. Ezt, valamint a $dz/dy = y/R$ értéket a (3) egyenletbe helyettesítve, a

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} + n_{y0}\frac{2y^2}{Rb^2} + p = 0 \qquad (3/a)$$

egyenletet kapjuk.

A (3a) egyenletet integráljuk o-től b-ig, azaz

$$\int_0^b \frac{\partial q_y}{\partial y}\,dy + \frac{2n_{y0}}{Rb^2}\int_0^b y^2 dy + \int_0^b p \cdot dy = 0.$$

Ebből a $p = p_0 + p_1 \cdot y^2/b^2$ terhelést figyelembe véve n_{y0} értéke kifejezhető.

Ha a q_y-nak a b helyi értékét q_b-vel jelöljük, úgy

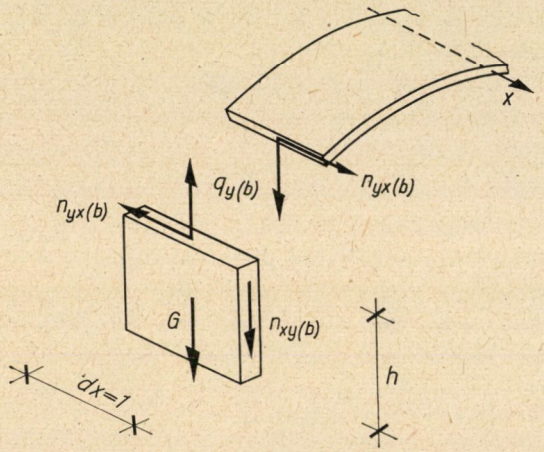
$$n_{y0} = -\frac{3}{2} R\left(p_0 + \frac{p_1}{3} + \frac{q_b}{b}\right). \qquad (5)$$

(5)-ből n_{y0} kiszámítható, ha q_b értékét ismerjük.

A q_b tulajdonképpen a héjról a peremtartóra átadódó függőleges nyíróerő. Értéke a peremtartó egységnyi hosszának

$$\frac{\partial n_{xy}(b)}{\partial_x} \cdot h + G - q_b = 0 \tag{6}$$

egyensúlyi egyenletéből meghatározható. Itt G a peremtartó egységhosszra eső súlya.



2c. ábra

Miután n_{y0} értékét ismerjük, rátérhetünk a q_y és m_y meghatározására. Az n_{y0} összefüggést behelyettesítve a $(3a)$ egyenletbe, és figyelembe véve, hogy a szimmetria miatt $q_{y(0)} = 0$, a $(3/a)$ egyenlet y szerinti integrálásával

$$q_y = -p_0 \cdot y - \frac{p_1 \cdot y^3}{3b^2} - \frac{n_{y0} \cdot 2y^3}{3Rb^2} .$$

Az m_y hajlítónyomatékot q_y ismeretében a (4) egyenlet integrálásával az

$$m_y = m_0 - \left(\frac{n_{y0}}{2R} + \frac{n_{y1}}{2R} + \frac{p_0}{2} \right) y^2 - \left(\frac{p_1}{12b^2} - \frac{n_{y0}}{12\,Rb^2} \right) y^4$$

képlet határozza meg. Ebben a képletben m_0 és n_{y1}, mint statikailag határozatlan mennyiségek szerepelnek, és így n_{y1}-et és m_0-t a megfelelő kerületi feltételek figyelembevételével, az ívtartók módszereivel, vagy az ívtartókra vonatkozó [5] táblázatok szerint számíthatjuk.

A metszeterők maximális értékeit részletes számítás nélkül, a következő 4. és 5. fejezetben adjuk meg.

Az n_x, n_{xy} metszeterőket főmetszeterőknek, az n_y, q_y, m_y metszeterőket mellékmetszeterőknek fogjuk nevezni.

4. A főmetszeterők képletei

Legyen Q a donga $2b$ szélességére és egységhosszára jutó teljes terhe.
Közbenső dongánál $Q = 2b(p_0 + p_{1/3}) + G$.
Egyedülálló dongánál $Q = 2b(p_0 + p_{1/3}) + 2G$.
A kéttámaszú héjtartó maximális nyomatéka:

$$M = \frac{Q \cdot l^2}{8}.$$

A húzóerő: $H = M/\bar{z}$, ahol $\bar{z}$ a belső erők karja:

$$\bar{z} = h + d + 2k/3; \text{ és } k = f \cdot s^2/b^2; \; d = f - k.$$

A szükséges vasmennyiség az $F_v = \frac{H}{2\sigma_v}$ képletből számítható.

A héjlemezben keletkező alkotóirányú maximális nyomó metszeterő az $x = 0$ helyen

$$n_{x\,\max} = -\frac{N}{2s}; \text{ ahol } N = M/\bar{z}.$$

Az n_x metszeterő x irányban az M nyomaték változásának megfelelően parabola szerint változik (3. ábra).

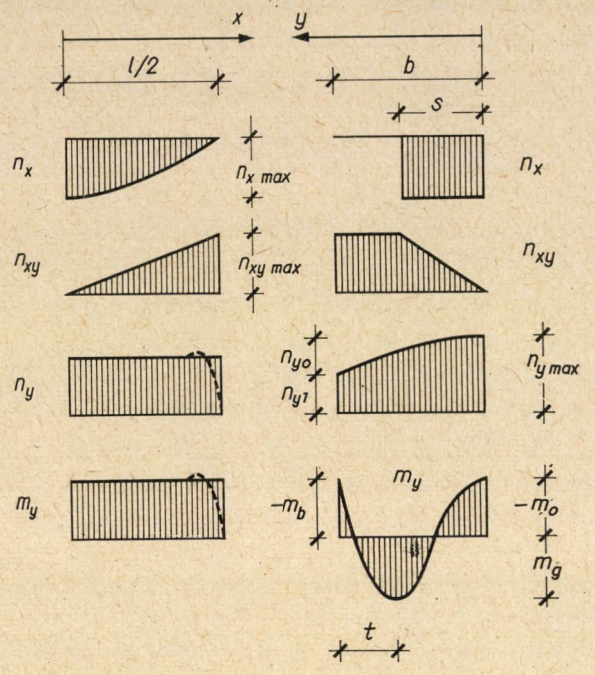
A héjlemez síkjába eső nyíró metszeterő a húzott övben

$$n_{xy} = -\frac{Q \cdot x}{2 \cdot \bar{z}}.$$

Maximális értéke az $x = l/2$ helyen van, itt

$$n_{xy\,\max} = -\frac{Q \cdot l}{4\bar{z}},$$

a nyomott szélességen pedig a 3. ábra szerint lineárisan változik $n_{xy\,\max}$-tól O-ig.



3. ábra

5. A mellékmetszeterők értékei

Közbenső dongánál :

A (6) egyenletből

$$q_b = \frac{1}{2}\left(-\frac{Q}{\bar{z}}h + G\right).$$

Az (5) egyenletből

$$n_{y0} = -3R\left(\frac{p_0}{2} + \frac{p_1}{6} + \frac{q_b}{2b}\right).$$

[5]-nek az $J \cdot \cos\omega = \text{constans}$ táblázataiból

$$n_{y1} = -\frac{b^2}{2f}\left(p_0 + \frac{p_1}{6{,}8} + \frac{6n_{y0}}{6{,}8\,R}\right),$$

$$n_{y\max} = n_{y0} + n_{y1},$$

$$m_b = \frac{b^2}{58}\left(\frac{n_{y0}}{R} - p_1\right) - 0{,}67\,\frac{n_{y1}\cdot b^2\,\omega_0^2}{2R\pi^2},$$

$$m_g = -\frac{b^2}{119}\left(\frac{n_{y0}}{R} - p_1\right) + 0{,}33\,\frac{n_{y1}\cdot b^2\omega_0^2}{2R\pi^2},$$

$$m_0 = \frac{b^2}{132}\left(\frac{n_{y0}}{R} - p_1\right) - 0{,}29\,\frac{n_{y1}\cdot b^2\omega_0^2}{2R\pi^2},$$

és $t = 0{,}30b$ (3. ábra).

Itt kerületi feltételként azt használtuk fel, hogy a két szomszédos donga találkozásánál, vagyis az $y = \pm b$ helyen, a szimmetria miatt sem y irányú eltolódás, sem pedig szögfordulás nem jöhet létre.

Az m_b, m_g, m_0 képleteiben a második ω_0^2-et tartalmazó tagok nagyobb ívmagasságú körív esetére vonatkozó közelítő korrekciós értékek. (ω_0 a dongaváll középponti szöge.)

E korrekciós tagokat azzal a feltevéssel számítottuk, hogy az n_{y1} erőnek a parabola és a körív eltéréséből származó nyomatéka arányos az első, [5]-ből származó tagok értékeivel.

Egyedülálló dongánál:

A (6) egyenletből:

$$q_b = \frac{1}{2}\left(-\frac{Q}{\bar{z}}h + 2G\right).$$

Az (5) egyenletből:

$$n_{y\max} = n_{y0} = -3R\left(\frac{p_0}{2} + \frac{p_1}{6} + \frac{q_b}{2b}\right).$$

$n_{y1} = 0$ (az oldalnyomás eltűnik).

$m_b = 0$ (a peremtartó csavarási merevségének hiánya miatt nem tud csavarónyomatékot felvenni).

A kérdéses pontra felírt integrált (4) egyenletből:

$$m_0 = \frac{b^2}{2}\left(p_0 + \frac{p_1}{6} + \frac{5n_{y0}}{6R}\right),$$

az m_g nyomaték az $y = b/\sqrt{2}$ helyen

$$m_g = \frac{b^2}{2}\left(\frac{p_0}{2} + \frac{p_1}{8} + \frac{3n_{y0}}{8R}\right) = \frac{9m_0}{20} + \frac{(p_0 + p_1)\,b^2}{40}.$$

6. Az alakváltozási munka

Az egyensúlyi egyenletekhez szükséges 5. egyenlet az alakváltozási munka minimumfeltétele. Ehhez az egyes metszeterők alakváltozási munkájának értékét a teljes héjfelület és a peremtartó felülete mentén közelítően integrálva a következő képletek adják:

$$Ln_x = L_{\text{Nyomó}} + L_{\text{Húzó}} = \frac{2l\,N^2}{15E_b\,s\delta} + \frac{2l\,N^2}{15E_v\,F_v} \approx \frac{l^2\,N^2}{8E_b\,s\delta} + \frac{l^2\,N^2}{8E_v\,F_v}.$$

Itt feltételezzük, hogy az F_v vasalás x irányában állandó. E_b a beton, E_v a vasbetét rugalmassági tényezője.

$$Ln_{xy} = \frac{8N^2}{3E_b\,\delta l}\left(\frac{\delta}{v}h + b - \frac{2s}{3}\right),$$

$$Ln_y \approx Lq_y \approx 0.$$

Egyedülálló dongánál, ha közelítően

$$m = \left[m_0 - \frac{(p_0 + p_1)\,b^2}{56}\right]\cos\frac{\pi x}{2b} + \frac{(p_0 + p_1)\,b^2}{56}\cos\frac{3\pi x}{2b}$$

nyomatékfüggvénnyel számolunk:

$$Lm_y \approx \frac{6lb}{E_b\,\delta^3}\left\{\left[m_0 + \frac{(p_0 + p_1)\,b^2}{56}\right]^2 + \left[\frac{(p_0 + p_1)\,b^2}{56}\right]^2\right\}.$$

Közbenső dongánál:

$$Lm_y = \frac{8{,}70\,lb\,m_0}{E_b\,\delta^3}.$$

Végeredményben

$$\Sigma L \approx Ln_x + Ln_{xy} + Lm_y.$$

Az alakváltozási munka minimumtétele szerint a szerkezeten a statikailag lehetséges erőjátékok közül az alakul ki, amelyhez tartozó alakváltozási munka minimális. Tehát

$$\frac{\partial \Sigma L}{\partial s} = 0.$$

Az s érték megválasztásához néhány felvett s érték mellett végrehajtjuk a számítást, meghatározzuk a metszeterőket és ezekből az alakváltozási munkát. A munkaértékeket s függvényében felrakjuk, a kapott pontokat folyamatos

görbével összekötjük, s kiválasztjuk a minimális munkához tartozó s értéket. Később azonban a 6. fejezetben megmutatjuk, hogy a fent vázolt munkaminimumszámítást a gyakorlatban általában nem is szükséges elvégezni.

A hosszú donga kritériuma.

A dongát a 2/3 fejezet szerint akkor tekinthetjük hosszú dongának, ha a n_{xy} okozta nyírási alakváltozási munka (s így a nyírási alakváltozás hatása is) az n_x normálerők okozta alakváltozási munkához képest elhanyagolható.

Ha homogén héjtartót feltételezve, kifejezzük az alakváltozási munkát, akkor

$$Ln_x + Ln_{xy} \approx aN^2\left[\frac{l}{b+h} + 2\frac{b+h}{l}\right],$$

ahol

az $\frac{l}{b+h}$ tag az L_{n_x}-el, a $2\frac{b+h}{l}$ tag az $L_{n_{xy}}$ munkával arányos, a pedig valamely, az n_x megoszlástól függő állandó.

$$\text{Az } e\% = \frac{Ln_{xy}\cdot 100}{Ln_x + Ln_{xy}} = \frac{200}{2+\left(\frac{l}{b+h}\right)^2} \text{ kifejezés}$$

értékét táblázatosan szemléltetjük.

$\frac{l}{b+h}$	8	6	4	3	2	1
$e\%$	3,0	5,3	11,0	18	33	67

Az alapfeltevéseknél megkívánt $\frac{1}{3}\,l \geq b+h$ arány eseteiben a nyírási alakváltozási munka nem haladja meg a teljes alakváltozási munka 20%-át.

7. Gyakorlati szempontok s meghatározásához

Az előző fejezetben elmondott munkaminimumszámítást a gyakorlatban általában nem szükséges elvégeznünk. Helyette a következő meggondolásokkal élhetünk.

Dongasor közbenső dongája.

Mint láttuk, Ln_{xy} a hosszú donga esetén elhanyagolható. Lm_y is kicsi és így szintén elhanyagolható. Eszerint s értékét lényegében az Ln_x minimuma

szabja meg. Ez azt jelenti, hogy közbenső donga esetén a semleges tengely helyét megszabó s értéket úgy határozhatjuk meg, mintha a héjtartó íves keresztmetszetű közönséges vasbetongerenda lenne. Tudniillik a közönséges vasbetongerendánál a semleges tengely helyét lineáris feszültségábra esetén a σ feszültségek alakváltozási munkájának minimuma szabja meg. Ez pedig azonos értékű azzal az egyszerűbb meghatározással, mely szerint a semleges tengelyre a keresztmetszet statikai nyomatéka zérus. Vagyis a közbenső dongának tartóként való számítása helyes eredményt ad.

Eszerint a semleges tengely meghatározásához az egyenletes n_x ábrát át kell alakítanunk olyan z szerint lineárisan változó n_x ábrává, melynek eredője és az eredő helye egybeesik az egyenletesen megoszló n_x ábráéval. Ennek a z szerint lineárisan változó n_x ábrának a semleges tengelyére lesz a keresztmetszet statikai nyomatéka zérus.

A behelyettesítést végrehajtva, az egyenletes n_x-hez tartozó s-re a következő összefüggést kapjuk:

$$1{,}29^3 \frac{2}{3} ks\delta \approx n \cdot F_v(h + d).$$

Itt F_v alatt a b szakaszra jutó húzott fővasbetét keresztmetszeti területét értjük, és $n = E_v/E_b$.

Egyedülálló donga.

Ilyen esetben az összes alakváltozási munka változásában L_{my} változása dominál, s így az összes alakváltozási munka minimumához tartozó s igen közel esik az m_y hajlítónyomaték munkájának minimumához tartozó s értékhez (5. ábra). Ezt az s értéket pedig a mellékmetszeterők és az Lm_y képleteiből könnyen meg tudjuk határozni, ha a peremtartó „h" magassága ismeretes. Illetve adott s-hez meg tudjuk keresni az Lm_y minimumát biztosító „h" peremtartómagasságot.

Így, ha s ismert,

$$h = \left(d + \frac{2}{3}k\right)\left[0{,}205 + 1{,}2\,\frac{G}{b(p_0 + p_1)}\right];$$

illetve, ha „h" ismert,

$$k = \frac{1{,}5h}{0{,}205 + 1{,}2\,\dfrac{G}{b(p_0 + p_1)}} - \frac{3}{2}d;$$

$$\text{és } s = b\sqrt{k/f}.$$

A gyakorlatban célszerű, ha az önsúly+fél hóteherhez számítjuk ki a szükséges peremtartómagasságot $b/2 \lessapprox s \lessapprox 2/3b$ s érték felvételével és a hóteher változásának számításánál most már adott „h" peremtartómagasság mellett meghatározzuk a minimális L_{my}-t biztosító s-t.

Ha az egyedülálló donga „h" peremtartómagasságát az elmondottak szerint vesszük fel, a mellékmetszeterők értékei:

$$-m_0 = +m_g = \frac{(p_0 + p_1)\,b^2}{56},$$

$$n_{y0} = n_{y_{max}} = -1{,}25\,R(p_0 + 0{,}2\,p_1),$$

$$q_b = 0{,}17\,b(p_0 + p_1).$$

Dongasor szélső dongája.

A dongasor szélső dongája tulajdonképpen asszimetrikus terhelésű, egyedülálló donga, mert a közbenső dongához csatlakozó vállnál n_{y1} vízszintes nyomás és m_b hajlítónyomaték éri, mint külső teher. Ez a számítást lényegesen megnehezíti, mert a szimmetria miatti könnyebbségek elesnek, s így a metszeterők nem írhatók fel egyszerű képletek formájában.

Ilyen szélső donga számításánál közelítően úgy járhatunk el, ha a szélső donga külső felét egy szabad donga felének, belső felét pedig egy közbenső donga felének számítjuk. A szélső féldonga n_{xy} és H értékeit megnöveljük az n_1 oldalnyomásból származó

$$\Delta n_{xy} = \frac{n_1 \cdot x}{4b}\,;\ \text{ill}\ \ \Delta H = \frac{n_1 \cdot l^2}{16b}$$

korrekciós értékekkel. Az m_y és n_y ábrában előálló ugrásokat a különbségeket kiegyenlítő ábrával tüntetjük el. (Δn_{xy} és ΔH értékeit úgy kapjuk, hogy a szélső dongát mint $2b$ magasságú, kétövű vízszintes tartót számítjuk.)

A szélső dongának ily módon számított erőjátéka nagyon közel fog esni a minimális alakváltozási munkát biztosító erőjátékhoz és tekintve, hogy a minimum közelében az alakváltozási munkát kifejező függvény csak lassan változik, a számított erőjáték alig tér el az alakváltozási munka minimumához tartozó (valódi) erőjátéktól.

Falra támaszkodó donga.

Ha az egyedülálló donga az $y = b$ vonalon oldalnyomással szemben nem ellenálló falra támaszkodik, vagy felfelé álló peremtartója van, a hajlítónyomatékok munkájának minimumát a falra, illetve a peremtartóra átadódó megfelelő nagyságú q_b erő biztosítja.

Így az m_0, m_g, n_{y0} és q_b mellékmetszeterők értékei megegyeznek az egyedülálló donga metszeterőinek értékeivel. Az n_x metszeterők minimumát pedig a közbenső dongánál elmondott s felvétellel biztosíthatjuk.

Tekintve, hogy a donga terhének egy része q_b formájában leadódik a falra, illetve felfelé álló peremtartóra, a donga főmetszeterőit a $Q = 1{,}66\, b(p_0 + p_1/3)$ teherértékből kell meghatároznunk.

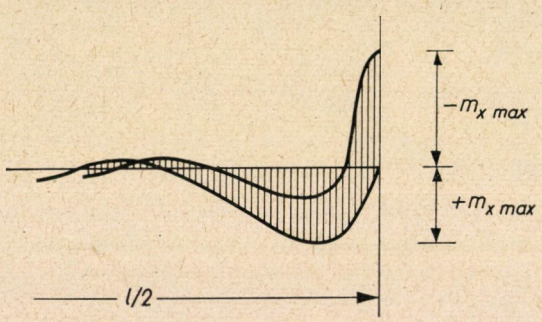
8. Peremzavarok

Az $x = l/2$ helyen olyan íves peremtartónak kellene lennie, mely a héjjal együtt tud mozogni, és csak az n_{xy} erőket képes felvenni. Tekintve, hogy ilyen peremtartó a valóságban nincsen, hanem az alkalmazott peremtartó általában a héjnál lényegesen merevebb, továbbá hogy q_x és m_x alkotóirányú nyíróerőt és nyomatékot is fel tud venni, az itt alkalmazott íves peremtartó, vagy homlokfal esetén keletkező zavarónyomatékokat közelítően a körhengertartály zavarónyomatékainak képleteivel vizsgálhatjuk.

Így $\quad -m_{x_{max}} = -0{,}290\delta \cdot n_y$,

$\quad +m_{x_{max}} = +0{,}093\delta \cdot n_y$,

és $0{,}6\sqrt{\delta R}$ a $+m_{x_{max}}$ távolsága az $l/2$ peremtől.



4. ábra

E peremzavarok a teher egy részét felveszik, s így befolyásolják az n_y és m_y x szerinti változását. E hatás azonban nagyon rövid szakaszon elenyészik. E peremzavarok hatása az n_y és m_y ábrán (3. ábra) szaggatott vonallal van jelölve.

A $-m_{x_{max}}$ számításánál befogott héjperemet, $+m_{x_{max}}$ számításánál pedig csuklós héjperemet tételeztünk fel. A tényleges megtámasztás e két szélső eset közé esik (4. ábra).

9. Kihajlási veszély becslése

Tekintve, hogy az n_x erők viszonylag nagy értékűek, fennállhat a kihajlás veszélye. Az alkalmazott betonanyag azonban nem korlátlanul rugalmas, s így a kihajlási vizsgálatnál bizonyos korrekció szükséges.

Alkotóirányban nyomott donga legkisebb kritikus feszültsége [4]

$$\sigma_{kr} = 0{,}35 \frac{E\delta}{R}.$$

Ha ezt az értéket egyenlővé tesszük a nyomott rúdra vonatkozó Euler-értékkel, egy helyettesítő λ karcsúsági értéket kapunk, melynek segítségével a nyomott vasbeton rúdra vonatkozó szabályok szerint a kihajlási biztonságot megbecsülhetjük.

$$\text{Így } 0{,}35 \frac{E\delta}{R} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \text{ -ból } \quad \lambda = 5{,}3 \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

10. Számpéldák

1. példa. Vizsgáljuk meg a budapesti Nagyvásárcsarnok héjszerkezetének egy közbenső dongáját, és hasonlítsuk össze a számítás eredményét a FINSTERWALDER [6] által közölt értékekkel.

A donga adatai:

$l = 41{,}00$ m
$p_0 = 0{,}27$ t/m² (átlagteher),
$p_1 = 0$
$G = 1{,}15$ t/m,
$R = 10{,}0$ m,
$2b = 11{,}8$ m,
$Fv = 100$ cm².

A peremtartó méretei $0{,}2 \times 2{,}40$ m és $h = 1{,}80$ m (a húzott vasak súlypontjáig).
A héjlemez méretei $\delta = 0{,}06$ m, $f = 1{,}93$ m
$\omega_0 = 0{,}63$

Legyen $s = 4{,}3$ m,

és $d = 0{,}91$ m; $k = 1{,}02$ m,

$$\bar{z} = 1{,}8 + 0{,}91 + \frac{2}{3} \cdot 1{,}02 = 3{,}38 \text{ m},$$

$$Q = 11{,}8 \cdot 0{,}25 + 1{,}15 = 4{,}10 \text{ t/m},$$

$$M = \frac{4{,}10 \cdot 41^2}{8} = 862 \text{ tm},$$

$$H = N = \frac{862}{3{,}38} = 265 \text{ t},$$

$$\sigma_v = \frac{265}{2 \cdot 100} = 1{,}325 \text{ t/cm}^2.$$

Állapítsuk meg, hogy s-t jól vettük-e fel. Legyen

$$n = E_v E_b = 15$$

$$1{,}29^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1{,}02 \cdot 4{,}3 \cdot 0{,}06 = 0{,}377 \approx 15 \cdot 0{,}01\,(1{,}8 + 0{,}91) = 0{,}406;$$

tehát s-t a megadott határhoz elég közel választottuk.

A metszeterők

$$n_x = -\frac{265}{2 \cdot 4{,}3} = -30{,}8 \text{ t/m},$$

$$n_{xy\max} = -\frac{-4{,}10 \cdot 41}{4 \cdot 3{,}38} = -12{,}45 \text{ t/m},$$

$$q_b = -\frac{1}{2}\left(\frac{4{,}10 \cdot 2}{3{,}38} - 1{,}15\right) = 0{,}64 \text{ t/m},$$

$$n_{y_0} = 3 \cdot 10\left(0{,}135 - \frac{0{,}64}{11{,}8}\right) = -2{,}43 \text{ t/m},$$

$$n_{y_1} = -\frac{5{,}9^2}{2 \cdot 1{,}93}\left(0{,}27 - \frac{6 \cdot 2{,}43}{6{,}8 \cdot 10}\right) = 0{,}50 \text{ t/m},$$

$$n_{y\max} = -2{,}43 - 0{,}50 = -2{,}93 \text{ t/m},$$

$$m_b = \frac{5{,}9^2}{58} \cdot \frac{-2{,}43}{10} + 0{,}67 \cdot \frac{0{,}50}{2} \cdot \frac{5{,}9^2}{10} \cdot \frac{0{,}63^2}{3{,}14^2} = -0{,}124 \text{ tm/m},$$

$$m_g = \frac{85}{119 \cdot 10} - 0{,}33 \cdot 0{,}035 = +0{,}060 \text{ tm/m},$$

$$m_0 = \frac{85}{132 \cdot 10} + 0{,}29 - 0{,}035 = -0{,}053 \text{ tm/m},$$

$$t = 0{,}3\,\frac{11{,}8}{2} = 1{,}77 \text{ m},$$

$$-m_{x_{\max}} = 0{,}29 \cdot 0{,}06 \cdot 2{,}93 = 0{,}051 \text{ tm/m},$$

$$+m_{x_{\max}} = 0{,}093 \cdot 0{,}06 \cdot 2{,}93 = 0{,}016 \text{ tm/m}.$$

Az összehasonlítás céljából a Finsterwalder által egytagú Fourier-sor segítségével meghatározott n_y, m_y értékeket a Fourier-sor megfelelő szorzóinak $\pi/4$. reciprok értékével megszorozzuk, mert az egytagú Fourier-sor a teherben és így m_y és n_y értékében is az $x = 0$ helyen $4/\pi = 1{,}27$-szeres értékeket ad. Az n_x és n_{xy} értékét az eredeti héjnál a Fourier-sor több tagjából határozták meg, úgyhogy ott átértékelésre nincs szükség.

	Finsterwalder	Átértékelve	Számpéldánk
n_x	$-31{,}28$	—	$-30{,}80$
$n_{xy\max}$	$-12{,}48$	—	-12.45
$n_{y\max}$	$-3{,}54$	$\frac{-\pi}{4} \cdot 3{,}54 = -2{,}78$	-2.93
m_b	$-0{,}142$	$\frac{-\pi}{4} \cdot 0{,}142 = -0{,}112$	-0.124
m_0	$-0{,}063$	$\frac{-\pi}{4} \cdot 0{,}063 = -0{,}049$	$-0{,}053$

Az eredmények nemcsak a bemutatott számpéldában, hanem számos más esetben is igen jó egyezést mutatnak a pontos rugalmasságtani megoldásokkal nemcsak közbenső, hanem egyedülálló dongák esetében is.

2. példa. Az 1. példában vizsgált héjtartót vizsgáljuk meg, mint egyedülálló héjat.

$$Q = 11{,}8 \cdot 0{,}27 + 2{,}30 = 5{,}48 \text{ t/m},$$
$$M = 41^2 \cdot 5{,}48/8 = 1151{,}5 \text{ tm},$$
$$F_v = 100 \text{ cm}^2.$$

Az s érték meghatározása céljából több felvett s értékkel fogjuk a számítást elvégezni.

A számításnak csak végeredményeit közöljük táblázatosan. A metszeterők függvényei:

$$H = N = \frac{M}{\bar{z}} = \frac{1151{,}50}{\bar{z}},$$

$$n_{xy_{\max}} = \frac{Q \cdot l}{4 \cdot \bar{z}} = \frac{56{,}2}{\bar{z}},$$

$$q_b = \frac{1}{2}\left(\frac{Q \cdot h}{\bar{z}} - 2G\right) = \frac{4{,}932}{\bar{z}} - 1{,}15,$$

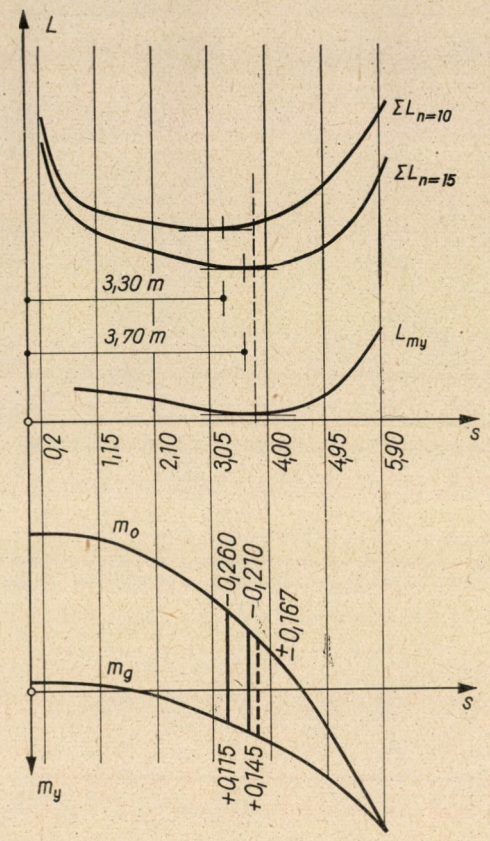
$$n_{y0} = -3R\left(\frac{p_0}{2} - \frac{q_b}{2b}\right) = -4{,}05 + 2{,}542\, q_b,$$

$$m_0 = \frac{p_0 \cdot b^2}{2}\left(1 - \frac{n_{y0}}{1{,}2\, p_0 \cdot R}\right) = 4{,}7\,(1 - 0{,}3086\, n_{y0}).$$

E képletek segítségével a következő táblázat értékeit kiszámíthatjuk:

s	m	0,2	1,15	2,10	3,05	4,00	4,95	5,90
$2k/3$	m	0.001	0,048	0,163	0,344	0,593	0.905	1,287
$d + 2k/3$	m	1.929	1.905	1,849	1,760	1,636	1.477	1,287
$\bar{z}$	m	3,729	3,705	3,649	3,560	3,436	3.277	3,087
$H = N$	t	309	310	315	323	335	351	373
σ_v	t/cm²	1,54	1,55	1,57	1,62	1,68	1,76	1,87
$n_{xy\ \max}$	t/m	15,01	15,20	15,40	15,80	16.35	17.15	18,20
q_b	t/m	0.177	0.181	0,202	0,235	0,285	0.355	0,448
n_{y0}	t/m	− 3.601	− 3,590	− 3,537	− 3,453	− 3,326	− 3.148	− 2,911
m_0	tm/m	− 0,523	− 0,507	− 0,430	− 0,309	− 0,125	+ 0,133	+ 0,477
L_N		407,0	71,3	40,3	29,2	23,9	21,2	19,8
L_H	$n = 15$	326,—	328,—	339,—	357,—	384,—	420,—	476,—
Ln_{xy}		66,—	58,—	54,—	50,—	46,—	44,—	38,—
Lm_y		105,5	98,—	66,3	32,8	20,2	80,3	302,—
ΣL	$n = 15$	983,—	636,—	572,—	529,—	515,—	572,—	812,—
ΣL	$n = 10$	1067,—	701,—	669,—	646,—	665,—	774,—	1026,—

A táblázatban a munkaértékekkel arányos mennyiségeket tüntettük fel.
Az alakváltozási munka és az m_y nyomatékok összefüggését az 5. ábrán szemléltettük.



5. ábra

Amint az 5. ábrából látjuk, az $n = E_v/E_b$ különböző értékeinek befolyása az erőjátékra nem túl nagy. A méretezést „n"-nek egy alsó és egy felső határával végezhetjük.

Ez bizonyos mértékig közömbösíti azt a tényt, hogy a bebetonozott vasbetét nyúlását a beton bizonytalan mértékben befolyásolja.

Megjegyzések.

1. Ha az alakváltozási munkának az $s = b$ szakaszon nincs minimuma, akkor a bemutatott számítóeljárás nem alkalmazható. Ilyenkor a donga arányát célszerű megfelelőképpen módosítani.

2. Egyedülálló dongánál az $y = b$ helyen $m_b = 0$ feltevést alkalmaztunk. A valóságban a peremtartónak van — bár kismértékű — csavaróellenállása, ezért célszerű az $y = b$ peremet minimális felső hajlítóvasalással is ellátni.

3. Az eljárás a bemutatott alakban csak szimmetrikus dongák számítására alkalmas.

ÖSSZEFOGLALÁS

A vasbeton dongahéjak olyan számításmódjával foglalkoztunk, mely a vasbetonelméletnek megfelelően a betonhúzásokat nem veszi figyelembe. A bevezetett egyszerűsítésekkel a metszeterők maximális értékeit zárt képletekkel meg tudtuk adni.

A nyomott öv szélességét jelentő, és az összes metszeterőket meghatározó s értéket a $\partial \Sigma L/\partial s = 0$ munkaminimumfeltétel alapján állítottuk elő.

IRODALOM

1. RÜDIGER—URBAN: Kreiszylinderschalen B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Leipzig: 1955.
2. SZMODITS K.: Héjszerkezetek statikája. Akadémiai Kiadó. Budapest: 1953.
3. DULÁCSKA E.: Hajlított dongahéjak vizsgálata. *Magyar Építőipar* 2. (1956) 87. o.
4. TIMOSHENKO, S.: Theory of Elastic Stability. Mc Graw-Hill Book Company Inc. New-York and London: 1936.
5. ENYEDI, B.: Tabellen zur Lösung der Bogenkonstruktionen. Zementverlag GmbH, Charlottenburg: 1929.
6. FINSTERWALDER, U.: Die Theorie der kreiszylindrischen Schalengewölbe System Zeiss-Dywidag. *Abh. Int. Ver. f. Brückenbau u. Hochbau* 1, (1932) 127.

STATIKAI LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLET MEGOLDÁSÁRA SZOLGÁLÓ FOKOZATOSAN KÖZELÍTŐ ELJÁRÁS ÉS ALKALMAZÁSA FÜGGŐHIDAKRA

SZIDAROVSZKY JÁNOS

„UVATERV" ÚT-VASÚTTERVEZŐ VÁLLALAT, BUDAPEST

[Beérkezett 1960. április 21-én]

1. Bevezetés

A mérnöki gyakorlatban sokszor terveznek olyan változó szelvényű tartót, amelyben fellépő belső erők változó együtthatós, hiányos lineáris differenciálegyenlet segítségével határozhatók meg. A megoldás csak a legritkább esetben fejezhető ki táblázatban adott függvények segítségével. Ezért a gyakorlatban közelítő megoldást alkalmazunk [1], [2], vagy valamilyen meggondolással állandónak tekintett szelvénnyel végzik el a számítást, vagy pedig a differenciálegyenletet integrálegyenletté alakítva át fokozatosan közelítő módszert alkalmaznak. Ez esetben általában a második közelítésnél már megállnak.

Az alábbiakban egy olyan ugyancsak fokozatosan közelítő módszert mutatunk be, melynek konvergenciája a legtöbb gyakorlati esetben lényegesen jobb, mint az integrálegyenlettel nyert közelítés és ha hasonló feladatot többször kell megoldani, akkor az általános előkészítés után a gépiesen végezhető számítási munka ugyanannyi, mint a fenti esetekben.

E fokozatosan közelítő módszernél a számítást egy tetszőlegesen választott állandó szelvényű, ún. helyettesítő tartón végezzük el.

Az így nyert érték (pl. a lehajlás, nyomaték) az első közelítés. Utána az első közelítés értékei, a tényleges tartó merevsége és a helyettesítő tartó merevsége alapján számítható első *fiktív terhelést* határozzuk meg. Ezzel terhelve a helyettesítő tartót, kapjuk ez első kiegészítő hatást, amit az első közelítéssel összegezve jutunk a második közelítéshez. A számítás addig ismételhető, míg a kívánt pontosságot el nem érjük.

2. A módszer ismertetése

Statikai lineáris differenciálegyenletek leggyakrabban a rugalmas ágyazaton felfekvő gerendák, a nyomott és húzott rudak, továbbá a függőhidak vizsgálatánál fodulnak elő. Ezek a differenciálegyenletek — mint azt

a (3,1), (5,1) és (6,25) képletek mutatják — mind

$$y^{(n)} + a(x)\, y = b(x)\, p(x) \tag{2,1}$$

alakúak, ahol $p(x)$ megoszló teher.

Jelen tanulmány a fenti alakú differenciálegyenlet megoldására egy fokozatosan közelítő módszert mutat be.

Ha a (2,1) alatti differenciálegyenlet $a(x)$ együtthatója állandó, úgy homogén alakjának megoldása zárt alakban felírható, vagy más szavakkal a megoldás a primitív függvényekkel végzett véges számú aritmetikai művelet segítségével kifejezhető. Ennek következtében a $p(x)$ teher hatására fellépő belső erő és alakváltozás hatásábrája, vagyis a differenciálegyenlet hatás (Green) függvénye is zárt alakban írható fel.

Helyettesítsük a (2,1) alatti differenciálegyenletet egy állandó együtthatós helyettesítő differenciálegyenlettel, vagy más szavakkal a változó szelvényű (vagy más okból változó együtthatóval jellemzett) tartót állandó szelvényűvel, a helyettesítő tartóval. És oldjuk meg a (2,1) alatti differenciálegyenlet helyett az

$$y^{*(n)} + a_0 y^* = b_0 p^*(x) \tag{2,2}$$

állandó együtthatós differenciálegyenletet a

$$p^*(x) = \frac{b(x)}{b_0}\, p(x)$$

zavarásra.

(2,1)-ből vonjuk le a (2,2)-t és vezessük be az

$$y_1 = y - y^*, \tag{2,3}$$

továbbá a

$$p_1(x) = \frac{a_0 - a(x)}{b(x)}\, y^* \tag{2,4}$$

jelöléseket, úgy az

$$y_1^{(n)} + a(x) y_1 = b(x)\, p_1(x) \tag{2,5}$$

differenciálegyenletet kapjuk. Ennek alakja teljesen azonos (2,1)-gyel, azonban megoldása azt a hibát adja meg, amit azzal követünk el, hogy az eredeti differenciálegyenlet helyett a helyettesítő differenciálegyenletet oldottuk meg.

Ugyanis (2,3)-ból (2,1) megoldása

$$y = y^* + y_1$$

Azonban a (2,5) alatti differenciálegyenlet megoldása ugyanazon — vagy még nagyobb — nehézségekbe ütközik, mint a (2,1) alattié. Ezért ezt is a helyettesítő differenciálegyenleten oldjuk meg. Az itt nyert megoldás az első kiegészítő hatás, aminek alapján meghatározzuk a második fiktív terhelést. E gondolatmenet ismétlésével sorban

$$y_k^{*(n)} + a_0 y_k^* = b_0 p_k^* (x) \tag{2,6}$$

differenciálegyenleteket oldjuk meg, ahol

$$p_k^* (x) = \frac{b(x)}{b_0} p_k(x) = \frac{a_0 - a(x)}{b_0} y_{k-1}^* \tag{2,7}$$

és az eredeti (2,1) alatti differenciálegyenlet megoldását az

$$y = y^* + \sum_{i=1}^{\infty}{}' y_i \tag{2,8}$$

összeg adja meg.

3. A módszer és az integrálegyenlet kapcsolata

A módszer abban az esetben, ha a helyettesítő differenciálegyenletben $a_0 = 0$ állandót vesszük fel, lényegében nem különbözik az integrálegyenlet Neumann-féle sor alakjában való megoldásától [2]. Ez a mérnöki gyakorlatban a kihajlás vizsgálatánál Vianello-féle eljárás néven ismert. A bizonyítást az egyidejűen nyomott és hajlított rúd esetére végezzük el. Ezt az általánosítás rovása nélkül tehetjük, mert általános esetre szóló bizonyítás lépései azonosak.

Az egyidejűen nyomott és hajlított rúd differenciálegyenlete

$$M'' + \frac{P}{EI} M = -p. \tag{3,1}$$

Vagy, ha a (2,1) alakban írjuk fel, úgy

$$a(x) = \frac{P}{EI}, \tag{3,2}$$

$$b(x) = -1,$$

$$n = 2.$$

A Vianello-féle eljárásnál első lépésként a keresztirányú terhelés okozta

$$\overline{M} = -\iint p\,dx\,dx \tag{3,3}$$

nyomatékot, mint első közelítést határozzuk meg. E nyomaték alapján számítható az

$$\bar{y} = -\iint \frac{M}{EI}\, dx\, dx$$

elmozdulás.

A második lépésnél a P erőnek az elmozduláson, mint karon kifejtett nyomatékát, az

$$\overline{M}_1 = P\bar{y} = -P \iint \frac{M}{EI}\, dx\, dx$$

első kiegészítő nyomatékot határozzuk meg. Ugyanezt a nyomatékot okozza a

$$\bar{p}_1 = -\frac{d^2}{dx^2}\overline{M}_1 = \frac{P}{EI}\overline{M} \tag{3,4}$$

megoszló teher is.

Az eljárás ismétlésével

$$\bar{p}_2 = \frac{P}{EI} M_1 = -\frac{P}{EI} \iint \bar{p}_1\, dx\, dx. \tag{3,5}$$

A bemutatott eljárásnál ha az

$$a_0 = 0 \tag{3,6}$$

együtthatót választjuk (2,2) és (3,2) alapján

$$M^{*\prime\prime} = -p.$$

Vagy kétszeres integrálás után a nyomaték első közelítése

$$M^* = -\iint p dx dx,$$

ami (3,3)-mal azonos.

Az első kiegészítő terhelés (2,4) és (3,2) alapján

$$p_1 = \frac{a_0 - a(x)}{b(x)} M^*,$$

ami (3,6) és (3,2) alapján a (3,4)-gyel egyező

$$p_1^* = p_1 = \frac{P}{EI} M^* = -\frac{P}{EI} \iint p\, dx\, dx$$

alakra hozható.

Hasonlóképp

$$M_1^* = -\iint p_1^* \, dx \, dx$$

és

$$p_2^* = p_2 = \frac{P}{EI} M_1^* = -\frac{P}{EI} \iint p_1^* \, dx \, dx,$$

ami (3,5)-el egyezik.

Így, ha az $a_0 = 0$ tényezőt választjuk, a két módszer, s ennek folytán azok konvergenciája is azonos, csupán a két módszernél a végrehajtásban van különbség. Ugyanis a Vianello-eljárásnál változó tehetetlenségi nyomatékú tartón adott nyomatékból lehajlást kell meghatározni, a bemutatott eljárásnál adott megoszló terhelésből nyomatékot kell meghatározni, ami analóg művelet.

Ha a helyettesítő tartónál

$$a_0 = \frac{P}{EI_0} \neq 0.$$

úgy a (2,7) alatti összefüggés szerint a

$$p_1^* = -P\left[\frac{1}{EI_0} - \frac{1}{EI}\right] M^* = \frac{P}{EI} \frac{I_0 - I}{I_0} M^* \qquad (3,7)$$

fiktív terhelés hatása kisebb, mint a Vianello-féle (3,4), ha I_0-t az I értékek valamilyen átlaga alapján választjuk. Ugyanis ekkor egyrészt $\left|\frac{I_0 - I}{I_0}\right|$ átlaga kisebb az egységnél, és így a (3,7), valamint a (3,4) képletek összehasonlítása alapján a (3,7) szerinti p_1^* fiktív terhelés átlaga kisebb a (3,4) szerinti $\bar{p}_1$ értéknél. Másrészt — és ez a lényegesebb ok — ha I_0 átlagos érték, úgy az $I_0 - I$ mennyiség a tartó hosszán legalább egyszer előjelet vált, vagyis váltakozó előjelű fiktív terhelés hatása okozza a kiegészítő nyomatékot, ami ennélfogva lényegesen kisebb s így a bemutatott módszer konvergenciája lényegesen jobb a Vianello-féle eljárásénál.

A bemutatott módszernek kétségtelenül hátránya, hogy ha $a_0 \neq 0$, a hatás (Green) függvények előállítása nem olyan egyszerű, mint az $a_0 = 0$, vagyis a Vianello-féle módszer esetében. Azonban, ha a hatás (Green) függvényeket számszerűen egyszer már előállítottuk, úgy azok újbóli felhasználása esetén e módszer alkalmazása már nem jelent további munkatöbbletet.

Az alábbiakban a fenti eljárást az egyidejűen hajlított és nyomott, illetve húzott rúdra, valamint a rugalmas ágyazaton felfekvő végtelen hosszú tartóra alkalmazzuk, és végül a kéttámaszú függőhíd méretezésénél való használatát is bemutatjuk.

4. Két végén csuklósan megtámasztott nyomott rúd

Az egyidejűen nyomott és hajlított tartó ismert differenciálegyenletét (3,1) adja meg. Ez esetben a (2,1) egyenletben előforduló y függvény nyomatékot jelent. (2,2) alapján a helyettesítő tartóra vonatkozó differenciálegyenlet homogén alakjának általános megoldása, tekintetbe véve a kezdeti $M_{(0)} = 0$ határfeltételt

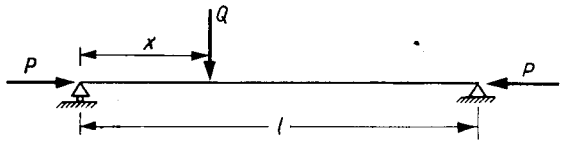
$$M^*(x) = M_m \sin k_0 x ,$$

ahol M_m állandó és

$$k_0 = \sqrt{a_0} = \sqrt{\frac{P}{EI_0}} . \tag{4,1}$$

Terhelje a helyettesítő tartót a z helyen $Q = 1t$ külső erő (1. ábra), akkor a differenciálegyenlet megoldása

$$\left.\begin{aligned} M_b^*(x) &= M_b^* \sin k_0 x ; \qquad z \geq x \\ M_j^*(x) &= M_j^* \sin k_0 (l - x); \; z \leq x \end{aligned}\right\} . \tag{4,2}$$



1. ábra

Az $x = z$ helyén a két nyomaték egyenlő, vagyis

$$M_b^*(z) = M_j^*(l - z)$$

és így

$$M_b^* \sin k_0 z = M_j^* \sin k_0 (l - z). \tag{4,3}$$

Ugyanitt az $R^*(x)$ nyíróerőben egységnyi ugrás lép fel, vagyis

$$R_b^*(z) = M_b^{*\prime}(z) = 1 - R_j^*(x) = 1 - M_j^*(x)$$

behelyettesítése (4,2)-ből

$$M_b^* k_0 \cos k_0 z = 1 - M_j^* k_0 \cos k_0 (l - z) \tag{4,4}$$

A (4,3) és (4,4) jelű egyenletekből, minthogy

$$\sin k_0 z \cos k_0 (l - z) + \cos k_0 z \sin k_0 (l - z) = \sin k_0 l ,$$

az állandók értékei:

$$M_b^* = \frac{\sin k_0(l-z)}{k \sin k_0 l}$$

$$M_j^* = \frac{\sin k_0 z}{k \sin k_0 l}.$$

Ezeket (4,2)-be helyettesítve az x hely nyomatéki hatásábráját az

$$\left.\begin{aligned} m(x) = M^*(x) &= \frac{1}{k_0} \frac{\sin k_0 x}{\sin k_0 l} \sin k_0(l-z); \; z \geq x \\ m(x) = M^*(x) &= \frac{1}{k_0} \frac{\sin k_0(l-x)}{\sin k_0 l} \sin k_0 z; \qquad z \leq x \end{aligned}\right\} \tag{4,5}$$

függvények adják meg.

A (4,1) képletből

$$k_0 = \sqrt{\frac{P}{EI_0}} = \frac{c}{l}.$$

S ebből

$$c = l k_0 = l \sqrt{\frac{P}{EI_0}} = \pi \sqrt{\frac{P}{P_E}}, \tag{4,6}$$

ahol az Euler-féle kritikus erő

$$P_E = \frac{\pi^2 EI_0}{l^2}.$$

Ha bevezetjük a

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l} \\ \varrho &= \frac{z}{l} \end{aligned}\right\} \tag{4,7}$$

és

jelöléseket, a keresett hatásfüggvények

$$\left.\begin{aligned} m(\xi, \varrho) &= l \frac{\sin c(1-\xi)}{c \sin c} \sin c\varrho; \qquad z \leq x \\ m(\xi, \varrho) &= l \frac{\sin c\xi}{c \sin c} \sin c(1-\varrho); \; z \geq x \end{aligned}\right\}. \tag{4,8}$$

Ha $c = 0$, úgy — akár sorbafejtés, akár közvetlen levezetés útján — egyszerűen igazolható, hogy

$$\left.\begin{aligned} m(\xi;\varrho) &= (1-\xi)\varrho\,; \quad z \leq x \\ m(\xi;\varrho) &= \xi(1-\varrho)\,; \quad z \geq x \end{aligned}\right\} \tag{4,8a}$$

Ha a P erő húzóerő, úgy a (4,8) alatti képletekben a sin függvények helyébe sh függvények lépnek, vagyis

$$\left.\begin{aligned} m(\xi;\varrho) &= l\,\frac{\operatorname{sh} c(1-\xi)}{c \operatorname{sh} c}\operatorname{sh} c\varrho\,; \quad z \leq x \\ m(\xi;\varrho) &= l\,\frac{\operatorname{sh} c\xi}{c \operatorname{sh} c}\operatorname{sh} c(1-\varrho)\,; \quad z \geq x \end{aligned}\right\}. \tag{4,9}$$

Nyomott rúdnál a szükséges biztonságra való tekintettel a nyomóerő kisebb a kritikus erőnél, vagyis $P_E = nP$. Nyomott és hajlított rúdban általában $n > 1{,}5$.

Ezért

$$\frac{P}{P_E} > \frac{1}{1{,}5}$$

és

$$c < \frac{\pi}{\sqrt{1{,}5}} \sim 2{,}56$$

A (4,8), illetve (4,9) képletben előforduló

$$\frac{\sin c\xi}{c \sin c}\sin c(1-\varrho)\,;\ \frac{\sin c(1-\xi)}{c \sin c}\sin c\varrho$$

és

$$\frac{\operatorname{sh} c\xi}{c \operatorname{sh} c}\operatorname{sh} c(1-\varrho)\,;\ \frac{\operatorname{sh} c(1-\xi)}{c \operatorname{sh} c}\operatorname{sh} c\varrho$$

függvényértékeket a

$$\xi = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 0{,}9;\ 1{,}0$$

$$\varrho = 0;\ 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots;\ 0{,}9;\ 1{,}0$$

és nyomott rúdban a

$$c = 0,\ 1{,}4,\ 1{,}8,\ 2{,}0,\ 2{,}2,\ 2{,}3,\ 2{,}4,\ 2{,}45,\ 2{,}50,\ 2{,}55$$

húzott rúdban pedig a

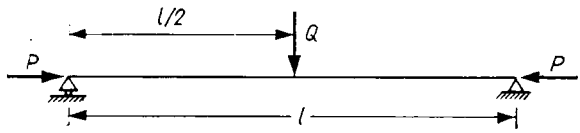
$$c = 1{,}8,\ 3{,}0,\ 5{,}0,\ \text{és}\ 10{,}0$$

értékekre meghatároztuk és azokat a számítási munka megkönnyítésére táblázatokba foglaltuk és azok közül a $c = 1{,}4$ parameterhez tartozó táblázatot e tanulmányban is közöljük.

A fenti c mennyiségeket olyan meggondolás alapján választottuk ki, hogy az egymás után következő c értékek alapján a tartó közepére számított hatásábra ordináták különbségei nagyjából 0,05 l legyenek.

4,1. Számpélda

Határozzuk meg egy kéttámaszú állandó szelvényű nyomott rúd közepén fellépő nyomatékot, ha azt középen Q erő terheli meg (2. ábra).



2. ábra

A nyomóerő

$$P = \frac{1{,}8^2\, EI}{l^2}$$

(4,6) alapján

$$c = l\sqrt{\frac{P}{EI}} = 1{,}8 \quad \text{és} \quad a(x) = \frac{1.8^2}{l^2}\,.$$

A rúd közepén, vagyis a $\xi = 0{,}5$ helyen keletkező nyomaték a $\varrho = 0{,}5$ helyen ható Q terhelés hatására (4,8) alapján

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = Qm\left(\frac{l}{2}\,;\,\frac{l}{2}\right) = Q\,\frac{l \sin 1{,}8(1-0{,}5)}{1{,}5 \sin 1{,}8} \sin 1{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}35005\, Ql.$$

Határozzuk meg ezt az értéket fokozatos közelítéssel is úgy, hogy a helyettesítő tartó merevségére jellemzőül $c = 1{,}4$-et választunk. Ekkor

$$a_0 = \frac{1{,}4^2}{l^2}$$

és a nyomatékok a táblázat alapján

$$\begin{aligned} M^*(0) &= 0 \\ M^*(0{,}1l) = M^*(0{,}9l) &= 0{,}06510\ Ql \\ M^*(0{,}2l) = M^*(0{,}8l) &= 0{,}12905\ Ql \\ M^*(0{,}3l) = M^*(0{,}7l) &= 0{,}19041\ Ql \\ M^*(0{,}4l) = M^*(0{,}6l) &= 0{,}24804\ Ql \\ M^*(0{,}5l) &= 0{,}30083\ Ql \end{aligned}$$

amiből

$$M(0{,}5) = 0{,}30083\ Ql$$

az első közelítés. A hiba most 16%.

(2,4) alapján

$$p_1^* = -M^*(a_0 - a(x)) = -M^* \frac{1{,}4^2 - 1{,}8^2}{l^2} = \frac{1{,}28}{l^2} M^*.$$

I. táblázat

Abszcissza ϱ	A ξ keresztmetszetnek a ϱ abszcisszához tartozó $m(\xi;\ \varrho)$ ordinátája				
	$\xi = 0{,}1$	$\xi = 0{,}2$	$\xi = 0{,}3$	$\xi = 0{,}4$	$\xi = 0{,}5$
0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,1	0,09630	0,09105	0,08401	0,07532	0,06516
0,2	0,09105	0,18031	0,16637	0,14917	0,12905
0,3	0,08401	0,16637	0,24546	0,22009	0,19041
0,4	0,07532	0,14917	0,22009	0,28671	0,24804
0,5	0,06516	0,12905	0,19041	0,24804	0,30083
0,6	0,05373	0,10641	0,15700	0,20452	0,24804
0,7	0,04125	0,08168	0,12052	0,15700	0,19041
0,8	0,02795	0,05536	0,08168	0,10641	0,12905
0,9	0,01411	0,02795	0,04125	0,05373	0,06516
1,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Így a tizedikben a megoszló teher értéke

$$\begin{aligned} p^*(0) &= 0 \\ p^*(0{,}1\,l) = p(0{,}09) &= 0\ 08340\ \frac{Q}{l} \\ p^*(0{,}2\,l) = p(0{,}8\,l) &= 0{,}16518\ \frac{Q}{l} \\ p^*(0{,}3\,l) = p(0{,}7\,l) &= 0{,}24373\ \frac{Q}{l} \end{aligned}$$

$$p^*(0{,}4\,l) = p(0{,}6\,l) = 0{,}31749\,\frac{Q}{l}$$

$$p^*(0{,}5\,l) = \qquad = 0{,}38506\,\frac{Q}{l}$$

A tizedekben levő megoszló teher és a középső keresztmetszet hatásábra ordinátáinak szorzata

$$\begin{aligned} p\eta = 0{,}08340 \cdot 0{,}06510\,Q &= 0{,}00543\,Q \\ &= 0{,}02132\,Q \\ &= 0{,}04641\,Q \\ &= 0{,}07875\,Q \\ &= 0{,}11584\,Q \end{aligned}$$

Simpson formula alkalmazásával a fenti ordinátákkal jellemzett függvény területe, vagyis az első kiegészítő nyomaték

$$M_1^* = \frac{4}{30}\,0{,}31959\,Ql = 0{,}04261\,Ql.$$

S a második közelítés

$$M(0{,}5) = M^* + M_1^* = 0{,}30083\,Ql + 0{,}04261\,Ql = 0{,}34344\,Ql$$

vagyis a hiba már csak 2%.

5. Rugalmas ágyazaton felfekvő gerenda

5,1. A hatásfüggvények

A rugalmas ágyazaton fekvő gerenda differenciálegyenlete WINKLER [3] levezetése szerint

$$y^{IV} + \frac{cb}{EI}\,y = \frac{1}{EI}\,p, \tag{5,1}$$

ahol y a lehajlás, c az ágyazási tényező, b a gerenda talpszélessége, E rugalmassági tényező, I a gerenda tehetetlenségi nyomatéka és p a tartót terhelő megoszló teher.

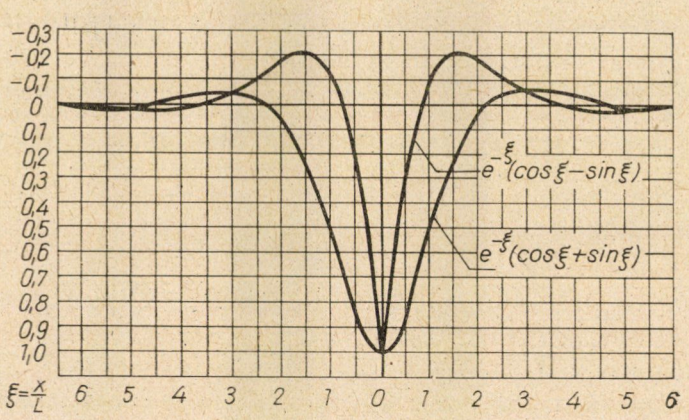
Ha a gerenda végtelen hosszú, szelvénye állandó és az ágyazási tényező is állandó, az $x = \xi L = 0$ helyen keletkező η lehajlási és m nyomatéki hatásfüggvényeket az

$$\eta = \frac{1}{2cbL} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi) \tag{5,2}$$

$$m = \frac{L}{4} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) \tag{5,3}$$

függvények írják le és azokat a 3. ábrán tüntettük fel. Ha a gerenda véges hosszú, úgy a fentinél lényegesen komplikáltabb összefüggések vezethetők le. A fenti összefüggésben

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{cb}} . \tag{5,4}$$



3. ábra

A hatásfüggvények ismeretében a számítás az ismertetett módszer alapján már elvégezhető.

5,2. Számpélda

Határozzuk meg egy végtelen hosszú rugalmasan alátámasztott állandó I tehetetlenségi nyomatékú gerendában a Q terhelés alatt keletkező hajlítónyomatékot, feltételezve, hogy a rugalmassági tényező állandó.

(5,3) alapján, ($\xi = 0$)

$$M = \frac{QL}{4} .$$

Határozzuk meg a nyomatékot fokozatos közelítés módszerével is. Válasszuk a helyettesítő tartó tehetetlenségi nyomatékát

$$I_0 = 0{,}5I$$

értékre. Ekkor a helyettesítő differenciálegyenlet

$$y^{*\mathrm{IV}} + \frac{cb}{0{,}5EI}\, y^* = \frac{1}{0{,}5EI}\, p$$

lesz. Így

$$L_0 = \sqrt[4]{\frac{4 \cdot E \cdot 0{,}5\, I}{c \cdot b}} = \sqrt[4]{0{,}5}\, L = 0{,}841\, L$$

$$a_0 = \frac{c \cdot b}{0{,}5\, EI}$$

$$a(x) = \frac{c \cdot b}{E \cdot I}$$

$$b(x) = \frac{1}{EI}$$

$$b_0 = \frac{1}{0{,}5\, EI}$$

és

$$p^* = p = 0.$$

A Q terhelésből a helyettesítő tartó lehajlása

$$y^*(x) = \frac{Q}{2\, cb\, 0{,}841\, L}\, e^{-\xi_0} (\cos \xi_0 + \sin \xi_0)\,,$$

ahol

$$\xi_0 = \frac{x}{0{,}841\, L}$$

és a nyomaték első közelítése

$$M^*(o) = 0{,}841\, \frac{QL}{4}$$

16%-os hibát tartalmaz.

(2,7)-ből az első kiegészítő teher

$$p_1^* = \frac{\dfrac{cb}{0{,}5\, EI} - \dfrac{cb}{EI}}{\dfrac{1}{0{,}5\, EI}}\, y^* = 0{,}5\, cby^* = \frac{Q}{0{,}841\, L}\, e^{-\xi_0} (\cos \xi_0 + \sin \xi_0).$$

Ezt szorozva az $x = 0$ keresztmetszet $m(x)$ nyomatéki hatásábrájával és integrálva $-\infty$ és $+\infty$ közt kapjuk az első kiegészítő nyomatékot

$$M_1^*(o) = \int_0^\infty p_1^* m(x)\,dx = \int_0^\infty p_1^* m(x)\,dx =$$

$$= \frac{Q}{0{,}841\,L}\,\frac{0{,}841\,L}{4}\,2\int_0^\infty e^{-\xi_0}(\cos\xi_0 + \sin\xi_0)\,e^{-\xi_0}(\cos\xi_0 - \sin\xi_0)\,dx =$$

$$= \frac{Q}{8}\int_0^\infty e^{-2\xi_0}(\cos^2\xi_0 - \sin^2\xi_0)\,0{,}841\,L d\xi_0 = 0{,}841\,\frac{QL}{8}\int_0^\infty e^{-2\xi_0}(\cos^2\xi_0 -$$

$$- \sin^2\xi_0)\,d\xi_0 = 0{,}841\,\frac{QL}{32}\left[e^{-2\xi_0}(-\cos^2\xi_0 + 2\sin\xi_0\cos\xi_0 +\right.$$

$$\left. + \sin^2\xi_0)\right]_0^\infty = 0{,}841\,\frac{QL}{32}.$$

A nyomaték második közelítése

$$M(o) = 0{,}841\,\frac{QL}{4} = 0{,}841\,\frac{QL}{4}\,\frac{1}{8} = 0{,}841\left(1 + \frac{1}{8}\right)\frac{QL}{4} = 0{,}966\,\frac{QL}{4}$$

már csupán 3,4%-os hibát tartalmaz.

6. Kéttámaszú változó szelvényű merevítőtartós függőhidak hatásábráinak előállítása

6,1. Meghatározások és jelölések

Terheletlen híd alatt olyan teherrel terhelt függőhidat értünk, melynél a merevítőtartóban belső erő nem keletkezik (két egymás melletti függesztőrúd közti szakasz önsúlyából keletkező hatás elhanyagolásával). Ekkor a kábel egyedül visel minden terhet. Ilyen általában az önsúllyal terhelt függőhíd.

Terhelt híd alatt olyan függőhidat értünk, melynél a merevítő tartóban is van belső erő.

Esetleges teher alatt olyan terhet és hatást értünk, mely a merevítő tartóban belső erőt ébreszt (hasznos teher, önsúly egy része, hőmérséklet hatása).

Kábelerő alatt a terheletlen híd kábelében fellépő húzóerő vízszintes vetületét értjük.

Kábelerő növekmény az esetleges teher hatására a kábelben keletkező húzóerő növekmény vízszintes vetülete.

Az alkalmazott főbb jelölések a következők:

H_g = a kábelerő
H = a kábelerő növekmény
H_r = rögzített kábelerő
H^* = számított kábelerő
H_t = hőmérsékletváltozás okozta kábelerő
$M_g(x)$ = önsúly okozta nyomaték a fel nem függesztett tartón (többtámaszú tartók esetében a támaszponti nyomaték ugyanakkora, mint a felfüggesztett tartón)
$M_p(x)$ = hasznos teher okozta nyomaték a fel nem függesztett tartón
$M(x)$ = a merevítő tartóban fellépő hajlítónyomaték
g = megoszló önsúly teher
p = megoszló esetleges teher
η = a merevítő tartó lehajlása az esetleges teher hatására
y = a kábel ordinátája a terheletlen hídon
φ = a kábel érintőjének irányszöge
$m_p(x; z)$ = a terheléstől közvetlenül függő hatásábra rész (lásd 6,3 pontot)
$m_q(x)$ = az $y'' \cdot 1^t$ megoszló teher hatására keletkező nyomaték
$m_m(x)$ = egységnyi támaszponti nyomaték hatására fellépő nyomaték
$\eta_q(x)$ = $y'' \cdot 1^t$ megoszló teher hatására a lehajlás
$\eta_H(x)$ = a kábelerő növekmény hatásábra
$v(x; z)$ = nyíróerő hatásábra, ill. ábra (lásd m-nél a lábindexet)
$\eta(x; z)$ = lehajlási hatásábra, ill. ábra (lásd m-nél a lábindexet)
corr = lábindex a korrigált értékre utal
I; $I(x)$ = a merevítőtartó tehetetlenségi nyomatéka
I_0 = a helyettesítő tartó tehetetlenségi nyomatéka
F_c = a kábel keresztmetszeti területe
E = a merevítő tartó rugalmassági tényezője
E_c = a kábel rugalmassági tényezője

$$k = \sqrt{\frac{H_r}{EI}}$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{H_r}{EI_0}}$$

ω = hőkiterjedési együttható
x = a keresztmetszet abszcisszája
z = a P teher abszcisszája
l = a híd nyílása

6,2. Függőhidak lehajlási elmélete

A statikai számításokat általában az eredeti tartóra vonatkozó alakon végzik el, vagyis a terhelés hatására bekövetkező alakváltozásnak a belső erőjátékra gyakorolt hatását, mint igen kis mennyiséget elhanyagolják. Ez az ún. *rugalmas elmélet.* Az első merevítőtartós függőhidakat is ennek alapján méretezték, mint pl. nálunk a régi Erzsébet-hidat.

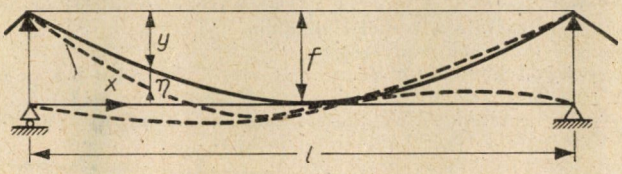
A függőhíd bizonyos szempontból analóg módon viselkedik, mint a húzott rúd, de itt az alakváltozás okozta nyomaték már nem elhanyagolható. Ezért függőhidak analizálásánál az alakváltozás hatását is figyelembe kell venni. Ez az ún. *lehajlási,* vagy más elnevezéssel *másodrendű elmélet.*

A lehajlási elméletet először MÜLLER—BRESLAU tárgyalta 1881-ben [4] és hatalmas irodalom igyekszik elősegíteni gyakorlati alkalmazását (pl. [5]).

Az első függőhíd, melyet ezen elmélet alapján terveztek és építettek meg a new-yorki Manhattan híd 1470 láb (448 m) középnyílással [9].

A Müller—Breslau-féle elmélet a levezetés alkalmazásával több közelítő feltevéssel él és az eredeti elmélet már bizonyos korrekciókon ment át. A gyakorlati tervezés általában mégis az eredeti elméletet használja fel, mert az elméletben elhanyagolt hatásoknál nagyobb jelentőségű tényezőt, a merevítőtartó merevségének (inertia nyomaték) változását is igen körülményes figyelembe venni [7], [8], [10].

Az alábbiakban egy fokozatosan közelítő módszert mutatunk be, melynek segítségével a merevítőtartó merevségének változása figyelembe vehető.



4. ábra

Hasonlóképp előnyösen alkalmazható a módszer abban az esetben is, ha megelőző számítás alapján nyert belső erők miatt az eredeti szelvényt módosítani kell.

A módszert a Müller—Breslau-féle elméletre alkalmazzuk, azonban más elmélet esetére is alkalmazható.

MÜLLER—BRESLAU levezetésében abból a meggondolásból indul ki, hogy önsúly hatására a merevítőtartóban nem keletkezik igénybevétel, így az önsúly nyomatékát a kábel viseli (4. ábra).

Az önsúly okozta nyomaték x helyen

$$M_g(x) = -\int\int g dx dx .$$

Az önsúly hatására keletkező H_g kábelerő nyomatéka tart ezzel egyensúlyt. Így ha y a kábel ordinátája

$$H_g y = M_g(x). \tag{6,21}$$

A p terhelés

$$M_p(x) = -\int\int p dx dx \tag{6,22}$$

nyomatékot ébreszt. Az $M_g(x)$ és $M_p(x)$ nyomatékkal egyensúlyt tart a merevítőtartóban fellépő $M(x)$ hajlítónyomaték és a H kábelerő növekménnyel növelt $(H_g + H)$ kábelerő nyomatéka. Ez azonban most nem y, hanem az η függőleges elmozdulás folytán $(y + \eta)$ karon működik. Így

$$M(x) + (H_g + H)(y + \eta) = M_g(x) + M_p(x). \tag{6,23}$$

(6,23)-ból (6,21)-et levonva, rendezve és (6,22)-t felhasználva az

$$M(x) + (H_g + H)\eta = -\iint p\,dxdx - Hy \tag{6,24}$$

egyenlőséget kapjuk, ami kétszer differenciálva és az

$$EI\,\eta'' = -M(x)$$

összefüggés felhasználásával az

$$M''(x) - \frac{H_g + H}{EI} M(x) = -p - Hg'' \tag{6,25}$$

alapdifferenciálegyenletre vezet.

Az alapdifferenciálegyenletben a H kábelerő növekmény az $M(x)$ nyomatéktól függ, s ezért az nem lineáris, hanem az ún. szemilineáris differenciálegyenlet. Így az $M(x)$ sem lesz arányos p-vel, tehát a szuperpozitio elve nem érvényes. Ennek következtében a mérnöki gyakorlatban a szokásos számítási eljárások nem alkalmazhatók.

A számításokban a $(H_g + H)$ megnövelt kábelerőt ismertnek tételezik fel és erre az értékre oldják meg a (6,25) alatti alapdifferenciálegyenletet. Az alap differenciálegyenlet általában zárt alakban csak állandó szelvény esetére oldható meg.

Végül le kell ellenőrizni az alábbiakban levezetett ellenőrző képlettel, hogy helyes-e a felvett H kábelerő növekmény.

Esetleges teher (p teher és hőmérsékletváltozás) hatására a kábel alakváltozást szenved és a kábelerő H_g-ről $(H_g + H)$ értékre növekszik. Ez alatt a kábelerő átlagos értéke $\left(H_g + \frac{H}{2}\right)$. A függesztőrudak által a kábelre átadott terhelés g^*-ról $(g^* + p^*)$ értékre növekszik meg. Ennek átlagos értéke $\left(g^* + \frac{p^*}{2}\right)$, mely terhelés okozta külső munka egyezik a kábelerő belső munkájával.

A külső munka az összes nyílásban

$$L_K = \Sigma \int_0^l \left(g^* + \frac{p^*}{2}\right)\eta\,dx.$$

Azonban a kábelre érvényes a

$$g^* + \frac{p^*}{2} = -\left(H_g + \frac{H}{2}\right)\frac{d^2}{dx^2}(y + \eta) \sim -\left(H_g + \frac{H}{2}\right)y''$$

összefüggés, így

$$L_K = -\left(H_g + \frac{H}{2}\right) \sum \int_0^l y'' \eta \, dx .$$

A kábel ds elemi hosszán végzett belső munka

$$dL_b = N \Delta ds ,$$

ahol N az átlagos normálerő, Δds pedig a ds elemi hossz hosszváltozása. De

$$ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$$

$$N = \frac{H_g + \frac{H}{2}}{\cos \varphi}$$

$$\Delta ds = \frac{H \, ds}{E_c \, F_c \cos \varphi} + \omega t \, ds .$$

Így

$$dL_b = \left(H_g + \frac{H}{2}\right)\left(\frac{H}{E_c \, F_c \cos^3 \varphi} + \frac{\omega t}{\cos^2 \omega}\right) dx$$

és ha az

$$L_s = \sum \int_0^l \frac{dx}{\cos^3 \varphi} \tag{6,26}$$

és

$$L_t = \sum \int_0^l \frac{dx}{\cos^2 \varphi} \tag{6,27}$$

jelöléseket bevezetjük, a kábel teljes hosszán végzett belső munka

$$L_b = \left(H_g + \frac{H}{2}\right)\left(\frac{H L_s}{E_c \, F_c} + \omega t \, L_t\right).$$

Mivel $L_k = L_b$, a kábelerő növekmény felvett értékét ellenőrző képlet

$$\sum \int_0^l y'' \eta \, dx + \frac{H L_s}{E_c F_c} + \omega t \, L_t = 0 . \tag{6,28}$$

6,3. A hatásábra eljárás

A (6,25) alatti összefüggés ún. szemilineáris differenciálegyenlet, mert a baloldalon $M(x)$ tényezőjében a H kábelerő növekmény (6,26) szerint η-nek és az $EI\eta'' = -M(x)$ összefüggés alapján magának $M(x)$-nek függvénye. Ha a baloldalon szereplő $(H_g + H)$ mennyiséget rögzítjük, úgy a baloldalon állandó

$$H_r = (H_g + H) \tag{6,31}$$

rögzített kábelerő szerepel. Ekkor a (6,25) alatti differenciálegyenlet lineáris differenciál egyenlet, aminél már a szuperpozitio elve alkalmazható. A fentiek után az

$$M''(x) - k^2 M(x) = -p - Hy'' \tag{6,32}$$

$$k^2 = \frac{H_r}{EI} \tag{6,33}$$

differenciálegyenlet hatásfüggvénye (GREEN-függvény) vagy mérnöki szóhasználattal a rögzített kábelerőhöz tartozó hatásábrák már elvileg megszerkeszthetők.

Hatásábra alapján pedig a vizsgált keresztmetszethez tartozó hatás megkapható, ha a jobboldalt a hozzátartozó hatásábra ordinátákkal szorozzuk és azt összegezzük. Ha a jobboldal értéke egy abscisszánál egység és máshol zérus, úgy annak egy választott keresztmetszetben előidézett hatása a keresztmetszethez tartozó hatásábrának az abscisszához tartozó ordinátájával egyenlő.

A belső erő két részre bontható fel. Az egyik *a külső terheléstől közvetlenül függő belső erő,* vagyis az a tag, ami a (6,32) egyenlet alapján számítható, ha a jobboldal $-p$. Ekkor a differenciálegyenlet

$$M_p''(x) - k^2 M_p(x) = -p. \tag{6.32a}$$

A másik rész *a külső terheléstől közvetve függő belső erő,* ekkor a differenciálegyenlet jobb oldala $-Hy''$. Itt a terheléstől a H erő függ. E részre vonatkozó differenciálegyenlet

$$M_q''(x) - k^2 M_q(x) = -Hy'' \tag{6,32b}$$

(6,32) alapján azonban a teljes nyomaték

$$M(x) = M_p(x) + M_q(x). \tag{6,32c}$$

Tételezzük fel, hogy előállítottuk a (6,32*a*) egyenlet baloldalához tartozó $m_p(x, z)$ hatásábrákat, ahol a keresztmetszet x, a terhelés abscisszája z.

Ha az x keresztmetszeteket elég sűrűn vesszük fel, az $m_p(x, z)$ hatásábráknak $-Hy''$-vel való terhelésével megkapjuk a $Hm_q(x)$ nyomatéki ábrát. A gyakorlatban általában a (6,32b) egyenletet oldják meg a $-Hy''$ zavaró tagra.

Ha a kábelt középen elvágva képzeljük el és ott a H_r erőt ΔH értékkel növeljük, akkor itt $\Delta\mu$ relatív eltolódás következik be. Ez nem más, mint a kábel hosszváltozásának vízszintes vetülete.

A ΔH erő következtében a merevítőtartóban keletkező nyomaték azonban $\Delta H\, m_q(x)$ s ebből a $\Delta H \eta_q(x)$ lehajlás már számítható. (6,28) szerint a $\Delta H \Delta\mu$ hosszváltozás

$$\Delta H\, \Delta\mu = \sum \int_0^l y''\, \Delta H \eta_q(x)\, dx + \frac{\Delta H L_s}{E_c F_c}\,.$$

MAXWELL tétele alapján a H hatásábra előállítható úgy is, mint a merevítőtartó függőleges elmozdulása az elvágottnak képzelt kábelben létesített egységnyi relatív hosszváltozás következtében. Vagyis ha egységnyi relatív elmozdulást iktatunk be, a lehajlás $\overline{\eta}_{\Delta\mu=1}(x)$, úgy a H erő hatásábrája

$$\eta_H(z) = \overline{\eta}_{\Delta\mu=1}(x) \qquad (x = z)\,,$$

ahol $H\Delta\mu$ a relatív hosszváltozás, az elmozdulás $\Delta H \eta_q(x)$ s így a hatásábra

$$\eta_H(z) = \frac{\Delta H \eta_q(x)}{\Delta H \Delta\mu} = \frac{\eta_q(x)}{\sum \int_0^l y''\, \eta_q(x)\, dx + \dfrac{L_s}{E_c F_c}} \quad ; \quad (x = z). \qquad (6{,}34)$$

A z helyen terhelő P erő hatására az x helyen keletkező nyomaték (6,32a) alapján

$$M(x) = P m_p(x;\, z)$$

(6,34) alapján a H erő

$$H = P\eta_H(z)$$

(6,32b) alapján az $M_q(x)$ nyomaték

$$M_q(x) = H m_q(x) = P m_q(x) \eta_H(z)$$

és (6,32c) alapján a merevítőtartóban keletkező nyomaték.

$$M(x) = P[m_p(x;\, z) + m_q(x)\eta_H(z)]$$

s így a keresett nyomatéki hatásábra

$$m(x;\, z) = m_p(x;\, z) + m_q(x)\eta_H(z). \qquad (6{,}35)$$

Hasonlóképpen a nyírőerő hatásábra

$$v(x;\ z) = v_p(x;\ z) + v_q(x)\,\eta_H(z) \tag{6,36}$$

és a lehajlási hatásábra

$$\eta(x;\ z) = \eta_p(x;\ z) + \eta_q(x)\,\eta_H(z). \tag{6,37}$$

6,4. A hatásábrák felhasználása

A hatásábrák alapján az igénybevételek, illetve alakváltozások meghatározása már elvégezhető. Például a merevítőtartó nyomatéka az alábbiak szerint határozható meg.

Különböző állandónak feltételezett

$$(H_g + H_1);\ (H_g + H_2);\ \ldots;\ (H_g + H_n)$$

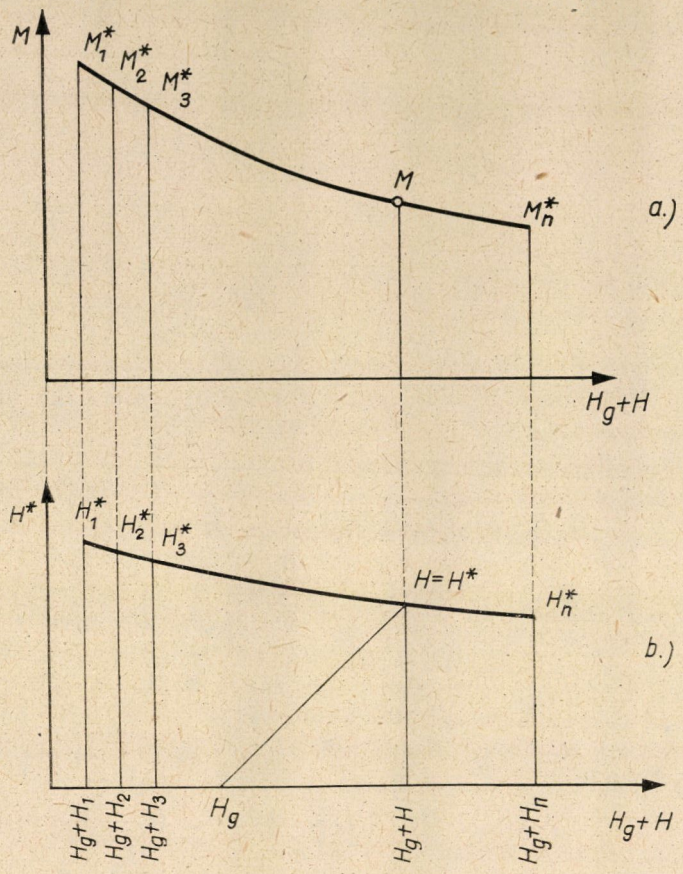
kábelerőhöz meghatározva a vizsgált x keresztmetszet nyomatéki hatásábráját az M_1, M_2, ..., M_n mértékadó nyomatékokat, és az azokat okozó h_1, h_2,... h_n mértékadó terhelt szakaszhosszakat kaphatjuk. Megjegyezzük, hogy az M_1, M_2,..., M_n mértékadó nyomatékokban a fiktív hőmérsékleti terhelésen kívül ($= H_t y''$) az állandó teher azon részének hatása is bennfoglaltatik, amit a kábel és a merevítőtartó együttesen visel.

Különböző felvett $(H_g + H_1)$, $(H_g + H_2)$,..., $(H_g + H_n)$ értékek alapján valamely x helyre vonatkozólag kiszámított M_1, M_2,..., M_n mértékadó nyomatékokat felrakjuk $(H_g + H)$ függvényében (5*a* ábra).

A fenti mértékadó nyomatékokat okozó h_1,... h_n terhelt szakaszhosszakkal a megfelelő $(H_g + H_1)$,... $(H_g + H_n)$ kábelerőhöz tartozó $\eta_H(z)$ hatásábrákat terhelve kapjuk a H_1^*, H_2^*,..., H_n^* kábelerő növekményeket. Ezek magukban foglalják az állandó teher növekményt és a hőmérsékletváltozás hatását is.

A H^* számított kábelerő növekményeket felrakva a végpontok összekötése adja a H^* görbét $(H_g + H)$ függvényében. Az 5*b* ábrán ábrázoltuk a $(H_g + H_1)$,... $(H_g + H_n)$ függvényeképpen a fenti kábelerő növekményt, vagyis arra az esetre, amikor a figyelembe vett terhelés a feltételezett kábelerő nyomaték szempontjából mértékadó. Ezek közül az a H_i kábelerő érvényes, amelynél $H_i = H_i^*$. Ezt a H_i kábelerőt megkapjuk, ha az abscissza tengely H_g pontjából 45°-os egyenest húzunk, mely a $H = H^*$ összefüggést ábrázolja. Ezt az egyenest metszésbe hozzuk a felrakott H^* kábelerő függvénnyel.

A tényleges H_i kábelerőhöz tartozó M_i nyomaték adja a kérdéses keresztmetszetben fellépő mértékadó nyomatékot (5*a* ábra).



5. ábra

A hatásábra alapján való számolás esetén különböző felvett $(H_g + H)$ értékek alapján meghatározva az M és H értékeket a közbenső szakaszok értékét interpoláljuk.

Az interpolálás lineáris, ha két felvett H értékre számítunk hatásábrát, ha háromra végezünk számítást az interpolálás másodfokú lehet [1].

6,5. A fokozatosan közelítő módszer alkalmazása

Tételezzük fel, hogy az állandó szelvényű függőhíd hatásábráit már meghatároztuk [5]. Változó szelvényű merevítőtartó belső erői az állandó szelvényű helyettesítő tartó hatásábrái alapján a tárgyalt fokozatosan közelítő módszerrel meghatározhatók. Terheljen a z helyen $P = 1^t$ teher. Az $m_p(x; z)$ hatásábrák terhelésével az $M_0(x)$ nyomatéki ábra (2,4) és (2,5) alapján előállítható.

Az első kiegészítő terhelés

$$p_1(x) = -M_0^*(x)\,(k_0^2 - k^2), \tag{6,51}$$

amivel leterhelve az $m_p(x, z)$ hatásábrákat meghatározzuk az $M_1(x)$ első kiegészítő nyomatékot. A második kiegészítő terheléssel, vagyis

$$p_2(x) = -M_1^*(x)\,(k_0^2 - k^2) \tag{6,51a}$$

megoszló teherrel terhelve az $m_p(x, z)$ hatásábrákat, az $M_2(x)$ kiegészítő nyomatékot kapjuk, és így tovább. Ha k_0 a $k(x)$-nek jó átlaga és attól nem nagyon tér el, az első kiegészítő nyomaték meghatározása már elegendő.

A helyes nyomatéki ábra tehát

$$M_p(x) = M_0^*(x) + M_1^*(x) + \ldots$$

Ez megadja a korrigált hatásábra ordinátákat a z helyen. Az eredeti hatásábra ordináta $m_p(x; z) = M_0(x)$ a $\Delta m_p(x; z)$ korrekció tehát

$$\Delta m_p(x;\, z) = M_1^*(x) + \ldots \tag{6,51b}$$

és a korrigált hatásábra

$$m_{p\,\mathrm{corr}}(x;\, z) = m_p(x;\, z) + \Delta m_p(x;\, z). \tag{6,51c}$$

Az $m_q(x)$ nyomatéki ábra előállítható úgy is, hogy az $m_p(x; z)$ hatásábrákat y''-el terheljük, vagyis

$$m_q(x) = \int y''\, m_p\,(x;\, z)\, dz.$$

A korrigált nyomatéki ábra

$$m_{q\,\mathrm{corr}}(x) = \int y''\, m_{p\,\mathrm{corr}}(x;\, z)\, dz = \int y''\,[m_p(x;\, z) + \Delta m_p(x;\, z)]\, dz =$$

$$= \int y''\, m_p(x;\, z)\, dz + \int y''\, \Delta m_p(x;\, z)\, dz = m_q(x) + \int y''\, \Delta m_p(x;\, z)\, dz,$$

vagyis

$$m_{q\,\mathrm{corr}}(x) = m_q(x) + \Delta m_q(x)\,, \tag{6,52a}$$

ahol az $m_q(x)$ nyomatéki ábrához tartozó javítás

$$\Delta m_q(x) = \int y''\, \Delta m_p(x;\, z)\, dz\,, \tag{6,52b}$$

amit úgy kapunk, hogy a $\Delta m_p(x; z)$ javítást terheljük y''-el.

A javított $\eta_{q\,\mathrm{corr}}(x)$ lehajlási ábra (6,24) és (6,32.b) alapján

$$\eta_{q\mathrm{corr}}(x) = -\frac{y - m_{q\mathrm{corr}}(x)}{H_r}. \tag{6,53a}$$

Itt y a kábel tényleges ordinátája, mert az elégíti ki az $x=0$, $y=0$ és $x=l$, $y=0$ határ feltételeket. Így

$$\eta_{q\,\mathrm{corr}}(x) = -\frac{y - m_q(x)}{H_r} + \frac{\Delta m_q(x)}{H_r}.$$

Vagyis az $\eta_q(x)$ lehajlási ábra javítása

$$\Delta\eta_q(x) = -\frac{\Delta m_q(x)}{H_r} \tag{6,53b}$$

és a javított érték

$$\eta_{q\,\mathrm{corr}}(x) = \eta_q(x) + \Delta\eta_q(x). \tag{6,53c}$$

H erő hatásábrához szükségünk van a

$$T = \sum \int_0^l y''\,\eta_q(x)\,dx + \frac{L_s}{E_c F_c}$$

mennyiségre. E mennyiségben a korrekció (6,34) alapján

$$\Delta T = \sum \int_0^l y''\,\Delta\eta_q(x)\,dx = \frac{1}{H_r}\sum \int_0^l \Delta m_q(x)\,y''\,dx. \tag{6,54a}$$

S így a kábelerő hatásábra javított értéke

$$\eta_{H\mathrm{corr}}(z) = \frac{\eta_q(x) + \Delta\eta_q(z)}{\sum \int_0^l y''\,\eta_q(x)\,dx + \frac{L_s}{E_c F_c} + \frac{1}{H_r}\sum \int_0^l y''\,m_q(x)\,dx}. \tag{6,54b}$$

Végül a nyomatéki hatásábra keresett javított értéke

$$m_{\mathrm{corr}}(x;\,z) = m_{p\mathrm{corr}}(x;\,z) + m_{q\mathrm{corr}}(x)\,\eta_{H\mathrm{corr}}(z). \tag{6,55}$$

Hasonlóképp a nyíróerő hatásábra

$$v_{\mathrm{corr}}(x;\,z) = v_{p\,\mathrm{corr}}(x;\,z) + v_{q\,\mathrm{corr}}(x)\,\eta_{H\,\mathrm{corr}}(z). \tag{6,56}$$

A $v_{p\mathrm{corr}}(x; z)$ külön meghatározható a $v_p(x; z)$ hatásárbák leterhelése alapján. Közelítő értéke azonban az alábbi módszerrel is előállítható.

A nyíróerő adott terhelésnél

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}.$$

Ha a $P = 1^t$ teher z helyen hat, a nyíróerő, ami egyben a különböző x keresztmetszetekhez tartozó hatásábrák z abscisszájához tartozó ordinátái

$$v_p(x; z) = v_p(x) = \frac{dM_p(x)}{dx} = \frac{dm_x(x; z)}{dx}.$$

A javított hatásábra ordináták

$$v_{p\,\mathrm{corr}}(x; z) = \frac{dm_{p\,\mathrm{corr}}(x; z)}{dx} = \frac{dm_p(x; z)}{dx} + \frac{d\Delta m_p(x; z)}{dx}$$

s innen

$$v_{p\,\mathrm{corr}}(x; z) = v_p(x; z) + \frac{d\Delta m_p(x; z)}{dx}. \tag{6,56a}$$

S így a $\Delta v_p(x, z)$ javítás a $\Delta m_p(x. z)$ javításnak x szerint vett differenciálhányadosa, ami — ha az x értékeket elég sűrűn vesszük fel — differencia hányadosával helyettesíthető.

Most már előállítható a $v_{q\,\mathrm{corr}}(x)$ érték is. A $\Delta v_q(x)$ előállítható úgy is, hogy a $\Delta v_p(x; z)$ hatásábra javítást y''-vel terheljük.

$$v_{q\mathrm{corr}}(x) = v_q(x) + \int_0^l y'' v_p(x; z)\, dz.$$

A lehajlási hatásábra

$$\eta_{\mathrm{corr}}(x; z) = \eta_{p\mathrm{corr}}(x; z) + \eta_{q\,\mathrm{corr}}(x)\,\eta_{H\mathrm{corr}}(z), \tag{6,57a}$$

ahol (6,24) és (6,53a) felhasználásával

$$\eta_{p\,\mathrm{corr}}(x; z) = -\frac{M_p(x; z) - m_{p\,\mathrm{corr}}(x; z)}{H_r} = -$$

$$-\frac{M_p(x; z) - m_p(x; z)}{H_r} + \frac{\Delta m_p(x; z)}{H_r}.$$

Ennek alapján

$$\eta_{p\,\mathrm{corr}}(x\,;\,z) = \eta_p(x\,;\,z) + \Delta\, m_p(x\,;\,z) \tag{6,57b}$$

$$\eta_{q\mathrm{corr}}(x) = \eta_q(x) + \Delta\eta_q(x) \tag{6,57c}$$

és

$$\Delta\eta_p(x\,;z) = \frac{\Delta m_p(x\,;\,z)}{H_r} \tag{6,57d}$$

$$\Delta\eta_q(x) = \frac{\Delta m_q(x)}{H_r}\,. \tag{6,57e}$$

A függőhíd számításához a hatásábrák egyszerű számítasa céljára dimenzionélküli táblázatokat és grafikonokat dolgoztak ki, különböző szerzők (pl. a [6] alatti irodalom). Ezek alapján állandó szelvényre a hatásábrák igen egyszerűen meghatározhatók.

IRODALOM

1. SZIDAROVSZKY, J.: A Practical Solution for Stiffened Suspension Bridges of Variable Inertia Moment and its Application to Influence-Line Analysis (Acta Technica Tom. XIX. 1958.)
2. SCHWANK, F.: Randwertprobleme und andere Anwendungsgebiete der höheren Analysis. (Teubner, 1951, Leipzig)
3. WINKLER: Der Eisenbahn (Prága, 1871)
4. MÜLLER—BRESLAU: Theorie der durch einen Balken versteiften Kette (Zeitschr. d. Arch-u. Ing. Ver. zu Hannover, 1881 és 1883)
5. PEERY, D.: An Influence Line Analysis for Suspension Bridges (proc ASCE, 1954. Dec. No 558.)
6. SELBERG, A.: Design of Suspension Bridges (Det Kgl Norske Videnscabers Selbskab Skrifter, 1945, Trondheim)
7. SZIDAROVSZKY, J.: Függőhidak újabb elmélete a lehajlás figyelembevételével (MTA Műsz. Tud. Oszt. Közleményei XXV. kötet, 1960)
8. SZIDAROVSZKY, J.: Die Beanspruchung von Stäben mit verendlichen Querschnitt auf Biegung bei gleichzeitigen Druck (Acta Technica, Tom. XXXIII., 1960.)
9. JOHNSON, I. B., BRYAN, C. W. and TURNEAURE, F. E.: The Theory and Practice of Modern Framed Structures (New-York, 1929)
10. SZIDAROVSZKY, J.: Corrected Defleciton Theory of Suspension Bridges. (ASCE Proc. Journal ST 11, 1960. No 2638)

ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmány első része egy, a statikában szokásos differenciálegyenlet típus megoldására fokozatosan közelítő megoldást mutat be, majd kimutatja, hogy ennek konvergenciája jobb a Vianello-félénél. A módszer használatát bemutatja az egyidejűen hajlított és nyomott, illetve húzott rúdon, valamint a rugalmas ágazaton felfekvő tartóra. Végül pedig kéttámaszú függőhíd belső erőinek meghatározására. valamint a hatásábrák meghatározására alkalmazza az eljárást.

A TORZIÓSLENGÉS KARAKTERISZTIKUS EGYENLETÉVEL KAPCSOLATOS TÁBLÁZATOK SZERKEZETE

Dr. BALOGH ARTÚR
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1960. július 5-én]

Bevezetés

Torziólengésnél az önlengésszámok kiszámításához szükséges karakterisztikus egyenlet alakját az MTA Műszaki Tudományok Osztálya Közleményei XV. kötet 1—4. számában ismertettük gyakorlati numerikus példákkal. Ezt a számítást a ma igen kedvelt táblázatok segítségével fogjuk egyszerűsíteni, amelyeknek előnye az áttekinthetőségen kívül az is, hogy e táblázatokban, illetőleg ábrákban jelentkező szabályszerűségek következtében az esetleges tévedések olyképpen jelentkeznek, hogy azok azonnal korrigálhatók is.

Különösen kedvező e táblázatok és ábrák használata akkor, ha azokat a gyakorlati eseteket vesszük figyelembe, amelyeknél a motorhengerekhez tartozó tömegeken kívül még 1, illetve 2 független tömeg is előfordul.

E táblázatoknál, ill. ábráknál felhasználjuk a PASCAL-féle háromszögeket némi módosítással.

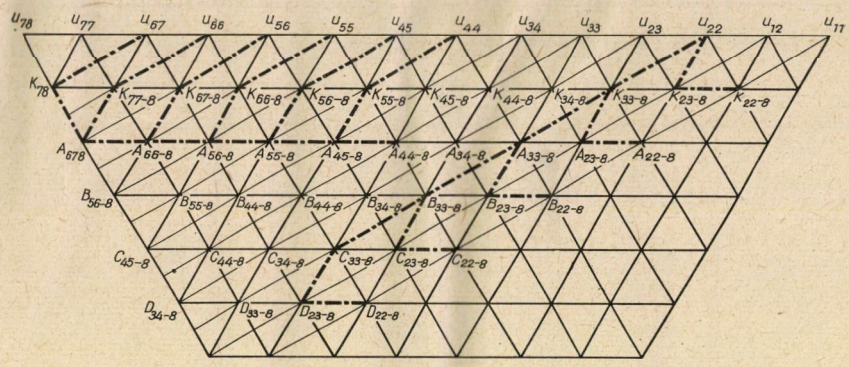
A táblázatok, illetőleg ábrák szerkezete

A táblázatokat, ill. ábrákat 8 tömegű rendszer esetére fogjuk bemutatni, és felhasználjuk az MTA Műszaki Tudományok Osztálya Közleményei XV. kötet 1—4. számában található eredményeket.

Felírtuk a 8 tömegű rendszer karakterisztikus egyenletét (1) és (2) alatt találjuk az egyenletben felvett jelölésekhez tartozó kifejezéseket. E jelöléseknél k betűvel jellemzett kifejezésekből indulunk ki, majd áttérünk ennek felhasználásával a nagybetűkkel jelölt kifejezések ismertetésére. Mint látható, a nagybetűk száma 4-gyel kevesebb, mint a tömegek száma.

Az 1. ábrában ezeket a (2) alatti kifejezéseket a PASCAL-féle háromszögbe írtuk be, ahol az ábrán látható segédegyeneseket húztuk.

Az ábra legfelső sorában vannak az u értékek, ez alatt vannak k, majd ezt követik az A, B, C és D-vel jelölt értékek.



1. ábra

A táblázat szerkezetileg egyszerű és áttekinthető, úgyhogy ez további magyarázatra nem szorul. A leolvasáshoz példaképpen bejelöltünk egy esetet. A leolvasás eredménye a következő:

E példában kiindulunk u_{22} pontból és a következő eredményt olvassuk le:

$$\begin{aligned} w^{14} - w^{12} \cdot k_{11-8} &+ w^{10}(u_{11} \cdot k_{22-8} + u_{12} \cdot k_{23-8} + A_{22-8}) \\ &- w^{8}(u_{11} \cdot A_{23-8} + u_{12} \cdot A_{23-8} + u_{22} \cdot B_{22-8}) + \\ &+ w^{6}(u_{11} \cdot B_{22-8} + u_{12} \cdot B_{23-8} + C_{22-8}) - \\ &- w^{4}(u_{11} \cdot C_{22-8} + u_{12} \cdot C_{23-8} + D_{22-8}) + \\ &+ w^{2}(u_{11} \cdot D_{22-8} + u_{12} \cdot D_{23-8} + u_{22} \cdot D_{33-8} + u_{23} \cdot D_{34-8}) \\ &- w^{0}(u_{11}(u_{22} \cdot D_{33-8} + u_{23} \cdot D_{34-8}) + u_{12} \cdot u_{23} \cdot D_{34-8} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} k_{78} &= u_{78} \\ k_{778} &= k_{78} + u_{77} \\ k_{678} &= k_{778} + u_{67} \\ k_{66-8} &= k_{678} + u_{66} \\ k_{56-8} &= k_{66-8} + u_{56} \\ k_{55-8} &= k_{56-8} + u_{55} \\ k_{45-8} &= k_{55-8} + u_{45} \\ k_{44-8} &= k_{45-8} + u_{44} \\ k_{34-8} &= k_{44-8} + u_{34} \\ k_{33-8} &= k_{34-8} + u_{33} \\ k_{23-8} &= k_{33-8} + u_{23} \\ k_{22-8} &= k_{23-8} + u_{22} \\ k_{12-8} &= k_{22-8} + u_{12} \\ k_{11-8} &= k_{11-8} + u_{11} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} A_{678} &= k_{78} \cdot u_{67} \\ A_{66-8} &= A_{678} + k_{778} \cdot u_{66} \\ A_{56-8} &= A_{66-8} + k_{678} \cdot u_{56} \\ A_{55-8} &= A_{56-8} + k_{66-8} \cdot u_{55} \\ A_{45-8} &= A_{55-8} + k_{56-8} \cdot u_{45} \\ A_{44-8} &= A_{45-8} + k_{55-8} \cdot u_{44} \\ A_{34-8} &= A_{44-8} + k_{45-8} \cdot u_{34} \\ A_{33-8} &= A_{34-8} + k_{44-8} \cdot u_{33} \\ A_{23-8} &= A_{33-8} + k_{34-8} \cdot u_{23} \\ A_{22-8} &= A_{23-8} + k_{33-8} \cdot u_{22} \\ B_{56-8} &= A_{678} \cdot u_{56} \\ B_{55-8} &= A_{66-8} \cdot u_{55} + B_{56-8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{45-8} &= B_{56-8} \cdot u_{45} \\ C_{44-8} &= B_{55-8} \cdot u_{44} + C_{45-8} \\ C_{34-8} &= B_{45-8} \cdot u_{34} + C_{44-8} \\ C_{33-8} &= B_{44-8} \cdot u_{33} + C_{34-8} \\ C_{23-8} &= B_{34-8} \cdot u_{23} + C_{33-8} \\ C_{22-8} &= B_{33-8} \cdot u_{22} + C_{23-8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{34-8} &= C_{45-8} \cdot u_{34} \\ D_{33-8} &= C_{44-8} \cdot u_{33} + D_{34-8} \\ D_{23-8} &= C_{34-8} \cdot u_{23} + D_{33-8} \\ D_{22-8} &= C_{33-8} \cdot u_{22} + D_{23-8} \end{aligned}$$

$$B_{45-8} = A_{56-8} \cdot u_{45} + B_{55-8}$$
$$B_{44-8} = A_{55-8} \cdot u_{44} + B_{45-8}$$
$$B_{34-8} = A_{45-8} \cdot u_{34} + B_{44-8}$$
$$B_{33-8} = A_{44-8} \cdot u_{33} + B_{34-8}$$
$$B_{23-8} = A_{34-8} \cdot u_{23} + B_{33-8}$$
$$B_{22-8} = A_{33-8} \cdot u_{22} + B_{23-8}$$

Jelölések:

$$u_{ik} = \frac{c_l}{I_k} = \frac{\text{merevségi tényező, kgcm}}{\text{tehetetlenségi nyomaték, kgcmsec}^2} =$$

$$\begin{aligned} k_{22-8} &= u_{22} + k_{23-8}; \\ A_{22-8} &= u_{22}\, k_{33-8} + A_{23-8}; \\ B_{22-8} &= u_{22}\, A_{33-8} + B_{23-8}; \\ C_{22-8} &= u_{22}\, B_{33-8} + C_{23-8}; \\ D_{22-8} &= u_{22}\, C_{33-8} + D_{23-9}. \end{aligned} \tag{3}$$

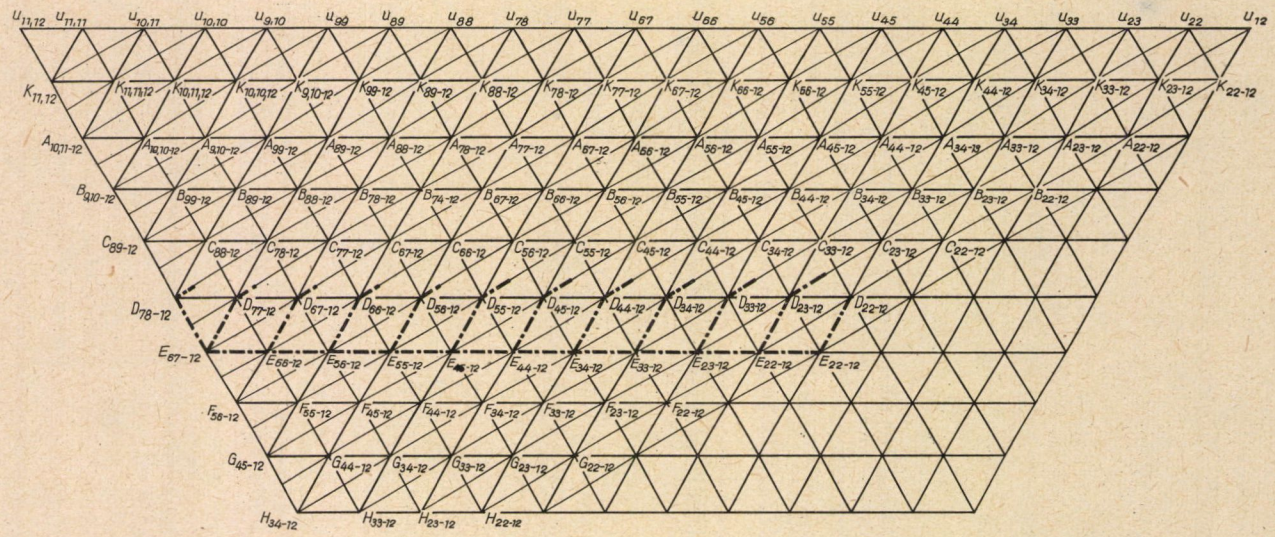
Ezeket az értékeket az u_{22}-ből kiinduló segédvonal mentén olvastuk le. Ily módon az összes nagybetűkhöz tartozó kifejezéseket azonnal felírhatjuk, és ha a felírásnál tévedés jelentkezne, azt azonnal észre lehet venni és korrigálni, mielőtt annak további kiterjedése felléphetne.

Az ilyen táblázatot, illetve ábrát minden tömegszámhoz külön-külön fel kell írni, és hogy ennek előnyeit lássuk, a 2. ábrában bemutatjuk a PASCAL-háromszög alkalmazását 12 tömegű rendszer esetére, amely szerkezetileg a már ismertetettel teljesen egyezik. Erre az esetre a karakterisztikus egyenlet alakja a következő:

$$\begin{aligned} &w^{22} - w^{20}k_{11-12} + w^{10}[u_{11}k_{22-12} + u_{12}k_{23-12} + A_{22-12}] - \\ &-w^{16}[u_{11}A_{22-12} + u_{12}A_{23-12} + B_{22-12}] + \\ &+ w^{14}[u_{11}B_{22-12} + u_{12}B_{23-12} + C_{22-12}] - \\ &- w^{12}[u_{11}C_{22-12} + u_{12}C_{23-12} + D_{22-12}] + \\ &+ w^{10}[u_{11}D_{22-12} + u_{12}D_{23-12} + E_{22-12}] - \\ &- w^{8}[u_{11}E_{22-12} + u_{12}E_{23-12} + F_{22-12}] + \\ &+ w^{6}[u_{11}F_{22-12} + u_{12}F_{23-12} + G_{22-12}] - \\ &- w_4[u_{11}G_{22-12} + u_{12}G_{23-12} + H_{22-12}] + w^2\,(u_{11}H_{22-12} + u_{12}H_{23-12} + \\ &+ u_{22}H_{33-12} + u_{23}H_{34-12}] - [u_{11}(u_{22}H_{23-12} + u_{23}H_{34-12}) + u_{12}u_{23}H_{31-12}] = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Az itt előforduló nagybetűkkel jelzett kifejezések az ábrából azonnal kiolvashatók, és példaképpen felírjuk az E-hez tartozó kifejezéseket:

$$\begin{aligned} E_{67-12} &= u_{67}\, D_{78-12} \\ E_{66-12} &= E_{67-12} + u_{66}\, D_{77-12} \\ E_{56-12} &= E_{66-12} + u_{56}\, D_{67-12}, \\ E_{55-12} &= E_{56-12} + u_{55}\, D_{66-12}, \\ E_{45-12} &= E_{55-12} + u_{45}\, D_{56-12}, \\ E_{44-12} &= E_{45-12} + u_{44}\, D_{55-12}, \\ E_{34-12} &= E_{44-12} + u_{34}\, D_{45-12}, \\ E_{33-12} &= E_{34-12} + u_{33}\, D_{44-12}, \\ E_{23-12} &= E_{33-12} + u_{23}\, D_{34-12}, \\ E_{22-12} &= E_{23-12} + u_{22}\, D_{33-12}. \end{aligned} \tag{5}$$


$u_{11,12}$ $u_{11,11}$ $u_{10,11}$ $u_{10,10}$ $u_{9,10}$ u_{99} u_{89} u_{88} u_{78} u_{77} u_{67} u_{66} u_{56} u_{55} u_{45} u_{44} u_{34} u_{33} u_{23} u_{22} u_{12}
$K_{11,12}$ $K_{11,11,12}$ $K_{10,11,12}$ $K_{10,10,12}$ $K_{9,10-12}$ K_{99-12} K_{89-12} K_{88-12} K_{78-12} K_{77-12} K_{67-12} K_{66-12} K_{56-12} K_{55-12} K_{45-12} K_{44-12} K_{34-12} K_{33-12} K_{23-12} K_{22-12}
$A_{10,11-12}$ $A_{10,10-12}$ $A_{9,10-12}$ A_{99-12} A_{89-12} A_{88-12} A_{78-12} A_{77-12} A_{67-12} A_{66-12} A_{56-12} A_{55-12} A_{45-12} A_{44-12} A_{34-12} A_{33-12} A_{23-12} A_{22-12}
$B_{9,10-12}$ B_{99-12} B_{89-12} B_{88-12} B_{78-12} B_{74-12} B_{67-12} B_{66-12} B_{56-12} B_{55-12} B_{45-12} B_{44-12} B_{34-12} B_{33-12} B_{23-12} B_{22-12}
C_{89-12} C_{88-12} C_{78-12} C_{77-12} C_{67-12} C_{66-12} C_{56-12} C_{55-12} C_{45-12} C_{44-12} C_{34-12} C_{33-12} C_{23-12} C_{22-12}
D_{78-12} D_{77-12} D_{67-12} D_{66-12} D_{56-12} D_{55-12} D_{45-12} D_{44-12} D_{34-12} D_{33-12} D_{23-12} D_{22-12}
E_{67-12} E_{66-12} E_{56-12} E_{55-12} E_{45-12} E_{44-12} E_{34-12} E_{33-12} E_{23-12} E_{22-12} E_{22-12}
F_{56-12} F_{55-12} F_{45-12} F_{44-12} F_{34-12} F_{33-12} F_{23-12} F_{22-12}
G_{45-12} G_{44-12} G_{34-12} G_{33-12} G_{23-12} G_{22-12}
H_{34-12} H_{33-12} H_{23-12} H_{22-12}

2. ábra

Teljesen hasonlóan olvashatjuk a többi nagybetűs kifejezéseket az ábrából, és ezért választottuk a gyakorlati szempontból talán a legnagyobb tömegszámot, hogy ezzel is bebizonyíthassuk e táblázatok előnyeit és fontos szerepét. Megjegyzendő, hogy a PASCAL-féle háromszög felhasználását megkönnyíti az a körülmény, hogy a segédvonalak mentén fekvő betűk indexe ugyanaz (kivéve a kiindulás értékét).

Gyakorlati alkalmazások

A gyakorlati számításokat lényegesen egyszerűsíti az a körülmény, hogy motoroknál a tehetetlenségi nyomaték és a hozzá tartozó merevségi tényező egyenlő. Emellett 1 vagy 2 független tömeget használnak, amely lehet lendkerék és generátor. Az esetek zöme ilyen szerkezetű, ami azután a számítást lényegesen egyszerűsíti.

Ezen egyszerűsítéssel ezután párhuzamosan halad a részünkről bevezetett táblázatok, illetve ábrák szerkezete és használata, és mint látni fogjuk, ilyen esetben egyetlenegy PASCAL-féle háromszög elegendő ahhoz, hogy a karakterisztikus egyenletben előforduló és nagybetűvel jelölt kifejezéseket azonnal felírhatjuk, amelyeket behelyettesítve a karakterisztikus egyenletbe, kapjuk azt az algebrai egyenletet, amelynek gyökeiből a rendszer önlengési számait ki lehet számítani.

Az (1) alatti 8 tömegű és a (4) alatti 12 tömegű rendszerhez tartozó karakterisztikus egyenletben azt találjuk, hogy ott a következő k értékek fordulnak elő:

$$k_{11-n},\ k_{22-n},\ k_{23-n}.$$

Ezeknek kiszámítása a következőképpen történik:

$$\begin{aligned} k_{23-n} &= k_{33-n} + u_{23}, \\ k_{22-n} &= k_{23-n} + u_{22}, \\ k_{12-n} &= k_{22-n} + u_{12}, \\ k_{11-n} &= k_{12-n} = u_{11}. \end{aligned} \tag{6}$$

A mondottakból következik:

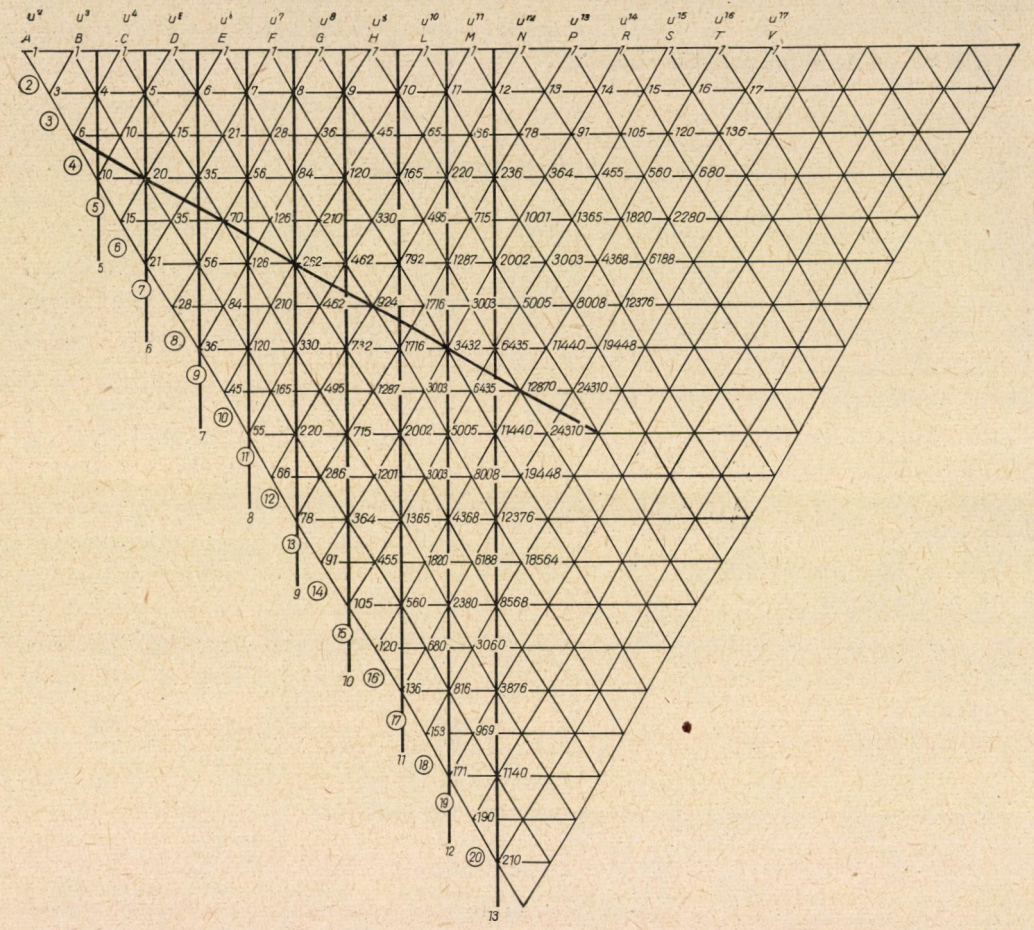
1. ha egy független tömeg van, amikoris

$$u = u_{22} = u_{23} = \ldots$$

2. két független tömeg esetén, amikoris

$$u = u_{33} = u_{34} = \ldots$$

a nagybetűkkel jelzett kifejezések nem tartalmazzák k értékeket, és így *minden tömegszámra* használható a PASCAL-féle háromszög, amelynek erre az egyszerűsített esetre való alkalmazását a 3. ábrában láthatjuk. Ebben az ábrában



3. ábra

felül a nagybetűket találjuk a hozzátartozó u hatványaival. A háromszög oldalán látható bekarikázott számok a két egymásután következő értékek különbségét adják.

Mint az ábrából látható, az egyik ferde egyenesen levő számokból a következőket egyszerű módon lehet kiszámítani; így pl. A csoport adataiból B csoportét a következőképpen számítjuk ki, mint azt egyébként az ábrában be is jelöltük:

$$1 + 3 = 4,\ 4 + 6 = 10,\ 10 + 10 = 20,\ 20 + 15 = 35,\ \text{s. í. t.}$$

Ily módon tehát az egyes egyenesekhez tartozó és nagybetűvel jelzetthez való számokat kiszámíthatjuk.

Az egyes tömegszámokhoz tartozó határszámokat függélyes egyenessel határoltuk, és az egyenesre rávezettük az erre érvényes tömegszámokat. Így pl. 9 tömegű rendszerhez tartozó legnagyobb értékek a függélyes egyenessel kijelölve a következők:

az *A)* csoportban 78, a *B)* csoportban 220, a *C)* csoportban 330, a *D)* csoportban 252 és az *E)* csoportban 84.

12 tömegű rendszerre végigvezetjük a számítást, felhasználva 3. ábrát. Az 1. esetet vesszük, amikor

$$u = u_{22} = u_{23} = \ldots,$$

tehát egy független tömeg van a rendszerben, és így csak u_{11}, u_{12} és u értékekkel számolunk.

$$k_{23-12} = 19u,\ k_{22-12} = 20u,\ k_{12-12} = u_{12} + 20u,\ k_{11-12} = u_{11} + u_{12} + 20u.$$

A 3. ábrából, figyelembe véve a 12-höz tartozó függélyes egyenest, a következőket olvassuk ki:

$$A_{22-12} = 171u^2; \quad B_{22-12} = 816u^3; \quad C_{22-12} = 2380u^4;$$
$$A_{23-12} = 153u^2; \quad B_{23-12} = 680u^3; \quad C_{23-12} = 1820u^4;$$
$$D_{22-12} = 4368u^5; \quad D_{23-12} = 3003u^5;$$
$$E_{22-12} = 5005u^6; \quad F_{22-12} = 3432u^7; \quad G_{22-12} = 1287u;^8$$
$$E_{23-12} = 3003u^6; \quad F_{23-12} = 1716u^3; \quad G_{23-12} = 495u^8;$$
$$H_{22-12} = 220u^9 \quad H_{23-12} = 55u^9; \quad H_{33-12} = 10u^9; \quad H_{34-12} = u^9.$$

Ezek alapján felírhatjuk a karakterisztikus egyenletet 12 tömeg esetére:

$$w^{22} - w^{20}[u_{11} + u_{12} + 20u] + w^{18}[20u_{11} + 19u_{12} + 171u]u -$$
$$-w^{16}[171u_{11} + 153u_{12} + 816u]u^2 +$$
$$+ w^{14}[816u_{11} + 680u_{12} + 2380u]u^3 - w^{12}[2380u_{11} + 1820u_{12} + 4368u]u^4 +$$
$$+ w^{10}[4368u_{11} + 3003u_{12} + 5005u]u^5 -$$
$$- w^8[5005u_{11} + 3003u_{12} + 3432u]u^6 + w^6[3432u_{11} + 1716u_{12} + 1287u]u^7 -$$
$$- w^4[1287u_{11} + 495u_{12} + 220u]u^8 + w^2[220u_{11} + 55u_{12} + 11u]u^9 -$$
$$- [11u_{11} + u_{12}]u^{10} = 0.$$

A következő táblázatba írtuk azokat a szorzási műveleteket, amelyeket el kell végezni és az eredmények összeadásával megkapjuk az algebrai egyenlet együtthatóit.

u_{11} szorozva	u_{12} szorozva	u szorozva
20	19	20
171	153	171
816	680	816
2380	1820	2380
4368	3003	4368
5005	3003	5005
3432	1716	3432
1287	495	1287
220	55	220
		11

Az u hatványait pedig u^2 és u^3-ból számíthatjuk vagy kézikönyvben táblázataikból vehetők ki.

Ezen adatokkal 12 tömegre a karakterisztikus egyenlet felírható és az így kapott 11-ed fokú egyenlet gyökeit a *regula falsi* módszereivel meg lehet találni. Általában egy, esetleg két gyök érdekelhet, amit azután az eredményekből ki lehet keresni.

A gyakorlatban 12 tömegnél nagyobb rendszer a legritkábban fordul elő és úgy találtuk, hogy a módszer előnyeit csak a legnehezebb esetekre való alkalmazásával tudjuk felfedni. Könnyebb lett volna, ha 6 vagy 7 tömeg esetére alkalmazzuk e táblázatokat, de ez sem célszerű, még kevésbé lett volna opportunus.

Említettük, hogy 1 független tömegű rendszernél a karakterisztikus egyenletben előforduló számértékeket a PASCAL-féle háromszögből* olvashatjuk ki, mégpedig ugyanazon ábrából bármennyi is legyen a tömegek száma. Ebből következik, hogy a szóban forgó egyenlet felírásához felhasználhatjuk azokat a jelöléseket, amelyek a binomiális tényezőkre használatosak.

Alább megtaláljuk a *9 tömegű* rendszerre — egy független tömeget feltételezve — a karakterisztikus egyenletet, a binomiális tényezőknél használatos jelölésekkel. Ezt követőleg ugyancsak a binomiális tényezők felhasználásával felírtuk a karakterisztikus egyenletet 12 tömegű rendszer esetére, egy független tömeget feltételezve. Ezt az esetet már az előzőkben tárgyaltuk. Ezekből az egyenlet szerkezete erre az esetre azonnal látható és a jelentkező törvényszerűség is, és így n tömeg esetére az általános egyenlet felírása — egy független tömeget feltételezve — elmaradhat.

Ezek alapján tehát oly rendszerre, amelyben egy független tömeg van, a karakterisztikus egyenletet azonnal fel lehet írni.

$$w^{16} - \left(\binom{16-1}{0}u_{11} + \binom{16-2}{0}u_{12} + \binom{16-2}{1}u\right)w^{14} +$$

* Abban az esetben, ha a független tömegek száma 2 vagy annál több, a karakterisztikus egyenletet ugyancsak azonnal felírhatjuk a PASCAL-féle háromszög felhasználásával. Erről külön tanulmányban számolok be.

$$+u\left(\binom{16-2}{1}u_{11}+\binom{16-3}{1}u_{12}+\binom{16-3}{2}u\right)w^{12}-$$

$$-u^2\left(\binom{16-3}{2}u_{11}+\binom{16-4}{2}u_{12}+\binom{16-4}{3}u\right)w^{10}+$$

$$+u^3\left(\binom{16-4}{3}u_{11}+\binom{16-5}{3}u_{12}+\binom{16-5}{4}u\right)w^{8}-$$

$$-u^4\left(\binom{16-5}{4}u_{11}+\binom{16-6}{4}u_{12}+\binom{16-6}{5}u\right)w^{6}+$$

$$+u^5\left(\binom{16-6}{5}u_{11}+\binom{16-7}{5}u_{12}+\binom{16-7}{6}u\right)w^{4}-$$

$$-u^6\left(\binom{16-7}{6}u_{11}+\binom{16-8}{6}u_{12}+\binom{16-8}{7}u\right)w^{2}+$$

$$+u^7\left(\binom{16-8}{7}u_{12}+\binom{16-8}{8}u_{12}\right)=0.$$

$$w^{22}-\left(\binom{22-1}{0}u_{11}+\binom{22-2}{0}u_{12}+\binom{22-2}{1}u\right)w^{20}+$$

$$+u\left(\binom{22-2}{1}u_{11}+\binom{22-3}{1}u_{12}+\binom{22-3}{2}u\right)w^{18}-$$

$$-u^2\left(\binom{22-3}{2}u_{11}+\binom{22-4}{2}u_{12}+\binom{22-4}{3}u\right)u^{16}+$$

$$+u^3\left(\binom{22-4}{3}u_{11}+\binom{22-5}{3}u_{12}+\binom{22-5}{4}u\right)w^{14}-$$

$$-u^4\left(\binom{22-5}{4}u_{11}+\binom{22-6}{4}u_{12}+\binom{22-6}{5}u\right)w^{12}+$$

$$+u^5\left(\binom{22-6}{5}u_{11}+\binom{22-7}{5}u_{12}+\binom{22-7}{6}u\right)w^{10}-$$

$$-u^6\left(\binom{22-7}{6}u_{11}+\binom{22-8}{6}u_{12}+\binom{22-8}{7}u\right)w^{8}+$$

$$+u^7\left(\binom{22-8}{7}u_{11}+\binom{22-9}{7}u_{12}+\binom{22-9}{8}u\right)w^{6}-$$

* Adjuk össze az egyes sorokban az u és w kitevőit: Sorban az eredmény a következő: $1+12=13, 2+10=12, 3+8=11, 4+6=10, 5+4=9, 6+2=8$ és végül $7+0=7$. A csökkenés állandóan: 1.

$$- u^8\left(\binom{22-9}{8}u_{11}+\binom{22-10}{8}u_{12}+\binom{22-10}{9}u\right)w^4+$$
$$+ u^9\left(\binom{22-10}{9}u_{11}+\binom{22-11}{9}u_{12}+\binom{22-11}{10}u\right)w^2-$$
$$- u_{10}\left(\binom{22-11}{10}u_{11}+\binom{22-11}{11}u_{12}\right)=0.$$

Az eddig ismertetett és a számításokat egyszerűsítő, és könnyítő eljárás teljes általánosságban használható és a lényege abban áll, hogy a körfrekvencia helyett bevezetjük a másodpercenkénti lengésszámot. Ezzel az együtthatók számszerűsége rövidebb lett (lásd: Függeléket).

Minthogy a torzióslengés jelensége ma főleg motorüzemeknél jelentkezik és az ilyen rendszerre terjeszkednek ki a számítások, figyelembe lehet venni azon körülményt, hogy a forgattyúkkal kapcsolatos tömegek, valamint az ezekhez tartozó merevségi tényezők egyenlők és leginkább azzal az esettel van dolgunk, amikor ezektől független lendkerék is előfordul, amelyet független tömeg néven veszünk figyelembe.

Ilyenkor egy más egyszerűsítési eljárást fogunk ismertetni, amelynek lényege az, hogy az egyenlő tömegeket, bármekkora is legyen azoknak a száma, olyan tömeggel helyettesítjük, amely a független tömeggel együtt kétoly tömegű rendszert állapít meg, mely az eredetivel lengéstechnikailag teljesen egyenértékű.

Példaképpen az eljárás lényegét négytömegű rendszerre fogjuk bemutatni és azután áttérünk egy öt tömeggel kapcsolatos numerikus példára.

A négytömegű rendszer karakterisztikus egyenlete a már többször idézett dolgozatban foglaltak alapján a következő:

$$w^6 - [u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34}]w^4 + [u_{11}(u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34}) + u_{12}(u_{23} + u_{33} + u_{34}) + u_{22})u_{33} + u_{34}) + u_{23}u_{34}]w^2 - u_{11}[u_{22}(u_{33} + u_{34}) + u_{23}u_{34}] - u_{12}u_{23}u_{34} = 0.$$

Ha 3 tömeg és a hozzájuk tartozó tehetetlenségi nyomatékok és merevségi tényezők egyenlők, akkor

$$I_1 = I_2 = I_3 = I \quad \text{és} \quad c_2 = c_3 = c,$$

és akkor

$$u_{22} = u_{23} = u_{33} = u_{34} = u.$$

A fenti karakterisztikus egyenlet alakja tehát a következő:

$$w^6 - [u_{11} + u_{12} + 4u]w^4 + u[4u_{11} + 3u_{12} + 3u]w^2 - [3u_{11} + u_{12}]u^2 = 0.$$

Mint már említettük, ezt a négytömegű rendszert kéttömegű oly rendszerre kívánjuk redukálni, amely az eredeti rendszerrel lengéstechnikailag egyenértékű. Más szóval:

$$w^2 = c_x\left(\frac{1}{3I} + \frac{1}{I_1}\right) = \frac{c_x}{I_0}\,.$$

Ebben a kifejezésben c_x az ismeretlen, mert w mindkét esetben ugyanaz kell hogy legyen.

Helyettesítsük be w^2 értékét a karakterisztikus egyenletbe:

$$\frac{c_x^3}{I_0^3} - (u_{11} + u_{12} + 4u)\frac{c_x^2}{I_0^2} + u(4u_{11} + 3u_{12} + 3u)\frac{c_x}{I_0} - u^2(3u_{11} + u_{12}) = 0\,.$$

Ha c_x ismert, akkor w^2 ebből kiszámítható.

Mint azonnal látható, ezzel az együtthatók számszerű terjedelme tetemesen csökken.

Ezek előrebocsátása után áttérünk e módszernek alkalmazására és e célból numerikus példát mutatunk be.

Öttömegű rendszert választunk, amelynek karakterisztikus egyenlete általános alakban a már többször idézett dolgozatban megtalálható. De mert most 4 tömeg a hozzá tartozó merevségi tényezőkkel egyenlő, tehát:

$$u_{22} = u_{23} = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = u\,,$$

amit az egyenletben keresztül vezetve a következő eredményt kapjuk:

$$w^8 - [u_{11} + u_{12} + 6u]w^6 + u[6u_{11} + 5u_{12} + 10u]w^4 - u^2[10u_{11} + 6u_{12} + 4u]w^2 + \\ + u^3[4u_{11} + u_{12}] = 0\,.$$

A zárójelekben az u_{11}, u_{12} és u mellett levő számértékek táblázata a következő:

u_{11}	u_{12}	u
1	1	6
6	5	10
10	6	4
4	1	

A számpélda adatai a következők:

$I_5 = I_2 = I_3 = I_4 = I = 2560$ kgcmsec². $I_1 = 24\,600$ kgcmsec². $c_1 = 83\,200 \cdot 10^3$ kgcm, $c_2 = 200\,000 \cdot 10^3$ kgcm. (4. ábra.)

Ezekből kiszámíthatjuk:

$$u_{11} = 3{,}37 \cdot 10^3,\ u_{12} = 32{,}4 \cdot 10^3,\ u = 78 \cdot 10^3.$$

Ezen adatokkal számítsuk ki az együtthatókat, és akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$w^8 - 503{,}8 \cdot 10^3 \cdot w^6 + 75\,053 \cdot 10^6 \cdot w^4 - 3\,285\,360 \cdot 10^9 \cdot w^2 + 21\,772\,445 \cdot 10^{12} = 0.$$

Az együtthatók tekintélyes számok, amelyekkel további számítások nehézkesek lennének, és ezért alkalmazzuk a jelzett módszert. Minthogy e rendszert 2 tömegű rendszerrel kívánjuk helyettesíteni, de úgy, hogy lengéstechnikailag változás ne legyen, akkor számítsuk ki:

$$w^3 = c_x\left(\frac{1}{4 \cdot I} + \frac{1}{I_1}\right) = c_x\left(\frac{1}{4 \cdot 2560} + \frac{1}{24\,600}\right) = c_x \cdot \frac{13 \cdot 07}{10^5} = c_y \cdot 10^3 \cdot 13{,}07.$$

A karakterisztikus egyenletbe helyettesítsük be w^2 helyébe c_y-t és akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$c_y^4 \cdot 13{,}07^4 - 503{,}8 \cdot c_y^3 \cdot 13{,}07^3 + 75\,053 \cdot c_y^2 \cdot 13{,}07^2 - 3\,285\,360 \cdot c_y \cdot 13{,}07 + \\ + 21\,772\,445 = 0.$$

Ha $13{,}07^4$-nél végig osztunk, akkor kapjuk:

$$c_y^4 - 38{,}54 \cdot c_y^3 + 445{,}23 \cdot c_y^2 - 1471{,}48 \cdot c_y + 74\,615 = 0.$$

Az eddigiekhez képest az együtthatók oly kedvező számok, hogy azzal a tovább számolást, tehát az egyenlet gyökeinek kiszámítását lényegesen egyszerűbben és gyorsabban elvégezhetjük, mintha az eddigi egyenletek bármelyikét is használtuk volna.

A gyökök kiszámításához a *regula falsi* módszerét fogjuk használni, bár negyedfokú egyenlet kiszámításának más módszere is ismert.

Jelöljük:

$$U = c_y^4 + 445{,}23\, c_y^2 + 746{,}15, \quad V = 38{,}54\, c_y^3 + 1471{,}48.$$

A számítás a következő eredményeket adja:

$c_y =$	$U - V =$
0,1	+603
0,5	+117
0,6	+ 15
0,62	− 2,79
1	−317
4	−226,65
4,2	− 74
4,4	− 17,71
4,5	+ 38,43
4,6	+ 94
4,8	+210
5	+327.

Ezen összeállításból azonnal látható, hogy a két gyök:

$$c_{y1} = 0{,}61 \quad \text{és} \quad c_{y2} = 4{,}45\,,$$

aminek $w_1^2 = 7973$ és $w_2^2 = 58\,101$ felel meg.

Ismeretes az algebrai egyenletekre nézve az a szabály, hogy a gyökök összege ebben az esetben:

$$7973 + 58\,101 + w_3^2 + w_4^2 = 503{,}8 \cdot 10^3$$

és a gyökök szorzata:

$$7973 \cdot 58\,101 \cdot w_3^2 \cdot w_4^2 = 21\,772\,445 \cdot 10^{12},$$

amiből kiszámíthatjuk: a még hiányzó két gyököt:

$$w_3^2 = 186\,356, \quad w_4^2 = 251\,350.$$

c_x ismeretével kiszámíthatjuk a hozzátartozó redukált hosszat l_x-et, ahová a $4I$ tehetetlenségi nyomatékot redukáltuk. Válasszuk erre a célra az w_1^2-et.

$$w_1^2 = 7973 = c_x \frac{13{,}07}{10^5} \text{ ebből } c_x = 610 \cdot 10^5.$$

Ámde

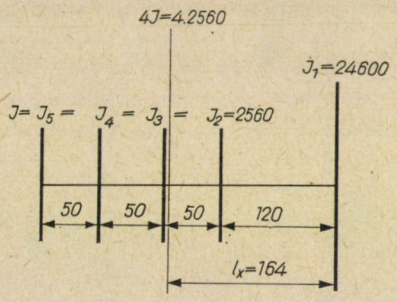
$$c_x = \frac{G \cdot I_p}{l_x} = \frac{10^{10}}{l_x} = 610 \cdot 10^5$$

és ebből $l = 164$ cm.

Tehát az I_1 tömeg helyétől számított 164 cm red. hossz távolságban $4I$ és I_1-vel alkotott 2 tömegű rendszer egyenértékű az eredeti rendszerrel lengéstechnikailag.

Természetesen ahány w^2 ismeretes, annyi ily l távolságot számíthatunk ki, amiből azonnal következik, hogy a tömegeket összefoglalni, illetve redukálni egy tetszőleges helyre találomra nem lehet, mint amivel az irodalomban elég gyakran találkozunk. A fenti képletben G a nyírási rugalmassági tényező, I_p a tengely keresztmetszetének poláris tehetetlenségi nyomatéka.

A 4. ábrában látjuk a tömegek eredeti elrendezését, és ide berajzoltuk a w_1^2-nek megfelelő redukált távolságot is.*



4. ábra

Bár a többször idézett dolgozatban ismertettek alapján 1 független tömegre a karakterisztikus egyenletet azonnal felírhatjuk, mégis közöljük e helyen az ide vágó anyagot. Hozzácsatoljuk azt az összeállítást, amellyel az u_{11}, u_{12} és u-t szorozni kell, de olyképpen, hogy a karakterisztikus egyenletben a zárójelben foglalt kifejezéseket azonnal ki lehessen számítani.

* Az itt bemutatott számpélda adatait SCHÖNFELDER lengéstechnikai főmérnök [Berlin-Siemensstadt] velem közölt számításaiból vettem át. A HOLZER-féle eljárással ő $w_1^2 = 8050$ számított ki, ami elég közel fekszik a mi eredményünkhöz. A többi lengésszámot nem számította ki, ami gyakorlatilag véve felesleges is, mert kiesik a lehetőség keretéből. Mi is csak teljesség kedvéért számítottuk ki.

6 tömegre a módosított karakterisztikus egyenlet:

$$w^{10} - [u_{11} + u_{12} + 8u]w^8 + u[8u_{11} + 7u_{12} + 21u]w^6 - u^2[21u_{11} + 15u_{12} + 20u]w^4 + u^3[20u_{11} + 10u_{12} + 5u]w^2 - u^4[5u_{11} + u_{12}] = 0.$$

u_{11}	u_{12}	u
1	1	8
8	7	21
21	15	20
20	10	5
5	1	

Az összeállítás egyes soraiban levő szorzásokat elvégezve és összeadva kapjuk az egyenletben a zárójelben foglalt kifejezéseket.

7 tömegre :

$$w^{12} - [u_{11} + u_{12} + 10u]w^{10} + u[10u_{11} + 9u_{12} + 36u]w^8 - u^2[36u_{11} + 20u_{12} + 56u]w^6 + u^3[56u_{11} + 35u_{12} + 35u)w^4 - u^4[35u_{11} + 15u_{12} + 6u]w^2 + [6u_{11} + u_{12}]u^5 = 0.$$

u_{11}	u_{12}	u
1	1	10
10	9	36
36	28	56
56	35	35
35	15	6
6	1	

8 tömegre:

$$w^{14} - [u_{11} + u_{12} + 12u]w^{12} + u[12u_{11} + 11u_{12} + 55u]w^{10} - u^2[55u_{11} + 45u_{12} + 120u]w^8 + u^3[120u_{11} + 84u_{12} + 126u]w^6 - u^4[126u_{11} + 70u_{12} + 56u]w^4 + u^5[56u_{11} + 21u_{12} + 7u]w^2 - u^6[7u_{11} + u_{12}] = 0.$$

u_{11}	u_{121}	u
1	1	12
12	11	55
55	45	120
120	84	126
126	70	56
56	21	7
7	1	

9 tömegre :

$$w^{16} - [u_{11} + u_{12} + 14u]w^{14} + u[14u_{11} + 13u_{12} + 78u]w^{12} - u^2[78u_{11} + 66u_{12} + 220u]w^{10} + u^3[220u_{11} + 165u_{12} + 330u]w^8 - u^4[330u_{11} + 210u_{12}$$

$+ 252u]w^6 + u^5[252u_{11} + 126u_{12} + 84u]w^4 - u^6[84u_{11} + 28u_{12} + 8u]w^2 +$
$+ u[8u_{11} + u_{12}] = 0.$

u_{11}	1	14	78	220	330	252	84	8
u_{12}	1	13	66	165	210	126	28	1
u	14	78	220	330	252	84	8	

Az ismertetett egyenletek csak arra az esetre érvényesek, ha egy független tömeg van a rendszerben, és w^2 helyébe c_y-t helyettesítve, kiszámítjuk az egyenlet gyökeit. Változatosság kedvéért az utolsó, tehát 9 tömeg esetén a számtáblázatot vízszintesen helyeztük el, ami az összeadás szempontjából kedvezőbb is.

Nem lenne teljes e módszer ismertetése, ha nem érintenők azt a gyakorlati esetet, amikor a rendszerben két független tömeggel találkozunk. Ilyenkor tehát a tetszőleges tömegszámú rendszert vele lengéstechnikailag egyenlő 3 tömegű rendszerre kellene visszavezetni, amely közül az egyik pótolná az egyenlő tömegek csoportját. Tehát a 3 tömegre érvényes karakterisztikus egyenletből kellene kiindulni, amelyre nézve:

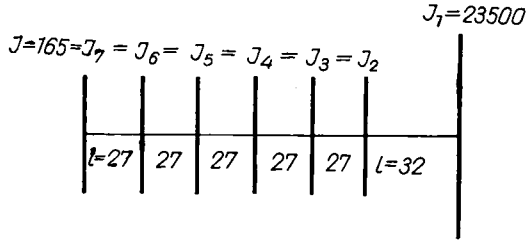
$$w^4 - [u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23}]w^2 + u_{11}[u_{22} + u_{23}] + u_{12}u_{23} = 0,$$

ahol

$$u_{11} = \frac{c_x}{n \cdot I}, \quad u_{12} = \frac{c_x}{I_2}, \quad u_{22} = \frac{c_2}{I_2}, \quad u_{23} = \frac{c_2}{I_3}.$$

I az egyenlő tömegek tehetetlenségi nyomatéka, és n a hengerek száma. Ezt az egyenletet kell tehát w^2-ra megoldani, ami magában véve nem okozna nehézséget, de azonnal látható, hogy c_x-re nézve a behelyettesítés után keletkező egyenlet oly számítási nehezségeket okozna, amely az esetleges előnyöket felemésztené. Erre az esetre azonban más eljárást dolgoztunk ki, amelyet külön tanulmányban fogunk ismertetni.*

Számpélda : Ker. WILSON: Practical solution of torsional vibration problems, London, 1956, c. könyve első kötete 39. és 50. oldalán az 5. ábra szerinti elrendezésben található adatokat fogjuk felhasználni a fontosabb önlengésszámok kiszámításához. WILSON számításait



5. ábra

* STRUNZ: Die Drehschwingungen in Kolbenmaschinen. 2. kiadás. 1952. könyvében az általa használt módszernél használta a PASCAL-féle háromszöget. Módszere teljesen eltér az itt ismertetettől.

a HOLZER-féle táblázatok felhasználásával végezte el. Az eredményeket egyeztetni fogjuk. Megjegyezzük, hogy az u értékek alkalmazásának az az előnye — lévén dimenzió $1/\text{sec}^2$ —, hogy használhatjuk vagy a metrikus vagy az angol mértékegységeket. A következőkben a nyírási rugalmassági tényezőt, G-t, és az összes tehetetlenségi nyomatékokat angol mérték-k egységben fogjuk behelyettesíteni. Azonkívül az összes u értékeket osztjuk $(2, 3, 14)^2$, amivel a számok terjedelme csökken, de a karakterisztikus egyenletben a körfrekvencia helyett n, a másodpercenkénti lengésszám fog szerepelni.

A számítás kiindulási adatai a következők:

$$G = 12 \cdot 10^6, \quad Ip = 455, \quad I = 165, \quad I_1 = 23\,500$$

$$c = \frac{12 \cdot 455 \cdot 10^6}{27}, \qquad c_1 = \frac{12 \cdot 455 \cdot 10^6}{32},$$

$$u_{11} = \frac{c_1}{I_1} = \frac{12 \cdot 455 \cdot 10^4}{32 \cdot 235 \cdot (2 \cdot 3{,}14)^2} = 0{,}184 \cdot 10^3,$$

$$u_{12} = \frac{c_1}{I} = \frac{12 \cdot 455 \cdot 10^6}{32 \cdot 165 \cdot (2 \cdot 3{,}14)^2} = 26{,}189 \cdot 10^3.$$

$$u = u_{22} = u_{23} = u_{33} = u_{34} = u_{44} = u_{45} = u_{55} = u_{56} = u_{66} = u_{67} =$$

$$= \frac{c}{I} = \frac{12 \cdot 455 \cdot 10^6}{27 \cdot 165 (2 \cdot 3{,}14)^2} = 31{,}029 \cdot 10^3,$$

A 7 tömegből álló rendszer karakterisztikus egyenlete a binomiális tényezőknél használatos jelölések felhasználásával a következő:

$$n^{12} - \left(\binom{12-1}{0}u_{11} + \binom{12-2}{0}u_{12} + \binom{12-2}{1}u\right)n^{10} +$$

$$+\left(\binom{12-2}{1}u_{11} + \binom{12-3}{1}u_{12} + \binom{12-3}{2}u\right)u \cdot n^8 -$$

$$-\left(\binom{12-3}{2}u_{11} + \binom{12-4}{2}u_{12} + \binom{12-4}{3}u\right)u^2 \cdot n^6 +$$

$$+\left(\binom{12-4}{3}u_{11} + \binom{12-5}{3}u_{12} + \binom{12-5}{4}u\right)u^3 \cdot n^4 -$$

$$-\left(\binom{12-5}{4}u_{11} + \binom{12-6}{4}u_{12} + \binom{12-6}{5}u\right)u^4 \cdot n^2 +$$

$$+\left(\binom{12-6}{5}u_{11} + \binom{12-6}{6}u_{12}\right)u^5 = 0.$$

Bár előbb felírtuk az egyenlet végleges alakját, beírva a binomiális tényezők értékeit mégis ismételjük, hogy a részletesen vezetett számítás áttekinthető legyen.

$$n^{12} - (u_{11} + u_{12} + 10u)n^{10} + (10u_{11} + 9u_{12} + 36u)u \cdot n^8 -$$
$$- (36u_{11} + 28u_{12} + 56u)u^2 \cdot n^6 + (56u_{11} + 35u_{12} + 35u)u^3 \cdot n^4 -$$
$$- (35u_{11} + 15u_{12} + 6u)u^4 \cdot n^2 + (6u_{11} + u_{12})u^5 = 0.$$

$u_{11} \cdot 1 = 0{,}184$
$u_{12} \cdot 1 = 26{,}189$
$u \cdot 10 = 310{,}29$
$336{,}56 \cdot 10^3$

$u_{11} \cdot 10 = 1{,}84$
$u_{12} \cdot 9 = 235{,}7$
$u \cdot 36 = 1117$
$1354{,}54 \cdot 10^3 \cdot 31{,}029 \cdot 10^2 = 42\,030 \cdot 10^6$

$u_{11} \cdot 36 = 6{,}624$
$u_{12} \cdot 28 = 733{,}292$
$u \cdot 56 = 1737{,}62$
$2477{,}542 \cdot 10^3 \cdot (31{,}029 \cdot 10^3)^2 = 2385\,370{,}56 \cdot 10^9$

$u_{11} \cdot 56 = 11{,}304$
$u_{12} \cdot 35 = 916{,}605$
$u \cdot 35 = 1086{,}0{,}15$
$2013{,}924 \cdot 10^3 \cdot (31{,}029 \cdot 10^3)^3 = 60\,982\,291{,}5 \cdot 10^{12}$

$u_{11} \cdot 35 = 6{,}44$
$u_{12} \cdot 15 = 392{,}835$
$u \cdot 6 = 186{,}174$
$585 \cdot 449 \cdot 10^3 \cdot (31{,}029 \cdot 10^3)^4 = 542\,700\,903{,}5 \cdot 10^{15}$

$u_{11} \cdot 6 = 1{,}109$
$u_{12} = 26{,}189$
$27{,}293 \cdot 10^3 \cdot (31{,}029 \cdot 10^3)^5 = 785\,036\,393{,}7 \cdot 10^{18}$

$$n^{12} - 336{,}56 \cdot 10^3 \cdot n^{10} + 42\,030 \cdot 10^6 \cdot n^8 - 2385\,370{,}56 \cdot 10^9 \cdot n^6 + 60\,982\,291{,}5 \cdot 10^{12} \cdot n^4 - 542\,700\,903{,}5 \cdot 10^{15} \cdot n^2 + 785\,036\,393{,}71 \cdot 10^{18} = 0.$$

Jelöljük:

$$n^2 = a \cdot 10^5$$

$$10^{10} a^6 - 336{,}56 \cdot 10^8 \cdot a^5 + 42\,030 \cdot 10^6 \cdot a^4 - 2385\,370{,}6 \cdot 10^4 \cdot a^3 + 60\,982\,291{,}5 \cdot 10^2 \cdot a^2 - 542\,700\,903{,}5 \cdot a + 7\,850\,363{,}9 = 0.$$

$$U = a^2 [a^2 (a^2 \cdot 10^{10} + 42\,030 \cdot 10^6) + 60\,982\,291{,}5 \cdot 10^2] + 7\,850\,363{,}9;$$

$$V = a[a^2 (336{,}56 \cdot 10^3 \cdot a^2 + 2385\,370{,}6 \cdot 10^4) + 542\,700\,903{,}5];$$

$$U = V.$$

A regula falsi módszerével kapjuk a következőket:

a	$U - V$
0,015	+1 003 022
0,018	−67 574
0,05	−6 763 648
0,1	−5 425 342
0,135	−451 737
0,14	+355 643

A rendszerre nézve a két fontos lengésszám:

1. $a = 0{,}0178$, $n^2 = 1780$ [WILSON: 1764]
2. $a = 0{,}138$, $n^2 = 13\,800$ [WILSON: 14 884].

FÜGGELÉK

Valamely feladat numerikus feldolgozásánál jelentkezhetnek oly keresztülvihető egyszerűsítések, amelyek a feladat használhatóságát lényegesen előmozdítják.

Erre nézve az idézett dolgozatban található 8 tömegű rendszer karakterisztikus egyenletét fogjuk példaképpen bemutatni, mert az itt kiszámított együtthatók terjedelme a számítást kissé nehézkessé teszik. E nehézségek főleg az algebrai egyenletek megoldásánál mutatkoznak. Célszerű lenne ezért e szempontból oly átalakítást végezni, amelynek következtében lényegesen könnyíthetnénk a számításokon.

Megjegyezzük azonban, hogy az említett dolgozatban eddig is bizonyos könnyítéseket alkalmazhattunk, ily irányú további egyszerűsítések azonban a módszer alkalmazhatóságát kedvezőbbé tehetnék.

A következőkben a w körfrekvencia helyett a másodpercenkénti lengésszámot kívánjuk bevezetni, amely mint ismeretes, a következőképpen számítható ki:

$$n = \frac{w}{2\pi} .$$

Ha már kiszámítottuk a karakterisztikus egyenlet együtthatóit, akkor 2π hatványával végig osztva, oly együtthatókat kapunk, amellyel a további számolás, tehát a gyökök meghatározása már kevesebb munkát kíván, és gyorsabban jutunk el a célhoz: a gyökök alapján a percenkénti lengésszám kiszámításához (amelyet motorok esetében annak percenkénti fordulatszámával kell a rezonancia szempontjából az ismert módon kapcsolatba hozni).

A mondottakat példán mutatjuk be és felhasználjuk az említett dolgozatban közölt karakterisztikus egyenletet, amelyben a körfrekvencia 14 hatványa van. Az egyenletet végig osztjuk $(2\pi)^{14}$-vel, azaz:

$$\left(\frac{w}{2\pi}\right)^{14} - \left(\frac{w}{2\pi}\right)^{12} \frac{540}{(2\pi)^2} \cdot 10^4 + \left(\frac{w}{2\pi}\right)^{10} \frac{108\,279}{(2\pi)^4} \cdot 10^8 -$$

$$- \left(\frac{w}{2\pi}\right)^{8} \frac{9\,958\,345}{(2\pi)^6} 10^{12} + \left(\frac{w}{2\pi}\right)^{6} \frac{6\,417\,632\,310}{(2\pi)^8} \cdot 10^{16} -$$

$$- \left(\frac{w}{2\pi}\right)^{4} \frac{6\,930\,554\,220}{(2\pi)^{10}} 10^{20} + \left(\frac{w}{2\pi}\right)^{2} \frac{34\,106\,031\,250}{(2\pi)^{12}} 10^{24} -$$

$$- \frac{42\,570\,000\,000}{(2\pi)^{14}} 10^{28} = 0.$$

Természetesen $w/2\pi$ helyébe n-et kell írni, és a kijelölt osztást elvégezni. Ennek megkönnyítésére szolgál a mellékelt táblázat, ahol ezen érték hatványai megtalálhatók. Azonnal látható, hogy az együtthatóknál az osztás elvégzése után az algebrai egyenlet megoldása céljából kisebb számok jelentkeznek, amelynél 3, esetleg 4 tizedes használata elegendő.

10 hatványainak eltávolítására az említett dolgozatba már mutattunk példát, ami itt is használható. Ezt az eljárást azonban kritikával kell használni, mert lehet, hogy oly tizedes számok kerülnek elő az osztás után, hogy a 10 hatványaiból kell elvenni, nehogy oly tizedesszámokat kelljen használni, ami esetleg újabb kényelmetlenséget jelentene. Erre nézve adott esetek szerint kell dönteni, szabályt nehéz lenne felállítani.

$2^{14} = 16\,384$	$\pi^{14} = 9\,122\,121{,}785$	$(2\pi)^{14} = 148\,355\,204\,925{,}420$
$2^{13} = 8\,192$	$\pi^{13} = 2\,903\,638{,}353$	$(2\pi)^{13} = 23\,786\,665\,387{,}776$
$2^{12} = 4\,096$	$\pi^{12} = 924\,236.122$	$(2\pi)^{12} = 3\,785\,671\,155{,}712$
$2^{11} = 2\,048$	$\pi^{11} = 294\,198{,}198$	$(2\pi)^{11} = 602\,517\,909{,}504$
$2^{10} = 1\,024$	$\pi^{10} = 93\,647{,}628$	$(2\pi)^{10} = 95\,895\,171{,}072$
$2^{9} = 512$	$\pi^{9} = 29\,809{,}004$	$(2\pi)^{9} = 15\,262\,208$
$2^{8} = 256$	$\pi^{8} = 9\,488{,}503$	$(2\pi)^{8} = 2\,429\,056{,}768$
$2^{7} = 128$	$\pi^{7} = 3\,020{,}263$	$(2\pi)^{7} = 386\,593{,}664$
$2^{6} = 64$	$\pi^{6} = 961{,}372$	$(2\pi)^{6} = 61\,507{,}808$
$2^{5} = 32$	$\pi^{5} = 306{,}019$	$(2\pi)^{5} = 9\,792{,}608$
$2^{4} = 16$	$\pi^{4} = 97{,}409$	$(2\pi)^{4} = 1\,558{,}44$
$2^{3} = 8$	$\pi^{3} = 31{,}006$	$(2\pi)^{3} = 248{,}048$
$2^{2} = 4$	$\pi^{2} = 9{,}869$	$(2\pi)^{2} = 39{,}478$

A természetes útja a számolásnak az, hogy a 2π-vel való osztást már a karakterisztikus determinánson hajtjuk végre, mert az értéke ezzel nem változik. Tehát a determináns minden sorát osztjuk $(2\pi)^2$-el.

Ilyképpen az w^2 helyébe n^2-ot kell írni és az u helyébe:

$$\frac{u}{(2\pi)^2} = U$$

értéket és ezzel az átalakítással végezzük el a számításokat. A determináns alakja tehát 5 tömegű rendszerre:

$$\begin{vmatrix} n^2 - U_{11} & U_{11} & 0 & 0 & 0 \\ U_{12} & n^2 - U_{12} - U_{22} & U_{22} & 0 & 0 \\ 0 & U_{23} & n^2 - U_{23} - U_{33} & U_{33} & 0 \\ 0 & 0 & U_{34} & w^2 - U_{34} - U_{44} & U_{44} \\ 0 & 0 & 0 & U_{45} & n^2 - U^{45} \end{vmatrix} = B_5 = 0,$$

amihez az szükséges, hogy a rendelkezésre álló adatok felhasználásával kiszámított u értékeket sorban osztjuk $(2\pi)^2$-el.

ÖSSZEFOGLALÁS

Az MTA Műszaki Tudományok Osztálya Közleményei XV. kötet 1—4 számában a karakterisztikus egyenlet felírására eljárást ismertettünk.

Ezen eljárásnak gyakorlati alkalmazása szempontjából kiegészítésül oly ábrákat mutatunk be, amelyek segélyével a karakterisztikus egyenlet szinte mechanikusan felírható.

A függelékben a számolással kapcsolatos további könnyítéseket ismertetünk.

TORONYHÁZAK VÁZSZERKEZETÉNEK SZÁMÍTÁSA SZÉLTERHELÉSRE*

CSONKA PÁL
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
AZ MTA ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Beérkezett 1960. szeptember 1-én]

Toronyházak és egyéb sokemeletes épületek vázszerkezetének szélteherre való számítása a feladat igen sokszorosan határozatlan volta miatt súlyos nehézségekbe ütközik. A nehézségeket még fokozza, hogy sokszor a számítást változtatott keresztmetszeti méretekkel többször meg is kell ismételni, mert csak a számítás legvégén derül ki, hogy a felvett méretek elégtelenek voltak.

E nehézségekre való tekintettel érdeklődésre tarthat számot minden olyan eljárás, mely már a tervezés kezdeti szakaszában tájékoztatást nyújt arról, hogy a felvett keresztmetszetek szélterhelés szempontjából megfelelőek-e, vagy sem.

Jelen tanulmány ilyen eljárást ismertet. Jellegzetessége, hogy nem az épület egészét, hanem annak csak a szélteherrel leginkább veszélyeztetett alsó szakaszát vizsgálja és nem relaxációval, hanem differenciaegyenletekkel dolgozik (1. ábra).

A dolgozat fejtegetései sokemeletes derékszögű oly keretszerkezetekre vonatkoznak, amelyek rúdjainak merevségi viszonyai az ún. *arányos keretekétől* legfeljebb kevéssé különböznek. A dolgozat felteszi, hogy a keretszerkezetnek alsó *vizsgálati szakaszán* az emeletmagasság állandó h értékű, az egymás felett álló oszlopok azonos szelvényűek, az egymás felett levő gerendák pedig azonos merevségűek. Az oszlopok az alapokhoz való csatlakozás helyén befogottak.

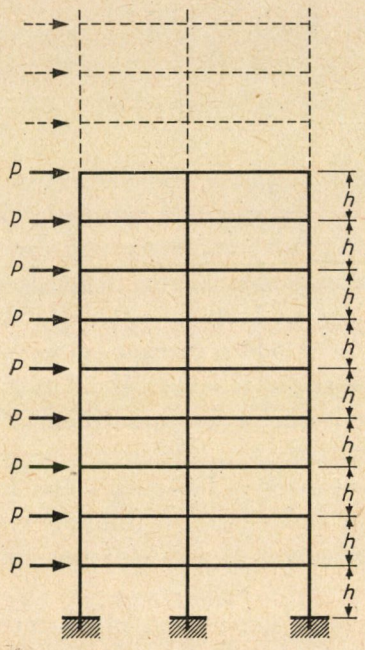
A tanulmány a szélerőket az emeletszintek magasságában ható összpontos erőkként kezeli. A szélerőt a vizsgálati szakasz minden emeletszintjében azonos P értékkel veszi számításba, a vizsgálati szakasz feletti emeletszintekre ható szélerőket pedig a vizsgálati szakasz legfelső emeletszintjében ható T_0 nyíróerővel és M_0 erőpárral helyettesíti. Ezek közül T_0 ismeretes, M_0 egyelőre ismeretlen (2. ábra).

Arányos keretről lévén szó, a keretszerkezetet célszerű alul befogott konzollal helyettesíteni. E konzolon — *a helyettesítő tartón* — a keretgerendáknak az alakváltozásra gyakorolt gátló hatását a csomópontokra működtetendő $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{s-1}$ rugalmas befogó nyomatékok pótolják. Az Y nyoma-

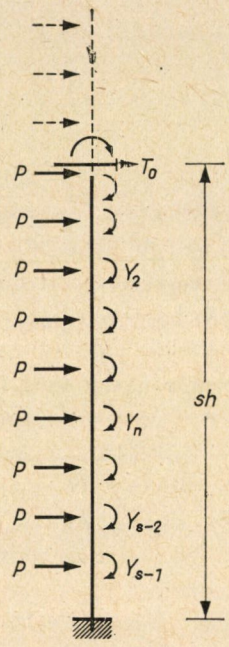
* Az Acta Technica XXXIV. kötetében angol nyelven megjelent tanulmány kivonata.

tékok betűjelében az indexek az emeletszinteknek a vizsgálati szakasz tetejétől lefelé számított sorszámára utalnak. A legfelső szint sorszáma 0, az oszlop legalsó keresztmetszetéé s.

Természetesen, a keretoszlopoknak hézagmentesen kell a keretgerendákhoz kapcsolódniok, tehát a csomópontokban a keretoszlopoknak és gerendáknak azonos szöggel kell elfordulniok. Ez a követelmény minden egyes emeletszint magasságában egy-egy folytonossági egyenlet felírását teszi lehetővé. A vizsgálati szakasz tetejétől számított n-edik emeletszint esetében a folytonossági egyenlet így fest:



1. ábra



2. ábra

$$\left[-\frac{Ph}{2}(s+1)^2+\frac{Ph}{2}\sum_{n+1}^{s+1}i^2+\frac{T_0h}{2}(s^2-n^2)+M_0(s-n)-\right.$$

$$\left.-(s-n)\,Y_n+(s-n)\sum_{0}^{n}Y_i+\sum_{n}^{s}(s-i)\,Y_i\right]+Y_n=0.$$

Itt

$$\beta=\frac{hK}{EJ},$$

ha ti. K az azonos szinten levő gerendavégek merevségeinek összegét, J az azonos szinten levő oszlopkeresztmetszetek tehetetlenségi nyomatékának összegét jelenti, E pedig a keret anyagának rugalmassági tényezője.

A folytonossági egyenlet a 0, 1, 2, . . ., s-1-edik keresztmetszetre felírva s egymástól független lineáris egyenletet ad, melyekből az ismeretlen Y_0, Y_1, Y_2,. . ., Y_{s-1} értékek kiszámíthatók. A számításnak ez a módja azonban az ismeretlenek nagy számára való tekintettel, igen hosszadalmas. Ezért az ismeretlenek meghatározására más módszert, a differenciaegyenletek módszerét célszerű alkalmazni.

A feladat differenciaegyenlete:

$$Y_{n+1} - (2 + \beta)\, Y_n + Y_{n-1} = \beta h \left(nP + \frac{P}{2} + T_0 \right).$$

Ennek karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 - (2 + \beta)\lambda + 1 = 0,$$

a karakterisztikus egyenlet gyökei pedig

$$\lambda_{12,} = 1 + (\beta/2) \pm \sqrt{\beta + (\beta/2)^2}\,.$$

A gyököket kiszámítva, a differenciaegyenlet általános megoldása

$$Y_n = A\lambda_1^n + B\lambda_1^{-n} - h\left(nP + \frac{P}{2} + T_0 \right)$$

alakú, ahol A és B állandók. Utóbbiak a feladat peremfeltételeiből állapítandók meg.

Első peremfeltételként az használható fel, hogy a talpkeresztmetszet mereven befogott, s így ott nincs szögforgás. Emiatt tehát

$$Y_s = 0.$$

Második peremfeltételként pontos előírás nem adható, de jó közelítéssel feltehető, hogy az Y értékek a vizsgálati szakasz felső szintje közelében egyenes szerint változnak, tehát

$$Y_1 - 2Y_0 + Y_{-1} = 0.$$

Fentiek figyelembevételével az A és B állandókra az alábbi értékek adódnak:

$$A = \frac{Ps + W}{\lambda_1^s - \lambda_1^{-s}}\, h,$$

$$B = -\frac{Ps + W}{\lambda_1^s - \lambda_1^{-s}}\, h,$$

ahol

$$W = \frac{P}{2} + T_0.$$

Ezzel az Y értékek ismertté váltak, s egyszerűen számítható M_0 értéke is:

$$M_0 = -\frac{Ph}{2} - \frac{T_0 h}{2} + Y_1 - Y_0 - \frac{Y_0}{\beta}.$$

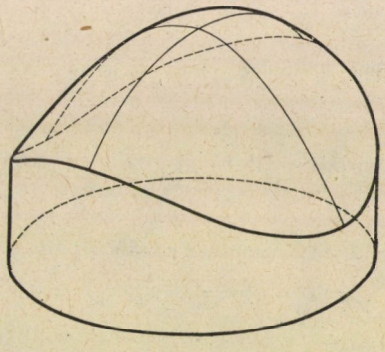
M_0 ismeretében a helyettesítő tartó hajlítónyomatékai egyszerű egyensúlyi megfontolásokkal határozhatók meg, majd a helyettesítő tartóval az eredeti keretszerkezetre visszatérve, annak nyomatékai egyszerű nyomatékosztással állapíthatók meg.

A MEMBRÁNHÉJAK PEREMABRONCSÁRÓL*

CSONKA PÁL
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
AZ MTA ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Beérkezett 1960. szeptember 14-én]

Az alábbiak oly membrán héjakra vonatkoznak, melyek gyűrűszerű körbefutó peremtartóját —*peremabroncsát* — teljes hosszában falazat támasztja alá (1. ábra). A falazat és a héj középfelülete a peremabroncs tengelyvonalában metsződik. Ezt a vonalat *a héj peremvonalának* nevezzük.



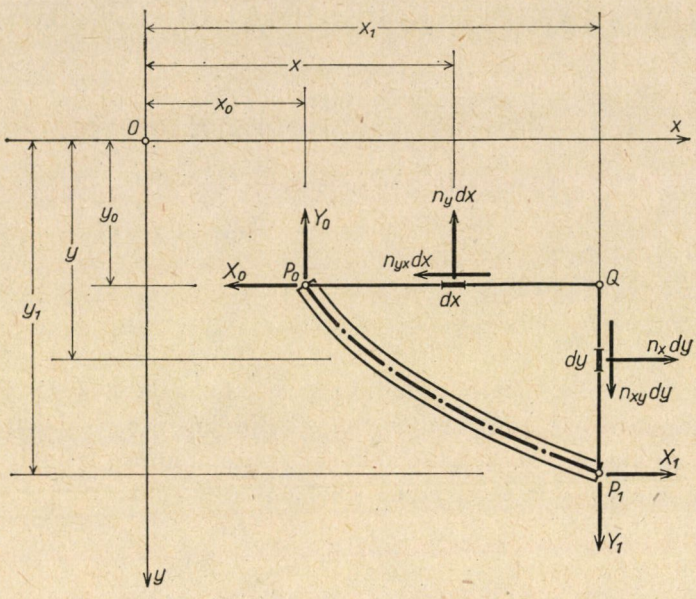
1. ábra. Membránhéj falazatra támaszkodó peremabronccsal

Feltesszük, hogy a héj peremabroncsa csak axiális erőkkel szemben fejt ki ellenállást, a peremabroncsot alátámasztó falazat pedig csak függőleges erőkkel szemben ellenálló. Terhelésként csak függőleges, folytonosan megoszló erőket veszünk számításba.

Minthogy a peremabroncs csak axiális erőkkel szemben fejt ki ellenállást, kell hogy tengelyvonala a terhelő erők kötélgörbéje legyen. Ahhoz viszont, hogy ez bekövetkezzék, az szükséges, hogy a peremvonal alaprajzi vetülete a peremabroncsot terhelő erők vetületének kötélgörbéje szerint legyen alakítva.

Egyszerű módszerekkel, nevezetesen a 2. ábrán feltüntetett héjrészlettel kiegészített peremabroncs-szakasz egyensúlyi vizsgálatával ki lehet mutatni,

* Kivonat az Acta Technica XXXIII. kötetében angol nyelven megjelent tanulmányból.



2. ábra. A héj és peremabroncs vizsgálati szakaszának alaprajzi vetülete

hogy a peremvonal alaprajzi vetülete akkor lesz a vetületi erők kötélgörbéje, ha

$$(x - x_0)\,[Y_0 - F_x(x_0, y_0)] - (y - y_0)\,[X_0 + F_y(x_0, y_0)] + \\ + F(x, y) - F(x_0, y_0) = 0. \tag{1}$$

Ebben a képletben $F = F(x, y)$ a héjprobléma PUCHER-féle feszültségfüggvénye, x_0 és y_0 a peremvonalon választott P_0 kezdőpont koordinátái, x és y a peremvonal P futó pontjának koordinátái, X_0 és Y_0 pedig a P pontra ható metszeterők. Az is egyszerűen igazolható, hogy az (1) képletben szögletes zárójelben levő mennyiségek a peremvonal minden pontján állandó értékűek. Ezek szerint az (1) egyenlet ilyen alakban is írható:

$$F(x, y) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + F(x_0, y_0). \tag{2}$$

Az utóbbi egyenlet nem más, mint az $F = F(x, y)$ felület $P_0(x_0, y_0)$ pontbeli ordinátájának végpontján átmenő síkmetszet egyenlete. Ha tehát a peremvonal a peremabroncsra ható erők kötélgörbéje, akkor a peremvonalon átfektetett függélyes tengelyű hengernek és az $F = F(x, y)$ felületnek — a *feszültségfelületnek* — a metszésvonala: síkgörbe.

Az imént említett síkgörbe természetesen a feszültségfelület valamely szintgörbéje is lehet, sőt, ha a feszültségfüggvényt alkalmas lineáris alakzattal

kiegészítjük, bármely sík metszésgörbe szintgörbévé alakítható át. Ámde adott héjalak és adott terhelés esetében elvileg mindig lehet oly feszültségfüggvényt előállítani, mely a peremvonal mentén állandó értékű. Ez más szóval azt jelenti, hogy fallal alátámasztott peremabronccsal bíró membránhéjak esetében semmi külön intézkedést sem kell tenni avégett, hogy a peremabroncs tengelyvonala a terhelő erők kötélgörbéje legyen. Az említett héjak esetében ui. az a követelmény minden ez irányú intézkedés nélkül is mindig eleve teljesül.

Az imént megállapított szabály egyenletesen megoszló függőleges erőkkel terhelt forgásparaboloid alakú héjak esetében érdekes analógia felismerését teszi lehetővé. Ily héjak esetében ui. a héjprobléma feszültségfüggvényének differenciálegyenlete ugyanolyan alakú, mint a rugalmas prizmatikus rúd csavarásproblémájának differenciálegyenlete, s a peremfeltétel is mindkét esetben azonos. Ezért aztán azonos alakú peremvonal, illetve keresztmetszeti kontúrvonal esetében a két feszültségfüggvény csak egy állandó tényezőben tér el egymástól.

A két probléma feszültségfüggvénye közt fennálló fenti hasonlóság folytán a csavarásprobléma minden megoldása egyúttal az analóg héjfeladat megoldását is szolgáltatja és fordítva, a héjprobléma minden megoldása egyúttal az analóg csavarási feladatnak is megoldása.

ÁLLANDÓ VAGY FOLYAMATOSAN VÁLTOZÓ FALVASTAGSÁGÚ ELLIPTIKUS PARABOLOIDHÉJ ELLIPSZIS ALAPRAJZ FELETT*

CSONKA PÁL
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
AZ MTA ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Beérkezett 1960. október 12-én]

Az elliptikus paraboloid szerint alakított ellipszis alaprajzú héjakat DISCHINGER, F_R. javaslatára a „statikai tömegkiegyenlítés" szabályának megfelelően változó falvastagságúra szokás készíteni (1. ábra).

A szóban forgó héjak falvastagságának ily módon való felvételét nem statikai szükségesség, hanem pusztán az a tény indokolja, hogy az ekként szerkesztett héjak számítása általában rendkívül egyszerű. Az említett egyszerűsítés azonban rendszerint komoly anyagpazarlással jár, miért is felette kívánatos oly számítóeljárás kidolgozása, amely állandó falvastagságú, vagy tetszőleges módon, de folyamatosan változó falvastagság esetében is célszerűen alkalmazható.

Az alábbiak ilyen számító eljárást mutatnak be. Az ismertetendő eljárás polinommal jellemezhető függélyes megoszló teher esetében alkalmazható.

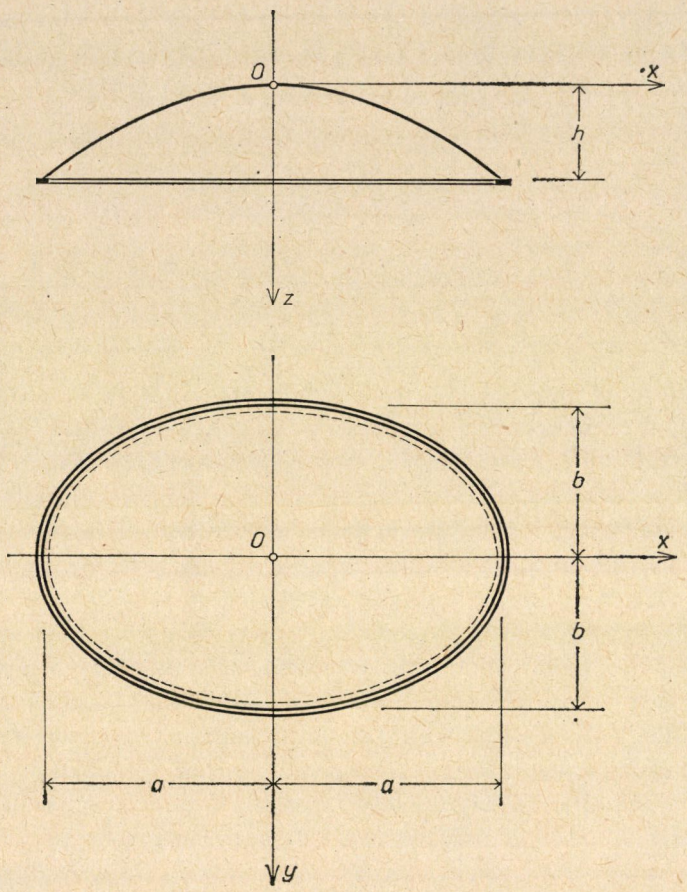
Maga a számítandó héj függélyes tengelyű elliptikus paraboloid alakú középfelülettel bír, és alul vízszintes síkú peremabroncsra támaszkodik. A támaszkodás egyetlen vonal mentén, a peremvonal mentén történik. Ez a vonal a peremabroncs tengelyvonalával esik egybe, s egyúttal rajta van a héj középfelületén. A peremabroncsot teljes hosszában falazat támasztja alá. A peremabroncs az alátámasztó falazatra csak függőleges erőket gyakorol, s ezek az erők a peremabroncs tengelyvonalán mennek át.

Tárgyalásainkban a membránelmélet egyszerűsítő feltevéseit alkalmazzuk. Ennek megfelelőleg feltesszük, hogy a héj hajlító- és csavaróhatásokkal szemben nem fejt ki ellenállást, továbbá, hogy a héj és peremabroncs csatlakozásánál az alakváltozási kényszerekből származó, a membránelmélettel összeférhetetlen hatások jelentéktelenek.

Vizsgálatainkat az 1., illetve 2. ábrán feltüntetett $O(x, y, z)$, illetve $O(\xi, \eta, \zeta)$ derékszögű koordinátarendszerben végezzük. A kétféle koordináták kapcsolata

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{h}. \tag{1}$$

* Az Acta Technica XXXIV. kötetében angol nyelven megjelent tanulmány kivonata.



1. ábra

Az $O(\xi, \eta, \zeta)$ koordinátarendszerben a héj középfelületeinek egyenlete

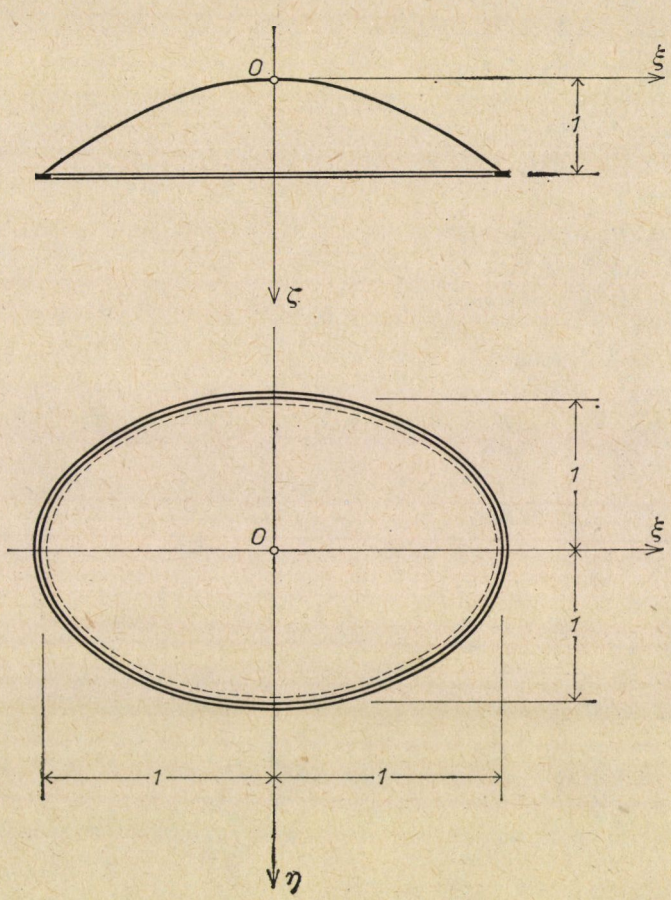
$$\zeta = \xi^2 + \eta^2 , \tag{2}$$

a héj terhelésadatait kifejező terhelésfüggvény

$$Z = Z(\xi, \eta) , \tag{3}$$

a héj $F(\xi, \eta)$ feszültségfüggvényének differenciálegyenlete pedig

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{a^2 b^2}{2h} Z = 0 . \tag{4}$$



2. ábra

A feszültségfüggvény peremfeltételeként azt kötjük ki, hogy a héj peremabroncsának tengelyvonala a peremabroncsra ható erők kötélgörbéje legyen. Ez a követelmény akkor teljesedik, ha a feszültségfüggvény a peremvonal mentén állandó, vagy sík szerint változó. Ennek megfelelőleg a peremértékeket illetően a legegyszerűbb lehetőséget, az

$$F = 0 \tag{5}$$

feltételt írjuk elő.

A gyakorlatban szóba jövő esetekben a héj terhelése általában egyszerű polinommal jellemezhető. Ilyenkor a feszültségfüggvény

$$F = \frac{a^2 b^2}{2h} [\xi^2 + \eta^2 - 1] G(\xi, \eta) \tag{6}$$

alakú, ahol $G(\xi, \eta)$ a ξ és η hatványai szerint haladó polinom. Az ekként megszerkesztett polinom nyilván megfelel az (5) peremfeltételnek, hiszen a (6) képletben szereplő szögletes zárójeles kifejezés értéke a héj peremén zérus. Így feldatunk megoldásához csupán a megfelelő $G(\xi, \eta)$ polinomot kell megkeresnünk. E polinom fokszáma a terhelés-polinom fokszámával megegyező. Magát a $G(\xi, \eta)$ polinomot az ismeretlen együtthatók módszerével határozzuk meg, nevezetesen a (6) kifejezést és a terhelés-polinomot (6)-ba behelyettesítjük, s együttható egyeztetést végzünk.

Ha pl. a terhelésfüggvény

$$Z = C_{00} + C_{20}\xi^2 + C_{02}\eta^2$$

alakú polinom, akkor a fent mondottak szerint eljárva, feszültségfüggvényként az alábbi kifejezést kapjuk:

$$F(\xi, \eta) = -\frac{a^2 b^2}{2h}(\xi^2 + \eta^2 - 1)\left(\frac{C_{20} + 8C_{00} + C_{02}}{32} + \right.$$
$$\left. + \frac{7C_{20} - C_{02}}{96}\xi^2 + \frac{7C_{20} - C_{02}}{96}\eta^2\right).$$

A feszültségfüggvényt ismervén, a vetületi feszítőerőket a következő képletekkel számíthatjuk:

$$n_x = \frac{1}{b^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2},$$

$$n_{xy} = -\frac{1}{ab}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \cdot \partial \eta},$$

$$n_y = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}.$$

VASBETON LEMEZSZERKEZETEK GAZDASÁGOSSÁGÁNAK SZÁMÍTÁSA

KORACH MARCELL
É. M. MÉLYÉPÍTÉSI TERVEZŐ VÁLLALAT

[Beérkezett 1960. október 11-én]

A vasbetonszerkezetek méretezésének módját — attól függően, hogy mi az egyes létesítmények rendeltetése — különféle szabályzatokba foglalt előírások szabályozzák. Az 1959. I. 1-én életbe lépett új árrendelet megadja a vasbetonszerkezetek fő anyagainak új árait. Ezek az árak — mint tudjuk — úgy jöttek létre, hogy lehetőleg híven tükrözzék a népgazdasági értéket.

Ennek a bázisnak a figyelembevételével megvizsgáltuk a tiszta hajlításra igénybevett vasbeton lemez „statikailag legkedvezőbb" kialakítása mellett szükséges beton és betonacél költségeit. Azután megvizsgáltuk annak a változtatásnak a hatásait, amely h dolgozó magasság növelésével és így a betonacél keresztmetszet csökkenésével a költségeknél jelentkezik.

„Statikailag legkedvezőbb" kifejezés alatt mind a beton, mind a betonacél — szabályzatok szerinti — teljes kihasználását értjük, amikor $x = 0{,}5 \cdot h$.

Kétségtelenül megállapítottuk, hogy a legkedvezőbb statikai kialakítás nagyobb kiviteli költséggel jár, mintha a szükségesnél nagyobb beton keresztmetszettel számolunk, tehát nem használjuk ki teljesen a vasbetonlemez nyomott övét.

Jelen munka célja, hogy a tervezés számára megadja, a lemezszerkezetek rendeltetésétől és anyagi minőségétől függő paramétereket, amelyekkel számított méretek a legalacsonyabb kiviteli költséget adják.

1. Kiindulási feltételek

A mérnöki vasbetonszerkezetek fő költségei a beton és a betonacél, valamint az állványozás és zsaluzás költségei. A költségvizsgálat szempontjából bizonyos közelítésekkel kellett élnünk, mert a probléma megoldása minden változó teljes figyelembevételével, matematikailag áttekinthetetlenül bonyolult.

A költségtényezőket elsősorban a vasbetonlemez vastagsági mérete és az acélbetétek keresztmetszete adják, mert a vasbeton sík lemezvastagsági méretének növelése nem változtatja meg a zsaluzott felületet, de az állvány-

méretek sem nőnek, mivel a „sztatikailag legkedvezőbb" vastagságú lemeznek megfelelő alátámasztás a leggazdaságosabb vastagságú (előzőnél vastagabb) lemeznek is általában megfelel.

Itt tehát a két mértékadó költségtényező a beton és a betonacél. Más a helyzet egy vb. gerendánál, ahol a magasság növekedésével a zsaluzat mennyisége is nő.

Ezekből is következik, hogy — nyilván — a leggazdaságosabb szerkezetet adó méretparaméter más lesz a vb. lemeznél és ismét más a vb. gerendánál. A betonok árait, minőségüktől függően alapárral és tapasztalati átlag szállítási költséggel adtuk meg. A betonacélok árai országos viszonylatban stabil árak.

Számításainknál ezért — jó közelítéssel — egyetlen változóval a vasbeton betonjának változó költségével dolgozunk.

A keretárakat az alábbiakban adjuk meg:

Betonminőség	Alapár Ft/m³ + szállítási költség
B 280	550—800 Ft. között
B 200	450—700 „ „
B 140	350—550 „ „
Betonacél 50.35. Bm	732 Ft/q.

A költségek és a statikai méretek között az alábbi összefüggés írható fel:

$$K = Ft_b\,(h + t) + Ft_v \frac{M_m}{q\,\sigma_{vH}}. \qquad (1)$$

A vizsgálatot a plasztikus méretezési eljárás szerint a MSZ 15022 előírásainak megfelelően végezzük, ahol K = összköltség 1 m², $h + t$ vastagságú lemezre vonatkozólag, h a húzott vasszálak súlyvonalának távolsága a nyomott beton keresztmetszet széltől cm-ben.

t = 3 cm (1,5 cm takarás + 1,0 cm kiviteli bizonytalanság + 0,5 betonacél átmérő átlag ∅ 10 betonacéllal számolva).

M_m = nyomaték kgcm-ben (biztonsági szorzókkal megnövelt és az önsúlyokat részben tartalmazó érték).

q = húzó nyomóerő karja cm-ben.

σ_{vH} = 2800 kg/cm² az 50.35 Bm acél határfeszültsége.

Ft_b = 1 cm vastag és 1,00 m² lemez betonjának költsége a beton minőségének függvényében.

Ft_v = 1 cm² keresztmetszetű és 1 fm hosszúságú betonacél költsége 20% szerelő betonacélt is beleértve (a 20% szerelő betonacél árával megemeltük a betonacél egységárát).

2. Levezetés olyan tiszta hajlításra igénybevett vb. lemezekre, ahol a statikailag optimális vastagsággal számított önsúly figyelembevétele elegendő pontosságot ad korrekció nélkül is (pl. vb. víztároló medencék fenéklemeze és oldalfala, vb. aknák fenéklemeze és oldalfala stb.)

M_m = konstans egy méretezésen belül, mert az önsúlykülönbség elhanyagolható.

Keressük az 1. egyenletből h azon értékét, amely adott M_m esetén minimum.

A szélső értékszámítás elvégzéséhez szükséges az egyenlet olyan átalakítása, hogy benne csupán h értéke legyen változó. Tekintve, hogy $\frac{M_m}{q\sigma_{vH}} = F_v$ és $q = h - \frac{x}{2}$, így ennek a tényezőnek átalakítása szükséges, mivel benne h változó implicit alakban van. Behelyettesítjük q értékét a nevezőbe:

$$\frac{M_m}{q\sigma_{vH}} = \frac{M_m}{\left(h - \frac{x}{2}\right)\sigma_{vH}} = F_v \,. \tag{2}$$

Tudjuk, hogy

$$\frac{x}{h} = \frac{F_v \sigma_{vH}}{bh\,\sigma_{bH}} \quad \text{innen} \quad x = \frac{F_v \sigma_{vH}}{b\sigma_{bH}} \,.$$

Betéve (2)-be

$$F_v = \frac{M_m}{\left(h - \frac{F_v \sigma_{vH}}{2b\,\sigma_{bH}}\right)\sigma_{vH}} \,.$$

Bevezetjük a $\beta = \frac{\sigma_{vH}}{\sigma_{bH}}$ jelölést és F_v-re megoldjuk az egyenletet:

$$F_v = \frac{M_m}{h\sigma_{vH} - \frac{F_v \sigma_{vH} \beta}{2b}} \quad \text{ebből}$$

$$F_v h\sigma_{vH} - \frac{F_v^2 \sigma_{vH} \beta}{2b} = M_m \,.$$

Rendezve az egyenletet

$$\frac{\sigma_{vH} \beta}{2b} F_v^2 - h\sigma_{vH} F_v + M_m = 0 \,.$$

Innen

$$F_v = \frac{h\sigma_{vH} \pm \sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - \frac{2\sigma_{vH}\beta M_m}{b}}}{\frac{\sigma_{vH}\beta}{b}}.$$

Bevezetjük a $C = \frac{\sigma_{vH}\beta}{b}$ jelölést és az $F_v = \frac{h\sigma_{vH} \pm \sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m}}{C}$ egyenlőség jobboldalát behelyettesítjük (1) utolsó tagjába az $\frac{M_m}{q\sigma_{vH}}$ helyébe. A négyzetgyökös kifejezés negatív értékét vesszük, mert így kapunk minimumot. A pozitív érték a maximumot adja.

Ekkor

$$K = Ft_b(h + t) + Ft_v \frac{h\sigma_{vH} - \sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m}}{C}.$$

A differenciáláshoz előkészítjük az előző egyenletet:

$$K = Ft_b h + t Ft_b + Ft_v \frac{h\sigma_{vH}}{C} - Ft_v \frac{\sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m}}{C}$$

h-nak ott lesz szélső értéke, ahol

$$\frac{dK}{dh} = 0 \quad \text{és ahol}$$

$$\frac{d^2K}{dh^2} > 0 \quad \text{ott minimum van.}$$

$$\frac{dK}{dk} = Ft_b + \frac{Ft_v \sigma_{vH}}{C} - \frac{\sigma_{vH} 2h \frac{Ft_v}{C}}{\sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - CM_m}} = 0. \tag{3}$$

A (3) egyenlet h szerinti deriváltja:

$$\frac{d^2K}{dh^2} = 0 + 0 - \frac{\sigma_{vH}^2 \frac{Ft_v}{C} \sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m} + \frac{h\sigma_{vH}^2}{\sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m}} h \frac{Ft_v}{C}}{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m} =$$

$$= - \frac{\sigma_{vH}^2 \cdot \frac{Ft_v}{C}}{\sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m}} + \frac{h\sigma_{vH}^2 \sigma_{vH}^2 h \frac{Ft_v}{C}}{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m \sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m}} .$$

Osszuk el mindkét törtet $\frac{\sigma_{vH}^2 \cdot \frac{Ft_v}{C}}{\sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m}}$ — el, akkor a jobboldali két tört alakja

$$-1 + \frac{h^2 \sigma_{vH}^2}{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m} .$$

Mivel $\frac{h^2 \sigma_{vH}^2}{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m} > 1$, a két tag különbsége:

$$\frac{d^2 K}{dh^2} > 0.$$

Így ezen a helyen valóban minimum van.

A (3) egyenlet mindkét oldalát $C\sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m}$ értékkel szorozzuk. Ekkor a (3) egyenlet alakja:

$$C\left(Ft_b + \frac{Ft_v \sigma_{vH}}{C}\right)\sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m} - Ft_v \sigma_{vH}^2 h = 0.$$

Rendezve:

$$C\left(Ft_b + \frac{Ft_v \sigma_{vH}}{C}\right)\sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m} = + Ft_v \sigma_{vH}^2 h.$$

Mindkét oldalt önmagával szorozzuk, akkor az egyenlet a következő:

$$C^2\left(Ft_b + \frac{Ft_v \sigma_{vH}}{C}\right)^2 (h^2 \sigma_{vH}^2 - 2CM_m) = Ft_v^2 \sigma_{vH}^4 h^2.$$

Rendezés után:

$$h^2 \sigma_{vH}^2 C^2\left(Ft_b + \frac{Ft_v \sigma_{vH}}{C}\right)^2 - Ft_v^2 \sigma_{vH}^4 h^2 = 2C^3 M_m\left(Ft_b + \frac{Ft_v \sigma_{vH}}{C}\right)^2$$

és $h^2\left[\sigma_{vH}^2 C^2\left(Ft_b + \frac{Ft_v \sigma_{vH}}{C}\right)^2 - Ft_v^2 \sigma_{vH}^4\right] = 2C^3 M_m\left(Ft_b + \frac{Ft_v \sigma_{vH}}{C}\right)^2$,

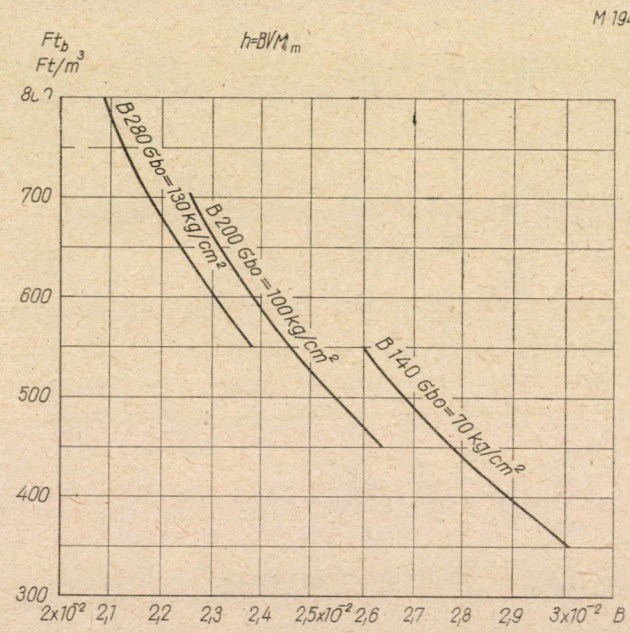
$b = 100$ cm és $\sigma_{bH} = 130$ kg/cm². Az $x = \xi h$ összefüggésből ábrázoltuk a ξ

Végül:

$$h_{opt} = \sqrt{\frac{2C^3\left(Ft_b + \frac{Ft_v \sigma_{vH}}{C}\right)^2}{\sigma_{vH}^2 C^2 \left(Ft_b + \frac{Ft_v \sigma_{vH}}{C}\right)^2 - Ft_v^2 \sigma_{vH}^4}} M_m .$$

Fenti alakból adott M_m nyomatékhoz a leggazdaságosabb h dolgozó magasság azonnal számítható az alkalmazandó beton és acél árainak behelyettesítésével, mert a végső alak $h = B\sqrt{M_m}$, ahol B a $\sqrt{M_m}$ érték szorzójából vont gyök pozitív értéke, és M_m a mértékadó nyomaték.

Az 1. ábrában megadtam B értékeit a különböző szilárdságú vasbetonok betonjára a betonok kiviteli költségének függvényében. A számítás grafikusan igen gyorsan elvégezhető.



1. ábra

Az eljárás a következő:

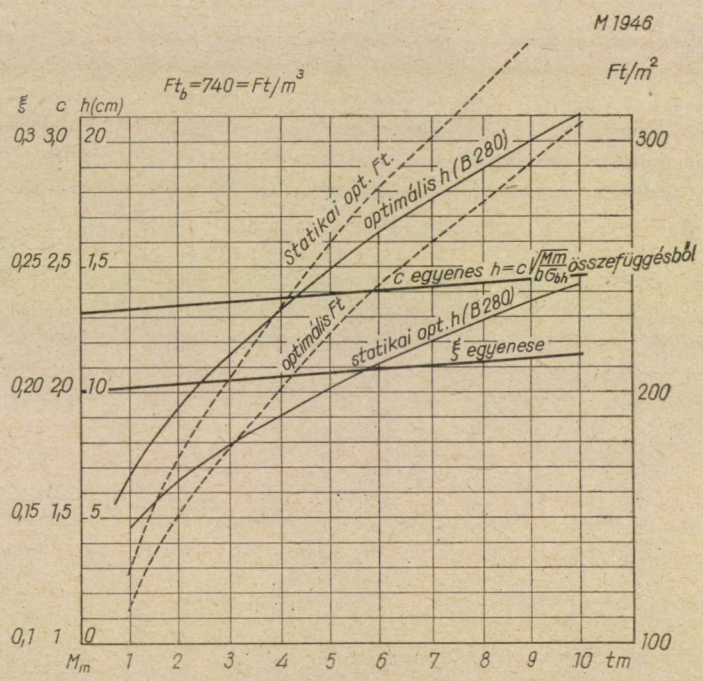
a) Meghatározzuk az igénybevételekből a lemezre mértékadó hajlító nyomatékot, M_m-t.

b) Megállapítjuk a kivitel helyére vonatkozó betonárat a szükséges betonszilárdsághoz.

c) Az így megállapított betonárhoz megkeressük a hozzátartozó *B* értéket úgy, hogy a betonár magasságában az abszcisszával párhuzamos egyenesnek és a megfelelő betonszilárdsághoz tartozó görbének a metszéspontjából az ordinátával párhuzamos egyenessel megkeressük a költségoptimumhoz tartozó *B* értékét.

d) Az így kapott *B* érték szorozva az M_m pozitív négyzetgyökével megadja azt a *h* dolgozó magasságot, amellyel kiadódó vasbetonlemez költsége minimum.

Mellékelten megadom még 740.—Ft/m³ betonár és 732.—Ft/q acélár mellett a statikailag teljesen kihasznált és az optimális költségű vasbetonlemez méret- és költségváltozásait a mértékadó nyomaték függvényében, B 280 minőségű beton esetére. Látható az ábrán is, hogy a különböző nyomatékokra méretezett optimális *h* értékekkel megvalósított vasbetonlemezek m²-kénti költségkülönbségei a statikailag teljesen kihasznált vb. lemezek költségéhez képest 16.— Ft-tól (8 cm vtg. lemeznél) 50.— Ft-ig (28 cm vtg. lemeznél) terjedő megtakarítást mutatnak. Ez beton m³-re vetítve 200.—Ft/m³-t, illetve 178.—Ft/m³-t jelent (2. ábra).



2. ábra

Az ábrán feltüntettük a $h = c\sqrt{\frac{M_m}{b\sigma_{bH}}}$ összefüggésből a *c* egyenesét, ahol

egyenesét. Látható, hogy ennél a betonárnál ξ értéke 0,207-től növekszik 0,215-ig.

Ha ezekután vizsgáljuk a $h = \frac{x}{\xi}$ összefüggést és összevetjük a $h = B\sqrt{M_m}$ és $h = c\sqrt{\frac{M_m}{h\sigma_{bH}}}$ összefüggéseket, ahonnan $B = \frac{c}{b\sigma_{bH}}$ és így $c = B\sqrt{b\sigma_{bH}}$, akkor a különböző szilárdságú betonoknál ξ értékének határai megállapíthatók a betonár függvényében.

Betonminőség	B 140		B 200		B 280	
$b\sigma_{bH} =$	7000		10,000		13,000	
$\sqrt{b\sigma_{bH}}$	83,7		100		114	
Betonár Ft/m³	350.—	550.—	450.—	700.—	550.—	800.—
$B \cdot 10^2$	3,005	2,600	2,638	2,255	2,380	2,0875
$c = B\sqrt{b\sigma_{bH}}$	2,515	2,176	2,638	2,255	2,713	2,380
ξ	0,173	0,240	0,156	0,221	0,147	0,195

Látható, hogy a leggazdaságosabb lemezek ξ értékei az eddig gazdaságos közelítő értékként kezelt $\xi = 0{,}4$ érték alatt marad. Ez azt jelenti, hogy az eddig használtaknál vastagabb vasbetonlemezek a gazdaságosabbak.

3. *Leggazdaságosabb lemezméretezés a vb. lemezek önsúlyának figyelembevételével*

Egyenlő vastagságú tiszta hajlításra igénybevett lemezről van itt is szó. Alapegyenlet differenciálásra előkészítve:

$$K = Ft_b\, h + Ft_b\, t + Ft_v \frac{h\sigma_{vH}}{C} - \frac{Ft_v}{C}\sqrt{h^2\sigma_{vH}^2 - C\left[p_{hm} + (h+t)\,\gamma_{vb}\right]\frac{l^2}{4}},$$

ahol $\gamma_{vb} = 1$ cm² keresztmetszetű és 100 cm hosszú betonszál súlya — 1,1 biztonsági szorzóval megszorozva, — $\gamma_{vb} = 0{,}275$ kg, p_{hm} a hasznos terhelés 1,4 biztonsági szorzóval megszorzott értéke 1 fcm-re vonatkoztatva, $b = 100$ cm, $t = 3$ cm, $Ft_v = 6{,}9$ Ft.

$$C = \frac{\sigma_{vH}^2}{b\sigma_{bH}}$$

Differenciálunk h szerint:

$$\frac{dK}{dh} = Ft_b + 0 + \frac{Ft_v \sigma_{vH}}{C} -$$

$$- \frac{Ft_v}{2C} \frac{2h\,\sigma_{vH}^2 - 0 - \dfrac{C\gamma_{vb}\,l^2}{4} - 0}{\sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - C\left[p_{hm} + (h+t)\,\gamma_{vb}\right]\dfrac{l^2}{4}}} = 0 .$$

Szorozzuk az egyenletet a gyökös kifejezéssel és rendezzük:

$$\left(Ft_b + \frac{Ft_v \sigma_{vH}}{C}\right) \sqrt{h^2 \sigma_{vH}^2 - C\left[p_{hm} + (h+t)\,\gamma_{vb}\right]\frac{l^2}{4}} = \frac{Ft_v \sigma_{vH}^2}{C}\, h - \frac{Ft_v \gamma_{vb}\, l^2}{8} .$$

Mindkét oldalt szorozzuk önmagával és $\left(Ft_b + \dfrac{Ft_v \sigma_{vH}}{C}\right)$ kifejezést α-val jelöljük:

$$\alpha^2 h^2 \sigma_{vH}^2 - C\alpha^2 \frac{l^2}{4}\left[p_{hm} + (h+t)\,\gamma_{vb}\right] =$$

$$= \frac{Ft_v^2 \sigma_{vH}^4}{C^2}\, h^2 - \frac{Ft_v^2 \sigma_{vH}^2\, l^2 \gamma_{vH}}{4C}\, h + \frac{Ft_v^2 \gamma_{vb}^2\, l^4}{64}$$

$$\underbrace{\left(\alpha^2 \sigma_{vH}^2 - \frac{Ft_v^2 \sigma_{vH}^4}{C^2}\right)}_{a} h^2 - \underbrace{\left(\frac{C\alpha^2 l^2 \gamma_{vb}}{4} - \frac{Ft_v^2 \sigma_{vH}^2 \gamma_{vb}\, l^2}{4C}\right)}_{b} h - \tag{4}$$

$$\underbrace{- \frac{C\alpha^2 l^2}{4}\left(p_{hm} + t\gamma_{vb}\right) - \frac{Ft_v^2 \gamma_{vb}^2\, l^4}{64}}_{c} = 0$$

$$h = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

A gyökös kifejezésnek csak a (+) értékét vesszük figyelembe, mert a (—) értéke nem értelmezhető.

$$h_{\text{opt}} = \frac{\dfrac{l^2}{4}\left(C\alpha^2 \gamma_{vb} - \dfrac{\sigma_{vH}^2\, Ft_v^2 \gamma_{vb}}{C}\right) + \sqrt{\left(C\alpha^2 \gamma_{vb} - \dfrac{Ft_v^2 \sigma_{vH}^2 \gamma_{vb}}{C}\right)^2 \dfrac{l^4}{16} + \left[C\alpha^2 l^2 \left(p_{hm} + t\,\gamma_{vb}\right) + \dfrac{Ft_v^2 \gamma_{vb}^2\, l^4}{16}\right]\left(\alpha^2 \sigma_{vH}^2 - \dfrac{Ft_v^2 \sigma_{vH}^4}{C^2}\right)}}{2\left(\alpha^2 \sigma_{vH}^2 - \dfrac{Ft_v^2 \sigma_{vH}^4}{C^2}\right)} \tag{5}$$

Más megoszló terhelés és más betonár esetén lineáris interpolálás vezet célra. Többtámaszú tartó esetén vagy koncentrált, illetve vegyes erők terhelésénél $p_{hm} = 8M$ mértékadó$/l_o^2$ számítható, ahol l_0 a nyomatéki 0 pontok közötti távolság. Kétirányú teherbirás esetén a nagyobb M_m-re méretezünk.

A továbbiakban h optimális értékét kiszámítottam különböző betonáraknak és terheléseknek megfelelően.

A hasznos terhelés értékébe beletartozik az esetleges feltöltés súlya is és minden egyéb teher a vb. lemez súlyán kívül, tehát a feltüntetett érték minden terhelésnek a vonatkozó szabályzatok szerinti — szorzókkal növelt vagy csökkentett — összes terhelését jelenti a vb. lemez súlyának kivételével.

Pl. ahol a mértékadó hasznos terhelés $p_{hm} = 5000$ kg/m² ez np_0 értékkel egyenlő, tehát ha a biztonsági szorzó $n = 1{,}4$, akkor

$$p_0 = \frac{5000}{1{,}4} = 3575 \text{ kg/m}^2. \text{ Ha } n = 1{,}2, \text{ akkor}$$

$$p_0 = \frac{5000}{1{,}2} = 4166 \text{ kg/m}^2.$$

Az ábrák tartalmazzák az optimális méretű vasbetonlemez súlyát is 1,1 szabályzat szerinti szorzóval és $\gamma = 2500$ kg/m³ alap térfogatsúllyal.

A 3., 4. és 5. ábrákon ábrázoltam a B. 140 minőségű vasbetonlemezek optimális dolgozó magasságait 350.— Ft, 450.— és 550.— Ft betonár mellett, 5000 kg/m² hasznos terhelésig, p_{hm} fenti értelmezésével.

Hasonlóképpen a 6., 7. és 8. ábrákon a B. 200 minőségű vasbetonlemezek optimális dolgozó magasságait 450.— Ft. 550.— Ft és 700.— Ft köbméterenkénti betonár mellett és a 9., 10. és 11. sz. nomogramokon a B. 280 minőségű vasbetonlemezek optimális dolgozó magasságait 550.— Ft, 650.— és 800.— Ft köbméterenkénti betonár mellett.

A nomogramok használata a következő:

1. Az adott beépítési helyer mértékadó betonárat megállapítjuk, úgyszintén a szükséges minőséget.

2. Megállapítjuk a mértékadó terhelést a vb. lemez önsúlya nélkül.

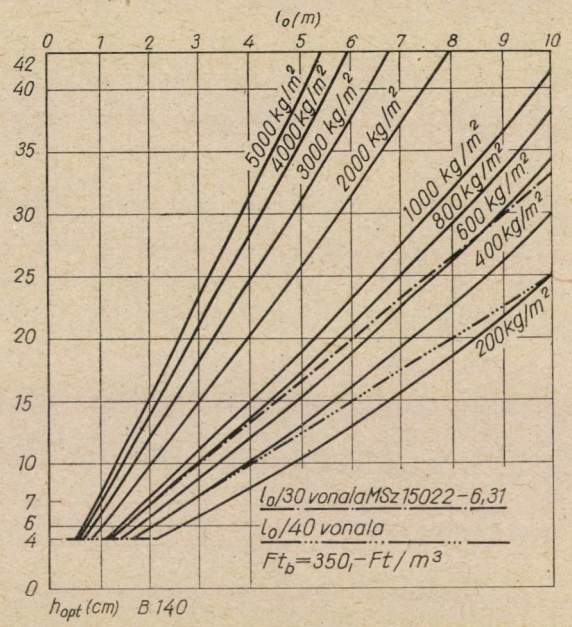
3. Az adott fesztávnak megfelelően megkeressük a szomszédos értékeket és egyenes mentén történő közbeiktatással megállapítjuk az optimális dolgozó magasságot.

Példa.

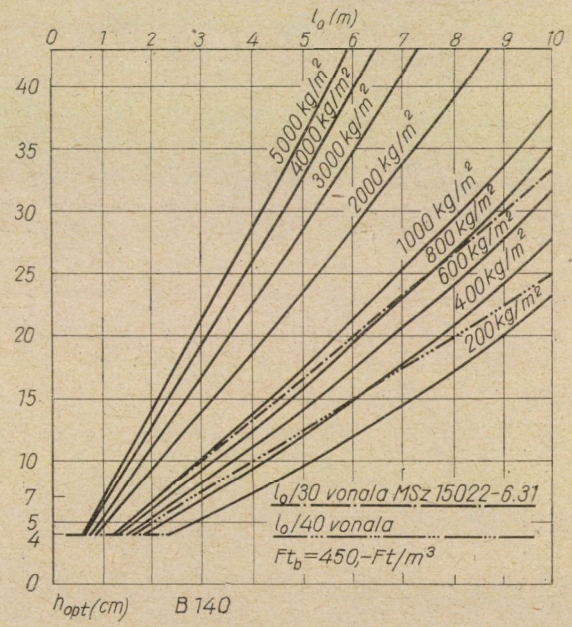
Legyen B. 280 minőségű vasbetonlemezre szükség. Legyen a vasbeton ára 612 Ft/m³. 2700 kg/m² hasznos terhelés adódik a biztonsági szorzókkal való szorzások elvégzése után.

A fesztáv 6,4 m legyen.

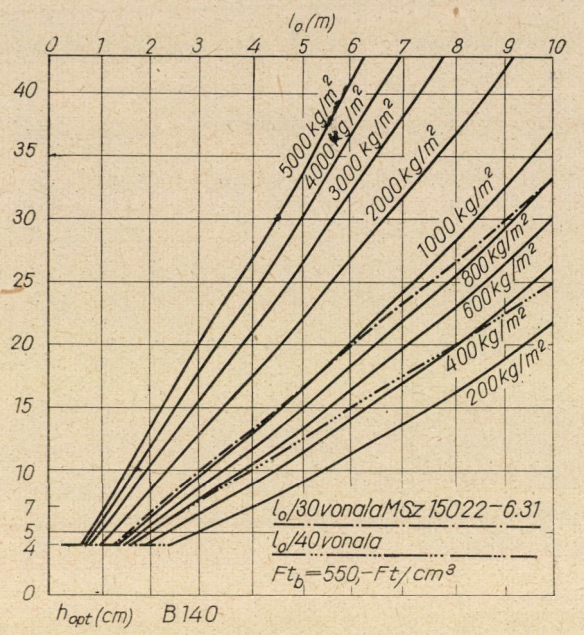
Az 550 Ft/m³ betonárnál 6,4 m. fesztávnál 2000 kg/m² terhelésnél $h_{opt} = 25{,}7$ cm és 650 Ft/m³ betonárnál $h_{opt} = 24{,}3$ cm.


l_o(m)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
42 40 35 30 25 20 15 10 7 6 4 0
5000 kg/m²
4000 kg/m²
3000 kg/m²
2000 kg/m²
1000 kg/m²
800 kg/m²
600 kg/m²
400 kg/m²
200 kg/m²
l_o/30 vonala MSz 15022-6,31
l_o/40 vonala
Ft_b=350,-Ft/m³
h_{opt}(cm) B 140

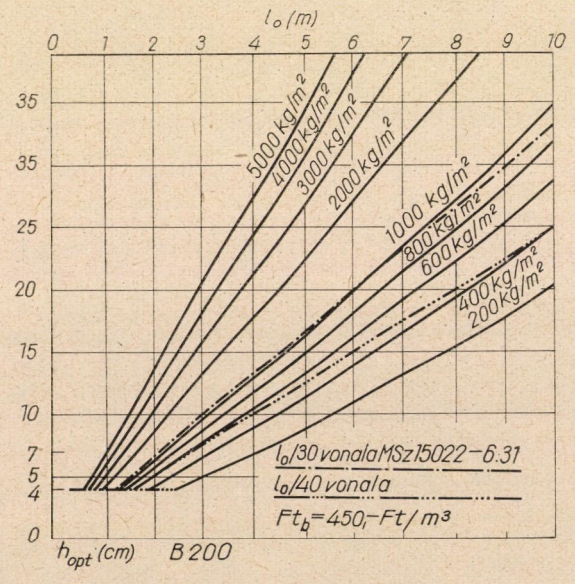
3. ábra


l_o(m)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
40 35 30 25 20 15 10 7 5 4 0
5000 kg/m²
4000 kg/m²
3000 kg/m²
2000 kg/m²
1000 kg/m²
800 kg/m²
600 kg/m²
400 kg/m²
200 kg/m²
l_o/30 vonala MSz 15022-6.31
l_o/40 vonala
Ft_b=450,-Ft/m³
h_{opt}(cm) B 140

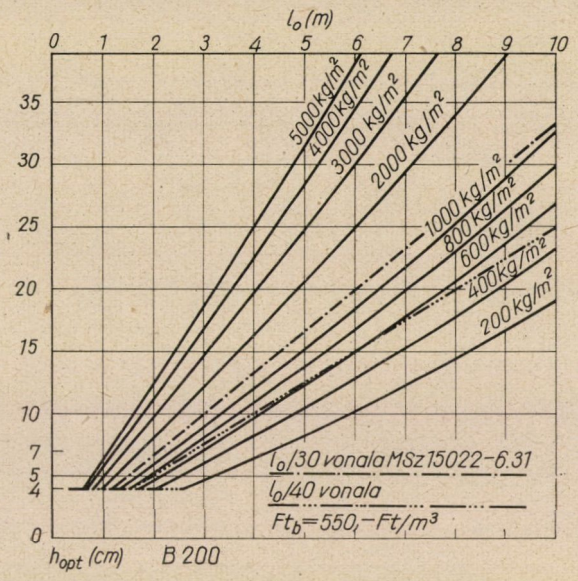
4. ábra


l_o(m)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
40
35
30
25
20
15
10
7
5
4
0
5000 kg/m²
4000 kg/m²
3000 kg/m²
2000 kg/m²
1000 kg/m²
800 kg/m²
600 kg/m²
400 kg/m²
200 kg/m²
l_o/30 vonala MSz 15022–6.31
l_o/40 vonala
Ft_b=550,–Ft/cm³
h_{opt}(cm) B 140

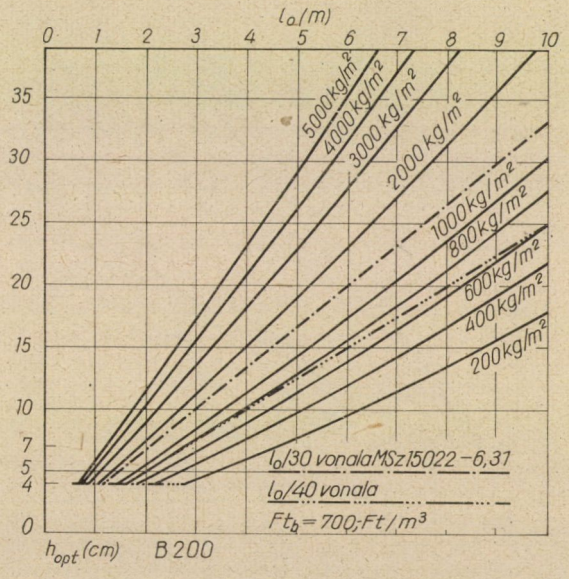
5. ábra


l_o(m)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
35
35
25
20
15
10
7
5
4
0
5000 kg/m²
4000 kg/m²
3000 kg/m²
2000 kg/m²
1000 kg/m²
800 kg/m²
600 kg/m²
400 kg/m²
200 kg/m²
l_o/30 vonala MSz 15022–6.31
l_o/40 vonala
Ft_b=450,–Ft/m³
h_{opt}(cm) B 200

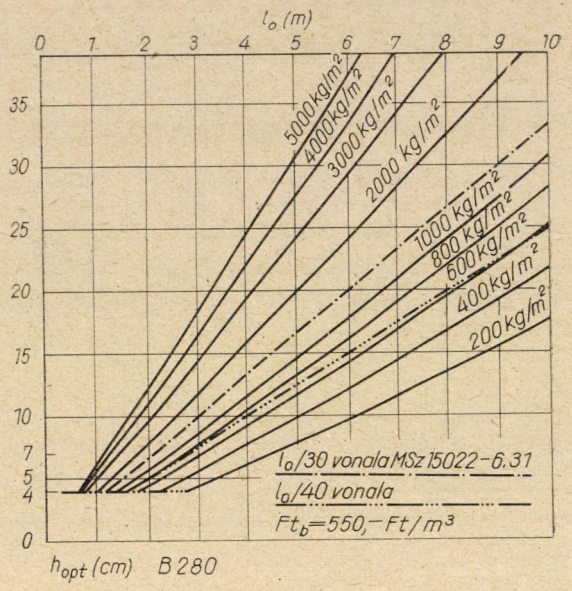
6. ábra


l_o (m)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
35 30 25 20 15 10 7 5 4 0
5000kg/m²
4000kg/m²
3000 kg/m²
2000 kg/m²
1000 kg/m²
800kg/m²
600kg/m²
400kg/m²
200 kg/m²
l_o/30 vonala MSz 15022–6.31
l_o/40 vonala
Ft_b=550,–Ft/m³
h_{opt} (cm) B 200

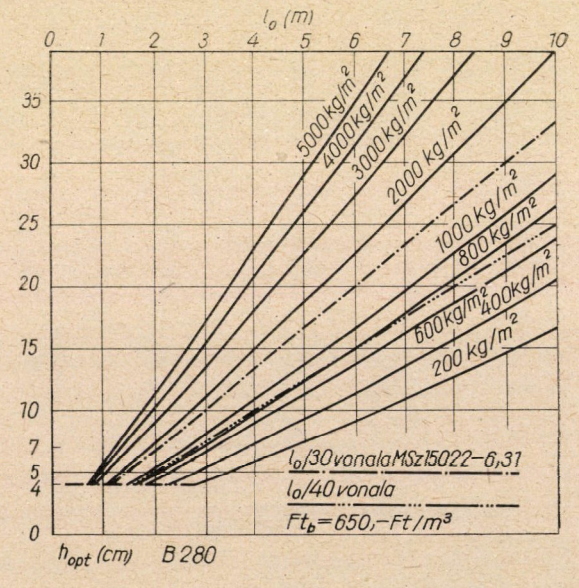
7. ábra


l_o (m)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
35 30 25 20 15 10 7 5 4 0
5000kg/m²
4000 kg/m²
3000 kg/m²
2000 kg/m²
1000kg/m²
800kg/m²
600kg/m²
400kg/m²
200kg/m²
l_o/30 vonala MSz 15022–6,31
l_o/40 vonala
Ft_b=700,–Ft/m³
h_{opt} (cm) B 200

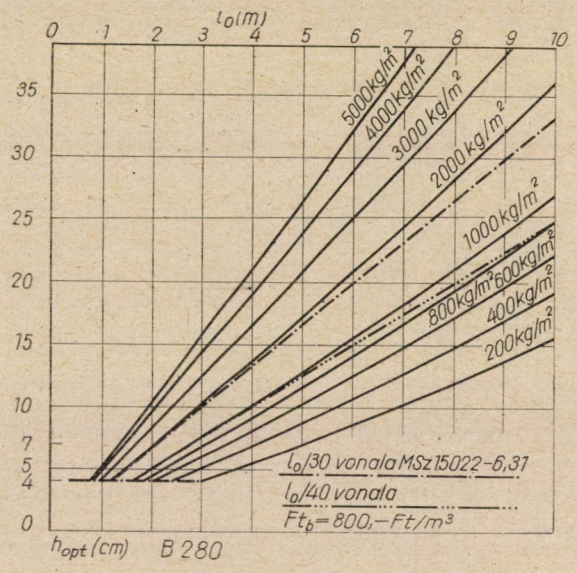
8. ábra



9. ábra



10. ábra



11. ábra

550 Ft/m³ betonárnál és 3000 kg/m² hasznos terhelés esetén ugyanezen fesztávra $h_{opt} = 31{,}1$ cm, míg 650 Ft/m³ betonárnál $h_{opt} = 29{,}2$ cm.

Terhelés	2000 kg/m²	2700 kg/m²	3000 kg/m²
550 Ft/m³	25,7 cm		31,1 cm
arányos különbségek:	−0,87 cm		−1,18 cm
612 Ft/m³	*24,83 cm*, △ = 5,09 cm	**28,39 cm**	*29,92 cm*
650 Ft/m³	−24,3 cm		−29,2 cm
	△ = 1,4 cm		△ = 1,9 cm

$$h_{opt.} = 24{,}83 + \frac{7 \cdot 5{,}09}{10} = 28{,}39\ cm$$

Ellenőrzésként a pontos számítást alább adom úgy, hogy *a*, *b*, és *c* értékeit a (4) egyenlet értékeibe helyettesítettem be a megfelelő számértékekkel.

$$a.\quad 1455{,}8803 \cdot 7{,}84 \cdot 10^6 = 11{,}4141 \cdot 10^9$$

$$\frac{47{,}67 \cdot 7{,}84^2 \cdot 10^{12}}{363701{,}7473} = \frac{-\ 8{,}0461 \cdot 10^9}{a = 3{,}3680 \cdot 10^9}$$

$$b.\quad \frac{603{,}0769 \cdot 1455{,}8803 \cdot 640^2 \cdot 0{,}275}{4} = 24{,}7247 \cdot 10^9$$

$$\frac{6{,}9^2 \cdot 7{,}84 \cdot 10^6 \cdot 0{,}275 \cdot 640^2}{4603{,}0769} = \frac{-\ 17{,}4297 \cdot 10^9}{b = 7{,}2950 \cdot 10^9}$$

$$c. \quad \frac{603{,}0769 \cdot 1455{,}8803 \cdot 640^2}{4}(27 + 0{,}825) = 2492{,}6993 \cdot 10^9$$

$$\frac{47{,}61 \cdot 0{,}275^2 \cdot 640^4}{64} = + \quad 5{,}8991 \cdot 10^9$$

$$c = 2498{,}5984 \cdot 10^9$$

$$b^2 = 53{,}2170 \cdot 10^{18}$$

$$+ 4ac = 33667{,}1176 \cdot 10^{18}$$

$$33714{,}3346 \cdot 10^{18}$$

$$h_{opt} = \frac{7{,}30 + \sqrt{33714{,}3346}}{6{,}736} = \frac{7{,}30 + 183{,}61}{6{,}736} = \frac{190{,}91}{6{,}736} = 28{,}34\ cm$$

Látható, hogy a leolvashatósági pontosság milliméter rendű, tehát gyakorlati célra megfelel.

A nomogramokat vizsgálva az alábbi megállapítások tehetők:

1. Optimális lemezvastagság csak 1000 kg/m²-nél nagyobb hasznos terhelés esetén tervezhető, tekintve, hogy az MSZ 15022 szabvány 6.31 pontjában foglaltakban a használható legkisebb lemezvastagság kéttámaszú lemez esetén a fesztáv 1/30-ad részénél, többtámaszú lemez esetén az 1/40-ed résznél kisebb nem lehet.

2. Látható — 1. alapján —, hogy a vb. lakásfödémek gazdaságtalanok és indokolt lenne lakásfödémek vonatkozásában az MSZ 15022. szabvány vonatkozó előírásának felülvizsgálata, természetesen az építési minőség szigorú betartásának megkövetelésével.

3. A ξ értékeket vizsgálva az alábbi határértékeket találjuk:

Megnevezés:	ξ							
Betonminőség:	B 140				B 200			
Hasznos teher: p_{hm}	200 kg/m²		5000 kg/m²		200 kg/m²		5000 kg/m²	
Fesztáv méter	5	10	5	10	5	10	5	10
Ft_{beton} Ft/m³								
350.—	0,221467	0,33003	0,19408	0,218	—	—	—	—
450.—	0,31386	0.37339	0,23347	0,25843	0,238	0,29643	0,17568	0.19568
550.—	0,351691	0,41900	0,2688	0,294	0,26813	0,330154	0,20532	0.22624
650.—	—	—	—	—	—	—	—	—
700.—	—	—	—	—	0,30786	0,36939	0,24475	0,2656
800.—	—	—	—	—	—	—	—	—

Megnevezés:	ξ			
Betonminőség:	B 280			
Hasznos teher:	200 kg/m²		5000 kg/m²	
Fesztáv méter:	5	10	5	10
$Ft_{betón}$ Ft/m³				
350.—	—	—	—	—
450.—	—	—	—	—
550,—	0,21823	0,273334	0,16488	0,18256
650.—	0,242875	0,300145	0,18781	0,20595
700.—	—	—	—	—
800.—	0,27654	0,33477	0,21962	0,23854

A határértékeket vizsgálva az alábbi következtetések vonhatók le:

1. A gazdaságos méretek nyomott övének magassága nem konstans érték, hanem változó.

2. A változásra hatása van:

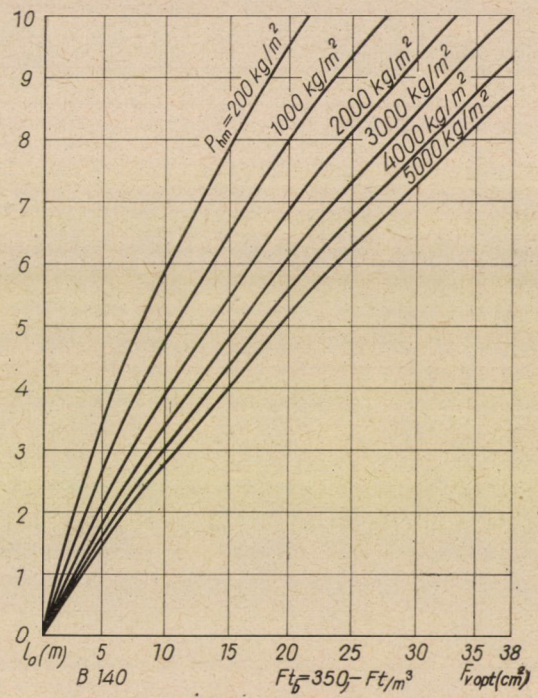
a) a vasbeton árának

b) a betonminőségnek

c) a vasbetonlemez fesztávjának és

d) a terhelés nagyságának.

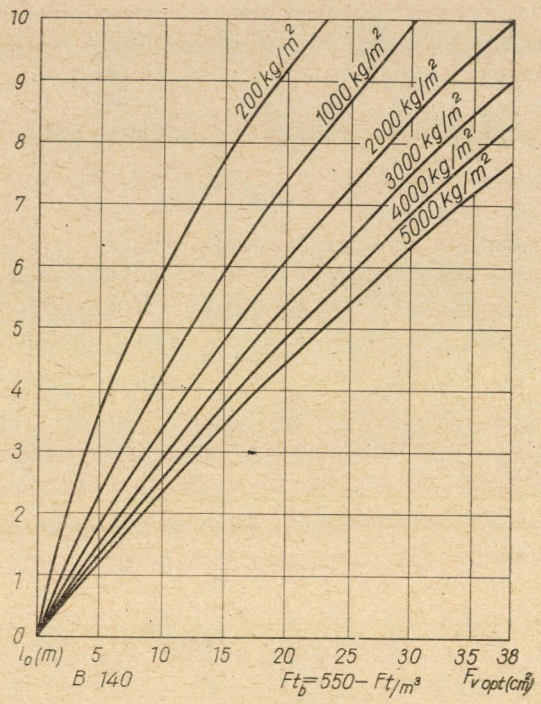
Az értékekből itt is levonható az a következtetés, hogy az átlaguk az eddig gazdaságosnak tartott $\xi = 0{,}4$ értéknél kisebb, tehát az ennek az értéknek



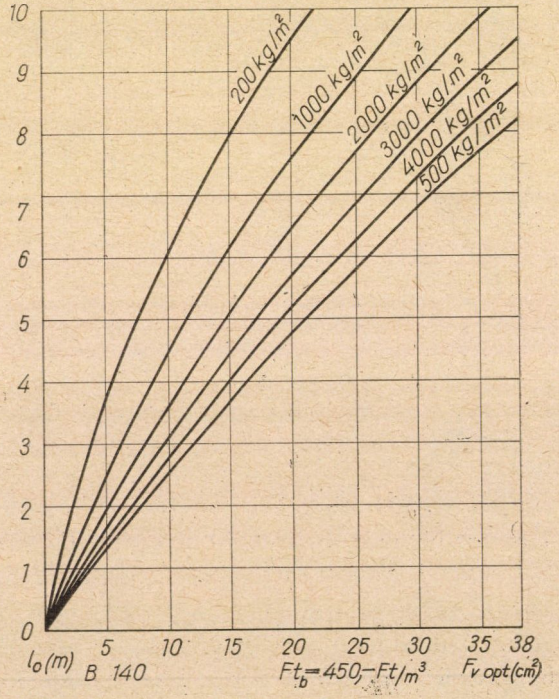
12. ábra

megfelelő lemezvastagságnál feltétlenül vastagabb lemezek a gazdaságosabbak, amelyek közül — ismert betonár mellett — az optimális méret mindig kiválasztható.

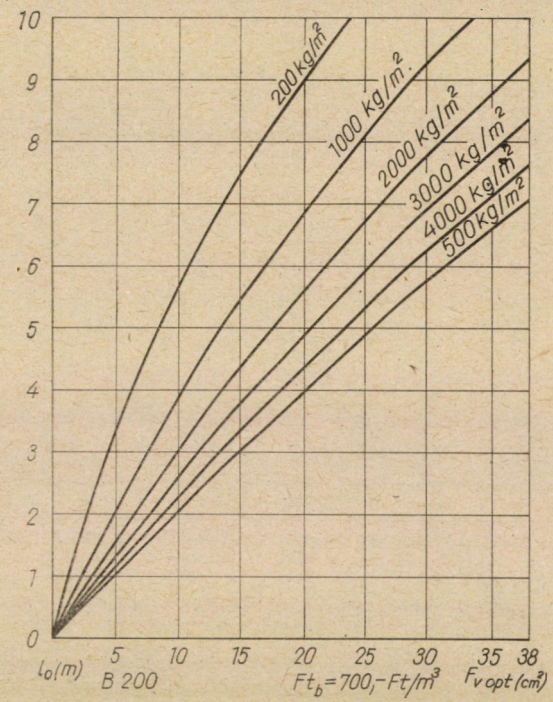
A 12—20. ábrák nomogramjaiból közvetlenül vagy egyenes mentén történő, kétirányú közbeiktatással megállapítható az optimális lemezvastagsághoz tartozó betonacél keresztmetszet a legnagyobb nyomaték helyére vonatkozólag.



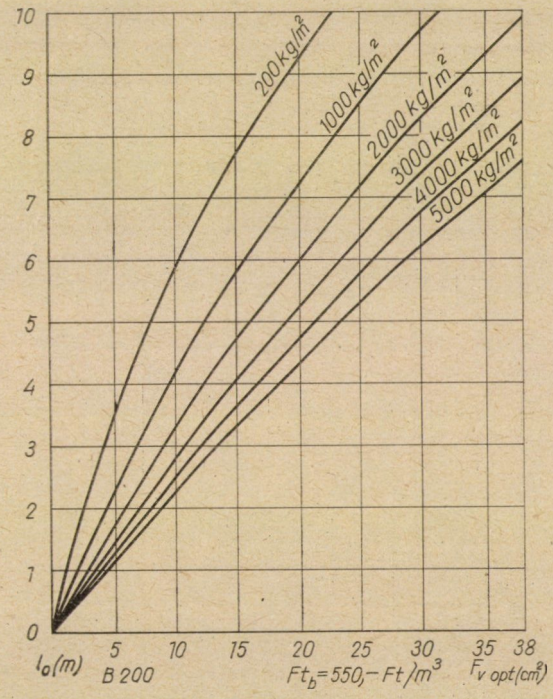
13. ábra



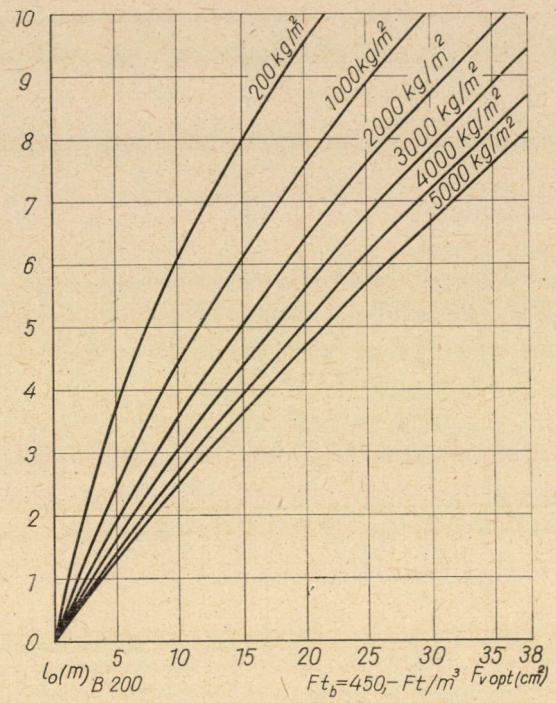
14. ábra



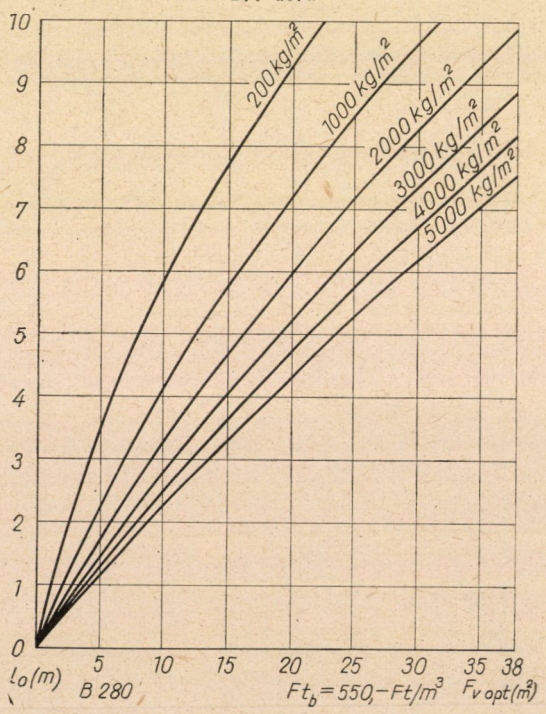
15. ábra



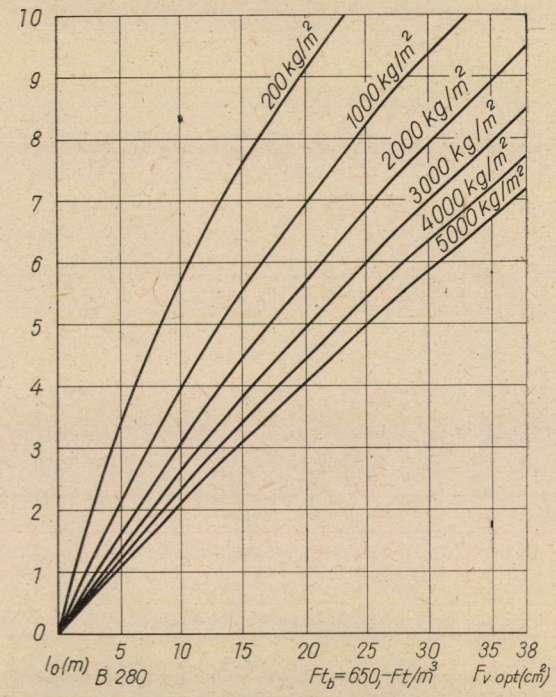
16. ábra



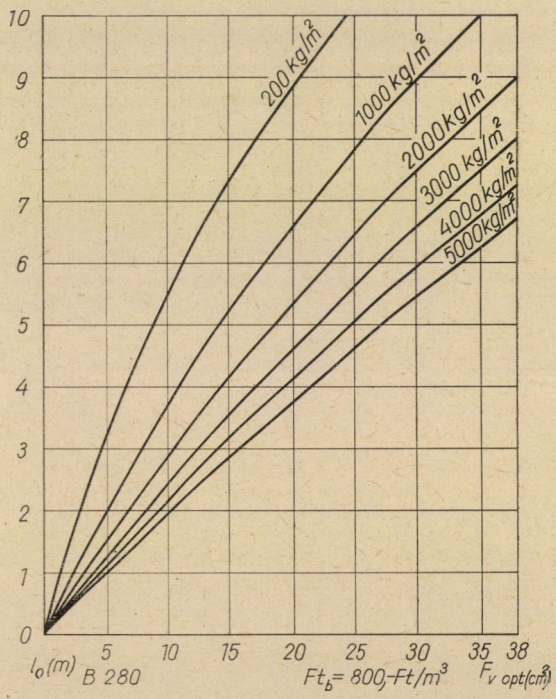
17. ábra



18. ábra



19. ábra



20. ábra

Végül az alábbi táblázatban megadom — ismert vasbetonárak függvényében — a vasbetonlemezek költségoptimumát. Ezekben a Ft értékekben nincs benne a zsaluzás és állványozás költsége.

Költségtáblázat

B 140 betonminőségnél Ft/m²

Ft/m³	Hasznos teher kg/m²	200	1000	2000	3000	4000	5000
350.—	5,00 m fesztávnál	95,61	150,21	193,85	227,79	256,61	282,07
	10,00 m fesztávnál	246,63	346,16	432,00	499,22	556,42	606,97
450.—	5,00 m fesztávnál	108,73	171,50	221,58	260,56	293,64	322,88
	10,00 m fesztávnál	268,43	388,85	487,34	564,67	630,35	688,53
550.—	5,00 m fesztávnál	121,13	191,36	247,50	291,12	328,20	360,85
	10,00 m fesztávnál	294,07	428,88	539,19	625,69	699,15	764,30

B 200 betonminőségnél Ft/m²

Ft/m³	Hasznos teher kg/m²	200	1000	2000	3000	4000	5000
450.—	5,00 m fesztávnál	105,28	167,18	216,55	254,90	287,43	316,15
	10,00 m fesztávnál	254,91	375,16	472,63	548,87	613,60	670,80
550.—	5,00 m fesztávnál	116,88	185,98	241,01	283,80	320,08	352,13
	10,00 m fesztávnál	277,75	411,84	520,62	605,33	677,90	741,76
700.—	5,00 m fesztávnál	133,00	212,36	275,31	324,21	365,70	402,43
	10,00 m fesztivnál	310,01	463,35	587,79	694,96	767,60	840,64

B 280 betonminőségnél Ft/m².

Ft/m³	Hasznos teher kg/m²	200	1000	2000	3000	4000	5000
550.—	5,00 m fesztávnál	114,53	183,04	237,47	279,79	315,64	347,36
	10,00 m fesztávnál	268,85	402,69	510,62	594,82	666,31	729,59
650.—	5,00 m fesztávnál	125,17	200,13	259,73	306,09	345,38	380,09
	10,00 m fesztávnál	288,17	435,57	553,74	645,93	724,19	793,41
800.—	5,00 m fesztávnál	140,36	224,42	291,24	343,02	387,24	426,16
	10,00 m fesztávnál	317,89	482,02	614,60	717,88	805,68	883,29

Fentieket vizsgálva felmerül az a kérdés, hogy költségek szempontjából — konkrét esetekben — milyen minőségű betont használjunk, ha speciális igény (pl. vízzáróság) nem jelentkezik.

A táblázat azonos betonárú, de különböző betonminőségű adatait összehasonlítva pl. az 5000 kg/m²-es terhelési szakasznál az $Ft_b = 550.—$ érték mellett B. 140-nél és 10,00 m fesztávnál 764,30 Ft/m²
B. 200-nál és 10,00 m „ 741,76 „ „
B. 280-nál és 10,00 m „ 729,59 „ „
az optimális költség.

Ugyanazon a munkahelyen a különböző minőségű betonoknak nem lehet azonos ára, hanem a B. 140 és B. 200 beton, valamint a B. 200 és B. 280 minőségű beton köbméterenkénti árai között kb. 60.— Ft a költségkülönbözet. Ez azt jelenti, — az optimális lemezvastagságoknak megfelelő költségkülönbözeteket figyelembe véve —, hogy minden vasbeton lemezszerkezetet, ahol a teherbíráson felül egyéb igény nincs, B. 140-es minőségű betonból kell tervezni, mert ez bizonyul a leggazdaságosabbnak a különböző minőségű betonok között.

Végül megjegyzem, hogy a 12—20. ábrák nomogramjainak használata valamivel nagyobb vaskeresztmetszeti értéket ad a gyakorlati számításhoz, mivel az optimális vasbeton lemezvastagságot általában csak centiméterre felkerekített értékkel lehet használni.*

ÖSSZEFOGLALÁS

A levezetett eljárás értékelése az alábbiakban foglalható össze:

1. Tiszta hajlításra igénybevett vasbetonlemezek optimális méretének kiszámítása — ismert betonár mellett — lehetséges és szükséges.
2. Az eddig használt $\xi = 0{,}4$ érték, mint gazdaságos méret elvetendő.
3. Lehetőleg B 140 minőségű betonból tervezzünk, mert az ebből készült lemezek költsége a legkisebb.
4. Az eddigiek kézzel foghatóan bizonyítják az optimumszámítások létjogosultságát.
5. Népgazdaságunk rohamos fejlődése megköveteli, hogy az óriási méretekben történő anyagfelhasználás mellett az egyes létesítmények tervezésénél ne csak arra törekedjünk, hogy a mérnöki létesítmények jól megfeleljenek rendeltetésüknek, hanem arra is, hogy ezek mellett a beruházási költségek a legkisebbek legyenek.
6. Ez a törekvés megköveteli az erre irányuló módszeres kutatást mind elméleti, mind gyakorlati vonatkozásban.

Az itt felvetett feladat nem egyszerű és nem könnyű. Más szakágaknál is számos költségparaméter befolyásolja az árak alakulását és így a beruházási és üzemeltetési költségeket.

A számítások gyorsabb és könnyebb elvégzésére az elektronikus számológépet is fel kell használni.

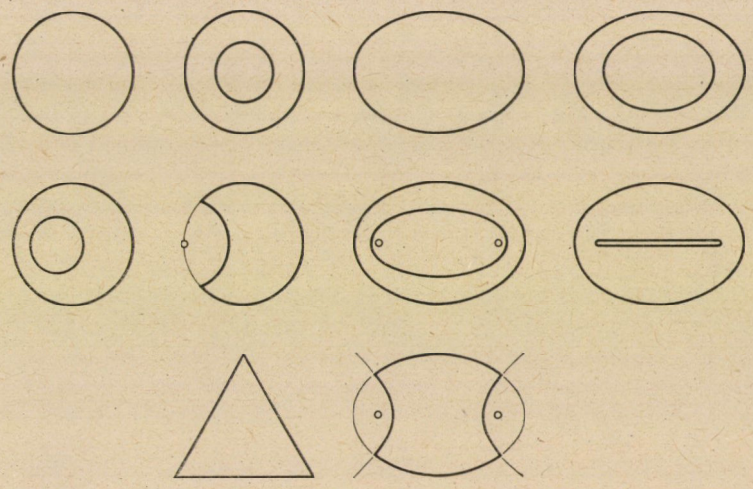
* A feltüntetett nomogramok — gyakorlati használatra — formátum nagyságban megrendelhetők az ÉM Mélyépítési Tervező Vállalatnál (Budapest, V., Vigadó tér 1.)

A CSAVARÁSI PROBLÉMA NÉHÁNY ZÁRT ALAKÚ MEGOLDÁSA*

CSONKA PÁL
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
AZ MTA ÉPÍTÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Beérkezett 1960. október 14-én]

A rugalmas anyagú prizmatikus rúd csavarási problémájának zárt alakú megoldása csak néhány különlegesen egyszerű keresztmetszeti idom esetében ismeretes. Egyes egyszerű, véges kiterjedésű ilyen keresztmetszeti idomok (1. ábra): a kör és körgyűrű, valamint ezek affin transzformáltjai, a konfokális ellipszisekkel, illetve hiperbolákkal határolt idom, a külpontos körgyűrű a körív̈es horonnyal gyengített körkeresztmetszet és a szabályos háromszög.



1. ábra

Az alábbiakban hiperbolaívvel, illetve egyenes vonallal határolt néhány véges kiterjedésű oly keresztmetszet-alakot mutatunk be, melyek esetében a csavarási feladat pontos megoldása szintén zárt alakban állítható elő. A közlendő képletekben M a csavarónyomatékot, G a nyírórugalmasság modulusát, ϑ a fajlagos elcsavarodás szögét, $F = F(x, y)$ a csavarás feszültségfüggvényét

* Az Acta Technica XXXVIII. kötetében angol nyelven megjelent tanulmány kivonata.

jelenti, τ_{zx}, illetve τ_{zy} pedig a keresztmetszeten keletkező nyírófeszültség x, illetve y irányú alkotóját jelöli. E feszültségalkotók a feszültségfüggvénnyel a következő kapcsolatban állanak

$$\tau_{zx} = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \tau_{zy} = -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

1. Hiperbolaív és egyenes által határolt keresztmetszet

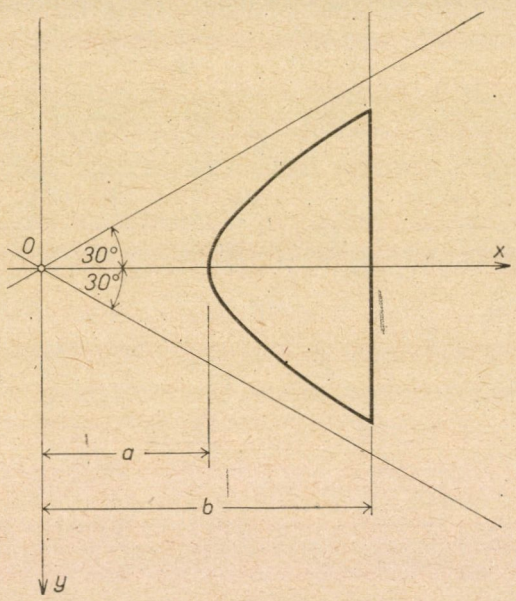
A hiperbolaív aszimptotái a valós tengellyel 30°-os szöget zárnak be. Az egyenes határvonal a hiperbola képzetes tengelyével párhuzamos (2. ábra).

A hiperbolaív egyenlete

$$x^2 - 3y^2 - a^2 = 0,$$

a határoló egyenesé pedig

$$x - b = 0, \quad b > a.$$



2. ábra

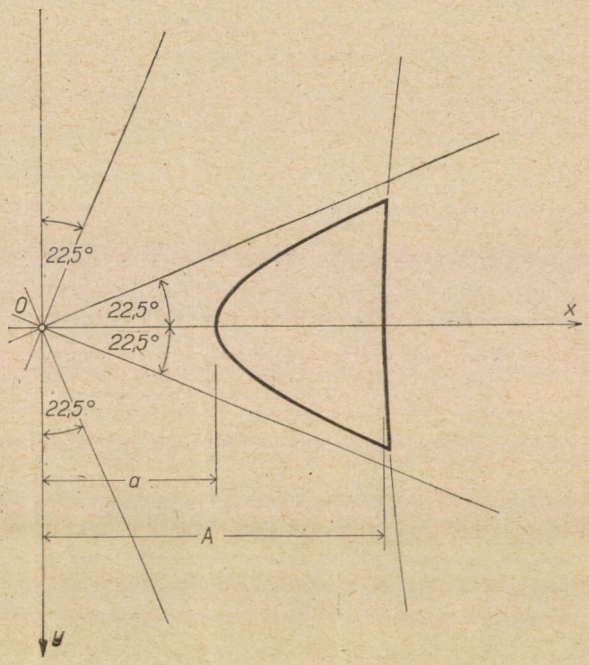
A keresztmetszet feszültségfüggvénye:

$$F = -\frac{G\vartheta}{2b}(x^2 - 3y^2 - a^2)(x - b).$$

Olyankor, amidőn $a = 0$, a szóban forgó keresztmetszeti idom szabályos háromszöggé fajul el. E különleges esetben a feladat feszültségfüggvénye az irodalomból ismeretes.

2. Két hiperbolaív által határolt keresztmetszet

A két hiperbola középpontja és valós tengelye egybeesik. A hiperbolák aszimptotái 22,5°-os szöget zárnak be a valós, illetve képzetes tengellyel (3. ábra).



3. ábra

A két hiperbolaív egyenlete

$$x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}-1}\right)^2 - a^2 = 0\,,$$

illetve

$$x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}+1}\right)^2 - A^2 = 0\,,$$

a csavarás feszültségfüggvénye pedig

$$F = -\frac{G\vartheta}{2K}\left[x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}-1}\right)^2 - a^2\right]\left[x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}+1}\right)^2 - A^2\right],$$

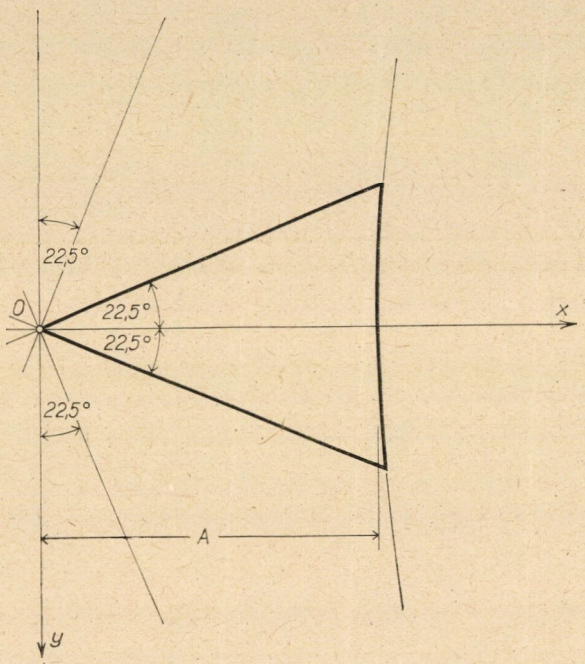
ahol

$$K = -\frac{a^2}{\sqrt{2}+1} + \frac{A^2}{\sqrt{2}-1}\,.$$

3. Hiperbolaív és két egyenes által határolt keresztmetszet

Az itt tárgyalandó keresztmetszet a 2. alatti keresztmetszet különleges esete. Ez a különleges eset akkor áll elő, ha $a = 0$.

A keresztmetszetet határoló két egyenes a hiperbola középpontján megy át és annak valós tengelyével 22,5°-os szöget alkot. A hiperbola aszimptotái 22,5°-os szöget zárnak be a képzetes tengellyel (4. ábra).



4. ábra

A hiperbolaív egyenlete

$$x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}+1}\right)^2 - A^2 = 0,$$

a keresztmetszetet határoló egyenespár egyenlete pedig:

$$x^2 = \left(\frac{y}{\sqrt{2}-1}\right)^2 = 0 \cdot$$

Ebben az esetben a csavarás feszültségfüggvénye

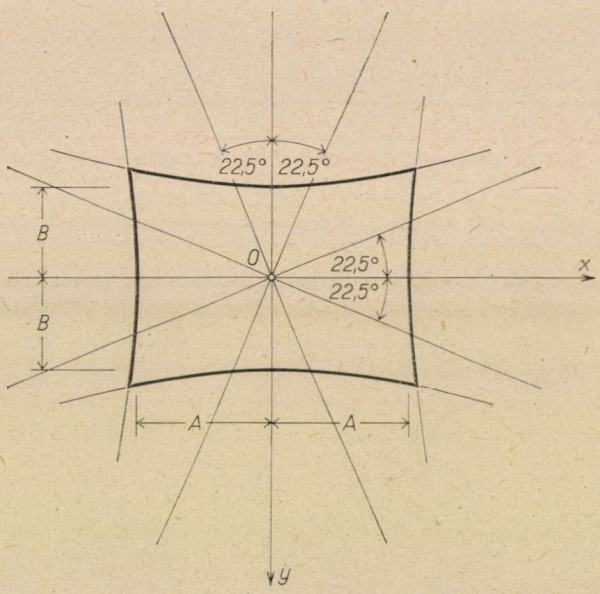
$$F = -\frac{G\vartheta}{2K}\left[x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}-1}\right)^2\right]\left[x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2}+1}\right)^2 - A^2\right],$$

ahol

$$K = \frac{A^2}{\sqrt{2} - 1} .$$

4. Négy hiperbolaívvel határolt keresztmetszet

A négy hiperbolaív két hiperbola két-két ága. A két hiperbola szimmetriatengelyei közösek, a valós tengelyek egymásra merőlegesek. Az aszimptoták 22,5°-os szöget zárnak be a valós, illetve képzetes tengellyel (5. ábra).



5. ábra

A két hiperbola egyenlete

$$x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2} + 1}\right)^2 - A^2 = 0,$$

illetve

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2} + 1}\right)^2 - y^2 + B^2 = 0.$$

A jelen esetben a csavarás feszültségfüggvénye

$$F = -\frac{G\vartheta}{2K}\left[x^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2} + 1}\right)^2 - A^2\right]\left[\left(\frac{x}{\sqrt{2} + 1}\right)^2 - y^2 + B^2\right],$$

ahol

$$K = \frac{A^2 + B^2}{\sqrt{2} + 1} .$$

ÖSSZEFOGLALÁS

A rugalmas prizmikus rúd csavaráspróblémájának zárt alakú megoldása mindössze néhány egyszerű keresztmetszet esetében ismeretes. Szerző — az ismerteken kívül — néhány további oly keresztmetszetet mutat be, melyek esetében a csavarásprobléma megoldása zárt alakban állítható elő. E keresztmetszeti idomok határvonala

1. hiperbolatív és egyenes
2. két hiperbolaív
3. hiperbolaív és két egyenes
4. négy hiperbolaív

A tárgyalt esetekben a probléma feszültségfüggvénye negyedfokú polinom.

A közölt képletek az analóg áramlási és egyéb feladatok megoldására is célszerűen felhasználhatók.

A SARUSCSAPÁGY RÉSGEOMETRIÁJÁNAK VÁLTOZÁSAI

HARKÁNYI ISTVÁN

SZERSZÁMGÉPFEJLESZTŐ INTÉZET, HALÁSZTELEK

[Beérkezett 1961. március 20-án]

1. Bevezetés

A szakirodalom csak a saruscsapágyak egyes különleges eseteire, illetve az azokat megközelítő esetekre ismer megoldásokat. További hiányosság az irodalomban, hogy az többnyire csak idealizált, stacioner viszonyokat tárgyal és nem emlékezik meg a résgeometria üzemközbeni változásairól és a szerkezeti megoldások által előidézett korlátozásokról. A cikk célja a szerző gyakorlata során előadódott és a rendelkezésre álló irodalomban nem található résgeometria változások megállapítása abból a célból, hogy a tényleges résméret és résgeometria alapján a valóságos hidrodinamikai viszonyok meghatározhatók legyenek.

2. A kérdés jelenlegi helyzete

A lineáris olajéket az irodalom részletesen tárgyalja és rá könnyen kezelhető méretezési módszerek ismeretesek. A magyar műszaki irodalomból [1, 2] foglalkoznak a lineáris olajékkel rendelkező saruscsapágy méretezésével. A [3] tanulmány szerzői haladás irányban exponenciális rés tulajdonságait vizsgálják és úgy találják, hogy az nem tér el jelentősen a lineáris olajékétől. [4] szerzői domború futófelületű talpcsapágyaknál vizsgálják a domborulat befolyását a csapágy jellemzőire centrális elhelyezkedésű sarucsapok esetén. Vizsgálataik szerint jelentős eltérés tapasztalható a sík és a domború sarufelületeknél mutatkozó tulajdonságok között. [5, 6] a saruk tranzverzális görbületének a csapágy tulajdonságaira gyakorolt befolyását tárgyalják és a szokványos gyártási pontosságok esetén a tranzverzális görbület befolyását jelentéktelennek tartják. [7] a domború futófelületű saru tulajdonságait adja meg általános elhelyezkedésű sarucsapoknál körhenger futófelületű saruk esetére, valamint bebizonyítja, hogy parabolikus hengerek esetére is igen jó közelítést adnak a levezetett formulák.

A saru résgeometriájának üzemközben történő megváltozásának módjára, valamint a szerkezeti kialakítás miatt előadódó résgeometria változásokra a szerző semmi irodalmi adatot nem talált.

3. Jelölések

C	surlódási szám
K	surlódási szám
L cm	a támcsap és tengelyvonal távolsága sík támfelület esetén
M cmkg	nyomaték
P kg	terhelés
R cm	a támcsap támfelületének (gömbi) sugara
R_1 cm	a sarucsap görbületi sugara a vizsgált síkban
R_2 cm	a támfelület görbületi sugara a vizsgált síkban
S kg	surlódó erő
T cm	csapágyjáték a saru-futófelület átmérő és a tengelycsap átmérő méretkülönbsége
a cm	saruhossz (forgásirányban)
b cm	saruszélesség (tengelyirányban)
d cm	elméleti csapágyátmérő $d = d_{cs} + 2h_p$
d_{cs} cm	tengelycsap átmérő
Δd cm	az elméleti csapágyhenger átmérő változása
e cm	saruexcentricitás
Δe_1 cm	a saruexcentricitás változása a csapágysurlódás miatt

Δe_2 cm saruexcentricitás változása a saru pozitív állásszöge (résmodul) miatt
f cm a futófelületre redukált támpont eltolódás
f_b cm oldalelfolyási tényező, mely a véges b/a viszony hatását veszi figyelembe
h cm résméret
h_0 cm kilépőrés, egyúttal legkisebb rés
h_1 cm belépőrés
h_p cm csaprés, a saru momentán támpontja alatt levő rés mérete
i cm támponteltolódás (körív mentén)
k cm a sarucsapsugár középpontjának a tengelyközépvonaltól való távolsága
m résmodul, $m = \frac{h_1 - h_0}{h_0}$
n simulási szám, $n = \frac{R_2}{R_1}$
p cm a saru futófelülete és a támasztási pontja között levő távolság
r cm az elméleti csapágyhenger sugara
r_1 cm a tengelycsap sugara
r_2 cm a hordsaru futófelületének sugara
Δr cm a h_p csaprés változása, ha a deformáció síkja a sarucsap síkjával egybeesik
Δr_t cm a h_p csaprés változása, ha a deformáció síkja a sarucsap síkjával nem esik egybe
t cm támponteltolódás,
v cm/sec relatív sebesség a saru és a tengelycsap között
Λ cm a tengelycsap középvonalának és a hordsaru-futófelület középvonalának egymástól való távolsága
Φ terhelési szám
α rad. saruszög, a saru belépőéle és kilépőéle között levő középponti szög
β (saru) oldalviszony, $\beta = \frac{b}{a}$
ε relatív saruexcentricitás, $\varepsilon = \frac{e}{a}$
ζ rad. a tengelydeformáció és a sarucsap síkjai által bezárt szög
η kgsec/cm^2 abszolút (dinamikai) viszkozitás
μ surlódási tényező
ξ cm a hordsaru futófelületének a tengelycsap középvonalától mért távolsága
φ rad. a ξ távolságvektorral és az x tengellyel bezárt szög O_1 középponttal
φ_v rad a ξ távolságvektorral és az x tengellyel bezárt szög O_2 középponttal
φ_1 rad. a belépőélhez tartozó középponti szög
φ_2 rad a kilépőélhez tartozó középponti szög
$\Delta\varphi$ rad az O_1 és O_2 középpontból húzott sugarakkal bezárt szög
ψ rad a támponteltolódáshoz tartozó középponti szög a támfelületre vonatkoztatva
ω rad a tengelyközépvonal szögelfordulása a csapágyközép síkjában

A többi betűjel (A, B, U, V, W, Δe_3, Δe_4, g, j, r_1, r_2, z, $\Delta\gamma$, σ, χ) értelmezése egy-egy ábra alapján állapítható meg.

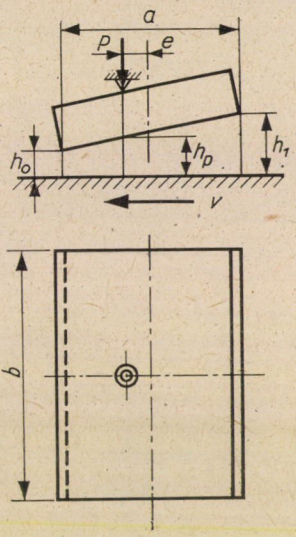
Indexek:
lin. lineáris, azaz a lineáris olajékhez tartozó
fp félparabolikus, azaz a félparabolikus olajékhez tartozó
max. legnagyobb
min. legkisebb
1, 2, ... egyes esetek jelölésére

4. A hordsaru résgeometriája

A szakirodalomban kimerítően ismertetett saruscsapágy jellemzők csak bizonyos idealizált viszonyok között valósulnak meg maradéktalanul, a tényleges üzemi körülmények között a jellemzők bizonyos mértékig eltérnek az irodalomban ismertetettektől. Az idealizált viszonyok: derékszögű négyszög

alakú, sík futófelületű saru alatt síkfelület mozog úgy, hogy a felület mozgásának irányában a rés folyamatosan (lineárisan) szűkül (1. ábra).

Sarus hordcsapágyaknál az idealizált viszonyok jó közelítésképpen határértékként mutatkozhatnak, de az üzemi jellemzőknek bármelyik irányban való kisméretű megváltozása már eltérő viszonyokat ad. Sarus hordcsapágyaknál a teherviselő olajfilmmel kitöltött rés két, nem koaxiális, hengerfelület közötti



1. ábra. Az idealizált saruscsapágy vázlatos ábrája

résnek tekinthető, melynél a saru futófelületét képező henger sugara nagyobb, mint a csapfelület hengeréé. Ilyen esetre körcsapágyaknál a résméret, mint az az irodalomból ismeretes [8], jó közelítéssel koszinusz görbe szerint változik.

Miután [8] nem közli a levezetést, valamint a továbbiakban történő hivatkozás kedvéért közöljük ennek bizonyítását. A 2. ábra szerint a rés (vonalkázott rész) méretének változását a φ középponti szög függvényében a következőképpen határozhatjuk meg:

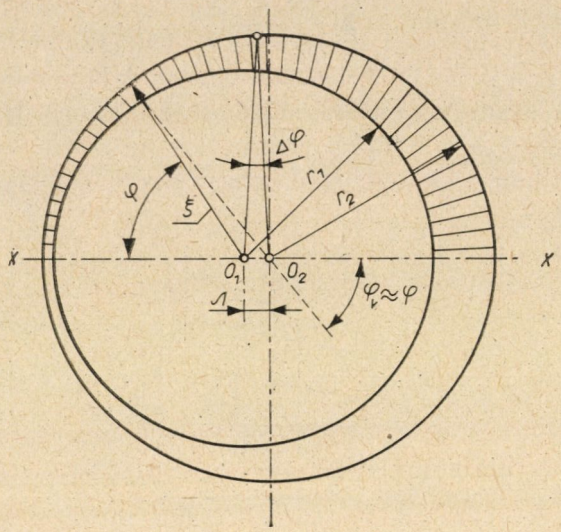
$$\xi^2 = r_2^2 + \Lambda^2 - 2r_2\Lambda\cos\varphi_\nu \quad \text{azaz} \quad \xi = \sqrt{r_2^2 + \Lambda^2 - 2r_2\Lambda\cos\varphi_\nu},$$

ebből a φ szög függvényében változó h rés

$$h = \xi - r_1 = \sqrt{r_2^2 + \Lambda^2 - 2r_2\Lambda\cos\varphi_\nu} - r_1.$$

Miután $\Lambda \ll r_2 \left(\Lambda \approx \frac{r_2}{1000}\right)$, Λ^2 elhanyagolható, a négyzetgyökös kifejezést sorbafejtve, és [11] alapján a sorbafejtés első két tagját figyelembe véve:

$$h \approx r_2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{2\Lambda}{r_2}\cos\varphi_\nu\right) - r_1 = r_2 - \Lambda\cos\varphi_\nu - r_1 = (r_2 - r_1) - \Lambda\cos\varphi_\nu.$$



2. ábra. A csaphenger és csapágyhenger felületek közötti rés, az ún. csapágyrés alakja

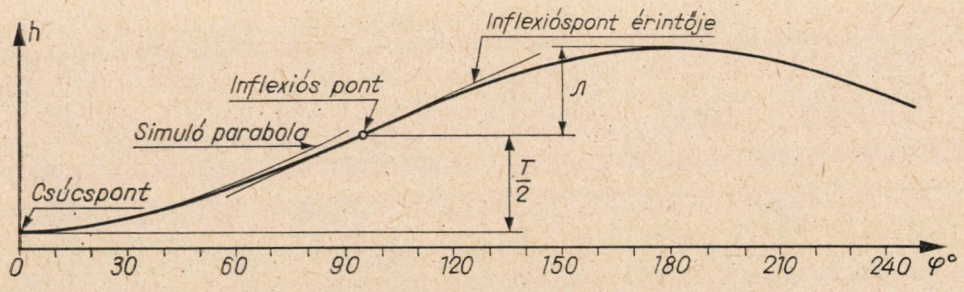
$\varphi_v = \varphi$ vehető, miután a két szög közötti eltérés igen kicsi, a legnagyobb akkor, ha $\varphi_v \cong \varphi = 90°$, ekkor ui. $\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{\Lambda}{r_2}$.

A szokásos értékek $\Lambda = 0{,}01-0{,}02$ mm; $r_2 = 20-80$ mm középértékeket véve $\operatorname{tg} \Delta\varphi = \frac{\Lambda}{r_2} = \frac{0{,}015}{50} \cong 0{,}0003$, azaz $\Delta\varphi \cong 1'$ tehát $\varphi \cong \varphi_v$ vehető, azaz:

$$h = (r_2 - r_1) - \Lambda \cos\varphi = \frac{T}{2} - \Lambda \cos\varphi, \tag{1}$$

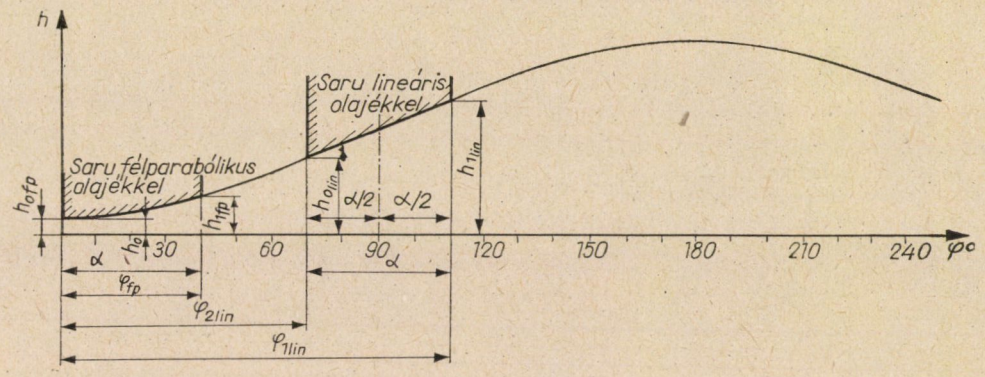
ahol T a saru futófelülete és a tengelycsapfutófelület között levő játék. A h résméretnek a változását a φ szög függvényében a 3. ábra szemlélteti.

Ismeretes a koszinusz görbének az a tulajdonsága, hogy a csúcspontok környezetében másodfokú parabolával (simuló-parabola), az inflexiós pont környezetében pedig az érintővel helyettesíthető jó közelítéssel. Ha tehát a



3. ábra. A csapágyrés kiterített alakja

saruhenger és a csaphenger sugarát úgy állapítjuk meg a h_0 kilépőréshez viszonyítva, hogy a 4. ábrán szemléltetett viszonyok létesüljenek, akkor a saru hordfelülete és a csapfelület között keletkező teherviselő olajréteg vastagsága forgásirányban félparabolikus, illetve lineáris változást mutat.



4. ábra. A résgeometria félparabolikus és lineáris olajék esetén, valamint a hozzátartozó központi szögek

Lineáris olajéknél a kilépőélhez tartozó középponti szög $\varphi_1 = 90° - \frac{\alpha}{2}$ (α = saru belépő- és kilépőéle közötti szög) a belépőélhez tartozó középponti szög $\varphi_2 = 90° + \frac{\alpha}{2}$ azon feltétel alapján, hogy a saruk hordfelülete a résméret koszinusz görbéjének inflexiós pontja környezetében helyezkedjenek el (4. ábra). A résméret 1 képletébe a megfelelő értékeket behelyettesítve:

$$h_0 = \frac{T}{2} - \Lambda \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$h_1 = \frac{T}{2} - \Lambda \cos\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{T}{2} + \Lambda \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

h_0 egyenletéből

$$\Lambda = \frac{\frac{T}{2} - h_0}{\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)},$$

ezzel

$$h_1 = \frac{T}{2} + \frac{\frac{T}{2} - h_0}{\cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)} \cos\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = T - h_0,$$

és ebből a szükséges játék

$$T = h_1 + h_0 = (m+1)h_0 + h_0 = (m+2)h_0. \qquad (2)$$

Ha tehát a saru hordfelület és tengelycsap gyártási játékát úgy határozzuk meg, hogy az a hidrodinamikai összefüggésekből meghatározható h_1 belépőrés és h_0 kilépőrés összegével azonos legyen, akkor a saru alatt előálló olajék hossz-

irányú metszete lineárisan változik, azaz lineáris olajék keletkezik. Hasonlóképp meghatározhatjuk a félparabolikus olajék előállításának feltételeit is.

(1) képletbe a félparabolikus olajék belépő-, illetve kilépőréséhez tartozó értéket helyettesítve (4. ábra):

$$h_0 = \frac{T}{2} - \Lambda \cos \varphi_1 = \frac{T}{2} - \Lambda ;$$

$$h_1 = \frac{T}{2} - \Lambda \cos \varphi_2 = \frac{T}{2} - \Lambda \cos \alpha,$$

mert félparabolikus olajéknél $\varphi_1 = 0$ és $\varphi_2 = \alpha$.

Az előbbiek alapján eljárva h_0 egyenletéből

$$\Lambda = \frac{T}{2} - h^\circ$$

és

$$h_1 = \frac{T}{2} - \left(\frac{T}{2} + h_0\right) \cos \alpha = \frac{T}{2} - \frac{T}{2} \cos \alpha + h_0 \cos \alpha ,$$

ebből T értékét kifejezve

$$\frac{T}{2}(1 - \cos \alpha) = h_1 - h_0 \cos \alpha ,$$

és

$$T = 2 \frac{h_1 - h_0 \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2 \frac{(m+1)h_0 - h_0 \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2(m + 1 - \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha} h_0. \qquad (3)$$

Ha a saru hordfelület és a tengelycsap gyártási tűrését a 3. képlet alapján választjuk, ahol h_1 belépőrés és h_0 kilépőrés értéke a hidrodinamikai összefüggések alapján számítható, akkor a keletkező olajék hosszmetszete (forgásirányban) félparabolikus lesz.

Mindkét esetben, tehát mind lineáris, mind félparabolikus olajéknél a képletek annál jobban megközelítik a tényleges viszonyokat, minél kisebb α saruszög értéke, mert a koszinusz görbének az egyenestől, illetve parabolától való eltérése annál kisebb.

A félparabolikus olajékre végzett vizsgálatok alapján [9] a h résméret különbsége az ideális félparabolikus és a tényleges koszinuszos résalak között a parabolikus résalakra vonatkoztatva $\alpha = 80°$ esetén 3,8%; $\alpha = 60°$ esetén 2,09%; $\alpha = 40°$ esetén 0,89%. Konkrét esetet vizsgálva $\alpha = 60°$ saruszög és $h = 0{,}03$ mm résméretnél a 2,09%-os eltérés $0{,}03 \cdot 0{,}0209 = 0{,}000\,627$ mm $\cong 0{,}63\ \mu$ különbséget jelent. Ez esetleg kisebb, mint a terhelés és az egyenlőtlen felmelegedés következtében mutatkozó vetemedés.

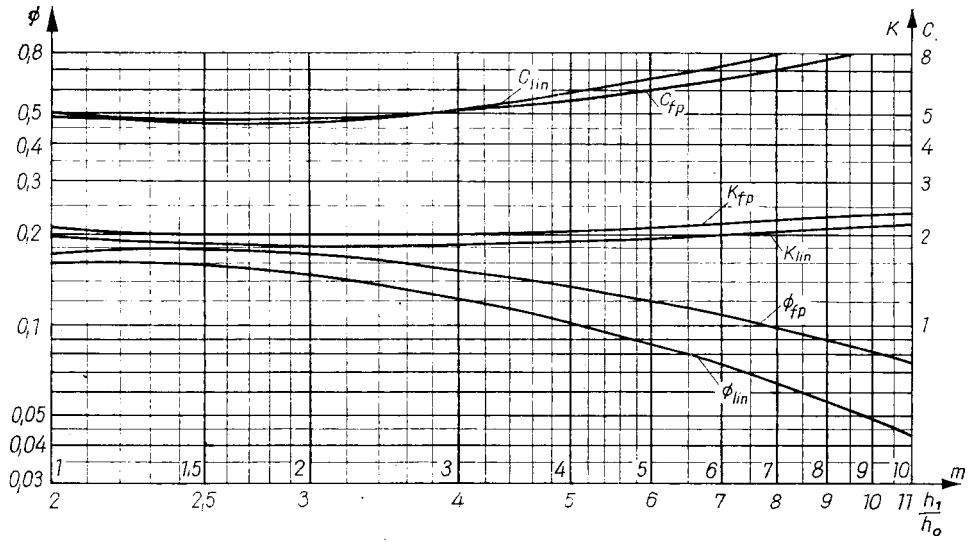
A fentiekben tárgyalt lineáris olajék azonos az irodalomban részletesen vizsgált saruscsapágyalakkal (MICHELL vagy KINGSBURY csapágy). A félparabolikus olajék hidrodinamikai tulajdonságait FRÖSSEL vizsgálta a többívű csapágyaknál. FRÖSSEL vizsgálatainak M. TEN BOSCH [10] könyvében levő ismertetése alapján összehasonlítás készíthető a két résalak jellemzőiről. A csapágyszámításnál használt állandók értékeit az 5. ábra hasonlítja össze. Az állandók meghatározó egyenletei M. TEN BOSCH könyve [10] alapján:

$$P = \Phi \frac{a^2}{f_b} \frac{\eta v b}{h_0^2} \text{ egyenletből } \Phi = \frac{P f_b h_0^2}{a^2 \eta v b};$$

$$\mu = C f_b \frac{h_0}{a} \text{ egyenletből } C = \frac{\mu a}{f_b h_0};$$

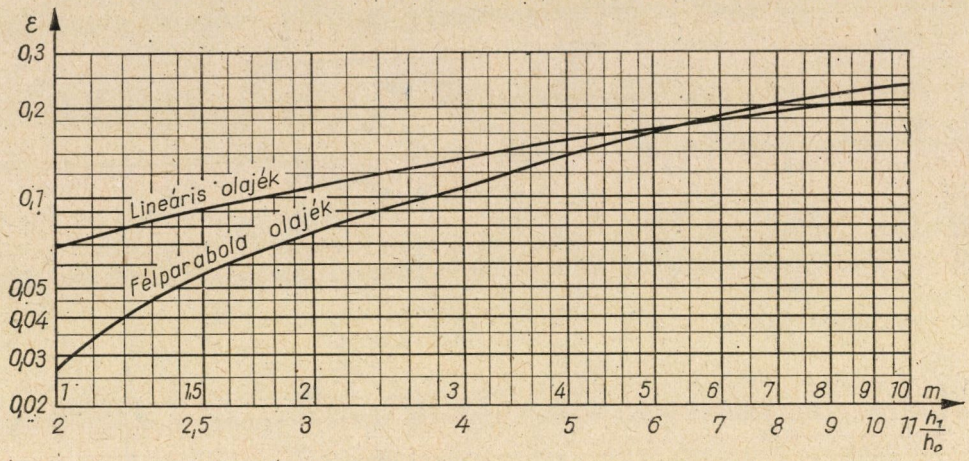
$$\mu = K f_b \sqrt{\frac{\eta v b}{P}} \text{ egyenletből } K = \frac{\mu \sqrt{P}}{f_b \sqrt{\eta v b}}.$$

Az 5. ábrából látható, hogy a résgeometriától függő állandó értékei csak kevéssé különböznek egymástól lineáris, illetve félparabolikus olajék esetén.



5. ábra. A súrlódási szám és terhelési szám változása a modul függvényében lineáris és félparabolikus olajéknél

Csapágyméretezés szempontjából azonban a h_1/h_0 viszonyszám, azaz a belépő- és kilépőrés aránya csak azonos résgeometria esetén jellemző a résre, vagyis csak akkor, ha az összehasonlított rések vagy mind lineárisak, vagy mind félparabolikusak. Lineáris olajéknek félparabolikussal való összehasonlítása esetén nem a h_1/h_0 viszonyszám, vagy az m modul vehető alapul, hanem az $\varepsilon = e/a$ relatív saruexcentricitás, ahol e a saru alátámasztási pontjának a saruközéptől való távolsága, és a a saruhossz. Az $\varepsilon = e/a$ relatív saruexcentricitás értékét lineáris olajékre a szakkönyvek alapján meghatározhatjuk, a félparabolikus olajékre pedig analitikus vagy grafikus eljárással lehet a relatív saruexcentricitást meghatározni. A 6. ábrában ábrázolt $\varepsilon = e/a$ görbét a félparabolikus olajékre grafikusan határoztuk meg.



6. ábra. A relatív saruexcentricitás változása a modul függvényében lineáris és félparabolikus olajék esetén

Az eddigiek és irodalmi adatok birtokában mind a lineáris, mind a félparabolikus olajékkel működő saruscsapágy összes üzemi jellemzői meghatározhatók. Az 5. ábra görbéinek összehasonlítása révén látható, hogy a félparabolikus olajék teherbírása (Φ terhelési szám) nagyobb, mint a lineáris olajéké, szélső esetben mintegy 10%-kal; viszont a lineáris olajéknél a súrlódási szám kisebb (K és C) értékek, tehát kisebb teljesítményveszteség mutatkozik egyébként azonos körülmények között a gyakorlatban alkalmazott modulintervallumban. $(1,2 < m < 4)$.

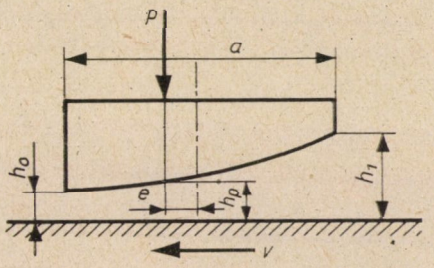
5. A csaprés változásai

A csapágyhézag megváltozása (pl. egyenlőtlen hőkiterjedés következtében) a h_p csaprés, vagyis az alátámasztási pont alatt levő résméret (1. ábra) megváltozását okozza; ha pl. a csapágyhézag adott értékkel csökken, akkor a támcsapok alatti rés, mint azt az alábbiakban látni fogjuk, az előbbi értéknek mintegy felével csökken minden sarunál, ha a csapágyra ható külső terhelés a belső terhelés mellett elhanyagolható. Ha a változó terhelés az egyes saruk terhelését változtatja meg, akkor a csaprések fognak mindaddig változni, míg a csaprésváltozás következtében keletkező h_0 legkisebb rés értéke akkora lesz, hogy a saru a megváltozott terheléssel egyensúlyt tud tartani.

A fenti változások értékeléséhez szükségünk van a csaprés és legkisebb rés közötti összefüggés megállapításához mind a lineáris, mind a félparabolikus

olajéknél. Lineáris olajéknél a csaprés értéke a sugárkettős tétel alapján az 1. ábra szerint:

$$h_{p_{\text{lin}}} = h_0 + (h_1 - h_0)\frac{\frac{a}{2} - e}{a} = h_0 + mh_0\left(\frac{1}{2} - \frac{e}{a}\right) = \\ = [1 + m(0{,}5 - \varepsilon)]\, h_0. \tag{4}$$



7. *ábra.* A saru vázlatos ábrája, félparabolikus olajék esetén

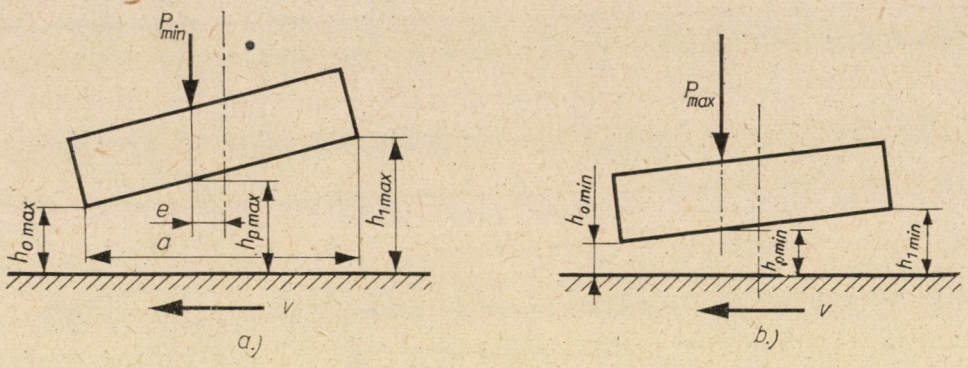
Félparabolikus olajéknél a 7. ábra szerint a következő összefüggés írható fel:

$$h_{p_{fp}} = h_0 + (h_1 - h_0)\left(\frac{\frac{a}{2} - e}{a}\right)^2 = h_0 + mh_0\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^2 = \\ = h_0 + mh_0\left(\frac{1}{4} - \varepsilon + \varepsilon^2\right) = [1 + m(0{,}25 - \varepsilon + \varepsilon^2)]h_0. \tag{5}$$

Miután $\varepsilon < 1$, tehát $\varepsilon^2 \ll 1$ így a fenti egyenlet kis saruexcentricitásoknál ($\varepsilon \leq 0{,}1$) a következő egyszerűbb alakban írható:

$$h_{p_{fp}} = [1 + m(0{,}25 - \varepsilon)]h_0. \tag{5a}$$

A fenti összefüggések alapján a h_p csaprés megváltozása következtében keletkező h_0 kilépőrés értéke meghatározható lenne, ha a résgeometria jellege változatlan maradna, azaz a lineáris olajék a csaprés változása után is lineáris maradna, vagyis a félparabolikus olajék a csaprés változása után is félparabolikus lenne. Sarus talpcsapágyaknál az előbbi feltétel teljesül, a változás úgy történik, mint azt a 8. ábra szemlélteti, azaz a csaprés változásával egyenes arányban változik mind a belépőrés, mind a kilépőrés értéke. Hordsaruknál azonban, mint az a későbbiekből látható lesz, ez a feltétel sem lineáris, sem félparabolikus olajék esetén nem teljesül, sőt a félparabolikus olajék, amennyiben az a gyártási nehézség ellenére talpsaruknál alkalmazásra kerülne, sem maradna meg félparabolikusnak a csaphézag megváltozásakor.

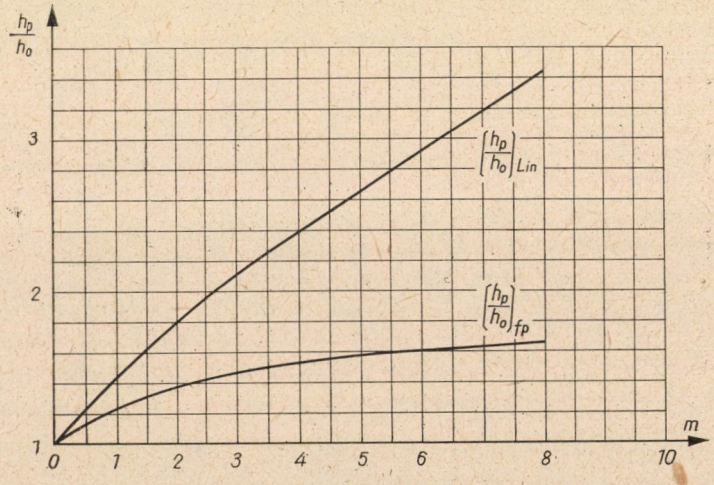


8. ábra. A saru vázlatos ábrája lineáris olajék esetén, a legkisebb és a legnagyobb terhelésnél

A csaphézagot meghatározó képletek számszerű összehasonlítása esetén látható, hogy a szokványos moduloknál lineáris olajék esetén jóval nagyobb a h_p csaprés értéke, a h_0 kilépőréshez viszonyítva, mint félparabolikus olajék esetén. Egyes értékeket számszerűen a 9. ábra mutat, grafikusan pedig a 10. ábra szemléltet.

m	1	2	3	4	5	5
$\left(\frac{h_p}{h_0}\right)_{lin} = 1 + m(0{,}5 - \varepsilon)$	1,43	1,78	2,1	2,38	2,67	2,94
$\left(\frac{h_p}{h_0}\right)_{fp} = 1 + m(0{,}25 - \varepsilon + \varepsilon^2)$	1,22	1,36	1,47	1,54	1,57	1,6

9. ábra. A csaprés és a legkisebb rés aránya lineáris és félparabolikus olajék esetén a modul függvényében



10. ábra. A csaprés és a legkisebb rés aránya lineáris és félparabolikus olajék esetén a modul függvényében

A h_p/h_0 viszonyszámnak lineáris olajék esetén nagyobb volta érzéketlenebbé teszi a saruscsapágyat a csaprés változásával szemben, ez az egyik ok, ami miatt a saruscsapágyat lineáris olajékre kell méretezni, jóllehet, a félparabolikus olajék teherbírása mintegy 10%-kal nagyobb (5. ábra).

A saruscsapágyat lineáris olajékkel tervezik és így üzeme is általában a lineáris olajékkel meghatározott viszonyok mellett folyik. 2. szerint lineáris olajék eléréséhez a gyártási játék $T = (m + 2)h_0$, ez adott (elkészített) saruscsapágy esetén rögzített érték. A saruscsapágy üzeme közben azonban egyes tényezők megváltozása miatt a rés értéke csökken, esetleg növekszik. Ilyen tényezők lehetnek: külső terhelés, mely egyes saruk hézagát csökkenti (a terhelés irányában) másokét pedig növeli (ellentétes irányban) vagy a változó csapágyhőmérséklet miatt mutatkozó egyenlőtlen hőkiterjedés. A csapágyhézag megváltozása saru csapágyhézagának h_p-nek megváltozását idézi elő, így a csapágy üzemi viszonyai ennek megfelelően megváltoznak.

Miután a saruk futófelülete és a tengelycsap közötti játék értéke adott, illetve egy bizonyos tűrés intervallumon belül van, az csak $h_0 = \dfrac{T}{(m+2)}$ értéknél eredményez lineáris olajéket. Ha ehhez a h_0 értékhez tartozó $h_p = [1 + m(0{,}5 - \varepsilon)]h_0$ csaprés értéke megváltozik, akkor az olajékgeometria már nem lineáris. Számszerű vizsgálat során látható, hogy a h_p csaprés megfelelő mértékű csökkenésekor a résgeometria a félparabolikushoz közeledik, ugyanis:

$$h_{p_{\text{lin}}} = [1 + m(0{,}5 - \varepsilon)]\, h_0 = [1 + m(0{,}5 - \varepsilon)]\, \frac{T}{m+2}, \tag{6}$$

és

$$h_{p_{fp}} = [1 + m(0{,}25 - \varepsilon + \varepsilon^2)]\, h_0 = [1 + m(0{,}25 - \varepsilon + \varepsilon^2)] \cdot \left(T \frac{1 - \cos\alpha}{2m + 2 - 2\cos\alpha} \right) \tag{7}$$

mert

$$T = 2\,\frac{h_1 - h_0\cos\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{2m + 2 - 2\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}\, h_0$$

egyenletből

$$\frac{T(1 - \cos\alpha)}{2} = h_1 - h_0\cos\alpha = (m+1)h_0 - \cos\alpha\, h_0 = (m + 1 - \cos\alpha)h_0,$$

és

$$h_0 = \frac{T(1 - \cos\alpha)}{2m + 2 - 2\cos\alpha}.$$

(6) és (7) kifejezések jobboldalát összehasonlítva látható, hogy $h_{p_{fp}}$ értéke — azonos T gyártási játék esetén — feltétlenül kisebb mint $h_{p_{\text{lin}}}$ (10. ábra).

Természetesen mindig tekintetbe kell venni, hogy a közölt eredmények csak bizonyos korlátok között érvényesek, akkor sem tökéletesen pontosan; az eddigiekben ui. mindenütt lineáris vagy félparabolikus olajéket tárgyaltunk, ezekre a közölt összefüggések maradék nélkül érvényesek, de a valóban keletkező koszinusz görbe alakú résméretnek a lineáris vagy félparabolikus olajékkel való helyettesítése bár jó közelítés, de mégsem tökéletesen azonos viszonyokat teremt. Az eltérés mértéke annál nagyobb, mennél nagyobb az α saruszög értéke.

6. További résalakok

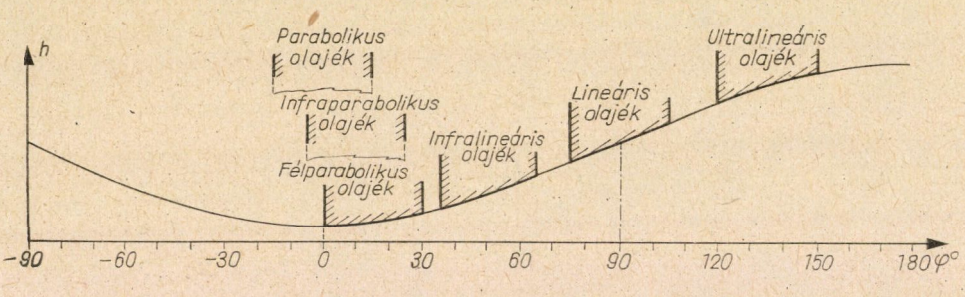
A csapágy üzeme közben történő felmelegedés következtében mutatkozó egyenlőtlen felmelegedés miatt vagy esetleg az egyes sarukon megnövekedett terhelés következtében a csaprés csökken. Az eredetileg lineáris olajék csaphézagának csökkenése az olajék geometriáját a félparabolikus felé tolja el. A félparabolikus olajék az adott gyártási hézag mellett

$$h_{p_{f_p}} = [1 + m\,(0{,}25 - \varepsilon + \varepsilon^2)]\,\frac{T\,(1 - \cos\alpha)}{2\,m + 2 - 2\cos\alpha}$$

értéknél keletkezik. A közbeeső csaprés értékeknél a résalak a lineáris és a félparabolikus között van, a továbbiakban ezt a résalakot infralineárisnak fogjuk nevezni. A gyakorlatban még további résalakok is keletkezhetnek. Ha a csaprés a lineáris olajék

$$h_{p_{\mathrm{lin}}} = [1 + m\,(0{,}5 - \varepsilon)]\,\frac{T}{m + 2}$$

értékénél nagyobb, akkor a rést ultralineárisnak nevezzük, ha pedig a $h_{p_{f_p}}$ értékénél is kisebb, akkor infraparabolikusnak. Mindezek az olajék alakok a koszinusz görbe egyes szakaszainak tekinthetők, mint azt a 11. ábra mutatja.



11. ábra. Különböző résalakok a φ középponti szög függvényében

A hat olajék típus közül a lineáris és a félparabolikus olajék határt képez az ultralineáris és infralineáris, illetve az infralineáris és az infraparabolikus olajékek között, a csaphézag bármily kis, egyik vagy másik irányban való megváltoztatásakor az olajék szigorúan véve már sem lineáris, sem félparabolikus nem lehet. Ez a két olajék típus az előbbiek alapján gyakorlatilag pontosan számítható. Az ultralineáris, infralineáris és infraparabolikus olajékek nem egyetlen rögzített h_p csaprés esetén keletkeznek, hanem többé-kevésbé széles csapréssávban; tulajdonságai pontosan nem számíthatók,* de a gyakorlat szempontjából egyes esetekben jó közelítéssel becsülhetők.

Az infraparabolikus olajék tulajdonságai eltérnek az ultralineáris, lineáris, infalineáris, és félparabolikus olajék tulajdonságaitól, annyiban hogy az infraparabolikus olajék kilépőélének közelében táguló résszakasz is van. A táguló résszakasz tulajdonságai nem kedvezők,

* [5] mű alapján a domború futófelülettel rendelkező saruk üzemi jellemzői meghatározhatók, tehát csak az ultralineáris olajék gyakorlat szempontjából kielégítően pontos számítása ütközik nehézségbe.

azért alkalmazása kerülendő. A résben mozgó olaj fölmelegedés következtében mutatkozó hőkiterjedés kismértékű táguló szakasz esetén még hoz létre felhajtóerőt (termikus olajék), de nagymértékű szétágazás esetén azonban már az olaj nem tölti ki a rést, így nem is járul hozzá a teherviseléshez, tehát csökken az egész saru teherbíróképessége. A táguló rés rezgésmentesség szempontjából sem előnyös.

Bár a félparabolikus olajéknél táguló résszakasz nincs, a rést meghatározó változók valamelyikének megváltozása, illetve a gyártási tűrések miatt bekövetkező résalakváltozások lehetővé tennék a nem kívánt táguló rés előállítását, emiatt félparabolikus résgeometria előállítására nem célszerű törekedni.

A parabolikus olajék, tehát szimmetrikus belépő- és kilépőszakasszal bíró rés a gyakorlatban alkalmazott pozitív excentricitások esetén nem fordulhat elő. Központosan elhelyezett támcsap esetén jó közelítéssel keletkezhetik, teherviselés és rezgésmentesség szempontjából nem előnyös megoldás, viszont lehetővé teszi a forgásirány megváltoztatását változatlan üzemi jellemzők mellett. A központos támcsapelhelyezés a 7D1 pontban ismertetett okok miatt főleg kisméretű saruknál nem állítható elő pontosan. Tulajdonságait FRÖSSEL nyomán M. TEN BOSCH [10] ismerteti.

7. A legkedvezőbb saruexcentricitás

Az irodalom a *saruexcentricitás* kedvező megválasztására két szempontoi szokott adni: *a)* a legnagyobb teherbírást adó saruexcentricitást ajánlják, ha a teherbírás a kritikus ($m_{\text{lin}} = 1{,}2$; $m_{fp} = 1{,}42$); *b)* a legkisebb súrlódást tényezőt (és legkisebb teljesítményfogyasztást) adó saruexcentricitást javasolják, ha a teljesítményfelvétel csökkentése a célszerű. Ezek a saruexcentricitási értékek nincsenek nagyon távol egymástól, de a tervezésnél célszerű kompromisszumok miatt a két határérték közötti saruexcentricitásokat is javasolnak, ugyanis a Φ, illetve K görbék szélső értékének (ε függvényében vizsgálva) környezetében az illető függvény alig változik, tehát az optimumhoz viszonyítva alig romlik, míg a másik függvény sokkal jelentősebben javul (l. 5. ábra Φ_{lin} és K_{lin} értékeit). A fenti szempontok általában helyénvalók, de esetleg további szempontokat is figyelembe kell venni.

Hordsaruk esetében, különösen ha a csapágynak erősen változó üzemi viszonyok között kell működnie (változó fordulatszám vagy olajviszkozitás, erősen változó terhelés stb), egy újabb tervezési szempont nyomul előtérbe, nevezetesen a résgeometria-változás iránt legkevésbé érzékeny saruexcentricitás kiválasztása.

A lineáris és a félparabolikus olajék tulajdonságai az előbbiek alapján ismertek, az infralineáris olajék, Φ, K, C és ε állandói a lineáris és a félparabolikus olajék megfelelő értékei közé esnek, ezek pedig alig térnek el egymástól. Ha tehát a résalak lineáris, infralineáris, vagy félparabolikus, akkor a csapágy üzembiztosan működik, működési jellemzői ismertek, tervezésnél figyelembe vehetők. Infraparabolikus olajéknél már keletkezik a nemkívánatos táguló rés, terhelhetősége is kisebb az előbbieknél, ennek alkalmazását tehát már célszerű kerülni.

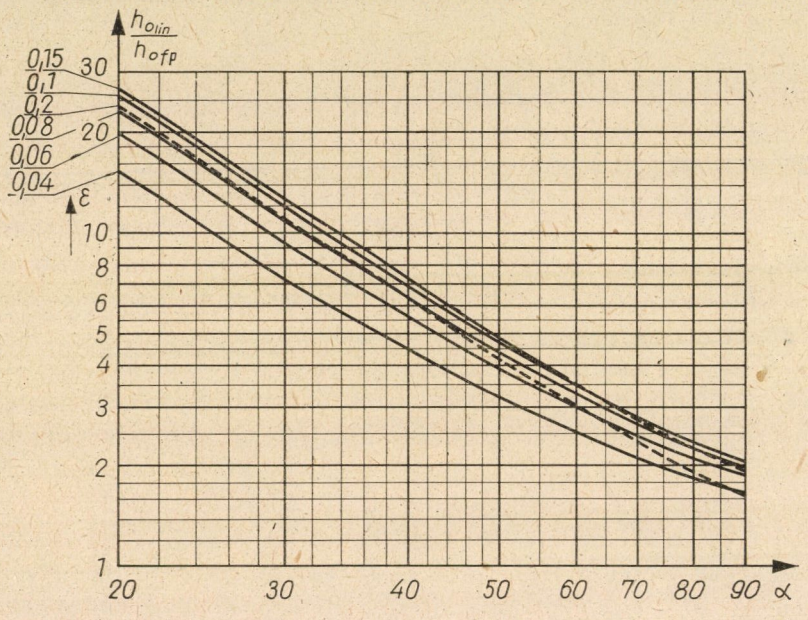
Az ultralineáris olajék mindaddig, amíg táguló rés nem képződik, stabilitás szempontjából biztonsággal lenne alkalmazható, de összes jellemzői meghatározásához szükséges állandók (Φ, K, C és ε) értékeit extrapolálni kell,

így azok csak durva közelítéssel bizonytalanul lennének meghatározhatók, azonkívül a terhelhetőség csökken a lineáris olajékhez viszonyítva.

A fentiek alapján a saru működését akkor tekinthetjük biztonságosnak, ha a résgeometria lineáris, infralineáris vagy félparabolikus. A lineárishoz közel eső ultralineáris olajékek ugyan nem vethetők el a gyakorlat szempontjából, de miután tulajdonságaik nem számíthatóak, a jelen vizsgálatból kizárjuk.

A (2) alapján lineáris olajékkel működő saruknál a gyártási hézag értéke:

$$T_{\text{lin}} = (m_{\text{lin}} + 2)h_{0_{\text{lin}}} .$$



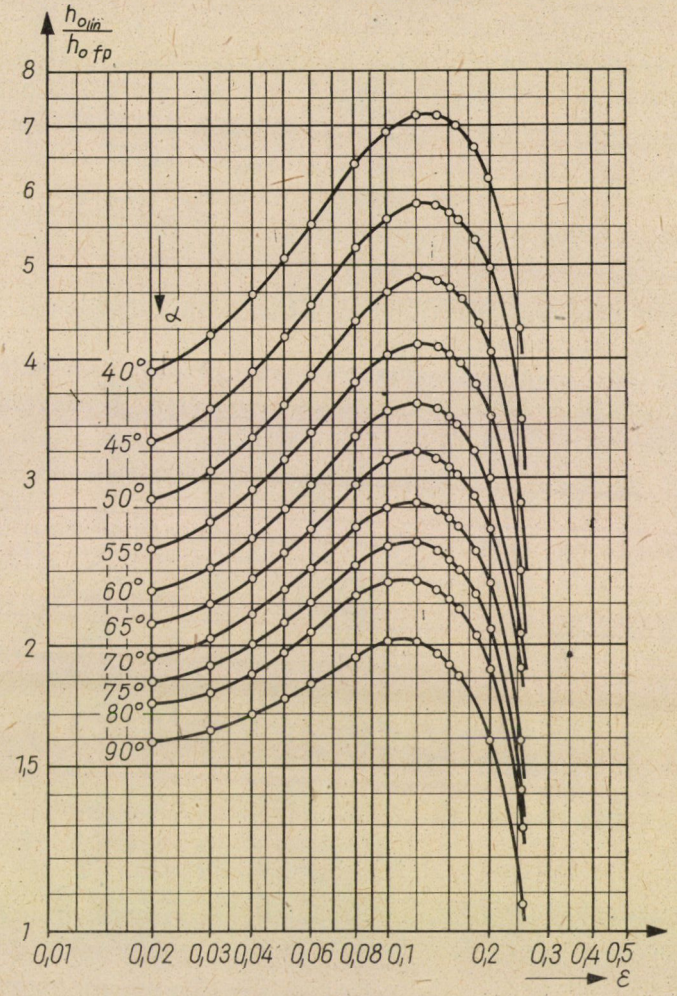
12. ábra. A lineáris és a félparabolikus olajék kilépőrésének aránya az α saruszög függvényében azonos játék esetén

A félparabolikus olajéknél pedig (3) alapján:

$$T_{f_p} = \frac{2m_{f_p} + 2 - 2\cos\alpha}{1 - \cos\alpha} h_{0_{f_p}} .$$

Azonos gyártási játék esetén (adott csapágynál) $T_{\text{lin}} = T_{f_p}$; a lineáris olajékkel való működés, és a félparabolikus olajékkel való működéskor a kilépőrések aránya:

$$\frac{h_{0\text{lin}}}{h_{0fp}} = \frac{\dfrac{T}{m_{\text{lin}} + 2}}{\dfrac{T(1 - \cos\alpha)}{2m_{f_p} + 2 - 2\cos\alpha}} = \frac{2m_{fp} + 2 - 2\cos\alpha}{(m_{\text{lin}} + 2)(1 - \cos\alpha)} . \qquad (8)$$



13. ábra. A lineáris és a félparabolikus olajék kilépőrésének aránya az ε relatív saruexcentricitás függvényében azonos játék esetén

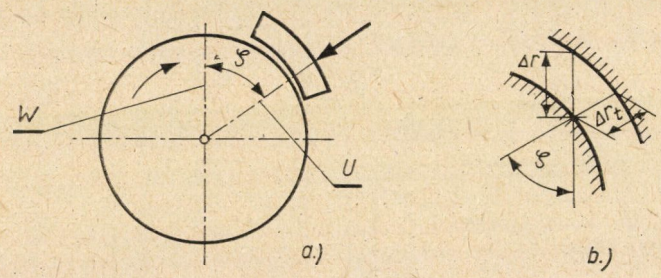
A hidrodinamikai kenéselmélet alapján meghatározhatjuk az adott $\varepsilon = e/a$ relatív saruexcentricitáshoz tartozó m_{lin} és m_{fp} modulok értékeit, és ezek ismeretében a különböző saruszögekhez (α) tartozó h_{0lin}/h_{0fp} értékeket. Ezek kiszámított értékei az α saruszög és az ε relatív saruexcentricitás függvényében a 12. és 13. ábrán láthatók.

A 12. ábrából látható, hogy növekvő α értékekhez csökkenő h_{0lin}/h_{0fp} viszonyszám tartozik, tehát ebből a szempontból minél kisebb saruszög értéke választása a célszerű. Talpsaruk esetén a saruszög értéke $\alpha = 0°$, ezeknél a $\frac{h_{0lin}}{h_{0f_p}} = \infty$, mert $h_{0fp} = 0$. A legnagyobb $\frac{h_{0lin}}{h_{0f_p}}$ arány a 13.

ábra alapján $\varepsilon \approx 0{,}12$ érték környezetében van (itt ε a valóságos alátámasztási pontra vonatkozik, mint később látni fogjuk (8.D pont), ez nem azonos a gyártási alátámasztási pont helyével). Az $\varepsilon \approx 0{,}12$ érték jelentősen eltér a legnagyobb teherbírással, és a legkisebb teljesítményfogyasztással meghatározott $\varepsilon_{1\text{ln}} = 0{,}058$, és $\varepsilon_{1\text{in}} = 0{,}107$ értékektől. Természetesen a hordsaru üzembiztos működése végett a kisebb saruexcentricitások sem hanyagolhatók el a nagy terhelésre való törekvéskor.

8. A saruk mozgása következtében bekövetkező résgeometria változások

A fentiekben a saru résgeometriájának változásait vizsgáltuk a teherviselő olajék jellege és jellemző mérete szempontjából. Az alábbiakban a résgeometria változásait előidéző okokat vizsgáljuk a gyakorlatban előforduló viszonyok és szerkezeti kialakítások figyelembevételével.



14. ábra. A tengelydeformáció W síkjában keletkező Δr réscsökkenés és a sarucsap U síkjában jelentkező Δr_t tényleges réscsökkenés közötti geometriai összefüggés

A csapágyhézag megváltozása, és az ideális vagy számított értéktől való eltérése több körülmény együttes befolyásának eredménye.

1. A saru oldalbillenése, azaz a tengelymetszetben előálló billenés.
2. A saru bólintása, azaz forgásirányú billenése.
3. A sarunak axiális irányban való excentrikus elhelyezkedése tengelymetszetben is görbült támfelület esetén.
4. A saru csaphézagát meghatározó szerkezeti elemek egyenlőtlen hőkiterjedése.
5. A keletkező erőhatásokkal okozott deformációk.

Az alábbiakban csak az 1—3. pontban vázolt résméret változásokkal foglalkozunk, miután a hőkiterjedés és az erőhatásokkal előidézett deformációk csak a szerkezet, és az üzemi viszonyok részletes ismerete esetén lennének meghatározhatók.

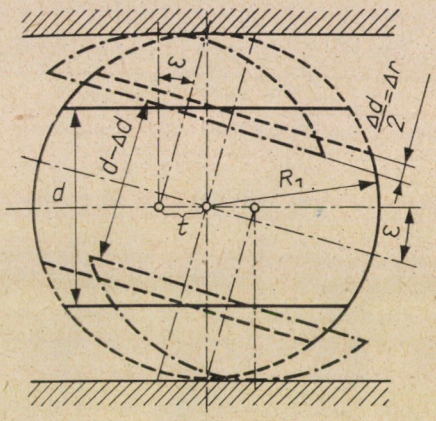
A tengely deformációja, vagy a csapágyfuratok nem teljesen koaxiális volta miatt a saru futófelületének alkotója nem merőleges a csapágysíkra. Emiatt a saru és tengelycsap között keletkező rés csökken. Ha a sarucsap a deformáció síkjában van, akkor a réscsökkenés teljes egészében érvényesül, ha a sarucsap síkja a deformáció síkjával φ szöget zár be, akkor a 14. ábra

szerint az alábbiak alapján meghatározott réscsökkenésnek cos φ-szorosa érvényesül, azaz

$$\Delta r_t = \Delta r \cos \zeta, \tag{9}$$

ahol Δr_t = a tényleges réscsökkenés a sarucsap síkjában
Δr = a maximális réscsökkenés
ζ = a W (a tengelydeformáció axiális síkja) és az U (a sarucsap axiális síkja) között mérhető szög.

A sarucsap síkoknak a deformáció síkjával bezárt szöge általában minden sarura más, ezért a réscsökkenés értéke is különböző az egyes sarukra.



15. ábra. A réscsökkenés hengeres támfelület esetén

A) Réscsökkenés

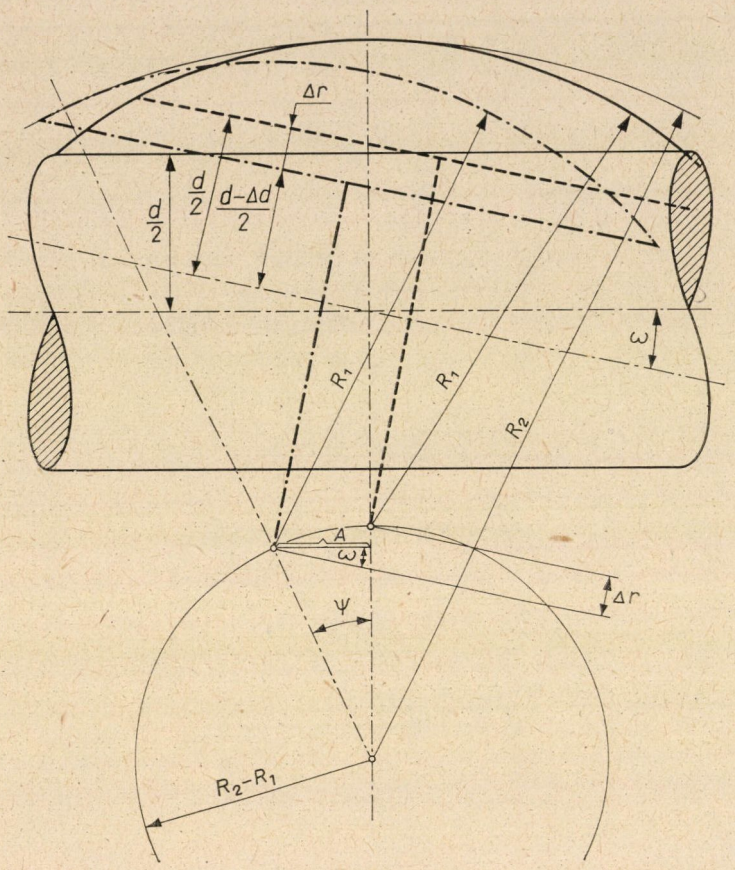
1. Hengeres támasztófelület esetén a réscsökkenés a sarucsap elgördüléséből adódik és értéke a 15. ábra szerint:

$$\Delta r = t \sin \omega = R_1 \omega \sin \omega = R_1 \sin^2 \omega, \tag{10}$$

miután kis szögeknél $\omega \approx \sin \omega$.

2. Körgyűrű alakú támfelület esetén a geometriai viszonyokat a 16. ábra mutatja, ha a sarucsapnak az axiális főmetszetben vett görbületi sugara nagyobb, mint a támfelület tengelyre merőleges legnagyobb átmérőjének a fele. A réscsökkenés értéke a 16. ábra szerint:

$$\Delta r = (R_2 - R_1)(1 - \cos \psi) + A \operatorname{tg} \omega =$$
$$= (R_2 - R_1)(1 - \cos \psi) + (R_2 - R_1) \sin \psi \operatorname{tg} \omega. \tag{11}$$



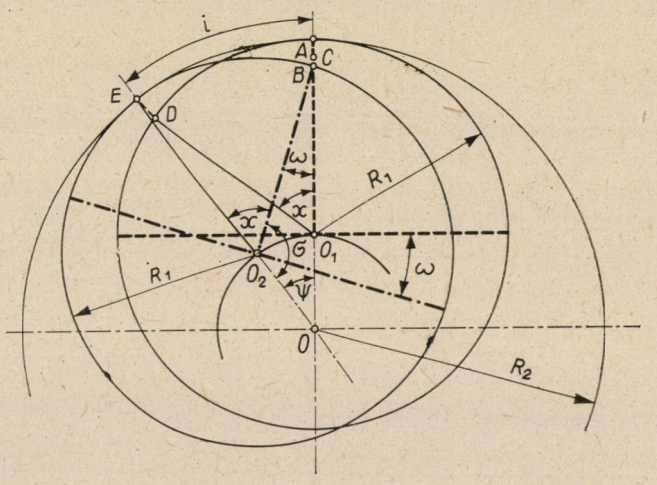
16. ábra. A réscsökkenés körgyűrű támfelület esetén, ha R_1 nagyobb, mint a támfelület radiális főmetszetének sugara

A ψ és az ω szög közötti összefüggést a 17. ábra szemlélteti. Csúszásmentes legördülést tételezünk fel a körök között, ami a tényleges fizikai viszonyoknak pontosan megfelel. Legördülés közben minden, a körhöz szilárdan rögzített alakzat, bár elmozdul, egymáshoz viszonyított helyzetét nem változtatja. Így a 17. ábrában a gördülés kezdeti és végső helyzetében fennálló geometriai viszonyokat a szaggatott vonalak, vagy pont-vonalak szemléltetik. A ψ szöggel való legördülés esetén a körhöz szilárdan rögzített alakzatok ω szöggel fordulnak el, miközben A. pont B. pontba, D. pont pedig E. pontba kerül. Ebből következik, hogy: AE = AD = BE, azaz az ábra jelöléseit felhasználva a legördített ívhossz:

$$i = R_2\psi = R_1\chi .$$

Az OO_2B háromszögből azonban

$$\omega + \psi + \sigma = 180° .$$



17. ábra. A támponteltolódáshoz tartozó ψ középponti szög és a sarubillenés ω szöge közötti összefüggés

EO_2O egyenes alapján

$$\chi + \sigma = 180° ,$$

tehát:

$$\omega + \psi = \chi .$$

Ezt behelyettesítve:

$$i = R_2\psi = R_1\chi = R_1(\omega + \psi) = R_1\omega + R_1\psi ;$$

$$R_2\psi - R_1\psi = (R_2 - R_1)\psi = R_1\omega .$$

ψ-re megoldva

$$\psi = \frac{R_1}{R_2 - R_1}\omega . \tag{12}$$

$R_2 = n\,R_1$ helyettesítéssel

$$\psi = \frac{1}{n-1}\omega . \tag{12a}$$

Ezt behelyettesítve 11. egyenletbe, a radiális réscsökkenés:

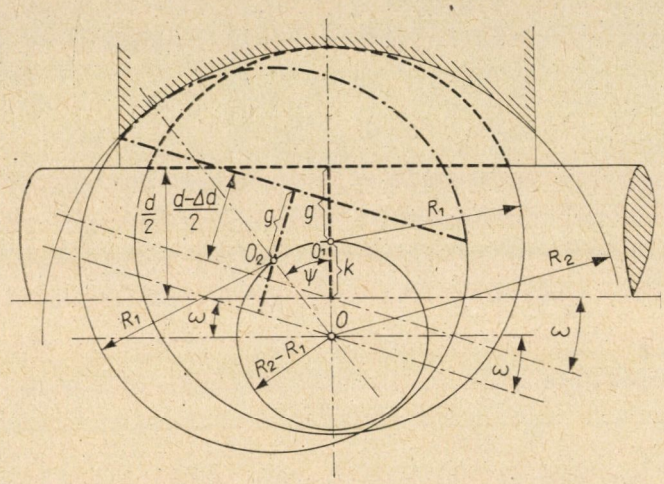
$$\triangle r = (R_2 - R_1)\left(1 - \cos\frac{R_1}{R_2 - R_1}\omega\right) + (R_2 - R_1)\sin\frac{R_1}{R_2 - R_1}\omega\,\mathrm{tg}\,\omega =$$

$$= R_1(n-1)\left[\left(1 - \cos\frac{1}{n-1}\omega + \sin\frac{1}{n-1}\omega\,\mathrm{tg}\,\omega\right], \tag{13}$$

miután kis szögeknél $\operatorname{tg}\omega \approx \sin\omega$:

$$\triangle r = R_1(n-1)\left(1 - \cos\frac{1}{n-1}\omega + \sin\frac{1}{n-1}\omega\sin\omega\right). \qquad (13a)$$

3. Ha a saruscsapágynak az axiális főmetszetben vett görbületi sugara kisebb, mint a támfelület tengelyre merőleges legnagyobb átmérőjének fele,



18. ábra. A réscsökkenés körgyűrű támfelület esetén, ha R_1 kisebb, mint a támfelület radiális főmetszetének sugara

akkor az előbbi képlet nem használható. A geometriai összefüggések a 18. ábra alapján a következők:

$$\frac{d-\Delta d}{2} = g + (R_2 - R_1)\sin(90° - \psi - \omega) - (R_2 - R_1 - k)\cos\omega \;;$$

$$\frac{d}{2} - \frac{d-\Delta d}{2} = \frac{\Delta d}{2} = \Delta r = g + k - g -$$

$$- (R_2 - R_1)\sin(90° - \psi - \omega) + (R_2 - R_1 - k)\cos\omega \;;$$

$$\Delta r = k + (R_2 - R_1 - k)\cos\omega - (R_2 - R_1)\sin(90° - \psi - \omega).$$

Behelyettesítve $\dfrac{R_1}{R_2 - R_1}\omega$ értéket

$$\triangle r = k + (R_2 - R_1)\cos\omega - k\cos\omega - (R_2 - R_1\sin\left(90° - \omega\frac{R_1}{R_2 - R_1} - \omega\right) =$$

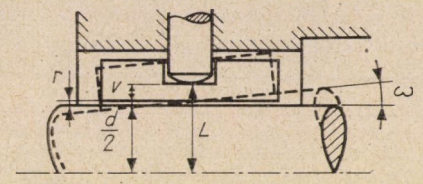
$$= k(1 - \cos\omega) + (R_2 - R_1)\left[\cos\omega - \sin\left(90° - \omega\frac{R_1 + R_2 - R_1}{R_2 - R_1}\right)\right]. \qquad (14)$$

$R_2 = nR_1$ helyettesítéssel

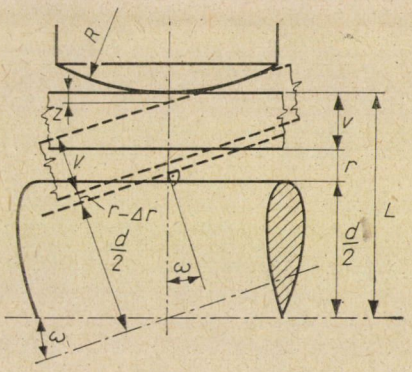
$$\Delta r = k(1 - \cos\omega) + (n-1)R_1\left[\cos\omega - \sin\left(90° - \omega\frac{n}{n-1}\right)\right] = \tag{14a}$$

$$= R_1(n-1)\left[\cos\omega - \sin\left(90° - \omega\frac{n}{n-1}\right)\right] + k(1 - \cos\omega).$$

4. Sík támfelület esetén a geometriai viszonyokat a 19. ás 20. ábra mutatja. A tengelycsapnak a csapágy középsíkjában ω szöggel való elfordulása következtében a csapágyrés az eredeti r értékről $(r - \Delta r)$ értékre csökken.



19. ábra. Szerkezeti kialakítás sík támfelület esetén



20. ábra. A réscsökkenés sík támfelület esetén

Az eredeti (el nem fordult) helyzetben:

$$\frac{d}{2} + r + V = L$$

ω szöggel elfordult tengelyhelyzetben:

$$\frac{d}{2\cos\omega} + \frac{r - \Delta r}{\cos\omega} + \frac{V}{\cos\omega} + z = L.$$

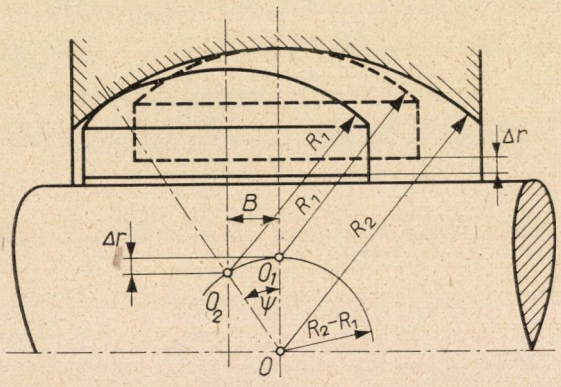
A két egyenletet egymással egyenlővé téve:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{2}+r+V=\frac{d}{2\cos\omega}+\frac{r-\Delta r}{\cos\omega}+\frac{V}{\cos\omega}+\frac{R}{\cos\omega}-R\\
&\left(\frac{d}{2}+r+V+R\right)\cos\omega=\frac{d}{2}+r-\Delta r+V+R\\
&\left(\frac{d}{2}+r+V+R\right)\cos\omega=\left(\frac{d}{2}+r+V+R\right)-\Delta r\\
&\Delta r=\left(\frac{d}{2}+r+V+R\right)-\left(\frac{d}{2}+r+V+R\right)\cos\omega=\\
&\quad=\left(\frac{d}{2}+r+V+R\right)(1-\cos\omega)=(L+R)(1-\cos\omega).
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Ha sík támfelületen a saruból kialakított csap fekszik fel, akkor a geometriai viszonyok az 1. esettel azonosak.

B) *Excentrikus saruelhelyezkedés* esetén is csökken a rés mérete homorú támfelület esetén, mint azt a 21. ábra mutatja. A réscsökkenés mértéke:

$$\Delta r=(R_2-R)\,(1-\cos\psi)\,.$$



21. ábra. Excentrikus saruelhelyezkedés körgyűrű alakú támfelületnél

A (tengelyirányú) excentricitás mértéke:

$$B=(R_2-R_1)\sin\psi\,,$$

miután

$$\sin\psi=\frac{B}{R_2-R_1}\,:$$

$$\Delta r=(R_2-R_1)(1-\cos\psi)=(R_2-R_1)\left(1-\sqrt{1-\sin^2\psi}\right)=$$

$$=(R_2-R_1)\left(1-\sqrt{1-\frac{B^2}{(R_2-R_1)^2}}\right)=(R_2-R_1)-\sqrt{(R_2-R_1)^2-B^2}.$$

Miután a $\ll (R_2 - R_1)$ pontosabban $(R_2 - R_1) \geq 10\ B$, azaz $(R_2 - R_1)^2 \geq 100\ B^2$; sorbafejtve és a sorbafejtés első két tagját figyelembe véve, a következő egyszerűsítést végezhetjük el:

$$\Delta r \approx (R_2 - R_1)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{B^2}{(R_2 - R_1)^2}}\right) =$$

$$= (R_2 - {}_1R)\frac{B^2}{2(R_2 - R_1)^2} = \frac{B^2}{2(R_2 - R_1)}\ . \qquad (16)$$

A közelítő képlet

$$\frac{B^2}{(R_2 - R_1)^2} \leq 0{,}089$$

esetén 1‰-nél kisebb hibát ad, ami

$$\frac{B}{R_2 - R_1} \leq 0{,}298$$

esetén már fennáll [11].

Hengeres és sík támfelület esetén az excentrikus saruelhelyezkedés nem okoz réscsökkenést. Az excentrikus saruelhelyezkedés a csaphézag csökkentésén kívül eltolja a központból a támpontot, emiatt az olajréteg alakja az axiális metszetben nem párhuzamos a tengellyel, és ez az általános réscsökkenésen kívül helyi réscsökkenést is okoz. Ennek számítása a hidrodinamikai kenéselmélet segítségével történhet.

C) *Sarubólintás.* A sarunak a csapágysíkban végzett szögelfordulása, az ún. sarubólintás is okoz hézagváltozást.

1. Az előzőekben levezetett összefüggések sarubólintás esetén is érvényesek, ha az egyes fogalmakat értelemszerűen átkereszteljük. Ha a 16. és 18. ábrák nem axiális főmetszetet jelentenek, hanem tengelyre merőleges főmetszetet, és hengeres támasztófelület esetén (1. eset) a tengelyre merőleges metszet geometriai viszonyai is ugyanazok, mint amit a 16–18. ábrák mutatnak vázlatosan, akkor a fenti összefüggések erre az esetre is alkalmazhatók. Egyszerűség okából elég a 18. ábrán vázolt esetet tárgyalni. Néhány jelölés értelmezése azonban megváltozik, erre esetenként utalni fogunk.

A) A/3. pontban levezetett képlet szerint a réscsökkenés értéke:

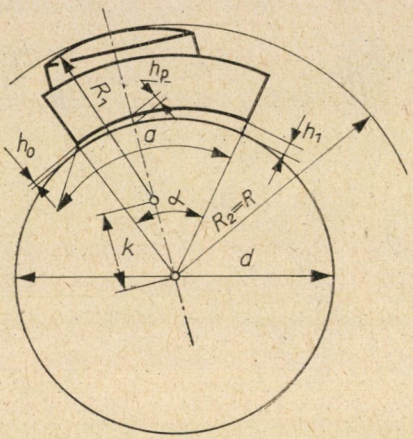
$$\Delta r_1 = R_1(n - 1)\left[\cos\omega - \sin\left(90° - \omega\frac{n}{n-1}\right)\right] + k(1 - \cos\omega), \qquad (17)$$

ahol az új értelmezés szerint az egyes betűjelek értelmezése a következő: Δr_1 réscsökkenés a saru középvonalában, azaz hp csökkenése; R_1 a sarucsapnak a tengelyre merőleges főmetszetében a sarucsap görbületi sugara; R_2 a támfelületnek görbületi sugara a tengelyre merő-

leges síkban; $n = R_2/R_1$ görbületi viszonyszám, mindig nagyobb egynél; $k = R_2 - R_1$; ω a saru állásszög változása a következő összefüggés szerint (22 ábra):

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{(h_1 - h_0)_1 - (h_1 - h_0)_2}{a} .$$

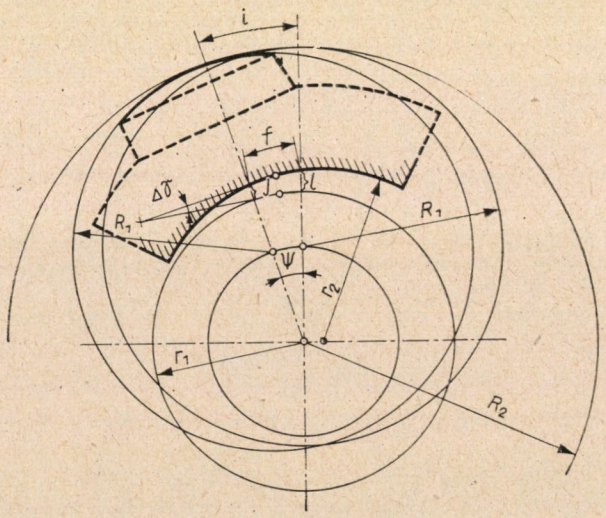
Az ω saruállásszög változása, hidrodinamikai és termikus viszonyokból számítható, nagyságrendje a tengelydeformációk nagyságrendjével megegyezik.



22. ábra. Támfelület, saru és tengelycsap általános elrendezése

A $(h_1 - h_2)_1$, illetve $(h_1 - h_0)_2$ zárójeles kifejezésekben a zárjel utáni 1 index a nagyobb, 2 index a kisebb $(h_1 - h_0)$ értékre vonatkozik.

A Δr_1 hézagváltozás az összes hézagváltozásnak csak egy része. Az emellett mutatkozó Δr_2 hézagváltozás értékét a továbbiak folyamán fogjuk megbecsülni a 23. ábra szerint.



23. ábra. A saru állásszög változása miatt előálló résváltozás körgyűrű vagy henger alakú támfelület esetén

Az ábrából

$$f = \psi r_2 ,$$

ahol $r_2 \approx r_1$ a saru futófelületének sugara.

A támpont környezetében az olajék szöge

$$\triangle\gamma \cong \operatorname{tg} \triangle\gamma = \frac{h_1 - h_0}{a} .$$

Ez a képlet lineáris olajék esetén $\Delta\gamma$-ra pontos értéket ad.

Félparabolikus olajéknél és minden átmeneti értéknél

$$\triangle\gamma \cong \frac{h_1 - h_0}{a} .$$

A sarubólintás miatt előálló hézagváltozás

$$\begin{aligned} \triangle r_2 = l - j = f\triangle\gamma = \psi r_2 \triangle\gamma \cong \psi r_2 \frac{h_1 - h_0}{a} = \\ = \frac{r_2}{a} \psi m h_0 = \frac{r_2}{a} \frac{(h_1 - h_0)_1 - (h_1 - h_0)_2}{a(n-1)} m h_0 = \\ = \frac{r_2}{a} \frac{(mh_0)_1 - (mh_0)_2}{a} \frac{mh_0}{n-1} \cong \frac{r_2}{a^2} \frac{(mh_0)_1^2 - (mh_0)_2^2}{2(n-1)} = \\ = \frac{r_2 m^2}{2(n-1)a^2} (h_{01}^2 - h_{02}^2), \end{aligned} \tag{18}$$

ahol $h_1 - h_0 = mh_0$ helyett

$$\frac{(h_1 - h_0)_1 + (h_1 - h_0)_2}{2} ,$$

azaz az eredeti és megváltozott állásszög számtani középarányosa van, miután $(h_1 - h_0)_1$ és $(h_1 - h_0)_2$ értéke nem tér el jelentősen egymástól.

Általában Δr_2 értéke elhanyagolható, mert valószínű értéke 0,001 és 5 μ közé esik, mindkét értéktől távol. Pontos értéke csak hosszas számítással határozható meg, és az esetek túlnyomó részében akkor sem befolyásolja Δr értékét lényegesen. A teljes képlet a bólintás okozta csaphézagváltozásra:

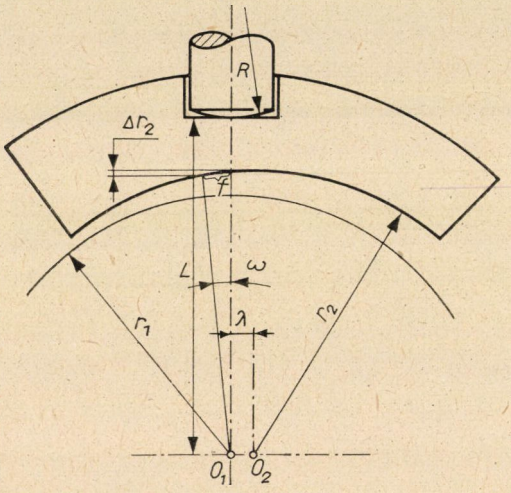
$$\triangle r = \triangle r_1 \pm \triangle r_2 =$$

$$= R_1(n-1)\left[\cos\frac{m(h_{01} - h_{02})}{a} - \sin\left(90° - \frac{n}{n-1}\frac{m(h_{01} - h_{02})}{a}\right)\right] +$$

$$+ k\left(1 - \cos\frac{m(h_{01} - h_{02})}{a}\right) \pm \frac{r_2 m^2}{2(n-1)a^2}(h_{01}^2 - h_{02}^2). \qquad (19)$$

A képletben előforduló jelölések az eddig közöltek alapján ismeretesek. A $\pm$ jel azt mutatja, hogy a második tag réscsökkenés és résnövekedés is lehet, a változás oly értelmű, hogyha a saru állásszöge nő, akkor a második tag réscsökkenést okoz, tehát a + előjel veendő figyelembe és fordítva.

2. Ha a sarukiképzés az A/4 esetnek felel meg, akkor a bólintás okozta hézagváltozás értéke megváltozik, mint azt a 24. ábra mutatja. A hézagváltozás törvényszerűsége az A/4 esetével azonos az ω értelmezésének megváltoztatása mellett.



24. ábra. A saru állásszög változása miatt bekövetkező résváltozás sík támfelületen

Ha ugyanis a résváltozás

$$\Delta r_1 = (L + R)(1 - \cos\omega) \qquad (15)$$

képletében az egyes változókat a következőképpen értelmezzük:

Δr_1 réscsökkenés; L a sarucsap legömbölyítésének a tengelyközépvonaltól való távolsága; R a sarucsap tengelyre merőleges főmetszetének görbületi sugara; ω a saru állásszög változása a következő összefüggés szerint:

$$\omega \cong \operatorname{tg}\omega = \frac{(h_1 - h_0)_1 - (h_1 - h_0)_2}{a},$$

akkor a fenti feltételek mellett Δr képlete a sarubólintás mértékének számítására is alkalmas. A C/1. esethez hasonlóan a támponteltolódás miatt Δr_2

résváltozás is jelentkezik, mely a saru kialakításának a függvénye. A 24. ábra szerint, ha λ kicsi r_1, illetve r_2-hez képest, akkor

$$f = r_2\omega$$

és

$$\Delta r_2 = f\,\mathrm{tg}\omega = r_2\omega\,\mathrm{tg}\omega \approx r_2\omega^2 . \tag{20}$$

Miután kis szögeknél $\omega \approx \mathrm{tg}\,\omega$,

$$\Delta r_2 = r_2\left[\frac{(h_1 - h_0)_1 - (h_1 - h_0)_2}{a}\right]^2 = r_2\left(\frac{mh_{01} - mh_{02}}{a}\right)^2 =$$

$$= r_2\frac{m^2}{a^2}(h_{01} - h_{02})^2 . \tag{20a}$$

A teljes résváltozás tehát

$$\Delta r = \Delta r_1 \pm \Delta r_2 = (L + R)(1 - \cos\omega) \pm r_2\frac{m^2}{a^2}(h_{01} - h_{02})^2 =$$

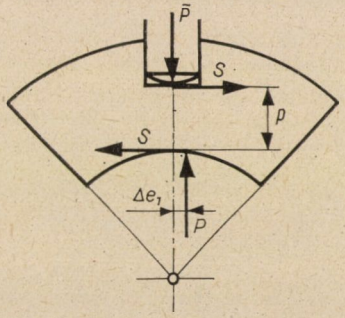
$$= (L + R)\left[1 - \cos\frac{m(h_{01} - h_{02})}{a}\right] \pm r_2\frac{m^2}{a^2}(h_{01} - h_{02})^2 . \tag{21}$$

ahol a + előjel a saru állásszögének növekedésénél használandó, a — előjel pedig az állásszög csökkenésénél.

D) *A saruexcentricitás változása*

1. *A súrlódás befolyása a saruexcentricitásra.*

A futófelületen ébredő S súrlódó erők eredője a sarucsapnál reakció erőt kelt, mellyel erőpárt alkot. Az erőpár karja p. Az $M = pS$ nyomaték elbillenti a sarut annyira, hogy a $p \cdot S$ nyomatékot egy másik nyomaték közömbösítse. A saru mindaddig csökkenti állásszögét, míg a P felhajtóerő, és a sarucsap helyén ébredő $\bar{P}$ reakció erő Δe_1 karja akkora lesz, hogy az $e_1 \cdot P$ nyomaték a súrlódó erő nyomatékát ellensúlyozza, azaz (25. ábra):



25. ábra. A súrlódóerő befolyása a saruexcentricitásra

$$\Delta e_1 P = M = pS\,,$$

miután

$$S = \mu P$$

$$\Delta e_1 P = pS = p\mu P$$

$$\Delta e_1 = \mu p\,. \tag{22}$$

A μ surlódási tényező értéke néhány tizezredtől néhány ezred milliméter nagyságrendű, ezért Δe_1 értéke sem nagy. Ha pl. $p = 10$ mm, és $\mu = 0{,}003$, akkor $e_1 = 0{,}03$ mm, ami gyakorlatilag elhanyagolható. Valamivel nagyobb érték, kb. kétszerese adódik annál a kiképzésnél, melynél a sarucsap a saruból van kimunkálva, mert ekkor p értéke nagyobb.

Induláskor, amikor S értéke a részleges fémes súrlódás miatt igen nagy, Δe_1 értéke is nagy lehet, és a sarut erősen előrebillenti. Ennek következtében az excentricitás negatívvá is válhat, ami induláskor a felhajtóerő jelentős csökkenését okozhatja. Negatív excentricitás esetén a saru belépőéle lekaparja az olajat a tengelyről, ez üzemzavart okozhat, ezért kerülendő.

2. *A saruexcentricitás változása a sarubólintás miatt.*

Eddig a C) pont alatt tárgyalt sarubólintás a résalak megváltoztatásán kívül az alátámasztás helyét is megváltoztatja, emiatt a saruexcentricitás értéke megváltozik. A változás mértéke a következőképpen határozható meg. A támpont eltolódása a támfelületen a 23. ábra szerint homorú támfelület esetén:

$$i = R_2 \psi\,.$$

A hidrodinamikai viszonyok vizsgálata szempontjából azonban nem a támfelületen, hanem a futófelületen jelentkező támponteltolódásnak van jelentősége, ezért a fenti értéket a sugarak arányával kell szorozni, azaz:

$$f = i\,\frac{r_2}{R_2} = R_2\psi\,\frac{r_2}{R_2} = r_2\,\psi \cong r_1\,\psi\,. \tag{23}$$

ψ értéke 12a. alapján:

$$\psi = \frac{n}{n-1}\,\omega\,, \quad \text{ahol} \quad \omega = \frac{(h_1 - h_0)_1 - (h_1 - h_0)_2}{a}$$

ezeket behelyettesítve:

$$\triangle e_2 = r_2\,\psi = r_2\,\frac{n}{n-1}\,\omega = r_2\,\frac{n}{n-1}\,\frac{(h_1 - h_0)_1 - (h_1 - h_0)_2}{a} = \tag{23a}$$

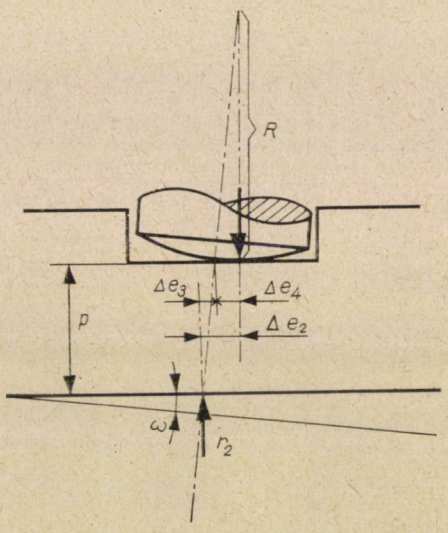
$$= r_2\,\frac{n}{n-1}\,\frac{m(h_{01} - h_{02})}{a} = \frac{r_2}{a}\,\frac{n}{n-1}\,m(h_{01} - h_{02})\,.$$

Sík támfelület esetén a támponteltolódás a 24. és 26. ábrák alapján:

$$f = r_2\,\omega = r_2 \cdot \frac{(h_1 - h_0)_1 - (h_1 - h_0)_2}{a} = \frac{r_2}{a}\, m(h_{01} - h_{02}). \qquad (24)$$

3. *A saru állásszög befolyása az excentricitásra.*

Ha a (26. ábra) támfelület sík, a sarucsap furatok iránya a házban radiális és a besüllyesztések iránya a saruban ugyancsak radiális (de a sarura vonatkoz-



26. ábra. A saru állásszög befolyása a saruexcentricitásra

tatva), tehát O_2 középpont felé mutat, akkor a saru állásszög miatt a támaszpont eltolódik és az excentricitás megváltozik, Δe_2 értékkel a 26. ábra szerint. Ekkor

$$\begin{aligned} \Delta e_2 &= \Delta e_3 + \Delta e_4\,; \\ \Delta e_3 &= p \sin\omega \cong p\omega\,; \\ \Delta e_4 &= R\omega\,, \end{aligned} \qquad (25)$$

miután kis szögeknél $\omega \approx \sin\omega$

$$\Delta e_2 = p\omega + R\omega = (p + R)\omega\,,$$

továbbá

$$\omega = \frac{(h_1 - h_0)_1 - (h_1 - h_0)_2}{a}\,.$$

Tehát

$$\Delta e_2 = (p + R)\,\omega = (p + R)\,\frac{(h_1 - h_0)_1 - (h_1 - h_0)_2}{a} =$$

$$= (p + R)\,\frac{m}{a}\,(h_{01} - h_{02}).$$

A fentiekből látható, hogy nagy sarucsapsugár esetén a Δe_2 támponteltolódás jelentősen nagyobb.

IRODALOM

1. Dr. Vörös Imre: Gépelemek 1961. II. köt. I. rész. 20—21 pont
2. Czégi József: Siklócsapágy kézikönyv. 1953. I. köt. I. fej. F.
3. Charnes, A. Saibel, E.: On the Solution of the Reynolds Equation for Slider Bearing Lubrication — I. Transactions of the ASME, July, 1952. pp. 267—273
4. Raimondi, A. A., Boyd, John: The Influence of Surface Profile on the Load Capacity of Thrust Bearings with Centrally Pivoted Pads. Transactions of the ASME, Apr, 1955. pp. 321—330
5. Charnes, A., Saibel, E., Ying, A. S. C.: On the Solution of the Reynolds Equation for Slider Bearing Lubrication — III. The Effect of Transverse Curvature. Transactious of the ASME, May, 1953. pp. 507—513
6. Ying, A. S. C., Charnes, A., Saibel, E.: Studies in Lubrication — XI. Slider Bearing with Transverse Curvature. Transactions of the ASME, Apr, 1956. pp. 465—467
7. Abramovitz, S.: Theory for a Slider Bearing with a Convex Pad Surface: Side Flow Neglected. Journal of the Franklin Institute. March, 1955. pp. 221—233
8. Kent: Mechanical Engineers' Handbook. Design and Production Volume, Section 12. Page 12
9. Harkányi I.: Nagypontosságú orsócsapágyazások kidolgozása. Saruscsapágyazás. SZFI jelentés IV—04—1957—453
10. ten Bosch, M.: Berechnung der Maschinenelemente, Dritte Auflage, Springer 1951. Sektion 43
11. Hütte: Des Ingenieurs Taschenbuch, Theoretische Grundlagen. 28. Auflage S 2

ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozat a billenő saruscsapágyak résgeometriájának változásait tárgyalja. Az első részben a hordsaruk esetére megállapítja azokat a feltételeket, melyeknél az ismert lineáris olajék keletkezik, valamint azokat is, melyeknél a résgeometria félparabolikus és módszert javasol ez utóbbinak számítására. Utalás történik a gyakorlatban előforduló átmeneti résalakokra is. Ismerteti a résgeometria változása iránt legkevésbé érzékeny saruexcentricitások értékeit.

A második részben a billenő saruscsapágyak szerkezeti kialakítása miatt azok mozgása, valamint a surlódás következtében bekövetkezett résgeometria változások kerülnek ismertetésre.

HOSSZÚ HENGERES TESTEK HEVÍTÉSI FOLYAMATÁNAK VIZSGÁLATA VÁLTOZÓ KEMENCE-HŐMÉRSÉKLET ÉS HŐÁTADÁSI TÉNYEZŐ ESETÉN

HOFFMANN ANDOR

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM, ÁRAMLÁSTANI AKADÉMIAI MUNKAKÖZÖSSÉG, V. MATEMATIKA TANSZÉK

[Beérkezett 1961. március 30-án]

Bevezetés

A dolgozatban elég hosszú körkeresztmetszetű henger hőátadási folyamatát vizsgáljuk, időtől függő kemencehőmérséklet és hőmérséklettől függő hőátadási tényező esetén, a Newton-féle hőátadási feltétel alapján.

Az előző közleményben [15] a hővezetés differenciálegyenletének egy — gyakorlatilag is jól számítható — megoldását adtuk a fent említett testre, időben változó kemencehőmérséklet esetén, de a termikus paramétereket (h, k, γ, c) ott állandóknak tekintettük (illetve lépcsősgörbével helyettesítettük). A számításokból kiderült, hogy a test hőmérsékleteloszlásának meghatározásánál a hevítés kezdeti időszaka (15—20 perc) után a gyakorlati esetek többségében (kohászat) lényegesebb a kemencehőmérséklet változásának a számításbavétele, mint a termikus paraméterek változásáé. Azonban a hevítés kezdeti időszakára nem tehettünk hasonló megállapítást, mert a megoldásfüggvény itt elég érzékeny a termikus paraméterek megváltozására, ezért a lépcsősgörbével való helyettesítés vagy nagyon durva eredményt ad, vagy — ha sűrítjük a lépéseket — gyakorlatilag túl bonyolult számításokra vezet. Ebben a dolgozatban megadunk egy módszert a test hőmérsékleteloszlásának kezdeti időszakbeli meghatározására, abban az esetben, mikor a hőátadási tényezőt a hőmérséklet függvényének tekintjük $[h = h(\vartheta)]$, a kemencehőmérséklet pedig — mint előzőleg is — az idő függvénye marad $[\vartheta_K = \vartheta_K(t)]$.

A hőátadási tényező gyakorlatilag két függvényből tevődik össze: az egyik a sugárzási törvényből (ezt később részletezzük), a másik a hőátadás konvekciós törvényéből adódik. Ez utóbbi a konvekciós hőátadási tényező, amely

$$Nu = C\ Gr^n$$

jellegű hatványfüggvénnyel fejezhető ki, ahol a Gr a Grashof-féle dimenzió nélküli szám, amelyet

$$Gr = \frac{gl^3 \triangle\vartheta\beta}{\nu^2}$$

fejez ki.

Ebben l a hőáramlásra jellemző méret (a rúd átmérője)

ν a kinematikai viszkozitás

$\beta = \frac{1}{T}$ tágulási együttható

$\Delta\vartheta$ a hőmérsékletkülönbség a rúd és a környező gáz között.

A szóban forgó esetekre egyszerűsítés után

$$a_c = a\Delta\vartheta^{1/3}$$

jellegű összefüggéshez jutunk, ahol

$$a \approx 1{,}7.$$

A gyakorlati esetek jelentős részében (hőkezelés, kohászat) a természetes hőmérsékletű munkadarabot magas hőmérsékletű kemencébe helyezzük. Az így kialakuló folyamatnál a hőátadás túlnyomó része sugárzással megy végbe, a folyamat kezdeti szakaszán is. Pl. 1000° C különbség esetén

$$a_c \approx 17 \text{ kcal/m}^2\text{ó°C}$$
$$h \approx 110 \quad ,,$$

A továbbiakban a_c értéke monoton csökken, míg a h kis átmeneti fogyás után — melyet a kemencehőmérséklet hirtelen esése okoz — monoton emelkedik (3. ábra). Ilyen jellegű hevítéseknél tehát a konvektív hőátadási tényező elhanyagolása a sugárzási tényező mellett technikailag megengedhető. Persze a folyamat finomabb vizsgálatánál, valamint más jellegű hevítéseknél a konvektív hőátadási tényezőt is tekintetbe kell venni.*

1. A probléma megoldása

A differenciálegyenlet hengerkoordinátákra átírt és dimenziómentes alakja:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho} = R^2\frac{\gamma c}{k}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}. \tag{1}$$

Kezdeti feltétel

$$\vartheta(\varrho, 0) = f(\varrho) \tag{2}$$

és a newtoni peremfeltétel

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=1} = R\frac{h(\vartheta_F)}{k}[\vartheta_K(t) - \vartheta(1,t)]. \tag{3}$$

Ha a hőátadási tényezőt a sugárzási törvényből számítjuk, akkor problémánk megoldásához az előző meggondolások hozzásegítenek. A sugárzási törvény alkalmazása a fentieken kívül technikailag azért is jogosult, mert elektromos

* E probléma jelentőségére Dr. Macskásy Árpád professzor hívta fel figyelmemet. Kidolgozását, azaz a két hőátadási tényező együttes hatásának vizsgálatát egy későbbi dolgozatban szeretném közzétenni.

ellenállásfűtésű hevítés esetén a hőátadás túlnyomó része sugárzás útján megy végbe.*

A sugárzási törvény alapján:

$$h(\vartheta_F) = \varepsilon c_s \frac{\left(\frac{\vartheta_K(t) + 273}{100}\right)^4 - \left(\frac{\vartheta_F + 273}{100}\right)^4}{\vartheta_K(t) - \vartheta_F},$$

ahol $C_s = 4{,}96$ az abszolút fekete test sugárzási együtthatója. Az ε a hőfelvevő, illetve a hőleadó felület sugárzási együtthatójától (ε_1; ε_2), valamint a két felület (F_1; F_2) nagyságától függő állandó.

Tehát ezt betéve a (3) peremfeltételbe

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=1} = \varepsilon c_s \frac{R}{k}\left[\left(\frac{\vartheta_K(t) + 273}{100}\right)^4 - \left(\frac{\vartheta(1,t) + 273}{100}\right)^4\right] \text{adódik.}$$

Jelöljük az

$$\varepsilon c_s \frac{R}{k}\left(\frac{\vartheta_K(t) + 273}{100}\right)^4 \quad \text{és az} \quad \varepsilon c_s \frac{R}{k}\left(\frac{\vartheta(1,t) + 273}{100}\right)^4$$

kifejezéseket $\vartheta_{Ka}(t)$-vel, és $g(\vartheta_F)$-fel.

Linearizáljuk a $g(\vartheta_F)$-et (egy megfelelő intervallumban) a következőképpen

$$g(\vartheta_F) \approx c_1\vartheta_F + c_0$$

és a továbbiakban a $g(\vartheta_F)$ helyett ezt a lineáris függvényt használjuk.

A (3) peremfeltétel így a következő lesz:

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho}\right|_{\varrho=1} = \vartheta_{Ka}(t) - c_1\vartheta(1,t) - c_0 = \vartheta_{Ka}(0) + \Delta(t) - c_1\vartheta(1,t) - c_0, \quad (4)$$

ahol a $\vartheta_{Ka}(t) = \vartheta_{Ka}(0) + \Delta(t)$ jelölést vezettük be, melyben $\Delta(0) = 0$, $\Delta(t)$ folytonos és szakaszonként síma görbe.

Válasszuk a megoldást két függvény összegeként

$$\vartheta = \vartheta_1(\varrho,t) + \int_{\tau=0}^{t} \frac{d\varphi}{d\tau}\vartheta_2(\varrho,t-\tau)\,d\tau \quad (5)$$

azzal a kikötéssel, hogy a $\vartheta_1(\varrho, t)$ és $\vartheta_2(\varrho, t)$ segédfüggvények külön-külön is kielégítik az (1) differenciálegyenletet. Így ϑ_1 és ϑ_2-re a

* HEILIGENSTAEDT: Wärmetechnische Rechnungen für Industrieöfen. Düsseldorf, 3. kiadás, 1951.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\varrho}&=R^2\frac{\gamma c}{k}\frac{\partial\vartheta_1}{\partial t}; \qquad \vartheta_1(\varrho,0)=f(\varrho)\\ \frac{\partial^2\vartheta_2}{\partial\varrho^2}+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\varrho}&=R^2\frac{\gamma c}{k}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial t}; \qquad \vartheta_2(\varrho,0)=0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

differenciálegyenletek és kezdeti feltételek adódnak.

Az eredeti differenciálegyenletre vonatkozó peremfeltétel

$$\frac{\partial\vartheta_1}{\partial\varrho}\Big|_{\varrho=1}+\int_{\tau=0}^{t}\frac{d\varphi}{d\tau}\frac{\partial\vartheta_2}{\partial\varrho}d\tau\Big|_{\varrho=1}=\vartheta_{Ka}(t)-c_1\vartheta_1(1,t)-c_1\int_{\tau=0}^{t}\frac{d\varphi}{d\tau}\vartheta_2(1,t-\tau)\,d\tau-c_0. \tag{7}$$

Ezt a következő két peremfeltételre bontjuk szét

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\vartheta_1}{\partial\varrho}\Big|_{\varrho=1}&=-c_1\vartheta_1(1,t)\\ \frac{\partial\vartheta_2}{\partial\varrho}\Big|_{\varrho=1}&=1-c_1\vartheta_2(1,t) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

és ezek mellett (7)-ből $\varphi(t)$-re a

$$\int_{\tau=0}^{t}\frac{d\varphi}{d\tau}d\tau=\vartheta_{Ka}(t)-c_0=\vartheta_{Ka}(0)+\triangle(t)-c_0$$

feltétel adódik. Legyen

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\delta(\tau)[\vartheta_{Ka}(0)-c_0]+\frac{d\triangle(\tau)}{d\tau}, \quad (\tau>0), \tag{9}$$

ahol $\delta(t)$ a DIRAC-féle delta függvény, melyre érvényes

$$\int_{\tau=0}^{t}\delta(\tau)\,d\tau=1, \quad \int_{\tau=0}^{t}\delta(\tau)f(\tau)\,d\tau=f(0).$$

Így az (1) differenciálegyenlet megoldása a következő:

$$\begin{aligned} \vartheta(\varrho,t)&=\vartheta_1(\varrho,t)+\int_{\tau=0}^{t}\delta(\tau)[\vartheta_{Ka}(0)-c_0]\,\vartheta_2(\varrho,t-\tau)d\tau+\\ &+\int_{\tau=0}^{t}\frac{d\triangle(\tau)}{d\tau}\vartheta_2(\varrho,t-\tau)\,d\tau=\vartheta_1(\varrho,t)+[\vartheta_{Ka}(0)-c_0]\vartheta_2(\varrho,t)+\\ &+\int_{\tau=0}^{t}\frac{d\triangle(\tau)}{d\tau}\vartheta_2(\varrho,t-\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

Megoldva a (6_1) egyenletet és a megadott kezdeti és peremfeltételt figyelembe véve adódik:

$$\vartheta_1(\varrho,t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\int_{\varrho=0}^{1} f(\varrho)\,\varrho J_0(\nu_p\varrho)d\varrho}{\left[1+\left(\frac{c_1}{\nu_p}\right)^2\right]J_0^2(\nu_p)} J_0(\nu_p\varrho)\, e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}t}.$$

A ν_p-re vonatkozó sajátértékegyenlet

$$\nu_p J_1(\nu_p) = c_1 J_0(\nu_p). \qquad (p \geqq 1)$$

Hasonlóan adódik a ϑ_2 függvényre a

$$\vartheta_2(\varrho,t) = \frac{1}{c_1} - 2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_p\varrho)}{(\nu_p^2+c_1^2)J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}t}$$

megoldás a fenti sajátértékekkel.

Tehát (10) alapján

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta(\varrho,t) = {} & \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\int_{\varrho=0}^{1} f(\varrho)\,\varrho J_0(\nu_p\varrho)\,d\varrho}{\left[1+\left(\frac{c_1}{\nu_p}\right)^2\right]J_0^2(\nu_p)} J_0(\nu_p\varrho)\, e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}t} + \\
& + [\vartheta_{K\alpha}(0)-c_0]\left[\frac{1}{c_1} - 2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{J_0(\nu_p\varrho)}{(\nu_p^2+c_1^2)J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}t}\right] + \\
& + \int_{\tau=0}^{t} \frac{d\triangle(\tau)}{d\tau}\left[\frac{1}{c_1} - 2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{J_0(\nu_p\varrho)}{(\nu_p^2+c_1^2)J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}(t-\tau)}\right]d\tau = \\
= {} & \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\int_{\varrho=0}^{1} f(\varrho)\,\varrho J_0(\nu_p\varrho)\,d\varrho}{\left(1+\frac{c_1^2}{\nu_p^2}\right)J_0^2(\nu_p)} J_0(\nu_p\varrho)\, e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}t} + \\
& + \frac{1}{c_1}[\vartheta_{K\alpha}(t)-c_0] - 2[\vartheta_{K\alpha}(0)-c_0]\sum_{p=1}^{\infty}\frac{J_0(\nu_p\varrho)}{(\nu_p^2+c_1^2)J_0(\nu_p)} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}t} - \\
& - 2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{J_0(\nu_p\varrho)}{(\nu_p^2+c_1^2)J_0(\nu_p)}\int_{\tau=0}^{t}\frac{d\triangle(\tau)}{d\tau} e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}(t-\tau)}d\tau .
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

A $g(\vartheta_F)$ függvényt nem tudjuk — a gyakorlati pontosság feladása nélkül — az egész vizsgált szakaszon egy egyenessel helyettesíteni, ezért kénytelenek

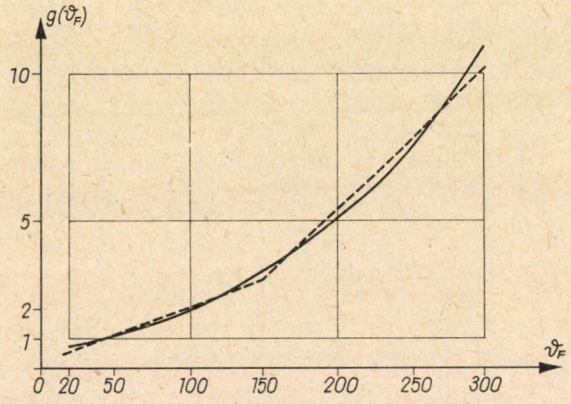
vagyunk több egyenest csatlakoztatni úgy. hogy adott számú (lehetőleg kevés) egyenes esetén a hiba minimális legyen. Így

$$g(\vartheta_F) \approx \begin{cases} c_1 \vartheta_F + c_0 & (0 \leqq t \leqq t_{j_1}) \\ c_1^{(1)} \vartheta_F + c_0^{(1)} & (t_{j_1} \leqq t \leqq t_{j_2}) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ c_1^{(j-1)} \vartheta_F + c_0^{(j-1)} & (t_{j_{s-1}} \leqq t \leqq t_{j_s}) \end{cases}$$

Esetünkben az egyenesek felvétele úgy történt, hogy a függvény különbségek négyzetének integrálja az adott szakaszon minimum legyen. Tehát a j-edik szakaszon $(\vartheta_F^{(j-1)} \leqq \vartheta_F \leqq \vartheta_F^{(j)})$ az

$$\int_{\vartheta_F^{(j-1)}}^{\vartheta_F^{(j)}} [g(\vartheta_F) - c_1^{(j-1)} \vartheta_F - c_0^{(j-1)}]^2 \, d\vartheta_F = \Omega(c_1^{(j-1)}, c_0^{(j-1)})$$

függvénynek minimuma legyen. Ezek az egyenesek csatlakoznak egymáshoz (1. ábra).



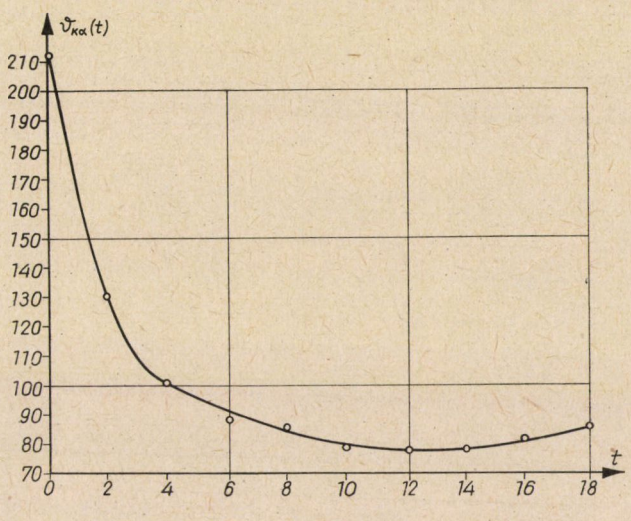
1. ábra

A $\vartheta_{Ka}(t)$ függvényt megközelíthetjük egymáshoz csatlakoztatott parabolákkal; pl. az i-edik szakszon $(t_{i-1} \leqq t \leqq t_i)$

$$\vartheta_{Ka}(t) \approx a_{2,\,i-1} t^2 + a_{1,\,i-1} t + a_{0,\,i-1}.$$

Itt jobb eredményt kapunk, ha a GAUSS-féle kiegyenlítés helyett a parabolákat szakaszonként a $\vartheta_{Ka}(t)$ függvény néhány alkalmas egzakt pontján vezetjük át. A parabolák is egymáshoz csatlakoznak (2. ábra).

A megoldásnak tehát most kétféle csatlakoztatása van: csatlakozniok kell a $g(\vartheta_F)$-et kiegyenlítő egyeneseknek és a $\vartheta_{Ka}(t)$-t megközelítő paraboláknak. Ezek sorrendjét az adott speciális folyamat szabja meg.



2. ábra

A hevítés kezdetén a testbeli hőmérsékleteloszlást állandónak vehetjük:

$$\vartheta(\varrho, 0) = f(\varrho) = \vartheta_a .$$

Ezzel a megoldás az első szakaszon a

$$J_1(\nu_n) = \frac{c_1}{\nu_n} J_0(\nu_n),$$

sajátértékegyenlet felhasználásával a következő:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta^{(0)}(\varrho,t) = {} & \frac{1}{c_1}\left[\vartheta_{Ka}(t) - c_0\right] - 2\left[\vartheta_{Ka}(0) - c_0 - \right. \\ & \left. - 2c_1\,\vartheta_a\right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n \varrho)}{(\nu_n^2 + c_1^2)\, J_0(\nu_n)}\, e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}\, t} - \\ & - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n \varrho)}{(\nu_n^2 + c_1^2)\, J_0(\nu_n)} \int_{\tau=0}^{t} \frac{d\triangle(\tau)}{d\tau}\, e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}(t-\tau)}\, d\tau \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Az előbbiek szerint

$$\vartheta_{Ka}(t) \approx \begin{cases} a_2\, t^2 + a_1 t + a_0 & (0 \leq t \leq t_{i_1}) \\ a_{21}\, t^2 + a_{11}\, t + a_{01} & (t_{i_1} \leq t \leq t_{i_2}) \\ \vdots & \\ a_{2,\,i-1}\, t^2 + a_{1,\,i-1}\, t + a_{0,\,i-1} & (t_{i_{r-1}} \leq t \leq t_{i_r}) \end{cases}$$

Ezt beírva a (12) megoldásba megkapjuk a megoldást az első szakaszon ($0 \leq t \leq t_1$):

$$\vartheta^{(0)}(\varrho,t) = \frac{1}{c_1}[\vartheta_{Ka}(t) - c_0] - 2[\vartheta_{Ka}(0) - c_0 -$$

$$- 2c_1\vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n\varrho)}{(\nu_n^2 + c_1^2)J_0(\nu_n)} e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}t} -$$

$$- 2R^2\frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n\varrho)}{\nu_n^2(\nu_n^2 + c_1^2)J_0(\nu_n)} \left[2a_2 t + A_n^{(0)}\left(1 - e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}t}\right)\right],$$

ahol

$$A_n^{(0)} = a_1 - 2a_2\frac{R^2}{\nu_n^2}\frac{\gamma c}{k}$$

Itt is látható, hogy a megoldás harmadik tagja a $\Delta(t)$-vel ellenkező előjelű, és az anyag „ellenállását" reprezentálja a $\vartheta_{Ka}(t)$ változással szemben.

A következő szakaszon a $\vartheta_{Ka}(t)$ jó közelítéssel egyenlő a második parabolával. Itt tehát új megoldást kell előállítani, amelynél a test „kezdeti" hőmérsékleteloszlása egyenlő a t_1 időpontig kialakult hőmérsékleteloszlással:

$$f_1(\varrho) = \vartheta^{(0)}(\varrho, t_1).$$

Ezt betéve az eredeti (11) megoldásba és tekintetbe véve a sajátértékegyenletet, valamint a BESSEL-függvények ortogonalitási relációit, megkapjuk a megoldást a második szakaszban ($t_1 \leq t \leq t_2$):

$$\vartheta^{(1)}(\varrho,t) = \frac{1}{c_1}[\vartheta_{Ka}^{(1)}(t) - c_0] - 2[\vartheta_{Ka}(0) - c_0 -$$

$$- 2c_1\vartheta_a] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n\varrho)}{(\nu_n^2 + c_1^2)J_0(\nu_n)} e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}t} -$$

$$- 2R^2\frac{\gamma c}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\nu_n\varrho)}{\nu_n^2(\nu_n^2 + c_1^2)J_0(\nu_n)} \left\{\left[2a_2 t_1 + \right.\right.$$

$$\left. + A_n^{(0)}\left(1 - e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}t_1}\right)\right] \cdot e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}(t-t_1)} +$$

$$\left. + \left[2a_{21}(t - t_1) + A_n^{(1)}\left(1 - e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}(t-t_1)}\right)\right]\right\},$$

ahol

$$A_n^{(1)} = 2a_{21}t_1 + a_{11} - 2a_{21}\frac{R^2}{\nu_n^2}\frac{\gamma c}{k}.$$

A következő szakaszon a $g(\vartheta_F)$ függvényt kiegyenlítő egyenes változik meg:

$$g(\vartheta_F) \approx c_1^{(1)}\vartheta_F + c_0^{(1)} \qquad (t_2 \leq t \leq t_3)\,.$$

Itt tehát újra vissza kell mennünk az eredeti (11) megoldáshoz. Úgy járunk el, mintha a hevítési folyamat a t_2 időpontban kezdődnék, és az eddig kialakult hőmérsékleteloszlást mint kezdeti eloszlást tekintjük:

$$f_2(\varrho) = \vartheta^{(1)}(\varrho, t_2)\,.$$

Így a megoldás a harmadik szakaszban $(t_2 \leq t \leq t_3)$:

$$\vartheta^{(2)}(\varrho,t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2\int_{\varrho=0}^{1} f_2(\varrho)\,\varrho J_0(\nu_p\varrho)\,d\varrho}{\left(1+\frac{c_1^{(1)2}}{\nu_p^2}\right)J_0^2(\nu_p)} J_0(\nu_p\varrho)\,e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}(t-t_2)} +$$

$$+\frac{1}{c_1^{(1)}}[\vartheta_{Ka}(t)-c_0^{(1)}] - 2[\vartheta_{Ka}(t_2) -$$

$$-c_0^{(1)}]\sum_{p=1}^{\infty}\frac{J_0(\nu_p\varrho)}{(\nu_p^2+c_1^{(1)2})J_0(\nu_p)}\,e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}(t-t_2)} -$$

$$-2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{J_0(\nu_p\varrho)}{(\nu_p^2+c_1^{(1)2})J_0(\nu_p)}\int_{\tau=t_2}^{t}\frac{d\triangle(\tau)}{d\tau}\,e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}(t-\tau)}\,d\tau\,.$$

A sajátértékegyenlet a $g(\vartheta_F)$ függvénynek a szóban forgó szakaszra vonatkozó új lineáris alakja folytán megváltozik, mégpedig:

$$\nu_p J_1(\nu_p) = c_1^{(1)} J_0(\nu_p)$$

és ez természetesen új $\{\nu_p\}$ sajátértéksorozatot ad. Így az

$$\int_{\varrho=0}^{1}\varrho J_0(\nu_n\varrho)J_0(\nu_p\varrho)d\varrho = \frac{1}{\nu_n^2-\nu_p^2}[\nu_n J_0(\nu_p)J_1(\nu_n) - \nu_p J_0(\nu_n)J_1(\nu_p)] =$$

$$= \frac{c_1 - c_1^{(1)}}{\nu_n^2-\nu_p^2} J_0(\nu_n)J_0(\nu_p)$$

integrálra már nem érvényesek az ortogonalitási relációk; csupán a saját-

értékegyenletet használhattuk ki. Így a (11) megoldás első tagjában levő integrál a következő lesz:

$$2\int_{\varrho=0}^{1} f_2(\varrho)\,\varrho J_0(\nu_p\,\varrho)\,d\varrho = \frac{2}{c_1}\,[\vartheta_{Ka}(t_2)-c_0]\,\frac{c_1^{(1)}}{\nu_p^2}\,J_0(\nu_p) -$$

$$-4[\vartheta_{Ka}(0)-c_0-2c_1\vartheta_a]\,(c_1-c_1^{(1)})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\nu_p)}{(\nu_n^2-\nu_p^2)(\nu_n^2+c_1^2)}\,e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}t_2} -$$

$$-4R^2\frac{\gamma c}{k}\,(c_1-c_1^{(1)})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\nu_p)}{(\nu_n^2-\nu_p^2)\,\nu_n^2(\nu_n^2+c_1^2)}\,\{\cdot-\cdot\}\,.$$

Ezt betéve a (11) megoldásba:

$$\vartheta^{(2)}(\varrho,t)=\frac{1}{c_1^{(1)}}\,[\vartheta_{Ka}(t)-c_0^{(1)}]+2\left[\left(\frac{c_1^{(1)}}{c_1}-1\right)\vartheta_{Ka}(t_2)-\right.$$

$$-\frac{c_1^{(1)}}{c_1}\,c_0+c_0^{(1)}\Big]\sum_{p=1}^{\infty}\frac{J_0(\nu_p\,\varrho)}{(\nu_p^2+c_1^{(1)2})\,J_0(\nu_p)}\,e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}(t-t_2)} -$$

$$-2R^2\frac{\gamma c}{k}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{J_0(\nu_p\varrho)}{\nu_p^2(\nu_p^2+c_1^{(1)2})\,J_0(\nu_p)}\Big|2a_{21}(t-t_2)+$$

$$\left.+A_p\left(1-e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}(t-t_2)}\right)\right]-4[\vartheta_{Ka}(0)-c_0-2c_1\vartheta_a]\,(c_1-$$

$$-c_1^{(1)})\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\nu_p\varrho)\,e^{-\frac{\nu_n^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}t_2}}{(\nu_n^2+c_1^2)(\nu_n^2-\nu_p^2)\left(1+\frac{c_1^{(1)2}}{\nu_p^2}\right)J_0(\nu_p)}\,e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}(t-t_2)} -$$

$$-4R^2\frac{\gamma c}{k}\,(c_1-c_1^{(1)})\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{\cdots\}}{\nu_n^2(\nu_n^2+c_1^2)}\times$$

$$\times\frac{J_0(\nu_p\varrho)}{(\nu_n^2-\nu_p^2)\left(1+\frac{c_1^{(1)2}}{\nu_p^2}\right)J_0(\nu_p)}\,e^{-\frac{\nu_p^2}{R^2}\frac{k}{\gamma c}(t-t_2)}\,,$$

ahol

$$A_p=2a_{21}t_2+a_{11}-2a_{21}\frac{R^2}{\nu_p^2}\frac{\gamma c}{k}\,.$$

A kemencehőmérsékletnek a test hőmérsékleteloszlására való befolyása a megoldás első, harmadik és ötödik tagjában nyilvánul meg. A harmadik és

ötödik tag mintegy az anyag „ellenállását" reprezentálja az első tagban előforduló $\vartheta_{Ka}(t) = \vartheta_{Ka}(t_2) + \Delta(t)$ $(t_2 \leq t \leq t_3)$ módosított kemencehőmérséklettel szemben. A $h(\vartheta)$ változását részben a c_1, c_0, $c_1^{(1)}$, $c_0^{(1)}$ együtthatókkal, részben pedig a módosított kemencehőmérséklettel illesztettük be a differenciálegyenlet megoldásába.

A megoldás numerikus kiszámítása — a látszat ellenére — nem bonyolult, mert a kettős szummáknál a belsőt (az n-re vonatkozót) már az előző szakaszban ki kellett számítanunk.

2. Alkalmazások és következtetések

Vizsgáljuk az előző közleményben leírt 10 cm sugarú, hosszú egyenes körhenger alakú és ugyanolyan összetételű acéltest felhevítését az előbbivel azonos körülmények között, csupán a hőátadási tényező változzék a fenti módon.

Adatok:

$$\frac{\gamma c}{k} = 1332 \left[\frac{perc}{m^2}\right]; \qquad \varepsilon = 0{,}87\ ; \qquad R = 0{,}1\ [m]\ ;$$

$$c_1 = 0{,}0189362\ ; \qquad c_0 = 0{,}1622754$$

$$c_1^{(1)} = 0{,}0476966\ ; \qquad c_0^{(1)} = -\ 4{,}1517891$$

$$a_2 = 6{,}4567\ ; \qquad a_1 = -\ 53{,}434\ ; \qquad a_0 = 211{,}2007$$

$$a_{21} = 0{,}2937: \qquad a_{11} = -\ 7{,}5475: \qquad a_{01} = 126{,}2622$$

$$\vartheta_a = 20[°C]: \qquad t_1 = 4: \qquad t_2 = 6 \qquad t_3 = 18$$

Az I. táblázatban a $g_e(\vartheta_F)$ a $g(\vartheta_F)$ függvény helyett vett kiegyenlítő egyenest jelenti. A II. táblázatban a ϑ_{Km} a kimért kemencehőmérsékletet, a $\vartheta_{Kam}(t)$ a mért kemencehőmérséklettel számított módosított kemencehőmérsékletet, a $\vartheta_{Ka}(t)$ az előbbit gyakorlatilag jól megközelítő másodfokú parabolát jelenti.

I. táblázat

ϑ_F	20	50	75	100	125	150
$g(\vartheta_F)$	0,745672	1,101254	1,483865	1,958452	2,538691	3,239209
$g_e(\vartheta_F)$	0,540999	1,109085	1,582490	2,055895	2,529300	3,002705

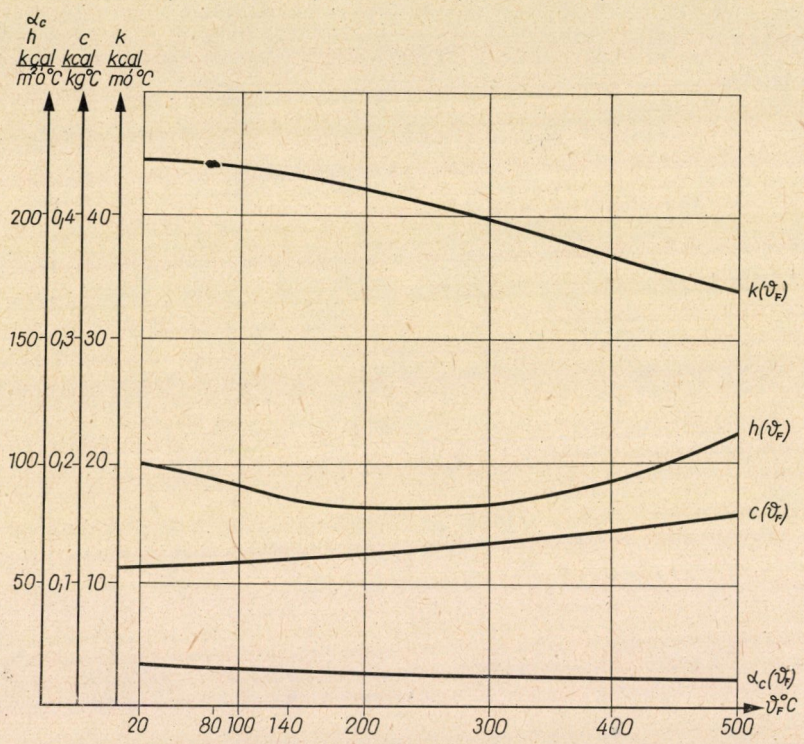
ϑ_F	175	200	225	250	275	300
$g(\vartheta_F)$	4,075581	5,064331	6,222929	7,569797	9,124304	10,906766
$g_e(\vartheta_F)$	4,195121	5,387537	6,579953	7,772368	8,964784	10,157200

A 4. ábrán a pontozott görbe jelenti a felület, illetve belső szál hőmérsékletét, állandó kemencehőmérséklet és állandó hővezetési paraméterek mellett; a szaggatott görbe mutatja a hőmérsékleteloszlást, ha a kemencehőmérsékletet az idő függvényében tekintjük, de még

II. táblázat

t	0	2	4	6	8	10
ϑ_{Km}	929	792	726	694	686	666
$\vartheta_{Kam}(t)$	211,2007	130,1595	100,7719	88,4674	85,5760	78,6574
$\vartheta_{Ka}(t)$	211,2007	130,1595	100,7719	91,5515	84,6809	80,1603

t	12	14	16	18
ϑ_{Km}	664	666	675	686
$\vartheta_{Kam}(t)$	77,9895	78,6575	81,7167	85,5760
$\vartheta_{Ka}(t)$	77,9894	78,1684	80,6972	85,5761



3. ábra

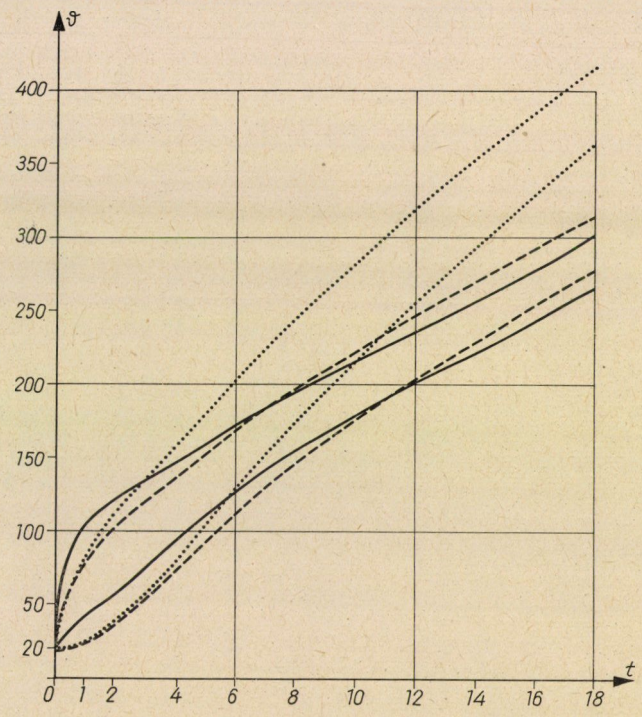
a termikus paraméterek állandók; a folytonos görbe a változó kemencehőmérséklettel és változó hőátadási tényezővel (a többi termikus paraméter állandó) számított hőmérsékleteloszlást mutatja. Ez utóbbi van jellegében legközelebb a kísérletileg kimért görbéhez* (pontos összehasonlítást azért nem tehetünk, mert a mérések 4 cm sugarú hengerre történtek).

* Borbély Samu: Nem-lineáris hővezetéssel kapcsolatos vizsgálatokról. MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. XXIII. 3—4. 261—286 o.

Maschek Tivadar: Hengerszimmetrikus bugák felhevítéséről. MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. XXV. 1—4. 199—228 o.

III. táblázat

t	$\vartheta_K = \text{const.}$, $h = \text{const.}$		$\vartheta_K = \vartheta_K(t)$, $h = \text{const.}$		$\vartheta_K = \vartheta_K(t)$, $h = h(\vartheta)$	
	$\vartheta(0,t)$	$\vartheta(1,t)$	$\vartheta(0,t)$	$\vartheta(1,t)$	$\vartheta(0,t)$	$\vartheta(1,t)$
1	21,649	81,932	21,626	78,417	41,509	102,744
2	35,4	111,4	34,8	102,1	56,0	122,3
3	56,9	136,4	54,2	120,5	75,4	135,1
4	80,5	159,6	74,2	137,0	94,5	147,6
5	104,3	181,7	93,5	152,9	111,0	160,2
6	127,7	203,1	111,7	168,1	126,2	172,4
7	150,6	223,9	128,9	182,6	140,3	183,9
8	172,8	244,0	145,3	196,6	153,7	195,2
10	215,4	282,6	175,9	222,9	178,4	216,5
12	255,6	319,0	203,9	246,0	201,2	237,3
14	293,5	353,4	230,0	270,9	222,8	258,0
16	329,3	385,8	254,5	293,5	244,0	279,4
18	363,1	416,4	277,9	315,8	265,4	302,2



4. ábra

A III. táblázatból és a 4. ábrából jól látható, hogy esetünkben a hevítés kezdeti időszakában a h hőátadási tényező változása mennyire befolyásolja a test hőmérsékleteloszlását. De ez nemcsak itt, hanem a gyakorlatban előforduló esetek nagy részében így van, mert a hevítést befolyásoló adatrendszer lényegesen nem változik. Módszerünk előnye, hogy a differenciálegyenlet linearitása megmaradt, ezért a megoldás numerikus kiszámítása is aránylag egyszerű volt. Ha még a többi termikus paramétert (k, $\gamma\, c$) is a hőmérséklet függvényének akarjuk tekinteni, akkor már a differenciálegyenlet linearitását fel kell adni, és a megoldás bonyolultabb lesz.

IRODALOM

1. COURANT—HILBERT: Methoden der Mathematischen Physik. Bd. II. 1937. Berlin
2. SZMIRNOV, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik. Bd. II. 1955. Berlin. Bd. IV. 1958. Berlin
3. TYIHONOV—SZAMARSZKIJ: A matematikai fizika differenciálegyenletei. 1956. Budapest. Akadémiai Kiadó
4. TOLSTOW, G. P.: Fourierreihen. 1955. Berlin
5. RELTON, F. E.: Applied Bessel Functions. London and Glasgow. 1949
6. MCLACHLAN: Bessel Funtions for Engineers. London. 1941
7. GRÖBER—ERK—GRIGULL: Wärmeübertragung. Berlin—Göttingen—Heidelberg. 1957. Springer
8. JAKOB, M.: Heat Transfer. Vol. I. New-York—London. 1958 Vol. II. New-York—London. 1957
9. HEILIGENSTAEDT, W.: Ipari kemencék hőtechnikai számításai. 1958. Budapest
10. BORBÉLY SAMU: Nem-lineáris hővezetéssel kapcsolatos vizsgálatokról. MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. XXIII. 3—4
11. MASCHEK TIVADAR: Hengerszimmetrikus bugák felhevítéséről. V. Hengerszimmetrikus testek hevítése változó hőmérsékletű kemencében. MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. XXV. 1—4
12. KNESCHKE, A.: Über gesteuerte Abkühl- und Anwärmvorgänge bei festen Körpern. Ing. Arch. XXIV. B. 1956
13. JÄCKEL, H.: Mathematische Behandlung gesteuerter Abkühl- und Anwärmvorgänge. Ing. Arch. XXVI. 1958
14. JUNG, H.: Zur Theorie der gesteuerten Anheizvorgänge. ZAMM 38. 1958
15. HOFFMANN ANDOR: Hosszú henger hevítése változó kemencehőmérsékleten. A hőátadási folyamat vizsgálata elég hosszú körkeresztmetszetű rúdban, időtől függő kemencehőmérsékleten, a Newton-féle hőátadási feltétel alapján. MTA Műsz. Tud. Oszt. Közl. XXIX. 1—4

ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozat a hővezetés differenciálegyenletét oldja meg hengerszimmetria esetén a harmadik peremfeltétellel abban az esetben, mikor a kemencehőmérséklet az idő, a hőátadási tényező pedig a hőmérséklet függvénye. A hőátadási tényezőt a sugárzási törvényből számítja és a hevítési folyamatok jelentős részére megindokolja ennek jogosultságát.

A megoldás előállítása a megfelelő segédfüggvények ($g(\vartheta_F)$, $\vartheta_{Ka}(t)$) kiválasztásával, alkalmas egyszerűsítésével, majd a szerző előbbi közleményében [15] kidolgozott módszerrel történik. A differenciálegyenlet, illetve a peremfeltétel egy speciális esete, amikor a hőátadási tényezőt állandónak tekintjük; ekkor az előző dolgozatban közölt megoldás adódik.

A cikk végén kidolgozott konkrét alkalmazás mutatja, hogy ez új számítási módszerrel kiszámított hőmérsékleteloszlás a kísérletileg kimért adatokat jobban megközelíti, mint az eddigi — műszaki gyakorlatban alkalmazott — módszerek.

ACÉLOK FOLYÁSHATÁRJELENSÉGÉNEK VIZSGÁLATA A RÁCSTORZULÁSOK INDIKÁLÁSÁNAK ÚJ MÓDSZERÉVEL*

SZÁNTÓ ISTVÁN
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA
BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM, MECHANIKAI TECHNOLÓGIAI INTÉZET**

[Beérkezett, 1961. március 31-én]

Áttekintés a problémakörről; célkitűzés

Ismeretes tény, hogy a röntgendiffraktometriai módszer az egyetlen olyan eljárás, amelynek segítségével nemcsak feszültségváltozásokat, hanem feszültségállapotokat is meg lehet mérni.

Így érthető, hogy jóformán a röntgenográfiai vizsgálatok elterjedésének kezdeti időszaka óta fennforog a kérdés: vajon megfigyelhető-e röntgen úton fémekben és ötvözetekben a rugalmasból a képlékeny alakváltozás zónájába való átmenet, illetve adott esetben a kristályos testek folyási jelensége.

A problémát mind ez ideig nem sikerült egyértelműen megoldani. Az irodalomban számos, egymásnak többé-kevésbé ellentmondó megfigyelésről olvashatunk.

A téma legrégebbi röntgenkutatói közül SMITH és WOOD [1] megállapításai említésre méltók. A rugalmas és képlékeny zónák közti határterhelésnek két lényeges vonását emelték ki. Ez a határ ott van, ahol megszűnik a rácsnyúlás arányossága az alkalmazott feszültséggel, más szóval: ahol a próbatest mechanikai anyagjellemzőinek konstans értéke megváltozik.

A folyáshatárt meghaladó terhelés másik ismertetőjele az, hogy visszamaradó deformációt találhatunk az anyagban azután is, hogy az igénybevétel megszűnt.

E megállapításokra értelemszerűen a makroszkópos szemlélet nyomta rá bélyegét, hiszen a tenzometria eszközeivel is ilyenfajta jelenségeket tudnak észlelni. SMITH és WOOD a kísérleteket acélon végezte, a (310) interferenciavonalak csúcshelyeinek eltolódását használva fel a mérések alapjául.

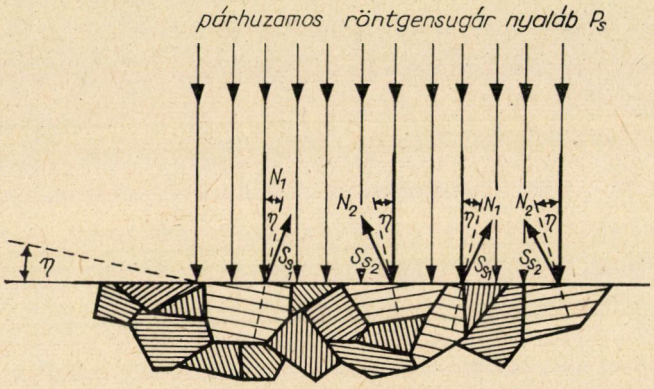
A megfigyelések elvi helyességéhez nem fér kétség, de a vonalcsúcs eltolódásából számított feszültségeket kvantitatív szempontból, kiváltképpen pedig a folyást előidéző feszültségek ilyen alapon történő meghatározását, joggal lehet bírálni.

Ismeretes, hogy bizonyos röntgenreflexióhoz csak egyfajta kitüntetett irányú krisztallitcsoport járul hozzá. Csak azon krisztallitok indikáló atomsíkjai közt levő változás észlelhető így röngten úton, amely síkok N normáli-

* Szerző kandidátusi értekezésének kiegészített része.
** Jelenlegi cím: MTA MŰSZAKI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETE, BUDAPEST.

sainak iránya a beeső P_s primér sugárnyalábbal éppen olyan η szöget zár be, amely a reflexió feltételi egyenletét kielégíti. A viszonyokat az 1. ábra szemlélteti. A vizsgáló röntgensugár hullámhossza és beesési szöge definiálja tehát azt az irányt, amely mentén a rácsnyúlások átlagértékét röntgendiffraktometriailag mérni lehet. Ez a középérték csak bizonyos irányú nyúlások átlaga; várhatóan nem azonos az összes irányokhoz tartozó nyúlások mechanikai módszerekkel mérhető átlagértékével.

Az eltérés kiküszöbölése céljából vezette be MÖLLER és MARTIN [2] az E és ν „röntgen-értékeit", amelyek mintegy 10—25%-kal nagyobbak a makroszkóposan mért rugalmassági anyagjellemzők értékénél. Ez a módosítás



1. ábra. Indikáló krisztallitok kialakulása a szelektív reflexió következtében

azonban nem általános érvényű, csak bizonyos esetekre ad kielégítő eredményt. Fennmarad ezenkívül az eljárás alapvető gyengéje. Az, hogy a feszültséget értékelő képleteihez az izotróp rugalmassági elmélet szolgál alapul, amely a polikrisztallin halmazok legtöbbjénél nem tekinthető érvényesnek. A gyakorlatban előforduló szerkezeti anyagok közül csak az Al- [3] és W-alapú [4] ötvözeteket vehetjük az izotrópiát kielégítő kivételnek.

Nincs egyezés azon kutatók között sem, akik közvetlenül a rácsnyúlás-feszültség viszony állandóságát vagy változását tanulmányozták. WOOD [5] kísérleteinek eredményeként arról számol be, hogy az acélok (211) atomsíkjaihoz tartozó reflexiók alapján mért arányossági határ megegyezik a makroszkópos folyási határral. GLOCKER és HASENMAIER [6] viszont ugyanezen reflexió vonalcsúcseltolódásából arra következtetett, hogy az arányosság megszűnik már a makroszkópos folyást előidéző feszültség 75%-a körüli terhelésnél. GARROD [7] is megfigyelte, hogy visszamaradó rácsdeformációk találhatók acél próbatestekben leterhelés után, mikor az előzetes igénybevétel a makroszkópos folyáshatárt még nem érte el. A saját kísérletek [8] hasonló eredménnyel jártak.

Számos olyan észlelet van tehát, amely arra utal, hogy az acélok szubmikroszkópos folyási határa más-más makroszkópos terhelésnél következik be. A kísérletek azt a látszatot keltik, mintha a folyási határ attól függene, milyen hullámhosszú sugárzással dolgoztak. További következtetés ebből az lehetne, hogy a besugárzás lágy vagy kemény volta megváltoztatja az anyagok mechanikai tulajdonságait. Esetünkben a tapasztalt különbséget egyrészt a röntgenmérések szelektív reflexiójával okozott irányfüggéssel lehet magyarázni. Másrészt abból ered, hogy a különböző keménységű sugaraknak más-más az áthatolóképessége. Emiatt különböző vastagságú az a besugárzott felületi réteg, amelynek átlagolásából adódik a rácsnyúlás fajlagos értéke.

A diszkrepanciáknak további indoka is lehet. Polikrisztallin halmazban az egyes krisztallitok orientációjának különbözősége és részben a szemcsehatárzónák interkrisztallin anyagának a mátrixtól eltérő mechanikai jellege folytán, az összes krisztallitok nem egyidejűleg és nem egyazon külső igénybevétel hatására kezdenek deformálódni, illetve folyni. Ebből következik, hogy az egyidejű rugalmas és maradó deformációt kiváltó terhelések közt éles határt nem lehet szubmikroszkópos szemlélet szerint megvonni [8], mivel a képlékeny alakváltozás nem egyszerre megy végbe valamennyi krisztallitban. Van tehát olyan közbenső helyzet, amikor a krisztallitok egy része még rugalmasan, másik része már képlékenyen deformálódik. Ha ilyenkor a külső terhelés megszűnik, a maradó alakváltozást szenvedett krisztallitok nem engedik teljesen eltűnni a rácstorzulást a még csak rugalmasan deformált krisztallitokban sem. A rugalmas feszültség visszamarad ezekben (és ez röntgenográfiai úton mérhető), míg a maradandóan deformálódott rácstartományokban az igénybevétel iránya megfordul. Ezeket a leterhelés után is visszamaradó és regisztrálható ún. „rejtett" rugalmas feszültségeket tehát a krisztallitok egy részének képlékeny alakváltozása stabilizálja.

A bizonytalanságot még az is növeli, hogy a mechanikai igénybevételtől eredő torzulásokat csaknem lehetetlen azoktól az egyidejűleg mutatkozó rácsdeformációktól elhatárolni, amelyeket az alakítás hatására esetleg végbemenő kiválások, precipitációk hoznak létre, és amelyek szintén a vonalcsúcs helyének megváltozásában jelentkeznek.

Idők folyamán felmerült a kutatók egyik csoportjában a gondolat, vajon nem lenne-e lehetséges a folyási határjelenségeket a diffrakciós vonalak szélesedése alapján regisztrálni.

Régebbi közlemények (Wever és Pfarr [9], Smith és Wood [10], Greenough [11]) arról számolnak be, hogy bár valószínűnek látszik a rugalmasan deformált halmazokról visszaverődő röntgendiffrakciós vonalak bizonyos mérvű szélesedése, a kísérleti módszerek nem elég érzékenyek ennek az effektusnak kielégítő pontosságú mérésére.

Újabban ismét előtérbe kerülhetett a folyási jelenségek vonalszélesedésen alapuló magyarázata. Időközben ugyanis a diffrakciós felvétel módszere ugrás-

szerűen fejlődött; nagyságrenddel növekedett a mérések érzékenysége. Feltehető, hogy a makroszkóposan rugalmas deformációt okozó terhelés a vonalcsúcseltolódáson kívül vonalszélesedést is eredményez. Aminthogy az is várható, hogy a képlékeny deformációt előidéző igénybevétel a vonalszélesedéssel egyidejűleg vonalcsúcseltolódást is kivált. GREENOUGH idézett tanulmányában [11] említést tesz arról, hogy a képlékeny alakváltozást kísérő atomos elmozdulások értelmezése szempontjából különösen kívánatos a kristályszerkezetben végbemenő jelenségeket egzakt módon, matematikailag is leírni. Ebből szükségképpen az következik, hogy a röntgenogramokból kiolvasható intenzitáseloszlásokat kell az értékelés alapjává tenni, mivel ezek inkább alkalmasak a jelenségek átfogó magyarázatára, mint akár a vonalcsúcseltolódás-, vagy a szélesedésmérések külön-külön (SZÁNTÓ [12]). A vonalprofil megváltozásának is lehetnek természetesen a folyási jelenséggel kapcsolatos rácstorzulásváltozáson kívül egyéb addicionális okai is. Ezeket BRASSE és MÖLLER részletesen tárgyalta [4, 13]. E sorok írója is több helyen analizálta a profilváltozások okait [8, 14].

Ebben a tanulmányban célkitűzése csak az lehetett, hogy megvizsgálja: a részéről bevezetett, elvi összefüggéseiben másutt [15] ismertetésre került értékelő módszer, a deformációs indexekkel történő feszültségállapot meghatározása, alkalmasnak bizonyul-e arra, hogy az acélanyagok folyáshatárzónájában lejátszódó folyamatot pontosabban leírja, mint az eddig használatos eljárások. Az alkalmazás eredményessége azért volt remélhető, mert a deformációs indexelés összetartozó részkalkulusai révén egyidejűleg veszi figyelembe a vonalcsúcseltolódást és a vonalprofilváltozást, illetve szélesedést. Az alakváltozás mechanizmusát így $p(d)$ valószínűség-sűrűségi eloszlásfüggvényekkel, az ún. rácstorzulási spektrumokkal lehet jellemezni [16], amely — bár approximációsan — a viszonyok átfogó matematikai tárgyalását és kvantitatív adatsorok produkálását teszi lehetővé.

Kísérletek

Alkalmazott anyag

A kísérletekhez használt anyag nagy folyási határú, csaknem tiszta perlites szövetű acél volt. Kémiai összetétele, szilárdsági adatai, valamint a vonatkozó röntgendiffrakciós alapmérések menete másutt [17] került részletesebb ismertetésre.

Hajlító etalon-berendezés

A cél az volt, hogy a négyszögkeresztmetszetű lemezanyag felületi rétegében jól definiált egytengelyű feszültségállapotot idézzünk elő. Olyan készüléket kellett ehhez szerkeszteni, amely

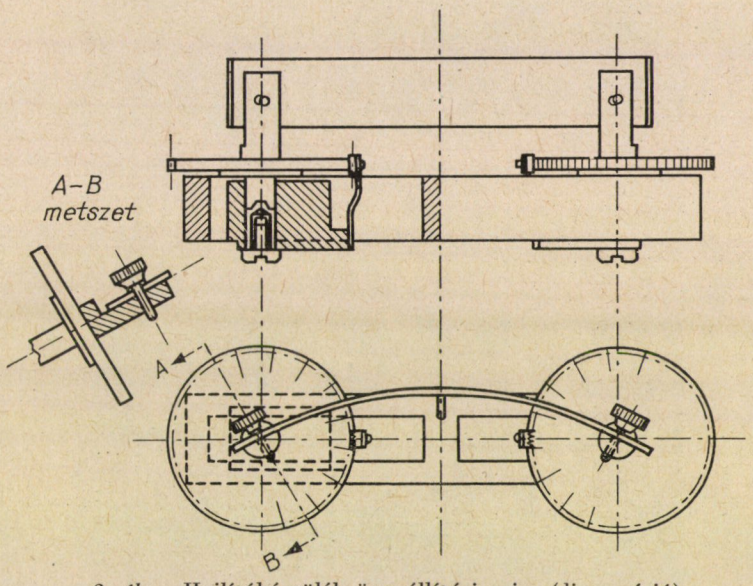
1. a próbatestben tiszta egyenes hajlítást hoz létre,

2. a próbatest hossza mentén helytől és időtől függetlenül végig azonos terhelést biztosít,

3. a terhelés lépcsőzetes növelésére folyamatosan beállítható,

4. a szélső szálakban ébredő maximális feszültségek közvetlen mérésére alkalmas.

A 2. ábrán vázolt szerkezet a követelményeket azzal elégíti ki, hogy a hajlítás síkjára illeszkedően csavaros kényszerbefogást, a hajlítónyomatékot szolgáltató fogastárcsák csapágyainak pedig az egyenesvezetékekben szabad elmozdulást biztosít.



2. ábra. Hajlítókészülék összeállítási rajza (diszpozíció)

A próbatest két végére csak erőpárok hatnak. Így elérhető, hogy a vizsgált lemez minden keresztmetszetében azonos nagyságú a hajlító nyomaték, és tetszés szerint időben is állandó marad. A fogastárcsák rugós peckei ugyanis arretálják a beállítást (3. ábra). A gondosan mart fog-osztás a terhelési fokozatok egyenletes növelését lehetővé teszi.

A felvételre kész, beállított hajlítókészülék fényképét a 4. ábra mutatja.

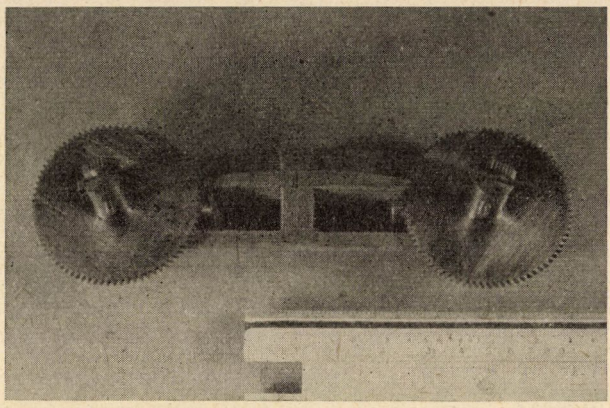
NAVIER—BERNOULLI feltevéséből adódóan a rugalmas zónában az alábbiak szerint lehet megadni a szélső szálban ébredő σ_{max} legnagyobb feszültség és a hajlítás görbületének ϱ sugara közt érvényes egyértelmű összefüggést:

$$\sigma_{max} = E \cdot \frac{v}{2} \frac{1}{\varrho}, \qquad (1)$$

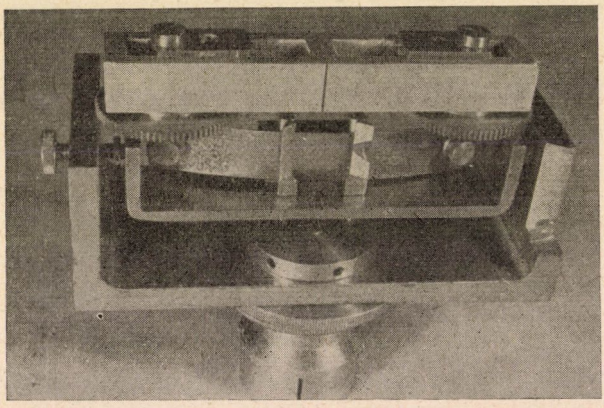
ahol v a próbalemez vastagsága, E a rugalmassági modulusz. Mivel a két utóbbi

adat egy bizonyos vizsgált darabra ismert és állandó, adott esetben a görbület lemérésével meghatározható a felszíni rétegben működő feszültség anélkül, hogy bármilyen nyúlás- vagy erőmérő műszert az elrendezésnél használni kellene.

Az összefüggés érvényét a képlékeny alakváltozások tartományára az egyenletes nyúlás határterheléséig akként terjeszthetjük ki, hogy NÁDAI [18]



3. ábra. Hajlítóberendezés fényképe alulnézetben (Méreteket a logarléc-mérce érzékelteti)



4. ábra. Felvételre beállított hajlítókészülék a befogott próbatesttel

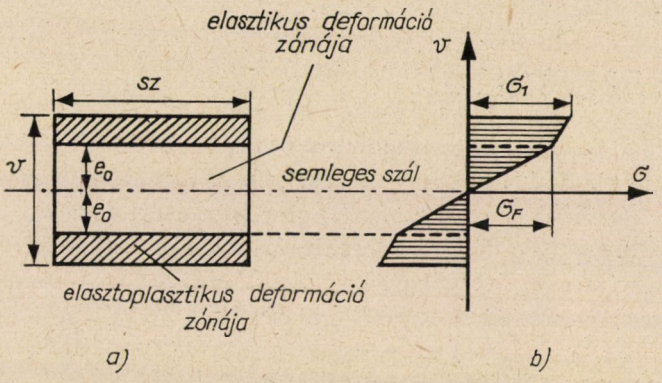
meggondolásai szerint figyelembe vesszük az alakítási keményedést, továbbá azt az e_0 lemezvastagságrészt, amelynek mentén a próbatest keresztmetszetében az E modulusszal jellemezhető arányosság első közelítésben még fennáll (5. ábra).

Az e_0 meghatározására alkalmas alábbi formulát a levezetés mellőzésével felhasználhatjuk:

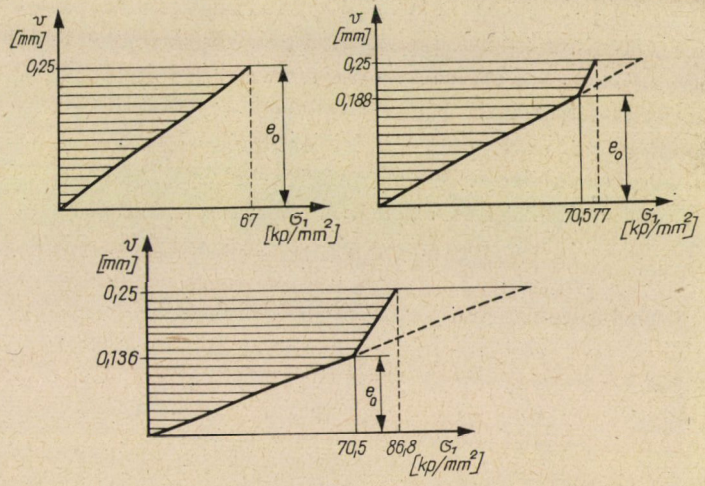
$$e_0 = \frac{v}{2} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{E \cdot (\sigma_1 - \sigma_F)}{\sigma_F \cdot E_p}}, \qquad (2)$$

ahol σ_1 az igénybevétel a folyási határon túl,
σ_F a folyást előidéző határfeszültség,
E_p a képlékeny alakváltozási tényező (keményedés sebességének mértékszáma).

A rugalmas és maradó alakváltozások vegyes zónája növekvő terhelés esetén egyre nagyobb keresztmetszet-részre terjed ki; e_0 ennek megfelelően



5. ábra. a) Elasztikus és elasztoplasztikus deformációk zónái. *b)* Feszültségeloszlás a hajlított lemez keresztmetszete mentén



6. ábra. Különböző görbületekhez tartozó feszültségeloszlások a félkeresztmetszet mentén

csökken. Kvantitatív tájékoztatást a 6. ábra számszerű adatai nyújtanak. Itt szimmetria okoknál fogva csak a lemez húzott felének feszültségeloszlását láthatjuk; a neutrális szál egybeesik az abszcisszával. A makroszkóposan felkeményedésnek nevezett jelenség miatt viszonylag kisebb rácstorzulás és kisebb feszültség ébred a szélső szálban, mint amekkora az (1) egyenlet

szerint várható lenne. A feszültségeloszlás gradiensének a szélső szál felé mutatkozó csökkenése a röntgenmérés szempontjából feltétlenül kedvező, mivel ez a felszínhez közel eső rétegben megy végbe. Ha a besugárzott réteg mélysége a $\left(\frac{v}{2} - e_0\right)$ értéket nem haladja meg, akkor a vizsgált anyagtérfogat feszültségállapota lényegesen homogénabb, mint a mélyebben fekvő részeké; a rácsdeformációmérés bizonytalansága csökken.

Mérések végrehajtása, eredmények

A vizsgálat feszített állapotban, monoton növekvő terhelési fokozatokban folyt le az utolsó, a 11. fokozat kivételével. A terhelés-lépcsők beállítása a hajlító etalonkészülékkel az I. táblázatban feltüntetett fokozatok szerint történt. A 9. és 10. terhelési fokszám feszültség-egyenértéke a 6. ábrával kapcsolatban kifejtett meggondolások miatt került zárójelbe. A röntgennyalábbal besugárzott térfogatrész a legnagyobb húzásra igénybe vett szélső szálak tartománya volt.

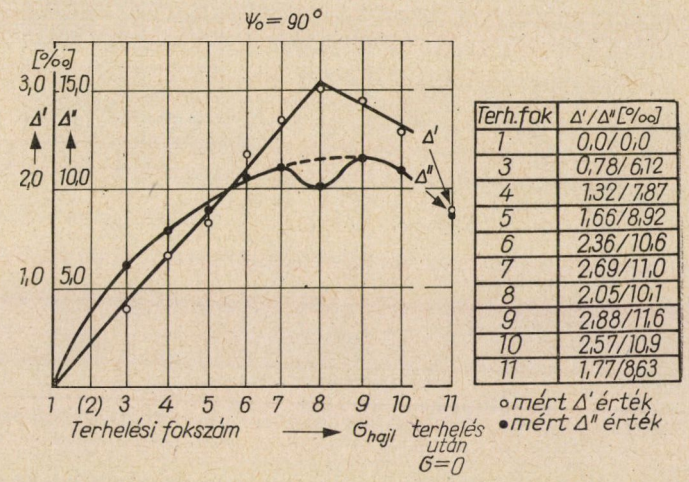
A bemutatott 3 mérési sorozat közül a merőleges és a 45°-os primer sugár beeséssel dolgozó elrendezésben a GISEN, GLOCKER és OSSWALD részéről először bevezetett klasszikus felvételi módszert [19] követtük. Az 52°-os beesési szöggel készített felvételeket SCHAAL [20] módszerének módosított változata szerint, ún. *duplex*-elrendezésben készítettük el. A kísérleti eljárások részleteit, továbbá az új értékelő módszernek, a deformációs indexelésnek teljes menetét másutt [8, 16] ismertettük.

A kísérletek során kapott mérési eredményeket grafikusan rendre a 7., 8. és 9. ábra szemlélteti. A deformációs indexek összetartozó értékeiről ugyanott táblázatos áttekintés látható. Az ábrákon szándékosan van terhelési fokszám feltüntetve, mivel nem feszültségeket, hanem deformációs állapotokat indikálnak a mért adatok.

A 11. terhelési fokozat a legnagyobb igénybevétel megszüntetése utáni terheletlen állapotnak felel meg. Ebben a helyzetben vizsgálatunk a képlékeny alakváltozás okozta visszamaradó rugalmas torzulások meghatározására irányult.

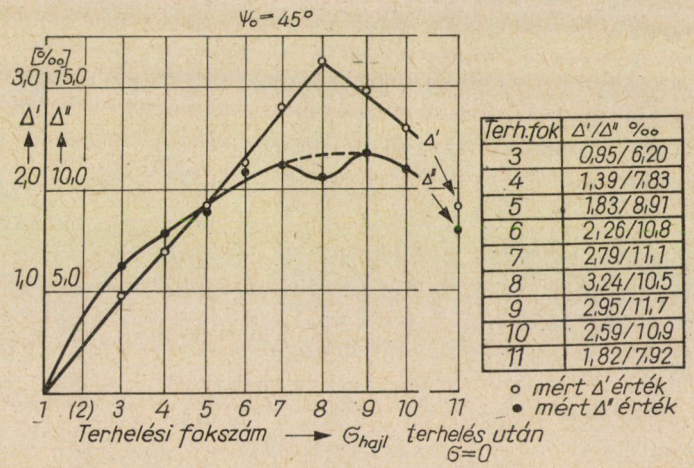
Az eredményekből látható, hogy a deformációs mutatószámokkal való indikálás szignifikáns változásokat képes kimutatni a különböző terhelésű próbák feszültségállapotával kapcsolatban. A rácsdeformációk spektrumának részkalkulusai nem azonos módon változtatják értéküket, azonos mérvű terhelésváltozás hatására. A 7—9. ábrákból jól ki lehet olvasni, hogy a σ_F terhelési határt megközelítve Δ' még nő, amikor a Δ'' már visszaeső tendenciát mutat. A két összetartozó érték nem egyforma változása inkább előnyös, mint hátrányos, mivel jobban definiálja a kérdéses állapotot. Magát a jelenséget *folyáshatár-anomáliának* neveztük el.

Ha csak Δ'-t vennénk figyelembe, nem lehetne belőle arra következtetni, hogy a próbatest a megengedett terhelhetőség határát elérte, hiszen a Δ' fajlagos főtorzulás még növekedőben van.



Terh.fok	Δ'/Δ'' [‰]
1	0,0/0,0
3	0,78/6,12
4	1,32/7,87
5	1,66/8,92
6	2,36/10,6
7	2,69/11,0
8	2,05/10,1
9	2,88/11,6
10	2,57/10,9
11	1,77/8,63

7. ábra. Deformációs indexek változása növekvő terhelés hatására ($\psi_0 = 90°$-os primér sugár beesési szög esetén)

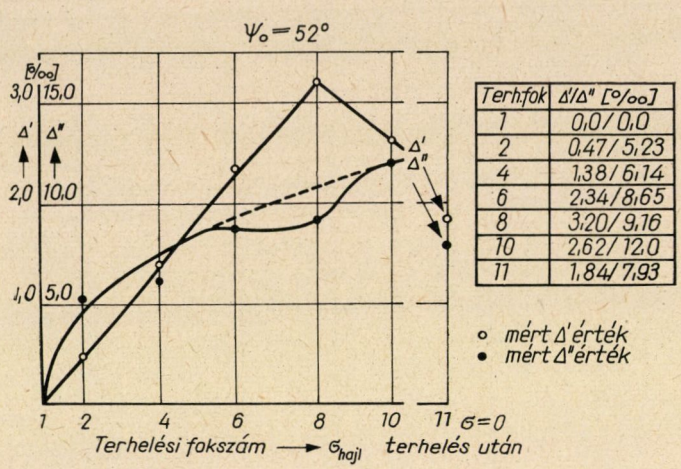


Terh.fok	Δ'/Δ'' ‰
3	0,95/6,20
4	1,39/7,83
5	1,83/8,91
6	2,26/10,8
7	2,79/11,1
8	3,24/10,5
9	2,95/11,7
10	2,59/10,9
11	1,82/7,92

8. ábra. Deformációs indexek változása növekvő terhelés hatására ($\psi_0 = 45°$-os primér sugár beesési szög esetén)

De ha csak a vonalprofilt vizsgálnánk és kizárólag a Δ'' részkalkulust tartanók szem előtt, ebből sem lehetne megállapítani, hogy ennek kisebb értéke a csekély igénybevételt vagy a koherensen reflektáló krisztallitok számának csökkenését jelzi.

A Δ' és Δ'' együttes számbavétele azonban egyértelműen megmutatja, hogy a kérdéses munkadarab deformáltsága milyen mérvű; mennyire haladt



Terh.fok	Δ'/Δ'' [‰]
1	0,0/ 0,0
2	0,47/ 5,23
4	1,38/ 6,14
6	2,34/ 8,65
8	3,20/ 9,16
10	2,62/ 12,0
11	1,84/ 7,93

9. ábra. Invariancia beesési szöghelyzetben ($\psi = 52°$) készített felvételsorozat szerinti deformációs indexváltozások a növekvő terhelés függvényében

előre a polikrisztallin halmaz alakváltozásának rugalmasból képlékenybe való átmenete, mint a krisztallitokban lejátszódó tömegjelenség.

Mérési pontosság

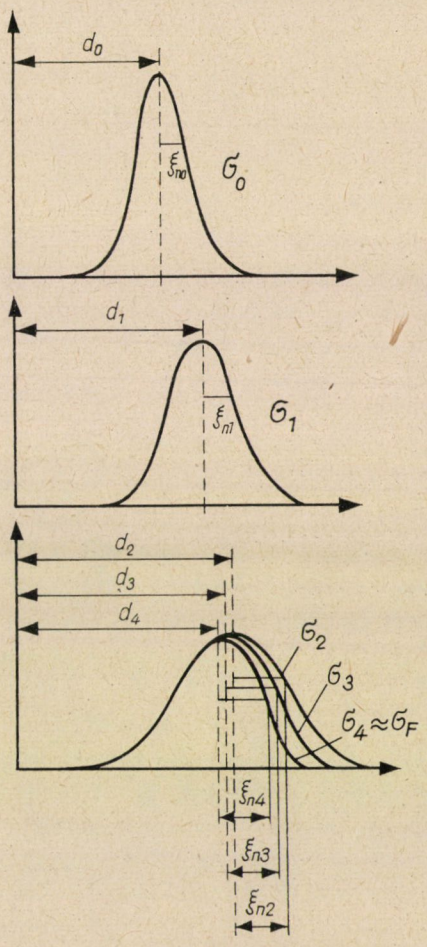
A két részkalkulus nemcsak változásának törvényszerűségében, hanem a változás abszolút értékét tekintve is eltér egymástól. Az egységnyi indexváltozások feszültségegyenértéke, illetve a mérés bizonytalansági szélessége tekintetében előző publikációnkra [8] utalunk. Megállapítható, hogy egyedül a Δ'' indexből kielégítő pontosságú feszültségállapot meghatározást végezni nem lehet. A Δ' részkalkulus viszont önmagában is megbízható index olyan terhelések esetében, amelyek a krisztallitok túlnyomó részében csak rugalmas alakváltozást idéznek elő.

Következtetések

Megállapítottuk, szemben GLOCKER legújabban megjelent művének [21] idevonatkozó állításaival, hogy az első fajtájú belső (visszamaradó) feszültségek nemcsak vonalcsúcseltolódást, hanem ugyanakkor profilváltozást, vonalszélesedést is okoznak. Éppen e kétfajta észlelés szintéziséből lehet a folyást előidéző terhelések kritikus tartományában megbízhatóbb mérési eredményekre jutni.

A két deformációs index változásának elemzésével kapcsolatban sémába foglalhatjuk a polikristályos halmaz jellemző vonásait a terhelésnövekedés folyamán, amint ez a 10. ábra $p(d)$ rácstorzulási spektrumai alapján megfigyelhető.

A σ_0 kiindulási, terhelésmentes állapothoz tartozó $p(d)$ eloszlást egy bizonyos d_0 várható legvalószínűbb rácsparaméter és egy ξ_{n0} alaktényező írja le. A σ_1, σ_2... növekedő igénybevételek hatására a rácsparaméter is, a



10. ábra. A $p(d)$ rácstorzulási spektrumok változásának sémája különböző σ paraméterek függvényében (a *folyáshatár-anomália* fizikai értelmezéséhez)

ξ_n tényező is nagyobbodik, amit a Δ' és Δ'' indexek növekedése mutat. A σ_3, de még inkább a makroszkópos folyási határ igénybevételnek megfelelő $\sigma_4 \approx \sigma_F$ terhelések következtében a $p(d)$ spektrum eltolódása, illetve szétterülése már nem fokozódik, hanem bizonyos mérvű visszaalakulást szemléltet. A kísérleti diagramokból ez kivehető. A ξ_{n3}, ξ_{n4}, érték valóban kisebb a ξ_{n2}-nél, míg a d_3, illetve d_4 értékkisebbedés csak látszólagos. Az aszimmetrikus szóráscsökkenés miatt úgy tűnik, mintha az eloszlási görbe mértékadó középvonala visszafelé tolódott volna.

Ez a röntgen úton észlelhető *folyáshatár-anomália* jelensége, amely fizikailag a következőképpen értelmezhető: Az indikáló krisztallitokra jellemző kitüntetett atomsíksorok d-értékei közt egyre nagyobb különbségek mutatkoznak egészen addig, amíg a vizsgált rácstérfogat igénybevétele meg nem közelíti a képlékeny alakváltozásra jellemző határterhelést. Szubmikroszkópos szemlélet szerint nincs éles folyáshatár, a krisztallitok halmazában egyre több egyedi kristály csúszik meg; mégpedig éppen azok, amelyek d értéke a d_v középértéktől leginkább eltér, vagyis amelyek a viszonylag legnagyobb rugalmas torzulást szenvedték. A csúszás tömegjelenséggé válik, amely a $p(d)$ valószínűségi eloszlásban olyképpen jut kifejezésre, hogy a felső szórástartomány csökken. A viszonylag legnagyobbmérvű alakváltozást szenvedett krisztallitok kikerülnek a röntgenmérés előfeltételét képező reflexióképes helyzetből. A halmazon belül a rugalmasan deformált krisztallitok egyre csökkenő csoportjában csak azok maradnak, amelyek d értékei kisebb eltérést mutatnak egymáshoz képest. A $p(d)$ eloszlás emiatt élesedik. A makroszkópos σ_F-et még megelőzően tehát az igénybevételek hatására a deformációs mechanizmus röntgenúton kapott képe ξ_n-csökkenést árul el; ez az oka a Δ'' görbe helyi visszaesésének. A d középérték látszólagos kisebbedése viszont a Δ' csökkenésében nyilvánul meg, de csak később.

A relatív vonalprofilélesedést, a Δ' értékének kisebbedését a makroszkópos folyási határt meghaladó hajlító igénybevétel esetén még az is indokolja, hogy a röntgennel besugárzott felszíni rétegben a d-eloszlás viszonylag homogénabbnak fog mutatkozni. Az 5. és 6. ábrából kivehető módon ugyanis a feszültségeloszlás gradiense a szélső szálak felé csökkenő tendenciát mutat.

A helyi torzulási egyenetlenséget definiáló Δ'' index értéke a σ_F-et meghaladó terhelések hatására ismét emelkedhetik. Ebből azonban az egyenértékű feszültségállapotra való következtetés bizonytalan.

Említésre méltó, hogy a röntgenképeken a maradó alakváltozás megjelenésére utaló megemelkedett alapfeketedésszint a vonalak folyáshatárközelben mutatkozó újraélesedésekor sem csökken. Ezáltal is jól észlelhető effektushoz jutunk az abszolút kismértékű és a képlékeny deformáció miatt csökkent értékű rugalmas torzulások, illetve a kapcsolatos feszültségállapotok megkülönböztetésére.

A kísérletsorozatok utolsó (11.) terhelési fokozatának mérési eredményeit külön ki kell emelnem. A deformációs mutatószámok itt ugyanis a terhelés megszünte utáni állapotot indikálják, mivel a röntgenfelvételek a leterhelés után készültek. A mérés rugalmas deformációk jelenlétére utal, holott ezeknek elvileg a leterhelés folytán el kellett volna tűnniök. Mivel azonban a kérdéses munkadarab előzetes igénybevétele következtében már eljutott a folyási határterhelés tartományába, sőt azon túl is, rácsstruktúrájának egy része maradóan deformálódott. Ez a rákövetkező terheletlen állapotban fennmaradt, és vele együtt rejtett rugalmas torzulások konzerválódtak. A terhelés utáni

állapotban mért deformációs indexek nagyságrendje az eredetileg 4. és 5. terhelési fokozattal igénybe vett próbák Δ'/Δ'' értékeinek felelt meg. A mérés tehát olyan virtuális állapotot indikált, mintha még jelentős hajlítófeszültség uralkodott volna a leterhelt próbatestek szélső szálaiban. A röntgen mérési adatokat szembetűnő módon támasztotta alá az a megfigyelés, hogy a befogás kényszerének megszüntével a kiszerelt próbalemezek éppen olyan görbületű alakot vettek fel, mint amilyenek terhelés alatt, de még a makroszkópos folyási processzus megindulása előtt, először adódtak a táblázat szerinti terhelési fokozatoknak megfelelő esetben.

I. táblázat

Hajlítókészülék terhelésbeállítása

Terhelési fokszám	Fogastárcsa helyzete	Görbületi sugár mm	$(\sigma_{max})_{hajl.}$ kp/mm²	Megjegyzés
1.	0	∞	0	
2.	1	544	9,7	
3.	2	272	19,3	
4.	3	182	28,9	
5.	4	136	38,5	
6.	5	109	48,2	
7.	6	91	57,7	
8.	7	87	67,4	
9.	8	68	(77,2)	
10.	9	61	(86,8)	
11.	—	—	0	Leterhelés utáni állapot

IRODALOM

1. Smith, S. L.—Wood, W. A.: Proc. Roy. Soc. **A181** (1942) 72
2. Möller, H.—Martin, G.: Mitt. KWI. Eisenforschg. **21** (1939) 261
3. Hanstock, R. F.—Lloyd, E. H.: Proc. Inst. Mech. Engrs, London, **157** (1947) 52
4. Brasse, F.—Möller, H.: Arch. Eisenhüttenwes. **29** (1958) 757
5. Wood, W. A.: Proc. Roy. Soc. A. **192** (1948) 218
6. Glocker, R.—Hasenmaier, H.: Z. VDI, **84** (1940) 825
7. Garrod, R. I.: Nature, London, **165** (1950) 241
8. Szántó I.: Rácsdeformációk spektrumának indikálása. Kand. disszert. (1959) Budapest
9. Wever, F.—Pfarr, B.: Mitt. KWI. Eisenforschg. **15** (1933) 137
10. Smith, S. L.—Wood, W. A.: Proc. Roy. Soc. **A176** (1940) 398
11. Greenough, G. B.: Progress in Metal Physics **3** (1952) 176
12. Szántó I.: Fémek rácsszerkezeti változásainak mérése, Mérnöki Továbbképző Intézet kiadványa, (1955) Budapest, 70
13. Brasse, F.—Möller, H.: Arch. Eisenhüttenwes. **30** (1959) 685
14. Szántó, I. S.: Period. Polytechn. *M I/3.* (1957) 175
15. Szántó, I. S.: Freiberger Forschungshefte, *B* **50** (1960) 52
16. Szántó, I. S.: Acta Techn. XXXII. **1—2.** (1961) 65
17. Szántó, I. S.: Acta Techn. XXXIX. **3—4.** (1962) (X-ray investigation of yield phenomena in steels. . .) Sajtó alatt
18. Nádai, A.: Theory of flow and fracture of solids, 2. ed. New-York—Toronto—London, McGraw-Hill, (1950)

19. GISEN, F.—GLOCKER, R.—OSSWALD, E.: Zeitschr. techn. Phys. 17 (1936) 145
20. SCHAAL, A.: Schweizer Archiv, 19 (1953) 211
21. GLOCKER, R.: Materialprüfung mit Röntgenstrahlen, 4. Ausg. Berlin, Springer (1958) 347

ÖSSZEFOGLALÁS

Régóta vitatott kérdés: regisztrálható-e röntgenmódszerekkel a kristályos testek folyási jelensége, illetve általában a rugalmasból a képlékeny alakváltozás zónájába való átmenet. Az irodalomban erre vonatkozóan található ellentmondó eredmények kritikai elemzése után a szerző megkísérli az acélok folyáshatárzónájában lejátszódó szubmikroszkópos folyamatot az eddigieknél alkalmasabb módon leírni. Erre a célra felhasználja a részéről kidolgozott új értékelő módszert, a feszültségállapot meghatározást deformációs indexekkel. Egyidejűleg figyelembe véve a röntgenogramok (310) interferenciavonalának mind a csúcseltolódását, mind pedig a profilváltozását, illetve a szórt alapfeketedés intenzitásszintjét, a kísérletekből megállapítható, hogy az ugyanolyan állapotra vonatkozó részkalkulusok nem azonos módon változnak azonos mérvű terhelésváltozás hatására. A folyást elindító igénybevétel zónájában a Δ' még nő, amikor a vele összetartozó Δ'' már visszaeső tendenciát mutat. Ezt a folyáshatár-anomáliának elnevezett effektust a szerző a polikristallin halmaz deformációmechanizmusának statisztikai szemlélete alapján értelmezi.

EGYENES FOGÚ EVOLVENSFOGAZATÚ HENGERES KEREKEK FOGFEJLENYESÉSÉNEK SZÁMÍTÁSA ÉS ELLENŐRZÉSE

ERNEY GYÖRGY

[Beérkezett 1961. április 13-án]

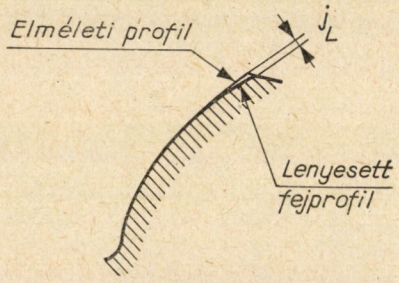
Jelölések

A — kapcsolás határpontja a kiskerék felé
C — főpont
e — kapcsolóhossz
E — kapcsolás határpontja a nagykerék felé
f_L — lenyesés magassága
F — profil fejpontja
F' — lenyesett profil fejpontja
h_L — lenyesés magassági mérete a diagramon
H — határkörpont
j_L — lenyesési hézag
l — profildiagram hossza
l_L — a lenyesés hosszmérete a diagramon
L — lenyesés kezdőpontja
m — modul
r_a — alapkörsugár
r_a' — lenyesés alapkörsugara
r_f — fejkörsugár
r_H — határkörsugár
r_L — lenyesési kör sugara
r_0 — osztókörsugár
s_f — fogfejvastagság
s_f' — lenyesett fogfejvastagság
δs_f — fogfejvastagság csökkenés
s_0 — osztóköri fogvastagság
t_a — alaposztás
T_{fL} — a lenyesés magasságának tűrése
T_{lL} — a lenyesés magasságának tűrése a diagramon
V_h — a diagram hibanagyítása
V_l — a diagram hosszléptéke
x — profileltolástényező
z — fogszám
α_f — profilszög a fejkörön
α_f' — lenyesés profilszöge a fejkörön
α_H — profilszög a határkörön
α_L — profilszög a lenyesési körön
α_L' — lenyesés profilszöge a lenyesési körön
α_0 — alapprofilszög
α_0' — lenyesés alapprofilszöge
ε — kapcsolószám
$\varkappa$ — az alaposztás szorzótényezője
λ — segédszög
ζ — segédszög
ϱ_H — görbületi sugár a profil határkörpontjában
σ_L — fogszög a lenyesési körön
σ_0 — fogszög az osztókörön

Indexek

1 — kiskerékre vonatkozó
2 — nagykerékre vonatkozó
a — alapkör
d — diagramra vonatkozó
f — fejkör
H — határkör
L — lenyesési kör, ill. a lenyesés kezdőpontjára vonatkozó
o — osztókör

A fogaskerekek anyagának mindinkább fokozódó kihasználása szükségessé tette a fogaskerekek fogfejének lenyesését, amit jónéhány éve hazánkban is sikeresen alkalmaznak [1, 4, 5]. A fogak ugyanis a terhelés hatására rugalmasan belapulnak és elhajlanak, aminek következtében a hajtókerék fogazatának alaposztása a kapcsolásba lépéskor szinte csökken, a hajtott keréké pedig szinte megnő az elméletileg helyes értékhez képest. Ha tehát a kerekek fogprofilját egész fejkörig elméletileg helyesen készítjük el, akkor a kapcsolásba



1. ábra. Fogfej lenyesése

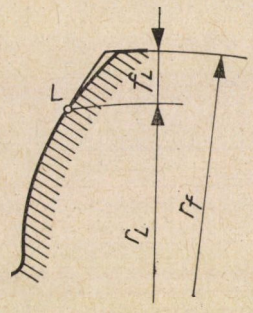
lépés pillanatában a hajtott kerék fogának fejéle beleütközik a hajtókerék foglábfelületébe, ami vibrációkat, zajt, nyugtalan járást eredményez, és előbbutóbb a fogfelületek megsérülését, tönkremenetelét okozza. Ehhez járulnak még a kapcsolódó fogaskerekek elkerülhetetlen alaposztáshibái is, amelyek szintén ütközéseket okoznak. Ezeket a bajokat meg lehet előzni akkor, ha a kapcsolódó kerekek fogfejét lenyessük. Ezzel a fogprofilt szándékosan „elrontjuk" az elméleti alakhoz képest, és annyi anyagot távolítunk el a fog fejfelületéről, hogy az előbbi okokból ne legyen ütközés. A lenyesés szükséges mértéke ezek szerint a kapcsolódó kerekek geometriai adatain és pontosságán kívül azok terhelésétől is függ [3, 6, 7]. Ha a lenyesés a szükségesnél nagyobb, akkor fölöslegesen csökkentjük a fogaskerékpár kapcsolószámát. Ha viszont kisebb a lenyesés a kelleténél, akkor nem szüntetjük meg a fenti bajokat, csak mérsékeljük azokat.

Kísérleti, tapasztalati és elméleti alapon meghatározható adott esetben a szükséges lenyesés j_L mértéke, vagyis az a méret, amellyel a profil fejpontját a profilra merőlegesen el kell tolni a fog középvonala felé ahhoz, hogy ne legyen ütközés a fogaskerekek kapcsolódásakor (1. ábra).

Nem ilyen egyértelmű annak a megállapítása, hogy mekkora legyen a lenyesés f_L magassága, tehát a lenyesés kezdetétől a fejkörig számított sugárirányú távolság. Ha r_f a fogaskerék fejkörsugara és r_L a profil azon L pontjának megfelelő kör sugara, amelyből a lenyesés kiindul, akkor a 2. ábra szerint:

$$f_L = r_f - r_L .$$

Egyenes fogazatú kerekek esetében tisztára elméleti megfontolások alapján a két kapcsolódó kerék lenyesésének abból a profilpontból kellene



2. ábra. A lenyesés magassága

kiindulnia, amely az egyfogpárkapcsolás kezdő-, illetve végpontjának felel meg. Ilyen mérvű lenyesést mindazonáltal nem tanácsos készíteni, mégpedig nemcsak az elkerülhetetlen gyártási hibák miatt, hanem azért is, mert ha a fogaskerékpár terhelése kisebb annál, mint amit a lenyesés megállapításakor számításba vettünk, akkor az egyenes fogazat kapcsolószámának fölösleges csökkenése nyugtalan járást okozhat. Különösen kellemetlenné válhat ez a gép üresjárásakor.

A gyakorlatban jól bevált eljárás az egyenes fogú evolvensfogazatú keréken a lenyesés f_L magasságának meghatározására a következő: Először is felrajzoljuk a fogaskerékpár *vonalas ábráját*, amely a tengelyközépvonalból, a kapcsolóegyenesből, az erre merőleges alapkörsugarakból és a kapcsolóegyenest metsző fejkörívekből áll (3. ábra). Ezt az ábrát célszerű oly nagy léptékben megrajzolni, hogy az $e = \overline{AE}$ kapcsolóhossz elég nagyra adódjék. Ha a tengelytávot 400—600 mm-re vesszük fel, akkor kielégítően pontos eredményeket kapunk.

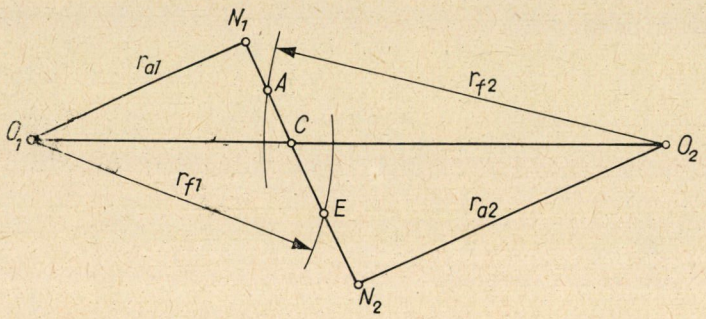
Ezután a rajz léptékében lemérjük a kapcsolóegyenesre a $t_a = m\pi \cos \alpha_0$ alaposztás $\varkappa$-szorosát a kapcsolóhossz A és E végpontjaitól a C főpont felé. Ezzel megkapjuk a kapcsolóegyenesnek azt az L_2 és L_1 pontját, amelyektől a két kerék fogfej-lenyesése kiindulhat (4. ábra).

$$\overline{O_1L_1} = r_{L1} \text{ és } \overline{O_2L_2} = r_{L2} .$$

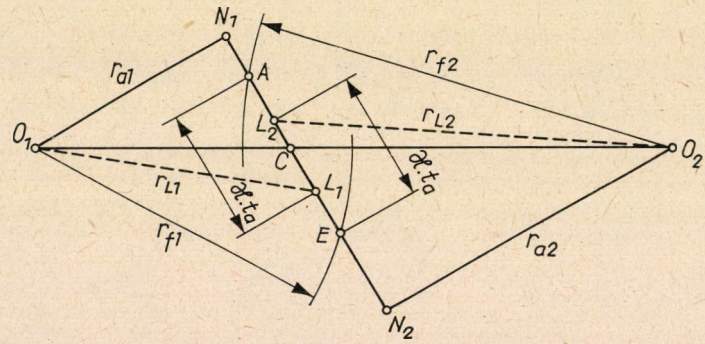
A $\varkappa$ tényezőt célszerű módon az $\varepsilon = \frac{e}{t_a}$ kapcsolószámtól függően állapítjuk meg. Ha $\varepsilon \geqq 1{,}4$, akkor $\varkappa = 1{,}2$; ha $1{,}4 > \varepsilon > 1{,}2$, akkor $\varkappa = 1{,}1$; ha pedig $\varepsilon \leqq 1{,}2$, akkor $\varkappa = 1$ lehet.

Az r_{L1} és r_{L2} sugarakat a fentiek alapján természetesen számítással is meg lehet határozni.

A fogfej lenyesését a kialakult gyakorlat szerint oly módon végzik, hogy a fogköszörűgépen olyan evolvensprofilt köszörülnek a fog fejrészére, amelynek



3. ábra. Egyenes fogazatú kerékpár vonalas ábrája



4. ábra. Az r_L sugarak meghatározása

α_0' alapprofilszöge valamivel nagyobb a fogazat szabványos $\alpha_0 = 20°$-os alapprofilszögénél. A lenyesésnek a fogaskerekek igénybevételéből számított j_L mértéke és a fentiek alapján meghatározott f_L magassága ezt az α_0' lenyesési alapprofilszöget meghatározzák, — és az az evolvensgeometriai ismeretekkel adott fogaskerékre ki is számítható, de csak többlépcsős megközelítő módszerrel. A számítás menete a következő:

Első közelítésként felvesszük az α_0' szöget pl. 20°30′-re. A kerék r_0 osztókörsugarából számítva a fogazat alapkörsugara $r_a = r_0 \cdot \cos \alpha_0$, a lenyesés

evolvensének alapkörsugara pedig $r'_a = r_0 \cdot \cos \alpha'_0$. Ha a fogaskerék osztókörön számított fogvastagsága s_0, akkor az osztóköri σ_0 fogszöget (a fél fogvastagságnak megfelelő középponti szöget) az

$$\operatorname{arc} \sigma_0 = \frac{s_0}{2r_0} = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2x \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 \right)$$

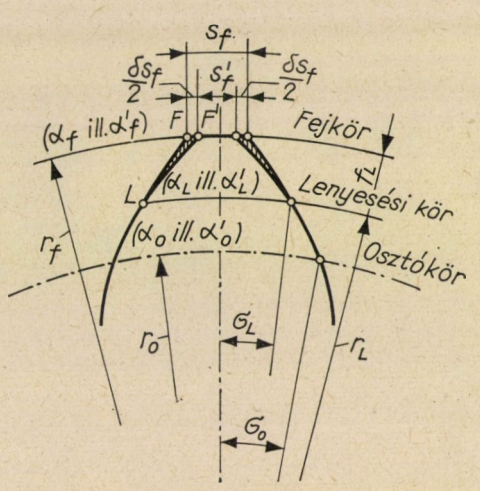
egyenletből számíthatjuk. A lenyesés r_L sugarú körén az eredeti fogprofil α_L profilszögét és a lenyesett profil α'_L profilszögét a

$$\cos \alpha_L = \frac{r_a}{r_L} \quad \text{és} \quad \cos \alpha'_L = \frac{r'_a}{r_L}$$

egyenletekből, az r_f sugarú fejkörön pedig az eredeti fogprofil α_f profilszögét és a lenyesett profil α'_f profilszögét a

$$\cos \alpha_f = \frac{r_a}{r_f} \quad \text{és} \quad \cos \alpha'_f = \frac{r'_a}{r_f} \tag{1}$$

egyenletekből számíthatjuk. Az így kapott szögek segítségével meghatározható az r_L sugarú lenyesési körön értett fogvastagsághoz tartozó σ_L fogszög, az eredeti



5. ábra. A fogvastagságok meghatározása

(lenyesés nélküli) fog s_f vastagsága a fejkörön, valamint a lenyesett fog s'_f vastagsága a fejkörön (5. ábra) a következő egyenletekkel:

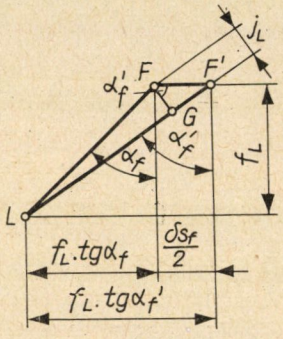
$$\operatorname{arc} \sigma_L = \operatorname{arc} \sigma_0 + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_L$$
$$s_f = 2r_f(\operatorname{arc} \sigma_0 + \operatorname{inv} \alpha_0 - \operatorname{inv} \alpha_f)$$
$$s'_f = 2r_f(\operatorname{arc} \sigma_L + \operatorname{inv} \alpha'_L - \operatorname{inv} \alpha'_f).$$

A fogvastagság csökkenése a fejkörön: $\delta s_f = s_f - s_f'$, és a lenyesés mértéke a fogprofilra merőlegesen, az ún. lenyesési hézag:

$$j_L \cong \frac{\delta s_f}{2} \cdot \cos \alpha_f' .$$

Az így kiadódó lenyesés természetesen nem azonos a terhelések miatt szükséges, előre kiszámított értékkel. Az eltérés mérvétől függően meg kell tehát változtatnunk a lenyesés α_0' alapprofilszögét, és a fenti számítást meg kell ismételni.

Ez az ismertetett számítási eljárás elég nehézkes, nemcsak azért, mert a fenti értékek kiszámítása sok időt kíván, hanem azért is, mert nem fordítható



6. ábra. A fogfej lenyesett sarka, közelítéssel egyenes vonalakkal határolva

meg. Tehát ha egy bizonyos lenyesést kell elérni, a fenti képletekkel nem számítható ki közvetlenül az ennek eléréséhez szükséges α_0' lenyesési alapprofilszög. Előfordulhat tehát, hogy a hosszas számítást többször meg kell ismételni, amíg jól megközelítő eredményt kapunk.

Ennek megkönnyítésére a következőképpen járhatunk el:

Az 5. ábrán vonalkázással jelölt felső fogsarkok egyikét, amelyet oldalt két evolvens-ív, fent pedig egy kis körív határol, egyenesekkel határolt háromszöggel helyettesíthetjük (a 6. ábrán az LFF' általános háromszög). Az így elkövetett számítási hiba igen sok összehasonlító számítás tanúsága szerint gyakorlatilag elhanyagolható. — Az elemi trigonometriai összefüggésekből

$$\left.\begin{aligned} j_L \cong \overline{FG} = \overline{FF'} \cdot \cos \alpha_f' = \frac{\delta s_f}{2} \cdot \cos \alpha_f' = f_L \cdot (\mathrm{tg}\alpha_f' - \mathrm{tg}\alpha_f) \cdot \cos \alpha_f', \\ \text{vagy: } j_L \cong \overline{FG} = \overline{LF} \cdot \sin(\alpha_f' - \alpha_f) = f_L \cdot \frac{\sin(\alpha_f' - \alpha_f)}{\cos \alpha_f} . \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ha tehát az α_0' lenyesési alapprofilszöget pl. 20°30′-re felvettük és az r_a és r_a' alapkörsugarakat kiszámítottuk, akkor az α_f és α_f' szögeket kiszámítjuk

az (1) egyenletpár szerint, és ezekkel közvetlenül kapjuk a j_L értékét a (2) egyenletek egyikéből. Jelöljük ezt $j_{L\ \text{kiadódó}}$-nak, szemben a terhelések miatt szükséges $j_{L\ \text{szükséges}}$-sel.

A felvett lenyesési alapprofilszög eltérése a fogazat alapprofilszögétől ennél az első felvételnél 30′ volt. Mivel az $(\alpha_f' - \alpha_f)$ szög 20′ ~ 40′között szokott lenni, a j_L méret változása megközelítőleg arányos az α_0 változásával, s így az α_0' végleges értékét az

$$\alpha_0' = \alpha_0 + \delta\alpha_0 = 20° + 30'. \frac{j_{L\,\text{szükséges}}}{j_{L\,\text{kiadódó}}} \tag{3}$$

egyenletből állapíthatjuk meg. Az ily módon meghatározott α_0' lenyesési alapprofilszöggel az elvégzett ellenőrző számítások szerint olyan lenyesést kapunk, amely a szükséges lenyeséstől általában 2—5%-kal tér el (extrém esetekben is az eltérés 10%-on belül van), ami gyakorlatilag megfelel.

Ha így számítunk, akkor nem szükséges az egyes profilszögek involutfüggvényeit kiszámítani, sőt nincs szükség a lenyesési körön mutatkozó α_L' szög kiszámítására sem. Ezzel a kiszámításhoz szükséges időben jelentős megtakarítás érhető el, azonkívül a számítást nem kell egyszer sem megismételni.

A fentiek megvilágítására szolgáljon a következő számpélda: Legyen $z = 17$; $m = 10$ mm; $\alpha_0 = 20°$; $r_0 = 85$ mm; $r_a = 79{,}87387$ mm; $r_f = 98{,}23034$ mm; $x = 0{,}471\,6169$. A lenyesés magassága a vonalas ábra szerint legyen: $f_L = 4$ mm. Ekkor $r_L = 94{,}23034$ mm. A terhelésből számítva a lenyesés szükséges mértéke ebben az esetben legyen pl. $j_L = 0{,}0332$ mm.

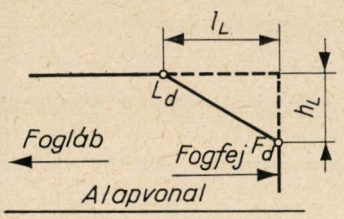
Ha $\alpha_0' = 20°\,30'$, akkor a fentiekben ismertetett pontos számítás szerint $j_L = 0{,}0230$ mm-nek adódik, az (1) és (2) egyenletek szerinti megközelítő számítással pedig 0,0220 mm-nek. Az eltérés kb. 4,5%.

A (3) egyenlettel továbbszámítva a pontos számítás szerint a lenyesés alapprofilszöge: $\alpha_0' = 20°\,43'\,18''$, a megközelítő számítás szerint pedig $20°\,45'\,10'' \cong 20°\,45'$.

Az ily módon helyesbített α_0' értékével pontosan kiszámítva $\alpha_0' = 20°\,43'\,18''$ esetében $j_L = 0{,}03465$ mm-nek, $\alpha_0' = 20°\,45'$ esetében pedig 0,0333 mm-nek adódik. Az eltérés egymás között kb. 4%, a kiinduló adatként felvett 0,0332 mm-hez képest viszont a pontos számítással kb. 0,5%, a megközelítő számítással pedig kb. 4,3%.

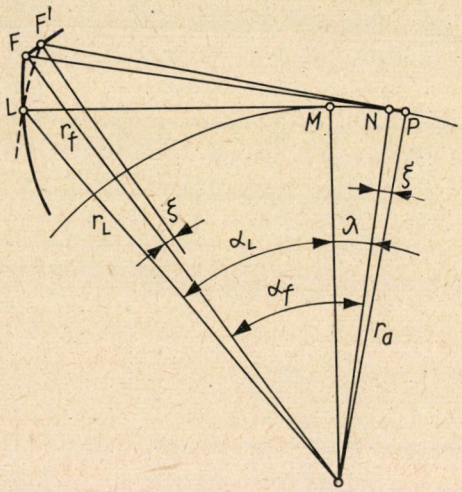
A lenyesés mértékét a fogaskerék rajzán kétféleképpen írhatjuk elő: az előállítás szempontjából meg kell adni a lenyesés α_0' alapprofilszögét, mert a fogköszörűgép beállítási adatait ennek megfelelően kell kiszámítani, továbbá az f_L magasságát, az utóbbinak tűrésével együtt. Az elkészült fogaskerék ellenőrzésére viszont ezek az adatok nem használhatók, mert a fogaskerék lenyesését profildiagram felvételével ellenőrizzük. E célra tehát ajánlatos előírni a rajzon az ideális profildiagram alakját [2].

A lenyesés nélküli hibátlan profil diagramja az alapvonallal párhuzamos egyenes vonal. A lenyesés a hibátlan profil diagramján oly módon mutatkozik, mintha más alapprofilszögű (tehát más alapkörátmérőjű) fogazatról volna szó, tehát a diagramnak ez a része ferde egyenes vonal (7. ábra). A profil L pontjának a diagramon az L_d pont, a lenyesett profil F' fejpontjának pedig az F_d pont felel meg. A fogaskerék rajzán ilyen ideális profildiagramot kell



7. ábra. Hibátlan lenyesett fog profildiagramja

a lenyesés ellenőrzése céljából megadni, de elő kell írni a lenyesett profilrészre a 7. ábrán l_L-lel és h_L-lel jelölt két méret számértékét is. A következőkben azt kívánjuk megvizsgálni, hogy mekkorák ezek a számértékek, és hogy hogyan függnek össze az α_0' és f_L kiinduló adatokkal.



8. ábra. A lenyesés befolyása az alapkör lefejtett ívhosszára

A 8. ábra szerint a fogprofil felső lenyesett LF szakaszának az r_a sugarú alapkörön az

$$\overset{\frown}{MN} = r_a \cdot \text{arc}\lambda = \overline{FN} - \overline{LM} = r_a \cdot \text{tg}\alpha_f - r_a \cdot \text{tg}\alpha_L = r_a \cdot (\text{tg}\alpha_f - \text{tg}\alpha_L)$$

lefejtett ívhossz felel meg.

Mivel a profilméréskor a fogaskerék az r_a sugarú alapkörén gördül le, az $\overset{\frown}{LF}$ evolvens-ívnek a V_l hosszléptékű profildiagramon a $V_l \cdot \overset{\frown}{MN}$ hossz felel meg. A lenyesett profil fejpontja azonban F'-be került, tehát az $\overset{\frown}{FF'}$ körívnek megfelelő ζ középponti szöggel, illetve az $\overset{\frown}{NP}$ alapkörívvel a diagram hossza

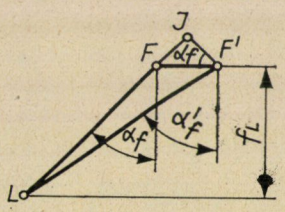
megnyúlik. Ennek mértéke az ábrán: $r_a \cdot \text{arc}\zeta$, ahol arc $\zeta = \dfrac{\widehat{FF'}}{r_f} = \dfrac{\delta s_f}{2r_f}$, tehát a profildiagram hosszának növekedése: $V_l \cdot r_a \cdot \dfrac{\delta s_f}{2r_f}$. Ezek szerint a diagramon a lenyesett rész hossza:

$$l_L = V_l \cdot (\widehat{MN} + \widehat{NP}) = V_l \cdot r_a \cdot \left(\text{tg}\alpha_f - \text{tg}\alpha_L + \frac{\delta s_f}{2r_f} \right).$$

Ha itt sem tekintünk arra, hogy a fogfej lenyesett sarka evolvens- és körívekből áll, akkor a 6. ábra alapján $\dfrac{\delta s_f}{2} = \overline{FF'} = f_L \cdot (\text{tg}\alpha'_f - \text{tg}\alpha_f)$, tehát

$$l_L = V_l \cdot r_a \cdot \left[(\text{tg}\alpha_f - \text{tg}\alpha_L) + \frac{f_L}{r_f} \cdot (\text{tg}\alpha'_f - \text{tg}\alpha_f) \right]. \tag{4}$$

A profildiagram eltérése az alapvonal irányától a mérőkészülék tapintójának az ideális, lenyesés nélküli profilra merőleges kitérésével a V_h hibanagyítás léptékében arányos. Ennek a közelítő 9. ábrán a $\overline{JF'}$ távolság felel meg,



9. ábra. A h_L számítása a fogfej lenyesett sarkának közelítő ábrája alapján

mert a valóságos F' fejpontnak ekkora a távolsága a lenyesetlen $\overline{LFJ}$ ideális profiltól. Tehát

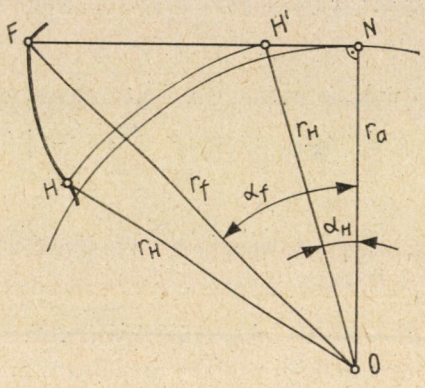
$$h_L = V_h \cdot \overline{JF'} = V_h \cdot \overline{FF'} \cos\alpha_f = V_h \cdot f_L \cdot (\text{tg}\alpha'_f - \text{tg}\alpha_f) \cdot \cos\alpha_f. \tag{5}$$

A lenyesés magasságának T_{fL} tűrését a profildiagramon a rajzon megadott l_L mérethez a (4) egyenlet alapján értelemszerűen

$$T_{lL} = V_l \cdot r_a \cdot (\text{tg}\alpha_L - \text{tg}\alpha_{LT}) \tag{6}$$

tűréssel írjuk elő, ahol az α_{LT} szög a lenyesésnek a tűréssel megnövelt magasságához, tehát az $r_{LT} = r_L - T_{fL}$ sugarú körhöz tartozó profilszög, amelyet a $\cos\alpha_{LT} = \dfrac{r_a}{r_{LT}} = \dfrac{r_a}{r_L - T_{fL}}$ összefüggésből határozhatunk meg.

Az előbbiek alapján adott esetben kiszámított l_L és h_L méretek akkor helyesek, ha a 7. ábra szerinti diagram L_dF_d ferde egyenese nem túl lapos vagy túl meredek, úgyhogy mindkét végén jól meghatározható a vízszintes, illetve függőleges diagramszakasszal való metszéspontja. A legkedvezőbb az, amikor mind az L_d, mind az F_d pontban a metszőszög 45° körül van, vagyis ha l_L



10. ábra. A diagram l hosszának számítása

megközelítőleg egyenlő h_L-lel. Ezt a V_l és V_h helyes megválasztásával könnyű elérni. Ilyenkor azonban tanácsos ellenőrizni, hogy a felvett diagram teljes l hossza nem lesz-e túl nagy.

A profildiagram a fogprofil H határkörpontjától az F fejpontjáig vehető fel (10. ábra), ahol a H pont helyét (tehát azt a pontot, amelyben a profil használható evolvens része átmegy a kapcsolódás szempontjából használhatatlan fogtőgörbébe) a lefejtő szerszám alakja határozza meg. A felvehető diagram teljes hossza ezek szerint az $\overline{FH'}$ távolsággal arányos. Ha a H ponton átmenő r_H sugarú határkörön a profilszög: α_H, ahol $\cos \alpha_H = r_a/r_H$, akkor

$$l = V_l \cdot \overline{FH'} = V_l \cdot r_a \cdot (\mathrm{tg}\alpha_f - \mathrm{tg}\alpha_H). \tag{7}$$

A fenti számpélda szerint 600-szoros hibanagyítást és 1-szeres hosszléptéket ($V_h = 600$ és $V_l = 1$) feltételezve, a (4) és (5) egyenletből $l_L = 7{,}2165$ mm és $h_L = 19{,}9997$ mm adódik. Ez nem szerencsés, mert így a diagram lenyesett része nagyon rövid és meredek lesz, úgyhogy az F_d pont helyét a tompaszögű metszék miatt nem lehet jól megállapítani. Ha viszont $V_l = 2$ és $V_h = 400$, akkor $l_L = 14{,}4328$ és $h_L = 13{,}3331$ mm, ami már megfelelő lesz. Ekkor a (6) egyenlet szerint $T_{fL} = +0{,}25$ mm esetében $T_{lL} \cong +0{,}95$ mm lesz, a teljes felvehető diagram l hossza pedig a következőképpen adódik:

A fogprofil határkörpontjában a görbületi sugár:

$$\varrho_H = \overline{NH'} = r_0 \cdot \sin \alpha_0 + \frac{m \cdot (x-1)}{\sin \alpha_0} = 13{,}6228\ mm.$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha_H = \varrho_H / r_a = 0{,}170\ 5541.$$

Ezzel a (7) egyenletből $l = 87{,}111$ mm. Ez megfelelő.

Valamely fogaskerékről felvett profildiagram alapján a lenyesés kiinduló adatait (α_0' és f_L) a fenti számítási menet bizonyos átalakítása révén határozhatjuk meg.

Az (5) egyenletből

$$f_L \cdot (\mathrm{tg}\alpha_f' - \mathrm{tg}\alpha_f) = \frac{h_L}{V_h \cdot \cos\alpha_f} .$$

Ezt behelyettesítve a (4) egyenletbe és $(V_l \cdot r_a)$-val végigosztva:

$$\frac{l_L}{V_l \cdot r_a} = \mathrm{tg}\alpha_f - \mathrm{tg}\alpha_L + \frac{h_L}{V_h \cdot r_f \cdot \cos\alpha_f} .$$

Figyelembe véve, hogy $r_f \cdot \cos\alpha_f = r_a$, az egyenletet rendezve kapjuk:

$$\mathrm{tg}\alpha_L - \mathrm{tg}\alpha_f - \frac{l_L}{V_l \cdot r_a} + \frac{h_L}{V_h \cdot r_a} = \mathrm{tg}\alpha_f - \frac{1}{r_a} \cdot \left(\frac{l_L}{V_l} - \frac{h_L}{V_h} \right) . \qquad (8)$$

Az így nyert α_L szöggel számítva:

$$f_L = r_f - r_L = r_f - \frac{r_a}{\cos\alpha_L} , \qquad (9)$$

és az (5) egyenletből

$$\mathrm{tg}\alpha_f' = \mathrm{tg}\alpha_f + \frac{h_L}{V_h \cdot f_L \cdot \cos\alpha_f} . \qquad (10)$$

Mivel pedig $r_a' = r_0 \cdot \cos\alpha_0' = r_f \cdot \cos\alpha_f'$, tehát

$$\cos\alpha_0' = \frac{r_f \cdot \cos\alpha_f'}{r_0} , \qquad (11)$$

ahonnan α_0' kiadódik.

A fenti számpélda adataiból ($V_l = 2$; $V_h = 400$; $l_L = 14{,}4328$ és $h_L = 13{,}3331$ mm) kiindulva a (8) egyenlet szerint $\mathrm{tg}\,\alpha_L = 0{,}625\,9277$, vagyis $\cos\alpha_L = 0{,}847\,6447$. — A (9) egyenletből $f_L = 4$ mm; a (10) egyenletből pedig $\mathrm{tg}\,\alpha_f' = 0{,}726\,1065$, vagyis $\cos\alpha_f' = 0{,}809\,1847$, és így a (11) egyenlet szerint $\cos\alpha_0' = 0{,}935\,1352$. Ennek megfelelően a lenyesés alapprofilszöge: $\alpha_0' = 20^\circ\,45'\,00''$.

IRODALOM

1. Dudley, D. W.: Modification of gear tooth profiles. Product Engineering, Sept. 1949, pp. 126/131
2. Dudley, D. W.: Practical gear design. Mc Graw-Hill, New York/Toronto/London, 1954. (p. 69)
3. Михайлов, В. Л.: Оптимальные размеры и форма срезов (фланков) прямозубых цилиндрических колес. — Sztanki i Insztrument, 1957. febr., pp. 16/19

4. THIEMIG, W.: Zahnflanken-Zurücklegungen. ATZ. April 1954, pp. 99/101
5. VÖRÖS I.: A fogaskerekek méretezésének és gyártásának néhány problémája. A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztálya Közleményei, 1952. 2. szám, 64/67. o.
6. WALKER, H.: Gear tooth deflection and profile modification. The Engineer, Oct. 14, 1938, pp. 409/412; Oct. 21, 1938, pp. 434/436; Aug. 16, 1940, pp. 102/104
7. WEBER, C.—BANASCHEK, K.: Formänderung und Profilrücknahme bei gerad- und schrägverzahnten Rädern. Fr. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1953

ÖSSZEFOGLALÁS

Az erősen igénybe vett fogaskerekek lenyesése az utóbbi években mindinkább elterjedt, de a lenyesés helyes kialakítása körül még sok a tisztázatlan kérdés. A legutóbbi időben néhány kutató behatóan foglalkozott a fogak terhelés alatti deformációjának mérésével és számításával, valamint a fogak fejélénél szükséges hézag mértékével, viszont alig foglalkoztak még a lenyesési görbe alakjával, és nincs még kialakult vélemény arról, hogy a lenyesés elkészítéséhez és ellenőrzéséhez milyen adatokat kell a fogaskerekek rajzain előírni, és hogy ezeket miképpen kell meghatározni. Ezért mindenféle fogaskeréken többnyire egységes mértékű lenyesést alkalmaznak, sőt ezt elvétve még a fogaskerekek alapprofiljain is szabványosítják, ami adott kapcsolási viszonyok között természetesen nem lehet mindig a legkedvezőbb megoldás.

A jelen értekezés célja, hogy felhívja a figyelmet a lenyesés helyes kialakításának módjára, egyben útmutatással szolgáljon arra nézve, hogy a lenyesés elkészítéséhez és ellenőrzéséhez szükséges adatokat hogyan kell meghatározni és előírni.

A SÚRLÓDÓ TENGELYKAPCSOLÓK INDÍTÁSA

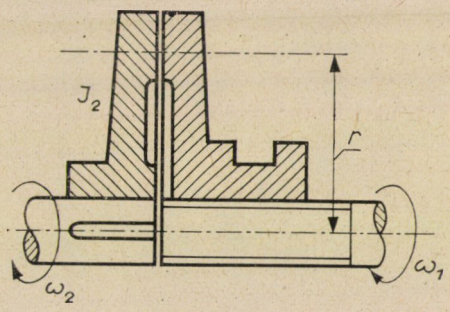
Dr. TERPLÁN ZÉNÓ
NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM, GÉPELEMEK TANSZÉKE, MISKOLC

[Beérkezett 1961. április 20-án]

A súrlódó tengelykapcsolók bármely fajtájának indítási szakaszában a hajtó és a hajtott tengelyek nyomaték-, szögsebesség-, teljesítmény- és energiaváltozásának ismerete szükséges.

A magyar szakirodalom [1, 2], a külföldi szakirodalomhoz hasonlóan [3, 4], vizsgálja ugyan a nyomaték-, szögsebesség- és az energiaváltozásokat, de mellőzi a teljesítményváltozás vizsgálatát.

E tanulmányban a súrlódó tengelykapcsolók indítási viszonyait a megszokott feltételek között, sőt azonos példaadatokkal [1, 2] tárgyaljuk azzal a



1. ábra

különbséggel, hogy az energiaváltozásokat a teljesítményváltozásokkal magyarázzuk.

Vizsgálatainkhoz az 1. ábrán látható legegyszerűbb tárcsás súrlódó tengelykapcsolót válasszuk. Jelöljük M_1-gyel az indító, M_2-vel a terhelő nyomatékot (mkp mértékegységgel), ω_1-gyel a hajtó, ω_2-vel a hajtott tengely szögsebességét 1/s-ban, t-vel az időt s-ban, α_2-vel a hajtott tengely szöggyorsulását 1/s^2-ben, P-vel a teljesítményt kW-ban, W-vel az energiát kpm-ben és J_2-vel a hajtott tárcsa és tengely tehetetlenségi nyomatékát kpm s^2-ben. Használjuk továbbá a P és W indexeiként 1-t a bevezetett, 2-t a hasznos, k-t a kinetikai és μ-t a súrlódó jelzők számára.

A vizsgálatot három esetre végezzük el.

1. Legyen P_1 és ω_1 állandó, továbbá $M_2 = 0$, azaz vizsgáljuk a terheletlen indítás törvényét.

Fejezzük ki M_1-et

$$M_1 = \frac{P_1}{\omega_1} = \text{const.} = J_2 \frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t} . \tag{1}$$

Mivel $J_2 = \text{const.}$, az $\alpha_2 = \mathrm{d}\omega_2/\mathrm{d}t = \text{const.}$, vagyis a hajtott tárcsa egyenletesen változó szögsebességgel indul. Ha $\alpha_2 = \text{const.}$, akkor $\alpha_2 = \omega_2/t$, és a zérusról növekvő ω_2 szögsebesség T idő múlva éri el az ω_1 szögsebességet. Mivel (1) szerint

$$M_1 = J_2\alpha_2 = J_2 \frac{\omega_2}{t} ,$$

ha $\omega_2 = \omega_1$, akkor $t = T$, tehát

$$T = \frac{J_2\omega_1}{M_1} .$$

Nyilvánvaló, hogy $0 \leq t \leq T$ idő alatt a hajtott tárcsa csúszik. Az is könnyen áttekinthető, hogy az indítás T ideje annál hosszabb, mentől nagyobb a hajtott tárcsa J_2 tehetetlenségi nyomatéka, a hajtó tengely ω_1 szögsebessége, és mentől kisebb az M_1 indító nyomaték.

Fenti levezetések és megállapítások jól követhetők a 2. ábra $M = \mathrm{f}(t)$, $\alpha = \mathrm{f}(t)$ és $\omega = \mathrm{f}(t)$ diagramjain. A $P = \mathrm{f}(t)$-ben a $P_1 = M_1\omega_1 = \text{const.}$ a feltételek között szerepelt, míg

$$P_\mathrm{k} = M_1\omega_2 , \tag{2}$$

azaz az időtől függően lineáris. De az is kitűnik az ábrából, hogy

$$P_\mu = P_1 - P_\mathrm{k} = M_1(\omega_1 - \omega_2) ,$$

vagyis a vonalkázott terület a $W_\mu = \frac{1}{2} PT$ súrlódásra fordított energia, míg a nem vonalkázott terület a $W_\mathrm{k} = \frac{1}{2} P_\mathrm{k}T$ hasznos energia és a $W_1 = P_1T$ a bevezetett energia.

Egyszerű geometriai szemlélet bizonyítja, hogy a $W_1 = \mathrm{f}(t)$ lineáris, míg a $W_\mathrm{k} = \mathrm{f}(t)$ kvadratikus, de úgy, hogy T időpontban $W_\mathrm{k} = W_1/2$. Ennek bizonyítása a következő:

A terheletlen állapotban csak a felgyorsított tömeg kinematikai energiája tekinthető hasznosnak:

$$W_\mathrm{k} = \frac{J_2\omega_1^2}{2} ,$$

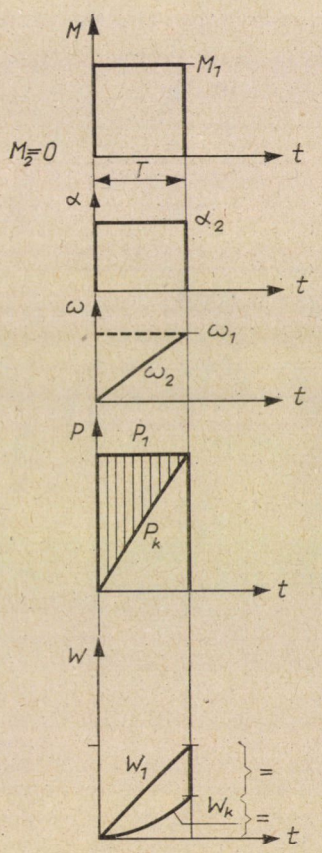
ugyanakkor a befektetett energia T idő alatt

$$W_1 = P_1 T = M_1 \omega_1 T = M_1 \omega_1 \frac{J_2 \omega_1}{M_1} = J_2 \omega_1^2,$$

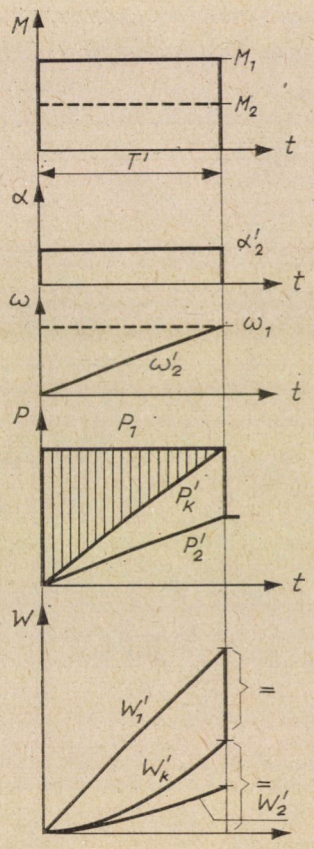
vagyis

$$W_k = \frac{1}{2} W_1.$$

Ezzel a 2. ábra $W = f(t)$ is megrajzolható, s így bármely $t = 0 \to T$ időhöz bármely változó leolvasható.



2. ábra



3. ábra

2. Legyen P_1 és ω_1 ismét állandó, de $M_2 = \text{const.} > 0$. Ekkor

$$M_1 = \frac{P_1}{\omega_1} = \text{const.} = M_2 + J_2 \frac{d\omega_2'}{dt}. \qquad (3)$$

Mivel M_2 és J_2 állandó, az $\alpha_2' = \mathrm{d}\omega_2'/\mathrm{d}t = \text{const.}$, vagyis a hajtott tárcsa szögsebessége ekkor is egyenletesen növekszik.

A gyorsító nyomaték (3)-ból

$$M_\mathrm{d} = M_1 - M_2 = J_2\alpha_2' = J_2\frac{\omega_2'}{t}.$$

Az $\omega_2' = \omega_1$ egyenlőség eléréséhez szükséges idő:

$$T' = \frac{\omega_1}{\alpha_2'} = \frac{J_2\omega_1}{M_1 - M_2}.$$

E képletből leolvasható, hogy T' annál nagyobb, mentől nagyobb J_2 és ω_1, és mentől kisebb az $M_\mathrm{d} = M_1 - M_2$. Az is nyilvánvaló, hogy $0 \leq t \leq T'$ idő alatt a hajtott tárcsa csúszik. A 3. ábra mutatja az $M = \mathrm{f}(t)$, $\alpha = \mathrm{f}(t)$, $\omega = \mathrm{f}(t)$, $P = \mathrm{f}(t)$ és $W = \mathrm{f}(t)$ diagramjait.

A teljesítmény-diagramban $P_1 = M_1\omega_1 = \text{const.} = P_2' + P_\mathrm{k}' + P_\mu'$, amelyben

$$P_2' = M_2\omega_2,$$
$$P_\mathrm{k}' = M_1\omega_2, \text{ és}$$
$$P_\mu' = M_1(\omega_1 - \omega_2).$$

Ekkor tehát a befektetett teljesítmény részben a súrlódó ellenállás és a felgyorsítás teljesítményét fedezi, másrészt viszont hasznos teljesítményt szolgáltat. Ennek megfelelően az energia-diagram is három részre bontható:

$$W_1' = W_2' + W_\mathrm{k}^1 + W_\mu \tag{4}$$

alapján.

A 2. és a 3. ábra összehasonlításából következik, hogy a 3. ábrán T' időben $W_\mathrm{k}' + W_2' = \frac{W_1'}{2}$,

mert

$$W_1' = M_1\omega_1 T' = M_1\omega_1\frac{J_2\omega_1}{M_1 - M_2} = \frac{M_1}{M_1 - M_2}J_2\omega_1^2.$$

Másrészt

$$W_\mathrm{k}' + W_2' = M_1\int_0^{T'}\omega_2'\,\mathrm{d}t = \frac{M_1}{M_1 - M_2}J_2\int_0^{\omega}\omega_2'\,\mathrm{d}\omega_2' = \frac{M_1}{M_1 - M_2}J_2\frac{\omega_1^2}{2},$$

amelyben $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\omega_2'}{\alpha_2'} = \frac{J_2}{M_1 - M_2}\mathrm{d}\omega_2'$ helyettesítést alkalmaztunk.

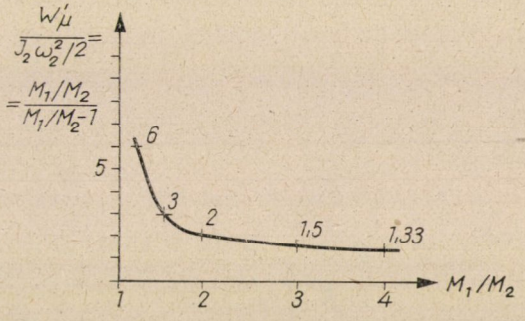
A (4)-ből

$$W'_\mu = W'_1 - (W'_2 + W'_k) = \frac{M_1}{M_1 - M_2} \frac{J_2\omega_1^2}{2},$$

vagyis

$$\frac{W'_\mu}{J_2\omega_1^2/2} = \frac{M_1}{M_1 - M_2} = \frac{M_1/M_2}{M_1/M_2 - 1}. \tag{5}$$

A 4. ábra mutatja az (5) képlet függvény-ábráját, amely szerint a bevezetett mozgási energia egységére vonatkoztatott súrlódási energia $M_1/M_2 > 2$ esetében már nem csökken számottevően.



4. ábra

3. Legyen $P''_1 = ct \neq$ const. és $\omega_1 =$ const., továbbá $M_2 = 0$. Ekkor az M''_1, α''_2, ω''_2, P''_k és W''_k az 5. ábra szerint változik.

Mivel $J_2 =$ const., ekkor is számolhatunk $\alpha''_2 = M''_1/J_2$-vel, csak α''_2 követi M''_1 változását. Ezek után az $\omega''_2 = \omega_1$ helyzethez tartozó T''_2-t a következőképpen határozhatjuk meg. A t-hez tartozó ω_2 éppen a felette levő $\alpha''_2 = f(t)$ t-hez tartozó területével egyenlő, azaz

$$\omega''_2 = \omega_1 = \frac{\alpha''_2 T''}{2},$$

vagyis

$$T'' = 2\alpha''_2\omega_1 = 2\frac{J_2}{M_1}\omega_1.$$

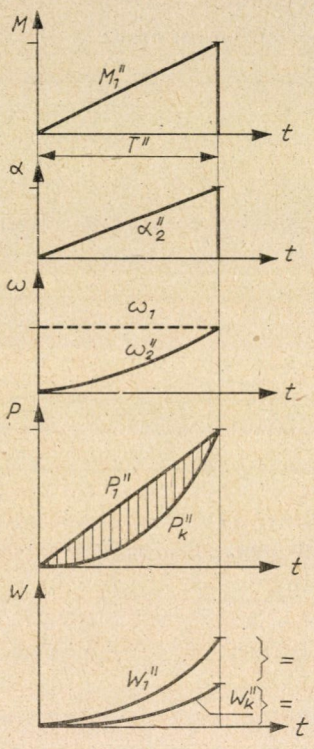
A $P''_1 = M''_1\omega_1$ és $P''_k = M''_1\omega''_2$ felrajzolása nem okoz gondot. Hasonlóképpen egyszerű a $W''_1 = f(t)$ felrajzolása, amely négyzetes görbe. A $W''_k = f(t)$ viszont harmadfokú görbe. Ismét érvényes a $W''_k = W''_1/2$ törvény a T'' időben, hiszen

$$W''_1 = \frac{1}{2}P_1T'' = \frac{1}{2}M''_1\omega_1 2\frac{J_2}{M_1}\omega_1 = J_2\omega_1^2,$$

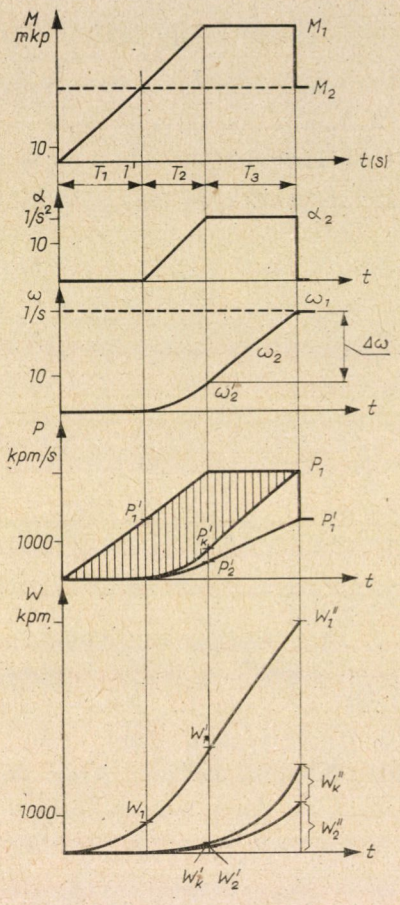
és

$$W''_1 = \frac{J_2\omega_1^2}{2}.$$

4. Ezek után vizsgáljunk egy összetett feladatot (6. ábra). A P_1 változzék kezdetben lineárisan, majd legyen állandó, ugyanakkor $\omega_1 = \text{const}$. E szerint M_1 nyomaték a P_1-hez hasonló jellegű, és $M_1/M_2 > 1$, ahol M_2 terhelő nyomaték állandó. A T_1 és T_2 indítási idők adottak, T_3-at abból a feltételből kell meghatározni, hogy $\omega_2 = \omega_1$.



5. ábra



6. ábra

A hajtott tárcsa ω_2 szögsebessége T_1 alatt zérus, T_2 alatt pedig kvadratikusan, majd lineárisan változik. Az $\omega_2 = \omega_1$ metszés jelöli ki T_3-at.

A T_2 végén

$$\omega_2' = \frac{1}{2}\alpha_2 T_2 ,$$

majd

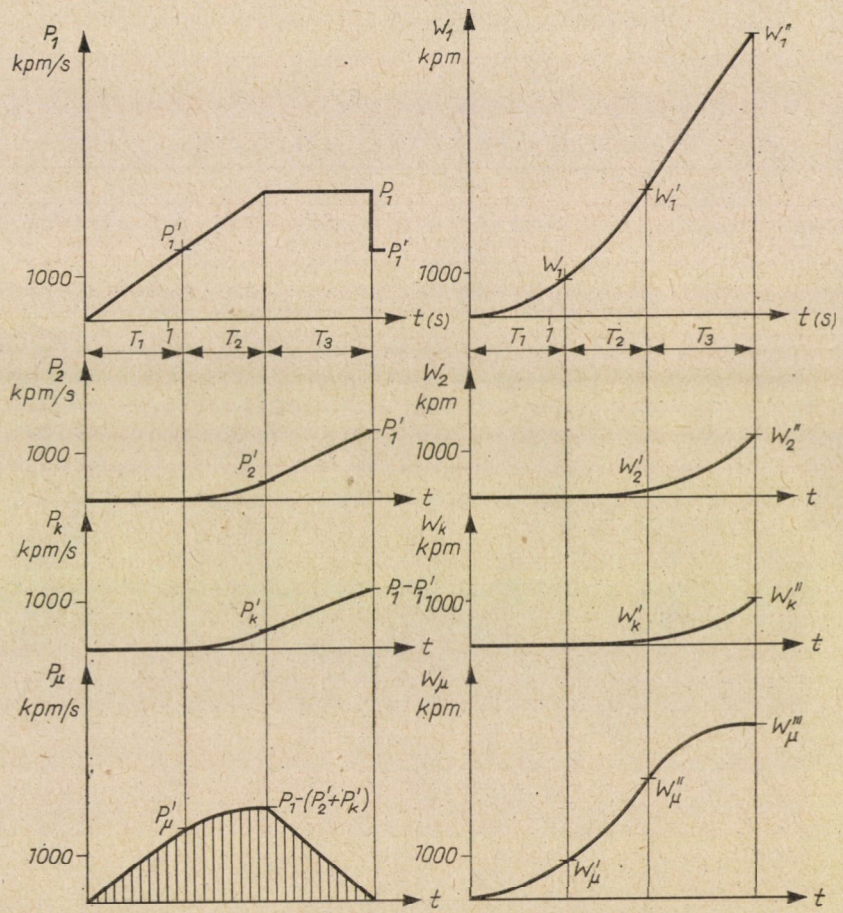
$$\omega_1 = \omega_2'' = \omega_2' + \alpha_2 T_3 ,$$

azaz

$$T_3 = \frac{\omega_1 - \omega_2'}{\alpha_2} .$$

A $P_1 = f(t)$ adott, amely azonban három részből adódik össze:

$$P_1 = P_2 + P_k + P_\mu = M_2\omega_2 + (M_1 - M_2)\omega_2 + M_1(\omega_1 - \omega_2) = M_1\omega_1 .$$



7a. ábra 7b. ábra

A 7a. ábrán a három részteljesítmény változása külön is látható.

A teljesítmény-függvények ismeretében az energia-diagramok is megszerkeszthetők. A 6. ábrán az összerajzolt, míg a 7b. ábrán a részekre bontott

energia-ábra látható. Mivel

$$W(t) = \int P(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

a W-diagramok felépítése könnyen áttekinthető.

Példa. Válasszunk a 4. pont jelleggörbéi szerint működő súrlódó tengelykapcsolót, az [1] és [2]-ben megadott következő adatok szerint: M_1 változzék 0-tól lineárisan, és $T_1 + T_2 = 2$s idő múlva legyen az $M_1/M_2 = 1{,}8$, ahol $M_2 = 60$ mkp = const., $\omega_1 = 26{,}2/\mathrm{s} =$ = const. és $J_2 = 3$ kpms^2.

A számítás célja, a 6. ábra jellegzetes pontjainak kiszámítása.

Az $M = \mathrm{f}(t)$-hez :

$$M_1 = \text{const.} = 1{,}8\; M_2 = 1{,}8 \cdot 60\ \text{mkp} = 108\ \text{mkp}.$$

$$T_1 = \frac{M_2}{M_1}\,(T_1 + T_2) = \frac{1}{1{,}8}\,2\ \text{s} = 1{,}11\ \text{s}\ .$$

$$T_2 = (T_1 + T_2) - T_1 = (2 - 1{,}11)\text{s} = 0.89\text{s}.$$

T_3 egyelőre ismeretlen.

Az $\alpha = \mathrm{f}(t)$-hez : $\alpha_1 = 0$,

$$\alpha_2 = \text{const.} = \frac{M_\mathrm{d}}{J_2} = \frac{M_1 - M_2}{J_2} = \frac{(108 - 60)\ \text{mkp}}{3\ \text{kp m s}^2} = 16/\mathrm{s}^2\ .$$

Ezzel $\alpha_2 = 0 \rightarrow 16/\mathrm{s}^2$ a T_2 szakaszban megrajzolható. T_3 egyelőre még mindig ismeretlen.

Az $\omega = \mathrm{f}(t)$-hez :

$$\omega_2' = \frac{1}{2}\,\alpha_2\,T_2 = \frac{1}{2}\,16/\mathrm{s}^2\,0{,}89\ \mathrm{s} = 7{,}12/\mathrm{s}\ .$$

$$T_3 = \frac{\Delta\omega}{\alpha_2} = \frac{\omega_1 - \omega_2'}{\alpha_2} = \frac{(26{,}2 - 7{,}12)/\mathrm{s}}{16/\mathrm{s}^2} \approx 1{,}19\ \mathrm{s}\ .$$

Ezzel az $M = \mathrm{f}(t)$, az $\alpha = \mathrm{f}(t)$ és az $\omega = \mathrm{f}(t)$, T_3-ra vonatkozó szakasza is megrajzolható.

A $P = \mathrm{f}(t)$-hez:

$$P_1 = \text{const.} = M_1\,\omega_1 = 108\ \text{mkp}\,26{,}2/\mathrm{s} \approx 2830\ \frac{\text{kp m}}{\mathrm{s}}\ .$$

Az indítás befejezése után pedig

$$P_1' = \frac{M_2}{M_1}\,P_1 = \frac{1}{1{,}8}\,2830\ \frac{\text{kp m}}{\mathrm{s}} = 1572\ \frac{\text{kp m}}{\mathrm{s}}\ .$$

$$P_2' = M_2\,\omega_2' = 60\ \text{mkp}\ 7{,}12/\mathrm{s} = 427{,}2\ \frac{\text{kp m}}{\mathrm{s}}\ .$$

$$P_\mathrm{k}' = (M_1 - M_2)\,\omega_2' = (108 - 60)\ \text{mkp}\ 7{,}12/\mathrm{s} \approx 342\ \frac{\text{kp m}}{\mathrm{s}}\ .$$

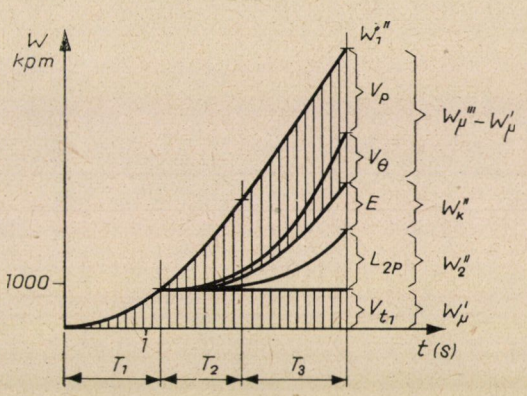
Mind a P_2, mind a P_k a T_2 szakaszban t-vel négyzetesen, a T_3 szakaszban pedig arányosan változik, tehát egyszerűen megszerkeszthető. A $P_\mu = \mathrm{f}(t)$-t legegyszerűbb a $P_1 - (P_2 + P_\mathrm{k})$ szerint a vonalkázott ordináták külön felrakásával szerkeszteni (l. 6. és 7a. ábrát).

A $W = f(t)$*-hez :*

$$W_1' = \frac{1}{2} P_1 (T_1 + T_2) = \frac{1}{2} 2830 \frac{\text{kp m}}{\text{s}} 2\,\text{s} = 2830\,\text{kp m} .$$

$$W_1'' = W_1' + P_1 T_3 = 2830\,\text{kp m} + 2830 \frac{\text{kp m}}{\text{s}} 1{,}19\,\text{s} \approx 6200\,\text{kp m} ,$$

E két adattal a $W_1 = f(t)$ megrajzolható, hiszen a $0 \leq t \leq (T_1 + T_2)$ szakaszban W_1 t-vel négyzetesen, majd $(T_1 + T_2) \leq t \leq T_3$ szakaszban arányosan változik.



8. ábra

Az [1]-ben látható 501. ábrával való összehasonlítás céljából (8. ábra), számítsuk ki W_1 értékét a T_1 időszakasz végén:

$$W_{11} = \frac{1}{2} P_1' T_1 = \frac{1}{2} 1572 \frac{\text{kp m}}{\text{s}} 1{,}11\,\text{s} \approx 872\,\text{kp m} .$$

A T_1 szakaszban $W_2 = 0$, a T_2 szakaszban harmadfokú, míg a T_3 szakaszban másodfokú a t-től függő W_2-változás.

$$W_2' = \int_0^{T_2} P_2(t)\,\mathrm{d}t = M_2 \int_0^{T_2} \omega_2(t)\,\mathrm{d}t = M_2 \frac{\alpha_2}{2\,T_2} \int_0^{T_2} t^2\,\mathrm{d}t = M_2 \frac{\alpha_2}{6\,T_2} [t^3]_0^{T_2} =$$

$$= M_2 \frac{\alpha_2}{6} T_2^2 = 60\,\text{mkp} \frac{16/\text{s}^2}{6} 0{,}89^2\,\text{s}^2 \approx 127\,\text{kp m} ,$$

mert közben

$$\alpha_2(t) = \frac{\mathrm{d}\,\omega_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\alpha_2}{T_2} t, \text{ azaz } \mathrm{d}\omega_2 = \frac{\alpha_2}{T_2} t\,\mathrm{d}t \text{ és } \omega_2(t) = \frac{\alpha_2}{2\,T_2} t^2 .$$

$$W_2'' = W_2' + P_2' T_3 + \frac{1}{2}(P_1' - P_2') T_3 = 126\,\text{kp m} + 427{,}2 \frac{\text{kpm}}{\text{s}} 1{,}19\,\text{s} +$$

$$+ \frac{1}{2}(1572 - 427{,}2) \frac{\text{kpm}}{\text{s}} 1{,}19\,\text{s} \approx (127 + 508 + 681)\,\text{kpm} \approx 1316\,\text{kpm} .$$

E két adattal a $W_2 = f(t)$ megszerkeszthető.

A $W_k = f(t)$ a T_1 szakaszban zérus, a T_2 szakaszban negyedfokú, míg a T_3 szakaszban másodfokú.

$$W'_k = \int_0^{T_2} P_k(t)\,dt = \int_0^{T_2} [M_1(t) - M_2]\,\omega_2(t)\,dt = \int_0^{T_2} \left(M_2 + \frac{M_1 - M_2}{T_2}\,t - M_2\right) \frac{a_2}{2T_2}\,t^2 dt =$$

$$= (M_1 - M_2)\frac{a_2}{2T_2^2} \int_0^{T_2} t^3\,dt = (M_1 - M_2)\frac{a_2}{8T_2^2}\,[t^4]_0^{T_2} = (M_1 - M_2)\,\frac{a_2}{8}\,T_2^2 =$$

$$= 48\ \text{mkp}\,\frac{16/\text{s}^2}{8}\,0{,}89^2\,\text{s}^2 \approx 76\ \text{kpm}.$$

$$W''_k = W'_k + P'_k\,T_3 + \frac{1}{2}\,(P_1 - P'_1 - P'_k)\,T_3 = 76\ \text{kpm} + 342\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}}\,1{,}19\ \text{s} +$$

$$+ \frac{1}{2}\,(2830 - 1572 - 342)\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}}\,1{,}19\ \text{s} = (76 + 407 + 545)\ \text{kpm} \approx 1030\ \text{kpm}\ .$$

Ennek az eredménynek azonosnak kell lennie a

$$W_k = \frac{1}{2}\,J_2\,\omega_1^2 = \frac{1}{2}\,3\ \text{kpm s}^2\,26{,}2^2\ 1/\text{s}^2 \approx 1030\ \text{kpm}$$

mozgási energiával.

A $W_\mu = f(t)$ három szakaszból áll.

$W'_\mu = W_{11} \approx 872$ kpm.

Már bonyolultabb a W''_μ, mert

$$W''_\mu = W'_\mu + \int_0^{T_2} P_\mu(t)\,dt\ ,$$

ahol az integrál megoldása a következő:

$$\int_0^{T_2} P_\mu(t)\,dt = \int_0^{T_2} M_1(t)\,[\omega_1 - \omega_2(t)]\,dt = \int_0^{T_2} \left(M_2 + \frac{M_1 - M_2}{T_2}\,t\right)\left(\omega_1 - \frac{a_2}{2T_2}\,t^2\right) dt =$$

$$= \int_0^{T_2} M_2\,\omega_1\,dt + \int_0^{T_2} \frac{M_1 - M_2}{T_2}\,\omega_1\,t\,dt - \int_0^{T_2} M_2\,\frac{a_2}{2T_2}\,t^2\,dt - \int_0^{T_2} \frac{M_1 - M_2}{T_2}\,\frac{a_2}{2T_2}\,t^3\,dt =$$

$$= M_2\,\omega_1\,T_2 + \frac{M_1 - M_2}{2}\,\omega_1\,T_2 - \frac{M_2}{6}\,a_2\,T_2^2 - \frac{M_1 - M_2}{8}\,a_2\,T_2^2 =$$

$$= \left(60 + \frac{48}{2}\right)\text{mkp}\ 26{,}2/\text{s}\ 0{,}89\ \text{s} - \left(\frac{60}{6} + \frac{48}{8}\right)\text{mkp}\ 16/\text{s}^2\ 0{,}89^2\ \text{s}^2 \approx$$

$$\approx (1960 - 202)\ \text{kpm} = 1758\ \text{kpm}\ .$$

Tehát

$$W''_\mu = (872 + 1758)\ \text{kpm} = 2630\ \text{kpm}.$$

Végül

$$W_\mu''' = W_\mu'' + \frac{1}{2}[P_1 - (P_2' + P_k')]\,T_3 =$$

$$= 2630\ \text{kpm} + \frac{1}{2}[2830 - (427{,}2 + 342)]\,\frac{\text{kpm}}{\text{s}}\,1{,}19\ \text{s} \approx$$

$$\approx (2630 + 1226)\ \text{kpm} = 3856\ \text{kpm}.$$

Ennek az eredménynek azonosnak kell lennie

$$W_\mu''' = W_1' - (W_2' + W_k') = [6200 - (1316 + 1030)]\ \text{kpm} \approx 3854\ \text{kpm}$$

értékkel, az eltérés a fel- és lekerekítésekből adódik.

Fenti értékekkel a $W_\mu = f(t)$ már közelítőleg felrajzolható. Pontosabb értékeket $W_\mu = W_1 - (W_2 + W_k)$ segítségével kaphatunk.

Végül hasonlítsuk össze a 8. ábrán látható és más módon kiszámított energia-értékeket számítási eredményeinkkel. Az összehasonlított adatok vonatkozzanak az indítási szakasz befejezésére.

A 8. ábra az [1] eredeti jelöléseivel tartalmazza az energiákat:

$$W_1'' = V_{t1} + L_{2P} + E + V_\Theta + V_P = (872 + 1316 + 1030 + 1030 + 1954)\ \text{kpm} = 6202\ \text{kpm},$$

ugyanakkor e tanulmány számításai összefoglalva:

$$W_1' = W_2' + W_k'' + W_\mu''' = (1316 + 1030 + 3854)\ \text{kpm} = 6200\ \text{kpm}.$$

Nyilvánvaló, hogy $W_2'' = L_{2P}$ és $W_k'' = E$, viszont

$$W_\mu''' = V_{t1} + V_\Theta + V_P = (872 + 1030 + 1954)\ \text{kpm} = 3856\ \text{kpm},$$

amelynek együttes értéke és változása érdekli elsősorban a szerkesztőt. A W_1'-ben észlelhető kis eltérés nem számottevő, oka a tizedesek elhanyagolásából származik.

E módszer ismeretében bonyolultabb indítási viszonyok is vizsgálhatók. Az M_1, M_2, ω_1 és ω_2 mérésével grafikus szorzással, és grafikus integrálással az α_2-, a P- és W-görbe, illetve görbék megszerkeszthetők.

IRODALOM

1. Vörös Imre: Gépelemek I. kötet Tankönyvkiadó, Budapest, 1958. 98. pont
2. Terplán Zénó: Gépelemek III. rész. (jegyzet) Felsőoktatási Jegyzetellátó. Miskolc, 1951.
3. Rötscher, F.: Maschinenelemente. II. k. 1929. 822/828. old.
4. Kollmann: Das Verhalten von Reibkupplungen. „Kupplungen." Vulkan-Verl. Essen. 1957. 5/12. old.

ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmány a súrlódó tengelykapcsolók indítási viszonyait a megszokott feltételek között, sőt azonos példaadatokkal [1, 2] tárgyalja, azzal a különbséggel, hogy az energiaváltozásokat a teljesítményváltozásokkal magyarázza.

TORZIÓSLENGÉSSEL KAPCSOLATOS CONTINUÁNS DETERMINÁNS NÉHÁNY TULAJDONSÁGA

Dr. BALOGH ARTÚR
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1961. május 2-án]

A torziószlengés önlengésszámainak kiszámításához determinánsegyenletet kell megoldani, amelynek alakja öt tömeg esetében a következő:

$$B_5 = \begin{vmatrix} w^2 - u_{11} & u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ u_{12} & w^2 - u_{12} - u_{22} & u_{22} & 0 & 0 \\ 0 & u_{23} & w^2 - u_{23} - u_{33} & u_{33} & 0 \\ 0 & 0 & u_{34} & w^2 - u_{34} - u_{44} & u_{44} \\ 0 & 0 & 0 & u_{45} & w^2 - u_{45} \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

ahol w a lengés körfrekvenciája,

$$u_{ik} = \frac{c_i}{I_k}, \tag{2}$$

ahol c_i a merevségi tényező, I_k a tömeg tehetetlenségi nyomatéka. Ennek dimenziója egyezik a szögsebességével tehát $1/\text{sec}^2$. Ebből következik, hogy a számításhoz az angol mértékegységeket is lehet használni minden átszámítás nélkül, de használhatjuk az

$$u_{ik} = \frac{1}{c_i I_k} \tag{3}$$

alakot is, amelynek dimenziója ismét a szögsebességével egyezik. Áttekinthetőség kedvéért az n-ed fokúra való kiterjesztést mellőzzük, mert ezzel csak felesleges módon a tárgyalás menetét megnehezítjük.

Az (1) determinánsegyenletnek néhány fontos tulajdonsága van, amelyek szétszórtan a Műszaki Tudományok Osztályának Közleményeiben és az Acta Technicában megjelentek, és ezért — úgy véljük — ajánlatos ezeket összefoglalóan ismertetni. A bizonyításokat természetesen elhagyjuk és hivatkozni fogunk a megfelelő közleményre. Ez az összefoglalás annál is inkább indokolt, mert a megjelent dolgozatokkal ezt a részt le is zárhattuk, és ezzel a determinánsegyenlet tulajdonságai áttekinthetően csoportosítva áll majd az olvasó előtt.

A [7] jelzésű dolgozatban levezetjük a következő összefüggést:

$$\begin{aligned} B_5 &= W_{445}\, B_4 - u_{34} u_{44} B_3 \\ W_{445} &= w^2 - u_{44} - u_{45}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

B-vel jelöljük a determinánst, az indexe a fokszáma. Teljes általánosságban:

$$B_n = W_{n-1,\,n-1,\,n}\,B_{n-1} - u_{n-2,\,n-1}\,u_{n-1,\,n-1}\,B_{n-2}. \tag{4a}$$

Tehát e determinánst két alacsonyabb fokú determináns felhasználásával ki lehet számítani, amit a későbbiekben fel is fogunk használni.

Ha pl. $B_5 = 0$, akkor

$$\frac{B_4}{B_3} = \frac{u_{34}\,u_{44}}{W_{445}}. \tag{5}$$

A [3] jelzésű dolgozatban az (1) determinánsegyenletet az ott megadott átalakításokkal a következő egyszerűbb alakra hoztuk:

$$B_5 = w^2 \begin{vmatrix} & & = B_2 & = B_3 & = B_4 \\ 1 & u_{12} & u_{22} & 0 & 0 \\ 1 & w^2 - u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & w^2 - u_{23} & u_{33} & 0 \\ 1 & 0 & w^2 & w^2 - u_{34} & u_{34} \\ 1 & 0 & w_2 & w^2 & w^2 - u_{45} \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

ahol bejelöltük egyúttal a 2, 3, 4 tömeg esetére érvényes determinánsokat: B_2, B_3, B_4.

Ugyanezen dolgozatban e determinánsegyenlet egy másik átalakítását is bemutatjuk, amelynek elrendezése szimmetrikus:

$$B_5 = w^2 \begin{vmatrix} 1 & u_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & w^2 - u_{12} & u_{22} & 0 & 0 \\ 1 & w^2 & w^2 - u_{23} & u_{33} & 0 \\ 1 & w^2 & w^2 & w^2 - u_{34} & u_{44} \\ 1 & w^2 & w^2 & w^2 & w^2 - u_{45} \end{vmatrix} = 0$$

E determinánsban jelentkező szabályszerűségeket kötővonallal emeltük ki és ez alapon a determinánst bármely tömegszám esetére felírhatjuk.

Az ismertetett átalakítások előnye akkor jelentkezik, ha a determinánst kifejtjük. Az (1) determináns kifejtésénél több egyenlő, de ellenkező előjelű

tagot kapunk, amely a rendezésnél kiesik. Ez a két alakított determináns kifejtésénél elmarad, ami — a kifejtés nehézségeit figyelembe véve — lényeges egyszerűsítést jelent. Természetesen e determinánsokat is — algebrai egyenlet alakra hozva — felhasználhatjuk a gyökök meghatározása után az önlengésszámok kiszámítására, és erre az idézett dolgozatban példát is találunk.

A determinánsegyenlet kifejtésénél jelentkező algebrai egyenlet tagszámát, sőt az egyes hatványok melletti tagok számát is meg lehet állapítani. A [8] munkánkban, felhasználva a (4), illetve (4a) egyenletet és 6 tömegű rendszer determinánsát, tehát B_6-ot kiszámítottuk B_5 és B_4 determinánsokból, és azt találtuk, ha a determinánsok fokszáma 1-el nő, akkor az algebrai egyenlet összes tagjainak száma megkétszereződik. Kimutatjuk, hogy amíg B_4 esetében a tagok száma $2^3 = 8$ és B^5-nél $2^4 = 16$, a B_6-nál $2^5 = 32$. És ez így folytatható, és általánosságban, ha a tömegek száma n, akkor a tagok száma 2^{n-1}. Ezen az alapon pl. 12 tömegű rendszernél a tagok száma 2048, ami természetesen felírhatatlan lenne, ha megfelelő jelölésekkel és egyszerűsítésekkel a gyakorlat számára megfelelő kurtitásokat nem lehetne elérni.

Ugyane dolgozatban az algebrai egyenlet egyes hatványai mellett levő tagok számára is kapunk felvilágosítást. Így pl. 5 tömegű rendszer esetében:

w^8 hatvány melletti tagok száma $\binom{4}{0} = 1$

w^6 „ „ „ „ $\binom{4}{1} = 4$

w^4 „ „ „ „ $\binom{4}{2} = 6$

w^2 „ „ „ „ $\binom{4}{3} = 4$

w^0 „ „ „ „ $\binom{4}{4} = 1$

összesen: $16 = 2^4$

És tényleg az ismert tétel szerint:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 2^4 = 16$$

6 tömegű rendszer esetében az egyes hatványok melletti tagok száma az algebrai egyenletben a következő:

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 = 32.$$

Az idézett dolgozatban felírtuk a hatványok melletti tagok számára a Pascal-féle háromszöget, amelynek segélyével tetszőleges tömegszámra nemcsak az egyes hatványokhoz tartozó tagszámokat, hanem egyúttal az egyenlet összes tagszámait meg lehet állapítani.

Az itt tárgyalt continuáns determináns kifejtése alkalmával kapott algebrai egyenletek, amelyek az önlengésszámok kiszámítására szolgálnak — mint említettük — olyan nagy tagszámúak és egy tagon belül is oly terjedelmesek, hogy azok gyakorlati szempontból nem használhatók az előírt számítások elvégzéséhez. Ez az állapot volt azután az oka annak, hogy számos megoldás került elő az irodalomban, amellyel e nehézséget elkerülni igyekeztek, több-kevesebb sikerrel. Pedig semmi akadálya nincs annak, hogy magát a karakterisztikus egyenletet felírhassuk tetszőleges tömegszám esetében is.

Ha a determinánst eredeti alakjában kifejtjük, tehát nem abban az alakban, mint az (1) alatt megadtuk, vagyis amidőn a determináns egyes sorait nem osztottuk el az abban a sorban levő tehetetlenségi nyomatékkal, a hatványok mellett fekvő egyes tagok a következő kifejezések szorzatából, illetve összegéből állnak:

$$c_k \cdot \cdot \cdot c_{n-1} \frac{I_k + I_{k+1} + \cdot \cdot \cdot + I_n}{I_k I_{k+1} \cdot \cdot \cdot I_n} = L_{k,K+1} \cdot \cdot \cdot n. \tag{8}$$

(8) kifejezésnél már megadtuk a jelölés módját, és ennek felhasználásával az [5] dolgozatban számos példán mutattuk be, hogy ily alapon — további egyszerűsítő jelölések alkalmazásával — a gyakorlatban használatos tömegszámokra a karakterisztikus egyenletet fel lehet írni.

A másik módszer abban áll, hogy a (8)-ban kijelölt műveleteket elvégezzük. Az ezzel kapcsolatos számításokat az [1] alatt találjuk. Ennek lényegét konkrét példán mutatjuk be:

$$\text{Példa:} \quad c_1 c_2 c_3 c_4 \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5}{I_1 I_2 I_3 I_4 I_5} = \tag{9}$$

$$= u_{11} / u_{22} (u_{33} ((u_{44} + u_{45})) + u_{34} u_{45}) + u_{23} u_{34} u_{45} / + u_{12} u_{23} u_{34} u_{45} .$$

Látszólag ezzel a jelöléssel meghosszabbítottuk volna a karakterisztikus egyenletet, azonban ha véglegesen felírjuk az így átalakított kifejezést, akkor oly további ismétlődések jelentkeznek, amelyeknek kihasználása újabb jelölésekkel lényegesen megrövidítik a karakterisztikus egyenletet. Az idézett értekezésben bevezettük a k és nagy betűkkel: A, B, C stb. kifejezéseket, amelyekkel azután a kijelölt célt elérhettük.

Kimutattuk, hogy az ekként jelölt kifejezéseket átnézetesen ábrázolhattuk a Pascal-féle háromszög felhasználásával, és ezzel a k és A, B, C stb. kifejezések azonnali felírását tettük lehetővé.

A gyakorlatban igen gyakran alkalmazzuk a torziólengéssel kapcsolatos számításokat olyan esetekben, amikor — mint pl. motoroknál — több tömeg és az ezzel kapcsolt merevségi tényezők egyenlőek. Ezen felül még számítanunk kell néhány független tömeggel is (lendkerék, generátor stb). Ezekre a különleges esetekre a Pascal-féle háromszög igénybevételével a karakterisztikus egyenletet azonnal fel lehet írni.

A motorgyártó üzemekben a hengerek mellett a független tömegek száma és elosztása rögzítettnek tekinthető, és így ezekhez az elrendezésekhez tartozó a torziólengés karakterisztikus egyenletének azonnali felírása semmi nehézséget nem okoz. Ezzel azután az önlengésszámokat az algebrai egyenlet gyökeinek megállapításával ki lehet számítani.

IRODALOM

1. Torziólengés önlengésszámának számítása a karakterisztikus egyenlettel. MTA Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei XV. kötet 1—4. szám.
2. A torziólengés önlengésszámának megállapítása új eljárás alapján. MTA Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei XVIII. kötet 1—4. szám.
3. A torziólengés determinánsegyenletének alkalmazása az önlengésszámok kiszámítására. XXV. kötet 1—4. szám. 1771. l.
4. Adalék a lengésekkel kapcsolatos számítások egyszerűsítésére. MTA Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei XXVII. kötet 3—4. szám.
5. Torziólengés karakterisztikus egyenlete együtthatóinak kiszámítása. MTA Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei XXVII. kötet 1—4. szám.
6. Ermittlung der Eigenschwingungszahlen bei Torzionsschwingung mit äusserer Dämpfung. Acta Technica, Tomus XIX. Fasciculi 1—2.
7. New Method for the calculation of the Natural Frequencies of Torsional Vibration. Acta Technica, Tomus XIX, Fasciculi 3—4., p. 311.
8. Karakterisztikus kifejezések közti összefüggés meghatározása torziós (kapcsolt) lengéseknél. MTA Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei XXVIII. kötet 1—4. szám.
9. Einiges über die Eigenschaften der charakteristischen Gleichung bei Torsionsschwingungen. Acta Technica, Tomus XXXII. Fasciculi 3—4.
10. Ein Neues Verfahren zum Ermitteln der Eigenschwingungszahlen von Torsionsschwingungen. Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure. 1955 No. 6.
11. Prof. Giovanni Scotto Lavina: Recenti metodi di calcolo delle vibraziona torsionali degli alberi rotanti, L'ingegnere, 1961 junius.
12. Dr. D. Csupor: Die Methode der natürlichen Teilung zur Austellung des Frequenzgleichung für die Torsionsschwingungen kontinuirlich belegter gerader Stäbe. Achiddstechnik 1957, hegt 21.

ÖSSZEFOGLALÁS

Az önlengésszámok megállapítása torziólengésnél oly matematikai feladathoz vezet amelynek megoldása egy determinánsegyenlet. Ennek a determinánsnak, amely egyébként a continuáns determinánsok sorába tartozik, tulajdonságait vezettük le abból a szempontból, hogy az eredmények felhasználásával és megfelelő jelölések bevezetésével a lengésre jellemző karakterisztikus egyenletet felírhassuk. Az ekként levezetett algebrai egyenlet gyökei adják egyszerű átszámítással az önlengésszámokat. Ezek a módszerek abban különböznek az eddig használt eljárásoktól, hogy a karakterisztikus determináns ismeretlen tulajdonságait használjuk fel az egyenlet felírásához.

A FÖLDALKÁLIKARBONÁTOK SZILÁRD OLDATAINAK KÉPZŐDÉSÉRE VONATKOZÓ VIZSGÁLATOK

WINTER ERNŐ
AZ MTA RENDES TAGJA
BUDINCSEVITS ANDOR és BÍRÓNÉ FRIGYES ÉVA

[Beérkezett 1961. május 12-én]

I.

Az oxidkatódok emissziós rétege több földalkálioxid szilárd oldatából áll. E célra a magfém felületére a földalkálifémek karbonátjainak megfelelő összetételű szilárd oldatait viszik fel és azt vákuumban történő izzítással földalkálioxidokból álló réteggé alakítják át.

Az oxidkatódok készítésének első lépése tehát a földalkálikarbonátok megfelelő összetételű szilárd oldatainak előállítása. Ez rendszerint úgy történik, hogy két (Ba-Sr), illetve három (Ba-Sr-Ca) földalkálifémnitrát oldatának keverékéből oldható karbonátok oldatával (pl. nátriumkarbonátoldattal) kicsapjuk az alkáliföldfémek karbonátjait. Ilyenkor az egyes földalkálikarbonátok izomorfiájának folyományaképpen nem az egyes karbonátok kristályai, hanem azok szilárd oldatai keletkeznek (1).

A tapasztalat azt mutatta, hogy akkor kapunk előnyös tulajdonságú oxidkatódokat, ha az alkáliföldfémkarbonátok előállításánál az alkáliföldfémnitrátok mennyisége nagyobb, mint amennyi a kicsapásra felhasznált Na_2CO_3 mennyiségének sztöchiometriailag megfelelne (2). Megállapítást nyert, hogy ekkor a keletkező kristályok felületén az alkáliföldfémek nitrátjaiból álló adszorbeált réteg alakul ki és ez megakadályozza az oldatban levő egyéb szennyezések adszorpcióját.

Az elektroncsőiparban tehát az alkáliföldfémkarbonátokat Ba-Sr- vagy Ba-Sr-Ca-nitrátok oldatának keverékéből állítják elő nátriumkarbonát- (ritkábban ammóniumkarbonát)-oldattal oly módon, hogy a kicsapáshoz használt nátriumkarbonát mennyisége a sztöchiometriai mennyiségnél kevesebb legyen.

A földalkálikarbonátok szilárd oldatainak belső és külső szerkezete, valamint kémiai összetétele befolyással van az oxidkatódok elektronemissziós tulajdonságára és élettartamára.

A kicsapás körülményeinek hatását a keletkező kristályok nagyságára és alakjára vonatkozóan elég széles körben tárgyalták (4). Az összetétel függését a kicsapás körülményeitől kevésbé vizsgálták, és a gyakorlatban sem veszik figyelembe, hogy a kicsapott alkáliföldfémkarbonátokban a fémek aránya

különbözhetik a nitrátoldatban levő fémek arányától, ha a kicsapásnál az alkáliföldfémek mennyisége sztöchiometriailag feleslegben van.

Jelen munkánkban azt vizsgáltuk, hogy az alkáliföldfémkarbonátok szilárd oldatainak összetétele miként függ a kicsapáshoz használt nátriumkarbonát relatív mennyiségétől.

II.

A földalkálikarbonátok előállításakor — ha két-, illetve három alkáliföldfémnitrát oldatából indulunk ki — a következő reakciók mennek párhuzamosan végbe:

$$Ba^{+} + CO_3^{-} = BaCO_3$$

$$Sr^{+} + CO_3^{-} = SrCO_3$$

$$Ca^{+} + CO_3^{-} = CaCO_3$$

A földalkálikarbonátok kis oldhatósága miatt a reakciótermék szilárd kristályok alakjában kiválik az oldatból (oldhatóságokat lásd: 1. táblázat), és a reakció egyensúlya gyakorlatilag teljesen a karbonátok képződésének irányában tolódik el.

I. táblázat

Az alkáliföldfémkarbonátok vízben való oldhatósági adatai és oldhatósági szorzatai[5]

	Oldhatóság g/l	Oldhatósági szorzat 25° C
$CaCO_3$	0,0153	$0{,}87 \cdot 10^{-8}$
$BaCO_3$	0,020	$0{,}81 \cdot 10^{-8}$
$SrCO_3$	0,011	$0{,}16 \cdot 10^{-8}$

Ha az alkáliföldfémnitrátokkal mól ekvivalens mennyiségű nátriumkarbonátot használunk, gyakorlatilag a teljes alkáliföldfémmennyiség kiválik karbonát alakjában az oldatból és így a csapadékban a fémek aránya nyilvánvalóan meg kell hogy egyezzék a fémek arányával a bemért nitrátokban.

Ha a kicsapásnál az alkáliföldfémionok feleslegben vannak a rendszerben, akkor a viszonyok sokkal bonyolultabbak. Az alkáliföldfémionok egy része karbonát alakjában kiválik az oldatból, másik része az oldatban marad. A csapadék komponenseinek aránya eltérhet a kiindulási nitrátoldat összetételétől.

Az alkáliföldfémek egyensúlyi eloszlását a szilárd- és folyadékfázis között, a tiszta alkáli földfémkarbonátok oldhatósági szorzatainak ismeretében exakt

módon számítani tudjuk, amennyiben az oldott fázisban a viszonyok ideálisak, és a csapadék nem szilárd oldat alakjában válik ki.

Ez esetben minden egyes alkáliföldfémion koncentrációja úgy alakul a visszamaradó anyalúgban, hogy megfeleljen az oldhatósági szorzattal meghatározott koncentrációnak. Az a komponens marad mindig túlnyomórészt az oldatban, amelynek karbonátja a vízben legjobban oldódik.

Ha a kiindulási nitrátoldatoknál a komponenseket ekvivalens arányban mértük le, akkor az az alkáliföldfém komponens válik ki elsősorban karbonát alakjában az oldatból, melynek vízben való oldhatósága a legkisebb. Nem ekvimoláris beméréskor a csapadék összetételét a komponensek bemért aránya és azok oldhatósági szorzata együttesen határozza meg.

A gyakorlatban az alkáliföldfémkarbonátok előállítása nem ideális viszonyok között megy végbe, és a kicsapáskor szilárd oldatok keletkeznek. Ezért az egyensúlyra vonatkozó fenti meggondolások csak közelítően vagy egyáltalán nem érvényesek. A sztöchiometriai mennyiségnél kevesebb nátriumkarbonáttal való kicsapás esetében az anyalúg és a csapadék egyensúlyi összetételének kiszámítása a tiszta komponensek oldhatósági szorzataiból nem lehetséges. A számítást csak akkor tudnánk elvégezni, ha ismernénk az ideális viselkedéstől való eltérés mértékét, illetve ismernénk az egyes földalkálikarbonátok oldhatósági szorzatát akkor, ha a szilárd fázis szilárd oldatokból áll.

Ha a kicsapás rövid ideje alatt nem tud kialakulni a termodinamikai egyensúlynak megfelelő eloszlás, a szilárd- és folyadékfázisban levő alkáliföldfémionok között, úgy az egyes komponensek kiválását az egyes komponensek feltehetően különböző kristályosodási sebessége fogja meghatározni.

Ha a kiindulási nitrátoldatban az egyes alkáliföldfém komponensek ekvimoláris arányban vannak, úgy elsősorban mindig az a komponens fog karbonát alakjában kiválni, amelynek kristályosodási sebessége a legnagyobb, és az marad túlnyomórészben vissza az anyalúgban, melynek kristályosodási sebessége a legkisebb.

Az előbbiek szerint az a hallgatólagos feltételezés, hogy a sztöchiometriai mennyiségnél kevesebb nátriumkarbonáttal kicsapott alkáliföldfémkarbonát csapadék összetétele megegyezik a kiindulási nitrátoldat összetételével, csak egyes speciális esetekben igaz. A viszonyok annyira bonyolultak, hogy a csapadék összetételének alakulását számítani nem tudjuk.

A gyakorlatban az alkáliföldfémkarbonátokat előírt összetételben kell előállítani. Ezért tűztük ki feladatul annak empirikus meghatározását, hogy miként függ az alkáliföldfémkarbonátok összetétele a kicsapáshoz felhasznált nátriumkarbonát relatív mennyiségétől.

III.

Kísérleti rész

Az utolsó bekezdés célkitűzéseinek megvalósítása céljából hat kísérletsorozatot végeztünk, amelyeknél hat különböző összetételű nitrátkeverék oldatából indultunk ki.

A hat nitrátkeverékoldat alkáliföldfém komponenseinek beállítani szándékolt mólaránya a II. táblázat második oszlopában látható.

II. táblázat

Kiindulási nitrátkeverékoldatok összetétele

Sorszám	Ba. Sr, Ca mólaránya (kb)	súly%			mól%		
		Ba	Sr	Ca	Ba	Sr	Ca
		elemzés szerint					
1	1—1—1	53,2	32,1	14,7	34,6	32,6	32,8
2	2—1—2	66	18,7	15,3	44,3	20,3	35,4
3	2—1—3	57	18,5	24,5	33,5	16,5	50,0
4	1—1—0	62,5	37,5	—	51,6	48,4	—
5	1—0—1	76,3	—	24,7	48.4	—	51,6
6	3—0—1	90	—	10	75	—	25

A vizsgálatok célja annak eldöntése volt, hogy

1. miként függ az alkáliföldfémkarbonát csapadék összetétele a kicsapáshoz felhasznált nátriumkarbonát mennyiségétől?

2. Megváltozik-e a csapadék összetétele az anyalúgban való állás folyamán?

1. A földalkálikarbonátok készítésének leírása

A kicsapás körülményeit, mint az oldatok hőmérsékletét, térfogatát, p_H-ját, a kicsapásra felhasznált nátriumkarbonátoldat térfogatát és a nitrátoldatok alkáliföldfémmennyiségre vonatkoztatott koncentrációját, minden egyes kicsapásnál szigorúan azonosnak tartottuk. Egy kísérletsorozaton belül a kicsapásra használt oldatok nátriumkarbonáttartalmát, különböző kísérletsorozatoknál a nitrátoldatok összetételét változtattuk. A kicsapás körülményeit úgy választottuk, hogy hasonlóak legyenek a katódbevonatokhoz használt alkáliföldfémkarbonátok készítésének körülményeihez.

A nitrátoldatok fémre vonatkoztatott töménysége 0,34 mól/l volt. Egy kicsapáshoz 2000 ml oldatot használtunk fel. Az egyes kísérletsorozatok nitrátoldatainak összetételét lángfotométeres módszerrel határoztuk meg (6). Az alkáliföldfémnitrátok ingadozó víztartalma miatt a nitrátoldatok összetétele

nem egyezett meg teljesen a bemérésből számítottal. Ezért egy kísérletsorozaton belül a négy párhuzamos kicsapáshoz a négy adagot együttesen mértük be, és csak a feloldás, szűrés és az oldat alkáli földfém tartalmának megelemzése után osztottuk négy egyenlő részre. A kiindulási nitrátoldatok elemzés szerinti összetételét súly- és mólszázalékban fémre vonatkoztatva, a II. táblázat 2. és 3. oszlopa tartalmazza.

III. táblázat

A kicsapásra használt nátriumkarbonátoldatok összetétele

Sztöchiom. mennyiség	30%—	60%—	80%—	100%-a
$NaCO_3$	21,5 g	42,9 g	57,3 g	71,5 g
Víz	500 ml	500 ml	500 ml	500 ml
NaOH	kb. 10 g	kb 10 g	kb. 10 g	kb. 10 g

A nátriumkarbonátoldatokat nem elemeztük meg, a nátriumkarbonát koncentrációját a bemérésből számítottuk. A p_H-t 9,4—9,5-re nátriumhidroxid hozzáadásával állítottuk be.

A kicsapásnál a nitrátoldat hőmérséklete 95 C°, a nátriumkarbonáté 70 C° volt. Minden esetben a nátriumkarbonátoldatot öntöttük a nitrátoldathoz. A keverést intenzív levegő átbuborékoltatással végeztük. A hozzáfolyatás ideje 4 sec. volt. Az összeöntés folyamán a csapadék nagy mennyiségben pillanatszerűen vált ki, utána a keverést további öt percig folytattuk, a folyadékot hűlni hagytuk, a csapadékot leülepítettük, az anyalúgban állni hagytuk, majd dekantáltuk.

A sókeverékek készítéséhez pro anal. vegyszereket és $3 \cdot 10^5$ Ohm cm fajlagos ellenállású, ioncserélővel előállított deszt. vizet használtunk fel.

2. Karbonátcsapadékok elemzése

A karbonátcsapadékok összetételét lángfotométerrel határoztuk meg (6).

A lángfotometriás elemzéshez néhány mg-nyi alkáliföldfémkarbonátot kvarctégelybe tettünk, 1/2 ml 0,5 norm. HNO_3-ban feloldottunk, majd infravörös lámpák alatt szárazra pároltunk. A szabad savak elűzése céljából a bepárlást háromszor ismételtük meg úgy, hogy ismételten egy-egy ml deszt. vizet öntöttünk a már bepárolt sókra. A harmadik bepárlás után minden egyes mintát deszt. vízzel három ml-re töltöttük fel és lángfotométerrel meghatároztuk az oldat Ba, Sr és Ca tartalmát.

A lángfotométeres elemzést (6) alatt idézett módszerrel végeztük. A

Ba-ot 4870 Å-ön,

Sr-t 4607 Å-ön,

Ca-t 4226 Å-ön határoztuk meg.

Lángfotométeres elemzéseknél az egyes komponensek mennyiségét fémre vonatkoztatva mikrogramban kaptuk. Ezeket a százalékos értékeket mól arányokra számoltuk át.

Az elemzés érzékenysége: 1 μg/ml báriumot, 0,2 μg/ml stronciumot, 0,1 μg/ml kalciumot $\pm$ 3%-os hibával tudtunk meghatározni. A mi esetünkben, ahol nem abszolút anyagmennyiségeket, hanem relatív százalékos összetételt kell meghatározni, az elemzési hibalehetőség ennél nagyobb, mivel az egyik komponens meghatározásában elkövetett hiba a többi komponens százalékos arányára kapott értékre is kihatással van.

IV.

Eredmények

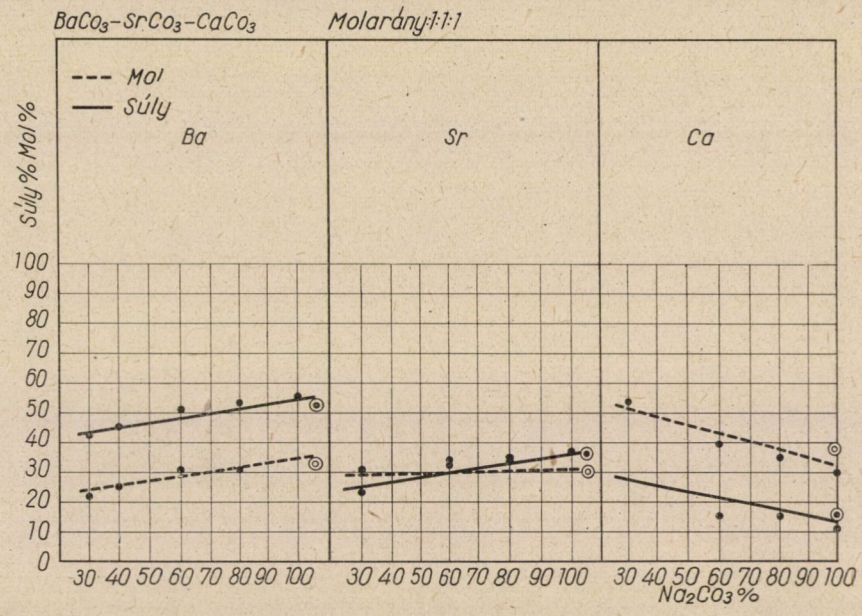
1. Annak szemléltetése céljából, hogy az adott összetételű Ba-Sr-Ca nitrátok keverékének oldatából készített alkáliföldfémkarbonát csapadékok összetétele hogyan függ a kicsapáshoz használt nátriumkarbonát relatív mennyiségétől, elemzési eredményeinket grafikusan ábrázoltuk. Egy grafikonon ábrázoltuk az azonos összetételű nitrátoldatokból kapott karbonátok csapadékainak összetételét, a kicsapáshoz használt nátriumkarbonát relatív mennyiségének függvényében. Az abszcissza tengelyre vittük fel a kicsapásra felhasznált nátriumkarbonát mennyiségét az equivalens mennyiség százalékában, míg az ordináta tengelyre felrakott számok a karbonátcsapadék egyes fémkomponenseinek százalékos mennyiségét tüntetik fel.

Az ordináta tengelyre rajzolt, bekarikázott pontokkal a kiindulási nitrátoldatok százalékos összetételét ábrázoltuk. A karbonátcsapadékok komponenseinek relatív arányát mólszázalékban és súlyszázalékban fémre vonatkoztatva adtuk meg.

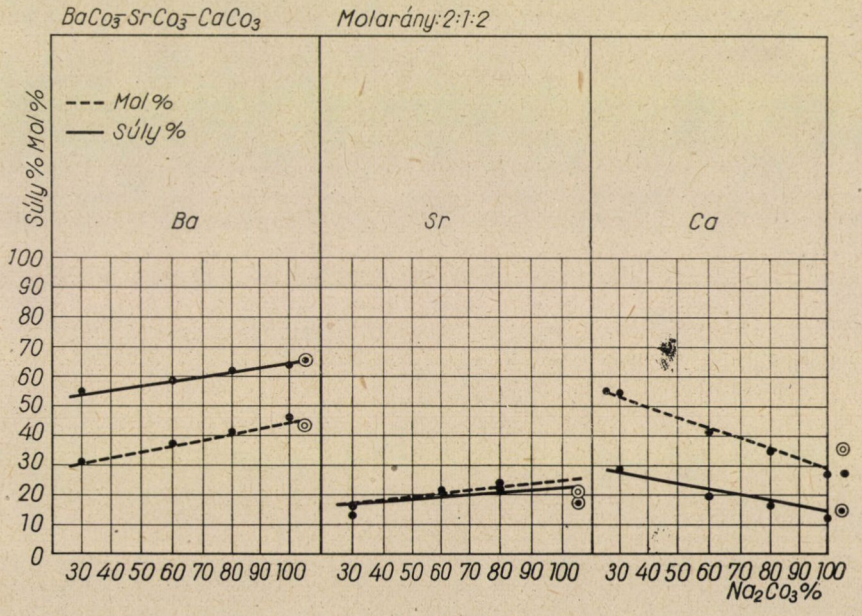
Az 1 mól bárium: 1 mól stroncium: és 1 mól kalcium arányú (továbbiakban 1 : 1 : 1), 1. sz. nitrátkeverékből készült hármaskarbonátok összetételét, súly, illetve mólszázalékban az 1. ábra ábrázolja.

A 2. sz. 2 : 1 : 2 molarányú nitrátkeverékből készült hármaskarbonátok összetételét a 2. ábra és a 3. sz. 2 : 1 : 3 sókeverékből készült karbonátcsapadékok összetételét, illetve komponenseinek relatív arányát a 3. ábra ábrázolja a kicsapó nátriumkarbonát mennyiségének függvényében.

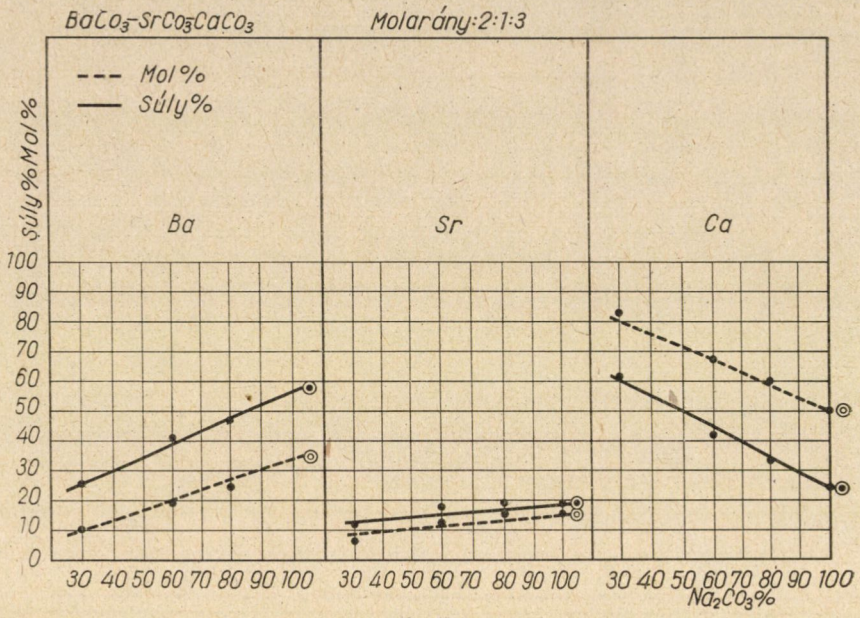
Az ábrákból elsősorban az állapítható meg, hogy az egyes komponensek aránya egyértelműen függ a nátriumkarbonát mennyiségétől az ekvivalens mennyiségig, a kicsapás egyéb körülményeit azonosan tartva. Mindhárom különböző összetételű nitrátoldatból kicsapott csapadék esetében a sztöchiometriailag szükségeshez képest kevés nátriumkarbonáttal kicsapott csapadék összetétele erősen eltér a nitrátoldat összetételétől. A csapadékban a kalcium


BaCo3–SrCo3–CaCo3
Molarány:1:1:1
--- Mol
— Súly
Ba
Sr
Ca
Súly % Mol %
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
30 40 50 60 70 80 90 100
Na2CO3 %

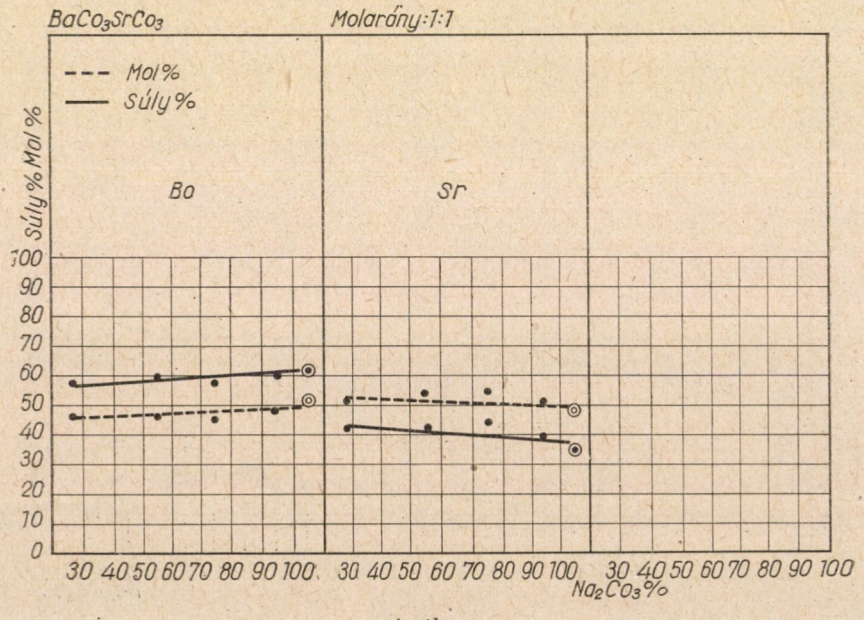
1. ábra


BaCo3–SrCo3–CaCo3
Molarány:2:1:2
--- Mol %
— Súly %
Ba
Sr
Ca
Súly % Mol %
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
30 40 50 60 70 80 90 100
Na2CO3 %

2. ábra

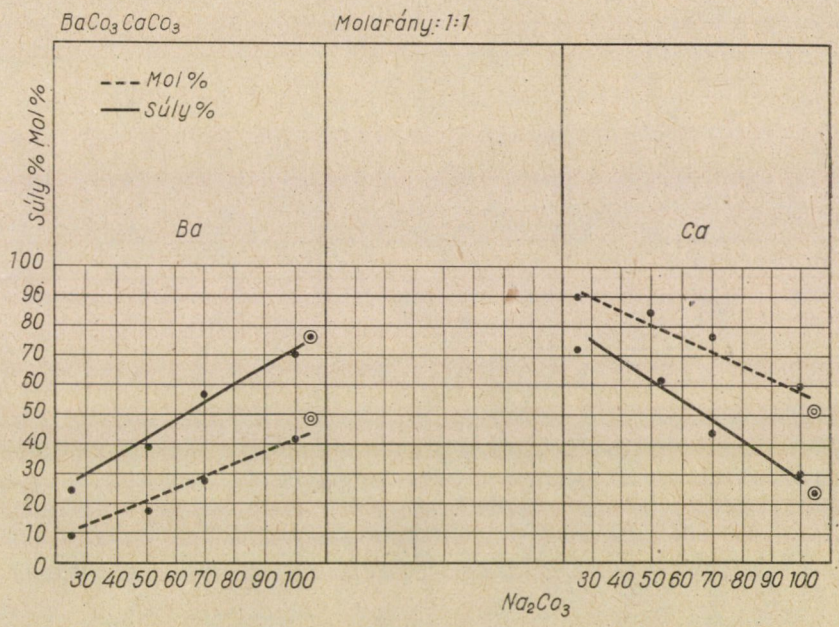

BaCO3-SrCO3CaCO3
Molarány:2:1:3
Mol%
Súly%
Súly% Mol%
Ba
Sr
Ca
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
30 40 50 60 70 80 90 100
Na2CO3%

3. ábra


BaCO3SrCO3
Molarány:1:1
Mol%
Súly%
Súly% Mol%
Ba
Sr
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
30 40 50 60 70 80 90 100
Na2CO3%

4. ábra

mennyisége sokkal nagyobb, a bárium mennyisége sokkal kisebb, mint a kiindulási nitrátoldatban. A stroncium százalékos mennyisége is függ a nátriumkarbonát relatív mennyiségétől, azonban sokkal kisebb mértékben. A kicsapáshoz használt nátriumkarbonát mennyiségét növelve, a komponensek aránya lineáris összefüggés szerint mindjobban megközelíti a kiindulási nitrátoldat összetételét, a kalcium aránya erősen csökken és a bárium aránya erősen növek-



5. ábra

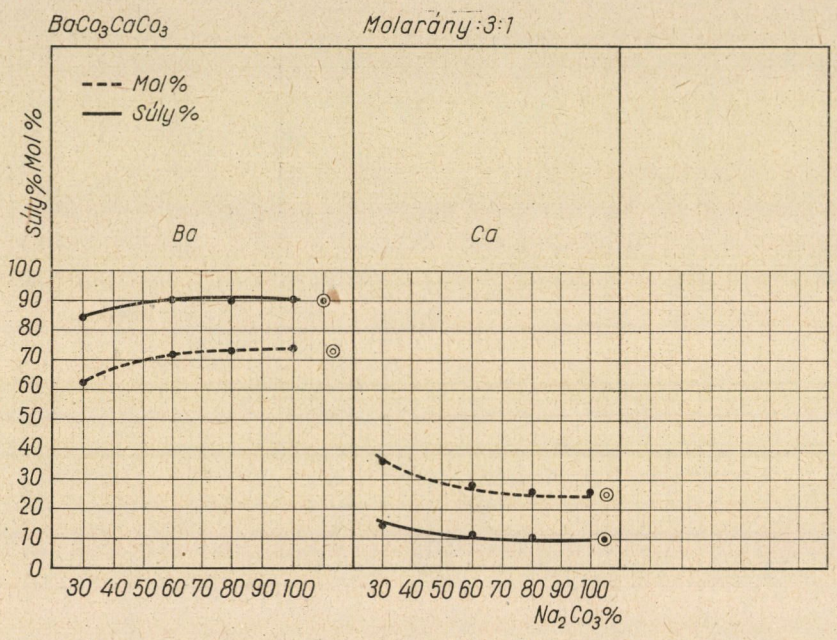
szik. Amikor a kicsapást az alkáliföldfémekkel ekvivalens mennyiségű nátriumkarbonáttal végeztük, a karbonátcsapadék összetétele gyakorlatilag megegyezett a kiindulási nitrátoldat összetételével.

A bárium-stroncium kettős karbonátok összetételét súly- és mólszázalékban a 4. ábra mutatja, a kicsapáshoz használt nátriumkarbonát relatív mennyiségének függvényében. Ekkor a karbonátcsapadék összetétele jóval kisebb mértékben függ a nátriumkarbonát relatív mennyiségétől. Az ekvivalenshez képest kevés nátriumkarbonáttal kicsapott karbonátcsapadékban a stroncium mennyisége valamivel több, a bárium mennyisége valamivel kevesebb, mint a kiindulási nitrátoldatban.

Az 5. ábra az 1:1 mólarányú bárium-kalcium kettős karbonát komponenseinek százalékos mennyiséget ábrázolja, a relatív nátriumkarbonátmennyiség függvényében. Ezen ábrák jellege ismét megegyezik a kalciumot tartalmazó hármas karbonátok összetételét ábrázoló 1. és 2. ábrákkal. Azonban az

összetételnek a nátriumkarbonát mennyiségétől való függése még sokkal kifejezettebb, mint az előbbi esetekben.

Az igen nagy fölöslegben báriumot tartalmazó 3 : 1 mólarányú bárium-kalciumnitrátkeverékből előállított karbonátcsapadék összetételének függését a kicsapó nátriumkarbonát relatív mennyiségétől a 6. ábra ábrázolja. Ezen ábra szerint az ekvivalensnél jóval kevesebb nátriumkarbonát esetében még



6. ábra

az ilyen nagy feleslegben báriumot tartalmazó nitrátoldatból is a kiváló karbonátcsapadék kalciumtartalma lényegesen nagyobb, mint az oldat kalciumtartalma, és csak az ekvivalens mennyiséget megközelítő kicsapás esetében közelíti meg a csapadékban a komponensek aránya a bemérési összetételt. Ez esetben a grafikon szerint az összefüggés nem lineáris.

Az egyes alkáliföldfém komponensek relatív kiválási készségét legjobban az ekvimoláris kiindulási nitrátoldatok esetében tanulmányozhatjuk, tehát az 1, 4, és 5 kísérletsorozatnál. Ekkor a komponensek egyenlő arányban vannak az oldatban, kiválásuk sorrendjét csak a „specifikus" kiválási készségük határozza meg, és nem az a körülmény, hogy a többi komponenshez képest feleslegben vannak-e az oldatban.

A fentiek szerint az alkáliföldfémkarbonátok kiválási készsége a Ca, Sr, Ba sorrendjében csökken. A Ba és Sr között nincs lényeges különbség,

a Ba és Ca között igen lényeges eltérés tapasztalható (lásd a II. táblázatot). A csapadék az általunk vizsgált összetételű nitrátoldatok esetében több kalciumot és kevesebb báriumot tartalmazott, mint a kiindulási nitrátoldat. Az eltérés annál nagyobb, mennél nagyobb kalciumtartalmú nitrátoldatból indultunk ki és mennél kevesebb az ekvivalenshez képest a kicsapásra használt nátriumkarbonát mennyisége.

A IV. táblázat tartalmazza a 2 : 1 : 3 mólösszetételű Ba-Sr-Ca nitrátoldatból, az ekvivalens Na_2CO_3 mennyiség 41%-ával kicsapott karbonátcsapadék, valamint a visszamaradó anyalúg elemzés szerinti Ba, Sr, és Ca tartalmát mólszámokban.

Az első sor a nitrátkeverékben levő alkáliföldfém mennyiségét mutatja mólban, a második sor a kivált karbonátcsapadék alkáliföldfémkarbonát tartalmát, a harmadik sor az anyalúgban visszamaradt mennyiségeket, a negyedik sor a csapadék és az anyalúgban levő alkáliföldfémmennyiségek összegét mólszámban, mely meg kell hogy egyezzék a nitrátoldat alkáliföldfémtartalmával. Látható, hogy az elemzési hiba kisebb mint két százalék. Megállapítható továbbá a táblázatban közölt eredményekből, hogy az összes földalkálimennyiség 41%-át csapva ki, kiválik a kalciummennyiség 65%-a és kb. $9 \cdot 10^{-2}$ mól Ca marad csak vissza az oldatban. A báriumnak csak 17%-a válik ki, s így $14 \cdot 10^{-2}$ mól bárium marad az oldatban.

IV. táblázat

2 : 1 : 3 Ba-Sr-Ca nitrátkeverékből 41,3% nátriumkarbonáttal kicsapott csapadék és anyalúg összetétele

	Ba 10^{-2} mól	Sr 10^{-2} mól	Ca 10^{-2} mól
Nitrátkeverék	17,42	9,9	27,6
Karbonátkeverék	3,06	1,85	17,82
Anyalúg	14,4	7,91	9,61
	17,48	9,77	27,43

2. A karbonátcsapadék összetételének változása az anyalúgban való állás folyamán

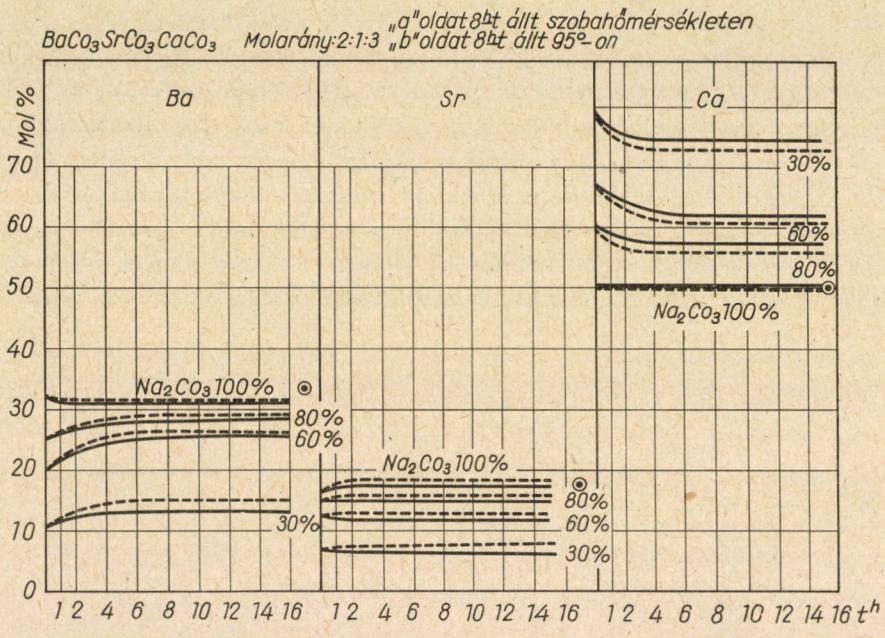
Eddigi kísérleteink mindig a 24 órát anyalúgban állt csapadékok elemzéseire vonatkoztak.

Kísérleteket folytattunk annak eldöntésére, hogy az anyalúgban állva megváltozik-e a csapadék összetétele, vagy az oldatok összeöntésekor azonnal a végleges összetételben válnak-e ki a kristályok.

E vizsgálatainkat úgy végeztük, hogy a három nitrátkeverékoldatból kiindulva az előbbiek szerint az ekvivalens nátriumkarbonátmennyiség 30, 60,

80 és 100%-ával alkáliföldfémkarbonátokat állítottunk elő. A két oldat összeöntése után a kiváló csapadékból a csapadék összmennyiségéhez képest kis mennyiségű mintát vettünk azonnali elemzésre. Ezután az anyalúgot és a csapadékot két egyenlő részre osztottuk, az egyik részét lehűlni hagytuk, és az időnként felkevert csapadékból két óránként mintát vettünk. A másik részét 9 órán át 90 C°-on tartottuk, és szintén az előbbiek szerint két óránként mintát vettünk belőle. A mintákat megelemeztük.

A csapadék összetételét az anyalúgban való állás idejének függvényeként a 7. ábra ábrázolja. Az ábrák végén levő bekarikázott pontok kiindulási nitrátoldat összetételét jelzik.



7. ábra

A folytonos vonal szobahőmérsékletű, míg a szaggatott vonal a meleg anyalúgban állt csapadék összetételét ábrázolja.

Látható, hogy a csapadék összetétele az anyalúgban való állás folyamán kismértékben megváltozik, a változás kb. öt százalék. Az összeöntés után azonnal kivett minta összetétele tér el legjobban a kiindulási nitrátoldat összetételétől, és a csapadék összetétele az anyalúgban állva olyan irányban változik meg, hogy megközelítse a kiindulási nitrátoldat összetételét. A változás az oldatok összeöntését követő két óra alatt végbemegy, és a további állás után a csapadék összetétele nem változik. A meleg anyalúgban állott csapadék összetétele változott meg nagyobb mértékben.

V.

A vizsgálatokból levonható következtetések

A fenti vizsgálatokból következtetéseket vonhatunk le, melyek az oxidkatódok előállítása és szerkezetének ismerete szempontjából jelentőséggel bírnak.

1. Megállapítottuk, hogy nátriumkarbonátoldattal alkáliföldfémnitrátok oldatának keverékéből előállított alkáliföldfémkarbonát csapadékban a fémek aránya csak akkor egyezik az alkáliföldfémnitrátoldat fémkomponenseinek arányával, ha a kicsapást a sztöchiometriailag szükséges nátriumkarbonátmennyiséggel végezzük.

Amennyiben az alkáliföldfémkarbonátok előállításakor a kicsapásnál az alkáliföldfémek feleslegben vannak, akkor a csapadék összetétele nemcsak a nitrátoldat alkáliföldfémtartalmától függ, hanem a kicsapáshoz felhasznált nátriumkarbonát relatív mennyiségétől is.

Mivel az oxidkatódok tulajdonságai erősen függenek a bevonat összetételétől, fontos, hogy ismert és adott összetételű alkáliföldfémkarbonátokat tudjunk előállítani, mely fenti ismeretek nélkül nem lehetséges.

2. Kimutattuk, hogy amennyiben a bárium-kalcium tartalmú alkáliföldfémkarbonátok szilárd oldatainak összetétele eltér a kiindulási nitrátok oldatának összetételétől, akkor az általunk vizsgált összetétel határok között (Ba: 33—75 mól%, Ca: 25—52 mól%) a csapadékban a kalcium és bárium aránya mindenkor nagyobb lesz, mint a kiindulási nitrátoldatban. Az eltérés annál nagyobb, mennél kisebb az ekvivalenshez viszonyítva a kicsapó nátriumkarbonátoldat mennyisége, és mennél nagyobb kalciumtartalmú nitrátkeverékoldatból indulunk ki.

Ismeretes, hogy az emissziós rétegek termikus emisszióját elsősorban azok báriumoxidtartalmának tulajdonítják, mert a bárium kilépési munkája a legkisebb. A stronciumoxid- és kalciumoxidkomponens az oxidkatód hőfokbírását javítja, biztosítja a magas hőfokon való kezelés lehetőségét, csökkenti a bevonat párolgását és kismértékben csökkenti a kilépési munkát is. Az előbbiek szerint tehát az aránylag nagy kalciumtartalmú alkáliföldfémkarbonát szilárd oldatok előállításakor az előállítás körülményeit úgy kell választani, hogy a keletkezett karbonátok báriumtartalma ne csökkenjen egy minimális szint alá. Minden esetben, amikor új összetételben akarjuk az alkáliföldfémkarbonátokat előállítani, szükséges, hogy a csapadék összetételét elemzéssel állapítsuk meg.

3. Az elvégzett kísérletekből következtethetünk az alkáliföldfémkarbonát elegykristályok struktúrájára is.

A csapadék elemzésénél minden esetben a kristályok átlagösszetételét kapjuk. Az elemzési eredményekből nem tudjuk megállapítani az egyes alkáli-

földfémionok kristályokon belüli eloszlását, illetve azt, hogy az egyes kristályok homogének-e összetétel szempontjából. E tekintetben csak feltevésekre támaszkodhatunk.

Elfogadott, illetve kimutatott tény, hogy a bárium-stroncium és kalcium sók oldatának keverékéből kicsapott alkáliföldfémkarbonátok nem külön-külön kristályosodnak, hanem szilárd oldatot képeznek.

Az alkáliföldfémkarbonátok szilárd oldatainak szerkezetére vonatkozóan OSZTAPCSENKO (1) végzett részletes, röntgenszerkezeti vizsgálatokat. Kimutatta, hogy együttesen lecsapott bárium-stronciumkarbonátok minden összetételben aragonit struktúrájú szilárd oldatot alkotnak, melynél a rácsparaméterek az összetétellel monoton változnak, a tiszta stronciumkarbonáttól a tiszta báriumkarbonátig. A bárium-kalciumkarbonát együttes lecsapásakor is a komponensek minden aránya mellett a karbonátok szilárd oldata képződik. Nagy, 80—100% báriumtartalom esetében aragonit kristályrácsú szilárd oldat, míg 55%-nál kisebb báriumtartalom esetében kalcit kristályrácsú szilárd oldat képződik. 80—55% Ba esetében két szilárd oldat van jelen, az egyik kalcit, a másik aragonit struktúrával. Bárium-stroncium és kalciumkarbonát együttes kicsapásakor 20—40% kalcium esetében szintén aragonit, míg 45—50% feletti kalciumtartalom esetében kalcit kristályrácsú szilárd oldat keletkezik.

OSZTAPCSENKO vizsgálatait nátriumkarbonáttal kicsapott karbonátokkal végezte.

Arra vonatkozóan, hogy a keletkező szilárd oldatok keresztmetszetük mentén homogén összetételűek-e, közvetlen vizsgálatokat végezni a részünkről használt módszer esetében igen nagy nehézségekbe ütközik. Az alkáliföldfémek nitrátjai és a szódaoldat összeöntésekor az oldatok igen nagy túltelítettségének következtében a kristályok pillanatszerű kiválása miatt a kristálynövekedés időbeli lefolyását mintavétellel, illetve elemzéssel követni nem lehet.

Könnyen belátható, hogy a két oldat összeöntésekor hasonló folyamatok mennek pillanatszerűen végbe, mint amit mi jelen kísérleteinknél mintegy lépésekre bontva vizsgáltunk. Amennyiben az alkáliföldfémkarbonátok előállításakor egyrészt az alkáliföldfémsók oldatához öntjük a karbonátoldatot, másrészt az összeöntés ideje nem elhanyagolható a csapadék kiválásának idejéhez képest, a folyamat elején a rendszerben mindig alkáliföldfém felesleg van, és a nátriumkarbonát mennyisége az összeöntés folyamán folyamatosan közelíti meg az alkáliföldfémekkel ekvivalens mennyiséget. A kicsapási folyamat elején, amikor a nátriumkarbonát mennyisége a sztöchiometriai mennyiségnél kevesebb, először az a komponens válik ki nagyobb mennyiségben, amelyiknek a kristályosodási hajlama a legnagyobb, ettől eltérő kiválási sorrendet csak akkor kapunk, ha az egyik komponenst igen nagy feleslegben mértük be. Szilárd oldat keletkezésekor a kristályok középpontjában helyezkedik el a korábban kivált komponens, míg a később kiváló komponens a

kristály felületéhez közeli rétegekben helyezkedik el. Az ionoknak a szilárd fázisban való igen kis mozgékonysága következtében jogosan tételezhető fel, hogy ez a keletkezéskor létrejött inhomogenitás a kicsapási folyamat további részében nem változik meg.

A fenti megállapítások természetesen általánosan érvényesek, akár ekvivalens, akár az ekvivalensnél kevesebb mennyiségű nátriumkarbonáttal végezzük az alkáliföldfémkarbonátok kicsapását.

A kristály összetételének inhomogenitásával főleg bárium-kalciumot tartalmazó kettős és hármas karbonát szilárd oldatok esetében kell számolnunk, mivel e két komponens kiválási készsége között van a legnagyobb eltérés. A részünkről vizsgált összetételű nitrátoldatok esetében a kiváló alkáliföldfémkarbonátkristályok középpontja az átlagos összetételnél mindig több kalciumot, míg a felülethez közeli rétegek több stronciumot és főleg több báriumot tartalmaznak.

Ha a kicsapást ekvivalens nátriumkarbonátmennyiséggel végezzük, akkor az összeöntés legvégén válik ki a bárium jelentős része, és így ez esetben a felület különösen feldúsul a báriumban.

Ha az ekvivalensnél kevesebb nátriumkarbonáttal végezzük a kicsapást, akkor az alkáliföldfémek nátriumkarbonát hiánnyal ekvivalens része visszamarad az anyalúgban, amelynek százalékos stroncium- és főleg báriumtartalma nagyobb, mint a kiindulási nitrátoldatban.

Ha a kivált, aránylag nagyobb százalékban kalciumot tartalmazó kristályokat az aránylag nagyobb százalékban báriumot tartalmazó anyalúgban állni hagytuk, a kristályok összetétele megváltozott (7. ábra). A kalcium százalékos aránya csökkent, a bárium százalékos aránya növekedett a csapadékban.

Ezt a jelenséget úgy magyarázzuk, hogy a nagy kalciumtartalmú csapadékkristályok oldattal érintkező részei nincsenek egyensúlyban a túlnyomórészt báriumot tartalmazó anyalúggal, jóllehet, a kristályok felülete a csapadék átlagösszetételénél nagyobb arányban tartalmaz báriumot. Az egyensúlyi eloszlás a csapadék és az oldott fázisban levő alkáliföldfémionok kicserélődése révén tud létrejönni. A szilárd fázisban azonban igen kicsi az ionok mozgékonysága, és így a kicserélődés csak a felületen, és a felülethez közeli rétegben megy végbe. A csapadék összetételének e változása egy idő után megáll. A meleg anyalúgban álló csapadék összetétele nagyobb mértékben változik meg az ionok magasabb hőmérsékleten való nagyobb mozgékonysága következtében.

A fenti meggondolások és a kísérletek eredményeinek alapján feltételezhetjük, hogy az ismertetett körülmények között előállított alkáliföldfémkarbonátok szilárd oldatainak összetétele a keresztmetszet mentén változik. A bárium- és kalciumtartalmú kettős- és hármaskarbonátok a részünkről vizsgált kiindulási nitrátoldatok esetében a felületükön és annak közelében a csapadék átlagösszetételénél több báriumot tartalmaznak.

Az összes kristálygócok képződése nem egyszerre történik. A két oldat összeöntésekor részben a meglevő kristálygócok növekednek tovább, részben azonban folyamatosan új kristálygócok is képződnak. Így az összetétel nemcsak az egyes kristályokon belül, hanem kristályszemcsénként is változik. Az egyes kristályszemcsék átlagos összetétele eltér egymástól és a csapadék átlagos összetételétől.

Az oxidkatód készítésekor az inhomogén karbonátokból keletkező oxidréteg szintén inhomogén. Az aktiválásnál (1) (hőkezelés 1000—1100 C°-on) célunk, hogy a diffúzió az üzeminél magasabb aktiválási hőfokon meggyorsuljon és kialakuljon az egész tömegében egyenletes összetételű, végleges kilépési munkával rendelkező emissziós réteg.

A felületi rétegek nagy báriumtartalma lehet egyik oka annak, hogy az oxidkatód készítésénél az elbontás alatt és közvetlenül az elbontás után a bárium erősebben párolog, mint a kiaktivált oxidkatód (3).

Jelen vizsgálatainknak az volt a célja, hogy az oxidkatódok alapanyagát képező alkáliföldfémkarbonátok előállításánál és felhasználásánál felmerülő néhány kérdést tisztázzunk.

Az irodalmi adatok szerint (l. I. táblázatot) a kalciumkarbonát oldhatósági szorzata nagyobb, mint a báriumkarbonáté. Eszerint az lenne várható, hogy a csapadékban a báriumkarbonát mólszázalékos aránya nagyobb lesz, mint az oldatban. Vizsgálatainkban ennek ellenkezőjét állapítottuk meg.

Az ellentmondás magyarázatául jogosan tételezhetjük fel, hogy az irodalomban található oldhatósági értékek tiszta karbonátokra vonatkoznak, míg a szilárd oldatokban levő földalkálikarbonátok oldhatósága eltér a tiszta karbonátokétól. Elképzelhető, hogy a $(Ba\text{-}Ca)CO_3$ szilárd oldatban levő $CaCO_3$ oldhatósága kisebb, mint az ugyanebben a rendszerben levő $BaCO_3$ oldhatósága.

A földalkálikarbonátok oldhatóságának meghatározása nem könnyű feladat. Az oldhatóságot a vízben levő minimális szénsavnyomok nagymértékben megváltoztatják, és ezért az irodalmi adatok helyességéhez is kétség férhet.

Az észlelt jelenségek további lehetséges oka a kristályosodási sebességek, illetve a kristálygócok növekedési sebességének különbözősége. Erre a lehetőségre a dolgozatban több helyen utaltunk.

Eddigi eredményeinket kísérleti tényeknek tekintjük. Az előző bekezdésekben ismertetett feltevések helyességét csak közvetlen kísérletekkel lehet bizonyossággal eldönteni. A karbonát szilárd oldatok keletkezésekor végbemenő fizikai-kémiai folyamatok tisztázása, valamint a kristályok szerkezetének megállapítása folyamatban van, és azokról további közleményekben óhajtunk beszámolni.

Végezetül köszönetet kívánunk mondani ÁDÁM János kartársunknak, akinek nagy része volt az alkáliák érzékeny lángfotométeres módszerének kidolgozásában [6], és aki e dolgozat lángfotométeres méréseinél mindig készséggel állott rendelkezésre. Ugyancsak köszönetet mondunk EGRI Lajosnak a kémiai munkák és VÁRALJAI Vilmosnénak a mérési eredmények értékelésének elvégzéséért.

IRODALOM

1. HERRMANN u. WAGENER: Die Oxydkathode. II. Teil. Barth. Verlag 1950. 27, 31. o. 62—70
OSZTAPCSENKO, F. P.: Izv. Akad. Nauk. Sz.Sz.Sz.R. **20**, 1105, (1956)
2. WINTER ERNŐ: Vákuumtechnika II. rész. Nehézipari Könyvkiadó, 1954. 59. o.
3. HERRMANN u. WAGENER: Die Oxydkathode, II. Teil, 1950. 197—207. o. Barth. Verlag
WINTER ERNŐ: Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztálya Közleményei. **25** (1960) 39
4. BENJAMIN, M. & ROOKSBY, H. P.: Philos. Mag. **15**, p 81. (1933) **61**, p 519. (1933)
BENJAMIN, M. HUCK, R. J. JENKINS. R. O. Proc. Phys. Soc. **50**, (1938) 345
BIGUENET, CH & MANO, C.: Le Vide, **1**, (1946) 137
AMAKASU, K. FUKASE, M. SEKIRE, E. TAKAHASHI, M. NOAKI, N. HIROTA, H. Le Vide, **51**, (1954) 43
5. HOGMAN, CH. D.: Handbook of Chemistry and Physics (Chem. Rubber Publ. Co. 1952-53) 460, 473, 585, 1558-59. o.
6. GERGELY Gy., VÁRADI F. P. Acta Physica, **5**, (1955) 51
ÁDÁM J. ETTRE K., GERGELY Gy., VÁRADI F. P.: Magyar Kémiai Folyóirat, **62** (1956) 223.

ÖSSZEFOGLALÁS

Megállapítottuk, hogy több alkáliföldfémnitrát oldatának keverékéből nátriumkarbonátoldattal kicsapott karbonátok szilárd oldatainak fémekre vonatkoztatott összetétele eltér a fémek arányától a nitrátoldatban. illetőleg csak akkor egyezik meg azzal, ha a kicsapást a sztöchiometriailag szükséges nátriumkarbonátmennyiséggel végeztük. Vizsgálatainkat a sztöchiometriailag szükséges nátriumkarbonátmennyiség 30, 60, 80, ill. 100%-ával hajtottuk végre.

A bárium- és stronciumkarbonát esetében az összetétel változása a kicsapásra használt nátriumkarbonát mennyiségének függvényében aránylag kicsiny. A szilárd oldatok báriumkarbonáttartalma 47 mól%-ról 50 mól%-ig változott, miközben a nátriumkarbonát mennyiségét az equivalens mennyiség 30%-áról—100%-ra változtattuk.

Ha az elektronemissziós szempontok szükségessé teszik, hogy a karbonátok készítésénél az alkáliföldfémnitrátokat feleslegben alkalmazzuk, az elmondottak szerint számolni kell azzal, hogy a karbonátok összetétele nem fog egyezni a bemért nitrátok mennyiségéből számított összetétellel.

A karbonátok kicsapásakor a felhasznált nátriumkarbonátmennyiség fokozatosan kerül a nitrátok oldatába. Vannak tehát időpontok, amikor a nitrátoldatban a sztöchiometriailag szükséges nátriumkarbonát mennyiségének 30, 60, 80, ill. 100%-a van, s így a karbonátcsapadék összetétele állandóan változik. Fel kell tehát tételezni, hogy az egyes kristályszemcsék összetétele más a kristály belsejében, mint a felülethez közel eső rétegekben. Fel kell tételezni továbbá azt is, hogy a kicsapás egész időtartama alatt képződnek új kristálygócok, és ezek összetétele más, mint a kicsapás korábbi szakaszaiban keletkező kristályoké.

Az oxikatódok emissziós rétege számára a szokványos módszerekkel készített alkáliföldfémkarbonátok tehát szilárd oldatok ugyan, de az egyes kristályszemcsék összetétele nem egyenletes a szemcse egész tömegében és a különböző kristályszemcsék összetétele sem azonos.

Valószínű, sőt bizonyosra vehető. hogy a szilárd oldatban levő alkáliföldfémkarbonátok oldhatósága lényegesen különbözik a tiszta karbonátok oldhatóságától, és ez szabja meg a kiváló szilárd oldatok összetételét. Feltehetően befolyása van ezenkívül az egyes karbonátok kristályainak különböző növekedési sebességeinek is.

Kísérleteink során kapott felismerések jelentőséggel bírnak az oxidkatódok fizikájában és gyártási eljárásában. Az oxidkatód elektronemissziója és kilépési munkája függ az emissziós réteg összetételétől. Az oxidkatód akkor éri el a végleges emissziós értékeket, ha az emissziós rétegben nincsenek koncentrációkülönbségek, illetőleg az oxidkatódot olyan hőkezelésnek vetjük alá, hogy a koncentrációkülönbségek diffúzió útján kiegyenlítődjenek. Az oxidkatódok emissziójának változása üzem közben részben a fenti okra vezethető vissza.

Az alkáliföldfémkarbonátok elemzését a Távközlési Kutató Intézetben kidolgozott lángfotométeres módszerrel végeztük.

FÜGGVÉNYEK ÁBRÁZOLÁSÁNAK ÚJ MÓDSZERE

(GEOMETROGRÁFIA)

Dr. BALOGH ARTÚR
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1961. május 17-én]

A *nomográfia* tudománya ismerteti azokat a módszereket, amelyekkel többváltozós függvényeket síkban lehet ábrázolni, mégpedig a kívánt pontossággal. Számos szakmunkában elméletileg és gyakorlati alkalmazásokkal megtaláljuk azokat az eljárásokat, amelyeket a nomográfia tudománya több évtizedes fennállása folyamán alkothatott. Talán azt is mondhatjuk, hogy ezen a téren sok újjal már alig fogunk találkozhatni, és úgy látszik, hogy azok a törekvések, amelyek újdonságokat és kiegészítéseket ismertetnek, inkább a meglevő eljárások rendszerezésének vagy tökéletesítésének lehet tekinteni.

A gyakorlatban — mégpedig elég gyakran — oly ábrázolási módszerekkel is találkozhatunk, amelyeket nem lehet a nomográfia módszerei közé sorolni, holott jogosultságuk azokéval kétségtelenül teljesen egyenértékű. Amellett jellemző még az is, hogy nomográfiai ismeretek teljesen feleslegesek, mert ezek a módszerek a mértani tételek egyszerű alkalmazásán alapulnak. Tekintettel azonban arra, hogy ezen ábrázolási módszernél a mértan kimeríthetetlen eljárásai és módszerei állnak rendelkezésre, számos esetben — megfelelő mértani összefüggések és szerkesztések alkalmazásával — a szóban forgó függvényt egyszerűbb módszerekkel lehet ábrázolni, mint amik a nomográfiából ismeretesek. A mértan nagyobb szerkesztési keretet bocsát rendelkezésre, és nem kell az ábrázoláshoz kiszemelt függvényt valamelyik ismert nomográfiai módszerbe — még nehézségek árán is — beskatulyázni.

Minthogy a mértani szerkesztések tárháza igen terjedelmes, az ábrázolandó függvény szerkezete szerint kell a helyes és legmegfelelőbb módszert kiválogatni és alkalmazni, ami nagy áttekintést és mértani ismereteket kíván. Ebből azonban következik, hogy ennél a módszernél, amelynél tehát mértani ismereteket alkalmaznak, a rendszerezés szinte lehetetlen.

Ezt a módszert *geometrográfia* névvel jelölhetjük. A következőkben néhány főleg az irodalomból vett példákon fogjuk e módszert bemutatni, amelyek mintául szolgálhatnak ilyen jellegű feladatok megoldásához.

Az ábrázolás fontosabb szempontjai

Az ábrázoláshoz kiszemelt kifejezést szükség szerint átalakítjuk. Lehetőleg oly alakot választunk — mert hiszen számos átalakításra lehetőség van —, amelynél a mértan anyagának legegyszerűbbje használható, illetve alkalmazható. Ebből már az is következik, hogy erre szabályt felállítani alig lehetne.

A következő lépés az ábrázoláshoz szükséges osztások (skálák) megállapítása és rögzítése. Sokszor azonban, ha osztáspapírokat használunk, amelyeket a legváltozatosabb kivitelben nyomdatechnikai pontossággal állítanak elő és beszerezhetők, az ilyen osztások megszerkesztése elmaradhat. Némelykor azonban az osztásváltás — amely nem más mint osztásátírás — jól használható az ilyen osztáspapírokon.

Minthogy a következőkben bemutatandó példákon a módszer lényegét kívánjuk ismertetni, a kifejezésekben előforduló mennyiségek jelentését mellőzzük.

1. Példa. A következő kifejezést ábrázoljuk (1. ábra):

$$v = k \sqrt[4]{\frac{1}{\delta s}} = \frac{3{,}14}{60} d n = v$$

E kifejezést átalakítjuk, mégpedig:

$$\frac{\sqrt[4]{s}}{\sqrt[4]{\frac{1}{\delta}}} = \frac{\frac{A}{n}}{d},$$

ahol $A = \frac{60\,k}{3{,}14}$ és k állandó.

Azonnal látható, hogy a kifejezés ebben az alakjában egyszerű arányossággal ábrázolható. E célra a milliméterpapírt használjuk. Berajzolunk egy derékszögű koordinátarendszert, amelynek kezdőpontja 0. A koordinátarendszer tengelyére 4 osztást helyezünk el, mégpedig:

$\sqrt[4]{s}$, amelyből osztásváltással s-t írunk,

$\sqrt[4]{\frac{1}{\delta}}$ ugyancsak osztásváltással δ-t írunk,

$\frac{A}{n}$, ahol A állandó, és így osztásváltással n-t írunk.

Ezekután adott δ, n és s-hez leolvassuk a d-t.

E példa alapján az itt bemutatott eljárással ábrázolható kifejezések általános alakja a következő:

$$f_1(x) f_2(y) = f_3(z) f_4(u),$$

ahol x, y, z és u a független változók.

2. Példa : A VDI Zeitschrift 1941. évfolyama 308. oldalán a következő kifejezést találjuk:

$$H = \frac{60\,k\,v_s}{60\,(1+k)\,s_w + k\,v_s\,T_u}\,.$$

E kifejezést átalakítjuk és az eredmény a következő:

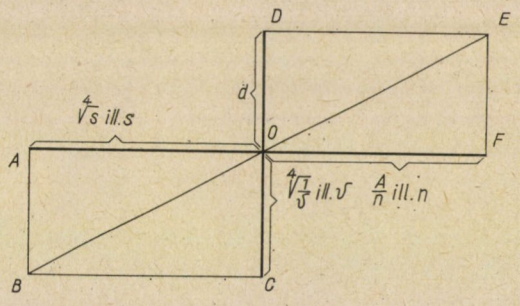
$$\frac{s_w}{v_s} = \frac{\frac{1}{H} - \frac{T_u}{60}}{K},$$

ahol $K = \frac{1+k}{k}$.

Az ábrázoláshoz milliméterpapírt használunk. Felveszünk egy koordinátarendszert, amelynek kezdőpontja 0.

A koordinátatengelyekre két osztást rakunk fel, mégpedig az egyenes mindegyik oldalára egyet-egyet. A 2. ábrán látható az osztások elrendezése. Osztásváltások: Tu és $\frac{T_u}{60}$; $\frac{1}{H}$, H és K, illetve, k között.

Megkeressük a k-nak megfelelő C pontot. Innen párhuzamost húzunk az abszcissza-tengellyel. Ide átvetítjük egy alul elhelyezett osztásról $\frac{T_u}{60}$-at. Kapjuk az E pontot. E pontot



1. ábra

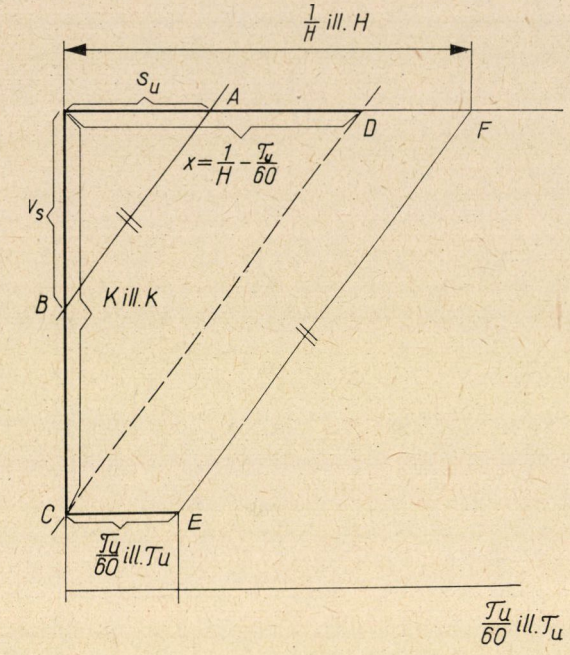
összekötjük a H értékkel, és a felvett s_w-hez ezzel az egyenessel párhuzamost húzunk, kapjuk a B pontot és egyúttal v_s-et.

Négy értékünk van, mégpedig: s_w, v_s, T_u és H. Ha a négy közül 3 ismeretes, bármelyik hiányzó érték megállapítható. Ekkor azonban némi szerkesztés is szükséges, mégpedig egy párhuzamos szerkesztés, ami nem okozhat nehézséget.

E példa alapján az itt bemutatott eljárással ábrázolható kifejezések általános alakja a következő:

$$f_1(x)f_2(y)f_3(z) = f_4(u) - f_5(v)\,,$$

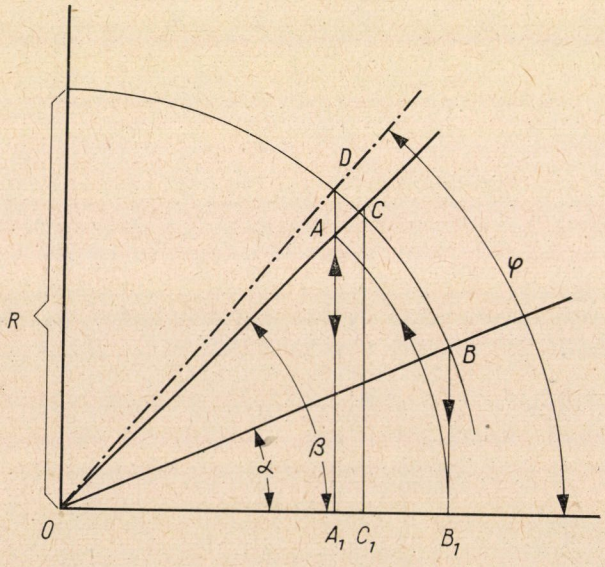
ahol x, y, z, u és v a független változók.



2. ábra

3. Példa : Az ábrázolandó képlet:

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)\,(1+\operatorname{ctg}^2\beta)}}.$$



3. ábra

Mindenekelőtt a képletet átalakítjuk, amikor a következőt kapjuk:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\,(1+\operatorname{tg}^2\beta)}},$$

ami a kitűzött képletnél lényegesen egyszerűbb.

Az ábrázolást a 3. ábrán mutatjuk be.

Felveszünk egy derékszögű koordinátarendszert 0 kezdőponttal, és kijelöljük a két felvett szöget α-t és β-t. Tetszőleges R sugárral kört húzunk, amely a kijelölt szögszárakat B és C pontokban metszi. B-t levetítjük az abszcisszára: B_1 pontot kapjuk. OB_1 sugárral körívet húzunk, és kijelöljük az A pontot. Az A pontból húzott és az abszcisszára merőleges egyenes kijelöli az R sugarú körön azt a D pontot, amelyhez tartozó OD szögszár megadja a keresett φ szöget.

Bizonyítás:

$$OB_1^2 + BB_1^2 = R^2 = OC_1^2 + CC_1^2 \quad \text{vagy:} \quad OB_1^2 + \frac{OB_1^2}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = OB_1^2(1+\operatorname{tg}^2\alpha) = R^2;$$

$$OC_1^2 + \frac{OC_1^2}{\operatorname{ctg}^2\beta} = OC_1^2(1+\operatorname{tg}^2\beta) = R^2, \; OC_1^2 = \frac{R^2}{1+\operatorname{tg}^2\beta}, \quad OB_1^2 = \frac{R^2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$OC_1 \cdot OB_1 = \frac{R^2}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\,(1+\operatorname{tg}^2\beta)}}, \quad \frac{OC_1}{R}\,\frac{OB_1}{R} = \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\,(1+\operatorname{tg}^2\beta}.$$

A következő háromszögek hasonlóságából következik:

$$OCC_1\Delta \sim OAA_1\Delta \quad \text{és} \quad \text{mert} \quad OA = OB_1$$

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OA_1}{OC_1} = \frac{OB_1}{R} \quad \text{és} \quad OA_1 = \frac{OB_1 OC_1}{R},$$

és így végül:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\,(1+\operatorname{tg}^2\beta)}} = \frac{OA_1}{R} = \frac{OA_1}{OD} = \cos\varphi$$

ami bebizonyítandó volt.

Az ábrázoláshoz a körhálósábrát lehet használni, amelyet különböző kivitelben készen meg lehet szerezni. A 4. ábrában ilyen körhálósábrát mutatunk be, amelyet a szóban forgó szerkesztés céljaira használtunk fel. Ilyenkor a körök szerkesztése elmarad, mert azokat az osztáspapíron megtaláljuk.

A 4. ábrában számpéldát is dolgoztunk ki, mégpedig: $\alpha = 20°$ és $\beta = 30°$, akkor leolvasunk $\varphi = 35°$-ot.

Ha a számítást elvégezzük, akkor

$$\operatorname{tg}^2 20° = 0{,}364^2 = 0{,}13; \; \operatorname{tg}^2 30° = 0{,}577^2 = 0{,}333.$$

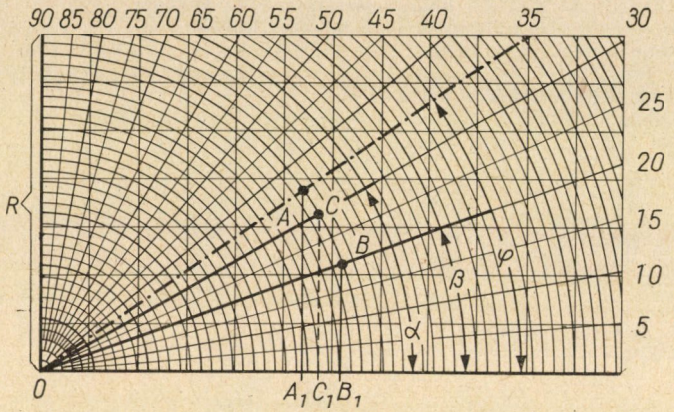
Ha ezen értékeket a $\cos\varphi$ kifejezésbe helyettesítjük, akkor $\cos\varphi = 0{,}82$ és valóban $\varphi = 35°$ adódik.

4. Példa. A VDI Zeitschrift 1943. évfolyam 510. oldalán a következő képletet találjuk:

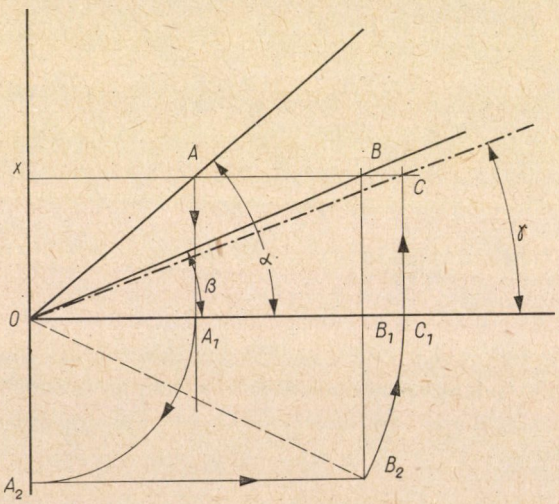
$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta = \operatorname{ctg}^2 \gamma.$$

E képlet ábrázolását az 5. ábrában látjuk.

Derékszögű koordinátarendszert választunk, amelynek kezdőpontja 0. Kijelöljük az α és β szögeket. X pontban az abszcisszatengellyel párhuzamost húzunk, és a kijelölt szögek



4. ábra



5. ábra

szárain kapjuk az A és B pontokat, amelyeket levetítünk az abszcisszára: A_1 és B_1 pontok. OA_1 sugárral körívet írunk le, és kijelöljük az A_2 pontot. OB_2 sugárral mint körívvel bemetszszük az abszcisszatengelyt, és az ekként kapott C_1 pontot felvetítjük az X pontban húzott párhuzamosra: így kapjuk a C pontot. OC szár kijelöli a keresett γ szöget.

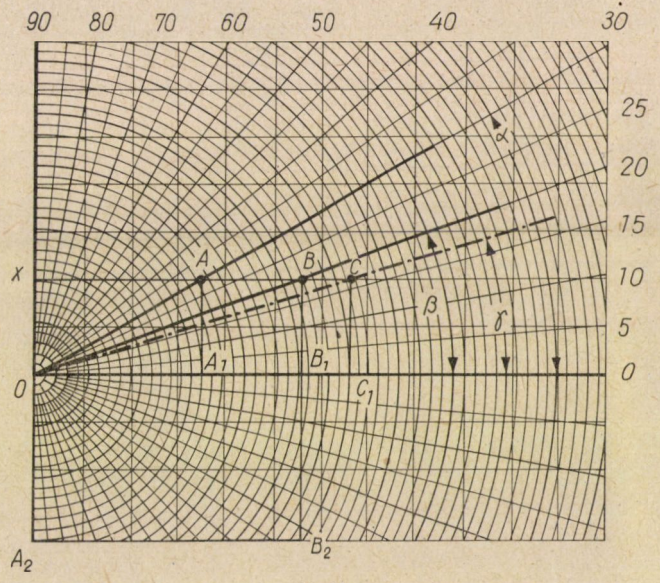
Bizonyítás:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{OA_1}{OX}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{OB_1}{OX}, \quad \operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta = \frac{OA_1^2 + OB_1^2}{OX^2},$$

de mert $OA_1 = OA_2$ és $OA_1^2 + OB_1^2 = OB_2^2$ és továbbá $OB_2 = OC_1$

$$\frac{OA_1^2 + OB_1^2}{OX^2} = \frac{OC_1^2}{OX^2} = \operatorname{ctg}^2\gamma\ .$$

Az 5. ábrában bemutatott szerkesztést átvittük a 6. ábrában oly körhálósábrába, amelynek még egyenletes osztása is van. E hálósábrán ezen felül



6. ábra

még szögbeosztás is található. Tehát mindent megtalálunk, ami a kitűzött feladat megoldásához szükséges, úgyhogy végeredményben a vonalakat követve megtaláljuk az eredményt.

A 6. ábrában számpéldát találunk, mégpedig $\alpha = 20°$, $\beta = 30°$ felvétellel

$$\operatorname{ctg}^2 30° + \operatorname{ctg}^2 20° = \operatorname{ctg}^2 17°,\ \gamma = 17°.$$

E példával kapcsolatos szerkesztés és a bejelölések a fentiek alapján ismertek.

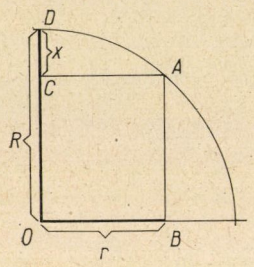
A derékszögű háromszög a geometrográfia keretében számos esetben használható az ismert összefüggések felhasználásával.

A következőkben néhány ide vonatkozó példát mutatunk be.

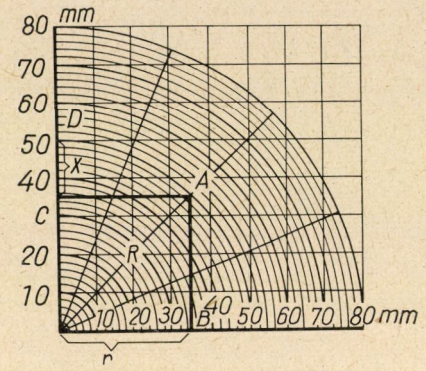
6. Példa. Ábrázoljuk a következő kifejezést:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

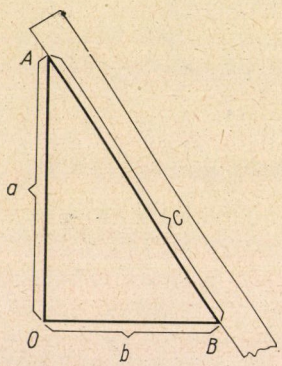
A 9. ábrában derékszögű koordinátarendszerben, amelynek kezdőpontja 0, felrakjuk a tengelyekre az a, és b hosszakat. Lemérjük az AB hosszat, és megkapjuk az eredményt.



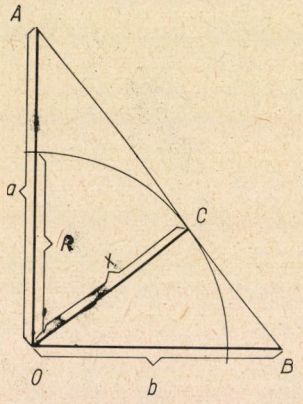
7. ábra



8. ábra



9. ábra



10. ábra

E célra tehát egy mérőosztást használunk, amelynek egyik kezdőpontját az A ponthoz illesztjük, és a másik végén leolvassuk az eredményt.

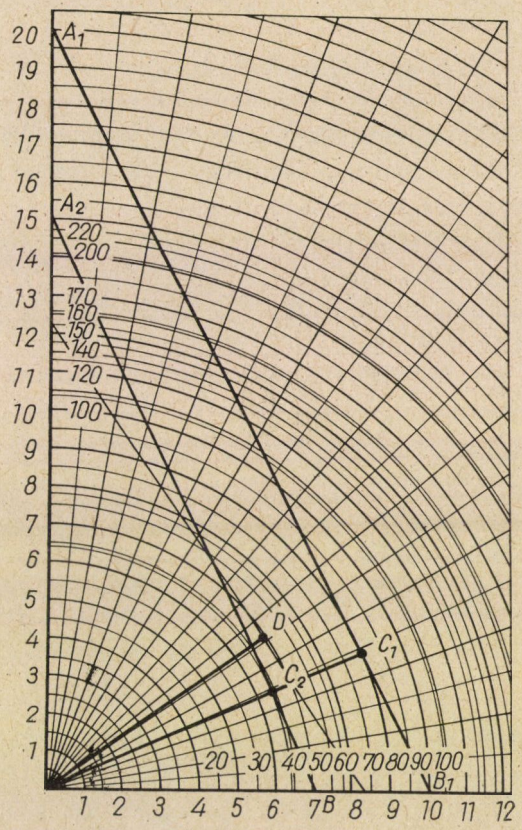
Ábrázoljuk a következő kifejezést:

$$x = \frac{a + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

E kifejezést a következő alakra hozzuk:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

A 10. ábrában derékszögű koordinátarendszert választunk 0 kezdőponttal. A tengelyekre felrakjuk az a és b hosszat. A végpontokat összekötjük egyenessel, és erre a 0 pontból merőlegest húzunk. Ennek levezetése azért felesleges, mert a derékszögű háromszögek ismert tulajdonsága.



11. ábra

Mindkét kifejezést a 11. ábrában látható osztáspapíron lehet ábrázolni. Megjegyzendő, hogy az összekötő egyenesre merőleges egyenes egyúttal a kör érintője, tehát ha meghúzzuk az összekötő egyenest, és kijelöltük az ezt érintő kört, akkor megkapjuk a keresett merőleges egyenest, és a hosszát a hozzá tartozó kör sugara adja meg.

Számpéldaként legyen $a = 20$, $b = 10$. Ha e két pontot összekötjük, az $x = 9$ sugarú kört érinti. A számítás szerint is:

$$\frac{1}{20^2} + \frac{1}{10^2} = \frac{1}{80} = \frac{1}{8{,}94^2}, \qquad \text{vagyis} \qquad x \simeq 9 .$$

Ezt az ábrát felhasználhatjuk reciprok értékek összegének ábrázolására, tehát:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{y}\,.$$

E célból a koordináta tengelyekre négyzetes osztást kell felrakni, amit az ábrán be is mutatunk (11. ábra D pont.) Számpélda:

$$\frac{1}{150}+\frac{1}{70}=\frac{1}{47{,}8}\,.$$

Természetesen a számpéldában előforduló értékeket a négyzetes osztáson kell kikeresni és egyenessel összekötni és az érintő kört kikeresni, majd az ennek megfelelő értéket ugyancsak a négyzetes osztáson kell leolvasni.

Az *osztáspapíroknak*, mint az az előző néhány példából is látható, nagy jelentőségük van az ábrázolásoknál, amit eddig alig méltányoltak. Sok fáradságot, időt és nehéz szerkesztési munkát kímélünk meg, ha a helyes és a célnak megfelelő osztáspapírt használjuk. Az osztáspapírokat nyomdatechnikai pontossággal állítják elő, amellyel egyenértékű rajzkészséggel elég ritkán találkozunk. Az osztáspapírokból már ma is nagy választék áll rendelkezésre, speciális cégek foglalkoznak gyártásukkal, és joggal feltehető, hogy a technika fejlődésével a szükségleteknek megfelelően még számos értékes és hasznos ily osztáspapír áll majd rendelkezésünkre. Legfontosabb e papírok használatánál az, hogy megkímélnek a szerkesztés legnehezebb részétől, mégpedig az osztás szerkesztésétől. Ma már különleges kívánságoknak megfelelő papírokat is gyártanak, és így remélhető, hogy mindazon módszerek, amelyeket ily osztáspapírokon lehet használni, minden egyéb nehézkes eljárást maga mögött fog hagyhatni. Kijelenthetjük, hogy az osztáspapírok nagy jövő előtt állnak.

5. *Példa.* Az ábrázolandó képlet:

$$x=R-\sqrt{R^2-r^2}$$

vagy más alakban rendezés után:

$$r^2-2Rx+x^2=0.$$

A betűk jelentősége az ábrázolás szempontjából nem jelentős.

Az ábrázoláshoz (7. ábra) derékszögű koordinátarendszert választunk 0 kezdőponttal. Az abszcisszára felrakjuk r-t (B pont). E pontot felvetítjük az R sugarú kör kerületére (A pont). E pontot kivetítjük az ordinátatengelyre (C pont). $CD = x$, a keresett hossz, amelyet mérőosztással állapíthatunk meg.

A 8. ábrában körhálósábra segítségével konkrét számpéldát oldottunk meg. Alapadatok: $R = 50$ mm és $r = 35$ mm, az eredmény tehát $x = 14{,}5$ mm.

ÖSSZEFOGLALÁS

A mértani szerkesztések kapcsolva a hozzá tartozó és megfelelő osztáspapírral, a kifejezéseket az eddigi módszereknél egyszerűbb eszközökkel lehet ábrázolni. Erre nézve néhány jellegzetes példát mutatunk be, amelyből látható a szerkesztés és az eljárás lényege. Egyébként az irodalomban elég gyakran találkozunk ilyen ábrázolásokkal. Azzal, hogy most ezt külön kiemeltük és névvel is illettük (geometrográfia), életképessé és gyakorlatilag is értékes tudománnyá léptettük elő. A geometrográfia szóképzése egyezik a *nomográfiáéval*. Azonban e szót már másutt is megtalálhatjuk, és ez alatt a geometriai szerkesztés értékelését értik — helytelenül. Mi e szónak ez alkalommal a helyes értelmet és jelentőséget megadtuk.

Köszönetemet fejezem ki Szőke Béla kollegámnak e tárgykörben adott néhány útbaigazításáért.

A HOSSZMÉRÉSES HÁLÓZATOK KIEGYENLÍTÉSÉHEZ

HALMOS FERENC
MTA GEODÉZIAI KUTATÓ LABORATÓRIUM, SOPRON

[Beérkezett 1961. június 29-én]

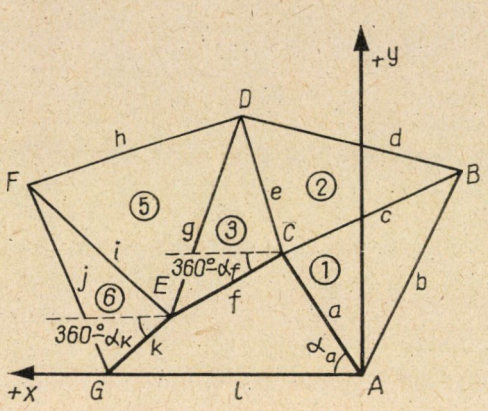
Az alappontok közötti távolságok elektronikus és elektrooptikai távmérőkkel való közvetlen megmérésével nagymértékben nőtt a hosszméréses hálózatoknak, illetőleg az ezek útján történő pontmeghatározásoknak a jelentősége. Az újabb irodalom már részletesen foglalkozik az alkalmazott eljárások pontosságvizsgálati kérdéseivel és kiegyenlítési problémáival is [1, 2, 3, 4, 5, 6, 14]. E vizsgálatok rámutatnak arra is, hogy a diagonálisok nélküli, tiszta hosszméréses hálózatok kiegyenlítése aránylag eléggé könnyű, miután a feltételes megfigyelések szerint megoldva a feladatot kevés egyenlet megoldásához vezet. A feltételi egyenletek felállítására vonatkozólag a fentebb jelzett irodalmi hivatkozásokban részletes tájékoztatást találunk. A különböző kiegyenlítési eljárásokat ismerteti és kritikailag vizsgálja WOLF [7]. Jelen tanulmányunk megírásához B. T. MURPHY-nek nemrégen megjelent érdekes tanulmánya adott indítékot [8].

A kiegyenlítésnek feltétele egyrészt, hogy fölös megfigyeléseink legyenek, másrészt a mért mennyiségek súlyát (pontossági mérőszámát) ismerjük, mely utóbbiak meghatározására TÁRCZY—HORNOCH tett javaslatot [9]. Amennyiben tiszta hosszméréses alaphálózatban a meghatározandó pontok számát n_P-vel, az összes mérések számát S-el jelöljük, miután egy pont két koordinátája és egy irányszög ismertnek tételezendő fel, a fölös megfigyelések számát (r) a következőképpen kapjuk:

$$r = S - 2n_P + 3. \tag{1}$$

Esetünkben az 1. ábrán vázolt hálózatnak megfelelően mértük az $a, b, \ldots l$ hosszakat, azaz $S = 12$, $n_P = 7$, tehát $r = 12-2,7 + 3 = 1$. Ennek az egy feltételi egyenletnek legegyszerűbb felírási módja az, hogy a hálózat pontjaiból egy sokszögvonalat választunk ki és ennek záróoldalára írjuk fel a megfelelő összefüggést [2]. Ennek érdekében vegyük fel például az A pontban a koordinátarendszer kezdőpontját és a $+x$ tengely legyen az A és G pont irányában. A számítási sokszögvonal haladjon az 1. ábrán vastagabban kijelölt a, f, k oldalak mentén (a b, d, h, j oldalak mentén haladó sokszögvonal is felhasznál-

ható lenne, de itt sokkal több szög lenne, ami a számítási munkát növelné és a számítás szempontjából nem valószínű, hogy kedvezőbb eredményekhez vezetne). Bár jelen esetben is felvetődhetik az a kérdés, hogy melyik feltételi



1. ábra

egyenlet kiválasztása a célszerűbb. Az 1. ábrán megjelölt irányszögek és a megfelelő oldalhosszak segítségével feltételi egyenletünk a következő lesz:

$$a \cos \alpha_a + f \cos \alpha_f + k \cos \alpha_k = l. \tag{2}$$

Az egyes irányszögek kiszámításához szükséges ismernünk, illetőleg meghatároznunk a mért hosszak segítségével a sokszögoldalak törésszögeit. A háromszög egyes szögeinek meghatározása céljából MURPHY az általános háromszögekre felírható cosinus tételből indul ki. A szögek jelölésénél alkalmazzuk mi is a részéről bevezetett jeleket, mely szerint C_1 alatt például az 1-es háromszög C csúcsához tartozó szöget értjük. Így

$$\cos C_1 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}. \tag{3}$$

Amennyiben a (3)-as egyenlet jobboldali tagjait megfelelő kis értékekkel megváltoztatjuk, úgy ennek következtében a képlet baloldalán álló szögérték megváltozását sorbafejtés útján tudjuk kifejezni. Általános formában:

$$F(x) = F(x_0) + \frac{\partial F}{\partial a} da + \frac{\partial F}{\partial b} db + \frac{\partial F}{\partial c} dc.$$

Ennek megfelelően a (3)-as összefüggés lesz:

$$\cos(C_1 + dC_1) = \cos C_1 \sin C_1 dC_1 =$$

$$= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a^2 c} da - \frac{b}{ac} db + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ac^2} dc =$$

$$= \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{b}{ac} \cos A_1 da - \frac{\sin C_1}{a \cdot \sin A_1} db + \frac{b}{ac} \cos B_1 dc. \tag{3a}$$

Ebből

$$dC_1 = -\frac{b}{ac} \cdot \frac{\cos A_1}{\sin C_1} da + \frac{1}{a \cdot \sin A_1} db - \frac{b}{ac} \frac{\cos B_1}{\sin C_1} dc. \tag{3b}$$

Mivel

$$\frac{b}{c \cdot \sin C_1} = \frac{1}{\sin A_1}; \quad \frac{1}{\sin A_1} = \operatorname{cosec} A_1; \quad \frac{b}{a \cdot \sin C_1} = \frac{1}{\sin B_1},$$

ezért a (3b) összefüggés a következőképpen írható

$$dC_1 = \frac{\operatorname{cosec} A_1}{a} db - \frac{\operatorname{ctg} A_1}{a} da - \frac{\operatorname{ctg} B_1}{c} dc. \tag{3c}$$

Miután a hosszakat közvetlenül mértük meg, ezek a kiegyenlítés folytán javításokat fognak kapni, azaz $db = v_b$ (b hossznak a javítása), $da = v_a$ és $dc = v_c$, a C_1 szög pedig kiegészítő értéket kap, tehát értelemszerűleg vezessük be a $dC_1 = \Delta C_1$ jelölést, akkor a (4) alatti összefüggéseket fogjuk kapni. Egyébként, ha meg nem mért hossz is van a kiegyenlítésben, akkor a megfelelő változás helyére a kiegészítő értéket kell az összefüggésbe behelyettesíteni. Tehát, a jelenlegi esetben

$$\Delta C_1 = \frac{\operatorname{cosec} A_1}{a} v_b - \frac{\operatorname{ctg} A_1}{a} v_a - \frac{\operatorname{ctg} B_1}{c} v_c, \tag{4a}$$

ahol ΔC_1 a C_1 szöghöz tartozó kiegészítő érték.

Hasonlóképpen a C_2, C_3, valamint az E_3, E_5, E_6 szögekre

$$\Delta C_2 = \frac{\operatorname{cosec} B_2}{c} v_d - \frac{\operatorname{ctg} B_2}{c} v_c - \frac{\operatorname{ctg} D_2}{e} v_e, \tag{4b}$$

$$\Delta C_3 = \frac{\operatorname{cosec} D_3}{e} v_g - \frac{\operatorname{ctg} D_3}{e} v_e - \frac{\operatorname{ctg} E_3}{f} v_f; \tag{4c}$$

$$\Delta E_3 = \frac{\operatorname{cosec} C_3}{f} v_e - \frac{\operatorname{ctg} C_3}{f} v_f - \frac{\operatorname{ctg} D_3}{g} v_g, \tag{4d}$$

$$\Delta E_5 = \frac{\operatorname{cosec} D_5}{g} v_h - \frac{\operatorname{ctg} D_5}{g} v_g - \frac{\operatorname{ctg} F_5}{i} v_i , \tag{4e}$$

$$\Delta E_6 = \frac{\operatorname{cosec} F_6}{i} v_j - \frac{\operatorname{ctg} F_6}{i} v_i - \frac{\operatorname{ctg} G_6}{k} v_k . \tag{4f}$$

Jelöljük még az egyes háromszögek gömbi szögfeleslegét ε_1, ε_2, ... stb.-vel és a mért hosszak segítségével meghatározott közelítő szögértékeket 0-ás indexszel különböztessük meg a végleges értékektől, akkor:

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \alpha_a \pm 180° + \Big\{360° - \Big(C_{1,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_1 + \Delta C_1 + C_{2,0} + \\ &+ \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \Delta C_2 + C_{3,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_3 + \Delta C_3\Big\} = \\ &= \alpha_a \pm 180° + \Big\{360° - \Big(C_{1,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_1 + C_{2,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \\ &+ C_{3,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_3\Big) - (\Delta C_1 + \Delta C_2 + \Delta C_3)\Big\}, \end{aligned} \tag{5}$$

továbbá:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_f \pm 180° + \Big\{360° - \Big(E_{3,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_3 + E_{5,0} + \\ &+ \frac{1}{3}\varepsilon_5 + E_{6,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_6\Big) - (\Delta E_3 + \Delta E_5 + \Delta E_6)\Big\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Behelyettesítve ezeket az értékeket a (2) egyenletbe és figyelembe véve a hosszaknak megfelelő javításait is (vesszős értékekkel különböztetjük meg a mért hosszakat a kiegyenlítettektől), a beillesztett sokszögvonalra ismert sorbafejtés alapján az alábbiakat kapjuk:

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta X^\circ_{A,C}}{a'} v_a + \frac{\Delta X^\circ_{C,E}}{f'} v_f + \frac{\Delta X^\circ_{E,G}}{k'} v_k - \Delta Y^\circ_{A,C}(\Delta C_1 + \Delta C_2 + \Delta C_3) - \\ &- \Delta Y^\circ_{C,E}(\Delta E_3 + \Delta E_5 + \Delta E_6) + \{\Delta X^\circ_{A,C} + \Delta X^\circ_{C,E} + \Delta X^\circ_{E,G}\} = l' + v_l, \end{aligned} \tag{7}$$

ahol $\Delta X^\circ_{A,C}$, $\Delta Y^\circ_{A,C}$ a közelítő értékek alapján meghatározott koordinátakülönbségek.

A ΔC_1, ΔC_2, ..., ΔE_3, ΔE_5, ... értékeket a (4) összefüggésekből behelyettesítve a következő javítási egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{\Delta X^{\circ}_{A,C} + \operatorname{ctg} A_{1,0}\cdot \Delta Y^{\circ}_{A,C}}{a'}\right) v_a - \frac{\operatorname{cosec} A_{1,0}\cdot \Delta Y^{\circ}_{A,C}}{a'} v_b +$$

$$+ \frac{(\operatorname{ctg} B_{1,0} + \operatorname{ctg} B_{2,0})\,\Delta Y^{\circ}_{A,C}}{c'} v_c - \frac{\operatorname{cosec} B_{2,0}\cdot \Delta Y^{\circ}_{A,C}}{c'} v_d +$$

$$+ \left(\frac{(\operatorname{ctg} D_{2,0} + \operatorname{ctg} D_{3,0})\,\Delta Y^{\circ}_{A,C}}{e'} - \frac{\operatorname{cosec} C_{3,0}\cdot \Delta Y^{\circ}_{C.E}}{f'}\right) v_e +$$

$$+ \left(\frac{\Delta X^{\circ}_{C,E} + \operatorname{ctg} E_{3,0}\cdot \Delta Y^{\circ}_{A,C} + \operatorname{ctg} C_{3,0}\cdot \Delta Y^{\circ}_{C,E}}{f'}\right) v_f +$$

$$+ \left(\frac{(\operatorname{ctg} D_{3,0} + \operatorname{ctg} D_{5,0})\,\Delta Y^{\circ}_{C,E}}{g'} - \frac{\operatorname{cosec} D_{3,0}\cdot \Delta Y^{\circ}_{A,C}}{e'}\right) v_g - \tag{8}$$

$$- \frac{\operatorname{cosec} D_{5,0}\cdot \Delta Y^{\circ}_{C,E}}{g'} v_h + \frac{(\operatorname{ctg} F_{5,0} + \operatorname{ctg} F_{6,0})\,\Delta Y^{\circ}_{C,E}}{i'} v_i -$$

$$- \frac{\operatorname{cosec} F_{6,0}\cdot \Delta Y^{\circ}_{C,E}}{i'} v_j + \left(\frac{\Delta X^{\circ}_{E,G} + \operatorname{cosec} G_{6,0}\cdot \Delta Y^{\circ}_{C,E}}{k'}\right) v_k -$$

$$- v_l + \sum_{A}^{G} \Delta X^{\circ} - l = 0 .$$

A (8) alatti kifejezésben elegendő az együtthatókat logarléccel meghatározni, azaz a megfelelő tagokat akár egy mérethelyes vázrajzról megfelelő pontossággal lemérhetjük, csupán a tiszta tagban előforduló $\sum_{A}^{G} \Delta x^{\circ}$ értékeket kell pontosan kiszámítani. Itt természetesen feltételezzük a logarléccel történő számításoknál, hogy a javításokat csupán három értékes számjegy pontossággal kívánjuk meghatározni. Megjegyezzük, hogy a ctg és cosec összefüggések helyett egyszerűbb úton is kapható értékeket helyettesíthetünk, melyekre még a későbbiekben vissza fogunk térni.

Javítási egyenletünk általános alakban írva:

$$A_a \cdot v_a + A_b \cdot v_b + A_c \cdot v_c + \cdots + L_A = 0. \tag{9}$$

A normálegyenlet, miután valamennyi megfigyelést egyenlő súlyúnak vesszük:

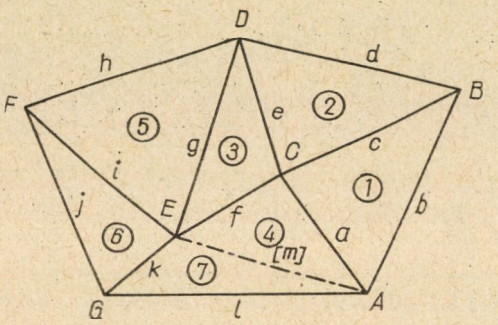
$$[A\,A]\,k + L_A = 0\,(10a)\,;\, k = -\frac{L_A}{[A\,A]}. \tag{10}$$

Számításainknál jelen esetben feltételezzük, hogy az egyes mérések egyenlő súlyúak. A k korelláta ismeretében már számíthatók az egyes javítások,

valamint az egyes megfigyelések középhibája is, mert

$$\begin{aligned} v_a &= A_a \cdot k \\ v_b &= A_b \cdot k \\ v_c &= A_c \cdot k \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \text{és} \qquad \mu_0 = \pm \sqrt{\frac{[v\,v]}{r}}. \tag{11}$$

Amennyiben a kiegyenlítés útján a 2. ábrán eredményvonallal rajzolt



2. ábra

$[m]$ oldal hosszát is meg kívánjuk határozni, akkor az alább ismertetendő háromféle eljárás valamelyikével dolgozhatunk.

1. Az előbbi kiegyenlítés folytán kapott végleges hossz- illetőleg szög-értékek segítségével a cos-tétellel számítjuk $[m]$ értékét és ha szükség van rá, a függvény függvénye középhiba képletével meghatározhatjuk ennek kiegyenlítés utáni középhibáját is, mert

$$\frac{1}{P_{[m]}} = [ff] - \frac{[Af]^2}{[AA]}. \tag{12}$$

2. Eljárhatunk úgy is, ahogy azt MURPHY bemutatta, azaz kifejezzük a C pont körül felírható horizontzárlati egyenletből az ismeretlen C_4 szöget, ezzel kifejezhetjük az $[m]$ értékét, mivel

$$[m]^2 = f^2 + a^2 - 2af\cos C_4, \tag{13}$$

majd az így kapott $[m]$-et behelyettesítjük az E pont körül felírható teljes zárlati egyenlet megfelelő helyeire, s most ennek kielégítésével visszafelé határozzuk meg mind az $[m]$, mind pedig C_4 végleges értékét. Ha figyelembe vesszük, hogy itt a közelítő értékek megfelelő felvétele mellett a végleges felté-

teli egyenlet együtthatóit csak fokozatos áthelyettesítés és összevonás útján kapjuk, máris belátjuk, hogy a számítási munka eléggé megnövekszik az előzőhöz képest. Amennyiben még az $[m]$ kiegyenlítés utáni középhibáját is ismerni akarjuk, hasonló számításokat kell elvégezni, mint ahogy azt a (12) összefüggés mutatja.

3. Ezért, ha a meghatározás szempontjából olyan hossz bevezetéséről van szó, melyet a továbbiakban különlegesen használunk fel és megkívánjuk határozni azt is, hogy mennyi a kiegyenlítés folytán adódó pontosságnövekedés a keresett hosszban, célszerűbb ezt az értéket mint meg nem mért ismeretlent bevinni a kiegyenlítésbe, amelyre TÁRCZY—HORNOCH is már felhívta a figyelmet ([3], 417. o.). Ezzel a feladat megoldása átmegy a „Feltételes megfigyelések kiegyenlítése meg nem mért ismeretlenekkel" c. csoportra. A megoldás az előzővel szemben azért előnyös, mert közvetlenül megadja az ismeretlen értékét és ezenfelül megkapjuk az ismeretlen súlyát is a normálegyenletek lefejtése után. A közbeeső számítási műveletek sem növekednek, mert a normálegyenletek felállításával és megoldásával kapcsolatos munkatöbblet az előbbinél a fokozatos behelyettesítéseknél jelentkezik, illetve az ismeretlenek utólagos kiszámításánál.

Ha az $[m]$ hosszat mint meg nem mért ismeretlent vezetjük be a kiegyenlítésbe, úgy a feltételi egyenletek száma:

$$r = S - 2n_P + 3 + 1 = 2\,. \tag{14}$$

A két független feltételi egyenletet célszerű a C és E pontban szereplő horizontzárlatra felírni.

$$\sum_{n=1}^{n=4}\left(C_{n,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_n + \Delta C_n\right) = 360^\circ \tag{15a}$$

és

$$\sum_{m=3}^{m=7}\left(E_{m,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_m + \Delta E_m\right) = 360^\circ. \tag{15b}$$

Ezeknek a felállításához szükségünk lesz még a (4)-ben nem szereplő szögértékekre is. Analogikusan a megfelelő összefüggéseket ezekre is felírhatjuk. A sorbafejtéseknél $[m]^\circ$ jelentse az $[m]$ bevezetett közelítő értékét és Δm a kiegyenlítésnél adódó kiegészítő értéket. Tehát a 4-gyel jelölt háromszög alapján, ha a meg nem mért hossz változása helyére a (3c) képletbe a kiegészítő értéket helyettesítjük be:

$$\Delta C_4 = \frac{\operatorname{cosec} E_{4,0}}{f'}\,\Delta m - \frac{\operatorname{ctg} E_{4,0}}{f'}\,v_f - \frac{\operatorname{ctg} A_{4,0}}{a'}\,v_a\,, \tag{16a}$$

$$\Delta E_4 = \frac{\operatorname{cosec} A_{4,0}}{[m]^\circ}\,v_a - \frac{\operatorname{ctg} A_{4,0}}{[m]^\circ}\,\Delta m - \frac{\operatorname{ctg} C_{4,0}}{f'}\,v_f\,, \tag{16b}$$

és a 7-el jelölt háromszög alapján:

$$\Delta E_7 = \frac{\operatorname{cosec} G_{7,0}}{k'} v_l - \frac{\operatorname{ctg} G_{7,0}}{k'} v_k - \frac{\operatorname{ctg} A_{7,0}}{[m]^0} \Delta m . \tag{16c}$$

A (4) és (16)-beli értékeket behelyettesítve a (15) összefüggésekbe nyerjük:

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{\operatorname{ctg} A_{1,0}}{a'} + \frac{\operatorname{ctg} A_{4,0}}{a'}\right) v_a + \frac{\operatorname{cosec} A_{1,0}}{a'} v_b - \left(\frac{\operatorname{ctg} B_{1,0}}{c'} + \right. \\ &\left. + \frac{\operatorname{ctg} B_{2,0}}{c'}\right) v_c + \frac{\operatorname{cosec} B_{2,0}}{c'} v_d - \left(\frac{\operatorname{ctg} D_{2,0}}{e'} + \frac{\operatorname{ctg} D_{3,0}}{e'}\right) v_e - \\ &- \left(\frac{\operatorname{ctg} E_{3,0}}{f'} + \frac{\operatorname{ctg} E_{4,0}}{f'}\right) v_f + \frac{\operatorname{cosec} D_{3,0}}{e'} v_g + \frac{\operatorname{cosec} E_{4,0}}{f'} \Delta m + \\ &+ \sum_{n=1}^{n=4} \left(C_{n,0} + \frac{1}{3} \varepsilon_n\right) - 360^\circ = 0 \end{aligned} \tag{17a}$$

és

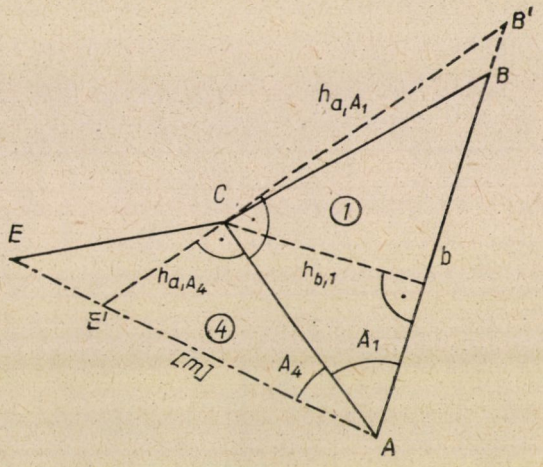
$$\begin{aligned} &\frac{\operatorname{cosec} A_{4,0}}{[m]^\circ} v_a + \frac{\operatorname{cosec} C_{3,0}}{f'} v_e - \left(\frac{\operatorname{ctg} C_{3,0}}{f'} + \frac{\operatorname{ctg} C_{4,0}}{f'}\right) v_f - \left(\frac{\operatorname{ctg} D_{3,0}}{g'} + \right. \\ &\left. + \frac{\operatorname{ctg} D_{5,0}}{g'}\right) v_g + \frac{\operatorname{cosec} D_{5,0}}{g'} v_h - \left(\frac{\operatorname{ctg} F_{5,0}}{i'} + \frac{\operatorname{ctg} F_{6,0}}{i'}\right) v_i + \\ &+ \frac{\operatorname{cosec} F_{6,0}}{i'} v_j - \left(\frac{\operatorname{ctg} G_{6,0}}{k'} + \frac{\operatorname{ctg} G_{7,0}}{k'}\right) v_k + \frac{\operatorname{cosec} G_{7,0}}{k'} v_l - \\ &- \left(\frac{\operatorname{ctg} A_{4,0}}{[m]^\circ} + \frac{\operatorname{ctg} A_{7,0}}{[m]^\circ}\right) \Delta m + \sum_{m=3}^{m=7} \left(E_{m,0} + \frac{1}{3} \varepsilon_m\right) - 360^\circ = 0. \end{aligned} \tag{17b}$$

MURPHYnak a szögek számítására megadott összefüggéseit bizonyos mértékig le is egyszerűsíthetjük, ha bevezetjük az egyes ctg és cosec értékek helyett a megfelelő méretarányú vázrajz alapján közvetlenül nyerhető koefficienseket. Arra már TÁRCZY—HORNOCH is felhívta a figyelmet, hogy eléggé kényelmetlen és hosszadalmas a háromszögek valamennyi szögével való számítás [9], s ezért javasolja [10]-ben a háromszögek magasságainak bevezetését, amelyekkel a koefficiensek meghatározása lényegesen egyszerűsödik. Ugyanakkor megemlíti, hogy ez részben megtalálható [1, 2, 4] alatti vizsgálatokban is, de ott a koefficiensekben a magasságokon kívül a megfelelő oldalhosszak is szerepelnek, ami a számítások szempontjából jelent többletmunkát, míg nála csak magasságokkal fejeződnek ki az együtthatók. Az [1] és [4] alatt a koefficienseket levezették a háromszögek megfelelő területével is.

Nézzük, hogy nem fejezhetők-e ki az együtthatók a magasságokkal még más úton is. Közvetlen szemléletből látható, hogy a (17a) egyenletben előforduló v_a javítás A_a együtthatója így is írható (3. ábra):

$$A_a = -\frac{\operatorname{ctg} A_{1,0} + \operatorname{ctg} A_{4,0}}{a'} = -\frac{1}{a'}\left(\frac{a'}{h_{a,A_1}} + \frac{a'}{h_{a,A_4}}\right) = -\left(\frac{1}{h_{a,A_1}} + \frac{1}{h_{a,A_4}}\right) \quad (18)$$

ahol $h_{a,A1}$ jelenti a 3. ábrának megfelelően a b oldal meghosszabbításával kapható ACB′ pontokkal határolt derékszögű háromszög a alapjához tartozó



3. ábra

és az A_1 szöggel szembenfekvő magasságot, amely a-nak a szöggel szemben fekvő végpontjára merőleges. Hasonlóképpen a $h_{a,A4}$ az ACE′ háromszög a alapjához tartozó az a végpontban merőleges magasságot jelenti. Továbbá a 3. ábra alapján

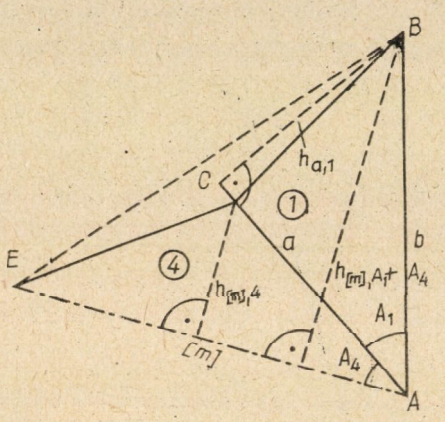
$$A_b = \frac{\operatorname{cosec} A_{1,0}}{a'} = \frac{1}{a'}\left(\frac{a'}{h_{b,1}}\right) = \frac{1}{h_{b,1}}, \quad (19)$$

ahol $h_{b,1}$ az 1-es háromszög b alapjához tartozó magasságot jelöli. Hasonlóképpen kifejezhető az összes többi együttható is. Alapjában véve két esetet kell megkülönböztetnünk: az egytagú koefficienseknél mindig a közvetlen három oldalával meghatározott háromszög megfelelő alapjára vonatkoztatott magasságról van szó, a kéttagúaknál pedig két fiktív háromszög megfelelő magassága van. Megjegyezzük, hogy akkor, ha a számításba bevont szög közel 90°, célszerűbb a ctg helyett a következő összefüggéssel számolni például a (18) esetében, bár itt a szögek nem 90°-osak, csupán az 1. ábrával való összehasonlítás kedvéért vettük így fel (4a. ábra). Miután $\alpha \doteq 90°$ esetén ctg $90° \doteq 0$,

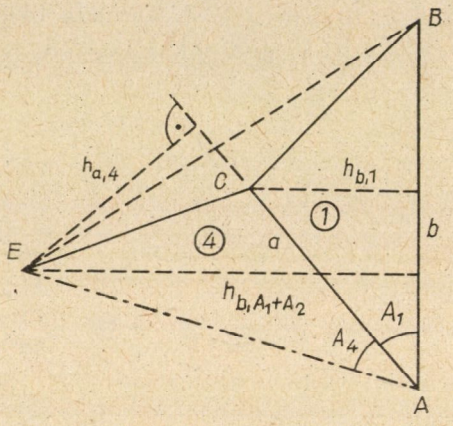
ezért itt a számításos eljárásnál is nehézségek jelentkeznek. Írhatjuk:

$$A_a = -\frac{\operatorname{ctg} A_{1,0} + \operatorname{ctg} A_{4,0}}{a'} = -\frac{1}{a'}\left(\frac{\sin(A_{1,0}+A_{4,0})}{\sin A_{1,0}\cdot \sin A_{4,0}}\right) =$$

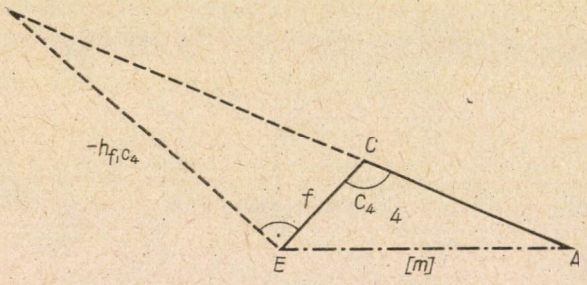
$$= -\frac{1}{a'}\left(\frac{[m]^\circ \sin(A_{1,0}+A_{4,0})}{[m]^\circ \sin A_{1,0} \sin A_{4,0}}\right) = -\frac{h_{b,\,A1+A4}}{h_{a,4}\cdot h_{b,1}} \qquad (20a)$$



4a. ábra



4b. ábra



5. ábra

vagy 4b. ábra alapján a szerkesztés szempontjából is könnyedébb megoldáshozjutunk:

$$A_a = -\frac{1}{a'}\left(\frac{b'\sin(A_{1,0}+A_{4,0}}{b'\sin A_{1,0}\sin A_{4,0}}\right) = -\frac{h_{[m],A_1+A_4}}{h_{a,}\cdot h_{[m],4}}, \qquad (20b)$$

ami értelemszerűen már a [10]-ben is megtalálható. Amennyiben valamelyik szög nagyobb mint 90°, a cotangense negatív előjelű lesz, ami a szerkesztéses módszernél azonnal kitűnik, mert ilyenkor a rajz alapján meghatározott magasság a szög 180°-os kiegészítő szögével szemben helyezkedik el (5. ábra). Végeredményképpen a (17a) és (17b) összefüggések a következők lesznek:

$$-\left(\frac{1}{h_{a,A_1}}+\frac{1}{h_{a,A_4}}\right)v_a+\frac{1}{h_{b,1}}v_b-\left(\frac{1}{h_{c,B_1}}+\frac{1}{h_{c,B_2}}\right)v_c+$$
$$+\frac{1}{h_{d,2}}v_d-\left(\frac{1}{h_{e,D_2}}+\frac{1}{h_{e,D_3}}\right)v_e-\left(\frac{1}{h_{f,E_3}}+\frac{1}{h_{f,E_4}}\right)v_f+ \qquad (21a)$$
$$+\frac{1}{h_{g,3}}v_g+\frac{1}{h_{[m]4}}\Delta m+L_1=0,$$

ahol

$$L_1=\sum_{n=1}^{n=4}\left(C_{n,0}+\frac{1}{3}\varepsilon_n\right)-360^\circ=\delta C,$$

és

$$\frac{1}{h_{a,4}}v_a+\frac{1}{h_{e,3}}v_e-\left(\frac{1}{h_{f,C_3}}+\frac{1}{h_{f,C_4}}\right)v_f-\left(\frac{1}{h_{g,D_3}}+\frac{1}{h_{g,D_5}}\right)v_g+\frac{1}{h_{h,5}}v_h-$$
$$-\left(\frac{1}{h_{i,F_5}}+\frac{1}{h_{i,F_6}}\right)v_i+\frac{1}{h_{j,6}}v_j-\left(\frac{1}{h_{k,G_6}}+\frac{1}{h_{k,G_7}}\right)v_k+\frac{1}{h_{l,7}}v_l- \qquad (21b)$$
$$-\left(\frac{1}{h_{[m],A_4}}+\frac{1}{h_{[m],A_7}}\right)\Delta m+L_2=0,$$

ahol

$$L_2=\sum_{m=3}^{m=7}\left(E_{m,0}+\frac{1}{3}\varepsilon_m\right)-360^\circ=\delta E.$$

Általános alakban javítási egyenleteink

$$\begin{aligned}A_a v_a+A_b v_b+A_c v_c+\ldots+M_1\Delta m+L_1&=0\\ B_a v_a+B_b v_b+B_c v_c+\ldots+M_2\Delta m+L_2&=0.\end{aligned} \qquad (22)$$

Ennek megfelelően normálegyenleteink a következők lesznek: ([11], 187—189. o.):

$$\begin{aligned}[AA]k_1+[AB]k_2+M_1\cdot\Delta m+L_1&=0\\ [AB]k_1+[BB]k_2+M_2\cdot\Delta m+L_2&=0\\ M_1k_1+\quad M_2k_2\qquad\qquad&=0.\end{aligned} \qquad (23)$$

Ezek alapján a Δm ismeretlen és a megfelelő korellátá k már számíthatók, majd az egyes javítások is az ismert összefüggések segítégével meghatározhatók. Az egyes megfigyelések középhibáját a

$$\mu_0=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{r-1}} \qquad (24)$$

képlet adja, amely egyenlő lesz a (11)-beli értékkel, a meg nem mért ismeretlen középhibája pedig

$$\mu_{[m]}=\pm\frac{\mu_0}{\sqrt{P_{[m]}}}=\pm\frac{\mu_0}{\sqrt{[MM2]}}, \qquad (25)$$

ahol [*MM*2] a normálegyenletek lefejtésénél az utolsó redukció után a Δm együtthatója.

Ez utóbbi módszer előnye az előbbiekkel szemben, hogy közvetlenül megadja a meg nem mért ismeretlen értékét, valamint annak középhibáját is. Egyúttal az egyes mérések javítása is egyszerűen logarléccel számítható. Amennyiben három értékes számjegy kiegyenlítésünknél kielégít, a számítás valamennyi műveletét logarléccel végezhetjük. A levezetéseknél mi szándékosan a MURPHY részéről közölt egyenletekből indultunk ki, bár a megoldás szempontjából célszerűen az irodalomban közölt bármelyik eljárást alkalmazzuk, a számítási élesség határán belül mindig ugyanarra az eredményre jutunk.

Megjegyezzük még, hogy a MURPHY részéről közölt összefüggések könnyen visszavezethetők HAMMERnek 1911-ben közölt összefüggésére. Mindkettőnek igen nagy hátránya, hogy a háromszögekben előforduló valamennyi szöget ki kell számítani a koefficiensek meghatározásához, míg az újabb megoldásoknál a feltételi egyenletbe bevont szögek ismerete szükséges csupán és a koefficiensek meghatározását is inkább a közvetlenül mért hosszakra alapozzák ([3, 7]), amely a számítási munkát lényegesen egyszerűsíti és gyorsítja. HAMMER szerint például a (4a) összefüggés a következő lesz:

$$\Delta C_1 = \frac{\operatorname{ctg} B_{1,0} + \operatorname{ctg} A_{1,0}}{b'} v_b - \frac{\operatorname{ctg} A_{1,0}}{a'} v_a - \frac{\operatorname{ctg} B_{1,0}}{c'} v_c. \tag{26}$$

A (26) képlet jobboldali két utolsó tagja egyezik a MURPHY-féle (4a) egyenlet megfelelő tagjaival. A 2. ábra alapján közvetlenül látszik, hogy

$$\frac{\operatorname{ctg} B_{1,0} + \operatorname{ctg} A_{1,0}}{b'} = \frac{\frac{b'}{h_{b,1}} - 1}{b'} = \frac{1}{h_{b,1}} \tag{27}$$

és

$$\frac{\operatorname{cosec} A_{1,0}}{a'} = \frac{\frac{a'}{h_{b,1}}}{a'} = \frac{1}{h_{b,1}}, \tag{28}$$

azaz

$$\frac{\operatorname{ctg} B_{1,0} + \operatorname{ctg} A_{1,0}}{b'} = \frac{\operatorname{cosec} A_{1,0}}{a'}. \tag{29}$$

Ezzel kiinduló feltevésünket bebizonyítottuk, ami egyébként várható is volt, hiszen mindkettő ugyanannak az általános háromszögnek cosinus-tételéből indul ki, tehát a sorbafejtett egyenlet együtthatóinak is egyenlőknek kell lenni. Hasonlóképpen bizonyítható ez az összes többi egyenletre is.

MURPHY [13]-ban újabb megoldást közöl, amelynél a sorbafejtett összefüggést továbbfejleszti, úgyhogy az előforduló szögek helyett a megfelelő háromszögek gömbi szögfeleslegét vezeti be a koefficiensekbe. Ennek megfele-

lően már lényegesen kevesebb szög ismerete szükséges az együtthatók meghatározásához. Jelentős munkatöbblet azonban a gömbi szögfelesleg megfelelő pontosságú meghatározása is, és amellett a képlet szerint megadott mellékszámítások ez esetben is eléggé hosszadalmasak. Ugyanakkor a módszer TÁRCZY—HORNOCH vizsgálata szerint [10] rövidoldalú háromszögek számításánál sok tizedesszámjegy használatát igényli, sík háromszögek esetére pedig teljesen használhatatlan. A mi esetünkben például a (17a) összefüggés v_b együtthatója a következőképpen lenne átalakítható:

$$\frac{\operatorname{cosec} A_{1,0}}{a'} = \frac{b'}{a' \cdot b' \cdot \sin A_{1,0}} = \frac{b'}{2\,T_1} = \frac{b'}{2\,\varepsilon_1 R^2}, \tag{30}$$

ahol T_1 az 1-gyel jelölt háromszög területe, R a simuló gömb sugara. v_a együtthatója:

$$-\left(\frac{\operatorname{ctg} A_{1,0} + \operatorname{ctg} A_{4,0}}{a'}\right) = -\frac{a' \cdot \varepsilon_{A_1+A_4}}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_4 \cdot R^2}, \tag{31}$$

ahol $\varepsilon_{A_1+A_4}$ az $(A_1 + A_4)$ szöget magába foglaló háromszög, ε_1 az 1-gyel, ε_4 a 4-gyel jelölt háromszög gömbiszög feleslege. Ezek helyett célravezetőbb az egyszerű méretheles vázrajz alapján a szükséges magasságok meghatározása és a koefficiensekbe való bevezetése [10], amit egyébként a (20) és (21) alatti összefüggésekben alkalmaztunk is. TÁRCZY—HORNOCH a közvetlen mérésben is előforduló oldalakkal meghatározott háromszögek magasságát szerkeszti meg a méretheles vázrajz alapján, a mi esetünkben pedig azon összegtagoknál, melyek szögei nem közös háromszögből származnak, egyszerű szerkesztés útján kapható háromszög megfelelő magassága szerepel. Az előbbi a szerkesztés szempontjából egyszerűbb, a számítási munkában nincs lényeges különbség a kettő között. A szerkesztés munkáját tekintve szebb a [10]-ben közölt eljárás, de a mi megoldásunk is szemléletes jellegű és lényegében gyorsabb MURPHYnak mindkét idézett módszerénél.

Lássuk most már a *Murphy* részéről közölt számítási példát. A 2. ábrán látható vázrajz jelölései alapján a mérési adatok az alábbiak:

a =	84 608,74	láb =	25 788,702 méter
b =	134 940,65	„ =	41 129,842 „
c =	114 222,50	„ =	34 814,961 „
d =	132 891,44	„ =	40 505,244 „
e =	84 569,14	„ =	25 776,632 „
f =	76 682,23	„ =	23 372,705 „
g =	124 997,15	„ =	38 099,069 „
h =	133 322,98	„ =	40 636,778 „
i =	116 659,62	„ =	35 557,794 „
j =	123 484,12	„ =	37 637,898 „
k =	52 558,54	„ =	16 019,817 „
l =	149 557,77	„ =	45 585,134 „

A nem mért ismeretlen közelítő értéke $[m]^\circ = 116\ 104{,}55$ láb $= 35\ 388{,}609$ méter. A számításokban előforduló gömbi szögfeleslegeket célszerű a feltételi egyenletekben levő szögekkel és a megfelelő oldalhosszakkal meghatározni. Például az 1-es háromszög esetére

$$\varepsilon_1'' = \varrho'' \frac{a' \cdot c' \sin C_{1,0}}{2R^2}, \qquad (31)$$

ahol R a $\varphi = -36^\circ 48'$ földrajzi szélességhez tartozó simuló gömb sugara, amit megfelelő táblázatokból is kivehetünk. Hasonlóképpen számítjuk az összes többi háromszögre is a gömbi szögfelesleget. A cosinus tétel alapján számítható közelítő szögértékek és a gömbi szögfeleslegek:

$$C_{1,0} = 84^\circ\ 04'\ 16{,}80'' \qquad \frac{1}{3}\varepsilon_1 = 0{,}75''$$

$$C_{2,0} = 82^\circ\ 26'\ 58{,}01'' \qquad \frac{1}{3}\varepsilon_2 = 0{,}76''$$

$$C_{3,0} = 101^\circ\ 31'\ 43{,}88'' \qquad \frac{1}{3}\varepsilon_3 = 0{,}50''$$

$$C_{4,0} = 91^\circ\ 56'\ 58{,}78'' \qquad \frac{1}{3}\varepsilon_4 = 0{,}51''$$

$$E_{3,0} = 41^\circ\ 31'\ 22{,}12'' \qquad \frac{1}{3}\varepsilon_3 = 0{,}50''$$

$$E_{4,0} = 46^\circ\ 44'\ 40{,}77'' \qquad \frac{1}{3}\varepsilon_4 = 0{,}51''$$

$$E_{5,0} = 66^\circ\ 51'\ 52{,}94'' \qquad \frac{1}{3}\varepsilon_5 = 1{,}06''$$

$$E_{6,0} = 84^\circ\ 44'\ 35{,}22'' \qquad \frac{1}{3}\varepsilon_6 = 0{,}48''$$

$$E_{7,0} = 120^\circ\ 07'\ 21{,}00'' \qquad \frac{1}{3}\varepsilon_7 = 0{,}41''$$

Ezeknek megfelelően javítási egyenleteink a következők lesznek (az egyenletek valamennyi együtthatóját 10^5-el beszoroztuk):

$$-2{,}1025\ v_a + 1{,}4038\ v_b - 2{,}1741\ v_c + 1{,}3877\ v_d - 2{,}2985\ v_e - 2{,}6998\ v_f + \\ + 1{,}9672\ v_g + 1{,}7905\ \Delta m + 0{,}00 = 0$$

$$+1{,}3049\ v_a + 1{,}3309\ v_e + 0{,}3103\ v_f - 1{,}6539\ v_g + 0{,}9943\ v_h - 2{,}3355\ v_i + \\ + 2{,}0225\ v_j - 2{,}7854\ v_k + 2{,}8334\ v_l - 3{,}6797\ \Delta m - 2{,}4192 = 0.$$

Az összehasonlítás kedvéért számítottuk a javítási egyenletekben előforduló koefficienseket öt számjegyre, egyébként három is elegendő lett volna. A dimenzió-helyesség kedvéért az egyenletek tiszta tagját mindjárt $\frac{1}{\varrho''}$-el beszoroztuk. A normálegyenletek a következők lesznek:

$$29{,}48548\ k_1 - 9{,}89393\ k_2 + 1{,}7905\ \Delta m + 0 = 0$$
$$-9{,}89393\ k_1 + 32{,}62604\ k_2 - 3{,}6797\ \Delta m - 2{,}4192 = 0$$
$$+1{,}7905\ k_1 - 3{,}6797\ k_2 = 0.$$

A normálegyenletek megoldása után a Gauss-féle eliminációval kapjuk az alábbi ismeretleneket:

$$\Delta m = -0{,}58801 \text{ láb} \qquad P_{[m]} = 0{,}43220$$
$$k_2 = +0{,}020767$$
$$k_1 = +0{,}042679.$$

Az egyes javítások és a javított értékek:

$$\begin{aligned}
v_a &= -0{,}0895 + 0{,}0271 = -0{,}06 \text{ láb}\\
v_b &= +0{,}0599 \qquad\quad = +0{,}06 \;,,\\
v_c &= -0{,}0930 \qquad\quad = -0{,}09 \;,,\\
v_d &= +0{,}0593 \qquad\quad = +0{,}06 \;,,\\
v_e &= -0{,}0980 + 0{,}0275 = -0{,}07 \;,,\\
v_f &= -0{,}1156 + 0{,}0064 = -0{,}11 \;,,\\
v_g &= +0{,}0827 - 0{,}0342 = +0{,}05 \;,,\\
v_h &= +0{,}0206 \qquad\quad = +0{,}02 \;,,\\
v_i &= -0{,}0485 \qquad\quad = -0{,}05 \;,,\\
v_j &= +0{,}0418 \qquad\quad = +0{,}04 \;,,\\
v_k &= -0{,}0578 \qquad\quad = -0{,}06 \;,,\\
v_l &= +0{,}0587 \qquad\quad = +0{,}06 \;,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a' + v_a = a &= 84\,608{,}68 \text{ láb} = 25\,788{,}683 \text{ méter}\\
b' + v_b = b &= 134\,940{,}71 \;,, = 41\,129{,}861 \;,,\\
c' + v_c = c &= 114\,222{,}41 \;,, = 34\,814{,}933 \;,,\\
d' + v_d = d &= 132\,891{,}50 \;,, = 40\,505{,}263 \;,,\\
e' + v_e = e &= 84\,569{,}07 \;,, = 25\,776{,}610 \;,,\\
f' + v_f = f &= 76\,683{,}12 \;,, = 23\,372{,}672 \;,,\\
g' + v_g = g &= 124\,997{,}20 \;,, = 38\,099{,}084 \;,,\\
h' + v_h = h &= 133\,323{,}00 \;,, = 40\,636{,}784\\
i' + v_i = i &= 116\,659{,}57 \;,, = 35\,557{,}779 \;,,\\
j' + v_j = j &= 123\,484{,}16 \;,, = 37\,637{,}910 \;,,\\
k' + v_k = k &= 52\,558{,}48 \;,, = 16\,019{,}798 \;,,\\
l' + v_l = l &= 149\,557{,}83 \;,, = 45\,585{,}152 \;,,
\end{aligned}$$

és

$$[m]^\circ + \Delta m = [m] = 116\,103{,}96 \;,, = 35\,388{,}429 \;,,$$

Az egységsúlyú megfigyelés, valamint a meg nem mért ismeretlen középhibájára a következőket kapjuk:

$$\mu_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{r-1}} = \pm\,0{,}222 \text{ láb} = \pm\,0{,}068 \text{ méter}$$

$$\mu[m] = \pm\frac{\mu_0}{\sqrt{P_{[m]}}} = \pm\,0{,}340 \text{ láb} = \pm\,0{,}104 \text{ méter.}$$

Az egyes szögek kiegészítő értékeit a (4) és (16) összefüggések alapján határozzuk meg:

$$\Delta C_1 = +\,0{,}48'' \text{ és } C_{1,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_1 + \Delta C_1 = \widehat{C}_1 = 57^\circ\,20'\,43{,}36''$$

$$\Delta C_2 = +\,0{,}48'' \quad C_{2,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \Delta C_2 = \widehat{C}_2 = 82^\circ\,26'\,59{,}25''$$

$$\Delta C_3 = +\,0{,}76'' \quad C_{3,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_3 + \Delta C_3 = \widehat{C}_3 = 101^\circ 31'\,45{,}15''$$

$$\Delta C_4 = -\,1{,}72'' \quad C_{4,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_4 + \Delta C_4 = \widehat{C}_4 = 91^\circ\,56'\,57{,}57''$$

$$\Delta E_3 = -\,0{,}36'' \quad E_{3,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_3 + \Delta E_3 = \widehat{E}_3 = 41^\circ\,31'\,22{,}26''$$

$$\Delta E_4 = +\,1{,}01'' \quad E_{4,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_4 + \Delta E_4 = \widehat{E}_4 = 46^\circ\,44'\,42{,}29''$$

$$\Delta E_5 = +0{,}03'' \qquad E_{5,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_5 + \Delta E_5 = \hat{E}_5 = 66^\circ\,51'\,54{,}03''$$

$$\Delta E_6 = +0{,}44'' \qquad E_{6,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_6 + \Delta E_6 = \hat{E}_6 = 84^\circ\,44'\,36{,}14''$$

$$\Delta F_7 = +3{,}87'' \qquad E_{7,0} + \frac{1}{3}\varepsilon_7 + \Delta E_7 = \hat{E}_7 = 120^\circ\,07'\,25{,}28''$$

A további szögek számítását mellőzzük, miután az adott hosszakkal és szögekkel valamennyi pont koordinátája már meghatározható. Számítási ellenőrzés, hogy a vázolt feltételi egyenletek bármelyikébe behelyettesítve most már a kiegyenlített értékekkel aszámítási élességen belül az ellentmondásnak nullának kell lennie. A közölt eljárások bármelyikét is választjuk, az eredmény minden esetben a számítás élességén belül egyező lesz.

A szakirodalomban az utóbbi évtizedben e téren már lényegesen előrehaladt és a számítások egyszerűsítése terén könnyed megoldások születtek. Mi csupán azért maradtunk meg a MURPHY és HAMMER-féle megoldásnál, hogy ezzel az általunk ismertetett eljárás előnyeit könnyebben bizonyíthassuk, másrészt az összehasonlítás jobban elvégezhető legyen.

IRODALOM

1. WARCHALOWSKI, E.: Triangulation d'un type nouveau. (Publications of the Polisch Geodetic Institute, Warszawa 1948)
2. DR. RINNER, K.: Geometrie mit Strecken (Schweizerische Z. f. Vermessung und Kulturtechnik, 1950)
3. DR. TÁRCZY—HORNOCH, A.: Über die Ausgleichung von Streckennetzen (Acta Technica Acad. Scient. Hungaricae, VIII. köt.)
4. DR. HUBENY, K.: Die Ausgleichung von Dreiecknetzen mit direkt gemessenen Seiten (Österr. Z. f. Vermessungswesen 1950)
5. DR. HAZAY, I.: Ausführung der statischen Koordinatenausgleichung (Acta Technica XXIII. köt. 4. füzet)
6. HOVÁNYI, L.: A kiegyenlítés szempontjából legkedvezőbb feltételi egyenlet megállapítása tiszta hosszméréses diagonális rendszerben (MTA Műszaki Tud. Oszt. Közleményei, XXIV. kötet 1—4 szám)
7. DR. WOLF, H.: Die Ausgleichung von Streckennetzen. (Z. f. Vermessungswesen, 1958)
8. MURPHY, B. T.: The use of concludes lengths in trilateration adjustment (Empire Survey Review, 1960, XV. kötet 116. szám)
9. DR. TÁRCZY—HORNOCH, A.: Least Squares Adjustment of Linear Dimensions in a Geodetic Quadrilateral (Empire Survey Review XV. kötet 111. szám). Illetőleg: A megmért oldalhosszú geodéziai négyszögeknek a legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítéséről. (Magyar Tud. Akadémia Műszaki Tud. Oszt. Közleményei XXIV. kötet 1—4 szám)
10. DR. TÁRCZY—HORNOCH, A.: Further remarks to least squares adjustment of linear dimensions in a geodetic quadrilateral. (Empire Survey Review 1961/4.)
11. DR. HAZAY, I.: Geodéziai Kézikönyv I. (Budapest 1956)
12. HAMMER, E.: Zur Ausgleichung von Streckennetzen (Z. f. Vermessungswesen 1911)
13. MURPHY, B. T.: The selection of pole and condition equation in the least squares adjustment of linear dimensions in a geodetic quadrilateral (Empire Survey Review 1960. XV. kötet)
14. DR. ARNOLD, K.: Zur Fehlertheorie der streckenmessenden Triangulation. (Berlin, 1952).

ÖSSZEFOGLALÁS

Szerző a hosszméréses hálózatok kiegyenlítéséhez használatos egyes eljárások problémáival foglalkozik. Vizsgálja egy tisztán hosszmérésekből álló hálózat kiegyenlítésének lehetőségeit. MURPHY ismert eljárásán kívül a következő kérdéseket tárgyalja:

1. Kiegyenlítés feltételes megfigyelések alapján, záróvonalból levezetett egyenlet segítségével.

2. Kiegyenlítés az ún. 5. kiegyenlítési csoport alapján (feltételes megfigyelések ismeretlenekkel), ahol a nem mért hosszt [m] mint ismeretlent tárgyalja. A második eljárás különösen akkor előnyös, ha ez a hossz a továbbiakban fontos szerepet játszik és emellett annak középbibája is szükséges.

Szerző egy eljárást ismertet, amely a koefficienseket nem matematikailag, hanem grafikusan vezeti le, csak azoknak a szögeknek pontos értékeit számítja matematikailag, amelyeket a feltételi egyenletben figyelembe vett.

A levezetéseket számpélda egészíti ki.

ELŐÍRT PONTOSSÁGÚ VONALSEREGES NOMOGRAMOK TERVEZÉSE

VONALSEREGES NOMOGRAMOK ALKALMAZÁSA A HIDRAULIKÁBAN

HASZPRA OTTÓ
VÍZGAZDÁLKODÁSI TUDOMÁNYOS KUTATÓ INTÉZET

[Beérkezett 1961. július 26-án]

Vonalsereges nomogramokat, mint számítási segédleteket, a vízépítési gyakorlatban és kutatásban különösen gyakran használnak. Elterjedtségük lényegesen meghaladja a pontsoros nomogramokét. Hasonló a helyzet a műszaki tudományok sok más ágában is. Mégis, ha a vonalsereges nomogramok szerkesztéséhez szükséges elméleti alapokat vizsgáljuk, egyes területeken nagy hiányosságokat találunk.

Számítási segédeszközök használhatóságának egyik feltétele, hogy ismerjük azt a pontosságot, amelyet velük elérhetünk. Éppen a nomográfia területén azonban ezzel a kérdéssel mind a „klasszikusok", mind az újabbkori kutatók keveset foglalkoztak. Amennyire részletes vizsgálatok történtek a nomografikus ábrázolási feltételeknek, valamint az egyes kapcsolattípusokat ábrázoló nomogramok alakjának meghatározására, annyira felületesen érintik a nomogrammal való számítás pontossági kérdéseit. Csak a legújabbkori irodalomban akadnak egyes szerzők, akik komolyabb lépéseket tettek a pontosság meghatározására [1—9]. Megállapításaikat felhasználva, értékelve és kiegészítve, a *függvényskálákra* és a *pontsoros nomogramokra* vonatkozóan már részletesen is tárgyaltuk ezt a kérdést [10—12]. Kétségtelen, hogy hasonló vizsgálatokra van szükség a *vonalsereges nomogramok* területén is.

A feladat kettős:

1. *Meg kell határoznunk adott vonalsereges nomogram leolvasási pontosságát.*

2. *Adott leolvasási pontosságú vonalsereges nomogramot kell szerkesztenünk.*

A teljes érthetőséghez és használhatósághoz szükséges a *hiba* fogalmának és összetevőinek ismerete általánosságban, valamint a nomogramszerkesztés legfontosabb tételei a vonalsereges nomogramokra vonatkozóan. Az előbbit a szükséges részletességgel már tárgyaltuk [12], most csupán a lényeget foglaljuk össze. Az utóbbival kissé részletesebben foglalkozunk, majd a vonalsereges nomogramok pontosságával kapcsolatos fejtegetések után a hidraulikai gyakorlatból adunk példákat. A jobb megértéshez célszerű előbb említett tanulmányunk [12] általános részeinek átnézése.

1. Hibák

1.1 *A hibák osztályozása*

A nomogram *összes hibája* az *öröklött hiba* és a *műveleti hiba* eredője. Relatív vagy abszolút hiba formájában maximális értékét *(hibakorlát)* vagy négyzetes középértékét *(szórás)* szokás megadni. Minthogy a hiba normális eloszlású, zérus várható értékű valószínűségi változónak tekinthető, a hibakorlát gyakorlatilag (0,9973 valószínűséggel) a szórás háromszorosa.

1.2 *Az öröklött hiba számítása*

Ha a $z = F(z_1, z_2, \ldots z_k) = F_{12\ldots k}$ függvény alapadatainak, általában tehát z_i-nek, abszolút középhibája μ_{ai}, relatív középhibája μ_{ri}, akkor az eredmény abszolút hibája

$$\mu_a = \sqrt{\sum_1^k F_i'^2 \mu_{ai}^2}, \tag{1}$$

relatív középhibája

$$\mu_r = \frac{\mu_a}{|z|} = \frac{\sqrt{\sum_1^k z_i^2 F_i'^2 \mu_{ri}^2}}{|F_{12\ldots k}|}, \tag{2}$$

ahol F_i' az $F_{12\ldots k}$ függvény z_i szerinti parciális deriváltja.

z abszolút és relatív hibakorlátja, A, ill. R gyakorlatilag

$$A = 3\mu_a, \tag{3}$$

$$R = 3\mu_r. \tag{4}$$

1.3 *A műveleti hiba számítása és megengedhető értéke*

A műveleti hiba az öröklött hibáéhoz hasonló módszerrel számítható. Vonalsereges nomogramokra vonatkozó gyakorlati végrehajtásával a 2.2 pontban foglalkozunk.

Ha azt kívánjuk, hogy a műveleti hiba legfeljebb 20%-kal növelje az öröklött hibát, a műveleti hiba értékére a

$$\mu_{\text{műveleti}} = \frac{2}{3}\mu_{\text{öröklött}} \tag{5}$$

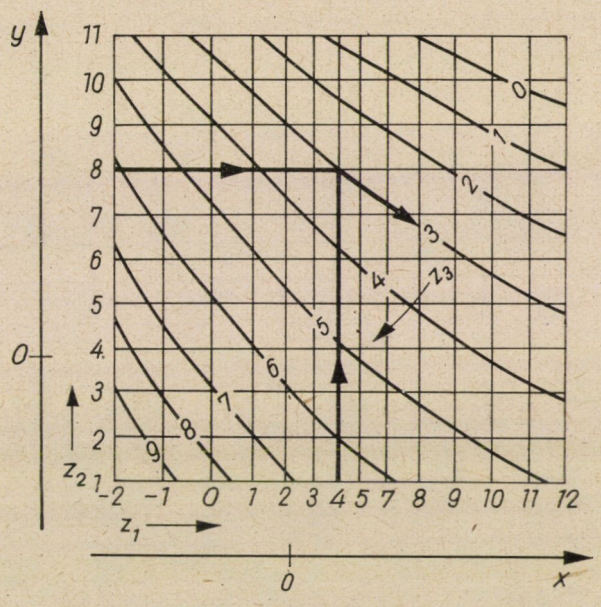
kikötést kell tennünk. Ekkor

$$\mu_{\text{összes}} = 1{,}2\,\mu_{\text{öröklött}}. \tag{6}$$

2. Vonalsereges nomogramok

2.1 *A vonalsereges nomogramok fogalma és szerkesztése*

A háromváltozós vonalsereges nomogram olyan ábra, amelyben minden változót egy-egy számozott görbesereg ábrázol, s az ábrázolt kapcsolatot kielégítő, összetartozó értékhármasok görbéi egy közös pontban metsződnek.



1. ábra. Descartes-féle vonalsereges nomogram

Csak a háromváltozós kapcsolatok Descartes-féle ábrázolásával foglalkozunk.

Valamely

$$G_{123} = 0$$

háromváltozós kapcsolat Descartes-féle nomogramjában a z_1 változót az y tengellyel, a z_2 változót az x tengellyel párhuzamos egyenessereg ábrázolja (1. ábra). E seregek (függvényhálózat) egyenlete (s ugyanakkor e seregek által az x, ill. y tengelyből kimetszett függvényskála egyenlete):

$$(z_1) \quad x = f_1 \qquad [\text{invertálva: } z_1 = z_1(x)] \tag{7a}$$

$$(z_2) \quad y = f_2 \qquad [\text{invertálva: } z_2 = z_2(y)]. \tag{7b}$$

A harmadik sereg egyenletét úgy kapjuk, hogy e helyettesítéseket beírjuk az eredeti $G_{123} = 0$ kapcsolatba:

$$(z_3) \quad G[z_1(x),\ z_2(y),\ z_3] = 0. \tag{7c}$$

Az f_1 és f_2 függvényeket úgy választjuk, hogy az ábrázolandó tartományban a nomogram megfelelő alakú (pl. közel négyzet alakú) legyen. Természetesen ennek megfelelően a G_{123} függvény szerkezete úgy alakítandó át, hogy a kapcsolat érvényessége megmaradjon. Geometriailag ez az átalakítás a nomogram affin transzformációját jelenti.

Annak, hogy a harmadik sereg is egyenessereg legyen, az a feltétele, hogy az ábrázolandó kapcsolat *Cauchy-féle kanonikus alakba* legyen írható:

$$G_{123} = f_3 f_1 + g_3 f_2 + h_3 = 0. \tag{8}$$

Ekkor a seregek egyenletei:

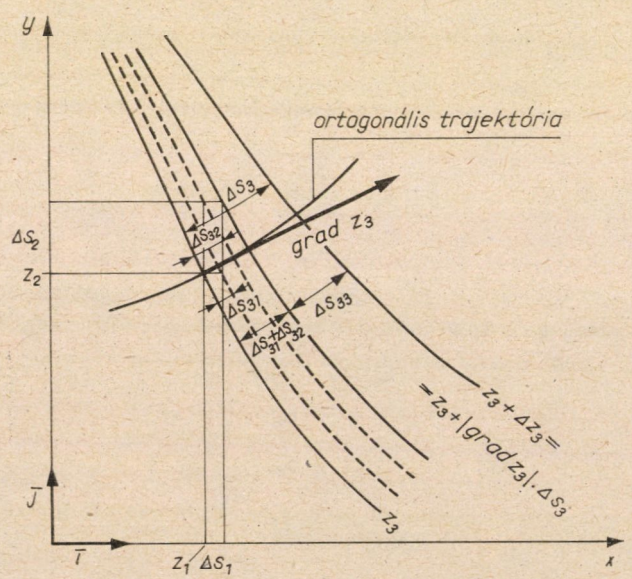
$$(z_1) \qquad x = f_1 \tag{9a}$$

$$(z_2) \qquad y = f_2 \tag{9b}$$

$$(z_3) \qquad f_3 x + g_3 y + h_3 = 0. \tag{9c}$$

2.2 *Vonalsereges nomogramok műveleti hibája*

Vegyük azt az esetet, ha a függő változó, vagyis az eredmény, amelyet keresünk, z_3. Hogyan adódik z_3 leolvasási hibája? A rajzolási pontatlanságokra ne legyünk tekintettel. A levezetést a *közepes* (δ-val jelölt) geometriai pontatlanságokra [12] végezzük, de a 2. ábrán a *tényleges* (Δ-val jelölt) geometriai pontatlanságok halmozódását is figyelemmel kísérhetjük.



2. ábra. Geometriai pontatlanságok a vonalsereges nomogramon

1. z_1 és z_2 értékét δ_1 és δ_2 közepes geometriai pontatlansággal állítjuk be. Emiatt a helyes z_3 görbe helyett egy rá merőleges irányban δ_{312} távolságra levő görbét határozunk meg.

2. Ezt a hibás görbét is újabb δ_{33} közepes geometriai pontatlansággal olvassuk le.

Ha δ_{312} és δ_{33} eredőjét δ_3-mal jelöljük, z_3 hibáját könnyen igazolható módon a

$$\mu_{a3} = |\operatorname{grad} z_3|\,\delta_3, \tag{10}$$

illetve a

$$\mu_{r3} = \left|\frac{\operatorname{grad} z_3}{z_3}\right|\delta_3 \tag{11}$$

képlet adja.

Határozzuk meg δ_3-at először explicite adott,

$$z_3 = F_{12}$$

kapcsolat esetén.

A δ_1, illetve δ_2 geometriai pontatlanságnak z_1 és z_2 értékében μ_{a1}, illetve μ_{a2} középhiba felel meg. z_3 értékében tehát (1) alapján

$$\mu_{a312} = \sqrt{F_1'^2\,\mu_{a1}^2 + F_2'^2\,\mu_{a2}^2} \tag{12}$$

hiba mutatkozik. μ-k helyett geometriai pontatlanságokra térve

$$|\operatorname{grad} z_3|\,\delta_{312} = \sqrt{\left(\frac{F_1'}{f_1'}\right)^2\delta_1^2 + \left(\frac{F_2'}{f_2'}\right)^2\delta_2^2}\,.$$

Innen, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ jogos egyszerűsbítéssel, δ_{312}-t kifejezve

$$\delta_{312} = \delta\,\frac{\sqrt{\left(\frac{F_1'}{f_1'}\right)^2 + \left(\frac{F_2'}{f_2'}\right)^2}}{|\operatorname{grad} z_3|}\,. \tag{13}$$

Ha azonban utánaszámolunk, észrevehetjük, hogy nemcsak a nevező, hanem a számláló is $|\operatorname{grad} z_3|$-mal egyenlő. Ugyanis $z_3 = F_{12} = F[z_1(x), z_2(y)]$-ból az $x = f_1$ és $y = f_2$ egyenletek figyelembevételével, a közvetett és az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} z_3 &= F_x'\,\bar{i} + F_y'\,\bar{j}\\ &= \frac{F_1'}{f_1'}\,\bar{i} + \frac{F_2'}{f_2'}\,\bar{j},\end{aligned}$$

ahol $\bar{i}$ és $\bar{j}$ a koordinátatengelyekkel párhuzamos egységvektorok. Innen grad z_3

abszolút értéke

$$|\operatorname{grad} z_3| = \sqrt{\left(\frac{F_1'}{f_1'}\right)^2 + \left(\frac{F_2'}{f_2'}\right)^2}\,. \tag{14}$$

Tehát (13) a következő egyszerű alakot ölti:

$$\delta_{312} = \delta\,. \tag{15}$$

A beállítás pontatlanságából származó δ_{312} geometriai pontatlanság mellett mutatkozik a leolvasás δ_{33} geometriai pontatlansága is. A kettő eredője

$$\delta_3 = \sqrt{\delta_{312}^2 + \delta_{33}^2}\,.$$

Feltéve, hogy δ_{33} is egyenlő δ-val,

$$\delta_3 = \sqrt{2}\,\delta\,. \tag{16}$$

Most már (10) és (11) felhasználásával, ha δ-t ismerjük, z_3 hibája számítható. Ha a nomogram mindhárom serege elegendő sűrűséggel (3 ÷ 5 mm) van megrajzolva, δ értéke 0,2 mm-nek, δ_3 tehát 0,3 mm-nek vehető.

Levezetésünk csak Descartes-féle nomogramokra határozta meg az eredő geometriai pontatlanságot, azonban érvényes bármely olyan általános görbesereges nomogramra is, ahol az adott változók görbéi közel derékszög alatt metsződnek. Természetesen nincs akadálya annak sem, hogy a levezetést általános görbesereges nomogramokra is kiterjesszük, de a gyakorlatban túlnyomórészben Descartes-féle nomogramokat alkalmaznak.

z_3 hibájának végképletei (10), (11) és (14) alapján

$$\mu_{a3} = \delta_3 \sqrt{\left(\frac{F_1'}{f_1'}\right)^2 + \left(\frac{F_2'}{f_2'}\right)^2} \tag{17}$$

$$\mu_{r3} = \delta_3 \frac{\sqrt{\left(\frac{F_1'}{f_1'}\right)^2 + \left(\frac{F_2'}{f_2'}\right)^2}}{|z_3|}\,. \tag{18}$$

Implicit $G_{123} = 0$ megadás esetére levezethető, hogy

$$\mu_{a3} = \delta_3 \frac{\sqrt{\left(\frac{G_1'}{f_1'}\right)^2 + \left(\frac{G_2'}{f_2'}\right)^2}}{|G_3'|} \tag{19}$$

$$\mu_{r3} = \delta_3 \frac{\sqrt{\left(\frac{G_1'}{f_1'}\right)^2 + \left(\frac{G_2'}{f_2'}\right)^2}}{|z_3 \cdot G_3'|}\,. \tag{20}$$

E hibák egyébként felfoghatók a z_3 sereg ortogonális trajektória seregéből a z_3 sereg által kimetszett függvényskálák hibáiként is (2. ábra).

2.3. *Előírt pontosságú vonalsereges nomogramok szerkesztése*

A vonalsereges nomogram tervezése, a pontsoros nomograméhoz hasonlóan [12], két lépésben megy végbe.

1. A seregek egyenleteit úgy határozzuk meg, hogy az ábrázolandó tartományban a nomogram alakja megfelelő legyen.

2. Ezután a nomogramot minden irányban C-szeresre nyújtjuk, hogy a hiba előírt legyen. Ez azt jelenti, hogy f_1 és f_2 helyére Cf_1-et, illetve Cf_2-t írunk. A (17—20) képletek átrendezésével, ha az abszolút középhiba van előírva

$$C = \frac{\delta_3}{\mu_{a3m}} \max_{\substack{a_1, b_1 \\ a_2, b_2}} \sqrt{\left(\frac{F_1'}{f_1'}\right)^2 + \left(\frac{F_2'}{f_2'}\right)^2}, \tag{21}$$

illetőleg

$$C = \frac{\delta_3}{\mu_{a3m}} \max_{\substack{a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \\ a_3, b_3}} \frac{\sqrt{\left(\frac{G_1'}{f_1'}\right)^2 + \left(\frac{G_2'}{f_2'}\right)^2}}{|G_3'|}. \tag{22}$$

Ha a relatív hiba van megadva

$$C = \frac{\delta_3}{\mu_{r3m}} \max_{\substack{a_1, b_1 \\ a_2, b_2}} \frac{\sqrt{\left(\frac{F_1'}{f_1'}\right)^2 + \left(\frac{F_2'}{f_2'}\right)^2}}{|F_{12}|}, \tag{23}$$

vagy

$$C = \frac{\delta_3}{\mu_{r3m}} \max_{\substack{a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \\ a_3, b_3}} \frac{\sqrt{\left(\frac{G_1'}{f_1'}\right)^2 + \left(\frac{G_2'}{f_2'}\right)^2}}{|z_3 G_3'|}. \tag{24}$$

A gyakorlatban általában csak az explicit alakra vonatkozó (21) és (23) képletek használhatók.

Ha a maximális hiba van előírva, δ_3 helyett Δ_3-at μ_{a3m} és μ_{r3m} helyett pedig A_{3m}-et és R_{3m}-et írunk [12].

Ha a nomogram túl nagyra adódnék, résznomogramokkal vagy törtdelt skálás nomogramokkal kell a kapcsolatot ábrázolnunk [7].

3. Rajzolási pontatlanságok hatása a nomogram leolvasási pontosságára

3.1. *Általános megjegyzések*

Vonalsereges nomogramoknál, akárcsak pontsorosoknál [12], a rajzi pontatlanságot csak akkor lehet figyelmen kívül hagyni, ha a nomogram a végső alak négy-ötszörös nagyításában készül, s a végleges nomogramot fényképészeti kicsinyítéssel állítjuk elő.

Ha a nomogram végleges méretben vagy csak csekély nagyításban készül, a rajzi pontatlanságokat is figyelembe kell venni.

A rajzi hiba nem valószínűségi változó, hanem a nomogram azonos helyén egyszer s mindenkorra állandó. Ennek ellenére megokolt normális eloszlású valószínűségi változóként kezelni [12]. Az eredő hiba számításában ez határozott könnyebbséget okoz.

3.2 *Vonalsereges nomogramok rajzi pontatlanságból származó hibája*

Vonalsereges nomogramoknál a rajzolás pontatlansága a vonalseregek egyes vonalaira merőlegesen érvényesül, vagyis egyrészt növeli δ_1 és δ_2 s ezek révén δ_{312} értékét, másrészt új δ_{33r} geometriai pontatlanságot is okoz. Ha a rajzolás δ_r geometriai pontatlansága egyenlő a beállítás δ geometriai pontatlanságával (2.2 pont), akkor az eredő δ_{3r} rajzi geometriai pontatlanság is (16) alapján számítható:

$$\delta_{3r} = \sqrt{2}\,\delta_r = \sqrt{2}\,\delta\,.$$

Az eredő geometriai pontatlanság tehát:

$$\delta_3 = \sqrt{2\delta_3^2 + 2\delta_{3r}^2} = \sqrt{2\delta^2 + 2\delta^2} = 2\delta. \tag{25}$$

Ilyenformán a 2.2 pontban közöltekkel összevetve δ_3 értéke 0,4 mm lenne. Tekintve, hogy δ_r a megrajzolás pillanatától kezdve már nem valószínűségi változó, biztonság kedvéért gondos rajz esetén is $\delta_3 = 0{,}5$ mm értékkel számoljunk. Ha pedig a z_3 sereg nem egyenessereg, akkor még ennél is nagyobb érték ajánlatos.

4. Példák adott pontosságú vonalsereges nomogram szerkesztésére

4.1. *Pikalov-zsilip hitelesítési nomogramja*

A *VITUKI laboratórium* 1956—57. év folyamán végezte el a rövidített építési hosszúságú *Pikalov-féle mérőzsilip* vizsgálatát. A felvíz és az alvíz közé iktatott mellékáramkörben a zsilipen átfolyó vízhozamnak csak kis hányada folyik át. A mellékáramkörben bizonyos idő alatt megmért V_m vízmennyiségből az n szorzótényező segítségével kapható meg az összes átfolyt vízmennyiség:

$$V = nV_m.$$

Az n szorzótényezőt a zsilipnyitás mértéke, a, egyértelműen meghatározza:

$$n = f(a).$$

Az $f(a)$ függvényt kísérletekkel határoztuk meg. Az egyes mennyiségek középhibájára a következő megállapításokat tettük:

Az n szorzótényező középhibája három részből tevődik össze: a hitelesítésből származó hiba 2%, az a beállítási bizonytalanságából származó hiba 0,75%, a mellékáramkör órájának különbözőségéből származó hiba pedig 1,5%. Ilyenformán V eredő középhibája a terepen:

$$\mu_{rV} = \sqrt{0{,}02^2 + 0{,}0075^2 + 0{,}015^2} = 2{,}6\%\,.$$

Ha a kapcsolatot vonalsereges nomogrammal akarjuk ábrázolni, mekkora műveleti hibát engedhetünk meg? Az (5) összefüggés alapján

$$\mu_{\text{műveleti}} = \frac{2}{3} \cdot 2{,}6 = 1{,}73\,\%\,.$$

Ekkor a leolvasás eredő hibája (6) szerint:

$$\mu_{\text{össz s}} = 1{,}2 \cdot 2{,}6 = 3{,}1 \approx 3\%\,.$$

Válasszuk a

$$V = f(a)\, V_m$$

kapcsolat ábrázolásánál V relatív leolvasási hibájának állandósága és így a leggazdaságosabb helykihasználás céljából a logaritmikus átalakítással történő ábrázolást:

$$\lg V = \lg f(a) + \lg V_m\,.$$

Legyen a V_m sereg az y tengellyel, az a sereg az x tengellyel párhuzamos. Cauchy-féle kanonikus alakra hozva és a C nyújtási tényezőt is bevezetve

$$C \lg V_m + C \lg f(a) - C \lg V = 0\,.$$

A seregek egyenlete a (9a), (9b), (9c) képletek alapján:

$$\begin{aligned} &(V_m) \quad x = C \lg V_m \\ &(a) \quad\; y = C \lg f(a) \\ &(V) \quad\; x + y - C \lg V = 0, \text{ ill. } y = C \lg V = x\,. \end{aligned}$$

Az V sereg tehát — 45°-os egyenesekből áll. Mekkora legyen a C tényező, ha a koordinátákat milliméterben értelmezzük és a nomogram műveleti hibáját, μ_{rV}-t, az előbbiek alapján 1,73%-ban írjuk elő?

Tekintve, hogy 250 mm-es egységű logaritmusos hálózat rendelkezésünkre állt, a nomogramot ennek felhasználásával óhajtottuk megrajzolni. Ez $C = 250$ fölvételét jelenti. Valószíňű, hogy bizonyos kicsinyítésre számíthatunk, ezért a rajzi pontatlanságot csökkentett értékkel véve figyelembe, az eredő geometriai pontatlanságot $\delta_3 = \delta_V = 0{,}4$ mm-nek vehetjük.

A változók ábrázolandó tartománya:

$$V_m = 1 \div 10$$
$$a = 5 \div 20, \text{ és } n = 123 \div 766.$$

Ebből számíthatóan pedig

$$V = 123 \div 7660.$$

Most már a (23) képlet alapján C számítható:

$$C = \frac{0{,}4}{0{,}0173} \cdot \max_{\substack{1.10 \\ (123{,}766)}} \frac{\sqrt{\left(\frac{n V_m}{0{,}434}\right)^2 + \left(\frac{V_m n}{0{,}434}\right)^2}}{n V_m} =$$

$$= \frac{0{,}4}{0{,}0173} \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{0{,}434}\right)^2} = 75{,}6.$$

Ez azt jelenti, hogy a $C = 250$ szorzótényezőjű logaritmusos hálózatban megrajzolt ábrát $75{,}6/250 \approx 0{,}3$-ére kicsinyítve, megkapjuk a kívánt pontosságú nomogramot. A 3. ábrán technikai okokból a 0,3-es kicsinyítési mérték helyett 1/3-os kicsinyítést alkalmaztunk.

Megjegyezzük, hogy a számítást a V, a V_m és az n változókra végeztük el, de az ábrán n helyett az a változót raktuk fel az $y = C \lg f(a)$ függvényskála szerint. Az $f(a)$ függvény négy pontját méréssel kaptuk, a skála besűrítését grafikus interpolációval szerkesztettük.

4.2. *Venturi csatorna hitelesítési nomogramja*

Trapézkeresztmetszetű, síkfenekű Venturi csatornák alvízi visszahatás nélküli vízszállítását, ha a torok rézsűhajlása 1 : 2, bizonyos korlátok között a

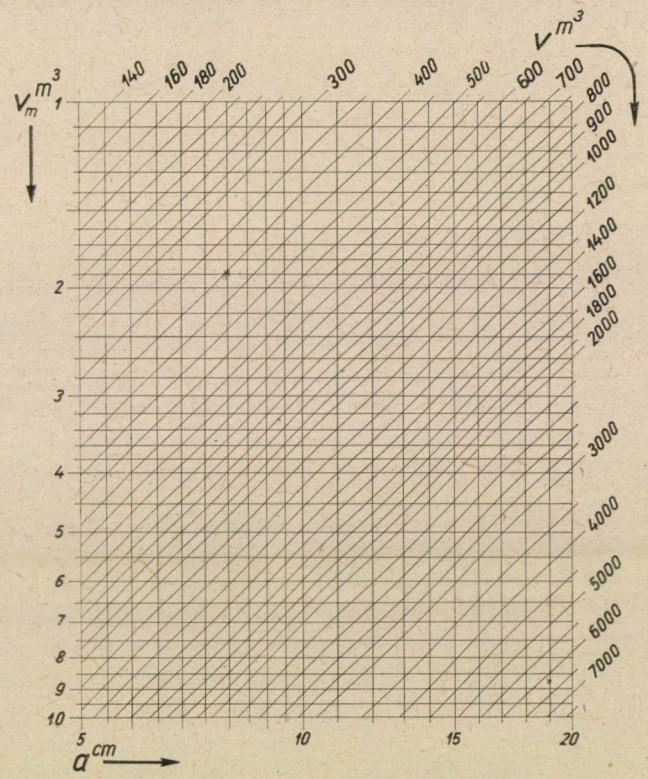
$$\frac{Q}{\sqrt{2g}\, b^{5/2}} = 0{,}305 \left(\frac{h}{b}\right)^{2{,}3}$$

dimenzió nélküli összefüggés átalakításából kapható

$$Q = 0{,}0135\, b^{0{,}2}\, h^{2{,}3}$$

képlet adja. A képletben Q a vízhozam l/sec-ban, b a torok fenékszélessége cm-ben, h a felvízi mélység ugyancsak cm-ben. A képlet adta vízhozam középhibája a típushitelesítés, valamint a helyszíni megépítés és mélység-

mérés hibáit figyelembe véve, becslés szerint legalább $\mu_{rQ\ \text{öröklött}} = 3\%$. Ábrázoljuk az összefüggést Descartes-féle egyenessereges nomogrammal úgy, hogy $\mu_{rQ\ \text{összes}} = 3{,}6\%$ legyen. Ekkor $\mu_{rQ\ \text{műveleti}} = 2\%$.



3. ábra. Egy Pikalov-típusú zsilip óraleolvasás—zsilipnyitás—vízmennyiség nomogramja

Ábrázolandó intervallumok:

$$h = 15 \div 150,$$
$$b = 2{,}5 \div 10,$$

s ebből számíthatóan

$$Q = 8{,}2 \div 2180.$$

Logaritmus alkalmazása, átrendezés, összevonások és a C nyújtási tényező bevezetése után a kapcsolat alakja:

$$2{,}3C \lg h + 0{,}2C \lg b - C(\lg Q + 1{,}86967) = 0.$$

A seregek egyenlete (10a), (10b) és (10c) alapján:

(h) $x = \lg h$

(b) $y = \lg b$

(Q) $2{,}3x + 0{,}2y - C(\lg Q + 1{,}86967) = 0$

ill. $y = 5C(\lg Q + 1{,}86967) - 11{,}5x.$

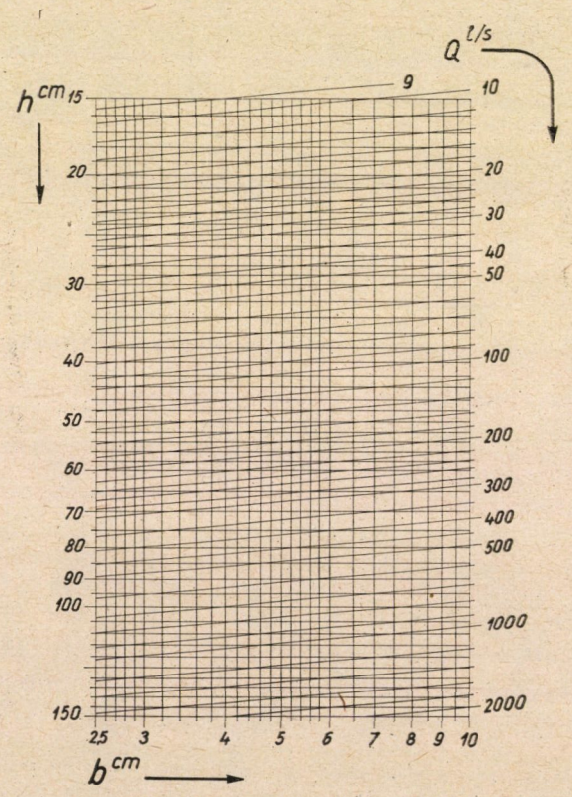
A nomogramot, mint az előbb is, 250 mm-es egységű hálózat felhasználásával kívánjuk megrajzolni. Valószínű, hogy a nagy megengedett hiba miatt bizonyos kicsinyítés lehetséges, így az eredő geometriai pontatlanságot $\delta_3 = 0{,}4$ mm-nek vehetjük föl.

A (23) képlet alapján

$$C = \frac{0{,}4}{0{,}02} \cdot \max_{\substack{15,150 \\ 2,5,10}} \frac{\sqrt{\left(\frac{2{,}3 \cdot 0{,}0135\, b^{0,2} h^{2,3}}{0{,}434}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2 \cdot 0{,}0135\, b^{0,2} h^{2,3}}{0{,}434}\right)^2}}{|0{,}0135\, b^{0,2} h^{2,3}|} =$$

$$= \frac{0{,}4}{0{,}02} \cdot \sqrt{\left(\frac{2{,}3}{0{,}434}\right)^2 + \left(\frac{0{,}2}{0{,}434}\right)^2} = 106{,}5.$$

Ezek szerint a 250 mm-es egységű hálózatban megrajzolt nomogramot 106,5 : 250 = 0,425 arányban lehet kicsinyíteni, így a kívánt pontossági előírásnak még eleget tesz. A 4. ábrán a nomogramot a 0,425-ös kicsinyítési mérték helyett 1/3-es kicsinyítésben mutatjuk be.



4. ábra. Egy trapézszelvényű Venturi csatorna típus felvízmélység—fenékszélesség—vízhozam nomogramja

Most bemutatott és előző [12] tanulmányunkkal igyekeztünk a nomogramszerkesztő mérnök számára olyan módszereket nyújtani, amelyek alkalmasak a gyakorlati nomogramszerkesztés feladatainak legnagyobb részében a pontossági problémák megoldására. Vizsgálataink legfeljebb háromváltozós kapcsolatokra terjedtek ki, de többváltozós kapcsolatokra is alkalmazhatók.

IRODALOM

1. Hajós György: A nomográfia alkalmazhatóságának határairól. A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei **1.** (1951) 268—273. o.
2. Meyer zur Capellen, W.: Leitfaden der Nomographie. Springer. Berlin—Göttingen—Heidelberg. 1953.
3. Nyevszkij, B. A.: Szpravocsnaja knyiga po nomografii. Gosztyehizdat, Moszkva—Leningrád. 1951.
4. Pál Sándor: Grafikus-numerikus módszer pontsoros és pontmezős nomogramok tervezésére. A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, I. évf. 1—2. füzet 223—272. o., 1956.
5. Pentkovszkij, M. V.: Nomografija. Gosztyehizdat, Moszkva—Leningrád, 1949.
6. Schwerdt, H.: Lehrbuch der Nomographie auf abbildungsgeometrischen Grundlage. Springer, Berlin, 1924.
7. Haszpra Ottó: Nomográfia. Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1955.
8. Bal, L.—Radó, F.: Lecţii de nomografie. Editura Tehnica, Bukarest, 1956.
9. Schroeder, R.: Praktische Einführung in die Nomographie. Hanser, München 1951.
10. Haszpra Ottó: Néhány megjegyzés nomogramok leolvasási hibáihoz. A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei. IV. évf. 3—4. füzet. 1959.
11. Haszpra Ottó: Függvényskálák és alkalmazásuk a hidraulikában. Hidrológiai Közlöny 1961/1.
12. Haszpra Ottó: Előírt pontosságú pontsoros nomogramok tervezése. Hidraulikai alkalmazások. A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei XXVIII. (1961) 1—4. sz.

ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmány a szerző [12] tanulmányának szerves folytatását képezi.

A hibákra vonatkozó rövid áttekintés után ismerteti a vonalsereges nomogram szerkesztési alapelveit, majd részletesen tárgyalja a vonalsereges nomogram műveleti hibájának meghatározását s adott pontosságú nomogram szerkesztését. A hiba a (17—20) képletek alapján, az előírt pontosságú nomogram nyújtási tényezője a (21—24) képletek alapján számítható.

Befejezésül két példát ad előírt pontosságú vonalsereges nomogramra a hidraulika területéről.

ELEKTRONIKUS VEZÉRLÉSŰ 40 000 VOLTOS NAGYPONTOSSÁGÚ SPEKTROSZKÓPIAI SZIKRAGERJESZTŐ

Dr. BARDÓCZ ÁRPÁD

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM, FINOMMECHANIKA—OPTIKA TANSZÉK

[Beérkezett 1961. augusztus 17-én]

Bevezetés

A szokásos módon előállított szikraszínképfelvételek vizsgálatánál és értékelésénél komoly nehézséget jelent az a körülmény, hogy időben erősen változó jelenségek által kibocsátott fény időben ugyancsak erősen változó színképei egymásra vannak helyezve. Eddigi vizsgálatok alapján ismert, hogy szikraszínképekben egy a kisülés kezdetén keletkező és a környező gázra jellemző folytonos színkép jelenik meg, amelyre ráhelyeződnek a környező gáz nehezen gerjeszthető színképvonalai is. A kisülés első szakaszában jelennek meg az elektródok gőze által kibocsátott szikravonalak, majd a gerjesztő energia csökkenésével ívszínkép kerül kisugárzásra. A szikrakisülés kezdetén a szikraközben az elektronok és ionok által létesített erős villamos terek folytán keletkező Stark-effektus következtében a vonalak kiszélesednek és egyes vonalak hullámhosszban való eltolódása is mutatkozik [22]. A szikrában uralkodó erősen változó viszonyok miatt, időben igen jelentősen változik a színképvonalak félérték szélessége és önabszorpciója is.

A fentebb felsorolt jelenségek létrejötte és időbeli lefolyása a szikraköz különböző helyein is más és más.

Az elmondottakból következik, hogy a szikrában lejátszódó optikai folyamatok részletes felderítése csak időben felbontott színképek segítségével lehetséges.

Az utóbbi időben többen foglalkoztak szikrakisülések színképének nagy időfelbontásban való vizsgálatával. GORDON és CADY [1], továbbá BLITZER és CADY [2] nagyenergiájú egyes kisülések időben felbontott színképeit állították elő fényképező úton. Ugyancsak fényképező eljárással dolgozott TSUI [3], 4 mikromásodperc időtartamú áramlökések által létrehozott fénysugárzás vizsgálatánál. Ugyanennek a feladatnak megoldására STEINHAUS, CROSSWHITE és DIEKE [4, 5, 6] fényelektromos eljárást dolgoztak ki.

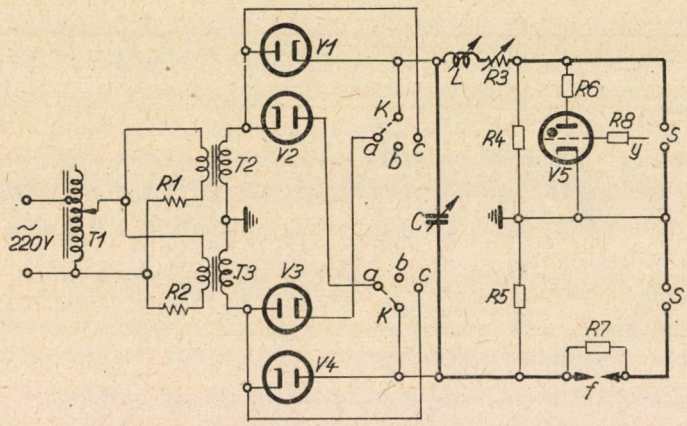
E dolgozat célja olyan nagypontosságú elektronikus vezérlésű nagyfeszültségű szikragerjesztő ismertetése, amely alkalmas arra, hogy segítségével mikromásodperces időfelbontásban spektrogramokat lehessen előállítani. A szikragerjesztő alkalmas nem időfelbontásos üzemre is. A szikragerjesztő használhatóságát néhány példán bemutatjuk.

A szikragerjesztő két részből áll, mégpedig a nagyteljesítményű munkaáramkörből és a kisteljesítményű vezérlő áramkörből. Ha a szikragerjesztőt időben felbontott színképek előállítására akarjuk felhasználni, fotocellával vezéreljük. Ha célunk időben fel nem bontott színképek előállítása, akkor a szikragerjesztő vezérlése a váltóáramú hálózatról szinkronizált impulzusgenerátorral történik.

A nagyteljesítményű munkaáramkör vázlata az 1. ábrán látható. A 4. ábra a fotocellával működtetett impulzusgenerátor villamos kapcsolási vázlatát, az 5. ábra annak tömbvázlatát ábrázolja. A 6. ábrán a hálózatról szinkronizált impulzusgenerátor villamos kapcsolási vázlatát mutatjuk be, a 7. ábra annak tömbvázlatát mutatja. A 12. ábra a szikragerjesztő fényképe.

A szikragerjesztő szerkezete

Az 1. ábrán látható szikragerjesztő felépítésénél a szerző részéről korábban ismertetett szikragerjesztő elvét használtuk fel [7, 8, 9, 10].



1. ábra. 40 000 voltos elektronikus vezérlésű spektroszkópiai szikragerjesztő villamos kapcsolási vázlata: Tl = toroid transzformátor 220/270 volt, 7 kVA, R1,2 = 3 ohm, T2,3 = = 220/15 000 volt 4 kVA, V1, 2, 3, 4 = vákuum egyenirányító dióda V 100/25, anódfeszültség 20 000 volt, inverz anódfeszültség 40 000 volt, *K* = átkapcsoló, *a*, *b*, *c*, annak állásai, *C* = 500—20 000 pF, csillám (Dubilier), L = 0—1500 μH, R3 = 0—16 ohm, R4, 5 = 100 Mohm, R6 = 0,02 Mohm, R8 = 30 kohm, V5 = thyratroncső 12 Q R 205, 20 000 V, 2,5A, R7 = 1,0 Mohm, *F* = elemző szikraköz, S = kettős vezérlésű szikraköz

Az 1. ábra *C* kondenzátora a gerjesztő energiát szolgáltató munkakondenzátor. A *C* kondenzárort a *T*2 és *T*3 sorba kapcsolt transzformátorok töltik fel. A *C* kondenzátor feltöltése történhet közvetlenül a *T*2 és *T*3 transzformátorokról (*K* kapcsolók *c* állása), vagy a *K* kapcsolók *b* állásában egyoldalas egyenirányítással, míg a *K* kapcsolók *a* állásában Graetz kapcsolásban egyenirányítunk. A *C* kondenzátor töltőfeszültségét az R4 és R5 ellenállások egyen-

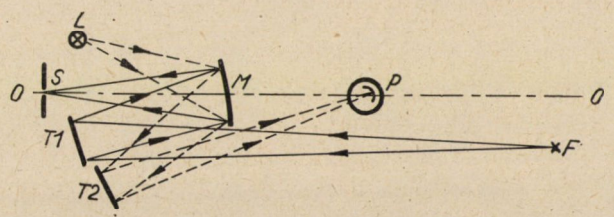
letesen elosztják az *S* kettős szikraközön. *F* az elemző szikraköz, amelyet R7 ellenállás áthidal. V5 thyratroncső, amelynek anódkörében az R6 ellenállás van. A kisülési áramkört az 1. ábrában vastagon jelöltük. *L* és R3 a kisülési áramkör üzemviszonyainak beállítására való önindukció és ohmos ellenállás. A T2 és T3 nagyfeszültségű transzformátorok feszültségét a T1 toroid transzformátorral állítjuk be. R1 és R2 áramkorlátozó ohmos ellenállások, amelyeknek az a feladata, hogy az *S* kettős vezérlő szikraköz és *F* elemző szikraköz rövidrezárásakor megakadályozza a megengedettnél nagyobb áram átfolyását a rendszeren. Ha a *C* kondenzátort közvetlenül a hálózatról tápláljuk (K kapcsolók *c* állása), a primer áramkörbe még kiegészítő ohmos ellenállást kell iktatni.

Az említett dolgozatok [7, 8, 9, 10] alapján a szikragerjesztő röviden a következőképpen működik:

Ha az egyébként negatív előfeszültséggel lezárt V5 cső rácsára pozitív feszültségjelet adunk, a cső begyúl, aminek folytán a *C* kondenzátor teljes töltőfeszültsége az *S* kettős vezérlő szikraköz ábra szerinti alsó szikraközén jelentkezik. Mivel az *S* szimmetrikus kettős vezérlésű szikraközt előzőleg úgy kell beállítani, hogy a *C* kondenzátor feltöltött állapota mellett még éppen ne üssön át, a jelentkező kétszeres feszültség hatására az alsó szikraköz át fog ütni. Ennek az átütésnek folyományaképpen a *C* kondenzátor az L-R3-R6-V5-S alsó fele-R7 úton át kezd kisülni. Mivel R7 sokkal nagyobb, mint R6, a *C* kondenzátor töltőfeszültsége nagyobbrészben R7-en jelenik meg, így F is átüt. Ezután L-R3-R6-V5-S alsó fele-F lesz a *C* kondenzátor kisülésének útja. Most azonban *C* teljes töltőfeszültsége R6-on, illetőleg *S* felső felén jelentkezik, így utóbbi is átüt. Ennek megtörténte után a *C* kondenzátor az L-R3-S-F úton szabadon kisül.

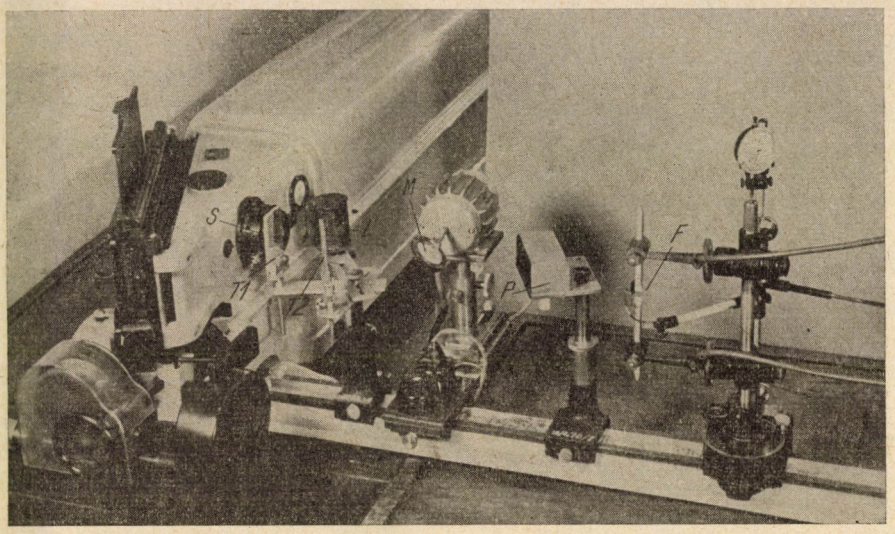
A fotocellával működtetett impulzusgenerátor

Az 1. ábrán vázolt szikragerjesztő fotocellás vezérlésénél használt optikai elrendezést vázlatosan a 2. ábra szemlélteti. Ugyanezen berendezés fényképét Hilger-féle autokollimációs spektrográffal kapcsolatban a 3. ábrán mutatjuk be. Az elrendezést részben az a követelmény szabta meg, hogy az egyes alkatrészek a spektrográf optikai padján jól rögzíthetően legyenek elhelyezhetők.



2. ábra. A szikragerjesztő fotocellás vezérlésénél alkalmazott optikai berendezés vázlatos elrendezése

A 2. ábrán az O—O vonal az optikai tengelyt jelképezi. Az *F* szikrafényforrásból jövő fény a T1 tükörre jut, amely a spektrográf *S* részének közelében van. A T1 tükör az F-ből jövő fényt az *M* konkáv forgó tükörre vetíti, utóbbi szinkronmotor tengelyére van erősítve. Az F fényforrás előtt vízszintes rés van, amelynek segítségével a szikra különböző részei kiárnyékolhatók.



3. ábra. A szikragerjesztő fotocellás vezérlésénél alkalmazott optikai berendezés fényképe Hilger-féle autokollinációs spektrográffal kapcsolatban

Az *M* forgó tükör az *F* fényforrás előtti rést a spektrográf *S* részére képezi, és forgása közben a résen végig vándoroltatja. A fényforrás előtt elhelyezett rést a 2. ábrán nem tüntettük fel, de a 3. ábrán látható. Ugyancsak a 3. ábrán látható az is, hogy az említett réshez viszonyítva a szikraköz függőleges irányban elmozdítható, hogy ezáltal a rés elé a szikraköz különböző részei kerüljenek. A szikraköz függőleges helyzetét a réshez viszonyítva a szikraállvány felső részén levő mérőóra mutatja.

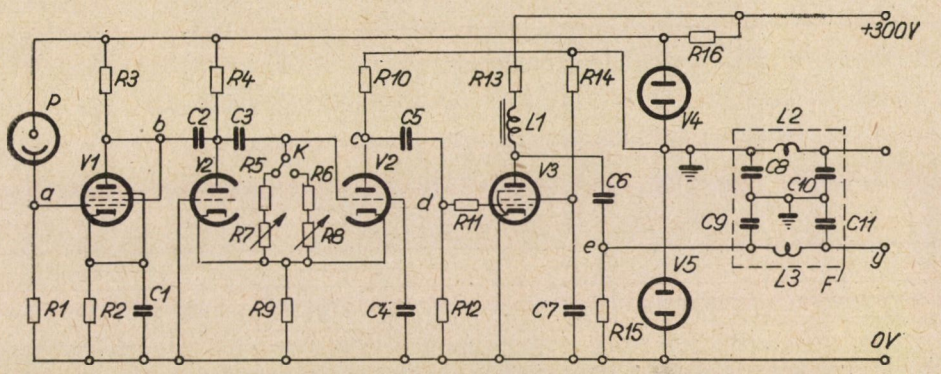
A szikragerjesztő működtetését végző fotocella megvilágítása az *L* autólámpa segítségével történik. Az *L* lámpa izzószálát a *P* fotocellára az *M* forgó tükör képezi le T2 tükör közbeiktatásával.

A 2. ábra elemeit a 3. ábrán ugyanazokkal a betűjelzésekkel láttuk el.

A 4. ábrán látható fotocellával működtetett impulzusgenerátor a V1 és V3 erősítő fokozatokon kívül tartalmazza még a V2 csövekből alkotott multivibrátort is. Ennek a multivibrátornak az a feladata, hogy a *P* fotocella által létrehozott feszültségjelhez képest, az impulzusgenerátorból kimenő és az 1. ábra szerinti szikragerjesztő V5 thyratroncsövét vezérlő jelet a kívánt mértékben késleltesse. Ennek jelentőségéről később lesz szó. A 4. ábra K kapcsolójának jobboldali állásában ez a késleltetés 0—10 mikromásodperc között,

baloldali állásában 10—100 mikromásodperc között változtatható. Az impulzusgenerátor egyébként az alábbiak szerint működik:

A V1 cső nagy katódellenállása (R2) segítségével közel lezárásra van beállítva. Ha a fotocellát fénylökés éri, rajta keresztül áram indul meg, amely az R1 ellenálláson pozitív feszültségjelet hoz létre. Ezt a pozitív jelet a V1 cső felerősíti és fázisban megfordítja. A katód C1 kondenzátora a negatív



4. ábra. Fotocellával működtetett impulzusgenerátor villamos kapcsolási vázlata: a, b, ... y = helyjelölések, C1 = 0,1 μF, C2 = 430 pF, C3 = 3000 pF, C4 = 47 pF, C5 = 100 pF, C6 = = 1000 pF, C7 = 1μF, C8—11 = 200 pF, K = átkapcsoló, L1 = 0,3 mH, L2 = 0,2 mH, L3 = 0,2 mH, R1 = 5 Mohm, R2 = 2 kohm, R3 = 68 kohm, R4 = 10 kohm, R5 = 10 kohm, R6 = 1 kohm, R7 = 0,1 Mohm, R8 = 10 kohm, R9 = 2,5 kohm, R10 = 3 kohm, 1 W, R 11 = 50 kohm, R12 = 0,1 Mohm, R13 = 40 kohm, 1 W, R14 = 5 kohm, R15 = 50 kohm, 1 W, R16 = 1 kohm, 12 W, P = fotocella, 32 mikro A/lumen, 150 V-nál, V1 = pentóda 6AU6, V2 = kettős trióda ECC40, V3 = pentóda EBL21, V4 = stabilizátorcső VR150

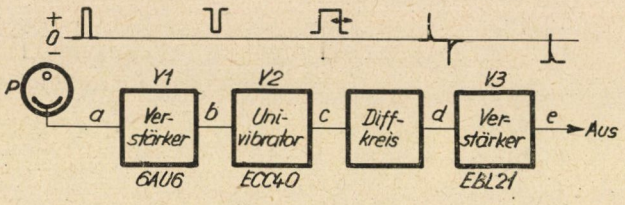
visszacsatolást gátolja meg. A negatív jel a C2 kondenzátoron keresztül a V2 multivibrátor első csövének anódjára kerül és azt megindítja úgy, hogy a C3-on keresztül lezárja a V2 második felét. A visszabillenés időtartama C3, R5, R7, illetőleg C3, R6, R8 elemekkel beállítható. R9 ellenállás a fokozat érzékenységének beállítására szolgál. A V2 második felének anódján és az R10 ellenálláson a visszabillenéskor negatív feszültségugrás jelenik meg, amely C5, R12-en keresztül a V3 erősítő rácsára kerül. A V3 anódkörében az R13, L1 elemeken, fázisban megfordított pozitív feszültségjel jelenik meg, amely a C6 kondenzátoron keresztül szolgáltatja az 1. ábra V5 thyratroncsövének vezérléséhez szükséges jelet. Ezt a jelet az *F* szűrőfokozaton átvíve az *y* ponton át az 1. ábra ugyanilyen jelű pontjához vezetjük.

Az 1. ábra V5 jelű thyratroncsövének lezárásához szükséges előfeszültséget oly módon állítjuk elő, hogy a V4, V5 feszültségstabilizátorok — 150 volton levő osztópontját földeljük le, ezzel az *y* pont az R15 ellenálláson keresztül a földpotenciálhoz képest — 150 volt potenciálra kerül.

Az 5. ábrán ábrázolt tömbvázlatba az impulzusgenerátor egyes pontjaiban jelentkező feszültségjeleket is berajzoltuk. A 4. és 5. ábrák azonos betű-

jelzésű helyei azonosak. Az 5. ábra *a*—*d* pontjaiban levő feszültségjelek zérus potenciálra, az *e* pontban jelentkező pedig földpotenciálra vonatkoznak.

A szikragerjesztő fotocellás üzeménél célszerű egyoldalas egyenirányítással dolgozni, amikor az 1. ábra *C* kondenzátora a hálózat egyik félperiódusa alatt feltöltődik, a kisülés a másik félperiódus alatt történik. Ezt úgy lehet



5. ábra. Fotocellával működtetett impulzusgenerátor tömbvázlata

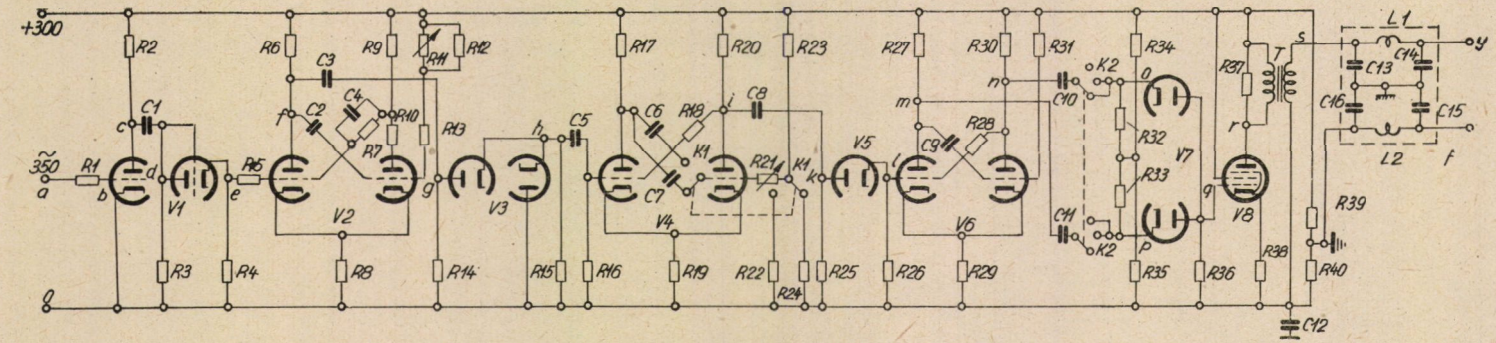
elérni, hogy a 2. ábra *M* forgótükrét a meghajtó szinkronmotor tengelyén a forgórészéhez viszonyítva megfelelő fázis-szögben rögzítjük. Az *F* fényforrás időben széthúzott képének a spektrográf *S* résén történő függőleges irányú állítása a *P* fotocella függőleges irányú elmozdításával és a 4. ábra impulzusgenerátorába beszerelt késleltető multivibrátorral történhetik.

A hálózatról szinkronizált impulzusgenerátor

A hálózatról szinkronizált impulzusgenerátor (6. és 7. ábra) másodpercenként legfeljebb 50, vagy a hálózati frekvencia valamely alharmonikusának megfelelő gyakorisággal, egymást 0,01 mp időközzel követő kettős feszültségjelek előállítására alkalmas. Ilyen módon az impulzusgenerátorral másodpercenként szolgáltatott jelek legnagyobb száma 100.

Az impulzusgenerátor a 6. és 7. ábrák alapján a következőképpen működik:

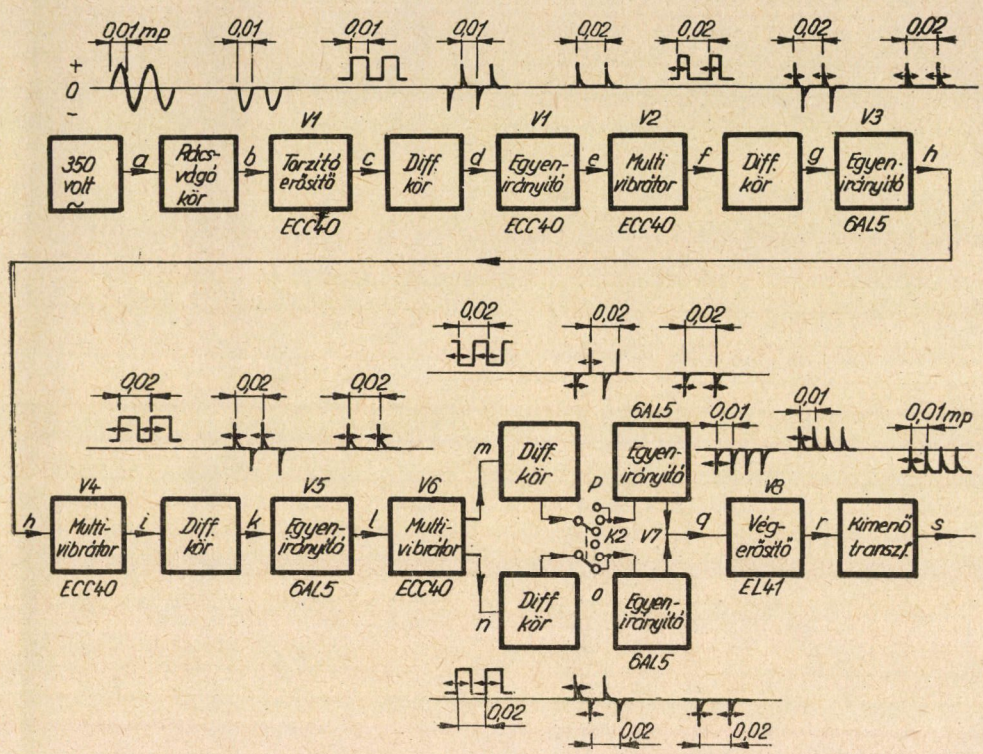
Az első fokozat torzító erősítő, amely a rácsára juttatott sinus alakú feszültségből négyszögjelet csinál, amelyet differenciálunk. (A feszültségjelek alakját az impulzusgenerátor egyes pontjaiban a 7. ábrába berajzoltuk.) Ezek a differenciált jelek egyenirányítás után megindítják a V2 egystabilállapotú multivibrátort, amely minden pozitív feszültségjel behatására négyszögjelet állít elő. A négyszögjel eleje szinkron az indítófeszültséggel, vége pedig az R11 potenciométerrel állítható be. A multivibrátor 90—270 villamos fok közötti fáziskéséseinek megfelelő, R11-el szabályozható időtartam után billen vissza stabilis helyzetébe. A kapott négyszögjelet differenciálva és egyenirányítva, fázisban eltolható pozitív feszültségjelet kapunk. A V2 multivibrátor ebben a működésében nem más, mint fázistoló, amire azért van szükség, hogy az impulzusgenerátorral szolgáltatott vezérlőjeleket a hálózati feszült-



6. ábra. A váltóáramú hálózatról szinkronizált impulzusgenerátor villamos kapcsolási vázlata: *a*, *b* . . . . *y* = helyjelölések, Cl = 680 pF, C2 = 50 *n*F, C3 = 680 pF, C4 = 300 pF, C5 = 680 pF, C6 = 250 nF, C7 = 50 nF, C8 = 680 pF, C9 = 20 nF, Cl0,11 = 680 pF, C12 = 0,1 μF, C13—16 = 200 pF, F = szűrőtag, Kl, K2 = kapcsolók, L = 0,2 mH, Rl = 1 Mohm, R2 = 68 kohm, 3 W, R3 = 0,2 Mohm, R4 = 0,5 Mohm, R5 = 0,3 Mohm, R6 = 68 kohm, R7 = 1,5 Mohm, R8 = 25 kohm, R9 = 33 kohm, 1 W, R10 = 33 kohm, 1 W, R11 = 1,0 Mohm, 1,5 W, R12 = 0,8 Mohm, R13 = 0,15 Mohm, R14 = 0,2 Mohm, R15 = 0,2 kohm, R16 = 0,5 Mohm, R17 = 68 kohm, 3 W, R18 = 1,5 Mohm, R19 = 20 kohm, R20 = 68 kohm, 3 W, R21 = változó az I. táblázat szerint, R22 = 10 kohm, R23 = 50 kohm, 3 W, R24 = 20 kohm, R25 = 0,2 Mohm, R26 = 0,5 Mohm, R27 = 68 kohm, 3 W, R28 = 1,5 Mohm, R29 = 20 kohm, R30 = 68 kohm, 3 W, R31 = 0,1 Mohm, R32,33 = 0,1 Mohm, R34 = 0,34 Mohm, R35 = 0,1 Mohm, R36 = 1,5 Mohm, R37 = 33 kohm, 2 W, R38 = 0,15 Mohm, R39 = 40 kohm, 1 W, R40 = 66 kohm, 2 W, T = csatoló transzformátor, áttétele 1 : 1., V1,2 = kettős trióda ECC40, V3 = kettős dióda 6 AL5, V4 = = kettős trióda ECC40, V5 = kettős dióda fele 6AL5, V6 = kettős trióda 6J6, V7 = kettős dióda 6AL5, V8 = pentóda EL41

séghez viszonyítva a megkívánt fázishelyzetbe hozza. Ennek jelentőségéről még később lesz szó.

A 6. és 7. ábrák *h* pontjához, 50 periódusú hálózatot feltételezve, másodpercenként 50 jel jut. Ezek a jelek megindítják a V4 egystabilállapotú multivibrátort, amelynek visszabillenése C7, C6, R22, R24 és R21 elemekkel szabá-

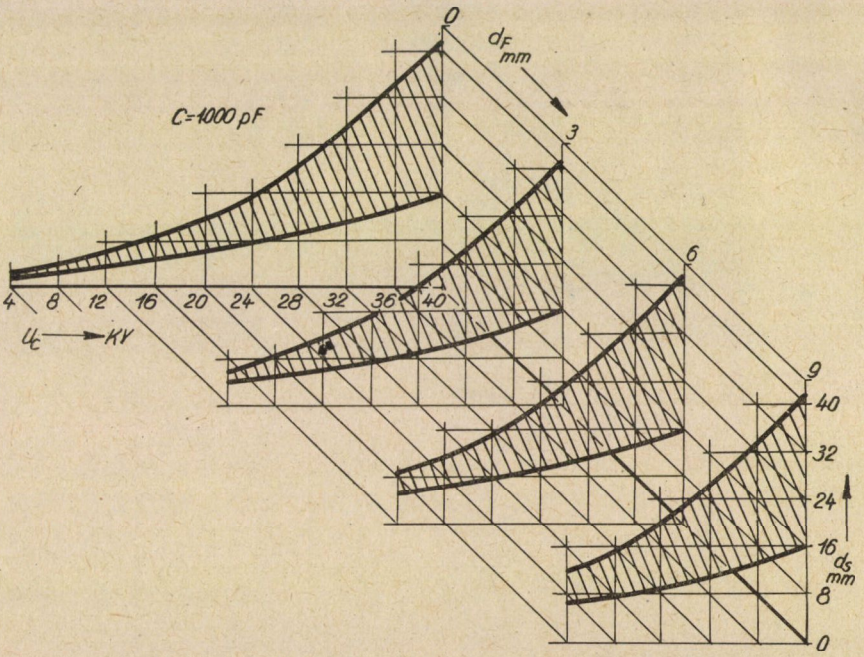


7. ábra. A váltóáramú hálózatról szinkronizált impulzusgenerátor tömbvázlata

lyozható és így az impulzusgenerátor frekvenciája a tápláló hálózat alharmonikusaira állítható be. A C7 és R24 értékek bekapcsolása mellett a különböző R21 ellenállásértékekhez tartozó impulzusgenerátor rezgésszámok az I. táblázatban vannak összefoglalva. Ugyanazon R21 értékek mellett, ha C7 és R24 helyett C6 és R22 értékeket kapcsoljuk be, a multivibrátor rezgésszáma az előbbi egyötödére esik. Ilyen módon a V4 multivibrátor rezgésszáma másodpercenként 1 és 50 között változtatható. Ezzel a kapcsolással válik lehetővé az egyes szikrák közé tetszőleges szünetek beiktatása. Addig ugyanis, amíg a V4 multivibrátor nem billen kiindulási állapotába, a *h* pontból érkező pozitív jelek hatástalanok. Ha a V4 multivibrátor visszabillent kezdeti állapotába, a *h* pontból érkező szinkronizáló jel újból elindítja, és a játék újra kezdődik.

A 6. és 7. ábrák *i* pontjában jelentkező jeleket differenciáljuk, majd egyenirányítjuk. Az ilyen módon előállított és *l* pontba érkező jelekkel indítjuk a V6 egystabilállapotú multivibrátort, amelynek visszabillenési ideje 0,01 mp-re van beállítva. Ennek a multivibrátornak az a feladata, hogy a hozzá érkező feszültségjeleket egymást 0,01 mp időtávolságban követő kettős jellé alakítsa. Ilyen módon érhető el a másodpercenkénti 100 jelszám. A V6 multivibrátort elhagyó jelek differenciálás és egyenirányítás után egy csatornába egyesülnek és a V8 végerősítőbe jutnak. A V8 végerősítő fokozat nagyfeszültségű és nagyenergiájú, az 1. ábra V5 thyratroncsövének vezérléséhez szükséges jeleket állít elő oly módon, hogy jelszünetben *T* transzformátoron keresztül áramot enged át és a rácsára érkező negatív jelek hatására a transzformátor áramát megszakítja. A szakításkor keletkező feszültségugrás nagyságát a transzformátorral párhuzamosan kapcsolt csillapító ellenállással lehet beállítani. Az 1. ábra V5 jelű thyratroncsöve negatív előfeszültségét az impulzusgenerátortól kapja, az R39 és R40 ellenállásokkal való leosztás útján.

A készülék működése szempontjából ugyanis a vonatkozási pont a nullpotenciál. Viszont a thyratroncső előfeszültségének biztosítása céljából nem a nullpotenciál, hanem az R39, R40 ellenállásokkal leosztott pozitívebb pont



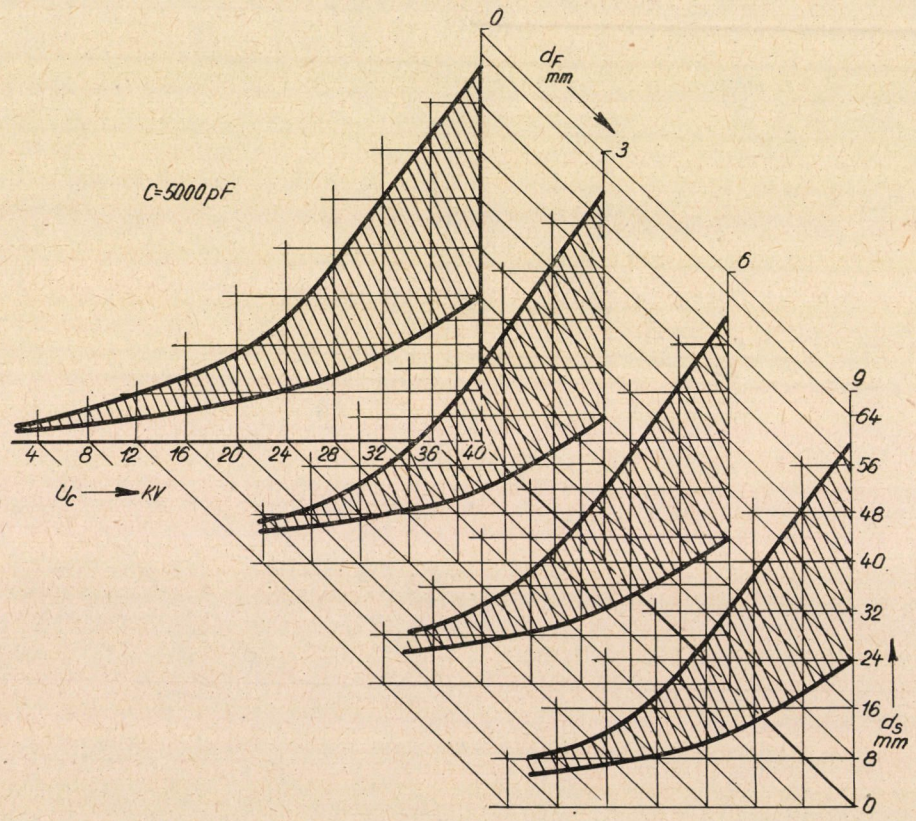
8. ábra. A szikragerjesztő működési tartománya a *C* kondenzátor U_C töltőfeszültségének és d_F elemző elektródtávolságának függvényében. d_S az S kettős vezérlőszikraköz (1. ábra) összelektródtávolságát jelenti. *C* = 1000 pF, R6 = 0,02 Mohm, R7 = 1,0 Mohm. A működési tartományok vonalkázva vannak

van földelve, illetve a thyratronkatódhoz kötve. A 7. ábrában az összes feszültségek nullpotenciálra, a kimenő jel pedig földpotenciálra van vonatkoztatva.

A *T* transzformátort elhagyó jelek *F* szűrőtagon áthaladva az *y* ponton át jutnak az 1. ábra ugyanolyan jelű pontjához.

Az impulzusgenerátort hálózati oldalán is ugyanolyan szűrővel kell ellátni, mint a kimeneti oldalon.

Ha a szikragerjesztőt a 6. ábrán ábrázolt impulzusgenerátorral tartjuk üzemben, legkedvezőbb működése akkor lesz, ha 50 periódusú hálózatot feltételezve, másodpercenként mindössze 50 szikrát keltünk (1. ábra *K* kapcsolójának *b* állása). Ekkor a *C* kondenzátor az egyik félperiódus alatt feltelik, másik félperiódus alatt kisül. A V5 thyratroncsövet vezérlő jel fázisát a 6. ábra R11 potenciométerével állítjuk be. Másodpercenként 100 szikrát elő lehet állítani az 1. ábra *K* kapcsolójának mind *a*, mind pedig *c* állásában. *a* kapcsolóállás esetén, tehát ha kétoldalas egyenirányításunk van, a *C* kondenzátor kisütése célszerűen a transzformátorfeszültség zérusértékénél történik. Ennek a kérdésnek a részleteit illetőleg lásd a [11] dolgozatot is.

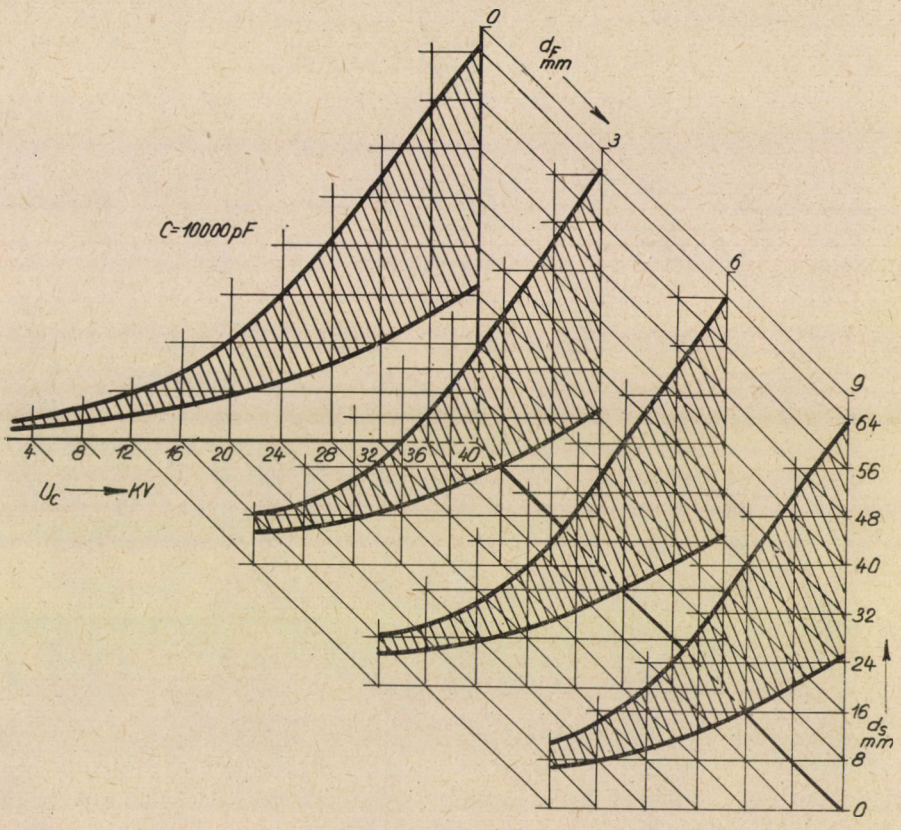


9. ábra. A szikragerjesztő működési tartománya $C = 5000$ pF mellett. Egyéb adatok azonosak mint a 8. ábránál

A szikragerjesztő egyes üzemi jellegzetességei

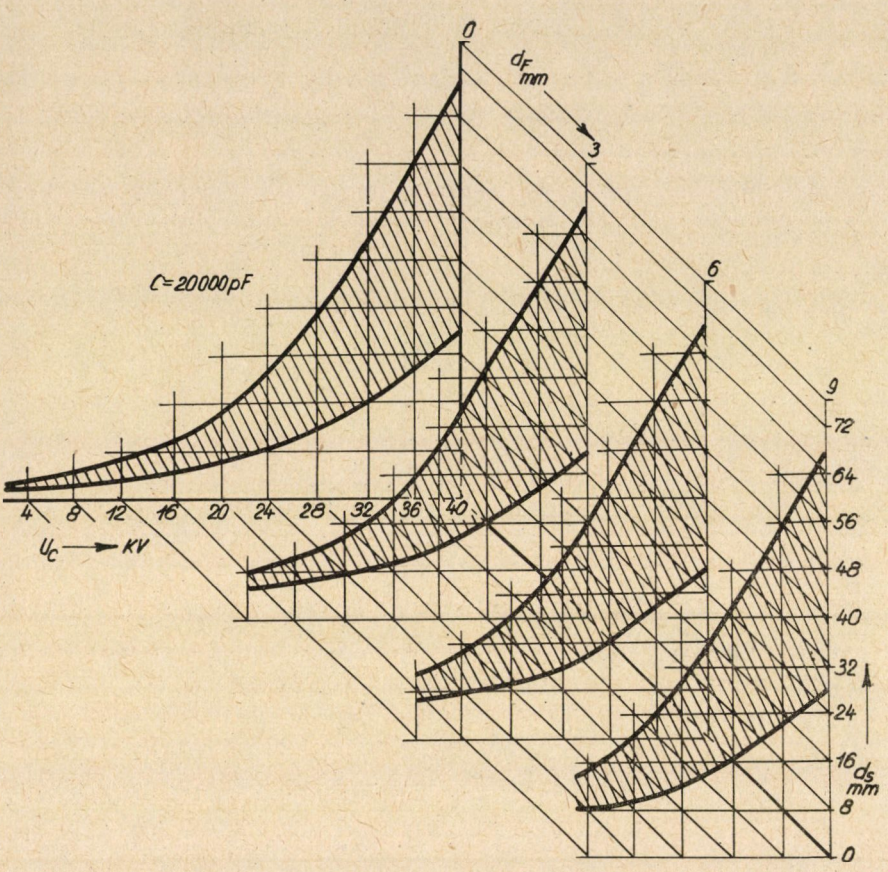
A szikragerjesztő működési tartományait [8, 9, 10, 11] az 1. ábra C kondenzátorának 1000, 5000, 10 000 és 20 000 pF kapacitásértékei mellett a 8., 9., 10. és 11. ábrákon adjuk meg.

A működési tartomány és a szikrakisülés beindulásának időpontja között fontos összefüggés van. Ha megfigyeljük az 1. ábra V5 thyratroncsövének



10. ábra. A szikragerjesztő működési tartománya $C = 10\,000$ pF mellett. Egyéb adatok azonosak mint a 8. ábránál

rácsára adott vezérjel érkezésének és a szikrakisülés beindulásának időpontját, azt tapasztaljuk, hogy minél kisebb a d_S vezérlőelektród távolság, annál kisebb a két időpont közötti szórás, az időszórás. A működési tartományok alsó határának közvetlen közelében ez az időszórás fotocellás üzemben néhány tizedmásodpercre csökken. Ilyen megfigyeléseket vagy magán a szikra időben széthúzott képén lehet eszközölni, vagy pedig szinkroszkóp segítségével, amelynél az időtengely eltérítését a V5 cső rácsára érkező feszültségjel indítja.



11. ábra. A szikragerjesztő működési tartománya $C = 20\,000$ pF mellett. Egyéb adatok azonosak, mint a 8. ábránál

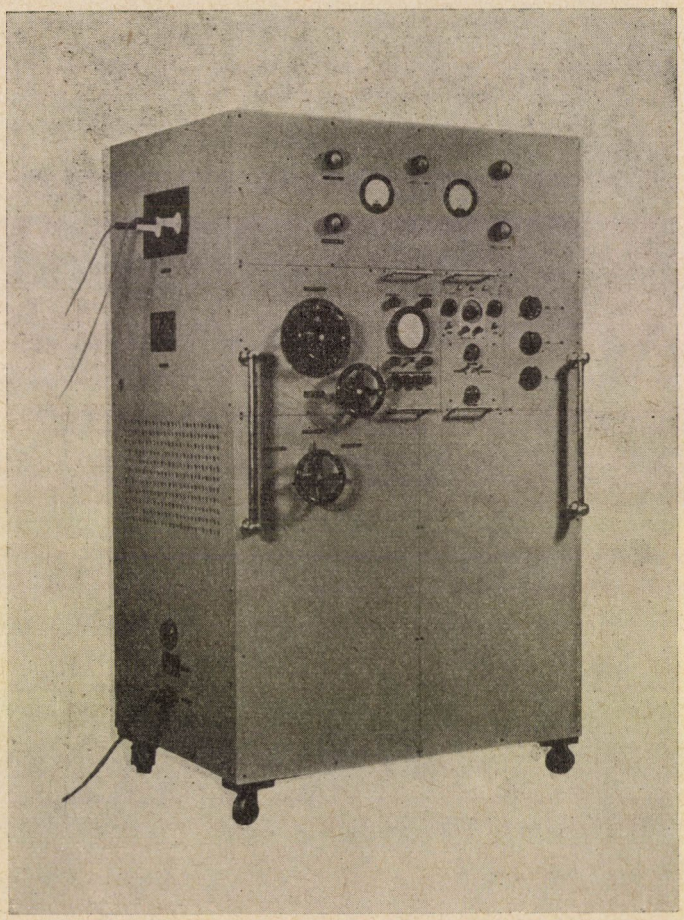
A tapasztalat azt mutatja, hogy az 1. ábra a V5 csövének rácsára érkező vezérlőjelhez viszonyítva az egyes szikrakisülések beindulásának időszórása kisebb, ha az 1. ábra szerinti kapcsolás nem szimmetriapontjában, hanem egyik fázisánál földelt.

A szikragerjesztő szerkezete

A dolgozat tárgyát képező szikragerjesztő kivitele a 12. ábrán látható. A berendezés 1350 × 1000 mm alapterületű, 2200 mm magas és görgőkön mozgatható.

A készülék a hálózatra elölről nézve baloldalt alul csatlakozik. Ezen csatlakozás közelében van a távvezérlés csatlakozása. Ugyanezen oldalról történik a nagyfeszültség elvezetése is. A készülék homloklapjának felső

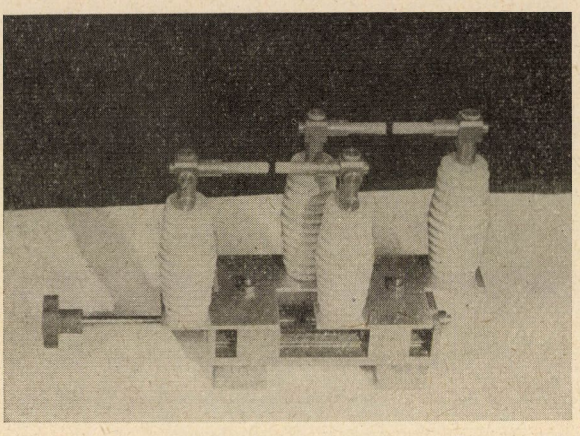
mezőjében feszültség és árammérő, továbbá öt jelzőlámpa helyezkedik el. Ez alatt négy különálló mező van. A baloldali mezőben az 1. ábra T1 toroid transzformátora és az *S* kettős szikraközt állító kerék van. Jobbfelé haladva a következő mező a készülékbe beszerelt oscilloszkópé. A következő mezőben



12. ábra. 40 000 voltos elektronikus vezérlésű spektroszkópiai szikragerjesztő

önműködő időkapcsolószerkezet és a hálózatról szinkronizált impulzusgenerátor van. A fotocellával vezérelt impulzusgenerátor nincs a készülékben. Az utolsó mezőben lévő három kapcsoló közül az egyik a főkapcsoló, a másik a készülék működtető kapcsolója, a harmadik a készülékbe beszerelt levegőfúvót működteti. A levegőfúvó segítségével az 1. ábra *S* kettős vezérlésű szikraközét fúvatni lehet. Az előbbiekben ismertetett mezősor első mezeje alatt az 1. ábra *K* kapcsolójának működtető kereke van.

A szikragerjesztőberendezés jellegzetes részlete az 1. ábra *S* jelű kettős vezérlő szikraköze, amelynek kivitele a 13. ábrán látható. A vezérlő szikraköz elektródjai 10 mm átmérőjű magnéziumrudakból készülnek, a mindenkori vezérlő szikraköztávolság optikai kivetítéssel észlelhető. A készülék balol-



13. ábra. Az 1. ábra *S* kettős vezérlő szikraközének kivitele

dalán levő behajtható tükör az elektródtávolság képét úgy vetíti ki, hogy az a készülék homloklapja felől szemmagasságban jól látható.

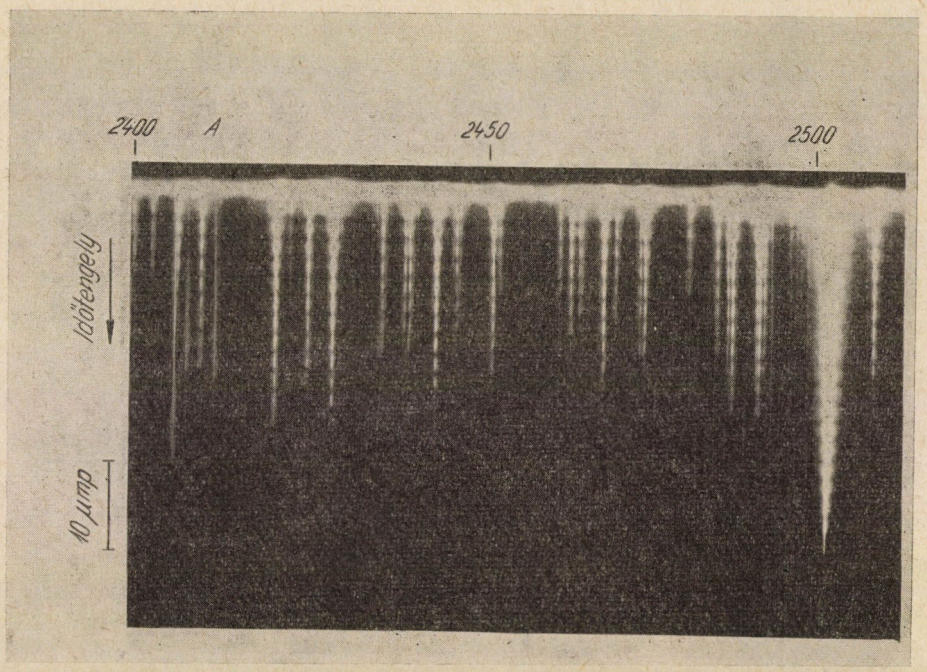
A szikragerjesztőrendszerből a T2, T3 transzformátorokon keresztül a hálózatba, zavaró, nagyfeszültségű lökések jutnak, amelyek átütéseket eredményezhetnek. Ennek meggátlására a T2, T3 transzformátorok primer áramkörébe aluláteresztő szűrőt kell helyezni. Ezt a szűrőt az 1. ábra nem tünteti fel.

A szikragerjesztő alkalmazása

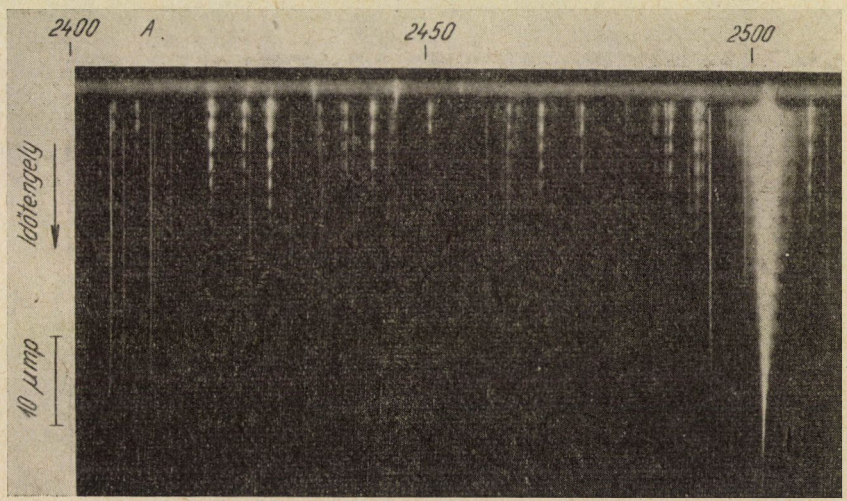
A továbbiakban néhány példán bemutatjuk, milyen jellegű munkák végzésére alkalmas az itt ismertetett szikragerjesztő.

A szikragerjesztő legfontosabb alkalmazási lehetősége időben felbontott színképek előállításánál van [23]. Ilyen, szennyezéseket tartalmazó cink elektródok alkalmazásával készített, időben felbontott szikraszínképeket a 14. ábrán mutatunk be. A felvételek 20 000 voltra feltöltött 10 000 pF kapacitású kondenzátornak 9 mm szikraközön át való kisülése alkalmával készültek.

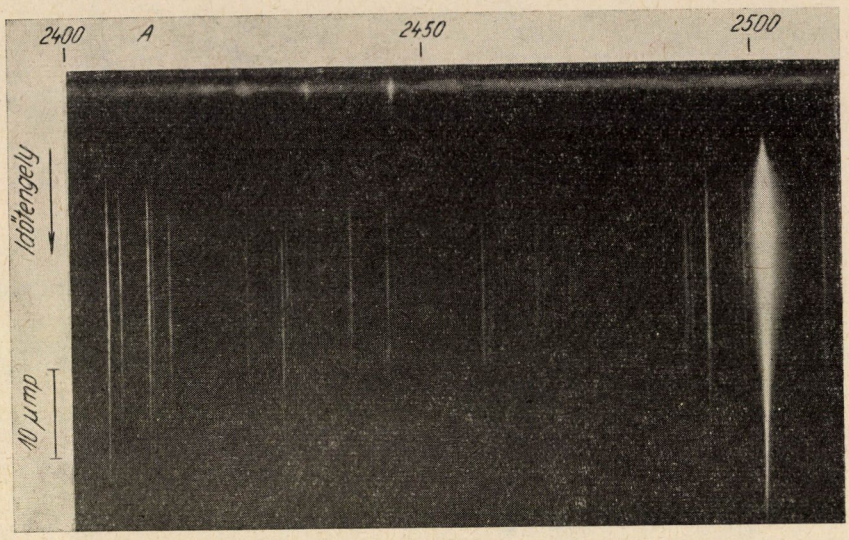
A 14a. ábra közvetlenül a katódnál, a 14b. ábra a katódtól 1 mm távolságra, a 14c. ábra a szikraköz közepén, a 14d. ábra az anódtól 1 mm távolságban és végül a 14e. ábra közvetlenül az anódnál adja a sugárzási viszonyokat. A kisülés rezgésszáma 0,5 MHerz körül van. A szikrakisülés időtartama mintegy 45 mikromásodperc. Az elektródok előtti rés (3. ábra) szélessége 0,45 mm, az *M* tükör fordulatszáma 3000/perc. Az *M* tükör görbületi sugara 360 mm,



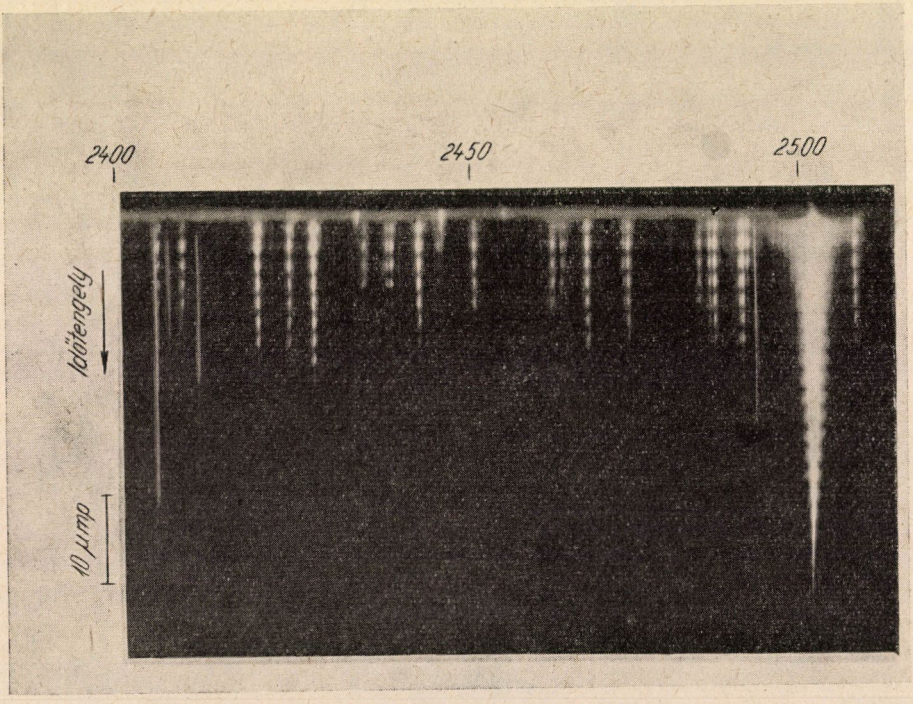
14. ábra. Részlet szennyezéseket tartalmazó cink időben felbontott szikraszínképéből
a kép: közvetlenül a katódnál



14b. kép: a katódtól 1 mm távolságra

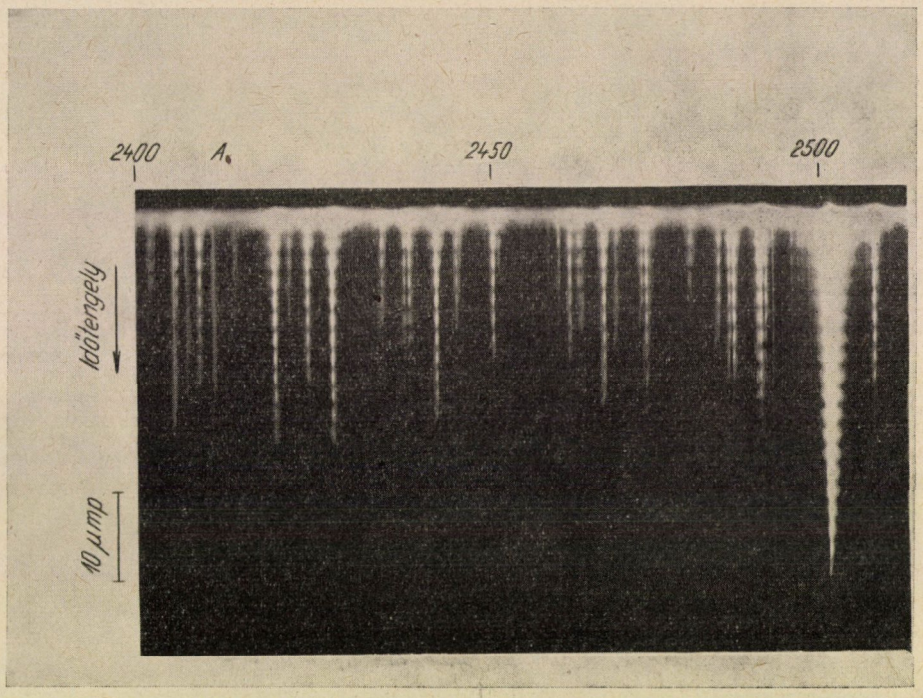


14c. kép: a szikraköz közepén



14d. kép: az anódtól 1 mm távolságban

amely az elektródok előtti rést a spektrográf résén háromszoros kicsinyítésben képezi le. A fényképező lemezen 1 mm színképvonal hosszra megközelítően 5 mikromásodperc jut. Időléptékül jól felhasználhatók a 14. ábra színképvonalainak időbeni intenzitás-ingadozásai. Az intenzitás-ingadozás periodicitása 2,14 mikromásodperc, ami azonos a szikragerjesztő kisülési áramkö-



14e. kép: közvetlenül az anódnál

rének periódusidejével. A felvételeknél az időfelbontás 1 mikromásodperc körül van. Egy-egy felvétel elkészítéséhez mintegy 9000 szikrára volt szükség.

Túl messze vezetne itt a 14. ábra színképeinek fizikai értelmezése. Ezért azokkal kapcsolatban csak néhány megjegyzést teszünk.

A szikra kezdetén minden képben jól látható a bevezetésben említett erős kontinuum, amelyre a nehezen gerjeszthető vonalak helyezkednek rá. Ez a színképrész a 14b., 14c. és 14d. ábrákban különállóan is látható. A legerősebb fényemisszió a katódnál jelentkezik. A katód és anód közelében jelentkező periodikus intenzitás-ingadozást mutató vonalak a nagy gerjesztési feszültségű szikravonalak.

Ilyen nagy elektródtávolság mellett a szikraköz közepén (14c. ábra) már csak a könnyen gerjeszthető vonalak vannak, mert azon idő alatt, amíg a fémgőzök ideértek, a gerjesztőenergia csökkent, illetőleg megszűnt. A szikrakisülés befejeződése után (45 mikromásodperc) az ívvonalak még hosszú ideig világítanak.

Hasonló módon vizsgálták VAN CALKER és TACKE [15] és DE BOER [16] mechanikai vezérlésű szikragerjesztők segítségével a szikrában uralkodó viszonyokat. Nevezettek kísérleteiben azonban az időfelbontás, a mechanikai kapcsoló természetének megfelelően több nagyságrenddel kisebb, mint jelen esetben.

A 14. ábra azt mutatja, hogy — amint azt a bevezetésben említettük —, időben széthúzott szikraszínképek tényleg igen bonyolultak. Ebből kifolyóan meg lehet állapítani, hogy a fényelektromos módszerek [4, 5, 6] vitathatatlan előnyeik mellett, a ma szokásos ábrázolási mód mellett nem alkalmasak ilyen természetű színképek áttekintő ábrázolására. Ezért az itt ismertetett módszer és fényelektromos-eljárás jól kiegészítik egymást.

Bizonyos feltételek mellett [21] fel lehet használni spektroszkópiai szikrafényforrásokban uralkodó hőmérséklet meghatározására a

$$I_1/I_2 = (A_1 g_1 \nu_1 / A_2 g_2 \nu_2 \exp \{(E_2 - E_1)kT\}$$

képletet esetleg más alakban akkor, ha az átmeneti valószínűségek ismeretesek [2, 17, 18, 19, 20]. A képletben I_1, I_2 a ν_1 és ν_2 frekvenciájú két vonal mért intenzitása. A_1 és A_2, továbbá g_1 és g_2 átmeneti valószínűségeket, illetőleg statisztikai súlyt jelentenek, k a Boltzmann-féle állandó, T az abszolút hőmérséklet.

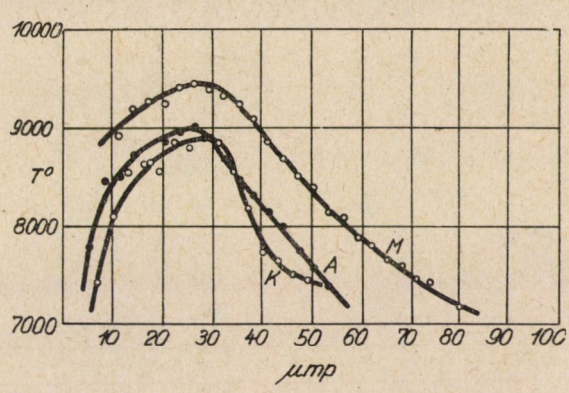
Fenti képletnek szikrában való hőmérséklet meghatározására való felhasználásánál fel kell tételezni, hogy a szikrában, annak minden helyén és az idő folyamán termikus egyensúly van. A vonatkozó vizsgálatok azt mutatják, hogy a termikus egyensúly feltétele általában nincs teljesítve és ha [19] van is, az a szikrában mind térbelileg [17], mind pedig időbelileg [5, 18] változik.

Időben felbontott színképek segítségével betekinthetünk a szikra hőmérsékletének változásába, a kisülés folyamán. Hasonló vizsgálatokat WILLIAMS, CRAGSG és HOPWOOD [18], továbbá BLITZER és CADY [2] végeztek. Időben felbontott színképek segítségével hasonló méréseket mi is végeztünk és a vonatkozó eredményeket a 15. ábra görbéi adják, ahol T az idő függvényében van ábrázolva. Mivel a hasonló módon eszközölt hőmérséklet meghatározást erős kritikával kell fogadni [21], kifejezetten nem akarunk a T-paraméternek hőmérséklet jelleget adni, hanem csupán az adott körülmények mellett T-t mint az idő függvényét ábrázoljuk. A 15. ábra görbéi a T-paraméter időbeli lefolyását adják, 10 mm-es szikraközben közvetlenül a katódnál és az anódnál, továbbá pedig a szikraköz közepében. T meghatározásához a $6^3S_1 - 4^3P_1$ és $4^3P_1 - 4^1S_0$ átmenetekhez tartozó Zn 3035 és Zn 3076 vonalakat használtuk fel [12]. A két vonal kezdeti energianívója $E_1 = 4{,}03\ eV$ és $E_2 = 8{,}11\ eV$. [12] alapján $A_1 g_1 = 0{,}244$ és $A_2 g_2 = 176{,}5$ értékeket vettük tekintetbe.

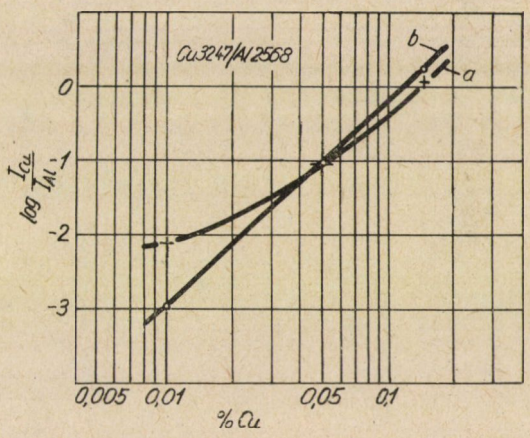
A 15. ábra görbéinek megrajzolásánál a színképvonalak legnagyobb intenzitásértékét vettük alapul. Az integrált színképvonal intenzitások valamivel alacsonyabb T értéket eredményeznek.

A következő két példa az ismertetett szikragerjesztőknek a spektrokémiai elemzésben való alkalmazásával kapcsolatos.

A spektrokémiai elemzésben a háttérnek és a színképvonalaknak, továbbá a szikravonalaknak és ívvonalaknak egymástól való elválaszthatósága adott



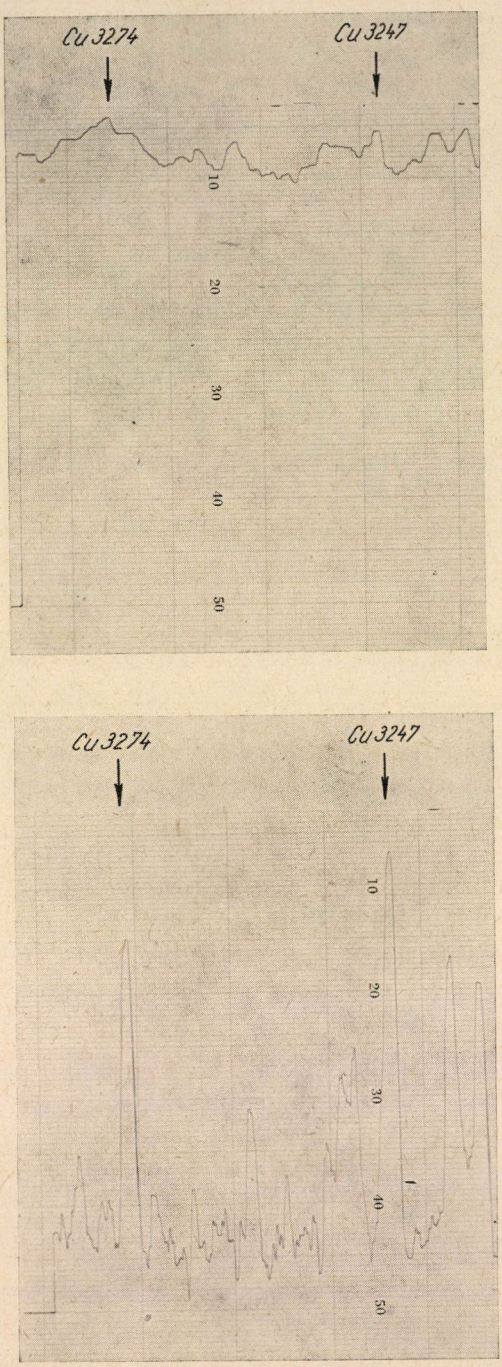
15. ábra. T paraméter változása a szikrakisülésben az idő függvényében. K = a katód közelében, A = az anód közelében, M = a szikraköz közepén



16. ábra. Munkagörbék Cu meghatározására Al-ban. *a* : a szokásos módon felvett színképekkel készített görbe, *b* : forgótükörrel felvett háttérnélküli színképekkel készített görbe

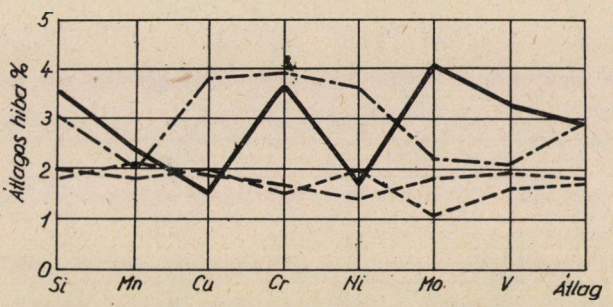
esetben jelentős előnyökkel bírhat. Így a színképvonalakat kiemelve a háttérből az elemzés érzékenysége megnövelhető, szikra és ívvonalak egymást zavaró túlfedése pedig kiküszöbölhető.

A 16. ábrán valóságos példán munkagörbéket mutatunk be Cu-nak Al-ötvözetben való meghatározásához, a Cu 3247 és Al 2568 vonalak segítségével. A munkagörbéket egyik esetben a szokásos módon felvett színkép segítségével (*a* görbe), a másikban olyan színkép felhasználásával rajzoltuk meg, amelyről a hátteret forgótükör segítségével leválasztottuk (*b* görbe)



17. ábra. 0,01% Cu-t (szennyezést) tartalmazó Al-minta színképéről készített mikrofénymérő-rajzolat. Felső ábra: szokott módon felvett színkép, alsó ábra: a háttér leválasztásával készült színkép

[13]. A gerjesztés 10 000 pF kapacitással, 20 000 volt feszültséggel történt 3 mm elektódtávolság mellett. A 17. ábrán bemutatjuk a 16. ábra munkagörbéinek felrajzolásánál használt 0,1% Cu-t tartalmazó Al-ötvözetminta két színképéről készített mikro-fénymérő rajzolatot. A 17. ábra felső képe a szokott módon felvett színkép, az alsó kép olyan színkép feketedési viszonyait tünteti fel, amelyről a hátteret forgótükör segítségével leválasztottuk. Az 50-es kitérés mindkét rajzolatnál a fényképezőlemez meg nem világított részének felel meg. A két színkép megvilágítási idejét úgy választottuk, hogy a legnagyobb feketedés értéke mindkét színképben megközelítően azonos legyen.



18. ábra. Megismételhetőségi eredmények Si, Mn, Cu, Cr, Ni, Mo, és V acélban való meghatározásánál. Kihúzott vonal: szinkron forgókapcsolós *Feussner*-gerjesztő. Többi vonal: elektronikus vezérlésű gerjesztők. Eredményvonal: másodpercenkénti szikragyakoriság 50, szaggatott vonal: másodpercenkénti szikragyakoriság: 100. Az átlag az összes elemekre vonatkozó átlagos értékeket jelenti

Az időben felbontott szikraszínkép használatának előnye minden magyarázat nélkül is világos.

Megemlítjük még, hogy utóbbi felvételeknél a háttér leválasztása olyan módon történt, hogy a szikra időben széthúzott képét nem közvetlenül a spektrográf résére képeztük le, hanem egy közbenső ernyőre, amely a szikra széthúzott képéből a kép elejét kiárnyékolta. Az ernyőt ezután leképeztük a spektrográf kollimátor lencséjére.

Végezetül bemutatunk olyan példát is, amikor a szikragerjesztőt a hálózatról szinkronizált impulzusgenerátorral működtettük. Itt Si, Mn, Cu, Cr, Ni, Mo és V-nak acélban való meghatározásánál elérhető megismételhetőség vizsgálatáról van szó [14]. A megismételhetőségi eredmények a 18. ábrában vannak összefoglalva. Az ábrában 20 felvételből kapott átlagos hibákat tüntettünk fel. Az átlagos hibák az ötvözőelem-tartalomra vannak vonatkoztatva. A megismételhetőségi vizsgálatnál használt acélpróba összetétele: Si = 0,625%, Mn = 1,11%, Cu = 0,24%, Cr = 0,96%, Ni = 0,565%, Mo = = 1,41%, V = 0,265%. Összehasonlításul végeztünk ugyanazon körülmények között egy méréssorozatot szinkron forgókapcsolóval vezérelt szikrager-

jesztővel is (*Feussner*-kapcsolás). A felvételek 10 000 pF kapacitással, 20 000 volt feszültség mellett készülnek. Elektródtávolság 3 mm.

A 18. ábra folytonos vonallal húzott vonala a forgókapcsolós szikragerjesztővel kapott megismételhetőségeket szemlélteti. Az eredményvonallal jelzett görbe az elektronikus vezérlésű szikragerjesztővel kapott megismételhetőségi viszonyokat adja másodpercenként 50 szikragyakoriság mellett. A két szaggatott vonal ugyancsak utóbbi gerjesztővel kapott eredményeket szemlélteti, de másodpercenként 100 szikragyakoriság mellett. Az ábra utolsó ordinátájának mentén az összes elemekre vonatkozó átlagos értékeket tüntettük fel.

A 18. ábra eredményei egyértelműen mutatják a másodpercenként 100-as szikragyakorisággal működtetett elektronikus vezérlésű szikragerjesztő fölényét mind a pontosság, mind pedig az eredmények egyenletessége szempontjából.

IRODALOM

1. GORDON, G.—CADY, W. M., J. Opt. Soc. Amer **40,** (1950) 852
2. BLITZER, L.—CADY, W. M., J. Opt. Soc. Amer. **41,** (1951) 440
3. TSUI, F., Brit. J. Appl. Phys., **3,** (1952) 139
4. CROSSWHITE, H. M.—STEINHAUS, D. W.—Dieke G. H., J. Opt. Soc. Amer. **41,** (1951) 299
5. STEINHAUS, D. W.—CROSSWHITE, H. M.—DIEKE, G. H., J. Opt. Soc. Amer. **43,** (1953) 257
6. STEINHAUS, D. W.—CROSSWHITE, H. M.—DIEKE, G. H., Spectrochim. Acta, **5,** (1953) 436
7. BARDÓCZ, Á., Nature, **171,** (1953) 1156
8. BARDÓCZ, Á., Acta Technica Hungarica, **8,** (1954) 99
9. BARDÓCZ, Á., Acta Physica Hungarica, **4,** (1954) 91
10. BARDÓCZ, Á., Spectrochim. Acta, **7,** (1955) 307
11. BARDÓCZ, Á., Z. angew. Phys. **7,** (1955) 523
12. SCHUTTEVAER, J. W.,—SMIT, J. A., Physica, **10,** (1943) 502
13. BARDÓCZ, Á.—VARSÁNYI, F., Nature, **177,** (1956) 222
14. BARDÓCZ, Á.—VARSÁNYI, F., Acta Technica Hungarica, **13,** (1955) 407
15. VAN CALKER, J.—TACKE, E., Z. Naturforschung, **4*a***, (1949) 573
16. DEINUM, H. W.—DE BOER, F., Specrochim. Acta, **2,** (1943) 318
17. SCHATZ, F. W., Spectrochim. Acta, **6,** (1954) 198
18. WILLIAMS, G. C.—CRAGGS, J. D.—HOPWOOD, W., Proc. Phys. Soc., **42B,** (1949) 49
19. LANGSTROTH, G. O.—MCRAE, D. P., Canad. J. Res., **16*A***, (1938) 17
20. BRAUDO, C. J.—CRAGGS, J. D.—WILLIAMS, G. C., Spectrochim. Acta, **3,** (1949) 546
21. HULDT, L., Spectrochim. Acta, **7,** (1955) 264
22. BLITZER, L., J. Opt. Soc. Amer. **45,** (1955) 564
23. BARDÓCZ, Á.—VARSÁNYI, F., Z. Naturforschung, **100,** (1955) 1031

ÖSSZEFOGLALÁS

Elektronikus vezérlésű, nagypontosságú, nagyfeszültségű spektroszkópiai szikrafényforrás ismertetése. A berendezés 40 000 volt felső feszültséghatárokig, 500—20 000 pF kapacitással működtethető. A szikragerjesztő vezérlése thyratroncsőből és kettős vezérlő szikraközből alkotott rendszer segítségével történik. A thyratroncső rácsának vezérlése fotocellával működtetett, vagy hálózatról szinkronizált impulzusgenerátorral történik. A szikrakisülések beindulásának az időszórása egy indító villamos jelhez viszonyítva, néhány tized mikromásodperc körül van. Ilyen működési pontosság mellett forgótükör alkalmazásával mikromásodperc felbontású, időben széthúzott színképek állíthatók elő.

Időben felbontott színképek segítségével időben követni lehet a szikrában lejátszódó optikai viszonyokat.

A dolgozat példaképpen bemutatja tisztátalanságokat tartalmazó Zn-nek a szikraköz különböző helyein kibocsátott, időben felbontott színképeit.

Az a tény, hogy a szikrakisülés kezdetén keletkező kontinuum és az elektródok színképvonalai egyrészt, az elektródok szikra- és ívvonalai másrészt egymástól elválaszthatók, a gyakorlati spektrokémiai elemzés szempontjából előnyöket rejt magában. Példa Cu-nak Al-ban való mennyiségi meghatározására, időben felbontott színképek alapján.

Acélpróbán végzett megismételhetőségi mérések azt mutatják, hogy az ismertetett szikragerjesztő egyenletesebb és pontosabb elemzési eredményeket szolgáltat, mint a mechanikus vezérlésű szikragerjesztő.

I. táblázat

A 6. ábra V4 multivibrátorának különböző R21 ellenállás értékeihez tartozó rezgésszámok C7 és R24 bekapcsolt állapota melett. C6 és R22 bekapcsolásával az alanti rezgésszámok egyötöd-részükre csökkennek :

A V4 multivibrátor másodpercenkénti rezgésszáma:	R 21 M ohm
50 × 1	0,10
50 × 1/2	0,30
50 × 1/3	0,50
50 × 1/4	0,68
50 × 1/5	0,90
50 × 1/6	1,08
50 × 1/7	1,28
50 × 1/8	1,48
50 × 1/9	1,68
50 × 1/10	1,90

A RADIÁLIS HÁROMSZÖGELÉS GEODÉZIAI RENDSZERHEZ VALÓ ILLESZTÉSE

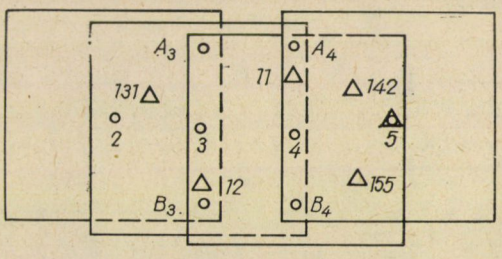
Dr. HANKÓ GÉZA

[Beérkezett 1961. augusztus 28-án]

A beillesztés elvi szempontjai

A radiális háromszögelés rendszerbe illesztése általában koordináta-transzformációval történik. A radiális háromszögelés számítását közelítő tájékozással és közelítő méretarányban végezzük, majd a kapott eredményeket transzformáljuk át az adott pontok geodéziai rendszerébe. A BUCHHOLTZ részéről követett eljárás ([1], 415., 416. o.), több ismert pont esetén tulajdonképpen a Helmert-transzformáció, s két adott pontnál egyszerű hasonlósági transzformálás.

A koordináta-transzformációval kapott pontok vízszintes értelmű pontosságára — az eljárás természetéből származó hibákon kívül — lényeges



1. ábra

befolyással van az adott pontoknak a képsor egyes képein való helyzete. A radiális háromszögelés sokszögvonalának pontjai (2, 3, 4. . .) és a képek szélén levő segédpontok (A_2, A_3, A_4,. . . B_2, B_3, B_4. . .) relatív helyzete a transzformációval nem változik. Az adott pontok elhelyezkedésénél azonban három lehetőséggel kell számolni (1. ábra).

1. Az adott pont a sokszögvonal valamely töréspontjával esik egybe, vagy közvetlen közelében van. Ezek a legmegbízhatóbb helyzetű pontok, mert sík terepnél a képhajlásból származó perspektív torzulás nincs rájuk hatással. Ilyen pl. az ábrában az 5 jelzésű pont.
2. A hármas átfedésű képsávban fekvő adott pontok hasonlóak az A_3, B_3. . . segédpontokhoz. Ezek másodrendű megbízhatóságúaknak tekinthetők, mert a radiális háromszögelés sokszögvonalának meghatározott pont-

jaiból mért három iránnyal vezethetők le. A perspektív iránytorzulás figyelembevételére a segédpontokhoz hasonlóan lehetőség van. Ilyen az ábrában a 11., 12. pont.

3. Legkevésbé megbízható helyzetűek a csatlakozó képek közös területén levő pontok. Az ábrában a 131, 142, 155 jelzésű pontok. Ezek csak két szomszédos képre esnek. A meghatározott sokszögpontokból mért irányokat a képsík hajlásából származó perspektív torzulás terheli, mely képenként és a pontnak a képen elfoglalt helyzete szerint változó, így megbízhatóságuk egy képen belül is különböző.

A radiális háromszögeléssel kapott sokszög- és segédpontokat pontos munkánál, ilyen különböző megbízhatóságú pontok alapján rendszerbe illeszteni tulajdonképpen nem lehet, mert több-kevesebb fennmaradó hibával mindig számolni kell, mint ezt BUCHHOLTZ munkájában megemlíti ([1], 416. o.).

Célszerűbb a radiális háromszögeléssel meghatározott pontok beillesztéséhez a legmegbízhatóbb és egyforma súlyú pontokat használni, melyek tehát a radiális háromszögelés sokszögpontjaival esnek egybe. Ezek közül a sorban az elsőt és az utolsót a megfelelő képek transzformátoron való beállításával határozzuk meg és ellenőrzésképpen a terepen is bemérjük. Az eljárás részletes leírását megtaláljuk a Geodéziai Kézikönyvben ([2], III. 206. o.), és az ilyen módon végrehajtott radiális háromszögelés eredményét a ([3], 252. o.) alatti értekezésben.

A továbbiakban síkvidéken alkalmazható eljárással foglalkozunk, mert dombvidéken a nadírpont mint radiális pont alkalmazásával a különböző magasságkülönbségek okozta hibák kiküszöbölhetők. A nadírpont helyét megfelelő segédberendezésekkel (horizontképek, pörgettyűs stabilizátorok stb.) pontosabban lehet meghatározni, mint a kamara tengelyének függőlegesét biztosítani. A nadírpont mint radiális pont választásával tehát a fennmaradó hibák főleg a perspektív iránytorzulásokból származnak.

Síkvidéken az azonosítás és az iránymérés hibáin kívül a képhajlás okozta perspektív iránytorzulás a legveszélyesebb. Az iránymérés hibája véletlen jellegű, előjelében változó. Gondos azonosítás mellett a mérés megismétlésével csökkenthető. A képhajlás maga véletlen jellegű. Az általa előidézett iránytorzulás azonban mindig fennáll, s az előmetsző irányok különböző iránytorzulásai egymásra való hatásukban nagyságrendben különböző, de szabályos jelleget mutatnak.

A választott radiális pont csak közelítően a szögtartópont. Az alkalmazott kiegyenlítési eljárások a perspektív iránytorzulások szempontjából közelítőek, mert vízszintes mérési síkban fellépő kicsi mérési hibák kiegyenlítésére valók. A radiális háromszögelés centrális rendszerei tehát matematikailag kiegyenlíthetők, de a szögtartópont bizonytalan helyzetéből kifolyóan a centrális rendszerek szögértékeiben hibák maradnak, melyek a levezetett követő oldal habár kismértékben, de mégis hibás hosszát eredményezik.

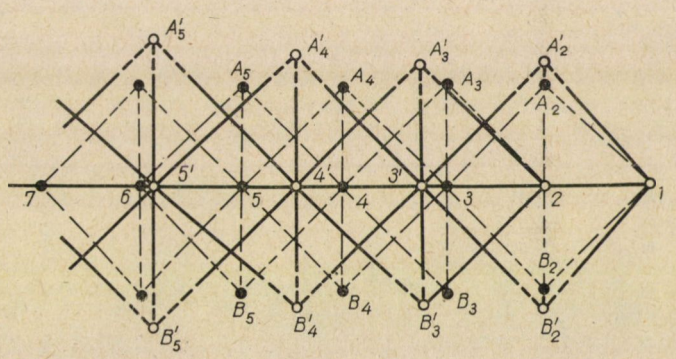
Ez abban mutatkozik, hogy az első ismert, vagy transzformátoron meghatározott oldalból a kiegyenlített centrális rendszerek q arányossági tényezőivel — melyek a centrális rendszerekben a megelőző oldalra, mint egységre redukált hosszak — levezetett utolsó oldal, a mért vagy a transzformátoron meghatározott oldallal nem egyezik, vagyis

$$uq_1 q_2 \ldots q_n = v_n \gtrless v, \tag{1}$$

hol u az első, v az utolsó transzformált oldal hossza és v_n a levezetett érték. Miután a centrális rendszerek szabályosak a q_1, $q_2 \ldots q_n$ értékek közel egyenlő nagyok. Ha ezeket átlagban q_i-vel jelöljük, akkor az (1) egyenlet a következőképpen írható

$$uq_i^n = v_n \tag{2}$$

vagyis az oldalhosszak geometriai haladvány szerint származtathatók. Erre a körülményre már SCHWEIZER rámutatott (4; 62. o.). A kiegyenlített centrá-



2. ábra

lis rendszerek megmaradó szöghibái által okozott méretarányváltozások az oldalhosszak értékében tehát geometriai haladvány szerint tovaterjedő hibát okoznak s ezzel a radiális háromszögeléssel meghatározott pontok az adott pontokhoz a hibák egyszerű arányos szétosztásával nem illeszthetők be. Ilyen hibaterjedés hatását a 2. ábra szemlélteti. A hosszú szaggatott vonalak a helyes centrális rendszerek, a folytonos vonalak a geometriai haladványok szerint változó sokszögoldalakon alapuló centrális rendszerek.

A különböző hibák kiküszöbölése céljából előbb a radiális háromszögelés sokszögvonalánál mutatkozó hibákat kell szétosztani, mégpedig megfelelő módon a szögzáróhibát, majd az oldalhosszakat megjavítani a származásuknak, a geometriai haladványnak értelmében.

A fényképen való iránymérés megbízhatóságáról

Mielőtt a radiális háromszögelés sokszögvonala két fő hibájának szétosztásával foglalkoznánk, vizsgáljuk meg a fényképen való iránymérés megbízhatóságát.

A fényképen való pontazonosítás középhibáját a szétválasztóképesség alapján $\pm 0{,}03$ mm-ben jelölhetjük meg. Ennek folytán a 23×23 cm-es mérőképeken 55%-os képátfedés mellett a sokszögpontokra és a segédpontokra menő irányoknak az azonosításból származó középhibája

$$\varepsilon_a = \pm \varrho' \frac{0{,}03}{230 \times 45\%} = \pm 1'. \tag{3}$$

A radiális háromszögelés ismert elrendezése mellett ([2], III. 204. o.). minden fényképen nyolc szöget kell megmérni, melyek egyforma súlyúak és összegük 360°. A középhiba ([2], I. 152. o.) egy szögre a hibaterjedés törvénye szerint

$$\mu_{sz} = 1' \sqrt{2},$$

nyolc szögre

$$\mu_{sz} = 1' \sqrt{8\,(\sqrt{2})^2} = \pm 4'. \tag{4}$$

A pontosság fokozása céljából a fényképen iránymeréssel kombinált szögmérést végzünk. A 360°-ot négy közel 90°-os szektorban mérjük meg. Ekkor a középhiba a hibaterjedés törvénye szerint

$$\mu_{sz} = 1' \sqrt{4\,(\sqrt{2})^2} = 2' \sqrt{2}. \tag{5}$$

A 360°-tól való eltérés szétosztása a négy, közös irányt közrefogó két-két szögre történik. Ezzel mind a nyolc szög javítást kap.

A mérést 1′ leolvasóképességű teljeskörű vagy félkörű szögmérővel végezhetjük, mindegyiknél különös gondot kell fordítani a beállító kar excentrikus forgásából származó hiba csökkentésére. Ezt a kezdő irány változtatásával, s a műszer többszöri felhelyezésével lehet elérni. Jobb eredményre számíthatunk a radiál-triangulátor alkalmazásával, melynél a fenti lehetőségek mellett a pontazonosításhoz és méréshez még a képpár sztereoszkópos hatását is felhasználjuk. A mérés négyszeri megismétlésével a pontosság kétszeresre emelhető. Tehát a 360°-nál mutatkozó középhiba ebben az esetben

$$\mu_{sz} = 1' \sqrt{2}. \tag{6}$$

A levezetett érték legnagyobb eltérése a valódi értéktől a (6) képlet alatti középhibának legfeljebb háromszorosa lehet, vagyis négyszeres ismétlésnél a 360°-tól

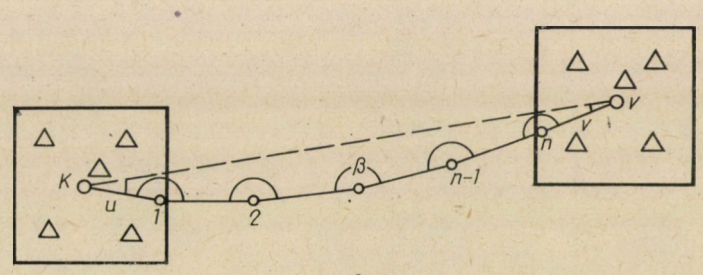
való eltérésnek $3'\sqrt{2} \approx 4'$-t nem szabad átlépni. Ez esetben a szögenkénti javítás 0,5', ami a negatívon a sztereoszkópos szétválasztóképességnek megfelelő szögmérésnek felel meg.

A radiális és a segédpontok kiválasztása, s a negatívokon való megjelölése után egyszerű szögmérő műszerek alkalmazásánál, az egyes képekről a pontokat mérettartó műanyag fóliára visszük át és ezen végezzük az irány-, illetve szögmérést. A mérési jegyzőkönyveken kívül minden képről egy iránymeghatározási vázlatot készítünk (1. táblázat), melyen a már javított szögértékeket tüntetjük fel.

A radiális háromszögelés sokszögvonalának számítása

a) A szögzáróhiba meghatározása és elosztása

A radiális háromszögelés rendszerbe illesztéséhez az első és utolsó képet megfelelő számú és elhelyezésű illesztőpont alapján transzformáljuk. Ezzel



3. ábra

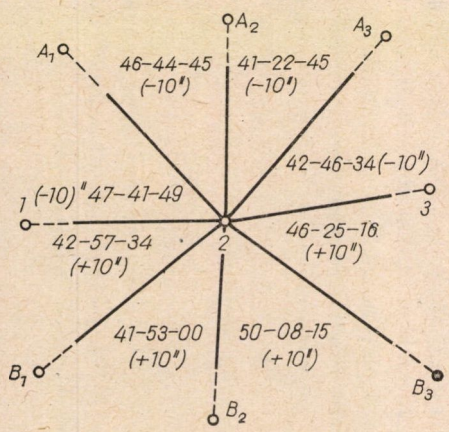
megkapjuk a K kezdő- és V végpont mellett az 1 és n sokszögpontokat és az u kezdő- és v záróoldal hosszát (3. ábra).

Az illesztőpontok (Δ) elrendezése folytán — melyek közül képenként négy a sarkok felé, egy a kép közepe táján fekszik — a bekapcsoláshoz csak a K és V pontokat fogadhatjuk el hibátlannak, mert a kép közepén és ellenőrző pontok közelében vannak. Az 1 és n pontok a képek szélén extrapolált képterületen és rendszerint ellenőrző pontoktól távolabb feküsznek. Ezeknél a transzformátoron kapott ponthelyzetet nem fogadhatjuk el hibátlannak. A tapasztalat szerint a képméretarányban, a monokuláris szétválasztóképesség mintegy háromszorosának, tehát 0,09 mm sugarú körnek megfelelő képterületen fekvőnek vehetjük őket, mely képterület tényleges értéke a feldolgozásnál a transzformátoron alkalmazott nagyítástól függ.

A $\beta_1 \ldots \beta_n$ a fényképeken mért törésszögek. A β_k és β_v, a K, 1; n, V és K, V pontok koordinátáiból számított irányszögekből levezetett szögértékek, tehát szintén kis hibával terheltek. Hasonlóan hibás az u kezdő- és v

Számítások **1. táblázat**

Jelölés	Számított és mért törésszögek (2), a szögzáró hibával javított értékek (3)		Oldal	$\pm (a-b)$	$\frac{a+b}{2} = q$	$\pm t_i = \frac{a_i - b_i}{c(a-b)_m}$	K	A tr.-nál kapott hosszak u, v; q' a javított aránysz.	A sokszögvonal számított oldalai	A δx javítása utáni törésszögek
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
β_K	358—56—32	358—55—40						$u =$		358—55—00
β_I	183—56—00	183—55—20	$K-I$					$= 1498{,}46$	1498,27	183—55—20
β_1	178—01—00	178—00—20	$I-1$	$-0{,}007190$	1,004888	$-0{,}000086$		1,004677	1505,28	178—00—20
β_2	178—35—53	178—35—13	1—2	$-0{,}007805$	1,019006	$-0{,}000150$		1,016409	1529,98	178—35—13
β_3	179—57—21	179—56—41	2—3	$+0{,}004177$	0,954908	$-0{,}000050$	0,999876	0,954740	1460,73	179—56—41
β_4	179—09—14	179—08—34	3—4	$+0{,}014715$	1,001650	$-0{,}000177$		1,001348	1462,70	179—08—34
β_U	1—28—53	1—28—12								1—28—52
$\Sigma\beta$	1260—04—53	1260—00—00	$4-V$	$-0{,}000831$	1,002096	$-0{,}000010$		1,001961	1465,57	1260—00—00
			.	.	.	.		$v =$ $= 1465{,}75$	.	



5. ábra

Iránymeghatározási vázlat

47—41—39		
46—44—35		
94—26—14		
41—22—35	178—35—13	
42—46—24		
84—08—59		
42—57—44		
41—53—10		
84—50—54		
50—08—25	181—24—47	
46—25—28		
96—33—53	[360—00—00]	

Az A_2 és B_2 segédpontok 1, 2, 3 sokszögpontokból, előmetszéssel számított koordinátái

	$+y$	$+x$
	480,85 m	083,15 m
	480,86 „	083,24 „
A_2	480,90 „	083,20 „
B_2	751,74 m	047,80 m
	751,74 „	048,00 „
	751,68 m	047,88 m

záróoldalak hossza is. A radiális háromszögelés sokszögvonalát mint kettősen tájékozott sokszögvonalat tekintjük. Kezdőpont a K, végpont a V, s mindkét ponton tájékozási iránynak a sokszögvonal K, V oldalát vesszük. Ennek irányszöge (KV), illetve (VK). Az 1 és n pontokat a β_k, β_v törésszögek és u, v távolságok közelítő értékének kiszámítására használjuk fel. Ugyanis

$$\beta_k = (K, 1) - (K, V); \quad \beta_v = (V, K) - (V, n)$$

és

$$u = \sqrt{\Delta x_{k,1}^2 + \Delta y_{k,1}^2}; \qquad v = \sqrt{\Delta x_{v,n}^2 + \Delta y_{v,n}^2}. \tag{7}$$

A β_k, β_v és β_i törésszögek megbízhatóságát a tapasztalat szerint egyenlőnek vehetjük. A Geodéziai Kézikönyv ([2], II. 327. o.) szerint a sokszögvonal szögzáróhibája

$$\Delta\delta = \delta_{vt} - (\delta_{kt} + \Sigma\beta - (n-1)\,180°) - k\,360°, \tag{8}$$

melyben $k = 1$, vagy $k = 0$.

Miután egy törésszög középhibája $1'\sqrt{2}$, a szögzáróhiba középhibája a hibaterjedés törvénye szerint $(n+2)$ egyenlő súlyú törésszög esetén elméletileg

$$\mu_z = 1'\sqrt{(n+2)\,(\sqrt{2})^2} = 1'\sqrt{2\,(n+2)}. \tag{9}$$

A tényleges szögzáróhibának ez elméleti érték háromszorosánál kisebbnek kell lennie (lehetőleg a középhiba nagyságában). A kapott szögzáróhibát a törésszögekre egyenlő mértékben osztjuk szét. A gyakorlatban úgy járunk el, hogy az egyes β_i törésszögekre — az összetevő szögekre való bonthatás céljából — néggyel osztható kerek részt veszünk. A β_k és β_v szögekre első közelítésnél a fennmaradó összeget egyenlő mértékben osztjuk szét. A javításokat és a javított szögértékeket az iránymeghatározási vázlaton feltüntetjük.

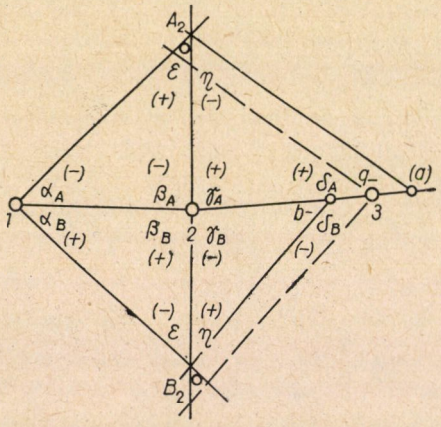
Az oldalhosszak ismeretében (az oldalhosszak meghatározását a b) fejezetben tárgyaljuk) számítjuk a sokszögvonalat. A δ_y és δ_x koordinátaeltérések a vonalas záróhiba összetevői. A tervszerű légifényképezés észak—déli, kelet—nyugati vagy fordított irányokban történik. Jó közelítéssel tehát y irányú légifényképezésnél a δ_y koordinátaeltérés a hosszhibának és δ_x a kereszthibának felel meg. A sokszögvonal nyújtott, az oldalhosszak jó közelítéssel egyenlő hosszúak; a hossz- és kereszthiba várható nagyságára a Geodéziai Kézikönyv ([2], II. 347. o.) (4), (5), (8) képletei nyújtanak felvilágosítást. A kereszthiba származása főleg ama szögek megmaradó hibáira vezethető vissza, melyek a radiális háromszögelés sokszögvonalánál a β_k és β_v szögértékek meghatározását szolgálják. A sokszögvonalból levezetett $|V|$ koordinátákkal meghatározhatjuk a $(K|V|)$ irányszöget, melynek $\Delta\tau$ eltérése a (KV) irányszögtől

előjelre helyesen adja a β_k szögjavításának nagyságát. Ennek ellenkező előjelű $-\Delta\tau$ értékével javítjuk meg a β_v szögértékét. $\Delta\tau$-t a törésszögek között is szétoszthatjuk. A β_k, illetve β_v szögek összes javításával okozott pontmozgás az 1 és n ponton azonban nem lehet nagyobb, mint szétválasztóképesség $\pm$ 0,03 mm-es középhibájának háromszoros értéke, azaz $\pm$ 0,09 mm a feldolgozás méretarányában. Ezzel megszüntettük a kereszthibát, és új szögzáróhiba nem keletkezett. A sokszögvonalat az új tájékozott irányértékekkel ismét átszámítjuk. Ha a keresztthibát teljesen megszüntettük, csak hosszhibát kapunk. A hosszhiba szétosztásánál a törésszögek változatlanok maradnak, ami a további számításhoz előnyös.

Az eljárás tulajdonképpen koordináta-transzformációval is megoldható. Nekünk azonban szükségünk van a β_k szög $\Delta\tau$ javításának nagyságrendi ismeretére, melynek a fentiekben meghatározott értéknél kisebbnek kell lennie, illetve csak annak megfelelő rész használható fel a β_k szög javítására.

b) Az oldalhosszak számítása

A radiális háromszögelés sokszögvonalának oldalhosszait nem közvetlen hosszméréssel kapjuk, hanem a fényképek radiális pontjában végzett irány-



4. ábra

mérésekből meghatározott szögekkel számítjuk. A számítás leírása részletesen megtalálható a következő munkákban ([2], III. 210. o. és [3], 232. 233. o.). Ennek értelmében figyelembe véve a 4. ábra jelöléseit a $\overline{2,3}$ követő oldal hossza az $\overline{1,2}$ megelőző oldalból az A segédponton keresztül számítva

$$\overline{2,3} = \overline{1,2}\,\frac{\sin\alpha_A \sin(\gamma_A + \delta_A)}{\sin(\alpha_A + \beta_A)\sin\delta_A}\,. \tag{10}$$

Hasonlóan a B segédponton keresztül is számítható a $\overline{2,3}$ oldal, az A indexű szögek és a B indexű szögek felcserélésével. A kétféle úton számított oldalhosszak a megelőző oldal egységére redukálva adják az a és b értékeket, melyek a légifényképeken végzett szögmérések különböző hibái folytán nem egyenlőek. A különbség az (a—b) ellentmondás, mely a szögértékek megbízhatóságáról ad képet. Az azonosítás és a szögmérés véletlen jellegű hibái, mint azt a ([3], 240. 241. o.) értekezésben kimutattuk, az ellentmondásban (a—b) $< 0{,}01$ értéket adnak. Nagyobb eltéréseknél az azonosítás felülvizsgálandó, mielőtt a számításokat folytatjuk. A felülvizsgálás után a további számításokhoz kiindulásként, az oldalhosszak megállapításánál az arányszámokra kapott érték számtani közepét vesszük és

$$\frac{a+b}{2} = q \tag{11}$$

jelölést használjuk. (A számításhoz célszerű táblázatot a 2. számú táblázat mutatja, melyben a 3. oszlop a sokszögvonal szögzáróhibájának szétosztása utáni szögértékeket és a többi oszlop a szükséges számításokat tünteti fel.) A kezdő oldal u hosszából és a q arányossági tényezőkből bármely oldal hossza meghatározható. Például az u_i oldal

$$u_i = uq_1q_2 \cdots q_i . \tag{12}$$

Az így kapott oldalhosszak, mint azt az (1) alatt már megemlítettük, hibásak. A mérésekből az oldalhosszakra levezetett eredmények: a transzformátoron kapott u, v értékek és a megelőző oldal egységre redukált, számított q_i arányszámok. Az oldalhosszak hibáinak nagyságára az u és v-nél a gyakorlatilag felvett középhiba nyújt képet. A többi oldalhossznál a hiba q értékének megbízhatóságától függ, melyre az (a—b) ellentmondás és q nagysága van befolyással. Az (a—b) nagyságát a szögtartópont helyzete és a szögmérés jósága befolyásolja. Ezzel gondos azonosítás és szögmérés esetén is, az u és v hosszak, továbbá minden q arányszám javítandó.

Minden oldalhosszra kétféle javítás írható elő. Egyik t_i az $(a_i—b_i)$ ellentmondás értékéből kifolyóan, a másik k az oldalhossztól függően. Az elsőt minden oldalra külön-külön kell megállapítani, a másodikat az egész geometriai haladványra az oldalhosszak származásának megfelelően.

A t_i javítások meghatározásánál, miután a legkisebb ellentmondás a legnagyobb súlyú, ezt választjuk javítási *egységnek*. A javítások pedig az egységre redukált ellentmondások

$$t_i = \frac{\pm (a_i - b_i)}{c\,(a-b)_{\min}} . \tag{13}$$

A követő oldal számítása	Jelölés	A szögzáróhiba szétosztása utáni szögen (3, 4) és a sinusok (5)			Szögjavítás V az állandó hibából (6), javított szögek (7) és a sinusok (8)			Szögjavítás v' a véletlen hibából (9), javított szögen (10), és a sinusok (11)		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$= \frac{\sin\alpha_A \sin\eta_A}{\sin\varepsilon_A \sin\delta_A}$		α	41—22—50	0,661057	—(1—07)	41—21—43	0,660814	—(1—30)	41—20—13	0,660486
		β	94—26—14		—(1—12)	94—25—02		—(0—45)	94—24—17	
	A	ε	44—10—56	0,696943		44—13—15	0,697426	+(2—15)	44—15—30	0,697895
0,492862		δ	47—38—33	0,738955	—(2—06)	47—36—27	0,738544	+(1—30)	47—37—57	0,738837
0,515009		γ	84—08—59		+(1—12)	84—10—11		+(0—45)	84—10—56	
0,492796		η	48—12—28	0,745566		48—13—22	0,745741	—(2—19)	48—11—07	0,745304
0,515080		α	47—30—40	0,737408	+(1—07)	47—31—47	0,737628	+(1—20)	47—33—07	0,737889
0,492263		β	84—50—54		+(1—12)	84—52—06		+(0—40)	84—52—46	
0,515631		ε	47—38—26	0,738932		47—36—07	0,738478	—(2—0)	47—34—07	0,738085
	B	δ	42—53—56	0,680707	+(2—06)	42—56—02	0,681154	—(1—20)	42—54—42	0,680870
		γ	96—33—53		—(1—12)	96—32—41		—(0—40)	96—32—01	
0,479264		η	40—32—11	0,649931		40—31—17	0,649733	+(2—00)	40—33—17	0,650178
0,502996		a		0,956996	a'		0,956737	(q_A)		0,954681
0,479261		b	.	0,952819	b'	.	0,952773	(q_B)	.	0,954668
0,503017		$a - b$	+	0,004177		.	.	$(q) - (q_A)$	+	0,000054
0,479759		$\frac{a+b}{2} = q$		0,954908	(q) a sokszögből		0,954735	$(q) - (q_B)$	+	0,000067
0,502540		Ellentmondások, arányossági tényezők, szögjavítások szám.								

Állandó hibából: $|v'| = 0{,}0002866|1\,000\,000(a-b)| = 0{,}0002866|4177| = |1' - 12''|; \frac{1}{2}|v'| = |0' - 36''|$

$$v'_{\alpha A} = \frac{(q) - a'}{2{,}5\sqrt{2}\,[(q) + a']} = \frac{0{,}954735 - 0{,}956737}{3{,}535 \cdot 1{,}911472} = \frac{-0{,}002002}{6{,}757054} = -0{,}000296 = -1' - 26'' \approx -1'30''$$

$$v'_{\alpha B} = \frac{(q) - b'}{2{,}5\sqrt{2}\,[(q) + b']} = \frac{0{,}954735 - 0{,}952773}{3{,}535 \cdot 1{,}907508} = \frac{+0{,}001963}{6{,}743041} = +0{,}000291 = +1'25'' \approx +1'20''$$

Ha a c tényezőre nem vagyunk tekintettel, a számított t_i javítások az egységnél nagyobbak. Miután csak kis javításokról lehet szó, a javítások helyi értékét is az $(a—b)_{min}$ határozza meg. Például legyen $(a—b)_{min} = 0{,}000831$, ez lesz a javítási egység. Az $(a—b)_{min}$ javítása csak kisebb lehet magánál az ellentmondásnál; $c = 100\,000$-t választunk, s így a minimum javítása 0,00001.

A kiszámított t_i javításokkal a q tényezőket és az u, v hosszakat növeljük, vagy csökkentjük aszerint, hogy v_n kisebb vagy nagyobb v-nél.

A második javítási tényező k, mellyel az összes q arányszámokat és az u, v hosszakat is szorozzuk. Ezzel a hosszakkal arányos javítást végzünk. Ennek folytán a javítási egyenlet

$$k(u \pm t_u) \cdot k(q_1 \pm t_1) \cdot k(q_2 \pm t_2) \ldots k(q_n \pm t_n) = k(v \pm t_v), \qquad (14)$$

mivel t_u és t_v értékek kicsi centiméterrendűek, ezzel elhanyagolhatók, tehát

$$k = \sqrt[n]{\frac{v}{u} \frac{1}{(q_1 \pm t_1)(q_2 \pm t_2) \ldots (q_n + t_n)}}. \qquad (15)$$

Az egyenlet logaritmussal könnyen megoldható, s a javítások figyelembevételével az oldalhosszak számíthatók.

Az oldalhosszak ismeretében a sokszögvonalat kiszámítjuk. A kapott δx kereszthiba kiküszöbölésére számítjuk a β_k szög $\Delta\tau$ javítását, majd az új tájékozott irányértékek és oldalhosszak ismeretében — mint már említettük — a sokszögvonalat újra számítjuk.

A pontkoordinátákból ellenőrzésképpen meghatározzuk az egyes oldalak irányszögét, melyek különbségei a fényképek horizontzárás utáni törésszögeit adják. Ugyancsak kiszámítjuk a pontkoordinátákból a végleges oldalhosszakat és a megelőző oldal egységére redukált végleges (q) arányszámokat, melyekre a további számításoknál van szükség. Ezeket a 2. számú táblázatban tüntetjük fel.

A radiális háromszögelés segédpontjainak kiszámítása

a) A csatlakozó centrális rendszerek tekintetbe vétele

A segédpontok koordinátáit a meghatározott radiális pontokból, a sokszögpontokból, pontonként három-három előmetszéssel számítjuk. Nagyobb pontosságot igénylő feladatnál, az előmetszéshez szükséges szögeket, melyek a centrális rendszer szögei, ki kell egyenlíteni.

A centrális rendszerek kiegyenlítésénél a szomszédos rendszerek hatását az egyes szögekre tekintetbe vesszük. A javításokat a Geodéziai Kézikönyvben

([2], III. 215. o. (13) képlet) közöltek alapján határozzuk meg. A szögjavítás percekben (és abszolút értékben) a centrumban levő négy közel 90°-os szögre

$$|v'| = 0{,}0002866\,(|a-b|). \tag{16}$$

A javítások előjelét a centrális rendszerből az ellentmondás iránya (előjele) szerint felírhatjuk.

A megelőző és követő centrális rendszerekben

$$|v'_\delta| = |v'_\alpha| = \frac{1}{2}|v'|, \tag{17}$$

ahol $|v'|$ a (16) képletből kapott javítási érték. Az így kapott értékekkel a centrális rendszerek megfelelő szögeit megjavítjuk és újból számítjuk az a' és b'-vel jelölt arányossági tényezőket. Ezek már általában jobban közelítik meg egymást. A javítások, a javított szögértékek és a számítás a 2. táblázat 6., 7., 8. oszlopaiban van feltüntetve.

b) Az egyes centrális rendszerek szögeiben bennmaradó véletlen jellegű hibák meghatározása

A számított a' és b' arányossági tényezők, habár kisebb mértékben, de mégis eltérnek egymástól. Ebből a szögértékek még fennálló hibáira következtetünk. A szögjavításokat meghatározhatjuk abból a feltételből, hogy ismert a centrális rendszerben mind a megelőző, mind a követő oldal és keressük a választott súlyozási rendszernél a szögek legoptimálisabb javításait.

Szabályos centrális rendszerekben, mikor a sarokpontok közel 45°-osak, a súlyozási rendszer 1/2 : 1-hez (3; 243—246. o.). Ennek folytán, ha a közel 45°-os sarokszögek sinusának javítását az egységnek vesszük, és a közel 90°-os központi szögekét a súlyozás szerint 0,5-nek, akkor a nem mért segédpontok melletti szögek sinusának javítása 1,5 egység lesz.

A csatlakozó centrális rendszerekből származó javítások figyelembe vétele után jelöljük a 4. ábra szerinti szögeket $\alpha', \beta', \ldots$-vel. A centrális rendszerekben fennmaradó véletlen jellegű iránytorzulásokat oly módon küszöböljük ki, hogy a súlyozás szerinti v' sinusnövekményekkel az oldalfeltétel (q) értékét adja. A sinusnövekmény v' értékét külön kell meghatározni az A és külön a B segédpontokra vonatkozóan. A 4. ábrában a B segédpontra a feltételi egyenlet a következő

$$\frac{(\sin \alpha'_B + v') \cdot (\sin \eta'_B + 1{,}5v')}{(\sin \varepsilon'_B - 1{,}5\,v') \cdot (\sin \delta'_B - v')} = (q) \tag{18}$$

kifejtve

$$\sin \alpha'_B \sin \eta'_B + 1{,}5v' \sin \alpha'_B + v' \sin \eta'_B + 1{,}5v'^2 = (q) \cdot (\sin \varepsilon'_B \sin \delta'_B - \\ - v' \sin \varepsilon'_B - 1{,}5v' \sin \delta'_B + 1{,}5v'^2)$$

rendezve

$$1,5v'^2\,[1-(q)] + 1,5v'\sin\alpha'_B + v'\sin\eta'_B + v'\,(q)\sin\varepsilon'_B + \\ + 1,5v'\,(q)\sin\delta'_B = (q)\sin\varepsilon'_B\sin\delta'_B - \sin\alpha'_B\sin\eta'_B\,. \tag{19}$$

Osszuk az egész egyenletet $\sin\varepsilon'_B \sin\delta'_B$ -vel, s a közelítő megoldáshoz vegyük fel, hogy $\alpha = \delta = 45°$, ekkor a $\sin\alpha = \sin\delta = 1/\sqrt{2}$. Ezt figyelembe véve az egyenlet egyes tagjai a következő értékeket veszik fel:

$$\frac{1.5v'^2\,[1-(q)]}{\sin\varepsilon'_B\sin\delta'_B} = \frac{1,5v'^2[1-(q)]}{(1/\sqrt{2})^2} = 3\,[1-(q)]\,v'^2.$$

$$\frac{\sin\alpha'_B}{\sin\varepsilon'_B\sin\delta'_B}\cdot\frac{\sin\eta'_B}{\sin\eta'_B}\cdot 1,5v' = \frac{1,5b'v'}{\sin\eta'_B} = 1,5\sqrt{2}\,b'v'$$

$$\frac{\sin\eta'_B}{\sin\varepsilon'_B\sin\delta'_B}\cdot\frac{\sin\alpha'_B}{\sin\alpha'_B}v' = \frac{b'v'}{\sin\alpha'_B} = \sqrt{2}\,b'v'$$

$$\frac{\sin\varepsilon'_B}{\sin\varepsilon'_B\sin\delta'_B}(q)\,v' = \frac{(q)\,v'}{\sin\delta'_B} = \sqrt{2}\,(q)v'$$

$$\frac{\sin\delta'_B}{\sin\varepsilon'_B\sin\delta'_B}1,5\,(q)\,v' = \frac{1,5(q)v'}{\sin\varepsilon'_B} = 1,5\sqrt{2}\,(q)v'$$

$$\frac{\sin\varepsilon'_B\sin\delta'_B}{\sin\varepsilon'_B\sin\delta'_B}(q) = (q) \text{ és } \frac{\sin\alpha'_B\sin\eta'_B}{\sin\varepsilon'_B\sin\delta'_B} = b'\,.$$

ezeket behelyettesítve, az egyenlet a következő:

$$3\,[1-(q)]\,v'^2 + 1,5\sqrt{2}\,b' + \sqrt{2}\,b' + \sqrt{2}\,(q) + 1,5\sqrt{2}\,(q)\,v' = (q) - b' \tag{20}$$

$$3\,[1-(q)]\,v'^2 + 2,5\sqrt{2}\,[(q)+b']\,v' - [(q)-b'] = 0$$

$$v'^2 + \frac{2,5\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{(q)+b'}{1-(q)}v' - \frac{(q)-b'}{3[1-(q)]} = 0\,. \tag{21}$$

Másodfokú egyenlet az $x^2 + px - r = 0\ldots$ (21/a) alakban, megoldása az

$$x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 + r}$$

értéknek megfelelően

$$v'_{1,2} = -\frac{2,5\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{(q)+b'}{1-(q)} \pm \sqrt{\left|\frac{2,5\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{(q)+b'}{1-(q)}\right|^2 + \frac{(q)-b'}{3[1-(q)]}}\,. \tag{22}$$

A keresett megoldást a kisebb érték adja, melyet v_2'-vel jelölünk. Miután v_2' kicsiny, közelítő megoldásként a másodfokú egyenletben a négyzetes tagot elhanyagoljuk, és a v_2' közelítő értékét v_k'-val jelöljük. Az egyenlet megoldva

$$v_k' = \frac{(q) - b'}{3\,[1 - (q)]} \cdot \frac{3\,[1 - (q)]}{2{,}5\sqrt{2}\,[(q) + b']} = \frac{(q) - b'}{2{,}5\sqrt{2}\,[(q) + b']} \tag{23}$$

v_k' az a_B, illetve a_A sinusnövekményét adja 45°-nál.

Határozzuk meg az összefüggést a v_k', v_1' és v_2' között. A (21/a) képlet alapján

$$v_1' + v_2' = -p = -\frac{2{,}5\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{(q) + b'}{1 - (q)} \tag{24}$$

$$v_1' v_2' = -r = -\frac{(q) - b'}{3[1 - (q)]} \tag{25}$$

$$\frac{v_1' v_2'}{v_1' + v_2'} = \frac{(q) - b'}{3\,[1 - (q)]} \cdot \frac{3[1 - (q)]}{2{,}5\sqrt{2}\,[(q) + b']} = \frac{(q) - b'}{2{,}5\sqrt{2}\,[(q) + b']} = v_k', \tag{26}$$

vagyis

$$v_k' = \frac{v_1' v_2'}{v_1' + v_2'} = \frac{v_2'}{1 + v_2'/v_1'}\,; \text{ ebből } v_2' = v_k'\left(1 + \frac{v_2'}{v_1'}\right), \tag{27}$$

ha a v_2' kicsi, v_1'-hez képest elhanyagolható és $v_2' = v_k'$-val. A v_2'/v_1' előjelét is megállapíthatjuk. Mint említettük v_2' nagyságrendben v_k'-hoz közel fekszik és előjelben is avval egyezik. Egyszerűen csak a v_k'-t tudjuk meghatározni. Pozitív v_k' esetén v_2' is pozitív. A (25) képletből

$$v_2' = -\frac{r}{v_1'},$$

ezt az értéket a (27) képletbe helyezve

$$v_2' = v_k'\left(1 \mp \frac{r}{v_1'^2}\right), \text{ mert } r = \frac{(q) - b'}{\pm\, 3\,[1 - (q)]}, \tag{28}$$

hasonlóan negatív v_k' esetén v_2' is negatív, vagyis

$$v_1'(-v_2') = -r \quad \text{és} \quad v_2' = \frac{r}{v_1'}.$$

Ebből

$$v_2' = v_k'\left(1 \pm \frac{r}{v_1'^2}\right). \tag{29}$$

A v'_k a (23) képletből pozitívnak vagy negatívnak adódik. A függvénytáblázatból 45°-nál kikeressük a $|v'_k|$ sinusnövekményhez tartozó perc- és másodpercértékeket. A közelítő megoldásra való tekintettel a $|v'_k|$-hez kikeresett perc- és másodpercértéket $\pm$ (0,05—0,15)-dal csökkentjük, illetve növeljük v'_k és 1—(q) előjelét figyelembe véve a (28) és (29) képletek alapján. Ellenőrzésül szolgál, hogy a v'_2-nek megfelelő értékekkel javított szögek alapján számított (q_a) és (q_b) arányossági tényezők, a (q) arányossági tényezőtől csak kis mértékben, az 5. és 6. tizedesben térhetnek el, ha 10 cm-nél nagyobb pontosságú számítással akarjuk — az előmetszésekből — a segédpontok koordinátáit megkapni.

A centrális rendszerek szögeinek és a sokszögoldalak irányszögeinek ismeretében a segédpontok koordinátáit elegendő két-két előmetszésből számítani.

Az eljárás egyes lépései az 1. és 2. táblázatban vannak feltüntetve. Az eljárás nyugodt légköri viszonyok melletti fényképezést tételez fel, mert ekkor a repülőgép magassági ingadozása, hossz- és keresztirányú dőlése kicsi és véletlen jellegű, továbbá könnyebb egyenes vonalon repülni. Ezen körülmények szabják meg a feldolgozható sor hosszát, vagyis, hogy egy soron belül hányadik fényképen kell lenni az illesztőpontoknak. Az eddigi tapasztalataink szerint, külön segédberendezések nélküli repülésnél minden 7—9. 60%-os átfedésű fényképen kell öt illesztőpontot mérni.

A Szovjetunióban alkalmazott fotopoligon módszernél csak a radiális háromszögelés sokszögpontjait határozzák meg. Ehhez a törésszögeket a fényképekről mérik le, az oldalhosszakat pedig egymástól függetlenül számítják az RW-10, vagy az RWTD rádiómagasságmérőnek és a képek kölcsönös tájékozásának egyes adataiból. Utóbbiakat sztereokomparátoron való parallaxismérésekkel határozzák meg. Részletes leírása az [5] alatti munkában található.

A táblázatok a kísérleti sor számításának főbb lépéseit tartalmazzák.

A szövegi rész

A sor hét, mintegy 1 : 18 000 méretarányú képből állott. A transzformálás 1 : 10 000 méretarányban történt. A transzformálással megkaptuk a K, I és 4,V pontok koordinátáit. Ezekből számítottuk a (K, V) irányszöget: 269° 36′ 17″, mely a sokszögvonal tájékozási szöge, továbbá a β_k és β_v törésszögeket. A fényképen végzett irány- és szögmérésből készítettük az iránymeghatározási vázlatokat (példa: a 2 jelzésű kép, a későbbi javításokkal, továbbá a szükséges szögekkel; 1. t. 5. ábra), melyekből a β_i törésszögek kivehetők. (1. t. 1., 2. oszlop.)

A horizontzárlat a megengedhető 4′-cel szemben 2′ 45″ volt. A sokszögvonal szögzáróhibája a (8) képlet szerint számítva

$$\Delta\delta = 4' 53'' = 293''.$$

A szögzáróhiba középhibája hét törésszögnél a (9) képlet szerint

$$\mu_z = 3' 45''.$$

A javított törésszögeket az 1. táblázat 3. oszlopa tünteti fel.

Az oldalhosszak számításához szükséges ($a - b$) ellentmondásokat és a q arányossági tényezőket a 2. t. 1—5. oszlopokban feltüntetett módon határoztuk meg. Ezeket a további számításhoz átírtuk az 1. t. 5., 6. oszlopaiba. A t_l és a k értékeket az 1. t. 7., 8. oszlopai tüntetik fel, meghatározásuk a (13) és (15) képletek szerint történt.

Az 1. t. 9. oszlopa a koordinátákból számított u és v hosszakat, továbbá a javított q' arányszámokat tünteti fel. Az 1. t. 10. oszlopa a sokszögvonal számított oldalait tartalmazza.

A sokszögvonal első kiszámítása után $\delta x = 2{,}17$ m kereszthiba folytán a $(K|V|)$ irányszög: 269° 37′ 8″. Ezért a β_k törésszöget $\Delta\tau = -40''$-cel csökkentettük, s ugyanennyivel növeltük a βv törésszöget. A sokszögszámításhoz a végleges törésszögeket az 1. t. 11. oszlopában tüntettük fel. A $\beta_k = 92''$-es javítása folytán, a I. pont teljes mozgása a képen 0,051 mm, 1 : 10 000 méretarányban 0,92, m tehát 0,1 mm alatt maradt.

A sokszögvonal másodszori átszámítása után a hosszhiba $\delta y = \Delta h = -1{,}88$ m, a kereszthiba $\delta x = \Delta k = +0{,}43$ m volt. A sokszögvonal hossza 8923 m. A vonalas záróhiba: $d_m = \sqrt{1{,}88^2 + 0{,}43^2} = 1{,}93$ m; a relatív hiba 1,93/8923 $\approx 0{,}2\%$. A várható hossz- és kereszthiba a ([2], II. 347. o. (4), (5)) képletek szerint: $\Delta h = 3{,}46$ m; $\Delta k = 2{,}34$ m.

A sokszögpontok kiszámítása után a segédpontok koordinátáinak számításához elsősorban a centrális rendszerek belső szögeit kellett kiegyenlíteni. Ennek első lépése az állandó hibák tekintetbevétele, melynek számítását a 2. t. 6., 7., 8. oszlopai tüntetik fel. A v'_{aA} és v'_{aB} véletlen hibák, és (q_a), (q_b) ellenőrzések számításait a 2. t. 9., 10., 11. oszlopaiban találjuk meg.

A belső szögeket ismerve a segédpontokat előmetszéssel számítottuk. Az A_2 és B_2 segédpontok koordinátáinak számításánál kapott három-három értékpárt az 1. t-ben tüntettük fel.

Az eljárás pontosságának megállapítása céljából a meghatározott segédpontokra az 1-es és 3-as negatíveket a transzformátoron beállítottuk, s a rajtuk levő 13 háromszögelési pontot mint ismeretleneket meghatároztuk. A pontkoordinátákban az eltérések a következők:
$\Delta y_{\min} = 0{,}0$ (3 esetben); Δy átlag $= \pm 1{,}27$ m; $\mu_{\Delta y} = \pm 1{,}55$ m; $\Delta y_{\max} = \pm 2{,}4$ m (2 esetben).
Az 1 : 10 000 kidolgozási méretarányban:
$\Delta y_{\min} = 0{,}0$; Δy átlag $= \pm 0{,}127$ mm; $\mu_{\Delta y\max} = \pm 0{,}155$ mm; $\Delta y = \pm 0{,}24$ mm;
az 1 : 18 000 fényképméretarányban;
$\Delta y_{\min} = 0{,}0$; Δy átlag $= \pm 0{,}071$ mm; $\mu_{\Delta y} = \pm 0{,}086$ mm; $\Delta y_{\max} = \pm 0{,}133$ mm.
$\Delta x_{\min} = 0{,}0$ (5 esetben); Δx átlag $= \pm 0{,}79$ m; $\mu_{\Delta x} = \pm 1{,}08$ m; $\Delta_{x\,\max} = \pm 2{,}3$ m (1 esetben).
Az 1 : 10 000 kidolgozási méretarányban:
$\Delta x_{\min} = 0{,}0$; Δx átlag $= \pm 0{,}079$ mm; $\mu_{\Delta x} = \pm 0{,}108$ mm; $\Delta x_{\max} = \pm 0{,}23$ mm;
az 1 : 18 000 fényképméretarányban:
$\Delta x_{\min} = 0{,}0$; Δx átlag $= \pm 0{,}044$ mm; $\mu_{\Delta x} = \pm 0{,}06$ mm; $1 x_{\max} = \pm 0{,}128$ mm.

A kapott eredmények a radiális háromszögelés grafikus megoldásához viszonyítva mintegy kétszeres pontosságfokozást mutatnak, s az eljárás az alkalmazott kisebb felvételi képméretarány folytán gazdaságosabb is.

IRODALOM

1. Buchholtz: Photogrammetrie (VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1960)
2. Az Állami Földmérési és Térképészeti Hivatal által megbízott munkaközösség, szerk. Hazay: Geodéziai Kézikönyv I. II. III. kötet (Közgazdasági és Jogi kiadó, Budapest, 1956, 1957, 1960)
3. Hankó: Über Radiáltriangulation (Acta Technica, XXX. kötet, 3—4 szám, Budapest, 1960).
4. Schweizer: Untersuchung und praktische Durchführung einer Radialtriangulation im Hügelland (Universitätsverlag von Robert Noske in Borna—Leipzig, 1931).
5. Konsin: Aerofototopografija (Geodesisdat, Moskva, 1954)

ÖSSZEFOGLALÁS

A radiális háromszögelés beillesztéséhez felhasználható pontok különböző megbízhatóságúak, mert a fényképek különböző részein feküsznek. Legelőnyösebbek a képsor radiális pontjai, melyek a radiális háromszögelés sokszögvonalát alkotják. A kezdő- és a záróoldal két-két pontját bemérhetjük, vagy a feldolgozás méretarányában a két kép transzformálásával is meghatározhatjuk.

A sokszögvonal egyik hibája a szögzáróhiba. Szétosztásánál a kereszthibára való tekintettel a kezdő-, illetve a záróoldal irányát változtatjuk meg, a transzformálás által megadott hibahatáron belül.

A másik hiba a hosszhiba, melynek megállapításához le kell vezetni a centrális rendszer szögeiből a sokszögvonal oldalhosszait, mert ezek közvetlenül nem mérhetők. A levezetett oldalhosszakra két javítás írható elő. Egyik a két úton levezetett követő oldal javítása, melyet az ellentmondásból, a másik az arányossági tényező javítása, amelyet az oldalhosszak geometriai sor szerinti származásából határozunk meg.

A sokszögvonal ismeretében a segédpontokra menő irányokat kell megjavítani, egyrészt az állandó, másrészt a véletlen hibákból kifolyóan. Ez utóbbinál abból a feltételből indulunk ki, hogy ismert mind a megelőző, mind a követő oldal, s a legkedvezőbb súlyviszonyok mellett számítjuk az irányok javítását.

A segédpontokat a sokszögpontokból többszöri előmetszéssel határozzuk meg.

A mellékletekben a kísérleti sor főbb számítási lépéseit tüntettük fel. Ellenőrzésképpen a meghatározott segédpontokból az ismeretlennek vett háromszögelési pontok koordinátaeltéréseit vizsgáltuk.

A HIBAELLIPSZIS ÉS A TALPPONTI GÖRBE JELLEMZŐI

HALMOS FERENC
MTA GEODÉZIAI KUTATÓ LABORATÓRIUM, SOPRON

[Beérkezett 1961. augusztus 28-án]

A megfigyelt értékekből különböző számítások útján meghatározzuk az ismeretlenek legvalószínűbb értékeit, majd kiszámítjuk ezeknek megbízhatósági mérőszámait a megfigyelési értékekre kapott legvalószínűbb javítások és a megfelelő súlyszámok alapján. Ezt az utat követjük mind a közvetlenül, mind pedig a közvetetten meghatározható ismeretlenek esetében. A megbízhatósági mérőszámok, melyekre mi a középhibákat fogadjuk el, megmutatják, hogy egy meghatározott valószínűség mellett az ismeretlenekre kapott értékek milyen bizonytalanságokkal terheltek.

Egy pont helyzetét a síkban két adattal, a két koordinátával tudjuk rögzíteni. Ebből következőleg a pont helyzetének megbízhatóságát is két számadattal fejezzük ki, a két koordináta irányába eső középhibákkal. Azt is tudjuk, hogy a levezetett két koordinátaközéphiba függvénye a koordináta tengelyrendszer felvételének. Más-más felvett tengelyrendszer mellett a koordinátaközéphibák mások és mások lesznek. Ezek a mérőszámok nem alkalmasak a pont tetszőleges irányban adódó középhibájának meghatározására. Az a tény, hogy egy pontot a síkban két adat határoz meg, s mindkettő bizonytalansága a pontnak egy síkidomszerű bizonytalanságát okozza, már ANDRAE bebizonyította, hogy ez egy ellipszis, a *hibaellipszis*, illetve annak talpponti görbéje, amelynél a bármely derékszögű koordináta tengelyrendszerre vonatkozó két koordinátaközéphiba négyzetösszege állandó. Ha ui. egy ellipszis középpontjából két tetszőleges egyenesre merőleges egyenest húzunk és megszerkesztjük az ezekre merőleges érintőket, az érintőknek az ellipszis középpontjától mért távolságainak négyzetösszege állandó. A középponttól mért távolságok egyúttal a kérdéses irányban az irányhoz kötött *pontközéphiba* értékét adják. Amennyiben valamennyi irányban megszerkesztjük a pontközéphiba értékét, ezeknek a pontoknak összekötő vonala az ellipszis *talpponti görbéjét* adja, melyet grafikusan és számítás útján is meghatározhatunk. Kérdéses a továbbiakban az, hogy az ellipszis féltengelyei segítségével kifejezhető talpponti görbe egyenletében előforduló tényezők egymástól független mennyiségekként kezelhetők-e. Tudvalevő, hogy az ellipszis fél nagy- és fél kistengelyét ugyanazon mennyiségekből határozzuk meg, és ha ezeknek valamilyen

függvénye középhibáját keressük, úgy az egyszer már ugyanazon független értékekből meghatározott mennyiségeket már nem tekinthetjük függetleneknek, hacsak valamilyen különleges feltétel nem érvényesül.

A kérdést tulajdonképpen már dr. TÁRCZY—HORNOCH professzor veti fel nemrég megjelent tanulmányában [1], ahol egy pont különböző irányokban mutatkozó bizonytalanságát határozza meg. Az addig ismert megoldások e problémát a középhibaellipszis adatainak meghatározásával oldják meg, amikor a középhibaellipszis ismert adatainak segítségével, számítással vagy grafikus úton jutnak el a talpponti görbéhez, amely minden irányban megadja a pont bizonytalanságát. TÁRCZY—HORNOCH az egyszerű pontbekapcsolások esetére a mérési irányokra merőlegesen jelentkező egymástól független középhibák segítségével meghatározza a középhibaellipszis két konjugált átmérőjét, amelyek egymástól szintén független mennyiségek, majd ezek segítségével anélkül, hogy a középhibaellipszist levezetné, a hibaterjedés törvényének megfelelően számítással vagy grafikus úton megadja bármely irányban a pontbizonytalanságot. Ezeknek a pontoknak összekötő vonala pedig az előbb is említett talpponti görbét szolgáltatja. Alapjában véve a hibaellipszis két főtengelye is felhasználható ezen számításokra és szerkesztésekre, hiszen ezek is ugyanannak az ellipszisnek konjugált átmérőiként foghatók fel [1]. Ebből következik, amire TÁRCZY—HORNOCH hívta fel a figyelmet, hogy miután mind az ellipszistengelyek, mind pedig a konjugált félátmérők segítségével történő talpponti görbe megszerkesztés ugyanarra az eredményre vezet, ezért kell hogy a középhibaellipszis kiegyenlítéssel vagy kiegyenlítés nélkül levezethető két főtengelye is a további számítások, illetve szerkesztések szempontjából úgy legyen kezelhető, mint egymástól független mennyiség. A továbbiakban e kérdést fogjuk részletesebben megvizsgálni. Először a kiegyenlítés alapján nyerhető értékekre végezzük el vizsgálatainkat, majd ezek alapján közvetlenül következtetéseket vonunk le az egyszerű pontbekapcsolások esetére.

Az idézett tanulmány két úton levezetett értékének egyezése és azoknak geometriai ellenőrzése már az adott kérdésre vonatkozólag közvetett bizonyítást is nyújt. Mi most más irányból kiindulva kívánjuk az értékek függetlenségét bizonyítani.

Vegyük szemügyre a továbbiakban a közvetítő megfigyeléseket, mégpedig az egyszerűség kedvéért az egyenlősúlyúakat. Két ismeretlen meghatározására (x, y) végeztünk összesen n megfigyelést. A kiegyenlítéssel meghatározható ismeretlenek a normálegyenletek alapján a megfelelő együtthatók és tisztatagok függvényeiként kifejezhetők. A tisztatagok a mérési eredmények függvényei, tehát a megfigyelt értékek alapján az ismeretlenek ezek függvényeiként adódhatnak. Tehát:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \ldots + \alpha_n l_n = [\alpha l] = -\frac{[al1]}{[aa1]} \\ y &= \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \ldots + \beta_n l_n = [\beta l] = -\frac{[bl1]}{[bb1]} \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

ahol $\alpha_1 \ldots, \beta_1 \ldots$ egyelőre meghatározatlan együtthatók, melyek mindenkor kiszámíthatók a kiegyenlítési alakzat megfelelő összefüggései alapján. A $[al1]$, $[aa1]$ értékek a normálegyenletek lefejtései alapján kaphatók. Ha az $l_1, l_2, \ldots l_n$-ben előforduló mérési középhibákat egyenlősúlyúakról lévén szó μ_0-val jelöljük, akkor a két koordinátaközéphiba négyzete lesz:

$$\left.\begin{aligned} \mu_x^2 &= \alpha_1^2\mu_0^2 + \alpha_2^2\mu_0^2 + \ldots + \alpha_n^2\mu_0^2 = [\alpha\alpha]\,\mu_0^2 = \frac{\mu_0^2}{[aa1]} = \mu_0^2\frac{[aa]}{D} \\ \mu_y^2 &= \beta_1^2\mu_0^2 + \beta_2^2\mu_0^2 + \ldots + \beta_0^2\mu_0^2 =]\beta\beta]\,\mu_0^2 = \frac{\mu_0^2}{[bb1]} = \mu_0^2\frac{[bb]}{D} \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

ahol

$$\mu_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

és $D = [aa]\,[bb] - [ab]\,[ab]$.

A javítások négyzetösszegének minimum feltétele ugyanazt fejezi ki, mint az adott koordinátarendszer mellett a koordinátaközéphibák legkisebb értékének követelménye. ([2], 86—87 o.). Azaz a $[\alpha\alpha]$ és $[\beta\beta]$ minimuma egyúttal a legnagyobb súlyt is biztosítja az ismeretlenek számára ([3], 198. o. (5) egyenl.)

$$p_x = \frac{1}{[\alpha\alpha]} = \frac{1}{Q_{xx}},\quad p_y = \frac{1}{[\beta\beta]} = \frac{1}{Q_{yy}} \text{ és } \frac{1}{[\alpha\beta]} = \frac{1}{Q_{xy}}, \tag{3}$$

ahol Q_{xx}, Q_{yy} a megfelelő ismeretlenek *súlykoefficiensei*. A Q_{xy} segédmennyiség, mely egyúttal azt is kifejezi, hogy az ugyanazon független megfigyelésekből együttes kiegyenlítés (számítás) útján kapott mennyiségek (ismeretlenek) nem függetlenek egymástól. Ezért, ha a

$$F = f(x, y) \tag{4}$$

függvény középhibáját keressük, a következő összefüggést kell alkalmaznunk:

$$\begin{aligned} \mu_F^2 &= \mu_0^2\,(f_x^2\,[\alpha\alpha] + 2f_xf_y\,[\alpha\beta] + f_y^2\,[\beta\beta]) = \\ &= \mu_0^2\,(f_x^2\,Q_{xx} + 2f_xf_y\,Q_{xy} + f_y^2\,Q_{yy}), \end{aligned} \tag{5}$$

ahol f_x és f_y az F függvénynek x és y szerint képzett első parciális differenciálhányadosa. Ahhoz, hogy a számított ismeretlenek mint egymástól független

mennyiségek legyenek kezelhetők, további számításnál a koordináta tengelyrendszert olyan ψ értékkel kell elforgatnunk, mely mellett a szorzatos tagok koefficienseinek összege nullával lesz egyenlő. Azaz:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\psi + y\sin\psi \\ y' &= -x\sin\psi + y\cos\psi. \end{aligned} \tag{6}$$

Továbbá

$$\begin{aligned} a' &= a\cos\psi + b\sin\psi \\ b' &= -a\sin\psi + b\cos\psi. \end{aligned} \tag{7}$$

Ekkor ugyanis

$$[a'b'] = -[aa]\cos\psi\sin\psi + [ab](\cos^2\psi - \sin^2\psi) + [bb]\cos\psi\sin\psi = 0. \tag{8}$$

Tehát

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2[ab]}{[aa] - [bb]}. \tag{9}$$

A két ismeretlen az új koordinátarendszerben a következő egyenletekkel fejezhető ki:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha_1' l_1 + \alpha_2' l_2 + \alpha_3' l_3 + \ldots + \alpha_n' l_n = [a'l] = -\frac{[a'l]}{[a'a']} \\ y' &= \beta_1' l_1 + \beta_2' l_2 + \beta_3' l_3 + \ldots + \beta_n' l_n = [\beta' l] = -\frac{[b'l]}{[b'b']} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

A (10) egyenlet alapján meghatározhatók a koordinátaközéphibák:

$$\left.\begin{aligned} \mu_{x'}^2 &= \alpha_1'^2\mu_0^2 + \alpha_2'^2\mu_0^2 + \alpha_3'^2\mu_0^2 + \ldots + \alpha_n'^2\mu_0^2 = [a'a']\mu_0^2 = \mu_0^2\frac{[a'a']}{D} \\ \mu_{y'}^2 &= \beta_1'^2\mu_0^2 + \beta_2'^2\mu_0^2 + \beta_3'^2\mu_0^2 + \ldots + \beta_n'^2\mu_0^2 = [\beta'\beta']\mu_0^2 = \mu_0^2\frac{[b'b']}{D} \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Ahol ismét az így meghatározott $\mu_{x'}$ és $\mu_{y'}$ az adott tengelyrendszer mellett a legkisebb, mert a kiegyenlítés alapfeltétele, hogy $[a'a']$ és $[\beta'\beta']$ minimum legyen. A súlyok hasonlóan a (3)-hoz:

$$p_{x'} = \frac{1}{[a'a']} = \frac{1}{Q_{x'x'}}, \quad p_{y'} = \frac{1}{[\beta\beta]} = \frac{1}{Q_{y'y'}}. \tag{12}$$

Miután az új koordinátarendszer felvételének alapja, hogy $[a'b'] = 0$, ennek következtében $[a'\beta']$ és így $Q_{x'y'}$ is nullával egyenlő. Ha az

$$F' = f'(x', y') \tag{13}$$

függvény középhibáját keressük, úgy a megfelelő összefüggés a következő lesz:

$$\mu_{F'}^2 = \mu_0^2(f_{x'}'^2[\alpha'\,\alpha'] + f_{y'}'^2[\beta'\,\beta']) = \mu_0^2(f_{x'}'^2 Q_{x'x'} + f_{x'}'^2 Q_{y'y'}). \quad (14)$$

Tehát a további számítások szempontjából az x' és y' mint egymástól független értékek tekinthetők és valamilyen függvényük középhibájának meghatározásánál az egyszerű hibaterjedés törvénye alkalmazható rájuk, figyelembe véve természetesen a kiegyenlítés folytán adódott súlyukat.

A (8)-as összefüggés mellett felírhatók a négyzetes új együtthatók is:

$$\left.\begin{aligned}[a'\,a'] &= [aa]\cos^2\psi + 2\,[ab]\sin\psi\,\mathrm{ccs}\,\psi + [bb]\sin^2\psi \\ [b'\,b'] &= [aa]\sin^2\psi - 2\,[ab]\sin\psi\cos\psi + [bb]\cos^2\psi\end{aligned}\right\}. \quad (15)$$

Mindkét utóbbi egyenletet beszorozva $\frac{\mu_0^2}{D}$ értékkel, kapjuk:

$$\left.\begin{aligned}\mu_{x'}^2 &= \mu_x^2\cos^2\psi + \frac{2\,[ab]}{D}\mu_0^2\sin\psi\cos\psi + \mu_y^2\sin^2\psi \\ \mu_{y'}^2 &= \mu_y^2\sin^2\psi - \frac{2\,[ab]}{D}\mu_0^2\sin\psi\cos\psi + \mu_y^2\cos^2\psi\end{aligned}\right\}. \quad (16)$$

A (16)-beli összefüggések bármelyikének ψ szerint képzett első parciális differenciálhányadosát egyenlővé téve nullával és az egyenletet megoldva, megkapjuk a hibaellipszis fél nagy- és fél kistengelyének irányát az eredeti koordinátarendszerhez viszonyítva. Az egyenlet megoldása a (8)-beli összefüggéshez vezet. A (16) egyenletbeli $\frac{[ab]}{D}\mu_0^2$ értéket jelölhetjük μ_{xy}-al is, amit „korrelációs érték"-nek nevezhetünk ([4], 91. o.). Így írhatjuk:

$$\left.\begin{aligned}\mu_{x'}^2 &= \mu_x^2\cos^2\psi + 2\,\mu_{xy}\sin\psi\cos\psi + \mu_y^2\sin^2\psi \\ \mu_{y'}^2 &= \mu_x^2\sin^2\psi - 2\,\mu_{xy}\sin\psi\cos\psi + \mu_y^2\cos^2\psi\end{aligned}\right\}. \quad (16a)$$

A (8)-beli feltétel betartása egyúttal tehát a $\mu_{x'y'} = 0$-t is biztosítja, azaz a meghatározott x', y' koordináták közötti korreláció is nullával lesz egyenlő ([4], 91. o. és [5]. 318. o.). Tudvalevőleg a korrelációs együttható:

$$r_{x'y'} = \frac{Q_{x'y'}}{\sqrt{Q_{x'x'}\,Q_{y'y'}}} = \frac{\mu_{x'y'}^2}{\mu_{x'}\,\mu_{y'}} = \frac{[a'\,b']}{\sqrt{[a'a'][b'b']}}, \quad (17)$$

ahol a $\mu_{x'y'} = \mu_0\sqrt{Q_{x'y'}} = 0$. Ennek alapján a kétismeretlenes (változós) normális eloszlás sűrűség függvénye is egyszerűbb alakot ölt. A kétváltozós normális eloszlás sűrűségfüggvénye függő ismeretlenek esetében a ([5], 313. o. (9) egyenlete) szerint:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\mu_x^2\mu_y^2\sqrt{1-r_{xy}}}\,e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}^2)}\left(\frac{x^2}{\mu_x^2} - \frac{2r_{xy}xy}{\mu_x\mu_y} + \frac{y^2}{\mu_y^2}\right)} \quad (18)$$

Míg ha a korrelációs együttható zérus, mint a mi esetünkben a ψ-vel elforgatott koordináta rendszer mellett, akkor

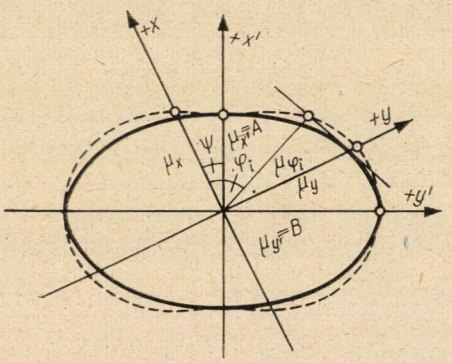
$$f(x'y') = \frac{1}{2\pi\mu_{x'}^2 \cdot \mu_{y'}^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x'^2}{\mu_{x'}^2} + \frac{y'^2}{\mu_{y'}^2}\right)}. \tag{19}$$

A hibaellipszis egyenlete lesz:

$$\frac{x'^2}{\mu_{x'}^2} + \frac{y'^2}{\mu_{y'}^2} = 1,$$

ahol x', y' itt az ellipszis egy tetszőleges pontjához tartozó az elforgatott rendszerben kifejezett koordináta. A $\mu_{x'}$ és $\mu_{y'}$ a hibaellipszis fél nagy- és fél kistengelye, amit egyéként A és B-vel szoktunk jelölni (1. ábra).

Az elforgatott koordinátarendszerhez tartozó ellipszis fél nagy- és fél kistengelyek így szintén úgy tekinthetők, mint független mennyiségekhez tar-



1. ábra

tozó értékek, mivel a szorzatos tagok minden esetben nullával egyenlők. Az ellipszis tengelyei nem mások, mint az új koordinátarendszerben a meghatározott ismeretlenek középhibái. Az ismeretlenekről pedig bebizonyítottuk, hogy ezekre a függvény függvényére vonatkozó középhibaszámításnál érvényes az egyszerű hibaterjedés törvénye, mert a két érték viszonyát, kapcsolatát kifejező korrelációs együttható nullával egyenlő.

A talpponti görbe egyenlete tudvalevőleg a ([2], 138. o. (3) egyenlete) alapján az x, y koordinátarendszerben a következő:

$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^2 &= \mu_0^2 (Q_{xx}x^2 + 2Q_{xy}xy + Q_{yy}y^2) = \\ &= \mu_0^2 \left(\frac{x^2}{[aa1]} + \frac{2xy}{[ab1]} + \frac{y^2}{[bb1]} \right) = \\ &= \mu_0^2 ([\alpha\alpha]x^2 + 2[\alpha\beta]xy + [\beta\beta]y^2).\end{aligned} \tag{20}$$

Míg az új koordinátarendszerben:

$$x'^2 + y'^2) = \mu_0^2 (Q_{x'x'} x'^2 + Q_{y'y'} y'^2) =$$

$$= \mu_0^2 \left(\frac{x'^2}{[a'a']} + \frac{y'^2}{[b'b']} \right) = \mu_0^2 ([\alpha' \alpha'] x'^2 + [\beta' \beta'] y'^2) = \quad (20a)$$

$$= A^2 x'^2 + B^2 y'^2.$$

ahol

$$A^2 = \mu_0^2 Q_{x'x'} = \mu_{x'}^2 \quad \text{és} \quad B^2 = \mu_0^2 Q_{y'y'} = \mu_{y'}^2 .$$

A talpponti görbe megszerkesztésével tetszőleges irányban megkapjuk a ponthiba értékét, ha a kérdéses irányban méréthelyesen meghatározzuk az ellipszis középponttól és a talpponti görbéig kimetszett vonaldarab hosszát. Számítással értéke a következő képlettel határozható meg ([3], 255. o. 15. egyenl.),

$$\mu_i^2 = A^2 \cos^2 \varphi_i + B^2 \sin^2 \varphi_i , \qquad (21)$$

ahol μ_i a φ_i irányban a ponthiba értéke (1. ábra). Mindezekben az esetekben látható, hogy a hibaellipszis főtengelyeivel meghatározható értékekben a szorzatos tagok a $[a'b'] = 0$ következtében kiesnek. Valamennyi számítás és szerkesztés úgy hajtható végre, mint a számított mennyiségek függetlensége esetén.

TÁRCZY—HORNOCH Antal levezette a hibaellipszis megfelelő adatait, fölös megfigyelések nélküli esetekre külön az egyszerű előmetszésre [6], a talpponti görbe egyszerű megszerkesztésére közöl eljárást és bemutatja a többi pontbekapcsolási esetekre a számítás és szerkesztés módszereit [1]. Utóbbi tanulmányában kimutatja, hogy a talpponti görbe megszerkesztését elvégezhetjük a hibaellipszis nélkül is, sőt a rajzi munka is lényegesen egyszerűbb. A szerkesztéseknél az ellipszis konjugált félátmérőiből indul ki. Tekintve, hogy ezek egymástól független értékek, így tetszőleges irányban való hatásukat a hibaterjedés egyszerű törvényszerűsége alapján lehet meghatározni. A [6] tanulmányban megtaláljuk az ellipszis fél kis- és nagytengelynek a koordinátarendszer + x tengelyével bezárt szögét a tetszőleges irányra felírható középhiba képlet (amely az adott irányban tehát a talpponti görbét adja meg) segítségével határozza meg, amikor keresi, hogy milyen irányban jelentkeznek a függvény szélső értékei. A kapott összefüggés ugyanaz, mint a kiegyenlítés alapján levezethető.

Miután a fölös megfigyelések nélküli pontbekapcsolások kiszámítására felhasználhatók ugyanazok az összefüggések, mint amelyek a szigorú kiegyenlítésnél mint közvetítő egyenletek tekinthetők, csupán azzal a megszorítással, hogy annyi közvetítő egyenlet van, mint amennyi az ismeretlenek száma, következik, hogy ami érvényes a közvetítő megfigyelések kiegyenlítésére az ellipszistengelyek függetlensége terén, jelen számításoknál is fenn kell állania.

A feltételes megfigyelések kiegyenlítésére vonatkozólag ismert, hogy valamennyi esetben a számításokat visszavezethetjük a közvetítő megfigyelések kiegyenlítésére ([7], 228—229. o.). Ennek megfelelően a közvetítő megfigyelések kiegyenlítése útján nyerhető hibaellipszisre kiterjedő vizsgálatok érvényesek a feltételes (közvetlen megfigyelések kiegyenlítése feltételekkel) megfigyelésekre is, miután a közvetítőkre való visszavezetés útján a vizsgálatok bármely elvégzett feladatra érvényesek.

A klasszikus valószínűségszámítás alapjaira támaszkodva végez vizsgálatokat HRISZTOW a [8] és [9]-ben a koordináta kiegyenlítés tulajdonságaira vonatkozólag. Részletesen vizsgálja a kiegyenlítés nyújtotta középhibák megbízhatóságát, valamint azok további felhasználásának feltételeit. Ugyanezen a helyen részletes bizonyítását adja annak is, hogy hogyan érhető el a tengelyrendszer elforgatásával a kiegyenlítésnél a szorzatos tagok kiesése. A vizsgálatokat kiterjeszti a kiegyenlített értékek függvényeire és azok megbízhatóságára vonatkozólag, különös tekintettel a valószínűségi eloszlások tételeinek figyelembevételével [10].

Rövid tanulmányunkban csak annak bizonyítását kívántuk megadni, hogy a középhibaellipszis számításánál miért függetlenek egymástól az ellipszis féltengelyei és milyen alapon lehet ezeket a további számításokban, illetve szerkesztésekben úgy kezelni, mint egymástól nem függő nagyságok. Jelen vizsgálatok a felvetett probléma megoldásának közvetlen bizonyítását adják.

IRODALOM

1. DR. TÁRCZY—HORNOCH A.: A középhibaellipszis talpponti görbéjének egyszerű megszerkesztése. (Geodézia és Kartográfia, Budapest, 1960)
2. GROSSMANN, W.: Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Berlin 1953
3. DR. HAZAY I.: Geodéziai Kézikönyv I. kötet (Budapest 1956)
4. DR. WOLF, H.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. (Vermessungstechnische Rundschau, 1961. 3. szám)
5. DR. RÉNYI A.: Valószínűségszámítás. (Budapest, 1954)
6. DR. TÁRCZY—HORNOCH A.: A középhibaellipszis kiszámításáról egyszerű előmetszésnél. (MTA Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei XXIV. kötet 1—4 szám)
7. HELMERT, F. R.: Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. (2. kiadás, Leipzig 1907)
8. DR. HRISZTOW, W. K.: Klassische und moderne Genauigkeitsabschätzungen in einigen Ausgleichungsfällen. (Acta Technica XXIII. Series Geodaetica et Geophysica Tom. I. Fasc. 1—3)
9. DR. HRISZTOW, W. K.: Kacsesztvó ocenok, polucsaemüh po metodu najmensih kvadratov (Geodezija i Aeroftocjemka. Moszkva 1960)
10. DR. HRISZTOW, W. K.: Doveriteljnüe intervalii i dovernitelјnüe verojatnoszti uravennüh velicsin, polucsaemüh po szposzobu najmenysih kvadratov. (Geodesija i Kartografija 1961/6)

ÖSSZEFOGLALÁS

A szerző ismerteti a közvetítő megfigyelések szerinti kiegyenlítés alapján számítható koordinátaközéphibák összefüggéseit. Szigorú bizonyítását adja annak, hogy miért tekinthető egymástól független mennyiségnek az együttes kiegyenlítés folytán kapott hibaellipszis két féltengelye. Ezzel egyúttal magyarázatát adja annak, hogy a hibaellipszis tengelyeire miért alkalmazható az egyszerű hibaterjedés törvénye. Vizsgálatainak valószínűségszámítási alapjait is bemutatja. A közvetítő megfigyelésekre (II. kiegyenlítési csoport) levezetett bizonyítását kiterjeszti a fölös megfigyelések nélküli pontmeghatározásra is, amennyiben ezek ugyanazon közvetítő egyenletekkel (csupán annyi egyenlet, ahány ismeretlen) oldhatók meg. A vizsgálatok egyúttal a feltételes megfigyelések (közvetlen megfigyelések feltételekkel, III. kiegyenlítési csoport) útján nyerhető értékek függetlenségét is bizonyítják, miután azok minden esetben visszavezethetők a közvetítő megfigyelések csoportjára.

A GYÉMÁNT DRÓTHÚZÓKÖVEK OPTIMÁLIS FÚRÁSI IRÁNYÁNAK MEGHATÁROZÁSA

Dr. HOFFMANN PÁL
KÁBEL- ÉS SODRONYKÖTÉLGYÁR, BUDAPEST

[Beérkezett 1961. október 27-én]

Bevezetés

A finom huzalgyártás alakítószerszáma, a húzókő, igen pontos furatú keményfémkarbidból, vagy gyémántból készül. A húzókövet sárgaréz, vagy acél (esetleg más alkalmas anyagból készült) foglalatba építik be. A furat profilja az alakítandó fémtől (elsősorban a keménységétől) és a húzás gyártási jellemzőitől (fogyás, húzási sebesség, kenés stb.) függően különböző lehet.

A kis átmérőjű (általában 0,3 mm ∅ alatti) huzalokat gyémánt húzókövekben húzzák. A húzókövek készítésére alkalmas gyémántnak tiszta, buborék- és zárványmentes, belső feszültségeket, vagy belső feszültségből eredő repedezéseket nem tartalmazó egy-kristálynak kell lennie. Iker-, vagy többkristályú gyémánt húzókő készítésére nem alkalmas.

A gyémántok minőségével kapcsolatos követelmények tehát igen szigorúak. W. LIER [1] szerint a huzalgyártásban alkalmazott gyémántok minőségének jobbnak kell lenni az ékszergyémántoknál és éppen ezért a kereskedelmi forgalomban levő, ún. ipari gyémántoknak csak kb. 0,5%-a használható fel húzókő előállítására.

Nem közömbös továbbá a gyémánt súlya sem. A gyémánt súlyát, mint ismeretes, karátokban mérik (1 metrikus karát = 200 mg). Az igénybevétel következtében fennálló kőtörés lehetőségének csökkentésére elő szokás írni azt a minimális karátsúlyt, amellyel az adott névleges furatátmérőjű nyersgyémántnak rendelkeznie kell. A nyersgyémánt karátsúlya arányosan nő a furatátmérő növekedésével [2].

Takarékossági szempontok alapján szokásos az ún. erősített gyémánt húzókövek alkalmazása is. Ezekben a húzókövekben a gyémánt karátsúlya kisebb [3]. Erősítésük különleges szilárdságú páncélfoglalással történik, majd ezután kerülnek szerelésre a sárgarézből, vagy acélból készült házba.

A csökkentett karátsúlyú gyémántokból készült húzókövek alkalmazása azonban csak látszólag gazdaságosabb. Nagyobb karátsúlyú gyémánt húzókő használatakor ugyanis, a nagyobb szilárdságból eredő előnyökön kívül az a lehetőség is megvan, hogy a helyesen méretezett profilú követ kopása után ismételten nagyobb furatátmérőre lehet csiszolni, tehát a kőben lehúzható huzal összmennyisége ezzel megnövelhető. Kis karátsúlyú gyémántkő használatakor ez a lehetőség nem jöhet számításba.

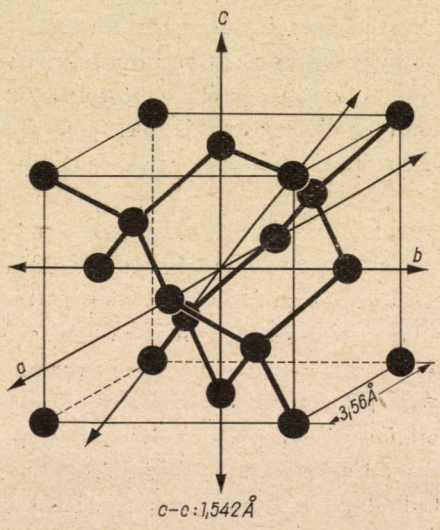
Köztudomású továbbá, hogy a kristályos anyagok tulajdonságai a kristályszerkezet következtében vektoriálisak. A kristályos anyagok egy-kristályainak kopása, hasadása ugyancsak vektoriális sajátság lévén, nem közömbös a gyémántkő élettartamára nézve az, hogy a furat iránya milyen kristálytani irányba esik. A kutatókat már kb. 1950-től foglalkoztatja a gyémánt húzókövek legalkalmasabb furatirányának kijelölése, az eredmények azonban nem eléggé egyértelműek és ezért még ma is vita tárgyát képezik.

Mindezek a körülmények amellett szólnak, hogy a gyémánt húzókövek gazdaságosabb kihasználhatósága végett méretezésük és kiképzésük körülményeit behatóan vizsgálni kell, annál is inkább, mivel a közeljövőben a hazai ipar is fog gyémánt húzóköveket előállítani.

A gyémántkristály fizikai és kristálytani jellemzői

A gyémánt kristálytanilag [4] a szabályos rendszerbe tartozó holoéderes kristályformában kristályosodik. Tércsoportjának jele: O_h^7-Fd 3 m.

A tetraéderes konfigurációban felépült elemi kockarács élhosszúsága 3,56 Å, a C—C távolság a rácsban 1,542 Å, a szénatomok vegyérték irányai



1. ábra. A gyémánt elemi rácsa

a tetraéder 109° 28′ szögét zárják be egymással. A rács szerkezetét az 1. ábra szemlélteti. Az ábra feltünteti az *a*, *b* és *c* kristálytani tengelyek helyzetét is.

A természetes eredetű gyémántok kristályain általában az (111) indexű oktaéder, illetve az (100) indexű hexaéder lapok dominálnak. Ritkábban fellelhetők a (210) indexű tetrakiszhexaéder, illetve a (321) indexű hexakisz-

oktaéder lapok is. A kristályok minden oldalról kialakultak, a lapok felülete kissé görbült, az élek lekerekítettek.

A gyémántkristály színe változó. Lehet színtelen, vagy sárgás, de lehet kékes, pirosas, ritkábban barnás, szürkés, színárnyalatú, sőt fekete is.

A gyémántok nagy része belső feszültségekkel rendelkezik, ezek között gyakori az anomális kettőstöréssel bíró kristály. A gyémánt fontosabb fizikai jellemzőit az 1. táblázat ismerteti.

I. táblázat

A gyémánt fizikai tulajdonságai [5]

Molekulasúly	12,01
Törésmutató, n_D 14 C°	2,4173
Fajsúly, g/ml, 18 C°	3,514
Keménység	
Mohs-skála	10
Knoop-skála	7000

A gyémánt keménységi skálába történő besorolásánál a Mohs-féle besorolás könnyen tévedésbe ejthet, ha a gyémánt keménységét az alakítandó fém keménységével akarjuk összehasonlítani. Ebből a szempontból a Knoop-féle skála jobb tájékoztatást nyújt, mert amíg a Mohs-skála szerint a gyémánt csak kb. 2,4-szer keményebb a réznél, addig a Knoop-skála szerint ez a viszony 7000 : 163.

A gyémántkristály geometriai viszonyai

A gyémánt elemi cellájának 1. ábra szerinti szerkezetében (100), (110) és (111) indexű kocka, rombtizenkettes, illetve oktaéder lapok dominálnak. A lehetséges fúrási irányoknak tehát az e síkokra merőleges irányokat tekinthetjük. Meg kell állapítanunk, hogy ezen irányokban milyen valószínűséggel következik be a kristály hasadása és kopása. A legalkalmasabb fúrási irány nyilvánvalóan az, amelyben a hasadás, vagy kopás valószínűsége a legkisebb.

A kristálytanból ismeretes, hogy a hasadás a kristályt alkotó elemi részecskéket összetartó legkisebb erők irányára merőleges síkok mentén következik be. A hasadás iránya tehát szerkezetileg adott, mégpedig az elemi részecskékkel legjobban terhelt, általában kis indexű kristálylapok síkjába esik.

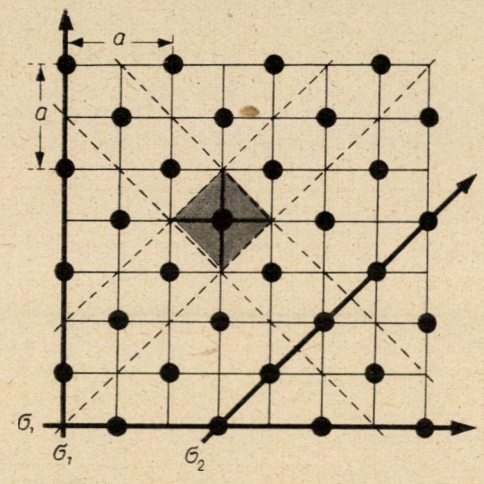
A hasadás szempontjából lényeges továbbá annak ismerete, hogy az igénybevétel iránya (esetünkben a fúrás iránya) milyen szöget zár be a kristály e legkönnyebben hasadó síkjaival. A hasadás, kopás valószínűségének megállapítása végett meg kell tehát határoznunk a kocka, a rombtizenkettes és az oktaéder kristályforma minden egyes lapjának a lehetséges fúrási irányokkal bezárt szögét, illetve a kérdéses laptípusok síkjában az atomsűrűséget.

A gyémántkristály (100), (110), *és* (111) *indexű síkok szerinti atomsűrűsége*

Az atomsűrűség megállapítása az elemi rácsszerkezet alapján történhetik, a megnövelt kristályrácsban elképzelt (100), (110), és (111) indexű síkok egységnyi felületére eső atomok számának meghatározásával.

A kérdéses síkokban az atomok elhelyezkedését a 2., 3. és 4. ábra szemlélteti.

Az ábrák valóságos méreteit az $a = 3{,}56$ Å rácsállandónak, illetve a vele arányos távolságoknak feltüntetésével érzékeltethetjük. Az ábrákban feltüntettem továbbá az egyes síkok jellemző irányaiba eső lineáris atomsűrűséget is, amely lényegében a kérdéses síkban levő atomeloszlás szimmetriájára ad felvilágosítást.



2. ábra. Atomeloszlás a gyémántkristály 100 indexű síkjaiban

Az (100) síkban, a 2. ábra alapján

$$\sigma_{(100)} = \frac{1}{\frac{a^2}{2}} = \frac{2}{3.56^2} = 0.1578 \text{ atom/Å}^2 \qquad (1)$$

atomsűrűséget találunk, melyre a

$$\sigma_1 = \frac{1}{a} = \frac{1}{3.56} = 0.2809 \text{ atom/Å} \qquad (2)$$

és a

$$\sigma_2 = \frac{1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3.56\sqrt{2}} = 0.3972 \text{ atom/Å} \qquad (3)$$

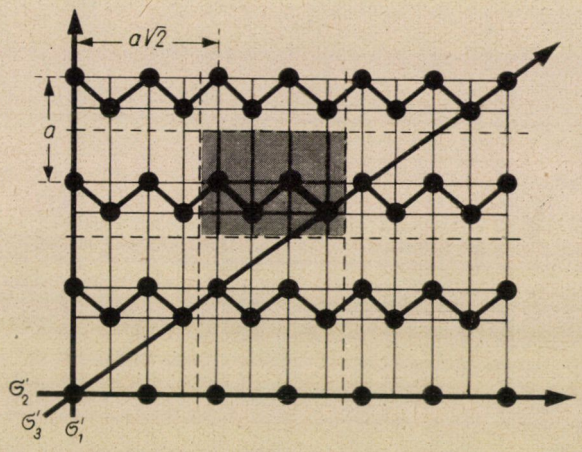
lineáris atomsűrűségek jellemzők. A σ_1 irányban a C—C távolság $a = 3{,}56$ Å,

a σ_2 irányban pedig $a\sqrt{2}/2 = 2{,}5173$ Å , vagyis nagyobb a gyémántra jellemző 1,542 Å vegyértéktávolságnál.

A (110) síkban a 3. ábra alapján

$$\sigma_{(110)} = \frac{4}{a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{4}{3.56^2\sqrt{2}} = 0.2232 \text{ atom/Å}^2 \tag{4}$$

atomsűrűség van ugyan, amely nagyobb, mint az előző esetben, az atomsorok elhelyezkedése azonban réteges szimmetriát mutat.



3. ábra. Atomeloszlás a gyémántkristály 110 indexű síkjaiban

A lineáris atomsűrűségekre

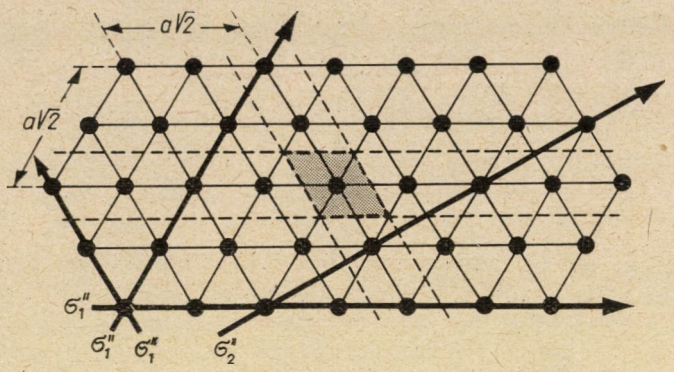
$$\sigma_1' = \frac{1}{a} = \frac{1}{3.56} = 0.2809 \text{ atom/Å} \tag{5}$$

$$\sigma_2' = \frac{1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3.56\sqrt{2}} = 0.3972 \text{ atom/Å} \tag{6}$$

és végül

$$\sigma_3' = \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3.56\sqrt{3}} = 0.3243 \text{ atom/Å} \tag{7}$$

értékek adódnak. A C—C távolságok e síkban, a σ_1' irányban $a = 3{,}56$ Å, a σ_2' irányban $a\sqrt{2}/2 = 2{,}5173$ Å, a σ_3' irányban pedig $a\sqrt{3}/4 = 1{,}542$ Å, illetve $3a\sqrt{3}/4 = 4{,}6246$ Å. A síkban nagyon egyenlőtlen tehát az atomeloszlás, és bár az atomsűrűség viszonylag nagy, a kristály e sík mentén nem hasad.



4. ábra. Atomeloszlás a gyémántkristály 111 indexű síkjaiban

Az (111) síkban, a 4. ábra szerint

$$\sigma_{(111)} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{4}{3.56^2\sqrt{3}} = 0.1822 \text{ atom/Å}^2 \qquad (8)$$

atomsűrűséget találunk, valamint

$$\sigma_1'' = \frac{1}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{3.56\sqrt{2}} = 0.3972 \text{ atom/Å} \qquad (9)$$

és

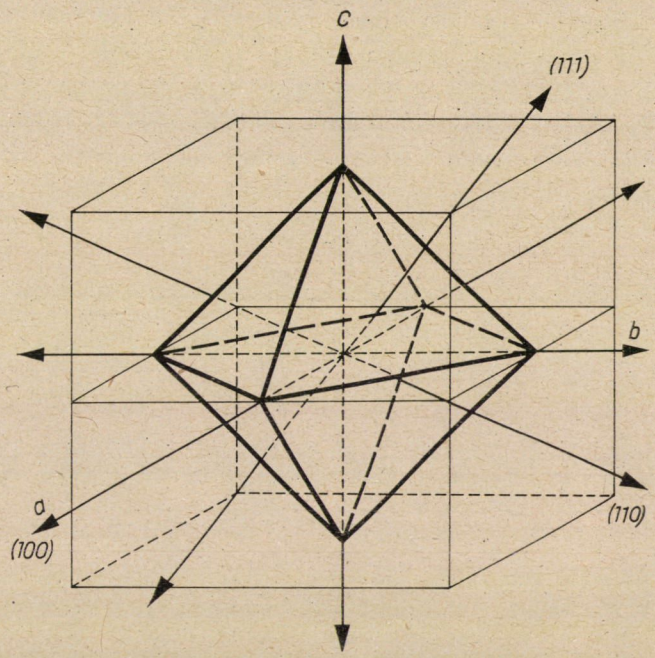
$$\sigma_2'' = \frac{1}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{2}{3.56\sqrt{6}} = 0.2293 \text{ atom/Å} \qquad (10)$$

ineáris atomsűrűségeket. A σ_1'' irányban $a\sqrt{2}/2 = 2{,}5173$ Å, a σ_2'' irányban $a\sqrt{6}/2 = 4{,}261$ Å értékek adódnak a C—C távolságokra.

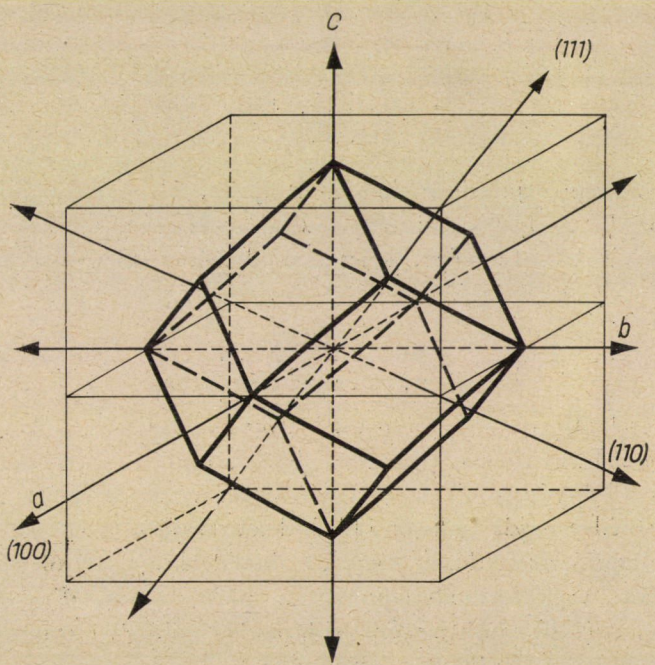
A fentiek alapján megállapítható, hogy a gyémántkristály hasadása elsősorban a 0,1822 atomsűrűségű oktaédersíkban várható, majd másodsorban kerülhet sor a 0,1578 atomsűrűségű kockasíkban a hasadásra. A rombtizenkettes síkokban hasadás nem következik be.

Az (100), (110) és (111) *indexű kristálysíkok és a lehetséges fúrási irányok által bezárt szögek nagyságának meghatározása*

A lehetséges fúrási irányok és a kocka, a rombtizenkettes, illetve az oktaéder kristályformák határoló lapjainak síkjaival bezárt szögek nagyságát az 5. és 6. ábrák alapján, pontosabban ezen ábrák helyesen választott síkmet-



5. ábra. Kockába szerkesztett oktaéder és a gyémántkristály lehetséges fúrási irányainak geometriai helyzete



6. ábra. Kockába szerkesztett rombtizenkettes és a gyémántkristály lehetséges fúrási irányainak geometriai helyzete

szeteiből lehet megállapítani. Az ábrák, valamint a síkmetszetek méretezése az elemi kockarács $a = 3{,}56$ Å élhosszúságára, mint egyetlen szükséges adatra, vonatkoztatva történt. A rombtizenkettes és az oktaéder kristályformák a kockarács megfelelő metszősíkokkal történő hasításával alakultak ki. A metszősíkok alapján kiszámított szögértékek nagyságait a 2. táblázatban foglaltam össze.

2. táblázat

A lehetséges fúrási irányok és a kristálylapok síkjai által bezárt szögek nagysága

Kristályforma	Tengely, lap jele	A fúrási irány merőleges		
		az 100	110	111 lapra
Kristálytani irányok	a_1 tengely	0°	45°	54°44′
	a_2 „	90°	45°	54°44′
	a_3 „	90°	90°	54°44′
Kocka	(100) és (100)	90°	45°	35°16′
	(010) és (010)	0°	45°	35°16′
	(001) és (001)	0°	0°	35°16′
Rombtizenkettes	(101) és (101)	45°	31°29′	54°44′
	(10$\bar{1}$) és ($\bar{1}$01)	45°	31°29′	0°
	(110) és ($\bar{1}$10)	45°	90°	54°44′
	(1$\bar{1}$0) és ($\bar{1}$10)	45°	0°	0°
	(011) és (011)	0°	31°29′	54°44′
	(01$\bar{1}$) és (011)	0°	31°29′	0°
Oktaéder	(111) és ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$)	35°16′	54°44′	90°
	($\bar{1}$11) és (1$\bar{1}\bar{1}$)	35°16′	0°	19°28′
	($\bar{1}\bar{1}$1) és (11$\bar{1}$)	35°16′	54°44′	19°28′
	(1$\bar{1}$1) és ($\bar{1}$1$\bar{1}$)	35°16′	0°	19°28′

A táblázat megadja mindhárom kristálytípus valamennyi lapjának síkja, illetve a három lehetséges fúrási iránya által bezárt szög értékét.

A számítások helyességét kristálymodelleken történő szögmérésekkel ellenőriztem.

A gyémántkristály kopásának vagy törésének valószínűsége az egyes fúrási irányokban

Az egyes laptípusokon mutatkozó atomeloszlások és a 2. táblázat adatainak ismeretében kvalitatíve már meg lehet állapítani a gyémántkő legmegfelelőbb fúrási irányát, melyet úgy célszerű választani, hogy az merőleges legyen az oktaéder egyik, pl. az 111 indexű lapján.

A megállapítás azon alapul, hogy az oktaéderlapon merőleges fúrási irány egyetlen kocka-, vagy oktaéderlappal sem párhuzamos. Mint az előző fejezetben láttuk, az (110) rombtizenkettes lapokkal való párhuzamosság nem hat zavaróan, mivel ezen síkokban a gyémántkristály hasadásával gyakorlatilag nem kell számolnunk.

W. LIER is erre a megállapításra jut (1), sőt kísérleti eredményeket is közöl, melyek szerint, ha 100 súlyegységnek tekintjük az (110) síkra merőlegesen fúrt gyémántkőben lehúzott huzalmennyiséget, akkor ehhez viszonyítva az 100, illetve 111 síkra merőlegesen fúrt, egyébként azonos kiképzésű, kőben 108, illetve 126,5 súlyegységnyi huzal húzható le.

Hasonló következtetésre jut továbbá E. C. WARWICK (6) is, aki azonban hozzáteszi, hogy bármilyen szempontok alapján is van kialakítva a furat iránya és bármennyire figyelembe is vannak véve a kő élettartamának megnövelésére irányuló egyéb előírások, a kövek változatlanul kopnak.

Kvalitatív jellegű megállapításunk tehát még nem teljes válasz a felvetett kérdésre. Meg kell keresnünk azt a módszert, amelynek segítségével számszerűen is ki tudjuk fejezni az egyes fúrási irányokban a kopás, vagy törés bekövetkezésének valószínűségét.

Számítási módszeremben az alábbi feltevésekre támaszkodtam:

a) 100%-nak tekinthetjük annak valószínűségét, hogy hasadás következik be akkor, amikor az igénybevétel (fúrás) iránya egybeesik (vagyis 0°-os szöget zár be) a kocka-, vagy oktaéderlapok, mint számbajöhető hasadási síkok, térirányával.

E feltevés értelmében, ha a szög 0°-nál nagyobb, a valószínűség értéke arányosan csökken. A 2. táblázatban előforduló szögek nagyságaira vonatkoztatott valószínűségek számértékei tehát, a feltétel értelmében, a 3. táblázatban összefoglalt adatok szerint alakulnak.

3. táblázat

A fúrási irány és a kristálylapok síkjával bezárt szögeknek megfelelő, százalékos valószínűségek

Szög nagysága, fok	A hasadás valószínűsége, %
0°	100°
19°28′ = 19,467°	78,37
31°29′ = 31,483°	65,02
35°16′ = 35,267°	60,81
45°	50
54°44′ = 54,733°	38,19
90°	0

b) 0%-nak tekintjük az (110) lapok szerinti hasadás valószínűségét.

c) A 3. táblázat szerinti valószínűségeket a kérdéses síkra jellemző atomsűrűség arányosan befolyásolja. Növeli, ha az atomsűrűség értéke viszonylag magas, csökkenti, ha az atomsűrűség értéke viszonylag kicsi. Az atomsűrűséget oly módon vettem figyelembe, hogy a kérdéses sík és a fúrási irány által bezárt szögek alapján megbecsült %-os valószínűséget megszoroztam az e síkokra jellemző atomsűrűség számértékével.

d) Miután az *a)* és *c)* alatti feltevések alapján kiszámítottuk a kérdéses síkra jellemző hasadás valószínűségét, ezt összegezni kell a kérdéses kristályforma mindazon lapjaira, amelyek a fúrási iránnyal ugyanezen szöget zárják be.

e) Végül összegezni kell a kérdéses kristályforma minden egyes lapjára meghatározott valószínűségeket, adott fúrási irány esetén.

A fenti feltevések alapján az egyes fúrási irányokban a hasadás, kopás valószínűségét, a 2. és 3. táblázatok adatainak felhasználásával, a következőképpen számíthatjuk ki:

(100) laptípusra merőleges fúrási irány esetén

$$V_{100} = [(0 \times 0{,}1578 \times 2) + (100 \times 0{,}1578 \times 4)]_{100} + [(60{,}81 \times 0{,}1822 \times 8)]_{111} = \\ = 0 + 63{,}12 + 88{,}64 = 151{,}76 \qquad (11)$$

(110) laptípusra merőleges fúrási irány esetén

$$V_{110} = [(50 \times 0{,}1578 \times 4) + (100 \times 0{,}1578 \times 2)]_{100} + [(38{,}19 \times 0{,}1822 \times 4) + \\ + (100 \times 0{,}1822 \times 4)]_{111} = 31{,}56 + 31{,}56 + 27{,}83 + 72{,}88 = 163{,}83 \qquad (12)$$

(111) laptípusra merőleges fúrási irány esetén

$$V_{111} = [(60{,}81 \times 0{,}1578 \times 6)]_{100} + [(0 \times 0{,}1822 \times 2) + (78{,}37 \times 0{,}1822 \times 6)]_{111} = \\ = 57{,}57 + 0 + 85{,}68 = 143{,}25 \qquad (13)$$

A hasadások valószínűségei tehát a

$$V_{111} : V_{100} : V_{110} = 143{,}25 : 151{,}76 : 163{,}83 \qquad (14)$$

arányt követik, vagyis a kő hasadásának, illetve kopásának valószínűsége akkor lesz a legnagyobb, ha a kő furata merőleges az (110) lapok síkjára, legkisebb pedig akkor lesz, ha a furat az (111) síkokra merőleges.

A (14) arány alapján tehát igazolni lehet W. LIERnek és mindazoknak véleményét, akik a gyémánt oktaéderlapjaira merőleges fúrási irányt javasolták.

A valószínűségek számértékeiben mutatkozó, viszonylag kis különbségek viszont közvetve igazolják E. C. WARWICK megállapításait, nevezetesen, hogy a fúrási irány kristályszerkezeti sajátosságok alapján történő kijelölése nem fog ugrásszerű változást hozni a kő élettartamában.

A hasadás és a kopás valószínűségének megállapítására végzett elméleti számítások eredményét W. LIER már ismertetett kísérleti eredményeivel összehasonlítva meglepő egyezést találunk.

Mint láttuk, W. LIER mérései szerint az oktaéder, a kocka, illetve a rombtizenkettes lapokra merőlegesen fúrt húzókövekben áthúzott huzalok mennyiségeinek aránya

$$S_{111} : S_{100} : S_{110} = 126{,}5 : 108 : 100 \qquad (15)$$

súlyegység huzal.

A (14) és (15) arányok között a viszony fordított, mivel nyilvánvaló, hogy olyan kövön, amelynek nagyobb a kopása, kevesebb huzal húzható át. A (14) és (15) arányok alapján tehát, a fordított viszony figyelembevételével az alábbiakat írhatjuk fel:

$$\frac{143{,}25}{151{,}76} = 0{,}9439, \quad \text{illetve} \quad \frac{151{,}76}{163{,}83} = 0{,}9263 \tag{16}$$

és

$$\frac{100}{108} = 0{,}9259, \quad \text{illetve} \quad \frac{108}{126{,}5} = 0{,}8537 \tag{17}$$

Az elméleti és kísérleti értékek közötti viszonyok különbségei:

$$\begin{array}{r} 0{,}9439 \\ -\ 0{,}9259 \\ \hline 0.0180 \end{array} \quad \text{illetve} \quad \begin{array}{r} 0{,}9263 \\ -\ 0.8537 \\ \hline 0{,}0726 \end{array} \tag{18}$$

vagyis a számít tt értékre vonatkoztatott százalékos eltérés:

$$\frac{0{,}0180 \times 100}{0{,}9439} = 1{,}907\,\% \quad \text{illetve} \quad \frac{0{,}0726 \times 100}{0{,}9263} = 7{,}84\,\%. \tag{19}$$

Az eredmények viszonyszámainak egyezése azért különösen érdekes, mivel a kövek élettartamának a kövön áthúzott huzalmennyiség mérésével történő, megbecsülése csak igen nehezen biztosítható kísérleti körülmények közepette történhetik. Ezen követelmények közül csak néhányat említve: biztosítani kell

a) pontosan azonos karátsúlyú és minőségű, azonos tökéletességgel befoglalt köveket, melyeknek csak a furat-iránya eltérő,

b) pontosan azonos méretű, tisztasági fokú és minőségű huzalt az áthúzáshoz,

c) a huzalhúzás körülményeinek (gép, húzási sebesség, kenés, stb.) tökéletes egyöntetűségét,

d) hogy a kövek azonos karátsúlycsökkenésig legyenek koptatva, mivel a kő töréséig tartó vizsgálat téves értékelésre ad lehetőséget,

e) hogy mindezeket a méréseket többször is el lehessen végezni.

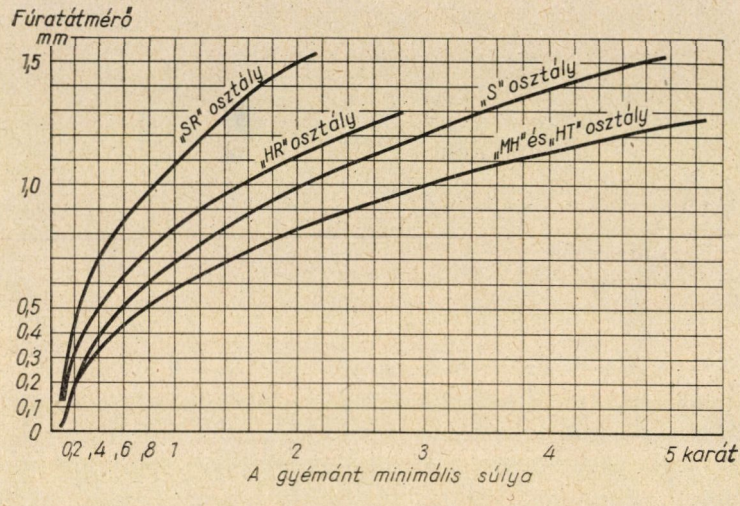
A követelmények jellegéből következik, hogy ezen adatok megállapítása termelőüzemben, sőt kísérleti üzemben is, igen nehéz és akkor is legfeljebb tájékoztató jellegű lehet.

IRODALOM

1. Lier, W.: Draht-Welt, 1959, p. 164—165
2. British Standard 1168 : 1949
3. British Standard 1393 : 1947
4. Koch S., Sztrókay K. I. Ásványtan. Tankönyvkiadó V. Budapest, 1955
5. Hodgman, C. D.: Handbook of Chem. and Phys. Chem. Rubber Publ. Co. Cleveland, 1954
6. Warwick, E. C.: The Wire Industry, 1960. p. 177—179
7. Geleji S.: Színesfémek félgyártmányainak technológiája. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952

FÜGGELÉK

Üzemi tapasztalatok alapján, legmegbízhatóbbnak azok a gyémántkövek mutatkoztak, amelyeknek nyers karátsúlya közel állt a BS 1168 : 1949 (2), és a BS 1393 : 1947 szabványokban (3) felsorolt és javasolt értékekhez. A furatátmérő és a nyersgyémánt minimális karátsúlya közti összefüggést, e szabványok alapján, a 7. ábra szemlélteti, amely feltünteti a lágy és kemény fémek húzására alkalmas, erősítés nélküli és erősített gyémántkövek méretezésére jellemző adatokat.



7. ábra. Erősített és erősítetlen gyémánt húzókövek fúratátmérője a karátsúly függvényében

„S" osztály: erősítetlen kő, lágy fémekhez
„MH" osztály: erősítetlen kő, közepesen kemény fémekhez
„HT" osztály: erősítetlen kő, kemény fémekhez
„SR" osztály: erősített kő, lágy fémekhez
„HR" osztály: erősített kő, kemény fémekhez

Ugyancsak az idézett szabványok alapján közlöm a réz-, bronz-, ellenállás-, illetve acélhuzal húzásra alkalmas húzókövek furatának profilvázlatát is (8., 9. és 10. ábra).

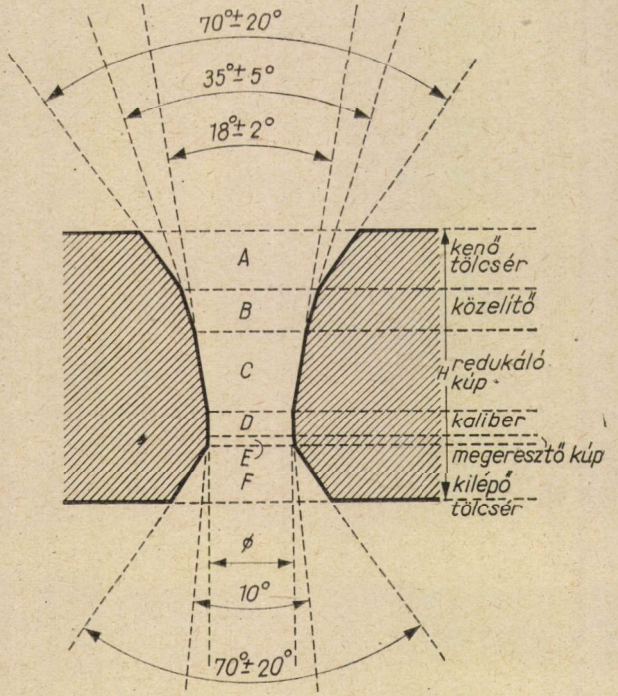
A profilok kialakításánál szembeötlő, hogy a kövön áthúzandó fém keménységének növekedésével arányosan növekszik a redukáló kúp, illetve a kaliber magassága, és csökken a közelítő szakaszban kiképzett szög nagysága. Az ilyen kiképzésű kövek alkalmazása terén még kevés tapasztalattal rendelkezünk.

Végezetül a kövek kopására, pontosabban karátsúlycsökkenésére, vonatkozóan GELEJI [7] adatai alapján foglaltam össze tájékoztató jellegű számértékeket a 4. táblázatban, illetve a kő kihasználhatóságára jellemző adatokat az 5. táblázatban.

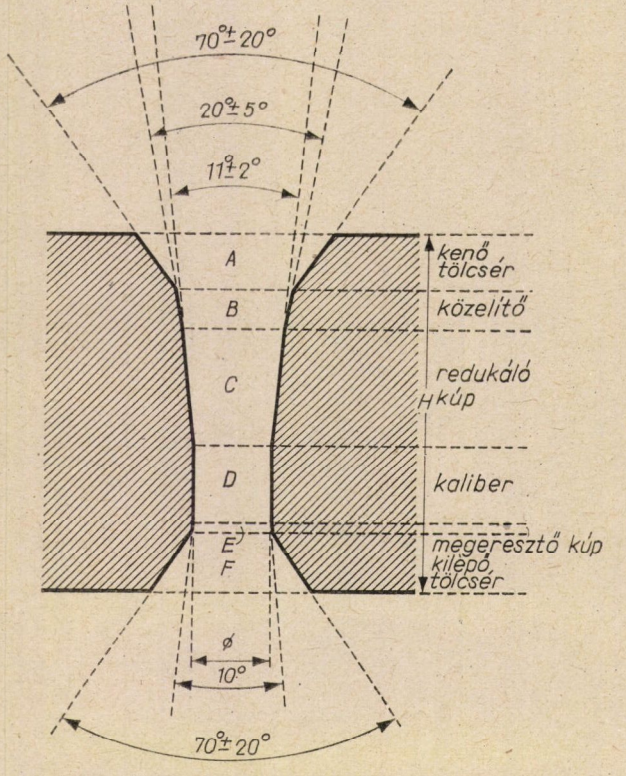
4. táblázat

Gyémántkövek karátelhasználódása a méret függvényében

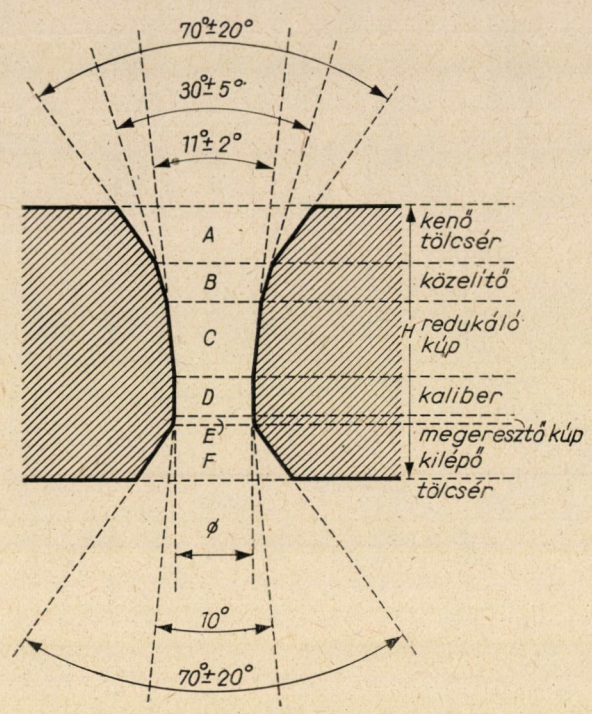
Furatátmérő, mm	100 kg rézhuzal lehúzása által előidézett karátelhasználódás
0,05 — 0,15	0,012
0,15 — 0,50	0,010
0,50 — 1,00	0,004
1,00 — 1,40	0,002



8. ábra. Réz-huzal húzására alkalmas gyémánt húzókő profilja



9. ábra. Bronz-huzal húzására alkalmas gyémánt húzókő profilja



10. ábra. Ellenállás- és acél-huzalok húzására alkalmas gyémánt húzókő profilja

A furatátmérő csökkenésével arányosan növekedő karátelhasználás oka részben a huzal keménységének növekedésével, részben a viszonylagosan növekedő súrlódási felülettel értelmezhető.

5. táblázat

Gyémánt húzókövek kihasználhatósága

Furatátmérő, mm	A tűrés kihasználásáig áthúzott rézhuzal súlya, kg.
0,05	300
0,1	1150
0,2	1400
0,9	24000
1,4	55000

A furatátmérő növekedésével arányosan növekedő huzalmennyiség lehúzhatóságát a már említett okok teszik lehetővé.

ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozat — a gyémánt húzókövek élettartamát befolyásoló egyéb körülmények ismertetésén túlmenően —, a gyémántkristály legkedvezőbb fúrási irányának megállapításával foglalkozik.

A gyémánt kristálytani sajátosságainak figyelembevételével eljárást dolgoz ki az egyes kristálytani irányokban bekövetkező kopás, illetve hasadás valószínűségének számszerű meghatározására.

A kísérleti adatokkal egybevetett és azokkal jó egyezést mutató eredmények alapján megállapítható, hogy a dróthúzó gyémántkövek fúrási iránya akkor a legkedvezőbb a kő élettartamára, ha merőleges egy (111) síkra, az egyéb számbajöhető fúrási irányokban bekövetkező kopások, hasadások valószínűségeinek nagyságrendje sem különbözik azonban ettől az értéktől.

A KINETIKUS GOLYÓSCSAPÁGYREZGÉS ALAPJELENSÉGEI*

SZŐKE BÉLA

A szakirodalom főként a gyártási hibákból származó kényszerrezgésekkel [1] és a rugalmas deformációkból eredő rugalmas rezgésekkel [2, 3, 4] foglalkozik, általában lassú fordulatok feltételezésével.

Az alábbiakban azt vizsgáljuk, hogy keletkezhetnek-e rezgések pusztán a gördülőcsapágy kinematikai szerkezetéből kifolyólag akkor is, ha az alkatrészeket geometriailag tökéletesnek tekintjük és a deformációt nem vesszük számításba.

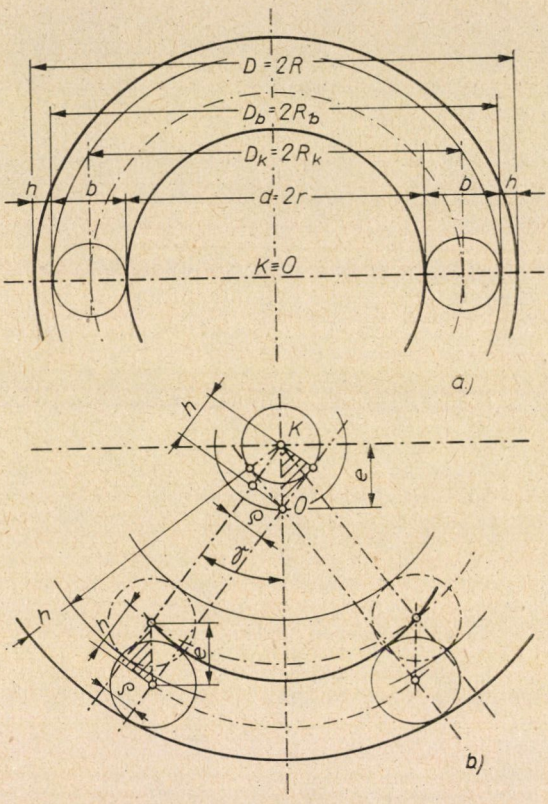
Két fő esetet kell vizsgálnunk: a hézagmentes és a hézaggal bíró csapágyak viselkedését.

A gyakrabban előforduló fogalmak jelei betű rendben
(1. és 2. ábra)

a = $\frac{P}{m}$ gyorsulás
b = a bolygómozgást végző gördülőtest (golyó, görgő) átmérője
c = $e\,\omega_k^2$ a keringő mozgás centrifugális gyorsulása
C = $me\,\omega_k^2$ a keringő mozgás centrifugális ereje
$\vec{c}$ = $\vec{u} + \vec{w}$ abszolút sebesség, mint a szállító és relatív sebesség vektoriális összege
C_{HB} = H pont abszolút sebessége B pont körül
d = $2r$ a belső gördülőpálya átmérője
D = $2R$ a külső gördülőpálya átmérője
D_k = $2R_k = d + b$ a golyókoszorú (kosár) középátmérője
D_b = $2R_b = D_k + b = d + 2b$ a gördülő részek burkoló körének átmérője
D_T = $2R_T$ az átbillenés idejét meghatározó *Thales*-kör átmérője
e = $\frac{h}{\cos\gamma}$ a külső gördülőpálya K középpontjának és e pályához tolt golyókoszorú O középpontjának mindig mérhető távolsága (excentricitása)
$\vec{E}$ = $\vec{P} + \vec{C}$ eredő erő
F = a csapágyra ható külső erő (pl. szíjhúzás)
g = nehézségi gyorsulás
G = mg a forgó m tömeg súlya
h = $R - R_b$ csapágyhézag sugárirányban, mely páratlan golyószámnál közvetlenül nem mérhető
i = $\frac{E}{m}$ eredő gyorsulás

* Szerzőnek ez a tanulmánya „Grunderscheinung der Kugellagerschwingung" címmel a Maschinenbautechnik 1961. decemberi számában jelent meg.

m = az O tengelyközéppontra kiegyensúlyozott tengellyel együtt forgó tömeg
n = az O középpont körül forgó tengely percenkénti fordulatszáma
n_k = a golyókosár percenkénti fordulatszáma
p = $\overline{KS} = \frac{a}{\omega_k^2}$ az S pólus (erőközéppont) távolsága a külső gördülőpálya K középpontjától
$\vec{P}$ = $\vec{G} + \vec{F}$ az önsúly és a külső erő eredője
r = a belső gördülőpálya sugara
R = a külső gördülőpálya sugara
R_T = a *Thales-kör* sugara



1. ábra. Jelölések. *a)* Golyókoszorú központi helyzetben; *b)* Golyókoszorú középponton kívül

u = $y \cos \alpha$ „esési magasság" a *Thales*-körben
u = szállító (kerületi) sebesség
u_{HO} = H pont kerületi sebessége O pont körül
w = relatív sebesség
z = a görgők (golyók) száma
x = $e - h$ a tengelyrezgés radiális amplitudója
y = a tengelyrezgés tangenciális amplitudója; a lejtő hossza a *Thales*-körben
α_0 = a billenési pályát helyettesítő lejtőnek az eredő irányával bezárt hajlásszöge mozdulatlan támaszpont (nullfordulat esetén)
α = ugyanaz mozgó támaszpontnál
β_0 = $90° - \alpha_0$
γ = $\frac{180°}{z}$ a golyók fél osztási szöge

ε = momentán differencia. Billenés közben B golyóközéppont távolsága K külső gyűrű középponttól $KB = r + b/2 + \varepsilon$

ϱ = $h \operatorname{tg} \gamma = e \sin \gamma$ az alapkör sugara. Az alapkört a gördülésben résztvevő golyók vezérsugarai, mint érintők burkolják.

φ = $\alpha_0 - \alpha$ a gördülő elem elfordulási szöge a billenés tartama alatt

ψ = a billenés kezdetének fázis szöge: $\sin \psi = \frac{\varrho}{p}$

ω = $\frac{n\pi}{30}$ a tengely szögsebessége

ω_k = $\omega \frac{d}{D+d} = \omega \frac{d}{2D_k}$ a golyókosár szögsebessége

I. A gördülőcsapágy mint bolygómű

Az 1a. ábra a hézaggal bíró csapágyat abban a helyzetben tünteti fel, amikor a tengely O középpontja a külső vezetőgyűrű K középpontjával egybeesik.

Az 1b. ábrán azt a helyzetet látjuk, amikor a deformációmentesnek képzelt csapágyban két golyó vagy görgő érintkezik a külső futópályával, vagyis az O tengelyközép legtávolabb került a K középponttól.

A gördülőcsapágyat olyan bolygóműnek képzelhetjük, melynél az 1. ábra jelöléseivel a napkerék átmérője $d = 2r$, a bolygókerék átmérője b, és a koszorúkerék átmérője $D = 2R$.

Annyival bonyolultabb azonban a helyzet, mint a bolygóműnél, hogy esetünkben a csapágyhézag miatt $OK \neq 0$, sőt értéke a tengely forgása közben változik.

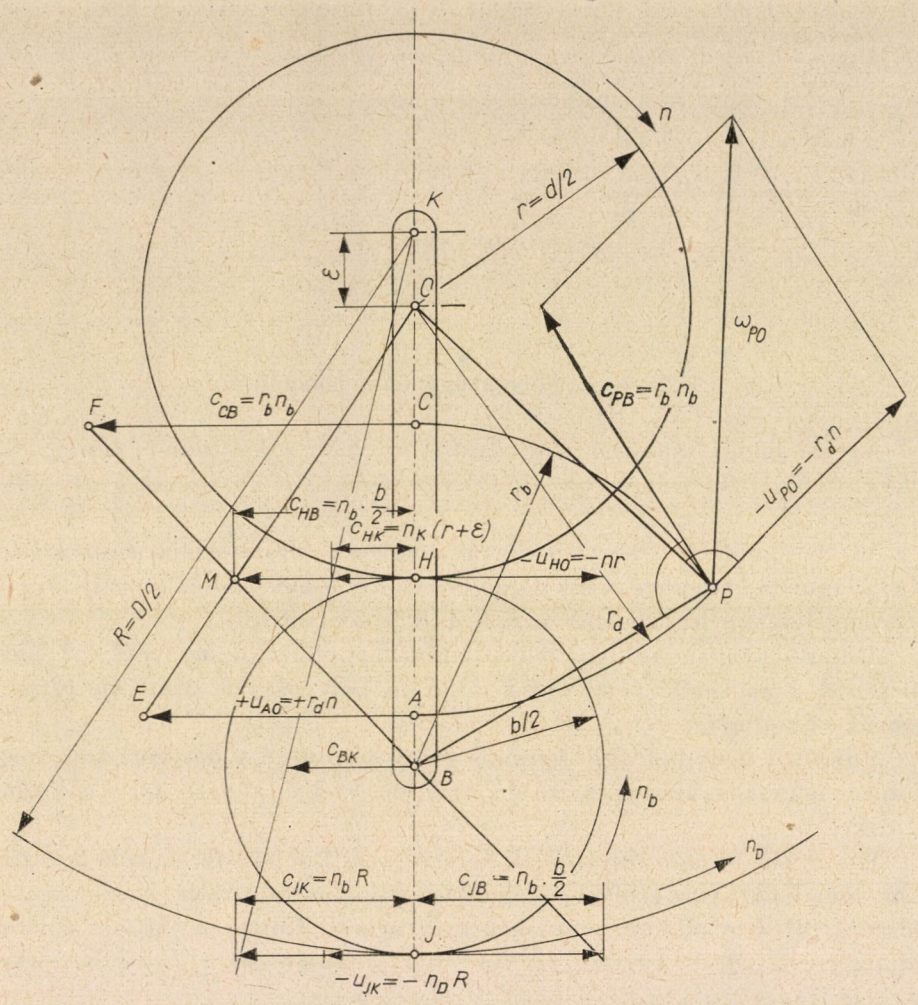
Ha az OK érték változásának befolyását is kifejezésre akarjuk juttatni, akkor sem KUTZBACH grafikus megoldása [7], sem SCHWAMP visszaforgatási módszere [6] nem alkalmazható nehézség nélkül. Könnyen jutunk azonban eredményre BALOGH ARTÚR számító eljárásának [8, 9], [19] kibővítésével, melynek lényegét a következőkben foglaljuk össze:

Képzeljük el, hogy az O középpont körül ω szögsebességgel forgó síkra írja le pályáját a B középpont körül ω_b szögsebességgel forgó sík valamely P pontja. A 2. ábra jelöléseivel a B körül forgó P pont abszolút sebessége

$$c_{PB} = r_b \omega_b = r_b n_b \frac{\pi}{30} .$$

A $\pi/30$ állandó tényező számításainkban és a vektorok jelölésénél elhagyható. Egy bizonyos időpontban az O körül forgó síkon a P pont szállító sebessége

$$u_{PO} = r\omega = rn \frac{\pi}{30} ,$$



2. ábra. Gördülőcsapágy, mint bolygómű. A hézaggal bíró csapágyelemek fordulatszámainak meghatározása Balogh Arthur vektoros módszerével

az O körül forgó sík megfigyelője pedig e síkra írt pálya P pontjának

$$\vec{w}_{PO} = \vec{c}_{PB} - \vec{u}_{PO}$$

relatív sebességét fogja észlelni.

Az OB egyenes $OA = r_d$ és $BC = r_b$ helyein is berajzolhatjuk az itt jelentkező $AE = +u_{AO} = r_d n$ és $CF = +c_{CB} = r_b n_b$ sebességvektorokat. OE egyenes pontjainak az OB középvonaltól való távolsága a szállító sebességnek az r_d sugárral arányos változását, a BF egyenes pontjai pedig az abszolút sebes-

ségnek r_b sugárral arányos változását tüntetik fel. E két egyenes M metszéspontjához egyforma vektorok tartoznak, vagyis

$$HM = + c_{HB} = + u_{HO},$$

tehát ezen a helyen a relatív sebesség

$$w = c - u = c - c = 0. \tag{1}$$

vagyis tiszta gördülés van.

Az egyik gördülőkör a tengellyel együtt forgó belső gördülőpálya, sugara

$$OH = r,$$

a másik gördülőkör a bolygó mozgást végző gördülőtest, sugara

$$BH = b/2.$$

Vegyük fel, hogy a K középpontú D átmérőjű

$$KJ = R$$

sugarú koszorúkeréknek a fordulatszáma n_D, a bolygókeréknek pedig K pont körül KB kar által n_k fordulatszámú keringő mozgást is adunk.

Ha nincs csapágyhézag, akkor $K = 0$ és a kar hossza

$$KB = r + b/2,$$

ha hézag is van, akkor KB kar forgás közben változó, amit ε változó tag fejez ki, vagyis

$$KB = r + b/2 + \varepsilon.$$

A sebességvektorokat $\pi/30$ elhagyásával csupán a fordulatszám és a sugár szorzatával jelölve, fejezzük ki (1) összefüggés alapján, hogy r és $b/2$ sugarú körök H pontjában gördülés van.

A görgő H pontjának kerületi sebessége B pont körül történő forgása következtében

$$c_{HB} = - n_b \frac{b}{2},$$

továbbá az egész görgőnek K körül történő keringő mozgása folytán H pontnak keringő kerületi sebessége is van

$$c_{BK} = c_{HK} = n_k \left(r + \frac{b}{2} + \varepsilon \right),$$

Az O pont körül forgó sík H pontjának szállító sebessége

$$u_{HO} = nr.$$

A gördülést kifejező

$$\Sigma c = u$$

összefüggés értelmében

$$-n_b \frac{b}{2} + n_k\left(\varepsilon + r + \frac{b}{2}\right) = nr. \tag{2}$$

A görgő J pontjának B pont körüli forgásából származó sebesség vektora

$$c_{JB} = -c_{HB} = +n_b \frac{b}{2}$$

és K pont körüli forgásából származó sebessége

$$c_{BK} = c_{JK} = n_k\left(R - \frac{b}{2}\right).$$

A K középpont körül n_D fordulatszámmal forgó R sugarú koszorúkerék J pontjának szállító sebessége

$$u_{JK} = n_D R$$

és a negatív előjelű szállító sebesség most is megegyezik $c_{JK} + c_{JB}$ vektoréval, tehát J pontban a gördülés feltétele

$$c_{JK} + c_{JB} = -u_{JK},$$

azaz

$$n_k\left(R - \frac{b}{2}\right) + n_D R = -n_b \frac{b}{2}, \tag{3}$$

A (2) és (3) egyenletekből $n_b \frac{b}{2}$ kiküszöbölése után a kar (kosár) fordulatszáma felírható

$$n_{kD} = \frac{nr - n_D R}{R + r + \varepsilon}. \tag{4}$$

Ha a külső gyűrű áll, akkor $n_D = 0$ és

$$n_{k\varepsilon} = \frac{nr}{R + r + \varepsilon}. \tag{4a}$$

Miután ε kis érték $(R + r)$ mellett, azért e helyett az egzakt érték helyett

a következő egyszerűbb kifejezést használjuk, ami arra az esetre érvényes, mikor a külső gyűrű áll és hézag nincs, ekkor

$$n_k = \frac{nr}{R+r} = n\frac{d}{D+d}. \tag{4b}$$

A (2) és (3) egyenletekből n_k kiküszöbölése után a tengellyel ellenkező irányban forgó görgő fordulatszáma felírható

$$-n_{gD} = \frac{2[nr(R-b/2)+n_D R(r+\varepsilon)]}{b(R+r+\varepsilon)}. \tag{5}$$

Ha a külső gyűrű áll, akkor

$$-n_{b\varepsilon} = \frac{2nr(R-b/2)}{b(R+r+\varepsilon)}. \tag{5a}$$

Ha a külső gyűrű áll és hézag nincs, akkor

$$-n_b = \frac{2nr(R-b/2)}{b(R+r)} = n\frac{d(D-b)}{b(D+d)}. \tag{5b}$$

A (4) és (5) képletcsoport azt bizonyítja, hogy hézaggal bíró gördülőcsapágyaknál a tengely állandó n fordulatszáma mellett sem a golyókoszorú, sem a golyó fordulatszáma nem maradhat állandó, ha KA távolság forgás közben változik.

II. A hézagmentes csapágy esete

Hézagmentes csapágyban a tengely O középpontja nem hagyhatja el a külső vezetőgyűrű K középpontját, érdemes azonban közelebbről megvizsgálni, hogy alakhiba nélküli jól kiegyensúlyozott hajtásnál lehet-e ilyenkor is rezgést keltő ok [14].

Egyszerűség kedvéért képzeljük el, hogy három golyó van a csapágyban. Így könnyen áttekinthető statikailag határozott terheléssel van dolgunk.

A 3a. ábrán az alsó golyó veszi fel az egész P terhelést, az itt jelentkező erő

$$B = P,$$

az A és C golyók nincsenek terhelve.

A 3b. ábrán 30°-kal elfordított helyzetben

$$B_1 = \frac{P}{\cos 30°} = \frac{2}{\sqrt{3}}P$$

és

$$C_1 = \frac{1}{2}P.$$

A 3c. ábrán 60°-kal elfordított helyzetben

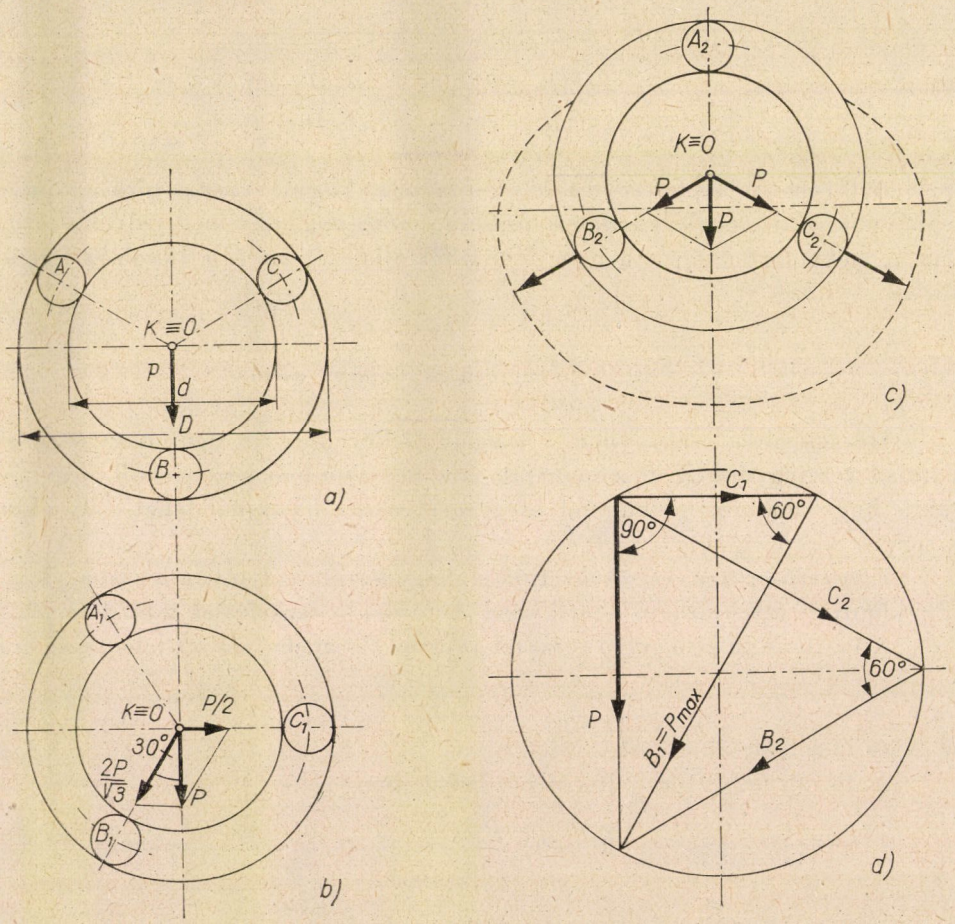
$$B_2 = C_2 = P\,.$$

A 3d. vektorábra szerint a golyókosár forgása közben B és C golyókra ható erők a P húrra 60 fokos kerületi szöggel rajzolt kör húrjaiként sorakoznak. Mivel a 30°-os elfordulásnak megfelelő B_1 erő a kör átmérője,

$$B_1 = P_{\max}\,,$$

mely 15,5%-kal nagyobb, mint a P külső terhelés.

A 3c. ábrán szaggatott vonal jelzi a körülforgó golyóra ható erő nagyságának változását; az erőket a külső gördülőkörtől mérve sugárirányban raktuk fel.



3. ábra. Lüktető erőhatások hézagmentes csapágyban. *a)* Három golyó közül B golyó az erő hatásvonalában; *b)* Helyzet 30°-kal történt elfordulás után; *c)* Helyzet 60°-kal történt elfordulás után; *d)* Vektorábra

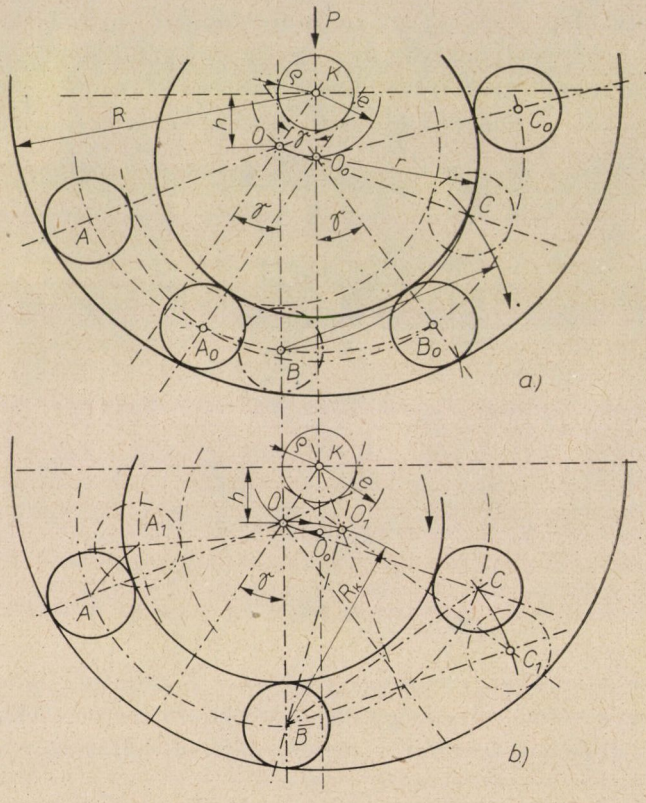
Amíg a golyókosár egyszer körülfordul, addig a három golyó mindegyike külön-külön terheli például a függőlegestől 30°-ra levő csapágyházrészt. Ha a csapágyház nem eléggé merev, ez a lüktető erő rezgésbe hozhatja. Példánkban (4b) szerint a frekvenciaszám

$$\nu = \frac{3n}{60} \cdot \frac{d}{D+d} = \frac{n}{20} \cdot \frac{d}{D+d}. \tag{6}$$

III. A csapágyhézag befolyása

1. Lassú fordulatok esete

Először az egész kis fordulatszámoknál — ahogyan mondani szokták „null-fordulatnál" — vizsgáljuk a várható jelenségeket. A 4a. ábra azt a helyzetet tünteti fel, amikor az R sugarú külső futópálya K középpontja és O_0 tengelyközéppont a P ható erő irányába esnek és az A_0 és B_0 szomszédos



4. ábra. A tengelyközép rezgési pályája; *a)* Billenés előtti helyzet; *b)* Billenés utáni helyzet

golyók $A_0O_0B_0\sphericalangle = 2\gamma$ szögének felező vonala ugyancsak O_0K egyenesbe esik.

Mivel h hézag miatt a feltételezett merev rendszerben e kettőn kívül több golyó nem érintkezhet a futópályával, a tengely forgatásakor O_0 tengelyközéppont

$$e = \frac{h}{\cos\gamma}$$

sugarú körívet írja le K körül. Amint azonban a golyókosár a golyók szögosztásának felével, γ szöggel elfordult, B_0 golyó B helyzetbe kerül az *O tengelyközépen áthaladó erő hatásvonalába* és a tengely tovább forgatásakor *átbillen* az egész golyókosár a tengellyel együtt B körül addig, amíg a szomszédos C helyzetű golyó a gördülőpályához ütközve C_1 helyzetet elfoglalja (4b. ábra). Ugyanekkor a tengely középvonala O helyzetből B körül írt $\widehat{OO_1}$ köríven mozogva O_1 helyzetbe billen. Ezután a már említett módon ismét két golyón, most már B és C golyókon folyik a gördülés, miközben a tengelyközép K körül $O_1\,O_0\,O$ körívet írja le [14, 15].

A tengelyközép a tengely egy körülfordulás alatt vizsgálatunk értelmében olyan pályán rezeg, melynek van legmélyebb és legmagasabb, továbbá az erő hatásvonalára vonatkoztatott két szélső helyzete.

Az egymásra merőleges x és y kilengések a velük kapcsolatos geometriai vonatkozással együtt az 5. ábrán láthatók,

$$x \approx e - h. \tag{7}$$

Az OO_1J derékszögű háromszögből

$$y = 2R_k \sin\beta_0$$

$$\cos\alpha_0 = \sin\beta_0 = \frac{\varrho}{BK}$$

$$BK = \sqrt{e^2 + R_k^2 + 2eR_k\cos\gamma}$$

és az e^2 másodrendű kis mennyiség elhanyagolásával

$$y = \frac{2R_k\varrho}{\sqrt{R_k^2 + 2R_kh}} = \frac{2\varrho}{\sqrt{1 + 2h/R_k}}. \tag{8}$$

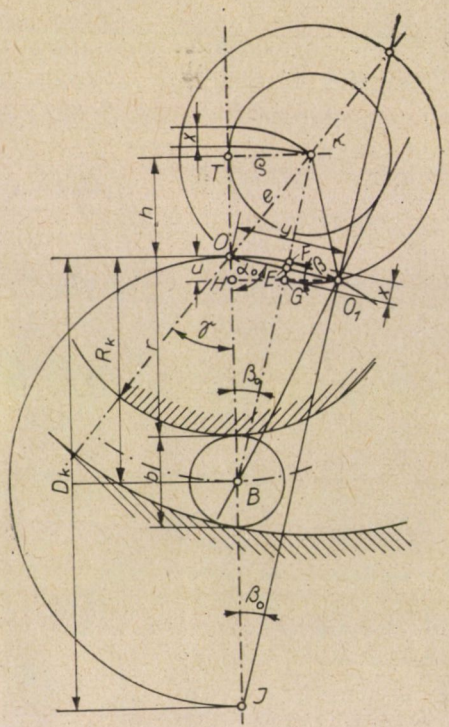
A rezgésszámot az erő irányvonalának B pontján másodpercenként áthaladó görgők száma adja meg, ami z golyószám esetén a (4a) képlet értelmében és a változónak tekintett ε helyett e excentricitással számolva

$$\nu = \frac{nz}{60}\,\frac{r}{R + r + e} \tag{9}$$

és a rezgési idő

$$T = \frac{60\,(R + r + e)}{nzr}\,. \tag{9a}$$

A dinamikus hatások megítélésére azonban nem alkalmas a rezgési idő, mivel az ütközés OFO_1 út O_1 pontjánál következik be (5. ábra), ennek a



5. ábra. Átbillenés nullfordulatnál

gyorsuló mozgással megtett útnak az ideje pedig nem egyenlő az állandó ω_k szögsebességből leszármaztatott O_1GO út idejével.

Nullfordulatnál B pontot állónak képzelve OFO_1 ívet OO_1 húrra helyettesítve, a lejtőn való mozgás értelmében felírhatjuk, hogy az ábra jelöléseivel az O_1 pontban elért sebesség

$$v_2 = \sqrt{2au}\,,$$

ahol

$$a = \frac{F + G}{m} = \frac{P}{m}$$

az a gyorsulás, amit a lengő m tömegen a G önsúly és az F ható erő P eredője létrehoz, u pedig az ütközésig megtett útnak az eredő erő irányában mért OH vetülete.

Az u út az OO_1J derékszögű háromszögből (8) tekintetbevételével

$$u = \frac{y^2}{D_k} = \frac{2\varrho^2}{R_k + 2h} \tag{10}$$

és az ütközési sebesség

$$v_2 = \sqrt{2au} = 2\varrho\sqrt{\frac{a}{R_k + 2h}}. \tag{11}$$

Az OFO_1 út rezgési ideje ugyanannyi, mint amennyi idő az a gyorsulással végzett szabadesésnél az OO_1 húrhoz tartozó *Thales*-kör $OJ = d + b = D_k$ átmérőjének befutásához szükséges.

Ugyanis

$$OO_1 = y = OJ \sin \beta_0 = D_k \sin \beta_0$$

és a lejtőn megtett út

$$y = a \sin \beta_0 \frac{t^2}{2} = D_k \sin \beta_0,$$

tehát

$$D_k = \frac{at^2}{2},$$

vagyis

$$t = \sqrt{\frac{2D_k}{a}} = \sqrt{\frac{2D_k m}{P}}. \tag{12}$$

2. *Gyorsabb fordulatok esete. Határfordulatszám*

Nagyobb fordulatszámoknál az O középpontú tengelyre G önsúly és F húzó erő (pl. szíjhúzás) P eredőjén kívül számításba kell venni a K középpont körül e sugáron forgó m tömeg C centrifugális erejét is (6a ábra), amiből az következik, hogy az A és B középpontú görgőkön forgó tengely csakis akkor billenhet át B körül, amikor B már olyan ψ szöggel hagyta el P erőt, melynél P erő nyomatéka nagyobb, mint a centrifugális erőé, vagyis

$$P \cdot \overline{BN} > C \cdot BM,$$

azaz

$$P \cdot R_k \sin \psi > C \cdot R_k \sin \gamma,$$

tehát határesetben

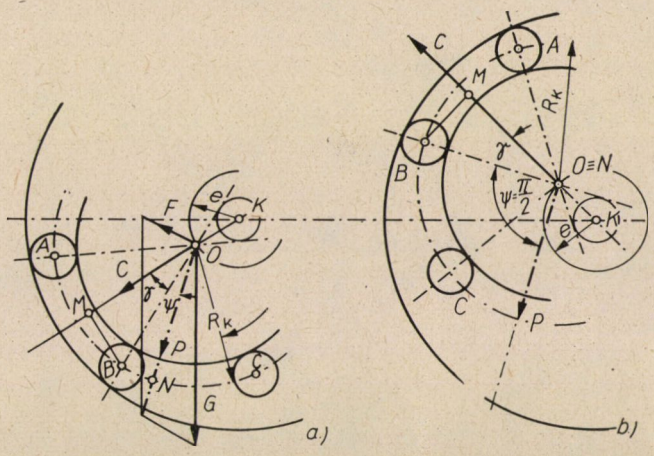
$$\sin \psi = \frac{C}{P} \sin \gamma = \frac{me\omega_k^2 \sin \gamma}{P} = \frac{mh\omega_k^2 \operatorname{tg} \gamma}{P};$$

mivel

$$\omega_k^2 = n_k^2 \left(\frac{\pi}{30}\right)^2 = \frac{n_k^2}{91} = \frac{n^2}{91}\left(\frac{d}{D+d}\right)^2,$$

$$\sin \psi = \frac{m\varrho n_k^2}{91P} = \frac{m\varrho n^2}{91P}\left(\frac{d}{D+d}\right)^2. \tag{13}$$

Amikor a fordulatszám olyan nagy, hogy a centrifugális erőnek B pont körül nagyobb a nyomatéka akkor is, amikor P erő nyomatéki karja a legnagyobb, vagyis éppen R_k (6b. ábra) és $P \perp OB$-re, akkor az átbillenés elmarad és a tengely A és B gördülő testeken forogva K körül keringő mozgást végez.



6. ábra. A rezgés és keringés esete. *a)* P erő hatásvonalától ψ szöggel történt elfordulás után $P \cdot \overline{BN} > C \cdot \overline{BM}$ forgatónyomaték és bekövetkezik a billenés; *b)* $\psi = \frac{\pi}{2}$ elfordulás után még mindig $C \cdot \overline{BM} > P \cdot \overline{BO}$ forgatónyomaték és bekövetkezik a keringés

Ezt a fordulatszámot, melynél $\sin \psi = 1$ *és a kinetikus rezgés keringésbe megy át, határfordulatszámnak nevezhetjük* és (13)-ból

$$n_h = \frac{D+d}{d} \sqrt{\frac{91P}{\varrho m}} . \tag{14}$$

Amikor csupán az önsúly hat

$$P = mg$$

és ilyenkor

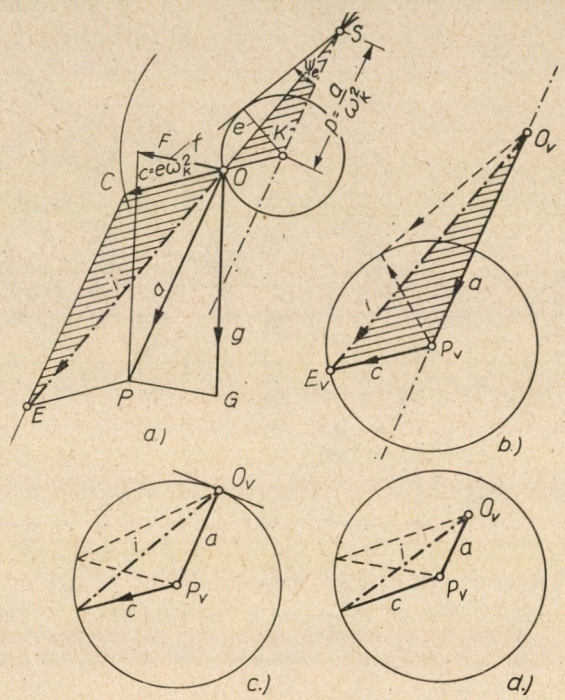
$$n_{hs} = \frac{D+d}{d} \sqrt{\frac{91g}{\varrho}} . \tag{15}$$

A határfordulatszámot létrehozó mikrogeometriai helyzetre a következő pontban még visszatérünk.

3. *A rezgés kezdő helyének szögelfordulása a fordulatszám függvényében*

A 7a. ábra a K középpont körül O tengellyel együttforgó tömegre ható gyorsulásokat tünteti fel. Az önsúlyból származó g és a külső ható erőből származó f gyorsulások eredője a, mely a centrifugális $c = e\omega_k^2$ gyorsulással

az i eredő gyorsulást adja. A 7b. vektorábrából kitűnik, hogy egy körülfordulás alatt miként változik az i gyorsulás, melynek értékeit az a vektor O_v végpont-



7. ábra. S erőközéppont (pólus) és p pólustávolság. *a)* Gyorsulások; *b)* Vektorábra $a > c$ *c)* Vektorábra $a = c$; *d)* Vektorábra $a < c$

jából a P_v végpontban rajzolt $c = e\omega_k^2$ sugarú kör megfelelő pontjaihoz vont vektorok szolgáltatják.

Miután

$$O_v P_v E_v \triangle \cong ECO\triangle$$

és

$$ECO\triangle \sim SKO\triangle ,$$

körülforgás közben az összes i eredő gyorsulások az e sugarú kör a-val párhuzamos KS átmérőjének S póluspontjába (erőközéppontjába) futnak össze.

Továbbá

$$OC : CE = OK : KS .$$

vagyis

$$e\omega_k^2 : a = e : p$$

a pólustávolság

$$p = \frac{a}{\omega_k^2} = \frac{91a}{n^2}\left(\frac{D+d}{d}\right)^2 . \qquad (16)$$

Amikor csak G önsúly hat,

$$p_s = \frac{91g}{n_k^2} = \frac{895}{n_k^2} = \frac{895}{n^2}\left(\frac{D+d}{d}\right)^2. \tag{17}$$

A (16) összefüggésből kitűnik, hogy amikor n nagyon kicsiny, vagy $a = P/m$ igen nagy értékhez közeledik, akkor a p pólustávolság határtalanul növekszik és S pólus a $\vec{P} = \vec{G} + \vec{F}$ eredő erő egyenesének irányában a végtelen felé halad.

Nullfordulatnál a P ható erő és a C centrifugális erő E eredője egy keringési fordulat alatt olyan párhuzamos sugársort ír le, mely a síknak $2e$ szélességű sávját foglalja el és tartója P erő egyenesének végtelenben fekvő S pontja.

Amikor $\infty > p > e$, akkor S póluson, mint erőközépponton átmenő E erők sugársora a síknak olyan $2\psi_e$ szöggel határolt részén helyezkedik el, melyre nézve 7a. ábra szerint (16) tekintetbevételével

$$\sin\psi_e = \frac{e}{p} = \frac{h}{\cos\gamma}\,\frac{n^2}{91a}\left(\frac{d}{D+d}\right)^2. \tag{18}$$

Abban a határesetben, amikor $p = e = h/\cos\gamma$, az i eredő gyorsulások sugársora $2\psi_e = 180°$ szögnyílásban foglal helyet (7c. ábra).

A (16) és (18) összefüggés szerint ennek az esetnek

$$n_e = \frac{D+d}{d}\sqrt{\frac{91a}{e}} = \frac{D+d}{d}\sqrt{\frac{91P\cos\gamma}{mh}} \tag{19}$$

fordulatszám felel meg.

Ha a fordulatszám tovább nagyobbodik, akkor $p < e = h/\cos\gamma$ és az eredő erő sugársora az egész 360°-os síkot elfoglalja (7d. ábra).

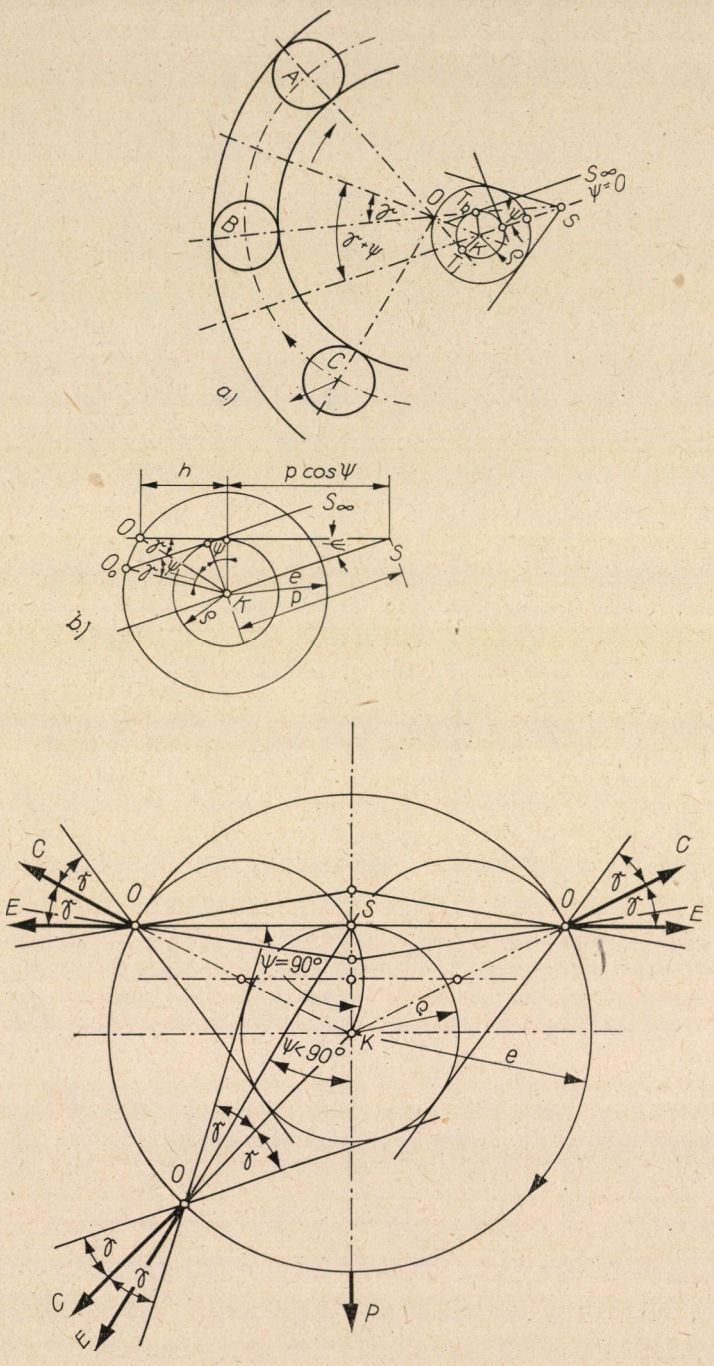
A 8a. ábra az átbillenés helyzetében tünteti fel az A, B és C görgőket, amikor OB sugár éppen az S póluson megy keresztül. Itt már végetért az O tengelyközép $KO = e$ sugarú körön történő forgása, de az AO egyenes a $\varrho = e\sin\gamma$ sugarú kört a jobboldali T_j pontban, BO pedig a baloldali T_b pontban érinti.

Átbillenés után BO érintési pontja átkerül a ϱ sugarú alapkör bal oldaláról a jobb oldalára, CO pedig a ϱ sugarú kör baloldali érintőjévé válik.

$$\varrho = e\sin\gamma = h\,\mathrm{tg}\,\gamma. \tag{20}$$

Ha most ezzel a mikrogeometriai szemlélettel a 8a. ábra KST_b derékszögű háromszögéből (16) tekintetbevételével határozzuk meg ψ szög értékét, akkor

$$\sin\psi = \frac{\varrho}{p} = \frac{\varrho}{91a}\,n^2\left(\frac{d}{D+d}\right)^2. \tag{18a}$$



8. ábra. Átbillenési helyzet véges fordulatszámnál. *a)* A kosár és pólus viszonylagos helyzete; *b)* ψ szög értelmezése; *c)* A határhelyzet mikrogeometriai képe

Az átbillenés helyét meghatározó $\psi = KSO \sphericalangle$ sinusa a fordulatszám négyzetével nő. A 8b. ábrából kitűnik, hogy az átbillenés kezdő helyének elfordulási szöge a nullfordulatnál bekövetkező átbillenés kezdő helyzetétől ugyancsak $O_0KO \sphericalangle = \psi$ szöggel egyenlő. Ugyanis O_0 pontból megvonva a KS pólustengellyel párhuzamos egyenest, a K pontból erre az $S_\infty O_0$ egyenesre és SO egyenesre emelt merőlegesek ugyancsak ψ szöget zárnak be egymással. Az O_0S_∞ egyenesnek ez a gördülési szöge az e sugarú körön is jelentkezik mint $O_0KO \sphericalangle$.

Ezek szerint *változatlan fordulatnál a C helyzetű gördülő test a külső gördülőpályának mindig ugyanazt a helyét „kalapálja", ami a pikkelyesedés forrása lehet.*

Azt a különleges esetet, amikor S pólus éppen az $e = KO$ sugarú kör kerületére esik, a (19) egyenlet foglalja magában.

További különleges eset, amikor S éppen ϱ sugarú körre esik. Ekkor $\psi = 90°$ és

$$\varrho = p = \frac{91a}{n_\xi^2} = h \operatorname{tg} \gamma,$$

tehát

$$n_\varrho = \frac{D+d}{d}\sqrt{\frac{91a}{\varrho}} = \frac{D+d}{d}\sqrt{\frac{91a}{h \operatorname{tg} \gamma}}, \tag{19a}$$

ami egyezik a (14) egyenletben kifejezett határfordulatszámmal.

A határfordulatszámot létrehozó mikrogeometriai helyzettel érdemes kissé behatóbban is foglalkozni, ezért a 8c. ábrán külön is felrajzoltuk az e és ϱ sugarú köröket a P erő hatásvonalába eső S pólussal. Az e sugarú körön keringő tengelyközép KO vezérsugara a pillanatnyi C centrifugális erő iránya; az O pontból a ϱ sugarú körhöz vont érintők pedig KO vezetősugárral a változatlan γ szöget alkotják. Az e sugarú körön való keringés közben O pontból $p = KS$ távolság folyton változó szög alatt látszik és azt a kérdést, hogy az SO irányú E eredő erő kilép-e a $\gamma \sphericalangle$ nyílásából, nyilván *abban a határhelyzetben dönthetjük el, amelyben $KOS \sphericalangle$ látószög a legnagyobb.* Ezzel a matematika történetében legrégibb szélsőérték problémának egy változatához jutottunk [18]* *Regiomontanus* (1471) fogalmazta a feladatot, hogy a vízszintes terep mely pontjából látszik a függőlegesen felfüggesztett rúd a legnagyobbnak [17]. Esetünkben pedig e sugarú körnek keressük azt a pontját, melyről SK a legnagyobb szög alatt látszik.

Nyilvánvaló, hogy SK mint húr egyforma szög alatt látszik egy-egy olyan kör kerületéről, melynek középpontja SK felező merőlegesén sorakozik. Mennél

* REGIOMONTANUSnak CHRISTIAN RODER Magisterhez írt erről a feladatáról M. CANTOR így emlékezik meg: „Unseres Wissens ist dieses die bisher noch nie beachtete erste Frage nach einem Maximum bei einem nachgriechen Schriftsteller."

kisebb a húrra írt kör sugara, annál nagyobb a látószög, tehát e körök közül annak a látószöge érvényesül, mely az e sugarú kört érinti. Az O érintési pontot az S pólusból az SK-ra emelt merőleges metszi ki, mivel $KO = e$ sugarat ebben a helyzetben felezi a pólustáv felező merőlegese.

Az ábrából nyilvánvalóan kitűnik, hogy

$$KS = p \leqq \varrho$$

esetén az SO irányú eredő erő nem léphet ki $\gamma\sphericalangle$ nyílásából.

4. A rezgés billenő szakasza

A 7. ábracsoportból látható, hogy valamely adott fordulatszámnál a tömegegységre ható centrifugális erő és külső erő i eredő gyorsulása a tengely egy körülfordulása alatt miként változik. A kirezdülés az átbillenés pillanatában a megfelelő ψ szöghöz tartozó i_0 gyorsulás hatására történik. Ez a gyorsulás a 9a. ábra SKO háromszögének $SO = q$ oldalából ω_k-val való szorzás után nyerhető.

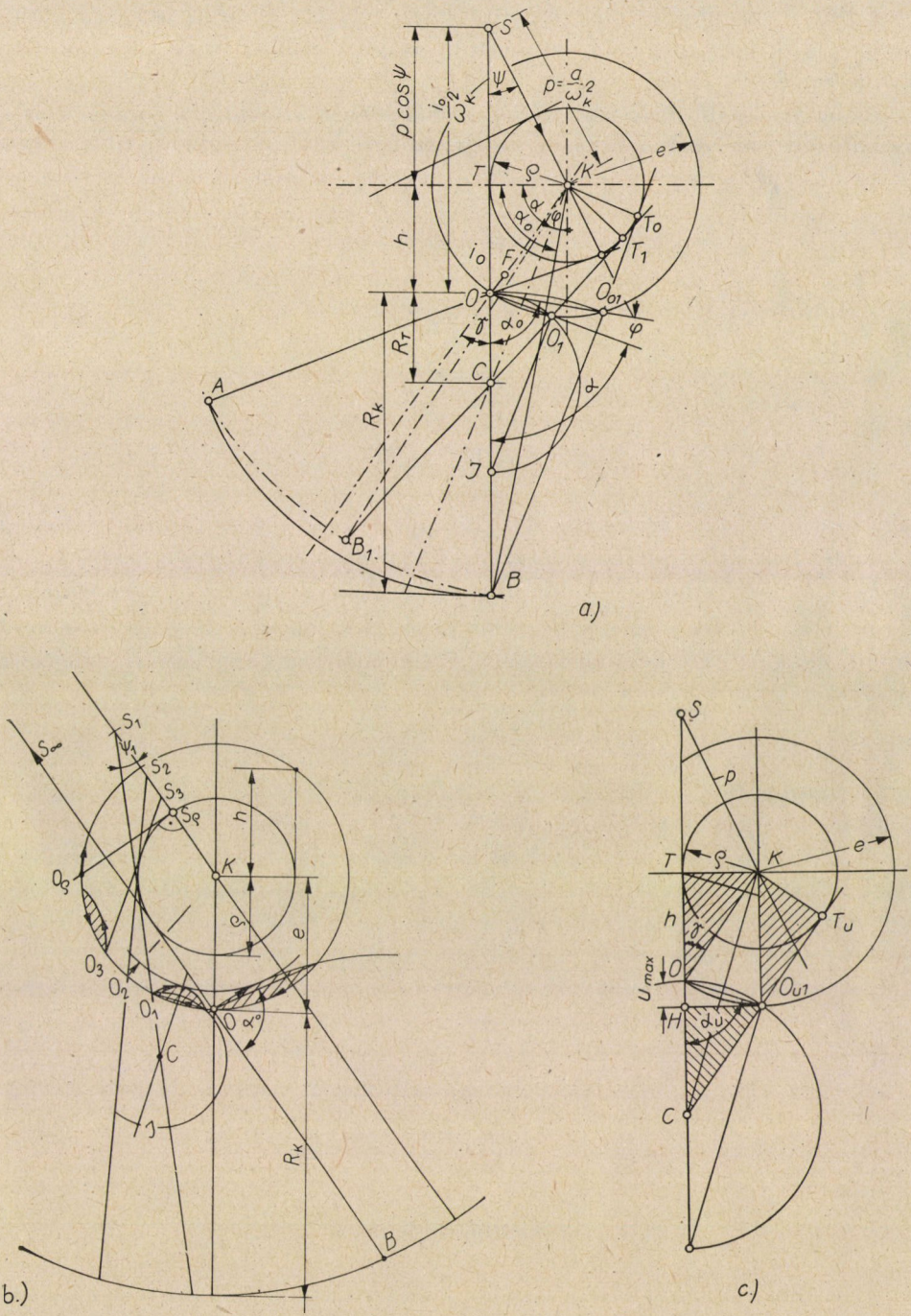
Midőn nullfordulatnál az 5. ábrán O tengelyközép billenési görbéjét OFO_1 ívként adtuk meg, B görgőt a billenés tartamára állónak képzeltük. B görgő azonban az átbillenés szakában is tovább mozog a külső gördülőpályán és a billenés tartama alatt (9a ábra) $\overset{\frown}{BB_1}$ ívet írja le. Az $\overline{OO_1}$ húr most az $i = \omega_k^2 SO$ eredő irányával α szöget zárja be, mely kisebb ennél az α_0 szögnél, ami S_∞ pólusnál az *álló helyzetű* B görgőnek felelne meg. E meredekebb lejtőnek megfelelő „esési idő" is kisebb lesz, ami most az OJ átmérőjű *Thales*-kör alapján számítható ki.

A visszabillenés alatt történő elfordulás $BKC\sphericalangle = \varphi$ szögét, illetve a helyettesítő lejtő $O_{01}OO_1\sphericalangle = \varphi$ hajlásszögét abból a feltételből határozhatjuk meg, hogy az SB irányú i gyorsulás egyenesén, mint átmérőn olyan *Thales*-kör C középpontja keresendő, melynél

$$t = \sqrt{\frac{2OJ}{i}}$$

esési idő egyenlő az ω_k szögsebességgel tovább mozgó B görgő $t = \dfrac{2\varphi}{\omega_k}$ mozgási idejével. Ugyanis $BKB_1\sphericalangle = 2BKC\sphericalangle = 2\varphi$, mivel a C ponton keresztül menő BT és B_1T_1 egyenesek ugyanannak a ϱ sugarú körnek az érintői. A két egyenlőség összevetéséből felírható, hogy

$$OJ = D_T = \frac{4\varphi^2 i}{2\omega_k^2} = \frac{2i}{\omega_k^2}(\alpha_0 - \alpha)^2 . \qquad (21)$$



9. ábra. A billenési szakasz időtartama. *a)* Az elfordulás φ szöge; *b)* Várható rezgéskének; *c)* A legnagyobb „esési magasság" helyzete, mint a legerősebb dinamikus hatás előidézője

Bár e számítás is csak közelítő mód, folytatása mégis annyira körülményes [15], hogy elegendő, ha pusztán utalunk a billenési ív várható alakjára a 9a. és 9b. ábrák alapján.

Mennél kisebb i/ω_k^2 tört értéke, annál jobban eltolódik a görgőnek az a B_1 helyzete, melynél a billenés befejeződik és (21) szerint annál kisebb a THALES-kör OJ átmérője, mely KTC derékszögű háromszögből is kifejezhető

$$\frac{Dr}{2} + h = \varrho \operatorname{tg} \alpha . \tag{22}$$

Határhelyzet, amikor $D_T = 0$, vagyis (22) szerint

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{\varrho},$$

és

$$\alpha = TKO\sphericalangle = 90° - \gamma$$

vagyis $\varphi\sphericalangle = \gamma\sphericalangle$ és így ekkor $\overset{\frown}{BB_1}$ ív éppen egy görgő osztásnak felel meg. A billenés befejezése pillanatában C görgő (8a. ábra) éppen arra a helyre kerül, amelyen B görgő a billenés kezdetekor volt. A billenési pálya a 9a. és 9b. ábra szerint $\overline{OF}$ és $\overline{FO}$ egyenesen történő kirezdülés (vagy O pontba visszatérő hurok), és a pálya x komponensének F tetőpontja a görgő osztási szögének felező vonalába esik.

Ha a pólustáv tovább csökken, akkor a billenési görbe átcsap a γ szög másik oldalára, a görgő a tengelyközépvonalat billenés közben mintegy maga után vonszolja (9b. ábra).

A pólustáv további csökkenésekor $p = \varrho$ esetében — miként a (14) és (19a) összefüggések tárgyalásánál már említettük — olyan határfordulatszámhoz értünk, melynél a rezgést az O tengelyközép keringése váltja fel.

Arra a kérdésre vonatkozólag, hogy milyen jelenségek várhatók a fordulatszám akkora fokozásánál, amikor $p < \varrho$, vagyis az S pólus a ϱ sugarú kör belsejébe lép, e vizsgálati módszerrel semmiféle további következtetést nem vonhatunk. Szerző feltevése szerint előfordulhat, hogy ilyenkor a tengelyközép ω_k szögsebességgel változatlanul ugyanazon golyópáron járva K körül kering, miközben a tengelyközépre vonatkozólag kiegyensúlyozott tömeg O körül ω szögsebességgel forogva bolygó mozgást végez és bizonyos súrlódási viszonyok között a görgők forgása is megszűnhet.

5. Dinamikus hatások

További fontos megállapítás, hogy a THALES-körök között lesz olyan, melynek α szögéhez az a legnagyobb u esési magasság tartozik, mely a ható i gyorsulás irányába esik. Ez határozza meg a billenés legnagyobb végsebes-

ségét. Adott gördülőcsapágynál, adott forgótömegnél és adott fordulatszámnál lesz tehát olyan $u_{\max}$-hoz tartozó P erőhatás, illetőleg $a = P/m$ gyorsulás, mely a billenést a legnagyobb $mv_{\max}$ mozgásmennyiséggel történő ütközéssel fejezi be és megfordítva, *adott terhelésnél lesz olyan fordulatszám, mely a legnagyobb dinamikus hatásokat eredményezi.*

A 9c. ábra szerint az u_{max}-hoz tartozó O_{u1} pontot e sugarú körből az SO-val párhuzamos KO_{u1} sugár metszi ki, mint „tetőpontot".

Az ábrából közvetlenül kitűnik, hogy

$$CHO_{u1} \triangle \cong KT_u O_{u1} \triangle ,$$

miután szögeik egyformák és

$$HO_{u1} = KT_u = \varrho .$$

Ennélfogva

$$CO_{u1} = KO_{u1} = R_T = e ,$$

vagyis az $u_{\max}$-hoz tartozó THALES-kör átmérője

$$D_T = 2e$$

és

$$u_{\max} = OH = OC - CH = e - h = h\left(\frac{1}{\cos\gamma} - 1\right). \tag{23}$$

Ehhez a THALES-kör átmérőhöz (21) szerint

$$i_u = \frac{2e\,\omega_k^2}{2(\alpha_0 - \alpha)^2} = \frac{e\omega_k^2}{\varphi^2} = \frac{e\omega^2}{\varphi^2}\left(\frac{d}{D+d}\right)^2 \tag{24}$$

érték tartozik.

SKO háromszögből

$$\overline{SK}^2 = (\overline{SO} - \overline{OT})^2 + \overline{KT}^2,$$

vagyis a 7a. ábra értelmezése szerint általában

$$\left(\frac{a}{\omega_k^2}\right)^2 = \left(\frac{i}{w_k^2} - h\right)^2 + \varrho^2$$

és ebből

$$a = \omega_k^2 \sqrt{\left(\frac{i}{\omega_k^2} - h\right)^2 + \varrho^2},$$

vagyis esetünkben

$$\frac{a_u}{\omega_k^2} = \sqrt{\left(\frac{i_u}{\omega_k^2} - h\right)^2 + \varrho^2} .$$

Az i_u-hoz tartozó ω_k^2 érték (24)-ből

$$w_k^2 = \frac{i_u}{e}(\alpha_0 - \alpha)^2$$

és ezzel az értékkel az u_{max}-hoz tartozó pólustávolság

$$p_u = \frac{a_u}{\omega_k^2} = \sqrt{\left[\frac{e}{(\alpha_0 - \alpha)^2} - h\right]^2 + \varrho^2}. \tag{25}$$

A gyökjel alatt előforduló α_0 értéke az 5. ábra szerint

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{R_k + h}{\varrho}$$

összefüggésből számítható, $\alpha\sphericalangle$ értékére pedig a 9c. ábra HOO_{u1} háromszögéből felírható

$$\operatorname{tg}\alpha_u = \frac{HO_{u1}}{HO} = \frac{\varrho}{e - h} = \frac{h\operatorname{tg}\gamma}{h\left(\frac{1}{\cos\gamma} - 1\right)} = \frac{\sin\gamma}{1 - \cos\gamma} = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\gamma}{2}\right)}. \tag{26}$$

Ezek szerint a (25) képlet négyzetgyöke alatt levő p_u kifejezése pusztán a gördülőcsapágy szerkezeti adataitól függ. Ha ezt a csapágy szerkezetére jellemző pólustávolságot ω_k^2-el szorozzuk, kapjuk azt az

$$a_u = \frac{P}{m}$$

tömegegységre ható erőt, mely az illető fordulatszámnál a kinetikus rezgésből származó legerősebb dinamikus hatást eredményezi. Ha pedig a terhelés, vagyis a gyorsulás adott, akkor a (25)-ből meghatározott P_u értékhez (16) összefüggés alapján határozható meg a tengelynek az az n fordulatszáma, melynél az adott terhelés és adott szerkezeti sajátosságokkal bíró csapágy esetén a legnagyobb dinamikus hatások várhatók.

A kinetikus rezgésből eredő dinamikus hatásokra vonatkozó meggondolásainkat röviden abban foglalhatjuk össze, hogy valamely csapágy szerkezeti adataihoz meghatározható az a p_u pólustávolság, melynek megfelelő $p_u = a/\omega_k^2$ üzemi viszonyok között a legnyugtalanabbul jár az illető csapágy. A tömeghatások arányosak lesznek $v_{max} = \sqrt{2iu_{max}}$ végsebességgel.

Bár a várható jelenségek jellemzésére a THALES-kör modellje alkalmasnak mutatkozott, mégis meg kell említenünk, hogy nehéz kérdés volna annak

a billenő mozgásnak szigorú tárgyalása, melyet az O tömegpont S pólusból kiinduló változó nagyságú erő hatására végez, miközben OB támaszték B pontja a K középpontú körön mozog. Annyi azonban bizonyos, hogy adott szerkezeti sajátságú, tökéletesnek és merevnek képzelt gördülőcsapágynál is a $p = a/\omega_k^2$-vel jellemzett üzemi viszonyok befolyásolhatják a várható jelenségeket, mert a szerkezeti sajátosságok mellett ez az arány határozza meg a billenési pálya alakját.

6. Néhány következtetés

Az előző tárgyalások összhangban vannak egyes gyakorlati tapasztalatokkal és rávilágítanak egyes jelenségekre. Felemlíthetjük a következőket:

a) Az uralkodó frekvenciák, amiket általában a fordulatszámmal szoktak viszonyba hozni, sokszor lényegesen nagyobbak a fordulatszámnál.

b) Ingadozó csapágyterheléseknél a gördülőcsapágyak zajosabban járnak, amin esetleg megfelelő előfeszítéssel szoktak segíteni. Ez a tény összhangban van azzal, hogy a visszabillenés pályájának jellege az a/ω_k^2 arányától függ.

c) Egyes csapágytípusoknál (pl. NNK sorozat) a görgők szaporításával, félosztással eltolt második görgősorral és a minimális csapágyhézag leggondosabb beállításával igyekeznek az átbillenés jelenségét kiküszöbölni.

d) Szokásos megoldás, hogy a gördülőtesteket csavarrugóval [14] vagy tányérrugóval [11] a gördülőpályához szorítják. Ennél az eljárásnál azonban kellő óvatosság szükséges, mert egyrészt a lazább illesztésű gyűrű a vándorlás veszélyét rejti magában [1], másrészt a szoros kosár, vagy hézagmentes csapágy sipoló szirénázó hangot adhat a fellépő súrlódások miatt [13].

Példaképpen felemlítjük az SKF Kugellagerzeitschrift 1955. évf. 2. számában [10] leírt metszőtárcsa csapágyazását, melynél az orsó két 2204 számú önbeálló $20 \times 47 \times 18$ mm méretű csapágyban forog. „Egy nyomórugó gondoskodik arról, hogy a csapágy mindenféle üzemviszony mellett előfeszítve maradjon. Ezáltal az orsó forgása játék- és rezgésmentessé válott" szól a szöveg erre vonatkozólag.

Ha tekintetbe vesszük, hogy ennek az orsónak a fordulatszáma 5600/perc, akkor a (17) képlet szerint pusztán az önsúly terhelésénél

$$p_s = \frac{895}{n^2}\left(\frac{2D_k}{d}\right)^2 = \frac{895}{5600^2}\left(\frac{2 \times 32}{28}\right)^2 = 28{,}5 \times 5{,}2 = 149\ \mu$$

pólustávolság adódik, ami nagyságrendileg egybeesik azokkal az értékekkel, melyek meggondolásaink szerint előfeszítés nélkül valóban a nyugtalan vagy keringő futást idézhették volna elő.

IRODALOM

1. JÜRGENSMEYER, WILHELM: Die Wälzlager. Berlin, Verlag Julius Springer (1937). Megad 171 korábbi szakirodalmi forrást.
2. PERRET, HANS: Wälzlager, als Schwingungserreger. Werkstattstechnik und Maschinenbau (1950) S. 5.
3. PERRET, HANS: Elastische Spielschwingungen konstant belasteter Wälzlager. Werkstatt und Betrieb (1950) S. 354.
4. MELDAU, ERNST: Die Bewegung der Axe von Wälzlagern bei geringen Drehzahlen. Werkstatt und Betrieb (1951) S. 308.
5. PERRET, HANS: Schwingungen in Wälzlagern bei statisch bestimmter Abstützungen VDI Vorschungsheft 434. Ausgabe B. Band 18. (1952) S. 17.
6. Ausschuss für Wirtschaftliche Fertigung: Getriebeblätter. Beuth-Verlag Berlin (1933)
7. KUTZBACH, K.: Mehrgliedrige Radgetriebe und ihre Gesetze. Getriebe (1928) VDI-Verlag. Berlin.
8. BALOGH, ARTHUR: Bolygó kerék számítása különös tekintettel szerszámgépekre és gépjárművekre. Merkantii nyomda A. T. Budapest (1950).
9. BALOGH, ARTHUR: Berechnung der Geschwindigkeiten der Planetengetriebe auf einer neuen Grundlage. Maschinenbautechnik (1954) S. 618.
10. KIHLBERG, B.: Spindellagerungen in Trennschlefmaschinen Kugellagerzeitschrift (1955) S. 27.
11. KINBERG, R.: Geräuscharme Lagerungen. Kugellager Zeitschrift (1956) S. 3.
12. MELDAU, ERNST: Die Druckverteilung in spielfreien Wälzlagern mit veränderlichem Druckwinkel. VDI. Furschungsheft (1943) S. 421.
13. TALLIÁN TIBOR: Beépített gördülőcsapágyak zöreje. Gép (1956) 281. o.
14. SZŐKE BÉLA: Esztergáláskor fellépő rezgések. Népszava Könyvkiadó (1953) 42. o.
15. SZŐKE, B.: The Possibility of Kinetik Vibrations in Anti-friction Bearings. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae Tom XXV. Fasc. 1—2 (1959). Ugyanezt közölte „Kinetische Schwingungen in Wälzlagern" címmel a Technische Rundschau Bern, 1961. jún. 30-i 28. számában.
16. SZŐKE BÉLA: Gördülőcsapágyak elasztikus rezgése. MTA által jutalmazott pályamunka (1958).
17. LORSCH, AD.: Über eine Maximalaufgabe. Zeitschrift für Mathematik und Physik. Historisch-literarische Abteilung. XXIII. évf. 120. o. Leipzig. B. G. Teubner 1878.
18. CANTOR, M.: Recension. Regiomontanus (Joh. Müller aus Königsberg in Franken) ein geistreicher Vorläufer des Columbus. Von Alexander Ziegler Dresden. C. Höckner 1874. Literaturzeitung der Zeitschrift für Mathematik und Physik XIX. évf. 41/53 o. Leipzig B. G. Teubner 1874.
19. BALOGH ARTHUR: Epicyclic Gears. Simplified Formulae for the Calculation of Velocity Ratios. Automobile Engneer, February, April 1950.

ÖSSZEFOGLALÁS

A gördülőcsapágy elemeinek a csapágyhézag tekintetbevételével mutatkozó fordulat számait BALOGH Arthur vektormódszerének kibővítése segítségével határoztuk meg. A hézagmentes gördülőcsapágy rezgéstkeltő okainak vizsgálata után a csapágyhézag befolyását vizsgáltuk. Az üzemi viszonyok megítélésére geometriai alakzatot mutattunk be és matematikai összefüggést vezettünk le. Ezek alapján valamely kifogástalan csapágy geometriai adataiból a terhelés és fordulatszám ismeretével már következtethetünk a várható rezgésjelenség természetére.

A LEVÉLTÁRI KUTATÁS A MŰSZAKI TUDOMÁNYTÖRTÉNET ÉS A NÉPGAZDASÁG SZOLGÁLATÁBAN

Dr. BENDEFY LÁSZLÓ

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA
VÍZGAZDÁLKODÁSI TUDOMÁNYOS KUTATÓ INTÉZET, BUDAPEST

[Beérkezett 1961. november 9-én]

A történetírásnak az utolsó másfél évszázad alatt világszerte tapasztalható hatalmas fellendültével, tudományos és kritikai módszereinek kialakultával a levéltári kutatások alapvető jelentősége és fontossága általánosan ismertté és elismertté lett. A levéltárak kimeríthetetlenül gazdag forrásanyagát a legutóbbi évtizedekig elsősorban a köz-, had- és egyháztörténet, majd a művelődés- és gazdaságtörténet művelői vették igénybe. Csak a legutóbbi évtizedekben, nálunk a felszabadulás óta kezdődött meg a rendszeres műszaki történeti kutatás is.

A Magyar Tudományos Akadémia kezdeményezésére és kebelén belül, egyes osztályok szerinti tagolódásban tudománytörténeti bizottságok alakultak és ezek pályázatok kiírásával és egyéb módon is igyekeznek elősegíteni a levéltári forrásoknak tudománytörténeti kiaknázását. Így az Akadémia VI. osztályán megalakult műszaki tudománytörténeti bizottság hivatott az utóbbi években nagyobb lendületet vett műszaki tudománytörténeti kutatásoknak és a műszaki tudományok történetére vonatkozó forráskutatásoknak segítséget nyújtani.

Gyakran halljuk, hogy a levéltári kutatói munka csupán önmagáért való tevékenység; a „tiszta tudomány" területén mozgó kutatási foglalatosság, mert nincs kapcsolata a mindennapi élettel. Ezzel a felfogással szemben mindinkább általánossá válik annak felismerése, hogy a levéltári forrásanyag feltárása, feldolgozása a nagy tömegek történetszemléletének kialakítása révén az életet szolgálja, hogy ideológiai téren társadalmi funkciója van. Azt a kérdést azonban, hogy van-e a levéltári forrásanyagnak gazdasági funkciója, hogy szolgálja-e az életszínvonal közvetlen emelését, a népgazdaság fejlesztését, a legtöbben még ma is nemlegesen válaszolják meg.

Mi tagadás, valóban nehéz kívülállóknak, sőt még levéltári kutatásokkal nem foglalkozó műszaki szakembernek is átlátnia, milyen lehetőségek kínálkoznak arra, hogy a százados vagy több évszázados iratokat a mai élet, napjaink és népgazdaságunk szolgálatába állítsuk. Az alábbiakban konkrét esetek, feladatok, problémák megoldásával kapcsolatban élő bizonysággá vált példák felsorolásával igyekszem megvilágítani és bizonyítani azt a tényt,

hogy a levéltári források kellő felhasználásával, alkalmazásával, értékelésével tetemes hasznot hajthatunk népgazdaságunknak, esetleg milliós megtakarításokat érhetünk el.

A dolog természetéből folyik, hogy elsősorban és csaknem kizárólag: a műszaki és természettudományi vonatkozású levéltári anyag az, amelynek a felhasználásáról van itt szó. De nem műszaktörténetről. A műszaki történetírás is a történetírásnak egyik faja, amely önmagában nem jelent különösebb, közvetlenül értékelhető hasznot a népgazdaság számára. Van azonban számos lehetőség arra, hogy a levéltári forrásokat népünk javára értékesítsük. Az alább felsorolt példák egyáltalában nem merítik ki a lehetőségeket; csak útmutatónak szánom őket.

Az alábbiakban levéltári forrásokon nemcsak a Magyar Országos Levéltárban, és nemcsak a budapesti é · ·déki állami levéltárakban levő forrásanyagot értem, hanem minden egyéb régi, műszakilag értékelhető, kielemezhető adatot, feljegyzést, vázlatot, térképet; legyen az egyházi, városi, megyei, vagy egyetemi, főiskolai levéltárban, vagy egyes hivatalok irattárában, esetleg raktárában (pincében, padláson !), vagy magánosok birtokában. Mindez az anyag érték, a nemzetnek hatalmas kincse, amelyet csak szakértő szemmel kell kézbevenni, és máris kitárul, ontja kincseit. Lássunk belőlük néhányat.

Bányászat és kohászat

A második világháború végén újból reánk köszöntött az 1919—1920-as évekből már jól ismert sóínség, de ezúttal a 30 évvel korábbinál sokkal nagyobb méreteket öltött. Voltak hetek, sőt hónapok, amikor valósággal országos jellegű katasztrófává nőtt [1].

Ekkor, 1946-ban kaptam kormányzatunktól azt a feladatot, hogy sós kutak és sós források feltárásával igyekezzem mielőbb enyhíteni a katasztrofális sóhiányon. Minden elképzelhető korszerű módon megkezdődött a kutatás: földtani, geofizikai és geokémiai módszerek alkalmazásával; dűlőnevek vizsgálatával. Nem mulasztottuk el a levéltári források igénybevételét sem. A számos figyelemre méltó történeti adalék közül itt csak a *Neoaquistica Commissio* idejéből származó, azokat a jelentéseket említem, amelyeket az Országos Levéltár őriz a „*Cameral Administration zu Ofen: Hofbefehle*" c. kamarai kötegben. Ebben a csomóban egy sereg olyan jelentést gyűjtöttek össze, amelyeket 1684—1685-ben az ország területére kiküldött kamarai inspektorok terjesztettek az Udvari Kamara elé. Ebben a vaskos és *máig is feldolgozatlan iratanyagban* nagyon sok értékes feljegyzés található; közöttük *igen sok a bányászati vonatkozású is.*

Ebben az anyagban, a bécsi Kamara egykori budai kirendeltségének iratai között találtatott a következő német nyelvű irat, melynek fordítása:

„A Nagytekintetű Császári Udvari Kamarának!... Ezek után egyébként úgy vélem, hogy minden nagyobb községbe, amelyekhez én néhány kisebbet is csatolnék, egy alárendeltünket, vagy egy tisztviselőnket helyezném,... Így pl. egyiküket Gyöngyösön lakhatnék; nem messze ettől, Solmos (ma : Gyöngyössolymos)-nál a Mátra hegységben kősót találtak, a bánya azonban még a török időkben beomlott... Johann Leonhardt Herdegen s. k."

A feljegyzés tehát J. L. HERDEGEN körzeti inspektortól származik. Kézírása jól olvasható. Az irat keltezetlen. A bécsi kamaránál 1687. dec. 12-én iktatták. Véleményadás végett küldték le Budára, az itteni kamarai kirendeltségnek. Ennek irattárából került az Országos Levéltárba [2].

A Gyöngyössolymos határában ezen a nyomon megkezdett földtani vizsgálatok a sós vizeket emberi élvezet céljára alkalmatlannak találták, de a vízelemzések eredményei alapján a kutatások az ércbányászat síkjára is kiterjesztettek. Így jutott el a magyar földtani kutatás és bányászati feltárás ahhoz a ponthoz, amikor már megkezdhette Solymos határában az ezüst bányászatát [3, 3a].

*

1960. október végén kezdett hozzá a Kőolajipari Tröszt a 100-ik olajkút fúrásához Eger környékén. A feltáró mélyfúrásokat igen gondos és minden részletre kiterjedő felderítő vizsgálatok előzték meg. A földtani és geofizikai részletfelvétel mellett nem hiányoztak ezúttal a könyv- és levéltári nyomozások sem.

KERTAI GYÖRGYnek tűnt fel, hogy ezúttal a földtani kutatómunkához segítséget nyújthatnak a történeti adatok is. Foglalkozni kezdett azzal a kérdéssel, miféle eredetű volt az egri hősök és egri nők törökűző, olthatatlan szurokja.

Eger várának 1552. évi ostroma a magyar történelem egyik csodálatos hőstette volt. A magyar hősök száma „hátvanöt híján kétezer vala", s ez az 1935 ember, a káptalannak hozzájuk csatlakozott 829 fegyveresével, megverte a 70 ezer főnyi török sereget ! Minden egykorú krónikás szerint a harcok döntő tényezői — többek között — a nagytudományú BORNEMISSZA GERGELY deák csodálatos tűzszerszámai voltak. GYÁRFÁS ISTVÁN szerint az egykorú krónikás azt írja, hogy ez a tűzeszköz: „Mirum nec antea visum artificium", azaz „soha nem látott csodálatos alkotás". Szurokról hallottunk eddig is, mint a hadi tűzszerek egyik fő gyúanyagáról, írja KERTAI [4] ezúttal azonban hosszas és gondos utánjárással, a magyar levéltárakban végzett kutatással megállapította, hogy a vár védői nem fenyőszurkot (gyantát), hanem — a magyar hadtörténelemben első ízben — kőolajat használtak.

GYÁRFÁS I. művében [5] feljegyezte, hogy DOBÓ ISTVÁN várkapitány 145 forintot fordított az ostrom megkezdése előtt „büdöskövek" vagy „földi szurok" gyűjtésére. (Igen nagy pénz volt ez akkoriban, amikor egy, a nádor

udvarához tartozó várépítő és földmérő mérnöknek évi készpénzjavadalma mindössze 12 forint volt.) ([5a]). A levéltárakban őrzött egykorú számadáskönyvek [6] tanúskodnak arról, hol jártak Dobó követ gyűjtő emberei: Recsk, Parád, Tard, Tibolddaróc határában és Kassa környékén. Ott, ahol ma is lelünk felszíni olajnyomokra, s ahol a szomszédos Bükkszéken egy emeletnyi mélységben a legelső magyar földi olajbánya működött. A tárók falában levő kőzetrésekből szivárgott, csepegett ki az olaj, melyet az anyakőzetbe vájt csatornák gyűjtöttek helyenként össze.

Még Eger körzetéhez kell sorolnunk Hont község határát (Ipolyság közelében), ahonnan már 1075-ben, majd újból 1358-ban találunk említést olyan patakról, amelynek partoldalából ugyancsak földiolaj (földi szurok) szivároghatott a patak vizébe. A honti erdőkön átfolyó, olajszennyezésű patakról írják az idézett egykorú, határjárási oklevelek: „...per *silvam hontensem quae Hungarice* s u r k o s c h e r *vocatur*..." Ilyen olajszennyezésű patakok, „szurkos erek" Eger környékén, ahol ma már 150 m mélységből olajat termelnek, bőségben lehettek.

*

Sok adatot tartalmaznak a régi sóbányászatra, sófőzésre, sószállításra, szénkibúvásokra vonatkozóan a magyar királyi udvari kamara levéltárának aktái. S ne higyjük, hogy csak kétes értékű, bizonytalanul azonosítható helymegjelölésekkel találkozunk a több százéves forrásokban. Az ügyiratok és egykorú jelentések mellett számos esetben ott vannak a vonatkozó bányatérképek és szelvények is.

Scherf Emil, Telkibánya és környéke érces tartományának újbóli feltárója, rendszeresen kutatja az egykori kamarai iratokat, mert számos értékes utalást kapott belőlük hazánk északkeleti határvidéke bányageológiai viszonyainak ismeretéhez. Így pl. a vonatkozó (magánkézen levő) levéltári anyagban lelt feljegyzések és vázlatok alapján tudtuk értelmezni azoknak a kis töbröknek eredetét, amelyeket Telkibányán az egykori bányajáratok fölött, vagy azok közelében sorokba rendezetten tucatjával találtunk [7, 8]. Ez alkalommal az (1947. évi) Iparügyi Minisztérium Bányászati kutatási osztálya is rendelkezésünkre bocsátotta archiválisértékű régi bányatérképeit: a Veresvízi altáróról 1785-ben készült Müller-féle, a telkibányai András-, János- és Heléna-bányákról készült 1825. évi 1 : 1000 méretarányú, és még egyéb, 1840-ből, 1843-ból, illetőleg 1845-ből származó bányatérképeket [9]. E nélkül a levéltári jellegű és egyéb, valóban az Országos Levéltárban felkutatott forrásanyag nélkül tíz- és százezer forintokat költhettünk volna el olyan kérdések tisztázására, amelyeket e források segítségével egyszerűen és biztosan megoldhattunk [10].

Beszélhetnénk még a bányászattal kapcsolatban azokról a levéltári adatkutatásokról, amelyeket a pénzügyminisztérium végeztetett az 1930-as

évek elején abból az alkalomból, hogy állami kezelésbe kívánta venni a dunai aranymosó helyek termelését [11]. A vonatkozó régi feljegyzések az Országos Levéltár udvari kamarai, illetőleg a helytartótanácsi levéltárának anyagában találhatók.

*

Végül olyan, napjainkban is folyó levéltári kutatómunkáról emlékezem meg, amely Vas megye, illetőleg a kőszegi—soproni hegyvidék nyersanyagkincseinek feltárását hivatott elősegíteni. Több mint száz éve vitatott az a kérdés, miért kapta Vas megye éppen a „Vas" nevet. Nyilván a régi megyeszékhelytől: Vasvártól. Erősen tartotta azonban magát az a helyi hagyomány, hogy Vas megyében egykor vaskohók is működtek.

Járdányi-Paulovics István Vasvárott római kori vaskohó maradványait vélte fellelni [12]. Erről azonban legújabban bebizonyult, hogy római ugyan, de nem vasolvasztó, hanem valószínűleg mészégető maradványa. [13]. A kormeghatározásban jelentős szerep jutott a Vasvárra és Vas megyére vonatkozó középkori okleveles anyagnak, amelyet levéltári eredeti darabok alapján Iványi Béla dolgoz fel és bocsátott kéziratban a kohászat-történeti kutatók rendelkezésére. Ezek alapján tudjuk bizonyossággal azt is, hogy a középkori Vas megyei vaskohászat nyersanyaga a Kőszeg és a Rába közötti, valamint a Kemeneshátat részben borító pleisztocén kavicstakaróban előforduló hematit-konkréciók voltak. Megemlítendő a Kohászat Történeti Bizottság működése, amely már számos leletet és adatot tárt fel. A Vas megyében és az ország több más területén folyó kohászat-történeti kutatásokat is e bizottság végzi.

Talajtan, földtan, földszerkezetkutatás

A korszerű puskaporgyártás feltalálásáig igen fontos alapanyaga volt a haditűzszer-iparnak a salétrom gyűjtése. Magyarország egyike volt Európa ama államainak, ahol fölös mennyiségben lehetett találni és gyűjteni (söpörni) a salétromot az ún. salétromszérükön. A salétromgyűjtési és -főzési jog olyan privilégium volt, mint pl. a kéményseprőség vagy a gyógyszerészség, azzal a különbséggel, hogy salétromgyűjtési, -főzési- és -eladási joga az egész országban csak két-három családnak volt.

Ezek közé tartozott például a XVIII.—XIX. század fordulóján Vay I. Miklós báró dandártábornok, illetőleg halála után az ő örökösei. A Vay család golopi levéltárában [14] tekintélyes csomót tesznek ki a debreceni és a nagykállói salétromgyűjtő és -feldolgozó telepre vonatkozó iratok. Ugyancsak az Országos Levéltárban a magyar udvari kamarai, illetőleg a helytartótanácsi levéltárban nagyon sok salétromgyűjtési, -főzési stb. vonatkozású irat van.

Ezeknek a levéltári állagoknak had- vagy műszaktörténeti szemszögből csak eszmei értékük van. Talajtani, illetőleg talajjavítási (meliorációs) szemszögből azonban komoly értékűek. Hazánkban ugyanis nagyon sok volt a szikes terület; hosszú skálán: a kevéssé szikesektől egészen a tökéletesen terméketlen vakszikekig. Ezeket a szikeseket legkiválóbb agrokémikusaink: 'SIGMOND ELEK [15], TREITZ PÉTER [16] és sokan mások igyekeztek valami módon tartósan megjavítani. A kérdést csak a felszabadulás után lehetett számottevő eredménnyel megoldani: a szikes földeknek visszaadták a vizet; rizstelepeket létesítettek rajtuk, és a szik eltűnt. A rizsföldek életerejének időleges kimerültével azonban vissza kell adni ezeket a területeket egyéb mezőgazdasági művelés céljára. A vizet lebocsátják róluk; kiszáradnak, és a szik újból kivirágzik. A szik-, azaz salétromprobléma tehát újból időszerűvé válik. És mivel a melioráció során ismételten az a kérdés kerül előtérbe: melyek a leginkább sziksós, salétromos területek, nem kell egyebet tennünk, mint végigtanulmányozni a kamarai és helytartótanácsi aktákat, illetőleg a salétromfőzés jogával felruházott családok vonatkozó iratait, és ezekből pontosan össze lehet állítani a statisztikát, legalább 180—200 évre visszamenően, hogy melyik sziksós területen évenként mennyi sót söpörtek össze. Maga VAY MIKLÓS tábornok ezeket a statisztikákat évről évre elkészítette (ezeket az adó lerovása végett be is kellett nyújtani a helytartótanácshoz); de — emlékezetem szerint — a golopi Vay-levéltárban a szóban forgó anyagnak még térképszerű feldolgozását is láttam. Ezeknek a gyakorlati melioráció területén való értékesítésével illetékes szerveink (OMMI stb.) tekintélyes forint-megtakarítást érhetnének el.

*

A magyarországi földrengésekre vonatkozó levéltári adatokat RÉTHLY ANTAL ötven éven át nagy szorgalommal és rendkívüli alapossággal gyűjtötte össze. Ide vonatkozó életműve az Akadémia kiadásában meg is jelent [17]. Az ebben a munkában összehordott több ezer földrengési adat a legkülönbözőbb levéltári forrásokból származik: az Országos Levéltár, a volt megyei és városi levéltárak, az egyházi levéltárak és hivatalok irattárának anyagából épp úgy, mint ahogy fel vannak benne dolgozva a különféle egyházak, volt szerzetesrendek „Historia domus"-ainak ide vonatkozó adatai. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy nincs vagy nem lehet olyan magyarországi földrengési adat, amely történetesen nincsen benne RÉTHLY nagy értékű földrengési katalógusában. Mindig és mindenünnen kerülnek elő véletlenül is földrengési adatok.

Például a szombathelyi Egyházmegyei könyvtár 76 sz. ősnyomtatványában a margón találta HORVÁTH TIBOR ANTAL ezt a bejegyzést: „1490. dec. 13. igen nagy földrengés volt Egerben" [18]. Vagy például a kecskeméti

állami levéltár őrzi DIÓSZEGI JÓZSEFnek és hasonló nevű leszármazottjainak feljegyzéseit. A DIÓSZEGIek komoly szaktudású, tehetős szőlőbirtokosok voltak Kecskeméten, és szőlőtermelésük érdekében, három nemzedéken át pontos naplót vezettek, melynek köteteiben szőlészeti, talajtani, éghajlattani stb. megfigyeléseken kívül — többek közt — földrengési adatokat is találunk.

Azt hihetnők, hogy a földrengési adatok gyűjtése legfeljebb statisztikus adattömeghez juttat bennünket. Sokkal többhöz. A szóban forgó földrengési adatoknak tájegységenkénti, korszerű feldolgozása az illető földtani tájegység nagyszerkezeti viszonyairól nyújt (az adatok tér- és időbeni sűrűségéhez képest) megközelítő, vagy többé-kevésbé részletes tájékoztatást.

RÉTHLY A. kiváló levéltári adatgyűjtését a magunkéval kiegészítve, az ország több területéről készítettünk már a fentebbiek szerint korszerű feldolgozást. Mindig meghatározott céllal: egy ízben a Dunaharaszti környékét veszélyeztető földrengési lehetőségeket vizsgáltuk az 1956 januárjában elpusztult községek újjáépítésével kapcsolatban [19], máskor a Szombathely város alatti alaphegység szerkezeti viszonyait kellett tisztázni hév- és gyógyvizet szolgáltató mélyfúrás kitűzéséhez [20]. (Azóta már a gyógyfürdő első egységei meg is épültek.) Legutóbb pedig a Kisalföld délnyugati medencéjében sorrakerülő kőolajkutató fúrások előkészítése érdekében tisztáztuk a Vasvár és Keszthely közötti térségben a több ezer méter mélységben levő alaphegység szerkezeti viszonyait [21], ugyancsak nagyrészt levéltári eredetű földrengési adatok felhasználásával. Ilyen módon több milliós, szerkezet-felderítő mélyfúrásokat takaríthattunk meg.

Hogy a fentebb előadott célú levéltári kutatások milyen nagy fontosságúak, megemlítem G. P. GORSKOV professzornak, a moszkvai Lomonoszov-egyetem „földtani nagyszerkezetkutatás" c. tanszéke vezető tanárának nálunk ismertetett munkálatait. GORSKOV szerint a moszkvai Tudományos Akadémia és a Lomonoszov-egyetem együttesen levéltári kutatórészleget tart fenn kizárólag abból a célból, hogy régi földrengési adatokat gyűjtsenek össze. Így például 1953—1956. között összegyűjtötték Mongólia, Kína és Tibet levéltári forrásaiból a régibb és újabb földrengésekre vonatkozó feljegyzéseket, és ezekből egész Belső-Ázsiára olyan földrengésgyakorisági és -intenzitás térképeket szerkesztettek, amelyeket a földrengések előrejelzéséhez kívánnak felhasználni [22]. Megjegyezzük, hogy a vonatkozó levéltári anyagon elsősorban a császári házak hivatalos történeti könyveit (krónikáit) és a buddhista stb. kolostoroknak rendszeresen vezetett évkönyveit kell érteni.

1908. június 30-án reggel 7 óra tájt a transzszibériai vasút utasai Kanszk állomás közelében, északi irányban körülbelül Nap nagyságú meteort láttak. Amint eltűnt szemük elől, óriási robbanás zaja hallatszott. Hirtelen megállt a vonat. Reszketett a levegő. A híres Podkamennaja—Tunguzkanak vidéki meteor ekkor csapódott be valahol a szibériai őserdőkben. A becsapódás

pillanatában még 400 km távolságban is — mintegy 20 km magasságba emelkedő — tűzoszlopot láttak felvillanni. Hatalmas mennydörgéshez hasonló robaját pedig még 1000 km távolságban is hallották. Ez volt a világtörténelem ember-látta, legnagyobb méretű meteorbecsapódása.

A cári uralom nem törődött a dologgal. Az eset megvizsgálására sem fordított gondot, mert a szinte megközelíthetetlen őserdőkbe felderítő expedíció küldése nagyon költséges lett volna.

Végre a fiatal szovjet kormány úgy határozott, hogy megvizsgáltatja a meteorbecsapódás helyét. A szervezés LUNACSARSZKIJ népbiztos dolga volt, a tudományos előkészítést és az expedíció vezetését pedig KULIKra bízták.

Az utóbbi mindenekelőtt a levéltári értékű és jellegű írott források felkutatását és összegyűjtését kezdte meg munkatársaival. Sikerült is annyi egykorú írott forrást: egyházi könyvekbe tett bejegyzéseket, hivatali jelentéseket stb. felkutatniuk, hogy azok alapján eléggé jól meg tudták határozni azt a helyet, ahol a földbe fúródott meteort kell keresniök. 1921-ben el is indult az expedíció, de olyan hihetetlen terepnehézségekkel találták szembe magukat, hogy vissza kellett térniük anékül, hogy a kívánt helyet megközelíthették volna.

1927-ben, 1929-ben s végül 1930-ban KULIK új és újabb expedíciókat vezetett a szóban forgó területre, és a kitartó munka sikert hozott: nemcsak megtalálták a meteor becsapódásának helyét, hanem annak minden apró részletkérdését és vonatkozását tisztázhatták. A tudományos eredményeken kívül azonban gazdasági eredménye nem lett a dolognak, mert a meteor a becsapódáskor szétrobbant és elégett. Nagyobb vasérctömegeket tehát KULIK és társai nem találtak, ellenben azok az idősebb tungúzok, akik 1930-ban meglátogatták a kutató expedíciót, elmondották, hogy ők a meteor becsapódása utáni időkben nagyon sok, kitűnő minőségű meteorvasat találtak ezen a környéken. Ezeket a darabokat annak idején összegyűjtötték és felhasználták [23].

Az azóta eltelt 30 esztendő alatt azonban kiderült, hogy az óriásmeteorok kérdése gazdaságilag érdekes akkor is, ha nyersvas- vagy nikkeltömegeket nem is találnak a szabályosan kerek alakú meteorkráterek közelében. Az Arizona-kráter is teljesen meddőnek bizonyult ilyen szempontból. A Kanadában és az USA-ban folytatott tanulmányok arra utalnak, ha ilyen tekintetben meddők is a szóban forgó meteorkráterek, ritka fémek és egyéb ritka ásványféleségek tekintetében hatalmas értékűek lehetnek.

Így egyik amerikai meteorkráter belsejében lefúrva fedezték fel a *coesit* nevű ásványt: a kvarcnak azt a válfaját, amely nagy nyomáson és magas hőmérsékleten képződik. Ebből — joggal — arra következtetnek, hogy a meteorkráterek belsejében, hasonló fizikai feltételek mellett esetleg gyémántok képződésére is volt lehetőség. A feltevésnek akkora a tudományos valószínűsége, hogy a gyémántpiac máris megmozdult. Kutatnak a meteor-

kráterek után: elsősorban Kanadában. Mégpedig hogyan? Régi archiválís anyag tanulmányozásával. S a levéltári kutatásnak máris eredménye van: Brent és Holleford közelében két, eddig ismeretlen meteorkrátert fedeztek fel [24].

Meteorológia

A temesvári vízügyi igazgatóság hatáskörébe megközelítően 20 000 km² terület tartozik. Annyi, mint hazánk területének ötöde. Amikor nemrég az igazgatóság vezetőjének, Dr. Pop Emil professzornak szobájába léptem, egy diagram ragadta meg figyelmemet. Közel 150—180 évre visszamenően az évi csapadékok (Σ mm) és a sági vízmérce nullpontjára vonatkoztatott legmagasabb árvízszintek voltak évenként felrakva. Arra a kérdésemre, honnan szerezte az adatokat, közölte: megbízott egy mérnököt, hogy a levéltárakból a szükséges csapadék- és árvízadatokat gyűjtse össze. (Az utóbbiak 86 évre visszamenően hivatalból is megvoltak, mert a sági vízmérce leolvasásai 1874 óta megvannak.)

Érdeklődésemre elmondotta Pop E. professzor, hogy ez a levéltári adatgyűjtés nagyon hasznosnak bizonyult. Bebizonyosodott ui., hogy átlagosan minden hetedik esztendőben veszedelmesen, sőt katasztrofálisan magas árvizek zúdultak reájuk. Ha a 7 esztendő véletlenül 6-ra szűkült, egyik — rövidesen reá következő — ciklus kiegyenlítette az eltérést, mert 8-nak adódott. Így készülnek ők fel már most az 1962. esztendőre, amelyben a grafikon bizonysága szerint kiugróan magas árvízszínnel kell számolniuk. (Ha ez ebben az évben elmaradna, Pop szerint 1963-ban feltétlen bizonyossággal bekövetkezik.) A tározókat tehát idejében kiürítteti Pop E. professzor, hogy majdan a várható nagy vízmennyiségeket befogadhassák, és ilyen módon az árvizek szintjét adott keretek közé szoríthassák.

*

Szabó Kálmán kecskeméti ny. múzeumigazgató egyik tanulmányában [25] érdekes összeállításra és grafikonra lettem figyelmes. A kecskeméti szüretek időpontját tartalmazta 1698-tól 1830-ig a város tanácsülési jegyzőkönyveinek adatai alapján. (Ez az összeállítás annál értékesebb, mert a szóban forgó tanácsjegyzőkönyvek 1944 novemberében elégtek.)

Alaposabban tanulmányozva Szabó K. adatsorát, bloxamálással olyan menetgörbét sikerült előállítanom, amely jellemző (a téli időszak kikapcsolásával) az időjárási viszonyok alakulására.

A továbbiakban Házi Jenő szíves segítségével Sopron tanácsülési jegyzőkönyveiből szereztem hasonló, 1576-ig visszamenő növényfenológiai adatokat. Majd Szövényi István Kőszeg város tanácsülési jegyzőkönyveiből volt szíves számomra a szükséges szüretkezdő adatokat kijegyezni egye-

lőre 1649-ig visszamenően, de a tanácsülési jegyzőkönyvek 1550-ig vezetik vissza — e téren — a kőszegi levéltárban kutatót. Ugyanígy, kérésemre, átnézte HORVÁTH FERENC a szombathelyi levéltárban az ottani városi tanácsülések jegyzőkönyveit; de sikerült külföldi adatokat is szereznem Prágából, Grácból, Bécsből és Berlinből.

Ilyen módon megvan a lehetősége annak, hogy történetileg hiteles, napra pontos levéltári adatok alapján szerkesszünk meg egy 400 esztendőre, a mohácsi vész koráig visszamenő időjárási görbét, amely a világirodalomban ismert leghosszabb ilyen nemű időjárási görbe lesz. Rokona az — ugyancsak kőszegi városi levéltár tulajdonát képező „*Szőlő Jövésének Könyve*" [26] [27] rajzai alapján BERKES ZOLTÁN által szerkesztett, 1740-ig visszavezetett időjárásgörbének [28].

Amikor nekifogtam ennek az évekig tartó munkának, az volt az elsődleges célom, hogy vizsgáljam az éghajlatváltozás és a középtengerszint változása közötti kapcsolatot évszázados viszonylatban. Ma már ez a célkitűzés jóval kibővült, mert a gazdag és feltétlenül megbízható levéltári forrásanyag lehetővé teszi, hogy — POP EMIL professzor tapasztalatait kamatoztatva — olyan görbéket szerkesszünk, amelyek komoly segítséget nyújtanak majd *a vizjárás előrejelzése terén*. Ez a kérdés ma általános probléma világszerte, és a magyar Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Intézetnek is egyik élvonalbeli témája [29, 30, 31].

*

Szombathely város északnyugati részében, a Felsőfokú Tanítóképző Intézet közelében, egyik utca sarkán ez év májusa óta festett tábla hirdeti, hogy zivataros időjárásban az utcában járni nem szabad. Még az autóbusz is más útvonalon közlekedik a zivatarveszély elmúltáig.

A Városi Tanács fenti intézkedésére az adott okot, hogy az utóbbi néhány esztendő alatt 6—8 személyt sújtott halálra ebben a rövid, a Perint patakkal párhuzamos vonalzású utcában a villám. A rendelet kiadása előtti héten, két napon belül, három halálos áldozat volt ezen az ominózus útszakaszon.

A megrendítő esemény után a helybeli állami levéltárban folytatott ellenőrző kutatás is kimutatta, hogy évtizedekre visszamenően abban az utcában szinte évenként szedett halálos áldozatot a villám.

Hasonló eseteket külföldön is megfigyeltek már. Elhárításukra világszerte levéltári kutatási alapon, statisztikus módszerekkel folyik a védekezés. Nálunk a Magyar Tudományos Akadémia soproni geofizikai tudományos kutatóintézetében BENCZE PÁL foglalkozik a témával, hogy megfelelő kapcsolatot találjon az ionoszféra állapota és a zivataros időjárás alkalmával lejátszódó természeti folyamatok között, illetőleg felderítse a kettő közötti kölcsönhatást [32].

Vízgazdálkodás

Talán egyetlen tudomány sem meríthet annyi közvetlen segítséget a levéltári forrásanyagból, mint a százféle igény kielégítésére hivatott vízgazdálkodást szolgáló tudományágak összessége. A folyók, egy-egy folyónak vízgyűjtő területe külön-külön természeti egység. Mindegyik élő egyed, amely a pillanatnyi természeti adottságok szerint alakítja a maga környezetét. Az utóbbi két évszázadban a vízfolyások és környezetük életében mélyreható beavatkozások történtek. Erdőket irtottak, mocsarakat csapoltak le, s a folyók elburjánzott kanyarulatait levágták. Megbontották az évezredek, — tízezredek alatt kialakult természeti egyensúlyi helyzetet.

Most már ezeken az erőszakos beavatkozásokon — legalább nálunk, a Kárpát-medencében — nagyjából túl vagyunk, de állandó problémánk, hogy hogyan viselkednek folyóink az új állapottal kapcsolatban, mikor lesz az új egyensúlyi állapot kialakultnak mondható, és milyen lesz az.

Tanulmányokat folytatunk a Duna, a Tisza, a Maros, a Körösök, a Rába és még más folyóink medrének megváltozásáról. Az egykori Vízrajzi Intézet felvételei csak az 1880—1890-es évekig nyúlnak vissza, azon túl már a levéltári anyagot kell elővennünk, és az egykori magyar udvari kamara és a helytartótanács példás szépségű és erre a célra megfelelő pontosságú térképeit is be kell kapcsolnunk a kutatásba. De ott vannak még a kancellária és a nádori hivatal levéltárának iratai között lappangó térképek is.

A folyók szabályozásával kapcsolatban megváltoztak a mozgatott hordalék mennyiségi viszonyai is. Az eredeti állapothoz való viszonyítás lehetőségét csakis a 150—200 évre visszamenő mederszelvények felhasználása nyújtja; tehát ismét csak a levéltári anyagot kell elővennünk.

És legyen a probléma bármi: árvizek gyakoriságának, — tartósságának, jeges árvizek levonulásának, jégtorlaszok, jégdugók képződésének kérdése egy-egy folyóval kapcsolatban, ha évszázados viszonylatban óhajtunk tisztán látni, a levéltári forrásokhoz kell folyamodnunk. Az évenként meg-megismétlődően felfakadó belvizek megjelenésének helyei kapcsolatosak az egykori mocsaras területekkel. Hogy a belvizekkel rendszeresen elöntött területeket végérvényesen az intenzív mezőgazdasági kultúra szolgálatába állíthassuk, ahhoz az eredeti, ősi állapot ismerete szükséges; ezt pedig leginkább hitelt érdemlő módon: az egykorú térképek — levéltári forrásanyag — felhasználásával érhetjük el.

Vízgazdálkodási tervezési és kivitelezési munkánk során még az olyan, látszólag nem sokat ígérő levéltári forrásoknak is hasznát láthatjuk, mint amilyenek például a középkori határjárások. Ezt a sok ezer oklevelet számláló anyagot ez ideig — a történészeken kívül — csak a néprajzosok, a régészek és a gazdaságtörténet kutatói értékesítették, pedig nagyon sok hasznos, értékes útmutatás meríthető belőlük mai problémáink megoldásához is.

Hogy mást ne említsek, utalok arra: évek óta erős ütemben munkálkodunk karsztos területeinknek ivó- és ipari vízzel való ellátásán. A határjárási okiratokban százával találhatók forrásokra, vízerekre való utalások: ma majdnem víztelennek ismert vidékeken. Ezeknek az útmutató jellegű és értékű adalékoknak feldolgozásával olyan értékes ismeretekhez juthatnánk, amelyeknek — a levéltári adatok ismerete nélkül történő — felkutatása nagyon sokba kerülne népgazdaságunknak.

Ugyancsak a határjárási iratok, valamint a magyar udvari kamara irattanyagának és a Neoaquistica Commissio jelentéseinek felhasználásával lehetőség nyílik a XIII—XVII. századi, ma már elpusztult halastavaink helyének megállapítására. Ezzel komoly segítséget nyújthatnánk azoknak a szépen fejlődő termelőszövetkezeteknek és állami gazdaságoknak, amelyek az újabb ötéves terv során — többek közt — haltenyésztésre is be kívánnak rendezkedni.

*

Hogy milyen alapvető jelentőségű a levéltári és az archiválisértékű iratanyag kutatása és felhasználása vízgazdálkodási vonatkozásban, néhány konkrét példát sorolok fel.

A Dnyeper folyóra építendő (és azóta már megépült) víztárolók és erőművek tervezéséhez szükség volt arra, hogy a tervezők évszázadokra visszamenően ismerjék a folyó vízjárási viszonyait. Az ukrán Sz. Sz. K. kormánya tehát megbízta G. I. Svec főmérnököt, hogy a szükséges adatokat gyűjtse össze. Rövid időn belül együtt volt a vízügyi hivatalokból és intézetekből összegyűjthető feljegyzések és adatok tömege, de ez a kollekció mindössze néhány évtizedre tekintett csak vissza.

Mivel ez az adattömeg nagyon kevés volt a mondott célra, Svec főmérnöknek a párt és a belügyminisztérium képviselői előtt kellett bebizonyítania, hogy valóban megtett mindent, amit csak az ügy, a tervfeladat érdekében megtehetett. Miután ezt sikerült tisztáznia, a kievi Ukrán Tudományos Akadémia közbelépésére és javaslatára Svec főmérnököt 3—4 évre mentesítették minden más munka alól, és megbízták azzal, hogy a szóban forgó adatoknak kb. a X. századig való visszamenőleges feltárását szervezze meg és hajtsa végre. Megkezdte tehát a levéltári kutatásokat, és azzal egyidejűen az ószláv egyházi nyelv és paleográfia tanulását. Évek szaladtak el ezzel a munkával, de végre, minden előkeríthető, vonatkozó ősi forrás felkutatása és értékelése után együtt volt a statisztikai feldolgozásra alkalmas és érdemes anyag. Pontosan láthatták, hány évenként és milyen legmagasabban tetőző árvizek szokták látogatni a Dnyeper környékét. Svec főmérnök több évi levéltári kutatásaival és az ezekkel párhuzamosan végzett régészeti feltárásaival igen értékes támpontokat tudott adni a Dnyeper nagyszabású vízhasznosítása tervezé-

sének kérdéséhez, a mértékadó maximális és minimális vízhozamok meghatározásának megoldásához [33].

Munkájának másik eredménye az lett, hogy a kievi Ukrán Tudományos Akadémia — belátván a műszaki történeti levéltári forrásanyag kutatásának fontosságát —, az akadémiai Hidrológiai és Vízépítési Kutatóintézetben levéltári kutatási osztályt szervezett, s annak vezetőjévé a nagy levéltári kutatási gyakorlattal rendelkező G. I. SVEC főmérnököt nevezte ki.

*

Hazánkban a KISZ munkabrigádjainak segítségével évről évre épül a Hanság vizeit lecsapoló csatornahálózat. Ennek megtervezéséhez ugyancsak szükség volt a Hanság területét elborító víztömegek maximális és minimális mértékének megbízható ismeretére. 100—150 éves távlatban ezek az adatok csakis levéltári kutatások útján szerezhetők meg.

A magyarországi levéltári anyagból csakis egy 1875. évi felvétel adatai voltak fellelhetők. Bécsben — KARL ULBRICH DR. műszaki főtanácsos, térképtörténész szíves útmutatása nyomán — a Nationalbibliothek térképtárában azonban alkalmunk volt látni és tanulmányozni CARL GODINGER 1835. évi pompás Hanság- és Fertő-felvételét és a hozzá tartozó terjedelmes műszaki leírást. A Hanság-felvételek sorában ez az első teljes, és egyben a legtöbb adatot szolgáltató. Ebben az esztendőben ui. igen korán beköszöntött a tél, és már november havában teljes egészében befagyott a Fertő és a Hanság is. (Az 1760 és 1860 közötti évszázadban ekkor volt a legszigorúbb és leghosszabban tartó tél.) Ezt használta fel C. GODINGER, az Esterházy-uradalom geometrája arra, hogy részletes mélységi felvételt készítsen a Hanságról, megjelölvén a szelvényeken a különböző esztendők legmagasabb vízállásait is. Most tehát az 1835, 1875, majd az 1895 és 1925 körüli felvételekkel tökéletes topográfiai sorozatot kapunk, amelyet a legutóbbi idők (1955—1958) korszerű felvételei zárnak le [34].

*

A XIX. század nagyszabású vízszabályozási és lecsapolási munkálatait hasonlóan nagyméretű geodéziai-topográfiai felvétel (térképezés) vezette be. Ennek legfontosabb eleme az alaphálózatot biztosító szintezések (egykori műszóval lejtezések, libellációk, Nivellierungen) voltak. Nagyon messze vezetne ennek a közel 100 esztendeig tartó, hatalmas munkának vázlatos ismertetése is. Röviden csak annyit jegyzünk itt meg, hogy a libellációk a legfontosabb alapadatokat szolgáltatták a szabályozáshoz, de mivel akkoriban még nem volt egyetlen országban, így nálunk sem, szintezési alaphálózat, ahány folyó, annyiféle alapsíkra vonatkoztatott lejtőzés volt az országban. A nagyobb folyóknak nem is egy alapsíkja volt.

Ebben a káotikus zűrzavarban VÁSÁRHELYI PÁL igyekezett rendet teremteni olyanformán, hogy a Kulpa-folyó szintezését a Lujza-úton át összekapcsoltatta az Adriával, majd a Kulpa—Dráva—Duna—Tisza értelmű fő kapcsolaton keresztül az egész ország minden, akkor nyilvántartott vízügyi eredetű magasságát ebbe a rendszerbe számíttatta át. Az eredményeket egyetlen nagy lajstromkönyvbe foglalták, és azon túl ezeket, az 1843-ban bevezetett, Adriára vonatkoztatott magasságokat röviden „VÁSÁRHELYI-féle magasságoknak", illetőleg magát a vonatkoztatási rendszert „VÁSÁRHELYI-féle rendszernek" nevezték [35].

A legelsőnek 1846-ban megalakult Középtiszai Ármentesítő Társulat után egyre-másra alakultak az ármentesítő és belvízlevezető társulatok, de ezeknek a magasságmérései sem voltak összehangolva egymással. Ma már 85—90%-ban a mai, korszerű módon megjelölt magasságjegyekkel rendelkező szintezési hálózatunkra vannak bekapcsolva ezek a régi lejtmérések is, de mégis gyakori eset, hogy az új ötéves terv végrehajtásához vízügyi igazgatóságaink fel akarnak használni egy-egy olyan, 1920—1940 között készült társulati tervet, amely még a VÁSÁRHELYI-rendszerre vonatkozik. Ez esetben a tervet át kell számítani a mai rendszerbe. A transzformáláshoz részletes helyi adatokra van szükség. Ezeket pedig csak kis részben őrzik a volt ármentesítő társulatok hivatali utódai; legnagyobb részük az Országos Levéltárban található.

Az egykori ármentesítő társulatok csak mai államhatárainkon belül 3 713 160 kataszrális holdról, azaz 21 855 km²-ről készítettek négyzethálós topográfiai felvételt. Ez a terület több, mint hazánk területének 20%-a. A VÁSÁRHELYI-rendszerben elkészült terv-alapadatok felhasználása tehát több millió mérnöki munkaóramegtakarítást, és ennek megfelelő forintmegtakarítást jelent. Ez a megtakarítás ismét csak az archiválís anyag felhasználásával érhető el.

*

A Balatoni Intézőbizottság és a Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Intézet megfigyeléseinek és méréseinek egybehangzó eredményei szerint a Balaton partvonala élénk mozgásban van. Az erózió és az abrázió egyik helyütt pusztítja a partot, az elhabolás lassú munkája helyenként néhány méternyi szélességű partszakasszal növeli a tó vízfelületét; másutt pedig a tófenéken mozgatott üledék több száz méter szélességű sávokat csatolt a déli parthoz [36].

Hogyan kísérhető figyelemmel ez a változás? Csakis évszázados viszonylatban, a megfelelő pontosságú régi, ma már 108—110 esztendős kataszteri térképeknek a mai földmérési térképekkel és légi fotogrammetriai felvételekkel való összehasonlítása útján. Már folyik is a munka az Országos Levéltárban; a VITUKI VI. osztályának dolgozói végzik, és minimális ráfordítási költséggel nemcsak több milliót felemésztő és évekre terjedő mérési munkát takarítanak

meg vele népgazdaságunknak, hanem olyan adatokhoz jut ezen az úton az új ötéves tervet szolgáló magyar tudomány, amelyekhez semmiféle más módon nem juthatna, csakis a levéltári kutatások segítségével.

A múlt hű képét írásban és térképekben ugyanis a levéltárak őrzik. És az 1850-es évek kataszteri felvételein túl is csomószámra akadnak még ott olyan térképek és műszaki leírások a Balaton partvidékéről, amelyekből a XVII. századig visszamenően figyelemmel lehet kísérni a Balaton partja mentén kialakult tőzegtelepek és kisebb-nagyobb kiterjedésű mocsarak sorsát. Ezeket az iratokat és az ügyiratokban, jelentésekben rejtőző térképeket és vázlatokat a volt udvari kamarai és a helytartótanácsi iratokban, valamint az egykori főúri uradalmak állagaiban, a geométráik által felvett térképeken és az általuk készített műszaki leírásokban találjuk.

Barlangkutatás. Műemlékvédelem

Az idegenforgalom is egyik fő tényezője gazdasági életünknek. Devizát hoz az országnak. Idegenforgalmi érdekességeink között kimagasló hely illeti meg barlangjainkat, közöttük a csodálatos szépségű Aggteleki barlangot (Baradla). Kessler Hubert, a barlangnak modern feltárója és a közforgalom számára való kialakítója, mielőtt belefogott volna mélybeni barlangfeltáró munkájába, a miskolci és budapesti levéltárakat vette sorra és kutatta át, hogy felleljen minden írott és térképszerű eredeti forrást Raisz Keresztélynek és Vass Imrének szellemi hagyatékából. Mind a kettő mérnökember. Raisz 1801-ben elsőnek hatolt a barlangba, Vass Imre pedig 1821-től kezdve szüntelenül próbálkozott, hogy megtalálja a Jósvafő felé vezető kijáratot. Végre 1825-ben siker koronázta fáradozásait, bár végső célját nem érhette el. Kesslernek sikerült elődjei levéltári hagyatékát fellelnie, sőt a barlang egyik metszetes régi térképét és színezett metszetét saját gyűjteményében is őrzi [37]. Azzal pedig, hogy az említett, és 9 kilométeres barlangi szakaszra vonatkozó megfigyelési és térképezési levéltári anyag hollétét a további kutatás és barlangfeltárás előtt felderítette és azt áttanulmányozta, igen nagy munkát és kiadást takarított meg a népgazdaságnak [38, 39].

*

Másik jelentős idegenforgalmi érdekesség Kessler Hubert nevével és a levéltári kutatásokkal kapcsolatban. Nemrég a honvéd-kincstár a Gellérthegyi Citadellát átadta a fővárosnak felhasználás végett. Miként ismeretes, a Fővárosi Tanács sörkertet és éttermet rendezett be az egykori erődben. Az épület átvizsgálásakor kiderült azonban, hogy az erőd látható része alatt mély pincesor húzódik, amely barlangszerűen van a hegy mélyébe vágva. Az üregek feltárását a Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Intézetre, ille-

tőleg személy szerint KESSLER HUBERTra bízták. Ő mindenekelőtt a Hadtörténeti Levéltárban kereste meg a citadellára vonatkozó ügyiratokat. Meg is találta, de azzal a megjegyzéssel, hogy a tisztázatot és az egyetlen példányban levő tervrajzot Bécsbe küldték. Fel kellett utaznia Bécsbe, ahol is három napi keresgélés után a Kriegsarchivban „Blocksberg, Festung" címen meg is találta a 4 lapból álló, eredeti, 1870-ből származó, színezett felvételt [40]. A tervrajzok birtokában a feltárás munkája néhány hét alatt befejeződött, míg ezek híján hónapokig elhúzódott volna.

*

Csak megemlítjük azt a rengeteg levéltári kutatómunkát, amelyet a műemlékvédelemmel kapcsolatban jó néhány kutató szüntelenül folytat. Ez a fajta kutatás kétirányú. Részint ismeretes műemlékek feltárásához, eredeti állapotuknak visszaállításához van szükség levéltári kutatásokra, amely azonban nemcsak régi tervrajzok és vázlatok kikeresését célozza, hanem szövegszerű leírásokra is kiterjed. A rekonstrukciót végző építőművésznek aprólékosan ismernie kell azt a történeti és építészeti környezetet, amelyet meg akar eleveníteni. Ehhez pedig a feladatát érintő levéltári forrásokat tökéletesen fel kell tárnia. Erre az első esetre jó példa a budapesti belvárosi rk. plébánia templom, a királyi palota, a sümegi vár, vagy a fertődi Esterházy-kastély helyreállításának munkája.

Más a helyzet, ha olyan valamit kell rekonstruálni, amiből a munka kezdetén semmi sem látható. Ilyen volt az eset — például — Mátyás király visegrádi palotájának [41], a budai királyi vár Mátyás- és Zsigmond-kori részleteinek [42], vagy a szombathelyi Isis-szentélynek feltárása és rekonstrukciója alkalmával. A régészeti és műemlékvédelmi munkálatokat évekre szóló levéltári kutatás előzte meg, és tart azóta is, és folyik rendszeresen a munkálatok befejezéséig.

Megállapíthatjuk: egyedül az Országos Műemléki Felügyelőség az az egyetlen szerv az országban, amely a maga teljességében, a mai szervezet megalakítása óta, kezdettől fogva, azonnal, szervezetten nekifogott a műszaki célzatú levéltári kutatásoknak, és rendszeres archiválís munkájával évenként igen számottevő megtakarításokat ér el.

Talajmechanika

A budapesti földalatti vasút építése, Dúnaújváros létrehívása, a diósgyőri, ózdi kohóművek korszerűsítése és egyéb, hasonló feladatok olyan kérdéseket vetettek fel, amelyek teljesen meglepetésként érték a tervező és kivitelező mérnököket. Ugyanis talajmechanikai problémák vetődtek fel építés közben, és ezek megoldásához — javaslatomra — levéltári adatok tömegét kutattuk, illetőleg dolgoztuk fel, majd hasznosították az építmények statikai

áttervezésénél. A felsoroltak közül csak egyetlen esetet írok le az alábbiakban konkrét példa kedvéért.

A földalatti vasút számára készített mozgólépcsős berendezéseket befogadó betontesteken vették először észre, hogy az egymástól alig pár méter távolságban levő, azonos méretű, kivitelű és súlyú falazatok alatt különböző mértékű talajtömörödés következett be. Hasonló jelenségek az alagútrendszer más helyein is meglepetésszerűen adódtak.

A leírt jelenség okának felderítésére a következő gondolatmenet vezetett. A földminták vizsgálatából ismert volt, hogy a beépített betontestek részint szűz talajrétegekre, részint pedig városi szemétfeltöltésből származó takarórétegre épültek. Ismert volt a szemétréteg vastagsága az építkezés helyén és annak szoros környezetében, ismeretlen volt azonban a távolabbi részekben. Márpedig nem volt közömbös sem statikai, sem hidrológiai szempontból, hogy milyen a rétegsor a szóban forgó létesítmény vonalait kísérő pár száz méter szélességű övezetben.

Pest város levéltárának egykorú iratait, térképeit és vázlatait kellett gondosan átnéznünk, hogy teljesen tiszta képet kapjunk a kérdésről. Az iratokat akkoriban a Bazilikai levéltár őrizte a „Pest-Buda régi lejtmérése" című állagban [43]. Ezekből kiderült, hogy azt az egykor hepe-hupás, homokbuckás térszínt, amelyen a kiegyezés után Pest rohamosan épülni kezdett, az 1838. évi katasztrofális árvíz után, városi tanácsi felterjesztésen alapuló helytartótanácsi határozat folytán városi szeméttel feltölteni kezdték. Rottenbiller Lipót főpolgármesternek 1866. február 16-i felterjesztése szerint „. . . ezen feltöltési elv követése által a város szépítési tekintetben nagy és többé egészen helyre alig hozható kárt szenvedett, . . . mert az új épületek talajainak folyton és versenyezve történt magasabbra emelése következtében, a régebben fennálló házak eltemettettek, az újak egész emeletet a földbe fektetni kényteleníttetvén. . . káros pincelakásokat eredményezték, a város pedig azon kellemetlen helyzetbe jutott, hogy az útszákat újból és újból feltöltetni és kiköveztetni. . . kényszerült".

A levéltári anyag gondos átvizsgálásából, méterrendszerbe és mai országos szintezésünk nadapi alapszintjére való átszámítása után kiderült, hogy a feltöltés során elképesztően nagy lejtmérési hibákat követtek el. Ezeknek következtében a belvárosban, a Dunaparton, a Váci utca környékén, a Bazilikánál, és még számos helyütt, ahol ma a földalatti vasút vonala halad, 0,5-től 2,7 méterrel hibásan hajtották végre az utcák és terek feltöltését [35].

A levéltári adatokból sikerült megállapítani, hol, milyen vastag szemétréteg borítja Pest belvárosának területét. (Vannak részek, ahol 8, sőt 10 méter vastagságban.) Ezeket az adatokat a Földmérő és Talajvizsgáló Iroda térképileg is feldolgozta, és azok a továbbiakban nemcsak a földalatti vasút munkálatainál, hanem egyéb talajmechanikai problémák felmerülte alkalmával is rendelkezésre állottak tervező mérnökeinknek.

Itt kell megemlítenem azt is, hogy talajmechanikával és betonvédelemmel foglalkozó mérnökeinknek igen sok segítséget nyújtottak azok az archiválís jellegű forráskutatások, amelyek adott területeken jelentkező agresszív vizek múltbani előfordulására vonatkoznak [44].

Geokinetika (kéregmozgástan)

Az előbbi témakörrel némiképpen rokon a jelenkori kéregmozgások kimutatásával foglalkozó tudományág. Különösen azok függőleges összetevőinek mérése és meghatározása napjainkban igen nagy pontossággal történik. Lényegileg akár függőleges, akár vízszintes összetevőkkel kívánunk munkálkodni, és ennek megfelelően függőleges, illetőleg vízszintes értelmű elmozdulásokat óhajtunk meghatározni, mindenképpen a régi, legtöbb esetben múlt század végi mérési eredményekre van szükség. Ezeket kell összehasonlítanunk a mai mérési eredményekkel. Anélkül, hogy itt részleteznénk a kérdés tudományos kívánalmait és gyakorlati megoldását, csupán azt rögzítjük le, hogy az esetek túlnyomó százalékában levéltári értékű és legtöbbször levéltárakban tárolt mérési anyag a fundamentuma a geokinetikai vizsgálatoknak.

Így volt például Budapest esetében, ahol ugyancsak a földalatti vasút építése tette szükségessé ezeket a vizsgálatokat. Alapmunkálatokként Pest 1867. évi, Budának és Óbudának pedig 1872. évi háromszögelési munkálatait, illetőleg Pest-Budának 1838/40. évi VÁSÁRHELYI-féle, 1839. évi TENCZER-féle, 1863/65. évi DOLETSKO-féle és 1871/72. évi MAREK-féle szintezési adatait használtuk fel a fővárosi levéltár anyagából [45, 46].

*

A szombathelyi hévvízfeltárás alkalmából, az előkészítő munkálatok során ugyancsak sor került Szombathely város altalaja geokinetikai térképének elkészítésére, a szombathelyi városi levéltárban őrzött régi mérési adatok alapján [20]. Az ezen az alapon kimutatott vetőrendszert a mélyfúrás valóban harántolta, és ma már ontja 40 C fokos, „Salvus"-típusú, szénsavas gyógyvizét Nyugat-Magyarország egyik legfiatalabb hévforrása [47]. Példásan kellemes környezetével, építészetileg is szép kiképzésével és — nem utolsósorban — közép-európai viszonylatban is a legelsők közé számító gyógyvizével — reméljük — nemcsak a hazai betegeket vonzza majd, s nemcsak a magyar dolgozóknak adja vissza egészségüket vagy munkaképességüket, hanem gyógyító erejének híre révén egyik számottevő devizaforrásává lesz népgazdaságunknak.

Mágnesség és csillagászat

Itt említjük meg, hogy BARTA GYÖRGY a fentiekhez teljesen hasonlóan, hazai és külföldi (vagy 25—30 államból származó) levéltári adatok alapján dolgozta fel országos, kontinentális, majd világviszonylatban a mágneses

térerősség évszázados változását. Általános elismerést kiváltó tanulmányai a Föld belső magja valószínű elmozdulásának, illetőleg ritmikus vándorlásának megállapítására vezettek [48, 49, 50].

Hasonló jellegű kutatások folynak világszerte a földi nehézségi erőtér változásának meghatározása végett is. Ezek ez ideig nem jártak túl sok eredménnyel. Annál szebb és értékesebb eredmények születtek csillagászati téren, különösen az eddig kutatók számára hozzáférhetetlen volt kínai és tibeti régesrégi csillagászati feljegyzések (merőben levéltári anyag) kiaknázása és feldolgozása alapján. Az űrhajózás megvalósulásának korszakában a kozmikus térséget benépesítő csillagvilág tüzetesebb megismerésének fokozottabb gyakorlati jelentősége van.

Kéziratos térképek

A magyarországi levéltárakban a 100 000 darabot jóval meghaladó számú kéziratos térképet őriznek a XVI—XIX. századból. Ennyiről tudunk. De legalább is közel ennyi lappang ismeretlenül a hasonló korból származó akták, ügyiratok között. Már 1957-ben ismételten felhívtam az illetékes kormányzati szervek figyelmét, hogy ezzel a páratlan értékes és gazdag kinccsel kellene valamit kezdenünk. Problémafelvető tanulmányaimból [51, 52] és a hozzászólásokból [53] az is kiderült, hogy mire volna legsürgősebben szükség: a kéziratos térképek katalógusának mielőbbi elkészítésére és könyv alakjában való közzétételére.

Hogy ez a munka óriási tudományos értéke mellett mennyire a gyakorlati életet, a népgazdaság vonalán jelentkező mindennapi feladatokat szolgálná, arra ezúttal nem kívánok bővebben kitérni. Idézett tanulmányaimban bőségesen megtárgyaltuk — a hozzászólókkal együtt — a kérdésnek minden vonatkozását.

Kétségtelen, hogy néhány évtizeddel ezelőtt a régi térképanyag értékét és jelentőségét világszerte felismerték. A csehszlovák kormány központi (prágai) és szlovák tartományi (pozsonyi) szerve külön-külön kutatókirendeltségeket tart fenn Budapesten, Bécsben, Kelet-Németországban, és ugyanígy a jugoszláv központi (belgrádi) kormány is levéltári kutató műszaki delegációt tart fenn Bécsben és Budapesten a műszaki vonatkozású levéltári anyag, nem utolsósorban a kéziratos térképek lajstromba vételére és fényképeztetésére. Osztrák részről például a kismartoni tartományi múzeum külső munkatársa, KARL ULBRICH DR., a kiváló térképtörténész, évről évre nálunk tölt pár hónapot a Burgenlandot érintő kéziratos, sőt régi, nyomtatott vagy rézmetszetes sokszorosítású térképanyag átvizsgálása, filmeztetése és jegyzékbe foglalása végett.

RÓNAI ANDRÁS és PATAKI JÁNOS [53] a. id. hozzászólásában sok hasznos gyakorlati vonatkozással egészítették ki a részemről felemlített szempontokat.

Most mindezekhez, csak címszószerűen szeretnék még néhányat fűzni. Régi kéziratos térképeink felkutatása és használata gyakorlatilag fogja segíteni népgazdaságunkat egykori helyrajzi adatok térbeliségének gyors és pontos meghatározásában; régi helyrajzi vázlatoknak a mai korszerű térképekkel való megbízható egyeztetésében; mondottakon keresztül a régészeti kutatásokkal járó topográfiai felvételi és feltáró (helyszínelő) munka költségeinek csökkentésében; geomorfológiai kutatások helyszíni felvételi munkájának és költségeinek csökkentésében; a régi vízrajzi állapotok gyors és igen megbízható meghatározásában; talajeróziós kutatások során a mai állapotnak a régivel való megbízható összevetésében.

*

A régi térképek közül különös fontosságúak a városok régi térképei. Természetesen ide számítanak már a 45—50 éves térképek és tervrajzok is. Szocialista országépítésünk mai ütemében nemcsak a városok természetes fejlődése vett nagyobb iramot, hanem városfejlesztési feladataink általában megnövekedtek és többrétűvé váltak. Nem egy városban a régi, szűk térre összepréselt utcahálózatban jelennek meg új elemek: sugárutak és körutak formájában. Másutt vannak egész városrészek, de legalább is háztömbök, melyekből semmi más nem maradt meg, csak a pincék vagy a fundamentum, de azokat is takarja a humusz és a pázsit. Az egykori épületek nyomai, a csatornák futása, a villany- és vízvezetékhálózat kiépített műtárgyai legkönnyebben és legolcsóbban a sokszor már levéltárakba helyezett kéziratos térképek segítségével kereshetők és tárhatók fel.

Mérés- és műszertechnika, mérőegységek

A régi térképeken, vázlatokon feltüntetett térrajzok, vázrajzok, bányatérképek, folyami felvételek, szelvények, keresztmetszetek, épületalaprajzok stb. műszaki értékeléséhez szükségünk van a korabeli mérés- és műszertechnikának, valamint az abban az időben használatos mérőegységeknek ismeretére is. Ebből a szemszögből tekintve a kérdést, határozottan a népgazdaság érdekeit támogató tevékenységnek kell mondanunk az ilyen irányú kutatási munkát is.

Azt tapasztaljuk, hogy a szóban forgó kutatási tárgykör ma világszerte igen nagy megbecsülésnek örvend. Kézikönyvek készülnek a gyakorlati szakemberek számára az egyes államokban használatban volt régi mértékegységekről [54, 55]. Az egyes részletkérdéseket komoly tudományos igényű tanulmányok igyekeznek tisztázni. Mert tisztáznivaló van bőven.

Hogy csak egyetlen dolgot említsek, XVII. században épült erődítmények ölben megadott méretei sehogy sem vágtak a természetben lemért hosszakkal. A levéltári kutatások tisztázták, hogy az erődítmények építéséhez a minden-

napi ölmértéktől eltérő hosszúságú ölet, az ún. „erődítmény-öl" mértékegységet használták, és ennek Közép-Európában egységes jellege volt [56, 57].

Talán még érdekesebb az a példa, amelynek írásos nyomára nemrég KÁROLYI ZOLTÁN akadt [58]. Tudvalevő, hogy 1865-ben a Fertő tó kiszáradt, s vagy három esztendőn keresztül nem volt víz benne. A tó medencéjéhez jogot formáló birtokosok, főként azonban a nagybirtokok urai, a tó fenekét felszántatták, és — az egykorú feljegyzések tanúsága szerint — egészen tűrhetően jó terméseredményeket értek el. Voltak azonban a tófenéknek olyan részei, amelyeken egyáltalában nem termett semmi, sőt még fel sem szánthatták, mert olyan kemény volt a talaj, mint a kő, és vastagon borította a nyári szárazságban fehéren kivirágzó sziksó. Ezt a sót az uradalmak összesöprették, és két inzsellért, név szerint HECKE VENCELT és MOSER HANSot bízták meg azzal, hogy készítsenek vázrajzot és kimutatást arról, hogy egy-egy négyszögölön évenként hány mázsa sót sikerült összegyűjteni. Ez a kimutatás igen nagy érték napjaink Fertő-kutatásához, mert — miután KÁROLYI Z. tisztázta a szóban forgó iratban előforduló terület- és súlymértékeket, az egész anyag átszámíthatóvá vált mai mérőegységekre, és ezzel egyúttal megvolt a mai sókoncentráció-kutatási eredményekkel való, igen hasznosnak bizonyult összehasonlítás közvetlen lehetősége.

A Fertő-kutatás élén ma az osztrák szakemberek állanak, de megalakult már a Fertő tó természeti viszonyait tanulmányozó magyar tudományos munkaközösség is. Ez a munka pedig azért különös fontosságú, mert a tó sókoncentrációja — az osztrák kutatók eddigi megállapítása szerint — összefüggésben van a közeli környéken feltételezhető szénhidrogén (kőolaj és földgáz) előfordulásokkal.

Feladatok és javaslatok

Fentiekben talán sikerült elegendő példával rávilágítanunk arra, hogy a levéltári kutatói munkának számos olyan ága van, amely a legszorosabb kapcsolatban van a gyakorlati élettel, és hathatósan tudja támogatni a népgazdaságot mindennapi feladataiban. Érdekes és különös jelenség, hogy erre a kimeríthetetlen gazdagságú, és mindig új meg új lehetőségeket kínáló forrásanyagnak rendszeres kutatására még nem gondolt és semmiféle komoly lépést sem tett sem a kormányzat, sem a Magyar Tudományos Akadémia. Erről is elmondható az, amit MÁLYUSZ ELEMÉR már húsz évvel ezelőtt a magyar történetkutatásról és történetírásról írt általánosságban: csupán egy-két magára hagyott ember küszködik ott, ahol valóságos iskoláknak kellene működniök [59].

A fenti idézetben tulajdonképpen benne foglaltatik minden. Egyes emberek küszködnek ott, ahol intézményesen kellene biztosítani a kutatómunka gyors és célirányos előhaladását. Kétségtelen azonban az is, hogy nem minden múlik azon, hogy a felső irányító szervek nem látják, vagy nem látnák a tennivalókat, hanem azon is, hogy rendkívül kevés az az ember, aki alkalmas a

fentiekben vázolt kutatómunkára. Nézzük meg röviden, ezúttal kizárólag magyar viszonylatban a követelményeket.

A szóbajöhető és példákkal illusztrált anyag kisebb részében XI—XV. századi és latin nyelvű, túlnyomórészt azonban XVI—XIX. századi latinságú és németségű, illetőleg a XVIII. század végétől kezdve imitt-amott akad már benne magyar nyelvű szöveg is, amely a XIX. század 30-as éveitől kezdve lassanként általánossá lesz műszaki, hivatalos iratváltásunkban; igazi helyét azonban csak a kiegyezés után foglalja el. Ebből következik, hogy mai tanítási rendszerünk mellett a műszaki, illetőleg csak műszaki képzettségű egyén: bármilyen szakos mérnök, nem boldogulhat a feladattal, illetőleg annak csakis a XVIII. század végi és XIX. századi magyar nyelvű anyagával boldogul. A fiatal mérnökök pedig, hacsak nem hozták magukkal a szülői házból a német nyelv ismeretét, ugyanezen időszakok német nyelvű írott emlékeivel sem tudnak mit kezdeni.

Mindezek mellett és után már alig kell szólnom a latin nyelvről. Fiatal kartársaink között azok számát, akik tudnak annyira latinul, hogy kellő szilárd alappal rendelkeznek ahhoz, hogy egyáltalán levéltári kutatóvá képezhetők legyenek, csak az ezrelék tört részeivel lehet kifejezni. Ebből pedig az következik, hogy a műszaki feladatok megoldását intéző kormányzati (főhatósági) szerveknek lenne feladatuk gondoskodni arról, hogy legalább nagyobb, átfogó tárgykörönként egy-egy mérnököt — G. I. Svec főmérnök esetéhez hasonlóan — kiképeztessenek a levéltári kutatómunkára. Bizonyos, hogy a befektetett energia és költség, valamint a kutatás költsége is, sok ezerszeresen visszatérülne.

Kétségtelen, hogy a szóban forgó kutatások terén az Országos Műemléki Felügyelőség mellett első helyen a Nehézipari Minisztériumot kell említenünk, mert annak megbízásából, Gyulay Zoltán egyetemi tanár vezetésével, 16 komoly képzettségű levéltári kutatót alkalmaz rendszeres kutatómunkára: a bányászati vonatkozású régi archiválís anyag és a kéziratos régi bányatérképek összegyűjtésére. Utána az Országos Vízügyi Főigazgatóság tett ez ideig legtöbbet, mert lehetővé teszi, hogy bizonyos feladatok megoldásához a joghatósági körébe tartozó szervek a levéltári forrásokat is felhasználják. Így például számottevően támogatja a Balatoni Intézőbizottság munkásságát — többek közt abban, hogy a Balaton tó medencéjének alakulását — levéltári források felkutatásával is — *több évszázados viszonylatban* megállapíthassa, és ennek alapján a partvédelmi tennivalókról hosszú perspektívájú tervet készíthessen.

Ha a közvetlen gazdasági hasznot nem jelentő történeti kutatásokra a Magyar Tudományos Akadémia és a Művelődésügyi Minisztérium, sőt a Honvédelmi Minisztérium is — igen helyesen — olyan hatalmas összegeket költ, amilyen anyagi támogatást nem élvezett a magyar történetírás ez ideig sohasem, akkor valóban itt lenne az ideje annak, hogy már csak újabb ötéves terveink jobb végrehajtásának érdekében is foglalkozzunk a fentiekben felvetett gondolat mielőbbi valóraváltásával.

Meg kellene tehát szervezni a levéltári kutatásoknak azt az ágát, amely a népgazdaság napi feladatai számára közvetlenül értékesíthető kutatási eredményeket tud nyújtani.

Nem leszünk elsők ezen a téren. A moszkvai és a kievi Tudományos Akadémia már több mint tíz évvel ezelőtt, ilyen célkitűzéssel létrehozott egy-egy tudományos munkaközösséget. Ezeknek vezetője egy-egy speciálisan képzett, tehát náluk elsősorban az egyházi ószláv, továbbá a német és francia nyelvben, valamint a megfelelő korok paleográfiájában jártas mérnök (a kieviben G. I. Svec), tagjai pedig részben ugyancsak mérnökök vagy műszaki képzettségű egyének, részben pedig hivatásos történészek, illetőleg levéltári kutatók, esetleg geográfusok, kartográfusok és geológusok.

A jugoszlávok csakis a vízügyi szolgálat terén tették meg az ez irányú legelső lépést. A belgrádi vízgazdálkodási tudományos intézet egyik, a levéltári kutatásokban jártas főmérnöke évenként 3—4 hónapot Bécsben tölt, hogy az osztrák levéltárakban őrzött, Jugoszláviát érdeklő vízgazdálkodási vonatkozású anyagot felderítse, feldolgozza és megfelelő másolatok formájában hazaszállítsa. Az esztendő további részében a jugoszláviai levéltárakban búvárkodik.

A Csehszlovák Tudományos Akadémia 6—8, néha még több személyből álló kutatócsoportot, sőt formális levéltári kutatódelegációt tart állandóan Budapesten és időnként Bécsben. Éppen az ő tevékenységük jó példa arra, hogy egyetlen jó forrás fellelése nemcsak évtizedekre, sőt esetükben évszázadokra fedezi a kutatócsoport fenntartásának költségeit, hanem számokkal ki nem fejezhető előnyt jelenthet a népgazdaságnak.

Történt ugyanis, hogy Heckenast G. kartársunk levéltári kutatás közben egy olyan iratcsomóra talált, amelyben jelentik a kamarának, hogy egyik felvidéki aranybányánk mély vágatait hirtelen elöntötte a víz; eltávolítani nem tudják, így az aranybányászatot ott azonnal be kellett szüntetniük. A szóban forgó iratcsomóra felhívta a szlovák kutatók figyelmét. Ennek alapján lehetővé vált az iratok előzményeinek, valamint a szomszédos érces területekre vonatkozó iratanyagoknak felkutatása. Ezt követően a szlovák bányamérnököknek sikerült a helyet pontosan azonosítaniuk. Megtalálták az egykor elöntött bányarészt, és ma Szlovákiában, az évszázadokkal ezelőtt elöntött vágatokban, virágzó aranybánya működik.

A magyarországi műszaki vonatkozású levéltári anyagnak igen számottevő, és nagyon sok esetben a legértékesebb része: az egykori ügyiratokhoz csatolt vázlatok, tervek és térképmellékletek általában, elbírálás és jóváhagyás végett felküldettek Bécsbe, és ott is maradtak. Az ottani levéltári kezelési szabályzatnak megfelelően az ügyiratokat és a nagy terjedelmű mellékleteket a felterjesztésektől, ügyiratoktól szétválasztották és ma külön kezelik. A mutatókon azonban ma már nem lehet egykönnyen eligazodni, tehát időbe és fáradtságba kerül, míg az összetartozó anyagot a kutató megtalálja. Ebből követ-

kezik, hogy futólagosan és mellékesen nem is lehet ezzel a feladattal foglalkozni.

Ahova levéltári kutatásokban járatos és a levéltári anyaggal ismerős szakember csak futólagosan is beletekint, számunkra értékes forrásokra talál. BARACZKA ISTVÁN például csak néhány napot töltött Zágrábban, és abból is csupán néhány órát a Jugoszláv Tudományos Akadémia zágrábi levéltárában. És ez alatt a pár óra alatt, amikor is csak futólagosan tanulmányozhatta a levéltár anyagát, mintegy 50 darab XVI. századi magyar nyelvű és magyarországi vonatkozású levél és irat került a kezébe; közöttük egy 1696-ból származó vízszabályozási egyezség, melyet a frankaiak (répcesarudiak) és a kalastromiak (borsmonostoriak) kötöttek egymással a Répce medrének szabályozására vonatkozóan [60].

Az előadottak alapján talán rájönnek, talán belátják illetékes fórumaink: nagyon is eljött az ideje annak, hogy a szóban forgó lehetőségek kiaknázására gondoljunk, és intézményesen biztosítsuk a levéltári kutatások vonalán is a népgazdaság közvetlen szolgálatát.

Ha csak a legnagyobb érdekelt intézményeink, hogy csak néhányat említsek közülük, a Nehézipari Minisztérium, az Országos Földtani Főigazgatóság, az Országos Vízügyi Főigazgatóság, az Építésügyi Minisztérium, a Posta- és Közlekedésügyi Minisztérium, a Földművelésügyi Minisztérium és a joghatóságuk alá tartozó mindazok az intézetek, intézmények és szervek, amelyek az ebben a tanulmányban kifejtett levéltári kutatásokban érdekeltek és ezekbe bekapcsolódni hajlandók lennének, évi költségvetésük tízezred részének csak egyharmadát hajlandók lennének erre a célra áldozni, olyan kutatócsoportot lehetne létrehozni, és fokozatosan kinevelni, kifejleszteni, amelynek munkája sok ezerszeresen térítené vissza a reá fordított személyi és dologi kiadásokat.

A feladatok és a kínálkozó lehetőségek olyan nagyok, hogy néhány év alatt, például akadémiai szinten, komoly, nagy műszaki történeti tudományos kutatóintézetet lehetne kifejleszteni. De akár erre szánná magát kormányzatunk, akár az egyes intézmények, szervek, intézetek külön-külön folytattatnák levéltári kutatásaikat, mindenképpen szükségesnek mutatkozik bizonyos kooperáció megteremtése. (Ki gondolná például, hogy merőben egészségügyi, tehát orvosi vonatkozású XVIII. századi iratanyagból a legpompásabb hidrológiai és balneológiai adatok tömege kerül elő, köztük a Fertő tó vízállásának változására vonatkozó egykorú, szabályos leolvasás-sorozattal!)

* * *

Röviden tehát a következőkben összegezhetnők a mai állapotot.

1. Biztos tudomásunk van arról, hogy a magyarországi vonatkozású levéltári anyagban nagyon sokrétű, és számokban szinte ki sem fejezhetően

nagy értékű olyan forrásanyag lappang, amely a népgazdaság javára, az ötéves tervek végrehajtása során értékesíthető lenne.

2. Függetlenül attól, hogy hol őrzik ezt az anyagot: részint belföldi, külföldi, állami, egyházi, vagy magántulajdonban levő levéltárakban, hivatalokban, közgyűjteményekben, parókiákon, vagy magánlakásokban: intézményesen gondoskodni kellene annak módszeres feltárásáról.

3. A feltárás munkáját szakmai levéltári leltárak készítésével kapcsolatban javasolnám végezni. Első lépésként általános leltárakat lenne célszerű készíteni. Ezek állagokig lebontva ismertetnék a még — úgyszólván — teljességgel ismeretlen anyagot. Második lépésben kerülhet sor az anyagnak teljes és részletes, cím, illetőleg tárgy szerinti feldolgozására.

4. Egy-egy érdekes és napi problémák szemszögéből fontos tárgykör feldolgozása a 3. alatt leírt munka közben is végrehajtható volna.

5. Kívánatos lenne gondoskodni arról, hogy a különböző műszaki ágazatok szerinti levéltári kutatói munkában résztvevők között szoros együttműködés alakuljon ki. A munkálatok koordinálásának szilárd alapját tulajdonképpen már a munka megszervezése alkalmával, hivatalból lenne célszerű megteremteni.

Arról nem beszéltünk az eddigiekben, és zárszóként futólag említem csak, hogy a fenti, gazdaságilag produktív jellegű kutatás mellett, ugyanazon költséggel jönne létre egy másik eredmény is: azoknak a műszaki történeti dokumentumoknak tömege, amelyeknek nem-ismeretében ma csak 40—70 évre visszamenő perspektívában látjuk és értékeljük a dolgokat. De nem ismerjük tiszteletre méltó műszaki múltunk több évszázados gyökereit; azoknak a szilárd fundamentomoknak mélységeit, amelyekből a XVIII—XIX. század fordulóján a magyar mérnökök európai szintű szellemóriásai — korukat megelőzve — kisarjadtak.

IRODALOM

1. Bendefy L.: A sóbányászat lehetőségei Magyarországon. Bány. Lapok 94. évf. 519—531 l. Bp. 1961
2. Bendefy L.: Történeti források felhasználása bányageológiai kutatásoknál. Jöv. Mélykutatás 1946. évi Jel. (Pénzügymin. kiadása) 226—231 l. Bp. 1946
3. Vitális S.: Földtani kutatásaink a szocializmus építésében. Földt. Közl. 88. kötet, 356—358 l. Bp. 1958

3a. Vidacs A.: Régi bányászati kutatások a gyöngyösoroszi ércbánya környékén. Bány. Lapok 91. évf. 733—738. l. Bp. 1958.

4. Kertai Gy.: Elnöki megnyitóbeszéd a M. Földtani Társulat 1960. október 21—23-i egri vándorgyűlése alkalmával. Földt. Közl. 91. kötet, 88—89 l. Bp. 1961
5. Gyárfás I.: Dobó István Egerben. Ért. Tört. tud. köréből (Akad.) VIII. kt. 5. sz. 46, 64. 72, 73 11. Bp. 1879

5a. Bendefy L.: Szombathelyi Benedek rudasmester. Adatok a középkori magyar földmérés történetéhez. 1—70 l. Műsz. Tud. Tört. Kiadv. Bpest, 1959

6. Dobó István számadáskönyvei: OL. Kamara — Városi és kamarai számadások f. 13. Fol. Lat. 1180 a — III. 635*b* lapon
7. Lengyel E.: Telkibánya környékének ércgenetikai viszonyai. — Jöv. Mélykutatás 1947—1948. évi Jel. 308—319 l. Bp. 1948

8. SCHRÉTER Z.: Adatok a Telkibánya vidéki érces terület földtani viszonyaihoz. Uo. 320—334 l. Bp. 1948
9. POLLNER J.: Jelentés a pányoki és telkibányai érckutatások bányászati szemléjéről. Uo. 335—341 l. Bp. 1948
10. BENDEFY L.: Összefoglaló jelentés az 1947/48. évi munkálatokról. Uo. 346 l. Bp. 1948
11. PANTÓ D.: A dunai aranymosás kérdése. Földt. Közl. 65. kötet. 182—274 l. (40 ábrával) Bp. 1935
12. JÁRDÁNYI—PAULOVICS I.: A vasvári régészeti kutatások eredményei az 1948. évben. Debreceni Tud. Egyet. Régészeti Int. Közl. Debrecen. 1949
13. HEGEDÜS és NOVÁKI: Újabb adatok a vasvári vaskohóról és Vasvár vaskohászati múltjáról. Vasi Szemle 1961/II. kt. 44—60 l. Szombathely. 1961
14. A Vay-család golopi levéltárának a háború után még fellelhető részét ma a Tiszán inneni Református Egyház sárospataki levéltára külön fondként őrzi. A szóban forgó irat-anyag is ott található.
15. 'SIGMOND E.: Alföldünk szikeseinek válfajairól. Földt. Közl. 36. kötet. 389—403 l. Bp. 1906
16. TREITZ P.: Sós földek a Nagy Alföldön. Földt. Közl. 38. kötet. 6—31. l. Bp. 1908
17. RÉTHLY A.: A Kárpát-medencék földrengései (455—1918). Akad. Kiadó. Bp. 1952
18. HORVÁTH T. A.: Levélbeni szíves közlése Bendefyhez, 1958. szept. 19
19. BENDEFY L.: Szeizmotektonikai vizsgálatok Budapest főváros környékén. Földr. Ért. 7. évf. 141—165 l. Bp. 1958
20. BENDEFY L.: Hév- és gyógyvízfeltárási lehetőségek Szombathely határában. Vasi Szemle. 1958/II. kt. 48—62 l. Szombathely. 1958
21. BENDEFY L.: Szeizmotektonikai vizsgálatok a Dunántúl nyugati térségében. Földr. Ért. 10. évf. 181—210 l. Bp. 1961
22. GORSKOV, G. P.: Seismicity charts for preventional planning — Geofiz. Közl. VII. kt. 195—198 l. Bp. 1958
23. DETRE L.: Üzenetek a világűrből. Kozmikus hatások a Földön. 66—72. l. Bp. 1939
24. —, A Hudson-öböl óriásmeteor becsapódási helye? Élet és Tudomány, 16. évf. 1372 l. Bp. 1961
25. SZABÓ K.: Kecskemét szőlő- és gyümölcstermelésének múltja. (A Katona József Társ. kiad.) Kecskemét, 1934
26. VISNYA A.: A szőlőjövések könyve. Búvár. 1935. szept. szám. 610—613 l. Bp. 1935
27. SZÖVÉNYI I.: Kőszeg szőlőkultúrája a Szőlőkönyv tükrében. Vasi Szemle, 1958/II. kt. 27—34 l. Szombathely. 1958
28. BERKES Z.: Éghajlatingadozások tükröződése a kőszegi szőlőhajtások hosszában. Meteorol. Int. kisebb kiadv. új sor. 15. sz. 1—16 l. Bp. 1942
29. SZESZTAY K.: A vízjárás előrejelzésének néhány módszere és hazai alkalmazásuk. Vízügyi Közl. 1961/3 sz. 249—292 l. Bp. 1961
30. SZESZTAY K.: A folyók vízjárásának előrejelzése. (Műsz. kandidátusi értekezés) 1—244 l. Bp. 1954
31. LÁSZLÓFFY W.: Dunavölgyi hidrológiai előrejelzési konferencia Budapest, 1961. április 11—14. Vízügyi Közl. 1961/3 sz. 243—248 l. Bp. 1961
32. BENCZE P.: A földi elektromágneses tér és a légelektromosság közötti kapcsolatról. Magyar Geofizika II. évf. 1—2 sz. 132 l. Bp. 1961
33. SVEC, G. I.: Sztik Dnyepra nyizse Kieva. (A Dnyeper vízjárása a Kiev alatti szakaszon.) Az Ukrán Tud. Akad. kiadása. 1—126 l. Kiev. 1957
34. Eredetije: Wiener Nationalbibliothek, Kartensammlung: „Albertina-Beständen" c. gyűjteményben.
35. BENDEFY L.: Szintezési munkálatok Magyarországon 1820—1920. (Akad.) 1—736 l. Bp. 1958
36. SZESZTAY K.: A Keszthelyi öböl feliszapolódása. 1—68 l. 19 ábra- és 4 táblázatmellékkel. (VITUKI kiad.) Bp. 1961
37. VASS IMRE: Az aggteleki Baradla barlang térképe és metszete. Felmérte — Pesth, 1831
38. KESSLER H.: Aggteleki felfedezések. Túristaság és Alpinizmus. 22. évf. 10. sz. Bp. 1932
39. KESSLER H.: Az aggteleki barlang hidrográfiája. Földr. Közl. 66. évf. 1—30. l. Bp. 1938
40. KESSLER. H.: Szíves közlése szerint az eredetiről készített fényképmásolatot a Magyarországi Idegenforgalmi Hivatal budapesti központja kapta és őrzi, ami véleményünk szerint helytelen dolog. A másolatnak a Hadtörténeti Levéltárban, mint az eredeti ügyiratot őrző intézménynél a helye.
41. DERCSÉNYI D.: Visegrád műemlékei. Bp. 1951
42. GERŐ L.: A budai vár helyreállítása. Bp. 1951
43. Pest-Buda régi lejtmérése: Budapesti Fővárosi Levéltár (régebben: Központi Levéltár). Intima A. N. Anno 1868. Lejtmérési munkák 4819

44. BICZOK, I.: Betonkorrosion und Betonschutz. (Akad. kiadó) Bp. 1960
45. BENDEFY L.: Vízszintes értelmű szekuláris mozgások Budapest területén. Földméréstani Közl. 5. évf. 19—25 l. és 67—76 l. 3 térképmelléklettel. Bp. 1953
46. BENDEFY L.: Szekuláris mozgások Budapest térségében. (Fejezet a „Budapest természeti képe" c. műből) (Akad.) Bp. 1958
47. BENDEFY L.: Vasmegyei mélyfúrások. Vasi Szemle 1961/II. sz. 24—44 l. Szombathely, 1961
48. BARTA GY.: A földmágneses tér évszázados változásának longitudinális és transzverzális effektusa. Geofiz. Közl. VII. kt. 3—31 l. Bp. 1958
49. BARTA GY.: A Föld mágneses sarkainak és középpontjainak időbeli változásáról — Geofiz. Közl. VIII. kt. 3—18. l. Bp. 1959
50. BARTA GY.: A földmágneses tér évszázados változásának okáról. Magyar Geofizika, II. évf. 125—126 l. Bp. 1961
51. BENDEFY L.: Kéziratos térképeink katalógusának kérdéséhez. Geod. és Kartogr. 9. évf. 170—175 l. Bp. 1957
52. BENDEFY L.: Mégegyszer kéziratos térképeink katalógusáról. Geod. és Kartogr. 10. évf. 214—215 l. Bp. 1958
53. PATAKI J.—RÓNAI A.—DÁVID Z.: Hozzászólások kéziratos térképeink katalógusának kérdéséhez. Geod. és Kartogr. 10. évf. 216—218 l. Bp. 1958
54. LITTROW, J. J.: Handbuch der vorzüglichsten Münzen, Masse und Gewichte zur Vergleichung mit denen des österreichischen Kaiserstaates. 1—135 l. Wien, 1865
55. v. ALBERTI. H. J.: Mass und Gewicht. 1—435 l. Berlin, 1957
56. ULBRICH. K.: Der Kartenmaszstab und seine Bestimmung in österreichischen vormetrischen Kartenwerke. Mitt. Geogr. Ges. Bd. 98. H. 2. Wien, 1956
57. BENDEFY L.: Középkori magyar hossz- és területmértékek. (Fejezetek a magyar mérésügy történetéből. 45—97 l.) Bp. 1959
58. HECKE V. és MOSER H. jelentése a kiszáradt Fertő tó sziksós talajáról. Mosonmagyaróvári Áll. Ltárban
59. MÁLYUSZ E.: A magyar történettudomány. 6. l. Bp. 1940
60. BARACZKA I.: Vízszabályozási egyezség Sopron vármegyében 1696-ból. — Soproni Szemle XV. évf. 2. sz. 168—170 l. Sopron, 1961

ÖSSZEFOGLALÁS

Az utolsó évszázadban teljesen kialakultak a történetírás tudományos és kritikai módszerei, és a forráskutatás igényei is az alapkívánalmakhoz idomultak. Különös jelenség, hogy — sajátos adottságok miatt — a forráskutatás csakis a tisztán történetírói kívánalmakhoz igazodik, és ennek folytán, noha a nagy tömegek történelemszemléletének kialakítása révén az életet szolgálja, és ideológiai téren be is tölti társadalmi funkcióját, kevéssé szolgálja a mindennapi élet felvetette gazdasági problémákat.

Szerző számos példával azt igazolja, hogy a levéltári forrásanyag hogyan lehet hasznára gazdasági életünknek. Ez a holtnak, elavultnak látszó anyag hozzáértő szakember kezében felbecsülhetetlen érték. De csak akkor, ha egyugyanaz a személy a szükséges szakmai és történeti felkészültség mellett levéltári kutatói gyakorlattal, nyelvi és paleográfiai ismeretekkel is rendelkezik. Ekkor a holt levéltári anyagból élő, gyakorlati valóság lesz, mert csak észre kell vennie az anyagban a hasznosítható kincseket, mint a folyam homokjában az aranyszemeket.

Olyan tapasztalati elméletet ad a szerző, amely filmszerűen érdekes és izgató, épp ezért meg is tud győzni arról, hogy a levéltári célirányos kutatásból népgazdaságunk komoly értékeket találhat és nyerhet. A tanulmány végén ilyen célú javaslatait foglalja tömören össze.

ADATOK A KOHÁSZAT MAGYARORSZÁGI TÖRTÉNETÉHEZ VIII.*

A KISLŐDI VASHÁMOR TÖRTÉNETE II. r.

Dr. techn. h. c. SCHLEICHER ALADÁR
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett 1961. november 20-án]

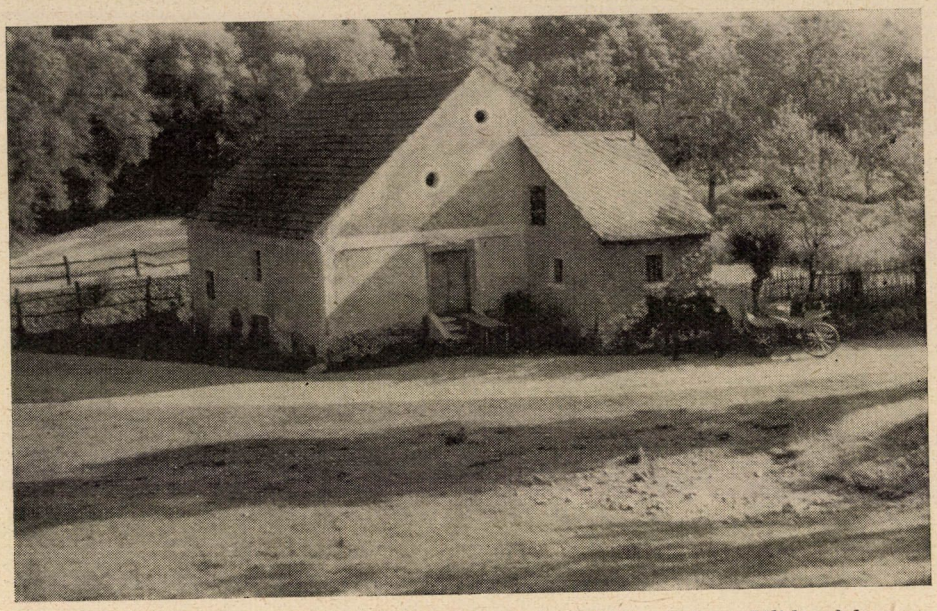
Egyik előző közleményünkben [1] ismertettük a Veszprém megyei kislődi vashámor XVIII. századi történetét, amikor is megállapítottuk, hogy a részleteket illetőleg a hozzáférhető levéltári adatok elég szerények. Leszögeztük azt is, hogy a tárgyra nézve feltehetően a selmeci (Banska Štiavnica-i) gazdag bányászati levéltárban lennének Kislődre vonatkozó adatok találhatók.

Azóta alkalmunk volt a selmeci levéltárban kutatást folytatni, ami Kislődre vonatkozólag sok említésre méltó adatot tárt fel. Ezek nyilvánosságra hozatala, valamint az első közlemény néhány téves adatának helyesbítése, továbbá több, eddig mellőzött irodalmi adat közlése végett az alábbiakban beszámolunk az újabb kutatási eredményekről [2].

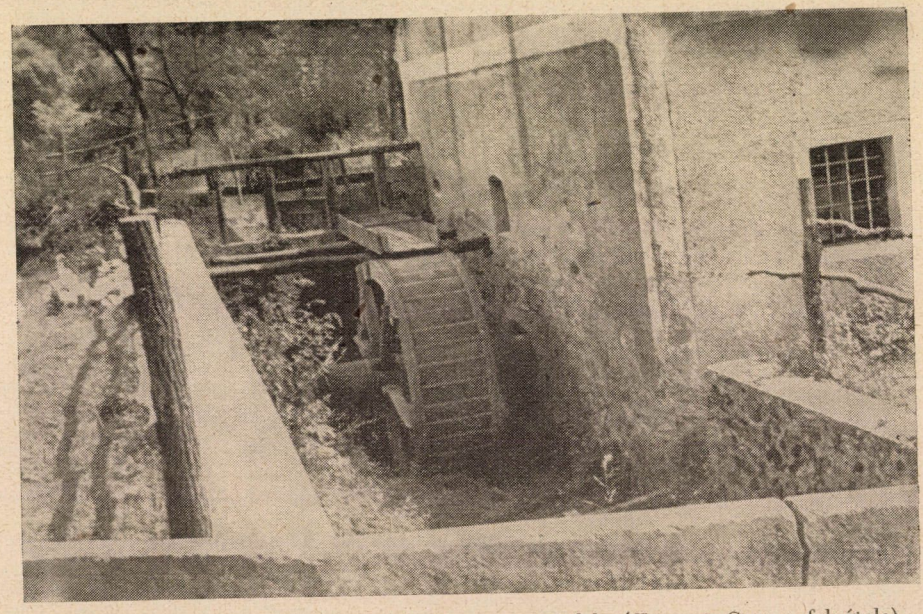
Újabb helyszíni szemle alapján helyesbítenünk kell mindenekelőtt a kohó helyét illetően [1]-ben hibásan közölt adatot. A kohó ui. [1] 2. ábráján feltüntetett 335-ös magassági ponttól valóban ÉÉNy-ra, de az ezen irányban berajzolt malomtól északra, tehát a vasúti töltés és a Torna-víz között, a patak jobb oldalán, a vasútvonaltól mintegy 50 m-nyire állott. Az [1] 1. ábráján feltüntetett falmaradványokat 1956 óta, amikor a fényképfelvétel készült, hivatlanok teljesen elhordták, már csak a salakhányó szerény maradványai vannak a helyszínen.

Mivel ilyenformán a kohó minden épületmaradványa megsemmisült, az 1. és 2. ábrán bemutatjuk annak az épületnek két képét, amely az [1] tanulmány 2. ábráján feltüntetett Vasbánya nevű telepen ma is áll és amelyet a törzsökös lakosság még most is „Eisenhammer" néven ismer. Szájhagyomány szerint ez volt a vasműhöz tartozó tulajdonképpeni vashámor, vízikerékkel

* Ebben a sorozatban eddig megjelentek a szerző következő munkái: *I.* A kohászat története a Mátra-hegység területén. Acta Technica *2* (1951) 3/46. (Németül.) *II.* A sárgaréz késő középkori feldolgozása és a dróthúzás kezdete Magyarországon. Magy. Tud. Akad. Műsz. Tud. Oszt. Közl. *9* (1953) 367/370. *III.* Az 1813. évben épült és 1952-ben újjáépített újmassai nagyolvasztó. Uo. *12* (1954) 403/411. *IV.* A tellur első nagyüzemi előállítása. Acta Technica *9* (1954) 213/222. (Németül.) *V.* A kislődi vashámor története. Nyersvastermelés bauxitos elegyből a XVIII. században. Magy. Tud. Akad. Műsz. Tud. Oszt. Közl. *21* (1957) 395/411. *VI.* Nagyolvasztó és hozzátartozó fúvógép terve 1816-ból. Uo. *22* (1958) 91/97. *VII.* Magyarország mint az ún. európai amalgamáció bölcsője. Uo. *29* (1961) 407/416.

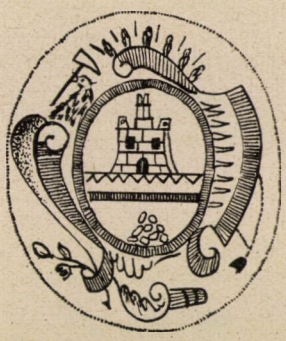


1. ábra. A kislődi Vasbánya-telepen álló XVIII. századbeli vashámor déli homlokzata (KISZELY GYULA felvétele)



2. ábra. Az 1. ábrán feltüntetett épület nyugati fala (KISZELY GYULA felvétele)

hajtott kalapáccsal, vagyis pöröllyel, „melynek zaját sok km-nyire hallhatták". Tény, hogy az [1] tanulmányunk 16. jegyzetében idézett, 1770. évből származó szerződés 10. pontja „Schmiedmühle"-t, azaz — a fűrész-, papír- stb. malom mintájára — kovácsmalmot említ, ami a szájhagyományt megerősíti. Az épület déli falán a homlokzat felső harmadában fordított címermezőben *H* és ez alatt *179.* van, a negyedik évszám nem olvasható, a *H* nyilván „Hammer"-t jelent. Ezt a hámort alább SCHWARZKÖNIG is a kohótól elkülönítve említi. A fényképfelvételek 1960-ban készültek; amikor e sorok írója 1956-ban a hely színén járt, emlékezete szerint 1763 vagy 1765 volt a falon olvasható. A 60-as évek valószínűsége azért is nagyobb, mert különben az 1770-ben kelt



3. ábra

szerződés azt nem említhette volna, de — amint alább látni fogjuk — a 90-es években a vállalat már annyi temérdek gonddal küszködött, hogy ilyen építkezés akkor már elképzelhetetlen volt. Az épületben a DNY-i sarokban a meszelés alatt kormos falfelületet találtak, ami kovácstűz nyoma lehet. A házban később — egészen a legutóbbi évekig — gabonaőrlő malom működött, így az épület nemcsak koránál fogva, hanem a még meglevő malomberendezés miatt is jogosan tekinthető ipari műemléknek.

A telep berendezéseit illetőleg a levéltári kutatás műszaki adatot csak keveset, rajzokat egyáltalában nem tárt fel.* Érdekes bizonyíték azonban egy pecsétviaszlenyomat, amely egyik 1772-ből származó iraton a már [1]-ben sokszor emlegetett SCHEBELLE principális aláírása mellett van. Ennek szabadkézi rajzát a 3. ábra, a szfragisztikai (pecséttani) előírásoknak megfelelően készült gipszlenyomata képét pedig a 4. ábra mutatja. Mindkét ábrán olvasztó képét

* A Levéltárak Országos Központjának küldöttsége állandóan a bécsi állami és udvari kamarai levéltárban dolgozik, ahol már eddig is sok magyarországi vonatkozású műszaki rajzot talált. Úgy látszik, hogy az abszolút bécsi kormány központosító törekvésében mindent Bécsbe irányított s ezért nem találtunk Selmecen rajzokat, de hozzájárult ehhez, hogy az egyes művekhez visszaküldött rajzok különböző okok folytán megsemmisültek. Reméljük, hogy a Bécsben talált műszaki rajzok feldolgozása meg fog történni.

látjuk. Természetesen elképzelhető, hogy SCHEBELLE pecsétnyomóján idealizált vagy másutt látott olvasztó rajzát ábrázolta volna. De mert tudjuk róla, hogy mennyi odaadással csüngött neki termérdek gondot okozó vállalkozásán, feltételezhető, hogy vállalata iránti szeretetből is saját olvasztójának képét örökítette meg pecsétnyomóján. Abban a korban, de feltehetően máskor is, szokás volt, hogy egyes foglalkozási ágak és mesterségek művelői pecsétnyomóikon saját szerszámaikat és eszközeiket ábrázolták [25].

Ami a 3. és 4. ábrát illeti, alakja szerint az olvasztót egyaránt lehet a „Stückofen"-nek vagy a „Floßofen"-nek (l. erre nézve [1], 399. l. 1. lábjegyzetét)

4. ábra

nevezett olvasztó valamelyikének, akár „Hochofen"-nek tekinteni. Az bizonyos, hogy a selmeci levéltár ide vonatkozó iratai — mind a vállalat, mind a bányabíróság részéről — következetesen nagyolvasztóról írnak. Mivel a bányabíróság emberei részben műszaki szakértők — pl. az 1780-as években a híres-nevezetes selmeci akadémia kohász professzora: RUPRECHT ANTAL ülnökként vett részt a tárgyalásokon és tanári állása mellett bírósági előadóként is működött — voltak, valószínűtlen, hogy az olvasztó megítélésében tévedtek volna.

De van erre döntő bizonyítékunk is. 1791-ben, amikor a kislődi vasgyár már nagy nehézségekkel küzdött, feles részesedést ajánlott a kincstárnak, mire Kislődre küldték a rónici — az ország akkor legnagyobb — vasgyárának vezetőjét: SCHWARZKÖNIG Jánost, hogy adjon véleményt a kislődi bánya és kohó állapotáról. Nevezett 1791. nov. 14-én Rónicon kelt jelentésében beszámolt a selmeci főkamaragrófi hivatalnak küldetéséről és abban számos helyen következetesen nagyolvasztóról ír [3]. SCHWARZKÖNIG korának kiváló kohásza volt, így pl. megalapozója az ún. rónici frissítő eljárásnak [4], róla képtelenség

feltételezni, hogy a nagyolvasztót az akkor még használatos egyéb olvasztó fajtáktól ne tudta volna megkülönböztetni.* SCHWARZKÖNIG jelentésével az alábbiakban még többször foglalkozunk.

Kislődön — mint látni fogjuk — öntőműhely is volt, de [1] alapján is tudjuk, hogy ott sokféle öntvény készült, valószínű tehát, hogy az olvasztó csapoló nyílása előtt gyűjtőgödör (Vorherd = előgyüjtő) lehetett, amelyből a folyékony nyersvasat kimeríthették. Sajnos, az olvasztóról többet nem mondhatunk, a fújtatót is csak SCHWARZKÖNIG említi. Amikor 1960-ban a helyet kitisztíttattuk, hogy az egykori műhely talpát felássuk, a falmaradványok közben történt önkényes elhordása után olyan sivár kép fogadott, ami kedvünket szegte a további kutatáshoz, de egészen valószínű, hogy annak amúgy sem lett volna eredménye.

A selmeci iratok között az 1790 körüli évekből van egy [5], amely arról szól, hogy DECKER Fülöp pécsváradi vaskő- és kőszénbánya társtulajdonos a bányahatóságtól kincstári támogatást kér „Blauöfen"-ek felállítására, amire azt a választ kapta, hogy Kislődről TSCHESCHKA Ferencet fel fogják kérni, menjen Pécsváradra és vizsgálja meg a helyi viszonyokat. Ez az adat némiképpen elgondolkoztató lehetne, ha a fentiek alapján nem tudnók határozottan, hogy Kislődön nagyolvasztó volt, mert hiszen ennek alapján feltételezhető lehetne, hogy a bányahatóság azért fordult TSCHESCHKÁhoz, mert őt a „Blauofen" üzemében jártasnak vélte. Egészen bizonyos, hogy nevezett ilyen jártasságot Kislődön nem szerezhetett, inkább azt hinnők, hogy a bányahatóságnak már terhére volt ez az ügy és azt egyszerűen le akarta magáról rázni [6].

A „Blauofen" rokona a „Stückofen"-nek, 4—6 m magas aknás kemence volt, amely 24 óránként 500—700 kg vaspogácsát (Scheibeneisen) termelt, 100 kg nyersvasra 370 kg szén felhasználásával [7]. Felesleges mondanunk, hogy ennek a kemencének semmi köze sincs a kék színhez, a név a Pla = Blasofenből ered. Részünkre inkább az említésre méltó, hogy mind a „Stückofen", mind a „Blauofen" üzeme Stájerországban érte el fejlődésének legmagasabb fokát, amihez csatlakozott a különlegesen stájer „Floßofen", amely nem egyéb, mint a „Stückofen" egyik fajtája. Már [1] alatt is említettük, hogy a földrajzi közelség folytán Kislődön nagy lehetett a stájer kohászat befolyása, ami egyformán vonatkozott valamennyi akkor járatos kemencetípusra, tehát a nagyolvasztóra is.

Ebben a vonatkozásban helyeselni kell HECKENASTnak azt a megállapítását, hogy pontos ismertetésre várnak a Magyarországon használatban volt vashámortípusok [8], amikor nyilván a vasolvasztókra vagy vaskohókra gondol, mert a további — félkész- vagy készáruvá történő — feldolgozást végző hámor neve nem szorul magyarázatra és nem lehet vitás. Bizonyára ez a cél lebegett VASTAGH szeme előtt [9], amikor megpróbálta ezt a kérdést, nevezetesen a vasolvasztó kemencék nomenklatúráját tisztázni, sajnos, kevés szerencsével. Ezen nem szabad csodálkoznunk, mert a szóban forgó kemencefajták ismertetése a német szakirodalomban is jóformán szerzőnként más és más. Az olvasónak az a benyomása, hogy a különböző magyar szerzők munkáiban — beleértve EDVI ILLÉS ALADÁR és KERPELY ANTAL, valamint e sorok írójának munkáit is — a különböző elnevezések fogalmilag összekeveredtek, ami megnehezíti azok magyarázatát.

* Nem szabad természetesen evvel kapcsolatban a mai — pl. 33 m magas, 12 m poha átmérőjű — valóban nagy olvasztóval való összehasonlításra gondolnunk. A régi elnevezés világosan az akkor járatos többi olvasztótól való megkülönböztetést szolgálta, mégpedig jogosan, mert mindegyiknél magasabb volt.

Fokozza a nehézséget az is, hogy a német elnevezések egyike-másika tájszólás eredetű, ami még a német olvasó részére is etimológiai elmélyedést kíván. A kérdés mindenképpen megérdemli, hogy felderítésén fáradozzunk, ezért a magunk részéről megpróbáljuk ezt adandó alkalommal elvégezni.

A kislődi üzem berendezéseire és műszaki létesítményeire vonatkozó felsorolásunkat csak abban a nagyon szerény keretben közölhetjük, amit a selmeci iratokban találtunk, ami azonban [1] adatainál mégis jóval több. Ezen iratok egyike a Krisztus mennybemeneteléről nevezett nagyolvasztón kívül érczúzót, salaktörőt és őrlőt, koptató malmot, szerszám kovácsműhelyt, formázó eszközökkel felszerelt öntőműhelyt, raktárt, vízduzzasztót, vízárkot és „jól felszerelt laboratorio"-t említ. Ezek az adatok 1777-ből valók.

SCHWARZKÖNIG 1791-i jelentésében ezeken kívül említi a hámort, amelyben egy frissítő-tűzhely és egy pöröly állott, írja, hogy az olvasztó épülete jó állapotban van, de a két bőrfúvó és a pörölyszerszám erős javításra szorul, az épület tetőzete és egyes belső berendezések is roskadozók. A berendezések javítására 5300 akkori forintot, míg vasérc, faszén és ásványi szén* egy évi szükségletére 10 000 f-t tart szükségesnek. Jelentésének végén hangsúlyozza, hogy az ércek vastartalma csekély, a bányák és a kohó hanyatlóban vannak, ezért a felújításra szánt összeg engedélyezését óvatosan a főkamaragrófi hivatalra bízza. Amint a későbbi események mutatják, ezt az engedélyt a cs. kir. szellemű hivatalnokok nem adták meg, de SCHWARZKÖNIG véleménye nem is volt olyan, ami az engedélyezést a kincstár részére különösen indokolta volna.

Részletesebb adatokat találunk a selmeci iratokban a vasércbányászatra vonatkozóan. [1] közleményünkben erre a kérdésre több figyelmet fordítottunk, mert érdekesnek mutatkozott annak megállapítása, hogy hol és milyen ércet fejtettek a régiek a kislődi kohó részére. Akkori megállapításaink helyességét a selmeci adatok jórészt igazolták.

A selmeci adatok azonban csak a bányák helyéről tájékoztatnak, míg az érc mineműségéről alig találunk adatot. Nem szólunk a vállalkozóknak arról az érthetetlen dicsekvéséről, amikor a „vasércen kívül unos-untalan ezüst,- arany, higany, ólom, antimon, arzén, réz, vitriol felfedezéséről írnak [11]. Ezt alig lehet komolyan venni, annak csupán hangulatkeltés lehetett a célja. Mai ismereteink szerint ui. nem tételezhető fel, hogy a részükről felsorolt helyeken a szóban forgó elemek ásványi alakban előfordultak volna. Az iratok szerint a bányák nagyobbik része, számszerint 12 — az akkori szokásnak megfelelően szentekről és egyházi ünnepekről elnevezve — azon a környéken volt, amelyet [1] 2. ábráján a Felsőerdő környékén Csehbánya és Németbánya közötti terü-

* A német nyelvű jelentés Kohlholzról = faszénről és Kohl-ról ír, ami szenet jelent. Nem lehetetlen, hogy ásványi szenet gondol, mivel az ajkai széntelepek Kislődtől csak mintegy 5—6 km-nyire vannak, és bár ott a bányászat csak kereken 100 évvel később: 1866-ban indult meg, elképzelhető, hogy kibúvások alakjában a szén már régebben ismeretes volt, a szénbányászat kezdetére is kibúvások vezettek [10]. Kőszénről egyébként [19] forrásunk is megemlékezik.

leten irodalmi adatok alapján határoztunk meg. A [11] irat foglalkozik Úrkút melletti bányákkal is, ahol 3 kutatóaknát, illetőleg tárót műveltek. Ez az adat azért említésre érdemes, mert már [1]-ben kifejeztük azt a feltevésünket, hogy Kislődön Úrkútról vagy a városlődi Csalányos völgyből származó mangánércet is feldolgoztak. Az még valószínűtlenebb, sőt egyszerűen lehetetlen — pedig ilyen adat is előfordul az iratokban —, hogy az úrkúti mangánércben lettek volna a felsorolt elemek, mert VADÁSZ Elemér szíves felvilágosítása szerint az úrkúti mangánércnek nemcsak teljes elemzését, hanem a nyomelemek meghatározását is elvégezték, amikor a felsorolt elemek nem voltak kimutathatók.

Még érthetetlenebb SCHEBELLE állítása ugyanezen iratban, hogy a Kisláz melletti kutatóárokból (ennek a helynek hollétét nem sikerült megállapítanunk*) eredő „nemes" ércnek a nagyolvasztóban történő 2. olvasztásakor a higany és az arzén „szerencsejátéka" (Hasart) folytán „borzasztó füst" keletkezett. Az még hagyján, hogy a jobb minőségű vasércet szokatlanul itt és másutt is „nemes"-nek nevezi, de teljesen értelmetlen a higany és az arzén füstje. Az sem világos, hogy mit értettek „második" olvasztáson; lehetséges, hogy amint az 1785. évi — 1786-ra is átnyúló — két kampányt számozták így (l. alább), úgy 1777-ben is lehetett ilyen több kampányból álló olvasztás. Amint látni fogjuk, később 2. olvasztásnak nevezték Kislődön a medencekövekből történő olvasztást, első lett volna az ércekből. Hogy azután hogyan kerülhetett volna a 2. olvasztás nyersanyagába higany és arzén, megmagyarázhatatlan és hihetetlen. Mindez csak úgy lenne valamelyest magyarázható, hogy SCHEBELLE nem volt szakember, hanem vállalkozásának laikus megszállottja, aki ábrándokat kergetett, pl. ezüst- és rézkohó építéséről álmodozott. Emellett szól az a furcsaság is, hogy egyes beadványain szinte hóbortosan minden értelem nélkül az ezüst félhold alakú alkimista vegyjelét — néha több helyen is — odarajzolta.

Egyébként felmerül a kérdés, hogy épelméjű volt-e. [11] jelzésű beadványát, melyet ugyanazon hónapban kettő már megelőzött, már másnap követte a negyedik, amely teljesen zavaros. Így pl. tudnia kellett és előzőleg tudta is, hogy a selmeci bányabíróságnak nem, hanem csak a selmeci főkamaragrófnak járt az „excellenciás" cím, mégis — más iratban is — folytonosan ismétli, saját aláírású irataiban pedig önmagát mindig urazza. A bányarészjegyek elosztásáról ír, egyik iratban családja, a bécsi cs. kir. udvari kamara, a m. kir. udvari kamara és von Fris báró** között akarja azokat szétosztani, egy másikban pedig név szerint megnevezi a bécsi kamara grófi funkcionáriusait és azok hölgyeit (!). ugyanúgy a pozsonyi udvari kamara szintén grófi vezetőit, de nem világos, hogy mit akart ezekkel, vajon bányarészjegyeket akart azoknak juttatni?

* Az bizonyos, hogy Kislődtől mintegy 50 km sugarú körben ilyen nevű község, hegy, dülő, patak stb. nincsen. PANTÓ Dezső okl. bányamérnök szíves közlése szerint a borsodmegyei Nekézseny környékén van Kislázhegy, ahol 1880 táján vasmangános palát bányásztak. [26]. Teljesen valószínűtlen, hogy a XVIII. század közlekedési és szállítási viszonyai között vasércnek Borsod megyéből Veszprém megyébe való szállítását egy pillanatig is komolyan mérlegelhették volna.

** (bécsi bankár?)

14 évvel később, 1791-ben SCHWARZKÖNIG [3] alatt idézett jelentésében szintén megemlékezett a Kislődtől délre fekvő Zichy-féle bányákról, amelyeket az uradalom székhelye után nagyvázsonyinak mond, de a leírásból kétségtelenül kitűnik, hogy Úrkútról van szó. Az ott fejtett ércet barnavasércnek vagy egyszerűen vaskőnek minősítette, pedig az lehetett mangánérc is, ami megmagyarázza a kislődi nyersvas és néhány salak nagy mangántartalmát (L. [1], 404. l.).

Az északi részen, vagyis a Felsőerdő területén fekvő bányákat SCHWARZKÖNIG szintén vizsgálta. A Lőrincz-bányában vaskő kibúvásokat talált, amelyek vörös agyagpalával erősen keveredett bolus-föld (alumíniumszilikát) alatt voltak láthatók. Ezt a bányát további művelésre alkalmasnak vélte, mert onnan sárga okkerrel kevert „egészen jó" vaskő termelhető. A Bertalan-bánya érceit SCHEBELLE már jórészt lefejtette, de egy vízmosásban vannak még vaskő kibúvások agyag, agyagpala, okker és kvarc mellett és 4—5 öl mélyen 1—5 lábnyi vastag érctelep is van. SCHWARZKÖNIGnek az ércekre vonatkozó megfigyelései nincsenek ellentmondásban VADÁSZ Elemér véleményével ([1], 406. l.), sőt ellenkezőleg: annak helyességét bizonyítják.

A kislődi hámornak alapítása óta voltak nehézségei; ez részben annak tulajdonítható, hogy a püspöki uradalom és valószínűleg a közigazgatási hatóságok sem támogatták eléggé, a selmeci bányahatóság pedig részvétlen bürokratizmussal nézte vergődését.* Az igazság kedvéért azonban arra is rá kell mutatni, hogy az eseményekben SCHEBELLE maga is hibás lehetett.

Az üzem nehézségei az 1780-as években már nagyon égetővé válhattak, ezekben az években SCHEBELLE is elhalálozott, ezért 1783-ban új bérlőkkel kötött a veszprémi püspökség szerződést [12]. Ebből az időből az iratok között kimutatást találtunk a nyersvastermelésről, melyet itt közlünk.

Ezekből az adatokból különböző következtetéseket vonhatunk le. Először: ezek is bizonyítják, hogy Kislődön nem lehetett „Stückofen", mert az utóbbi üzeme szakaszos,** márpedig nem nevezhetjük az egyik 3 és a másik közel 3 hónapos időszakot szakaszosnak, mert azok folytonosak. A kimutatásban feltüntetett kéthetes szakaszok egymástól nem függetlenek, hanem azok egy-egy egységes kampány részei. Esetleg még lehetne „Floßofen" voltát feltételezni, de a kislődi nagyolvasztó mivoltára vonatkozó fentebbi fejtegetéseink ezt feleslegessé teszik.

Másodszor: A táblázatból kitűnik, hogy a 3 hónapig tartó első olvasztás heti átlaga 56 mázsa, évi összege tehát kereken 2900 mázsa; míg a második olvasztásé hetenként 53,5 mázsát, egész évre számítva kereken 2800 mázsát

* Így pl. SCHWARZKÖNIG kiküldetését hosszú időn át „mérlegelték", mert abban politikum is van, tehát függőben tartják. A politikum nyilván az lehetett, hogy Bécsből utasítást kellett kérni, hogyan intézkedjenek.

** A „Stückofen" üzeme vasárnap éjféltől szombat reggel 10 óráig tartott, azaz heti 130 óra volt (l. [7], 132/133. l.)

Kivonat a veszprémmegyei Kislőd közelébeni vasmű olvasztó-regiszteréből 1785-ben 1786. jan. 23-ig termelt nyersvas mennyiségéről

Első olvasztásból	Nyersvas	
	Mázsa	Font
1. 1785. febr.23.—március 6-ig	36	—
2. Március 7.—március 20-ig	96	15
3. Március 21.—április 3-ig	95	—
4. Április 4.—április 17-ig	72	84
5. Április 18.—május 1-ig	75	83
6. Május 2.—május 15-ig	87	18
7. Május 16.—május 27-ig	52	58
Összesen	515	58
Második olvasztásból az itt talált medenceövekből termelt:		
1. 1785. nov.11.—nov. 27-ig	69	58
2. November 28.—dec. 11-ig	102	82
3. December 12.—dec. 25-ig	99	27
4. Dec. 26.—1786. jan. 9-ig	63	32
5. Január 10.—január 23-ig	88	66
Összesen	423	65
A két összeg együtt	939	23

ad. Az olvasztó teljesítménye azonban természetesen ennél kisebb volt, mert karbantartásra és javításra időt kellett fordítani, ilyenformán az évi termelést 2000—2200 mázsára becsülhetjük. Az olvasztó évi teljesítménye ezek szerint kereken 1/3-a volt az abban az időben működött ómassai nagyolvasztónak, amely akkor az ország legnagyobb (?) vasolvasztója volt és évente 6000 mázsa nyersvasat termelt [13].

Schwarzkönig [3] alatt idézett jelentését kimutatás egészíti ki, amely szerint 1791-ben 48 héten át 2047 mázsa nyersvasat termeltek, amiből frissítéssel és kovácsolással 1538 mázsa rúdvasat készítettek. Nehézséget okozott, hogy a jobb minőségű érc állandóan fogyott, de feltehetően egyéb okok is közrejátszottak a viszonyok romlásában. Ilyen ok volt már 5 évvel előbb is a fenti kimutatást kísérő, 1786. márc. 7-én kelt jelentés, amely „hosszantartó nagyon beteg körülményekről" panaszkodik, majd azzal folytatja, hogy a mű ez idő szerint nincs teljesen kiépítve és a Sz. Mihály-akna — ez a Felsőerdőn volt — remélt vasköve nem termelhető, ezért az egész évre szünetelési engedélyt kérnek. Schwarzkönig jelentésének mellékletében egyéb érdekes adatok is vannak a nyersanyag felhasználásáról, árakról, munkabérekről, fuvarköltségről és a legkülönbözőbb kiadásokról. Mivel mi nem gazdaság, hanem műszaki tudománytörténetet írunk, ezek részletezését mellőzzük, csak példaképpen említjük, hogy az olvasztár bére heti 13 akkori forint volt. Egy mázsa nyersvas termelési költsége 1786-ban 5 f, 1791-ben Schwarzkönig szerint 3 f 48 kr volt. A mai árakkal történő számszerű összehasonlítás természetesen hibás lenne, mert nem ismerjük az akkori forint vásárlóerejét.

A fentebb közölt termelési adatokat — legalábbis a táblázatban foglaltakat — azonban nem szabad teljesen megbízhatóknak tekintenünk. Erre nézve idézzük szabad fordításban SCHWARTNERnek, a pesti egyetem neves tanárának, kora kitűnő statisztikusának a hazai vasgyártásról írt nagyon jellemző szavait [14]. „Számokban egyáltalában nem lehet megmondani, hogy ebből a nélkülözhetetlen fémből Magyarországon mennyit termelnek, ezt maga a kormány sem tudja, mivel a vas termelése után sem úrbért, sem tizedet nem kell fizetni. II. József császár 1781. okt. 26-án kelt pátense alapján a kincstárnak a vastermelésben is részesnek kell lennie és régebbi országos törvények, mint pl. az 1492. évi 30. törvénycikk szintén a kincstár előnyére döntenek, de a Magyarországon mindent uraló hagyományos szokás ennek ellene volt és amikor a bányarészeseket kötelezni akarták, hogy hasznukból a kincstárnak évenként részesedést adjanak, még kevésbé voltak abban a helyzetben, hogy a termelés mennyiségéről bármit is megtudjanak. József császár meghalt, mielőtt a kamara valamennyi bányarészessel erre nézve meg tudott volna egyezni".

Ezzel kapcsolatban hivatkozunk MERTHEN selmeci bányabírósági ülnök [15] alatt idézett jelentésére, amely kifogásolta, hogy a bányaúrjog értelmezése körül a kislődi vashámor részéről is voltak zavarok. Hivatkozik az 1351, 1492, 1518, 1526, 1545 és 1609-ből származó országos törvényekre, amelyek kifejezetten a vasércbányászatot is felölelik. Ezt a bányavárosokban és bányakerületekben jól tudják és a távolabb fekvő bányáknak is ismerniök kell. Valamit tudhattak erről Kislődön is, mert a fenti táblázatot magában foglaló iratban a megyének befizetett királyi porciók nyugtáiról van szó; MERTHEN talán keveselte az összegeket.

A kislődi vasműnek csaknem egész fennállása óta mutatkozó válságai és a 80-as években kezdődő hanyatlása SCHWARZKÖNIG és MERTHEN [14] látogatása után már gyors ütemben folytatódott. Egyébként a bányarészesek azon javaslatát, hogy a vasmű részesedését a kincstár fele részben átvegye, 1792-ben elutasították [16]. Ezt álszent módon részben a nagy távolsággal okolták, ami a felügyeletet megnehezíti, részben azzal, hogy a mű csekély jövedelme új hivatalnok alkalmazását nem indokolná és végül a SCHEBELLE örököseivel folyó viták sem szóltak a kincstár részére a javaslat elfogadása mellett. Ezek az érvek a kincstár szempontjából tetszetősek, de — véleményünk szerint — az igazi ok Bécsben keresendő, ahol minden magyarországi ipari vállalkozást sanda szemmel néztek, ha csak az nem volt főúri kézben, ami azonban akkor csak szórványosan fordult elő.*Kétségtelen, hogy a hatóságok bizalmatlan magatartásának tárgyi okai is voltak, hiszen maga SCHWARZKÖNIG mutatott rá a kislődi helyzet igen nagy nehézségeire. A hatóságok

* A főurak és a földbirtokosok érdeklődése a vasgyártás iránt csak a XIX. sz. első tizedeiben éledt fel nagyobb mértékben. [27].

részére valóban meggondolandó lehetett, hogy ebbe a bizonytalan jövőjű vállalkozásba betársuljanak. Ettől függetlenül azonban nem vitás, hogy a bécsi kormánynak soha nem volt olyan szívügye a magyarországi vasgyártás fejlesztése, mint pl. a nagy hasznot hozó nemesfém bányászaté és kohászaté. Most már a veszprémi püspöknek sem fűződött nagy érdeke ahhoz, hogy ezért a szerencsétlen kispolgári vállalkozásért síkra szálljon, hiszen a [12] alatt idézett szerződés szerint a püspök a bérlőktől csak 80 f évi bért kapott, ami az 1769—70. évekbeli 500 f-on felüli összegeknek csak alig több mint egyhatoda (l. [1], 400. l.). A csaknem állandósult vergődésnek tárgyi okaihoz sorolandók elsősorban a jobb minőségű érc lefejtése, ami egyes bányák teljes beszüntetését okozta. Ilyen volt a tőke hiánya is, amin azonban jóakarattal lehetett volna segíteni.

A kislődi hámor múltjában azelőtt is gyakran előfordult, hogy egyes bányákra szünetelési engedélyt kértek, ami mindenképpen a bányászat nehézségeivel, pl. a bánya kimerültével vagy a művelés költségeinek növekedésével magyarázható. 1792-ben azután bekövetkezett, hogy a nagyolvasztóra, a zúzóra, a hámorra és a [17] iratban felsorolt bányákra is szünetelési engedélyt kértek, amit a bányabíróság — egyebet nem tehetvén — megadott.

Nem tudjuk, hogy ez a szünetelés már végleges volt-e, az bizonyos, hogy a most következő 3 évről Selmecen Kislődre vonatkozó irat már csak három volt található, ezek is bennünket nem érdeklő közigazgatási ügyeket tárgyalnak. Feltehető, hogy valamiféle pepecselés folyhatott, mert nehéz elképzelni, hogy ezek az évek semmittevéssel múltak volna el, hiszen PESTY is 1795-re mondja ([1], 401. l.) az olvasztás megszűntét.

Az utolsó irat 1796-ból származik, amely a püspök és a bérlő közötti vitákról szól. Ebből kitűnik, hogy TSCHESCHKA már nem volt Kislődön, hanem Bécs egyik szegény negyedében egy szabómester udvari lakásában lakott, ami feltehetően teljes elszegényedésének bizonyítéka [18]. A selmeci iratokból kihámozható, általában eléggé lehangoló történet ezzel a méla akkorddal végződik.

Visszatérünk még [1] tanulmányunk utolsóelőtti bekezdésére, amely FÉNYES Elek azon téves állítását közli, hogy „Városlődön vas, piskolc, gáliczréz, kőszén ásattatik". Fentebb [11] jegyzetünkkel kapcsolatban már mondottuk, hogy mindez csak a képzelet szüleménye lehetett; kiegészítésképpen még megemlítjük, hogy ez a téves adat — feltehetően a kislődiek hírverése alapján — az irodalomban először 1786-ban KORABINSZKYnál bukkan fel [19]. Amint az gyakran megtörténik, egy-egy ilyen adat aztán minden kritika nélkül egyik forrásból a másikba vánszorog, amire jó példa [1] azon elképesztő adata, hogy Révai Nagy Lexikona szerint Kislődön még 1914-ben is lett volna vashámor (!). FÉNYES hibás adatát nemcsak KORABINSZKYtól vehette, hanem pl. SCHMIDLtől is [20], akinek munkája egyik láncszeme lehetett ennek a hibás adatnak tovább vonszolásában. Ezzel szemben Kislődre és Városlődre vonatkozóan

teljesen negatív BREDETZKY [21], SCHÖNBAUER [22], ZIPSER [23], és CSAPLOVICS [24] munkái, pedig ezek bányászati tekintetben általában pontosak és megbízhatók. Mindezek alapján a különböző színesfém-ércekre vonatkozó kislődi eredetű adatokat kénytelenek vagyunk a képzelet világába sorolni.

Végezetül megemlítjük, hogy a részünkről figyelembe vett selmeci főkamaragrófi és bányabírósági iratok jó részében számos adat van, amelyek gazdaságtörténeti szempontból feldolgozásra érdemesek lehetnek. Ezek részben pótolhatják a veszprémi püspöki levéltár sajnálatos módon kiselejtezett iratait (l. [1], 400. l.). Mivel mi elsősorban a műszaki vonatkozású adatok kidomborítását tartottuk szem előtt, a gazdaságiak feldolgozását általában mellőztük, az iratok fényképmásolatai azonban esetleges további kutatás céljára a Kohászattörténeti Bizottság levéltárában rendelkezésre állanak.

JEGYZETEK

1. SCHLEICHER ALADÁR: A kislődi vashámor története. Nyersvastermelés bauxitos elegyből a XVIII. században. Magy. Tud. Akad. Műsz. Tud. Oszt. Közl. *21* (1957) 395/411.

2. A selmeci levéltári kutatást részben magunk, részben KISZELY Gyula, a Kohászattörténeti Bizottság titkára végezte és gondoskodott az iratok fényképezéséről, valamint a 4. ábra gipszlenyomatának elkészítéséről, amiért neki e helyen is köszönetünket fejezzük ki.

3. Selmeci főkamaragrófi levéltár, HKG 1450/1792. A jelentés másolata a Kohászattörténeti Bizottság irattárában van.

4. L. erre nézve PAULINYI Ákos: Adalékok a rónici vasgyár technikai fejlődéséhez a XIX. század 20-as—40-es éveiben. Magy. Tud. Akad. Műsz. Tud. Oszt. Közl. *28* (1961) 149/188.

5. Az év nélküli csonka irat a §. 1006 számot viseli; TSCHESCHKA [1] és a selmeci iratok tanúsága szerint 1785—1795 között működhetett Kislődön.

6. TSCHESCHKA már alig juthatott el Pécsváradra, legalábbis BABICS András: A vasérckutatás története a Mecsek hegységben (Dunántúli tudományos gyűjtemény, 3. sz., a dunántúli tudományos intézet kiadványa, Pécs, 1955) c. munkájában nem tud erről, jóllehet a 8. lapon megemlékezik DECKER pécsváradi iskolamester vállalkozásáról, sőt azt is közli, hogy Pécsváradtól ÉK-re mintegy 4 km-nyire Pusztakisfalun „kis érckohója, bucakemencéje" volt.

7. O. JOHANNSEN: Die Geschichte des Eisens. 3. Aufl., Düsseldorf, Verlag Stahleisen, 1953, S. 140.

8. HECKENAST GUSZTÁV: Adatok a vaskohászat történetéhez Magyarországon a XVIII. század elején. Kny. Értekezések a történeti tudományok köréből. Budapest, 1960, 10. l.

9. VASTAGH GÁBOR: Egy XVIII. századi magyar vasolvasztó kemence. Kohászati Lapok *94* (1961) 473/475; a 11. jegyzetben foglalkozott ezzel a kérdéssel.

10. VITÁLIS ISTVÁN: Magyarország szénelőfordulásai. Sopron. 1939, 110. l.

11. L. erre nézve pl. az 1777. ápr. 24-én kelt § 421. sz. beadványt.

12. Selmeci bányabírósági jegyzőkönyv § 1294, No. 808. 1783. szept. 11-én kelt magyar és latin nyelvű azonos szerződés a püspökség és HOMOLÁCS János vasbányai árendás között a vashámornak folytatása végett. A szerződés 10 pontját nem soroljuk itt fel, annak fényképmásolata a Koh. Tört. Biz. irattárában van. 1784. júl. 21-én kelt záradék szerint Homolács árendás társul maga mellé vette CSESKA Ferencet, akit TSCHESCHKA néven már ismerünk és akit sorsa arra jelölt ki, hogy a 90-es években az olvasztó üzemét beszüntesse. A bányabíróság a szerződést 1784. okt. 2-iki ülésében jóváhagyta, végzésében SCHEBELLE örököseiről és HOMOLÁCSról ír, de a 6 hét múlva tartott ülés votuma már TSCHESCHKÁt is említi. Az 1784. dec. 2-án kelt beadványban nevezi magát a két új bérlő a cs. kir. vasbánya (!) részeseinek Kislőd közelében. (L. [1] 11. jegyzetét is). Itt jegyezzük meg, hogy mindhárom név viselője, um. SCHEBELLE, TSCHESCHKA és HOMOLATSCH cseh- és morvaországi származásúak voltak.

13. SOÓS—KISZELY—ZÁDOR: Vázlatok a diósgyőri vaskohászat 190 éves történetéből 1770—1960. Miskolc. 1960. 15. l. — Rónic 1763-ban 3675 mázsát termelt [4].

14. MARTIN v. SCHWARTNER: Statistik des Königreichs Ungern. 1. Th., 2. Ausg., Ofen, Universitäts-Druckerei, 1809, S. 253.

15. MERTHEN kislődi útjáról 2452/1791 sz. iratban hat sűrűn írt lapon számolt be. Ezt a jelentést nem ismertetjük részletesen, mert az nagyobbrészt közigazgatási (megyei) és adminisztrációs kérdésekkel foglalkozik. Részünkre abból az érdekes, hogy [1] 12. jegyzetével szemben a vasmű alapítását nem mint PESTY 1751-re, hanem 1758-ra teszi, mert az ejectációsnak (eltávolítási?) nevezett táblázatok ettől az utóbbi évtől voltak meg.

16. Főkamaragrófi hivatal rescriptuma 1792. ápr. 21-ről; Fasc. IV, 864.

17. Bányabírósági 1792. jún. 2-án kelt Fasc. VI, 1196. jelzésű irat.

18. 1796. jan. 30-án kelt Fasc. I, No 169 jelzésű irat votuma.

19. Johann Matthias KORABINSZKY: Geographisch-historisches und Produkten Lexicon von Ungarn. Pressburg. 1786, S. 307. Dicséri a vállalkozó szorgalmát és áldozatkészségét, azt nevén meg is nevezi; nem tudhatjuk, nem rejlett-e valamilyen érdek emegett.

20. Adolf SCHMIDL: Reisehandbuch durch das Königreich Ungarn. . . Wien, 1835, Carl Gerold. 2. Aufl. Bd. 1, S. 462.

21. Samuel BREDETZKY: Beyträge zur Topographie des Königreichs Ungarn. Wien, 1803.

22. Vincentius SCHÖNBAUER: Minerae metallorum Hungariae et Transsilvaniae. Pestini, 1806, Pars I.

23. Christian Andreas ZIPSER: Versuch eines topographisch-mineralogischen Handbuches von Ungarn. Oedenburg, 1817.

24. Johann CSAPLOVICS: Topographisch-statistisches Archiv des Königreichs Ungarn. Wien, 1821.

25. L. pl. VAJKAI Aurél: A veszprémi tobakmesterség. Természettudományi Közlöny *92* (1961) 532/535.

26. PANTÓ Gábor és BALOGH Kálmán: Földtani vizsgálatok Nekézseny környékén. Földt. Intézet évi jelentése. 1953., I. 21. l.

27. HÓMAN—SZEKFŰ: Magyar Történet. 1. kiadás. SZEKFŰ Gyula: A tizenkilencedik és huszadik század. VII. köt., 95. l.

ÖSSZEFOGLALÁS

A dolgozat kiegészíti az [1] alatt idézett tanulmányt a selmeci bányászati levéltár Kislődre vonatkozó iratainak feldolgozásából származó újabb adatokkal. Amíg az első [1] tanulmány műszaki tudománytörténeti szempontból érdekes, de csupán hézagos adatokat tudott összegyűjteni, addig a fentebb közölt szöveg ebben a tekintetben megközelítő képet ad a műszaki berendezésekről, másodsorban arról a vergődésről, amivel a kislődi hámornak fennállása csaknem egész idején küzdenie kellett. Egyúttal bizonyítja azt az értetlenséget, amivel ezt a küszködést a segíteni tudó arra hivatott illetékesek nézték és főképpen a Magyarország iránt ellenséges bécsi kormány közönyét és ellenszenvét minden hazai ipari megmozdulással szemben

BÁNYAÜZEMEK TELEPÍTÉSÉNEK LEGFŐBB PARAMÉTEREI*

ZAMBÓ JÁNOS
LEV. TAG.

A bányászatról, ezen belül a bányaművelésről azt tartották, hogy csupán leíró tudomány. Ebben az állításban sok igazság van, de ez az igazságnem teljes. Igaz, hogy a bányaművelés gerincét a bányászati ismeretek rendszerezése alkotta, tartalmában pedig lényegileg technológiai folyamatok leírását adta, mégis van a bányaművelésnek olyan ága, — és itt elsősorban a bányaszellőztetésre gondolunk — amely már olyan értelmű alkalmazott tudomány, ahol a matematikai alapokon nyugvó áramlástani analízis nem nélkülözhető. Hasonlóan kell vélekednünk a bányaművelésnek egy másik és még ma is újnak mondható ágáról, a kőzetmechanikáról is.

A legutóbbi időben a bányaművelés egy másik területén is alkalmazásra talál a matematikai analízis. A bányászati telepítések analitikai vizsgálata a Szovjetunióban több évtizedre tekinthet vissza. Ezt a munkát Bokij, a Leningrádi Bányászati Akadémia tanára kezdeményezte, később egyre többen foglalkoztak ilyen kérdésekkel. Kiemelkedik ezek közül Sevjakov munkássága. Lengyelországban Krupinszki, Csehszlovákiában Řiman, Németországban Benthaus vezetésével folytak és folynak ma is beható vizsgálatok. Ezek leginkább numerikus vizsgálatok, az elméleti megoldások rendszerint csak egy-egy részletkérdésre szorítkoznak. A kérdéskomplexum átfogó elméleti és gyakorlati vizsgálatával magam is foglalkoztam több éven keresztül. Az eredményeket »Bányászati telepítések analitikája« c. könyvemben foglaltam össze.

A bányászati telepítések legfőbb paramétereinek kiválasztásában olyan összefüggések állapíthatók meg, amelyek segítségével a gazdasági optimum meghatározható. A legfőbb paraméterek alatt a bányaüzem termelési kapacitását, az aknaüzem mezőjének kiterjedését, valamint az akna, illetve aknák telepítési helyét értjük.

A paraméterek akkor lesznek optimálisak, ha a velük összefüggő fajlagos költség (Ft/t) a legkisebb. Ha tehát sikerül a fajlagos költséget a paraméterek függvényében matematikai alakban felírni, a probléma megoldása már csak egyszerű feladat lesz.

* A Magyar Tudományos Akadémián 1961. december 4-én tartott székfoglaló előadás.

Vegyük elsőnek a termelési kapacitás kérdését. Két esetet különböztethetünk meg. Első esetben az aknamező határai adottak, így adott a kitermelhető ásványvagyon is (Q). A második esetben a mezőhatárok szabadon terjeszkedhetnek, szabadon határozhatók meg.

Az üzemi termelési költség két részre osztható. Az egyik rész a termelési kapacitással proporcionálisan változik, fajlagos értéke nem függvénye tehát a kapacitásnak. A másik rész állandónak tekinthető, fajlagos értéke tehát a kapacitás függvényében hiperbolikusan változik.

A termelési költségtől teljesen függetlenül kezeljük a beruházási költséget. Abból indulunk ki, hogy a beruházási költség a termelési kapacitással arányosan változik.

Jelentse a továbbiakban q a termelési kapacitást t/nap-ban, k_1 az állandó jellegű költségek fajlagos értékét Ft/t-ban, k_2 pedig a beruházási költségek fajlagos értékét szintén Ft/t-ban. Legyen a napi állandó jellegű költség K_1, a beruházási költséget pedig fejezzük ki

$$K_2 = aq + b$$

egyenlettel, azaz egyelőre azt tételezzük fel, hogy a beruházási költség a kapacitás függvényében egyenes szerint változik.

Ilyen egyszerűsítő feltételek mellett az optimális kapacitás meghatározása is egyszerű. A

$$k = k_1 + k_2 = \frac{K_1}{q} + \frac{aq + b}{Q}$$

összefüggés ugyanis akkor ad minimális k-értéket, ha

$$q = \sqrt{\frac{QK_1}{a}}\,.$$

Az a tulajdonképpen iránytangenst jelent, kifejezi pedig azt a beruházási összeget, amely napi 1 t termelési kapacitás létrehozásához szükséges (Ft/t/nap).

A második esetben, amikor a mező méretei szabadon terjeszkedhetnek, összefüggéseinkbe be kell vezetni az átlagos csapásirányú (A), és az átlagos dőlésirányú kiterjedés (B) fogalmát. Ekkor természetesen ezek is változó mennyiségek. A kapacitással, valamint a mezőméretekkel összefüggő fajlagos költséget most is kifejezhetjük:

$$k = \frac{K_1}{q} + \frac{aq + b}{ABQ_0} + c_A A + c_B B\,.$$

A c_A és c_B tényezők dimenziója Ft/mt. Q_0 egy m^2-ről kitermelhető ásványvagyon.

A főparaméterekkel összefüggő üzemi költségek általában a következők: a bányaszállítás, a személyközlekedés, a vízemelés, a szellőztetés, a fenntartás, az energiaveszteségek költségei. Ezeknek a költségeknek állandó jellegű részét K_1 fejezi ki, a másik, a paraméterektől függő részének fajlagos értéke c_A, illetve c_B. Úgy kell tehát e két fajlagos költséget meghatározni, hogy az 1 t-ra és egy m mozgásra, illetve mozgatásra vonatkozzék.

Többváltozós függvényről lévén szó, írjuk fel k-nak q,· A és B szerinti parciális differenciálhányadosát, és tegyük azokat nullával egyenlővé:

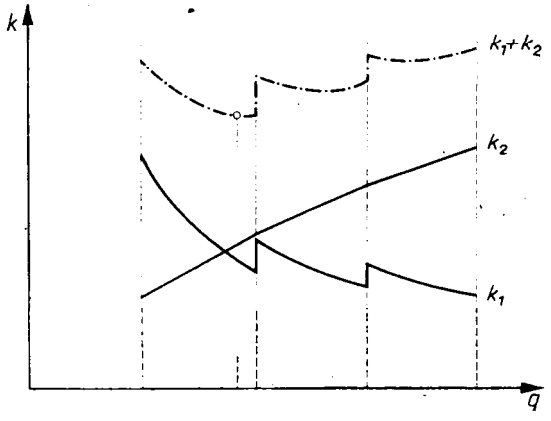
$$\frac{\partial k}{\partial q} = -\frac{K_1}{q^2} + \frac{a}{ABQ_0} = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial A} = -\frac{aq + b}{A^2 BQ_0} + c_A = 0$$

$$\frac{\partial k}{\partial B} = -\frac{aq + b}{AB^2 Q_0} + c_B = 0.$$

Ezek szerint tehát három egyenlethez jutottunk három ismeretlennel, három főparaméterrel.

Az elméleti összefüggések viszonylag egyszerűnek látszanak. A gyakorlati részletes vizsgálatok azonban több problémát hoznak felszínre. Ezek

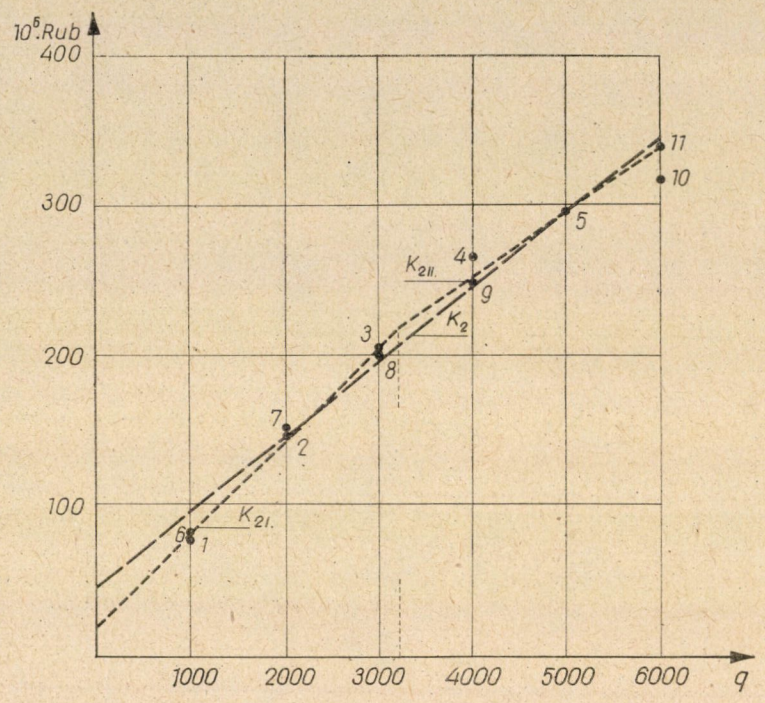


1. ábra

a következők. 1. Az állandó jellegű költségek csak bizonyos termelési kapacitáshatárokon belül foghatók fel állandónak. 2. a és b értékei is csak bizonyos termelési kapacitáshatárokon belül változatlanok. 3. A különböző időben jelentkező költségeket egyazon időpontra kell vonatkoztatni.

Az 1. ábra szerint szakaszonként változik tehát az állandó jellegű költségek hiperbolájának paramétere, valamint a beruházási költségek egyene-

sének iránytangense és az egyenes egyenletének tiszta tagja. Természetesen minden szakaszra vonatkozóan külön-külön kell a fentiek szerinti számításokat elvégezni. Reális csak az az eredmény, amelyik saját szakaszába esik és ezek között pedig az optimális, amelyikhez a legkisebb fajlagos érték tartozik.



2. ábra

A beruházási költségek egyenletét a már meglevő adatokra támaszkodva lehet meghatározni. Természetesen olyan egyenletet kell keresni és alkalmazni, amely geológiailag hasonló üzemek adataiból adódott.

Dudnyik és Zvjagin közlései alapján összeállítottuk a *Donyec* medence beruházási adatait. Az adatok alapján kiegyenlítő egyenest, illetve kiegyenlítő egyeneseket határoztunk meg. A kiegyenlítő egyenes egyenletét azzal a feltétellel adtuk meg, hogy az egyenesektől való merőleges eltérések négyzetösszege a legkisebb legyen (2. ábra).

A részletes levezetést mellőzve megadjuk a kiegyenlítő egyenes két paraméterének egyenletét:

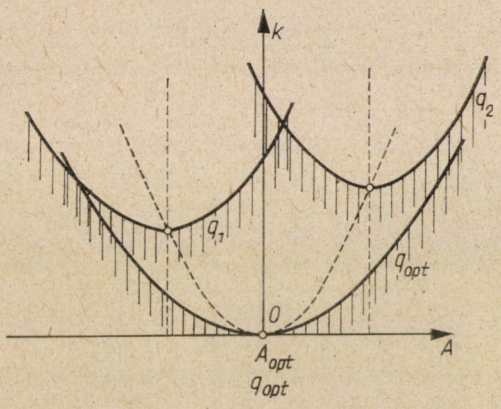
$$\operatorname{tg} 2\varphi = 2 \frac{\sum_1^n q \sum_1^n R - n \sum_1^n qR}{\sum_1^n q \sum_1^n q - n \sum_1^n q^2 - \sum_1^n R \sum_1^n R + n \sum_1^n R^2}$$

és

$$p = \frac{\cos\varphi \sum_1^n q + \sin\varphi \sum_1^n R}{n}.$$

Az ábra alapján is megállapítható, hogy már a kétszakaszos egyenes is megbízhatóan fedi a pontsort. Az is megállapítható, hogy a két szakasz egyenesének iránytangense nem lényegesen tér el, a két irányszög közötti különbség mindössze kereken 10°.

A beruházási költségek jelentős része a bányaüzem megindulása előtt jelentkezik, másik része pedig az üzemidő alatt. A főparaméterekkel összefüggő üzemi jellegű költségek az üzemidő alatt többé-kevésbé egyenletesek. A költsé-



3. ábra

geket azonos időre a kamatos kamat-, illetve a járadékszámítás segítségével hozhatjuk.

Az elméletileg egyszerűnek látszó összefüggéseinket még egy másik körülmény is komplikálja. c_A és c_B tényezők bizonyos fokig függenek az A és B hosszaktól. Kettős függvényről, függvény függvényéről van tehát szó. Mivel a függvény függvénye matematikailag rendkívül bonyolult alakban fejezhető csak ki, gyakorlati megoldásként a fokozatos megközelítés elvét alkalmazhatjuk. A gyakorlat azt mutatja, hogy ezzel a módszerrel igen gyorsan célhoz lehet érni.

Ha az optimálistól a két főparaméter eltér, a velük összefüggő fajlagos termelési költség növekszik. Ez a növekedés matematikai alakban is kimutatható: a növekedés parabola szerint megy végbe (3. ábra). Az ábrán a O pont azt a helyzetet mutatja, amikor a termelési kapacitás is (q_{opt}) és a mezőméret is (A_{opt}) optimális.

/ Azok a költségek, amelyek a főparaméterekkel összefüggenek, a termelési költségnek a bányaüzemi viszonyoktól függően a termelési költségnek 25–35%-át érik el. Mennél inkább különböznek a főparaméterek az optimálistól, annál inkább megnövekednek ezek a költségek.

A harmadik főparaméter az akna vagy aknapár helye. Az akna vagy aknapár akkor van optimális helyen, ha a hellyel összefüggő költségeknek minimuma van. Ha csak a földalatti költségeket vesszük számításba, az akna helyével most is a mozgás és a mozgatás költségei függnek össze.

Az akna optimális helyének kiválasztásában célszerű szétválasztani a táblás és szintműveléses rendszert.

Táblás művelési rendszerben legyen most is a csapásirányú kiterjedés jele A és a dőlésirányúé B. Az akna döféspontján átmenő dőlésvonal az átlagos csapásirányú kiterjedést A_b és A_j részre osztja, az akna és a telep döféspontján átmenő csapásvonal pedig az átlagos dőlésirányú kiterjedést B_s és B_e részre bontja. Írjuk fel a földalatti mozgás és mozgatás fajlagos költségét.

$$k = \frac{1}{2}\{c_{A_b} A_b + c_{A_j} A_j + c_{B_s} B_s + c_{B_e} B_e\},$$

ahol a c jelzi a mozgás és mozgatás fajlagos költségét (Ft/mt) B_s a siklós, B_e az ereszkés mező átlagos kiterjedési hosszát jelenti a telepben mérve. Tudva azt, hogy

$$A_b + A_j = A$$

és

$$B_s + B_e = B,$$

a k értéke akkor legkisebb, ha

$$A_b = \frac{c_{A_j}}{c_{A_b} + c_{A_j}} A = \omega_b A$$

és

$$A_j = \frac{c_{A_b}}{c_{A_b} + c_{A_j}} A = \omega_j A,$$

valamint

$$B_s = \frac{c_{Be}}{c_{B_s} + c_{B_e}} B = \omega_s B$$

és

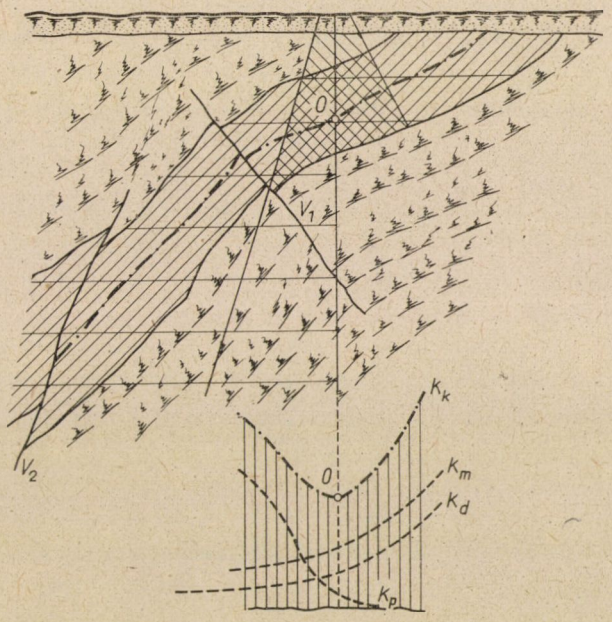
$$B_e = \frac{c_{Bs}}{c_{B_s} + c_{B_e}} B = \omega_e B.$$

Ezek az egyenletek egyértelműen jelölik ki az akna, illetve aknák optimális helyét.

Az akna helyével összefüggő költségek alakulását elliptikus paraboloid felület írja le. Ennek a felületnek legmélyebb pontja jelenti az akna optimális

helyét. Ettől eltérő helyzetben a költségek parabolikusan növekszenek. Az egyenlő költségek parabolikusan növekszenek. Az egyenlő költségek geometriai helye ellipszis.

Ezek az elméleti összefüggések csak a földalatti mozgás és mozgatás költségeit vették figyelembe. Természetesen figyelemmel kell lenni arra is, hogy az akna helyétől függően változik az akna mélysége, a védőpillérben



4. ábra

lekötött ásványvagyon, valamint a külszíni beruházási és mozgatási költségek is. Ezeket az utóbbiakat már legcélszerűbben alternatívák formájában vehetjük számításba. Az egyes alternatívák ilyen költségeit szuperponáljuk a megfelelő földalatti költségekre és így az összehasonlítás önmagától adódik.

Meredekebb telepek szintműveléses rendszerében a mozgás és mozgatás költségein kívül figyelemmel kell lennünk a főkeresztvágatok összhosszára is, továbbá itt már a védőpillérben lekötött ásványvagyonnak is lényegesebb szerepe van.

A viszonyokat a 4. ábra szemlélteti. k_P jelenti a védőpillérben lekötött ásványvagyon mennyiségéből eredő többletköltséget, k_d a főkeresztvágatok beruházási költsége, k_m a mozgás és a mozgatás költsége.

Szabályosnak tekinthető előfordulásokban — eltérően az előbbi esettől — a költségek most egy görbesereg szerint alakulnak. Ezeket a görbéket azok a síkok vágják ki az elliptikus paraboloid felületből, amelyek párhuzamosak

a k-tengellyel és keresztülmennek a szintmezőket elválasztó csapásvonalakon. Az egyenlő költségeket kifejező pontok most is ellipszisen fekszenek.

Az összefüggések élesen kidomborítják a védőpillérben lekötött ásványvagyon jelentőségét. Mennél gazdagabb és mennél meredekebb az előfordulás, az akna helye annál inkább eltolódik a fekü felé a védőpillérben lekötött ásványvagyon mennyiségének csökkentése céljából.

A három főparaméter meghatározása sok mellékproblémát vet fel. Ezekre részleteiben kitérni most nincs lehetőség.

A három főparaméter megállapítását aknamezők vonatkozásában vizsgáltuk. Ugyanezt megtehetjük az aknamezőn belül is az egyes mezők vonatkozásában. Analóg módon vizsgálható táblás művelés esetében a siklő- és ereszkemezők termelési kapacitása, kiterjedése, a siklók vagy ereszkék telepítési helye. Szintműveléses rendszerben egyik alapvető probléma a szintmagasság meghatározása, továbbá a keresztvágatmezők kiterjedése, a keresztvágatok helye.

A mezők, szintmezők, fejtési mezők optimális paramétereinek meghatározása sokban hasonlít a főparaméterek meghatározásához.

A szintosztás problémája már régi keletű. A korábbi vizsgálatok azonban csak numerikus összehasonlító vizsgálatok voltak. Miután sikerült nekünk az általános elvi összefüggések tisztázása és rögzítése, örömmel állapíthatjuk meg, hogy azóta például a „Glückauf"-ban, ebben a világviszonylatban is előkelő helyet elfoglaló bányászati szaklapban az általános elvekre támaszkodva több ilyen irányú cikk jelent meg. Ezzel egy időben megdőlt az a korábbi felfogás, hogy a szintmezők optimális magassága a műszakilag lehetséges legnagyobb szintmagasság, de nem állja meg a helyét az a régebbi felfogás sem, hogy a szintmagasság 40—50 m között van.

A fejtési mezők optimális telepítésének körülményeit analitikailag az irodalom még sehol sem tárgyalta. Az elvégzett vizsgálatok eredményeképpen több gyakorlati következtetés született a siklók, ereszkék telepítési helyét, továbbá a csapásmenti kiterjedést illetően. Megállapítottuk, hogy az optimálistól való eltérés függvényében a paraméterekkel összefüggő költségek parabolikusan növekszenek.

Világviszonylatban, és így nálunk is, a bányászatnak a gazdasági mérlegekben tekintélyes súlya van. A mi viszonylag kicsi országunkban a népgazdasági mérlegben egyedül a szénbányászat közel 10 milliárdot képvisel évenként. A főparaméterekkel a költségeknek kereken 1/3-a függ össze, azaz kereken évi 3 milliárd forint.

Ez a rövid gazdasági számítás is meggyőzhet bennünket arról, hogy ezekkel a problémákkal való foglalkozás nemcsak a bányászati tudományokat fejleszti, de komoly népgazdasági jelentősége is van. Helyénvaló tehát, hogy a korábbi szubjektív szemléletet, a tekintély elvén alapuló ítéletet az objektív szemlélet váltsa fel.

Az út, amelyen elindultunk, már eddig is komoly eredményeket hozott. Hazánkban már eddig is több telepítést előzött meg objektív műszaki-gazdasági-matematikai vizsgálat. Vonatkozik ez elsősorban a Pécs—Komló-i liasz szénterületre, ahol hazánk legkomolyabb telepítései vannak.

IRODALOM

1. Sevjakov, L. D.: Mélyművelésű bányaüzemek tervezési alapelvei. Budapest, Nehézipari Könyvkiadó 1951. A Nehézipar Könyvei: 55. sz.
2. Шевяков Л. Л.: Основы теории проектирования угольных шахт. Изд. 2-е. Москва, Углетехиздат, 1958.
3. Řiman, Alois: Optimalne wielkosci kopaln wegla kamiennego i ich zwiazek z rentowoscia. Katowice, Przeglad Górniczy 1958. 11. sz. 597—607. pp.
4. Krupinski, B.: Zasady projektowania kopaln. I. Katowice, 1957. Krakow, 1958
5. Benthaus, Fr.: Das Berechnen der wietschaftlichsten Größe von Schachtbaufeldern. Glückauf, 1956. 8—38. pp.
6. Dr. Zambó János: Bányászati telepítések analitikája. Budapest, 1960. Műszaki Könyvkiadó

ÖSSZEFOGLALÁS

Legfőbb paraméterek alatt az aknaüzem termelési kapacitását, az aknamező csapás- és dőlésmenti kiterjedését, valamint az akna, illetve aknák telepítési helyét értjük. A szerző a legalapvetőbb összefüggéseket tisztázza abból kiindulva, hogy a paraméterek akkor optimálisak, ha a velük összefüggő fajlagos költség minimumot mutat. Felírja az alapvető függvényeket és azokat részletesen elemzi.

A főparaméterek nemcsak az egész bányaüzemre, hanem azon belül egyes fejtési mezőkre is meghatározhatók hasonló módon.

Végezetül a szerző kidomborítja a kérdéskomplexum gazdasági jelentőségét.

TORZIÓSLENGÉSEKNÉL KELETKEZŐ TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKOK REDUKCIÓJA

Dr. BALOGH ARTÚR
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1960. szeptember 5-én]

Nagy teljesítmény végett több motor egységet kapcsolnak a hajtott szerkezet (pl. hajócsavar) mozgatásához. Ilyenkor a számítási nehézségek lényegesen fokozódnának, ha az a körülmény, hogy a motorok tehetetlenségi nyomatékai és a hozzátartozó merevségi tényezők egymásközötti egyenlősége nem segítenének. A feladat mindössze az, hogy az egyenlő tömegek tehetetlenségi nyomatékait, figyelembe véve a merevségi tényezőket, 1 tömeggel helyettesíthessük, másszóval az egyenlő tömegek tehetetlenségi nyomatékait tetszőleges, de kedvezően fekvő helyre redukáljuk akként, hogy a rendszeren lengéstechnikailag változás ne legyen.

E redukáló eljárásnak az a legegyszerűbb megoldása, hogy 2 tömegből álló, de az eredeti rendszerrel lengéstechnikailag egyenértékű rendszerre vezetjük vissza, amelynek alakja a következő:

$$w^2 = c_1 \left(\frac{1}{If(w^2)} + \frac{1}{I_1} \right).$$

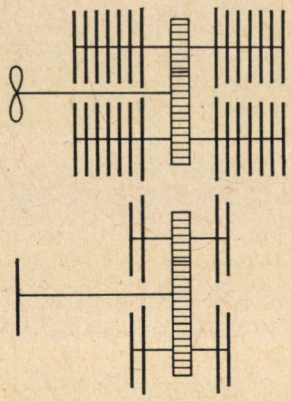
Ekkor azonban a dolog természeténél fogva, a redukált tehetetlenségi nyomaték függvénye marad a w körfrekvenciának. I_1 pedig a változatlanul maradt tömeg tehetetlenségi nyomatéka, c_1 a hozzá tartozó merevségi tényező.

Feladatunk megoldásánál, eltérően az irodalomban található leírásoktól, a karakterisztikus egyenletből indulunk ki és felhasználjuk azt a formáját, amelyet az MTA Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei XV. kötet 1—4. számában ismertettem. Mindamellett azonban az eredményeket az irodalomban található kifejezésekkel össze fogjuk hasonlítani.*

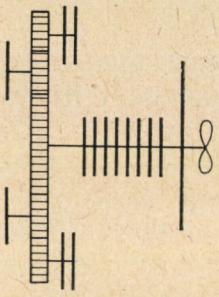
A redukció jelentőségét néhány megoldáson mutatjuk be. Az 1. ábrán négy Diesel-motorból álló rendszert látunk, amelyek fogaskerékpárral hajtják

* A feladat megoldását megtaláljuk a következő munkában: Handbook on torsional vibration. B. I. C. E. R. A. Researche Laboratory. Cambridge. At the University Press. 1958. A 260. lapon ismert képletből indulnak ki, és vezetik le a tehetetlenségi nyomaték redukálási képletét. Mint fentebb jeleztük, mi ettől teljesen eltérően a karakterisztikus egyenletből vezetjük le képleteinket, amelyek az idézett könyv eredményeivel teljesen egyeznek.

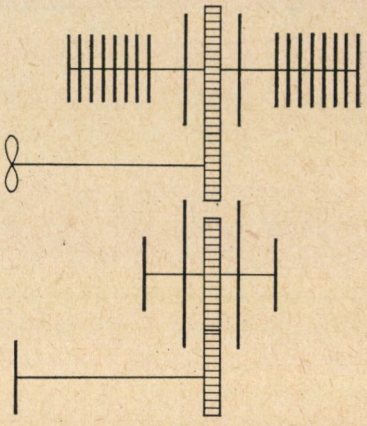
a hajócsavart. Ezen az ábrán látható a redukció eredménye is, amelynél a hathengerű egységeket (egy független tömeggel, mégpedig lendkerékkel) két tömegből álló rendszerre redukáltuk. Kétségtelen, hogy ez a számítást lényegesen megkönnyíti. A 2. ábrában más hajtási elrendezést ismertetünk ugyancsak fogaskerekekkel, amelynél a redukció ismét lényegesen egyszerűsíti



1. ábra



2. ábra



3. ábra

a számítást. A 3. ábra az 1. ábrában már ismertetett rendszer egy részletét mutatja, amelynél két motoregység ugyancsak fogaskerekekkel hajtja a hajócsavart.

A használt jelölések a következők:
w a rendszer körfrekvenciája (1/sec);
I a tömeg tehetetlenségi nyomatéka (kgcmsec^2);
c merevségi tényező (kgcm);
$u_{ik} - \frac{c_i}{I_k}$ (1/sec^2);
f a csavarási szög;
p a lengés amplitudója (cm).

3. *tömegre* a karakterisztikus egyenlet (4. ábra):

$$w^4 - [u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23}]w^2 + u_{11}[u_{22} + u_{23}] + u_{12}u_{23} = 0. \qquad (1)$$

Helyettesítsük be az u értékeket:

$$-w^4 + w^2\left(\frac{c_1}{I_1} + \frac{c_1}{I_2} + \frac{c_2}{I_2} + \frac{c_2}{I_3}\right) = \frac{c_1 c_2}{I_1 I_2} + \frac{c_1 c_2}{I_1 I_2} + \frac{c_1 c_2}{I_2 I_3}.$$

Végig szorzunk:

$$\frac{c_1}{I_1 I_2}$$

és rendezve a következő alakot kapjuk:

$$w^2\left[I_2\left(1-\frac{I_1 w^2}{c_1}\right)+I_1\right]=c_2\left[1-\frac{I_1 w^2}{c_1}\right]+\frac{I_2\left(1-\frac{I_1 w^2}{c_1}\right)+I_1}{I_3}c_2 \tag{2}$$

ebből:

$$w^2=c_2\left(\frac{1-\frac{I_1 w^2}{c_1}}{I_2\left(1-\frac{I_1 w^2}{c_1}\right)+I_1}+\frac{1}{I_3}\right),$$

vagy

$$w^2=c_2\left(\frac{1}{I_2+\frac{I_1}{1-\frac{I_1 w^2}{c_1}}}+\frac{1}{I_3}\right). \tag{3}$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$I_2'=I_2+\frac{I_1}{1-\frac{I_1 w^2}{c_1}}. \tag{4}$$

Akkor:

$$w^2=c_2\left(\frac{1}{I_2'}+\frac{1}{I_2}\right). \tag{5}$$

Ha $I_1=I_2$ és

$$\frac{I_1 w^2}{c_1}=q,$$

jelöljük akkor:

$$I_2'=I_1\frac{2-q}{1-q}.$$

Tehát a 3 tömegből álló rendszert visszavezettük két tömegből álló rendszerre. Legyen:

$$I_0=\frac{I_1}{1-\frac{I_1 w^2}{c_1}}, \tag{6}$$

amit átalakítással a következőkben ismertetett kifejezésre lehet visszavezetni.

A (6)-ból kapjuk:

$$\frac{I_1 w^2}{c_1}=1-\frac{I_1}{I_0}$$

vagy:

$$I_1 w^2=c_1\left[1-\frac{I_1}{I_0}\right]. \tag{7}$$

Ámde két tömegű rendszer differenciálegyenlete:

$$I_1 \dot{f}_1 = c_1[f_2 - f_1] ,$$

amelynek megoldása $f_1 = p_1 \cos wt$ és $f_2 = p_2 \cos wt$, amit a differenciálegyenletbe helyettesítve:

$$I_1 w^2 p_1 = c_1(p_1 - p_2) ,$$

vagy:

$$I_1 w^2 = c_1\left[1 - \frac{p_2}{p_1}\right], \tag{8}$$

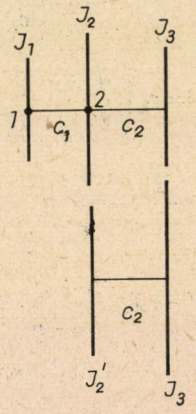
amiből következik, hogy:

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{p_2}{p_1} , \tag{9}$$

amit a következőképpen is írhatunk:

$$I_1 p_1 w^2 = I_0 p_2 w^2 , \tag{10}$$

aminek dimenziója kgcm². Mint, látható (10)-ből visszafelé levezethetjük a redukció (5) kifejezését és ezt az utat követik az irodalomban* is. Azáltal



4. ábra

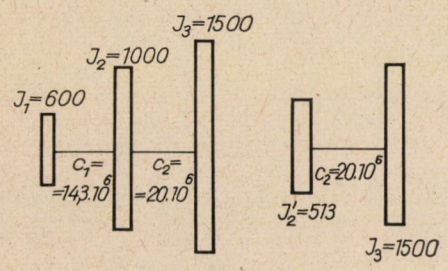
azonban, hogy az itt közölt levezetéssel a (10) kifejezés helyességét igazoltuk és felhasználásának jogosultságát a redukció kiszámításánál megállapítottuk, a részünkről használt és bevezetett karakterisztikus egyenlet fölényes jelentőségét is bebizonyíthattuk.

Az (5) alatti kifejezésből látható, hogy adott tömeg tehetetlenségi nyomatékát tetszőleges előre megállapított helyre lehet redukálni olyképpen, hogy

* Hivatkozunk a már idézett B. I. C. E. R. A. kiadványra, ahol azonban csak 4 tömegű rendszerig vezetik le a redukciót a (10) kifejezésből kiindulva.

ezáltal a rendszeren lengéstechnikai szempontból változás nincs és amennyiben ezen az előre kijelölt helyen további tehetetlenségi nyomaték lenne, azt a számított értékhez hozzá kell adni.

Ezt a redukciós eljárást tovább lehet folytatni, tehát a már megállapított redukált I_2' értéket egy másik helyre lehet redukálni. Az ehhez felhasználandó kifejezés szerkezetileg egyezik a (6) alatti kifejezéssel. A következőkben ezt a folytatólagos redukciót példákon fogjuk bemutatni, kiindulván ismét a karak-



5. ábra

terisztikus egyenlet azon alakjából, amelyet a már idézett munkámban felállítottam.

Számpélda (3 tömegre).
Az 5. ábra szerinti elrendezésnél a következő értékeket vesszük számításba:

$$u_{11} = \frac{2 \cdot 10^6}{1500} = 1{,}33 \cdot 10^4, \qquad u_{12} = \frac{20 \cdot 10^6}{1000} = 2 \cdot 10^4,$$

$$u_{22} = \frac{14{,}3 \cdot 10^6}{1000} = 1{,}43 \cdot 10^4 \qquad u_{23} = \frac{14{,}3 \cdot 10^6}{600} = 2{,}4 \cdot 10^4.$$

Más úton kiszámítottuk, hogy az egyik körfrekvencia:

$$w_1^2 = 532 \cdot 10^2,$$

amely értéket fogjuk ellenőrizni a már levezetett kifejezés felhasználásával.

$$I_2' = I_2 + \frac{I_1}{1 - \frac{w^2}{c_1} I_1} = 1000 + \frac{600}{1 - \frac{532 \cdot 10^2 \cdot 600}{14{,}3 \cdot 10^6}} = 513.$$

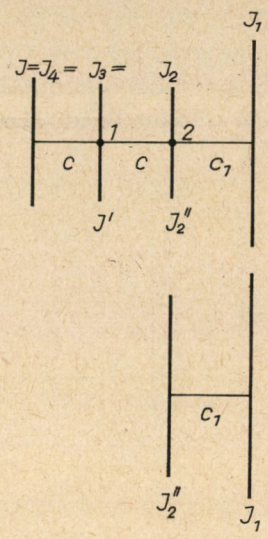
Ellenőrzéséhez:

$$w^2 = 20 \cdot 10^6 \left(\frac{1}{513} + \frac{1}{5000} \right) = 523 \cdot 10^2,$$

ami felvétellel elég jól egyezik.

4 *tömegre.* Két esetet tárgyalunk. Az egyik esetben egy, a másik esetben két független tömeg van a rendszerben.

Egy független tömeg esetét a 6. ábrában látjuk, és ugyanezen ábrában bemutatott redukciót fogjuk végrehajtani, majd visszavezetni két tömegből álló rendszerre.



6. ábra

A karakterisztikus egyenlet erre az esetre a következő:

$$w^6 - [u_{11} + u_{12} + 4u]w^4 + u[4u_{11} + 3u_{12} + 3u] - u^2[3u_{11} + u_{12}] = 0\,, \quad (11)$$

ahol:

$$\frac{c_1}{I_1} = u_{11}, \qquad \frac{c_1}{I_2} = {}_{12}, \qquad \frac{c}{I} = u\,.$$

Válasszuk külön azon tagokat, amelyek u_{11}, illetve u_{12} tartalmazzák és a még fennmaradottakat külön, akkor:

$$[w^2 - u_{11}]\,[3u^2 - 4uw^2 + w^4] = u_{12}[u^2 - 3uw^2 + w^4]\,.$$

Ebből:

$$w^2 = u_{12}\,\frac{1 - \dfrac{3w^2}{u} + \dfrac{w^4}{u^2}}{3 - \dfrac{4w^2}{u} + \dfrac{w^4}{u^2}} + u_{11}\,. \qquad (12)$$

Legyen:

$$\frac{w^2}{u} = q = \frac{w^2}{\dfrac{c}{I}}\,,$$

akkor:

$$w^2 = u_{12}\frac{1-3q+q^2}{3-4q+q^2} + u_{11} = c_1\left(\frac{1}{I\dfrac{3-4q+q^2}{2-3q+q^2}} + \frac{1}{I_1}\right). \tag{13}$$

Tehát:

$$w^2 = c_1\left(\frac{1}{I''} + \frac{1}{I_1}\right), \tag{14}$$

ahol:

$$I_2'' = I\frac{3-4q+q^2}{1-3q+p^2} = I\left(1+\frac{2-q}{1-3q+q^2}\right). \tag{15}$$

Átalakítás után:

$$I_2'' = I + \frac{I\dfrac{2-q}{1-q}}{1-\dfrac{w^2}{c}\dfrac{2-q}{1-q}I}. \tag{16}$$

Jelöljük:

$$I' = \frac{2-q}{1-q}I = I\left(1+\frac{1}{1-\dfrac{w^2 I}{c}}\right) = I\left(1+\frac{1}{1-q}\right) = \frac{2-q}{1-q}I, \tag{17}$$

akkor:

$$I_2'' = I + \frac{I'}{1-\dfrac{w^2 I'}{c}}. \tag{18}$$

E számításban kettős redukciót hajtottunk végre. Az elsőnél I-t redukáltunk 1 helyre. Kaptuk I'-őt. Majd I'-őt redukáltuk 2 helyre, és kaptuk az I_2''-őt. És így a két tömegű rendszerre redukált kifejezés:

$$w^2 = c_2\left(\frac{1}{I_2''} + \frac{I}{I_1}\right). \tag{19}$$

A számítás menete a következő: Felvesszük w^2, és ezzel kiszámítjuk q-t, továbbá I'-t és ezzel I''-t. Ezen adatokkal kiszámítjuk (19)-ben megadott kifejezést, és ha az ekként kapott eredmény a felvett w^2-al egyezik, akkor a számítás helyes. Tehát próbálgatásokhoz kell folyamodni.

Áttérünk arra az esetre, amikor négy tömegű rendszernél a független tömegek száma 2.

Ha tehát $u = u_{33} = u_{34}$, a karakterisztikus egyenlet a következő:

$$w^6 - [u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 2u]w^4 + [u_{11}(u_{22} + u_{23} + 2u) + u_{12}(u_{23} + \\ + 2u) + 2u\,u_{22} + uu_{23}]w^2 - [u_{11}(u_{22}\,2u + u_{23}u) + u_{12}u_{23}u] = 0. \tag{20}$$

Válasszuk szét ezen egyenletet a következőképpen:

$$\begin{aligned} &u_{11}[-w^4+(u_{22}+u_{23}+2u)w^2+(u_{22}\,2u+uu_{23})]+\\ &+u_{12}[-w^4+(u_{23}+2u)w^2-u_{23}u]+\\ &+w^6-(u_{22}+u_{23}+2u)w^4+(2uu_{22}+uu_{23})w^2=0\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Összevonva:

$$\frac{w^2-u_{11}}{u_{12}}=\frac{w^4-(u_{23}+2u)\,w^2+u_{23}u}{w^4-(u_{22}+u_{23}+2u)\,w^2+2uu_{22}+uu_{23}}\,. \tag{22}$$

A számlálót, illetve a nevezőt a következő alakra vonhatjuk össze:

$$\frac{w^2-u_{11}}{u_{12}}=\frac{u_{23}(u-w^2)-w^2(2u-w^2)}{u_{23}(u-w^2)-w^2(2u-w^2)+u_{22}(2u-w^2)}\,. \tag{23}$$

A következő átalakításokhoz az egyenlőség baloldalát nem vesszük tekintetbe, és csak a jobboldal átalakításával foglalkozunk.

A további átalakítások a következők:

$$\frac{1}{1+u_{22}\dfrac{2u-w^2}{u_{23}(u-w^2)-w^2(2u-w^2)}}=\frac{1}{1+u_{22}\dfrac{1+\dfrac{u}{u-w^2}}{u_{23}-w^2\left(1+\dfrac{u}{u-w^2}\right)}}= \tag{24}$$

$$=\frac{1}{1+u_{22}\dfrac{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{w^2}{u}}}{\dfrac{c_2}{I}-w^2\left[1+\dfrac{1}{1-\dfrac{w^2}{u}}\right]}}=\frac{1}{1+u_{22}\dfrac{I\left[1+\dfrac{1}{1-\dfrac{w^2}{u}}\right]}{c_2-w^2\left[1+\dfrac{1}{1-\dfrac{w^2}{u}}\right]}}\,. \tag{25}$$

Jelöljük:

$$I\left[1+\frac{1}{1-\dfrac{w^2}{u}}\right]=I'\,,$$

akkor:

$$w^2-u_{11}=\frac{u_{12}}{1+\dfrac{c_2}{I_2}\dfrac{I'}{c_2-w^2I'}}=\frac{c_1}{I_2+\dfrac{I'}{1-\dfrac{w^2I'}{c_2}}}\,. \tag{26}$$

Ebből azután levezethető:

$$w^2 = c_1\left[\frac{1}{I_2''} + \frac{1}{I_1}\right], \text{ ahol } I_2'' = I_2 + \frac{I'}{1 - \frac{w^2 I'}{c_2}}. \tag{27}$$

és

$$I' = I\left(1 + \frac{1}{1 - \frac{w^2 I}{c}}\right) = I\frac{2-q}{1-q},$$

ahol $q = \frac{w^2 I}{c}$.

Ha (26) és (27)-be behozzuk a q értéket, akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$w^2 = c_1\left(\frac{1}{I_2 + \frac{I\frac{2-q}{1-q}}{1 - \frac{w^2 I}{c_2}\frac{2-q}{1-q}}} + \frac{1}{I_1}\right).$$

E kifejezésben van a (17) alatti kifejezés, tehát 4 tömegnél két független tömeg esetét visszavezettük megelőző egyszerűbb esetre, és ha c_2 helyébe c kerül, mert a független tömegek száma 1-re csökken, akkor (14) és (16) alatti kifejezéseket kapjuk.

Ezzel a rendszert visszavezettük két tömegű rendszerre, amelynél az egyik a redukált tömeg tehetetlenségi nyomatéka I_2'', a másik pedig I_1.

I' az 1 pontra redukált, I'' pedig a 2 pontra redukált tömeg tehetetlenségi nyomatéka.

Teljesség kedvéért megjegyezzük még, hogy

$$u_{11} = \frac{c_1}{I_1}, \quad u_{12} = \frac{c_1}{I_2}, \quad u_{22} = \frac{c_2}{I_2}, \quad c_{23} = \frac{c_2}{I} \text{ és } \frac{c}{I} = u \tag{28}$$

A számítás menete egyezik az előzőben megadottal: felvesszük w^2-t és kiszámítjuk I' és I_2'', és ezzel kiszámítjuk w^2-et. Ha az ekként kiszámított w^2 egyezik a felvett w^2-el, akkor a választás helyes.

Számpélda (4 tömegre):

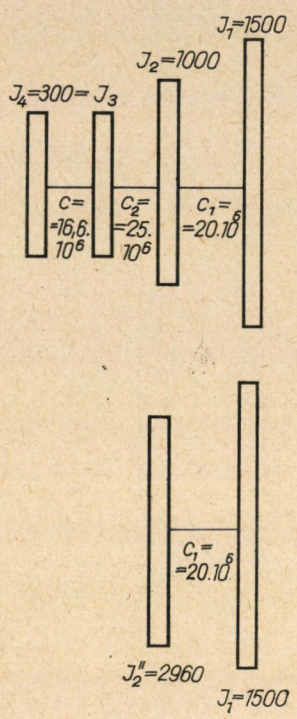
A 7. ábrán 4 tömegű rendszer adatait olvashatjuk ki. A független tömegek száma 2.

Erre nézve: $u_{11} = \frac{20 \cdot 10^6}{1500} = 1{,}33 \cdot 10^4$, $u_{12} = \frac{20 \cdot 10^6}{1000} = 2 \cdot 10^4$

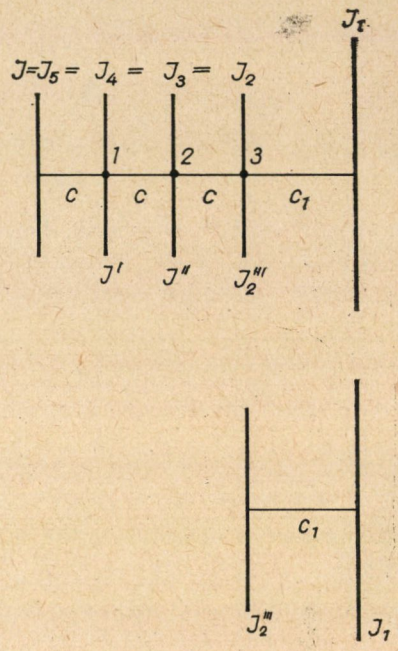
$$u_{22} = \frac{25 \cdot 10^6}{1000} = 2{,}5 \cdot 10^4, \; u_{23} = \frac{25 \cdot 10^6}{300} = 8{,}3{,}10^4, \; u_{33} = u_{34} = u =$$

$$= \frac{16{,}6 \cdot 10^6}{300} = 5{,}5 \cdot 10^4.$$

Ezen adatokkal a *regula falsi* módszerével az egyik önlengésszámot, illetve annak körfrekvenciáját kiszámítottuk, és az eredmény: $w_1^2 = 2 \cdot 10^4$. Ennek helyességét a tömegredukció elvéből levezetett kifejezésekkel fogjuk ellenőrizni.



7. ábra



8. ábra

$$I' = I\left(1 + \frac{1}{1 - \frac{w^2 I}{c}}\right) = 300\left(1 + \frac{1}{1 - \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 300}{16{,}6 \cdot 10^6}}\right) = 768,$$

$$I_2'' = I_2 + \frac{I'}{1 - \frac{w^2 I'}{c_2}} = 1000 + \frac{768}{1 - \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 768}{25 \cdot 10^6}} = 2960.$$

Ellenőrzéshez:

$$w^2 = 20 \cdot 10^6\left(\frac{1}{2960} + \frac{1}{1500}\right) = 10^4\left(\frac{2000}{2960} + \frac{2000}{1500}\right) = (0{,}67 + 1{,}33)\,10^4 = 2 \cdot 10^4,$$

tehát a körfrekvenciát helyesen választottuk.

5 tömegre. Két esetet tárgyalunk. Az egyik esetben egy, a másik esetben két független tömeg van a rendszerben.

Egy független tömeg esetét a 8. ábrában találjuk, és ugyanabban az ábrában bemutatott redukciót fogjuk végrehajtani és visszavezetjük két tömegből álló rendszerre.

A karakterisztikus egyenlet erre az esetre a következő:

$$w^8 - [u_{11} + u_{12} + 6u]w^6 + u[6u_{11} + 5u_{12} + 10u]w^4 - u^2[10u_{11} + 6u_{12} + 4u]w^2 + u^3[4u_{11} + u_{12}] = 0.$$

Ezt az egyenletet — úgy mint előbb — 3 részre bontjuk, éspedig azon tagokat szemeljük ki, amelyek az u_{11}, ill. u_{12}-höz tartoznak, és külön vesszük a fennmaradó tagokat. Az eredmény a következő:

$$w^2 - u_{11} = u_{12}\frac{w^6 - 5uw^4 + 6uw^3 - u^3}{w^6 - 6uw^4 + 10u^2w^2 - 4u^3} = \tag{30}$$

$$= u_{12}\frac{\frac{w^6}{u^3} - 5\frac{w^4}{u^2} + 6\frac{w^2}{u} - 1}{\frac{w^6}{u^3} - 6\frac{w^4}{u^2} + 10\frac{w^2}{u} - 4} = u_{12}\frac{q^3 - 5q^2 + 6q - 1}{q^3 - 6q^2 + 10q - 4}.$$

Ebből:

$$w^2 = c_1\left(\frac{1}{I\frac{q^3 - 6q^2 + 10q - 4}{q^3 - 5q^2 + 6q - 1}} + \frac{1}{I_1}\right). \tag{31}$$

Legyen:

$$I_2''' = I\frac{q^3 - 6q^2 + 10q - 4}{q^3 - 5q^2 + 6q - 1}, \tag{32}$$

akkor

$$w^2 = c_1\left(\frac{1}{I_2'''} + \frac{1}{I_1}\right). \tag{33}$$

I'''-t átalakítjuk a következőképpen:

$$I_2''' = I\frac{q^3 - 5q^2 + 6q - 1 - q^2 + 4q - 3}{q^3 - 5q^2 + 6q - 1} = I\left(1 + \frac{q^2 - 4q + 3}{1 - 6q + 5q^2 - q^3}\right). \tag{34}$$

Ezt az eredményt a karakterisztikus egyenletből vezettük le, és ellenőrizni fogjuk az eddig ismertetett tömeg redukcióval.

Redukálunk az 1 helyre. A (17) képlet szerint:

$$I' = I\frac{2 - q}{1 - q}. \tag{35}$$

Redukálunk a 2. helyre:

$$I'' = I + \frac{I'}{1 - \frac{w^2 I'}{c}} = I + \frac{I\frac{2-q}{1-q}}{1 - \frac{w^2}{c} I \frac{2-q}{1-q}} =$$

$$= I\left(1 + \frac{\frac{2-q}{1-q}}{1 - q\frac{2-q}{1-q}}\right). \tag{36}$$

Redukálunk a 3. helyre:

$$I_2'' = I + \frac{I''}{1 - \frac{w^2 I''}{c}}. \tag{37}$$

Helyettesítsük be I''-öt:

$$I_2''' = I\left[1 + \frac{\frac{2-q}{1-q}}{1 - q\left(1 + \frac{\frac{2-q}{1-q}}{1 - q\frac{2-q}{1-q}}\right)}\right] =$$

$$= I\left[1 + \frac{1 - \frac{3q + q^2 + 2 - q}{1 - 3q + q^2}}{1 - q\left(\frac{1 - 3q + q^2 + 2 - q}{1 - 3q + q^2}\right)}\right] = \tag{38}$$

$$= I\left(1 + \frac{3 - 4q + q^2}{1 - 3q + q^2 - 3q + 4q^2 - q^3}\right),$$

és ezek után a végeredmény:

$$I_2'' = I\left(1 + \frac{3 - 4q + q^2}{1 - 6q + 5q^2 - q^3}\right), \tag{39}$$

amely tehát a már levezetett (34) kifejezéssel teljesen egyezik. Le kívánjuk szögezni ezzel az eredménnyel azt, hogy a karakterisztikus egyenlettel végzett egyszerűsítés ugyanazt az eredményt adja, mintha szabályszerű tömegredukciót végeztünk volna. A továbbiakban erre a célra csakis a karakterisztikus egyenletet fogjuk felhasználni.

Erre az esetre numerikus példát fogunk bemutatni.

Számpélda (5 tömegre): $I = 2560$, $I_1 = 24\,600$, $c_1 = 83\,200 \cdot 10^3$, $c_2 = 200\,000 \cdot 10^3$,

$$u_{11} = 3{,}37 \cdot 10^3,\quad u_{12} = 32{,}4 \cdot 10^3,\quad u = 78 \cdot 10^3.$$

Legyen $w^2 = 8000$, $\quad q = \dfrac{w^2}{u} = \dfrac{8000}{78 \cdot 1000} = 0{,}1025$,

$$q^2 = 0{,}010506$$

$$q^3 = 0{,}001076$$

$$1 + \frac{q^2 - 4q + 3}{-q^3 + 5q^2 - 6q + 1} = 1 + \frac{0{,}010506 - 0{,}4100 + 3}{-001076 + 0{,}05253 - 0{,}6150 + 1} = 6{,}95.$$

$$w^2 = 83\,200 \cdot 10^3 \left(\frac{1}{2560 \cdot 6{,}95} + \frac{1}{24\,600} \right) = 8040,$$

ami a felvett értékkel jól egyezik.

Legyen $w^2 = 7000$ $\quad q = \dfrac{7000}{78 \cdot 1000} = 0{,}0897$,

$$q^2 = 0{,}008046,$$

$$q^3 = 0{,}0007271.$$

$$1 + \frac{q^2 - 4q + 3}{-q^3 + 5q^2 - 6q + 1} = 1 + \frac{0{,}008046 - 0{,}3588 + 3}{-0{,}0007221 + 0{,}04023 - 0{,}5382 + 1} = 7{,}28,$$

$w^2 = \dfrac{83\,200 \cdot 10^2}{2560 \cdot 7{,}28} + 3{,}38 \cdot 10^3 = 7840$, tehát a felvett értéknél nagyobb.

Legyen $w^2 = 10\,000$, $\quad q = 0{,}128$, $\quad q^2 = 0{,}016384$; $\quad q^3 = 0{,}002097$.

$$1 + \frac{q^2 - 4q + 3}{-q^3 + 5q^2 - 6q + 1} = \frac{0{,}01638 - 0{,}512 + 3}{-002097 + 0{,}08192 - 0{,}768 + 1} = 11{,}51.$$

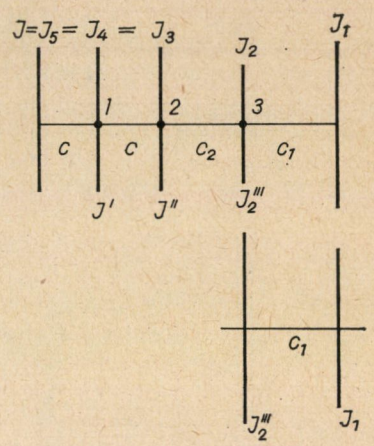
$w^2 = \dfrac{83\,200 \cdot 10^3}{2560 \cdot 11{,}51} + 3{,}38 \cdot 10^3 = 6200$, a felvett értéknél kisebb.

Áttérünk arra az esetre, amikor az öt tömegű rendszerben a független tömegek száma 2 (9. ábra).

A karakterisztikus egyenlet erre az esetre:

$$w^8 - [u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + 4u]w^6 + [u_{11}(u_{22} + u_{23} + 4u) + u_{12}(u_{23} + 4u) + u(4u_{22} + 3u_{23} + 3u)]w^4 - [u_{11}(4u_{22} + 3u_{23} + 3u)u + u_{12}(3u_{23} + 3u)u + (3u_{22} + u_{23})u^2]w^2 + u_{11}(3u_{22} + u_{23}) + u_{12}u_{23}]u^2 = 0. \qquad (40)$$

Ezt az egyenletet 3 csoportra osztjuk, mégpedig az egyik csoport tartalmazza u_{11}-t, a másik csoport u_{12}-t, és a fennmaradó tagok alkotják a harmadik csoportot. Ezekből alakul a következő kifejezés:



9. ábra

$$\frac{w^2-u_{11}}{u_{12}}=\frac{w^6-(u_{23}+4u)\,w^4+(3u_{23}+3u)\,uw^2-u_{23}\,u}{w^6-(u_{22}+u_{23}+4u)\,w^4+u(4u_{12}+3u_{23}+3u)\,w^2-(3u_{22}+u_{23})u^2}=$$

$$=\frac{u(u_{23}-w^2)(u-w^2)-(2u-w^2)(-w^4+w^2u_{23}+w^2u)}{u(u_{23}-w^2)(u-w^2)-(2u-w^2)[-w^4+w^2(u_{23}+u)]+u_{22}(3u-w^2)(u-w^2)}=$$

$$=\frac{1}{1+u_{32}\dfrac{(3u-w^2)(u-w^2)}{u(u_{23}-w^2)(u-w^2)-(2u-w^2)[-w^4+w^2(u_{23}+u)]}}\,. \tag{41}$$

$$\frac{w^2-u_{11}}{u_{12}}=\frac{1}{1+u_{22}\dfrac{u-(w^2-u)\dfrac{2u-w^2}{u-w^2}}{u(u_{23}-w^2)-\dfrac{2u-w^2}{u-w^2}[-w^4+w^2(u_{23}+u]}}=$$

$$=\frac{1}{1+u_{22}\dfrac{c-(w^2-u)\,I\left[1+\dfrac{1}{1-\dfrac{w^2}{u}}\right]}{c(u_{23}-w^2)-I\left[1+\dfrac{1}{1-\dfrac{w^2}{u}}\right][-w^4+w^2(u_{23}+u)]}}\,. \tag{42}$$

Legyen: $I\left[1+\dfrac{1}{1-\dfrac{w^2}{u}}\right]=I'$, akkor az egyenlet jobboldala:

$$\frac{1}{1+u_{22}\dfrac{c-(w^2-u)I'}{c(u_{23}-w^2)-I'\left[-w^4+w^2(u_{23}+u)\right]}}= \tag{43}$$

$$=\frac{1}{1+u_{22}\dfrac{1+\dfrac{c}{I}\dfrac{I'}{c-I'w^2}}{u_{23}-w^2\left[1+\dfrac{c}{I}\dfrac{I'}{c-I'w^2}\right]}}= \tag{44}$$

$$=\frac{1}{I+\dfrac{I'}{1-\dfrac{w^2I'}{c}}}\cdot\frac{1}{1+u_{22}\dfrac{\dfrac{c}{c_2-w^2\left[1+\dfrac{I'}{1-\dfrac{w^2I'}{c}}\right]}}{}}$$

Legyen: $I''=I+\dfrac{I'}{1-\dfrac{w^2I'}{c}}$.

Behelyettesítve:

$$\frac{w^2-u_{11}}{u_{12}}=\frac{1}{1+u_{22}\dfrac{I''}{c_2-w^2I''}}, \tag{45}$$

és ebből

$$w^2-u_{11}=\frac{c_1}{I_2+\dfrac{I''}{1-\dfrac{w^2I''}{c_2}}}=\frac{c_1}{I_2'''}, \tag{46}$$

és végül:

$$w^2=c_1\left(\frac{1}{I_2'''}+\frac{1}{I_1}\right). \tag{47}$$

Az eddigiekből látható, hogy I' a redukció az 1, I'' a redukció a 2 pontra. és I''' redukció a 3. pontra.

Megjegyezzük még, hogy:

$$\frac{c_1}{I_1}=u_{11},\quad \frac{e_1}{I_2}=u_{12},\quad \frac{c_2}{I_2}=u_{22},\quad \frac{c_2}{I}=u_{23},\quad \frac{c}{I}=u\,. \tag{48}$$

Öt tömeg esetére a levezetett kifejezéseket összevonjuk, mégpedig:

$$I_2''' = I_2 + \frac{I''}{1 - \frac{w^2 I''}{c_2}}, \quad I'' = I + \frac{I'}{1 - \frac{w^2 I''}{c}} \text{ és}$$

$$I' = I\left[1 + \frac{1}{1 - \frac{w^2}{u}}\right] = I\frac{2-q}{1-q}.$$

Ezen adatokkal:

$$I'' = I + \frac{I\frac{2-q}{1-q}}{1 - q\frac{2-q}{1-q}} = I\left[1 + \frac{2-q}{q^2 - 3q + 1}\right],$$

amely kifejezéssel (15) alatt a 4 tömegnél, de egy független tömege esetén már volt dolgunk, tehát előttünk már ismert.

Ezekkel:

$$I_2''' = I_2 + \frac{I\left[1 + \frac{q-2}{-q^2 + 3q - 1}\right]}{1 - \frac{w^2}{u_{23}}\left[1 + \frac{q-2}{-q^2 + 3q - 1}\right]},$$

ezzel tehát 5 tömegű rendszernél, két független tömeggel, visszavezethető az eggyel kisebb számú rendszer esetére, de egy független tömeggel. Ily módon a két független tömegű rendszereket visszavezettük az egy független tömegű rendszerre. Más szóval, ha az erre vonatkozó eredményeket ismerjük, akkor a két független tömegű rendszerrel kapcsolatos számítások újat lényegileg nem jelentenek.

Az eddigiek alapján már kibontakozott a számítás menete.

Kiindultunk a karakterisztikus egyenletből, amelyet megfelelőképpen átalakítva, a rendszert két tömegű rendszerre vezettük vissza. A számítás lényege abban állt, hogy kiszámítottuk a tömegeket helyettesítő redukált tömeget, amelyet vesszőzött I_2-vel jelöltünk. Természetesen tömegeknél mindig azoknak megfelelő tehetetlenségi nyomatékára kell gondolni.

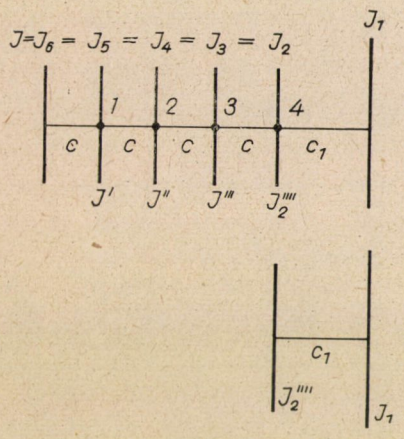
A részünkről bevezetett karakterisztikus egyenlet ezt az eljárást lehetővé tette, szemben az irodalomban található azon megoldással, amelynél bizonyos feltételek alapján — amelyek véletlenül eredményeikben helyesnek bizonyultak — végezték el a redukció műveletét.

A redukció eme másik módszerét mi is bemutattuk néhány esetben, annak igazolására, hogy bár a kiindulásuk önkényesen választatott meg, annak helyességét a mi kiindulásunkból elért levezetések igazolták.

Mint az eddigiekből látható volt, a két független tömeg esete oly kifejezésekre vezethető vissza, amelyeket az egy független tömeg esetére már bemutattunk.

Az egyes tömegszámokra levezetett vesszőzött I_2 értékeket összefoglaltuk, és q hatványai mellett levő számokat rendszerbe szedtük és ezekre nézve érdekes eredményeket vezethettünk le, amelyeknek egyöntetűsége és szabályszerűsége levezetéseink helyességét igazolják (lásd a 439. oldalon).

Teljesség kedvéért megemlítjük, hogy sokszor a motorgyárak többhengerű motoroknál a hengerekkel kapcsolatos tömegeket, illetve azok tehe-



10. ábra

tetlenségi nyomatékát, a hozzájuk tartozó tengelydarabokkal együtt egyenletesen elosztott tömeggel helyettesítik, amely kiterjed a teljes motorhosszra olyképpen, hogy a két rendszer lengéstechnikailag egyenértékű maradjon. Ezzel kapcsolatos számítások nem jelentenek egyszerűsítést, tehát hacsak egyéb körülmények nem kívánják, a rendszernek lengéstechnikailag egyenértékű két tömeggel való helyettesítést előnybe helyezik.

6 tömegre. Egy független tömeg legyen a rendszerben, és erre az esetre a karakterisztikus egyenlet (10. ábra):

$$w^{10} - [u_{11} + u_{12} + 8u]wj + u[8u_{11} + 7u_{12} + 21u]w^6 - u^2[21u_{11} + 15u_{12} + \\ + 20u]w^4 + u^3[20u_{11} + 10u_{12} + 5u]w^2 - u^4[5u_{11} + u_{12}] = 0. \qquad (49)$$

Külön csoportosítjuk ismét azon tagokat, amelyben u_{11} és u_{12} van, és külön vesszük azokat, amelyek ezekután fennmaradnak:

$$\frac{w^2 - u_{11}}{u_{12}} = \frac{w^8 - 7uw^3 + 15u^2w^4 - 10u^3w^2 + u^4}{w^8 - 8uw^6 + 21u^2w^4 - 20u^3w^2 + 5u^4}. \qquad (50)$$

Végig osztjuk a számlálót és nevezőt u^4, és $\frac{w^2}{u} = q$-t helyettesítünk, akkor

$$\frac{w^2 - u_{11}}{u_{12}} = \frac{q^4 - 7q^3 + 15q^2 - 10q + 1}{q^4 - 8q^3 + 21q^2 - 20q + 1}. \tag{51}$$

Ebből:

$$w^2 = c_1\left[\frac{1}{I\,\dfrac{q^4 - 8q^3 + 21q^2 - 20q + 5}{q^4 - 7q^3 + 15q^2 - 10q + 1}} + \frac{1}{I_1}\right] = c_1\left[\frac{1}{I_2''''} + \frac{1}{I_1}\right] \tag{52}$$

ahol

$$I_2'''' = I\,\frac{q^4 - 8q^3 + 21q^2 - 20q + 5}{q^4 - 7q^3 + 15q^2 - 10q + 1} = I\left[1 + \frac{-q^3 + 6q^2 - 10q + 1}{q^4 - 7q^3 + 15q^2 - 10q + 1}\right]. \tag{53}$$

A következőkben a tömegredukció módszerét használjuk, és ezzel fogjuk I_2'''' kiszámítani.

A 10. ábra szerint 1 helyre a redukció

$$I' = I\,\frac{2 - q}{1 - q}, \tag{54}$$

2 helyre a redukció:

$$I'' = I + \frac{I'}{1 - \dfrac{w^2 I'}{c}} = I\left[1 + \frac{\dfrac{2 - q}{1 - q}}{1 - q\,\dfrac{2 - q}{1 - q}}\right], \tag{55}$$

3 helyre a redukció:

$$I''' = I + \frac{I'}{1 - \dfrac{w^2 I''}{c}} = I\left[1 + \frac{\dfrac{2 - q}{1 - q}}{1 - q - \dfrac{1 - q}{\dfrac{2 - q}{1 - q}\left(1 + \dfrac{1 - q}{1 - q\,\dfrac{2 - q}{1 - q}}\right)}}\right]. \tag{56}$$

Ezzel a kifejezéssel az 5 tömegű rendszernél már találkoztunk (38) alatt, és a rendezés eredménye:

$$I''' = I\left(1 + \frac{3 - 4q + q^2}{1 - 6q + 5q^2 + q^3}\right) \tag{57}$$

4 helyre a redukció:

$$I_2'''' = I + \frac{I'''}{1 - \frac{w^2 I'''}{c}} = I + \frac{I\left(1 + \frac{3 - 4q + q^2}{1 - 6q + 5q^2 + q^3}\right)}{1 - q\left(1 + \frac{3 - 4q + q^2}{1 - 6q + 5q^2 - q^3}\right)}. \quad (58)$$

Ennek rendezése már egyszerű feladat, és így felírjuk a végeredményt:

$$I_2'''' = I\left(1 + \frac{-q^3 + 6q - 10q^2 + 4}{1 - 10q + 15q^2 - 7q^3 + q^4}\right), \quad (59)$$

ami már a levezetett kifejezéssel teljesen egyenlő.

Ha két független tömeg van a 6 tömegű rendszerben, akkor az w-től függő tehetetlenségi nyomaték a következő alakú:

$$I_2'''' = I_2 + \frac{I\left(1 + \frac{3 - 4q + q^2}{1 - 6q + 5q^2 - q^3}\right)}{1 - \frac{w^2}{c_2}\left(1 + \frac{3 - 4q + q^2}{1 - 6q + 5q^2 - q^3}\right)}, \qquad \text{ahol } \frac{c_2}{I} = u_{23}.$$

Ha csak egy független tömeg van a 6 tömeg között, akkor ez a kifejezés a következőképpen egyszerűsbödik:

$$I_2'''' = I + \frac{I\left(1 + \frac{3 - 4q + q^2}{1 - 6q + 5q^2 - q^3}\right)}{1 - \frac{w^2 I}{c}\left(1 + \frac{3 - 4q + q^2}{1 - 6q + 5q^2 - q^3}\right)},$$

de mert $\frac{w^2 I}{c} = q$, amit behelyettesítve és rendezve kapjuk az (59) alatti már levezetett képletet.

Ez a menet érvényes bárhány tömegű rendszer esetére.

7. *tömegre.* Egy független tömeg legyen a rendszerben, amelyre nézve a karakterisztikus egyenlet a következő (11. ábra):

$$w^{12} - [u_{11} + u_{12} + 10u]\, w^{10} + u[10u_{11} + 9u_{12} + 36u]w^8 - u^2[36u_{11} + 28u_{12} + 56]w^6 + u^3[56u_{11} + 35u_{12} + 35u]w^4 - u^4[35u_{11} + 15u_{12} + 64]w^2 + u^5[6u_{11} + u_{12}] = 0. \quad (60)$$

Ezen egyenlet tagjait 3 csoportba osztjuk, mégpedig amelyek u_{11}-, és u_{12}-ket tartalmaznak, és a fennmaradó tagok alkotják a harmadik csoportot. Rendezés után a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{w^2-u_{11}}{u_{12}}=\frac{w^{10}-9uw^8+28u^2w^6-35u^3w^4+15u^4w^2-u^5}{w^{10}-10uw^8+36u^2w^6-56u^3w^4+35u^4w^2-6u^5}. \tag{61}$$

Osszuk a számlálót és nevezőt u^5-vel, és $w^2/u = q$-t helyettesítve a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{w^2-u_{11}}{u_{12}}=\frac{q^5-9q^4+28q^3-35q^2+15q-1}{q^5-10q^4+36q^3-56q^2+35q-6}. \tag{62}$$

Egyszerű átalakítás után a következő kifejezést kapjuk:

$$w^2=c_1\left\{\frac{1}{\left[1+\frac{-q^4+8q^3-21q^2+20q-5}{q^5-9q^4+28q^3-35q^2+15q-1}\right]}+\frac{1}{I_1}\right\}= \tag{63}$$

$$=c_1\left(\frac{1}{I_2^{(5)}}+\frac{1}{I_1}\right),$$

ahol (5)

$$I_2^{(5)}=I\left(1+\frac{-q^4+8q^3-21q^2+20q-5}{q^5-9q^4+28q^3-35q^2+15q-1}\right). \tag{64}$$

Ellenőrzésként az eredményt redukció útján fogjuk kiszámítani. E célra felhasználjuk az (59) alatt már levezetett kifejezést. 7 tömeg esetében a redukciót folytatjuk az 5. pontra, mégpedig:

$$I_2^{(5)}=I+\frac{I'''}{1-\frac{w^2I'''}{c}}=I+\frac{I+I\frac{4-10q+6q^2-q^3}{1-10q+15q^2-7q^3+q^4}}{1-q\left(1+\frac{4-10q+6q^2-q^3}{1-10q+15^2-7q^3+q^4}\right)}. \tag{65}$$

Rendezés után a következő kifejezést kapjuk:

$$I_2^{(5)}=I\left(1+\frac{5-20q+21q^2-8q^3+q^4}{1-15q+35q^2-28q^3+9q^4-q^5}\right),$$

ami a már levezetett (64) képlettel teljesen egyezik (11. ábra).

8 tömegre. Kiindulunk a karakterisztikus egyenlet azon alakjából, amely egy független tömeg esetére érvényes:

$$w^{14}-[u_{11}+u_{12}+12u]w^{12}+u[12u_{11}+11u_{12}+55u]w^{10}-u^2[55u_{11}+$$
$$+45u_{12}+120u]w^8+u^3[120u_{11}+84u_{12}+126u]w^6-u^4[126u_{11}+70u_{12}+$$
$$+56u]w^4+u^5[56u_{11}+21u_{12}+7u]w^2-u^6[7u_{11}+u_{12}]=0. \tag{66}$$

Külön csoportosítjuk ezen egyenlet azon tagjait, amelyek u_{11}-, és u_{12}-t tartalmaznak, és egy harmadik csoportba foglaljuk a fennmaradó tagokat. Ekkor a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{w^2-u_{11}}{u_{12}}=\frac{w^{12}-11uw^{10}+45u^2w^8-84u^3w^6+70u^4w^4-21u^5w^2+u^6}{w^{12}-12uw^{10}+55u^2w^8-120u^3w^6+126u^4w^4-56u^5w^2+7u^6}. \tag{67}$$

Ezt a kifejezést osszuk [mind a számlálót, mind a nevezőt] u^6-tal, és jelöljük a $w^2/u = q$-val, akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$\frac{w^2 - u_{11}}{u_{12}} = \frac{q^6 - 11q^5 + 45q^4 - 84q^3 + 70q^2 - 21q + 1}{q^6 - 12q^5 + 55q^4 - 120q^3 + 126q^2 - 56q + 7}. \tag{68}$$

Rendezés után a következő kifejezést kapjuk:

$$w^2 = c_1\left\{\frac{1}{I\left(1 + \frac{-q^5 + 10q^4 - 36q^3 + 56q^2 - 35q + 6}{q^6 - 11q^5 + 45q^4 - 84q^3 + 70q^2 - 21q + 1}\right)} + \frac{1}{I_1}\right\} = \tag{69}$$

$$= c_1\left(\frac{1}{I_2^{(6)}} + \frac{1}{I_1}\right).$$

Tehát e kifejezésből:

$$I_2^{(6)} = I\left(1 + \frac{q^5 - 10q^4 + 36q^3 - 56q^2 + 35q - 6}{-q^6 + 11q^5 + 45q^4 + 84q^3 - 70q^2 + 21 - 1}\right). \tag{70}$$

Ha e képletet a tömegek redukciójával kívánjuk ellenőrizni, akkor:

$$I_2^{(6)} = I + \frac{I_2^{(5)}}{1 - \frac{w^2 I^{(5)}}{c}}, \tag{71}$$

ahol felhasználjuk a már (65) alatt levezetett kifejezést, és így:

$$I_2^{(6)} = I + \frac{I\left(1 + \frac{-q^4 + 8q^3 - 21q^2 + 20q - 5}{q^5 - 9q^4 + 28q^3 - 35q^2 + 15q - 1}\right)}{1 - q\left(1 + \frac{-q^4 + 8q^3 - 21q^2 + 20q - 5}{q^5 - 9q^4 + 28q^3 - 35q^2 + 15q + 1}\right)}. \tag{72}$$

Ha ezt a kifejezést rendezzük, akkor a következő eredményt (a már levezetett kifejezést) kapjuk:

$$I_2^{(6)} = I\left(1 + \frac{q^5 - 10q^4 + 36q^3 - 56q^2 + 35q - 6}{-q^6 + 11q^5 - 45q^4 + 84q^3 - 70q^2 + 21q - 1}\right), \tag{73}$$

és így 8 tömeg esetét is két tömegű rendszerre sikerült visszavezetni.

9 *tömegre.* A karakterisztikus egyenlet egy független tömeg esetén:

$$w^{16} - [u_{11} + u_{12} + 14u]w^{14} + u[14u_{11} + 13u_{12} + 78u]w^{12} - u^2[78u_{11} + 66u_{12} + 220u]w^{10} + u^3[220u_{11} + 165u_{12} + 330u]w^8 - u^4[330u_{11} + 210u_{12} + 252u]w^6 + u^5[252u_{11} + 126u_{12} + 84u]w^4 - u^6[84u_{11} + 28u_{12} + 8u]w^2 + u^7[8u_{11} + u_{12}] = 0. \tag{74}$$

Ez alkalommal is összefoglaljuk azokat a tagokat, amelyek u_{11}-, illetve u_{12}-t tartalmazzák, és külön vesszük a fennmaradó tagokat, továbbá osztjuk a számlálót és nevezőt uf-tel, és $w^2/u = q$-t behelyettesítve a következő végeredményt kapjuk rendezés után:

$$w^2 = c_1\left(\frac{1}{I_2^{(7)}} + \frac{1}{I_1}\right), \tag{75}$$

ahol

$$I_2^{(7)} = I\left(1 + \frac{-q^6 + 12q^5 - 55q^4 + 120q^3 - 126q^2 + 56q - 7}{q^7 - 12q^5 + 66q^5 - 165q^4 + 201q^3 - 126q^2 + 28q - 1}\right). \tag{76}$$

Ennek ellenőrzése — úgy mint ez eddig történt — a tömegredukció elve alapján, minthogy ismétlésről van szó, elmaradhat. Figyelembe kellene venni:

$$I_2^{(7)} = I + \frac{I^{(6)}}{1 - \dfrac{w^2 I^{(6)}}{c}}. \tag{77}$$

Megjegyezzük még, hogy a numerikus számolásnál felesleges q 3-nál nagyobb hatványait ismeri, mert pl. a tört számlálóját így is írhatjuk: $q^3[-q^3 + 12q^2 - -55q] + 120q^3 - 126q^2 + 56q - 7$. Ezeket a hatványokat pedig minden táblázatban megtaláljuk.

Összefoglaljuk az eddigi eredményeket egy független tömeg esetére:

$$I_2'' = I\left(1 + \frac{q - 2}{-q^2 + 3q + 1}\right);$$

$$I_2''' = I\left(1 + \frac{q^2 - 4q + 3}{-q^3 + 5q^2 - 6q + 1}\right);$$

$$I_2'''' = I\left(1 + \frac{q^3 - 6q^2 + 10q - 4}{-q^4 + 7q^3 - 15q^2 + 10q - 1}\right);$$

$$I_2^{(5)} = I\left(1 + \frac{q^4 - 8q^3 + 21q^2 - 20q + 5}{-q^5 + 9q^4 - 28q^3 + 35q^2 - 15q + 1}\right);$$

$$I_2^{(6)} = I\left(1 + \frac{q^5 - 20q^4 + 36q^3 - 56q^2 + 35q - 6}{-q^6 + 11q^5 - 45q^4 + 84q^3 - 70q^2 + 21q - 1}\right);$$

$$I_2^{(7)} = I\left(1 + \frac{q^6 - 12q^5 + 55q^4 - 120q^3 + 126q^2 - 56q + 7}{-q^7 + 13q^6 - 66q^5 + 165q^4 - 210q^3 + 126q^2 - 28q + 1}\right).$$

Külön fel fogjuk írni a tört számlálójában és nevezőjében levő q hatványai mellett levő számokat, és az itt fellelhető törvényszerűség igazolni fogja számítási eredményeink helyességét.

A számláló adatai:

$$q^0\,1=\binom{1}{0}\;-\;2=\binom{2}{1}\;+\;3=\binom{3}{2}\;-\;4=\binom{4}{3}\;+\;5=\binom{5}{4}\;-\;6=\binom{6}{5}+7=\binom{7}{6}$$

$$q\,1=\binom{3}{0}\;-\;4=\binom{4}{1}+10=\binom{5}{2}\;-\;20=\binom{6}{3}\;+\;35=\binom{7}{4}\;-56=\binom{8}{5}$$

$$q^2\,1=\binom{5}{0}\;-\;6=\binom{6}{1}+21=\binom{7}{2}\;-\;56=\binom{8}{3}+126=\binom{9}{4}$$

$$q^3\,1=\binom{7}{0}\;-\;8=\binom{8}{1}+36=\binom{9}{2}-120=\binom{10}{3}$$

$$q^4\,1=\binom{9}{0}\;-10=\binom{10}{1}+55=\binom{11}{2}$$

$$q^5\,1=\binom{11}{0}-12=\binom{12}{1}$$

$$q^6\,1=\binom{13}{0}$$

Ha rátekintünk erre az összeállításra, bizonyos törvényszerűséget állapíthatunk meg, amellyel nemcsak azt igazoljuk, hogy az eredmények helyesek, de tovább mehetünk és felírhatjuk 10 tömeg esetére az $I_2(^8)$ számlálóját a következőképpen:

$$q^7\binom{15}{0}-q^6\binom{14}{1}+q^5\binom{13}{2}-q^4\binom{12}{3}+q^3\binom{11}{4}-q^2\binom{10}{5}+q\binom{9}{6}-q^0\binom{8}{7}=$$

$$=q^7-14q^6+78q^5-220q^4+330q^3-252q^2+84q-8.$$

A nevező adatai:

$$q^0\;+\;1=\binom{1}{1}\;-\;1=\binom{2}{2}\;+\;1=\binom{3}{3}\;-\;1=\binom{4}{4}\;+\;1=\binom{5}{5}\;-\;1=\binom{6}{6}-1=\binom{7}{7}$$

$$q-1=\binom{2}{0}\;+\;3=\binom{3}{1}\;-\;6=\binom{4}{2}\;+\;10=\binom{5}{3}\;-\;15=\binom{6}{4}\;+\;21=\binom{7}{5}-28=\binom{8}{6}$$

$$q^2-1=\binom{4}{0}\;+\;5=\binom{5}{1}\;-15=\binom{6}{2}\;+\;35=\binom{7}{3}\;-\;70=\binom{8}{5}+126=\binom{9}{5}$$

$$q^3-1=\binom{6}{0}\;+\;7=\binom{7}{1}\;-28=\binom{8}{2}\;+\;84=\binom{9}{3}\;-210=\binom{10}{4}$$

$$q^4-1=\binom{8}{0}\;+\;9=\binom{9}{1}\;-45=\binom{10}{2}+165=\binom{11}{3}$$

$$q^5-1=\binom{10}{1}+11=\binom{11}{1}-66=\binom{12}{2}$$

$$q^6-1=\binom{12}{0}+13=\binom{13}{1}$$

$$q^7-1=\binom{14}{0}$$

Ez az összeállítás is bizonyos törvényszerűséget állapít meg, amellyel nemcsak azt igazoljuk, hogy az eredmények helyesek, de tovább mehetünk, és felírhatjuk az $I_2^{(8)}$ nevezőjét, amely 10 tömegre vonatkozik, de akárhány tömegre is felírhatjuk az előzők alapján mind a számlálót és mind a nevezőt is, és ezzel az egész kifejezést is. A szóban forgó esetre:

$$-q^8+q^7\binom{15}{1}-q^6\binom{14}{2}+q^5\binom{13}{3}-q^4\binom{12}{4}+q^3\binom{11}{5}-q^2\binom{10}{6}+q\binom{9}{7}-q^0\binom{8}{8}=$$
$$=-q^7+15q^7-91q^6+286q^5-495q^4+462q^3-210q^2+36q-1.$$

Felhasználhatjuk e célra a PASCAL-féle háromszöget (I. táblázat) a bejelölt módosítással. A táblázat oldalán a bekerített számok az ott megadott és egymásután következő számok különbségét jelzik.

A táblázatban fennt a q hatványait találjuk. Megkülönböztetésül a tört számlálójához tartozó q értékeket *sz*, a nevezőhöz tartozott n index-el jelöltük.

A berajzolt ferde vonalak mentén olvasunk le.

Példaképpen berajzoltuk az $I_2^{(7)}$-hez tartozó számlálónak megfelelő egyenest (eredményesen) és a nevezőnek megfelelő egyenest (szakadozottan). Az egyenesek mentén fekvő számokhoz tartozó q értékek hatványát felülről olvassuk le, és az ezekhez tartozó egyeneseket megfelelő módon jelöltük be. A táblázatból egyszerűség kedvéért a számláló q^9-hoz tartozó számokat nem vettük fel.

E táblázat segélyével tehát minden előzetes számítás nélkül a vesszőzött I_2 értékeket azonnal fel lehet írni.

Általánosságban, ha a tömegek száma n, akkor az n és I_2 indexe i között a következő az összefüggés:

$$n=i+2.$$

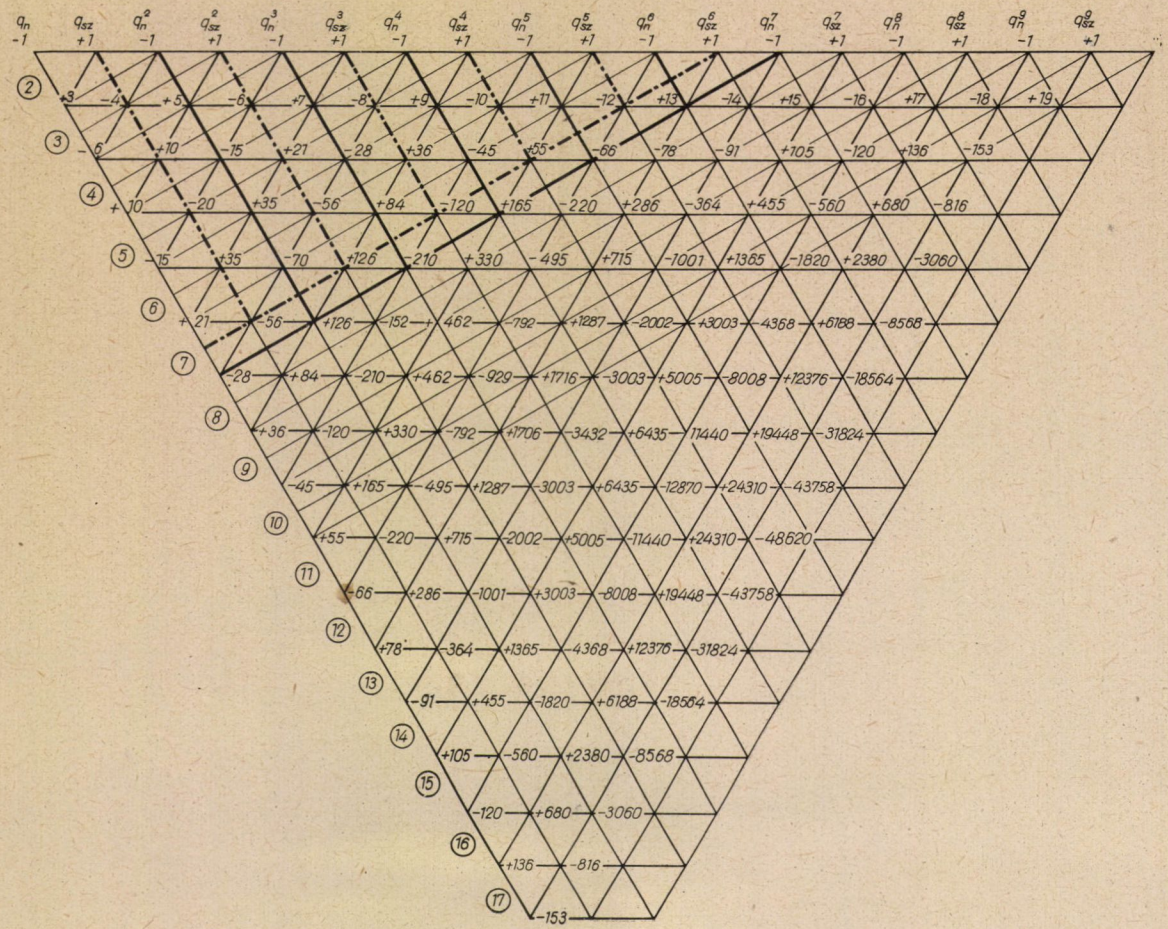
A továbbiakban az i-t fogjuk használni, és felírjuk a következő általános alakot:

$$I_2^{(i)}=I\left\{1+\frac{\binom{2i-1}{0}q^{i-1}-\binom{2i-2}{1}q^{i-2}+\binom{2i-3}{2}q^{i-3}-\ldots+(1)^{i-1}\binom{i}{i-1}}{-\binom{2i}{0}q^i+\binom{2i-1}{1}q^{i-1}-\binom{2i-2}{2}q^{i-2}+\ldots+(-1)^{i-1}\binom{i}{i}}\right\} \tag{78}$$

Példa: Legyen a tömegek száma 8, tehát $i=6$, akkor az általános kifejezés felhasználásával a következő eredményt kapjuk:

$$I_2^{(6)}=I\left\{1+\frac{\binom{11}{0}q^5-\binom{10}{1}q^4+\binom{9}{2}q^3-\binom{8}{3}q^2+\binom{7}{4}q-\binom{6}{5}}{-\binom{12}{0}q^6+\binom{11}{1}q^5-\binom{10}{2}q^4+\binom{9}{3}q^3-\binom{8}{4}q^2+\binom{7}{5}q+\binom{6}{6}}\right\}=$$
$$=I\left\{1+\frac{q^5-10q^4+36q^2-56q^2+35q-6}{-q^6+11q^5-45q^4+84q^3-70q^2+21q-1}\right\}.$$

I. táblázat


q_n −1
q_{sz} +1
q_n^2 −1
q_{sz}^2 +1
q_n^3 −1
q_{sz}^3 +1
q_n^4 −1
q_{sz}^4 +1
q_n^5 −1
q_{sz}^5 +1
q_n^6 −1
q_{sz}^6 +1
q_n^7 −1
q_{sz}^7 +1
q_n^8 −1
q_{sz}^8 +1
q_n^9 −1
q_{sz}^9 +1
2 3 −4 +5 −6 +7 −8 +9 −10 +11 −12 +13 −14 +15 −16 +17 −18 +19
3 −6 +10 −15 +21 −28 +36 −45 +55 −66 −78 −91 +105 −120 +136 −153
4 +10 −20 +35 −56 +84 −120 +165 −220 +286 −364 +455 −560 +680 −816
5 −15 +35 −70 +126 −210 +330 −495 +715 −1001 +1365 −1820 +2380 −3060
6 +21 −56 +126 −252 +462 −792 +1287 −2002 +3003 −4368 +6188 −8568
7 −28 +84 −210 +462 −929 +1716 −3003 +5005 −8008 +12376 −18564
8 +36 −120 +330 −792 +1706 −3432 +6435 −11440 +19448 −31824
9 −45 +165 −495 +1287 −3003 +6435 −12870 +24310 −43758
10 +55 −220 +715 −2002 +5005 −11440 +24310 −48620
11 −66 +286 −1001 +3003 −8008 +19448 −43758
12 +78 −364 +1365 −4368 +12376 −31824
13 −91 +455 −1820 +6188 −18564
14 +105 −560 +2380 −8568
15 −120 +680 −3060
16 +136 −816
17 −153

Legyen a tömegek száma $n = 10$, és így $i = 8$, akkor

$$I_2^{(8)} = I\left\{1 + \frac{\binom{15}{0}q^7 - \binom{14}{1}q^6 + \binom{13}{2}q^5 - \binom{12}{3}q^4 + \binom{11}{4}q^3 - \binom{10}{5}q^2 + \binom{9}{6}q - \binom{8}{7}}{-\binom{16}{0}q^8 + \binom{15}{1}q^7 - \binom{14}{2}q^6 + \binom{13}{3}q^5 - \binom{12}{4}q^4 + \binom{11}{5}q^3 - \binom{10}{6}q^2 + \binom{9}{7}q - \binom{8}{8}}\right\} =$$

$$= I\left\{1 + \frac{q^7 - 14q^6 + 78q^5 - 220q^4\ 330q^3 - 252q^2 + 84q - 5}{-q^8 + 15q^7 - 91q^6 + 286q^5 - 495q^5 + 462q^3 - 210q^2 + 36q - 1}\right\}.$$

A 438. oldalon közölt összeállításban előforduló kifejezések szerkezetére a következőket állapíthatjuk meg, amely célból a következő jelöléseket vezetjük be:

$p_1 = 1;$
$p_2 = 1 - q;$
$p_3 = q^2 - 3q + 1;$
$p_4 = -q^3 + 5q^2 - 6q + 1;$
$p_5 = q^4 - 7q^3 + 15q^2 - 10q + 1;$
$p_6 = -q^5 + 9q^4 - 28q^3 + 35q^2 - 15q + 1;$
$p_7 = q^6 - 11q^5 + 45q^4 - 84q^3 + 70q^2 - 21q + 1;$
$p_8 = -q^7 + 13q^6 - 66q^5 + 165q^4 - 210q^3 + 126q^2 - 28q + 1$

Általános alakban:

$$p_k = 1 - \binom{k}{2}q + \binom{k+1}{4}q^2 - \binom{k+2}{6}q^3 + \dots,$$

amit addig folytatunk, amíg a kifejezés utolsó tagja 1.

Példa:

$$p_9 = \binom{16}{16}q^8 - \binom{15}{14}q^7 + \binom{14}{12}q^6 - \binom{13}{10}q^5 + \binom{12}{8}q^4 - \binom{11}{6}q^3 + \binom{10}{4}q^2 - \binom{9}{2}q + 1 =$$
$$= q^8 - 15q^7 + 91q^6 - 286q^5 + 495q^4 - 462q^3 + 210q^2 - 36q + 1.$$

$$p_{10} = -\binom{18}{18}q^9 + \binom{17}{16}q^8 - \binom{16}{14}q^7 + \binom{15}{12}q^6 - \binom{14}{10}q^5 + \binom{13}{8}q^4 - \binom{12}{6}q^3 +$$
$$+ \binom{11}{4}q^2 - \binom{10}{2}q + 1 = -q^9 + 17q^8 - 120q^7 + 455q^6 - 1001q^5 +$$
$$+ 1287q^4 - 924q^3 + 330q^2 - 45q + 1.$$

Megjegyezzük azonban, hogy a közölt p értékek a torzióslengés technikában akkor jelentkeznek, ha a tömegek egyenlők, ill. tehetetlenségi nyomatékok, továbbá a merevségi tényezők is egymás között egyenlőek. Ekkor a p értékek — az egyes tömegek helyén — az amplitudók.

E p értékek jelentőségét fogjuk most az előző összeállításban előforduló kifejezésekben ismertetni.

Sorba vesszünk néhány esetet.

$$I_2' = I\frac{2-q}{1-q} = I\frac{1+1-q}{1-q} = I\frac{q_1+q^2}{p^2} = I\sum_{i=1}^{2}\frac{p_i}{p_2};$$

$$I_2'' = I\left[1+\frac{q-2}{-q^2+3q-1}\right] = I\left[\frac{1+1-q+q^2-3q+1}{q^2-3q+1}\right] =$$

$$= I\frac{p_1+p_2+p_3}{p_3} = I\sum_{i=1}^{3}\frac{p_i}{p_3};$$

$$I_2''' = I\left[1+\frac{q^2-4q+3}{-q^3+5q^2-6q+1}\right] = I\left[\frac{q^3-6q^2+10q-4}{q^3-5q^2+6q-1}\right] =$$

$$= I\left[\frac{1+1-q+q^2-3q+1-q^3+5q^2-6q+1}{-q^3+5q^2-6q+1}\right] =$$

$$= I\left[\frac{p_1+p_2+p_3+p_4}{p_4}\right] = I\sum_{i=1}^{4}\frac{p_i}{p^4}.$$

Teljesen hasonlóan kapjuk:

$$I_2'''' = I\left[1+\frac{q^3-6q^3+10q-4}{-q^4+7q^3-15q^2+10q-1}\right] =$$

$$= I\left[\frac{p_1+p_2+p_3+p_4+p_5}{p_5}\right] = I\sum_{i=1}^{5}\frac{p_i}{p_5}.$$

Teljes általánosságban:

$$I_2^{(k)} = I\sum_{i-1}^{k}\frac{p_i}{p_k} = \frac{I}{p_k}\sum_{i=1}^{k}p_i. \tag{79}$$

A tehetetlenségi nyomatékok redukciójának néhány alkalmazását példán fogjuk bemutatni.

Az előzőkben láttuk, hogy bizonyos esetekben valamely több tömegből álló rendszert két tömegből álló rendszerre lehet visszavezetni, és ennek alakja a következő:

$$w^2 = c_1\left(\frac{1}{I_2^{(i)}}+\frac{1}{I_1}\right),$$

ahol I_2, a w^2 függvénye, és I_1, a független tömeg tehetetlenségi nyomatéka, állandó érték. Említettük, hogy két független tömeg esetén is használhatjuk az ismertetett eljárást, sőt több ilyen tömeg esetére is.

Alkalmazhatjuk azonban a redukciót közvetlenül is a következőképpen, megjegyezvén, hogy ekkor már a fenti összeg második tagja is w^2 függvénye. Tehát a 11/a ábra kapcsán, ahol két független tömeget: I_1- és I_2-t látunk, elvégezzük a redukciót a C pontra.

$$I_C = I_1 + \frac{I_2}{1 - I_2 \frac{w^2}{c_2}} = I_1 \left[1 + \frac{\frac{u_{11}}{u_{12}}}{1 - \frac{w^2}{u_{22}}} \right] = I_1 \left[1 + \frac{u_{11} u_{22}}{u_{12}(u_{22} - w^2)} \right].$$

Ebben az esetben tehát I_1 helyére az imént levezetett I_C kifejezést kell helyettesíteni, amely tényleg w^2 függvénye.

A 11/b ábrában 3 tömeget: I_1, I_2, I_3 találunk, amelyeknek C helyre való redukcióját kell elvégezni és az ekként kapott eredményt a fenti összeg második tagja helyébe helyettesíteni.

A B pontra a redukció eredménye:

$$I_B = I_2 + \frac{I_3}{1 - I_3 \frac{w^2}{c_3}} = I_2 \left[1 + \frac{u_{22} u_{33}}{u_{23}(u_{33} - w^2)} \right]$$

C pontra a redukció:

$$I_c = I_1 + \frac{I_b}{1 - I_b \frac{w^2}{c_2}} = I_1 \left[1 + \frac{\frac{I_b}{I_1}}{1 - I_b \frac{w^2}{c_2}} \right]$$

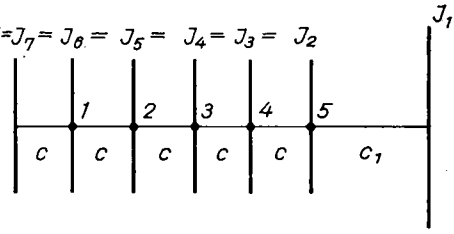
E kifejezésbe helyettesítjük I_B fentebb már kiszámított kifejezését, és ha szükséges rendezve helyettesítjük végleg az I_1 helyébe. Ezt az eljárást használhatjuk az ismertetett módon 4 és ennél több tömegre is.

Egy másik feladatot, amelynél a redukciót használni lehet, a 11c. ábra mutatja. Ebben az esetben az I_2 tehetetlenségi nyomatékot a c_x-nek megfelelő merevségi tényezőnek megfelelően kell redukálni. Felvesszük, hogy $I_1 = 0$. Erre az esetre a következő egyenletet írhatjuk fel:

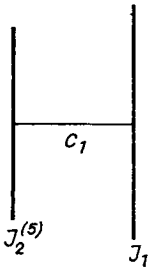
$$\frac{I_2}{1 - I_2 \frac{w^2}{c_2}} = \frac{I_x}{1 - I_x \frac{w^2}{c_x}}.$$

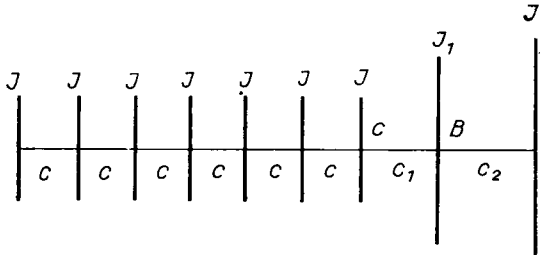
E kifejezésben az I_x vagy a c_x az ismeretlen, és egyszerű rendezéssel a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{1}{I_x} = w^2 \left(\frac{1}{c_x} - \frac{1}{c_2} \right) + \frac{1}{I_2}$$

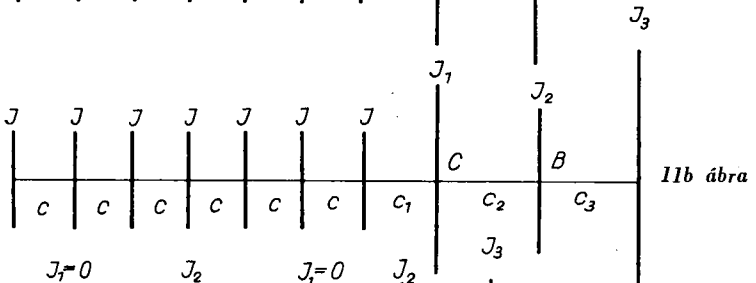


11. ábra

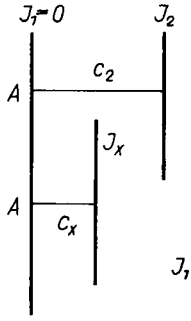




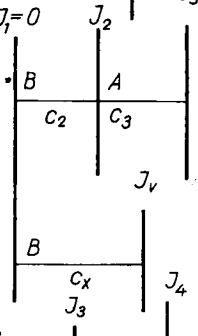
11a ábra



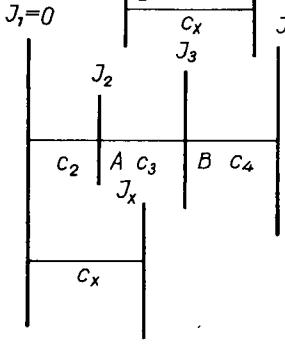
11b ábra



11c ábra



11d ábra



11e ábra

vagy

$$\frac{\frac{1}{I_x}-\frac{1}{I_2}}{\frac{1}{c_x}=\frac{1}{c_2}}=w^2.$$

A 11d ábrában két tömeg tehetetlenségi nyomatékát kell a c_x-nek megfelelő merevségi tényezőhöz redukálni.

A pontra a redukció:

$$I_A = I_2 + \frac{I_3}{1 - I_3\frac{w^2}{c_3}},$$

B pontra a redukció:

$$I_B = \frac{I_a}{1 - I_a\frac{w^2}{c_2}},$$

és végül:

$$\frac{I_x}{1 - I_x\frac{w^2}{c_x}} = \frac{I_B}{1 - I_b\frac{w^2}{c_2}},$$

ebből:

$$\frac{1}{I_x} = w^2\left(\frac{1}{c_x} - \frac{1}{c_2}\right) + \frac{1}{I_B}.$$

Tehát csak I_B-t kell kiszámítani, azaz:

$$I_B = I_2\left(1 + \frac{u_{22}\,u_{33}}{u_{23}(u_{33} - w^2)}\right).$$

A 11e ábra esetében már három tömeg tehetetlenségi nyomatékának redukcióját kell elvégezni, és I_x-et kiszámítani, ha c_x adott vagy fordítva. Egyenleteink a következőek:

Redukció a *B* pontra:

$$I_B = I_3 + \frac{I_4}{1 - I_4\frac{w^2}{c_2}} = I_3\left(1 + \frac{u_{33}}{u_{34} - w^2}\right).$$

Redukció az *A* pontra:

$$I_A = I_2 + \frac{I_B}{1 - I_B\frac{w^2}{c_2}},$$

és végül

$$\frac{I_A}{1 - I_A \frac{w^2}{c_2}} = \frac{I_x}{1 - I_x \frac{w^2}{c_x}},$$

amiből

$$\frac{1}{I_x} = w^2 \left(\frac{1}{c_x} - \frac{1}{c_2} \right) + \frac{1}{I_A}.$$

Tehát csak I_A-t kell kiszámítani a következőképpen

$$I_A = I_2 + \frac{I_3 \left(1 + \frac{u_{33}}{u_{33} - w^2} \right)}{1 - I_3 \left(1 + \frac{u_{33}}{u_{34} - w^2} \right) \frac{w^2}{c_2}}.$$

Rendezés után a következő kifejezést kapjuk:

$$I_A = I_2 \left(1 + \frac{u_{22}(u_{33} + u_{34} - w^2)}{w^4 - w^2(u_{23} + u_{33} + u_{34}) + u_{23} u_{34}} \right).$$

A tömegek számának további növekedésénél a számítás menete az eddig ismertetettel teljesen hasonló.

FÜGGELÉK

Az előzőkben ismertetett redukciót példán fogjuk alkalmazni annak a bemutatására, mely szerint eléggé bonyolult esetben is számítás menetét leegyszerűsíthettük.

A 12. ábrában két hathengerű Dieselmotor egy lendkerékkel fogaskerekek közbeiktatásával hajócsavart hajt. Ezt a rendszert az ábrán látható megoldással helyettesítjük, amelynél a Diesel-motorok helyén, redukálást feltételezve, két-két tömeg szerepel (13. ábra).

Magát az ábrában feltüntetett rendszert külön fogjuk most teljes általánosságban tárgyalni, mint az 14. ábrában látható. Ennél az elrendezésnél az általánosság abban nyilvánul meg, hogy a két ágon különböző elrendezést veszünk fel*.

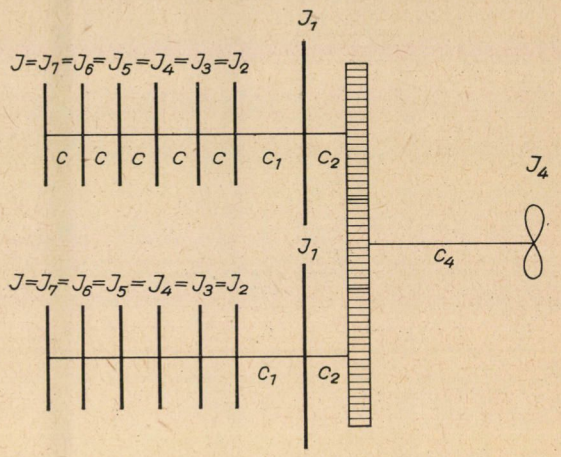
Az általános levezetés után két speciális esetet is mutatunk be olyképpen, hogy az eredeti felvételt módosítjuk.

A levezetésnél nem vettük figyelembe a redukciókat, és ezt utólag kell érvényesíteni olyképpen, hogy az u_{11}-ben előforduló I_1 helyébe a megfelelő, és az előzőkben levezetett I_2, de vesszővel ellátott kifejezéseket helyettesítjük. Itt azután figyelembe kell venni a redukálandó tömegek számát, és annak megfelelő I_2 értéket kell felhasználni. Az előzőkből ismeretes, hogy e kifejezésekben a w^2, tehát a körfrekvencia fordul elő. Ebből következik, hogy a számí-

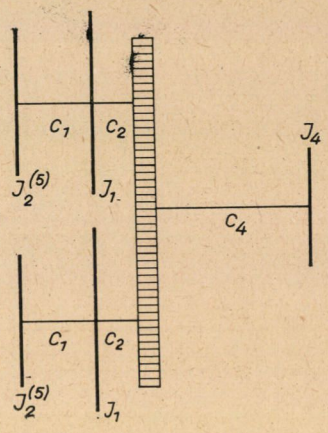
* C. H. BRADBURY: The geared marine oil engine (1933) című dolgozatában e példát feldolgozta. Mi ezen a helyen teljesen eltérően fogjuk a levezetést bemutatni, és felhasználjuk azokat az eredményeket, melyeket eddigi dolgozatainkban ismertettünk. BRADBURY számpéldájának kiindulási adatait felhasználtuk egy példa kidolgozásánál, amit annál is inkább tehetünk, mert részünkről alkalmazott u értékek csak a másodperctől függnek. A két számítás eredményei teljesen egyeznek.

tást akként bonyolíthatjuk le, miszerint felvesszük w^2-t, ezzel kiszámítjuk a vesszővel elátott I_2-t és u_{11}-et. Ne tévesszen össze bennünket az, hogy az u_{11}-ben előforduló I_1 helyébe a vesszőzött I_2-t kell behelyettesíteni, de másképpen a két anyagot nem lehetett volna összhangba hozni.

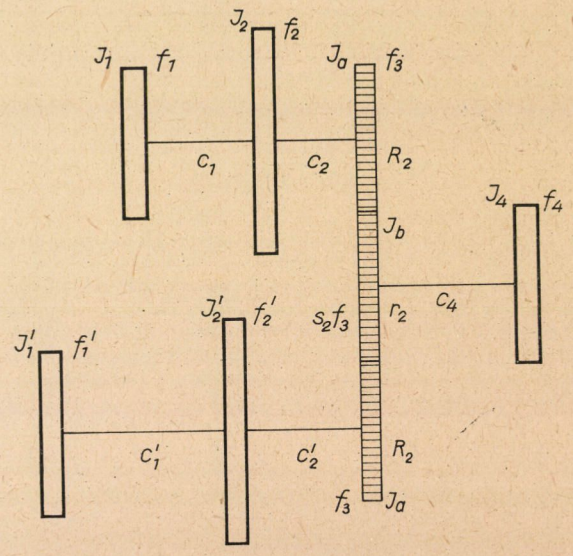
Ha tehát felvettük w^2-t és kiszámítottuk a vesszőzött I_2 értékeket, akkor behelyettesítés után megoldjuk az algebrai egyenletet, és amennyiben az egyik gyök a felvett w^2-el egye-



12. ábra



13. ábra



14. ábra

zik, a felvétel helyes volt. A számítás nem okoz nehézséget, mert mint később látni fogjuk egy másodfokú és egy harmadfokú egyenlet megoldásáról van szó.

A következőkben ismertetjük még az alkalmazott jelöléseket. Ezek a következők:

P a fogaskerekeknél fellépő kerületi erő,

R_2 és r_2 a fogaskerék átmérő,

$s_2 = R_2/r_2$, az áttétel.

I_a és I_b fogaskerekek tehetetlenségi nyomatékai, a 2-ik differenciál hányadost két ponttal jeleztük.

14. ábrában két tömegű rendszerről fogaskerekek viszik át — tehetetlenségi nyomatékuk nem hanyagolhatók el — az energiát egy tömegre, amely lehet pl. hajócsavar.

A mozgás egyenletei:

$$I_1 \ddot{f}_1 = c_1 (f_2 - f_1); \tag{81}$$

$$I_1' \ddot{f}_1' = c_1' (f_2' - f_1'); \tag{82}$$

$$I_2 \ddot{f}_2 = -c_1 (f_2 - f_1) + c_2 (f_3 - f_2); \tag{83}$$

$$I_2' \ddot{f}_2' = -c_1' (f_2' - f_1') + c_2' (f_3 - f_2'); \tag{84}$$

$$I_a \ddot{f}_3 = -c_2 (f_3 - f_2') + P_2 R_2; \tag{85}$$

$$I_a \ddot{f}_3 = -c_2' (f_3 - f_2') + P_2' R_2; \tag{86}$$

$$I_b s_2 \ddot{f}_3 = c_4 (f_4 - s_2 f_3) - (P_2 + P_2') r_2; \tag{87}$$

$$I_4 \ddot{f}_4 = -c_4 (f_4 - s_2 f_3). \tag{88}$$

A (85), (86), (87)-ből küszöböljük ki P_2 és P_2' értékeit, akkor

$$[I_b s_2^2 + 2I_a] \ddot{f}_3 = c_4 s_2 (f_4 - s_2 f_3) - c_2 (f_3 - f_2) - c_2' (f - f_2').$$

Legyen: $I_b s_2 + 2I_a = I_3$ továbbá (81), (82), (83) és (84) figyelembevételével:

$$I_3 \ddot{f}_3 = -s_2 I_4 \ddot{f}_4 - (I_2 \ddot{f}_2 + I_1 \ddot{f}_1) - (I_2' f_2' + I_1' f_1'),$$

vagy rendezve:

$$I_1 \ddot{f}_1 + I_2 \ddot{f}_2 + I_3 \ddot{f}_3 + s_2 I_4 \ddot{f}_4 + I_1' \ddot{f}_1' + I_2' \ddot{f}_2' = 0, \tag{89}$$

és ha: $f_1 = p_1 \cos wt$, $f_2 = p_2 \cos wt$, $f_3 = p_3 \cos wt$,

$$f_1' = p_1' \cos wt; \qquad f_2' = p_2' \cos wt \tag{90}$$

behelyettesítve (89)-be:

$$I_1 p_1 + I_2 p_2 + I_3 p_3 + s_2 I_4 p_4 + I_1' p_1' + I_2' p_2' = 0. \tag{91}$$

A (81) és (82)-ből (90) figyelembevételével:

$$(-w^2 I_1 - c_1) p_1 + c_1 p_2 = 0; \qquad (-w^2 I_1' - c_1') + c_1 - p_2 = 0 \tag{92}$$

(91)-be (92)-t behelyettesítve:

$$\left[I_1 \frac{c_1}{-w^2 I_1 + c_1} + I_2\right] \frac{p_2}{p_3} + \left[I_1' \frac{c_1'}{-w^2 I_1' + c_1'} + I_2'\right] \frac{p_2'}{p_3} + s_1 I_2 \frac{p_4}{p_3} + I_3 = 0. \tag{93}$$

A (83) és (84)-ből kapjuk (90) felhasználásával:

$$\begin{aligned} \left[-w^2 I_2 + c_1 + c_2 - \frac{c_1^2}{-w^2 I_1 + c_1}\right] p_2 &= c_2 p_3 ; \\ \left[-w^2 I_2' + c_1' + c_2' - \frac{c_1'}{-w^2 I_1' + c_1'}\right] p_2' &= c_2' p_3 . \end{aligned} \tag{94}$$

A (94)-et helyettesítjük be a (93)-ba, és vezessük be a következő jelöléseket:

$$\frac{c_1}{I_1} = u_{11}\,, \quad \frac{c_1}{I_2} = u_{12}\,, \quad \frac{c_2}{I_2} = u_{22}\,, \quad \frac{c_2}{I_3} = u_{23}\,, \quad \frac{c_4}{I_4} = u_{44}\,,$$
$$\frac{c_1'}{I_1'} = u_{11}'\,, \quad \frac{c_1'}{I_2'} = u_{12}'\,, \quad \frac{c_2'}{I_3} = u_{23}'\,, \quad \frac{c_4}{I_3} = u_{43} = u_{34} \text{ (index átírással).} \tag{95}$$

$$\left[I - \frac{u_{12}}{w - u_{11}}\right] \cdot \left[\frac{u_{23}}{w^2 - u_{12} - u_{22} - \dfrac{u_{11}\,u_{12}}{w^2 - u_{11}}}\right] + \left[I - \frac{u_{12}'}{w^2 - u_{11}'}\right] \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{u_{23}'}{w^2 - u_{12}' - u_{22}' \dfrac{u_{11}'\,u_{12}'}{w^2 - u_{11}'}}\right] + s_2^2 \frac{u_{34}}{w^2 - u_{44}} = 1\,. \tag{96}$$

Ha (96)-ot továbbrendezzük, és a következő jelölést vezetjük be:

$$\frac{(w^2 - u_{11} - u_{12})\,u_{23}}{w^4 - w^2(u_{11} + u_{12} + u_{22}) + u_{11}\,u_{22}} = \Phi_{11-3} \tag{97}$$

jeléül annak, hogy a kifejezésben 11, 12, 22 és 23 indexek fordulnak elő és ha ugyanezen értékek u-ban, de vesszőzve jelentkeznek, akkor a végeredmény a következő:

$$\Phi_{11-3} + \Phi'_{11-3} + \frac{s_2^2\,u_{34}}{w^2 - u_{44}} = 1\,. \tag{98}$$

A számítás menete a következő:
Kiszámítjuk a felvett w^2-hoz a két $\varnothing$ értéket és azt behelyettesítjük (98)-ba. Ha az eredmény 1-et ad, a w^2-t helyesen választottuk meg. E kifejezésben az u értékek állandóak, csak a w_2 értékek változnak, és a (98) egész bál oldalát mint w^2 függvényét rajzolhatjuk fel. Maga az egyenlet tizedfokú lévén, ill $w^2 = x$-ben ötödfokú, tehát 5 w^2-ot kell megállapítani.

Különleges esetek:

I. Legyen $I_1 = I_1'$, $c_1 = c_1'$, $I_2 = I_2'$, $c_2 = c_2'$,

akkor:

$$u_{11} = u_{11}'\,, \quad u_{12} = u_{12}'\,, \quad u_{22} = u_{22}'\,, \quad u_{23} = u_{23}'\,.$$

Ezen az alapon a (96), és a (98) egyenletek a következő alakot öltik:

$$[w^4 - w^2(u_{11} + u_{12} + u_{22}) + u_{11}\,u_{22}]\{[w^4 - w^2(u_{11} + u_{12} + u_{22}) +$$
$$+ u_{11}u_{22}]\,.\,[w^2 - s_2^2 u_{34} - u_{44}] + (w^2 - u_{44})\,2u_{23}(w^2 - u_{11} - u_{12})\} = 0$$

w hatványai szerint rendezve:

$$[w^4 - w^2(u_{11} + u_{12} + u_{22}) + u_{11}\,u_{22}]\,.$$

$$\{w^6 - w^4(u_{11} + u_{12} + u_{22} + 2u_{23} + s_2^2 u_{34} + u_{44}) + w^2[u_{11}(u_{22} + 2u_{23} + s_2^2 u_{34} + u_{44}) + u_{12}(2u_{23} + s_2^2 u_{34} + u_{44}) + u_{22}(s_2^2 u_{34} + u_{44}) + 2u_{23}u_{44}] - [u_{11}(u_{22}((s_2^2 u_{34} + u_{44})) + 2u_{23}u_{44} + u_{12}2u_{23}u_{44}]\} = 0. \quad (99)$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\begin{aligned} u_{11} + u_{12} + u_{22} + 2u_{23} + s_2^2 u_{34} + u_{44} &= k_{11-4} = u_{11} + k_{12-4} \\ u_{12} + u_{22} + 2u_{23} + s_2^2 u_{34} + u_{44} &= k_{12-4} = u_{12} + k_{22-4} \\ u_{22} + 2u_{23} + s_2^2 u_{34} + u_{44} &= k_{22-4} = u_{22} + k_{234} \\ 2u_{23} + s_2^2 u_{34} + u_{44} &= 2u_{23} + k_{345} \\ s_2^2 u_{34} + u_{44} &= s_2^2 u_{34} + k_{44} \\ u_{44} &= k_{44} \end{aligned} \quad (100)$$

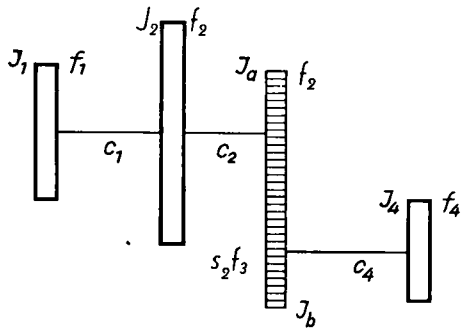
(100) alatti jelölésekkel (99) a következő alakot veszi fel:

$$[w^2 - (u_{11} + u_{12} + u_{22}) + u_{11}u_{22}]. \quad (101)$$

$$\{w^6 - w^4 k_{11-4} + w^2(u_{11}k_{22-4} + u_{12}k_{234} + u_{22}k_{344} + 2u_{23}) - [u_{11}(u_{22}k_{344} + 2u_{23}k_{44}) + u_{12}2u_{23}k_{44}]\} = 0.$$

Az egyenlet tehát két tényezőből áll és ez csak úgy lehet 0, ha mindegyik tényező külön-külön 0-val egyenlő.

II. Legyen I_1', c_1', I_2', c_2 és I_a zérussal egyenlő, ami annyit jelent, hogy az átvitel egyik ágát lekapcsoltuk, és egy pár fogaskerékről van szó, amelynek



15. ábra

tehetetlenségi nyomatékait figyelembe kell venni (15. ábra). Erre az esetre:

$$I_3 = I_a + s_2^2 I_b.$$

A (98) egyenleten e változást keresztül vezetve:

$$[w^4 - w^2(u_{11} + u_{12} + u_{22}) + u_{11}u_{22}]\,[w^2 - u_{44}] - [w^2 - u_{44}]\,[w^2 - u_{11} - u_{12}]u_{23} - [w^4 - w^2(u_{11} + u_{12} + u_{22}) + u_{11}u_{22}]s_2^2 u_{34} = 0.$$

w hatványai szerint rendezve:

$$w^6 - w^4[u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + s_2^2 u_{34} + u_{44}] + w^2[u_{11}(u_{22} + u_{23} + s_2^2 u_{34} + u_{44}) + u_{12}(u_{23} + s^2 u_{34} + u_{44}) + u_{22}(s_2^2 u_{34} + u_{44}) + u_{23}u_{44}] - [u_{11}(u_{29}((s_2^2 u_{34} + u_{44})) + u_{23}u_{44}) + u_{12}u_{23}u_{44}] = 0. \quad (102)$$

Számpélda. A (102) egyenletnek megfelelő esetét számpéldán alkalmazzuk, és átvesszük BRADBURY adatait (The geared marine oil engine London. 1933), amely ugyan angol mértékegységen van megadva, azonban az u értékek csak a sec. mértékegység következtében ennek jelentősége nincs.

Az adatok a következők:

$$I_1 = 409\,,\ c_1 = 14{,}18 \cdot 10^6\,,\ I_2 = 3600\,,\ c_2 = 123 \cdot 10^6$$

$n = 250$, áttétel 100 és így

$$s_2 = \frac{1}{2{,}5}\,,\quad I_3 = 417\,,\quad c_4 = 0{,}264 \cdot 10^6\,,\quad I_4 = 1310.$$

Kiszámítjuk az u értékeket:

$$u_{11} = \frac{c_1}{I_1} = \frac{14{,}18 \cdot 10^6}{409} = 34{,}6 \cdot 10^3\,,\ u_{12} = \frac{c_1}{I_2} = \frac{14{,}18 \cdot 10^6}{3600} = 3{,}94 \cdot 10^3\,,$$

$$u_{22} = \frac{c_1}{I_2} = \frac{123 \cdot 10^6}{3600} = 34{,}2 \cdot 10^3\,,\quad 2u_{23} = \frac{c_2}{I_3} = \frac{2 \cdot 123 \cdot 10^6}{417} = 590 \cdot 10^3\,,$$

$$s_2^2 u_{34} = \frac{0{,}264 \cdot 10^6}{6{,}25 \cdot 417} = 0{,}101 \cdot 10^3\,,\ u_{44} = \frac{c_4}{I_4} = \frac{0{,}264 \cdot 10^6}{1310} = 0{,}201 \cdot 10^3.$$

Kiszámítjuk a következőkben a k értékeket:

$$\begin{aligned} k_{44} &= 0{,}201 \cdot 10^3; \\ k_{344} &= 0{,}101 \cdot 10^3 + 0{,}201 \cdot 10^3 = 0{,}303 \cdot 10^3; \\ k_{234} &= 590 \cdot 10^3 + 0{,}303 \cdot 10^3 = 590{,}3 \cdot 10^3; \\ k_{22-4} &= 34{,}2 \cdot 10^3 + 590{,}2 \cdot 10^3 = 624{,}5 \cdot 10^3; \\ k_{12-4} &= 3{,}94 \cdot 10^3 + 624{,}5 \cdot 10^3 = 628{,}44 \cdot 10^3; \\ k_{11-4} &= 34{,}6 \cdot 10^3 + 628{,}44 \cdot 10^3 = 663{,}04 \cdot 10^3. \end{aligned}$$

Helyettesítsük be a k értékeket az egyenletbe:

$$w^6 - w^4\,663{,}04 \cdot 10^3 + w^2\,[34{,}2 \cdot 10^3 \cdot 624{,}5 \cdot 10^3 + 3{,}94 \cdot 10^3 \cdot 590{,}3 \cdot 10^3 + 34{,}2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}3 \cdot 10^3 + 590 \cdot 10^3\,0{,}2 \cdot 10^3] - [34{,}6 \cdot 10^3\,(34{,}2 \cdot 10^3\,0{,}3 \cdot 10^3 + 590 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2 \cdot 10^3) + 3{,}94 \cdot 10^3 \cdot 590 \cdot 10^3 \cdot 0{,}2 \cdot 10^3] = 0.$$

A számításokat elvégezve:

$$w^6 - 663{,}54 \cdot 10^3 w^4 + 24\,061{,}7 \cdot 10^6 w^2 - 4902 \cdot 10^9 = 0.$$

Bevezetjük a másodpercenkénti rezgésszámot azzal, hogy az egyenletet végig osztjuk $(2\pi)^2$-el:

$$n^6 - 663{,}54 \cdot 0{,}0253 \cdot n^4 10^3 + 24\,061{,}7 \cdot 0{,}0253^2 \cdot 10^6 \cdot n^2 - \\ - 4902 \cdot 0{,}0253^3 \cdot 10^9 = 0.$$

Bár ezt az esetet is ismertettük, de jelen esetben az együtthatók oly kis terjedelmű számok, hogy ezt az egyszerűsítést elhagyhatjuk. Mint lehetőséget más esetre azért meg kellett említeni.

Legyen $w^2 = a \cdot 10^3$, akkor behelyettesí tés után:

$$a^3 - 663{,}54 \cdot a^2 + 24\,061{,}7 \cdot a - 4902 = 0,$$

amellyel a harmadfokú egyenlet gyökeit kell megkeresni.

Más alakban:

$$U = a^3 + 24\,061{,}7 \cdot a \quad \text{és} \quad 663{,}5 \cdot a^2 - 4902 = V,$$
$$U = V$$

Regula falsi módszert használva, az egyenlet megoldásához:

$a =$	$U - V =$
0,1	−2502
0,2	−916
0,21	+121
0,22	+359
0,25	+1438
0,3	+2257

$$w_1^2 = a_1 10^3 = 0{,}205 \cdot 10^3 = 205, \quad w_1 = 14{,}31$$

$$14{,}31 = w_1 = \frac{3{,}14 \cdot n}{30}, \quad n = 137/\text{min}.$$

Ezzel az egyik gyököt meghatároztuk. A következő gyökre nézve kapjuk:

$a =$	$U - V =$	
36	+48 089	
37	48 195	
38	6 250	$a_2 = 38{,}3$, $w_2^2 = 38\,300$, $w_2 = 196$ és $n_2 = 1870/\text{min}$.
38,5	−4 768	
39	−16 360	

A harmadik gyök meghatározásánál abból indulunk ki, hogy a három gyök összege:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 38{,}5 + a_3 = 663{,}5,$$

és ebből a harmadik gyök:

$$a_3 = 625, \quad w = 625\,000, \; w_3 = 791 \text{ és } n_3 = 7550/\text{min}.$$

Ellenőrizhetjük számításunk helyességét azzal, hogy a már kiszámított gyökök szorzatát állapítjuk meg:

$$a_1 a_2 a_3 = 0{,}205 \cdot 38{,}3 \cdot 625 = 4907{,}4$$

tehát helyes.

Ezzel már 3 önlengésszámot ismerünk. Hátra van még a másik tényező révén megállapítható két önlengésszám megállapítása.

$$w^4 - w^2 (u_{11} - u_{12} + u_{22}) + u_{11} u_{22} = w^4 - w^2\, 72{,}7 \cdot 10^3 + 1183 \cdot 10^6 = 0.$$

Osszuk az egyenletet 10^6, akkor kapjuk:

$$w^2 = b \cdot 10^3$$

jelölést bevezetve:

$$b^2 - 72{,}7 \cdot b + 1183 = 0.$$

Ezen egyenlet két gyöke: $b_1 = 47{,}87$ és $b_2 = 24{,}73$, tehát $w_1 = 47\,870$, $w^2 = 24\,730$, vagyis $n_1 = 2100/\text{min}$, $n_2 = 1490/\text{min}$.

Ezekután mind az öt lengésszám ismeretes.

Ellenőrzésül a 15. ábrában feltüntetett rendszert közvetlenül is levezetjük. E célból felírjuk a mozgási egyenleteket:

$$I_1 f_1 = c_1[f_2 - f_1]\,; \tag{103}$$

$$I_2 f_2 = c_1[f_1 - f_2] + c_2[f_3 - f_2]\,; \tag{104}$$

$$I_a f_3 = c_2[f_2 - f_3] + PR\,; \tag{105}$$

$$I_b s_2^2 f_3 = c_4[f_4 - s_2 f_3] - Pr\,; \tag{106}$$

$$I_4 f_4 = -c_4[f_4 - s_2 f_3]\,, \tag{107}$$

ahol P a fogaskerekeken fellépő kerületi erő, és r és R a kerekek sugarai. A (105) és (106)-ból küszöböljük ki P-t:

$$I_3 f_3 = s_2 c_4[f_4 - s_2 f_3] + c_2[f_2 - f_3]\,; \qquad I_3 = I_a + s^2 I_b\,. \tag{108}$$

Megoldásként a szimultán differenciálegyenletre legyen:

$$f_1 = p_1 \cos wt, \quad f_2 = p_2 \cos wt, \quad f_3 = p_3 \cos wt, \quad f_4 = p_4 \cos wt\,. \tag{109}$$

Helyettesítsük be a fenti egyenletekbe, és rendezzük a p amplitúdók szerint:

$$\begin{aligned}
&[w^2 - u_{11}[p_1 + u_{11} p_2 = 0\,;\\
&u_{12} p_1 + [w^2 - u_{12} - u_{22}]p_2 + u_{22} p_3 = 0\,;\\
&u_{23} p_2 + [w^2 - u_{23} - s_2^2 u_{43}]p_3 + s_2 u_{43} p_4 = 0\,;\\
&u_{44} s_2 p_3 + [w^2 - u_{44}]p_4 = 0\,,
\end{aligned} \tag{110}$$

ahol

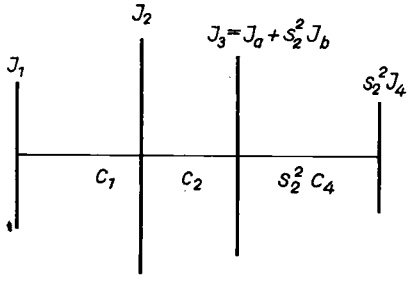
$$u_{11} = \frac{c_1}{I_1}, \quad u_{12} = \frac{c_1}{I_2}, \quad u_{22} = \frac{c_2}{I_2}, \quad u_{23} = \frac{c_2}{I_3},$$

$$u_{43} = \frac{c_4}{I_3}, \quad u_{44} = \frac{u_4}{I_4}\,.$$

A (110) egyenletrendszer csak úgy állhat fenn, ha

$$\begin{vmatrix} w^2 - u_{11} & u_{11} & 0 & 0 \\ u_{12} & w^2 - u_{12} - u_{22} & u_{22} & 0 \\ 0 & u_{23} & w^2 - u_{23} - s_2^2 u_{43} & s_2 u_{43} \\ 0 & 0 & s_2 u_{44} & w^2 - u_{44} \end{vmatrix} = 0. \qquad (111)$$

determináns 0. E determinánson végezzük el a következő átalakításokat:



16. ábra

1. az utolsó oszlopot s-sel szorozva hozzáadjuk az előző 2 oszlophoz,
2. 3. oszlopot hozzáadjuk a 2. oszlophoz,
3. 2. oszlopot hozzáadjuk az első oszlophoz, és az ekként kapott determinánsból w négyzetét kiemeljük és elhagyjuk.

Az eredmény a következő:

$$\begin{vmatrix} 1 & u_{11} & 0 & 0 \\ 1 & w^2 - u_{12} & u_{22} & 0 \\ 1 & w^2 & w^2 - u_{23} & s_2 u_{43} \\ s_2 & s_2 w^2 & s_2 w^2 & w^2 - u_{44} \end{vmatrix} = 0. \qquad (112)$$

Ha e determinánst kifejtjük:

$$[w^2 - u_{11} - u_{12}]\,[w^4 - (u_{23} + u_{44})w^2 + u_{23}u_{44} - s_2^2 w^2 u_{44}] - [w^2 - u_{11}]\,[u_{22}w^2 - u_{22}u_{44} - u_{22}s_2^2 u_{43}] = 0. \qquad (113)$$

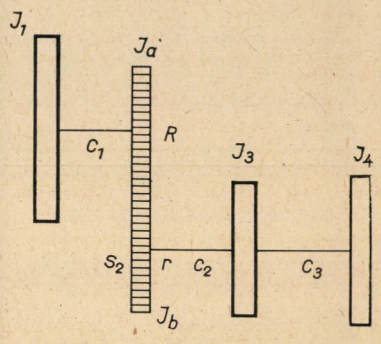
Rendezzük w hatványai szerint:

$$\begin{aligned} & w^6 - w^4[u_{11} + u_{12} + u_{22} + u_{23} + s_2^2 u_{43} + u_{44}] + \\ & + w^2[u_{11}(u_{22} + u_{23} + s_2^2 u_{43} + u_{44}) + u_{12}(u_{23} + s_2^2 u_{43} + u_{44}) + \\ & + u_{22}(s_2^2 u_{34} + u_{44}) + u_{23}u_{44}] - \\ & \{u_{11}[u_{22}(s_2^2 u_{43} + u_{44}) + u_{23}u_{44}] + u_{12}u_{23}u_{44}\} = 0, \end{aligned} \qquad (114)$$

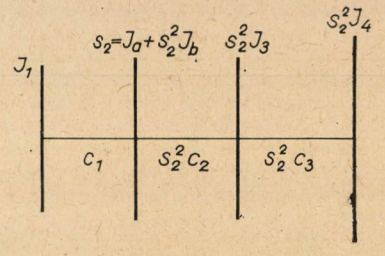
amely a már levezetett (102) egyenlettel egyezik. Ha itt c_4 helyett c_3-at vennénk, akkor u_{43} helyébe u_{33}, és u_{44} helyébe u_{34} kerül. Mi azonban a már előzőkben választott jelöléseket használtuk. E változtatással azonban a szabályszerűség az indexekre nézve helyreáll.

Ez a rendszer a 16. ábrában látható rendszerrel helyettesíthető. Ha az ábrában megadott értékekkel írjuk fel a karakterisztikus egyenletet (114)-et fogunk kapni.

A 17. ábrában az előzővel annyiban találunk egyező elrendezést, hogy a rendszerben ugyancsak 3 tömeg van, de a fogaskerékáttételt más elrendezésben



17. ábra



18. ábra

helyeztük el. Az ezt helyettesítő rendszert a 18. ábrában látjuk úgy, hogy az előzőkben tárgyalt esetnek megfelelően a karakterisztikus egyenletet azonnal felírhatjuk:

$$w^6 - w^4[u_{11} + u_{12} + s^2u_{22} + u_{33} + u_{34}] + \\ + w^2[u_{11}(s^2u_{22} + u_{23} + u_{33} + u_{34}) + u_{12}(u_{23} + u_{33} + u_{34}) + s^2u_{22}(u_{33} + \\ + u_{34}) + u_{23}u_{34}] - \{u_{11}[s^2u_{22}(u_{33} + u_{34}) + u_{23}u_{34}] + u_{12}u_{23}u_{34}\} = 0.$$

Amíg az előző esetben az áttételt jellemző s_2^2 az u_{34}, illetve u_{33}-hoz, addig ebben az esetben az u_{22}-höz tartozott. Az utóbbi esetben:

$$I_2 = I_2 + a_2^2 I_b.$$

ÖSSZEFOGLALÁS

A torzióslengések karakterisztikus egyenletéből kiindulva levezetjük azon kifejezéseket, amelyekkel több tömegű rendszert lengéstechnikailag vele egyenértékű, de két tömegből álló rendszerre vezetjük vissza. Természetesen az ekként levezetett kifejezések frekvenciafüggőek, mégis komplikált elrendezésű hajtóműveknél s lengéstechnikai számításokat tetemesen leegyszerűsítik. E számításoknál az összekötőtengely tehetetlenségi nyomatékát elhanyagolhatónak vettük fel, amely a gyakorlati esetek zömének meg is felel. Ezzel ismét bizonyítékát látjuk annak, hogy a karakterisztikus egyenletek alkalmazása, a torzióslengések követésénél egyébként igen elterjedt táblázatok használatával szemben, igen nagy előnyt jelentenek.

Az elért eredményeket összefoglaltuk és sikerült levezetéseink helyességét a binomiális együtthatók felhasználásával ellenőrizni.

KÖNYVSZEMLE

Horváth Aurél:

KOHÁSZATI FIZIKAI KÉMIA

Egyetemi tankönyv. Tankönyvkiadó, Budapest, 1961. 467 o. 386 ábra

A szerző a könyv első fejezetében mintegy 50 oldalon az anyag atomos szerkezetével, a kémiai kötésével foglalkozik. Közben röviden a természetes radioaktivitásra és a mesterséges atombontásra is kitér. A fejezet következő része mintegy 60 oldalon a homogén, illetve heterogén egy- és többkomponensű, valamint a kolloid rendszereket tárgyalja, majd az anyagi rendszerek szerkezetének a vizsgálati módszereit kb. 10 oldalon ismerteti. A kb. 80 oldal terjedelmű második fejezet a termodinamika alapfogalmaival, a termodinamikai függvényekkel, különböző anyagi rendszerek sajátos termodinamikai függvényeivel és a termodinamikai függvények kémiai folyamatok következtében beálló változásaival foglalkozik. Egyúttal röviden, inkább elvileg tárgyalja a termodinamikai függvények meghatározásait is. A könyv harmadik, kb. 40 oldal terjedelmű fejezete a reakciókinetikát ismerteti. Külön tárgyalja a reakciókinetika fontosabb kohászati vonatkozásait. A szerző a következő, negyedik fejezetben kb. 70 oldalon az egyensúlyok elméletével, mégpedig a tömeghatás törvénnyel, gázegyensúlyokkal, fázistörvénnyel, oldatok egyensúlyával, két-, három- négyalkotós rendszerek fázisdiagramjaival foglalkozik. Egyúttal ismerteti a komponensek aktivitásának meghatározásait, valamint az egyensúlyok kísérleti meghatározásának módjait. Közben külön kitér a fejezetnek kohászati vonatkozásaira is. A befejező, kb. 80 oldal terjedelmű ötödik fejezet elektrokémia. A szerző ebben a fejezetben az elektrolitikus disszociációt, a vezetőképességet, az ionvándorlást, az elektrolitoldatok egyensúlyát, az elektromotoros erőt, az elektródpotenciálokat, az elektrolízist és a polarizációt nemcsak elméletileg tárgyalja. Egyúttal ismerteti ezeknek a fontosabb gyakorlati alkalmazását, illetve az ezzel kapcsolatos mérési eljárások elvét is. E közben mind az elektrokémia kohászati, mind elemzőkémiai alkalmazását kellően figyelembe veszi.

A szerző a könyv előszava szerint azt a célt tűzte ki maga elé, „hogy az egyetemi tanulmányokat folytató kohómérnökhallgatók és a gyakorlati kohászat különböző területein működő kohómérnökök és technikusok számára összefoglalja azokat az alapvető ismereteket, amelyek nemcsak a hazai kohászat továbbfejlesztéséhez, de ma már a korszerű szakirodalom megértéséhez és műveléséhez elengedhetetlenül szükséges". A könyv ennek a rendeltetésének rendkívül jól felel meg. Az anyag tárgyalása ugyanis teljesen korszerű és annyira világos, hogy még az elvontabb részek ismertetése is könnyen érthető. A szerző a fizikai kémia alkalmazásánál elsősorban a kohászat igényeit vette figyelembe. Ezeknek a részeknek a tárgyalása is azonban kétségtelenül lényegesen megkönnyíti a más természetű problémák megértését, illetve a megoldását. Így a nagy gonddal, nagy szakmai ismerettel megírt könyv nem kizárólag kohászati kérdésekkel foglalkozóknak, hanem mindazoknak is ajánlható, akiknek a technika más területén fizikai-kémiai kérdésekkel van dolguk. A kiváló munkával a magyar szakirodalom jelentősen és örvendetesen bővült.

Dr. Mika József

Dr. Vörös Imre:

GÉPELEMEK II.

Tankönyvkiadó, Budapest, 1961. 528 o. 586 ábra, 73 táblázattal, 13 melléklettel

Dr. Vörös Imre professzor, Kossuth díjas, a Budapesti Műszaki Egyetem Gépelem tanszéke vezetőjének, most megjelent Gépelemek II. a már előzőleg megjelent I. és III. kötettel teljessé tette a gépelemek tárgykör feldolgozott anyagát.

A jelenleg ismertetésre kerülő Gépelemek II. könyv szerkezetében jelentősen eltér az eddigi megjelent külföldi gépelem könyvektől, mert az egyetemi oktatás kívánalmainak elő-

térbe hozásával az anyag elrendezése ennek irányát követi és az anyag feldolgozása során is tekintettel van az oktatási követelményekre. A gépelem tárgykör feldolgozásán kívül jelentős oktatási segédlet is, éppen ezért helyenként a szükséges technológiai ismertetésekre is kitér és számpéldákon keresztül a számítások menetét is bemutatja. Tárgyalási módszerét tekintve az elmélet és gyakorlat helyes egyensúlyát valósítja meg, amikor az elméleti fejtegetések után a gyakorlati alkalmazásra mutat be példákat.

A könyv a sikló- és gördülőcsapágyak, laposszíj és ékszíj és lánchajtásokat, a forgattyús hajtóműveket, valamint a rugók számítási és beépítési anyagát tárgyalja.

A siklócsapágyak tárgyalását a csapágykenés hidrodinamikai elmélete alapján, a részletesebb levezetésekre csak utalással, de abból leszűrhető végeredményeket a gyakorlati tervezés szempontjából dolgozza fel, ezzel megkönnyítve az elméletnek a tervezéshez való felhasználását. A gördülőcsapágyak méretezésének és beépítésének hangsúlyozott ismertetése mellett — mely gyakorlati fontosságú — a hazai szempontoknak figyelembevételével történt meg az anyag feldolgozása.

A szíjhajtások ismertetésénél különös tekintettel volt a korszerű műanyaghevederek megjelenésére, mely nem egy esetben, a már részben mellőzött, lapos szíjhajtás ismételt felelevenítésének lehetőségét, előnyeit — az egyszerű konstrukció mellett — biztosítják. A lánchajtások tárgyalásánál a gyakorlati szempontoknak megfelelően előtérbe helyezte a lánchajtások élettartamra, kopásra való méretezését, a szakítószilárdságra való méretezés helyett.

A forgattyús hajtóművek ismertetését az anyag helyes szelektálása mellett a belsőégésű motorok és kompresszorok szempontjából végezte, mert a klasszikus gőzgépek mindinkább kiszorulnak a gyakorlatból.

A rugók tárgyalásánál a gyakorlatban a legnagyobb problémát jelentő méretezésekre fordította a fősúlyt, ezzel a fejezetnek gyakorlati használhatóságát nagymértékben biztosította.

A könyv ábrái, taglalása és mellékletei egységes egészet alkotnak. Az ábrák minden tekintetben méltóan csatlakoznak a szöveganyag színvonalához. Az egyes fejezetek anyagának súlyozása megfelel az elméleti, gyakorlati és oktatási követelményeknek egyaránt.

A könyv anyagának ismertetésénél talán hiányolni lehet, hogy az irodalmi jegyzék nem minden esetben adja a könyv szerkesztéséig megjelent újabb irodalmat és azt, hogy a csúszófelületeknél pl. nem volt kellő tekintettel a korszerű műanyagokra és speciális csúszófelületi anyagokra, melyek mindjobban elterjedtek.

A könyv kiállítása, kötése kielégíti teljes mértékben az igényeket, ami nem mondható a kötést illetően, a sorozat I. és III. tagjáról.

A könyv megjelenésével a gépelemek tárgykör szakirodalma lényegesen gazdagabb és rendezettebb lett és ezzel az évtizedek óta tartó hiány nyert pótlást.

Dékány István

Keith Swainger:

ANALYSIS OF DEFORMATION

Vol. IV. Waves and Vibrations. London, Chapman and Hall, 1959.

A könyv a deformációk elméletének hullámtani részével foglalkozik. Tárgyalja az izotróp szilárd, cseppfolyós és plasztikus anyagokban terjedő hullámok sajátságait. Az egész könyv tárgyalásmódjában a matematikai szemlélet jut túlsúlyra, úgyhogy olvasása igen nagyfokú matematikai és hullámtani ismereteket kíván.

A hullámtanon át mint példához jut el a szerző a X. fejezetben a geofizikához. A Földet ui. át meg át járják a földrengési hullámok, bizonyos sajátlengése is van. Ezek a tulajdonságok nagyon fontosak a Föld szerkezeti felépítésének és fejlődéstörténetének megértéséhez és magyarázatához. Ezeknek a tárgyalása tehát demonstratív példája lehet az elméleti hullámtani elgondolások gyakorlati alkalmazásának.

Szerző a hideg eredetű földmodell mellett száll síkra. Szerinte a Föld ismeretes hőjelenségei (a vulkanizmus, posztvulkanizmus, kifelé áramló hő stb.) a mechanikai kiegyensúlyozatlanság hatására a kéregben és a köpenyben jönnek létre. Ez a mechanikai energia a földrengésekben szabadul fel és részben hővé alakulva okozza a Föld hőjelenségeit.

Egy nagy földrengés energiája 10^{22} erg nagyságrendű, ez az energiamennyiség hővé alakulva egy 70 m-es élű kvarckocka megolvasztására elegendő. Elgondolható tehát, hogy bizonyos vulkanikus jelenségeknek ez az alapja.

A Föld egész területén észlelt, kifelé irányuló hőáram magyarázatára azonban a földrengések energiája nem látszik elegendőnek. A földrengésekben évenként felszabaduló energiát

$2{,}5 \times 10^{24}$ ergnek, vagyis 6×10^{16} kalóriának becsülik. A Föld kifelé irányuló hőáramát $1{,}3 \times 10^{-6}$ kal/cm^2.sec-nek véve a Föld egész felületén évenként 2×10^{20} kalória hőenergia lép át. Ez az energiamennyiség több nagyságrenddel nagyobb, mint az évenként felszabaduló földrengési energia.

A szerző az elgondolást a Napra is átviszi. Valószínű, hogy a Nap óriási sugárzó energia, vesztesége mellett a felületén levő anyag mechanikai kiegyensúlyozatlanságából származó energia még jobban eltörpül. A Földre vonatkozóan a kérdést közelebb fogja vinni a megoldáshoz a földkéreg tervezett átfúrása.

A könyv matematikai függelékekkel zárul, melyekben a szerző az általa használt matematikai formalizmus alapjait és egyes különleges függvények sajátságait tárgyalja.

Dr. Barta György

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1961. XII. 29. — Terjedelem: 40,50 (A/5) ív, 216 ábra

1962.54626 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

86,— Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Faller Jenő : Kövesi Antal 1876—1961 3
Szidarovszky János : Tengelyirányú erővel terhelt rúd sajátrezgése a forgási tehetetlenség figyelembevételével 5
Dulácska Endre : Vasbeton dongahéjak számítása 19
Szidarovszky János : Statikai lineáris differenciálegyenlet megoldására szolgáló fokozatosan közelítő eljárás és alkalmazása függőhidakra 39
Balogh Artúr : A torziószlengés karakterisztikus egyenletével kapcsolatos táblázatok szerkezete 65
Csonka Pál : Toronyházak vázszerkezetének számítása szélterhelésre 85
Csonka Pál : A membránhéjak peremabroncsáról 89
Csonka Pál : Állandó vagy folyamatosan változó falvastagságú elliptikus paraboloidhéj ellipszis alaprajz felett 93
Korach Marcell : Vasbeton lemezszerkezetek gazdaságosságának számítása 97
Csonka Pál : A csavarási probléma néhány zárt alakú megoldása 121
Harkányi István : A saruscsapágy résgeometriájának változásai 127
Hoffmann Andor : Hosszú hengeres testek hevítési folyamatának vizsgálata változó kemencehőmérséklet és hőátadási tényező esetén 157
Szántó István : Acélok folyáshatárjelenségének vizsgálata a rácstorzulások indikálásának új módszerével 171
Erney György : Egyenes fogú evolvensfogazatú hengeres kerekek fogfejlenyesésének számítása és ellenőrzése 185
Terplán Zénó : A súrlódó tengelykapcsolók indítása 197
Balogh Artúr : Torziószlengéssel kapcsolatos continuáns determináns néhány tulajdonsága 209
Winter Ernő, Budincsevits Andor és Bíróné Frigyes Éva : A földalkálikarbonátok szilárd oldatainak képződésére vonatkozó vizsgálatok 215
Balogh Artúr : Függvények ábrázolásának új módszere. (Geometrográfia) 233
Halmos Ferenc : A hosszméréses hálózatok kiegyenlítéséhez 243
Haszpra Ottó : Előírt pontosságú vonalsereges nomogramok tervezése. Vonalsereges nomogramok alkalmazása a hidraulikában 261
Bardócz Árpád : Elektronikus vezérlésű 40 000 Voltos nagypontosságú spektroszkópiai szikragerjesztő 275
Hankó Géza : A radiális háromszögelés geodéziai rendszerhez való illesztése 299
Halmos Ferenc : A hibaellipszis és a talpponti görbe jellemzői 317
Hoffmann Pál : A gyémánt dróthúzókövek optimális fúrási irányának meghatározása 327
Szőke Béla : A kinetikus golyóscsapágyrezgés alapjelenségei 341
Bendefy László : A levéltári kutatás a műszaki tudománytörténet és a népgazdaság szolgálatában 365
Schleicher Aladár : Adatok a kohászat magyarországi történetéhez. VIII. A kislődi vashámor története, II. r. 393
Zambó János : Bányaüzemek telepítésének legfőbb paraméterei 407
Balogh Artúr: Torziószlengéseknél keletkező tehetetlenségi nyomatékok redukciója 417

Könyvszemle

Horváth Aurél: Kohászati Fizikai Kémia — Mika Józseftől 457
Vörös Imre: Gépelemek II. — Dékány Istvántól 457
Keith Swainger: Analysis of Deformation. Vol. IV. Waves and Vibrations — Barta Györgytől 458