Kedves Olvasónk!

Néha nagyszerű célokkal születnek bizonyos fejlesztési programok. Talán mondhatjuk, a Felsőoktatási Fejlesztési Alap minden bizonnyal ezek közé tartozott, hiszen olyan hiányosságok pótlására lehetett felhasználni, mint például különböző intézmények közötti kapcsolatok ápolása, közös kutatások végzése. A Szigma jelen száma a Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem, valamint a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Kara által Bad-Klein-Kirchemben 2000 szeptemberében tartott szeminárium néhány anyagát adja közre, abban a reményben, hogy elnyeri tisztelt olvasóink tetszését.

Vörös József, főszerkesztő

EGERVÁRY JENŐ

1891. április 16 - 1958. november 30.

A DATA ENVELOPMENT ANALYSIS (DEA) ALKALMAZÁSA IPARI PARKOK HATÉKONYSÁGÁNAK VIZSGÁLATÁRA[1]

FÜLÖP JÁNOS – TEMESI JÓZSEF
MTA SZTAKI – BKÁE Operációkutatás Tanszék

A Data Envelopment Analysis hatékonysági modelljeinek megalapozása (természetesen még nem ezzel az elnevezéssel) Farrell (1957) agrárközgazdasági elemző cikkében jelent meg. Hosszú évek teltek el, amíg elsősorban Charnes, Cooper, Rhodes és Banker úttörő cikkei új megvilágításban, a lineáris programozás egy speciális közgazdasági alkalmazási lehetőségeként egy egész modellcsalád kifejlesztését indították el: Charnes, A., W.W. Cooper és E. Rhodes (1978), Banker, R.D., A. Charnes és W.W. Cooper (1984), Charnes, A., W.W. Cooper, B. Golany, L. Seiford és J. Stutz (1985). A nyolcvanas és kilencvenes évek egyértelműen ennek az elemzési eszköznek a világméretű elterjedését mutatják, összefoglaló művek és a továbbfejlesztés irányait meghatározó könyvek és cikkgyűjtemények sora jelenik meg: Norman, M. és B. Stoker (1991), Charnes A., W. W. Cooper, A. Y. Lewin és L. M. Seiford (1994), Hammer, P. L. (1996), Lewin, A. Y. és L. M. Seiford (1997).

Megszületnek azok a programcsomagok is, amelyekkel a számítások könynyen elvégezhetők, s egyre nő a felhasználási területek száma: Ali, A. I. (1994), Coelli, T., D. S. Prasada Rao és G. E. Battese (1998). Hatékonysági elemzések jelennek meg kórházakról, Chilingerian, J. A. és H. D. Sherman (1997), Byrnes P. és Valdmanis, V. (1994), bankokról, English, M., S. Grosskopf, K. Hayes és S. Yaisawarng (1993), egyetemekről, Finlay, P. N. és G. Gregory (1994), egyéb termelési és szolgáltató egységekről, Ganley, J. A. és J. S. Cubbin (1992), Zeng, G. (1996). A nemzetközi operációkutatási és programozási konferenciák állandó szekcióit alkotják a DEA elméleti továbbfejlesztései és alkalmazásai.

Magyarországon a módszer ismert ugyan (lásd pl. Danyi, P. és Varró, Z. (1995)), de a valós alkalmazások száma csekély. Ezért találtuk jó alkalomnak azt a felkérést, amely a Gazdasági Minisztériumból érkezett és a magyar ipari parkok értékelésére vonatkozott.

Cikkünkben először röviden az alkalmazási feladatot mutatjuk be. A második részben aránylag részletesen foglalkozunk a DEA modellek ismertetésével. Ezt azért is tesszük, hogy az érdeklődők (egyetemi hallgatók, kutatók, alkalmazók) magyar nyelven is találjanak egy bevezetést a DEA modellek módszertanába – ezt egészíti ki a legfontosabb szakirodalmi hivatkozások jegyzéke. A cikk harmadik része az ipari parkok elemzéséhez felhasznált adathalmaz néhány statisztikai jellemzőjét mutatja be, majd a

[1]Beérkezett: 2001. április 3. E-mail: fulop@sztaki.hu, temesi@pegasus.bke.hu

negyedik és ötödik rész foglalkozik a DEA modellek eredményeivel és a levonható következtetésekkel.

1 Ipari parkok és értékelési lehetőségeik

A nemzetgazdasági szintű gazdasági célkitűzések között alapvető prioritásként jelentkezik a magyar ipari és agrárgazdasági múlt örökségeként megmaradt regionális egyenlőtlenségek felszámolása. Az Európai Unióba készülő Magyarország számára ugyanakkor kiemelt jelentősége van a termékek és szolgáltatások minősége növelésének, egy olyan exportképes árualap létrehozásának, amely a külkereskedelmi mérleg javításán keresztül hozzájárul a fizetési mérleg egyensúly közeli állapotának eléréséhez.

Az 1990-es évek végére a magyar tulajdonosi szerkezet nagyfokú változáson ment keresztül. A magyar ipar szerkezetváltásában meghatározó jelentőségű a külföldi működőtőke jelenléte. Ennek a tőkének megfelelő működési feltételeket kell teremteni, azaz olyan termelői és szolgáltatási infrastruktúrát kell létrehozni, amely vonzóerőt jelent a tartós letelepedésre, s ezáltal munkahelyteremtő beruházások terepéül szolgálhat.

Mindezen gazdaságpolitikai célok megvalósításához járul hozzá a Gazdasági Minisztérium részéről 1996 végén elindított *Ipari Park Pályázati Program*. A program első lépcsőjében az ország legkülönbözőbb részein működő szervezetek, illetve területek pályáznak az „Ipari Park" címre. A cím elnyeréséhez egy olyan fejlesztési elképzelést kell bemutatni, amely egy már meglévő, bizonyos infrastruktúrával ellátott területen, vagy anélkül — „zöldmezős beruházásként" — lehetővé teszi a hazai és külföldi vállalkozások betelepülését és gyors fejlődését.

Az „Ipari Park" cím elnyerésével együtt járó kedvezmények és pályázati lehetőségek több vállalkozás és önkormányzat figyelmét is felkeltették. 1997-ben a Gazdasági Minisztérium 28, 1998-ban pedig 47 címet ítélt meg, azaz 1998 végére 75 terület volt jogosult a cím viselésére. A címet elnyert parkoknak lehetőségük van arra, hogy a gazdaságfejlesztési céltámogatások speciálisan erre elkülönített részét megpályázzák *infrastrukturális fejlesztések* kivitelezésére. 1996 és 1998 között 25 ipari park kapott összesen 1.6 milliárd forintot a gazdaságfejlesztési, illetve területfejlesztési céltámogatási alapokból. Az infrastrukturális pályázatok speciálisak abból a szempontból, hogy a más alapokból elnyerhető célzott támogatásokkal ellentétben itt többféle külső infrastruktúra együttes kialakításához kapnak segítséget: csatornázás, vízelvezetés, elektromos hálózat és gázvezeték kiépítése, úthálózat kiépítés és bővítése szerepelhet a célok között. Nyilvánvaló, hogy ezen beruházások sikeres megvalósításával olyan működő infrastruktúra jön létre, amely kedvez a vállalkozások, szolgáltató egységek betelepülésének.

A Gazdasági Minisztérium 1999-ben értékelni kívánta az Ipari Park Pályázati Program addigi állását. Az értékelés nyilvánvalóan csak a meglévő adatokra támaszkodhatott. Az „Ipari Park" cím elnyerésére benyújtott pályázatokban öt évre, éves ütemezésben kellett megadniuk a pályázóknak a legfontosabb mutatókban célul kitűzött értékeket. Ez az adatbázis szolgáltathat alapadatokat arra nézve, hogy helyi, regionális és országos szinten milyen várakozások lehetnek az ipari parkokkal szemben.

Az elmúlt évek teljesítéseiről ugyanakkor már tényadatok is rendelkezésre állnak. Ezek a tényadatok önmagukban is elemezhetők és összevethetők a tervezett adatokkal is. Az idő előrehaladtával a *tényadatok dinamikája* is vizsgálható.

Elvileg lehetőség lenne arra, hogy *az ipari parkok teljesítményét összevessük az ipari parkokon kívül folyó termelés számaival, trendjeivel.* Itt a fő gondot az okozza, hogy az ilyen jellegű összehasonlításhoz *speciális összehasonlítható adatokra lenne szükség*, azonban ilyenek előállítása különleges feladatot jelentene. Egy-egy ipari park ugyanis összességében ítélendő meg, s ezáltal a vállalati összehasonlításokra vagy a szokásos regionális (megyei, területi) egybevetésekre alkalmas statisztikai adatok nem használhatók fel direkt módon. Az ipari parkokba betelepült sokszínű, egy helyen koncentrálódó tevékenység megítélésére az iparági vagy országos átlagokkal való összehasonlítás nem alkalmazható, éppen az ipari park jellegzetes összetétele miatt.

Ezért választottuk azt a lehetőséget, hogy az ipari parkok számának növekedésével és az egész országra kiterjedő hálózat kialakulásával létrejött adatállomány segítségével az alapvető statisztikai elemzések mellett az ipari parkokat önmagukban és önmagukhoz mérve végezzünk el egy újfajta összehasonlító és értékelő elemzést.

A gazdálkodástani szakirodalomban egyre inkább elterjedő módszer az úgynevezett benchmarking, azaz a legjobb teljesítményt nyújtó egységek meghatározása, és a többi egység hozzájuk viszonyított értékelése. Sokféle technikát dolgoztak ki erre a feladatra, a versenytársak véleményének formalizálásától kezdve a vállalat önmagáról alkotott képének elemzéséig. A „best practice", a legjobb gyakorlat felderítése és követése persze nem csak a különböző termelő egységek számára lényeges, más területeken is hódít ez a szemléletmód, például a közigazgatásban, az egészségügyben vagy az oktatási intézmények értékelésénél is.

A szakirodalomban az utóbbi húsz évben egyre több olyan publikáció jelent meg, amelyek erre a feladatra egy *speciális modellt* fogalmaznak meg. Mivel az értékelések egyik legnehezebb problémája a sokszor egymással is ellentétes célok kielégítésének mértékéül szolgáló mutatószámok közös nevezőre hozása, a több tényező alapján történő összehasonlítás, olyan módszer kialakítása és alkalmazása indult el, amely végső soron egyetlen tulajdonságot, a hatékonyságot állítja a középpontba: Charnes, A., W. W. Cooper és E. Rhodes (1978), Färe, R. és C. A. K. Lovell (1978), Banker, R. D., A. Charnes és W. W. Cooper (1984), Charnes, A., W. W. Cooper és R. M. Thrall (1991), Ali, M. és L. M. Seiford (1993), Cooper, W. W., R. G. Thompson és R. M. Thrall (1996), Coelli, T., D. S. Prasada Rao és G. E. Battese (1998).

Ez a módszertan —a Data Envelopment Analysis— a gazdasági egységek közül kiválasztja azokat, amelyek a súlyozott output/input arány szempontjából a leghatékonyabbak, s a többi gazdasági egységet ezekhez a (bizonyos értelemben legjobb, „hatékony") egységekhez viszonyítja. Az ipari parkokra alkalmazott DEA segítségével megkíséreljük az ipari parkok egymás közötti viszonyát, élenjáró vonásaikat vagy lemaradásukat számszerűsíteni, s ezáltal hasznos információkra tehetünk szert a pótlólagos erőforrások allokálásának vonatkozásában. Mielőtt ebbe belefognánk, a fentebb hivatkozott alapirodalmakra támaszkodva áttekintjük a DEA főbb modelljeit és tulajdonságaikat.

2 Hatékonyság-elemzés a DEA módszertannal

A hatékonyság-elemzés olyan társadalmi-gazdasági egységek hatékonyságának vizsgálatával foglalkozik, amelyek tevékenységük során egy vagy több input felhasználásával egy vagy több outputot hoznak létre. Ilyenek nemcsak cégek és termelőegységek lehetnek, hanem bankok, iskolák, stb. Ezeket az egységeket *Decision Making Unit (DMU, döntéshozó egység)* elnevezéssel látjuk el. A cikkünkben vizsgálandó ipari parkokat is döntéshozó egységként fogjuk kezelni, hiszen inputnak tekinthetjük például a befektetett tőkét, a különböző állami és önkormányzati támogatásokat, és outputként kezelhetjük a foglalkoztatottsági létszám, a beépítettség, az árbevétel, az exporthányad és a naturális fejlesztési adatok (csatorna, út, gáz, stb.) közvetlen értékét vagy pedig növekményét.

Egyetlen inputtal és egyetlen outputtal leírható döntéshozó egységek hatékonyságának leírására elfogadott technikai mérőszám az output/input hányados. Több input vagy output esetén *az outputok súlyozott összegének és az inputok súlyozott összegének a hányadosa* használható ilyen célból, a megfelelő súlyok meghatározása azonban nem magáról értetődő, hanem fontos módszertani kérdés.

Tekintsünk döntéshozó egységeket, amelyek két inputból (x_1, x_2) egyetlen outputot (y) hoznak létre. Feltesszük, hogy konstans skálahozadékkal (CRS, constant return to scale) számolhatunk, azaz pl. kétszeres input mennyiségek esetén kétszeres output keletkezik. *Egy egységet akkor tekintünk hatékonynak, ha nem létezik egy másik olyan egység, melynek legalább az egyik egységnyi outputra eső input értéke kisebb, de a másik sem nagyobb, mint a vizsgálté.*

Az *input-orientált* technikai hatékonysági mérték arra ad választ, hogy mennyire lehet az input mennyiségeket arányosan csökkenteni az output mennyiségek változatlanul hagyása mellett. Ennek természetesen felmerülő alternatívájául szolgál az *output-orientált mérték*, amely azt méri, hogy mennyire lehet az output mennyiségeket arányosan növelni az input mennyiségek megváltoztatása nélkül.

A több inputtal és outputtal leírható döntéshozó egységek technikai hatékonyságának numerikus meghatározására ad eljárásokat a Data Envelopment Analysis (DEA) módszertan. Lényege az, hogy az adatokból kiindulva lineáris programozási technikával tudja előállítani a hatékony pontok többdimenziós, részenként lineáris felületét, majd egy adott pont hatékonysági mutatóját e felülethez viszonyítva határozza meg.

Tegyük fel, hogy a hatékonyság-elemzésben szereplő N döntéshozó egység mindegyike K számú inputtal és M számú outputtal írható le. Az i-edik döntéshozó egység legyen az inputok x_i oszlopvektorával és az outputok y_i oszlopvektorával reprezentálva. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az input és output mennyiségek nemnegatívak, és hogy legalább egy pozitív input és output adat szerepel minden egység esetén. Az összes N egységre vonatkozó input és output adatokat egymás mellé írva elkészíthetjük az input adatok $K \times N$-es X mátrixát és az output adatok $M \times N$-es Y mátrixát.

A DEA alapötlete az úgynevezett *hányados formán* keresztül érthető meg legkönnyebben. Egyetlen input és output esetén azt az egységet tekintenénk hatékonynak, amelynél az output/input hányados maximális. Több input és output esetén az outputok valamilyen súlyozott összegét kell az inputok valamilyen súlyozott összegével osztani, és ezeket a hányadosokat kellene összehasonlítani. A súlyokról egyelőre feltesszük, hogy azok nemnegatívak. Végtelen sokféleképpen választhatunk súlyokat, és a súlyok különböző megválasztása különböző fontosságot rendel az egymással nem összehasonlítható input és output értékekhez. Azonban annyit elvárhatunk egy magát hatékonynak tekintő döntéshozó egységtől, hogy tudjon olyan súlyokat mondani, hogy azokkal véve a súlyozott összegek hányadosát, ő legyen a legjobb. Amennyiben tehát létezik olyan u M-elemű és v K-elemű nemnegatív súlyvektor, amelyre

$$u^T y_i / v^T x_i = \max\{\, u^T y_j / v^T x_j : j = 1, \ldots, N \,\} \,, \tag{1}$$

ahol ^{T} a transzponálást jelöli, akkor az i-edik döntéshozó egységet hatékonynak tekintjük. Ha egy döntéshozó egységre (1) semmilyen u és v esetén nem érhető el, azaz az egység nem hatékony, akkor is fontos kérdés, hogy (1) bal oldala mikor lesz relatíve legközelebb (1) jobb oldalához. Ez a

$$\max_{u \geq 0, v \geq 0} \frac{u^T y_i / v^T x_i}{\max\{\, u^T y_j / v^T x_j : j = 1, \ldots, N \,\}} \tag{2}$$

optimalizálási feladat megoldását jelenti. A (2) feladat optimum-értéke 0 és 1 közé esik, és ezt az értéket tekintjük az i-edik döntéshozó egység technikai hatékonysági mértékének. Mivel bármely u, v és pozitív α esetén αu és v az u és v által adott hányados értékek α-szorosát adja, a hányadosok értékét korlátozhatjuk 0 és 1 közé. A (2) feladatot tehát átírhatjuk az ekvivalens

$$\begin{gathered} \max_{u,v} \, (u^T y_i / v^T x_i) \,, \\ u^T y_j / v^T x_j \leq 1 \,, \quad j = 1, \ldots, N \,, \\ u \geq 0 \,, \ v \geq 0 \end{gathered} \tag{3}$$

matematikai programozási feladatra. Az eddigi feladatok hiperbolikus programozási feladatok, amelyek megoldása azonban visszavezethető lineáris programozásra.

A (3) feladatnak is végtelen sok optimális megoldása van még, és mivel a számlálókról feltételezzük, hogy nem nullák, az általánosság megszorítása nélkül elég az optimális megoldást a $v^T x_i = 1$ feltételnek eleget tevő pontok között keresni. Ezért a (2) feladat az ekvivalens

$$\begin{aligned} &\max_{\mu,\nu} \mu^T y_i \,, \\ &\nu^T x_i = 1 \,, \\ \mu^T y_j - &\nu^T x_j \le 0 \,, \quad j = 1, \dots, N \,, \\ &\mu \ge 0 \,, \ \nu \ge 0 \end{aligned} \tag{4}$$

alakra hozható. Ez (2)-től eltérően már egy lineáris programozási feladat, és ezt az új μ és ν változók bevezetésével is hangsúlyozzuk. Ennek a feladatnak is jól interpretálható közgazdasági jelentés adható. A (4) feladatot szokták *szorzó alakú DEA lineáris programozási feladatnak* is nevezni, egyrészt mivel itt az inputoknak és az outputoknak az i-edik döntéshozó egység értékeléséhez szükséges optimális súlyait, szorzóit határozzuk meg, másrészt ez az elnevezés a (3)-ra használt *hányados alak* elnevezésnek mintegy az ellentéte.

A lineáris programozás dualitás elméletét használva, (4) duál feladatát a következő alakban írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} &\min_{\theta,\lambda} \theta \,, \\ -y_i &+ Y\lambda \ge 0 \,, \\ \theta x_i &- X\lambda \ge 0 \,, \\ &\lambda \ge 0 \,, \end{aligned} \tag{5}$$

ahol θ egy skalár változó, λ pedig változóknak egy N-elemű vektora. Az elméletből tudjuk, hogy (5) optimum-értéke azonos az (1)-(4) feladatok mindegyikének optimum-értékével, tehát szintén 0 és 1 közé esik, és az optimum-érték az i-edik döntéshozó egység technikai hatékonysági mértéke. Hangsúlyozzuk, azonban hogy minden döntéshozó egység számára egy önálló (4) vagy (5) feladatot kell megoldani, tehát összesen N számút.

Az $X\lambda$ és $Y\lambda$ vektorokat geometriailag tekinthetjük úgy, mint a vizsgált döntéshozó egységekből λ-beli nemnegatív súlyokkal vett lineáris kombinációval előállított *képzetes* döntéshozó egységet, amelynek $X\lambda$ az input, $Y\lambda$ pedig az output vektora. Csak olyan képzetes döntéshozó egységek érdekelnek minket, amelyek legfeljebb annyi inputból legalább annyi outputot állítanak elő, mint az i-edik döntéshozó egység, azaz $x_i \ge X\lambda$ és $Y\lambda \ge y_i$. Ilyen nyilván van, például amikor λ éppen az i-edik egységvektor, tehát a képzetes és az i-edik döntéshozó egység azonos. A kérdés most az, hogy van-e olyan képzetes döntéshozó egység, amelyre $x_i > X\lambda$ és $Y\lambda \ge y_i$, azaz amelynél az input-felhasználás határozottan kisebb. Ilyen pontosan akkor van, ha az x_i vektort egy 1-nél kisebb θ-val való szorzással radiálisan tudjuk csökkenteni úgy, hogy (5) feltételei teljesüljenek. Az (5) feladat megoldása geometriailag úgy interpretálható, hogy az input-output térben az összes képzetes döntéshozó által alkotott konvex kúpban fekvő i-edik döntéshozó egység által meghatározott pontot a kúp határán fekvő $(X\lambda, Y\lambda)$ pontra vetítjük. Az $(X\lambda, Y\lambda)$ pont ilyen módon tovább nem vetíthető, ő már biztosan hatékony a technikai hatékonysági mérték szerint. Mivel ebben a modellben az input vektorokat vetítjük, ezt a feladatot az input-orientált jelzővel is szokták illetni.

A DEA programban az i-edik döntéshozó egységet a technikailag hatékony $(X\lambda, Y\lambda)$ pontba vetítjük. Az $(X\lambda, Y\lambda)$ pont egy képzetes döntéshozó egység, amely a valódi döntéshozó egységek nemnegatív súlyokkal vett lineáris kombinációja. A nemnegatív súlyok között persze nullák is lehetnek, és az ezekhez tartozó döntéshozó egységek nem játszanak szerepet a vetített pont előállításában. A DEA módszertan során viszont fontos információtartalma van annak, hogy mely döntéshozó egységek szerepelnek pozitív súllyal. Ezekből áll elő ugyanis 'szintetikus' úton a technikailag hatékony vetített pont. Ezek a *meghatározó döntéshozó egységek a DEA irodalomban peer néven szerepelnek.*

A DEA programcsomagok miközben *minden döntéshozó egységre kiszámítják a hatékonysági mértékeket, általában megadják a megfelelő meghatározó döntési egységeket és a hozzájuk tartozó súlyokat is.* Annak a statisztikának is fontos információtartalma van, hogy *melyik döntéshozó egység volt egyáltalán meghatározó (peer) és hányszor.*

A konstans skálahozadékú modelleknél azt feltételeztük, hogy minden döntéshozó egység mindig optimális skálán működik. Így az input vektorokat valamilyen nemnegatív számmal szorozva várhattuk, hogy az output vektorok automatikusan ezzel a számmal szorzódnak. Ezt azonban nem minden gazdasági környezetben tehetjük fel, ezért *a konstans skálahozadékú modellt* megfelelően, *változó skálahozadékú* (variable return to scale, VRS) *modellé is át kell alakítani.*

Az (5) modellben az esetleg nem hatékony i-edik döntéshozó egységet a nemnegatív súlyokkal előállított, technikailag hatékony $(X\lambda, Y\lambda)$ képzetes döntéshozó egységgel hasonlítottuk össze. Itt azonban a λ komponensei bármilyen nagyok lehetnek, a képzetes döntéshozó egység nagyságrendileg nagyon eltérhet azoktól, amelyekből képezzük őt, ezért a változó skálahozadékú környezetben ez irreális eredményekhez vezethet. Annak biztosítására, hogy a $(X\lambda, Y\lambda)$ képzetes döntéshozó egység nagyjából olyan nagyságrendű legyen, mint amiből képződik, a DEA módszertan a

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = 1$$

konvexitási feltétel (5)-höz való csatolását javasolja. A konvexitási feltétel vektor alakban $1_N^T\lambda = 1$, ahol 1_N a csupa egyesből álló N-elemű vektort jelöli. A konvexitási feltétel a nemnegativitási feltétellel együtt biztosítja, hogy minden λ_j komponens 0 és 1 közötti, így változó skálahozadékú környezetben nem hasonlítjuk össze a tekintett döntéshozó egységet irreálisan képzett döntéshozó egységgel.

A *változó skálahozadék* esetére szóló VRS DEA modell tehát

$$\begin{aligned} &\min_{\theta,\lambda} \theta \,, \\ -&y_i + Y\lambda \geq 0 \,, \\ &\theta x_i - X\lambda \geq 0 \,, \\ &1_N^T\lambda = 1 \,, \\ &\lambda \geq 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

alakban írható fel. Jelölje TE_{VRS} a (6), illetve TE_{CRS} az (5) feladat optimum-értékét. Könnyen látható, hogy

$$0 \le TE_{\text{CRS}} \le TE_{\text{VRS}} \le 1 \,.$$

A konstans skálahozadék szerint technikailag hatékony döntéshozó egységek tehát a változó skálahozadék szerint is technikailag hatékonyak lesznek, fordítva azonban ez nem feltétlenül igaz. A konstans, illetve a változó skálahozadékú technikai hatékonysági mértékek hányadosát *skála hatékonyságnak* (SE, scale efficiency) nevezzük, azaz

$$SE = TE_{\text{CRS}}/TE_{\text{VRS}} \,.$$

A fenti definícióból közvetlenül kapjuk a

$$TE_{\text{CRS}} = TE_{\text{VRS}} \times SE$$

összefüggést, amely szerint a konstans skálahozamú technikai hatékonysági mérték felbontható a változó hozamú technikai hatékonysági mérték és a skála hatékonyság szorzatára, ahol az utóbbi azt jelzi, hogy milyen messze van a vizsgált döntéshozó egység az optimális működési szintjétől.

A skála hatékonysági mérték egyik hátránya az, hogy nem ad információt arról, hogy a döntéshozó egység növekvő vagy pedig csökkenő skálahozamú tartományban működik. Egy kiegészítő lineáris programozási feladat megoldásával azonban erre is választ lehet kapni. Tekintsük az alábbi *nem-növekvő skálahozamú* (NIRS, non-increasing returns to scale) *DEA modellt,* amelyet úgy kapunk, hogy (6) $1_N^T\lambda = 1$ konvexitási feltételét a $1_N^T\lambda \le 1$ feltételre cseréljük:

$$\begin{aligned} &\min_{\theta,\lambda} \theta \,, \\ &-y_i + Y\lambda \ge 0 \,, \\ &\theta x_i - X\lambda \ge 0 \,, \\ &1_N^T\lambda \le 1 \,, \\ &\lambda \ge 0 \,. \end{aligned} \tag{7}$$

A $1_N^T\lambda \le 1$ feltétel is biztosítja, hogy az i-edik döntéshozó egység ellenében konstruált képzetes döntéshozó egység előállításában ne vegyen részt a vizsgáltnál lényegesen nagyobb döntéshozó egység, kisebb viszont megengedett. Jelölje TE_{NIRS} a (7) feladat optimum-értékét. Nyilván

$$0 \le TE_{\text{CRS}} \le TE_{\text{NIRS}} \le TE_{\text{VRS}} \le 1 \,,$$

és az is megmutatható, hogy a második és harmadik egyenlőtlenség közül legalább az egyik egyenlőségként teljesül.

Az eddig bemutatott input-orientált modellekhez hasonlóan a megfelelő *output-orientált modelleket* is fel lehet írni. Tekintsük először az i-edik döntéshozó egységre vonatkozó *konstans skálahozadékú (CRS) output-orientált*

DEA modellt:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\phi,\lambda} \phi \,, \\
&-\phi y_i + Y\lambda \geq 0 \,, \\
&x_i - X\lambda \geq 0 \,, \\
&\lambda \geq 0 \,.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Azt már tudjuk, hogy van olyan képzett döntéstámogató egység, melyre $x_i \geq X\lambda$ és $Y\lambda \geq y_i$ teljesül, pl. amikor λ az i-edik egységvektor. Az output-orientáció esetén a kérdés az, hogy van-e olyan is, melyre $x_i \geq X\lambda$ és $Y\lambda > y_i$, és ha igen, akkor az y_i output vektort mennyire tudjuk radiálisan növelni úgy, hogy még $Y\lambda \geq \phi y_i$ teljesüljön. A (8) feladat éppen erre ad választ, az optimális ϕ értékre $1 \leq \phi < \infty$ teljesül, és azt jelzi, hogy $(\phi - 1)$-szeres az output értékek arányos növelésének a lehetősége az input értékek változatlanul hagyása mellett. Output orientáció esetén is bevezethető a változó skálahozadékú DEA modell, amely

$$
\begin{aligned}
&\max_{\phi,\lambda} \phi \,, \\
&-\phi y_i + Y\lambda \geq 0 \,, \\
&x_i - X\lambda \geq 0 \,, \\
&1_N^T \lambda = 1 \,, \\
&\lambda \geq 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

alakú. A konstans skálahozadékú modellekre vonatkozó összefüggések itt már nem érvényesek.

A többkritériumú döntéshozatalban megszokott módon az i-edik döntéshozó egységet akkor tekintjük hatékonynak, ha bármely λ-val képzett mesterséges döntéshozó egységre az $x_i \geq X\lambda$ és $y_i \leq Y\lambda$ egyenlőtlenségek teljesüléséből $x_i = X\lambda$ és $y_i = Y\lambda$ következik. Ez azt jelenti, hogy csak úgy tudnánk valamelyik input mennyiséget csökkenteni, vagy valamelyik output mennyiséget növelni, ha közben valamelyik másik inputot növelnénk, vagy valamelyik másik outputot csökkentenénk.

Ha egy döntéshozó egység technikai hatékonysági mutatója nem 1, azaz őt radiális vetítéssel javítani lehet, akkor a fenti értelemben biztosan nem hatékony. A technikai hatékonysági mérték 1 értékéből azonban még nem következik a fenti értelmű hatékonyság.

A hatékonyság ellenőrzésének, illetve a hatékony pontba való lépésnek több módja is van, az egyik a holtjátékok (slackek) összegének a maximalizálása. Tekintsük a következő lineáris programozási feladatot:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\lambda, s^I, s^O} 1_M^T s^O + 1_K^T s^I \,, \\
&-y_i + Y\lambda - s^O = 0 \,, \\
&\theta x_i - X\lambda - s^I = 0 \,, \\
&\lambda \geq 0 \,,\ s^O \geq 0 \,,\ s^I \geq 0 \,,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ahol s^O az output slack változók M-elemű vektora, s^I az input slack változók K-elemű vektora, 1_M és 1_K pedig a csupa 1 elemből álló M, illetve K-elemű vektor. A (10) modellben θ nem változó, hanem konstans. *A (10) modell az (5) konstans skálahozamú input-orientált DEA modellhez tartozó kiegészítő, második fázisú feladat.* Az i-edik döntéshozó egység pontosan akkor hatékony, ha

- (5) optimum-értéke, azaz a döntéshozó egység technikai hatékonysági mértéke 1, és
- (10) optimum-értéke 0.

Az is igaz, hogy a (10) optimális megoldásából nyert $(X\lambda, Y\lambda)$ pont mindig hatékony. A változó skálahozadékú esetre vonatkozó (6) input-orientált modellre hasonló állítás érvényes, csak most a (10) feladatot is ki kell egészíteni a $1_N^T\lambda = 1$ konvexitási feltétellel.

A (8), konstans skálahozadékú output-orientált modellhez tartozó második fázisú lineáris programozási feladat az alábbi:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda, s^I, s^O} \; & 1_M^T s^O + 1_K^T s^I \,, \\ -\phi y_i + Y\lambda - s^O &= 0 \,, \\ x_i - X\lambda - s^I &= 0 \,, \\ \lambda \geq 0 \,,\; s^O \geq 0 \,,\; & s^I \geq 0 \,. \end{aligned} \tag{11}$$

Az állítás hasonló. Az i-edik döntéshozó egység pontosan akkor hatékony, ha

- (8) optimum-értéke, azaz a döntéshozó egység technikai hatékonysági mértéke 1, és
- (11) optimum-értéke 0.

A változó skálahozadékú környezetre vonatkozó (9) output-orientált modell esetén hasonló állítás érvényes, mindössze a (11) feladatot ki kell egészíteni a $1_N^T\lambda = 1$ konvexitási feltétellel.

Hangsúlyozzuk, hogy *mind a konstans, mind pedig a változó skálahozadékú környezetben a fent bemutatott input- illetve output-orientált technika ugyanazokat a döntési egységeket minősíti hatékonynak.* A két orientáció közötti választás függ a konkrét elemzéstől, aszerint, hogy az input csökkentése vagy pedig az output növelése kézenfekvőbb az adott elemzési feladatnál. Változó skálahozadék esetén gyakran mindkét orientációval elvégzik az elemzést.

A két fázis feladatát egyetlen feladatban végzik el a továbbiakban bemutatandó DEA modellek. Nagyon sok ilyen modellvariáns található ma már az irodalomban különféle jelzőkkel (CCR, BCC, input-orientált, output-orientált, primál, duál) ellátva. Ezek ma már külön taxonómiával rendelkeznek, és gyakran elrettentik a Data Envelopment Analysis-szel ismerkedő kezdő olvasót. Hangsúlyozzuk azonban, hogy mind levezethető az egyszerű, geometriailag is könnyen értelmezhető (2) illetve (3) hányados modellből.

Tekintsük először az *input-orientált CCR (Charnes-Cooper-Rhodes) modellt:*

$$
\begin{aligned}
&\min_{\theta,\lambda,s^I,s^O} \theta - \varepsilon 1_M^T s^O - \varepsilon 1_K^T s^I \,, \\
&- y_i + Y\lambda - s^O = 0 \,, \\
&\theta x_i - X\lambda - s^I = 0 \,, \\
&\lambda \geq 0 \,, \; s^O \geq 0 \,, \; s^I \geq 0 \,,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

ahol ε egy megfelelően választott kis pozitív konstans. Könnyen látható, hogy (12) tulajdonképpen az (5) és (10) feladatokból van összerakva. Az eddigiekhez hasonlóan látható, hogy (12) optimum-értéke nem vehet fel 1-nél nagyobb értéket. Megmutatható, hogy van olyan $\varepsilon_0 > 0$, hogy bármely $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ esetén (12) optimum-értéke pontosan akkor 1, ha $\theta = 1$, $s^O = 0$ és $s^I = 0$. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy (5) optimum-értéke 1, és (10) optimum-értéke 0. Tehát kellően kicsi, de pozitív ε esetén az i-edik döntéshozó egység pontosan akkor hatékony, ha (12) optimum-értéke 1. Nem hatékony döntéshozó egység esetén az (5) által szolgáltatott technikai hatékonysági mérték eltérhet (12) optimum-értékétől, de mivel ε a gyakorlatban kicsi, az eltérés elfogadható.

Az output-orientált CCR modell a következő:

$$
\begin{aligned}
&\max_{\phi,\lambda,s^I,s^O} \phi + \varepsilon 1_M^T s^O + \varepsilon 1_K^T s^I \,, \\
&- \phi y_i + Y\lambda - s^O = 0 \,, \\
&x_i - X\lambda - s^I = 0 \,, \\
&\lambda \geq 0 \,, \; s^O \geq 0 \,, \; s^I \geq 0 \,.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

A párhuzam megint nyilvánvaló, (13) a (8) és (11) feladatokból van összerakva. Továbbá kellően kicsi, de pozitív ε esetén az i-edik döntéshozó egység pontosan akkor hatékony, ha (13) optimum-értéke 1.

A (12) és (13) modellek nyilván konstans skálahozadékú környezetben használhatók, akárcsak a (5), (8), (10) és (11) feladatok, amelyekből összerakhatók. Szokás még a (12) és (13) feladatok duálját is felírni, de ezektől itt eltekintünk, mert semmilyen lényeges geometriai vagy közgazdasági jelentéstöbblettel nem rendelkeznek.

A következő, *BCC (Banker-Charnes-Cooper) rövidítésű modellek* szintén közvetlenül levezethetők a korábban a változó skálahozadékú esetre bemutatott kétfázisú modellekből. Az input-orientált BCC modell az alábbi:

$$
\begin{aligned}
&\min_{\theta,\lambda,s^I,s^O} \theta - \varepsilon 1_M^T s^O - \varepsilon 1_K^T s^I \,, \\
&- y_i + Y\lambda - s^O = 0 \,, \\
&\theta x_i - X\lambda - s^I = 0 \,, \\
&1_N^T \lambda = 1 \,, \\
&\lambda \geq 0 \,, \; s^O \geq 0 \,, \; s^I \geq 0 \,,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

az output-orientált BCC változat pedig

$$
\begin{aligned}
&\max_{\phi,\lambda,s^I,s^O} \phi + \varepsilon 1_M^T s^O + \varepsilon 1_K^T s^I , \\
&-\phi y_i + Y\lambda - s^O = 0 , \\
&x_i - X\lambda - s^I = 0 , \\
&1_N^T \lambda = 1 , \\
&\lambda \geq 0 , \; s^O \geq 0 , \; s^I \geq 0 .
\end{aligned} \tag{15}
$$

Látható, hogy akárcsak a kétfázisú modelleknél, a változó skálahozadék esetére vonatkozó BCC modelleket a konstans skálahozadék esetére vonatkozó CCR modellekből nyerhetjük a $1_N^T\lambda = 1$ konvexitási feltétel csatolásával. De levezethetjük a BCC modelleket közvetlenül a megfelelő kétfázisú modellekből is.

Az állítás a változó skálahozadékú BCC modellek esetén is hasonló. E-szerint kellően kicsi, de pozitív ε esetén az i-edik döntéshozó egység pontosan akkor hatékony, ha (14) illetve (15) optimum-értéke 1.

A CCR és BCC modelleken alapuló DEA elemzés kulcskérdése az, hogy miként válasszuk meg az elég kicsi, de még pozitív ε értékét. Elméletileg létezik olyan $\varepsilon_0 > 0$, hogy bármely $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ megfelelő, de az ilyen ε_0 numerikus meghatározása sokkal több ráfordítást igényel, mint a DEA elemzés a többfázisú módszertan használatával.

A DEA programcsomagok egy része eleve többfázisú modelleket alkalmaz. Ilyenkor minden döntéshozó egység kiértékeléséhez kettő vagy több lineáris programozási feladatot kell megoldani. A programcsomagok egy másik része előre beállított nagyon kicsi, pl. $\varepsilon = 10^{-20}$ értékkel számol. Ez kevesebb számú lineáris programozási feladat megoldását igényli, de elméletileg mindig konstruálható olyan feladat, ahol a szoftver egy hatékony döntéshozó egységet nem-hatékonynak minősít. A nagyon kicsi ε a lineáris programozási feladaton belül is jelenthet numerikus nehézségeket. Ezért a legújabb szoftverek általában a többfázisú megközelítést alkalmazzák, akkor is, ha a felhasználó felé a kompaktabb CCR vagy BCC modelleket kínálják.

A Data Envelopment Analysis a hatékonyság-elemzésre szolgáló módszerek közül az egyik. Számos előnye van más módszerekkel szemben, de bizonyos korlátokkal is rendelkezik.

Az *előnyök:*

- A hatékonyságot egyetlen mérőszámmal jellemzi.
- A nem-hatékony pontokat - az orientációtól függően - a hatékony pontok felületére vetíti, ezzel irányt mutat a hatékonyság javítására.
- Teljesen eltérő mértékegységű inputok és outputok kezelését teszi lehetővé.
- A legjobban teljesítő döntéshozó egységek által kifeszített felülethez viszonyít, nem pedig az átlagos teljesítményhez, miként azt a regresszióelemzés tenné.

- Nincs függvényszerű kapcsolat feltéve az inputok és az outputok között.

A módszertan *korlátjai:*

- A módszertan nem tesz megkülönböztetést a hatékony döntési egységek között, azaz nem rangsorolja őket.

- Az adott adathalmazhoz viszonyítva határozza meg relatív hatékonysági mértékeket, nem pedig valamilyen elméleti optimális felülethez viszonyítva, ezért egyetlen kiugró adat, egyes inputok vagy outputok vizsgálatból való kihagyása, vagy újak bevonása is lényegesen befolyásolhatja a hatékonysági mértékeket.

3 Az ipari parkok célkitűzéseinek és azok megvalósulásának elemzése

A DEA elemzés előtt röviden tekintsük át az ipari parkokat az elemzésben majd felhasználandó input és output adatok statisztikai jellemzőinek oldaláról.

Az Ipari Parkok a címpályázat beadásakor öt évre előre tervet készítenek a park teljesítményének megítélésére leginkább alkalmas gazdasági mutatók értékéről. Ezek az alábbiak:

- betelepülő vállalatok száma,

- foglalkoztatottak száma,

- a fejlesztésbe bevont terület nagysága,

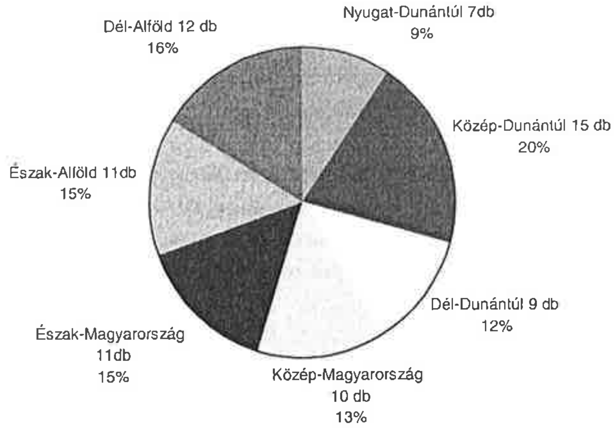
- a fejlesztésbe bevont terület nagyságának aránya a teljes rendelkezésre álló területhez,

- az árbevétel értéke,

- a beruházások nagysága.

Az *1. ábra* az ipari parkok számának eloszlását mutatja 1998-ban régiók szerint az ország területén. Azt látjuk, hogy az ipari parkok nagyjából egyenletesen vannak szétszórva az ország különböző régióiban, talán Közép-Dunántúlt tekinthetjük némileg túlreprezentáltnak. Ez az eredmény azért lényeges, mert mint látni fogjuk, ez a nagyjából egyenletes számszerű eloszlás nagymértékben eltérő jellemzőkkel rendelkező ipari parkokat takar.

Az *1. táblázat* 1997 és 2001 között kíséri végig a kiemelt mutatókban történt vállalásokat. Ez a táblázat nem csak az alapadatokat, hanem az alapadatok átlagát és relatív szórását is tartalmazza.



1. ábra. Az ipari parkok száma és regionális megoszlása 1998-ban

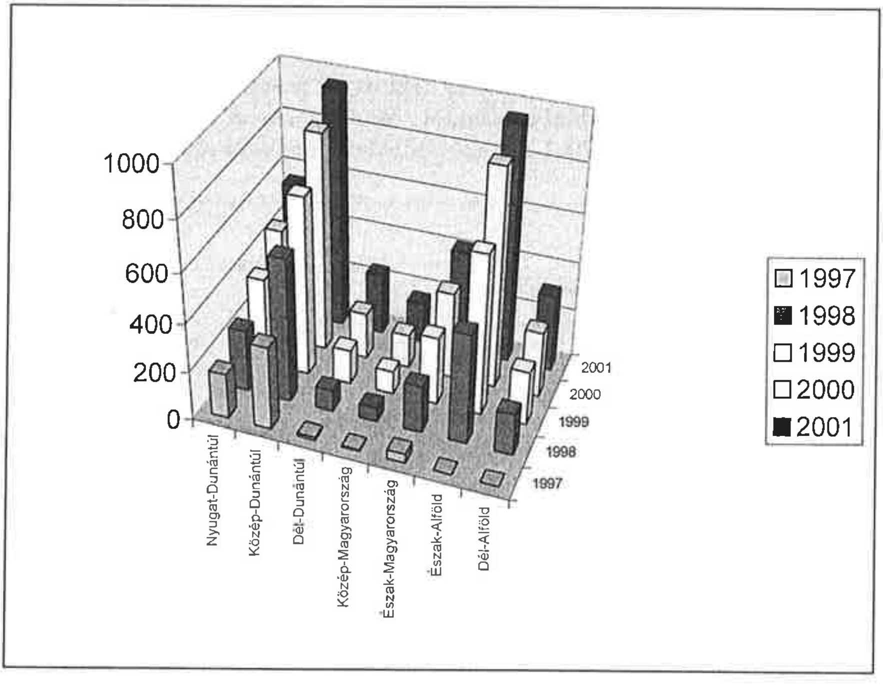
Ezek az alapstatisztikák jól mutatják azt a problémát, amely további elemzéseinkben is figyelembe veendő: az egyes ipari parkok méretükben és teljesítményükben nagyon eltérő képet mutatnak. Megfigyelhető, hogy egyes mutatóinknál a relatív szórás magas értékeket vesz föl – jelezve, hogy az ipari parkok az egyes mutatókban igen heterogének.

		Betel. vállal-kozás (db)	Fogl. lét-szám (fő)	Össz-terü-let (ha)	Beép. terü-let (ha)	Beruh. érték (MFt)	Ár-bevétel (MFt)	Export (MFt)
1997	Összeg	346	31788	2291.5	581.9	160141	632922	492520
	Átlag	12.36	1177.3	81.8	20.8	5719	22604	17590
	Rel. szórás	1.60	1.70	0.87	1.49	1.97	2.69	3.17
1998	Összeg	838	63238	4785.8	1791.3	300387	848893	609342
	Átlag	11.17	843.2	63.8	23.9	4005	11319	8125
	Rel. szórás	1.33	1.74	1.29	1.76	2.41	3.44	4.38
1999	Összeg	1183	86151	4785.8	2482.3	383652	994050	711806
	Átlag	15.77	1148.7	63.8	33.1	5115	13254	9491
	Rel. szórás	1.01	1.45	1.29	1.74	2.03	2.98	3.83
2000	Összeg	1536	109690	4785.8	3193.2	486563	1197684	859467
	Átlag	20.48	1462.5	63.8	42.6	6488	15969	11460
	Rel. szórás	0.86	1.28	1.29	1.74	1.83	2.54	3.25
2001	Összeg	1844	122735	4785.8	3646.1	526314	1398480	1001038
	Átlag	24.59	1636.5	63.8	48.6	7018	18646	13347
	Rel. szórás	0.81	1.24	1.29	1.55	1.73	2.24	2.85
2001/1998 arány		2.20	1.94	1.00	2.04	1.75	1.65	1.64

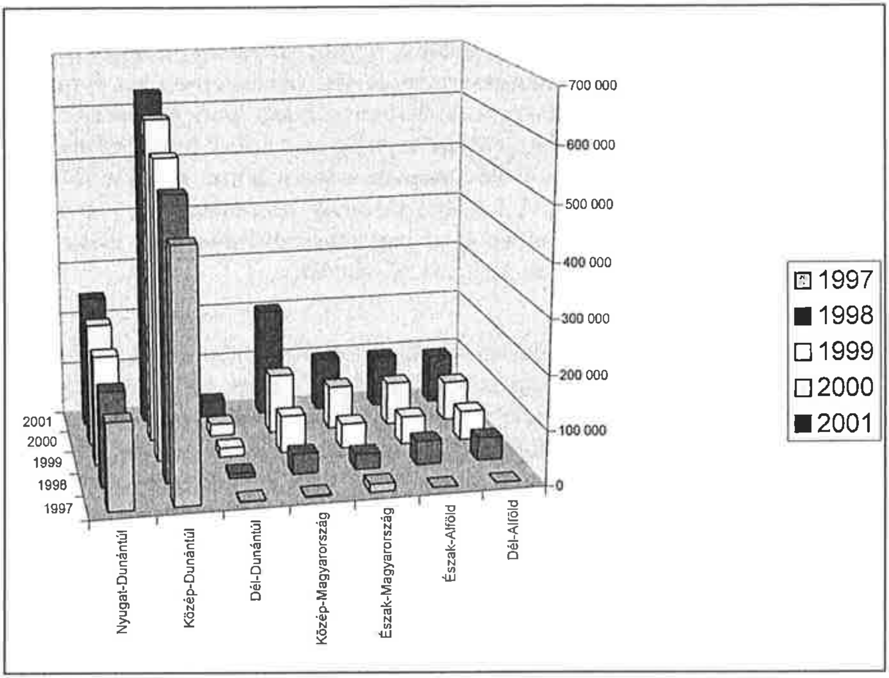
1. táblázat. Ipari parkok országos statisztikája

Fordítsuk most figyelmünket a vállalásokban megmutatkozó fejlődési trendekre. A táblázat utolsó sorában találjuk a 2001-re vállalt mutatókban az 1998-as állapothoz képest felmutatandó fejlődést. (Azért erre a két évre számoljuk a fejlődési mutatót, mert az 1998-ban pályázó ipari parkoknak még nincs 1997-es adata, az 1997-ben pályázók pedig nem adtak meg 2002-es adatot. Az 1998 és 2001 közötti évekre vannak a teljes körre, mind a 75 ipari parkra vonatkozó adataink.) A foglalkoztatottak számában 194, a beruházási értékben 175, az árbevételben és az exportárbevételben 165, illetve 164 százalék a négy éves periódusra kitűzött növekedés.

Bár az országos adatok is lényegesek, hasznosabb azonban, ha az adatokat megnézzük regionális bontásban is. Az országot 7 nagy területre felosztva (Nyugat-Dunántúl, Közép-Dunántúl, Dél-Dunántúl, Közép-Magyarország, Észak-Magyarország, Észak-Alföld, Dél-Alföld) az 1998-ról 2001-re ígért fejlődés mindegyik régióban magas, egyes régiókban az országos növekedési átlagot is meghaladja. A *2. és 3. ábra* a beépített összterület és az árbevétel régiónkénti vállalásainak dinamikáját mutatja.

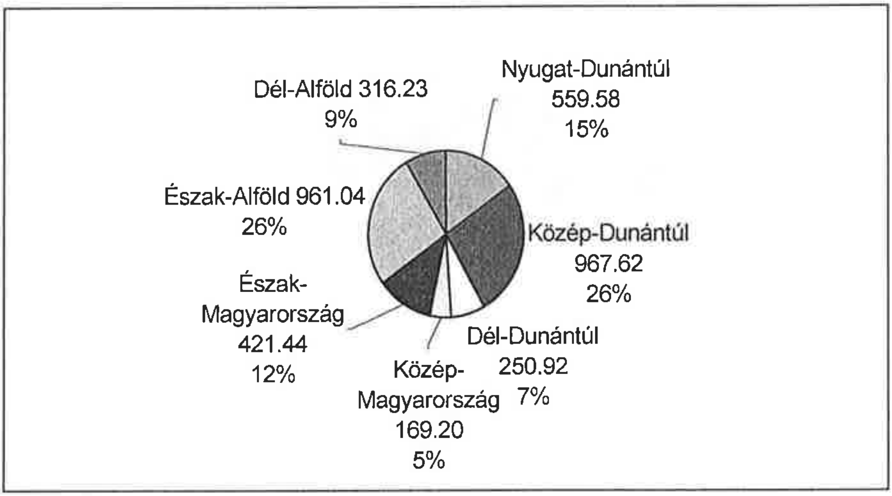


2. ábra. Beépített összterület régiónként a vállalások alapján (ha)

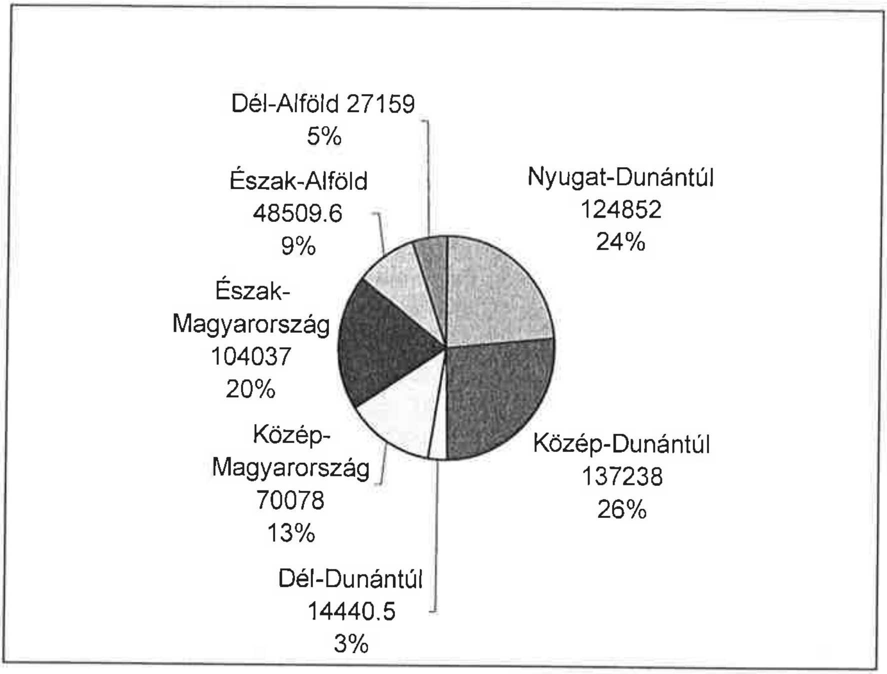


3. ábra. Árbevétel régiónként a vállalások alapján (MFt)

Ha mutatónként a 2001 évet célnak tekintve elemezzük az ígért fejlődést, akkor a 4. és 5. ábrák például a beépített összterületre és a beruházási összértékre vonatkozó adatok 2001-re bekövetkező regionális eloszlást illusztrálják.



4. ábra Beépített összterület és megoszlásuk régiónként 2001-ben a vállalások alapján (ha)



5. ábra. Beruházási összértékek és megoszlásuk régiónként 2001-ben a vállalások alapján (MFt)

Ha az összes hasonló ábrát tekintjük, akkor azt látjuk, hogy Közép-Dunántúl minden mutatóban „tarol": bár a betelepülő vállalatok száma az összvállalatszámnak csak 19%-a (ugyanannyi, mint amit például Észak-Magyarország tervez), de a beruházási összértékben és a beépített összterületben már az ország összes ipari parkja beruházásának és foglalkoztatottjának 26%-át tervezi, a foglalkoztatottak számában 37%, az árbevételben 45%, az export árbevételben pedig 52% lesz a részaránya! A másik nagy részesedésű terület a Nyugat-Dunántúl. Itt a betelepülő vállalatok 11%-a a beruházási összérték 24%-ával az árbevétel és az export árbevétel 18, illetve 19%-át termeli majd.

Ha az ország keleti és nyugati felét tekintjük, akkor a betelepülő vállalatok számában, a beépített összterületben (Dunántúl: 48%), a foglalkoztatottak számában (Dunántúl: 55%) még kiegyensúlyozottság tapasztalható, az igazán lényeges jellemzőkben azonban már elbillennek az arányok (beruházási összérték: 53%), vagy egyértelmű koncentrálódás van az ország nyugati felére: az árbevételben 65%, az export árbevételben 72%. Tovább árnyalja a képet, hogy az ipari parkok teljesítményét tekintve a Dunántúl is kétfelé szakad: Dél-Dunántúl – ahová 9 ipari parkban a betelepülő vállalkozások 9%-a települ 2001-ben, árbevételben és export árbevételben nem fogja elérni a 2, illetve 1%-ot.

Tudva azt, hogy ezekben a számokban egy-egy kivételes potenciállal rendelkező ipari park is benne van, és ezek "húzzák" Nyugat-Dunántúl és Közép-Dunántúl teljesítményét, mégis érdemes arra felhívni a figyelmet, hogy az ipari parkok esetében sem hagyhatjuk az országban „szokásos" kettészakadást továbbélni, s a regionális gazdaságpolitikai céloknak —akár speciális támogatásokkal— érvényt kell szerezni.

A DEA elemzésben megjelenő ipari parkok alaphalmazának kialakításához megnéztük azt, hogy a vállalások és teljesítések hogyan viszonyulnak egymáshoz. A régiónkénti teljesítéseknél a Közép-Dunántúl domináló szerepéről hasonlókat mondhatunk el, mint amit a vállalásoknál tettünk. Meglepő volt viszont, hogy Észak-Magyarország ipari parkjai milyen jól teljesítettek.

A 75 ipari park közül azokat tudtuk a számításokba bevonni, amelyek 1998-ban teljesítéssel rendelkeztek. Összesen 50 ilyen tulajdonságú ipari parkot találtunk. Ezek közül 19 az 1997-es évben nyerte el az ipari park címet, 31 pedig 1998-ban. A két csoportot külön kezeltük, mert míg az egyiknek két év, a másiknak egyetlen év állt rendelkezésére, hogy önmagát „hatékony" egységgé tegye. Külön-külön futtatásokat végeztünk el tehát az 1997-es és az 1998-as indulású ipari parkokra, ezáltal a csoportokon belüli homogenitást biztosítva.

4 Az ipari parkokra vonatkozó DEA számítások

Modelljeink output-orientáltak, mind konstans, mind változó skálahozadék mellett kiszámolják a hatékony egységeket és a súlyokat. Számításaink során a DEAP programcsomagot használtuk fel: Coelli, T., D.S. Prasada Rao és G.E. Battese (1998).

A DEA esetében a leglényegesebb kérdés az inputok és az outputok meghatározása. Közgazdasági megfontolások alapján inputnak tekintettünk két mutatót:

- Beruházási érték
- GFC+TFC támogatás

(az első az általános, a második a speciális céltámogatás nagysága). Outputnak a szűkebb esetben két mutatót vettünk:

- Exportárbevétel
- A beépített terület %-os nagysága

Ezen választás logikája az volt, hogy az inputként választott mutatók hatására történik egyrészt a betelepült vállalatok eredményességét mutató árbevétel elérése (itt a beruházás a meghatározó), másrészt az ipari park infrastrukturális fejlesztése (itt a támogatás a másik befolyásoló tényező).

A két output-két input változat mellé felvettünk egy négy output-két input mutatókkal operáló másik változatot is, ahol az újabb output-értékek:

- Teljes árbevétel
- Foglalkoztatottak száma

Az 1997-ben a címet elnyert ipari parkok 2 output-2 input futtatásainak jelölése a további elemzésben 1997/a, ugyanezekre az ipari parkokra a 4 output-2 input változat jelzője 1997/b. Az 1998-ban a címet elnyert ipari parkoknál a 2 output-2 input változat az 1998/a, a 4 output-2 input változat az 1998/b.

Számításaink során az alábbi kérdésekre kerestünk választ:

1. Melyek az adott futtatási változatban szereplő mutatók szerint „hatékony" ipari parkok?

2. Mekkora az egyes ipari parkok technikai hatékonysága?

3. A „nem-hatékony" egységek milyen súlyokkal „keverhetők ki" a hozzájuk legközelebb eső „hatékony" egységekből? Hányszor szerepel egy adott hatékony egység az ilyen típusú előállításokban?

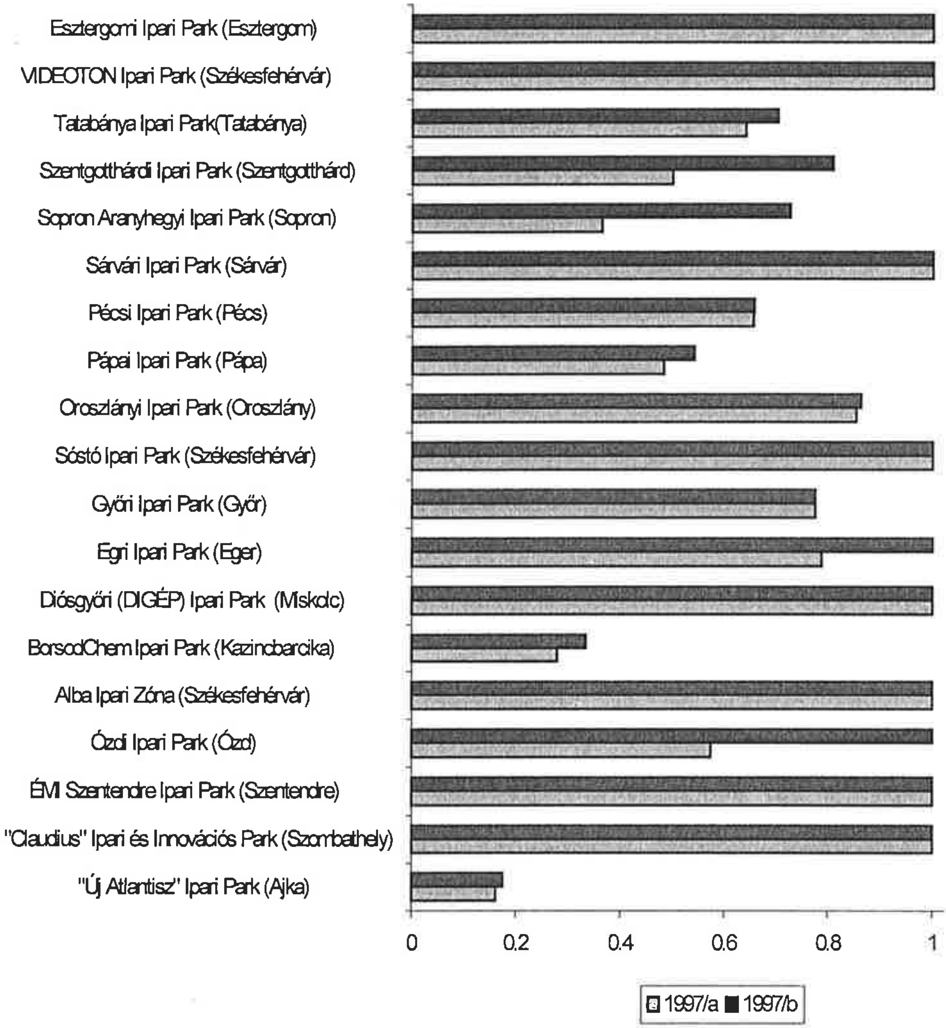
Az eredmények értelmezése nagyfokú óvatosságot igényel és csak a felhasznált módszertan feltételeinek és korlátainak szem előtt tartásával lehetséges.

Az első és második kérdésre adandó válaszok a 6. és 7. ábrából olvashatók ki. Az ábrákban az 1 értékek jelzik azt, hogy az adott ipari park az outputok és inputok súlyozott hányadosa alapján hatékonynak tekinthető. A többi ipari parknál a 0-1 közötti értékek a hatékonyság mértékét jelzik. Látható, hogy már a 2 output-2 input változat is jól jellemzi a sokaságot, mert a 2 újabb output hozzávételével nem történik jelentős változás.

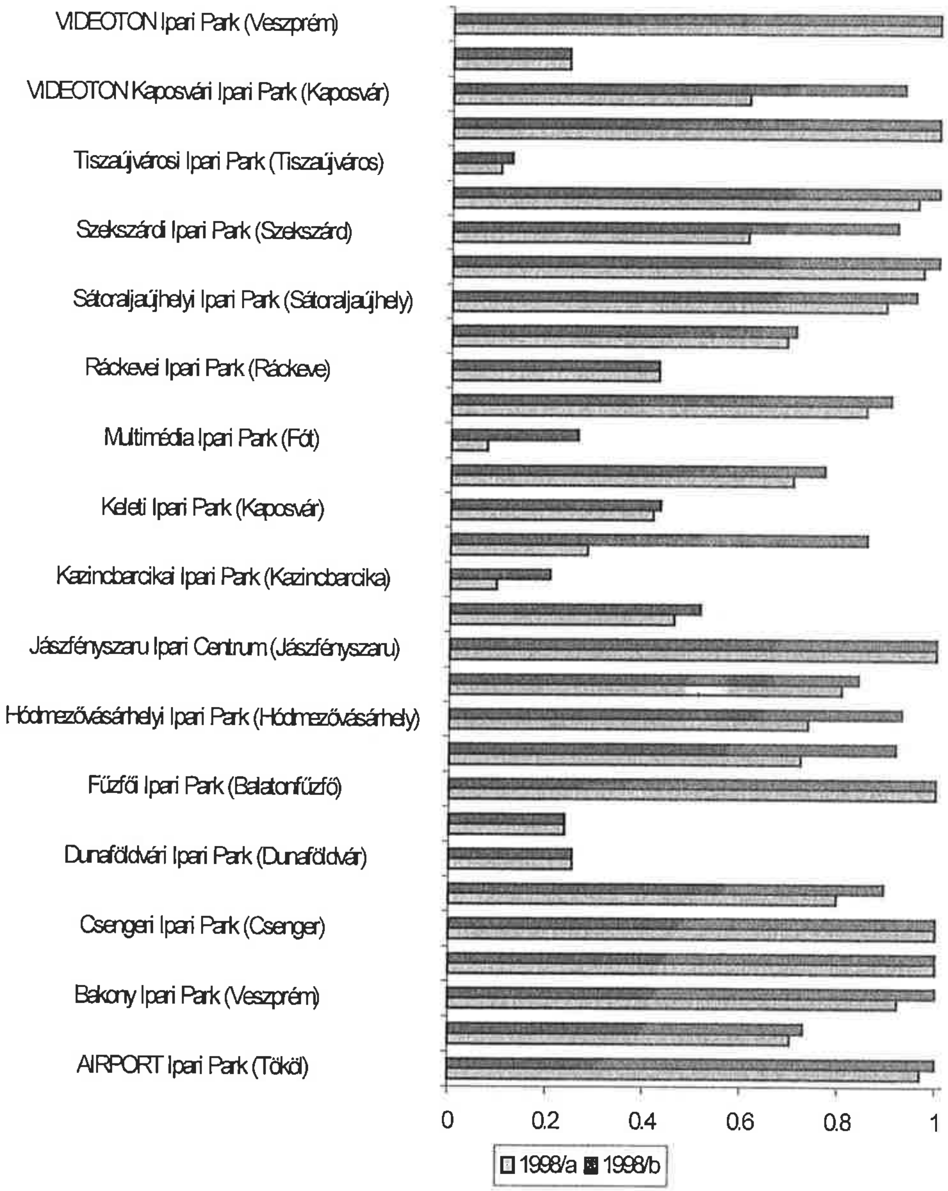
Mi okozza a „kiemelkedőnek" számító ipari parkok jó szereplését? Ennek a kérdésnek a megválaszolásához vissza kell térnünk a DEA geometriájához. Mint a DEA leírásában láttuk, a módszer megkeresi a térben azokat a nem-dominált pontokat, amelyekhez képest a többiek (output-orientált esetben) a hatékony felület „alatt" helyezkednek el. Eközben nincs arról szó, hogy ez a „hatékonyság" milyen szinten következett be: lehetséges, hogy egy egység hatékony besorolású alacsony szintű input-output kombináció esetében, míg egy másik —valamely outputban kiemelkedőt produkáló— egység egy másik output relatív rossz helyzete miatt nem kerül a hatékony felületre. Ennek oka az, hogy itt a hatékony input-felhasználásról van szó: ez utóbbi egységnek a felhasznált input segítségével illett volna „többet kihoznia" magából.

Az ábrák a hatékonysági értékeket teszik vizuálisan érzékletesebbé. Leolvasható, hogy 1997-ben a tizenkilenc ipari parkból nyolc (a b. változat szerint tíz) lett hatékony. Ezeknél a VRS (Variable Return to Scale) technikai hatékonysági együttható értéke 1. Igazán gyengén szereplő ipari parkként mindössze 2 ipari parkot hoznak ki a számítások: ezek az „Új Atlantisz" Ipari Park (Ajka) és a BorsodChem Ipari Park (Kazincbarcika).

Jól láthatóan érdemes volt elkülönítenünk egymástól az 1997-es és 1998-as csoportot. Míg az 1997-es csoportban már látható volt némi „megállapodottság", az 1998-ban ipari címet elnyert egységek még a kezdeti teljesítés stádiumában lévén nagyon szétszórt hatékonysági képet mutatnak – illetve a többség még nem érte utól a jó helyzetből indulókat. A 2 outputos a. változatban a 31 ipari parkból 6 bizonyul hatékonynak, a 4 outputot számításba vevő b. változatban a hatékony ipari parkok száma 10. További 9 ipari park együtthatója nagyobb, mint 0.8. Itt is megállapítható, hogy nagyon gyenge teljesítményt mindössze 6 ipari park nyújt. Ezek: Dunaföldvári Ipari Park, Első Szegedi Ipari Park, Kazincbarcikai Ipari Park, Multimédia Ipari Park (Fót), Tiszaújvárosi Ipari Park és a Záhonyi Város Ipari Park.



6. ábra. Az 1997/a és 1997/b futtatásokból kapott technikai hatékonysági VCR értékek



7. ábra. Az 1998/a és 1998/b futtatásokból kapott technikai hatékonysági VCR értékek

Firm	Peer			Súlyok			n
1	18	3	5	0.002	0.929	0.069	
2	2			1.000			2
3	3			1.000			6
4	14	3		0.170	0.830		
5	5			1.000			6
6	14	5	3	0.031	0.624	0.345	
7	7			1.000			
8	18	5		0.021	0.979		
9	18	5	14	0.600	0.160	0.240	
10	10			1.000			
11	14	3		0.050	0.950		
12	5	3		0.490	0.510		
13	18	5		0.010	0.990		
14	14			1.000			5
15	3	2		0.582	0.418		
16	18	2		0.613	0.387		
17	14			1.000			
18	18			1.000			5
19	19			1.000			

2. táblázat. A nem-hatékony elemek peer-jei

A futtatási eredményekből a 3. kérdésünkre adandó válaszhoz emelünk még ki néhány adatot. A *2. táblázat* a nem-hatékony ipari parkok peer-jeit és az előállítás súlyait adja meg. Az utolsó oszlop azt mondja meg, hogy az 1997/b változatú modellben az egyes kiemelkedő (hatékony, "peer") ipari parkok hányszor szerepeltek egy nem-hatékony ipari park előállításában. A táblázat a DEAP program eredménytábláiból készült.

A táblázat értelmezésénél vegyük figyelembe a DEA alapgondolatát. Ha tehát arról beszélünk, hogy egy „peer" egy másik egység számára mintául szolgál, akkor ezt úgy értjük, hogy az adott szinten őt tekintve példaképnek a másik egység is jobb eredményt érhetne el. Mivel tudjuk, hogy az általunk figyelembe vett inputok és outputok mellett még nagyon sok hatással kell számolni egy adott ipari park teljesítményének megítélésénél (honnan indult, melyek a regionális feltételek, stb.) ezért számításaink technikai jellegűek. Nem azt mondjuk tehát, hogy például Egernek Szombathelyhez kellene hasonlítania a szó szoros értelmében, hanem azt, hogy az erőforrások felhasználásában kell példaként szolgálnia – vagy még egyszerűbben: teljesítményben egymáshoz ők vannak (a leolvasható súlyszám által meghatározhatóan) a legközelebb.

5 Következtetések, javaslatok

A gazdaságfejlesztési és regionális fejlesztési politika összekapcsolása versenyképes termelő és szolgáltató egységek koncentrált kiépítésével nem megy végbe egyik napról a másikra. Az ipari parkok esetében hosszú távú programról van szó, amelynek az első három év után csak az első eredményeit lehet értékelni. Valószínű, hogy az első nagyobb lélegzetű, összefoglaló értékelésre csak 2002-ben kerülhet sor, sőt, nem túlzás megkockáztatni azt sem, hogy inkább 10-15 éves időtávban érdemes gondolkodni.

Érdemes megjegyezni, hogy az ipari park program olyan támogatási forma, amelynek kiadási oldala jóval alatta marad egyéb gazdaságfejlesztési, versenyképességet növelő, beruházásösztönző programoknak. Itt elsősorban a régió feltörekvő gazdasági és politikai (kormányzati, önkormányzati) szereplőinek van pozitív hatása: az ő kezdeményezésükre beinduló folyamatok tovagyűrűző hatása teremti meg azt a környezetet, amely a közvetlenül befektetett állami támogatás sokszorosát képes az ipari parkba betelepülő vállalkozásokon keresztül meghozni.

Tudva azt, hogy elemzéseinkben egy-egy kivételes potenciállal rendelkező ipari park is benne van, és ezek „húzzák" Nyugat-Dunántúl és Közép-Dunántúl teljesítményét, mégis érdemes arra felhívni a figyelmet, hogy az ipari parkok esetében sem hagyhatjuk az országban „szokásos" kettészakadást továbbélni, s a regionális gazdaságpolitikai céloknak —akár speciális támogatásokkal— érvényt kell szerezni.

Éppen ennek a célnak az eléréséhez használható fel az általunk alkalmazott Data Envelopment Analysis technika. A továbbiakban is érdemes lenne —az alapvető statisztikai feldolgozásokon túl— ezt a hatékonysági módszertant alkalmazni, akár úgy is, hogy egy külön erre a célra képzett adathalmaz legyen a modell bázisa. Ezáltal a nem-hatékony ipari parkoknál megadható lenne a fejlődés iránya.

Sajnos az adatok elégtelensége miatt nem tudtuk a naturális mutatókban bekövetkezett eredményeket mérni, pedig a módszertan egyik nagy előnye, hogy képes az eltérő típusú inputokat és outputokat kezelni. Javasoljuk, hogy ezek az adatok is kerüljenek be (terv- és tényértékekkel) a rögzített és elemzendő alapadatok közé.

Irodalom

1. Ali, A. I. (1994) "Computational Aspects of DEA", a Charnes A., W. W. Cooper, A. Y. Lewin és L. M. Seiford (1994) szerk.: *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*, Kluwer, Boston kötetben, 63–88.

2. Ali, M. és L. M. Seiford (1993) "The Mathematical Programming Approach to Efficiency Analysis", a *The Measurement of Productive Efficiency: Techniques and Applications*, szerk.: Fried, H. O., C. A. K. Lovell és S. S. Schmidt kötetben, Oxford University Press, New York, 120–159.

3. Allen, R., A. Athanassopoulos, R. G. Dyson és E. Thanassoulis (1997) "Weight restrictions and value judgements in Data Envelopment Analysis: Evolution, development and future directions" a Lewin, A. Y. és L. M. Seiford szerk.: *From Efficiency Calculations to a New Approach for Organizing and Analyzing: DEA Fifteen Years Later*, Annals of Operations Research 73, Baltzer, Amsterdam kötetben, 13–34.

4. Banker, R. D., A. Charnes és W. W. Cooper (1984) "Some Models for Estimating Technical and Scale Efficiencies in Data Envelopment Analysis", *Management Science* 30, 1078–1092.

5. Banker, R. D. és R. M. Thrall (1992) "Estimation of Returns to Scale Using Data Envelopment Analysis", *European Journal of Operational Research* 62, 74–84.

6. Byrnes P. és Valdmanis, V. (1994) "Analyzing Technical and Allocative Efficiency of Hospitals", a Charnes A., W. W. Cooper, A. Y. Lewin és L. M. Seiford szerk.: *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*, Kluwer, Boston kötetben, 129–143.
7. Charnes A., W. W. Cooper, D. Divine, T. W. Ruefli és D. Thomas (1989), "Comparisons of DEA and Existing Ratio and Regression Systems for Effecting Efficiency Evaluations of Regulated Electric Cooperations in Texas", *Research in Governmental and Nonprofit Accounting* 5, 187–210.
8. Charnes, A., W. W. Cooper, B. Golany, L. Seiford és J. Stutz (1985), "Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions", *Journal of Econometrics* 30, 91–107.
9. Charnes A., W. W. Cooper, A. Y. Lewin és L. M. Seiford (1994) szerk.: *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications*, Kluwer, Boston
10. Charnes, A., W. W. Cooper és E. Rhodes (1978) "Measuring Efficiency of Decision Making Units", *European Journal of Operational Research* 2, 429–444.
11. Charnes, A., W. W. Cooper és R. M. Thrall (1991) "A Structure for Classifying and Characterizing Efficiency and Nonefficiency in Data Envelopment Analysis", *Journal of Productivity Analysis* 2, 197–237.
12. Chilingerian, J. A. és H. D. Sherman (1997) "DEA and primary care physician report cards: Deriving preferred practice cones from managed care service concepts and operating strategies, a Lewin, A.Y. és L. M. Seiford szerk.: *From Efficiency Calculations to a New Approach for Organizing and Analyzing: DEA Fifteen Years Later*, Baltzer, The Netherlands kötetben, 35–66.
13. Coelli, T., D. S. Prasada Rao és G.E. Battese (1998) *An Introduction to Efficiency and Productivity Analysis*, Kluwer, Boston
14. Cooper, W. W., R. G. Thompson és R. M. Thrall (1996) "Introduction: Extensions and new developments in DEA, a Hammer, P. L. szerk.: *Extensions and New Developments in Data Envelopment Analysis*, Annals of Operations Research 66, Baltzer, Amsterdam kötetben, 1–46.
15. Danyi, P. és Varró, Z. (1995) *Operációkutatás. Lineáris programozás*, Pécs, 122–127.
16. English, M., S. Grosskopf, K. Hayes és S. Yaisawarng (1993) "Output Allocative and Technical Efficiency of Banks", *Journal of Banking and Finance* 17, 349–366
17. Färe, R. és C. A. K. Lovell (1978) "Measuring the Technical Efficiency of Production", *Journal of Economic Theory* 19, 150–162.
18. Farrell, M. J. (1957) "The Measurement of Productive Efficiency", *Journal of Royal Statistical Society*, Series A 120, 253–290.
19. Finlay, P. N. és G. Gregory (1994) "A Management Support System for Directing and Monitoring the Activities of University Academic Staff", *Journal of the Operational Research Society* 45, 641–650.
20. Ganley, J. A. és J. S. Cubbin (1992) *Public Sector Efficiency Measurements: Applications of Data Envelopment Analysis*, North Holland, Amsterdam
21. Hammer, P. L. (1996) szerk.: *Extensions and New Developments in Data Envelopment Analysis*, Annals of Operations Research 66, Baltzer, Amsterdam
22. Lewin, A. Y. és L. M. Seiford (1997) szerk.: *From Efficiency Calculations to a New Approach for Organizing and Analyzing: DEA Fifteen Years Later*, Annals of Operations Research 73, Baltzer, Amsterdam

23. Norman, M. és B. Stoker (1991) *Data Envelopment Analysis: An Assessment of Performance*, Wiley, New York

24. Seiford, L. M., és R. M. Thrall (1990) "Recent Developments in DEA", *Journal of Econometrics*, 46, 7–38.

25. Yu, G., Q. Wei és P. Brockett (1996) "A generalized data envelopment analysis model: A unification and extension of existing methods for efficiency analysis of decision making units", a Hammer, P. L. szerk.: *Extensions and New Developments in Data Envelopment Analysis*, Annals of Operations Research 66, Baltzer, Amsterdam kötetben, 47–89.

26. Zeng, G. (1996) "Evaluating the efficiency of vehicle manufacturing with different products", a Hammer, P. L. szerk.: *Extensions and New Developments in Data Envelopment Analysis*, Annals of Operations Research 66, Baltzer, Amsterdam kötetben, 299–310.

DATA ENVELOPMENT ANALYSIS FOR EVALUATING THE EFFICIENCY OF INDUSTRIAL PARKS IN HUNGARY

The paper reports on the results of a project for evaluating the efficiency of industrial parks in Hungary. The aim of the project was to review how the formal support and the financial subsidy from the Ministry of Economic Affairs had been used. The efficiency of the industrial parks cannot be evaluated from a single aspect but from several ones. A part of these aspects can be considered as inputs and another part as outputs. It was thus an obvious idea to use the methodology of data envelopment analysis (DEA) for this evaluation considering the industrial parks as decision making units (DMU). The paper gives a solid review on the basic models and methodology of DEA, and applies them for evaluating the industrial parks. Computational results and their analysis are also presented.

ÁLTALÁNOSÍTOTT MONOTONITÁS MIKROÖKONÓMIAI MODELLEKBEN[1]

KOMLÓSI SÁNDOR
PTE Közgazdaságtudományi Kar

Az általánosított monotonitás „karrierje" 1990-ben a Karamardian-Schaible cikk megjelenésével kezdődött. Ebben a cikkben a szerzők többváltozós differenciálható függvények általánosított konvexitási tulajdonságait vizsgálták és megmutatták, hogy ezek a tulajdonságok a szóbanforgó függvények gradiensének bizonyos általánosított monotinitási tulajdonságaival ekvivalensek. Ez a tanulmány arra hívja fel a figyelmet, hogy az általánosított monotonitás, mint természetes módon jó tulajdonság, már reflektorfénybe kerülése előtt is számos közgazdasági munkában, mikroökonómiai modellben megjelent.

1 Bevezetés

Az általánosított monotonitás „karrierje" 1990-ben a Karamardian-Schaible cikk [16] megjelenésével kezdődött. Ebben a cikkben a szerzők differenciálható többváltozós függvények általánosított konvexitási tulajdonságait vizsgálták és megmutatták, hogy ezek a tulajdonságok a szóbanforgó függvények gradiensének bizonyos általánosított monotonitási tulajdonságaival ekvivalensek.

A pszeudomonotonitás fogalmát S. Karamardián vezette be egy 1976-ban megjelent cikkében [15]. Ennek a tulajdonságnak a használhatóságára már korábban is rájöttek. Reinhard John hívta fel a figyelmet arra (lásd [11]), hogy Wald Ábrahám, híres egzisztencia bizonyításában, ezt a tulajdonságot feltételezve tudta a Walras-féle egyensúlyi modell megoldhatóságát bizonyítani [27]. Ugyancsak R. John mutatott rá arra, hogy Samuelsonnak „a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája" nem más, mint a szigorú pszeudomonotonitás megkövetelése [12].

A kvázimonotonitás fogalmát 1983-ban vezette be A. Hassouni marokkói matematikus [9]. Azóta több változata is az érdeklődés középpontjába került. Az egyik legfigyelemreméltóbb változatát a valódi kvázimonotonitást Daniilidis és Hadjisavvas vezették be [4]. Keresleti relációk, illetve keresleti leképezések racionalizálásában játszott szerepére ugyancsak R. John mutatott rá először [12, 14].

1.1 Jelölések

X, Y a továbbiakban lokálisan konvex Hausdorff-féle topologikus vektorteret jelölnek.

[1]Beérkezett: 2001. június 25. E-mail: komlosi@ktk.pte.hu

$\Re$ a valós számok halmazát, $\Re_+$ ($\Re_-$) pedig a nemnegatív (nempozitív) valós számok halmazát jelöli.

$L(X,Y)$ az X-en értelmezett és Y-ba képező folytonos lineáris operátorok terét jelöli.

$X^* = L(X,\Re)$ az X topologikus duálját jelöli, vagyis az X-en értelmezett folytonos lineáris funkcionálok terét.

Az $\langle x^*, x\rangle$, $x^* \in X^*$ és $x \in X$ bilineáris forma jelentése: $\langle x^*, x\rangle = x^*(x)$. Ha $F \subseteq X^*$ és $x \in X$, akkor $\langle F, x\rangle$ jelentése a következő:

$$\langle F, x\rangle = \{\langle f, x\rangle : f \in F\}.$$

Annak ellenére, hogy közgazdasági alkalmazásokban X, Y rendszerint véges dimenziós euklideszi terek, én mégis —ahol lehet— az általánosságnak ezt a szintjét tekintem. Aki nem szívesen kalandozik a véges dimenzióból végtelenbe, az nyugodtan gondolja azt, hogy $X = \Re^n$, amikor is $X^* = \Re^n$ és az $\langle x^*, x\rangle$ bilineáris forma pedig az x, x^* n-dimenziós vektorok skaláris szorzata.

1.2 Kvázimonotonitás és pszeudomonotonitás

Ebben a részben —pusztán a rend kedvéért— két klasszikus eredményt szeretnék felidézni [16].

1. Definíció. *Az $f(x)$ függvényt az A konvex halmazon* kvázikonvex*nek mondjuk, ha bármely $x, y \in A$ és bármely $0 \le \lambda \le 1$ esetén*

$$f(x) \le f(y) \Longrightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le f(y)\,. \tag{1}$$

Az $F : A \to X^*$, $A \subseteq X$ leképezést az A halmazon kvázimonoton*nak nevezzük, ha bármely $x, y \in A$ esetén*

$$\langle F(x), y - x\rangle > 0 \Longrightarrow \langle F(y), x - y\rangle \le 0\,. \tag{2}$$

2. Definíció. *Az $f(x)$ függvényt az A konvex halmazon* pszeudokonvex*nek mondjuk, ha bármely $x, y \in A$ esetén*

$$f(x) < f(y) \Longrightarrow \langle \nabla f(y), x - y\rangle < 0\,. \tag{3}$$

Az $F : A \to X^*$, $A \subseteq X$ leképezést az A halmazon pszeudomonoton*nak nevezzük, ha bármely $x, y \in A$ esetén*

$$\langle F(x), y - x\rangle \ge 0 \Longrightarrow \langle F(y), x - y\rangle \le 0\,. \tag{4}$$

Az $F : A \to X^*$, $A \subseteq X$ leképezést az A halmazon szigorúan pszeudomonoton*nak nevezzük, ha bármely $x, y \in A, x \ne y$ esetén*

$$\langle F(x), y - x\rangle \ge 0 \Longrightarrow \langle F(y), x - y\rangle < 0\,. \tag{5}$$

A következő alaptétel teremt kapcsolatot az általánosított monotonitás és az általánosított konvexitás között. Legyen $f : A \to \Re$ differenciálható függvény, ahol $A \subseteq X$ konvex halmaz. Jelölje $\nabla f : A \to X^*$ az f függvény gradiensét.

1. Tétel. [16] *Legyen az $f : A \to \Re$ függvény differenciálható az $A \subseteq X$ konvex halmazon. Ekkor igazak a következő állítások.*

(i) *Az f függvény akkor és csak akkor kvázikonvex A-n, ha a ∇f leképezés kvázimonoton A-n.*

(ii) *Az f függvény akkor és csak akkor pszeudokonvex A-n, ha a ∇f leképezés pszeudomonoton A-n.*

1.3 Pszeudomonotonitás és a komplementaritási feladat

A pszeudomonotonitás fogalmát Karamardián a következő feladat megoldhatósága szempontjából találta célszerűnek. Legyen adott egy $K \subseteq X$ konvex kúp és egy $F : K \to X^*$ leképezés. Jelölje K^+ a K kúp (pozitív) polárisát:

$$K^+ = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle \geq 0 \text{ minden } x \in K\text{-ra}\} \ .$$

Az F és K által meghatározott komplementaritási feladat a következő: keressünk olyan $a \in K$ elemet, melyre $F(a) \in K^+$ és $\langle F(a), a \rangle = 0$. Más szóval: oldjuk meg a következő $CP(F, K)$ feladatot

$$x \in K, \quad F(x) \in K^+, \quad \langle F(x), x \rangle = 0. \tag{6}$$

A következő tételt, $X = \Re^n$ esetén, Karamardian bizonyította be [15]. Hilbert térre Cottle és Yao terjesztette ki [1].

2. Tétel. *Legyen a K kúp zárt és konvex, legyen továbbá* $\operatorname{int}(K) \neq \emptyset$ *és* $K \cap (-K) = \emptyset$. *Legyen az $F : K \to \Re^n$ leképezés folytonos és pszeudomonoton. Ha* $F(K) \cap \operatorname{int}(K^+) \neq \emptyset$, *akkor a $CP(F, K)$ feladatnak van megoldása.*

2 Általánosított monotonitás és egyensúlyi modellek

A komplementaritási feladatnál általánosabbak a variációs egyenlőtlenségek. Legyen adott egy $F : A \to X^*$, $A \subseteq X$ leképezés. Stampacchia-féle variációs egyenlőtlenségnek a következő feladatot szokták nevezni [19]:

SVI(F,A): *Keressünk olyan $a \in A$ elemet, hogy minden $x \in A$ esetén*

$$\langle F(a), x - a \rangle \geq 0 \ .$$

Nem nehéz belátni, hogy amennyiben az A halmaz konvex kúp, akkor az $SVI(F, A)$ feladat egybeesik a $CP(F, A)$ komplementaritási feladattal.

Duális feladatnak, vagy Minty-féle variációs egyenlőtlenségnek a következő feladatot nevezzük [7, 19, 13]:

MVI(F,A): *Keressünk olyan* $a \in A$ *elemet, hogy minden* $x \in A$ *esetén*

$$\langle F(x), a - x \rangle \leq 0 \,.$$

Mindkét feladattípust általánosítani lehet arra az esetre, amikor $F : X \longrightarrow L(X, Y)$. Ekkor vektor-variációs egyenlőtlenségekről beszélünk. Vegyük észre, hogy az $Y = \Re$ esetben $L(X, \Re) = X^*$, tehát speciális esetként a nem vektoros eset adódik. A vektor variációs egyenlőtlenségeknek bőséges irodalma van (lásd pl. a [2,19,20] cikkeket és a bennük található hivatkozásokat), de ezt az esetet ennek a dolgozatnak a keretében nem tárgyalom. Közgazdasági alkalmazások szempontjából nagyobb érdeklődésre tarthatnak számot a variációs egyenlőtlenségek halmazértékű változatai [25].

Legyen adott egy halmazértékű $F : A \longrightarrow 2^{X^*}$, $A \subseteq X$ leképezés. Ebben az esetben mind az (SVI)-nek, mind pedig az (MVI)-nek többféle általánosítása is lehetséges. A következő feladatot az (SVI) erős változatának szokás tekinteni.

(mv-eSVI): *Keressünk olyan* $a \in A$ *elemet, amelyhez létezik olyan* $a^* \in F(a)$, *hogy minden* $x \in A$ *esetén*

$$\langle a^*, x - a \rangle \geq 0 \,. \tag{7}$$

A (7) feltételnek eleget tevő $a \in A$ elemet az F leképezés A fölött vett *erős egyensúlyi pontjának* nevezzük. Szokás az ilyen pontot *Stampacchia-féle erős egyensúlyi pontnak* is nevezni. Jelölje $eS(F, A)$ az összes erős egyensúlyi pont halmazát. A következő változatot tekintik sokan az (SVI) természetes általánosításának.

(mv-SVI): *Keressünk olyan* $a \in A$ *elemet, hogy minden* $x \in A$*-hoz található olyan* $a^* \in F(a)$, *hogy*

$$\langle a^*, x - a \rangle \geq 0 \,. \tag{8}$$

A (8) feltételnek eleget tevő $a \in A$ elemet az F leképezés A fölött vett *egyensúlyi pontjának* nevezzük. Szokás az ilyen pontot *Stampacchia-féle egyensúlyi pontnak* is nevezni. Jelölje $S(F, A)$ az egyensúlyi pontok halmazát.

Egy lehetséges duális feladat a következő:

(mv-MVI): *Keressünk olyan* $a \in A$ *elemet, hogy minden* $x \in A$ *és minden* $x^* \in F(x)$ *esetén*

$$\langle x^*, a - x \rangle \leq 0 \,. \tag{9}$$

Az (9) feltételnek eleget tevő $a \in A$ elemet az F leképezés A fölött vett stabil egyensúlyi pontjának nevezzük. Szokás az ilyen pontot *Minty-féle egyensúlyi pontnak* is nevezni. Jelölje $M(F, A)$ a stabil egyensúlyi pontok halmazát.

Legutóbbi feladatunkat gyengíthetjük a következőképpen:

(mv-gyMVI): *Keressünk olyan* $a \in A$ *elemet, hogy minden* $x \in A$*-hoz létezik olyan* $x^* \in F(x)$, *hogy*

$$\langle x^*, a - x \rangle \leq 0 \,. \tag{10}$$

A (10) feltételnek eleget tevő $a \in A$ elemet az F leképezés A fölött vett gyengén stabil egyensúlyi pontjának (Minty-féle gyenge egyensúlyi pontjának) nevezzük. Jelölje $gyM(F, A)$ a gyengén stabil egyensúlyi pontok halmazát.

Mind a négy feladattípust általánosítani lehet arra az esetre, amikor $F : X \to 2^{L(X,Y)}$. Ekkor halmazértékű vektor variációs egyenlőtlenségekről beszélünk. Vegyük észre, hogy az $Y = \Re$ esetben $L(X, \Re) = X^*$, tehát speciális esetként a nem vektoros halmazértékű eset adódik. A halmazértékű vektor variációs egyenlőtlenségeknek is bőséges irodalma van (lásd pl. a [20, 21] cikkeket és a bennük található hivatkozásokat), de ezt az esetet sem tárgyalom ennek a dolgozatnak a keretében.

Amennyiben az $F(x)$ halmaz minden x-re egyetlen elemből áll, akkor visszakapjuk az egyértékű esetet, és ekkor —nyilvánvaló módon— az *(mv-eSVI)* és *(mv-SVI)* feladatok egybeesnek az *(SVI)* feladattal, illetve az *(mv-gyMVI)* és *(mv-MVI)* feladatok egybeesnek az *(MVI)* feladattal. Az nyilvánvaló a definíciókból, hogy

$$eS(F, A) \subseteq S(F, A) \qquad \text{és} \qquad M(F, A) \subseteq gyM(F, A)\,. \tag{11}$$

A definíciókból a Minty-féle egyensúlyi pontok és a Stampacchia-féle egyensúlyi pontok halmazai között semmiféle kapcsolat nem következik.

Az egyensúly elmélet egyik alapvető kérdése, hogy az F leképezésnek mikor van erős egyensúlyi, egyensúlyi, gyengén stabil, illetve stabil egyensúlyi pontja A fölött. Ezekre a kérdésekre általában igen nehéz választ adni. Egyensúlyi, illetve stabil egyensúlyi pontok létezésére vonatkozó vizsgálatok azonban szép eredményeket hoztak. Ezekben a vizsgálatokban fontos szerepet kapnak a következő halmazértékű leképezések:

$$S_F(x) = \{y \in A : \exists y^* \in F(y), \text{ hogy } \langle y^*, x - y\rangle \geq 0\}\ ,$$

$$M_F(x) = \{y \in A : \forall x^* \in F(x),\ \langle x^*, y - x\rangle \leq 0\}\ .$$

Nem nehéz belátni, hogy

$$S(F, A) = \bigcap_{x \in A} S_F(x)\ , \tag{12}$$

és

$$M(F, A) = \bigcap_{x \in A} M_F(x)\ . \tag{13}$$

Egyensúlyi pontok létezése tehát ekvivalens a

$$\bigcap_{x \in A} S_F(x) \neq \emptyset \qquad \text{és} \qquad \bigcap_{x \in A} M_F(x) \neq \emptyset$$

feltételekkel.

Az $S_F(x)$ halmazértékű függvénynek van egy fontos tulajdonsága: minden $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A$ esetén

$$\operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq S_F(x_1) \cup S_F(x_2) \cup \ldots \cup S_F(x_k)\ . \tag{14}$$

Ezt a tulajdonságot —mely a nevezetes Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz tételben alapvető szerepet játszik— *KKM-tulajdonságnak*, azokat a halmazértékű leképezéseket pedig, melyek rendelkeznek a KKM-tulajdonsággal, *KKM-leképezéseknek* nevezzük.

3. Tétel. *Az $S_F(x)$ leképezés KKM-leképezés.*

Bizonyítás. Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy létezik olyan $z \in \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, hogy $z \notin S_F(x_i), i = 1, 2, \ldots, k$. Ez azt jelenti, hogy minden $z^* \in F(z)$-re és x_i-re

$$\langle z^*, x_i - z\rangle < 0 \, .$$

Legyen $z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$. Az egyenlőtlenség mindkét oldalát λ_i-vel szorozva ($\lambda_i \geq 0$), majd i-re összegezve ($\sum_i \lambda_i = 1$), a következő ellentmondás adódik:

$$\langle z^*, z - z\rangle < 0 \, .$$

□

Ez a tétel azért érdekes, mert a Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz-féle fixpont tételt általánosító Ky Fan Lemma éppen a KKM-leképezésekre vonatkozik [18, 23].

A Ky Fan Lemma. *Legyen A részhalmaza az X Hausdorff topologikus vektortérnek. Legyen $T : A \to 2^X$ egy kompakt halmazértékű függvény, vagyis legyen minden $x \in A$* esetén a *$T(x) \subseteq X$ halmaz zárt és legyen legalább egy olyan x_0, hogy $T(x_0)$ ráadásul még kompakt is. Ha T KKM-leképezés, akkor*

$$\bigcap_{x \in A} T(x) \neq \emptyset \, .$$

Mivel

$$S(F, A) = \bigcap_{x \in A} S_F(x) \, ,$$

így az $S(F, A) \neq \emptyset$ feltételhez elegendő, hogy az $S_F : A \to 2^X$ leképezés kompakt legyen. Mivel $S_F(x) \subseteq A$, ezért az ember ezek után azt hihetné, hogy kompakt A halmaz esetén az $F : A \to 2^{X^*}$ halmazértékű leképezésről már csak valamilyen alkalmas módon értelmezett folytonosságot kell feltenni, amely biztosítja az $S_F(x)$ halmazok zártságát, és már kezünkben is van egy tétel egyensúlyi pont létezéséről. A helyzet valóban ilyen szép, ha X véges dimenziós, $F : A \to X^*$, $A \subseteq X$ pedig folytonos egyértékű leképezés [17]. Végtelen dimenzióban sajnos nem ismert olyan folytonossági fogalom, amely garantálná az $S_F(x)$, $x \in A$ halmazok zártságát. Alkalmasan értelmezett folytonossággal azonban egy lépéssel előrébb juthatunk.

3. Definíció. *Legyenek X és Y topologikus terek és tekintsünk egy $F : X \to 2^Y$ halmazértékű leképezést.*

(i) *F-et az $a \in X$ helyen* felülről félig folytonosnak *nevezzük, ha bármely olyan $V \subseteq Y$ nyitott halmazhoz, melyre $T(a) \subseteq V$ teljesül, található olyan $U \subseteq X$ nyitott környezete a-nak, hogy valahányszor $x \in U$, mindannyiszor $T(x) \subseteq V$ teljesül.*

(ii) *Legyen X topologikus vektortér, $Y = X^*$ és legyen $A \subseteq X$ konvex halmaz. F-et A-n* radiálisan vetítve felülről félig folytonosnak*nevezzük, ha bármely $a, b \in A$ esetén a $\Phi_{a,b}(t) = \langle F(a + t(b - a)), b - a\rangle$, $t \in [0, 1]$ halmazértékű leképezés jobbról felülről félig folytonos $t = 0$-ban.*

Ha az $F : A \to 2^{X^*}$, $A \subseteq X$ leképezés rendelkezik ezzel a speciális folytonossági tulajdonsággal, akkor F-nek A fölött vett minden stabil egyensúlyi pontja egyúttal egyensúlyi pontja is.

4. Tétel. *Ha az $F : A \to 2^{X^*}$, $A \subseteq X$ leképezés radiálisan vetítve felülről félig folytonos a konvex A halmazon, akkor*

$$M(F, A) \subseteq S(F, A)\,. \tag{15}$$

Bizonyítás. Indirekt módon okoskodva tegyük fel, hogy $a \in A$ stabil egyensúlyi pontja F-nek A fölött, de nem egyensúlyi pontja. Ekkor van olyan $x \in A$ pont, hogy

$$\langle a^*, x - a\rangle < 0 \quad \text{minden} \quad a^* \in F(a) \quad \text{esetén}\,.$$

Mivel a $\Phi_{a,x}(t) = \langle F(a + t(x - a)), x - a\rangle$, $t \in [0, 1]$ leképezés jobbról felülről félig folytonos $t = 0$-ban és $\Phi_{a,b}(0) = \langle F(a), x - a\rangle \subseteq \operatorname{int}\Re_-$, ezért „elegendően kicsi" pozitív t-vel a $z = a + t(x - a)$ pontra

$$\Phi_{a,b}(t) = \langle F(z), x - a\rangle \subseteq \operatorname{int}\Re_-$$

teljesül. Mivel $z - a = t(x - a)$, ezért $\langle F(z), z - a\rangle \subseteq \operatorname{int}\Re_-$, ami (9) szerint ellentmond az $a \in M(F, A)$ feltevésnek. □

Az F leképezésről tehát egy sajátos radiális félig folytonosságot feltételezve az $S(F, A) \neq \emptyset$ problémát —végső soron— át lehet játszani az

$$M(F, A) = \bigcap_{x \in A} M_F(x) \neq \emptyset$$

problémára. Sajnos az $M_F(x)$ halmazértékű leképezés azonban általában nem KKM-leképezés. Viszont minden esetben zárt és konvex. Ha az (mv-MVI) feladatot konvex kompakt A halmazon tekintjük, akkor Minty egyensúlyi megoldás létezéséhez elegendő az, ha az $M_F(x)$ leképezés KKM-leképezés. Hogy ez a feltétel a kvázimonotonitással van kapcsolatban, az az elmúlt évek egyik szép felismerése. Ez a felismerés a kvázimonotonitásnak egy variánsára, a valódi (proper) kvázimonotonitásra hívta fel a figyelmet [4]. A célszerűség kedvéért halmazértékű leképezésekre több általánosított monotonitási fogalmat is bemutatunk.

4. Definíció. *A halmazértékű* $F : A \to 2^{X^*}$, $A \subseteq X$ *leképezést*

(i) kvázimonotonnak *nevezzük, ha bármely* $x_1, x_2 \in A$ *és* $x_1^* \in F(x_1)$, $x_2^* \in F(x_2)$ *esetén igaz a következő implikáció*

$$\langle x_1^*, x_2 - x_1 \rangle > 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \leq 0\,, \tag{16}$$

(ii) valódian kvázimonotonnak *nevezzük, ha minden* $x_1, x_2, \ldots, x_k \in A$ *és* $z \in \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *esetén létezik olyan* $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *hogy minden* $x_j^* \in F(x_j)$*-re*

$$\left\langle x_j^*, z - x_j \right\rangle \leq 0\,. \tag{17}$$

(iii) pszeudomonotonnak *nevezzük, ha bármely* $x_1, x_2 \in A$ *és* $x_1^* \in F(x_1)$, $x_2^* \in F(x_2)$ *esetén igaz a következő implikáció*

$$\langle x_1^*, x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \leq 0, \tag{18}$$

A definíciók közvetlen következménye, hogy pszeudomonoton leképezés szükségképpen valódian kvázimonoton, míg egy valódian kvázimonoton leképezés szükségképpen kvázimonoton. (Legyen $z = (x_1 + x_2)/2$.) Megmutatható, hogy a fordított kapcsolatok azonban általában nem érvényesek.

5. Tétel. [4] *A halmazértékű* $F : A \to 2^{X^*}$, $A \subseteq X$ *leképezés akkor és csak akkor valódian kvázimonoton, ha az* $M_F : A \to 2^X$, $A \subseteq X$ *leképezés* KKM *leképezés.*

Ebből és a 4. Tételből azonnal adódik a következő egzisztencia tétel:

6. Tétel. *Legyen* $A \subseteq X$ *kompakt konvex halmaz, legyen továbbá* F *valódian kvázimonoton* A*-n. Ekkor* F*-nek* A *fölött létezik stabil (Minty-féle) egyensúlyi pontja. Ha ráadásul* F *radiálisan vetítve felülről félig folytonos* A*-n, akkor minden stabil egyensúlyi pont egyúttal egyensúlyi pont is.*

Ha az F leképezéstől pszeudomonotonitást követelünk (ami erősebb, mint a valódi kvázimonotonitás), akkor az előző tétel állítása élesíthető. Igaz ugyanis a következő tétel.

7. Tétel. *Legyen az* $F : A \to 2^{X^*}$, $A \subseteq X$ *leképezés pszeudomonoton az* A *konvex halmazon. Ekkor*

$$S(F, A) \subseteq M(F, A)\,.$$

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy minden $x \in A$-ra

$$S_F(x) \subseteq M_F(x)\,. \tag{19}$$

Legyen $y \in S_F(x)$. Ez azt jelenti, hogy van olyan $y^* \in F(y)$, hogy

$$\langle y^*, x - y \rangle \geq 0.$$

(18)-ból az következik, hogy

$$\langle x^*, y - x \rangle \leq 0$$

minden $x^* \in F(x)$ esetén. Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $y \in M_F(x)$. □

Megjegyzés. Az, hogy a pszeudomonoton esetben az M_F halmazértékű leképezés KKM-leképezés, közvetlenül is adódik a (19) tartalmazásból.

8. Tétel. *Legyen $A \subseteq X$ kompakt konvex halmaz, legyen továbbá F pszeudomonoton A-n. Ekkor F-nek A fölött létezik stabil (Minty-féle) egyensúlyi pontja. Ha ráadásul F radiálisan vetítve felülről félig folytonos A-n, akkor minden stabil egyensúlyi pont egyúttal egyensúlyi pont is és fordítva.*

Az A halmaz kompaktságának feltételezése azt a célt szolgálja, hogy a Ky Fan Lemmát közvetlenül alkalmazni lehessen. A variációs egyenlőtlenségek elméletében természetesen a nemkompakt A halmazok esete is fontos. Ilyenkor a kompaktság hiányát bizonyos koerszivitási (coercive) feltételekkel lehet ellensúlyozni [3]. Ezekre azonban itt most nem szándékozom kitérni.

3 Általánosított monotonitás a mikroökonómiában

3.1 Georgescu-Roegen fogyasztási elmélete

Gyakori jelenség, hogy hasznosnak bizonyult fogalmakat már „születésük előtt" felfedezték és elnevezés nélkül használták. Reinhardt John-tól tudjuk [14], hogy így van ez az általánosított monotonitással is. 1936-ban Georgescu-Roegen fogyasztói magatartás elméletében "észrevétlenül" már használta a szigorú pszeudomonotonitás tulajdonságát [5].

A fogyasztáselmélet azt vizsgálja, hogy a fogyasztó miként választ a fogyasztási javak kötegeiből. A fogyasztáselmélet olyan fogyasztót feltételez, aki képes „racionálisan" választani, döntéseit egy (saját) preferenciarendezés vezérli. Egy fogyasztási jószágköteget (fogyasztási kosarat) jelöljön egy $x \in \Re^n_+$ vektor.

Tekintsünk egy fogyasztót, aki számára adott egy fogyasztói kosár $x \in \Re^n_+$. Tegyük fel, hogy a fogyasztó az adott fogyasztói kosár helyett másik, $y \in \Re^n_+$, fogyasztói kosár választását fontolgatja. Georgescu-Roegen lokális preferenciarendezést feltételez, vagyis azt, hogy a fogyasztó számára a választható jószágköteg csak egy valódi A részhalmaza $\Re^n_+$-nak. További feltételezés, hogy a fogyasztó képes eldönteni, hogy az $x \in A$ fogyasztói kosárról az $y \in A$ fogyasztói kosárra való áttérés számára előnyösebb, hátrányosabb, vagy teljesen mindegy. Georgescu-Roegen modelljében ezt a döntési szabályt egy

$F : A \to \Re^n$ leképezés formalizálja a következő módon: az $\{x \to y\}$ váltás preferált, nem-preferált illetve közömbös akkor és csak akkor, ha

$$\langle F(x), y - x \rangle > 0\,, \qquad < 0\,, \qquad \text{illetve } = 0\,.$$

Georgescu-Roegen az $x \in A$ jószágköteget *a fogyasztó megelégedettségi pontjának* (point of saturation) vagy *egyensúlyi jószágkötegnek* nevezi akkor, ha

$$\langle F(x), y - x \rangle \leq 0 \quad \text{minden} \quad y \in A \quad \text{esetén}\,.$$

(Egyik bírálóm hívta fel a figyelmemet, hogy a magyar nyelvű szakirodalomban a megelégedettségi pont helyett inkább a *telítődési pont* elnevezés használatos.)

Vegyük észre, hogy a megelégedettségi pont fogalma mai modern terminológia szerint nem egyéb, mint az F leképezés Stampacchia-féle egyensúlyi pontja A fölött.

Természetesen alapvető kérdés a fogyasztáselméletben a megelégedettségi pont létezése. A létezés „kikényszerítéséhez" természetesen a preferenciáról (jelen esetben az F leképezésről) valami speciális tulajdonság meglétét is fel kell tenni. Ez vezette Georgescu-Roegent a következő posztulátumhoz (*principle of persisting nonpreference*): ha a fogyasztó az $x \in A$ mellet nem preferálja az $y \in A$ jószágköteget, azaz az $y - x$ változás nem preferált, vagy közömbös x-ben, akkor a változásnak ez az iránya y-ban nem preferált, formálisan

$$\langle F(x), y - x \rangle \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle F(y), y - x \rangle < 0\,. \tag{20}$$

Ez a posztulátum valójában az $F(x)$ leképezés szigorú pszeudomonotonitását írja elő. Egy későbbi dolgozatában ezt a posztulátumot Georgescu-Roegen a következő, enyhébb változatban használta [6]:

$$\langle F(x), y - x \rangle \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle F(y), y - x \rangle \leq 0\,, \tag{21}$$

ez pedig F pszeudomonotonitását jelenti.

Georgescu-Roegen —kikerülve a fixpont tételek használatát— a variációs egyenlőtlenségek ma már jól kidolgozott elméletének alapvető megállapításaihoz is eljutott. Feltételezve az A halmaz konvexitását és kompaktságát, valamint az F leképezés folytonosságát, bebizonyította egyensúlyi pont létezését, egyensúlyi pont és stabil egyensúlyi pont egybeesését és az egyensúlyi pontok halmazának konvexitását.

Megjegyzés. A figyelmes olvasó szemünkre vetheti, hogy a Georgescu-Roegen modellben szereplő $F(x)$ leképezéssel kapcsolatban helytelenül használtuk a (szigorú) pszeudomonotonitás fogalmat. A (20) és a (21) feltételek valójában a $-F(x)$ leképezés (szigorú) pszeudomonotonitását jelentik. A probléma gyökere abban van, hogy az általánosított monotonitás az általánosított konvexitással van összhangban. Az általánosított konkavitási tulajdonságok az antigradiens, vagyis a $-\nabla f(x)$ leképezés általánosított monotonitási tulajdonságaival jellemezhetőek. Ha tehát általánosított konkavitást a gradienssel szeretnénk közvetlenül jellemezni, akkor be kellene vezetnünk az "anti" általánosított monotonitási fogalmakat. Ekkor pl. a (20) tulajdonságot *anti pszeudomonotonitásnak* kellene neveznünk. Ez a megkülönböztető szóhasználat még nem alakult ki, ezért nem teszünk különbséget se most, se pedig a későbbiek folyamán az „anti" és az „eredeti" változat között.

3.2 Fogyasztói választás és keresleti megfeleltetés

A fogyasztói magatartás egzakt leírására többféle megközelítés alakult ki. Szokásos a fogyasztói magatartást (a) preferencia relációval, (b) hasznossági függvénnyel, illetve (c) keresleti relációval, keresleti megfeleltetéssel leírni. A fogyasztási elmélet egyik központi kérdése a három megközelítés kapcsolata [12, 25, 26, 28]. Ismertetésünkben a fogyasztói preferencia és az általa indukált keresleti megfeleltetés vizsgálatára szoritkozunk.

Szükségünk lesz a továbbiakban néhány fogalomra. A figyelembe veendő jószágokra nézve nem teszünk semmiféle megkötést, azaz a teljes $\Re^n_+$ halmazt jószágtérnek tekintjük. Jelölje $p \in \operatorname{int} \Re^n_+$ az aktuális árak vektorát és tekintsük egységnyinek a fogyasztó által elkölthető jövedelmet.

5. Definíció. *A*

$$K(p) = \left\{x \in \Re^n_+ : \langle p, x\rangle \leq 1\right\}, \quad p \in \operatorname{int} \Re^n_+$$

halmazértékű függvényt a fogyasztó költségvetési leképezés*ének nevezzük.*

Amennyiben a fogyasztói magatartást az R preferenciareláció írja le, akkor azt a $D_R \subseteq \operatorname{int} \Re^n_+ \times \Re^n_+$ relációt, amelyre

$$pD_Rx \iff x \in K(p) \quad \text{és} \quad \text{minden } y \in K(p) \text{ estén } xRy\,,$$

keresleti reláció*nak nevezzük. A keresleti reláció helyett dolgozhatunk a*

$$D_R(p) = \{x \in \Re^n_+ : pD_Rx\}\,,$$

keresleti hozzárendeléssel,*amennyiben minden $p \in \operatorname{int} \Re^n_+$ esetén $D_R(p) \neq \emptyset$.*

Megjegyzés. Ha xRy jelentése: x *„nem rosszabb, mint" y*, akkor pD_Rx jelentése: p árszinvonalat feltételezve nincs x-nél jobb választás.

A keresleti reláció a gyakorlat számára jobban megragadható, közvetlen megfigyeléseket végezhetünk rá vonatkozóan. Természetesen adódik tehát a kérdés, hogy a megfigyelt adatokból lehet-e rekonstruálni azt az R relációt, amely a D_R keresleti relációt indukálja? Hogy ezt a kérdésfeltevést pontosítsuk, vezessük be a következő fogalmakat.

6. Definíció.

(i) *A $D \subseteq \operatorname{int} \Re^n_+ \times \Re^n_+$ relációt* keresleti reláció*nak mondjuk, ha*

$$pDx \implies \langle p, x\rangle = 1\,. \tag{22}$$

(ii) *A $D : \operatorname{int} \Re^n_+ \to 2^{\Re^n_+}$ halmazértékű hozzárendelést* keresleti megfeleltetés*nek nevezzük, ha minden $p \in \operatorname{int} \Re^n_+$ esetén $D(p) \neq \emptyset$ és minden $x \in D(p)$-re $\langle p, x\rangle = 1$.*

(iii) *Azt mondjuk, hogy az R preferenciareláció racionalizálja a D keresleti relációt (a D keresleti megfeleltetést), ha $D \subseteq D_R$ ($D(p) \subseteq D_R(p)$), minden $p \in \operatorname{int} \Re^n_+$ esetén. Ha $D = D_R$, akkor szigorú racionalizálásról beszélünk.*

Megjegyzés. Nem nehéz igazolni, hogy a D_R reláció csak akkor rendelkezik a (22) tulajdonsággal, ha az R reláció *lokálisan kielégítetlen*, ami azt jelenti, hogy bármely $x \in \Re^n_+$ esetén az x bármely U környezetében található olyan $y \in \Re^n_+$, amelyre $(x, y) \notin R$, verbálisan: „x rosszabb, mint y".

A keresleti relációkra (megfeleltetésekre) vonatkozó olyan feltevéseket, amelyek biztosítják racionalizálhatóságukat *kinyilvánított preferencia axiómáknak* szokás nevezni. Az ezekben az axiómákban megfogalmazott tulajdonságok interpretálhatóak úgy is, mint racionális fogyasztói döntésekkel szemben támasztott konzisztencia.

Az egyik ilyen nevezetes axióma Samuelsontól ered [24], és a *kinyilvánított preferencia gyenge axiómájaként* (*WARP*) szokás emlegetni.

(WARP): *Tegyük fel, hogy a p árrendszer esetén az x jószágköteget választom ($x \in D_R(p)$), a q árrendszer esetén az x-től különböző y-t választanám ($y \in D_R(q)$), miközben tudom (felfedem), hogy a p árrendszer mellett — tisztán költségvetési szempontból— az y-t is választhattam volna ($\langle p, y\rangle \leq 1 = \langle p, x\rangle$). A konzisztens viselkedés —Samuelson szerint— azt jelenti, hogy ekkor a q árrendszer esetén —költségvetési szempontból— nem lehetséges az x választása ($\langle q, x\rangle > 1 = \langle q, y\rangle$). Ez a „konzisztens" viselkedés tehát a következőképpen formalizálható:*

$$x \in D_R(p),\ y \in D_R(q),\ \langle p, y - x\rangle \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle q, x - y\rangle > 0\,. \tag{23}$$

Sokan túl erősnek találták ezt a fajta konzisztenciát, és a következővel helyettesítették:

$$x \in D_R(p),\ y \in D_R(q),\ \langle p, y - x\rangle < 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle q, x - y\rangle \geq 0. \tag{24}$$

Tekintettel a $\langle p, x\rangle = \langle q, y\rangle = 1$ költségvetési azonosságra, az előbbi feltételek a következő alakban is felírhatóak:

$$y \in D_R(q),\ x \in D_R(p),\ \langle y, p - q\rangle \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle x, q - p\rangle > 0\,, \qquad (WARP)$$

$$y \in D_R(q),\ x \in D_R(p),\ \langle y, p - q\rangle < 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle x, q - p\rangle \geq 0\,. \qquad (ARP)$$

A ($WARP$) illetve az (ARP) feltételek —modern szóhasználattal élve— a $D_R(p)$ költségvetési megfeleltetés szigorú pszeudomonotonitását, illetve kvázimonotonitását jelentik. Hogy ezeknek a „konzisztencia" követelményeknek a posztulálása jó intuícióra vallanak, bizonyítja R. John alábbi tétele.

9. Tétel. [12] *Ha az R preferenciareláció konvex és lokálisan nem kielégíthető, akkor a $D_R(p)$ keresleti megfeleltetés kvázimonoton.*

Ennek a tételnek van egy nagyon fontos következménye.

Következmény. *Ahhoz, hogy a $D(p)$ keresleti megfeleltetést egy konvex és lokálisan nem kielégíthető preferencia racionalizáljon, szükséges, hogy a $D(p)$ halmazértékű leképezés kvázimonoton legyen.*

Bizonyítás. Feltételezésünk szerint van olyan R konvex és lokálisan nem kielégíthető preferencia, hogy $D(p) \subseteq D_R(p)$. A 9. Tétel szerint $D_R(p)$ kvázimonoton. Egyszerűen belátható, hogy a $D(p) \subseteq D_R(p)$ tartalmazás miatt $D(p)$ is kvázimonoton. □

R. John bebizonyította, hogy az állítása megfordítható.

10. Tétel. [12] *Ahhoz, hogy a $D(p)$ keresleti megfeleltetést egy konvex és lokálisan nem kielégíthető preferencia racionalizáljon, szükséges és elegendő, hogy a $D(p)$ halmazértékű leképezés kvázimonoton legyen.*

Az előző két tételben azzal a nagyon erős feltételezéssel éltünk, hogy minden p árvektor esetén $D_R(p)$, illetve $D(p)$ nem üres. Tetszőleges keresleti reláció esetén ez a feltétel általában nem teljesül. Éppen ezért érdekes R. John következő tétele, melynek megfogalmazásához értelmeznünk kell a D keresleti reláció valódi kvázimonotonitását.

7. Definíció. *A $D : \operatorname{int}\Re^n_+ \times \Re^n_+$ keresleti relációt* valódian kvázimonoton*nak nevezzük, ha a $G(x) = \{p \in \operatorname{int}\Re^n_+ : (p,x) \in D\}$ halmazértékű függvény valódian kvázimonoton.*

Könnyű belátni, hogy a $D : \operatorname{int}\Re^n_+ \times \Re^n_+$ keresleti reláció akkor és csak akkor valódian kvázimonoton, ha nem léteznek olyan (p_1,x_1), (p_2,x_2), ..., $(p_k,x_k) \in D$ elemek és $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ pozitív valós számok, melyek összege 1, hogy az $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$ vektorra minden $i = 1, 2, \ldots, k$ esetén $\langle p_i, x\rangle < 0$ teljesül.

11. Tétel. [12] *Ahhoz, hogy a $D : \operatorname{int}\Re^n_+ \times \Re^n_+$ keresleti relációt egy konvex és lokálisan nem kielégíthető preferencia racionalizáljon, szükséges és elegendő, hogy a D halmazértékű leképezés valódian kvázimonoton legyen.*

R. John azt is megmutatta, hogy ebben a tételben a valódi kvázimonotonitás nem gyengíthető kvázimonotonitásra.

3.3 Wald Ábrahám egzisztencia bizonyítása

További érdekes példát találhatunk a pszeudomonotonitás tulajdonságának „korai" előfordulására Wald Ábrahám nevezetes egzisztencia bizonyításában [27]. Az egyensúlyi modell, amit Wald megoldott, lényegében a következő [22, 28]. Keresünk olyan $x^*, p^*, q^* \in \Re^n_+$ vektorokat, amelyek adott $r \in \operatorname{int}\Re^n_+$, $A \in \Re^{m\times n}_+$ és $F : \Re^n_+ \to \operatorname{int}\Re^n_+$ mellett kielégítik az alábbi feltételrendszert.

$$p \le qA \quad \text{és} \quad \langle qA - p, x\rangle = 0\,, \tag{25}$$

$$Ax \le r \quad \text{és} \quad \langle q, Ax - r\rangle = 0\,, \tag{26}$$

$$p = F(x)\,. \tag{27}$$

Wald a következő feltételekkel dolgozott:

(W1) *Minden* $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ *indexhez található olyan* $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ *index, hogy* $a_{ij} > 0$.

(W2) F *folytonos.*

(W3) *Minden* $x_1, x_2 \in \Re^n_+$, $x_1 \neq x_2$ *esetén*

$$\langle F(x_1), x_2 - x_1\rangle \le 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle F(x_2), x_1 - x_2\rangle > 0\,.$$

A (W1) feltétel biztosítja, hogy a lehetséges megoldások $L = \{x \in \Re^n_+ : Ax \le r\}$ halmaza korlátos. L emellett még zárt is és konvex is. Ezek a jó tulajdonságok garantálják, hogy bármely adott p vektor mellett a

$$\langle p, x\rangle \to \max$$

$$Ax \le r, \quad x \ge 0$$

és a

$$\langle q, r\rangle \to \min$$

$$p \le qA, \quad q \ge 0$$

lineáris programozási duális feladat-párnak van x^* és q^* optimális megoldása, melyekkel a (p, q^*, x^*) hármas kielégíti a (25) és (26) feltételeket, a (27) feltételt azonban nem szükségképpen. A (27) feltétel teljesülését kikényszeríthetjük azáltal, hogy először keresünk egy olyan $x^* \in L$ vektort, amely maximalizálja az $\langle F(x^*), x\rangle$ függvényt az L halmazon. Nyilvánvaló, hogy x^* akkor és csak akkor rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, ha eleget tesz a következő feltételnek:

$$\langle F(x^*), x - x^*\rangle \le 0\,, \quad \text{minden} \quad x \in L\text{-re.} \tag{28}$$

Ez azt jelenti, hogy x^* az F leképezés Stampacchia egyensúlyi pontja kell, hogy legyen L fölött. Mivel L korlátos és zárt konvex halmaz, F pedig folytonos, ezért a variációs egyenlőtlenségek elméletéből ismert, hogy ilyen x^* létezik. Megmutatható, hogy ha az előbb említett lineáris programozási feladat-párt a $p^* = F(x^*)$ választás mellett oldjuk meg, akkor a kapott (p^*, q^*, x^*) hármas kielégíti a (25) – (27) feltételrendszert.

Az elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy az F leképezés szigorú pszeudomonotonitását megkövetelő (W3) tulajdonság nélkül is igazolható az egzisztencia tétel. A (W3) feltétel egyébként nem más, mint a $D(p) = F^{-1}(p)$ keresleti függvényre kírótt szokásos konzisztencia: a kinyilvánított preferencia gyenge axiómája.

Sokaknak okozott fejtörést, hogy mi szüksége volt Waldnak az említett konzisztencia megkövetelésére. Wald bizonyítása nem használ fixpont tételt, ehelyett n szerinti indukcióval dolgozik. Az F leképezés szigorú pszeudomonotonitása ekvivalens azzal, hogy az F leképezésnek bármely $C \subseteq L$ zárt konvex halmazon létezik egyetlen Stampacchia egyensúlyi pontja. Ez az a fontos tulajdonsága a szigorú pszeudomonotonitásnak, melyre Wald Ábrahámnak ténylegesen szüksége volt, és amelyet R. John fedzett fel. Igaz ugyanis a következő Martos-típusú tétel.

12. Tétel. [10] *Tekintsük az* $F : A \rightarrow \Re^n$ *leképezést, ahol* $A \subseteq \Re^n$ *konvex halmaz. Ahhoz, hogy* F *szigorúan pszeudomonoton legyen* A*-n, szükséges és elégséges, hogy bármely kompakt konvex* $C \subseteq A$ *esetén az* $S(F, C)$ *halmaz pontosan egy elemű legyen.*

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom lektoraimnak a hasznos észrevételeikért, valamint az OTKA T025442 és az FKFP 059/1997 sz. pályázatoknak támogatásukért.

Irodalom

1. Cottle, R. W. and J. C. Yao, Pseudomonotone complementarity problems in Hilbert space, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 75 (1992) 281–295.
2. Daniilidis, A. and N. Hadjisavvas, Existence Theorems for Vector Variational Inequalities, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 54 (1996) 473–481.
3. Daniilidis, A. and N. Hadjisavvas, Coercivity Conditions and Variational Inequalities, *Mathematical Programming*, 86 (1999) 433–438.
4. Daniilidis, A. and N. Hadjisavvas, On Generalized Cyclically Monotone Operators and Proper Quasimonotonicity, *Optimization*, 47 (2000) 123–135.
5. Georgescu-Roegen, N., The Pure Theory of Consumer's Behaviour, *Quarterly Journal of Economics*, 50 (1936) 545–593.
6. Georgescu-Roegen, N., Choiche and Revealed Preference, *Southern Economic Journal*, 21 (1954) 119–130.
7. Giannessi, F., On Minty Variational Principle, in: Giannessi, F., S. Komlósi and T. Rapcsák (eds.) *New Trends in Mathematical Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998. pp. 93–99.
8. Hartman, P. and G. Stampacchia, On some nonlinear elliptic differential functional equations, *Acta Mathematica*, 115 (1966) 153–188.
9. Hassouni, A., *Sous-differentiels des fonctions quasiconvexes*, Thèse de 3ème Cycle de l'Université Paul Sabatier, Toulouse, 1983.
10. John, R., Variational Inequalities and Pseudomonotone Functions: Some Characterizations, in: Crouzeix, J.-P., Martínez-Legaz, J.-E. and M. Volle (eds.), *Generalized Convexity, Generalized Monotonicity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998, pp. 291–301.
11. John, R., Abraham Wald's equilibrium existence proof reconsidered, *Economic Theory*, 13 (1999) 417–428.
12. John, R., Quasimonotone individual demand, *Optimization*, 47 (2000) 201–209.
13. John, R., A Note on Minty Variational Inequalities and Generalized Monotonicity, in: Hadjisavvas, N., J.-E. Martínez-Legaz and J.-P. Penot (eds.), *Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*, Springer Verlag, Berlin, 2001, pp. 240–246.

14. John, R., *Uses of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity in Economics*, Manuscript, University of Bonn, 2001, pp. 45.
15. Karamardian, S., Complementarity Problems over Cones with Monotone and Pseudomonotone Maps, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 18 (1976) 445–454.
16. Karamardian, S. and S. Schaible, Seven kinds of monotone maps, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 66 (1990) 37–46.
17. Kinderlehrer, D. and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, New York, 1980.
18. Knaster, B., K. Kuratowski and S. Mazurkiewicz, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-Dimensionale Simplexe, *Fundamenta Mathematicae*, 14 (1929) 132–137.
19. Komlósi, S., On the Stampacchia and Minty Variational Inequalities, in: G. Giorgi and F. Rossi (eds.), *Generalized Convexity and Optimization for Economic and Financial Decisions*, Pitagora Editrice, Bologna, 1999, pp. 231–260.
20. Konnov, I. and J. C. Yao, On the Generalized Vector Variational Inequality Problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 206 (1997) 42–58.
21. Konnov, I. and J. C. Yao, Existence of Solutions for Generalized Vector Equilibrium Problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 233 (1999) 328–335.
22. Kuhn, H. W., On a Theorem of Wald, in: Kuhn, H. W. and A. W. Tucker (eds.), *Linear Inequalities and Related Systems*, Annals of Mathematical Studies No. 38, Princeton University Press, Princeton, 1956.
23. Ky Fan, A Generalization of Tychonoff's Fixed-Point Theorem, *Mathematics Annals*, 142 (1961) 305–310.
24. Samuelson, P. A., A Note on the Pure Theory of Consumer Behaviour, *Economica*, 5 (1938) 61–72.
25. Szabó, I., *Dualitás a mikroökonómiában*, kézirat, BKÁE, Budapest, 1999.
26. Varian, H. R., *Mikroökonómia középfokon*,
27. Wald, A., *Über die Produktionsglechungen der ökonomischen Werthlehre,* Ergebnisse eines mathemathischen Kolloquiums, 7 (1936) 1–16.
28. Zalai, E., *Matematikai közgazdaságtan*, KJK-KERSZÖV Kiadó, Budapest, 2000.

EARLY APPEARANCE OF GENERALIZED MONOTONICITY IN MICROECONOMICS

Generalized monotonicity is a very useful property of maps figuring in complementarity problems, variational inequality problems and equilibrium problems. The "carrier" of these concepts started with the seminal paper of Steven Karamardian and Siegfried Schaible published in 1990, in which the authors revealed the links between several generalized convexity properties of smooth functions and generalized monotonicity properties of their gradient maps. Based on the results obtained by Reinhard John very recently the paper provides on overlook on the early appearance of these favourite concepts in Microeconomics.

KOCKÁZAT ELUTASÍTÁS TÖBBFORRÁSÚ KOCKÁZAT ESETÉBEN[1]

VARGA JÓZSEF
PTE Közgazdaságtudományi Kar

A kockázat elutasító döntéshozó bármely két független kockázatos eszközt nemkívánatosnak tekint. Fontos elméleti és gyakorlati szempontból is az a kérdés, hogy ha a kockázat elutasító döntéshozó már rendelkezik egy kockázatos eszközzel, akkor módosítja-e a portfólióját egy másik szintén kockázatos eszközzel? Ha a válasz tagadó, akkor a döntéshozó megfelelő kockázat elutasítási attitűddel rendelkezik. A dolgozatban a megfelelő kockázat elutasítás elégséges feltételeit állapítjuk meg a kockázatot képviselő valószínűségi változók momentumaira és a hasznossági függvény magasabb rendű deriváltjaira kirótt feltételekkel. Bemutatunk továbbá két példát a megfelelőséget nem mutató hasznossági függvényekre. A megfelelő kockázat elutasítás fontos gyakorlati következményekkel jár, mivel biztosítja például, hogy a biztosítások és más fedezeti műveletek iránti kereslet nem csökken a kockázati tényezők számának növekedtével.

1 Bevezetés

Többforrású kockázat az élet számos területén előfordul, azonban csak nagyon ritkán találkozik a döntéshozó olyan egyedi kockázatokkal, amelyek tisztán elkülöníthetők egymástól. Ugyanakkor még a sztochasztikusan független kockázatokkal kapcsolatban is úgy vélhetjük, hogy ha a döntéshozó kénytelen elviselni egy bizonyos kockázatot, akkor ez a kockázatvállalás csökkenti a hajlandóságát egy másik kockázat elviselésére.

A kockázat elutasító befektető nemkívánatosnak tekint minden egyes független kockázatos eszközt. Ha választani kényszerül egy kockázatos eszközt, akkor vajon folytatja-e a befektetési lehetőségek elemzését egy másik kockázatos eszköz megvizsgálásával? Másképpen fogalmazva, kívánatosnak tekinthet-e a kockázat elutasító befektető egy kockázatos szerencsejátékot, ha már rendelkezik egy másik kockázatos szerencsejátékkal? Ha a fenti kérdésre adott válasz nemleges, a döntéshozót, befektetőt *megfelelő kockázat elutasítónak* mondjuk. Ezt a fogalmat Pratt és Zeckhauser (1987) vezette be, egy gyengébb változatának vizsgálata pedig Gollier és Pratt (1993) dolgozatában található. Az összes nemkívánatos szerencsejáték pár esetére a *megfelelő,* illetve *gyenge értelemben megfelelő kockázat elutasítást* mutató hasznossági függvénycsaládok leírása megtalálható Kimball (1993), Gollier és Pratt (1993, 1995) dolgozatában. Ebben a dolgozatban más szempontból vizsgáljuk ezt a kérdést.

[1] Beérkezett: 2001. június 25. E-mail: varga@ktk.pte.hu

Azok a feltételek, amelyek garantálják a megfelelőséget és a gyenge értelemben vett megfelelőséget, nem érvényesek mindegyik nemkívánatos kockázat párra, ezért a hasznossági függvényt alkalmazzuk ezek jellemzésére kockázat elutasítási, óvatossági és mértékletességi együtthatók segítségével.

A megfelelő kockázat elutasításnak olyan fontos gyakorlati következményei vannak mint például az, hogy biztosítja, hogy a biztosítás iránti kereslet, valamint más fedezeti műveletek kereslete nem csökken a független, előnytelen kockázatok számának növekedtével.

Az alábbi probléma a racionális befektető viselkedésével kapcsolatos és még nem teljesen tisztázott kérdésre irányítja a figyelmet.

Legyen X és Y két nemkívánatos kockázatos eszköz. Tegyük fel, hogy a befektető kiválasztotta az Y eszközt. Folytatja-e a befektetési lehetőségek értékelését a másik (X) eszköz értékelésével? Másként fogalmazva, ha a racionális befektető portfóliójában már szerepel egy Y kockázatos, nemkívánatos eszköz, akkor módosítja-e a befektetését egy másik független, nem fair kockázatos eszköznek a portfóliójába választásával?

Az első pillantásra, csupán intuíciónkra támaszkodva adható nemleges választ két tényező támasztja alá. Az egyik az, hogy a feltételezés szerint X nem fair, a másik pedig, hogy az ugyancsak feltételezett függetlenség nem vonja maga után a portfólió varianciájának csökkenését. Ennek ellenére számos példa azt mutatja, hogy még nagyon egyszerű konkáv hasznossági függvények esetében is adható pozitív válasz a fenti kérdésre. Ezeket az eseteket Pratt és Zeckhauser (1987) vizsgálta elsőként, akik a *megfelelőség* fogalmát bevezették az említett paradox eredmények kiküszöbölésére. Vizsgálták a megfelelőség elégséges feltételeit. Az egyik ilyen feltétel az, hogy az u hasznossági függvény legyen analitikus függvény (Pratt és Zeckhauser, 1987), egy másik pedig, hogy mind az *abszolút kockázat elutasítás*, mind pedig az *abszolút óvatosság* a vagyon csökkenő függvénye legyen (Kimball, 1993). Gollier és Pratt (1993) vezeti be a *gyenge értelemben vett megfelelőség* fogalmát, amely ugyanazokat a komparatív statikus eredményeket indukálja, mint a megfelelőség feltételezése.

A kockázat elutasítást *gyenge értelemben megfelelőnek* mondjuk, ha egy nemkívánatos kockázat nem tehető kívánatossá egy olyan Y háttér kockázat esetében, amelyre $E(Y) \leq 0$ teljesül. A gyenge megfelelőség elégséges feltétele az abszolút kockázat elutasítás csökkenő és konvex volta.

A következőkben először rámutatunk a fentebb említett viselkedés nyilvánvalóan paradox voltára, majd intuitív magyarázatot adunk erre a paradoxonra. Ennek érdekében felhasználjuk, hogy az u magasabb rendű deriváltjait a vizsgált kockázatok magasabb rendű momentumaihoz rendelt súlyoknak tekinthetjük. Megmutatjuk, hogy egy bizonyos momentumban bekövetkező nemkívánatos változás (például a variancia növekedése) ellensúlyozható egy másik momentum alkalmas változásával (például a ferdeség növekedésével egy óvatos befektető esetében).

Olyan, a hasznossági függvénnyel kapcsolatos enyhébb feltételeket állapítunk meg, amelyek biztosítják a gyenge megfelelőséget a *kockázat elutasítási, óvatossági és mértékletességi mértékek* segítségével.

A következő szakaszban összefoglaljuk a tárgyaláshoz szükséges fogalmakat, összefüggéseket, majd magyarázatot adunk a paradox viselkedésre. Ezután a gyenge megfelelőség elégséges feltételeiről szólunk, majd példákkal fejezzük be az elemzést.

2 Fogalmak

Tekintsünk egy várható hasznosság maximalizáló döntéshozót az u Neumann-Morgenstern típusú hasznossági függvénnyel. A következőkben feltesszük, hogy a szóba jövő valószínűség-eloszlások n-ed rendig véges momentumokkal rendelkeznek ($n > 1$). A hasznossági függvények halmazát korlátozzuk azokra a függvényekre, amelyek biztosítják a várható hasznosság létezését. Ezt a feltételt teljesítik például azok az akárhányszor differenciálható u függvények, amelyekhez létezik olyan k negatív egész szám, hogy

$$\lim_{x\to\infty}(1+x^2)^k \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = 0$$

minden n esetében fennáll.

Értelmezünk az elemzésben előforduló néhány fogalmat.

1. Definíció. *Az X kockázatos eszköz (kockázat) nemkívánatos az u hasznossági függvénnyel jellemzett befektető számára a véletlentől függő W háttérvagyon mellett, ha*

$$\mathbf{E}u(W+X) \le \mathbf{E}(W) .$$

Tekintsünk most olyan valószínűségi változókat, amelyek rendelkeznek az u függvénnyel kapcsolatos néhány tulajdonsággal. Definiáljuk a Σ_i szerinti *megfelelőség* fogalmát.

2. Definíció. *Az u Neumann-Morgenstern típusú függvény Σ_i $(i = 1, 2, 3)$ szerint megfelelő a w pontban, ha semmilyen nemkívánatos kockázat sem tehető kívánatossá valamely Y független kockázat bevezetésével adott w háttérvagyon mellett. Jelekben:*

$$\mathbf{E}u(w+X+Y) \le \mathbf{E}u(w+Y)\,, \quad \text{hacsak} \quad \mathbf{E}u(w+X) \le u(w)$$

és

$$Y \in \Sigma_i(w,u)\,, \tag{1}$$

ahol

$$\Sigma_1(w,u) \equiv \{\, Y : \mathbf{E}u'(w+Y) \ge u'(w) \,\}$$
$$\Sigma_2(w,u) \equiv \{\, Y : \mathbf{E}u(w+Y) \le u(w) \,\}$$
$$\Sigma_3(w,u) \equiv \{\, Y : \mathbf{E}(Y) \le 0 \,\} .$$

A Σ_1 szerinti megfelelőséget Kimball (1993) *standard kockázat elutasításnak* nevezte, a Σ_2 szerinti a Pratt-Zeckhauser (1987) féle *megfelelő kockázat elutasítás*, míg a Σ_3 szerinti a Gollier-Pratt (1993) féle *gyenge értelemben* *vett megfelelő kockázat elutasítás.* Megmutatható, hogy a standard megfelelő kockázat elutasítás magában foglalja a megfelelő kockázat elutasítást, a megfelelő kockázat elutasítás pedig a gyenge értelemben vett megfelelő kockázat elutasítást.

3 A lokális viselkedés intuitív magyarázata

Vegyük az (1) összefüggésbeli várható hasznosság kifejezésekben az u hasznossági függvény Taylor-sorát. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}u(w+X+Y) = u(w) + u'(w)\mathbf{E}(X+Y) + \frac{u''(w)}{2!}\mathbf{E}(X+Y)^2 + \\ + \frac{u'''(w)}{3!}\mathbf{E}(X+Y)^3 + \ldots + o\left(\mathbf{E}(X+Y)^n\right)\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}u(w+Y) = u(w) + u'(w)\mathbf{E}(Y) + \frac{u''(w)}{2!}\mathbf{E}(Y^2) + \\ + \frac{u'''(w)}{3!}\mathbf{E}(Y^3) + \ldots + o\left(\mathbf{E}(Y^n)\right)\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}u(w+X) = u(w) + u'(w)\mathbf{E}(X) + \frac{u''(w)}{2!}\mathbf{E}(X^2) + \\ + \frac{u'''(w)}{3!}\mathbf{E}(X^3) + \ldots + o\left(\mathbf{E}(X^n)\right) .\end{aligned} \tag{4}$$

Abban az esetben, amikor X és Y sztochasztikusan függetlenek, amikor tehát bármely g és h Borel függvény esetében a $g(X)$ és $h(Y)$ valószínűségi változók is függetlenek[2], a w pontbeli, Σ_i szerinti megfelelő kockázat elutasítás ekvivalens a következővel:

$$\begin{aligned}u'(w)\mathbf{E}(X) + \frac{u''(w)}{2!}\left[\mathbf{E}(X^2) + 2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)\right] + \\ + \frac{u'''(w)}{3!}\left[\mathbf{E}(X^3) + 3\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y) + 3\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^2)\right] + \\ + \frac{u^{(4)}(w)}{4!}\left[\mathbf{E}(X^4) + 4\mathbf{E}(X^3)\mathbf{E}(Y) + 6\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) + 4\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^3)\right] + \ldots \leq 0\end{aligned} \tag{5}$$

feltéve, hogy

$$u'(w)\mathbf{E}(X) + \frac{u''(w)}{2!}\mathbf{E}(X^2) + \frac{u'''(w)}{3!}\mathbf{E}(X^3) + \ldots \leq 0 \quad \text{és} \quad Y \in \Sigma_i(w,u)\ . \tag{6}$$

A (2), (3) és (4) összefüggések az $u^{(i)}(w)$ deriváltak jelentését világítják meg. Ezek a deriváltak a vizsgált valószínűségi változó i-edik momentumának a fontosságát mutatják a döntéshozó szempontjából. Az $u^{(i)}(w)$ pozitivitása a döntéshozó preferenciáját (elutasítását) mutatja az i-edik momentum pozitivitásával (negativitásával) kapcsolatban.

---

[2] Ezért például két független valószínűségi változó összegének harmadik momentuma: $\mathbf{E}(X+Y)^3 = \mathbf{E}(X^3) + 3\mathbf{E}(X^2Y) + 3\mathbf{E}(XY^2) + \mathbf{E}(Y^3) = \mathbf{E}(X^3) + 3\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y) + 3\mathbf{E}(Y^2)\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y^3)$

Ez pedig a „nem megfelelően" döntő befektető paradoxikus viselkedésének intuitív magyarázatát szolgáltatja. Az (5) valamelyik tagjában bekövetkező változás ellensúlyozható egy másik tagjának megfelelő változásával. Például egy büntető jellegű változás az $\mathbf{E}(X+Y)^2$ második momentumban kompenzálható az $\mathbf{E}(X+Y)^3$ harmadik momentumbeli kedvező irányú változásával. Másképpen kifejezve egy kedvezőtlen növekedés a varianciában kiegyensúlyozható a ferdeségben bekövetkező kedvező változással. Így például pozitív harmadik derivált esetében a döntéshozó a pozitív ferdeségű valószínűségi változót részesíti előnyben, vagyis olyan szerencsejátékot méltányol, amelyben nagy összeget kis valószínűséggel míg kis összeget nagy valószínűséggel veszít. Ilyen esetben a ferdeségben mutatkozó növekedés természetes fedezetet jelent a jelentős veszteségekkel szemben.

A következőkben megvizsgáljuk ennek az állításnak az analitikus alátámasztását. Az (5) feltétel ekvivalens az alábbival:

$$u'(w)\mathbf{E}(X) + \frac{u''(w)}{2!}\mathbf{E}(X^2) + \frac{u'''(w)}{3!}\mathbf{E}(X^3) + \frac{u^{(4)}(w)}{4!}\mathbf{E}(X^4) + \ldots \leq$$
$$-\Big\{u''(w)\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) + \frac{u'''(w)}{2!}\left[\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^2)\right] +$$
$$\frac{u^{(4)}(w)}{4!}\left[4\mathbf{E}(X^3)\mathbf{E}(Y) + 6\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) + 4\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^3)\right] + \ldots\Big\}\,,$$

ahol az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés negatív értékű és egyenlő az $\mathbf{E}u(w+X) - u(w)$ kifejezéssel. Ennek felhasználásával a következőt kapjuk:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}u(w+X) - u(w) \leq \\ -\Big\{u''(w)\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) + \frac{u'''(w)}{2!}\left[\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^2)\right] + \\ \frac{u^{(4)}(w)}{4!}\left[4\mathbf{E}(X^3)\mathbf{E}(Y) + 6\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) + 4\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^3)\right] + \ldots\Big\}\,.\end{gathered} \tag{7}$$

Ez az eredmény azt mutatja, hogy a megfelelőséget biztosítja az X kockázat elegendően nem kedvelt volta, vagyis, ha az $\mathbf{E}u(w+X) - u(w)$ különbség nem nagyobb egy a hasznossági függvény magasabb rendű deriváltjai és a momentumok által meghatározott korlátnál.

Az is leolvasható a (7) feltételről, hogy a megfelelőség az alábbi két módon biztosítható:

(i) az u deriváltjai relatív értékeire vonatkozó feltételek előírásával,

(ii) az u deriváltjainak rögzítése után a valószínűségi változók momentumaira vonatkozó előírásokkal.

Az elsőként említett feltételekkel az irodalomjegyzékben található dolgozatok foglalkoznak, itt a másodikként említett esetet elemezzük. A továbbiakban szigorúan növekedő és konkáv hasznossági függvényeket vizsgálunk.

4 A gyenge értelemben lokális megfelelőség feltételei

Tegyük fel, hogy $\mathbf{E}(Y) \leq 0$. A formuláról közvetlenül leolvasható, hogy (7) mind negatív, mind pedig pozitív várható értékű X esetében teljesülhet.

Első eset. Legyen $\mathbf{E}(X) > 0$. A gyenge értelemben lokális megfelelőség elégséges feltételét ekkor (7) jobb oldalának pozitivitása adja, vagyis

$$\mathbf{E}(X)\left[u''(w)\mathbf{E}(Y) + \frac{u'''(w)}{2}\mathbf{E}(Y^2)\right] + \mathbf{E}(Y)\left[\frac{u'''(w)}{2}\mathbf{E}(X^2) + \frac{u^{(4)}(w)}{3!}\mathbf{E}(X^3)\right] + \\ + \frac{u^{(4)}(w)}{4!}\left[6\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^3)\right] < 0\,.$$

Az elégségesség feltételei más alakban a következők:

$$p < 2\frac{\mathbf{E}(Y)}{\mathbf{E}(Y^2)}$$

$$\lambda\mathbf{E}(X^3) > 3\mathbf{E}(X^2)$$

$$u^{(4)}(w)\left[3\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) + 2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^3)\right] < 0\,,$$

ahol $p = -u'''/u''$ a Kimball (1990, 1993) által bevezetett ún. *óvatossági együttható*, $\lambda = -u^{(4)}/u'''$ pedig a *mértékletességi együttható* (ld. Eeckhoudt és Schlesinger (1991), Gollier és Pratt (1993, 1995)).

Második eset. Legyen most $E(X) \leq 0$. Ebben az esetben az elégségesség feltétele (7) jobb oldalának pozitív volta, vagyis

$$\mathbf{E}(X) \leq 0$$

$$u''' \geq 0$$

$$u^{(4)}\left[2\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y) + 3\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) + 2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^3)\right] \leq 0\,,$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesülése $u^{(4)}$ előjelétől függ. Ha $u^{(4)} \leq 0$ és u analitikus függvény, akkor a gyenge érelemben vett megfelelőség biztosított (ld. Gollier-Pratt, 1993), abban az esetben pedig, ha $u^{(4)} > 0$, a kitűzött cél az X és/vagy Y momentumaira vonatkozó kikötésekkel érhető el, például a következő módon:

$$u^{(4)} > 0$$

$$\mathbf{E}(X^3) > \frac{-3\mathbf{E}(X^2)\mathbf{E}(Y^2) - 2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^3)}{2\mathbf{E}(Y)}\,.$$

Ezek az eredmények tehát azt mutatják, hogy amennyiben az $u^{(i)}(w)$ deriváltakat a döntéshozó vagyonát jelentő valószínűségi változó momentumainak fontosságát kifejező súlyoknak tekintjük, akkor a megfelelő kockázat elutasítás biztosítható az X és Y momentumaira kirótt alkalmas feltételekkel.

A következőkben olyan hasznossági függvényeket vizsgálunk, amelyek *nem megfelelő kockázat elutasítási* tulajdonságot mutató döntéshozót jellemeznek. Az első példában nem-differenciálható hasznossági függvény szerepel.

1. Példa. Legyen a befektető hasznossági függvénye

$$u(w) = \begin{cases} w, & \text{ha } w < 20; \\ w/2 + 10, & \text{ha } w \geq 20, \end{cases}$$

és tekintsük az

$$X = \begin{cases} -4, & p = 1/2; \\ +5, & p = 1/2 \end{cases}$$

kockázatos eszközt. Ekkor a $w = 21$ háttérvagyon mellett $\mathbf{E}u(21 + X) = 20$, és mivel $u(21) = 20.5$, az u hasznossági függvénnyel jellemzett befektető számára X nemkívánatos kockázatos eszköz. Legyen

$$Y = \begin{cases} -10, & p = 1/2; \\ +10, & p = 1/2 \end{cases}$$

az X-től független kockázatos eszköz. Ekkor ugyancsak a $w = 21$ háttérvagyon mellett $\mathbf{E}u(21 + Y) = 18.25$ és $\mathbf{E}u(21 + X + Y) = 18.625$, tehát az X nemkívánatos eszköz kívánatossá válik a befektető számára, ha az Y független és ugyancsak kockázatos eszköz is szerepel a portfóliójában. Ennek az irracionális viselkedésnek a magyarázatát a következő számítási eredmények sugallják.

$$\begin{array}{lll} \mathbf{E}(X) = 0.5\,; & \mathbf{E}(Y) = 0\,; & \mathbf{E}(X+Y) = 0.5\,; \\ \mathbf{E}(X^2) = 20.5\,; & \mathbf{E}(Y^2) = 100\,; & \mathbf{E}(X+Y)^2 = 120.5\,; \\ \mathbf{E}(X^3) = 30.5\,; & \mathbf{E}(Y^3) = 0\,; & \mathbf{E}(X+Y)^3 = 180.5\,; \\ \mathbf{E}(X^4) = 440.5\,; & \mathbf{E}(Y^4) = 10000\,; & \mathbf{E}(X+Y)^4 = 22740.5\,. \end{array}$$

Tehát X bevezetése kedvezőtlen növekedést eredményez a második momentumban, ha azonban óvatos a döntéshozó, akkor ez kiegyenlíthető a harmadik momentum növelésével. Megjegyezzük, hogy a vizsgált esetben

$$\mathbf{E}(X+Y)^3 > \mathbf{E}(X^3) + \mathbf{E}(Y^3)\,.$$

A fenti példában szereplő hasznossági függvény második és annál magasabb rendű deriváltjai azonosan zérussal egyenlőek, ezért a (7) feltétel teljesülése nem ellenőrizhető. A következő példában olyan hasznossági függvényt választunk, amelyre ellenőrizhető a megfelelő kockázat elutasítás feltétele.

2. Példa. Tegyük fel, hogy a befektető hasznossági függvénye közelíthető a

$$v(w) = w^3 - 255w^2 + 15652w$$

harmadfokú polinommal. Legyen a háttérvagyon ismét $w = 21$, X pedig ugyanaz a kockázatos eszköz, mint az előző példában. Ekkor $\mathbf{E}v(21 + X) = 224725$ és $v(w) = 225498$. Az X eszköz tehát nemkívánatos a v hasznossági függvénnyel jellemzett befektető számára. Mivel pedig a (7) feltétel nem teljesül, a megfelelő kockázat elutasítás sem áll fenn. A (7) feltétel ugyanis sérül, ha az

$$\mathbf{E}v(21+X) - v(21) \geq -v''(21)\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \frac{v'''(21)}{2}\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y^2)$$

egyenlőtlenség fennáll. Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a fenti egyenlőtlenség teljesül, vagyis a v hasznossági függvénnyel jellemzett befektető nem rendelkezik megfelelő kockázat elutasító attitűddel. Megjegyezzük még, hogy a v''' pozitivitása esetén a döntéshozó a nagyobb ferdeségű valószínűségi változóval jellemzett vagyont részesíti előnyben.

A második példa azt is mutatja, hogy nem a hasznossági függvény differenciálhatóságának hiánya az oka a döntéshozó nem megfelelő kockázat elutasító attitűdjének.

5 A nem megfelelő kockázat elutasítás és a döntési gyakorlat

A biztosítási kereslet vizsgálata irányította a figyelmet a többforrású kockázat jelenlétében tevékenykedő kockázat elutasító döntéshozó viselkedésére.

Ha egy kockázat kiküszöbölésére biztosítást köt a döntéshozó (vagyis semlegesíti az Y háttérkockázatot), akkor ez ösztönözheti egy új X kockázat elfogadására. Ezért új opciós és határidős piacok megnyitása serkentheti a versenyhelyzetben levő piacok aktivitását. Ez nyilvánvalóan nem teljesül, ha a befektetők nem megfelelő kockázat elutasító attitűddel rendelkeznek. Ha ugyanis a befektető vagyona a véletlentől függő $W+Y$, akkor hajlandó elfogadni, míg ha az induló vagyona a nem véletlentől függő w, akkor inkább visszautasítja az új X kockázatot.

A dolgozatban csak a független kockázatok esetét vizsgáltuk. A (2) összefüggésből leolvasható, hogy a megfelelőség feltételei tartalmazzák a $w+X+Y$ véletlen összeg összes momentumát, ezért nyilvánvaló, hogy a korrelációs együttható nem megfelelő eszköz a megfelelő kockázat elutasítás feltételeinek meghatározására abban az esetben, amikor a kockázatok nem feltétlenül függetlenek, mert a korrelációs együttható csak az X és Y közötti függőségi struktúrának a $w+X+Y$ összeg varianciájára gyakorolt hatását mutatja. Alkalmas függőségi mértékek meghatározása és beillesztése a kockázati attitűd vizsgálatába további vizsgálatokat igényel.

Irodalom

1. Eckhoudt, L., M. Kimball (1992), Background Risk, Prudence and the Demand for Insurance, in: *Contribution to Insurance Economics*, ed. Georges Dionne, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 239–254.

2. Gollier, C., J. W. Pratt (1993), *Weak Proper Risk Aversion and the Tempering Effect of Background Risk*, Cahier de Recherche HEC School of Management, n. 494/1993, Paris.

3. Kimball, M. S. (1990), Precautionary Saving in the Small and in the Large, *Econometrica*, 58, 53–73.
4. Kimball, M. S. (1993), Standard Risk Aversion, *Econometrica*, 61, 589–611.
5. Pratt, J. W., Zeckhauser ((1987), Proper Risk Aversion, *Econometrica*, 55, 143–154.
6. Segal, U., A. Spivak (1990), First Order versus Second Order Risk Aversion, *Journal of Economic Theory*, 51, 111–125.

RISK AVERSION UNDER PRESENCE OF MULTIPLE SOURCES OF RISK

Sufficient conditions to guarantee properness and weak properness properties in the case of independent risks are discussed in this paper. Proper risk aversion should have important consequences in applications. For example, properness guarantees that the demand in insurance and in other forms of hedging does not decrease as the number of independent unfavourable risks increase. Examples of utility functions violating the properness property are also reported.

AZ MC^2 PROGRAMOZÁS FELHASZNÁLÁSI LEHETŐSÉGE AZ AGGREGÁLT TERMELÉSTERVEZÉSBEN[1]

GYETVÁN FERENC
PTE Közgazdaságtudományi Kar

A dolgozat egy olyan aggregált termeléstervezési modellt ismertet, amely a döntési alternatívákat több kritérium alapján értékeli, továbbá a kapacitás és a kereslet különböző lehetséges szintjeit is figyelembe veszi. A probléma megoldását szolgáló eljárás a mátrixprogramozás és az MC^2 (Multi-Criteria and Multi-Constraint) programozás elméleti alapjain nyugszik. A megoldás a kapacitás és a keresleti szintek, valamint az értékelő kritériumok súlyainak függvényében a potenciális optimális megoldások halmazát adja. A dolgozat célja annak bemutatása, hogy miként használhatók fel egy aggregált termeléstervezési probléma megoldása során a mátrixprogramozás és az MC^2 programozás elméleti eredményei. Az utolsó fejezet áttekintést nyújt a témához kapcsolódó legfontosabb munkákról.

Kulcsszavak: aggregált termeléstervezés, többkritériumos döntéshozatal, mátrixprogramozás, MC^2 (Multi-Criteria and Multi-Constraint) programozás, szállítási feladat, potenciális optimális megoldás.

1 Bevezetés

Az aggregált termeléstervezés területén az első modellek egyikét Bowman (1956) fogalmazta meg. A termeléstervezési problémát lineáris programozási feladatként formalizálta, és a feladatot szállítási feladatra vezette vissza. Az optimális megoldás előállítására, azaz az összköltség minimalizálására, a szállítási feladat megoldási algoritmusát alkalmazta. Ennek a modellnek nagy hatása volt a modellezés fejlődésére, ugyanis nem csak a matematikai modellezés termeléstervezésre történő alkalmazását mutatta meg, hanem a számítógépes szoftverek megjelenésével utat nyitott bármelyik, valóságos aggregált termeléstervezési probléma gyors gyakorlati megoldásához is.

A lineáris programozás struktúrájának megfelelően Bowman modellje csak egy célfüggvény, a termelés és raktározás együttes költségének figyelembe vételére volt alkalmas. A szélsőérték problémák sokkal árnyaltabb kezelésére adott lehetőséget a célprogramozás (Goodman (1974)), és a többkritériumos vagy többcélfüggvényes programozás módszereinek az alkalmazása, ahol a termeléssel, raktározással vagy a munkaerővel kapcsolatos célokat nem egy összegként kezeljük, hanem egyedi céloknak tekintjük (lásd, pl. Charnes és

[1]Beérkezett: 2001. április 3. E-mail: gyetvan@ktk.pte.hu

Cooper (1962), Lee (1972), Zeleny (1974), Yu és Zeleny (1975), Yu (1985)). A többkritériumos alkalmazások egyik legnagyobb előnye, hogy vizsgálhatjuk a kritériumok közötti átváltási lehetőségeket. Az átváltási mutatók arról adnak felvilágosítást, hogy valamelyik célfüggvény érték egy egységének feláldozása milyen előnyt jelent a többi kritérium célfüggvény értékének vonatkozásában.

Az említett modellekben a szerzők feltételezik, hogy a kapacitás és keresleti szintek adottak. A valóságban azonban a kapacitás és keresleti szintek ingadozást mutathatnak. Shi és Haase (1996) nyomán az aggregált termeléstervezésnek egy olyan modelljét mutatjuk be a mátrixprogramozás és a lineáris MC^2 (Multi-Criteria and Multi-Constraint) programozás keretében, mely több kapacitás és keresleti szintet képes figyelembe venni, és több kritérium segítségével értékeli a lehetséges alternatívákat. A mátrixprogramozás elméletének kidolgozása Gale, Kuhn és Tucker (1951) nevéhez, az MC^2 programozás elméletének kidolgozása pedig Seiford és Yu (1979) nevéhez fűződik. A mátrixprogramozás egy összefoglalása és kiegészítése megtalálható Gyetván (1989) cikkében, a mátrixprogramozás és a lineáris MC^2 programozás ekvivalenciáját Gyetván és Shi (1992) dolgozata tartalmazza. Az aggregált termelésprogramozási probléma megoldása a döntéshozó számára a potenciális optimális megoldások halmazával szolgál a kapacitás és keresleti szintek különböző súlyainak, valamint az értékelő kritériumok súlyainak függvényében.

2 Aggregált termeléstervezés több kapacitás- és keresletszint mellett

Az aggregált termeléstervezés a termelés/szolgáltatás menedzsment legfontosabb fejezeteinek egyike. Egy vállalat vezetése a tervezési folyamat során arra a kérdésre keresi a választ, hogy egy adott tervezési időszak periódusaiban milyen aggregált termelési, raktározási és munkaerő szintek esetén lehet minimális költséggel kielégíteni a keresletet. A kérdés megválaszolásához a matematikai programozást hívhatjuk segítségül.

A vállalati felső vezetés számára az éves üzleti terv elkészítése a tárgyévet megelőző év utolsó hónapjaiban válik aktuálissá. Ekkor kell a befektetett eszközök eredményes működtetését megtervezni. Az eszközök hozadéka csak forgalom útján realizálódhat. A tervezést végző csoportnak tehát jó előre látnia kell a forgalom várható alakulását. Ezért a vállalat szerződéseket igyekszik kötni üzleti partnereivel, és piaci prognózisok révén nyer információt a várható forgalomról. A szerződések és előrejelzések nem termék mélységűek, hanem általában termékcsaládokra vonatkoznak, mert a középtávú (általában egy év időhorizontú) előrelátáshoz mind a termelőnek, mind pedig a fogyasztónak elegendő aggregátumokban gondolkodni (Vörös (1999)). A modellek általában az adott időtávra vonatkozó fix kapacitás és keresleti adatokból indulnak ki, és egy kritérium alapján választják ki az optimális alternatívát.

Ha a probléma matematikai modelljében az erőforrásokra és keresletre vonatkozó korlátokat feltételi egyenlőtlenségek formájában fogalmazzuk meg, akkor a mátrixaritmetika eszközeivel leírt lineáris modellben több jobboldali vektor szerepel. A következő fejezetekben látni fogjuk, hogy a különböző kapacitás és kereslet korlátok vektorainak a súlyozása révén mód nyílik a tradicionális lineáris programozási modell kiterjesztésére különböző kapacitás és keresleti szinteket kezelő modellre.

Egy másik ok, ami miatt a többkritériumos, több kapacitás- és keresletszint problémával foglalkozunk, az a csoportos döntéshozatal (Hwang és Lin (1987)). A gyakorlat azt mutatja, hogy egy termelő cég élén a vezetők, az elnök, a pénzügyi, termelési igazgatók stb. csoportot képeznek és úgy hoznak döntést. A döntéshozóknak azonban a vállalaton belül elfoglalt pozíciója alapján különböző lehet az érdeke a szükséges kapacitások vonatkozásában vagy a kereslet mértékének megítélésében. Az optimális aggregált termelési tervnek vissza kell tükröznie a kompromisszumot a döntéshozók által preferált különböző diszkrét kapacitás és keresleti szintek között.

Az előbbiekben vázolt aggregált termeléstervezési filozófia modelljének leírásához szükséges elméleti keretek rövid ismertetését tartalmazza a következő rész.

3 Mátrixprogramozás és az MC^2 programozás

A termeléstervezés lineáris programozás-alapú modelljeinek egyik hiányossága, hogy csak egy kritérium alapján értékelik az alternatívákat. De a többkritériumos alkalmazások eszközrendszere is kevés, ha emellett még több kapacitás- és keresletszintet kell figyelembe venni. Ezek a problémák a klasszikus lineáris programozás sémájának általánosításával úgy fogalmazhatók meg, hogy a modellben egy célfüggvény helyett több célfüggvény, és a feltételi egyenlőtlenségek egy jobboldali vektora helyett több jobboldali vektor szerepel. A probléma tehát

$$\begin{gathered} Ax \leq By \\ x \geq 0,\ y > 0 \\ Cx \to \max \end{gathered} \tag{1}$$

alakú, ahol A $m \times n$-es, B $m \times p$-s és C $q \times n$-es mátrixok, ezért a vizsgált aggregált termeléstervezési problémát a mátrixprogramozás eszközrendszerével írjuk le. Az elmélet részletes kidolgozását megtalálja az olvasó Gale, Kuhn és Tucker (1951) munkájában, valamint Gyetván (1989) összefoglaló és kiegészítő cikkében. A mátrixprogramozás elméletének kiindulópontja egy primál-duál probléma-pár, melyet a szerzők a következőképpen definiáltak:

$$\max \{\, D \mid Cx \geq Dy,\ Ax \leq By,\ x \geq 0,\ y > 0 \,\}\ , \tag{2}$$

$$\min \{\, D \mid u^T B \leq v^T D,\ u^T A \geq v^T C,\ u \geq 0,\ v > 0 \,\}\ . \tag{3}$$

Ugyanúgy, mint az (1) feladatban, mindkettőben az $m \times n$-es A, $m \times p$-s B és $q \times n$-es C mátrixok a kiinduló információk hordozói. A D $q \times p$ méretű ismeretlen mátrix, és x, y, u, v megfelelő méretű vektorváltozók. Tekintettel arra, hogy a mátrixok halmaza részben rendezett halmaz, a maximum és minimum fogalma a probléma jellegéhez igazodó, egyedi definiálást igényelt.

Ezt a hiányt az efficiencia fogalmának bevezetésével hidalták át a szerzők. Dolgozatunk céljának megfelelően e helyütt eltekintünk a dualitáselmélet eredményeinek ismertetésétől.

Egyszerűen megmutatható, hogy a (2) és (3) általános mátrix problémák speciális esetként kiadják a lineáris vektor probléma és a lineáris skalár probléma primál-duál párját. Ennek alapján logikusnak látszik az eddig önállónak tekintett két programozási feladatot a mátrixprogramozás primál-duál párjának nevezni. Az egzisztencia és dualitási tételek alátámasztják ennek a felfogásnak a helyességét.

A mátrixprogramozási feladat numerikus megoldásához visz közelebb a másik programozási módszer, az ún. MC^2 lineáris programozás, melyet Seiford és Yu (1979) dolgoztak ki. A szerzők a mátrixprogramozáshoz nagyon hasonló megközelítést alkalmaznak, és az alábbi primál-duál feladatpárt definiálják:

$$\max\left\{ v^T Cx \mid Ax \leq By,\ x \geq 0,\ y > 0,\ v > 0 \right\}, \tag{4}$$

$$\min\left\{ u^T By \mid u^T A \geq v^T C,\ u \geq 0,\ y > 0,\ v > 0 \right\}. \tag{5}$$

A különbség a mátrixprogramozás (2)-(3) primál-duál párjához képest az, hogy (4)-(5) ignorálja a D célmátrixot, és mind a primál, mind pedig a duál feladatban szerepelteti a két pozitív előjelű y és v vektort.

A mátrixprogramozás és az MC^2 lineáris programozás között a formai hasonlóságon túl mély belső kapcsolat van. A két probléma ekvivalens abban az értelemben, hogy a két feladat megengedett megoldásai és a két feladat efficiens megoldáspárjai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak. Teljesen analóg dualitási tételek mondhatók ki az MC^2 programozás (4)-(5) primál-duál párja között, mint a mátrixprogramozás (2)-(3) primál-duál párja között, melyeket a továbbiak szempontjából nem tartjuk fontosnak e helyen ismertetni. A mátrixprogramozás és az MC^2 lineáris programozás közötti elméleti kapcsolatok részletes leírása Gyetván és Shi (1992) dolgozatában található. Az MC^2-hez kapcsolódó döntési problémákról Lee, Shi és Yu (1990), továbbá Shi és Yu (1992) értekezik.

A fejezet következő részében a (4) MC^2 primál feladat szimplex alapú megoldó algoritmusát ismertetjük. Az alapötlet az, hogy a korábban vázolt (4) lineáris többkritériumos, több feltételi korlátot tartalmazó feladatot fogjuk fel parametrikus feladatként oly módon, hogy a pozitív $v > 0$, $y > 0$ változókat paramétereknek tekintjük. Hogy jelekben is érzékeltessük a változást, a következőkben a paraméterek jelölésére a görög λ és γ betűket használjuk. Így (4) az alábbi alakot ölti:

$$\max\left\{ \lambda^T Cx \mid Ax \leq B\gamma,\ x \geq 0 \right\}, \tag{6}$$

ahol $C \in I\!R^{q\times n}$, $A \in I\!R^{m\times n}$ és $B \in I\!R^{m\times p}$ $q \times n$, $m \times n$ és $m \times p$ méretű mátrixok, $x \in I\!R^n$ n-elemű döntési változók vektora, $\lambda > 0$, $\lambda \in I\!R^q$ a kritériumok paraméter-súlyai és $\gamma > 0$, $\gamma \in I\!R^p$ a feltételi szintek paraméter-súlyai. Feltételezzük, hogy a paraméterek ismeretlenek és normáltak, azaz teljesülnek az alábbiak:

$$\lambda \in I\!R^q, \quad \lambda > 0, \quad \sum_{k=1}^{q} \lambda_k = 1 \qquad \text{és} \qquad \gamma \in I\!R^p, \quad \gamma > 0, \quad \sum_{k=1}^{p} \gamma_k = 1 .$$

A leírt primál MC^2 lineáris programozási feladatnak q célfüggvénye és p feltételi szintje van. Ha a feltételi szintek γ paramétervektora ismert, akkor (6) többkritériumos lineáris programozási feladatra redukálódik. Továbbá, ha λ a kritériumok paramétervektora is ismert, akkor a klasszikus lineáris programozási feladat áll elő.

Jelölje az $\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\}$ bázisváltozók indexhalmazát $J = \{j_1, \ldots, j_m\}$. Nem okoz zavart, ha magát a probléma bázisát is J jelöli. Megjegyezzük, hogy a bázisváltozók slack változókat is tartalmazhatnak. Mivel egy J bázismegoldás a (γ, λ) paraméterpár függvénye, az alábbi módon definiáljuk a primál és duál megengedett megoldás, valamint a potenciális optimális megoldás fogalmát.

i) A J bázismegoldás az MC^2 programozási feladat primál megengedett megoldása, ha létezik olyan $\gamma_0 > 0$, hogy J megengedett megoldása MC^2-nek.

ii) A J bázismegoldás az MC^2 programozási feladat duál megengedett megoldása, ha létezik olyan $\lambda_0 > 0$, hogy J duál megengedett megoldása MC^2-nek.

iii) A J bázismegoldás potenciális optimális megoldása az MC^2 programozási feladatnak, ha létezik olyan $\gamma_0 > 0$ és $\lambda_0 > 0$, hogy J optimális megoldása a lineáris programozási feladatnak.

Legyen $\Gamma(J)$ a feltételi szintek összes olyan γ súlyainak halmaza, melyre J primál megengedett, és legyen $\Lambda(J)$ a kritériumok összes olyan λ súlyainak halmaza, melyre J duál megengedett. Ekkor a J bázis

i) primál megengedett vagy duál megengedett akkor és csakis akkor, ha $\Gamma(J)$ vagy $\Lambda(J)$ nem üres és

ii) potenciális optimális megoldás akkor és csakis akkor, ha $\Gamma(J)$ és $\Lambda(J)$ nem üres.

Egy MC^2 programozási feladatnak természetesen több potenciálisan optimális megoldása is lehetséges, ahogyan a (γ, λ) paraméterpár a döntési szituációnak megfelelően változik. Seiford és Yu (1979) kidolgoztak egy szimplex módszeren alapuló eljárást az összes potenciális optimális megoldás előállítására. Ide kapcsolódik még Yu (1985) és Shi és Yu (1992) munkája. Az algoritmus számítógépes megvalósítását Chien, Shi és Yu (1989) végezte el.

4 Az MC^2 programozás egy alkalmazási lehetősége az aggregált termeléstervezésben

Az aggregált termeléstervezés matematikai modelljéhez a klasszikus szállítási feladat szolgál alapul, mely speciális lineáris programozási feladat. Haase (1994) és Shi (1995) ennek általánosításaként kidolgozta az MC^2 programozás elméleti keretein belül az MC^2 szállítási feladat modelljét. Az általunk tárgyalt aggregált termeléstervezési probléma modelljének általános formája az MC^2 szállítási feladat. Ez a dolgozat Shi és Haase (1996) felépítését követi. Megjegyezzük, hogy a továbbiakban a klasszikus szállítási feladat terminológiáját használjuk.

Tegyük fel, hogy a tervezési időszakot n periódusra bontottuk, és az egyes periódusokban becslések alapján ismertek a szezonális ingadozásoknak megfelelően az aggregált keresleti szintek alternatívái. Ismertnek tételezzük fel továbbá a kereslet szezonális ingadozásainak megfelelő kapacitásszintek alternatíváit.

Jelölje $P_1, P_2, \ldots, P_n$ a periódusokat, és $b_{11}, \ldots, b_{1p}$; $b_{21}, \ldots, b_{2p}$; ... ; b_{n1}, ..., b_{np} az n periódusban a keresleti szinteket. Tegyük fel továbbá, hogy m erőforrás áll rendelkezésre, melyek kapacitása szintén a szezonális ingadozásoknak megfelelően változik. Jelölje $E_1, E_2, \ldots, E_m$ az erőforrásokat, és $a_{11}, \ldots, a_{1p}$; $a_{21}, \ldots, a_{2p}$; ...; $a_{m1}, \ldots, a_{mp}$ a megfelelő kapacitásszinteket. Az alternatívák értékelése q kritérium alapján történik. Az i-edik erőforrás felhasználásával a j-edik periódusban jelentkező kereslet kielégítésére történő termelés fajlagos költsége c_{ij}^1, ..., c_{ij}^q. A leírt modell szemléltethető az *1. táblázaton* látható disztribúciós táblán.

Periódus / Erőforrás	P_1	...	P_n	Kapacitásszint
E_1	$c_{11}^1, \ldots, c_{11}^q$	...	$c_{1n}^1, \ldots, c_{1n}^q$	$a_{11}, \ldots, a_{1p}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
E_i	$c_{i1}^1, \ldots, c_{i1}^q$	...	$c_{in}^1, \ldots, c_{in}^q$	$a_{i1}, \ldots, a_{ip}$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
E_m	$c_{m1}^1, \ldots, c_{m1}^q$	...	$c_{mn}^1, \ldots, c_{mn}^q$	$a_{m1}, \ldots, a_{mp}$
Keresletszint	b_{11} $\vdots$ b_{1p}	...	b_{n1} $\vdots$ b_{np}	

1. táblázat: A többcélfüggvényes, több kapacitás-kereslet szintű aggregált termelési feladat disztribúciós táblája

A probléma matematikai modellje a következő alakot ölti.

$$\min(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q,) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^1 x_{ij} \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2 x_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^q x_{ij} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ip}) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = (b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jp}) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{minden } (i, j) \text{ párra},$$

ahol

c_{ij}^k - az i-edik forrás felhasználásával a j-edik periódusban jelentkező kereslet kielégítésére előállított termék fajlagos költsége, ha a tevékenységet a k-adik célfüggvény értékeli, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, q$;

a_{is} - az i-edik erőforrás s-edik kapacitás szintje, $i = 1, \ldots, m$, $s = 1, \ldots, p$;

b_{js} - a j-edik periódusban az s-edik keresletszint, $j = 1, \ldots, n$, $s = 1, \ldots, p$;

x_{ij} - az i-edik erőforrás felhasználásával a j-edik periódusban jelentkező kereslet kielégítésére előállított termékmennyiség, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$;

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)^T$ - a célfüggvények súlyainak vektora és

$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)^T$ - a kapacitás- és keresletszintek súlyainak vektora.

Annak érdekében, hogy lássuk, hogy a fenti modell hogyan választja ki a potenciális optimális megoldásokat, ismertetnünk kell néhány alapvető tételt. Az MC^2 szállítási feladatra vonatkozó állítások bizonyítását Shi (1995) dolgozatában, és az MC^2 lineáris programozás elméletének részletes tárgyalását Yu (1985) munkájában találja meg az olvasó.

Ha érvényesek a

$$\sum_{i=1}^{m} a_{is} = \sum_{j=1}^{n} b_{js}, \qquad (s = 1, 2, \ldots, p)$$

feltételek, akkor az MC^2 szállítási feladatra igazak az alábbi állítások:

i) Adott $\gamma^0 > 0$-hoz létezik az MC^2 szállítási feladatnak primál megengedett megoldása.

ii) Ha adott egy J primál megengedett bázis, akkor a megfelelő $x(J)$ bázisváltozók legfeljebb $m + n - 1$ darab pozitív komponenst tartalmaznak, ahol minden x_{ij} a γ függvénye.

Legyen adott a (7) feladat egy $x(J)$ bázismegoldása, és legyen

$$c_{ij} = (c_{ij}^1, c_{ij}^2, \ldots, c_{ij}^q)^T$$

a q célfüggvény együttható-vektora, ha x_{ij} az i-edik erőforrásból a j-edik periódusban felmerült kereslet kielégítésére termelt mennyiség. Jelölje $u_i(\lambda)$ az i-edik erőforráshoz tartozó duál együtthatót, $v_j(\lambda)$ pedig a j-edik keresletehez tartozó duál együtthatót. Megjegyezzük, hogy mind az $u_i(\lambda)$, mind pedig a $v_j(\lambda)$ a λ függvénye. Ekkor igaz a következő tétel:

Tétel. *Egy J bázis duálmegengedett, ha*

i) $u_i(\lambda) + v_j(\lambda) - \lambda^T c_{ij} = 0$ *minden olyan (i, j) párra, melyre x_{ij} bázisváltozó, és*

ii) $u_i(\lambda) + v_j(\lambda) - \lambda^T c_{ij} \leq 0$ *minden olyan (i, j) párra, melyre x_{ij} nem bázisváltozó.*

Az iménti tételek lehetőséget nyújtanak egy eljárás megalkotására, mivel az i) állítás alapján ki lehet számítani a J bázishoz tartozó $u_i(\lambda)$ és $v_j(\lambda)$ duálváltozók értékét, és ha a feltételi súlyok $\Gamma(J)$ halmaza nem üres, akkor az ii) állítás alapján tesztelni lehet, hogy egy megengedett megoldás potenciális optimális megoldás-e. Az algoritmus ennek alapján két fázisból áll.

Az első fázisban

i) keresünk egy J induló megengedett bázismegoldást;

ii) egy iteráció során a be- és kilépő bázisváltozók kiválasztása annak megfelelően, hogy a J bázismegoldás potenciálisan optimális-e, vagy sem.

A második fázisra csak akkor fut az algoritmus, ha J nem potenciális optimális megoldás. Ekkor

i) pivot transzformációval, előállítja a szomszédos K bázist, és megismétli az első fázis ii) részét;

ii) egyébként pedig a J bázist elhelyezi a potenciális optimális megoldások halmazába, és egy pivot lépéssel átlép egy szomszédos Q bázisra, és megismétli az első fázis ii) részét.

Ez a két lépés ismétlődik mindaddig, míg az algoritmus teljesen be nem futja a (γ, λ) minden lehetséges értékpárját. Az eljárás eredményeként megkapjuk az MC^2 szállítási feladat összes potenciális optimális megoldását (lásd Yu (1985)).

5 Egy példa

Mint a korábbi fejezetekben láttuk, a többkritériumos és több kapacitás-keresletszinttel rendelkező aggregált termeléstervezési modellek MC^2 szállítási feladatként interpretálhatók. A probléma egy lehetséges megoldásának illusztrálására bemutatjuk Singhal és Adlakha (1989), három célfüggvényt és három kapacitás-kereslet szintet kezelő modelljét. A három célfüggvény: a termelési költség, a tárolási költség és a hiány okozta veszteség. A kapacitás és kereslet szintjeit három, a döntéshozatalban résztvevő vezető adja meg. Tegyük fel továbbá, hogy a termelési időszak három periódusból áll. Minden termelési periódusban alap munkaidőben és túlórában folyhat a termelés. Egy adott periódusbeli termelést a termelési költségen túl tárolási költség is terheli, ha későbbi periódusokban jelentkező igények kielégítésére szolgál. Ha azonban korábbi periódus számára történik a termelés, azaz a hiányt is megengedjük, akkor a hiány által elszenvedett veszteség lép fel. A feladat adatait a *2. táblázat* mutatja.

Legyen r - a termelés egységköltsége alap munkaidőben; v - a termelés egységköltsége túlórában; h - az egy periódus során felmerülő tárolási egységköltség; s - a hiány egységköltsége periódusonként; a_{ik} - az i-edik periódusban a k-adik termelési kapacitásszint, b_{jk} - a j-edik periódusban a k-adik keresletszint, és b_{4k} kiegészítő (slack) változó ($i = 1, \dots, 7,\ j, k = 1, 2, 3$).

Periódusok	$P1$	$P2$	$P3$	Slack	Kapacitásszintek
Kezdő raktárkészlet	$0, 0, 0$	$0, h, 0$	$0, 2h, 0$	$0, 0, 0$	$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}$
$A1$	$r, 0, 0$	$r, h, 0$	$r, 2h, 0$	$0, 0, 0$	$a_{21}\ a_{22}\ a_{23}$
$T1$	$v, 0, 0$	$v, h, 0$	$v, 2h, 0$	$0, 0, 0$	$a_{31}\ a_{32}\ a_{33}$
$A2$	$r, 0, s$	$r, 0, 0$	$r, h, 0$	$0, 0, 0$	$a_{41}\ a_{42}\ a_{43}$
$T2$	$v, 0, s$	$v, 0, 0$	$v, h, 0$	$0, 0, 0$	$a_{51}\ a_{52}\ a_{53}$
$A3$	$r, 0, 2s$	$r, 0, s$	$r, 0, 0$	$0, 0, 0$	$a_{61}\ a_{62}\ a_{63}$
$T3$	$v, 0, 2s$	$v, 0, s$	$v, 0, 0$	$0, 0, 0$	$a_{71}\ a_{72}\ a_{73}$
Keresletszintek	b_{11} b_{12} b_{13}	b_{21} b_{22} b_{23}	b_{31} b_{32} b_{33}	b_{41} b_{42} b_{43}	

2. táblázat. Aggregált termeléstervezési feladat disztribúciós táblája három célfüggvény valamint három kapacitás- és keresletszint esetén

termelési	periódusok	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	slack	kapacitások	
															1. vezető	2. vezető
0	raktárkészl.	$0, 0$	$0, h$	$0, 2h$	$0, 3h$	$0, 4h$	$0, 5h$	$0, 6h$	$0, 7h$	$0, 8h$	$0, 9h$	$0, 10h$	$0, 11h$	0, 0	100	100
1	főmunkaidő	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	$r, 6h$	$r, 7h$	$r, 8h$	$r, 9h$	$r, 10h$	$r, 11h$	0, 0	800	900
1	túlóra	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	$v, 6h$	$v, 7h$	$v, 8h$	$v, 9h$	$v, 10h$	$v, 11h$	0, 0	320	400
2	főmunkaidő	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	$r, 6h$	$r, 7h$	$r, 8h$	$r, 9h$	$r, 10h$	0, 0	760	600
2	túlóra	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	$v, 6h$	$v, 7h$	$v, 8h$	$v, 9h$	$v, 10h$	0, 0	304	400
3	főmunkaidő	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	$r, 6h$	$r, 7h$	$r, 8h$	$r, 9h$	0, 0	840	800
3	túlóra	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	$v, 6h$	$v, 7h$	$v, 8h$	$v, 9h$	0, 0	336	420
4	főmunkaidő	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	$r, 6h$	$r, 7h$	$r, 8h$	0, 0	880	700
4	túlóra	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	$v, 6h$	$v, 7h$	$v, 8h$	0, 0	352	400
5	főmunkaidő	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	$r, 6h$	$r, 7h$	0, 0	840	800
5	túlóra	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	$v, 6h$	$v, 7h$	0, 0	336	350
6	főmunkaidő	X	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	$r, 6h$	0, 0	800	770
6	túlóra	X	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	$v, 6h$	0, 0	320	340
7	főmunkaidő	X	X	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	$r, 5h$	0, 0	800	770
7	túlóra	X	X	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	$v, 5h$	0, 0	320	340
8	főmunkaidő	X	X	X	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	$r, 4h$	0, 0	760	700
8	túlóra	X	X	X	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	$v, 4h$	0, 0	304	300
9	főmunkaidő	X	X	X	X	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	$r, 3h$	0, 0	840	800
9	túlóra	X	X	X	X	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	$v, 3h$	0, 0	336	350
10	főmunkaidő	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	$r, 2h$	0, 0	880	820
10	túlóra	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	$v, 2h$	0, 0	352	400
11	főmunkaidő	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$r, 0$	r, h	0, 0	840	800
11	túlóra	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$v, 0$	v, h	0, 0	336	350
12	főmunkaidő	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$r, 0$	0, 0	800	750
12	túlóra	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	$v, 0$	0, 0	320	300
kereslet	1. vezető	1100	500	1200	1300	1500	1000	800	500	1000	1200	1400	1400	976	13876	
kereslet	2. vezető	1200	400	1500	1000	1600	900	900	450	900	1300	1500	1500	510		13660

3. táblázat. Aggregált terméléstervezési feladat disztribúciós táblája két célfüggvény és két kapacitás- és keresletszint esetén (Forrás: Shi és Haase (1996))

6 Potenciális optimális megoldások és azok kapcsolata

Ebben a fejezetben egy irodalmi illusztratív példát mutatunk be. Az általánosított szállítási feladat tulajdonságait kihasználva Haase és Shi (1994) egy számítógépes programot fejlesztett ki a probléma megoldására. Ennek felhasználásával a potenciális optimális megoldások illusztrálására azt a két célfüggvényes, két kapacitás-keresletszinttel rendelkező problémát mutatjuk be, melyet először Menipaz (1984) publikált. Legyen $r = 120$, $v = 180$, $h = 3$ és a kezdeti tárolt mennyiség 100-100 egység mindkét kapacitásszint esetén. A modell adatait a *3. táblázat* mutatja. A kapacitásszintek az utolsó oszlopokban, a keresleti szintek az utolsó sorban láthatók. A táblázat belső adatai a termelés és raktározás költségei a megfelelő relációkban. Hiány nem megengedett, ezért bizonyos relációkat letiltunk. Ennek jelölésére az X jel szolgál.

Az előző fejezetben vázolt megoldó algoritmust alkalmazva, a számítógépes futtatás eredményeként potenciális optimális megoldásnak $\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$ adódott, mely részletesen a 4., 5. és 6. táblázatban látható.

A *4. táblázat* a potenciális optimális megoldások halmazát tartalmazza. A táblázat sorai a J_k bázishoz tartozó $\Gamma(J_k)$ kapacitás és keresleti szint súlyok halmazát, a $\Lambda(J_k)$ kritérium súlyok halmazát és a hozzájuk tartozó $TC(J_k)$ összköltséget mutatják.

	$\Gamma(J_k)$	$\Lambda(J_k)$	$TC(J_k)$
J_1	$0.71 \le \gamma_1 < 1$	$0.05 \le \lambda_1 < 1$	$\lambda^T \begin{pmatrix} 1713600 & 1796400 \\ 10116 & 14220 \end{pmatrix} \gamma$
J_2	$0.46 \le \gamma_1 < 1$	$0.17 \le \lambda_1 < 1$	$\lambda^T \begin{pmatrix} 1713600 & 1796400 \\ 10116 & 14220 \end{pmatrix} \gamma$
J_3	$0.60 \le \gamma_1 < 1$	$0.08 \le \lambda_1 \le 0.09$	$\lambda^T \begin{pmatrix} 1713600 & 1796400 \\ 10116 & 14220 \end{pmatrix} \gamma$
J_4	$0.60 \le \gamma_1 < 1$	$0 < \lambda_1 \le 0.02$	$\lambda^T \begin{pmatrix} 1750800 & 1827100 \\ 8052 & 12570 \end{pmatrix} \gamma$

4. táblázat. Potenciális optimális megoldások (Forrás: Shi és Haase (1996))

Az *5. és 6. táblázat* a bázismegoldások x_{ij} értékeit tartalmazzák. Mind a bázismegoldások x_{ij} értékei, mind pedig a $TC(J_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ összköltség a (γ, λ) paraméterpár függvénye, ahol $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ és $0 < \gamma_1, \gamma_2, \lambda_1, \lambda_2 < 1$.

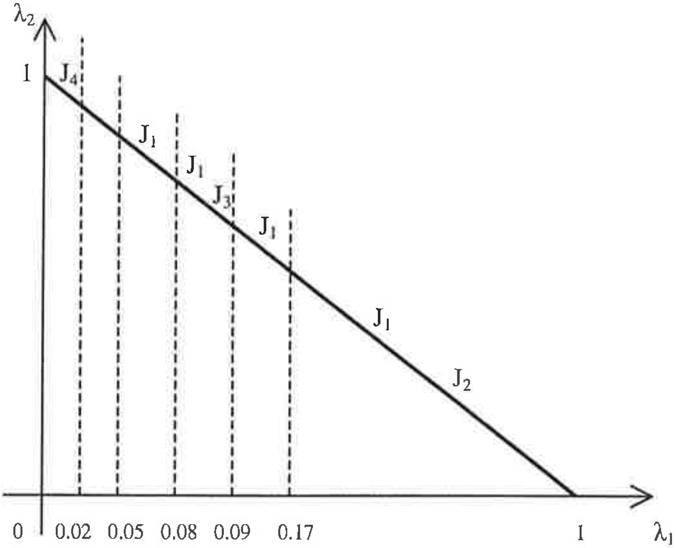
A potenciális optimális megoldások egymás közötti kicserélési lehetőségeinek vizsgálatát három szempont alapján végezzük el. Megvizsgáljuk, milyen kicserélési lehetőségek vannak a potenciális optimális megoldások között a célok vonatkozásában a termelési és raktározási költség tekintetében, a kapacitás-kereslet vonatkozásában a két döntéshozó által javasolt két különböző szintje között, valamint a termelési költség és az 1. döntéshozó által javasolt kapacitás- keresletszint között. Ezeken kívül további három vonatkozásban végezhető vizsgálat, de annak leírását az olvasóra bízzuk.

J_1			J_2		
x_{11}	=	$32\gamma_1 + 200\gamma_2$	x_{19}	=	$100\gamma_1 + 100\gamma_2$
x_{14}	=	$68\gamma_1 - 100\gamma_2$	x_{21}	=	$780\gamma_1 + 800\gamma_2$
x_{21}	=	$800\gamma_1 + 900\gamma_2$	x_{22}	=	$20\gamma_1 + 100\gamma_2$
x_{31}	=	$268\gamma_1 + 100\gamma_2$	x_{31}	=	$320\gamma_1 + 400\gamma_2$
$x_{3,13}$	=	$52\gamma_1 + 300\gamma_2$	x_{42}	=	$176\gamma_1 - 100\gamma_2$
x_{42}	=	$196\gamma_1$	x_{43}	=	$192\gamma_1 + 350\gamma_2$
x_{43}	=	$240\gamma_1 + 150\gamma_2$	x_{44}	=	$392\gamma_1 + 350\gamma_2$
x_{45}	=	$324\gamma_1 + 450\gamma_2$	x_{52}	=	$304\gamma_1 + 400\gamma_2$
x_{52}	=	$304\gamma_1 + 400\gamma_2$	x_{63}	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$
x_{63}	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	x_{73}	=	$168\gamma_1 + 350\gamma_2$
x_{73}	=	$120\gamma_1 + 550\gamma_2$	$x_{7,13}$	=	$168\gamma_1 + 70\gamma_2$
$x_{7,13}$	=	$216\gamma_1 - 130\gamma_2$	x_{84}	=	$556\gamma_1 + 250\gamma_2$
x_{84}	=	$880\gamma_1 + 700\gamma_2$	x_{85}	=	$324\gamma_1 + 450\gamma_2$
x_{94}	=	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$	x_{94}	=	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$
$x_{10,5}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	$x_{10,5}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$
$x_{11,5}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{11,5}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{12,6}$	=	$800\gamma_1 + 770\gamma_2$	$x_{12,6}$	=	$800\gamma_1 + 770\gamma_2$
$x_{13,6}$	=	$200\gamma_1 + 130\gamma_2$	$x_{13,6}$	=	$200\gamma_1 + 130\gamma_2$
$x_{13,13}$	=	$120\gamma_1 + 210\gamma_2$	$x_{13,13}$	=	$120\gamma_1 + 210\gamma_2$
$x_{14,7}$	=	$732\gamma_1 + 340\gamma_2$	$x_{14,7}$	=	$604\gamma_1 + 620\gamma_2$
$x_{14,12}$	=	$68\gamma_1 + 430\gamma_2$	$x_{14,8}$	=	$196\gamma_1 + 150\gamma_2$
$x_{15,7}$	=	$68\gamma_1 + 560\gamma_2$	$x_{15,7}$	=	$196\gamma_1 + 280\gamma_2$
$x_{15,13}$	=	$252\gamma_1 - 220\gamma_2$	$x_{15,13}$	=	$124\gamma_1 + 60\gamma_2$
$x_{16,8}$	=	$388\gamma_1 + 580\gamma_2$	$x_{16,9}$	=	$216\gamma_1 - 130\gamma_2$
$x_{16,9}$	=	$160\gamma_1 + 100\gamma_2$	$x_{16,10}$	=	$320\gamma_1 + 480\gamma_2$
$x_{16,12}$	=	$212\gamma_1 + 20\gamma_2$	$x_{16,11}$	=	$224\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{17,8}$	=	$112\gamma_1 - 130\gamma_2$	$x_{17,8}$	=	$304\gamma_1 + 300\gamma_2$
$x_{17,11}$	=	$192\gamma_1 + 40\gamma_2$	$x_{18,9}$	=	$684\gamma_1 + 930\gamma_2$
$x_{18,9}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	$x_{18,12}$	=	$156\gamma_1 - 130\gamma_2$
$x_{19,13}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{19,13}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{20,10}$	=	$848\gamma_1 + 900\gamma_2$	$x_{20,10}$	=	$880\gamma_1 + 820\gamma_2$
$x_{20,11}$	=	$32\gamma_1 - 80\gamma_2$	$x_{21,12}$	=	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$
$x_{21,10}$	=	$352\gamma_1 + 40\gamma_2$	$x_{22,11}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$
$x_{22,11}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	$x_{23,11}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{23,11}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{24,12}$	=	$800\gamma_1 + 750\gamma_2$
$x_{24,12}$	=	$800\gamma_1 + 750\gamma_2$	$x_{25,12}$	=	$92\gamma_1 + 480\gamma_2$
$x_{25,12}$	=	$320\gamma_1 + 300\gamma_2$	$x_{25,13}$	=	$228\gamma_1 - 180\gamma_2$

5. táblázat: A J_1 és J_2 bázishoz tartozó potenciális optimális megoldások (Forrás: Shi és Haase (1996))

J_3			J_4		
x_{16}	=	$100\gamma_1 + 100\gamma_2$	$x_{1,13}$	=	$100\gamma_1 + 100\gamma_2$
x_{21}	=	$800\gamma_1 + 900\gamma_2$	x_{21}	=	$800\gamma_1 + 900\gamma_2$
x_{31}	=	$300\gamma_1 + 300\gamma_2$	x_{31}	=	$300\gamma_1 + 300\gamma_2$
$x_{3,13}$	=	$20\gamma_1 + 100\gamma_2$	$x_{3,13}$	=	$20\gamma_1 + 100\gamma_2$
x_{42}	=	$344\gamma_1 - 30\gamma_2$	x_{42}	=	$344\gamma_1 - 30\gamma_2$
x_{43}	=	$24\gamma_1 + 280\gamma_2$	x_{43}	=	$24\gamma_1 + 280\gamma_2$
x_{44}	=	$68\gamma_1 - 100\gamma_2$	x_{44}	=	$68\gamma_1 - 100\gamma_2$
x_{45}	=	$324\gamma_1 + 450\gamma_2$	x_{45}	=	$324\gamma_1 + 450\gamma_2$
x_{52}	=	$156\gamma_1 + 430\gamma_2$	x_{52}	=	$156\gamma_1 + 430\gamma_2$
$x_{5,13}$	=	$148\gamma_1 - 30\gamma_2$	$x_{5,13}$	=	$148\gamma_1 - 30\gamma_2$
x_{63}	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	x_{63}	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$
x_{73}	=	$336\gamma_1 + 420\gamma_2$	x_{73}	=	$336\gamma_1 + 420\gamma_2$
x_{84}	=	$880\gamma_1 + 700\gamma_2$	x_{84}	=	$880\gamma_1 + 700\gamma_2$
x_{94}	=	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$	x_{94}	=	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$
$x_{10,5}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	$x_{10,5}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$
$x_{11,5}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{11,5}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{12,6}$	=	$800\gamma_1 + 770\gamma_2$	$x_{12,6}$	=	$800\gamma_1 + 770\gamma_2$
$x_{13,6}$	=	$100\gamma_1 + 30\gamma_2$	$x_{13,6}$	=	$200\gamma_1 + 130\gamma_2$
$x_{13,13}$	=	$220\gamma_1 + 310\gamma_2$	$x_{13,13}$	=	$120\gamma_1 + 210\gamma_2$
$x_{14,7}$	=	$480\gamma_1 + 560\gamma_2$	$x_{14,7}$	=	$480\gamma_1 + 560\gamma_2$
$x_{14,8}$	=	$36\gamma_1 + 380\gamma_2$	$x_{14,13}$	=	$320\gamma_1 + 210\gamma_2$
$x_{14,13}$	=	$284\gamma_1 - 170\gamma_2$	$x_{15,7}$	=	$320\gamma_1 + 340\gamma_2$
$x_{15,7}$	=	$320\gamma_1 + 340\gamma_2$	$x_{16,8}$	=	$500\gamma_1 + 450\gamma_2$
$x_{16,8}$	=	$464\gamma_1 + 70\gamma_2$	$x_{16,10}$	=	$72\gamma_1 + 280\gamma_2$
$x_{16,10}$	=	$72\gamma_1 + 280\gamma_2$	$x_{16,11}$	=	$188\gamma_1 - 30\gamma_2$
$x_{16,11}$	=	$224\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{17,11}$	=	$36\gamma_1 + 380\gamma_2$
$x_{17,13}$	=	$304\gamma_1 + 300\gamma_2$	$x_{17,13}$	=	$268\gamma_1 - 80\gamma_2$
$x_{18,9}$	=	$664\gamma_1 + 550\gamma_2$	$x_{18,9}$	=	$664\gamma_1 + 550\gamma_2$
$x_{18,10}$	=	$176\gamma_1 + 250\gamma_2$	$x_{18,10}$	=	$176\gamma_1 + 250\gamma_2$
$x_{19,9}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{19,9}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{20,10}$	=	$600\gamma_1 + 370\gamma_2$	$x_{20,10}$	=	$600\gamma_1 + 370\gamma_2$
$x_{20,12}$	=	$280\gamma_1 + 450\gamma_2$	$x_{20,12}$	=	$280\gamma_1 + 450\gamma_2$
$x_{21,10}$	=	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$	$x_{21,10}$	=	$352\gamma_1 + 400\gamma_2$
$x_{22,11}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$	$x_{22,11}$	=	$840\gamma_1 + 800\gamma_2$
$x_{23,12}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$	$x_{23,12}$	=	$336\gamma_1 + 350\gamma_2$
$x_{24,12}$	=	$800\gamma_1 + 750\gamma_2$	$x_{24,12}$	=	$800\gamma_1 + 750\gamma_2$
$x_{25,12}$	=	$320\gamma_1 + 300\gamma_2$	$x_{25,12}$	=	$320\gamma_1 + 300\gamma_2$

6. táblázat: A J_3 és J_4 bázishoz tartozó potenciális optimális megoldások
(Forrás: Shi és Haase (1996))

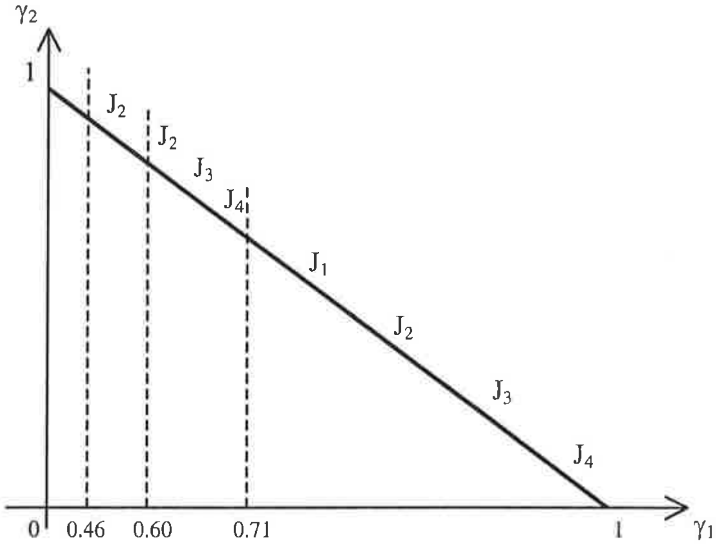


1. ábra. Termelési költség (λ_1) versus raktározási költség (λ_2) (Forrás: Shi és Haase (1996))

Mivel négy potenciális optimális megoldás van, $\{J_1, J_2, J_3, J_4\}$, a kicserélési lehetőségeket ezek segítségével írjuk le. A két cél, a termelési költség (λ_1) és a raktározási költség (λ_2) közötti kicserélési viszonyok:

- Ha $0 < \lambda_1 \leq 0.02$, akkor J_4 az optimális termelési terv.
- Ha $0.02 < \lambda_1 \leq 0.05$, akkor nincs optimális termelési terv.
- Ha $0.05 < \lambda_1 \leq 0.08$, akkor J_1 az optimális termelési terv.
- Ha $0.08 < \lambda_1 \leq 0.09$, akkor J_1 és J_3 az optimális termelési terv.
- Ha $0.09 < \lambda_1 \leq 0.17$, akkor J_1 az optimális termelési terv.
- Ha $0.17 < \lambda_1 \leq 1$, akkor J_1 és J_2 az optimális termelési terv.

A célfüggvény-együtthatók grafikus megjelenítése látható az 1. ábrán. Ha a vastagon rajzolt vonalon választjuk a termelési költség λ_1 és a raktározási költség λ_2 súlyát, akkor a megfelelő szakasz fölé írt potenciális optimális megoldáshoz jutunk, vagy nincs optimális megoldás, a választástól függően. A következőkben a két kapacitás-keresletszint, (γ_1) és (γ_2) közötti kicserélési viszonyokat vizsgáljuk.

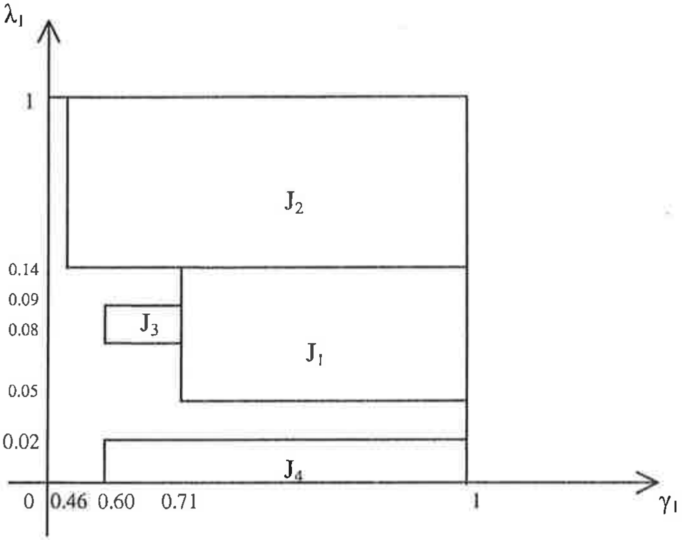


2. ábra: Az első és második kapacitás-keresletszint kapcsolata (Forrás: Shi és Haase (1996))

- Ha $0 < \gamma_1 \leq 0.46$, akkor nincs optimális termelési terv.
- Ha $0.46 < \gamma_1 \leq 0.60$, akkor J_2 az optimális termelési terv.
- Ha $0.60 < \gamma_1 \leq 0.71$, akkor J_2, J_3 és J_4 az optimális termelési terv.
- Ha $0.71 < \gamma_1 \leq 1$, akkor J_1, J_2, J_3 és J_4 az optimális termelési terv.

A két kapacitás-keresletszint együtthatóinak grafikus megjelenítése a *2. ábrán* látható. Ha a γ_1 és γ_2 súlyokat a vastagon kihúzott vonalon választjuk, és a megfelelő kapacitás-keresletszinteket ezekkel súlyozzuk, akkor a megfelelő szakasz fölé írt potenciális optimális megoldáshoz jutunk, vagy nincs optimális megoldás, a választástól függően.

A termelési költség (λ_1) és az első vezető által preferált kapacitás- és keresletszint (γ_1) közötti kicserélési kapcsolat viszonyai láthatók a *3. ábrán*. Ha a (γ_1, λ_1) paraméterpár értékeit a J_1, J_2, J_3 vagy J_4 jelek valamelyikével jelölt $\Gamma(J_k) \times \Lambda(J_k)$, $k = 1, 2, 3, 4$ halmazokon választjuk, akkor van potenciális optimális termelési terv, egyébként pedig nincs optimális megoldás. További három kicserélési lehetőség vizsgálatát kínálja a két célfüggvény és a két kapacitás- és keresletszint közötti kapcsolat. A 3. ábrához hasonló módon lehet képet kapni a termelési költség (λ_1) és a második kapacitás- és keresletszint (γ_2), a raktározási költség (λ_2) és az első kapacitás- és keresletszint (γ_1), valamint a raktározási költség (λ_2) és a második kapacitás- és keresletszint (γ_2) kicserélési kapcsolatáról.



3. ábra: Az első kapacitás-keresletszint és a termelési költség kapcsolata (Forrás: Shi és Haase (1996))

7 Összefoglalás

A dolgozatban bemutattunk egy modellt, mely az aggregált termeléstervezés problémájának megoldására szolgál olyan gazdasági környezetben, amikor feltételezzük, hogy a keresleti szintek szezonális vagy egyéb okból fakadóan fluktuálnak, és az egyes alternatívákat több kritérium alapján értékeljük. A probléma megoldására a mátrix programozás és az MC^2 programozás elméleti kereteit használtuk fel. A megoldó algoritmus a szállítási feladat több célfüggvény, több kapacitás-keresletszint irányú kiterjesztése révén született. A megoldás egy rendszerezett áttekintést szolgáltat az értékelő kritériumok, valamint a kapacitás- és keresletszintek súlyaitól függő összes potenciális optimális aggregált termelési tervről. A potenciális optimális megoldások és azok kicserélési lehetőségei széles mozgásteret biztosítanak a döntéshozónak az adott gazdasági környezethez igazodó optimális aggregált termelési terv kialakításához, vagy az aktuális termelési terv menet közbeni módosításához.

Köszönetnyilvánítás

Végül szeretnék köszönetet mondani Vörös Józsefnek, a Pécsi Tudományegyetem professzorának, a dolgozat elkészítése során nyújtott értékes instrukcióiért.

Irodalom

1. Bergstrom, G. L. and B. E. Smith, Multi-item Production Planning – An Extension of the HMMS Rules, *Management Science*, 16, 1970, B614-629.
2. Bitran, G. R. and A. C. Hax, On the Decision of Hierarchical Production Planning Systems, *Decision Sciences*, 8, 1977, 28-55.
3. Bowman, E. H., Consistency and Optimality in Managerial Decision Making, *Management Science*, 9, 1963, 310-321.
4. Bowman, E. H., Production Scheduling by the Transportation Method of Linear Programming, *Operations Research*, 4, 1956, 100-103.
5. Brown, R. G., *Decision Rules for Inventory Management*, Dryden Press, Hinsdale, Illinois, 1967.
6. Buffa, E. S., *Modern Production Management* (2nd ed.), Wiley and Sons, New York, 1965.
7. Charnes, A. and W. W. Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, Wiley and Sons, New York, 1962.
8. Chien, I. S., Y. Shi and P. L. Yu, MC^2 Program: *A Pascal Program Run on PC or VAX* (revised version), Unpublished Computer Software, School of Business, University of Kansas, 1989.
9. Current, J. and H. Min, Multiobjective Design of Transportation Networks: Taxonomy and Annotation, *European Journal of Operational Research*, 26, 1986, 187-201.
10. Dantzig, G. B., *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1963.
11. Davidson, P. and E. Smolensky, *Aggregate Supply and Demand Analysis*, Harper and Row, New York, 1964.
12. Gale, D., H. W. Kuhn, and A. W. Tucker, Linear Programming and the Theory of Games, in T. C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley and Sons, New York, 1951, 317-329.
13. Goodman, D. A., A Goal Programming Approach to Aggregate Planing of Production and Work Force, *Management Science*, 20, 1974, 1569-1579.
14. Gyetván, F. and Y. Shi, Weak Duality Theorem and Complementary Slackness Theorem for Linear Matrix Programming Problems, *Operations Research Letters*, 11, 1992, 249-252.
15. Gyetván, F., Dualitás a mátrixmaximum és a vektormaximum problémánál és azok kapcsolata, *Alkalmazott Matematikai Lapok* 14, 1989, 377-387.
16. Haase, C. and Y. Shi, *TPMC2 Program: ANSI Program for IBM and Compatible PC Running on UNIX Machine*, Unpublished Computer Software, College of Business Administration, University of Nebraska-Omaha, 1994.
17. Heizer, J. and B. Render, *Production and Operations Management* (3-rd ed.), Allyn and Bacon, Boston, Massachusetts, 1993.
18. Henderson, H. D., *Supply and Demand*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1922.
19. Holt, C. C., F. Modigliani, J. F. Muth and H. F. Simon, *Planing Production Inventories and Work Force*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1960.
20. Hwang, C. L. and M. J. Lin, *Group Decision Making under Multiple Criteria: Methods and Applications*, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1987.

21. Keynes, J. M., *The General Theory of Employment, Interest and Money*, Harcourt Brace Jovanovich, New York, 1938.

22. Lee, S. M., *Goal Programming for Decision Making*, Auerbach, Philadelphia, Pennsylvania, 1972.

23. Lee, Y. R., Y. Shi and P. L. Yu, Linear Optimal Designs and Contingency Plans, *Management Science*, 36, 1990, 1106-1119.

24. Menipaz, E., *Essentials of Production and Operations Management*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.

25. Nagasawa, H., N. Nishiyama and K. Hitomi, Decision Analysis for Determining the Optimum Planning Horizon in Aggregate Production Planning, *International Journal of Production Research*, 20, 1982, 243-254.

26. Oliff, M. D. and G. K. Leong, A Discrete Production Switching Rule for Aggregate Planning, *Decision Sciences*, 18, 1987, 582-597.

27. Phelps, D. M., *Planning and Products*, Irwin, Chicago, Illinois, 1947.

28. Saad, G., An Overview of Production Planning Models: Structural Classification and Empirical Assessment, *International Journal of Production Research*, 20, 1982, 105-114.

29. Seiford, L. and P. L. Yu, Potential Solutions of Linear Systems: The Multicriteria Multiple Constraint Level Program, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 69, 1979, 283-303.

30. Shi, Y. and C. Haase, Optimal Trade-offs of Aggregate Production Planning With Multi-Objective and Multi-Capacity-Demand Levels, *International Journal of Operations and Quantitative Management*, 2, 1996, 127-143.

31. Shi, Y. and P. L. Yu, Selecting Optimal Linear Production Systems in Multiple Criteria Environments, *Computer and Operations Research*, 19, 1992, 585-608.

32. Shi, Y., A Transportation Model with Multiple Criteria and Multiple Constraint Levels, *Mathematical and Computer Modelling*, 21, 1995, 13-28.

33. Singhal, K. and V. Adlakha, Cost and Shortage Trade-offs in Aggregate Production Planning, *Decision Sciences* 20, 1989, 158-165.

34. Starr, M. K., *Management Production and Operations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

35. Vergin, R. C., Production Scheduling under Seasonal Demand, *Journal of the Industrial Engineering*, 17, 1966, 260-266.

36. Vörös, J., *Termelés management*, Harmadik kiadás, Janus Pannonius Egyetemi Kiadó, Pécs, 1998.

37. Vörös, J., *Termelési-szolgáltatási rendszerek vezetése*, Janus Pannonius Egyetemi Kiadó, Pécs, 1999.

38. Yu, P. L. and M. Zeleny, The Set of All Nondominated Solutions in the Linear Cases and A Multicriteria Simplex Method, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 49, 1975, 430-458.

39. Yu, P. L., *Multiple Criteria Decision Making: Concepts, Techniques and Extensions*, Plenum, New York, 1985.

40. Zeleny, M., *Linear Multiobjective Programming*, Springer-Verlag, New York, 1974.

41. Zeleny, M., Trade-Off-Free Management via De Novo Programming, *International Journal of Operations and Quantitative Management*, 1, 1995, 3-13.

THE POSSIBILITY OF APPLICATION OF MC^2 PROGRAMMING IN THE AGGREGATE PRODUCTION PLANNING

This paper gives a summary of aggregate production planning with multiple objective and multiple capacity-demand levels, using matrix programming and MC^2 (Multi-Criteria and Multi-Constraint level) linear programming. The model provides a scenario about all possible potential optimal solution of aggregate production planning, depending on parameters (as weights) of multiple capacity-demand levels and multiple criteria. These potential optimal production plans provide a basis for managers to consider the consequences of possible fluctuations in capacity and demand data.

KÖNYVEKRŐL

DANCS ISTVÁN – PUSKÁS CSABA: *Vektorterek.* AULA, Budapest, 2001, 309 o.

A könyv —a szerzők útbaigazítása szerint— a BKÁE gazdaságmatematika szakos hallgatóinak algebra, pontosabban lineáris algebra, vektoralgebra tananyagát tartalmazza. Végigolvasva a könyvet – én inkább úgy igazítanám útba az érdeklődőket, hogy ez a könyv a véges-dimenziós lineáris vektorterek modern elméletével ismerteti meg az olvasót. A könyv 12 fejezetből áll, melyek bemutatását legjobb, ha magukra a szerzőkre bízom.

> „Az első, bevezető fejezetben ismertetjük azokat a klasszikus és modern algebra tárgyköréhez tartozó fogalmakat és eredményeket, amelyek a vektorterek tanulmányozásánál nélkülözhetetlenek.
>
> A második fejezet tartalmazza a vektortér fogalmát, legfontosabb tulajdonságait, és ebben a fejezetben teremtünk először kapcsolatot a homogén lineáris egyenletrendszerek és a tér alterei között.
>
> A harmadik fejezet az affin halmazokkal foglalkozik, itt igazoljuk, hogy kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van a lineáris egyenletrendszerek megoldáshalmazai és a tér affin részhalmazai között.
>
> A negyedik fejezet a lineáris leképezések és transzformációk, és az azok koordinatizálása révén kapott mátrixok bevezetését, azok közötti műveletek vizsgálatát tartalmazza.
>
> Az ötödikben néhány alkalmazási lehetőséget mutatunk be, megoldási algoritmust adunk lineáris egyenletrendszerekhez, mátrixegyenletekhez, továbbá a mátrixok invertálásának módszere is itt található.
>
> A hatodik fejezetben foglalkozunk a lineáris transzformációk invariáns altereivel, a transzformációk minimálpolinomja, sajátértéke, sajátvektora itt jelenik meg először. A transzformációk különböző kanonikus alakjait is itt tárgyaljuk.
>
> A hetedik fejezet a determináns fogalmának és elemi tulajdonságainak ismertetésére van szánva.
>
> A nyolcadik fejezetben valós és komplex vektorterekben értelmezzük a skaláris szorzat fogalmát, abból metrikát származtatunk, ez teszi lehetővé az euklideszi geometria általánosítását.
>
> A kilencedik és tizedik fejezetben a skaláris szorzatos terek lineáris transzformációit vizsgáljuk, itt készítjük elő, majd bizonyítjuk be a spektráltételt. Ugyancsak itt vizsgáljuk a többváltozós függvénytanban fontos szerepet játszó kvadratikus alakokat is.

A tizenegyedik és tizenkettedik fejezetben a valós skaláris szorzatos terek konvex halmazait és konvex kúpjait tanulmányozzuk, igazoljuk a véges kúpok alaptételeit és többek között bizonyítjuk, hogy egy-egyértelmű kapcsolat van a lineáris egyenlőtlenség-rendszerek megoldáshalmazai és a tér poliedrikus halmazai között."

Ez a rövid tartalmi összefoglaló persze nem elégséges ahhoz, hogy megtudjuk, valójában miről és hogyan szól ez a könyv. De aki ismeri Dancs István professzor munkásságát, az tudja, hogy nála a ,,miről" mellett a ,,hogyan"-on van legfőképpen a hangsúly, és hogy ez mindig a lehető legkorszerűbb tárgyalási módot jelenti. Puskás Csabával közösen írt könyve is ezen hagyomány szellemében fogant.

A könyv a vektorterek (elsősorban véges dimenziós vektorterek) modern elméletébe nyújt betekintést. Ez a terület a funkcionálanalízis korszerű fogalmai és módszerei kialakulásával vált igazán modern matematikai diszciplínává. A normált lineáris vektorterek (Hilbert-tér, Banach-tér) elméletének 20. század eleji ,,diadalmenete" természetes következményeként előtérbe került a véges dimenziós vektorterek, a lineáris algebra ,,funkanalos" tárgyalási módja is. Ezt nemcsak P. R. Halmos kiváló munkája, de I. M. Gelfand Lineáris algebrája is tanúsítja. (És még sok más, hasonló szellemben fakadt könyv!)

Közben az idő telt és a funkcionálanalízis mellett egyre ,,testesebb" formát kezdett ölteni egy újabb terület, mely arról leválva, a 20. század 70-es éveitől kezdve már külön diszciplínaként, *nemlineáris analízisként* nyer említést. Ennek kialakulásában meghatározó része volt a konvex analízisnek, mely a funkcionálanalízis lineáris fogalmai helyett (alterek, lineáris operátorok) a hangsúlyt nemlineáris fogalmakra (kúpok, szublineáris leképezések) helyezi. Ez a vektorterek elméletének további gyarapodásához vezetett.

Dancs István és Puskás Csaba könyvében ez az új ,,irányzat" is gazdagon van reprezentálva, sőt a könyv borítója is ezt a ,,nóvumot" van hivatva kihangsúlyozni. A könyv tárgyalásmódja a modern ,,funkanalos" tárgyalásmód, kiegészítve a nemlineáris analízis modern eszköztárával.

A könyv nem alapfokú bevezető, nem a gazdasági tömeg-felsőoktatás számára készült, hanem az elit-képzést célozza meg. Egyre tömegesedő felsőoktatásunkat látván csak üdvözölni lehet ezt a nemes törekvést.

Komlósi Sándor

BAJALINOV ERIK – IMREH BALÁZS: *Operációkutatás.* POLYGON, Szeged, 2001. 300 o.

Lassan már egy éve, hogy az operációkutatás egyetemi oktatása ezzel az új tankönyvvel gazdagodott. Nem mintha hiány lenne operációkutatási jegyzetekből, tankönyvekből a felsőoktatás palettáján, de a bőség zavarával sem küszködünk. Számomra mindig öröm, ha sokasodnak a szakmánkat tanítani, bemutatni hivatott könyvek.

Nem vadonatúj könyvről van szó. Imreh Balázs már „jegyzett" egy 1997-ben megjelent egyetemi jegyzetet a szegedi egyetemisták számára. Jelen tankönyv ennek a jegyzetnek a továbbérlelt, továbbfejlesztett, kibővített és szoftver melléklettel is ellátott változata. Az átdolgozott kiadás már Bajalinov Erik közreműködésével készült, aki a hosszú fejlesztőmunkája eredményeként megalkotott WinGULF programcsomagját bocsátotta az oktatás rendelkezésére.

Hogy mire is vállalkozik a könyv, azt legjobb, ha maguk a szerzők mondják el. A könyv előszavában írják:

> „Jelen munka a Debreceni Egyetem és a Szegedi Tudományegyetem programozó matematikus, programtervező matematikus, közgazdasági programozó matematikus és informatika tanár szakos hallgatói számára készült. A két egyetem oktatóinak együttműködésével feldolgozott anyag bár bevezető jellegű, ugyanakkor lefedi mindkét intézmény ilyen irányú oktatási anyagát."

A tankönyv a szó igaz értelmében „klasszikus" bevezető abba a tudományterületbe, melyet interdiszciplináris jellege miatt szinte lehetetlen „körülhatárolni", de amelynek alapfeladatát a szerzők nagyon világosan láttatják:

> „az operációkutatás feladata a gyakorlati élet különböző problémacsoportjaihoz az illető problémacsoportokat leíró optimumszámítási modellek konstruálása, továbbá a meglévő modellekhez az optimális megoldást meghatározó eljárások kidolgozása."

Modellalkotás – modellvizsgálat – modellszámítás, ez az a hármas egység, mely alapvetően meghatározza a két szerző tárgyalásmódját, stílusát.

A könyv 6 fejezetre tagolódik. Az 1. fejezet: „Optimumszámítási modellek és elemeik" sok egyszerű és közérthető példa kapcsán mutatja be a modellalkotás lényeges elemeit, az optimumszámítási modellek és a modellvizsgálatok sokféleségét.

A 2. fejezet a lineáris programozás témakörét vizsgálja. A kétváltozós problémák grafikus elemzése módot ad a szerzőknek arra, hogy kialakítsák a hallgatókban azt a szemléleti hátteret, amely a nagyobb méretű feladatok algebrai vizsgálata során is biztos intuitív fogódzkodó lehet.

A fejezet Imreh Balázs korábbi jegyzetének felépítését követi, melyhez a követendő példát a szerző bevallása szerint is Dantzig 1963-ban megjelent, nagysikerű könyve jelenti. Lineáris programozásról a világon számtalan jobbnál-jobb könyv jelent meg. Hogy ezek közül melyek az oktatás, tanítás számára a legjobbak, az szubjektív megítélés kérdése. Ennek a fejezetnek a szépen megkomponált szerkezete, a téma kibontása és a tárgyalás nehézségi szintjének fokozatos (de mértéktartóan fokozatos) emelése azt mutatja, hogy Imreh Balázs jó érzékkel választott követendő példát.

A fejezet végén bemutatkozik a WinGULF program, mely nem a könyv lemez-mellékleteként hozzáférhető, hanem szabadon letölthető a

`http://compsci.math.klte.hu/erik/Personal/tr93-86.html` weboldalról. (Én megpróbálkoztam a letöltéssel és nekem sikerült.) Tudom, hogy sok helyen más szoftvereket használnak: Lindo, Lingo, GAMMS stb. Véleményem szerint oktatási célra a WinGULF legalább olyan jó, mint az előbb említettek, és további előnye, hogy ingyen hozzáférhető.

A 3. fejezet a lineáris programozás matematikai alapjaiba ad egy alapos bevezetőt. Áttekintést ad egyfelől a lineáris programozási feladatok feltételi halmazának, a konvex poliédereknek legalapvetőbb tulajdonságairól, másfelől pedig betekintést ad a dualitáselméletbe és annak alkalmazásaiba.

A 4. fejezet az egészértékű optimumszámítási modelleknek van szentelve. Két fontos módszercsaládot mutatnak be a szerzők: a metszési eljárásokat valamint a korlátozás és szétválasztás módszerét. Az utolsó két alfejezet a hozzárendelési feladatot és az egészértékű szállítási feladatot tárgyalja.

A hozzárendelési feladat megoldására H.W. Kuhn adott egy igen hatékony algoritmust, melyet magyar módszernek nevezett el, tisztelegve ezzel is Kőnig és Egerváry magyar matematikusok munkássága előtt. Kuhn erről igen szépen ír egyik visszaemlékezésében, melynek magyar fordítása a SZIGMA-ban jelent meg 1992-ben. Nagy örömmel olvastam ennek a visszaemlékezésnek a lényegi elemeit a magyar-módszer ismertetése kapcsán a könyvben is.

A Kuhn-visszaemlékezés csak egy adalék ahhoz, hogy a könyv szerzői mennyire alapos ismertetést adnak az operációkutatás kialakulásáról, fejlődéséről, nevezetes eseményekről, eredményekről és az emberekről, akikhez ezek a fontos eredmények köthetők. Imponáló a megadott irodalomjegyzék. És, ami a legfontosabb: nincsenek ,,üres" hivatkozások, az irodalomjegyzék minden tételére (valahol a könyvben) érdemi hivatkozás történik.

Az 5. fejezetben elkezdődik a nemlineáris modellek tárgyalása. Elsőként a lineáris modellekhez sok szempontból legközelebb álló törtlineáris programozási feladat, Martos Béla elnevezésével a hiperbolikus programozási feladat kerül bemutatásra. Kár, hogy Martos Béla módszere csak említés szintjén jelenik meg és csupán a Charnes-Cooper módszer kerül bemutatásra. Igaz, hogy az eredeti Martos-módszer azért nem terjedt el, mert nem volt véges módszer, de azóta ezt a ,,fogyatékosságát" olasz matematikusok (A. Cambini és L. Martein) már kijavították.

A 6. fejezet a konvex programozásba éppen csak, hogy ,,belecsíp". A feltételi halmaz továbbra is konvex poliéder, a célfüggvény pedig (szigorúan) konvex függvény. A szeparábilis célfüggvény esete jól illusztrálja azt, hogy nemlineáris feladatot bizonyos esetben lineáris modellekkel hatékonyan lehet approximálni. Végezetül, mint ,,igazi" nemlineáris módszer, a hatékony irányok módszere kerül bemutatásra.

Mint ,,nemlineáris" szimpatizáns egy kritikai megjegyzésemet hadd fogalmazzam meg: a könyv terjedelmét nem növelte volna meg lényegesen, ha a nemlineáris programozás egyik alaptételét a Karush-Kuhn-Tucker tételt is tárgyalták volna a szerzők. A stacionaritás fogalmát (az egyenlőtlenség feltételes feladatra vonatkozóan) a szerzők sem tudják megkerülni, annak duális alakját viszont igen. A KKT-feltétel éppen a stacionaritás duális alakja, amelyre Farkas Gyula adott először korrekt bizonyítást.

Hogy kinek készült a könyv, arról a szerzők már nyilatkoztak. Hogy kik forgathatják haszonnal? Mindenki, aki tanulja vagy tanítja az operációkutatást. És, hogy a tekintett modellek ne csak elméleti megfontolások tárgyai maradjanak, ahhoz a WinGULF használata hatékonyan hozzájárulhat.

Komlósi Sándor

MONHOR DAVAADORZSÍN: *Valós lineáris algebra és lineáris programozás.* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2001. 201 o.

Monhor Davaadorzsínt nem kell bemutatni a magyar operációkutatóknak. Az 1980-as évek elején érkezett aspiránsként Magyarországra Mongóliából, Prékopa András aspiránsa volt. Azóta is itt él, dolgozik és tanít közöttünk.

Monhor, mint az előszóban írja, egy széleskörűen használható (agrár, műszaki, gazdasági főiskolákon, illetve egyetemeken), bevezető jellegű tankönyv megírására tesz kísérletet, ahol a tantárgy-pedagógiai, didaktikai szempontokat igyekszik a lehetőségekhez mérten előtérbe helyezni. A felsőoktatásban tevékenykedő sok kollégámmal együtt én is csak egyetérteni tudok a szerző alábbi véleményével: „Az utóbbi időben a főiskolai és egyetemi hallgatók száma nagymértékben nőtt és a tömeges felsőoktatás kialakulóban van. Ez azzal a következménnyel jár, hogy a főiskolai és egyetemi matematikaoktatásban a módszertani, illetve didaktikai oldalra is megfelelő súllyal kell figyelnünk. A matematikaoktatás jó jegyzettel vagy tankönyvvel hatékonyan megvalósítható és korszerűsíthető, mivel a jegyzet és tankönyv színvonala, tartalma és didaktikai felépítése egyaránt hatást gyakorol mind a hallgatókra, mind az oktatókra."

A könyv a lineáris algebra és lineáris programozás alapjaiba nyújt bevezetést. Teszi ezt úgy, hogy a könyv megértéséhez nem szükséges különös matematikai előismeret, elegendő a középiskolában megszerzett tudás.

Az első rész a lineáris algebra, mátrixalgebra, determinánselmélet legalapvetőbb fogalmaiba, problémáiba nyújt betekintést. Megismerkedhetünk a vektorterekre, azon belül is az euklideszi terekre vonatkozó fogalmakkal, tételekkel: altér bázisaival és az általuk meghatározott koordinátarendszerekkel, az elemi bázistranszformációval, a távolság- és szögméréssel R^n-ben, ortonormált bázisokkal, az előállításukra szolgáló Gram-Schmidt-féle eljárással, lineáris transzformációkkal. Az új fogalmak jobb megértése és gyorsabb befogadása céljából minden új fogalom bevezetését illusztratív számpéldák kísérik. A könyv számos gyakorlati alkalmazást is bemutat. Közülük számomra a Fibonacci-számok elegáns mátrixalgebrai tárgyalása jelentett „csemegét".

Monhor példamutatóan utal az egyes témakörök történeti vonatkozásaira. Ezeket, vélhetően, a meglévő könyvek, monográfiák történeti áttekintéseiből meríti. Sajnos ezek a magyar vonatkozásokkal nem igen foglalkoznak. Márpedig a lineáris algebra, mátrixelmélet, determinánselmélet története is bővelkedik hazai nagyságokkal. Farkas Gyula híres tétele a lineáris algebra, vektoralgebra egyik „gyöngyszeme". Világviszonylatban is. Emögött az eredmény mögött az is meghúzódik, hogy Farkas Gyula a maga idejében még nagyon újnak számító vektoralgebrának nemzetközi színvonalú értője, tudósa volt. Ezt még Sain Márton is fontosnak tartja megjegyezni Matematikatörténeti ABC-jében: „Hazánkban működése nyomán indult meg a vektoralgebra és a vektoranalízis tanulmányozása."

A mátrixelmélettel, determinánselmélettel kapcsolatban pedig Egerváry Jenőt kell feltétlenül megemlíteni. Mátrixok kombinatorikus tulajdonságairól szóló cikke alapozta meg a Kuhn által a hozzárendelési feladat megoldására kidolgozott „magyar-módszert". Kuhn visszaemlékezése erről a „sztoriról" a SZIGMA 23 (1992) 113-118 cikkben olvasható. Ugyancsak a SZIGMA ad teret egy következő számában Egerváry Jenő munkássága bemutatásának és méltatásának.

A könyv második része egy szolid korrekt bevezető a lineáris programozásba, a klasszikus szimplex módszerbe, annak matematikai hátterébe, valamint a dualitáselmélet elemeibe, gyakorlati vonatkozásaiba. Ebben a részben is számos illusztratív számpélda segíti a megértést.

A könyvet a műszaki, gazdasági és agrárfőiskolák és egyetemek hallgatóinak, valamint oktatóinak ajánlja a szerző.

* * *

A klasszikus „recenziómat" magam mögött tudva, szeretnék a könyv kapcsán egy szakmai vitát „provokálni". Monhor könyvének egyik részével kapcsolatban van egy szubjektív észrevételem, melyet kifejezetten az adott tárgyakat oktató kollegáim által történő megvitatására szánok.

A lineáris programozás klasszikus, Dantzig-féle tárgyalása alapvetően a lineáris egyenletrendszerek elméletén alapszik, annak lineáris algebrai tárgyalása pedig alapvetően a bázis és a koordinátarendszer fogalmára épít. Ennek a megközelítésnek —véleményem szerint— az a tantárgy-pedagógiai jelentősége, hogy megerősíti azt a matematika oktatásban már a kezdetektől „sulykolt" módszert, hogy „új változó bevezetésével hozzuk egyszerűbb alakra a feladatot". A lineáris egyenletrendszer általános megoldása (megoldóképlete) pontosan ennek az elvnek a gyümölcse. Az alapfeladatot, melyben az adatok a természetes bázisbeli koordinátáikkal vannak megadva, új változó(k) bevezetésével átírjuk egy másik, alkalmasan megválasztott bázis koordinátarendszerébe, és már le is olvasható az összes megoldás. A technikai kivitelezés lehet például az elemi bázistranszformáció, amely speciális koordináta-transzformáció. Aki lineáris algebrát és lineáris programozást egyszerre tanít, annak mindenképpen ezt célszerű választani.

Ez a speciális koordináta-transzformáció az alapja a szimplex módszernek is. Az elmondottak miatt nem tartom szerencsésnek a Monhor által használt MSZ-tábla elnevezést, ami a Majdnem SZimplex-tábla rövidítése. Az MSZ-tábla valójában koordináta-tábla, mint ahogy magát a szimplex táblát is tekinthetjük tisztán koordináta-táblának, amennyiben az LP feladatot egy speciális paraméteres lineáris egyenletrendszernek fogjuk fel (a célfüggvény értéke a paraméter). A szimplex algoritmus meg semmi egyéb, mint egy pivot-algoritmus, ahol a pivot elem választásnak számos korlátozó feltétele van. Én a magam részéről ezt a megközelítést próbáltam érvényesíteni „Az optimalizáláselmélet alapjai" c. tankönyvemben.

A Monhori szóhasználat azt erősíti, mintha a szimplex-tábla lenne az elsődleges fogalom és ezáltal háttérbe szorítja a bázisok szerepét. Sajnos több könyvben is a praktikum, a technika háttérbe szorítja az „igazi" lineáris algebrai háttér feltárását.

Mivel Monhor nagy hangsúlyt fektet mind az elméleti megalapozásra mind pedig a didaktikai szempontokra, ezért gondoltam arra, hogy éppen az Ő könyve kapcsán célszerű felvetni ezt a tantárgymódszertani kérdést.

Komlósi Sándor

RAPPAI GÁBOR: *Üzleti statisztika Excellel.*
KSH, Budapest, 2001, 231 o.

A Központi Statisztikai Hivatal (KSH) kezdeményezésére 2000-ben indult a „Statisztikai módszerek a társadalmi és gazdasági elemzésekben" elnevezésű sorozat egyik tagja eme könyv. A sorozat célja, hogy felvállalva a KSH a tudomány művelésével kapcsolatos feladatát korszerű statisztikai módszerekkel ismertesse meg az érdeklődő olvasóközönséget.

A könyv a hazai szakirodalom úttörői közé sorolható a tekintetben, hogy a Magyarországon hagyományosan elméleti oktatás helyett a gyakorlati alkalmazást helyezi előtérbe. Ahelyett, hogy minden egyes terület elméletét taglalná tudományos mélységekben, arra törekedett a szerző, hogy egy bármelyik területet képviselő közgazdász számára könnyen érthető, lehetőleg olvasmányos legyen a mű. A szerző magas fokú szakmai tudását mutatja, hogy a közérthetőség nem ment a szakmai színvonal rovására.

A könyv megírásakor nagy segítségére volt a szerzőnek a több mint másfél évtizedes, a Pécsi Tudományegyetemen szerzett oktatási tapasztalat, valamint az, hogy a gyakorlati életben is számtalanszor alkalmazta a statisztika-tudomány eredményeit. Ennek köszönhető, hogy a könyvben szereplő példák és megoldásuk világos és jól illeszkednek az adott fejezetben tárgyalt módszerekhez.

Az Előszóban a szerző felvázolja a mű során követett szerkesztési elvet, és azt, mi motiválta abban, hogy ezt kövesse. A könyv minden fejezetében következetesen alkalmazza az 1. gyakorlati példa, 2. statisztikai módszertan, 3. MS Excel támogatás, 4. konkrét megoldás tematikát. A példaválasztás helyességét mutatja, hogy valamennyi példa az életből kiragadott eseteken alapul, és olyan kérdéseket taglal, amely egy üzleti életben tevékenykedő közgazdászban felmerülhet.

A példákhoz nagy segítséget nyújt a CD-melléklet, amelyen megtalálható valamennyi MS Excel fájl, amellyel a könyv során találkozhatunk. A fájlokban megtalálhatók az adatbázisok, valamint az egyes fejezetekhez tartozó bemutató példák megoldásai, az ezek könnyebb megértését pedig a Függelék biztosítja. Mint ahogy a szerző is utal arra, hogy a mai számítástechnikai háttérrel sokkal jobban megoldható a statisztika oktatása, hiszen az adatbázisok teljességükben vizsgálhatók, és nem kell kompromisszumot tenni a terjedelem és a részletesség között, azaz számolásigényes példákat is fel lehet dolgozni rövid idő alatt.

Minden fejezetet mértéktartás jellemez, az adott problémákhoz tartozó elméleti háttér taglalása során a szerzőt mindvégig a praktikusság vezette, elkerülendő a terjengősséget. A könyvből megismerhető valamennyi módszer alapja és alkalmazása, és a korrekt hivatkozásoknak köszönhetően az érdeklődők jobban is elmélyülhetnek egy-egy témában.

Az első fejezetben megismerhetjük a legegyszerűbb adatelemzési technikákat: a sorok fajtáit, azok szerkesztését, gyakorisági sorok készítését és a grafikus ábrázolás alapvető eszközeit. Tehát mindazon eredményeket és azok prezentálásához szükséges módszereket, amelyekkel a hétköznapok során bármikor találkozhatunk.

A 2. fejezet a táblák szerkesztésével foglalkozik és bevezeti az olvasót a sztochasztikus kapcsolatok vizsgálatába. A kombinációs táblák segítségével bemutatja a viszonyszámokat és azok alkalmazási lehetőségeit a szerző, valamint az utóbbiakra épülően az asszociációs kapcsolat szorosságának mérését.

Elsőként kényszerült feladni a teljesség igényét a szerző a 3. fejezetben. A gyakorlat elve miatt kényszerült kihagyni néhány középérték tárgyalását, és koncentrálni a leggyakrabban használtakra. Hasonlóan a középértékekhez a szóródási mérőszámok esetében sem ismerhetjük meg valamennyi mutatót, de ez ugyanúgy, mint a középértékek esetében csak olyan ismeretektől „esik el" az olvasó, amelyeket csak igen ritkán alkalmaznak az üzleti életben. Az aszimmetria és a csúcsosság vizsgálatához viszont már több mutatót is megismerhetünk, és először látjuk igazi hasznát a számítástechnikai háttérnek a momentumok segítségével számított mutatószámok alkalmazása során.

Merész vállalkozásnak tűnik a következtetéses statisztika két ágának egy-egy fejezetben való tárgyalása, hiszen mindkét alapműként ajánlott irodalom 2-300 oldalon keresztül tárgyalja a statisztika ezen ágát. A szerző azonban sikerrel oldotta meg a feladatot, koncentrálva a minimálisan elegendő elméleti háttérre. Figyelembe véve a könyv rendeltetését (a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi karán folyó MBA képzés alaptankönyve, valamint az üzleti statisztikai gyakorlat), és a sorozatban elfoglalt helyét (a következtetéselméletnek külön könyvet szenteltek a sorozatszerkesztők) mindenképpen elfogadható a 4. fejezetben néhol tapasztalható vázlatossága.

A hipotézisvizsgálattal foglalkozó 5. fejezetben megismerteti a szerző a módszer alapjaival az olvasót, majd sorra veszi szinte valamennyi egy- és kétmintás sokasági paraméterekre vonatkozó eljárást. A széleskörű szoftveres támogatás nagy segítséget nyújt a felhasználó számára, és ezt a szerző jól be is mutatja.

A hazai szakirodalomtól eltérően íródott a 6. fejezet. A magyar szakirodalom a varianciaanalízist legtöbbször, mint hipotézisellenőrzési módszert tárgyalja. A nyugat-európai, valamint amerikai szakkönyvek gyakorlata a módszer bemutatása, majd alkalmazási területeinek ismertetése. A szerzőt a MS Excel-es támogatás indította arra, hogy külön fejezetet szentelve módszernek mutassa be annak alkalmazhatóságát. A fejezet szabatosan mutatja be a varianciaanalízis elméleti hátterét, valamint azt, hogyan alkalmazható a módszer a többmintás várható érték egyezőségének, egy sokaság homogenitásának, illetve a vegyes kapcsolat szignifikáns voltának tesztelésére.

Dilemma a sztochasztikus kapcsolatok elemzéséhez szükséges mutatók egy vagy több helyen történő ismertetése. A szerző az egyes ismérvek közötti kapcsolatok (asszociációs, vegyes, korrelációs) szorosságát mérő mutatókat más fejezetekben ismerteti, pusztán a korrelációs kapcsolatnak szentel külön fejezetet. A 7. fejezetben pontos, világosan érthető leírását és alkalmazását találjuk a lineáris korrelációs együtthatónak, mind a két-, mind a többváltozós esetet feltételezve.

A 8. fejezet ismerteti meg az olvasóval a regressziószámítást. A két- és a többváltozós lineáris regressziós függvényeken keresztül módszeresen mutatja be a szerző a statisztikai modellezés alapjait, melyek elsajátításával és a fejezetben később taglalt nemlineáris regressziófügvények segítségével könnyedén elsajátítható mindazon ismeretanyag, amivel adekvát regressziós modellek szerkeszthetők.

Az idősorok elemzésével foglalkozik a 9. fejezet, egészen az egyszerűbb módszerektől a számolásigényes, de megbízhatóbb módszerekig. Nagyban megkönnyíti az idősorelemzés megértését, hogy a szerző kapcsolatot teremt ezen témakör és az előző fejezetekben tárgyaltak között. Igazi értéke a könyvnek, hogy mint az előző fejezetben, itt is bemutatja a szerző a több, mint fél tucat ismertetett modell gyakorlati alkalmazását és összehasonlítását.

A 10. fejezetben az indexszámítást, mint a több változó időbeni alakulását vizsgáló módszert ismerteti a szerző, ez utóbbi tény indokolta a témakörnek a könyv végén való tárgyalását. Bár az MS Excel mostohán kezeli ezt a témakört, a szerző gondosan ismerteti a különböző index számítási menetét. Az átlagindexkörrel pedig bepillantást nyerhetünk a standardizálás módszertanába is.

A könyv egyszerre testesíti meg a tankönyvek és a szakkönyvek által támasztott követelményeket, ami nagyban köszönhető a gyakorlatorientált tárgyalásmódnak és a tárgyalásmenethez jól illeszkedő, életszerű mintapéldáknak. Bár a könyv legfőbb erénye az, hogy előtérbe helyezi az alkalmazást, a terjedelemhez mérten korrekten ismerteti az egyes módszerek elméleti hátterét. Mindezeket figyelembe véve bátran ajánlhatom mind a hallgató, mind a végzett közgazdászok számára.

Lénárt Imre