

SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági
Szakosztályának lapja

Szerkeszti:

MARTOS BÉLA

Társszerkesztők:

BOD PÉTER, IFJ. KREKÓ BÉLA, PONGRÁCZ TIBOR
SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA

Szerkesztő bizottság:

AUGUSZTINOVICS MÁRIA (elnök), BOD PÉTER, CSEPINSZKY ANDOR, ÉLTETŐ ÖDÖN, FORGÓ FERENC,
HALABUK LÁSZLÓ, KELLE PÉTER, KORNAI JÁNOS, KOVÁCS ÁLMOS, KREKÓ BÉLA, LIGETI ISTVÁN,
MESZÉNA GYÖRGY, MIKÓ GYULA, ORMÓS ZSOLT, SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA, SIMONOVITS ANDRÁS,
SÓLYOM CSABA, STAHL JÁNOS, SZAKOLCZAI GYÖRGY, SZÉP JENŐ, TÓTH JÓZSEF, ZALAI ERNŐ, ZIERMANN
MARGIT

•

E szám szerzői:

Dr. BENEDEK ANDRÁS kandidátus, az Országos Pedagógiai Intézet tudományos tanács-
adója, Dr. HANÁK GÁBOR, az MTA Matematikai Kutató Intézet tudományos munkatársa,
Dr. KOMLÓSI SÁNDOR kandidátus, a Pécsi Janus Pannonius Tudományegyetem adjunktus-
a, Dr. MEDVEGYEV PÉTER, az Országos Vezetőképző Központ főelőadója, NÉMETH
GYÖRGY, az Egészségügyi Minisztérium Szervezési, Tervezési és Információs Központjá-
nak osztályvezetője, SCHMIDTNÉ KIGYÓSSY ÉVA kandidátus, az NDK Tudományos Akadé-
miája Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos főmunkatársa

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43–45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél a Posta
hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodáknál (PKHI 1900 Budapest, József
nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKHI 215–96 162
pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-
Zsilinszky út 76 sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363
Budapest, Alkotmány u. 21. Telefon 111-010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488,
és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest, Váci u. 22. Telefon:
185-612. Előfizetés díj egy évre: 80, – Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest. Pf. 149

A nem áruszektor teljesítményének közvetett értékelése

1. Bevezetés

A cikk a „nem árujavak és szolgáltatások”¹ azon körével foglalkozik, amelyeket a piac megkerülésével osztanak el személyes fogyasztás céljából. Ezen a csoporton belül is az oktatásügyi és az egészségügyi intézményeket, teljesítményük számszerűsíthetőségét vizsgáljuk. Különbséget teszünk az oktatásügyi és az egészségügyi intézmények közvetlen és közvetett teljesítménye (outputja) között. Közvetlen teljesítménynek tekintjük a megfelelő intézmény tevékenységének azt az eredményét, amely a tevékenység kifejtésével egyidejűleg keletkezik. Ezek a közvetlen szolgáltatások az emberre irányulnak, eredményük pl. egy bizonyos képzettségi színvonal elérése vagy egy betegség kiküszöbölése. Amennyiben az ember, mint munkaerő, a társadalmi újratermelési folyamatba lép, a szolgáltatások közvetlen teljesítménye munkavégző képességként az újratermelési folyamat részévé lesz, közvetett úton hat az újratermelési folyamat eredményére (outputjára). Ezt az utóbbi hatást nevezzük a szolgáltatások közvetett teljesítményének. A tanulmány ennek a közvetett hatásnak a számszerűsítését tűzi ki céljául. A számszerűsített közvetett hatásból kiindulva teszünk javaslatot az oktatásügyi és az egészségügyi intézmények közvetlen teljesítményének becslésére.

A leírt módszertan elvi megközelítésnek tekintendő. A szolgáltatások közvetett népgazdasági hatásának nyomkövetése a cél. A dolog természetéből adódóan egy sor szigorú egyszerűsítő feltételezéssel kellett dolgoznunk. Az eredményül kapott nagyságrendek azonban még így is elgondolkodtatóak: *a vizsgálatba bevont nem árujellegű szolgáltatások outputja inputjuk 3–4-szeresére tehető.*

Bevezetésül rövid áttekintést adunk a szolgáltató szektorok teljesítményének ismert értékelési módszereiről. A mi értékelési módszerünk mindenekelőtt abban különbözik ezektől az eljárásoktól, hogy az áruszektor és a nem áruszektor kölcsönhatásait is figyelembe veszi a nem áruszektor teljesítményének becslésénél. A továbbiakban az ÁKM felhasználásával leírunk egy módszert a vizsgálatba bevont szolgáltatások közvetett népgazdasági hatásának kvantifikálására. Végezetül az NDK népgazdaságának egy hétszektoros ÁKM időszora példáján bemutatjuk az oktatásügyi és egészségügyi szolgáltatások egy lehetséges értékelését.

2. A szolgáltatások értékelésének módszereiről

A szocialista országok szakirodalma alapján — a teljesség igénye nélkül — bevezetőül néhány módszertani elgondolás:

¹ A fogalom definícióját és részletesebb leírását lásd [5]-ben.

— Az általános népgazdasági hatékonyságra alapuló módszer (lásd [1] és [2]-t) abból a hipotézisből indul ki, hogy a népgazdaság különböző szféráinak a ráfordításai azonos gazdasági feltételek mellett ugyanazt a hatékonyságot eredményezik. A szolgáltató szektorok társadalmi hatékonyságának becslésére az anyagi termelés adott termelési értékére eső átlagos munkaidő szolgál. A következő mutatószám adja a szolgáltató szektorok teljesítményét: a megtermelt nemzeti jövedelem osztva az anyagi termelésben foglalkoztatottak létszámával, az így nyert hányados szorozva a szolgáltatószektorok létszámával és egy koeficienssel, amely a szolgáltató szektorokban kifejtett munka bonyolultságát fejezi ki.

— A szolgáltató szektorok teljesítményének összesítő mutatója (lásd [2]-t) a szolgáltató szektorok finanszírozását veszi alapul. Az áru jellegű szolgáltatások esetében a lakossági kiadások és a nyereség, a részben áru jellegű szolgáltatásoknál a lakossági kiadások és az állami támogatás összege, a nem áru jellegű szolgáltatásoknál az anyag- és bérköltségek nyújtják a számszerűsítés bázisát.

— A nemzeti jövedelem kibővített aggregátuma (lásd [3] és [11]-t) mindenképp előtt a nemzetközi összehasonlítás célját szolgálja. Itt a nemzeti jövedelemben a szolgáltató szektorok tevékenysége is megjelenik. A szolgáltató szektorok teljesítményének az összvolumene lényegében a következő összetevőkből adódik. A szolgáltatások azon teljesítményét, amelyet a szocialista országok statisztikáiban a nemzeti jövedelemhez sorolnak osztják az itt foglalkoztatottak létszámával. Az így kapott eredményt szorozzák a szolgáltató szektorok összes foglalkoztatottjának számával. Ez adja a szolgáltató szektorok összteljesítményét.

— Az ún. munkaerőpotenciál kiszámításánál (lásd [9]-t) a Tudomány és kutatás, az Oktatásügy, az Egészségügy, valamint a Közművelődés szektorait vesszük figyelembe. A termelőerők minőségi növekedésének tényezőjét a „munkaerőpotenciál”-ban a következőképpen számszerűsítik:

$$L = \varphi N + \varphi V + \omega Z + K,$$

ahol:

L — a „munkaerőpotenciál”;

N — a Tudomány és kutatás szektorára fordított kiadások összege;

V — az Oktatásügy szektorára eszközölt kiadások összege;

Z — az Egészségügy szektorára eszközölt kiadások összege és

K — a Közművelődés szektorára eszközölt kiadások összege.

A φ , φ és ω együtthatók a megfelelő ráfordítás társadalmi hatékonyságát fejezik ki. Ezeket a koeficienszeket főleg a szakképzettség és az oktatási ráfordítások alapján számszerűsítik.

— A szolgáltató szektorok bevonása a termelési függvénybe (lásd [11]-t) a következő formát öltheti:

$$Q = aL^k \cdot F^z \cdot N^y \cdot e^{rt},$$

ahol:

Q — a társadalmi termék;

a — egy nívókonstans;

L — a munkaerő;

F — a termelő alapok (holtmunka);

N — a szolgáltató szektorok teljesítménye;

k, z, y — a megfelelő elaszticitások;

e^{rt} — a műszaki haladás befolyása.

Az első három módszernél a nem áruszektorok teljesítményét az áruszektorok analógiájára, illetve önköltségi szinten becslik. A problémának ez legális megközelítése, hiszen becslésről lévén szó, minden körülmények között bizonyos feltételezéseket kell előre bocsátanunk. Az utóbbi két becslési eljárás, megfelelő együttthatók révén, a nem áruszektor teljesítményeire eszközölt ráfordítások megtérülését is figyelembe veszi. A tulajdonképpeni problémát éppen ezeknek a megtérülési tényezőknek a számszerűsítése jelenti.

A jelen tanulmány egy további lehetőséget mutat be a nem áruszektor teljesítményének értékelésére. A megközelítés iránya annyiban tér el az ismertetett módszerektől, hogy nem adunk meg eleve valamiféle hányadost a nem áruszektor teljesítményének becslésére és nem az így becsült outputot vizsgáljuk népgazdasági összefüggéseiben. Mi a nem áruszektor népgazdasági hatásaiból indulunk ki. Az áruszektor és a nem áruszektor kölcsönhatása alapján teszünk kísérletet a nem áruszektor közvetett népgazdasági hatásának a számszerűsítésére. Ezt a közvetett népgazdasági hatást igyekszünk figyelembe venni vizsgálatunk végeredményében, a nem áruszektor bizonyos szolgáltatásainak értéke-
ésében.

3. A nem áruszektor közvetett népgazdasági hatásának számszerűsítése

3.1. A közvetett összehasonlítás módszere

Az áruszektor és a nem áruszektor kölcsönhatásait az ÁKM segítségével elemezzük. Ennek érdekében az MPS rendszerben összeállított ÁKM belső négyzetét kibővítettük a nem áruszektorok bevezetésében említett néhány tevékenységével.² Példánkban az Oktatásügy és az Egészségügy ágazatok képviselik a nem áruszektor. Az áruszektor az Ipar, Építőipar, Mezőgazdaság és Bekereskedelem ágazataira tagozódik. Az NDK népgazdaságának összesítő adatai alapján az 1960-tól 1980-ig terjedő időszakra becsültük ezt a 7 ágazatot tartalmazó ÁKM-sort.³

Mivel a nem áruszektor outputjait bevittük az ÁKM belső négyzetébe, eleve meg kellett adni egyfajta becslésüket. Ezt az első becslést minimális szinten, a tevékenységekre eszközölt ráfordítás (input) nagyságában adtuk meg.⁴ Ily módon szembe kerültünk azzal a jól ismert problémával, hogy az áruszektor outputján a nem áruszektor inputján mértük a kölcsönhatások vizsgálatánál. Ezt a nehézséget kiküszöbölendő olyan ÁKM-eket állítottunk össze [7], ame-

² Az ÁKM kibővítésének elvét lásd [4] és [10]-ben. Hasonlóképpen lehet az SNA rendszerben felállított ÁKM-et is kibővíteni a nem áruszektor outputjával.

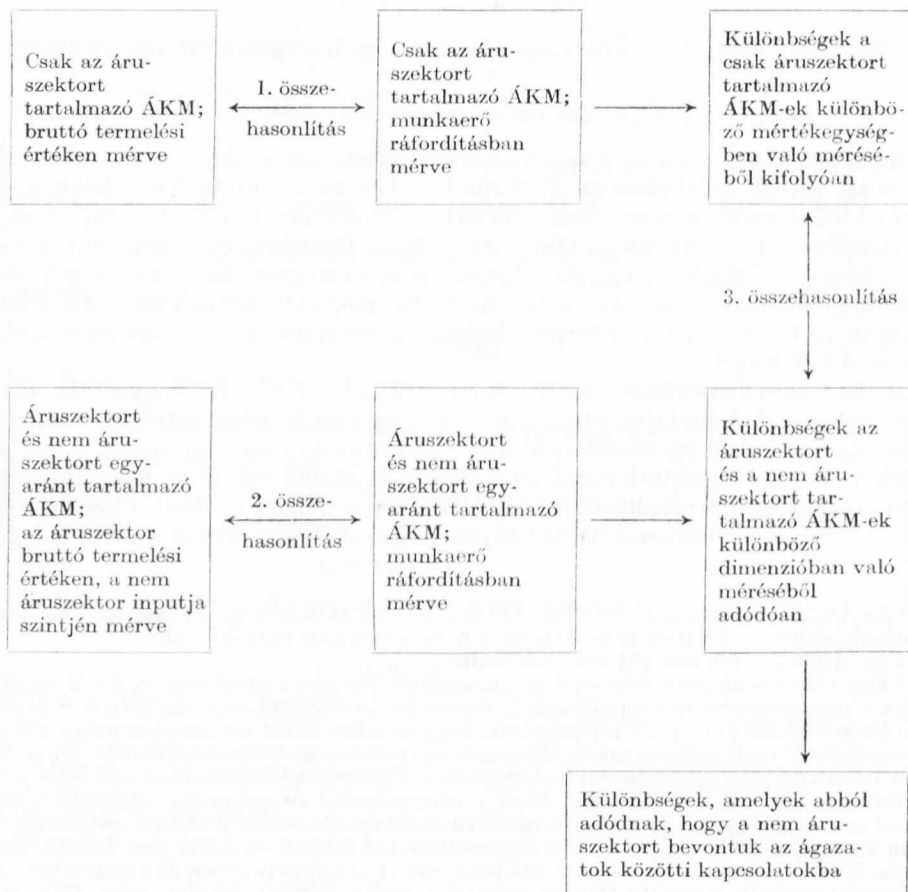
³ Az ÁKM-sor adatait [8]-ban publikáltuk.

⁴ Egy kísérleti elemzés folyamán megvizsgáltuk, hogyan változtatná az ÁKM struktúráját a nem áruszektorok inputjának 5, illetve 30%-os felértékelése az output közvetlen becslésénél. (Lásd [6]-t.) Azt tapasztaltuk, hogy az adott ÁKM-rendszerben még a 30%-os felértékelés is csak egészen minimális struktúraváltozásokat von maga után. Ez a tény arra vezethető vissza, hogy az Oktatásügyi és az Egészségügyi ágazatokra eszközölt ráfordítások összege elhanyagolhatóan kicsi a népgazdasági össztermelés értékéhez képest. Ezzel szemben lényeges struktúraeltolódásokat találtunk az ÁKM elemzésénél, amikor a nem áruszektorok *nélküli* és a nem áruszektorokkal kibővített ÁKM-eket hasonlítottuk össze. Mindebből arra a következtetésre jutottunk, hogy az áruszektor és a nem áruszektor kölcsönhatásainak a pusztá figyelembevételével jóval fontosabb feladat, mint kifinomult módszerek kidolgozása a nem áruszektor inputjánál *közvetlen* felértékelésére.

lyekben az áruszektor és a nem áruszektor ágazatok közötti kölcsönhatásait nem a szokásos bruttó termelési értékekben (illetve a nem áruszektor outputjában), hanem a két szektor egy közös dimenziójában, inputjuk egy meghatározott összetevőjében (pl. csak a munkaerő ráfordításban vagy csak az anyagráfördítésben) fejezzük ki. Az ágazatok közötti kapcsolatok ilyen egységes leképezését felhasználva a nem áruszektor teljesítményének közvetett népgazdasági hatása a következő módon mutatható ki:

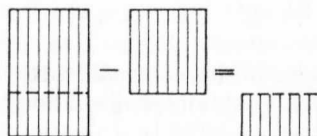
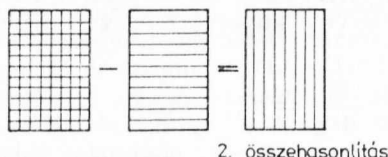
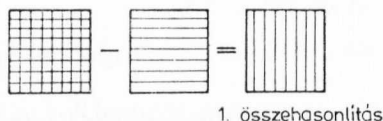
1. Első lépésként csak az áruszektorot tartalmazó két ÁKM-et hasonlítunk össze különböző dimenziókban mérve. Vegyük például, hogy egy bruttó termelési értéken mért áruszektoros ÁKM-et vetünk össze egy munkaerő ráfordításban mért szintén áruszektoros ÁKM-mel. Mivel az ÁKM-ek kizárólag csak az áruszektorot foglalják magukban, ennek az első összehasonlításnak az eltérései az ágazati kapcsolatok különböző mérési módjára vezethetők vissza. (1. ábra, 1. összehasonlítás.)

2. A következő lépésben olyan ÁKM-eket vetünk egybe, amelyek az áruszektor és a nem áruszektor egyaránt magukban foglalják és különböző dimenziókban vannak összeállítva. (1. ábra, 2. összehasonlítás.)



1. ábra. A közvetett összehasonlítás elve

3. Az első összehasonlításban olyan strukturális hatások mutatkoznak meg, amelyek az áruszektor ágazati kapcsolatainak különböző mértékegységben végzett mérésével magyarázhatók. A második összehasonlításban mutatkozó különbségek az ágazati kapcsolatok különböző dimenzióban való mérésén túl a nem áruszektor bevonásának a hatását is visszatükrözik. Mivel az első és a második összehasonlításban az áruszektor különböző dimenzióban mért ágazati kapcsolata a „közös rész”, e két összehasonlítás különbségei a nem áruszektor bevonására vezethetők vissza.⁵ (1. ábra, 3. összehasonlítás.)



2. összehasonlítás – 1. összehasonlítás = 3. összehasonlítás

2. ábra. A közvetett összehasonlítás sémája

A közvetett összehasonlítás elvét erősen leegyszerűsített formában, differenciák alkalmazásával a 2. ábrában foglaljuk össze.

A közvetett összehasonlítás feltétele egy új dimenziónak a bevezetése (esetünkben az ágazati kapcsolatok input-összetevőkben való mérése). Ennek az új dimenzióknak a segítségével válik lehetővé, hogy közvetett módon információt nyerjünk egy olyan részhalmazról (példánkban a nem áruszektor képviseli ezt a részhalmazt), amelyet eredetileg nem tartalmazott a rendszer.

3.2. A közvetett összehasonlítás statisztikai interpretációja⁶

Az előző fejezetben bemutatott összehasonlítások illusztrálására vegyük az ágazati bruttó termelési érték és az ágazati munkaerő ráfordítás strukturális differenciáit például.

⁵ A nem áruszektor bevonásán túl szerepet játszik még a 3. összehasonlításban, hogy a nem áruszektorral kibővített és bruttó termelési értékben mért ÁKM-ekben a nem áruszektor teljesítménye az input szintjén szerepel. Mint a 4. lábjegyzetben megjegyeztük, ennek a tényezőnek a strukturális hatása az adott ÁKM-rendszerben elhanyagolhatóan csekély, ezért a továbbiakban eltekintünk tőle.

⁶ Itt köszönöm meg Martos Bélának a probléma kidolgozása során nyújtott segítségét. E fejezet bárminemű vitás kérdéséért természetesen csak a szerzőt terheli a felelősség.

Vezessük be a következő jelölést:

$\mathcal{R}$: az áruszektorok halmaza

$\mathcal{N}$: a nem áruszektorok halmaza

$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cup \mathcal{N}$: az összes (áru és nem áru) szektorok halmaza

x_i : az i . szektor bruttó kibocsájtása

m_i : az i . szektorban ráfordított munkaerő

$X_{\mathcal{R}}, X_{\mathcal{N}}, X_{\mathcal{S}}$: az ágazati bruttó kibocsájtások a megfelelő szektorhalmazokra összegezve

$M_{\mathcal{R}}, M_{\mathcal{N}}, M_{\mathcal{S}}$: az ágazati munkaerőráfordítások a megfelelő szektorhalmazokra összegezve.

1. összehasonlítás

A csak áruszektorot tartalmazó ÁKM-ek szembeállítására bruttó termelési értékben és munkaerő ráfordításon mérve a következő ágazati differenciákat eredményezi:

$$\frac{x_i}{X_{\mathcal{R}}} - \frac{m_i}{M_{\mathcal{R}}} = d_{1i}, \quad i \in \mathcal{R} \quad (1)$$

2. összehasonlítás

A különböző dimenziókban összeállított, áruszektorot és nem áruszektorot egyaránt tartalmazó ÁKM-ek eltérései a következőképpen írhatók fel:

$$\frac{x_i}{X_{\mathcal{S}}} - \frac{m_i}{M_{\mathcal{S}}} = d_{2i}, \quad i \in \mathcal{S} \quad (2)$$

3. összehasonlítás

A harmadik összehasonlítás ebben a megközelítésben az első és a második összehasonlítás közötti differencia, $d_1 - d_2 = d_3$. Az (1) és (2) összefüggés szerint érvényes az áruszektorokra:

$$\frac{x_i}{X_{\mathcal{R}}} - \frac{m_i}{M_{\mathcal{R}}} - \left(\frac{x_i}{X_{\mathcal{S}}} - \frac{m_i}{M_{\mathcal{S}}} \right) = \left(\frac{x_i}{X_{\mathcal{R}}} - \frac{x_i}{X_{\mathcal{S}}} \right) - \left(\frac{m_i}{M_{\mathcal{R}}} - \frac{m_i}{M_{\mathcal{S}}} \right) = d_{3i}, \quad i \in \mathcal{R} \quad (3),$$

a nem áruszektorokra pedig:

$$-\frac{x_i}{X_{\mathcal{S}}} + \frac{m_i}{M_{\mathcal{S}}} = d_{3i}, \quad i \in \mathcal{N}. \quad (4)$$

A (3) összefüggést írjuk át a következő alakba:

$$d_{3i} = \frac{x_i}{X_{\mathcal{R}}} \left(1 - \frac{X_{\mathcal{R}}}{X_{\mathcal{S}}} \right) - \frac{m_i}{M_{\mathcal{R}}} \left(1 - \frac{M_{\mathcal{R}}}{M_{\mathcal{S}}} \right) = \frac{x_i}{X_{\mathcal{R}}} \cdot \frac{X_{\mathcal{N}}}{X_{\mathcal{S}}} - \frac{m_i}{M_{\mathcal{R}}} \cdot \frac{M_{\mathcal{N}}}{M_{\mathcal{S}}}, \quad i \in \mathcal{R} \quad (5)$$

ahol figyelembe vettük a $X_{\mathcal{S}} = X_{\mathcal{R}} + X_{\mathcal{N}}$, $M_{\mathcal{S}} = M_{\mathcal{R}} + M_{\mathcal{N}}$ összefüggéseket. A harmadik összehasonlítást tehát (5) jobb oldalának felhasználásával úgy interpretálhatjuk, hogy az egyes áruszektorok bruttó termelési értékét a nem áru-

széktorok bevonásának strukturális hatását kifejező koefficienssel korrigáltuk és ugyanezt tettük az áruszéktorok munkaerő ráfordításaival is, azzal a különbséggel, hogy a koefficiens az első esetben a bruttó termelési értékek arányaiból, a másodikban a munkaerő ráfordítások arányaiból számítottak.

4. Példa a nem áruszéktor teljesítményének közvetett értékelésére

4.1. A becslés feltételei

A nem áruszéktor teljesítményének becslésekor a következő szempontokból indultunk ki:

— Tekintettel kell lennünk az áruszéktor és a nem áruszéktor kölcsönhatásaira. A kölcsönhatások leképezésének egy lehetőségét az ÁKM nyújtja. A mi példánkban az ÁKM belső négyzete egyaránt magában foglalja az áruszéktor és a nem áruszéktor inputját és outputját. (Lásd [10]-ben.)

— Az áruszéktor és a nem áruszéktor inputját és outputját kölcsönhatásuk nyomkövetése érdekében azonos dimenzióban kell leképezni. Míg az áruszéktor outputját valamiféle termelési áron vesszük számba, a nem áruszéktor outputjának mérésére csak a teljesítmények önköltsége áll közvetlenül rendelkezésre. A hagyományos ÁKM ágazatok közötti áramlásainak újraértelmezése [7] lehetővé teszi, hogy az áruszéktort és a nem áruszéktort azonos dimenzióban vessük egybe. Az ÁKM ezen interpretációjánál azt a jelenséget használjuk ki, hogy az ágazati összkibocsátások áramlásával egyidejűleg ezen összkibocsátás egyes elemei is — így pl. az önköltség egyes összetevői is — áramlanak az ágazatok között. Így az áruszéktor és a nem áruszéktor kölcsönhatásainak kimutatásánál azonos dimenziót (pl. ágazati munkaerő ráfordítást) alkalmazhatunk.

— A nem áruszéktor bevonása az ÁKM belső négyzetébe és az ágazatok közötti áramlások önköltségi tényezőként való mérése lehetővé teszi, hogy kvantifikálható információkat nyerjünk a nem áruszéktor teljesítményének közvetett népgazdasági hatásairól. (Vö. a cikk 3. pontjával.) Ez a közvetett népgazdasági hatás mindig egy-egy önköltségi tényező (pl. munkaerő vagy anyagráfordítás) vonatkozásában számszerűsíthető. Az így kapott eredmények arra adnak választ, hogy mekkora lenne a nem áruszéktor közvetett népgazdasági hatása, ha pl. a kölcsönhatásokat csak munkaerő ráfordításon vagy csak állóalap ráfordításon mérnénk.

— A továbbiakban feltételezzük, hogy létezik az áruszéktor kibocsátásainak valamiféle árrendszere, amely a nyereség megállapításánál az önköltségi tényezőket — szűkösségük szerint vagy egyéb módon — súlyozza. Amennyiben az önköltségi tényezők ezen súlyai az áruszéktorban megállapíthatók, mint az átlagos népgazdasági megtérülés visszatükrözői, felhasználhatjuk őket a nem áruszéktor önköltségi tényezőként mért népgazdasági hatásának a súlyozására. Így olyan becslést adhatunk a nem áruszéktor teljesítményének (outputjának) az értékelésére, amelyben az áru- és a nem áruszéktor kölcsönhatásait és az áruszéktor önköltségi tényezőinek a megtérülését kombináljuk.

Ahogy az alábbi példa is mutatja, a nem áruszéktor output és input hányadosának nagyságrendjét nemigen befolyásolja az önköltségi tényezők súlyainak megválasztása. Így végső soron az áru- és a nem áruszéktor kölcsönhatásai dominálnak a nem áruszéktor outputjának adott becslésénél.

4.2. Példa a nem áruszektor outputjának becslésére

A következő erősen leegyszerűsített példában, amelyet egy becsült hétszektoros ÁKM-idősor alapján az NDK népgazdaságára állítottunk össze, *adottak*:

- Az áruszektor bruttó termelési értéke;
- A nem áruszektorra eszközölt ráfordítások értéke;
- Egy feltételezett átlagos népgazdasági súlyrendszer az önköltségi tényezők (példánkban csak a munkaerő és az állóalap ráfordításokat vettük önköltségi tényezőként figyelembe) súlyozására az áruszektor árainak kialakításához;
- A nem áruszektor közvetett strukturális hatásának kvantifikált értékei az egyes önköltségi tényezők vonatkozásában.

Első lépésként tegyük fel, hogy a népgazdasági árak kialakításánál *csak a munkaerő ráfordítást* vesszük figyelembe. Az 1. táblázatban a nem áruszektor közvetett népgazdasági hatását kvantifikáljuk a munkaerő ráfordítás példáján. A bruttó termelési értéken és a munkaerő ráfordításon mért ÁKM-ek összehasonlítása, kizárólag az áruszektor figyelembevétele mellett, az ipar részarányának 19%-os eltolódását eredményezi. [Lásd az 1. táblázat (3) oszlopát.] Az ipar részarányának említett eltolódása az ipari termékek és szolgáltatások aránylag alacsonyabb munkaerő igényével magyarázható. Még nagyobb az ipar részarányának az eltolódása, ha a nem áruszektor bizonyos tevékenységeit is (példánkban az Oktatásügy és az Egészségügy ágazatainak a tevékenységeit is) bevonjuk vizsgálatunk körébe. Ebben az esetben 27%-ot tesz ki az ipar részarányának változása. [Lásd az 1. táblázat (6) oszlopát.] Amíg csak az áruszektorra vettük figyelembe 19% volt az ipar vonatkozásában a részarányváltozás, a nem áruszektor bevonásával 8%-kal magasabb (27%) lett az arányeltolódás mértéke. Éppen ez a 8%-os arányeltolódás az, amit az adott relációban a nem áruszektor figyelembevételének tulajdonítunk.

A nem áruszektor közvetett népgazdasági hatását a közvetett összehasonlítás módszeréből kiindulva az *áruszektor* struktúrájának a változásából olvashatjuk le. (Lásd a harmadik összehasonlítást az 1. táblázat (7) oszlopában.) Példánkban 18%-ot tesz ki a részarányeltolódás a nem áruszektor javára.

Amennyiben továbbra is feltesszük, hogy csak a munkaerő ráfordítást vesszük figyelembe a teljesítmények értékelésénél, a nem áruszektor közvetett strukturális hatása alapján példánkban az áru- és a nem áruszektor outputja között 82 : 18 aráynak kellene fennállnia.

Ha az áruszektor hagyományos bruttó termelési értékét adottnak vesszük, akkor példánkban a következőképpen kvantifikálható a nem áruszektor bevont körének teljesítménye:

1980-ban az NDK Statisztikai Évkönyve szerint 457 730 millió márka volt az áruszektor bruttó termelési értéke. Ha ez az összeg 82%-nak felel meg, akkor a 18%-nak megfelelő 100 477 millió márkára becsülhető a nem áruszektor bevont ágazatainak a teljesítménye. Ez utóbbi összeg a nem áruszektor adott inputjának kereken *ötszörösét* teszi ki.

Oldjuk fel most azt a feltételezést, hogy csak a munkaerő ráfordítást vesszük figyelembe a teljesítmények mérésénél. Tegyük további vizsgálatunk tárgyává a munkaerő ráfordításon túl az állóalap ráfordítást is. (Hasonlóképpen kiterjeszthetnénk a vizsgálat körét egyéb ráfordítási tényezőkre is. Itt az egyszerűség kedvéért csak az említett két tényezővel dolgozunk.)

Amennyiben az ágazati *állóalap ráfordítást* vesszük a közvetett összehasonlítás alapjául, az 1. táblázat analógiájára azt kapjuk, hogy a nem áruszektor be-

1. táblázat

A nem árujellegű szolgáltatások közvetett hatásainak kimutatása részarányuk differenciái alapján (Az NDK népgazdaságának átlagos értékei 1962–1980, népgazdaság összesen = 100%)

Ágazatok	1. összehasonlítás			2. összehasonlítás			3. összehasonlítás
	A csak az áruszekektort tartalmazó ÁKM-ek ágazati részarányai			Az áru- és nem áruszekektort tartalmazó ÁKM-ek ágazati részarányai			Eltérés a csak áruszekektort tartalmazó ÁKM-ek és az áru- és nem áruszekektort egyaránt tartalmazó ÁKM-ek között (3)–(6)
	a bruttó termelési érték alapján	a munkaerő ráfordítás alapján	Differencia (1)–(2)	a bruttó termelési érték alapján	a munkaerő ráfordítás alapján	Differencia (4)–(5)	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Ipar	68	49	19	66	39	27	—8
Építőipar	7	9	—2	7	7	0	—2
Mezőgazdaság	11	19	—8	10	14	—4	—4
Közlekedés	5	10	—5	5	7	—2	—3
Belkereskedelem	9	13	—4	8	11	—3	—1
Oktatásügy				2	16	—14	14
Egészségügy				2	6	—4	4

Forrás: [8], 2. melléklet, 1. és 5. táblázat.

vont ágazatainak inputját 3,2-szeresére kellene felértékelni az output meghatározásához.

Tegyük fel, hogy a munkaerő ráfordítás és az állóalap ráfordítás társadalmi értékelésének (árrendszer vagy egyéb úton becsült) átlagos aránya 3 : 7. Ezekkel az arányszámokkal súlyozzuk a nem áruszektor közvetett hatását figyelembe vevő output/input arányokat:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0,3 & \times & 5 & + & 0,7 & \times & 3,2 & = & 3,74 \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{A munkaerő} & & \text{A nem áruszek-} & & \text{Az állóalap} & & \text{A nem} & & \\
 \text{ráfordítás} & & \text{tornak a munkaerő} & & \text{ráfordítás} & & \text{áruszektor} & & \\
 \text{társadalmi} & & \text{alapján becsült} & & \text{társadalmi} & & \text{becsült} & & \\
 \text{értékelésének} & & \text{outputja osztva} & & \text{értékelésének} & & \text{outputja} & & \\
 \text{súlya} & & \text{a nem áruszektor} & & \text{súlya} & & \text{osztva a nem} & & \\
 & & \text{inputjával} & & & & \text{áruszektor} & & \\
 & & & & & & \text{inputjával} & & \\
 & & & & & & \text{A nem áruszektor-} & & \\
 & & & & & & \text{nak az állóalap} & & \\
 & & & & & & \text{ráfordítás alapján becsült output-} & & \\
 & & & & & & \text{ja osztva a nem áruszektor} & & \\
 & & & & & & \text{inputjával.} & &
 \end{array}$$

Az NDK-ban az oktatásügyi és az egészségügyi ágazatokra eszközölt költségvetési kiadások 1982-ben 21 914 millió márkát tettek ki. Ha a hetvenes évek tendenciáit vesszük alapul, akkor 1982-ben a 21 914 millió márka nagyságú inputnak 3,74-szeresére, kereken 82 milliárd márkára tehető az oktatásügyi és az egészségügyi ágazatok outputja. Bárhogyan válasszuk meg példánkban az egyes ráfordítási tényezők társadalmi értékelésének súlyait, a nem áruszektor outputja az input 3–4-szeresére becsülhető. Példánk ezt a nagyságrendet kívánja érzékeltetni és nem valamiféle precíz koefficiens hivatott megadni a nem áruszektor outputjának kvantifikálására. Becslésünkénél a nem áruszektor teljesítményének népgazdasági hatásait próbáltuk meg nyomon követni és ennek alapján kívántunk a nem áruszektor outputjára egy lehetséges értékelést megadni.

(Beérkezett: 1984. augusztus 15-én.)

IRODALOM

1. AGABABJAN, E. M.: *Ekonomiceszkij analiz szferü uslug*, Moszkva, 1968. *Ekonomika*.
2. AGABABJAN, E. M.: Proporcija mezsdu matyerialnüm proizvodstvom i szferej uslug v szvetye osznovno zakona socializma, *Izvesztyija Akadgymii Nauk SSSR*, Szerija ekonomiceszkaja, Moszkva, 1976/5. 55–64.
3. ÁRVAI J.: *Nemzeti termelés, nemzeti jövedelem, nemzeti vagyon*, Budapest, 1973, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. BLÜMEL, H.—KIGYÓSSY/SCHMIDT, E.—SCHILAR, H.—SCHWARZ, K.—WALTER, D.: Zur Darstellung ökonomischer Zusammenhänge zwischen den materiellen und einigen nichtmateriellen Bereichen der DDR mit Hilfe der volkswirtschaftlichen Verflechtungsbilanz, *Wirtschaftswissenschaft*, 1975, 11, 1675–1691.
5. HÁMORI B.: „Nem árujavak és szolgáltatások” a szocialista gazdaságban. *Közgazdasági Szemle*, 1980, 6. 668–683.
6. KIGYÓSSY/SCHMIDT, E.—SCHWARZ, R.: *Strukturanalyse der volkswirtschaftlichen Wechselbeziehungen zwischen materiellen und nichtmateriellen Bereichen*, Berlin, 1979 (Kézirat).
7. KIGYÓSSY/SCHMIDT, E.—SCHWARZ, R.: Analysis of indirect interrelations between material and non-material spheres of economy, *Proceedings of the Third Hungarian Conference on Input-Output Techniques*, Héviz, 3–5 November 1981, 395–403, Budapest, 1982, Statistical Publishing House.
8. KIGYÓSSY/SCHMIDT, E.—SCHWARZ, R.: *Nichtmaterielle Leistungen in Wechselbeziehung mit der materiellen Produktion*, Berlin, 1983, Akademie-Verlag.
9. NIEDUSZYŃSKI, M.: *Analiza zakladów na usługę socjalne w krajach RWPG*, Warszawa, 1975, Państwowe wydawnictwo ekonomiczne.
10. SCHMIDTNÉ KIGYÓSSY É.: Ágazati kölcsönhatások a népgazdaság anyagi és nem-anyagi szférái között egy dinamikus rendszerben, *Szigma*, 1979, 1–2, 17–30.
11. STIBALOVÁ, B.: Možnosti kvantifikace přínosu nevyrobní sféry ekonomickému rustu, *Politická ekonomie*, 1978, 11, Praha, 995–1005.

INDIRECT EVALUATION OF NON-MARKET SERVICES

The article deals with the estimation of the output of educational and health sectors within the sphere of non-market services. Starting from the interrelations between non-market services and the sphere of marketed commodities some indirect structural effects of non-market services are quantified. To this end the interdependent quadrant of the input-output table is completed by some non-market services, a new dimension is introduced to measure sectoral relations, furthermore, an indirect method of comparison is presented aimed at indicating the economy-wide effect of non-market services. On the

basis of a 7-sector input-output time series of the national economy of the GDR estimated for 1960—1980 an example for the indirect evaluation of the output of educational and health sectors is submitted. As a result of estimation the output of non-market services under study amounts to about 3—4-fold of their input.

КОСВЕННАЯ ОЦЕНКА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ НЕТОВАРНОГО СЕКТОРА

В статье рассматриваются вопросы оценки результатов отрасли здравоохранения и просвещения в сфере услуг нетоварного типа. Исходя из взаимного влияния услуг нетоварного типа и товарной сферы, даётся количественный анализ косвенного структурного влияния услуг нетоварного типа. С этой целью внутренний прямоугольник входной-выходной таблицы дополняется услугами нетоварного типа, вводится новая размерность для измерения отраслевых связей, а также демонстрируется косвенный метод сравнения народнохозяйственного влияния услуг нетоварного типа. На основании семисекторного входного-выходного приближенного временного ряда народного хозяйства ГДР на 1960—80 гг. даётся пример косвенной оценки результата деятельности отрасли здравоохранения и просвещения. В результате приближенной оценки результаты услуг нетоварного типа, включенных в исследование, в 3—4 раза больше, чем выходные данные.

Emberi erőforrás elemzése szimulációs modellezéssel¹

1. Bevezetés

Köztudott, hogy nehezen strukturálható komplex folyamatok empirikus leírása nem könnyű feladat. Még nehezebb a helyzet, ha ilyen folyamatok elemzése során a prognosztikai megközelítést is megkísérljük. Mindazonáltal, legyen szó bármilyen bonyolult rendszerről, a tervezés — a korlátokat és lehetőségeket felismerő tudatos előrelátás — igénye hatókörébe von minden olyan módszert, amely információt nyújthat a komplex folyamatok előrejelezhető változásairól.

Az erőforrás elemzés jellemzője, hogy egymással kölcsönhatásban álló sok tényező vizsgálatára vállalkozik. A társadalmi-gazdasági folyamatokkal való szoros összefüggés a relatíve könnyen kezelhető fizikai tényezők mellett olyan hatásrendszert alkot, amelyet a stratégiai tervezéssel foglalkozók általában adaptív módon szemlélnek. Ez a felfogás abban is kifejeződik, hogy az előrejelzés-tervezés outputjai egyre inkább alternatív forgatókönyvek vagy közgazdasági-matematikai modellek vagy szakértői vélemények által kialakított verbalizált modellek eredményei.

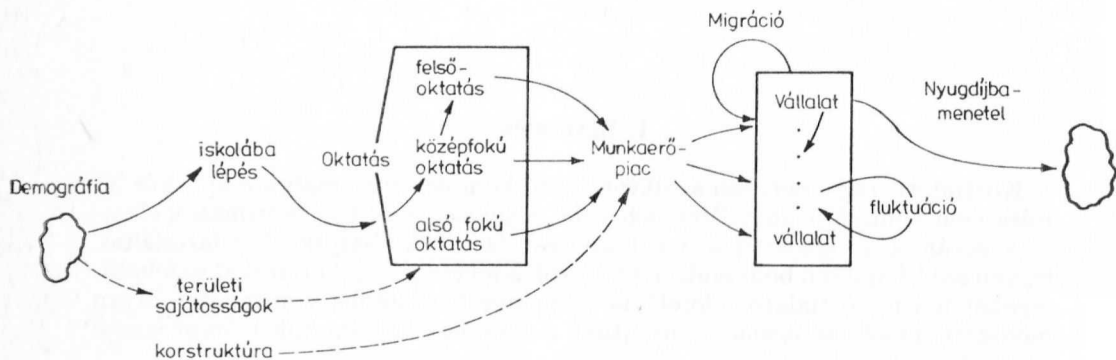
Különösebb indoklást nem igényel az az állításunk, hogy az emberi erőforrás hasznosítási folyamatában számos olyan tényező van, amelyet viszonylag egyszerű eszközökkel formalizálhatunk. Ilyennek tekinthetjük például azokat a demográfiai tényezőket,² amelyek a népesség jelenlegi nagyságát, területi megoszlását, korösszetételét, iskolázottságát a jelenben statisztikai adatokkal, illetve a jövőben prognózisok segítségével adják meg.

Hasonlóan „kemény” struktúrájának tekinthető a felnövekvő nemzedék szakmastruktúrájának kialakításában meghatározó szerepet játszó oktatási rendszer. Még ha jól strukturált folyamatnak tekinthető is a munkaerő felkészítése — noha az oktatási rendszer fejlesztésének problematikája sem írható le és szimulálható egyszerűen — annál bonyolultabb a helyzet az elsőízen a foglal-

¹ A jelen tanulmány a rendkívül széles spektrumú erőforrás-elemzéseknek elsősorban azon részével érintkezik, amely a számítógépes modellezés módszerét alkalmazza; az erőforrások hasznosítási folyamatait tervezési szempontból elemzi. E megközelítés, bár széles körben ismerik, a gyakorlatban még alig alkalmazzák. Az a tény azonban, hogy 1982-ben hazánkban az UNESCO támogatásával konferenciasorozat kezdődött (Balaton Group), amelynek célja a modellezést erőforrás elemzésre alkalmazni (Resource Management), feltehetően ösztönzően hat a magyar tervezés-tudomány fejlődésére is. Ehhez kapcsolódik az Ipari Minisztérium által koordinált kutatás az emberi erőforrás hasznosításáról. Erről adunk itt esetelemzést is bemutató áttekintést.

² A demográfiai tényezők determinisztikus hatását az oktatási, fejlesztési modellek konstrukciójára számos tanulmány meggyőzően mutatja be. Így utalhatunk Deif (1980) és Batey (1981) munkáira. Ezek a modellek inkább elméleti jelentőségűek, s csupán Deif esetében kapcsolódnak számítógépes realizáláshoz.

koztatási rendszerbe belépő munkaerő elosztása, majd fluktuációs, migrációs mozgása. A munkaerőpiac sajátos „puha” szférája a foglalkoztatási rendszernek, e piacot politikai, elsősorban foglalkoztatáspolitikai és szociálpolitikai hatások befolyásolják. E ponton jut el minden modellkonstrukció ahhoz a kritikus szakaszhoz, amikor a tényleges adatkezelés vagy transzformáció végső-



1. ábra. A munkaerőforrás faktografikus összefüggéseinek sémája

soron kvalitatív elemzést, pontosabban olyan információkat eredményez, amelyek nem határozzák meg, de mindenképpen orientálhatják a szociálpolitikát.

Valójában a faktografikus megközelítés érvényesítése sem egyszerű feladat, mivel különböző struktúrák egymásra épüléséről van szó (1. ábra). Akár a demográfiai tényezőket, akár az oktatást, vagy a vállalatokat szemléljük, egyértelmű, hogy strukturált jelenségről, illetve szervezetekről beszélhetünk.³

Ezeknek a struktúráknak a rendszerbefoglalása explicit modellnek még nem nevezhető, s a leíró megközelítést a konstrukció eme szintje nem haladja meg. Az adott szinten csupán az oksági összefüggések egyik lehetséges formáját adhatja meg a bemutatott séma. Megváltozik a helyzet, ha a rendszer lényegi funkcióit befolyásoló preferenciákat fogalmazzuk meg, illetve ha empirikusan olyan állapotjellemzők regisztrálhatók, amelyek a működés szempontjából kritikusnak tekinthetők.

Viszonylag könnyű, akár a felvázolt séma alapján is, a rendszer funkcióit befolyásoló állapotjellemzőket találni. Ilyenek például: a demográfiai hullámmás, az iskolarendszerben oktatott szakmák és a foglalkoztatási szerkezet közötti strukturális eltérés. Mindezek egyidőben hoznak létre hiányt és felesleget a munkaerőpiacon. Ez az ismert állapot globálisan kezelhető, sőt a valóságos piaci automatizmusok valamiféle kvázi egyensúlyt létre is hoznak. Problémátikus ugyanakkor, ha egy-egy ágazat, régió vagy vállalat preferálása a feladat. (Kimutatható, hogy a társadalmi törekvések egyértelműen erre irányulnak.)

³ A modellkonstrukció számára, a szélesebb értelemben felfogott erőforráshasznosítási folyamat strukturális összefüggéseinek leírásához, jelentős szemléletformáló segítséget nyújtottak Marchetti (1980), Hafkamp és Nijkamp (1981) és Mulligan (1983) munkái.

2. A modellkonstrukció általános orientációja

A probléma nem csupán a konkrétizálás oldaláról modellezéstechnikai kérdésként fogalmazható meg. A preferenciák megállapításának társadalom- és gazdaságpolitikai meghatározottságával összefüggő jóval súlyosabb kérdés az, hogy mennyiben és milyen eszközökkel preferálható egy-egy terület, gazdasági szervezet.

E ponton tűnik az egyik legtöbb információt nyújtó megoldásnak a szimuláció, amely a modellkonstrukció befejeztével alkalmazható operatív, kísérleti módszer. A szimuláció ebben a felfogásban — elsősorban számítógépes elemzési módszer. Ez a módszer különböző struktúrák relevanciáját a forrás-felhasználás íve mentén differenciáltn vizsgálja, és így lehetővé teszi a fejlesztési alternatívák politikai mérlegelését lokális és centrális szempontból. Ugyanakkor a szimuláció, mint rendkívül gyors struktúramódosítási lehetőség, a komplex kiértékelés jóvoltából a fenti problémák megoldásához szintén hozzájárulhat. Egyfelől, a modell-technika oldaláról, a flexibilis struktúra kialakítását és kezelését teszi lehetővé, másfelől a preferenciák módosításával lehetőséget nyújt alternatív elemzésekre.

Explicite formalizált vagy impliciten elfogadott modell nélkül szimulálni nem lehet. A számítógépes szimuláció lényeges előfeltétele, hogy a modell állapotának leírására változókat vezessünk be, s a változók közötti kapcsolatokhoz függvényeket rendeljünk. Ez nem jelent — mint ahogy ezt a következőkben részletesen is bemutatjuk — és az adott modell jellegéből adódóan nem is jelenthet teljesértékű matematikai-logikai modellt.

Visszatérve az erőforráselemzéshez, a tényleges modellkonstrukciót a következő hipotézis alapján kezdtük el:

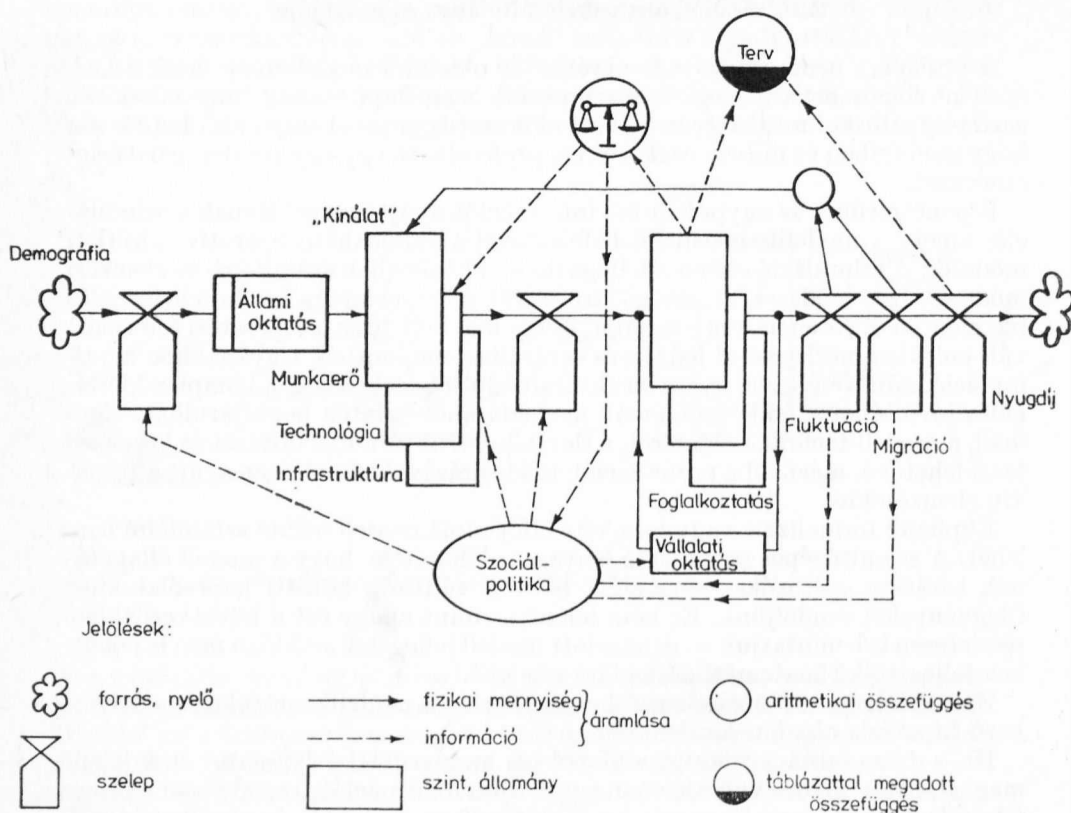
Ha a társadalmi-gazdasági erőforrások hasznosítási folyamatairól a jelent meghaladva a jövőre vonatkozóan egyre több információval rendelkezünk, úgy feltételezhető, hogy a tervezés „mozgástere” növekedhet, és az alternatívák kidolgozásával a stratégiai tervezés a valóságformálás hatékonyabb eszközévé válhat. Ehhez a fejlődéshez a szimuláció azzal járulhat hozzá, hogy az adott rendszerről rendelkezésre álló információkat eltérő struktúrák és dinamikák figyelembevételével dolgozza fel.

A munkaerőforrás elemzéséhez pedig a következő — részben a preferenciálást is érintő — hipotézis megfogalmazásával kezdtünk:

Kielégíthető-e egy vállalat hosszabb távon megfogalmazott munkaerőigénye (mennyiségi és minőségi komponenseit együttesen szemlélve) a területi munkaerőforrásoknak, alapvetően a szociálpolitikai tervezés és intézkedés által végrehajtott intenzifikálásával.

A hipotéziseket a szimuláció nem döntheti el, de a bemutatandó DMDS (Dynamics of Manpower Demand and Supply) modell hozzájárulhat az élőmunka hasznosítási folyamatainak szimulációs elemzéséhez. Mivel távlati célunk az, hogy az élőmunka, a holtmunka és a technológia közötti kölcsönhatást is vizsgáljuk, ezért a modell a „materializált technológiát” hasonló mechanizmusként kívánja kezelni mint az élőmunkát, s elemezni kívánja a helyettesítés lehetőségeit.

Munkánk konkrét célja tehát az volt, hogy a népesség, az oktatás, a foglalkoztatás és a szociálpolitika dinamikus összefüggéseit leíró modellel a stratégiai tervezés információbázisát kiegészítsük, újabb dimenziókkal gazdagítsuk. Arra törekedtünk, hogy a DMDS modell integrálható legyen egy globális



2. ábra

hosszútávú tervezési modellbe, azonban a feladat konkretizálása során csupán az emberi erőforrás hasznosítási folyamatainak leírására vállalkoztunk. Az élő-munka alrendszer szoros összefüggésben van a nyersanyag-hasznosítás alrendszerével, s a kettő közötti dinamikus kölcsönhatást fejezi ki az alkalmazott technika/technológia később sorra kerülő prognosztikai elemzése.

A DMDS modellben a demográfiai helyzetnek és prognózisnak, az oktatási rendszer dinamikájának, valamint a foglalkoztatás szerkezetének térbeni és időbeli kapcsolatait kívántuk elemezni. Kísérletet tettünk arra, hogy 2000-ig az energetika és az ipar felé irányuló potenciális munkaerőkínálat függvényeit, s a szociálpolitika stratégiai elemeit kvalitatíve leírjuk. A modell folyamatokat ábrázol, leírja a „kínálat” és állomány struktúráját, és összehasonlítja ezt a tervekben rögzített „szükséglet”-tel. Lehetővé teszi a differenciált hasznosítási stratégia, sőt távolatlag a munkaerő-hasznosítási folyamat optimalizálását.

A hosszabb távú elemzés keretei között a számítógépes szimuláció eljárását alkalmaztuk. A kutatás első szakaszában kialakítottuk az élőmunka hasznosítási folyamatának elemző modelljét. A blokkvázlatokon alkalmazott jelölések általános értelmezését és a DMDS modell főbb összefüggéseit a 2. ábra mutatja be.

Célunk olyan általános elemző eljárás konstruálása volt, hogy a munkálatok következő szakaszában a típusmodellel több ágazatot lehessen szimulálni, — például: az energetika, a kohászat, és az építőanyagipar munkaerőgazdálkodását. Ezért arra törekedtünk, hogy a folyamatok együttfutását, a „keresleti” és „kínálati” állományok egymásraépülését úgy oldjuk meg, hogy a szimuláció a stratégiai tervezés számára alkalmazható eredményeket szolgáltatson.

Utalnunk kell arra, hogy ez a számítógépes szimuláció, bár feltárja a komplex kölcsönhatásokat is, elsősorban a makro folyamatokat elemzi. Olyan folyamatokat, amelyek vertikálisan tagoltak ugyan, de horizontálisan nem osztottak, annak ellenére, hogy a folyamat jellemző paramétereit térség, régió szinten aggregálják. Éppen ezért tovább kutatandó, hogyan lehet a térszerkezet figyelembevételével, a lineáris programozás alkalmazásán túl a számítógépes szimulációt is a stratégiai tervezés folyamatába illeszteni. A modellszerkesztésnek ezen a szintjén foglalkozni kell azzal a problémával, hogy a stratégiai jellegű döntések operacionalizálása során az erőforrások allokációja elengedhetetlen. Vagyis a globális szemlélet minden határon túl nem tartható fenn; szembe kell nézni azzal a ténnyel, hogy az ilyen modellezés a politika formálásához, a döntések előkészítéséhez alig nyújthat segítséget.

Más jellegű, de a struktúrák bonyolultságával összefüggő kérdés a modellezés „értelmezési tartománya”. Ezek az értelmezési keretek esetenként szinte kizárólagosan az anyagi-technikai folyamatokra korlátozódnak, a nagyobb bizonytalanságú társadalmi-emberi viszonylatokat is csupán az elsődleges fizikai paraméterek mentén (népesség létszáma, korösszetétele, átlagéletkora stb.) kísérlik meg kezelni.

3. A munkaerő hasznosítási folyamatának matematikai formalizálása

Az általános modell-struktúra részletes formalizációjának lényege az volt, hogy bevezettünk létszámfüggvényeket — ezeknek dimenziója értelemszerűen emberfő —, továbbá valószínűségi változókat. Ez utóbbiak a szimuláció, a stratégiai tervezés alternatíváinak értelmezése során változhatnak. Viszonylag részletesen, kvázi-lineárisan felépíthető a munkaerő-kínálati és -keresleti struktúra. A kettő kapcsolata — a fluktuációs és migrációs munkaerőáramlás miatt — a linearitást hosszabb távon szükségszerűen felbontja. A kereslet — kínálat mérlegének „kilengése” esetén bizonyos, elsősorban stratégiai elemektől függő, döntések születnek, melyek egyes valószínűségi változók értékeinek diszkrét változásában jelentkeznek.

A függelékben definiált függvények és valószínűségi változók segítségével felépítettük először a „kínálati”, majd a „keresleti” oldalt, s végül a szimuláció menetéhez szükséges beavatkozó (szabályozó) függvényeket.

Az alkalmazott jelölések a következőképpen értelmezhetők:

- nagybetűvel jelöljük a létszám-függvényeket, kisbetűvel a valószínűségi változókat,
- a bemeneti függvények I betűvel, a kimeneti függvények O betűvel kezdődnek,
- a kínálati állományt felépítő függvények S betűvel, a keresletiek D betűvel kezdődnek,

— a PE-vel kezdődő függvények az általános iskoláztatásra, az SE-vel kezdődőek a gimnáziumi iskoláztatásra, a TE-vel kezdődőek a középfokú szakképzésre vonatkoznak,

— t az időindex (abszolút), k a pótindex (relatív), s az iskolaév indexe.

— i a szakmaindex, j a pótindex (szakma és foglalkozás-váltás)

— m — ágazati, területi szektorális index.

1. Kínálati oldal formalizálása során kialakíthatók az $SPE(T, i, m)$ $SSE(T, i, m)$ és az $STE(T, i, m)$ függvények.

$SPE(T, i, m)$: szakképzetlenül el akar helyezkedni az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

$SSE(T, i, m)$: gimnáziumi végzettséggel el akar helyezkedni az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

$STE(T, i, m)$: szakképzettséggel el akar helyezkedni az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

Első lépésként az általános iskolába lépők számát leíró függvényt kell meghatároznunk:

$$IPE(T) = \sum_{k=6}^{\infty} epe(k) \cdot P(T - k), \quad (1)$$

ahol

$IPE(T)$: az általános iskolába lépők száma T évben,

$epe(k)$: k évesen általános iskolába lépés valószínűsége.

Ez a jelenlegi gyakorlatot figyelembe véve a 6 éves korosztály és ennek iskolába lépési valószínűségének szorzatösszegével adható meg.

Hasonló összefüggésként írható le az általános iskolából kilépők száma:

$$IPE(T) = \sum_{k=8}^{\infty} spe(k) \cdot IPE(T - k), \quad (2)$$

ahol

$spe(k)$: k év alatt az általános iskola elvégzésének valószínűsége.

A kilépők a szakképzetlen foglalkoztatás, a középfokú szakképzés és a gimnáziumi képzés irányában összegező kifejezéssel is megadhatók:

$$OPE(T) = \sum_i \sum_m SDE(T, i, m) + \sum_i ITE(T, i) + ISE(T), \quad (3)$$

ahol

$OPE(T)$: az általános iskolából kilépők száma T évben.

$SDE(T, i, m)$: T évben általános iskolát végzett és szakképzetlenül munkábaállók száma.

$ITE(T, i)$: az i -edik szakma szakképzésébe lépők száma T évben.

$ISE(T)$: gimnáziumba lépők száma T évben.

$SDE(T, i, m)$ a következő összefüggéssel adható meg:

$$SDE(T, i, m) = ede(T, i, m) \cdot OPE(T) \quad (3.1)$$

ahol

$ede(T, i, m)$: T évben az általános iskolából való kilépés és szakképzetlenül munkába lépés valószínűsége.

A középfokú képzésbe történő belépést két további függvény írja le, az egyik a szakképzésre, a másik a gimnáziumba lépésre vonatkozik:

$$\text{ITE}(T, i) = \text{ete}(T, i) \cdot \text{OPE}(T) \quad \forall i \quad (4)$$

$$\text{ISE}(T) = \text{ese}(T) \cdot \text{OPE}(T), \quad (5)$$

ahol

$\text{ete}(T, i)$: T évben i -edik szakképzésbe lépés valószínűsége

$\text{ese}(T)$: T évben gimnáziumba lépés valószínűsége.

A kimeneti függvények a képzés időtartamát figyelembe véve:

$$\text{OTE}(T, i) = \sum_{k=3}^{\infty} \text{ste}(k, i) \cdot \text{ITE}(T - k, i) \quad \forall i, \quad (6)$$

ahol

$\text{OTE}(T, i)$: az i -edik szakma szakképzéséből kilépők száma T évben.

$\text{ste}(k, i)$: az i -edik szakképzés k év alatti sikeres elvégzésének valószínűsége.

A szakképzés esetében 3 éves képzési időt számolva, s értelmezve a szakmastruktúrát (i), a gimnázium esetében

$$\text{OSE}(T) = \sum_{k=4}^{\infty} \text{sse}(k) \cdot \text{ISE}(T - k), \quad (7)$$

ahol

$\text{OSE}(T)$: gimnáziumból kilépők száma T évben.

$\text{sse}(k)$: a gimnázium k év alatti sikeres elvégzésének valószínűsége.

A szakképzetlen munkaerőkínálat blokkja viszonylag több forrásból is táplálkozik, a (3.1-ben) már szerepelt SDE-t is magában foglaló SPE függvényt a következő kifejezéssel adhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \text{SPE}(T, i, m) = & \sum_i \sum_m \text{SDE}(T, i, m) + \sum_{k=1}^n \text{fse}(k) \cdot \text{ISE}(T - k) + \\ & + \sum_{k=1}^3 \text{fte}(i, k) \cdot \text{ITE}(T - k, i), \end{aligned} \quad (8)$$

ahol

$\text{SPE}(T, i, m)$: szakképzetlenül el akar helyezkedni az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

$\text{fse}(k)$: lemorzsolódás valószínűsége a gimnázium k -adik évében.

$\text{fte}(i, k)$: lemorzsolódás valószínűsége az i -edik szakképzés k -adik évében.

Vagyis e blokkba kerülnek az általános iskolát követően szakképzettség nélkül elhelyezkedők, a középfokú képzésből lemorzsolódók és azok is akik szakképzettséggel nem rendelkeznek és foglalkozásukat elhagyják.

A fenti kifejezéshez a valószínűségi változókra vonatkozó két összefüggést is meg kell adnunk:

$$\sum_{k=1}^n \text{fse}(k) + \sum_{k=4}^{\infty} \text{sse}(k) = 1 \quad (9)$$

$$\sum_{k=1}^n \text{fte}(i, k) + \sum_{k=3}^{\infty} \text{ste}(i, k) = 1. \quad (10)$$

A továbbiakban a kvalifikált munkaerő kínálatot leíró függvényt ismertetjük. A szakmasztruktúrát tükröző $STE(T, i, m)$ felépülése a következő:

$$STE(T, i, m) = ewte(T, i, m) \cdot OTE(T, i) + SMTE(T, i, m) + FTE(T, i, m) \quad \forall i, \forall m, \quad (11)$$

ahol

$ewte(T, i, m)$: a T évben szakképzettséggel munkába lépés valószínűsége.

$SMTE(T, i, m)$: szakképzettséggel az i -edik szakma m -edik szektorába áramlás migrációval (állományba).

A szakképzésből kilépők és munkavállalók mellett a vállalati-üzemi oktatásban kiképzettek és a szakképzettséggel migráció következtében megjelentek alkotják ezt a blokkot.

Ide tartozó segédösszefüggés:

$$\sum_i \sum_m ewte(T, i, m) \leq 1 \quad \forall T. \quad (12)$$

A részleges hiányt az adja, hogy a felsőfokú továbbtanulás miatt a középfokú szakképzettséggel munkába állók száma nem egyezik a középfokú szakképzés teljes outputjával.

2. A kereslet oldalon három domináns függvény van: a $DPE(T, i, m)$, a $DSE(T, i, m)$ és a $DTE(T, i, m)$.

Leírásukhoz először értelmeznünk kell a migrációs összefüggéseket:

$$MPE(T, i, m) = mpe(T, i, m) \cdot EPE(T, i, m), \quad (13)$$

ahol

$MPE(T, i, m)$: az i -edik szakma m -edik szektorának elhagyása T évben munkahelyváltás miatt.

$mpe(T, i, m)$: szakképzetlen kiáramlás valószínűsége az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

$$MSE(T, i, m) = mse(T, i, m) \cdot ESE(T, i, m), \quad (14)$$

ahol

$MSE(T, i, m)$: az i -edik szakma m -edik szektorának elhagyása T évben munkahelyváltás miatt.

$mse(T, i, m)$: gimnáziumi végzettségű kiáramlás valószínűsége az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

$$MTE(T, i, m) = mte(T, i, m) \cdot ETE(T, i, m), \quad (15)$$

ahol

$MTE(T, i, m)$: az i -edik szakma m -edik szektorának elhagyása T évben munkahelyváltás miatt.

$mte(T, i, m)$: szakképzett kiáramlás valószínűsége az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

A kereslet változásában, szabályozásában jelentős szerepe van a vállalati-üzemi oktatás stabilizáló hatásának.

A vállalati oktatás rendszerét a következő két függvény írja le:

$$FSE(T, i, m) = fse(T, i, m) \cdot EPE(T, i, m) \quad (16)$$

$$FTE(T, i, m) = fte(T, i, m) \cdot EPE(T, i, m), \quad (17)$$

ahol

$FSE(T, i, m)$: vállalati oktatásban részt vevők száma.
 $FTE(T, i, m)$: az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

$EPE(T, i, m)$: szakképzetlenül az i -edik szakma m -edik szektorában dolgozók száma T évben.

$fse(T, i, m)$: a gimnáziumi, ill. a szakképzés valószínűsége
 $fte(T, i, m)$: vállalati keretben az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

Vagyis az egy adott szakmában dolgozók száma függ az előző évi állománytól, az aktuális évben belépőktől, a vállalati oktatásból az $i - 1$ -ről i -re, ill. az i -ről $i + 1$ -re átképzettek számától, valamint a fluktuáció és migráció következtében eltávozottak és végül a nyugdíjba mentek számától.

Erre vonatkozóan értelmezzük a következő három függvényt:

$$a) \quad EPE(T, i, m) = EPE(T - 1, i, m) + IWPE(T, i, m) - FSE(T, i, m) - FTE(T, i, m) - MPE(T, i, m) - RPE(T, i, m), \quad (18)$$

ahol

$IWPE(T, i, m)$: szakképzetlenül az i -edik szakma m -edik szektorában ténylegesen alkalmazottak száma T évben.

$RPE(T, i, m)$: nyugdíjazás az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

$$b) \quad ESE(T, i, m) = ESE(T - 1, i, m) + IWSE(T, i, m) - MSE(T, i, m) - RSE(T, i, m), \quad (19)$$

ahol

$ESE(T, i, m)$: gimnáziumi végzettséggel az i -edik szakma m -edik szektorában dolgozók száma T évben.

$IWSE(T, i, m)$: gimnáziumi végzettséggel az i -edik szakma m -edik szektorába ténylegesen felvettek száma T évben.

$RSE(T, i, m)$: nyugdíjazás az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

$$c) \quad ETE(T, i, m) = ETE(T - 1, i, m) + IWTE(T, i, m) - MTE(T, i, m) - RTE(T, i, m), \quad (20)$$

ahol

$ETE(T, i, m)$: szakképzettséggel az i -edik szakma m -edik szektorában dolgozók száma T évben.

$RTE(T, i, m)$: nyugdíjazás az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

Ezeknek ismeretében kialakítható már a kereslet függvényhármasa.

$$a) \quad DPE(T, i, m) = \begin{cases} PPE(T, i, m) - EPE(T, i, m), & \text{ha ez a különbség pozitív,} \\ 0, & \text{ha } PPE(T, i, m) - EPE(T, i, m) \leq 0, \end{cases} \quad (21)$$

ahol

$DPE(T, i, m)$: szakképzetlen munkaerő igény(kereslet) az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

$PPE(T, i, m)$: szakképzetlenül foglalkoztatottak tervezett száma az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.

$$b) \quad DSE(T, i, m) = \begin{cases} PSE(T, i, m) - ESE(T, i, m), & \text{ha ez a különbség pozitív,} \\ 0, & \text{ha } PSE(T, i, m) - ESE(T, i, m) \leq 0, \end{cases} \quad (22)$$

ahol

$DSE(T, i, m)$: munkaerő igény(kereslet) gimnáziumi végzettséggel az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.
 $PSE(T, i, m)$: az i -edik szakma m -edik szektorában T évben gimnáziumi végzettséggel foglalkoztatottak tervezett száma.

$$c) \quad DTE(T, i, m) = \begin{cases} PTE(T, i, m) - ETE(T, i, m), & \text{ha ez a különbség pozitív,} \\ 0, & \text{ha } PTE(T, i, m) - ETE(T, i, m) \leq 0, \end{cases} \quad (23)$$

ahol

$DTE(T, i, m)$: szakképzett munkaerő igény(kereslet) az i -edik szakma m -edik szektorában T évben.
 $PTE(T, i, m)$: az i -edik szakma m -edik szektorában T évben foglalkoztatottak tervezett száma.

Beavatkozó függvények

Ezeket a függvényeket csak a PE szintre mutatjuk be, hasonlóan értelmezhetők természetesen SE és TE szintekre is:

Ha $SPE(T, i, m) = DPE(T, i, m)$, optimum áll fenn, és $IWPE(T, i, m) = SPE(T, i, m)$. (24)

Ha $\maxpe(T, i, m) - SPE(T, i, m) - DPE(T, i, m) > 0$, kvázi-optimum van és $IWPE(T, i, m) = SPE(T, i, m)$, (25)

ahol $\maxpe(T, i, m)$: az a munkaerő-túlkínálati érték, ameddig a felesleg még elhelyezhető.

Ha $SPE(T, i, m) - DPE(T, i, m) > \maxpe(T, i, m)$, elfogadhatatlan a munkaerő-túlkínálat, így $IWPE(T, i, m) = \maxpe(T, i, m)$. (26)

Ha $\minpe(T, i, m) - DPE(T, i, m) < 0$, azaz elfogadható munkaerőhiány van, akkor $IWPE(T, i, m) = SPE(T, i, m)$ és $\xi(T, i, m)$ növekszik. (27)

Itt

$\minpe(T, i, m)$: az a munkaerő-hiány érték, mely még nem készletet kompenzáló technológiai fejlesztés bevezetésére.

$\xi(T, i, m)$: a feszültség függvény kritikus értéke, amelynél a szociálpolitika által determinált valószínűségi változók inkrementálódnak.

Ha $0 > \minpe(T, i, m) - SPE(T, i, m) - DPE(T, i, m)$ azaz elfogadhatatlan a munkaerőhiány, akkor belép az intenzív technológiai fejlesztés, vagyis a $IWPE(T, i, m) = SPE(T, i, m) + TPE(T, i, m)$ függvény értéke nő, $\xi(T, i, m)$ is növekszik. (28)

Itt

$TPE(T, i, m)$: a szakképzetlen munkaerőt helyettesítő, kiváltó technológia („fő”).

És elérve a kritikus értéket, ha $\xi(T, i, m)$, $\xi_{\max}(T, i, m)$ akkor a *-gal jelölt valószínűségi változók értékei inkrementálódnak, módosítva a modell valószínűségi változóinak jelentős körét, új feltételeket megfogalmazva a rendszerben.

A bemutatott modellel az MTA IBM 3031-es számítógépe segítségével 1982 óta végeztünk szimulációt, az oktatás komplex tervezésének korszerűsítésére irányuló OKKFT program keretei között. A kialakított programanyag forrásnyelvvel FORTRAN IV., jellemző sajátossága, hogy maximálisan kétezer függvényt képes processzorként rendszerbe szervezni, illetve szimulálni.⁴

4. A szimuláció eredményeiről

A DMDS modell alapján végzett elemzés arról győzött meg, hogy a területi orientáció, mint megközelítési mód nem nevezhető irreálisnak. Az extenzív tartalékok kimerülésével világszerte a területi adottságok válnak meghatározókká mindennemű fejlesztés esetében. Különösen így van ez a nehéziparban s kivált a bányászatban, ahol igen kedvezőtlenek a munkakörülmények.

A komáromi körzet egy vállalatára vonatkozó szimulációs elemzés abból a helyzetből indult ki, hogy a már közel egy évtizede erősödő és jelentőssé váló létszámhiány okait a következő tényezőkkel hozhatjuk kapcsolatba:

1. A vonzáskörzet településeinek népessége a legutóbbi 20 évben növekedett ugyan, de az ipari aktív keresők száma az utóbbi tíz évben jelentősen csökkent, s e tendencia megváltozására nem számíthatunk.

2. Az ifjúsági munkaerőforrás most még kedvező strukturális és mennyiségi bővülése a 90-es évek elejétől jelentősen csökkenni fog (mintegy 20–30%-kal). Vagyis e területen is olyan szűkülő munkaerőforrással kell gazdálkodni, amelynek jelenlegi strukturális összetétele sem nevezhető optimálisnak.

3. A demográfiai helyzet tíz éven belül megromlik, szinte minden állománycsoportban a kínálat csökkenése regisztrálható.

4. Az első ízben munkát vállalók számának csökkenése és a létszámtervekben jelzett állománynövekedés — betanított munkás (1985–86), bányászati szakmákban dolgozók (1986–88), középfokú végzettségűek (1988–89), felsőfokú végzettségűek (1989–91) — olyan időbeli egybeesés, amely jelentős létszám-feszültséget okoz.

Modellünkben a munkaerőpiac mozgását is megyei szinten értelmeztük, s az ÁBMH rövidtávú ágazati munkaerő prognózisait használtuk fel. A szimulációs időtartam szempontjából — mivel ez esetünkben közel 20 év volt — a munkaerőpiacra vonatkozó előrejelzés rendkívül rövidnek bizonyult (0,5–1 év). Feltételezésünk szerint a bányászat preferált helyzete a jövőben sem változhat meg, azonban e tényező kedvezőbb megváltoztatását nem szimuláltuk. Vagyis a munkaerő ágazati mozgásának arányait közel azonosnak tekintettük a szimuláció teljes tartományában.

⁴ A kidolgozott programcsomag a már sokszor kipróbált időszelletes („step by step”) digitális folyamatszimuláció módszerével dolgozik. A program kidolgozásakor és felhasználásakor különös gondot fordítottunk az egyszerű input-output adatkezelésre, az eredmény áttekinthető megjelenítésére, hogy a számítástechnikában járatlan tervezők is használhassák a rendszert. Egy-egy modellszimuláció végrehajtásának gépi ideje 2–3 perc volt. Ez a tervező számára lehetővé teszi, hogy az előkészített modellen, közvetlenül a gép mellett interaktív módon elemezheti a stratégiai és taktikai variációk hatását, s a prognosztizált folyamat jellemzőit figyelembe véve döntéseit jól előkészítheti.

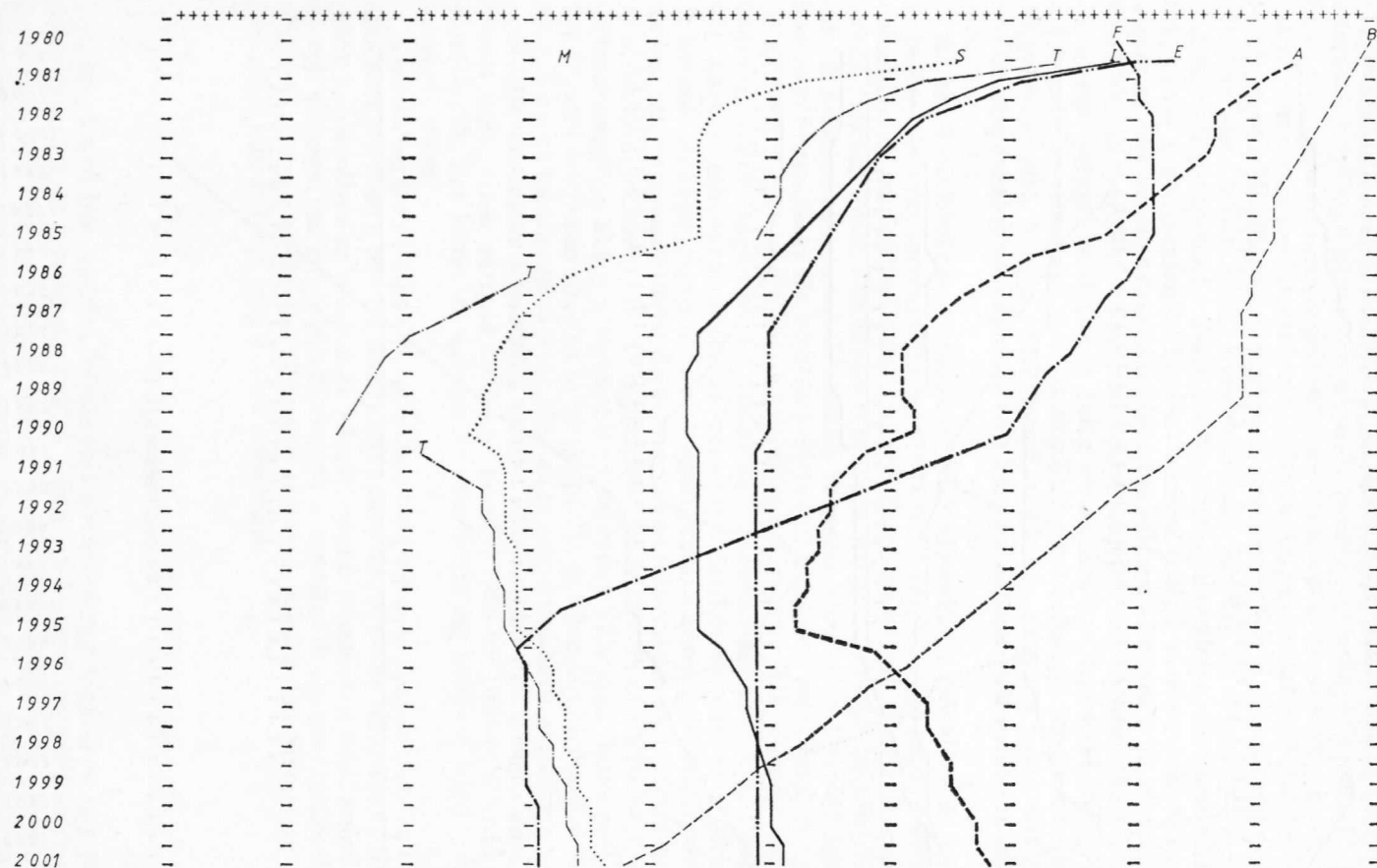
A DMDS modell szimulációja során kapott eredmények közül elsősorban azokat az adatokat célszerű elemezni, melyek a létszám változásával függenek össze. A tendenciák megállapításakor figyelembe kell venni, hogy a modellt a megadott paraméterekkel (forrásadatok, migráció, fluktuáció) működtettük, s ezeken az adatokon a modellből kapott függvények verifikálása érdekében sem változtattunk. Így minden számszerűsítés és numerikus lista ellenére az eredményeket *kvalitatív* értelemben célszerű felhasználni, s a következtetések számára megfogalmazni.

Ha a tervadatok és a szimulált létszámváltozás adatainak összevetésére vállalkozunk, úgy a napjainktól 2000-ig terjedő időtáv három nagyobb szakaszra bontható. Az első szakasz, amely közvetlenül a mához kapcsolódik, a tényadatok és a tervadatok szoros megfeleltetése következtében „stabilis” jelzővel illelhető. Gyors változások zajlanak le viszont a második szakaszban, mely a 80-as évek közepétől a 90-es évekig tart. Ezt követően — a hosszútávú tervezés időhorontjáig olyan jelentős változások regisztrálhatók, melyek az adott modell forrásadatainak és „stratégiájának” újragondolására késztetnek.

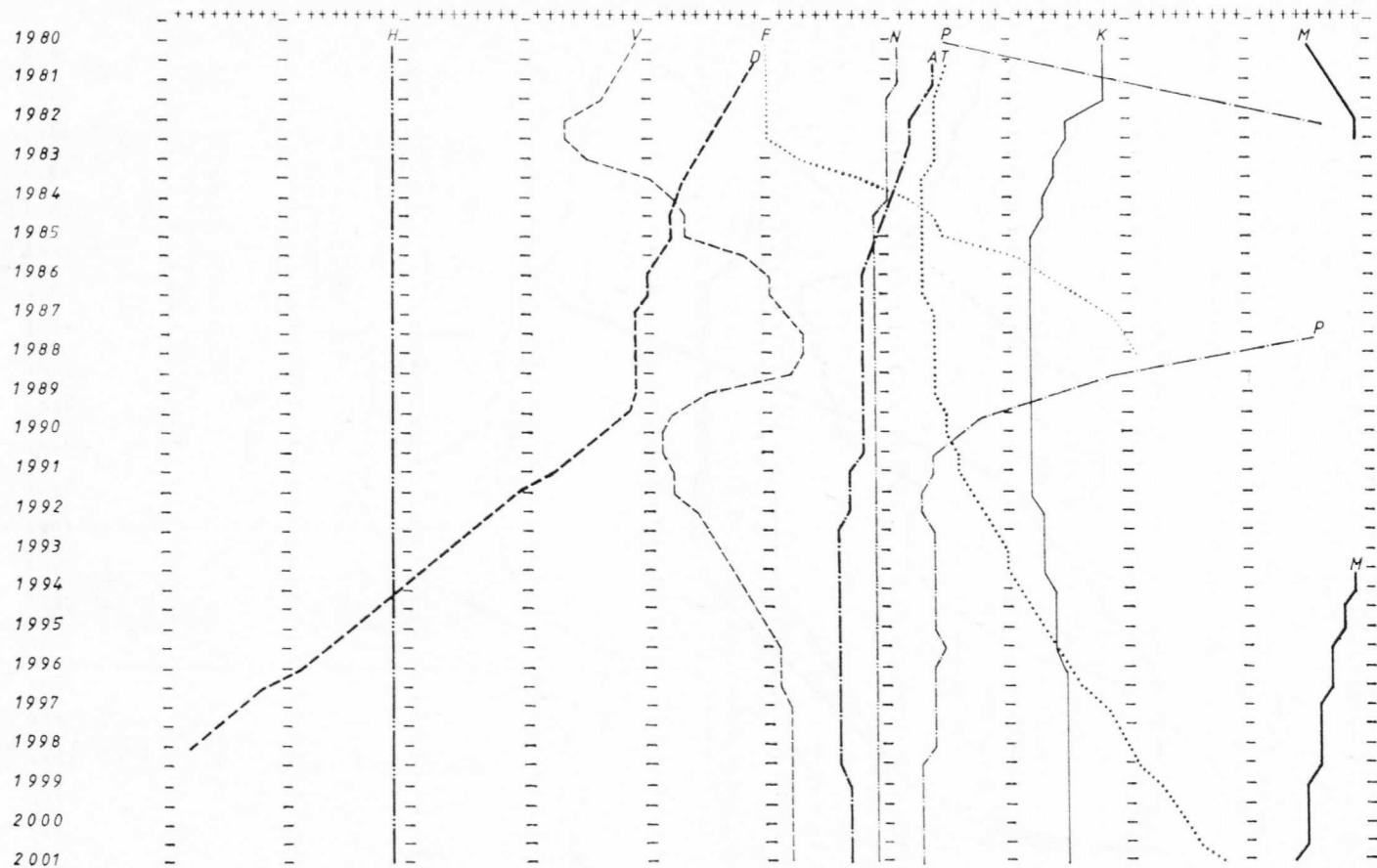
A változásokat legplasztikusabban a 3. ábrán látható görbesereg mutatja be. Itt együttesen szemlélhetők az állományok és tervek közötti eltérés görbéi a következő állományok esetében: bányász, aknász, egyéb szakmunkás, betanított munkás, segédmunkás, mérnök, egyéb középfokú végzettségű, egyéb nem fizikai állomány. Szinte minden görbén, kivéve a felsőfokú végzettségűeket, az első és második időszakaszban lassú, de monoton fogyás mutatható ki. Vagyis az állomány lefelé tér el a tervtől, s bár az eltérés mértéke változó, jelentősnek csupán a segédmunkások és az egyéb középfokúak esetében mondható. Itt a 80-as évek végére a hiány már több száz fő.

Jelmagyarázat a 3. és 4. ábrához

Értelmezés		Értékhatarók (fő)	
		alsó	felső
3. ábra			
B	Bányász	— 5000	0
A	Aknász	— 50	0
E	Egyéb szakmunkás	— 500	0
M	Bet. munkás	— 500	0
S	Segédmunkás	— 250	0
F	Mérnök	— 200	+ 50
T	Egyéb középfokú	— 250	0
I	Egyéb nem-fizikai	— 250	0
4. ábra			
K	Bányász továbbképzésből	— 500	+ 500
P	Bányász potenciális kínálat	— 500	+ 500
F	Bányász felvétel pot. kínálatból	— 500	+ 500
V	Bányászállomány éves változása	— 500	+ 500
N	Bányász nyugdíjba	— 500	+ 500
M	Bányász migrál	— 500	+ 500
A	Bányász munkaerőállományban	— 2000	+ 8000
T	Tervezett bányászállomány	— 2000	+ 8000
D	Bányász állomány eltérés a tervtől	— 2500	+ 2500
H	Bányász telepítés	0	+ 1000



3. ábra



4. ábra

A bányász állományt kivéve minden állomány változásának mértéke, illetve eltérése a tervtől jól követhető, a „szabályozási tartományban marad”. Éppen ezért a vizsgálódás lehetőségeit jól szemlélteti a 4. ábra, amelyen az adott állomány változására hatást gyakorló legfontosabb paraméterek időbeli módosulása követhető. Mindhárom elemzési szakaszban rendkívül dinamikus változik a potenciális kínálat, a tényleges munkaerő felvétel, az állomány.

A területi szempontot a felsőfokú végzettséggel rendelkezőkre nem alkalmaztuk, mivel a bányamérnöki képzés országos jellegű és elosztású. A felsőfokú végzettségűek körében drasztikus létszámcsökkenés 1990 és 1995 között mutatkozik, ami az évenkénti változatlan telepítési létszámot figyelembe véve a felsőfokú végzettséggel rendelkezők átlag életkorának változásával függ össze és a fokozatosan előregedő mérnökállomány reprodukcióját sem teszi lehetővé. Figyelemreméltó, hogy a gyors ütemű csökkenés, vagyis a hiány mértékének növekedése ennél az állománynál és a bányász állománynál mennyire párhuzamos.

Az előző ciklusoknál maradván az első időszakot a következők jellemzik. A potenciális munkaerőkínálat, az adott területen bányász képzettséggel rendelkezők valószínűsíthető száma, változatlanul növekszik. Ez részben a migrációból, fluktuációból, valamint a már régebben más területre kerültekből adódik. A létszámarányos továbbképzési rendszer viszonylag kedvező feltételek között két-háromszáz fős képzéssel, illetve új munkaerővel számol. A nyugdíjba-menetel, figyelembe véve az állomány korstruktúráját, szintén viszonylag kedvező módon csupán évi 2,5 százalékos létszámcsökkenést okoz. Ebből adódik, hogy az állomány csökkenésével azonos módon változik ez a görbe.

Jelentős mozgást, mondhatnánk lengést mutat a bányász-állomány éves változása, mely a számos tényező következtében több lokális szélső értékkel, illetve inflexióval jellemezhető. Az egyik szélső érték 82–83-ra érzékelhető, a teljes időtartományban ekkor a legkisebb az állomány változása (hozzávetőlegesen 100 fő, ami értelemszerűen az állománypótlás és állományfogyás következménye). A másik lokális szélső érték 1988-ra prognosztizálható, amikor is a változás sajátos és majdnem egyedülálló módon pótlási többletet mutat. Majd újabb lokális szélső érték várható 1990–91 között; 1989-től 1995-ig állandó fogyás mutatkozik. Ezt követően egészen az ezredfordulóig kedvező irányú változás jelezhető előre.

A pótlás-fogyás váltakozása egészében nem befolyásolja jelentősen a bányász állomány eltérését a tervtől, amely különösen az 1987–88-tól növekvő létszámgigény időszakában az előbb már jelzett módon rohamosan csökkenővé válik. Ennek ellenére, ha mégis megkíséreljük a tendenciák számszerűsítését, megállapítható, hogy a bányász állomány változása a szimulált időtartam egészében sehol sem haladja meg a húsz százalékot.

5. Következtetések

A munkaerő hasznosítási folyamatát elemezve egy tágabb és egy szűkebb vizsgálati tárgyat értelmezhetünk. A tágran értelmezett iparpolitika és szociálpolitika a tervezés társadalmi jellegének erősítése érdekében, a komplexitás jegyében makro (népgazdasági), mezo-(iparági, ágazati) és mikroszinten (a vállalatok szintjén) egyaránt nagyszámú változó együttes vizsgálatát, a preferen-

ciák és diszpreferenciák összetett mérlegelését igényli. Mindez az ilyen modell generatív leírását és felhasználását teszi szükségessé.

Megállapítható, hogy a számítógépes modellszimuláció a stratégiai tervezés hasznos eszköze. Komplex társadalmi folyamatoknak, esetünkben a munkaerő-hasznosításnak a tervezése során a szimulációs eredményeket kritikusan kell szemlélni, hiszen megbízhatóságuk — jó modell esetén is — a kiindulási feltételek, valószínűségi változók és függvények pontosságától függ, továbbá az időtáv növekedésével — valószínűségi alapon — csökken. Tapasztalataink szerint ahhoz, hogy a társadalmi tervezésben a számítógépes szimuláció egyre szélesebb körben terjedjen el, az egyszerű, játékos példákon túl a bonyolultabb problémák olyan kezelésére is törekednünk kell, hogy megfelelő eszközökkel azok is egyszerűeknek, könnyen megoldhatóknak tűnjenek a tervezők, politikusok stb. számára.

Felfogásunk szerint az erőforrások itteni szimulációs elemzése is ilyen. Ma még kétségtelenül bonyolult a probléma, azonban a jövőben az egyre korszerűbb számítástechnikai eszközök felhasználásával és újabb megközelítések kimunkálásával megszelídíthető lesz.

(Beérkezett: 1984. május 5-én.)

Függelék

A modell létszám függvényei

- | | | |
|------|------------------|--|
| 1. | $P(T)$: | a T évben született népesség száma |
| 2. | $IPE(T)$: | az általános iskolába lépők száma T évben |
| 3. | $OPE(T)$: | az általános iskolából kilépők száma T évben |
| 4. | $ISE(T)$: | gimnáziumba lépők száma T évben |
| 5. | $ITE(T, i)$: | az i -edik szakma szakképzésébe lépők száma T évben |
| 6. | $OSE(T)$: | gimnáziumból kilépők száma T évben |
| 7. | $OTE(T, i)$: | az i -edik szakma szakképzéséből kilépők száma T évben |
| 8. | $SDE(T, i, m)$: | a T évben általános iskolát végzett és szakképzetlenül munkába állók száma |
| 9. | $SPE(T, i, m)$: | szakképzetlenül el akar helyezkedni az i -edik szakma m -edik szektorában T évben |
| 10. | $SSE(T, i, m)$: | gimnáziumi végzettséggel el akar helyezkedni az i -edik szakma m -edik szektorában T évben |
| 11. | $STE(T, i, m)$: | szakképzettséggel el akar helyezkedni az i -edik szakma m -edik szektorában T évben |
| 12.* | $EPE(T, i, m)$: | szakképzetlenül |
| 13.* | $ESE(T, i, m)$: | gimnáziumi végzettséggel |
| 14.* | $ETE(T, i, m)$: | szakképzettséggel |
| 15.* | $PPE(T, i, m)$: | szakképzetlenül |
| 16.* | $PSE(T, i, m)$: | gimnáziumi végzettséggel |
| 17.* | $PTE(T, i, m)$: | szakképzettséggel |
| 18. | $DPE(T, i, m)$: | szakképzetlen |
| 19. | $DSE(T, i, m)$: | gimnáziumi végzettségű |
| 20. | $DTE(T, i, m)$: | szakképzett |
| 21.* | $FSE(T, i, m)$: | vállalati oktatásban résztvevők száma |
| | $FTE(T, i, m)$: | az i -edik szakma m -edik szektorában T évben |
| 22. | $MPE(T, i, m)$: | az i -edik szakma m -edik szektorának elhagyása T évben munka- |
| | $MSE(T, i, m)$: | helyváltás miatt |
| | $MTE(T, i, m)$: | |
| 23.* | $RPE(T, i, m)$: | nyugdíjazás az i -edik szakma m -edik szektorában T évben |
| | $RSE(T, i, m)$: | |
| | $RTE(T, i, m)$: | |

24. $IWPE(T, i, m)$: szakképzetlenül
 25. $IWSE(T, i, m)$: gimnáziumi végzettséggel
 26. $IWTE(T, i, m)$: szakképzettséggel } ténylegesen alkalmazottak száma az i -edik szakma m -edik szektorában
 27. $SMTE(T, i, m)$: szakképzettséggel az i -edik szakma m -edik szektorába áramlás migrációval
 28.* $TPE(T, i, m)$: szakképzetlen
 29.* $TSE(T, i, m)$: gimnáziumot végzett } munkaerőt helyettesítő technológia („f6’’)
 30.* $TTE(T, i, m)$: szakképzett

* A jelöléssel ellátott függvények adatoknak vagy prognosztizált adatoknak tekinthetők, a többi a modell számolt függvénye.

A modell valószínűségi változói

1. $epe(k)$: k évesen általános iskolába lépés valószínűsége
 2. $spe(k)$: az általános iskola k év alatt elvégzésének valószínűsége
 3.* $ese(T)$: T évben gimnáziumba lépés
 4.* $ete(T, i)$: T évben i -edik szakképzésbe lépés valószínűsége
 5.* $ede(T, i, m)$: T évben az általános iskolából való kilépés és szakképzetlenül munkába lépés valószínűsége
 6.* $sse(k)$: a gimnázium k év alatti sikeres elvégzésének valószínűsége
 7.* $ste(k, i)$: az i -edik szakképzés k év alatti sikeres elvégzésének valószínűsége
 8.* $ewse(T, i, m)$: T évben gimnáziummal munkába lépés valószínűsége
 9.* $ewte(T, i, m)$: T évben szakképzettséggel munkába lépés valószínűsége
 10.* $fse(k)$: a gimnázium k -adik évében a lemorzsolódás valószínűsége
 11. $fte(i, k)$: az i -edik szakképzés k -adik évében a lemorzsolódás valószínűsége
 12.* $mpe(T, i, m)$: szakképzetlenek kiáramlási valószínűsége az i -edik szakma m -edik szektorában T évben
 13.* $mse(T, i, m)$: gimnáziumi végzettségűek kiáramlási valószínűsége az i -edik szakma m -edik szektorában T évben
 14.* $mte(T, i, m)$: szakképzettek kiáramlási valószínűsége az i -edik szakma m -edik szektorában T évben
 15. $fse(T, i, m)$: gimnáziumi képzés valószínűsége vállalati keretben i, m, T szerint
 16. $fte(T, i, m)$: szakképzés valószínűsége vállalati keretben i, m, T szerint
 17. $maxpe(T, i, m)$ } az a munkaerő túlkínálati érték, ameddig a felesleg még elhelyezhető
 18. $maxse(T, i, m)$ }
 19. $maxte(T, i, m)$ }
 20. $minpe(T, i, m)$ } az a munkaerőhiány érték, mely még nem készlet kompenzáló
 21. $minse(T, i, m)$ } technológiai fejlesztés bevezetésére
 22. $mint(T, i, m)$ }
 23. $\xi(T, i, m)$: feszültség függvény, melynek értéke a technológia függvény belépéseinek számával és a munkaerő hiánnyal együtt nő
 24. $\xi_{\max}(T, i, m)$: a feszültség függvény kritikus értéke, amelynél a szociálpolitika által determinált valószínűségi változók inkrementálódnak.

* A jelöléssel ellátott valószínűségi változók a szociálpolitika által változtathatók, a többiek statisztikai változók.

IRODALOM

1. BATEX, P. W.—MADDEN, M.: Demografia economic forecasting within an activity-commodity framework: Some theoretical considerations and empirical result. *Environment and Planning*. A., 1981. Vol. 13, 1067—1083. p.
 2. BENEDEK, A.—CSÁKÁNY, A.: Discrete modelling of structural changes in education systems. In: *Discrete simulation and related fields*. North-Holland, Amsterdam, 1982. 191—197. p.
 3. COLE, S.: Towards a model for long-term education policy. In: *Computers in Education*, 1980. Vol. 4, 147—156. p.

4. DEIF, A.: A linear programming model for an optimum admissions policy in education. *Appl. Math. Modelling*. Vol. 80, No. 4, 39—44. p.
5. HAFKAMP, K.—NIJKAMP, P.: Multiobjektive modelling for economic environmental policies. *Environment and Planning*. A., 1981. Vol. 13, 7—18. p.
6. KAPOLYI L.: *A szénbányászat termelés-tervezési módszeréről* Bp., 1966. 194. p. Nehézipari Minisztérium Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézete.
7. KAPOLYI L.: *Ásványi nyersanyag- és energiapolitikánk alapjai* Bp., Kossuth K. 1981. 183. p.
8. KAPOLYI L.: *Ásványipar-gazdálkodás, matematikai módszer. Ásványi eredetű természeti erőforrások rendszer- és függvényszemlélete*. Bp., Akadémiai K. 1981. 766 p.
9. KOVÁCS J.: *A model for planning school enrolment*. Hungarian Academy of Sciences, Institute of Economics Bp., 1969. 37. p.
10. MARCHETTI, C.: Society as a learning system: Discovery, invention and innovation cycles revisited. *Technological Forecasting and Social Change*, 1980. Vol. 18, 267—282. p.
11. MASHAYEKHI, A. N.: Economic planning and growth of education in developing countries. *Simulation*, 1977. No. 4. 189—197. p.
12. MULLIGAN, G. F.: Central place populations: A microeconomic consideration. *Journal of Regional Science*, 1983. Vol. 23. 83—92. p.
13. TRUSCOTT, W. G.: Modelling the dynamic effects of multiperiod allocation decision. *Environment and Planning A*, 1981. Vol. 13, 809—818. p.
14. VAUGHTON, J. H.: Alternate scenario planning. *Technological Forecasting and Social Change*, 1977. No. 10, 169—180. p.

ANALYSIS OF HUMAN RESOURCES WITH SIMULATION MODELLING

The author analyzes resources by applying computer simulation. Over and beyond the theoretical examination of the problem he describes demographical factors of labour resources, education as well as connections between professional structure and employment in a model called DMDS (Dynamics of Manpower Demand and Supply). In the course of a case study it answered the question whether the long-run manpower demand of a concrete enterprise can be satisfied by the intensification of regional labour resources. The author presents the mathematical formalization of the model in detail, then submits results of computerized processing.

He states that computerized model simulation is a useful tool of strategic planning. With the planning of complex social processes, in our case that of manpower utilization, simulation results should be considered critically, since their reliability — even in case of a good model — depends on the accuracy of initial constraints, random variables and functions, furthermore, decreases with the time-horizon on probability basis. Experience shows that computer simulation will not permeate social planning processes unless we can make complex problems appear simple and easily solvable to planners and politicians through simple, playful problems.

АНАЛИЗ ЧЕЛОВЕЧЕСКИХ РЕСУРСОВ С ПОМОЩЬЮ СИМУЛЯЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

Автор анализирует ресурсы с применением симуляции на вычислительной машине. Кроме теоретического анализа в модели принимается во внимание взаимосвязь демографических факторов, трудовых ресурсов, образования структуры отдельных специальностей. Разработанная таким образом динамическая модель спроса и предложения трудовых ресурсов при частном анализе оказала помощь при ответе на вопрос, можно ли на долгосрочный период удовлетворить потребности отдельных предприятий в трудовых ресурсах с учётом территориальной интенсификации трудовых ресурсов. Автор подробно излагает математическую формализацию модели, а затем знакомит с машинными результатами.

Автор устанавливает, что вычислительная симуляционная модель является полезным средством стратегического планирования. При планировании сложных общественных процессов, в данном случае использования рабочей силы, нужно критически подходить к

результатам симуляционных расчётов, так как их надёжность, даже в случае хорошей модели, зависит от исходных условий, от точности вероятностных переменных и функций, и с увеличением сроков их надёжность на вероятностной основе уменьшается. Опыт показывает, что для того, чтобы в процессе общественного планирования машинная симуляция нашла как можно более широкое распространение, нужно стремиться к решению через простые игровые примеры более сложных проблем, чтобы с помощью соответствующих средств они казались специалистами по планированию, политикам и т. д. также простыми и легко разрешимыми.

Egy-kiszolgálóhelyes sorbanállási rendszer szimulációja

Vizsgálatunk célja egyetlen kiszolgálóhellyel és egy várakozó sorral rendelkező sorbanállási rendszer szimulációs modelljének kidolgozása, illetve a rendszer viselkedését szimuláló néhány kísérlet és tapasztalat bemutatása. A dolgozat nem új tudományos eredmény közlésére készült, de a vázolt rendszer könnyen áttekinthető matematikai és számítástechnikai modelljének megadásával módszertani útmutatást ad, és megkönnyíti az alkalmazást bárki számára. A modell alkalmas arra is, hogy bonyolultabb szimulációs rendszer részeként működjön.

I. A modell leírása

A szimuláció során feltételezzük, hogy

- (1) az egységek egyenként érkeznek,
- (2) a kiszolgálóhelynél nincs prioritás, tehát a rendszer azt szolgálja ki előbb, aki előbb érkezett,
- (3) az érkezési időpontok közötti időintervallumok változása ugyanazt a valószínűségeloszlást (I. eloszlás) követi a szimuláció folyamán,
- (4) az I. eloszlás az idő múlásával nem változik, azaz a rendszer stacionárius,
- (5) a kiszolgálási idők meghatározott valószínűségeloszlást (II. eloszlás) követnek,
- (6) a II. eloszlás is stacionárius, és
- (7) az érkezési időpontok közötti időintervallumok, illetve a kiszolgálási idők eloszlása egymástól független.

A rendszerre jellemző két valószínűségeloszlást (beérkezések és kiszolgálások) véletlenszám-generátorokkal állítjuk elő. Monte Carlo technikát alkalmazunk egyenletes eloszlású véletlen számok, illetve a kívánt valószínűségeloszlásra illeszkedő sztochasztikus változók előállítására, majd a generátorokat úgy kapcsoljuk a modellhez, hogy a sztochasztikus folyamatot szimulálja. A véletlenszámgenerátorok szubrutinok formájában jelennek meg, és a szimuláció folyamán attól függően változtatjuk bemenő paramétereit, hogy a modell milyen speciális eloszlást követel meg. Ennek a partikuláris szimulációs technikának az alkalmazása a szimulált rendszert viszonylag könnyen érthetővé teszi.

2. A modell változói

A szimuláció során az alábbi mennyiségeket határozzuk meg:

- (1) a teljes várakozási időt,
- (2) a teljes tétlen időt,

- (3) a várakozni kényszerülő egységek számát,
- (4) a tétlen idő előfordulásainak számát,
- (5) a generált belépési idők összegét,
- (6) a teljes kiszolgálási időt,
- (7) a rendszerben levő egységek számának gyakorisági- és valószínűségeloszlását (így az egyszerre várakozók maximális számát is)
- (8) a várakozó egységek számának gyakorisági és valószínűségeloszlását,
- (9) a várakozó egységek számának gyakorisági és valószínűségeloszlását nem üres várakozó sor esetén.

A fenti mennyiségek leírására az alábbi jelöléseket használjuk:

RAR : két egymást követő érkezés közti véletlen időintervallum,

RSR : véletlen kiszolgálási idő,

S : az egyidejűleg várakozó egységek maximális száma,

L_p : a szimulált egységek száma,

k : a rendszerben levő egységek száma,

n : a várakozó sorban levő egységek száma,

i : a rendszerbe érkezett egységek száma,

i_w : a várakozni kényszerülő egységek száma,

i_{de} : tétlen idő előfordulásainak száma,

j : index annak jelölésére, hogy a kiszolgálóhely aktív-e, vagy sem ($j = 0$, ha tétlen; $j = 1$, ha aktív),

jn : index a teljes várakozási idő korrekt értékének meghatározására,

TC : a szimuláció során elért aktuális időpont,

TP : a következő érkezés előrejelzett időpontja,

TS : egy kiszolgálás befejezési időpontja,

WT : valamely egység várakozási ideje,

ID : tétlen idő,

T_k : az az időtartam, amelyet k egység tölt a rendszerben ($k = 0, 1, \dots, S + 1$),

WA_n : az az időtartam, amelyet egyidejűleg n egység tölt várakozással,

TWT : a teljes várakozási idő,

TID : a teljes tétlen idő,

TST : a teljes kiszolgálási idő,

TAT : a szimuláció kezdetétől a legutóbb rendszerbe lépett egység belépésének időpontjáig eltelt idő,

$TATS$: a szimuláció teljes időtartama.

A felsorolt változók között néhány egyszerű kapcsolat adható meg, így:

$$TAT = \sum_i RAR$$

$$TST = \sum_i RSR$$

$$TWT = \sum_{i_w} WT$$

$$TID = \sum_{i_{de}} ID$$

$$TATS = TAT + (TS^{\text{last}} - TE),$$

ahol TS^{last} a szimuláció befejezési, TE pedig az utolsó kiszolgálandó egység rendszerbe lépésének időpontja.

3. A matematikai modell

A fenti jelölésekkel a szimulált mennyiségeket a következő összefüggések alapján számíthatjuk.

Annak valószínűsége, hogy a rendszerben k számú egység tartózkodik

$$p_k = \frac{T_k}{TATS}, \quad k = 0, 1, \dots, S + 1.$$

Annak valószínűsége, hogy n számú egység várakozik kiszolgálásra

$$q_n = \frac{WA_n}{TATS}, \quad n = 0, 1, \dots, S.$$

Annak valószínűsége, hogy w számú egység várakozik egy nem üres sorban

$$r_w = \frac{WA_n}{SUM}, \quad w = 1, 2, \dots, S$$

$$SUM = \sum_{w=1}^S WA_w.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{k=0}^{S+1} p_k = 1, \quad \sum_{n=0}^S q_n = 1, \quad \sum_{w=1}^S r_w = 1,$$

$$T_m = WA_{m-1}, \quad p_m = q_{m-1}, \quad \text{ha } m > 0.$$

A modellt jellemző többi szimulált mennyiséget az alábbiak szerint adjuk meg: a rendszerben levő egységek várható száma:

$$E(k) = \sum_{k=0}^{S+1} k \cdot p_k$$

a várakozó sor várható hossza:

$$E(n) = \sum_{n=0}^S nq_n,$$

nem üres várakozó sor várható hossza:

$$E(w|w > 0) = \sum_{w=1}^S wr_w,$$

egy érkező egység várható tartózkodási ideje a rendszerben:

$$E(T_{ws}) = \frac{TWT + TST}{L_p},$$

egy érkező egység várható várakozási ideje:

$$E(WT) = \frac{TWT}{L_p},$$

TP	$TP^{(1)}$	$TP^{(2)}$	$TP^{(3)}$		$TP^{(4)}$	$TP^{(5)}$		$TP^{(6)}$	$TP^{(7)}$		$TP^{(8)}$			$TP^{(9)}$		$TP^{(10)}$			
TS	$TS^{(1)}$		$TS^{(2)}$			$TS^{(3)}$			$TS^{(4)}$	$TS^{(5)}$	$TS^{(6)}$		$TS^{(7)}$	$TS^{(8)}$	$TS^{(9)}$	$TS^{(10)}$			
k	1	2	1	2	3	2	3	4	3	4	3	2	3	2	1	1	0	1	
n	0	1	0	1	2	1	2	3	2	3	2	1	2	1	0	0	0	0	
WA_n	WA_1		WA_1			WA_2		WA_1		WA_2	WA_3	WA_2	WA_3		WA_2	WA_1	WA_2		WA_1
ID																		ID	
T_k	T_1	T_2	T_1	T_2	T_3	T_2	T_3	T_4	T_3	T_4	T_3	T_2	T_3	T_2	T_1	T_1	T_0	T_1	

1. ábra

Szimuláció $L_p = 10$ és szabadon választott valószínűségeloszlások esetén

egy várakozó egység várható várakozási ideje:

$$E(WT|WT > 0) = \frac{TWT}{i_w},$$

a várható tétlen idő:

$$E(ID) = \frac{TID}{L_p},$$

a szimuláció teljes időtartamának az a várható hányada, amíg a kiszolgálóhely tétlen:

$$E(f_{id}) = p_0,$$

a szimuláció teljes időtartamának az a várható hányada, amíg a kiszolgálóhely foglalt:

$$E(f_{occ}) = 1 - p_0$$

4. A modell folyamatábrája

A modell folyamatábrájának leírása előtt az 1. ábrán egy szimulációs folyamat néhány jellemző mennyiségének változásait és ezek pillanatnyi értékeit tüntettük fel. Itt TP^i az i -edik egység rendszerbe lépésének, TS^i pedig kiszolgálásának befejezési időpontját jelöli.

A folyamatábra (2. ábra) leglényegesebb részei a következők:

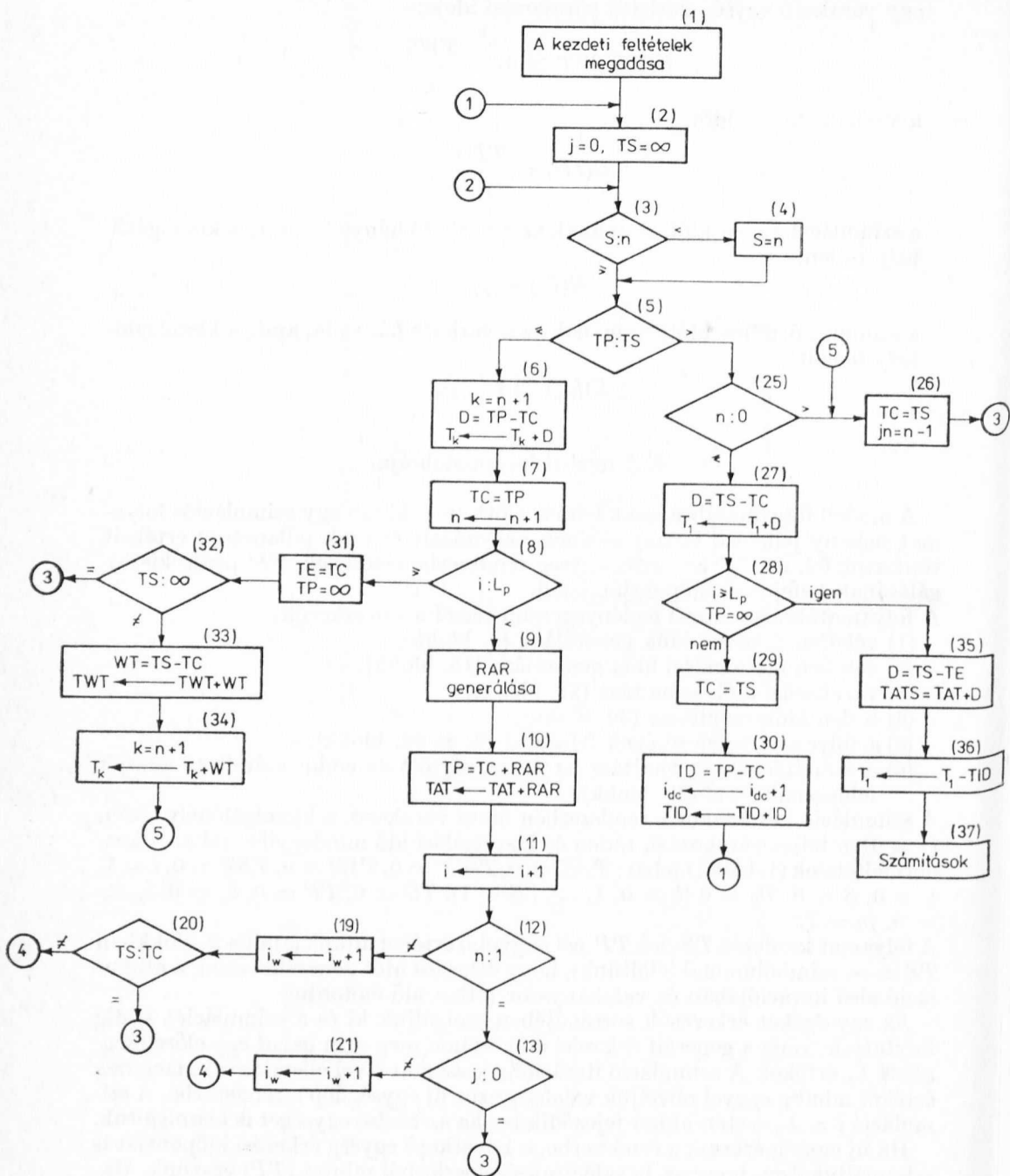
- (1) véletlen érkezési idők generálása (9. blokk),
- (2) véletlen kiszolgálási idők generálása (15. blokk),
- (3) várakozási idők számítása (22. blokk),
- (4) tétlen idők számítása (30. blokk),
- (5) a folyamat befejezésének feltételei (8. és 28. blokk),
- (6) a számítások végrehajtása az összegyűjtött és eddig számított adatok felhasználásával (37. blokk).

A szimuláció kezdetekor a rendszerben nincs várakozó, a kiszolgálóhely tétlen ($j = 0$), a teljes várakozási, tétlen és kiszolgálási idő mindegyike nulla. A kezdeti feltételek (1. blokk) tehát: $TAT = 0, TWT = 0, TID = 0, TST = 0, i = 1, n = 0, S = 0, T_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, S + 1$), $TC = 0, TP = 0, i_w = 0, i_{dc} = 0, jn = 1$.

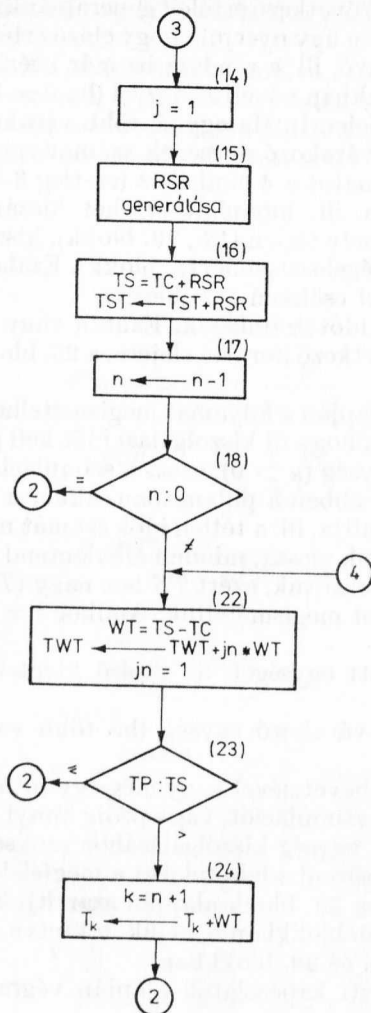
A folyamat kezdetén TS -nek TP -nél nagyobb értéket adunk (amit a 2. blokkban $TS = \infty$ szimbólummal jelöltünk), hogy érkezési időt generálhassunk a szimuláció első iterációjában és valahányszor tétlen idő előfordul.

Az egységeket érkezésük sorrendjében szolgáljuk ki és a szimulációt addig folytatjuk, amíg a generált érkezési idők száma meg nem halad egy előre megadott L_p értéket. A szimuláció iterációinak számát i -vel ellenőrizzük, melynek értékét mindig eggyel növeljük valahányszor új egység lép a rendszerbe. A szimuláció $i = L_p$ esetén akkor fejeződik be, ha az utolsó egységet is kiszolgáltuk.

Ha új egység érkezik a rendszerbe, a következő egység érkezési időpontját is szimuláljuk úgy, hogy az I. valószínűségeloszlásból mintát (TP) veszünk. Hasonlóan, ha valamely egység kiszolgálása megkezdődik, a kiszolgálás befejezési időpontját (TS) is meghatározzuk a II. valószínűségeloszlást szimuláló generátor segítségével. A folyamat bármely stádiumában a soronkövetkező esemény



2. ábra
(Folytatása a következő oldalon.)



bekövetkezését az fogja meghatározni, hogy az előbbi két sztochasztikus érték (TP , ill. TS) közül melyik a kisebb. Más szavakkal, a blokkdiagramot úgy állítottuk össze, hogy a következő érkezési időt csak akkor generáljuk, ha a teljes kiszolgálási és tétlen idők pillanatnyi értékeinek összege nagyobb vagy egyenlő mint TP aktuális értéke, azaz

$$TST + TID \geq TP.$$

Ha azonban $TST + TID < TP$, akkor kiszolgálási időt generálunk.

A szimuláció folyamán minden alkalommal kiszámítjuk a T_k értékeit (tehát azt az időt, amelyet k egység tölt a rendszerben) valahányszor új egység lép a rendszerbe, ill. megkezdődik vagy befejeződik egy kiszolgálás (6., 24., 27. és 34. blokk).

Mielőtt az érkezési idő következő értékét generálnánk TC felveszi TP aktuális értékét, TP új értékét pedig úgy nyerjük, hogy előző értékét megnöveljük RAR -rel. A várakozó sorban levő, ill. a rendszerbe már beérkezett egységek számát (n , ill. i) a 7., ill. a 11. blokkban növeljük 1-gyel (ha $i = 1$, RAR az első és második érkezés közötti időt jelenti). Ha egynél több várakozó egység van, vagy a kiszolgálóhely foglalt, a várakozó egységek számát eggyel növeljük (19. vagy 21. blokk), majd a folyamatot a 4 címkéhez (esetleg 3-hoz) vezéreljük, hogy a várakozási idők aktuális, ill. kumulált értékét kiszámíthassuk (22. blokk). Ha $n = 1$ és a kiszolgálóhely tétlen (12., 13. blokk), kiszolgálási időt (RSR) generálunk a II. valószínűségeloszlásból (15. blokk). Ezalatt a várakozó egységek aktuális száma (n) eggyel csökken (17. blokk).

Ha $n > 0$, várakozási időt számítunk. Ezután vagy közvetlenül, vagy közvetve visszatérünk a következő iteráció elejére, a 23. blokkban megadott döntés szerint.

Az 5. (döntési) blokk alapján a folyamat megismételhető, vagy a 25. blokkhoz vezérelhető. Nyilvánvaló, hogy új kiszolgálási időt kell generálnunk, ha a rendszerben van várakozó egység ($n > 0$), ezért a szimulációt a 3 címkénél folytatjuk. Ha nincs várakozás ebben a pillanatban, akkor a program az aktuális és kumulált tétlen időt számítja, ill. a tétlen idők számát növeli eggyel (30. blokk).

Ha az 1 címkéhez térünk vissza, minden alkalommal $TS < TP$, egy kivételével az összes érkezőt kiszolgáltuk, ezért TS -hez nagy (TP -nél nagyobb) értéket rendelünk és a folyamatot megismételjük. Amikor $i = L_p$, a rendszer két állapotban lehet:

- (1) az összes beérkezett egységet, az utolsó kivételével, már kiszolgáltuk, vagy
- (2) van legalább egy várakozó egység (ha több van, akkor kiszolgálás is folyik).

E két lehetőség figyelembevételével vagy még egy (utolsó) kiszolgálási időt generálunk és befejezzük a szimulációt, vagy pedig annyi kiszolgálási időt generálunk, amennyi az összes egység kiszolgálásához szükséges. A 31. és 32. blokk segítségével tudjuk biztosítani a feltételeket a megfelelő befejezéshez. A szimuláció teljes időtartamát a 35. blokk alapján számítjuk.

T_1 korrekt értékét a 36. blokkban nyerjük, tekintve, hogy a szimuláció során kétszer jelenik meg (a 6. és 30. blokkban).

Végül, a változók közti kapcsolatok alapján végrehajtjuk a számításokat (37. blokk).

5. A modell érvényességének vizsgálata

A modell érvényességét abban az esetben ellenőriztük, amikor az érkezések közti időintervallumok és a kiszolgálási idők adott várható értékekkel rendelkező exponenciális eloszlást követnek. Leggyakrabban ilyen eloszlásokkal találkozunk. A rendszerjellemzők analitikus értékei ebben az esetben könnyen hozzáférhetőek. Ismeretes ugyanis, hogy ha egy meghatározott idő alatt beérkezett egységek száma Poisson eloszlású, akkor az érkezések közötti időtartamok exponenciális eloszlást követnek. A t idő alatt bekövetkezett érkezések közötti időintervallumok eloszlásának sűrűségfüggvénye $\lambda e^{-\lambda t}$, ahol λ az átlagos érkezési ráta, és $1/\lambda$ két érkezés közti átlagos időtartam. Hasonló sűrűségfüggvénnyel jellemezhetjük a t idő alatti kiszolgálási időket is, amelyet a μ paraméterrel

adunk meg. μ az átlagos kiszolgálási rátát, $1/\mu$ pedig az egy kiszolgálásra eső átlagos kiszolgálási időt jelenti.

A korábban bevezetett jelöléseket használva, $\lambda/\mu < 1$ esetén, a megfelelő elméleti értékek a következő egyenletekkel számíthatók [14, 131–133. o.], ahol az alsó st index a megfelelő statisztikáknak a tárgyalt sorbanállási rendszer stacionárius állapotában felvett elméleti értékeire utal:

$$E(k)_{st} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$E(n)_{st} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$E(w|w > 0)_{st} = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$$

$$E(T_{ws})_{st} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$E(WT)_{st} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

1. táblázat

	$\psi = 0,22$			$\psi = 0,4$		
	Elméleti	Szimulált		Elméleti	Szimulált	
		$L_p = 200$	$L_p = 1200$		$L_p = 200$	$L_p = 1200$
$E(k)$	0,29	0,31	0,30	0,67	0,62	0,70
$E(n)$	0,06	0,06	0,07	0,27	0,23	0,30
$E(w w > 0)$	1,29	1,13	1,28	1,67	1,43	1,92
$E(T_{ws})$	2,86	2,48	2,52	2,22	1,69	2,08
$E(WT)$	0,64	0,20	0,27	0,89	0,43	0,72
$E(WT WT > 0)$	2,86	0,81	1,21	2,22	1,09	1,83
$E(f_{id})$	0,78	0,75	0,77	0,60	0,61	0,60
$E(f_{occ})$	0,22	0,25	0,23	0,40	0,39	0,40
Valószínűségek (p_n)						
$n : 1$	0,7778	0,7502	0,7680	0,6000	0,6125	0,6010
2	0,1729	0,1951	0,1790	0,2400	0,2235	0,2425
3	0,0384	0,0483	0,0418	0,0960	0,1102	0,0923
4	0,0085	0,0057	0,0082	0,0384	0,0404	0,0327
5	0,0019	0,0007	0,0025	0,0154	0,0105	0,0145
6	0,0004	—	0,0004	0,0061	0,0029	0,0067
7	0,0001	—	0,0001	0,0024	—	0,0037
8				0,0010	—	0,0008
9				0,0004	—	0,0019
10				0,0002	—	0,0018
11				0,0001	—	0,0003
12						0,0011
13						0,0007

$$E(ET|WT > 0)_{st} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$E(f_{occ})_{st} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$E(f_{id})_{st} = 1 - \frac{\lambda}{\mu},$$

és az a valószínűség, hogy k számú egység van a rendszerben:

$$P_{k,st} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad k \geq 0.$$

A λ és μ paraméterek értékeit változtatva a szimuláció útján nyert és az analitikusan számított jellemző mennyiségeket összehasonlítottuk, majd a szimulá-

2. táblázat

	$\varphi = 0,47$			$\varphi = 0,65$		
	Elméleti	Szimulált		Elméleti	Szimulált	
		$L_p = 200$	$L_p = 1200$		$L_p = 200$	$L_p = 1200$
$E(k)$	0,88	0,80	0,95	1,83	1,93	1,84
$E(n)$	0,41	0,35	0,49	1,18	1,28	1,20
$E(w w > 0)$	1,88	1,56	2,21	2,83	2,87	2,95
$E(T_{ws})$	1,25	0,96	1,24	4,35	4,56	4,22
$E(WT)$	0,58	0,33	0,56	2,81	2,94	2,64
$E(WT WT > 0)$	1,25	0,71	1,20	4,35	4,77	4,10
$E(f_{id})$	0,53	0,55	0,54	0,35	0,36	0,36
$E(f_{occ})$	0,47	0,45	0,46	0,65	0,64	0,64
Valószínűségek (p_n)						
$n : 1$	0,5333	0,5481	0,5345	0,3539	0,3550	0,3650
2	0,2489	0,2299	0,2462	0,2286	0,1982	0,2269
3	0,1161	0,1296	0,1110	0,1477	0,1286	0,1536
4	0,0542	0,0676	0,0509	0,0955	0,1073	0,0881
5	0,0253	0,0192	0,0237	0,0617	0,0574	0,0563
6	0,0118	0,0045	0,0143	0,0399	0,0535	0,0316
7	0,0055	0,0011	0,0064	0,0258	0,0560	0,0238
8	0,0026	—	0,0010	0,0166	0,0339	0,0131
9	0,0012	—	0,0033	0,0108	0,0101	0,0122
10	0,0006	—	0,0025	0,0070	—	0,0059
11	0,0003	—	0,0024	0,0045	—	0,0071
12	0,0001	—	0,0010	0,0029	—	0,0052
13	0,0001	—	0,0023	0,0019	—	0,0067
14			0,0005	0,0012	—	0,0023
15				0,0008	—	0,0008
16				0,0005	—	0,0005
17				0,0003	—	0,0009
18				0,0002	—	—
19				0,0001	—	—
20				0,0001	—	—

ciót megismételtük a véletlenszám generátorok különböző kezdeti értékei mellett. Ezután a modellt kipróbáltuk L_p eltérő (200 és 1200) értékei esetén is.

Az iterációk számának (L_p) növelésével az eredmények egyre jobban közelítik az analitikus értékeket, és a modell a paraméterek minden értékénél jó eredményeket szolgáltat. Ezek közül néhányat az 1. és 2. táblázatban közöltünk.

6. Összefoglalás

A modell felépítése során először a szimulációhoz szükséges változókat adtuk meg és a matematikai modellt definiáltuk, amelyet blokk diagram formájában állítottunk elő. A blokk diagram szubrutinként realizálva alkalmas a sorbanállási rendszert leíró sztochasztikus mennyiségek meghatározására — a szimuláció eszközeivel. A közölt részletes blokk diagram alapján a modell könnyen programozható és a program elvileg bármilyen számítógépen futtatható.

A cikkben kitértünk arra, hogy a modell jellemzői bizonyos feltételek esetén analitikus módszerekkel is meghatározhatók, azonban a szimuláció módszere sokkal általánosabb, nem csak speciális feltételek mellett alkalmazható. Ez a módszer kiterjeszthető olyan esetekre, amikor

- a szimulációval nyert és az analitikus értékeket össze akarjuk hasonlítani,
- a bemenő adatok nem illeszkednek semmiféle elméleti valószínűségeloszlásra,
- bonyolult, analitikus módszerekkel le nem írható sorbanállási modelleket kívánunk létrehozni és jellemezni.

7. Kiegészítések

Egyenletes eloszlású pseudo-véletlen számok előállítására a *Multiplikatív Kongruencia Módszert* alkalmaztuk az

$$x_{i+1} \equiv ax_i \pmod{m}$$

kongruencia felhasználásával, ahol x_i , a , m és x_{i+1} pozitív egészek és m nagyobb mint x_i , a és x_{i+1} . A fenti kongruenciából nyert sorozatot az x_i/m transzformációval a $[0,1)$ intervallumra képeztük le. Maximális periódust akkor kapunk, ha

- (1) $m = 2^a$;
- (2) az x_0 kezdő érték m -hez relatív prim;
- (3) a az m -hez relatív prim;
- (4) $a \equiv \pm 3 \pmod{8}$, azaz $a = 8t \pm 3$, ahol t pozitív egész;
- (5) a -nak $2^{a/2}$ közelében kell lennie. a ily módon választott értéke kielégíti a COVEYOU [4] — GREENBERGER [10] feltételt.

Ezen feltételek mellett elérhető maximális periódus $p = 2^{a-2}$ (HULL és DOBELL [11]).

Egyrészt a fenti megfontolások miatt, másrészt mivel a dolgozat megírásához használt programokat 24-bites szavakkal rendelkező számítógépen futtatuk, a kezdeti értékeket az alábbiak szerint választottuk:

$$m = 2^{23}$$

$$x_0 = 2^{23} - 1 \text{ (vagy bármely páratlan szám)}$$

$$a = 2^{11} + 3 + 8t \text{ (ahol } t \text{ egész és } 0 \leq t \leq 64).$$

m , x_0 és a ilyen értékei mellett a periódus hossza $p = 2^{21}$.

A fenti módszer, amelyet számos statisztikai teszttel is ellenőriztünk, mindig megbízható eredményeket szolgáltatott.

A módszer alkalmazásával létesített véletlenszám-generátorokat használva nyertünk sztochasztikus változókat *inverz transzformációs technika* [18] felhasználásával. Ha ugyanis egy statisztikai populáció $F(x)$ eloszlásfüggvénye explicit formában létezik, ezzel a technikával valószínűségi változók generálhatók a populációból, ha ismételten használjuk az $x_i = F^{-1}(u_i)$ relációt, ahol u_i egyenletes eloszlású pszeudo-véletlen számokat jelent a $[0, 1)$ intervallumon. *Exponenciális* vagy *Poisson-eloszlás* esetén

$$x_i = - \left(\frac{1}{\lambda} \right) \log_e u_i$$

vagy

$$\prod_{i=0}^x u_i \geq e^{-\lambda} > \prod_{i=0}^{x+1} u_i \quad (x > 0, \text{ egész})$$

és így u_i minden értékéhez x_i és x egyetlen értéke tartozik, melyeknek sűrűség-függvénye

$$\lambda e^{-\lambda x} \text{ vagy } \lambda^x e^{-\lambda} / x!$$

(Beérkezett: 1984. május 15-én.)

IRODALOM

1. AHRENS, J. H.—DIETER, U.: Computer methods for sampling from gamma, beta, Poisson and binomial distributions. *Computing* 12 (1974) 223—246.
2. ASHOUR, S.—JHA, R. D.: Numerical transient-state solutions of queueing systems. *Simulation* 21 No. 4., Oct. 1973.
3. BÉKÉSSY, A.: Remarks on beta distributed random numbers. *MTA Matematikai Kutató Intézet Közleményei* 9 (1964).
4. COVEYOU, R. R.: Serial correlation in the generation of pseudorandom numbers. *Journ. of Assoc. for Comp. Mach.* 7 (1960).
5. DEÁK I.: Véletlenszám generátorok Tanulmány az ELTE TTK Valószínűség-számítási Tanszék részére (1977).
6. DEÁK I.: Monte Carlo módszerek a többdimenziós térben elhelyezkedő halmazok valószínűségének meghatározására normális eloszlás esetén Kandidátusi értekezés, MTA TMB 1980.
7. DEÁK I.: Egyenletes eloszlású véletlen számok generálása MTA SZTAKI Working Paper MO/29, 1981.
8. DEÁK, I.: An economical method for random number generation and a normal generator. *Computing* 27/1981 113—121. o.
9. DIETER, U.: Pseudo-random numbers: The exact distribution of pairs. *Mathematics of Computation* 25 No. 116., Oct. 1971.
10. GREENBERGER, M.: Notes on a new pseudo-random number generator. *J. Assoc. Comp. Mach.* 8 (1961) 163—167.
11. HULL, T. E.—DOBEL, A. R.: Mixed random number generators for binary machines. *J. Assoc. for Comp. Mach.* 11 (1964) 31—40.
12. IGLEHART, D. L.: Simulating stable stochastic systems VII: Selecting the best system. *TIMS Studies in the Management Sciences* 7 (1977) 37—49., North-Holland Publ. Co.
13. IGLEHART, D. L.—SHEDLER, G. S.: *Regenerative simulation of response time in networks of queues*. Springer-Verlag, 1980.
14. KAUFMANN, A.: *Methods and models of operations research*. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1963.
15. LEHMER, D. H.: Mathematical methods in large-scale computing units. *Annals. Computer Labor.*, Harvard Univ. XXVI (1951).

16. MACLAREN, M. D.—MARSAGLIA, G.: Uniform random number generators. *Journal of the ACM* XII. No. 1. 1965.
17. NAYLOR, T. H.: *Computer simulation experiments with models of economic systems*. J. Wiley, 1971.
18. NAYLOR, T. H.—BÁLINTFY, J. L.—BURDICK, D. S.—CHU, K.: *Computer simulation techniques*. J. Wiley, 1966.
19. NÉMETH GY.: Tömegkiszolgálás szimulációja sorbakapcsolt kiszolgálóhelyek esetén *Alkalm. Mat. Lapok* 5 (1979) 103—122.
20. PANICO, J. A.: *Queueing theory*. Prentice-Hall, Inc., 1969.
21. TOCHER, K. D.: *The art of simulation*. D. Van Nostrand Co. Princeton, N. J., 1967.

SIMULATION OF A QUEUING SYSTEM WITH ONE SERVICE STATION

The model is aimed at elaborating the simulation of a queuing system with a single service station and one waiting line and, respectively, presenting some experiments simulating the behaviour of the system and connected experiences. The paper has been made not with the aim of publishing any new scientific achievement, however, with submitting a mathematical and computational model of the outlined system easy to survey methodological guidelines are provided and application is made easier.

In the course of simulation it was supposed that units arrive one by one and the "first come first served" principle is enforced. Changes in intervals between arrival times follow the same probability distribution (distribution I) in the course of simulation, service times also follow a determined probability distribution (distribution II), furthermore, both distributions are stationary in time and independent of each other.

The two probability distributions (arrivals and services) characteristic of the system are obtained by random number generators. Firstly Monte-Carlo technique is applied for the generation of random numbers with even distribution and the stochastic variables fitting to the required probability distribution, respectively, then these generators are attached to the model in such a way that the stochastic process will be simulated. Random number generators appear in the form of sub-routines and input parameters are changed in the course of simulation depending on the special distribution required by the model. The application of this particular simulation technique makes the simulated system relatively easy to understand. On the basis of the submitted detailed block diagram the model is easily programmable and the programme may be run through any kind of computer in principle.

Characteristics of the model may in case of certain constraints be determined also with analytical methods, but the method of simulation is much more general and may be applied not only with special constraints. The method may be extended also to cases when we wish to compare analytical values with those obtained by simulation, input data do not fit to any theoretical probability distribution or we wish to establish and characterize complicated queuing models that cannot be described with analytical methods.

СИМУЛЯЦИЯ МОДЕЛИ ОЧЕРЕДНОСТИ С ОДНИМ МЕСТОМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Целью модели является симуляция системы с одним местом обслуживания и одним рядом ожидания, а также изложение опыта и нескольких экспериментов симуляции поведения системы. Статья не содержит новых научных результатов, а дает с помощью изложенной в ней вычислительной и математической модели системы методологические рекомендации, облегчая тем самым их применение.

В ходе симуляции предполагается, что единицы поступают по одной, и первыми те единицы обслуживаются, которые поступили первыми. Изменения временных интервалов между моментами поступления имеют одинаковое распределение вероятности (I. распределение) в процессе симуляции, время обслуживания имеет также определенное распределение вероятности, и оба распределения являются стационарными во времени и независимы друг от друга.

Две характерных для системы распределения вероятности (поступление и обслуживание) составляются с помощью генератора случайных чисел. Для составления стохастических переменных с нужным распределением вероятности и равномерно распределённых

случайных чисел применяется метод Монте-Карло, позже эти генераторы так подключены к модели, чтобы они симулировали стохастический процесс. Генераторы случайных чисел разработаны в виде подпрограмм и в процессе симуляции их входные параметры изменяются в зависимости от того, какое распределение требуется данной моделью. Применение такой техники симуляции позволяет относительно легко понять симулируемую систему. С помощью данной подробной блокдиаграммы модель легко программируема, и программа может быть использована в принципе на любой вычислительной машине.

При наличии определённых условий свойства модели могут быть определены и аналитическими методами, однако метод симуляции более общий и может применяться не только при наличии специальных условий. Метод может быть распространён и на те случаи, когда нужно сравнить аналитические результаты с симуляционным, когда входные данные не имеют определённого теоретического распределения вероятности, а также когда нужно моделировать сложные модели очередности, которые нельзя описать с помощью аналитических методов.

Matematikai programozási feladatok optimalitási kritériumairól

I. Bevezetés

A matematikai programozás viszonylag fiatal ága a gyakorlati (és ezen belül a gazdasági) problémák megoldása során sikerrel és hatékonyan alkalmazható matematikai elméleteknek. Alapfeladatát a következő feltételes szélsőérték-feladat formájában szokták megfogalmazni:

$$(1) \quad \begin{aligned} & f(x) \rightarrow \max \\ & g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

ahol $x \in R^n$ (R^n az n -dimenziós euklideszi teret jelöli), az $f(x)$ célfüggvény és a $g_i(x)$ feltételi függvények tetszőleges számértékű függvények. Az (1) feladat leg-egyszerűbb közgazdasági interpretációja a következő: az $f(x)$ hozamfüggvény maximumát keressük az erőforrások korlátozottságát kifejező $g_i(x)$ függvények által meghatározott

$$L = \{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\}$$

lehetséges programok halmazán. (ld. pl. [3, 9. old.])

Az (1) feladat megoldása abban áll, hogy meghatározzuk az összes olyan $x_0 \in L$ lehetséges programot, amelyekre teljesül a következő feltétel:

$$(2) \quad f(x_0) \geq f(x), \quad \text{ha } x \in L.$$

A (2) feltételnek eleget tevő x_0 lehetséges programot az (1) feladat *optimális megoldásának*, *optimumpontjának* nevezzük.

Ha a (2) feltétel az x_0 lehetséges program valamely G környezetében teljesül csupán, vagyis:

$$(3) \quad f(x_0) \geq f(x), \quad \text{ha } x \in L \cap G,$$

akkor az x_0 programot az (1) feladat *lokálisan optimális megoldásának*, *lokális optimumpontjának* nevezzük.

Ha a (2), ill. (3) feltételekben $x \neq x_0$ esetén az egyenlőtlenségek szigorú formában teljesülnek, akkor az x_0 lehetséges programot az (1) feladat *szigorú optimumpontjának* nevezzük.

Az (1) feladattal kapcsolatban a legfontosabb elméleti és gyakorlati kérdés az optimális, ill. lokálisan optimális programok meghatározása, előállítás. Az e célhoz vezető úton az első jelentősebb lépés az *optimalitás szükséges feltételeinek* kidolgozása.

Differenciálható cél és feltételi függvények esetén jól ismertek az (1) feladatra vonatkozó *Kuhn-Tucker-Lagrange feltételek* (a továbbiakban, röviden, KTL-

feltételek), amelyek meglehetősen tág feltételek mellett az (1) feladat lokálisan optimális x_0 megoldására adnak szükséges feltételeket [1, 3, 8, 12]:

Léteznek olyan $t_1, \dots, t_m$ nem-negatív valós számok (ún. Lagrange-multiplikátorok), hogy

$$(4) \quad \nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^m t_i \nabla g_i(x_0)$$

és

$$(5) \quad t_i g_i(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

A $\nabla f(x)$ szimbólum az $f(x)$ függvény gradiens-vektorát jelöli, melyet kényelmi okokból sorvektornak tekintünk. Az R^n tér elemeit viszont — szokás szerint — oszlopvektornak tekintjük.

A (4)–(5) KTL-feltételeknek eleget tevő lehetséges programot a szóban forgó feladat *KTL-stacionárius pontjának* nevezzük [12, Chapter 8., Definition 5]. Annak eldöntése, hogy egy KTL-stacionárius pont optimális vagy lokálisan optimális megoldása-e a tekintett feladatnak, további vizsgálódásokat igényel. Ismeretes, hogy bizonyos program-osztályokra (pl. lineáris, konvex, pseudo-konvex feladatokra) a KTL-feltételek az optimalitásnak egyúttal elegendő feltételei is [12, Chapter 8]. Ismeretesek továbbá olyan eredmények, amelyeknél a KTL-feltételeket még további feltételekkel egészítik ki oly módon, hogy a ki-gészített feltételrendszer az adott program-osztályra nézve már elegendő legyen az optimalitáshoz vagy a lokális optimalitáshoz. Kétszer differenciálható cél-, illetve feltételi függvények esetén több ilyen ún. másodrendű optimalitási feltétel ismeretes [1, 2, 4, 10, 14].

Jelen dolgozat célja megadni olyan új feltételeket (első-, illetve másodrendűeket), amelyek a KTL-feltételekkel együtt az (1) feladat esetében a lokális optimalitás elegendő feltételéül szolgálnak.

II. Egy elsőrendű optimalitási feltétel

Kuhn és Tucker immár klasszikussá vált cikkükben [9] bebizonyították, hogy amennyiben az (1) feladat célfüggvénye konkáv és a lehetséges programok L halmaza konvex, úgy a KTL-feltételek az optimalitásnak nem csak szükséges, hanem elégséges feltételei is. Ezt az eredményt O. L. Mangasarian általánosította, megmutatván a KTL-feltételek elegendőségét pseudokonkáv célfüggvényű (1) feladat esetében is [11]. Vizsgálódásaink alapjául Mangasarian tételének egy általánosítása szolgál. Ennek megfogalmazásához szükségünk lesz a következő két definícióra.

1. *definíció.* Legyen $x_0 \in L$. Az L halmazt x_0 -ban *lokálisan csillagszerűnek* nevezzük, ha x_0 -nak van olyan G gömbkörnyezete, hogy minden $x \in L \cap G$ vektorra

$$(6) \quad [x, x_0] = \{tx + (1-t)x_0 \mid t \in [0, 1]\} \subset L.$$

2. *definíció.* A differenciálható $f(x)$ függvényt az x_0 pontban *lokálisan pseudokonkávnak*, illetve *lokálisan szigorúan pseudokonkávnak* nevezzük, ha van az

x_0 -nak olyan G gömbkörnyezete, hogy a következő két feltétel közül a felsorolás sorrendjének megfelelő feltétel teljesül:

$$(7) \quad \text{ha } x \in G \text{ és } f(x) \geq f(x_0), \text{ akkor } \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0,$$

és $f(x) > f(x_0)$ esetén $\nabla f(x_0)(x - x_0) > 0$;

$$(8) \quad \text{ha } x \in G, x \neq x_0 \text{ és } f(x) \geq f(x_0), \text{ akkor } \nabla f(x_0)(x - x_0) > 0.$$

1. tétel. Tekintsük az (1) feladatot. Teljesüljenek az $x_0 \in L$ pontban a következő feltételek:

- (a) x_0 *KTL*-stacionárius pontja az (1) feladatnak, továbbá a lehetséges programok L halmaza lokálisan csillagszerű x_0 -ban,
- (b) az $f(x)$ célfüggvény lokálisan pseudokonkáv (lokálisan szigorúan pseudokonkáv) x_0 -ban.

Ekkor az x_0 lehetséges program lokális optimumpontja (szigorú lokális optimumpontja) az (1) feladatnak.

Bizonyítás. Legyen G egy olyan gömbkörnyezete x_0 -nak, amelyre teljesül a (6) feltétel. A lokális pseudokonkavitás esetét vizsgálva, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a (7) feltétel teljesül a G környezeten. Okoskodjunk indirekt módon: tegyük fel, hogy van olyan $x_1 \in L \cap G$, hogy $f(x_1) > f(x_0)$. Ebből, a (7) feltétel folytán, a

$$(9) \quad \nabla f(x_0)(x_1 - x_0) > 0$$

egyenlőtlenség adódik. Tekintettel arra, hogy az L halmaz lokálisan csillagszerű x_0 -ban, ezért (6) szerint $[x_1, x_0] \subset L \cap G$. Most megmutatjuk, hogy

$$(10) \quad t_i \nabla g_i(x_0)(x_1 - x_0) \leq 0$$

teljesül minden $i = 1, \dots, m$ indexre. Mivel x_0 -ra teljesül az (5) *KTL*-feltétel, ezért elegendő a (10) teljesülését csak az ún. x_0 -ban aktív feltételekre igazolni. Legyen tehát i egy olyan index, amelyre $g_i(x_0) = 0$ teljesül. Mivel a $\nabla g_i(x_0)(x_1 - x_0) > 0$ feltételből az következik, hogy az $[x_1, x_0]$ szakasznak van olyan z belső pontja, amelyre $g_i(z) > 0$, ami viszont ellentmondásban van a tétel azon feltevésével miszerint $[x_1, x_0] \subset L$, ezért szükségképpen a $\nabla g_i(x_0)(x_1 - x_0) \leq 0$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie. Mivel $t_i \geq 0$, ezért (10) érvényessége bizonyítást nyert.

(10)-ből a (4) *KTL*-feltétel figyelembevételével

$$\nabla f(x_0)(x_1 - x_0) = \sum_{i=1}^m t_i \nabla g_i(x_0)(x_1 - x_0) \leq 0$$

következik, amely viszont ellentmond (9)-nek. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy $f(x) \leq f(x_0)$ teljesül minden $x \in L \cap G$ lehetséges programra.

Az nyilvánvaló, hogy ha a G gömbkörnyezeten a (7) feltétel helyett a nála erősebb (8) feltétel teljesül, akkor egyetlen $x \in L \cap G, x \neq x_0$ vektorra sem lehet $f(x) = f(x_0)$. *Q. E. D.*

A továbbiakban feltételezzük, hogy az $f(x)$ célfüggvény folytonosan differenciálható az x_0 *KTL*-stacionárius pont valamely környezetében és $\nabla f(x_0) \neq 0$. Ezen feltételezések mellett megadunk egy, az 1. tétel (b) feltételével ekvivalens feltételt. Ezen új feltétel kimondásához és az ekvivalencia bizonyításához szükségünk van néhány fogalom és jelölés bevezetésére, valamint két segédtétele.

Legyen $d \in R^n$ olyan normált vektor, amelyre $\nabla f(x_0)d \neq 0$. Legyen $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_{n-1}\} \subset R^n$ ortonormált vektoroknak egy olyan rendszere, amely d -vel kiegészítve R^n -ben bázist alkot. Jelölje B azt az $n \times (n-1)$ -es mátrixot, melynek oszlopvektorai rendre a $b_1, \dots, b_{n-1}$ vektorok. Legyen $x \in R^n$ tetszőleges. Az $u = B^T x \in R^{n-1}$ vektor és a $v = d^T x \in R$ skalár egyértelműen meghatározzák x -et, ezért az x vektor és az (u, v) rendezett pár között nem teszünk különbséget. (T a transzponálás jele.)

Tekintsük az $f(u, v) = f(x_0)$ egyenletet, ahol $x_0 = (u_0, v_0)$. Az implicit-függvény tétel szerint igazak a következő állítások:

(IFT): létezik x_0 -nak olyan G környezete, u_0 -nak olyan N környezete és egyetlen olyan N -en definiált differenciálható $h_{d,x_0}(u)$ függvény, hogy $(u, v) \in G$ és $f(u, v) = f(x_0)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $u \in N$ és $h_{d,x_0}(u) = v$; továbbá minden $u \in N$ -re érvényes a következő összefüggés:

$$(11) \quad \nabla h_{d,x_0}(u) = - \frac{\nabla f(u, h_{d,x_0}(u)) B}{\nabla f(u, h_{d,x_0}(u)) d}.$$

Vezessük be a következő függvényt:

$$H_{d,x_0}(u) = -(\nabla f(x_0)d)h_{d,x_0}(u), \quad u \in N.$$

A további vizsgálódásokban ez a *korrigált implicit-függvény* alapvető szerepet játszik. A (11) összefüggés felhasználásával egyszerűen igazolható a következő állítás.

1. *segéd-tétel.* Minden $u \in N$ -re

$$\nabla f(x_0)(x - x_0) = \nabla H_{d,x_0}(u)(u - u_0) + H_{d,x_0}(u_0) - H_{d,x_0}(u),$$

ahol $x = (u, h_{d,x_0}(u))$.

■ A következő segéd-tétel az 1. tétel (b) feltételével ekvivalens.

2. *segéd-tétel.* Legyen $f(x)$ folytonosan differenciálható x_0 valamely környezetében. Legyen $\nabla f(x_0)d \neq 0$ és $x_0 = (u_0, v_0)$. Ahhoz, hogy $f(x)$ x_0 -ban lokálisan pszeudokonkáv (lokálisan szigorúan pszeudokonkáv) legyen, szükséges és elegendő, hogy a $H_{d,x_0}(u)$ korrigált implicit-függvény u_0 -ban lokálisan konkáv (lokálisan szigorúan konkáv) legyen.

Bizonyítás. Szükségesség: Legyen $f(x)$ lokálisan pszeudokonkáv az x_0 pontban. x_0 -nak van olyan G és u_0 -nak olyan N környezete, melyekre teljesül az (IFT) állítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy G -n teljesül a (7) feltétel. Mivel minden $u \in N$ esetén $x = (u, h_{d,x_0}(u)) \in G$ és $f(x) = f(x_0)$, ezért az 1. segéd-tétel és a (7) összefüggés alapján minden $u \in N$ -re igaz a következő egyenlőtlenség:

$$(12) \quad H_{d,x_0}(u) \leq H_{d,x_0}(u_0) + \nabla H_{d,x_0}(u_0)(u - u_0),$$

amely differenciálható függvényekre éppen a lokális konkavitás definíciója.

Elegendőség: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy minden $u \in N$ -re teljesül a (12) egyenlőtlenség. Megmutatjuk, hogy ekkor a (7) összefügg-

gés teljesül a G környezeten. *Rapcsák Tamás* egy eredménye alapján azonban ehelyett elegendő az

$$x \in G, f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0$$

implikáció helyességét igazolni [13, 2.6. Lemma]. Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy van olyan $x_1 \in G$, amelyre $f(x_1) \geq f(x_0)$ és mégis $\nabla f(x_0)(x_1 - x_0) < 0$. E két utóbbi egyenlőtlenségből következik, hogy az $f(x)$ függvény az $[x_0, x_1]$ szakasz mentén kezdetben csökken, x_0 közelében a függvényértékek az $f(x_0)$ értéknél kisebbek lesznek, az x_1 végpontban azonban az $f(x_1)$ függvényérték már ismét nem-kisebb, mint $f(x_0)$. Lévé az $f(x)$ folytonos az $[x_0, x_1]$ szakasz mentén, ezért az elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy van olyan $x_2 \neq x_0$ pontja az $[x_0, x_1]$ szakasznak, amelyre $f(x_2) = f(x_0)$ teljesül. Mivel az $x_2 - x_0$ vektor csak egy pozitív szorzóban tér el az $x_1 - x_0$ vektortól, ezért x_2 -re még a $\nabla f(x_0)(x_2 - x_0) < 0$ feltétel is teljesül. Legyen $x_2 = (u_2, v_2)$. Nyilvánvaló, hogy $u_2 \in N$ és $v_2 = h_{d,x_0}(u_2)$. Tekintettel az 1. segédtételre, azt kapjuk, hogy

$$\nabla H_{d,x_0}(u_0)(u_2 - u_0) + H_{d,x_0}(u_0) - H_{d,x_0}(u_2) < 0.$$

Ez viszont ellentmond kiindulási feltevésünknek.

A lokális szigorú pszeudokonkavitásra vonatkozó állítás teljesen hasonlóan bizonyítható. Q. E. D.

Az imént bizonyított segédtételt az 1. tétellel kombinálva nyerjük a következő optimalitási tételt.

2. tétel. Tekintsük az (1) feladatot. Teljesüljenek az $x_0 \in L$ pontban a következő feltételek:

- (a) x_0 KTL-stacionárius pontja az (1) feladatnak, továbbá a lehetséges programok L halmaza lokálisan csillagszerű x_0 -ban;
- (c) $\nabla f(x_0)d \neq 0$ és a $H_{d,x_0}(u)$ korrigált implicit-függvény lokálisan konkáv (lokálisan szigorúan konkáv) az $u_0 = \bar{B}^T x_0$ pontban.

Ekkor az x_0 lehetséges program lokális optimumpontja (szigorú lokális optimumpontja) az (1) feladatnak.

A következő részben kétszer differenciálható $f(x)$ célfüggvényt feltételezve, a 2. tétel (c) feltételéből kiindulva, az optimalitásnak egy másodrendű jellemzését nyerjük.

III. Egy másodrendű optimalitási feltétel és annak variánsai

Legyen az (1) feladat $f(x)$ célfüggvénye kétszer folytonosan differenciálható a feladat x_0 KTL-stacionárius pontjának valamely környezetében. Tegyük fel, hogy $\nabla f(x_0)d \neq 0$. Ismert tény, hogy ekkor a $h_{d,x_0}(u)$ implicit-függvény, és ezáltal a $H_{d,x_0}(u)$ korrigált implicit-függvény is kétszer folytonosan differenciálható az $u_0 = \bar{B}^T x_0 \in R^{n-1}$ pont valamely környezetében. Jól ismert továbbá az is, hogy amennyiben a $H_{d,x_0}(u)$ függvény $\nabla^2 H_{d,x_0}(u)$ Hesse-mátrixa negatív definit az $u = u_0$ pontban, akkor a $H_{d,x_0}(u)$ függvény lokálisan szigorúan konkáv az $u = u_0$ pontban. Ezt összevetve a 2. tétellel a következő eredményre jutunk.

3. *tétel.* Tekintsük az (1) feladatot. Legyen $f(x)$ kétszer folytonosan differenciálható az $x_0 \in L$ pont valamely környezetében.

Teljesüljenek továbbá a következő feltételek:

(a) x_0 *KTL*-stacionárius pontja az (1) feladatnak és a lehetséges programok L halmaza lokálisan csillagszerű x_0 -ban;

(d) a $\nabla^2 H_{d,x_0}(u_0)$ Hesse-mátrix negatív definit.

Ekkor az x_0 lehetséges program szigorú lokális optimumpontja az (1) feladatnak.

Fenti tétel alkalmazhatósága felveti a $\nabla^2 H_{d,x_0}(u_0)$ Hesse-mátrix kiszámíthatóságának kérdését, valamint azt, hogy a $h_{d,x_0}(u_0)$ implicit-függvény által meghatározott $\nabla^2 H_{d,x_0}(u_0)$ Hesse-mátrix milyen kapcsolatban van magával az $f(x)$ függvénnyel? Erről a kapcsolatról szól a következő segédétel, melynek igazságáról az $f(u, h_{d,x_0}(u)) = \text{const.}$ egyenlethől kétszeri differenciálással lehet meggyőződni.

3. *segédétel.* Legyen $f(x)$ kétszer differenciálható az x_0 pont valamely környezetében és $\nabla f(x_0)d \neq 0$. Ekkor érvényes a következő összefüggés:

$$(13) \quad \nabla^2 H_{d,x_0}(u_0) = B^T(Q_1(x_0) - Q_2(x_0, d) + Q_3(x_0, d))B,$$

ahol

$$Q_1(x_0) = \nabla^2 f(x_0),$$

$$Q_2(x_0, d) = \frac{1}{\nabla f(x_0)d} (\nabla f(x_0)^T d^T \nabla^2 f(x_0) + \nabla^2 f(x_0)d \nabla f(x_0)),$$

$$Q_3(x_0, d) = \frac{d^T \nabla^2 f(x_0)d}{(\nabla f(x_0)d)^2} \nabla f(x_0)^T \nabla f(x_0).$$

A (13) összefüggés jobb oldalára vezessük be a $Q_{\mathfrak{B}}(f; x_0, d)$ jelölést, és ezt az $n - 1$ -ed rendű szimmetrikus mátrixot nevezzük az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli, a $\{d, \mathfrak{B}\}$ bázishoz asszociált kvázi Hesse-mátrixának [5, 7].

Valamely $\{d, \mathfrak{B}\}$ bázist x_0 -ban megengedettnak nevezünk, ha a d vektorra teljesül a $\nabla f(x_0)d \neq 0$ feltétel. x_0 -ban megengedett bázis akkor és csak akkor létezik, ha $\nabla f(x_0) \neq 0$. E feltétel teljesülése esetén viszont végtelen sok x_0 -ban megengedett bázis van. A következő segédétel különböző megengedett bázisokhoz asszociált kvázi Hesse-mátrixok kapcsolatáról szól.

4. *segédétel.* [6, 3.9. Lemma] Legyen $f(x)$ kétszer differenciálható az x_0 pont valamely környezetében és $\nabla f(x_0) \neq 0$. Legyenek $\{d_1, \mathfrak{B}_1\}$ és $\{d_2, \mathfrak{B}_2\}$ x_0 -ban megengedett bázisok. Ekkor a $Q_{\mathfrak{B}_1}(f; x_0, d_1)$ és a $Q_{\mathfrak{B}_2}(f; x_0, d_2)$ kvázi Hesse-mátrixok hasonlóak.

Ebből a segédételből közvetlenül következik, hogy az $f(x)$ függvény x_0 pontbeli valamennyi $Q_{\mathfrak{B}}(f; x_0, d)$ kvázi Hesse-mátrixa vagy egyidejűleg negatív definit, vagy egyik sem az.

Ha a 3. tételben a $\nabla^2 H_{d,x_0}(u_0)$ Hesse-mátrixot a $Q_{\mathfrak{B}}(f; x_0, d)$ kvázi Hesse-mátrixszal helyettesítjük, akkor *Rapcsák Tamás* eredményével lényegében megegyező következő tételhez jutunk.

4. *tétel.* [14, 4.1. Tétel] Tekintsük az (1) feladatot. Legyen $f(x)$ kétszer folytonosan differenciálható az $x_0 \in L$ pont valamely környezetében. Teljesüljenek továbbá a következő feltételek:

(a) x_0 KTL-stacionárius pontja az (1) feladatnak és a lehetséges programok L halmaza lokálisan csillagszerű x_0 -ban,

(e) a $Q_{\mathfrak{B}}(f; x_0, d)$ kvázi Hesse-mátrix negatív definit valamely x_0 -ban megengedett $\{d, \mathfrak{B}\}$ bázisra.

Ekkor az x_0 lehetséges program szigorú lokális optimumpontja az (1) feladatnak.

A következő segédtételekből kiderül, hogy a meglehetősen bonyolult képzési szabályú kvázi Hesse-mátrixok között vannak egyszerűbb szerkezetűek is.

5. *segédétel.* Ha a $\{d, \mathfrak{B}\}$ x_0 -ban megengedett bázis olyan, hogy

$$b_i^T \nabla^2 f(x_0) d = 0$$

teljesül minden $b_i \in \mathfrak{B}$ -re, akkor

$$Q_{\mathfrak{B}}(f; x_0, d) = B^T \left(\nabla^2 f(x_0) + \frac{d^T \nabla^2 f(x_0) d}{(\nabla f(x_0) d)^2} \nabla f(x_0)^T \nabla f(x_0) \right) B.$$

Bizonyítás. Az állítás nyilvánvaló a kvázi Hesse-mátrix definíciója, a (13) formula alapján. A segédétel feltétele ugyanis nem más, mint a $B^T \nabla^2 f(x_0) d = 0$ összefüggés, amiből közvetlenül adódik a $B^T Q_{\mathfrak{B}}(x_0, d) B = 0$ egyenlőség, illetve a bizonyítandó állítás.

Ha a d vektor történetesen sajátvektora a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrixnak, akkor az 5. segédétel feltételei nyilvánvaló módon teljesülnek. Ez az oka annak, hogy a továbbiakban olyan megengedett bázisokat vizsgálunk, melyek elemei a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrix sajátvektorai.

Legyenek $u_1, \dots, u_n \in R^n$ a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrix ortonormált sajátvektorai, $h_1, \dots, h_n \in R$ pedig a megfelelő sajátértékek. Legyen U az az ortogonális mátrix, melynek oszlopvektorai $u_1, \dots, u_n$. Mivel $\nabla f(x_0) \neq 0$, ezért van olyan i index, hogy $\nabla f(x_0) u_i \neq 0$. Legyen $\mathfrak{B}_i = \{u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n\}$. A továbbiakban a $Q_{\mathfrak{B}_i}(f; x_0, u_i)$ kvázi Hesse-mátrixot fogjuk vizsgálni.

Legyen E_i az az $n \times (n-1)$ -es mátrix, melynek oszlopvektorai rendre az $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n \in R^n$ egységvektorok. Az 5. segédtételelől közvetlenül adódik a következő összefüggés:

$$(14) \quad Q_{\mathfrak{B}_i}(f; x_0, u_i) = E_i^T U^T \left(\nabla^2 f(x_0) + \frac{h_i}{(\nabla f(x_0) u_i)^2} \nabla f(x_0)^T \nabla f(x_0) \right) U E_i.$$

Ennek az összefüggésnek a segítségével a $Q_{\mathfrak{B}_i}(f; x_0, u_i)$ kvázi Hesse-mátrix negatív definitiségének érdekes jellemzését adhatjuk, amely egyúttal az optimalitás egy új másodrendű elégséges feltételét is szolgáltatja.

5. *tétel.* Tekintsük az (1) feladatot. Legyen $f(x)$ kétszer folytonosan differenciálható az $x_0 \in L$ pont valamely környezetében és $\nabla f(x_0) \neq 0$. Legyenek $u_1, \dots, u_n \in R^n$ a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrix ortonormált sajátvektorai, $h_1, \dots, h_n \in R$ pedig a megfelelő sajátértékek. Teljesüljenek továbbá a következő feltételek:

(a) x_0 KTL-stacionárius pontja az (1) feladatnak és a lehetséges programok L halmaza lokálisan csillagszerű x_0 -ban,

- (f) a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrix vagy negatív definit, vagy egyetlen egyszeres nem-negatív sajátértéke van (legyen ez h_k) és teljesül a $\nabla f(x_0)u_k \neq 0$ összefüggés, amely a $h_k > 0$ esetben még kiegészül a következő egyenlőtlenséggel:

$$(15) \quad \sum_{j=1}^n \frac{(\nabla f(x_0)u_j)^2}{h_j} > 0.$$

Ekkor az x_0 lehetséges program szigorú lokális optimumpontja az (1) feladatnak.

Bizonyítás. Ha a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrix negatív definit, akkor a (14) összefüggés szerint a $Q_{\mathfrak{A}_i}(f; x_0, u_i)$ kvázi Hesse-mátrix ugyancsak negatív definit. (Itt i egy olyan indexet jelöl, amelyre $\nabla f(x_0)u_i \neq 0$.)

Most tegyük fel, hogy a $\nabla^2 f(x_0)$ mátrixnak h_k az egyetlen egyszeres nem-negatív sajátértéke és $\nabla f(x_0)u_k \neq 0$. Ez utóbbi feltétel biztosítja a $Q_{\mathfrak{A}_k}(f; x_0, u_k)$ kvázi Hesse-mátrix létezését. Most megmutatjuk, hogy a feladat feltételei mellett ez a mátrix negatív definit. Legyen $z \in R^{n-1}$ tetszőleges és legyen $E_k^T z = (z_1, \dots, z_n)^T \in R^n$. A (14) összefüggésből következik, hogy

$$(16) \quad z^T Q_{\mathfrak{A}_k}(f; x_0, u_k) z = \sum_{j \neq k} h_j z_j^2 + \frac{h_k}{(\nabla f(x_0)u_k)^2} \left(\sum_{j \neq k} (\nabla f(x_0)u_j) z_j \right)^2.$$

Ha $h_k = 0$, akkor (16)-ból közvetlenül kiadódik, hogy a $Q_{\mathfrak{A}_k}(f; x_0, u_k)$ mátrix negatív definit. Ha $h_k > 0$, akkor a

$$\left(\sum_{j \neq k} (\nabla f(x_0)u_j) z_j \right)^2 \leq \left(\sum_{j \neq k} \frac{(\nabla f(x_0)u_j)^2}{h_j} \right) \left(\sum_{j \neq k} h_j z_j^2 \right)$$

egyenlőtlenség (melynek érvényessége a *Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij*-féle egyenlőtlenség segítségével belátható) és a (16) formula figyelembevételével a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$z^T Q_{\mathfrak{A}_k}(f; x_0, u_k) z \leq \left(\sum_{j \neq k} h_j z_j^2 \right) \left(1 + \frac{h_k}{(\nabla f(x_0)u_k)^2} \sum_{j \neq k} \frac{(\nabla f(x_0)u_j)^2}{h_j} \right).$$

Itt a jobb oldali szorzat első tényezője $z \neq 0$ esetén nyilván negatív, a második tényező viszont (15) miatt pozitív, következésképpen a bal oldal értéke negatív, ami azt jelenti, hogy a $Q_{\mathfrak{A}_k}(f; x_0, u_k)$ mátrix negatív definit. Kimutattuk tehát, hogy bizonyítandó tételünk (f) feltétele maga után vonja a 4. tétel (e) feltételét, melynek alapján nyilvánvaló az 5. tétel helyessége. Q. E. D.

Megemlítjük, hogy az (e) és (f) feltételek valójában ekvivalensek [7].

Míg az imént bizonyított tétel másodrendű optimalitási feltételében — a nem-konkáv esetben — a $\nabla^2 f(x_0)$ mátrix minden sajátvektorának és sajátértékének ismeretére szükség van, addig a következő tétel másodrendű feltételében — a nem-konkáv esetben — csak egy sajátérték és a hozzátartozó sajátvektor ismeretére van szükség.

6. tétel. Az 5. tétel állítása érvényben marad, ha az (f) feltételt a következő feltétellel helyettesítjük:

(g) a $\nabla^2 f(x_0)$ Hesse-mátrix vagy negatív definit, vagy egyetlen egyszeres nem-negatív sajátértéke van (legyen ez h_k) és teljesül a $\nabla f(x_0)u_k \neq 0$ összefüggés, amely a $h_k > 0$ esetben kiegészül még a következővel: az

$$r = (\nabla^2 f(x_0))^{-1} \nabla f(x_0)^T$$

vektorra $\nabla f(x_0)r > 0$ teljesül.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy a (g) feltétel teljesülése maga után vonja az (f) feltétel teljesülését. Ehhez csupán a $h_k > 0$ esetet kell vizsgálnunk. Legyen U a $\nabla^2 f(x_0)$ mátrix sajátvektoraiból a már leírt módon képezett mátrix és $p \in R^n$ az a vektor, amelyre $r = Up$. Ekkor az r vektorra vonatkozó feltétel miatt fennáll az

$$U^T \nabla^2 f(x_0) U p = U^T \nabla f(x_0)^T$$

összefüggés. Ennek az egyenletnek a koordinátás alakja a következő:

$$(17) \quad h_j p_j = \nabla f(x_0) u_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\nabla f(x_0)r = \nabla f(x_0)Up = \sum_{j=1}^n (\nabla f(x_0)u_j)p_j,$$

ezért ebből, a (17) és a $\nabla f(x_0)r > 0$ feltételekből közvetlenül kiadódik az (f) feltételben szereplő

$$\sum_{j=1}^n \frac{(\nabla f(x_0)u_j)^2}{h_j} > 0$$

egyenlőtlenség. Q. E. D.

Megemlítjük, hogy a (g) és (f) feltételek valójában ekvivalensek [7].

(Beérkezett: 1984. szeptember 15-én.)

IRODALOM

1. BAZARAA, M. S.—SHETTY, C. M.: *Nonlinear programming: theory and algorithms* Wiley, New York, 1979.
2. FIAOCO, A. V.—McCORMICK, G. P.: *Nonlinear programming: Sequential unconstrained minimization techniques*, Wiley, New York, 1968.
3. FORGÓ F.: *Nemkonvex és diszkrét programozás*, KJK, Bp., 1978.
4. HESTENES, M. R.: *Optimization theory—The finite dimensional case*, Wiley, New York, 1975.
5. KOMLÓSI, S.: Second order characterisation of pseudoconvex and strictly pseudoconvex functions in terms of quasi-Hessians, in: *Contributions to the theory of optimization*, Ed.: Forgó F., Karl Marx University of Economics Budapest, DM 83-2. (1983) 19—45.
6. KOMLÓSI S.: Néhány adalék a kvázikonvex függvények elméletéhez, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 10 (1984), 103—113.
7. KOMLÓSI S.: A kvázikonvex programozás elmélete és módszerei egyes kérdéseire, Baku, 1984. Kandidátusi disszertáció. (Orosz nyelven.)
8. KREKÓ B.: *Optimumszámítás*, KJK. BP. 1973.

9. KUHN, H. W.—TUCKER, A. W.: Non-linear programming, in: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* (Ed.: J. Neyman). Univ. California Press, Berkeley, Calif. 1951.
10. LUNENBERGER, D. G.: *Introduction to linear and nonlinear programming*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1973.
11. MANGASARIAN, O. L.: Pseudo-convex functions, *SIAM Journal on Control* 3 (1965) 281—290.
12. MARTOS, B.: *Nonlinear programming: theory and methods*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
13. RAPCSÁK T.: A SUMT-módszer alkalmazása nem konvex programozási feladatok esetén, *Alk. Mat. Lapok*, 2 (1976) 427—437.
14. RAPCSÁK T.: Az optimalitás másodrendű feltételeiről, *Alk. Mat. Lapok*, 4 (1978) 109—116.

ON OPTIMALITY CRITERIA OF MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS

The paper deals with sufficient optimality conditions of inequality constrained non-linear programming problems. Assuming differentiability of the objective and the constraint functions first and second order conditions, respectively, are elaborated which, together with the well-known Kuhn-Tucker conditions, are sufficient for local optimality and strict local optimality, respectively. Investigations of the paper are closely connected with function properties of local pseudo-concavity and local strict pseudo-concavity, respectively. The local variant of a well-known theorem of Mangasarian serves as a starting point (Theorem 1). From this results the first order characterization of local optimality in terms of the implicit function (Theorem 2). In the following, assuming continuous bidifferentiability of the objective function second order conditions are submitted which ensure the fulfilment of the first order optimality conditions (Theorems 3—6). Second order optimality criteria are fundamentally based on the notion of the quasi-Hessian matrix (Theorem 4) and its various properties. Theorem 5 gives such a sufficient optimality condition that may be described by means of the eigenvalues and eigenvectors of the Hessian as well as of the gradient-vector of the objective function. This theorem is a generalization of the classical optimality theorem where the definiteness of the Hessian matrix is required.

О КРИТЕРИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В статье рассматриваются вопросы достаточности условий оптимальности задач нелинейного программирования с нелинейными ограничениями. Предполагая дифференцируемость целевой функции и ограничений, в статье разработаны условия первого и второго порядка, которые совместно с условиями Куна-Таккера служат условиями достаточности локальной и строго локальной оптимальности. Исследования тесно связаны со свойствами локальной псевдогогнутости и строго локальной псевдогогнутости функций. Исходной точкой является локальный вариант одной из известных теорем Мангасаряна (1. теорема). Исходя из неё и используя теорему о неявной функции, получаем анализ первого порядка локальной оптимальности с помощью неявных функций (2. теорема).

В дальнейшем, предполагая дважды непрерывную дифференцируемость целевой функции, задаются такие условия второго порядка, которые обеспечивают выполнение условий оптимальности первого порядка (3.—6. теорема). Условия оптимальности второго порядка опираются в основном на понятия квази-матрицы Хессе (4. теорема) и на её различные свойства. 5. теорема даёт такое условие достаточности, которое может быть описано с помощью собственных значений и собственных векторов матрицы Хессе целевой функции. Эта теорема является обобщением той классической теоремы оптимальности, в которой требуется определённость матрицы Хессе.

SZOFTVER*

HANÁK GÁBOR

Az MPSX-MIP/370 matematikai programozási programcsomag. Néhány konkrét tapasztalat

Bevezetés

Az MPSX-MIP/370 olyan IBM termék, amelyet a 370-es gépcsaládhoz tartozó számítógépekre lehet installálni. Segítségével vegyes egészértékű lineáris programozási feladatokat oldhatunk meg. Tulajdonképpen két, részben független programcsomagról van szó. Az egyik, az MPSX/370 (*Mathematical Programming System Extended/370*) csak folytonos feladatok megoldására alkalmas, viszont a másiktól függetlenül is használhatjuk. A MIP/370 (*Mixed Integer Programming*) programcsomagot csak az MPSX/370-nel együtt működtethetjük.

Mi két gépen is használtuk az MPSX-MIP/370 programcsomagot. Először a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézet (MTA SZTAKI) IBM 3031 típusú, majd a Magyar Alumíniumipari Tröszt (MAT) IBM 4331 típusú gépén. Megjegyezzük, hogy információink szerint [5] az ESZR számítógépcsalád nagyobb gépein, például a SZTAKI R-35 típusú gépén is installálható a programcsomag.

Ismertetőnket a következők szerint építjük fel:

1. Általános ismertető az MPSX/370 programcsomagról
2. Általános ismertető a MIP/370 programcsomagról
3. Általános ismertető az MPSX/370 által biztosított Report Generator-ról
4. Konkrét tapasztalatok

I. Általános ismertető az MPSX/370 programcsomagról

A programcsomag alkalmas minden olyan folytonos lineáris programozási feladat megoldására, vizsgálatára, amelyben a feltételek száma nem haladja meg a 16 ezret. (Nem volt alkalmunk kipróbálni ilyen méretű feladat esetén az MPSX/370 működését; saját tapasztalataink alapján azonban elmondhatjuk, ha a feladat ezer körüli feltételt tartalmaz, a programcsomag működése igen jó.) Az egyes feltételek, illetve változók számára bármilyen korlát-intervallum előírható, megengedve, hogy az intervallum végpontjai $\pm \infty$ is lehetnek.

Az MPSX/370-et használhatjuk bizonyos szeparábilis problémák megoldására is, amikor minden nemlineáris függvény egyváltozós konvex nemlineáris függvények lineáris kombinációja.

Az MPSX/370 többféle operációs rendszer alatt is futtatható. A leggyakoribbak a batch futások, ilyenkor vagy OS/VS vagy DOS/VS alatt fut a jobunk.

* Új rovatunk indulásakor a szerkesztő, a *magyarol* nyelv esküdt ellensége, eleve feladta a harcot a számítástechnikusok túlerejével szemben.

Lehetséges azonban a programcsomagot az interaktív CMS (Conversational Monitoring System) alatt is használni. Ez utóbbira természetesen csak akkor van mód, ha a feladat méretei nem túl nagyok. Mindenképpen hasznos viszont a CMS alatti használat részfeladatok, programrészletek tesztelésére. Mivel az MPSX/370 leírása az operációs rendszertől lényegében független, az OS és a DOS futás különbözőségeire csak az utolsó részben térünk ki.

Először az MPSX/370 belső logikájáról szólnunk, a konkrét módszerekről később lesz szó.

Egy MPSX/370 job összeállításához job-kontrol utasításokra, kontrol-program utasításokra és esetleg adatokra van szükség. A job-kontrol utasítások annyiban függenek a konkrét megoldandó feladattól, amennyiben ez meghatározza az MPSX/370 által megkövetelt, az adott futáshoz szükséges file-ok számát, neveiket, méreteiket és esetleges egyéb jellemzőiket. A kontrol-programot kétféle program-nyelven írhatjuk meg. Az egyik, az MPSCL (Mathematical Programming System Control Language) MPSX/370 specifikus, azaz az ilyen nyelven írt kontrol-programot az MPSX/370-be beépített fordító, szerkesztő, futtató program kezeli. Ez a lehetőség nagymértékben egyszerűsíti a kontrol-program megírását. Hátránya viszont, hogy nem teszi lehetővé a nehezebb problémák megoldását. Erre alkalmas az ECL (Extended Control Language) nyelv, amely tulajdonképpen a PL/I nyelv bővítésének tekinthető. Egy ECL nyelven megírt kontrol-program olyan PL/I program, amely speciális MPSX/370 makró- illetve eljárás-hívásokat is tartalmaz. Az ECL nyelv használatakor a kontrol-programot a PLIOPT fordítóprogrammal fordítjuk. Kontrol-programunkban tehát minden olyan PL/I utasítást használhatunk, amely a PLIOPT számára értelmezhető.

Ebben az ismertetőben csak az ECL nyelven írt programokkal foglalkozunk. Egy ilyen program első utasítása:

címke: PROCEDURE OPTIONS (MAIN);

második utasítása:

%INCLUDE DPLINIT;

utolsó utasítása:

END címke;

kell legyen. A második utasítással aktivizáljuk a DPLINIT nevű MPSX/370 makró-t. Ez részben standard induló értékeket ad a program futását befolyásoló különböző paramétereknek, részben pedig arról intézkedik, mi történjék, ha bizonyos események bekövetkeznek.

Az MPSX/370 paramétereit ún. kommunikációs cellákban tárolja. Amennyiben a standard implementációtól eltérő paraméter értékeket szeretnénk használni, úgy a DPLINIT makró meghívása, azaz a kezdőértékek beállítása után a kontrol-programban újradefiniálhatjuk a kívánt kommunikációs cellák tartalmát: ily módon választhatunk a programcsomag által kínált lehetőségek közül.

Egy MPSX/370 futás során különböző fontosabb „események” következhetnek be, például az első feasisibilis megoldás elérése, optimális megoldás elérése, kiderül, hogy nincs feasisibilis megoldás, vagy van, de nem korlátos, újra kell invertálni a mátrixot, ki kell nyomtatni az aktuális megoldást, különböző hibák,

stb. Ezekre az „eseményekre” a DPLINIT standard választ ad. Ha például ún. fő-hiba következik be, akkor, a standard implementáció szerint, a futás a STATUS eljárás (ld. később) meghívása után befejeződik. A különböző „eseményekre” adott választ végső soron természetesen a felhasználó határozza meg, hiszen a DPLINIT meghívása után felülírhatja a standard választ. Ha például egy konkrét feladat esetében tudjuk, hogy a standard implementáció szerint rengeteg nyomtatás várható, akkor az XDOPRINT választ felülírjuk és kihagyjuk belőle a nyomtatási utasítást; ez esetben viszont a nyomtatásról magunknak kell gondoskodnunk a kontrol-programban. Más példa: bizonyos, előre sejthető hiba előfordulása esetén ne álljon le a futás, hanem valamilyen MPSX/370 eljárás segítségével próbáljuk meg rögtön felderíteni, esetleg elhárítani a hibát. Ez utóbbi esetben persze nagyon óvatosan kell eljárni, nehogy a program végtelen ciklusba essék. (A különböző „események” és a rájuk adott standard válaszok felsorolása az [1] Demands fejezetében található meg.)

A legegyszerűbb ECL programok a DPLINIT makró meghívása után lényegében kétféle utasítást tartalmaznak: értékadást és eljárás hívást. Az értékadással valamilyen kommunikációs cellát töltünk meg adattal, illetve módosítjuk annak értékét. Az eljárás hívás egy CALL utasítás, amely valamilyen speciális MPSX/370 vagy MIP/370 eljárást aktivizál.

Az MPSX/370 eljárásokat hét csoportra bontva tárgyaljuk. Ezek:

1.1 Problem file fenntartási eljárások

1.2 Induló eljárások

1.3 Optimalizáló eljárások

1.4 Eredmény nyomtatási eljárások

1.5 Paraméteres eljárások

1.6 Mentési és újraindítási eljárások

1.7 File kezelési eljárások

Nem célunk a mindent átfogó ismertetés, ezért csak a fontosabb eljárásokról szólunk.

1.1 Problem file fenntartási eljárások

Logikai szempontból az első ilyen eljárás a *CONVERT*: a felhasználó által valamilyen formában (ld. erről később) megadott adatrendszer bináris pakolt formátumúvá konvertálja, és egy, szintén a felhasználó által adott név hozzárendelésével elhelyezi a problem file-on, amennyiben ez utóbbi egyáltalán létezik; ha nem, akkor előbb magát a problem file-t is elkészíti.

A problem file alapvető jelentőségű MPSX/370 objektum. Itt lehet tárolni — az MPSX/370 számára kezelhető formában — feladatunk adatrendszerét (egy konkrét feladathoz akárhány jobb oldalt, ún. range, ill. bound vektort rendelhetünk); itt őrződnek meg az egyes futások alkalmával előálló, az adott problémához tartozó, névvel ellátott bázisok (pl. ugyanannak a feladatnak más jobb oldallal, más célfüggvénnyel való futása esetén célszerű alkalmas nevek használata), valamint egyes feladat esetében az integer fázisban előállt különböző, szintén névvel ellátott fák (erről ld. később). Egy problem file-on tetszőleges számú egymástól független probléma tárolható a hozzá tartozó adat-, bázis- ill. fa-rendszerrel együtt.

A *CONVERT* bizonyos szintű automatikus hibakeresést végez, ezenkívül a konvertált problémáról statisztikát készít. A megfelelő paraméterek beállításával mind a hibakeresés, mind a statisztika alaposabbá tehető.

A problem file-on létező valamilyen problémát kétféle eljárással változtathatjuk meg. Az egyik a *REVISE*, ennek hatására új probléma keletkezik a problem file-on. A *REVISE* segítségével vektorokat törölhetünk az eredeti problémából és új vektorokat adhatunk hozzá; bármely adatát módosíthatjuk. Ha az új problémának ugyanazt a nevet adjuk, mint az eredetinek, úgy a *REVISE* a régit felül fogja írni. Van olyan eset, amikor célszerű ily módon eljárni (például helytakarékosági okok miatt), de általában biztonságosabb az új problémának új nevet is adni: ez esetben mindkét probléma megőrződik a problem file-on.

A másik eljárás, amivel a problem file-on adott valamilyen problémát megváltoztathatunk a *MODIFY*. Ez az eljárás azonban nem a problem file-on operál, hanem az ún. work matrix-on. Az 1.2 pontban tárgyalandó *SETUP* eljárás a problem file-on adott probléma alapján elkészíti a work matrix nevű file-t. A *MODIFY* ezen a mátrixon hajt végre változtatásokat. Vektorokat nem lehet törölni, ill. hozzáadni, csak a meglevő adatokat módosíthatjuk.

Mikor célszerű a *REVISE*-t, és mikor a *MODIFY*-t használni? Ha korlátlanul áll rendelkezésünkre szabad lemezterület, akkor, a problem file-t elég nagyra meghatározva, célszerű a *REVISE*-t használni. Általában azonban nem ez a helyzet. Ezért a következő eljárást javasoljuk: egy adott probléma nagyobb átalakítása esetén használjuk a *REVISE*-t; ha viszont csak pár adatot érintő változtatásról, esetleg ilyen változtatások seregéről van szó, használjuk a *MODIFY*-t. Ez utóbbi esetben a keletkező optimális megoldásnak, ill. fának könnyen felismerhető nevet adunk; ez a bázis, ill. fa a megadott névvel felíródik a problem file-ra.

A *REVISE* használata esetén például problem file-unkon a következők találhatók: *PROB1*, bázis, fa; *PROB2*, bázis, fa; ... ; *PROB12*, bázis, fa. A másik esetben pedig: *PROB1*, bázis ALAP, fa ALAP, bázis KOZEP, fa KOZEP bázis NAGY, fa NAGY, bázis ORIAS, fa ORIAS; *PROB2*, bázis ALAP, fa ALAP, bázis KOZEP, fa KOZEP, bázis NAGY, fa NAGY, bázis ORIAS, fa ORIAS; *PROB3*, bázis ALAP, fa ALAP, bázis KOZEP, fa KOZEP, bázis NAGY, fa NAGY, bázis ORIAS, fa ORIAS.

Természetesen a *REVISE* használata esetén az új problémához csatolva megjelennek a régi problémához tartozó bázisok, ill. fák eredeti nevükön, de a feladat módosításának megfelelően módosítva. Ily módon természetesen előfordulhat, hogy egy a régi problémához tartozó optimális bázis a módosítás után nem lesz az, mégis érdemes az új probléma optimális megoldásának keresésekor ezt a bázist használni induló bázisként, mert ily módon nagyon hamar eljutunk az új problémánál érvényes optimumhoz.

A problem file tartalomjegyzékét a *PROBLEMS* eljárással kérdezhetjük le. Ugyancsak ezzel az eljárással lehet egy adott problémát, illetve a hozzárendelt bázist és fát törölni vagy átnevezni.

1.2 Induló eljárások

A legfontosabb induló eljárás a *SETUP*, amely hármas funkciót lát el. Először is kijelöli a feladatnak adekvát helyigényt és inicializál bizonyos későbbi eljárások által használt file-okat. A helyigény kijelölését három független paraméterrel irányíthatjuk, de egyszerűbb esetekben célszerű ezek alapértelmezésére hagyatkozni; tényleges használatukra csak problematikus esetben, az MPSX/370 alapos ismeretében kerülhet sor. Másodszor, a *SETUP* létrehozza a work matrix-ot, figyelembe véve a feladat összes változóját, feltételét és jobb

oldalát, de csak egy range és egy bound vektort engedve meg (a range a feltételekre, a bound a változókra ad korlátot). Végül a SETUP meghatározza egy kezdő megoldást is.

Az MPSX/370 minden egyes feltételhez hozzárendel egy ún. logikai változót. Ily módon egy feladathoz annyi MPSX/370 változó tartozik, mint az eredeti változók és feltételek számának összege. Az eredeti változókat strukturális változóknak nevezzük. A logikai változókat mint az adott feltételhez tartozó slack-változókat fogjuk fel.

A SETUP által meghatározott induló megoldásban a bázist a logikai változók alkotják, míg a strukturális változók az alsó ill. felső korláttal indulnak. Ezt az induló helyzetet all-slack állapotnak nevezzük.

A SETUP eljárás során kell intézkednünk arról, hogy a későbbi optimalizálás során minimalizálni vagy maximalizálni akarunk-e. Az alapértelmezés a minimalizálás.

A problem file-on adott problémának többféle redukcióját végezhetjük el itt nem részletezendő eljárások segítségével. Ezek részben kiszűrik a feladatban levő redundanciákat és a redukált feladatra vonatkozóan végzik el a SETUP funkcióit. Másrészt a SETUP végrehajtása után módosíthatjuk a generált work matrix-ot (például a fentebb ismertetett MODIFY segítségével). Természetesen az ilyen változtatások nem érintik a problem file-on levő adott problémát.

1.3 Optimalizáló eljárások

Az MPSX/370 programcsomagban többféle optimalizáló eljárás közül választhatunk. A legalapvetőbb ilyen a PRIMAL. Nagyobb feladatok esetén célszerű a PRIMAL-t előkészíteni a CRASH-sel.

A CRASH eljárás segítségével részben igyekszünk minél több strukturális változót bevonni a bázisba, részben az infeasibilitás nagyságát próbáljuk csökkenteni. A CRASH két lépésből áll. Az elsőben választhatunk: vagy a strukturális változók bázisba való bevonása (ez az alapértelmezés), vagy pedig az infeasibilitások négyzetösszegeinek redukciója az elsődleges cél. A második lépésben a CRASH az infeasibilitások abszolút értékei összegének csökkentésére törekszik.

Ha az aktuális bázis már nem all-slack állapotú (pl. a CRASH után, vagy ha egy korábban mentett feladatot indítunk újra), az optimális megoldást legcélszerűbb a PRIMAL eljárással keresni. A PRIMAL a kétfázisú módosított szimplex módszert használja.

Az optimalizálás menetét több paraméterrel kontrollálhatjuk, de lehetőség van a DPLINIT által beállított alapértelmezések használatára is. Ilyenkor csak annyi a dolgunk, hogy bármilyen paraméter megadása nélkül meghívjuk a PRIMAL eljárást.

A PRIMAL standard meghívása dinamikus pricing és cycling módszert használ annak eldöntésére, hogy a soron következő iteráció mely vektort vigye ki a bázisból, és melyiket hozza be.

Egy másik optimalizáló eljárás a DUAL, amely azonban elsősorban csak megengedett megoldás elérésére törekszik. Létjogosultsága azért van mégis, mert (a PRIMAL-tól eltérően) az eljárás során a feasibilitások csökkentése mellett a célfüggvény javítása is cél. A DUAL eljárás végén egy megengedett megoldás áll rendelkezésünkre (hacsak létezik ilyen), amely ugyan gyakran nem optimális, viszont az optimumhoz sokkal közelebb áll, mint a PRIMAL első

megengedett megoldása. Természetesen ha optimális megoldást akarunk, úgy a DUAL után meg kell hívunk a PRIMAL-t is.

Végül az OPTIMIZE makró segítségével automatikusan meghívhatjuk a fentebb ismertetett optimalizáló eljárásokat a programcsomag által meghatározott módon. Természetesen itt is van mód bizonyos paraméterek beállításával befolyásolni a futás menetét, de — főleg az MPSX/370 legegyszerűbb használata esetén — elég pusztán az OPTIMIZE makrókat meghívni, és akár all-slack állapotból kiindulva optimális megoldáshoz juthatunk.

1.4 Eredmény nyomtatási eljárások

A legalapvetőbb eljárás, amellyel információkat szerezhetünk az aktuális megoldásról, a SOLUTION. A SOLUTION meghívásával a következő nyomtatott outputhoz juthatunk:

— általános jellemzők (nem megengedett, megengedett ill. optimális-e a megoldás; iterációs szám; célfüggvény értéke stb.)

— az egyes feltételekről: sorszáma; neve; benne van-e a bázisban, vagy alsó ill. felső korláton van; sorösszeg; slack; alsó korlát; felső korlát; duális aktivitás

— az egyes változókról: sorszáma; neve; benne van-e a bázisban, vagy alsó, ill. felső korláton van; aktuális érték; input cost; alsó korlát; felső korlát; reduced cost.

A lista jelzi azt is, hogy — nem megengedett megoldás esetén — hol van infeasibilitás, ill. — optimális megoldás esetén — hol van alternatív optimum. Van lehetőség a fent felsorolt információk részleges lekérdezésére is.

Az optimalitás elérése után a megoldás érzékenysége nézve kaphatunk információkat a RANGE eljárás segítségével.

Kinyomtathatjuk a simplex táblát oszloponként (TRANCOL) vagy soronként (TRANROW).

Infeasibilitás esetén meghívhatjuk a TRACE eljárást, amely segít az ok felderítésében.

Kinyomtathatjuk az adott feladathoz tartozó bemenő adatrendszert. Kártyakép formában megjeleníthetjük az adatokat a BCDOUT eljárás segítségével, amely oszlopfolytonos listát nyújt. (Sorfolytonos listát a fentebbi TRANROW eljárással kaphatunk.) A PICTURE eljárás viszonylag jól áttekinthetően, mátrix-szerűen közli az adatokat, pusztán azok nagyságrendjének jelzésével.

Az ECL nyelv lehetőséget ad arra, hogy ne a nyomtatóra vagy egy külső file-ba küldjük, hanem egy ún. ECL-struktúrába töltsük be az adatokat. Az ECL-struktúra nem más, mint az ECL nyelv által használt speciálisan felépített PL/I struktúra. Az INQUIRE eljárás segítségével valósíthatjuk meg az adatok ECL-struktúrába töltését. Ily módon rekurzív feladatok igen könnyen kezelhetővé válnak.

Végül a STATUS eljárás segítségével információkat kaphatunk a gép, a megoldás, a mátrix és a toleranciák aktuális állapotáról.

1.5 Paraméteres eljárások

Az MPSX/370 ötféle paraméteres eljárása a következő elven alapszik: adott egy vektor, ezt szeretnénk paraméterezni; adott egy másik vektor, a paramétervektor; végül adott egy szám, ami a paraméter felső korlátja lesz. Az eljárás során a paraméterezendő vektor helyett a következő vektor kerül a work mat-

rixba: az eredeti vektor plusz a paramétervektor és a paraméter szorzata. A paraméter nullától folytonosan nő egészen a felső korlátig. Közben az eljárás báziscserékkel tartja fenn az optimalitást (feasibilitást). Az eljárás során minden báziscserénél kinyomtatásra kerül az iterációs szám, a bázisból kimenő ill. oda bemenő vektor sorszáma, a célfüggvényérték és a paraméterérték. Az eljárást bármelyik iterációnál ill. a paraméter bizonyos értékeinél félbeszakíthatjuk. Ilyenkor meghívhatunk bármilyen nyomtatási eljárást (ld. 1.4 pont), majd a paraméteres eljárás folytatódhat.

Az MPSX/370 programcsomagban a következő paraméteres eljárások vannak beépítve:

- *PARAOBJ*, paraméterezendő a célfüggvény vektor
- *PARARHS*, paraméterezendő a jobb oldal
- *PARARIM*, paraméterezendő a célfüggvény és a jobb oldal egyszerre
- *PARACOL*, paraméterezendő az egyik strukturális változó
- *PARAROW*, paraméterezendő az egyik feltétel vektor.

Természetesen a kontrol-programból a feladat bármilyen paraméterezését megvalósíthatjuk, különösen alkalmas erre az ECL nyelv.

1.6 Mentési és újraindítási eljárások

Négy ilyen eljárás van az MPSX/370 programcsomagban. Két eljárás mentő, két eljárás újraindító. Másrészt két eljárás, egy mentő és egy újraindító, a problem file-lal kommunikál, míg a másik kettő a rendszer perifériáival, ill. ECL-struktúrákkal.

Az aktuális bázist menti a problem file-ra a *SAVE* eljárás. Egy adott problémához mentett bázisok sorozata tartozhat. Az egyes bázisoknak nevet lehet adni. A mentett bázist a problem file-ról a *RESTORE* eljárással lehet behívni, természetesen megadva azt a nevet, amelyet az előző *SAVE* során használtunk.

A *PUNCH* eljárás segítségével az aktuális bázist átadhatjuk a rendszer printernek vagy punchnak, átvihetjük valamilyen mágneses adathordozóra, vagy ECL-struktúrába tölthetjük. Ennek az eljárásnak a megfordítottja az *INSERT*.

1.7 File kezelési eljárások

Az *ASSIGN* eljárás arra szolgál, hogy azonosítsuk a kontrol-programban használt MPSX/370 file neveket a job-kontrol utasításokban szereplő adatnevekkel. Természetesen a legtöbbet használt file-ok esetében ez az azonosítás automatikus.

A lineáris programozási feladatok általában megkívánnak bizonyos permanens adatállományokat, azaz olyan file-okat, amelyek nem szűnnek meg egy-egy job lefutása után sem. Mindenekelőtt ilyen a problem file. Másik ilyen a report készítéséhez szükséges file (erről bővebben később). Mindkét előbb említett file-nak közvetlen elérésűnek kell lennie. Ha viszont nincs lehetőség permanens közvetlen hozzáférésű állomány létrehozására, úgy a szükséges file-okat, például a problem file-t, minden egyes job esetében először szalagról egy temporális területre be kell olvasni, majd a job végén azokat szalagra vissza kell tölteni. Ezt a célt szolgálja az *IMPORT* és az *EXPORT* eljárás. Ezek akkor is hasznosíthatók, amikor egy adott problémát fizikailag át kell helyezni egy másik számítógépre.

Az MPSX/370 I/O adatrendszere

Az MPSX/370 számos eljárása input adatokkal dolgozik. Ilyen eljárás például a CONVERT, a REVISE, a MODIFY stb. Az input adatokat többféleképpen is megadhatjuk.

A legalapvetőbb módszer, hogy valamilyen periférián keresztül létrehozunk egy kártyaképekből álló adatfile-t. Ezt Data Deck-nek hívjuk. Ezt a Data Deck-et aztán a job futása során valamilyen perifériáról beolvassuk az MPSX/370 számára. A kártyaképeken az adatok megadása kétféleképpen történhet: kötött ill. szabad formátum szerint, de mindenképpen oszlopfolytonosan: azaz egy változónak az összes feltételben szereplő együttthatóit a Data Deck-nek egymás utáni kártyaképei kell hogy tartalmazzák.

Az ECL nyelv használata viszont lehetőséget ad arra, hogy az input adatokat ne Data Deck-en, hanem ECL-struktúra formában adjuk meg.

Az MPSX/370 által adott output vagy valamilyen perifériára kerül (rendszer printer, punch, lemez, szalag), vagy pedig ECL-struktúrába töltődik. Számos olyan eljárás van (SOLUTION, RANGE stb.), amely ún. standard formátumú file-t tud készíteni (ha a megfelelő paraméterrel lemezre vagy szalagra irányítjuk az outputját); ez olyankor hasznos, ha a kapott eredményeket valamilyen magasszintű nyelven (FORTRAN, PL/I, COBOL) írt programmal további feldolgozásnak vetjük alá.

A legegyszerűbb ECL nyelven megírt kontrol-program, amely egy, a rendszer inputon keresztül érkező Data Decken megadott problémát állít fel, old meg, és a megoldás outputját a rendszer printerre küldi, így nézhet ki:

PROGRAM: PROCEDURE OPTIONS (MAIN);

%INCLUDE DPLINIT;

 XDATA = 'ADAT';

 XPBNAME = 'PBFILE';

 XOBJ = 'CELFUGGV';

 XRHS = 'JOBOLDAL';

 CALL CONVERT;

 CALL SETUP;

 CALL OPTIMIZE;

 CALL SOLUTION;

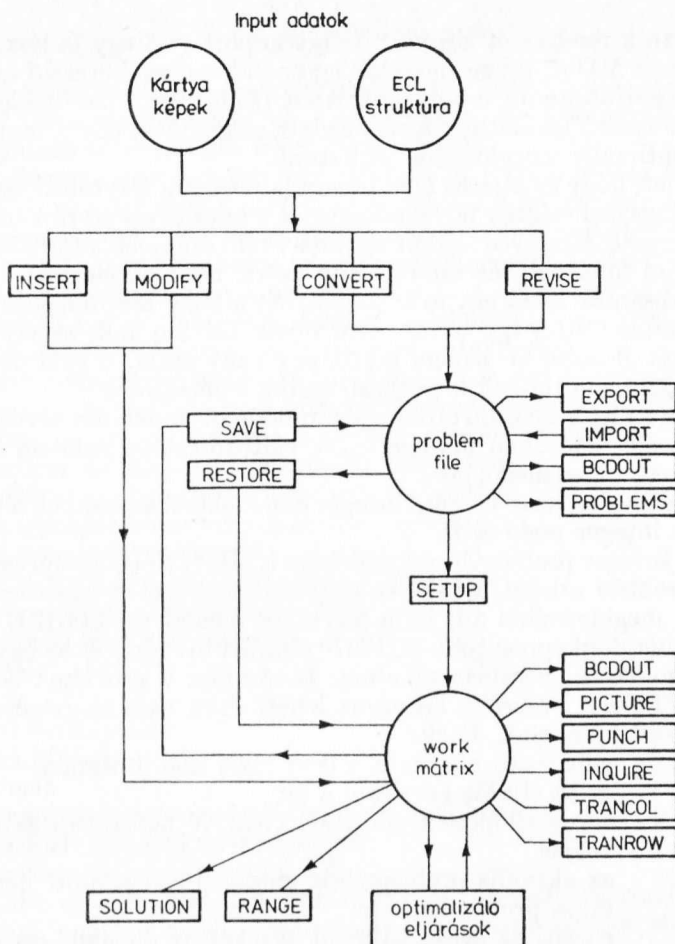
STOP;

END PROGRAM;

Az MPSX/370 programcsomag fentebb ismertetett fontosabb eljárásait az 1. ábrán szemléltethetjük:

2. Általános ismertető a MIP/370 programcsomagról

A MIP/370 programcsomag olyan lineáris programozási feladatok megoldására alkalmas, melyben a változók egy részére (vagy egészére) kikötjük, hogy azok értéke a megoldásban csak egész szám lehet. A MIP/370, mint azt a Bevezetésben említettük, nem önálló programcsomag, hiszen csak az MPSX/370-nel együtt működtethető. Egy vegyes vagy tiszta egész feladat esetén először az MPSX/370 programcsomag megoldja a problémát úgy, mintha az szabályos folytonos feladat volna. Azaz minden kikötés ugyanúgy él, mint az eredeti fel-



1. ábra

adathál, csak az nem, hogy a megfelelő változóknak egészeknek kell lenniük. Az így nyert feladatot nevezzük az eredetihez tartozó folytonos feladatnak. A tulajdonképpeni Mixed Integer fázis, azaz a MIP/370 bekapcsolódása a feladat megoldásába akkor kezdődik, amikor a folytonos feladat optimális megoldását már megkaptuk.

A MIP/370 által irányított futás ezután úgy folytatódik, hogy a programcsomag, a paraméterek beállításától és a feladat természetétől függően, választ egy ún. elágazó változót, amelynek egésznek kellene lennie, de a folytonos optimumban az értéke nem az. A megoldás ezután két ágon fut tovább. Az egyik ágon a kiválasztott elágazó változó felső korlátjának választjuk a folytonos optimum során felvett értékének az egészrészét, míg a másik ágon ugyanezen változó alsó korlátjaként az előző számnál eggyel nagyobbat választunk. Az így kapott két folytonos lineáris programozási feladatot (amelyek egymástól csak az elágazó változóra adott egyedi korlátban különböznek) megoldjuk. Ha ezt az eljárást folytatjuk, elágazási pontok, ill. elágazások, és a hozzájuk tartozó foly-

tonos feladatok rendszerét kapjuk. Az így kapott gráf egy fa lesz. Mivel alapvető kikötés a MIP/370-ben, hogy az egész-változókra kötelező explicit véges alsó és felső korlátot adni, a fának véges sok pontja lesz. Ezért ha létezik az eredeti (vegyes egész) feladatnak megengedett megoldása, úgy a fent ismertetett eljárással optimális megoldáshoz juthatunk.

Úgy tűnhet, hogy az eljárás igen hosszadalmas és a folytonos részproblémák száma az elágazási szintek növekedésével a 2 hatványai szerint nő. Valójában nem ez a helyzet. Bizonyos ágakat ugyanis rövid számolás után azonnal törölni lehet (például infeasibilitás miatt, vagy azért, mert az elérhető célfüggvény-érték csak rosszabb lehet egy már megkapott integer megoldáshoz tartozó célfüggvényértéknél stb.) Így aztán nem olyan fát kapunk, amelynek minden pontjából két él indul ki, hanem kettő, egy vagy nulla. A gráf pontjait node-oknak nevezzük. Végül is a következő esetek lehetségesek:

1. a keletkezett gráf nem tartalmaz olyan node-ot, amelyhez tartozó folytonos probléma megoldásában minden egész változó értéke valóban egész; ekkor a feladatnak nincs megoldása.
2. az előző ellentéte, azaz van ún. integer node; ebben az esetben a fa tartalmaz optimális integer node-ot is.

A Mixed Integer problémák megoldására a MIP/370 programcsomag háromféle megközelítési szintet ajánl. Az alapszint lényegében egyetlen makró, az *OPTIMIX* meghívásából áll. Ez a folytonos feladat *OPTIMIZE* makrójához hasonlóan tulajdonképpen több MIP/370 eljárást hív meg, és az egyszerűbb feladatok megoldására kiválóan alkalmas is. Amikor a probléma bonyolultabb, vagy az *OPTIMIX* makróba beépített lehetőségek nem elégségesek, a közép-szint eljárásait hívhatjuk. Ezek:

MIXSTART: előkészítő eljárás a mixed fázis számításaihoz

MIXFLOW: ez az eljárás készíti el a fát

MIXSTATS: statisztikákat közöl a *MIXFLOW* fázisról és az egész változókról

MIXSAVE: az aktuális problémához rendelve a megadott néven menti a fát a problem file-ra

MIXFIX: rögzíti az egész változók értékét az aktuális egész értékeken további olyan (folytonos) vizsgálatok számára, amikor ezeknek a változóknak az értékét fixen akarjuk tartani és csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy a többi változó hogyan viselkedik.

Az *OPTIMIX* makró tulajdonképpen ennek az öt eljárásnak egymás utáni meghívása standard paraméterekkel.

A Mixed Integer probléma magasszintű megközelítése feltételezi a mixed fázist befolyásoló és egymással igen bonyolult összefüggésben levő összes paraméter hatásának ismeretét. Ismertetésükre itt nem térünk ki.

A legegyszerűbb Mixed Integer problémák esetében tehát az előző fejezet végén leírt ECL kontrol-programon csupán annyit kell változtatnunk, hogy az *OPTIMIZE* és a *SOLUTION* között az *OPTIMIX*-et is meg kell hívunk:

```

:
:
CALL OPTIMIZE;
CALL OPTIMIX;
CALL SOLUTION;
:
:

```


3. Report Generator

A most ismertetendő Report Generator nem önálló programcsomag, hanem az MPSX/370 része. Segítségével — az aktuális megoldás alapján — különféle eredményközlő táblázatokat lehet szerkeszteni.

Külön programcsomagként elérhető egy MGRW (*Matrix Generator and Report Writer*) nevű önálló IBM termék, amely, a leírás szerint, mind a Data Deck generálásához, mind reportok készítéséhez használható; ráadásul az itt ismertetendő Report Generator lehetőségeinél rugalmasabban és hatékonyabban. Minthogy azonban ezt a programcsomagot csak papírról ismerjük, használni nem állt módunkban, ezenkívül ezt a lehetőséget az MPSX-MIP/370 installációja nem tartalmazza, ismertetésétől eltekintünk.

A Report Generator használata tulajdonképpen egy speciális (a Report Generator nyelvén megírt) program futtatását jelenti bizonyos MPSX/370 eljárások segítségével. A programnyelv a következő típusú utasításokat ismeri:

- numerikus- és karakter-konstansok definiálása
- numerikus- és karakter-konstansok beolvasása
- kiírás a rendszer outputra (printer vagy punch)
- kiírás felhasználói file-ra
- az előző két irány közötti kapcsoló átállítása
- a kiíró utasítás számára számolás
- nem kiírás számára számolás
- tesztelés
- címzés
- makró definiálása
- makró hívása
- comment.

A programnyelv a következő elemeket tartalmazza:

- numerikus- és karakter-konstansok
- numerikus- és karakter-változók
- megoldás-elemek (változók, feltételek alsó- és felső korlátai, azok értékei az aktuális megoldásban, input cost, slack, reduced cost stb.)
- mátrix-elemek
- függvények (ezek a következők lehetnek: abszolút érték, egészrész, az argumentumok minimuma, maximuma és összege, négyzetgyök)

A Report Generátort elsősorban akkor célszerű használni, ha egy adott lineáris programozási feladatot sok szempontból akarunk vizsgálni és sokszor futtatni kis változtatásokkal. Ilyenkor gyakran fölösleges a SOLUTION eléggé „bőbeszédű” outputját böngészni, amely ráadásul sok fontos információt nem mutat ki. A Report Generator lehetőséget nyújt arra, hogy minden futásról ugyanazokat a lényeges információkat kérjük le és így a megoldás jellemzőinek olyan sűrítményét tanulmányozhatjuk, amely „ránézéssel” is jól kezelhető. Nagy hibája a Report Generátornak, hogy egy futás során mindig csak az éppen aktuális megoldást veszi figyelembe, ezért a program-nyelven belül nincs lehetőség két különböző megoldás elemeinek összehasonlítására.

A Report Generator három MPSX/370 eljárást tartalmaz.

Az *ANALYZE* tulajdonképpen fordítóprogram. Inputja vagy a program-nyelven megírt program, vagy az ugyanezen a nyelven leírt adatrendszer. (Gyakran szükség van ugyanis olyan adatok bevitelére, amelyek magába a programba — variabilitásuk miatt — nem vihetők be, és sem az aktuális meg-

oldásból, sem a mátrixból nem olvashatók ki). A programot és az adatrendszert az ANALYZE külön kezeli, ezért például ha programot és adatrendszert is akarunk használni, az ANALYZE-t kétszer kell meghívni: egyszer a program miatt, egyszer az adatrendszer miatt. A lefordított programot (adatrendszert) az ANALYZE egy speciális file-on, a REPPFILE-on (REPDATA-n) helyezi el. Ez a fordítás még független a konkrét lineáris programozási feladat aktuális adataitól, tehát a fordítás eredményét célszerű megőrizni. Ezért a REPPFILE-nak (REPDATA-nak) permanens file-nak kell lennie.

A SETREP eljárás a lefordított programot és az éppen élő work matrixot összekapcsolja és a programot futáskész állapotban a REPWORK nevű file-on helyezi el.

Végül a REPORT eljárás a lefordított, összeszerkesztett programot a REPWORK-ről, az adatokat a REPDATA-ról beolvasva végrehajtja az előírt feladatokat.

4. Konkrét tapasztalatok

Több kis méretű és jelentőségű lineáris programozási feladat mellett egy nagyobb méretű modellt építettünk fel és vizsgáltunk a Bevezetésben említett két számítógépen.

A kisebb méretű feladatok, mint említettük, CMS alatt is futtathatók, ha ez installálva van. A CMS alatti futtatás a felhasználó számára nagyon kényelmes, hiszen ilyenkor rövid idő alatt számos vizsgálatot el lehet végezni, és az adatok kezelése nagyon egyszerű.

A nagy modell egy vállalat hosszútávú stratégiai tervezési feladata volt. A modell három ötéves tervidőszakot ölelt fel. Időszakonként 300–350 feltétel és 450–550 változó tartozott a feladathoz; így összesen mintegy ezer feltétel és ezeröttszáz változó alkotta a mátrixot. Az egyes időszakok közötti összefüggés szűk keresztmetszeten jelentkezett, ezért a mátrix lényegében három diagonálisan elhelyezkedő almátrixból állt.

A stratégiai tervezést 12 fejlesztési körhöz kapcsolódóan 31 integer változó segítségével írtuk le. Egy-egy fejlesztési körhöz 2–4 integer változó tartozott, amelyek mindegyike csak a 0 vagy az 1 értéket vehette fel; az azonos fejlesztési körhöz tartozó változók összege kötelezően 1 volt. Ez azt jelenti, hogy a feladat megengedett megoldásában minden egyes fejlesztési körben pontosan egy integer változó értéke egyenlő 1-gyel, az összes többié 0-val. Az ilyen jellegű integer változó csoportokat a MIP/370 külön, ún. SOS-ként (Special Ordered Set) kezeli, az ilyen feladatok megoldásánál némileg más algoritmust használ és így könnyebben jut eredményre. Ezek az integer változók jelentették tehát a döntéseket. Minden fejlesztési kör a vállalat egy nagyobb részterületének felelt meg. Az egyes integer változók reprezentálták az erre a területre vonatkozó, egymástól eltérő fejlesztési pályákat, amelyek közül pontosan egynek kell megvalósulnia. Amennyiben egy integer változó értéke a megoldásban 1, úgy a hozzá kapcsolódó beruházások, kapacitások, egyéb ráfordítások (munkaerő, munkabér, karbantartás stb.) „élnek”, az ehhez a fejlesztési körhöz tartozó többi változó által meghatározott adatok nem játszanak szerepet a megoldás többi részének meghatározásában. Az integer változók adatai természetesen mind a három tervidőszak tevékenységét meghatározták, így az ezekhez a változókhoz tartozó mátrix-elemek nem korlátozódtak egy almátrixra.

A három tulajdonképpeni tervidőszak mellett két fiktív ötéves időszakot is illesztettünk a modellhez. Ezek szerepe pusztán annyi volt, hogy biztosítsa a harmadik időszak végén elért szint fenntartását, valamint a pénzügyi egyensúly továbbvitelét. E két fiktív időszak mérete (kb. 20—20 változó és 15—15 feltétel) az egész modellhez képest elhanyagolható volt. Viszont mind az öt időszak pénzügyi elszámolásánál alkalmaztunk egy 0—1 értékű változót, amelynek a következő volt a szerepe: megengedte a vállalati tartalék megnyitását, ha az előző időszakban nem volt pénzmaradvány, ellenkező esetben viszont nem engedett a tartalékhoz nyúlni.

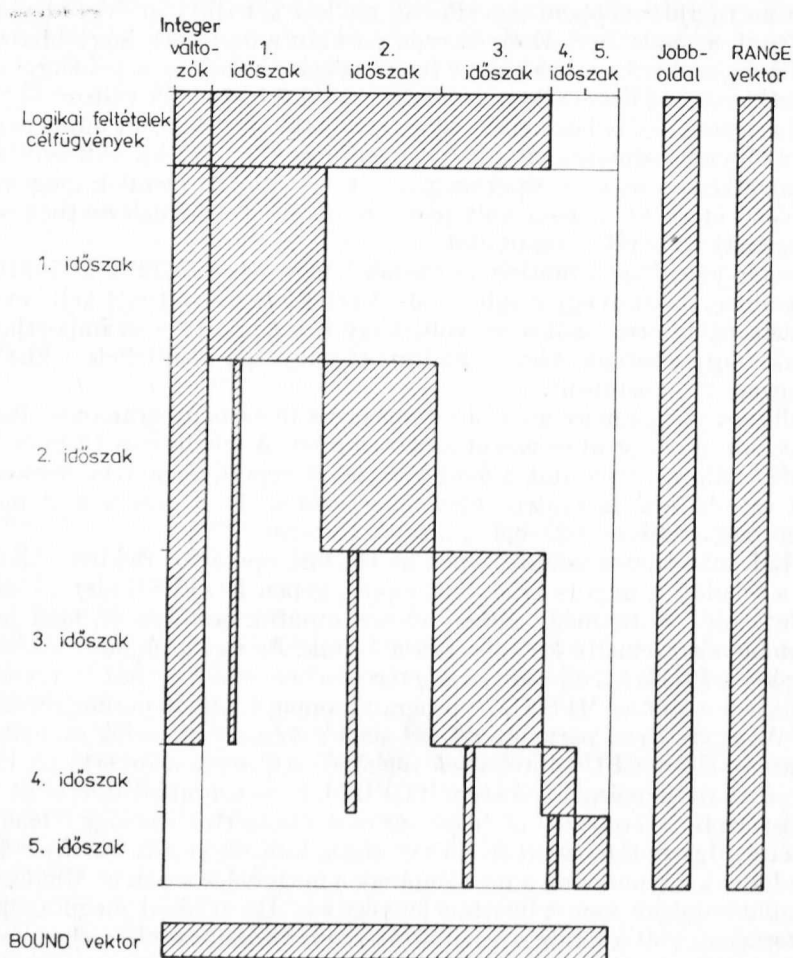
A hasonló jellegű nem-lineáris kapcsolatok leírására az MPSX-MIP/370 kiválóan alkalmas, pusztán egy megfelelő 0—1 értékű egész változót kell bevezetni. Egy másik példa erre: szükséges volt, hogy egy adott termék importját megengedjük, vagy letiltsuk; viszont az import nagysága nem lehetett kisebb egy előre megadott konstansnál.

Végülis egy eléggé nagy méretű vegyes egész lineáris programozási feladatot kaptunk, kb. ezer sorral és ezeröttszáz oszloppal. A feladatban 12 SOS feltétel és 31 SOS változó, valamint 8 0—1 változó szerepelt. A mátrix szerkezetét a 2. ábra szemlélteti. A mátrix elemeinek száma 7—8 ezer között mozgott, sűrűsége elég stabilan 0,2—0,3% között változott.

Az IBM 3031 típusú számítógépen az OS/VSI operációs rendszer alatt vizsgáltuk a feladatot, míg az IBM 4331 típusú gépen DOS/VSE alatt. Emiatt az egyes futások között, még teljesen azonos inputok esetében is, nem jelentős, de azért figyelemreméltó különbségek adódtak. Az egyik ok, ami felelős a különbségért, a PRIMAL eljárás paraméterezésében rejlik. A mátrix invertálásának szükségességét az MPSX/370 programcsomag többféle paraméterrel is irányítja. Az egyik ilyen paraméter DOS alatt a végzett iterációk számától, míg OS alatt az eltelt CPU időtől teszi függővé, szükséges-e invertálni. (A DOS ugyanis nem tudja mérni a felhasznált CPU időt, csak a futási időt, amit viszont nem célszerű figyelembe venni, hiszen ez csak kis mértékben függ a feladat természetétől). Így aztán az OS és a DOS alatti futások között bizonyos különbségek adódnak ugyanannak a problémának a megoldása során is. Mindazonáltal ezek a különbségek nem túlzottan lényegesek. Ha például megnézzük, hogy hány iterációra volt szükség a feásibilitás vagy optimalitás eléréséhez, az eltérés minden esetben 10% alatt volt.

All-slack állapotból indulva az első lépésben, a CRASH hatására, mintegy 700—800 iteráció után 100—150 helyen maradt infeasibilitás, amit további 500—600 iterációval a PRIMAL eljárással meg lehetett szüntetni, ha volt megengedett megoldás. A második fázisban a PRIMAL még 800—1000 iterációt végzett a folytonos optimum eléréséig, ha volt ilyen. Tehát az első megengedett megoldást kb. 1200, a folytonos optimumot kb. 2000 iterációval lehetett megkapni. A folytonos optimum elérésére az IBM 3031-es gép kb. 4 perc CPU időt fordított, míg ugyanez az IBM 4331-esnek kb. 15 perc CPU időbe került. (A futási idő nagysága nem jó mérőeszköz a gyorsaságra, hatékonyságra, hiszen az nagymértékben függ attól, milyen más programokkal van párhuzamosan leterhelve a számítógép.)

A folytonos optimum elérése után a MIXFLOW meglepően rövid idő alatt találta meg az optimális integer megoldást. Ez CPU időben mindig 2 perc alatt megtörtént és a megvizsgált node-ok száma sohasem haladta meg a 15-öt. Ebből is látszik, hogy a gyakorlatban nem kell félni nagyméretű fától. Érdekes tapasztalat az is, hogy a MIP/370, a mi feladatunk esetében, szinte minden eset-



2. ábra

ben olyan integer megoldást talált első ízben, ami rögtön optimális is volt. A futtatásoknak csupán pár százalékánál fordult elő az ellenkező eset, vagyis az, hogy az első integer megoldás még nem volt optimális. Háromnál több különböző integer megoldás azonban sohasem született: a mi esetünkben legkésőbb a harmadik integer megoldás optimális volt.

Komoly nehézségeink az MPSX-MIP/370 programcsomag belső tartalmából fakadóan csak egy ízben voltak. Ekkor a mixed fázisban nem kaptunk megengedett megoldást, de ezt semmi sem indokolta. Bizonyos toleranciák gondos megválasztásával végül sikerült a megfelelő eljárásokat pontosabb számolásra kényszeríteni, ami a megfelelő eredményre vezetett.

Feladataink megoldása során természetesen igen ritkán indítottunk all-slack állapotból. Általában az első ilyen futás eredményéből továbbszámolva lehetett előállítani az újabb és újabb megoldásokat. A feladat kismértékű megváltozta-

tása esetén nagyon hamar megengedett ill. optimális megoldáshoz lehetett jutni. De amikor nagyobb mértékű átalakításra volt szükség (az adatok kb. 10%-át kellett megváltoztatni), akkor is elég volt az eltárolt megoldás alapján pár száz új iterációt végezni az első megengedett megoldás eléréséig, és az optimalitásig is kb. ennyit.

Inkább a konkrét feladat belső sajátosságából származó tapasztalatunk, és az MPSX-MIP/370 programcsomag felépítésével csak kevésbé függ össze, hogy a kapott megoldás nagyon sok alternatív optimumot tartalmazott. Egy másodlagos célfüggvény bevezetésével, előírva, hogy az elsődleges célfüggvény értéke szinten maradjon, ezeknek az alternatív optimumoknak a túlnyomó része eltűnt. Az ECL nyelv használatával el lehet érni, hogy ilyen jellegű másodlagos célfüggvények vizsgálatára egyetlen job lefuttatása folyamán is sort kerítsünk.

A megoldások értékelésénél az MPSX/370 eljárásain kívül használtuk a Report Generátort is. A használat során felszínre került a Report Generator néhány hibája. Az egyik hibája a nehézkesség: különösen a feltételtől függő elágazások megszervezése bonyolult. Ezenkívül időnként kifejezetten zavaró az, hogy keveset „tud” (pl. tesztelni csak numerikus értékeket lehet). A nehézkesség folyamánként egy-egy program nagyon nagy terjedelmű, és emiatt a karbantartás is nehézkessé válik. Illusztrálásként csak annyit említünk meg, hogy modellünk input adatrendszer mintegy 5000 rekordból áll; a futás utáni report kb. 10 féle, képernyőnyi méretű táblázatához szintén kb. 5000 rekordból álló programot kell írni, ezenkívül a report futtatásához szükség van egy külön kb. 600 rekordból álló adatrendszerre is.

Összességében azonban az MPSX-MIP/370 programcsomagról igen jó benyomásokat szerezünk: viszonylag egyszerű feladatok esetében kezelése tulajdonképpen primitívnek mondható, mégis igen hatékony eljárásokkal rendelkezik; kevés igényre nem tud „felelni”. A programcsomag tervezése olyan, hogy egyszerűbb feladatok esetében elegendő viszonylag felületesen megismerni; bonyolultabb esetekben már alaposan tanulmányozni kell, míg a különösen matematikus feladatoknál kifejezetten mélyen meg kell érteni a kínált lehetőségek közötti összefüggéseket. Így aztán mindenki megtalálhatja benne azt, amire éppen szüksége van.

(Beérkezett: 1984. november 13-án.)

IRODALOM

1. IBM Mathematical Programming System Extended/370 Program Reference Manual SH19 — 1095 — 2.
2. IBM Mathematical Programming System Extended/370 Mixed Integer Programming/370 Program reference Manual SH19 — 1091 — 1.
3. IBM Mathematical Programming System Extended/370 Control Languages SH19 — 1094 — 2.
4. IBM Mathematical Programming System Extended/370 Introduction to the Extended Control Language SH19 — 1147 — 0.
5. KÉRI G.: *Az operációkutatás számítógépes módszerei I.* Budapest, Tankönyvkiadó, 1984.

KÖNYVEKRŐL

BRÓDY ANDRÁS: *Lassuló idő: A gazdasági bajok magyarázata*hoz Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest 1983. 166 o.

A *Lassuló idő* először a Közgazdaságtudományi Intézet egy tanulmányaként jelent meg, s pályafutását már akkor is szokatlan jelek kísérték: a népszerűség és a siker eszkalátorra tartozóként a tanulmány nehezen volt megszerezhető. A tanulmány sorsában osztozott a könyv is, percek alatt elkapkodták. Mi az oka a pajzán történeteket megszegyenyítő népszerűségnek? Előfordult már máskor is, hogy közgazdasági könyv népszerű volt, és a szűk szakmai környezeten kívüli közönség is élvezettel forgatta, a *Lassuló idő* népszerűségét azonban kevesen múlták felül. Mi a siker titka? Nyilván számos tényezőtől tevődik össze: a szellemes, könnyed, színpompázó stílus, időszzerű problémafelvetés, újszerű gondolatok, éles kritikai szellem, mind a sikerhez vezető egy-egy igen fontos lépés. A dolog lényege és a siker legfontosabb tartozéka mégis az, hogy Bródy András könyve egyszerűen „jó könyv”, hasznos és kellemes olvasmány.

A könyv három fejezetből áll: „A növekedésről”, „A lassulásról” és „A ciklusról”. A három kérdéskört összefűző közös gondolat a könyv címében is megjelenő probléma, a gazdasági növekedés lassulása, a hosszú évtizedek óta tapasztalt és szinte már természetesnek tekintett növekedési folyamat megtorpanása, a megtorpanás magyarázata. Az elméleti, modellisztikus közgazdaságtan oldaláról közelítve a könyv tárgya az egyenletes növekedés Harrod-Domar-(Leontief) modelljének „ízre szedése” és bírálata. Érdekes mindjárt leszögezni, hogy Bródy a lassulást nem átmene-ti, rövidtávú jelenségnek tekinti, amely felületi kezeléssel, „teakúrával” orvosolható, hanem a gazdasági növekedés mélyen-fekvő dinamikus törvényeinek alapvető, objektív, hosszantartó és elkerülhetetlen következményének.

Az első fejezetben a szerző a gazdasági

növekedés és a nemzeti jövedelem szimplifikált összekapcsolását támadja, azt a koncepciót, amely alapján: „Az egy főre jutó nemzeti jövedelem szintje és e szint évenkénti növekedése a siker általánosan elfogadott mutatója. Ebben a minőségben kiszorított minden egyéb számszerű vagy nem is számszerűsíthető jellemzőt, s a világon mindenütt minden jelenséget egyre inkább abból a szempontból vizsgálunk, hogy elősegíti-e vagy hátráltatja-e fétisszerűen bálványozott mutató alakulását”. A támadás kétirányú, egyrészt a számszerűsítés korlátait hangsúlyozza, másodszor a mutató használatának indokoltóságát kérdőjelezi meg. A könyv egészének gondolatmenetét szem előtt tartva a mutató manipulálhatósága, bizonytalansága másodlagos jelentőségű. A szerző lényegi mondanivalóját a legszemléletesebben a „Zambiai közbizalom” alfejezet írja le, amely az infrastruktúra és az emberi tényezők szerepét emeli ki. A gazdasági növekedés és fejlettség fogalmait túlságosan bonyolult és összetett fogalmak, egyetlen mérőszámra sűrítésük megoldhatatlan feladat. A közgazdaságtan legfőbb kérdése, amióta ez a tudomány létezik, hogy „miből is ered a nemzetek gazdagsága”. Bródy véleménye: „A valódi gazdagság... az ember”, „... a társadalom leköltött eszközei között az emberi munkaerőben felhalmozott képesség a domináló...”. A nemzeti jövedelem fogalma helyett egy új mutató számszerűsítését javasolja: „... az (új) mérőszámnak tartalmaznia kell az emberi munkaerő, sőt az emberi élet újratermeléséhez szükséges összes tevékenységet is.”

A második fejezetben a szerző figyelme a lassulás okai felé fordul. A fejezet lényegét ismét a közbizalom fogalma tartalmazza. Az alkotó és tudományos értelmiség elbürokratizálódása, az a folyamat, amely során a „Hivatal vagy az Üzlet maga alá rendeli a Tudományt, neki tetsző ámdé általában használhatatlan és már születésekor avult szempontok szerint” korunk alapvető problémáinak egyike. „E hivatások (oktatás,

kutatás) kommercializálása, áruvá válása nem vált javukra.” „Ennek a következménye az, hogy egyforma joggal állapíthatjuk meg mind e foglalatosságok beszűkülését és ugyanakkor felhígulását: egy egyre szűkülő és egyre kisebb létszámú nagy tehetségű és gyakran teljesen az aszkézisig önzetlen, magát elhivatottnak érző partizán csapat úszik a híg hozzá nem értés és félhőzártság, a botesinálta kutatók és oktatók bezupált katonákhoz hasonlatos tengerében”. A gazdasági növekedés lassulásának okát a szerző a következőkben összegzi: „A technikai fejlődés szellemi és oktatási tartalékai vannak hát kimerülőkben, s véleményem szerint már régóta és meglehetősen hosszú időre.”

A könyv harmadik része a gazdasági ciklusok vizsgálatát tűzi célul. A dinamikus rendszerek elméletéből közismert, hogy az időbeli folyamatok hajlamosak a ciklizálásra, egyensúlyi állapotaik körüli rezgőmozgásokra. A gazdasági növekedés bonyolult folyamata nyilvánvalóan számos ciklikus komponenset tartalmaz. Természetesnek tűnik, hogy a közismert 7–8 éves rövidtávú üzleti ciklusok mellett léteznek hosszú, 50–60 éves periódussal rendelkező ciklusok is. Nyilvánvaló, hogy ezek az ún. Kondratiev ciklusok jelentősen befolyásolhatják a különböző generációk életpályáját, és így vizsgálatuk, kimutatásuk alapvető feladata a közgazdasági elméletnek. Ezen a téren azonban — miként a szerző hangsúlyozza — nagy bizonytalanság uralkodik, mondhatnánk teljes a tanácstalanság. A Kondratiev és a demográfiai ciklus összekapcsolása jó hipotézisnek tűnik. A ciklus hosszát a szerző véleménye szerint az ember biológiai újratelmeztetése határozza meg. Érvelése meggyőző, de a nevezetes kilenc hónap szerepe a frekvencia meghatározásában úgy gondolom pontosításra, újragondolásra szorul.

Módszertani szempontból igen érdekesek a kereslet és kínálat törvényének működésére vonatkozó megjegyzések. Tudomásom szerint elsősorban Walras nyomán a matematikus közgazdászok az egyensúlytalan gazdasági rendszerek mozgását elsőrendű differenciálegyenlettel szokták leírni, vagyis feltételezik, hogy az egyensúlytalanság mértéke a változó sebességére hat. Bródy véleménye szerint azonban az egyensúlytalanság mértéke a változás gyorsulására hat, vagyis az egyensúlyi állapotából kilendült rendszer mozgását másodrendű egyenlettel írhatjuk le.

„Arról döntünk, hogy a növekedési ütemet gyorsítsuk vagy lassítsuk-e.” „A döntés hatását ábrázoló egyenlet az eddigiektől eltérően nem valamilyen „egyensúlyt” fogalmaz meg, hanem azt mondja ki, hogyan viselkedik a gazdaság, ha nincs egyensúly-

ban és ha a döntési változója a termelés sebességének gyorsítása vagy lassítása

$$\int_0^t (\lambda - s) dt = Ds."$$

(Az egyenletet deriválva $\lambda - s = D \frac{d^2 s}{dt^2}$.)

Bródy véleménye szerint a gazdasági mozgások ciklikus jellegének kulcsa a másodrendű mozgásegyenlet. Elsőrendű differenciálegyenleteknek másodrendű egyenletekre való felesterelése a fizika történetében is fontos szerepet játszott. Felületesen és elnagyoltan kifejezve Newton mozgásegyenletei éppen abban különböznek a korábbi elméletektől, hogy a mozgás sebessége helyett a gyorsulást helyezte a vizsgálatok középpontjába, és az $F = mv$ egyenletet az $F = ma$ egyenlettel helyettesítette. (Részleteket lásd. Simonyi Károly nagyszerű, *Fizika kultúrtörténete* című könyvében.) Miként a fizikában, a közgazdaságtanban is a második derivált figyelembevétele a folyamatok „tehetetlenségét” reprezentálja. Egy másodrendű rendszert hiába vezérelünk az egyensúlyi pontja felé, az elérve az egyensúlyi állapotot a tehetetlenség erejétől hatva túllendül rajta, úgy mond „átesik a ló másik oldalára”. A túlkeresletből túlkínálat lesz, majd e túlkínálatból ismét túlkereslet stb., röviden: a gazdaság ciklikusan mozog; „ciklus hátán ciklus”.

A könyv egészének legfontosabb jellemzője a szerző nem éppen alaptalan pesszimizmusa. A fegyverkezési verseny fokozódása, a környezet rettenetes elszennyeződése nem valami rózsás jövőre utaló előjelek. A *Lassuló idő* igazi Kasszandra jóslat. Igaza van a szerzőnek, valóban „az idő csutkáján rágódunk”?

Fogás kérdés, reméljük nem. A kérdést azonban ne hessegetsük el magunktól és ne ítéljünk sommásan, vegyük figyelembe, hogy akár hitték Trója lakói a tudós papnő szavait, akár nem, az acháj hadak — ha némi nehézség árán is — lerombolták a büszke város falait!

Kasszandra és Bródy hasonló társadalmi jelenségek kifejezői. Kasszandra az archaikus kor Bródyja és Bródy a jelenkor Kasszandrája. Mindketten egy válságkor válságtudatának szószólói és mondanivalójuk ebből a szempontból mindig új, de ugyanakkor rendkívül régi, mondhatnám ősi. A ciklus hátán ciklus kép már megjelent az indusoknál és számos antik szerző művében találkozhatunk az általános erkölcsi hanyatlást megállító rátermett férfiak periódikusan jelentkező seregével. Ősi elméletek és gondolatok visszfényre vetődik a könyv lapjaira, és éppen ebből táplálkozik meggyőző, szuggesztív ereje.

MEDVEGYEV PÉTER

Közlemény

A Nyolcadik Nemzetközi Input-Output Konferenciát 1986. július 28-a és augusztus 2-a között tartják Sapporo-ban (Japán) a Hokkaido Egyetemen. Előadásokkal 1985. szeptember 30-ig lehet jelentkezni, a végleges szöveg leadásának határideje: 1986. január 31. A konferencia titkárnője: Ms. Anna Gelei, Secretary, UNIDO, Vienna International Centre, P.O. Box 300, A — 1400 Vienna, Austria.

Köszönet a kötet lektorainak

A Sigma 1984. évfolyamához benyújtott cikkeket — a Szerkesztőség állandó munkatársain kívül — a következő külső munkatársak lektorálták:

*Ábel István
Arató Máttyás
Bródy András
Csepinszky Andor
Éltető Ödön
Frigyes Ervin
Halpern László
Heppes Aladár
Hunyadi László
Hüttl Antónia
Kovács Álmos
Kovács János*

*Kozma Géza
Kőrösi Gábor
Kutas János
Laky Teréz
Ligeti Csák
Matits Ágnes
Medvegyev Péter
Meszéna György
Orlóczi István
Rapcsák Tamás
Simon András
Szántai Tamás*

Ziermann Margit

Áldozatkész munkájukért ezúton is köszönetet mond a Szerkesztőség.

CONTENTS

ÉVA KIGYÓSSY-SCHMIDT: Indirect evaluation of non-market services	211
ANDRÁS BENEDEK: Analysis of human resources with simulation modelling	223
GYÖRGY NÉMETH: Simulation of a queuing system with one service station	243
SÁNDOR KOMLÓSI: On optimality criteria of mathematical programming problems ..	257

SOFTWARE

GÁBOR HANÁK: MPSX-MIP/370 mathematical programming software package	267
--	-----

BOOK REVIEWS

ANDRÁS BRÓDY: Slow down: about our economic maladies (<i>Péter Medvegyev</i>)	283
---	-----

СОДЕРЖАНИЕ

Ева Кидеши-Шмидт: Косвенная оценка производительности нетоварного сектора	211
Андраш Бенедек: Анализ человеческих ресурсов с помощью симуляционных моделей	223
Дердь Немет: Симуляция модели очередности с одним местом обслуживания	243
Шандор Комлоши: О критериях оптимальности в задачах математического программирования	257

СОФТВЕР

Габор Ханак: Покет программ математического обеспечения MPSX—MIP/370: несколько конкретных опытов	267
---	-----

О КНИГАХ

Андраш Броди: Замедляющееся время: К объяснению экономических проблем (<i>Петер Медведьев</i>)	283
--	-----

Ára: 20 Ft

Előfizetés egy évre: 80 Ft

ISSN 0039—8128

TARTALOM

SCHMIDTNÉ KIGYÓSSY ÉVA: A nem áruszektor teljesítményének közvetett értékelése	211
BENEDEK ANDRÁS: Emberi erőforrás elemzése szimulációs modellezéssel	223
NÉMETH GYÖRGY: Egy-kiszolgálóhelyes sorbanállási rendszer szimulációja	243
KOMLÓSI SÁNDOR: Matematikai programozási feladatok optimalitási kritériumairól	257

SZOFTVER

HANÁK GÁBOR: Az MPSX-MIP/370 matematikai programozási programcsomag: Néhány konkrét tapasztalat	267
--	-----

KÖNYVEKRŐL

BRÓDY ANDRÁS: Lassuló idő: A gazdasági bajok magyarázatához (Medvegyev Péter)	283
---	-----



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST