

SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági
Szakosztályának lapja

Szerkeszti:

MARTOS BÉLA

Társszerkesztők:

BOD PÉTER, IFJ. KREKÓ BÉLA, PONGRÁCZ TIBOR,
SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA

Szerkesztő bizottság:

AUGUSZTINOVICS MÁRIA, BOD PÉTER, CSEPINSZKY ANDOR, ÉLTETŐ ÜDÜN, FORGÓ FERENC,
HALABUK LÁSZLÓ, KELLE PÉTER, KORNAI JÁNOS, KOVÁCS ÁLMOS, KREKÓ BÉLA, LIGETI ISTVÁN,
MESZÉNA GYÖRGY (elnök), MIKÓ GYULA, ORMÓS ZSOLT, SIMONNÉ MOSOLYGÓ NÓRA, SIMONOVITS
ANDRÁS, SÓLYOM CSABA, STAHL JÁNOS, SZAKOLCZAI GYÖRGY, SZÉP JENŐ, TÓTH JÓZSEF, ZALAI
ERNŐ, ZIERMANN MARGIT

*

E szám szerzői:

ÁBEL ISTVÁN, a Pénzügyminisztérium előadója, A. CHARNES, egyetemi tanár, University of Texas at Austin, W. W. COOPER, egyetemi tanár, University of Texas at Austin, CSERNÁTONY CSABA, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet főelőadója, Dr. ERDŐSI PÁL kandidátus, az Ipargazdasági Intézet tudományos tanácsadója, GÁL LÁSZLÓ, az Ipargazdasági Intézet tudományos főmunkatársa, LEIF JOHANSEN, Oslo, HUNYADI LÁSZLÓ, az Országos Tervhivatal csoportvezetője, KOVÁCS ÁLMOS kandidátus, az Országos Tervhivatal csoportvezetője, MOLNÁRNÉ Dr. HEGYI EDIT, az Ipargazdasági Intézet tudományos munkatársa, Dr. MUNDRUCZÓ GYÖRGY kandidátus, a Marx K. Közgazdaságtudományi Egyetem docense, E. RHODES, egyetemi tanár, State University of New York at Buffalo, ZALAI ERNŐ kandidátus, a Marx K. Közgazdaságtudományi Egyetem docense

Szerkesztőség: Budapest XI., Budaörsi út 43—45.

Levélcím: 1502 Budapest, Pf. 262.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodáknál (PKHI 1900 Budapest, József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a PKHI 215—96 162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest, Bajcsy-Zsilinszky út 76 sz. alatti hírlapboltban

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest, Alkotmány u. 21. Telefon 111-010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488, és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1363 Budapest, Váci u. 22. Telefon: 185-612. Előfizetés díj egy évre: 80, —Ft

Külföldön terjeszti a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat, H-1389 Budapest. Pf. 14

A marxi értékrendszer (zárt) sajátérték-formákban

1. Bevezetés

A marxi értéknagyság fogalmi meghatározottságának és létezési feltételeinek tisztázásához jelentős mértékben hozzájárultak azok az elemzések, amelyek az értékeket egy input-output modell keretei között értelmezték. Kutatók hosszú sorára kellene itt hivatkozni, ha teljességre törekednénk, éppen ezért elégedjünk meg két jelentős és átfogó igényű munkára való utalással: Bródy [1] és Morishima [3].

Az értékek létezésének matematikai elemzése szinte kizárólagosan a *nyílt* input-output modellen alapult. Tudomásom szerint egyedül Bródy András kísérelte meg az értékek létezését egy zárt modell keretében, matematikai sajátértékfeladat formájában bizonyítani. Mint meg fogjuk mutatni, megoldásának érvényessége korlátozott, valójában csak az egyszerű újratermelés esetében vezet helytálló eredményre. Továbbá: a pozitív értékek létezésének bizonyítását közgazdasági szempontból a kelleténél erősebben szorító feltevésekre alapozta, így többek között az ismert irreducibilitási feltételekre.

Egy korábbi tanulmányomban [6], Reich [4] lényegében azonos eredményre vezető elemzésétől függetlenül, megmutattam, hogy heterogén munkaerő és egyöntetű értéktöbbletráta feltételezése esetén az értékek és az értéktöbbletráta már csak egy zárt (szimultán) egyenletrendszer formájában értelmezhető. Mindkét tanulmány Morishima [3] elemzéséből indult ki, s egyik sem tért ki az értékek létezési feltételeinek vizsgálatára.

A jelen dolgozat ez utóbbi kérdés elemzésére irányul. Az előzmények rövid összefoglalása után Bródy [1] zárt értékmodelljét külön részben elemzem. Ezt követően az érték meghatározás nemlineáris sajátérték-alakjának két alternatív megfogalmazását vezetem be és hasonlítom össze. A két forma a Bródy, illetve Morishima által eltérően felépített teljes körű ráfordítási mátrixokon alapul. Megmutatom, hogy a kérdéses két mátrixnak az elemzés szempontjából lényeges matematikai jellemzői megegyeznek. S végül a sajátérték-feladatok egyértelmű, pozitív megoldásának létezését a [7] dolgozatomban bevezetett minimálisan elégséges feltételek (tisztá árutermelés és a teljes automatizálás lehetetlensége) mellett bizonyítom. Ezek a feltételek nem implikálják az együtt-ható mátrixok irreducibilitását. A bizonyítás egy irreducibilis *alapgazdaság* felismerésén nyugszik, amelyet a fogalmilag Sraffa [5] bázistermékeivel rokon *alappjavak* határoznak meg. Érdekes már itt is utalni Sraffa bázistermékei és az itt használt alappjavak közötti lényeges tartalmi különbségekre. Nevezetesen, Sraffa kizárja a bázistermékek közül a munkaerőt és a csak annak fogyasztásába bekerülő termékeket. Nálam az alappjavak között és még inkább azok definiálásában a fenti termékek kulcsfontosságú szerepet játszanak.

2. Az előzmények rövid összefoglalása

A marxi értékrendszer alapmodellje *Dmitriev, Lange, Bródy, Morishima* és mások munkássága folytán ma már közismertnek számít. Nevezetesen ezen alapmodell a következő feltevéseken nyugszik. Ismertek egyrészt a különböző (n -féle) közönséges áruk termeléséhez ugyanezen árukból társadalmilag szükséges ráfordítások: $A = (a_{ij})$, ahol a_{ij} a j -edik áru egységére jutó ráfordítás az i -edik áruból, $i, j = 1, \dots, n$. Ismertek másrészt az absztrakt munka óráiban mért eleven munkaráfordítási igények: $m = (m_j)$, ahol m_j a j -edik áru termelésének fajlagos munkaigénye.

A fenti adatok ismeretében az értékek meghatározása például az alábbi formában írható fel:

$$p^* = p^* A + m^*, \quad (1)$$

ahol $p = (p_j)$ az értékek vektora. Az egyenlet közgazdasági tartalma: az érték egyenlő a holt- és élőmunkaráfordítások összegével.

Ha a munkaerő minden szempontból homogén, így újratermelésének ráfordítási igénye szerint is, és egy órai munka újratermeléséhez a különböző közönséges árukból $f = (f_j)$ vektorban jelzett mennyiségekre van szükség,¹ akkor a munkaerő értékét (p_0) a következő képlet szolgáltatja:

$$p_0 = p^* f. \quad (2)$$

Ha az értékek egyértelműen meghatározottak, akkor az (1) egyenletrendszert p^* -ra megoldva adódik, hogy

$$p^* = m^*(E - A)^{-1}. \quad (3)$$

Ez utóbbit (2)-be behelyettesítve egy közgazdaságilag jól értelmezhető formát nyerünk:

$$p_0 = m^*(E - A)^{-1} f. \quad (4)$$

Ebből világosan kiolvasható, hogy az egy órai munkaerő értéke nem más, mint az újratermeléséhez szükséges munka (marxi értelemben). Így egy óra munkavégzés során $1 - p_0$ többletmunka keletkezik. (Itt hallgatólagosan élünk a $p_0 \leq 1$ feltevéssel. Ennek elégséges feltételeire még visszatérünk.²) Jelöljük r -rel az értéktöbblet rátáját, amelyet tehát többek között az alábbi módon is meghatározhatunk:

$$r = \frac{1 - p_0}{p_0} = \frac{1 - p^* f}{p^* f}. \quad (5)$$

Bródy [1] az egyszerű árutermelés esetét elemezve felismerte, hogy az értékek egy „teljes körű” ráfordítási mátrix sajátvektorát képezik. Abból indult ki, hogy az egyszerű újratermelés feltételei között a teljes végső kibocsátás szük-

¹ Itt egyelőre, mint szokásos, eltekintünk a munkaerő újratermeléséhez szükséges esetleges közvetlen munkaerő ráfordításoktól. Később erre a kérdésre még visszatérünk.

² Érdeemes utalni arra, hogy az A és m paraméterektől eltérően, amelyeket elsősorban az újratermelés technikai relációi határoznak meg, az f vektor elemei jórészt a termelési viszonyok függvényei. Így többek között erőteljesen függenek a munkanap hosszától, azaz a kizsákmányolás abszolút fokától. Ez a tárgyalási lehetőség elesik, ha a szükséges fogyasztást nem egy órára, hanem egy főre vetítve szerepeltetjük.

séges fogyasztásnak tekinthető. Legyen $x = (x_j)$ a termelés vektora, $x_0 = m^*x$ az összes ledolgozott órák száma. A fentiek értelmében az egyszerű árutermelés modelljében fenn kell állnia az alábbi mérlegösszefüggéseknek:

$$x_0 = m^*x \quad (6)$$

$$x = Ax + x_0f. \quad (7)$$

Összevonva a két egyenletet azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & m^* \\ f & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x \end{bmatrix}, \quad (8)$$

ahol az együttható mátrix a *teljes körű ráfordítások* Bródy-féle (kibővített) változata; a továbbiakban B -vel jelöljük.

A kapott (8) meghatározás egy közismert sajátérték-egyenlet. Ha Bródyhoz hasonlóan feltesszük, hogy B irreducibilis, továbbá, hogy x_0 és x elemei (tényszerűen) pozitívak (legalábbis elvben nem negatívak), akkor B domináns sajátértéke nyilván 1-gyel egyenlő.

A fenti feltételek mellett matematikailag is igazolható, hogy egyszerű újratermelés esetén értéktöbblet nincs, vagyis $r = 0$, azaz $p_0 = 1$. Így az értékrendszer meghatározása felírható a fenti sajátérték-feladat duálisaként:

$$[1, p^*] = [1, p^*] \begin{bmatrix} 0 & m^* \\ f & A \end{bmatrix}. \quad (9)$$

3. A Bródy-féle sajátérték-meghatározás korlátozott érvényessége

Az előző pontban megismételt, lényegében helytálló levezetést Bródy helytelenül általánosította a tőkés árutermelés esetére. (Pontosabban: a zárt formákat csak a *tőkés* viszonyok között megvalósuló *egyszerű* újratermelés esetére terjesztette ki.)

Nézzük meg közelebbről Bródy zárt formáját. Legyen F_m a (produktív) munkaerő *szükséges fogyasztása*, F_l az egyéb végső fogyasztás (improduktív fogyasztás, felhalmozás). Legyen a *munkások* egy (produktív)³ *munkaóra*ra *jutó fogyasztása* $f_m = F_m/(m^*x)$ és Bródyt [1, 56. o.] követve $f_l = F_l/(m^*x)$ az egy produktív *munkaóra*ra *jutó* egyéb végső fogyasztás. Jelöljük továbbá m_s és m_t vektorokként az egyes ágazatokban a *szükséges* és a *többletmunka* fajlagos mennyiségeit ($m_s + m_t = m$). (Érdemes már itt felfigyelni arra, hogy ezt a felosztást Bródy adottnak veszi, noha a felosztást nyilván *csak az értékek ismereté-*

³ Valójában Bródynál csak a produktív szférában foglalkoztatott munkaerő jelenik meg explicit formában. Megoldása úgy értelmezhető, hogy a produktívan foglalkoztatott munkaerő újratermelésének fogyasztás-igényében benne szerepel az improduktívan foglalkoztatott munkaerő fogyasztása is, mármint azoké, akiknek szolgáltatásai a produktívan foglalkoztatott munkaerő újratermeléséhez szükségesek. Alternatív megoldásként kínálkozik ezen munkaerő explicit figyelembevétele a produktív munkaerő újratermelésének munkaerő igényeként.

ben lehet elvégezni.) Bródy úgy vélte, hogy az értékek vektora az alábbi „kibővített” fajlagos mátrix egy sajátvektorának részvektora:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & m_t^* \\ 0 & 0 & m_s^* \\ f_t & f_m & A \end{bmatrix}.$$

Erről a mátrixról Bródy feltételezte, hogy 1 a domináns sajátértéke, s azt állította, hogy a hozzá tartozó bal oldali sajátvektorok között van olyan, amelynek utolsó n komponense éppen a közönséges áruk értékével azonos.

Ez azonban általában lehetetlen. Írjuk fel ugyanis dezaggregálva a sajátérték-egyenletet:

$$p_t = p^* f_t,$$

$$p_m = p^* f_m,$$

$$p^* = p^* A + p_m m_s^* + p_t m_t^*.$$

Vizsgáljuk meg közelebbről a kapott feltételek tartalmát. p_t az egy produktív munkaóra-ra jutó egyéb végső felhasználás „értéke” (hogy valóban az érték vektora-e, azt még nem tudjuk). Ha p valóban az értékek vektora, akkor p_m a munkaerő értéke. Mivel f_t és f_m struktúrája és volumene általában eltérő, ezért p_t és p_m is általában különböző nagyság. A harmadik egyenletből viszont az derül ki, hogy p akkor és csak akkor lehet az értékek vektora, ha $p_m m_s^* + p_t m_t^* = m^*$. Ez utóbbi egyenlőség azonban csak véletlenszerűen teljesülhet. (Nyilván fennáll akkor, mint Bródy sajátos számpéldájában, ha $f_t = f_m$ és $p_m = p_t = 1$.)

Az értékmeghatározás Bródy-féle zárt sémája tehát csak nagyon speciális feltételek mellett helytálló. Megállapításunkat még egy oldalról alátámasztandó, nézzük meg a fenti sajátérték-forma *duálisát*, amely fényt derít a rejtett hiba lényegére. A jobb oldali sajátvektorra az alábbi összefüggéseket nyerjük:

$$x_t = m_t^* x$$

$$x_s = m_s^* x$$

$$x = Ax + f_m x_s + f_t x_t.$$

Az egyes változók és feltételek jelentése kézenfekvő. x egy termelési vektor, x_t ezen termeléshez felhasznált munkából a *szükséges munka*, x_s pedig a *többlet-munka*. Az összes kifejtett munka tehát $x_t + x_s$. A foglalkoztatott munkaerő újratermeléséhez nyilván $f_m(x_t + x_s)$ fogyasztásra van szükség. Mivel azonban a végső kibocsátásból a munkások csak $f_m x_s$ mennyiségű fogyasztási cikket kapnak, ezért újratermelésük csak szűkítve lenne lehetséges.

A fentiekből is látható, hogy a kibővített ráfordítási mátrix Bródy-féle „dezaggregációja” nem vezet helyes eredményre. Egy esetben lesz értelmes a dezaggregáció: akkor, ha a munkaerő sorához hasonlóan a végső fogyasztást a szükséges munkát és a többletmunkát nyújtó munkaerő fogyasztásaként bontjuk meg ($f_t = f_m$). Ekkor viszont a mátrixban nem szerepel többlettermék, a domináns sajátértéke akkor és csak akkor lesz 1, ha a gazdaságban nincs többlettermelésre lehetőség. Vagyis csak az egyszerű újratermelés esetében.

4. Az értékrendszer két általános zárt formája és tartalmi azonosságuk matematikai háttere

A továbbiakban a *közönséges áruk* és a *munkaerő értékét együtt teljes értékrendszernek* fogjuk nevezni,⁴ és $\hat{p}^* = (p_0, p^*)$ vektorral jelöljük. Megmutatjuk, hogy a teljes értékrendszer (és így az értéktöbbletráta) meghatározása visszavezethető sajátérték-feladatra, de általában csak parametrikus (nemlineáris) sajátérték-feladatra.

Induljunk ki az értéktöbblet-rátát meghatározó (5) egyenletről. Ezt átrendezve kapjuk, hogy

$$p_0 + rp_0 = 1,$$

ahol p_0 tehát a szükséges munka aránya, rp_0 pedig a többletmunkaé. Ennek megfelelően az érték (1) képletében a felhasznált munkát szükséges (megfizetett) és többletmunkára (meg nem fizetett munkára) oszthatjuk fel. Így azt kapjuk, hogy:

$$p^* = p^*A + p_0m^* + rp_0m^*. \quad (11)$$

Vegyük észre, hogy a fenti átalakítás, azaz egy új változó (r) bevezetése az értékeket meghatározó egyenletrendszert egy minőségében megváltoztatja. Nevezetesen, az addig inhomogén rendszert homogénná teszi. Ha egyszer (p_0, p) megoldás, akkor bármely (kp_0, kp) szintén megoldás (természetesen: $k > 0$). Eme művi úton előidézett homogenitást Bródy sajátérték-modellje kapcsán egyesek tévesen az értékszintek meghatározatlanságaként értelmezik. Valójában azonban nem erről van szó. Ha az értéket következetesen továbbra is az absztrakt munka óráiban mérjük, mint ezt az induló (1) egyenlet jelzi, akkor az értékek szintje kötött. Ez azonban a fenti matematikai átalakítás folytán nem mutatkozik. E hiányosságot korrigálandó a homogén formákat ki kell egészítenünk az r változót definiáló (5) feltétellel. Vagyis jelen esetben az értékeknek a (2) és (3) egyenletekkel egyenértékű teljes meghatározását a (2), (5) és (11) egyenletek adják.

A továbbiakban két, tartalmilag egyenértékű eljárás között választhatunk. Vegyük először Marx, illetve Morishima kedvelt fogását,⁵ s a munkaerő értékét helyettesítsük a munkaerő fogyasztásának értékével, azaz tegyünk p_0 helyébe p^*f -et. Ekkor az értékekre az alábbi formát nyerjük:

$$p^* = p^*A + p^*fm^* + rp^*fm^*.$$

Vezessük be az fm^* diadikus szorzat jelölésére az $F = (f_{ij})$ mátrixot. f_{ij} az i -edik áru azon mennyiségét mutatja, amely az egységnyi j -edik áru előállításához felhasznált munkaerő újratermeléséhez szükséges. Az $M = A + F$ mátrix tehát ismét csak a teljes körű ráfordítások mátrixa, B -vel azonos tartalmú, de formájában attól eltérő: összevont és nem kibővített. Tartalmi azonosságuk matematikai vonatkozásaira majd később visszatérünk. A fenti

⁴ A teljes értékrendszer implicite magában foglalja az értéktöbblet rátáját is, hiszen, mint láttuk, $r = (1 - p_0)/p_0$, ezért akár bele is érthetjük a teljes értékrendszer fogalmába.

⁵ Megjegyezzük, hogy Morishima az értékeket nem elemezte sajátérték formájában, de előszeretettel használta elemzéseiben az összevont ráfordítási mátrixra építő formákat.

jelöléseket felhasználva az értékmeghatározást a következőképpen írhatjuk fel:

$$p^* = p^*(M + rF), \quad r = \frac{1 - p^*f}{p^*f}. \quad (12)$$

Ez utóbbi forma első egyenlete pedig nem más, mint egy speciális (nemlineáris) sajátérték-forma. Azt mutatja meg, hogy ha az értékek és az értéktöbblet ráta léteznek, akkor az $(M + rF)$ mátrix sajátértékei között van 1-gyel egyenlő, s az értékek vektora egy ehhez tartozó bal oldali sajátvektor.

Ha a másik utat követjük, akkor valamelyest Bródy Andráséhoz hasonló formákhoz jutunk. Vegyük most ismét az értékre bevezetett (1) képletet alapul és a munkaerő értékét meghatározó (4) formát. A kettő összevonásából a következő képletet nyerjük:

$$(p_0, p^*) = (p_0 p^*) \begin{bmatrix} 0 & m^* \\ f & A \end{bmatrix} + r(p_0, p^*) \begin{bmatrix} 0 & m^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A már korábban bevezetett jelölések, valamint a $\hat{p}^* = (p_0, p^*)$ és a

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 & m^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jelölés alkalmazásával az értékek meghatározását a fenti képlet alapján az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$\hat{p}^* = \hat{p}^*(B + rB_m), \quad r = \frac{1 - p_0}{p_0}. \quad (13)$$

Ez ismét az előzőhöz hasonló sajátérték-forma. A különbség mindössze annyi, hogy itt explicite megjelenik a munkaerő értéke is, továbbá az *összevont* ráfordítási mátrix (M) helyett a *kibővített* ráfordítási mátrix (B) játszik kulcsszerepet. Tartalmilag azonban a két forma teljesen egyenértékű.

Megmutatjuk, hogy nemcsak az igaz, hogy a két mátrix domináns sajátértéke csak egyidejűleg lehet 1, 1-nél kisebb, vagy nagyobb, hanem az is, hogy az egyik irreducibilitása feltételezi a másikat, s a kibővített forma Leontief-inverze magában foglalja az összevont forma L -inverzét.

1. TÉTEL: Legyenek adottak az A , m és f szemipozitív ráfordítási mátrix, illetve vektorok. A belőlük képzett teljeskörű ráfordítások kibővített (B) és összevont (M) mátrixának domináns sajátértéke csak egyidejűleg lehet 1. Továbbá, a két mátrix (ir)reducibilitása feltételezi egymást. Végül: a B mátrix Leontief-inverzének utolsó $n \times n$ -es blokkja az M mátrix L -inverze.

Bizonyítás: A Perron–Frobenius-féle sajátérték-tételekből (lásd például Nikaido [3]) ismert, hogy az $x \leq Ax$ egyenlőtlenségnek⁶ csak akkor létezhet szemipozitív ($x \geq 0$) megoldása, ha A domináns sajátértéke 1-nél nagyobb. Továbbá, az $x > Ax$ egyenlőtlenségnek akkor és csak akkor van szemipozitív megoldása, ha A domináns sajátértéke 1-nél kisebb. Ezek ismeretében elegendő

⁶ A vektor-egyenlőtlenségek jelölésénél a $>$, $\geq$ és $\leq$ jeleket használjuk a minden elemében nagyobb, legalább egy elemében határozottan nagyobb és egyikben sem kisebb, és az egyetlen elemében sem kisebb relációkra.

tehát azt belátni, hogy a fenti feltételek fennállása az egyik mátrix esetében implikálja azt, hogy teljesülnek a másikra vonatkozóan is.

Tegyük fel, hogy van olyan $\hat{x}_B \geq 0$ vektor, amely kielégíti az $\hat{x}_B \leq B\hat{x}_B$ egyenlőtlenséget. Részletesen kibontva kapjuk, hogy

$$x_{0B} \leq m^*x_B \\ x_B \leq Ax_B + fx_{0B} \leq (A + fm^*)x_B = Mx_B.$$

Azaz, a második egyenlőtlenségbe az elsőből x_{0B} -t behelyettesítve, máris belátható, hogy x_B kielégíti M vonatkozásában a kívánt egyenlőtlenséget. Szemipozitivitása nyilvánvaló, hiszen ha nulla lenne, akkor x_{0B} is, és így x_B is az lenne, feltevésünkkel ellentétben.

Fordítva: legyen $x_M \geq 0$, amely eleget tesz az $x_M \leq Mx_M$ egyenlőtlenségnek. Könnyen belátható, hogy az

$$\hat{x}_M = \begin{bmatrix} m^*x_M \\ x_M \end{bmatrix}$$

vektor kielégíti az $\hat{x}_M \leq B\hat{x}_M$ egyenlőtlenséget.

A második egyenlőtlenségek kölcsönös teljesülését a fentivel csaknem azonos módon láthatjuk be. Mindössze annyi a különbség, hogy a második lépésben

$$\hat{x}_M = \begin{bmatrix} km^*x_M \\ x_M \end{bmatrix}$$

vektort kell választanunk, ahol k 1-nél nagyobb, de ahhoz kellően közel választott skalár. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A két mátrix nevezetes strukturális sajátosságának azonosságát a következőképpen igazolhatjuk. Először is, vegyük figyelembe, hogy alkalmasan megválasztott pozitív skalárokkal beszorozva a mátrixokat, domináns sajátértékeket 1 alá szoríthatjuk, ami természetesen nem befolyásolja (ir)reducibilis jellegüket. Így a bizonyítást elegendő 1-nél kisebb domináns sajátértékek esetére elvégezni. Mármost, ha egy nemnegatív A mátrix domináns sajátértéke 1-nél kisebb, akkor Leontief-inverz, $(E - A)^{-1}$ akkor és csak akkor pozitív, ha a mátrix irreducibilis. Az $(E - B)$ mátrix inverzét, generáló elemnek elsőként a bal felső sarkában szereplő 1 elemet választva, az alábbi alakban számíthatjuk ki.

Első lépés:

$$\begin{bmatrix} 1 & -m^* \\ f & E - A - fm^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -m^* \\ f & E - M \end{bmatrix}.$$

Innen már egyszerűen adódik az inverz:

$$(E - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + m^*(E - M)^{-1}f & m^*(E - M)^{-1} \\ (E - M)^{-1}f & (E - M)^{-1} \end{bmatrix}.$$

A B mátrix Leontief-inverzének fenti alakjából világosan látszik, hogy annak a közönséges árukra vonatkozó blokkja valóban az M mátrix Leontief-inverzét tartalmazza.⁷

⁷ Fordított sorrendben választva a generáló elemeket, egészen eltérő formákhoz jutunk, amelyekből a fenti azonosság fennállása korántsem szembetűnő. Ennek az útnak a tárgyalását itt mellőzzük, de ajánljuk azon olvasók számára, akik közelebbről meg kívánnak ismerkedni a kérdéses mátrixok sajátos összefüggéseivel.

Meg kell még mutatnunk, hogy a két mátrix Leontief-inverzének pozitivitása kölcsönösen feltételezi egymást. B -ből indulva az állítás nem szorul különösebb bizonyításra. Ha viszont $(E - M)^{-1} > 0$, akkor m és f feltételezett szemipozitivitása biztosítja, hogy az első sor és oszlop is csak pozitív elemeket tartalmaz.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Egy rövid megjegyzés erejéig érdemes közgazdasági oldalról is megvilágítani a Leontief-inverzek összefüggését. A Leontief-inverzek egyik szokásos értelmezéséből kiindulva az $(E - B)^{-1}$ mátrix adott oszlopát úgy értelmezhetjük, mint a vonatkozó áru egy egységnyi végső (jelen esetben a munkaerő fogyasztása is közönső fogyasztásnak számít!) kibocsátásához szükséges teljes termelés vektorát. Az egyes árukból annyit kell előállítani, amennyi a szűkebb értelemben vett termelés és a felhasznált munkaerő fogyasztási igényén túl még egy egységnyi többletet is eredményez az adott áruból. Az M mátrix elemei, a közönséges árakra vonatkozóan, éppen ezeket az együttes 'közvetlen'⁸ ráfordítási igényeket tartalmazzák összevontan. A két inverz közönséges árakra vonatkozó elemeinek azonossága tehát közgazdasági okfejtés alapján is belátható. Az első sor és oszlop pedig a teljes ráfordítási igények számításából ismert formákat tartalmazza, amelyek tartalmát felesleges lenne itt ismertetni.

A tételnek a sajátértékekre vonatkozó megállapítása az értéktöbbletrata pozitívításában kulcsszerepet tölt be. Ezt érdemes külön tételben megvilágítani, kivételesen az irreducibilitás feltételére alapozva. Lényegében Bródy [1] vonatkozó eredményeit reprodukálják más megközelítésben.

2. TÉTEL: Adottak az A , f , m szemipozitív ráfordítási együttható mátrix és vektorok. A belőlük képzett teljes körű ráfordítási mátrixok irreducibilisek. Pozitív értékek és értéktöbbletrata együttes létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy a teljes körű ráfordítási mátrixok domináns sajátértéke 1-nél kisebb legyen.

Bizonyítás: A bizonyítást az 1. tétel alapján elegendő csak egyik forma esetére megadni. Válasszuk az összevont formát, s mutassuk meg először a szükségességet. Tegyük fel, hogy p vektor és r skalár pozitív. Mivel M nem negatív, irreducibilis és az F mátrix szemipozitív, ezért $M + rF$ is irreducibilis. A Perron–Frobenius-tételek folytán egy nemnegatív irreducibilis mátrixnak csak a domináns sajátértékéhez tartozhat pozitív sajátvektor, ezért tehát az $M + rF$ mátrixnak 1 szükségképpen domináns sajátértéke. Ugyanezen tételekből ismert az is, hogy a domináns sajátérték a mátrix bármely elemének szigorúan monoton növekvő, folytonos függvénye. Ebből adódik, hogy M domináns sajátértékének szükségképpen 1-nél kisebbnek kell lenni.

Az elégségséget hasonlóan láthatjuk be. Ha ugyanis M domináns sajátértéke 1-nél kisebb, akkor a jelzett tulajdonságok folytán az $M + rF$ mátrix domináns sajátértéke r -nek szigorúan növekvő, folytonos függvénye, ha $r > -1$. [Ugyanis az $A + (1 + r)F$ mátrixról van szó, amelynek struktúrája M -ével azonos r fenti értékei mellett]. $r = 0$ értéknél ezen sajátérték 1-nél kisebb, tehát valamely pozitív r mellett szükségképpen felveszi az 1 értéket.

⁸ Nem keverendő össze az ÁKM irodalomban meghonosodott közvetlen ráfordítási igénnyel, noha a tartalmi rokonság szembetűnő.

Ezen r érték nem más, mint az értéktöbbletráta. Az $M + rF$ mátrixnak az 1 (domináns) sajátértékéhez tartozó, arányaiban egyértelműen meghatározott bal oldali sajátvektora pedig, szintjét az (5) egyenletnek megfelelően normálván, az értékek vektorát szolgáltatja.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A tétel bizonyításából az *irreducibilitás* feltétele szinte elengedhetetlennek mutatkozik. Általában, mint ismert, a Perron—Frobenius-tételek csak irreducibilis mátrixokra vonatkozóan garantálják a kihasznált előnyös tulajdonságokat (szigorú monotonitás, pozitivitás, egyértelműség). Nem véletlen tehát, hogy Bródy is mindig él ezen feltevessel, mind az érték, mind a termelési ár modelljében. Feltevését igen frappánsan, de megint csak az egyszerű újratermelés esetében tökéletesen helytállóan a következő mögöttes feltevésekkel indokolja. Minden áru újratermelése emberi munkát kíván, s közvetve vagy közvetlenül emberi fogyasztásra kerül. Ez azonban nem mindig helytálló érvelés. A teljes körű ráfordítások ugyanis *csak* a munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztást ölelik fel, ezért az irreducibilitáshoz az is kell, hogy minden áru a munkaerő újratermeléséhez szükséges, s nem általában vett emberi fogyasztás tárgya legyen. Tőkés újratermelés esetén ez a feltétel aligha teljesül, gondoljunk csak a luxustermékekre, hadikiadásokra.

A következőkben éppen azt fogom megmutatni, hogy a fentiek ellenére mégsem indokolatlan esetenként, az egyszerűség kedvéért a teljes körű mátrixok irreducibilitását feltételezni. Ez az induk a luxus- vagy pusztán hadi célú termékek egy mélyebb indukban gyökeredző elhanyagolhatóságában rejlik, és pedig az árutermelő gazdaság egy fundamentális alrendszerének sajátosságaiban.

5. Az értékrendszer egyértelműségének és pozitivitásának bizonyítása a reducibilis esetben

Egy korábbi dolgozatomban [7] az értékek létezését, pozitivitását, egyértelműségét és fogalmi-logikai megalapozottságát pusztán a marxi szabadpiaci árutermelés modelljének immanens feltevéseire (az emberi munka nélkülözhetetlensége és átlagban nem veszteséges árutermelés) alapozva bizonyítottam be a *nyílt* alapmodell keretei között. Nyilván azt várjuk, hogy ugyanazok a feltevések elegendőek lesznek a zárt, nemlineáris sajátértékfeladatra is. Ha pedig ez így van, akkor meg kell találnunk azokat a formális (matematikai) és tartalmi (közgazdasági) okokat, amelyek a vizsgált sajátérték-formákból adódó sajátvektorokat egyértelművé és pozitívvá teszik.

Ezeket az okokat röviden a következőkben foglalhatjuk össze. Egy gazdaságban „normális” feltételek között *mindig* van egy olyan árucsoport (alapjavak), amelyek előállításához csak ugyanezen árukra van szükség, viszont *minden áru termeléséhez* közvetve vagy közvetlenül *szükség van ezen alapjavakra*. Ezen alapjavak között szerepel a *munkaerő* is. A vizsgált gazdaságból a nem alapjavak és -tevékenységek elhagyásával nyert *alapgazdaság* kibővített ráfordítási mátrixa viszont *irreducibilis* lesz. Következésképpen az alapjavak értéke pozitív, s így minden áru értéke pozitív lesz. Azt is meg fogjuk mutatni, hogy az *értéktöbblet rátája* csak ezen alapgazdaság ráfordítási viszonyaitól függ.

Melyek lesznek ezek az áruk? Nos, megmutatjuk, hogy ezek a *munkaerő* és a *munkaerő újratermeléséhez közvetlenül vagy közvetve szükséges áruk*, amelyeket

a továbbiakban *alapjavaknak*⁹, az általuk definiált szűkebb gazdaságot pedig *alapgazdaságnak* fogjuk nevezni. A következő tétel fényt derít az *alapgazdaság* kulcsfontosságú szerepére.

3. TÉTEL: Ha egy gazdaságban minden áru előállítás (közvetlenül vagy közvetve) igényel munkaráfordítást, *akkor*

- i) alapgazdaságának ráfordítási mátrixa irreducibilis;
- ii) a teljes gazdaságban csak akkor létezhetnek az értékek, ha annak alapgazdaságában is léteznek;
- iii) a teljes gazdaság értéktöbbletrátája megegyezik alapgazdaságának értéktöbbletrátájával;
- iv) minden áru termeléséhez szükség van, közvetlenül vagy közvetve, minden alapjóságra.

Bizonyítás: A bizonyítást a kibővített forma esetére közöljük. Az alapgazdaság ráfordítási mátrixa: B_{11} , azaz a kibővített ráfordítási mátrixnak az alapjavak által meghatározott almatrixa. Ha az alapgazdaság a teljes gazdaság *valódi* részhalmaza (nem maga a teljes gazdaság),¹⁰ akkor (szükség esetén a javak sorrendjét megváltoztatva) a kibővített ráfordítási mátrix az alábbi alakban dekomponálható:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & m_1^* & m_2^* \\ f_1 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Először igazoljuk, hogy A_{21} valóban csak 0 lehet. Tudjuk, hogy a nem alapjavak között csak közönséges áruk szerepelhetnek. Ha mármost a vizsgált almatrixban lenne pozitív elem, ez azt jelentené, hogy a sor szerinti *nem alapjóságra* valamely alapjóság termeléséhez szükség lenne. De akkor közvetve szükség lenne ezen árura a munkaerő újratermeléséhez is, tehát maga is alapjóság lenne. (Megjegyezzük még, de ennek igazolását az olvasóra bizzuk, hogy B_{12} nem lehet 0, mert különben a nem alapjavak termeléséhez nem lenne szükség munkára).

- i) Az alapgazdaság ráfordítási mátrixának irreducibilitása könnyen igazolható. Egyrészt képzési szabályából következik, hogy az alapgazdaságban a munkaerő újratermeléséhez minden árura szükség van. Másrészt feltettük, hogy minden áru igényel munkaráfordítást. Ezek viszont éppen Bródy idézett feltételei, amelyek szükségesek és elégségesek B_{11} irreducibilitásához. A formai bizonyítást a következő megfigyelésre alapozhatjuk. Ha egy nem negatív mátrix irreducibilis, ez egy és ugyanazt jelenti, hogy Leontief-inverze pozitív (lásd például Nikaido [3]). Mivel az irreducibilitás csupán

⁹ Az alapjavak itt bevezetendő fogalma szoros rokonságban áll Sraffa [5] bázistermékeivel. Sraffa a bázistermékeket a közönséges javak körére szűkíti, s azokat a termékeket nevezi bázistermékeknek, amelyekre minden termék előállítása során közvetlenül vagy közvetve szükség van (pl. villamosenergia). A mi esetünkben az alapjavak között szerepel a munkaerő is.

¹⁰ Vagyis a teljes gazdaság értéktöbbletrátája független a nem alapjavak termelési feltételeitől. Ez ismét egy olyan megállapítás, amely szoros kapcsolatban van Sraffa hivatkozott elemzéseivel. (Nála a profitráta adódik függetlennek a nem bázistermékek termelési feltételeitől.)

a nulla és nem nulla elemek struktúrájától függ, ezért az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy B_{11} domináns sajátértéke 1-nél kisebb. (Ellenkező esetben a vizsgált mátrixnak alkalmasan megválasztott skalárral való beszorzása révén erre az esetre vezethetjük vissza a bizonyítást.) A B_{11} mátrix Leontief-inverzét az alábbi alakban írhatjuk fel:

$$(E - B_{11})^{-1} = \begin{bmatrix} s & sm_1^*(E - A_{11})^{-1} \\ s(E - A_{11})^{-1}f_1 & (E - A_{11})^{-1} + s(E - A_{11})^{-1}f_1m_1^*(E - A_{11})^{-1} \end{bmatrix},$$

ahol

$$s = \frac{1}{1 - m_1^*(E - A_{11})^{-1}f_1}.$$

A feltevések miatt mind $(E - A_{11})^{-1}f_1$, mind $m_1^*(E - A_{11})^{-1}$ határozottan pozitív vektor. Ezekből viszont már valóban könnyen belátható, hogy $(E - B_{11})^{-1}$ is határozottan pozitív. Vegyük figyelembe, hogy $1/s$ volt a második lépésben választott generáló elem, ezért $s = 0$ nem lehetett. Viszont egy produktív mátrix L -inverze nemnegatív, vagyis végül is az s skalár szükségképpen pozitív.

ii) Az alapgazdaságban az értékeket definiáló összefüggés:

$$p_1^* = p_1^*A_{11} + m_1^*$$

és ez részét képezi a teljes gazdaság értékegyenletének is, mivel $A_{21} = 0$. Így a teljes gazdaságban csak akkor lehet az érték értelmezett, ha az alapgazdaságban is az.¹¹

- iii) Tudjuk, hogy a munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztásban csak alapjavak szerepelnek. Ezért a munkaerő értéke, p_0 az alapgazdaságban és a teljes gazdaságban megegyezik. Mint láttuk, a munkaerő értéke egyértelműen meghatározza az értéktöbblet rátáját [$r = (1 - p_0)/p_0$], tehát az alap- és a teljes gazdaság értéktöbbletrátája is szükségképpen megegyezik.
- iv) Mivel minden áru előállításához szükség van közvetlen vagy közvetlenül munkaráfordításra, a munkaerő újratermeléséhez pedig hasonló módon minden alapjóságra, ezért valóban minden áru termeléséhez közvetlenül vagy közvetve szükség van minden alapjóságra.

A fentebbi tulajdonság belátása után most már közvetlenül rátérünk a pozitív értékek létezését biztosító elégséges feltételek elemzésére, s megmutatjuk, hogyan vonják ezen feltételek maguk után azt, hogy a sajátérték-formák megoldásai a reducibilitás ellenére is rendelkeznek a kívánatos unicitási és pozitivitási tulajdonságokkal.

4. TÉTEL: Legyenek adottak egy gazdaság fajlagos ráfordítási együtthatói az A , m^* és f szemipozitív mátrix, illetve vektorok által. Tegyük fel, hogy az adott fajlagos ráfordítási viszonyok mellett nem képzelhető el a gazdaság teljes automatizálása (azaz nincs olyan $q \geq 0$, amely esetén $q \geq Aq$ és $m^*q = 0$). Teljesüljön továbbá az alábbi két, (i) és (ii) feltétel közül valamelyik.

¹¹ Nyilvánvaló, hogy ha minden áru igényel munkaráfordítást, akkor a pozitív értékek létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy mind A_{11} , mind A_{22} produktív mátrix legyen. Ennek igazolását az olvasóra hagyjuk.

- (i) A tényleges (pozitív) *termelés* ($x > 0$) *pótlást meghaladó szinten* folyik, azaz keletkezik külső felhasználásra átadható termék ($x \geq Ax$) és *nem* folyik *öncélú termelés* a gazdaságban.¹²
- (ii) A gazdaság tényleges (pozitív) árai ($p_a^* > 0^*$) és béraránya ($w_a > 0$) mellett egyetlen áru termelése sem volt veszteséges (*tiszta árutermelés*).

A fenti gazdaságban *minden áru értéke pozitív*. A közönséges áruk és a munkaerő értéke, valamint az értéktöbblet rátája egyértelműen meghatározott az alábbi feltételekkel:

$$\lambda(M + rF) = 1, \quad p^* = p^*(M + rF), \quad p^*f = \frac{1}{1 + r} = p_0,$$

ahol (λ) a domináns sajátértéket jelöli. A kibővített formában felírva a teljes értékrendszert egyértelműen meghatározó feltételeket azt kapjuk, hogy:

$$\lambda(B + rB_m) = 1, \quad p^* = p^*(B + rB_m), \quad p_0 = \frac{1}{1 + r}.$$

Bizonyítás: Az (i) vagy (ii) és a nem teljes automatizálhatóság feltételeiből (lásd [7], 2. és 4. tétel) következik, hogy az A mátrix domináns sajátértéke 1-nél kisebb. Ebből, valamint a teljes automatizálás lehetetlenségéből viszont az következik (lásd [7], 3. tétel), hogy minden áru termeléséhez szükség van, közvetlenül vagy közvetve munkaráfordításra. Fentebb a 3. tételben igazoltuk, hogy ekkor az alapgazdaság teljes körű ráfordítási mátrixa irreducibilis. Vegyük például az összevont formából adódó mátrixot, pontosabban annak az alapgazdaságra vonatkozó részét, M_{11} -et. Mivel $M_{21} = 0$, ezért az alapjavak értékére vonatkozó sajátérték-egyenletek az alábbi formát öltik:

$$p_1^* = p_1^*(M_{11} + rF_{11}) = p_1^*[A_{11} + (1 + r)F_{11}]. \quad (14)$$

Mivel M_{11} irreducibilis, ezért $(M_{11} + rF_{11})$ is az lesz, valahányszor $r > -1$. Ezért ebben az intervallumban a mátrix domináns sajátértéke szigorúan monoton nő r -rel. Mivel A domináns sajátértéke 1-nél kisebb, ezért A_{11} -é is 1-nél kisebb. Ebből következik, hogy r -et (-1) -hez kellően közel választva $(M_{11} + rF_{11})$ domináns sajátértéke is kisebb lesz 1-nél. Ugyanis van olyan $q_1 > 0$, hogy $q_1 > A_{11}q_1$, ezért $(1 + r)$ megválasztható pozitívnak úgy, hogy $q_1 > [A_{11} + (1 + r)F_{11}]q_1$ is fennálljon, ami elegendő állításunk igazolásához. Van tehát olyan $r > -1$ érték, amely mellett a vizsgált mátrix domináns sajátértéke 1 lesz, és így van olyan, arányaiban egyértelműen meghatározott $p_1 > 0$, amely a (14) egyenletet a nevezett r érték mellett kielégíti. Válasszuk meg p_1 szintjét úgy, hogy $p_1^*f_1 = 1/(1 + r)$ legyen. Ezt nyilván megtehetjük, mert $1/(1 + r) > 0$, és $f_1 \geq 0$. Mivel pedig F_{22} és A_{21} szükségképpen 0, és

$$p_1^* = p_1^*A_{11} + (1 + r)p_1^*f_1m_1^* = p_1^*A_{11} + m_1^*,$$

ezért p_1^* nem más, mint a közönséges alapjavak értéke; $p_1^*f_1$ a munkaerő értéke; r pedig az értéktöbblet rátája.

¹² Az öncélú termelés fogalmát és a Leontief-mátrixszal összefüggő tulajdonságait lásd [7] dolgozatomban. Röviden: öncélú termelésről akkor beszélünk, ha egy x termelési vektornak és egy A ráfordítási mátrixnak van olyan particiója, amelyben $x_1 \leq A_{11}x_1$ és $x_1 > 0$.

A sajátérték-egyenletek nem alapjakra vonatkozó része viszont a következő formában írható fel:

$$p_2^* = p_1^* M_{12} + p_2^* A_{22} + r p_1^* F_{12} = p_1^* A_{12} + p_2^* A_{22} + m_2^*.$$

Mivel A produktív, ezért A_{22} is az, így van szemipozitív L -inverze, tehát p_2^* -ot a fenti összefüggésből egyértelműen meghatározhatjuk az alábbi számítás révén:

$$p_2^* = p_1^* (M_{12} + r F_{12}) (E - A_{22})^{-1} = (p_1^* A_{12} + m_2^*) (E - A_{22})^{-1}.$$

Nyilvánvaló, hogy p_2^* , a *nem-alapjakra* értéke szükségképpen pozitív lesz, mivel minden áruhoz szükség van munkaráfordításra. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

A 4. tétel feltételei csak az értékek pozitivitását és egyértelműségét biztosítják. Az r skalárról csak annyit tudunk, hogy (-1) -nél nagyobb. A pozitív értéktöbblet-ráta létezésére vonatkozó elégséges feltételeket és állítást külön tételben fogalmazzuk meg.

5. *TÉTEL*: Teljesüljenek a 4. tétel feltételei, azzal a módosítással, hogy az (i) és (ii) feltételek helyett az alábbi két feltétel szerepel:

- a) van *többletermék* és nincs öncélú termelés ($x > 0$, $x \geq Ax + Fx = Mx$)
- b) legalább egy áru előállításának nyereséges, de egyiké sem veszteséges az átlagos ráfordítási feltételek mellett, azaz

$$p_a^* \geq p_a^* A + w_a m^*, \quad (p_a^* > 0^*, w_a > 0),$$

továbbá a munkabér legalább akkora, mint a munkaerő újratermeléséhez szükséges fogyasztás értéke (árösszege), azaz

$$w_a \geq p_a^* f.$$

Egy ilyen gazdaságban a 4. tételben megfogalmazott állítások igazak maradnak, továbbá az értéktöbbletráta (r) pozitív.¹³

Bizonyítás: Mivel a) illetve b) tartalmazza (i)-t, illetve (ii)-t, ezért a 4. tétel állításai valóban igazak maradnak.

Az értéktöbbletráta pozitivitásához viszont elegendő azt igazolni, hogy M domináns sajátértéke 1-nél kisebb. Ezt viszont az a) feltétel és a Leontief-mátrixokra [7]-ben igazolt produktivitási tétel biztosítja. A b) feltétel esetén viszont w_a helyébe p_{af}^* -t helyettesítve az első egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $p_a^* \geq p_a^* M$, amely a teljes automatizálás lehetetlenségével együtt ismét egy [7]-ben igazolt produktivitási feltétel. Ezért a b) feltételekből is következik, hogy M domináns sajátértéke 1-nél kisebb. A bizonyítást ezzel befejeztük.

A sajátérték és az értéktöbbletráta, valamint a gazdaság (teljes körű) termelési és ráfordítási feltételei között fennálló összefüggéseket feltárva meg-

¹³ Ha az a) és b) feltételekben szereplő egyenlőtlenségek helyett mindenhol egyenlőség szerepelne, akkor az egyszerű újratermelés modelljének feltételeivel lenne dolgunk. Bródy, mint arra utaltunk, ezt az esetet elemezte az irreducibilitás feltétele mellett. Ebben az esetben, az értéktöbblet rátája (r) természetesen 0 lesz, ennek egzakt bizonyítását azonban az olvasó bízunk. A dolog érdekessége az, hogy ezen esetben a b) feltételben szereplő érvényes árrendszer (a bért is beleértve) egyszersmind értékárrendszer is, vagyis az értéktől csupán egy skaláris szorzó erejéig térhet el.

mutattuk, hogy az értékrendszer és a ráfordítási együtthatók összefüggéseinek teljes körű és egyidejű vizsgálatához a matematikai sajátérték-formák adekvát eszközt szolgáltatnak. Utaltunk arra is, hogy heterogén munkaerő esetén a sajátérték-formák jelentősége még az itt mutatkozónál is nagyobb, mivel heterogén munka és egyöntetű (általános) értéktöbbletráta érvényesülése esetén az értékrendszert nem is lehet másképpen meghatározni, csak szimultán jelleggel, sajátérték-formákkal. Itt, az alapmodell keretei között — mint tudott — a sajátérték-formák még valójában nélkülözhetők.

Végezetül, a dolgozat tételei egyszerűsre rámutatnak arra is, hogy az irreducibilis feltételezése egyes elemzésekben nemcsak kényelmi szempontokkal indokolható. Tartalmilag is teljesen jogosult, mivel úgy tekinthető, hogy a vizsgálatban csupán a természeténél fogva irreducibilis *alapgazdaságra* összpontosítjuk figyelmünket. Ennek ugyanis olyan kulcsszerepe van például az értékrendszer meghatározásában, hogy az alapgazdaság értékrendszere és a nem alapgazdaság technikai paraméterei a nem-alapjavak értékeit egyszerűen diktálják.

(Beérkezett: 1983. április 21-én.)

IRODALOM

1. BRÓDY, A.: *Érték és újratermelés*. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. MORISHIMA, M.: *Marx's Economics*. Cambridge, 1973. Cambridge University Press.
3. NIKAIIDO, H.: *Convex Structures and Economic Theory*. New York, 1968. Academic Press.
4. REICH, U. P.: From Heterogenous to Abstract Labour and the Definition of Segmentation. *Acta Oeconomica*, Vol. 23 (3–4), 1979.
5. SRAFFA, P.: *Áruk termelése áruk révén*. Budapest, 1975. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
6. ZALAI, E.: A heterogén munka kérdéséhez *Egyetemi Szemle*, 1980/3.
7. ZALAI, E.: Nemnegatív Leontief-inverz létezésének két közgazdasági kritériuma *Szigma*, 1982/4.

MARXIAN LABOR VALUES IN (CLOSED) EIGENVALUE MODELS

The existence and positivity of the Marxian labor values has traditionally been discussed and proven in the framework of an open Leontief system. The only notable exception is Bródy, who addressed these questions in an eigenvalue formulation. His analysis, however, turns out to be correct only for the special case of simple commodity production and also relies on unnecessarily restrictive assumptions (e.g., irreducibility of the augmented input-output matrix). Reich and Zalai have independently shown, without existence proofs, that the case of heterogenous labor under the assumption of a uniform rate of exploitation leads to a special (parametric) eigenvalue problem.

In this paper two alternative eigenvalue forms of the labor values are developed and confronted with that of Bródy. The two differ in the treatment of labor only and, consequently, in the way the global commodity input-output coefficient matrices are defined. First, the basic identity of some crucial mathematical properties of the two matrices are proven. Second, the existence, uniqueness and positivity of solutions is discussed under very general assumptions (perfect competition and impossibility of full automation). These assumptions do not imply irreducible structures for the coefficient matrices in the eigenvalue forms. Nevertheless, uniqueness and strict positivity of the eigenvectors (labor values) is guaranteed by the existence of a special, irreducible sub-economy (basic economy) defined by the commodities directly or indirectly needed in the reproduction of labor power.

СИСТЕМА ТРУДОВОЙ СТОИМОСТИ МАРКСА В ФОРМЕ (ЗАМКНУТОЙ) СОБСТВЕННОЙ СТОИМОСТИ

Трудовая стоимость Маркса традиционна анализировалась в рамках открытой модели «затраты-выпуск». А. Броди был единственным, кто попытался доказать существование стоимости в замкнутой модели. Однако этот анализ действует лишь для случая простого воспроизводства, кроме того доказательства основаны на более сильных, чем необходимо, предпосылках (например, на ирредуцибельности). Рейх и Залаи независимо друг от друга и без экзистенционального доказательства показали, что в случае неоднородной рабочей силы и одинаковой нормы прибавочной стоимости естественной формой анализа системы стоимости является нелинейная (параметрическая) задача собственной стоимости.

В статье система стоимости сводится к двум альтернативным задачам собственной стоимости, существенно отличающимся от соответствующей модели Броди. Две формы отличаются лишь в подходе к рабочей силе, что дает различные полные матрицы затрат. Показывается, что с точки зрения анализа математические характеристики этих матриц одинаковы. Существование решения задач собственной стоимости доказывается при весьма общих посылах (чисто товарное производство и невозможность полной автоматизации). Ирредуцибельность матричных коэффициентов не имплицитруется. Доказательство строгой позитивности и однозначности стоимостей, т.е. собственных векторов, основано на признании ирредуцибельной частной экономики (основной экономики), которая определяется непосредственно и косвенно необходимыми для воспроизводства рабочей силы товарами.

Nyereségérdekeltség nyereségszint korlát mellett

A „Néhány kiegészítő megjegyzés a nyereségszint-korlát mellett a nyereség maximalizálására törekvő vállalat elméletéhez” cím helyett használjuk a rövidebb fenti címet. Bármennyire mesterkéltnek tetszik ugyanis a címben jelzett vállalati érdekeltségi rendszer típus, mind a nemzetközi, mind pedig a hazai szakirodalom már foglalkozott ennek vizsgálatával. A hazai érdeklődés alapja az a körülmény, hogy a jelenlegi árszabályozás szerint — kicsit leegyszerűsítve — a számottevő nem-rubel exportot lebonyolító ipari vállalatok esetén a vállalati nyereségszint nem lehet nagyobb, mint az ilyen exportban elért átlagos nyereségszint. Némi megnyugvással vehetjük azonban tudomásul, hogy az ilyen típusú szabályozás nem magyar találmány, hiszen az Egyesült Államokban a monopóliumokkal szemben alkalmazott „rate of return regulation”, amely szerint az eszközarányos nyereség értéke nem lehet nagyobb a megadott korlátnál, szintén hasonló típusú vállalati érdekeltségi rendszert hoz létre.

A nyereség/eszköz arányra adott korlát mellett a nyereségmaximalizálás jellemzőit elsőként *Averch* és *Johnson* [2] vizsgálták, és további eredmények fűződnek *Baumol* és *Klevorick* [4], valamint *Bailey* [3] nevéhez. A magyar szabályozást *Ábel* [1] és *Megyeri* [8] vizsgálták.

Kiegészítő megjegyzéseinknek két célja van. Egyrészt megmutatjuk, milyen eltérések vannak a nyereség/eszköz szintre, illetve a nyereség/árbevétel szintre adott korlát mellett a nyereséget maximalizáló magatartás jellemzői között, másrészt pedig azt a kérdést vizsgáljuk, hogy ezek a jellemzők mennyiben függenek a vállalati gazdálkodásnak attól az elméleti modelljétől, amely az elemzés alapjául szolgál. A hivatkozott munkák a termékkibocsátás és az erőforrás felhasználása között a kapcsolatot „hagyományos”, neoklasszikus termelési függvénnyel ábrázolták, ezt az elemzést kiegészítjük a vállalati gazdálkodás lineáris programozási modellje alapján levonható legfontosabb következtetésekkel. A vizsgált érdekeltségi rendszerben a vállalati gazdálkodás legfontosabb jellemzői már egy olyan erősen egyszerűsített modell alapján is feltárhatóak, amelyben mind az erőforrások felhasználását, mind pedig a termelést aggregáltan kezeljük. Ezért az elemzést ilyen modellekre alapozzuk és csak annyiban térünk ki a termelést és az erőforrás felhasználását részletezetten ábrázoló modellekre, amennyiben belőlük lényeges további következtetések vonhatók le.

A nyereség maximálásának fő jellemzői nyereség/árbevétel-korlát mellett

Az első lépésben mind az erőforrás felhasználását, mind pedig a termelést aggregáltan kezeljük. Jelölje q a termelési szintet, $p(q)$ az értékesítési árszinvonalat (amely tehát a termelési szinttől függ), x az erőforrás felhasználási

sintjét, $r(x)$ az erőforrások árszínvonalát (amely tehát az erőforrás felhasználási szintjétől függ), b a vállalati állandó költségek értékét.

Az $N = p(q)q - r(x)x - b$ nyereségfüggvény a hagyományos termelési függvények mellett felírható mind q , mind pedig x függvényében, ugyanis meghatározható akár egy költségfüggvény, akár pedig egy bevételfüggvény. A továbbiakban a $K(q)$ költségfüggvényt használjuk, amely a q termelési szinthez a technikai és árfeltételek alapján minimálisan szükséges változó költséget rendeli.

A nyereség/árbevétel adott k korlátja esetén az optimális vállalati termelési szintet az

$$L_1 = p(q)q - K(q) - \lambda[p(q)q - K(q) - kp(q)q] \quad (1)$$

Lagrange függvény maximumpontja adja meg.

E termelési szint mellett teljesülnie kell a

$$[p'(q)q + p(q)] \frac{1 - \lambda + \lambda k}{1 - \lambda} = K'(q) \quad (2)$$

egyenlőségnek, ahol $(')$ a deriválást jelöli.

A Kuhn–Tucker feltételek miatt az (1) feladat maximumpontjában $\lambda \geq 0$.

Pozitív λ esetén (2) alapján látható, hogy az optimális termelési szint mellett – a „tisztá” nyereségmaximalizálástól eltérően – a bevételnövekmény nem lesz egyenlő a költségnövekménnyel. Az, hogy a bevételnövekmény vagy a költségnövekmény nagyobb-e, λ értékétől függ. Ha $\lambda < 1$, akkor a költségnövekmény nagyobb a bevételnövekménynél.

Zajac [9] bizonyította, hogy a vizsgált modellben a $0 \leq \lambda \leq 1$ feltétel teljesül. Eljárását követve könnyen belátható, hogy esetünkben, mivel a korlát effektív, a $0 < \lambda < 1$ feltétel is teljesül. Jelölje a nyereséget az $F(q)$ függvény, az árbevételt pedig a $G(q)$ függvény. E jelöléssel az (1) Lagrange függvény így írható:

$$L_1 = F(q) - \lambda[F(q) - kG(q)] = (1 - \lambda)F(q) + \lambda kG(q). \quad (3)$$

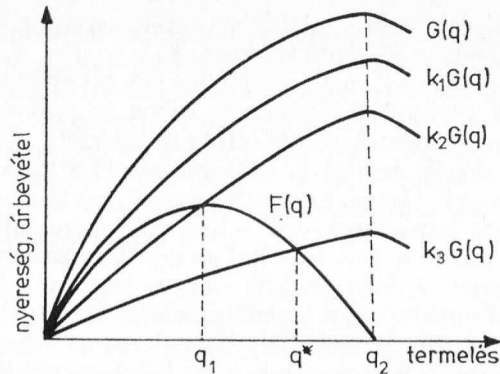
A (3) Lagrange függvényt maximáló optimális termelési szintre teljesül az alábbi összefüggés:

$$(1 - \lambda)F'(q^*) + \lambda kG'(q^*) = 0 \quad (4)$$

Mivel $\lambda \geq 0$ és $k > 0$, abból, hogy $F'(q^*) < 0$ és $G'(q^*) > 0$ közvetlenül adódik, hogy (4) összefüggés csak akkor teljesül, ha $\lambda > 0$ és $(1 - \lambda) > 0$, vagyis ha $0 < \lambda < 1$.

Az $F'(q^*) < 0$ és $G'(q^*) > 0$ összefüggések belátásához az alábbiakat kell végiggondolnunk. A vállalat F nyereségfüggvénye és az árbevétel G függvénye a termelés növekedésével egy darabig nő, majd csökken. A közgazdaságilag reális esetekben (pozitív határköltséget feltételezve a termelés minden lehetséges szintje mellett) az $F(q)$ függvény előbb veszi fel maximumát, mint a $kG(q)$ függvény. Ezt szemlélteti az 1. ábra a korlátozás különböző értékei mellett. A nyereségkorlát effektív érvényesülésének feltételezése azt jelenti, hogy $q_1 < q^* < q_2$ vagyis $F'(q^*) < 0$ és $G'(q^*) > 0$.

A nyereségsszint-korlát mellett a nyereség maximalizálása tehát olyan optimális termelési szintet ad, amelynek csökkentésével a nyereség növelhető volna, ekkor azonban a vállalat megsértene a nyereség/árbevétel mutatóra adott



1. ábra. A nyereség és a nyereségkorlát függvény

Megjegyzés: q_1 : $F(q)$ maximumhelye [$F'(q_1) = 0$]

q_2 : $kG(q)$ maximumhelye [$kG'(q_2) = 0$]

$$K'(q) = G'(q) - F'(q) > 0 \Rightarrow F'(q) < G'(q) \rightarrow q_1 < q_2.$$

felső korlátot. Ez azt jelenti, hogy a nyereséget nyereségszint-korlát mellett maximalizáló termelési szint — és ezzel összhangban az erőforrásfelhasználás mértéke — nagyobb lesz, mint a „tisztá” nyereségmaximalizáló termelési szint.

A vizsgált érdekeltségi rendszer kevésbé szigorú követelményeket támaszt a termelési lehetőségek kihasználásával és az erőforrások alkalmazásával szemben, mint a nyereség maximalizálása önmagában. A vállalat ekkor többet termel és több erőforrást használ fel, mint ahogyan a nyereség korlátozás nélküli maximalizálása esetén tenné. Az erőforrások helyettesítésével összefüggésben a következő részben vizsgáljuk, hogy az erőforrásokat a vállalat milyen hatékonyan használja fel.

Szembeötlő a nyereségszint-korlát melletti maximalizálás és a *másodlagos nyereségérdekeltségi rendszer* néven tárgyalt érdekeltségi típus hasonlósága [6], [7]. Könnyen belátható, hogy kölcsönös és egyértelmű megfeleltetés létesíthető két olyan feladat között, amelyek közül az egyik az árbevételt maximalizálja nyereségkorlát mellett, a másik a nyereséget a nyereség/árbevétel mutatóra adott felső korlát mellett. Bármelyik feladat optimális megoldása alapján meghatározható az a másik feladatbeli korlát érték, amely mellett a két feladat optimális megoldása megegyezik.

Az 1. ábra alapján látható, hogy az $\{F(q) \rightarrow \max | F(q) \leq k_3 G(q)\}$ feladat ekvivalens a $\{k_3 G(q) \rightarrow \max | k_3 G(q) \leq F(q)\}$ feladattal, vagyis a $\{G(q) \rightarrow \max | G(q) \leq 1/k_3 F(q)\}$ nyereségkorlátos árbevételmaximalizálási feladattal. Ebből a hasonlóságból kiindulva feltárhatóak a vállalati magatartás jellemzői akkor is, ha a nyereség/árbevétel esik korlátozás alá és a nyereséget maximalizálják.

Adott felső korlát esetén a termelési szint annál nagyobb mértékben tér el a nyereséget maximalizáló termelési szinttől, minél kevésbé meredeken csökken a nyereség/árbevétel függvény e szinten túl, hiszen annál nagyobb mértékben kell a termelést növelni ahhoz, hogy a nyereség/árbevétel mutató a szükséges szintre csökkenjen. Ugyanakkor adott nyereség/árbevétel függvény mellett ez az eltérés annál nagyobb lesz, minél kisebb a nyereségszint korlát. A k nyere-

ségszint-korlát növelése ebben a modellben értelemszerűen csökkenti a termelést, ugyanakkor növeli az elérhető nyereséget.

A vállalati magatartást a vizsgált modellben egy kívülről adott nyereségszint korlát szabályozta. Térjünk most vissza ahhoz a gyakorlati problémához, amelynek kapcsán az elméleti elemzés ötlete felvetődött. A nem-rubel exportban elért jövedelmezőségi szintet korlátként kezelő árszabályozási gyakorlat ugyanis azt eredményezi, hogy a nem-rubel export mértékének meghatározásával maga a vállalat is hatást gyakorol a korlát értékére. Miután pedig a korlát értékének növelése növeli a vállalat által az adott árszabályozási rendszerben realizálható nyereséget, érdeke fűződik ahhoz, hogy a kevésbé jövedelmező export elhagyásával növelje azt a jövedelmezőségi korlátot, amelyet a belföldi értékesítés nem léphet túl. Az árszabályozásnak ezt az export visszafogó hatását egyébként hamarosan felismerték és a szabályozás részleges módosításával lépéseket is tettek kiküszöbölésére.

Erőforrások helyettesítése

Ha összevetjük a nyereség/árbevétel és a nyereség/eszközérték mutatók korlátozásának esetét, legmarkánsabb eltérést az erőforrások helyettesítése tekintetében találunk a nyereséget maximalizáló vállalat magatartásában. Ezért az eltéréseket olyan modell alapján vizsgáljuk, amely az erőforrásokat fajtankénti bontásban veszi figyelembe. Ebben a modellben tehát a vállalat q mennyiséget termel az $x_1, x_2, \dots, x_n$ erőforrások felhasználásával. A termelés és erőforrásfelhasználás közötti kapcsolatot a $q = f(x_1, \dots, x_n)$ termelési függvény írja le. A tárgyalás egyszerűsítése érdekében ebben a modellben rögzített árakat használunk, az értékesítési ár p , az erőforrások ára pedig $r_1, r_2, \dots, r_n$. Az eredmények könnyen általánosíthatók arra a valóságot jobban tükröző esetre, amelyben a mennyiségtől független árak helyett a $p(q), r_1(x_1), r_2(x_2), \dots, r_n(x_n)$ árfüggvényeket alkalmazzuk. A nyereség/árbevétel mutató korlátozása esetén a nyereséget maximalizáló vállalatnál az erőforrások optimális felhasználási szintjét a következő Lagrange-függvény maximumhelyei szolgáltatják:

$$L_2 = (1 - \lambda)[pf(x_1, \dots, x_n) - r_1x_1 - \dots - r_nx_n - b] + \lambda kpf(x_1, \dots, x_n). \quad (5)$$

A szélsőérték helyeken teljesülniük kell a

$$pf_i \frac{1 - \lambda + \lambda k}{1 - \lambda} = r_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6)$$

típusú egyenlőségeknek (f_i a termelési függvény x_i szerinti parciális deriváltját jelöli). Effektív korlát esetén ebben a modellben is megmutatható, hogy λ pozitív és 1-nél kisebb, tehát bármelyik erőforrás felhasználásának növelése esetén az árbevétel növekménye kisebb, mint az erőforrás ára. A termelési függvényre vonatkozó szokásos feltevések mellett tehát, az erőforrások felhasználásával szemben támasztott enyhébb követelménnyel összhangban, a vállalat valamennyi erőforrásból többet használ fel, mint amennyit nyereségmaximalizálás esetén használna, és értelemszerűen a termelési szint is nagyobb lesz a „tisztá” nyereségmaximalizáló termelési szintnél.

Az erőforrások optimális felhasználási szintjei annál nagyobb mértékben térnek el a megfelelő tiszta nyereségmaximalizáló szintektől, minél kevésbé

meredeken csökkennek a határtermék görbék a nyereség maximuma után, és minél kisebb a nyereségszint korlátja. Mivel ezek növelésével a realizálható nyereség is növelhető, a vállalat törekedni fog a nyereségszint korlát növelésére pl. a kevésbé jövedelmező export elhagyása útján. E viselkedés azonban nem jelent feltétlenül költséghígító gazdálkodást az erőforrásokkal.

Az erőforrások helyettesítési feltételei ugyanis bármely erőforráspár esetén megegyeznek a tiszta nyereségmaximalizálás során adódó feltételekkel, hiszen ebben az esetben is teljesülnek a

$$-\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{r_i}{r_j} \quad (7)$$

típusú feltételek. Az erőforrások közötti helyettesítési határárány tehát megegyezik az erőforrások árának arányával. Bár költséghígító érdekeltiségről nem beszélhetünk, látnunk kell, hogy a vizsgált korlátozás csökkenti a nyereség-érdekeltiség intenzitását. 1 Ft költségmegtakarítás csak $(1 - \lambda)$ Ft nyereség-növekedést eredményezhetne. Az (5) egyenletben a b fix költségek csökkentésével elérhető megtakarításoknak csak $(1 - \lambda)$ -ad része lenne nyereségként realizálható.

Ha viszont a nyereségszint korlátja az eszközarányos nyereségre vonatkozik, az előbbtől eltérő eredmény adódik. A vállalati eszközfelhasználást az erőforrásfelhasználás $e(x_1, \dots, x_n)$ függvényének tekintjük. Ekkor a vállalat a

$$pf(x_1, \dots, x_n) - r_1x_1 - \dots - r_nx_n - b \quad (8)$$

nyereségfüggvény maximumát a

$$\frac{pf(x_1, \dots, x_n) - r_1x_1 - \dots - r_nx_n - b}{e(x_1, \dots, x_n)} \leq k \quad (9)$$

feltétel mellett keresi.

Az optimális magatartás jellemzői így az

$$L_3 = (1 - \lambda)[pf(x_1, \dots, x_n) - r_1x_1 - \dots - r_nx_n - b] + \lambda ke(x_1, \dots, x_n) \quad (10)$$

Lagrange függvény szélsőérték pontjai alapján ismerhetők meg.

A szélsőérték pontokban teljesülnek a

$$pf_i + \frac{\lambda}{1 - \lambda} ke_i = r_i \quad (11)$$

típusú egyenlőségek (e_i az eszközfelhasználási függvény x_i szerinti parciális deriváltja). Az olyan erőforrások esetén tehát, amelyeknek felhasználása növeli az eszközszükségletet — azaz e_i pozitív — a bevétel növekménye nem lesz egyenlő a költség növekményével. (A szakirodalom általában olyan modellt használ, amelyben egyetlen ilyen erőforrás van: az eszközérték vagy tőke.) Mint az előző részben láttuk, effektív korlát esetén λ pozitív, és 1-nél kisebb. A bevétel növekménye tehát az ilyen erőforrások esetén kisebb lesz az erőforrás áránál, és így az eszközarányos nyereségre adott felső korlát mellett a nyereség maximalizálására törekvő vállalat ezekből az erőforrásokból viszonylag többet használ, mint a „tiszta” nyereségmaximalizálás esetén.

Ez az érdekeltségi rendszer annál kevésbé szigorú követelményt támaszt az egyes erőforrások felhasználásával szemben, minél nagyobb mértékben növeli a kérdéses erőforrás alkalmazása a vállalati eszközöket. A kevésbé szigorú követelménnyel összhangban az ilyen erőforrások felhasználása is nagyobb mérvű lesz, mint tiszta nyereségmaximalizálás esetén volna. Tükröződik mindez a helyettesítési háttérarány és az erőforrások viszonyairól az optimális megoldás alapján kapott összefüggésben is:

$$-\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{f_j}{f_i} = \frac{r_j - \frac{\lambda}{1-\lambda} ke_j}{r_i - \frac{\lambda}{1-\lambda} ke_i}. \quad (12)$$

Tehát a vállalat olyan erőforrás szerkezet kialakítására törekszik, amelyben a kevésbé eszközigényes erőforrások rovására növeli az eszközigényesebb erőforrások felhasználását.

Az eszközarányos nyereségre adott korlátozás mellett a vállalat tehát inputjai között olyan helyettesítési lehetőségeket igyekszik kihasználni, melyek révén ugyanazon termelést a nagyobb eszközvonzattal járó inputok kisebb felhasználásával állíthat elő. Az erőforrások közötti helyettesítési lehetőségek tehát fontos szerepet játszanak a korlátos szabályozás ezen sajátosságai létrejöttében. *Averch—Johnson* [2] ennek alapján megkockáztatta azt az állítást, hogy a vállalat az eszközarányos nyereségre adott korlát mellett is hatékonyan gazdálkodik erőforrásaival, ha a technológiai lehetőségei rögzítettek, ha termelési függvényében az erőforrások nem helyettesítik egymást. E feltételezést cáfolja *Kennedy* [5]. Mielőtt rátérünk az érdekeltségi rendszer vizsgálatára a vállalat lineáris programozási modellje keretében, érdemes kitérni e kérdéskörre, hiszen a lineáris programozási modell is rögzített technológiákat kezel.

Átmeneti eset: Leontief termelési függvény

A vállalat klasszikus modellje és lineáris programozási modellje között átmenetnek tekinthetjük a Leontief-féle termelési függvénnyel jellemzett vállalat esetét. Ez egyetlen terméket gyárt (mint az eddig tárgyalt modellek) és ezt a termelési tényezőket rögzített arányban hasznosító technológiával állítja elő, hasonlóan a lineáris programozási modellhez. Legyen a termelési függvényünk az alábbi alakú:

$$q = \min_i \left(\frac{x_i}{a_i} \right), \quad (13)$$

ahol a_i a technológiai együtthatók konstansait jelöli ($i = 1, \dots, n$). Legyen $i = 1$ a legszűkösbb erőforrás indexe, ekkor (13) értelmében $q = x_1/a_1$.

Az eszközarányos nyereségkorlát mellett érvényes (10) egyenletben az $f(x_1, \dots, x_n)$ termelési függvényt e kifejezéssel helyettesítve kapjuk:

$$L_4 = (1 - \lambda) \left(p \frac{x_1}{a_1} - r_1 x_1 - \dots - r_n x_n - b \right) + \lambda ke(x_1, \dots, x_n). \quad (14)$$

A vállalat magatartását ebben az érdekeltségi rendszerben a (14) Lagrange függvény szélsőérték pontjaiban teljesülő alábbi feltételek jellemzik:

$$\frac{\lambda}{1 - \lambda} k e_i = r_i, \quad (i = 2, \dots, n). \quad (15)$$

[A szűk keresztmetszetet képező erőforrás alkalmazásának szintjét (x_1) konstansnak vesszük.]

Az 1. ábra szemléletét követve ez azt jelenti, hogy a vállalat nyereségkorlát nélkül (erőforrásai és technológiai adottságai által megszabott keretek között) a $q_1 = x_1/a_1$ termelési szintet valósítja meg. Ha ez megsértené a nyereségre adott felső korlátot, akkor hasznos terméktöbbletet nem eredményező pótlólagos erőforrás felhasználásával és az ezzel járó magasabb eszközleköttéssel lazítja a nyereségkorlátot. A pótlólagos erőforrás felhasználása költségnövekedést is eredményez, ami a nyereséget csökkenti. Ezért az eszközleköttés növelését olyan összetételben valósítja meg a vállalat, hogy az minimális költségtöbbletet eredményezzen. Ezt jelzi, hogy a (15) összefüggés szerint az eszközfelhasználási függvény parciális deriváltjainak aránya megegyezik az erőforrások arányával:

$$\frac{e_j}{e_i} = \frac{r_j}{r_i} \quad (i, j \neq 1). \quad (16)$$

A nyereségkorlátos vállalat végülis ugyanazt a termelési szintet valósítja meg, mint a korlátozás nélkül nyereséget maximáló vállalat ($q_1 = q^*$), csak éppen költségei és eszközleköttése felpumpálásával részben nyereségét csökkentve, részben a korlátot emelve éri el a nyereségre vonatkozó előírás teljesítését. A költséghígító viselkedés ezen esetben természetében is eltér a (12) összefüggés által jellemzett költséghígítástól. A (12) összefüggés esetében az erőforrásokkal torzított árak mellett gazdákodnak, hiszen a határtermelékenységeket az erőforrások torzított áraival vetik össze. A (15) összefüggésben azonban határtermelékenység egyáltalán nem is szerepel. Nincsenek olyan pozitív erőforrások, melyek mellett a nyereségérdekelte vállalat olyan összetételben használna fel erőforrásokat, mint a vizsgált szabályozott vállalat. Tehát a szabályozás torzító hatása már nem egyszerűen erőforrás értékelési torzulásként jelenik meg, hanem nyílt pazarlás képét ölti.

Az árbevételre vetített nyereség ráta korlátozásának hatását e modellben nem vizsgáljuk. Ezt inkább egy nála némileg gazdagabb, a gyártási technológia kiválasztását is leíró, lineáris programozási modell keretében elemezzük a következő részben.

Elemzés a vállalati gazdálkodás lineáris programozási modellje alapján

A termékek kibocsátása és az erőforrások felhasználása között a kapcsolatot (a folytonos termelési függvények mellett) leggyakrabban a vállalati gazdálkodás lineáris programozási modellje segítségével írják le.

E modell jellemző vonása, hogy rögzített számú termelési tevékenységet feltételez. E tevékenységeket az jellemzi, hogy alkalmazásuk mértékétől függetlenül az erőforrások felhasználása és a termelési szintek között az arányok állandóak, így a tevékenységet egyértelműen leírják azok a fajlagosok, amelyek

megadják, hogy a tevékenység egységnyi mértékű alkalmazása milyen mennyiségeket igényel az egyes erőforrásokból és milyen mennyiségeket hoz létre az egyes termékekből.

Így az erőforrások felhasználását és a termelési szinteket egyértelműen meghatározza az, hogy a szóba jöhető tevékenységek közül a vállalat melyiket és milyen mértékben alkalmazza. Ezért az adott érdekeltségi rendszernek megfelelő vállalati gazdálkodás jellemző vonásait ebben a modellben úgy ismerhetjük meg, hogy meghatározzuk, mely tevékenységek, milyen mértékű alkalmazása vezet optimális eredményre. Az elemzést ezúttal csak arra a modellre végezzük el, amely mind a termelést, mind az erőforrások felhasználását aggregáltan kezeli.

A termelési eljárások a fajlagos erőforrás-felhasználással határozhatók meg. A q_j tevékenység egy egységnyi termék előállításához a j erőforrás mennyiséget használ fel. A termék ára és a termelt mennyiség között, illetve az erőforrás költsége és a felhasznált mennyisége között a kapcsolatokat szakaszonként lineáris függvénnel közelítjük. A vállalati viselkedés jellemzőinek bemutatására elegendő, ha csak két árkategóriát különböztetünk meg. Egységnyi „olcsó” erőforrás költsége c , egységnyi „drága” erőforrás költsége pedig r , míg a „drágábban” értékesített termék eladási ára p , az olcsóbban értékesített termék eladási ára pedig t . A j tevékenység egységnyi alkalmazásával elérhető nyereség tehát $p - ca_j$, $p - ra_j$, $t - ca_j$ és $t - ra_j$ lehet, az értékesítési és beszerzési áráktól függően.

Miután a két-két árkategóriával minden szóba jöhető esetet ábrázolni szeretnénk, szerepelnie kell a veszteséges termelésnek is, így $t - ra_j$ értéke minden j esetén negatív lesz. Utalunk arra, hogy a vállalatok tényleges gazdasági gyakorlatában nincs olyan tevékenység, amely végtelen nagy nyereséget hozhatna. Azt, hogy egy tevékenység mértéke nem lehet tetszőlegesen nagy, nem feltétlenül szükséges explicit módon a modellbe foglalni, hiszen a valóságos ok mindig az erőforrások hiánya (ami megfogalmazható költségeik növekedéseként) vagy az értékesítési lehetőségek hiánya (ami viszont az értékesítési árak kellő mértékű csökkenésével is kifejezhető).

A q_j technológiához rendelhető, gazdaságilag különböző tevékenységeket a q_{j1} , q_{j2} , q_{j3} és q_{j4} változókkal, az „olcsó” erőforrásból rendelkezésre álló mennyiséget d -vel, a „drágább” áron értékesíthető termékmennyiséget g -vel jelöljük.

Ez a modell Kovács [6]-ban már szerepelt, röviden azonban megismételjük a nyereséget maximalizáló vállalat magatartásáról e modell alapján levonható következtetéseket. Ugyanis a nyereségszintre adott felső korlát mellett a nyereségmaximalizálásra törekvő vállalat gazdálkodásának jellemző vonásai a nyereségmaximalizáló gazdálkodás jellemzőivel való összehasonlítás révén tárhatóak fel.

A nyereséget maximalizáló vállalat

A vizsgált egyszerű modellben a nyereség maximalizálásának feladata az alábbiak szerint írható fel:

$$q_{ji} \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, 4)$$

$$\sum_j a_j(q_{j1} + q_{j3}) \leq d$$

$$\sum_j (q_{j1} + q_{j2}) \leq g \quad (17)$$

$$\sum_j q_{j1}(p - ca_j) + \sum_j q_{j2}(p - ra_j) + \sum_j q_{j3}(t - ca_j) + \sum_j q_{j4}(t - ra_j) \rightarrow \max$$

A feladat duálisának változóit u -val és z -vel jelöljük. u az „olcsó” erőforrás használatával elérhető nyereség szélső értéke, így az „olcsó” erőforrás felhasználásának normatív hozamaként tekinthető. Normatív hozamon ezúttal az erőforrás alternatív felhasználási módjai esetén egységnyi felhasználással elérhető legnagyobb nyereséget értjük. A lineáris programozás elméletétől függetlenül is világos, hogy az erőforrásnak csak olyan felhasználási lehetősége gazdaságos, amely mellett a tényleges és a normatív hozam megegyezik. A „drágább” áron értékesíthető termékmennyiséghez rendelt z duális változó a kedvező értékesítési lehetőség kihasználása esetén egységnyi terméken elérhető nyereség szélső értéke. Az értékesítési lehetőség kihasználásához is rendelkezünk normatív hozamot, amelyen az alternatív termelési eljárások esetén egységnyi termék értékesítésével elérhető legnagyobb nyereséget értjük. Világos, hogy az értékesítési lehetőség kihasználása szintén csak akkor gazdaságos, ha a tényleges és a normatív hozam megegyezik. Így a duális az alábbi lineáris programozási feladat:

$$\begin{aligned} u, z &\geq 0 \\ ua_j + z &\geq p - ca_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ z &\geq p - ra_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ ua_j &\geq t - ca_j \quad (j = 1, \dots, n) \\ ud + zg &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (18)$$

A feltételi egyenlőtlenségek azt az immár nyilvánvaló tényt fejezik ki, hogy az egyes tevékenységek tényleges hozama legkedvezőbb esetben eléri normatív hozamukat, de nem lehet annál nagyobb. A normatív hozam az „olcsó” erőforrás felhasználása és a „kedvező” értékesítési lehetőség kihasználása normatív hozamainak összege. Értelemszerűen mindkét fajta hozam csak a q_{j1} tevékenységek esetén értelmezhető, míg a q_{j2} tevékenységek esetén csak az értékesítési lehetőségek kihasználásának, a q_{j3} tevékenységek esetén pedig csak az „olcsó” erőforrás felhasználásának normatív hozamát kell a tevékenységnek fedeznie.

Az $ua_j + z \geq p - ca_j$ duális feltételt a $ca_j + ua_j \geq p - z$ formában írva, az általánosítottan értelmezett költségnövekmény és a bevételnövekmény szerepel az egyenlőtlenség bal illetve jobb oldalán. A költségnövekmény a ca_j közvetlen és az ua_j közvetett költségnövekmény összege, a bevételnövekmény pedig a p közvetlen bevétel és a z közvetett bevételkiesés különbsége.

A nyereséget maximalizáló (optimális) megoldás esetén az alkalmazandó tevékenységekre a fenti egyenlőtlenség egyenlőség formájában teljesül, így a bevételnövekmény egyenlő a költségnövekménnyel, a nem alkalmazandó tevékenységekre viszont a költségnövekmény nagyobb, mint a bevételnövekmény. A nyereségmaximalizáló vállalat ebben a modellben legfeljebb két tevékenységet alkalmaz. Egy tevékenység alkalmazására kerül sor akkor, ha valamennyi technológia esetén mind $p - ra_j$, mind pedig $t - ca_j$ negatív, hiszen ekkor az egyes tevékenységekhez tartozó duális feltételek nem teljesülhetnek

egyenlőség formájában. (Természetesen ha $p - ca_j$ is negatív valamennyi j esetén, azaz minden technológia veszteséges, a vállalat egyetlen tevékenységet sem alkalmaz, ha a nyereség maximalizálása a célja.)

Ha a nyereség maximalizálásához egyetlen tevékenység alkalmazása vezet, ez a tevékenység az lesz, amelyre $(p - ca_j)/a_j$ érték, az egységnyi erőforrás felhasználásra jutó nyereség, a legnagyobb, tehát amelyhez a legkisebb a_j tartozik. Alkalmazásának mértéke pedig d/a_j és g értéke közül a kisebbik. Ha d/a_j a kisebb, a nyereség szintjét az erőforrás rendelkezésre álló mennyisége, míg ha g kisebb, a kedvező értékesítési lehetőségek szabják meg.

Ha a $p - ra_j$, illetve a $t - ca_j$ értékek között van pozitív, a nyereségmaximalizálás érdekében a fenti módon kiválasztott tevékenység mellett még egy tevékenység alkalmazására is sor kerülhet. Nevezetesen ha d/a_j kisebb, mint g , a vállalat akkor alkalmaz még egy tevékenységet, ha a $p - ra_j$ értékek között van pozitív, míg az ellenkező esetben a $t - ca_j$ értékek között kell pozitívnak lennie. Ha ugyanis az olcsó erőforráskorlát már kimerült, csak olyan tevékenységek jöhetnek szóba, amelyek esetén az egységnyi erőforrás költsége r , míg ha a kedvező értékesítési lehetőség merült ki, csak t áron való értékesítés választható.

Nyeréségérdekeltség nyereségsszint korlát mellett

Bár a nyereség/árbevétel mutatóra adott felső korlát figyelembevételével a feltételek közé egy nem lineáris feltétel is kerül, könnyű belátni, hogy a feladat továbbra is vizsgálható lineáris programozási keretek között, hiszen ekvivalens feladathoz jutunk, ha a feltételek között azt írjuk elő, hogy a nyereség nem lehet nagyobb az árbevételnek egy adott állandóval (a felső korlattal) szorzott értékénél. Tehát ebben a modellben a

$$\frac{\text{nyereség}}{\text{árbevétel}} = \frac{\sum_j [q_{j1}(p - ca_j) + q_{j2}(p - ra_j) + q_{j3}(t - ca_j) + q_{j4}(t - ra_j)]c_0}{\sum_j [pq_{j1} + pq_{j2} + tq_{j3} + tq_{j4}]} \leq k \quad (19)$$

feltétel helyettesíthető a

$$\sum_j [q_{j1}(p - ca_j - kp) + q_{j2}(p - ra_j - kp) + q_{j3}(t - ca_j - kt) + q_{j4}(t - ra_j - kt)] \leq c_0 \quad (20)$$

feltétellel. k a nyereség/árbevétel arányra adott felső korlátot, c_0 pedig az állandó költségek értékét jelöli.

Az egyes tevékenységek alkalmazásával szemben ebben az érdekeltségi rendszerben támasztott normatív követelményeket tehát a fenti feltétellel kibővített feladat duálisa alapján fogalmazhatjuk meg. A nyereségsszint korlátjához rendelt duális változót y -nal jelölve, a duális feladat az alábbi lesz:

$$\begin{aligned} u &\geq 0 \quad z \geq 0 \quad y \geq 0 \\ ua_j + z + y(p - ca_j - kp) &\geq p - ca_j \\ z + y(p - ra_j - kp) &\geq p - ra_j \end{aligned} \quad (21)$$

$$ua_j + y(t - ca_j - kt) \geq t - ca_j$$

$$y(t - ra_j - kt) \geq t - ra_j$$

$$u + zg + yc_0 \rightarrow \min.$$

Ha a nyereségszint korlátja effektív, akkor y értéke pozitív lesz. Ebből következik, hogy az egyes tevékenységekkel szemben támasztott normatív hozamkövetelmény attól függően változik, hogy a tevékenység fajlagos nyereségszint mutatója — a tevékenység egységnyi alkalmazása esetén az árbevételre jutó bruttó nyereség — nagyobb-e, vagy kisebb, mint a megadott nyereségszintkorlát. Ha a fajlagos nyereségszint a k korlátnál nagyobb, akkor a nyereségszint feltételhez rendelt duális változó együtthatója pozitív lesz és így a hozamkövetelmény szigorúbb, mint ami a nyereség maximalizálása esetén volna, ellenkező esetben viszont a megfelelő együttható negatív, és így a hozamkövetelmény kevésbé szigorú. A kedvező jövedelmezőségű tevékenységekre ez a rendszer „adót” vet ki, míg a kedvezőtlen jövedelmezőségű tevékenységeket „támogatásban” részesíti. Ez a támogatás teszi lehetővé, hogy a duális feladat által megfogalmazott gazdaságossági követelmények mellett a vállalatnak érdemes legyen valamely veszteséges tevékenységet is alkalmaznia, amelyet a nyereség maximalizálása esetén értelemszerűen már nem alkalmazna.

Ha a nyereséget maximalizáló vállalat csak egyetlen tevékenységet alkalmaz — amikor tehát csak az olcsón beszerezett erőforrással termelt és kedvező áron értékesített termék termelése gazdaságos — akkor a nyereségszint korlát mellett a nyereség maximalizálása érdekében valamelyik veszteséges tevékenységet is alkalmaznia kell. Miután ugyanis a nyereségszintet korlátozó feltételnek egyenlőség formájában kell teljesülnie, az optimális megoldás szerint az olcsó erőforrásnak vagy a kedvező értékesítésnek a korlátját kimerítő nyereséges tevékenység mellett legalább még egy további tevékenységet alkalmaznia kell. Hasonlóan látható be, hogy ha a nyereséget maximalizáló megoldásban a vállalat két tevékenységet alkalmaz — tehát mind az olcsó erőforrást, mind a kedvező értékesítési lehetőségeket kimeríti —, a nyereségszint korlát effektivitása miatt egy további, már értelemszerűen veszteséges tevékenységet is alkalmaznia kell. Látható tehát, hogy a nyereségszintre vonatkozó korlát mellett a vállalat a gazdálkodás lineáris programozási modelljében is többet termel, jobban kihasználja értékesítési lehetőségeit, több erőforrást használ fel, mint tiszta nyereségmaximalizálás esetén.

Miután a nyereségszint korláthoz pozitív duális változó érték tartozik, ebben a modellben is nő a nyereség, ha ez a korlát növelhető. Így ha a vállalatnak módjában áll ezt a korlátot növelnie — pl. a kevésbé jövedelmező export elhagyásával —, törekedni fog erre. Megjegyezzük egyébként, hogy felírható egy olyan programozási feladat is, amelyben maga a nyereségszint korlát is változó és függ az exportlehetőségek kihasználásától, ekkor azonban a feltételek közé nemlineáris feltétel is kerül. Gyakorlati szempontból ezért sokszor egyszerűbb ezt a feladatot is egy olyan iterációs eljárás révén megoldani, amely során az egyes iterációs lépésekben rögzített korlátérték mellett számítjuk ki az elérhető maximális nyereséget.

Az a megállapítás, hogy a nyereség a korlát bővítésével növelhető, csak az erőforrás és értékesítés korlátainak adott szintű kimerítése esetén igaz, tehát gyakorlati problémák esetén nem biztos, hogy a legnagyobb nyereség a legnagyobb olyan nyereségszint-korlát mellett adódik, amelyet a modellben gene-

rálni lehet. Ha például a belföldi értékesítés korlátozott, a nyereség tömege a kevésbé jövedelmező export növelésével még akkor is növelhető, ha emiatt a belföldi értékesítés során realizált nyereség kisebb lesz.

Az állandó költségekkel való takarékoskodás tekintetében ebben a modellben is ugyanarra a következtetésre juthatunk, mint a folytonos modellben, tehát a vállalat kevésbé érdekelt az állandó költségek csökkentésében, mint tiszta nyereségérdekeltség esetén, de nem állítható, hogy érdekelt volna növelésükben.¹ Ezt igazolandó gondoljuk végig a következőket. A nyereségszint korlát átrendezésével kapott feltétel jobb oldalán a vállalati állandó költségek összege áll, így a megfelelő duális változó értéke mutatja, hogyan változik a célfüggvény értéke az állandó költségek változásakor. A vizsgált lineáris programozási modell célfüggvényében a vállalati bruttó nyereség (fedezet) értéke szerepel, így az állandó költségek növelése $(y - 1)$ értékkel változtatja a vállalati nyereség értékét, szemben a tiszta nyereségmaximalizálással, amikor az állandó költségek egységnyi növelése értelemszerűen a nyereség egységnyi csökkenésére vezet. Azt már megmutattuk, hogy y pozitív, de az is belátható, hogy értéke 1-nél kisebb.

A (21) duális feladatban a veszteséges tevékenységre felírt

$$y(t - ra_j - kt) \geq t - ra_j$$

feltételt

$$(y - 1)(t - ra_j) \geq ykt$$

formára átrendezve, $(t - ra_j) < 0$ és $ykt > 0$ alapján következik, hogy $(y - 1) < 0$ és így $y < 1$.

Az állandó költségek növelése tehát ebben a modellben is csökkenti a nyereség értékét, a csökkenés mértéke azonban kisebb, mint amekkora a nyereség maximalizálása esetén volna.

Korábban már említettük, hogy a nyereséget maximalizáló vállalat ebben az egyszerű modellben mindig azt a termelési eljárást választja, amelynek fajlagos erőforrásigénye, és így költsége a legkisebb, hiszen a duális feladat feltételei között az ilyen tevékenységekhez tartozó bal oldal mindig kisebb, míg a jobb oldal mindig nagyobb lesz, mint a nagyobb fajlagos erőforrásigényű termelési eljárások esetén.

A nyereségszint korlátozása mellett már nem feltétlenül van ez így, hiszen a kérdéses korláthoz tartozó duálváltozó együtthatója éppen a legkisebb fajlagos erőforrásigényű termelési eljárás esetén lesz a legnagyobb, és így bizonyos duálváltozó értékek esetén előfordulhat, hogy egy nagyobb fajlagos erőforrásigényű tevékenység mellett éri el a tényleges hozam a normatív hozamkövetelményt (amely természetesen már a nyereségszint-korlát túllépése miatti „adó” is magában foglalja). Az a tény, hogy ez az adó annál nagyobb, minél jövedelmezőbb egy tevékenység, előnyben részesíti a kevésbé gazdaságos tevékenységeket a gazdaságosabbakkal szemben, és a preferencia mértékétől függően nagyobb fajlagos erőforrásigényű és így nagyobb változó költségszintű tevékenység alkalmazására vezethet.

Az export jövedelmezőségéhez kötött belföldi árszabályozás konkrét esetében még határozottabban kimutatható az érdekeltség a változó költségek hígításá-

¹ Erre a tényre Hüttl Antónia hívta fel figyelmünket, és a bizonyítás gondolatmenete is tőle származik.

ban. Ha ugyanis a belföldön értékesíthető mennyiség az adott kapacitáskorlátok mellett nem függ az eladási ártól, és így a vállalat a kereslet csökkenésének veszélye nélkül növelheti belföldi árait az export jövedelmezősége által megengedett mértékben, nyilván nagyobb nyereséget realizál, ha növeli a belföldi termelés folyó költségeit.

A nyereségszintre adott felső korlát mellett a nyereség maximalizálására törekvő vállalat magatartásáról lényegében hasonló jellegű következtetések vonhatók le a vállalati gazdálkodás olyan lineáris programozási modellje alapján is, amelyben a termelést és az erőforrások felhasználását már nem aggregáltan, hanem fajtankénti bontásban vesszük figyelembe. Az elemzés a [6]-ban alkalmazotthoz hasonló módon végezhető el, miután azonban nem vezet közgazdaságilag lényegesnek tetsző további következtetésekre, a részletes vizsgálatról eltekintünk. Ugyancsak eltekintünk attól, hogy lineáris programozási modellek alapján összehasonlítsuk a nyereség/árbevétel mutató korlátozásának hatását a nyereség/eszköz mutatóéval, ez az összehasonlítás ugyanis nem ad lényeges új információkat a termelési függvényt alkalmazó modellhez képest.

(Beérkezett: 1983. szeptember 22-én.)

IRODALOM

1. ÁBEL, I.: A külkereskedelmi árakhoz igazodó árképzés és a vállalati nyereségérdekeltség. *Közgazdasági Szemle*, 1980. 854–870. o.
2. AVERCH, H.—JOHNSON, L.: Behavior of the Firm under Regulatory Constraints. *American Economic Review*, 1962. pp. 1053–1069.
3. BAILEY, E.: *Economic Theory of Regulatory Constraints*. Lexington, 1973. Lexington Books.
4. BAUMOL, W. J.—KLEVORICK, A.: Input Choices and Rate of Return Regulation: An Overview of the Discussion. *Bell Journal of Economics and Management Sciences*, 1970. pp. 162–190.
5. KENNEDY, T. E.: The Regulated Firm with a Fixed Proportion Production Function. *American Economic Review*, 1977. pp. 968–971.
6. KOVÁCS, Á.: *Nyerességérdekeltség és vállalati magatartás*. Budapest, 1978. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
7. KOVÁCS, Á.: Vállalati célok, vállalati viselkedés. *Sigma*, 1974. 75–88. o.
8. MEGYERI, E.: A „versenyárrendszer” és a vállalati nyereségérdekeltség. *Közgazdasági Szemle*, 1980. 842–853. o.
9. ZAJAC, E. E.: Lagrange Multiplier Values at Constrained Optima. *Journal of Economic Theory* 1972. pp. 125–131.

RATE-OF-RETURN REGULATION IN ALTERNATIVE MODELS OF FIRM BEHAVIOUR

The study examines the characteristics of enterprise behaviour under rate-of-return regulation. Depending on whether the constraint relates to the ratio of profit to income or to assets, essentially different motivations to inefficient use of inputs are found. Beside the classical model of the firm which is based on production function, a linear programming model admitting technological choice is also used and the behavioural characteristics related to inefficient use of resources are presented.

ЗАИНТЕРЕСОВАННОСТЬ В ПРИБЫЛИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ УРОВНЯ ПРИБЫЛИ

В статье анализируются особенности поведения предприятий в условиях конкурсного ценообразования, ограниченном регулировании и заинтересованности в прибыли. В зависимости от того, ограничивается ли уровень прибыли относительно выручки или относительно фондов, имеет место существенно различная заинтересованность в разжижении затрат. Наряду с классической моделью предприятия, основанной на производственной функции, используется и линейная модель программирования, описывающая выбор между технологиями, и показываются особенности поведения, связанные с разжижением расходов и заменой ресурсов.

Egy terjedési típusú osztott késleltetésű modell

Bevezetés

Ebben a cikkben¹ egy új típusú osztott késleltetésű modellt mutatunk be. Az osztott késleltetésű modellek legfőbb sajátossága az, hogy a gazdasági változók közti hatásmechanizmusokban az ugrásszerűen változó körülményekhez való igazodást több időszakra elosztva, egy bizonyos tehetetlenséggel veszik figyelembe, ugyanakkor erre az igazodásra az ökonometriai modellekhez alkalmazható becslési eljárást is adnak.

Az osztott késleltetésű modellek hagyományos megalapozása [3] általában a viselkedésre vonatkozó egyszerű makroegyenletekre épül, ehhez képest az itt vizsgált modell annyival próbál többet nyújtani, hogy vissza megy a mikro-szintű folyamatokig és onnan épít fel makromodellezéshez alkalmazható osztott késleltetésű modellt.

Az egész eljárás a korábban részletesen elemzett „Hólabda” folyamatra épül [4]. Ennek lényege, hogy igen egyszerű és triviális terjedési szabályt feltételezve vizsgáltuk, hogy hogyan terjednek hírek, információk, fogyasztási szokások egy zárt közegben. A terjedési folyamat rekurzív egyenletére a

$$(1) \quad \Delta s_t = s_{t+1} - s_t = s_t - \frac{s_t^2}{N} = s_t \left(1 - \frac{s_t}{N}\right)$$

differenciaegyenlet adódott, ahol s_t azok számát jelöli, akik a t -edik időszak végéig megkapták a hírt, információt stb. . . ., N pedig a „közeg” (város, ország stb. . .) lakóinak teljes számát. Ennél a formulánál az s_t -k várható értékeket jelölnek; a megfelelő eloszlás ugyanakkor minden idő-intervallumra explicite megadható [4]. A „Hólabda” folyamatot leíró cikkben meghatároztuk (1) megoldását is, ami trendfüggvényként is használható:

$$(2) \quad s_t = N \left[1 - \left(1 - \frac{s_0}{N} \right)^{2t} \right],$$

ahol s_0 azok számát jelenti, akik kívülről megkapták a hírt és elkezdtek terjeszteni. Ez az egyenlet a logisztikus függvényhez hasonló görbét ír le; valószínűségelméleti megalapozottsága folytán alkalmas konfidenciasáv meghatározására, ugyanakkor paraméterbecslése az (1) egyenletből kiindulva egyszerű lineáris regressziószámítással megvalósítható. Az itt vizsgálandó osztott késleltetésű modell ezekből az eredményekből indul ki.

A cikk első fejezete az osztott késleltetésű modell származtatását mutatja be, a második fejezetben a h -eloszlás (Hólabda eloszlás) néhány tulajdonságát vizs-

¹ A cikk egy OT TgI kiadvány [5] rövidített változata.

gáljuk meg. A harmadik fejezetben ismertetjük a paraméterek becslésére javasolt eljárást és azokat a Monte-Carlo kísérleteket, amelyekkel a becslési eljárás egyes tulajdonságait teszteltük. A befejező, negyedik fejezet a modell egy lehetséges alkalmazására mutat példát, amely az állami- és szövetkezeti iparban foglalkoztatottak létszámának a bérarányok eltéréseihez való igazodását próbálja leírni.

1. Egy terjedési-típusú osztott késleltetésű modell

A hagyományos keretek között az osztott késleltetésű modelleket az „adaptív várakozás” vagy a „részleges igazodás” hipotéziseiből származtatják [3]. Megközelítésünk leglényegesebb jellemzője az, hogy más kiinduló pontból jut el osztott késleltetésű modellhez, azaz terjedési folyamatot feltételez a gazdaság szereplő között. Kétségtelen, hogy a részleges alkalmazkodás hipotézise hasonló folyamatot feltételez, mindazonáltal az ilyen magatartás lényegét a diffúziós modell jobban megvilágítja.

Releváns példaként tételezzünk fel egyszerű lineáris kapcsolatot egy adott áru ára és fogyasztása között:

$$q = \alpha \cdot p + u.$$

Tételezzük fel, hogy a fogyasztók nem igazítják magatartásukat egy exogén árváltozáshoz ugyanabban az időszakban, és azok száma, akik már megváltoztatták viselkedésüket a $t + k$ időszakig valószínűségeloszlással fejezhető ki.

Ha a teljes népesség száma N , és s_k azok száma, akik magatartásukat a k -ik időszakig (azaz legkésőbb k időszakkal az adott árváltozás után) módosították, akkor

$$s_k = f\left(\frac{s_0}{N}, k\right)$$

írható fel.

Mivel a fogyasztói szokások terjedési folyamatként is felfoghatók (terjed a hír a tényleges vagy várt árváltozásokról, terjednek a helyettesítő termékek, illetve azok használata stb. . . .), okunk van arra, hogy erre a folyamatra a Hólabda függvényt alkalmazzuk:

$$s_k = N \left[1 - \left(1 - \frac{s_0}{N} \right)^{2^k} \right].$$

Itt s_i/N -t $\tilde{s}_i$ -vel helyettesítve és bevezetve az $1 - \tilde{s}_0 = \lambda$ jelölést (hiszen ez rögzített, exogén paraméterként tekinthető):

$$(3) \quad \tilde{s}_k = 1 - \lambda^{2^k},$$

és $0 < \lambda < 1$, mivel $\lambda = 1 - s_0/N$ az eredeti modell jelöléseivel és $0 < s_0 < N$ természetes összefüggés volt a paraméterek közt.

Vizsgáljuk most meg a fogyasztást a különböző egymást követő időszakokban.

$$(4) \quad q(1) = q(0) + \tilde{s}_0 \alpha [p(1) - p(0)].$$

A (4) egyenlet azt mondja, hogy az 1. időszak fogyasztása egyenlő a korábbi

fogyasztással + a teljes árhatás ($\alpha[p(1) - p(0)]$) és $\tilde{s}_0$ szorzatával, ahol $\tilde{s}_0$ a népességnek az a része, amely magatartását már a kezdeti időszakban igazította az új árakhoz.

Először tekintsünk egy egyszerű árváltozás-típust: $t(0)$ -ról $t(1)$ -re az ár (Δp)-vel változik, de az új árszínvonal változatlan marad a következő időszakokban. (Ez az ármozgástípus meglehetősen jellemző a szocialista gazdaságokra.)

Ekkor

$$p(1) = p(2) = \dots = p(k) = \dots = p(K)$$

$$\Delta p = p(1) - p(0) = p(2) - p(0) = \dots = p(K) - p(0)$$

és így

$$q(k) = q(0) + \tilde{s}_k \cdot \alpha \cdot \Delta p,$$

mivel $\tilde{s}_k$ azon fogyasztók arányát jelenti, akik a k -időszak végéig már módosították magatartásukat. Így ez az alábbi egyszerű eredményhez vezet:

$$(5) \quad q(k) = q(0) + \alpha \Delta p (1 - \lambda^{2k}),$$

ami megmutatja, hogy mi lesz egy egyszeri árváltozás teljes hatása, és ez az alapja az osztott késleltetésű modellnek.

A fent vázolt egyszerű igazodási modell egyszeri árváltozást feltételez. Általában túlságosan erős korlátozó feltétel hosszabb időszakban változatlan árat feltételezni. A következőkben a fenti feltételt egy reálisabban helyettesítjük, mely árváltozást enged meg az egész időszakban és feltételezi, hogy minden egyes árváltozás egy különálló Hólabda folyamatot indít el. Azaz minden egyes időszakban egy új igazodási folyamat indul el a megváltozott feltételeknek megfelelően, és a különböző időpontokban induló igazodási folyamatok paraméterei egyenlők. Így, míg a fentebb vizsgált egyszerű modell rögzített célhoz való alkalmazkodást ír le, a jelenlegi változat úgy interpretálható, mint igazodás egy mozgó célponthoz.

Az elgondolás, ahogy makroszintű osztott késleltetésű modell konstruálható, az 1. táblázat sémájában látható.

1. táblázat

A különböző időpontokban induló terjedési folyamatok együttes sémája

$t(0)$	$t(1)$	$t(2)$	$t(3)$	...	$t(i)$	...
$\alpha \Delta p \tilde{s}_0$	$\alpha \Delta p \tilde{s}_1$	$\alpha \Delta p \tilde{s}_2$	$\alpha \Delta p \tilde{s}_3$	...	$\alpha \Delta p \tilde{s}_i$	...
0	$\alpha \Delta p(1) \tilde{s}_0$	$\alpha \Delta p(1) \tilde{s}_1$	$\alpha \Delta p(1) \tilde{s}_2$	...	$\alpha \Delta p(1) \tilde{s}_{i-1}$	...
0	0	$\alpha \Delta p(2) \tilde{s}_0$	$\alpha \Delta p(2) \tilde{s}_1$	...	$\alpha \Delta p(2) \tilde{s}_{i-2}$	...
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
0	0	0	0	...	$\alpha \Delta p(i) \tilde{s}_0$	...

Az 1. táblázat sorai azt a hatást mutatják, amelyet egy adott árváltozás implicál a későbbi időintervallumokra (egyszerű igazodási folyamat). Pl. az első sor azt jelenti, hogy a 0-ik időszakban volt egy árváltozás (Δp) és az 1. időszak végéig a Δp árváltozás eredményeként $\alpha \Delta p \tilde{s}_1$ elmozdulás lesz a fogyasztásban,

a 2. időszak végéig ennek az átváltozásnak a teljes hatása $\alpha \Delta p \tilde{s}_2$ lesz stb. . . . A második sor azt mutatja, hogy az 1-ik időszakban egy újabb átváltozás következett be ($\Delta p(1)$) és ebben a sorban ennek hatásai figyelhetők meg.

Hasonlóan értelmezhető a táblázat többi sora is. Azt azonban, hogy egy időpontig a különböző korábbi időszakokban végbement átváltozások milyen keresletnövelő hatást fejtettek ki *összesen* a tábla oszlopai mutatják. Tekintsük példaként az i -ik oszlopot:

$$(6) \quad q(i) - q(0) = \alpha \Delta p \tilde{s}_i + \alpha \Delta p(1) \tilde{s}_{i-1} + \dots + \alpha \Delta p(i) \tilde{s}_0 + \dots,$$

vagy átrendezve:

$$q(i) = q(0) + \alpha \Delta p(i) \tilde{s}_0 + \alpha \Delta p(i-1) \tilde{s}_1 + \dots + \alpha \Delta p \tilde{s}_i.$$

(Ennél a felírásnál feltételeztük, hogy i -nél nagyobb késleltetés a folyamatban nem létezik.) Mivel az $\tilde{s}_i - k$ időben állandó paraméterek, az egyenletet az időváltozó egyszerű eltolásával az osztott késleltetésű modellek felírásánál szokásos alakra lehet hozni:

$$q(0) = q(-i) + \alpha [\Delta p \tilde{s}_0 + \Delta p(-1) \tilde{s}_1 + \dots + \Delta p(-i) \tilde{s}_i]$$

vagy feloldva a véges késleltetésre tett feltételt:

$$\begin{aligned} q(0) = q &= \alpha [\Delta p \tilde{s}_0 + \Delta p(-1) \tilde{s}_1 + \dots + \Delta p(-i) \tilde{s}_i + \dots] = \\ &= \alpha [(p(0) - p(-1)) \tilde{s}_0 + (p(-1) - p(-2)) \tilde{s}_1 + \dots + (p(-i) - p(-i-1)) \tilde{s}_i + \\ &\quad + \dots] = \alpha p(0) \tilde{s}_0 + \alpha p(-1) [\tilde{s}_1 - \tilde{s}_0] + \alpha p(-2) [\tilde{s}_2 - \tilde{s}_1] + \dots + \\ &\quad + \alpha p(-i) [\tilde{s}_i - \tilde{s}_{i-1}] + \dots \end{aligned}$$

Ismét feltételezve $\tilde{s}_i$ -kre a hólabda modell érvényességét és bevezetve a $\lambda = 1 - \tilde{s}_0$ helyettesítést

$$\begin{aligned} q &= \alpha p(0)(1 - \lambda) + \alpha p(-1) [\lambda^{2^1} - \lambda^{2^1}] + \alpha p(-2) [\lambda^{2^1} - \lambda^{2^1}] + \dots = \\ &= \alpha p(1 - \lambda) + \alpha \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) p(-i), \end{aligned}$$

és innen

$$(7) \quad q = \alpha \cdot p(1 - \lambda) + \alpha \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) p(-i)$$

alakhoz jutunk, ami egy egyparaméteres, végtelen sok késleltetést tartalmazó osztott késleltetésű modell. Ha a késleltetett változó együtthatóit (súlyparamétereit)

$$w_i = \frac{1}{\lambda} (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i})$$

vizsgáljuk $i = 1, 2 \dots \infty$ esetre, azt tapasztaljuk, hogy w_i -ik *formailag* kielégítik a valószínűségeloszlás kritériumát, így ezt h -eloszlásnak fogjuk nevezni.²

² A h -eloszlás elnevezés a Hólabda szóból ered.

2. A h -eloszlás néhány tulajdonsága

Ebben a fejezetben a fent definiált h -eloszlás formális tulajdonságait vizsgáljuk meg.

A w_i -k pozitivitása trivális, hiszen $w_i = (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i})/\lambda$ minden $i = 1, 2, \dots, \infty$ -re, és $0 < \lambda < 1$, így $w_i > 0$ adódik.

Egyszerűen belátható az, hogy a w_i -k alkothatnak valószínűségeloszlást, hiszen az összegük 1:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} w_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2^{i-1}} - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2^i} = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=2}^{\infty} \lambda^{2^{i-1}} - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2^i} \right] = 1 + \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2^i} \right) = 1. \end{aligned}$$

Az eloszlás várható értéke az alábbi módon adódik:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} i w_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} i (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) = \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{i=1}^{\infty} i \lambda^{2^{i-1}} - \sum_{i=1}^{\infty} i \lambda^{2^i} \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=2}^{\infty} i \lambda^{2^{i-1}} - \sum_{i=1}^{\infty} i \lambda^{2^i} \right] = \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} (i+1) \lambda^{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} i \lambda^{2^i} \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{2^i} \right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2^i}. \end{aligned}$$

A második momentum hasonlóan kapható:

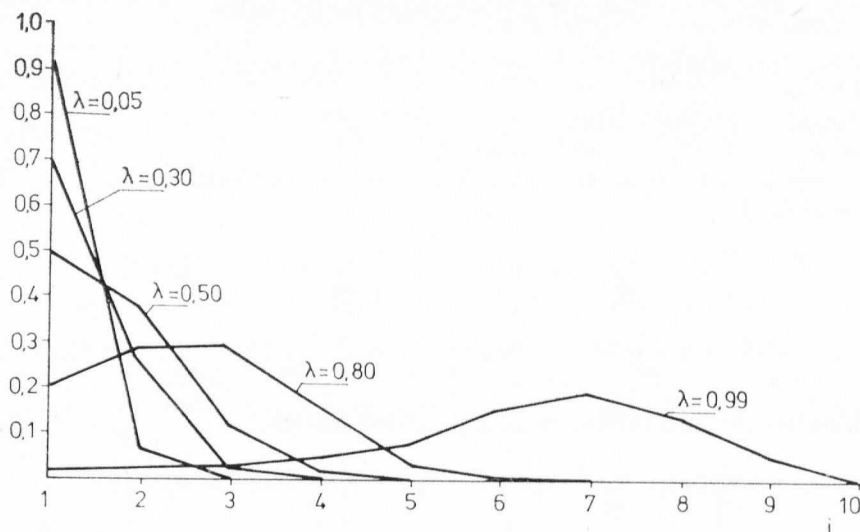
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 w_i &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} i^2 (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) = \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=2}^{\infty} i^2 \lambda^{2^{i-1}} - \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \lambda^{2^i} \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)^2 \lambda^{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \lambda^{2^i} \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} (2i+1) \lambda^{2^i} \right] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) \lambda^{2^i}. \end{aligned}$$

A szórás az alábbi lesz:

$$\text{VAR} = \sqrt{\frac{1}{\lambda} \left[\sum_{i=1}^{\infty} (2i+1) \lambda^{2^i} - \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2^i} \right)^2 \right]}.$$

Mint a fenti formulák mutatják, az eloszlás momentumait végtelen sorok összegével fejeztük ki, s mivel nem sikerült analitikus formákat kapni, ezért a momentumokat, valamint az eloszlás értékeit különböző λ -k esetére a 2. táblázatban adjuk meg.

A 2. táblázatban a SUMMA egy ellenőrző sor, amely a csonkítás hatását teszteli, a VÁRH.ÉRT., a SZÓR.NÉGYZ. és a SZÓRÁS pedig a várható értéket, a szórásnégyzetet és a szórást jelenti. Az 1. ábra különböző jellemző λ -k mellett mutatja az eloszlást. Hangsúlyozni kell, hogy a h -eloszlás egyparaméteres eloszlás, de különböző λ -k mellett egészen eltérő görbék kaphatók. Ez az eloszlásnak előnyös tulajdonsága, mivel ilyen különböző típusokat csak több-



1. ábra. A h -eloszlás grafikonja néhány jellegzetes λ érték esetén

paraméteres eloszlások voltak képesek osztott késleltetésű modellekhez generálni (*Solow* Pascal-eloszlása vagy *Almon* polinomális függvényei).

Továbbmenve az 1. ábra azt is mutatja, hogy kis λ -k mellett (ami azt jelenti, hogy $\tilde{s}_0$ közel van az 1-hez) az eloszlás koncentráltabb mint nagy λ -kra. Ez utóbbi eset az, amikor a népesség jelentős hányada igazítja fogyasztását az új árakhoz az első időszakban, ennél fogva λ a terjedési sebesség, illetve az intenzitás inverz mutatójának tekinthető.

3. Becslés és Monte Carlo kísérletek

Térjünk most át az osztott késleltetésű modell becslésére. Tekintsük a (7) egyenletet:

$$(8) \quad q = \alpha p(0)(1 - \lambda) + \alpha p(-1)(\lambda - \lambda^2) + \alpha p(-2)(\lambda^2 - \lambda^4) + \dots + u$$

$$q = \alpha [p(0) - \lambda \Delta p(0) - \lambda^2 \Delta p(-1) - \lambda^4 \Delta p(-2) - \dots] + u$$

ahol u -ra a standard hipotézisek érvényesek:

$$E(u) = 0, \quad E(uu') = \sigma^2 I.$$

Meg kell jegyezni, hogy (8) alkalmasabb forma a becslésre, mint (7), mivel jobb oldalán p differenciáinak késleltetett értékei szerepelnek magyarázó változóként, míg (7)-ben p és késleltettjei, ezért a két eljárás erősen különböző a multikollinearitás³ szempontjából. Mindazonáltal (8) becslése több problémát is fel-

³ Bizonyítható, hogy ha egy idősor és késleltetett sora közt ρ korreláció van, akkor a két említett sor differenciái közti korreláció $\rho_1 = (\rho - 1)/2$ lesz. Minthogy makroökonometria i idősorok esetén általában $0,5 < \rho < 1$, ρ_1 a $(-0,25, 0)$ intervallumban helyezkedik el és így $|\rho_1| < |\rho|$, ami fontos a multikollinearitás okozta károk elkerülése végett.

2. táblázat
A h-eloszlás táblázata

$\lambda =$	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
I = 1	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
I = 2	0,0499	0,0990	0,1466	0,1920	0,2344	0,2730	0,3071	0,3360	0,3589	0,3750
I = 3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0268	0,0422	0,0624	0,0874	0,1172
I = 4	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016	0,0037	0,0078
I = 5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Summa	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Várh. ért.	1,0501	1,1010	1,1534	1,2080	1,2657	1,3272	1,3935	1,4656	1,5449	1,6328
Szór. négyz.	0,0479	0,0928	0,1366	0,1808	0,2266	0,2750	0,3270	0,3834	0,4452	0,5138
Szórás	0,2188	0,3046	0,3696	0,4252	0,4760	0,5244	0,5718	0,6192	0,6673	0,7168

$\lambda =$	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	0,99
I = 1	0,4500	0,4000	0,3500	0,3000	0,2500	0,2000	0,1500	0,1000	0,0500	0,0100
I = 2	0,3836	0,3840	0,3754	0,3570	0,3281	0,2880	0,2359	0,1710	0,0926	0,0197
I = 3	0,1512	0,1880	0,2256	0,2606	0,2884	0,3023	0,2935	0,2507	0,1590	0,0382
I = 4	0,0151	0,0275	0,0475	0,0776	0,1201	0,1745	0,2332	0,2724	0,2350	0,0720
I = 5	0,0001	0,0005	0,0016	0,0047	0,0132	0,0342	0,0809	0,1677	0,2594	0,1278
I = 6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0065	0,0368	0,1644	0,2014
I = 7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0013	0,0380	0,2519
I = 8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0015	0,2020
I = 9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0712
I = 10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0058
I = 11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
I = 15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Summa	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
Várh. ért.	1,7317	1,8445	1,9752	2,1301	2,3189	2,5579	2,8786	3,3526	4,2139	6,3777
Szór. négyz.	0,5907	0,6781	0,7789	0,8970	1,0384	1,2128	1,4365	1,7426	2,2167	2,9774
Szórás	0,7686	0,8235	0,8826	0,9471	1,0190	1,1013	1,1985	1,3201	1,4888	1,7255

vet, ilyenek pl.: α -ban és λ -ban nemlineáris a modell (a két paraméter szorzódik); a λ hatványai által a modellre kényszerített nemlineáris korlátok; és végül a késleltetések és a magyarázó változók végtelen száma. Másik oldalról (8) előnyös tulajdonsága, hogy λ korlátos intervallumban helyezkedik el. Ezért az alábbi egyszerű „rács-technikát” alkalmaztuk:

Legyen $t(\lambda)$ a λ -nak a függvénye, melyet így definiálunk:

$$t(\lambda) = p(0) - \lambda \Delta p(0) - \lambda^2 \Delta p(-1) - \lambda^4 \Delta p(-2) - \dots$$

Számítsuk ki $t(\lambda)$ -t különböző λ -k mellett. Minden egyes λ és $t(\lambda)$ értékhez a klasszikus legkisebb négyzetek módszerével becsülhető $\hat{\alpha}$ a

$$q = \alpha t(\lambda) + u$$

egyenletből. Mivel λ lehetséges megoldásai jól definiált intervallumban helyezkednek el ($0 < \lambda < 1$), ezt a halmazt M pontra osztjuk fel és mindegyikéhez ($i = 1, 2, \dots, M$) meghatározva a minimális $u^{(i)'} \cdot u^{(i)}$ -t, a legkisebb négyzetek értelmében optimális $\hat{\alpha}$ és $\hat{\lambda}$ értékek könnyen megkaphatók.

Tekintettel arra, hogy a modell bonyolultságánál fogva a becslési eljárás jellemzőit analitikusan úton nem tudjuk meghatározni, ismeretük azonban a későbbi alkalmazások szempontjából fontos, — *Monte Carlo* szimulációt véghezvük, amelynek viszonylag részletes bemutatását ezen cikk keretében azért tartjuk indokoltnak, mivel magyar ökonometriai kutatások során a becslési eljárások vizsgálatára még nem alkalmazták.

A módszer alapelve roppant egyszerű: ismertnek tételezve fel egy alapmodellt, elkészítjük annak K db. realizációját (megfelelő, ismert eloszlású véletlen minták segítségével), majd ezekből a mintákból becsüljük az alapmodell elméleti jellemzőit. Itt látható a *Monte Carlo* módszernek az a nagy előnye, amely az egyszerű, gyakorlati példákra való számolások fölé emeli: az ismétlések lehetősége, az igazi kísérletezés. Hiszen az alapmodellnek tetszés szerinti sok realizációja állítható elő, melyek egymástól csak a véletlen hatásokban különböznek, így a becslési eljárás tulajdonságai steril körülmények közt vizsgálhatók. Esetünkben ez a következőt jelentette.

Tekintsük a (7) alapegyenletet, q és p helyett az ökonometriában szokásos y és x változókat használva:

$$y = \alpha \left[(1 - \lambda)x + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) x(-i) \right] + u.$$

x idősorát ismertnek feltételezve α és λ értékeket adunk meg (rögzítünk egy mintában), és specifikáljuk u eloszlását is. Ekkor K db. y -t generálunk, majd ezek segítségével mind a K db. mintából a javasolt eljárás segítségével becsüljük $\hat{\alpha}_i$ -t és $\hat{\lambda}_i$ -t ($i = 1, 2, \dots, K$). A K db. becsült paraméterkészletből meghatározzuk azok várható értékét és szórását $[M(\hat{\alpha}), M(\hat{\lambda}), D(\hat{\alpha}), D(\hat{\lambda})]$ és ezekből következtetünk a becslés tulajdonságaira. Látható, hogy a módszer egyszerű, más hasonló ökonometriai problémák vizsgálatánál is jól használható.

Ami a kísérletek konkrét megvalósítását illeti, kezdjük a leírást x idősor specifikálásával. A szakirodalomban (pl. [1], [2], [7]) x -ről általában feltételezik, hogy az elsőrendű autoregresszív folyamat, ismert (pontosabban: adott) paraméterrel és ismert eloszlású véletlen változóval. Ilyen kiinduló feltételezések mellett általában minden mintához más-más x idősort becsülnek és ezeket

használják fel az y -ok előállításához. Ebben a kísérletsorozatban némiképp másként jártunk el. Mi ugyanis:

- Az x -et minden mintában rögzítettnek vettük, azaz csak egy x -et generáltunk és ezt használtuk fel a számítások egész menetében. Ezt a választást egyszerűsége mellett az indokolja, hogy az ökonometria gyakran él azzal a hipotézissel, hogy x nem valószínűségi változó;
- A rögzített x -et úgy generáltuk, hogy exponenciális trendet képeztünk 4 %-os évi növekedéssel és ezt zavartuk meg additív módon egy, a $[-4; +4]$ intervallumban egyenletes eloszlású,⁴ véletlen változóval. Mivel az x nagyságrendjét 100 körül rögzítettük (lásd később részletesen), a $-4, +4$ határok kb. egy időszak növekedésnek felelnek meg;
- A mesterséges x idősort 30 elemét generáltuk a fenti módon, ezekből az utolsó 20-at használtuk fel a szimulációra, az első 10 db. csak a késleltetések előállításához kellett;
- Az x idősor 11. elemét rögzítettük 100-ra, azaz azt feltételeztük, hogy az x bázisindexsort reprezentál, ahol a bázis a tényleges számítások (becslések) kezdeti időpontja.

Az x ilyen kialakításával azt próbáltuk elérni, hogy lehetőleg minden szempontból olyan „idősort” kapjunk, amely nagyságrendjét, tendenciáját, hosszúságát, azaz minden lényeges jellemzőjét tekintve egy átlagos, reprezentáns, éves makrogazdasági idősortnak felel meg. Úgy véljük, hogy az x idősor valóban megfelel ezeknek a követelményeknek.

A többi paraméterek közül λ természetes intervalluma $0 < \lambda < 1$. Mivel az eloszlás elméleti vizsgálata megmutatta, hogy más-más λ -k eltérő alakú és tulajdonságú eloszlásokhoz vezetnek, a szimuláció során több jellemző λ értékre végeztünk számításokat. Az α paraméter ezzel szemben lényegileg skálafaktor-nak is tekinthető, így szerepe lényegesen kisebb. Korábbi — itt nem részletezendő — vizsgálatok azt mutatták, hogy az eljárás különféle nagyságrendű α -k esetén meglehetősen érzéketlen erre a változásra (pontosabban akkor, ha a véletlen változó szórását ennek megfelelően választjuk meg), így α elméleti értékét az összes vizsgálat során 2-re rögzítettük.

A véletlen változó (u) a standard ökonometriai hipotézisek szerint 0 várható értékű, autokorrelálatlan, σ szórású, normális eloszlású változó. Itt csak σ a priori kijelölése volt a feladat. Úgy jártunk el, hogy ismét az átlagos makromodelleket tekintve, feltételeztük, hogy a modell relatív hibájának hozzávetőlegesen 0,5 és 4 % között kell lennie. Ebből — a már rögzített paraméterek alapján — visszaszámolva az adódott, hogy a $4 \leq \sigma \leq 32$ intervallumban kell megválasztanunk a szórás elméleti értékét.

A szimuláció mintanagyságát, azaz a kísérletek ismétlésének számát elméleti megfontolások alapján igen nagyra, több ezerre kellene tenni. Gyakorlati, ökonometriai munkákban a kísérletszám az 50—200 intervallumban szóródik ([1], [2], [7]). Ezt tekintettük mi is alapnak; de egyes esetekben — számítástechnikai korlátok következtében — valamivel ez alá is kellett mennünk.

Az esztimátor tulajdonságainak jellemzésére — a hasonló vizsgálatokkal összhangban — az alábbi mutatókat számítottuk ki a kísérletek eredményeiből:

- a paraméterek várható értéke; $M(\hat{\lambda})$ és $M(\hat{\alpha})$, ahol pl.

⁴ Az egyenletes eloszlású és a későbbiekhez szükséges normális eloszlású pszeudovéletlen számokat az OTSZK által készített szubrutinnal generáltuk. A számítások az OTSZK ICL System 4/70 számítógépén készültek.

$$M(\hat{\lambda}) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{\lambda}_i;$$

— a paraméterek szórása = az esztimátor standard hibája:

$S_1(\hat{\lambda})$ és $S_1(\hat{\alpha})$, pl.

$$S_1(\hat{\lambda}) = \sqrt{M(\hat{\lambda} - M(\hat{\lambda}))^2} = D(\hat{\lambda})$$

— az esztimátor torzítása: $B(\hat{\lambda})$ és $B(\hat{\alpha})$, pl.

$$B(\hat{\lambda}) = \lambda - M(\hat{\lambda});$$

— a torzítás abszolút százalékos mértéke: $BP(\hat{\lambda})$ és $BP(\hat{\alpha})$, pl.

$$BP(\hat{\lambda}) = |B(\hat{\lambda})|/\lambda;$$

— az elméleti érték körüli átlagos hiba: $S_2(\hat{\lambda})$ és $S_2(\hat{\alpha})$, pl.

$$S_2(\hat{\lambda}) = \sqrt{M(\hat{\lambda} - \lambda)^2};$$

— a reziduumok várható értéke és szórása: $M(\hat{u})$ és $D(\hat{u})$.

A vázolt becslési eljárást $M = 100$ paraméterrel, azaz 0,01-es pontossági követelménnyel végeztük el; ez a viszonylag durva becslés a nagyszámú kísérlet esetén jelentős gépidő megtakarítást jelentett. Gyakorlati becsléseknél természetesen a pontosság gond nélkül fokozható. Végül a $t(\lambda)$ végtelen sort 8 tagú (7 késleltetett differenciát tartalmazó) véges formulával helyettesítettük, ugyanis a h eloszlás táblázata azt mutatta, hogy $\lambda = 0,9$ -ig az eloszlásnak legfeljebb az első 7 tagja ad értékes jegyet a 4. tizedesben.

A fenti módon specifikált kísérletsorozattal arra a kérdésre kerestük a választ: a becslési eljárás (esztimátor) hogyan reagál a modell egyes paramétereinek különböző értékeire; a fenti keretek közt a h -eloszlású folyamatok becslése mennyire megbízható; milyen intervallumban mozog a becslések szórása; és végül összefoglalóan mennyire megbízhatók a kapott becslések. Ezeknek a kérdéseknek a tükrében vizsgáljuk most meg a kapott eredményeket!

Az *eredmények értékelését* azzal kell kezdeni, hogy több kisebb, itt tételesen nem vizsgált, számítást végeztünk annak érdekében, hogy jól körülhatároljuk a vizsgálandó eseteket. Hiszen maga a probléma túlsok paramétert tartalmaz ahhoz, hogy minden lehetséges kombinációt külön-külön is megvizsgáljunk. Ezen előzetes vizsgálatok egyikére már utaltunk azzal, hogy α értékére az eljárás érzékenyen, míg a másik fontos megállapításunk az, hogy a paraméterek (elsősorban a λ) torzítása nagyon érzékeny a véletlen változó szórására. Az összefüggés nemlineáris: a véletlen változó szórásával progresszive nő a paraméterek torzítása. Ezeket kiegészítendő utalunk arra a vizsgálatra, amely ugyan közvetlenül nem hasonlítható össze a később részletesen bemutatandó eredményekkel (más x értékekkel dolgoztunk és a csonkítási eljárás némiképp eltérő volt), de amely viszonylag nagy minta ($K = 180$) esetén azt mutatta, hogy $\hat{\lambda}$ eloszlása kb. 4%-os relatív hiba a priori specifikálásával meglehetősen „diffúz”. Azaz még ez a mintanagyság sem elegendő ahhoz, hogy az eloszlás jellegzetességét kidomborítsa, sőt ilyen szórás feltételezésével — úgy tűnik — nagyságrendileg nagyobb kísérletszám lenne szükséges megbízható következte-

tések levonására. Minthogy erre a számítástechnikai lehetőségeink pillanatnyilag nem megfelelőek, inkább az a priori specifikált véletlen szórást csökkentettük le, így a $\sigma = 4$ (kb. 0,7% relatív hiba) és $\sigma = 12$ (kb. 2% relatív hiba) értékekkel számoltunk a továbbiakban.

A főbb eredményeket a 3. táblázat ($\sigma = 12$) és a 4. táblázat ($\sigma = 4$) tartalmazza.

A táblázatok számai közt az alábbi fontosabb összefüggésekre, tendenciákra hívjuk fel a figyelmet:

— λ kis értékei esetén (főleg $\sigma = 12$ -nél) a $\hat{\lambda}$ esztimátorának torzítása és szórása olyan nagy, hogy az eljárás gyakorlatilag használhatatlan. Igen fontos és

3. táblázat

A szimuláció fontosabb eredményei I.

Paraméterek: $\sigma = 12$, $\alpha = 2,0$, $K = 40$.

$\lambda =$	0,20	0,35	0,50	0,70	0,90
$M(\hat{\lambda})$	0,3432	0,4875	0,5670	0,5687	0,8200
$B(\hat{\lambda})$	-0,1432	-0,1375	-0,670	0,1313	0,0800
$BP(\hat{\lambda})$	71,6	39,29	13,40	18,76	8,89
$S_1(\hat{\lambda})$	0,3143	0,3181	0,2587	0,3153	0,2232
$S_2(\hat{\lambda})$	0,3453	0,3465	0,2672	0,3489	0,2371
$M(\hat{\alpha})$	2,0261	2,0309	2,0297	2,0014	1,9964
$B(\hat{\alpha})$	-0,0261	-0,0309	-0,0297	-0,0014	0,0036
$BP(\hat{\alpha})$	1,31	1,54	1,48	0,07	0,18
$S_1(\hat{\alpha})$	0,0574	0,0480	0,0573	0,0600	0,0600
$S_2(\hat{\alpha})$	0,0630	0,0570	0,0645	0,0601	0,0601
$M(\hat{u})$	0,0145	-0,0919	-0,1002	0,0572	-0,0866
$D(\hat{u})$	10,91	11,16	11,57	10,60	11,72

4. táblázat

A szimuláció fontosabb eredményei II.

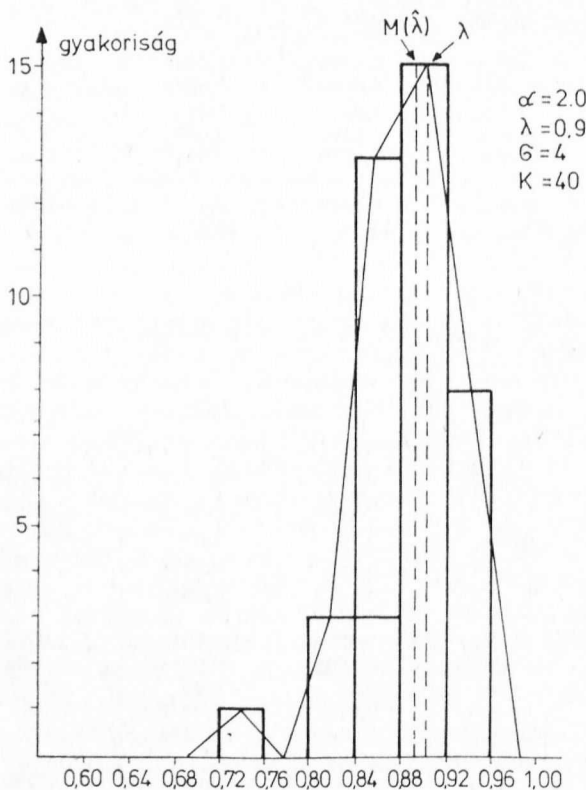
Paraméterek: $\sigma = 4$, $\alpha = 2,0$, $K = 40$.

$\lambda =$	0,20	0,35	0,50	0,70	0,90
$M(\hat{\lambda})$	0,2015	0,3195	0,4927	0,6790	0,8895
$B(\hat{\lambda})$	-0,0015	0,0305	0,0073	0,0210	0,0105
$BP(\hat{\lambda})$	0,75	8,75	1,46	3,00	1,17
$S_1(\hat{\lambda})$	0,1201	0,1405	0,1353	0,1105	0,0424
$S_2(\hat{\lambda})$	0,1201	0,1438	0,1355	0,1125	0,0436
$M(\hat{\alpha})$	2,0016	1,9995	2,0018	1,9996	1,9982
$B(\hat{\alpha})$	-0,0016	0,0005	-0,0018	0,0004	0,0018
$BP(\hat{\alpha})$	0,80	0,25	0,90	0,20	0,90
$S_1(\hat{\alpha})$	0,0100	0,0141	0,0173	0,020	0,0236
$S_2(\hat{\alpha})$	0,0100	0,0141	0,0174	0,020	0,0237
$M(\hat{u})$	0,0087	0,0449	0,0531	-0,0585	-0,0008
$D(\hat{u})$	3,89	3,84	3,77	3,73	3,72

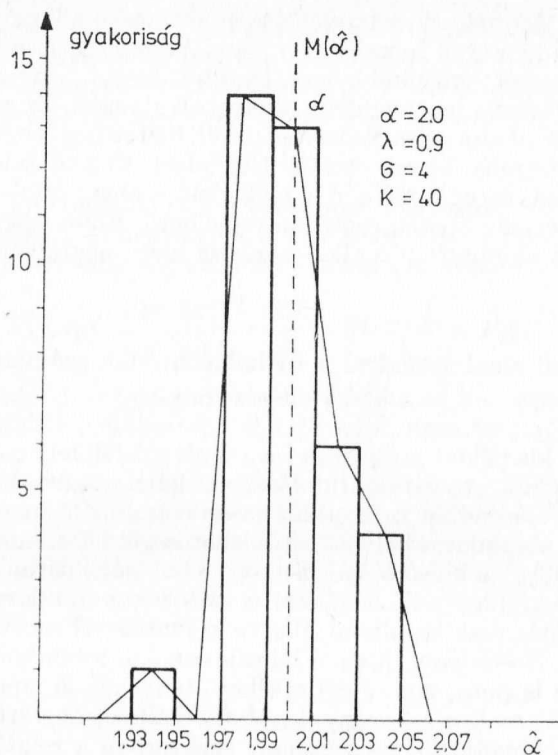
érdekes eredmény, hogy a véletlen szórás harmadára való csökkentése a paraméter szórását nagyjából *arányosan* csökkentette, mígnem a torzítást (és a relatív torzítást) ennél lényegesen nagyobb mértékben;

- mindkét táblán látható, hogy λ növekedésével a relatív torzítás tendenciászerűen csökken. Nagy λ esetén még a $\sigma = 12$ szórásnál is elfogadható, 10 %-on belüli relatív torzítás adódik;
- mindkét táblából kitűnik, hogy kis λ értékek mellett az esztimátorok eloszlása meglehetősen „diffúz”, nagy a szórásuk, laposak. Tekintve, hogy a további, itt nem közölt számítások is ezt a tendenciát mutatják, arra következtethetünk, hogy ez nem kizárólag a kis minta következménye, hanem más, reális oka is van.

Figyelembe véve, hogy a gyakorlati alkalmazások során ismétlésekre nincs lehetőségünk, csak egy becslés eredménye áll rendelkezésünkre, és az itteni eredmények egyáltalán nem biztatóak. Az eredmények azonban azt is mutatják, hogy λ növelésével a szórás számottevően csökken; az eloszlás sokkal nagyobb mértékben koncentrálódik a várható érték körül, bár meg kell említeni azt is, hogy $\sigma = 12$ esetén még mind a torzítás, mind pedig a szórás eléggé számottevő. Ugyanakkor, mint az a 2. ábrán is látható, ilyen λ érték mellett a várható érték és a módusz igen közel esik egymáshoz, ami kedvező becslési tulajdonság. *Összefoglalva* a λ becsléséről mondottakat, úgy tűnik, hogy különösen



2. ábra. $\hat{\lambda}$ eloszlásának hisztogramja

3. ábra. $\hat{\alpha}$ eloszlásának histogramja

kisebb λ -k esetén, az a felület, amelynek minimumát keressük λ -ban meglehetősen lapos, viszonylag kis véletlen elmozdulások nagy mértékben befolyásolják a minimum helyét.

Amennyire kritikus volt λ becslése, annyira jó eredményeket adott α becslése, bár ez kevésbé lényeges paraméter. Itt a százalékos torzítások átlagosan 1% alatt maradtak, de kis szórás esetén *mindig* ez alatt a szint alatt maradtak. Az egyetlen említésre méltó tendencia itt az, hogy α megnövekedésével inkább valamit romlottak a becslési eredmények (pl. szórás), de még a legrosszabb esetben is messze elfogadható értékeket produkáltak. Erre csak egy példát mutatunk be a 3. ábrán.

Az eredmények ismertetését az $\hat{u}$ reziduumokra vonatkozó eredményekkel zárjuk. Ezek jelentősége abban áll, hogy az u eloszlásának nem csupán várható értékét, de szórását is a priori ismerjük. Másrészt a reziduumokra jóval nagyobb minta áll rendelkezésünkre, mint az egyes paraméterekre (hiszen $K \cdot T$ reziduumot határozunk meg minden kísérletsorozatban). Így ezekből már némiképp megbízhatóbb következtetéseket lehet levonni, elsősorban a Monte Carlo módszer értékére vonatkozóan. Az $M(\hat{u})$ abszolút értéke mindenütt (egy kivétellel) 0,1 alatt marad, általában ennél sokkal kisebb értéket vesz fel. Mivel $\sigma = 12$ esetén 1% relatív eltérésnek 0,1, $\sigma = 4$ esetén pedig kb. 0,04 felel meg, azt állíthatjuk, hogy a reziduumok várható értékének eltérése az elméleti 0-tól elhanyagolható.

A becslésre és a Monte Carlo szimulációra vonatkozó eredmények összefoglalásul csak annyit tehetünk hozzá az elmondottakhoz, hogy a kísérletek egyértelműen bebizonyították: inkább csak lassúbb, kisebb intenzitású terjedési folyamatok esetén lehet a fenti modellt sikerrel alkalmazni. Ez azt jelenti, hogy a modell gyakorlati alkalmazása elsősorban havi, illetve negyedéves folyamatok vizsgálatánál jöhet szóba, hiszen ezeknél feltételezhető a több időszakra kiterjedő alkalmazkodás, és ugyanakkor a megfelelő szabadságfok biztosításához szükséges mintanagyság is ezek esetében remélhető. Ennél fogva a következő fejezetben röviden bemutatandó alkalmazás is havi megfigyelésű idősorokon nyugszik.

5. Példa a modell alkalmazására: a foglalkoztatottak számának igazodása a bérek eltéréseihez

Befejezésül egy kis példát mutatunk be a fenti modell lehetséges alkalmazására. A példa a foglalkoztatottak áramlását vizsgálja a szövetkezeti iparból az állami iparba. Mivel mindkét szektorban hasonló szakmák, iparágak és vállalatok léteznek, nem alaptalan a helyettesítés lehetőségét feltételezni. Annak érdekében, hogy elkerüljük a külső tényezők zavaró hatását (iparon kívülre történő áramlást, illetve a kívülről való belépést), a változókat standardizáltuk: a képzett új változók már csak az állami, illetve szövetkezeti szektorban dolgozók arányát tükrözik. Hasonlóan, mivel a bérszínvonalak különbözők a megfigyelési időszak elején is (más, nem-megfigyelhető tényezők kompenzálják az alacsonyabb béreket), csak a bérarányok relatív változását vettük figyelembe.

Hipotézisünk a következő: ha valamely szektorban a relatív bérek nőnek, ez az aránytalanság egy terjedési-igazodási típusú folyamatot indít el, munkaerőáramlást a jobb szektor felé. Így, ha a hipotézis igaz, a bérek és a foglalkoztatottak számának összefüggése h -eloszlású osztott késleltetésű modellel írható le.

Jelöljük L_1 -el és L_2 -vel az állami, illetve szövetkezeti szektorban dolgozók számát. Hasonló módon w_1 és w_2 a megfelelő bérszínvonal. Legyenek

$$l_1 = L_1/(L_1 + L_2), \quad l_2 = L_2/(L_1 + L_2)$$

a két szektor foglalkoztatottjainak részarányai és legyen $w = w_1/w_2$ az átlagbérek hányadosa.

Ezekkel a jelölésekkel hipotézisünk

$$l_1 = f(w)$$

alakot ölti, feltéve, hogy f egy h -eloszlású osztott késleltetésű függvény α és λ paraméterekkel, azaz az

$$l_1 = \alpha \left[(1 - \lambda)w + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} (\lambda^{2^{i-1}} - \lambda^{2^i}) w(-i) \right] + u$$

modell releváns.

Az adatok az 1980–1982. évek havi megfigyeléseiből származnak, mind a foglalkoztatottak számára, mind a bérekre vonatkozóan, így 36 elemű minta állt rendelkezésünkre.⁵ A viszonylag nagy minta lehetővé tette, hogy elfogadható szabadságfok mellett 7 késleltetett értékkel dolgozzunk.

⁵ Forrás: Statisztikai Havi Közlemények 1980–1982. KSH, Budapest.

A becsült paraméterek $\hat{\alpha} = 0,6910$ -nak és $\hat{\lambda} = 0,9530$ -nak adódtak, s ez azt mutatja, hogy egy igen lassú terjedés ment végbe a modellben.

A modell érvényességét tesztelendő a $\lambda = 0$ nullhipotézist vizsgáltuk meg a jól ismert F próba egy kissé módosított változatával. (8)-ból

$$q = \alpha p - \alpha r(\lambda) + u$$

írható fel, és a jobb oldalon álló 2 tagot két magyarázó változónak tekintve, de felső korlátként a szabadságfokot úgy tekintettük, mintha $r(\lambda)$ 7 elemből állt volna. Így a második tag szignifikáns voltára készített F próba

$$F(\text{emp}) = \frac{21,6025}{0,0071} \cdot \frac{19}{10} = 5780,95 > F_{19}^{10}(1\%)$$

módon számítható. F magas tapasztalati értéke azt mutatja, hogy a 0 hipotézist minden szignifikancia-szinten el kell vetni, azaz az alaphipotézis elfogadható.

Végül érdemes megjegyezni, hogy ebben az esetben világos, hogy a modell, kiváltképp magas λ -kra, egyfajta simítófüggvényként funkcionál és a magas F érték részben annak következménye, hogy a bérek szórása viszonylag nagy, a foglalkoztatottak száma viszont simán alakult.

(Beérkezett: 1983. október 10-én.)

IRODALOM

1. CORRADI, C.—GAMBETTA, G.: Ritardi distribuiti ed errori di specificazione: un esperimento di simulazione. *Statistica*, XXXVIII. (1978) (Università di Bologna, Padova e Palermo) pp. 207—222.
2. GÓRSKA-HALADAJ, E.: *Properties of estimators of parameters for the models with geometric lag distribution. Some Monte Carlo results*. Paper presented at the Meeting of the University of Łódź, Blaziejewko, 1978.
3. GRILICHES, Z.: Distributed lags: A survey. *Econometrica*, vol. 35. (1967) pp. 16—49.
4. HUNYADI L.: Egy terjedési folyamat elemzése (A hólabda modell) *Sigma*, XI. (1978). 191—199. o.
5. HUNYADI L.: *A h-eloszlású osztott késleltetésű modell* Országos Tervhivatal, Tervgazdasági Intézet. Budapest, 1982.
6. MESZÉNA GY.—ZIERMANN M.: *Matematikai statisztika* Budapest, 1981. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
7. PAIZS J.: *Paraméterbecslési módszerek kisminta-tulajdonságai és specifikációs hibákkal szembeni érzékenysége* (Kézirat) Laboratóriumi Munkaanyagok, 8. szám. Budapest, 1969. KSH Statisztikai és Matematikai Módszerek Közgazdasági Alkalmazásának Laboratóriuma.

A DIFFUSION TYPE DISTRIBUTED LAG MODEL

The article presents the setup and estimation of a distributed lag model of a new type. The traditional foundation of the distributed lag models relies most frequently on adjustment and expectation behaviour. The present model derives the distributed lags from a diffusion process. The diffusion process underlying the model is the so-called snowball process published earlier. Setting out from it the article presents the origin of the distributed lag model with h -distribution. The author suggests a "scanning"-type estimation procedure for this distributed lag model and discusses in some detail also the Monte-Carlo experiments which serve to analyse some properties of the estimation procedure. The

main lesson of these is that the proposed estimation procedure promises success in such cases when we are facing a distribution covering relatively many periods, that is, the diffusion is slow relative to the period observed. Confronting this with the considerations deriving from the degree of freedom of the estimation we may reach the conclusion that the application of the model may be proposed mainly in the case of monthly or quarterly observations. The application of the model is therefore presented through an example relying on monthly observations: it is shown that the flow of labour between the state-owned and the cooperative industry that may be attributed to shifts in relative wages, can be well described with the distributed lag model of the diffusion type considered here.

МОДЕЛЬ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ТИПА РАСПРОСТРАНЕНИЯ

В статье выводится и оценивается новый тип модели с распределенным запаздыванием. Традиционное обоснование моделей с распределенным запаздыванием чаще всего основано на поведении приспособления и ожидания, анализируемая в статье модель выводит распределенные запаздывания из процесса распространения. Служащий основной модели процесс распространения представляет собой уже известный по прежним публикациям процесс снежного кома. Исходя из этого, в статье представлено происхождение т.н. модели с распределенным запаздыванием с распространением h , а затем показываются некоторые особенности распространения h . Делается предложение метода оценки модели с распределенным запаздыванием при распределении h типа «сканирования» и относительно подробно рассматриваются эксперименты Монте-Карло, которые служат анализу отдельных особенностей метода оценки. Их основная особенность в том, что предлагаемый метод оценки может успешно применяться в тех случаях, когда мы имеем дело с распределением медленным относительно данного периода. Сравнивая это со степенью свободы оценки, можно прийти к выводу, что модель можно рекомендовать к применению в первую очередь при месячных и квартальных наблюдениях. Поэтому применение модели показывается на примере, основанном на месячных наблюдениях: показано, что переток рабочей силы между государственной и кооперативной промышленностью, вытекающий из сдвига пропорций заработной платы, можно хорошо описать с помощью рассматриваемой модели с распределенным запаздыванием типа распространения.

Dinamikus modell a különböző energiaigényességű ágazati fejlesztések hatékonyságának vizsgálatára¹

I. Bevezetés

Közhelyszerű hivatkozás, hogy energia nélkül nincs termelés. Az egyes ágazatokban azonban különböző energiamennyiségekre van szükség az egységnyi eredmény eléréséhez. Konkrétabban, az al- és szakágazatok energiaigényessége egymáshoz viszonyítva szélsőségesen, akár 10—20-szoros arányban is eltérhet.

Közismert az is, hogy az *energetika a népgazdasági elsődleges erőforrások tekintélyes hányadát köti le*. Az utóbbi évek világgazdasági viszonyai miatt mind az importban, mind a beruházásokban különösen kedvezőtlenül nőtt az energetika aránya. Mindkét népgazdasági erőforrás helyzete jelenleg és a jövőben is közismerten kedvezőtlen, ennek felszámolásában, illetve az egyensúly megteremtésében tehát hangsúlyozott szerepe van az energetikának.

A modell az energetikának csak a beruházásokra gyakorolt hatásával foglalkozik, mivel az import és export szerepét korábbi tanulmányok vizsgálták.

Attól függően tehát, hogy *milyen energiaigényességű gazdaságfejlesztést irányozunk elő*, a hozzá kapcsolódó energetikai fejlesztésben is többszörös arányú különbségek léphetnek fel. Emiatt a *fejlesztés hatékonysága is széles sávban változhat*, amely a jelen helyzethez képest jelentős javulást, illetve romlást eredményezhet. Az ezt előidéző két ok:

- egyrészt az összes beruházásból az energetika — a fejlesztés energiaigényességétől függően — különböző hányadot von el,
- másrészt az eltérő ágazati összetételű fejlesztések hatékonyságát az energetika más-más arányban rontja.

Az energiaigényesség szerepét helyesen csakis a népgazdasági hatékonyságra gyakorolt hatásával mérhetjük. Önmagában az energiaigényesség alacsony vagy magas volta még nem dönt a hatékonyság kérdésében, bár jelentősen predesztinál. Az *energiaigényes tevékenység ugyanis népgazdaságilag általában kedvezőtlen*, bár e szabály alól esetenként lehetnek kivételek. (Az ilyen termékek kivételes helyzetét kell bizonyítani.)

¹ A cikkben, az Ipargazdasági Intézetben folyó vizsgálataink első eredményeiről számolunk be, amely témakörben a XIII. Magyar Operációkutatási Konferencián tartottunk előadást.

2. Célkitűzés

A bemutatásra kerülő modell az alábbi kérdés megválaszolását tűzte ki célul:

Hogyan alakul a különböző struktúrájú gazdasági (ipari) fejlesztések jövedelemtermelő képessége egy közép-, illetve hosszútávú fejlesztés során, és ebben mennyi a szerepe a struktúránként eltérő energiaigényességnek.

Cikkünkben az ipari beruházások hatékonyságának rendkívül összetett problémáját *elsősorban az energetika oldaláról vizsgáljuk*. Az energetikán kívüli jelentős tényezőket (külgazdaság, foglalkoztatáspolitikai stb.) — a bevezető szemlélete szerint — szándékosan hagytuk ki vizsgálatainkból.

Cikkünkben egy számítógépre szervezett számítási eljárást, úgynevezett szimulációs modellt mutatunk be. Modellünk *döntéshozókészítő eszközként* használható iparpolitikai, beruházáspolitikai döntésekhez, amennyiben segítségével az energiaigényesség hatását számszerűsíthetjük. Módszerünk ugyanis az állóeszköz-hatékonyság alakulásával jellemzi az eltérő energiaigényességű ipari fejlesztéseket.

A modell a különböző hatékonysági mérőszámok közül az egységnyi állóeszközhöz vetített megtermelt társadalmi tiszta jövedelem mutatójával dolgozik. Ennek a mutatónak a hosszú távon való alakulását szimulálja különböző feltételezések mellett.

3. A modellezés köre és a vizsgált időszak

A népgazdaság teljes tevékenységéből az *ipart vizsgáltuk*. Az ipar tevékenysége ugyanis döntően befolyásolja a népgazdasági termelési struktúrát, hatékonyságot, energiaigényességet stb., az ipar népgazdaságon belüli nagy súlya és a többihez viszonyított nagy energiaigényessége miatt.

Az ipart a vizsgálatban az *energetika nélkül értjük*, tehát a bányászat nem tartalmazza a szénbányászatot, valamint a kőolaj- és földgáztermelést, a vegyipar pedig a kőolajfeldolgozást és gázgyártást, továbbá a villamos-energiaipar adatait sem vesszük a statisztika által értelmezett ipar körébe.

Eddigiekben a modellel az *extenzív* fejlesztések hatékonysági viszonyait vizsgáltuk. Rendszerünk azonban alkalmas az *intenzív* fejlesztések vizsgálatára is, mivel az intenzív fejlesztésekre is — szakértői becslések alapján — minden nehézség nélkül, exogén változóként felvehetők az állóeszköz-hatékonysági mutatók. Ezzel a teljes körű — extenzív és intenzív — beruházási lehetőség bevonható a beruházási allokációs vizsgálatokba.

A különböző ágazati fejlesztések vizsgálata természetesen magában foglalja egyes ágazatok visszafelépítési lehetőségét is. (Ezek ugyanis még szinttartó beruházást sem kapnak a modellben.)

Összhangban az energetikai fejlesztési koncepcióval, *hazai bázisú energia- és villamosenergia ellátást tételezünk fel*; a primer energiahordozó igénynövekedés fedezése a szénbányászat feladata.

A kidolgozott modell alkalmas az ipari termelés bármilyen összetételű fejlesztése esetén meghatározni az állóeszközök, a társadalmi tiszta jövedelem, és ezek segítségével az energia felhasználás távlati alakulását. A dolgozat az adott lehetőségek közül, 1980. évi bázison, 1981—2000 közötti időszakban, évenkénti szakaszolásban, különböző „ágazati” összetételű fejlesztési változatok összehasonlításával vont le a döntésekhez figyelembe vehető következtetéseket.

4. A vizsgálat főbb módszertani jellemzői

4.1 *A modell működésének alapfogolata*

A modell alapján Harrod-Domar típusú növekedési elv alapján működő dinamikus modell.² Eszerint a társadalmi termelés — amelyet mi a társadalmi tiszta jövedelem időben változó nagyságával mérünk — a termelésben lekötött állóeszközök mennyiségével arányos. Az egységnyi ágazati állóeszközök különböző mértékű tiszta jövedelmeket hoznak létre.

A növekedés úgy megy végbe, hogy a létrejövő társadalmi tiszta jövedelem meghatározott részét beruházzuk és az eszközölt beruházások adott hányada növeli az állóeszközök állományát. A megnövelt állóeszközállományon nagyobb társadalmi tiszta jövedelem jön létre; a növekedés azonban a beruházások ágazatok közötti elosztásától függ. Az állóeszközállomány-összetétellel jellemzett struktúra módosulása — fejlesztési változatokként — így eltérő átlagos ipari állóeszközhatékonyságot eredményez.

A különböző változatokban az 5, 10, 15 és 20 éves ciklusok végére más és más lesz a fejlesztés „eredménye”. Az eltérő eredmények alapján a fejlesztési változatok összevethetők és különböző szempontok szerint értékelhetők.

A vizsgálat jelenlegi szakaszában időben változatlanak tételeztük fel az egyes szektorok állóeszköz-hatékonysági mutatóit, a társadalmi tiszta jövedelem beruházásra fordítható hányadát és a beruházásokból aktiválásra kerülő hányadot. Nincs akadály, hogy a modellben e feltételezések egy része maga is változtatható legyen, és így eleme lehet a szimulációnak.

Az eddig szavakban megfogalmazott folyamat egyszerű jelölésekkel a következőképpen írható le:

$$(A^{(1)} \rightarrow m^{(1)} \rightarrow B^{(1)} \rightarrow \Delta A^{(1)}) \dots (A^{(k)} \rightarrow m^{(k)} \rightarrow B^{(k)} \rightarrow \Delta A^{(k)}) \dots \\ \dots (A^{(n)} \rightarrow m^{(n)} \rightarrow B^{(n)} \rightarrow \Delta A^{(n)}).$$

A közbeeső folyamatokat is feltüntetve, az n -edik évben a következőképpen alakul a logikai lánc:

$$\dots \left(\begin{array}{ccccc} A^{(n)} & \longrightarrow & m^{(n)} & \longrightarrow & B^{(n)} & \longrightarrow & \Delta A^{(n)} \\ & \mu^{(n)} A^{(n)} & & \delta \cdot m^{(n)} & & \gamma B^{(n)} & \end{array} \right)$$

ahol:

$A^{(k)}$	k -adik év halmozott állóeszközállományának bruttó értéke (nyitó állomány)
$m^{(k)}$	a vizsgált időszak k -adik évében felhasználható társadalmi tiszta jövedelem,
$B^{(k)}$	a k -adik év társadalmi tiszta jövedelméből beruházásra fordítható összeg,
$\Delta A^{(k)}$	a k -adik év állóeszköz-növekménye (halmozott),
k	a vizsgált időszak futóindexe ($k = 1, 2, \dots, n$)
n	a vizsgált időszak záró évének indexe,
$\mu^{(n)}$	az n -edik év átlagos állóeszköz-hatékonysági mutatója,

² Lásd pl. Andorka—Dányi—Martos: Dinamikus népgazdasági modellek című könyvben, KJK 1967.

- δ a társadalmi tiszta jövedelemből beruházásra fordított összeg részaránya (jelenleg időben konstans exogén tényezők),
 γ a beruházásokból aktiválásra kerülő hányad (jelenleg időben konstans exogén adat).

Az előbbieken bemutatott logikai láncnak megfelelően az alábbiak szerint írhatunk le egy, tetszőleges évre vonatkozó, fejlesztési ciklust; pl. a záró évre:

$$A^{(n)} = A^{(1)} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \gamma \delta \sum_{i=1}^N \mu_{ih} \cdot a_i \cdot s_i^{(k)} \right)$$

$$m^{(n)} = \mu^{(n)} A^{(n)}$$

$$B^{(n)} = \delta \mu^{(n)} A^{(n)}$$

$$\Delta A^{(n)} = \gamma \delta \mu^{(n)} A^{(n)}.$$

A fenti képlet segítségével — a számítás terjedelmes volta miatt célszerűen számítógéppel — *számítható a különféle gazdaságfejlesztési változatokkal egy-egy fejlesztési periódus során elérhető népgazdasági eredmény, amelyeket különböző mennyiségi jellemzőkkel mérhetünk.* Ilyenek:

- Az n -edik évben elért $m^{(n)}$ jövedelmek és a következő év termelését szolgáló $A^{(n+1)} = A^{(n)} + \Delta A^{(n)}$ állóeszközállomány (és ennek megoszlása energetikai és termelő hányadra).
- A fejlesztési periódus során elért $\Delta m^{(n)} = m^{(n)} - m^{(1)}$ n -edik évi jövedelemnövekmény, esetleg ennek kumulált $\sum_1^n \Delta m^{(k)}$ értéke.
- A $\mu^{(n)}$ népgazdasági átlagos állóeszközhatékonysági mutató alakulása a periódus végére.
- Növekedési ütemek a különböző jellemző tényezőkre, illetve — elsősorban energia/tiszta jövedelem tartalmú — rugalmassági tényezők.
- Az energia és villamosenergia igények növekedése, az átlagos népgazdasági energiaigényesség alakulása.

4.2 Ágazatközi szemlélet

Az állóeszközökre vetített szokásos hatékonysági vizsgálatokkal szemben a bemutatott modell *új vonása*, hogy bevezetünk a dolgozatban „halmozott” mutatónak nevezett mérőszámokat. A „halmozott” fogalmat azonban nem a statisztikai gyakorlatban megszokott (ÁKM) értelmezésben használjuk. Abból indulunk ki, hogy az energiaipar a többi termelő ágazat kiszolgálója. Ezért az energiaipart jellemző mutatókat — állóeszközök, beruházás, tiszta jövedelem stb. — az energiát felhasználó termelő ágazatokhoz rendeljük, energiafelhasználásuk arányában. Így jutunk a továbbiakban „halmozott”-nak nevezett mutatóinkhoz, amelyek csak a termelő ágazatokra vonatkoznak és a közvetlen ágazati értékeken felül tartalmazzák az energiaipar mutatóinak az ágazatokra szétosztott részét. Vagyis „halmozott” nem más, mint „termelő + energetikai”.

A vizsgálatban szereplő valamennyi tényező felosztható E , illetve T indexű energetikai és termelői részre. Az alapösszefüggések tehát $m_T = \mu_T \cdot A_T$ és

$m_E = \mu_E \cdot A_E$ formában, a népgazdasági átlagos állóeszközhatékonysági mutató pedig súlyozott átlagként írható fel.

$$\mu = \frac{\mu_T \cdot A_T + \mu_E \cdot A_E}{A}.$$

Köztudott, hogy a hazai szén- és villamosenergia termelés μ_E állóeszközhatékonysága általában kisebb, mint μ_T , tehát az *energetika általában csökkenti (rontja) a népgazdasági átlagos állóeszközhatékonyságot*.

Az (energetika nélküli) A_T és m_T felírható az összes i termelő ágazat eredőjeként

$$A_T = \Sigma A_i \text{ és}$$

$$m_T = \mu_T \cdot A_T = \Sigma m_i = \Sigma \mu_i \cdot A_i = A \cdot \Sigma \mu_i \cdot s_i.$$

A képletben a $\mu_i = m_i/A_i$ az ágazatok saját állóeszközhatékonysága és $s_i = A_i/A$, vagyis az ágazat saját állóeszközének aránya az $A_T + A_E$ összes állóeszközhöz (tehát: $\Sigma s_i < 1$).

A vizsgálat úgy alkalmaz *ágazatközi szemléletet*, hogy az ágazatok saját jellemzőihez hozzárendeli azt az energetikai jellemzőt, amely az ágazat energiaigényessége ismeretében kielégítő pontossággal meghatározható. Így például minden ágazati A_i állóeszközhöz tartozik egy-egy meghatározott A_{ie} energetikai állóeszköz, ami viszont az ágazat saját m_i hozamát megnöveli egy m_{ie} -vel. Az *ágazatok energetikával együttes, úgynevezett halmozott állóeszköze, jövedelme, valamint állóeszközhatékonysága* tehát $A_{ih} = A_i + A_{ie}$ és $m_{ih} = m_i + m_{ie}$, valamint

$$\mu_{ih} = m_{ih}/A_{ih} = \frac{m_i + m_{ie}}{A_i + A_{ie}}.$$

A korábbiakban súlyozott átlagként felírt $\mu = f(\mu_T, \mu_E)$ átlagos népgazdasági állóeszközhatékonysági mutató meghatározható az ágazati μ_{ih} halmozott állóeszközhatékonysági mutatók eredőjeként is, az alábbi képlettel (a levezetést mellőzve):

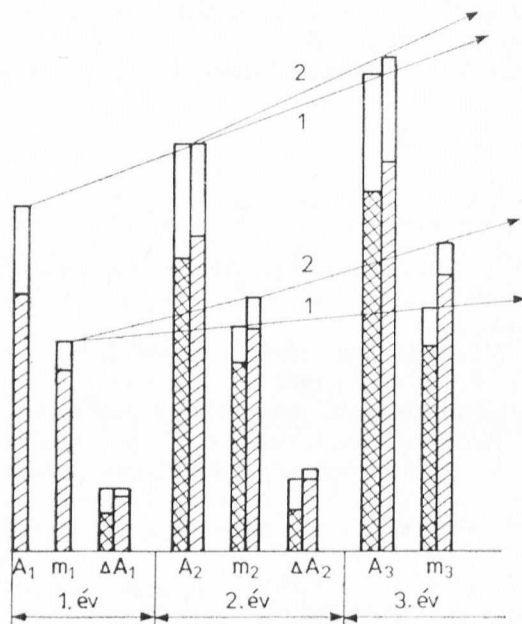
$$\mu = \sum_i \mu_{ih} \cdot s_i \cdot a_i \quad (a_i = A_{ih}/A_i).$$

Hasonlóképpen az állóeszközökhöz, minden ágazat B_i beruházásához is — annak üzemeltetése érdekében — szükséges egy B_{ie} energetikai beruházás; a halmozott ágazati beruházás tehát $B_{ih} = B_i + B_{ie}$. Az ennek alapján számított $e_i = B_{ih}/B_i$ *halmozott beruházási mutató* azt mondja meg, hogy hány-szoros az ágazat energetikával együttes halmozott beruházásigénye az ágazat saját beruházásához viszonyítva.

Az e_i mutatók segítségével kifejezhető az *ágazati és energetikai beruházások népgazdasági egyensúlyi feltétele* is a $B = \Sigma e_i \cdot B_i = B \cdot \Sigma e_i \cdot s_{iB}$ képlet segítségével, amiből az is következik, hogy $\Sigma s_{iB} \cdot e_i = 1,0$. (Az $s_{iB} = B_i/B$, tehát $\Sigma s_{iB} < 1$.) (Az e_i tényezőknek állóeszköz megfelelője az $a_i = A_{ih}/A_i$ halmozott állóeszköz mutató.)

4.3 Vizsgálati algoritmus

A fentiek szellemében az egyes fejlesztési változatok jövedelemtermelő képessége (valamint állóeszköz felhalmozó képessége) a fejlesztési struktúrától — illetve annak energiaigényességétől — függ, ami a meglévő gazdasági szerkezetet folyamatosan változtatja. A fentiek szerint *kettős hatás érvényesül*, amely gerjesztve növeli vagy csökkenti a fejlődés dinamikáját, mivel



4.3-1 ábra

- egyrészt a beruházási allokációktól függően, a B összes beruházásból az energetikán kívüli ágazatoknak jutó ΣB_i hányad — az e_i tényezőkön keresztül — az energiaigényesség függvénye, vagyis a $\Sigma \Delta A_i$ „termelő” állóeszköznövekmény erősen változó,
- másrészt az évenként változó μ népgazdasági átlagos állóeszközhatékonyság ugyancsak függvénye az energiaigényességnek.

Nagyobb energiaigényességű fejlesztés esetén kisebb a ΣB_i és az ebből aktiválható $\Sigma \Delta A_i$, egyidejűleg kisebb az átlagos ipari μ állóeszközhatékonysági tényező is.

Az előzőeket a 4.3-1 sematikus ábra is jól szemlélteti. Az oszlopdiagram sűrű, keresztsraffozással az energiaigényes⁽¹⁾ fejlesztést, a ritkább, egyirányú sraffozással a kevésbé energiaigényes⁽²⁾ fejlesztést ábrázoltuk. (Ábrázolástechnikai okokból az A , m , ΔA eltérő léptékek.) A vonalkázott területek a termelőkre vonatkoznak, a sraffozatlan ábrarészek az energetika jellemzői.

4.4 A vizsgálati eredmények megbízhatósága

A vizsgálati eredmények alapvetően az $a_i = A_{ih}/A_i$ [Ft/Ft], valamint a $\mu_{ih} = m_{ih}/A_{ih}$ [Ft/Ft] tényezők függvénye. Az árrendszer sajátosságaitól függetlenül ugyanis mindkettőt lényegesen befolyásolhatja az állóeszközök, az utóbbi pedig a tiszta jövedelem számbavétele is. Az állóeszköz értékelésnek ezen felül még metodikai gondjai is vannak (záró-nyitó, bruttó-nettó stb.).

A vizsgálatokat 1980. évi árszinten végeztük; a számításhoz szükséges különféle fajlagos mutatókat a hivatalos statisztikai adatok alapján határoztuk meg. Az 1980. évben kezdeményezett, kompetitív árrendszer kifejezett sajátossága a világpiaci árviszonyok folyamatos közelítése; különösen érvényes ez a célkitűzés az energiahordozók piacán. Ezért a vizsgálati eredmények általában megfelelnek a világpiaci árakon számítható hatékonysági viszonyoknak.

Az árrendszerei „bizonytalanságok” ellenére tehát a vizsgálati eredmények elfogadhatóan elégítik ki a gyakorlat igényeit. Az ágazatok egyes energiaigénységi-hatékonysági jellemzői között ugyanis nagyságrendi eltérések vannak, amint ezt a 4.4-1 és -2 táblázatok is mutatják.

4.4-1. táblázat

Az ágazatok járulékos energetikai állóeszközigénye; ($a_i - 1$) értékek

Me.: Ft en.áe/Ft ág.áe

Bányászati*	Kohászat	Gépipar	Építőanyag-ipar	Vegyipar*	Könnyűipar	Egyéb ipar	Élelmiszer ipar	Ipar össz.*
0,26	0,40	0,09	0,22	0,30	0,13	0,10	0,11	0,19

* Energetikai ágazatok nélkül

4.4-2. táblázat

Ágazatok „halmazott” állóeszközhatékonysága; μ_{ih} értékek

Me.: Ft ttj/Ft áe.

Bányászati*	Kohászat	Gépipar	Építőanyag-ipar	Vegyipar*	Könnyűipar	Egyéb ipar	Élelmiszer ipar	Ipar össz.*
0,08	0,10	0,18	0,07	0,11	0,14	0,28	0,05	0,12

* Energetikai ágazatok nélkül.

A táblázatokban szereplő adatok természetesen ágazati átlagok. Egy-egy ágazaton belül a szak- és alágazatok között további, hasonló nagyságú szórások vannak.

Az adatok nagyságrendi eltérései miatt a fajlagos mutatók akár több 10%-nyi „pontatlanságai” sem tudják érdemlegesen módosítani az ágazati mutatók egymás közötti arányait. Ezért a hatékonysági vizsgálati eredményeket egy esetleges árrendszer-módosítás is alig észrevehető mértékben befolyásolhatja.

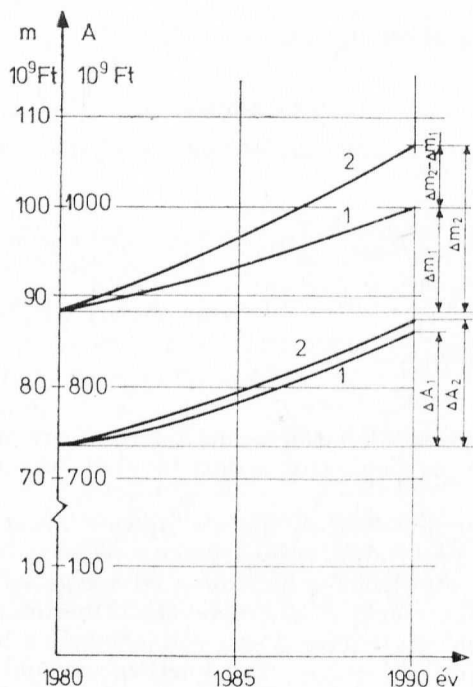
A fentiekhez hasonló nagyságrendi arányok jellemzik a beruházási allokáció egyensúlyát meghatározó $B = \sum e_i \cdot B_i$ képletben szereplő ágazati e_i mutatókat is. Ezzel kapcsolatos, említésre méltó sajátosság még, hogy a $B_{ih} = B_i +$

+ B_{ie} képletben szereplő B_{ie} ágazati járulékos energetikai beruházás egy speciális, úgynevezett „*halmozott beruházási mutató*” alapján lett meghatározva. Ennek értelmezése az, hogy az éves energiaszolgáltatás egységnyi növekményének biztosítása érdekében hány forint energetikai beruházásra van szükség hazai bázisú szénbányászat és villamosenergia-ellátás esetén. (Az előbbi nem azonos az energetikai kapacitás-létesítési beruházási fajlagossal, bár a [Ft/PJ/év] dimenzió mindkettőre azonos.)

5. Egy gyakorlati példa

A vizsgálati algoritmus segítségével, az 1980. évi statisztikai helyzetből kiindulva, 5—10—20 éves fejlesztési periódus során vizsgáltuk a különféle struktúrájú (és energiaigényességű) ipari fejlesztések hatékonysági viszonyait. A vizsgálathoz az ipart 29 al-, illetve szakágazatra bontottuk. Tudatosan kerülve a szélsőséges példákat, egy mesterkéltén energiaigényes és a tényhelyezethez képest valamivel kedvezőbb energiaigényességű két alternatíva jellemzőit hasonlítottuk össze. Az 1980. évi 6,9 [MJ/Ft ttj.] energiaigényességgel szemben a fejlesztési alternatívák növekményeinek energiaigényessége 16,4, illetve 4,4 [MJ/Ft ttj.]. (Szélső esetekben az átlaghoz képest ± 5 –6-szoros arányok is lehetségesek, pl. alumíniumipar 30, feldolgozó ágazatok 1—2 [MJ/Ft ttj.]

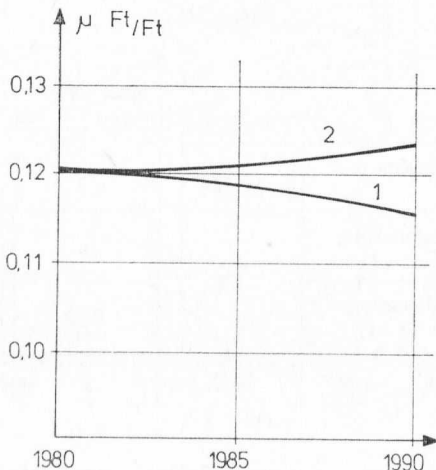
A vizsgálathoz felvett fejlesztési alternatívák mérsékeltén eltérő jellegét húzza alá az a körülmény is, hogy az *extenzív bővítés hatását csak az összes ipari*



5-1. ábra

beruházási lehetőségek mintegy 20 %-ára végeztük, valamint az energetikai fajlagos beruházásokat viszonylag kedvező értékkel — az elmúlt időszak statisztikai adatai alapján — vettük számításba.

Ennek ellenére a fejlődés dinamikáját jellemző mutatók különbségei meglehetősen nagyok az eltérő beruházási alokációk esetén.³ A változó népgazdasági haté-



5-2. ábra

konyságot tükröző 10. évre vonatkozó eredményeket közelítő értékekkel mutatják az alábbi diagramok.

Az 5-1 ábra felső része a társadalmi tiszta jövedelem évenkénti növekedését ábrázolja. A kétféle energiaigényességű, 1 és 2 jelű görbék közötti olló erőteljesen nyílik. Ez annak az eredménye, hogy a tízéves időszak folyamán az ipari átlagos állóeszközhatékonysági mutató a teljes állóeszközállományra 0,12-ről 0,115-re csökken az energiaigényes, illetve 0,123-ra nő a nem energiaigényes fejlesztés esetén (5-2 diagram), vagyis a 10. évre a *nem energiaigényes alternatíva jövedelemnövekménye* már 60–70%-kal nagyobb az energiaigényes fejlesztésnél. Ugyanakkor az állóeszköz-felhalmozókéességük között kisebbek a különbségek, amint ezt az 5-1 ábra alsó görbepárja mutatja.

Figyelemre méltó jellemző mutatói a kétféle fejlesztésnek, hogy hogyan változik már 10 év alatt is

- az ipar átlagos energiaigényessége,
- az $(a - 1)$ tényező, amely azt mutatja meg, hogy az ipar átlagában 1,0 Ft ágazati állóeszköz működtetése hány forint „járulékos” energetikai állóeszközt igényel. (Ennek oka az, hogy a különböző összetételű fejlesztések ágazati beruházásaihoz népgazdasági átlagban eltérő nagyságú, $[e - 1]$ arányú járulékos energetikai beruházás szükséges.)

³ A beruházási alokációt a B összes (extenzív) beruházás ágazati megoszlását jellemző, időben változatlan p_i ágazati arányokkal határoztuk meg. A jövő vizsgálatokban a p_i megoszlások időbeli változtatása is beépíthető a modellbe.

Különösen feltűnő, hogy milyen szélsőségesen eltérőek a mérsékeltten eltérő energiaigényességű fejlesztési változatok rugalmassági mutatói (az energiafogyasztás növekedésének és a jövedelem növekedésének hányadosai).

A két eltérő energiaigényességű fejlesztési alternatíva megfelelő jellemzőit az 5-1 táblázat foglalja össze.

5-1. táblázat

		Induló állapot	Energiaigényes fejlesztés 1.	Nem energiaigényes fejlesztés 2.
Ipar átlagos energiaigényessége a periódus végén		MJ/Ft	6,9	8,3
„Járulókos” energetikai	beruházás ($e-1$)	Ft	—	0,93
	állószerkező ($a-1$)		0,19	0,33
Rugalmassági mutató r		%/%	—	1,5
				0,6

A vizsgálati algoritmus — egyszerűsítési megfontolásokból — nem tesz különbséget a különböző energiaigényességű fejlesztések időben eltérő realizálhatóságai között. Az időbeli fáziseltolódásnak a hatékonyságra gyakorolt hatásait azonban közvetve, egyszerűsített módon figyelembe vehetjük. Ez úgy történhet, hogy az f évvel hosszabb idő alatt, illetve később realizálódó, energiaigényesebb fejlesztés megfelelő jellemzőit ábrázoló görbéket a diagram időtengelyén jobbra f évvel eltoljuk, mint ezt példaként az 5-3 ábra szaggatott, $1'$ jelű görbéje is mutatja. A fáziseltolódás figyelembevételével, az eltérő energiaigényességből származó hatékonysági különbségek tehát még nagyobbak lennének, a jövedelemnövekmények különbsége pl. az ábra szerint $\Delta m_2 - \Delta m_1$ nagyságú szemben az 5.3 ábrán szereplő $\Delta m_2 - \Delta m_1$ különbséggel.

A kétféle energiaigényességű fejlesztés eredményességének, jövedelemtermelő képességének eltérése két hatás eredőjeként adódik:

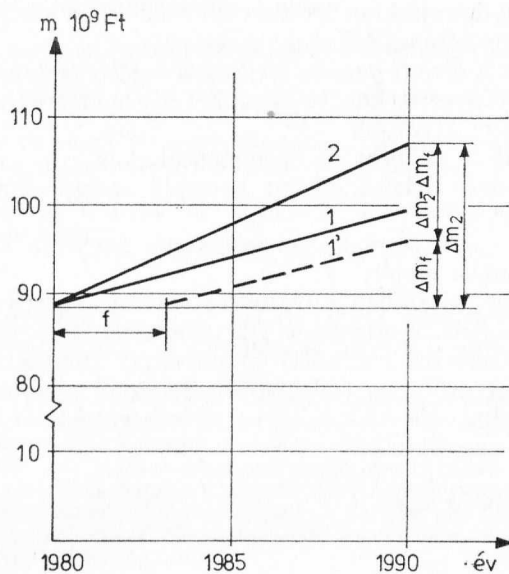
— egyrészt az ágazatok saját μ_i állószerkezőhatékonyságainak különbözőségéből,

— másrészt az ágazatok eltérő energiaigényességéből.

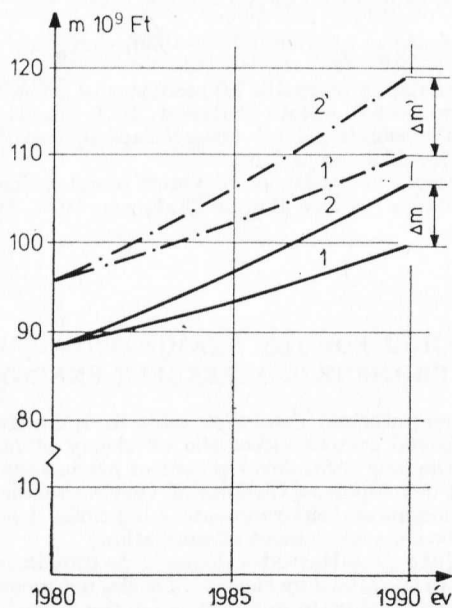
Az energiaigényesség szerepét szemlélteti az 5-4 számú ábra. Ezen az $1'$ és $2'$ jelű görbék olyan fejlesztések jövedelmének alakulását mutatják, amelyben az energetikai ágazatok is μ_T állószerkezőhatékonysággal termelnének a μ_E helyett („energetika nélküli termelés”).

Az $1'$ és $2'$ jelű görbék nemcsak hogy meredekebbek, vagyis nagyobb ütemű növekedést biztosítanak, mint a megfelelő, eredeti 1 és 2 jelű fejlesztések, hanem a vizsgálat szerint az A_E energetikai állószerkező már az első évben is — a μ_T/μ_E kb. kétszeres viszonyának megfelelően — egy $A_E \cdot (\mu_T - \mu_E) \cong A_E \cdot \mu_E$ -vel nagyobb tiszta jövedelmet állítana elő. (Már az induló év jövedelme is mintegy 10% körüli értékkel nagyobb lenne.)

A kifejlesztett vizsgálati módszer alkalmas arra, hogy tetszőleges fejlesztési variánsokat rutinszerűen, viszonylag rövid idő alatt vizsgáljunk, ezzel a nép-



5-3. ábra



5-4. ábra

gazdasági fejlesztési döntésekhez hasznos információkat szolgáltatassunk. A vizsgálatok mindenesetre *bizonyítják, hogy az energiaigényesség az egyik igen fontos befolyásoló tényezője a távlati gazdaságfejlesztés hatékonyságának*, ezért az energetika a termelési tényezők között kiemelt figyelmet érdemel.

A jövőben elemezni kívánjuk

- az extenzív mellett az intenzív beruházásokat is
- a modellben exogén bázisadatként szereplő energiaellátási fajlagos beruházás drágulását,
- az energiaigényesebb termeléshez szükséges nagyobb beruházások hosszabb megvalósulási idejét,
- az energiaigényes, általában folyamatos üzemű alapanyaggyártó és a kevésbé energiaigényes, rendszerint 1-2 műszakos feldolgozó ágazatok állóeszközeinek kihasználása közötti különbséget (műszakszámnövelés arányosan javítja az utóbbiak fajlagos jövedelemtényezőjét),
- a környezetvédelmi előírások miatti többletberuházások az energiaigényes tevékenységnél nagyobbak.

(Beérkezett: 1983. október 25-én.)

IRODALOM

1. ANDORKA R.—DÁNYI D.—MARTOS B.: *Dinamikus népgazdasági modellek* Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. DRECHSLER L.: A gazdaságosság mérésének általános kérdései *Gazdaság*, 1978.
3. DRECHSLER L.: *A hatékonyság mérése és tervezése* Budapest, 1981. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. ERDŐS P.: Az energiaigényesség népgazdasági szerepe Budapest, 1980. Kézirat.
5. FÜLÖP G.: Hatékonyság és az újratermelés arányai Budapest, 1978. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
6. GALLA L.: Eszközigenység az iparban (1960—1980) Budapest, 1982. augusztus. Kézirat.
7. MEGYERI E.: A vállalati alapok optimális kihasználása és a hatékonyságmérés néhány problémája Szoc. váll. sorozat 5. kötete Budapest, 1976. Akadémiai Kiadó.
8. NYITRAI F.-né: A hatékonyságvizsgálatok tapasztalatai az iparban Szoc. váll. sorozat 5. kötete Budapest, 1976. Akadémiai Kiadó.
9. Anyag- és energiaigényesség közvetlen és közvetett összetevőinek népgazdasági elemzése az ágazati kapcsolatok mérlege alapján Budapest, 1983. Ipargazdasági Intézet. Kézirat.

A DYNAMIC MODEL FOR THE EXAMINATION OF SECTORAL DEVELOPMENT PROJECTS OF DIFFERENT ENERGY-INTENSITY

The article presents a computerized *simulation model* for quantifying how the different energy-intensities of industrial sectors affect the efficiency of industrial investments.

The model determines the long-term development of net income produced per unit of fixed assets for industrial development variants of varying sectoral composition under different technological, economic and environmental conditions. A part of the assumptions can be changed and thus become an element of simulation.

The model relies basically on the Harrod—Domar type growth principle. Accordingly, social output — measured in the model by the size of social net income — is proportionate to the quantity of fixed assets tied up in production. On the other hand, the expansion of fixed assets depends on the amount of income produced.

The basic *properties* of the development model:

- it is dynamic,
- up to now the model examined the efficiency of extensive expansion but it is also suited to analyse intensive developments,
- it is constructed at fixed (1980) prices, thus it presents quantity relations.

For illustrative purposes we examined with the model several development variants of moderately different energy-intensity. The numerical results show the economic importance of the reduction of the average industrial energy-intensity, as it generally goes with increased income generation.

The presented method is suited for a routine-like, relatively rapid examination of optional development variants.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АНАЛИЗА ЭФФЕКТИВНОСТИ ОТРАСЛЕЙ С РАЗЛИЧНОЙ ЭНЕРГОЕМКОСТЬ

В статье показана разработанная для ЭВМ симуляционная модель, с помощью которой можно количественно представить влияние различной энергоемкости на народнохозяйственную эффективность промышленных капиталовложений.

Модель определяет, как складывается производство удельного чистого общественного дохода на единицу основных фондов в течение длительного периода для вариантов промышленного развития различных по отраслевой структуре при разных технико-экономических условиях и разной среде. Часть посылок может быть сама изменена и поэтому может быть элементом стимулирования.

Модель по существу основана на принципе роста Харода-Домара. В соответствии с этим общественное производство, которое в модели измеряется величиной чистого общественного дохода, пропорционально количеству вложенных в производство основных средств. Возможность же расширения основных фондов зависит от величины произведенного дохода. Основные особенности модели развития: она динамична; до сих пор с ее помощью анализировались условия эффективности экстенсивного развития, однако она может быть применена и для анализа интенсивного развития; модель рассчитана в неизменных ценах (1980 г.), т.е. показывает объемную связь. Конкретные количественные результаты проанализированных с помощью модели в качестве примера вариантов развития, лишь незначительно расходящихся по энергоемкости, показывают, что одним из важнейших требований экономического развития является сокращение средней потребности промышленности в энергии. А это обычно ведет к росту доходности.

Разработанный метод пригоден для проведения общего и относительно быстрого анализа любых вариантов развития.

IDEGEN TOLLAK

LEIF JOHANSEN

Az interakció a közgazdasági elméletben*

1. Bevezetés

A cikket azzal a szándékkal írtam, hogy hozzájáruljak a közgazdaságtudomány és a szociológia összekapcsolásához. A „szereplők közti interakció” fogalmát érintkezési pontként használom. Ennek a fogalomnak központi helyet kell kapnia minden társadalomtudományban. Úgy gondolom, hasznos és magyarázó erejű lesz, ha a figyelmet ráirányítom arra, hogy a társadalomtudomány különböző ágaiban hogyan kezelik, milyen módon fogják fel és elemzik az interakciókat. Ez segítségünkre lehet abban, hogy megértsük a társadalomtudományok hasonlóságait és különbségeit és talán abban is, hogy előremozdítsuk a közös kutatást.

Ezzel a szándékkal és szemlélettel megkísérlem, hogy rövid áttekintést adjak a közgazdasági elméletben előforduló „szereplők közötti interakciók”-ról. (A közgazdaságtanban a szereplők lehetnek személyek, háztartások, vállalatok vagy más döntéshozó egységek.) Gondolataim kifejtése némiképp kísérleti lesz, két vonatkozásban is: először abban, hogy kísérletet tesz a tudományágak közti határ átlépésére, másodszer kísérleti a közgazdaságtan határain belül is, mert az elméletek és kérdések interakció-típusok szerinti elrendezése eléggé különbözik a közgazdaságtanban szokásos osztályozástól.

Interakcióról akkor beszélünk, ha egy kölcsönös függéseket magában foglaló rendszerben két vagy több szereplő cselekszik. A rendszer abban az értelemben kölcsönösen függő, hogy — a jövedelemben, a jólét növekedésében, a „sikerben” — jelentkező eredmény, amit az egyik szereplő valamilyen módon elért, saját akcióján kívül függ a többi szereplő akcióitól is. Akció csaknem minden lehet, amiről egy szereplő dönthet — egy termék termelésének mennyiségétől kezdve az (igaz vagy hamis) információ-szolgáltatásig.

Úgy gondolom, hogy a kölcsönös függések léte szükséges követelmény az interakciók létrejöttéhez. Ha úgy határozom meg az akciót, mint amiről a szereplők dönthetnek, akkor lehet, hogy ezzel megfontolásaim köréből kizártam az interakció néhány olyan formáját, amivel a többi társadalomtudományok foglalkoznak. A közgazdaságtudományban a szereplő rendszerint *tudatosan* hozza döntéseit. (Eltekintve talán bizonyos kísérleti, elméleti megfontolásoktól, amelyekben a szereplők többé-kevésbé önkényes módon viselkednek, s a piaci mechanizmus vagy más intézményi rendszer olyan módon működik, hogy csak azok maradnak életben, akik bizonyos típusú döntéseket hoznak; azaz eltekintve a darwinizmus és a hozzá kapcsolódó gondolatok által inspirált

* A cikk az *Économie appliquée*, Archives de l'I.S.M.E.A.-ban jelent meg. (Tome XXXIV-1981-No 2—3, pp. 229—268) Itt most a szerzőnek 1982 végén bekövetkezett hirtelen halálára emlékezve közöljük. Fordította *Farkas Katalin*.

elméletektől.) A közgazdaságtanok többsége még tovább megy, és feltételezi, hogy a gazdasági élet szereplői képesek *raciónalisán* választani. (Paul Samuelson — nagy hatású könyvében a *Foundations of Economic Analysis*-ben — azt az észrevételt tette, hogy a közgazdászok többsége a racionális, illetve irracionális magatartás alapján választja el egymástól a közgazdaságtant és a szociológiát, s a kétféle magatartást a hasznossági elmélet alapján határozzák meg.) Általános jellemzőként ez kétségtelenül helyes, de bizonyos összefüggésekben, a különböző tökéletlenségek megengedésével természetesen módosítani kell. Az a benyomásom, hogy ha figyelmünket a különböző helyzetekben kialakuló interakció-típusokra összpontosítjuk, a kép kevésbé lesz világos. Ennek alapvetően az az oka, hogy társadalmi interakciós helyzetekben nem mindig világos, mi a racionális cselekvés. Talán megfogalmazhatjuk a következőképpen: Ha világos, hogy mi a racionális cselekvés, akkor a közgazdász szereti feltételezni, hogy a szereplők racionális döntéseket hoznak, és mindaddig amíg ez beválik, úgy érzi, hogy elméleteinek alapja igaz. Vannak azonban olyan helyzetek, amelyekben ez az alapelv nem meggyőző. Ekkor lenne különösen szükség az integrált társadalomtudományi megközelítésre.

Az interakciók közgazdasági elméletben játszott szerepének pontosabb és rendszeresebb leírásához — úgy gondolom — hasznos lesz, ha megkülönböztetjük az interakciók következő típusait.

1. Az első típust *közvetettnek és parametrikusnak* nevezhetnénk. Ebben az esetben a szereplő bizonyos fokig nem tudatosan vesz részt az interakcióban és akciót olyan módon választja meg, mint az a döntéshozó, aki természeti vagy mechanikai rendszerek által létrehozott helyzetben van, azaz olyan helyzetben, amikor az ember nem úgy gondol a környezetére, hogy az olyan szereplőkből áll, akik az ő akciójára reagálnak. Interakció valójában azért jön létre, mert az összes szereplő akcióinak összessége visszacsatolódik az egyes szereplők helyzetére és az eredményekre, amit akcióikkal elérnek. Az interakció azért „parametrikus”, mert olyan nagyságokon keresztül lép működésbe, amit az egyes szereplők nem a többi azonosítható szereplő döntéseinek kifejeződéséként érzékelnek, hanem inkább mechanikus vagy személytelen módon kialakuló nagyságokként. Ennek legtipikusabb esete a piac, ahol minden szereplő egy személytelenül meghatározott „piaci árat” figyel, és döntéseiben ehhez a piaci árhoz, mint adott tényhez alkalmazkodik. A szereplők között nincsen közvetlen információ-csere, de mindegyikük megfigyeli a „paraméterek” értékét, amelyek az akciók összességének és a rendszer működési módjának eredményeként alakulnak ki. Az egyes szereplők csak jelentéktelen befolyással vannak a paraméterek értékére (és ennek megfelelően nem irracionális az előbbi viselkedési mód részükről), de sok szereplő van, így tehát az akciók összessége lesz az ok, amely meghatározza a „paraméterek” értékét. A paraméterek minden egyes szereplő számára kívülről adottként jelennek meg, a rendszer egésze szempontjából azonban bensőek.

2. Második típusnak a *közvetett funkcionális interakciót* tekinthetnénk. Itt a szereplők inkább tudatában vannak a többi szereplőnek, mint az első típusnál. Egy részük ismeri a többi szereplő magatartási és reakcióformáit, s ezeket az ismereteit számításba veszi saját döntéseinek meghozásakor. Az interakció azonban még mindig közvetett, mert az egyedi szereplő nem találkozik közvetlenül a többivel, tehát nem tudnak közvetlenül információt cserélni, egyezéseket kötni. A közvetett interakciónak ezt a típusát azért nevezzük „funkcionális”-nak, mert most már egy vagy több szereplő számára a környezet

magatartási formákban, nem pedig egyszerűen „paraméterek”-ben jelenik meg, s a magatartási formákat matematikai értelemben vett függvényekkel is ki lehet fejezni. Az interakciónak ezt a típusát tovább lehet osztályozni aszimmetrikus esetekre — amelyekben az egyik szereplő ismeri a többiek magatartási formáit és ki is használja ezt a tudását, de fordítva ez nem igaz — és szimmetrikus esetekre — amelyekben két vagy több szereplő kísérletet tesz arra, hogy kölcsönösen kihasználják egymás magatartási formáinak ismeretét. Az utóbbi eset sokkal problematikusabb, mint az aszimmetrikus. Ez könnyen elgondolható: saját döntésem kialakítása során megpróbálom kiszámítani, milyen lesz a többi szereplő magatartási formája, miközben tudatában vagyok annak, hogy ők is megpróbálják kiszámítani az én magatartási formámat, mielőtt saját döntésüket meghoznák. Meg kell tehát próbálnom olyan ésszerű döntést hozni, ami tekintetbe veszi a többi szereplő döntési folyamatának alapjául szolgáló gondolatokat, ami megint csak függ attól, hogy ők mit gondolnak az én döntési folyamatomról, azaz épp arról a dologról, amelyről határozni próbálok.

3. Az utolsó típus pedig a *közvetlen interakció*, amelynek során a szereplők közvetlen kapcsolatban vannak egymással, információt cserélhetnek, ajánlatokat tehetnek egymásnak, fenyegethetik egymást, megegyezésre juthatnak akcióik összehangolásában stb.

Az 1., 2. és 3. pontban nagyon általános formában írtam le az interakció típusait. A következő alfejezetekben alaposabban fogom őket leírni, és a közgazdasági elméletből vett fogalmakkal és példákkal magyarázni. Talán meg kell említenem, hogy a kifejezések, amelyeket használtam, nem felelnek meg a közgazdasági elmélet standard terminológiájának, hanem pillanatnyi célo-mnak megfelelően alakítottam ki őket. Elég könnyűnek látszik azonban a közgazdasági elmélet különböző részeinek besorolása ebbe az osztályozásba. Durván azt lehetne mondani, hogy a közgazdasági elméletnek csak az első típusú interakciókat felölölő problémák elemzése az erőssége, kevésbé erős a második típus elemzésében, különösen a szimmetrikus esetben, és a harmadik típusú interakciók elemzésében a leggyengébb. Más társadalomtudományok talán épp fordított rangsort adhatnának. S ha így van, az a társadalomtudományok közti komplementáris kapcsolatokra utalhat.

Ahogy más esetekben kifejtettem, úgy gondolom, hogy olyan rendszerben, amely a szereplők kölcsönös függésével és különböző fokú közös és egymásnak ellentmondó érdekeikkel jellemezhető, a szereplők interakcióinak elemzéséhez a játékelméleti megközelítés és a játékelmélet fogalmai a legmegfelelőbbek. A játékelmélet különböző ágai többé-kevésbé megfelelnek az interakciók előbbiekben megadott osztályozásának. A nem-kooperatív játékok felelnek meg a közvetett funkcionális interakciónak. Ebben az esetben a szereplők tudatában vannak a kölcsönös függéseknek, de a döntéseket elszigetelten hozzák, közvetlen kommunikáció és az együttműködésre vonatkozó megegyezések nélkül. A kooperatív játékok és az alku-elmélet felel meg azoknak a helyzeteknek, amelyekben közvetlen interakció van, mert ezek foglalkoznak azokkal az esetekkel, amelyekben a szereplők közvetlenül kommunikálhatnak, koalíciókat alakíthatnak, egyezségeket köthetnek stb. Az interakciók első típusa, a parametrikus közvetett interakció, problematikusabb, ha a játékelmélethez próbáljuk társítani. Szigorúan véve minden olyan közgazdasági elmélet, amely a parametrikus interakcióval foglalkozik, a játékelmélet szempontjából hiányos. A játékelmélet a szereplők lehetséges akcióinak teljes specifikációját

követeli meg, míg a parametrikus interakcióval foglalkozó elméletek általában kissé homályban hagyják azokat az akciókat, amelyek megváltoztathatják a paraméterek értékét. Ezeket az elméleteket hitelesebbé lehet tenni, különleges esetek figyelembevételével vagy a játékelmélet határeseteként, így az eredeténél jobban megalapozva őket.

A fenti összefüggéseket a következő táblázat foglalja össze:

Az interakció típusai a közgazdasági elméletben:	Összekapcsolhatók a játékelmélet következő formáival:
Közvetett parametrikus interakció	→ A közgazdasági elméleteknek ez a típusa játékelméleti szempontból hiányos, de egyes esetekben védhető, mint az alábbi játékok közelítése vagy határesete
Közvetett funkcionális interakció	→ Nem-kooperatív játékok
Közvetlen interakció	→ Kooperatív játékok és alkuelmélet

A cikk 2., 3. és 4. részében az interakció különböző típusait — ahogy már ígértem — alaposabban megvizsgálom és mindegyik részben a játékelmélettel való kapcsolattal is foglalkozom. Az 5. részben a közgazdasági elmélet néhány speciális ágával fogok röviden foglalkozni, különös tekintettel arra, hogy milyen típusú interakciót képviselnek. A befejező részben többek között javaslatot teszek egy általánosabb elméletre, amely a táblázatban nem szerepel, de amely leginkább egy vegyes (kooperatív + nem-kooperatív) játékelméletnek tekinthető, s ennek megfelelően magában foglalja mind a közvetett, mind a közvetlen interakció elemeit.

2. Közvetett parametrikus interakció

A közgazdasági elmélet fő célja, és egyben jellemzője is a nemzeti (és talán a világ-) gazdaságot együttesen alkotó nagyságok kapcsolatainak és kölcsönös függéseinek, valamint ezek következményeinek feltárása és elemzése. Hogy úgy mondjam ez a közgazdaságtannak mint társadalomtudománynak „raison d'être”-je (létezésének oka); annyira az, hogy sokszor gúnyolódniak rajta és a közgazdászt olyan embernek tekintik, aki mindig arra a következtetésre jut, hogy minden mindennel összefügg. Az előbbieket figyelembe véve világos, hogy a közgazdaságtan a társadalmi jelenségeket tanulmányozva az interakció igen magas fokát tükrözi. A modelleknek azok a típusai azonban, amelyek a „minden mindennel összefügg” következtetésre vezetnek, általában olyan módon vannak megfogalmazva, hogy a bennük szereplő interakció közvetett parametrikus típusú, ahogy a bevezető részben már említettem. A paraméterek szerepét játszó nagyságok — amelyeket az egyedi szereplők megfigyelnek, s amelyekhez alkalmazkodnak — általában árak (árnak tekintve a béreket és a kamatlábakat is).

A standard elmélet az *általános egyensúlyelmélet*. Ez szabad szereplők piaci rendszerének egy modellje: a szereplők vállalatok, egyének vagy háztartások. Minden piacot egy általános rendszer részeként kezel, amelyben minden kölcsönös függés megjelenik. Az elmélet abban az értelemben egyensúlyi, hogy

a gazdaságnak azokat az állapotait vizsgálja, amelyekben a különböző piacok kiegyensúlyozottak: az árak olyanok, hogy a kereslet és a kínálat egyenlő, és nem érvényesülnek árváltozási tendenciák. Az elmélet abban az értelemben „általános”, hogy minden piac azonos időben érvényesülő egyensúlyát, az összes kölcsönös összefüggést figyelembe veszi.

A következő fejtegetéshez röviden össze kell foglalnom, hogyan fogalmazzák meg az általános egyensúlyi modelleket. A modell elemei a következők:

(1) Minden vállalatnak vannak bizonyos termelési lehetőségei, amelyekkel a termelési inputok különböző mennyiségeinek különböző kombinációival különböző termékeket bocsáthatnak ki. Matematikai formában ezt termelési függvénnyel vagy termelési halmazzal lehet kifejezni.

(2) A vállalat megfigyeli termékeinek és különböző termelési ráfordításának piaci árát (a béreket is). A vállalat maximális profitot próbál elérni, azaz a termék és a termeléséhez felhasznált inputok értéke közötti maximális különbségre törekszik. A piacon uralkodó áraknak megfelelően a vállalat ki tudja számítani azt a termelési mennyiséget és a ráfordításoknak azt a mennyiségét és kombinációját (összetételét), amelyik maximális profitot eredményez. Ez meghatározza a vállalat által termelt termékek termelését és kínálatát, és a vállalat keresletét a különböző termelési tényezők (ezek között a munka) iránt. Ha különböző árakat képzelünk el, a vállalat termékeinek kínálata és a termelési tényezők iránti kereslete az árak függvényében változik, ezek lesznek a kínálati függvények és a termelési tényezők keresleti függvényei.

(3) A háztartások a munkát kínálják a vállalatoknak és termékeket fogyasztanak. A háztartásnak olyan preferencia szerkezete van, amelyben szerepel a kifejtendő munka és a fogyasztani kívánt javak mennyisége és összetétele. Választási lehetőségeit az korlátozza, hogy kiadásait jövedelméből kell fedeznie — azaz a költségvetési korlátja. A jövedelem elsősorban a munkáért kapott bérből származik, de néhány háztartásnak lehet profit-jövedelme is (amit a tulajdonosok kapnak). A bérek és a termék-árak (és esetleg a tulajdonosi jövedelmek) adott konstellációjának megfelelően a költségvetési korlát által behatárolt lehetőségek halmazában lesz a kifejtett munkának és a fogyasztás mennyiségének és összetételének egy olyan nagysága, amely a háztartás preferencia-szerkezetét tekintve a legjobb. Ha a béreknek és a termékáraknak különböző, változó nagyságait képzeljük el, a háztartás által kifejtetni óhajtott munka és az elfogyasztani kívánt termékek különböző értékeit kapjuk. Azt, ahogyan a munka mennyisége és a különböző termékek fogyasztása a bérektől és áráktól függ, a munka kínálati függvényével és a fogyasztási javak keresleti függvényével lehet kifejezni.

(4) A gazdaság mint egész számára szükséges, hogy egyenlőség legyen minden terméknek (beleértve a munkát is) a rendelkezésre álló és a felhasznált mennyisége között. *Egyensúly* van, ha minden termékből a különböző vállalatok által kínált mennyiségek összege megegyezik a különböző háztartások és vállalatok által vásárolni kívánt mennyiségek összegével, és ugyanakkor a háztartások által kínált munka mennyisége egyenlő azzal a munkamennyiséggel, amely iránt a különböző vállalatok keresletet támasztanak.

Az (1)–(4)-ben említett minden összefüggés matematikai egyenletnek tekinthető, s így egy egyenletrendszer kapunk, amelyben az ismeretlenek az árak (beleértve a béreket is), a különböző termékek megtermelt és eladott mennyisége, a munka és a többi termelő input felhasználása és a háztartások fogyasztása a különböző termékekből.

Általában az effajta egyenletrendszerek megalkotását tekintik a közgazdasági elmélet egyik leglátványosabb eredményének. A rendszert logikai és matematikai szempontból szigorúan elemezték, és gondosan kidolgozták az effajta rendszerek értelmes megoldásának létezéséhez a feltételeket. Ha létezik ilyen megoldás, akkor a rendszer meglehetősen erős, bepillantást enged abba, hogyan működik a piaci rendszer. Ha olyan gazdaságot tekintünk, amelyben nagyszámú vállalat és háztartás van, és elképzeljük a meghozandó döntések hatalmas számát, ugyanakkor tudatában vagyunk annak, mennyi kölcsönös összefüggésnek kell lennie a termelés és a fogyasztás között a rendszerben mint egészben, akkor csodálkozunk azon, hogy a rendszer egyáltalán működőképes, teljes káosz vagy összeomlás nélkül. Az általános egyensúlyi modellek megértése és az áraknak ezekben a rendszerekben játszott szerepe segít felfognunk, miért tart mégis egyfajta stabilitáshoz, a különböző piacok megközelítő egyensúlyához a piaci rendszerben hozott — a termelésre és fogyasztásra vonatkozó — óriási számú döntés. Továbbá az általános egyensúlyi rendszer megértésével válik világossá, hogyan „függ össze minden mindennel” a gazdaságban. Tekintsünk például egy technikai újítást, ami megváltoztatja a gazdaság egy szektorában a termelési lehetőségeket. Ekkor — az ezt a szektort jellemző — keresleti és kínálati függvények megváltoznak. Az új egyensúly az árak új nagyságát kívánja meg, ami a háztartásokat arra indítja, hogy megváltoztassák fogyasztási döntéseiket és talán munka-kínálatukat is, és így tovább a rendszer összes változójára vonatkozó teljes körben. Specifikus ok-okozati elemzéssel nem kaphatunk végső választ arra a kérdésre, milyen hatással volt a technikai újítás az ágazatra magára és a rendszer többi részére. A választ csak úgy kaphatjuk meg, ha a rendszert mint olyan egyenletekből álló egészet tanulmányozzuk, amely kölcsönös összefüggéseket fejez ki.

A rendszer, ahogy itt röviden összefoglaltam, stilizált elméleti séma. Így elsősorban a megértést szolgálja. Néhány változtatással azonban az ilyen és hasonló rendszerek fontos szerepet játszanak az empirikus elemzés eszközeként és a különböző gazdaságpolitikai beavatkozások hatásának kutatásával kapcsolatban is. Ebben az összefüggésben az előbb az (1)–(4)-ben röviden leírt egyenletrendszer különböző helyein (ahová tartoznak) be kell vezetni olyan dolgokat is, mint a közvetlen és közvetett adók, támogatások és a gazdasági-politikai beavatkozások egy sor más típusa. Ekkor a változások hatásával kapcsolatos kérdés az lesz, — például az adók vagy támogatások változtatásakor — hogy hogyan változik a rendszer egyensúlyi helyzete a gazdasági-politikai eszközök értékének adott változtatására adott válasz-reakciók eredményeképp. A hatások a rendszerben mint egészben gyakran eléggé különbözni fognak attól, amit az ember a közvetlenül érintett pontra gyakorolt hatás alapján gondolna.

Ezek a gondolatok megmutatják az általános egyensúlyi rendszerben az interakciók fontosságát. Hogy mi történik az egyes gazdasági szereplőkkel, az a rendszerben mint egészben lezajló reakcióktól függ. Ha például egy ágazatban egy technikai újítás a termelékenység növekedését teszi lehetővé, akkor az, hogy a kérdéses ágazatban a foglalkoztatás nőni vagy csökkenni fog, a rendszer egészében lezajló kereslet és ár reakcióktól függ. Hasonló módon, ha adóváltoztatással, támogatással vagy bizonyos árak és bérek szabályozásával egyes ágazatok vagy társadalmi csoportok helyzetét próbáljuk meg javítani, a rendszerben mint egészben lejátszódó reakciók ellentétesek lehetnek az eredeti szándékokkal és nem szándékolt mellékhatásokat okozhatnak. Ezek

a problémák azokat az interakció-típusokat példázzák, amelyekkel a közgazdaságtan intenzíven foglalkozik, s amelyeket a többi társadalomtudományok hajlamosak elhanyagolni, illetve az effajta reakciók jelentőségét alábecsülni.

Az általános egyensúlyi rendszerben lezajló interakciók a bevezetésben közvetettnék és parametrikusnak nevezett típusba tartoznak. Minden egyes gazdasági szereplő — vállalat vagy háztartás — elszigetelt döntéshozóként, a többi döntéshozóval való nyílt és tudatos interakció nélkül, választja meg akcióit. Az árak játsszák a paraméterek szerepét: az egyedi döntéshozók az árakat személytelen adatokként figyelik meg és a megfigyelt értékhez alkalmazkodnak. Az interakciók ezeken a személytelen árakon keresztül zajlanak az összes keresleti és kínálati döntés következményeként, ahogy az árak egy olyan szint felé hajlanak, amelyen a kereslet és a kínálat minden piacon egyenlővé válik. (Ezen a ponton helyénvaló, hogy röviden elmagyarázzam, miért tekinti a játékelmélet művelője a „közvetett parametrikus interakciót” használó elméletet némiképp hiányosnak, ahogy azt a bevezetés végén levő táblázatban állítottam. Ha az emberi interakciót játékelméleti alapon tanulmányozzuk, akkor világosan meg kell adni a különböző játékosok lehetséges akcióit, és minden végrehajtott akciót explicit módon össze kell kapcsolni az egyes játékosokkal. Az általános egyensúlyelmélet modelljében a szereplők lehetséges akciói azokra az esetekre vannak alaposan kidolgozva, amikor az árak adottak a számukra. Az azonban, hogy milyen akciókra van lehetőség, amikor változnak az árak, az elmélet szokásos formájában nincs világosan specifikálva.)

Természetesen rá kell mutatni arra, hogy sok olyan cél van, amelyhez az általános egyensúlyi rendszer csak az elemzés kiindulópontja. Sok érdekes kérdést vet fel például az a probléma, hogy hogyan működik a rendszer mint egész, ha az árak nem alkalmazkodnak automatikusan olyan módon, hogy biztosítsák a kereslet és a kínálat egyensúlyát. A munkanélküliség magyarázata fontos kérdés, amely szoros kapcsolatban van ezekkel a problémákkal. Nem folytatom tovább a felsorolást. Az általános egyensúlyi rendszer rövid bemutatása csupán azt a célt szolgálta, hogy megvilágítsam, milyen fajta interakciók jelennek meg ebben a rendszerben.

Ha egy résztvevő megfigyelőnek konkrét leírást kell adnia arról, hogyan működik egy gazdaság a valóságban, akkor természetesen sok olyan interakciót kell leírnia, amely nem tartozik a közvetett parametrikus típushoz. Ez önmagában nem csökkenti az általános egyensúlyelméleti elemzés értékét és fontosságát. Talán azt mondhatnánk, hogy ez az elméleti típus kísérletet tesz a valóságban lezajló közvetlenebb és tudatos interakciók *eredményének* leírására és magyarázatára. Ebben az összefüggésben a leglényegesebb kérdés az árak szerepe. Az általános egyensúlyi rendszer magyarázatában az árakat úgy kezelik, hogy többé-kevésbé automatikus alkalmazkodással megtisztítják a piacot. Valójában az árakat emberi döntések változtatják meg, és ez olyan folyamat során megy végbe, amelyben az eladók és a vevők közvetlenebb interakcióban vannak egymással. S amíg a modellel összhangban levő egyensúly ki nem alakul, közvetlen interakciók mozgásban tarthatják az árakat.

A közgazdasági elmélet művelői természetesen tudatában vannak az általános egyensúlyelmélet jelenlegi formájával szemben felhozható számos kritikai észrevételnek. Világos, hogy az elmélet azoknak a helyzeteknek a tanulmányozásában a legerősebb, amelyekben olyan sok szereplő van, hogy a piaci

ár az egyes szereplők számára személytelen és személyes befolyásán kívülálló valami. Továbbá akkor a legrelevánsabb, ha a termékek nagymértékben standardizáltak, s így a termék nem kapcsolódik szorosan egy meghatározott termelőhöz. Ki kell azonban terjeszteni, illetve módosítani kell az elméletet akkor, ha a termelési folyamat olyan hosszú ideig tart, hogy az egyes termelőnek döntése meghatározásakor figyelembe kell vennie, mi fog történni hosszabb idő múlva a jövőben.

Az interakció közvetett parametrikus formájának az a legérdekesebb vonása, hogy az egymástól való függések bonyolult hálózata ellenére minden egyes döntéshozót elvileg egyszerű helyzetbe hoz. Ha az egyensúlyi árak kialakultak, akkor — úgy is mondhatjuk — segítenek egy hatalmas, bonyolult döntési problémának egy sor egyszerű döntési feladattá való dekomponálásában. Ezeket a döntési feladatokat — öntudatlanul — „paraméterek”, az árak koordinálják. Az általános egyensúlyelmélet ellen felhozható kritikai megjegyzések az interakció más formáit vezetik be, s ezek bonyolultabb döntési helyzeteket hoznak létre. Érdekes az a tény, hogy az egyensúlyelmélet által létrehozott interakciós mechanizmus megoldását — amelyben, ahogy az előbbiekben leírtam, az árak parametrikus szerepet játszanak — bizonyos feltételek fennállása esetén olyan érveléssel is lehet magyarázni, hogy közvetlen interakciót is magában foglaljon. Erre később még visszatérünk.

3. Közvetett funkcionális interakció. Nem-kooperatív játékok

Az ebben a fejezetben vizsgált interakciós formában a rendszer egy vagy több szereplőjének „magasabb fokon álló” fogalma van a környezetről (vagy rendszerről), mint hogy néhány paramétert egyszerűen megfigyeljen és adott mennyiségként kezeljen. Paraméterek helyett szisztematikus magatartási formák elemeit érzékeli, amelyek a többi szereplő reagálási mechanizmusait képviselik. Ezután úgy döntenek saját akciókról, hogy közben figyelembe veszik a többi szereplő magatartási szabályosságait.

Ahogy a bevezetésben említettem, az interakciónak ez a típusa lehet szimmetrikus és aszimmetrikus. Az aszimmetrikus eset elég egyszerű, a szimmetrikus eset viszont mély problémákat vet fel.

A közvetett funkcionális interakció legegyszerűbb és legaszimmetrikusabb típusának a közgazdasági elméletben a *monopolisztikus piacot* tekintik, ahol a piac egyik oldalán egy termék egyetlen eladója, míg a másik oldalon a vevők nem szervezett nagy csoportja áll. Minden egyes vásárló a teljes kereslet jelentéktelen részét reprezentálja, és saját döntésével nem tudja érzékelhető módon befolyásolni a piaci helyzetet. Az egyes vásárlónak nincs más lehetősége, mint hogy elfogadja a piacon érvényes árat és csak vásárlásának mennyiségéről döntsön. A kínálati oldalon levő monopolista vállalat teljesen más helyzetben van: egyoldalúan meghatározhatja az árat. A tapasztalat és a piaci helyzet ismerete és talán némi kísérletezés alapján a vállalat számára világos lesz, hogyan függ a keresett mennyiség az általa meghatározott ártól: a keresett mennyiség az ár függvénye — keresleti függvénye — lesz, nagyobb kereslet felel meg az alacsonyabb árnak. Ha a vállalat célja a lehető legnagyobb profit, akkor — ha figyelembe veszi, hogyan függ a keresett mennyiség az ártól — megállapíthatja, melyik árszínvonal mellett jut a lehető legnagyobb profithoz.

Ha ezt összehasonlítjuk az előző pontban tárgyalt parametrikus interakcióval, akkor azt mondhatjuk, hogy a vevők ugyanúgy viselkednek, mint abban az esetben, amelyekben bizonyos nagyságokat adott nagyságként kezelnek, és elszigetelt döntésekkel alkalmazkodnak hozzájuk. Másfelől egy különleges szereplő — a monopolista — saját céljainak megfelelően tud befolyásolni egy olyan mennyiséget, amit a többiek adott paraméternek tekintenek, és ennek a befolyásolásnak a során kihasználja a többi szereplő reakció-formáiról rendelkezésére álló tudását. (Ebben a helyzetben a szimmetria hiányát nem a racionalitás különböző fokozatai vagy a helyzet helyes felismerésének képtelensége hozza létre, hanem a különböző piaci helyzet.)

A monopolisztikus eset egyszerű kiterjesztése, ha a piacon a domináns vállalat mellett egy sor, ugyanazt a terméket ugyanazon a piacon értékesítő, kisebb vállalat van jelen. Azokat az eseteket is ide sorolhatjuk, amelyekben a monopolista az árnegállapításban különbséget tesz a piacok között.

Ha a piaci alkalmazkodáson túl tekintünk, sok olyan helyzetet találunk, amelyek az interakció formáját tekintve aszimmetrikusak. Az egyik szereplő birtokában információk vannak a többi szereplő reakcióinak szabályosságairól, s ezt a tudását ki tudja használni, míg a többi szereplőnek ugyanúgy kell alkalmazkodnia, mint a parametrikus interakció esetében. Mikroszinten sok olyan eset van, amelyben pl. a darabbérek, prémiumok feltételei az interakciónak ezt a formáját képviselik. Szélesebb értelemben azt is mondhatnánk, hogy a gazdaságpolitika sok része ugyanehhez az interakció-típushoz tartozik, a központi hatóság van abban a különleges helyzetben, hogy ismeri és figyelembe veszi a többi szereplő reakcióformáját. Az akciók különböző gazdaságpolitikai eszközök értékének meghatározását jelentik, míg a többi szereplő reakcióformáit a fogyasztóknak és a vállalatoknak az eszközökben bekövetkezett változásokra adott válaszreakciói képviselik, néha a gazdaság ökonometriai modelljében kidolgozva.

Az ilyen aszimmetrikus helyzetek szervezetenként néha instabilak, abban az értelemben, hogy azok a szereplők, akiknek nincs más választásuk, mint hogy alkalmazkodjanak a különleges helyzetben levő szereplő döntéseihez, úgy érezhetik, hogy hátrányos helyzetben vannak és szervezeti intézkedések révén megpróbálkozhatnak helyzetük erősítésével. Ez a tendencia kapcsolódik a modern kapitalizmusban létező „kiegyenlítő hatalom” fogalmához, amit *J. K. Galbraith* vezetett be.

Az interakció aszimmetrikus típusának logikája, amit az előbbiekből írtam le, egyszerű és világos. A helyzet sokkal nehezebb, ha kisszámú szereplő szimmetrikusabb pozícióban van. Például olyan piacon, ahol nincs monopolista, hanem néhány azonos nagyságú vállalat, s mindegyik tudatában van annak, hogy némi befolyással bír a piaci helyzetre, de azt is tudja, hogy ez a többi vállalatra is igaz. Az ilyen helyzetekre is kialakultak elméletek — azt mondhatjuk, hogy ezek a szimmetrikus vagy kölcsönös funkcionális interakció formáit képviselik. Minden vállalat megpróbálja kitalálni, milyenek a többi vállalat reagálási formái, és ezeket a sejtéseket figyelembe véve hoz döntést saját akcióiról. Ezt az elméletet gyakorta nevezik „sejtési elmélet”-nek. Ez a fajta elmélet azonban mély problémákat vet fel. Ha én, mint egy vállalat képviselője tudom, hogy a többi vállalat megpróbálja az én jövőbeni reagálási szabályaimat kitalálni, és én megpróbálom az övéiket kitalálni, akkor a sejtések bonyolult szövevénye áll elő. Egy vállalatnak a többi vállalatra vonatkozó sejtése szükségképpen függ attól, hogy az első vállalat mit gondol arról, hogy

a többi vállalat mit gondol róla, és így tovább. A közgazdasági irodalomban erre a helyzetre sok zavaros elmélet létezik, amelyeknek nincs világos eredményük.

Úgy tűnik, az ilyen típusú interakció kezeléséhez a legmegfelelőbb elmélet-típus a *játékelmélet*. Ebben az esetben az elmélet releváns ága a *nem-kooperatív játékok* elmélete, azaz az olyan játékok elmélete, amelyek során a szereplők közvetlenül nem kommunikálnak egymással, és nincs közöttük együttműködés akcióik összehangolására.

Általános és elvont formában a következőképp jellemezhetjük a helyzetet. Az N szereplőt jelöljük $i = 1, 2, \dots, N$ -nel. Az i -edik szereplő, a lehetséges akciók A_i halmazából a_i -t választhatja. Az i -edik szereplő R_i eredményt ér el, s ez az összes többi szereplő akcióitól függ. R_i -t tehát az összes akció függvényeként írhatjuk fel:

$$R_i = f_i(a_1, \dots, a_i, \dots, a_N) \quad (i = 1, \dots, N).$$

Ez a példa N vállalat esetének felel meg. Az i -edik vállalat R_i profitot szerez, de a profit értéke nemcsak saját akcióitól függ, hanem az összes vállalat akcióitól általában. Ezek között az akciók között lehet a piacon kínálni kívánt termék mennyiségének meghatározása vagy az ár, amit a vállalat termékéért kér, ha a termékek többé-kevésbé megkülönböztethetőek, s így lehetséges a különböző árak fenntartása. A mi céljainkra nem szükséges a példa részletesebb specifikálása. Az alapvető a helyzet logikája, amelyben minden szereplő képes arra, hogy a helyzet egyes elemeit szabályozza, — azokat az elemeket, amelyek a_i -t alkotják — míg az elért eredmény a többi szereplő döntéseitől is függ.

Ha mármost a szereplők valamilyen okból nem tudnak vagy nem akarnak közvetlen kapcsolatba lépni annak érdekében, hogy a választott akcióikat összehangolják, akkor minden egyes szereplő elég nehéz döntési helyzetbe kerül. Úgy kell az a_i akcióját megválasztania, hogy a lehetséges legjobb R_i eredményt érje el, de ezt nem tudja anélkül megtenni, hogy ne gondolná végig, milyen akciókat választanak a többiek. Feltételezzük, hogy minden szereplő ismeri az egész helyzetet, azaz tudja, hogy a többiek milyen akció-lehetőségekkel rendelkeznek, és minden $f_1, \dots, f_N$ függvényt ismer. Ezt az információt kell azután felhasználnia, hogy valahogyan előrebecsülje a többiek akcióit. Ennek során minden szereplő tudja, hogy a többiek hasonló helyzetben vannak és a helyzetet — saját szempontjukból — azonos módon elemzik.

Hogy ilyen helyzetben mit tekinthetünk racionális viselkedésnek, az irodalomban semmiképpen nincs teljesen megoldva. (S ha világosan jellemezni is tudnánk a racionális magatartást ilyen bonyolult helyzetben, ebből még nem következne szükségképpen, hogy ez az elméleti típus jól felhasználható előrejelzésre.) Van azonban a megoldásnak egy bizonyos típusa, ami különösen érdekes, és amit legalábbis bizonyos területeken, bizonyos fokig empirikusan is alá lehet támasztani. Ez az úgynevezett *nem-kooperatív egyensúly*, (ami John Nash névével kapcsolódott össze, s ennek megfelelően gyakran Nash-egyensúlynak nevezik). A feltevésen alapuló elméletekhez, — ahogy az előbbieken már említettem — a következő megfontoláson keresztül kapcsolható: A nem-kooperatív egyensúly az egyedi szereplők döntéseinek olyan együttese, amelyben minden szereplőnek a többi szereplő által hozandó döntésre vonatkozó várakozását megerősítik a tényleges döntések.

Formálisabb módon a következőképp definiálható a nem-kooperatív egyensúly. Tekintsük a különböző szereplők $a_1^*, \dots, a_N^*$ akcióit. Tegyük fel, hogy az i -edik szereplő számára a_i^* a legjobb akció az A_i halmazban szereplő lehetőségek közül, ha a többi szereplő az $a_1^*, \dots, a_{i-1}^*, a_{i+1}^*, \dots, a_N^*$ akciót hajtja végre. E szerint

$$R_i^* = f_i(a_1^*, \dots, a_i^*, \dots, a_N^*) = \max \{f(a_1^*, \dots, a_i, \dots, a_N^*) \mid a_i \in A_i\}.$$

A bal oldalon R_i értéke szerepel, ha az $a_1^*, \dots, a_i^*, \dots, a_N^*$ akciókat hajtják végre, és a jobb oldali kifejezés azt jelenti, hogy az i -edik szereplő nem tud R_i^* -nál nagyobb R_i értéket elérni, úgyhogy az A_i halmazban szereplő lehetséges akciók közül a_i^* -tól különböző a_i akciót választ, ha a többi szereplő akciói rendre $a_1^*, \dots, a_{i-1}^*, \dots, a_{i+1}^*, \dots, a_N^*$.

Tegyük fel, hogy a fenti követelmény minden $i = 1, 2, \dots, N$ -re érvényes. Ha ez egyértelműen meghatározza az akciók egy $a_1^*, \dots, a_N^*$ együttesét, akkor ez az akciók nagyon érdekes konstellációja. Azt állíthatjuk, hogy az egyes szereplők szempontjából ezek az akciók racionálisak. Az állítást a következő érveléssel támaszthatjuk alá.

Ahhoz, hogy egy akció a fent leírt helyzetben racionális legyen a következő feltételek teljesülését kívánhatjuk meg:

a) Az egyes szereplő döntése kizárólag a döntési helyzetről rendelkezésre álló releváns információtól függ. Ezt a mi esetünkben a lehetőségek $A_1, \dots, A_N$ halmazáról rendelkezésre álló információk és az $f_1, \dots, f_N$ függvények képviselik.

b) Ha egy akció racionális az egyes szereplő számára, akkor ezt a többi szereplő ki tudja következtetni és előre tudja jelezni, mert ők is ugyanazzal az információval rendelkeznek. Ez annyit jelent, hogy ha az információ tökéletes és minden szereplő racionálisan viselkedik, akkor minden egyes szereplő helyesen becsüli meg a többiek akcióit.

c) A többi szereplő akcióját előre becsülve az egyéni szereplő akciójának az erre adható legjobb válaszareakciónak kell lennie, abban az értelemben, hogy R_i lehető legnagyobb értékét eredményezi.

Egy akció racionalitásának megítéléséhez még egy feltételt hozzátehetünk: azt, hogy miután a döntés napvilágra kerül, egyetlen szereplő se bánja meg akcióját. Ha megbánja az akciót, akkor az — első fokon — nem lehet racionális. Ez utóbbi feltétel az a), b) és c) feltételekből következik, mert ha valaki megbánja az akcióját, akkor vagy nem sikerült a többiek akcióit helyesen megbecsülnie, vagy nem sikerült ezek alapján a legjobb választ kikövetkeztetnie.

Könnyen belátható most már, hogy az előbbieken meghatározott nem-kooperatív egyensúly az összes követelményt kielégíti (feltéve, hogy az $a_1^*, \dots, a_N^*$ akciókat egyértelműen meghatározza). Továbbá könnyen belátható, hogy az akcióknak egyetlen más együttese sem elégítené ki ugyanezeket a követelményeket. Ennek megfelelően arra a következtetésre kényszerülünk, hogy ha egy ilyen döntési helyzetben egyáltalán értelmes racionális akciókról beszélni, akkor azok az akciók racionálisak, amelyek az előzőekben meghatározott nem-kooperatív egyensúlyt alkotják.

Ha azonos döntési helyzetek sorozatosan ismétlődnek, és csak abban a tényben különböznek, hogy az egyes szereplők meg tudják figyelni, mit tettek

a többiek az előző időszakban, akkor az itt leírt egyensúly-típus egy olyan dinamikus folyamat eredményeként is tekinthető, amelynek során az egyes szereplők bizonyos fókig naivan viselkednek. Ekkor minden szereplő találgathat úgy, hogy a többiek azt fogják tenni a következő időszakban, amit az utolsó megfigyelt időszakban, és ennek a feltételezésnek az alapján választja meg a maga számára legjobb akciót. A döntések ilyen folyamata bizonyos feltételek fennállása esetén elvezet egy olyan egyensúlyhoz, amely megfelel az előbbiekben leírt $a_1^*, \dots, a_N^*$ akcióknak. Ez a fajta egyensúly elérhető más folyamatok révén is, amelyekben a különböző szereplők bonyolultabb feltételezésekkel élnek arról, hogy mit tesznek a többi szereplők. Végtelen az erre vonatkozó gondolatmenetek lehetséges listája, és sokkal bizonytalanabb talajon állnak, ha az interakció dinamikus folyamatát próbálják meg leírni, mintha magát az egyensúlyt jellemzik.

Az egyensúlyi akcióegyüttesben megnyilvánuló magatartást a nem-kooperatív egyensúly elméletének sok ismertetésében nevezik naivnak, abban az értelemben, hogy a többiek akcióit minden egyes szereplő „adott”-nak tekinti. Ez nem helytálló. A többiek akcióit nem tekintik „adott”-nak: minden szereplőnek egyedül kell kiszámítania milyenek lesznek a többiek akciói. Számításba véve az összes kölcsönös összefüggést, a többi akciót helyesen becslik előre és saját akciójukat optimális módon ehhez alkalmazzák. Ebben semmi naivitás nincs.

A nem-kooperatív egyensúly elméletében alkalmazott fogalmakat és módszereket a közgazdasági elmélet széles körben felhasználja (bár némiképp rejtett formában, a játékelméletre való nyílt hivatkozás nélkül). Ez természetesen elsősorban olyan piaci helyzetekre érvényes, amelyben legalább néhány szereplő elég „nagy” ahhoz, hogy érzékelhető hatása legyen a piaci helyzetre. De azonos típusú érvelést alkalmaznak egy sor más összefüggésben is, például környezetszennyezési problémák elemzésében, ahol az egyes szereplő döntése a többiek körülményeire a környezeten keresztül gyakorol hatást, vagy a szűkös természeti erőforrások kiaknázásával kapcsolatos elemzésben, ahol azonos forrást néhány szereplő aknázhathat ki, vagy szállítási és közlekedési problémákkal kapcsolatban, ahol az egyes szereplő a többiekre a torlódáson keresztül hat, és még sok más területen is. Minden egyes esetben a döntések (a_i) természetét, az eredmények leírásának módját (R_i), és az f_i függvényeket úgy kell meghatározni és formalizálni, hogy megfeleljen az éppen kezelt problémának. A logikai szerkezet azonban ugyanaz marad. Az előzőekben tárgyalt parametrikus interakció után talán a nem-kooperatív játékok által képviselt interakcióforma jelenik meg leggyakrabban a közgazdasági elméletben.

Alapvetően fontos meglátás az interakciónak ezzel a formájával kapcsolatban, hogy még ha minden egyes szereplő racionálisan viselkedik is (amennyiben ez a fogalom definiálható) és célja az, hogy a (fentiekben R_i -vel jelölt) lehető legjobb eredményt érje el, az egyénileg racionális $a_1^*, \dots, a_N^*$ döntésekből kialakuló egyensúly lehet nagyon rossz az összes szereplő szempontjából. Nagyon könnyen megeshet, hogy egy vagy több olyan akcióegyüttes is létezik, amelyik minden szereplő számára jobb eredménnyel járna, azaz az $R_1, \dots, R_N$ értékei nagyobbak lennének $R_1^*, \dots, R_N^*$ értékeinél (amit az $a_1^*, \dots, a_N^*$ döntések generáltak). Ezek a jobb akcióegyüttesek azonban nem rendelkeznek az $a_1^*, \dots, a_N^*$ nem-kooperatív egyensúlyhoz kapcsolódó stabilitással. Bármely más szándékolt akcióegyüttes esetén egy vagy több szereplő arra érezne ösztönzést, hogy döntését felülvizsgálja és valami mást tegyen. Ez

a fajta érvelés a „közgazdasági jóléti elmélet” lényege, ezt a későbbiekben röviden érinteni fogjuk.

Hadd fejezzem be ezt a fejezetet a piaci elméletre vonatkozó egy megjegyzéssel. A második fejezetben az általános egyensúlyelméletet tekintettük át közvetett, parametrikus interakció formájában. Megfigyeltük, hogy az elméletnek ebben a megfogalmazásában hiányzik az ármeghatározás explicit leírása. Természetes, hogy a nem-kooperatív játékelmélet gondolati vonala mentén megkísérelték egy teljesebb elmélet létrehozását, a termelésről hozott döntéseken kívül az ármeghatározás aktusát is a termelőkre ruházva. Ez a fajta megközelítés elég komoly nehézségekkel találja szembe magát, ha versenyben álló vállalatok homogén terméket gyártanak. Ebben az esetben nem könnyű a megoldást megtalálni, ill. jellemezni. (Valóban lehet ún. kevert stratégiát alkalmazni, amelyben a szereplő sztochasztizálja döntését. Ennek további tárgyalása túl messzire vezetne.) Ez kellemetlen tapasztalatnak tűnhet. Az effajta elmélet kialakításának kísérlete során felmerülő nehézségek tanulmányozása azonban nagyon értékes lehet abban az értelemben, hogy ennek révén megérthetjük, milyen bonyolult lehet a nem-kooperatív interakció logikája, és rájöhethetünk arra a tényre, hogy nem mindig világos, mit kell érteni racionális magatartáson.

4. Közvetlen interakció, kooperatív játékok

A közvetlen interakció esetében a szereplőknek lehetőségük van arra, hogy kapcsolatba lépjenek egymással információk és ajánlatok cseréje céljából, és hogy megállapodásokat kössenek akcióik összehangolására. Az ilyenfajta interakciók néhány fontos vonását elemezhetjük a kooperatív játékok elméletének segítségével. Ez az elmélet is fenntartja azt a feltételezést, hogy a szereplők, amennyire csak lehetséges, követik saját érdekeiket. A „kooperáció” eleme ezért csak annyiban jelenik meg, amennyiben olyan akciók összehangolására vonatkozik, amelyek — a szereplők saját véleménye szerint is — az egyes szereplők érdekeit szolgálják. Ennek az elméletnek az egyik leglényegesebb kérdése az, hogy ezekben az esetekben az interakció eredményét gyakran erősen befolyásolhatja, hogy a szereplők lehetséges koalíciói mekkora hatalommal rendelkeznek követeléseik támogatásához és az eredmény befolyásolásához. Ennek a gondolatmenetnek a megvilágításához talán a legegyszerűbb a *játék magva* (core) fogalomnak a magyarázata.

Legyen, ahogy az előzőekben is $i = 1, \dots, N$ szereplő. A szereplők különböző csoportjai alkothassanak koalíciókat, és figyelhessék meg, hogy mit tudnak közösen elérni. Gondoljuk el a szereplők egy csoportját, amelyik az $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ sorszámú szereplőből áll. Tételezzük fel, hogy ezek a szereplők úgy találják, hogy akcióik összehangolása révén legalább $\bar{R}_\alpha, \bar{R}_\beta, \dots, \bar{R}_\gamma$ eredményt tudnak biztosítani maguknak, figyelmen kívül hagyva, hogy a csoporton kívüli szereplők mit tesznek. Ezek után ésszerű elvárni, hogy az interakciós helyzet eredménye $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ szereplők számára nem lesz kevesebb, mint $\bar{R}_\alpha, \bar{R}_\beta, \dots, \bar{R}_\gamma$, mert ha úgy lenne, akkor a szereplők előnyösebbnek találnák, hogy olyan egyezményt kössenek akcióik összehangolására, hogy legalább ezt az eredményt elérjék. Most már megvizsgálhatjuk az eredmények összes lehetséges konstellációját az egyes szereplők számára, azaz $R_1, R_2, \dots, R_N$ összes konstellációját, és megállapíthatjuk, van-e a szereplőknek olyan

csoportja, amely visszautasítaná ezt az eredményt, mert a csoport tagjai számára jobb eredményt érhettek volna el, koalíció-alakítás és akcióik összehangolása révén. A játék „magva” az $R_1, R_2, \dots, R_N$ eredmények minden olyan konstellációját tartalmazza, amelyet egy csoport sem utasít vissza a fent leírt módon. Az elmélet előrejelzése az, hogy egy játék minden valóságos eredménye olyan konstelláció lesz, ami a játék magvához tartozik.

Ez az interakció egy teljes és közvetlen formájának felel meg. Minden egyes szereplő mérlegeli, hogy mit képes elérni elszigetelt döntéssel; a szereplők minden lehetséges párja (az 1. és 2., az 1. és 3., a 2. és 3. stb.) mérlegeli, hogy mit érhetnek el akcióik páros összehangolása révén; három szereplő minden lehetséges csoportja is megvizsgálja a lehetőségeit, és így tovább.

Egy olyan végeredményről, amelyik a játék magvához tartozik, el lehet mondani, hogy a játékokban részt vevő lehetséges koalíciók egyfajta erőegyensúlyát képviseli. Egy csoport akkor rendelkezik hatalommal, ha jó eredményeket tud biztosítani a tagok akcióinak koordinálása révén, tekintet nélkül arra, hogy a többi szereplő mit tesz. Az ilyen csoport jó eredményeket fog elérni a játék végső kimenetelekor. Hogy a játék magvának elmélete mennyiben nyújt érdekes állításokat, az a hatalmi helyzettől függ. Egyes lehetséges koalíciók olyan erősek lehetnek, hogy az $R_1, R_2, \dots, R_N$ konstellációknak csak egy nagyon szűk halmaza vagy határesetben csak egyetlen konstelláció elégíti ki az összes lehetséges koalíciót. Ebben az esetben az elmélet előrejelzése nagyon speciális. Ha minden olyan koalíció, amely az összes szereplőt magában foglaló koalíciónál kisebb, csak csekély hatalommal rendelkezik, akkor az $R_1, R_2, \dots, R_N$ konstellációk széles skálája kielégíti a különböző lehetséges koalíciókat, s az elmélet nem lesz képes speciális előrejelzést adni. Nem túlzottan mesterséges helyzetekben az is előfordulhat, hogy a különböző lehetséges koalíciók olyan erősek, hogy egyetlen $R_1, R_2, \dots, R_N$ konstelláció sem elégíti ki mindnyájukat. Ekkor az elméletből nem lehet speciális előrejelzést adni. Az azonban világos, hogy ez olyan éles konfliktushelyzet, amely a kooperáció megszakításához és talán a játéknak részben nem-kooperatív játékká való átalakulásához is vezet.

Egy olyan gazdaságban, amelyben teljes a termelés és kereskedelem szabadsága, és a szereplők szabadon léphetnek egyezségekre, korlátlan lehetőség van közvetlen interakcióra. Ilyen gazdaságban természetes gondolat a kooperatív játékok elméletén alapuló interakcióval próbálkozni. A közgazdasági elmélet központi témája volt ez az utóbbi időben, és érdekes eredményeket hozott. Ennek illusztrálására nézzünk meg egy eléggé meglepő eredményt, amellyel visszatérünk a piaci rendszer általános egyensúlyelméletéhez, amiben az árak parametrikus szerepet játszanak (ahogy a 2. fejezetben leírtuk). Tegyük fel, hogy a kiinduló helyzetben minden szereplő tulajdonában van a különböző javaknak és más erőforrásoknak egy bizonyos mennyisége. Minden szereplőnek vannak preferenciái, ugyanúgy, ahogy a 2. fejezetben feltettük. A kiinduló helyzetben az egyes szereplők tulajdonában levő javak és erőforrások összetételének nem kell szükségszerűen megfelelni a szereplő preferencia-szerkezetének. Ennek megfelelően a javak cseréje révén potenciálisan kölcsönösen nyerne. A szereplők teljesen szabadon, bármilyen módon és bármilyen feltételekkel cserélhetik javaikat, ahogy megegyezésre tudnak jutni. Elképzelhető olyan piac, amelyen minden résztvevő minden irányban teremt kapcsolatot, minden kis és nagy csoportban elérhető eredményt felderít. Ekkor az az eredmény, amit bármely csoport tagjai biztosítanak saját maguk számára

(tekintet nélkül arra, hogy a többi szereplő mit tesz), megfelel preferenciáik olyan szintű kielégítésének, amit a kiinduló helyzetben a csoport tagjai által birtokolt javak és erőforrások csoporton belüli újraelosztásával tudnak elérni.

Ilyen helyzetekben a preferencia-szerkezetre vonatkozó bizonyos feltételek fennállása esetén a csere-játéknak létezik megoldása. Nem lesz szükségképpen egyértelmű a megoldás, de minél több szereplő vesz részt a „játék”-ban, annál pontosabb eredmény felé tendál a játék. Ez ahhoz a tényhez kapcsolódik, hogy minél több szereplő van, annál nagyobb a lehetséges koalíciók száma, és minden új lehetséges koalíció vissza fog utasítani bizonyos, egyébként lehetséges eredményeket. Ha el tudjuk képzelni, hogy a szereplők száma a végtelenségig nő, akkor a következő konklúzióra jutunk: a javaknak csak a különböző szereplők közötti azon megoszlásai tartoznak a játék magvához, amelyekhez a 2. fejezetben leírt módon, parametrikus árakkal működő piaci rendszer egyensúlyi megoldásai révén jutottunk. Bizonyos feltételek fennállása esetén a javaknak egy és csak egy olyan megoszlása van, amelyik kielégíti ezt a feltételt.

A bonyolult interakciós rendszer, amit itt elképzeltünk, a szereplők és a szereplők összes elképzelhető csoportja közt óriási mennyiségű szerződést foglal magában. Az interakció parametrikus formája ehhez képest drámai egyszerűsítést képvisel: amikor a helyes árak már kialakultak, akkor minden egyes szereplő elszigetelt döntéssel határoz keresletéről és kínálatáról. Az a tény, hogy az árak „helyesek”, a rendszer egészében hozott döntések olyan koordinációjához vezet, amely az egyes döntések szűk szempontjai ellenére minden termék keresletét és kínálatát kiegyensúlyozza. A fentiekben leírt elméleti eredmény további következménye, hogy ha a piacon helyesek az árak, akkor a szereplők egyetlen csoportja sem lesz képes arra, hogy a csoport tagjainak helyzetét a piaci rendszertől való elfordulással és saját erőforrásainak bázisán, csupán a csoporton belüli cserével javítsa.

Ez a gondolatmenet a gazdasági interakció formáit illetően nagyon fontos távlatokat nyit meg. Jól ismert, hogy árakkal működő piaci rendszer nagyon különböző társadalmakban és csaknem minden időben létezett. Ha valahol megpróbálják elnyomni vagy megpróbálnak eltérni tőle, van egy tendencia arra, hogy újra megjelenjen és helyreállítsa magát. Az előbbieken ismertetett gondolatmenet sejtethet valamit abból, miért tűnik olyan erősnek a piaci rendszer túlélési képessége és miért képes különböző körülmények között újra és újra megjelenni.

Ugyanakkor ez az elméleti példa megvilágítja, amit a 2. fejezetben mutatunk ki: azt a gondolatot, hogy a közgazdasági elmélet, amely nyilvánvalóan az interakciónak egy nagyon egyszerű formáját tételezi fel, ezt azzal a céllal teszi, hogy az interakció egy sokkal bonyolultabb és sokkal közvetlenebb formájának eredményeit írja le. Az előbbieken kifejtett eredmény azt jelenti, hogy egy látszólag közvetett parametrikus interakciót képviselő egyensúly, esetleg egy teljesen nyitott interakciós helyzet eredménye is lehet, amelyben minden szereplő közvetlen interakcióban szabadon alkuszik és szabadon köt egyezményeket az összes többi szereplővel.

Az, ameddig ez az elmélet elmegy, eléggé erőteljes és elegáns. Sok szempontból azonban — természetesen — nagyon leegyszerűsített. Túl sokat tételez fel az információ hozzáférhetőségéről és arról, hogy mennyire értik az egyes szereplők a rendszer működését; magáról az interakciónál különleges hatékonyságot és racionalitást tételez fel, abban az értelemben, hogy az interakciós

folyamatban semmilyen lehetséges nyereséget nem pazarolnak el; és a leghatározottabb következtetésre akkor jut, amikor sok szereplő van és így a különböző lehetséges koalíciók kiegyenlítik egymást és egymás ellen hatnak — olyan módon, hogy a lehetséges megoldásoknak csak egy kis halmaza marad, amit egyik vagy másik koalíció ne utasítana vissza.

A közvetlen interakció gazdagabb, kevésbé stilizált kezeléséhez egy lépéssel közelebb visz az alku-elmélet. Az effajta elmélet szükségessége természetesen merül fel azokban a helyzetekben, amikor a probléma megfogalmazható a kooperatív játékok fogalmait használva, de amikor a lehetséges koalíciók nem egyensúlyozzák ki és ellensúlyozzák egymást olyan módon, hogy világos következtetések adódjanak. E terület néhány elmélete a kooperatív játékok stilizált elméletének gondolatmenetén halad tovább, hozzátéve ehhez néhány új, formalizált feltételt, amikről felteszik, hogy az alku eredménye kielégíti őket. Ezek között a követelmények között rendszerint szerepel a „kollektív racionalitás” feltétele, amiből az következik, hogy az alku-folyamat olyan eredményre vezet, amelyben semmilyen, a kooperáció és koordináció révén elérhető haszon sem vész el. Más elméletek inkább magatartási (behaviourista) típusúak és nyíltabban kezelik magát az alku-folyamatot, a javaslatokkal, fenyegetésekkel és engedményekkel, amelyeket magában foglal. Ez az elmélet azonban túlzott optimizmusra hajlamos, az alku-folyamatnak a „kollektív racionalitás” elérésére való képességét illetően. Véleményem szerint nagyon fontos az alku-folyamatok tanulmányozása, és meg kell próbálnunk megérteni ezeket, de nincs túl nagy remény rá, hogy nagy előrejelző erővel rendelkező elméletet találunk. Az alku-helyzetben az alkudozó felek potenciális nyereséggel rendelkeznek, feltéve, hogy megegyezésre jutnak. Minden résztvevő rendelkezik egyfajta hatalommal, mert tudja, hogy a potenciális nyereség csak azzal a feltétellel realizálható, hogy jóváhagyja. Természetesen nagy a kísértés e potenciális hatalom felhasználására. Továbbá, ha e hatalom felhasználásának eltökéltségében bármilyen gyengeség mutatkozik, azt a szemben álló felek kihasználják, és ugyanez a helyzet mindkét (vagy az összes) résztvevő szempontjából. Ez egyfajta labilis helyzetet hoz létre, ami lehetőséget teremt „katasztrófa-politikára” és más olyan stratégiákra, amelyek összeomláshoz vezethetnek. Sok esetben különböző fajta erőforrások mobilizálásához és felhasználásához is vezethet, aminek révén az alkuhelyzetben résztvevők pozíciója megerősödik. Még ha az egyedi résztvevők külön-külön racionálisak is, akkor sincs erős alapunk arra, hogy a „kollektív racionalitás” bármilyen axiómáját bevezessük egy elméletbe, amely azt állítja magáról, hogy úgy modellezi az alku-folyamatokat, ahogy azok a valóságban lezajlanak. (Élesebben fogalmazva egy más alkalommal azt írtam, hogy „az alkuval együtt járó tendencia, hogy kiküszöböli az alku célját jelentő lehetséges nyereségeket”).

Az alku-elméletről nem mondhatjuk el, hogy fontos szerepet játszana a közgazdasági elméletben, s tárgyalását nem is folytatom tovább. Ez a kutatási terület különböző társadalomtudományok határterületén fejlődött ki. Úgy gondolom, hogy általánosan el kellene fogadni azt a tényt, hogy az interdiszciplináris megközelítés szükséges. Ahogy az előbbiekben rámutattam, a közgazdaságtudomány akkor a legerősebb, ha a racionalitás elveit egyértelműen tudja alkalmazni. Az alku területén szembe kell néznünk vele, hogy ezek az elvek nem eredményeztek még világos és egyértelmű eredményeket, és jó okunk van attól tartani, hogy ezen a vonalon nem is lehet erős eredmé-

nyeket elérni. Én személy szerint úgy érzem, hogy fontos az alku-folyamatnak és az alku-helyzetből adódó fejleményeknek és eredményeknek a megértése, még akkor is, ha ennek alapján nem vagyunk képesek jó előrejelzéseket adni. Önmagában is érdekes annak a pontos megértése, gyakran miért olyan kiszámíthatatlanok az alku-helyzetek.

A modern társadalmaknak van olyan fejlődési tendenciájuk, amely abba az irányba mutat, hogy az alku-helyzetek az egész gazdaságot képviselő döntéshozási rendszerben egyre nagyobb arányban vannak jelen. Ez a tendencia szorosan kapcsolódik: a szervezetek, vagy korporációk szerepéhez; az állami hatóságok beavatkozásához a gazdaság sok területén; ahhoz, hogy a gazdaság rendelkezésére álló források felhasználásában egyre nagyobb az állam szerepe; a gazdaság különböző részeiben felmerülő válságokhoz és konfliktusokhoz; ahhoz, hogy az ezekben részt vevők nem fogadják el többé a terhek szabadpiaci mechanizmusból adódó megoszlását; és végül ahhoz, hogy a közös javakkal vagy a környezetvédelemmel stb. kapcsolatos döntések és tranzakciók nagyobb részét nem lehet sima, személytelen módon, a piaci mechanizmus segítségével szabályozni. A gazdaságpolitika is sok vonatkozásban inkább alku-jelleget tételez fel, mint egy központi hatóság egyoldalú döntéseit. Ez a tendencia természetesen a „jövedelem-politika” számos formájában fejeződik ki a legvilágosabban, de ugyanez érvényes más területekre is.

5. Megjegyzések a közgazdasági elmélet néhány speciális ágáról

Ebben a fejezetben a közgazdaságtudomány néhány olyan ágáról ejtek szót, amelyek az interakció típusainak kérdésével kapcsolatban különösen érdekesek. Lehetséges, hogy nem adnak az előző fejezetekben általánosabban elemzettekhez képest új interakció-típusokat, de némiképp különböző szövegből világítják meg és illusztrálják az előbbieket.

A közgazdasági elmélet nagyon fontos területe a *jóléti gazdaságtan*. Talán inkább a gazdasági értékelés elméletének kellene nevezni. Fejtegetésünkkel kapcsolatban azt mondhatnánk, hogy a jóléti elmélet különböző gazdasági rendszerek vagy különböző gazdaságpolitikák által létrehozott eredmények értékeléséhez és összehasonlításához ad módszereket és kritériumokat; valamint megadja ezeknek a módszereknek és kritériumoknak konkrét problémákra való alkalmazását. Az értékelést, ilyen vagy olyan módon, de az egész gazdaság szempontjából, illetve az egész gazdaságnak, mint egyéni érdekek kombinációjának nevében, vagy egy felső hatóság szempontjából végzik el. A jóléti elmélet fontos eleme, hogy egyrészt világosan kimondja a gazdaság tényleges működéséről alkotott pozitív elméletet, másrészt világossá teszi az elemzésbe bevezetett értékelés szubjektív elemeit.

Ezt a fajta elméletet az az alapvető tény teszi érdekessé, hogy az egyedileg racionális szereplők (akik racionális módon módon a lehető legjobb eredményt igyekeznek a maguk számára elérni) interakciós rendszerként nem jutnak szükségképpen olyan összesített eredményhez, ami általános szempontból, az összes vagy legalább néhány résztvevő számára, kedvező. A 3. fejezetben elemzett nem-kooperatív egyensúlyra hivatkozhatunk: például könnyen megtörténhet, hogy koordinált akciók megfelelő megválasztásával olyan, $R_1, R_2, \dots, R_N$ eredményeket lehetne elérni, amelyek jobbak az $R_1^*, R_2^*, \dots, R_N^*$

eredményeknél, amelyek a nem-kooperatív egyensúllyal járnak, azaz $R_1 > R_1^*, R_2 > R_2^*, \dots, R_N > R_N^*$. Ez annak ellenére igaz, hogy minden résztvevő, elszigetelt döntéshozóként racionális módon viselkedik a nem-kooperatív egyensúlyhelyzetben (amennyiben a racionalitás egyáltalán definiálható). Más szavakkal kifejezve, racionális egyének közötti nem-kooperatív interakció olyan eredményre vezethet, ami Pareto-i értelemben nem optimális, azaz „kollektíven irracionális”.

A jóléti közgazdaságtan szerepének megértéséhez fontos, hogy egyaránt megértsük, a döntések egy rendszere, amely csak az egyén szempontjából tudatosan racionális olyan eredményhez is vezethet, ami általános szempontból jó, és olyan eredményhez is, amely minden résztvevő számára rossz. Magától értetődő, hogy fontos feladat megtalálni, melyek azok a körülmények, amelyek az egyik, s melyek azok, amelyek a másik eredményhez vezetnek. Ily módon a jóléti gazdaságtan fontos része a közgazdász tudásának és elemzési eszköztárának, amikor azzal a kérdéssel foglalkozik, hogyan kellene az interakciót különböző összefüggésekben megszervezni.

E terület klasszikus és központi elmélete az általános egyensúlyi rendszernek a jóléti elmélet szempontjából való tárgyalása. Az általános egyensúlyi rendszerben minden szereplő szabad, elszigetelt döntéshozóként viselkedik, a szereplők közötti interakciók közvetett módon, az árrendszeren keresztül zajlanak. Bizonyos feltételek fennállása esetén meg lehet mutatni, hogy az elért egyensúlyi helyzet Pareto-optimális lesz. Ez azt jelenti, hogy ha az egyes szereplők csupán saját érdekeiket követik is, az eredmény bizonyos általános szempontból megfogalmazott hatékonysági és racionalitási kritériumokat ki fog elégíteni. Ez a „tétel” központi helyet foglal el a közgazdaságtanban, annak a kérdésnek a kezelésében, hogy hogyan kell egy társadalomnak a termelést és elosztást megszerveznie, hogy a szervezetet centralizálni vagy decentralizálni kell-e, és így tovább. Az a berendezkedés, amelyben a gazdaságban végrehajtandó minden feladat minden részlete központi döntéshozáson alapul, vagy az a berendezkedés, amelyben az eldöntendő kérdésekről az összes résztvevők (ilyen vagy olyan módon) közösen döntenek, információs és szervezeti szempontból nagyon nehéz és nehézkes. Az előbb említett „tétel” azt mutatja meg, hogy bizonyos feltételek mellett sokkal egyszerűbben lehet az általános racionalitást elérni, feltéve, hogy a helyes árak kialakíthatók. Ez az elmélet természetesen nem ad általánosan érvényes választ arra, hogyan szerveződjön a gazdasági vezetés, de másfelől, olyan erőteljes, hogy teljesen különböző tulajdonrendszerek mellett is releváns.

Ez a gondolatmenet tűnik sajátosan jellemzőnek, amikor a közgazdaságtudományban az interakció problematikájához nyúlunk. A jóléti gazdaságtan értelmében a gazdaság általános rendszer, és tudatosan számol a szereplők lehetőségeinek és eredményeinek kölcsönös függőségével, a rendszernek ebből adódó komplexitásával. Az interakciók megszervezésének olyan módját keresi, amelyben az egyes szereplők viszonylag egyszerű döntési helyzetbe kerülnek, ugyanakkor a meghozott döntések összessége kielégít bizonyos általános értékelésnek megfelelő racionalitási és hatékonysági feltételeket.

A közgazdaságban tárgyalt sok más problémát is tekinthetünk úgy, mint az előbbi jóléti elméleti típusú elemzés kiterjesztését. Ez érvényes a környezetszennyezésnek és a környezetet befolyásoló többi „externalitásnak” a kezelésére, a túlnépesedésre, bizonyos típusú természeti erőforrások kiaknázásának problémájára stb. A közönséges árukra és szolgáltatásokra az általános egyen-

súlyi rendszerben kialakult árak az optimalitási és racionalitási követelményeket sok ilyen esetben nem fogják kielégíteni.

Ekkor a jóléti gazdaságtan elmélete szabályokat ad arra, hogy hogyan kell a piaci mechanizmus működésének helyesbítésére beavatkozni a rendszerbe. Ekkor újra csak az interakció parametrikus formáját kapjuk, de az egyes szereplők az árakon kívül adó- és támogatás-arányokkal fognak találkozni, s ezek azok az új paraméterek, amelyekhez alkalmazkodniuk kell, az állami hatóságok pedig olyan módon alakítják ezeket az arányokat, hogy a döntési rendszer egészében — egy sor bonyolító mellékhatás fennállása mellett — hatékonyságot vagy racionalitást érjenek el.

A tétel érvényességének feltétele, hogy az egyes háztartások fogyasztásra és munkára vonatkozó preferenciái tökéletesen individualisták legyenek. Ez azt jelenti, hogy az egyes háztartások a fogyasztás és munka különböző lehetséges kombinációit a többi háztartás helyzetétől függetlenül értékelik. Ha az a helyzet, hogy vannak háztartások, amelyek azért akarnak bizonyos termékeket fogyasztani, *mert más háztartások is azt fogyasztják*, például azért, hogy „státus”-ban lépést tartsanak vagy megelőzzék a többieket, akkor a tétel többé nem érvényes. A közgazdaságtudomány tett bizonyos lépéseket és kialakított bizonyos fogalmakat, hogy az effajta preferencia-hatásokat beépítse az elmélet megfogalmazásába, de az elméletet alapjában továbbra is a klasszikus individualizmus jellemzi. Más társadalomtudományok valószínűleg kritikusak azzal a móddal szemben, ahogy a közgazdaságtudomány ezeket a kérdéseket kezeli. Az interakció itt felvázolt típusa, azaz a preferenciák kölcsönös befolyásolása, talán nem sorolható be természetes módon a cikk elején definiált egyik fő interakció-típusba sem. A döntés-hozás rendszere azonban a szokásos módon osztályozható. Az egyes szereplők ugyanúgy alkalmazkodnak az árakhoz, mint a parametrikus interakcióban. Ezen kívül megfigyelik egymás fogyasztói magatartását, és a megfigyelések hatása alatt döntenek saját fogyasztásukról, anélkül, hogy a 4. fejezetben tárgyalt módon közvetlen interakcióba lépnének. Az egész helyzetet úgy lehetne leírni, mint a parametrikus interakciónak (árakhoz való alkalmazkodásnak) és személyek és háztartások között a fogyasztásra vonatkozó nem-kooperatív egyensúlynak egyfajta keverékét. Ha olyan a helyzet, hogy minden háztartás a szomszédal akar lépést tartani vagy meg akarja előzni, és senki nem elégedett az így kialakult helyzettel, akkor jó példát találtunk arra, hogy a 3. fejezetben definiált nem-kooperatív egyensúly nem szükségképpen jó helyzet. Minden szereplő egyfajta csapdába került: mindegyikük érti, hogy a helyzet nem jó úgy, ahogy van, de egyetlen szereplő sem tud ellene tenni, mert az egyéni devianciát még rosszabbnak élné meg, mint a helyzet változatlanságát.

A jóléti elmélet és az általános egyensúlyelmélet előző tárgyalásával kapcsolatban a teljesség kedvéért meg kell még említeni, hogy a közgazdasági elmélet nem állítja, hogy az általános egyensúly a tisztán parametrikus funkciójú árakkal együtt magától kialakul a piaczgazdaságban. Ahogy azt a 3. fejezet végén megállapítottam, az árak kialakulásának folyamata nehéz kérdéseket vet fel. Továbbá, bizonyos feltételek mellett a termelésben és marketingben monopolista magatartás alakul ki, ha semmit nem tesznek annak érdekében, hogy verseny-magatartást kényszerítsenek a rendszerre (l. a 3. fejezet első részét).

Az utóbbi évtizedekben fejlődött ki egy nagyon fontos speciális terület: *a csoport-döntések elmélete*. (Ez természetesen olyan terület, amit a szociológia

és a politikai tudományok is vizsgálják.) Ebben az esetben a csoportokban zajló közös döntés-hozást tanulmányozzák. Úgy tűnhet, hogy ez olyan helyzet, amit a 4. fejezetben általánosan tárgyalt direkt interakciók közé sorolhatunk. Ha közelebbről vizsgáljuk meg a dolgot, akkor ez nem magától értetődő. Úgy gondolom gyümölcsöző a csoport-döntés két fajtája közt különbséget tenni: az egyikben a döntéseket előre adott a priori szabályok szerint hozzák, a másikban nincsenek ilyen szabályok, s a helyzet ennek megfelelően sokkal nyitottabb. Interakciós típusként kezelve a csoport-döntés második típusát nyilván a közvetlen interakciók közé sorolhatjuk, míg az elsőt, amelyben a szabályok a priori adottak, egyes esetekben és bizonyos célokra a közvetettebb, nem-kooperatív játékként ábrázolt, interakció-típushoz tartozónak tekinthetjük. Ebben az esetben a szereplők lehetséges akciói: javaslatok előterjesztése és szavazás. Az $f_1, \dots, f_N$ függvények, amelyekkel a 3. fejezetben a helyzetet jellemeztük, most két szintűek: először egy olyan függvény, amely a döntési rendszer szabályait írja le, azaz megmutatja, melyik csoport-döntés lesz az eredmény a résztvevők akcióinak különböző konfigurációi esetén, továbbá olyan függvények, amelyek azt reprezentálják, hogy ez az eredmény mit jelent az egyes szereplők számára ($R_1, \dots, R_N$ -nel szimbolizálva). Az egyes szereplők azzal a céllal választják meg akcióikat, hogy a saját szempontjukból a lehető legjobb eredményt érik el, s az egész helyzet megfelel a 3. fejezetben általánosan leírt nem-kooperatív játék helyzetnek.

Az ilyen problémák megoldásához tanulmányozni kellett, hogyan működnek a különböző szabályok. Fontos kérdések utalnak az információ-problémákra és a manipulációmentesség problémájára. A csoport-döntési rendszer szabályai megkívánják, hogy az egyedi szereplők a döntési rendszer „input”-jaként különböző információkat szolgáltatassanak. Felvethető a kérdés, hogy a rendszer ösztönzi-e az egyedi szereplőket helyes információ szolgáltatására. A döntéshozás mechanizmusa működhet jól, feltéve, hogy az egyes szereplők valódi preferenciáiknak megfelelően becsületesen szavaznak, de ugyanakkor olyan is lehet a rendszer, hogy az egyes szereplők jobb eredményt érnek el saját parciális szempontjukból, ha taktikusabb módon szavaznak. Ha egy vagy több szereplő ilyen módon próbálja a rendszert manipulálni, akkor nem biztos, hogy jól fog működni. Az ilyen kérdéseket az irodalomban általában a nem-kooperatív játékelmélet modelljeivel tanulmányozzák. A gyakorlatban a szavazás előtti mérlegelést és alkut is magában foglaló teljes döntési procedúra az interakció kevertebb típusa lesz.

Típusos eset, amelyben ezeket a kérdéseket a közgazdaságtudomány széles körben tárgyalja: a *közjavakkal* (public goods) kapcsolatos döntések. Ezek olyan termékek, amelyekből az egyik szereplő előnyhöz juthat anélkül, hogy a mások részesedését az előnyökből csökkentené. Egy tökéletesen közösségi jószágot a társadalom minden tagja élvez, de természetesen egy speciális közösségi javat illetően, más közösségi vagy magán-javakkal összehasonlítva különbözhet a preferenciájuk. Ha a társadalom ellátja tagjait egy közösségi jószággal, akkor ennek költségeit meg kell osztania a társadalom tagjai között. A kiinduló helyzetben saját preferenciáit a társadalom minden tagja csak maga ismeri. Ez a helyzet az egyes szereplőket különféle taktikai manőverekre indítja. E terület közgazdasági elméletei általában azt tételezik fel, hogy minden szereplő hatékonyan használja ki a manipulációs lehetőségeket. Ez azt jelenti, hogy a döntési folyamat során a szereplők a valódi preferenciáktól eltérő színlelt preferenciákat közölhetnek, a folyamat bizonyos fázisaiban taktikai

módon szavazhatnak stb. A közölt információt, a szavazást, stb. más akciókkal egyenrangúnak tekintik, és a helyzet elemzésében általában a nem-kooperatív játékok elméletét használják fel. E szerint az elmélet szerint nehéz elkerülni, hogy minden szereplő torzított benyomást keltsen a közösségi javakkal kapcsolatos preferenciáiról, abban a reményben, hogy a teljes költségnek így kisebb része fog rá jutni, és így többé-kevésbé ingyen élvezheti az előnyeit. Az egyének effajta stratégiájának az lesz a következménye, hogy a racionális döntéshez szükséges információs bázis súlyosan eltorzul és a közösségi jószág létrehozásának bázisát aláássák. A végső eredmény olyan lehet, amit minden szereplő megbán.

Az interakciós rendszerek szempontjából ezek az elméletek azt az új elemet tartalmazzák, hogy az interakciós folyamat részeként megjelenik az információ és a preferenciák kinyilvánítása. A közgazdasági elmélet előadásában ezeknek az eseteknek a kezelése akkor a legmeggyőzőbb, amikor úgy képes megfogalmazni az elemzést, hogy beilleszthető legyen a cikk előző fejezeteiben általánosan definiált stilizált interakciós formák keretei közé, úgy alkalmazva ezeket, hogy az (igaz vagy hamis) információk közlése, a preferenciák kinyilvánítása, a szavazás stb. az „akciók” között szerepel. Más társadalomtudományok talán úgy érezhetik, hogy ily módon fontos elemeket hanyagolnak el, és hogy más interakciós jelenségek lennének relevánsak, amelyeket nem lehet az e cikkben használt egyszerű séma szerint osztályozni. Ebben az összefüggésben megfigyelhetjük: az a szándék, hogy a közjavak terheitől szabaduljanak, nem olyan gyakori, mint ahogy a szigorú közgazdasági elméletből adódna.

Az utóbbi években a közgazdaságtudomány egy sor olyan speciális területet kezdett el elemezni, amelyek más társadalomtudományok sajátos területével határosak vagy éppen oda tartoznak. Ilyen területek például: az oktatás több vonatkozása, a bűnözés és büntetés, a családalakulás (és válás), családnagyság, különböző társadalmi tevékenységek, a szabadidő felhasználása stb. Ma már az emberi lénnyel kapcsolatos csaknem minden dolognak van „gazdaságtana”. Túl messzire vezetne belemenni ezekbe a területekbe, és e cikk céljaihoz aligha szükséges. A tipikus az, hogy a közgazdász e területekre magával viszi szokásos elemzési eszközeit, ami azzal jár, hogyha közgazdász kutatja ezeket a területeket, akkor az interakció típusa általában az ebben a cikkben tárgyalt és elemzett egyik általános típus lesz. Véleményem szerint kétséges, hogy eléggé gazdag-e az interakciós formáknak ez a listája az összes új terület realiztikus és mély elemzéséhez.

6. Néhány zárómegjegyzés

Az előző fejezetekben azt próbáltam megmutatni, hogy az interakció fogalma a közgazdaságtudomány központi fogalmának tekinthető, és hogy a közgazdasági elméletben szereplő interakció-típusok néhány fő kategóriába sorolhatók. Ahogy már rámutattam, a közgazdaságtudomány — úgy tűnik — a közvetett, parametrikus interakciós helyzetek elemzésében a legerősebb, amikor minden résztvevő elszigetelt, egyéni döntési helyzetben van; a közgazdasági elmélet viszonylag erős a közvetett funkcionális interakció elemzésében, amelyek nem-kooperatív játékként írhatók le; végül sokkal kevésbé áll szilárd talajon a közvetlen interakcióval kapcsolatos helyzetekben. Minél nyitottabb a közvetlen interakciós helyzet, azaz minél kevésbé rögzítettek előre az interakció és a

döntés szabályai, elméletileg annál nehezebben kezelhető a helyzet. Úgy tűnik, hogy a jelenlegi társadalmi fejlődésben a teljes döntési rendszer összetételében az interakció egyszerűbb típusai felől a bonyolultabb közvetlen interakció felé tolódnak el az arányok. Talán ez megerősíti az interdiszciplinárisabb társadalomkutatás szükségességét.

Az előző fejezetekben a problémák leírása erősen stilizált volt, és világos, hogy ez a stilizált leírás teszi lehetővé az interakció fő típusainak egyértelmű megkülönböztetését. A cikk bevezetésében rámutattam, hogy a közgazdaságtudomány legtisztábban megfogalmazott részeinek célja az interakció *eredményének*, s nem magának a folyamatnak a magyarázata. Ha valaki a folyamatokat akarja tanulmányozni, sok olyan szempontot kell figyelembe vennie, amit az itt bemutatott stilizált forma nem tartalmaz. Ehhez a közvetlen interakció néhány típusa lenne megfelelő, de csak akkor, ha sokkal több változatot és árnyalatot tudna megkülönböztetni, mint a 4. és 5. fejezetben taglaltak.

Sok olyan probléma van, amelyhez a közgazdaságtan hagyományos területén kívül eső interakció-típus lenne megfelelő. Például meg vagyok győződve róla, hogy az a mód, ahogyan a közgazdaságtan a csoport-döntés problémáját tárgyalja, túlságosan stilizált: individualista kiindulópontja túlságosan korlátozza. Bizonyára sok formája van a konfliktusoknak és lojalitásoknak, társadalmi normáknak, szokásoknak és hagyományoknak, amelyek hatnak egy helyzetre, s amelyeket nem lehet e cikk egyszerű sémája szerint osztályozni. Talán néhány fenti elemet a „közvetlen interakció” magában foglalhat, de ebben az esetben a kategória olyan tág és olyan sok különféle elemet tartalmaz, hogy nem nagyon használható. Ha más társadalomtudományoknak kellene az interakció típusait és elemzésük módját osztályozni, akkor a közvetlen interakció széles kategóriáját bizonyára finomabban osztanák fel. Azt hiszem a közgazdaságtudomány továbbfejlődéséhez fontos lenne az ezzel foglalkozó más társadalomtudományok fogalmait és nézőpontjait magába olvasztani.

Hadd mutassak rá végül arra, hogy a közgazdasági elméletek elég kemény korlátjának tekintem, hogy előre fel kell tételezni, milyen típusú interakció lesz jellemző. Például, amikor játékelméleti megközelítést használnak, akkor előre el kell dönteni, hogy a játék kooperatív lesz-e vagy nem-kooperatív. Egy általánosabb elméletnek ezt nem kellene előre megadnia. Az elmélettel megmagyarázandó egyik fontos dolog éppen az, hogy lesz-e kooperáció vagy sem. Általánosabb elmélethez jutnánk annak a feltevésnek alapján, hogy a közvetlen interakció általánosan lehetséges, de vagy túl költséges és bonyolult, vagy túlságosan sok konfliktust hoz magával, s ezért a közvetlen interakció lehetősége nem vezet szükségképpen kooperatív helyzethez. Így, még ha a közvetlen interakció és kooperáció lehetséges is, végül olyan helyzet is kialakulhat, amelyben van kooperáció a szereplők között a csoporton vagy koalíción belül, de ugyanakkor a kooperáló szereplők csoportjai között nem-kooperatív játék zajlik. Egy ilyen általánosított elméletben az *agresszivitás* fogalmának lehet szerepe. Más összefüggésben megpróbáltam néhány gondolatot ebben az irányban fejleszteni, a játék magvának (ahogy a 4. fejezetben röviden elmagyaráztam) elméletét kiterjesztve. Az agresszivitás szigorúbb követelményeket támaszt a különböző lehetséges koalíciókkal szemben, mint a játék magvának szokásos elmélete. Ennek megfelelően a követelmények könnyebben válnak összeegyeztethetetlenekké. A kooperáció megghiúsulhat, és helyette a koalíciók nem-kooperatív játékot játszanak egymás ellen, a 3. fejezetben tárgyalt típusú koalíciók között nem-kooperatív egyensúlyt hozva létre, míg a koalíción belül

kooperatív megoldásokat tartanak meg. Ha az agresszivitás növekvő szintjét képzeljük el, akkor a megoldásoknak olyan sorozatát hozhatjuk létre, amelyek a teljesen kooperatív megoldástól, a kevert (kooperatív/nem-kooperatív) megoldáson át a teljesen nem-kooperatív egyensúlyig terjednek. A résztvevők által elért eredmény összesített értéke a kooperáció fokának csökkenésével maga is csökken. És egy ilyen típusú elmélet más érdekes eredményre is vezethet. A kevert interakciók általánosabb sémájának ez a megfogalmazása azonban még kísérleti stádiumban van.

Bibliográfiai jegyzetek

A 2. fejezetben az általános egyensúlyelmélet volt az indirekt, paraméteres interakció standard példája. Az általános egyensúlyelméletet minden gazdaság-elméleti tankönyv tárgyalja, különböző színvonalon. Tekintélyes könyv, amely az elmélet jelenlegi kifejlett alakját, számos variánsát és kiterjesztését is nyújtja: *Arrow—Hahn* (1971, 1980). Az általános egyensúlyelmélet gyakorlati, empirikus alkalmazását adja (a növekedélmélet elemeivel úgy kombinálva, hogy „mozgó egyensúly” jöjjön létre) a norvég hosszú távú tervezési mode, (MSG): *Johansen* (1960, 1974). Újabban sok gyakorlati alkalmazás jelent még a nemzetközi gazdasági egyensúly tárgyköréből.

A 3. fejezetben a funkcionális interakció példaként a monopóliumok elméletét használta és olyan piacokat, melyek a monopolista és a szabadversenyes piac között helyezkednek el. A legtöbb tankönyv ezeket az elméleteket is tárgyalja, jóllehet az ittenitől eltérő terminológiával.

A 3. és 4. fejezetben játékelméleti fogalmak és gondolatok jelennek meg. A játékelméletbe még ma is az egyik legjobb bevezetés egy elég régi könyv: *Luce—Raiffa* (1957), bár nem foglalkozik különösen közgazdasági alkalmazásokkal. Hasznos és nem túl magas követelményű bevezetés: *Bacharach* (1976). A nem-kooperatív játékelméletnek az oligopóliumra és hasonló piaci helyzetekre alkalmazásában az alapvető referencia még mindig: *Shubik* (1959). A 3. fejezet végén említjük a kompetitív árképzésnek nem-kooperatív tájként való modellezését, az e téren felmerülő nehézségekbe *Shilony* (1977) és *Shubik* több újabb cikke nyújt bepillantást. Magam is kifejtettem nézeteimet a játékelmélet fontosságáról a gazdaságpolitika és a tervezés területén: *Johansen* (1977)-ben (különösen a 2. fejezetben). A nem-kooperatív játékelmélet gondolatmenetének alkalmazása megtalálható az elméletibb irányzatú közgazdasági folyóiratok szinte minden számában, egy részük explicite is támaszkodik a játékelméleti fogalmakra, mások ezt többé-kevésbé álcázzák. A kooperatív játékelméletet is elég széleskörűen használják, noha nem annyira, mint a nem-kooperatív játékokat. A játékelmélet és a közgazdaságtudomány kapcsolataról jó áttekintést ad *Schotter és Schwödiauer* (1980).

Az az elmélet, amit a 4. fejezetben próbáltam meg kifejtetni, hogy ti. milyen a kapcsolat egyfelől a cseregazdaságnak kooperatív játékként való megoldása, másfelől az árakat paraméterként kezelő általános egyensúlyelméleti megoldás között, magas színvonalú könyvek és cikkek tárgya volt, pl. a már említett *Arrow—Hahn* könyvé. Elemi matematikai módszerre alapozott egyszerűbb bevezetést nyújt *Johansen* (1978a). Már idézett más művek is tartalmaznak erről bevezető vagy áttekintő anyagot.

A 4. fejezet az alku-elméletet is érinti. Ez az elmélet legalább annyira tárgya a szociológiának és a politikaelméletnek is, mint a közgazdaságtudománynak. Ebben a fejezetben röviden felvázoltam egy gondolatmenetet, amely arra vezet, hogy sok gazdaságban a döntéshozatal egész rendszerében növekvőben van az alkufolyamatok részaránya. Ezt a gondolatot *Johansen* (1979)-ben részletebben is kifejtettem, ott több irodalmi hivatkozás is található.

Az 5. fejezet a jóléti elméletet tárgyalja. Ez az elmélet is megtalálható a legtöbb tankönyvben. Sok szakkönyv is létezik ebben a tárgykörben, sokan hosszasan taglalják azokat a vitákat, amelyek e területet máig is jellemzik. A jóléti elmélet alkalmazásával is sokhelyütt találkozunk, így a piaci formákról, az adókról és támogatásokról, a közművek árképzéséről, a közösségi beruházások eldöntésére alkalmazott kalkulációkról, a költség-haszon analízisről, a szociálpolitikáról stb. szóló irodalomban. *Johansen* (1978b)-ben, különösen ennek 7.2. fejezetében taglaltam az árrendszer optimalitásáról szóló „tétel” érvényességi határait és jelentőségét a decentralizált döntési folyamatban.

A csoportos döntések elméletét és ennek szokásos közgazdaságelméleti tárgyalását mutatja be *Sen* (1970). E téren a közgazdaságtudomány, a szociológia és a politikaelmélet nagy közös irodalmat produkált.

Az 5. fejezetben a közösségi javak feletti döntés kérdését is érintem. Ezt a közösségi gazdaságtanról (public economics) szóló csaknem minden modernebb tankönyv tárgyalja kisebb vagy nagyobb terjedelemben. Kiterjedt szakirodalma is van. Jól reprezentáló tanulmányok olvashatók egyes folyóiratok különszámaiban, amelyek olyan kérdésekre irányulnak, mint az információcsere, döntési mechanizmusok szerkesztése stb. a közösségi javakkal kapcsolatban, lásd pl. a *Scandinavian Journal of Economics* 1979. évi 2. számát vagy a *The Review of Economic Studies* 1979 áprilisi számát.

Dolgozatomban más témákat is érintettem. De túl messze vezetne, ha minden pontját irodalmi hivatkozással akarnám ellátni. (Az 5. fejezet végén „A... gazdaságtana” típusú hivatkozások közül sokra *G. Becker* könyvei és tanulmányai volnának fontos adalékok).

Sok ott említett területen több vita eldöntetlen. A fentebb adott hivatkozások csak tipikusnak tekintendők, azaz nem hivatkoztam a legélesebben kritikus munkákra. Mégis meg kell említeni egyet, amelyik kritikus az általános egyensúlyelmélettel, és ezáltal a járatos közgazdasági elméletek legtöbbszörének magvával szemben: *Kornai* (1971) könyvét. Ez a könyv, amely bizonyos mértékig rendszerelméleti indíttatású, segítheti további interakciós típusok definiálását, a jelen tanulmányban alkalmazott kategóriákon túl.

A 6. fejezet legvégén azt sugallom, hogy egy általánosított típusú játék, a kooperatív és a nem-kooperatív játék keveréke, releváns lehet. Az ilyen játékok elméletének kísérleti bemutatását tartalmazza *Johansen* (1981).

IRODALOM

- ARROW, K. J.—HAHN, F. J. (1971, 1980): *General Competitive Equilibrium*, Amsterdam.
 BACHARACH, M. (1976): *Economics and the Theory of Games*, London.
 JOHANSEN, L. (1960, 1974): *A Multi-Sectoral Study of Economic Growth*, Amsterdam.
 JOHANSEN, L. (1977): *Lectures on Macroeconomic Planning, Part 1. General Aspects*, Amsterdam.
 JOHANSEN, L. (1978a): „A Calculus Approach to the Theory of the Core of an Exchange Economy”, *The American Economic Review*.

- JOHANSEN, L. (1978b): *Lectures on Macroeconomic Planning, Part 2. Decentralization, Planning under Uncertainty*, Amsterdam.
- JOHANSEN, L. (1979): „The Bargaining Society and the Inefficiency of Bargaining”, *Kyklos*.
- JOHANSEN, L. (1981): „Some Thoughts on Cores, Aggressiveness and Breakdown of Cooperation in Game Theory”, *Memorandum from the Institute of Economics*, University of Oslo.
- KORNAI, J. (1971): *Anti-Equilibrium*, Amsterdam.
- LUCE, R. D.—RAIFFA, H. (1957): *Games and Decisions*, New York.
- SCHOTTER, A.—SCHWÖDIAUER, G. (1980): „Economics and the Theory of Games: A Survey”, *Journal of Economic Literature*.
- SEN, A. K. (1970): *Collective Choice and Social Welfare*, London.
- SHILONY, Y. (1977): „Mixed Pricing in Oligopoly”, *Journal of Economic Theory*.
- SHUBIK, M. (1959): *Strategy and Market Structure*, New York.

Programok és végrehajtásuk, a hatékonyság értékelése*

I. Bevezetés

Ez a tanulmány a közületi programok eredményességével, valamint azok irányításával foglalkozik. Olyan módozatokra irányul, amelyek révén a program hatékonyságot külön lehet választani a vezetési hatékonyságtól, mégpedig a *kijelölt* program inputokat a *megkívánt* program outputokba átalakító intézményektől (pl. iskolák) vagy más döntéshozó egységektől nyert empirikus megfigyelésekre támaszkodva. Hatékonyság-értékelési eljárásunkat egy nagyarányú társadalmi kísérlet eredményeiből válogatott adatokkal fogjuk szemléltetni. A hátrányos helyzetű gyermekek állami oktatásáról van szó, és a kísérletet Program Follow Through (PFT) néven ismerjük.¹

Ilyen szétválasztásra szükségünk van, ha el akarjuk kerülni azt, hogy a jó vezetés eredményeit rossz programoknak tulajdonítsuk és viszont. Sőt az összezavarás valószínűségét a közületi szektorra vonatkozó kiértékeléseknél még növeli a többszörös outputok és inputok fennforgása. Ha ilyen programokat szubjektív súlyozású egyetlen outputtal mérnek, ez olyan mérvű önkényességet von maga után, ami számos alkalmazásra nézve elfogadhatatlan. Ugyanez áll fenn akkor is, ha objektív adatokat használnak fel azzal a céllal, hogy a többszörös outputokat egyetlen outputra redukálják költség-ár számítások segítségével, noha ezek gyakran az éppen taglalt programoktól távol eső piacokról származnak.

Szemléltető példaként utalhatunk az „önbecsülésre” mint a 11 kívánatos output egyikére vagy a „szülőknek a gyermekek iránt tanúsított figyelmére” mint a 25 input egyikére, mindkettőt fontosnak véljük a PFT kísérlet eredményeinek kiértékelésénél. Hogy miért és hogyan állapították meg épp ezeknek az outputoknak és inputoknak fontosságát, azt nem tesszük vizsgálat tárgyává e tanulmányban.² Ehelyett feltételezzük, hogy a kívánt outputokat és a kijelölt inputokat, valamint azt a módot, ahogyan ezeket mérni kell, már megállapították. Ez megengedi majd, hogy a lényegre, a hatékonyságra összpontosítsunk olyan programok folyamán, amelyeket a következő output és input orientációkra való utalással jellemezhetünk:

* A fordítást a The Institute of Management Sciences engedélyével közöljük. Eredeti megjelenés A. Charnes, W. W. Cooper and E. Rhodes: Evaluating Program and Managerial Efficiency: An Application of Data Envelopment Analysis to Program Follow Through, *Management Science* Vol. 27. No. 6. June 1981, © TIMS, 1981. Fordította: Vitézy András.

¹ E kísérletről részletesebb leírást a cikk második része tartalmaz majd.

² Ezekről a témákról [1] és [2]-ben esik szó. Lásd még [43] és [53]. Ahogy Eric Hanushek [44] és [45]-ben megjegyzi, az ilyen szülői és családi inputokat általában fontosnak tekintik, talán a legeslegfontosabbnak, kivált a Coleman jelentés óta.

I. *Output orientáció*: egy döntéshozó egység (Decision Making Unit: DMU) nem mondható hatékonynak, ha bármely output növelhető valamelyik input növelése és egy másik output csökkentése nélkül.

II. *Input orientáció*: egy DMU nem mondható hatékonynak, ha bármelyik input csökkenthető anélkül, hogy egy másik inputot növelnénk és csökkentenénk valamelyik outputot.

Egy DMU-t akkor és csak akkor mondhatunk hatékonynak, ha nem érvényes rá sem az I. sem a II.

Látni fogjuk, hogy a mi hatékonysági mértékünk lehetővé teszi, hogy a fenti orientációkat egyidejűleg vegyük számításba. Mindamellett a bemutatás nagyobb világossága érdekében az tűnt a legjobbnak, hogy a most következő fejtegetésben elválasszuk őket. Bárhogyan van is, a fenti jellemzők úgy tekintendők, mintha a „Pareto hatékonyság”³ szokásos koncepcióját kiterjesztenénk azáltal, hogy beleérténénk mind az inputokat, mind az outputokat, azzal a feltételezéssel, hogy a felszabadított inputoknak van „valamiféle” értékük más lehetséges felhasználások során. Mint ilyen, a mi mértékünk mentes a súlyozást és árat feltételező megközelítések afféle önkényességétől, amelyre fentebb már utalnuk, legalábbis a hatékonyságot illetően feltétlenül mentes. Nem akarunk azonban pusztán a hatékony és nem-hatékony DMU-k azonosításánál megállni. Ennél is messzebb akarunk jutni azáltal, hogy megadjuk a hatékonyság mennyiségi becsléseit, valamint azokat a dimenziókat (program vagy vezetés) amelyekben előfordulnak.

A „döntéshozó egység” (DMU) kifejezést azért vezettük be a fenti definíciókba, hogy elkerülhető legyen az azonosítás, mely a hosszú használat folyamán rögzült az olyan fogalmakkal mint „vállalat” meg „cég”, melyek a közgazdasági irodalomban természetszerűen szerepelnek az input és output döntésekkel foglalkozó szervezeti egységekként. Mégis hasznosnak fogjuk találni a kölcsönzést ettől az irodalomtól annak érdekében, hogy a termelési függvény fogalmát alkalmazzuk annak tisztázására, hogy mit is próbálunk elérni a mi hatékonysági kiértékeléseinkkel. Ezt tesszük a bevezető hátralevő részében. Vagyis a termelési függvény fogalmát használjuk fel arra, hogy előzetes képet adjunk a fogalmakról, a módszertanról és az alkalmazásról, melyet a későbbiekben fejtenk ki e cikkben.

Először is írjuk fel

$$y = f(x_1, \dots, x_m) \quad (2)$$

alakban azt az összefüggést, ahol az y az $x = (x_1, \dots, x_m)$ input értékek bármely meghatározott vektorából nyert egyetlen output szintjét jelenti. Ahhoz hogy (2) termelési függvényt jelentsen, az y értékének mindegyik input vektorra maximálisnak kell lennie. Más szóval f „szélső érték”. Egy adott technológia (azaz vezetési és technikai tudás) vonatkozásában határozzuk meg, amely

³ Nevezik *Pareto–Koopmans* hatékonyságnak is. (Lásd [17], IX. fejezet.) Amivel mi itt foglalkozunk, azt *Farrell* [36] egy alternatív megközelítésben, amely nem vonatkozik kifejezetten a $P-K$ hatékonyságra, úgy nevezi, hogy „technikai hatékonyság” és megkülönbözteti az „árhatékonyság”-tól. Tanulmányunkban mi sem foglalkozunk árhatékonysági megfontolásokkal. Jóllehet rendelkezésre állnak az erre szolgáló eszközök a helyettesítési határráta értékein keresztül, melyeket — mint látni fogjuk — felhasználunk melléktermékeként az általunk alkalmazott értékelési eljárások során. További fejtegetés [28] és [30] alatt található. A transzformációs elmélet kiterjesztése [30] rendelkezésre áll, amennyiben az idevonatkozó hatékonyság-költség függvényekre szintén szükség lenne.

magában foglalja azt a módot, ahogyan a DMU-n belül a döntéshozatalok meg vannak (vagy meg kellene hogy legyenek) szervezve.⁴

Mivel (2) egy „iparágon” belül minden egyes $j = 1, \dots, n$ „vállalatra” alkalmazható, használhatjuk arra is, hogy bármelyik vállalat hatékonyságát kiértékeljük a következő gondolatmenet révén. Tegyük fel, hogy a j -edik ilyen vállalatnak az $x_{1j}, \dots, x_{mj}$ input értékei adva vannak. A (2)-be történő behelyettesítés az

$$\hat{y}_j = f(x_{1j}, \dots, x_{mj}) \quad (3)$$

összefüggést eredményezi, mint az adott input értékekből nyerhető maximális outputot. Ha az észlelt output értéke y_j , akkor a

$$0 \leq y_j/\hat{y}_j \leq 1 \quad (4)$$

formulát kapjuk, amely a vállalat által elért hatékonyság értékét adja meg. Ez az mérték több mint csupán egy hatékonysági mutató. Teljesen operacionális abban az értelemben, hogy értéke a lehetséges output aránya a ténylegesen elérthez, vagy fordítva: az adott input értékek inefficiens felhasználásából eredő output veszteséget jelöli.⁵

A fent vázolt körülmények között az ilyen inefficiencia a vezetésnek tulajdonítható.⁶ Természetesen a helyzet még bonyolultabb lehet: némely vezetőnek olyan termelési függvénnyel kell dolgoznia, amelyek a többiekétől eltérnek. Ilyenkor az $\hat{y}_j$ -t mint olyan maximális outputot jelölhetjük, amely az egyes $\alpha = 1, 2, \dots, k$ különböző termelési függvények esetén lehetségesek, és hasonlóan jelölhetjük az $x_j^\alpha = (x_{1j}^\alpha, x_{2j}^\alpha, \dots, x_{mj}^\alpha)$ input vektorokat azért, hogy kiértékelhessük a vezetés hatékonyságát a termelési lehetőségek k különböző halmazán.

A termelési lehetőségek ilyen eltérő halmazainak bevezetése jogosan vet fel hatékonyságot érintő kérdéseket. Még ha fel is tételezzük, hogy mindegyik vezető 100%-os hatékonysággal működik, arra lehetünk kíváncsiak, hogy melyik a leghatékonyabb függvény közülük, és hogy mily módon lehetne az ilyenfajta hatékonyságot identifikálni és kiértékelni.

Az ilyen típusú „funkcionális hatékonyság”,⁷ amely a függvények közötti összehasonlítást hozza magával, a „program hatékonyság” és a „vezetési hatékonyság” közötti megkülönböztetéshez vezet el bennünket, amelyet e tanulmány későbbi részében fogunk vizsgálat tárgyává tenni. Az előbbit a vezetési magatartás vonatkozásában mérjük, a megfelelő függvény vagy program mellett. Az utóbbi a különböző függvényeket veti össze az egész program keretében. Ez további komplikációt okoz még akkor is, ha feltételezzük, hogy a vezetési hatékonyságból származó különbségeket már identifikálták és figyelembe vették. Figyeljük meg például, hogy az egyik termelési függvény nagyobb output értékeket adhat az input értékek némely tartomá-

⁴ Carlson [15] és Allen [5] kifejtik, hogy a szervezeti megfontolások — azaz, az a módszer, ahogyan a döntéseket megszervezik és egymással kapcsolatba hozzák — a termelési függvény definíciójának részét képezik.

⁵ Ez a gondolatmenet a [27]-ben használtat követi. Lásd [38]-at is.

⁶ Eltekintünk az észlelési és más hasonló hibák lehetőségétől. Lásd Aigner et al. [3]. Statisztikai kérdésekkel, az általunk javasolt hatékonysági mértékekkel kapcsolatos eloszlás-fajtákkal [29]-ben foglalkozunk, itt nem.

⁷ Az itt alkalmazott „funkcionális hatékonyság” kifejezés eltér attól, amely a [17] 3. oldalán szerepel.

nyában, mint egy másik, de más input tartományok esetében fordítva. Természetesen a helyzet még bonyolultabbá válik, amikor több mint két függvényről van szó. Ennélfogva, habár a mi tárgyalási módunk ilyen kiterjesztést is lehetővé tesz, ebben a cikkben nem fogunk részletesen foglalkozni vele.

Természetesen az a tény, hogy egyik függvény némelyik input érték tartományban hatékonyabb mint a többi, önmagában is jogosan fontos lehet. Ilyen eset áll fenn pl. amikor anyagi eszközöket osztanak szét különböző vállalatokra vagy programokra és ehhez üzemek különböző területekre telepítése vagy pedig különböző programokkal kapcsolatos jogi korlátozások kapcsolódnak.

Analízisünk lehetővé tesz ilyen identifikálást is, ha kell. Egyes közérdekű akciók kiértékelése esetében éppen azt akarhatjuk mérlegelni, hogy a többféle lehetséges függvény közül melyik lenne a legjobb. Ilyen az az eset, amikor döntést kell hozni, hogy több szövetségi állami program közül melyik az az egy, amit folytassunk (mint pl. a PFT esetében), annak ellenére, hogy bizonyos körülmények mellett az egyik program hatékonyabb, más körülmények között a másik.

Annak biztosítása végett, hogy az a hatékonysági hányados, melyet az ilyen kiértékelésre fogunk használni, ne vehessen fel egyenél nagyobb értéket, felállítunk egy új függvényt, amely mindig legalább olyan hatékony mint a sorozatban levő bármelyik függvény. A szövegben a függvényre mint „közös burkolóra” utalunk, mivel mintegy beburkolja a sorozatban levő többi függvényt. Ezt úgy is lehet tekinteni, mint olyan „hatékonysági határ” alakú burkolót, amely korlátozó feltételt szab az alattuk működő DMU-k részére. Innen van a Data Envelopment Analysis = DEA (adatburkoló analízis) elnevezés, mely észlelési adatokra alkalmazott azon eljárásokból (és fogalmakból) áll, amelyeket a hatékonysági határok megállapítására használunk.

Tegyük fel, hogy a DMU-knak a vezetői előzetesen csak a program korlátozásai szerint — olyan korlátok ezek, melyeket a saját termelési függvényeik határoznak meg — tudtak cselekedni. Most viszont azt tételezzük fel, hogy a közös burkoló által meghatározott korlátokhoz tudnak igazodni. Ilyen feltételezés mellett az eredményül kapott hatékonysági mértéknek olyan tulajdonságai lesznek, melyek a hatékonyság előbbi definícióját kiterjesztik. A mi megközelítésünk különösen figyelembe veszi a DMU-k eloszlását az egyes programokon belül, valamint azokat az eredményt növelő vagy anyagi forrást megtakarító lehetőségeket, amelyek az egyes programoknál elérhetők azáltal, hogy a régi korlátokon túllépve az új, közös burkolóra térünk rá.

A cikk következő részeiben megvizsgáljuk milyen módon lehet e célt elérni. Ez úgy történik, hogy a matematikai programozás mechanizmusának a vezetési döntéshozatalban szokásos (csak) tervezési felhasználásán túllépve az optimalizálás eszközeit és fogalmát a már végrehajtott döntések kiértékelésére alkalmazzuk.⁸ Ez azt eredményezi, hogy új utak nyílnak az empirikus észlelésekből összefüggések becslésére. Más megközelítésekkel mint pl. a statisztikai regresszióval az empirikus észlelésekhez való illesztésével nem csak azért végzünk összehasonlítást, hogy a mi javaslataink megértését megkönnyítsük, hanem

⁸ Ez eltér azoktól a felhasználásoktól, amelyekben a programozási (tervezési) modellekből nyert eredményeket régebbi döntésekkel vetik egybe, és a régebbi adatok alapján az eredményeket összehasonlítják a matematikai programozási modellek eredményeivel azzal a céllal, hogy megtudják vajon el lehetett volna-e érni jelentős javulást. Lásd pl. [25] és [46]. Ügyszintén lásd Theil [55] munkáját.

azért is, hogy megmutassuk, mikor előnyösebb a mi módszerünk használata és mikor más, a statisztikában megszokottabbaké. A kétféle módszer kombinációja természetesen szintén lehetséges és ezt be is fogjuk mutatni. A tanulmány hangsúlya azonban a hatékonyság mérésén van és nem az extrémis összefüggések becslésén.⁹

2. A döntéshozatal hatékonysága

Ha csak egyetlen programmal foglalkoznánk, akkor a vezetési (döntéshozatali) hatékonyság mértékéül a következő kifejezést vehetnők át [28]-ből és [50]-ből:

$$\max h_0 = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^m x_i v_{i0}} \quad (5)$$

feltéve, ha

$$1 \geq \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}}; \quad j = 1, \dots, n;$$

$$u_r, v_i > 0; \quad r = 1, \dots, s; \quad i = 1, \dots, m.$$

Itt, mint eddig is, x_{ij} a j -ik DMU-ra vonatkozóan jelenti az input értékeket, de az outputokat most úgy indexeljük, hogy az y_{rj} az ezekből az inputokból nyert mindegyik $r = 1, \dots, s$ output észlelt mennyiségét jelentse. Azt feltételezzük, hogy az összes outputot és inputot mint pozitív értékeket észleltük. Mindegyik $j = 1, \dots, n$ DMU ugyanazokat az inputokat használja fel és ugyanazokat az outputokat hozza létre: (általában) eltérő mennyiségekben. Voltaképpen azt is mondhatnánk, hogy ez elegendő ahhoz, hogy úgy jellemezzük őket, mintha ugyanahhoz az „iparághoz” tartoznának.

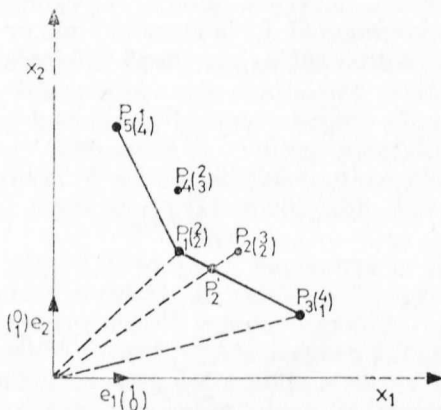
Az (5)-ben szereplő n feltétel nyilvánvalóan biztosítja, hogy egyik DMU sem tud elérni olyan hatékonysági minősítést, amely meghaladná az egységet. A hatékonysági kiértékelés mindegyik fázisára kiszemeljük ennek a halmaznak egy tagját, amelyet mind a célfüggvényben, mind a feltételekben szerepeltetünk. Az ezt követő optimalizálás ezután az u_r^*, v_i^* -nek egy *pozitív*¹⁰ együttesét eredményezi, amely optimális $0 \leq h_0^* \leq 1$ -ot ad, ahol a $h_0^* = 1$ akkor, és csak akkor, ha az így megkülönböztetett DMU az (1) értelmében hatékony.

Most ezekben a h_0^*, u_r^* és v_i^* értékeknek értelmezésére térünk rá, mégpedig úgy, hogy (a lineáris programozás „dualitási” értelmében) a következőképpen kapcsoljuk őket a termelégazdaságtan fogalmaihoz. Egyelőre tegyük fel,

⁹ További tárgyalás [28]-ban és [50]-ben található.

¹⁰ Lásd a [28]-ra vonatkozó Javításokat avégett, hogy miért vannak ezek pozitív értékekre korlátozva. Úgyszintén lásd a nem-archimédieszi modell hatékonysági tételét a [24]-ben, amely a lineáris programozási feladatban jelentkező pozitív maradékokat hozza kapcsolatba a nem-archimédieszi elemek megjelenésével a hányados feladat megoldásában.

hogy megint az egyetlen output (közöséges termelési függvény) esetéről van szó. Az 5 DMU mindegyikére két inputról szereztünk észleléseket, az x_1 és az x_2 mennyiségekről. Ezeket az input értékeket ezután a megfelelő outputjukkal normáljuk és az 1. ábra koordináta rendszerében, mint $P_1, \dots, P_5$ pontokat ábrázoljuk. Az 1. ábrán levő koordináták a különböző inputoknak az egységnyi outputra eső mennyiségét mutatják. A P_2 esetében pl. az egységnyi outputra eső inputok: $x_{12} = 3$, illetve $x_{22} = 2$, ahol a j index (itt $j = 2$) mutatja, hogy az öt DMU közül melyikre vonatkoznak az $i = 1, 2$ inputok.



1. ábra. Hatékony pontok és az isoquant görbe

A könnyebbség kedvéért ezekről az x_{ij} értékekről inkább mint mennyiségekről, mintsem hányadokról fogunk beszélni. Így az 1. ábrán levő összefüggő vonalra mint az „egységnyi *isoquant*ra” utalunk, melyet a következő módon használunk a hatékonysági kiértékelésekre.

Vegyük a P_2 pontot a jelölt koordinátákkal. Ezek az észlelt inputok, amelyekre a 2. sz. DMU-nak szüksége van ahhoz, hogy egységnyi outputot hozzon létre. Másrészről az origótól a P_2 -ig terjedő sugáron levő P'_2 pont az egységnyi *isoquant*on van. Ez viszont azt jelenti, hogy a P'_2 szintén létrehoz egy egységnyiit ugyanebből az outputból, de az inputokból kevesebbet használ fel. Ennél fogva ésszerű, hogy a

$$0 \leq d(OP'_2)/d(OP_2) \leq 1 \quad (6)$$

arányt, mint az adott DMU hatékonysági mértékét használjuk, ahol a $d(OP'_2)$ az origótól a P'_2 -ig terjedő sugár hosszát és $d(OP_2)$ ugyanennek az origó és a P_2 közötti hosszát jelöli.

Nyilvánvaló, hogy a hányados értéke kisebb mint a P_2 -re vonatkozó egységnyi érték, és ugyanez áll a P_4 ponttal kapcsolatos adatokra. Ugyanez az eljárás azonban az 1. ábrában feltüntetett másik három DMU mindegyikére egységnyi értéket adna. Az utóbbiak így mind hatékonynak bizonyulnak, mivel az egységnyi *isoquant*on vannak, a P_2 és P_4 pontok pedig nem. Ily módon a programozás duális oldalán is kaptunk hatékonysági jellemzést, amely a dualitás révén ekvivalens a hányados kifejezésünkkel. (Lásd [24]-et és [28]-at.) A részletek [28]¹¹-ben vannak kifejtve, és itt nem bocsátkozunk

¹¹ Lásd Rhodes [50]-et is.

ismétlésekbe. Ehelyett egyszerűen felírjuk a P_2 -vel ábrázolt DMU kiértékelésére kapott optimális értékeket:

$$u^* = 1, \quad v_1^* = \frac{1}{6}, \quad v_2^* = \frac{1}{3}, \quad (7)$$

amely

$$h_0^* = \frac{1u^*}{3v_1^* + 2v_2^*} = \frac{6}{7} \quad (8.1)$$

optimális célfüggvény értéket ad és kielégíti az összes idevonatkozó feltételt, azaz

$$\begin{aligned} \frac{1u^*}{2v_1^* + 2v_2^*} &= 1, \\ \frac{1u^*}{3v_1^* + 2v_2^*} &= \frac{6}{7}, \\ \frac{1u^*}{4v_1^* + 1v_2^*} &= 1, \\ \frac{1u^*}{2v_1^* + 3v_2^*} &= \frac{3}{4}, \\ \frac{1u^*}{1v_1^* + 4v_2^*} &= \frac{2}{3}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

mint ahogy (5) megköveteli ebben az egyszerű esetben, amikor csak egyetlen (egységnyi értékű) output van.

Látható tehát, hogy P_2 nem hatékony és $h_0^* = 6/7$ valójában azt jelenti, hogy az egységnyi outputot úgy kellett volna elérni, hogy mindegyik megfigyelt inputból csak $6/7$ részt használ fel. Ezt a tényt a P_1 és P_2 adataira utalva állapítjuk meg, amelyek ugyanezen számítás segítségével hatékonynak minősülnek, mint ahogy ez látható is a (8.2)-ben levő első és harmadik feltétel értékeiből.

Ez a példa azt mutatja, hogy bár nem tettünk a priori feltételezéseket a DMU-k termelési szerkezetére, a lineáris programozás dualitása minden hányados formulához párosít egy „érintő” poliédert vagy „állandó hozamú termelési határfelületet”, amely a kérdéses DMU termelési függvényének lokális approximációja.

Ámbár a mi hatékonysági mértékünk úgy tűnik, mintha a DMU-knak csak a kiértékelés alatt álló részhalmazára vonatkozna, nem szabad elfelejtenünk, hogy az összes többi is résztvevett az egységnyi hatékonyság meghatározásában. Így a P_2 -re vonatkozó $h_0^* = 6/7$ hatékonysági értéket a P_1 és P_3 -ra vonatkozó sugár-eljárással kaptuk, ahol ez utóbbiakat az 1. ábrán feltüntetett adatok alapján úgy jellemeztük, mint amelyek e kiértékelés keretében hatékonyak.

Mondanivalónk további megvilágítására a P_4 kiértékelését vesszük szemügyre, amely a fenti módszerrel¹² az

¹² Azaz egy ekvivalens lineáris programot oldunk meg és az optimális megoldást (5)-be helyettesítjük.

$$u^* = 1, v_1^* = \frac{1}{3}, v_2^* = \frac{1}{6} \quad (9)$$

értéket adja, melyre

$$h_0^* = \frac{1u^*}{2v_1^* + 3v_2^*} = \frac{6}{7}. \quad (10.1)$$

Ez ugyanaz a hatékonysági érték, mint amit a DMU_2 -re kaptunk. Azonban a DMU_4 -re elvégzett hatékonysági értékelés a P_5 és P_1 pontokra utal vissza, ahogy az (5) megfelelő feltételeibe való behelyettesítéssel bizonyítható:

$$\begin{aligned} \frac{1u^*}{2v_1^* + 2v_2^*} &= 1, \\ \frac{1u^*}{3v_1^* + 2v_2^*} &= \frac{3}{4}, \\ \frac{1u^*}{4v_1^* + 1v_2^*} &= \frac{2}{3}, \\ \frac{1u^*}{2v_1^* + 1v_2^*} &= \frac{6}{7}, \\ \frac{1u^*}{1v_1^* + 4v_2^*} &= 1. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Ez más helyzet, mint a DMU_2 -re kapott $h_0^* = 6/7$ esetben, ahol a sugár hatékonyságra P_1 és P_3 képezte a referencia halmazt. Más szóval a P_2 és P_4 -re vonatkozó referencia halmazok különböznek annak ellenére, hogy az eredményül kapott hatékonysági értékek ugyanazt jelzik mindkét esetben a források csökkenthetőségének értelmében.

Amikor a hatékonyság kérdését egy *isoquant* szemszögéből közelítjük meg, magától értetődik, hogy input megtakarításokról beszéljünk. A dolgot meg is lehet fordítani úgy, hogy az output növelést mérlegeljük, sőt az általunk alkalmazott modell-típusok esetében mértékeinket egyidejűleg alkalmazhatjuk mind az inputokra, mind az outputokra, ha úgy tetszik.¹³

További felvilágosítást kapunk arról, hogy ez mily módon végezhető el a (7) és (9)-ben feltüntetett megoldási értékekre hivatkozva. Az ott szereplő v_1^* és v_2^* értékek, melyeket a lineáris programozási megoldásokból nyertünk, az 1. ábrán található megfelelő *isoquant* szakaszokhoz tartozó normálisokat reprezentálják. A P_1 -től P_3 -ig terjedő szakasz a

$$\left\{ (x_1, x_2): \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}x_2 = 1; 2 \leq x_1 \leq 4; 1 \leq x_2 \leq 2 \right\} \quad (11)$$

halmaz, ahol az együtthatók értékét a $v_1^* = 1/6$ és $v_2^* = 1/3$ segítségével nyerjük (7)-ből. Ezek nyilvánvalóan az egyes input változókhoz tartozó marginális termelékenységek. Ezek azonban nem becsülhetők pusztán a P_2 tevékenység

¹³ Lásd [35]-ben azoknak a feltételeknek a további fejtegetését, melyek mellett ez keresztülvihető.

adataiból, hanem tulajdonképpen bármely olyan DMU kiértékelésére alkalmazható *hatékony* marginális termelékenységek, amelyek erre az isoquant szakaszra vonatkoztathatók. Ennélfogva a (11)-ben szereplő egyik x_i , $i = 1, 2$ változónak sincs a DMU-t jelölő j alsó indexe.

Az a tartomány, ahol ezek a termelékenységek érvényesek a (11) jobb oldali részében van feltüntetve. A reláció ezen a tartományon belül lineáris, így a marginális és az átlag termelékenységek itt egyenlők. Ennélfogva, miután a v_i^* értékeket a P_2 -re vonatkozó észlelt értékekre alkalmazzuk, a következő összefüggést nyerjük:

$$v_1^* x_{12} + v_2^* x_{22} = 3v_1^* + 2v_2^* = \frac{7}{6}. \quad (12)$$

Ezáltal 7/6 egységnyi output értékhez jutunk (a hatékonysági arány reciprok értéke) a P_2 -nek megfelelő egy egységnyi output helyett.

A P_2 és P_5 közötti isoquant szakasznak megfelelő termelékenységeket (9)-ből nyerjük és a következő halmazt kapjuk:

$$\left\{ (x_1, x_2) : \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{6}x_2 = 1; 1 \leq x_1 \leq 2; 2 \leq x_2 \leq 4 \right\}. \quad (13)$$

Ez természetesen más mint (11), noha az adatok értelmezése ismét az előbbi eredményt hozza:

$$\frac{1}{3}x_{14} + \frac{1}{6}x_{24} = \frac{7}{6}.$$

Annak ellenére, hogy az output növekedés mindkét esetben ugyanaz, nem szabad elfelejtenünk, hogy ezek az értékek különböző hatékony referencia halmazokból származnak. Ennélfogva hiba lenne a (13)-ban szereplő termelékenységeket a P_2 -re alkalmazni és úgyszintén hiba volna a (11)-ben levő termelékenységeket arra alkalmazni, hogy a P_4 által elfogyasztott inputok hatékonyabb felhasználásából származó lehetséges output növekményt becsüljük fel.

Hangsúlyoznunk kell, hogy a mi termelési felületünk *nem* lineáris, csak szakaszonként lineáris, ami azt eredményezi, hogy a termelékenységek úgyszintén csak szakaszonként állandóak és csak a kijelölt tartományokon belül alkalmazhatók.

Kérdéshetjük persze, hogy nem található-e a szakaszosan lineárisnál általánosabb reprezentáció. A (7) dolgozat pl. megmutatja, hogy ezeket az ideákat ki lehet terjeszteni olyan függvényekre, amelyek szakaszonként Cobb–Douglas-típusúak, valamint a többszörös outputokkal rendelkezőkre és még általánosabb függvényosztályokra. Ez lehetővé teszi olyan esetek vizsgálatát is, amikor a különböző outputokban egyidejűleg jelentkezik növekvő és csökkenő (valamint állandó) hozam.

A később tárgyalandó alkalmazás esetében azonban túlzás lenne, hogy ennyire általános módszert használjunk az elemzésre. Az olyan outputok pontoszással való értékelése, mint egy *gyermek önbecsülése*, vagy olyan inputoké mint a *szülői figyelem*, nem állnak azon a fokon, hogy a növekvő hozam

tényleges megjelenését meg lehetne különböztetni a pontozó mechanizmusok hiányosságaitól. Ilyen körülmények között az tűnik a legjobbnak, ha az eddigi úton haladunk tovább,¹⁴ vagyis olyan egyszerűbb modellekből indulunk ki, mint az ebben a tanulmányban használatos szakaszonként lineáris modell.

Az ilyen eljárásnak további előnye, hogy a kívánt hatékonysági számítások elvégzésére számítógépes programcsomagokat alakítottak ki. Ezek megadják a (más célra is felhasználható) termelékenységi és egyéb koefficiensek becslését is, ha kell.¹⁵ Ezek természetesen az (5)-ben levő többszörös outputok és inputok esetét is tartalmazza és ennél fogva szükségesnek tűnik, hogy a tanulmánynak ezt a részét azzal zárjuk, hogy előbbi értelmezéseinket kiterjesz-
szük erre a helyzetre is.

Az egyetlen output esetén úgy léphetünk túl, ha a termelési függvény fogalmát általánosítjuk „lehetséges termelési felületekre” és hatékonysági tulajdonságukra.¹⁶ A határtermelékenység fogalma és a megfelelő *isoquant* határlapok stb. a többszörös output esetében kétértelművé válnak és ez *a fortiori* igaz, amikor ezeket az outputokat egyidejűleg határozzák meg egy tetsző szerinti input kombinációból. Tulajdonképpen ez az, ami bennünket érdekel, ennél fogva a következő típusú értelmezéssel folytatjuk.

A fizikában és technikában használatos természettudományi szaknyelvből kölcsönözve¹⁷ úgy fogunk az (5)-ben szereplő törtek számlálójának értékeire utalni, mint amelyek „virtuális inputot” és a nevező értékeire, mint amelyek „virtuális outputot” adnak. A u_r -t és a v_i -t az észlelt input és output értékekből ezekbe a virtuális inputokba és outputokba átvívó „virtuális transzformációs rátáknak” fogjuk tekinteni. Az eredmény olyan (dimenzió nélküli) hányados lesz, amely akkor alakul át tényleges (hatékonysági mérték) aránnyá, amikor az u_i^* -k és v_i^* -k optimalisak. A v_i^* -kat olyan marginális termelékenységekként értelmezhetjük, amelyek az „output potenciál” mértékével megadott virtuális inputra vonatkoznak. Hasonlóképpen, bármelyik ilyen meghatározott output potenciálra¹⁸ az u_i^* -k hatékony transzformációs határrátákként értelmezhetők az észlelt outputokból a virtuális outputokba, úgy hogy a kapott output-input arány nem nagyobb egynél.

Végezetül azt is megfigyelhetjük, hogy a mi hatékonysági mértékünk skála-független mindegyik inputjában és outputjában. Tehát ha rendelkezésünkre áll az x_{ij} értékek egy együtteséből nyert h_0^* és ezeknek az x_{ij} értékeknek bármelyik részhalmozát mind a függvényben, mind a feltételekben a $\varrho_i x_{ij}$, $\varrho_i > 0$ új értékekkel helyettesítjük, ez nem változtatja meg az eredeti h_0^* -ot. Ugyanez a tulajdonság érvényes az y_{rj} outputokra vagy az inputok és outputok bár-

¹⁴ Például a lineáris programozás első tényleges ipari felhasználásában, ahol a benzin-keverék minősítésére használt „teljesítmény-számok” által lehetővé tett linearizációt választottuk az oktánszámmal kapcsolatos *non-linearitás* helyett. Lásd [25]. Ügyszintén lásd az A. Charnes és A. Manne közti vitát az *Econometrica* ugyanezen kötetében. Az ezt követő fejlemények természetesen már helyet adtak ilyen és más nem-lineáris vonatkozásoknak azokban a matematikai programozási modellekben, melyeket ma már egyetemesen használnak a benzin- és más jellegű keverési folyamatokban.

¹⁵ Lásd [47].

¹⁶ Lásd [28].

¹⁷ Lásd [17] 645. oldalát, amely az olyan fogalmak programozási alkalmazásairól szól, mint a „virtuális elmozdulás”, „virtuális munka” stb.

¹⁸ Lásd [5]-ben R. G. Allen fejtegetését az egyik outputból a másikba transzformálás határrátájának gazdasági jelentőségéről.

melyik olyan kombinációjára is, amelyek számunkra fontosak lehetnek, feltéve, hogy az ilyen skála változtatások az összes mérlegelés alatt álló DMU-ra vonatkoznak.¹⁹

3. A vezetés (végrehajtás) hatékonysága

Most ki fogjuk terjeszteni a fenti fogalmakat avégett, hogy meg lehessen különböztetni a program hatékonyságát a vezetés hatékonyságától azoknak a DMU-knak különböző referencia halmazában, melyeket tanulmányozni fogunk. Következésképpen bevezetjük (5)-nek a következő kiterjesztését:

$$\max h_0^\alpha = \frac{\sum_{r=1}^{s_\alpha} u_r^\alpha y_{r0}^\alpha}{\sum_{i=1}^{m_\alpha} v_i^\alpha x_{i0}^\alpha} \quad (15)$$

feltéve, ha

$$1 \geq \frac{\sum_{r=1}^{s_\alpha} u_r^\alpha y_{rj}^\alpha}{\sum_{i=1}^{m_\alpha} v_i^\alpha x_{i0}^\alpha}; \quad j = 1, \dots, n_\alpha$$

$$u_r^\alpha, v_i^\alpha > 0; \quad r = 1, \dots, s_\alpha; \quad i = 1, \dots, m_\alpha,$$

ahol $\alpha = 1, 2, \dots, k$ indexeli az egyes vizsgált halmazokat.

Természetesen mindegyik halmazon belül a hatékonysági mérés helyzete ugyanaz mint korábban volt, azaz $0 \leq h_0^{\alpha*} \leq 1$, és $h_0^{\alpha*} = 1$ akkor és csak akkor, ha az a DMU, melyet a DMU-k α -ik halmazához viszonyítva értékelünk, hatékony. Most viszont úgy akarjuk kiterjeszteni ezeket a fogalmakat, hogy az $\alpha = 1, 2, \dots, k$ halmazokra együttesen alkalmazhassuk őket avégett, hogy megvizsgáljuk a kérdéses programok viszonylagos hatékonyságát.

Hogy elvégezhessük ezeket az összehasonlításokat, szükségünk van a referencia halmazok közös outputjaira és inputjaira. Ideiglenesen úgy képzeljük el ezt, mintha összehasonlítást végeznénk az egyes α „technológiák” között azért, hogy meghatározzuk a közös inputoknak a közös outputokba való átalakításának különböző hatékonysági fokát. Mindegyik ilyen technológia megadja a termelési lehetőségek halmazának egy „határát” a gazdasági elmélet szokványos feltételezései mellett. Mi azonban empirikus adatokból származó következtetésekkel fogunk foglalkozni, melyekben *nem* tételezhetjük fel, hogy az összes DMU eléri ezeket a határokat. Mivel általában nem ismerjük ezeket a határokat valamilyen *a priori* forrásból, csak burkolási eljárással tudjuk őket megállapítani, úgy ahogy az 1. ábrában megmagyaráztuk: a DMU-k megfelelő halmazának leghatékonyabb tagjaiból kiindulva. Ezután a DMU-k eme hatékony részhalmazait fogjuk felhasználni az olyan *viszonylagos* hatékonysági határok megállapítására, amelyekre mint „burkolókra” utalunk azzal a céllal, hogy kihangsúlyozzuk az eltéréseket a közgazdasági elmélet szokásos feltételezéseiről és az empirikus kutatás szokásos módszereitől.

¹⁹ A bizonyítást lásd [18]-ban. Más általánosabb invariancia tulajdonságok vizsgálata [50]-ben található.

Mindenesetre $\alpha = 1, 2, \dots, k$ ilyen burkolót fogunk használni a halmazokból vett minden DMU hatékonyságának mérésére. Utána azzal foglalkozunk, hogy a DMU-k mindegyik részhalmazát a rá vonatkozó burkolóhoz igazítsuk, mielőtt a teljes halmazra vonatkozó hatékonysági összevetéseket készítenénk a tanulmány bevezető részében jelölt módon. Hogy ezeket a burkolók közti összevetéseket el tudjuk végezni, mindegyik DMU-t átvisszük saját referencia halmazának burkolójára, a [28]-ban leírt módon. Leginkább a közületi szektorban található magatartással foglalkozunk — mint pl. az oktatási intézmények magatartása —, ahol a tökéletes verseny piaci erői nem érvényesülnek szabadon. Mindazonáltal, durva analógiára támaszkodva, úgy tekinthetjük ezeket a „burkolóra igazításokat”, mint amelyek megfelelnek a versenyelmélet ama részének, mely szerint a fennmaradásnak feltétele, hogy minden DMU olyan hatékony legyen, mint versenytársai közül a leghatékonyabb.²⁰ Jegyezzük meg azonban, hogy ez nem feltételezés a mi esetünkben, hiszen mi így igazítjuk ki észleléseinket. Ennélfogva a burkolók közti összevetéseket olyan kiigazított adatok alapján végezhetjük, amelyekben már minden DMU olyan hatékony, mint a leghatékonyabb közülük. A burkolók közti összevetéseket ezután arra használjuk, hogy ezeket a burkolókat hatékonyság szerint rangsoroljuk.

Az alkalmazható tesztelési és becslési eljárások statisztikai aspektusaival másutt foglalkozunk — lásd [18] és [50] — és ezeket a jelen tanulmányban nem tárgyaljuk részletesen. Mindazonáltal kihangsúlyozhatjuk a következő szempontokat. Ellentétben az olyan helyzettel, amelyben egy elméletet akar-nánk tesztelni, itt úgy járunk el, hogy az elméletet arra használjuk, hogy az észleléseket arra a burkolóra hozza, mely az egyes halmazokban hatékonysági határként szolgál. Csak *miután* ez megtörtént lehet a burkolók közti szignifikancia vizsgálatokat elvégezni.

Ez a megközelítés nagymértékben egyszerűsít néhány olyan statisztikai modellt és módszert, melyeket fel lehet használni, és sok olyan alkalmazás-módot tesz lehetővé a stratégiák elemzésének és irányításának területén, amelyekre a szokásos módszerek nem alkalmasak.²¹ Mindenestire szükségesnek tartottuk, hogy módszerünknek külön nevet adjunk: Data Envelopment Analysis = DEA (adat burkoló analízis). Ezt a következőképpen próbáljuk motiválni: Tegyük fel, hogy rendelkezésünkre áll a közoktatásban alkalmazható két különböző program. Mindkét programnak ugyanolyan (többszörös) outputjai vannak és mindkettő ugyanazokat az inputokat használja fel, mint pl. a PFT kísérletben, melyet rövidesen vizsgálat tárgyává teszünk. Ahhoz, hogy eldöntsük, vajon a PFT jobb-e mint ennek az NFT alternatívája, különféle lehetőségeket kell figyelembe vennünk azon oknál fogva, hogy az észlelések minden egyes PFT és NFT-re vonatkozóan olyan eltéréseket tartalmaznak, melyek visszatükrözik a vezetői döntéseket akkor is, ha a *program* adta lehetőségekkel e döntések nem elég jól éltek.

Azáltal, hogy különbséget teszünk a program hatékonysága és a vezetés-végrehajtás hatékonysága között, a mi DEA megközelítésünk a különféle

²⁰ A burkolókra úgy is fogunk utalni, mint „hatékonysági határok”-ra, annak ellenére, hogy nem élünk a szokásos profit maximáló (ösztönző) feltételezéssel, miszerint a leghatékonyabb DMU-k mindig a technológia engedte optimumot választják.

²¹ Lásd *Griliches* [42] értekezését az oktatás szokványos ökonometriai vizsgálatával ezidáig nyert csekély eredményekről.

stratégiák kiértékelésére irányul. Továbbá a DEA módszer menet közben kiválasztja a hatékony DMU-kat esetleges tanulmányozás végett, miáltal az egyes programok követelményeit és irányítását módosíthatják. Lehetőséget nyújt arra is, hogy teljesen új programokat szintetizáljunk, úgy hogy egyes DMU-részhalmazokat válogatunk ki, és belőlük olyan új program-kombinációkat képezünk, amelyek jobbak, mint bármelyik eredeti program. Természetesen még más lehetőségek is rendelkezésre állnak és bárhogyan is van, a DEA módszerrel megkülönböztethetjük a jó programokat, melyeket esetleg rosszul menedzselnek a rosszabbaktól, amelyek inkább a jó vezetés miatt, semmint a program adottságai miatt tűnnek jobbnak. A következőkben a DEA-nak ezt az aspektusát fogjuk hangsúlyozni, de azért a többi lehetőségek közül is megmutatunk néhányat menetközben.

4. A „végig-követő program” (PFT) háttere

A cikk első részében tárgyalt DEA eljárást most egy olyan adathalmazon²² szemléltetjük, amely az Egyesült Államok közoktatásában végzett igen fontos kísérletből származik. Ezt a kísérletet „végig-követő program” (Project Follow Through = PFT) néven ismerik.²³ Mielőtt azonban analízisünk részleteibe bocsátkoznánk, foglalkozunk röviden a PFT kísérlet történeti hátterével és kifejlesztésével.

Országos programként a hatvanas évek vége felé kezdeményezték, abból a célból, hogy az oktatásban hátrányos helyzetű alsófokú elemi iskolás tanulóknak javító támogatást nyújtson. A korábban Project Head Start²⁴ néven ismert program céljait és eredményeit volt hivatva továbbvinni. A PFT legjelentősebb indoka éppen az volt, hogy a Head Start-ot, ezt az iskolát megelőző programot egészítse ki, mivel az alsó fokozatokban az általános iskolák nem működtek a Head Start céloknak, tananyagoknak és célkitűzéseknek megfelelően, és így nem tették lehetővé az ilyen gyermekek számára azt, hogy megtartsák vagy felgyorsítsák iskola előtti eredményeiket.²⁵ A PFT volt hivatva megoldani ezt a problémát. Ugyanakkor iskolán kívüli „társadalmi tevékenységi programnak” is tekintették abban az értelemben, hogy közösségi szolgáltatásokat is nyújtának: helyes táplálkozási programot, szociális, egészségügyi és fogászati támogatást, sőt pszichológiai tanácsadó szolgáltatást is.

²² Az adatokat az Egyesült Államok Oktatásügyi Hivatala (USOE) és az Abt Társaság (Cambridge, Mass.) bocsátotta rendelkezésünkre, még mielőtt [1] és [2]-ben publikálták volna. Köszönetünk illeti őket a szokatlan előzékenységért. Hálaadás vagyunk *Mary Kennedy*nek is (USOE), a kísérletért felelős tisztviselőnek, aki a [2] és [43] hivatalos jelentéseket rendelkezésünkre bocsátotta.

²³ Lásd az imént hivatkozott [2] és [43] jelentéseket.

²⁴ A Project Head Start-ot mint kora gyermekkori *iskola előtti* közbeavatkozó programot tervezték azzal a céllal, hogy jelentős ismeretbeli és más nyereségeket hozzon létre a hátrányos helyzetű gyermekek körében. Amikor későbbi tanulmányok kimutatták, hogy a Project Head Start hatásai veszendőbe mentek, miután a résztvevők elkezdtek az elemi iskolát, mint egyik javító intézkedést a PFT-t javasolták azzal az elképzeléssel, hogy az első néhány osztályban tanúsított különleges figyelem tovább erősítheti azt, amit a Project Head Start előzetesen elkezdett. Lásd a fejtegetéseket az Egyesült Államok Oktatásügyi Hivatal Jelentései IIA kötetének 158–159 oldalain [2]-ben.

²⁵ [53], 2–3. oldal

A PFT elméleti részét úgy értelmezhetjük, mint a Head Start egy formáját, amely ezt az óvodától a harmadik elemi osztályig terjeszti ki. A PFT eredetileg mintegy 200 000 gyermeket magában foglaló programként fogalmazódott meg és lelkes támogatásra talált a különböző oktatásügyi szerveknél. Csalódtak azonban azok, akik egy széleskörű tevékenységre számítottak, a kezdés és a finanszírozás között egy sor olyan fejlemény történt, amely a szövetségi politika megváltozását és az anyagi támogatás csökkentését eredményezte.²⁶ Ez viszont azt hozta magával, hogy újra kellett gondolni a dolgokat, és az előzőleg javasolt tömeges alkalmazást „kísérleti tanulmánnyá” változtatták. Az volt az elgondolás, hogy a statisztika klasszikus szabályai szerint tervezik a kísérletet vagy ezeket legalábbis annyira közelítő megoldásként használják, amelyet az oktatáspolitikai területén csak el lehet érni.²⁷ Mindegyik program variáció „patronálók-kal” volt kapcsolatos (pl. a helyi egyetemeken vagy kutató intézetekben székelő patronálókkal), akiknek az volt a feladatuk, hogy (1) egy bizonyos variáció alapvető formáját és tartalmát megadják és (2) a variáció végrehajtásában együttműködjenek a kijelölt helyi iskola-körzetekkel.*

A fenti követelmények betartásától függött a szövetségi anyagi támogatás (valamint az ehhez fűződő más természetű előnyök). Ezekhez még hozzájött a követelmény: mindegyik iskola-körzet jelöljön ki egy-egy ellenőrző Non-Follow Through = NFT csoportot a PFT csoport mellé.²⁸

Egy másik nehézség abban jelentkezik, hogy a PFT számos társadalmi, egészségügyi és művelődési szolgáltatást nyújtott a közösségnek. Mivel ez a tevékenység nem tartozott semmiféle kifejezetten tudományos programhoz, nem lehetett meghatározni differenciális hatásait sem. Ennélfogva úgy teszünk, mint más analízis-kiértékelők is tesznek, vagyis egyszerűen mi sem vesszük figyelembe a program eme részeit, és csupán az elméleti részekre összpontosítunk.

E korlátokon belül azonban bizonyos, a mi céljaink szempontjából vonzó sajátosságok is felbukkannak. Elsősorban az, hogy az ilyen méretű programok között egyedülálló módon a PFT tanulmány országos kiértékelésére az összes színhelyen azonos tesztek és mérési szempontokat alkalmaztak. Ez az országos kiértékelés magában foglalta mind az NFT, mind a PFT csoportokat. Továbbá, az előbbi színhelyeket, az NFT-ket, úgy válogatták össze, hogy az utóbbiakhoz hasonló tanulókból álló halmazokat tartalmazzanak. Ily módon a PFT eredményeket a hasonló kontrol-populációkhoz lehet viszonyítani, és nem csak az összesített országos átlaggal összevetni. Mégha ez az összeillesztés nem is volt tökéletes, jobb alapot nyújtott mint az oktatáspolitikai más, „kvázi-kísérlet” típusú tervezetei.²⁹

²⁶ A PFT terjedelmét jellemzi, hogy a bevont tanulók száma 47 ezer és 102 ezer között volt az egyes években és reá 10 tanév alatt (1967–77) központi forrásból 467 millió dollárt fordítottak. Az eredeti cikk erről részletes adatokat tartalmaz. (Szerk.)

²⁷ Felismervén, hogy milyen érzékeny az oktatás (különösen az alsó osztályos oktatás) az emóciókra, a feszültségekre és a tudományos tanulmányok más akadályaira.

* A patronáló intézményeket és a patronált körzeteket felsoroló mellékletet a magyar fordításból elhagytuk. (Szerk.)

²⁸ A különböző patronálói teljesítmények részletes tárgyalását adja [1] és [2].

²⁹ Campbell és Stanley [13] értelmezése szerint.

5. A változók kiválasztása

Már tárgyaltuk néhány tulajdonságát annak a DEA módszernek, melyet a program és a végrehajtás hatékonyságának mérésére javasoltunk. Most megmutatjuk néhány más tulajdonságát is. Figyeljük meg pl., hogy a fenti összeillesztés bizonyos nehézségeket támaszt, amelyekkel a kísérletek tervezésének klasszikus (természettudományos) modelljeiben nem találkozunk és amelyek ezért különös figyelmet igényelnek. Erre példának vehetjük a vezetési (= döntéshozatali) hatékonyság megoszlását a PFT-ben és az NFT-ben levő DMU-k között. Figyelembe kell vennünk a döntéshozatal hatékonyságában rejlő különbségeket, mivel nyilvánvaló, hogy egy „jó programot” rosszul is végre lehet hajtani és viszont. Ennélfogva ahhoz, hogy egy „program” kiértékeléséhez eljussunk, szükségünk van arra, hogy valamilyen módon identifikálni tudjuk a tökéletlenség esetleges forrását.

Ha profitra törekvő egységekkel volna dolgunk, akkor annak érdekében, hogy a hatékonyságokat az eredeti kísérleti tervezetben összevethessük, használhatnánk — legalábbis elvileg — dollárban mért skálát mind az inputokra, mind az outputokra. Itt azonban nem áll ilyen *a priori* bázis rendelkezésünkre és így a DEA módszereinket úgymond „utólagosan” alkalmazzuk avégett, hogy menet közben kűszöböljük ki a végrehajtási fogyatékoságokat a kívánt PFT-NFT összevetésekből.

Mivel törekvéseinket a DEA módszer fogalmaira és eljárásaira akarjuk összpontosítani, az tűnik a legésszerűbbnek, ha csak néhány változóra szorítkozunk azok közül, amelyekre a PFT kísérletből adatok állnak rendelkezésre. Ez azt jelenti, hogy a módszer alkalmazása a PFT-re csak szemléltető jellegű lesz. Másrészt viszont azok a változók, amelyeket tanulmányozni fogunk, nagyon is fontosak, és ennélfogva kedvezőtlen észrevételeinket nem lehet csak úgy félresöpörni, még akkor sem, ha mi főleg a DEA szemléltetését tartottuk szem előtt. Továbbá, a programból kihagyott részek (mint pl. a szociális szolgáltatásokkal kapcsolatos komponensek) a PFT előnyére befolyásolták volna az eredményeket. Más szavakkal élve, még a PFT-re nézve kedvező eredmény sem lett volna elegendő igazolás a további kiadásokra, és ezért további indokot kellene találnunk, mielőtt a PFT-re pozitív ajánlást lehetne előterjeszteni.³⁰ Az a tény, hogy tanulmányunk nem kedvező a PFT-re az NFT-vel szemben, azt jelenti, hogy más dimenziókban erős hatásokra lenne szükség ennek kiegyenlítése végett.³¹

A tanulmányban felölelt személyek közül csak az egyik évjáratra fogunk összpontosítani a több közül.³² Ennek az évjáratnak is csupán az utolsó (3. osztályos) eredményeit használjuk és így elkerüljük a további bonyodalmakat, melyek a végállapothoz vezető dinamikus vagy átmeneti magatartáshoz kapcsolódnak. A 11 output mérőszám közül csupán a következő hármat választjuk, mivel ezek is elegendően tartalmasak céljainkhoz:

³⁰ Figyeljük meg azonban, hogy az általunk javasolt megközelítés a költség-haszon analízis szokványos dollár skalarizációját csak mint a sok dimenzió egyikét (vagy részhalmazát) tudja befogadni ahelyett, hogy olyan elsőrendű fontosságot tulajdonítsunk ezeknek a dollár skalarizációknak, mint amilyen a költség-haszon megközelítéseknél szokásos.

³¹ A PFT és NFT közötti elkülönülés voltaképpen nem olyan teljes, mint ahogyan kívánatos lenne.

³² A magyar fordításból kihagyott egyik melléklet erről további részleteket közöl. (Szerk.)

y_1 : az ún. „átfogó olvasási eredmény”³³

y_2 : az „átfogó matematikai eredmény”³³

y_3 : az „önbecsülés terjedelme”, melyet Coopersmith módszerével³⁴ mérnek.

Megfigyelhetjük, hogy ez az y_3 mérce az érzelmi magatartásra (vagyis nem tudásbeli növekedésre) irányul, egy olyan dimenzióra tehát, amely a programnak célkitűzései közé tartozott. Az y_1 és y_2 -vel együtt ez az y_3 jól mutatja, miről is van szó az ilyen programok kiértékelésénél. Különösen azt figyeljük meg, hogy eme outputok viszonylagos fontosságának súlyozására nincs kéznél valamilyen könnyen rendelkezésünkre álló módszer, és még az a gondolat is mesterkéltnek, sőt bizarrnak látszik, hogy piaci értéket tulajdonítsunk a hátrányos helyzetű kisgyermekök önbecsülésének. Mindamellett szükségünk van a program hatékonyságának valamilyen „átfogó” mérőszámára ahhoz, hogy a PFT kontra NFT alternatívát kiértékelhessük. Az ehhez szükséges alapadatokat a PFT-ről az 1. és a 2. táblázatban, az NFT-ről a 3. és 4. táblázatban mutatjuk be.

A 2. táblázat az input adatokat adja meg ugyanazokra a PFT helyszínekre, mint az 1. táblázat az output adatokat. Ezeket az input mutatókat 25 mutatószám közül választottuk ki:

x_1 : Az anya műveltségi szintje, az érettségizett anyák százalékos aránya.

x_2 : A család legmagasabb szintű tagjának foglalkozása, előre elrendezett besorolási skála szerint.

x_3 : A szülői látogatás indexe, az iskola helyére történt látogatások száma.

x_4 : A szülői instruktorkodás indexe, iskolai témákban a gyermekkel töltött idő (pl. együtt olvasás stb.).

x_5 : Tanítók száma az adott helyszínen.

Az 1. és 3. táblázatban feltüntetett adatok mind 100 tanulóra vonatkoznak és ugyanez érvényes a 2. és 4. táblázatban szereplő input adatokra is, kivéve az x_5 -öt.³⁵ Figyeljük meg, hogy ismét világosan megmutatkozik az, ami bizonyára más hasonló tanulmányokban is fellelhető, éspedig, hogy kizárólag az x_5 esetében van lehetőség olyan fajta input variációs döntésekre, amilyenek a termelés gazdaságtanában szokásosak. Erőforrásokat persze lehet arra is fordítani, hogy elősegítsék a szülők látogatásait vagy instruktorkodását, de az ilyen ráhatások a legjobb esetben is lazák és még a tanítók száma is csak korlátok közt változtatható.

Mint ahogy azonban már megjegyeztük, mégis folytathatjuk a „hatékonyság” kiértékelését a tekintetben, hogy elértük-e már a maximális outputokat a felhasznált inputokból — legalább is miután már eldöntöttük, hogy melyek a kívánatos outputok és a kijelölt inputok és hogy milyen módszereket használjunk ezek mérésére. Azzal a kérdéssel, hogy pl. a vezetés hatáskörén kívül álló inputok esetén hogyan lehet mérni a hatékonyságot, másutt³⁶ foglalkoztunk, ennek a témának a taglalása itt szükségtelenül bonyolítaná a dolgokat. Ezért úgy folytatjuk ezt a tanulmányt, mintha a PFT minden kiválasztott outputja

³³ E két változó mérési módját a Metropolitan Achievement Test keretében [49] írja le.

³⁴ Lásd [34].

³⁵ [26] és [50] részletesen indokolja a választásokat. Mint már megjegyeztük, a h_0^* értékét, mint viszonylagos hatékonyságot, nem befolyásolja a skála megválasztása, feltéve, ha egyik inputra vagy outputra sem használunk eltérő skálákat a különböző helyszíneken. Lásd [18] és [50].

³⁶ Lásd [24].

1. táblázat

Eredeti PFT output adatok

Körzet	Átfogó olvasási eredmények y_1	Átfogó mate- matikai er- edmények y_2	Coopersmith eredmények y_3
1	54,53	58,98	38,16
2	24,69	33,89	26,02
3	36,41	40,62	28,51
4	14,94	17,58	16,19
5	7,81	6,94	5,37
6	12,59	16,85	12,84
7	17,06	16,99	17,82
8	20,29	30,64	33,16
9	26,13	29,80	26,29
10	46,42	51,59	35,20
11	39,80	37,73	30,29
12	37,84	47,85	25,35
13	26,48	31,36	26,54
14	10,31	10,86	7,47
15	14,39	18,30	14,33
16	32,94	36,03	38,19
17	17,25	20,80	12,07
18	27,55	38,19	20,44
19	41,12	43,80	36,54
20	29,43	42,63	23,34
21	37,46	51,02	27,44
22	19,40	25,18	16,52
23	39,88	47,72	38,97
24	25,72	30,81	16,54
25	24,88	25,27	22,43
26	31,62	40,78	31,16
27	31,31	38,32	25,03
28	21,00	21,30	18,30
29	6,51	7,02	6,16
30	11,64	15,26	15,68
31	12,58	15,90	14,42
32	4,59	6,16	4,99
33	43,76	46,64	39,10
34	32,38	38,55	31,05
35	34,64	45,46	39,22
36	11,52	15,14	13,91
37	15,96	19,21	15,30
38	9,91	12,30	7,22
39	30,44	33,53	29,80
40	22,63	25,24	17,15
41	24,41	27,16	25,30
42	23,11	22,67	17,56
43	21,82	31,45	27,54
44	63,92	79,67	63,11
45	9,47	11,92	8,85
46	33,94	39,18	34,61
47	29,42	35,10	28,42
48	7,70	11,02	9,02
49	12,17	16,03	15,82

2. táblázat
Eredeti PFT input adatok

Körzet	Az anya művelt- ségi szintje x_1	Foglalkozási index x_2	Szülői látogatás indexe x_3	Instruálás indexe x_4	Tanítók száma x_5
1	86,13	16,24	48,21	49,69	9
2	29,26	10,24	41,96	40,65	5
3	43,12	11,31	38,19	35,03	9
4	24,96	6,14	24,81	25,15	7
5	11,62	2,21	6,85	6,37	4
6	11,88	4,97	18,73	18,04	4
7	32,64	6,88	28,10	25,45	7
8	20,79	12,97	54,85	52,07	8
9	34,40	11,04	38,16	42,40	8
10	61,74	14,50	49,09	42,92	5
11	52,92	11,67	39,48	39,64	5
12	36,00	10,15	37,80	39,52	7
13	39,20	10,80	41,04	41,12	3
14	14,60	2,88	9,64	-11,14	5
15	4,29	5,42	21,45	17,27	9
16	27,25	14,17	56,46	55,26	9
17	22,63	4,43	15,40	15,00	2
18	28,00	7,61	28,73	27,04	9
19	53,56	13,70	53,04	49,85	7
20	25,42	9,05	29,69	31,74	4
21	31,57	10,08	39,34	40,57	6
22	16,34	5,84	20,89	22,10	4
23	44,28	14,14	56,70	52,27	11
24	19,74	6,43	24,20	25,66	3
25	24,40	8,05	33,42	31,29	7
26	41,40	11,70	44,01	46,35	7
27	27,20	9,38	37,80	31,55	4
28	23,92	7,12	25,58	29,01	3
29	10,62	2,55	10,10	9,09	4
30	12,48	6,14	23,13	22,46	6
31	19,32	5,89	24,01	24,74	6
32	6,30	1,93	7,11	7,68	4
33	46,62	14,65	65,71	57,49	10
34	38,95	12,82	47,02	48,92	9
35	61,60	15,56	53,98	50,29	6
36	31,08	6,26	22,18	21,96	4
37	19,35	6,68	22,61	23,31	4
38	11,20	3,08	9,90	10,06	2
39	34,40	11,61	41,79	41,79	5
40	35,55	6,48	21,69	21,69	6
41	30,53	9,30	35,50	35,14	8
42	25,44	7,10	26,81	26,23	3
43	26,66	11,43	41,36	44,63	6
44	39,79	22,49	84,77	76,12	11
45	8,32	3,64	12,92	13,13	2
46	59,78	13,52	48,80	49,69	15
47	39,22	10,06	37,00	38,33	4
48	3,24	3,18	13,12	12,71	5
49	7,14	5,29	23,10	19,06	8

3. táblázat

Eredeti NFT output adatok

Körzet	Átfogó olvasási eredmények y_1	Átfogó mate- matikai eredmé- nyek y_2	Coopersmith eredmények y_3
50	39,07	42,71	27,67
51	9,96	14,34	9,33
52	45,37	51,38	31,61
53	18,23	22,05	17,56
54	59,63	64,41	35,89
55	24,20	28,21	18,74
56	13,53	17,09	15,61
57	28,39	27,65	20,79
58	21,67	26,22	13,66
59	120,17	144,67	88,59
60	15,15	18,04	13,58
61	6,92	7,10	6,35
62	9,35	9,85	7,70
63	13,03	13,40	10,29
64	18,63	24,48	23,13
65	12,28	13,01	9,89
66	16,81	19,72	18,70
67	26,36	28,22	24,46
68	22,85	26,21	28,14
69	8,17	8,70	5,12
70	13,69	14,19	12,99

4. táblázat

Eredeti NFT input adatok

Körzet	Az anya művelt- ségi szintje x_1	Foglalkozási index x_2	Szülői látogatás indexe x_3	Instruálás indexe x_4	Tanítók száma x_5
50	68,16	12,28	33,58	34,64	15
51	11,88	3,59	13,41	13,82	8
52	55,30	11,53	36,73	35,78	6
53	16,20	7,02	26,94	26,30	9
54	82,45	15,52	45,00	44,23	13
55	15,81	6,93	23,91	23,61	7
56	4,65	5,50	20,91	23,39	5
57	41,25	8,41	26,23	25,24	10
58	10,44	5,22	17,10	18,93	3
59	139,65	35,03	119,56	130,83	22
60	16,28	4,81	18,20	18,98	5
61	12,06	2,59	8,74	8,17	5
62	4,29	2,64	9,89	11,25	2
63	19,44	3,83	12,87	13,23	5
64	28,38	8,91	30,95	33,33	8
65	13,50	3,61	15,60	12,39	4
66	23,32	7,10	24,96	28,56	22
67	27,60	9,38	32,29	34,01	20
68	11,70	10,53	37,67	43,60	8
69	4,68	1,85	6,22	5,46	5
70	10,44	4,82	17,13	18,21	9

és inputja változtatható lenne, legalább is a jelen tanulmányban ilyennek tekintjük őket a DEA eljárási módok szemléltetése céljából.

Ismételten alkalmazván a (15) modellt $\alpha = 1$ -re (1. és 2. táblázat), illetve $\alpha = 2$ -re (3. és 4. táblázat) megkapjuk a h_0^{*1} és a h_0^{*2} értékeket, melyeket az 5. táblázat tartalmaz. Ezek a h_0^* értékek megadják a DMU-k hatékonyság szerinti minősítését, külön a PFT és az NFT feltételek mellett, amikor is a $h_0^{*z} = 1$ mindkét esetben akkor és csak akkor érhető el, ha a minősítés alatt álló DMU hatékonynak minősül a kérdéses referencia halmazhoz képest. Például a $h_0^{*1} = 1$ az 1. körzetre vonatkozóan azt jelenti, hogy az 1. körzetben levő DMU a PFT-ben szereplő hatékony körzetek valamilyen részhalmazához képest van hatékonynak minősítve, míg a $h_0^{*2} = 0,94$ a 70. körzetre vonatkozóan azt jelenti, hogy ez a DMU csak 94%-ban olyan hatékony, mint a DMU-knak az a hatékony részhalmaza, melyek az NFT halmazból relevánsak. Az összevetés alapjául szolgáló halmazt minden esetben a modell és a számítási eljárás határozza meg az 1. és 2., illetve a 3. és 4. táblázatok adataiból.³⁷

Mielőtt a következő fejezetre áttérnénk, talán még egyszer visszapillantathatunk a statisztikai regresszió számítással és más hasonló módszerekkel való összevetésre. Ezek általában egyenként vezetnek vissza az egyes outputokat azokra az inputokra, melyektől feltehetően függenek.³⁸ Ez viszont arra a kemény feltevésre épül, hogy a vizsgált outputok függetlenek egymástól,³⁹ ellentétben az itt alkalmazott módszerekkel, melyekben az összes outputot *egyidejűleg* vesszük figyelembe a kijelölt inputokkal együtt úgy, hogy megkapjuk azokat az extrémális relációkat, melyek az 5. táblázatban bemutatott hatékonyságoknak szolgálnak alapul.

6. A végrehajtás hatékonyságának kiértékelése

Mint már utaltunk rá, nem kézenfekvő, hogy miként lehet egy kísérlet tervezetében számításba venni az esetlegesen eltérő mértékű vezetési hatékonyságot. Valamit azonban lehet tenni annak érdekében, hogy *miután* megkaptuk a kísérleti eredményeket, kimutassuk ennek a fontos tényezőnek a hatását. Ezt a DEA-val különböző módon kapcsolatban álló statisztikai módszerekkel lehet megvalósítani.

Az egyik lehetőség az, hogy összevetjük az arányait azoknak a h_0^{*z} értékeknek, melyek az 5. táblázatban $\alpha = 1$ és $\alpha = 2$ -re vonatkoznak. Egy alternatív (vagy mellérendelt) lehetőségként kiszámíthatnánk a PFT-re és az NFT-re vonatkozó h_0^{*z} értékek átlagát is. Ezután a becsült arányokra és átlagokra statisztikai szignifikanciát lehet tesztelni, szemben a null-hipotézissel, miszerint a PFT és az NFT közt nincs különbség, és így meggyőződhetünk arról, vajon mutatott-e egyik is a két vizsgált halmaz közül olyan eredményeket, amelyeket inkább a végrehajtásnak, semmint a program hatékonyságának lehetne tulajdonítani.

³⁷ Pl. [28]-ban taglaltuk, hogy a szimplex, vagy a duális módszer, vagy hasonló szomszéd-csúcs módszerek megadják a megfelelő részhalmazokat, a kérdéses módszer bázisjelöltjei alapján. De vegyük figyelembe a [28]-ban kifejtett korrekciókat, valamint ezek kezelését (és bizonyítását) [24]-ben.

³⁸ A regressziós analízis módszerét széles körben alkalmazták a PFT elemzésében is.

³⁹ Másféle eljárások, melyeket szintén lehetett volna alkalmazni, szimultán (ökonometriai) becslési módszereket foglalnak magukban, mint [10] és [11]-ben.

5. táblázat

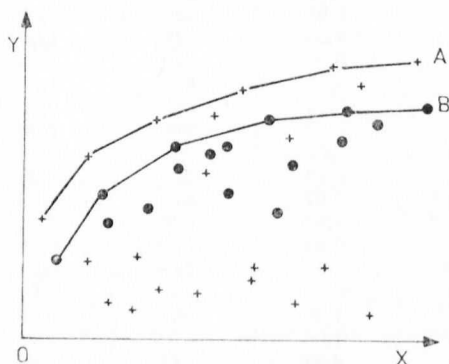
A PFT és az NFT programnak az α -burkoló szerinti hatékonyságai

PFT körzet	h_{α}^{*1} hatékonyság	NFT körzet	h_{α}^{*2} hatékonyság
1*	1,00	50	0,95
2	0,90	51	0,92
3	0,98	52*	1,00
4	0,90	53	0,87
5*	1,00	54*	1,00
6	0,90	55*	1,00
7	0,89	56*	1,00
8	0,91	57	0,92
9	0,87	58*	1,00
10*	1,00	59	0,92
11	0,98	60	0,98
12	0,97	61	0,88
13	0,86	62*	1,00
14	0,98	63	0,96
15*	1,00	64	0,91
16	0,95	65	0,97
17*	1,00	66	0,92
18*	1,00	67	0,92
19	0,95	68*	1,00
20*	1,00	69*	1,00
21*	1,00	70	0,94
22*	1,00		
23	0,96		
24*	1,00		
25	0,97		
26	0,93		
27*	1,00		
28	0,94		
29	0,84		
30	0,90		
31	0,83		
32	0,90		
33	0,94		
34	0,85		
35*	1,00		
36	0,80		
37	0,94		
38	0,94		
39	0,91		
40*	1,00		
41	0,94		
42	0,94		
43	0,87		
44*	1,00		
45	0,89		
46	0,90		
47*	1,00		
48*	1,00		
49*	1,00		

* Egységnyi hatékonyságú körzet.

Tegyük fel, hogy az ilyen tesztek nem eredményeztek statisztikai szignifikanciát,⁴⁰ és így folytathatjuk a két program összehasonlítását. Nagyon fontos dolog, hogy tudatában legyünk: az összehasonlítást továbbra is fertőzik a vezetési elégtelenségek — noha ezt természetesen azon az alapon lehetne igazolni, hogy az ilyen hiányosságokat nem lehet kiküszöbölni és ennél fogva a programok közötti minden választásnak részét képezik.

A DEA-nak és a klasszikus statisztikai vizsgálati módszereknek a kombinálását ilymódon alkalmaztuk a hatékonyság kiértékelésére.⁴¹ Itt azonban ennél



2. ábra. Megfigyelt adatok az egyes DMU-kra A-ban (+) és B-ben (·)

is tovább akarunk menni, hogy megpróbáljuk elválasztani a program hatékonyságát a végrehajtás hatékonyságától. A 2. ábrában szemléltetett hipotetikus helyzet lesz segítségünkre ahhoz, hogy megértsük miről van szó. Két DMU halmazt tételezünk fel, melyeknek olyan hasonló outputjaik és inputjaik vannak, amelyek megegyező szinten vannak rögzítve mindegyik DMU-ra, kivéve egyetlen x inputot és y outputot.

Ha egyszerűen csak átlag hatékonyságokat számítanánk ki, vagy akár ha y -nak az x -re vonatkozó regresszióját is, akkor az A halmaz alacsonyabb rendűnek minősülne, mint a B halmaz. Viszont az A -ra vonatkozó hatékonysági határ domináló a B -nek a hatékonysági határához képest és így a becslési eljárások eredményei hibás következtetésekhez vezethetnek a B és az A relatív hatékonyságát illetően. Ezért tűnik indokoltnak, hogy megpróbáljuk kimutatni az inefficiencia különböző forrásainak jelenlétét, mielőtt őket az A -val, illetőleg a B -vel kapcsolatos programoknak tulajdonítanánk.

Az összevetés végett rövidesen az összes pontot a határookra vetítjük. Természetesen az ilyen típusú előrejelzések eltérnek majd azoktól, amelyeket a 2. ábra adataiból végrehajtott közönséges statisztikai becslések nyújtanak. Különösen arra lesz most szükség, hogy a DEA módszerrel készített előrejelzés megerősítése céljából kiegészítő analíziseket végezzünk és esetleg útmutatásokat, irányítást adjunk a vezetőknek, akik az egyes halmazokban (pl. A vagy B) szereplő DMU-kal vannak kapcsolatban.

⁴⁰ Ezt az eredményt kaptuk (azaz nem sikerült szignifikanciát elérni) [25]-ben és [50]-ben.

⁴¹ Lásd pl. [26], [50] és [18].

Ez teljesen analóg azzal az esettel, mellyel standardköltség rendszereknél találkozunk, amit az ipari műveletek irányításában alkalmaznak. Az ilyen rendszerekben tanulmányozzák a hatékony eljárásokat, és különböző kombinációkat (anyag, szakértelem stb.) állapítanak meg, melyeket aztán meghatározott outputok létrehozására alkalmaznak. Vannak ún. hatékonysági varianciák, melyek aztán jelzik, ha egy vagy több ilyen előírástól eltértek és így alapot nyújtanak a vizsgálatra.⁴²

Megfigyelhetjük, hogy az utóbbi eredmény eltér attól, melyet úgy kapnánk, hogy egyszerűen regressziószámítást végeznénk a múltbeli teljesítmény adataiból a bekövetkezett technikai tanulmányok és szabályozás nélkül. Hogy ez utóbbit megkülönböztessük, „szabályozott előrejelzésnek” nevezzük majd, szemben a „tisztá előrejelzéssel”, melyet az eredeti (ki nem igazított) észlelésekre alkalmazott regressziós megközelítésből nyerünk. Az ilyen tisztá előrejelzés azt feltételezi, hogy a hatékony és az inefficiens eljárásoknak, anyagfelhasználásnak stb. az a keveréke, amely az észlelésekben tükröződik vissza, a jövőben is folytatódni fog. A szabályozott előrejelzés esetében viszont e variancia megjelenése azt jelzi, hogy egy vagy több előírt eljárástól eltértek. Standard-költség rendszer esetében a jövőre vonatkozó előrejelzések továbbra is a technikai tanulmányokból származó együttthatókra utalnak vissza. Esetünkben azonban ezek az együttthatók nem kizárólag a kiértékelés alatt álló DMU-ból származnak. Hanem abból a hatékony határlapból nyerjük, melyből ennek a DMU-nak a kiértékelését végezzük. Ez azt jelenti, hogy a hatékony transzformáltak, melyeket ezeknek a szélső értékeknek az együttthatói képviselnek, egészen addig nem ismeretesek, míg a megjelölt DMU-ra vonatkozó hatékony határlap nincs meghatározva.⁴³ Énnél fogva a „szabályozott előrejelzések” és a „tisztá előrejelzések” közti különbség ismét nyilvánvaló, mivel az utóbbiakat, amelyeket pl. a szokványos regressziós becslési eljárásokból nyerünk, általában változtatás nélkül alkalmazhatjuk azokra az adatokra, melyekből származnak, míg a mieink az egyes DMU-ból származó adatok változtatásával járnak együtt, és e DMU-k hatékony határlapjaira vonatkoznak.

Elméletileg persze előfordulhat, hogy az ilyen regressziós eredmények egybeesnek a DEA eredményeivel, mint amikor pl. a szabadon működő piacok versenyfeltételei olyan állapotot hoznak létre, melyben az összes DMU a hatékonysági határon vagy hozzá nagyon közel van.⁴⁴ Az ilyen helyzetet hasonlíthatjuk az általunk mérlegelt helyzethez úgy, hogy a következő 2 típusba rendezzük át az ilyen lehetőségek létezésére vonatkozó szokványos gazdasági feltételeket:

1. *Feszültségi feltételek*: Mindegyik vállalat (DMU) olyan hatékonyra kényszerül válni, mint a referencia halmaz leghatékonyabb tagja.

⁴² Figyeljük meg, hogy az ilyen varianciák szintén többet jelentenek, mint csupán egy index (mutató) számot. Gyakran a mértékét is megadják az inefficiencia *fokának*, melyet a standard eljárásoktól, anyagoktól stb. való eltérések okoznak. (Említésre érdemes, hogy *Rajiv Banker* már megmutatta, hogy miként kell a DEA-módszereket alkalmazni a célból, hogy a szokványos standard költség variancia analízist ki lehessen terjeszteni az ikertermékek esetére is.)

⁴³ Az erre szolgáló matematikai eljárást [28] és [24] adja meg, [9]-ben szemléltető példát és ennek taglalását találjuk.

⁴⁴ Elvonatkoztatunk a statisztikai hiba olyan problémáitól, amelyeket a *Bassett és Koenker* tanulmányában [8] tárgyalt becslési módszerekkel lehet kezelni. Ámbátor ez utóbbiakat is ki kellene terjeszteni a többszörös outputokra és a szakaszonként lineáris relációk becslésére, melyeket ebben a tanulmányban használunk.

2. *Ösztönző feltételek:* A leghatékonyabb vállalatok (DMU-k) a technológia által megengedett határookra mozdulnak el.

A feszültségi feltételeket olybá is lehet tekinteni, mint amelyek bármelyik vállalat (hosszú távú) fennmaradásának a feltételét jelentenék a piacgazdaság szokványos feltevései mellett. A feszültségi feltételeket illetően ezeknek a feltevéseknek az érvényességét a viszonylagos vállalati teljesítmény alapján (még ha csak egy *ex post facto* módon is) lehet tesztelni, olyan mutatószámokkal, mint haszon, költség stb. Az ösztönző feltételek tesztelése kevésbé kézenfekvő.

A 2. feltétel nélkül a feszültségi feltételek csak a relatív hatékonyság mérését teszik lehetővé. Azaz, bármely DMU hatékonysága csak a halmaz olyan tagjaihoz képest mérhető, amelyek hatékonyak minősülnek. Eltekintve attól, ha valamilyen *ex cathedra* (pl. műszaki tudományok) információkra lehet támaszkodni, úgy látszik nem áll módunkban meggyőződni róla, hogy a hatékony részhalmaz elérte-e azokat a határokat, melyeket a rendelkezésünkre álló technológiák és programok lehetővé tesznek. Ezekben a korlátokon belül azonban az általunk kifejlesztett eljárást úgy lehet tekinteni, mint egy alternatív módját annak, hogy a relatív határok felé mozduljunk el, vagy legalább is annak, hogy kiértékeljük a veszteséget, amely eme határok el nem éréséből ered.

7. A közös burkoló és a program hatékonysága

A 3. ábra megmutatja, miként javasoljuk a „programok hatékonyságát” összehasonlítani. Az ábrában a pontok ($\cdot$) és az α -ek mutatják a PFT, illetve az NFT észleléseket. Ezek mind hipotetikus adatok, melyek azt kívánják megmutatni, hogy milyen mennyiségű két inputra van szükség ahhoz, hogy több különböző DMU ugyanabból az outputból egy egységnyi hozzon létre a PFT-ben, illetve az NFT-ben. Lásd az 1. ábra taglalását a 2. fejezetben.

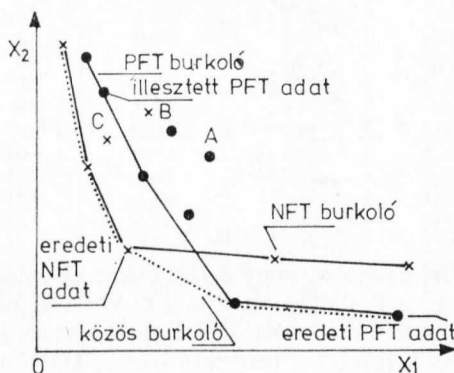
A PFT-re és az NFT-re vonatkozó észleléseket arra használjuk, hogy levezessük azokat az „egységnyi isoquantokat”⁴⁵, melyek megfelelnek a PFT-re, illetve az NFT-re vonatkozó burkolóknak. Ezeket a burkolókat és ennél fogva a megfelelő *isoquantokat* is úgy határozzuk meg, hogy a (15) feladattal ekvivalens LP feladatot felváltva alkalmazzuk az $\alpha = 1$ és az $\alpha = 2$ -re vonatkozó észlelésekre. Az A -hoz hasonló pontok olyan PFT észleléseket jelentenek, melyek $h_0^* < 1$ értékkel rendelkeznek, mivel nincsenek rajta a PFT α -burkolóján, melyre $h_0^{*1} = 1$ érvényes. Hasonlóképpen, a B és a C pontokhoz $h_0^{*2} < 1$ értékek tartoznak, ezeket az NFT-burkolókhoz képest határoztuk meg.

Miután (15)-öt ismételten alkalmaztuk a burkolók meghatározásához, úgy találjuk — mint ahogy a 3. ábra mutatja —, hogy a PFT α -burkolója hatékonyabb az egyik tartományban, az NFT pedig hatékonyabb egy másik tartományban. Az ilyen tartományok meghatározása akkor lehet hasznos, amikor például anyagi erőforrásokat a szerint utalnak ki az egyes programokra, hogy figyelembe vesszük ezeket az eltérő hatékonyságokat. Más esetekben, amikor el kell dönteni, hogy vajon folytassuk-e a PFT-t, szükség lehet annak meghatározására, hogy melyik program a jobbik valamilyen átfogó hatékonysági értelemben.

⁴⁵ Lásd a 2. fejezet fejtegetéseit.

Az ilyen választás az előzőtől eltérő helyzetet teremt számunkra. Összes kiértékelésünk és igazításunk mostanig csak a hatékonyság javításával foglalkozott. A most említett választás a PFT és NFT programok közötti azonban magával hozhatja azt, hogy egyes DMU-k teljesítménye rosszabbodik azért, hogy más DMU-k teljesítménye javuljon.

Hogy felállítsunk egy vonatkoztatási rendszert, amely lehetővé teszi számunkra, hogy értelmesen foglalkozhassunk az ilyen szituációval, a hipotetikus lehetőségeknek egy újabb halmazát készítjük most elő. Ezek a lehetőségek a



3. ábra. Az α -burkolók és a közös burkoló

eredeti észlelések olyan összeillesztésére vannak alapozva, melyek az erőforrások elosztásának és az output létrehozásának bármely olyan kombinációját megengedik, melyet egyik vagy együttesen a két program lehetővé tesz. Ezt a következő módon végezzük el:

Először is felhasználjuk a [28]-ban leírt eljárásokat arra, hogy az összes észlelést a megfelelő α -burkolókra vigyük át. Azután szerkesztünk egy közös burkolót, amely lehetővé teszi számunkra, hogy a DMU-k egyes csoportjait mind $\alpha = 1$, mind $\alpha = 2$ -re vonatkozóan összehasonlítsuk, ama feltételezés mellett, hogy azok mind a program feltételei által megengedett hatékonysági határokon működnek. Végül a maradék különbségeket az egyes programoknak tudjuk be, a közös burkolóhoz képest, amely mindig legalább olyan hatékony, mint az α -burkolók akármelyike. Ennek bizonyosságául szolgál pl. a 3. ábrában szemléltetett „közös burkoló”.⁴⁶

Hogy a fentieket konkrétabbá tegyük, (15)-öt a következő formulával helyettesítjük a közös hatékony burkoló meghatározása céljából:

⁴⁶ A könnyebb érthetőség végett úgy beszélünk itt, mintha az *isoquant* feltételezés érvényes lenne. Mivel azonban többszörös outputokkal és inputokkal van dolgunk, az *isoquant* koncepciónak nincs értelme és ezt a termelési lehetőségek halmazának általánosabb fogalmával kell helyettesítenünk. Lásd [28]. Ugyanebben a szellemben folytatjuk, úgy mintha az erőforrások megtakarítási lehetőségeivel foglalkoznánk. Valójában azonban számos input eleve rögzítve van vagy pedig, mint ahogy már korábban megjegyeztük a vezetés hatókörén kívül áll. Ennélfogva helyesebb lenne, ha inkább output növekedésről, semmint input redukciónak beszélnénk a [27] és [24]-ben vázolt gondolatmenetet követve.

$$\max h_0 = \frac{\sum_{r=1}^s u_r \hat{y}_{r0}}{\sum_{i=1}^m v_i \hat{x}_{i0}}$$

feltéve, hogy

$$1 \geq \frac{\sum_{r=1}^s u_r \hat{y}_{rj}^1}{\sum_{i=1}^m v_i \hat{x}_{ij}^1}; \quad j = 1, \dots, n_1 \quad (16)$$

és

$$1 \geq \frac{\sum_{r=1}^s u_r \hat{y}_{rj}^2}{\sum_{i=1}^m v_i \hat{x}_{ij}^2}; \quad j = 1, \dots, n_2.$$

$$u_r, v_i > 0, \quad \forall i, r.$$

A jeleken lévő kalap itt azt jelzi, hogy a DMU-kat az előző fejezetben leírt módon már átvittük az $\alpha = 1$, illetve az $\alpha = 2$ -re vonatkozó burkolókra.⁴⁷

A (16) által legjobbnak minősített DMU₀ jöhet akár az $\alpha = 1$ -ből, akár az $\alpha = 2$ -ből, de a h_0^* érték mindkét program összes DMU-jára együtt érvényes. Így abból, hogy egy DMU hatékony a saját programján belül és ennél fogva az α -burkolóján van, nem következik szükségszerűen, hogy $h_0^* = 1$ értéket vesz fel az új közös burkolóra vonatkoztatva is. Most viszont azt feltételezzük, hogy ez a lemaradás annak a programnak tudható be, amely mellett ez a DMU működött akkor, amikor az $\hat{y}_{r0}$ és $\hat{x}_{i0}$ -ból az y_{r0} és x_{i0} -ba átvittük. Más szavakkal, a $h_0^* < 1$ most inkább a programnak tudható be, semmint a minősítés alatt álló DMU-ban működő vezetés hatékonyságának.

A (16) programozásnak az itt bemutatott alkalmazása a 6. táblázatban feltüntetett h_0^* értékeket eredményezi. Hogy végrehajtsuk a programok kiértékelését, most összehasonlítást kell végeznünk az eredményül kapott eloszlások között.

Az egyik lehetőség az lenne, hogy az összehasonlítást a két eloszlás közti távolság valamilyen mérésével — vagy súlyozott mérésével — végezzük el. Általánosabban ezt ki kellene úgy terjeszteni, hogy egy specifikus vonatkoztatási rendszertől (pl. az előbb vázolt közös burkolótól) való viszonylagos távolságot mérhessünk.⁴⁸ Különleges helyzetekben a sztochasztikus dominancia elvét,⁴⁹ sőt még az egyszerű ránézést is igénybe vehetjük.

A jelen vizsgálat céljára azonban elegendő azt megjegyezni, hogy az összes ilyen módszer, beleértve a 6. táblázat egyszerű átnézését is, ugyanarra az eredményre vezet.⁵⁰ Olyan bizonyítékokat kaptunk, miszerint a PFT nem mutatott

⁴⁷ Egy alternatív eljárás is rendelkezésre áll [50], amely a hatékonysági kiértékelést anélkül valósítja meg, hogy az észleléseket előbb a megfelelő α -burkolóra hozná.

⁴⁸ S. Kulback [48] „divergencia statisztikáját” alkalmaztuk ennek a tanulmánynak egy korábbi változatában [26], amely korlátozott példányszámban még mindig rendelkezésre áll a szerzők bármelyikénél. Eme adatok még részletesebb tárgyalása, beleértve a statisztikai eloszlásokra javasolt kanonikus alakok kifejlesztését is, [18] függelékében található.

⁴⁹ R. Morey (Duke Egyetem) beszámol arról, hogy ő már végzett ilyen analízist, amely kimutatta, hogy sztochasztikusan az NFT a PFT felett áll.

⁵⁰ Lásd az előző két lábjegyzetet.

6. táblázat

A közös burkolóra vonatkozó hatékonyságok

PFT körzet	h_0^* hatékonyság	NFT körzet	h_0^* hatékonyság
1	0,92	50*	1,00
2*	1,00	51*	1,00
3	0,94	52*	1,00
4*	1,00	53*	1,00
5	0,93	54*	1,00
6*	1,00	55	0,99
7	0,99	56*	1,00
8*	1,00	57*	1,00
9	0,98	58*	1,00
10	0,92	59*	1,00
11*	1,00	60	1,00
12*	1,00	61*	1,00
13	0,99	62*	1,00
14	0,95	63*	1,00
15*	1,00	64*	1,00
16*	1,00	65*	1,00
17*	1,00	66*	1,00
18*	1,00	67*	1,00
19	0,99	68	0,99
20*	1,00	69*	1,00
21*	1,00	70*	1,00
22*	1,00		
23	0,99		
24*	1,00		
25*	1,00		
26	0,99		
27*	1,00		
28*	1,00		
29	0,99		
30*	1,00		
31	0,99		
32*	1,00		
33	0,99		
34	0,98		
35*	1,00		
36*	1,00		
37	0,94		
38	0,99		
39*	1,00		
40	0,95		
41	0,99		
42*	1,00		
43	0,99		
44*	1,00		
45	0,99		
46*	1,00		
47*	1,00		
48*	1,00		
49*	1,00		

* Egységnyi hatékonyságú körzet.

magasabb értékű hatékonyságot az általunk vizsgált adatok alapján.⁵¹ Ezért a korábban előterjesztett okok miatt (pl. a velejáró többlet költségek) a PFT-megvalósítása az NFT-vel szemben nem igazolható, legalábbis a teljes programnak a vizsgálatba bevont része tényállásai alapján nem.

Természetesen nem szükséges (és nem is szabad), hogy a PFT kontra NFT kiértékelése itt véget érjen. Egy sor lehetőség áll még nyitva a kérdés további tanulmányozására. Elvégezhetnénk például mindegyik α -burkolón a DMU-k összehasonlítását is határlaponként külön-külön.⁵² Figyeljük meg például, hogy az azonos határlapra eső DMU-kat az köti össze, hogy ugyanazon optimális bázissal rendelkeznek. Továbbá, eme DMU-k távolságát a közös burkoló megfelelő részétől könnyen kiszámítható irányszámok (irány cosinusok)⁵³ jellemzik és ezek, ha szükséges, határlaponként alkalmazhatók a PFT-NFT lehetőségek egyes részalmazainak további kiértékelésére.

A „közös burkoló” formájú hipotetikus referencia felületünk megszerkesztése még további lehetőségeket is nyújt. Ez különösen egy olyan újabb program lehetőségére mutat rá, amely a PFT-nek az NFT-vel való kombinációjára épülne. A hipotetikus helyzet a 3. ábrán például olyan, hogy az NFT előnyösebb az ábra bal oldali részében, a PFT pedig a jobb oldali részében.⁵⁴ A közös burkolónak az a része, amelyik mindkét α -burkoló alatt fekszik (szaggatott vonal) a PFT és az NFT olyan újabb kombinációját sejteti, mely hatékonyabb, mint külön-külön akármelyikük. Az ilyen újabb lehetőségek további, lehetőleg helyszíni tanulmányozást igényelnek, de a lényeg az, hogy nem szabad kizárni őket pusztán azért, mert az eredeti tervezet nem vette explicit formában tekintetbe a PFT-nek és az NFT-nek ezeket a potenciális kombinációit.

8. Összefoglalás és következtetések

Az előzőekben elmondottak kellőképpen jelzik a mi DEA módszerünk nyújtotta lehetőségeket. A módszert itt a PFT-re alkalmazva szemléltettük. Nem szabad azonban úgy tekinteni, mintha csupán erre a programra vagy csak oktatási programokra lenne korlátozva. Szándékunk az, hogy általános fogalmakat és módszert adjunk, melyet számos olyan közérdekű programnál lehet alkalmazni, ahol a profit, a költség, valamint más hasonló tényezők közvetlenül nem alkalmazhatók.⁵⁵

Van egy dolog azonban, amelyről nem szabad megfeledkeznünk, és pedig az, hogy a DEA módszerek és a hatékonysági fogalmaink akkor a legjobbak, ami-

⁵¹ Ez szintén úgy tűnik, mintha megegyezne az Abt Associates által végzett tanulmányokkal, melyek komplettebb adatokra támaszkodnak. Az [1] és a [2]-ben számolnak be ezekről.

⁵² Lásd pl. Gray és Weldon [41]. Úgyszintén [51] és [14].

⁵³ Lásd a [17]-ben az A függelékét, amely megmutatja miként lehet megkapni egy ponttól a hipersíkig terjedő távolságot az ilyen értékek segítségével.

⁵⁴ A határlapok identifikálásához szükséges információt az alkalmazott számítási rutinok melléktermékeként kapjuk meg.

⁵⁵ Azaz a költség, profit és más ilyen dollárban mért fogalmaknak nincs döntő jelentőségük, de persze lehet és kell is, hogy legyen szerepük, úgy, hogy legalább is tekintetbe vesszük őket a kiértékelendő inputok és outputok között. További fejtegetés található a [28], [50], valamint a [6] tanulmányban.

kor olyan szituációkra alkalmazzuk, ahol adva van a célok egy halmaza és ahol nem jön szóba, hogy az erőforrásokat más programok felé irányítsák.⁵⁶

Ott, ahol ezek a feltételek teljesülnek, még mindig érdekünkben állhat erőforrások megtakarítása, feltéve, hogy a felszabadított erőforrások máshoz felhasználhatók. Ahogy már előbb is észrevételeztük, a DEA olyan módszert nyújt, amely által megállapítható a program vagy a végrehajtás hatékonyságának növelése révén megtakarítható erőforrások és elérhető output többletek mennyisége. Az azonban, hogy miként lehet a nyert javakat újra szétosztani más tevékenységek között, pl. nem-oktatási tevékenységre, olyan árazási és súlyozási szempontokat vet fel, amelyeneket formuláink nem tartalmaznak.

A 6. fejezet végén lévő megjegyzéseink arra irányultak, hogy megmutassuk, miben különbözik a DEA a szokványos statisztikai módszerektől, valamint arra, hogy a kettő miként használható fel különböző kombinációkban. Azt is megfigyelhetjük, hogy mi megfordítottuk az empirikus kutatásban a statisztikai módszerek és a gazdasági elmélet szokásos sorrendjét. Az utóbbi gyakran az elmélet tesztelésére irányul, és ez nem volt feladatunk. Ehelyett azzal foglalkozunk, hogy felhasználjuk ezt az elméletet (pl. a termelés-elmélet általánosan elfogadott részeit) azzal a céllal, hogy segítségünkre legyen a közérdekű programok kiértékelésében. Azon felül, hogy eljutunk a programoknak (és végrehajtásuknak) a kiértékeléséhez, azzal is foglalkozunk, hogy az elméletet alkalmazzuk erőforrások megtakarítása vagy outputok javítása lehetőségeinek a feltárására, amelyek máskülönbén rejtve maradnának.

Természetesen az esetleges újabb lehetőségek modellezését mi az észlelt adatokból levonható következtetésekre korlátoztuk. Azt is javasoltuk, hogy jobb lenne a DEA módszert csak útmutatásnak tekinteni és kiegészíteni további helyszíni tanulmányozással és így megbizonyosodni róla, hogy a jelzett lehetőségek valóban léteznek. De létezésük ténye sem döntő, ha csak olyan módosításokat nem lehet kijelölni (pl. a US. Főkönyvelőség program-revizíós módszerével,⁵⁷ amelyek révén a jelzett javítási lehetőségek megvalósíthatók.

Végezetül ismét szembeállíthatjuk DEA analízisünket a „tisztá előrejelzés” módszerével *Milton Friedman* következő állítása alapján:⁵⁸

„... egy hipotézis érvényességének egyetlen igazi próbája az, ha előrejelzéseit a tapasztalattal hasonlítjuk össze...”

Ez egy, de nem egyetlen helyes nézet arról, hogy a tudományos kutatásban mi az elmélet és a bizonyítási eljárás közti kapcsolat. Nem hangsúlyozza kellően ki a elméletnek felfedezésre vezető értékét, mint amikor pl. az az elmélet, hogy a föld kerek, felfedező útra vezet, vagy mikor a relativitás elmélete arra készlet bennünket, hogy fekete lyukakat keressünk, amelyek mindig is ott voltak. Ez a nézet figyelmen kívül hagyja az irányítási előrejelzéseket, mint amikor egy mechanizmusnak a sikertelensége, hogy a konstrukció műszaki leírásai szerint működjek, arra készlet bennünket, hogy inkább a mechanizmust javítsuk ki semmint a konstrukciót. Ez utóbbi út mentén van alkalom találékonyságra és aktivitásra,⁵⁹ és ezek szintén olyan dolgok, melyekre a közérdekű programokban

⁵⁶ [32] terminológiáját használva: mi itt hatékonysággal foglalkozunk (beleértve a gazdaságosságot is) és nem „hatásossággal” vagy „alkalmassággal”.

⁵⁷ Vagy az ilyen felülvizsgálatoknak ílymódon kiterjesztett változatai révén, hogy számításba lehessen venni a programközi összevetéseket és kiértékeléseket. Lásd *Churchill et al.* [32]. A PFT kiértékelésére vonatkozóan lásd [56]-ot.

⁵⁸ [39], 8–9. oldal.

⁵⁹ Példát találunk erre [40]-ben.

és végrehajtásuknál figyelemmel kell lenni. E programok terjedelme* magában is elegendőnek látszik, hogy figyelemre ösztökéljen, még az állítólagosan kapitalista orientációjú országokban is.

Befejezésül azt is megfigyelhetjük, hogy a találékonyságra és aktivitásra vonatkozó lehetőségek nagy mértékben különböznek az irányított és a nem-irányított programokban.⁶⁰ Hasonlóképpen, az olyan tesztek, melyeket az utóbbi kategóriába eső elmélet igazolására használnak, nem mindig alkalmasak irányítási előrejelzésekre, még akkor sem, amikor ugyanabból az alapvető elméletből következnek.⁶¹

IRODALOM

1. ABT ASSOCIATES: *Education as Experimentation: A Planned Variation Model*, Vol. IA and IB. Abt Associates, Inc., Cambridge, Mass., 1974.
2. ABT ASSOCIATES: *Education as Experimentation: A Planned Variation Model*, Vol. IIIA and IIIB (Cambridge, Mass: Abt Associates, Inc. 1976). Also issued as *The Follow Through Planned Variation Experiment*, Vols. IIA, IIB and IIC, U.S. Office of Education, Washington, 1977.
3. AIGNER, D. J.—AMEMIYA, T.—POIRIER, P. J.: On the Estimation of Production Frontiers: Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a Discontinuous Density Function, *Internat. Econom. Rev.*, Vol. 17, No. 2 (1976), pp. 377—396.
4. AKAIKE, A.: Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle. *Proceedings of the Second International Symposium of Information Theory*, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1972.
5. ALLEN, R. G. D.: *Mathematical Analysis for Economists*. MacMillan, New York, 1939.
6. BANKER, R.: A Game Theoretic Approach to Measuring Efficiency, *European J. Operational Res.* (to appear).
7. BANKER, R.—CHARNES, A.—COOPER, W. W.—SCHINNAR, A.: A Bi-Extremal Principle for Estimating the Efficiency of Decision Making Units, *Management Sci.* (submitted).
8. BASSETT, G.—KOENKER, R.: Estimation of Efficiency Contours in Flexible Models of Production. A paper prepared for presentation at the 1979 winter meetings of the Econometric Society in Atlanta, Bell Telephone Laboratories, Inc., Murry Hill, N. J.
9. BESSERT, A.—BESSERT, W.: Determining Attributes of Efficient and Inefficient Schools Through Data Envelopment Analysis. *Educational Admin. Quart.* (to appear).
10. BOARDMAN, A.: Policy Models for the Management of Student Achievement and Other Education Outputs, *TIMS Studies in the Management Sciences*. Vol. 8. Management Science Approaches to Manpower Planning and Organization Design, North-Holland, Amsterdam, 1978.
11. BOARDMAN, A.—DAVIS, O. A.—SANDAY, P. R.: A Simultaneous Equations Model of the Educational Process, *J. Public Econom.*, Vol. 7 (1977), pp. 23—49.
12. BOARDMAN, A.—MURNANE, R. J.: The Use of Panel Data in Education Research. *Sociology of Education* (to appear).
13. CAMPBELL, D. T.—STANLEY, J. C.: *Experimental and Quasi-Experimental Designs for Research*. Rand-McNally, Chicago, Ill., 1963.
14. CARLSON, D. E.: *The Production and Cost Behavior of Higher Education Institutions*. University of California, Berkeley, Calif., 1972.
15. CARLSON, S.: *The Pure Theory of Production*, P. S. Kind, London, 1939.

* Az eredeti cikkben közölt táblázat szerint ez az egyes tőkésországokban a GDP 27%-ától (USA, 1965) 62%-áig (Svédország, 1977) terjed. (Szerk.)

⁶⁰ Részletesebben lásd [33]-ban.

⁶¹ A szerzők hálával tartoznak Arie Lewin professzornak, valamint számos lektornak, akik észrevételeket tettek egy korábbi kéziratához [26], amelyet 1978 májusban a TIMS/ORSA konferencián mutattunk be New Yorkban. Az észrevételek alapján a kéziratot jelentősen átdolgoztuk.

16. CHARNES, A.—COOPER, W. W.: Auditing and Accounting for Program Efficiency and Management Efficiency in Not-For-Profit Entities, *Accounting, Organizations, and Society*, Vol. 5, No. 1 (1980), pp. 87—107.
17. CHARNES, A.—COOPER, W. W.: *Management Models and Industrial Application of Linear Programming*. Vol. 1. Wiley, New York, 1961.
18. CHARNES, A.—COOPER, W. W.: Management Science Relations for Evaluation and Management Accountability, *J. Enterprise Management*, Vol. 2, No. 2 (1980), pp. 143—162.
19. CHARNES, A.—COOPER, W. W.: Managerial Economics—Past, Present and Future, *J. Enterprise Management*, Vol. 1, No. 1 (1978), pp. 5—23.
20. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—DEVÖE, J. K.—LEARNER, D. B.: Demon, Mark II: An Extremal Equation Approach to New Product Marketing, *Management Sci.*, Vol. 14, No. 9 (1968), pp. 513—524.
21. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—DEVÖE, J. K.—LEARNER, D. B.: Demon, Mark II: Extremal Equations Solutions and Approximation, *Management Sci.*, Vol. 14, No. 11 (1968), pp. 682—691.
22. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—LEARNER, D. B.: Constrained Information Theoretic Characterization in Consumer Purchase Behavior, *J. Operational Res. Soc.*, Vol. 29, No. 9 (1978), pp. 833—884.
23. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—LEARNER, D. B.—PHILLIPS, F.: The MDI Method as a Generalization of Logit, Probit and Hendry Analyses in Marketing, A paper presented at the 1980 TIMS/ORSA conference in Washington, D. C., Market Research Corporation of America, Stanford, Conn., May 1980.
24. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—LEWIN, A.—MOREY, R.—ROUSSEAU, J.: Efficiency Analysis with Non-Discretionary Resources, Research Report CCS 379, The University of Texas at Austin, Center for Cybernetic Studies, Austin, Texas, October 1980.
25. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—MELLON, B.: Blending Aviation Gasoline—A Study in Programming Interdependent Activities in an Integrated Oil Company, *Econometrica* Vol. 20, No. 2 (1952). See also September, 1952, for an exchange between A. Manne and A. Charnes.
26. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—RHODES, E.: A Data Envelopment Analysis Approach to Evaluation of the Program Follow Through Experiment in U.S. Public School Education. Management Sciences Research Report No. 432, Carnegie-Mellon University School of Urban and Public Affairs, Pittsburgh, November, 1978. Subsequently revised and issued in May, 1980 as „Data Envelopment Analysis as an Approach for Evaluating Program and Managerial Efficiency—With an Illustrative Application to the Program Follow Through Experiment in U.S. Public School Education”.
27. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—RHODES, E.: An Efficiency Opening for Managerial Accounting in Not-For-Profit Entities, in P. Holzer. Editor. *Proceedings of a Conference on Managerial Accounting*, University of Illinois Department of Accountancy, Urbana, 1980.
28. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—RHODES, E.: Measuring the Efficiency of Decision-Making Units, *European J. Operational Res.* Vol. 2, No. 6 (1978), pp. 429—444. See also „Corrections”, *op. ci.* Vol. 3, No. 4 (1979), p. 339.
29. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—RHODES, E.: On the Distribution of Efficiency Measures for Decision Making Units, University of Texas Center for Cybernetic Studies, Research Memorandum, Austin, Texas, Feb. 1978. Included as an Appendix in [18].
30. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—SCHINNAR, A., Transforms and Approximations in Cost and Production Function Relations, Research Report CCS 339. The University of Texas at Austin, Center for Cybernetic Studies, January, 1977.
31. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—SEIFORD, L.: Extremal Principles and Optimization Dualities for Khinchin-Kullback-Leibler Estimation, *Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization*, Vol. 9, No. 1 (1978), pp. 21—29.
32. CHURCHILL, N. C.—COOPER, W. W.—SAN MIGUEL, J.—GOVINDARAJAN, V.—POND, J.: Comprehensive Audits: Some Findings and Some Suggestions for Research, *Symposium on Auditing Research*, II. Department of Accounting. University of Illinois at Urbana-Champaign, 1977.
33. COOPER, W. W.: Understanding Prediction and Control—And Other Matters Relating to Scientific Research, *SUPALUM Alumni Magazine*, School of Urban and Public Affairs Carnegie-Mellon University, No. 2, April 1974, pp. 25—28.

34. COOPERSMITH, S., *The Antecedents of Self-Esteem*, San Francisco, Calif.
35. FÄRE, R.—LOVELL, C. A. K.: Measuring the Technical Efficiency of Production, *J. Econom. Theory*, Vol. 19 (1978), pp. 150—162.
36. FARRELL, M. J.: The Measurement of Productive Efficiency, *J. Roy. Statist. Soc.*, Vol. 120, Sec. A, pt. 3 (1957), pp. 253—290.
37. FERBER, R.—HIRSCH, W. Z.: Social Experiments in Economics, in D. J. Aigner and C. N. Morris, eds., *Experimental Design in Econometrics*, Annals of Applied Econometrics 1979-2, Supplement to *J. Econometrics*, Vol. 11, No. 1 (1979).
38. FORSUND, F. R.—KNOX LOWELL, C. A.—SCHMIDT, P.: A Survey of Frontier Productions and of Their Relationship to Efficiency Measurement, *J. Econometrics* (May 1980).
39. FRIEDMAN, M.: *Essays in Positive Economics*, University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1953.
40. FUMAS, V. S.—WHINSON, A. B.: Flexible Contracting Theory and Case Examples, *European J. Operational Res.*, Vol. 3. No. 5 (1979), pp. 368—378.
41. GRAY, R.—WELDON, K.: An Experiment with Convex Production Functions, Working Paper. National Center for Higher Education Management Systems, Boulder, Colo., Nov. 1978.
42. GRILICHES, Z.: Estimating the Returns to Schooling: Some Econometric Problems, *Econometrica*, Vol. 14, No. 1 (1977), pp. 1—22.
43. HANEY, W.: The Follow Through Planned Variation Experiment, *The Follow Through Evaluation: A Technical History*, Vol. 5. Prepared for the Office of Planning, Budgeting and Evaluation of the U.S. Education Department of HEW by The Huron Institute, Cambridge, Mass., August, 1977.
44. HANUSHEK, E. A.: Conceptual and Empirical Issues in the Estimation of Educational Production Functions, *J. Human Resources*, Vol. 14, No. 3 (1979).
45. HANUSHEK, E. A.: Families, Schools and Achievement, Discussion paper 7906, University of Rochester Public Policy Analysis Program, Rochester, N.Y., 1979.
46. HOLT, C. C.—MODIGLIANI, F.—MUTH, J. F.—SIMON, H. A.: *Planning Production, Inventories and Work Force*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1960.
47. KENNINGTON, J.: A Primal Simplex Code for Computing the Efficiency of Decision Making Units, Technical Report OREM 80001, Dept. of Operations Research, Dalls: Southern Methodist University, January, 1980.
48. KULLBACK, S.: *Information Theory and Statistics*, Wiley, New York, 1959.
49. *Metropolitan Achievement Tests Special Report*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1971. 50
50. RHODES, E. L.: *Data Envelopment Analysis and Related Approaches for Measuring the Efficiency of Decision-Making Units with an Application to Program Follow Through in U.S. Education*, unpublished Ph. D. thesis, Carnegie-Mellon University School of Urban and Public Affairs, Pittsburgh, Pa., 1978.
51. RODGERS, K. W.: The Realization of National Policy Objectives by Historically Black Colleges, Arthur D. Little, Cambridge, Mass., 1976.
52. SAWA, T.: Information Criteria for Discriminating Among Alternative Regression Models, *Econometrica*, Vol. 46, No. 6 (1978), pp. 1273—1291.
53. STALLINGS, JANE A.: Follow Through Program Classroom Observation Evaluation, 1971—72, Stanford Research Institute, Menlo Park, Calif., 1973.
54. SUMMERS, A. A.—WOLFE, B. L.: Which School Resources Help Learning? Efficiency and Equity in Philadelphia Public Schools, *Business Review of Federal Reserve Bank of Philadelphia*, Feb., 1975. See also Summers and Wolfe „Do Schools Make a Difference?“, *Amer. Econom. Rev.* (to appear).
55. THEIL, H.: *Optimal Decision Rules for Government and Industry*. North-Holland, Amsterdam, 1964.
56. U. S. GENERAL ACCOUNTING OFFICE: *Follow Through: Lessons Learned from Its Evaluation and Need to Improve Its Administration*, U. S. General Accounting Office, Washington, 1975.

KÖNYVEKRŐL

SIPOS BÉLA: *Termelési függvények — vállalati prognózisok* Budapest, 1982. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

A gazdasági kutatások középpontjában a termelés megfigyelése, vizsgálata áll. Az egyes tudományágak más-más aspektusból foglalkoznak a termelő tevékenységgel. A gazdaságstatisztika a termelési eredmények számbavételi, mérési kérdéseivel foglalkozik. A gazdaságmatematika a termelés technológiai kapcsolatait helyezi a vizsgálódás előterébe és azt vizsgálja, hogy adott erőforrások (gépek, munkaerő stb.) és technológiai lehetőségek esetén hogyan lehet a termelés optimális mennyiségét, összetételét — a vállalat által megszabott kritériumok szerint — meghatározni. Az ökonometria termelési kutatások abból indulnak ki, hogy a termelő optimálisan döntött a termelés technológiai kérdéseit illetően. Ezért olyan problémákra korlátozza vizsgálatait, hogy az optimális döntések esetén milyen összefüggés van a ráfordítások és a termelési eredmények, a termelési tényezők mennyisége és ára között, milyen a termelési tényezők közötti helyettesíthetőség, a műszaki fejlődés hogyan fejt ki hatását a termelésre stb. Ezekre a kérdésekre a választ a leggyakrabban a termelési függvények alkalmazásával keressük.

A termelési függvények irodalma — csak a magyar nyelvű szakirodalmat tekintve is — igen gazdag, szerteágazó. W. C. Cobb és P. H. Douglas 1928-ban megjelent tanulmánya óta számtalan, a termelési függvényekkel foglalkozó cikk, tanulmány jelent meg szerte a világon. Ennek a téma iránti fokozott érdeklődésnek legújabb tudományos produktuma Sipos Béla könyve.

A szerző nagyon helyesen nem arra vállalkozik, hogy könyvében összegezze az eddigi kutatások eredményeit; célja első sorban az, hogy sok éves oktatási tapasztalata, több ezer termelési függvény szá-

mítása során szerzett ismeretei alapján módszertani segítséget adjon ágazati és vállalati termelési függvényszámítások elkészítéséhez és kiértékeléséhez.

A könyv három nagy fejezetből áll. Az első fejezet az ökonometria kutatásokról, módszerekről ad rövid áttekintést, majd a termelési függvényt mutatja be. Az egyszerű tárgyalási mód szempontjait szem előtt tartva, a termelési függvény jellemzőit három-változós modell segítségével, a függvénytípus specifikálását melőzve, általánosan tárgyalja. Ennek keretében ismerteti a határtermelékenység, a parciális elaszticitás, a volumenhozadék, a helyettesítési határárány, a helyettesítési elaszticitás, a közvetlen és a kereszt akcelerátor fogalmát és interpretálja az egyes jellemzőket. A fejezet a termelési függvények osztályozásával és paraméterbecslési kérdések tárgyalásával zárul.

A második fejezet az ágazati termelési függvényszámítások, gyakorlati végrehajtásának kérdéseivel és az ipari létszámstruktúra változásával foglalkozik. Az ipar ágazataira és alágazataira összesen több, mint ezer termelési függvényt határoz meg, részben lineáris, részben Cobb—Douglas típusú modellek alapján. Az ágazatonként meghatározott 40 féle termelési függvényből azután statisztikai kritériumok alapján választja ki az optimálisnak tekintett modellt. Ehhez a korrelációs és regressziós együtthatók, a multikollinearitás és autokorreláció teszteléséhez felhasznált statisztikákat (F , t , χ^2 , $D-W$) alkalmazza. Érdekes színtölt a fejezetnek a Kádas-féle termelési függvények megismétlése a gép-iparra és papíriparra vonatkozóan. A fejezet végén az ipari létszámalakulás tendenciáját a prognosztizálás szempontjából vizsgálja.

A harmadik fejezet a vállalati termelési függvények és prognózisok kérdéseit tárgyalja. Az ágazatiakkal szemben a vállalati termelési függvények sajátosságait a szerző a következőkben fogalmazza meg: — A vállalati termelési függvények az

ágazati függvényeknél több termelési tényezőt tudnak figyelembe venni.

- A vállalati termelési függvények többnyire homogén termelést reprezentálnak.
- Jól közelíthetők lineáris függvénnyel.
- Célszerű — az adatbázis korlátozott volta miatt — a tényező-változók szelekciója matematikai-statisztikai módszerekkel.

Vizsgálja az iparvállalati prognóziskészítés kérdéseit, a prognózis és vállalati terv összefüggését, a prognózismunka szervezését, ellenőrzését, és áttekinti a fontosabb objektív és szubjektív prognózismódszereket. Egy cipőipari és egy építőipari vállalat adatbázisán mutatja be a vállalati termelési függvények számítási módjait és vállalati felhasználási (elemzési és előrejelzési) lehetőségeit is.

A termelési függvények irodalmában valamelyest is jártas olvasóval joggal felmerül a kérdés, miben hozott újat a szerző az eddig megjelent magyar nyelvű publikációkhoz képest? Elsősorban azzal, hogy hogy a hangsúlyt az adatbázis kialakítására és a termelési függvényszámítások gyakorlati kérdéseire helyezi. A szerzőnek ez a törekvése mindvégig a matematikai-statisztikai módszerek korrekt alkalmazásával és interpretációjával párosul.

Új fajta szemléletben, a modellépítés szemléletében tárgyalja a termelési függvények meghatározását. Ennek kapcsán a modellspecifikációs technikák (a lépcsős regressziós módszer, a visszafelé haladó eliminációs módszer) ismertetésével, a termelési függvények értékelésében felhasznált kritériumok számításával és értelmezésével hasznos segítséget ad a felhasználóknak. Sipos Béla a magyar közgazdasági szakirodalomban elsőként foglalkozik a vállalati termelési függvények specifikumaival és felhasználásával a vállalati elemző és tervező munkában. A gyakorlati szakemberek számára is értékesek a termelési függvényszámítások teljes folyamatát áttekintő esettanulmányok.

A könyv olvasása során több vonatkozásban hiányérzete is van az olvasónak. A szerző csak az idősorokból számított termelési függvények problémakörét tárgyalja, pedig ágazati szinten gyakran kerül sor keresztmetszeti adatok felhasználására is. Itt a problémák másként vetődnek fel, az interpretációban és a felhasználás lehetőségeiben is különbségek vannak. Nem foglalkozik a szerző az ágazati függvények kapcsán az aggregáció kérdésével sem és önkényesen korlátozottnak tűnik a modell-típusok kiválasztása is. Célszerű lett volna más típusú (pl. a technikai haladást is figyelembe vevő) termelési függvényekkel

is számításokat végezni és eredményeit a klasszikus termelési függvényekkel egybevetni.

A termelési függvények prognosztikai alkalmazása kellő óvatosságot, gondosságot igényel. Ismeretes ugyanis, hogy a vizsgált termelési függvények esetében bármelyik termelési tényező korlátlan növelésével számszerűen termelési növekedés biztosítható. A valóságban azonban szigorú szabályok, arányosságok érvényesülnek a termelési tényezők között, a tényezők helyettesíthetősége is csak korlátok között lehetséges. Számos egyéb tényező is nehezíti a prognosztizálást, erre a felhasználót jobban fel kell készíteni. Nem véletlen, hogy a termelési függvényeket elsősorban közgazdasági elemzésekre használják fel.

Sipos Béla könyvében több tudományág kutatási eredményeire támaszkodik. Jól példázza ezt a közel háromszáz irodalmi hivatkozás is. A matematikai-statisztika eszköztárát a szerző nagy magabiztossággal kezeli, alkalmazását jól megválasztott példanyag segítségével mutatja be. Az egyszerű tárgyalási mód persze igen nagy háttér-ismeretet (pl. a korreláció és regresszió analízisben, a hipotézis-ellenőrzés terén) igényel az olvasótól. A könyvet ezért elsősorban a matematikai-statisztikai módszerek terén jártas közgazdászoknak ajánlhatjuk.

A könyv stílusa, világos okfejtése és példanyaga révén tankönyvként is használható.

MUNDRUCZÓ GYÖRGY

LAWLER, E. L.: *Kombinatorikus optimalizálás: hálózatok és matroidok*. Budapest, 1982. Műszaki Könyvkiadó. 360 o.

A kombinatorika a matematikának az az ága, mely többnyire véges számú, diszkrét objektum elrendezésével, leszámolásával, csoportosításával, kiválasztásával kapcsolatos problémák megoldására törekszik. Kezdetben többnyire bizonyos tulajdonságú részhalmozok létezésével, leszámolásával foglalkozott. Egyre inkább előtérbe került azonban az a kérdés, hogy a létező objektumok közül melyik a legjobb. Különösen a számítógépek megjelenése óta gyorsult fel az ilyen kombinatorikus optimalizálási problémák vizsgálata.

Azt gondolhatnánk, hogy a modern számítógépek gyorsasága e tudományág halálát okozza, hiszen nem kell mást tennünk, mint az összes lehetséges megoldás listáját áttekinteni és a lehető legjobbat kiválasz-

tani. Rövidke számolással meggyőződhetünk azonban arról, hogy például a közismert hozzárendelési feladat összes lehetségesét áttekinteni már 20 objektum esetén is mintegy egy évezredig tartana. Olyan algoritmusok kifejlesztésére van tehát szükség, amelyekben az elemi számítási lépések száma elfogadhatóan „kicsiny”.

Mit jelent az, hogy kicsiny? „Egy algoritmust akkor tekintünk „jónak”, ha a megkívánt elemi számítási lépések száma a feladat méretének polinomiális függvényével korlátozható.” Sok kombinatorikus optimalizálási problémára ilyen módszer már létezik, sokra ilyen még nincs. (Csak sejthük, hogy többségükre nem is lehet.)

A megoldási módszereket öt széles osztályba lehet sorolni: (1) lineáris programozás, (2) rekurzió és leszámolás, (3) heurisztika, (4) statisztikai mintavételezés, (5) speciális és ad hoc technikák. Ez a könyv olyan lineáris programozási technikákkal foglalkozik, amelyekre létezik jó számítási korlát. Más módszerekkel csak érintőlegesen; többnyire csak utal a megfelelő irodalomra.

A lineáris programozáson alapuló algoritmusok alap gondolata az, hogy egy konvex politóp csúcsai és a szobán forgó kombinatorikus probléma objektumai között alkalmas megfeleltetést találva a probléma egy lineáris programozási feladat megoldására vezet. Sok esetben a politóp leírásához kevés számú feltétel elegendő (pl. legrövidebb út, minimális vágás, hozzárendelési probléma stb.) Más esetekben (pl. élfedési, élszínezési, feszítőfa problémák stb.) ugyan sok feltétel szükséges, de ezeket csak akkor állítjuk elő, amikor szükség van rájuk, és így sokszor bonyolult politópok esetén is lehetséges polinóm-korlátos lépésszámú algoritmust találni. Természetesen nem egyszerűen a szimplex módszer valamely válfajáról van szó, speciális technikákra van szükség, amelyek mögött — sokszor alig felismerhetően — a lineáris programozás elmélete, dualitási tétele húzódik meg. A könyv második fejezete röviden összefoglalja azt a gráfelméleti és lineáris programozási ismeretanyagot, amire a későbbiekben támaszkodik.

Az ezt követő hét fejezet szerkezete egységes. Minden fejezet néhány típusfeladat megfogalmazásával kezdődik, melyek megoldására algoritmust keres. Ezt a módszer tartópilléreit szolgáló tételek követik, majd maga az algoritmus, általában több változatban. Minden esetben precízen elemzi az algoritmus által igényelt számítások mennyiségének nagyságrendjét a feladat méreteinek függvényében. Több bizonyítást és menet közben felme-

rülő egyes problémák megoldását a szerző az olvasóra bízta, továbbá külön feladatokat tűz ki, melyek a könyv oktatási felhasználásában is nagy segítséget jelentenek.

Röviden az egyes fejezetek tartalmáról. A harmadik fejezet irányított gráfok legrövidebb út problémáival foglalkozik. A megoldó algoritmus alap gondolata a dinamikus programozásból ered. Az ebből származtatott *Bellman* egyenletek megoldására pozitív élű hálózatok esetén *Dijkstra* módszerét, általános esetben *Bellman*—*Ford* módszerét javasolja a szerző. Ismerteti az utóbbinak *Yen* féle módosításait, *Floyd*—*Warshall* módszerét és az *M*-edik legrövidebb út meghatározására *Dreyfus* algoritmusát.

A negyedik fejezet a hálózati folyamatok klasszikus elméletét, a maximális folyam, illetve minimális vágás meghatározására szolgáló módszereket és a *Minty* és *Fulkerson* által felfedezett kilter-eljárást tartalmazza.

Az ötödik fejezet páros (kétrészes) irányítatlan gráfok valamilyen értelemben optimális élhalmazait keresi úgy, hogy az élhalmaz nem legyen ugyanazon csúcsal szomszédos két él. Ez a párosítás problémája. A fejezet tartalmazza részletesen a korábban már megismert típus feladatok ekvivalenciáját egymással és a párosítási feladattal, és ennek elméleti következményeit. Ezt a magyar módszer és ennek speciális feladatokra kidolgozott változatai követik.

A hatodik fejezet az általános (nem feltétlenül kétrészes) gráfok párosítási problémáival foglalkozik. Ennek a minden előzőnél általánosabb feladatnak a megoldására *Edmonds* javasolt módszert.

A következő három fejezet a szakterület legmodernebb, legdinamikusabban fejlődő területével foglalkozik. A hetedik fejezet a matroidok elméletét tárgyalja olyan mélységig, ahogy ezt az ún. mohó algoritmus megkívánja. A mohó algoritmus egy súlyozott matroid maximális súlyú független halmazának kiválasztására szolgál.

A nyolcadik fejezet a matroidmetszet, azaz az ugyanazon alaphalmazon értelmezett két matroid struktúrára nézve is független maximális súlyú halmaz meghatározásával foglalkozik. Két módszert ad, az egyik a minimális költségű hálózati folyam megkeresésére szolgáló *Busacker*, *Gowan* és *Jewell* féle eljárással, a másik a magyar módszerrel analóg.

A kilencedik fejezet röviden foglalkozik az ún. matroid ikerproblémával. A könyv megjelenése óta — elsősorban *Lovász* *László* eredményei nyomán — erről a területről már sokkal többet tudunk.

Végül a függelék a fordító *Frank András* és mások legfrisebb eredményeivel zárja a könyvet.

A kombinatorikus optimalizálás oktatóinak és hallgatóinak szűk körén túl a numerikus módszerekkel foglalkozó matematikusok számára Lawler műve kézi-

könyvként használható. Ajánljuk ezenkívül az alkalmazási területen dolgozó mérnököknek, közgazdászoknak is, akik sok ötletet és hasznos ismeretanyagot kapnak munkájukhoz.

CSERNÁTONY CSABA

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója

Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat a nyomdába érkezett: 1984. február 16. — Terjedelem: 10,85 (A/5) ív
84.12977 Akadémiai Kiadó és Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Hazai György

CONTENTS

ERNŐ ZALAI: Marxian labour values in (closed) eigenvalue models	1
ISTVÁN ÁBEL—ÁLMOSS KOVÁCS: Rate-of-return regulation in alternative models of firm behaviour	17
LÁSZLÓ HUNYADI: A diffusion type distributed lag model	31
PÁL ERDŐSI—EDIT HEGYI-MOLNÁR—LÁSZLÓ GÁL: A dynamic model for the examination of sectoral development projects of different energy-intensity	47

BORROWED QUILLS

LEIF JOHANSEN: Interaction in economic theory	61
A. CHARNES—W. W. COOPER—E. RHODES: Evaluating program and managerial efficiency: an application of data envelopment analysis to program follow through	87

BOOK REVIEWS

BÉLA SIPOS: Production functions — enterprise prognoses (<i>György Mundruczó</i>)	119
E. L. LAWLER: Combinatorial optimization: networks and matroids (<i>Csaba Csernátó</i>)	120

СОДЕРЖАНИЕ

Эрне Залаи: Система трудовой стоимости Маркса в форме (замкнутой) собственной стоимости	1
Иштван Абел—Альмосс Ковач: Заинтересованность в прибыли при ограничении уровня прибыли	17
Ласло Нуньяди: Модель с распределенным запаздыванием типа распространения	31
Пал Эрдеши—Эдит Хедьи-Мольнар—Ласло Гал: Динамическая модель анализа эффективности отраслей с различной энергоемкостью	47

СО СТРАНИЦ ЗАРУБЕЖНЫХ ЖУРНАЛОВ

Леиф Йохансен: Интеракция в экономической теории	61
А. Чарнс—В. В. Купер—Э. Родс: Программы и их осуществление, оценка их эффективности	87

О КНИГАХ

Бела Шипос: Производственные функции — прогнозы предприятий (<i>Дьердь Мундручо</i>)	119
Э. Л. Полер: Комбинаторная оптимизация: сети и матроиды (<i>Чаба Чернатонь</i>)	120

Ára: 40 Ft

Előfizetés egy évre: 80 Ft

INDEX: 26 793
ISSN 0039—8128

TARTALOM

ZALAI ERNŐ: A marx-i értékrendszer (zárt) sajátérték-formákban	1	C
ÁBEL ISTVÁN—KOVÁCS ÁLMÓS: Nyereségérdekeltség nyereség szint korlát mellett	17	C
HUNYADI LÁSZLÓ: Egy terjedési típusú osztott késleltetési modell	31	C
ERDŐSI PÁL—MOLNÁRNÉ HEGYI EDIT—GÁL LÁSZLÓ: Dinamikus modell a különböző energiaigényességű ágazati fejlesztések hatékonyságának vizsgálatára	47	C

IDEGEN TOLLAK

LEIF JOHANSEN: Az interakció a közgazdasági elméletben	61	C
A. CHARNES—W. W. COOPER—E. RHODES: Programok és végrehajtásuk, a hatékonyság értékelése	87	C

KÖNYVEKRŐL

SIPOS BÉLA: Termelési függvények — vállalati prognózisok (<i>Mundruczó György</i>)	119
E. L. LAWLER: Kombinatorikus optimalizálás: hálózatok és matroidok (<i>Csernátony Csaba</i>)	120



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST