

SZIGMA

Matematikai-közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági
Szakosztályának lapja

Szerkeszti:

MARTOS BÉLA

Társszerkesztők:

BOD PÉTER, IFJ. KREKÓ BÉLA, PONGRÁCZ TIBOR,
SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA

Szerkesztő bizottság:

AUGUSZTINOVICS MÁRIA, BOD PÉTER, CSEPINSZKY ANDOR, ÉLTETŐ ÜDÖN, FORGÓ FERENC,
HALABUK LÁSZLÓ, KELLE PÉTER, KORNAI JÁNOS, KOVÁCS ÁLMOS, KREKÓ BÉLA, LIGETI ISTVÁN,
MESZÉNA GYÖRGY (elnök), MIKÓ GYULA, ORMÓS ZSOLT, SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA, SIMONOVITS
ANDRÁS, SÓLYOM CSABA, STAHL JÁNOS, SZAKOLCZAI GYÖRGY, SZÉP JENŐ, TÓTH JÓZSEF, ZALAI
ERNŐ, ZIERMANN MARGIT

*

E szám szerzői

BRÓDY ANDRÁS, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Közgazdaságtudományi
Intézet tudományos tanácsadója, JESUS CARRERA, a University of Arizona, Tucson,
hidrológiai tanszékének kutatója, HULYÁK KATALIN, az OT Tervgazdasági Intézet fő-
munkatársa, KALMÁR JÁNOS, az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézet tudomá-
nyos munkatársa, KÖRÖSI GÁBOR, az MTA Közgazdaságtudományi Intézet tudományos
munkatársa, DR. LENGYEL IMRE, a Békés megyei Tanács VB Tervosztálya főelőadója,
MARTOS BÉLA a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Közgazdaságtudományi In-
tézet tudományos tanácsadója, SEMJÉN ANDRÁS, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági
Intézete főelőadója, SZIDAROVSKY FERENC kandidátus, a Kertészeti Egyetem docense,
EDUARDO USUNOFF, a University of Arizona, Tucson, hidrológiai tanszékének kutatója

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43—45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél a Posta
hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodáknál (PKHI 1900 Budapest, József
nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKHI 215—96 162
pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-
Zsilinszky út 76 sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363
Budapest, Alkotmány u. 21. Telefon 111-010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488,
és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest, Váci u. 22. Telefon:
185-612. Előfizetés díj egy évre: 80, —Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest. Pf. 149

Nem-walrasi szabályozási modellek egy családja¹

1. Bevezetés

A nem-walrasi szabályozási modellek alapgondolatai *Kornai János* „Anti-equilibrium”-ához [3] nyúlnak vissza. Az első ilyenfajta modellt *Kornai* és *Martos* [7] szerkesztette, ezt egy sorozat különböző szerzőktől származó tanulmány követte, közülük sokat a „Szabályozás árjelzések nélkül” [8] c. kötet tartalmazott.² A jelen tanulmány ezt a kutatási vonalat folytatja a formalizált szabályozási modellek egy újabb sorozatával. Bennük *Kornai* és *Martos*, *Martos*, *Bródy*, *Kornai* és *Simonovits* [8] számos gondolata megőrződik³ és összegeződik, valamint továbbhalad a következő irányokban:

- Párhuzamosan megjelenik készletjelzés és megrendelésjelzés ugyanabban a modellben.
- Külön kereskedelmi szektor iktatódik a termelők és fogyasztók közé.
- A „rövidebb oldal elvének” elvetése egyes modellekben.
- A „nem-ár” jelzéses modellek összehasonlítása olyannal, ahol a termelők állapítják meg a (nem-walrasi) árakat.

A végső következtetés az lesz, hogy *ugyanazt a gazdaságot különböző nem-walrasi szabályozókkal lehet működtetni*. (Eltérésekkel a jelek tartalmában, az információáramlás és döntéshozás szerkezetében.)

A 2. fejezetben az alapfogalmakat és elveket vezetem be. A 3–8. fejezetekben öt modellt mutatok be, gazdasági interpretációjukkal és strukturális elemzésükkel egyetemben. A 9. fejezet tartalmazza e modellek stabilitási feltételeit, a 10. fejezetben működőképességükkel foglalkozom a 11-ben pedig általános következtetéseket vonok le. A 9. és 10. fejezetben található eredmények matematikai taglalását külön *Matematikai függelékbe* tettem.

2. Fogalmak és elvek

A célból, hogy e cikk önmagában is érthető legyen, felidézek néhány fogalmat és alapelvet mind magam, mind mások régebbi írásaiból. Ezek olyan általános

¹ Ez a cikk *Gazdasági szabályozási struktúrák és működésük: a nem-walrasi eset* c. akadémiai doktori értekezésemnek egy részét dolgozza fel tömörített formában. Előadtam az ESEM'83 konferencián Pisában és a XI. Magyar Operációkutatási Konferencián Balatonfüreden.

² A könyv összefoglalását lást [11]-ben.

³ Különösen a koordinálatlan döntéshozatal működőképessége és a „norma szerinti szabályozás” elve.

keretet vázolni fel, amelybe a fentebb említett előzményekkel együtt ez a tanulmány is beleillik.

a) Szigorúan megkülönböztetem a gazdaság *reálszféráját*, melyben a reáltevékenységek (termelés, javak átadása, fogyasztás) folynak, a *szabályozási szférától*, ahol jelekkel (jelképzéssel, jelek átadásával, döntéshozással) van dolgunk. A két szférát egyik végükön a reálmenntényiségek *megfigyelése* (mérése), másik végükön a reálfolyamatokba való *beavatkozás* köti össze.

A jelek között megkülönböztetek mennyiségi (nem-ár) jelzéseket (pl. készletekről, rendelésállományról) és árjellegű jelzéseket (pl. árak, gazdaságossági mutatók vagy más pénzben kifejezett jelzések). Mind a walrasi általános egyensúlyelmélettel, mind a nem-walrasi „adagolásos egyensúly” elméletével szemben a nem-ár jelzések itt sokkal jelentősebb szerepet játszanak.

b) Mind a reálszférának, mind a szabályozási szférának a leírása *dinamikus*, mind az *állomány*, mind a *folym* típusú változók az idő függvényei. A szabályozás folyamaton belüli (*on-line*), azaz a kapott jelek a döntésre és a reálfolyamatokba való beavatkozásra időtlen „tapogatózás” és „újraszerződés” nélkül hatnak. A nem-egyensúlyi reálmenntényiségek és szabályozójelek ugyanabban a valódi időben befolyásolják egymást.

c) Klasszikus *visszacsatolási hurkokat* alkalmazok a résztvevők (determinisztikus) magatartásának leírására. Ebben az is benne van, hogy nem tételezek fel optimáló magatartást (ellentétben szinte az egész egyensúlyelméleti és „disequilibrium” irodalommal). Vannak exogén beállító jelek (modelljeinkben: *normák*) és a szabályozási mechanizmust az hozza mozgásba, ha különbség van az állapotváltozóknak a ténylegesen megfigyelt és a norma szerinti értéke között. Ebben a tanulmányban a termelő vállalatok input és outputkészleteinek, rendelésállományainak van normájuk, más modellekben sok másféle norma is szerepel.⁴ A *norma szerinti szabályozásnak* ezt az elvét alkalmazván nem tételezem fel, hogy a normák valamiféle kívánt, szándékolt vagy optimális állapotot reprezentálnak, csak azt, hogy a döntéshozók e történelmi tapasztalat vagy megegyezés formálta értéket az alkalmazkodás mércéjéül elfogadták.

d) A különböző szabályozási mechanizmusokat három kritérium szerint értékelem:

- (i) Stabilitás
- (ii) Működőképesség
- (iii) Szerkezeti jellemzők.

A *stabilitás* fogalma a szabályozáselméletből ered: egy rendszer akkor aszimptotikusan stabilis, ha a változók (konstans külső hatást feltételezve) valamilyen véges határértékhez tartanak, ha az idő végtelenhez tart.

A *működőképesség* azt jelenti, hogy azok a változók, amelyek közgazdasági értelmezésük szerint nem vehetnek fel negatív értékeket (pl. termelési szint, javak készletei stb.) valóban soha nem válnak negatívvá a modell szerint sem.

e) A *struktúra* szempontjából a szabályozási mechanizmusokat a jelképzés szerkezete (*döntési struktúra*) és a jelátadás szerkezete (*információs struktúra*) jellemzi. A jelképzésnél megkülönböztetek *koordinálatlan* döntéseket, melyet a résztvevők (vállalatok) elkülönülten hoznak és koordinált döntéseket, ahol vagy a reálszervezetek egymás között *interaktív* módon koordinálják döntéseiket (mint pl. a piacon) vagy pedig van egy vagy több elkülönült koor-

⁴ Pl. a várakozási sor normális hossza [9]-ben, vagy egy aggregált hiány-indikátor normál értéke [6]-ban.

dináló szervezet (pl. tervhivatal, államháza, központi bank), ez esetben a jelátalakítás (részben vagy teljesen) *centralizált*.⁵

Ami pedig az információs struktúrát illeti, egy folyamat lehet *nem-kommunikatív*, ha a jel nem hagyja el a szervezetet, amelyben keletkezett, *tranzakciós kommunikatív*, ha a jel csak két reálszervezet között áramlik és egy tényleges vagy potenciális tranzakciójukhoz kapcsolódik, és végül *nem-tranzakciós kommunikatív* minden más esetben, különösen ha egy szabályozási szervezet is részes benne.

f) A hangsúly a termelő vállalat magatartásán van: a végső felhasználás exogén, a fogyasztói magatartást elhanyagolom.

g) Nem veszem figyelembe a források szűkösségét. Ami az elsődleges erőforrásokat, a munkaerőt és a termelési kapacitásokat illeti, ezt azért tehetem meg, mert a modellek lényegében stagnáló gazdaságokat ábrázolnak és nem fordítanak figyelmet a növekedésre. A pénzügyi források szűkösségét illetően pedig Kornai [4, 5], „puha költségvetési korlát” fogalmára hivatkozom.

3. A közös reálszféra

Öt különböző szabályozási mechanizmust fogok illeszteni lényegében azonos reálfolyamatokhoz. Ezért módomban áll a reálfolyamatoknak egy viszonylag egyszerű ábrázolását választani: a *nyílt statikus Leontief-gazdaságot* állandó technológia mellett. A hagyományos formától egy ponton tértek el: az input és outputkészleteket külön kezeltem, ez már maga is visz némi dinamikus ízt az egyébként statikus Leontief-gazdaságba.

Jelölések

n a termelők (szektorok) és a termékek száma. A latin kisbetűk vektorokat, a latin nagybetűk mátrixokat jelölnek. A kurzív betűk a t idő függvényeit jelölik, amelyek a $t \geq 0$ értékekre vannak definiálva és itt folytonosan differenciálhatók is. Az álló betűk az időtől nem függő (konstans) vektorokat és mátrixokat jelölik. A görög kisbetűk skaláris konstansok.

Reálváltozók és konstansok

r : termelési vektor

Y : transzfer mátrix (Y_{ij} : az i termék átadása a j termelőnek)

q : outputkészlet

V : inputkészlet

c : a végső felhasználás vektora (exogén)

A : inputkoefficiens mátrix

e : az összegező vektor: $[1, 1, \dots, 1]'$

$\langle b \rangle$: a b vektorból képezett diagonális mátrix

$'$: a transzpozíció jele.

⁵ Ebben a dolgozatban csak koordinálatlan szabályozókkal foglalkozom. Ekvivalens koordinált szabályozást találhatunk [10]-ben vagy [8] 8. és 9. fejezetében.

Az output mérleg

$$(1) \quad \dot{q} = r - Ye - c,$$

azaz az outputkészletek változása egyenlő a termelt mennyiségek mínusz a transzferek a termelőkhöz és végső felhasználásra. Ez a vektoregyenlet n skalár egyenletből áll, melyek

$$\dot{q}_i = r_i - \sum_j Y_{ij} - c_i \text{ alakúak.}$$

1. FELTEVÉS: $c(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, azaz a végső felhasználás szemipozitív.

Az input mérleg

$$(2) \quad \dot{V} = Y - A \langle r \rangle,$$

azaz az inputkészletek változása egyenlő a transzferek (anyagvásárlások) mínusz a termeléshez használt inputok. Ez a mátrixegyenlet n^2 skaláregyenletből áll, melyek

$$\dot{V}_{ij} = Y_{ij} - A_{ij} r_j \text{ alakúak.}$$

2. FELTEVÉS: Az A mátrix eleget tesz a szokásos nem-negativitási, irreducibilitási és produktivitási (spektrálsugara $\varrho < 1$) feltevéseknek és emellett feltesszük, hogy sajátértékei egyszerűek.

Az A sajátértékeinek halmazát (spektrumát) $\mathcal{A}$ -val jelöljük, úgy, hogy $\varrho = \max \{ |\varphi| : \varphi \in \mathcal{A} \}$.

4. Inputkészlet és outputkészlet jelzésre működő szabályozó (1. sz. modell)

Az (1) és (2) egyenletekkel ábrázolt reálfolyamatokat véve alapul a legegyszerűbb szabályozó az lesz, amelyik megfigyeli az input- és outputkészleteket, összehasonlítja őket a megfelelő normákkal és ebből alakítja ki a termelési és anyagvásárlási döntéseket.⁶

Normák és szabályozó paraméterek

q^* : az outputkészlet normák vektora

V^* : az inputkészlet normák mátrixa

β : csillapítási tényező (skaláris szabályozó paraméter)

γ : természetes frekvencia (skaláris szabályozó paraméter).

A termelés szabályozása (a termelő által)

$$(3) \quad \dot{r} = -2\beta\gamma\dot{q} - \gamma^2(q - q^*),$$

A transzferek szabályozása (a vevő által)

$$(4) \quad \dot{Y} = -2\beta\gamma\dot{V} - \gamma^2(V - V^*).$$

⁶ Ez a modell a [7]-ben, majd [8] 2. fejezeteként publikálnak módosított változata.

3. FELTEVÉS: $\gamma > 0$ (az általánosság megszorítása nélkül).

EMLEKEZTETŐ: Az 1., 2. és 3. feltevéssel a dolgozat egészében élek, akkor is, ha nem emlitem újra.

Értelmezés

Noha nincs bizonyítékunk rá, hogy a vállalatok a (3) és (4) magatartási szabályokat követik, e szabályok nem mondanak ellent a józan észnek. A termelő akkor növeli termelését, ha outputkészlete csökken vagy norma szerinti értéke alá esik — és fékezi a termelést az ellenkező esetben. Ugyanígy növelik ill. csökkentik anyagvásárlásaikat az inputkészletek változási sebességétől és normához képest elért szintjüktől függően.

Az, hogy az összes szabályozó egyenletekben ugyanazt a két paramétert (β és γ) szerepeltetem, nem azért van, mintha azt feltételezném, hogy az összes döntéshozók minden döntésükben egyformán viselkednek. Ez csak egy matematikai fogás, ami megkönnyíti az elemzést. Ha egy szabályozó szerkezetet jól be lehet hangolni úgy, hogy csak két hangoló gombot állítok be a megfelelő értékre, akkor kettőnél többnek az alkalmazása nem ronthatja a szervezet működését.

Mivel működőképes rendszerben a készletek nem lehetnek negatívak, a vevők mindig végre tudják hajtani termelési és vásárlási döntéseiket. Másszóval: a „rövidebb oldal elve” érvényesül ebben a gazdaságban és mindig az eladók vannak a hosszú oldalon (vevők piaca).

Strukturális elemzés

Komponensenként megnézve a (3) és (4) szabályozó egyenleteket, azonnal látható, hogy az i termelőnek csak saját outputkészleteiről kell információval rendelkeznie a termelési döntéshez és csak a j anyagból raktáron levő input készletét kell ismernie ahhoz, hogy vásárlásairól döntsön. Tehát a szabályozási folyamathoz nincs szükség koordinációra a vállalatok közt, sőt még információk cseréjére sem. Tehát a szabályozó *koordinálatlan* és *nem-kommunikatív*.

5. Inputkészlet és rendelés jelzés (2. sz. modell)

Az első modellben a szabályozó működése a nem-negatív outputkészleteken múlt, nem volt akadálya, hogy a vevők végrehajtsák vásárlási döntéseiket akár termelési célra, akár végső felhasználásra. A valóságos gazdaságban azonban vannak olyan termékek, amit soha nem termelnek raktárra, hanem csak a fogyasztó megrendelésére (pl. azért, hogy az egyedi kíválmaknak eleget tegyenek). Másrészt az is előfordul, hogy olyan javakból, amiket általában raktárra termelnek, kifogy a készlet, a vevőknek várniuk kell megrendelésük teljesítésére és a transzferek ütemezéséről az eladó dönt. Az általános esetben e kétféle szituáció párhuzamosan is fennáll különböző javakat illetően és változva is egy jószágnál különböző időszakokban. Az 1. sz. modellben az egyik szélsőséges esetet vizsgáltuk meg, most a másik szélsőséget vesszük szemügyre,

amikor is az outputkészletek mindig nullák és a megrendeléseket az eladó intézkedése szerint teljesítik.⁷

A rendszer reálfolyamatait változatlanul az (1) és (2) egyenletek reprezentálják.

Szabályozási változók és normák

W : a rendelés-feladás mátrixa

K : a rendelés-állomány mátrixa

K^* : a rendelés-állomány normájának mátrixa

A termelők nem tartanak outputkészletet

$$(5) \quad q(t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

A rendelésállomány mérlege (amit az eladók tartanak nyilván)

$$(6) \quad \dot{K} = W - Y,$$

azaz a rendelésállomány változása a beérkező új megrendelések és a végrehajtott transzferek különbsége.

A rendelés-feladás szabályozása (a vevő által)

$$(7) \quad \dot{W} = -2\beta\gamma\dot{V} - \gamma^2(V - V^*),$$

azaz a megrendelések feladása az inputkészletek változásától és szintjétől függően változik, a már ismert formula alkalmazásával.

A transzferek szabályozása (az eladó által)

$$(8) \quad \dot{Y} = 2\beta\gamma\dot{K} + \gamma^2(K - K^*),$$

azaz a transzferek a hátralékos rendelésállománytól függenek (amelyeknek van K^* normájuk). Figyeljük meg a pozitív visszacsatolást: a norma feletti állomány és a hátralék növekedése növeli a kiszállítást is.

Értelmezés

A vevők és eladók magatartása ebben az esetben is ugyanolyan „ésszerű”, mint a készletjelzéses modellben volt. De most van egy bökkenő: meg kell magyarázni, miért kezeljük ebben a modellben másképpen azokat, akik input anyagokat vásárolnak, szemben azokkal, akik végső felhasználásra teszik ezt. Amíg az első csoport megrendelést ad fel és várakozik, a másodiknak elsőbbsége van és a folyó termelésből azonnal kiszolgálják. A két csoport egyforma kezelése bonyolultabbá tenné a modellt, de semmi újat nem adna az elemzéséhez, ezért tartottam meg a modell itteni visszatetsző formuláját.

⁷ Ehhez a modellhez egyes alapgondolatokat a Kornai és Simonovits-féle rendelésjelzéses modellből [8, 12. fejr.] kölcsönöztem, de maguk a modellek formailag eltérők.

A rövidebb oldal elve ebben a modellben is érvényes, de ellenkező értelemben, mint a készletjelzéses modellnél: most az inputanyagok vásárlói vannak a hosszú oldalon (eladók piaca).

Strukturális elemzés

A (6) egyenlet könyvelési azonosság. Az eladó megfigyeli mennyit szállított vevőinek (amiről egyébként ő döntött) és jeleket (megrendeléseket) kap tőlük. Ezek birtokában folyamatosan vezetni tudja — koordináció nélkül — a teljesítetlen megrendelések hátralékát. Ezt az információt maga használja fel (tehát kommunikálnia nem kell), amikor a transzferekről dönt (8) szerint. A vevő pedig arról dönt, mekkora megrendelést adjon föl (7), miután megfigyelte saját inputkészleteit. Az előbbi döntési folyamat koordinálatlan és nem-kommunikatív, az utóbbi ugyancsak *koordinálatlan*, de *transzakciós kommunikatív* (rendelés-jelzéssel). Ettől a szabályozási folyamat egészét is az utóbbi minősítés jellemzi.

6. Inputkészlet, outputkészlet és megrendelés jelzés (3. sz. modell)

Az első két modellben két szélsőséges esetet vizsgáltam: az egyikben soha nem volt teljesítetlen megrendelés, mivel a termelők outputkészletet tartottak, a másikon soha nem volt outputkészletük, de volt teljesítetlen megrendelésük. Az első a vevők piacáról, a második az eladók piacáról adott absztrakt képet. Közelebb jutunk a valósághoz (vö. [2]), ha azt tételezzük fel, hogy minden jószágból egyszerre van outputkészlet is, teljesítetlen megrendelés is. Így a szabályozó az előző kettő kombinációja lesz.

A rendelésállomány mérlege (amit az eladók tartanak nyilván)

$$(9) \quad \dot{K} = W - Y$$

A termelés szabályozása (a termelő által)

$$(10) \quad \dot{r} = -2\beta\gamma\dot{q} - \gamma^2(q - q^*).$$

A rendelés-feladás szabályozása (a vevő által)

$$(11) \quad \dot{W} = -2\beta\gamma\dot{V} - \gamma^2(V - V^*),$$

A transzferek szabályozása (az eladó által)

$$(12) \quad \dot{Y} = 2\beta\gamma\dot{K} + \gamma^2(K - K^*).$$

A (9)–(12) egyenletek azonosak a (6), (3), (7) és (8) egyenletekkel ebben a sorrendben, így értelmezésüket nem kell itt megismételni. Csak a végső felhasználók prioritása itt egyszerűsödik: őket az outputkészletből elégítik ki.

A rövidebb oldal elve itt már nem érvényesül, vevők és eladók egyként a hosszú oldalon vannak. Az eladók outputkészleteket tartanak az elsőbbséget élvező vevők ellátására, tehát van túlkínálat, és ugyanakkor a teljesítetlen megrendelések ugyanabból a cikkből túlkeresletről tanúskodnak.

Strukturális elemzés

Az 1. és 2. modell elemzésére hivatkozva itt csak leszögezem, hogy ez a szabályozó is *koordinálatlan és tranzakciós-kommunikatív* (rendelés-jelzéssel).

7. Külön kereskedelmi szektor (4. sz. modell)

Az előző két modell kissé önkényes prioritási feltevésétől megszabadulhatunk azzal, hogy egy külön kereskedelmi szektort iktatunk a modellbe. Feladata az, hogy a termelő szektorok helyett outputkészletet tartson. Ilyen modell megszerkesztését az az érzésem is motiválta, hogy a piac legtöbb elméleti modelljében a kereskedelemnek vagy nincs nélkülözhetetlen szerepe, vagy legfeljebb másodhegedűt játszik. Mégsem állíthatom, hogy ezzel a modellel demonstrálnám, hogy a kereskedelmi szektor beiktatása elkerülhetetlen, de azt talán igen, hogy milyen természetes módon illeszkedik be a forgalom szabályozásába.

A reálszféra átértelmezése

Egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy egyetlen kereskedő forgalmazza az összes cikkeket. (Ettől eltérő feltevések is ugyanilyen jó szolgálatot tesznek.) A reálfolyamatok (1) és (2) egyenletei formálisan érvényben maradnak, de értelmzésük megváltozik.

Feltesszük, hogy a termelő ágazatok teljes outputjukat azonnal átadják a kereskedőnek. Tehát az r termelési vektor egyúttal a termelőktől a kereskedőhöz irányuló transzfert is reprezentálja. q most a kereskedő által tartott készlet, amelyből mind a termelők input vásárlásait, mind a végső felhasználásra irányuló keresletet kielégíti. Így az Y mátrix most a kereskedőtől a termelőkhez irányuló inputanyag transzfereket reprezentálja.

Mivel a termelők maguk nem tartanak outputkészletet, a kereskedőnek megrendeléseket kell feladnia. A w vektor képviseli a kereskedő megrendeléseinek folyamát, a k vektor pedig a hátralékos megrendelések állományát.

A rendelésállomány mérlege (melyet a termelők tartanak nyilván)

$$(13) \quad \dot{k} = w - r,$$

azaz a hátralék változása egyenlő a bejövő rendelésekkel mínusz a termelés, amit azonnal átadnak a kereskedőnek.

A megrendelés-feladás szabályozása (a kereskedő által)

$$(14) \quad \dot{w} = -2\beta\gamma\dot{q} - \gamma^2(q - q^*),$$

azaz a feladott megrendelések a kereskedő készleteitől függenek.

A kereskedőtől kimenő transzferek szabályozása (a termelő mint vevő által)

$$(15) \quad \dot{Y} = -2\beta\gamma\dot{V} - \gamma^2(V - V^*),$$

mint (8)-ban.

A termelés szabályozása (a termelők által)

$$(16) \quad \dot{r} = 2\beta\gamma\dot{k} + \gamma^2(k - k^*),$$

azaz a termelők termelési szintjüket, és ezzel a kereskedőhöz menő kiszállításiakat is, a náluk felgyülemlett hátralékos megrendeléstől függően változtatják.

Értelmezés

E rendszerben elválík egymástól a „nagybani” és a „kicsinybani” piac. Az előbbin a termelő az eladó és a kereskedő a vevő, aki a hosszú oldalon van. A kicsinybani piacon a termelők (és a végső felhasználók) a vevők, a kereskedő az eladó, ismét csak a hosszú oldalon. Így a rövidebb oldal elve a két piacon, külön-külön véve, érvényben van, de érvényét veszti, ha a kettőt együtt tekintjük. Minden termékből az egyik piacon túlkereslet, a másikon túlkínálat van.

Strukturális elemzés

A szabályozó szerkezetileg itt is — hasonlóan a 3. sz. modellhez — *koordinálatlan és tranzakciós-kommunikatív*. Az egyetlen különbség, hogy a jelek (megrendelések) most a kereskedő és a termelők között áramlanak (nem pedig csupán a termelők között) és ez megtakarítást eredményez az információk mennyiségében (n számú jel n^2 helyett).

8. Egy eladói ár jelzéses modell (5. sz. modell)

Mindedig figyelmen kívül hagytam a walrasi rendszerek fő szabályozó eszközét: az árakat, és kizárólag mennyiségi (nem-ár) jellegű jelekkel dolgoztam. Arra a hibás következtetésre lehetne jutni, hogy mihelyt bevezetjük a (nem ragadós) árakat, a walrasi egyensúly elérhető lesz. A mostani modellel azt mutatom meg, hogy az eladók által képezett árak, bármilyen gyorsan követik is a készletek változását, hasonló eredményekhez vezetnek, mint a nem-ár jelzéses (vagy változatlan áras) szabályozók.

Ár és hozzáadott érték

Az eddig használt mennyiségi jelek mellé most belép az árjelzések p vektora, amelyhez a termelési döntésekben alkalmazkodnak (de a transzferek feletti döntésekben nem). Egy termék gazdaságosságát a „termékegységre eső hozzáadott érték” mutatójával mérjük, amelyet a termék ára és a felhasznált anyagok költsége különbségeként definiálunk:⁸

⁸ Ezt Bródytól ([8] 6. fejezet) kölcsönöztem, ő egyszerűbb modellek keretében használja.

$$(17) \quad g = p - A'p = (E - A')p,$$

ahol A' az A input-koefficiens mátrix transzponáltja, E pedig az egységmátrix.

Az árak bevezetéséből nem következik, hogy a pénzbeli folyamatokat is figyelembe vennénk. A pénzforrások korlátozatlanok maradnak. Az ár itt nem más mint egy jel, amit a termelési döntésben használnak fel.

Az előbbi feltevéshez, hogy ti. az árak befolyásolják a termelt mennyiséget, de a vásárlásokat (legalábbis közvetlenül) nem, hozzávesszük még azt az egyszerűsítő feltevést, hogy az inputkészleteket állandó szinten tartják.

Az inputkészletek állandósága

$$(18) \quad \dot{V} = 0,$$

azaz $V = V^0 = V^*$.

Ármegállapítás (a termelő, mint eladó által)

$$(19) \quad \dot{p} = -2\beta\gamma\dot{q} - \gamma^2(q - q^*),$$

azaz az eladó az árakat outputkészletei nagyságától és változási sebességétől függően változtatja.

Gazdaságossági számítás

$$(20) \quad q = (E - A')p,$$

azaz a termelési döntés előtt a termelő kiszámítja a termék gazdaságossági mutatóját.

Termelési döntés

$$(21) \quad \dot{r} = \alpha\dot{q},$$

ahol $\alpha > 0$ egy újabb szabályozó paraméter, és a termelési szint arányosan változik a gazdaságosság változásával.

Ily módon a termelés szabályozása egymást követő három alfolyamatra oszlik:

outputkészlet $\rightarrow$ ár $\rightarrow$ hozzáadott érték $\rightarrow$ termelési szint.

Értelmezés és strukturális elemzés

A (18) egyenlet a termelőknek, mint vevőknek azt a feltételezett magatartását írja le, hogy inputkészleteiket változatlan szinten tartják, ehhez nincs szükség sem koordinációra, sem kommunikációra. Úgy foghatjuk fel, mint a vevők döntését arról, hogy nem bocsájtkoznak (árváltozásokra számítva) spekulációs vásárlásokba — és mivel tudják, hogy a számukra szükséges input anyagokat az outputkészletekből késedelem nélkül megkapják, nincs célja annak, hogy inputkészleteiket változtassák.

A (2) és (18) egyenletekből azt kapjuk, hogy

$$(22) \quad Y = A \langle r \rangle,$$

és ez megmutatja, hogy a termelők, amikor termelési szintjükről döntenek, egyben döntenek vásárlásaikról is, és ehhez másra, mint saját inputkoefficiensaik (technológiájuk) ismeretére nincs is szükségük. Így ez a döntés is koordinálatlan és nem-kommunikatív.

Az ármegállapításnál (19) a termelő ismeri meglevő outputkészleteit, így koordinálásra itt sincs szükség. De a hozzáadott érték kiszámításához (20) nemcsak saját termékének árát kell ismernie, hanem mindazokét az anyagokét is, amelyet inputként használ. E célból az eladóknak közölniök kell áraikat a vevőkkel, ez tranzakciós kommunikációt teremt köztük. Ezután magát a kalkulációt a termelők már elszigetelten végezhetik és ugyanígy hozzák meg termelési döntéseiket. E két részfolyamat tehát koordinálatlan és nem-kommunikatív. Végülis a szabályozó egésze *koordinálatlan és tranzakciós (ár) kommunikációt* tartalmaz.

9. Stabilitás és állandósult állapot

Most stabilitási feltételeket adok meg az előző fejezetben bemutatott öt szabályozó szerkezetre. Fő kérdésnek ugyan a működőképességet, azaz a rendszerek által produkált trajektóriák nem-negativitását tekintem, de a stabilitás a lokális működőképesség elégséges feltételeinek egyike.⁹

Ebben a fejezetben a matematikai elemzésnek csak a végeredményét közlöm, a részletek és a bizonyítások a Matematikai függelékben találhatók.

Jelölések

Jelöljük $\mathfrak{R}^\theta$ -val ($\theta = 1, 2, 3, 4$) az alábbi karakterisztikus egyenletek megoldásainak halmazát, ahol a θ felső index az első négy modell sorszáma utal.

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^1 &= \{ \sigma \mid (\sigma - 1)^2 = \varphi \in \mathcal{A} \} \\ (23) \quad \mathfrak{R}^2 &= \{ \sigma \mid \sigma^2 - \sigma + 1 = \varphi \in \mathcal{A} \} \\ \mathfrak{R}^3 &= \mathfrak{R}^4 = \{ \sigma \mid -\sigma^3 + 2\sigma^2 - 2\sigma + 1 = \varphi \in \mathcal{A} \}, \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{A}$, mint már mondtuk, az A input-koefficiensmátrix spektruma. Legyen továbbá

$$(24) \quad \beta^\theta = \max \left\{ \frac{|\operatorname{Im} \sigma|}{2|\sigma|\sqrt{\operatorname{Re} \sigma}} \mid \operatorname{Re} \sigma > 0, \sigma \in \mathfrak{R}^\theta \right\} \quad (\theta = 1, 2, 3, 4)$$

⁹ Bizonyos feltételek mellett formálisan létezhetnek instabil és mégis működőképes rendszerek. De jogosnak tartom, hogy kizárjam őket a vizsgálatból, hiszen létezésüket csak az erőforrások korlátozatlanlansága, azaz a jelen elemzés egy fogyatéka teszi lehetővé. Ez a gondolatmenet jogosít fel arra is, hogy kizárjam a Ljapunov-stabilis, de nem aszimptotikusan stabilis rendszereket (amelyek szintén lehetnek működőképesek), mivel az ilyen rendszerek az instabilitás határán vannak.

és

$$\begin{aligned}
 \underline{\beta}^1 &= \beta^1 \\
 \underline{\beta}^2 &= \max \{ \beta^2, \sqrt{6/4} \} \\
 \underline{\beta}^3 &= \max \{ \beta^3, \sqrt{6/4} \} \\
 \underline{\beta}^4 &= \beta^4 \\
 \underline{\beta}^5 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

1. TÉTEL: *Stabilitás.* A ϑ sorszámú modell ($\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5$) akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis (a 2. és 3. feltevés mellett), ha fennáll a következő két feltétel:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \underline{\beta} > \underline{\beta}^\vartheta \quad (\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5) \\
 (ii) \quad & \operatorname{Re} \varphi + (\operatorname{Im} \varphi)^2 < 1, \text{ minden } \varphi \in \mathcal{R}\text{-ra, } \vartheta = 2.
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

A stabilitási tétel azt mondja, hogy mind az öt modellnél csak a β paramétertől függ a stabilitás és hogy β -t elég nagyra választva mind stabilissá tehetők. A β -ra megadott alsó korlátok (fáradtságosan) kiszámíthatók A sajátértékeiből. Kivételt képez a 2. sz. modell, ahol még a (ii) feltételt is ki kell elégíteniök ezeknek a sajátértékeknek. Ez a modell az A sajátértékeinek bizonyos konfigurációja esetén minden β értékre instabilitást mutathat.¹⁰

1. KOROLLÁRIUM: *Állandósult állapot.* Ha a ϑ sorszámú modell ($\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5$) aszimptotikusan stabilis és a végső felhasználás vektora konstans, azaz $c(t) = c, \forall t \geq 0$, akkor az egyes modellek változói a következő állandósult állapotukhoz tartanak $t \rightarrow \infty$ esetén (az állandósult állapotot ∞ alsó indexszel jelöljük meg):

$$\begin{aligned}
 (27) \quad & \begin{aligned} q_\infty &= q^* & r_\infty &= Lc & (\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5) \\ V_\infty &= V^* & Y_\infty &= A\langle Lc \rangle & (\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5) \\ K_\infty &= K^* & W_\infty &= A\langle Lc \rangle & (\vartheta = 2, 3) \\ k_\infty &= k^* & w_\infty &= Lc & (\vartheta = 4) \end{aligned}
 \end{aligned}$$

ahol $L = (E - A)^{-1}$, a Leontief-inverz.

Az állandósult állapot az (1)–(16) és (19) egyenletekből számítható ki, úgy hogy minden deriváltat nullával teszünk egyenlővé.

A korollárium azt mondja, hogy a (q, V, K, k) állapotváltozóknál, amelyekre van norma, az állandósult állapot egyenlő vele, azaz nincs szabályozási hiba. Az r és w szabályozási változóknál az állandósult állapot egyenlő a konstans végső felhasználásnak megfelelő teljes termeléssel, a Y és W változóknál pedig azzal az anyagfelhasználással, ami ennek a termelési szintnek megfelel.

¹⁰ A (ii) feltétel fennállásához elégséges, ha $\varrho < \sqrt{3/2} \sim 0,866$. Ugyanis ebben az esetben $|\varphi|^2 < 3/4$ minden $\varphi \in \mathcal{R}$ -ra és $\operatorname{Re} \varphi + (\operatorname{Im} \varphi)^2 < \operatorname{Re} \varphi + \frac{3}{4} - (\operatorname{Re} \varphi)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2} - \operatorname{Re} \varphi\right)^2 \leq 1$. Mivel pedig nyílt modellekben a ϱ rendszerint jóval $\sqrt{3/2}$ alatt van, a (ii) feltétel gyakorlatilag nem jut szerephez.

Ha A valamelyik eleme, mondjuk A_{ij} nullával egyenlő, azaz az i anyagot nem használják a j termék előállításánál, akkor ésszerű feltenni, hogy $V_{ij}^0 = V_{ij}^* = K_{ij}^0 = K_{ij}^* = Y_{ij}^0 = W_{ij}^0 = 0$, azaz hogy a megfelelő inputkészletek, rendelésállományok, transzferek és rendelés feladások mind nulla kezdő értékkel és (ahol van norma) nulla értékű normával rendelkeznek. Ekkor könnyen belátható, hogy ezekre a változókra $V_{ij}(t) = K_{ij}(t) = Y_{ij}(t) = W_{ij}(t) = 0, \forall t$ áll, azaz minden időpontban nulla szinten maradnak. Az ilyen változókat *irrelevánsnak* nevezzük,¹¹ míg az összes többi változót (beleértve q, r, k, w -t is) *relevánsnak*.

4. FELTEVÉS: A releváns normák pozitivitása

- (28) (i) $A_{ij} > 0 \rightarrow V_{ij}^* > 0 \quad \forall (i, j), \quad (\theta = 1, 2, 3, 4, 5)$
 (ii) $A_{ij} > 0 \rightarrow K_{ij}^* > 0 \quad \forall (i, j), \quad (\theta = 2, 3)$
 (iii) $q^* > 0 \quad (\theta = 1, 3, 4, 5)$
 (iv) $k^* > 0 \quad (\theta = 4).$

2. KOROLLÁRIUM: A releváns változók állandósult állapotának pozitivitása. Ha a θ sorszámú modell ($\theta = 1, 2, 3, 4, 5$) aszimptotikusan stabilis és az 1. 2. és 4. feltevések fennállnak, akkor minden releváns változó állandósult állapota pozitív.

Ez a korollárium egyenesen következik a feltevésekből, hiszen $L = (E - A)^{-1} > 0$ a 2. feltevés értelmében, és így $Lc > 0$ minden szemipozitív c -re. Az állandósult állapot pozitívítása fontos szerepet játszik a működőképesség most következő elemzésében.

10. Működőképesség

Mint már említettem, számos olyan változó van, aminek esetleges negatív értékét közgazdaságilag nem lehet értelmezni. Ez a helyzet minden input- és outputkészlet változóval (q, V), a rendelésállománnyal (K, k) és a termeléssel (r). Egyes modellekben értelmezhető lenne viszont a negatív transzfer (valamilyen input-anyag visszaküldése a termelőjének) vagy negatív rendelésfeladás (egy teljesítetlen megrendelés visszavonása), másokban, közgazdasági megfontolásokból, ez sem. Egyszerűség kedvéért azonban eltekintek ettől a megkülönböztetéstől és feltételezem, hogy az összes transzfer változóra (Y) és rendelésfeladási változóra (W, w) is fennáll a nem-negativitás követelménye.

Lokális működőképesség és működőképes indulási tartomány. Egy aszimptotikusan stabilis rendszert *lokálisan működőképesnek* nevezzünk, ha változói (vagy közgazdasági megfontolások alapján kiválasztott egyes változói) nem vesznek fel negatív értéket (semmilyen $t \geq 0$ -ra) akkor, ha az induló állapot eléggé közel van az állandósult állapothoz (a megfelelő dimenziójú tér valamilyen metrikája értelmében).

¹¹ $q(t)$ irreleváns $\theta = 2$ -re (5) miatt és itt $q^* = 0$ kényszerűen (és ésszerűen) feltételezzendő.

Működőképes indulási tartománynak nevezzük azoknak a pontoknak a halmazát (az imént említett térben), amelyekből mint induló állapotból működőképes (nem-negatív) trajektoriak indulnak.

2. TÉTEL: *Lokális működőképesség.* Ha a ϑ sorszámú modell ($\vartheta = 1, 2, 3, 4, 5$) eleget tesz az alábbi feltételeknek:

- a) aszimptotikusan stabilis (1. tétel),
- b) a végső felhasználás szemipozitív (1. feltevés) és konstans,
- c) a releváns normák pozitívak (4. feltevés),

akkor

- (i) a rendszer minden (q, V, K, k, r, Y, W, w) változójában működőképes és
- (ii) a működőképes indulási tartomány tartalmaz egy, az állandósult állapot köré írt pozitív élhosszúságú kockát.

Ez a tétel azt mondja, hogy konstans végső felhasználás esetén a rendszer aszimptotikus stabilitása lényegében elégséges¹² a lokális működőképességhez. A tétel fogyatéka az, hogy nem mond semmit a működőképes indulási tartomány terjedelméről, sem arról, hogyan lehet ezt a β és γ paraméterek megfelelő megválasztásával befolyásolni.

Az árak nem-negativitása

Az 5. sz. modellben árak is szerepelnek változóként és nemnegativitásukat nem követeltük meg, mint a működőképesség feltételét. Valóban mindaddig, amíg az árak csak kalkulatív célokat szolgálnak, negatív árak is megengedhetők lennének; de eleget tehetünk annak a közgazdaságilag mégiscsak ésszerű követelménynek is, hogy az árak ne váljanak negatívvá. Ehhez az eddig elhanyagolt α paramétert hívjuk segítségül.

3. TÉTEL: *Az árak nem-negativitása.* Ha az 5. sz. modellre állnak a 2. tétel a, b és c feltételei, továbbá, ha az induló árak pozitívak ($p(0) > 0$), és az α szabályozó paraméter eléggé nagy, akkor az árak trajektorija nem-negatív, azaz $p(t) \geq 0, \forall t \geq 0$.

II. Következtetések

Öt különböző szabályozót illesztettünk ugyanahhoz a reálszférához, a nyílt statikus Leontief-gazdasághoz. A szabályozók sok tekintetben hasonlítottak egymásra, nevezetesen:

- A „norma szerinti szabályozás” elvét alkalmazták.
- Áranyos és integrál tagokból álló (PI) lineáris visszacsatolást tartalmaztak.
- A döntési folyamatok koordinálatlanok voltak.¹³

¹² A bizonyítás a matematikai függelékben csak a változók korlátosságára és folytonosságára támaszkodik.

¹³ Kawasaki és mások [2] empirikusan tesztelték az output-készlet és rendelés-állomány jelzések rövidtávú hatását iparvállalatok termelésére és árképzésére, egy olyan keretben, ami lényegében a „norma szerinti szabályozás” elvét alkalmazta.

Különböztek azonban egymástól a döntéshozatal és az információáramlás szerkezetében:

(i) Különböző mennyiségi (inputkészlet, outputkészlet, megrendelés) és ár (eladó által képzett ár, hozzáadott érték) jelzéseket alkalmaztunk a különböző modellekben. Az 1. sz. modellben kommunikáció sem volt a résztvevők között, másokban megrendeléseket (2. 3. és 4. sz. modell) ill. árakat (5. sz. modell) közöltek egymással.

(ii) Egyes modellek a vevők piacát ábrázolták (1. és 5. sz. modell), egy az eladók piacát (2. sz.), egyesekben pedig a „rövidebb oldal elve” (a „disequilibrium-elmélet” egy kedvenc feltevése) nem is érvényesül (3. és 4. sz.).

Mind az öt modelről bebizonyosodott, hogy a β paraméter megfelelő választásával, nem túl erős feltevések mellett, aszimptotikusan stabilisak, és ekkor lokálisan működőképesek is.

A stabilis modellek egyensúlyi (állandósult) állapota nem-walrasi, hiszen magukban foglalnak olyan pozitív inputkészleteket, amiket a rendszertelen szállítások nem indokolnak, outputkészleteket, amik nem szükségesek a vevők kiszolgálásához és hátralékos megrendeléseket, amit sem termelési átfutási idő, sem korlátos kapacitás nem indokol. Így rendszereink eredendően nem-walrasiak. Még azt is kimondhatjuk, hogy ez az elmélet „még kevésbé walrasi” mint az „adagolós egyensúlyelmélet” [1] modelljei, noha nincs bennük sem „adagolási séma”, sem pedig nem vezettük be az „effektív kereslet” fiktív fogalmát.¹⁴

Összefoglalva: Bebizonyosodott, hogy ugyanazt a gazdaságot sokféle nem-walrasi szabályozási mechanizmussal lehet működtetni koordináció nélkül (az absztrakciónak a tanulmányban alkalmazott fokán), amelyek különböző jelzőrendszerekre, információáramlási és döntési struktúrákra támaszkodnak.

Matematikai függelék

1. Előkészület

A modellek elemzésében a következő, *redukált alak*nak nevezett általános sémának gyakorta hasznát vesszük majd:

$$(F. 1) \quad \dot{x} = Ru + z \quad (\text{Szabályozott szakasz})$$

$$(F. 2) \quad \dot{u} = -2\beta\gamma\dot{x} - \gamma^2(x - x^*), \quad (\text{Szabályozó})$$

ahol x : állapotvektor

u : a beavatkozójelek vektora

z : külső hatások vektora

x^* : a beállítójelek vektora

R : a szabályozott szakasz négyzetes input-mátrixa (N -ed rendű)

β, γ : skaláris szabályozó paraméterek ($\gamma > 0$).

¹⁴ Ez a részleges összevetés nem kérdőjelezi meg az adagolós egyensúlyelmélet egészét, ami sok tekintetben általánosabb és sok olyan esetre is kiterjed, amit én nem tárgyaltam. A motivációk, alapelvek, hatókörök, feltevések és következtetések széleskörű összevetése külön tanulmányt igényelt volna.

Jelölje

$$\mathfrak{R} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\}$$

az R mátrix spektrumát (sajátértékeinek halmazát).

1F. LEMMA: Az (F.1)–(F.2) redukált alak akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis, ha

$$(i) \quad \operatorname{Re} \sigma > 0, \forall \sigma \in \mathfrak{R} \text{ és}$$

$$(ii) \quad \beta > \max \left\{ \frac{|\operatorname{Im} \sigma|}{2|\sigma| \sqrt{\operatorname{Re} \sigma}} \mid \sigma \in \mathfrak{R} \right\}.$$

Az 1F. lemma bizonyítása:

Helyettesítsük $\dot{x}$ -ot (F.1)-ből (F.2)-be, így a következő állapotegyenletet kapjuk

$$(F.3) \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ -\gamma^2 E & -2\beta\gamma R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E & 0 \\ -2\beta\gamma E & \gamma^2 E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x^* \end{bmatrix}.$$

Az aszimptotikus stabilitás akkor és csak akkor áll fenn, ha a

$$(F.4) \quad \begin{bmatrix} 0 & R \\ -\gamma^2 E & -2\beta\gamma R \end{bmatrix}$$

rendszer mátrix minden sajátértékének negatív a valós része. Legyen $\sigma \in \mathfrak{R}$ és s a hozzátartozó jobb oldali sajátvektor, azaz

$$(F.5) \quad Rs = \sigma s.$$

Először azt bizonyítjuk, hogy az

$$(F.6) \quad \omega^2 + 2\beta\gamma\sigma\omega + \gamma^2\sigma = 0$$

karakterisztikus egyenlet két ω gyöke az (F.4) rendszer mátrix két sajátértékét szolgáltatja és a hozzájuk tartozó sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} \sigma s \\ \omega s \end{bmatrix}.$$

Ugyanis

$$\begin{bmatrix} 0 & R \\ -\gamma^2 E & -2\beta\gamma R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma s \\ \omega s \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \sigma s \\ \omega s \end{bmatrix}$$

azt adja, hogy

$$\omega Rs = \omega \sigma$$

$$-\gamma^2 \sigma s - 2\beta\gamma \omega Rs = \omega^2 s,$$

ez pedig (F.5), (F.6) és $s \neq 0$ miatt fennáll.

(F.6)-ot ω -ra megoldva azt kapjuk:

$$(F.7) \quad \omega = \gamma(-\beta\sigma \pm \sqrt{\beta^2\sigma^2 - \sigma}).$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$\begin{aligned} \zeta &= \beta^2 \sigma^2 - \sigma \\ (F. 8) \quad \mu &= \operatorname{Re} \sigma \\ \nu &= \operatorname{Im} \sigma, \end{aligned}$$

ekkor

$$\begin{aligned} (F.9) \quad \operatorname{Re} \zeta &= \beta^2(\mu^2 - \nu^2) - \mu \\ \operatorname{Im} \zeta &= \nu(2\beta^2\mu - 1). \end{aligned}$$

Mivel feltettük, hogy $\gamma > 0$, a $\operatorname{Re} \omega < 0$ stabilitási feltétel (F.7) szerint a következő:

$$(F.10) \quad \pm \operatorname{Re} \sqrt{\zeta} > \beta\mu,$$

ami mindkét előjelre csak akkor állhat fenn, ha

$$(F.11) \quad \beta\mu > 0.$$

Tekintsük most a Moivre-formula segítségével könnyen belátható

$$(F.12) \quad \operatorname{Re} \sqrt{\zeta} = \sqrt{\frac{1}{2}(|\zeta| + \operatorname{Re} \zeta)}$$

formulát, alkalmazzuk ezt (F.10)-re és emeljük négyzetre.

Átrendezve kapjuk

$$|\zeta| < 2\beta^2\mu^2 - \operatorname{Re} \zeta.$$

Az alábbi (F.13) feltétel miatt a jobb oldal mindenképp pozitív lesz, így újból négyzetre emelhetünk. (F.9) szerint helyettesítve újabb átrendezés után ezt kapjuk:

$$\nu^2 < 4\beta^2\mu(\mu^2 + \nu^2).$$

Ebből következik, hogy

$$(F.13) \quad \mu = \operatorname{Re} \sigma > 0$$

és ezzel a lemma (i) feltételének szükségességét bebizonyítottuk. Az (F.11) és (F.13) következtében

$$(F.14) \quad \beta > 0.$$

Tehát

$$\beta^2 > \frac{\nu^2}{4(\mu^2 + \nu^2)\mu} = \frac{(\operatorname{Im} \sigma)^2}{4|\sigma|^2 \operatorname{Re} \sigma}$$

áll minden $\sigma \in \mathfrak{R}$ -re. Tekintettel (F.14)-re a lemma (ii) feltételének szükségesége is bizonyítva van. Bizonyításunkból az is következik, hogy a (i) és (ii) feltételek együttesen elégségesek is az (F.1)–(F.2) rendszer stabilitásához. (Vége a bizonyításnak.)

Az 1F. lemmát használjuk fel az 1. tétel (stabilitás) bizonyításában az 1–4. sz. modelleket illetően, míg az 5. sz. modellre másfajta bizonyítást adunk majd.

2. Az 1. tétel bizonyítása $\vartheta = 1, 2, 3, 4$ -re

Szorozzuk meg a (2), (4), (6), (7), (8), (9), (11), (12), (15) egyenleteket jobbról $e = [1, 1, \dots, 1]'$ -vel, ami azt jelenti, hogy a kérdéses mátrixegyenleteket vektor-egyenletekké aggregáljuk. A redukált alak (F.1) szabályozott szakasza és (F.2) szabályozója ezek után a következő egyenletekből fog állni, ahol az a felső index a megfelelő egyenletnek a fentiek szerint aggregált alakjára utal:

Modell sorszáma (ϑ)	Szabályozott szakasz (F.1)	Szabályozó (F.2)
1	(1), (2^a)	(3), (4^a)
2	(2^a), (6^a) ^b	(7^a), (8^a)
3	(1), (2^a), (9^a)	(10), (11^a), (12^a)
4	(1), (2^a), (13)	(14), (15^a), (16)

b) A (6^a) egyenlet a következő alakot ölti $Ve = (E - A)Ye - Ac$, miután (5) figyelembevételével (1)-ből elvégezzük az $r = Ye + c$ helyettesítést a (6)-nak e -vel jobbról megszorozott alakjába.

Szorozzuk most a (6^a), (9^a) és (13) egyenleteket (-1) -gyel és Ke , ill. k helyett tekintsük $(-Ke)$ -t, ill. $(-k)$ -t az x vektor komponensének. Ekkor a $\vartheta (= 1, 2, 3, 4)$ modell R^ϑ input-matrixaként a következőket kapjuk:

$$(F.15) \quad R^1 = \begin{bmatrix} E & -E \\ -A & E \end{bmatrix} \quad R^2 = \begin{bmatrix} 0 & E-A \\ -E & E \end{bmatrix}$$

$$R^3 = \begin{bmatrix} E & 0 & -E \\ -A & 0 & E \\ 0 & -E & E \end{bmatrix} \quad R^4 = \begin{bmatrix} 0 & -E & E \\ 0 & E & -A \\ -E & 0 & E \end{bmatrix}.$$

Nem nehéz belátni, hogy a (23) szerint definiált $\mathfrak{R}^\vartheta$ halmazok valóban az (F.15)-beli R^ϑ mátrixok spektrumát adják $\vartheta = 1, 2, 3, 4$ -re, ha segítségül hívjuk a $\sigma \in \mathfrak{R}^\vartheta$ sajátértéknek megfelelő s^ϑ sajátvektorok alábbi előállítását (ahol f a $\varphi \in \mathcal{A}$ -nak megfelelő sajátvektora A -nak):

$$s^1 = \begin{bmatrix} f \\ (1 - \sigma)f \end{bmatrix}, \quad s^2 = \begin{bmatrix} (1 - \sigma)f \\ f \end{bmatrix}, \quad s^3 = \begin{bmatrix} f \\ (1 - \sigma)^2 f \\ (1 - \sigma)f \end{bmatrix}, \quad s^4 = \begin{bmatrix} (1 - \sigma)f \\ (1 - \sigma + \sigma^2)f \\ f \end{bmatrix}.$$

Most pedig félbeszakítom az 1. tétel bizonyítását, hogy a folytatáshoz szükséges lemmát bizonyítsam előbb.

2F. LEMMA. Ha a 2. feltevés áll (azaz $|\varphi| \leq \varrho < 1$ minden $\varphi \in \mathcal{A}$ -ra) és $\vartheta = 2$ -re áll az 1. tétel (ii) egyenlőtlensége, akkor $\operatorname{Re} \sigma > 0$, minden a (29) szerint definiált $\sigma \in \mathfrak{R}^\vartheta$ -ra, $\vartheta = 1, 2, 3, 4$.

A 2F. lemma bizonyítása

$\vartheta = 1$. Mivel az $\Re^1$ definíciójából a karakterisztikus egyenletünk $(1 - \sigma)^2 = \varphi$, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{Re} \sigma = \operatorname{Re} (1 \pm \varphi^{1/2}) = 1 \pm \operatorname{Re} \varphi^{1/2} \geq 1 - |\varphi^{1/2}| \geq 1 - \varrho^{1/2} > 0.$$

$\vartheta = 2$. $\Re^2$ -ből a karakterisztikus egyenlet

$$\sigma^2 - \sigma + 1 = \varphi$$

melynek megoldása

$$\sigma = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{4\varphi - 3}).$$

Ebből az (F.12) formula alkalmazásával

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (2\sigma) &= \operatorname{Re} (1 \pm \sqrt{4\varphi - 3}) = 1 \pm \operatorname{Re} \sqrt{4\varphi - 3} = \\ &= 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2} (|4\varphi - 3| + 4\operatorname{Re} \varphi - 3)} > 0 \end{aligned}$$

akkor és csak akkor, ha

$$|4\varphi - 3| < 5 - 4\operatorname{Re} \varphi.$$

Mivel a jobb oldal pozitív, vehetjük mindkét oldal négyzetét, és ebből:

$$(4\operatorname{Re} \varphi - 3)^2 + (\operatorname{Im} \varphi)^2 < (5 - 4\operatorname{Re} \varphi)^2.$$

Átrendezés után ez megegyezik az 1. tétel (ii) feltételével.

$\vartheta = 3, 4$. $\Re^3$ és $\Re^4$ közös karakterisztikus egyenlete:

$$-\sigma^3 + 2\sigma^2 - 2\sigma + 1 = \varphi.$$

Az (F. 8) alatt bevezetett jelöléssel és némi számolgatással ezt kapjuk:

$$|\varphi|^2 = \nu^6 + (3\mu^2 - 4\mu)\nu^4 + (3\mu^4 - 8\mu^3 + 8\mu^2 - 2\mu)\nu^2 + (\mu^3 - 2\mu^2 + 2\mu - 1)^2.$$

Ki kell elégítenünk a $|\varphi|^2 \leq \varrho^2 < 1$ egyenlőtlenséget. De ez $\mu \leq 0$ esetén nem állhat, mivel akkor a jobb oldal első három tagja nem-negatív, az utolsó pedig egy 1-nél abszolút értékben nem kisebb szám négyzete. Tehát $\mu = \operatorname{Re} \sigma > 0$. (Vége a lemma bizonyításának.)

Az 1. tétel bizonyítása $\vartheta = 1, 2, 3, 4$ -re. (Folytatás)

Bebizonyítottuk, hogy ami az 1–4. sz. modellek aggregált alakját illeti, az 1F. lemma (i) feltétele ki van elégítve, ha az 1. tétel (ii) feltétele áll. Tehát az 1F. lemma (ii) feltétele elégséges és szükséges is az aggregált modellek stabilitásához. Ezzel az eredeti (aggregálatlan) modellek stabilitása is bizonyítva van a q, r, k, w vektorváltozókban a $\beta > \beta^\vartheta$ ($\vartheta = 1, 2, 3, 4$) feltétel mellett [lásd (24)]. De a V, K, Y, W mátrixváltozók vonatkozásában csak a V_e, K_e, Y_e, W_e aggregátumok stabilitását bizonyítottuk. Ezt tehát még ki kell terjeszteni az eredeti változókra. De ha a q, r, k, w vektorváltozókat adottaknak tekintjük,

akkor a mátrixváltozókra vonatkozó egyenletek szétesnek komponensenként az alább következő skaláris egyenletekből álló rendszerekké.

$$(F.16) \quad \left. \begin{aligned} \dot{V}_{ij} &= Y_{ij} - A_{ij} r_j \\ \dot{Y}_{ij} &= -2\beta\gamma \dot{V}_{ij} - \gamma^2(V_{ij} - V_{ij}^*) \end{aligned} \right\} \quad (\vartheta = 1, 4)$$

$$(F.17) \quad \left. \begin{aligned} \dot{V}_{ij} &= Y_{ij} - A_{ij} r_j \\ -\dot{K}_{ij} &= -W_{ij} + Y_{ij} \\ \dot{W}_{ij} &= -2\beta\gamma \dot{V}_{ij} - \gamma^2(V_{ij} - V_{ij}^*) \\ \dot{Y}_{ij} &= -2\beta\gamma(-\dot{K}_{ij}) - \gamma^2(-K_{ij} + K_{ij}^*) \end{aligned} \right\} \quad (\vartheta = 2, 3)$$

Ezek is (F.1)–(F.2) alakú redukált formáknak tekinthetők, a következő specifikálással

$$(F.18) \quad R^\vartheta = [1], \quad \text{ha } \vartheta = 1, 4$$

$$(F.19) \quad R^\vartheta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{ha } \vartheta = 2, 3$$

Az (F.18) alatt egy degenerált (1-szer 1-es) mátrixot találunk, melynek egyetlen sajátértéke $\sigma = 1$, és így $\operatorname{Re} \sigma > 0$. Továbbá az 1F. lemma alkalmazásával a $\beta > 0$ feltételt kapjuk, ami a $\beta > \underline{\beta}^\vartheta (\vartheta = 1, 4)$ feltételből amúgy is következik. Így $\beta > \beta^\vartheta = \underline{\beta}^\vartheta (\vartheta = 1, 4)$ elégséges és szükséges feltétele az 1. és 4. sz. modellek stabilitásának, miként ezt az 1. tétel (i) állítása mondja. (F.19)-ben a

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{-3})$$

sajátértékeknek ugyancsak pozitív a valós része és a 2F. lemma (ii) feltételét alkalmazva rá a

$$\beta > \frac{\sqrt{6}}{4} \sim 0,6123$$

pótlólagos feltételt kapjuk. Tehát a $\underline{\beta}^\vartheta = \max \left\{ \beta^\vartheta, \frac{\sqrt{6}}{4} \right\}$ definíciót figyelembe véve az 1. tétel (i) feltétele szükséges a stabilitáshoz, ha $\vartheta = 2, 3$; elégséges, ha $\vartheta = 3$, és a (ii) feltétellel együtt elégséges, ha $\vartheta = 2$. (Vége az 1. tétel bizonyításának a $\vartheta = 1, 2, 3, 4$ esetre.)

3. Az 1. tétel bizonyítása $\vartheta = 5$ -re

Helyettesítsük Y -t (22)-ből (1)-be:

$$(F.20) \quad \dot{q} = (E - A)r - c.$$

Helyettesítsük ezután g -t (20)-ből (21)-be, majd $\dot{p}$ -ot (19)-ből az így előálló egyenletbe:

$$(F.21) \quad \dot{r} = \alpha(E - A')[-2\beta\gamma \dot{q} - \gamma^2(q - q^*)].$$

Ha itt $\beta/\sqrt{\alpha}$ -t írunk β helyére és $\gamma/\sqrt{\alpha}$ -t γ helyére, akkor α formálisan eltűnik,

(α szerepére még visszatérünk). Ha ezeketán $\dot{q}$ -ot (F.20)-ból (F.21)-be helyettesítjük, a következő rendszert kapjuk:

$$(F.22) \quad \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & E - A \\ -\gamma^2(E - A') & -2\beta\gamma(E - A')(E - A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} -c \\ \gamma^2(E - A)q^* + 2\beta\gamma(E - A')c \end{bmatrix}.$$

Jelöljük most $\mathfrak{D}$ -vel az $(E - A')(E - A)$ mátrix spektrumát, és jelölje $\delta \in \mathfrak{D}$ egy sajátértékét, d pedig a megfelelő sajátvektort. Mivel az $(E - A')(E - A)$ Gram-féle mátrix szimmetrikus, δ valós szám, és mivel pozitív definit is, $\delta > 0$ minden $\delta \in \mathfrak{D}$ -re. Az (F.22)-nek megfelelő H rendszermátrix:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & E - A \\ -\gamma^2(E - A') & -2\beta\gamma(E - A')(E - A) \end{bmatrix},$$

spektrumáról pedig beláthatjuk, hogy a következő alakú:

$$(F.23) \quad \mathcal{H} = \{\chi \mid \chi^2 + 2\beta\gamma\delta\chi + \gamma^2\delta = 0, \delta \in \mathfrak{D}\}$$

Ez úgy látható be, hogy behelyettesítjük a

$$h = \begin{bmatrix} (E - A)d \\ \gamma d \end{bmatrix}$$

sajátvektort a $Hh = \chi h$ egyenletbe.

Az (F.23)-beli karakterisztikus egyenlet megoldásaként azt kapjuk, hogy

$$\chi = \gamma[-\beta\delta \pm \sqrt{\beta^2\delta^2 - \delta}],$$

és mivel $\delta > 0$, $\operatorname{Re} \chi < 0$ akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\beta > \underline{\beta^5} = 0.$$

Mivel pedig a rendszer stabilitása ezek szerint csak β előjelen múlik, utólag igazolódott α kiküszöbölésének jogossága. (Vége az 1. tétel $\vartheta = 5$ eset bizonyításának.)

4. A 2. tétel bizonyítása

Ebben a bizonyításban a

$$\|b\| = \max_i |b_i|$$

ún. kocka-vektornormát fogom használni, a hozzá tartozó természetes mátrix-normával együtt:

$$\|B\| = \max_i \sum_j |B_{ij}|$$

úgy, hogy az ismert

$$(F.24) \quad \|Bb\| \leq \|B\| \cdot \|b\|$$

egyenlőtlenség érvényes lesz.

A dolgozatban tárgyalt mindegyik modell

$$(F. 25) \quad \dot{x} = Px + Ru$$

alakra hozható, ahol

x : a releváns változók vektora (úgy hogy a mátrix alakú változók elemeit oszloponként egymás alá írjuk és az irreleváns változókat elhagyjuk),

u : a bejövő jelek vektora, ami konstans akkor, ha a c végső felhasználás konstans.

P : a rendszermátrix, amely minden modellünk esetében nonszingulárisnak bizonyul.

Az eredeti modellek átírása az (F.25) alakra fáradságos munka, amely behelyettesítéseket és a változók átrendezését követeli meg, éppen ezért itt nem részletezem. Ha az eredeti rendszerek stabilisak saját változóikban, akkor (F.25) alakjukban is azok x -ben. Mivel pedig P mind az öt modellben nonszingulárisnak adódik, állandósult állapotukat

$$(F.26) \quad x_{\infty} = -P^{-1}Ru$$

alakban írhatjuk. Mivel pedig x csak a releváns változókat tartalmazza és a 4. feltevés is áll, a 2. korollárium értelmében:

$$(F. 27) \quad x_{\infty} = -P^{-1}Ru > 0.$$

Tegyük most fel, hogy valamilyen $\delta > 0$ -ra

$$(F. 28) \quad \|x^0 - x_{\infty}\| < \delta,$$

azaz az x^0 induló állapot eléggé közel van az állandósult állapothoz.

(F. 25) megoldása felírható a következő alakban

$$(F. 29) \quad x(t) = x_{\infty} + \exp(Pt)(x^0 - x_{\infty}).$$

Ha a rendszer aszimptotikusan stabilis, akkor az $\exp(Pt)$ mátrix elemei mindannyian korlátosak alulról is és felülről is $t \geq 0$ -ra, tehát $\|\exp(Pt)\| \leq \psi$, $\forall t \geq 0$, ahol $\psi > 0$ és nem függ az időtől. (F. 29)-ből ezt kapjuk:

$$\|x(t) - x_{\infty}\| = \exp(Pt)(x^0 - x_{\infty}) \leq \|\exp(Pt)\| \cdot \|x^0 - x_{\infty}\| \leq \psi\delta,$$

ahol (F. 24)-et és (F. 28)-at vettük figyelembe.

Az $x(t)$ trajektória tehát teljes egészében benne fekszik egy olyan kockában, amelynek középpontja a pozitív x_{∞} pont, élhosszúsága pedig $2\psi\delta$ ugyancsak pozitív. Ha mármost δ elég kicsiny, akkor az egész kocka úgy összezsugorodik, hogy beleessék a nem-negatív ortánsba, és így $x(t) \geq 0$ minden $t \geq 0$ -ra. (Vége a bizonyításnak.)

5. A 3. tétel bizonyítása

Integráljuk (21)-et $\tau = 0$ -tól $\tau = t$ -ig és helyettesítsük be (20)-ból g -t:

$$r - r^0 = \alpha(E - A')(p - p^0).$$

Ebből azt kapjuk, hogy:

$$p = p^0 + \frac{1}{\alpha} L'(r - r^0).$$

Aszimptotikus stabilitás esetén r korlátos $[0, \infty]$ -ben és így $p^0 > 0$ maga után vonja, hogy $p(t) \geq 0$, $\forall t$, ha α eléggé nagy. (Vége a bizonyításnak.)

(Beérkezett: 1984. március 8-án.)

IRODALOM

1. BENASSY, J.-P.: *The Economics of Market Disequilibrium*. London, 1982. Academic Press.
2. KAWASAKI, S., J. McMILLAN—K. F. ZIMMERMANN: „Disequilibrium Dynamics: An Empirical Study” *American Economic Review* 72 (1980) 992—1003.
3. KORNAI J.: *Anti-equilibrium* Budapest, 1971. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. KORNAI J.: *A hiány* Budapest, 1980. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
5. KORNAI J.: „Hard and Soft Budget Constraint”, *Acta Oeconomica*, 25 (1980) 231—247.
6. KORNAI J.: *Növekedés, hiány és hatékonyság* Budapest, 1982. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
7. KORNAI, J.—B. MARTOS: „Autonomous Functioning of the Economic System”, *Econometrica*, 41 (1973) 801—820.
8. KORNAI J.—MARTOS B. (szerk.) *Szabályozás árjelzések nélkül* Budapest, 1981. Akadémiai Kiadó.
9. KORNAI J.—J. W. WEIBULL: „A piac normál állapota hiánygazdaságban: egy sorbanállási modell” *Sigma* 11 (1981) 1—32.
10. MARTOS, B.: „Comparison of Economic Control Systems” in *Models and Decision Making in National Economies*, ed. by J. M. L. Janssen, L. F. Pau and A. Straszak, Amsterdam, 1979. North-Holland.
11. MARTOS, B.: „Non-Price Control (Report on a Research Trend)” in *Dynamic Modelling and Control of National Economies*, ed. by J. M. L. Janssen, L. F. Pau and A. J. Straszak, Oxford, 1980. Pergamon Press.

A FAMILY OF NON-WALRASIAN CONTROL MODELS

A series of five new control models is presented in the spirit of the papers collected in the volume “Non-Price Control”. Different control mechanisms are fitted to the same open static Leontief-economy. The controllers are characterized by uncoordinated decision making and by the application of the “control by norm” principle. Quantity signals (on input stocks and backlog orders) play primary role in the information processes. Conditions for the asymptotic stability of non-Walrasian equilibria are given and local viability of the transient responses proved.

СЕМЕЙСТВО МОДЕЛЕЙ РЕГУЛИРОВАНИЯ НЕ ТИПА ВАЛЬРАСА

В статье представлено пять новых моделей, разработанных в духе сборника статей «Регулирование без ценовых сигналов». Автор применяет для регулирования открытого, статического хозяйства Леонтьева различные механизмы. Регуляторы характеризуются некоординированным принятием решений и применением принципа «нормативного регулирования». В информационном процессе первостепенную роль играют количественные сигналы (входная и выходная информация о запасах и заявках). Автор описывает условия асимптотической стабильности состояния равновесия не типа Вальраса, а также доказывает локальное действие транзитивных ответов.

Kószálás Logaritmiában*

I. Exponenciális folyamatok

A matematikai gazdaságtan növekedési modelljei azon a felismerésen alapulnak, hogy a termeléshez nemcsak anyagra, gépre és munkára, hanem *időre* is szükség van.

Ez az időszükséglet nemcsak arányosan szerepelhet a ráfordítások közt, azaz nemcsak úgy, hogy x -szeres termékmennyiség kibocsátáshoz x -szerte több időre van szükség, mint ahogy ezt közelítőleg feltesszük az anyag- vagy munkaráfordítások esetében. Általában — tehát az előbbi esetet is magában foglalva — amikor a ráfordításokat kibocsátásokká alakítjuk át, vagyis az inputokat outputokká „transzformáljuk” a következőket feltételezhetjük.

1. *feltevés*: Ha valamilyen input-termék-halmazon egy t időtartamot igénylő transzformációt végzünk, majd az így kapott új termék-halmazt egy újabb s időtartamú transzformációnak vetjük alá, akkor a létrehozott végeredménynak azonosnak kell lennie azzal az eredménnyel, amelyet a kiinduló termék-halmazból egy $(t + s)$ időtartamot igénylő transzformációval kaphatunk.

Matematikailag: ha a transzformációt a T nagybetűvel, végzésének tartamát a mellette zárójelben feltüntetett (s) , illetve (t) szimbólummal jelöljük, akkor

$$(1.1.) \quad T(t + s) = T(s)T(t).$$

Ez az egyenlet jól ismert függvényegyenlet (elsőként Cauchy vizsgálta¹) és az *exponenciális* függvényt, tehát általában az exponenciális folyamatokat határozza meg, ha feltesszük, hogy a T transzformáció differenciálható. Ez ugyan nem szükséges feltétel, de a vizsgált tulajdonság legegyszerűbb bemutatására vezet.² Az (1.1) egyenletet t , illetve s szerint differenciálva, s a két eredményt egyenlővé téve

$$(1.2.) \quad T(s)T'(t) = T'(s)T(t).$$

* Köszönettel tartozom Ziermann Margitnak, Matics Ágnesnek és Virág Ildikónak, akik az első fogalmazás egyes nehezen érthető részeire, ügyetlen jelölésmódjára, hibáira stb. felhívták a figyelmet és módosításokat javasoltak.

¹ Lásd pl. Aczél (1961). Az egyenlet matrixos alakját Pólya (1928) mutatta be.

² Vö. Rényi (1966) levezetésével a radioaktív bomlás jelenségét illetően (ez exponenciálisan csökkenő folyamat). Rényi csak a $T(t)$ függvény $t = 0$ pontban való differenciálhatóságát, Pólya pedig pusztán a folytonosságát tételezte fel.

$T(t)$, illetőleg $T(s)$ nem lehet zérus vagy szinguláris, hiszen az (1.1.) egyenletből következik, hogy $1 = T(0) = T(t)T(-t)$. Ezért oszthatunk vele, s így

$$(1.3.) \quad T'(t)T^{-1}(t) = T^{-1}(s)T'(s).$$

Mivel s és t értéke tetszőleges, a derivált és a reciprok szorzata minden t -re azonos, azaz konstans. Legyen ez a konstans K , akkor

$$(1.4.) \quad T'(t) = KT(t), \text{ amiből } T(t) = \exp(Kt).$$

2. feltevés: Úgy is megfogalmazhatjuk az (1.4.) egyenletet és megoldását, hogy a változás kizárólag az elért színvonalától függ és azzal arányos.

Az 1. és 2. feltevés esetünkben ekvivalensnek bizonyul: azonos folyamatot határoz meg.

A gazdasági folyamatok exponenciális jellegét így két igen egyszerű és logikus — egymással ekvivalens — feltevésből vezettük le. Hogy e felvételek bármelyike, pontosabban: az e feltevésnek megfelelő sajátosság maguknak a termelési folyamatoknak a jellemző tulajdonsága, vagy pedig csak a termelési folyamatokról alkotott gondolati képünk követeli meg — ez olyan kérdés, amelyet ma még nem lehet jól megválaszolni.³

A következőkben feltesszük, hogy Logaritmia országában a gazdasági folyamatok exponenciálisak, és ha a statisztikai mérések némi eltérést mutatnak is, akkor ez kizárólag a mérés elégtelenségének, a mérési hibának a következménye.⁴

2. Az exponenciális folyamatok kölcsönviszonya

Logaritmiában a gazdasági idősorok közti kapcsolat mindig hatványfüggvény alakjában írható.

Legyen ugyanis két exponenciális folyamatunk, ahol

$$(2.1.) \quad x_1(t) = c_1 \cdot \exp(k_1 t)$$

és

$$(2.2.) \quad x_2(t) = c_2 \cdot \exp(k_2 t).$$

Akkor világos, hogy

$$(2.3.) \quad x_1 = a x_2^b,$$

ahol $b = k_1/k_2$ és $a = c_1 c_2^{-b}$, amiről behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk.

³ Valószínű, hogy a felvételek bizonyos egyszerűsítéseket jelentenek, s a végleges forma bonyolultabb lesz.

⁴ A valóságos világ mindenestre nagyon hasonlít Logaritmiához, mert azt tapasztaljuk, hogy a legtöbb gazdaságstatisztikai idősor alakulását az illesztett exponenciális trend 90—95 százalékban „megmagyarázza”, és az egyéb hatások — legyenek ezek akár determinisztikus jellegűek, mint például a ciklusok, vagy a technikai változás, akár sztochasztikus eredetűek — mint a mérési hibák — legfeljebb 5—10 százalékos nagyságrendben játszanak közre.

Tudjuk, hogy a hatványfüggvényt logaritmikus beosztású koordináta-rendszerbe rajzolva egyenest kapunk, mivel a

$$(2.4.) \quad \log x_1 = \log a + b \cdot \log x_2$$

egyenlet lineáris összefüggést állapít meg $\log x_1$ és $\log x_2$ közt. Azt is bizonyítani fogjuk, hogy a mértékegység megfelelő megválasztásával $\log a$ értékét zérussal (a értékét tehát az egységgel) tehetjük egyenlővé. Két, az időben exponenciálisan alakuló változó logaritmusai között így egyszerű arányosság áll fenn, s ezt az arányosságot a hatványfüggvény b kitevője, a növekedési ráták hányadosa szabja meg.

3. Jánossy NG mutatói

Jánossy (1963) a gazdasági növekedést vizsgálva igen sok természetes gazdasági mutató (természetes egységekben mért termelési és fogyasztási mutató), azaz „NG mutató” értékét rajzolta fel ilyen logaritmikus papírra, a nemzeti jövedelem függvényében, és általában egyenesekkel jól közelíthető összefüggéseket talált.

Egy ilyen jellegzetes egyenest mutat be az 1. ábra, amely az egy főre jutó villamosenergiafogyasztást és az egy főre jutó nemzeti jövedelem alakulását írja le.

Az egyenes iránytangensét szabatosan a regressziószámítás segítségével állapíthatjuk meg. A viszonylag szoros illeszkedés miatt azonban akkor sem követhetünk el nagy hibát, ha csupán a két szélső adatpárból számolunk. Például:

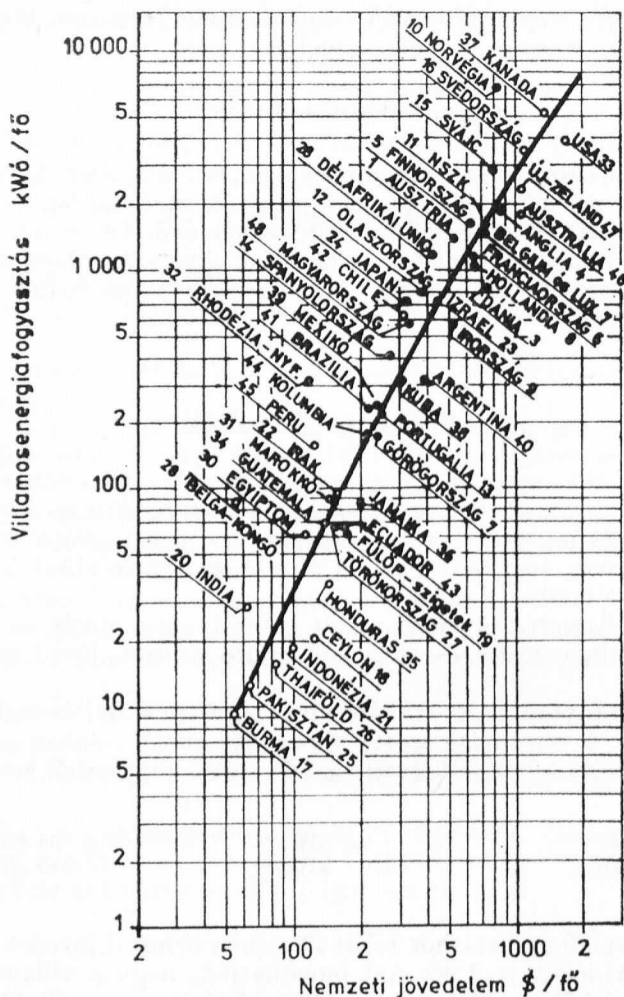
Burma	9,1 kWó/fő	54 \$/fő
Kanada	5040 kWó/fő	1345 \$/fő

554-szeres energiafogyasztáshoz tehát 25-szörös nemzeti jövedelem tartozik, s így $b = \log 554 / \log 25 \approx 1,96$. Azt mondhatjuk, hogy a villamosenergia fogyasztása közel kétszer olyan gyorsan növekedett a vizsgált időben, mint a fejenkénti nemzeti jövedelem termelése.

Felhasználva az $ax^b \equiv (a^{1/b} x)^b$ azonosságot a (2.3.) összefüggést „arányossággá” alakítjuk a mértékegység megfelelő megválasztásával. Ha a nemzeti jövedelmet kerekén 18 \$-os „egységekben” fejezzük ki, akkor Burmának 3 „egység”, Kanadának pedig 71 „egység” nemzeti jövedelme volt, és ezek négyzete — 9 illetve 5041 — adja meg az egy főre jutó villamosenergiafogyasztást. A villamosenergiafogyasztás és a nemzeti jövedelem logaritmusai így konstans arányban állnak egymással a regressziós egyenes mentén; az egyenes átmegy az (1,1) ponton.

4. Pareto-eloszlások

Logaritmiában a társadalmi ranglétra egy bizonyos magasságán vagy ennél magasabban r számú személy áll. Ha feltesszük, hogy a pozíciókból való ki-



1. ábra

esés valószínűsége arányos a már elért pozícióval, akkor — az első pontban levezetett okfejtés mintájára —

$$(4.1.) \quad v = c_1 \cdot \exp(-k_1 s).$$

Itt k és c az eloszlást meghatározó paraméterek.⁵

Az egyes pozíciókban elért jövedelem, ξ legyen ismét exponenciális függvénye az s pozíciónak, s így

$$(4.2.) \quad \xi = c_2 \cdot \exp(k_2 s).$$

⁵ Pareto feltette, hogy ezek alapja a képességek egyenlőtlen eloszlása. De elégséges azt feltenni, hogy a munkamegosztás adott technikai szintje bizonyos hierarchiát határoz meg, amelyben egy-egy vezető adott számú beosztott munkáját képes áttekinteni, s így kialakul a társadalmi pozíciók adott „meredekségű” gúlája.

A második pontban bemutatott összefüggés alapján tudjuk, hogy a jövedelem-eloszlást akkor

$$(4.3.) \quad \nu = a\xi^{-b}$$

alakba írhatjuk, ahol $b = k_1/k_2$. Itt tehát ν azok száma, akiknek jövedelme ξ -vel egyenlő vagy azt meghaladja.

Ez az úgynevezett Pareto-féle jövedelemeloszlás.

Bár *Theiss* (1935) már ismertette Magyarországon a Pareto-eloszlást, és *Malinvaud* (1974) is utal rá, talán nem hiábavaló a nálunk Rényi által bevezetett tárgyalásmódnak megfelelően definiálni és néhány sajátosságára felhívni a figyelmet.

Egy ξ valószínűségi változót Pareto eloszlásúnak nevezünk, ha sűrűségfüggvénye

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \xi < a^{1/b} = \xi_{\min} \\ ab\xi^{-(1+b)}, & \text{ha } \xi \geq \xi_{\min}. \end{cases}$$

Az eloszlás várható értéke ennek megfelelően, ha $b > 1$

$$(4.4.) \quad \bar{\xi} = E(\xi) = \int_{a^{1/b}}^{\infty} ab \xi^{-b} d\xi = \frac{ab}{1-b} \xi^{1-b} \Big|_{a^{1/b}}^{\infty} = \frac{ab}{b-1} (a^{1/b})^{1-b} = \frac{b}{b-1} a^{1/b}.$$

Ebből következik, hogy $\bar{\xi}(b-1) = b\xi_{\min}$, így az eloszlás paraméterei az alábbi érdekes és egyszerű összefüggéseknek tesznek eleget:

$$(4.5.) \quad b = \bar{\xi}/(\bar{\xi} - \xi_{\min}), \quad a = \xi_{\min}^b.$$

$b \leq 1$ esetén a várható érték nem véges szám. Hasonlóan győződhetünk meg róla, hogy $b \leq 2$ esetén az eloszlás szórása nem véges, mert a valószínűségi változó négyzetének várható értéke nem létezik. Ezért beszél Malinvaud „szórásmentes” eloszlásról.

A Pareto eloszlásfüggvény (a 4.3. egyenlettel *ellentétes* valószínűség) annak valószínűségét adja meg, hogy a jövedelem egy adott ξ szinttel egyenlő vagy annál kisebb:

$$F(\xi) = P(j \leq \xi) = \begin{cases} 0, & \text{ha } \xi < a^{1/b} \\ 1 - a\xi^{-b}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Még megjegyzendő, hogy a Pareto eloszlásnak van egy tulajdonsága, amely különösen alkalmassá tesz a jövedelemeloszlások tanulmányozására: *stabilis* eloszlás, ami azt jelenti, hogy az ilyen eloszlásból származó valószínűségi változók összege is ugyanabba az eloszláscsaládba tartozik. Ez a sajátossága az ismertebb eloszlások közül csak a normális eloszlással közös.⁶

Logaritmiában széleskörű a Pareto-eloszlások érvénye: a személyi jövedelmeken kívül a családi jövedelmek, az üzemek, vagyonok, a faluk és városok nagysága, stb., stb. is ezt az eloszlást követi, mert mint a 2. pont megmutatta: az exponenciális folyamatok „egymás számára” mindig Pareto-eloszlásúnak tűnnek.

⁶ Lásd Rényi (1966) V. 8 §.

Kiegészítésül azt is meg kell állapítani, hogy ha Logaritmiában a profitok és a bérek azonos frekvenciával ingadoznak (az ingadozás is lehet exponenciális folyamat, csak hogy a kitevő tisztán képzetes szám), akkor az ezeket összekapcsoló „Pareto-eloszlás” ax^{-1} alakú, amit köznyelven úgy fogalmazhatunk meg, hogy a profitok és a bérek egymással fordítottan arányosak. Ennek az „eloszlásnak” azonban nincsen sem várható értéke, sem szórása.

5. A Cobb—Douglas függvények

Rendkívül jellegzetesen alakulnak Logaritmiában a termelési függvények is. Ha ugyanis az

$$(5.1.) \quad T = aK^\beta L^{1-\beta}$$

alakú összefüggés, ahol T a termelés, K a tőke és L a munka mennyisége, három exponenciális folyamatot kapcsol össze, akkor

$$(5.2.) \quad \begin{aligned} T &= \mu_1 e^{\lambda_1 t} \\ K &= \mu_2 e^{\lambda_2 t} \\ L &= \mu_3 e^{\lambda_3 t}. \end{aligned}$$

Behelyettesítve (5.1.)-be kapjuk, hogy

$$(5.3.) \quad \mu_1 e^{\lambda_1 t} = a[\mu_2 e^{\lambda_2 t}]^\beta [\mu_3 e^{\lambda_3 t}]^{1-\beta}.$$

A kitevőket vizsgálva világos, hogy

$$\lambda_1 = \lambda_2 \beta + \lambda_3(1 - \beta),$$

amiből, ha $\lambda_2 \neq \lambda_3$:

$$(5.4.) \quad \beta = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}.$$

Szavakban kifejezve tehát a tőke exponense („hozama”) a következőképpen függ a munka termelékenységeinek és a munkának tőkével való felszereltségének növekedésétől:

hozam = termelékenység növekedése/felszereltség növekedése.

Tehát ha például a termelés évi 2%-kal és a létszám évi 1%-kal nő, akkor a munkatermelékenység értelemszerűen évi 1%-kal nő.⁷ Ha ugyanakkor a tőke évi 6%-kal nő, akkor a munka tőkével való felszereltsége 5%-kal növekszik évente. Így a tőke „hozama” $0,01/0,05 = 0,2$ lesz, s a létszám „hozama” $1 - 0,2 = 0,8$.

Világos, hogy ilyen „növekedési ollók” csak az iparosítási korszak sajátoságaiból adódnak és csak azokból adódhatnak. Ha a munkaerőforrások kiapadnak — tehát ha a munkáslétszám nem vagy csak igen csekély mértékben nő, akkor a tőke „hozama” a termelés és a tőkeállomány növekedésének hányadosaként adódik. Mivel az intenzív szakaszban a tőkeigényesség csökken-

⁷ Mivel $T/L = \mu_1/\mu_3 e^{(\lambda_1 - \lambda_3)t}$.

het — tehát a tőkeállomány lassabban nőhet, mint a termelés, így a tőke kitevője szükségképpen nagyobbá válik 1-nél, a munka „hozama” teljesen eltűnik vagy negatívvá válik, s az eredeti Cobb-Douglas függvény felmondja a szolgálatot. Ezért kellett a második világháború utáni számításokban, a fejlett országokra vonatkozóan újból és újból helyesbíteni a termelési függvények alakját, először a „technikai fejlődés” együtthatóját bevezetve,⁸ majd a CES és egyéb függvények osztályában keresve az összefüggéseket jobban leíró egyenleteket.

6. A statisztikai illesztésről

Bármennyire is meglepő a következő állítás — mert ellentmond egész eddig kialakult ökonometriai gyakorlatunknak — az eddig levezetett összefüggésekből kiviláglik, hogy a fent ismertetett esetekben, tehát a Pareto-eloszlások, a Jánossy-féle NG mutatók és a Cobb-Douglas függvények esetében Logaritmiában nem bízhatjuk magunkat az egyébként jól bevált regressziószámítás technikájára, illetőleg az csak egyváltozós alakjában, tehát egy-egy hatványfüggvény kitevőjének (esetleg együtthatójának) becslésére alkalmas. A többváltozós alak — a változók közt fennálló sajátos összefüggés következtében — szükségszerűen hibás következtetésekre vezet.

A Cobb-Douglas függvények becslésével kapcsolatban ez a probléma már gyakorlatilag felmerült, amikor a tapasztalatok alapján, látva a statisztikai becslés bizonytalanságát, ezt a változók úgynevezett multikollinearitásával indokolták. A multikollinearitás azonban csak bizonytalanná teszi a becslést, de nem teszi lehetetlenné. A számítások során felmerülő mátrix inverzióját azért teszi bizonytalanná, mert ez a mátrix a multikollinearitás következtében „rosszul kondicionált”, legnagyobb és legkisebb sajátértékének aránya túl nagy.

Valójában ennél rosszabb a helyzet: a mátrix inverziója nemcsak bizonytalan, hanem — az elméletileg tiszta, „pontosan mért” esetben — lehetetlen is, mivel e mátrix *szükségképpen szinguláris*, sőt már másodrendű minorainak determinánsa is zérus, tehát egyetlen diádból áll és rangja 1-gyel egyenlő.

Tegyük fel ugyanis, hogy az (5.1.) egyenletben szereplőnél általánosabb $T = a K^\beta L^\gamma$ Cobb-Douglas függvényt akarjuk számítani, azaz a β és γ kitevő értékét becsülni, mégpedig a T termelésre, K tőkeállományra és L létszámra vonatkozó statisztikai adatsor, illetőleg ezek logaritmusai alapján. Azaz a

$$(6.1.) \quad \ln T = \beta \ln K + \gamma \ln L$$

logaritmikusan lineáris kétváltozós regressziószámítást kívánjuk elvégezni. (Az a együttható értékét itt figyelmen kívül hagyhatjuk, mert a 3. pontban levezettük, hogy értékét egységnyivé, logaritmusát tehát zérussá lehet tenni a mértékegységek megfelelő megválasztásával, s most feltesszük, hogy adatainkat eleve ilyen mértékegységekben mértük.) Világos, hogy az ilyen illesztés nemcsak a Cobb-Douglas függvény meghatározását szolgálhatná, hanem ezt alkalmaznánk, ha több (jelen esetben két) NG mutatónak a nemzeti növede-

⁸ Azaz a $T = e^{\gamma} K^{\beta} L^{1-\beta}$ alakban a technikai fejlődést jellemző γ együttható alkalmas arra, hogy β értékét „leszorítsa”, mivel $\lambda_3 = 0$ esetén $\beta = \lambda_1/\lambda_2 - \gamma/\lambda_2$.

lemre gyakorolt együttes hatását kívánnánk megbecsülni, ha tehát például éppen a tőkét és a munkát tekintenénk a megfelelő NG mutatóknak (de választhatnánk az elektromos energiát és az acétermelést is).

Logaritmiában azonban, ha a statisztikai adatok pontosak, akkor mind $\ln K$, mind pedig $\ln L$ adatsora $\ln T$ adatsorának egy-egy többszöröse lesz — ennek következtében tehát $\ln K$ adatsora is valamilyen többszöröse lesz $\ln L$ adatsorának, s így a belőlük képzett mátrix szinguláris és Penrose értelmében sem invertálható, mivel rangja 1.

Ha a gyakorlatban mégis elvégezhető az invertálás, tudniillik ha a mérési hibák következtében $\ln K$ és $\ln L$ adatsora lineárisan függetlenné válik, akkor az eredmény igen bizonytalan (mert a mátrix továbbra is igen közel van egy szinguláris mátrixhoz, s így legkisebb sajátértéke igen kicsiny), s ami még kellemetlenebb: a kapott megoldás nemcsak bizonytalan, hanem *teljes egészében* a mérési hibák függvénye.

Az így kapott, gyökerükben hibás becslések ezen után nem használhatók sem arra, hogy a „valódi” értékek valamilyen közelítésének tartsuk őket, sem pedig arra, hogy esetleges torz voltuk miatt, negativitásukkal vagy értelmezhetetlenül nagy értékükkel érvelve a fenti modellekben leírt elméletet cáfoljuk velük.

Ahogy e kérdéskört jelenleg látom, csupán a minden változóra külön-külön elvégzett statisztikai becslés a járható út, a mérési hibák utólagos kiegyenlítésével, hogy erre pl. Jánossy műve 159. oldalán tesz javaslatot a geometriai átlagolás módszerét alkalmazva. Lehetséges tehát olyan eset, amikor a többszörös regresszió módszere nemcsak rosszabb eredményre vezet, mint a többszörösen elvégzett regresszió, hanem egyenesen értelmetlen és értelmezhetetlen eredményeket ad.

(Beérkezett: 1984. március 7-én.)

IRODALOM

1. ACZÉL, I. (1961): *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin.
2. COBB, C.—DOUGLAS, P. (1928): A Theory of Production. *AER*; Vol. 18. Supplement 139—165. pp.
3. JÁNOSY F. (1963): *A gazdasági fejlettség mérhetősége és új mérési módszere* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest.
4. MALINVAUD, E. (1974): *Az ökonometria statisztikai módszerei* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. Budapest.
5. PÓLYA G. (1928): *Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion im Matrizkalkül*. Sitzberichte. Akademie Berlin. 96—99. pp.
6. RÉNYI A. (1966): *Valószínűségszámítás* Tankönyvkiadó, Budapest.
7. THEISS E. (1935): Statisztikai törvényszerűség a jövedelemeloszlásban. *Közgazdasági Szemle*, jan./febr. 1—38. old.

ROAMING IN LOGARITHMIA

The exponential nature of economic processes can be deduced from simple assumptions. If the processes are strictly (and not only approximately) exponential, the relationship between them can always be written in the form of a power function. Special forms of this relationship are the NG indicators of Jánossy, the Pareto distributions and the Cobb—Douglas functions. In the case of strictly exponential processes the methods of linear regression cannot be employed because they yield misleading results.

ПУТЕШЕСТВИЕ В ЛОГАРИТМИЮ

Благодаря своему экспоненциальному характеру экономические явления могут быть описаны с помощью простых предположений. Если явления имеют строгий (а не только приближенно) экспоненциальный характер, то связь между ними всегда можно описать в виде степенной функции. Специальные виды этой связи NG-показатели Яношии, распределения Парето и функции Кобб-Дагласа.

В случае строго экспоненциальных явлений методы регрессионного расчета неприменимы или дают неверный результат.

Mérési helyek optimális kijelölése talajvizek minőségvizsgálatában

1. Bevezetés

Az alkalmazott tudományok és így a hidrológia művelése során is gyakran találkozunk olyan adatokkal, amelyek térben és időben kiterjedő valószínűségi változók halmazával jellemezhetők. Az ötvenes évek végén és a hatvanas évek elején *Matheron* (1957, 1963) dolgozta ki a regionalizált változók elméletének alapjait, és vezette be a kriging módszer különféle változatait. A konkrét módszerek jó leírása megtalálható a szakirodalomban [*Kapolyi* (1981), *Journal* és *Huijbregts* (1978), *David* (1977)]. Azóta ezeket az eljárásokat az alkalmazott tudományok számos területén alkalmazzák. A bányászati alkalmazásokat tárgyalja *Kapolyi* (1981), *Journal* és *Huijbregts* (1978), a hidrológiai alkalmazások néhány kérdését mutatja be *Delhomme* (1978), *Gambolati* és *Volpi* (1979), talajmechanikai alkalmazásokat vizsgál *Webster* és *Burgess* (1980).

A kriging módszer szokásos változatai nemcsak a szóban forgó változó egy-egy pontban felvett értékét és adott tartományokon való átlagértékét becsülik meg, hanem a becslés bizonytalanságát jellemző becslési varianciát is megadják. A módszerek nagyon fontos tulajdonsága, hogy a becslési variancia értéke nem függ közvetlenül a mérési adatoktól, csak a mérési pontok koordinátáitól. Ez más szavakkal azt is jelenti, hogy a becslési bizonytalanságot a mérések konkrét elvégzése előtt jellemezni tudjuk. A kriging-típusú módszereknek ez a tulajdonsága lehetőséget ad arra, hogy a mérési helyeket optimálisan kijelölhessük.

Mérési pontok optimális kijelölésével több szerző is foglalkozott. Egyetlen hely kijelölését *Delhomme* (1978) vizsgálta, és egy szekvenciális módszert javasolt a mérési pontok fokozatos bevonására. Több mérési hely szimultán kijelölésével először *Szidarovszky* (1981) foglalkozott, aki matematikai programozási feladatok megoldására redukálta a problémát. Egy egyszerű szám példát mutatott be a *Szidarovszky* (1982a) dolgozatban és egy konkrét bányászati alkalmazást tárgyal a *Szidarovszky* (1982b) tanulmány. A redukált matematikai programozási feladat nemkonvex, így megoldására speciális algoritmusok kidolgozása szükséges (*Szidarovszky*, 1982c, d).

Jelen dolgozatunkban egy speciális leszámlálási algoritmust ismertetünk a fenti feladat megoldására. Először a kriging módszer alapjait vázoljuk, majd a leszámlálási algoritmust részletezzük. A San Pedro folyó (Arizona) vízgyűjtőjének fluor szennyeződése mérésére alkalmazzuk ezután eljárásunkat. A dolgozatot néhány észrevétellel, következtetéssel és általánosítási lehetőséggel leírásával zárjuk.

* A tanulmány akkor készült, amikor az első szerző az Arizonai Egyetem Rendszerelméleti Tanszékén vendégelőadóként dolgozott 1981 augusztusától 1983 januárig.

2. A kriging módszer alapelve

A kriging módszerek nevüket D. G. Krige-ről kapták, aki először javasolt hasonló alapgondolatú eljárást aranybányák készletének becslésére (Krige, 1951). A módszeresalád legegyszerűbb változatát ismertetjük a továbbiakban, az általánosított eljárások a szakirodalomban megtalálhatók (Journel és Huijbregts, 1978).

Jelöljön D egy tartományt az egy, két, vagy három dimenziós térben. Tegyük fel továbbá, hogy tetszőleges $x \in D$ estén létezik a $Z(x)$ valószínűségi változó, valamint tetszőleges x , $x + h \in D$ esetén

$$E[Z(x + h) - Z(x)] = 0 \quad (2,1)$$

$$\text{Var} [Z(x + h) - Z(x)] = 2\gamma(h). \quad (2,2)$$

Az első feltételből nem következik, hogy a $Z(x)$ valószínűségi változóknak létezik a várható értéke, hiszen azonos Cauchy eloszlások eleget tesznek a (2,1) feltételnek és mégsem rendelkeznek várható értékkel. A második feltétel szerint a $Z(x)$ függvény megváltozásának a varianciája a független változók megváltozásától függ. A $\gamma(h)$ függvényt variogramnak nevezzük.

A (2,1) és (2,2) feltételeknek eleget tevő sztochasztikus függvényeket *belső függvényeknek* is nevezzük (Matheron, 1973). Megjegyezzük, hogy a fenti feltételek számos általánosítását tárgyalja David (1977).

Legyen ezután V a D tartomány egy részhalmaza. A $Z(x)$ függvény V -n felvett átlagértékét a

$$Z(V) = \frac{1}{|V|} \int_V Z(x) dx \quad (2,3)$$

összefüggéssel definiálhatjuk, ahol $|V|$ jelöli a V halmaz mértékét (hosszát, területét vagy térfogatát a dimenziótól függően.) A kriging módszer alkalmazásakor a $Z(V)$ átlagértéket a $Z(x)$ függvény aktuálisan mért $Z(x_1), \dots, Z(x_n)$ értékeinek lineáris kifejezésével becsüljük:

$$Z(V) \approx Z^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i), \quad (2,4)$$

ahol a λ_i együtthatók egyelőre ismeretlenek. A (2,4) becslésről feltesszük, hogy torzítatlan és minimális szórású. A torzítatlansági feltétel nyilvánvalóan teljesül, ha

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1. \quad (2,5)$$

A minimális szórás elérése pedig a

$$\text{Var} [Z^*] \rightarrow \min \quad (2,6)$$

szélsőértékfeladat megoldását igényli. Ismeretes (ld. pl. Szidarovszky, 1981), hogy

$$\text{Var} [Z^*] = -\gamma_{vv} + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{vi} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma_{ij}, \quad (2,7)$$

ahol

$$\gamma_{ij} = \gamma(x_i - x_j), \quad \gamma_{vj} = \frac{1}{|V|} \int_V \gamma(x_i - x) dx, \quad \gamma_{vv} = \frac{1}{|V|^2} \int_V \int_V \gamma(x - x') dx dx'. \quad (2,8)$$

Megjegyezzük, hogy pontbecslések esetén V egyetlen pontból áll, vagyis ekkor $V = \{x_0\}$, valamint a (2,8) összefüggésekben:

$$\gamma_{vi} = \gamma(x_i - x_0), \quad \gamma_{vv} = 0. \quad (2,9)$$

A (2,6) célfüggvénynek a (2,5) feltétel melletti optimalizálására a Lagrange-féle multiplikátor módszert alkalmazhatjuk (Szép, 1972), amely végeredményben lineáris egyenletrendszer megoldására vezet:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (2,10)$$

$$\mu + \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_{ij} = \gamma_{vi} \quad (i = 1, \dots, n),$$

ahol μ jelöli a Lagrange-multiplikátort. Az egyenletrendszer $n + 1$ egyenletből áll és $n + 1$ ismeretlent tartalmaz; numerikus megoldására jól alkalmazható számítógépes módszerek állnak rendelkezésünkre (Szidarovszky, 1974; Szidarovszky és Yakowitz, 1983). Az egyenletrendszer megoldásából adódó $\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*$ értékek adják a (2,4) becslési együtthatókat, a megfelelő becslési varianciát pedig a (2,7)-ből könnyen származtatható

$$\text{Var}_n [Z^*] = \mu^* + \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \gamma_{vi} - \gamma_{vv} \quad (2,11)$$

kifejezés szolgáltatja. A fenti összefüggések tömör felírása érdekében vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{G}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ 1 & \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma_{v1} \\ \gamma_{v2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{vn} \end{pmatrix}. \quad (2,12)$$

Ekkor a (2,10) egyenletrendszer a tömör

$$\mathbf{G}_n \boldsymbol{\lambda}_n = \boldsymbol{\gamma}_n \quad (2,13)$$

alakban írható fel, valamint

$$\text{Var}_n [Z^*] = \boldsymbol{\gamma}_n^T \boldsymbol{\lambda}_n - \gamma_{vv} = \boldsymbol{\gamma}_n^T \mathbf{G}_n^{-1} \boldsymbol{\gamma}_n - \gamma_{vv}. \quad (2,14)$$

A módszer alkalmazásának két alapvető tulajdonságával foglalkozunk ezután. Tegyük fel, hogy a meglevő $x_1, \dots, x_n$ pontokon kívül egy további x_{n+1} mérési helyet vonunk be a becslési eljárásba. Ekkor a $\mathbf{G}_n$ mátrix egy újabb

oszloppal és sorral, valamint γ_n és λ_n egy-egy újabb elemmel bővül, vagyis

$$\mathbf{G}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_n & \mathbf{g} \\ \mathbf{g}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{n+1} = \begin{pmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{v, n+1} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

ahol

$$\mathbf{g}^T = (1, \gamma_{n+1, 1}, \dots, \gamma_{n+1, n}). \quad (2.16)$$

Könnyen kimutathatjuk, hogy az $n + 1$ pontra épülő egyenletrendszer megoldását az n pontra épülő egyenletrendszer megoldásából közvetlenül is megkaphatjuk az egyenletrendszer ismételt megoldása nélkül, ezzel jelentősen csökkenthetjük a szükséges számítások mennyiségét. Keressük ennek érdekében a $\mathbf{G}_{n+1}$ mátrix inverzét is a hasonló blokkosított alakban:

$$\mathbf{G}_{n+1}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{y} \\ \mathbf{y}^T & s \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Ekkor az inverz definíciója alapján $\mathbf{G}_{n+1} \mathbf{G}_{n+1}^{-1} = \mathbf{I}_{n+1}$, azaz

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_n \mathbf{X} + \mathbf{g} \mathbf{y}^T &= \mathbf{I}_n, \\ \mathbf{G}_n \mathbf{y} + \mathbf{g} s &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}^T \mathbf{X} &= \mathbf{0}^T, \\ \mathbf{g}^T \mathbf{y} &= 1, \end{aligned} \quad (2.18)$$

ahol $\mathbf{I}_n$ és $\mathbf{I}_{n+1}$ jelöli az n és $n + 1$ dimenziós egység-mátrixot. Ismeretes (Szidarovszky és Yakowitz, 1978), hogy a (2.18) összefüggések alapján

$$\begin{aligned} s &= \frac{-1}{\mathbf{g}^T \mathbf{m}}, \\ \mathbf{y} &= -\mathbf{m} s, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{G}_n^{-1} + \frac{1}{s} \mathbf{g} \mathbf{y}^T,$$

ahol $\mathbf{m} = \mathbf{G}_n^{-1} \mathbf{g}$. Egyszerű számolással kimutatható továbbá (Szidarovszky, 1974), hogy az $n + 1$ pontra épülő kriging rendszer megoldása:

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= s(\gamma_{v, n+1} - \mathbf{g}^T \lambda_n^*), \\ \lambda_n &= \lambda_n^* - \mathbf{m} \lambda_{n+1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

ahol most λ_n^* jelöli az n pontra épülő (2.13) egyenletrendszer megoldását; továbbá

$$\text{Var}_{n+1} [Z^*] = \text{Var}_n [Z^*] + \frac{1}{s} \cdot \lambda_{n+1}^2. \quad (2.21)$$

Vegyük észre, hogy a fenti formulák felhasználásával n^2 nagyságrendű művelet végrehajtásával az együtthatómátrix inverzét, a megoldást és a megfelelő becslési varianciát is meghatározhatjuk. Megjegyezzük, hogy az egyenletrendszer közvetlen megoldása n^3 nagyságrendű művelet elvégzését igényelné (Szidarovszky, 1972).

Tegyük fel ezután, hogy az $x_1, \dots, x_{n+1}$ pontok közül az x_{n+1} pontot kihagyjuk a becslésből. Ekkor a G_{n+1} inverzmátrix (azaz a X, y blokk és s konstans), a λ_{n+1} megoldás és a $\text{Var}_{n+1}[Z^*]$ becslési variancia ismeretes. Az x_{n+1} pont elhagyásával adódó újabb G_n^{-1} inverz, λ_n megoldás és a becslési variancia a fenti egyenlőségek átrendezésével adódnak:

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{s} y, \\ G_n^{-1} &= X - \frac{1}{s} y y^T, \\ \lambda_n^* &= \lambda_n + m \lambda_{n+1}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\text{Var}_n[Z^*] = \text{Var}_{n+1}[Z^*] - \frac{1}{s} \cdot \lambda_{n+1}^2.$$

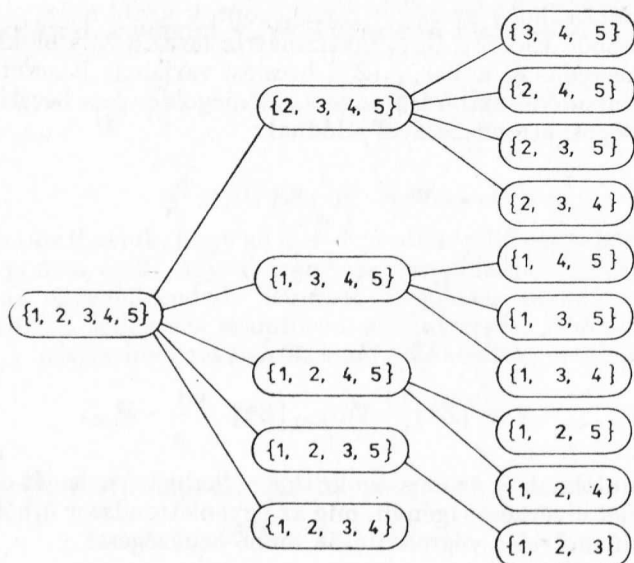
Ezeknek a formuláknak és azonosságoknak az alkalmazása ismét csak n^2 nagyságrendű művelet elvégzését igényli, míg az egyenletrendszer újbóli megoldása n^3 nagyságrendű művelet végrehajtását tenné szükségessé.

3. Mérési pontok optimális telepítése

Jelölje most $x_1, x_2, \dots, x_n$ a meglevő helyeket, valamint tegyük fel, hogy k további mérési helyet kívánunk kijelölni. Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre állnak a $t_1, t_2, \dots, t_N$ mérési hely alternatívák; közülük kívánjuk kijelölni a legjobb k darabot a becslési variancia minimalizálása alapján. A Szidarovszky (1981, 1982a,b) dolgozatokban vegyes és tiszta egészértékű programozási modellek felírására került sor, amelyek megoldása az optimális mérési hely kijelölését adja meg. A továbbiakban a probléma megoldására egy speciális leszámítási algoritmust javasolunk.

Az eljárás konkrét ismertetése előtt képezzük a következő irányított gráfot. A gráf csúcspontjainak az $N = \{1, 2, \dots, N\}$ halmaz legalább k elemű részhalmazai felelnek meg, a kezdőpontot a teljes halmazzal azonosítjuk. A gráf irányított éleit a következőképpen definiáljuk. Az $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_r\}$ részhalmaznak megfelelő csúcsból akkor és csak akkor vezet közvetlen él a $J = \{j_1 < j_2 < \dots < j_s\}$ részhalmaznak megfelelő csúcsba, ha $s = r - 1$, valamint az $(N - J) - (N - I)$ halmaz egyetlen olyan elemből áll, amely nagyobb $(N - I)$ összes eleménél. Ezt a tulajdonságot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a J halmaz I -ből egyetlen olyan elem elhagyásával adódik, amely nagyobb, mint az I halmaz esetében elhagyott elemek mindegyike. Az $N = 5$, $k = 3$ esetnek megfelelő gráfot a 3.1 ábra mutatja be. Vegyük észre, hogy az I csúcspontból közvetlen éllel elérhető csúcspontokat az elhagyott elemek nagyságrendje szerint rendeztük. Például a kezdőpontból az 1 elem elhagyásával a $\{2, 3, 4, 5\}$ pont adódik, a 2 elem elhagyásával $\{1, 3, 4, 5\}$, 3 elhagyásával $\{1, 2, 4, 5\}$, a 4 elhagyásával $\{1, 2, 3, 5\}$ és végül 5 elhagyásával adódik az $\{1, 2, 3, 4\}$ csúcspont. Ezeket a csúcspontokat pedig ebben a sorrendben ábrázoltuk felülről lefelé.

A leszámítási eljárást a gráf kezdőpontjánál kezdjük, amikor kiszámítjuk a hozzátartozó kriging rendszer együtthatómátrixának inverzét, a becslési



3.1 ábra. Az algoritmus irányított gráfja

együtthatókat és varianciát. Minden lépésben pedig egy-egy csúcsból egy szomszédosba haladunk a következő szabály szerint:

a) Tegyük fel, hogy a következő feltételek közül legalább egy fennáll:

(i) az illető csúcsból kiinduló valamennyi él végpontjában már jártunk, vagy az illető csúcsból nem indul ki újabb él (azaz a csúcshoz pontosan k elem tartozik);

(ii) a csúcsponthoz tartozó becslési variancia érték nem kisebb, mint az eddig már megvizsgált k elemű halmazokhoz tartozó legkisebb variancia-érték.

Ekkor haladjunk vissza az ebbe a csúcspontba befutó él mentén.

b) Ha a fenti feltételek egyike sem teljesül, akkor haladjunk előre a gráf mentén az első olyan csúcspontba, amelyet még nem vizsgáltunk meg.

c) Az eljárás akkor ér véget, ha az $\{1, 2, \dots, k\}$ csúcspontot is megvizsgáltuk.

Optimálisnak pedig azt a pontosan k elemű részhalmazt fogadjuk el, amely a legkisebb becslési varianciát szolgáltatja. Ha $\{i_1, \dots, i_k\}$ jelöli azt a részhalmazt, akkor a $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ újabb mérési pontokat tekintjük optimálisnak.

Az algoritmussal kapcsolatban néhány további megjegyzést teszünk. Az a) eset (i) feltétele akkor teljesül, ha az illető csúcspontból nem tudunk újabb csúcsba közvetlen előre haladással eljutni. A (ii) feltétel szerint az illető csúcs-hoz tartozó becslési variancia nem jobb, mint az eddig talált optimum. Ekkor pedig nem érdemes újabb mérési pontokat elhagynunk, hiszen ekkor a becslési variancia tovább romlana. A c) eset akkor teljesül, ha a kezdőpontból kiinduló utolsó él végpontját is megvizsgáltuk, amelyből már további él nem indul ki. Bármelyik él mentén is haladunk előre, az él végpontja egyetlen mérési pont elhagyásával adódik a kezdőpontból, visszafelé történő haladás

esetén egyetlen újabb mérési pontot vonunk be a kriging becslésbe. Mindkét esetben a megfelelő kriging rendszer együtttható-mátrixának inverze, a rendszer megoldása és a becslési variancia az előző paragrafusban bemutatott egyszerűsített módszerekkel származtatható a kriging rendszer újbóli megoldása helyett. Ha a számítógép memóriájában elegendő hely áll rendelkezésünkre, akkor visszafelé haladáskor nem kell a fenti mennyiségeket újra meghatároznunk, hiszen a megfelelő újabb csúcspontot a korábbiak során már megvizsgáltuk. Vegyük azt is észre, hogy ez esetben maximálisan $N - k + 1$ mátrixot kell egyszerre tárolnunk, amelyek megfelelnek a kezdőpontból az illető csúcsba vezető útvonal csúcspontjaihoz tartozó adatoknak.

Az imént bemutatott eljárás többféleképpen is módosítható és általánosítható (Szidarovszky, 1982c, d). Megjegyezzük végül, hogy a leszámlálási eljárás fentiekben is alkalmazott alapelve a korlátozás és szétválasztás (Forgó, 1974) módszerének egy alkalmas adaptálása.

4. A San Pedro folyó vízgyűjtőjének vizsgálata

A San Pedro folyó Mexico Sonora államában ered, és észak felé folyik át az Egyesült Államokba, ahol az arizonai Gila folyóval egyesülve még kb. 150 mérföldet halad észak felé, ahol eltűnik a sivatagban. A San Pedro vízgyűjtője kb. 4483 négyzetmérföldet tesz ki, amelyből kb. 696 négyzetmérföld Mexicohoz tartozik. A folyó felső szakaszát fogjuk vizsgálni, amely mintegy 65 mérföld hosszan, váltakozó, 15-től 65 mérföld szélességben terjed el az Arizona állam Cochise megyéjében, és északról a Winchester hegység, valamint nyugatról a Rincon, Whetstone és Huachuca hegység határolja.

A vízgyűjtőhöz jelentős mennyiségű talajvíz tartozik, amely a sivatagi klíma miatt alapvető fontosságú az ivóvíz ellátás és mezőgazdasági öntözés szempontjából. A talajvíz általában jó minőségűnek tekinthető, azonban St. David–Benson környékén fluorral szennyezett. Ez a fluor szennyezés káros hatásokkal, például csontkárosodással járhat (Smith és Commack Smith, 1932). Éppen ezért alapvető fontosságú a fluor szennyeződés állandó ellenőrzése. A St. David környéki átlagos fluortartalom becslését kutak adataival végzik. Esetünkben tehát $Z(x)$ az x helyen jelentkező fluorszennyeződés mértékét jelenti, a V tartomány a St. David környékét. Az átlagszennyeződés a (2,3) átlagértékkel jellemezhető.

A kutak közül 33-ban méri rendszeresen a fluor szennyeződés mértékét, így e kutak helyét tekintjük létező mérési pontnak, azaz esetünkben $n = 33$. A fluor szennyeződés eredete ismeretlen és a szennyeződés helyi elterjedésében semmilyen trend sem ismeretes. A (2,1), (2,2) feltételek teljesülését a mért adatok alapján hipotézis vizsgálattal ellenőriztük. Első lépésként a variogramot határoztuk meg. Először a mért adatok alapján tapasztalati variogramot konstruáltunk (Szidarovszky, 1982a), majd szférikus függvényt (Szidarovszky, 1982a) illesztettünk a legkisebb négyzetek módszerével. Eredményül a

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0, & \text{ha } h = 0 \\ a_0 + \frac{w}{2} \left[\frac{3h}{a} - \left(\frac{h}{a} \right)^3 \right], & \text{ha } 0 < h \leq a \\ a_0 + w, & \text{ha } h \geq a \end{cases} \quad (4.1)$$

függvény adódott, ahol $a_0 = 1,0$, $w = 2,8$ és $a = 8,0$ (mérföld).

A vizsgált területen még 10 olyan kút létezik, amelyet a vízszennyeződés mérésére konkrétan nem használnak. Feladatunk az volt, hogy a 10 meglevő kútból kiválasszuk azt a hatot, amelyet a továbbiak során bevonnának a mérési gyakorlatba. Tehát $N = 10$ és $k = 6$.

Az előző paragrafusban leírt leszámítási eljárást alkalmaztuk a konkrét esetre, és az optimális 6 további kút bevonása esetén becslési varianciának 0,1236 adódott.

Míthogy a variogram paraméterei bizonytalanok (véges sok érték alapján történő becsléssel és simítással adódtak), a teljes számítást kissé megváltoztattott paraméterértékek mellett többször megismételtük. Egyetlen esettől eltekintve mindig ugyanazok a mérési helyek adódtak optimálisnak, az egyetlen kivétel az a_0 értékének drasztikus csökkentésekor adódott. A becslési variancia pedig esetről esetre változott. Ezzel mi is alátámaszthatjuk a kriging módszerének alkalmazásánál gyakran hangoztatott körülményt, miszerint a módszer igen stabil a függvény becslésekor, viszont instabil a becslési varianciát illetően.

A konkrét számításokat az Arizonai Egyetem, Tucson (U.S.A.) CDC Cyber 175 típusú számítógépén végeztük. A teljes számítás összesen 3,5 másodperc gépidőt vett igénybe, amely tisztán mutatja az eljárás gyorsaságát és gyakorlati alkalmazhatóságát.

5. Következtetések

A dolgozat elméleti eredményeiből és az esettanulmányból az alábbi következtetések adódnak:

a) A kriging módszer és a mérési pontok optimális kijelölését biztosító eljárás hasznosan alkalmazható a hidrológiában és egyéb földtudományokban. További alkalmazásokat tervezünk többek között a következő területeken:

- bányászati fúrólukak optimális telepítése;
- kőzetmechanikai adatok mérése;
- talajvízszint és vízminőség becslése;
- csapadék mennyiségének becslése;
- meteorológiai mérések optimalizálása.

b) Ha az adatok trenddel rendelkeznek, akkor az univerzális kriging módszerét alkalmazhatjuk (Matheron, 1969).

c) Az itt bemutatott eljárás többcélú kiterjesztése a következő esetekben célszerű;

— egyszerre több korrelált függvény szimultán becslésekor a cokriging (Journel és Huijbregts, 1978) módszerét kell alkalmaznunk, és a különböző függvények becsléseinek varianciái jelentik a célfüggvényeket;

— egyetlen függvény értékét egyszerre több pontban vagy tartományon is becsülhetjük, ilyenkor az egyes becslések varianciái adják a célfüggvényeket. Például terület lehatárolásakor és izovonalak szerkesztésekor egy előre adott hálózati pontjaiban becsüljük a függvény értékét;

— az előző két eset összevonásakor több függvényt becsülünk egyszerre több ponton vagy tartományon.

d) A bizonytalan variogram paraméterek hatása nemcsak az esettanulmányban bemutatott érzékenységi vizsgálattal elemezhető, hanem a bayes döntésmélet számos módszerét is alkalmazhatjuk (de Groot, 1970).

(Beérkezett: 1984. február 20-án.)

IRODALOM

1. DAVID, M. (1977) *Geostatistical Ore Reserve Estimation*. Elsevier Scientific Publ. Co., New York.
2. DE GROOT, M. H. (1970) *Optimal Statistical Decisions*. Mc. Graw Hill Book Co., New York.
3. DELHOMME, J. P. (1978) Kriging in the Hydrosiences. *Advances in Water Resources*, Vol. 1, No. 5, pp. 251—266.
4. FORGÓ F. (1974) *Nemkonvex és diszkrét programozás*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
5. GAMBOLA TI, G.—G. VOLPI (1979) Groundwater Contour Mapping in Venice by Stochastic Interpolation, 1. Theory. *Water Resources Research*, Vol. 15, No. 2, pp. 281—290.
6. JOURNAL, A. G.—CH. J. HUIJBREGTS (1978) *Mining Geostatistics*. Academic Press, New York.
7. KAPOLYI L. (1981) *Ásványi eredetű nyersanyagok rendszer- és függvényszemlélete*. Akadémiai Kiadó, Budapest.
8. KRIGE, D. G. (1951) *A Statistical Approach to Some Mine Valuation and Allied Problems on the Witwatersrand*. Master's thesis. Johannesburg, Univ. of Witwatersrand, 136 p.
9. MATHERON, G. (1957) Theorie lognormale de l'échantillonnage systématique des gisements. *Ann. Mines*, pp. 566—584.
10. MATHERON, G. (1963) Principles of Geostatistics. *Econ. Geol.* Vol. 58, pp. 1246—1266.
11. MATHERON, G. (1969) Le krigeage universel. *Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique*, No. 1, ENSMP, Paris. 82. p.
12. MATHERON, G. (1973) The Intrinsic Random Functions and their Applications. *Adv. in Appl. Prob.* Vol. 5, pp. 439—468.
13. SMITH, H. V.—M. COMMACK SMITH (1932) Mottled Enamel in Arizona and its Correlation with the Concentration of Fluorides in Water Supplies. Univ. of Arizona Agr. Exp. Station, *Techn. Bull.* 43, July.
14. SZÉP J. (1972) *Analízis*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
15. SZIDAROVSKY F. (1974) *Bevezetés a numerikus módszerekbe*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.
16. SZIDAROVSKY F. (1981) *Az univerzális kriging módszer néhány fontos tulajdonsága*. KBF1 kutatási jelentés, 1981 aug.
17. SZIDAROVSKY F. (1982a) Új módszer kísérletek optimális tervezésére. *Statistikai Szemle*, 1114—1121. o.
18. SZIDAROVSKY F. (1982b) Optimal Data Management in Geostatistics and Underground Hydrology. Paper presented at the SIAM 30th Anniversary Meeting, July 1982, Stanford, California és *Applied Mathematical Modelling*, Megj. alatt.
19. SZIDAROVSKY F. (1982c) Optimal Data Management in the Theory of Regional Variables. Paper presented at the ORSA-TIMS Meeting, Oct. 1982. San Diego, Calif.
20. SZIDAROVSKY F. (1982d) Multiobjective Observation Network Design for Regionalized Variables. *International Journal of Mining Engineering*, (megj. alatt) és Working paper 82—36, Systems and Ind. Eng. Dept., Univ. of Arizona, Tucson, AZ., 85721
21. SZIDAROVSKY F.—S. YAKOWITZ (1978) *Principles and Procedures of Numerical Analysis*. Plenum Publ. Comp., New York—London.
22. SZIDAROVSKY F.—S. YAKOWITZ (1983) *An Introduction to Numerical Computations* Megj. alatt.
23. WEBSTER, R.—T. M. BURGESS (1980) Optimal Interpolation and Isarithmic Mapping in Soil Properties. III. Changing Drift and Universal Kriging. *J. of Soil Sciences*, Vol. 31, pp. 505—524.

OPTIMUM LOCATION OF MEASURING POINTS IN THE QUALITY ANALYSIS OF GROUNDWATER

The regular checking of the quality of groundwater is a highly costly process. Thus, the cheapest possible implementation of the measurements is an important task. The study proposes a method for the solution of this problem. The procedure is based on the principles of modern geostatistics and relies on the Kriging method. First the bases of the Kriging method are reviewed and then the methodology of the optimum location of measuring points is discussed. Finally the application of the procedure is presented in a case study.

ОПТИМАЛЬНОЕ НАХОЖДЕНИЕ МЕСТ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ГРУНТОВЫХ ВОД

Систематический контроль качества грунтовых вод весьма дорогостоящий процесс. Как можно более дешево получить нужных данных измерений является очень важной практической задачей. В статье предлагается метод решения данной проблемы, который базируется на основных принципах современной геостатистики, на метода Кригинга. Сначала излагаются основы метода Кригинга, а затем рассматривается методика оптимального определения мест измерений. В заключение описывается конкретный случай практического использования упомянутых методов.

A raktárkészlet figyelembevétele a Gilmore—Gomory módszernél

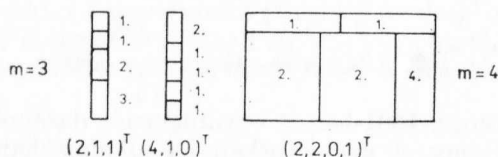
A le szabási (másképp: darabolási) feladat elsősorban üveg-, fém-, textil-, papír-, műanyagipari stb. üzemekben jelentkezik, ahol az alapanyagokat, félkésztermékeket a megadott méretű és darabszámú rendelésekre kell felvágni. A le szabási feladat visszavezetése lineáris programozási feladatra közismert. A speciális feladat megoldására széles körben terjedt el P. C. GILMORE és R. E. GOMORY módszere, amely szép példája a kétfázisú módosított duális szimplex módszer gyakorlati alkalmazásának. Dolgozatunkban a szükséges alapfogalmak ismertetése után a Gilmore—Gomory módszer egy lehetséges, a raktárkészletet is figyelembe vevő módosítását mutatjuk be.

1. A le szabás lineáris programozási feladata

A le szabási feladatokat a felhasznált alapanyagok dimenzióinak megfelelően is csoportosíthatjuk. *Egydimenziós* a feladat pl. csövek, rudak, szalagok, stb. szétvágásakor, amikor az alapanyagoknak és az igényelt rendeléseknek csak az egyik mérete domináns. *Kétdimenziós* a darabolási feladat pl. üvegtáblák, fémlemezek, bútortlapok stb. le szabásakor, míg *háromdimenziós* feladatnak tekinthető a csomagolási, térfogatkitöltési stb. probléma.

Tegyük fel, hogy *adott* azoknak az alapanyagoknak a mérete, mennyisége és költsége, amelyek feldarabolásával kell az ismert méretű és tételszámú (igényelt darabszámú) *rendeléseket* megkapnunk. *Szabásmintán* (szabásképen, szabásrajzon, le szabási változaton stb.) a rendelések egy részének nem-átfedő elrendezését értjük az alapanyagon. A *darabolási feladat*: olyan szabásképek sorozatának a megadása, amelyek alkalmazása esetén minden rendeltetést a tételszámának megfelelően kielégítünk, és a felhasznált alapanyagok összköltsége minimális.

A le szabási feladatot egészértékű lineáris programozási feladatra (a továbbiakban: ILP) vezethetjük vissza szabás-vektorok segítségével. Legyen a rendelések sorrendje rögzített és a számuk: m . Tegyük fel, hogy ezekből a rendelésekből összeállítható összes le szabási változatot ismerjük, a számuk: n . Ha egy szabásképen belül a rendelések sorrendje, elhelyezkedése az optimalizálás szempontjából tetszőleges, akkor jellemezhetjük a szabásképet egy m -dimenziós oszlop-



1. ábra. Példák egy- és kétdimenziós szabásmintákra

vektorral, amelynek i -edik komponense azt mutatja, hogy az i -edik rendelésből hány szerepel ebben a szabásmintában. Ezeket az oszlopvektorokat nevezzük *szabás-vektoroknak* (természetesen nem-negatív, egész számokból álló vektorok, lásd I. ábra).

A szabás-vektorok segítségével a darabolási feladat optimális megoldását a következő ILP szolgáltatja:

$$\begin{aligned}
 & x_j \geq 0, \quad x_j = \text{egész} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\
 & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq N_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\
 (1) \quad & \sum_{j=1}^n \delta_{kj} x_j \leq Q_k \quad (k = 1, 2, \dots, p) \\
 & \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,
 \end{aligned}$$

ahol n a szabás-vektorok száma,
 m az eltérő méretű rendelések száma,
 p az alapanyag fajták száma,
 N_i az i -edik rendelés tételszáma,
 Q_k a k -adik alapanyag raktári készlete (darabszáma),
 a_{ij} azt mutatja, hogy az i -edik rendelésből a j -edik szabásképben hány szerepel (a j -edik szabáskép szabás-vektorának i -edik komponense),
 $\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{ha a } j\text{-edik szabáskép a } k\text{-adik alapanyagból készült,} \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$
 c_j a j -edik szabáskép alapanyagának a költsége,
 x_j változó azt mutatja, hogy a megoldásban hányszor szerepel a j -edik szabáskép.

A gyakorlatban az (1) ILP megoldása nehézségeket okoz, mivel

- (i) a szabásképek száma nagyon nagy,
- (ii) a feladat egészértékű.

A szabásképek számának nagyságáról tájékoztat a következő becslés [6]: egydimenziós esetben, ha 200 egység hosszúságú alapanyagokból 40 különböző hosszúságú rendeltetést vágunk le, amelyek hossza legalább 20 és legfeljebb 80 egység, akkor a leszállási változatok száma 10 és 100 millió között van.

Az (1) feladat megoldására két fő megközelítés a jellemző:

- (i) annyi „jó” szabásképet generálva, amennyit még a rendelkezésre álló számítógép elbír, az ILP-t közvetlenül megoldják, illetve az egészértékűségtől eltekintve az (1)-ből kapott folytonos feladatot oldják meg (pl.: [16], [17]),
- (ii) a Gilmore—Gomory módszert alkalmazzák (pl.: [14], [15], [19], [20]).

A továbbiakban a Gilmore—Gomory módszert (röviden: GGM) és az általunk elkészített módosítását, bővítését ismertetjük.

2. A Gilmore—Gomory módszer

GILMORE és GOMORY 1961-ben az egydimenziós darabolás ILP feladatának megoldására hatékony, a gyakorlatban jól alkalmazható eljárást adott [5]. Alap gondolatukban az egészértékűségtől eltekintettek és azt használták fel,

hogy módosított szimplexmódszer alkalmazásakor egy adott bázis esetén a bázisba bevonandó vektor az szabás-vektor, így csak a legmegfelelőbb szabás-vektort kell minden egyes lépés során kiválasztani. Ez a kiválasztás pedig egyszerűen visszavezethető egy hátizsák feladatra. Az induló bázismegoldást homogén szabásképekből kapták meg. Tehát alapvetően kétfázisú módosított szimplex módszert alkalmazva, hátizsák feladatok sorozatának a megoldásával a nagyméretű, folytonos lineáris programozási feladat optimális megoldását egzaktul, viszonylag kis tárigénnyel gyorsan megkapták. Eredményeiket későbbi munkáikban továbbfejlesztették és a leszábási feladatoknak szinte összes jellemző vetületét, matematikai hátterét megvizsgálták [6], [7]. A speciális hátizsák feladatok megoldására pedig kidolgozták a dinamikus programozáson alapuló ún. „hátizsák függvények” elméletét [8].

2.1. A GGM alap gondolata

GILMORE és GOMORY a következő folytonos feladattal foglalkozott, amelyben a raktárkészlet-feltételektől eltekintett:

$$(2) \quad \begin{aligned} x_j &\geq 0 & (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{n=1}^n a_{ij} x_j &\geq N_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \min. \end{aligned}$$

Az (1) feladat gyakorlati megoldásakor két nehézséget említettünk. GILMORE és GOMORY a (2) feladat optimális megoldásának felfelé kerekítéséből kapott egészértékű megoldást (ez a közelítés természetesen szuboptimális), ami a gyakorlatban elfogadható, általában „jó” eredményt szolgáltatott.

A feladat nagy méretéből adódó problémát kétfázisú módosított duális szimplex módszerrel küszöbölték ki, így lényegében csak a bázist kell tárolni és a bázisba bevonandó vektort egy vagy több kisegítő hátizsák feladat (továbbiakban: KP) megoldásával kapjuk meg.

Tegyük fel, hogy ismert a (2) feladatnak egy bázismegoldása, amelyben $P_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$ a bázisban szereplő j -edik oszlopvektor c_j árnyékköltséggel ($j = 1, 2, \dots, m$), $A = (P_1, P_2, \dots, P_m)$ és $C = (c_1, c_2, \dots, c_m)$.

Legyen $P = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$ a bázisba bevonandó ismeretlen oszlopvektor, amelynek költsége c_t (a t -edik alapanyag költsége). A P vektor bázisba vonhatóságának feltétele a hozzá tartozó árnyékköltség pozitivitása, azaz a következő egyenlőtlenség fennállása:

$$CA^{-1}P - c_t > 0.$$

Jelöljük a CA^{-1} vektor komponenseit (amelyek a szimplex módszer táblázatában a bázisvektorok árnyékköltségei) $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$ -el, ekkor az előzőek értelmében a bázisba bevonandó P oszlopvektort a következő feltétel szerint választjuk ki:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^m \pi_i a_i - c_t > 0.$$

Mivel a P vektor szabás-vektor, ezért a konkrét leszabási feltételek ismeretében a gyakorlati problémák döntő részénél kiszámítható. A (3) egyenlőtlenségnek eleget tevő vektor kiszámítására a 2.2. pontban visszatérünk.

Tegyük fel, hogy a bázisba bevonandó P vektort ismerjük. A korábbi jelöléseket alkalmazva a számításokhoz használatos táblázat és a P vektor transzformáltja a következő:

$$(4) \quad \left[\begin{array}{c|c} C A^{-1} & C A^{-1} N \\ \hline A^{-1} & A^{-1} N \end{array} \right]_{(m+1)(m+1)} \quad P^* = \left[\begin{array}{c} C A^{-1} P - c_t \\ \hline A^{-1} P \end{array} \right],$$

ahol $N = (N_1, N_2, \dots, N_m)^T$.

A módszer nem önindító, ezért szükség van egy induló bázismegoldásra, ami homogén szabásképekből áll. *Homogén egy szabáskép*, ha csak egyféle rendelés szerepel benne, azaz a szabás-vektornak csak egy komponense pozitív. Az ilyen indítás előnye az, hogy adott egy triviális bázismegoldás, aminek alapján a (4) táblázatban szereplő A diagonális mátrix inverzét könnyű kiszámítani (a főátlóban az eredeti elemek reciprocai szerepelnek). A (4) táblázatban a jobb szélső vektor a bázisba bevihető oszlopvektor transzformáltját tartalmazza, amelyből a generálolem kiszámítható a szűk keresztmetszet elve alapján. Tehát egy induló bázismegoldás és a P vektor ismeretében a bázistranszformáció elvégezhető. A bázistranszformáció után a táblázat már az új bázisra vonatkozik és ebben kell az iterációt (a KP megoldása plusz szimplex lépés) megismételni. A (4) táblázat optimális, ha nincs olyan P vektor, amely a (3) egyenlőtlenségnek eleget tesz.

2.2. Egy- és kétdimenziós darabolások hátizsák feladatai

A (3) egyenlőtlenségnek eleget tevő $P = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$ vektor megkeresését célszerű a megfelelő KP (k) megoldására visszavezetni. A továbbiakban az egydimenziós darabolás és a kétdimenziós leszabás kétütemű guillotinevágásának hátizsák feladatát ismertetjük, mivel erre a két darabolási feladatra dolgoztuk ki részletesen a raktárkészlet figyelembevételéből adódó módosításokat. Az üzemi gyakorlatban ez a két darabolási típus tűnik a legfontosabbnak, a legtöbbször ezekkel találkozhatunk.

2.2.1. Egydimenziós darabolás hátizsák feladata

Az egydimenziós esetben legyen L_i a i -edik alapanyag hossza, c_i a költsége és l_i ($i = 1, 2, \dots, m$) az egyes rendelések hossza. Ekkor a (3) egyenlőtlenségnek eleget tevő P vektort (ha létezik) a következő KP optimális megoldásaként is megkaphatjuk:

$$(5) \quad \begin{aligned} a_i &\geq 0, \quad a_i = \text{egész} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{i=1}^m l_i a_i &\leq L_t \\ \sum_{i=1}^m \pi_i a_i &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Amennyiben az (5) optimális megoldásának célfüggvényértéke nagyobb mint c_t , akkor az így kapott P vektor bevihető a bázisba. Természetesen a (3)-nak

eleget tevő bármelyik vektor (amely szabás-vektor) bevihető a bázisba, azonban célszerűbb a KP optimális megoldásaként kapott vektort felhasználni (amint ezt gyakorlati futtatásokkal is alátámasztották [6]). Az (5) feladatot természetesen minden alapanyaghosszra meg kell oldani.

Az (5) feladathoz további feltételként a „vágófejek” számából adódó korlátozást is csatolhatjuk, ugyanis a szabászgépek többségénél a vágófejek egyszerre vágna, így legfeljebb annyi vágás végezhető egyidejűleg, annyi rendelés lehet egy szabásképbén, ahány vágófej van. Legyen R a vágófejek száma, ekkor a következő feltételt kell figyelembe venni:

$$(6) \quad \sum_{i=1}^m a_i \leq R.$$

Előfordulhat másmilyen, például nem-lineáris feltétel is:

$$(7) \quad \sum_{i=1}^m \text{sign } a_i \leq V,$$

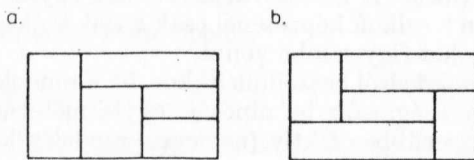
ami azt fejezi ki, hogy a csomagolás, raktározás problémái miatt legfeljebb V különböző méretű rendelés lehet egy szabásmintában (lásd [17]).

2.2.2. Kétdimenziós leszabások hátizsák feladatai

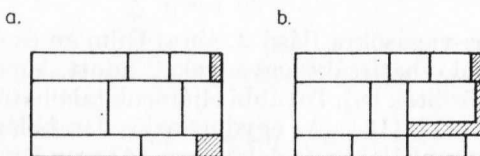
A kétdimenziós leszabások közül a legegyszerűbb a *kétütemű guillotine-vágás*, amelyet egydimenziós feladatok sorozatára vezethetünk vissza. Egy téglalapból-téglalapot darabolást *ortogonálisnak* nevezünk, ha a vágások az alapanyag valamelyik oldalára mindig merőlegesek. Egy ortogonális leszabást *guillotine-vágásnak* hívunk, ha mindig szélről-szélíig kell vágni az alapanyagot (lásd 2. ábra). A guillotine-vágás *kétütemű* (lásd 3. ábra), ha először az alapanyagot csíkokra szabjuk fel (1. ütem) és a csíkokat, mint egydimenziós alapanyagokat vágjuk tovább (2. ütem).

A guillotine-vágások egydimenziós feladatokra való visszavezetést, illetve rekurzív megközelítéseket tesznek lehetővé, mivel egy vágás után újra téglalap alakú, kisebb méretű „alapanyagot” kapunk.

Két fő lépésben határozzuk meg a P vektort, először csíkokat hozunk létre, majd a csíkok egymás mellé illesztésével a legjobb szabásképet.



2. ábra. Általános guillotine- (2a) és nem-guillotine-vágás (2b)



3. ábra. Keresztvágásos (3a) és általános (3b) kétütemű guillotine-vágás

Tegyük fel, hogy (L_i, W_i) az alapanyag mérete, (l_i, w_i) a rendelések mérete ($i = 1, 2, \dots, m$), ahol $w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_m$.

1. lépés: megoldjuk az alábbi KP -t, ezáltal a w_i szélességű legjobb csíkot megkapjuk:

$$b_j \geq 0, b_j = \text{egész} \quad (j = 1, 2, \dots, i)$$

$$\sum_{j=1}^i l_j b_j \leq L_i$$

$$\sum_{j=1}^i \pi_i b_j \rightarrow \max.$$

Legyen a célfüggvény maximuma π_i^* . A feladatot meg kell oldani $i = 1, 2, \dots, m$ -re és a csík összeállítását, a $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ vektort minden i -re meg kell őrizni.

2. lépés: a következő KP megoldásával az 1. lépésben nyert csíkokból a legjobb szabásképet összeállítjuk:

$$d_j \geq 0, d_j = \text{egész} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{j=1}^m w_j d_j \leq W_i$$

$$\sum_{j=1}^m \pi_j^* d_j \rightarrow \max.$$

Ezután a P vektor a csíkok és multiplicitásai ismeretében összeállítható azaz $m + 1$ darab KP megoldásával elkészíthető a megfelelő szabás-vektor (A számításokat minden alapanyagra el kell végezni.)

Kétütemű guillotine-vágásnál megkülönböztetjük a keresztvágásos és az általános guillotine-vágást (lásd 3. ábra). A fentiekben az általános guillotine-vágás modellezését írtuk le. A keresztvágásos ennek egyszerűsítéséből adódik, ugyanis az 1. lépésben a csíkok képzésénél csak a csík szélességével azonos szélességű rendeléseket lehet figyelembe venni.

A *rendelés elforgathatóságáról* beszélünk akkor, ha a rendelés két mérete közül bármelyik lehet a szélesség, azaz ha nincs az egyik méretnek sem kitüntetett szerepe. Ezt a legegyszerűbben fiktív (névleges) rendelések beiktatásával modellezhetjük, legyen $l_{m+i} = w_i$ és $w_{m+i} = l_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Ekkor a KP változóinak a száma $2m$ darab lesz. Az *alapanyag elforgathatósága* hasonlóan értelmezhető.

Általános guillotine-vágásokra (lásd 2. ábra) Gilmore és Gomory dinamikus programozáson alapuló hátizsákfüggvényeket adott, amelyek realizálására több algoritmust is közöltek [8]. További eljárások találhatók még a következő publikációkban: [1], [11], [13]. Az egydimenziós darabolás matematikai hátterét GILMORE egyik munkájában foglalta össze [4], míg DYCKHOFF egy újszerű megközelítést vázol [2].

2.3. A raktárkészlet problémája a GGM-nél

Látszólag nem ütközik akadályba, hogy a raktárkészlet-feltételekkel kibővített feladatot oldjuk meg a GGM-el. A kibővített feladat az alábbi; a jelölések az (1) feladat jelöléseivel egyeznek meg:

$$\begin{aligned}
 x_j &\geq 0 & (j = 1, 2, \dots, n) \\
 \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq N_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\
 \sum_{j=1}^n \delta_{kj} x_j &\leq Q_k & (k = 1, 2, \dots, p) \\
 \sum_{j=1}^n c_j x_j &\rightarrow \min.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

A (8) feladat egy induló bázisa a következő:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline K & E \end{array} \right],$$

ahol A az induló bázismegoldáshoz tartozó szabás-vektorok mátrixa, E egységmátrix, K pedig egy 0 — 1 mátrix, amelynek elemei a (8) feladatban szereplő megfelelő δ -k. Rendeljük az E mátrix oszlopvektoraihoz a 0 költséget, akkor a korábbi jelöléseket felhasználva az induló táblázat a következő:

$$\left[\begin{array}{c|c|c} C A^{-1} & 0 & C A^{-1} N \\ \hline A^{-1} & 0 & A^{-1} N \\ \hline -K A^{-1} & E & Q - K A^{-1} N \end{array} \right],
 \tag{9}$$

ahol $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_p)^T$ a készletvektor. Ha generáloelemet nem az A^{-1} mátrix valamely sorában találunk, akkor az induló táblázat 0 mátrixa, illetve a segédvektorokhoz rendelt 0 költségvektor elromlik (segédvektort cserélünk valósi szabás-vektorra). Ezért a táblázat felső soráról csak annyit tudunk, hogy

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m, \pi'_1, \pi'_2, \dots, \pi'_p$$

alakú, a bázisba bevonandó vektor pedig

$$(a_1, a_2, \dots, a_m, \overset{m+1}{0}, \dots, \overset{m+t}{0}, \overset{m+p}{1}, 0, \dots, 0),$$

ha a szabáskép a t -edik alapanyagra vonatkozik. Így a bázisba bevonandó P vektor árnyékköltsége

$$\sum_{i=1}^m \pi_i a_i + \pi'_t - c_t.$$

A KP -t tehát a szokásos célfüggvényre kell megoldani, így a KP „hossza” ezzel nem növekszik.

A fentiek után úgy tűnik, hogy a GGM módosítások nélkül is alkalmas a készletfeltételek kezelésére. Hogy a szakirodalom mégsem említ ilyen felhasználást, az a következőkkel magyarázható:

(i) A GGM nem önindító eljárás, ezért egy megfelelő bázismegoldás szükséges az indításához, ami szűk raktárkészletet feltételezve egy, az optimálisához közel álló bázismegoldás ismeretét feltételezi. Másrészt tekintetbe kell venni azt is, hogy a táblázatba a bázisvektorokból álló mátrix inverzét kell beírni. Ha ez a mátrix nem diagonális, akkor az invertálás gondokat okoz, nagyméretű mátrix esetében nem biztos, hogy a későbbiekben numerikusan használható lesz ez az inverz.

(ii) Egészértékű megoldást a (8) feladat optimális megoldását felfelé kerekítve kapunk, de ekkor megsérthetjük a készletfeltételeket (gyakori lehet a túllépés).

3. A raktárkészlet figyelembevétele

A készletfeltételek figyelembevételekor két probléma vetődött fel. Egyrészt gondot okoz a kétfázisú módosított duális szimplex módszer induló bázismegoldásának a megadása (első fázis), másrészt a folytonos megoldás felfelé kerekítéséből nyert egészértékű megoldás megsértheti a készletfeltételeket. A fejezetben mindkét problémára adunk megoldási javaslatot.

3.1. Az induló bázismegoldás elkészítése

A 2. fejezetben bemutatott GGM az induló bázismegoldást homogén szabásminták alapján készíti el, így a felhasznált szabás-vektorok nyilvánvalóan bázist alkotnak. Az eljárás nem használható akkor, ha van olyan rendelés, amelyet nem tudunk egyféle alapanyagból kiszabni (az alapanyag szűkös raktárkészlete miatt). Ez az eset előfordulhat például akkor, amikor az alapanyagok összes felülete kevéssel haladja meg a rendelések összes felületét és kevesebb rendelés van, mint alapanyag ($m < p$). Lehetséges, hogy az optimális megoldáshoz közeli induló bázismegoldást kell megkeresni, ekkor hosszú futási idővel számolhatunk és az algoritmus — a szabás-vektorok sorozatának generálása miatt — meglehetősen bonyolulttá válik. Említettük a szabás-vektorokból álló mátrix invertálásának gondját is, amely speciális szerkezetű mátrix (például háromszögmátrix), illetve iterációs eljárások felhasználását teheti szükségessé.

A fentiek miatt az induló bázismegoldás elkészítésére egyszerű ötleten alapuló eljárást választottunk, a *rendeléseket olyan részrendelésekre bontjuk*, amelyek külön-külön már egyféle alapanyagból kiszabhatók homogén szabásminták szerint. Azaz a rendeléseket „névleges” részrendelésekkel helyettesítjük, vizsgázva arra, hogy a rendelések darabszámainak összege az eredeti rendelés tételszámával egyezzek meg. Így (a számításokhoz használt táblázat méreteinek növelése árán) az induló bázismegoldás vektorainak a mátrixa már diagonális lesz (mivel homogén szabás-vektorokból áll), és a táblázat a szokott módon indítható. Megjegyezzük, hogy a táblázat méreteinek a növelése a KP -k megoldásának idősükségletét nem növeli (ami a becslések szerint egydimenziós esetben a teljes számítási idő 80%-a [15]), mert a KP hossza tulajdonképpen nem nő. Ugyanis, ha az (5) KP -nál a részrendelések mérete azonos, akkor elég közülük azt megtartani, amelynek az árnyékköltsége nagyobb, mivel ha $l_i = l_j$ és $\pi_i < \pi_j$, akkor $a_i = 0$.

Az induló bázismegoldáshoz az összes homogén szabásképből választjuk ki a megfelelőket és a kiválasztás alapján bontjuk szét a rendeléseket részrendelé-

sekre. Természetesen ha van rá lehetőség, akkor elkerüljük a rendelések szétbontását. *Egydimenziós feladat*nál legyen az alapanyagok és a rendelések sorrendje rögzített. Defináljuk a $D = [d_{ij}]_{j=1, p}^{i=1, m}$ szabásmátrixot és az $E = [e_{ij}]_{j=1, p}^{i=1, m}$ fajlagos felületveszteség-mátrixot a következőképpen:

$$d_{ij} = \begin{cases} [L_j/l_i], & \text{ha } l_i \leq L_j, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$e_{ij} = \begin{cases} (L_j - l_i d_{ij})/d_{ij}, & \text{ha } d_{ij} > 0, \\ \infty & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $[]$ az egészrész jele. Ekkor a homogén szabás-vektorokra a következő feladat írható fel:

$$\begin{aligned} x_{ij} &\geq 0, \quad x_{ij} = \text{egész} & (i = 1, 2, \dots, m; \\ & & j = 1, 2, \dots, p) \\ \sum_{j=1}^p d_{ij} x_{ij} &\geq N_i \\ (10) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} &\leq Q_j \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p e_{ij} d_{ij} x_{ij} &\rightarrow \min, \end{aligned}$$

ahol x_{ij} mutatja azt, hogy a megfelelő homogén szabás-vektor hányszor szerepel a megoldásban. A célfüggvény most közvetlenül a felületveszteség mennyiségét minimalizálja és nem az alapanyag költségét.

Vegyük észre: ha a (10) képletekből a d_{ij} együtthatókat elhagyjuk és az egyenlőtlenségek helyett egyenlőséget írunk, akkor a közismert szállítási feladat áll előttünk. Ezért az annak megoldására alkalmazott disztribúciós kezdő megoldását szolgáltató heurisztikus eljárás egy módosításával határozzuk meg az x_{ij} értékeket a következőképpen:

- $i = 0$
1. lépés: $i = i + 1, x_{ij} = 0, (j = 1, 2, \dots, p).$
2. lépés: $j = \{k \mid \min_k e_{ik}\},$
 ha $e_{ij} = \infty$, menj a 3. lépésre.
 $e_{ij} = \infty$
 $x_{ij} = \min_j \{Q_j, [(N_i + d_{ij} - 1)/d_{ij}]\}$
 $Q_j = Q_j - x_{ij}$
 $N_i = N_i - x_{ij} d_{ij}.$
 Ha $N_i > 0$, menj a 2. lépésre.
3. lépés: Ha $i < m$, menj a 1. lépésre.
 Vége.

Látható, hogy az eljárás a legkisebb veszteségű homogén szabásképeket használja fel minél többször, az aktuális igény és a készlet figyelembevételével. Ezután a részrendelésekre bontás egyértelmű (az i -edik rendelt $\sum_j \text{sign } x_{ij}$ -

féle részre kell bontani), és az induló bázismegoldás is megvan. Így a (9) táblázat a D és $X = [x_{ij}]$ mátrixok ismeretében feltölthető, tehát a GGM-iterációk (KP plusz bázistranszformációk) elvégezhetők.

A fenti eljárás csaknem dimenzió-független, így kétdimenziós feladatnál is alkalmazható kis módosítással. Csupán a d_{ij} és az e_{ij} kiszámítása változik.

Ha az alapanyagon a rendelés nem forgatható el, akkor

$$d_{ij} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{L_j}{l_i} \right\rfloor \left\lfloor \frac{W_j}{w_i} \right\rfloor, & \text{ha } l_i \leq L_j \text{ és } w_i \leq W_j, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

elforgatható rendelés esetén pedig:

$$d_{ij} = \max \left\{ f_1 \left\lfloor \frac{L_j}{l_i} \right\rfloor + f_2 \left\lfloor \frac{W_j}{w_i} \right\rfloor \right\}$$

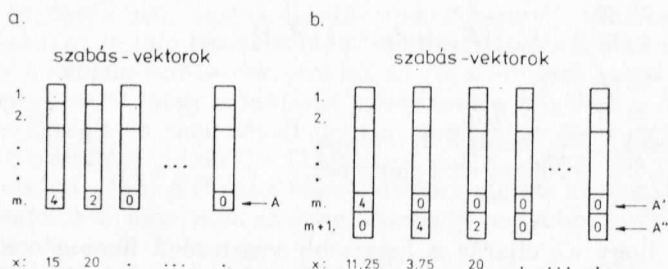
ahol $w_i f_1 + l_i f_2 \leq W_j$
és $f_1, f_2 \geq 0$, egészek,
feltéve, hogy $\min\{l_i, w_i\} \leq \min\{L_j, W_j\}$ és $\max\{l_i, w_i\} \leq \max\{L_j, W_j\}$.
Tehát az utóbbi esetben egy KP megoldásaként adódik a homogén szabásvektor (kétféle homogén csíkot is figyelembe veszünk egy szabásképben).

Az e_{ij} pedig a következő:

$$e_{ij} = \begin{cases} (L_j W_j - l_i w_i d_{ij}) / d_{ij}, & \text{ha } d_{ij} > 0, \\ \infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A fenti eljárás a lehetséges megoldások halmazát is előzetesen teszteli, így ha az eljárás nem ad bázismegoldást, akkor célszerű valamelyik készletfeltétel lazítása, feloldása.

A rendeléseknek részrendelésekre bontásával a (8) LP feltételeinek a száma megnő, és maguk a feltételek is megváltoznak. Első látásra úgy tűnik, hogy az egzakt GGM ezáltal heurisztikussá válik. Valójában a darabolási feladatnak és a szabásmintáknak a jellemzői miatt a részrendelések bevezetése után is egzakt marad a módszer. Ez a legegyszerűbben azzal bizonyítható, ha belátjuk, hogy az eredeti LP optimális megoldása egyben megoldása a részrendelésekre felírt LP -nek is. A visszavezetést egyszerű példa segítségével szemléltetjük (mellőzve a nehézkes formalizmust): tegyük fel, hogy az A rendelés (amelyből 100 db-ot kértek) az eredeti feladat optimális megoldásának két szabásvektorában szerepel, az egyik szabásmintát 15-ször, míg a másikat 20-szor kell ki szabni



4. ábra. Az eredeti feladat optimális megoldásának (a) és a részrendelésekre bontott feladat egy lehetséges megoldásának (b) szabásvektorai és multiplicitásai

Tegyük fel továbbá, hogy a rendelkezések közül *csak a A rendelkezést* kellett részrendelésekre bontani, a részrendelések (A' és A'') tételszámai 45 és 55. Ekkor az eredeti feladat optimális megoldása alapján a 4. ábrán vázolt lehetséges megoldása készíthető el a részrendelésekre bontott feladatnak (ahol A legyen az eredeti feladat m -edik rendelkezése, míg A' az m -edik, A'' az $m + 1$ -edik a részrendelésekre bontott feladatban).

A fordított visszavezetés is hasonlóan triviális a szabás-vektorok és multiplícitásaik felbontása alapján. Így a két feladat ekvivalens, optimális megoldásuk megegyezik. A gyakorlati megoldások viszont eltérhetnek az alkalmazott módszerek különbözőségei és a kerekítési hibák miatt.

3.2. Virtuális raktárkészlet bevezetése

A GGM a (8) feladat folytonos megoldását felfelé kerekíti, így gyakran előfordulhat, hogy a készletfeltételt megsértik. A kerekítésből adódó hibák, túllépések kiküszöbölésére a következő egyszerű gondolat kínálkozik. A (8) feladat készletfeltételeinek jobb oldalát a szükséges mértékben csökkentjük, legyen:

$$(11) \quad Q'_k = Q_k - \min \{m + p, \sum_{j=1}^n \delta_{kj}\}, \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Ekkor biztos, hogy a készletfeltételekre a felfelé kerekítés után is teljesül az egyenlőtlenség (figyelembe vettük, hogy legfeljebb $m + p$ szabásképet tartalmaz egy bázismegoldás). Komoly problémát okoz viszont az, hogy egyidejűleg csak a bázisban szereplő szabás-vektorok ismertek, nem a teljes feltételrendszer. Másrészt nem lenne célszerű az összes szabás-vektort a (11) képletnél figyelembe venni; elég, ha a bázist alkotó szabás-vektorok alapanyagának készletét csökkentjük, változtatjuk a bázisvektor-cserék alkalmából, ezért legyen:

$$(12) \quad Q'_k = Q_k - \min \{m + p, \sum_{j=1}^m \delta'_{kj}\}, \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

ahol δ'_{kj} csak a bázist alkotó szabás-vektorokhoz tartozik.

A fentieknek megfelelően *virtuális raktárkészletet* (Q'_k) hozunk létre minden alapanyagból, és minden bázisvektor-csere esetén a bázisból kikerülő szabás-vektor alapanyagának virtuális készlete 1-el nő, míg a bázisba bekerülő szabás-vektore 1-el csökken.

Ez a változtatás azt jelenti, hogy a (8) feladatban a feltételek minden bázisvektor-csere alkalmából megváltozhatnak (akkor maradnak változatlanok, ha a belépő és a kilépő vektor ugyanolyan alapanyagot használ). A (9) táblázatban gondos programozással végigvihető az elképzelésünk, azonban a virtuális raktárkészlet alkalmazása egyéb módosításokat is maga után von.

3.3. Egyéb módosítások

A bázisba bevihető szabás-vektort úgy keressük meg, hogy minden alapanyagra a KP -k megoldásával megállapítjuk a „legjobb” szabás-vektort. A GGM az árnyékköltségeket összehasonlítva választja ki ezek közül a legelőnyösebb szabás-vektort, amit azután bevisz a bázisba.

A legelőnyösebb árnyékköltségű szabás-vektor bázisba vitele helyett mi a következőket végezzük el: mindegyik alapanyagra imitáljuk a bázistranszfor-

mációt és azt a szabás-vektort vonjuk be a bázisba, amelyre a célfüggvény a legnagyobb javulást mutatja. Azaz a (9) táblázat jobb szélső oszlopán végrehajtjuk a virtuális raktárkészlet megkövetelte változtatást (a bázisba bevonandó alapanyag készlete 1-el csökken) és főelem-kiválasztással megállapítjuk a bázisból kikerülő vektort (az alapanyagának készletét 1-el növeljük). Végrehajtjuk a bázistranszformációt, de csak a jobb oldali oszlopot és a célfüggvény értékét számoljuk ki. Miután ezt mindegyik alapanyagra elvégezzük, azt a vektort visszük be a bázisba, amelyik a legnagyobb javulást eredményezi a célfüggvényénél. Ez azért szükséges, mivel a feltételrendszer jobb oldalának folytonos változtatása miatt az árnyékköltségek vizsgálatára nem elég a javulás megállapításához, a próbafuttatások során előfordult a célfüggvény értékének „hullámozása”, a változás nem volt monoton.

Az iterációs lépések csökkentésére a szokásos módon küszöbszámot érdemes használni ($\varepsilon > 0$), amelynek nagysága a gyakorlati feltételektől függ. Az aktuális bázismegoldást optimálisnak fogadjuk el, ha a célfüggvény értéke a megadott küszöbszámnál kevesebbet javul. Ezáltal a szimplex módszernél esetleg fellépő degeneráció is kiszűrhető.

A virtuális raktárkészlet bevezetése a módszert heurisztikussá teszi. Megjegyezzük azonban, hogy így egyrészt egyszerű eszközökkel elkerülhetjük a raktárkészlet-feltételek megsértését (mellőzhetjük az egészértékű megoldást kereső bonyolultabb eljárásokat), amely a folytonos feladat megoldásának egészértékűvé kerekítésekor fordulhat elő. Másrészt a szakirodalom szerint a GGM-t akkor célszerű használni, ha a rendelkezés és alapanyagok tételszáma „elég nagy” (ami azt jelenti, hogy a megoldásban a szabás-vektorok multiplivitása legalább kétjegyű szám), ekkor a raktárkészlet minimális csökkentése nem befolyásolja lényegesen a hulladékot (mivel $Q_k \approx Q'_k$). Ezért ebben az esetben a virtuális raktárkészlet nem okoz számottevő eltérést az optimális megoldástól.

4. A GGM módosításának számítógépes realizálása

Az előző fejezetben bemutatott módosításokat egydimenziós darabolásokra és kétütemű kétdimenziós guillotine-vágásokra kipróbáltuk, az algoritmusok számítógépes futtatását elvégeztük. A gépidő- és a társzükséglet természetesen a leszábási feladat konkrét jellemzőitől, a felhasznált számítógéptől és a programrendszer felépítésétől függ. Becsléseink szerint az eredeti GGM-hez képest, ahol a raktári feltételeket nem vesszük figyelembe, kb. 10–20%-kal nő meg a gépidő. A növekedés jelentős részét a bázistranszformáció alapanyagok-kénti imitálása okozza, míg az induló bázismegoldás kiszámításához szükséges idő elenyésző. A tárigény a megoldandó feladat függvénye, a részrendelésekre bontás mértéke előre nem adható meg, azonban becslésünk szerint egy 32 Kszó tárcapacitású számítógéppel is kezelhető legalább 70 (rész-)rendelés. Az általunk megvalósított egydimenziós programrendszer helyfoglalása a bináris kódon túl még $2(m' + p^2) + m'p + 12m'$ szó (1 szó = 1 egész szám), ahol m' a részrendelések, p pedig az alapanyagok száma.

Az egydimenziós és a kétdimenziós darabolásra készített programrendszerek legfontosabb jellemzőit röviden ismertetjük. Mindkét rendszer HP-1000 számítógépre készült (32 Kszó = 64 Kbyte tárcapacitású) FORTRAN-ban.

Megítélésünk szerint hajlékony mágneslemezzel rendelkező személyi számítógépekre is elkészíthetők a rendszerek, habár nagyon hosszú futási időre kell számítani (a programrendszereket 1982-ben, a személyi számítógépek hazai megjelenése előtt készítettük el).

Az *egydimenziós* darabolásnál az alapanyagok és rendelések jellemzőin kívül (ahol $p \leq 10$ és $m' \leq 70$) a használható vágófejek maximális számát és a konvergencia ellenőrzését biztosító paramétert (ε) is megadjuk az inputban. Az (5) *KP* tehát a (6) vágófej-feltétellel kibővül. A *KP* megoldására a [6] publikációban ismertetett eljárást használjuk, amely a vektorok lexikografikus elrendezésén alapszik. Az eljárás előnye, hogy az összes alapanyagra szimultán oldja meg a *KP*-kat, kihasználva, hogy csak a feltételek jobb oldalában térnek el egymástól. További előnye, hogy a vágófejekből adódó feltételt egyszerű figyelembe venni, és a program helyigénye kicsiny (L_f -től független, 2 mp a tárigény). Ezt a leszámoló algoritmust használja több programrendszer, például [3], [14]. Megjegyezzük, hogy a (7) nem-lineáris feltételt az eljárás nem veszi figyelembe, viszont egy-egy rendelés számának szabásképben való korlátozását be lehet építeni [10].

Kétdimenziós leszabásnál az alapanyagok és a rendelések jellemzői között meg kell adni (ahol $p \leq 10$ és $m' \leq 50$), hogy elforgathatók-e. Mivel kétütemű guillotine-vágásról van szó, ezért lehet keresztvágásos vagy általános a leszabás (lásd 3. ábra), amit szintén jelezni kell. A vágófejek maximális számát és a konvergencia-faktort, illetve az alapanyag szélén kötelezően levágandó technológiai selejtesíki szélességét is meg lehet adni. A *KP*-k megoldására ugyancsak a lexikografikus rendezésen alapuló leszámoló algoritmust használjuk. (A szabás-mintákat a számítógép megközelítőleg méretarányosan kirajzolja.) Megjegyezzük, hogy a szabás-vektorokkal együtt a csik-vektorokat is tárolni kell (a reprodukálhatóság végett), a nagy mennyiségű adattömeget célszerű közvetlen elérésű háttértárolón elhelyezni (például mágneslemezen).

A témakör szakirodalmában a GGM alkalmazásáról igen sokszor számolnak be. Azonban olyan publikációt és futtatási eredményeket nem ismerünk, amely a raktárkészletet, mint korlátozó feltételt veszi figyelembe; így az általunk alkalmazott módosításokat nem tudjuk teljeskörűen összevetni más eredményekkel. MARCONI ugyan felveti a raktárkészlet okozta problémát, de megoldást nem ad rá szűkebb körben publikált tanulmányában [20]. A módszer és a módosítások illusztrációjaként a [17] dolgozatban található leszabási feladatra — amely húzott síküveg feldarabolását mutatja be — közöljük a futtatási eredményeket. A leszabás általános feltételének a következőket vetjük: kétütemű guillotine-vágás, a vágófejek száma 8, a technológiai selejtesíki 7 cm, a konvergencia-faktor 1,0. Az előbbi általános leszabási feltételeken belül

1. táblázat

Az alapanyagok jellemzői, input adatok

Azonosító	Méretek	Készlet	Ár
T1	200×200	2000	4,0
T2	200×220	2000	4,4
T3	200×240	2000	4,8

2. táblázat

A rendelkezések két csoportjának jellemzői (minden rendelés elforgatható)

Azono- sító	Méretek	Tételszám	Azono- sító	Méretek	Tételszám
A1	134×74	420	B1	152×80	220
A2	50×74	207	B2	184×84	700
A3	134×132	300	B3	100×100	200
A4	50×132	150	B4	162×78	300
A5	132×102	204	B5	130×82	150
A6	50×102	170	B6	134×74	280
A7	132×132	204	B7	50×74	138
A8	86×132	204	B8	134×132	200
A9	84×84	204	B9	50×132	100
A10	134×44	204	B10	132×102	136
A11	150×134	80	B11	132×132	136
A12	96×85	80	B12	86×132	136
A13	82×82	80	B13	84×84	136
A14	150×44	80	B14	134×44	136

1. csoport

2. csoport

több eltérő leszábási változatra számoltuk ki az optimális szabás-vektorokat. A bemenő adatok az 1. és a 2. táblázatban találhatók meg (minden adatot cm-ben adunk meg). A 3. táblázat az eltérő leszábási feltételek mellett az optimális darabolások hulladékát (a felületveszteség %-át) tartalmazza, ahol:

$$\text{hulladék \%} = \frac{\text{felvágott alaptáblák összfelülete} - \text{rendelések összfelülete}}{\text{felvágott alaptáblák összfelülete}} \times 100.$$

Mivel a technológiai selejtesík, amelyet az alaptábla szélén kötelező levágni, az egyes darabolási feltételek szemléltető hatását eltorzíthatja, ezért a technológiai selejt nélkül is megadjuk az egyes hulladékokat, amely a táblázatban az adott csoport alsó sorában található.

A [17] dolgozatban a leszábás konkrét feltételei a következők: az alapanyag nem forgatható el, keresztvágásos kétütemű guillotine-vágás lehetséges (3. a ábra) és csak az alapanyag szélességével párhuzamosan vágathatók a csíkok (az alaptáblák 200 cm-es fix méretét *szélességnek*, a változó méretet pedig *hosszúságnak* nevezzük). A 3. táblázat 1. oszlopában a hivatkozott cikk eredményei, a 2. oszlopban ugyanazon feltételek mellett a GGM-el kiszámolt szabás-vektorok hulladékai találhatók, így a két szomszédos oszlopban szereplő adatok összevethetőek.

A [17] dolgozattal összevethető, azonos leszábási feltételek alapján készült optimális szabás-vektorokat mindkét csoportra a 4. táblázatban közöljük. A szabás-vektor i -edik komponense a beolvasás sorrendjében i -edik rendeléshez tartozik, a nullákat nem tüntettük fel, a szabás-vektor itt sorvektor. A 3. táblázatból látható, hogy minimális az eltérés a két módszer között, ami a kerekítésekéből és a konvergencia-faktor alkalmazásából adódhat. [A (7) feltételt mi nem vettük figyelembe, viszont nem is sértettük meg.] A GGM előnyére írható, hogy kisszámítógépen közel 50 rendelés leszábását lehet optimalizálni, míg a [17]-ben nagy-számítógépen csak 20 rendelését (ez utóbbi egy nagymérete-

3. táblázat

A hulladék %-os alakulása a kétütemű guillotine-vágás eltérő leszabási feltételei esetén

	Az alaptábla <i>nem</i> forgatható el					Elforgatható alaptábla	
	Keresztvágásos			Általános		Kereszt- vágásos	Általános
	Szélességgel párhuzamos csík		Hosszal párh. csík	Szélességgel párh. csík	Hosszal párh. csík		
	1.	2.	3.	4.	5.		
1. csoport	22,02 16,61	22,39 17,03	24,35 19,07	21,59 16,22	22,79 17,46	21,12 15,79	19,46 14,07
2. csoport	23,65 18,23	23,57 18,14	28,97 23,86	22,14 16,43	23,48 18,10	22,02 17,53	20,65 15,13

Megjegyzés: a) Csoportonként az alsó érték a technológiai veszteség nélküli leszabási hulladékot tartalmazza.

b) Az 1. oszlopban a [17] dolgozatban szereplő optimális szabásvektorok hulladéka található, míg a 2. oszlopban a megfelelő GGM-eredmények.

4. táblázat

A két csoport optimális szabás-vektorai

Alap-tábla	Hány db	Szabás-vektorok													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T2	34	1				1			1						
T2	3	1	1		1			1							
T2	96	1		1											
T2	85					2	2								
T3	16							1	1						
T2	204	1	1	1							1				
T2	38	1						1							
T3	52								3						
T3	102				1			1		2					
T2	5	1			1			1							
T3	40	1										1			1
T3	40				1			1					2		
T3	40											1		2	1

1. csoport. Az optimális szabás-vektorok hulladéka: 22,39%

T1	34		1	1											
T1	299		2												
T2	65				1			1							1
T2	136				1						1		1		
T3	47			1		2									
T3	51			1					1	1					
T3	69		1				2	2							
T2	28				1	2									
T2	49	1								1		1			
T2	71				1		2								1
T1	68			1										2	
T2	84	1							1						
T2	87	1										1			

2. csoport. Az optimális szabás-vektorok hulladéka: 23,57%

tű ILP-t generál és old meg). Az egyes darabolási jellemzők hatását a hulladék alakulására a 3. táblázat szemléletesen mutatja.

Végeztünk futtatásokat szűk raktárkészlet esetében is. Például az 1. csoportnál, ha $T_1 = 400$, $T_2 = 400$ és $T_3 = 400$, akkor a 3. táblázat specifikációi alapján a 2. oszlopnak 24,12%, a 3. oszlopnak 33,79%, míg az 5. oszlopnak 27,60% felel meg. A hulladék jelentősen megnő, azonban ez a növekedés nem egyedül a raktárkészlet szűkösségétől függ (habár az a döntő), hanem a rendelések méreteinek „összeilleszthetőségétől” is.

* * *

Dolgozatunkban a GGM egy gyakorlati szempontú, számítógépre egyszerűen adaptálható bővítését, módosítását ismertettük, amelynek segítségével az alapanyagok raktári készletét is korrekt módon figyelembe lehet venni. Kedvező esetben nincs szükség az alapanyag készletezésére, mivel az optimális leszabáshoz szükséges mennyiségben és méretben megrendelve a darabolás megkezdéséig megérkezik. Azonban előfordulhat, hogy a termelés ütemtelensége, a megrendelések hosszú átfutási ideje, az előre nehezen becsülhető felhasználás stb. miatt a vállalat nagy biztonsági készletet hoz létre, és ebből a raktári készletből kell az üzemi igényeket kielégíteni. Másrészt egyes alapanyagoknál technológiai okok miatt van szükség a raktározásra, például húzott síküvegnél csak a húzás után dől el az alaptábla minősége, ezért jelentős mennyiségű raktárkészlet is felhalmozódhat olyan minőségű üvegtáblákból, amelyre az adott pillanatban nincs piaci igény.

A módszer alkalmazásakor felvetődő szervezési munkákra és egyéb kapcsolódó feladatokra nem térünk ki, mivel a célunk a GGM, egy eszközként funkcionáló eljárás, módosításának ismertetése. A leszabási feladattal foglalkozó szakirodalom igen bőséges, az üzemi feltételeket messzemenően figyelembe vevő (főleg heurisztikus) eljárások tömegét dolgozták ki (lásd [18]). A darabolási feladatok iránt érdeklődőknek GILMORE és GOMORY munkáin kívül [4–8] elsősorban GOLDEN elméleti [9] és HINXMAN alkalmazói szempontú [12] áttekintését ajánljuk.

(Beérkezett: 1983. szeptember 13-án.)

IRODALOM

1. CHRISTOFIEDS, N.—WHITLOCK, C.: An algorithm for two-dimensional cutting problems. *Operations Research* 25, 1977 (30–44).
2. DYCKHOFF, H.: A new linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research* 29, 1981 (1092–1104).
3. DYSON, R. G.—GREGORY, A. S.: The cutting stock problem in the flat glass industry. *Operational Res. Quart.* 25, 1974 (41–53).
4. GILMORE, P. C.: Cutting stock, linear programming, knapsacking, dynamic programming and integer programming, some interconnections. *Annals of Discrete Math.* 4, 1979 (217–235).
5. GILMORE, P. C.—GOMORY, R. E.: A linear programming approach to the cutting stock problem. *Operations Research* 9, 1961 (849–859).
6. Op. cit. Part II. *Operations Research* 11, 1963 (863–888).
7. GILMORE, P. C.—GOMORY, R. E.: Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research* 13, 1965 (94–120).
8. GILMORE, P. C.—GOMORY, R. E.: The theory and computation of knapsack functions. *Operations Research* 14, 1966 (1045–1074).

9. GOLDEN, B. L.: Approaches to the cutting stock problem. *AIIE Transactions* 8, 1976 (265—274).
10. HAESSLER, R. W.: A note on computational modifications to the Gilmore-Gomory cutting stock algorithm. *Operations Research* 28, 1980 (1001—1004).
11. HERZ, J. C.: Recursive computational procedure for two-dimensional stock cutting. *IBM Journal of Res. and Dev.* 16, 1972 (462—469).
12. HINXMAN, A. I.: The trim-loss and assortment problems: a survey. *European Journal of Operational Res.* 5, 1980 (8—18).
13. HODGSON, T. J.: A combined approach to the pallet loading problem. *IIE Transactions* 14, 1982 (175—182).
14. JOHNSTON, D.—BOURKE, S. B.: The development of computer programs for rools deckle filling. *APPITA* 26, 1973 (444—448).
15. KUUTTI, M.—VOUTILAINEN, R.: *A discrete optimization approach to the pattern analysis of the cutting stock problem*. Paper presented at EURO III. Conference, Amsterdam (Netherlands), 1979.
16. LAMPL, T.: Anyagleszabási tervek készítése és programozása matematikai eszközökkel *Operációkutatási Észettanulmányok (SZÁMOK)*, 1971.
17. LENGYEL, I.—KUBA, A.: Sfküveg szabásának optimalizálása (I) *Sigma* 14, 1981 (169—190).
18. LENGYEL, I.: *A darabolási feladatok és a megoldásukra alkalmazott módszerek áttekintése* Egyetemi doktori értekezés, 1982.
19. MADSEN, Oli. B. G.: Glass cutting in a small firm. *Mathematical Programming* 17, 1979 (85—90).
20. MARCONI, R.: *Generalization of a mathematical procedure for the optimal solution of two-dimensional cutting problems*. Technical reports No. 7. Centri Studi IBM of Pisa, 1970.

THE CONSIDERATION OF STOCK WITHIN THE GILMORE—GOMORY METHOD

In industrial shops the demand for solving the cutting problem frequently arises when the given raw materials and intermediary products have to be cut into a given number of pieces of a specified size. For the solution of this problem the method worked out by P. C. Gilmore and R. E. Gomory is widely applied which solves the linear programming problem of cutting with the aid of a modified dual simplex method so that the vector to be drawn into the basis is obtained as a solution of a knapsack problem. In this paper an extension and modification of the Gilmore—Gomory method is presented so that also the constraints deriving from the stock of the materials can be taken into account. Two problems emerged: on the one hand the finding of an initial basic solution itself and, on the other hand the integer solution obtained by rounding-off the optimum solution of the continuous linear programming problem may exceed the stock. For the solution of both problems a simple, easily computerized procedure has been prepared. The computerization of the procedures is briefly reviewed.

УЧЕТ СКЛАДСКИХ ЗАПАСОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ЖИЛМОР-ГОМОРИ

На промышленных предприятиях часто возникает потребность в решении задач отсечения, когда необходимо разделить имеющиеся материалы и полуфабрикаты в соответствии с заданными размерами и количеством. Для решения данной задачи очень широко применяется метод, разработанный П. С. Жилмором и Р. Е. Гомори. Когда задача отсечения решается с помощью модифицированного двойственного симплексного метода таким образом, что вводимый в базис вектор получают в результате решения задачи о ранце.

В данной статье излагается такое обобщение метода Жилмора-Гомори, с помощью которого можно учесть ограничения на складские запасы. При этом возникли две проблемы: во-первых, выбор исходного базисного решения, во-вторых, оптимальное решение задачи линейного программирования при округлении для получения целочисленного решения может превысить складской запас. В обоих случаях авторами разработан простой и легко адаптируемый на ЭВМ метод, а также кратко излагается их вычислительный алгоритм.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

HULYÁK KATALIN

Dinamikus ökonometriai modellek

(Az egyszerű alkalmazkodási mechanizmusoktól a racionális várakozások figyelembevételéig)

Bevezetés

Ebben a cikkben arra törekszünk, hogy röviden, de kellő irodalmi hivatkozással, bemutassunk néhány olyan dinamikus ökonometriai módszert, pontosabban modellezési konstrukciót, amelyek felhasználhatók a gazdasági rendszer alkalmazkodási képességének mérésére. A tanulmány elsődleges célja elősegíteni azt, hogy a hazai közgazdasági—matematikai kutatás az eddigiek-nél nagyobb mértékben kihasználja e módszerek lehetőségeit. Természetesen számos hazai közgazdasági kutatásban foglalkoztak a gazdaságban érvényesülő alkalmazkodási vagy szabályozási mechanizmusokkal, de viszonylag kevés ilyen jellegű alkalmazott ökonometriai vizsgálatot találunk. Jelen cikkben első-sorban a külföldön széleskörűen alkalmazott dinamikus ökonometriai modellek elméleti hátterére fektetünk súlyt. Véleményünk szerint ugyanis éppen a módszerek mögött meghúzódó elmélet általános jellege, vagy legalábbis rugalmasan értelmezhető feltételei indokolják kísérleti alkalmazásukat.

Másodlagos célunk annak a bemutatása, hogy az ökonometriai modellek maguk sem veszítették el alkalmazkodási képességüket a változó körülmények között. Indokoltan lép fel szkepticizmus a merev struktúrához ragaszkodó klasszikus modellek felhasználási lehetőségeivel szemben, de szeretnénk érzékelteni, hogy a módszerek és modellek terén sem állt meg a fejlődés, s új lehetőségeket nyújtanak újfajta vizsgálatokra. A bemutatandó módszerek háttere a dinamikus közgazdasági elmélet, s eszközeiket a sztochasztikus idősorlemezés nyújtja. Matematikai szempontból a modellek általában sztochasztikus differenciaegyenleteket tartalmaznak.

A dinamikus közgazdasági elmélet általános jellegének bemutatására néhány lényeges szempontot emelünk ki.

Az első lényeges tulajdonsága az elméletnek az, hogy az alkalmazkodás vagy igazodás valamilyen statisztikailag nem megfigyelhető, de lényeges szerepet játszó érték irányában történik. Példaképpen említhetjük valamely változó egyensúlyi értékét, kívánt vagy elvárt szintjét, norma szerinti értékét, vagy akár tervezett vagy optimális szintjét. A második szempont a dinamikus jelleg, az, hogy az alkalmazkodás e kívánt szinthez az időben folyik. A harmadik szempont az alkalmazkodási folyamat különbözőféle gyorsaságának feltételezése. A modellek keretébe az alkalmazkodás hiányától a teljes alkalmazkodásig terjedve mindenféle mechanizmus belefér. Ez utóbbi szempont egyben választ ad arra a kérdésre is, hogy érdemes-e ilyen modellekkel kísérletezni akkor, amikor a megfigyelési időszak egy részében nem, vagy csak alig beszélhetünk az alkalmazkodás érvényesüléséről.

Véleményünk szerint gazdaságunk eddig is kénytelen volt, és most is kénytelen alkalmazkodni a változó körülményekhez, akár ha késve és súrlódásokon

keresztül is. (Gondoljunk például az olajárrobbanás késleltetett, de elhúzódó hatására.) Éppen e hatások kimutatása lehet e módszerek feladata. Ugyanakkor lényegesnek tartjuk, hogy az alkalmazkodás fogalmát a lehető leg szélesebben értelmezzük, s ne csak a klasszikus példák (pl. áralkalmazkodás) körében maradjunk. Például megemlíthetjük az egyensúlyra való törekvést a fogyasztási-cikk piacon. Igaz, hogy a fogyasztói árak csak a hetvenes évek második felében alkalmazkodtak a piachoz a kereslet és a kínálat egyensúlyának biztosítása érdekében, de több más jelenség megfigyelése (pl. lakossági pénzmegtakarítások) meggyőzhet arról, hogy az egyensúlyra törekvés korábban is jellemezte a fogyasztási-cikk piacot.

A cikk két fő részre tagolódik. Az első részben bemutatjuk azokat az egyszerűbb alkalmazkodási hipotéziseket és modelleket, amelyek az osztott késleltetésű modellekhez vezetnek. Bizonyos szempontból az első részben ismertetett modellek általánosítását tartalmazza a tanulmány második része, amely bemutatja a racionális várakozások hipotézisét és alkalmazásukat dinamikus ökonometriai modellekben. Célunk elsősorban a modellek mögött húzódó elmélet ismertetése, valamint a modellkonstrukciók levezetése, nem foglalkozunk modellidentifikációs és becslési kérdésekkel.

1. Egyszerű alkalmazkodási hipotéziseken alapuló osztott késleltetésű modellek

Az osztott késleltetésű modellek irodalma rendkívül gazdag. A korai úttörő jelentőségű tanulmányok [4], [22], [28], [29] mellett, összefoglaló munkák és kézikönyvek [6], [10] is jelentek meg e témában. A hazai szakirodalomban is fellelhetők az osztott késleltetésű modellekkel foglalkozó módszertani tanulmányok [2], [15]. Jelen ismertetésünkben elsősorban K. F. WALLIS tanulmányára [35] támaszkodunk.

1.1. A modellhez vezető egyszerű hipotézisek

Osztott késleltetésű hatásról akkor beszélünk, amikor valamely magyarázó változóban bekövetkező változás a függő változóban nem egyszeri, hanem a következő megfigyelési periódusokban elosztva jelentkező, többszöri változást idéz elő. Például a cigaretta árának emelése valamely fogyasztó cigarettafogyasztását nem egyszerre csökkenti, hanem hónapról-hónapra, (vagy esetleg évről évre) fejt ki csökkentő hatását. Még időszerűbb példát felhozva, az energia árak ugrásszerű emelkedése nem azonnali (hanem esetleg csak néhány év múlva jelentkező) és nem egyszeri, energiatakarékossági intézkedést váltott ki.

Ezt az időben elosztva jelentkező hatást a következő formában fogalmazhatjuk meg:

$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x_{t-j}, \quad (1.1)$$

azaz valamely y endogén változó t időszaki értékét az x egzogén változó t időszaki, $t-1$ időszaki, $t-2$, stb. időszaki értékének alakulása befolyásolja.

A β_j paraméter azt a hatást méri, amit az x egzogén változó $t-j$ időszaki változása az y változóban a t időszakban vált ki. GOLDBERGER [9] a β_j para-

métereket multiplikátoroknak nevezi, és pedig β_0 az azonnali hatást kifejező közvetlen multiplikátor, $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j$ pedig a teljes hatást kifejező totális multiplikátor.

Az (1.1) típusú egyenlet statisztikai becslésekor már a korai alkalmazásokkor praktikus okokból felmerült az az igény, hogy a β_j -k értékére egyszerűsítő, azaz megszorító kikötéseket kell tenni a becslés érdekében. Az empirikus munkában Koyck [22] tevékenysége volt kiemelkedő, aki egyben az elosztott késleltetésű modellnek interpretálható, közgazdasági tartalmat is adott, nevezetesen a *parciális alkalmazkodás* (partial adjustment) hipotézisét. Koyck feltételezte, hogy valamely időszaktól kezdődően a β_j koefficiensek geometriai haladvány szerint csökkennek, azaz

$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \lambda \beta_1 x_{t-2} + \lambda^2 \beta_1 x_{t-3} + \dots, \\ 0 \leq \lambda < 1.$$

Ha feltételezzük, hogy a csökkenés már a t -edik időpontban indul, akkor:

$$y_t = \beta \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j x_{t-j}.$$

Ebben az esetben a totális multiplikátor:

$$\beta \sum_j \lambda^j = \beta / (1 - \lambda).$$

Az y változó alkalmazkodása az x -ben bekövetkezett változást követően, megközelítően exponenciális görbe szerint megy végbe.

A Koyck féle transzformáció a modellt becslhető formára hozza:

$$y_t - \lambda y_{t-1} = (\beta x_t + \lambda \beta x_{t-1} + \lambda^2 \beta x_{t-2} + \dots) - \lambda(\beta x_{t-1} + \lambda \beta x_{t-2} + \dots) = \beta x_t,$$

azaz:

$$y_t = \lambda y_{t-1} + \beta x_t.$$

A $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ jelölést bevezetve:

$$\Delta y_t = \beta x_t - (1 - \lambda) y_{t-1}. \quad (1.2)$$

Amikor y eléri $\bar{y}$ -t, egyensúlyi értékét, azaz már nem változik tovább, akkor $y_{t-1} = y_t = \bar{y}$.

Mivel $\bar{y} = \beta x_t / (1 - \lambda)$, a βx_t -re nyert kifejezést (1.2)-be helyettesítve:

$$\Delta y_t = (1 - \lambda)(\bar{y} - y_{t-1}). \quad (1.3)$$

Az (1.3) formájú egyenlet fejezi ki a *parciális alkalmazkodás feltételezésének lényegét, amennyiben azt fogalmazza meg, hogy az y_t változó a kívánt $\bar{y}$ értékhez az időben alkalmazkodik, de csak részlegesen, vagyis a λ alkalmazkodási ráta szerinti mértékben.*

Míg Koyck a geometriailag csökkenő paraméterű osztott késleltetésű modellhez utólag teremtette meg a közgazdasági hipotézist, a parciális alkalmazkodás feltételezésében, CAGAN [4] ugyanehhez a modellhez az *adaptív várakozások* (adaptive expectations) hipotézisével jutott el. E hipotézis szerint *valamely x*

változóra vonatkozó várakozás (elvárás) időben úgy alakul, hogy a várt értéket fokozatosan igazítjuk, a tényérték¹ és az előző időszakra vonatkozó várt érték közötti eltérés figyelembevételével.

Ha $\hat{x}_t$ -vel jelöljük az x_t -re vonatkozó várakozást, akkor

$$\hat{x}_t - \hat{x}_{t-1} = (1 - \gamma)(x_t - \hat{x}_{t-1}), \quad (1.4)$$

vagy

$$\hat{x}_t = \gamma \hat{x}_{t-1} + (1 - \gamma)x_t, \quad 0 \leq \gamma < 1.$$

Az x_t -re vonatkozó várakozás tehát az x változó elmúlt időszakokra vonatkozó x_{t-j} megfigyeléseinek súlyozott átlaga:

$$\hat{x}_t = (1 - \gamma) \sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j x_{t-j}.$$

Cagan az adaptív várakozások hipotézisét az árváltozásokra vonatkozó várakozások becslésére használta. Olyan regressziós egyenletet becsült, amelyben az $\hat{x}_t$ változó magyarázó változóként szerepelt:

$$y_t = \alpha + \beta \hat{x}_t = \alpha + \beta(1 - \gamma) \sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j x_{t-j}. \quad (1.5)$$

Az adaptív várakozások modelljében a γ paraméternek van kitüntetett jelentősége. Amennyiben γ értéke 0-hoz van közel, akkor az $(1 - \gamma)\gamma^j$ koefficiensek j növekedésével gyorsan csökkennek, azaz a jövőre vonatkozó várakozás inkább a közelmúlt tapasztalataitól függ. Ha γ értéke inkább 1-hez esik közel, akkor a múlt tapasztalatainak, vagyis a régebbi megfigyeléseknek nagyobb szerepük van a várakozások alakításában. NERLOVE [28] volt az első, aki rámutatott a *kétféle modell*, a parciális alkalmazkodáson alapuló modell és az adaptív várakozások modelljének „*dualitására*”. A parciális alkalmazkodás modelljében az y endogén változó valamely kívánt (pl. egyensúlyi vagy normál) értéke függ az x egzogén változótól. Ha y_t^* -vel jelöljük ezt a kívánt szintet, akkor

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t.$$

Az (1.3) összefüggés szerint:

$$y_t - y_{t-1} = (1 - \lambda)(y_t^* - y_{t-1}), \quad 0 \leq \lambda < 1$$

behelyettesítve:

$$y_t = \alpha(1 - \lambda) + \beta(1 - \lambda)x_t + \lambda y_{t-1}. \quad (1.6)$$

Ezzel szemben az adaptív várakozások modelljében az y endogén változó az x egzogén változóra vonatkozó várakozásoktól függ:

$$y_t = \alpha + \beta \hat{x}_t.$$

Az (1.4) összefüggés szerint:

$$\hat{x}_t = \gamma \hat{x}_{t-1} + (1 - \gamma)x_t, \quad 0 \leq \gamma < 1$$

behelyettesítve:

$$y_t = \alpha(1 - \gamma) + \beta(1 - \gamma)x_t + \gamma y_{t-1}. \quad (1.7)$$

¹ A formula felírásakor egyesek az aktuális tényértéket, mások pedig az előző-időszaki tényértéket szerepeltetik.

Az (1.6) és (1.7) összefüggéseket összevetve látható, hogy a parciális alkalmazkodás modellje és az adaptív várakozások modellje determinisztikus formában megegyezik. Ha sztochasztikus formában írjuk fel mindkét modellt, az u_t , illetve v_t véletlen hibatermokok figyelembevételével, akkor a két modell végső formája különböző lesz.

A parciális alkalmazkodás modellje:

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + u_t$$

$$y_t - y_{t-1} = (1 - \lambda)(y_t^* - y_{t-1}) + v_t \quad 0 \leq \lambda < 1 \quad (1.8)$$

$$y_t = \alpha(1 - \lambda) + \beta(1 - \lambda)x_t + \lambda y_{t-1} + (1 - \lambda)u_t + v_t,$$

az adaptív várakozás modellje:

$$y_t = \alpha + \beta \hat{x}_t + u_t$$

$$\hat{x}_t = \gamma \hat{x}_{t-1} + (1 - \gamma)x_t + v_t \quad 0 \leq \gamma < 1$$

$$y_t = \alpha(1 - \gamma) + \beta(1 - \gamma)x_t + \gamma y_{t-1} + (u_t - \gamma u_{t-1} + \beta v_t). \quad (1.9)$$

A hibatagokat is tartalmazó (1.8) és (1.9) összevetésével (feltételezve az u_t és v_t függetlenségét) látható, hogy a parciális alkalmazkodás végső formájában a véletlen változó nem tartalmaz autokorrelációt, azonban az adaptív várakozás modelljében a véletlen változó mozgó-átlagolású és így autokorrelációt tartalmaz. Ennek a körülménynek a modellek becslése szempontjából van jelentősége. Olyan modellekre ugyanis, amelyekben a függő változó késleltetett értéke a magyarázó változók között szerepel, és emellett a hibatag autokorrelációt is tartalmaz, a legkisebb négyzetek klasszikus módszere inkonzisztens becslést ad. Ennek ellenére a parciális alkalmazkodású és az adaptív várakozásokra illesztett modellek döntő többségét a klasszikus legkisebb négyzetek módszerével becsülik. Az ily módon előállított becslések szerint $(1 - \lambda)$ becslése lefelé torzított, míg $(1 - \gamma)$ becslésére felfelé torzított értéket kapunk. Mivel jelen cikkünkben nem kívánunk részletesen becslési problémákkal foglalkozni, csak megemlítjük, hogy kidolgoztak olyan módszereket [8], amelyek figyelembe veszik e modellek sajátos jellegét.

Inkább arra törekszünk, hogy ismertessük azokat a közgazdasági alkalmazásokat, ahol e modellformák hasznosnak bizonyultak.

1.2. Parciális alkalmazkodási modellek

A parciális alkalmazkodás hipotézisén alapuló modellekre a klasszikus példákat a keresletelemzés szolgáltatja.

Először a *tartós cikkek iránti keresletet* magyarázták a parciális alkalmazkodás modelljével. Ezekben az esetekben feltételezték, hogy a tartós cikkből kívántos készletállomány, S_t^* a folyó jövedelemtől és áráktól függ. A jelen vásárlásai tehát úgy alakulnak, hogy a tényleges készlet alkalmazkodjon a kívánt készlethez (stock-adjustment).

S_t -vel jelölve a készletállományt:

$$S_t = (1 - \lambda)S_t^* + \lambda S_{t-1}.$$

Ez az egyenlet, valamint az az összefüggés, amelyik azt fejezi ki, hogy a készlet elhasználódását is pótolni kell, együttesen egy olyan összefüggéssé

transzformálható, amelynek függő változóját a vizsgált cikke fordított kiadások alkotják:

$$q_t = S_t - S_{t-1} + \delta S_{t-1},$$

behelyettesítve:

$$q_t = (1 - \lambda) S_t^* - (1 - \lambda - \delta) S_{t-1},$$

ahol q_t -vel jelöljük a t -időszaki vásárlásokat, δ pedig az állomány amortizációs rátája.

Ha az S_t állományadatokat nem ismerjük, a Koyck-féle transzformációt alkalmazva az egyenletet olyan formára hozhatjuk, amelyben csak megfigyelhető változók szerepelnek (lásd pl. [34]-ben). Általában, a Koyck-féle transzformáció alkalmas olyan modellek transzformálására, amelyekben stock-típusú és flow-típusú változók együttesen szerepelnek. A transzformáció eredményeként csak flow-típusú változók maradnak az egyenletekben. Ilyen típusú modelleket többen becsültek, a gépkocsi, a hűtőszekrény és más tartós fogyasztási cikkek keresletének becsülésére [11], [5].

HOUGHAKKER és TAYLOR a parciális alkalmazkodási modellt általánosították az összes fogyasztási cikkekre [12].

A nem tartós cikkeknel a fogyasztási szokások állománya veszi át a tényleges állomány szerepét, s itt is a kívánt optimális szinthez történő alkalmazkodást tételezik fel. A Houthakker–Taylor-féle dinamikus keresleti függvény azonos formában illeszthető az összes fogyasztási cikke, sőt felhasználásával el lehet dönteni az egyes cikkekről, hogy fogyasztásukat inkább a fogyasztói szokások uralják, avagy az optimális tartós állományra való törekvés. A Houthakker–Taylor keresleti függvényekre hazai alkalmazást is találunk [13]. Ugyancsak parciális alkalmazkodás feltételezésén alapul az az *aggregált fogyasztási függvény*, amelyben az előző évi fogyasztás szerepel a magyarázó változók között [37]. Ebben az esetben a λ alkalmazkodási együttható az összfogyasztás kívánt szintjéhez való alkalmazkodás gyorsaságáról tájékoztat.

A parciális alkalmazkodáson alapuló osztott késleltetésű modellek számos alkalmazását találjuk a *beruházások elemzésében*. Már KOYCK idézett úttörő jelentőségű munkája [22] is a beruházásokra vonatkozott. JORGENSEN [18], [19] beruházási függvénye többféle késleltetési struktúrát épít egybe. A beruházások iránti keresletet egyrészt egy kívánt (optimális vagy tervezett) állótőkeállomány határozza meg, amelyhez a beruházási ráfordítások parciálisan alkalmazkodnak. Egy másik késleltetési struktúra a beruházási ráfordítások és az üzembehelyezés közötti időeltolódást hivatott kifejezni.

A Jorgenson féle beruházási függvény végső formája:

$$I_t - \delta K_t = \lambda_1(I_{t-1} - \delta K_{t-1}) + \lambda_2(I_{t-2} - \delta K_{t-2}) + \alpha \sum_{j=s}^{s+3} \beta_j \frac{p_{t-j} Q_{t-j}}{C_{t-j}},$$

ahol I_t a t -időszaki beruházási ráfordítások változója, s a késleltető függvény kezdőpontját jelöli, értéke általában kettőtől négy negyedévig terjed. K_t a tőkeállomány, $p_t \cdot Q_t$ a hozzáadott érték folyó áron a t -időszakban, δ pedig az amortizációs ráta. (Jorgenson a K_t^* kívánt állóeszközállományt egy Cobb–Douglas féle termelési függvényből származtatja marginális termelékenységi feltételt véve figyelembe:

$$K_t^* = \alpha \frac{p_t Q_t}{C_t},$$

ahol α a termelés tőkére vonatkoztatott elaszticitása, C_t pedig a tőkére konstruált árváltozó.)

A Jorgenson-féle beruházási függvény a késleltetési struktúrán (struktúrákon) alapuló beruházási függvények egyik válfaja, több más formulát is alkalmaztak ezen a területen. Részben hasonló hipotézisekből kiindulva, magyar beruházási adatokra is illesztettek osztott késleltetésű modellt [16].

A termeléshez és értékesítéshez szükséges *készletállomány alkalmazkodási mechanizmusának* leírására ugyancsak széleskörben alkalmaznak parciális alkalmazkodási modelleket. Megemlíjtük M. C. LOVELL modelljét [24], amely a következő két összefüggésen alapul:

$$In_t^* = \alpha + \beta \hat{x}_t$$

$$In_t^p = (1 - \lambda) In_t^* + \lambda In_{t-1}.$$

Az első egyenlet szerint a kívánt készletszint In_t^* az értékesítésre vonatkozó várakozásoktól ($\hat{x}_t$) függ.² Ezért a tervezett készletszintet (In_t^p) a kívánt szinthez tartozó parciális alkalmazkodással írja le a második egyenlet.³ A készlet-egyenleteken kívül a termelésre- és a tervezett termelésre vonatkozó összefüggések is szerepelnek Lovell modelljében.

A készletfelhalmozás alakulásának elemzése hazai gazdasági vizsgálatainknak is központi kérdése. Több kísérletet tettek a közelmúltban a készletmozgások modellezésére, egyrészt a jelenség belső ciklikus mozgásának meghatározására, másrészt a készletek más fontos gazdasági makrokategóriákkal való összefüggésének vizsgálatára [32], [3], [17]. E vizsgálatokban is alkalmaztak osztott késleltetésű modelleket.

A parciális alkalmazkodás egy további felhasználása a *pénzkészlet iránti kereslet* meghatározása [23]. Míg a kívánt pénz optimális mennyisége (M_t^*) a jövedelem, a gazdagság és a kamatlábak függvénye, addig a tényleges pénzkészlet (M_t) iránti keresletet a következő alkalmazkodási egyenlettel közelíthetjük:

$$M_t = (1 - \lambda) M_t^* + \lambda M_{t-1}.$$

Az eddig felsorolt példák a parciális alkalmazkodási modell klasszikus felhasználási lehetőségeit mutatták be, a következőkben megemlíjtük azokat az alkalmazásokat, amelyek a *disequilibrium helyzetek elemzésére* szolgálnak. Ezekben az esetekben nem arról van szó, hogy az alkalmazkodás az illető változó kívánt vagy optimális szintjének elérésére törekszik, hanem valamely változó alkalmazkodása az érintett terület (vagy piac) egyensúlyának biztosítását vagy létrejöttét szolgálja. Erre klasszikus példa az *áralkalmazkodási mechanizmus* szerepeltetése disequilibrium modellben. Feltételezve, hogy a kereslet D_t és a kínálat S_t nincs egyensúlyban $D_t \neq S_t$, az áralkalmazkodási mechanizmus:

$$P_t = P_{t-1} + \gamma(D_t - S_t),$$

² Megjegyezzük, hogy egyes modellek egyszerre tartalmazzák a parciális alkalmazkodás és az adaptív várakozások feltételezését.

³ Az alkalmazkodási modellekben általában nem tételezik fel a „kívánt” és a „tervezett” értékek egyenlőségét. Míg az előbbi kategória nem-megfigyelhető fiktív érték, az utóbbi egy önkényesen meghatározott érték.

azaz az árváltozások a túlkereslet (túlkínálat) függvényében alakulnak, vagyis alkalmazkodásukkal az egyensúly létrejöttét segítik elő (lásd pl. [30]). Az áralkalmazkodás mintájára más változókat is fel lehet használni hasonló formában a túlkereslet (túlkínálat) mérésére (lásd pl. [14]-ben).

A tervgazdálkodásban kialakult disequilibrium helyzetek modelljeiben használható a *tervalkalmazkodási mechanizmus* [31]. Ennek egyik válfaja a következő:

$$Q_{t+1,t}^P = Q_{t,t-1}^P + \lambda(P_t - S_t),$$

ahol $Q_{t+1,t}^P$ a t időszakban a $t + 1$ időszakra tervezett értéket jelöli. Azaz feltételezik, hogy maga a tervezés alkalmazkodik a kialakult nem-egyensúlyi $P_t \neq S_t$ helyzethez, úgy, hogy az egyensúly javuljon.

1.3 Adaptív várakozásokon alapuló modellek

Ahogy az 1.1 pontban bemutattuk, az adaptív várakozásokon alapuló hipotézis egzakt formában ugyanahhoz az osztott késleltetésű modellhez vezet, mint a parciális alkalmazkodás hipotézise. Annak ellenére, hogy a kétféle hipotézis között a határvonal nem éles, sőt olyan modellek is találhatók, amelyek egyszerre tartalmazzák mindkét típusú feltételezést, megállapíthatjuk, hogy az adaptív várakozásokon alapuló modellek nem annyira elterjedtek, mint a parciális alkalmazkodási modellek. A következőkben felsoroljuk azokat a fő területeket, ahol ez utóbbiak alkalmazása jellemző.

Klasszikus példát jelent az *árváltozások, illetőleg az infláció alakulására vonatkozó várakozások* modellezése [4]. Nyilvánvaló, hogy a gazdasági alanyok (tervezők, vállalatok és fogyasztók) jelen magatartását és döntéseit befolyásolják azok az elképzelések, amelyeket az árak ezévi-jövőévi alakulásáról kialakítottak. Ezeknek az elképzeléseknek az alakulására nyújt egy egyszerű hipotézist az adaptív várakozások feltételezése. Amennyiben y_t -vel jelöljük azt a változót, amelyre hat az árra vonatkozó várakozás: $\hat{P}_{t+1}$, akkor a modell alakja a következő:

$$y_t = \alpha + \beta \hat{P}_{t+1}$$

$$\hat{P}_{t+1} = (1 - \gamma) \sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j P_{t-j}$$

$$y_t = \alpha(1 - \gamma) + \beta(1 - \gamma) P_t + \gamma y_{t-1}.$$

A készletek modellezésében is fontos szerepet játszanak várakozások, akár az áralakulásra, akár a következő időszaki értékesítésekre vonatkozóan [25].

Szintén klasszikus alkalmazásnak számít az M. FRIEDMAN [7] féle *fogyasztási függvényben a fogyasztó jövedelmére vonatkozó várakozások* figyelembevétele. A várt jövedelmek változóját a tényleges jövedelmek idősoráiból konstruálják, súlyozott átlag formájában. Ez a típusú jövedelemváltozó előrejezését adja egy olyan jövedelemnek, amely egy permanens- és egy tranzien komponensből tevődik össze. Általánosan is mondható, hogy ilyen típusú változók konstruálására alkalmas az adaptív várakozások hipotézise.

Végül megemlítünk egy olyan alkalmazást [1], amely a *spekulációs nemzetközi pénzmozgásokat* vizsgálta a kanadai változó cserearánytól való függőségében. Ezek a pénzmozgások nem annyira a tényleges aktuális cserearánytól

$[r_t]$ függöttek, hanem a cserearány egy normális, elvárt, nem megfigyelhető szintjétől $[\hat{r}_t]$:

$$\hat{r}_t - \hat{r}_{t-1} = (1 - \gamma)(r_t - \hat{r}_{t-1}).$$

A modellben becsült értékek azt mutatták, hogy azok akik spekulációkba becsátkoztak, elég mereven ragaszkodtak elképzeléseikhez, s csak lassan alkalmazkodtak a tényleges cserearány változásokhoz.

2. A racionális várakozások hipotéziséen alapuló modellek

Az előző fejezet 1.3 pontjában az adaptív várakozások hipotéziséen alapuló osztott késleltetésű modelleknél is láttuk, hogy különböző gazdasági jelenségek alakulására vonatkozó várakozások, elképzelések gyakran szerepet játszanak a gazdasági alanyok döntéshozatalában, tervezett és megvalósult viselkedésükben. Éppen ezért a várakozásokat elég széles körben felhasználták az alkalmazott ökonometriában is. A várakozásokra vonatkozó direkt megfigyelések (közvéleménykutatás vagy egyéb információk) ritkán állnak rendelkezésre. Ezért a várakozásokat származtatott változókkal helyettesítik. A származtatás módjára különböző hipotéziseket használnak fel. Ilyen hipotézis az „adaptív várakozás”, amelynek alapja az a gondolat, hogy a jövőre vonatkozó várakozásokat a múltbeli értékek határozzák meg. Egy alternatív, s az utóbbi években igen gyakran használt hipotézis a *racionális várakozások hipotézise*, amelyet MUTH [27] dolgozott ki 1960-ban. Mielőtt részletesebben bemutatnánk MUTH úttörő jelentőségű munkáját, kiemeljük e hipotézis lényegi tulajdonságát, amely egyben megkülönbözteti a racionális várakozásokon alapuló modelleket az 1. részben bemutatott egyszerűbb modellektől is.

A racionális várakozások lényege az a feltételezés, hogy a gazdasági alanyok valamely változóra vonatkozó várakozásaikat úgy képezik, hogy közben figyelembe veszik az egész gazdasági rendszert, azaz a többi változó között fennálló interdependens kapcsolatokat is. Ennek a feltételezésnek két olyan következménye van, amelyek minőségileg megkülönböztetik a racionális várakozások modelljeit az 1. részben bemutatott egyszerű alkalmazkodási modellektől. Az egyik ilyen tulajdonság a *rendszerismeret*, az az eltérés, hogy míg az egyszerű alkalmazkodási modellekben egyetlen endogén változónak és egy egzogén változónak a folyó és múltbeli értékei közötti dinamikus kapcsolatát írjuk le, addig a racionális várakozásokkal nem elszigetelt összefüggést vizsgálunk, hanem a változókat és várakozásaikat a teljes gazdasági rendszerben (illetve ennek modelljében) ábrázoljuk.

Amennyiben ez a modell szimultán egyenletekből álló ökonometriai modell, akkor a változók endogén és egzogén minősítése természetesen továbbra is szükséges, de most már a rendszer összes endogén változója áll szemben egy-szerre a rendszer összes egzogén változójával. „Racionálisán” csak ezen dinamikus kapcsolatrendszeren belül képezhetjük a várakozásokat. A másik tulajdonság az első lényegi tulajdonságból eredő formai sajátosság, az, hogy míg az egyszerű alkalmazkodási modellek általában egy vagy legfeljebb két egyenletről állnak, a racionális várakozásokat figyelembe vevő modellek *mindig több egyenletes modellek*.

Megemlítjük, hogy a racionális várakozások hipotézise a gondolat születése óta eltelt húsz évben rendkívül népszerű lett. A növekvő számú alkalmazással

egyidőben közgazdasági- és matematikai kutatásokat folytattak és folytatnak a közgazdasági és módszertani háttér teljesebbé tételére [26]. Várható, hogy az elkövetkezendő években, amikor a gyorsabban változó gazdasági feltételek új és új követelményeket támasztanak az ökonometria modellekkel szemben, a racionális várakozások hipotézisére alapuló módszerek fejlődése még nagyobb lendületet kap.

Úgy gondoljuk, hogy érdemes e módszer hazai felhasználási lehetőségeinek a megfontolása is, hiszen akarva vagy akaratlanul nálunk is kialakulnak elvárások, s e várakozások befolyásolják gazdasági alanyaink (pl. a vállalatok, a tervezők, a fogyasztók stb.) magatartását és döntéseit.

A következőkben előbb bemutatjuk Muth alaphipotézisét, majd fő vonalakban ismertetünk néhány olyan esetet, amely érzékelteti, hogy hogyan jelennek meg a racionális várakozások ökonometria modellekben.

2.1 Racionális várakozások és az ármozgások elmélete

A téma felvetése Muth bevezető tanulmányában [27]

A gazdasági jelenségek rövidtávú ingadozásának elemzése már régen igazolta azt a feltételezést, hogy alakulásukra hatással vannak azok az elképzelések, várakozások, amelyek a gazdaság alanyaiban kialakulnak az események bekövetkezése előtt. Viszonylag kevesebbet foglalkoztak azzal, hogy hogyan, milyen módon képezik ezeket a várakozásokat. A „racionális várakozások” hipotézise azt a feltételezést tartalmazza, hogy a várakozásokat úgy képezik, hogy azok ugyanazok legyenek, mint a releváns gazdasági elmélet előrejelzései. Annak ellenére, hogy léteznek különbségek a különböző egyedi várakozások között, ezek a várakozások ugyanazon az információs bázison alapulnak, s tendencia jelleggel ugyanazon eredményt adják. Más oldalról közelítve, feltételezhetjük, hogy a gazdasági alanyok kénytelenek „tanulni” az időben, nem hagyhatnak figyelmen kívül információt, s lehetőleg rendszer-szemléletben gondolkoznak. A várakozások „racionális” alakítása tehát nem azt jelenti, hogy a gazdasági alanyok érdekeiknek megfelelően, ésszerűen vagy optimalisan döntenek el, hogy mit tegyenek, hanem csak azt, hogy szubjektív ítéleteik, elképzeléseik nem térhetnek el hosszabb távon a gazdasági valóságtól. Ez a feltételezés, szemben a korábbi elméletekkel, nem azt állítja, hogy a dinamikus modellek túl „racionálisak” a valósághoz képest, hanem azt, hogy a modellek nem eléggé veszik figyelembe a „racionalitást”.

Elméletének bővebb kifejtésére és igazolására Muth két konkrét és viszonylag egyszerű gazdasági szituációt leíró modellt elemmez.

a) Ármozgások egy izolált piacon

A rövidtávú áringadozásokra vonatkozó várakozások hatását vizsgáljuk egy egyszerű (egytermékes) piac körülményei között.

A modell egyenletei a következők:

$$\begin{aligned} C_t &= -\beta p_t && \text{(kereslet)} \\ Q_t &= \gamma p_t^e + u_t && \text{(kínálat)} \\ Q_t &= C_t && \text{(piaci egyensúly)} \end{aligned} \quad (2.1)$$

ahol Q_t -vel jelöljük a vizsgált termékből a t időszakban gyártott volument, C_t -vel a termék fogyasztására fordított pénzösszegeket jelöljük, p_t a t időszaki ár, p_t^e pedig az a t időszaki piaci árra vonatkozó várakozás, amelyet a $t - 1$ időszakban az akkor elérhető információ alapján kialakítottak. A kínálati függvényben u_t a véletlen hatásokat reprezentáló változó. Az összes változót az egyensúlyi értéküktől való eltérésekre értelmezzük.

Ha a Q_t változót kiküszöböljük a (2.1) egyenletből, akkor a modellt a következő összefüggésre redukálhatók:

$$p_t = -\frac{\gamma}{\beta} p_t^e - \frac{1}{\beta} u_t. \quad (2.2)$$

A modellel előállított előrejelzést úgy kapjuk, hogy a változók helyére várható értéküket írjuk. (Első lépésben feltételezzük, hogy $Eu_t = 0$.)

$$Ep_t = -\frac{\gamma}{\beta} p_t^e. \quad (2.3)$$

Ha a modell előrejelzése lényegesen jobb mint a várakozások értéke, akkor ez a körülmény az előrejelzést előállító cégnek extra nyereség elérését teszi lehetővé (pl. készletezési spekulációkkal).

Ez a lehetőség nem áll fenn többé, ha feltételezzük, hogy a vállalat várakozása éppen egybeesik a modell előrejelzésével, azaz

$$Ep_t = p_t^e. \quad (2.4)$$

(2.4.) hipotézis fejezi ki a racionalitási feltétel lényegét. Ha $\gamma/\beta \neq -1$, akkor a (2.4) racionalitási feltétel csak úgy állhat fenn, ha $p_t^e = 0$, azaz a várt ár éppen az egyensúlyi ár (azaz az egyensúlyi ártól való eltérés 0).

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a kínálati függvényben szereplő véletlen változó nem jelezhető előre, s ezért várható értékét, nullát helyettesítettük be a (2.2) függvénybe. A legtöbb piacon mind a keresleti, mind a kínálati oldalon figyelembe kell venni sztochasztikus változókat (lényegében az árváltozón kívüli egyéb hatásokat is ezek közé soroljuk ebben az egyszerű modellben). Ha ezek megfigyelhetők, feltételes várható értéküket használhatjuk fel előrejelzésükre. Felhasználva a (2.2)–(2.4) összefüggéseket, az árra vonatkozó várakozást a következő összefüggés fejezi ki:

$$p_t^e = -\frac{1}{\beta + \gamma} Eu_t. \quad (2.5)$$

Ha most nem tételezzük fel azt, hogy az u_t változó normális eloszlású független változó zérus várható értékkel, akkor az Eu_t értékét a múlt megfigyelései alapján becsüljük. Nézzük meg hogyan alakulnak a várakozások szeriálisan korrelált u_t véletlen változóknál. Akkor az u_t változót ε_t nulla várható értékű és σ^2 varianciájú független normális változó mozgó átlagolásával írhatjuk fel:

$$u_t = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{t-i}, \quad E\varepsilon_j = 0, \quad E\varepsilon_i \varepsilon_j = \begin{cases} \sigma^2 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j. \end{cases} \quad (2.6)$$

A p_t árváltozások (az egyensúlyi ártól való eltérések) ezért szintén az ε_t -ből származtathatók:

$$p_t = \sum_{i=0}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i}. \quad (2.7)$$

Az árra vonatkozó várakozás a $t-1$ időszakban csak annyiban tér el a (2.7) összefüggéstől, hogy a t időszaki ε_t érték helyére várható értékét, nullát helyettesítjük:

$$p_t^e = W_0 E \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-1} = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i}. \quad (2.8)$$

Általánosan, $p_{t,L}$ -vel jelölve a $t+L$ időszakra vonatkozó, a t időszakban kialakított várakozást:

$$p_{t-L,L} = \sum_{i=L}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i}. \quad (2.9)$$

A (2.7) és (2.8) összefüggést (2.1)-be helyettesítve és felhasználva az egyensúlyi feltételt:

$$W_0 \varepsilon_t + \left(1 + \frac{\gamma}{\beta}\right) \sum_{i=1}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i} = -\frac{1}{\beta} \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i \varepsilon_{t-i}. \quad (2.10)$$

A (2.10) összefüggés olyan azonosság, amely ε_j bármely értéke mellett érvényesül, ezért az ε_j -re vonatkozó megfelelő együtthatóknak egyenlőeknek kell lenniük:

$$\begin{aligned} W_0 &= -\frac{1}{\beta} \omega_0 \\ W_i &= -\frac{1}{\beta + \gamma} \omega_i, \quad (i = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.11)$$

A (2.11) összefüggésrendszer az ár és az árra vonatkozó várakozás közötti kapcsolat paramétereit fejezi ki, de úgy, hogy mindkét változót az ε_t független véletlen változó lineáris kombinációjaként állítottuk elő. A mi célunk viszont az, hogy az árra vonatkozó várakozást az árváltozó múltbeli értékeiből tudjuk meghatározni valamilyen

$$p_t^e = \sum_{j=1}^{\infty} V_j p_{t-j} \quad (2.12)$$

formában.

A V_j súlyokat a W_j súlyokból a következőképpen határozhatjuk meg. Helyettesítsük a (2.7) és (2.8) összefüggéseket (2.12)-be:

$$\sum_{i=1}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i} = \sum_{j=1}^{\infty} V_j \sum_{i=0}^{\infty} W_i \varepsilon_{t-i-j} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^i V_j W_{i-j} \right) \varepsilon_{t-i}. \quad (2.13)$$

Mivel (2.13)-ban az azonosságnak fenn kell állnia ε_t minden értékére

$$W_i = \sum_{j=1}^i V_j W_{i-j}, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (2.14)$$

A (2.14) egyenletrendszer trianguláris szerkezetű, ezért szukcesszív módon megoldható a $V_1, V_2, V_3 \dots$ koeficiensekre.

A levezetésből látható, hogy a racionális várakozások modellje, az adaptív várakozások modelljéhez hasonlóan, a múlt áringadozásából vezeti le a jövő árváltozására vonatkozó várakozásokat. A lényeges különbséget viszont az okozza, hogy míg a modell koeficiensei (a súlyok) az adaptív várakozási modellben a közgazdasági környezettől teljesen függetlenül pusztán az érintett változó múltbeli értékeinek alapján határozódnak meg, addig a racionális várakozások modelljében ezek a súlyok (2.10) szerint a közgazdasági környezetet leíró modelltől, jelenleg a (2.1) piaci keresleti és kínálati egyenletek β és γ paramétereitől függnek. Ez a körülmény jelenti a „racionalitást”. Az árváltozásokra irányuló várakozások tehát nemcsak a múlt időszakok árváltozásaitól függenek, hanem a keresleti és kínálati függvénytől is, azaz keresleti és kínálati tényezők is közrejátszanak az árak alakulására vonatkozó megfontolásokban.

b) Készletezési spekulációk

Különösen érdekes hatások figyelhetők meg az árra vonatkozó várakozások és a készletezési politika között. A készletek keresleti függvénye függ a folyó ár és a jövőre vonatkozó várt ár különbségétől. Míg a várt áremelkedés a készletállomány növelésének irányában hat, árcsökkenés kilátásában fordított a helyzet.

A spekulációs készletezés eredményeként nyereségre tehet szert a vállalat. Ha π_t -vel jelöljük a várt nyereséget, akkor ez a spekulatív készletváltozás In_t és az árváltozás szorzata:

$$\pi_t = In_t(p_{t+1} - p_t). \quad (2.15)$$

Maga a spekulatív készletváltozás a folyó ár és a jövőre vonatkozó várt ár közötti eltérés függvénye

$$In_t = \alpha(p_{t+1}^e - p_t). \quad (2.16)$$

A (2.16) készletegyenlettel kiegészítve, a (2.1) modellt a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} C_t &= -\beta p_t && \text{(kereslet)} \\ Q_t &= \gamma p_t^e + u_t && \text{(kínálat)} \\ In_t &= \alpha(p_{t+1}^e - p_t) && \text{(készletspekuláció).} \end{aligned} \quad (2.17)$$

A piaci egyensúlyi feltétel itt:

$$C_t + In_t = Q_t + In_{t-1}. \quad (2.18)$$

Megmutatható [26], hogy ebben az esetben az árra vonatkozó várakozás az előző időszaki ár függvénye:

$$p_t^e = \lambda p_{t-1}. \quad (2.19)$$

A λ paraméter értéke 0 és 1 közé esik és a modell többi (α , β és γ) paraméterétől függ. Amennyiben λ értéke 1-hez van közel, akkor az áralakulásra erősen hat a készletezés. Ha λ 0-hoz esik közel, akkor a modell lényegében a (2.1) induló modellünk, amelyben még nem volt szerepe a készletezésnek.

Ha a (2.19) kifejezést (2.17)-be helyettesítjük és a modellt redukáljuk a (2.18) egyensúlyi feltételt felhasználva, akkor a modell a következő lesz:

$$-[\beta + \alpha(1 - \lambda)]p_t = [\gamma\lambda - \alpha(1 - \lambda)]p_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2.20)$$

Ebben a formában a korábbi β és γ paraméterek mellett az α és λ paraméterek is helyet kapnak, s így a racionális ár-várakozásokra a kereslet, a kínálat és a készletezés is hatást gyakorol, a megfelelő α , β , γ és λ paramétereken keresztül.

2.2 Racionális várakozások szimultán ökonometriai modellekben

A várakozások „racionális” jellegének lényege az, hogy azokat nem elszigetelten, hanem az egész gazdasági rendszer interdependens összefüggésrendszerét figyelembe véve képezik. Ezért a racionális várakozások alkalmazása egyrészt egy szimultán egyenletrendszerből álló ökonometriai modellt igényel, másrészt maguk a várakozások is e modell keretében határozhatók meg. A szimultán egyenletrendszerből álló ökonometriai modellek mintegy negyven éves múltra tekinthetnek vissza, és a racionális várakozások hipotézise is mintegy húsz éve született meg. Új jelenség viszont a racionális várakozások szerepeltetése ökonometriai modellben. A következőkben K. F. WALLIS 1980-ban megjelent tanulmánya [36] alapján bemutatjuk azokat a főbb eseteket, amelyekben a racionális várakozások megjelennek szimultán ökonometriai modellekben.

Induljunk ki a szimultán egyenletrendszerből álló ökonometriai modell általános strukturális formájából:

$$By_t + \Gamma x_t = u_t \quad t = 1, \dots, T$$

Ez egy olyan g strukturális egyenletből álló lineáris modell, amelyben y_t a kölcsönösen összefüggő endogén változók g elemű vektora, x_t a predeterminált (egzogén és késleltetett endogén) változók k elemű vektora, u_t a véletlen változó g -elemű vektora, B és Γ a strukturális paraméterek $g \times g$, illetve $g \times k$ rendű mátrixai.

Ebben a formában minden egyes egyenlet egy részét írja le a gazdaságnak, amelyben valamelyik endogén változót fejezzük ki endogén- és predeterminált változók függvényében. Annak érdekében, hogy explicitte tegyük, hogy a kölcsönösen összefüggő endogén változók hogyan függnek a predeterminált változóktól, a rendszert redukált formára hozzuk:

$$y_t = \Pi x_t + v_t,$$

ahol Π a redukált forma $g \times k$ rendű koefficiens mátrixa, v_t pedig a redukált rendszer g -elemű véletlen változó vektora:

$$\Pi = -B^{-1}\Gamma, \quad v_t = B^{-1}u_t.$$

1. eset

Induljunk ki az előbbi „klasszikus” modellből úgy, hogy a megfigyelhető y_t és x_t endogén és egzogén változókon kívül a modellben y_{1t}^* változókat is, azaz endogén változókra vonatkozó nem megfigyelhető várakozásokat is szerepeltetünk. Ekkor a modell a következő formájú lesz:

$$By_t + A_1 y_{1t}^* + \Gamma x_t = u_t,$$

ahol a korábbi vektorok és mátrixok mellett az y_{1t}^* h elemű vektor ($h \leq g$), és az A_1 $g \times h$ elemű koefficiens mátrix is megjelenik.

Feltesszük tehát, hogy a strukturális egyenletekben az endogén változók értékére vonatkozó várakozások is megjelennek. A racionális várakozások hipotézise szerint az y_{1t} endogén változókra vonatkozó várakozások a $t - 1$ időszakban rendelkezésre álló összes információra⁴ mint feltételre vonatkoztatott várható értékek:

$$y_{1t}^* = E(y_{1t} | \Omega_{t-1}).$$

A modell redukált formája:

$$y_t = -B^{-1}A_1y_{1t}^* - B^{-1}\Gamma x_t + B^{-1}u_t.$$

Particionálva:

$$y_{1t} = \Pi_{11}y_{1t}^* + \Pi_{12}x_t + v_{1t}$$

$$y_{2t} = \Pi_{21}y_{1t}^* + \Pi_{22}x_t + v_{2t},$$

Feltételes várható értékeket véve az első mátrixegyenletben:

$$E(y_{1t} | \Omega_{t-1}) = \Pi_{11}E(y_{1t} | \Omega_{t-1}) + \Pi_{12}E(x_t | \Omega_{t-1}) + E(v_{1t} | \Omega_{t-1}).$$

Feltételezve, hogy a v_{1t} véletlen változó nem tartalmaz autokorrelációt és hogy az $(I - \Pi_{11})$ mátrix nem-szinguláris, valamint $\hat{x}_t$ -t írva $E(x_t | \Omega_{t-1})$ helyére:

$$y_{1t}^* = (I - \Pi_{11})^{-1} \Pi_{12} \hat{x}_t.$$

Azaz a racionális várakozások nem mások, mint a predeterminált változókra vonatkozó előrejelzések lineáris kombinációi. A racionális várakozásokra nyert kifejezést behelyettesítve a particionált redukált formába:

$$y_{1t} = P_{11}\hat{x}_t + P_{12}x_t + v_{1t}$$

$$y_{2t} = P_{21}\hat{x}_t + P_{22}x_t + v_{2t},$$

ahol:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11}(I - \Pi_{11})^{-1}\Pi_{12} & \Pi_{12} \\ \Pi_{21}(I - \Pi_{11})^{-1}\Pi_{12} & \Pi_{22} \end{bmatrix}.$$

A racionális várakozások hibájára az

$$y_{1t} - y_{1t}^* = \Pi_{12}(x_t - \hat{x}_t) + v_{1t}$$

összefüggés adódik, amely szerint ez a hiba az egzogén változók előrejelzési hibájától és a folyó időszak véletlen zavaró tényezőjétől függ.

Ha a kiinduló strukturális rendszer A_1 mátrixát kiegészítjük egy $g \times (g - h)$ rendű zérusokból álló blokkal az $A = [A_1 \ ; \ 0]$ $g \times g$ méretű mátrix felhasználásával:

$$By_t + Ay_t^* + \Gamma x_t = u_t.$$

⁴ Az Ω_{t-1} jelölés egészen általánosan a modellbe foglalt összes információt jelöl a $t - 1$ -dik időszakban. Feltételezik, hogy a modell tartalmazza az összes lényeges információt.

Ekkor a racionális várakozások felírhatók a strukturális paraméter-mátrixok segítségével:

$$y_t^* = -(B + A)^{-1} \Gamma \hat{x}_t.$$

A racionális várakozások hibája pedig:

$$y_t - y_t^* = -B^{-1} \Gamma (x_t - \hat{x}_t) + B^{-1} u_t.$$

2. eset

Az előző esethez képest dinamikus továbbfejlesztés, ha a strukturális rendszerbe nemcsak a t -időszaki várakozásokat építjük be, hanem a jövő $t + 1$, $t + 2$, ..., $t + T$ időszakokból álló teljes periódusra vonatkozó várakozásokat. Akkor az egyenletrendszer a következő formájú lesz:

$$B y_t + \sum_{j=0}^{\tau} A_{1j} y_{1,t+j}^* + \Gamma x_t = u_t.$$

A redukált forma:

$$y_t = - \sum_{j=0}^{\tau} B^{-1} A_{1j} y_{1,t+j}^* - B^{-1} \Gamma x_t + B^{-1} u_t.$$

Az y_{1t} -re vonatkozó részt külön kifejezve:

$$y_{1t} = \sum_{j=0}^{\tau} \Pi_{11,j} y_{1,t+j}^* + \Pi_{12} x_t + v_{1t}.$$

Feltételes várható értékeket véve és feltételezve a hibatényező autokorrelálatlanságát $(y_{1,t+j}^*) = E(y_{1,t+j} | \Omega_{t-1})$;

$$(1 - \Pi_{11,0}) y_{1,t}^* = \sum_{j=1}^{\tau} \Pi_{11,j} y_{1,t+j}^* + \Pi_{12} E(x_t | \Omega_{t-1}),$$

amely többváltozós τ -ad rendű differenciaegyenlet. Ennek létezik megoldása y_{1t}^* -re nézve az $\hat{x}_{t+j} = E(x_{t+j} | \Omega_{t-1})$ $j = 0, 1, 2, \dots$ változóiban kifejezve, amennyiben az egyenlet stabil.⁵

A racionális várakozás hibájára ebben az esetben is az:

$$y_{1t} - y_{1t}^* = (\Pi_{11,0} - I) y_{1t}^* + \sum_{j=1}^{\tau} \Pi_{11,j} y_{1,t+j}^* + \Pi_{12} x_t + v_{1t} = \Pi_{12} (x_t - \hat{x}_t) + v_{1t}$$

összefüggés adódik.

3. eset

Végül vázoljuk azt az esetet, amikor a dinamikus szimultán egyenletrendszerből álló modellben nemcsak az endogén változókra vonatkozó várakozások jelennek meg, hanem mind az endogén, mind az egzogén változók késleltetett értékeit is megengedjük.

Ekkor a strukturális rendszer a következő lesz:

$$B(L) y_t + A y_t^* + \Gamma(L) x_t = u_t.$$

⁵ Nem arról van szó, hogy csak stabil esetben létezik megoldás, hanem csak arról, hogy a stabilitásra tett feltétel mellett írható fel a megoldás ilyen formában (lásd [36]-ban).

ahol $B(L)$ és $\Gamma(L)$ az L késleltető operátor polinomjait jelöli ($Lz_t = z_{t-1}$):

$$B(L) = B_0 + B_1L + \dots + B_rL^r$$

$$\Gamma(L) = \Gamma_0 + \Gamma_1L + \dots + \Gamma_sL^s.$$

Azaz a modellben megjelennek az endogén változók 1, 2, ..., r időszakkal, az egzogén változók 1, 2, ..., s időszakkal késleltetett értékei is.

A racionális várakozásokat ismét úgy származtatjuk, hogy vesszük a feltételes várható értékeket:

$$y_t^* = -(B_0 + A)^{-1} E[\{\Gamma(L)x_t + B_1y_{t-1} + \dots + B_ry_{t-r}\} | \Omega_{t-r}].$$

A figyelembe vett információ most az endogén változók késleltetett értékeit is tartalmazza, s a kifejezésben csak az x_t egzogén változókat kell előrejelezni:

$$y_t^* = -(B_0 + A)^{-1} \{\Gamma_0\hat{x}_t + \Gamma_1x_{t-1} + \dots + \Gamma_sx_{t-s} + \\ + B_1y_{t-1} + \dots + B_ry_{t-r}\}.$$

Tehát lényegében a racionális várakozások formálásában ugyanazok a változók ugyanolyan késleltetéssel jelentkeznek, mint a strukturális formában.

A racionális várakozások hibája ebben az esetben is csak a folyó egzogén változók előrejelzési hibájától és a folyó zavarótényezőtől függ:

$$y_t - y_t^* = -B_0^{-1}\Gamma_0(x_t - \hat{x}_t) + B_0^{-1}u_t.$$

(Beérkezett: 1984. március 14-én.)

IRODALOM

1. ARNDT, S. W.: International Short Term Capital Movements: A Distributed Lag Model of Speculation in Foreign Exchange. *Econometrica* 36. 1968. 59–70.
2. BÁNKÖVI, GY., VELICZKI, J., ZIERMANN, M.: Prediction of Macroeconomic Time Series by System of Distributed Lag Equations, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, 12. *Progress in Operations Research*. Ed. Prékopa A. North-Holland P. C., Amsterdam (1974) 71–81.
3. BUDAVÁRI P.—NÁRAY L.: *A késleltetelhalmozás és a növekedés néhány összefüggése a magyar gazdaságban* OT Közgazdasági Főosztály. Budapest, 1982. 15.
4. CAGAN, P. D.: The Monetary Dynamics of Hyperinflation In: *Studies in the Quantity Theory of Money*, edited by M. Friedman. Chicago 1956.
5. CHOW, G. C.: Statistical Demand Functions for Automobiles and their Use for Forecasting. In: *The Demand for Durable Goods*, edited by A. C. Harberger, Chicago. 1960.
6. DHRYMES, O. J.: *Distributed Lags*, North-Holland P. Co. Amsterdam, 1981.
7. FRIEDMAN, M., *A Theory of the Consumption Function*. Princeton: Princeton University Press, 1957.
8. FULLER, W. A. and MARTIN, J. E.: The Effects of Autocorrelated Errors on the Statistical Estimation of Distributed Lag Models. *J. Farm. Econ.* 43 (1961)
9. GOLDBERGER, A. S.: *Impact Multipliers and Dynamic Properties of the Klein—Goldberger Model*. Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1959
10. GRILICHES, Z.: Distributed lags: A survey. *Econometrica* vol. 35. (1967) 16–49.
11. HARBERGER, A. C., ed. *The Demand for Durable Goods*. Chicago, University of Chicago Press, 1960.
12. HOUTHAKKER, H. S. and TAYLOR, L. D.: *Consumer Demand in the United States 1929–1970*. Cambridge: Harvard University Press, 1966.
13. HULYÁK K.: A lakosság fogyasztásának elemzése dinamikus keresleti függvényekkel, *Statisztikai Szemle*, 1980. december 1224–1245.

14. HULYÁK K.: Egyensúlyhiányok a lakossági fogyasztásban, (I., II.) *Statisztikai Szemle*, 1983. március és április.
15. HUNYADI L.: *Népgazdasági folyamatok késleltetési struktúrájának elemzése. Osztott késleltetési modellek elmélete és gyakorlati alkalmazási lehetőségei. A magyar népgazdaság ökonometria makromodelljének munkaanyagai* XVIII. SZÁMKI, 1981.
16. HUNYADI L.: *A H-2 modell szerkezete és becslései A magyar népgazdaság ökonometria makromodellezésének eredményei* IV. SZÁMKI, 1980.
17. HUNYADI L.: *A készletváltozások egy aggregált modellje* (kézirat) OT TGI 1982.
18. JORGENSEN, D. W.: Anticipations and Investment Behavior Ch. 2 of Duesenberry et al. *The Brookings Quarterly Econometric Model of the U. S. Economy*. Chicago, 1965.
19. JORGENSEN, D. W.: Capital Theory and Investment Behavior *Amer. Econ. Rev.* 53 (1963) 247—259.
20. KORNAI J., MARTOS B.: *Szabályozás árjelzések nélkül* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981.
21. KORNAI J.: *Növekedés, hiány és hatékonyság. A szocialista gazdaság egy makrodinamikus modellje*. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1982.
22. KOYCK, L. M.: *Distributed Lags and Investment Analysis*. Amsterdam, North-Holland Pub. Co., 1954.
23. DE LEEUW, F.: The Demand for Money: Speed of Adjustment Interest Rates, and Wealth, In: *Monetary Process and Policy: A symposium* edited by G. Horwich Homewood, 1966.
24. LOVELL, M. C.: Manufacturers Inventories, Sales Expectations and the Acceleration Principle *Econometrica* 29 (1961) 293—314.
25. LOVELL, M. C.: Sales Anticipations, Planned Inventory Investment, and Realizations. In: *Determinants of Investment Behavior*, Universities-National Bureau Conference Series, No 18. New York, 1967.
26. LUCAS R. E. and SARGENT T. J. (editors): *Rational Expectations and Econometric Practice*, George Allen and Unwin, London, 1981.
27. MUTH, J. F.: Rational Expectations and the Theory of Price Movements. *Econometrica*, 29 (1961) 315—335.
28. NERLOVE, M.: Estimates of the Elasticities of Supply of Selected Agricultural Commodities. *J. Farm Econ.* 38 (1956) 496—509.
29. NERLOVE, M.: *Distributed Lags and Demand Analysis*. United States Department of Agriculture Handbook No. 141. Washington, 1958.
30. QUANDT, R. E.: Econometric Disequilibrium Models, *Econometric Reviews* I. 1982.
31. QUANDT, R. E. and CHAREMZA, W.: Models and Estimation of Disequilibrium in Centrally Planned Economies, *Review of Economic Studies* 1982.
32. RIECKE, W.: *Szimultán modell a készletfelhalmozás és a külkereskedelem közötti összefüggésre a magyar gazdaságban* Budapest, 1982. augusztus.
33. SIMONOVITS A.: Normák, várakozások és stabilitás egy lineáris dinamikus modellben. *Sigma*, 12. (1979) 31—56.
34. STONE, R. and ROWE, D. A.: The Durability of Consumers' Durable Goods. *Econometrica* 28. (1960) 407—16.
35. WALLIS, K. F.: Some Recent Developments in Applied Econometrics: Dynamic Models and Simultaneous Equation Systems. *Journal of Economic Literature*, 7. (1969) 771—796.
36. WALLIS, K. F.: Econometric Implications of the Rational Expectations Hypothesis, *Econometrica* 48. (1980) 49—75.
37. ZELNER, A. (ed.) *Readings in Economic Statistics and Econometrics*. Boston. Little Brown Co. 1968.

KÖNYVEKRŐL

SIMON GYÖRGY: *Gazdaságpolitika és gazdaságfejlődési törvényszerűségek* Budapest, 1983. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 315 o.

Nehéz feladatot vállalt a szerző, amikor új gazdasági növekedési modellje elméleti megalapozásaként könyvében hozzáfogott ahhoz, hogy új kategóriák bevezetésével, definiálásával tegye érthetőbbé a tudományág legalapvetőbb összefüggéseit.

S nagy fába vágja fejszéjét az olvasó is, aki ezt az újszerű, jelentős szellemi teljesítményt, sokéves munkát bemutató könyvet meg kívánja ismerni.

Új kategóriák alkotása, új elnevezések használata rendszerint akkor bizonyul sikeresnek, ha a jelenség, a fogalom, melynek megnevezésére, leírására szolgálnak, már megérett, a „levegőben van”, csak nincs még megnevezésére elfogadott, tömör nyelvi eszköz. Ilyenkor a jól eltalált új névre rögtön mint régi ismerősre tekintenek a szakmabeliek, de legalábbis a ráismerés örömteli érzését váltja ki a kategória-újítás. Ha azonban az olvasó nem érzi, hogy az adott jelenséget már ő is szeretne volna valahogy megnevezni, akkor a „nyelv-újítás” inkább nehezíti az új gondolatok befogadását, semmint segíti azt. Attól tartok, hogy *Simon György* könyvének jó néhány alapkategóriája — bár kétségtelenül pontosan és jól van definiálva — nem válik a könyv elolvasása után sem az olvasók szakszókincsének részévé; nem segítik jobb elsajátításukat az alkalmazott fizikai hasonlatok sem (pl. az, ahogy a reprezentortényezőket a „bővített újratermelés kvarkjaiként”, míg a felszereltségi tényezőket a „bővített újratermelés mezonjaiként” mutatja be a szerző).

Az olvasók egy részének valószínűleg az egyes alfejezetek címei sem nyújtanak elég érthető eligazítást (pl. „A növekedési funkcionál transzformálása és a reprezentorok relatív differenciális eredménye”) a bennük rejlő tartalomról. Talán célszerű lett volna a szerző új eredményeinek a köz-

ismert növekedési, gazdasági modellekhez való kapcsolatára nagyobb súlyt helyezni — különösen előnyösnek tűnne számomra ez azért, mert az itt alkalmazott matematikai, modellépítési módszerek (már maga a funkcionál fogalma, vagy például a folytonos időkezelés) eltérnek a közgazdasági modellezésben — különösen ami a számszerűsített hazai modelleket illeti — általánosan használt eszköztártól.

A könyv három részre tagozódik. Az első részben („A gazdasági fejlődés törvényszerűségei”) a szerző leszögezi, hogy elsődlegesen a termelőerők fejlődésére vonatkozó törvényszerűségeket kíván vizsgálni. Szemügyre veszi a gazdaságfejlődés alapvető tényezőit és kölcsönhatásait; a növekedési tényező fogalmi meghatározása után definiálja az alapvető növekedési tényezőket, bevezeti a reprezentortényezőt („a termelőfolyamatban aktív szerepet játszó alapvető és statisztikailag konkrétan meghatározható tényező”), a komplementertényezőt („olyan erőforrás, amelynek szükséges mennyisége szorosan kötődik más, a növekedésben aktívabb szerepet játszó erőforrásokhoz”) és a szupertényezőt („minden olyanfajta jelenség, amely a növekedés általános sajátossága, s hatása abban nyilvánul meg, hogy befolyásolja a rendelkezésre álló erőforrások mennyiségét és felhasználásuk hatékonyságát”) kategóriáját. A gazdasági növekedés vizsgálatához őt reprezentort vesz figyelembe: a munkaerőt, az állóalapok volumenét, a felsőfokú képzettséggel rendelkező szakemberek számát, a dolgozók fogyasztásának volumenét, és a mezőgazdasági földterületet. Ezenkívül felveti az ásványkincs-vagyon reprezentorként való számbavételének lehetőségét is. A fogyasztás növekedési tényezőként való felfogásával a szerző a munka minőségi jellemzőinek áttételes figyelembevételére tesz kísérletet. A modell így számításba veszi majd a fogyasztásnak a termelőfolyamatra gyakorolt aktív visszahatását is. A reprezentortényezők kölcsönhatásai között a szerző a helyettesíthetőségnek és a

komplementaritásnak tulajdonít kiemelkedő jelentőséget. A kölcsönhatások ilyen felfogása kizárja a reprezentorok függetlenségét a népgazdasági eredmény létrehozása során. A növekedési tényezők kölcsönhatásait *intenzitási szintjük* szerint is csoportosítja a könyv; az aszimptotikusan független tényezők aszimptotikusan additív kapcsolatait adják az alapszintet; a „klasszikus” növekedési tényezők kapcsolatai multiplikatívak — ez az ún. normálszint. A harmadik — erős — intenzitási szint a tényezők „egymás hatását hatványozzák... az adott esetben közömbös, hogy melyik tényezőzt melyikre tekintjük hatványozottnak.” Az ezt is hatványozó hatást szupererős kölcsönhatásnak nevezi a szerző (ilyen kölcsönhatás van pl. a kutató-fejlesztő tevékenység és a technikai felszereltség között). A fenti kölcsönhatások közös sajátossága a belső ellentmondásosság, mely az erősítés—gyengítés ellentétpárban jól kivethető.

A gazdasági fejlettség leírására, vizsgálatára a szerző a reprezentortényezők mennyiségeinek egymáshoz viszonyításával előállítható felszereltségi tényezőket használ; kitüntetett szerepet ad a munka felszereltségi mutatóinak. A felszereltségi tényezők mellett a tényezőfogalom további általánosításának eredménye a specifikus származékos tényező (a hagyományos termelésrugalmassági együttható általánosítása), a specifikus sebességtényező és a komplex tényező bevezetése.

Az „Érték és ár” című fejezetben a marxí értékelmélet következtetéseinek szellemében folytatja a szerző a modellépítési folyamatot. Hangsúlyozza a munka kitüntetett szerepét; a többi reprezentortényezőzt „gazdasági katalizátorként” veszi figyelembe, melyek befolyásolják a munka bonyolultságát, s ezáltal a marxí értelemben vett értéknagyságot. Ez a megoldás kiküszöböli a tőke hozadéka-szerű „polgári kategóriákat”, s lehetővé teszi, hogy a modellben egyedül a munkát tekintsük értékkalkulációnak. A katalizátorok lehetnek személyi, illetve tárgyi jellegűek; a személyi katalizátorok közvetlenül növelik a munka bonyolultságát, míg a tárgyi katalizátorok növekedése megköveteli a személyi katalizátorok fejlesztését, s így közvetve hat az értéknagyságra. Külön említést érdemel a kutató—fejlesztő tevékenység, mely nem sorolható be se a személyi, se a tárgyi katalizátorok közé; ez olyan specifikus katalizátor, mely „minden más katalizátortól eltérően akkor is növeli a társadalmi munka termelékenységét, ha mennyisége nem változik.” Az idő (melyet egyes modellek szintén önálló tényezőként szerepeltetnek) a szerző szerint nem gazdasági

katalizátor, csupán kerete, feltétele a katalizátorok hatásának.

A modell ismertetése előtt a szerző tárgyal még ár- és értékelméleti kérdéseket, foglalkozik az árnyékárak, az árcentrum és az árelértékesítések problémájával. A népgazdasági optimumkritérium létezését vizsgáló részben tárgyalja a fogyasztás és a felhalmozás, a ma és a holnap dilemmáját, ennek lehetséges modellbeni feloldásait.

A szerző lényeges gondolata, hogy a modellben nemcsak a jellemezni kívánt törvényszerűségek mindenkorai konkrét alakját kell beépíteni, hanem változásának módját is.

A munka második része foglalkozik az alapvető összefüggések modellszerű ábrázolásával — itt ismerkedhetünk meg a növekedési funkcionállal, mint kitüntetett modellípussal.

A gazdasági fejlődés modellezésének általános kérdései című fejezet mondandója a hosszú átfutási idő áldozatává vált; ma már talán a szerző sem a gazdasági növekedés problematikáját tartja a közgazdaságtudomány legintenzívebben művelt területének (ez inkább a 60-as években volt jellemző). A gazdasági dinamika alapvonásairól írottak — melyben a fizika analóg fogalmait kíséri meg használni a szerző — a mai, nem éppen növekedésre orientált helyzetben nem tűnnek túl szerencsés absztrakciónak.

A fejezet logikája egyébként alapvető a könyv további szerkezete szempontjából; először az elemi munkát kifejező matematikai összefüggést, az „alapvető gazdasági erőtvényt” kell megkonstruálni, majd az elemi munkák összegzése, integrálása révén jutunk el a növekedési funkcionálhoz.

A munka első szakasza nem veszi figyelembe a természeti erőforrásokat mint reprezentortényezőket. Ennek eredménye a növekedési funkcionál bázisváltozata; a második szakaszban a főbb természeti erőforrásokat (termőföld, ásványvagyon) is bevonják az elemzésbe.

A munka harmadik szakasza az eredmények népgazdasági szintű, nemzetközi összehasonlításokat is lehetővé tevő szintetizálása.

A növekedési funkcionál fő specifikumai tehát a következők:

- egységes matematikai összefüggés a gazdasági fejlődés egész hosszú folyamatára és részterületeire
- az ábrázolni kívánt törvényszerűségek változásainak megfelelően a növekedési funkcionál is „automatikusan” változik, ha a gazdasági fejlődés eltérő szakaszaira vonatkoztatjuk.

Az elmondottakból következően a funkcionál — melyet a hagyományos termelési

függvények általánosításának is tekinthetünk — független változói maguk is függvények, és a hagyományosan konstans termelésrugalmassági együttthatók szerepét is függvények veszik át.

A funkcionál bázisváltoztatának ismeretése során differenciálegyenletek alkalmazásával segíti a szerző a probléma megértését; itt tárgyalja a modellben szereplő főbb függvényeket is. Különösen érdekes az S_{12} függvény, mely — mint a szerző írja — „betörési kísérlet a »szentélyek szentélyében«: különféle gazdasági csodák hatásmechanizmusába”.

A későbbi, a funkcionál további technikai részleteire, illetve általánosításaira is kitérő alfejezetekben a szerző sokoldalú képet ad az általa kifejlesztett modellezési technika tulajdonságairól, közgazdasági értelmezhetőségéről, a tudományos-technikai haladás és a növekedésmélet egyéb modelljeihez való viszonyáról.

A gyakorlati modellezés iránt érdeklődő és a gazdaságpolitikai következtetéseket igénylő olvasók számára különösen érdekes lehet a III. rész, mely a „Növekedési törvényszerűségek és a gazdaságpolitika” címet viseli. Ebben a szerző a KGST országok 1951–78 közötti fejlődését elemzi statisztikai elemzések és modellszámítások segítségével. A számítások egyfelől jól illusztrálják a korábban elmondottakat, másfelől segítenek az ágazatok tipologizálásában, a növekedés extenzív és intenzív oldalának feltárásában, és módot adnak további új kategóriák bevezetésére is (pl.

szuperextenzív-szuperintenzív növekedés). Említést érdemelnek a technikai haladással és a tényezők „hozadécai”-val foglalkozó részek.

A számítás és a verbális elemzés is meggyőző és sokoldalú képet fest a térség országainak gazdasági teljesítményéről, azonban a szerző egyes közgazdasági következtetéseit — melyek lényegesen nagyobb horderejű kérdéseket érintenek annál, hogy pusztán modellszámítások alapján véleményt alkothassunk róluk — nyilván sokan vitatni fogják; ennek érzékeltetésére itt csak a következő példát említeném. „Lényegében hiányzik az alapvető gazdaságpolitikai elképzelések, *gazdaságfejlesztési stratégia előzetes koordinált átgondolása*, amely végső soron egy olyan *policentrikus KGST-szintű optimalizálás* keretében valósulhatna meg, ahol az egyes résztvevők önállóságukat megtartva, de érdekeiket a makroszintű optimális fejlődés követelményeivel összeegyeztetve érvényesítenék... egy ilyen rendszer létrehozása a szocialista országok közössége szempontjából... objektíve szükséges”.

Összességében, az egyes vitatott részletek és következtetések ellenére is, a szerző műve kétségtelenül újszerű, végiggondolt, zárt logikai rendszerre épülő jelentős szellemi teljesítmény, mely — ha talán nem is kapcsolódik a hazai közgazdasági gondolkodás, közgazdasági—matematikai modellezés fővonalába — érdemes az olvasók figyelmére.

SEMJÉN ANDRÁS

Kerekasztal beszélgetés az ökonometriáról

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai—Közgazdasági Szakosztályának nemrégiben alakult Ökonometria Szekciója nagy érdeklődést keltő kerekasztal beszélgetést rendezett a XIII. Operációkutatási Konferencián a hazai ökonometriai kutatás néhány problémájáról. A szekció *Hunyadi László*t kérte fel a beszélgetés megszervezésére és a vita vezetésére. Négy különböző témájú vitaindító hangzott el, amelyek egy-egy az ökonometriával határos diszciplína — a közgazdaságtan és a gazdaságelmélet, a matematika és a matematikai statisztika, a gazdaságpolitika és a népgazdasági tervezés, végül a statisztika — szemszögéből elemezték a hazai ökonometriai kutatás és modellezés helyzetét, problémáit.

A *közgazdaságtani* és ökonometriai kutatás kapcsolatát *Kőrösi Gábor* vizsgálta. Szerinte a magyar ökonometriai modellek jelentős része csak készítőinek rutinját és általános gazdasági műveltségét tükrözi. A hazai gazdaságelméleti munkák, vagy a szocialista gazdaság kutatásának nemzetközi eredményei csak elvétve tükröződnek ezekben a modellekben. Igaz, a hazai közgazdaságtani kutatásokban ritka az olyan elméleti hipotézis, amelyet úgy fogalmaznának meg, hogy az ökonometriai eszközökkel közvetlenül tesztelhető legyen, de addig, amíg gazdaságelméleti hipotézisek ökonometriai elemzése nem válik élő gyakorlattá, erre kár is várni.

A nagyobb méretű modellekből gyakran az tűnik ki, hogy készítőinek nem maradt elég ideje, energiája arra, hogy minden egyes egyenletét gondosan elemezzék, specifikálják; elvesznek a technikai és közgazdasági problémák rengetegében. A sok tisztázatlan részletkérdés, összefüggés következtében viszont a modell lényege is elsikkad. Nem támaszkodhatnak a modell készítői elméletileg megalapozott, letesztelt, „konyhakész” egyenletekre, összefüggésekre, részmodellekre. A hazai ökonometriai kutatásból jószerivel hiányoznak, csak elvétve találhatók olyan munkák,

amelyek „csak” egy részterületet: egy konkrét függvényt, egyenletet vizsgálnak. Ilyen elemzésekre nagyon nagy szükség lenne: ezek nélkül a nagy modelleket mindig az alapoktól kell újraépíteni. Ha elkészülnének ezek az egy-egy konkrét elméleti hipotézist ökonometriai formába öntő és tesztelő cikkek, a nagyméretű modellek jelentős része ezekből az egyenletekből, részmodellekből „összeszerelhető” lenne, és a modellezőknek lényegesen több ideje, energiája maradna azoknak a számukra különösen fontos összefüggéseknek az elemzésére, amelyek a kitűzött feladat sajátosságait hordozzák.

Ezen az úton a hazai ökonometriai kutatás még csak az első lépéseket tette meg; talán a fogyasztás elemzése területén jutott a legmesszebb. Több — főleg polgári — elméletet kipróbáltak és egyes termékek piacára már megbízható eredményeket kaptak. Ugyanakkor kiderült, hogy más piacokon a fogyasztók nem úgy viselkednek, ahogyan ezek az elméletek feltételezték, így ezek a modellek nem alkalmasak a magyar fogyasztók viselkedésének általános leírására. Vannak olyan termékcsoportok, amelyek piaca egyetlen modell feltevéseinek sem felel meg. Sikeresen lezártnak tehát ez a munka sem nevezhető.

A *matematika* szemszögéből *Székelly István* fejtette ki véleményét: A hazai modellezési gyakorlatban a lehetséges, a statisztikai elmélet által javasolt próbáknak csak nagyon szűk körét végzik el. Azt, hogy mely próbákra kerül sor, megtudhatjuk, ha megnézzük, hogy az elterjedtebb számítógépi programok milyen statisztikákat számítanak. Nagyon keveset tudunk arról, hogyan módosulnak ezek a statisztikák, ha nem teljesül az ökonometriai modellek azon alaphipotéziseinek egy része, amelyek mellett a becslőfüggvényeket származtatták, és amelyeknek teljesülését a modellezők általában nem tesztelik. Az ökonometriai elemzéseknél általában csak az egyes egyenletekre külön-külön végeznek el a modellezők próbákat; nem

vizsgálják, hogy az adott statisztikák alakulását mennyiben befolyásolja, hogy egy szimultán modellből kiragadott egyenletről van szó. Legtöbbször még a jól ismert és a könnyen feltárható torzító tényezőkre sem fordítanak kellő figyelmet, például sok modell paramétereit torzítja súlyos multi-kollinearitás.

A modellezők sokszor ragaszkodnak a régi „jól bevált” módszerekhez, pedig gyakran célszerű lenne robusztus becsléseket, vagy például egyéb — regressziószámításon kívüli — módszereket alkalmazni. Gyakori például, hogy egy kisebb, aggregált modellből úgy készül egy nagyobb, dezaggregált (pl. többszektoros), hogy feltételezik, minden szektor ugyanazokat a viselkedési szabályokat követi; az aggregált mutatókra megállapított összefüggések érvényesek a megfelelő dezaggregált változókra is. Ez a feltevés nagyon ritkán igazolódik be. A klaszter elemzés például kiváló eszköz lehet annak vizsgálatára, mely szektorokban alakulnak hasonlóan a folyamatok és melyek különböznek szignifikánsan.

A tervezés és az ökonometria kutatás kapcsolatát *Budavári Péter* elemezte. Örömmel állapította meg, hogy az ökonometria modellezés az utóbbi időszakban gyorsan terjed, sokan, sok helyen foglalkoznak modellezéssel. Ezek a modellek azonban nem különböznek egymástól lényegesen; ritkán ismerhető fel a konkrét cél, amire ezek a modellek készülnek, legtöbbször a népgazdaság egészének általános leírását adják. Nem az a feladat, hogy megpróbálják a népgazdasági tervezést egy ökonometria modellel helyettesíteni, hanem, hogy egyes folyamatokat elemezzenek részleteiben és hatásukat a makrofolyamatokra, és hogy konzisztens előrejelzéseket adjanak. Nem azt kell modellezni, amit a tervezők úgyis tudnak, az elemzéseknek sokkal inkább probléma-orientáltaknak kell lenniük. Kevesebb általánosságra, az aktuális kérdések, célok gondosabb, részletesebb figyelembevételére van szükség.

Az ökonometria modellezők és a *statistika* viszonyáról *Csepinszky Andor* fejtette ki véleményét: ökonometrikusok gyakran panaszkodnak arra, hogy a statisztikai adatszolgáltatás hiányos, és gyakran változik a szerkezete. A magyar statisztikai adatszolgáltatás nem rosszabb, mint bármely más országé. A modellezők gyakran azt sem tudják, mi áll rendelkezésre, és publikált, vagy kis munkával könnyen előállítható adatokat hiányolnak. Ha például hosszú változatlan áras idősorokra van szükség, akkor ugyan különböző árbázisokon állnak rendelkezésre az adatok,

de mindig van olyan átmeneti év, melyre mindkét árbázisban publikálták a megfelelő értéket. Ennek alapján az adatok elenyésző hibával visszaláncolhatók.

Senki sem kívánhatja, hogy a statisztikai számbavételi rendszer ne változzon, hiszen ezzel a statisztika fejlődését gátolná. Ezeknek a változásoknak két fő oka van. Egyrészt a statisztika tudomány fejlődik, és e fejlődés eredményei jelennek meg a statisztikai gyakorlatban, másrészt a megfigyelt gazdaság maga is változik: új folyamatok válnak fontossá, a változásokat a statisztikai adatgyűjtésnek is követnie kell, hogy ne szakadjon el a statisztika a valóságtól. A Statisztikai Hivatal megpróbálja ugyan a változásokat visszafelé is végigvezetni, de ez egy bizonyos határon túl lehetetlen. Ez persze a modellezőknek nem kellemes, de az sem lenne jó, ha elavult változókkal, adatstruktúrákkal kellene dolgozniuk.

A vitaindítók után élénk, ámbar kissé csapongó eszmecsere folyt.

Egymással ellentétes válaszokat adtak a résztvevők arra a kérdésre, hogy mikor *siker*es egy ökonometria modell, kutatás.

Volt, aki szerint gazdaságelméleti hipotézisek tesztelése gyakorlatilag megvalósíthatatlan, mivel például az elméletek gyakran megfigyelhetetlen változókkal dolgoznak, amiket az ökonometrikus legfeljebb jól-rosszul közelíthet; az elmélet nem verifikálható, a közelítések manipulálásával az elméletet alátámasztó vagy azzal ellentétes következtetések is levonhatók. Ezért az ökonometria modell akkor *siker*es, ha jó előrejelzéseket ad.

Arról, hogy mi a jó előrejelzés, szintén vita volt. Egyik vélemény szerint az előrejelzés, és így a modell, akkor nevezhető jó-nak, *siker*esnek, ha illeszkedik a tényleges folyamatokhoz, ha a statisztikák egyértelműen alátámasztják, hogy a modell a valóságot jól írja le. Természetesen ennek eldöntésére a statisztikai próbák széles körét kell felhasználni, és a modell akkor *siker*es, ha az ex post elemzés során semmi nem mond ellent annak a hipotézisnek, hogy az előrejelzések jól leírják a valóságot.

Ezzel szemben azonnal felmerült az önmegsemmisítő jóslat problémája: ha egy modell kedvezőtlen tendenciákat tár fel, reális veszélyre figyelmeztet, és azt a figyelmeztetés alapján sikerül felszámolni, sikerül elkerülni a bajt, akkor a modell nagyon is *siker*es, noha a statisztikai mutatók valószínűleg azt fogják jelezni, hogy a modell rosszul írja le a valóságot.

Más vélemény szerint egy ökonometria modell akkor tekinthető *siker*esnek, ha valamilyen várakozásunkat, sejtésünket megcáfolja. És ez éppen a gazdaságelméleti

kutatások számára fontos, így az előbbi véleménnyel szemben éppen a gazdaságelméleti hipotézisek vizsgálatára alkalmas az ökonometria: egy modell egyértelműen megcáfolhat valamilyen elméleti következtetést; kimutathatja, hogy az elmélet hibás, mert ellentmond a gazdasági valóságnak, és ezzel orientálhatja a kutatást.

Mások szerint az ökonometria a közgazdaságtanban ennél szélesebb körben is felhasználható: új, váratlan következtetések adódhatnak egy modellből, segíthet új elméletek, hipotézisek felállításában. Ehhez azonban ki kell szélesíteni az ökonometriai kutatások körét. Fontos lenne például a vállalatok viselkedésének, a szabályozórendszer hatásának ökonometriai elemzése. Ehhez megfelelő adatbázis is rendelkezésre áll és a kutatások a magyar gazdaság működésének eddig még feltáratlan jellemzőire is rávilágíthatnak.

Többen hozzászóltak a statisztikai adat-szolgáltatás témaköréhez. Úgy vélték, a vitaindító túl szép képet festett a statisztikáról. A különböző adatforrásokban esetenként ugyanarra a kategóriára eltérő adat-sorok szerepelnek, melyeknek időnként még a tendenciája is ellentétes. A különböző adatrendszerek egymással nem konzisztensek, az adatok bontása nem hozható összhangba (pl. külkereskedelmi, fogyasztási statisztika és a népgazdasági mérlegek).

Nem egy esetben modellezők vezették vissza a statisztikai rendszer változásait korábbi évekre. Nem világos, miért kell mindenkinek külön-külön visszaláncolni az idősorokat, ha változatlan áras adatokat akar használni, miért nem lehet a statisztikai

kiadványokban közölni ezeket a sorokat azzal a megjegyzéssel, hogy becstült adatok. Felmerült, hogy az éves adatok viszonylag széles köre érhető el, de az, aki negyedéves, vagy havi adatokat szeretne használni, összehasonlíthatatlanul nehezebb helyzetben van.

Felmerült, hogy sok modell értelmezhetetlen a multikollinearitás miatt, gondosabb specifikációval a multikollinearitás elkerülhető lenne.

Egy modellező hozzászólásában kifejtette, hogy illúzió azt gondolni, miszerint a tervezők bizonyos kérdésekre pontosan tudják a választ, s azzal a modellezőknek kár is foglalkozniuk. Valójában ők ugyanúgy modellekben dolgoznak, legfeljebb másképp fogalmazzák meg az összefüggéseket, más eszközöket használnak elemzésükre. Ezért egyáltalán nem haszontalan, ha az övéktől eltérő nézőpontból is megvizsgálják a népgazdasági folyamatokat. Nem kell az ökonometriát csak a tervezés kiszolgálójának tekinteni, ugyanakkor azt várni, hogy a modellek oldják meg mindazokat a problémákat, amire a tervezők képtelenek.

Megfogalmazták hozzászólók, hogy az ökonometria a közgazdaságtan része, hibás azzal szembeállítani, vagy kirekeszteni.

A vita során sok, az ökonometriai kutatáshoz kapcsolódó kérdés nyitva maradt. Remélhetőleg az itt felmerült kérdésekre, problémákra a szekció munkája során visszatérnek. A vita alapján úgy tűnik, hogy hosszú időre van mit a szekció programjára tűzni.

KÖRÖSI GÁBOR

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója

Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat a nyomdába érkezett: 1984. V. 31. — Terjedelem: 7,70 (A/5) ív
85.13376 Akadémiai Kiadó és Nyomda, Budapest. — Felelős vezető: Hazai György

CONTENTS

BÉLA MARTOS: A family of non-Walrasian control models.....	123
ANDRÁS BRÓDY: Roaming in Logarithmia	147
FERENC SZIDAROVSKY—JESUS CARRERA—EDUARDO USUNOFF: Optimum location of measuring points in the quality analysis of groundwater	157
JÁNOS KALMÁR—IMRE LENGYEL: The consideration of stock within the Gilmore— Gomory method	167

CONCEPTS AND METHODS

KATALIN HULYÁK: Dynamic econometric models	185
--	-----

BOOK REVIEWS

GYÖRGY SIMON: Economic policy and regularities of economic development (<i>András Semjén</i>)	203
---	-----

SCIENTIFIC LIFE

GÁBOR KÖRÖSI: Round-table conference on econometrics	207
--	-----

СОДЕРЖАНИЕ

Бела Мартош: Семейство моделей регулирования не типа Вальраса	123
Андраш Броди: Путешествие в Логаритмию	147
Ференц Сидаровски—Хесус Каррера—Эдуардо Юсанов: Опти- мальное нахождение мест качественного анализа грунтовых вод	157
Янош Калмар—Имре Лендьел: Учет складских запасов с помощью метода Жилмор-Гомори	167

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

Каталин Хуяк: Динамические эконометрические модели	185
--	-----

О КНИГАХ

Дьердь Шимон: Экономическая политика и закономерности развития эконо- мики (<i>Андраш Шемйен</i>)	203
--	-----

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Габор Кереш: Разговор у круглого стола об эконометрике	207
--	-----

Ára: 20 Ft

Előfizetés egy évre: 80 Ft

ISSN 0039—8128

TARTALOM

MARTOS BÉLA: Nem-walrasi szabályozási modellek egy családja.....	123
BRÓDY ANDRÁS: Kószálás Logaritmiában	147
SZIDAROVSKY FERENC—JESUS CARRERA—EDUARDO USUNOFF: Mérési helyek optimális kijelölése talajvizek minőségvizsgálatában	157
KALMÁR JÁNOS—LENGYEL IMRE: A raktárkészlet figyelembevétele a Gilmore—Gomory módszernél	167

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

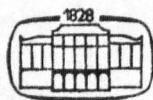
HULYÁK KATALIN: Dinamikus ökonometriai modellek	185
---	-----

KÖNYVEKRŐL

SIMON GYÖRGY: Gazdaságpolitika és gazdaságfejlődési törvényszerűségek (<i>Semjén András</i>)	203
--	-----

TUDOMÁNYOS ÉLET

KÖRÖSI GÁBOR: Kerekasztal beszélgetés az ökonometriáról	207
---	-----



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST