MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

SZERKESZTIK ÉS KIADJÁK:

HUNYADY JENŐ, KŐNIG GYULA, KRUSPÉR ISTVÁN, SZILY KÁLMÁN, SZTOCZEK JÓZSEF ÉS WARTHA VINCZE,

MŰEGYETEMI TANÁROK.

HARMADIK KÖTET.

BUDAPEST.

NYOMATOTT AZ ATHENAEUM R. TÁRS. NYOMDÁJÁBAN.

1878.

A „Műegyetemi Lapok“ III. kötetének
tartalma.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

III. kötet. 1878. 21. füzet.

CLAUSIUS ÉS BOLTZMANN THERMODYNAMIKAI TÉTELÉNEK ÁLTALÁNOSITÁSA, HA A POTENTIÁL A SEBESSÉGNEK IS FÜGGVÉNYE.

Dr. Réthy Mór, kolozsvári egyetemi tanártól.

[Folytatás.*)]

V. Mult alkalommal föltettük, hogy az erők potentiáljának dynamikai része a sebességnek quadratikus homogén függvénye. — Könnyü az általánosítás e föltevés nélkül is.

Az erő és a potentiál közötti vonatkozás levezetésére ismét az eleven erő tételéből indulunk ki:

11.) $$dP = dT,$$

mely egyenlet a potentiál általános definitiójául tekinthető. Az egyenletet integrálva, ered:

$$P + \text{constans} = T;$$

miből következik, hogy *a potentiál sorrá kifejtve, a sebességkomponensek hatványai szerint, nem tartalmazhat negativ hatványokat*, mint-hogy akkor a baloldal végtelen nagy volna, ha a sebesség zéró, mig a jobb oldal ez esetben zéróvá válik. Ha a constans E-vel jelöltetik akkor ezen egyenlet így irható:

11.*) $$E = T - P,$$

s ez az energia megmaradásának elve általánosított alakban; az E neve a test összes energiája.

Legyen először csak két pontról szó: az egyik mozdulatlan, a másik az összekötő egyenesben mozog x' változó sebességgel; a két pont távolsága x, a mozgó pont tömege m és gyorsulása x''.

A P helyett hozzunk be egy másik függvényt, V-t a következő egyenlet alapján:

$$P = Ax' + V - \frac{\partial V}{\partial x'} x',$$

*) Az első részt l. »Műegy. Lapok« 19-ik füzet 274. l.

hol A egyelőre határozatlan függvénye az x-nek, de melyről rögtön bebizonyúl, hogy a természetnek csak úgy felelhetünk meg, ha zéró. Ezen egyenlet nem tartalmaz a P-re nézve semminemü megszoritást sem, mert a jobb oldal első tagja az x' lineáris függvénye, mig a második és harmadik tagja együttvéve *csakis* lineáris tagot nem tartalmazhat; az egyenlet nem tartalmaz megszorítást akkor sem, ha egyszer mindenkorra megállapodunk, hogy a V olyan függvény legyen, a melynek a sebesség-komponsek szerinti sorkifejtésében lineáris tag nincs.

A P iménti értékét betéve a 11.)-be és a differentiálást elvégezve, ered rövid összevonás után:

$$Adx' + \frac{\partial A}{\partial x} x'dx + \frac{\partial V}{\partial x} dx - x'd . \frac{\partial V}{\partial x'} = mx'dx',$$

azaz dx-szeli osztás után:

$$\frac{Ax''}{x'} + \frac{\partial A}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial x'} = mx''.$$

E szerint a baloldal nem egyéb azon Galiléi értelmében vett erőnél, a melylyel a mozdulatlan pont a másikat az összekötő egyenes irányában vonzza. Az erő ezen kifejezése mutatja, hogy az A szükségkép zéró: mert különben az első tag (tehát az egész erő is) vagy végtelen nagygyá vagy zeróvá válnék, valahányszor a pont sebessége zéró, a mi absurdum. Ezt tekintve, lészen tehát:

12.) $$P = V - \frac{\partial V}{\partial x'} x'$$

és

13.) $$mx'' = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial x'}.$$

Ha már mostan akárhány, egymást kölcsönösen vonzó és akárhogyan mozgó, pontról van szó, és az m tömegü — példaként választott — pont Descartes-i koordinátái x_1, x_2, x_3, akkor is behozva a P potentiál helyett egy V függvényt, a következő (általánositó) definitióval:

12.*) $$P = V - \Sigma \frac{\partial V}{\partial x'} x',$$

hol a Σ összegezés valamenynyi pont és koordinátára vonatkozik, az m tömegü pontra ható összes erő $m . x_i''$ komponense gyanánt is a következő (általánositó) kifejezést fogadjuk el per definitionem:

13.*) $$X_i = \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i'}.$$

VI. Fölirva a D'Alembert-Lagrange-féle elvet s benne az $m x''$ és az X-ek helyett betéve a

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial x'},$$

illetőleg a 13.*) alatti értékeket, ered:

$$\Sigma\left[\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial(T+V)}{\partial x'}-\frac{\partial V}{\partial x}\right]\delta x=0\,.$$

Ezen egyenlet szebb alakot ölt fel, ha:

14.) $$T+V=H$$

tétetik. Ugyanis igy irható:

15.) $$\Sigma\left[\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial H}{\partial x'}-\frac{\partial H}{\partial x}\right]\delta x=0$$

vagy áthelyezés után:

15.*) $$\Sigma\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x'}\right).\ \delta x=\Sigma\frac{\partial H}{\partial x}\delta x\,.$$

A 15.) egyenletből fordítva, könnyen levezethető az energia megmaradásának elve. Ugyanis δx helyébe a dt idő alatt tényleg leírt út dx projectiója téve, lészen:

$$\Sigma\left[d\left(\frac{\partial H}{\partial x'}\right).\,x'-\frac{\partial H}{\partial x}dx\right]=0\,,$$

azaz:

$$\Sigma\left[d\left(\frac{\partial H}{\partial x'}x'\right)-\frac{\partial H}{\partial x'}dx'-\frac{\partial H}{\partial x}dx\right]=0\,,$$

tehát:

$$d\left[\Sigma\frac{\partial H}{\partial x'}x'-H\right]=0,$$

és integrálva:

16.) $$E=\Sigma\frac{\partial H}{\partial x'}x'-H.$$

Ha H helyett betétetik a 14.) alatti értéke, ha tekintetbe vétetik, hogy T homogén quadratikus függvénye a sebesség-komponenseknek és tekintetbe vétetik a 12.*) egyenlet, akkor ezen egyenlet a 11.*)-gal azonossá válik. A 16.) egyenlet tehát szintén az energia megmaradásának elvét fejezi ki. Ezen egyenlet és a 13.*) alatti tudtommal Scheringnél fordul elő legelőször. Hamilton Jacobi'sche Theorie etc. Abh. Göttingen 1873. p. 16, 17, 21.

Engedjük meg általánosság kedvéért, hogy a testnek vannak olyan pontjai is, a melyek egyensúlyban tartatnak a belső és külső erők által addig, míg az állapot zavartalan, s a melyek általában meg-mozdulnak, ha az állapot változik: ilyen pontok pl. a közönséges fölfogás szerint a gázgépeknél a gázt tartalmazó henger dugójának pontjai. Tegyük föl, hogy külső munka *csakis* az ilyen pontok elmozdulása folytán végeztetik. E pontok, mondjuk rövidség kedvéért, *határpontok* koordinátái jelöltessenek ξ_1, ξ_2, ξ_3-mal, míg a többi — belső — pontok koordinátái számára ezentul is az x betüt tartjuk fenn.

Miután a határpontok és belső pontok között is van kölcsönhatás, tehát a potentiál és igy a H is függvénye lesz a ξ és ξ'-eknek is; de az ξ'-ek szerinti sorkifejtésük ép oly kevéssé tartalmazhat negativ és első hatványokat, mint a V-nek az x'-ek szerintije nem tartalmazhatott (V.) Ennélfogva a $\frac{\partial V}{\partial \xi'}$, és $\frac{\partial H}{\partial \xi'}$, sorkifejtése zéró, ha $\xi' = 0$; következéskép a határpontokra ható belső erők komponensei a 13.*) schema szerint képezve ilyenek:

$$\Xi_i = \frac{\partial V}{\partial \xi_i} = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}$$

Lépjenek föl már mostan zavaró erők és körülmények, melyek következtében a határpontok elmozdulván, ezek koordinátái $\delta\xi$-vel nőnek. Akkor a belső erők által kifelé végzett munka

$$= \sum \Xi_i \delta\xi_i = \Sigma \frac{\partial H}{\partial \xi_i} \delta\xi_i$$

Egyúttal a test energiája is nő δE-vel. Következéskép a zavarás folytán közölt összes erély:

$$\delta Q = \delta E + \sum \frac{\partial H}{\partial \xi} \delta\xi. \tag{17.)}$$

Ezen egyenlet fejezi ki a jelen esetben *a thermodynamika első főtételét*. Ezt nevezem Clausius általánositott első főtételének.

Betéve E helyett a 16.) alatti értéket, ered:

$$\delta Q = \delta\,.\,\Sigma \frac{\partial H}{\partial x'} x' - \Sigma \frac{\partial H}{\partial x'} \delta x' - \Sigma \frac{\partial H}{\partial x'} \delta x',$$

s a 15.*) egyenletet tekintve:

$$\delta Q = \delta\,.\,\Sigma \frac{\partial H}{\partial x'} x' - \Sigma \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x'}\right).\,\delta x - \Sigma \frac{\partial H}{\partial x'} \delta x'.$$

Már mostan a δx-eknek épolyan értelmet tulajdonitva, mint mult közleményünkben, világos, hogy ebből ered:

$$\delta Q dt = \left[\delta\,.\,\Sigma \frac{\partial H}{\partial x'} x'\right].\,dt - d\,.\left[\Sigma \frac{\partial H}{\partial x'} \delta x\right] + \Sigma \frac{\partial H}{\partial x'} [d\delta x - \delta x'\,.\,dt],$$

s mivel: $$d\delta x = \delta dx = \delta\,(x' \,.\, dt)$$
$$= \delta x' \,.\, dt + x'\,\delta\,dt,$$

tehát összevonás után:

18.) $$\delta\,Q\,dt = \delta\,.\,\Sigma \frac{\partial H}{\partial x'}\,dx - d\,.\,\Sigma \frac{\partial H}{\partial x'}\,\delta x.$$

Ezen egyenlet a Boltzmann-Clausius-félével egyez abban, hogy a $\delta Q\,dt$ itt is, ott is különbsége két mennyiségnek, melynek egyike függvényvariatiója, mig másika egy másik függvény differentiálisa. Ha tehát itt is földteszszük, hogy mind a variálandó, mind a differentiálandó függvény periodikus, vagy ha más ezzel äquivalens föltevést teszünk, akkor a periodust i-vel jelölve és téve:

19.) $$\frac{1}{i}\int_0^i \Sigma \frac{\partial H}{\partial x'}\,x' \,.\, dt = 2\,\mathfrak{T}$$
$$\frac{1}{i}\int_0^i \delta Q\,dt = \overline{\delta Q}$$

ered végezetül itt is, épúgy mint Boltzmann és Clausiusnál:

20.) $$\frac{\overline{\delta Q}}{\mathfrak{T}} = \delta \log\,(i\,\mathfrak{T})^2.$$

Ez az általánositott Boltzmann-féle tétel, — *az u. n. thermodynamikai második főtétel.*

Ha földteszszük még, hogy a határpontokat megtámadó külső erők (nyomás) csakis zavarás alkalmával változnak, mig a zavartalan állapotban állandók: akkor a határpontok egyensulyban tartatván e külső erők és a belsők által és azért az utóbbiak virtuális munkája $\Sigma \frac{\partial H}{\partial \xi}\,\delta\xi$ épen akkora lévén, mint a külső (változatlan) erők virtuális munkája, világos, hogy az előbbi épúgy független az időtől, mint az utóbbi. A

$$\Sigma \frac{\partial H}{\partial \xi}\,\delta\xi$$

külső munka tehát állandó. Tekintettel a 17.)-re mondhatjuk tehát, hogy *esetünkben* δQ is állandó, minélfogva

20a.) $$\overline{\delta Q} = \delta Q.$$

Megjegyzés. A 18.) képletben csak az x'-ek szerinti deriváltak fordulván elő, e képlet helyesen adja a baloldal értékét akkor is, ha a H-ból egyszerün kihagyatnak azok a tagok, a melyek x-eket nem tartalmaznak.

Igy pl. a qnadratikus homogén potentiál esetében, — miként a 4.) és a 13.*) egyenletek összehasonlitása mutatja,

$$V = -D + S,$$

tehát a 14.)-ből folyólag

$$H = T - D + S.$$

Tekintve, hogy S nem tartalmaz x'-et, ered tehát

$$\delta Q\, dt = \delta \,.\, \Sigma \frac{\partial (T-D)}{\partial x'} dx - d \,.\, \Sigma \frac{\partial (T-D)}{\partial x'} \delta x,$$

s mivel $T - D$ homogén és quadratikus az x'-ekben, tehát végezetül:

$$\delta Q\, dt = \delta \,.\, 2\,(T - D)\, dt - d \,.\, \Sigma \frac{\partial (T-D)}{\partial x'} \delta x$$

mely egyenlet azonos azzal, a melyre mult alkalommal jöttünk.

Megjegyezzük még, hogy a $2\,\mathfrak{T}$ nem egyéb, mint az E és a H-nak i idő alatti középértéke, — miként a 16.) egyenletből közvetetlenül látható.

VII. A thermodynamikai első főtételt még más alakban is lehet írni. Ugyanis a 11.*) és 12.*) egyenletek összefoglalásával

$$E = T - V + \Sigma \frac{\partial V}{\partial x'} x'$$

A V függvényt oszszuk két részre: az egyik (S) csak a koordinátáktól, a másik ($-D$) a sebességektől is függjön. Igy azután:

$$V = -D + S$$

lévén:

$$E = T + D - \Sigma \frac{\partial D}{\partial x'} x' - S$$

Már mostan a 17.) egyenletet így írva:

$$\delta Q = \delta E + \Sigma \frac{\partial V}{\partial \xi} \delta \xi$$

és az E és V helyett az imént fölirt értékeket betéve, ered végezetül

$$\delta Q = \delta \left(T + D - \Sigma \frac{\partial D}{\partial x'} x' \right) - \Sigma \frac{\partial S}{\partial x} \delta x - \Sigma \frac{\partial D}{\partial \xi} \delta \xi. \qquad 21.)$$

Ha pl. D quadratikus, homogén függvénye a sebességi komponenseknek, akkor:

$$\delta Q = \delta\,(T - D) - \Sigma \frac{\partial S}{\partial x} \delta x - \Sigma \frac{\partial D}{\partial \xi} \delta \xi \qquad 21.a)$$

Ezen egyenlet különbözik az előbbi közleményünkben neki megfelelőtől; a különbség onnét jő, mert mult alkalommal hallgatva föltételeztük, hogy a D nem tartalmazza a ξ-ket. Mostani közleményünk e tekintetben is általánosít tehát.

* * *

Végezetül legyen megengedve annak följegyzése, hogy az általánositott Boltzmann-Clausius-féle tételt már 1877. évi február óta ismerem ezen alakban:

$$\delta Q = \frac{1}{i}\delta i \Sigma \overline{\frac{\partial (T+V)}{\partial q'} q'}$$

hol q a mozgásnak feltételi egyenletektől független koordinátáit jelenti, továbbá:

$$q' = \frac{dq}{dt}$$

s hol a Σ fölötti vizszintes vonal azt jelenti, hogy az alatta álló menynyiségnek i idő alatti középértéke veendő. A tétel azonban az imént közöltnél sokkal hosszabb bizonyitással fedeztetett fel, t. i. a constansok variatiójának módszerével. Levezetésénél akkor, ép úgy mint most, föltételeztetett, hogy a potentiál az időt nem tartalmazza.

Kolozsvártt, 1897. deczember 30.

AZ ENERGIA ELVE A DYNAMIKÁBAN.

Szily Kálmántól.

E lapok 20-ik füzetében, az energia értelméből kiindulva, egy általános érvényü dynamikai elvet*) állítottam fel, melyet azon okból, mivel mind rendeltetésére, mind használatára és a velebánásra nézve teljesen megfelel D'Alembert elvének, egyelőre »a D'Alembert-féle elv egy új alakja« néven neveztem el. Minthogy azonban ez az elnevezés véglegesen úgy sem maradhatna meg, és már most kezdetben is félreértésre és összetévesztésre adhatna alkalmat, minthogy továbbá a szóban forgó elv voltaképen az energia állandóságát fejezi ki legáltalánosabb alakjában, és az »energia elve« a dynamikában különben sincs még lefoglalva, jobbnak látom a szóban forgó dynamikai elvet *»az energia elve«* néven vezetni be a tudományba.

Az energia elve szóban kifejezve így hangzik:

Minden háborítatlan (úgynevezett spontán) *mozgásnál a kinetikai energia végtelen kis változásának és az a közben végzett munkának összege egyenlő a semmivel.*

Mathematikai jelekkel kifejezve pedig:

$$dK + \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) + J\,dt = 0 \qquad 1.)$$

hol is K (a kinetikai energia) tetszőleges, folytonos függvénye a pontrendszer koordinátáinak, sebességi komponenseinek és az időnek;

---

*) Műegy. Lapok. II-ik kötet, 289. lap, 4.) sz. egyenlet.

x_i, y_i, z_i a pontrendszer i-ik pontjának koordinátái; X_i... az i-dik pont által az x... koordináta szerint kifejtett erő-komponens; t az idő; végre J egy névtelenül hagyott függvény, a mely méretére nézve egyenértékü az erő és sebesség méreteinek szorozmányával. A mi az 1.) egyenlet baloldalán dK után áll, mindaz egybefoglalva, a pontrendszer által dt idő alatt végezett munkát ábrázolja.

Az 1.) alatti egyenlet önkénytelenül emlékeztet egy a dynamikában nagy szerepet játszó elvre, t. i. az elevenerő megmaradásának elvére. Ez t. i. így hangzik:

$$dT + \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = 0 \qquad 2.)$$

hol is T a pontrendszer eleven erejét, x_i... a koordinátákat, X_i... az erőkomponenseket jelentik.

De mégis *lényeges* különbség van köztük! Az elevenerő elvében T egy teljesen meghatározott függvénye (t. i. pythagorási függvénye) a Descartes-féle derékszögü sebességi komponenseknek, holott az energia elvében K tetszőleges függvénye a koordinátáknak, sebességi komponenseknek és az időnek. — Még egy más különbség is forog fenn. Az 1.) alatti egyenletben egy oly tag is ($J\,dt$) szerepel, a mi a 2.)-ből teljesen hiányzik. Ez onnan van, mivel én független változóul nem az időt, hanem egy meghatározatlanul hagyott φ mennyiséget vettem, úgy hogy nálam az n pontból álló rendszer mozgásának teljes ismeretére nem $3n$, hanem $3n + 1$ függvény szükséges, a koordináta-függvényekhez még hozzájárulván az idő függvénye:

$$t = f(\varphi).$$

Idézett dolgozatomban megmutattam, miként lehet az 1.) alatti egyenletből a szokásos egyensúlyi és mozgási egyenleteket levezetni, és pedig a következő 3 esetben:

1.) ha K állandó,

2.) ha $K = T$,

3.) ha K a sebességi komponenseknek quadratikus homogén függvénye, a koordinátáknak pedig tetszőleges függvénye.

Jelen közleményemben idevágó tanulmányaim folytatását terjesztem elő.

I.

Az 1.) alatti egyenlet, könnyen belátható, független a koordinátarendszer választásától; érvényes az, minden változtatás nélkül, bármiféle koordináta-rendszerre is. A koordinátákat a 20-ik füzetben x, y, z-vel jelöltük, és egy szóval sem emlitettük meg és kötöttük ki, hogy ezek ilyen vagy amolyan koordináták legyenek. De minthogy az ember hajlandó már puszta megszokásból, ha az ellenkező meg is van mondva, az x, y, z alatt csupán Descartes-féle derékszögü koordinátákat érteni, jobbnak látom a pontrendszer koordinátáit más betükkel jelölni. Jelöljük ezentúl az n pontból álló pontrendszer $3n$ koordinátáját bármiféle rendszerre vonatkoztatva

$$p_1\,,\,p_2\,,\,p_3\,,\,\ldots\ldots\,p_{3n}$$

betükkel; az ezen koordináták szerinti erő-komponenseket pedig rendre

$$P_1\,,\,P_2\,,\,P_3\,,\,\ldots\ldots\,P_{3n}$$

betükkel, úgy az 1.) alatti egyenlet még igy is irható:

$$dK = \overset{3n}{\Sigma}\,Pdp + Jdt = 0\,. \qquad 3.)$$

hol is a K, P_1..... és J mennyiségek most a p_1.... koordináták p'_1..... sebességi komponensek és a t függvényei lehetnek. A sommajel fölé irt index azt jelenti, hogy a sommázás mind a $3n$ koordinátára kiterjesztendő.

Ha a pontrendszer teljesen szabad, vagyis nincs feltételi egyenleteknek alávetve, úgy a p_1..... és t (számra $3n + 1$) mennyiségek teljesen függetlenek egymástól. Ha ellenben a pontrendszer számra m feltételi egyenletnek van alávetve, úgy a $3n + 1$ mennyiség közül csak $3n + 1 - m$ független egymástól, m pedig már amazoktól függő. Képzeljük, hogy a számra m feltételi egyenletek segítségével a 3.) alatti egyenletből számra m koordinátát kiküszöböltünk és a hátramaradó koordinátákat megint

$$p_1\,,\,p_2\,,\,p_3\,\ldots\ldots\,p_{3n-m}$$

és a dp..... elmozdulások mostani együtthatóit megint

$$P_1\,,\,P_2\,,\,P_3\,\ldots\ldots\,P_{3n-m}$$

betükkel, valamint a dt együtthatóját is megint J betüvel jelöljük, úgy a 3.) alatti egyenlet igy lesz irandó:

$$dK + \overset{3n-m}{\Sigma}\,Pdp + Jdt = 0 \qquad 4.)$$

hol is a sommajel fölé irt index azt fejezi ki, hogy itt az összeadás már csak a független koordinátákra terjesztendő ki. Az itt fellépő koordinátákat Lagrange-féle vagy *általánositott koordináták*-nak és a P..... együtthatókat *általánositott erőkomponenseknek* szokás nevezni. Itt most a K a p_1..... p_{3n-m} koordináták, p'_1..... p'_{3n-m} sebességi komponensek és az idő függvényének tekintendő.

Ismételve hangsulyozom, hogy *a 4.) alatti egyenletben a p_1....., p_{3n-m} koordináták és az idő t egymástól teljesen függetlenek.*

II.

Tüzzük ki feladatul a 4.) alatti elv segítségével *egyszerű kifejezést találni a P_i erőkomponens számára, abban az esetben, midőn a kinetikai energia tetszőleges folytonos függvénye a kordinátáknak, sebességi komponenseknek és az időnek.*

Ez esetben a kinetikai energia differentiálja (elhagyván a sommajel feletti indexeket, melyek úgyis maguktól értetődnek) leszen:

$$dK = \Sigma \frac{\partial K}{\partial p} dp + \Sigma \frac{\partial K}{\partial p'} dp' + \frac{\partial K}{\partial t} dt.$$

A jobb oldal utolsó előtti tagját ekként átalakítván:

$$\Sigma \frac{\partial K}{\partial p'} dp' = d\left(\Sigma \frac{\partial K}{\partial p'} p'\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial p'}\right) . dp,$$

és a dK e szerinti értékét 4.)-be helyettesítvén, származik:

$$d\left(\Sigma \frac{\partial K}{\partial p'} p'\right) + \Sigma\left[P + \frac{\partial K}{\partial p} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial p'}\right)\right] dp + \left(J + \frac{\partial K}{\partial t}\right) dt = 0.$$

Vonjuk le ebből a 4.) alatti egyenletet:

$$d\left(\Sigma \frac{\partial K}{\partial p'} p' - K\right) + \Sigma\left[\frac{\partial K}{\partial p} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial p'}\right)\right] dp + \frac{\partial K}{\partial t} dt = 0.$$

Ez az egyenlet, mint a műveletek végrehajtása is mutatja, nem egyéb puszta identitásnál. Érvényes tehát egy a K-tól különböző, valami tetszőleges R függvényre is. Vagyis:

$$d\left(\Sigma \frac{\partial R}{\partial p'} p' - R\right) + \Sigma\left[\frac{\partial R}{\partial p} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial p'}\right)\right] dp + \frac{\partial R}{\partial t} dt = 0.$$

Vonjuk ezt le 4.)-ből:

$$d\left(K - \Sigma \frac{\partial R}{\partial p'} p' + R\right) + \Sigma\left[P + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial p'}\right) - \frac{\partial R}{\partial p}\right] dp + \left(J - \frac{\partial R}{\partial t}\right) dt = 0,$$

a mely egyenlet érvényes tartozik lenni R minden értékére.

Szabadon rendelkezvén vele, defineáljuk az R függvényt úgy, hogy

$$\Sigma \frac{\partial R}{\partial p'} p' - R = K \qquad 5.)$$

legyen. Ekként az iménti egyenlet a következőre redukálódik:

$$\Sigma\left[P + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial p'}\right) - \frac{\partial R}{\partial p}\right] dp + \left(J - \frac{\partial R}{\partial t}\right) dt = 0.$$

Ámde $p_1 \ldots p_{3n-m}$ és t teljesen függetlenek egymástól; ez egyenletnek tehát elég tétetik, ha dp_i és dt szorzója identikusan zérus, vagyis ha:

$$P_i = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{R\partial}{\partial p}\right) - \frac{\partial R}{\partial p_i}\right] \tag{6.}$$

és

$$J = \frac{\partial R}{\partial t}. \tag{7.}$$

A 6.) alatti egyenlet egy egyszerü kifejezést állapít meg *az erőkomponensre a legáltalánosabb esetben.* E kifejezés érvényes marad, akárminő függvénye legyen is K és következéskép R a koordinátáknak, sebességi komponenseknek és az időnek.

Itt egy igen nevezetes körülmény azonnal szembe ötlik. Az erő imént megállapitott kifejezésének t. i. *tökéletesen olyan alakja van, mint a Lagrange-féle általánositott erőkomponensnek.* Ez t. i. a mi betüinkkel írva így fejeztetik ki: *)

$$P_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_i} \tag{8.}$$

A különbség csak az, hogy az itt tárgyalt általános esetben az eleven erő helyébe a föntebb 5.) alatt defineált R függvény lép, és hogy a 6.) alatti P_i az utóbbitól jelben különbözik. A jelkülönbség onnan van, mivel nálam P_i nem a pontra működő erőt, hanem a pont által kifejtett reactio-erőt jelenti.

Megjegyzendő még az is, hogy az J kifejezése is beleillik az erőkomponens schémájába. Ha ugyanis 6.)-ban p_i helyébe t tétetik, úgy $p'_i = 1$ és úgy a jobb oldal első tagja zérus lévén, származik a 7.) alatti kifejezés.

A közlött erély δQ, az erőkomponens iménti megszabása mellett, (20-ik füzet, 293-ik lap, 2.) egyenlet) lesz tehát:

$$\delta Q = \delta K - \Sigma\left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial p'}\right) - \frac{\partial R}{\partial p}\right]\delta p\right\} + \frac{\partial R}{\partial t}\delta t \tag{9.}$$

A kinetikai energia helyébe betéve 5.) alatti kifejezését, és részben végrehajtva a kijelölt müveleteket, némi rövidités után lesz:

$$\delta Q = \delta\left(\Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}p'\right) - \Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}\delta p' - \Sigma\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial p'}\right)\delta p\right].$$

*) V. ö. Jacobi-Clebsch »Vorlesungen über Dynamik« 64-ik lap 11.)-ik egyenlet, vagy Thomson és Tait »Treatise on Natural Philosophy«, 253-ik lap, 10.)-ik egyenlet.

A jobb oldalon az utolsó tagot ekként átalakítva:

$$\Sigma\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial p'}\right)\delta p\right]=\frac{d}{dt}\left(\Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}\,\delta p\right)-\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial p'}\,\frac{d\delta p}{dt}\right).$$

vagy még az utolsó sommában a d és δ sorrendjét fölcserélve és dp helyébe $p'dt$-t téve, lesz:

$$\Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}\frac{\delta dp}{dt}=\Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}\delta p'+\frac{\delta dt}{dt}\,.\,\Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}\,p'.$$

Behelyettesitések és rövidítések után származik:

$$\delta Q=\delta\left(\Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}\,p'\right)+\frac{\delta dt}{dt}\,.\,\Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}p'-\frac{d}{dt}\left(\Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}\delta p\right).$$

A dt-vel felsokszorozva és a jobb oldal két első tagját összevonva, lesz végre:

$$\delta Q\,.\,dt=\delta\left(\Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}dp\right)-d\left(\Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}\delta p\right). \qquad 10.)$$

A 10.) alatti egyenlet megadja *a közlött erély kifejezését a legáltalánosabb esetben.* Szembeötlik, hogy ezen egyenletnek tökéletesen az az alakja van, mint a Hamilton-féle actio-elvének. Hamilton elve t. i., a mi betüinkkel irva, így fejezhető ki:

$$\delta Q\,.\,dt=\delta\left(\Sigma\frac{\partial T}{\partial p'}dp\right)-d\left(\Sigma\frac{\partial T}{\partial p'}\delta p\right). \qquad 11.)$$

Az egyedüli különbség 10.) és 11.) között csak az, hogy az általános esetben T helyébe az 5-ik egyenletben defineált R függvény lép be.

Jacobi előadásai a Hamilton-féle elvet a 11.)-től különböző, speciálisabb alakban terjesztették el. Nem lesz talán fölösleges, megmutatni, hogy a 10.) alatti egyenlet miként redukálódik a Jacobi-féle alakra.

Integráljuk a 10.) egyenletet t_0 és t_1 határok között és tegyük fel,

$$(\delta p_i)_{t_0}=0 \text{ és } (\delta p_i)_{t_1}=0,$$

úgy:

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta Q\,.\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta\left(\Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}p'dt\right).$$

A δQ helyébe tegyük be 9.) alatti értékét, s a δK után következő tagok összegét, rövidség okáért, jelöljük — U'-vel; végre szabjuk meg, hogy t vétessék független változónak, vagyis hogy dt állandó legyen, úgy:

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta K-U')\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta\left(\Sigma\frac{\partial R}{\partial p'}\,p'\right).\,dt.$$

Végre, figyelembe véve K 5.) alatti értékét, összevonás után marad:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta R + U)\, dt = 0 \qquad 12.)$$

A 12.) alatti egyenlet teljesen megfelel a Hamilton-Jacobi-féle alaknak.*) A különbség itt is csak az, hogy T helyébe R lépett.

* * *

Az energia elvét kifejező 4.) egyenlet, mint az imént láttuk, a legáltalánosabb esetben is szétválasztható $3n - m + 1$ egymástól független egyenletre. Ez egyenletek, kapcsolatban a számra m föltételi egyenletekkel képezik a pontrendszer mozgási egyenleteit.

De e szétválasztás $3n - m + 1$ egyenletre, könnyü meggyőződni, nemcsak egyféleképen, hanem végtelen sokféleképen is foganatositható.

Az imént láttuk, hogy a 4.) alatti egyenletnek a P_i és J együtthatók 6.) és 7.) alatti értékeivel megfelelhetünk. De ugyanazon egyenletnek megfelelhetünk akkor is, ha P_i helyébe

$$P_i = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial p_i'}\right) - \frac{\partial R}{\partial p_i} - F_i\right] \qquad 13.)$$

és J helyébe:

$$J = \frac{\partial R}{\partial t} - \Sigma (F \,.\, p') \qquad 14.)$$

kifejezéseket teszünk, hol is F_i egészen tetszőleges mennyiség lehet. Ezen értékek mellett a közlött erély δQ a következő értéket veszi fel:

$$\delta Q = \delta K - \Sigma \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial p'}\right) - \frac{\partial R}{\partial p} - F\right]\delta p + \left(\frac{\partial R}{\partial t} - \Sigma F p'\right)\delta t$$

a mi a 9.) egyenleten véghezvitt átalakitások alapján még igy is irható:

$$\delta Q \,.\, dt = \delta\left(\Sigma \frac{\partial R}{\partial p'} dp\right) - d\left(\Sigma \frac{\partial R}{\partial p'} \delta p\right) + \Sigma [F(\delta p dt - dp \delta t)].$$

Ez az egyenlet azonban általában nem vihető vissza a Hamiltoni alakra. E visszavezetés általában csak úgy lehetséges, ha P_i és J 13.) és 14.) alatti kifejezéseiben az F_i eltünik, vagy ha P_i és J akként defineáltatnak, miként ez a 6.) és 7.) alatti egyenletekben történt.

Minthogy F_i tetszőleges függvény, nyilván való, hogy az emlitett szétválasztás $3n - m + 1$ egyenletre végtelen sokféleképen megejthető.

---

*) V. ö. Kirchhoff »Vorlesungen über mathem. Physik«. 28-ik lap, 9.) egyenlet.

Ezek közül kiszemeljük azt a szétválasztási módot, mely az erőkomponensekre felfogásunk szerint a legegyszerübb kifejezést adja. A mozgási egyenletek minősége attól is lényegesen függ tehát, hogy miként akarjuk az erőkomponens (P_i) kifejezését megállapitani. Az energia elve e tekintetben igen nagy választási szabadságot enged és nem köti ki oly peremptóriusan, mint azt a D'Alembert elve teszi, hogy így és ne másképp irassanak le a természetben előforduló mozgási jelenségek. És ez csak előnyére van; mert egyfelől folytonosan szemünk előtt tartja, hogy mi az önkényes és hypothetikus abban a schémában, melyet magunknak kiválasztottunk, másfelől pedig megőrzi az actio szabadságát, sőt folytonosan ingerel a dynamikai hypothesisek experimentális megvitatására. — Legyen szabad erre egy példát felhozni.

Tegyük fel, hogy experimentális úton csakugyan be van bizonyítva, hogy a »melegség magától nem mehet át hidegebb helyről melegebbre.« Ebből, mint ismeretes, teljesen szigorú következtetések alapján levezethető a hőelmélet második főtétele. E tétel pedig, mint más alkalommal megmutattam,*) szoros összefüggésben van Hamilton elvével. Az erőkomponens kifejezésének úgy kell tehát választva lennie, hogy eleget tegyen az általánositott Hamilton-féle elvnek.

Az energia állandóságának elve csak a *keretet* állapitja meg; maga a *kép* folyton változik a természetről szerzett ismereteink haladásával. *A mostanság kiállitott* képet a következő három fővonás jellemzi:

1.) A kinetikai energia quadratikus homogén függvénye a sebességi komponenseknek, és nem függvénye az időnek.

2.) Az erő dynamikai kifejezése ez:

$$P_i = -\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial p_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial p_i}\right]$$

hol K a kinetikai energiát jelenti.

3.) Az erőknek van potentiáljok, és e potentiál nem függ sem az időtől, sem a sebességi komponensektől.

---

*) Értekezések a mathematikai osztály köréből. X. szám 1871.

A KLOSTERNEUBURGI MUSTMÉRŐRŐL.

Dr. Pillitz Vilmos, müegyetemi magán-tanártól.

A magyar tudományos akadémia Értesítőjében 1875. jun. 14-én Preysz Móricz tanár ur egy értekezést publikált, a melyben a klosterneuburgi mustmérő pontatlan és ingadozó jelzéseit tárgyalva, annak kijavítását sürgeti és egyúttal azon óhajnak ad kifejezést, miszerint a kijavítást megelőző tanulmányokban a hazánkbeli szakkörök is részt vegyenek. A klosterneuburgiak a Preysz tanár úr által érintett tökéletlenségeket egész terjedelmükben elismerték ugyan, de azzal igyekeztek mentegetni, hogy: miután a mérő egyáltalában nem finom analytikai, hanem csak praktikus czélokra, a borkezelők vagy termelők mindennapi használatára van szánva, egy vagy két perczentnyi eltérés a jelzésben nem baj.

Tekintetbe véve azonban, hogy a mustban foglalt czukornak helyes meghatározása hazai termelésünkre nagy fontossággal bir, a kir. magy. természettudományi társulat választmánya, Preysz tanár úr felszólítása következtében, ezen ügy megvizsgálását elrendelte és a kiküldött négy tagu bizottság, mely Wartha tanár úr elnöklete alatt Preysz, Say és Hidegh tanárokból állott, engem tisztelt meg a vizsgálatokkal, minthogy Preysz tanár úr maga betegeskedése következtében, a kellő vizsgálatokkal nem foglalkozhatott. A bizottság által kitüzött kérdés a következő: »Minthogy a Babo-féle mustmérő és a Fehling-féle meghatározás adatai közt oly tetemes a különbség, hogy amazt még gyakorlati czélokra sem igen lehet használni, tétessenek összehasonlító kisérletek még f. é. augusztus és szeptember havak folytán egy és ugyanazon szőlőfajjal, a tapasztalt eltérések kipuhatolása, és az igazi tényleges viszonyok kiderítése erdekében.«

Mielőtt tárgyalásom fonalát felvenném, helyén valónak tartom azon megjegyzést, hogy általában egy mustmérő értékét csak úgy lehet helyesen megbirálnunk, ha esetről-esetre megelőzőleg ama fundamentális vizsgálatokat véghez vittük, a melyeknek eredményein a megbirálandó mérleg indicatiói alapulnak. Ennek megfelelőleg egy hosszabb kisérleti sorozatban oly szőlőelemzéseket vettem foganatba, a melyek a szőlőszemek növése és fokonkinti érlelése minden stádiumában szabatosan mutatják a czukor, sav és többi extractanyagok ingadozását.

A kisérletek 1. augusztustól fogva szeptember 30-ig ugyanegy szőlőfajjal (apró fehér, Zelenka vagy Bálint) tétettek. A szőlő fekvése délkeleti hegyoldal. Köszönettel említem fel Petrovics István földbirtokos urat, ki szives volt az egész tetemes mennyiségben felhasznált kisérleti anyagot saját birtokáról (Puszta-Leányfalu, Sz.-Endre mellett,) a legnagyobb készséggel rendelkezésemre bocsátani.

Az elemzések eleinte minden harmad-, később minden másodnapon és közel a szüretliez, naponkint tétettek.

Meghatároztattak:

1. must fajsúlya,
2. az összes extract,
3. a czukortartalom { a) Fehling szerint, b) a klosterneuburgi mustmérővel,
4. az összes savak.

Az első elemzéseket Dussza Károly vegyiparműtani laboratoriumi gyakornok úr vitte végbe augusztus és szeptember havakban. Az ellenőrző kisérleteket pedig (beforrasztott üvegcsövekben gondosan elzárt mustokkal) magam végeztem.

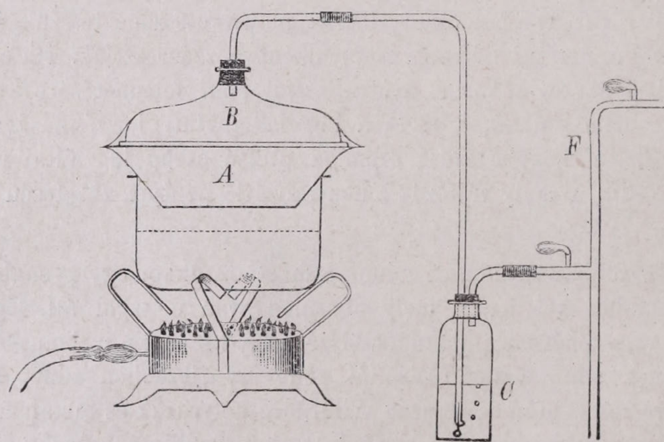
A fajsúly meghatározás a 100 grammos edénynyel történt, azért mert ezen eszköz segítségével sokkal élesebb a meghatározás, mint a piknometerrel, továbbá mert mindazon nehézségek, a melyekkel a piknometrikus fajsúly meghatározás egybe van kötve, a 100 grammos edény alkalmazásánál mellőzve vannak.

Az összes extract meghatározásnál eleintén ugyanazon nehézségekre akadtam, a melyek ezen operatiónál általában fel szoktak merülni. Az eljárási mód, mely a laboratoriumokban szokásos, kivétel nélkül differentiákra vezet. A hiba épen az eljárási módban fekszik, mert a must, a szabad levegő befolyása alatt, bepárologtatva megbarnul és a lepárlási maradék sötét szinü, kenőcsös, szivós és kellemetlen keserü izü anyag, mely vizben nem tökéletesen oldható. Mindez arra mutat, hogy lepárlás közben az extract anyagokban némi bomlások keletkeztek. Ennek kikerülésére többféleképen próbáltam az eljárás módosítását. Eleintén például azon nézetet tápláltam, hogy a bomlás részint a mustban levő savaknak a czukorra gyakorolt hatásától, részint pedig a savaknak a lepárlási mérséklettől okozott saját megbomlása által idéztetik elő; a borsavat lepárlás előtt aetheralkohollal a mustból kiráztam, de ezen manipulatió nem vezetett czélhoz, a borsavtól megszabadított extract mégis megbarnult. Egy másik kisérlet, a melynél a savak nátronlúg által lettek neutralizálva, szintoly kevéssé használt, sőt midőn a lepárolgás és szárításnál alkalmazott hőfokot 80^0 C-ra leszállítottam, a maradék csak úgy mint eddig sötétbarna, szivós, kellemetlen izü, vizben nehezen s csak részben oldhatóvá lett. Ezen utakon czélt nem érvén, egy harmadik kisérletnél a levegő befolyását is kisértettem elhárítani a párologtatás és szárításnál. Ez okból a savak neutralizátiója után a folyadékot vacuumban kiszárítottam. Ezen eljárásnak végtére volt sikere. Egy helyesen kiállított extractnak következő tulajdonságokkal kell birni: 1. hogy legyen tökéletesen száraz és kemény; 2. hogy ujbóli feloldásnak alávetve, benne az eredeti czukor mennyiséget megtaláljuk; 3. hogy szine, a mennyire lehetséges, változatlan maradjon. Az utóbbi mód szerint kezelt extractanyag ezen feltételeknek tökéletesen megfelelt.

A kezelendő mustot (20 köbcentimetert) a kisérlet előtt normal nátronluggal közömbösítenünk kelletvén, azt egy előbb pontosan lemért és rövid üvegpálczával ellátott platin csészébe tesszük, és egy burettából a normal nátront csöppenként hozzáeresztjük. Ha a must szine kissé sárga, akkor a neutralizátiói pont felismerésére különös indicator nem szükséges, mert a lug lassankinti hozzáadásával azt tapasztalhatni, hogy a must szine az utolsó csepp lug által rögtön megsötétedik, a mely változás a neutralizátió pontját tüzetesen megmutatja.

Ha több nátronlugot adunk a musthoz, akkor egy gyenge pelyhes csapadék keletkezik, mely phosphorsavas mészből áll. Egészen világos vagy fehér mustfajoknál czélszerü egy-két csepp lackmus-oldatot a musthoz adni, a neutralizátiói pont igy élesebben tünik ki. — A neutralizálás után a csészét vizfürdőre helyezzük és tartalmát egészen vastag szörpsűrűségig elpárologtatjuk, azután a szörpöt absolut szeszszel leöntjük és ezt a szörpbe belékeverjük, mire a szesz egy homokfürdőn 60—70^0 C-nál kiüzetik. Az e mérsékletnél kiszökő alkoholgőzök a szörpben levő viznek nagy részét magukkal rántják. Az absolut alkoholt mint gyors szárítót Dr. Wartha tanár úr már évek óta használja és javaslatára magam is a legjobb sikerrel alkalmaztam. Ezen kezelés után az extractanyagot a vacuum készülékbe tesszük.

Ezen készülék berendezését a mellékelt ábra mutatja. *A* egy szilárd vastag horgonyedény, a melynek széle lecsiszolt, egy kautschukgyűrű segítségével az üveg sisak *B* légmentesen ráilleszthető. A sisak egy *C* mosópalaczkkal, ez megint az *F* vizi légszivattyúval áll összeköttetésben. A vacuum edényben a szárítandó extract mellett egy edény van elhelyezve, a mely clorcalciumot tartalmaz. A mosópalaczkban concetrált kénsav foglaltatik, részint a gyorsabb szárítás előidézésére, részint a vizgőz tenziójának leszállítása végett. Hogy a kénsav a szivattyúzás megszüntével a mosópalaczkból a vacuumba vissza ne szálljon, a mosópalaczkban *E*-nél egy üvegszelep van a mosócsőbe belécsiszolva, a mely a szivattyúzásnál kinyilik, de mihelyt *F*-ben a vizroham bármi okból meggyengül, vagy a szivattyúzás megszüntetik, akkor a szelep a mosócső száját elzárja és ezáltal minden visszaáramlatot meggátol. A szivattyú ujbóli megindulásánál azonban a szelep oly erővel nyílik, hogy megtörténhetik, miszerint az a palaczk aljára leesve, azt átlukaszthatja; azért szükséges, hogy a mosópalaczk jó erős legyen, már azért is, hogy a külső légnyomásnak ellent állhasson, továbbá czélszerü a palaczk aljára asbestet rakni.



1. idom.

A mint ezen készülékeket megtettük, akkor a műtételt azzal kezdjük meg, hogy a szivattyú működését megindítva, egyúttal a vizfürdőt megfűtjük. Egy pár percz alatt az edény ki van szivattyúzva és pedig, ha a sisak és egyébb részei a készüléknek jól zárnak, egészen a vizgőz tenziójáig. A platincsésze tartalma felduzzad, nagy buborékokat vet és lassanként egy átlátszó, törékeny anyaggá alakul, melynek szine csak valamivel sötétebb, mint az eredeti musté. A szárítást addig kellene folytatnunk, mig a csésze tartalma állandó súlyt mutat. Nekem ezen tökéletes állandóság elérése nem sikerült, s meg kellett elégednem, ha a súlyi különbség egy órai szárítás után 8—10 milligrammra leszállt, mely különbség 20 k. c. mustról 100-ra átszámítva 0·04—0·05 %-ot tesz. Ennek elérésére 8—10 órai hevítés a vacuumban szükségeltetett.

Az extracttartalom kiszámitásánál szem előtt tartandó, hogy a savak nátronluggal való telitésénél az extract súlya szaporodott; másrészről pedig, hogy minden vegysúly nátron, mely a mustnak alma-, bor- vagy oxalsavával egyesül, egy vegysúly vizet kihajt, miáltal az eredeti súly ismét megcsökken. Ezen kiszabadított viz súlyát azonban könnyen meghatározhatni, mert a felhasznált nátronhydrat az ő mértéke. Most már tegyük fel, hogy az extract összes súlya $= g$ a semlegesítésre felhasznált nátroné $= n$ és v képezné azon vizmennyiséget, mely az n nátronmennyiség által szabaddá tétetik, akkor lesz a valódi extract tartalom

$e = g + v - n$; 100 k. c. mustban, a mely 100 grammra

átszámítva: $e' = \frac{g + v - n}{s}$ hol s a mustnak fajsúlyát jelöli.

Ha vegytiszta nátronlug alkalmaztatott a semlegesítésre, akkor ezen utóbbi képlet egész terjedelmében helyes. Ámde a laboratoriumokban a nátronlugot rendesen mésztejjel kezelt nyers sódából állítják elő, és ha sóda chlornatrium tartalmu, akkor elkerülhetlen, hogy az a nátronlugba át ne menjen. A timföldtartalomtól a nátronlugot könynyen lehet megóvni azáltal, hogy azt oly palaczkokban tartjuk, a melyek belül paraffinnal vannak bevonva. A chlornátrium a normal nátronlug hatásképességét nem változtatja ugyan, de a száraz anyag tartalmában, a mire itt fősúlyt kell fektetnünk, roppant eltéréseket okozhat és annak következtében hibás meghatározásokra vezethet.

Ez esetben nem marad egyébb, mint hogy a használandó lug száraz anyag tartalmát meghatározzuk. E czélból 20—30 k. c. lugot egy lemért platincsészében lepárologtatunk, de ezáltal a nátronhydrát nagy része szénsavas vegygyé alakulván, nehogy ezen körülmény bonyodalmat okozzon, inkább az egészet változtatjuk át szénsavas nátronná azáltal, hogy a párlási maradékot tiszta szénsavas ammoniakkal kezeljük és végre izzítjuk és lemérjük. Tegyük fel, hogy 20 k. c. lug ily módon kezelve m összes súlyu maradékot adott volna. 20 k. c. normal nátronlúg azonban 1·060 gr. szénsavas nátronnak felel meg és igy a tisztátlanságnak mennyisége $m - 1{\cdot}060$ 20 k. c.-ben, és $\frac{m - 1{\cdot}060}{20}$ 1 k. c.-ben.

Legyen e helyen megengedve egy ily módon véghezvitt extract meghatározást példa gyanánt leirnom.

20 k. c. must 9·2 k. c. normal nátronluggal a már említett módon beszáríttatott. Az összes extract súlya $g = 1{\cdot}1964$ gr. volt. Az alkalmazott nátronlúg csupán is Chlornatrium által volt tisztátlanítva. 30 k. c. lug lepárologtatva szénsavas ammoniakkal kezelve és izzítva, három jól összevágó kisérleti eredmény átlagában 1·6815 gr. maradékot adott. 30 k. c. lug azonban tényleg 1·590 gr. szénsavas nátronnak felel meg; igy tehát 1. k. c. lug Chlornatrium tartalma

$$= \frac{1{\cdot}6815 - 1{\cdot}590}{30} = 0{\cdot}00305 \text{ gr. } NaCl$$

és maró nátron tartalma $= 0{\cdot}031$ gr. NaO

összes szilárd anyag $= 0{\cdot}03405$ gr., mely szám a felhasznált köbcentimeterrel szorozva, az n értékét adja. Tehát ez esetben $n = 0{\cdot}03405 \times 9{\cdot}2 = 0{\cdot}3134$ gr.

Az összes extract a fennebbi képlet szerint $e = g + v - n$.

Hiányzik még v értéke, ez a felhasznált nátronlugtól függvén, avval egyszersmind aequivalens viszonyban áll; tehát

$$1000 : 9 = 9{\cdot}2 : v\,;\quad v = 0{\cdot}0828$$

$$e = 5\,(1{\cdot}1864 + 0{\cdot}0228 - 0{\cdot}3134) = 4{\cdot}829 \quad 100 \text{ k. c.-ben}$$

$$e' = 5\left(\frac{1{\cdot}1964 + 0{\cdot}0828 - 03134}{s = 1.01915}\right) = 4{\cdot}7375 \quad 100 \text{ gr. mustban.}$$

Ha az extract meghatározásra nem 20, hanem csak 10 k. c.-mustot használtunk volna fel, akkor természetes, hogy a fennebbi képlet nem öt, hanem tizszeresen veendő.

Az itt leirt módon végbe vitt meghatározások sorozata a következő eredményeket adta.

A szőlőszedés napja	A must fajsulya	Extract Balling szerint	direct Extract meghatározás		Megjegyzések
			100 Grban	100 k. c.-ben	
Aug. 1	1·01878	4.700	—	—	Aug. 2-án 15·1 mm. eső
3	1·01915	4.775	4.738	4.829	„ 6-án 11·9 „ „
8	1·0176	4.375	4.437	4.516	9. és 10-én 21·1 és 24·3 mm.
11	1·01938	4.827	4.741	4.833	12. és 13. 1 *mm.* 3 régi párlási mód szer.*)
17	1·02792	6.950	5.940	6.115*)	16—19-én 8·9, 1·1, 22·8 és 0·4 mm.
20	1·04228	10.447	9.970	10.393	
22	1·03638	9,019	8.820	9.149	24-én 18·8 mm.
24	1·03522	8.731	8.702	9.008	26. és 29-én 0·55 és 1·4 mm.
30	1·05243	12.857	12.530	13.199	3-án 1·7 mm.

A szőlő-szedés napja	A must fajsulya	Extract Balling szerint	direct Extract meghatározás		Megjegyzések
			100 Grban	100 k. c.-ben	
Sept. 2	1·059588	14.571	14.351	15.203	5., 6. és 7-én 1·17, 21·5, 9·3 mm.
5	1·06445	15.721	—	—	
8	1·060878	14.881	—	—	
11	1·07410	17.943	—	—	
14	1·076704	18.541	—	—	
17	1·08629	20.749	—	—	
20	1·08591	20.657	—	—	23., 23., 24. hüv. köz. mérs. 19° c.
22	1·090809	21.784	—	—	
23	1·08944	21.462	—	—	
26	1·09131	21.899	—	—	
27	1·08851	21.255	—	—	
28	1·09102	21.830	—	—	28-án legmag. havi mérs. 30·2° c.
29	1·09006	21.600	—	—	
30	1·0909	21.807	21.793	23.774	

A meteorologia észlelések Schenzl Guido a budai meteor. intézet igazgató úr feljegyzései alapján vétettek.

A mint tehát látni, a direct úton nyert extract meghatározásoknak eredménye összevág a fajsúlynak megfelelő extractmennyiséggel. Ebből okvetlenül következik, hogy mindazon anyagok, melyek a mustban a czukor mellett vannak, a fajsúlyra ugyanazon, vagy legalább közelítőleg azon mértékben hatnak, mint maga a czukor; következik továbbá az is, hogy ha a mustban az egyes alkatrészek súlyi viszonyai változnak is, az ezáltal előidézett változás alig fog az összes fajsúlyára észrevehető módon nyilatkozni.

Augusztus elején az éretlen mustnak fajsúlya 1·01878 volt, ennek megfelelne 4·78 czukorperczent, de a czukor tényleg csak 0.556 %-ot tett, és igy 4·224 % nem czukor ugyanazon fajsúlyt mutatta, mintha ugyanannyi czukor lett volna.

A fent említett módon nyert extract világossárga, rideg, kemény és átlátszó anyagot képezett, mely vizben tökéletesen feloldódott, az oldat szine ugyan valamivel sötétebb volt az eredetinél, de a czukor tökéletesen intact maradt.

Augusztus 22-én egy bizonyos mennyiségü mustban, a czukor meghatározás végbe vive 4·78 % czukor találtatott. Miután az extract a leirt módon előállíttatott, azt ujra feloldottam és most a czukor ujra meghatároztatván, 4·63 % tartalmat találtam.

Szeptember 30-án 100 gr. must 17.338 % czukrot tartalmazott, belőle 20 k. c. extract ujonnan feloldva és czukortartalmára megvizsgálva 17·04 % czukrot mutatott.

A czukor meghatározás.

Az ismert Fehling-féle meghatározás oly általános használatban áll és jóságára oly gyakran megvizsgáltatott, hogy kisérleteimnél is nem vonakodtam a czukrot Fehling módszere szerint meghatározni. Ámde ismeretes dolog, hogy a mustban mint oly complicált keverékben a titrátio végpontját elegendő pontossággal meghatározni annyira lehetetlen, hogy egy félperczentes czukoroldat 0·5 k. c.-nyi mennyisége az észlelhetés határán kivül esik.

Azon czukormennyiség, mely 0·5 k. c. félperczentes oldatban foglaltatik, 0·0025 gr.-ot tesz ki, és miután 10 k. c. Fehling-féle oldatból épen 10 k. c. félperczentes folyadékban foglalt czukormennyiség képes az összes rezet kiválasztani, önként következik, hogy minden 10 k. c. czukoroldatnál az eltérés 0·0025 gr.-ra mehet. Ha például egy 20 % czukor tartalmu mustban akarnók a czukrot meghatározni, akkor a mustot csak 40-szeresen higított állapotban titrirozhatjuk, tehát pl. 25 k. c. mustot 1000 k. c.-re higítva.

Számítsuk most a fennemlített 0·0025 gr. hibát 10-ről 1000 k. c. higitott vagy 25 k. c. eredeti mustra, akkor a hiba már 0·25 gr., mely 100 k. c. mustban egy egész perczentet tesz ki.

Ennél sokkal előnyösebben járunk el, ha a Fehling-féle titratió helyett, a súlyelemzési módot használjuk, vagyis ha a kiválasztott rézoxydult lemérjük. Tekintetbe véve a filternek hygroscopitását és mérlegeink tökéletlenségét, 2 milligramm hibát a mérésnél elkövethetünk, mely rézoxydul mennyiségnek 0·001 gr. czukor felel meg; mert 100 gr. czukor 198·2 gr. rézoxydult választ ki.

Ha ezen hibát egy 20 % czukrot tartalmazó mustra a fenntemlített módon átszámítjuk, akkor a hiba már csak 0·4 %-et tesz.

Csekély czukrot tartalmazó mustnál, a hol a higítás 1—5-szeres, a hibák is csekélyebbek fognak lenni, és miután másrészt a hibás méréseket többnyire a mérleg tökéletlensége okozza, és a hiba a terhelés bizonyos határáig állandó, ennélfogva czukordús mustoknál a Fehling-féle súlyi — ellenben czukorszegényeknél a térfogatos czukormeghatározás fog előnyösebbnek mutatkozni.

Az utóbbi időben azonban a Fehling-féle súlyi meghatározással is felhagytam, mert a filterek és a csapadék szárítása, és a gyakori mérések szükséges volta, igen hosszadalmassá és fárasztóvá teszik az eljárást, azért megkisértém a kiválasztott rézoxydult térfogatos elemzés útján meghatározni.

E műtétel mellett a Schwarz-féle eljárás [1]) kitünő szolgálatot tett. Az eljárás t. i. a rézoxydulnak Chamaeleon által oxyddá való átalakulásán alapszik.

E szerint ha valamely adott mennyiségü czukortartalmu folyadék segítségével, a Fehlingféle oldatból a rézoxydult kiválasztottuk, akkor a csapadék fölött levő még kék folyadékot egy szürőn át decantáljuk, a csapadékot és a szürőt forró vizzel mossuk, és végre a szürőt egy lombikba dobva, konyhasó és concentrált chlorment sósavval [2]) leöntjük, a lombik nyakába egy Krönig-féle kautschukszelepet illesztünk és néhány percznyi forralás után, a mint a szürő tökéletesen szétmállott, a lombik tartalmát egy hengerüvegbe átöntjük 200—250 k. c. vizzel higítjuk és chamaeleonnal titrirozzuk. Ez alkalommal a szintelen rézchlorür mindinkább kék szint nyer, a melyben a végreactió t. i. az ibolyás szin keletkezése nagy pontossággal észlelhető. Most még a chamaeleon oldatnak czukorértékét kell megállapitanunk. Erre a normal oxalsav-oldat szolgál.

Ismert dolog, hogy 1. v. s. chamaeleon 158·11 oxalsavvali reductiójánál 5 v. s. élenyt szabadít ki, és igy $^1/_5$ v. s. chamaeleon = 31·62 éppen 1 v. s. oxalsavat képes szénsavvá átalakitani. Ha csak $^1/_{50}$ v. s. chamaeleont oldunk egy literre, azaz 3·162 gr.-ot, akkor tulajdonképen egy tized normal oldatot nyertünk, a mennyiben 10 k. c. normal oxalsavnak 100 k. c. chamaeleonoldat fog megfelelni. De miután 1 v. s. oxalsav felbontására ugyanazon chamaeleonoldat mennyiség szükségeltetik, mint 1 v. s. rézoxydulnak oxyddá való átalakítására, következik, hogy a mennyi chamaeleon 10 k. c. normal oxalsavra kivántatik, egyszersmind 0·7136 gr. rézoxydulnak is fog megfelelni.

Igy tehát 100 k. c. chamaeleon megfelel 0·63 gr. oxalsavnak, vagy 0·7136 gr. rézoxydulnak.

De 1 v. s. czukor, 5 v. s. rézoxydult választ ki a borsavas rézoxyd nátron oldatából, tehát minden v. s. chamaeleonnak 158·11 megfelel 1 v. s. vizment szőlőczukornak.

---

[1]) Annalen d. Ch. u. Pharm. Bd. 92. p. 97. — Mohr's T. Aritmethode 4. Aufl. p. 215.

[2]) Czélszerűbbnek tartom a rézoxydult hig kénsav és konyhasóval feloldani.

100 k. c. a fennemlített $^1/_{50}$ v. s. Chamäleon oldatból megfelel	0·36 gr.	szőlőczukornak
1 k. c. a fennemlített $^1/_{50}$ v. s. Chamäleon oldatból megfelel	0·0036 gr.	

Igy tehát a chamäleonnali titrátiónál a felhasznált k. centimetereket a czukor titerrel 0·0036-al szorozni kell és igy directe a czukorértékeket nyerjük. A titrátió igen egyszerü, a végpont élesen észlelhető annyira, hogy ezen eljárás a legpontosabb térfogatelemzések közé számitható.

Hogy a hiba nagyságát megitélhessük; a melyet ezen eljárásnál elkövethetünk, vegyünk itt is például egy 20 % czukrot tartalmazó mustot, mely 40-szeres térfogatára, azaz 25 k. e. 1000 k. c.-re lett higítva. A rézoxydul kiválasztására 25 k. c. félpercentes folyadékot használunk. Tegyük fel, hogy 0.2 k. c. külömbség mutatkozik egy kisérletnél, akkor annak 0.00172 gr. czukor felel meg, mi 100 k. c. mustra átszámitva 0·115% eltérésnek felel meg.

Hasonlitsuk most az egyes eljárásoknál elkövethető hibák nagyságait össze, akkor azok egy 20% czukor tartalmú mustra alkalmazva a következők:

A térfogatos Fehling meghatározásnál	1 %
A sulyi » »	0·3 %
Chamäleonnal titrirozva	0·115 %

Igy tehát ez utóbbi módszer a legpontosabbnak nyilvánül.

De még más fontos oknál fogva is ajánlja magát ezen eljárás, u. m.

1. A meghatározás rövid időt igényel és

2. minden időben egyforma pontossággal kivihető; nappal ugymint mesterséges világitásnál a végpont határozottan, élesen észlelhető.

3. A pontos Fehling-féle — oly nagy mértékben bomlékony oldat késztése, — ezen módszernél felesleges. A kisérlet előtt rézvitriol seignette-só és nátronlúg a kellő viszonyban elegyíttetik ugy, hogy a keverék a forralásnál rézoxydult ne válaszszon ki, és a megvizsgálandó czukoroldat segitségével a rézoxydult kiválaszthatjuk.

Egy pár kisérlet világosabbá teendi a fent mondottokat. 2·4416 gr. vegytiszta szőlőczukor 250 k. c. vizben feloldatott és 20 k. č. oldattal a czukor meghatározás végbe vive szükségeltetett az

1-ső kisérletnél	54·4	Chamäleon
2-ik »	54·2	»
3-ik »	54·4	»
4-ik »	54·2	»
átlag	54.3	»

1 k. c. chamäleon megfelel 0.0036 gr. czukornak tehát lészen 20 k. c. czukoroldatban 54·3 + 0·0036 = 0·19548 gr. és 250 k. c.-ben 2·440 gr. 2·4416 helyett.

Legyen most már megengedve feladatom tárgyához egy kissé közelebb állani. E czélból bátorkodom egy kisérleti sorozatot bemutatni, mely szem elé tünteti a szőlőnek növés idénye alatt a fokozatosan fejlődő czukortartalmat, és azután az ezen észleletekből kivonható tanulmányokat elmondani.

A czukormeghatározások részben a Fehling-féle titrátió, vagy sulyi elemzéssel, részint chamäleonnal vitettek végbe, az eredmények pedig a klosterneuburgi mérő adataival hasonlíttattak össze. A must a czukor meghatározás előtt ólomeczettel lőn kezelve és a szürletből szénsavasnátronnal az ólom túlmennyisége kicsapatott. A Fehling-féle titratiónál legalább 2 jól összevágó meghatározásnak középértéke vétetett.

A szőlőszedés napja	Czukor Fehling szerint a) 100 Gr.-ban.	Czukor Fehling szerint b) 100 k. c.-ben	Klosterneuburgi mustmérő 17 5° C.-nél	Külömbség a klosterneuburgi mérleg és Fehling a) közt	Külömbség a klosterneuburgi mérleg és Fehling b) közt	Megjegyzések
Aug. 1	0·556	0·5668 [3]	—	—	—	A meteorolog. észlel. lásd tab. I.
3	0·530	0·540 [1]	—	—	—	
8	0·467	0·476 [1]	—	—	—	A (1)-el meghatározások a Fehling titratió.
11	0·680	0·700 [1]	—	—	—	A 2 a suly elemzés utján 3
17	1·990	2·046 [1]	—	—	—	Chamälenunal téttettek.
20	5·020	5·238 [1]	9·05	4·03	3·712	
22	4·400	4·562 [1]	8.5	4·1	3·94	
24	4·120	4·273 [1]	8.5	4·38	4·23	
30	8·797	9·259 [1]	11·5	2·703	2·24	
Sept. 2	10·530	11·160 [1]	13·0	2·47	1·84	
5	10·870	11·574 [1]	14·0	3·13	2·43	
8	10·560	11·210 [1]	13·5	2·49	1·84	
11	13·300	14·285 [2]	16·0	1·71	2·7	
14	14·298	15·387 [3]	16·55	2·25	1·0	
17	17·033	18·503 [3]	18·05	1·02	0·45	
20	16·473	17·808 [3]	18·5	2·03	0·69	
22	17·579	19·176 [3]	19·05	1·47	0·13	
23	17·506	19·072 [3]	18·0	0·49	0·57	
26	18·362	20·035 [3]	19·0	0·638	1·035	
27	17·361	18·898 [3]	18·55	1·189	0·34	
28	17·220	18·790 [3]	19·05	1·83	0·26	
29	17·960	19·584 [3]	19·0	1·04	40·58	
30	17·338	18·915 [2]	19·05	1·71	50·13	

Ezen táblázatból három tény tünik ki.

1. Ha a czukornak fokozatos szaporodását az összes extract szaporodásával összehasonlitjuk, azt találjuk, hogy a czukor némelykor rövid időközökben több percenttel szaporodott, mig a nem czukor relativ mennyisége alig változott. Igy pl. a czukor 8-ik augusztustól, september 2-áig majdnem 10%-al szaporodott, a midőn a nem czukor mennyisége állandó maradt. A fentebbi táblázatban feljegyzett czukor mennyiségek összehasonlitva a megfelelő mustnak összes extract tartalmával (lásd I. tabella) a nem czukorra a következő értékek esnek:

Augusztus 8-án , ...	3·97
» 11-én	4·06
» 22-én	4·42
» 30-án	3·78
Szeptember 2-án	3·82 stb.

2. 100 köbcentimeter mustban mindig több czukor foglaltatik, mint ugyanazon mustnak 100 gr.-jában, a mi a must magasabb fajsulyánál fogva természetes dolog.

3. A klosternenburgi mustmérő adatai egy 20% extractot tartalmazó mustnál csak azon értelemben járnak közel a Fehling meghatározásokhoz, ha amazokat 100 k. c. mustmennyiségre vonatkoztatjuk, holott 100 gr. oldatban bőven egy percenttel kevesebb czukor foglaltatik, mint a mennyit a klosterneuburgi mustmérő mutat.

A klosterneuburgi mustmérő különben szerkesztőjének nyilatkozata által kritika mentessé tétetett.

Miután a mérő feladata nem egyébb, mint csak közelitőleg jelezni a czukortartalmat, és azt is csak 20% összes extract tartalom körül némi valószinüséggel; miután továbbá az osztályzata 17%-on alól csak arra szánt, »hogy a practicus borász mindig szeme előtt tartsa, miszerint e mérleg adatai nem absolut, hanem csak megközelitőleg helyes számokat szolgáltatnak«,*) tehát minden kifogás, a melyet az eszköz jelzései vagy beosztása ellen felhozhatnánk és vele együtt minden kritika a priori mellőzve van.

De mindennek daczára e mérőt két principiális ellenvetés alól nem lehet felmenteni.

1. Nem helyeselhetem a mérő szerkesztőjétől megállapitott 3%-nyi levonást, a melyet 20% összes extract tartalomnál, nem czukor fejében alkalmaz. Számos ez irányban tett kisérleteim 4·3%-re vezet-

*) Welnlaube 1875. p. 349.

tek. A hármas szám alkalmasint ugy keletkezett, hogy a mikor a mustelemzéseket; a nemczukottartalom megállapitása végett átvizsgálták, hihetőleg azon czukormennyiségek vétettek tekintetbe, a melyek 100 k. c. mustban foglalvák, a miként az közönségesen szokásos, hogy a megvizsgáladdó mustot nem suly-, hanem ürmértékkel mérik s valóban, ha a 100 köbcentimeterben foglalt czukormennyiséget a sacharometer adatából levonom, az én kisérleteím is hármat eredményeznek nem czukor fejében. Ámde ha valamely mérőt a Balling-féle sacharometerrel, mely Gramm extractot 100 Gr. fogadékban jelöl, összhangzásba akarunk hozni, akkor szükségképen azon czukormennyiségről lehet csak szó, mely szintén 100 Gr. folyadékban foglaltatik, s miután 100 Gr. mustban mindig kevesebb czukor van, mint 100 köbcentimeterben, a külömbségnek, mely az összes extract és czukor között létezik, nagyobbnak kell lenni.

Például. Egy must, mely 20% összes extractot tartalmaz, annak fajsulya 1·084. Ha ezen mustnak 100 köbcentimeterjében 17 gr. czukor foglaltatik, akkor az eddigi szokott módon $20 - 17 = 3\%$-ot számitottak a nem czukorra, de 100 gr. ezen mustból nem 17 gr., hanem $\frac{17}{1{\cdot}084} = 15{\cdot}69$ gr. czukrot tartalmaz, e szerint a nem czukor nem 3, hanem 4·31 vagy kerek számban 4·3% lesz; ez pedig ugyanazon szám, a melyet számos elemzéseim átlagából magam is kaptam.

(*Folytatása következik.*)

IRODALOM.

TRAITÉ DE DYNAMIQUE, dans lequel les loix de l'Equiribre et du Mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, et démontrées d'une manière nouvelle, et où l'on donne un Princlpe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres, d'une manière quelconque. Par M. *d'Alembert*, de l'Académie royale des Sciences. A Paris, 1743.

A munka, melyről ez alkalommal megemlékezünk, nem az idén, nem is taval, hanem réges-régen, most 135 esztendeje hagyta el a sajtót. Rég letünt a könyvpiaczról, sőt a nagy könyvtárak közül is csak kevés dicsekedhetik bírásával. Még *Dühring* a »*Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik*« koszorús irója is csak az 1796-ik évben megjelent posthumus kiadást használhatta.

Minek is forgatnók már most a régi dynamikákat, miért vesződnénk azzal, hogy magunkat Galilei, Huyghens, a Bernouilliak (Jaaab, János és Dániel), Varignon, Euler, D'Alembert stb. gondolkozás-módjába és a maitól annyira eltérő jelölés-módjába beletaláljuk? Hiszen Lagrange, az analitikai mechanika nagy rendszerezője, úgyis elmondja nekünk a Dynamique I. Sectionjában mindazt, a mit e régiebb klassikusokról tudni szükséges. Igy pl. D'Alembertről úgy is tudjuk, hogy fentidézett munkájában fejtette ki azt a nagyfontosságu dynamikai elvet, melyet ma már minden mechanikában megtalálhatunk, s a mely ma is a nagy encyklopedista nevét viseli.

Megvallom, magam is így gondolkoztam ekkoráig. A következő eset azonban másra tanított.

Dühring művének második kiadásában a 302-ik lapon ezt olvasván: — »man ist in den Vorstellungen, die man unter dem Namen des d'Alembert'schen Princips zur Anwendung brachte, nicht immer genau der eignen Auffassungsart d'Alembert's gefolgt« — magam tájékozása végett kikértem a m. tud. Akadémia könyvtárából a d'Alembert Traité de Dynamique-jének *páratlan becsü, a szó szoros értelmében unikum példányát.*

Mielőtt elmondanám, hogy mit találtam benne magára az elvre vonatkozólag, szabadjon közbevetőleg a m. akadémia birtokában levő példányról, melyet az imént páratlan becsü unikumnak neveztem, kegyelettel megemlékeznem.

E példány, mint a czímlap hátulján levő bélyeg vallja a »G. Telekiek' Alapítványá«-ból került az akadémia könyvtárába. — Mindjárt a mint a kemény bőrkötésü könyvet kinyitjuk, szemünkbe tünik, hogy a széleken, sőt itt-ott a nyomtatott sorok között is roppant piczinységű, valódi mikroskopikus betűkkel írva, igen szép rendes *kézírás* is található. Szabad szemmel, erős nagyító nélkül, lehetetlen az írást elolvasni. S ez méginkább ingerli kiváncsiságunkat, megtudni, ki írta e könyvszéli jegyzeteket és mit írhatott oda? Kiváncsiságunk és bámulatunk még inkább fokozódik, a mint a miniatur-írást olvasni kezdjük. Meggyőződünk, hogy *e jegyzetek javítások és pótlások egy második kiadáshoz, a szerző saját kezével írva.* — Dr. Akin Károly, az akadémia lev. tagja, ki e könyvészeti jegyzetekre legelőször figyelmeztette az akadémiát, 1867. nyarán magával vitte Párisba a Telekiek példányát és átadta Bertrand urnak megtekintés végett. Bertrand 1868. január 13-án jelentést tett a párisi akadémiában a nagybecsű példányról, és azt indítványozta, hogy a jegyzetek másoltassanak le, mit is a párisi akadémia elfogadott és foganatosított is. (V. ö. M. Tud. Akad. Értesítője, II-ik évfolyam. — 46 és 250 lap.

Képzelheti a t. olvasó, mily kegyelettel fogtam e könyv olvasásához, melynek minden lapján a nagy bölcsnek nemcsak szellemével, hanem tulajdon kezeírásával is találkozhattam.

Az egész munka, a 26 lapra terjedő elöszón kivül, két részre oszlik: az első részben a mechanika elveit fejtegeti kezdők számára, a másodikban pedig, mely az elsőnél jóval terjedelmesebb, előterjeszt egy általános elvet »pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, avec plusieurs applications de ce Principe.«

Érdekes lenne, ha terünk megengedné, részletesen idézni d'Alembert saját szavait az elv megállapításában, és azután kifejteni, hogy az miként ültetendő át mai jargonunkba. Csak a kész eredményt veszem ki és mindjárt átöltöztetem a ma napság divatos formába.

Jelentse W azt a munkát, melyet a működő erők valamely a feltételek által megengedett virtuális elmozdítás közben akkor végeznének, ha a rendszer egészen szabad lenne; W_e pedig azt a munkát, melyet ugyanezen elmozdúlásnál *tényleg* végeznek, úgy d'Alembert elve azt mondja:

$$W = W_e$$

vagyis legyen a rendszer bárminő kapcsoknak és korlátozó feltételeknek alávetve, az erők munkája csak annyi, mintha a rendszer egészen szabad lenne, azaz más szóval a kapcsok és korlátozások által vesztett munka: $W - W_e$ mindenkor egyenlő a semmivel.

Lássuk, míként szokás jelenleg ez elvet mathematikai jelekkel kiírni. Ezt találjuk mindenütt

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \delta x \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot \delta z\right)$$

hol is a baloldal azt a munkát jelenti, a mit az imént W-vel, a jobb oldal pedig azt, a mit az imént W_e-vel jelöltünk.

Az egyenlet baloldala csakugyan meg is felel a d'Alembertféle felfogásnak teljesen. Hanem a jobb oldal!! Ha *ezt* d'Alembert láthatná és tudhatná, hogy *micsoda egyenletet* neveznek most az ő nevén, lehetetlen, hogy a legnagyobb határozottsággal ne tiltakoznék a hamisítás és visszaélés ellen, melyet az ő elvén és az ő nevével mostanában elkövetnek. Ő t. i. azt sohasem engedte volna meg, hogy a róla elnevezett elvet azzal az önkényes hypothesissel elcsúfitsák, mely szerint a gyorsító erőt (a tömeg-egységre eső erőt) egyenlőnek veszik a sebesség elemének és az idő elemének viszonyával. Igy pl. a Préface XI-ik lapján ezt mondja:

»Pourquoi donc aurions-nous recours à ce Principe dont tout le monde fait usage aujourd'hui, que la force accélératrice ou retardatrice est proportionnelle à l'Élément de la vitesse; principe appuyé sur cet unique axiôme vague et obscur, que l'effet est proportionnel à sa cause. Nous n'examinerons point si ce Principe est de verité nécessaire; nous avouerons seulement que les preuves qu'on en a données jusqu'ici, ne nous paraissent pas fort convaincantes: nous ne l'adopterons pas non plus, avec quelques Géométres, comme de vérité purement contingente, ce qui ruineroit la certitude de la Méchanique, et la réduiroit à n'être plus qu'une Science expérimentale: nous nous contenterons d'observer, que orai ou douteux, clair ou obscur, il est inutile à la Méchanique, et que par conséquent il doit en être banni.«

A 18-ik lapon pedig ezeket mondja:

»La plûpast des Géométres présentent sous un autre point de vûe l'Equation $\varphi dt = du$ entre les tems et les vitesses. Ce qui n'est, selon nous, qu'une hypothese, est érigée par eux en Principe. Comme l'accroissement de la vitesse est l'effet de la cause accélératrice, et qu'un effet, selon eux, doit être toujours proportionnel à sa cause, ces Géométres ne regardent pas seulement la quantité φ comme le simple expression du rapport de du à dt; c'est de plus, selon eux, l'expression de la force accélératrice, à laquelle ils prétendent que du doit être proportionnel, dt étant constant; delà ils tient cet axiôme général, que le produit de la force accélératrice par l'Elément du tems est égal à l'Elément de la vitesse. *M. Daniel Bernoulli* (Mém. de Petersb. To. I.) prétend que ce Principe est seulement de vérité contingente, attendu qu'ignorant la nature de la cause et la manière dont elle agit, nous ne pouvons savoir si son effet lui est réellement proportionnel, ou s'il n'est pas commc quelque puissance ou quelque function de cette même cause' M. Euler, au contraire, s'est efforcé de prouver fort au long dans sa Mécanique, que ce Principe est de vérité nécassaire. Pour nous, sans vouloir discuter ici si ce Principe est de vérité nécessaire ou contingente, nous nous contenterons de la prendre pour une définition, et d'entendre seulement par le mot de force accélératrice, la quantité à laquelle l'accroissement de la vitesse est proportionnel.«

Ha ekbént az eredeti forrásból merítünk, egészen más fogalmat szerzünk magunknak D'Alembert elvének valódi jelentéséről, a mint azt a tan- és kézi-könyvekben szokásos merev schémából tehetjük. A szemrehányás, melyet e tekintetben d'Alembert elvének egy más helyen tettünk, nem illetheti tehát egyáltalában d'Alembert eredeti felfogását, hanem egyes egyedül azt az Euler-Lagrange-féle schémát, melyben d'Alembert elvét jelenleg előterjeszteni szokták. Sz. K.

Éléments de la théorie des déterminants avec application à l'algébre la trigonométrie et la géométrie analytique dans le plan et dans l'espace à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Par G. Doctor Docteur és sciences Professeur de Mécanique rationelle à la Faculté des sciences le l'Université catholique de Paris. Paris Gauthier-Villars 1877. (XXXI, 352 l.) Ára 8 Mrk.

A jeles mathematikai tan- vagy kézi-könyvek századunk első felében túlnyomólag franczia eredetűek voltak, minek egyik főoka bizonyára az, hogy é század első negyedében a mathematikai disciplinák majdnem kizárólag a francziák által műveltettek, de másrészt még az is, hogy Francziaország számos előkelő mathematikusa fogott tan- vagy kézikönyv irásához, még ezzel ellentétben a többi nemzetek, nevezetesen a németek és angolok kitünő mathematikusai a tankönyv irásától egyáltalán irtóztak. Csak ritkán találunk jó, német eredeti tan- vagy kézikönyvet, mely századunk első felében jelent volna meg. Azonban az ötvenes évektől kezdve, mióta különösen jeles német mathematikusok is tankönyveket írtak, a viszonyok tetemesen megváltoztak; ámbár a franczia könyvek még mindig általános elismerésben részesülnek. Megszünt különben az ötvenes évek óta az, hogy jó tan- vagy kézikönyvet csak is Francziaországból várunk. Ezen ismertetés megírása alkalmat nyújt az utóbbi állításom bebizonyítására. — Bármennyire is kellene visszatekintenünk, ha a determináns elmélet-történelmi fejlődését akarnók ecsetelni, úgy mégis tagadhatlan, hogy az egész elmélet alapját Francziaországban vetették meg, és mind ennek daczára az előttünk lévő munka az első eredeti franczia kézikönyv, mely ezen elméletről megjelent. Az előttünk fekvő munka négy könyvből áll, melyek közől az I-ső a determinánsok elméletére szoritkozik, a II-ik a determinánsok alkalmazását az algebrára és trigonometriára, a III-ik azok alkalmazását az elemző mértanban, végre pedig a IV-ik a discriminánsokat és inváriánsokat tárgyalja.

A determinánsok elméletét tárgyaló első könyvben (1—80 ll.) az ezen elméletre vonatkozó főtételek mellett némelykor kevésbbé fontosakat is találunk.

A második könyvben (81—150 ll.) előforduló alkalmazások közől azokat tartjuk különösen kiemelendőknek, melyek a trigonometriára vagy helyesebben a goniometriára vonatkoznak.

A harmadik legterjedelmesebb könyvben (157—316 ll.) találjuk a determinánsok alkalmazását az elemző sík- és térmértanra különösen a kúpszeletekre és másodrendű felületekre. Az e könyvben feldolgozott anyag körülbelől ugyanaz, a mit Salmon munkái a kúpszeletekről és másodrendü felületekről a determinánsok alkalmazásából tartalmaznak. Végre a negyedik könyvben a discriminánsok és invariánsok elméletével találkozuk.

A levezetések mindenütt elemiek és gyakran újak. A munka azon czélszerű berendezése, hogy a kevésbbé fontos, vagy az első tanulásnál mellőzhető tételek apróbb betükkel vannak nyomtatva, a tanulónak czélszerü tájékozásul szolgál. A munka becsét emelik továbbá az abban kifejtett példák. Szó nélkül nem hagyhatjuk, hogy az eredeti források idézésében szerző nem járt el következetesen, még tekintélyek nevét vagy ritkán vagy éppen nem találjuk idézve, úgy a szerző saját értekezéseire, melyek többnyire a Grunert-féle Archiv-ban és a Nouvelles annales de mathématiques-ban jelentek meg, túlságosan gyakran hivatkozik.

E hiány daczára, a munka olvasását nem csak tanuló ifjuságunknak, de szaktársainknak is annyival inkább ajánljuk, miután abban mind kifejtésre, mind pedig anyagra nézve gyakran újat találunk. H. J.

FÖLADAT.

35. Jelöljük az első p törzsszám $p_1, p_2, \ldots p_r$ szorzatát P-vel, akkor tudvalevőleg $P + 1$ vagy törzsszám, vagy egy p_r-nél nagyobb törzsszámmal osztható, mely tehát p_r és P közt fekszik. Azonban nemcsak a második esetben, hanem általánosságban áll azon tétel, hogy p_r és P közt legalább egy új törzsszám fekszik. Mikép lehet ezt bebizonyítani? (*König.*)

Budapest, 1878. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

III. kötet. 1878. 22. füzet.

AZ ELHAJLITOTT FÉNY INTENZITÁSÁNAK KISÉRLETI MEGVIZSGÁLÁSA.

Dr. Fröhlich Izor egyetemi magántanártól.

1.

A diffractió elmélete az elhajlított fény intenzitásának függését a diffractio-szögtől, és bizonyos megszoritások mellett *) magát az intenzitást határozza meg, viszonyitva a beeső fényéhez.

Az elmélet ezen eredményei közül csak az első vizsgáltatott meg kisérletileg, s az észlelők egész sora, FRAUNHOFER-tól kezdve mostanáig ezt teljesen és szigorúan igazolta.

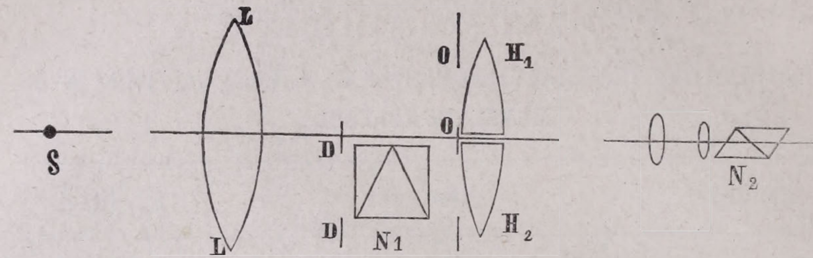
Az intenzitás, úgy látszik, még nem lett eléggé megfigyelve; legalább kisérleti adatok ez irányban teljesen hiányoznak, daczára annak, hogy az amplitúd értéke ép oly fontosságú, mint annak függése az elhajlított fény irányától.

Ezen theoretikus követelmények kisérleti vizsgálatát választva kutatásom tárgyául, csekély elhajlítási szöggel biró ilynemű tüneményeknél az intenzitás mérések eszközlése czéljából következő photometrikus módszert használtam:

A collimator gyanánt működő LL 107 mm. nyilású, 702 mm. gyutávú achromatikus lencse góczpontjában egy változtatható szélességű, de állandó 1 mm. magasságú hasadék volt alkalmazva, mely mögött egy DUBOSCQ-féle lámpában nyugodtan égő nátriumláng bocsátott ki homogén fényt. Az L-ből kilépő párhuzamos fénynyaláb egy része egy kettős törő, a rendes nyalábot csak keveset eltéritő s köridomú diaphragmával ellátott, compenzált hasábon kényszerül áthaladni, és így érkezik az LL tengelye irányában felállított, 78 mm. nyilású, metszésük irányában s tengelyükre merőlegesen eltolható két

*) Műegyetemi Lapok II. köt. 18. füzet.

fél tárgylencsével biró heliometer*) alsó fél tárgylencséjére; egy másik része a nyalábnak az OO nyiláson át jut a felső félhez. Mindegyik



féllencse góczpontjában az S tiszta képe keletkezik; a féllencsék alkalmas eltolása által e két képet egymás mellé, szigorú érintkezésbe hozhatjuk s intenzitásukat megfigyelhetjük.

Az N_1 kettős törő hasáb által előidézett rendes nyalábból eredő kép észleltetik; a rendkivüli nyaláb pedig annyira térittetik el, hogy az teljesen a heliometer diaphragmái közé esik, s igy számba se jön.

Ily elrendezésnél különben állandó viszonyok mellett, az észlelt két kép viszonylagos intenzitása teljesen független az S fénylő felület intenzitásától, mi által az észlelés lényegesen egyszerűsbödik

Az OO nyilás alakja négyzet, melynek felülete F-el jeleltessék; oldalai függőlesek és vizszintesek; mérete a DD nyilás-éhoz úgy lett választva, miszerint az N_1 es N_2 főmetszeteinek párhuzamos állása mellett az OO-n áthaladt nyaláb képe valamivel csekélyebb intenzitásu az alsó féllencsén átmenő polarizált nyalábból keletkező képnél. Az ocular elébe erősített N_2 nikol forgatása által a polarizált kép intenzitása változik, de a természetes fényből álló képé állandó marad. Ha az emlitett párhuzamos helyzettől számitva η_0 szöglettel kell az N_2-t elforgatni, hogy a polarizált kép intenzitása a nem polarizált képével egyenlővé gyengittessék, akkor e két kép *viszonylagos* intenzitása: $1 : \cos^2 \eta_0$.

Erre egy teljesen átlátszatlan sodrony menetei által képezett rács helyeztessék az OO elébe, merőlegesen a lencsék tengelyére, s elhajlító nyilásaik hosszirányával függőlegesen; az előbbi egy kép helyébe, a horizontalis vonalon a képek egész sorozata keletkezik, melyek középsője az emlitett egy kép előbbi helyét foglalja el. Mindezen képek természetes fényből állók s intenzitásuk az N_2 helyzetétől független.

*) Ezen eszköz FRAUNHOFER-től való, s a gellérthegyi csillagdának 1849-iki lerombolás alkalmával megmentetett.

Az intenzitások összehasonlítása czéljából a polarizált képet az alsó féllencse eltolása által e fentebbi képek bármelyike mellé, szigorú érintkezésbe lehetett hozni; ez által a polarizált kép intenzitása észrevehetőleg nem változott, miután a *DD* diaphragma és az N_1 hasáb a heliometerrel összefüggésben nem levő állvány által tartattak, s a H_2 alsó féllencse eltolása mellett a polarizált nyaláb csak annyiban szenvedhetett változást, a mennyiben ez a H_2-nek többé vagy kevésbbé vastag részén haladott át; ez utóbbi befolyás azonban, különösen az aránylag csekély eltolódások mellett, itt teljesen elhanyagolható. Ha most η_1 azon szög, melynél a polarizált kép annyira gyengittetett mig az egy tetszőleges elhajlított képpel egyenlő intenzitású, akkor azok relativ intenzitása: $1 : \cos^2 \eta_1$; tehát az elhajlított kép intenzitása viszonyitva a rács eltávolitása után az *OO*-n beeső fény képéhez:

$$\frac{\cos^2 \eta_1}{\cos^2 \eta_0}.$$

A mérés biztosabb kivitele kedvéért az *S*-ben levő hasadék minden egyes rács számára annyira szélesbittetett, mig a polarizált kép éppen két egymásra következő főkép közé férhetett el, tehát szélessége egyenlő volt a főmaximumok távolának felével. A tulajdonképi mérésnél az N_2 annyira forgattatott, míg a polarizált s a megmérendő kép egyetlen, összefüggő s egyenletesen megvilágított felületnek látszott; ezen eljárásnál az emberi szem legérzékenyebb intenzitás-különbségek észrevételére. *)

Az elhajlított fényben keletkező képek intenzitásának elméleti meghatározására az idézett dolgozatomban adott kifejezések elegendők volnának, ha az *S*-ben csak egy végtelen kis kiterjedésü felület világitana; azonban az említettek értelmében e nyilás, habár igen kicsiny mégis véges méretű s ez az intenzitást lényegesen változtatja, miután az elsőrendű maximumok intenzitásai is hozzá járulnak a főmaximum amplitudjához.

Ez utóbbi befolyás kipuhatolására vizsgáljuk meg a térben fekvő egy tetszőleges pont megvilágitását az *S*-ben levő, $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ oldalakkal biró, fénylő egyenközény által, midőn a belőle kiinduló sugarak nagyszámú nyilásokból álló rács közvetitésével elhajlíttatnak.

---

*) Helmholtz: Physiologische Optik 327. l. és köv.

2.

Válaszszuk ismét a fény tovaterjedési irányát, itt tehát a lencsék optikai tengelyét Z gyanánt, Y merőleges, X horizontalis fekvésü. Legyen b a rács egyes nyilásának magassága, a annak szélessége; a collimatorlencse gyujtó távolsága ϱ_1, a heliometer lencséi-é ϱ; végre a fénylő nyilás középpontjában emelt normalis essék össze a Z tengelylyel. Ezen nyilás minden egyes világitó pontja a többitől függetlenül rezeg, s igy az intenzitás, mely az elhajlított fényben fellép, az egyes rezgő felületelemek által okozott intenzitások összege.

Jelezze $\mathfrak{A}_0^2 dx_1 dy_1$ a $dx_1 dy_1$ nyiláselemből kisugárzott fény amplitudja négyzetét a távolság egységében, akkor $\frac{\mathfrak{A}_0^2 \, dx_1 \, dy_1}{\varrho_1{}^2}$ az LL lencsére eső fény számára ugyanazt jelenti; a lencse áthaladásával az amplitúd gyengittetik, ép úgy a heliometer felső féllencséje által; azonban ez által csak egy állandó lép $\mathfrak{A}_0$-hoz, melyet hallgatag oda értünk, úgy, hogy $\frac{\mathfrak{A}_0}{\varrho_1}\left(dx_1 \, dy_1\right)^{\frac{1}{2}}$-nek ugyanazon jelentése van, mint az idézett dolgozatban $\mathfrak{A}$-nak, azaz a $dx_1 dy_1$ elemből eredő, s a rács nyilásáiba eső fény amplitudja. Ebből pedig az elhajlított fény amplitudja lesz:

$$\mathfrak{A}_0 \frac{(dx_1 \; dy_1)^{\frac{1}{2}}}{\varrho_1} \cdot \frac{ab}{\varrho} \cdot \frac{\sin \frac{\pi a \varphi}{\lambda}}{\frac{\pi a \varphi}{\lambda}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi n d \varphi}{\lambda}}{\sin \frac{\pi d \varphi}{\lambda}} \cdot \frac{\sin \frac{\pi b \psi}{\lambda}}{\frac{\pi b \psi}{\lambda}}.$$

Keressük pedig az egész $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ felületelemei összességéből eredő fényintenzitását, tehát az egyes $dx_1 dy_1$ elemekből keletkezett ily összes amplitudok négyzeteit kell összegeznünk; ez lesz, ha tekintetbe veszszük, hogy $dx_1 = \varrho_1 d\varphi$, $dy_1 = \varrho_1 \, d\psi$, s a hasadék határai: $\varphi_0 = \frac{\mathfrak{a}}{2\varrho_1}$, $\psi_0 = \frac{\mathfrak{b}}{2\varrho_1}$,

$$A^2 = \mathfrak{A}_0^2 \frac{a^2 \, b^2}{\varrho^2 \, \lambda^2} \int\limits_{\varphi - \varphi_0}^{\varphi + \varphi_0} \frac{\sin^2 \frac{\pi a \varphi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi a \varphi}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi n d \varphi}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi d \varphi}{\lambda}} \, d\varphi \int\limits_{\psi - \psi_0}^{\psi + \psi_0} \frac{\sin^2 \frac{\pi b \psi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b \psi}{\lambda}\right)^2} \, d\psi. \;.\;.\;.\;.\; 1)$$

Ez tehát a φ és ψ elhajlítási szögletekkel biró fény amplitudja; e szerint lenne a ϱ gyujtó távolságú heliometer góczpontjában felállítva gondolt ernyőnek φ_1 φ_2 és ψ_1 ψ_2 által határolt részére eső erély (hol ψ_1 és ψ_2 a φ-k függvénye is lehet:)

$$J = C\mathfrak{A}_0^2 \frac{a^2 b^2}{\lambda^2} \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\varphi-\varphi_0}^{\varphi+\varphi_0} \frac{\sin^2 \frac{\pi a\varphi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi a\varphi}{\lambda}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\pi n d\varphi}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi d\varphi}{\lambda}} d\varphi \int\limits_{\psi_1}^{\psi_2} d\psi \int\limits_{\psi-\psi_0}^{\psi+\psi_0} \frac{\sin^2 \frac{\pi b\psi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi b\psi}{\lambda}\right)^2} d\psi.$$

A használt rácsoknál a nyilások hossza, b, a hullámhossz irányában igen nagy volt (20 mm.) tehát az *1)* egyenlet ψ szerinti egészlete csak akkor bír véges értékkel ha ψ_1 ψ_0 és $-\psi_0$ határok között fekszik; ezen, habár igen csekély határokon túl az egészlet elenyésző, úgy, hogy $\psi-\psi_0$ és $\psi+\psi_0$ határok helyébe $-\infty$ és $+\infty$ helyettesítendő, miután úgy is csak az X tengely mentében fekvő tüneménynyel van dolgunk, melyre nézve $\psi=0$; ez által az egészlet értéke lesz: $\frac{\lambda}{b}$, s így az amplitúd:

$$A^2 = \mathfrak{A}_0^2 \frac{ab}{\varrho^2} \frac{a}{\lambda} \int\limits_{\varphi-\varphi_0}^{\varphi+\varphi_0} \frac{\sin^2 \frac{\pi a\varphi}{\lambda}}{\left(\frac{\pi a\varphi}{\lambda}\right)^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi n d\varphi}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi d\varphi}{\lambda}} d\varphi$$

Ha ismét az idézett dolgozatban megállapított rövíditésekkel élünk, téve $\omega = \frac{\pi a\varphi}{\lambda}$, $\omega_0 = \frac{\pi a\varphi_0}{\lambda}$, $m = \frac{d}{a}$, s ha figyelembe veszszük, hogy az egész rács nyilásainak összes felülete: $a\,b\,n$, továbbá a rácsnak az elhajlításnál közreműködő átlátszó és átlátszatlan részeinek felülete, (mely teljesen egyenlő az OO nyilás felületével:) $dbn = F$, s így $ab = \frac{F}{mn}$, az amplitúd alakja:

$$A^2 = \frac{\mathfrak{A}_0^2 F}{\varrho^2} \frac{1}{\pi n m} \int\limits_{(\omega-\omega_0)\frac{\lambda}{\pi a}}^{(\omega+\omega_0)\frac{\lambda}{\pi a}} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 n m\omega}{\sin^2 m\omega} d\omega.$$

Ámde, midőn a rács eltávolitása után a fény az egész F felületen szabadon hatolhat be, észrevehető elhajlásnak nincs helye, s a dx_1 dy_1 elemből eredő s az LL lencsére érkező fény amplitudjának négyzete, mint előbb is: $\frac{\mathfrak{A}_0^2\, dx_1\, dy_1}{\varrho_1^2}$; ez az LL és H_1 lencsék által ugyanazon gyengülést szenvedi, mint az előbb tárgyalt fény, itt is ezen befolyásból eredő állandót az $\mathfrak{A}_0$-ban hallgatag oda értjük.

Ezen amplitud pedig most az egész F felületen ugyanazon értékkel bir, s igy a $dx_1 dy_1$ által az F-re bocsátott fény intenzitása $C\mathfrak{A}_0^2 F d\varphi\, d\psi$; a heliometerben pedig a $dx_1 d\,y_1$ felületi elem tiszta képe keletkezik, mely képnek méretei ugyancsak a $d\varphi\, d\psi$ szögletek által adatnak, s ennek felülete: $\varrho^2\, d\varphi\, d\psi$.

Legyen A_b az ezen képet alkotó fénymozgások amplitudja, akkor mivel a $dx_1 dy_1$-ből jövő s OO-n beeső minden fény ezen kép előállitására fordittatik:

$$C\, A_b^2\, \varrho^2\, d\varphi\, d\psi = C\, \mathfrak{A}_0^2 F d\varphi\, d\psi,$$

$$A_b^2 = \frac{\mathfrak{A}_0^2\, F}{\varrho^2};$$

ennek helyettesitése által előbbi kifejezésünkbe, nyerjük a beeső fény képe s az elhajlított fény képe intenzitásainak összefüggését:

$$A^2 = A_b^2\, \frac{1}{\pi nm} \int\limits_{(\omega-\omega_0)\frac{\lambda}{\pi a}}^{(\omega+\omega_0)\frac{\lambda}{\pi a}} \frac{\sin^2 \omega}{\omega^2} \cdot \frac{\sin^2 nm\omega}{\sin^2 m\omega}\, d\omega.$$

A további kifejtésre ez integrál szűkebb határú egészletekre bontatik szét, melyek egy-egy első- vagy másodrendü maximumra vonatkoznak; a gyakorlati számitásoknál ezen kivül ω_0 számára határozott numerikus értékek helyettesitendők. Az észlelési mód leirása végén felemlített esetekben mindig volt: $\omega_0 = \frac{1}{4}\frac{\pi}{m}$, azaz a főképek szélessége távoluk felével volt egyenlő; ezen kivül n nagy szám lévén, az első rendű maximumok a térben igen sürüen esnek egymáshoz, s közelitőleg felvehetjük, hogy csakis azon pontok számára keressük az amplitudot, melyek ily maximumok elején vagy végén feküsznek; ilyenekre pedig $\omega = \mu \frac{\pi}{nm}$, μ alatt egész számot értve. Egészletünk szétbontása adja:

$$\int\limits_{(\omega-\omega_0)\frac{\lambda}{\pi a}}^{(\omega+\omega_0)\frac{\lambda}{\pi a}} = \int\limits_{\frac{\pi}{nm}\left(\mu-\frac{n}{4}\right)}^{\frac{\pi}{nm}\left(\mu+\frac{n}{4}\right)} = \int\limits_{\mu^1\frac{\pi}{nm}}^{(\mu^1+1)\frac{\pi}{nm}} + \int\limits_{(\mu^1+1)\frac{\pi}{nm}}^{(\mu^1+2)\frac{\pi}{nm}} + \ldots\ldots + \int\limits_{\left(\mu^1+\frac{n}{2}-1\right)\frac{\pi}{nm}}^{\left(\mu^1+\frac{n}{2}\right)\frac{\pi}{nm}}.$$

hol rövidség kedvéért $\mu - \frac{n}{4} = \mu^1$-nek tétetett.

Ha a μ^1 és $\mu^1 + \frac{n}{2}$ között fekvő határok valamelyike 0, vagy n $2n$, $3n$, stb. értéket venne fel, akkor azon két egészlet, melyben e speciális határ fellép, egygyé olvasztatik, s az többször idézett dolgozat végén adott eljárás szerint meghatároztatik; a többiek közelitő értékéhez következő uton juthatunk:

Az $\int\limits_{\mu^1 \frac{\pi}{nm}}^{(\mu^1+1)\frac{\pi}{nm}}$ egészlet határai igen közel feküsznek egymáshoz, miután n nagy szám, ennél fogva az ω, $\sin\omega$, $\sin m\omega$ közel állandónak tekinthető az egészelési határok között, s azokba, ω helyébe e határok középértéke helyettesitettik, s lesz:

$$\int\limits_{\mu' \frac{\pi}{nm}}^{(\mu'+1)\frac{\pi}{nm}} = \frac{\sin^2 \frac{2\mu'+1}{m}\frac{\pi}{2n}}{\left(\frac{2\mu'+1}{m}\frac{\pi}{2n}\right)^2}, \quad \frac{1}{\sin^2(2\mu'+1)\frac{\pi}{2n}} \int\limits_{\mu' \frac{\pi}{nm}}^{(\mu'+1)\frac{\pi}{nm}} \sin^2 nm\omega \, d\omega$$

$$= \frac{2nm}{\pi} \frac{1}{(2\mu'+1)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{2\mu'+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2n}}{\sin^2 (2\mu'+1) \cdot \frac{\pi}{2n}}.$$

Ezen képlet minden μ' számára érvényes, *kivéve* $\mu' = o, n-1, n, 2\,n-1, 2\,n, 3\,n-1, 3\,n$, stb. ezekre nézve az említett eljárás követendő.

Ezek alapján, ha pl. $\varphi = 0$ és $\psi = 0$ irányra vonatkozólag keresnők az amplitudot, ez lenne, némi számitás után:

$$A^2 = A_b^2 \left\{ \frac{1}{m^2} 0{\cdot}791711 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=\frac{n}{4}} \frac{1}{(2\mu'+1)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{2\mu'+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2n}}{\sin^2 (2\mu'+1) \cdot \frac{\pi}{2n}} \right\};$$

ez egyszersmind a lehető legnagyobb amplitud s megfelel az első főkép közepének. Ha az első és második főkép közötti fél távolságban keressük az amplitudot, tehát $\psi = o$, $\varphi = \frac{\lambda}{2d}$ irányra nézve,

$$A^2 = A_h^2 \frac{2}{\pi^2} \sum_{\mu' = \frac{n}{4}}^{\mu' = \frac{3n}{4}} \frac{1}{(2\mu'+1)^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{2\mu'+1}{m} \cdot \frac{\pi}{2n}}{\sin^2 (2\mu'+1) \cdot \frac{\pi}{2n}}.$$

Ezen summatió jelek alatt lévő, elsőrendű maximumoknak megfelelő kifejezések értéke összevéve mindig sokkal kevesebbet tesz ki, mint az A^2-ban netán fellépő egy főmaximumnak megfelelő integrál.

Közelebbről pedig arra vezet ezen eredmény, miszerint az ab világitó nyilásnak a rács által előidézett főképei nem birnak szigorúan egyenlő megvilágitással, hanem hogy az a középből a szélek felé lassan fogy; továbbá a főképek közötti tér is, habár gyenge, de mind azon által figyelembe veendő fénymozgást tartalmaz.

Ha szigorúan akarunk eljárni, ugy nincs egyébb mód, mint a summatio-jel alatt lévő kifejezések egyenkénti kiszámitása $\mu^1 = 1$-től pl. $\mu^1 = n—2$-ig; ez által képesitve vagyunk a középső főképnek s a mellette levő, jobb és bal oldalán fekvő első főkép közötti térnek tetszőleges pontja számára a megvilágitást kiszámitani.

A főképek s a közöttük foglalt sötétebb térnek emlitett egyenetlen megvilágitását az észlelő szeme nem képes észrevenni; ez okból e terek mindegyike egyenletesen megvilágitottnak vétetett fel, s az intenzitás számára egy középérték számittatott ki. Jelölje A_k egy főkép különböző pontja amplitudjának egyesitéséből így meghatározott középamplitudot, A'_k ugyanazt az ezen főkép s a következő közötti térben, akkor az észlelés gyakorlati kivitelénél a polarizált nyaláb képe esvén az utóljára említett gyengén megvilágitott térre, a két főkép közötti űrt kitölté; midőn most N_2 forgatása által a megvilágitás egyenlővé tétetik, akkor áll, ha $\mathbf{A}$ a polarizált kép amplitudja:

$$\mathbf{A}^2 \cos^2 \eta_1 + A_k^2 = A_k'^2;$$

azonban az előbbiek értelmében volt $A_h^2 = \mathbf{A}^2 \cos^2 \eta_0$, s ha tesszük

$$A_k^2 = A_h^2 K^2, A_k'^2 = A_h^2 K'^2,$$

hol K^2 és K'^2 a fentebb kifejtett összegek megfelelő közepei, lesz:

$$\frac{\cos^2 \eta_1}{\cos^2 \eta_0} = K^2 - K'^2$$

Ez egyenlet baloldala az intenzitások méréséből eredő észlelési adatokat tartalmazza, jobb oldala pedig elméletileg kiszámitható, ha a rács lényeges tulajdonai, t. i. n, m advák; *ezen egyenlet alapján tehát a kisérlet eredményei az elméleti követelményekkel összehasonlithatók.*

Két hypothetikus rács vétetett fel, melynél $m = 3$, $n = 20$; és $m = {}^{9}/_{8}$, $n = 40$ (ez adatok igen közel megfelelnek az alább közlendő táblázatban az V és I alatti rácsoknak;) ezekre nézve a számitás teljes szigorral lett keresztülvive, e mellett kiderült, miszerint az A_k — $A_k'^2$, mint azt már előre lehetett várni, csak kevéssel különbözött a megfelelő főmaximum értékétől, de mégis az elsőnél 6·3%-tel, a másodiknál 7·1%-tel volt nagyobb ennél. E számitások által nyert egyszerüsitések segélyével minden rács számára a megfelelő adatok ily módon szigoruan számittattak ki.

3.

A használt rácsok másodika PLÖSSL-től való, a többieket magam készítettem egy PERREAUX-féle osztógép segélyével; azok méretei az alább következő táblázatban foglalvák.

A heliometer szemlencséje elé erősitett nikol helyzete által adott η polarizatió azimut az ocularcső kerületére alkalmazott positiókörön olvastatott le; miután az észlelés természeténél fogva az N_2 nikolon áthaladó sugarak nem estek össze a nikol forgási tengelyével, a leolvasás két ellentett körnegyedben történt, hogy az ezen körülmény által becsúszott hiba elimináltassék. *)

Minden egyes észlelési napon az észlelés elején és végén az N_2 null-állása, viszonyitva az N_1-hez s az η_0 szöglet gondosan meg lett határozva. Erre a polarizált kép pl. a középső főkép baloldalán fekvő második és harmadik főkép közé állíttatott s a két körnegyed mindegyikében öt-öt leolvasás történt; ugyanily eljárás követtetett a jobb oldalon, úgy hogy minden főkép intenzitása husz leolvasásból került ki. Az egymásra következő főképek intenzitása gyorsan fogy; a legkisebb mért intenzitás a beesőnek egy ezredrésze volt; természetes, hogy a mérés bizonytalansága, részint az η szögletek kicsinysége, részint a szemnek ily kis intenzitások melletti csekély érzékenysége miatt, ilyenkor igen nagy.

Az észlelések és a számitások eredményei, továbbá az egyes rácsok jellemző méretei a következő táblázatban vannak egybefoglalva.

Benne a rácsok nyilásaik viszonylagos szélessége szerint rendezvék; a közelitő számitásnál a főképek csak egyszerű főmaximumok-

*) Bakhuyzen. Pogg. Ann. CXLV. 278.

A főkép sorszáma	I. m = $1{\cdot}25_0 2$ mm, d = $0{\cdot}5_{00}$ mm, n = 40			II. m = $1{\cdot}5_0 4$ mm, d = $0{\cdot}270_0 3$ mm, n = 54			III. m = 1·953 mm, d = $0{\cdot}75_0$ mm, n = 26			IV. m = 2·252 mm, d = $0{\cdot}5_{00}$ mm, n = 40		
	K. Sz.*)	Észlelés	Sz.Sz.**)	K. Sz.	Észlelés	Sz. Sz.	K. Sz.	Észlelés	Sz. Sz.	K. Sz.	Észlelés	Sz. Sz.
0	0.5985	0·6890	0·6404	0·3496	0·3759	0·3741	0·2064	0·2442	0·2203	0·1561	0·1680	0·1663
1	0·0130	0·0171	0·0139	0·0603	0·0666	0·0645	0·0801	0.0909	0·0852	0·0778	0·0765	0·0828
2	0·0109	0·0137	0·0117	0·0149	0·0126	0·0159	0·0002	0·0000	0·0002	0·0024	0·0022	0·0025
3	0·0080	0·0081	0·0086				0·0088	0·0079	0·0093	0·0066	0·0048	0·0070
4	0·0049	0·0026	0·0052									

A főkép sorszáma	V. m = 2·806 mm, d = 1·000 mm, n = 20			VI. m = 3·261 mm, d = $0{\cdot}75_0$ mm, n = 26			VII. m = $3{\cdot}73_0$ mm, d = 0.5_{00} mm, n = 40			VIII. m = $7{\cdot}5_0$ mm, d = $0{\cdot}75_0$ mm, n = 26		
	K. Sz.	Észlelés	Sz. Sz.	K. Sz.	Észlelés	Sz. Sz.	K. Sz.	Észlelés	Sz. Sz.	K. Sz.	Észlelés	Sz. Sz.
0	0·1006	0·1140	0·1071	0·0745	0·0833	0·0790	0·0569	0·0614	0·0603	0·0141	0·0159	0·0150
1	0·0650	0·0728	0·0692	0·0541	0·0610	0·0574	0·0447	0·0464	0·0474	0·0133	0·0139	0·0142
2	0·0124	0·0152	0·0132	0·0176	0·0219	0·0187	0·0197	0·0207	0·0210	0·0111	0·0121	0·0118
3	0·0004	0·0000	0·0004				0·0037	0·0035	0·0039	0·0079	0·0078	0·0084
4	0·0047	0·0043	0·0050							0·0050	0·0041	0·0053
5	0·0013	0·0009	0·0014									

*) Közelitő számitás.

**) Szigorú számitás.

nak tekintetnek, a szigorú számitás pedig a 2. alatt tárgyalt mód szerint történt; végre az »észlelés« rovata a $\frac{\cos^2 \eta_1}{\cos^2 \eta_0}$ hányadost tartalmazza, azaz az illető főkép intenzitását, viszonyitva a rács eltávolitása után az $O\ O = F$ felületü nyiláson beeső fényéhez képest.

Figyelembe véve azt, hogy ezen észleléseknél a szem érzékenykenysége akkora, miszerint az egész intenzitásnak csak $^1/_{50}$ részét képes megkülönböztetni, s hogy az itt előforduló kisebb intenzitásoknál az érzékenység még sokkal csekélyebb; figyelembe véve a rácsok szerkezetében itt-ott fellépő elkerülhetlen szabálytalanságokat s végre még, hogy az egész itt alkalmazott számitás mégis csak közelitő; ugy az észlelési adatok s az elméleti várakozások közötti emez összhangzás igen kielégitőnek mondható.

Ez által egyszersmind az egész elméleti fénytanra nézve fundamentalis jelentőségű kérdés egy része meg van fejtve; a feladat másik részének megoldása, az elhajlított fény amplitudjának meghatározása nagyobb elhajlítási szögletnél csak későbbi kutatás tárgyát képezheti.

A jelen vizsgálat eredményeit szóval kimondva, leszen:

1) *Az elhajlított fényben egymásra következő főképek viszonylagos és absolut* (a beeső fényhez mért) *intenzitásai igen közelitőleg megegyeznek az elmélet követelményeivel;* ebből folyólag

2) *az elhajlított fény amplitudjának azon absolut értéke, mely a jelen számitás alapjául szolgált, megfelel a valóságnak;* ennélfogva azon feltevés is, melyből többször idézett dolgozatomban az amplitudok ez értéke következett, helyesnek tekinthető, azaz

3) *csekély elhajlítási szöglet mellett az összes beeső fénymozgás a diffractió után ismét csak fénymozgás marad.*

(A budapesti egyetem physikai intézete, 1878. február 1-én.)

AZ ENERGIA ELVÉNEK LEVEZETÉSE A LAGRANGE-FÉLE MOZGÁSI EGYENLETEKBŐL.

Szily Kálmántól.

A D'ALEMBERT-ről elnevezett dynamikai elv, vagyis az a bizonyos analytikai schéma, melyet jelenleg a következő alakban

$$0=\sum\left\{\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right\}\ldots(1)$$

szokás »a mozgási egyenletek« levezetésére alkalmazni, daczára több rendbeli előnyeinek, — a minők pl. az általános érvényesség, a kompendiosus forma — egy el nem vitatható kellemetlen oldallal is bir. A mig a feltételi egyenletekben az idő explicite elő nem fordul, mindaddig a mozgási egyenletek egész természetszerűen, minden fogalmi kényszer nélkül kiadódnak e schémából. És ilyenkor levezethető belőle az eleven erő elve is. Ez esetben t. i. a virtuális elmozdulások komponensei (δx......), azon felül hogy végtelen kicsinyek, *csakis* azon kikötésnek tartoznak eleget tenni, hogy megférjenek a feltételi egyenletekkel; s minthogy a tényleges elmozdulás a feltételi egyenleteknek eo ipso eleget tesz, ez esetben a tényleges elmozdulás csakugyan virtuális elmozdulásnak tekintendő. Vagyis más szóval, ilyenkor bevezethetjük az (1) alatti egyenletbe a koordináták variatiói helyett differentiáljaikat is, és így felirhatjuk a következő egyenletet

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx+\frac{d^2y}{dt^2}dy+\frac{d^2z}{dt^2}dz\right)=\sum\left(Xdx+Ydy+Zdz\right)$$

a miből kis átalakitás után megkapjuk az eleven erő elvét:

$$dT=\Sigma\,(Xdx+Ydy+Zdz)\,\ldots\ldots\ldots(2)$$

mely szerint az elevenerő növekedése egyenlő a rendszerre működő erők által a közben végzett munkával.

Nem így, ha a feltételi egyenletekben az idő explicite is előfordul. Ebben az esetben az a fogalmi furcsaság adja elő magát, hogy a virtuális elmozdulásoknak *nem szabad eleget tenni a valódi feltételeknek*, hanem igen is eleget tartoznak tenni bizonyos *fictiv feltételeknek*, melyek a valódiakból úgy állíttatnak elő, hogy bennök *az idő állandónak tekintetik*. E szerint a tényleges elmozdulás, mely a valódi feltételeknek tesz eleget, nem számíttathatik a virtuális elmozdulások közzé·

ugy hogy ez esetben *a tényleg bekövetkező elmozdulást egyáltalában nem szabad virtuális elmozdulásnak venni.* Vagyis, más szóval, ilyenkor *nem* vezethetjük be az (1) alatti egyenletbe a koordináták variatiói helyett a differentiáljaikat és így nem is idomíthatjuk át az (1) alatti egyenletet arra a formára, melyben az eleven erő elvét szokjuk kifejezni.

De vajjon nem lehetne-e még ebben az esetben is, a midőn t. i. a feltételekben az idő explicite is előfordul, találni egy oly egyenletet, mely analog alkotású lenne az eleven erő elvét kifejező egyenlettel? Ha ez sikerülne, úgy az eleven erő elve, mai használatának korlátolt köréből kiemelkedve, *általános érvényü elvvé válnék.*

És ez csakugyan lehetséges is, mihelyt a dynamika kiindulási alapjául nem a D'Alembert-féle elvet, hanem — miként Kirchhoff is teszi *) — a Lagrange-féle mozgási egyenleteket veszszük, ú. m.

. . . .

$$
\begin{aligned}
m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \ldots\ldots \\
m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} = \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y_i} + \ldots\ldots \qquad (3) \\
m_i \frac{d^2 z_1}{dt^2} &= Z_i + \lambda_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z_i} + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

. . . .

Ezek ép oly általános érvényüek, mint az (1) alatti egyenlet; igaz, hogy számuk n anyagi pontból álló rendszernél, $3n$-re rug, de legalább nem tartalmazzák magukban azokat a sajátságos szabású virtuális elmozdulásokat, melyek nem a valódi, hanem csakis a fictiv föltételeknek tesznek eleget. Értsük most, eltérőleg az előbbi jelöléstől, a δx_i, δy_i, δz_i . . . . . variatiók alatt oly végtelen kis elmozdulások kompenenseit, melyek a *valódi* föltételi egyenletnek tesznek eleget, úgy a feltételi egyenletek teljes variatiója által a következő relatiokat nyerjük:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \psi_1}{\partial z_i} \delta z_i + \ldots + \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \delta t = 0. \\
\frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial \psi_2}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial \psi_2}{\partial z_i} \delta z_i + \ldots + \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \delta t = 0.
\end{aligned}
$$

. . . .

Szorozzuk már most a (3) alatti egyenleteket rendre . . . δx_i, δy_i

*) Vorlesungen über mathem. Physik Mechanik. §. 3. pag. 23.

δz_r-vel és adjuk őket azután össze, úgy némi áthelyezések után, az iménti relatiók tekintetbe vételével, a következő egyenletet kapjuk:

$$\sum\left\{\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z\right\}=A\delta t\,.\,.(4)$$

hol is

$$A=-\left(\lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial t}+\ldots.\right)$$

A (4) alatti egyenlet, mint látjuk, magában foglalja az (1) egyenletet, mint speciális esetet. Ha ugyanis a δ variatió alatt oly műveletet értünk, melynél a $\psi_1, \psi_2 \ldots.$ föltételi egyenletek az időtől függetleneknek tekintetnek, úgy

$$A=0$$

és egyenletünk vissza van vezetve a D'Alembert-féle elv szokásos alakjára.

A (4) alatti egyenletet az különbözteti meg az (1)-től, hogy a (4)-ben a virtualis elmozdulások a valódi föltételeknek, (1)-ben pedig a fictiv föltételeknek tesznek eleget. Mostani egyenletünkbe bevezethetjük tehát a koordináták variatiói helyett differentiáljaikat is és így felirhatjuk a következő egyenletet:

$$dT=\Sigma\,(X\,dx+Ydy+Zdz)+A\,dt\,.\,.\,.\,.\,.\,(5)$$

mely szerint az eleven erő növekedése egyenlő a rendszerre működő erők által e közben végzett munkával, hozzáadva ehhez még a $A\,dt$ kifejezést.

Minthogy a Adt kifejezés, méretére nézve, azonos a munka méretével, czélszerű mindjárt az egész

$$\Sigma\,(Xdx+Ydy+Zdz)+A\,dt$$

összeget nevezni a működő erők munkájának. Igy értvén a munkát, az (5) alatti *általános érvényű* egyenlet szavakban kifejezve ekként hangzik: *az eleven erő növekedése egyenlő a végzett munkával.* És így az *eleven erő elve egyaránt érvényes,* akkár függenek a feltételi egyenletek az időtől, akár nem. Az egész különbség abban áll, hogy ez utóbbi esetben Adt kiesik a munka definitiójából, holott általában még ez is bele tudandó a munkának nevezett összegbe.

Az eleven erő elvéből levezethetjük viszont a Lagrange-féle mozgási egyenleteket. Differentiáljuk ugyanis a ψ_1 $\psi_2 \ldots.$ feltételi egyenleteket és azután sokszorozzuk meg $\lambda_1, \lambda_2 \ldots.$ egyelőre ismeretlen együtthatókkal és végre adjuk őket, összegük zérus lévén, az 5) alatti egyenlet jobb oldalához, úgy

$$dT = \sum\left\{\left(X + \lambda_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial x} + ..\right)dx + \ldots\right\} + \left(A + \lambda_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right) + \ldots dt.$$

A jobb oldal utolsó tagja, A jelentésénél fogva, zérus és így az egyenletben, ha dT helyébe beteszszük értékét, ú. m.

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \ldots\ldots\right)$$

csupán a koordináták differentiáljai fordulnak elő. A dx_i...... együtt hatóját a jobb- és baloldalon egymás között egyenlővé tévén, megkapjuk a (3) alatti egyenleteket.

* * *

Az (5) alatti egyenletből, egyszerű transformatió utján, levezethetjük már most azt az egyenletet, melyet e lapok 21-ik füzetében *energia elvének* neveztem el.

Jelentse ugyanis D valamely folytonos, (különben egészen tetszőleges) függvényét a pontrendszer koordinátáinak, sebességi komponenseinek és az időnek, és neveztessék e függvény *dynamikai potentiálnak.*

Defineáljunk ezen D függvény segedelmével egy másik függvényt R-t akként, hogy

$$D = \sum\left(\frac{\partial R}{\partial x'}x' + \right) - R - T \quad \ldots\ldots.(6)$$

hol is a Σ kiterjesztendő a pontrendszernek mind a $3n$ sebességi komponensére. Az itt fellépő R általában függvénye lesz, valamint D, a pontrendszer koordinátáinak, sebességi komponenseinek és az időnek.

Adjuk már most ezen D függvény differentiálját az (5) alatti egyenlethez, úgy némi összevonás után lesz:

$$d(T + D) = \sum\left\{\left(X + \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial R}{\partial x'} - \frac{\partial R}{\partial x} - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx + \ldots\right\} + \left(A - \frac{\partial R}{\partial t}\right)dt.$$

A jobb oldal első tagját a (3) egyenletek segedelmével transformálva és mindent a bal oldalra hordva, lesz:

$$d(T+D) + \sum\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial R}{\partial x'} + \lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\delta x} + \lambda_2\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + ..\right)dx + ..\right\} + \left(\frac{\partial R}{\partial t} - A\right)dt = 0.$$

Jelöljük már most

$$T + D = \sum\left(\frac{\partial R}{\partial x'} x' + \ldots\right) - R = K$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial R}{\partial x_i'} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \ldots . = X_i \quad (7)$$

és

$$\frac{\partial R}{\partial t} - A = \frac{\partial R}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = J.$$

úgy

$$dK + \Sigma (Xdx + \ldots . .) + Jdt = 0 \ldots . (8)$$

vagyis tökéletesen az az egyenlet, melyre a 20-ik füzetben egészen másnemű elmélkedések utján jutottam, és a melyet a 21-ik füzetben az »energia elvének« neveztem el. Ugyanott a K függvényt, t. i. az eleven erő és a dynamikai potentiál összegét, *kinetikai energiának*, az $X_i \ldots .$ együtthatót (mely természetesen egészen más, mint az (1) vagy a (3)-beli X_i függvény) az i-dik pont által az $X \ldots .$ koordináta szerint kifejtett *erőkomponensnek* és a

$$\Sigma (Xdx + \ldots . .) + Jdt$$

összeget az (5) egyenletben már használt fogalom-bővités alapján az *erők munkájának* neveztem el.

Nyilván való, hogy az energia elvében (8) *mást* értünk erő alatt, mint a mit a D'Alembert elvében (1), a Lagrange-féle mozgási egyenletekben (3) és az eleven erő elvében (5) erőnek szokás nevezni. Az erő *eddigi definitiója* ugyanis (3)

$$X_i = m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} - \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} - \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} - \ldots . .$$

az energia elvéből következő *új definitio* pedig (7.)

$$X_i = \frac{\partial R}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial x'} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_i} + \ldots . .$$

A két definitio egymástól először is jelben különbözik (a mi lényegtelen), s másodszor (a mi lényeges) abban, hogy az eddigi

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}$$

helyébe a

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial R}{\partial x_i'} - \frac{\partial R}{\partial x_i}$$

kifejezés lépett be, tehát egy ugyan oly alakú kifejezés, a minő a Lagrange-féle, általános koordinátákra vonatkoztatott erőkomponensnél is előfordul. Ha ugyanis a (3) alatti egyenleteket az .... x_i, y_i, z_i .... derékszögü koordináták helyett az általánosított p_1 ...... p_{3n} koordinátákban fejezzük ki, úgy a ... p_i .....-re vonatkoztatott erőkomponens ily alakú lesz: *)

$$P_i = \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial p_i'} - \frac{\partial T}{\partial p_i} - \lambda_1\frac{\partial \psi_1}{\partial p_i} - \lambda_2\frac{\partial \psi_2}{\partial p_i} - \dots \quad (9)$$

az energia elvéből következő új erő-definitio szerint pedig;

$$P_i = -\left(\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial R}{\partial p_i'} - \frac{\partial R}{\partial p_i} - \lambda_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial p_i} - \lambda_2\frac{\partial \psi_2}{\partial p_i} - \dots\right) \quad (10)$$

Igy a Galilei-Newton-féle erő-definitio és az energia elvéből következő erő-definitio *alakra nézve* teljesen identikusok. A jelen kivül az egész különbség köztük csak az, hogy *az eleven erő helyett a másodikban egy tetszőleges függvény (R) lép föl.* Az energia elve tehát az erő eddigi legáltalánosabb schémáján mit sem változtat, csupán az *eleven erő fogalmát bővíti ki.*

De van-e szükség ily bővitésre? A régi fogalmakkal ekkoráig jól ki tudtunk jönni, kényszerítő ok nélkül ne változtassunk rajtok!

Azt nem lehet mondani, hogy e bővités föltétlenül szükséges! Ha azonban fönn akarjuk továbbra is tartani az abstract dynamika eddigelé általánosan elfogadott kikötését, hogy az erők munkája, midőn eleget tesz az integrabilitás föltételének, csupán a koordináták és az idő függvénye lehessen **) ha mondom e kikötés mellett továbbra is meg akarunk maradni, úgy nz erő eddigi definitioja (9) okvetetlenül elejtendő. A helyébe teendő új erő fogalomnak pedig, már csak a czélszerüség szempontjából is, olyannak kell lenni, hogy lehetőleg hozzásimuljon az eddigi definitio formájához. Az általam javasolt erődefinitio mind a két kelléknek teljesen megfelel; 1) lehetségessé teszi a potentiál eddigi fogalmának megtartását, 2) az eddigi Galilei-Newton-féle erődefinitio általános alakján mit sem változtat, csupán egy új függvénynyel helyettesiti az eleven erő eddigi kifejezését.

Érdekesnek tartom megemlíteni, hogy már Helmholtz is indittatva érezte magát W. Weberrel ez előtt öt évvel folytatott polemiájában az eleven erő eddigi fogalmát elmellőzni és egy másikkal, némileg általánosabbal helyettesiteni. A Borchadt-féle Journal 75-ik köte-

---

*) Lagrange Méc. anal. Tome I. 1811-ik évi kiadás, 313. és 315. l. l.

**) V. ö. Kirchhoff: Mechanik, 31 l. (Es ist hieraus ersichtlich, dass wenn ein Potential existirt, die Kräfte nur von den Coordinaten und der Zeit, wie das Potential selbst, abhängen können, nicht aber von den Geschwindigkeiten) tében a 47-ik lapon (38) egyenlet alatt az eleven erőt egy oly pontnál, mely egy a koordináták kezdő pontjában levő elektrikus részecskétől Weber törvénye értelmében vonzatik, a mi betüinkkel irva: Helmholtz ekként számítja:

$$L = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{ee_1}{cc}\frac{(xx' + yy' + zz')^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

és ha a pont a radius vector (r) irányában mozog, úgy az eleven erőt, az iménti definitiónak megfelelőleg, ekként írja (41 l.)

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{ee_1}{cc}\frac{1}{r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

Világosan kiderül továbbá a 46-ik lapon (3^c) és (3^d) alatti képleteiből, hogy ez esetben az elektrikus erők potentiálja

$$P = \frac{ee_1}{r}$$

szerinte is független a sebességtől, s hogy az eleven erő elve, föltéve, csupán csak elektrikus erők működnek, így irandó: [47 l. (3^h) alatti egyenlet]

$$L + P = \text{Const.}$$

Kitünik mindebből, hogy már Helmholtz is érezte, hogy előnyösebb lenne az elektro dynamikus potentiált bele számítani az eleven erőbe, és csupán az elektrostatikus potentiált nevezni potentiálnak. Azonban e gondolatot nem füzte tovább és nem vonta le belőle a maguktól kinálkozó következményeket.

Ép a midőn e sorokat befejezni akarom, érkezik hozzám: a következő czímű füzet: »Die Grundprobleme der Mechanik« von Dr. P. Langer, Privatdocent der Mathematik und Physik an der Universität Jena-Halle 1878. Meglepetéssel olvasom benne a következő helyeket, melyek teljesen egyeznek a »Műegy. Lapok« 1877. deczemberi füzetében kifejtett nézeteimmel: »Man muss unbedingt für Kraft einen scharfen mechanisehen Begriff substituiren, der wo möglich vom Begriff der geradlinigen Bewegung befreit ist.« ..... »Gegenüber so vielen Schwierigkeiten, welche in den Grundlagen der Galilei-Newton'schen Mechanik auftreten, scheint es am gerathensten zu sein den alten Kraftbegriff und Massenbegriff aufzugeben und andere Annahmen zu Grunde zu legen. Zunächst müssen wir den alten Kraftbegriff verlassen.« (10-ik l.) Ezután megkisérti Langer, puszta elmélkedés utján — melyek azonban inkább metaqhysikai, mintsem physikai vagy mathematikai természetűek — megállapítani egy új erődefinitiót. Kisérlete mint előre várható, igen síralmasan üt ki. Ide írom kuriózum képen, hogy a

LANGER-féle erő-definitió szerint az X tengely irányára eső erő így fejezendő ki:

$$\text{Erő} = mx\, C^{2x'} (xx'' + x')$$

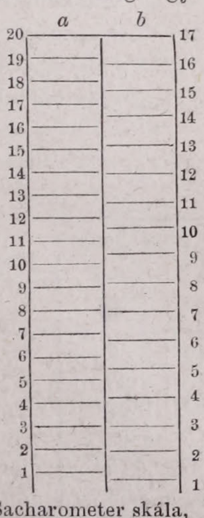
hol is m és C állandók; x' és x'' pedig az x koordinátának az idő szerint vett első illetőleg második differentiális quotiensét jelentik. — Ez is egy ujabb bizonyiték arra a régi igazságra, hogy a mechanika és metaphysika egymásnak kiengesztelhetetlen ellenségei.

A KLOSTERNEUBURGI MUSTMÉRŐRŐL.

(Folytatás.)

Dr. Pillitz Vilmos müegyetemi magántanártól.

A második és fontosabb ellenvetés a klosterneuburgi mérő 17-en alóli osztályozására vonatkozik. Sajnos, hogy Babo eredeti értekezésében *) azon elvet nem közölte, a mely őt a 17-én alóli fokok bejegyzésénél vezérelte. Azonban ha az itt másolatban közölt skálának eredetie helyesen van rajzolva, akkor úgy látszik, hogy Babo a czukor fejlődésére nézve a nem czukoré-hez képest, combinált arányt tesz fel; u. m. 20% összes extract tartalomnál a czukor állandóan 17%, azon alól a czukor ugy viszonylik az összes extracthoz mint 5 a 6-hoz t. i. hogy minden 5%-nyi czukor szaporulat vagy fogyatkozás 6%-nyi összes extractnak felel meg. Igy tehát megfelel:



a Sacharometer skála,
b Klosterneuburgi mustmérő skálája.

Sacharometer	Czukor %
20	17
19	$16^1/_6$
18	$15^2/_6$
17	$14^3/_6$
16	$13^4/_6$
15	$12^5/_6$
14	12

satb.

Ezen principium körösztülvitelénél azonban absurdomra vezetettünk; mert a 2-ös számnál a Sacharometricus és a klosterneuburgi jelzések utolszor esnek össze egy vo-

*) Weinlaube 1869. 17. szám.

nalba a mely összetalálkozás élő szavakban kifejezve azt demonstrálja, hogy azon 2% összes extract a mely az éretlen szőlő-levében találtatik csupa czukorból áll — pedig ennek épen az ellenkezője igaz. De még tovább; egy must a melynek összes extract tartalma 1% a mustmérő szerint már 1 1/6 % czukrot mutat, tehát 1/6 %-el többet, mint egyáltalában extract jelen van.

De akár 20 : 17 akár pedig 6 : 5 arányban vétetik a czukorfejlődés bizonyos, hogy a klosterneuburgi mustmérő szerkesztésénél azon feltevés szolgált alapúl, hogy a fejlődő szőlőben a czukor és nemczukor egy bizonyos kölcsönös arányban növekedik, ez pedig olyan suppositió, melynek helytelen volta a II. táblázatból vont következtetésekből de még inkább az itt következő III. összeállitásból kétségtelenül bebizonyitható.

A szőlő fejlődési folyama nekem a következő alakban tünt elő. A szőlőbogyó már fejlődésének első szakaszában czukrot tartalmaz, de oly csekély mennyiségben, hogy azt ugyan qualitative kimutathatni, de csekélysége miatt megmérni nem lehet. Azon mértékben, a mint a bogyó térfogata nagyobbodik, növekszik az összes extract mennyiség is, de a czukor még mindig minimalis mennyiségben van jelen. Csak a mikor az összes extract mennyisége kb. 4%-re szaporodott kezd a czukor is meghatározható mennyiségben mutatkozni. Innen aztán az érlelés befejeztéig napról-napra ugy szólván ugrásonként — az időjárás kedvező voltához képest — növekszik. Mi alatt azonban a bogyóban a czukormennyiség felszökött a nemczukor mely kisérleteimnél már Aug. 1-jén 4·144-en állott relativ mértékében alig változott; körülbelöl 4%-en állandóan maradt.

III. Tabella.

A szőlő szedési napja	Extract % Balling szerint	Czukor 100 gr. mustban	Különbség	Sav 100 gr. mustban mint borsav	Megjegyzés
Augustus 1.	4·700	0·556	4·144	3·38%	
» 3.	4·775	0·53	4·245	3·23	
» 8.	4·375	0·468	3·908	3·08	
» 11.	4·827	0·68	4·147	1·12	
» 17.	6·951	1·99	4·960	3·15	
» 20.	10·447	5·02	5·427	2.60	
» 22.	9·019	4·40	4·619	2·82	
» 24.	8·731	4·12	4·611	2·77	
» 30.	12·857	8·797	4·060	2·18	

A szőlő szedési napja	Extract % Balling szerint	Czukor 100 gr. mustban	Különbség	Sav 100 gr. mustban mint borsav	Megjegyzés
September 2.	14·571	10·53	4·041	1·76	
» 5.	15·721	10·87	4·851	1·78	
» 8.	14·881	10·56	4·321	2·05	
» 11.	17·943	13·30	4·643	1·30	
» 14.	18·541	14·298	4·243	1·25	
» 17.	20·749	16·813	3·936	1·17	
» 20.	20·657	16·471	4·184	1·28	
» 22.	21·784	77·579	4·205	0·94	
» 23.	21·462	17·506	3·956	1·19	
» 25.	21·899	18·362	35·37	0·89	
» 27.	21·255	17·361	3·894	1·02	
» 28.	21·830	17·22	4·610	0·96	
» 29.	21·600	17·96	3·64	0·80	
» 30.	21·807	17·338	4·469	1·01	

közép 4·239 . . 4·3 kerek számban.

Ezen táblázatból kitünik, a miként már egyszer említettük, hogy mig a czukor 0·5 %-től 17 %-ig meggyült, a nemczukor körülbelöl 4 %-nél megállapodott. Alig szükséges hangsulyoznom, hogy azért a nemczukor absolut mennyisége mégis megszaporodott; mert midőn azt mondjuk, hogy a nemczukor folyvást 4 %-nyi mennyiségben megállapodott, önként értetődik, hogy a mint a szőlőlé mennyisége az érlelés folytán növekedett a nemczukornak is szaporodnia kellett — de mindig csak 4 %-es relátióban.

A savak összege az érlelés folytán mind inkább fogy és pedig két okból 1. a szaporodó alkaliak által létre hozott részbeni semlegesités következtében, 2. a szaporodó nedv higitása által.

Még egyszer áttekintve az itt mondottakat az egyes extract testek fejlődési mozzanatai a következőképen tünnek elő:

A szőlőbogyó növése folytán a savak fogynak

a nemczukor 4 %-es relátióban,

a czukor pedig aránytalnul növekedik.

Sav és czukor a szőlőben két ellentétes principium gyanánt szokott tekintetni. Sejtelmem szerint a sav nemcsak nem ellenzője, hanem inkább tényezője a czukor képződésnek és ez utóbbi a savak befolyása nélkül a szőlőben alig keletkezhetnék. Ezen sejditésre gerjesztettem mióta Neubauer*) a szőlő leveleiben és gyenge hajtásaiban a quercitrin jelenletét kimutatta. Ezen test egy glycosid, a mely savak befolyása alatt czukorrá és quercetinné felbomlik. A szüret után csupán a quercetin található a szőlőlevél és hajtásban. Ennélfogva mi sem természetesebb, mint a czukrot, a quercitrinnek savak által létesitett egyik bomlási terménye gyanánt tekintenünk. Támogatja ezen véleményt némileg azon körülmény is, hogy a szőlőnél, leszakitás után azon ugynevezett utólérlelés nem existál, mit más gyümölcsfajaknál tapasztalunk. Természetes; mert a leszakitás által a szőlő czukorforrásától a quercitrintől el van választva.

A III. táblában nyert átlagos értéke a mustban foglalt nemczukor anyagoknak = 4·3% találtatott. Vajjon lehet-e ezen számnak általános értéket tulajdonitani? Azt hiszem hogy igen. Merész dolog volna ugyan egyetlen egy fajta és egy évbeli szőlőn körösztül vitt egy kisérleti sorozat alapján cardinalis számokat felállitani. De Bábónak elemzései, a melyek alapján ő a hármas számot állapította, a fent leirt rectificatió után mind 4.3 nemczukorra vezetnek mihelyt t. i. a 100 k. c.-ben constatált 3% nemczukrot 100 gr. mustra számitjuk át. Ennélfogva jogosultnak vélem magam Bábó elemzéseit mindannyi argumentum gyanánt igénybe venni, melyek a 4·3 rectificált állandó mellett tanuskodnak.

Ezen kivül vannak még előttem nagy számmal más mustelemzések is, a melyek az említett rectificátió nyomán körülbelül 4·3-at adnak:

Mustfaj	vegyész és irodalmi forrás	A must fajsulya	Extract Balling szerint	Czukor 100 gr. mustban	Differentia
Nerobergi riesling 1868.	Neubauer Annal. d. Oen. 4_{172}	1·094	22·52	18 06	4·46
» riesling 1873.	» » 4_{489}	1·0825	19·875	14·678	4·99
» tramini I.	» » »	1·098	23·44	18·07	4·47
» » II.	» » »	1·095	22·75	18·41	4·34
riesling 1870.	» » »	1·0699	16·976	12·04	4·82

*) Annalen der Oenologie Bd. 4 p.

Az eddig mondottakból tisztán láthatni, hogy miként kell egy mustmérőnek szerkesztve lenni, a mely a nemczukor mennyiségét helyesen hozza a czukor tartalomról levonásba és a mely nemcsak érett szőlőből készült mustban, hanem az érlelés minden fokában »közelitőleg« helyes czukor jelzéseket ád.

Ezen előnyek úgy látszik már el is vannak érve a Balling-féle sacharometernél mihelyt annak adataiból minden stadiumban egyformán 4·3%-et nemczukorra levonnunk. De mielőtt ezen expediens megbirálásába bocsátkoznám egy principális kérdést kell tisztába hoznunk, a melynek megoldásától a Balling-féle sacharometernek mustra való használhatósága függ. Köztudomásu dolog, hogy Balling az ő czukormérőjének szerkesztésénél nádczukor oldatokat használt. De tudjuk azt is, hogy a mustban invertczukor foglaltatik, Tehát a Balling-féle sacharometer csak azon esetben adhat a mustban biztos adatokat ha az invertczukor fajsulya a nádczukoréval megegyezik. Pohl és ujabb időben Hoppe-Seyler *) kimutatták, hogy a szőlőczukor fajsúlya tetemesen nagyobb mint a nádczukor-é, így például egy 26·0366%-es szőlőczukor oldat 1·115665 fajsulylyal bir azon fajsuly pedig a Balling-féle tábla szerint már egy 27%-on fölüli nádczukor oldatra illik. Az invertczukor jobbra és balra forgató czukorfajoknak aequivalens keverékéből áll. Igy tehát az invertczukor fajsulya csak ugy fog összevágni a nádczukoréval, ha benne a különféle czukornemek oly arányban kevervék, hogy a fajsulyi különbségek a mennyiségek aránya által ki van egyenlitve. Hogy ez valóban igy van-e? arra direct kisérleti adatokkal nem szolgálhatok, de hogy ez mégis ugy van, valószinü azon körülményből, hogy az én kisérleteimben a Balling-féle sacharométerrel meghatározott czukormennyiségeket, kivétel nélkül a direct meghatározás utján igazolva találtam. A Balling-féle sacharometer használata azonban azért nem ajánlja magát, mert jelzései 100 súlyegységre vonatkoznak. A practikus borász ellenben kényelmesebbnek tartja a czukrot térfogat egységekre vonatkoztatva kitudni.

Ennek elérése két féle módon lehetséges.

1) akként hogy a Balling-féle tabellát átszámitjuk grammokról köbcentimeterekre, mit elérhetni az által, hogy a sacharometer perczentekről 4·3-at levonunk a maradékot pedig az összes extract fajsulyával szorozzuk.

Például: September 30-án a must fajsulya 1.0909 volt ennek Balling szerint megfelel 21·807 gr. Extract 100 gr. mustban tehát

---

*) Zeitschrieft 7. an algt. Chemie.

vonjunk le 21.807-től 4·3-at marad 17·507 gr. czukor 100 gr oldatban mely 100 kc-re átszámitva lesz 17·507 szorozva 1.0909-el ád 19·098 gr. czukrot a direct meghatározás 18·91 %-et adott.

2) czélszerübbnek látszik azon eljárás hogy magára a mustmérő skálájára minden czukorperczent mellé a hozzá való fajsulyt jegyezzük. Egy egyszerű szorzása ezen két correspondáló értéknek t. i. a czukorperczent szorozva a must megfelelő fajsulyával adja a czukormennyiséget 100 térfogati egység mustban.

Például. Valamely must 16·3 sacharometer %-ot mutat ennek megfelel 16·3 — 4·3 = 12 % czukor 100 sulyrészben, de ezen mustnak fajsulya 1·067, tehát lesz 100 térfogat mustban 12 × 1·067 = 12·804 s. r. czukor.

Kisérletképen készitettem magamnak Claude Lajos üvegfuvó urnál egy mustmérőt a fenn említett elvek alapján. Az állandó 4·3 a sacharometer jelzéseiből le van vonva úgy, hogy a skála *0* pontja oda esik ahol a Balling-féle sacharometeren 4·3 áll. Ezen mustmérő tehát egy oly mustban, a melynek összes extract tartalma például 19·3 % direct 15 % czukrot mutat a 15 % czukor mellett feljegyzett fajsuly azonban 19·3 %-re vonatkozik. A mustmérő osztályozása különben a következő táblázatból tünik ki:

Összes extract	Ennek megfelelőleg a mustmérő fokai	Fajsúly	Összes extract	Ennek megfelelőleg a mustmérő fokai	Fajsúly
4·3	0	1·0172	17·3	13	1·0713
5·3	1	1·0212	18·3	14	1·0757
6·3	2	1·0253	19·3	15	1·0800
7·3	3	1·0294	20·3	16	1·0844
8·3	4	1·0335	21·3	17	1·0887
9·3	5	1·0376	22·3	18	1·0930
10·3	6	1·0417	23·3	19	1·0975
11·3	7	1·0459	24·3	20	1·1017
12·3	8	1·0501	25·3	21	1·1060
13·3	9	1·0543	26·3	22	1·1103
14·3	10	1·0585	27·3	23	1·1146
15·3	11	1 0627	28·3	24	1·1189
12·3	12	1·0570	19·3	25	1·1232

A mustmérőn ez első rovat (összes extract) ki van hagyva.

Tegyük fel, hogy a mustmérő 17·5° C-nál a 20-dik fokig lesüljedne, akkor az azt jelenti, hogy a must 100 grammjában 20 gr. czukor van. E must 100 köb centimeterjében tehát 20 × 1.1017 = 22.034 gr. s literben 220·34 gr. czukor foglaltatik.

Noha én meg vagyok győződve, hogy ezen mustmérő meg fog felelni a czélnak, mégis kivánatosnak vélem, hogy szakférfiak, lehetőleg különböző mustoknál még bővebben kipróbálnák.

Utólagosan birtokába jutottam Preysz tanár ur egy értekezésének, melyet Mádon a hegyaljai bormivelő egyesület közgyülésén 1862. Octóber 16-án előadott. A sok tekintetben nagyérdekü értekezésben Preysz tanár ur egy mustmérőt ajánlt a hegyaljai mustok számára a melynek szerkezete meglepő prototypusa a hét évvel később megjelent Bábó-féle mustmérőnek. A Preysz-féle mustmérőnél szintén a Balling-féle sacharometer szolgált alapul. Az összes extractból tett levonások

20 — 25%-ig . . . . . . 3 %
25 — 30%-ig . . . . . . 3·5%
30-tól feljebb . . . . . . 4 %-et tettek ki.

Ily mustmérőket a melyeknél ezen levonások már eszközölve voltak Claude Lajos ur annak idején készitett és forgalomba hozott.

Ellenőrzési kisérletek.

Az 1875-ben szerkesztett mustmérőre vonatkozólag tettem 1876-ban a szőlőérési idényben ellenőrzési kisérleteket, melyeknek eredményeit néhány ujabb észrevétel kiséretében ime közölni bátorkodom.

Mint már felemlitve volt, mustmérőm a Balling-féle sacharométertől abban különbözik, hogy annak adatai, minden positióban egyformán 4·3%-el alacsonyabbak, továbbá kogy egy másik skála is van alkalmazva a mely a mustnak fajsulyát jelöli.

Hogy tehát a mustmérőm helyes voltáról meggyőződést szerezzek magamnak a következőképen jártam el:

Mindenek előtt arról igyekeztem tisztába jönni, vajjon az eszköz mechanikai elkészitése helyes-e vagy nem. E czélból néhány fajsulyi jelzését a piknometrikus fajsuly meghatározás adataival hasonlítottam össze. Hogy ha az eszköz jól el van készitve, akkor legfelebb csak a harmadik decimalis számnál szabad 1—2 egységnyi különbségnek mutatkozni. Hasonlóképen jártam el a czukor meghatározásnál is — a mérő jelzéseit a Chamäleon titrátió utján nyert eredményekkel hasonlítottam össze.

A mint az ide csatolt táblázatból látható a különbségek a legtöbb esetben 0·1—0·7 százalékot nem haladnak meg csak két esetben t. i. October 2. és 3-án a különbség egy egész perczentig emelkedik. Megjegyzendő azonban hogy az illető kisérletek rothadt szőlővel tétettek. Ez pedig olyan körülmény a mely mellett — miként azt első értekezésemben túlérett szőlőkre vonatkozólag megjegyzettem — pontos czukor meghatározás mustmérő segitségével egyáltalán lehetetlen.

Laboratoriumokban a hol czukor meghatározások gyakran tétetnek, czélszerű az egyes oldatokat külön és közelítőleg meghatározott töménységben készen tartani. E czélra a Städeler-Krause-féle oldatok jó sikerrel alkalmazhatók tehát 36—37 gr. rézvitriolt továbbá 148—150 gr. Nátronbydrótot egy, egy literre s végre 37—38 gr. borsavat 100 k. c.-re oldunk. A használatra vegyitünk 20 k. c. rézvitriol oldatot 4 k. c. borsav oldattal, teszünk hozzá 20 k. c. nátronlugot és felforraljuk a keveréket. Hogy ha a gyakori használat következtében a felforralásnál rézoxydul válnék ki a folyadékból, akkor csak a borsav oldatot kell megujitanunk.

Mintán a borsavas rézoxyd nátron oldatból, czukor által a rézoxydult kiválasztottuk, Schwarz *) szerint annak feloldását tömény sósav és konyhasó segítségével kellene eszközölni. Az itteni laboratoriumban ezen oldószer alkalmazása mellett tetemes eltérésekre akadtunk, mert a műtét folytán határozottan figyelhető chlórszag fejlődött A baj elháritására a sósavat egészen elkerülhetjük és helyette hig kénsavat használhatunk konyhasóval az oxydul szint oly hamar és könyyen oldódik fel.

Nagy súly fektetendő továbbá a Chamäleon tisztaságára. Egy olyan termény, mely hig kénsavval melegitve már önként chlórt fejleszt minden esetre elvetendő.

A rézoxydul feloldásánál czélszerű lesz csak mérsékelt sóadagokkal — az oxydulnak körülbelöl 2—3 szoros sómennyiségével dolgozni. Az alkalmazott sóhoz egy kis kettős szénsavas nátront keverünk, a mivel azt nyerjük, hogy a midőn az oxydulhoz hig kénsavat öntünk, a fejlődő szénsav a lombíkból kiüzi a levegőt, a mely aztán a Krönig-féle Kautschuk szelepen eltávozik. Ha végre hídegen és nagy higitás mellett titrirozunk, akkor a helyes titrátió minden feltételeinek megfeleltünk.

---

*) Mohr Titrirmethode 4. Aufl. p. 215. — Annal. d. Chem. u. Pharm. Bd. 92. pag. 97.

Az itt következő kisérlet sorozatnál a Bábó, Guyot és Salleron által elkészitett Guyot-féle mustmérők jöttek összehasonlitás alá a vegyi czukor meghatározással. Tévedések elháritása okából Gross Lipót ur volt szives tőlem függetlenül a vegyi czukormeghatározásoknak egy részét végezni, miért is neki e helyen köszönetemet nyilvánitom.

Szőlő elemzés napja 1876.	Fajsúly		Balling extract	Czukor					
	Picknometer	Mustmérőm		Chamäleonnal titrirozva	Balling extract — 4·3	mustmérőm	Babo mérlege	Guyot	Guyot Salleron
Sept. 2.	1·0644	1·0698	15·7	11·97	11·4	11·25	13·5	15·0	12·5
» 6.	1·0614	1·0617	15.0	10·11	10·7	10·75	12·5	14·0	11·5
» 12.	1·0727	1·0724	17·5	12·76	13·2	13·25	15·0	16·75	14·0
» 18.	1·0669	1·0681	16·3	12·8	12·0	12·25	13·5	15·25	12·6
» 22.	1·0743	1·0757	17 99	14 2	13·6	14·0	15·0	16·5	14·0
» 26.	1·0595	1·0617	14·5	11·07	10 2	10·75	12·0	13·25	10·75
» 28.	1·0615	1·0617	15·2	11·28	10·72	10·75	12·5	14·0	11·25
Octob. 2.	1·0707	1·0703	17·16	11·8	12·8	12·75	14·25	16·0	13·25
» 3.	1·0692	1·0692	16·81	11·5	12·5	12·5	14·1	15·5	13·25
» 6.	1·0648	1·0660	16·04	11·88	11·7	11·75	13·0	14·5	12·0

Ezen sorozatból kitünik miszerint az általam nemczukor fejében 4·3-ra megállapitott szám, az érlelés minden fokában a valósághoz legközelebben áll.

Végre legyen e helyen még megengedve Dr. Wartha tanár urnak — kinek laboratoriumában e dolgozatot véghez vittem — hálás köszönetemet kifejezni, azon támogatásért, melyben engem munkálkodásom közben részesitett.

Nagyágit és Bánáti Chromvaskö.

Dr. Koós Gábor debreczeni föreáliskolai tanártól.

Elemzési adataim közt lapozgatva jegyzökönyvemben egy *Nagyágit s Bánáti Chromvaskö* elemzésre akadtam, remélem nem lesz érdektelen az általam talált elemzési adatok közzététele: Bunsen tanár adott nekem annak idejében nagyágról származó föleg nagyágit érczet tartalmazó zuzdalisztet elemzés végett, mely elemzést Heidelbergában Bunsen tanár laboratoriumában 1872/3 évben véghez is vittem. A vegybontás eredményét azért tartom a közlésre elég érdekesnek, minthogy kimutatja azon lelhelybeli zuzdaérczunek arany és tellurtartalmát. A tellúrközet és egyébb idegen alkatrészek mint kovasav, vaséleg, agyag, szénsavas- és csekély kénsavas mész, levonása után, a próba következöt adott

Kén	*4·648*
Tellur	*35·928*
Antimon	*6·572*
Arsen	*0·631*
Olom	*26·270*
Arany	*17·962*
Ezüst	*4·878*
Réz	*3·112*
összeg:	*100·001*

miböl kitünik, hogy a zuzdapornak érczes része közel 18 % aranyat és 36 tellurt tartalmaz. Az elemzés egyszersmind azt is mutatja ki, hogy a zuzdaérczek nagyágiton kivül szabad aranyat és szabad arsent, azon kivül Bourvonitot is tartalmaztak. A nagyágit magában véve Klaproth szerint 9·0 Schönlein szerint pedig 9·10 százalék aranyat foglal magában még mások p. Brandes 8·29, Berthier 6·7 és Folbert 5·91 % tehát még kevesebbet találtak.

Elemzésemnél az aranyat sóskasavval választottam ki, finom lemezkék alakjában a tellurt pedig kénsavval, a többi elemek elválasztása a szokásos uton történt.

Chromvaskö. Plaviseviczáról, Ogradina mellett.

Ezen ásványt Bunsen tanár laboratoriumában dolgozó Hoffmann nevü dél magyarországi ifju elemezgette; azonban különbözö körülmények miatt dolgozatát be nem fejezhetvén, a porrá tört érczet átadta nekem, mit én örömmel fogadtam, s mint honi ásványt csakugyan elemezvén, abban következö alkatrészeket találtam.

Chroméleg	*58,348°/₀*
Vasélecs	*21,337°/₀*
Magnesia	*1,909°/₀*
Timföld	*14,614°/₀*
Kovasav	*3,639°/₀*
	99,847°/₀

Minthogy ezen számok közel állnak azokhoz, melyeket Abich a krystályodott Baltimori Chrómvaskőnél talált összehasonlítólag ezeket is sorolom fel, t. i.

Chroméleg	*60,04°/₀*
Vasélecs	*20,13°/₀*
Magnesia	*7,45°/₀*
Timföld	*11,85°/₀*
	99,47°/₀

a chroméleg-tartalom ezen érczbeo tehát az 58 °/₀ meghaladja. Feltünő a csekély magnesia-tartalom az aldunai válfajnál, mely ezt a Volterrai (Toskana) Chromvashoz közel hozná, a 3·639 °/₀ kovasav-tartalom árulja el, hogy idegen silikátok keveredtek az anyaghoz.

Az egyes vegyek elválasatása s meghatározása a szokott uton történt.

(Debreczen, 1878. Februar 12.)

MEGFEJTETT FÖLADATOK.

18. Mit kell a variatió közben állandónak tekinteni, hogy a középérték variatiója egyenlő legyen a variatió középértékével, vagyis hogy

$$\delta\left[\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1} X\,dt\right]=\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}\delta X\,dt\;\ldots\;1)$$

hol X tetszőleges függvénye t-nek. (*Szily.*)

Megoldás: Bein Károlytól.

Minthogy $\delta\left[\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1} X\,dt\right]=\delta\left[\int_{t_0}^{t_1} X\frac{dt}{t_1-t_0}\right]$, úgy a variatió kifejtése után következő alakot ölt:

$$\frac{1}{t_1-t_0}\int_{t_0}^{t_1}\delta X.\,dt+\int_{t_0}^{t_1}X\delta\frac{dt}{t_1-t_0}$$

Hogy az *1)* alatti egyenlet fennállhasson, arra szükséges, hogy az utóbbi kifejezés második tagja eltünjék, ami csak úgy lehetséges, ha az integráljegy alatt levő mennyiség egyenlő a semmivel. Tehát

$$X.\ \delta.\ \frac{dt}{t_1 - t_0} = 0$$

Minthogy azonban X a t-nek tetszőleges függvénye, és ennélfogva zérus lenni nem tartozik, kell, hogy

$$\delta \frac{dt}{t_1 - t_0} = 0 \text{ legyen.}$$

De ez nem mond mást, mint hogy $\frac{dt}{t_1 - t_0}$ tekintendő variatió közben állandónak, vagy pedig $\frac{t}{t_1 - t_0}$ *tekintendő független változónak.*

35. Jelöljük az első p törzsszám $p_1, p_2, \ldots p_r$ szorzatát P-vel, akkor tudvalevőleg $P + 1$ vagy törzsszám, vagy egy p_r-nél nagyobb törzsszámmal osztható, mely tehát p_r és P közt fekszik. Azonban nemcsak a második esetben, hanem általánosságban áll azon tétel, hogy p_r és P közt legalább egy új törzsszám fekszik. Mikép lehet ezt bebizonyítani? (*König.*)

Megfejtették Grossmann Vilmos és Schönfeld Salamon.

Az *1*-től P-ig előforduló P-hez viszonylagos törzsszámok száma:

$$\varphi(P) = P\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

$$\varphi(P) = p_1\, p_2 \ldots p_r\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

$$\varphi(P) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)\ldots(p_r - 1)$$

Ezen a P-hez viszonylagos törzsszámok egyike sem tartalmazhatja, mint tényezőt a $p_1\ p_2 \ldots p_r$ törzsszámok valamelyikét, azoknak mindegyike tehát — kivéve az *1*-et, mely szintén foglaltatik a P-hez viszonylagos törzsszámok sorában + nagyobb p_r-nél, azaz csak p_r és P között feküdhetik.

Ezen viszonylagos törzsszámok legkisebbje q nagyobb nem lehet $\overline{P - \varphi(P) + 1}$-nél, mert különben nem tartalmaztathatnék q és P között a többi $\varphi(P) - 2$ viszonylagos törzsszám; tehát:

$$q \leqq \overline{P - \varphi(P) + 1}$$

p_r és P között tehát minden esetre van egy törzsszám p_s, mely vagy a q maga, vagy annak tényezője, és igy p_s szintén kisebb vagy legfeljebb egyenlő $\overline{P - \varphi(P) + 1}$-gyel

$$p_s \leqq \overline{P - \varphi(P) + 1}$$

hol $\varphi(P) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \ldots (p_r - 1)$
ha csak túlmentünk a törzsszámok sorában a 3-n, azaz ha $p_r \overline{\gtrless} 3$, szintén nagyobb 3-nál, tehát

$$\overline{P - \varphi(P) + 1} < \overline{P - 2}$$

és így mindenesetre

$$p_s < P - 1$$

egy $P - 1$-nél kisebb törzzszám.

---

24. Kerestetik azon gömbfelület egyenlete, mely az r_1, r_2, r_3, r_4, sugarakkal tetszőleges középpontokból leirt gömböket $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ szögök alatt metszi (*Hunyady*)

Megfejtették Grossmann Vilmos és Steiner Samu.

Legyenek a négy adott gömb egyenletei:

$$(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 + (z-c_i)^2 - r_i^2 = 0$$

hol i helyébe $1, 2, 3, 4$ teendő; a keresett gömb egyenlete pedig:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \varrho^2 = 0$$

Legyen O ezen, O_i pedig az adott négy gömb egyikének középpontja, továbbá P_i a két gömb átmetszési körének egy tetszés szerinti pontja. A φ_i szög, mely alatt e két gömb egymást metszi, azonos azon szöggel, melyet a két gömb középpontjaiból P_i-hez húzott $O\,P_i$ és $O_i\,P_i$ sugarak bezárnak. A két gömb középpontjainak $OO_i = d_i$ távola kifejezhető az $OP_i\,O_i$ háromszögből Carnot tétele szerint:

$$d_i^2 = \varrho^2 + r_i^2 - 2\varrho\, r_i \cos\varphi_i \ldots\ldots \alpha)$$

míg más úton, minthogy az O pont összrendezői $\alpha\ \beta\ \gamma$, az O_i ponté pedig $a_i\ b_i\ c_i$:

$$d_i^2 = (\alpha - a_i)^2 + (\beta - b_i)^2 + (\gamma - c_i)^2$$

vagy: $d_i^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2\alpha a_i - 2\beta b_i - 2\gamma c_i + a_i^2 + b_i^2 + c_i^2$

és ha teszszük:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = p^2$$
$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = p_i^2$$

hol p és p_i az O valamint az O_i középpontok távolai az összrendezők kezdő pontjától;

$$d_i^2 = p^2 - 2\alpha a_i - 2\beta b_i - 2\gamma c_i + p_i^2 \ldots\ldots \beta)$$

α) és β)-ból tehát:

$$p^2 - 2\alpha a_i - 2\beta b_i - 2\gamma c_i + p_i^2 - r_i^2 + 2r_i\varrho\cos\varphi_i - \varrho^2 = 0$$

Ha ezen egyenletben i helyébe $1, 2, 3, 4$-et teszünk és ezen négy egyenlethez még hozzá veszszük a keresett gömb egyenletét, következik ezen egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{l} p^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2 = 0 \\ p^2 - 2\alpha a_1 - 2\beta b_1 - 2\gamma c_1 + p_1^2 - r_1^2 + 2r_1\varrho \cos\varphi_1 - \varrho^2 = 0 \\ p^2 - 2\alpha a_2 - 2\beta b_2 - 2\gamma c_2 + p_2^2 - r_2^2 + 2r_2\varrho \cos\varphi_2 - \varrho^2 = 0 \\ p^2 - 2\alpha a_3 - 2\beta b_3 - 2\gamma c_3 + p_3^2 - r_3^2 + 2r_3\varrho \cos\varphi_3 - \varrho^2 = 0 \\ p^2 - 2\alpha a_4 - 2\beta b_4 - 2\gamma c_4 + p_4^2 - r_4^2 = 2r_4\varrho \cos\varphi_4 - \varrho^2 = 0 \end{array}\right\} \gamma.)$$

mely egyenletrendszer a p^2, -2α, -2β, -2γ mennyiségek kiküszöbölése által megadja a keresett gömb egyenletét ezen determinánsban:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z & x^2 + y^2 + z^2 \\ 1 & a_1 & b_1 & c_1 & p_1^2 - r_1^2 + 2r_1\varrho\cos\varphi_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 & p_2^2 - r_2^2 + 2r_2\varrho\cos\varphi_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 & p_3^2 - r_3^2 + 2r_3\varrho\cos\varphi_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 & p_4^2 - r_4^2 + 2r_4\varrho\cos\varphi_4 \end{vmatrix} = 0,$$

melyben még az ismeretlen ϱ is előfordul.

Ez külön meghatározható az által, hogy a négy adott gömb és a keresett gömb középpontjai által meghatározott tiz távolság között fennálló relatiót tekintetbe veszszük (L. e lapok I. kötetében 238. lapon a (9) alatti egyenletet), mely ϱ meghatározására egy másodfokú egyenletet ad.

Tizenhat gömb van, melyek követelésünket kielégitik, miután a φ_i szög ugyanis vagy az OPO_i szöget, vagy annak mellékszögét jelenti és a szerint

$$d_i^2 = r_i^2 + \varrho^2 \mp 2r_i\varrho\cos\varphi_i$$

A (γ) alatti egyenletrendszer utolsó négy egyenletében a $2r_i\varrho\cos\varphi_i$ tagok előjele tehát $2^4 = 16$-szor felcserélhető.

FÖLADAT.

36. Kerestetik azon pont mértani helye, mely a kúpszelet párhuzamos húrait adott viszonyban osztja. *(Hunyady.)*

Budapest, 1878. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

// MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

III. kötet. 1878. 23. füzet.

EGY ÚJ RENDSZER SZERINT KÉSZITETT MÉRLEGRŐL.

(Előadatott a m. tud. Akadémia 1878 február 18-iki ülésén.)

Kruspér Istvántól.

Van szerencsém egy új rendszer szerint készített mérleget bemutatni a tisztelt Akadémiának, mely minden eddigieket felülmúl positive azon jó tulajdonságokban, melyekkel bir, és negative azon káros hátrányok elkerülése által, melyekben a többiek sinlenek. Ezen mérleg 20 k. egyoldali terhelhetőségre van készítve, és az állami központi mérték hitelesítő bizottság inspectora számára van tervezve, ki azt az útra magával viszi s a mérték hitelesítő hivatalok megvizsgálásánál használja. Ezen mérlegnek tehát *először* könnyen szétszedhetőnek, és minden pillanatban összerakhatónak kell lenni, *másodszor* mesterkélt felállítást, asztalra való megerősítést nem szabad igényelnie, hanem csak egyszerüen valamely asztalra helyezve használhatónak kell lennie, mind a mellett annak lehetőleg csekély súlylyal kell birnia; *harmadszor* a lehető legtágasabb határok közt, a legkülönbözőbb nagyságú súlyok megmérésére használhatónak kell lennie. Ezen tulajdonságok együttesen egy mérleg rendszeren sem találhatók fel. A szétszedhetőség meg van ugyan minden mérlegen, de az összeállítás rendesen hosszadalmas rectificatiót igényel; vagy ha a felállítás könynyen eszközölhető is, ezen előny vagy a mérleg súlyának növelése, vagy az élek aránylag nagyobb megterhelése, tehát a mérleg conservatiójának veszélyeztetése árán éretik el. Ezen a mérlegen a részek épen úgy szedetnek szét és rakatnak be az illető tokba, mint valamely mérnöki műszernél, és az összeállítás semmi hosszadalmas műtételt nem igényel.

A mi a felállítás szilárdságát illeti, a kisebb fajta mérlegek minden szilárd alapon álló erős asztalon eléggé szilárdan állanak, de azok még is nagyobb biztosság végett a talaj ingadozásaitól függetlenítés végett a falakon megerősített asztalkákra, consolokra szoktak állíttatni.

A mérleg maga egy eléggé erős, széles táblára lévén megerősítve, az asztalkán semmi további megerősítést nem kiván; de már a 10 k. és nagyobb terhek megmérésére szánt mérlegeket az asztalhoz csavarokkal kell leszoritni, hogy az egyoldalú terheltetésből eredő nyomásoknak ellentálljanak. Ez szükségképen következik a mérleg szerkezetének azon sajátságából, hogy az egész egy középponti oszlopon nyugszik, melynek alapja nem igen nagy azon távolsághoz képest, melyben a serpenyők felfüggesztési, vagyis a terhek fogpontjai ezen oszloptól állanak.

Ezen oszlopon, érzékeny libella által, tetemes ingadozást lehet észrevenni egyik vagy másik oldalra, ha a terhek a serpenyőkben nem ugyan azon pillanatban kezdenek hatni a mérlegigára.

Az én mérlegemen a központi oszlop hiányzik; helyette egy vízszintes fekvésű, eléggé merev, de azért nem súlyos parallelepipedhez hasonlító test van alkalmazva, mely a mérlegtartó emelő részét ábrázolja. Ebben vannak a mérlegnek többi organikus részei elhelyezve. Ez a test, mintegy két bakon, négy lábon nyugszik, az egész teher tehát szélesebb alapon oszlik meg. A mérleg sokkal alacsonyabb, mint a többi mérleg rendszereknél, mi annak szilárd állását tetemesen növeli, ugy hogy az 20 k.-val terhelve mind a két serpenyőben, külön az asztalhoz leszoritás nélkül is, mozdulatlan áll, noha a mérleg teste maga 20 k.-ot nem nyom.

A mérleg munkaképességét illetőleg szigorú mérlegeknél megelégesznek, ha az azon megmérhető legkisebb és legnagyobb teher ugy van egymáshoz, mint 1 : 10. A párizsi nemzetközi méter bizottság számára készítendő mérlegek 0—2 gr., 2—20 gr., 20—200 gr., 200 gr. — 2 k. és 2—20 k. határok közötti használatra vannak tervezve. Ezen a mérlegen 200 grammot még 0·5 milligr. és 20 k.-ot 2 milligr. pontossággal meglehet mérni.

Minden mérlegnek leglényegesebb alkotórésze az iga. Az elmélet megállapítja azon mathematikai feltételeket, melyeknek eleget kell tenni, hogy az egyenlő karú mérleggel pontos méréseket lehessen tenni.

Ezek a következők:

1) A mérlegiga lehetőleg hosszú legyen.

2) Annak két karja egyenlő legyen egymással.

3) Az iga könnyü, mind a mellett erős, merev legyen, hogy a teher alatt meg ne görbüljön.

4) Az igán a két serpenyő felfüggesztési pontjait összekötő egyenes vonal a tengely élvonalát messe.

5) Az iga nyelve lehetőleg hosszú legyen.

6) Az iga súlypontja valamivel a tengely éle alá essék. Ezen feltételek teljesítése nélkül pontos eredményekre gondolni sem lehet. Igen fontos dolog, hogy az iga tengelye egyenes vonal alakú élet képezzen, s az igával együtt igen kemény anyagból legyen készítve, símára csiszolva és pallérozva azért, hogy a surlódás az iga lengését minél kevésbbé akadályozza. De ezen feltételeken kivül még számos más körülmények befolyással vannak a mérés pontosságára; s ezek részint a tengely és a serpenyők felfüggesztésének módozataira, részint az élek tehermentesítésére vonatkoznak.

Az iga tengelye régentén egy az iga testébe vájt lyukba be volt ékelve, úgy hogy az az iga mind két oldalán kiállott, de a tengely középső része, mely az iga testébe esett, hozzá férhetetlen volt. A tengely ágya szintén két egymástól külön vált homorú felületü vályúból állott. Az egész összeköttetést a gémes kúton igen híven látjuk ábrázolva, hol a gém gerendájában megerősített vastengely a mérleg iga tengelyéhez, az iga s két ágában fúrt lyukak pedig a mérleg iga tengely ágyaihoz hasonlitnak.

Az iga két vége karikára görbített élekben végződött, melyeknek síkja merőlegesen állott az iga közép hosszvonalára; a serpenyőlánczok végei szintén karikára voltak fűzve, melynek belső éles karimája az iga végéleire keresztben állott. Ekképen ezen két karika csak egy pontban érintkezett egymással. Igy voltak a finom mérlegek még csak 20—30 évvel ezelőtt berendezve. De ezen szerkezetnek lényeges tökéletlenségei vannak. T. i. a tengely két ágyát igen nehéz úgy késziteni és elhelyezni az ágason, hogy azok meghosszabbitva egy és ugyanazon felületnek két külön vált részei legyenek; azok rendesen két különböző, egymás mellett fekvő felületet fognak képezni, melyeken az igatengely éle nem egyformán fekszik mindenkor. Ebből azután feszültségek keletkeznek, a tengely éle bizonyos pillanatokban akadályokkal, lökésekkel találkozik, melyek a lengési szög nagyságát egyenlőtlen módon megváltoztatják. Továbbá a végélek és a serpenyők karikái csak egy pontban érintkezvén egymással, az egész teher ezen pontokra nehezedik; ennek folytán az érintkezési pontnál az élek hamar eltompulnak, s ez által a mérlegkarok hosszában tetemes változások állanak elő, minthogy a mérlegkarok hossza ezen érintkezési pontok, most már felületek által határoltatik. Pedig ha valamely mérleg karja annak n-ed részével változik, akkor a sulyegyen is megbomlik, s az csak a serpenyőbe helyezett suly n-ed részének hozzáadása, illetőleg elvétele által állítható helyre. Ha tehát egy 20 k. súlyt 2 milligr. pontosságig megakarunk mérni, 2 mgr. 20 k-nak $\frac{1}{10.000.000}$ része lévén, a mérlegkarban sem szabad annak $\frac{1}{10.000.000}$ részénél nagyobb változásnak történni. Ez egy 300 mméter hosszú mérlegkaron, mint a milyen ezen mérlegé, egy milliméternek mintegy 33.000-ed részét teszi, olyan kis mennyiséget, melyet csak egy 600—800-szor nagyitó górcsővel lehetne látni. Tehát a mérlegkar hosszának ilyen mérvü ingadozásai már a mérésre káros befolyást gyakorolnak. Ezen hiba befolyás csökkentése végett az ujabb időben a mérlegek vég éleit is prizmákkal helyettesítették s azokat ugy rendezték el, hogy azok az ágyak egész hosszukban érintkeznek. Ez által a teher nagyobb hosszaságra oszolván el, a prizmák élei az eltompulásnak sokkal csekélyebb mértékben vannak kitéve. Ezen javitás a mérleg egyes részeiben lényeges változtatást huzott maga után; az iga közepén egy tágas lyuk lett áttörve, melyen a prizmát át lehet dugni; a prizma az igához csavarokkal lett megerősítve, a tengely ágy szintén hasáb alakot kapott, mely az iga közép nyilásán szintén akadály nélkül átfér, a nélkül hogy az a nyilás falait valahol érintené. Ez *) az ágas két ágához csavarokkal lett megerősítve. A vég éleken kengyelalakú függelékek akasztattak fel s ezekre lettek a serpenyők megerősítve. De ezen berendezésnél nem volt a mérleg iga könnyen levehető az ágyáról, mert az iga áttörésén keresztül dugott s az ágas két ágára megerősített tengelyágy a szétszedhetést akadályozta. Ezen a nehézségen az által gondoltak átesni, hogy a tengely ágyát egy a központi oszlopból oldalt vízszintesen kinyuló tartóra erősítették meg, mely egyik végén hozzáférhető. Erre tehát oldalról az iga tengelyét rálehet tolni. A könnyű szétszedhetőség célja tehát el lett érve, de ekképen az iga a központi oszloptól oldalvásti fekvést nyervén, a súlyok a középponti oszlopra, valamint az oszlop alapjára külpontos nyomást gyakoroltak, mi a mérleg szilárd állásának tetemes kárára szolgált. Ezen oldalnyomás ellensúlyozására szükséges volt az oszlopot jóval súlyosobbra csinálni, mint a központi nyomásnál szükséges lenne. Az ilyen nagyobb teherre szánt mérleget okvetetlen le kell srófolni az asztalhoz, különben pontos mérésekre alkalmatlan.

Mérlegemnél az iga ismét visszahelyeztetett az előbbi központi fekvésbe, s a szétszedhetőség azon egyszerűségénél fogva a Co·

*) Két Oertling-féle mérleget így láttam berendezve.

lumbus tojásához hasonlító berendezésem által el lett érve, hogy az ágyat képező hasábot könnyen ki lehet húzni azon rovátékból, melyben az ágas két ágában van ágyazva, és azt ismét vissza lehet tolni. Ezen berendezés nincsen kárára a mérleg szilárdságának. Hiszen ágyukból kivehető és ismét vissza helyezhető prizmák, ékek már más, igen érzékeny műszereknél is vannak alkalmazásban. Nevezetesen a Repsold készítette reversio-inga tengelye is igy van berendezve. Az egész csak mechanikai ügyes kezet kiván.

A régibb mérlegeken az ágyak mind henger alakú vályúkból állottak, s az élek az ágyakkal folytonos érintkezésben maradtak. De nem sokára belátták, hogy ezen berendezés mellett az élek csakhamar eltompulnak; ha pedig a prizmák élei eltompultak, ugy hogy azok egy kis radiusú hengerfelületet képeznek, akkor ezeknek érintkezési vonalai az ágyakat képző vályúkkal az iga lengése közben oldalt mozdulnak, épen úgy, mint a bölcső lábai a szoba földjén a ringatás közben egy oldalról a másikra gördülnek. Az érintkezési vonalak elmozdulása pedig egyet jelent a mérleg karhosszának időnkénti megváltozásával. Mennél nagyobb a vályú görbületi sugara, annál kisebb ez a befolyás. Szükség volt tehát az ágyakat sík alakra késziteni; de akkor egyszersmind elkerülhetetlen lett a középélet ágyából, úgy szintén a kengyeleket a végélekről felemelni azon időre, mig a mérleg működésen kivül helyeztetett, és azokat ismét leereszteni, ha a mérleggel dolgozni akarunk. Szükséges volt ezen felemelés már csak azért is, hogy az iga az ágyáról, a kengyelek az élekről magoktól le ne csúszszanak. Ez által egyúttal azon czél is el lett érve, hogy az élek jobban megóvattak a szükségtelen koptatástól. Igy képződött a mérleg kiemelő vagy zárókészüléke. A finom mérlegeken ezeket nélkülözni nem lehet. Hozzá járult még ezekhez a serpenyő alátámasztása. Ez különösen nagy terhekre szánt mérlegeknél szükséges, azért, hogy midőn a teher egymásután elébb az egyik, azután a másik serpenyőre helyeztetik, ezen egyoldalú terhelés a mérleg oszlopára oldalnyomást ne gyakorolhasson.

Átalában tehát egy tökéletes mérlegen három kiemelésre van szükség, de annak berendezése különböző lehet. u. m.

1) *A serpenyők a mérleg nyugalmi állapotában az asztalon nyugszanak.* Ekkor a középső élnek, ágyának és a kengyeleknek az elzárás közben lefelé kell mozdúlni és egyenkint fennakadni az akaszokon. Legcsekélyebb a kengyelek sülyedése. Ez megszünik, mihelyt a serpenyők az asztalt elérték s a lánczok egy kissé meglazúltak. Valamivel tovább sülyed a középső él, hogy a végélek és kengyelek közt

egy kis hézag képződjék. Még tovább sülyed a középső él ágya, hasonló oknál fogva. Nagy teherre szánt mérlegeknél ezen berendezés a legczélszerübb, mert a serpenyők az asztalon nyugodván, azok igen szilárd módon vannak alátámasztva; el lehet őket látni vas sínekkel, melyeken egy alacsony kocsi kerekei gördülhetnek, s a teher ezen kocsira egy oldalt helyezett állványon rárakatván, könnyen a serpenyőre tolatik, s ekképen a kezelés igen kényelmessé lesz.

2) *A serpenyö a mérleg nyugalmi állapotában az asztal felett van.* Ekkor a közép él ágya mozdulatlanul megerősíthető a mérleg alsó részén, az iga a kengyelek és a serpenyők az elzárás közben felfelé emeltetnek. Itt a középső él legcsekélyebb emelkedést kiván, valamivel nagyobbat a kengyelek, és ezeknél is nagyobbat a serpenyők. Lehet a mozgásokat másként is combinálni, de ezek a legczélszerűbbek és a dolog természete által leginkább vannak indokolva.

Milyen sorrendben kell az elzárásnak következni egymásután? Legczélszerűbbnek látszik, ha legelőbb a kengyelek vétetnek át az igáról az akaszok által, hogy az iga a tehertől megszabaduljon, azután az iga záratik el, végre a serpenyők támasztatnak alá. A mérleg meginditásánál ellenkező rendben jönnek a különböző részek mozgásba. Legelőbb a serpenyő szabadúl fel, s ha az erősen ingadoznék, azt meg lehet és kell nyugtatni. Ekkor az egész teher a kengyelek akaszain nyugszik. Most a kengyelek az iga végéleihez közelednek, mig végre azok az akaszoktól megszabadulnak, és az iga végélein akadnak fenn. Most a teher már a végéleken nyugszik, de az iga még az akaszok által tartatik. Végre a középső él ágya közeledik az élhez, vagy megforditva az él közeledik az ágyhoz. Az ágy átveszi az igát a rajta lévő teherrel együtt az akaszoktól, és most már az iga szabadon leng.

Az akaszok rendesen kúpalakú hegyes peczkekből állanak, melyek megfelelő mélyedésekbe illenek. Ezen mélyedések részint kúp, részint prizma alakúak. A kengyelek felakasztására egyik oldalon kúp, másikon homorú prizma alakú mélyedésre van szükség, hogy semmi feszültség elő ne állhasson. Az iga egyik végén hasonlóképen kúp, a másikon homorú prizma alakú mélyedések szükségesek. Ezeken kivül támaszpeczkekre van szükség, hogy az iga fel ne düljön. De ez nem egyedüli módja az elzárásnak, noha véleményem szerint a legjobbak közzé tartozik.

Az emelkedések és sülyedések vagy függélyes (egyenes) parallel vonalokban mennek véghez, vagy körforgásra vannak szerkesztve. Az első hosszú vezetékeket igényel, az utóbbi kisebb tért foglal el, de hogy ezen utóbbi jól működjék, szükséges, hogy a mozgás azon pillanatban, midőn az iga a terhet a kengyelek akaszairól átveszi, függélyes irányban történjék; akkor ezen szerkezet épen úgy működik, mint az első parallel mozgásra alapított berendezés.

Az én mérlegem a második akaszrendszer szerint van szerkesztve, s a kiemelések és elzárások körmozgásra vannak alapitva.

A mérleg iga közép élének ágya mozdulatlan. Az iga két vége felé mindkét oldalt kinyuló orrocskák vannak, melyekben az akaszmélyedések vannak megerősítve, a kúppeczkek a mérleg testének két végén szilárd ágyakba helyezett, s vizszintes tengelyek körül forogható szögemeltyűk karjaiban vannak elhelyezve, mindeniken egy pár a kengyelek, egy pár az iga számára. A szögemeltyűk lefelé nyuló karjain csavaranyák vannak beágyazva, melyeken a mérleg egész teste hosszában átvonuló csavarorsó megyen át. Ezen orsó csak tengelye körül foroghat, hosszirányban minden mozgás meg van akadályozva, egyik végire bal, másikra jobb menetü csavar van metszve, úgy hogy ezen orsó, forgásba hozatva, mind a két csavaranyát egyformán befelé huzza, vagy kifelé tolja, s ekképen a szögemeltyűk vizszintes karjait s ezek által a peczkeket is lefelé, vagy felfelé mozdítja. Ezen orsó pedig két fogas kúpkerék által hozatik forgásba, melyek közül egyik az orsó tengelyén, másik pedig az orsóra keresztben egy mellék tengelyen van megerősítve. Ezen tengely végre egy forgattyúval van ellátva, melyet jobbra-balra egy iránt lehet forgatni. Ha a mérleg iga le van eresztve a középágyra, akkor a serpenyő alatt az asztalig elég tér van a szabad lengésekre. Az emelő karok úgy vannak berendezve, hogy azoknak forgástengelyei a közép él ágyával egy vizszintes síkban fekszenek, s ha az iga annyira le van eresztve, hogy a középső él érintkezésbe jön az ágyával, a kengyelek síkjai is épen érintkezni kezdenek a vég élekkel. Ezen állapotban az akaszpeczkek hegyei a tengelyeken keresztül gondolt síkban vannak, s ha az emelőkarok egy kissé elfordíttatnak, a peczkek függélyes mozdulatot tesznek, úgy mint az fentebb meg volt említve. Ha a mérleget el akarjuk zárni, akkor a karok által fel kell az igát emelni annyira, hogy a középső él az ágya felett 3—4 milliméter magasan álljon. Ekkor a serpenyők alá tányérok tolatnak; ezután az emelő karok leeresztetnek, mig a serpenyők az alájuk tolt tányérokra ülnek, és a lánczok egy kissé meglazúlnak. Ekkor a tengely éle még mindig egy milliméterrel magasabban áll az ágyánál, a kengyelek pedig még valamivel magasabb állást foglalnak el, mert az azokat emelő akasznak nagyobb emeltyűkaruk van, mint az igáénak, és így a kengyelek és a vég élek közt egy kis hézag marad. A mérleg igy el van zárva. Ha a mérleget lengésbe akarjuk hozni, akkor az emelő karokat egy kissé emelni kell, hogy a serpenyők támaszait könnyen vissza lehessen húzni a mérleg teste alá, azután az emelő karokat le kell ereszteni elébb lassan, mig a középső él az ágyára ráül, azután gyorsabban, hogy a karok az iga lengésének útjában ne álljanak.

A kengyel szerkezete sem egészen közönbös a mérleg pontosságára. Ugyanis gondoljuk egy pillanatra, hogy a serpenyő merev kapcsolatban volna a kengyellel, és a kengyel síkja, midőn annak mélyedései az akasz peczkeken ülnek, nem megyen a peczkek hegyeit összekötő vonalon keresztül, akkor, ha a teher a serpenyőnek majd egyik majd másik oldalára tétetik, az egésznek súlypontja a térben más-más helyre esvén, míg a felfüggesztési vonal — a peczkek hegyeit összekötö vonal — változatlanul marad, a kengyel síkja is majd egyik majd másik oldalra mozdúl a peczkek hegyeit összekötő vonaltól, és a vizszintestől való elhajlását is megváltoztatja, s midőn a kengyel az iga végélére leereszkedik, az érintkezési vonal a síknak más-más helyére esik. Ha most az élet is szintén egy kis radiusú hengernek gondoltatik, az érintkezési vonal is az élt alkotó kis henger különböző vonalaival fog öszszeesni; s ez által a mérlegkar hossza is más-más fog lenni. Hogy ez ne történhessék, szükséges, hogy a kengyelsík helyezkedése állandó, a teher fekvésétől független legyen. Ez két feltételtől függ: u. m. *a mérleg elzárt állapotában a kengyel síkja a peczkek hegyeit összekötö vonallal összeessék*, továbbá *a kengyel a serpenyő testével ne merev kapcsolatban, hanem minden irányban könnyen mozogható összeköttetésben álljon.* Ha több nehéz, átmérőjükben átszúrt homogén golyót kisebb nagyobb távolságban egy czérnaszálra fűzünk, s a czérnaszál végét egy szögre kötjük, azután az így képződő physikai ingát magára hagyjuk, ezen tömegrendszer akkor jön nyugalomba, ha a golyók középpontjai a felfüggesztési ponton keresztül gondolt függélyes vonalba esnek. Ezen elvnek megfelelő módon van az én mérlegemen azon függelék készítve, melyre a serpenyő van felakasztva. Ez áll a felső kengyelből, melynek két oldalán az akasz peczkeknek megfelelő mélyedések, belül a kengyel síkja van helyezve, a kengyel alsó részén pedig egy felfelé álló peczek van alkalmazva. Ezen peczekbe egy másik, az előbbire keresztben álló kengyel felső részén helyezett kúpalakú mélyedés illik, az alsó rész szétszedhető, azért, hogy a kengyelt a serpenyő lánczok karikájával össze lehessen kapcsolni. A peczkek hegyei és a mélyedések feneke közt a mozoghatóság igen nagy lévén, a felső kengyel mindig ugy fog helyezkedni, hogy a két felső és az alsó peczkek egy függélyes síkba essenek s ekképen a kengyel síkja az élhez képest mindig egyenlő fekvésben maradjon.

E módon a fentebb kitüzött czél jobban eléretik, mint lánczkarikák által, melyeknél az érintkezés szélesebb térre terjed, ennélfogva a mozoghatóság sokkal csekélyebb.

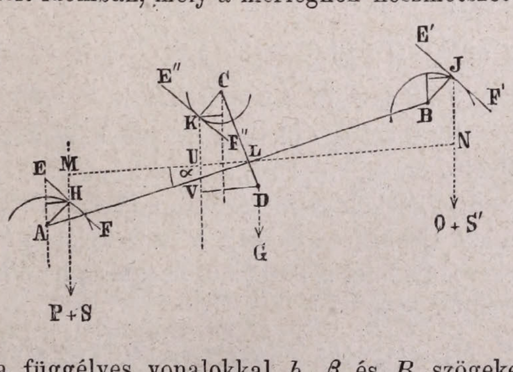
Hátra van még, hogy az iga nyelvéről szóljak. A régibb mérlegekben a nyelv hossza meg nem haladja a mérlegkar hosszát. Újabb időben azonban belátták, hogy a mérleg érzékenységét nem annyira az iga súlypontjának a középélhez mód nélküli közelitése, hanem a skálán a leolvasási képesség fokozása által kell elérni törekedni. Mert ha az iga súlypontja igen közel van a tengelyélhez, akkor a mérleg igen lassan leng, a mozgó tömegek csekélyebb eleven erőt fejtenek ki, ennélfogva a mérleg az ágy legkisebb egyenetlenségét, ripacsosságát is jobban megérzi, mintha a lengés élénkebb volna. Az ilyen mérleg stabilitása igen csekély, mi abban mutatkozik, hogy a mérleg nyelve mindig más-más ponton állapodik meg a skálán. Nagy haladást tett tehát a mérleg szerkezete Steinheilnek azon berendezése által, hogy a mérleg nyelvét egy optikai apparátussal helyettesítette. Ő t. i. a Gauss deklinometerének analogiájára az iga tetején egy sík tükröt erősített meg, keresztben annak hossz vonalára. Ezzel átalellenben egy távcsőt állított fel szilárd alapon, s e mellé egy függélyes skálát helyezett. Ezen skála osztály részeit a tükörben lehet látni a távcsővel, s az iga lengési szögét a távcső vizszintes szálán az osztályrészek leolvasása által lehet meghatározni. A skála a tükörtől 3—4 méter távolságban áll; s a tükör felületére gondolt s a skáláig érő merőleges vonal ábrázolja a mérleg nyelvét. De minthogy a tükör által visszavetett sugár eltérítése kétszer olyan nagy, mint a merőleges által leirt szög, a skálán leolvasott osztályrészek az iga lengési szögének kettős értékét fogják szolgáltatni. Ezt tehát felezni kellene. Azonban egyszerübb ezen leolvasást változatlanul megtartani, s helyette a mérleg nyelvét kétszerezni. S ha tekintetbe veszszük, hogy a távcső tulajdonképen nem a tükörre, hanem a tükörben látszó képre van beállítva, ezen képnek a skálától való távolsága tekintendő a mérleg nyelvének. Ez tehát 6—8 méterre felrúg, s ezen mérvben növekszik azon pontosság is, melylyel az iga hajlásszögét meg lehet határozni.

A tükörnek elhelyezése az iga tetején egy kis elméleti hibát von maga után, t. i. a tükör távolsága az iga tengelyétől nagyobb mérlegeknél 6—8 centimetert is elérvén, annak távolsága a skálától észrevehetően különbözik, ha a tükör a skála felé, vagy ellenkező irányban leng. Ez által a skála osztályrészeinek szög értéke megváltozván, czélszerübb a tükröt az iga oldalára közel a tengelyhez megerősíteni. Ezen berendezés azonban utazásra szánt mérlegnél nem használható, mert az a mérlegnek, de különösen a távcsőnek mozdulatlan felállítását követeli.

Az én mérlegemen szintén optikai leolvasás van alkalmazva, de az előbbitől különböző módon. Ezen a mérleg igán két achromatikus prizma van megerősítve oly módon, hogy a prizma élek egymással párhuzamos függélyes vonalakat, azoknak hypothenusa lapjai pedig egymásra derék szög alatt álló síkokat képeznek. A prizmáknak két befogó oldala az iga két vége felé néz, a másik kettő pedig az iga széles oldallapjához párhuzamos. Ezen prizmák elé egy távcső van állítva, melyet vagy külön állványon, vagy magán a mérlegtest oldalán is meg lehet erősítni. A mérleg iga két végétől 3—4 méter távolságban két skála állíttatik fel szilárd fekvésben, p. o. a szoba falaira erősítve. Az egyik skála 1—2 millim. nagyságú egyenlő részekre osztatik a másiknak osztályrészei 10-szer nagyobbak az elsőénél. Ezen skálák a prizmák középétől egyenlő távban állíttatnak fel, és kellőleg elhelyezve azoknak képei a prizmákban történt visszavettetés után 90^0 alatt eltéritve, a távcső látterében ellenkező mozgásban látszanak, s a sűrübb osztályzatú skála részeit a ritkább osztályzatúnak valamely vonásán le lehet olvasni. Ha ezen első izben használt vonás a munka folytatásánál igen távol jön a láttér közepétől, akkor a leolvasást azon a vonáson kell tenni, mely a láttér közepéhez legközelebb áll, s a leolvasást át kell számitni az első ízben használt vonásra, mi egyszerü összeadás vagy kivonás által eszközöltetik. Ezen berendezésnek azon előnye van, hogy az irányzó szilárd felállítást nem kiván, minthogy a képek coincidentiája a távcső elmozdulása által épen nem zavartatik. Csak a skálák legyenek mozdulatlanúl felállítva. A képek világosságát a skálák megvilágitása által lehet fokozni. A képek mozgási sebessége kétszer olyan nagy, mintha csak egy prizma s a távcsőben kifeszített vizszintes szál használtatik, mi azonban semmi nehézséggel nem jár, csak el kell az egyik prizmát takarni, és a távcső diaphragmáján pókszálat kell behúzni. A sugárzó melegnek eltávolitására szükséges a mérleget egy vastag szövetből készült ernyővel befödni, melynek oldalt lefüggő szárnyai a szükséghez képest könnyen felemelhetők és leereszthetők. Ezek főbb vonásokban az uj mérlegrendszert jellemző részletek, ezeknek ismertetésével eleget tettem azon kötelességnek, hogy mielőtt ezt a párisi világkiállításon az egész világ itélete alá bocsátanám, elébb a hazai tudományosság legilletékesebb areopagja előtt bemutassam. Ezzel befejezhetném előadásomat, de szükségesnek látom azon indokok némelyikére, melyek a mérleg szerkezetének complicatójára okot szolgáltattak, egy kis figyelmet forditni.

Ha a mérleggel két súly különbségét nagy pontossággal akarjuk meghatározni, a munka sorrendjét illetőleg a Borda-féle, vagyis helyettesítési és a Gauss-féle, vagyis felcserélési módok valamelyikét alkalmazzuk. Azon eszközöket illetőleg, melyeket ezen munka közben használunk, háromféle eljárást lehet követni a szerint, a mint az összehasonlítandó súlyok különbségét vagy kisebb súlydaraboknak közvetlen a serpenyőre rakása, vagy egy nagyobb súlydarabnak a mérlegkar különböző pontjain felakasztása, vagy a mérleg nyelv által a skálán lemetszett osztályrészek leolvasása által határozzuk meg. Akármelyik módszer használtassék, felteszszük, hogy a mérleg karjai csaknem egyenlő hosszúak, a serpenyők súlyai csaknem egyenlők, az összehasonlitandó súlyok különbsége előleges kitárázás által néhány milligrammot meg nem haladó kis mennyiségre leszállittatott, vagy hogy, ha a súlyok a serpenyőkre tétetnek, a mérleg igának a vizszintes fekvésből elmozdulása 10—20 perczet meg nem halad. A mérlegelés hibája leginkább két kútfőre vihető vissza, ezek: az élek tompasága kapcsolatban a kengyel síkok és a középél ágyának ingatagságával, és a mérlegkarok hosszának a hőmérsék változása okozta növekedése vagy csökkenése. Ezen hiba kútfők egymástól függetlenül hatnak, azért feltévén, hogy az azokból eredő hibák csak csekély értéküek, a hibákat egyenként lehet meghatározni.

Legyenek a mellékelt idomban, mely a mérlegnek hoszmetszetét ábrázolja. *A, B, C* az éleket alkotó hengerecskék görbületi középpontjai, *EF*, *E'F'*, *E''F''* a kengyelek, illetőleg a közép ágy síkjai, *H, K, J,* ezeknek a hengerrel való érintkező pontjai, $AH = r$, $BJ = \varrho$, $CK = R$ a hengerek görbületi sugarai, melyek a függélyes vonalokkal b, β és B szögeket zárnak be. Tegyük fel, hogy a mérleg iga sem tökéletesen symmetri-



kus alakú, hanem a súlypontot D a görbületi középponttal O összekötő vonal CD az AB-vel $90 - \varphi$ szöget képez, hol φ csak kis értékű mennyiség. Legyen $AL = a$, $LB = a'$, $CL = t$, $CD = t'$. A bal serpenyő súlya $= S$, a jobb serpenyőé $= S'$, a mérleg igáé $= G$, mely a D pontban működik. Tegyünk a balserpenyőbe P, a jobbba Q súlyt, ezeknek hatása alatt a mérleg iga AB vonala a vizszintestől α szög alatt lehajlik, s az egyensúly egyenlete ez leend:

$$(P+S)\,\overline{MU} = (Q+S')\,\overline{NU} + G.\overline{DV}.$$

Fejezzük ki az emeltyű karokat a mérleg adataival: ekkor

$$MU = a\cos\alpha - r\sin b - R\sin B - t\sin(\varphi+\alpha).$$
$$NU = a'\cos\alpha + \varrho\sin\beta + R\sin B + t\sin(\varphi+\alpha)$$
$$DV = R\sin B + t'\sin(\varphi+\alpha)$$

vagy tekintetbe vévén, hogy a hajlás szögek mind igen kicsinyek, melyeknél a sinusokat az ivekkel, a cosinust 1-el fel lehet cserélni, egyszerűbben

$$MU = a - rb - RB - t(\varphi+\alpha),$$
$$NU = a' + \varrho\beta + RB + t(\varphi+\alpha),$$
$$DV = RB + t'(\varphi+\alpha).$$

Ezeket helyettesítvén, némi kifejtés és rendezés után lesz:

$$\begin{aligned}(Pa-Qa')+(Sa-S'a') = {}&\Big((P+Q+S+S')\,t + Gt'\Big)(\varphi+\alpha)\\ &+(P+Q+S+S'+G)RB+(P+S)rb+(Q+S')\varrho\beta.\end{aligned} \qquad 1)$$

Zárjuk el a mérleget, és tegyünk a serpenyőkre más súlyokat, melyek az előbbiektől szintén csak keveset különböznek, akkor a hajlásszögek egy kissé megváltoznak, s ha a megváltozott mennyiségeket megkülönböztetés végett egy vonással jeleljük meg, ezen egyenlet áll elő:

$$\begin{aligned}(P'a-Q'a')+(Sa-S'a') = {}&\Big((P'+Q'+S+S')t+Gt'\Big)(\varphi+\alpha')\\ &+(P'+Q'+S+S'+G)RB'+(P'+S)rb'+(Q'+S')\varrho\beta'.\end{aligned}$$

Ezen két egyenletben a jobb oldalon az ugyanazon betüvel irt súlyok közötti különbségeket el lehet hanyagolni, mert ezek igen kis mennyiségekkel lévén szorozva, csak másodrendű kis tagokat szolgáltatnak. Ugyanazon okból a P és Q, továbbá S és S' közötti különbségeket is tekintet nélkül lehet hagyni; s ha a két egyenletet egymásból levonjuk, lesz:

$$\begin{aligned}(P-P')a-(Q-Q')a' = {}&\Big(2(P+S)t+Gt'\Big)(\alpha-\alpha')+\Big(2(P+S)+G\Big)R(B-B')\\ &+(P+S)r(b-b')+(P+S)\varrho(\beta-\beta').\end{aligned} \qquad 2)$$

Ezen egyenletből most már az élek tompaságának befolyását a mérlegelésre meg lehet itélni.

Tegyük fel, hogy a Borda-féle módszer a súlyokkal való közvetlen kiméréssel kapcsolatban alkalmaztatik, akkor a mérleg egyik serpenyőjében elhelyezett tárák mind a két ízben egyenlők, az az $\alpha = \alpha'$ és $Q = Q'$. Ha tehát az összehasonlítandó súlyok P, Q és az adalék súly q-val jelöltetnek $P = P$, $P' = Q + q$-val helyettesítendő, s a fentebbi egyenletből lesz:

$$P-Q-q=\left(2(P+S)+G\right)\frac{R}{a}(B-B')+(P+S)\frac{r}{a}(b-b')+(P+S')\frac{\varrho}{a}(\beta-\beta') \quad 3)$$

Ezen egyenletből kitünik, hogy a hibákat képviselő jobb oldali tagok igen kicsinyek lesznek, ha vagy a radiusok, vagy a hajlásszögek igen kicsinyek. Ezen utóbbiakat illetőleg, nem annyira a hajlásszögeknek absolut nagysága, mint inkább azoknak ingatagsága hat károsan az eredményre. Legyenek p. o. $P = 20\ K = 20.10^6\ mg$, $S = 2\ K = 2.10^6\ mg$, $G = 3\ K = 3.10^6\ mg$, $R = r = \varrho = 0{\cdot}01\ mm.$ $a = 300\ mm.$, $B - B' = b - b' = \beta - \beta' =$ arc $1' = 0{\cdot}0003$, akkor a hibák lesznek: 0·47, 0·22, 0·22 mg. s minthogy ezek legrosszabb esetben summázodhatnak, a mérés eredménye csaknem 1 egész milligrammal hibás lehet.

Ha a Gauss-féle módot akarjuk használni, akkor $P = P + p_1$, $Q = Q$, $P' = Q$, $Q' = P + p_2$, $\alpha = \alpha'$, s ezen kivül még $a = a'$ helyettesítendő, s a fentebbi egyenlet ezzé válik:

$$(P-Q)+\frac{p_1+p_2}{2}=\frac{2(P+S)+G}{2}\frac{R}{a}(B-B')+\frac{P+S}{2}\frac{r}{a}(b-b')+\frac{(P+S)\varrho}{2\ a}(\beta-\beta'). \quad 4)$$

Ezen esetben tehát a hibák fél akkorák, mint a hogy a Borda-féle módnál találtattak.

Ha a nyelv állásait olvassuk le a skálán s szintén a Gauss-féle módot alkalmazzuk, akkor $P = P$, $Q = Q$, $P' = Q$, $Q' = P$, helyettesítendő, s a fentebbi egyenlet ezzé lesz:

$$(P-Q)(a+a')=\left(2(P+S)t+Gt'\right)(\alpha-\alpha')+\left(2(P+S)+G\right)R(B-B')$$
$$+(P+S)r(b-b')+(P+S')\varrho(\beta-\beta'). \quad 5)$$

Hogy ezen képletből $P-Q$ értékét meg lehessen határozni, szükséges tudni, hogy egy bizonyos p súlyocskának hány osztályrész felel meg a skálán. E végett tegyük a p súlyt a mérlegnek ugyanazon megterheltetésénél elébb az egyik, azután a másik serpenyőbe, és olvassuk le a skálán a nyelvnek megállapodási helyeit, legyenek ezek α'', és α''' akkor ezen egyenletek képződnek

$$\Big((P+p)a-Qa'\Big)+(Sa-S'a')=\Big(2(P+S)t+Gt'\Big)(\varphi+\alpha'')$$
$$+\Big(2(P+S)+G\Big)RB+(P+S)rb+(P+S)\varrho\beta.$$
$$\Big(Pa-(Q+p)a'\Big)+(Sa-S'a')=\Big(2(P+S)t+Gt'\Big)(\varphi+\alpha''')$$
$$+\Big(2(P+S)t+Gt'\Big)RB+(P+S)rb+(P+S)\varrho\beta.$$

s ezeket egymásból levonván, lesz

$$p\,(a+a')=\Big(2\,(P+S)\,t+Gt'\Big)(\alpha''-\alpha'''). \qquad 6)$$

Ha az 5) és 6) egyeleteket egymással elosztjuk, lesz:

$$P-Q=p\left(\frac{a-a'}{\alpha''-\alpha'''}\right)+p\frac{\big(2(P+S)+G\big)\;R(B-B')}{\big(2(P+S)t+Gt'\big)(\alpha''-\alpha''')}+p\frac{(P+S)r(b-b')}{\big(2(P+S)t+Gt'\big)(\alpha''-\alpha''')}$$
$$+\,p\,\frac{(P+S)\,\varrho\,(\beta-\beta')}{\big(2\,(P+S)\,t+Gt'\big)\,(\alpha''-\alpha''')}$$

Figyelembe vévén azonban, hogy

$$\frac{p}{\big(2\,(P+S)\,t+Gt'\big)\,(\alpha''-\alpha''')}=\frac{1}{a+a'}=\frac{1}{2a}$$

akkor a képlet ezzé válik:

$$P-Q=p\frac{a-a'}{\alpha''-\alpha'''}+\frac{2(P+S)+GR}{2\quad a}(B-B')+\frac{(P+S)r}{2\quad a}(b-b')+\frac{P+S\varrho}{2\quad a}(\beta-\beta') \qquad 7)$$

melyben a hibát jelentő tagok a fentebb, a közvetlen mérés esetében kifejtett 4) képlet megfelelő tagjaival azonosak.

Menjünk most át a hőmérsék befolyása folytán a mérlegkarokban beálló változások hatásának meghatározására. Használjuk a skála leolvasásait és a Gauss-féle módot, mint a melynél a hibák befolyását csekélyebbnek találtuk. Az egyensúly egyenletét most az előbbi hibák elhanyagolása folytán következő egyszerű alakban lehet felirni:

$$(P+S)\,a-(Q+S')\,a'=k\,\alpha$$

hol k egy állandó tényezőt jelent.

A mérlegelés második stadiumában a és a' megváltoztak $\varDelta a$ és $\varDelta a'$-el; lesz tehát:

$$(Q+S)\,(a+\varDelta\,a)-(P+S')\,(a'+\varDelta\,a')=k\,\alpha'$$

Ezeket egymásból levonván, lesz:

$$(P - Q)(a + a') = k(\alpha - \alpha') + (Q + S)\Delta a - (P + S')\Delta a'$$

vagy elegendő pontossággal:

$$(P - Q)(a + a') = k(\alpha - \alpha') + (P + S)(\Delta a - \Delta a')$$

Osszuk el ezt az adalék súlyra vonatkozó egyenlettel

$$p(a + a) = k(\alpha'' - \alpha''')$$

akkor lesz:

$$P - Q = p\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha'' - \alpha'''} + p\frac{(P + S)(\Delta a - \Delta a')}{k(\alpha'' - \alpha''')}$$

s minthogy $\frac{p}{k(\alpha'' - \alpha''')} = \frac{1}{a + a'} = \frac{1}{2a}$, az utóbbi egyenletet igy is lehet irni:

$$P - Q = \frac{p(\alpha - \alpha')}{\alpha'' - \alpha'''} + \frac{(P + S)}{2}\frac{(\Delta a - \Delta a')}{a} \qquad 8)$$

A jobb oldali második tag ábrázolja a hőmérsék befolyásából eredő hibát. Legyen p. o. $P = 20\,k = 20.10^6\,mg.$ $S = 2k = 2.10^6\,mg.$ $a = 300\,mm.$ növekedjék az egyik kar hőmérséke csak $\frac{1}{100}$°-al a másikéhoz képest, akkor $\frac{\Delta a - \Delta a'}{a} = \frac{a}{100.64000.a} = \frac{1}{64.10^5}$, tehát a hiba lesz $= \frac{22.10^6}{2.64.10^5} = 1{,}7\,mg.$ Akármi legyen azon physikai törvény, melyet a mérlegkarok változásai követnek, ha feltehetjük, hogy ezen törvény azon rövid idő lefolyása alatt, mely a mérlegelésre megkivántatik, állandó marad, a hibát az eredményből ki lehet ejteni az által, hogy a mérést kétszer egymásután, de ellenkező sorrendben viszszük véghez, s a nyert eredményekből a számtani középet veszszük. Ezen esetben a hiba az eredményre egyszer positiv, másszor negativ értelemben hat, de értékben ugyanaz marad, ennélfogva a számtani középből kiesik. Ezen szabályon alapszik a Bessel-féle eljárás.

Könnyü belátni, hogy ilyen módon a serpenyőkre ható valamely állandó légáram befolyása is kiesik a közép értékből.

A VILLANYSZIKRA SIKAMLÁSÁROL ÉS KÜLÖNOSEN AZ ELLENTÉTES VILLANYOSSÁGOK KIEGYENLÍTŐDÉSI HELYÉRŐL A SZIKRÁBAN.

Antolik Károly aradi gymnasiumi tanártól.

Ujabb vizsgálataim a villanyszikra sikamlását illetőleg tanuskodni látszanak, hogy az ellentétes villanyosságok kiegyenlítődése a szikrahossz bizonyos helyén történik. Ezen nézetemet már akkor fejeztem ki, midőn a villanyszikra sikamlásáról második értekezésemet közöltem a tudományos világgal *), de állitásomat még akkor nem volt módomban bebizonyitani.

A villanyszikra sikamlását illetőleg hazánkban leginkább *Schuller* Alajos és *Kont* Gyula tanár urak tettek elismerésre méltó kisérleteket.

Schuller úr a villanyszikra mechanikájával, *Kont* úr pedig a magy. tud. Akadémiának előterjesztett és a »Műegyetemi Lapokban«**) is közzétett értekezésében az ellentett villanyosságoknak a szikrában történő kiegyenlítődésével foglalkozott különösen. — Az ő vélekedése szerint azonban e kiegyenlítődésben nagy szerep jut a villanyos megosztásnak is. *Kont* úr azt igyekszik kimutatni, hogy a szikra tartama alatt az igenleges villanyosság a nemleges sarkhoz, a nemleges villanyosság pedig a tevőlegeshez áramlik, *de tagadja, hogy a kiegyenlítődés annak bizonyos pontján menne véghez.*

Többek közt *Schneebeli* és *Peters* idevágó kisérleteire nézve, — kik a kiegyenlítődési helyet a villanyszikrában szintén látni vélik, — *Kont* úr így nyilatkozik: »*Schneebeli* megjelöli a pontot, melyben a villanyosságok kiegyenlítődnének, *Peters* pedig a kiegyenlítődés helyét a szikra hosszának középső harmadrészébe helyezi.

»Ez az eredmény oly távol esik a villanyáramokról eddig alkotott fogalmainktól, hogy helyességét elismerve, vagy e fogalmainkat kellene megváltoztatni vagy a villanyszikrát az áramok sorából kitörölni.«

---

[1]) Pogg. Ann. 1875. — 154. k. p. 15.

[2]) II. kötet 11. füzet 19. old.

A következőkből úgy hiszem, világosan ki fog tűnni, miben egyeznek meg és miben térnek el egymástól egyrészt a *Kont* Gyula úr és általam végzett kisérletek, másrészt az azokból vont következtetések.

Én ujabb kisérleteimet leginkább légritkított térben tettem, még pedig azért, hogy a légkör által előidézett megosztási tüneményeket, melyek e kisérleteknél nagyon zavarólag hatnak, eltávolítsam.

Az alább következő kisérletekhez közönséges üveglemezeket használtam, melyek hossza 9, szélessége pedig 7 cm-nyi volt, s ezekre elektródok gyanánt egy cm-nyi széles és finom csúcsba végződő ónlemezeket ragasztottam, úgy, hogy a távolság e csúcsok között mindig 46 mm-nyi maradjon. Az üveglemezre fényezett látogató jegypapirt ragasztottam, melyet a lemezek kiszáritása után az óncsúcsok fölött átlyukasztván, egészen bekormoztam. Az igy előkészített üveglapot ónlemezzel bevont parafadugaszra állítottam függélyesen s evvel együtt a légszivattyú tányérjára helyeztem, gondoskodván arról, hogy a parafadugasznak ónfelülete és a légszivattyúnak tányérján levő rézgyürü között a fém-érintkezés tökéletes legyen. Ezután tágas üvegburát borítottam a lemez fölé, melynek másik elektródját a bura tetején alkalmazott és azon keresztül légmentesen járó rézpálczával kötöttem össze. A rézpálcza külső végére vastag rézlánczot kötöttem, mely egy elszigetelt kisütőhöz vezetett; a légszivattyú rézcsatornája hasonló rézlánczon által érintkezett a villanyos telep külső felületével. Most a 4 leydeni palaczkból álló és együttvéve 1821 □ cm-nyi belső fedélzetü telepet egy Holtz-féle villanygéppel egészen a kisugárzásig megtöltöttem. A megtöltés után tanácsos rendesen vagy 10 m.pig várakozni, míg ugyanis a telepben levő villanyosság nyugvásba nem jön. (Ezen fogás t. i. a villanyszikra rajzának szabályosságára befolyással van.) Végre rátettem a kisütő rézgombját a telep belső felületére és kisütöttem a telepet. Ebben a pillanatban a lemezen csinos és többnyire szabályos szikrakép keletkezik. (Hogy a kisütést mindig egyenlő gyorsasággal hajthassam végre, kisütő gépet készítettem magamnak. de miután azzal a kivánt eredményt el nem érhettem, későbben a kisütőt a telep belső felületének közelében úgy helyeztem állandóan, hogy a kellő pillanatban a telep maga-magát kisütötte.)

Az 1. ábra oly szikraképet mutat, mely 10 mm-nyi légnyomás mellett keletkezik, ha a telep tevőleges villanyossággal van megtöltve.

Tagadhatatlan, hogy a szikrakép *három* részre bontható fel. *Peters* idevágólag ezeket mondja: »In dem *positiven Drittel* des Blitzes macht sich die Natur der + *E.* geltend, in dem *negativen Drittel* die der — *E.*, und in dem *mittleren Drittel* findet die Vereinigung oder Ausgleichung der beiden entgegengesetzten *E. E.* statt, weshalb man dieses Drittel das *Ausgleichungs-drittel* nennen kann.«

Én is Peters beosztása mellett maradok, csak a kiegyenlítődési harmadot fogom »*kiegyenlítödési helynek*« nevezni, minthogy a legtöbb esetben az ellentétes villanyosságok kiegyenlítődése csak kis helyen, sokszor csak egy vonalban történik.

Az első ábra tevőleges harmadában egy belsö egyenes csíkot látunk, mely a kiegyenlítődési helyen megdagadottnak és élesen elmetszettnek tünik fel. A jelzett belső csík mindkét oldalán mellékcsíkok nyomai mutatkoznak, melyek a kiegyenlítődési helyen világos foltokká válnak. Ezen két folt a szikraképnek mindig legvilágosabb részét képezi; gyakran mentelékes alakkal birnak és a belső szikracsíktól csekély távolságban fekszenek. Némely esetben a két folt összefolyik és hosszukás, harántfekvő, szakadozott keritésü téglány-alakot képez. Olykor ismét meglehetős szabálytalansággal lépnek fel és összeesnek a két mellékcsíkkal. Nagyító segítségével könnyen meggyőzödhetünk arról, hogy a tevőleges harmadnak csíkja egész hosszában párhuzamosan futó, de itt-ott megszaggatott szálakból áll; a belső csík dagadt végében azonban a szálak tökéletesen elmosódnak. A mellékcsíkokban valamint a két foltban a szálaknak soha még nyomai sem vehetők észre. A kisebb, vagyis a nemleges szikraharmadban a belső csíknak csak gyönge és szálatlan nyomai láthatók; a mellékcsíkok is többnyire csak jelezve vannak.

Már ezen egyetlen kép is világosan mútatja, hogy a *kiegyenlítődési helyen két elleniránýú áramlat találkozott és egyik a másik által megközömbösíttetett.*

Igen nagy számú kisérleteket végeztem már a légritkított térben, de csak a legritkább esetekben kaptam oly szikraképet, melyen a kiegyenlítődés helye annyira el volt mosódva, hogy találkozás vonalat fel nem lelhettem.

A 2--3 mm-nyi nyomásra megritkított térben a kiegyenlítődés helyén csak három folt észlelhető és a csíkok nyomai csak akkor látszanak, ha a képet az ablaknak tartjuk, úgy, hogy az attól visszaverődött fénysugarak szemünkbe jussanak. Ily módon a belső csíkok még mindig észrevehetők, habár a mellékcsíkok nem is láthatók. Annyira soha sem voltam képes a levegőt megritkitani, hogy a szikraképnek épen semmi nyomát se találtam volna a bekormozott üveglemezen. Megjegyezhetem még, hogy a szikrák rajzai annál szabályosabbak, mennél ritkább levegőben állíttatnak elő. Ezen szabályosság azonban csekély légnyomás és erős telepek mellett oly különös módon változik, hogy annak részletesebb leírásába nem bocsátkozhatom. A ki a villanyszikra e sajátságos tüneményeit kellőleg akarja észlelni, annak magának kell megtennie a kisérletet, annyival is inkább, mivel az ilyen rendkívül finom szikraképeket állandósítani nem lehet.

A 2-ik ábrában oly szabályos szikraképet látunk, mely ugyanazon körülmények közt hozatott létre mint az előbbi, csakhogy a telepnek nemleges villanyossággal való megtöltése mellett. Ezen is felismerhetjük a képnek fentebb említett *három* részét, de azt találjuk, hogy a tevőleges harmad rövidebb a nemlegesnél s hogy a kiegyenlítődés helye is módositva van. A tevőleges harmadban fellépő mellékcsíkok itt is jól ki vannak fejlődve, holott a nemleges harmadban azoknak nyomai is alig vehetők észre. A két mellékfolt is a rendes helyen lép fel, ámbár szintén kissé módositva; a belső csík a nemleges negyedben is látható, de a kiegyenlítődési helyen nem lemetszve, hanem csak mintegy összezsugorodva.

A 3. és 4-ik ábra ugyancsak nemleges villanyossággal hozatott létre, de a befedési módszer alkalmazásával. (Azért mellékelem itt csak a nemleges villanyossággal létrehozott ábrákat, mert a tevőleges villanyossággal végzett kiserletek képét a Pogg. Ann. — 154. k. 29. old. 7. ábra — hozta.) A befedési módszer abban áll, hogy ez esetben két előkészített üveglemez boríttatik párhuzamosan egymás fölé, úgy hogy bekormozott felületükkel egymásnak állanak s köztük 1·25 mm.-nyi térköz marad. (A távoltartást kis üvegdarabokkal eszközölhetjük, melyeket pecsétviaszszal erősítünk a lemezek közé.) A befedési módszer e kisérleteknél már csak azért is ajánlható, mert általa a képek mind szabályosságban, mind tisztaságban igen sokat nyernek. A két utóbbi képnek részletes leirását mellőzöm, minthogy a mellékelt ábrák minden leirásnál többet mondanak. A kiegyenlítődési hely a befedési módszer mellett előállított szikraképeknél hiven követi a szabályt. *A belsö csík nem szenved változást, annál jobban vannak azonban változásnak alávetve a mellékcsíkok.*

Igen nagy számú kisérleteimből az derült ki, hogy *a tevőleges villanyossággal megtöltött telepek oly szikrarajzokat adnak, melyeknek tevőleges harmada mindig hosszabb a nemleges harmadnál.* A nemleges töltések azonban a kiegyenlítődési helyet illetőleg ingadozó eredményeket szolgáltatnak, *ezeknél ugyanis némelykor a tevőleges, máskor pedig a nemleges harmad mutatkozik hosszabbnak.*

Melyik tüunemény törvényszerű ezek közül, mindeddig nem sikerült eldöntenem, ámbár a látszólag befolyással biró körülményeket aggodalmas pontossággal tartottam szem előtt, u. m. a telepnek állandó szikrahossz mellett történő kisütését, annak a mérő palaczkkal eszközölhető egyenlő fokban való megtöltését, a belső- és külső vezetést, valamint a légnyomás egyenlőségét, ugy a töltés és kisütés közt lefolyt időtartam azonosságát és sok más, esetleg befolyható körülményt. Az üveglapok mikénti bekormozása csak a szikrakép tisztaságára van befolyással, de nem a szikraharmadok viszonylagos hosszaságára. (A bekormozás legalkalmasabb fokát akkor érjük el, ha a kormon át a papir szine még átlátszik.)

Daczára annak, hogy a szikraharmadok hosszát illetőleg a különböző töltések mellett a törvényszerűséget még nem sikerült megállapitanom, mégis azt hiszem, hogy *a szikra tevőleyes harmadának mindig hosszabbnak kell lennie a nemlegesnél*; mi különben — a tevőleges villanyosságnak nagyobb mozgékonyságot tulajdonitván — igen természetes volna. (A szikra tevőleges harmadának a telep nemleges megtöltése mellett mutatkozó eltérése úgy látszik, csakis a *telep üvegrészecskéinek* ingadozó változásaiban lelhetné magyarázatát, — l. *Oettingen* értekezését *Wiedemann* Ann. neue Folge II. kt. 305—326 pp.)

E helyen még megemlíthetőnek vélem, hogy hosszúra nyúlt kiegyenlítődési helyeket kaptam a szikraképekben akkor, ha a telephez vezető sodronyt vagy lánczot ugy szakítottam meg, hogy a villanyszikrának az elektródok távolságán kivül még 1—50 mm-nyire a szabad levegőn is át kellett ugrania. A kisérletek azt mutatták, hogy a kiegyenlítődési hely (különösen a nemleges töltések alkalmával) annál nagyobb területet foglalt el és annál közelebb jutott a nemleges elektródhoz, mennél nagyobb rés volt a vezető lánczba becsatolva. Csak ezen esetben lehet *Peters* szerint a kiegyenlítődési helyet »kiegyenlítődési harmadnak« nevezni.

Mielőtt ezekből némely következtetésekre térnék át, ki kell emelnem, hogy a koromrajzoknál, kivévén talán a befedési módszert, a villanyos megosztás tüneményei nem szerepelnek, holott a *Lichtenberg*-féle alakoknál épen azok a mérvadók. Gyakrabban és különböző körülmények közt hintettem be a fris koromrajzokat a használatos kénminium porkeverékkel, de a villanyosságnak nyomait sem vehettem észre a koromrajzokon; és ez természetes is, mivel a bekormozott üveglemezeken — ha ezek elegendő vastagok — a szikra sikamlása alkalmával az ellentétes villanyosságok tökéletesen közömbösíttetnek s a szikra csak mechanikai és elégési nyomokat hagy maga után, mig a megosztási tüneményeket egészen kizárja. (Ha azonban az üveglemezek igen vékonyak és a be nem kormozott oldalon jó vezetőkkel láttatnak el, akkor a megosztási tünemények a kormon is észrevehetők.*)

De hogy a villanyszikra sikamlásánál a megosztási tüneményeket is számba vehessem és a koromrajzokkal összehasonlíthassam, ujabban üveglombikokon a kén-minium porkeverék segítségével oly szikrarajzokat állítottam elő, melyek mindenesetre a koromrajzok és a Lichtenberg-féle alakok közötti átmenetet adják.

Minthogy egyrészt ezen kisérletekre a végkövetkeztetéseknél szükségem leend, másrészt pedig, mivel újak és a villanyszikra — kisütés mechanikájára vonatkozólag — meglepő szabályosságuknál fogva — új világosságot deritenek, czélszerűnek látom azokat e helyen megismertetni.

Ha jól megtisztított vékonyfalú üveglombikot 25—30° C foknyi vizzel megtöltünk és azt a Henley-féle kisütő elektródjai közé ugy állítjuk be, hogy a szikrahossz 8—10 cmnyi legyen, akkor a telep kisütése alkalmával a szikra a lombikon *elsikamlik*. Ha a szikra nyomát kén-minium porkeverékkel hintjük be, csodálatra méltó képet kapunk, mely gyakran a 2—3 literes lombiknak fél felületét is elfedi. (l. az 5 ábrát. Ha a müködő *Holtz* influctió gépnek két sűrítőjét kicsatoljuk és a két kisütő rézgolyó közé nagyobb lombikot tartunk, akkor a villanygép rézgolyóin összegyűlt villanyosságok a lombik felületén indított villanyosságokkal kiegyenlítődnek anélkül, hogy a szikra átsikamlanék. Ez esetben *Kont* ur szikraképeihez hasonló alakokat nyerünk.) Jelenleg az utóbbi kisérleteket bővebben fejtegetni nincs szándékomban, csakis a sikamló szikrákat veszem vizsgálat alá.

Mielőtt bővebb fejtegetésekbe bocsátkoznám, megemlítendőnek tartom, hogy a lombikban foglalt víznek feladata a villanyos megosztást elősegíteni; száraz belsejü lombikokon nem keletkeznek semmiféle alakok. (Természetes, hogy a vizet más jó vezetővel is lehet helyettesíteni. A víz magasabb hőmérsékének czélja a levegőben foglalt vízgőzöket a lombik felületéről távol tartani.)

Lássuk tehát az 5. ábrát.

Az elsikamlott villanyszikra két végpontja (vagyis sarka) körül két nagy zigzugos, de köralakhoz közelítő területet látunk. Ezentúl e két területet »sarkterületeknek« fogom nevezni.

---

*) Pogg. Ann. 154. k. 36. p.

A sarkterületek feltünően különböznek egymástól. A tevőleges sarkterület kikerekített és karajzolt párkányzata kivülről sugáros, belülről pedig sima; a nemleges sarkterületnél épen ellenkezőt tapasztalunk. A tevőleges sarkterület párkányzatát kénpor, a nemlegesét pedig miniumpor jellemzi. A tevőleges sarkterület középpontjától, — hol t. i. a szikra tevőleges vége csapott a lombikra, — széles miniumcsíkok terjednek el minden irányban. A miniumcsíkok közt itt-ott pormentes gyökéralakú foszlányok futnak tova, melyek leginkább a középpont körül feltünőek, különösen akkor, ha az alak jól ki van fejlődve. A miniumcsíkok egészen a kénpárkányzatig nyulnak, hol az utóbbival azonos karajzatokat vesznek fel, de a kénes párkányzattól pormentes közök által vannak elválasztva. Ezen kivül a kénpárkányzattól a miniumcsíkok közé kén-czafrangok nyúlnak a sarkterület belsejébe.

A nemleges sarkterület középpontjától, — hol t. i. a szikra nemleges vége csapott a lombikra, — minden irányban élesen kifejlődött kénágak sugároznak ki, melyek egészen a miniumpárkányzatig érnek. A miniumpárkányzattól a sarkterület belsejébe és az egyes kénágak közé most miniumczafrangok hatolnak, melyek a sarkterület középpontja felé tartanak. A kénágak és a miniumczafrangok közötti rendkivül élesen határolt térrészek pormentesek.

Forditsuk végre figyelmünket magára a sikamló szikra utjára, mely a két sarkterület középpontjait köti össze.

A szikranyom egy széles és határozott szegélyű szalag által van jelezve, mely két egyenlőtlen félből áll. *A szikraszalag tevőleges fele,* mely a koromalakok tevőleges harmadának felel meg, *hosszabb és mindenütt miniumporral van befedve,* szélei pedig kissé érdesek. *A nemleges és egyszersmind kisebb fél* simább szélekkel bir és *kénminium* keverékkel van bevonva, *esetleg üres;* mindkét oldala mellett azonban párhuzamos *kéncsíkok* vonulnak el egészen a kiegyenlítődés helyéig. A szikraszalag két fele a kiegyenlítődési helyen változtatja meg természetét, ahol a két párkányzat is át van törve. A kiegyenlítődési helyen a két sarkterület belsejének átvonuló alkatrészei is megváltoztatják ugyan jellegüket, de észrevehetetlenül folynak egymásba.

Ha a szikracsík útja nincsen elég tisztán kifejlődve, akkor az út mindenik fele saját sarkterülete belső részeinek megfelelő természetét veszi fel, de a kiegyenlítődési helyet mindamellett fel lehet még találni.

A kén-minium alakok létrehozásánál a szikra igen gyakran szétoszlik két sőt több ágra is, mi által magától érthetőleg *a kiegyenlítődési hely is módosul, de főjellegéből még akkor sem veszit.*

Megemlíthetem még végöl, hogy a két sarkterület külső párkányzata körül pormentes árnyalatok hiven követik a párkányzat egyes kanyarulatait és dudorodásait; a minium-párkányzat pormentes hajlásaiban kénporos nyujtványok láthatók, melyek villanyos természetet árulnak el.

A sötét elliptikus folt a tevőleges sarkterület középpontjában a ritkább tüneményck közé tartozik, mert e helyen a szikravégnek rendesen csak erősebb kinyomatát találjuk.

Úgy hiszem, hogy az egyes, kissé nehezebben érthető helyeket az ide mellékelt 5-ik ábra eléggé kimagyarázza; különben ezen kisérletek a legkönnyebbek közé tartoznak és mindig sikerülnek. A sarkterületek elkülönitve is létre hozhatók s rendkivül jól fejlődnek ki, ha a Henley-féle kisütőnek egyik elektródját a lombik belsejével kötjük össze és csak a másik elektródot illesztjük a lombik felületére, csakhogy minden ily kisérletnél a lombik tönkre megy.

A villanyos megosztási folyamatnak magyarázatát mellőzhetőnek vélem, annyival is inkább, mivel az e tárgyra vonatkozó és P. Th. *Riess* által felállított nézeteket*) az általam észlelt tényekkel teljesen megegyezőknek találtam. Még csak azt akarom megjegyezni, hogy a tevőleges villanyosság ezen épen tárgyalt alakoknál is, — a vele egyidejüleg sikamló és alkalmasint dissociált gázakból álló anyag-árammal együtt, — utját a szikrahosszban gyorsabban teszi meg, mint a nemleges villanyosság. Némelykor a tevőleges villanyosság egészen a nemleges elektródig eljut s a nemleges áramot meghasítja, úgy hogy ez utóbbi ketté feslik s magába zárja a tevőleges áramot, mi közben a két ellentétes villanyosság közömbösitése történik. E mellett figyelemre méltó még az is, hogy az ellenirányú nemleges villanyosság a kiegyenlítődési helyet *soha* sem látszik átlépni, — én legalább nem tudok rá esetet, — ámbár az őt követő anyagáram a tevőleges elektródot is elérheti.

Az ide tartozó kisérletek valamennyiéből és az azokon tett észleletekből a következőket vonhatjuk le:

1. *A villanyszikra hosszában létezik két ellenirányú és dissociált gázokból álló anyagáram, mely az ellenkező elektródok felé tart és a két ellentétes villanyosságnak vezetőül szolgál*; vagy jobban mondva: *a két áram ellenkezöleg villanyos.* (Idáig *Kont* úr nézete az enyimmel megegyezik.)

---

*) Riess. Lehre v. d. Reibungselektricität 2. Bd. pag. 212 és Abbaudlungen v. d. Reibungselektricität pag. 285.

2. *A tevöleges villanyosság és a vele sikamló dissociált gázok a szikra hosszában gyorsabban haladnak, mint a nemleges villanyosság és a neki megfelelö anyagáram, legyen ez légritkított térben, vagy pedig a normalis nyomású légkörben.*

3. *A szikrahosszban létezik egy kiegyenlítődési hely, melyben a két villanyosság közömbösül* (itt *Kont* úr nézete az enyimtől eltér), *habár az ellentétes anyagáramok az ellenkező elektródokat legalább részben elérik.* A dissociált gázok legnagyobb része úgy látszik már a szikra hosszában egyesül.

4. *Azon esetekben, midőn a tevőleges villanyosság a nemleges elektródot nem érhette el, a két villanyosságnak egyesülése a szikrahossz kiegyenlítődési helyén történt meg végképen.* Ezt a miniumkén, de különösen a légritkított térben előállított koromképek elég világosan bizonyitják. A koromrajzok kiegyenlítődési helyén t. i. a belső csík vagy élesen el van metszve, vagy pedig egy interferenz-vonal van rajta keresztülfektetve, mely vonal kőrül maguk a mellékcsíkok interferálnak, miről az ide mellékelt rajzok eléggé tanúskodnak. Annak oka, hogy némelykor a tevőleges villanyosság a nemleges elektródot elérni képes, alkalmasínt a tevőleges villanyosság nagyobb mozgékonyságában keresendő. Különösen a tevőleges villanyosság nagyobb mozgékonysága mellett még az is tanúskodik, hogy a kén-minium-alakoknál a tevőleges sarkterület mindig nagyobb, mint a nemleges.

5. *A tevöleges áramlat mindig nagyobb mennyiségü gázokat visz magával, mint a nemleges.* Ez állítás mellett azon tény tanuskodik, hogy a koromrajzok tevőleges harmadában sokkal több korom sepertetik, illetőleg égettetik el, mint a nemleges harmadban.

6. *A tevöleges harmad hoszza* (mérve a legbensőbb csík interferenz-vonalától) *úgy viszonylik az egész szikrahosszhoz, valamint 0.6 az 1-hez; a nemlegesé pedig ugy mint 0.4 : 1.*

E szerint a tevöleges villanyosság útja a szikrahosszban 0·2-del nagyobb, mint a nemleges villanyosságé.

Számtalan koromrajz, de a kénminium-rajzok is biztositani látszanak ezen eredményeket. A kénminium alakoknál nincsenek ugyan harántfekvő interferenz-vonalak, de a két villanyosság kiegyenlítődési helye közelítőleg mégis meghatározható.

Remélem, hogy más alkalommal az épen említett viszonyszámokat még nagyobb pontossággal fogom előadhatni.

Aradon, 1878. január hó.

NÉHÁNY COVARIÁNS JELLEGGEL BIRÓ DETERMINÁNS ALAKRÓL.

Scholtz Ágoston főgymn. igazgatótól.

Ugyanazon sikban fekvő $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ pontnak az a tulajdonsága, hogy e pontok ugyanazon n-ed rendü görbe vonalon fekszenek és $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ egyenesnek az a tulajdonsága, hogy ezek ugyanazt az n-ed osztályu görbe vonalat érintik, projektiv vonatkozások. Szintúgy projektiv vonatkozás $\frac{1}{6}(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ pontnak, illetőleg siknak az a helyzete, mely szerint amazok ugyanazon n-ed rendü görbe felületnek a pontja, emezek ugyanazt az n-ed osztályu görbe felületet érintik. Tudva van, hogy ilyen vonatkozásokat invariánsok vagy covariánsok eltűnése fejez ki.*) Jelen esetünkben tehát a koordináták azon functiojának, melynek megsemmisűlése a pontok, egyenesek, illetőleg sikok emlitett helyzetének anolytikai aequivalense, covariáns természetű alakzatnak kell lenni. Ez állitást a következőkben $n = 1, 2, 3$ esetben mind a sikra, mind a térre nézve bebizonyitjuk.

I. a) $n = 1$ esetben legyenek $x_i\, y_i\, z_i$ $(i = \alpha, \beta, \gamma)$ a három pont, illetőleg egyenesnek koordinátái.

$$\begin{vmatrix} x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ x_\beta & y_\beta & z_\beta \\ x_\gamma & y_\gamma & z_\gamma \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma)$$

lévén, $(\alpha\beta\gamma)$ determináns eltünése fejezi ki, hogy az α, β, γ pontok ugyanazon egyenesben fekszenek, illetőleg (vonalösszrendezőkben) az α, β, γ egyenesek ugyanazon ponton átmennek. Hogy $(\alpha\beta\gamma)$ alakzat covariáns, a determinánsok egyik sarkalatos tulajdonságából következik. Ha ugyanis $x_{i'}, y_{i'}, z_{i'}, (i' = \alpha', \beta', \gamma')$ az α, β, γ pontoknak megfelelő pontok koordinátái, melyeket eme pontokéival az

*) Alig szükséges emliteni, hogy ez inváriáns vagy cováriáns jelleg nem vonatkozik az n-edtokú görbe vagy fölület egyenletére, melynek sem állandói, sem változói a vizsgálandó alakzatokban elő nem fordulnak. E kifejezések ú. n. absolut covariánsok, mely csupán oly mennyiségekből van összerakva, melyek a vizsgálat folytában azonos lineár átalakitásoknak lesznek alávetve.

$$\begin{array}{lll} x_{\alpha'}=a_1x_\alpha+b_1y_\alpha+c_1z_\alpha & x_{\beta'}=a_1x_\beta+b_1y_\beta+c_1z_\beta & x_{\gamma'}=a_1x_\gamma+b_1y_\gamma+c_1z_\gamma \\ y_{\alpha'}=a_2x_\alpha+b_2y_\alpha+c_2z_\alpha & y_{\beta'}=a_2x_\beta+b_2y_\beta+c_2z_\beta & y_{\gamma'}=a_2x_\gamma+b_2y_\gamma+c_2z_\gamma \\ z_{\alpha'}=a_3x_\alpha+b_3y_\alpha+c_3z_\alpha & z_{\beta'}=a_3x_\beta+b_3y_\beta+c_3z_\beta & z_{\gamma'}=a_3x_\gamma+b_3y_\gamma+c_3z_\gamma \end{array}$$

lineár egyenletek összekapcsolnak, akkor

$$(\alpha'\beta'\gamma')=\begin{vmatrix} x_{\alpha'} y_{\alpha'} z_{\alpha'} \\ x_{\beta'} y_{\beta'} z_{\beta'} \\ x_{\gamma'} y_{\gamma'} z_{\gamma'} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1x_\alpha+b_1y_\alpha+c_1z_\alpha & a_2x_\alpha+b_2y_\alpha+c_2z_\alpha & a_3x_\alpha+b_3y_\alpha+c_3z_\alpha \\ a_1x_\beta+b_1y_\beta+c_1z_\beta & a_2x_\beta+b_2y_\beta+c_2z_\beta & a_3x_\beta+b_3y_\beta+c_3z_\beta \\ a_1x_\gamma+b_1x_\gamma+c_1z_\gamma & a_2x_\gamma+b_2y_\gamma+c_2z_\gamma & a_3x_\gamma+b_3y_\gamma+c_3z_\gamma \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha \\ x_\beta & y_\beta & z_\beta \\ x_\gamma & y_\gamma & z_\gamma \end{vmatrix}$$

azaz

$$(\alpha'\beta'\gamma')=(a_1b_2c_3).(\alpha\beta\gamma)\ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

Ez az egyenlet $(\alpha\beta\gamma)$ determinánsnak covariáns voltát mondja ki.

b) A térben legyenek $x_i\ y_i\ z_i\ p_i$ ($i=\alpha, \beta, \gamma, \delta$) a négy pont, illetőleg siknak koordinátái, melyeknek

$$\begin{vmatrix} x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha & p_\alpha \\ x_\beta & y_\beta & z_\beta & p_\beta \\ x_\gamma & y_\gamma & z_\gamma & p_\gamma \\ x_\delta & y_\delta & z_\delta & p_\delta \end{vmatrix}$$

determinánsát $(\alpha\beta\gamma\delta)$-vel jelöljük. E determináns eltünése föltétele annak, hogy az α, β, γ, δ pontok ugyanazon sikban fekszenek, illetőleg az α, β, γ, δ sikok ugyanazon ponton keresztül mennek. Ha $x_{i'}\ y_{i'}\ z_{i'}\ p_{i'}$ ($i'=\alpha'\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$) a transformált koordináták és

$$\begin{array}{ll} x_{\alpha'}=a_1x_\alpha+b_1y_\alpha+c_1z_\alpha+d_1p_\alpha & x_{\beta'}=a_1x_\beta+b_1y_\beta+c_1z_\beta+d_1p_\beta \\ y_{\alpha'}=a_2x_\alpha+b_2y_\alpha+c_2z_\alpha+d_2p_\alpha & y_{\beta'}=a_2x_\beta+b_2y_\beta+c_2z_\beta+d_2p_\beta \\ z_{\alpha'}=a_3x_\alpha+b_3y_\alpha+c_3z_\alpha+d_3p_\alpha & z_{\beta'}=a_3x_\beta+b_3y_\beta+c_3z_\beta+d_3p_\beta \\ p_{\alpha'}=a_4x_\alpha+b_4y_\alpha+c_4z_\alpha+d_4p_\alpha & p_{\beta'}=a_4x_\beta+b_4y_\beta+c_4z_\beta+d_4p_\beta \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} x_{\gamma'}=a_1x_\gamma+b_1y_\gamma+c_1z_\gamma+d_1p_\gamma & x_{\delta'}=a_1x_\delta+b_1y_\delta+c_1z_\delta+d_1p_\delta \\ y_{\gamma'}=a_2x_\gamma+b_2y_\gamma+c_2z_\gamma+d_2p_\gamma & y_{\delta'}=a_2x_\delta+b_2y_\delta+c_2z_\delta+d_2p_\delta \\ z_{\gamma'}=a_3x_\gamma+b_3y_\gamma+c_3z_\gamma+d_3p_\gamma & z_{\delta'}=a_3x_\delta+b_3x_\delta+c_3z_\delta+d_3p_\delta \\ p_{\gamma'}=a_4x_\gamma+b_4y_\gamma+c_4z_\gamma+d_4p_\gamma & p_{\delta'}=a_4x_\delta+b_4y_\delta+c_4z_\delta+d_4p_\delta, \end{array}$$

a determinánsoknak fentebb emlitett sarkalatos tulajdonságánál fogva

$$(\alpha'\beta'\gamma'\delta') = (a_1 b_2 c_3 d_4)\,(\alpha\beta\gamma\delta) \ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

Ez egyenlet bizonyitja $(\alpha\beta\gamma\delta)$ covariáns voltát.

II. a) Hogy $x_i y_i z_i$ $(i = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi)$ pontok ugyanazon kúpszeleten fekszenek vagy (vonal-összrendezőket értve $x_i y_i z_i$ alatt) α, β, γ, δ, ε, ξ egyenesek ugyanazt a kupszeletet érintik,

$$\begin{vmatrix} x_\alpha^2 & y_\alpha^2 & z_\alpha^2 & y_\alpha z_\alpha & z_\alpha x_\alpha & x_\alpha y_\alpha \\ x_\beta^2 & y_\beta^2 & z_\beta^2 & y_\beta z_\beta & z_\beta x_\beta & x_\beta y_\beta \\ x_\gamma^2 & y_\gamma^2 & z_\gamma^2 & y_\gamma z_\gamma & z_\gamma x_\gamma & x_\gamma y_\gamma \\ x_\delta^2 & y_\delta^2 & z_\delta^2 & y_\delta z_\delta & z_\delta x_\delta & x_\delta y_\delta \\ x_\varepsilon^2 & y_\varepsilon^2 & z_\varepsilon^2 & y_\varepsilon z_\varepsilon & z_\varepsilon x_\varepsilon & x_\varepsilon y_\varepsilon \\ x_\xi^2 & y_\xi^2 & z_\xi^2 & y_\xi z_\xi & z_\xi x_\xi & x_\xi y_\xi \end{vmatrix} = S_{3,2}$$

determinánsnak megsemmisülése mondja ki. A »Műegyetemi Lapok« 13. füzetében a 70. lapon a következő egyenletet bizonyitottuk:

$$(\alpha\beta\gamma)^2.\, S_{3,2} = \begin{vmatrix} (\delta\gamma\alpha)\,(\delta\alpha\beta) & (\varepsilon\gamma\alpha)\,(\varepsilon\alpha\beta) & (\xi\gamma\alpha)\,(\xi\alpha\beta) \\ (\delta\alpha\beta)\,(\delta\beta\gamma) & (\varepsilon\alpha\beta)\,(\varepsilon\beta\gamma) & (\xi\alpha\beta)\,(\xi\beta\gamma) \\ (\delta\beta\gamma)\,(\delta\gamma\alpha) & (\varepsilon\beta\gamma)\,(\varepsilon\gamma\alpha) & (\xi\beta\gamma)\,(\xi\gamma\alpha) \end{vmatrix}$$

A transformált koordinátákra nézve ugyanazon alakú egyenlet áll fenn:

$$(\alpha'\beta'\gamma')^2.S'_{3,2} = \begin{vmatrix} (\delta'\gamma'\alpha')\,(\delta'\alpha'\beta') & (\varepsilon'\gamma'\alpha')\,(\varepsilon'\alpha'\beta') & (\xi'\gamma'\alpha')\,(\xi'\alpha'\beta') \\ (\delta'\alpha'\beta')\,(\delta'\beta'\gamma') & (\varepsilon'\alpha'\beta')\,(\varepsilon'\beta'\gamma') & (\xi'\alpha'\beta')\,(\xi'\beta'\gamma') \\ (\delta'\beta'\gamma')\,(\delta'\gamma'\alpha') & (\varepsilon'\beta'\gamma')\,(\varepsilon'\gamma'\alpha') & (\xi'\beta'\gamma')\,(\xi'\gamma'\alpha') \end{vmatrix}.$$

Ámde 1) szerint $(\alpha'\beta'\gamma') = (a_1 b_2 c_3)\,(\alpha\beta\gamma)$, $(\delta'\gamma'\alpha') = (a_1 b_2 c_3)$ $(\delta\gamma\alpha)$, $\delta'\alpha'\beta') = (a_1 b_2 c_3)\,(\delta\alpha\beta)$ s. t. b. Ennek folytán

$$(a_1 b_2 c_3)^2.\, (\alpha\beta\gamma)^2.\, S'_{3,2} = (a_1 b_2 c_3)^6.\, (\alpha\beta\gamma)^2.\, S_{3,2},$$

vagyis

$$S'_{3,2} = (a_1 b_2 c_3)^4.\, S_{3,2}.$$

Tehát $S_{3,2}$ covariáns.

b) Annak föltételét, hogy $x_i y_i z_i p_i$ $(i = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi, \eta, \vartheta, \iota, \varkappa$ pontok, ugyanazon másodrendü felületen fekszenek, illetőleg α, β, γ, δ, ε, ξ, η, ϑ, ι, $\varkappa$ sikok ugyanannak a másodosztályu felületnek érintősikjai:

$$\begin{vmatrix}
x_\alpha^2 & y_\alpha^2 & z_\alpha^2 & p_\alpha^2 & y_\alpha z_\alpha & z_\alpha x_\alpha & x_\alpha y_\alpha & x_\alpha p_\alpha & y_\alpha p_\alpha & z_\alpha p_\alpha \\
x_\beta^2 & y_\beta^2 & z_\beta^2 & p_\beta^2 & y_\beta z_\beta & z_\beta x_\beta & x_\beta y_\beta & x_\beta p_\beta & y_\beta p_\beta & z_\beta p_\beta \\
x_\gamma^2 & y_\gamma^2 & z_\gamma^2 & p_\gamma^2 & y_\gamma z_\gamma & z_\gamma x_\gamma & x_\gamma y_\gamma & x_\gamma p_\gamma & y_\gamma p_\gamma & z_\gamma p_\gamma \\
x_\delta^2 & y_\delta^2 & z_\delta^2 & p_\delta^2 & y_\delta z_\delta & z_\delta x_\delta & x_\delta y_\delta & x_\delta p_\delta & y_\delta p_\delta & z_\delta p_\delta \\
x_\varepsilon^2 & y_\varepsilon^2 & z_\varepsilon^2 & p_\varepsilon^2 & y_\varepsilon z_\varepsilon & z_\varepsilon x_\varepsilon & x_\varepsilon y_\varepsilon & x_\varepsilon p_\varepsilon & y_\varepsilon p_\varepsilon & z_\varepsilon p_\varepsilon \\
x_\xi^2 & y_\xi^2 & z_\xi^2 & p_\xi^2 & y_\xi z_\xi & z_\xi x_\xi & x_\xi y_\xi & x_\xi p_\xi & y_\xi p_\xi & z_\xi p_\xi \\
x_\eta^2 & y_\eta^2 & z_\eta^2 & p_\eta^2 & y_\eta z_\eta & z_\eta x_\eta & x_\eta y_\eta & x_\eta p_\eta & y_\eta p_\eta & z_\eta p_\eta \\
x_\vartheta^2 & y_\vartheta^2 & z_\vartheta^2 & p_\vartheta^2 & y_\vartheta z_\vartheta & z_\vartheta x_\vartheta & x_\vartheta y_\vartheta & x_\vartheta p_\vartheta & y_\vartheta p_\vartheta & z_\vartheta p_\vartheta \\
x_\iota^2 & y_\iota^2 & z_\iota^2 & p_\iota^2 & y_\iota z_\iota & z_\iota x_\iota & x_\iota y_\iota & x_\iota p_\iota & y_\iota p_\iota & z_\iota p_\iota \\
x_\varkappa^2 & y_\varkappa^2 & z_\varkappa^2 & p_\varkappa^2 & y_\varkappa z_\varkappa & z_\varkappa x_\varkappa & x_\varkappa y_\varkappa & x_\varkappa p_\varkappa & y_\varkappa p_\varkappa & z_\varkappa p_\varkappa
\end{vmatrix} = S_{4,2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

determinánsnak eltünése fejezi ki. E determináns átalakitása végett bebizonyitjuk, hogy

$$\begin{vmatrix}
x_\alpha^2 & y_\alpha^2 & z_\alpha^2 & p_\alpha^2 & 2y_\alpha z_\alpha & 2z_\alpha x_\alpha & 2x_\alpha y_\alpha & 2x_\alpha p_\alpha & 2y_\alpha p_\alpha & 2z_\alpha p_\alpha \\
x_\beta^2 & y_\beta^2 & z_\beta^2 & p_\beta^2 & 2y_\beta z_\beta & 2z_\beta x_\beta & 2x_\beta y_\beta & 2x_\beta p_\beta & 2y_\beta p_\beta & 2z_\beta p_\beta \\
x_\gamma^2 & y_\gamma^2 & z_\gamma^2 & p_\gamma^2 & 2y_\gamma z_\gamma & 2z_\gamma x_\gamma & 2x_\gamma y_\gamma & 2x_\gamma p_\gamma & 2y_\gamma p_\gamma & 2z_\gamma p_\gamma \\
x_\delta^2 & y_\delta^2 & z_\delta^2 & p_\delta^2 & 2y_\delta z_\delta & 2z_\delta x_\delta & 2x_\delta y_\delta & 2x_\delta p_\delta & 2y_\delta p_\delta & 2z_\delta p_\delta \\
x_\beta x_\gamma & y_\beta y_\gamma & z_\beta z_\gamma & p_\beta p_\gamma & y_\beta z_\gamma + y_\gamma z_\beta & z_\beta x_\gamma + z_\gamma x_\beta & x_\beta y_\gamma + x_\gamma y_\beta & x_\beta p_\gamma + x_\gamma p_\beta & y_\beta p_\gamma + y_\gamma p_\beta & z_\beta p_\gamma + z_\gamma p_\beta \\
x_\gamma x_\alpha & y_\gamma y_\alpha & z_\gamma z_\alpha & p_\gamma p_\alpha & y_\gamma z_\alpha + y_\alpha z_\gamma & z_\gamma x_\alpha + z_\alpha x_\gamma & x_\gamma y_\alpha + x_\alpha y_\gamma & x_\gamma p_\alpha + x_\alpha p_\gamma & y_\gamma p_\alpha + y_\alpha p_\gamma & z_\gamma p_\alpha + z_\alpha p_\gamma \\
x_\alpha x_\beta & y_\alpha y_\beta & z_\alpha z_\beta & p_\alpha p_\beta & y_\alpha z_\beta + y_\beta z_\alpha & z_\alpha x_\beta + z_\beta x_\alpha & x_\alpha y_\beta + x_\beta y_\alpha & x_\alpha p_\beta + x_\beta p_\alpha & y_\alpha p_\beta + y_\beta p_\alpha & z_\alpha p_\beta + z_\beta p_\alpha \\
x_\alpha x_\delta & y_\alpha y_\delta & z_\alpha z_\delta & p_\alpha p_\delta & y_\alpha z_\delta + y_\delta z_\alpha & z_\alpha x_\delta + z_\delta x_\alpha & x_\alpha y_\delta + x_\delta y_\alpha & x_\alpha p_\delta + x_\delta p_\alpha & y_\alpha p_\delta + y_\delta p_\alpha & z_\alpha p_\delta + z_\delta p_\alpha \\
x_\beta x_\delta & y_\beta y_\delta & z_\beta z_\delta & p_\beta p_\delta & y_\beta z_\delta + y_\delta z_\beta & z_\beta x_\delta + z_\delta x_\beta & x_\beta y_\delta + x_\delta y_\beta & x_\beta p_\delta + x_\delta p_\beta & y_\beta p_\delta + y_\delta p_\beta & z_\beta p_\delta + z_\delta p_\beta \\
x_\gamma x_\delta & y_\gamma y_\delta & z_\gamma z_\delta & p_\gamma p_\delta & y_\gamma z_\delta + y_\delta z_\gamma & z_\gamma x_\delta + z_\delta x_\gamma & x_\gamma y_\delta + x_\delta y_\gamma & x_\gamma p_\delta + x_\delta p_\gamma & y_\gamma p_\delta + y_\delta p_\gamma & z_\gamma p_\delta + z_\delta p_\gamma
\end{vmatrix} = r_{4,2}$$

determináns $(\alpha\beta\gamma\delta)^5$ mennyiséggel egyenlő.

Legyenek $X_\alpha,$ $X_\beta,$ $X_\gamma,$ $X_\delta,$ az $(\alpha\beta\gamma\delta)$ determinánsnak $x_\alpha,$ $x_\beta,$ $x_\gamma,$ x_δ elemei szerint való minorjai, vagyis

$$X_\alpha = \begin{vmatrix} y_\beta & z_\beta & p_\beta \\ y_\gamma & z_\gamma & p_\gamma \\ y_\delta & z_\delta & p_\delta \end{vmatrix}, \; X_\beta = -\begin{vmatrix} y_\gamma & z_\gamma & p_\gamma \\ y_\delta & z_\delta & p_\delta \\ y_\alpha & z_\alpha & p_\alpha \end{vmatrix}, \; X_\gamma = \begin{vmatrix} y_\delta & z_\delta & p_\delta \\ y_\alpha & z_\alpha & p_\alpha \\ y_\beta & z_\beta & p_\beta \end{vmatrix}, \; X_\gamma = -\begin{vmatrix} y_\alpha & z_\alpha & p_\alpha \\ y_\beta & z_\beta & p_\beta \\ y_\gamma & z_\gamma & p_\gamma \end{vmatrix}.$$

Az

$$r_{4,2} = (\alpha\beta\gamma\delta)^5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

egyenlet helyességének bebizonyitása végett szorozzuk $r_{4,2}$ determináns első sorát X_α, másodikát X_β, harmadikát X_γ és negyedikét X_δ minorral. Azután adjuk hozzá

az első sorához az X_γ, X_β illetőleg X_δ minorral szorzott 6-dik, 7-dik, illetőleg 8-dik sorát,
a második sorához az X_α, X_γ » X_δ » » 7 » 5 » » 9 » »
a harmadik sorához az X_β, X_α » X_δ » » 5 » 6 » » 10 » » és
végre a negyedik sorához az X_α, X_β » X_γ » » 8 » 9 » » 10 » »

Tekintve az

$$
\begin{aligned}
x_\alpha X_\alpha + x_\beta X_\beta + x_\gamma X_\gamma + x_\delta X_\delta &= (\alpha\beta\gamma\delta),\\
y_\alpha X_\alpha + y_\beta X_\beta + y_\gamma X_\gamma + y_\delta X_\delta &= 0\\
z_\alpha X_\alpha + z_\beta X_\beta + z_\gamma X_\gamma + z_\delta X_\delta &= 0\\
p_\alpha X_\alpha + p_\beta X_\beta + p_\gamma X_\gamma + p_\delta X_\delta &= 0
\end{aligned}
$$

egyenleteket, az emlitett átalakitás eredménye ez:

$$
X_\alpha X_\beta X_\gamma X_\delta . r_{4,2} = \begin{vmatrix}
x_\alpha(\alpha\beta\gamma\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & z_\alpha(\alpha\beta\gamma\delta) & y_\alpha(\alpha\beta\gamma\delta) & p_\alpha(\alpha\beta\gamma\delta) & 0 & 0\\
x_\beta(\alpha\beta\gamma\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & z_\beta(\alpha\beta\gamma\delta) & y_\beta(\alpha\beta\gamma\delta) & p_\beta(\alpha\beta\gamma\delta) & 0 & 0\\
x_\gamma(\alpha\beta\gamma\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & z_\gamma(\alpha\beta\gamma\delta) & y_\gamma(\alpha\beta\gamma\delta) & p_\gamma(\alpha\beta\gamma\delta) & 0 & 0\\
x_\delta(\alpha\beta\gamma\delta) & 0 & 0 & 0 & 0 & z_\delta(\alpha\beta\gamma\delta) & y_\delta(\alpha\beta\gamma\delta) & p_\delta(\alpha\beta\gamma\delta) & 0 & 0\\
x_\beta x_\gamma & y_\beta y_\gamma & z_\beta z_\gamma & p_\beta p_\gamma & y_\beta z_\gamma + y_\gamma z_\beta & z_\beta x_\gamma + z_\gamma x_\beta & x_\beta y_\gamma + x_\gamma y_\beta & x_\beta p_\gamma + x_\gamma p_\beta & y_\beta p_\gamma + y_\gamma p_\beta & z_\beta p_\gamma + z_\gamma p_\beta\\
x_\gamma x_\alpha & y_\gamma y_\alpha & z_\gamma z_\alpha & p_\gamma p_\alpha & y_\gamma z_\alpha + y_\alpha z_\gamma & z_\gamma x_\alpha + z_\alpha x_\gamma & x_\gamma y_\alpha + x_\alpha y_\gamma & x_\gamma p_\alpha + x_\alpha p_\gamma & y_\gamma p_\alpha + y_\alpha p_\gamma & z_\gamma p_\alpha + z_\alpha p_\gamma\\
x_\alpha x_\beta & y_\alpha y_\beta & z_\alpha z_\beta & p_\alpha p_\beta & y_\alpha z_\beta + y_\beta z_\alpha & z_\alpha x_\beta + z_\beta x_\alpha & x_\alpha y_\beta + x_\beta y_\alpha & x_\alpha p_\beta + x_\beta p_\alpha & y_\alpha p_\beta + y_\beta p_\alpha & z_\alpha p_\beta + z_\beta p_\alpha\\
x_\alpha x_\delta & y_\alpha y_\delta & z_\alpha z_\delta & p_\alpha p_\delta & y_\alpha z_\delta + y_\delta z_\alpha & z_\alpha x_\delta + z_\delta x_\alpha & x_\alpha y_\delta + x_\delta y_\alpha & x_\alpha p_\delta + x_\delta p_\alpha & y_\alpha p_\delta + y_\delta p_\alpha & z_\alpha p_\delta + z_\delta p_\alpha\\
x_\beta x_\delta & y_\beta y_\delta & z_\beta z_\delta & p_\beta p_\delta & y_\beta z_\delta + y_\delta z_\beta & z_\beta x_\delta + z_\delta x_\beta & x_\beta y_\delta + x_\delta y_\beta & x_\beta p_\delta + x_\delta p_\beta & y_\beta p_\delta + y_\delta p_\beta & z_\beta p_\delta + z_\delta p_\beta\\
x_\gamma x_\delta & y_\gamma y_\delta & z_\gamma z_\delta & p_\gamma p_\delta & y_\gamma z_\delta + y_\delta z_\gamma & z_\gamma x_\delta + z_\delta x_\gamma & x_\gamma y_\delta + x_\delta y_\gamma & x_\gamma p_\delta + x_\delta p_\gamma & y_\gamma p_\delta + y_\delta p_\gamma & z_\gamma p_\delta + z_\delta p_\gamma
\end{vmatrix}.
$$

vagy

$$X_\alpha X_\beta X_\gamma X_\delta \cdot r_{4,2} = (\alpha\beta\gamma\delta)^4 \begin{vmatrix} x_\alpha & y_\alpha & z_\alpha & p_\alpha \\ x_\beta & y_\beta & z_\beta & p_\beta \\ x_\gamma & y_\gamma & z_\gamma & p_\gamma \\ x_\delta & y_\delta & z_\delta & p_\delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_\beta y_\gamma & z_\beta z_\gamma & p_\beta p_\gamma & z_\beta p_\gamma + z_\gamma p_\beta & p_\beta y_\gamma + p_\gamma y_\beta & y_\beta z_\gamma + y_\gamma z_\beta \\ y_\gamma y_\alpha & z_\gamma z_\alpha & p_\gamma p_\alpha & z_\gamma p_\alpha + z_\alpha p_\gamma & p_\gamma y_\alpha + p_\alpha y_\gamma & y_\gamma z_\alpha + y_\alpha z_\gamma \\ y_\alpha y_\beta & z_\alpha z_\beta & p_\alpha p_\beta & z_\alpha p_\beta + z_\beta p_\alpha & p_\alpha y_\beta + p_\beta y_\alpha & y_\alpha z_\beta + y_\beta z_\alpha \\ y_\alpha y_\delta & z_\alpha z_\delta & p_\alpha p_\delta & z_\alpha p_\delta + z_\delta p_\alpha & p_\alpha y_\delta + p_\delta y_\alpha & y_\alpha z_\delta + y_\delta z_\alpha \\ y_\beta y_\delta & z_\beta z_\delta & p_\beta p_\delta & z_\beta p_\delta + z_\delta p_\beta & p_\beta y_\delta + p_\delta y_\beta & y_\beta z_\delta + y_\delta z_\beta \\ y_\gamma y_\delta & z_\gamma z_\delta & p_\gamma p_\delta & z_\gamma p_\delta + z_\delta p_\gamma & p_\gamma y_\delta + p_\delta y_\gamma & y_\gamma z_\delta + y_\delta z_\gamma \end{vmatrix}.$$

A »Műegyetemi Lapok« 18. füzetében álló 33. feladat tétele szerint a jobb oldalon levő 6-od foku determináns $X_\alpha X_\beta X_\gamma X_\delta$ szorzattal egyenlő; ennek folytán az utolsó egyenletből lesz:

$$r_{4,2} = (\alpha\beta\gamma\delta)^5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Legyen $R_{4,2}$ azon determináns, mely $r_{4,2}$ determinánsból támad, ha ebben $x_i y_i z_i p_i$ $(i = \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ helyett $(\alpha\beta\gamma\delta)$ determinánsnak ezen elemeknek megfelelő $X_i Y_i Z_i P_i$ $(i = \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ minorjait tesszük. A 4) egyenletből lesz akkor:

$$R_{4,2} = \begin{vmatrix} X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha & P_\alpha \\ X_\beta & Y_\beta & Z_\beta & P_\beta \\ X_\gamma & Y_\gamma & Z_\gamma & P_\gamma \\ X_\delta & Y_\delta & Z_\delta & P_\delta \end{vmatrix}^5$$

és mivel

$$\begin{vmatrix} X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha & P_\alpha \\ X_\beta & Y_\beta & Z_\beta & P_\beta \\ X_\gamma & Y_\gamma & Z_\gamma & P_\gamma \\ X_\delta & Y_\delta & Z_\delta & P_\delta \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma\delta)^3,$$

ered

$$R_{4,2} = (\alpha\beta\gamma\delta)^{15}$$

Most a 3) egyenlet baloldalát $R_{4,2}$, jobb oldalát $(\alpha\beta\gamma\delta)^{15}$ mennyiséggel szorozzuk és kapjuk az

$$(\alpha\beta\gamma\delta)^{15},S_{4,2}=\begin{vmatrix}
(\alpha\beta\gamma\delta)^2 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & (\alpha\beta\gamma\delta)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & (\alpha\beta\gamma\delta)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & (\alpha\beta\gamma\delta)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
(\varepsilon\beta\gamma\delta)^2 & (\varepsilon\gamma\delta\alpha)^2 & (\varepsilon\delta\alpha\beta)^2 & (\varepsilon\alpha\beta\gamma)^2 & (\varepsilon\gamma\delta\alpha)(\varepsilon\delta\alpha\beta) & (\varepsilon\delta\alpha\beta)(\varepsilon\beta\gamma\delta) & (\varepsilon\beta\gamma\delta)(\varepsilon\gamma\delta\alpha) & (\varepsilon\beta\gamma\delta)(\varepsilon\alpha\beta\gamma) & (\varepsilon\gamma\delta\alpha)(\varepsilon\alpha\beta\gamma) & (\varepsilon\delta\alpha\beta)(\varepsilon\alpha\beta\gamma)\\
(\xi\beta\gamma\delta)^2 & (\xi\gamma\delta\alpha)^2 & (\xi\delta\alpha\beta)^2 & (\xi\alpha\beta\gamma)^2 & (\xi\gamma\delta\alpha)(\xi\delta\alpha\beta) & (\xi\delta\alpha\beta)(\xi\beta\gamma\delta) & (\xi\beta\gamma\delta)(\xi\gamma\delta\alpha) & (\xi\beta\gamma\delta)(\xi\alpha\beta\gamma) & (\xi\gamma\delta\alpha)(\xi\alpha\beta\gamma) & (\xi\delta\alpha\beta)(\xi\alpha\beta\gamma)\\
(\eta\beta\gamma\delta)^2 & (\eta\gamma\delta\alpha)^2 & (\eta\delta\alpha\beta)^2 & (\eta\alpha\beta\gamma)^2 & (\eta\gamma\delta\alpha)(\mu\delta\alpha\beta) & (\eta\delta\alpha\beta)(\eta\beta\gamma\delta) & (\eta\beta\gamma\delta)(\eta\gamma\delta\alpha) & (\eta\beta\gamma\delta)(\eta\alpha\beta\gamma) & (\eta\gamma\delta\alpha)(\eta\alpha\beta\gamma) & (\eta\gamma\alpha\beta)(\eta\alpha\beta\gamma)\\
(\vartheta\beta\gamma\delta) & (\vartheta\gamma\delta\alpha)^2 & (\vartheta\delta\alpha\beta)^2 & (\vartheta\alpha\beta\gamma)^2 & (\vartheta\gamma\delta\alpha)(\vartheta\delta\alpha\beta) & (\vartheta\delta\alpha\beta)(\vartheta\beta\gamma\delta) & (\vartheta\beta\gamma\delta)(\vartheta\gamma\delta\alpha) & (\vartheta\beta\gamma\delta)(\vartheta\alpha\beta\gamma) & (\vartheta\gamma\delta\alpha)(\vartheta\alpha\beta\gamma) & (\vartheta\delta\alpha\beta)(\vartheta\alpha\beta\gamma)\\
(\iota\beta\gamma\delta) & (\iota\gamma\delta\alpha)^2 & (\iota\delta\alpha\beta)^2 & (\iota\alpha\beta\gamma)^2 & (\iota\gamma\delta\alpha)(\iota\delta\alpha\beta) & (\iota\delta\alpha\beta)(\iota\beta\gamma\delta) & (\iota\beta\gamma\delta)(\iota\gamma\delta\alpha) & (\iota\beta\gamma\delta)(\iota\alpha\beta\gamma) & (\iota\gamma\delta\alpha)(\iota\alpha\beta\gamma) & (\iota\delta\alpha\beta)(\iota\alpha\beta\gamma)\\
(\varkappa\beta\gamma\delta) & (\varkappa\gamma\delta\alpha)^2 & (\varkappa\delta\alpha\beta)^2 & (\varkappa\alpha\beta\gamma)^2 & (\varkappa\gamma\delta\alpha)(\varkappa\delta\alpha\beta) & (\varkappa\delta\alpha\beta)(\varkappa\beta\gamma\delta) & (\varkappa\beta\gamma\delta)(\varkappa\gamma\delta\alpha) & (\varkappa\beta\gamma\delta)(\varkappa\alpha\beta\gamma) & (\varkappa\gamma\delta\alpha)(\varkappa\alpha\beta\gamma) & (\varkappa\delta\alpha\beta)(\varkappa\alpha\beta\gamma)
\end{vmatrix}$$

egyenlet, meiyből $(\alpha\beta\gamma\delta)^8$ szorzóval való osztás után támad

$$(\alpha\beta\gamma\delta)^7.S_{4,2}=\begin{vmatrix}
(\varepsilon\gamma\delta\alpha)(\varepsilon\delta\alpha\beta) & (\varepsilon\delta\alpha\beta)(\varepsilon\beta\gamma\delta) & (\varepsilon\beta\gamma\delta)(\varepsilon\gamma\delta\alpha) & (\varepsilon\beta\gamma\delta)(\varepsilon\alpha\beta\gamma) & (\varepsilon\gamma\delta\alpha)(\varepsilon\alpha\beta\gamma) & (\varepsilon\delta\alpha\beta)(\varepsilon\alpha\beta\gamma)\\
(\xi\gamma\delta\alpha)(\xi\delta\alpha\beta) & (\xi\delta\alpha\beta)(\xi\beta\gamma\delta) & (\xi\beta\gamma\delta)(\xi\gamma\delta\alpha) & (\xi\beta\gamma\delta)(\xi\alpha\beta\gamma) & (\xi\gamma\delta\alpha)(\xi\alpha\beta\gamma) & (\xi\delta\alpha\beta)(\xi\alpha\beta\gamma)\\
(\eta\gamma\delta\alpha)(\eta\delta\alpha\beta) & (\eta\delta\alpha\beta)(\eta\beta\gamma\delta) & (\eta\beta\gamma\delta)(\eta\gamma\delta\alpha) & (\eta\beta\gamma\delta)(\eta\alpha\beta\gamma) & (\eta\gamma\delta\alpha)(\eta\alpha\beta\gamma) & (\eta\delta\alpha\beta)(\eta\alpha\beta\gamma)\\
(\vartheta\gamma\delta\alpha)(\vartheta\delta\alpha\beta) & (\vartheta\delta\alpha\beta)(\vartheta\beta\gamma\delta) & (\vartheta\beta\gamma\delta)(\vartheta\gamma\delta\alpha) & (\vartheta\beta\gamma\delta)(\vartheta\alpha\beta\gamma) & (\vartheta\gamma\delta\alpha)(\vartheta\alpha\beta\gamma) & (\vartheta\delta\alpha\beta)(\vartheta\alpha\beta\gamma)\\
(\iota\gamma\delta\alpha)(\iota\delta\alpha\beta) & (\iota\delta\alpha\beta)(\iota\beta\gamma\delta) & (\iota\beta\gamma\delta)(\iota\gamma\delta\alpha) & (\iota\beta\gamma\delta)(\iota\alpha\beta\gamma) & (\iota\gamma\delta\alpha)(\iota\alpha\beta\gamma) & (\iota\delta\alpha\beta)(\iota\alpha\beta\gamma)\\
(\varkappa\gamma\delta\alpha)(\varkappa\delta\alpha\beta) & (\varkappa\delta\alpha\beta)(\varkappa\beta\gamma\delta) & (\varkappa\beta\gamma\delta)(\varkappa\gamma\delta\alpha) & (\varkappa\beta\gamma\delta)(\varkappa\alpha\beta\gamma) & (\varkappa\gamma\delta\alpha)(\varkappa\alpha\beta\gamma) & (\varkappa\delta\alpha\beta)(\varkappa\alpha\beta\gamma)
\end{vmatrix}$$

Ugyanazon alakú egyenlet áll fönn a transformált koordinátákra nézve és minthogy 2) szerint

ered $$(\alpha'\beta'\gamma'\delta')=(a_1b_2c_3d_4)(\alpha\beta\gamma\delta),\ (\varepsilon'\gamma'\delta'\alpha')=(a_1b_2c_3d_4)(\varepsilon\gamma\delta\alpha)\text{ stb.}$$

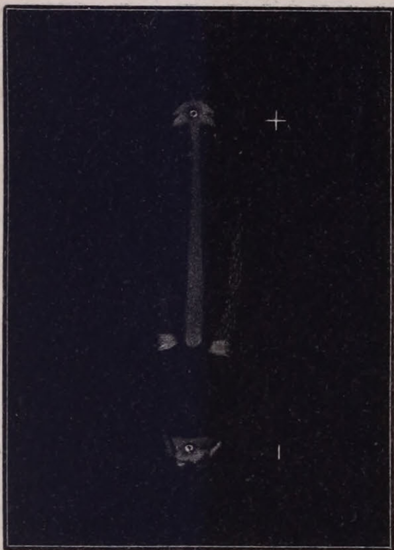
$$(a_1b_2c_3d_4)^7.(\alpha\beta\gamma\delta)^7.S'_{4,2}=(a_1b_2c_3d_4)^{12}.(\alpha\beta\gamma\delta)^7.S_{4,2}$$

vagy $$S'_{4,2}=(a_1b_2c_3d_4)^5.S_{4,2}$$

Ez az egyenlet $S_{4,2}$ alakzat covariáns voltát jellemzi.

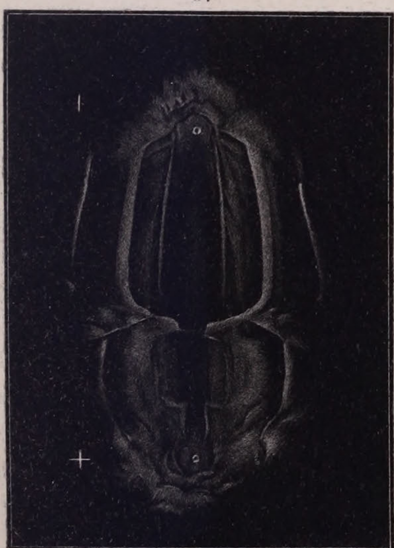
(Folytatása következik.)

1.

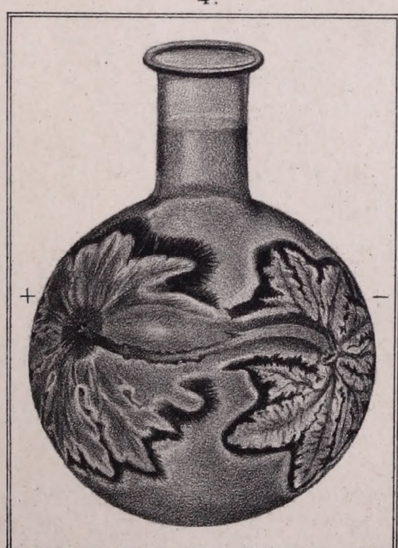


2.

3.



4.



Ny Grund V Budapest

Antolik: „A villanyszikra sikamlásáról.

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMANYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

III. kötet. 1878. 24. füzet.

NÉHÁNY COVARIÁNS JELLEGGEL BIRÓ DETERMINÁNS ALAKRÓL.

Scholtz Ágoston, fögymn. tanártól.

(Folytatása és vége.)

III. a) Annak föltételét, hogy $x_i y_i z_i$ $(i = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta. \eta, \vartheta, i, \varkappa)$ pontok ugyanazon harmadrendü vonalon fekszenek, vagy hogy az $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta, \iota, \varkappa$ egyenesek ugyanazt a harmadosztályu görbe vonalat érintik, az

$$\begin{vmatrix}
x^3_\alpha & y^3_\alpha & z^3_\alpha & x^2_\alpha y_\alpha & x^2_\alpha z_\alpha & y^2_\alpha z_\alpha & y^2_\alpha x_\alpha & z^2_\alpha x_\alpha & z^2_\alpha y_\alpha & x_\alpha y_\alpha z_\alpha \\
x^3_\beta & y^3_\beta & z^3_\beta & x^2_\beta y_\beta & x^2_\beta z_\beta & y^2_\beta z_\beta & y^2_\beta x_\beta & z^2_\beta x_\beta & z^2_\beta y_\beta & x_\beta z_\beta z_\beta \\
x^3_\gamma & y^3_\gamma & z^3_\gamma & x^2_\gamma y_\gamma & x^2_\gamma z_\gamma & y^2_\gamma z_\gamma & y^2_\gamma x_\gamma & z^2_\gamma x_\gamma & z^2_\gamma y_\gamma & x_\gamma y_\gamma z_\gamma \\
x^3_\delta & y^3_\delta & z^3_\delta & x^2_\delta y_\delta & x^2_\delta z_\delta & y^2_\delta z_\delta & y^2_\delta x_\delta & z^2_\delta x_\delta & z^2_\delta y_\delta & x_\delta y_\delta z_\delta \\
x^3_\varepsilon & y^3_\varepsilon & z^3_\varepsilon & x^2_\varepsilon y_\varepsilon & x^2_\varepsilon z_\varepsilon & y^2_\varepsilon z_\varepsilon & y^2_\varepsilon x_\varepsilon & z^2_\varepsilon x_\varepsilon & z^2_\varepsilon y_\varepsilon & x_\varepsilon y_\varepsilon z_\varepsilon \\
x^3_\zeta & y^3_\zeta & z^3_\zeta & x^2_\zeta y_\zeta & x^2_\zeta z_\zeta & y^2_\zeta z_\zeta & y^2_\zeta x_\zeta & z^2_\zeta x_\zeta & z^2_\zeta y_\zeta & x_\zeta y_\zeta z_\zeta \\
x^3_\eta & y^3_\eta & z^3_\eta & x^2_\eta y_\eta & x^2_\eta z_\eta & y^2_\eta z_\eta & y^2_\eta x_\eta & z^2_\eta x_\eta & z^2_\eta y_\eta & x_\eta y_\eta z_\eta \\
x^3_\vartheta & y^3_\vartheta & z^3_\vartheta & x^2_\vartheta y_\vartheta & x^2_\vartheta z_\vartheta & y^2_\vartheta z_\vartheta & y^2_\vartheta x_\vartheta & z^2_\vartheta x_\vartheta & z^2_\vartheta y_\vartheta & x_\vartheta y_\vartheta z_\vartheta \\
x^3_\iota & y^3_\iota & z^3_\iota & x^2_\iota y_\iota & x^2_\iota z_\iota & y^2_\iota z_\iota & y^2_\iota x_\iota & z^2_\iota x_\iota & z^2_\iota y_\iota & x_\iota y_\iota z_\iota \\
x^3_\varkappa & y^3_\varkappa & z^3_\varkappa & x^2_\varkappa y_\varkappa & x^2_\varkappa z_\varkappa & y^2_\varkappa z_\varkappa & y^2_\varkappa x_\varkappa & z^2_\varkappa x_\varkappa & z^2_\varkappa y_\varkappa & x_\varkappa y_\varkappa z_\varkappa
\end{vmatrix} = S_{3,3} \ldots 5)$$

determináns eltünése fejezi ki. Hogy e determinánsnak covariáns-tulajdonságát kimutassuk, azt bizonyos determinánssal való szorzás által más alakba öntjük. E mellett rövidség kedvéért az

$${}^y\delta_x\varphi = y_\alpha \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} + y_\beta \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} + y_\gamma \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_\gamma},\ {}^z\delta_x\varphi = z_\alpha \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} + z_\beta \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} + z_\gamma \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_\gamma}$$

egyenletek által defineált müvelettel fogunk élni és azt δ-müveletnek akarjuk nevezni. Ezt előrebocsátva a

$$\Sigma \pm a_{11}\, a_{12} \ldots . a_{10,10} = r_{3,4}$$

determinánsban az első oszlop elemei legyenek

$$a_{11}=x_\alpha^3,\ a_{12}=x_\beta^3,\ a_{13}=x_\gamma^3,\ a_{14}=x_\alpha^2 x_\beta,\ a_{15}=x_\alpha^2 x_\gamma,\ a_{16}=x_\beta^2 x_\gamma,\ x_{17}=x_\beta^2 x_\alpha,\ a_{18}=x_\gamma^2 x_\alpha,\ a_{19}=x_\gamma^2 x_\beta,\ a_{1,10}=x_\alpha x_\beta x_\gamma;$$

a második és harmadik oszlop elemeiben y, illetőleg z pótolja az első oszlop elemeiben levő x betűt. A többi oszlopok elemeit a δ-műveléttel származtatjuk e három oszlop elemeiből. Ugyanis

$$a_{4i} = {}^y\delta_x a_{1i},\ a_{5i} = {}^z\delta_x a_{1i},\ a_{6i} = {}^z\delta_y a_{2i},\ a_{7i} = {}^x\delta_y a_{2i},\ a_{8i} = {}^x\delta_z a_{3i},\ a_{9i} = {}^y\delta_z a_{3i},$$

$$a_{10i} = {}^z\delta_x a_{4i} = {}^y\delta_x a_{5i} = {}^x\delta_y a_{6i} = {}^z\delta_y a_{7i} = {}^y\delta_z a_{8i} = {}^x\delta_z a_{9i}.$$

Itt i betűnek 1, 2, 3, ... 10 értékek tulajdonítandók. Az $r_{3,3}$ determinánsról kimutatjuk, hogy

$$r_{3,3} = (\alpha\beta\gamma)^{10} \ldots\ldots\ldots \qquad 6)$$

E vonatkozás helyességét bebizonyítandók, szorozzuk $r_{3,3}$ determinánsban az első sort X_α, a második sort X_β, a harmadik sort X_γ, $(\alpha\beta\gamma)$ determinánsnak x_α, x_β, x_γ elemeinek megfelelő minorjaival és azután adjuk hozzá

az első sorhoz az	X_β	minorral szorzott	4-dik és az	X_γ	minorral szorzott	5-dik sort,	
a másodikhoz az	X_γ	» »	6-dik » »	X_α	» »	7 » »	
a harmadikhoz az	X_α	» »	8-dik » »	X_β	» »	9 » »	

Továbbá szorozzuk a negyedik sort X_α, a hatodikat X_β és a nyolczadikat X_γ minorral és adjuk

a negyedikhez az	X_β-val szorzott	7-dik és az	X_γ-val sorzott	10-dik sort,
a hatodikhoz az	X_γ » »	9-dik » »	X_α » »	10 » »
a nyolczadikhoz az	X_α » »	5-dik » »	X_β » »	10 » »

Ennek az átalakitásnak eredményét így fejezhetjük ki

$$X_\gamma^2 X_\beta^2 X_\gamma^2 \,.\, r_{3,3} = (\alpha\beta\gamma)^6 \,.\, \begin{vmatrix} x_\alpha^2 & y_\alpha^2 & z_\alpha^2 & 2y_\alpha z_\alpha & 2z_\alpha x_\alpha & 2x_\alpha y_\alpha \\ x_\beta^2 & y_\beta^2 & z_\beta^2 & 2y_\beta z_\beta & 2z_\beta x_\beta & 2x_\beta y_\beta \\ x_\gamma^2 & y_\gamma^2 & z_\gamma^2 & 2y_\gamma z_\gamma & 2z_\gamma x_\gamma & 2x_\gamma y_\gamma \\ x_\beta x_\gamma & y_\beta y_\gamma & z_\beta z_\gamma & y_\beta z_\gamma + y_\gamma z_\beta & z_\beta x_\gamma + z_\gamma x_\beta & x_\beta y_\gamma + x_\gamma y_\beta \\ x_\gamma x_\alpha & y_\gamma y_\alpha & z_\gamma z_\alpha & y_\gamma z_\alpha + y_\alpha z_\gamma & z_\gamma x_\alpha + z_\alpha x_\gamma & x_\gamma y_\alpha + x_\alpha y_\gamma \\ x_\alpha x_\beta & y_\alpha y_\beta & z_\alpha z_\beta & y_\alpha z_\beta + y_\beta z_\alpha & z_\alpha x_\beta + z_\beta x_\alpha & x_\alpha y_\beta + x_\beta y_\beta \end{vmatrix} \,.\, \omega, \ldots\ldots\ldots 7)$$

hol

$$\omega = \begin{vmatrix} a_{25} & a_{35} & a_{65} & a_{95} \\ a_{27} & a_{37} & a_{67} & a_{97} \\ a_{29} & a_{39} & a_{69} & a_{99} \\ a_{2,10} & a_{3,10} & a_{6,10} & a_{9,10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_\beta y_\gamma^2 & z_\beta z_\gamma^2 & y_\gamma^2 z_\beta + 2y_\beta y_\gamma z_\gamma & z_\gamma^2 y_\beta + 2z_\beta z_\gamma y_\gamma \\ y_\gamma y_\alpha^2 & z_\gamma z_\alpha^2 & y_\alpha^2 z_\gamma + 2y_\gamma y_\alpha z_\alpha & z_\alpha^2 y_\gamma + 2z_\gamma z_\alpha y_\alpha \\ y_\alpha y_\beta^2 & z_\alpha z_\beta^2 & y_\beta^2 z_\alpha + 2y_\alpha y_\beta z_\beta & z_\beta^2 y_\alpha + 2z_\alpha z_\alpha y_\beta \\ y_\alpha y_\beta y_\gamma & z_\alpha z_\beta z_\gamma & y_\beta y_\gamma z_\alpha + y_\gamma y_\alpha z_\beta + y_\alpha y_\beta z_\gamma & z_\alpha z_\gamma y_\alpha + z_\gamma z_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta y_\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{y_\alpha y_\beta y_\gamma} \,.\, \begin{vmatrix} 0 & -z_\beta z_\gamma X_\beta & -y_\beta y_\gamma X_\beta & -(y_\beta z_\gamma + y_\gamma z_\beta) X_\beta \\ 0 & -z_\gamma z_\alpha X_\gamma & -y_\gamma y_\alpha X_\gamma & -(y_\gamma z_\alpha + y_\alpha z_\gamma) X_\gamma \\ 0 & -z_\alpha z_\beta X_\alpha & -y_\alpha y_\beta X_\alpha & -(y_\alpha z_\beta + y_\beta z_\alpha) X_\alpha \\ y_\alpha y_\beta y_\gamma & z_\alpha z_\beta z_\gamma & y_\beta y_\gamma z_\alpha + y_\gamma y_\alpha z_\beta + y_\alpha y_\beta z_\gamma & z_\beta z_\gamma y_\alpha + z_\gamma z_\alpha y_\beta + z_\alpha z_\beta y_\gamma \end{vmatrix} = X_\alpha X_\beta X_\gamma \,.\, \begin{vmatrix} z_\beta z_\gamma & y_\beta y_\gamma & y_\beta z_\gamma + y_\gamma z_\beta \\ z_\gamma z_\alpha & y_\gamma y_\alpha & y_\gamma z_\alpha + y_\alpha z_\gamma \\ z_\alpha z_\beta & y_\alpha y_\beta & y_\alpha z_\beta + y_\beta z_\alpha \end{vmatrix} = X_\alpha^2 X_\beta^2 X_\gamma^2.$$

*) Az első sort szoroztuk y_α, a másodikat y_β, a harmadikat y_γ-val és kivontuk az elsőből az y_γ, a másodikból az y_α, a harmadikból az y_β-val szorzott negyedik sort. Végre tekintettel voltunk a »Műegyetemi Lapok« 13-dik füzetében a 68. lapon közlött

$$\begin{vmatrix} z_\beta z_\gamma & y_\beta y_\gamma & y_\beta z_\gamma + y_\gamma z_\beta \\ z_\gamma z_\alpha & y_\gamma y_\alpha & y_\gamma z_\alpha + y_\alpha z_\gamma \\ z_\alpha z_\beta & y_\alpha y_\beta & y_\alpha z_\beta + y_\beta z_\alpha \end{vmatrix} = X_\alpha X_\beta X_\gamma$$

egyenletre. Ha még tekintetbe veszszük, hogy a »Műegyet. Lapok« 13. füzetében a 68. l. 4) számu egyenlet szerint

$$\begin{vmatrix} a_\alpha^2 & y_\alpha^2 & z_\alpha^2 & 2y_\alpha z_\alpha & 2z_\alpha x_\alpha & 2x_\alpha y_\alpha \\ x_\beta^2 & y_\beta^2 & z_\beta^2 & 2y_\beta z_\beta & 2z_\beta x_\beta & 2x_\beta y_\beta \\ x_\gamma^2 & y_\gamma^2 & z_\gamma^2 & 2y_\gamma z_\gamma & 2z_\gamma x_\gamma & 2x_\gamma y_\gamma \\ x_\beta x_\gamma & y_\beta y_\gamma & z_\beta z_\gamma & y_\beta z_\gamma + y_\gamma z_\beta & z_\beta x_\gamma + z_\gamma x_\beta & x_\beta y_\gamma + x_\gamma y_\beta \\ x_\gamma x_\alpha & y_\gamma y_\alpha & z_\gamma z_\alpha & y_\gamma z_\alpha + y_\alpha z_\gamma & z_\gamma x_\alpha + z_\alpha x_\gamma & x_\gamma y_\alpha + x_\alpha y_\gamma \\ x_\alpha x_\beta & y_\alpha y_\beta & z_\alpha z_\beta & y_\alpha z_\beta + y_\beta z_\alpha & z_\alpha x_\beta + z_\beta x_\alpha & x_\alpha y_\beta + x_\beta y_\alpha \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma)^4,$$

a 7) egyenletből származik a kijelentett relatio

$$r_{3,3} = (\alpha\beta\gamma)^{10} \dots\dots\dots\dots \qquad 6)$$

Váljék $r_{3,3}$ determináns $R_{3,3}$ determinánssá, ha abba $x_i\ y_i\ z_i$ $(i = \alpha, \beta, \gamma)$ helyett $(\alpha\beta\gamma)$ determinánsnak ezen elemeknek megfelelő minorjait teszszük; akkor a 6) egyenlet szerint

$$R_{3,3} = \begin{vmatrix} X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \\ X_\beta & Y_\beta & Z_\beta \\ X_\gamma & Y_\gamma & Z_\gamma \end{vmatrix}^{10},$$

és

$$\begin{vmatrix} X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \\ X_\beta & Y_\beta & Z_\beta \\ X_\gamma & Y_\gamma & Z_\gamma \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma)^2$$

lévén

$$R_{3,3} = (\alpha\beta\gamma)^{20}.$$

Az 5) egyenlet baloldalát $R_{3,3}$ determinánssal, jobb oldalát $(\alpha\beta\gamma)^{20}$ mennyiséggel szorozván, ered:

$$(\alpha\beta\gamma)^{20}\cdot S_{3,3} = \begin{vmatrix}
(\alpha\beta\gamma)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (\alpha\beta\gamma)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & (\alpha\beta\gamma)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(\delta\beta\gamma)^3 & (\delta\gamma\alpha)^3 & (\delta\alpha\beta)^3 & (\delta\beta\gamma)^2(\delta\gamma\alpha) & (\delta\beta\gamma)^2(\delta\alpha\beta) & (\delta\gamma\alpha)^2(\delta\alpha\beta) & (\delta\gamma\alpha)^2(\delta\beta\gamma) & (\delta\alpha\beta)^2(\delta\beta\gamma) & (\delta\alpha\beta)^2(\delta\gamma\alpha) & (\delta\beta\gamma)(\delta\gamma\alpha)(\delta\alpha\beta) \\
(\varepsilon\beta\gamma)^3 & (\varepsilon\gamma\alpha)^3 & (\varepsilon\alpha\beta)^3 & (\varepsilon\beta\gamma)^2(\varepsilon\gamma\alpha) & (\varepsilon\beta\gamma)^2(\varepsilon\alpha\beta) & (\varepsilon\gamma\alpha)^2(\varepsilon\alpha\beta) & (\varepsilon\gamma\alpha)^2(\varepsilon\beta\gamma) & (\varepsilon\alpha\beta)^2(\varepsilon\beta\gamma) & (\varepsilon\alpha\beta)^2(\varepsilon\gamma\alpha) & (\varepsilon\beta\gamma)(\varepsilon\gamma\alpha)(\varepsilon\alpha\beta) \\
(\zeta\beta\gamma)^3 & (\zeta\gamma\alpha)^3 & (\zeta\alpha\beta)^3 & (\zeta\beta\gamma)^2(\zeta\gamma\alpha) & (\zeta\beta\gamma)^2(\zeta\alpha\beta) & (\zeta\gamma\alpha)^2(\zeta\alpha\beta) & (\zeta\gamma\alpha)^2(\zeta\beta\gamma) & (\zeta\alpha\beta)^2(\zeta\beta\gamma) & (\zeta\alpha\beta)^2(\zeta\gamma\alpha) & (\zeta\beta\gamma)(\zeta\gamma\alpha)(\zeta\alpha\beta) \\
(\eta\beta\gamma)^3 & (\eta\gamma\alpha)^3 & (\eta\alpha\beta)^3 & (\eta\beta\gamma)^2(\eta\gamma\alpha) & (\eta\beta\gamma)^2(\eta\alpha\beta) & (\eta\gamma\alpha)^2(\eta\alpha\beta) & (\eta\gamma\alpha)^2(\eta\beta\gamma) & (\eta\alpha\beta)^2(\eta\beta\gamma) & (\eta\alpha\beta)^2(\eta\gamma\alpha) & (\eta\beta\gamma)(\eta\gamma\alpha)(\eta\alpha\beta) \\
(\vartheta\beta\gamma)^3 & (\vartheta\gamma\alpha)^3 & (\vartheta\alpha\beta)^3 & (\vartheta\beta\gamma)^2(\vartheta\gamma\alpha) & (\vartheta\beta\gamma)^2(\vartheta\alpha\beta) & (\vartheta\gamma\alpha)^2(\vartheta\alpha\beta) & (\vartheta\gamma\alpha)^2(\vartheta\beta\gamma) & (\vartheta\alpha\beta)^2(\vartheta\beta\gamma) & (\vartheta\alpha\beta)^2(\vartheta\gamma\alpha) & (\vartheta\beta\gamma)(\vartheta\gamma\alpha)(\vartheta\alpha\beta) \\
(\iota\beta\gamma)^3 & (\iota\gamma\alpha)^3 & (\iota\alpha\beta)^3 & (\iota\beta\gamma)^2(\iota\gamma\alpha) & (\iota\beta\gamma)^2(\iota\alpha\beta) & (\iota\gamma\alpha)^2(\iota\alpha\beta) & (\iota\gamma\alpha)^2(\iota\beta\gamma) & (\iota\alpha\beta)^2(\iota\beta\gamma) & (\iota\alpha\beta)^2(\iota\gamma\alpha) & (\iota\beta\gamma)(\iota\gamma\alpha)(\iota\alpha\beta) \\
(\varkappa\beta\gamma)^3 & (\varkappa\gamma\alpha)^3 & (\varkappa\alpha\beta)^3 & (\varkappa\beta\gamma)^2(\varkappa\gamma\alpha) & (\varkappa\beta\gamma)^2(\varkappa\alpha\beta) & (\varkappa\gamma\alpha)^2(\varkappa\alpha\beta) & (\varkappa\gamma\alpha)^2(\varkappa\beta\gamma) & (\varkappa\alpha\beta)^2(\varkappa\beta\gamma) & (\varkappa\alpha\beta)^2(\varkappa\gamma\alpha) & (\varkappa\beta\gamma)(\varkappa\gamma\alpha)(\varkappa\alpha\beta)
\end{vmatrix},$$

innen lesz:

$$(\alpha\beta\gamma)^{11}\, S_{3,3} = \begin{vmatrix}
(\delta\beta\gamma)^2(\delta\gamma\alpha) & (\delta\beta\gamma)^2(\delta\alpha\beta) & (\delta\gamma\alpha)^2(\delta\alpha\beta) & (\delta\gamma\alpha)^2(\delta\beta\gamma) & (\delta\alpha\beta)^2(\delta\beta\gamma) & (\delta\alpha\beta)^2(\delta\gamma\alpha) & (\delta\beta\gamma)(\delta\gamma\alpha)(\delta\alpha\beta) \\
(\varepsilon\beta\gamma)^2(\varepsilon\gamma\alpha) & (\varepsilon\beta\gamma)^2(\varepsilon\alpha\beta) & (\varepsilon\gamma\alpha)^2(\varepsilon\alpha\beta) & (\varepsilon\gamma\alpha)^2(\varepsilon\beta\gamma) & (\varepsilon\alpha\beta)^2(\varepsilon\beta\gamma) & (\varepsilon\alpha\beta)^2(\varepsilon\gamma\alpha) & (\varepsilon\beta\gamma)(\varepsilon\gamma\alpha)(\varepsilon\alpha\beta) \\
(\zeta\beta\gamma)^2(\zeta\gamma\alpha) & (\zeta\beta\gamma)^2(\zeta\alpha\beta) & (\zeta\gamma\alpha)^2(\zeta\alpha\beta) & (\zeta\gamma\alpha)^2(\zeta\beta\gamma) & (\zeta\alpha\beta)^2(\zeta\beta\gamma) & (\zeta\alpha\beta)^2(\zeta\gamma\alpha) & (\zeta\beta\gamma)(\zeta\gamma\alpha)(\zeta\alpha\beta) \\
(\eta\beta\gamma)^2(\eta\gamma\alpha) & (\eta\beta\gamma)^2(\eta\alpha\beta) & (\eta\gamma\alpha)^2(\eta\alpha\beta) & (\eta\gamma\alpha)^2(\eta\beta\gamma) & (\eta\alpha\beta)^2(\eta\beta\gamma) & (\eta\alpha\beta)^2(\eta\gamma\alpha) & (\eta\beta\gamma)(\eta\gamma\alpha)(\eta\alpha\beta) \\
(\vartheta\beta\gamma)^2(\vartheta\gamma\alpha) & (\vartheta\beta\gamma)^2(\vartheta\alpha\beta) & (\vartheta\gamma\alpha)^2(\vartheta\alpha\beta) & (\vartheta\gamma\alpha)^2\vartheta\beta\gamma) & (\vartheta\alpha\beta)^2(\vartheta\beta\gamma) & (\vartheta\alpha\beta)^2(\vartheta\gamma\alpha) & (\vartheta\beta\gamma)(\vartheta\gamma\alpha)(\vartheta\alpha\beta) \\
(\iota\beta\gamma)^2(\iota\gamma\alpha) & (\iota\beta\gamma)^2(\iota\alpha\beta) & (\iota\gamma\alpha)^2(\iota\alpha\beta) & (\iota\gamma\alpha)^2(\iota\beta\gamma) & (\iota\alpha\beta)^2(\iota\beta\gamma) & (\iota\alpha\beta)^2(\iota\gamma\alpha) & (\iota\beta\gamma)(\iota\gamma\alpha)(\iota\alpha\beta) \\
(\varkappa\beta\gamma)^2(\varkappa\gamma\alpha) & (\varkappa\beta\gamma)^2(\varkappa\alpha\beta) & (\varkappa\gamma\alpha)^2(\varkappa\alpha\beta) & (\varkappa\gamma\alpha)^2(\varkappa\beta\gamma) & (\varkappa\alpha\beta)^2(\varkappa\beta\gamma) & (\varkappa\alpha\beta)^2(\varkappa\gamma\alpha) & (\varkappa\beta\gamma)(\varkappa\gamma\alpha)(\varkappa\alpha\beta)
\end{vmatrix}.$$

Ugyanezen alaku egyenlet kapcsolja össze a transformált koordinátákat és minthogy

$$(\alpha'\beta'\gamma') = (a_1 b_2 c_3)(\alpha\beta\gamma), \quad (\delta'\beta'\gamma') = (a_1 b_2 c_3)(\delta\beta\gamma) \text{ stb.}$$

a két egyenlet egybevetéséből azt látjuk, hogy

$$(a_1 b_2 c_3)^{11}.\, (\alpha\beta\gamma)^{11}.\, S'_{3,3} = (a_1 b_2 c_3)^{21}.\, (\alpha\beta\gamma)^{11}. S_{3,3},$$

vagyis

$$S'_{3,3} = (a_1 b_2 c_3)^{10}.\, S_{3,3}.$$

Tehát $S_{3,3}$ covariáns.

b) Hogy 20 pont : $x_i\, y_i\, z_i\, p_i\, (i = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta, \iota, \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, o, \pi, \varrho, \sigma, \tau, \upsilon)$ ugyanazon harmadrendü felületen fekszik vagy 20 sík $(\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots)$ ugyanazt a harmadosztályu felületet érinti, az

$$\begin{vmatrix} x_\alpha^3 & y_\alpha^3 & z_\alpha^3 & p_\alpha^3 & x_\alpha^2 y_\alpha & x_\alpha^2 z_\alpha & y_\alpha^2 z_\alpha & y_\alpha^2 x_\alpha & z_\alpha^2 x_\alpha & z_\alpha^2 y_\alpha & x_\alpha^2 p_\alpha & y_\alpha^2 p_\alpha & z_\alpha^2 p_\alpha & p_\alpha^2 x_\alpha & p_\alpha^2 y_\alpha & p_\alpha^2 z_\alpha & x_\alpha y_\alpha z_\alpha & y_\alpha z_\alpha p_\alpha & z_\alpha x_\alpha p_\alpha & x_\alpha y_\alpha p_\alpha \\ x_\beta^3 & y_\beta^3 & z_\beta^3 & p_\beta^3 & x_\beta^2 y_\beta & x_\beta^2 z_\beta & y_\beta^2 z_\beta & y_\beta^2 x_\beta & z_\beta^2 x_\beta & z_\beta^2 y_\beta & x_\beta^2 p_\beta & y_\beta^2 p_\beta & z_\beta^2 p_\beta & p_\beta^2 x_\beta & p_\beta^2 y_\beta & p_\beta^2 z_\beta & x_\beta y_\beta z_\beta & y_\beta z_\beta p_\beta & z_\beta x_\beta p_\beta & x_\beta y_\beta p_\beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_\nu^3 & y_\nu^3 & z_\nu^3 & p_\nu^3 & x_\nu^2 y_\nu & x_\nu^2 z_\nu & y_\nu^2 z_\nu & y_\nu^2 x_\nu & z_\nu^2 x_\nu & z_\nu^2 y_\nu & x_\nu^2 p_\nu & y_\nu^2 p_\nu & z_\nu^2 p_\nu & p_\nu^2 x_\nu & p_\nu^2 y_\nu & p_\nu^2 z_\nu & x_\nu y_\nu z_\nu & y_\nu z_\nu p_\nu & z_\nu x_\nu p_\nu & x_\nu y_\nu p_\nu \end{vmatrix} = S_{4,3} \quad 8)$$

20-ad foku determináns eltünése fejezi ki. E determinánsnak covariáns voltát az által bizonyitjuk be, hogy azt bizonyos determinánssal szorozván, uj alakba öltöztetjük. Ez utóbbi determinánst

$$\Sigma \pm a_{11}\, a_{22} \ldots\ldots a_{20;20} = r_{4,3}$$

20-ad foku determinánsból fogjuk származtatni. Az $r_{4,3}$-ben az első oszlop elemei

$a_{11} = x_\alpha^3$, $a_{12} = x_\beta^3$, $a_{13} = x_\gamma^3$, $a_{14} = x_\delta^3$, $a_{15} = x_\alpha^2 x_\beta$, $a_{16} = x_\alpha^2 x_\gamma$, $a_{17} = x_\beta^2 x_\gamma$, $a_{18} = x_\beta^2 x_\alpha$, $a_{19} = x_\gamma^2 x_\alpha$, $a_{1,10} = x_\gamma^2 x_\beta$, $a_{1,11} = x_\alpha^2 x_\delta$, $a_{1,12} = x_\beta^2 x_\delta$, $a_{1,13} = x_\gamma^2 x_\delta$, $a_{1,14} = x_\delta^2 x_\alpha$, $a_{1,15} = x_\delta^2 x_\beta$, $a_{1,16} = x_\delta^2 x_\gamma$; $a_{1,17} = x_\alpha x_\beta x_\gamma$, $a_{1,18} = x_\beta x_\gamma x_\delta$, $a_{1,19} = x_\gamma x_\alpha x_\delta$, $a_{1,20} = x_\alpha x_\beta x_\delta$. A második, harmadik, negyedik oszlop elemei az elsőéiből ugy származnak, hogy amazokban sorban: y, z, p betűket irjuk az ott álló x helyébe. A többi oszlopok elemeit e négy oszlop elemeiből

$$^{y}\delta_{x}\varphi = y_{\alpha} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\alpha}} + y_{\beta} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\beta}} + y_{\gamma} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\gamma}} + y_{\delta} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x_{\delta}}$$

művelettel hozzuk ki. Ugyanis

$$a_{5i} = {}^{y}\delta_{x}a_{1i}\,,\ a_{6i} = {}^{z}\delta_{x}a_{1i}\,,\ a_{7i} = {}^{z}\delta_{y}a_{2i}\,,\ a_{8i} = {}^{x}\delta_{y}a_{2i}\,,\ a_{9i} = {}^{x}\delta_{z}a_{3i}\,,\ a_{10,i}\,;$$

$$a_{11,i} = {}^{p}\delta_{x}a_{1i}\,,\ a_{12,i} = {}^{p}\delta_{y}a_{1i}\,,\ a_{13,i} = {}^{p}\delta_{z}a_{3i}\,,\ a_{14,i} = {}^{x}\delta_{p}a_{4i}\,,\ a_{15,i} = {}^{y}\delta_{p}a_{4i}\,,\ a_{16,i} = {}^{z}\delta_{p}a_{4i}\,;$$

$$a_{17,i} = {}^{z}\delta_{x}a_{5i} = {}^{y}\delta_{x}a_{6i} = {}^{x}\delta_{y}a_{7i} = {}^{z}\delta_{y}a_{8i} = {}^{y}\delta_{z}a_{9i} = {}^{x}\delta_{z}a_{10,i}\,,$$

$$a_{18,i} = {}^{p}\delta_{y}a_{7i} = {}^{p}\delta_{z}a_{10,i} = {}^{z}\delta_{y}a_{12,i} = {}^{y}\delta_{z}a_{13,i} = {}^{z}\delta_{p}a_{15,i} = {}^{y}\delta_{p}a_{16,i}\,,$$

$$a_{19,i} = {}^{p}\delta_{x}a_{6i} = {}^{p}\delta_{z}a_{9i} = {}^{x}\delta_{z}a_{13,i} = {}^{z}\delta_{x}a_{12,i} = {}^{x}\delta_{p}a_{16,i} = {}^{z}\delta_{p}a_{14,i}\,,$$

$$a_{20,i} = {}^{p}\delta_{x}a_{5i} = {}^{p}\delta_{y}a_{8i} = {}^{y}\delta_{x}a_{11,i} = {}^{x}\delta_{y}a_{12,i} = {}^{y}\delta_{p}a_{14,i} = {}^{x}\delta_{p}a_{15,i}\,.$$

Az $r_{4,3}$ determinánsról bebizonyitjuk, hogy

$$r_{4,3} = (\alpha\beta\gamma\delta)^{15}.$$

Ennek bebizonyitása végett legyenek X_{α}, X_{β}, X_{γ}, X_{δ} az $(\alpha\beta\gamma\delta)$ determinánsnak x_{α}, x_{β}, x_{γ}, x_{δ} elemeihez tartozó minorjai. Az $r_{4,3}$ determinánsban szorozzuk az első sort X_{α}, a másodikat X_{β}, a harmadikat X_{γ}, a negyediket X_{δ} minorral, azután adjuk hozzá az elsőhöz az ötödik, hatodik, tizenegyedik sort,

	ezeket sorban szorozva			X_{β}, X_{γ}, X_{δ}	minorral
a másodikhoz a 7, 8, 12-dik sort,	»	»	»	X_{γ}, X_{α}, X_{δ}	»
a harmadikhoz a 9, 10, 13-dik sort,	»	»	»	X_{α}, X_{β}, X_{δ}	»
a negyedikhez a 14, 15, 16-dik sort,	»	»	»	X_{α}, X_{β}, X_{γ}	»

Azután szorozzuk az ötödik, hetedik, kilenczedik, sort sorban X_α, X_β, X_γ és a 14-dik, 15-dik, 16-dik sorokat X_δ minorral és adjuk hozzá

az ötödik sorhoz	a 8-dik, 17-dik, 20-dik	sort,	ezeket	sorban	szorozva	X_β, X_γ, X_δ	minorokkal,
a hetedik sorhoz	10-dik, 17-dik, 18-dik	»	»	»	»	X_γ, X_α. X_δ	»
a kilenczedikhez	6-dik, 17-dik, 19-dik	»	»	»	»	X_α, X_β, X_δ	»
a tizenegyedikhez	11-dik, 19-dik, 20-dik	»	»	»	»	X_α, X_γ, X_β	»
a tizenötödikhez	12-dik, 20-dik, 18-dik	»	»	»	»	X_β, X_α, X_γ	»
a tizenhatodikhoz	13-dik, 18-dik, 19-dik	»	»	»	»	X_γ, X_β, X_α	»

Ezen átalakitás eredményét igy fejezzük ki:

$$
\begin{array}{c}
X_\alpha^2 X_\beta^2 X_\gamma^2 X_\delta^4 . r_{4,3} \\
= (\alpha\beta\gamma\delta)^{10} .
\end{array}
\left|
\begin{array}{cccccccccc}
x_\alpha^2 & y_\alpha^2 & z_\alpha^2 & p_\alpha^2 & 2y_\alpha z_\alpha & 2z_\alpha x_\alpha & 2x_\alpha y_\alpha & 2x_\alpha p_\alpha & 2y_\alpha p_\alpha & 2z_\alpha p_\alpha \\
x_\beta^3 & y_\beta^2 & z_\beta^2 & p_\beta^2 & 2y_\beta z_\beta & 2z_\beta x_\beta & 2x_\beta y_\beta & 2x_\beta p_\beta & 2y_\beta p_\beta & 2z_\beta p_\beta \\
x_\gamma^2 & y_\gamma^2 & z_\gamma^2 & p_\gamma^2 & 2y_\gamma z_\gamma & 2z_\gamma x_\gamma & 2x_\gamma y_\gamma & 2x_\gamma p_\gamma & 2y_\gamma p_\gamma & 2z_\gamma p_\gamma \\
x_\delta^2 & y_\delta^2 & z_\delta^2 & p_\delta^2 & 2y_\delta z_\delta & 2z_\delta x_\delta & 2x_\delta y_\delta & 2x_\delta p_\delta & 2y_\delta p_\delta & 2z_\delta p_\delta \\
x_\beta x_\gamma & y_\beta y_\gamma & z_\beta z_\gamma & p_\beta p_\gamma & y_\beta z_\gamma + y_\gamma z_\beta & z_\beta x_\gamma + z_\gamma x_\beta & x_\beta y_\gamma + x_\gamma y_\beta & x_\beta p_\gamma + x_\gamma p_\beta & y_\beta p_\gamma + y_\gamma p_\beta & z_\beta p_\gamma + z_\gamma p_\beta \\
x_\gamma x_\alpha & y_\gamma y_\alpha & z_\gamma z_\alpha & p_\gamma p_\alpha & y_\gamma z_\alpha + y_\alpha z_\gamma & z_\gamma x_\alpha + x_\alpha z_\gamma & x_\gamma y_\alpha + x_\alpha y_\gamma & x_\gamma p_\alpha + x_\alpha p_\gamma & y_\gamma p_\alpha + y_\alpha p_\gamma & z_\gamma p_\alpha + z_\alpha p_\gamma \\
x_\alpha x_\beta & y_\alpha y_\beta & z_\alpha z_\beta & p_\alpha p_\beta & y_\alpha z_\beta + y_\beta z_\alpha & z_\alpha x_\beta + z_\beta x_\alpha & x_\alpha y_\beta + x_\beta y_\alpha & x_\alpha p_\beta + x_\beta p_\alpha & y_\alpha p_\beta + y_\beta p_\alpha & z_\alpha p_\beta + z_\beta p_\alpha \\
x_\alpha x_\delta & y_\alpha y_\delta & z_\alpha z_\delta & p_\alpha p_\delta & y_\alpha z_\delta + y^\delta z_\alpha & z_\alpha x_\delta + z_\delta x_\alpha & x_\alpha y_\delta + x_\delta y_\alpha & x_\alpha p_\delta + x_\delta p_\alpha & y_\alpha p_\delta + y_\delta p_\alpha & z_\alpha p_\delta + z_\delta p_\alpha \\
x_\beta x_\delta & y_\beta y_\delta & z_\beta z_\delta & p_\beta p_\delta & y_\beta z_\delta + y_\delta z_\beta & z_\beta x_\delta + z_\delta x_\beta & x_\beta y_\delta + x_\delta y_\beta & x_\beta p_\delta + x_\delta p_\beta & y_\beta p_\delta + y_\delta p_\beta & z_\beta p_\delta + z_\delta p_\beta \\
x_\gamma x_\delta & y_\gamma y_\delta & z_\gamma z_\delta & p_\gamma p_\delta & y_\gamma z_\delta + y_\delta z_\gamma & z_\gamma x_\delta + z_\delta x_\gamma & x_\gamma y_\delta + x_\delta y_\gamma & x_\gamma p_\delta + x_\delta p_\gamma & y_\gamma p_\delta + y_\delta p_\gamma & z_\gamma p_\delta + z_\delta p_\gamma
\end{array}
\right| . \omega_{4,3} \ldots 9)
$$

Itt a jobb oldalon a 10-ed foku determináns a 4) egyenlet szerint $(\alpha\beta\gamma\delta)^{5}$-vel egyenlő és $\omega_{4,3}$ azaz

$$\begin{vmatrix}
a_{2,10} & a_{3,10} & a_{4,10} & a_{7,10} & a_{10,10} & a_{12,10} & a_{13,10} & a_{15,10} & a_{16,10} & a_{18,10} \\
a_{2,6} & a_{3,6} & a_{4,6} & a_{7,6} & a_{10,6} & a_{12,6} & a_{13,6} & a_{15,6} & a_{16,6} & a_{18,6} \\
a_{2,8} & a_{3,8} & a_{4,8} & a_{7,8} & a_{10,8} & a_{12,8} & a_{13,8} & a_{15,8} & a_{16,8} & a_{18,8} \\
a_{2,11} & a_{3,11} & a_{4,11} & a_{7,11} & a_{10,11} & a_{12,11} & a_{13,11} & a_{15,11} & a_{16,11} & a_{18,11} \\
a_{2,12} & a_{3,12} & a_{4,12} & a_{7,12} & a_{10,12} & a_{12,12} & a_{13,12} & a_{15,12} & a_{16,12} & a_{18,12} \\
a_{2,13} & a_{3,13} & a_{4,13} & a_{7,13} & a_{10,13} & a_{12,13} & a_{13,13} & a_{15,13} & a_{16,13} & a_{18,13} \\
a_{2,17} & a_{3,17} & a_{4,17} & a_{7,17} & a_{10,17} & a_{12,17} & a_{13,17} & a_{15,17} & a_{16,17} & a_{18,17} \\
a_{2,18} & a_{3,18} & a_{4,18} & a_{7,18} & a_{10,18} & a_{12,18} & a_{13,18} & a_{15,18} & a_{16,18} & a_{18,18} \\
a_{2,19} & a_{3,19} & a_{4,19} & a_{7,19} & a_{10,19} & a_{12,19} & a_{13,19} & a_{15,19} & a_{16,19} & a_{18,19} \\
a_{2,20} & a_{3,20} & a_{4,20} & a_{7,20} & a_{10,20} & a_{12,20} & a_{13,20} & a_{15,20} & a_{16,20} & a_{18,20}
\end{vmatrix}$$

determinánsról nem nehéz kimutatni, hogy az $X_\alpha^2 X_\beta^2 X_\gamma^2 X_\delta^4$ kifejezéssel egyenlő. Ennek folytán 9)-ből lesz:

$$r_{4,3} = (\alpha\beta\gamma\delta)^{15}.$$

Jelöljük $R_{4,3}$-val azt a determinánst, mely $r_{4,3}$-ből támad, ha ebben $x_i y_i z_i p_i$ $(i = \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ helyett $(\alpha\beta\gamma\delta)$ determinánsnak megfelelő minorjait helyettesitjük, akkor

$$R_{4,3} = (\alpha\beta\gamma\delta)^{45}.$$

Most a 8) egyenletet egyfelől $R_{4,3}$, másfelől $(\alpha\beta\gamma\delta)^{45}$ mennyiséggel szorozzuk és eredményül egy oly alakú egyenletet kapunk, mely a transformált koordináták között is meg van; azért, minthogy a 2) egyenlet szerint

$(\alpha'\beta'\gamma'\delta') = (a_1 b_2 c_3 d_4)(\alpha\beta\gamma\delta)$, $(\varepsilon'\beta'\gamma'\delta') = (a_1 b_2 c_3 d_4)(\varepsilon\beta\gamma\delta)$ stb. lesz $(a_1 b_2 c_3 d_4)^{33}. (\alpha\beta\gamma\delta)^{33}. S'_{4,3} = (a_1 b_2 c_3 d_3)^{48}. (\alpha\beta\gamma\delta)^{33}. S_{4,3}$ vagyis

$$S'_{4,3} = (a_1 b_2 c_3 d_4)^{15}. S_{4,3}.$$

Ez az egyenlet azt mutatja ki, hogy $S_{4,3}$ alakzat covariáns.

Inductió útján az e dolgozatban előadottak alapján a következő egyenleteket állithatjuk föl

$$S'_{3,n} = (\alpha\beta\gamma)^p \,.\, S_{3,n} \; \ldots\ldots \; 10)$$

$$S'_{4,n} = (\alpha\beta\gamma\delta)^q \,.\, S_{4,n} \; \ldots\ldots \; 11)$$

hol $p = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ és $q = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$

Ezen egyenletek elseje azt mondja, hogy $S_{3,n}$ alakzat, melynek eltünése kifejezi, hogy $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ pont ugyanazon n-ed rendű vonalon fekszik vagy $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ egyenes ugyanazt az n-ed osztályu vonalat érinti, covariáns. Az egyenletek másikának tartalma: $S_{4,n}$ alakzat, melynek eltünése föltétele annak, hogy $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ pont ugyanazon n-ed rendű felületen fekszik, vagy $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$ sík ugyanazt az n-ed osztályu felület érinti, szintén covariáns.

A 10) és 11) egyenletek fönállásának kimutatása az n-ről $(n+1)$-re való átmenetel által eszközölhető — de ez az utja a bizonyításnak igen fáradságos.

ÁLLANA-E AZ BOLTZMANN-CLAUSIUS-FÉLE TÉTEL AKKOR IS, HA A POTENTIÁL AZ IDŐTŐL EXPLICITE IS FÜGGENE?

Dr. Réthy Mór, kolozsvári egyetemi tanártól.

Két, egymást kölcsönösen vonzó avagy taszító tömegpont közötti potentiál alatt Weberig olyan függvényt értettek, mely tökéletesen meg van határozva, ha adva van mindegyik pont helyzete és tömege, s a mely továbbá [föltéve, hogy a mozgás *csakis* a kölcsönös vonzás és tetszésszerinti kezdetleges impulsus következménye] mindig épen anynyival változik, mint a két pont eleven ereje; akárhány tömegpont közötti potentiál alatt azután a kettő-kettő közöttiek algebrai összegét értették. Weber óta, miként ismeretes, e definitió csak annyiban változott, hogy a két-két pont közötti potentiál tökéletes meghatározására most már nem elegendő, ha a két pontnak csupán helyzetét és tömegét ismerjük, hanem múlhatatlanul szükséges, hogy ezeken kivül relativ sebességük komponenseit is ismerjük, sőt szükséges a tömegeken kivül még más physikai állandó ismerete is. E bővités korántsem valami mathematikai fényüzés: nélküle lehetetlen volt természetes és egyszerű módon kimagyarázni az Ampère és Faraday-féle elektrikus tüneményeket, úgy hogy mondhatni, hogy a bővitést határozottan maga a physikai felfogás parancsolta. Különösen hangsúlyozzuk továbbá, hogy az új potentiáltörvény szerinti mozgás *egészen más termé-*

szetű mint a régi törvény szerinti mozgás: ugyanis míg a régi szerint a potentiál (tehát a pontrendszer eleven ereje is) ugyanazzá válik *szükségképen*, valahányszor a pontrendszer mindenik pontja régi helyére viszszatér, — addig az új törvény szerint történő mozgásnál a potentiál (tehát az eleven erő is) ezer meg ezerféle lehet, ha mindegyik pont ugyanazt a helyet foglalja is el, a melyet egyszer már elfoglalt: a potentiál függ ugyanis attól a sebességtől is, melylyel az *egyes* pontok régi helyeikre visszatérnek. Még világosabban látható a különbség, ha az erőket hasonlítjuk össze: ugyanis a régi gravitátió-törvény értelmében az az erő, melylyel két pont egymást vonzza, a tömegeken kivül *csakis* a pontok relativ helyzetétől függött; ellenben a Weber-féle gravitátiónál más-más ez az erő, ha a relativ helyzet egy ugyanaz is, mihelyt csak a sebesség komponensei mások.

A Weber szerinti potentiál (vagy ha tetszik gravitátió) tehát nem redukálható a Laplace szerinti potentiálra (illetőleg gravitátió-törvényre) ennélfogva, még ha eddigelé nem lett volna reá múlhatatlanul szüksége a physikusnak (a mi pedig nem áll, mert múlhatatlanul szüksége volt reá), még akkor sem lehetne a priori tagadni, hogy a jövőben akadhatnak olyan tüneményekre is, a melyeket nélküle kimagyarázni lehetetlenség.

Ezeket szem előtt tartva, érdekelni fogja a physikust, ha a potentiál fogalma *még* tovább is bővíttetik, jelesül fölvétetik a potentiál formulájába az idő is explicite, vagy fölvétetnek még a gyorsulás és a magasabb rendű gyorsulások is. Az utóbbiak fölvétele és a fölvétel befolyása a mozgás egyenleteire érintve van Schering munkájában: Hamilton Jac. Theorie etc. pag. 31, 32. Czélom ezuttal a következő kérdésekkel foglalkozni: mi módon léphet föl az idő explicite is a potentiálban, illetőleg mi módon nem léphet föl semmi esetre sem; minő befolyása *lehetne* föllépésének a mozgás egyenleteire és minő a Boltzmann Clausius-féle tételre? Föl fog ugyanis állíttatni egy igen egyszerű gravitatiótörvény, melynek a Laplace-Newton, Riemann-Weber féle speciális esete, s a mely hódol az energia megmaradása elvének; de ki fog tünni, hogy e gravitatió törvény mellett nem áll a Boltz. Claus. tétel minden további föltétel nélkül.

I. Jelöltessék a pontrendszer potentiálja P-vel és eleven ereje T-vel: úgy a potentiál definitiója szerint azon mozgás folyamában, a mely létrejő a pontrendszer csupán *kölcsönös* vonzódása következtében, az egyik épen annyival növekedvén mint a másik, a kettő közötti különbség állandó: azaz

1) $$T - P = E.$$

Az E neve a pontrendszer »energiája,« s az egyenleté »az energia megmaradásának elve.« Az elvnek tehát állani kell *legalább* minden szabad pontrendszerről, melyre kivülről erők nem hatnak.

Valamint minden függvényről, a mely számolás alá esik, úgy a potentiálról is föl kell tennünk, hogy általánosan szólva véges és argumenseinek legfőlebb csak bizonyos speciális értékei mellett válhatik végtelen nagygyá; a mi pedig az eleven erőt illeti, arról tudjuk, hogy csak úgy válik végtelen nagygyá, ha valamelyik pont sebessége végtelen nagy felé konvergál.

Gondoljunk már mostan akárhány pontból álló rendszert, melynek potentiálja és eleven ereje egy bizonyos pillanatban véges: akkor az E energiája is véges. Az 1) egyenletre rátekintve, kimondhatjuk tehát, hogy e pontrendszer potentiálja akkor és csakis akkor válik végtelen nagygyá, ha az eleven erő végtelen nagygyá lesz. E föltételnek megfelelünk, ha a két-két pont közötti potentiál számára olyan formulát fogadunk el, a mely kifejthető a sebesség-komponensek *positiv* (már akár egész, akár tört) hatványai szerint haladó sorrá, mely sor koefficiensei az x, y, z koordináták és a t idő s ezeken kivül még csak physikai állandók ismeretlen függvényei; ellenben inconveniensekre vezetne, ha a kifejtésben a sebességi komponensek negativ hatványai is szerepelnének: akkor ugyanis általánosan szólva végtelenné kellene válni a potentiálnak, mihelyt egyik vagy másik pont sebessége (vagy helyesebben két pontnak egymásra vonatkozó relativ sebessége) zéró.

A positiv hatványok szerinti kifejtést elfogadva, jelöljük már mostan a sor szabad tagját P_0-val, azon tagok összegét, melyek dimensiója < 2, P'-vel, s a másodfokú és magasabb fokú tagokat P''-vel: úgy

$$P = P_0 + P' + P''.$$

Azt állitjuk, hogy $\dfrac{\partial P_0}{\partial t}$*-nek és* P'*-nek identice zérónak kell lenni.*

Ugyanis álljon a pontrendszer csak két pontból, melyek egyike mozdulatlan, míg a másik az összekötő egyenesben mozog x' változó sebességgel; a két pont távola egymástól x, a mozgó pont tömege m és gyorsulása x''. Akkor a $dT = dP$ egyenletet kifejtve és dx-szel osztva nyerjük ezt:

$$mx'' = \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{1}{x'}\frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{1}{x'}\frac{\partial P'}{\partial x'}x'' + \frac{1}{x'}\frac{\partial P'}{\partial t}$$
$$+ \frac{\partial P''}{\partial x} + \frac{1}{x'}\frac{\partial P''}{\partial x'}x'' + \frac{1}{x'}\frac{\partial P'}{\partial t}$$

Ha már mostan $x' = 0$, akkor a jobb oldalon álló függvényeк közül *csak* a következő három válnék végtelen nagygyá:

$$\frac{1}{x'}\frac{\partial P_0}{\partial t}\,,\quad \frac{1}{x'}\frac{\partial P'}{\partial t}\,,\quad \frac{1}{x'}\frac{\partial P'}{\partial x'}\,.$$

Ezekhez képest elenyésznék a többi, és tekintve hogy az utolsó mellett x'' áll mint szorzó, elenyésznék a baloldali mx'' is. Azért e határesetben egyenletünknek azzá kellene redukálódni, hogy

$$0 = \frac{\partial P_0}{\partial t} + \frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{\partial P'}{\partial x'}\,x''\;;\ \lim x' = 0$$

Ámde ezen egyenlet tagjai közül a középső x'-vel együtt enyészik el; ha tehát az első tag identice zéró nem volna, akkor azon inconveniens előtt állnánk, hogy $x'' = \infty$ vagy $= 0$ (általánosan szólva) *mindig* és *mindenütt*, mihelyt csak $x' = 0$.

A $\frac{\partial P_0}{\partial t}$-nek tehát identice zérónak kell lenni.

Igy azután fenmaradna még

$$0 = \frac{\partial P'}{\partial t} + \frac{\partial P'}{\partial x'}\,x''.$$

Ámde a $\frac{\partial P'}{\partial x'}$ egy fokkal alacsonyabb rendű zéró, mint $\frac{\partial P'}{\partial t}$; ha tehát ez utóbbi identice zéró nem volna, akkor megint az az inconveniens előtt állnánk, hogy $x'' = 0$ *mindig* és *mindenütt, mihelyt* csak $x' = 0$.

A $\frac{\partial P'}{\partial t}$-nek tehát és így azután $\frac{\partial P'}{\partial x'}$-nek is zérónak kell lenni identice, *a mi* tekintve, hogy P' definitiójánál fogva nem tartalmazhatott x'-től szabad tagot, csak úgy lehetséges, *ha P' identice zéró.*

Mindezeket tekintve marad azután

$$mx'' = \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial P''}{\partial x} + \frac{1}{x'}\frac{\partial P''}{\partial x'}\,x'' + \frac{1}{x'}\frac{\partial P''}{\partial t}\,,$$

a mi többé nem tartalmaz inconvenientiát; úgy hogy a mig csak egy mozgó pontról van szó, a mely még hozzá a vonzó centrum irányában mozog, igaznak bizonyult be fenebbi állításunk.

Ép úgy menne a bizonyitás akkor is, ha a pont akármilyen térbeli vonalat irna is le: a tétel tehát általánosan bebizonyitottnak tekinthető.

II. Ezentúl tegyük azon specializáló föltevést, hogy a sorkifejtés *egész* hatványok szerint lehetséges s nevezzük a *0, 2, 3, . . . n*-ed fokú tagjait a sornak P_0, P_2, P_3, . . . P_n-nek.

Lészen

$$P = P_0 + \sum_{n=2}^{\infty} P_n$$

vagy téve

$$P_n = V_n - x' \frac{\partial V_n}{\partial x'} \text{ és } V = P_0 + \sum_{n=2}^{\infty} V_n$$

lészen

$$P = V - x' \frac{\partial V}{\partial x'} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 2)$$

Az ezen egyenlettel defineált V függvényt a szóban lévő két pont közötti erőfüggvénynek fogjuk nevezni. Mi az összefüggés az erő és az erőfüggvény között?

Kifejtve a $dT = dP$ egyenletet ered

$$mx'' = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial x'} + \frac{1}{x'} \frac{\partial V}{\partial t} .$$

Ámde Euler szerint

$$n . V_n = x' \frac{\partial V_n}{\partial x'} ,$$

tehát

$$\frac{1}{x'} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} , \text{ hol } W = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V_n}{n} .$$

Ezt betéve, ered

$$3) \qquad mx'' = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial x'} + \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} ,$$

egy oly képlet, mely igen alkalmas a gravitatió törvény általánositására. Ha ugyanis V nem egyéb mint az x' *0, 2, 3, . . . n*-ed fokú függvényeinek összege és

$$W = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V_n}{n} ,$$

akkor a

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial x'} + \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t}$$

képletet elfogadva azon erő gyanánt, a melylyel a kezdetpontban nyugvó pont a szabadon mozgót vonzza, ezen erőképlet, miként láttuk, megegyez az energia megmaradásának elvével. A mellett az első tekintetre meggyőződünk, hogy e képlet nem egyéb a NEWTON-COULOMB, WEBER-RIEMANN-féle általánositásánál.

Kisértsük meg már mostan e *gravitátió törvényt* kiterjeszteni görbe vonalas mozgásra és akárhány mozgó pontból álló rendszerre is oly módon, hogy a két-két pont közötti V_{12} erőfüggvény legyen e két pont sebesség komponensei *0, 2, 3, . . . n*-ed fokú függvényeinek összszege, míg az öszszes erőfüggvény $V =$ a két-két pont közötti V_{12}-ök összszege: így tehát most is

$$\text{3a)} \qquad V = P_0 + \sum_{n=2}^{\infty} V_n \; ;$$

a mi a W-t illeti, most is legyen

$$\text{3b)} \qquad W = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{V_n}{n} \; ;$$

végezetül akármelyik pontra ható összes erő komponense az X_i tengely irányában legyen adva a

$$\text{3c)} \qquad \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial x'_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial x'_i \partial t}$$

képlettel.

Azt állitjuk, hogy ezen erőtörvény megegyez az energia megmaradása elvével.

Ugyanis pontrendszernél, melyre kivülről vagy nem hat erő, vagy ha hat, úgy csak mozdulatlan centrumoktól ered, a dt alatti *munka*

$$\sum_i \left[\frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial x'_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial x'_i \partial t} \right] dx_i ,$$

[hol az összegezés az egész pontrendszerre s minden koordinátára kiterjed] tökéletes differentiál. Valóban e kifejezés

$$= \sum_i \left[\frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial V}{\partial x'_i} dx'_i - \frac{\partial V}{\partial x'_i} dx'_i - d \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \right) x'_i \right.$$

$$\left. + \frac{\partial V}{\partial t} dt - \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial^2 W}{\partial x'_i \partial t} dx_i \right]$$

azaz

$$= d \left[V - \sum_i \frac{\partial V}{\partial x_i} x'_i \right] + \sum_i \frac{\partial^2 W}{\partial x'_i \partial t} dx_i - \frac{\partial V}{\partial t} dt \, .$$

Amde Euler szerint

$$V_n = \frac{1}{n} \sum_i \frac{\partial V_n}{\partial x_i} x'_i$$

tehát 3_a és 3_b értelmében

$$V = P_0 + \sum_i \frac{\partial W}{\partial x'_i} x'_i ,$$

mely egyenletet deriválva t szerint és tekintve, hogy P_0 a t-től nem függ explicite, ered

$$4) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial^2 W}{\partial x'_i \partial t} x'_i .$$

Ezt tekintetbe véve, ered tehát végezetül, *hogy a dt idő alatti munka*

$$= d\left[V - \sum_i \frac{\partial V}{\partial x'_i} x'_i \right] .$$

Más részről *e munka* szabad pontrendszernél [és akkor is, ha a föltéti egyenletekben nincs az idő]

$$= \Sigma_i m x_i'' dx_i = dT$$

A munka kétféle kifejezését egyenlővé téve és az eredő egyenletet integrálva ered tehát

$$5) \qquad E = T - \left(V - \sum_i \frac{\partial V}{\partial x'_i} x'_i \right),$$

mely egyenletet összehasonlítva az (*1*)-gyel, látható, hogy a zárjelben lévő mennyiség nem egyéb a P potentiálnál; s az egyenlet maga nem egyéb az energia megmaradása elvénél.

Az egyenlet szebb alakot vesz fel, ha tétetik

$$T = \sum_i \frac{\partial T}{\partial x'_i} x'_i - T$$

és röviditésül

$$6_a) \; H = T + V ;$$

ugyanis ezzé válik:

$$6) \qquad E = \sum_i \frac{\partial H}{\partial x'_i} x'_i - H .$$

III. Szigorún véve nem igen van a világon anyagi pont, a mely mozdulatlan, és még kevésbbé van két olyan anyagi pont, a melyek között kölcsönhatás nincs. E két oknál fogva az energia megmaradásának elve abban az alakban, a mint az imént levezettük, csak az öszszes világrendszerre állhat szigorún, míg egy-egy testre nézve nem. De ha valamely test bizonyos nemű mozgására csak elenyésző csekély befolyása van a kivüle eső anyagi pontok mozgásának, akkor a meddig e mozgásokról van szó, mégis meg lesz engedve és czélszerű is lehet, e külső anyagi pontokat teljesen nyugvóknak tekinteni. Ha pl. egy delejtű légüres aczéltokban leng és egyúttal az aczéltok pontjai hangrezgéseket tesznek, akkor bizonyosan igen csekély befolyása van a lengésre annak a körülménynek, hogy a tok pontjai rezegnek. Vagy ha egy fémhengerben elzárt, állandó hőmérsékű és térfogatú gőz mozgásával foglalkozunk, akkor kétségkivül van némi befolyása e mozgásra annak is, hogy a fémhenger pontjai nem nyugszanak, hanem rezegnek: de a befolyás elenyésző csekély. Ilyen külső anyagi pontokat tehát állóknak vehetünk és fogunk is venni addig, míg csak a delejtű lengéséről, az állandó hőmérsékű és térfogatú gőz mozgásáról stb. van szó. Igy véve a dolgot azután szabatos értelemmel fognak birni az előbbi pontbeli levezetések, ha csak ez az egy test (delejtű, gőz stb) mozgásáról van is szó: beszélhetünk a test energiájáról úgy, a mint azt a *6)* egyenlet jobb oldala adja és mondhatjuk, hogy az energia megmaradásának elve áll ezen egy testre is.

De be kell látnunk, hogy az E energiának nincsen szabatos értelme addig, míg a V és W erőfüggvényeket az eddiginél szabatosabban nem defineáljuk. Hogy szabatos értelme legyen, megállapodunk tehát abban, hogy a V és W-ben ne legyenek olyan additiv (felesleges) tagok, a melyek a test pontjainak koordinátáitól és sebességi komponenseitől függetlenek. A külső pontok koordinátáit megkülönböztetésül ξ_1, ξ_2, ξ_3-mal jelölve, világos, hogy ezek is fognak szerepelni az erőfüggvények kifejezésében s az iménti megállapodás után következik, hogy

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial V}{\partial \xi'} + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi' \partial t}$$

lesz azon erő X komponense, melylyel a test anyagi pontjai a szóban lévő külső pontra hatnak. Mivelhogy pedig a külső pont sebességét zérónak veszszük és a $V_2 \ldots V_n$ a (ξ') sebességnek legalább is quadratikus függvényei, tehát $\frac{\partial V}{\partial \xi'} = 0$ és $\frac{\partial W}{\partial \xi'} = 0$: lészen tehát az erő

X komponense

$$= \frac{\partial V}{\partial \xi} \text{ vagyis } = \frac{\partial H}{\partial \xi}$$

Ha a testre zavaró erők hatnak, akkor megváltozik energiája és meg a külső pontok helyzete, mely utóbbi külső munka végzésével jár. Ha a zavarás végtelen kicsiny, akkor az energia változása $= \delta E$ és a testből a külső anyagi pontokra ható erők által végzett — röviden

külső — munka $= \Sigma \frac{\partial H}{\partial \xi} \delta \xi$;

Ennélfogva a testtel közölt összes erély

$$\delta Q = \delta E + \sum \frac{\partial H}{\delta \xi} \partial \xi ;$$

ezen erély kifejezésének más alakra hozása képezi további föladatunkat.

Betéve ide *6*-ból az E értékét, lészen kifejtés és egyszerű reductió után

$$\delta Q = \delta \left[\sum \frac{\partial H}{\partial x'} x' \right] - \sum \frac{\partial H}{\partial x} \delta x - \sum \frac{\partial H}{\partial x'} \delta x' - \frac{\partial H}{\partial t} \partial t .$$

Az egyenletet dt-vel szorozva s a jobboldalon álló három első tagot tökéletesen ugyanazon a módon átalakítva, mint a »M. L.« f. é. januári füzetebeli dolgozatomban, lészen mostan

$$\delta Q \,.\, dt = \delta \left[\sum \frac{\partial H}{\partial x'} dx \right] - d \left[\sum \frac{\partial H}{\partial x'} \delta x \right] + \sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} \delta x \,.\, dt - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t \,.\, dt \,.$$

Az utolsó tag helyett már mostan betéve az *4*-ből látható értéket, az utolsó két tag összege

$$= \sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} \left[\delta x \,.\, dt - dx \,.\, \delta t \right] ;$$

a zárjelben lévő mennyiség itt nem egyéb mint dt-szer az x-nek egyenlő t-k melletti variátiója: e variátiót $\delta_{,}x$-vel jelölve lészen tehát végezetül

$$7) \quad \left[\delta Q - \sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} \delta_{,} x \right] dt = \delta \left[\sum \frac{\partial H}{\partial x'} dx \right] - d \left[\sum \frac{\partial H}{\partial x'} \delta x \right] .$$

Ezen egyenlet nem azonos a Boltzmann-féle tételnek múlt alkalommal levezettük általánosításával, mert a baloldalon ottan

$$\delta Q . dt,$$

itten pedig

$$\left[\delta Q - \sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} \delta_i x\right] dt$$

áll. E szerint a Boltzmann-féle tétel nem áll többé általánosan szólva, mihelyt a potentiál függ az időtől explicite is, hanem áll helyette a következő tétel:

Ha a δQ-nak i periodus alatti közép értéke $\overline{\delta Q}$-val és a

$$\sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} \delta_i x \text{ középértéke } \overline{\sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} \delta_i x}\text{-vel}$$

jelöltetik, s röviditésül

$$\frac{1}{i} \int_0^i \sum \frac{\partial H}{\partial x'} x'.dt = 2\,\mathfrak{T}$$

tétetik, akkor

$$\frac{\overline{\delta Q} - \overline{\sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} \delta_i x}}{\mathfrak{T}} = \delta \log 2i\mathfrak{T}.$$

Látni való, hogy e tétel akkor és csakis akkor válik azonossá a Boltzmanné-val, ha

$$\overline{\sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} \delta_i x} = 0$$

Kolozsvár, 1878. január hó.

A KÚPSZELETEK ELŐÁLLÍTÁSA PROJECTIV SUGÁRSOROK ÁLTAL.

Hunyady Jenőtől.

A kúpszeleteknek előállítási módja Newton szerint, két állandó szögnek csúcsaik körüli forgatása által, akként történik, hogy a forgatásnál két különböző szöghöz tartozó két szár egymást egy egyenesen metszvén, a másik két szár metszéspontja kúpszeletet ír le.

Ezen előállítási mód a mai terminologia szerint következőképen fejeztetik ki.

»Két projectiv sugár-sor megfelelkező sugarainak metszéspontjai kúpszeletet írnak le.«

E sorok czélja ez utóbbi tétel analytikai bebizonyítása és bővebb kifejtése.

1. A következő jelölések használata mellett:

$$\left.\begin{aligned} U &\equiv a_1 x + a_2 y + a_3 \\ V &\equiv b_1 x + b_2 y + b_3 \\ U' &\equiv a'_1 x + a'_2 y + a'_3 \\ V' &\equiv b'_1 x + b'_2 y + b'_3 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots 1)$$

Az

$$\left.\begin{aligned} U = 0\,,\ U' = 0 \\ V = 0\,,\ V' = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots 2)$$

egyenletek egyenesek egyenleteit jelentik. Ha továbbá λ és λ' határozatlan állandók, úgy azon sugársorok egyenletei, melyeknek középpontjai az U, U' és V, V' egyenesek metszéspontjai által vannak meghatározva, a következők:

$$\left.\begin{aligned} U - \lambda U' = 0 \\ V - \lambda' V' = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots 3)$$

Az ezen egyenletek által kifejezett sugársorok projectivek, ha az egyik sugársorban egy sugárnak a másik sugársorban is csak egy sugár felel meg, és megfordítva. A két projectiv sugársor sugarainak ezen egyértelmű megfelelkezése a következő egyenletben nyer analytikai kifejezést:

$$\alpha \lambda \lambda' + \beta \lambda + \gamma \lambda' + \delta = 0 \;\ldots\; 4)$$

a melyben α, β, γ, δ mennyiségek állandókat jelentenek.

Ha a 3) és 4) alatti egyenletekből λ-*t* és λ'-*t* kiküszöböljük, úgy az ekként eredő egyenlet az egymásnak megfelelő sugarak metszéspontjainak mértani helyét fejezi ki, melyről könnyen belátjuk, hogy kúpszelet.

A 3) alatti sugársorok akkor is projectivek, ha

$$\lambda' = \lambda \;\ldots\; 5)$$

és ha most a 3 és 5) alatti egyenletekből λ-*t* és λ'-*t* kiküszöböljük, úgy a kérdéses mértani hely egyenlete a következő:

$$UV' - U'V = 0 \;\ldots\; 6)$$

2. Egy további kérdés, melylyel itt foglalkozni akarunk az, hogy a projectiv sugársorok megfelelő sugarainak metszéspontjai minő feltételek mellett írják le a különféle kúpszeleteket?

Erre megfelelhetünk, hogy ha a (6) alatti egyenletben az U, V mennyiségek értékeit az 1) egyenletekből helyettesitjük, s az x, y szerint rendezett egyenletet a kúpszelet következő átalános egyenletével:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

összehasonlítjuk, melyről tudjuk, hogy az hyperbolát, parabolát vagy ellipsist jelent, a szerint a mint:

$$B^2 - 4AC \gtreqless 0, \;.\;.\;.\;.\;.\; 7)$$

megjegyezvén, hogy a kúpszeletek ezen előállításánál nem szükséges a valós és képzetes ellipsist egymástól megkülönböztetni, minthogy az utóbbi ki van zárva.

A hyperbola egyenoldalú, ha

$$A + C = 0 \;.\;.\;.\;.\; 8)$$

a kör feltételei pedig a következők:

$$\left.\begin{array}{l} B = 0 \\ A = C \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\; 9)$$

Ugyanezen feltételek a jelen esetben a következők lesznek: a 6) alatti egyenlet által kifejezett kúpszelet hyperbola, parabola vagy ellipsis, a szerint a mint:

$$a_1^2 b_2'^2 + a_2^2 b_1'^2 + a_1'^2 b_2^2 + a_2'^2 b_1^2$$

$$- 2a_1a_2b_1'b_2' - 2a_1a_1'b_2b_2' - 2a_1a_2'b_1b_2' - 2a_2a_1'b_2b_1' - 2a_2a_2'b_1b_1' - 2a_1'a_2'b_1b_2$$

$$+ 4a_1a_2'b_2b_1' + 4a_2a_1'b_1b_2' \gtreqless 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 11)$$

egyenoldalú hyperbola, ha

$$a_1 b_1' - a_1' b_1 + a_2 b_2' - a_2' b_2 = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; 12)$$

és kör, ha

$$\left.\begin{array}{r} a_1 b_2' + a_2 b_1' - a_1' b_2 - a_1' b_1 = 0 \\ a_1 b_1' - a_1' b_1 = a_2 b_2' - a_2' b_2 \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\; 13)$$

3. Végre kérdezzük, hogy a 11), 12) és 13) alatti feltételeknek mi a mértani jelentésök, a 3) alatti projectiv sugársorokra nézve.

Legyenek

$$U - \lambda U' = 0, \; V - \lambda V' = 0 \;.\;.\;.\; 14)$$

két egymásnak megfelelő sugár egyenletei a 3) alatti projectiv sugársorokban, úgy ezen két sugár egymással párhuzamos lesz, ha:

$$(a_1 - \lambda a_1')(b_2 - \lambda b_2) - (a_2 - \lambda a_2')(b_1 - \lambda b_1') = 0$$

vagy ha ez egyenletet rendezzük, ugy

$$(a_1'b_2' - a_2'b_1')\lambda^2 - (a_1b_2' - a_2b_1' + a_1'b_2 - a_2'b_1)\lambda + a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \quad 15)$$

mely egyenletből, minthogy λ szerint másodfokú, következik, hogy a 3) alatti projectiv sugársorokban átalában két egymással párhuzamos, egymásnak megfelelő sugár-pár fordulhat elő. Hogy az előbb nevezett két párhuzamos sugárpár valóban létezik-e, vagy pedig egybe esik, vagy pedig képzetessé válik, az a 15) alatti egyenletnél fogva akkor történik, ha annak gyökei valósak és egymástól különbözők, vagy pedig valósak és egymással egyenlők, vagy végre képzetesek. Ámde ezen különböző esetek a szerint fognak előállani, a mint

$$(a_1b_2' - a_2b_1' + a_1'b_2 - a_2'b_1)^2 - (a_1b_2 - a_2b_1)(a_1'b_2' - a_2'b_1') \gtreqless 0 \ldots 16)$$

Ha pedig ezen feltételekben a műtéteket végrehajtjuk, úgy látjuk, hogy ezek tökéletesen azonosok a 11) alatti feltételekkel, a honnét a következő tételre vezettetünk:

Két projectiv sugársor metszéspontjai hyperbolát, parabolát vagy ellipsist írnak le, a szerint, a mint a két sugársorban vagy két vagy egy, vagy pedig egy párhuzamos sugárpár sem létezik.

4. Feltéve, hogy λ_1 és λ_2 a 15) alatti egyenlet gyökei, úgy a 3) alatti projectiv sugársorokban az egymásnak megfelelő párhuzamos sugarak egyenletei a következők:

$$\left.\begin{array}{l} U - \lambda_1 U' = 0\,,\ V - \lambda_1 V' = 0 \\ U - \lambda_2 U' = 0\,,\ V - \lambda_2 V' = 0 \end{array}\right\}$$

Világos, hogy ha az egyik sugársorhoz tartozó két sugár egymásra merőleges, úgy az ennek megfelelő két sugár a másik sugársorban, mint az előbbiekhez párhuzamosak, szintén egymásra merőlegesen állanak. Ennélfogva tehát a két egymásnak megfelelő párhuzamos sugárpár sugarai egymásra azonnal merőlegesek, a mint ez az egyik sugárpárra bekövetkezik.

Fejezzük ki tehát, hogy az

$$\left.\begin{array}{l} U - \lambda_1 U' = 0 \\ U - \lambda_2 U' = 0 \end{array}\right\}$$

egymásra merőlegesen állanak, úgy ezen sugarakra nézve a merőlegesség feltétele a következő egyenlet által van kifejezve:

$$(a_1 - \lambda_1 a_1')(a_1 - \lambda_2 a_1') + (a_2 - \lambda_1 a_2')(a_2 - \lambda_2 a_2') = 0.$$

vagy

$$(a_1^2 + a_2^2) - (a_1 a_1' + a_2 a_2')(\lambda_1 + \lambda_2) + (a_1'^2 + a_2'^2)\lambda_1\lambda_2 = 0 \ldots 17)$$

De minthogy a feltétel szerint λ_1 és λ_2 a 15) alatti egyenletnek a gyökei, azért

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{a_1 b'_2 - a_2 b'_1 + a'_1 b_2 - a'_2 b_1}{a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1},$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1},$$

mely értékeket a 17) alatti egyenletbe helyettesítve, az a következőbe megy át:

$$(a_1^2 + a_2^2)(a'_1 b'_2 - a'_2 b'_1) - (a_1 a'_1 + a_2 a'_2)(a_1 b'_2 - a_2 b'_1 + a'_1 b_2 - a'_2 b_1)$$
$$+ (a_1'^2 + a_2'^2)(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

ez pedig még a következő alakra hozható:

$$(a_1 a'_2 - a_2 a'_1)(a_1 b'_1 - a^1_1 b_1 + a_2 b'_2 - a'_2 b_2) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; 18)$$

mely egyenlet csak úgy állhat, ha az első tagnak vagy az egyik vagy pedig a másik tényezője eltünik.

Az első tényező eltünése azt fejezi ki, hogy az

$$U = 0 \text{ és } U' = 0$$

sugarak egymáshoz párhuzamosak, a mi a feltétellel ellenkezik, és így csak a második tényező eltünése, azaz a következő feltétel

$$a_1 b'_1 - a'_1 b_1 + a_2 b'_2 - a'_2 b_2 = 0$$

fejezi ki azt, hogy az egymásnak megfelelő párhuzamos sugárpárnak a sugarai egymásra merőlegesen állanak, mely feltétel a 12) alattival azonos lévén azt mutatja:

»Hogy ha a két projectiv sugársorban az egymásnak megfelelő párhuzamos sugárpár sugarai egymásra merőlegesen állnak, úgy az összetartozó sugarak metszéspontjai az egyenoldalú hyperbolát irják le.«

5. A kör feltételeit, azaz a 13) alatti egyenleteket még a következőképen írhatjuk:

$$\left.\begin{aligned} a_1 b'_1 - a_2 b'_2 &= a'_1 b_1 - a'_2 b_2 \\ a_1 b'_2 + a_2 b'_1 &= a'_1 b_2 + a'_2 b_1 \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 19)$$

Hogy ha pedig az első egyenletet $(a_1 b_1 - a_2 b_2)$-vel, a másodikat $(a_1 b_1 + a_1 b_1)$-vel szorozzuk és összeadjuk, úgy ered:

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1 b'_1 + b_2 b'_2) = (b_1^2 + b_2^2)(a_1 a'_1 + a_2 a'_2)$$

és hasonló módon

$$(a_1'^2 + a_2'^2)(b_1 b_1' + b_2 b_2') = (b_1'^2 + b_2'^2)(a_1 a_1' + a_2 a_2')$$

végre ezen egyenletek szorzása által lesz:

$$\frac{b_1 b_1' + b_2 b_2'}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)(b_1'^2 + b_2'^2)}} = \frac{a_1 a_1' + a_2 a_2'}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(a_1'^2 + a_2'^2)}} \quad \ldots . \; 20)$$

Ha továbbá a 19) alatti egyenletek közöl az elsőt $(a_2 b_1 + a_1 b_2)$-vel, a másodikat $(a_1 b_1 - a_2 b_2)$-vel szorozzuk és azután egymásból kivonjuk, úgy találjuk, hogy

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1 b_2' - b_1' b_2) = (b_1^2 + b_2^2)(a_1 a_2' - a_1' a_2)$$

valamint hasonlóan

$$(a_1'^2 + a_2'^2)(b_1 b_2' - b_1' b_2) = (b_1'^2 + b_2'^2)(a_1 a_2' - a_1' a_2)$$

Ez utóbbi két egyenlet szorzása által pedig ered:

$$\frac{b_1 b_2' - b_2' b_2}{\sqrt{(b_1^2 + b_2^2)(b_1'^2 + b_2'^2)}} = \frac{a_1 a_2' - a_1' a_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(a_1'^2 + a_2'^2)}} \quad \ldots . \; 21)$$

A 20) és 21) alatti egyenletek azt mutatják, hogy a kör-feltételekből következik, hogy a 3) alatti projectiv sugársorokban a V és V' sugár által képezett szög cosinusa és sinusa egyenlő az U és U' sugarak által képezett szög cosinusával és sinusával, azaz a V és V' valamint az U és U' sugarak által képezett szögek egyenlők. Az U és U', valamint a V és V' sugarak a két különböző sugársorban egymásnak megfelelő sugarakat jelentenek.

Az oly projectiv sugársorokat, melyek egyikében két sugár éppen akkora szöget képez, mint a neki megfelelő két sugár a másik sugársorban, projective egyenlőknek nevezzük.

A nyert eredményeket a következő tételben foglalhatjuk össze: »Két projective egyenlő sugársor megfelelkező sugarainak metszéspontjai körvonalat írnak le.«

ADATOK A GÁZMÓTOROK ÖSSZEHASONLÍTÁSÁHOZ.

A m. k. müegyetem gépészmérnöki szakosztálya a következő pályakérdést tüzte ki az elméleti géptan köréből.

Kivántatik az eddig alkalmazásban levő, világitó gázzal müködő mótorok összehasonlító elmélete a mechanikai hőelmélet alapján. A pályadolgozat felszerelendő a tárgyalt gépek világos és érthető átnézeti rajzaival, a szerkezetileg fontosabb részleteknek nagyobb méretekben való kiemelése mellett. A nyert elméleti képletek alapján számíttassék ki a rajzban közölt gépekre az óránként és lóerőnként szükségelt gázmennyiség, és a számitott értékek hasonlíttassanak össze a rendelkezésre álló kisérleti adatokkal. Előnyben részesülnek azon dolgozatok, melyek a m. k. müegyetem birtokában levő LANGEN-OTTÓ és OTTÓ-féle gépek, valamint a m. k. tudomány-egyetem élettani intézetében felállított LENOIR-féle gép körül tett kisérletekre vonatkoznak. Pályadíj 100 o. é. forint. — A pályamunkák 1878. október 1-éig bezárólag a m. k. müegyetem gépészmérnöki szakosztálya dékánjánál nyujtandók be.

Ezen pályakérdésre vonatkozólag a mellékelt rajzlapon közöljük az idézett gázmótorok indikátor-diagrammjait; az alantabb következőkben pedig müködésük vázlatát, az indikátor-kisérletek és az egyidejüleg végzett dörzsfék-kisérletek számitási eredményeit adjuk.

A diagrammokra nézve megjegyezzük, hogy abscissáik a dugattyúlöket hosszával, ordinátáik pedig a hengerben müködő gáz nyomásával arányosak, és hogy ez utóbbiak léptékének számai kg □ cm. terület nyomásokat jeleznek.

Az I. diagramm a müegyetem mech. technologiai szertárában alkalmazott LANGEN OTTÓ-féle gázmotorral lőn felvéve. Ezen u. n. athmosphaerikus gázgép dugattyuja függélyes irányban felfelé szabadon mozog és csak akkor kapcsolódik össze a gép főtengelyével, ha az a körlég nyomása és önsulya folytán lefelé száll. — Müködése kezdetén ugyanis a dugattyú a megelőző löket alatt felhasznált gázon nyugszik, míg a gép szabályzója a kiömlési szelentyüt megnyitja, mire a gáz a szabadba elillan és a dugattyú mozgásának alsó a végpontjához közeledik. Ezen pillanatban a gép, lendítőkerekének eleven erejével a dugattyút $ab = 0.1$ m. magasra felemelvén, fris gázt és levegőt húz a hengerbe, mely b ponton a tolóka mozgó lángja által meggyújtva felrobban és a dugattyút $l = 0.85$ m. magasra fellöki, mi közben a hengerben expandáló gáz nyomása cde vonal szerint csökken. — Minthogy most a gáz nyomása a hengerben $o'e$ kisebb a légkör nyomásánál, a dugattyú a körlég és saját sulya túlyomása folytán efa vonal mentében lefelé száll, a gép főtengelyével össze-kapcsolódik, s azt gyorsuló mozgásba hozza, vagyis a lendítőkerék eleven erejét a kifejtett munka arányában növeli. — Végül a dugattyú az alatta lévő kihasznált gázt a hengerben komprimálja, míg nyomása a légnyomás és a dugattyú sulyával egyenlővé válik. Ezután a dugattyú addig pihen a comprimált elégési gáz terméken, míg a löket alatt kifejtett mechanikai munka felemésztve lévén, előbbi működését a szabályozó segítségével ujból megkezdi. — A mint e gép működése vázlatából kitünik, a gáz robbanások és a dugattyú löketek száma nincsenek szoros összefüggésben a főtengely fordulati számaival, hanem inkább a végzett munkával, mely e szerint a regulátor terhelése által bizonyos határok között szabályozható. A robbanások maximális száma perczenként $Zm = 36$. A gáz maximális nyomása a felrobbanásnál s a gép üres járása alatt 4 és 8 kg, rendes terhelése alatt 4 és 5 kg között ingadozott □ cm-ként. A dugattyú sulya $G = 22{,}5$ kg; a henger káros ürtartalma 200 köb centimeterre számitható.

A Lenoir-féle gázmótor, mely az egyetemi élettani intézet Gramme-féle szerkezetü dynamo-elektrikai világitó gépének mozgatására szolgál, szerkezete és müködése tekintetében közönséges gőzgépeinkhez némileg hasonló, a menynyiben hengere mindkét végén zárva van, és a gáz a dugattyú mindkét oldalán egyaránt müködik a hengerben. E gép II. diagrammja csak a dugattyú egyik oldalára vonatkozik ugyan, a másik oldal diagrammját azonban az előbbivel egyenlőnek lehet tekinteni. Működése kezdetén a dugattyú löket hosszának közepe tájáig gázt és levegőt szí a hengerbe, mely b ponton egy külön e czélra alkalmazott galván telep villanyszikrája által meggyujtva felrobban és a dugattyu mozgása folytán cd vonal szerint expandál, s a löket vége felé kibocsáttatik a szabadba. — Visszafelé menet a dugattyú efa vonal mentében végkép kiszoritja az elégési termékeket a hengerből és mozgásának kiinduló pontjához érve előbbi müködését ujból megkezdi. A gép üres járásának megfelelő diagramm a terhelés alatt felvett diagrammtól az ábrában, c_1 pontozott vonallal jelzett részében különbözik. Ezen gép sebessége ugyanis csak a gázkeverék bevezető nyilásának megszükitése által lévén szabályozható, a keverék helyes arányának megváltoztatása következtében a gáz elégése lassabban és nem oly hatásosan megy véghez. A gáz maximális nyomása a kisérleteknél 4 és 5 kg. között ingadozott □ cm-ként. A henger káros ürtartalma 500 köb centimeternyire és a dugattyú egyoldalu rudjának átmérőjét 30 mmre lehet felvenni.

Az Ottó-féle uj gázmótor, mely a müegyetem kisérleti természettani szertárában a Siemens-Halske által készített Heffner-Altenegg-féle szerkezetü dynamo-elektrikai világító gép mozgatására használtatik, ugy szerkezete mint müködése tekintetében is az eddigi gázmotoroktól lényegesen abban különbözik, hogy egyoldaluan müködő dugattyúja a gép főtengelyével folytonos összefüggésben van, tetemesen comprimált gázkeverékkel dolgozik és müködési körfolyama négy löketre terjed.

Az első löketnél (III ábra) a dugattyú mögött 5600 köb cmnyi térben mintegy 3 kg □ cmnyire comprimált és előmelegített gáz a mozgó tolóka gázlángja által meggyujtva felrobban és 11—13 kg □ cmnyi nyomással hat a dugattyúra kezdetben, menet közben *cd* vonal szerint expandál és a löket vége felé a szabadba kiömlik. — A második löketnél a dugattyú visszafelé menet az elégési termékeket a hengerből *efg* vonalnak megfelelő nyomással a hengerből kitolja. — A harmadik löketnél a dugattyú fris gázkeveréket szí a hengerbe *ahg* vonal szerint. — A negyedik löketnél végre a dugattyu a beszívott gázveréket *gib* vonal szerint a fentjelzett nyomásra comprimálja és így a gép egyik müködési körfolyama befejezve lévén, a többi mind hasonlóképen megy véghez. Megjegyzendő még hogy a gép sebességének szabályozása a gép centrifugalregulatora által, a töltések és robbanások számának szaporitásával vagy csökkentésével, önmüködően eszközöltetik.

A fentebbi gázmótorok főbb méreteit, s a velök végzett indikátor- és dörzsfék-kisérletekre vonatkozó adatokat és számitási eredményeket a következő táblázatba foglaltuk össze.

	I. Langen-Ottó	II. Lenoir	III. Ottó	
A dugattyú átméröje d =	16	25	17	cm.
» » metszete f =	201	491	227	□ cm.
» » löket hossza l =	0,85	0,48	0,34	m.
A gáz robba- terhelve Z_i =	36	120	80	perczenként
nások száma üresen Z_0 =	12	120	18	»
A diagrammokból számitott közép nyomások a dugattyú terület egységére				
Az 1-ső löketnél $(a\ b\ c\ d\ e)$ p_1 =	1,15	1,73	5,46	kg. □ cm.
A 2-ik » $(a\ f\ e)$ p_2 =	—0,63	—1,10	—1,15	»
A 3-ik » $(a\ h\ g)$ p_3 =	—	—	0,85	»
A 4-ik » $(b\ i\ g)$ p_4 =	—	—	—1,70	»
A nyomások terhelve p_i =	0,52	0,63	3,46	»
összege üresen p_0 =	0,52	0,20	3,46	»

	I. Langen-Ottó	II. Lenoir	III. Ottó	
Az indikált hatály terhelve N_i =	0,72	3,96	4,75	lóerő.
Az indikált hatály üresen N_0 =	0,24	1,26	1,06	»
$N_i - N_0$ =	0,48	2,70	3,69	»
A dörzsfék karhossza R =	0,65	—	0,94	m.
A kar végén működő erő P =	$8_{,0}$	—	$18_{,0}$	kg.
A fékezett tengely fordulati száma N =	60	—	160	perczenként
A dörzsfék adataiból számitott hatály N_e =	0,44	—	3,76	lóerő.

A kisérletek folyamában a gépek terhelése és sebessége rendes maximális működésüknek megfelelően szabályoztatott. Mindegyik gép vizhütő készülékkel van ellátva. A diagrammok a hengerek megmelegedésekor vétettek fel és az indikátor-rugók léptékei előzetesen a kellő pontossággal lettek meghatározva.

Közli:

Pilch A.

IRODALOM.

M. E. Mascart. Traité d'électricité statique. 2 kötet 8-adrét Paris, G. Masson. 1876.

Önálló dolgozatok gyártása bármi áron, ez az mit a tudóstól a jelenkor tudományos szelleme követel. Ennek befolyása alatt az összehordott kisérleti tények és elméleti következtetések halmaza folyvást növekszik. A tudományos anyag rendezése, az értékesnek kiválasztása s az összetartozóknak egybefoglalása e mellett másodrendű feladatnak látszik, s valóban a tudósban ma már alig tiszteljük ismereteinek széles körét és alaposságát, hanem leginkább csak azt, ha búvárkodásában még nem járt utakra lépett.

De azért érezzük, mennyire szükséges a buvárlat eredményeinek rendezése. A jó könyvet, melyben ezt megtaláljuk, mindannyian örömmel fogadjuk. Alig van physikus, ki ne használná Verdet munkáit s ne élvezné e tág látkörü tudós szorgalmának gyümölcseit, különösen ha a fénytan kérdéseiben megbizható felvilágositást keres. A mit Verdet a fénytanban s még a hőtan és elektrodynamika egy részében tett, azt tette Mascart az elektrostatika mezején. Könyvet írt, mely bizton elvezet az eredeti forrásművek tömkelegében, kiemeli mindazt a mi lényeges, de nem zárja el látkörünk elől azt sem a mi ma kevésbbé fontosnak vagy érdekesnek látszik.

Ily könyvre valóban nagy szükségünk volt, mert a kitűnő mathematikusok munkái mellett, kik az elektrostatikában jóformán csak mathematikai problémát láttak, csupán az u. n. kisérleti tankönyveket használhattuk, melyek az elmélet vivmányait figyelemre alig méltatják.

Mascart az első, ki az elektrostatika terén az elmélet és kisérlet eredményeit érdemlegesen egybe állította. Munkája nem szoritkozik azon ismeretkörre, melyet a szó szigorú értelmében elektrostatikának nevezünk, benne nem csupán az elektrikus egyensúly feltételeit találjuk tárgyalva, hanem mindazon jelenségeket is melyeknél a Volta-féle elektrikus feszültség (t e n s i o n) nyilvánul.

Mascart könyvét röviden jellemezhetjük, ha mondjuk, hogy az a Volta-féle feszültség vagyis az elektrikus potentiál kézikönyve, mely e függvény sajátságaival és mindazon körülményekkel foglalkozik, melyek között e feszültség vagyis az elektrikus potentiál-különbség előáll.

Az egész mű 16 fejezetre van osztva.

Az első öt fejezet [1) bevezetés, 2) az elektrikus hatások törvényei, 3) az elektricitás elveszése, 4) az elektricitás elhelyezkedése, 5) az elektrikus influentia] körülbelül azon anyagot tárgyalja, mely rendesen a kisérleti physikai tankönyvekben felhalmozva van. Előkészités ez a munka többi részeinek megértésére a nélkül, hogy az elektrikus potentiál fogalma behozatnék.

A 6-ik fejezet már az elektrikus tünemények elméletével foglalkozik. A potentiál fogalma, a Poisson-féle egyenlet, Green tétele s az eletkrikus erők munkája kisütéseknél vannak itt tárgyalva.

A 7-ik fejezet czíme: Az elmélet alkalmazása. Különösen kiemelendő itt a két érintkező golyó esetének tárgyalása a physikust kielégítő modorban.

A 8-ik fejezet az észlelést és mérést elősegitő eszközökről szól. Elektrikus ingák, mérlegek, csavarási eszközök, a Thomson-féle finom elektrometerek, a kisütéssel mérők, sőt az elektro-dynamometer mind pontosan s világosan vannak leirva.

A 9-ik fejezet oly mérésekkel foglalkozik, melyek az előbb leírt eszközök segélyével az elektrikus condensatió és influentia körében végeztettek. Különös figyelmet fordított szerző a szigetelő közegek befolyására, a többi között Boltzmann kisérleteire.

A 10-ik fejezet tárgya az elektrikus kisütés vezetőkben, a 11-iké és 12-iké az elektrikus szikra. Lelkiismeretesen van itt felsorolva mindaz mi e sok tekintetben homályos kérdésekre világot vethet.

A munkának utolsó 4 fejezete (13—16) az elektricitás forrását tárgyalja. Ez a legérdekesebb rész. A dörzsölésre, az influentiára s az inductióra alapított elektrikus gépek működése, a galvánelemek elektrostatikai sajátságai, a thermoelektricitás és pyroelektricitás, a vegyfolyamatokat és capillaris mozgásokat kisérő elektrikus hatások, s a légköri elektricitás mind eme látszólag külön nemű jelenségek egy közös szempontból, mint az elektrikus potentiál-különbség nyilvánulásai vannak előtüntetve. A tárgynak ilyetén felfogása egyáltalában nem új, de nem volt még oly teljesen feldolgozva, mint MASCART könyvében. Ez csupán a tudományos irodalom oly lelkiismeretes tanulmányozása által volt lehetséges, mint azt VERDET műveiben csodáljuk s MASCART-nál újra megtaláljuk. (Eö. L.)

ALFRED NIAUDET. Traité élémentaire de la pile électrique. 8-adrét. Paris. J. Baudry 1878.

E kis, 228 lapra terjedő munka, mint czíme is mondja, valóban elemi. A galvánelem elméletét s működési módját illetőleg benne csupán azon általános tételeket találjuk, mint bármely más elemi tankönyvben. Csakhogy ezen kivül e könyvben mind a mai nap használatban lévő galvánelemek egyenként, részletesen, hogy úgy mondjam használati utasítással együtt vannak leirva. A könyv laboratoriumban jó szolgálatokat tehet. (Eö. L.)

MAGYAR LEXIKON, szerkeszti SOMOGYI EDE. I füzet. Budapest, 1878. Kiadja RAUTMANN FRIGYES.

Mérnökök és vasúti tisztviselők naptára 1878. évre I évfolyam. Szerkeszti KALECSINSZKY JÓZSEF. Budapest kiadja WEISMANN testvérek.

Mindenesetre örvendetes jelenségnek vehetjük, hogy legujabban afféle kisegítő, utána keresésre való kézikönyvek, zsebkönyvek is kezdenek feltünedezni a magyar könyvpiaczon, a minőknek ekkoráig egészen híjával voltunk. Ime mindjárt kettő fekszik előttünk: az első dióhéjba szorítva, minden konkrét kérdésre feleletet, minden vitás esetben felvilágositást, az összes emberi ismeretek repertóriumát szándékozik nyujtani; a második olyan VADEMECUM-féle, mérnökök és vasúti tisztviselők számára.

Mi e helyen természetesen csak a mathematika és természettudományok szempontjából itélhetjük meg e műveket. Szivesen elismerjük, hogy mind a kettőnek még a kezdet nehézségeivel kell küzdenie; de annyit mégis tartozó kötelességünk kimondani, hogy ezek bizony még csak afféle zsengék, melyek nem egyhamar fogják kiszoríthatni a közkézen forgó, fájdalom, nem magyar nyelvű »Nachschlagebuch«-okat. Csak egy-két helyet akarunk idézni:

ABEL, Niels Henrik szül. 1802 aug. 5-én Findóében Norvégiában, meghalt 1829 apr. 8-án Frolandban Arendal mellett, mint mathematikus különösen az elliptikai működések elvének meghatározása körül érdemeket szerzett magának. (Magy. Lex. 9. l.)

Aequátor, a földgömbön ama legnagyobb kör, melynek lapja függélyesen ennek tengelyén, még pedig ennek közepében áll, s a foldgömböt éjszaki és déli félgömbre osztja. (Magy. Lex. 39 l.)

Aerostatikai sajtó, mechanikai készülék a kivonásra, melynél a légnyomás a folyadékot a kivonatolandó testen át légüres helyre nyomja. (Magy. Lex. 41. l.)

Ha már a nagyobb közönség számára írt lexikonoknak is mellőzhetetlen kelléke a szabatosság és megbizhatóság, mennyivel inkább megróvandó az, ha mérnöktől mérnökök számára írt zsebkönyvben ily megfoghatatlan baklövést találunk, mint a minő a következő:

»Surlódási együttható a csúszó surlódásnál $f = \frac{S}{P}$ = súrlódási ellentállás elosztva a légnyomással.

Surlódási szög ϱ alatt azt értjük, midőn a test a surlódási szög alatt hajlott síkon épen nem csuszik $f = tg\varrho$.« .... »Ha P a légnyomás, melylyel α átmérőjü henger egy alzat alá szoríttatik, akkor a gördülő surlódási ellentállásra kapjuk: etc.«

Ilyen tudományú zsebkönyvekkel bizony nem fogjuk kiszoritani a német vademecumokat. (Sz. K.)

MEGFEJTETT FÖLADATOK.

36. Kerestetik azon pont mértani helye, mely a kúpszelet párhuzamos húrjait adott viszonyban osztja. (Hunyady.)

Megoldás Scholtz Ágostontól.

Legyen

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = o \quad \ldots \quad 1)$$

a kúpszelet egyenlete;

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

a koordináták kezdőpontján átmenő egyenes, mely párhuzamos a húrokkal. E húrok egyike P_1 és P_2 pontokban messe a kúpszeletet. E pontok koordinátái eleget tesznek az

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1y_1 + a_{22}y_1^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}y_1 + a_{33} = 0$$

$$a_{11}x_2^2 + 2a_{12}x_2y_2 + a_{22}y_2^2 + 2a_{23}x_2 + 2a_{13}y_2 + a_{33} = 0 \quad 3)$$

$$\frac{x_1 - x_2}{a} = \frac{y_1 - y_2}{b}$$

egyenleteknek, ha $x_1 y_1$ és $x_2 y_2$ a P_1 és P_2 pontok koordinátáit jelentik. Az utolsó egyenlet azt mondja, hogy a P_1 és P_2 pontokat összekapcsoló egyenes a 2) egyenessel párhuzamos.

A P_1 P_2 húron legyen P azaz (xy) az a pont, mely a húrt az adott $m : n$ arányban osztja, akkor

$$(m + n)\, x = m x_1 + n x_2 \,,\ (m + n)\, y = m y_1 + n y_2 \quad \ldots\ldots\ 4)$$

A kivánt mértani hely egyenletéhez jutunk, ha P_1 és P_2 pontok koordinátáit a 3) és 4) egyenletekből kiküszöböljük. A 3) alatt álló egyenletek utolsója szerint szabad irnunk

$$x_1 - x_2 = a\varrho \,,\ y_1 - y_2 = b\varrho.$$

Innen és 4)-ből ered

$$x_1 = x + n\varepsilon . a \,,\ x_2 = x - m\varepsilon . a$$
$$y_1 = y + n\varepsilon . b \,,\ y_2 = y - m\varepsilon . b$$

hol ε rövidség kedvéért $\dfrac{\varrho}{m + n}$ helyett áll. Ezen értékeket beletévén a 3) alatt álló első és második egyenletbe, ezek

$$\left.\begin{aligned} K + 2n\varepsilon . A + n^2\varepsilon^2 . \mu &= o \\ K - 2m\varepsilon . A + m^2\varepsilon^2 . \mu &= o \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 5)$$

alakban fejezhetők ki, hogyha

$$K = a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33},$$
$$A = (a_{11} x + a_{12} y + a_{13})\, a + (a_{12} x + a_{22} y + a_{23}) b,$$
$$\mu = a_{11} a^2 + 2a_{12} ab + a_{22} b^2.$$

Az 5) egyenletekből kiküszöbölvén az ε mennyiséget, a kiküszöbölés eredménye

$$\mu\, (m - n)^2\, K + 4\, mn\, A^2 = o$$

a kivánt mértani hely egyenlete. E mértani hely tehát kúpszelet, mely az adott kúpszeletet azon két pontban érinti, a melyben az utóbbit

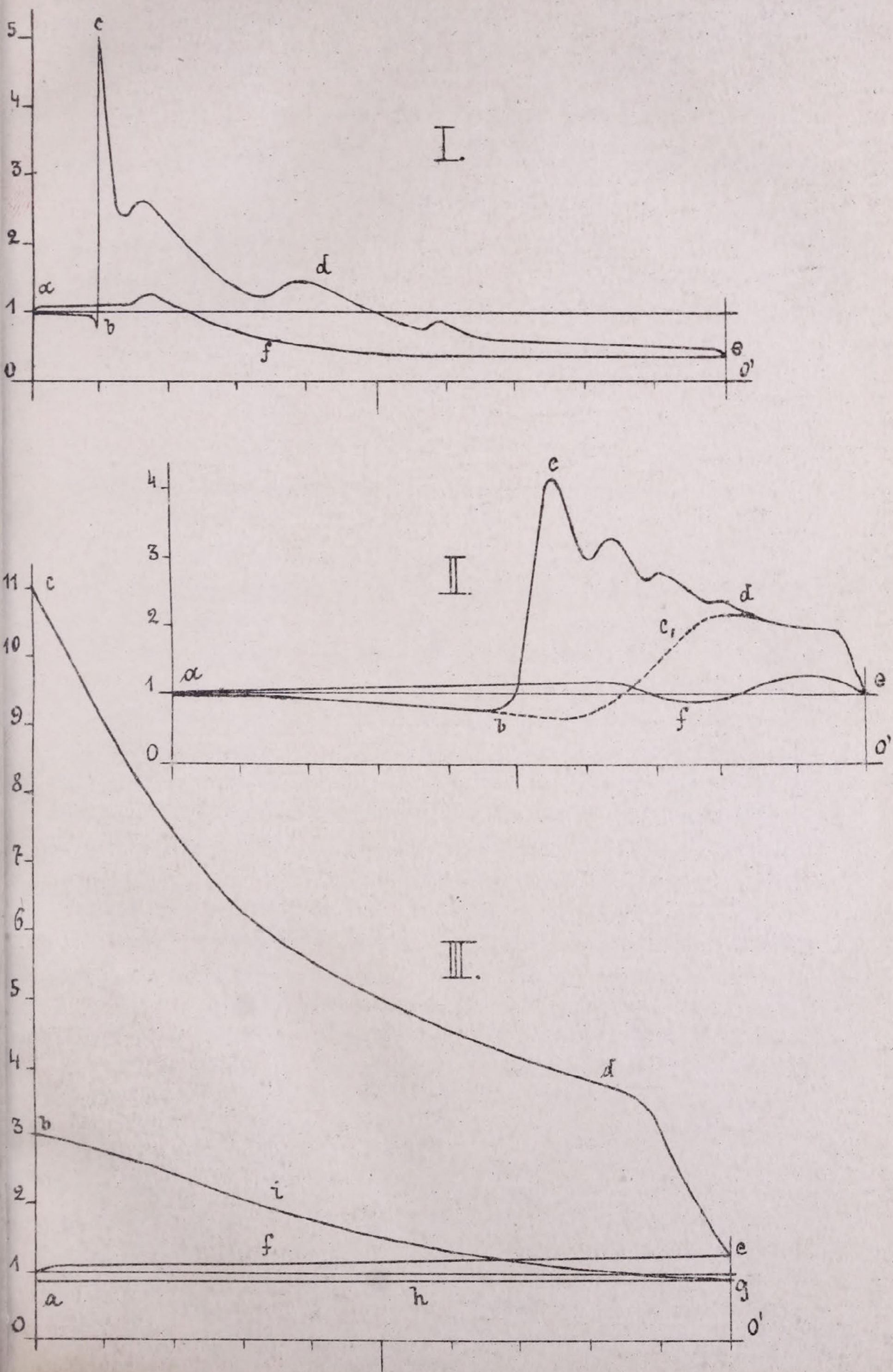
$$A = o$$

egyenes metszi. Ez az egyenes az adott kúpszeletnek a párhuzamos húrok ordinátáival párhuzamos átmérője.

Az $m : n$ arány különböző értékeinek megfelelő kúpszeletek egy különös kúpszelet-kévét alkotnak. A kettősnek gondolt $A = o$ egyenes és az adott kúpszelet is e kúpszelet-kévéhez tartoznak; amaz $m : n = 1$, emez $m : n = o$, vagy $n : m = o$ értéknek felel meg. Az egyenletből látjuk, hogy $m : n$ és $n : m$ arányoknak ugyanaz a kúpszelet felel meg, mivel az egyenlet m és n fölcserélése által nem változik.

Ugyane föladatot, részben eltérő módon, még megoldották: Mészáros Ferencz tanár Bpest; Goldfinger Zsigmond, Grossmann Vilmos, Raussnitz Ignácz műegyetemi hallgatók Budapesten.

Budapest 1878. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.


I.
II.
III.
a
b
c
c_1
d
e
f
g
h
i
O'

MŰEGYETEMI LAPOK.

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

III. kötet. 1878. 25 és 26. füzet.

A VEGYÉRTÉK TANÁNAK TÖRTÉNETI FEJLŐDÉSE 1875-ig.

Dr. Rik Gusztávtól.

(Előterjesztette Than Károly r. tag a m. tud. akadémia III. osztálya ülésén, 1878. márczius 26-án.)

Mint minden tudományban, ugy az elméleti vegytanban is, hol számnélküli részletek és tünemények szerfelett bonyolodott halmazának állunk szemben, — a meghatározások és törvények a tudomány mindenkori állásának felelnek meg s így korszakonként változók, a szerint a mint megismerés vagy buvárkodás alapján a tudomány újabb adatokkal és tüneményekkel lett gazdagabb, melyeknek a már meglévők közzé sorolása, észszerű rendezése magának a fennálló rendszernek, vagy a közös sajátságokat körülíró meghatározásoknak és törvényeknek megváltozását, esetleg mások általi helyettesítését vonja maga után.

Ilyen a vegytan tárgyát képező részletek bizonyos irányban való megfigyelésének szükségképeni kifolyása volt a »vegyértékek« vagyis azon törvény létezésének föltétele, mely kifejezné azt: mily állandó vagy mily viszonyoktól függő sajátságok szerint egyesülnek a chemiai parányok (atómok) tömecsekké (molekulákká).

Tapasztalat nyujtotta tényekből kelvén kiindulni, a meghatározások és törvények szabatos megállapítása a részleteknek kimerítő ismeretét feltételezi. A tudomány egy kis részletének fejlődése azonban azonos magának az összes tudománynak fejlődésével s összefüggésben van annak minden részével, a mennyiben az egyes eszméket igazoló tények az egész tudomány mezején szétszórva tünnek fel.

Midőn tehát az elméleti vegytan egy parányi részének történelmi fejlődését igyekszem körvonalozni, nem terjeszkedhetem ki mindazon, végtelen nagyszámu tények felsorolására, melyek természetüknél fogva a vegyérték elméletének tovább fejlesztéséhez, mint adatok, teljes mértékben hozzájárultak, hanem csak is azon főbb mozzanatok kijelölésére és számba vehetőbb nézetek felsorolására szoritkozom, melyek magának e tárgynak fejlődésével legszorosabb összefüggésben állanak.

Mielőtt a szorosan e tárgyhoz tartozó nézetek és tények felsorolásához fognék, nem lesz fölösleges vázlatosan előtüntetni az elméleti vegytan azon fejlődési korszakát, mely a vegyértékek felismerését közvetlenül megelőzte. [1])

1804-ben állapította meg s 1808-ban tette közzé Dalton angol vegyész a sokszoros súlyviszonyok törvényét, oly időben, midőn Berthollet és Proust Francziaországban még az állandó súlyviszonyok törvénye felett vitatkoztak; ezzel egyidejüleg állította fel a parányelméletet s értékesíté azt mindjárt vegyi vizsgálódásainál; általa magyarázza meg s ad szabatosabb kifejezést a sokszoros súlyviszonyok törvényének. Nézete rövid idő alatt általánosan el lett fogadva. Néhány hónappal később fedezte fel Gay-Lussac a róla nevezett térfogati törvényt s öszhangzásba hozta azt Dalton parányelméletével s kifejté majdnem oly alakban, mint azt mai napig is használjuk. Némi különbségek állottak még fenn Dalton es Gay-Lussac nézetei között, ezeket végképen megszünteté Avogadro olasz physikus, ki a gázok hőmérséki és nyomási viszonyait tanulmányozva, azon feltevésre vezettetik, hogy egyenlő nyomásnál és hőmérséknél, különböző gázok egyenlő térfogatában a különvált részecskék száma egyenlő, s egyszersmind e különvált részecskéket még összetetteknek tartja; szóval ő fejté ki először azon különbséget, mit ma paránynyal és tömecscsel jelölünk.

Azonban az Avogadro által kimondott különbség a parány és tömecs között nem nagy viszhangra talált, annyival is inkább, mert elmélete pusztán gázalaku testekre vonatkozott. Ennek következménye volt, hogy uj irányu vizsgálódás vette kezdetét, melynek meginditója Wollaston 1808-ban; felállítá az aequivalens (egyenérték) fogalmát, s a Dalton-féle hypothetikus paránysúlyok helyett a tapasztalati egyenértéksúlyokat ajánlja; egyenérték alatt azon mennyiségeket értvén, melyek szerint a testek egymással egyesülnek (meghatározásaiban az

---

[1]) A körülbelül 1850-ig terjedő részlet H. Kopp, Geschichte d. Chemie; u. a. Die Entwickelung der Chemie in der neueren Zeit; Wurtz Geschichte d. Chemischen Theorien; Ladenburg Entwickelungsgeschichte d. Chemie czímű munkákból lett összeállítva. Az ezeken kivül használt források mindenütt megjelölvék.

élenyét 10-nek teszi). Ily módon aztán parány és aequivalens sok időn át egyértelemben lettek használva, mely zavar a tudományból csak igen nehezen lett kiküszöbölhető.

A Davy által már 1800-ban megkezdett elektrochemia a kálium és nátrium felfedezése következtében, magára vonta az egész tudományos világ figyelmét s valóban oly nagyszerű eredmények után, minőkre Davy jutott a villanyosságnak chemiai alkalmazása által, nem lehet csodálkoznunk, hogy egy ideig ugy a tudományos kutatás, mint az elméleti vegytan ezen, be kell vallanunk, igen fontos és érdekes, de mégis egyoldalú irányban kultiváltatott. Tetőpontját érte el ezen irány Berzelius elektrochemiai elméletében.

Ő a villanyosságot az anyag sajátságának tekinti, s a vegyületek keletkezésénél valamint azok szétbomlásánál az ellentétes villanyosságot veszi fel alapúl s egyszersmind magyarázatául az általa teljesen keresztül vitt s a vegyületek szerkezetére vonatkozó dualistikus elméletnek, melynek lényege saját szavai szerint következő: minden össze tett test, bármennyi legyen is az alkatrészek száma, két részre bontható fel, melyek egyike igenleges, másika nemleges villanyosságu. Föltevése általánosítható volt a tudomány összes tényeire, s így alkalmas volt a vegytanban egy tudományos rendszer megállapítására, mely Berzelius nak valóban sikerült is. Határozott nézetet fejtett ki a vegyületek szerkezetéről, vagy is azon törvényről, mely szerint az alkatrészek vegyületekké egyesülnek. »A parányok oszthatatlansága, — úgymond — nem magyarázza meg teljesen a sokszoros súlyviszonyok törvényét, a mennyiben ha végtelen sok parány másik elemnek hasonlag igen nagy számu parányaival a legkülönbféle változatok szerint egyesülhetne, a vegyületek oly nagy száma volna előállítható, hogy a legjobb elemzések által sem lenne lehetséges közöttük különbségeket megállapitani? Törvények létezésének szükségét fejezi ki, melyek a lehetséges vegyületek számát szűkebb térre szoritják. — A vegyületekké egyesülő parányok számát illetőleg, következőleg nyilatkozik:

1) egy paránya valamely elemnek 1, 2, 3 sat. parányával egy másiknak egyesül; egy elem egy paránya ritkán egyesül több mint 4 parányával egy másik elemnek.

2) 2 paránya az egyik elemnek 3, 5 parányával egy másiknak egyesül.

Ezen szabályt felhasználá Berzelius összetett testeknél a parányok számának meghatározására.

Berzelius fentebb jelzett s a dualismus nevezete alatt ismeretes nézeteit leginkább a szervetlen vegyületek tanulmányozásából vezette le. 1815—17 között azonban tökélesíté a szénenyvegyületek alkatrészeinek meghatározási módszereit, melyeknek alkalmazása által az állandó- és sokszoros súlyviszonyok törvényeit a vegyületek ezen csoportjára is érvényeseknek ismerte föl; a mennyire lehető volt kiterjeszté a dualismust a szervi vegyületek összetételének magyarázatára is, a szervi és szervetlen vegyületek közötti különbséget következőkben állapítván meg: szervetlen testeknél minden élenyvegyületben egy egyszerű gyök van; mig ellenben minden szervi anyag összetett gyökök élenyvegyületeiből áll.

Berzelius, definitióiban a »gyök«, »radical« kifejezést még a dualismus szellemében használja, gyök alatt értvén a szervi vegyületek azon részét, mely az élenyhöz van csatolva, melyek, mint maga mondja, szabad állapotban nem léteznek, hanem egészen hypothetikusok.

Nézeteit a vegyületek szerkezete körül, legalább a dualismus szempontjából, nem fejté ki tovább, s a dualismus leginkább a szervi vegyületek tanulmányozása következtében lassanként ujabb elméletnek engedte át a tért az u. n. gyökelméletnek (radicaltheorie).

Gay-Lussac 1815-ben az aether, alkohol olajnemző gáz és víz gőzsürüségeit meghatározván, az aether és alkohol gőzsürüségeire nézve kimutatá, hogy ezen vegyületek olajnemző gázból és vízből összetetteknek tekintendők, a mennyiben az alkohol ugy fogható fel, mint egyenlő térfogatú olajnemző gázból és vízgőzből álló vegyület, az aether pedig mint a mely 2 térfogat olajnemző gáz és 1 térfogatú vízgőzből van összetéve. Gay-Lussac ezen nézetéből kiindulva, Dumas és Boullay (1828) a legkülönbfélébb aethernemű testeket tüzetes vizsgálat alá vették; pontos elemzések és gőzsürüségi meghatározások után, egész sorozatát az alkoholból levezethető aethereknek mind ugy fogják fel, mint a mely vegyületek mindannyian a C_4H_4 paránycsoportot mint gyököt tartalmazzák, s egyszersmind ezen aetherek és az anorganikus sók szerkezetében levő analogiát kiemelik:

Olajnemző gáz .	C_4H_4	— Ammoniak . . .	NH_3
Alkohol	$2C_4H_4 + 2H_2O$	— Ammon. hydrát	$2NH_3 . 2H_2O$
Chloraethyl . . .	$C_4H_4 + HCl$	— Chlorammon . .	$NH_3 + HCl$

sat.

Ezen elméletet maga Berzeeius is elfogadta, s ezen az alkoholból levezethető vegyületekben előforduló parányprocsoportot, C_4H_4, mint gyököt »aetherin«-nek s az egész elméletet aetherin elméletnek nevezte el. Időközben (1815) Gay-Lussac felfedezte a cyangázt; s a kéksavat, valamint ennek sóit ugy tekinti mint a mely vegyületekben a cyangyök foglaltatik. Ezen felfedezés a gyök fogalmát lényegesen tisztázta s annak határozottabb jelentőséget adott.

Az addigi nézet szerint a gyök nem tartalmazhatott élenyt, sőt a legtöbb esetben a vegyületek azon része tekintetett gyöknek, mely az élenynyel van egyesülve. Azonban 1832-ben jelent meg Liebig és Wöhler-nek dolgozata a keserű mandola olajról és származékairól, [1]) melyben kimutatták, hogy a keserű mandola olaj éleny felvétele által benzoesavvá alakítható át s ezen vegyületeket valamint a keserű mandola olaj chlór, jód, bróm, cyan-származékait mint a benzoyl élenytartalmu gyök ($C_{14}H_{10}O_2$) vegyületeit tekintik; a keserű mandolaolaj tehát mint benzoyl-köneny, a benzoesav pedig mint a benzoyl élenyvegyülete fogható fel. Ezen a szervi vegytan terén oly nagy jelentőségü felfedezése Liebig és Wöhler-nek a »radical-elméletet« teljesen átalakítá, s általa a gyök fogalma azon értelmet nyeré, melyet annak a vegyületek szerkezetében jelenleg is tulajdonitunk.

Mint említve volt, a gyök fogalmával nem fért össze, hogy az élenytartalmu legyen, nem, különösen Berzelius electro-chemiai és dualisticus elméleténél fogva. Liebig és Wöhler kisérleteinek eredményei által igazolva, a benzoyl, élenytartalma daczára, összetett gyöknek bizonyult, a mennyiben egyszerű elemek módjára vegyületekbe beléphet s azok egyikéből a másikba szétbomlás nélkül átvihető.

Maga Liebig a gyök fogalmát következőleg határozta meg [2]): gyöknek nevezzük a cyant,

1) mert a vegyületek egész sorozatának változatlan alkatrésze,

2) mert ezen vegyületekben helyettesíthető más egyszerű elemek által,

3) mert vegyületeiben, melyeket egyszerű testekkel képez, ez utóbbiakat más elemek aequivalense által kiválasztani vagy helyettesíteni lehet.«

Eltekintve kisebb nézetkülönbségektől, a radical elmélet általánosan el lett fogadva, Liebig fentjelzett definitiója értelmében. Azonban az ujabb felfedezések, ha a fennálló és uralkodó nézetekbe ütköznek és azzal össze nem egyeztethetők, ismét ujabb elméletek felállítását vonják magok után. A gyökelmélet a gyököt mint változatlan paránycsoportot tekinté. Gay-Lussac észlelte legelőször, hogy a viasz chlórral kezelésnél könenyt veszit, melynek térfogata a felvett chlóré-

---

[1]) Annal. d. Pharm. Bd. III 249.

[2]) Annal. d. Chem. Pharm. XXV. 3.

val egyenlő; ugyan ezt tapasztalta Dumas a terpetin-olajnál s számos más szervi vegyületnél, s e tüneményekben tapasztalt törvényszerűséget (1834-ben) néhány általános szabályban fejezte ki. Tovább fejtette azt Laurent s végleg megállapítá a helyettesítés elméletét (Substitutionstheorie), melynek lényege a következő: midőn valamely vegyületben a köneny aequivalens chlór vagy bróm által helyettesíttetik, akkor a chlór vagy bróm azon helyet foglalja el, melyen a köneny volt s így bizonyos tekintetben annak szerepét játszsza. Ezért a chlór-helyettesítési termény analog azon vegyülettel, melyből nyeretett.

Döntő volt különösen ezen elmélet tovább fejlesztésére a Dumas által felfedezett trichlóreczetsav, mely vegyületben a chlórparányok valóban azonos szerepet játszanak azon könenyparányokkal, melyeknek helyét elfoglalták. Dumas az oxydatió tüneményeit is helyettesítésnek tekinti; így p. o. az alkohol átvitelét eczetsavvá, mely folyamatnál egy volum kilépő könenyt $^1/_2$ volum éleny helyettesít. — Ezen utóbbi példát azért tartottam fontosnak felemlíteni, mert itt találkozunk az első esettel, hogy a Wollaston óta gyakran egy értelemben használt parány és aequivalens mint két különböző érték szerepel, amennyiben Dumas egészen világosan kiemeli, hogy 1 térfogat köneny aequivalens 1 trf. chlór-bróm-jód és $^1/_2$ térfogat élenynyel. Az aequivalens és parány közötti különbségtétel, mint majd később látni fogjuk, a tudomány fejlődésére igen nagy fontossággal birt.

1839-ben több értekezésben tárgyalja Dumas a helyettesítés tüneményeit, kifejtve az u. n. jellegelméletet, melynek főbb pontjai a következők:

1) Valamely összetett testben az elemek sok esetben helyettesíthetők s pedig aequivalens mennyiségei által más elemeknek, vagy oly összetett testeknek, melyek egyszerűek gyanánt szerepelnek.

2) Ha ezen helyettesítés egyenlő aequivalensek szerint történik, ugy azon test, melyben a helyettesítés végbe ment, megtartja eredeti *vegyi-jellegét,* s abban a belépő elem ugyanazon szerepet játszsza, mint a mely elvonatott.

A trichlor-eczetsav felfedezése vetette meg alapját Dumas jellegelméletének. Mindazon vegyületek, melyekben az aequivalensek száma s azok összefüggése azonos, valamint főbb sajátságaikban egymással megegyeznek, ugyanazon vegyi typushoz tartoznak. Nagyobbrészt oly vegyületek ezek, melyek egymásból igen egyszerű reactiók által állíthatók elő, ilyenek: eczetsav, trichlóreczetsav; chloroform, bromoform, jodoform; aethylen és az abból chlór behatása által keletkező vegyületek.

Különbséget tesz DUMAS vegyi és mechanikai vagy molekularis typusok között, ezen utóbbihoz számitva azon vegyületeket, melyeknél az aequivalensek száma ugyan egyenlő, de sajátságaikban egy mástól eltérők, p. o. mocsárlég, hangyasav, chloroform, szénchlorid.

A dualismus és elektrochemiai elmélet BERZELIUS és követői által még folyvást fenntartatott, daczára annak, hogy a helyettesítés tüneményei mind nagyobb számban tüntették föl az ezen elmélet értelmében épen nem magyarázható tényeket. Másrészről a LAURENT és DUMAS által kifejtett helyettesítési és jellegelméletek mind inkább nagyobb tért foglaltak el, míg végre DUMAS nyiltan síkra szállott BERZELIUS nézetei ellen. Elkeseredett, gyakran a személyeskedésig menő vita vette kezdetét, mely egyreszről BERZELIUS s nézetkövetői, másrészt a helyettesítés és jellegelmélet védői között a legnagyobb erélylyel folyt s az utóbbiak határozott győzelmével végződött.

DUMAS elméletének közvetett és közvetlen befolyása a tudomány fejlődésére kétségbe vonhatatlan; az által, hogy a vegyületeket mint egységes parány csoportozatokat fogja fel, nagy jelentőseget tulajdonitván a hasonösszetételü vegyületek főbb sajátságaikbeli megegyezésének, az ezen iránybeli összehasonlító buvárkodást nagy mértékben serkentette. A mennyiben pedig a vegyületeket sajátságaik és összetételük szerint hasonlítja egybe, ugyanazon typushoz csak egyenlő számu parányokból álló vegyületeket számítván, annak megvitatására nyujtott alkalmat: hogy melyek tehát a különböző vegyületek egymással összehasonlítható mennyiségei, s hogy mily viszony szerint helyettesítik egymást az elemek. Ekképen tehát az aequivalens és parány közötti különbség s a tömecs fogalmának világosabb kifejtésére vezetett.

Mielőtt a jellegelmélet tovább fejlődését, illetőleg annak a helyettesítés- és gyökelmélettel összeolvadását tovább fűzném, szükséges lesz megemlékezni az elméleti vegytannak egy másik téren kivivott haladásáról, mely később a vegyérték fejlődésével a legszorosabb kapcsolatba jött: ez a többalju savak elmélete (Theorie der mehrbasischen Säuren). A vegytan jelenlegi elmélete épen a parány és aequivalens közötti különbségen alapszik. Mint említve volt, a helyettesítés tüneményei és a jellegelmélet az aequivalens meghatározására uj módszert szolgáltattak; ezen kivül azonban egészen más oldalról is kétségtelennek bizonyult, hogy az összetett testek parányai sem szükségképen aequivalensek, s különösen ki lett ez emelve a vegyületek egy jól ismert csoportjára, a savakra nézve.

Midőn H. DAVY kifejté, hogy a savak savi hatása a bennök foglalt könenytől függ, már ismerték azon tüneményt, hogy egyik savhydrát telitésére több alj szükséges mint a másikéra, így p. o. hogy 1 aequivalens phosphorsav 3 (illetőleg 2) annyi aljat képes teliteni mint 1 aequivalens sósav; mindamellett ezen mennyiségek aequivalens elnevezése folyvást használatban maradt.

A savelmélet kifejtésére s különösen a savak összetételének kipuhatolására közvetlenül a phosphorsav és sóinak tanulmányozása adott alkalmat. CLARK, vizsgálódásai nyomán a phosphorsavról, azon nézetre jutott, hogy a phosphorsavnak két isomeriája létezik, melyeknek sói egymástól igen lényegesen különböznek; hogy a közönséges phosphorsavas nátron ezüstoldattal sárga csapadékot ad s az oldat savanyú hatásu lesz, ellenben a pyrophosphorsavsók fehér pyrophosphorsavas ezüstöt adnak s az oldat közönyös marad; tudták ugyan, hogy a nátriumsók közül egyik több vizet tartalmaz mint a másik, de ennek épen oly csekély jelentőséget tulajdonitottak, mintha jegeczvíz lenne, s a két sav csakis isomer módosulásnak tekintetett. Ezen téves felfogást GRAHAM vezeté helyesebb útra, [1]) kimutatván, hogy a savhydrátban a víztartalom közötti különbség nem lényegtelen, hanem szorosan összefügg a vegyület szerkezetével s kimutatá, hogy a víz a vízmentessav mellett ugyanazon szerepet játszsza, mint az alj. GRAHAM megmagyarázta, miként fogható fel a közönséges phosphorsav s annak minden sója oly vegyületként, mely egy atóm phosphorsav P_2O_5 s három atóm aljból áll mely utóbbiak részben vagy egészen víz által lehetnek helyettesítve. E szerint a közönséges phosphorsavnátrium egy atóm phosphorsav, 2 atóm nátrium, s egy atóm vízből áll. Ha a só vízoldata légenysavas ezüsttel hozatik össze, a kicsapodott ezüst só három atóm ezüstöt tartalmaz, míg az oldatban légenysavas nátrium és légenysav marad, minek következtében az savanyu hatást mutat. Kimutatá továbbá, hogy midőn a közönséges phosphorsavas nátrium 350°-ra hevíttetik, vízelvesztés következtében belőle pyrophosphorsavas natrium keletkezik, mely azonban amazzal nem isomer, hanem épen egy atóm víz elvesztése által különbözik, mely a sav természetére nézve oly nagy jelentőségü. Azon fehér csapadék is, melyet ezüst sókkal ad, 2 atóm ezüst éleget tartalmaz; s ez épen a pyrophosphorsavsóknak közös sajátsága, hogy

[1]) Annal. Chem. Pharm. XXV. 1.

két atóm aljat, illetőleg vizet képesek megkötni, és épen ez által igen lényegesen különböznek a közönséges phosphorsavtól. Előállítá továbbá Graham még az addig ismeretlen metaphosphorsavat és sóit, melynek összetételét a fentiekével analog levezetve, mint oly savat ismerteti, mely egy atóm alj által telíttetik. [1])

Graham ezen munkálataiból Liebig 1838-ban azon fontos elméleti következtetéseket vonta le, hogy

1) a savak bizonyos számu vizatómot tartalmaznak, s ezek helyettesítése által jönnek létre a sók.

2) A savak atómjai az aljak atómjaival nem mindig aequivalensek, sőt egyeseknél e viszony változó. — Igy Graham ugyanazon phosphorsavból három savat állított elő, melyek mindegyike különböző aljmennyiséget képes megkötni.

Liebig azonban nem szoritkozott csupán a Graham által megállapított tényekre, hanem nagyobb számu szervi savakat vévén vizsgálat alá, kideríté, hogy az aljakhoz való ezen viszonyt illetőleg a phosphorsav nem az egyedüli, azaz hogy más savak is birnak azon sajátsággal, mely szerint egy atómjuk több atóm aljat is képes teliteni, s miután ekként nagyobb számu adatok birtokába jutott, állítá fel a több alju savak elméletét.

Erre vonatkozólag Liebig saját szavai a következők [2]):

»A savak 1, 2, 3 aljuakra oszthatók fel. Két alju savak alatt azok értendők, melyeknek egy atómja két atóm aljjal olyképen egyesül, hogy a két basis atóm a savban két vizatómot helyettesít. A basicus só fogalma ez által nem változik: ha egy atóm sav két vagy több atóm aljjal egyesül, s csak egy atóm víz választatik le, tehát kevesebb mint a basis aequivalenseinek száma, ezen esetben basicus só keletkezik.«

Ugyanezen értelemben különbséget tesz a savakra nézve, a szerint, hogy képesek-e vegyes sókat vagyis olyanokat alkotni, melyekben két különböző alj foglaltatik, (p. o. phosphorsavas kálinátronnál) vagy pedig nem; ugy hogy ez által phosphorsav, arsensav és számos szervisav a többiektől különválasztattak. Ezen okoskodás alapján a Seignet-só öszszetételénél fogva, a borkősav ez ideig használt képletének megkettőztetése vált szükségessé. Mint látható, Liebig ezen munkálatai közben egy új eszközt nyert a savak tömecsnagyságának megállapítására.

---

[1]) Az atóm elnevezést mindenütt szándékosan meghagytam, mert épen nagyon jellemző az ez időben uralkodó felfogásra.

[2]) Annal. Chem. Pharm. XXVI. 169.

Davy-Dulong savelméletére megjegyzi, hogy az u. n. köneny- és élenysavak egymástól való elkülönitésére semmi alapos ok nincsen, sőt határozottan ellene szólanak egészen azonos vegyi sajátságaik, s tagadja azon föltevés jogosultságát mintha az u. n. élenysavakban a víz már mint olyan jelen lenne. [1])

»A savak — ugymond — bizonyos könenyvegyületek, melyekben a köneny fémek által helyettesíthető, midőn a sav valamely fémeleggel érintkezik . . . « a köneny a legtöbb esetbben vízalakjában választatik le. — A képződött vegyület összetételére nézve tökéletesen mindegy, bármiként képzeljük is el a víz képződését, sok esetben az éleg reductiója által, — más esetben talán a sav elemeinek rovására; egy szóval, ez bizonytalan.

A sav elméletét Gerhardt és Laurent később Williamson fejleszték tovább s különösen az egy és két aljú savak közötti különbség megállapitása által a savaknak azon definitióját adták, mely lényegileg mai napig is el van fogadva.

S most térjünk ismét viszsza Dumas jellegelméletéhez.

Már Dumas felemlité helyettesitési és jellegelméletében, hogy nem csak elem képes egy másiknak helyébe lépni s nem csak a nitrovegyületeknél képes az NO_2 paránycsoport könenyt helyettesíteni, hanem hogy a typusokban is bizonyos parány csoportok vehetők fel, melyek viszont köneny által helyettesíthetők, s mely paránycsoportokra e tekintetben a gyök elnevezés használható. — A radicál és jellegelmélet teljes összeolvadását nagymértékben elő segítette Gerhardt-nak már 1839-ben közzétett »theorie des residus«-nak nevezett nézete. »A midőn, úgymond, egyszerű test összetett által helyettesíttetik, nem tekinthető a vegyfolyamat egyszerű helyettesítésnek, hanem úgy fogható az fel, hogy az egyik test egyik eleme a másik test egy elemével egyesülve, az így keletkezett termény kilép, míg a mindkét testből visszamaradt részletek (residus-reste) hasonlag vegyületté egyesülnek.«

1849-ben Wurtz, az ammoniák basisok valóban korszakot alkotó felfedezése által, az első alkalmat szolgáltatta és egyszersmind a legdöntőbb sikert biztosította a gyököknek typusokba való felvételére. E vegyületek szerkezetéről két nézet uralkodott; az egyik nézet úgy tekinté azt mint alkohol gyökök oxydjait, melyekben az éleny az amid csoport által van helyettesítve; a másik nézet oly ammoniáknak tartá, melyben egy köneny aethyl vagy más szervi gyök által van helyette-

[1]) Annal. Chem. Pharm. XXVI. 181.

sítve. Hoffmann [1]) volt az, ki határozottan ez utóbbi nézetet pártolta, sőt egészen kétségen kivülivé tette azt akkor, midőn sikerült neki az alkohol-gyökök jódvegyületeinek ammoniákkal kezelése által egymásután 1, 2, 3 könenyt helyettesíteni az ammoniákban, sőt előállitani a chlórammonium és ammonium hydroxidnak megfelelő szervi basisokat. — Az ammoniák és a Wurtz és Hoffmann által felfedezett ammoniakbásisok közötti analogia fel nem ismerhetetlen volt; s ezen időtől fogva mindinkább kezdették az organikus vegyületeket az inorganikusokkal mint typusokkal összehasonlitani; s így általánosan el lett fogadva, hogy az ammoniak typusban ($= NH_3$) a könenyparányok nem csak fémek, hanem alkoholgyökök által is helyettesíthetők.

Majdnem egyidejüleg Wurtz és Hoffmann dolgozataival jelentek meg Williamson értekezései (1850) [2]) az aether képződés, továbbá az alkohol és aether összetételi szerkezetéről. Ő ugy fogja fel ezen vegyületeket, mint a melyek egy tömecs vízből vezethetők le, ha annak egyik vagy mindkét könenye alkoholgyök által helyettesíttetik. Ezen felfogás által, mint látható, a már elfogadott ammoniak-typus mellé egy másik s pedig a vegyületek igen nagy részére alkalmazható víztypus lépett. Nem sokára Williamson kiterjeszté ezen nézetet a savakra is, így p. o. az eczetsav hydratot ugy tekinté, mint vizet, melynek egyik könenye helyét (C_2H_3O) paránycsoport foglalja el, s analogia utján az aether szerkezetéből következteté: hogy a másik köneny hasonló gyök által helyettesítve, $\left.\begin{matrix} C_2H_3O \\ C_2H_3O \end{matrix}\right\} O$ hypothetikus vegyületet adná, s miután Gerhardt ezen vegyületet valóban előállítá, a jellegelmélet általánosan elfogadtatott.

Williamson kisérleteinek s az azokból levont, a vegyületek szerkezetére vonatkozó nézeteinek igen nagy jelentősége abban állott, hogy módszert nyujtott általa a vegyészek kezébe, melylyel pusztán vegyi uton a vegyületek tömecsnagyságát lehetett meghatározni, miből kiderült, hogy az ez uton nyert tömecsnagyság megegyező az Avogadro-hypothezis alapján gőzsürüségből, tehát physikai uton nyert értékekkel.

Így fejlődött ki Gerhardt jellegelmélete, mely az összes szervi vegyületeket jól ismert anorganikus vegyületekkel az u. n. őstypusokkal hasonlítja egybe; ezen typusok a víz, sósav, köneny és ammoniak; szerkezetükre nézve ezen typusokra vihetők vissza a vegyületek az

[1]) Annal. Chem. Pharm. LXVI. 129. LXVII. 61 és 129. sat.

[2]) Annal. Chem. Pharm. 77. 37; 81. 73 l.

által, hogy abban könenyeket gyökök által képzelünk helyettesítve. Ekként az alkohol, aether, savak, aldehyd, acetonok a víztypushoz, a chlór, bróm, jód, cyánvegyületek a sósavéhoz; az amid, amin, imid és nitrilek az ammoniakhoz, s végül a szénkönenyek a könenytypushoz tartoznak.

A vegytan ezen iránybeli rohamos fejlődését lépésről-lépésre kisérni alig lehetséges; hogy az legalább nagyban s tekintet nélkül a részletekre csak némileg is áttekinthető legyen, s különösen hogy Dumas, Laurent, Gerhardt, Wurtz, Hoffmann, Williamson legutóbb felemlített munkálatainak átalakító hatását felfoghassuk, szükségképen fel kell említeni, hogy a helyettesítés tüneményei s a több alju savak elmélete, melyekről fentebb már bővebben volt szó, nagy mértékben tisztázták az aequivalens, parány és tömecs fogalmak közötti különbséget, ugy hogy különösen azon zavar, melyet az aequivalens és parány egy értelemben használata előidézett, lassanként ez időben (1850) már kezdett megszünni.

Nem lehet feladatom a parányelmélet fejlődését Dalton-tól kezdve fokról-fokra kisérni, elég legyen csak annyit felemlíteni, hogy daczára Avogadro, Gay-Lussac, Ampére, Neumann, Dulong, Petit és Mitscherlich idevágó s a parányelméletnek mai napig is támpontjait képező nagyszerű felfedezéseinek, a paránysuly fogalma nem tisztult meg, s lehet mondani, hogy pusztán csak azért, mivel az említett törvények csupán az anorganikus vegytanra szorítkoztak. Ugy hogy, miután ezen törvények egyike sem volt a tömecs- és paránysuly meghatározásoknál teljesen átalánosítható s minden kivételnélküli alkalmazásban, az egész parányelméletet és így a paránysulyt is, mint nagyon hypothetikust és bizonytalant mellőzve, a vegysulyok (aequivalensek) használatára szoritkoztak (Gmelin jeles tankönyve).

A szervi vegytan fejlődési folyamában szükségképen, mondhatni a kényszerűség vezetése alatt, látjuk a buvárokat a parány elméletet föleleveníteni. Mint említve volt, különösen Liebig többalju savak elmélete s Dumas jelleg elmélete által vált szükségessé az »atóm« és az »aequivalens« közötti különbségtétel. 1846 fejték ki aztán Gerhardt és Laurent, hogy a vegyületek azon mennyiségei, melyek a vegyi folyamatokban részt vesznek, egymással összehasonlítható, de nem aequivalens mennyiségek, s így tömecssulyokat fejeznek ki s a vegyületek tömecsnagyságát olyképen állapítják meg, hogy gőzalakban két térfogatot töltsenek be (1 köneny = 1). Ugyan csak Laurent volt, ki

AVOGADRO hypothesisét, mely szerint egyszerű testek, az az elemek tömecsei is szükségképen legalább két parányból állanak, vegyi okokból szükségesnek találta felujítani, erre mint égyik indokot a status-nascens tüneményeit hozván fel. Ezekhez járult még WILLIAMSON fentemlített tömecsmeghatározási módszere. — 1857-ben CLAUSIUS a meleg mechanikai elméletéből egészen függetlenül, GERHARDT, LAURENT és WILLIAMSON munkálatait nem is ismerve, hasonlóan a tömecsek oszthatóságát vonta le, s így mind vegyi, mind physikai okok támogatták e hypothesis jogosultságát.

Igen könnyen belátható, hogy mihelyest a parány és aequivalens közötti kölönbség felismertetett, szükségképen a vegyérték fogalmának felkellett merülni. Ha két parány, gyök vagy tömecs nem volt egyenértékű, azon kérdés szüksége állott be, hány egyenértékű, azaz hány vegyértékű (quanti valens) az egyik a másikra vonatkoztatva.

A helyettesítés tüneményei által lett fölismerve, s a jelleg elmélet által ki is fejezve, hogy különböző elemek vegyületekben előforduló legkisebb mennyiségei nem aequivalensek. Ugyanezt találjuk a paránycsoportok, vagy gyökökre nézve a több alju savak elméle te által. Ezen utóbbi felfedezést különösen WILLIAMSON-nak köszönhetjük, ki az u. n. többaljú (vagy ha úgy tetszik több vegyértékű) gyököket legelőször ismerteté, amennyiben míg egy részt az alkohol gyököket p. o. aethyl C_2H_5, mint egy könenynyel aequivalenst tekinti, addig, úgymond »a CO két könenyparánynyal egyenértékű, a mennyiben két tömecs KOH-at képes összetartani, midőn azokban a könenyeket helyettesítve, szénsavas kálium-ot képez. — Általában a vegyületeket úgy fogja fel, mint a melyekben a több aljú gyökök tartják össze a különböző paránycsoportokat.

WILLIAMSON ezen nézetét látszik felhasználni KEKULÉ (1854.) a thioeczetsav és származékai összetételének magyarázatánál[1]). Összehasonlítja azon vegyfolyamatokat, melyeket az aether, alkohol és eczetsav — a phosphorpentachlorid és phosphorpentasulhpid behatása általszenvednek ; az eczetsavnál tapasztalt átalakulást következőleg fejezi ki :

$$5\,\left.\begin{matrix}C_2H_3O\\H\end{matrix}\right\}O + P_2S_5 = 5\,\left.\begin{matrix}C_2H_3O\\H\end{matrix}\right\}S + P_2O_5$$

$$5\,\left.\begin{matrix}C_2H_3O\\H\end{matrix}\right\}O + P_2Cl_5 = \frac{5\,C_2H_3OCl}{5HCl} + P_2O_5$$

[1]) Annal. d. Chem. Pharm. XC. 309. lap. Notiz über eine neue Reihe schwefelhaltiger organischer Säuren.

»látható, hogy a bomlás lényegében ugyanaz; mig azonban a phosphor pentachlorid alkalmazásánál a nyert termény chloraethyl és sósavra bomlott, addig a phosphor pentasulphid alkalmazásánál mindkét csoport egyesülve marad, mivel a két atom chlórral aequivalens kén oszthatatlan«. Ugyan ezen közleményében mondja alább: »nemcsak irásbeli különbség, hanem sokkal inkább a valódi tényállás az, hogy egy atóm víz két atóm könenyt és egy atom élenyt tartalmaz, s hogy egy oszthatatlan élenyparánynyal egyenértékű chlór kettő által osztható, s hogya kén, valamint az éleny két aljú (zwei basisch), úgy hogy egy atóm két atóm chlórral aequivalens.«

1857-ben KEKULÉ a durrhigany vegyi szerkezetének ismertetése alkalmával [1]) összehasonlítja a methylsorozat vegyűleteit — s a mocsárlég, chloroform, chlormethyl, acetonitril és durrhigany szerkezetére utalva, felállitja a negyedik u. n. mocsárlég typust.

Ez volt kezdete KÉKULÉ azon valóban bámulatos haladást — s az egész tudomány, de különösen a szervi vegytan átalakitását eredményező munkálatainak, melyek egy részről a vegyértékek kifejtése által az elemek egyik legfontosabb vegyi sajátságának ismeretére vezettek, más részről ez által a szervi vegytanban oly rendszer alapját veték meg, mely nemcsak könnyű áttekintést enged meg a szervi vegyületek rendkívüli sokasága között, hanem utat mutatott egyszersmind még nem ismert, de lehetséges vegyületek előállítására is.

Még ugyanezen évben [2]) a typusok és typikus vegyületek magyarázatát az elemek több parányúságára — mint akkor nevezték — vezeté vissza. — »A vegyületek tömecsei több parány csoportosulása által keletkeznek. — Egy parányával (egy elemnek, vagy ha összetett testeknél e viszonyt az elemekre vissza vinni nem akarjuk, gyöknek) összekötött más elemi parányok (vagy gyökök) száma függ az alkatrészek basicitásától. E tekintetben az elemek három főcsoportra oszlanak:

1) Egy aljú vagy egy parányúak I. p. *H, Cl, J, Br, K,*
2) Két » » két » II. » *O, S,*
3) Három » » három » III. » *N, P, As.*

Ezek képezik a három fő typust:

$$I + 1,\ II + 2.1,\ III + 3.1;$$

jelölve a legegyszerűbb vegyületek által

$$HH,\ OHH,\ NHHH.$$

[1]) Annal. d. Chem. Pharm. CI. 200 lap.
[2]) Annal. Chem. Pharm. CIV. 130.

Több typus tömecseinek egyesülése által, melyek egyenlők vagy különbözők is lehetnek, állanak elő a többszörös és vegyes typusok p. o.

$$\left\{\begin{matrix}HCl\\HCl\end{matrix}\right. \quad \begin{matrix}H\;O\\ \left\{\begin{matrix}H\\H\end{matrix}\right.\\ H\;O\end{matrix} \quad \left\{\begin{matrix}HCl\\ \left.\begin{matrix}H\\H\end{matrix}\right\} O\end{matrix}\right. .$$

Több typus tömecseinek egyesülése csak akkor történhetik, ha több parányú gyök két vagy három köneny helyébe lépvén, azokat összetartja.« — Ehhez sorolja végül a széneny négy parányuságából következő negyediket az u. n. mocsárlég typust.

1858-ban jelent meg »Über die Constitution und die Metamorphosen der Chemischen Verbindungen und über die Chemische Natur das Kohlenstoffs« [1]) czímű értekezése, melyben szükségesnek, sőt lehetőnek tartja, a vegyületek sajátságainak tanulmányozásában visszamenni maguknak az elemeknek, melyekből a vegyület összetéve van, tanulmányozására. Ez idő szerint nem a gyököknek tekinthető paránycsoportozatok kimutatását tartja főfeladatnak, melyek által a vegyületeket bizonyos typusokba lehet beosztani, hanem maguknak ezen gyököknek szerkezetét kell vizsgálat alá venni, azok egymáshoz való viszonyát és az elemek sajátságaiból a gyökök és vegyületeik sajátságait levezetni; erre nézve kiindulási pontul szolgálnak az elemek vegyértékei s más sajátságai. Ismételten hangsulyozza ezen értekezésben a szénenyparányok 4 vegyértéküségét, s itt említi fel első alkalommal, hogy a széneny parányai egymás között is képesek kapcsolódni s így lánczolatos összefüggésben lehetnek. »Tekintve a szénenynek legegyszerübb vegyületeit (CH_4, CH_3C, CCl_4 CCl_3H, CO_2, $COCl_2$, CS_2, CNH, sat.) föltünő, hogy a szénenynek azon lehető legkisebb mennyisége, melyet a vegyészek paránynak vettek fel, mindig négy parányával egy-egy vegyértékü elemnek, vagy két parányával egy 2 vegyértékünek egyesül, hogy általában egy parány szénenynyel egyesülő elemek vegyértékeinek összege = 4. Ez azon nézetre vezet, hogy a széneny 4 vegyértékü.«

»Azon vegyületekre nézve, melyek több szénenyparányt tartalmaznak, fel kell tenni, hogy legalább egy része a parányoknak a széneny vegyértéke által van kötve a vegyületben, s hogy a szénenyparányok egymás között is képesek kapcsolódni, mi által természetesen egy része az egyik parány vegyértékeinek a másik parány hasonló számu vegyértéke által van lekötve.«

[1]) Annal. d. Chem. u. Pharm. CVI. 129 lap.

»A legegyszerűbb s ennél fogva legvalószínűbb esete két szénenyparány kapcsolatának, hogy az egyik parány egy vegyértéke a másiknak egy vegyértékével van kapcsolatban. Tehát két széneny paránynak 2×4 vegyértékéből 2 arra használtatik, hogy a két parányt összetartsa, marad tehát szabadon 6, mely más elemek által vétetik igénybe.«

»Az ily módon egyesült n parány szénenynyel egyesülő könenyparányok száma kifejezhető:

$$n(4-2) + 2 = 2n + 2.«$$

Mindjárt ezután megjegyzi azonban Kekulé, hogy ez nem csak az egyedüli lehetséges módja a szénenyparányok kapcsolatának, sőt hogy szükséges egyes csoportjainál a szénenyvegyületeknek azt felvenni, miszerint bennök a szénenyparányok sokkal bensőbb kapcsolatban vannak, azaz több vegyérték által függenek össze, mint p. o. a benzol, naphtalin és homologjainál.

Az előre bocsátottakból, hol csak igen vázlatosan, mondhatnám töredékesen tüntettem elő a tudomány ezen ágának fejlődését, látható mint fejlődött a vegyérték fogalma az empirikusan felállított typusokból; eredete majdnem kizárolagosan a szervi vegytanban gyökeredzik, de egyszersmind ennek fejlesztésére hatott vissza legközvetlenebbül és legelőnyösebben. A vegyértékek által vált lehetővé számot adni némileg a parányok egymás közötti kapcsolatáról s ez által vált lehetővé az u. n. szöveti képletek szerkesztése, melyek eltekintve attól, hogy hypothetikus természetüknél fogva nem fejezik ki a valóságot, következményeikben mégis a tudományra nézve igen nagy fontosságuak.

Vegyérték alatt értjük az elemek parányssúlya és egyenértéke közötti viszonyt kifejező hányadost, az egyenértékeket egy parány, vagy egy sulyrész könenyre mint egységre vonatkoztatva. Föltéve a parányssúlyok pontos ismeretét, függ tehát a vegyértéket kifejező szám az egyenértéktől. — Azonban az egyenérték s ezzel együtt a vegyérték ismerete a mily nagy horderejü a tudományra, épen oly nagy nehézséggel jár azok biztos meghatározása. »A dolog természetében fekszik hogy különböző elemek bármily mennyiségei is sohasem lehetnek egymással tökéletesen egyenértéküek, hanem legjobb esetben is csak egyik vagy másik szempontból lehetnek egymással megegyezők. A szerint a mint különböző szempontból tekintették ezen többé-kevésbé megközelítő értékeket, a szerint jutottak különböző egyenértéksúlyokhoz. [1]) Ennek tulajdonítandó, hogy különösen az újabb időben azon kérdés eldöntésénél: vajjon a vegyérték állandó azaz változhatlan sajátsága-e a parányoknak, vagy pedig körülményektől függő, tehát változó érték-e, a vegyészek igen eltérőleg nyilatkoztak, s a kérdés mai napig is igen érdekes vita tárgyát képezi.

Bármely definitióját az egyenértéknek tekintsük is igazul, levezetve abból az elemek vegyértékét, nem juthatunk el oly állandó számokhoz, melyeknek segítségével az összes vagy csak a vegyületek nagyobb részénél is a parányok egymás közötti kapcsolatát megmagyaráznunk lehetne. Eltekintve az egyenérték régibb meghatározási módjaitól, jelenleg általánosan el van fogadva egyenértéknek tekinteni: az elemek vagy vegyületek azon mennyiségét, mely egy súlyrész könenyt képes helyettesíteni; vagy egy alkatrésznek azon mennyiségét, mely 1 súlyrész könenynyel van egyesülve; vagy egész általánosságban, különböző vegyületek vagy alkatrészek azon mennyiségei, melyek az egységgel egyenlő vegyi hatást képesek előidézni. — Tudjuk azonban, hogy végtelen a példák száma, melyek mind azt bizonyitják, hogy ugyanazon elemek különböző vegyületekben különböző vegyi hatást képesek létrehozni; p. o. az éleny, mely elemnek úgy egyenértéke, mint vegyértéke a legszabatosabban ismertek közé tartozik, más értéket mutat a szénsavban, mint a szénélegben, így a vas és csoportjába tartozó elemek az élecs- és éleg vegyületekben, a kén különböző élenyvegyületeiben. Ennél fogva épen a vegyérték törvényének kutatása által vált szükségessé az egyenérték meghatározásánál szem előtt tartandó körülményeket oly szabatosan kijelölni, hogy az ekként nyert értékek az egyenérték valódi fogalmának leginkább megfeleljenek. Erre nézve szükséges, hogy valamely alkatrész vegyértékének és egyenértékének meghatározására annak oly vegyületei használtassanak, melyben a kérdéses elemnek csak egy paránya s pusztán egy vegyértékű elemekkel legyen kapcsolatban, mi szükségképen feltételezi, hogy az elemek közvetlenül, nem pedig mások közvetitése által függenek össze s végül hogy az illető vegyületnek tömecssúlya pontosan megállapítva s pedig a gőzsürüségből levezetve legyen. Ily megszoritások mellett az egyenértéket meghatározni csak igen kevés vegyületnél lehetséges, a menynyiben azok nagy része vagy épen nem, vagy legalább bomlás nélkül nem vihető át gáz halmazállapotba. De még azon vegyületek között is,

[1]) Meyer, Moderne Theorien 241 lap.

hol az lehetséges, még mindig maradnak kivételek, azaz olyanok, melyekben a parányok kapcsolatáról a fentjelzett körülmények között meghatározott vegyértékek sem adnak biztos felvilágosítást; ilyenek p. o. szénéleg és légenyéleg, mely vegyületekben a széneny 4, a légeny 3 vegyértéke daczára, mindkettő csak két vegyértékkel szerepel; más részről számtalan oly vegyület létezik, melyekben a több vegyértékü paránynak tulajdonított vegyértéki szám nem elegendő az egy vegyértékü parányok kapcsolatára; szóval az eltérés a fent jelzett körülmények között megállapított vegyértékektől mindkét értelemben lehetséges, azaz annál nagyobb is kisebb is. Ezeket előre bocsátva nem csodálkozhatunk, kogy sokan a vegyészek közül a vegyértékét valamely paránynak változó azaz viszonyoktól függő sajátságának tekintik, sőt hogy egyesek p. o. Mendelejeff azok létezését, sőt a föltevés szükségességét is tagadják.

Ugy szólva alig honosodott még meg a vegyérték fogalma a tudományban, már is több oldalról oly vegyérték számok hozattak javaslatba s használtattak, melyek a Kekulé által s a typusokból levezetettekkel épen nem voltak össze egyeztethetők. Igy Naquet [1]) az éleny csoport elemeit, sőt magát az élenyt is, 4 vegyértéküeknek tekinti, ugyanezt tartja az ólomról, mely chlórral való vegyületeiben ugyan két vegyértékü, azonban az ólomaethyl szerkezetéből kétségtelenül 4 vegyértéküenek tekintendő. A SCl_4 és $TeCl_4$ s egyéb vegyületekből azon következtetést vonja le, miszerint a vegyértékek maximuma nagyobb mint a typusokból levezetett s ez ideig észlelt értékek. Ezen maximumát aztán a vegyértékeknek minden elemre nézve állandónak hiszi. Hasonlóan Couper [2]) a légeny vegyületeiből kiindulva, azt 5 vegyértékünek nyilvánitá.

Ezen és hasonló ellenvetések által indíttatva érzé magát Kekulé, mint a vegyértékek megállapítója, hogy nézeteit ez irányban kifejtve, e látszólagos eltéréseknek is magyarázatát adja [3]) a következőkben: »A vegyérték elmélete módositása Dalton elméletének, mely számot igyekszik adni arról mit emez nem magyaráz meg, hogy miért egyesülnek különböző elemek parányai kiválóan egy bizonyos viszony szerint. A vegyérték tehát alapsajátsága a paránynak, s épen oly változhatlan mint a parány súly. Azt fölvenni, hogy a vegyérték változó, s hogy ugyanazon test majd ez majd ama vegyértékkel bir, annyi mint töké-

[1]) Zeitschrift f. Chem. u Pharm. 1864. 686 lap.

[2]) Annal. de Chimie et de Physique LIII 469.

[3]) Zeitschrift f. Chem. u Pharm. 1864. 689.

letesen más értelmet tulajdonítani e szónak, mint én azt ajánlám.« — Továbbá: az egyenérték és vegyérték egészen különbözők, amennyiben azon senki sem kételkedik, hogy az egyenérték viszonyok szerint változó lehet, ellenben a vegyérték minden körülmények között állandó; hasonló tévedés a vegyértéket a telithetés maximumával azonositani. Naquet nézeteire megjegyzi továbbá, hogy azon esetben, ha az *O, S, Te* 4 vegyértéküeknek vétetnek fel, ugyan azon joggal JCl_3 vegyületből a jódnak vegyértékét háromra lehet tenni, ebből ismét az következnék, hogy PJ_3 és TeJ_4 vegyületekben a P 9 a Te 12 vegyértékü. Megkülönböztet ennélfogva Kekulé parány- és tömecsvegyületeket; parányvegyületek közé sorolandók azok, melyek pusztán a parányok kölcsönös vonása folytán tartatnak össze s egyedül ezek képesek szétbomlás nélkül gáz halmazállapotot felvenni; tömecsvegyületek pedig azok, melyek 2 vagy több parányvegyület tömecseinek egyesülése utján keletkeznek. Ilyen vegyületeknek tekinti Kekulé JCl,Cl_2; $SeCl_2,Cl_2$; $TeBr_2,Br_2$; NH_3,HCl; $P(C_2H_5)_3,Cl_2$ sat. Azon tünemény okaiul pedig, hogy az aequivalens változó lehet, azt tulajdonitja, hogy az ily parányok vegyértékeinek egy része egymás között olyképen van kapcsolatban, hogy csak egy része van parányok kapcsolatára felhasználva. Hogy molekularis vegyületek léteznek, azt elfogadta Naquet is,[1]) tagadja azonban, hogy ide sorolandók mindazon vegyületek, melyek szétbomlás nélkül nem illékonyak, s a parány- s tömecsvegyületek között következőleg tesz különbséget: parányvegyületek azok, melyek más vegyületekkel cserebomlást szenvednek, míg a tömecsvegyületeknél az egyes paránycsoportok külön-külön szerepelnek; eszerint PCl_5, $(H_4N)Cl$, $TeCl_4$, $SeCl_4$ parányvegyületek, a mennyiben cserebomlás útján ismét hasonló vegyületeket képeznek, s épen ebben találja legfőbb bizonyitékát annak, hogy az élenycsoport elemei 4, a légeny 5 vegyértéküek; azt azonban megengedi, hogy a JCl_3 tömecsvegyület lehet.

Míg Naquet csak abban különbözött lényegesen Kekulé-tól, hogy az elemeknek más vegyértéket tulajdonított, addig Wurtz egészen ellentétes állást foglalt el; [2]) a vegyértéket nem tekinti állandó számnak, hanem azonosítja azt a vegyületek szerint változó egyenértéküségével a parányoknak, s így a légenyt az ammoniakban 3, a chlórammoniumban 5 vegyértékünek tartja. Elismeri ő is, hogy vannak tömecsvegyületek; ilyeneknek tartja a jegeczvíz tartalmu sókat, oldatokat;

[1]) Zeitschrift f. Chem. u. Pharm. 1864. 694.
[2]) Zeitschrift f. Chem. u. Pharm. 1864. 628.

tömecsvegyület keletkezéséből magyarázza a kénsav és víz elegyitésénél tapasztalható melegfejlődést; a KEKULÉ által felhozott példákat azonban nem tekinti ilyeneknek; indokul hozza fel ellene, hogy phosphoroxychlorid gázalakban is létezik, s hogy ezen vegyület az ötös chlórphosphorból cserebomlás utján állítható elő, s hogy ezen utóbbi vegyület sem bomlik fel teljesen, hanem részben gáz halmazállapotba is átvihető. [1]) Fődolognak azon tényleges vegyérték megállapítását tartja, melylyel egy elem vagy paránycsoport egyik vagy másik vegyületben szerepel, kevésbbé fontos vajjon a vegyértékek maximuma ismeretes-e vagy sem. A platina lehet 2 vegyértékü a $PtCl_2$, 4 vegyértékü a $PtCl_4$-ben, de nem szükségképeni, hogy ez vegyértékének határa legyen. Hasonlag lehet a széneny 2 vegyértékü p. o. a szénélegben, 1 vegyértékü a mocsárlégben, sőt egyes vegyületekben p. o. az aethylénben részben 2, részben 4 vegyértékü.

WILLIAMSON hasonlóan tagadja a vegyértékek állandóságát[1]) s KEKULÉ tömecsvegyületei ellenében felhozza, hogy a miként az ötös chlórphosphort $PCl_3 + Cl_2$-nek, a JCl_3-ot $JCl + Cl_2$-nak tekinti, épen oly joggal azt lehetne mondani, hogy a jódphosphor PJ_5 minus J_2 s a légenyéleny $N_2\ O_3$ minus O_2, miáltal nincs sem megczáfolva sem magyarázva a légeny és phosphor változó vegyértéke.

Mint látható, a felsorolt különböző nézetek — a felett vajjon a vegyérték állandó vagy pedig változó szám — mindannyian pusztán speculativ természetüek lévén, általános elismerésre közülök egyik sem számithatott. BUFF volt az első, ki e kérdés feletti nézeteit kísérletekkel igazolni s következtetéseit tényekből levezetni iparkodott. Kiinlási pontul KOPP-nak a vegyületek fajtérfogatára vonatkozó kisérleteit használta fel. Fajtérfogat alatt érti KOPP [2]) azon viszonyos térfogatot, melyet külömböző anyagok aequivalens menyiségei betöltenek. Vizsgálódásai közben azon eredményre jutott, hogy a cseppfolyó vegyületek fajtérfogata, oly hőmérséknél, melynél egyenlő gázfeszélyt mutatnak, bizonyos viszonyban van azok összetételével, s pedig eleintén úgy vélte, hogy a cseppfolyó testek forrópouti térfogata a vegyület összetételéből kiszámitható, azaz hogy minden elemnek minden paránya a térbetöltésnél változatlan értékkel szerepel. Azonban számosabb vegyületre kiterjesztvén vizsgálodásait, azon meggyőződésre jutott, hogy az éleny különböző vegyületben, sőt ugyan azon vegyületben is, térbefoglalási képességét illetőleg változó értékkel birhat, s hogy e változó érték

[1]) Zeitschrift f. Chem. und Pharm. 1864. 697.

[2]) Annal. d. Cham. Pharm. XCII. 1.

azon helyzettől függ, melyet az elem egyik paránya a vegyületben elfoglal. Egy a víz typusára vonatkoztatott vegyületben p. o. az éleny paránya kisebb térfogatot tölt be, ha az a gyökön kivül van elhelyezve, mint azon esetben, ha a gyökben foglal helyet, mely gyököt p. o. a víz könenye helyén képzeljük. — Hasonló eltéréseket tapasztalt Kopp a kén parányai térbetöltésénél is, mely annak a vegyületekbeli külömböző elhelyezésétől látszik függeni. Még feltünőbb volt az a légenynél és a légeny tartalmu anyagok fajtérfogatának vizsgálatánál. — Ezen külömbséget Kopp az éleny és kén parányai térbetöltésénél arra vezette vissza, hogy azok a gyökön belül vagy azon kivül vannak elhelyezve, mig a légenyre nézve a légenytartalmu anyagok különböző szerkezetét emliti fel okul.

Midőn Mendius a nitriloknak ammonbasisokká átalakithatóságát felismerte, Buff azon eszmére jutott, hogy talán a cyánban a légeny mint egy, a széneny mint két vegyértékü szerepelnek, s ezen szokatlan vegyérték lenne az oka a cyánvegyületek annyira eltérő fajtérfogatának, ez lenne továbbá oka azon számos és sajátságos átalakulásoknak, melyeket ezen vegyületek mutatnak.

Azon föltevésből kiindulva, hogy a több vegyértékü elemek különböző vegyületekben változó vegyértékkel szerepelhetnek s hogy ez által valószinüleg a vegyületeknél eltérő physikai sajátságokat hozhatnak létre, — számos *S*, *O*, *P*, tartalmu vegyület fajtérfogatát határozta meg, s pedig kisérleteihez oly vegyületeket választván, melyekben feltevése szerint a nevezett elemek részben különböző vegyértékkel szerepelhetnek.[1]) — A megvizsgált vegyületek voltak víz, amylén, valerylén, diallyl, szénkéneg, hármas chlórphosphor, phosphoroxychlorid s. a. t. Vizsgálatainak eredménye méginkább megerősiték azon feltevését, hogy a vonzási egységek száma, — melylyel az illető elem valamely vegyületben szerepel — lényegesen befolyásolja annak fajtérfogatát.

Eszerint a légeny három vagy öt vegyértékü; egyes bizonytalanabb esetekben azonban *2* vagy *4* vegyértékü is lehet, hasonlag a phosphor, meghatározásai szerint, az oxychloridban mint 5 vegyértékü szerepel. tellur, selén, kén 2, 4, 6 vegyértéküek [2]). Ez utóbbinál a vizment kénsavban a felette kis fajtér annak hat vegyértéküségére enged következtetni. Az élenyre nézve csak analogia utján következteti, hogy 2 és 4

---

[1]) Annal d. Chemie u. Pharm. IV. Suppl. 129 lap.

[2]) Hogy a kén 6 vegyértékü, az SO_3 vegyületből, ugylátszik, legelőször Buttlerow következtette Zeitschrift f. Chemie 1863. 507. l.

vegyértékü is lehet; valószinünek tartja hogy az ozon és a könenyföléleg tömecsei egy 4 vegyértékü élenyt is tartalmaznak:

$$O''=O''''=O'' \qquad H_2''=O''''=O''$$

ozon könenyföléleg.

Általános szabályul állitja fel az elemek vegyértékeire, hogy a hőmérsékkel változó, és pedig hogy a vonzási egységek száma alacsonyabb hőmérséknél mindig nagyobb mint magasaknál[1]).

Hasonló összefüggést talált Buff szilárd halmazállapotú vegyületek fajmelege s az ezen vegyületekben foglalt elemek vegyértéke között is.[2]) A rhombos kénnek fajmelege ugyanis közvetlenül meg lett határozva, s az ebből számitott paránymeleg a kénre nézve 5·4; a kén paránymelege ugyan ezen értékkel bir, számos kénfém fajmelegmeghatározásaiból számitva; jelentékenyen kisebb azonban ezen érték a kénsavas sók fajmelegéből számitva; ugy hogy husz fajmelegmeghatározásból mint közép érték — a kénsavsókban foglalt 6 vegyértékü kén paránymelegére 3·8. Hasonló viszonyt ismert fel a phosphornál és légenynél, sőt általában minden elemre nézve, hogy t. i. kisebb vegyértéknek nagyobb paránymeleg felel meg.[3])

Buff egyike volt azoknak, kik a vegyérték kérdésével legtöbbet és legtüzetesebben foglalkoztak; az időszaki sajtóban közzétett ezen munkálatain kivül, melyekről épen most volt szó, 1866-ban jelent meg »Grundlehren der theoretischen Chemie, und Beziehungen zwischen den chemischen und physikalischen Eigenschaften der Körper« czimü munkája. Alkalmazta ebben a fajtér és fajmeleg körüli vizsgálódásainak eredményeit az elemek változó vegyértékeire vonatkozólag, a mennyiben a vegyületek szerkezetét kifejező szöveti képleteket változó vegyértékek segitségével állitja fel, természetesen nem önkényesen, hanem amennyiben a fajtér és fajmeleg meghatározásaiból szükségesnek sőt jogosultnak véli. A kéksavnak methylaminná átalakulását fejtegetvén, azon kérdést meriti fel, hogyan lehetséges, hogy egy a sósavval

---

[1]) Hogy a vegyértékek változására a hőmérsék lényeges befolyással bir, már megelőzőleg H. Hübner is hangsulyozta s pedig ugyanazon értelemben mint Buff, t. i. hogy a hőmérsek emelkedésével a vegyértékek száma csökken Zeitschrift f. Chemie 1865. 475. lap.

[2]) Annal. d. Chem. Pharm. IV. Suppl. 164.

[3]) Kopp azon nézetben volt, hogy a vegyületek tömecsmelege a rationalis képlettől függetlenül, pusztán az empirikus képletből kiszámitható, azaz hogy minden elem paránymelege minden körülmények között állandó (Ann. d. Chemie u. Pharm. III. Suppl. 1864—1865.).

összehasonlitható savtermészetü vegyület 5 parány könenynyel egyesülés által oly vegyületet képez, mely vegyjellemére nézve a kálium mellett áll. Vajjon ezen változás csupán a könenynek tulajdonitható-e, vagy pedig hogy a széneny és légeny vegyértékeinek változásával változik azok vegyi sajátsága is.[1])

E munkájában nem csak bebizonyitani törekszik a vegyértékek változóságát, hanem azt szükségképeninek, mondhatni törvényszerünek hajlandó tartani, midőn igy szól: »Die Fähigkeit des Eisens, des Schwefels und anderer Elemente eine wechselnde Anzal von Affinitäten äussern zu können, ist eine mächtige, nie ruhende Ursache von Umwandlungen auf unserem Planeten.« — . . . »Als eine der mächtigsten und allgemeinsten Ursachen, welche chemische Umsetzungen bewirken, muss die Fähigkeit der Atome vieler Elemente, eine wechselnde Valenz bethätigen zu können, bezeichnet werden.« — . . . »Die wechselnde Valenz der Elemente veranlasst einen ewigen Kreislauf im Werden und Vergehen.«

Hasonló értelemben t. i. a változó vegyértékek előnyére nyilatkozik W. Gibbs.[2]) Párhuzamot von Kekulé és Wurtz fentebb említett nézetei között, kiemeli hogy egymással egészen ellentétes nézetek pártolói, amenyiben Kekulé szerint a vegyérték minden elemi parányra nézve állandó szám, mig Wurtz azokat változóknak tartja; Kekulé a P_2Cl_5-ot mint tömecsvegyületet fogja fel, s bár Wurtz szerint szintén létezhetnek tömecsvegyületek p. o. jegeczvíz tartalmazók, a PCl_5-t azonban nem számitja azok közzé; ebből látható, mondja Gibbs, hogy az u. n. tömecs- és parányvegyületek közötti különbségtétel, valamint azok közötti határ egészen önkényes, s általában nem is tartja szükségesnek a vegyületek közötti ezen különbségtételt, amenyiben bármelyik vegyület parányvegyületnek tekinthető, a következő feltételek mellett; 1) az elemek két csoportra oszthatók, s pedig az egyik csoportba tartoznak azok, melyeknek eredeti vegyértéke páratlan, a másikba, melyeké páros szám által van kifejezve. 2) A vegyértékek változók s azoknak határát vagy maximumát kijelölni nem lehet. Az első csoport elemei ennélfogva 1. 3. 5. s. a. t. — a másodikéi 2. 4. 6. s. a. t. vegyértéküek. 3) Az elemek egymásközötti vagy másokkal egyesülése alkalmával, — a vegyérték egységeinek

---

[1]) Buffnak ezen szerény megjegyzése által felelevenitett eszme, nehány évnek későbben, különösen Blomstrand által (Chem. d. Jetztzeit) igen erélyesen lett hangsúlyozva.

[2]) Will. Jahresbericht 1867. 27. l.

egy része eltünik, s a keletkezett vegyület vegyértéke másodlagosnak (secundaer) tekintendő. — Ezen föltevések mellett GIBBS valamennyi ez ideig tömecsvegyületeknek tekintetteket parányvegyületek közzé soroz. Igy a jegeczvízben az élenyt 4 vegyértékünek, magának a víznek tömecseit, valamint több egymással tetszés szerinti számban egyesült víztömecseket, mint gyengén két vegyértéküt tekint. — Mint látható s mint GIBBS maga is mondja ezen eszmék nem újak, mert azon nézet, hogy ha a vegyérték száma változik, ez mindig páros szám szerint történik, hallgatagon bár, de úgy látszik általánosan el volt fogadva; az azonban kétségtelen, hogy GIBBS volt az első, ki ezen szabályt a vegyértékek változásában ily határozott alakban kifejezte.

Ugy látszik, BUFF nem osztá egészen feltétlenül e nézetet, azt lehet legalább következtetni, midőn azt mondja, [1]) »a légeny leginkább 3 vagy 5 vegyértékünek tünik elő, ez utóbbi ugy látszik inkább csak alacsony hőmérséknél; 2 vagy 4 vegyértéket csak ritkán s kétségesebb esetekben mutat.«

Azonban a KEKULÉ, illetőleg az állandó vegyértékek pártolói sem maradtak hátra, demonstráló kisérletek és nézetüket támogató bizonyitékok felsorolásában. Egyik az elsők közül e téren WICHELHAUS. Már 1857-ben jelent meg egy kisebb értekezése, [2]) melyben a phosphor nehány vegyületét annak három vegyértékéből vezeti le; ő ugyanis hasonló eljárás szerint, mint Mentchukin, a hármas chlórphosphorból alkohol behatása által aethyl phosphorossav chlorürt $[PCl_2(C_2H_5O)]$ s ebből bróm behatása által a phosphoroxychlórbromürt nyerte, az ennek megfelelő chlórvegyületet elő állítá, összehasonlítá azt a phosphoroxychloriddal, s úgy találta, hogy ezen vegyületek nem isomerek, hanem egymással teljesen azonosak, s hogy keletkezését tekintve $P'''Cl_2(OCl)$ képlettel bir. — A phosphoroxychloridból, vagy az aethylphosphorossav chlorürből a $PO(C_2H_5)_3$ vegyület lesz előállítható, s ha e vegyület is azonos lesz a triaethylphosphoroxyddal, úgy szerkezetére nézve ez is analog a phosphoroxychloriddal s a következő szöveti képlettel bir

$$P'''\begin{cases}OCl\\Cl\\Cl\end{cases}\qquad P'''\begin{cases}OC_2H_5\\C_2H_5\\C_2H_5\end{cases}$$

ez által a phosphornak oly vegyületekben, melyeknél a gőzsürüség szolgál bizonyitékul arra, hogy a tömecs pusztán parányai vonzása által tartatik egybe, más mint három vegyértéket tulajdonítani nem lehet.

---

[1]) Annal. d. Chem. u. Pharm. IV. Suppl. 160 l.

[2]) »Vorläufige Notiz über einige Verbindungen des Phosphors« Zeitschrift f. Chemie 1867. 321 l.

A következő évben (1868) még bővebben fejté ki e tárgy körüli nézeteit; [1]) felsorolja azon kisérleteket, melyeknek czélja volt kideríteni, miszerint a phosphorvegyületek mindegyike egy parány phosphor három vegyértéküségéből le vezethető. Kiemeli, hogy a vegyérték nagyságának meghatározására csak is azon vegyületek szolgálhatnak kiindulási pontul, melyek teljes biztossággal egy tömecset képviselnek. Erre nézve általánosan el van fogadva, hogy ha nem is egyedül mérvadó, de legbiztosabb következtetést vonni a vegyületek tömecs szerkezetére az Avogadro hypothesise alapján, azok gőzsürüségéből lehet; hibás dolog ennélfogva valamely parány vegyértékének levezetésére oly vegyületeket alkalmazni, melyek gáz állapotban 2 vagy több tömecset képeznek.

Ha tehát egyelőre mérvadóknak csak azon vegyületek fogadtatnak el, melyeknek tömecssúlya gőzsürüség alapján teljes biztossággal meg van állapitva, úgy a vegyérték kérdése könnyen eldönthető. Ezen szempontból a légeny mindig három vegyértékü, következésképen a légeny-éleg és szalmiakban is, mint magában az ammoniakban. A légeny-élegre nézve azon kifejezés, hogy benne »a N 2 vegyértékü« csak röviditésnek mondható e helyett: a légeny vegyértékei közül csak kettő szerepel, mert hogy tényleg a harmadik is tulajdona, teljes biztossággal következik abból, miszerint az NO anélkül, hogy térfogatát megváltoztatná, egy parány egy vegyértékü chlórt képes felvenni. A szalmiaknál már nem lehet pusztán szóvitának mondani, vajjon benne a N 3 vagy 5 vegyértékü-e, mert ez utóbbi esetben azt lehetne következtetni, hogy az NH_3 és HCl egyesülésénél, az NH_3 tömecsben levő légenyparány oly vonzási erélyt nyilvánit a HCl parányaira, mely képes összetartását megsemmisíteni, azaz a H és Cl parányokat külön választani, úgy hogy aztán e H és Cl parányok hasonlóan köttetnének a légenyparányhoz, mint a többi három H parány. Miután azonban a szalmiáknak NH_4Cl képletben kifejezett mennyisége gőzalakban két annyi tömecs jelenlétét mutatja, mint H_2 vagy NH_3, ennélfogva azon feltevés, hogy a légeny 5 vegyértékü, gőz- vagy gázalakú vegyületeire, tarthatatlan, s így az NH_3, HCl jelzés egészen jogos.

Egyedül a phosphor vegyületei között léteznek olyanok, melyek bebizonyithatólag egy tömecset képviselnek, mind a mellett alkalmat nyujtanak azon föltevésre, hogy a phosphornak más vegyértéke is lehet, mint a melyet egyszerűbb vegyületeiből (PCl_3, PH_3) levezetni le-

[1]) »Über die Verbindungen des Phosphors« Annal. d. Chem. u. Pharm. VI. Suppl. 258 l; u. cs. Berichte d. Deutsch. Chem. Gesellschaft. 1868. 77.

het, a mennyiben több mint 3 más paranyt vagy parányesoportot tartalmaznak.

Ilyen vegyületek p. u. $POCl_3$, $PO(C_2H_5)_2$ sat; ezen vegyületekre nézve bebizonyitja, hogy tekintve képződésüket és vegyi átalakulásaikat, bennök a chloroxyl (OCl) bromoxyl (BrO) illetőleg aethyloxyl (OC_2H_5) paránycsoportok foglaltatnak, következésképen az élenyparány csak egy vegyértékkel áll a phosphorral kapcsolatban s így a phosphor egy paránya ezekben is három vegyértékü; képletük következő:

$$P\begin{matrix}-Cl\\-Cl\\-Cl\end{matrix}\qquad P\begin{matrix}-OCl\\-Cl\\-Cl\end{matrix}\qquad P\begin{matrix}OBr\\Br\\Br\end{matrix}\qquad P\begin{matrix}-O(C_2H_5)\\-C_2H_5\\-C_2H_5\end{matrix}$$

Hasonló szerkezettel bir a phosphorsav, s ezt látszik bizonyitani sóképzése, valamint hajlama polymerisatióhoz

$$P\begin{matrix}-O-O-H\\-O-H\\-O-H\end{matrix}+P\begin{matrix}-O-O-H\\-O-H\\-O-H\end{matrix}=H_2O+P\begin{matrix}-O-O-O-\!\!-\!\!-\\-O-H\quad H-O\\-O-H\quad H-O\end{matrix}P$$

Ezek után a következő tételt állítja fel: »a gőzsürüségből kétségtelenül egy tömecset képviselő vegyületekben a parányok vegyértéke állandó.« — Sőt azon esetben is ha fölteszszük, hogy p. o. szalmiak és ötös chlórphosphor szilárd halmaz állapotban más szerkezettel birnak mint gázalakban, s fölteszszük, hogy egy tömecset képviselnek, bár gőzsürüségök ellene szól, érvényes marad a fenti tétel a következő alakban: « az elemek függetlenül a halmaz állapottal csak egy állandó vegyértékkel birnak.« Ezt megengedve, Wichelhaus azon egyesülési erőt, mely egy gázalaku vegyületben sem nyilvánul, hanem mint p. o. a légenynél egyesek véleménye szerint növekszik s gőzzé alakuláskor ismét eltünik, más névvel kivánja jelölni, mint a vegyértékeket, melyek minden körülmények között állandók s ezért amattól lényegesen különböznek. Azon kérdésre, minemű lehet tehát azon erő, melynek hatása gőz- vagy gázállapotban megszünik, azon nézet, melylyel a halmaz állapotbeli különbség lényegét magyarázni szokás, közvetlenül arra vezet, hogy az tömecsvonzásnak tekintessék. S ezekben igazolva látja Canisaro, Kopp és Kekulé azon nézetét, hogy az ötös chlórphosphor mint bimolekularis vegyület tekintessék.

A Wichelhaus által hangsulyozott, s a szabályos gőzsürüség alapján felállított különbség látszólag elég döntő erővel birt a parány- és tömecsvegyületek közötti különbségtételre, s egyszersmind az állandó vegyértékek elfogadására; látszólag mondjuk, mert valószinüleg a tárgy fontossága által serkentve, WURTZ, HORSTMAN és NAUMANN épen az ötös chlórphosphor gőzsürüségi viszonyait vizsgálva, e kérdést WICHELHAUS ellenében döntötték el.

WURTZ 1869-ben a párisi »Société Chimique« aprilisi ülésében közlé már régebben megkezdett dolgozatait a PCl_5 gőzsürüségéről, melyeket alacsony hőmérséknél változó volumokkal, a DUMAS-féle eljárás szerint eszközölt, s melyek szerint oly számokhoz jutott, melyek a normális sürüséghez 7·2 közelednek. HORSTMAN [1]) WURTZ kisérleteiből azon következtetést vonja le, hogy azon viszonyok között, melyeknél a gőzsürüség meghatározva lett, nem lehet azt tökéletlen gáznak, hanem épen discotiatióban lévőnek tekinteni, a mennyiben ezek tulajdona, hogy gőzsürüségük, a hőmérsék és egyidejüleg a nyomás csökkentése mellett, növekszik; mig ellenben a tökéletlen gázoknál épen ellenkezőleg áll a dolog, s következteti, hogy a PCl_5, mint olyan, gázállapotban létezik; miután pedig az állandó vegyértékek pártolói az u. n. molekularis vegyületeknek épen ezen sajátságát nem ismerik el, a jelen esetben a phosphor 5 vegyértéküségét látja bebizonyitva.

WICHELHAUS azonban ragaszkodott előbbeni nézetéhez [2]). WURTZ kisérleteit nem tartja döntőknek s azt hiszi, miszerint PCl_5-t azon körülmények között, melyeknél WURTZ kisérleteit eszközölte, úgy lehet tekinteni, mint PCl_3 gőznek chlórgázban oldatát; ezen nézetét azon ismert ténynyel támogatja, miszerint igen magas hőmérséknél, vagy épen nem illékony vegyületek vízzel lepárolhatók anélkül, hogy azt lehetne állítani, hogy az illető vegyület gázalakban volt jelen. Mióta a dualistikus nézet megszünt, a vegyületek szerkezetére nézve egységes vegyületnek tekintenek gyakran olyanokat is, melyekre az sok esetben épen nem alkalmazható. S e visszásság már annyira megy, hogy a változó vegyértékek segélyével még a kettős sók és jegeczvíz tartalmu vegyületek is a többiekkel egy rendszerbe soroztatnak.

Arra nézve, hogy a szalmiak és PCl_5 sokak által nem tartatik tömecsvegyületnek, legfőbb oknak azt tartja, hogy azok szétbomlás nélkül képesek vegyi átalakulásokban részt venni s cserebomlást szenvedni. Erre nézve következő példát hozza fel: a pikrinsavas naphtalinban köneny helyettesíthető bróm által s ez által pikrinsavas brómnaphtalinná alakul át, mely jegeczes vegyület

$$C_6H_2{(NO_3)_3 \atop OH}, C_{10}H_8 + Br_2 = HBr + C_6H_2{(NO_3)_3 \atop OH}, C_{10}H_7Br.$$

[1]) Berichte d. D. Ch. G. 1869. 299. »Über veränderliche Dampfdichten.«

[2]) Berichte d. D. Ch. G. 1869. 302. »Zur Kentniss d. molecularen Verbindungen.«

Mind a mellett azt hiszi, hogy e vegyületet még ez ideig senki sem tartá egységes parányvegyületnek, már pedig e reactio folytán épen oly joggal lehetne azt tenni, mint a szalmiaknál. Végül értekezését következőleg fejezi be, »valóban a változó vegyértékekre alapított rendszer eléggé »elasticus«, hogy benne minden elférjen.«

WICHELHAUS-nak ezen kissé erőltetett nézetét, mely nem is igen talált viszhangra, hogy t. i. a PCl_5 gőze nem egyéb, mint PCl_3-nak chlórgázban oldata, szükségtelenné tette NAUMANN,[1] ki különben az állandó vegyértékek pártolója; ő ugyanis a PCl_5-nek Cahours által már régebben eszközölt gőzsürüségi meghatározásait összehasonlítva, azt következtette, hogy egy része a PCl_5-nek valóban képes változatlanul gázállapotot felvenni; és ezen feltevését bizonyítva látja WURTZ említett kisérletei által. NAUMANN a CLAUSIUS meleg mechanikai elméletének alapján jutott azon meggyőződésre, miszerint a tömecsvegyületek is képesek bizonyos körülmények között, anélkül hogy alkotó tömecseikre bomlanának fel, gázalakot felvenni. A testek ugyanis gáz halmazállapotot vesznek fel akkor, midőn a hőmérsék emelkedése által a tömecsmozgás eleven ereje oly nagy lett, hogy általa az egyes tömecsek vonzása az összes többi tömecsek iránt legyőzetett; ezen átmenet bomlás nélkül akkor történik meg, hogy ha a tömecsmozgásnak megfelelő eleven ereje a tömecs-alkatrészek mozgásának nem győzi le ezen alkatrészek egymáshoz vonzását. Igen könnyen képzelhető tehát, hogy valamely tömecsvegyületre nézve létezik bizonyos hőmérséki állapot, melynél ezen összetett tömecsek alkatrészeinek eleven ereje annyira fokozódnék, hogy egymástól való szétválásukat, vagyis az összetett tömecs szétesését eredményezné. »Ezek után tehát a phosphor három vegyértéküsége a gázalaku PCl_5 létezése mellett még megállhat.«

A tömecsvegyületek létezése és ezek létezése esetében a parány- és tömecsvegyületek közötti határ- vagy különbségtétel a legszorosabban össze függ a vegyérték kérdésével; mert bár ez ideig (1869) a tömecsvegyületek létezését GIBBS-en kivül teljesen nem tagadta meg senki, mind az által a határra nézve, mely a vegyületek e két csoportját egymástól elválasztá, lényeges eltérések mutatkoztak, mi szükségképen különböző vegyértékek elfogadását feltételezi; NAUMANN-nak a PCl_5 gőz alakban létezéséből levont következtetései, hogy t. i. tömecsvegyületek is vehetnek fel gáz halmazállapotot, a legbiztosabb kriteriumot semmisítette meg, mely ez ideig a parány- és tömecsvegyületek közötti

[1]) Berichte d. D. Ch. G. 1869. »Über das Bestehen von Molecular-Verbindungen in Gasform.«

különbségtételre nézve fennállott; ugy hogy a molekular vegyületek kérdése csupán vegyérték kérdésévé vált. A mennyire azonban a tömecsvegyületek létezése szükségesnek mutatkozott, miután arra a gőzsürüség többé nem szolgálhatott alapul, új támpontokra és bizonyitékokra volt szükség. Igy p. o. Rathke [1]) megkülönböztetéseül annak, vajjon parány- vagy tömecsvegyülettel van-e dolgunk, következő feltételeket állapítja meg. Tömecs vegyület az 1) ha alkatrészei közvetlen egyesülése által keletkezett, s pedig oly viszonyok között, melyeknél, ha egyszer képződött, állandó marad; 2) ha alkatrészei vegyjellemüket változatlanul megtartják. Alkalmazva ezt a légeny és phosphor vegyületeire, kétségtelennek tartja, hogy p. o. az ammoniumvegyületekben a parányok, vagy gyökök a légenyparány 5 vegyértéke által tartatnak össze, következésképen parányvegyületek, s nem tekinthetők két tömecsből állónak.

A vegyértékek vitatásában, mint az eddigiekből látható, a vegyészek nagyobb mérvben csak kevesen vettek részt, s bár az elvi különbség a »változó« és »állandó« vegyértékek között, egy részről leginkább Buff, másrészről Wichelhaus által elég élesen volt már körülírva, mind a mellett a részletes vita ez ideig leginkább a phosphor és légeny vegyületeire szorítkozott. A vita folyamában azonban annak tárgyai is mind inkább szaporodtak; azaz mindig sürübben alkalmazták a változó vegyértékeket a vegyületek szerkezetének magyarázatánál.

Wanklyn [2]) a nátriumvegyületek egész sorát közli, melyekben a Na-ot mint három, egyes esetekben mint hét vegyértéküt tekinti p. o.

$$Na'''(C_2H_4)OH$$

$$Na'''\begin{cases}(C_2H_4)'' \\ [O(C_2H_3O)]'\end{cases} \text{ aethylén natriumacetat,}$$

$$Na'''\begin{cases}OC_2H_5 \\ H \\ Cl\end{cases} \quad \text{s végül a chlórnátriumot}$$

$$\left(\begin{matrix}Na''' \\ \| \\ N''a'''\end{matrix}\right)Cl_2$$

Wanklyn e nézetének előterjesztése a londoni »Chemical Society« 1869 aprilisi ülésében élénk eszmecserére adott alkalmat, mely alkalommal Williamson azon nézetet fejezte ki, hogy vegyértékeiket

[1]) Berichte d. D. Chem. G. 1869. 703. Kriterien zur Erkennuug von Molecular-Verbindungen.

[2]) Berichte d. D. Chem. G. 1869. 65, 192. l. u. cs. Jahresbericht f. 1869 13. l.

illetőleg ugyan, az elemek páros és páratlan vegyértéküekre oszthatók; annak megitélése azonban, vajjon minden egy vegyértékü parány képes e 3 vagy 5, s minden 2 vegyértékü egyszersmind mint 4 vagy 6 vegyértékkel is szerepelni, későbbi kutatások feladata marad. A nátriumot illetőleg különösen oly vegyületek felkeresését ajánlja, melyekben az egy vegyértékü elemekkel van kapcsolva, e tekintetben a $NaCl_3$ vegyület sokkal nagyobb bizonyító erővel birna mint a $Na(C_2H_3O)_3$. Természetesnek fogjuk találni, hogy Wichelhaus nem hagyta szó nélkül Wanklyn-nak a nátrium több vegyértéküségére vonatkozó nézetét. [1] »Hogy a (NaC_2H_3) gyök egy vegyértékü, azt épen a nátrium egy vegyértéküségéből lehet következtetni, s hogy e vegyületekben a nátrium 3 vegyértékünek tekintessék, még más bizonyitékokra is van szükség. Általában Wanklyn következtetéseiben arra nem talál semmi érvet, hogy a nátriumnak más mint egy vegyérték tulajdoníttassék.

Fennebb említve voltak már Buff nézetei s azon tények, melyek őt a változó vegyértékek elfogadására, sőt azok szükségességének kifejezésére vezették. 1869-ben »Einige Bemerkungen zur Affinitätslehre« czímű közleményében [2]) röviden párhuzamot von a két ellentétes t. i. az állandó és változó vegyértékek tana között. A vegyérték tana Dalton sokszoros súlyviszonyok törvényéből eredt, mely azt fejezi ki, hogy egy vagy több báránya egyik elemnek, egy másik elemnek változó számu parányaival képes egyesülni; ezen nézetet osztá Berzelius is, és minden ellenmondás nélkül el is volt fogadva általánosan, míg Kekulé által az állandó vegyérték tana fel nem állíttatott. — Míg az egyik nézet a sokszoros súlyviszonyok törvényét kizárólagosan a több vegyértékü parányok lánczolatos kapcsolódása által magyarázza, addig a másik nézet ezen kapcsolódást csak egyes esetekben, és sok más esetben a változó vegyértéket veszi magyarázatul. — Míg ugyanis egy részről a gőzsűrűség, vegyjellem, isomorphismus, a vegyületek tömecsnagyságának s az elemek azon vegyértékének felismerésére vezet, mely az illető elemre nézve uralkodónak látszik lenni, addig másrészről elvezet a változó vegyértékek felismerésére is. — A szénéleg gőzsürűsége azt mutatja, hogy a széneny, mely legtöbb esetben egy, itt két vegyértékű, a légeny-élegre, hogy benne a légeny két vegyértékű. — A vas és mangan, mint a magnesiumcsoport tagjai, két vegyértéküek, az aluminium- és chrómmal mint négy vegyértéküek egy másik csoportot képeznek; általában az isomorphismus tüneményeit a legnagyobb

[1]) Berichte d. D. Chem. G. 1869. 65. lap.
[2]) Berichte d. D. Chem. G. 1869. 142 lap.

figyelmet érdemlőknek tartja, a mennyiben épen azt mutatják, menynyire változik a vegyértékkel a parány vegyi minősége is. »A 2, 4, vagy 6 vegyértékű vas egyikből a másikba könnyen átvihető ugyan, de egymás között nagyon különbözők. E tekintetben bizonyára távolabb állanak egymástól, mint megfelelő vegyületei a két vegyértékű vas-, mangan-, aluminium-, chróm-, vagy végül a hat vegyértékű vasmangan-, chróm-, tellur-, selen- és kénnek.

Ezen felfogásmódban találja épen a két nézet közötti igen lényeges különbséget: »Ez értelemben az állandó vegyértékek szerint, a vegyrokonság lényegében nem egyéb, mint pusztán vonzási erély, mely úgyszólván ugyanazon mechanikai természetű, mint p. o. a nehézségerő (Schwerkraft)«, e szerint a parányok affinitása épen oly változhatlan mint azok súlya. — A másik, t. i. a változó vegyértékek tana szerint, a vegyi erély csak egy alakja az erőnek, mely sok oldalról mint mozgás tekinthető s így, mint minden neme a mozgásnak, változó lehet. — *A vegyileg működő belső munkanagyság változása azonban a parány vegyi minőségének megváltozását is feltételezi.*

Legjobban jellemzik Buff felfogásmódját a vegyértékeket illetőleg, következő sorai: »Vielleicht finden wir, wenn wir das tiefe Geheimniss des Wesens der chemischen Affinität erkennen, dass sie eine, je nach der Anzahl der thätigen Verwandschaftseinheiten mehr oder weniger gehemmte Bewegung der Atome ist«. — Tagadhatatlan, hogy Buff ezen sejtelemszerűen kimondott hypothesise igen elmés, érthető s egyszersmind modern is. — Melegfejlődés vegyifolyamatoknál, mechanikai mozgás átalakulása meleggé, a magasabb vegyértékű elemek cseppfolyó vegyületeinek kisebb fajtérfogata, ugyanily vegyületek kisebb fajmelege szilárd halmazállapotban, továbbá a hőmérsék emelése és a nyomás csökkentése által előidézett bomlások, melyeknek következtében az összetett tömecsek parányainak mozgását akadályozni látszó erő legyőzetik, oly tünemények, melyekben feltevése bizonyitékait találja.

Látható Buff összes — ezen irányban való működéséből, hogy bizonyos physikai sajátságokból fajtér-, fajmelegbeli változások és különbségekből jutott a változó vegyértékek kifejezésére; hogy a vegyjellem mellett épen ezekben találja a legfőbb bizonyítékot nézetei támogatására, sőt hogy magyarázatát is a változó vegyérték tüneményeinek physikai törvényekben, a mozgás törvényeiben keresi; általában tehát úgy felfogásmódja, mint indokolásában inkább természettani, mint vegytani alapon áll.

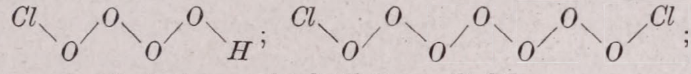
E tekintetben igen lényegesen különbözik BUFF-tól a változó vegyértékek egy másik — lehet mondani még sokkal merészebb előharczosa C. K. BLOMSTRAND svéd vegyész. 1869-ben jelent meg »Die Chemie der Jetztzeit« vom Standpunkte der electrochemischen Auffassung czímű munkája, melyben a parányok vegyértékével igen tüzetesen és nagy kiterjedésben foglalkozik. — Mielőtt őt vizsgálódásai és okoskodásaiban az egyes részletekig követnők, megismerhetjük és híven visszatükrőzve találjuk nézeteit, következő szavaiban: »Das Gesetz der Atomigkeit ist mir ein veränderter Ausdruck des Gesetzes der multiplen Proportionen«. — »Die wechselnde Sättigungscapacität ist eine Grundeigenschaft der Atome«.

De lássuk nézeteit közelebbről.

Miután a sokszoros súlyviszonyok törvénye tapasztalat után lett megállapítva, ennek megfelelőleg a parányok vegyértékének meghatározásánál is a tapasztalatra utal, s e tekintetben a vegyületek már futólagos áttekintésénél is szembetünőnek találja, hogy a vegyérték csak egyes kivételes esetben, különösen pedig az éleny, köneny és fluórnál változatlan. A vegyértékek ezen változásánál bizonyos szélső határokon belül, szintén a tapasztalatra vagyunk utalva.

Végig tekint a vegyérték egész történetének fejlődésein s annak egyes mozzanatait kritikailag fejtegetve, egyrészről KEKULÉ és követői, másrészről WURTZ-nak általunk már ismert nézetei ellenében, fent jelzett álláspontját igyekszik érvényesíteni. A mi BLOMSTRAND nézeteit valamennyi másétól megkülönbözteti s eltérővé teszi, abban áll, hogy esetről-esetre a parányok vegyértékének meghatározásánál nem a könenу- vagy chlór-, hanem az élenyvegyületeket használja fel. Mint ismeretes, WURTZ, ki különben a változó vegyértékek védője volt, épen úgy mint KEKULÉ és követői, a vegyérték megállapításánál, kizárólagosan csak a haloid-csoport elemeivel képezett vegyületeket tekinték mérvadóknak, a mennyiben a több vegyértékű elemekkel való vegyületekben s így az élenyvegyületekben is az éleny vagy más több vegyértékű elemnek egymás közötti lánczolatos kapcsolódását tételezték fel, épen úgy mint az a szénenyparányokra nézve általánosan el is fogadtatott.

BLOMSTRAND igen nagy súlyt fektet arra, hogy ezen általánosan elterjedt felfogásmód tévességét bebizonyítsa; e czélból a legkülönbözőbb élenyvegyületeket s pedig úgy a fémélegek, mint a nemleges elemek élenyvegyületeit vette vizsgálat alá — vegyi szempontból. A KEKULÉ typicus felfogása szerint SO_2, SO_3, N_2O_5, P_2O_5, valamint WURTZ szerint SO_3, Cl_2O_5, J_2O_7 mind oly vegyületek, melyekben az éleny parányok $\overset{|}{O}-\overset{|}{O}=O_2$, $\overset{|}{O}-\overset{|}{O}-\overset{|}{O}=O_3$, $\overset{|}{O}-\overset{|}{O}-\overset{|}{O}-\overset{|}{O}=O_4$ egymással lánczolatos kapcsolatban állanak. Már pedig egyátalában nem képzelhető el, hogy a phosphorpentoxydban, ezen rendkívül állandó vegyületben az élenyparányok épen olyszerű kapcsolatban legyenek, mint p. o. a könenyfölélegben, mely már önmagában bomlik, sőt élenyét bizonyos körülmények között explosiószerűleg adja le; ebből következteti, hogy az élenyparányok a phosphorpentoxydban nem egymás között, hanem közvetlen a phosphorral állanak összefüggésben, s így a phosphor ezen vegyületben 5 vegyértékű; hasonlóan a felchlórsav vagy anhydritje:



különösen az anhydrid ezen képletéből egyáltalában nem magyarázható meg, miért szakad tömecse vizzel érintkezésnél épen középen két egyenlő részre, holott az élenyparányok mindenütt egyenlő összetartásánál fogva, a szakadás bármely ponton képzelhető volna; nem értelmezhető továbbá az, hogy ha pusztán az élenyparányok kapcsolata az ok, miért nem fokozódik azok száma még magasabbra, vagy épen végtelenre. Általában a felchlórsav sajátságai, annak állandósága két ily határozottan nemleges elem között, épen nem látszanak ezen szöveti képlet helyességét igazolni, valamint azon körülmény sem, hogy 200°-nál párolog, s pedig bomlás nélkül; káliumsója ellen áll a kénsavnak, ezüst sója bomlás nélkül megolvasztható. Hasonló s a typikus felfogás szerint még kevésbbé magyarázható viszonyokat tüntet fel a J_2O_7 s az ebből levezethető vegyületek.

Mindezen vegyületek vegyi sajátságai s paránykapcsolata nagyon egyszerűen érthető lesz, mihelyest a chlór- vagy jódparányok, a velök kapcsolatban lévő élenyparányok szerint, Cl_2O, Cl_2O_3, Cl_2O_5, Cl_2O_7 1, 3, 5, 7. sat. vegyértékűnek tekintetnek.

Ugyan ezen következtetésre jut a fémélegek és az u. n. fölélegek vegyi sajátságainak megfigyelésénél is, azok vegyértékére nézve; a mennyiben itt is azt igyekszik bebizonyítani, hogy fémélegek és fölélegek parányszerkezetükre nézve egyátalában nem hasonlíthatók a könenyföléleghez, azaz nem lehet feltételezni, hogy bennök az élenyparányok egymással állanának kapcsolatban.

Erre nézve a könenyföléleggel, egyrészről a Brodie által felfedezett organikus könenyföléleg derivátokat,[1]) másrészről pedig a kér-

[1]) Annal. d. Chem. Pharm. CVIII. 79; CXXIX. 282 lap.

déses fölélegeket hasonlítja össze, vegytani sajátságaikat illetőleg, s elég éles különbséget talál közöttük, hogy vegyi szerkezetükre nézve különbözőknek tekintessenek. »Ha jogosult az — ugymond — hogy BaO_2, MnO_2, H_2O_2 és másrészről BaO, MnO és H_2O ugyanazon szerkezetü vegyületeknek tekintessenek, hogyan magyarázható az, hogy ugyanazon külső körülmények, melyek folytán a könenyföléleg bomlást szenved, mangán- és báriumfölélegre hatásnélküliek? Miért óvatik meg a könenyféleg a bomlástól, épen azon körülmény t. i. savak jelenléte által, mely majdnem egyedüli föltétel a mangan- és báriumfölélegből az élenyt leválasztani?«

Ezek után a következő képletekből. MnO, Mn_3O_4, Mn_2O_3, MnO_2 MnO_3, Mn_2O_7 következteti, hogy a mangánnak egy paránya 2, 4, 6; 2 paránya 2, 4, 6, 14 vegyértékü lehet, s így változik valamennyi fémnek vegyértéke, mely meghatározható azok különböző élenyvegyületeiből.

Reá mutat Blomstrand a typuselmélet hátrányaira, mely kényszerit mindazon vegyületeket, s ezeknek száma igen nagy, melyek a 4 typus szük keretébe be nem szorithatók, molekuláris vegyületekként felfogni, holott épen ezen vegyületek legnagyobb része, a legrégibb idő óta és a legtökéletesebben ismeretes, s a legjogosabban atomistikus vegyületekként tekintendők. Blomstrand, ha általánosan nem tagadja is a molekuláris vegyületeket, de elmélkedéseiből határozottan kitünik, hogy azok létezésének föltevését szükségtelennek tartja.

Hasonló értelemben nyilatkozik Markownikoff. [1]) Általános áttekintéséből a vegyületek meleghez való viszonyának,azon következtetést vonja le, miszerint egyes vegyületeknek magasabb hőmérséknél szétbomlása nem ok arra, hogy azok tömecsvegyületeknek tekintessenek s ennek alapján külön osztályba soroztassanak. Minden vegyület csak bizonyos hőmérséki határok között állandó, s így vegyi és physikai átalakulások között határt vonni nem lehet; ebből következteti, hogy az elemek vegyértéke nem állandó, hanem a körülményekhez képest tág határok között ingadozhat. Még tovább megy Mendelejeff, [2]) amenynyiben ő még a jegeczvíz tartalmu testeket sem tartja tömecsvegyületeknek s nem tesz határozott különbséget a jegecz és hydrat víz között sem, a mennyiben a jegeczvíz képződését mindig a tulajdonképeni hydratok víztartalmára vezeti vissza. Igy p. o. 10 H_2O a jegeczedett kénsavas nátriumban következő hydrátoknak felelne meg:

$$NaH_3(OH)_4 = (NaOH.3H_2O) \text{ és } S(OH)_6 = [H_2SO_4.2H_2O]:$$
$$S(OH_6) + 2NaH_3(OH)_4 = Na_2SO_4 + 10H_2O.$$

[1]) Berichte d. D. Chem. G. 1871. 930.

[2]) u. o.

Szóval, a jegeczvíz tartalmu vegyületekben a víz alkatrészeit ugyanazon erő által kapcsoltaknak képzeli, mint a többi alkatrészeket.

Általában MENDELEJEFF, a vegyérték hypothesisét illetőleg, egészen sajátos álláspontot foglal el, a mennyiben nem csak az állandó vegyértékek tanát nem fogadja el, de egyátalában a vegyérték elméletének bármely alakját is szükségtelennek és fölöslegesnek tartja, s bármiféle vegyületalakzat képződésének törvényeit, a vegyérték elméletét megelőző additió határai és a substitutió tüneményeinek tanulmányozása által véli megállapithatni.

A vegyérték elméletére vonatkozó ellenvetéseit »Die periodische Gesetzmässigkeit der chemischen Elemente« czímű terjedelmes értekezésében [1]) egy külön fejezetben tette közzé, melynek mindjárt bevezetésében következőleg nyilatkozik: ... es ist das Schicksal unserer Wissenschaft, dass die wichtigsten Endeckungen einer Epoche zuerst zu extremen Hypothesen führen. Als solche betrachte ich die gegenwärtig herrschende Lehre über die Atomicität (Werthigkeit Valenz u. z. w.)

Az állandó vegyértékek ellen felhozott érvei különben ugyanazok, melyekkel már BLOMSTRAND munkájában találkoztunk, t. i. hogy a molekuláris vegyületek felvétele jogosulatlan, hogy a könenyvegyületekből megállapított vegyértékek, a könenyvegyületek csekély száma miatt, nem lehetnek irányadók, hogy az élenyvegyületek szerkezete az állandó vegyértékek által épen nem magyarázható.

Mind ezen ellenvetései daczára, MENDELEJEFF úgy tartja, hogy legkövetkezetesebbek azok, kik a vegyértékekben a parányoknak állandó változatlan tulajdonát tekintik; miután azonban a tények hatalmának engedve, a vegyészek legnagyobb része a vegyértékeket változónak vette fel, ez által tulajdonképen magának a vegyértéknek tana lett feladva; »nem egyéb az jelenleg, mint a parányokban foglalt aequivalensek számáról szóló tan; a mint az aequivalens a sokszoros súlyviszonyok törvénye szerint változik, akként változik a vegyérték is. Ha pedig a vegyérték változó sajátság, azaz ha fölteszszük, hogy a legtöbb esetben a vonzási egységek egyrésze latens marad, úgy a vegyérték nagyságának meghatározásáról is általában le kell mondani.« Fölhozza p. o. aként, mely sok időn át két vegyértékünek tekintetett, mig később SO_2,SO_3 vegyületekből 4 majd 6 vegyértékünek ismertetett el, ugyan így tekinthető a chlór 7 vegyértékünek, s ezek után állítható-e biztossággal, hogy az éleny és köneny vegyértékei nem változók?

---

[1]) Annal. d. Chem. Pharm. 8. Suppl. 211 l.

Szóval MENDELEJEFF a vegyértékek tanát csak annyiban tartja megengedhetőnek, a mennyiben az az aequivalensek számbeli kifejezéseül szolgálhat, azon része pedig, mely a parányokban müködő vonzási egységek érvényesülése által igyekszik képzetet alkotni azok tömecsekké egyesülésénél, mint oly elmélet, mely az anyag szerkezetéről szóló sokkal biztosabb ismereteinkkel egyátalában nem hozható összhangzásba, teljesen elvetendő; s pedig a következő okoskodás alapján: »a tömecsekben a parányokat, egymásra gyakorolt kölcsönös hatásaik folytán létesült mozgó-egyensúlyi állapotban kell képzelnünk; az egész rendszer tehát oly erők által tartatik össze, melyek minden egyes résznek sajátjai; mert általában nem képzelhető el, hogy egy egésznek két része, pusztán egy harmadik résznek befolyása alatt állva — egymásra semmi hatást ne gyakoroljon, különösen az esetben, midőn e két részről szerzett ismereteink a közöttük létező határozott és állandó vegyi vonzásról tanuskodnak. Vegyük fel p. o. hogy a CH_4-ben a 4 H parány pusztán csak a szénenyparány által tartatik össze, ezen nézet nem bir semmi valószinütlenséggel; de ha egy H — Cl által helyettesíttetik, már nagyon nehéz azt felvenni, hogy a 4 parány (H_3Cl) pusztán a széneny parány által tartatik össze, s hogy a reactió folyama alatt, vagy az után a Cl és H között létező vonzási erély minden hatás nélkül maradna.«

Felemlíté továbbá MENDELEJEFF, hogy a vegyérték tana leginkább a szénenyvegyületek tanulmányozása folytán merült fel. Elismeri, hogy arra nagyon könnyen alkalmazható is; ennek okát különösen abban találja, hogy a széneny parány egyenlő számu aequivalenst képes mint maximumot az O és H-ből is megkötni, továbbá hogy a szénenynek nincsenek u. n. molekuláris vegyületei.

A törvényszerű összefüggés, melyet MENDELEJEFF ezen értekezésében az elemek és vegyületeik összehasonlító tanulmányozásából levezet, lényegében a következő: az elemek vegyi és physikai sajátságai paránysúlyaiknak periodikus functióit képezik, s így egymásnak reciprok meghatározására szolgálnak. Annak megitélésére, hogy az elemek egymás között micsoda vegyületi alakzatokat képezhetnek, a substitutió és vegyülés határa (Grenzprincip) mellett, ezen periodikus törvényszerűséget tartja irányadónak. Ezen utóbbit nem képes ugyan teljesen kifejteni s egyelőre következőkben fejezi ki: »valamely elemnek könenynyel és élenynyel, következőképen aequivalens elemekkel alkotott legmagasabb vegyületei is azoknak paránysúlya által határozható meg, melynek azok periodikus functiói.«

Föltünteti azon összefüggést, mely a köneny- és élenyvegyületek között létezik; bármely elemi parány könenynyel való vegyülete valamelyike a következő alakzatnak:

$$RH, RH_2, RH_3, RH_4;$$

élenyvegyületei pedig a következők:

$$R_2O, RO, R_2O_3, RO_2, R_2O_5, RO_3, R_2O_7, RO_4.$$

Tehát az első esetben RH_4, a másodikban RO_4 a legmagasabb vegyület; ezen vegyületekből aztán részint elimininatio, részint substitutió által jönnek bonyolodottabb vegyületek. A vizet tekintve, H_2 aequivalens O-val, miután a H vegyületek maximuma RH_4, ennélfogva azon elemeknek, melyek RO_4-t alkotnak, könenyvegyületei nem léteznek; azon elemek, melyek R_2O_7-et adnak, könenyvegyületei RH, az RO_3-nak RH_2, R_2O_5-nek RH_3, RO_2-nek RH_4 felel meg. Ebből kitünik hogy a mily mérvben képes valamely elemi parány élenyparányokat megkötni, ugyanoly mérvben kisebbedik a könenyek száma, melylyel egyesülhet. Az eleny- és könenyvegyületekben azonban még nincs mindazon vegyületi alakzat kifejezve, mely lehetséges, melyeket ugyanis az elemek egymás között képezhetnek; különösen az esetben, midőn a tömecsekben valamely elemnek több mint 2 paránya fordul elő.

Mendelejeff tehát magát az elvet s így az egész vegyérték theoriát elveti s már elvileg épen úgy nem egyez az állandó, mint a változó vegyérték tanával, s bár nem lép fel kész hypothesissel, hogy elvetvén a régit azt jobbal helyettesítse, mind a mellett figyelemre méltó törekvést kezdeményez, t. i. az eddigiektől eltérőleg, az elemi parányoknak vegyületekké egyesülésénél észlelhető törvényszerüségét, mint a parányoknál észlelhető minden egyébb törvényszerűséget, azok vegysúlytani viszonyaival igyekszik összhangzásba hozni s azokból levezetni.

Lehetetlen fel nem ismerni, hogy míg az állandó vegyérték tana mai nap is ugyanazon ponton áll, melyre az története kezdetén Kekulé által helyeztetett, addig a változó vegyértékek tana, alkalmazásában, ugy mint magyarázatában különösen Buff és Blomstrand által, oly mértékben fejtetett ki, hogy a két tan közötti különbség nem tekinthető már pusztán nézetkülönbségnek, hanem a hypothesisek természeténél fogva, mint alkalmazásában általánosíthatóbb, ezen utóbbi amannál jogosultabbnak tünik elő. Látható már ezen irodalmi áttekintésből hogy a vegyértékek állandóságának tana oly sok oldalról lett megtámadva, oly sok érv felhozva ellene, s számos bizonyiték az ellenkező nézet mellett, hogy ezekből itélve a már majdnem 2 évtizeden át tartó vita a változó vegyértékek előnyére látszik eldőlni. Annyi kétségtelen hogy midőn az ujabb munkák, de különösen folyóiratokban a vegyületek szerkezetéről és a parányok kapcsolatáról van szó, gyakran találjuk, hogy nem ragaszkodnak többé szigorúan a 4 typusnak megfelelő állandó vegyértékekhez, hanem alkalmazzák a szükség szerint párosan változó vegyértékeket. [1])

Mind a mellett is a kérdés korántsem tekinthető megoldottnak; végig tekintve a legelterjedettebb és közhasználatban lévő tan- és kézikönyvek során, még ha ujabb keletüek is, legtöbbnyire az állandó vegyértékek alapján vannak kidolgozva; nem említve KEKULÉT, ezek között találjuk: ERLENMAYER, HOFFMANN, L. MEYER munkáit; az elvek a munkákban is ugyanazok levén, melyeket már KEKULÉ és követőinél megismertünk, így erre nem terjeszkedem ki; felemlítem csak, hogy ERLENMAYER a vegyértéket — analog az aequivalenssel — affivalensnek nevezi és így uniaffin, biaffin, triaffin sat. elemeket különböztet meg, az elemek vegyértékét állandónak s minden körülmények között változatlannak tekintve, telitett és nemtelitett vegyületeket különböztet meg, mely utóbbiaknál rendesen páros számu vegyértékek maradnak hatályon kivül. E szabály alól egyedüli kivételt a légenyéleg (*NO*) látszik képezni, miből azt vélte, hogy a légenyéleg képlete nem *NO*, hanem *NOH*, azaz hogy egy parány könenyt is tartalmaz; ez irányban eszközölt kisérletei azonban az *NO* képlet helyességet igazolták. [2]) L. MEYER »Die moderne Theorien der Chemie« czímű művében terjedelmesen foglalkozik a vegyérték kérdésével; egyátalában nem tartja haladásnak azon szintén hypothetikus feltétet: hogy a vegyérték változó; jogos és alkalmasnak volna az tekinthető az esetben, ha ezen változás okának magyarázatára szintén valamely megbízható hypothesis állíttatnék fel. Az állandó vegyérték a gázalakú vegyületekből lett levezetve; a tapasztalás eléggé bizonyítja, hogy a gázalakú vegyületeken felismert törvévyszerűséget nem gázalakúakra átvive, gyakran a legkisebb valószínűséggel sem biró következtetésekre vezetnek; sőt igen

[1]) Hogy csak egyet a legujabbak közül említsek: Josias P. Cook. »Die Chemie d. Gegenwart« (Internationale wissenschaftliche Bibliothek BXVI) 242—243 lap.

[2]) A legutóbbi időben Than tanár úr ugyancsak abból indulva ki, hogy a vegyértékek páros szám szerint változnak, s hogy egyedül a *NO*, az mely e szabálynak nem látszik hódolni, számos és igen nagy szabatossággal kivitt kisérleteket tett, melyeknek alapján határozottan mondható, hogy a *NO* nem tartalmaz könenyt.

valószínű, hogy a gázalakú vegyületek szerkezete egészen más törvényszerűségnek hódol mint a cseppfolyók és szilárdaké. Ha a vegyérték meghatározására nem csupán gázalakú, hanem szilárd és cseppfolyó vegyületek is alkalmaztatnak, azon esetben valóban majd minden elemre igen sokféle vegyértéket lehet megállapítani; így p. o. a gázalakú vegyületeikben egy vegyértékű elemek közül a jód, az egyszerű chlórjódon (ClJ) kivül, még két más chlórvegyületet képez JCl_3, JCl_4 [1]) s ezek szerint a jód egy paránya egy, három, négy vegyértékü is lehet, s ezen alapon ismét Al_2J_6 vegyületből azt is lehetne következtetni, hogy az legalább is tizenhárom vegyértékű; hasonló következtetéseket lehet tenni a kén vegyértékeiből, a mennyiben ha jogos az, hogy SO_3-ból indulva ki, a kén 6 vegyértékű, úgy semmi ellenvetést sem lehet tenni, ha valaki a H_2S-ból azt következteti, hogy a köneny három vegyértékű. Ha továbbá a vegyérték megállapítására nézve irányadónak tekintetetik a vegyületeknél az isomorphismus és a hasonló vegyjellem, s analog vegyületekben a megfelelő elemek egyenlő vegyértéküeknek tekintetnek, akkor valóban minden elemre nézve, minden tetszés szerinti vegyértéket valószínűvé lehet tenni; a légenysavsókhoz nagy mértékben hasonlók a chlór, bróm, jódsavak, s ha ez alapon mind ezen vegyületeknek egyenlő szerkezet tulajdoníttatik, ugy nem csak a jódot, hanem a chlórt és brómot is három vagy öt vegyértékűnek kell elismerni, mint a légenyt. Másrészről a chlór a mangánnal nagy mértékben megegyezik, a mennyiben a felchlórsavas és felmangansavas kálium isomorph vegyületek, s ha a mangan két vagy igen valószínüleg négy vegyértékű, úgy már a chlórnak egy paránya egy, két, három, négy, öt vegyértékű lehet.

Szóval L. Meyer a vegyértékeket épen úgy, mint a tömecssúlyokat, ez idő szerint csakis a gázalakú vegyületekből tartja meghatározhatónak, ellenkező esetben, ha ugyanis cseppfolyó és szilárd vegyületek is irányadóknak tekintetnek, úgy a parányok egymás közötti kapcsolatát semmi törvényszerűséggel nem vagyunk képesek magyarázni.

Az állandó vegyértékek egyik legbuzgóbb védője, A. Naumann giesseni tanár. A tömecsvegyületekről szólva, láttuk már, hogy Naumann volt az, ki a PCl_5-nek mint molekuláris vegyületnek gázalakban létezését az állandó vegyértékek fenntartása mellett lehetségesnek mondotta ki. Erre vonatkoz ónézeteit bővebben fejté ki: »Über Molecülverbindungen nach festen Verhältnissen« czímű, 1872-ben kiadott kis füzetében. Naumann e munkájában nem találunk ugyan semmi újat, az

[1]) Kaemmerer Journal f. pr. Chemie 83. k. 83 l. 1861.

az olyat, mely e kérdés érdemére még elmondva nem lett volna, mind a mellett az állandó vegyértékek alapján, a vegyületek szerkezetére vonatkozó nézeteit oly tisztán, könnyen érthetően és következetesen adja elő, mint azt elvtársai közül ez ideig senki sem tevé. Röviden következőkben foglalható az össze:

A vegyérték azon szám, mely bármely elemnek egy parányára nézve kifejezi azt, hogy gázalakú állandó vegyületeiben hány egy vegyértékű parányt képes megkötni, vagy vegyületekben helyettesíteni. Ily fogalom meghatározás mellett a vegyérték épen oly állandó s minden körülmények között változatlan értéke a parányoknak, mint azok viszonyos súlya. Ezen meghatározás épen nem áll ellentétben az úgynevezett nemtelített vegyületek p. o. szénéleg létezésével, azaz lehetséges, hogy e vegyértékek csak részben vannak igénybe véve, de nem megkevesbítve vagy épen megsemmítve.

A változó vegyértékek tanának hódoló vegyészek legtöbbnyire oly vegyületekre hivatkoznak, melyek vagy épen nem vagy csak részben képesek bomlás nélkül gázalakot felvenni, holott a vegyérték meghatározásánál csakis a gázalakban jól ismert vegyületek szolgálhatnak kiindulási pontul.

Az állandó és változó vegyértékek követői között, eltérő vélemények vannak továbbá azon határ megállapítására nézve, mely a vegytanból ki nem küszöbölhető két csoportját a vegyületeknek, t. i. a parány- és tömecsvegyületeket egymástól elválasztja. *Parányvegyületek* azok, melyekben az elemi parányok a tulajdonukat képező vonzási egységek kölcsönös telitése által tartatnak össze. *A tömecsvegyületek* közelebbi alkatrészei tömecsek, melyek egymás között nem az őket alkotó elemi parányok vonzási egységei által tartatnak össze, hanem azon összvonzás által, melyet az egynemű vagy különnemű tömecsek mint ilyenek egymásra gyakorolnak, mely összvonzás a molekülöknél úgy tekintendő, mint eredője az egyes moleküllt alkotó elemi parányok közötti vonzásnak. *Az állandó viszony szerinti tömecsvegyületekben* bizonyos száma az egynemű vagy különnemű tömecseknek egy együttmozgó egészszé, egy tömecscsé egyesülnek, p. o. $BaCl_2$, $2H_2O$ tömecsvegyület, mely az elemi parányok vonzási egységei által tartatik egybe. *Változó viszony szerinti tömecsvegyületeknek* tekinthetők az oldatok, keverékek, absorptiók.

A parányok vegyértékére vonatkozó, eltérő nézetek szerint eltérők lehetnek a vélemények a határra nézve is, mely a parány- és tömecsvegyületek között vonható, azonban hogy a tömecs vegyületek létezésének szüksége általánosan el van fogadva, hivatkozik Kolbe és Blomstrand-ra, kik bár a változó vegyértékek tanának fejlesztéséhez a legjelentékenyebben hozzá járultak, mind a mellett tömecsvegyületek létezését nem tagadják meg. S miután a legtágabb értelemben vett, egészen a szélsőségig vitt értelmezése a változó vegyértékeknek, még mindig nem képes az állandó súlyviszonyok szerint létrejött összes vegyületeket mint parányvegyületeket értelmezni: ennélfogva a tudomány ez ágának tovább fejlesztésére épen nem találja kedvezőnek az oly törekvést, mint a mely p. o. az orosz természetvizsgálók kievi gyülésén a vegyészeti osztályban nyilvánult, (l. Markovnikoff és Mendelejeff), mely a tömecsvegyületek teljes kiküszöbölésével semmi más, mint általánosan elfogadott és elismert tények és viszonyok tekintetbe nem vétele, teljes elhanyagolása.

Kimutatja továbbá Naumann, hogy mindazon definitiók, melyek a parány- és tömecsvegyületek közötti határt szigorúan megszabni igyekeznek, csak bizonyos esetekben, de soha általánosan nem alkalmazhatók. A természetben nincs ugrás, s bár mennyire jogosult is a növény-állatvilág közötti különbségtétel, még sem lehet közöttük elég éles határvonalat húzni, sőt kétségtelen, hogy bizonyos körülmények között ugyan azon egyed majd mint növény, majd mint állat tekintendő. — Épen így jogosult a parány- és tömecsvegyületek közötti különbségtétel is, habár nem mindig vagyunk képesek teljes biztossággal felismerni, hogy a vegyületek melyik neme áll előttünk.

Áttér aztán a tömecsvegyületek létezésének bebizonyítására s pedig mindhárom u. m. gáz, cseppfolyó és szilárd halmaz állapotban, bizonyitékai leginkább az oldási, jegeczedési, thermikus viszonyokra s az isomorphismus tüneményeire vannak alapítva.

Sajátos, hogy Kekulé, ki tulajdonképeni megalapítója az állandó vegyérték tanának, daczára az elmélet ellen felmerült számos ellenvetéseknek, az ujabb időben a dolog érdemleges vitatásában egyátalában nem vett részt. A mennyire az idevágó szakirodalmat átnéznem sikerült, újabban egyetlen egy alkalommal szólott röviden e tárgyról, (nem is reflektálva a vegyérték felőli ellenkező nézetekre;) »Über einige Condensations-produkte des Aldehyds« czímű közleményében [1]) a benzol és derivátjainak szerkezetéről szólva, a parányok vegyértékét egészen mechanikai szempontból magyarázza; úgy fogja azt ugyanis fel, mint viszonyos számát azon ütközéseknek, melyet egy parány az

[1]) Annal. d. Chem. u. Pharm. 162. 86.

idő egysége alatt egy másik paránytól nyer; így p. o. két egyvegyértékű és egy két vegyértékű parányból álló tömecsben az ütközések száma a kétvegyértékü parányra nézve = *2*, mindegyikére az egyvegyértékű parányoknak = *1*. Ezen nézet azonban nem nagy viszhangra talált, sőt LADENBURG [1]) és MICHAELIS [2]) épen azt következtetik KEKULÉ ez új elméletéből, hogy annak alapján csakugyan különböző viszonyok szerint a parányok különböző vegyértékkel birhatnának, hogy általa épen az állandó vegyértékek dogmája lenne megsemmisítve. MICHAELIS még az elmélet lehetőségét is kétségbe vonta.

MICHAELIS, ki különben állandó vegyértékeket fogad el, némileg eltér az eredeti t. i. KEKULÉ álláspontjától. Azon kérdést meríti fel, [3]) hogy mi értendő tulajdonképen vegyérték alatt; azon erő, melylyel a parányok egymást kölcsönösen vonzzák bizonyára nem, mert ez mindenkor és minden a vegyületben foglalt paránytól függ. Igy nem lehet más, minthogy a parányok csak bizonyos irányban képesek egymásra vonzást gyakorolni s ezen vonzási irányok száma az, mi a vegyérték alatt értendő. Ezen vonzási irányok száma jól megkülönböztetendő azok intensitásától, amaz a vegyérték, ez utóbbi az affinitás.

A kérdés most az, vajjon a vegyértékek egyenlő intensitással birnak-e mind, vagy lehetnek különbözők is. MICHAELIS azon nézetben van, hogy az elemi parányok vegyértékei különböző intensitással birnak, s így nem minden esetben nyilvánulnak teljes számmal. Nem a változó vegyérték, hanem a vegyértékek különböző intensitása tehát az ok, hogy valamely elemi parány egyik elemből több aequivalenst képes vegyileg megkötni mint egy másikból. Nézeteit különösen alkalmazza a phosphor-vegyületekre. A phosphor egy paránya 5 vegyértékű, s ezen szám változhatlan, de ez öt vegyérték közül három nagyobb intensitással bir mint a másik kettő, s ez az oka hogy egyes vegyületeiben a phosphor 5 vegyértéke közül csak három van igénybe véve. Példákul hozza fel azon vegyületeket, melyek P_2O_3 és P_2S_3-ből directe additió utján állíthatók elő. E nézet szerint

$$\begin{array}{ccccc} =P & - & O & - & P= \\ \| & & & & \| \\ O & & & & O \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} =P & - & S & - & P= \\ \| & & & & \| \\ S & & & & S \end{array}$$

---

[1]) Berichte d. D. Chem. G. 1872. 322. l.

[2]) Berichte d. G. Chem. G. 1872. 464. l.

[3]) »Über die Constitution d. Phosphorverbindungen« Ann. d. Chem. Pharm. 164 k. 9.

nemtelített vegyületek, a mennyiben tényleg additió utján belőlük következő vegyületek állíthatók elő:

$$\begin{array}{ccccccccc} Cl_2{=} & P & —O— & P & {=}Cl_2\,; & Br_2{=} & P & —S— & P & {=}Br_2 \\ & \Vert & & \Vert & & & \Vert & & \Vert & \\ & O & & O & & & S & & S & \end{array}$$

Ugyanezen elvet alkalmazza a kénchlorid és oxychlorid vegyeire; [1]) s annak alapján a ként hat vegyértékünek tekinti, mely vegyértékek páronként különböző elemek irányában, különböző intensitással birnak. Látható, hogy MICHAELIS nagyon közeledik már a változó vegyértékekhez egyrészről, mert midőn a ként 6, a phosphort 5 vegyértékűnek tekinti, egészen elhagyta a typusokból levezetett vegyértékeket, másrészről mert azt mondani: hogy a kén ugyan 6 vegyértékű, de ezek közül esetről-esetre hol 2, hol 4, hol mind a hat szerepel, magára a tényre nézve nagyon hasonló felfogás azzal, hogy a kén vegyértéke változó, és pedig 2, 4 vagy 6 által van kifejezve.

Felemlítendőnek tartom még a legutóbbi időből (1875.) V. MEYER és M. LECCO-nak az ammóniumvegyületekre vonatkozó dolgozatait, [2]) melyeknek czélja volt kisérletileg eldönteni, vajjon az ammoniumvegyületek, mint molekuláris vegyületek tekintendők-e, vagy pedig levezethetők a légenyparány öt vegyértékéből. Azon elvből indultak ugyanis ki, hogy azon esetben, ha a N parány három vegyértékű, következő vegyületek:

$$N\begin{array}{l} —CH_3 \\ —CH_3 \\ —C_2H_5 \end{array} + C_2H_5J \text{ és } N\begin{array}{l} —CH_3 \\ —C_2H_5 \\ —C_2H_5 \end{array} + CH_3J$$ isomerek, de nem azonosak, miután különböző tömecsekből vannak összetéve; kisérleteik eredménye azonban az lett, hogy a fenti két vegyület egymással minden tekintetben tökéletesen azonos és ennélfogva a légeny 5 vegyértékéből vezethetők le:

$$N\begin{array}{l} —CH_3 \\ —CH_3 \\ —CH_3 \\ —C_2H_5 \\ —J \end{array} \qquad N\begin{array}{l} —H \\ —H \\ —H \\ —H \\ —Cl\,. \end{array}$$

Az elmondottakban igyekeztem röviden áttekinthetővé tenni a vegyérték tanának történelmi fejlődését, s kicsiben összefoglalni az

---

[1]) Annal. d. Chem. u. Pharm. B. 170. 1.

[2]) Bericht. d. D. Chem. G. 1875. 233, 936. Über die Constitution der Ammonium-verbindungen u. des Salmiaks.

ezen kérdés körül felmerült eltérő nézeteket, valamint feltüntetni azon különböző irányu tudományos kutatásokat, melyik egyik vagy másik részről kivíve, az illető nézetek támogatására érvekül használtattak. A sokféle, elágazó és egymástól lényegesen eltérő nézetek eléggé bizonyitják, miszerint a vegyérték kérdése nem csak hogy megoldva nincs, de hogy annak megoldása a megkezdett irányban, legalább rövid idő alatt alig remélhető.

Mint gyakran a tudomány vitás kérdéseinél, ugy a vegyértékekre vonatkozó irodalomban is, nem ritkán találkozunk kissé tulságosan polemikus hangulattal s hogy az ellentétes nézetek szóvivői nem mindig maradtak eléggé tárgyilagosak; mindkét részről s mondhatni nem ritkán »argumentum«-ként mondották el egymásnak, hogy nézetük »káros befolyással bir, »akadályozza a tudomány további fejlődését.«

Az igazság diadala sehol sem bir oly teljes biztossággal, mint épen az egyes tudományok fejlődési folyamában felmerült eszmeharczoknál. Ennélfogva az igazság érzetével, tehát teljes meggyőződéssel kimondott, de különböző felfogás mód következtében egymással homlokegyenest ellenkező eszmék és nézetek sohasem lehetnek a tudománynak hátrányára, mert hiszen a rossz, de még a jó is a jobbnak felkeresésére serkent; a helytelen eszmék, csak midőn auctoritások palástja alatt, a megtámadástól menten örülnek az elismerésnek, akadályok a tudomány fejlődésében s nevezhetők károsaknak.

AZ ÁLTALÁNOSÍTOTT BOLTZMANN-CLAUSIUS-FÉLE TÉTEL BEBIZONYÍTÁSA, AZ ÉRVÉNYESSÉG KÖRÉNEK BŐVITÉSÉVEL.

Dr. Réthy Mór, kolozsvári egyetemi tanártól.

Akárhogyan fogjunk is hozzá, az erőket bajos és hypothésisek nélkül nem is lehet defineálni. Ha az anyagi pont mozgásában nyilvánuló *összes* erő alatt, GALILEI szerint, a tömeg és gyorsulás szorzatát, és iránya alatt az u. n. deviátió irányát értjük, akkor a *partiális* erőket, szerény véleményem szerint is leghelyesebb, KIRCHHOFF eljárása szerint defineálni. [1]) De a GALILEI-féle mx'' helyett lehetne kiindulni akármilyen önkényszerű kifejezésből is: csakhogy egészen önkényszerű kiindulás mellett természetesen elveszne az általános mechanikai elveknek és mozgási egyenleteknek mostani remek alakja és egyszerűsége. Kivételt képez a SZILY-től kigondolt,

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial K}{\partial x'} - \frac{\partial K}{\partial x}$$

erődefinitió, mely mx'' helyett alapul véve, az elvek és egyenletek alakján mit sem változtat. [2]) Ha $K =$ az eleven erő, úgy a mostani mechanikai elvek és egyenletek jönnek ki változatlanul; ha K más, úgy azok némi tekintetben eltérők, de *alakra* nézve legkevésbbé sem.

Jelen közleményemben a megszokott erőfogalmakkal fogok élni, megjegyezvén azonban, hogy a SZILY-féle alapon is ugyanazon eredményekre jöhetni.

I. Hogy minő törvény szerint vonzzák egymást a világegyetem anyagi pontjai, az még nyilt kérdés; annyi azonban valószínű, hogy az erőtörvény hódolni fog az energia megmaradása elvének.

Általánosítva a NEWTON- és WEBER-RIEMANN-féle törvényt, fogadjuk el a következőt erőtörvényül:

Vegyünk szemügyre két anyagi pontot; az egyiknek legyenek t időben koordinátái x_{11}, x_{21}, x_{31}, sebességi komponensei x'_{11}, x'_{21}, x'_{31}, sat; a másikéi x_{12}, x_{22}, x_{32}, x'_{12}, x'_{22}, x'_{32} sat. Akkor a második ponttól az elsőre gyakorolt erőnek X_{11}, X_{21}, X_{31} komponensei, és ép úgy

---

[1]) Kirchhoff, Vorl. über math. Phys.

[2]) »Műegyet. Lapok« 20 füzet »A D'Alembert-féle elv új alakja sat.«

az elsőtől a másodikra gyakorolt erő X_{12}, X_{22}, X_{32} komponensei a következő képlettel legyenek adva:

$$1)\qquad X_{ij} = \frac{\partial V}{\partial x_{ij}} - \frac{d}{dt}.\frac{\partial V}{\partial x'_{ij}} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_{ij}\partial t},$$

hol V és W a két pont koordinátái, sebesség komponensei és az időnek egyelőre egészen önkényszerű függvényei; e függvények úgy fognak később meghatároztatni, hogy az erőtörvény az energia elvének hódoljon; nevezzük őket addig is a két pont közötti *erőfüggvényeknek.*

Ha a két pont helyett akárhány egymást kölcsönösen vonzó, vagy taszitó pontból álló rendszerrel van dolgunk, akkor az egy-egy pontra ható erő komponensei szintén az 1) minta szerint képezendők, csakhogy V és W most nem egyéb, mint a két-két pontok közötti erőfüggvények összege: az így képezett V és W-t a pontrendszer *belső erőfüggvényeinek* s az erőket *belső erőknek* fogjuk nevezni. Ha a pontrendszerre azon kivül külső pontok is hatnak, akkor a külső pontokat kombinálva a belsőkkel és képezve ezen pontpárok erőfüggvényeit is, ezeket mind hozzáadjuk a pontrendszer belső erőfüggvényeihez: az az összeget a *pontrendszer teljes erőfüggvényeinek,* vagy röviden *erőfüggvényeinek* fogjuk nevezni. Ezek betéve az 1) képletbe, az illető pontra ható *összes* erő illető komponense jő ki.

Ezen erőtörvény mellett az erőkomponensek képezése módja független a választott koordináta-rendszertől: azaz a törvény nem változik meg a koordináta-rendszer változásával; miről könnyü meggyőződni.

Miként ismeretes gyakori eset, hogy szomszédos testek (pontrendszerek) befolyása a szemügyre vett testre, sőt a belső erők is közelítőleg helyettesíthetők bizonyos feltéti egyenletekkel, melyek a pontok koordinátái között fennállanak: ilyen körülmények között a test mozgása gátoltnak neveztetik. A gátolt mozgás pedig LAGRANGE eljárása szerint legczélszerűbben úgy tárgyaltatik, hogy a föltéti egyenletek következtében egymástól függő x_{ij} helyett kevesebb számú és e réven független q_1, q_2, ... q_k koordináták és az x'_{ij} helyett a

$$q'_1 = \frac{dq_1}{dt},\ q'_2 = \frac{dq_2}{dt},\ \ldots.$$

hozatnak be.

Az ismert eljárás szerint könnyű megmutatni, hogy az egyes q koordinátákat pl a q_k-t megnöveszteni törekvő Q_k erő szintén az 1) egyenlet alakjával bir; hogy t. i.

$$Q_k = \frac{\partial V}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}.\frac{\partial V}{\partial q'_k} + \frac{\partial^2 W}{\partial q'_k\partial t},$$

hol V és W természetesen a q-k és q'-ek függvényének tekintendő; a szükséges és elegendő feltétel, hogy ezen alak érvényes legyen, csak abban áll, hogy a föltéti egyenletekben az idő ne forduljon elő explicite. Ennek bizonyítását, hivatkozva az ismert LAGRANGE-félére, mellőzhetjük.

II. *Kérdés, hogy erő-törvényünk hódol-e az energia megmaradása elvének?*

Arra nézve, hogy hódoljon ezen elvnek, szükséges és elegendő, hogy a pontrendszert mozgató erők dt idő alatt végzett munkája tökéletes differentiál legyen, abban az esetben, a mikor a rendszeren kívül eső vonzó centrumok mozdulatlanok.

Ámde 1)-ből a dt idő alatt végzett munka

$$\sum X dx = \sum \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial x'} + \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t}\right] dx',$$

ez pedig

$$= \sum \left[\frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial x'} \cdot dx'\right] + \frac{\partial V}{\partial t} \cdot dt$$

$$- \sum \left[\frac{\partial V}{\partial x'} dx' + d\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right) x'\right]$$

$$- \frac{\partial V}{\partial t} dt + \sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} \cdot dx,$$

azaz

$$\sum X dx = d\left[V - \sum \frac{\partial V}{\partial x'} x'\right]$$

$$- \left[\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \sum \frac{\partial W}{\partial x'} x'\right] dt.$$

Igy tehát általános erőtörvényünk hódol az energia általános elvének, ha V és W között a következő vonatkozás áll fenn:

$$2b) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left[V - \sum \frac{\partial W}{\partial x'} x'\right] = 0 .$$

Ezt föltéve, lészen a dt alatti munka

$$\sum X dx = d\left[V - \sum \frac{\partial V}{\partial x'} x'\right];$$

szóval a dt idő alatti munka tökéletes differentiálja a

$$V - \sum \frac{\partial V}{\partial x'} x'$$

függvénynek, mely függvény az erőrendszer *potentiál*-jának neveztetik.

Mivelhogy pedig a dt idő alatti munka annyi miut az eleven erő változása dT és

$$dT = d\left[\sum \frac{\partial T}{\partial x'} x' - T\right]$$

tehát a pontrendszer mozgására nézve áll ezen egyenlet

$$d\left[\sum \frac{\partial (T+V)}{\partial x'} x' - (T+V)\right] = 0 ,$$

mely egyenlet, egészelve és E alatt az integrális állandót értve, lészen

$$\sum \frac{\partial (T+V)}{\partial x'} x' - (T+V) = E .$$

Ezen egyenlet az energia megmaradása elvének általánosítása azon esetre, ha a potentiál a koordinátákon és sebességi komponenseken kívül az időtől is függ explicite. Magától értetik, hogy az elv akkor is áll, ha a mozgás gátolt, föltéve, hogy a gát-egyenletekben az idő nincs meg explicite.

Az E a pontrendszer *összes energiájának* fog neveztetni mindig, akkor is, ha a pontrendszeren kívül eső vonzó centrumok mozognak. Az E-t kifejező bal oldal képzése módjára megjegyzendő, hogy T csak a *belső* pontok eleven ereje; a V képzésmódja fentebb előadatott. A későbbiekben rövidítésül

$$3a) \quad H = T + V$$

tétetvén, lészen az energia definitiójául:

$$3b) \quad \sum \frac{\partial H}{\partial x'} x' - H = E .$$

III. Azon kölcsönhatásnál fogva, mely a testek között fennáll, s azon körülménynél fogva, hogy valamennyi (akár földi akár égi) test anyagi pontjai változatos és bonyolódott törvények szerint mozognak, az energia megmaradásának elve *egyes* testekre egymagukra csak véletlenül, csak igen ritkán lesz érvényes és csak az *összes világrendszer* energiája lesz szigorúan véve állandó.

De nem lesz ritka eset, hogy a test olyan körülmények közé jut hogy ezeknél fogva *csaknem* úgy mozog, mintha a kívüle levő anyagi pontok mozdulatlanok volnának. Ilyenkor *energiáját állandónak* mondjuk, noha szigorúan véve csak *közel* állandó. Gyakran megint nagy valószinűség szól a mellett, hogy az energiát inkább *periodikusnak* tekintsük; ilyenkor az energia egy-egy periódus alatti középértékét mondjuk állandónak. [1]) De legközelebb jövünk a valósághoz, ha olyankor, a mikor a külső pontok mozgása kevés befolyással van a test pontjaira, csak annyit mondunk, hogy a test energiája bizonyos középérték körül ingadozik egy kevéssé, a nélkül, hogy az ingadozás befolyására nézve periodicitást vagy akárminő más szabályosságot állapítanának meg: röviden az energiát ilyenkor leghelyesebb *stationariusnak* tekinteni.

Még gyakoribb eset, a mikor a test viszonyai oly módon változnak, hogy a külső pontok mozgása csak nagy időközökben érvényesiti befolyását, ugy hogy kisebb időközökben ezen középérték más-más. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az energia kisebb időközökben állandó, vagy periodikus vagy még általánosabban stationárius, de a stationárius energia a külső befolyások következtében időnként megváltozik.

De ha egy test energiája nő, akkor a világrendszer többi testjei energiájának ugyanannyival fogyni kell: mert hiszen a világrendszer összes energiája állandó. Ez okból az imént leírt esetben a szemügyre vett test energiájának változását egyszerűn *kivülről közölt összes energiának* nevezik.

Az eddigiek megvilágítására s a későbbiek előkészítésére szolgáljon az ideális gázgép. Egy gázt tartalmazó fémhenger legyen légmentesen záró és mozogható dugattyúval ellátva; a dugattyú terheltessék meg egy súlylyal és az egész vétessék körül hőáthatatlan burokkal. Úgy föltéve, hogy a dugattyú látszat szerint mozdulatlan, azt fogjuk mondani a gázról, hogy hőmérséke és feszélye, egy szóval állapota változatlan: egyes pontjainak mozgását illetőleg is azt fogjuk mondani, hogy energiája stationárius, mert hiszen a gázon kivül levő pontok mozgása (pl. a dugattyú és a fémhenger pontjainak rezgése) rendkivül kicsiny befolyással lesz a gáz pontjainak mozgására. De távolítsuk el a burok egy részét, érintsük meg a fémhengert rövid ideig nagyobb hőmérsékű testtel, a dugattyún lévő súlyt is nagyobbitsuk egy kicsit s azután állítsuk megint helyre a teljes elburkolást. Világos, hogy a hőmérsék és feszély megváltozik az első pillanatokban s a dugattyu talán magasabb helyre emelkedik; rövid idő mulva azonban helyre áll egy új változatlan állapot: a gáz energiája más lesz, de ismét stationárius. Az egész rendszerrel közölt összes erélynek nevezzük itt azt a hőmennyiséget, a mely az érintés folytán a fémhengerrel közöltetett s a mely később egyenletesen szétoszolva a gáz pontjai között is, a gázt kiterjesztette, minek következtében a dugattyú felemeltetett.

---

[1]) Szily K. A hőelm. előford. menny. dynamikai jelentéséről. »M. L.« 8 füzet.

Menjünk e példán tovább. Az egész folyamatot oszszuk fel két időszakra. Az elsőben a közölt összes erély feloszlott két részre, melyek közül az egyik megmaradt a fémhengerben mint meleg, míg a másik rész végkép megmaradt magában a gázban mint energia. Mivelhogy főleg a gáz állapotváltozása által végeztetik munka, azért az egész folyamatban ezen utolsó időszak köti le leginkább az érdeket és azért azon erélyre vagyunk főleg tekintettel, a mely az első időszak lefolyásával a gázra jutott: ezt nevezzük *a gázzal közölt összes erélynek*. A gázzal közölt összes erély tehát = a dugattyú emelésére fordított külső munka + a gáz energiájának növekedése.

E példát általánosítva, foglalkozzunk ezentúl egy rendszerrel, mely áll két rendesen stationárius energiáju testből: az egyik test (i), a mely természetesen lehet akár homogén akár heterogén, időszakonként erélyforrással jövén érintkezésbe, erélyt merít a külvilágból, míg a vele egy oldalról érintkező másik test (e) más oldalról folytonosan nyomatik, időszakonkint változó erővel és az által, hogy az első test által időszakonkint haladó mozgásba hozatik, a külső nyomást visszatolva kifelé munkát ad át. Igy aztán azaz erély, a melyet az i test az erély forrásból merít, mindig két részre oszol: az egyik rész az e mozgása (szabatosabban középhelyének változása) folytán külső munkává válik, míg a másik rész magában az i-ban marad mint energiabeli gyarapodás.

A testeket discrét anyagi pontok halmazának tekintve, tökéletesen szabatos értelemmel beszélhetünk az i test V és W erőfüggvényeiről és E *összes* energiájáról, úgy a mint azok az I és II fejezetben értelmeztettek. E szerint a V és W erőfüggvények olyanok, hogy x_i alatt értve az i test akármelyik pontjának koordinátáját, az 1) értelmében lészen:

$$4a) \qquad m x_i'' = \frac{\partial V}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_i' \partial t},$$

hol V és W között a a 2b) alatti vonatkozás áll fenn; továbbá x_e alatt értve az e test koordinátáit, lészen:

$$4b) \qquad m x_e'' = X_{i,e} + X,$$

hol $X_{i,e}$ azon erők illető komponensét jelentvén, melyekkel az i test pontjai az e test szóban lévő pontjára hatnak, lészen a V és W-nek I. fejezetbeli definitiója értelmében

$$4c) \qquad X_{i,e} = \frac{\partial V}{\partial x_e} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_e'} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_e' \partial t},$$

míg X azon erők komponensét jelenti, melyeket az e test pontjai akár kölcsönös vonzás vagy taszítás, akár bárminemű összeköttetések folytán, akár pedig más okoknál fogva szenvednek.

Ezen egyenletek még máskép is írhatók. Ha ugyanis T-vel jelöljük az i test eleven erejét, akkor a 4a) mozgási egyenletet így írhatjuk

$$5a) \qquad 0 = \frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial t},$$

és a 4c) egyenletet, tekintve hogy T nem függ az x_e és x'_e-től, így írhatjuk

$$5c) \qquad X_{i,e} = \frac{\partial H}{\partial x_e} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial H}{\partial x'_e} + \frac{\partial^2 W}{\partial x'_e \partial t}.$$

Az E függ az x_i, x'_i, x_e, x'_e, t-n kívül, általánosan szólva még az i és e testen kívül eső anyagi pontok koordinátái és sebességi komponenseitől is; azért *egyelőre*, egyszerűség végett felteszszük, hogy ezek a kívül eső pontok akkora távolságban vannak az i testtől, hogy mozgásuk nincs befolyással az i energiájára; ezt föltéve, eltekinthetünk teljesen e távoli pontok *mozgásától.*

Közölve már mostan energiát az i testtel, változást fog szenvedni mind az ő, mind az e test eredeti mozgása. Az i és e testek pontjainak koordinátáit a közlés utáni állapotban és $t+\delta t$ időben összehasonlítva a koordináták sat. azon értékeivel, a melyek t időben az erély közlése nélkül elérettek volna, legyenek a különbségek δx_i, $\delta x'_i$, δx_e, $\delta x'_e$, δE sat. E mennyiségek között a 3) egyenlet folytán a következő identikus egyenlet áll fönn:

$$6) \qquad \delta E = \delta\left(\sum \frac{\partial H}{\partial x'} x'\right) - \sum \frac{\partial H}{\partial x} \delta x - \sum \frac{\partial H}{\partial x'} \delta x' - \frac{\partial H}{\partial t} \delta t,$$

hol a Σ-val jelölt összegezés kiterjesztendő mind az i mind az e test pontjaira és koordinátáira.

Ezen egyenletet átalakítjuk az 5a) alatti mozgási és 5c) alatti defineáló egyenlet segélyével. Ugyanis ezen egyenletekből könnyen következik, hogy

$$\sum \frac{\partial H}{\partial x} \delta x = \sum \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial x'}\right) \delta x - \sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} \delta x + \sum X_{i,e}\, \delta x_e$$

azaz

$$\sum \frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \sum \frac{\partial H}{\partial x'} \delta x' + \sum \frac{\partial H}{\partial x'} x' \frac{\delta dt}{dt} =$$

$$= \frac{d}{dt} \cdot \left(\sum \frac{\partial H}{\partial x'} \delta x\right) - \sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} \delta x + \sum X_{i,e}\, \delta x_e,$$

mely értéket az 5)-be írva, egy tag áthelyezése után kijő a czélzott átalakítás, s. i.

$$[\delta E + \Sigma X_{i,e}\delta x_e]\, dt = \delta\Big[\sum \frac{\partial H}{\partial x'} dx\Big] - d\,\Big[\sum \frac{\partial H}{\partial x'}\delta x\Big]$$

$$+\Big[\sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t}\delta x - \frac{\partial H}{\partial t}\delta t\Big] dt$$

Ezen egyenlet baloldala nem egyéb, mint a i test energiabeli gyarapodása + a belőle kifolyó erőktől az e test pontjainak δx_e mozgatása folytán végzett (röviden: külső) munka, az összes szorozva dt-vel. Ha tehát azt, a mit a tapasztalat a középállapotok változásáról tanit, kiterjeszthetnők a momentán történő változásra is, akkor a baloldal nem volna egyéb, mint *az összes erély, a melyet az* ***i*** *testtel közölni kellett volna arra nézve, hogy a t időbeli eredeti állapot a* $t+\delta t$ *időbeli változott állapotba momentán átmenjen.* A jobb oldal mutatja, hogy e mennyiség nem bir a Boltzmann-Clausiusi alakkal, kivéve, ha az erőfüggvény a t-től explicite független. A természetben valószinű, hogy az erőfüggvény nem függ a t-től explicite: így tehát a természet esetében a legnagyobb valószinűség szerint áll az általánosított Boltzmann-Clausius-féle tétel.

De arra nézve, hogy stationárius állapotú testre álljon, még enynyit sem szükséges feltenni.

Ugyanis az 5a) egyenlet jobb és bal oldalán levő mennyiségek középértékét véve 0 és t között, és akármelyik mennyiség középértékét fölötte elhúzott vonással jelölve, lészen

$$5)\qquad \overline{\delta E} + \overline{\sum X_{i,e}\delta x_e} = \frac{1}{t}\delta\Big[\overline{t\sum \frac{\partial H}{\partial x'} x'}\Big] - \frac{1}{t}\Big|_0^t \sum \frac{\partial H}{\partial x'}\delta x$$

$$+\overline{\Big[\sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t}\delta x - \frac{\partial H}{\partial t}\delta t\Big]}$$

Stationárius állapotú testnél a közölt erély mindenesetre csak a közép energia változtatására és külső munka végzésére fordíttatik. Ámde $\delta\overline{E}$ a közép energia változása, és [*legalább* a mikor stationárius állapotban mind az x_e mind a $X_{i,e}$ kevéssé ingadozik] a $\Sigma X_{i,e}\,\delta x_e$ nem egyéb a külső munkánál. A baloldal tehát nem egyéb a test közép állapotának változására fordított összes erélynél, a *közölt erélynél.* Arra nézve, hogy a B. Cl.-féle tétel álljon, a szükséges feltétel csak annyiból áll tehát, hogy a második sor zéró érték felé konvergáljon, ha t végtelen nagy. [Könynyü megmutatni, a második sor így írható

$$\overline{\sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t} \delta_t x}$$

hol $\delta_t x$ nem egyébb mint az állandó t szerint vett variatió; e mellett azonban nem akarunk időzni.]

IV. A 6a) alatti tétel érvényességi körének tágitására szolgáljon az a megjegyzés, hogy először teljesen független attól, hogy a mozgás stationárius-e vagy sem, s hogy másodszor szabadságunkban áll az e test alatt érteni az i testen kivül eső összes világot: az iménti levezetés nem változik ez által legkevésbbé sem.

A tétel általánosítására pedig szolgáljon a következő megjegyzés. Ha az i és e testek pontjai között akárminő összekötések vannak, s ha az ezeket kifejező föltéti egyenletek az időt is tartalmazzák, akkor az előző levezetés csak annyit változik, hogy

1) a 4a) (és így az 5a) egyenlet jobb oldalához hozzáadandók még az x_i-t növelni törekvő u. n. reactió-erők; jelöljük őket R_i-vel,

2) a 4c) egyenlet jobb oldalán az X fogalomba beleveendők még az i-vel meglevő összeköttetésekből származó reactióerők is.

A 4c) és így 5c) is, továbbá a 6) identikus egyenletek természetesen változatlanul maradnak.

Ezek folytán a 6) utáni egyenlet jobb oldalához hozzá jő még

$$-\Sigma R_i \delta x_i\,,$$

és így a 6a) tétel helyébe ez jő:

$$[\delta E + \Sigma X_{i,e}\,\delta x_e]dt = \delta\left[\sum \frac{\partial H}{\partial x'} dx\right] - d\left[\sum \frac{\partial H}{\partial x'} \delta x\right]$$
$$+\left[\sum \frac{\partial^2 W}{\partial x' \partial t}\delta_t x + \sum R_i \delta x_i\right]dt.$$

Ezen egyenlet áll függetlenül attól, hogy az eredeti mozgás stationárius-e vagy sem, szabad-e vagy sem. De hogy a baloldal egész általánosan is a testtel közölt összes erélyt jelentse, azt legtávolabbról sem akarjuk állítani.

Levezetésünk eleitől fogva megengedte, hogy az e test pontjaira potentiál nélküli erők is hassanak; ha az eddigieken kivül ilyen erők is hatnak az i test pontjaira is, akkor ezen potentiál nélküli erők hozzá csatolandók az imént fölirt képletben az R_i-khez: a képlet különben egkevésbbé sem változik.

Végezetül megjegyezzük, hogy a δE variatiót csak akkor adja a 6) képlet helyesen, ha föltehetjük, hogy benne *variáló* állandók nincsenek, a mit a természet szerint föl lehet tenni. Ha *analytikai* tekintetből ezen föltevéstől is megakarnánk szabadulni, akkor a jobb oldalhoz a 6)-ban, valamint a későbbi egyenletekben is még hozzáirandó $\sum\frac{\partial H}{\partial c}\delta c$ tag, hol c ezen állandókat jelenti.

Kolozsvár, 1878 január 16.

A BÁRIUMSÓK ALKALMAZÁSA A SZÓDAGYÁRTÁSBAN.

Dr. Wartha Vinczétől.

PATER MALHERBE volt az első, ki a szódát, mely addig csakis tengeri növények hamvából állíttatott elő, konyhasóból, illetőleg a belőle nyert glaubersóból készítette. ALBAN nevű franczia gyáros már 1779-ben állított fel egy szódagyárt, mely a MALHERBE-féle eljárás szerint működött. Az eljárás abban állott, hogy a glaubersó, faszénnel kezelve, kénnátriummá alakíttatott át; e vegyület azután fémvassal olvasztva, kénsav és maró nátronból álló tömeggé alakult. A levegő befolyása alatt elmállott tömeg vízzel kilúgoztatott, mi közben a szóda feloldódott.

LEBLANC 1791-ben 15 évre szóló szabadalmat nyert a szódának glaubersó, kőszén- és mészkőkeverékből való előállítására. Ezen eljárás mai napig is majd nem kivétel nélkül alkalmaztatik és csakis a legujabb időben akadt az úgynevezett »ammoniak processus«-ban nem épen erőteljes vetélytársra. MALHERBE eljárását is megkisérlették, KOPP által 1855-ben javitva, a gyakorlatban föleleveníteni; azonban ennek sem sikerült a LEBLANC-féle móddal versenyezni.

LEBLANC eljárásának legnagyobb bajai a következők: a) tetemes nátronveszteség a műtét közben; b) aránytalan tüzelőfogyasztás; c) a nyert szóda tisztátalansága, főleg az oldható kénvegyületek jelenléte miatt.

Mindezen nehézségek kikerülése végett már számos javaslat tétetett, s főleg a báriumsók alkalmazását tanulmányozták, minthogy a glaubersó kénsava kénsavas báriumsó alakjában quantitativ pontossággal eltávolítható lévén, kénmentes termény előállítását remélhették.

Az idevágó eddigi javaslatok a következő pontokba foglalhatók össze:

1. A glaubersónak szétbontása bárium-carbonáttal (vagy természetes witherittel) miközben *blanc fixe* ($BaSO_4$) és neutrális szénsavas nátron keletkezik. [1])

Minthogy azonban a szénsavas nátron már maga képes a kénsavas báriumot felbontani, előrelátható volt, hogy a javaslatba hozott eljárás nem fog czélra vezetni. E kérdés analytikai tanulmányozásával Erdmann, [2]) Buchner [3]) H. Rose [4]) és Malaguti [5]) foglalkozott.

2. A kénsavas nátron felbontása kettős szénsavas báriummal, mely eljárás eredetileg R. Wagner [6]) által hozatott javaslatba és G. Lunge [7]) kezében gyakorlati alakot öltött. Igy sem sikerült czélt érni, a mennyiben nem csak a nyert folyadék higitottsága, hanem főleg a szükséges szénsav olcsó és nagy mennyiségben való előállítása a gyakorlatban legyőzhetetlen nehézségekbe ütközött.

3. A sulphát felbontása maró baryttal.

4. A nátronsalétrom szétbontása maró baryttal.

5. A witherit ($BaCO_3$) alkalmazása mészkő helyett, a Leblanc-féle eljárásnál.

A 3 és 4 alatt említett eljárások a szükségelt nyers anyag becsességénél fogva megemlítést sem érdemelnek; az 5-dik pontban foglalt helyettesítés pedig egyáltalában nem sikerül.

Az eddigi eredménytelen törekvések hasznos anyagot szolgáltattak arra nézve, hogy mily irányban kell a tanulmányokat folytatni, a mutatkozó hézagok pótlása végett.

Mindenek előtt olcsó és könnyen nyerhető nyersanyagból kellett kiindulni és ez más nem lehet mint a természetben előforduló witherit vagy báriumcarbonát. Súlyt kellett fektetni továbbá arra is, hogy a cserebomlásnál keletkező vegyület az előállított terményre chemiai hatást ne gyakoroljon, és végre törekedni kellett a nátronsót a lehető legértékesebb alakjában előállítani.

Mindezen feltételeknek sikerült megfelelni az által, *hogy a báriumcarbonát felbontására a glaubersó mellett még égetett meszet is használtam.* Az ezen cserebomlás útján keletkezett szénsavas nátron azon-

[1]) Dingler Polyt. Journ. XXVII. 138. Kastner, R. Wagner és Kölreuter.
[2]) Journal für ökn. és tech. Chemie XIV. 462.
[3]) Report. f. Pharm. XLI. 402.
[4]) Poggendorf. An. XCIV. 492.
[5]) Annales de Chim. et phys. t. LI. 344.
[6]) Jahresber. für tech. Chemie 1857 104.
[7]) Dingler CCVIII. 137.

nal átalakul maró nátronná; ez pedig a kénsavas báriumra semmiféle hatást nem gyakorol és még azon kitünő tulajdonsággal is bir, hogy oldatában bizonyos töménység mellett a nátron és kálisulphát majd nem tökéletesen oldhatatlan; e mellett a maró nátron a gyakorlatban leginkább keresett és legbecsesebb nátronvegyület.

A kisérletek úgy tétettek, hogy a glaubersóoldat közönséges nyomás mellett a szükséges, vagy annál valamivel több báriumcarbonáttal és égetett mészszel kevertetett és $^1/_2$—1 óráig forraltatott. A nyert oldat a szűrés után normálsavval titriroztatott. Chemiailag tiszta sókkal a bomlás csakugyan quantitativ; és a nyert szóda absolut kénmentes. Továbbá alkalmazható ezen eljárás, úgy a nátron, mint a káliumsulphát felbontására, a mi nem csekély fontosságu körülmény, mert még eddig csak nagy nehezen sikerült a Leblanc-féle eljárást az úgynevezett »ásványos hamuzsír« készítésére alkalmazni. Laboratoriumi czélokra kitünően használható ez az új eljárás, a mennyiben így legkönnyebben sikerül kovasavmentes lúgot késziteni Felesleges mész- és báriumcarbonát alkalmazása mellett, a bomlás $1^1/_2$ órai forralás után eléri a 96.8%-ot, mely eredmény még eddig távolról sem közelíttetett meg más eljárás alkalmazása mellett.

Meglévén állapítva a báriumsók alkalmazhatósága a fentemlített czélra, a gyakorlatnak legközelebbi feladata lesz a melléktermények értékesítésével, valamint a báriumcarbonát regeneratiójával foglalkozni. Még ha főleg az utóbbi is sikerül, úgy a Leblanc-féle eljárás le van győzve.

FÖLADAT.

37. Egy anyagi részecske adott kezdeti sebességgel eldobatva, a nehézség hatása alatt egy vertikális síkú görbe vonalon mozog; határoztassék meg a görbe vonal természete úgy, hogy a görbére gyakorolt nyomás a mozgás közben mindenütt ugyanaz legyen. (Szily.)

A szeptemberi (27-ik) füzet $2^1/_2$ ív tartalommal fog megjelenni.

(Szerk.)

Budapest, 1878. Nyomatott az Athenaeum r. társ. könyvnyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

III. kötet. 1878. 27. füzet.

EGY ÚJ TÉTEL A DIFFRACTIÓ ELMÉLETÉBEN, ÉS ANNAK ALKALMAZÁSA.

Dr. Fröhlich Izor egyetemi magántanártól.

Az elhajlított fény intenzitásának meghatározására szolgáló kifejezés sajátságos alkatából egyszerű tárgyalások útján érdekes összefüggés ered, egy oldalról valamely kis, világitó felületi elemből kiinduló s egy végtelen felfogó ernyőre eső, más oldalról egy végtelen nagy fénylő felületből eredő, de csak egy ernyőelemre eső kinetikus erélyei között az elhajlított fénynek.

Különösen gyakorlati alkalmazása végett figyelemre méltó e tétel, miután egyszerű kisérleti módszerre vezet, melylyel a belső s az elhajlított fény kinetikus erélyeinek egyenlőségét *bármily alakú nyilásra* nézve is azonnal eldönthetjük.

E tétel megállapitása céljából következő feltevéseket kell tennünk:

Legyen egy tetszőleges alakú, sík vagy térbeli görbe által határolt elhajlitó nyilás, melynek dimensiói a hullámhossz irányában igen nagyok; ez elhajlított fény tehát csak kis hajlitási szögek mellett bír véges, ezentúl pedig elenyésző amplituddal. Továbbá legyen egy egyenletesen világitó gömbfelület FF, melyből e fény, elhajlitás után a szintén gömbalakú felfogó ff ernyőre érkezik; mindkét felület sugara ϱ_1 és ϱ_0, a nyiláshoz képest, igen nagy, s közös középpontjuk a nyilásban vagy annak legközelebbi szomszédságában van.

A dF fénylő elemből kibocsátott mozgás amplitudja legyen a távolság egységében $(\mathfrak{A}_0^2 dF)^{\frac{1}{2}}$ (mivel minden felületi elem a többitől függetlenül rezeg); tehát a nyiláshoz csak $\frac{(\mathfrak{A}_0^2 dF)^{\frac{1}{2}}}{\varrho_1}$ amplituddal biró rezgés érkezik, melyet mint a dF-ből eredő, s a nyilásra eső fény amplitudját $\mathfrak{A}_i$-val jelöljünk.

Az elhajlított fénymozgás alakja: $A \sin\left(2\pi\frac{t}{T}+\delta\right)$; az amplitud kifejezése pedig, mely mind FRESNEL mind FRAUNHOFER tüneményeit magában foglalja:

$$A^2 = \mathfrak{A}_i^2 K^2 \left\{ \left(\iint \cos p \frac{\partial \varrho_1}{\partial n} dF \right)^2 + \left(\iint \sin p \frac{\partial \varrho_1}{\partial n} dF \right)^2 \right\}^{1)}, \text{ hol:}$$

$$p = \frac{2\pi}{\lambda}\left\{ \frac{x^2+y^2+z^2}{2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_0}\right) - (x\alpha + y\beta + z\gamma) \right\},$$

$x\ y\ z$ az elhajlító nyilást befödő felület dF elemének összrendezői, n ez elem normalisa, $\alpha = \cos\alpha_0 - \cos\alpha_1$, $\beta = \cos\beta_0 - \cos\beta_1$, $\gamma = \cos\gamma_0 - \cos\gamma_1$; hol $\alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0$, $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$ az elhajlított, illetőleg beeső sugár irányszögei.

A nyilás befödésére felvett F felület egyenletét mindenesetre $z = \varphi(x,y)$ alakba hozhatjuk; ebből $\frac{\partial \varrho_1}{\partial n} = \cos(\varrho_1 n)$, x és y által fejezhető ki s végre írható $df = \frac{dxdy}{\cos(nz)}$, melynek nevezője szintén csak x és y függvénye, úgy hogy A kifejezésében csak két független változó, x és y fordúl elő. Miután A értéke a coordináta rendszer fekvésétől független, adjunk ennek oly helyzetet, hogy a beeső fény iránya, tehát ϱ_1 igen közel a ZX síkba essék. Az A-ban jelzett egészelések végrehajtása után x és y változók teljesen eltünnek; azok helyébe a nyilás határolási parameterei lépnek be és A ezeken kivül csakis α, β, γ, ϱ_0 és ϱ_1 függvénye.

Ámde, ily csekély elhajlitási szögletek mellett α_0 és α_1 stb. igen közel egyenlők s írhatjuk:

$$\alpha = (\alpha_1 - \alpha_0)\sin\alpha_1 = (\alpha_1 - \alpha_0)\sin\alpha_0$$

$$\cos^2\alpha_0 + \cos^2\alpha_0 + \cos^2\gamma_0 = 1$$

$$\beta = (\beta_1 - \beta_0)\sin\beta_1 = (\beta_1 - \beta_0)\sin\beta_0; \text{ ezenkivül pedig:}$$

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1.$$

$$\gamma = (\gamma_1 - \gamma_0)\sin\gamma_1 = (\gamma_1 - \gamma_0)\sin\gamma_0$$

---

1) Az e képletben fellépő $\frac{\partial \varrho_1}{\partial n} = \cos(\varrho_1 n)$ együtthatót a közönséges FRESNEL-féle theoria nem adja; de az következik az erély elvéből, mint az egy későbbi dolgozatban fog bebizonyúlni s a fény elasticitás-elméletéből. Tételünk levezetésére vagy érvényességére e szorzó semmi befolyással nem bír.

Téve az utólsóelőtti egyenletbe $\alpha_0 = \alpha_1 + (\alpha_0 - \alpha_1)$, $\beta_0 = \beta_1 + (\beta_0 - \beta_1)$, $\gamma_0 = \gamma_1 + (\gamma_0 - \gamma_1)$ s kifejtve, leszen:

$(\gamma_0 - \gamma_1) \sin\gamma_1 \cos\gamma_1 = -(\alpha_0 - \alpha_1) \sin\alpha_1 \cos\alpha_1 - (\beta_0 - \beta_1) \sin\beta_1 \cos\beta_1$ vagy:

$$\gamma = -\alpha\frac{\cos\alpha_1}{\cos\gamma_1} - \beta\frac{\cos\beta_1}{\cos\gamma_1} = -\alpha\frac{\cos\alpha_0}{\cos\gamma_0} - \beta\frac{\cos\beta_0}{\cos\gamma_0};$$

azaz γ az α és β-nek *linearis* függvénye; ha még ezenkivül (mint a feltevésben említettük) ϱ_1 és ϱ_0 állandók, akkor *az elhajlított fény amplitudja A csakis α és β függvénye;* ennek jelzése:

$$A^2 = \mathfrak{A}_i^2 K^2 \Phi(\alpha,\beta).$$

A coordináta rendszer említett fekvése mellett a fénylő s a felfogó ernyő felületi elemei:

$$dF = \varrho_1^2 d\alpha_1 d\beta_1 \text{ ; } df = \varrho_0^2 d\alpha_0 d\beta_0 \text{ ; tehát:}$$

$$\mathfrak{A}_i = \left(\frac{\mathfrak{A}_0^2 dF}{\varrho_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (\mathfrak{A}_0^2 d\alpha_1 d\beta_1)^{\frac{1}{2}} \text{ ;}$$

a dF-ből eredő s elhajlított fény amplitubja:

$$A^2 = K^2 \mathfrak{A}_0^2 d\alpha_1 d\beta_1 \Phi(\alpha,\beta).$$

Következik tehát, hogy a dF-ből keletkező, F-en át hajlított és df ernyő-elemre eső fény kinetikus erélye:

$$CA^2\varrho_0^2 d\alpha_0 d\beta_0 = CK^2\varrho_0^2\mathfrak{A}_0^2\Phi(\alpha,\beta)\, d\alpha_0 d\beta_0 d\alpha_1 d\beta_1 \text{ . . . . . (0)}$$

Ezen képletből kétfelé indulhatunk: az $\alpha_0\beta_0$ szerinti egészelés az egész f ernyőre eső kinetikus erélyt adja, mely dF-ből ered, az $\alpha_1\beta_1$ szerinti egészelés pedig az egész F felületből eredő, de csak df-re eső erélyhez vezet. Tegyük meg e két integratiót sorrendben:

1) $\alpha_0\beta_0$ a változók; leszen $\alpha = \sin\alpha_1 (\alpha_1 - \alpha_0)$, $\beta_0 = \beta_1 - \beta_0$, mivel a coordináta-rendszer fekvésénél β_1 és β_0 igen közel $\frac{\pi}{2}$; tehát:

$$d\alpha_0 = -\frac{d\alpha}{\sin\alpha_1} = -\frac{d\alpha}{\cos\gamma_1}\text{; } d\alpha_0 = -d\beta \text{ ; és így:}$$

$$d\alpha_0 d\beta_0 = \frac{d\alpha d\beta}{\cos\gamma_1}$$

leszen tehát a dF-ből eredő, elhajlított és az egész f ernyőre eső fény kinetikus erélye:

$$CK^2\varrho_0^2\mathfrak{A}_0^2 d\alpha_1 d\beta_1 \frac{1}{\cos\gamma_1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\alpha,\beta)\, d\alpha d\beta \text{ . . . . . . (1)}$$

2) $\alpha_1 \beta_1$ a változók; akkor: $\alpha = \sin \alpha_0 (\alpha_1 - \alpha_0)$, $\beta = \beta_1 - \beta_0$; itt szintén β_1 és β_0 közel $\frac{\pi}{2}$; tehát $d\alpha_1 = + \frac{d\alpha}{\sin \alpha_0} = + \frac{d\alpha}{\cos \gamma_0}$; $d\beta_1 = d\beta$;

$$d\alpha_1 d\beta_1 = \frac{d\alpha d\beta}{\cos \gamma_0};$$

leszen tehát az egész F fénylő felületből eredő, de csak df elemre eső elhajlított fény kinetikus erélye:

$$CK^2 \varrho_0^2 \mathfrak{A}_0^2 d\alpha_0 d\beta_0 \frac{1}{\cos \gamma_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha,\beta)\, d\alpha d\beta \quad \ldots\ldots (2)$$

Mindkét egészlet határai azért terjesztettek $-\infty$ és $+\infty$-ig mivel $\Phi(\alpha,\beta)$ csak igen csekély $\alpha_1 - \alpha_0$, $\beta_1 - \beta_0$ értékek mellett véges, ezentúl pedig elenyésző csekély.

Ha most két oly dF és df elemet pl. conjugáltnak mondunk, melyek kúpszöge a nyilásban ugyanaz, tehát hol $d\alpha_0 d\beta_0 = d\alpha_1 d\beta_1$ akkor az (1) és (2) alatti egyenletek identikusok lesznek, mit szóval következő tétel által fejezhetünk ki.

Egy egyenletesen világító nagy gömbfelület által kibocsátott. elhajlított s egy gömbalakú ernyő elemére eső fény kinetikus erélye teljesen egyenlő a conjugált fénylő elemből eredő, elhajlított s az egész ernyőre eső fény kinetikus erélyével, feltéve, hogy a conjugált két elemet öszszekötő egyenes a nyilást befödő felületet átdöfi, vagy annak legközelebbi szomszédságában halad el, úgy hogy $\gamma_1 - \gamma_0$ mindig csak végtelen csekély.[1])

E tételt azonnal alkalmazhatjuk.

Tegyük csak *fel,* hogy a dF-ből származó, a nyiláson beeső, s azután elhajlított fény egyenlő kinetikus erélylyel birjon.

Térbeli nyilásoknál a beeső erély képzésére a nyilást a beeső, igen közel síknak vehető hullámfelületre vetitjük s e vetületnél merőleges incidentiát veszünk fel.

Az egyenlőség képzésekor az (1) kifejezésből egyenlet válik ($\mathfrak{A}_i^2 = \mathfrak{A}_0^2 d\alpha_1 d\beta_1$):

$$C\mathfrak{A}_0^2 d\alpha_1 d\beta_1 \int \int \frac{\partial \varrho_1}{\partial n} dF = C\mathfrak{A}_0^2 d\alpha_1 d\beta_1 K^2 \varrho_0^2 \frac{1}{\cos \gamma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha,\beta)\, d\alpha d\beta$$

---

[1]) E tételt eleinte csak FRAUNHOFER tüneményeire találtam, de dr. RÉTHY M. kolozsvári tanár úr szives volt arra figyelmeztetni, hogy a vele levélben közlött tétel a FRESNEL-féle jelenetekre is kiterjeszthető.

és ebből az ismeretlen kettős egészlet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha,\beta)\, d\alpha d\beta = \frac{\cos\gamma_1}{K^2\varrho_0^2}\int\int \frac{\partial\varrho_1}{\partial n}\, dF.$$

Ellenben végtelen nagy fénylő felület által df elemben előidézett amplitud négyzetét nyerjük, ha a (2) alatti kifejezést $Cdf = C\varrho_0^2 d\alpha_0 d\beta_0$-lal osztjuk; jelölve ez amplitudot A_∞-nel, ez leszen:

$$A_\infty^2 = \frac{\mathfrak{A}_0^2 K^2}{\cos\gamma_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha,\beta)\, d\alpha d\beta.$$

A kettős egészletnek éppen talált értékét helyettezve s figyelembe véve, hogy γ_0 igen közel $= \gamma_1$:

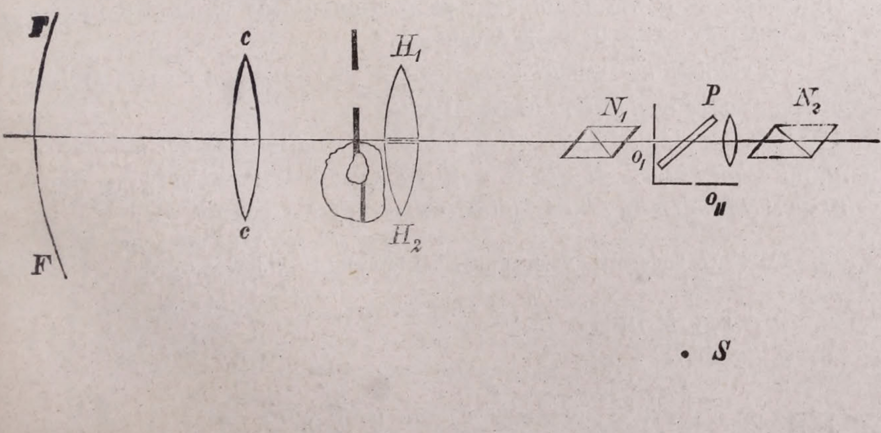
$$A_\infty^2 = \frac{\mathfrak{A}_0^2}{\varrho_0^2}\int\int \frac{\partial\varrho_1}{\partial n}\, dF = \mathfrak{A}_0^2 \frac{F_p}{\varrho_0^2},$$

ha F_p a nyilásnak a beeső hullámfelületre vetitett projectiójának területe.

Ez egy nevezetes eredmény; e szerint, a beeső s az elhajlított fény kinetikus erélyeinek egyenlőségét véve fel, ily *nagy kiterjedésű fénylő felület mellett az elhajlított kép közép tájának megvilágitása különben egyenlő körülmények között a nyilásnak a beeső hullámfelületre vetitett projectió területével egyenesen arányos, de a nyilás alakjától teljesen független.*

De meg is fordithatjuk ez utóbbi következtetést: *ha ez utóbbi eredmény kisérletileg igazoltatik, akkor a kinetikus erélyek egyenlősége tetszőleges alakú nyilásokra be van bizonyitva.*

A szóban forgó vizsgálat keresztülvitele következő módon történt.



A *cc* collimator gyújtópontja közelében egy finom, zsirozott papirból álló gömbfelületi rész egy mögötte alkalmas távolságban felállított nagy lánggal és szabályosan égő kőolajlámpa által különösen közepe táján igen egyenletesen lett megvilágitva (hogy a szélek nem voltak a közép részszel egyenlők intenzitásra nézve, az a hozzátartozó $\Phi(\alpha, \beta)$ csekély volta miatt csak elenyésző befolyást gyakorolhatott;) e felületnek látszólagos nagysága a collimator közepére vonatkoztatva, mint egy 8^0 lehetett, tehát teljesen kielégítőméretű. A heliometer két féllencséje oly helyzetü volt, hogy tengelyük teljesen összeesett; gyújtópontjuk előtt a forgatható N_1 nikol alkalmaztatott; e mögött egy ernyő, mely csak kis, köralakú O_1 nyiláson át engedte az F felületnek elhajlított fényéből keletkező kép középső részének észlelését. A P sik üveglemez az **S** fényforrás által megvilágított, szintén köralakú O_{11} nyilás képét visszaverte, úgy hogy mind az O_1 mind az O_{11} két nyilás egyidejüleg egymás mellett tüntek fel az okularban. Az N_2 nikol szintén forgathatólag volt az okular elé erősítve, de az az észlelés folyamában állandó helyzetü maradt.

H_1 előtt az egész észlelés folyama alatt egy quadratikus nyilás volt alkalmazva; H_2 előtt pedig egymásután a legkülönbözőbb alakú sík és térbeli nyilás, melynek mérete és fekvése gondosan lett meghatározva. A mérésnél az egyik féllencse el lett födve és N_1 addig forgatva, míg az okulárban feltünő két kép egyenlő intenzitásúvá vált; erre az első féllencse szabaddá tétetett, de a másik el lett födve s a két képnek, ismét N_1 forgatása által előidézett, egyenlő intenzitása észlelve; az N_1 e két helyzete az O_1-ban való megvilágításnak viszonyát adta az első és a második esetben; ámde derékszögü parallelogramm alakú nyilásoknál egy előbbi dolgozatban [1]) kisérletileg be lett bizonyitva az erélyek egyenlősége; ha tehát a mostani észlelő az O_1-ban való megvilágításnak az F_p vetűlettel való proportionalitását kimutatta, úgy az egyenlőség bármi nyilásra is érvényes.

S valóban az észlelés az egyenes aránylagosságot a megfigyelési hibákkal egyenrangú pontossággal adta.

Ennek alapján *kisérletileg bebizonyitott általános tételnek mondhatjuk tehát ki: kis elhajlítás mellett a beeső s az elhajlított fény kinetikus erélye bármily alakú nyilásra nézve teljesen egyenlő.*

(A budapesti egyetem physikai intézete 1878. junius 15.)

---

[1]) Műegy. L. III k. 33 l.

NÉHANY TÉTEL A HEXAGRAMMUM MYSTICUM TELJES IDOMÁRÓL.

Scholtz Ágoston, gymn. tanártól Budapesten.

1) Tudva van, hogy egy pont mértani helye kúpszelet, ha homogén koordinátái arányosak egy változó parameter három négyzetes függvényével, például:

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
\varrho x &= a_1\vartheta^2 + a_2\vartheta + a_3 \\
\varrho y &= b_1\vartheta^2 + b_2\vartheta + b_3 \\
\varrho z &= c_1\vartheta^2 + c_2\vartheta + c_3
\end{aligned}
$$

E kúpszelet egyenletéhez úgy jutunk, hogy az (1) egyenletekből ϱ és ϑ mennyiségeket kiküszöböljük. Sylvester dialytikus módszerével [1]) a kiküszöbölés eredményét abban az alakban állíthatjuk elő, melyet neki Salmon [2]) adott, a kérdéses kúpszelet egyenletét a következő módon fejezvén ki:

$$
\begin{vmatrix}
x & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\
y & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\
z & 0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\
0 & x & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
0 & y & 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\
0 & z & 0 & c_1 & c_2 & c_3
\end{vmatrix} = 0.
$$

Czélunknak jobban megfelelő alakja emez egyenletnek:

$$
(2)\qquad \alpha\gamma - \beta^2 = 0,
$$

hol α, β, γ az

$$
\begin{vmatrix}
a_2 & a_3 & x \\
b_2 & b_3 & y \\
c_2 & c_3 & z
\end{vmatrix},\quad
\begin{vmatrix}
a_3 & a_1 & x \\
b_3 & b_1 & y \\
c_3 & c_1 & z
\end{vmatrix},\quad
\begin{vmatrix}
a_1 & a_2 & x \\
b_1 & b_2 & y \\
c_1 & c_2 & z
\end{vmatrix}
$$

determinánsokat jelentik. Az átalakitás a Laplace-féle deteminánstétellel nem nehéz [3]).

---

[1]) Philosoph. Magazine. 1840. 101. szám.

[2]) A Treatise on the higher plane curves. Sec. ed. 44 szám. 29 lap.

[3]) Baltzer, Det. 4 kiad. 29 l. 1 sz. és 34 l. 6 sz.

De közvetetlenül is jutunk a (2) egyenlethez, ha az (1) alatt állókat sorban:

$$(a_1b_2c_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

determinánsnak elébb a_1, b_1, c_1; azután a_2, b_2, c_2 és végre a_3, b_3, c_3 elemeihez tartozó minorjaival szorozzuk és az e minor-determinánsokkal szorzott egyenleteket minden egyes esetben összeadjuk. Az öszszegek:

$$\begin{aligned} \varrho\alpha &= (a_1b_2c_3).\vartheta^2 \\ \varrho\beta &= (a_1b_2c_3).\vartheta \\ \varrho\gamma &= (a_1b_2c_3) \end{aligned}$$

és innen a (2) egyenlet közvetetlenül ered.

Eddigi fejtegetéseink eredményét e tételben foglaljuk össze:

Egy pont a (2) kupszeleten fekszik, ha koordinátái az (1) egyenleteknek eleget tesznek.

Mellesleg a (2) egyenletből még e tételt olvassuk ki:

Az $(a_2b_2c_2)$ ponton átmenő $\alpha = o, \gamma = o$ egyenesek érintik a (2) kúpszeletet az $(a_3b_3c_3)$, illetőleg $(a_1b_1c_1)$ pontokban, melyekben e kúpszeletet $\beta = o$ egyenes metszi, vagyis: $\alpha = o, \beta = o$ a (2) kúpszelet érintői és $\beta = o$ amaz egyenesek metszőpontjának polárja.

2) Legyen i, k, l, m, n, p a ϑ parameter hat értéke, akkor ez értékeknek megfelelő, az (1) egyenletek által meghatározott hat pont a 2) kúpszeletbe beleirt teljes hatszöget [4]) képez. Tudnivaló, hogy a teljes hatszögnek 15 oldala van, melyek 60 különböző egyszerü hatszöget alkotnak [5]) Első feladatunk a 15 oldal analytikai aequivalenseit azaz egyenleteit fölállítani. Az *ik* oldal egyenlete:

$$\begin{vmatrix} a_1i^2 + a_2i + a_3 & a_1k^2 + a_2k + a_3 & x \\ b_1i^2 + b_2i + b_3 & b_1k^2 + b_2k + b_3 & y \\ c_1i^2 + c_2i + c_3 & c_1k^2 + c_2k + c_3 & z \end{vmatrix} = 0$$

E determinánst fölbontván és az α, β, γ mennyiségeknek (3) alatt közlött értékeit tekintetbe vévén, az utolsó egyenlet így irható:

$$\alpha - (i + k)\,\beta + ik\,\gamma = o.$$

---

[4]) Steiner, Syst. Entw. d. Abhäng. geom. Gest. 73 lap. — Staudt, Geometrie d. Lage. 37 lap. 80 szám.

[5]) Steiner u. o. 311 lap. 54 feladat.

A kupszeletbe beleirt teljes hatszög 15 oldalának egyenletei tehát:

$$
(4)\qquad \begin{array}{lll}
\alpha-(i+k)\beta+ik.\gamma=o & \alpha-(k+l)\beta+kl.\gamma=o & \alpha-(l+n)\beta+ln.\gamma=o \\
\alpha-(i+l)\beta+il.\gamma=o & \alpha-(k+m)\beta+km.\gamma=o & \alpha-(l+p)\beta+lp.\gamma=o \\
\alpha-(i+m)\beta+im.\gamma=o & \alpha-(k+n)\beta+kn.\gamma=o & \alpha-(m+n)\beta+mn.\gamma=o \\
\alpha-(i+n)\beta+in.\gamma=o & \alpha-(k+p)\beta+in.\gamma=o & \alpha-(m+p)\beta+mp.\gamma=o \\
\alpha-(i+p)\beta+ip.\gamma=o & \alpha-(l+m)\beta+lm.\gamma=o & \alpha-(n+p)\beta+np.\gamma=o.
\end{array}
$$

3) A (4) alatt álló egyenletek baloldalai között bizonyos analytikai összefüggések vannak, melyek közül a czélunknak megfelelőket közöljük. Ezen összefüggéseket a következő egyenlet-csoportokban állítjuk össze: [1])

$$
(5)\qquad \begin{array}{ll}
(mn)=(ik)+\nu(lm)+\mu(np) & (lp)=(ik)+\nu'(lm)+\mu'(np) \\
(ip)=\nu(ik)+(lm)+\lambda(np) & (kn)=\nu'(ik)+(lm)+\lambda'(np) \\
(kl)=\mu(ik)+\lambda(lm)+(np) & (im)=\mu'(ik)+\lambda'(lm)+(np) \\
 & \\
(mn)=(ik)+\nu(lm)+\mu(np) & (lp)=(ik)+\nu'(lm)+\mu'(np) \\
(kp)=\nu(ik)+(lm)+\lambda'(np) & (in)=\nu'(ik)+(lm)+\lambda(np) \\
(il)=\mu(ik)+\lambda'(lm)+(np) & (km)=\mu'(ik)+\lambda(lm)+(np) \\
 & \\
(ln)=(ik)+\nu(lm)+\mu'(np) & (mp)=(ik)+\nu'(lm)+\mu(np) \\
(ip)=\nu(ik)+(lm)+\lambda(np) & (kn)=\nu'(ik)+(lm)+\lambda'(np) \\
(km)=\mu'(ik)+\lambda(lm)+(np) & (il)=\mu(ik)+\lambda'(lm)+(np) \\
 & \\
(mp)=(ik)+\nu'(lm)+\mu(np) & (ln)=(ik)+\nu(lm)+\mu'(np) \\
(in)=\nu'(ik)+(lm)+\lambda(np) & (kp)=\nu(ik)+(lm)+\lambda'(np) \\
(kl)=\mu(ik)+\lambda(lm)+(np) & (im)=\mu'(ik)+\lambda'(lm)+(np)
\end{array}
$$

Az (ik), (lm), (np) stb. jelképek a (4) egyenletek baloldalaitól csak bizonyos tényezőkre nézve különböznek. E tényezőket alább közöljük. Az λ, μ, ν mennyiségeket a következő egyenletek defineálják:

$$\lambda=\sqrt{(ikln)(ikmp)},\quad \mu=\sqrt{(lmni)(lmpk)},\quad \nu=\sqrt{(npil)(npkm)}$$

hol $(ikln)$ symbolummal rövidség kedvéért $\frac{i-l}{k-l}:\frac{i-n}{k-n}$ kettős arányt jelöljük. Végre λ', μ', ν' mennyiségek a λ, μ, ν mennyiségek reciprok értékei, tehát:

$$\lambda'=\sqrt{(iknl)(ikpm)},\quad \mu'=\sqrt{(lmin)(lmkp)},\quad \nu'=\sqrt{(npli)(npmk)}.$$

Az (5) egyenletek helyességét csak az első csoportra nézve bizonyítjuk be, mert a többieknél hasonló módon járhatunk el.

---

[1]) Hesse ez egyenleteket fölállitja: Vorl. a. d. analyt. Geometrie d. g. Linie, d. Punkte u. d. Kreises 170 lap.

Legyen:

$$\alpha - (i+k) \,.\, \beta + ik \,.\, \gamma = \varepsilon_1 \,.\, (ik)$$
$$\alpha - (l+m) \,.\, \beta + lm \,.\, \gamma = \varepsilon_2 \,.\, (lm)$$
$$\alpha - (n+p) \,.\, \beta + np \,.\, \gamma = \varepsilon_3 \,.\, (np),$$

hol ε_1, ε_2, ε_3 később meghatározandó állandók. Ha:

$$\omega = (i-m)(l-p)(n-k) + (k-l)(m-n)(p-i),$$

akkor:

$$\omega \,.\, \alpha = \begin{vmatrix} \varepsilon_1(ik) & i+k & ik \\ \varepsilon_2(lm) & l+m & lm \\ \varepsilon_3(np) & n+p & np \end{vmatrix}, \quad \omega \,.\, \beta = \begin{vmatrix} \varepsilon_1(ik) & ik & 1 \\ \varepsilon_2(lm) & lm & 1 \\ \varepsilon_3(np) & np & 1 \end{vmatrix}, \quad \omega \,.\, \gamma = \begin{vmatrix} \varepsilon_2(ik) & 1 & i+k \\ \varepsilon_2(lm) & 1 & l+m \\ \varepsilon_3(np) & 1 & n+p \end{vmatrix}$$

és

$$\omega \,.\, [\alpha - (m+n)\beta + mn \,.\, \gamma] = A_{11}(ik) + A_{12}(lm) + A_{13}(np)$$
$$\omega \,.\, [\alpha - (i+p)\beta + ip \,.\, \gamma] = A_{21}(ik) + A_{22}(lm) + A_{23}(np)$$
$$\omega \,.\, [\alpha - (k+l)\beta + kl \,.\, \gamma] = A_{31}(ik) + A_{32}(lm) + A_{33}(np)$$

Ez egyenletekben:

$$A_{11} = \varepsilon_1 (l-n)(m-n)(m-p), \; A_{22} = \varepsilon_2 (n-i)(p-i)(p-k),$$
$$A_{33} = (i-l)(k-l)(k-m),$$

továbbá:

$$A_{23} = (i-l)(i-m)(k-p) \,.\, \varepsilon_3, \; A_{31} = (l-n)(l-p)(m-k)\,\varepsilon_1,$$
$$A_{12} = (n-i)(n-k)(p-m)\,\varepsilon_2$$
$$A_{32} = -(i-l)(k-n)(k-p) \,.\, \varepsilon_2, \; A_{13} = -(l-n)(m-i)(m-k)\,\varepsilon_3,$$
$$A_{21} = -(n-i)(p-l)(p-m)\,\varepsilon_1,$$

tehát:

$$A_{23} \,.\, \varepsilon_2 (n-k) = A_{32} \,.\, \varepsilon_3 (i-m) = -(i-l)(i-m)(k-n)(k-p) \,.\, \varepsilon_2\varepsilon_3$$
$$A_{31} \,.\, \varepsilon_3 (i-m) = A_{13} \,.\, \varepsilon_1 (l-p) = -(l-n)(l-p)(m-i)(m-k) \,.\, \varepsilon_3\varepsilon_1$$
$$A_{12} \,.\, \varepsilon_1 (l-p) = A_{21} \,.\, \varepsilon_2 (n-k) = -(n-i)(n-k)(p-l)(p-m) \,.\, \varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Ha már most az (mn), (pi), (kl) symbolumokat ekkép defineáljuk:

$$\begin{aligned} (mn) &= \omega \,.\, [\alpha - (m+n) \,.\, \beta + mn \,.\, \gamma] \,.\, \varepsilon_1 (l-p) \\ (pi) &= \omega \,.\, [\alpha - (p+i) \,.\, \beta + pi \,.\, \gamma] \,.\, \varepsilon_2 (n-k) \\ (kl) &= \omega \,.\, [\alpha - (k+l) \,.\, \beta + kl \,.\, \gamma] \,.\, \varepsilon_2 (i-m) \end{aligned} \tag{8}$$

és ε_1, ε_2, ε_3 mennyiségeknek ez egyenletekből:

$$\frac{1}{\varepsilon_1^2} = (l-n)(l-p)(m-n)(m-p), \; \frac{1}{\varepsilon_2^2} = (n-i)(n-k)(p-i)(p-k),$$
$$\frac{1}{\varepsilon_3^2} = (i-l)(i-m)(k-l)(k-m)$$

eredő értékeket tulajdonítjuk, akkor a helyettesítések végeztével azt találjuk, hogy:

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
&A_{11}\,.\,\varepsilon_1(l-p) = A_{22}\,.\,\varepsilon_2(n-k) = A_{33}\,.\,\varepsilon_3(i-m) = 1,\\
&A_{23}\,.\,\varepsilon_2(n-k) = A_{32}\,.\,\varepsilon_3(i-m) = \sqrt{(ikln)(ikmp)} = \lambda,\\
&A_{31}\,.\,\varepsilon_3(i-m) = A_{13}\,.\,\varepsilon_1(l-p) = \sqrt{(lmni)(lmpk)} = \mu,\\
&A_{12}\,.\,\varepsilon_1(l-p) = A_{21}\,.\,\varepsilon_2(n-k) = \sqrt{(npil)(npkm)} = \nu.
\end{aligned}
$$

A (6) egyenleteket sorban $\varepsilon_1(l-p)$, $\varepsilon_2(n-k)$, $\varepsilon_2(i-m)$ mennyiségekkel szorozván, ezen egyenletek a (7) és (8) alatt álló viszonylatok tekintetbe vételével a következőkké váltak:

$$
\begin{aligned}
(mn) &= (ik) + \nu(lm) + \mu(np)\\
(pi) &= \nu(ik) + (lm) + \lambda(np)\\
(kl) &= \mu(ik) + \lambda(lm) + (np).
\end{aligned}
$$

Hasonló módon mutatjuk ki a többi egyenletek helyességét. Elegendőnek tartjuk a hátralevő symbolumoknak jelentését magyarázó egyenleteket ide írni:

$$
\begin{aligned}
(lp) &= \omega\,.\,[\alpha - (l+p)\ \beta + lp\,.\,\gamma]\,.\,\varepsilon_1(m-n),\\
(kn) &= \omega\,.\,[\alpha - (k+n)\ \beta + kn\,.\,\gamma]\ \varepsilon_2(p-i),\\
(im) &= \omega\,.\,[\alpha - (i+m)\ \beta + im\,.\,\gamma]\,.\,\varepsilon_3(k-l),\\
(ln) &= \omega\,.\,[\alpha - (l+n)\,.\,\beta + ln\,.\,\gamma]\,.\,\varepsilon_1(m-p),\\
(kp) &= \omega\,.\,[\alpha - (k+p)\,.\,\beta + kp\,.\,\gamma]\,.\,\varepsilon_2(n-i),\\
(il) &= \omega\,.\,[\alpha - (i+l)\,.\,\beta + il\,.\,\gamma]\,.\,\varepsilon_3(k-m),\\
(mp) &= \omega\,.\,[\alpha - (m+p)\,.\,\beta + mp\,.\,\gamma]\,.\,\varepsilon_1(l-n),\\
(in) &= \omega\,.\,[\alpha - (i+n)\ \beta + in\,.\,\gamma]\ \varepsilon_2(p-k),\\
(km) &= \omega\,.\,[\alpha - (k+m)\ \beta + km\,.\,\gamma]\,.\,\varepsilon_3(i-l).
\end{aligned}
$$

Ha most még rövidség kedvéért az:

$$(ik) = x_1\ ,\ (lm) = x_2\ ,\ (np) = x_3$$

jelölésekkel élünk, a (2) kúpszeletbe beleirott *iklmnp* teljes hatszög 15 oldalát a következő egyenletek fejezik ki:

az *ik, lm, np* egyenesek egyenletei $x_1 = o$, $x_2 = o$, $x_3 = o$.

A többi egyenletek három typusra oszolnak:

$$\text{első typus:}\begin{cases} mn & \text{egyenes egyenlete} & x_1+\nu x_2+\mu x_3=o \\ lp & » \quad » & x_1+\nu' x_2+\mu' x_3=o \\ ln & » \quad » & x_1+\nu x_2+\mu' x_3=o \\ mp & » \quad » & x_1+\nu' x_2+\mu x_3=o \end{cases}$$

$$\text{második typus:}\begin{cases} ip & » \quad » & \nu x_1+x_2+\lambda x_3=o \\ kn & » \quad » & \nu' x_1+x_2+\lambda' x_3=o \\ in & » \quad » & \nu' x_1+x_2+\lambda x_3=o \\ kp & » \quad » & \nu x_1+x_2+\lambda' x_3=o \end{cases}$$

$$\text{harmadik typus:}\begin{cases} kl & » \quad » & \mu x_1+\lambda x_2+x_3=o \\ im & » \quad » & \mu' x_1+\lambda' x_2+x_3=o \\ il & » \quad » & \mu x_1+\lambda' x_2+x_3=o \\ km & » \quad » & \mu' x_1+\lambda x_2+x_3=o. \end{cases}$$

Későbbi használat okáért még ideigtatjuk az 5) egyenlet-csoportok jobboldalain levő együtthatók determinánsait, ugyanis:

$$(10)\quad \begin{array}{ll} \sigma=1+2\lambda\mu\nu-\lambda^2-\mu^2-\nu^2, & \sigma^1=1+2\lambda'\mu'\nu'-\lambda'^2-\mu'^2-\nu'^2, \\ \sigma_1=1+2\lambda'\mu\nu-\lambda'^2-\mu'^2-\nu'^2, & \sigma_1'=1+2\lambda\mu'\nu'-\lambda^2-\mu'^2-\nu'^2, \\ \sigma_2=1+2\lambda\mu'\nu-\lambda^2-\mu'^2-\nu^2, & \sigma_2'=1+2\lambda'\mu\nu'-\lambda'^2-\mu^2-\nu'^2, \\ \sigma_3=1+2\lambda\mu\nu'-\lambda^2-\mu^2-\nu'^2, & \sigma_3'=1+2\lambda'\mu'\nu-\lambda'^2-\mu'^2-\nu^2. \end{array}$$

4.) A 15 egyenes $\frac{15.14}{1.\ 2}=105$ pontban metszi egymást. Ezek közül a kupszeletbe beleirt hatszög egy-egy csucsában 10 pont egymásra esik. A többi 45 pont egymáshoz való helyzetére irányul most figyelmünk. E pontokat röviden A pontoknak hivjuk.

Mondottuk, hogy az i, k, l, m, n, p pontok hatvan különböző egyszerű hatszöget formálnak melyeknek egyikében, például $iklmnp$ hatszögben az átellenes oldalak, ugymint:

$$ik, mn;\ lm, pi;\ np, kl$$

oldalak három A pontban metszik egymást. E pontok koordinátáit:

$$(11)\quad \begin{array}{lll} x_1=o & x_2=o & x_3=o \\ x_1+\nu x_2+\mu x_3=o & \nu x_1+x_2+\lambda x_3=o & \mu x_1+\lambda x_2+x_3=o \end{array}$$

egyenlet-párokból számíthatjuk ki. A kivánt koordináták:

$$o, -\mu, \nu;\ \lambda, o, -\nu;\ -\lambda, \mu, o.$$

Minthogy:

$$\begin{vmatrix} o & -\mu & \nu \\ \lambda & o & -\nu \\ -\lambda & \mu & o \end{vmatrix}$$

determinánsnak identice zérussal egyenlő értéke van, a kérdésben forgó három A pontnak egy ugyanazon egyenesben fekszik és ezzel bebizonyitottuk Pascal híres tételét:

A kupszeletbe beleirt hatszög átellenes oldalai három egy egyenesben fekvő pontban metszik egymást.

A (11) egyenletek első csoportjában az első egyenlet $(\lambda'-\mu'\nu')$, a másodikat $\mu'\nu'$ mennyiséggel szorozván és a szorzott egyenleteket öszszeadván, tekintetbe vévén, hogy $\mu\mu'=1$, $\nu\nu'=1$, ered:

(12) . . . . . $$\lambda' x_1 + \mu' x_2 + \nu' x_3 = o$$

Ugyanez egyenlet származik, ha a második csoport egyenleteit $\mu'-\nu'\lambda'$, illetőleg $\nu'\lambda'$ mennyiségekkel, a harmadik csoporthoz tartozókat $\nu'-\lambda'\mu'$, illetőleg $\lambda'\mu'$ mennyiségekkel szorozunk és a szorzott egyenleteket mind a két esetben külön-külön összeadjuk.

A (12) egyenlet e levezetése ujból bizonyitja Pascal tételét és belőle egyuttal megtudjuk, hogy ama három A pont, melyben *ik, mn; lm, pi; np, kl* átellenes oldalak egymást metszik, a (12) egyenesben feküsznek. Ez egyenes vonalat az *iklmnp* egyszerű hatszög Pascal-féle egyenesének nevezik.

Minthogy az A pontok száma *45*, jogosan föltehető, hogy a többire nézve hasonló tétel fönn áll. Steiner volt az első, ki, midőn megmutatta, hogy a kupszelet tetszőleges hat pontja *60* beleirt egyszerű hatszög csucsait képezi, egyuttal bebizonyitotta, hogy ezek mindegyikében az átellenes oldalak három, egy egyenesben fekvő pontban metszik egymást. A teljes hatszögben tehát *60* Pascal-féle egyenes van; mindegyik A ponton *4* Pascal-féle egyenes megyen át és minden Pascal-féle egyenes *3* A pontot foglal magában. Például (*ik, mn*) ponton átmegyen az *iklmnp, ilmnpk, ilnmpk, iklnmp* egyszerű hatszögek Pascal-féle egyenese. Ez egyeneseket röviden G_{iklmnp}, G_{ilmnpk} .... Pascal-féle egyeneseknek akarjuk nevezni.

Átmegyünk a *60* Pascal-féle egyenes egyenleteinek felállítására.

(Vége következik.)

A TIZEDES TÖRTEK FELTALÁLÁSÁNAK TÖRTÉNETE.

Dr. Wohlrab Flóris, budai gymnasiumi tanártól.

Hogy ki találta fel a tizedes törteket? oly kérdés, melyre egyhangú feleletet nem találunk a különböző mennyiségtani történetirók műveiben. Igy HEILBRONNER [1]) művének 802. lapján BEYER-nek itéli oda a babért, midőn írja:

»Joannes Hartmannus BEYERUS (Erat celebris Medicus atque Chimicus Francofurtensis. Obiit A. 1625.) *invenit primus Logisticam Decimalem, ... ;*«

míg a 882. lapon »De arithmetica decimali« czímű fejezetnek 16. §.-ában ezeknek felfedezését REGIOMONTANUS-nak tulajdonitja következő szavaival:

» . . . . . Primus Joannes REGIOMOMTANUS ea usus fuit in computandis Tabulis Sinuum, quem secutus fuit Simon STEVINUS ; . . . . .«

KÄSTNER [2]) az angol *Buckley*-ben vélte felfödözni a tizedes törteknek feltalálóját, azt írván t. i. róla

»Leicht wandte man auch diese Eintheilung nach Zehnen in der gemeinen Arithmetik für Brüche an. Das älteste Beyspiel das ich kenne, giebt mir Wallis Alg. c. 9. WILHELM BUCKLEY, der zu Eduard VI. Zeit lebte, und um 1550. gestorben sein mag . . . .«

MONTFERRIER [3]) következő szavai által:

» . . . 0,1 désigne $\frac{1}{10}$, 0,54 désigne $\frac{54}{100}$, 0,003 désigne $\frac{3}{1000}$, et ainsi de suite. Cette manière d'écrire les fractions decimales introduite par le géomètre OUGHTRED, facilite extrêmement les calculs, ...«

a tizedes törteknek mai jelölésmódját OUGHTRED-nek tulajdonitja, míg GERHARDT [4]) a német RUDOLF KRISTÓF-nak egyik 1526. megjelent művében találja már e jelölésmódot »mit einer Virgel.«

---

[1]) Heilbronner (Jo. Christoph), Historia Matheseos Universae etc. Lipsiae 1742.

[2]) Kästner (Albr. Gotthelf), Geschichte der Mathematik. I. Bd. Göttingen, 1796. p. 48. c. 24.

[3]) Montferrier (de A.-S.), Dictionnaire des Sciences Mathématiques pures et appliquées 2. edit. Tome I. Paris. Hachette p. 415.

[4]) Gerhardt (C. J.), Geschichte d. Mathem. in Deutschland. München, 1877. Oldenbourg. p. 39.

Dr. PEACOCK az »Encyclopaedia Metropolitana«-ban megjelent »History of Arithmetic« czímű értekezésében [1]) GIRARD-nak foglalja le a tizedes törtek feltalálásának dicsőségét, írván:

»Stifelius and Stevinus used circumflexed digits instead of ('), (''), etc. in the sexagesimal system, and an application of the same principle to the decimal system was first made by ALBERT GIRARD in or about 1590. This consisted in expressing fractions by tenths, hundredths, etc., in the following way — $16 \frac{3}{10} \frac{4}{100}$ would be writte $\overset{(0)}{16}\,\overset{(1)}{3}\,\overset{(2)}{4}$, the number of the power of ten, which must be used with that digit as a denominator.«

BALTZER [2]) és MATTHIESSEN [3]) határozottan REGIOMONTANUS-ban (1436—1476) látják a tizedes törteknek feltalálóját; az első ugyanis ezt írja róla:

REGIOMONTAN vertauschte um 1464 die . . . . Sexagesimalbrüche mit den . . . . Decimalbrüchen«;

MATTHIESSEN pedig:

»JOANNES MÜLLER [Regiomontanus] . . . . führte den Gebrauch der Decimalbrüche ein«;

míg KLÜGEL [4]) csak azt mondja róla, hogy:

»REGIOMONTANUS hat die *Veranlassung* dieser Rechnung gegeben, da er die Sexagesimal-Eintheilung des Halbmessers eines Kreises mit der bequemeren in zehn Millionen Theile vertauschte.«

CANTOR [5]) CARDANUS-nak vindikálta a koszorút, a mennyiben ezeket irja róla:

»Die andere Methode [der Wurzelausziehung] hingegen, welche CARDANUS ausdrücklich als seine Erfindung in Anspruch nimmt, ist vollständig die noch jetzt gebräuchliche mit Anwendung der *Decimalbrüche*, obgleich man überall gesagt findet, erst STEVIN habe dieselben 1585, also 45 Jahre später, in Anwendung gebracht. Es dürfte sogar die *Practica arithmetica* [Cardanus egyik műve] die Quelle sein, aus welcher STEVIN schöpfte, ...«

---

[1]) Lásd: »English Cyclopaedia« Arts et sciences. Vol. I. p. 529.

[2]) Baltzer (Dr. Rich.), Elemente der Mathematik. I. Bd. 3. Aufl. p. 41.

[3]) Matthiessen (Dr. Ludw.), Schlüssel zur Heis' Aufgabensammlung. II. Bd. Anhang. p. 562.

[4]) Klügel (G. Simon), Mathematisches Wörterbuch. 2. Bd. Leipzig, 1802. p. 717.

[5]) Cantor (Dr. Mor.), »Petrus Ramus, Michael Stifel, Hieronymus Cardanus, ... »(Schlömilch's Zeitschr. 2 Jahrg. p. 373.)

És hogy még több zavart okozzon e dologban, GÜNTHER [1]) még Regiomontanus kitünő tanítóját, a magyarokkal oly sokat érintkezett [2]) PEURBACH-ot is belebonyolítja e kérdésbe:

»Ihm verdankt — mondja u. is Günther — die Lehre von den Dezimalbrüchen wohl am meisten . . . . ;«

(talán csak nem azért, mert MÄDLER [3]) szerint »PURBACH és REGIOMONTANUS voltak az ujabb Európában (?) az elsők, kik nagyobb számvetéseknél alkalmazták az arabs számjegyeket s általánossá tették ezeknek használatát.« ?)

DR. CSÁSZÁR KÁROLY végre az orsz. középtan. tanáregylet egyik taval tartott ülésén STEVIN SIMON-t tüntette fel a tizedes törteknek feltalálójául [4]).

Ezen néhány adatból már is eléggé kitünik, hogy a mathematika történetirói nem értenek egyet a tizedes törteknek feltalálóját illetőleg, sőt kerülik is a határozott feleletet e kérdésre.

A következőkben feladatunkul tűztük ki előadni a tizedes törtek feltalálásának történetét, mely után nem lesz nehéz eldönteni, kit vagy kiket illet a babér.

Mindenek előtt azonban a könnyebb megérthetés s a felfedezésnek kellő méltánylása végett szükségesnek tartjuk a tizedes törtek időszakát (XVI. század) megelőző kornak hasonló eszközeit valamivel bővebb fejtegetés tárgyává tenni, hogy átlássuk egyúttal azon kényszerítő okokat is, melyek a tizedes törteknek feltalálását eredményezték.

Ismeretes az, hogy a sexagesimalis rendszer ősidőktől kezdve divott és használtatott a csillagászatban; s éppen ezért *Ptolemaios Almagest*-jében (*μεγάλη σύνταξις*) is, mely felölelte az ókor összes csillagászati tudományát, a csillagászatban szükségelt többi számolási apparatussal együtt ez is előrebocsáttatott.[5]) Sőt már *alexandriai Theon* mutatja ki a Ptolemaios-féle Almagesthez irt commentárjában azt, hogy némely számvetés, pl. a négyzetgyö-

---

[1]) Günther (Dr. Sigm.), Vermischte Untersuchungen zur Gesch. d. math. Wiss. Leipzig, 1876. p. 108.

[2]) Regiom. és Peurb. viszonyáról Mátyás királylyal, »diesem ebenso heldenmüthigen als kenntnissreichen Fürsten«, és János eszterg. érsekkel : l : Wolf R., Gesch. d, Astr. München, 1877. p. 89. ; és FRAKNÓI V. »Vitéz János könyvtára«, Magyar Könyvszemle. III. évf. 1 füz.

[3]) Mädler (Dr. J. H. v.), Gesch. d. Himmelskunde. 1. Bd. Braunschweig, 1873. p. 128.

[4]) Császár (Dr. K), »A tizedes törtek felfedezője.« Tanáregyl. Közlöny. 18⁸/₉. évf. (még nem jelent meg.)

[5]) Nesselmann (Dr. G. H. F.), Die Algebra d. Griechen Berlin, 1842. p. 136.

kér-vonás [1]) oly számokból, melyek nem négyzetszámok, — kényelmesebben vihető véghez, ha sexagesimalis törtek alkalmaztatnak, mint ha közönségesek használtatnának fel.

Maguk a görögök is azonban ezen rendszert — valamint csillagászati tudományuknak legnagyobb részét — a *chaldaeusoktól* vették át, kik a csillagászatban messze túlszárnyalták a többi nemzeteket. A chaldaeusoknál a sexagesimalis rendszer nemcsak a tudományban, hanem a gyakorlati életben is kizárólag uralkodott.

»Das stärkste Beispiel eines consequent durchgeführten Typus — mondja Hankel [2]) — zeigen die Babylonier, welche nicht nur ihre Masse, Gewichte und Münzen, sondern auch die Grade am Himmel und die Zeitstunde in 60 Theile und jeden dieser Theile wiederum nach demselben Principe eintheilen, wovon noch heute jedes Zifferblatt unserer Uhren, jeder getheilte Gradbogen Zeugniss ablegt. Auch die Angaben der Babylonier über die Grösse ihrer Städte, deren Mauern u. s. w. zeigen überall diess sexagesimale System.«

Látjuk tehát, hogy a napnak és órának még ma is használatos felosztása perczekre és másodperczekre a babyloni papoktól (a chaldaeusoktól) ered; [3]) az ekliptikát ép úgy, mint a nap által az égboltozaton 24 óra alatt leirt kört már ők osztották fel 6.60=360 egyenlő részre; mértékegységüknek, a *stadion*-nak 6-od része, a *Plethron* 60 rőfre volt felosztva, úgy hogy egy stadion 6.60=360 rőföt foglalt magában. (A lábmértéknél mint legmagasabb hatvány előfordul 60^4 [Dekastadion, Parasange, Schoinion] [4]).

A súly és- ürmértéknél is szerepelt a 60-adrész: a babyloniai köbláb, a *Maris* 60 *Log*-ra volt felosztva; a nehéz talentum (*Kikker* azaz korong) 60-ad része *Mine* nevet viselt. És — a mi különösen megfigyelendő — számrendszerük is tisztán 60-as volt. Ennek bizonyitása végett legyen szabad Rawlinson [5]) classicus művéből a következő sorokat ideigtatni:

»On a tablet found at Senkareh, and belonging *probably* to an early period, a table of squares is given, correctly calculated from one to sixty. The system of notation, which is here used, is very curious. Be-

---

[1]) Nesselmann, idézett müvében, p. 144.—147.

[2]) Hankel (Dr. H.), Zur Gesch. d. Math. im Alterthum u. Mittelalter. Leipzig. 1874. p. 48.

[3]) Duncker (Max), Gesch. d. Alterthums. 1. Bd. 5. Aufl. Leipzig. 1878. p. 280. s. köv.

[4]) Günther (Dr. S.), Ziele u. Resultate. d. neueren math.-hist. Forschung. Erlangen. 1876. p. 93. Jegyz.

[5]) Rawlinson (George), The great Monarchies of the ancient eastern World London. 1871. p. 102.

rosus informs us that, in their computations of time, the Chaldaeans employed an alternate sexagesimal and decimal notation, reckoning the years by the *soss*, the *ner*, and the *sar* — the *soss* being a term of 60 years, the *ner* one of 600, and the *sar* on of 3600 (or 60 *sosses*). . . . . . the notation is by means of two signes — the simple wedge V, and the arrowhead < ; the wedge representing the unit, the soss (60), and the sar (3600), while the arrowhead expresses the decades of each series, or the numbers 10 and 600.«[1])

E jelölés, mint könnyen belátható, nehézkes ugyan, de alig oly ügyetlen mint a rómaiaké, kikét Nesselmann [2]) találóan jellemzi ezen szavaival: ». . . . ein in vielen Stücken unvollkommenes System, ein System, das trotz seiner ungeheuren Mängel und seiner eckelhaften Weitschweifigkeit und Unbequemlichkeit . . . . sich doch bis auf den heutigen Tag zu gewissen Zwecken in ganz Europa erhalten hat,« A következetesség és egyszerűség legalább nem tagadható meg a chaldaeusok számrendszerétől.

Európa államai a római, helyesebben görög műveltséggel — Ptolemaios és mások közvetitése folytán — elsajátították egyuttal a chaldaeusok csillagászati tudományával — az evvel összefüggésben levő 60-as rendszert is, mely idők folytán oly tekintélyre tett szert s ennek következtében olykép inficiálta és tartotta fogva a szellemeket, hogy még a tízes számrendszer behozása után (13. szd.) máig is képes volt fönntartani magát mind a szögmérésnél, mind az időmérésnél — a franczia forradalom ideális törekvései daczára is; söt még nem oly rég mult időkben a valamire való arithmetikai tankönyvekben mindenütt párhuzamosan volt tárgyalva a tizes számrendszerrel a hatvanas.[3]) Hogy mennyire élték bele magukat a régibb és ujabbkori tudósok a hatvanas-rendszerbe, mutatja a következő két példa: *Ptolemaios* húr-tábláí-

[1]) Ezen Senkareh-ben talált tábla, melyből Rawlinson (p. 103) az 50-től 60-ig bez. terjedő egész számoknak négyzetét terjeszti elő eredeti és arabs számjegyekben, még — mint nekem látszik — ép ily módon adja az 1—32 terjedő egész számoknak köbét is (legalább Schrader Eb.-nak a »Jenaer Literaturzeitung« 1878 1. számában megjelent recensioja Lepsius-nak egyik értekezéséről ezt hagyja sejteni). Az ezen tábla körül támadt polemia Lepsius R. és Oppert J. közt ugy látszik befejezést talált a »Berliner Monatsberichte der kön. Akad. d. Wiss.« 1878. februáriusi füzetében.

[2]) Nesselmann, i. m. p. 87.

[3]) Birtokomban van egy — valami S. R. által irt — mű, melynek kétszinű teljes cime: »Mathematischer Lust- und Nutz-Garten. Darinnen das Nothwendigste von der Arithmetica vulgari, *decimali* und *sexagesimali*; etc. Nürnberg. 1724.«

ban (melyeknek helyébe később az arabok [1]) behozták a félhúr- vagyis sinustáblákat) a kör küllőjét éppen 60 egyenlő részből állónak vette fel [2]); GMUNDENI JÁNOS [3]) pedig (1380—1442) jól vette észre, hogy a csillagászatban a sexagesimalis rendszer nincsen egész következetességgel keresztülvive, a menynyiben az állatöv 12 csillagjegyre, egy ily jegy 30 fokra, egy fok 60 perczre st. van felosztva; ezen következetlenségen aztán úgy vélt segíthetni, hogy két-két csillagjegyet egybefoglalt, mely kettős csillagjegyeknek mindegyike már természetesen $2.30^0 = 60^0$-ot tartalmazott.[4])

De természetellenes ugrás is lett volna az, ha a tizedes törtek még a tízes rendszer behozatala előtt vergődtek volna uralomra. Míg a tízes számrendszerrel az arabs, helyesebben indus számjegyek nem honosodtak meg nyugaton, addig a tizedes törteknek feltámadására nem volt meg a szükséges alapfeltétel.

Nem szándékozom e helyütt a tizes számrendszer Európába való behozásának s elterjedésének történetét előadni; csak arra akarok figyelmeztetni, hogy a tízes rendszer — a tízes egészeket illetőleg — használatban volt már a 13. századtól a 16-ig, a nélkül, hogy az akkori idők tudósai megtették volna azon egyszerű és szükségképeni lépést: kiterjeszteni a tízes egészekre vonatkozó törvényt jobbra, az egyeseken túl következő helyekre is. E mulasztás okát az ugynevezett »*helyérték*« oly momentuosus fogalmának kellő figyelembe nem vételében kell keresnünk. Egyes tudósok, kik tisztában látszanak lenni e fogalommal, a nélkül, hogy megtették volna következetesen ezen még hiányzó lépést, mely egyenesen a tizedes törteknek feltalálására vezetendett, kedvencz tudományuk bűvös körében félreléptek. Igy a már fentebb említett GMUNDENI JÁNOS-nak a 15. század elején megjelent »Tractatus de minutiis physicis« czimű kanonikus egyetemi tankönyvében a következő sorok olvashatók: [5])

»Minutie igitur phisice taliter representantur secundum quod pars alicuius per sui loci differentiam indicantur (sic!) solus enim numerator cujuslibet fractionis seorsum scribitur et locus pro denominatore tenetur. Exempli gratia si sunt .2. signa .24. gradus .36. minuta .45. se-

---

[1]) Chasles, Gesch. d. Geom. Aus dem Franz. übertr. d. Dr. L. A. Sohncke. Halle. 1839. p. 570.

[2]) Nesselmann, i. m. p. 136.

[3]) Gerhardt, i. m. p. 6.

[4]) Hasonló törekvésről (a hatvanas rendszert t. i. balra is folytatni) értesit Wallis is; l. Nesselmann, i. m. p. 137. Jegyzet 24.

[5]) Gerhardt, i. m. p. 6.

cunda, tunc scribitur sic .2. .24. .36. .45. primus enim locus est signo rum, secundus graduum etc.« [1])

Hogy az akkori idők tudósai nem voltak tisztában kellőleg a helyérték fogalmával, mutatják Chasles-nak [2]) következő szavai, melyekkel bemutatja olvasóinak az »Algorismus domini *Joannis de Sacro Busco*, noviter impressum, Venetiis 1523.« czímű művet:

»Ce Traité présente avec les autres une différence légère, mais qui mérite néanmoins d' être remarquée. C' est que l'auteur dit de placer un *point* au dessus du chiffre des *mille*, pour le distinguer des autres ; puis semblablement un *point* sur le quatrième chiffre après celui de mille ; et ainsi de suite sur les chiffres pris de quatre en quatre. Ce sont, comme on le voit les *tétrades* d' Apollonius [3]) qui sont reduites, dans le système actuel, à des tranches de trois chiffres, puisque nous dénommons un nombre per tranches de trois chiffres en nous servant des mots *unités, mille, millions, billions*, etc. Au *point* on a substitué des virgules qui separent ces tranches des trois chiffres.

On trouve aussi ces tetrades marquées par un *point* dans le Traité d'Arithmétique de *Purbach, Algorithmus G. Purbachii in integris* Viennae, 1515. in 4°.

Míg a latin nyelven irott más könyvekben (Huswirt, Stifel, Ramus, Micyllus) legtöbbnyire a 4., 7., 10., ... helyek fölé van helyezve egy-egy pont. [4])

Ezen a mostani szokástól eltérő csoportositásnak oka abban rejlik, hogy akkor a tízes számrendszer egyes helyeinek — vagy legalább e helyek legnagyobb részének — még nem voltak — sőt még ma sincsenek — külön nevei (pl. nálunk 10-nek egymásra következő hatványainak sorából csak a 0., 1., 2., 3., 6., 12., ... hatványok birnak külön névvel) ; míg ellenben az indusoknál [5]) 10-nek minden hatványa birt külön névvel, ugy, hogy pl. 86 789 325 178 számot ekként olvasták az indusok : 8 kharva, 6 padma, 7 vyarbuda, 8 kôti, 9 prayuta, 3 laksha, 2 ayuta, 5 sahasra, 1 çata, 7 daçan, 8. Söt a buddhismus vallás irodalmában még oly szókkal is lehet találkozni, melyek *m*,

---

[1]) Ezen jelölésnek analogonja Regiomontanusé ; ennél $\overline{25}.40 = 25°40'$ (Gerhardt, p. 19.).

[2]) Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géometrie. Second édition. Paris. 1875. p. 559. és Chasles-Sohncke, p. 662.

[3]) V. ö. Nesselmann, p. 80.

[4]) Treutlein (P.), »Das Rechnen im 16. Jarhundert.« Abhandlungen zur Gesch. d. Mathem. Erstes Heft. Leipzig. 1877. p. 41.

[5]) Hankel, p. 15.

$m^2, m^4, \ldots, m^{2^{128}}$ hatványokat fejezik ki [1]) azon feltét mellett, hogy $m = 10^7$; és BIERNATZKY [2]) szerint Chinában is 10 különböző hatványainak sora mind külön névvel bir egész az 53-ig, (mely utólsó »Hang ho schan« [= Ganges homokja] nevet visel). Mily nyelvbeli szegénységről tesznek tanuságot ezekkel szemben a latin nyelven irott Arithmetikák, melyek csak a »*digiti*« és »*articuli*« gyüjtő nevekkel rendelkeztek a 13. és köv. századokban! CHASLES [3]) több felhozott példáiból mi csak a következő — SCHONER »*Algorithmus demonstratus*« czímü müvéből idézett — helyet akarjuk átvenni:

»*Digitus* est omnis numerus minor decem. *Articulus* est omnis numerus, qui digitum decuplat, aut digiti decuplum, aut decupli decuplum, et sic in infinitum. Separantur autem digiti et articuli in *limites*. *Limes* est collectio novem numerorum, qui aut digiti sunt, aut digitorum aeque multiplices, quilibet sui relativi. Limes itaque primus digitorum. Secundus primorum articulorum. Tertius est secundorum articulorum. Et sic in infinitum. Numerus *compositus* est qui constat ex numeris diversorum limitum. Item numerus compositus est qui pluribus figuris significativis repraesentatur.«

Míg az indusok még végtelenül nagy számokat is képesek voltak kimondani, addig az *Archimedes* előtti görögök csak oly számokat voltak képesek kifejezni szóbelileg, melyek kilenczvenkilencz milliót nem haladtak meg,[4]) vagyis meg kellett már állapodniok a μυριάκις μύριαι μυριάδες-nél.[5])

Hogy fogalmat szerezhessünk a kiirt szám leolvasásának — a nyelvszegénység okozta — rémséges voltáról, álljon e helytt a következő példa [6])

9186357243 »Neunmal Tausant tausant tausant Hundert tausant tausant Sechsundachtzig tausand tausand Drey hundert tausant Sybenundfunftzig tausant zweyhundert und dreyundfyrtzigk.«

Mit csináltak volna szegények, ha nem lett volna meg nekik ezen »tausant« szó?!

Ezek után határozott haladásnak kell tartani 10 hatványainak külön nevekkel való ellátását.

GERHARDT [7]) az első ilynemű kisérletet RUDOLFF-nál véli találni (Christoff

---

1) Hankel, p. 17.

2) Biernatzky, »Ueber die Arithmetik der Chinesen.« Crelle's Journal, Bd. 52, p. 69.

3) Chasles — Sohncke, p. 530.

4) Chasles — Sohncke, p. 542.

5) Nesselmann, p. 124.

6) Treutlein, p. 42.

7) Gerhadt, p. 39.

Rudolff von Jauer, Németország első számvetési tankönyvének szerzője):

»Bei dem Numeriren erwähnt er einmal das Wort »million« (»das tausentmal tausent oder Million«).

Baltzer [1]) ugyanezen »Millio« szóról a következőket írja:

»Das Wort Million bedeutete im 16. Jahrhundert in der vulgären Sprache eine Geldsumme; als abstractes Zahlwort hat es erst im 18-ten Jahrhundert in die Rechenbücher allgemein Eingang gefunden.«

A francziák már szintén meglehetősen korán vezették be a magasb egységekre a neveket:

»*François del Sole* arithméticien de Château-Thierry, a, dans un Traité d' Arithmétique, imprimé à Ferrare en 1546, employé le mot *Cumulo* dans le sens de *mille millions*. *Étienne de la Roche*, dans son Traité d' Arithmétique, imprimé en 1520, a donné au mot *Billion* le sens de *million de millions*. *Jaques Peletier*, dans un Traité d' Arithmétique imprimé pour la première fois en 1549, emploie, dans le même sens, le mot *milliard*.« [2])

A számoknak felosztása milliókra, billiókra, trilliókra, st. — Klügel [3]) szerint — egy németalföldi mathematikustól, Girard Albert-től ered; mig ennek ellenében Treutlein [4]) kimutatja, hogy a modern értelemben vett millió, billió, trillió, quadrillió, quillió, sixlió, septilió, ... szók a fentebb említett La Roche-tól származnak; sőt bebizonyítja, hogy a »Millio« szónak használata Francziaországban — igaz, hogy némileg más értéménynyel — még a La Roche előtti időkre vihető vissza, mert valami Sanchez Péter által »nouiter« compilált »Tractatus Arithmetice pratice qui dicitur Algorismus« (1495. Paris) czímű műben a mai millió »*cuento*« szóval van jelölve, a mai billió pedig »million«-nal.

Láttuk az eddigiekből egyrészt azt, hogy a tudományos nyugaton kizárólag uralkodtak a hatvanas törtek, másrészt érintettük azon nyelvbeli nehézségeket is, melyek éppen a tízes rendszernél uralkodtak. Ezen két akadály állott a tizedes törtek feltalálásának utjába. De legyőzettek emez akadályok két oldalról: a gyökérvonás módszereinek fejlődése s a trigonometriai tábláknak pontossága által.

---

[1]) Baltzer, i. m., p. 62.

[2]) »Nouvelles Annales de Mathématiques.« 1878. Février. p. 95—96.

[3]) Klügel, II, 720.

[4]) Treutlein, p. 42, 43.

Hankel [1]) művében olvassuk, hogy már az indusok éltek oly gyökérvonási módszerrel, mely némikép összefügg a tizedes törtekkel:

»Decimalbrüche im heutigen Sinne kommen nicht vor; doch hängen die Inder bei Wurzelausziehungen, die mit grösserer Genauigkeit vorgenommen werden sollen, eine Anzahl Nullen an und dividiren dann den so erhaltenen Werth durch die entsprechende Potenz von 10.«

Európában Sevillai János (Hispalensis) rabbi a 12. században volt az első, ki — Cantor [2]) magát rectificáló tanusága szerint — Arithmeticájában a tizedes törteknek tudatos hasznát veszi a gyökérvonásnál; mivel azonban Hispalensis valószinüleg önállóan nem dolgozott, alig fér hozzá kétség, ha állítjuk, hogy a tizedes törteknek e téren való alkalmazása még régibb időkre viendő vissza. Megerősíti ezen állitásunkat Chasles [3]) is, ki írja:

». . . . Thatsache ist, dass im 13-ten Jahrhundert (más irók a 12.-be helyezik!) Johannes Hispalensis unter dem Titel *Algorismus* ein Werk über Arithmetik geschrieben hat, welchem sich beigefügt findet die Auflösung der Gleichung des zweiten Grades, ausgezogen, wie er sagt, aus dem Buche *De Gebra et Mucabala*.« [4])

Legtisztább fogalmat szerezhetünk Hispalensis gyökérvonási módszeréről Friedlein leirásából, [5]) mely szó szerint így hangzik:

»Végül előadatik a gyökérvonás zéróknak hozzáfüggesztése által. A gyökérnél annyi helyet tartunk meg, a mennyi a hozzáfüggesztett zéróknak fele; azon helyek, melyek még fennmaradnak, adják a fokokat; a perczeket, másodperczeket sat. rendre nyerjük a megtartott számoknak 60-nal való szorzása s azon félnél túl maradt helyeknek elvétele által. Pl. $\sqrt{2} = \sqrt{2000000} = 1414$-et aliquid modicum. 6 zero függesztetett hozzá, három hely tartatik meg, ezeken felül van 1, tehát nyertünk 1^0-ot; $414.60 = 24840$, három hely megtartatik, ezeken túl marad 24, van tehát $24'$; ép így nyerünk $50''24'''$ . . . Ugyanezen eljárás« — mondatik tovább — »akkor is alkalmazható, ha az egészek mellett még *fractiones*, azaz perczek, másodperczek sat. is vannak adva, mely esetben ugyanis mindent a legkisebb nevezetre kell hozni, zérókat kell hozzáfüggeszteni, a gyökeret kivonni s ezt ismét felsőbb nevezetre átalakítani.«

---

[1]) Hankel, p. 185. Jegyzet.

[2]) Cantor (Dr. M.), Mathem. Beiträge zum Culturleben d. Völker. Halle, 1863. p. 275.

[3]) Chasles — Sohncke, p. 631. Jegyzet 304.

[4]) V. ö. Nesselmann, i. m. p. 51. s köv.

[5]) L. Günther, Untersuchungen, p. 106 — 107.

Ha ezek után olvassuk Hoefer [1]) következő szavait:

»*Jean de Séville*, ou *de Luna*, . . . On y trouve un procédé d' extraction des racines carrées à l'aide des fractions décimales, procédé qui fut plus tard présenté par Cardan et considéré comme nouveau. Mais ce procédé remont luimême à Theon le jeune, du quatrième siècle. Ce commantateur de Ptolémée (Euklidesről egészen megfeledkezik!) exécutait avec les fractions sexagesimales ce que Jean de Sévilla faisait avec les fractions décimales.«

csak bámulni lehet M. Hoefer fogalomzavarát. Mert Friedlein leirásából határozottan kitünik, hogy Sevillai János a gyököret sexagesimalis és nem decimalis törtekben nyerte; s ha továbbá összehasonlitjuk Hispalensis módszerét Theon-éval, [2]) a kardinális különbség:

1) ott lelhető fel, hogy Theon nem függesztett az adott számhoz zérópárokat, míg Hispalensis azt teszi;

2) mig Sevillai J. módszere pontos, addig Theon-é csak megközelitő, mint ezt maga Theon is mondja. Sevillai János módszere csak éppen abban egyezik Theonéval, hogy mindkettő sexagesimalis törtekben kapja a gyököret. [3]) Hogy Cardanus-étől mily feltünően üt el a Sevillai János módszere, az alábbiakból ki fog tünni elég világosan.

A Sevillai János módszere azonban, bár feltehető, hogy éppen egyszerűsége miatt szélesebb körökben is elterjedt, mégsem termette meg a tizedes törtek fejlődésének érdekében gyümölcseit, minek oka abban rejlett, hogy e módszer a sexagesimalis törtek szolgálatában állott, melyeknek pedig a csillagászatban a decimalis törtek fölött meg volt azon előnyük, hogy sokkal nagyobb összetartósággal biró sorokat szolgáltattak, mi azon kor inyjének inkább felelt meg — bár csillagászati észleleteinek pontossága nem érte el a másodperczet, de mindamellett számitásaiban használta a secundákat, tertiákat sat.

E módszerrel ujból vélek találkozni a már többször említettem Gmundeni János-nál, ki a 15. század elején irt »Tractatus de minutiis physicis« czimű — már egyszer említett — latin nyelvű művében közöl a gyökérvonásra egy módszert, [4]) melyet a következőkben iparkodom visszaadni:

»Arra nézve pedig, miként találjad valamely páros nevű számnak igen

---

[1]) Hoefer (Ferd.), Histoire des Mathématiques. Paris 1874. p. 320.

[2]) L. Nesselmann, p. 144—146.

[3]) Legujabban jelenti Günther a Köenigsberger-Zeuner-féle »Repertorium etc.« II. k. 3. füzetének 180. lapján, hogy ő önté először algebrai alakba Theon négyzetgyökér-vonási módszerét a cseh tud. Akademia 9. kötetében (6. Folge).

[4]) L. Gerhardt, i. m. p. 7.

közeli és pontos gyökerét, vagy visszavezetve páros elnevezésre vagy pedig egészekre: irj . . . zérókat (cifras), a mennyit csak akarsz, azonban páros számmal, jobbra, s mennél többet függesztettél hozzá, annál pontosabban nyered a gyökeret; fejtsd ki azután a gyökeret az egész aggregatumból, s ha maradna valami, az tekintet alá nem esik (pro nihilo computetur); a gyökérből azután, melyet nyertél, mozdíts el anynyi számjegyet (figuras), a mennyi a hozzáfüggesztett zéróknak fele s helyezd el azon jegyeket az első számjegyektől [t. i.] jobbra, s a maradék, mely visszamarad balra a gyökér, melyet bonts fel részekre, s (mely) egész szám lesz, ha a szám, melynek gyökerét kereséd egész volt. Ha ellenben tört (minucie) lett volna, a gyökér is törtekből álland, melyeknek neve függ a középső helytől az egészek felé, mint mondva volt előbb; szorozd meg azután a számjegyeket, melyeket elmozdítottál, .60. által s abból, mi kijön, válaszsz el jobbfelül annyi jegyet, mely akkora, mint a hozzáaggatott zéróknak félszáma, mint előbb, — s a fennmaradtat tartsd meg a másik visszamaradttal, melyet előbb őriztél meg; s (ez) első percz lesz, ha a szám, melynek gyökere kerestetéк egész. Ha ellenben tört vala, akkor azon maradék tört lesz, melynek neve a gyökérnek előbb elválasztott részének nevét közvetlenül követő alsóbb nevezet (denominata a numero immediate sequenti denominationem radicis prius servate), úgy hogy ha a gyökér első percz vala, a kijövő szám másodpercz lesz, s ha másodpercz volt, a kijövő szám harmadpercz leend sat. Ezután a jegyeket, melyeket utoljára különitettél el szintén szorozd meg .60.-al s azon számból, mely kijön mozdits el jobb részről — mint előbb — annyi jegyet, mint a mennyi a fele azon zéróknak, melyeket először adtál hozzá; a fennmaradtakat tartsd meg éppen úgy, mint a többi maradékokat s nyerni fogod a következő törtrészek számából amaz utolsót, melyet megőriztél; azután ismét szorozd az utoljára elmozdított jegyeket — mint előbb — .60.-nal s különitsd el a zéróknak fele számú jegyeit, a maradék a következő tört . . . . s tedd ezt annyiszor, a hányszor csak akarod, hogy pontosan nyerjed a gyökeret fokokban, perczekben, másodperczekben, harmadperczekben és negyedperczekben, és így, míg megelégszel.«

Legyen e helyt *először* figyelmeztetve a Gmundeni János és Sevillai János módszereinek azonosságára, mely ugy látszik az e tárgygyal foglalkozó szakférfiak figyelmét egészen kikerülte. Összehasonlítva e két módszert, köztük a legparányibb eltérés sem fedezhető fel.

Megemlitettük értekezésünk elején, hogy Cantor egykoron Cardanus-nak tulajdonitotta a tizedes törtek feltalálásának dicsőségét; bár később az általunk már említett Sevillai János-ban vélte felfedezni azoknak feltalálóját (l. p. 207.) Hogy lássuk mennyiben volt okadatolva Cantor-nak ezen véleménycseréje s mennyire jogosult Hoefer-nek fennebb idézett állítása: közöljük Cardanus gyökérvonási módszerét ezennel magyar nyelven: [1])

»Függeszszünk azon számhoz, melyből gyökeret kell vonni, annyiszor 00-t, a hányszoros megközelitést óhajtunk (quotiens volueris invenire praecisionem propinquiorem.) Igy ha 00-t függesztünk hozzá, $\frac{1}{10}$-ig terjedő pontosságot nyerünk; ha 0000-t függesztünk hozzá, $\frac{1}{100}$-ig terjedő pontosságot nyerünk; ha 000000-t függesztünk hozzá, akkor $\frac{1}{1000}$-ig terjedő pontosságot kapunk . . . . és így mindig egy a hozzácsatolt zerok felének megfelelőt.«

Ha pl. $\sqrt{17}$ keresendő a tizezredrészekig terjedő pontossággal, akkor nyolcz zérót kell hozzáfüggeszteni, s ha ily módon azt kapjuk, hogy $\sqrt{1700000000} = 41231$, akkor még jobbról négy hely különítendő el (»auffer 4. litteras a dextra«) s így találjuk gyökérnek: $4\frac{1231}{10000}$.

Összehasonlítva ezen módszert Hispalensis-ével látjuk, hogy mindkét módszer egyenlőkép indul meg: mindkettő zéró-párokat függeszt az adott számhoz; de végük már nagyon is különbözik: mig t. i. Hispalensis sexagesimalis törtekben nyeri az eredményt, addig Cardanus decimalis törtekben kapja a gyökeret, bár az ő jelölése különbözik is a ma használttól. S ha Treutlein [2]) azt mondja, hogy e módszer hasonlókép fenntalálható egy zsidó nyelven írt és valami »*Rabbi Elia qui cognominatur Orientalis*« által *régen* (»olim«) kiadott munkában, mely 1546. Münster Seb. és Schreckenfuchs által adatott ki ujból az eredeti szövegben és latin fordításban; »dass der erhaltene Zahlwerth nicht in gewöhnlichem Bruche stehen bleibt, sondern schlieslich in Graden, Minuten . . . der 60 theiligen Brüche dargestellt wird, ändert an de Methode nichts«:

úgy mi Treutlein ezen szavait nem írjuk alá feltétlenül; mi, kik más szemüvegen át vizsgáljuk ezen dolgokat, — a tizedes törtek behozatalára való különös tekintetből — éppen abban látjuk a haladást, a mi — Treutlein szerint — nem változtat a módszerben. Szerintünk Elia rabbi módszere inkább símul Sevillai János-éhoz, mint Cardanus-éhoz, s ez utóbbi annyiban terjesztette ki

[1]) Latin nyelven található: Cantor, »Petrus Ramus, ...« Schlömilch's. Zeitschr. 2. évf. p. 373. és Günther, Untersuchungen. p. 111; német forditásban: Treutlein, i. m. p. 69—70.

[2]) Treutlein, p. 70.

a tizedes törteknek használatát, a mennyiben nála a gyökérben *is* előfordul. Ha keresni akarunk már valakit, kivel Cardanus módszerét össze lehetne hasonlítani, ugy ez — csakis az indusok lehetnek, kiknek — fentebb vázolt — módszere Cardanus-éval — az eredményt illetőleg legalább — tökéletesen egybevág.

Ebből már most következik, hogy mi nem tarthatjuk jogosultnak Cantornak vélemény-cseréjét sem, sőt egyedül alaposnak éppen Cantor régebbi véleményét tartjuk, mert az eléadottakból határozottan kitünik az, hogy Cardanus sokkal nagyobb terjedelemben karolta fel a tizedes törteket, mint Sevillai János. Evvel — ugy hiszszük — Hoefer-rel is leszámoltunk!

Treutlein [1]) még azon alapon is kétségbe vonja e módszernek Cardanus-tól való eredetét, mert szerinte már 1495. található az Sanchez-nél, és később (1540.) Gemma Frisius-nál. De ezen állítás annál kevésbbé látszik nekem bebizonyitva, mert más iróknál ezt nem tudtam fellelni; de megengedve is azt, hogy e módszer ezen két irónál is előfordul, ez nem zárja ki azt, hogy Cardanus ezen módszerre önállólag jutott. — Cardanus-sal körülbelül egy időben az angol Buckley is alkalmazza már a tizedes törteket ugyancsak a gyökérvonásra. Kästner [2]) írja erre vonatkozólag:

»Das älteste Beyspiel, dass ich kenne, giebt mir Wallis Alg. c. 9. Wilchelm Buckley, der zu Eduard VI. Zeit lebte und um 1550. gestorben sein mag, hat eine *Arithmeticam memorativam* hinterlassen, die Wallis bey Setoni Logica, Cambridge 1631. fand, nicht weiss, ob sie eher erschienen ist. Sie ist in lateinischen Versen verfasst, folgende für Ausziehung der Quadratwurzel durch Näherung:

Quadrato numero senas praefigito ciphras
Producti qũadri radix per mille secetur.
Integra dat Quotiens, et pars ita recta manebit
Radici ut verae, ne pars millesima desit.« [3])

Ezen versek azt akarják kifejezni, hogy a gyökeret az egység ezredrészeiben nyerjük, ha a négyzet-számhoz három pár zérót függesztünk. »Ein wenig Nachdenken — folytatja Kästner [4]) — lehrte den Schüler das auf Zehntausendtheile u. s. w. zu erstrecken, vielleicht fand man solche Schärfe nicht für nöthig.«

A tizedes törtek előfordulnak még sporadice a 16. század német mathematikusainak műveiben is. Igy olvassuk Treutlein művében, [5]) hogy Drobisch

---

[1]) Treutlein, p. 70.
[2]) Kästner, i. m. Bd. I, p. 48., c. 24.
[3]) U. e. verset Kästner után közlik : Treutlein, p. 70 ; Günther, Unt. p. 114.
[4]) Kästner, p. 49.
[5]) Treutlein, p. 70.

Riese Ádám (1550.) nagyobbik művében bukkant Cardanus módszerére; »es ist ihm entgangen — teszi hozzá Treutlein — dass in Chr. Rudolff's Coss (1525.)... jene Annäherungsmethode sich angewandt findet und zwar bis auf tausendteil'.« S ha más oldalról még fontolóra veszszük azon haladást, melyről Gerhardt [1]) értesít minket:

»In Betreff der Division durch 10, 100, 1000, u. s. w. giebt Rudolff (in seinem Rechenbuch, das im Jahre 1526 erschien) zunächst die Regel so viel Ziffern, als der Divisor Nullen enthält, im Dividendus ‚*mit einer Virgel*' abzuschneiden, ...«:

ugy bebizonyítva látjuk azt, hogy *a tizedes törteknek mai jelölésmódja először* Rudolff Kristóf *műveiben található fel.* E jelölés — mint látni fogjuk alább — Bürgi és Kepler által lett ujra felelevenitve.

A tizedes törteknek egy másik érdekes jelölés módja található Riese közönséges számvetési művében (1533.), valamint Menher-nél (1565.) is; ezeknél előfordul ugyanis a következő Tabula radicum quadratorum [2]):

1	1	1000		7	645		13	606
	2	414		8	828		14	741
	3	732	3	9	1000		15	873
2	4	1000		10	162	4	16	1000
	5	234		11	316		17	123
	6	449		12	464		......	;

mely táblázatból kitünik, hogy a második oszlopban állnak az adott számok, a megfelelő négyzetgyökereknek egészei az első, tizedes részei pedig a harmadik oszlopban. Ezen gyökereknek kikeresése Cardanus módszere szerint adatik elő.

Látjuk az eddigiekből, hogy a főfeladatnak megoldása — adott irrationalis számoknak négyzetgyökereit megtalálni — mellékterményül szolgáltatta a tizedes törteket. De a tizedes törtek feltalálásának történetében azon nevezetes tüneménynyel találkozunk — mi különben éppen nem áll magában a mathematika történelmében — hogy egy a most vázoltamtól egészen elütő vizsgálódási irány szintén — és pedig egészen függetlenül — eredményezte a tizedes törteknek feltalálását; ezen más irány nyilvánult — mint már egyszer említve volt — azon törekvésben, hogy a csillagászok lehetőleg pontos trigonometriai tábláknak birtokába jussanak.

---

[1]) Gerhardt, p. 39.

[2]) Treutlein, p. 71.

Gerhardt [1]) a tizedes törtek feltalálásának századát ekként jellemzi:

»Durch das ganze 16. Jahrhundert geht ein Zug, die Trigonometrie und die trigonometrischen Tafeln auf dem möglichsten Grad von Genauigkeit zu bringen, ein Zug, den François Viète (Vieta) treffend charakterisirt: Ex angulis latera, vel ex lateribus angulos, et mixtim in Triangulis tam planis quam sphaericis assequi, summa gloria Mathematici est: sic enim Coelum et Terras et Maria foelici et admirando calculo mensurat.«

A lelkesedést és kitartást, valamint az áldozatkészséget, melylyel ezen eszmének megvalósitása járt, legjobban illustrálja azon herkulesi munka, melynek elkészitéséhez *Rheticus* (Georg Joachim; sz. 1514, megh. 1576. Kassán, Magyarhonban) 12 éven át folyton nehány számolót tartott elfoglalva és sok ezer forintot ráfordított; de befejezését mégsem élhette meg, mert a munka csak halála után lett befejezve Otho Valentin által 1596., kit az akkori császár, továbbá a szász s a pfalzi uralkodó herczegek tekintélyes pénzösszegekkel támogattak az 1468 oldalra terjedő »Opus Palatinum de Triangulis« cimű munka létrehozásában. [2])

Emlitettük fentebb már, hogy a csillagászatban a chaldaeusok sexagesimalis rendszere befolyásolta a szellemeket, s hogy Ptolemaios a kör küllőjét 60 hosszegységből állónak vette fel. — Az 1080. év körül élő arabs Arzachel összevegyítette a tízes rendszert a hatvanassal, a mennyiben a kör átmérőjét $\frac{60.10}{2} = 300$ részre osztotta fel. [3]) A bécsi egyetem hires tanára Peurbach (1423—1461) 60.10000 = 600000 részre felosztottnak vette fel a kör küllőjét (a »sinus totus«-t); [4]) míg ép oly munkás mint genialis tanitványa Regiomontanus [5]) (Johannes Müller, Königsbergből; 1436—1476) majd 6 millió, 10 m. és 600 m., majd ismét 60000, majd végre — a tangenseknél (melyek különben már Abulvefa-nál is előfordulnak) 100000 részből állónak tekintette a kör küllőjét. Sokan — mint már érkezésünk elején is láttuk — Regiomontanus-nak tulajdonitanak egy főérdemet a tizedes törtek alkalmazása körül, bizonyosan azért, mert nála a küllő legnagyobb részt 10-nek valamely hatványa. Ezt az okoskodást olvashatjuk ki Cantor [6]) következő szavaiból is:

---

1) Gerhardt, p. 112.
2) V. ö. Gerhardt. p 88—93.
3) Günther, Unters., p. 108.
4) Günther, Unters., p. 108.
5) L. Gerhardt, p. 16—17.
6) Cantor, Recensioja. »Alexander Zigler, Regiomontanus, ...« fölött; Schlömilch's Zeitschrift. 19. Jahrg. Literaturzeitung. p. 49.

»Derselbe (t. i. Regiom.) war kühner und consequenter als sein Lehrer. Er setzte in einigen seiner Arbeiten den Halbmesser = 10 000 mit durchweg dezimaler Unterabtheilung und *hat damit das Seinige zur Verbreitung der Dezimalbrüche in Europa beigetragen;*«

továbbá Gerhardt [1]) következő Regiomontanusra vonatkozó passusából:

»Ueber die zweite Tafel für den Radius 10 000 000 ist nichts beigebracht. Mit dieser letzteren, die *einen Fortschritt zur Dezimalrechnung bezeugt,*....«

Ezen okoskodásoknak logikai összefüggése előttem meglehetősen homályos. Legtöbb port hint azonban az olvasónak szemébe e tárgyra vonatkozólag Suter, [2]) ki azt állítja Regiomontanusról, hogy ez

» . . . . meghatározta a sinusokat *a sugár milliomodrészében,* a mi már jelentékeny lépés a tizedes rendszer felé.«

Suter-nek ezen szavai, melyek meglehetős fogalomzavarról tesznek tanuságot — számba már csak azért sem jöhetnek, mert irójuk elfelejti előre megemlitni azon itt valóban kardinális kérdést, hogy R. hány részre gondolta felosztva a küllőt? A mai olvasó, ki hozzá van szoktatva mindenütt »$r=1$«-et látni, ama bizonyos »milliomodrész«-ben csakugyan tizedes törtet lát — ugy mint Suter; de ha figyelembe veszszük az előrebocsátottakat s meggondoljuk pl. csak azon esetet, midőn r=10 millio: belátjuk, hogy ama bizonyos »milliomodrész« éppen nem tizedes tört, hanem még mindig tízes egész, és pedig a jelen esetben »tízes.« Hisz' éppen hogy a törteket kikerüljék, vettek fel a 16. század csillagászai oly nagy küllőt, úgy mint ma — ugyanily czélból — a logarithmus táblákban is a küllő = 10^{10}-nek vétetik!

Mi részünkről legalább Regiomontanusnak fentebb kifejtett módosításaiban éppen nem tudjuk felfedezni azon nagy érdemet, melyet a német mennyiségtani történetirók nagy része ezen honfitársukra octroyál; sőt határozottan aláírjuk az éles itélőtehetséggel s bámulatos olvasottsággal biró Wolf Rudolf véleményét, ki következő szavaival:[3])

Regiomontan dem manche, weil er den Sinus totus von 60 000 auf 100 000 erhöhte, sogar die Einführung der Decimalbrüche zuschreiben wollten, ...«

szakít a hagyományos német nézettel.

Bár határozottan tagadnunk kell azt, hogy a tizedes törtek dolgában valamit köszönhetünk a hires königsbergi tudósnak, mégis el kell ismernünk

---

[1]) Gerhardt, p. 17.

[2]) Suter (Dr. Henrik), A mathem. tudományok története. Első rész. [A többi rész nem forditatott még le magyarra!] Ford. Lederer S. Budap. 1874. p. 130.

[3]) Wolf, i. m. p. 108.

azt, hogy ő példa gyanánt szolgált utódainak abban, hogy már ezután kizárólagosan használtassék a sugárnak tízes felosztása. E tízes felosztás előnyeit a hatvanassal szemben utódai csakis Regiomontanustól tanulhatták, s az ő példája elég volt arra, hogy utódai egyedül 10-nek valamely hatványával tegyék egyenlővé a kör küllőjét. Igy találjuk, hogy Rheticus-nál r=10000 millió, majd ismét — ellenőrzésül — 100 billió [1]; Pitiscus Bartholomaeus-nál (1561—1613) r=100000, 10000 millió, 1 billió, 100 billió, 10 quadrillió stb. [2]), tehát mindig tíznek valamely positiv egész számú hatványa; az idősb Apianus-nál r=100000; Copernicus-nál szintén ennyi [3]),

Végre — nunc venio ad fortissimum virum! — Bürgi-nek [4]) támadt azon momentuosus gondolata, hogy a *kör küllőjét egyenlőnek vette az egységgel,* minek eredménye az lőn, hogy sinus tábláiban a számokat valódi törtekben kapta, »mit denen leicht zu rechnen ist, da nur ihre Zähler berücksichtigt zu werden brauchen.« Kortársa és barátja Kepler hesseni Fülöp herczeghez írt egyik levelében [5]) ezt mondja:

»Hic haben aber E. F. Gnaden das remedium zu Handen, den E. Gnaden Underthan Jost Byrgius hat die sinus auff ein Neues biss auf acht Figuren gerechnet, und so ich mich recht besinne, auff alle gerade secunda. Er hatt gleichwol das geschriebene Werckh nie von Handen gegeben, noch druckhen lassen.«

Kepler-nek ezen szavai más oldalról jobban világosíttatnak meg Wolf R. [6]) következő sorai által:

»Bürgi giebt nun zunächst eine Anleitung zur Coss oder Algebra, und zwar theils zu den gewöhnlichen algebraischen Operationen, theils aber namentlich auch zu der von ihm muthmasslich unabhängig von Stevin

---

[1]) L. Gerhardt, p. 89.

[2]) L. Gerhardt, p. 93. s köv.

[3]) L. Gerhardt, p. 16, 17.

[4]) Bürgi (Justus Byrgius), kinek neve még a logarithmusok s az ingaóra feltalálásával is szoros kapcsolatban van, sz. 1552. Lichtensteigban (Toggenburgban, Svájczban), hol az óraművészetet tanulta meg, s később — mint vándorló legény — Kasselba érkezett. Mivel kitünő gyakorlati ügyessége mellett még kiváló mathem. talentummal is birt, az akkori uralkodó herczeg őt Rothmann Kristóf astronomusához segédnek nevezte ki. Itt nyerte theoreticus képzettségét — bár latinul nem tudott! 1592. Vilmos herczeg őt bizta meg, hogy egy általa kiváló gonddal készitett tekét vigyen el II. Rudolf császárnak ajándékul Prágába, ki őt később Kepler mellé »Kammer-Uhrmacher-«nak nevezte ki. Prágában volt 1631-ig. Megh. Kasselban 1632.

[5]) Frisch, »Ueber Kepler's Logarithmen und einige Briefe von Kepler.« Grunert's Archiv. Bd. 24. p. 297.

[6]) Wolf R. Astr. Mittheilungen, XXXI. p. 14. s. k.; és Günther, Unters. p. 132.

in den Gebrauch eingeführten Dezimalbruchrechnung. Den grössten Sinus setzt er gleich der Einheit, und alle anderen Sinus drückt er, ganz ähnlich wie es in der Neuzeit gebräuchlich ist, in dieser Einheit aus; nur fehlt das Komma, welches er nöthigenfalls durch eine vor oder untergesetzte Null ersetzt (später scheint Bürgi das Komma ebenfalls benutzt zu haben) . . . .«

Bürgi-nél pl. 0723 $\equiv$ 0,723 ; ha pedig még tízes egészek is fordulnak elő, akkor a következő jelölést használja: $364_0 2 \equiv 364,2$. A vessző, melyet — mint fentebb kimutattuk — Rudolff hozott be, ujból Kepler által lett használatba hozva. [1])

Wolf ezután így folytatja:

» . . . . bei Division oder Wurzelausziehung hängt er dem Dividend oder Radikand, wie wir es zu thun pflegen, nöthigenfalls Nullen an, ...«

Ezekből már most világos az, hogy Bürgi, ki az akkori idők latin nyelven irott mathematikai müveiből nem merithette a tizedes törtekről való ismereteit, ha mindjárt lett is volna szó ezekről az akkor közkézen forgó művekben, — egészen önállólag találta fel ujra a tizedes törteket, melyekre éppen az által vezettetett rá, hogy »$r=1$«-et vett fel, s hogy a tizedes törteket már nemcsak sinustábláiban alkalmazta, hanem az osztásnál s a gyökérvonásnál is.

De legérdekesebb az, mit Kepler egyik 1616. megjelent bor-akoló könyvében [2]) mond e tárgyra vonatkozólag:

»Weil ich kurtze Zahlen brauche, derhalben es oft Brüche geben wirdt, so mercke dass alle Ziffer, welche nach dem Zeichen »(« folgen, die gehören zu dem Bruch, als der Zehler, der Nenner dazu wird nicht gesetzt ist aber allezeit eine runde Zehnerzahl von so viel Nullen, als viel Ziffer nach dem Zeichen kommen. Wann kein Zeichen nicht ist, das ist eine gantze Zahl ohne Bruch, und wann also alle Ziffern nach dem Zeichen gehen, da heben sie bissweillen an von einer Nullen. *Diese Art der Buchrechnung ist von* Jost Buergen *zu der sinusrechnung erdacht* und ist darzu gut, dass ich den Bruch abkürtzen kann, wo er unnötig lang werden will, ohne sondern Schaden der übrigen Zahlen; kann ihn auch etwa auff Erhaischung der Notdurfft erlengern. *Item lasset sich also die gantze Zahl und der Bruch mit einander durch alle species arithmeticae handlen wie nur eine Zahl.* Als wann ich rechne

---

[1]) Gerhardt, p. 77. Jegyzet.

[2]) Kepler, Opera omnia, ed. Frisch. Vol. V. p. 547. ; R. Wolf az i. h. és Günther, i. m. p. 133.

365 Gulden mit 6 percento, wievil bringt es dess Jars Interessen? das stehet nun also:

$$\begin{array}{l} 3(65 \\ 6 \text{ mal} \\ \hline \text{facit } 21(90 \end{array}$$

und bringt 21 Gulden und 90 Hundertheil oder 9 Zehentheil, das ist 54 Kr.«

Kepler ezen szavaiból kitünik egyrészt, hogy ő egészen tisztában volt a tizedes törtek előnyeivel és széleskörű alkalmazhatóságaival, másrészt pedig, hogy Bürgit tartja a tizedes törtek feltalálójának.

Sokan Bürgi-nek tulajdonítják még a logarithmusok feltalálását is. Igy Kästner történeti művében [1]) olvashatjuk:

»Justus Byrgius . . . . hat Logarithmen erfunden den Decimalsystem gemäss, und zu arithmetischen Gebrauche: dass er seine Erfindung bekannt zu machen zögerte, liess Nepern die Ehre Erfinder der Longarithmen (!) zu sein.«

Továbbá Wolf R. írja ugyane tárgyra vonatkozólag: [2])

»Es ist für diese beiden Männer (Bürgi und Napier,) welche somit in der Geschichte der Erfindung der Logarithmen immer *neben einander* genannt werden sollten, ehrenvoll, ...«

Végre Mädler [3]) szerint plane »nach Einiger Versicherung« Bürgi titokban tartotta volna a logarithmusok feltalálását.

De mindezen állításokkal szemben legyen szabad csak Matzka [4]) következő sorait idéznem:

»Es hat sich bekanntlich unter Mathematikern die ganz gewöhnliche Ansicht geltend gemacht, dass Byrg, mindestens mit Neper gleichzeitiger, wenn nicht sogar früherer, folglich eigentlicher Erfinder der Logarithmen sei . . . . Allein . . . . ich sehe mich gezwungen, diese Anschauung aufzugeben. Ich entschloss mich hiezu allerdings um so schwerer, als ich — ein Vollblut-Deutscher — es viel lieber gesehen hätte, wenn es möglich wäre, diese so wichtige Erfindung unserem grossen Volke unbedenklich zuschreiben zu dürfen. Doch der Wahrheit und Gerechtigkeit muss die Vorliebe zu den Stammgenossen weichen . . . . mithin ist es unumstösslish entschieden, dass weder unser geistreicher Mathematiker

---

1) Kästner, i. m. II. p. 375. cap. 60.

2) Wolf R. Dr., Johannes Keppler und Jost Bürgi. Zürich, 1872.

3) Mädler, i. m. I. p. 184., 187.

4) Matzka (Dr. W.), »Ein kritischer Nachtrag zur Gesch. d. Erf. d. Log.« Grunert's Arch. XXXIV. 341—354.

STIEFEL, noch unser findiger Praktiker BYRG, *sondern bloss der scharfsinnige schottische Gelehrte* NEPER, *und nur er allein, für den Erfinder der Logarithmen angesehen werden kann und muss.«* [1])

NEPER-nek e téren való prioritása BÜRGI fölött ezzel — úgy hiszszük — el van döntve.

De térjünk már most ezek után át a már többször említett STEVIN SIMON-ra, a hydrostatikai paradoxon híres felfödözőjére, kit általánosan a tizedes törtek feltalálójául tartanak, és vizsgáljuk meg az eddigiek alapján: mennyiben illeti őt meg e dicsőség.

Nálunk dr. CSÁSZÁR K. úr a középtan. Tanáregylet egyik közelmult ülésében felolvasott értekezésében — TREUTLEIN már több helyütt idéztem értekezése alapján — STEVIN-t a »tizedes törtek felfedezője« ként tünteté föl bár TREUTLEIN essay-jének egy árva sora sem engedi meg ezen következtetést. TREUTLEIN egyedül »a tizedes törtekről szóló tannak első összeállítója«-ként ismerteti meg STEVINT, s annak »La Disme« (1585.) czímű művecskéjét. [2])

Ha STEVIN-t megilletné a tizedes törtek feltalálásának dicsősége, akkor földije QUETELET volna mindenesetre az első, ki ezért neki odaitélné a babért. QUETELET ugyanis, miután szükségesnek tartotta előrebocsátani a következő sorokat: [3])

»L'opinon publique présente aussi SIMON STEVIN comme l'inventeur du calcul décimal; mais cette opinion est-elle bien fondée? Et d' abord on pourrait se demander ce qu'on entend par invention. Est-ce, comme le mot semble l'indiquer, l'idée première que l'on a d'une decouverte importante? Mais cette idée se présente en général d'une manière si obscure, si embarassée, qu'il est bien souvent impossible, même pour celui qui l'a conçu, d'en apprécier toute la portée. Il reste presque toujours un second travail a faire: c'est celui qui consiste à feconder l'invention et à mettre si bien en évidence l'utilité que peuvent en retirer les hommes, qu'elle

---

[1]) Legközelebb E. GERLAND: »Zur Geschichte der Erfindung der Pendeluhr« czimű értekezésében (Wiedemann, Annalen d. Physik u. Chemie. Neue Folge. Bd. IV. Hft. 4. 1878. Nro. 8. p. 585—613) Günther és Wolf R. ellenében tagadja, hogy Bürginek az ingaóra feltalálása körül valami érdeme volna. G. tanulmányának zárószavai a következők (p. 613.):

»Bürgi und Treffler haben an der Erfindung der Pendeluhr nicht den geringsten Antheil. Dieselbe gehört Galilei und Huygens, die beide unabhängig von einander darauf kamen. Da jedoch dem ersteren dieselbe 15 Jahre früher, wie dem letzteren gelang, so ist die Pendeluhr ein Werk Galilei's.«

[2]) Treutlein i. m. p. 84.

[3]) Quetelel, Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques cher ies Belges. Bruxelles, 1864. p. 156.

prenne désormais un rang assuré dans les sciences. Cette seconde création est sans contredit la plus importante, c'est celle qui donne l'âme et la vie . . . .«

nehány sorral alább [1]) e kérdésre vonatkozólag a következő nagyfontosságú nyilatkozatot teszi:

Quoique plusieurs contemporains et prédécesseurs de Stevin aient fait usage des fractions decimales dans quelques circonstances particulières, par exemple, pour l'extraction des racines, il paraît néanmoins que notre compatriote a eu l'honneur d'avoir le mieux apprécié la simplicité et la généralité de ce calcul, et de l'avoir appliqué à toutes les opérations de l'arithmetique usuelle.

Szerintünk egyedül Quetelet mond helyes itéletet Stevin-nek a tizedes törtek tana körül szerzett érdemei fölött; s Günther [3]) nagyon is túl lő a czélon, midőn Stevin-t a tizedes törtek »második feltalálójá«-nak nevezi — állítólag Quetelet után. — A mi felfogásunk szerint legalább Quetelet a »second création« szóval egészen mást akart mondani. — S ha Stevin azt mit ő nyujt, maga sem nevezi »egy bámulatos találmánynak, hanem oly egyszerü dolognak, hogy némileg meg sem érdemli a találmány nevét, mert valamint egy buta paraszt tisztán véletlenül egy nagy kincset talál, a nélkül, hogy ennél bármi tudományt érvényesített volna, ugy a mi esetünkben is — mondja Stevin [3]) — egészen hasonló dolog történt«: ugy könnyen belátlatható, hogy egyedül ezen kétértelmű szavakban rejlik oka annak, hogy némelyek őt tartják a tizedes törtek felfedezőjének.

Ha mi már Stevin-ben sem ismerjük el a tizedes törteknek feltalálóját, annál kevésbbé fogadhatjuk el Dr. Peabock (értekezésünk elején idézett) azon állítását, mely szerint Girard volna azoknak feltalálója. Girard ki tudvalevőleg Stevin munkáit adta ki, [4]) a tizedes törteknek idézett jelölését éppen Stevin-től vette át.

Foglaljuk össze már most tanulmányunk eredményét: kitünik az eddigiekből, hogy a tizedes törteknek feltalálására okot adott a négyzetgyökérfejtés irrationalis számokból és a trigonometriai tábláknak lehető pontos szerkesztése. Kimutattuk, hogy legelsőbben a 12. században élő *sevillai János* rabbinál találkozunk egy gyökérvonási módszerrel, mely már alkalmazza a tizedes törteket, bár a gyökeret sexagesimalis törtekben kapja; ezen módszert legszebben találjuk kifejtve *gmundeni János*-nál. Haladást mutat e módszer

---

[1]) Quetelet, p. 158.

[2]) Günther, Unters. p. 114.

[3]) Treutlen, p. 85.

[4]) L. Günther, Unters. p. 114.

Cardanus-nál és Buckley-nél, kiknél a gyökér már közönséges törtek alakjával bíró tizedes törtek. Egészen más úton — 10 hatványaival való osztás által — jutott Rudolff Kristóf a tizedes törtekre s azoknak mai jelölés módjára, mely feledésbe menvén át, újra behozatott Bürgi, bizonyosabban Kepler által. De egyedül rationalisan s elődeitől egészen függetlenül, Bürgi találta fel ujra azokat, s használta már mai alakjukban sinus tábláiban. Stevin volt az első, ki »La Disme« czimű füzetkében először írta meg a tizedes törteknek — és csakis ezeknek — rendszeres tanát, hangsúlyozva egyúttal azoknak előnyeit a közönséges törtek fölött. [1])

IRODALOM.

Prof. Dr. Siegmund Günther: Die Anfänge und Entwicklungsstadien des Coordinatenprincipes. (Denkschriften der Naturforscher-Gesellschaft zu Nürnberg 6. Bd). Nürnberg 1877.

Ha valaki a mathematikai tudományok történelmi fejlődéséről általában vagy pedig csupán csak a geometriai disciplinák fejlődéséről kiván tudomást szerezni, úgy az vagy Montucla, vagy pedig Chasles nagyhírű műveit fogja kalauzul választani. Tekintetbe véve, hogy Chasles munkája a geometria fejlődését, valamint a vele kapcsolatos roppant nagy tárgyhalmazt, mintegy 25 századon át adja, bizonyára nem meglepő, hogy az ily munkánál gyakran helyreigazítások válnak szükségessé, melyek tán leginkább onnét eredhetnek, hogy a bölcs történelemiró előtt az egyik vagy másik forrás, hozzáférhetetlensége, vagy figyelme kikerülése miatt, ismeretlen maradt. Ha ezt Chasles munkájára nézve elfogadjuk, úgy Montucla munkájára nézve annyival inkább áll, minthogy ez nemcsak a mathematikai tudományoknak egy egyes fejezetét, hanem egész összességüket választá tárgyáúl.

A mathematikai tudományok történelmét tárgyaló, most említett két fő-munkában részint a szükségessé vált helyreigazításokat, részint pedig bővebbi kifejezésüket leginkább az utóbbi évtizedekben megjelent történelmi monographiák vitték véghez. Ezek közül első sorban a korán elhúnyt ifjabb Hankel a könyvczímre igényt tartható munkáját, valamint Cantor, Woepcke, Biernatzki,

---

[1]) Quetelet i. m. p. 156. ezt irja ugyanis: Dans la dédicace de son opuscule *la Disme*, il demande qu'on ne juge pas de l'importance de l'invention par l'exiguité du volume: »»Pourtant, dit-il, si quelcun me voulust estimer pour vauteur de mon entendement à cause de l'explication de ces utilitez: sans doubte il demonstre, ou qu'il n'y a en luy ny jugement ny intelligence de sçavoir discerner le chosses simples des ingénieuses; ou qu'il soit envieux de la prosperité commune; mais quoy qu'il en soit, il ne faut pas omettre l'utilité de celui cy, pour l'inutile calomnie de cesluy la.««

Bretschneider, Friedlein, Hultsch, Curtze, Günther stb. értekezéseit említem fel, melyek részint önálló monographiákként, részint pedig különféle mathematikai folyóiratokban jelentek meg.

Hogy mily buzgón kutatják a jelenkor mathematikusai a mathematikai tudományok történelmi fejlődését, arra nézve bizonyítékul szolgálhat, hogy Buoncompagni herczeg már 1868 óta »Bulletino di bibliografia e di storia delle science mathematiche e fisiche« czímű folyóiratát indított meg, melyben csupán csak a mathematika történelmére vonatkozó értekezések jelennek meg.

Szándékom Günther úrnak egy ilynemű értekezését bemutatni, mely a geometria történelmének egyik fejezetét: »A coordinata elv kezdeményeit és fejlődési stádiumait« választá tárgyáúl, s a melynek kezdetén szerző a következőket mondja:

»Aránylag rövid idővel ez előtt valamely történelmi-mathematikai értekezés e czím alatt képzelhetetlen lett volna. Ki a coordinata fogalmának történelmi fejlődését leírni akarja, úgy mondatott volna, annak kell, hogy azon hatalmas alkotás haladását kövesse, mely Descartes elméjét tölté be, hiszen ő a feltaláló, előtte hasonló gondolatok legkisebb nyomai sem találhatók. Chasles, a geometriának halhatatlan történetirója, e nézetre tekintélyének bélyegét nyomta; »Cette doctrine de Descartes . . . . est la seule peut être dont on puisse dire, comme Montesquieu de son esprit des lois, *proles sine matre creata* . . . . .« Ha ez tényleg így volna, úgy egyike a legjelentékenyebb tapasztalati tételeknek, melyet a tudomány történelmének tanulmányozásából abstrahálhatunk, meg volna semmisítve, az a tétel t. i., hogy a tudomány terén még a legeredetiebb jellegű ujításnak is bizonyos fokig előkészitve kell lennie. Ha a tényt a mathematika legmélyebbrehatóbb haladásaiban: Differentiálszámítás, Fourierféle sorok, Determinánsok, a Complex tárgyalása kivétel nélkül fényesen igazolva találjuk, úgy annak érvényességét, mint az a priori helyeset az előttünk fekvő esetben is elvárhatjuk, és állításunkat valóban nyomós és megczáfolhatatlan okokkal támogathatjuk« . . . .

Szerző kutatásainak mintegy kiinduló pontjáúl szintén egy újabb tudósnak, Baltzernek az e tárgyra vonatkozó történelmi jegyzetét veszi, ki Chaslesnak fentebb idézett szavaival ellenkezőleg azt állítja, hogy valamely felületen a pont meghatározását két elem, — abscissa és ordinata — által nem a 17-dik század mathematikusai találták ki. Már régen Archimedes és Apollonius előtt az égi gömbön a pont azimút és magasság, rectascensio és deklinatio, hosszaság és szélesség által határoztatott meg.«

Szerzőnk ez állítás helyességét nagyában elismeri ugyan, de Baltzernél mégis sokkal óvatosabban jár el, figyelmetesebben vizsgálja, hogy vajjon menynyivel Archimedes előtt voltak már a régiek az előbb felhozott ismeretek birtokában, és itt azon végeredményre jut, habár a régieknél is meg volt már a pont meghatározására szolgáló coordinata-fogalom, a kort illetőleg, melyben e fogalmat ismerték, legfelebb Archimedes (287—212 Kr. e.) élettartamának utolsó éveit engedhetjük meg.

Günther az általános coordináta-elv összefoglalásában a következő három főmomentumot különbözteti meg: Az első stadium két már meglevő vagy tetszőlegesen választott egynemü vonalnak felvételében áll, melyekre az operatio-felület pontjai vonatkoztatnak. A második stadiumban még egyelőre szabálytalan görbéhez jutunk, ha bizonyos abscissákhoz az ordinátákat meghatározzuk és az ily módon nyert pontokat egy huzás által összekötjük. A harmadik stadiumba jutunk végre, ha a pontoknak ezen szabálytalan egymásutánságát folytonossá változtatjuk át, azaz egy egyenletnek felállítására x és y között, melynek segítségével minden x vagy y-hoz a hozzá tartozó y vagy x meghatározása válik lehetségessé.

A coordinataelv különböző stadiumainak megállapitása után szerző a legnagyobb gonddal kutatja, vajjon mely stadiumában találjuk kifejtve az ókor és középkor népeinél a coordinátaelvet.

Ebbeli eredményeit a következőkben foglalhatjuk öszsze: a görögöknél a coordinataelv legalsóbb stadiumával találkozunk és evvel is csak részben, minthogy a tiszta mennyiségtanokban éppen nem, és az alkalmazott mennyiségtanban is csak egyes problémáknál, mint nehány csillagásznál és Alexandriai Heronnál található. Noha az arabok görög mestereiknél valamivel tovább haladtak, mégis még náluk is mindig csak egy bizonyos pont coordinátái forognak kérdésben és azon gondolat, melynél fogva a görbe különböző pontjainak coordinatáit összefüző törvény a görbe képviselőjének tekinthető, még náluk sem jutott érvényre. Nicole Oresme (1320—1382) a coordinata-elv második stadiumát is elérte, végre Fermat és Descartes a coordinataelvet teljes hatalmukban birták, még pedig Fermat mintegy hat—hét évvel előbb, mint Descartes. Ezek után szerző a következő fontos következtetést vonja:

A coordináta-geometria tudományos megállapitása három franczia mathematikusnak kizárólagos érdeme.

Legyen megengedve abbéli nézetünknek kifejezést adni, hogy meglepő vala reánk nézve, miként kerülhette ki Fermat prioritása Descartes felett Chaslesnak, e nagyhírű történelembúvárnak figyelmét.

Midőn a jelenleg ismertetett igen érdekes monographiát olvastuk, mindinkább azon meggyőződés gyökeredzett meg bennünk, hogy annak, a ki majd egykor az elemző-mértan keletkezésének és sajátságos módszerének történelmi fejlődését fogja megírni, Günther monographiája történelmi tanulmányának igen tanulságos bevezetését fogja képezni. H. J.

ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIAI ÉRTEKEZÉSEK KÖZÉPISKOLÁINK PROGRAMMJAIBAN.

A mult években és az idén is sok becses értekezés látott napvilágot azon Értesítőkben, melyeket középiskoláink minden tanév végén kiadnak. Csak az a kár a dologban, hogy e dolgozatok nagyobbrészt teljesen ismeretlen maradnak a szakemberek előtt. Az iskolák igazgatóságai megküldik — vagy gyakran nem is küldik — az Értesítőt a többi iskolákhoz; nehány napilap és folyóirat is kap belőle egy-egy példányt, melynek tartalmát vagy egyszerűen registrálják, vagy kevés avatottsággal birálják. A tudományos dolgozatok ellenben elvesznek, mert azoknak, kiknek legérdekesebbek lehetnének, t. i. szakembereinknek, szemök elé sem kerülnek. Pedig van a sok haszontalan között néha egy-egy becses jó értekezés is, mely bátran helyet foglalhatna tudományos értekezésirodalmunkban. Bizonyára ebből a szempontból itélve, vette birálat alá a »Philologiai közlöny« a körébe vágó programmértekezéseket; s az ő példáját követjük, midőn a következő sorokban röviden ismertetjük az ábrázoló geometriai s vele rokon programmértekezéseket.

1. Szabó József, a másodrendü felületek érintősikjairól. 12 kőnyomatú ábrával. (A győri főreáliskola $187^5/_6$-Értesítőjében és külön). Ezen, úgy látszik tanárvizsgálati házidolgozatból keletkezett értekezés a másodrendű felületek azon érintési feladataival foglalkozik, melyeknél az érintősík érintéspontja nincs adva. Mindenekelőtt lehozza a négy feladat megoldására szolgáló elveket. A mód, melyen bizonyítja, hogy a kívül fekvő pontból szerkeszthető érintőkúp vagy az egyenessel párhuzamos érintőhenger a másodrendű felületet egy kúpszeletben érinti, ugyanaz, melyet Leroy-nál találunk. Az első feladatot (kívül fekvő pontból) megoldja az ellipsoid, egyszerü hyperboloid, az elliptikus és hyperbolikus paraboloidra nézve; a másodiknak (vonallal párhuzamosan) megoldását a három utóbbi felületre nézve adja; a harmadik és negyedik feladatot szintén 3—3 esetben oldja meg. Mindenütt meghatároztatnak azon elemek, melyekből az érintéskúpszeletek szerkeszthetők. Az értekezéshez mellékelt rajzok azért érdemelnek különös figyelmet, mert csinosságuk és pontosságuk által igen jó bizonyítványt adnak Beszédes esztergomi fényképiró photolithographiai módszeréről.

2. *Szirtes Ignácz, egy Apolloniusféle föladat általános alakban* 5 kőnyomatu ábrával. (A pancsovai főreáliskola $187^6/_7$. programmjából és külön). Ez foglalkozik a már Paulus által is tárgyalt feladattal: »adatik két kör; kerestetik oly harmadik, mely az adottakat érintse.« Kimutatja az itt előforduló öt esetet, azután ujabb geometriai úton bizonyítja, hogy az érintőkörök középpontjainak geometriai helyei kúpszeletek. Végül eme képzeleteknek az öt esetben való meghatározásával foglalkozik. Befejezésül kiemeli azt a nagy

hasznot, melyet a szerkesztő geometria a synthetikai módszer alkalmazásából húz, s erre nézve rámutat a tárgyalt feladatra, mely valóban fényesen is igazolja szerző állításait. Mi is melegen óhajtjuk a synthetikai módszer minél szélesebb elterjedését.

3. *Hajduczky József, a hyperboloid központi (central) vetülete és síkmetszései azon esetben, ha a képzetes tengely merőlegesen áll a tábla síkjára.* 4 ábrával (dévai főreáliskola 187$^7/_8$). A mint a czím mutatja, az egyszerű hyperboloid centrál ábrázolásának egy különös esetével foglalkozik. Minthogy Zipernovszky a hyperboloidkörrajz meghatározásának mind a kilencz esetét már tárgyalta, ujnak ezen értekezésben csak az egyenesvonalú alkotókból való meghatározását és a síkmetszet szerkesztését lehet mondani. Ezt az utóbbit szerző azon esetben szerkeszti, melyben az originális és a kép hyperbola; meg vannak határozva a középpont, valódi tengely és végérintők. A hyperboloidot meghatározza táblai átmetszése, irányvonala s egyik alkotója által.

4. *Kreybig Lajos, a napórák szerkesztéséről.* 2 ábrával. (Budapesti II. ker. főreáliskola 187$^7/_8$). Szerző ezen értekezésben az ábrázoló geometriának egyik legérdekesebb alkalmazását mutatja be — úgy látszik — első sorban tanítványainak. Azok után, miket Leroy Stereotomiájában és Sonndorfer Rudolf a napórákról írt munkájában e tárgyról mondottak, szerző ujat nem igen adhatott, de értekezésének főbecsét szép, világos előadásában találjuk. A A szükséges csillagtani előfogalmak rövid megmagyarázása után áttér a régiek napóráinak ismertetésére, melyben különösen az 1741-ben Cicero Tusculumából kiásott Berosus-féle napórát leírja. Ennek az arabs napórákkal való összehasonlításából azt az elvet nyeri, mely az ujabbkori napórák szerkesztésénél is irányadó, t. i. hogy az ujabbkori napóra középponti vetülete a soláris nap óráit meghatározó 12 elhajlási körnek. Ezután áttér a vizszintes és függélyes síklapon alakított napórák szerkesztésére. SUPPAN VILMOS.

FÖLADAT.

38. Ha a P_1 és P_2 pontok összrendezői x_1, y_1, z_1 és x_2, y_2, z_2, úgy az a viszony, melyben a $P_1 P_2$ távolságot a

$$\varphi\,(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{12}xy = 0 \ldots.(1)$$

kúpszelet metszés-pontja osztja a következő egyenlet által van meghatározva.

$$\varphi_2\,\lambda^2 + \{x_1\varphi_2'(x_2) + y_1\varphi_2'(y_2) + z_1\varphi_2'(z_2)\}\lambda + \varphi_1 = 0 \ldots.(2)$$

hol

$$\varphi_1 = \varphi(x_1,y_1,z_1),\ \varphi_2 = \varphi(x_2,y_2,z_2),\ \varphi'(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x};\ \text{sat.}$$

Kérdés mikor lesz a (2)-ből λ minden értékére identitás? mi az identitás föltételének mértani jelentése? és mily feltéti egyenletet nyerünk a kúpszeletek együtthatói között az identitás feltételeiből? (HUNYADY.)

Budapest 1878. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

III. kötet. 1878. 28. füzet.

NÉHÁNY TÉTEL A HEXAGRAMMUM MYSTICUM TELJES IDOMÁRÓL.

Scholtz Ágoston gymn. tanártól Budapesten.

(Folytatás).

5) Az *iklmnp* teljes hatszög által meghatározott 60 egyszerű hatszög Pascal-féle egyeneseinek egyenleteit öt typusra oszthatjuk. Ezen alaki rokonság szerint rendezve a 60 egyenlet a következő:

Első typus.

$$
(13)\qquad
\begin{array}{llllll}
G_{iklmnp} & \text{egyenes} & \lambda' x_1 & + \mu' x_2 & + \nu' x_3 & = o \\
G_{imlpnk} & \text{»} & \lambda x_1 & + \mu x_2 & + \nu x_3 & = o \\
G_{ikpnml} & \text{»} & \lambda x_1 & + \mu' x_2 & + \nu' x_3 & = o \\
G_{ikmlnp} & \text{»} & \lambda' x_1 & + \mu x_2 & + \nu' x_3 & = o \\
G_{iklmpn} & \text{»} & \lambda' x_1 & + \mu' x_2 & + \nu x_3 & = o \\
G_{inplmk} & \text{»} & \lambda' x_1 & + \mu x_2 & + \nu x_3 & = o \\
G_{ilmpnk} & \text{»} & \lambda x_1 & + \mu' x_2 & + \nu x_3 & = o \\
G_{imlnpk} & \text{»} & \lambda x_1 & + \mu x_2 & + \nu' x_3 & = o
\end{array}
$$

A G_{iklmnp} Pascal-féle egyenes egyenletét már fönnebb kihoztuk. Hasonló módon jutunk a (13) alatt álló többi egyenlethez. Például G_{imlpnk} egyenes átmegyen

$$
\begin{array}{lll}
ik \text{ és } lp \text{ azaz } x_1 = o & \text{és} & x_1 + \nu' x_2 + \mu' x_3 = o \\
lm \text{ és } kn \text{ azaz } x_2 = o & \text{és} & \nu' x_1 + x_2 + \lambda' x_3 = o \\
np \text{ és } im \text{ azaz } x_3 = o & \text{és} & \mu' x_1 + \lambda' x_2 + x_3 = o
\end{array}
$$

egyenes-párok metszőpontjain. Ha az első párhoz tartozó egyenleteket $\lambda - \mu\nu$, illetőleg $\mu\nu$; a második párhoz tartozókat $\mu - \nu\lambda$, illetőleg $\nu\lambda$; a harmadik párhoz tartozókat $\nu - \lambda\mu$, illetőleg $\lambda\mu$ mennyiségekkel szorozzuk és azután az egyenleteket minden esetben külön-külön összeadjuk, származik mind a három esetben

$$\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = o$$

egyenlet. Ez tehát az *ik, lp; lm, kn; np, im* pontokon átmenő G_{imlpnk} PASCAL-féle egyenes egyenlete.

Második typus.

$$(14)\begin{array}{lll} G_{iplknm} & \text{egyenes} & \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 + \lambda\mu\nu(\lambda' x_1 + \mu' x_2 + \nu' x_3) = o \\ G_{ilpkmn} & » & \lambda' x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 + \lambda'\mu\nu(\lambda x_1 + \mu' x_2 + \nu' x_3) = o \\ G_{ipmknl} & » & \lambda x_1 + \mu' x_2 + \nu x_3 + \lambda\mu'\nu(\lambda' x_1 + \mu x_2 + \nu' x_3) = o \\ G_{inlkpm} & » & \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu' x_3 + \lambda\mu\nu'(\lambda' x_1 + \mu' x_2 + \nu x_3) = o. \end{array}$$

Ez esetben is csak egynek, például G_{iplknm} PASCAL-féle egyenesnek egyenletét származtatjuk le. Ez egyenes átmegyen

$$\left\{\begin{array}{lcl} mn & & x_1 + \nu x_2 + \mu x_3 = o \\ & \text{azaz} & \\ lp & & x_1 + \nu' x_2 + \mu' x_3 = o; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} ip & & \nu x_1 + x_2 + \lambda x_3 = o \\ & \text{azaz} & \\ kn & & \nu' x_1 + x_2 + \lambda' x_3 = o; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} kl & & \mu x_1 + \lambda x_2 + x_3 = o \\ & \text{azaz} & \\ im & & \mu' x_1 + \lambda' x_2 + x_3 = o \end{array}\right.$$

egyenes-párok metszőpontjain. Az első egyenletpárban levő első egyenletet λ, a másodikat $\mu\nu$ mennyiséggel szorozván és őket azután összeadván, tekintve, hogy $\mu\mu' = 1, \nu\nu' = 1:$

$$(\lambda + \mu\nu)x_2 + (\mu + \nu\lambda)x_2 + (\nu + \lambda\mu)x_3 = o$$

egyenlet származik, melyet a $\lambda\lambda' = 1, \mu\mu' = 1, \nu\nu' = 1$ viszonylatoknál fogva így is írhatunk:

$$\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 + \lambda\mu\nu(\lambda' x_1 + \mu x'_2 + \nu' x_3) = o.$$

Ugyanez egyenletre jutunk, ha a második egyenlet-párban az első egyenletet μ, a másodikat $\nu\lambda$ mennyiséggel, vagy a harmadik egyenlet-pár első egyenletét ν, a másikát $\lambda\mu$ mennyiséggel szorozzuk és a szorzott egyenleteket külön-külön összeadjuk. E származtatás azt bizonyítja, hogy az említett egyenlet-pároknak megfelelő egyenes-párok metszőpontjai egy ugyanazon

$$\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 + \lambda\mu\nu(\lambda' x_1 + \mu' x_2 + \nu' x_3) = o$$

egyenesen feküsznek. E typushoz tartozó többi egyenletekhez hasonló módon jutunk.

Harmadik typus.

$$
(15)\quad
\begin{array}{lcl}
G_{imlknp} & \text{egyenes} & (\mu - \lambda\nu)x_2 - (\nu - \lambda\mu)x_3 = o \\
G_{ilmkpn} & » & (\mu - \lambda'\nu)x_2 - (\nu - \lambda'\mu)x_3 = o \\
G_{ilmknp} & » & (\mu' - \lambda\nu)x_2 - (\nu - \lambda\mu')x_3 = o \\
G_{imlkpn} & » & (\mu - \lambda\nu')x_2 - (\nu' - \lambda\mu)x_3 = o \\
G_{iklpnm} & » & (\nu - \mu\lambda)x_3 - (\lambda - \mu\nu)x_1 = o \\
G_{ikmnpl} & » & (\nu - \mu\lambda')x_3 - (\lambda' - \mu\nu)x_1 = o \\
G_{ikmpnl} & » & (\nu - \mu'\lambda)x_3 - (\lambda - \mu'\nu)x_1 = o \\
G_{iklnpm} & » & (\nu' - \mu\lambda)x_3 - (\lambda - \mu\nu')x_1 = o \\
G_{iplmnk} & » & (\lambda - \nu\mu)x_1 - (\mu - \nu\lambda)x_2 = o \\
G_{inmlpk} & » & (\lambda' - \nu\mu)x_1 - (\mu - \nu\lambda')x_2 = o \\
G_{ipmlnk} & » & (\lambda - \nu\mu')x_1 - (\mu' - \nu\lambda)x_2 = o \\
G_{inlmpk} & » & (\lambda - \nu'\mu)x_1 - (\mu - \nu'\lambda)x_2 = o
\end{array}
$$

G_{imlknp} egyenes egyenletéhez következő módon jutunk. Ez egyenesnek át kell mennie

$$
\left\{\begin{array}{l} im \\ kn \end{array}\right. \quad \text{azaz} \quad
\begin{array}{l} \mu'x_1 + \lambda'x_2 + x_3 = o \\ \nu'x_1 + x_2 + \lambda'x_3 = o; \end{array}
$$

$$
\left\{\begin{array}{l} lk \\ pi \end{array}\right. \quad \text{azaz} \quad
\begin{array}{l} \mu x_1 + \lambda x_2 + x_3 = o \\ \nu x_1 + x_2 + \lambda x_3 = o; \end{array}
$$

$$
\left\{\begin{array}{l} np \\ ml \end{array}\right. \quad \text{azaz} \quad
\begin{array}{l} x_3 = o \\ x_2 = o \end{array}
$$

egyenesek metszőpontjain. Az első csoport első egyenletét szorozzuk $\lambda\mu$, a másodikat $\lambda\nu$ mennyiséggel. Kivonás által ered azután

$$(\mu - \lambda\nu)x_2 - (\nu - \lambda\mu)x_3 = o.$$

Ugyanez egyenlet származik, ha a második csoport egyenleteit ν, illetőleg μ mennyiséggel szorozzuk és az egyenleteket egymásból kivonjuk. Hogy $(\mu - \lambda\nu)x_2 - (\nu - \lambda\mu)x_3 = o$ egyenes a harmadik csoporthoz tartozó egyenesek metszőpontján is átmegyen, az egyenlet alakjából közvetetlenűl látjuk. E typusnak többi egyenleteit ugyanezen módon formálhatjuk.

Negyedik typus.

$$
(16)\quad
\begin{array}{lcl}
G_{iknlpm} & \text{egyenes} & (\mu-\mu')(\nu-\nu')x_1+(\lambda'-\mu\nu)(x_1+\nu' x_2+\mu' x_3)=o \\
G_{ilnmpk} & » & (\mu'-\mu)(\nu'-\nu)x_1+(\lambda'-\mu'\nu')(x_1+\nu x_2+\mu x_3)=o \\
G_{ikmpln} & » & (\mu-\mu')(\nu-\nu')x_1+(\lambda-\mu\nu)(x_1+\nu' x_2+\mu' x_3)=o \\
G_{ipmnlk} & » & (\mu'-\mu)(\nu'-\nu)x_1+(\lambda-\mu'\nu')(x_1+\nu x_2+\mu x_3)=o \\
G_{iknmpl} & » & (\mu'-\mu)(\nu-\nu')x_1+(\lambda'-\mu'\nu)(x_1+\nu' x_2+\mu x_3)=o \\
G_{imnlpk} & » & (\mu-\mu')(\nu'-\nu)x_1+(\lambda'-\mu\nu')(x_1+\nu x_2+\mu' x_3)=o \\
G_{iklpmn} & » & (\mu'-\mu)(\nu-\nu')x_1+(\lambda-\mu'\nu)(x_1+\nu' x_2+\mu x_3)=o \\
G_{iplnmk} & » & (\mu-\mu')(\nu'-\nu)x_1+(\lambda-\mu\nu')(x_1+\nu x_2+\mu' x_3)=o \\
G_{inkplm} & » & (\nu-\nu')(\lambda-\lambda')x_2+(\mu'-\nu\lambda)(\nu' x_1+x_2+\lambda' x_3)=o \\
G_{ipkmln} & » & (\nu'-\nu)(\lambda'-\lambda)x_2+(\mu'-\nu'\lambda')(\nu x_1+x_2+\lambda x_3)=o \\
G_{inkpml} & » & (\nu-\nu')(\lambda-\lambda')x_2+(\mu-\nu\lambda)(\nu' x_1+x_2+\lambda' x_3)=o \\
G_{ipklmn} & » & (\nu'-\nu)(\lambda'-\lambda)x_2+(\mu-\nu'\lambda')(\nu x_1+x_2+\lambda x_3)=o \\
G_{ipknlm} & » & (\nu'-\nu)(\lambda-\lambda')x_2+(\mu'-\nu'\lambda)(\nu x_1+x_2+\lambda' x_3)=o \\
G_{inkmlp} & » & (\nu-\nu')(\lambda'-\lambda)x_2+(\mu'-\nu\lambda')(\nu' x_1+x_2+\lambda x_3)=o \\
G_{ipknml} & » & (\nu'-\nu)(\lambda-\lambda')x_2+(\mu-\nu'\lambda)(\nu x_1+x_2+\lambda' x_3)=o \\
G_{inklmp} & » & (\nu-\nu')(\lambda'-\lambda)x_2+(\mu-\nu\lambda')(\nu' x_1+x_2+\lambda x_3)=o \\
G_{ilpnkm} & » & (\lambda-\lambda')(\mu-\mu')x_3+(\nu'-\lambda\mu)(\mu' x_1+\lambda' x_2+x_3)=o \\
G_{inpmkl} & » & (\lambda'-\lambda)(\mu'-\mu)x_3+(\nu'-\lambda'\mu')(\mu x_1+\lambda x_2+x_3)=o \\
G_{ilnpkm} & » & (\lambda-\lambda')(\mu-\mu')x_3+(\nu-\lambda\mu)(\mu' x_1+\lambda' x_2+x_3)=o \\
G_{ipnmkl} & » & (\lambda'-\lambda)(\mu'-\mu)x_3+(\nu-\lambda'\mu')(\mu x_1+\lambda x_2+x_3)=o \\
G_{imklpn} & » & (\lambda'-\lambda)(\mu-\mu')x_3+(\nu'-\lambda'\mu)(\mu' x_1+\lambda x_2+x_3)=o \\
G_{ilknpm} & » & (\lambda-\lambda')(\mu'-\mu)x_3+(\nu'-\lambda\mu')(\mu x_1+\lambda' x_2+x_3)=o \\
G_{imklnp} & » & (\lambda'-\lambda)(\mu-\mu')x_3+(\nu-\lambda'\mu)(\mu' x_1+\lambda x_2+x_3)=o \\
G_{ilkpnm} & » & (\lambda-\lambda')(\mu'-\mu)x_3+(\nu-\lambda\mu')(\mu x_1+\lambda' x_2+x_3)=o
\end{array}
$$

A G_{iknlpm} egyenesnek át kell mennie:

$$
\left\{\begin{array}{lcr}
ik & & x_1 = o \\
 & \text{azaz} & \\
lp & & x_1+\nu' x_2+\mu' x_3=o
\end{array}\right.
$$

$$
\left\{\begin{array}{lcr}
nl & & x_1+\nu x_2+\mu' x_3=o \\
 & \text{azaz} & \\
mi & & \mu' x_1+\lambda' x_2+x_3=o
\end{array}\right.
$$

$$
\left\{\begin{array}{lcr}
pm & & x_1+\nu' x_2+\mu x_3=o \\
 & \text{azaz} & \\
kn & & \nu' x_1+x_2+\lambda' x_3=o
\end{array}\right.
$$

egyenes-párok metszőpontjain. Erről meggyőződünk, ha az első csoport egyenleteit $(\mu-\mu')$ $(\nu-\nu')$, illetőleg $(\lambda'-\mu\nu')$ mennyiséggel szorozzuk és őket a szorzás után összeadjuk.

Az összeg:

$$(\mu - \mu')(\nu - \nu')x_1 + (\lambda' - \mu\nu)(x_1 + \nu' x_2 + \mu' x_3) = o.$$

Ugyanez egyenlet származik, ha a második csoport egyenleteit összeadjuk, miután az elsőt $(\lambda' - \mu\nu')$, a másodikat $(\nu' - \nu)$ mennyiséggel szoroztuk; vagy ha a harmadik csoport egyenleteit összeadjuk, miután az elsőt $(\lambda' - \mu'\nu)$, a másodikat $(\mu' - \mu)$ mennyiséggel szoroztuk. Analog módón jutnak e typusnak többi egyenleteihez.

Otödik typus.

$$
(17)\quad
\begin{array}{lll}
G_{imnkpl} & \text{egyenes} & (\mu\nu - \mu'\nu')x_1 + [\mu - \mu' + \lambda'(\nu - \nu')]x_2 + [\nu - \nu' + \lambda'(\mu - \mu')]x_3 = o \\
G_{inmklp} & » & (\mu\nu - \mu'\nu')x_1 + [\mu - \mu' + \lambda(\nu - \nu')]x_2 + [\nu - \nu' + \lambda(\mu - \mu')]x_3 = o \\
G_{ilnkpm} & » & (\mu'\nu - \mu\nu')x_1 + [\mu' - \mu + \lambda'(\nu - \nu')]x_2 + [\nu - \nu' + \lambda'(\mu' - \mu)]x_3 = o \\
G_{inlkmp} & » & (\mu'\nu - \mu\nu')x_1 + [\mu' - \mu + \lambda(\nu - \nu')]x_2 + [\nu - \nu' + \lambda(\mu' - \mu)]x_3 = o \\
G_{imknlp} & » & (\nu\lambda - \nu'\lambda')x_2 + [\nu - \nu' + \mu'(\lambda - \lambda')]x_3 + [\lambda - \lambda' + \mu'(\nu - \nu')]x_1 = o \\
G_{ilknmp} & » & (\nu\lambda - \nu'\lambda')x_2 + [\nu - \nu' + \mu(\lambda - \lambda')]x_3 + [\lambda - \lambda' + \mu(\nu - \nu')]x_1 = o \\
G_{inlpkm} & » & (\nu'\lambda - \nu\lambda')x_2 + [\nu' - \nu + \mu'(\lambda - \lambda')]x_3 + [\lambda - \lambda' + \mu'(\nu' - \nu)]x_1 = o \\
G_{ilkpmn} & » & (\nu'\lambda - \nu\lambda')x_2 + [\nu' - \nu + \mu(\lambda - \lambda')]x_3 + [\lambda - \lambda' + \mu(\nu' - \nu)]x_1 = o \\
G_{implkn} & » & (\lambda\mu - \lambda'\mu')x_3 + [\lambda - \lambda' + \nu'(\mu - \mu')]x_1 + [\mu - \mu' + \nu'(\lambda - \lambda')]x_2 = o \\
G_{imnlkp} & » & (\lambda\mu - \lambda'\mu')x_3 + [\lambda - \lambda' + \nu(\mu - \mu')]x_1 + [\mu - \mu' + \nu(\lambda - \lambda')]x_2 = o \\
G_{inkmpl} & » & (\lambda'\mu - \lambda\mu')x_3 + [\lambda' - \lambda + \nu'(\mu - \mu')]x_1 + [\mu - \mu' + \nu'(\lambda' - \lambda)]x_2 = o \\
G_{ipkmnl} & » & (\lambda'\mu - \lambda\mu')x_3 + [\lambda' - \lambda + \nu(\mu - \mu')]x_1 + [\mu - \mu' + \nu(\lambda' - \lambda)]x_2 = o
\end{array}
$$

A G_{imnkpl} PASCAL-féle egyenesnek át kell mennie:

$$
\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} im \\ kp \end{array}\right. \text{ azaz } \begin{array}{l} \mu' x_1 + \lambda' x_2 + x_3 = o \\ \nu x_1 + x_2 + \lambda' x_3 = o \end{array} \\
\left\{\begin{array}{l} nk \\ li \end{array}\right. \text{ azaz } \begin{array}{l} \nu' x_1 + x_2 + \lambda' x_3 = o \\ \mu x_1 + \lambda' x_2 + x_3 = o \end{array} \\
\left\{\begin{array}{l} pl \\ mn \end{array}\right. \text{ azaz } \begin{array}{l} x_1 + \nu' x_2 + \mu' x_3 = o \\ x_1 + \nu x_2 + \mu x_3 = o \end{array}
\end{array}
$$

egyenes-párok metszőpontjain.

Az első csoport első egyenletét $\nu-\nu'$, a másodikat $\mu-\mu'$ mennyiséggel szorozzuk és a szorzott egyenleteket összeadjuk; ez által ered:

$$(\mu\nu-\mu'\nu')x_1 + [\mu-\mu' + \lambda'(\nu-\nu')]x_2 + [\nu-\nu' + \lambda'(\mu-\mu')]x_3 = o.$$

Uggyanez egyenlet származik, ha a második csoport egyenleteit összeadjuk, miután a csoport első egyenletét $\mu - \mu'$, a másikát $\nu - \nu'$ mennyiséggel szoroztuk. Végre hogy ugyanez egyenes a harmadik egyenes-pár metszőpontján is átmegyen, arról így győződünk meg. A harmadik csoporthoz tartozó egyenletek különbsége:

$$(\nu - \nu')x_2 + (\mu - \mu')x_3 = o.$$

Ugyanez egyenletek különbsége, miután az elsőt $\mu\nu$, a másodikat $\mu'\nu'$ mennyiséggel szoroztuk ez:

$$(\mu\nu - \mu'\nu')x_1 + (\mu - \mu')x_2 + (\nu - \nu')x_3 = o.$$

E két utolsó egyenlet eredetéből látjuk, hogy a nekik megfelelő egyenesek a pl és mn egyenesek metszése által támadt A ponton keresztül mennek. Azért e metszőponton keresztül kell menni:

$$(\mu\nu-\mu'\nu')x_1+(\mu-\mu')x_2+(\nu-\nu')x_3+\lambda'[(\nu-\nu')x_2+(\mu-\mu')x_3] = o$$

azaz:

$$(\mu\nu-\mu'\nu')x_1 + [\mu-\mu' + \lambda'(\nu-\nu')]x_2 + [\nu-\nu' + \lambda'(\mu-\mu')]x_3 = o$$

egyenesnek is. E typusnak többi egyenletei analog módon származnak.

Még megjegyezzük, hogy a következőkben rövidség kedvéért például a G_{iklmnp} symbolummal nemcsak az $iklmnp$ egyszerű hatszög Pascal-féle egyenesét, hanem egyuttal ezen egyenes egyenletének, tehát $\lambda'x_1 + \mu'x_2 + \nu'x_3 + = o$ egyenletnek baloldalát is jelöljük. E szerint az $iklmnp$ egyszerű hatszög Pascal-féle egyenesének egyenletét röviden így irjuk:

$$G_{iklmnp} = o$$

és hasonlóan a többi egyenleteket.

A G_{iklmnp} stb. symbolumok között számos identikus egyenlet áll fenn, a melyek Steiner, Kirkman, Cayley-től eredő tételek analytikai aequivalensei. Ezen identitásokat a nekik megfelelő mértani tételekkel most fölsoroljuk.

6) Steiner [1]) a 60 Pascal-féle egyenesről egy tulajdonságot fe-

---

[1]) Syst. Entwickelung. 311 l. 54. tantétel.

dezett föl, melyet a 13) — 17) egyenleteinkből olvashatunk ki. Említett egyenleteink között ugyanis a következő azonosságok állanak fönn:

$$
(18)\ldots\quad
\begin{array}{lllllllll}
\lambda\mu\nu\,. & G_{iklmnp} & + & G_{imlpnk} & - & G_{iplknm} & \equiv & o \\
\lambda'\mu\nu\,. & G_{ikpnml} & + & G_{inplmk} & - & G_{ilpkmn} & \equiv & o \\
\lambda\mu'\nu\,. & G_{ikmlnp} & + & G_{ilmpnk} & - & G_{ipmknl} & \equiv & o \\
\lambda\mu\nu'\,. & G_{iklmpn} & + & G_{imlnpk} & - & G_{inlkpm} & \equiv & o \\
 & G_{imlknp} & + & G_{iklpnm} & + & G_{iplmnk} & \equiv & o \\
 & G_{ilmkpn} & + & G_{ikmnpl} & + & G_{inmlpk} & \equiv & o \\
 & G_{ilmknp} & + & G_{ikmpnl} & + & G_{ipmlnk} & \equiv & o \\
 & G_{imlkpn} & + & G_{i\ \ pm}^{\ kln} & + & G_{inlmpk} & \equiv & o \\
 & G_{iknlpm} & - & G_{ilnmpk} & + & G_{imnkpl} & \equiv & o \\
 & G_{ikmpln} & - & G_{ipmnlk} & + & G_{inmklp} & \equiv & o \\
 & G_{iknmpl} & - & G_{imnlpk} & + & G_{ilnkpm} & \equiv & o \\
 & G_{iklpmn} & - & G_{iplnmk} & + & G_{inlkmp} & \equiv & o \\
 & G_{inkplm} & - & G_{ipkmln} & + & G_{imknlp} & \equiv & o \\
 & G_{inkpml} & - & G_{ipklmn} & + & G_{ilknmp} & \equiv & o \\
 & G_{ipknlm} & - & G_{inkmlp} & + & G_{inlpkm} & \equiv & o \\
 & G_{ipknml} & - & G_{inklmp} & + & G_{ilkpmn} & \equiv & o \\
 & G_{ilpnkm} & - & G_{inpmkl} & + & G_{implkn} & \equiv & o \\
 & G_{ilnpkm} & - & G_{ipnmkl} & + & G_{imnlkp} & \equiv & o \\
 & G_{imklpn} & - & G_{ilknpm} & + & G_{inkmpl} & \equiv & o \\
 & G_{imklnp} & - & G_{ilkpnm} & + & G_{ipkmnl} & \equiv & o.
\end{array}
$$

Ezen azonosságok bizonyitják Steiner tételét [1]): a 60 Pascal-féle egyenes hármanként egy ugyanazon ponton megyen keresztül. Ily pont tehát 20 van és e pontokat Steiner-féle pontoknak nevezik. A fönnebbi azonosságokból egyszersmind megtudjuk, melyik hatszögeknek Pascal-féle egyenesei találkoznak egy Steiner-féle pontban. A törvény, mely szerínt bármely Pascal-féle egyenes symbolumából a másik kettőét, melyek vele ugyanazon Steiner-féle ponton átmennek, formáljuk, a következő: a symbolumban három nem egymásután következő csucsot szilárdul megtartván, a többi hármat cyclicusan változtatjuk. Így például G_{iklmnp} Pascal-féle egyenesből, ha az *iln* csúcsokat helyeiken meghagyjuk és a *kmp* csúcsokat cyclicusan változtatjuk, a G_{imlpnk} és G_{iplknm} Pascal-féle egyenesek származnak, melyek G_{iklmnp} egyenessel egyugyanazon Steiner-féle ponton átmentek. Ugyanez Pascal-féle egyenesekhez jutottunk volna, ha a *kmp* csúcsokat hagyjuk meg helyeiken és az *iln* csúcsokat változtatjuk cyclicusan; mert

---

[1]) Syst. Entwickelung. 311 l. 54. tantétel.

G_{lknmip} nem egyéb, mint G_{iplknm} és G_{nkimlp} nem egyéb, mint G_{imlpnk} PASCAL-féle egyenes. A STEINER-féle pontokat abban a sorban, a melyben a (18) alatt álló azonosságokban föl vannak tüntetve, SCHRÖTER szerint [1])

$$p\ a_1\ a_2\ a_3\ \pi\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ b_1\ c_1\ \beta_1\ \gamma_1\ b_2\ c_2\ \beta_2\ \gamma_2\ b_3\ c_3\ \beta_3\ \gamma_3$$

betűkkel fogjuk a következőkben jelölni. Például p azt a STEINER-féle pontot jelenti, melyben G_{iklmnp}, G_{imlpnk}, G_{iplknm} PASCAL-féle egyenesek metszik egymást.

7) A (18) alatt közlött azonosságok nem az egyedüliek, melyek a G_{iklmnp} stb. symbolumokból formálhatók. E symbolumokat még a következő 60 azonosság fűzi egymáshoz:

$$G_{ilnkpm} + G_{inlpkm} + G_{inkmpl} \equiv o \quad K_{iklmnp} \text{ pont}$$
$$G_{inlkmp} + G_{ilkpmn} + G_{ipkmnl} \equiv o \quad K_{imlpnk} \text{ »}$$
$$G_{inlkmp} - G_{imknlp} + G_{implkn} \equiv o \quad K_{ikpnml} \text{ »}$$
$$G_{ilkpmn} - G_{implkn} + G_{imnkpl} \equiv o \quad K_{ikmlnp} \text{ »}$$
$$G_{ipkmnl} - G_{imnkpl} + G_{imknlp} \equiv o \quad K_{iklmpn} \text{ »}$$
$$G_{ilnkpm} - G_{ilknmp} + G_{imnlkp} \equiv o \quad K_{inplmk} \text{ »}$$
$$G_{inlpkm} - G_{imnlkp} + G_{inmklp} \equiv o \quad K_{ilmpnk} \text{ »}$$
$$G_{inkmpl} - G_{inmklp} + G_{ilknmp} \equiv o \quad K_{imlnpk} \text{ »}$$
$$\lambda(\mu\nu - \lambda).G_{ilmkpn} + \mu(\nu\lambda - \mu).G_{ikmpnl} + \nu(\lambda\mu - \nu).G_{inlmpk} \equiv o \quad K_{iplknm} \text{ »}$$
$$(\mu'\nu' - \lambda).G_{imlknp} + (\mu\nu' - \lambda).G_{ipmlnk} + (\mu'\nu - \lambda).G_{iklnpm} \equiv o \quad K_{ilpkmn} \text{ »}$$
$$(\nu'\lambda' - \mu).G_{iklpnm} + (\nu\lambda' - \mu).G_{imlkpn} + (\nu'\lambda - \mu).G_{inmlpk} \equiv o \quad K_{ipmknl} \text{ »}$$
$$(\lambda'\mu' - \nu).G_{iplmnk} + (\lambda\mu' - \nu).G_{ikmnpl} + (\lambda'\mu - \nu).G_{ilmknp} \equiv o \quad K_{inlkpm} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda'\mu'\nu').G_{iplknm} - G_{ipmnlk} + G_{iknlpm} \equiv o \quad K_{ilmkpn} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda'\mu'\nu').G_{iplknm} - G_{ipklmn} + G_{inkplm} \equiv o \quad K_{ikmpnl} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda'\mu'\nu').G_{iplknm} - G_{ipnmkl} + G_{ilpnkm} \equiv o \quad K_{inlmpk} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda\mu'\nu')\ G_{ilpkmn} - G_{ilnmpk} + G_{ikmpln} \equiv o \quad K_{imlknp} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda\mu'\nu')\ G_{ilpkmn} - G_{ipknml} + G_{inkmlp} \equiv o \quad K_{iklnpm} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda\mu'\nu').G_{ilpkmn} - G_{ilkpnm} + G_{imklpn} \equiv o \quad K_{ipmlnk} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda'\mu\nu').G_{ipmknl} - G_{iplnmk} + G_{iknmpl} \equiv o \quad K_{imlkpn} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda'\mu\nu').G_{ipmknl} - G_{ipkmln} + G_{inkpml} \equiv o \quad K_{iklpnm} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda'\mu\nu').G_{ipmknl} - G_{imklnp} + G_{ilknpm} \equiv o \quad K_{inmlpk} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda'\mu'\nu).G_{inlkpm} - G_{iklpmn} + G_{imnlpk} \equiv o \quad K_{ilmknp} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda'\mu'\nu).G_{inlkpm} - G_{inklmp} + G_{ipknlm} \equiv o \quad K_{ikmnpl} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda'\mu'\nu)\ G_{inlkpm} - G_{inpmkl} + G_{ilnpkm} \equiv o \quad K_{iplmnk} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda'\mu'\nu').G_{imlknp} - G_{inkmlp} + G_{imklpn} \equiv o \quad K_{ilnmpk} \text{ »}$$
$$(1 - \lambda'\mu'\nu').G_{imlknp} - G_{ipknml} + G_{ilkpnm} \equiv o \quad K_{ikmpln} \text{ »}$$

[1]) Theorie d. Kegelschnitte. Zweite Aufl. 134. lap.

$$(1-\lambda'\mu'\nu')\; G_{iklpnm} - G_{ilknpm} + G_{iknmpl} \equiv o \qquad K_{ipkmln} \text{ pont}$$
$$(1-\lambda'\mu'\nu')\; G_{iklpnm} - G_{imklnp} + G_{iplnmk} \equiv o \qquad K_{inkpml} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu'\nu')\; G_{iplmuk} - G_{imnlpk} + G_{ipknlm} \equiv o \qquad K_{inpmkl} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu'\nu')\; G_{iplmnk} - G_{iklpmn} + G_{inklmp} \equiv o \qquad K_{ilnpkm} \text{ »}$$
$$(1-\lambda\mu'\nu')\; G_{ilmkpn} - G_{ipklmn} + G_{ipnmkl} \equiv o \qquad K_{iknlpm} \text{ »}$$
$$(1-\lambda\mu'\nu').\, G_{ilmkpn} - G_{inkplm} + G_{ilpnkm} \equiv o \qquad K_{ipmnlk} \text{ »}$$
$$(1-\lambda\mu'\nu').\, G_{ikmnpl} - G_{inpmkl} + G_{iklpmn} \equiv o \qquad K_{ipknlm} \text{ »}$$
$$(1-\lambda\mu'\nu')\; G_{ikmnpl} - G_{ilnpkm} + G_{imnlpk} \equiv o \qquad K_{inklmp} \text{ »}$$
$$(1-\lambda\mu'\nu')\; G_{inmlpk} - G_{iplnmk} + G_{ipkmln} \equiv o \qquad K_{ilknpm} \text{ »}$$
$$(1-\lambda\mu'\nu')\; G_{inmlpk} - G_{iknmpl} + G_{inkpml} \equiv o \qquad K_{imklnp} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu\nu')\; G_{ilmknp} - G_{inklmp} + G_{inpmkl} \equiv o \qquad K_{imnlpk} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu\nu')\; G_{ilmknp} - G_{ipknlm} + G_{ilnpkm} \equiv o \qquad K_{iklpmn} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu\nu')\; G_{ikmpnl} - G_{ipnmkl} + G_{ipmnlk} \equiv o \qquad K_{inkplm} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu\nu')\; G_{ikmpnl} - G_{ilpnkm} + G_{iknlpm} \equiv o \qquad K_{ipklmn} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu\nu')\; G_{ipmlnk} - G_{ilnmpk} + G_{ipknml} \equiv o \qquad K_{imklpn} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu\nu')\; G_{ipmlnk} - G_{ikmpln} + G_{inkmlp} \equiv o \qquad K_{ilkpnm} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu'\nu).\, G_{imlkpn} - G_{ipkmln} + G_{imklnp} \equiv o \qquad K_{iknmpl} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu'\nu)\; G_{imlkpn} - G_{inkpml} + G_{ilknpm} \equiv o \qquad K_{iplnmk} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu'\nu).\, G_{iklnpm} - G_{ilkpnm} + G_{ilnmpk} \equiv o \qquad K_{inkmlp} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu'\nu).\, G_{iklnpm} - G_{imklpn} + G_{ikmpln} \equiv o \qquad K_{ipknml} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu'\nu).\, G_{inlmpk} - G_{ipmnlk} + G_{ipklmn} \equiv o \qquad K_{ilpnkm} \text{ »}$$
$$(1-\lambda'\mu'\nu).\, G_{inlmpk} - G_{iknlpm} + G_{inkplm} \equiv o \qquad K_{ipnmkl} \text{ »}$$
$$(\mu\nu - \lambda')\; G_{iklmnp} - (\mu'\nu' - \lambda')\, G_{inplmk} - \lambda'.G_{inmklp} \equiv o \qquad K_{ilnkpm} \text{ »}$$
$$(\nu\lambda - \mu').\, G_{iklmnp} - (\nu'\lambda' - \mu').G_{ilmpnk} - \mu'.G_{ilknmp} \equiv o \qquad K_{inlpkm} \text{ »}$$
$$(\lambda\mu - \nu').\, G_{iklmnp} - (\lambda'\mu' - \nu').G_{imlnpk} - \nu'.G_{imnlkp} \equiv o \qquad K_{inkmpl} \text{ »}$$
$$(\mu\nu - \lambda).\, G_{ikpnml} - (\mu'\nu' - \lambda).G_{imlpnk} - \lambda.G_{imnkpl} \equiv o \qquad K_{inlkmp} \text{ »}$$
$$(\nu\lambda - \mu).\, G_{ikmlnp} - (\nu'\lambda' - \mu).G_{imlpnk} - \mu.G_{imknlp} \equiv o \qquad K_{ilkpmn} \text{ »}$$
$$(\lambda\mu - \nu).\, G_{iklmpn} - (\lambda'\mu' - \nu).G_{imlpnk} - \nu.G_{implkn} \equiv o \qquad K_{ipkmnl} \text{ »}$$
$$(\mu\nu' - \lambda').\, G_{iklmpn} - (\mu'\nu - \lambda').G_{ikmlnp} + \lambda'.G_{inlkmp} \equiv o \qquad K_{imnkpl} \text{ »}$$
$$(\mu\nu' - \lambda).\, G_{ilmpnk} - (\mu'\nu - \lambda).G_{imlnpk} + \lambda.G_{ilnkpm} \equiv o \qquad K_{inmklp} \text{ »}$$
$$(\nu\lambda' - \mu').\, G_{ikpnml} - (\nu'\lambda - \mu').G_{iklmpn} + \mu'.G_{ilkpmn} \equiv o \qquad K_{imknlp} \text{ »}$$
$$(\nu\lambda' - \mu).\, G_{imlnpk} - (\nu'\lambda - \mu).G_{inplmk} + \mu.G_{inlpkm} \equiv o \qquad K_{ilknmp} \text{ »}$$
$$(\lambda\mu' - \nu')\; G_{ikmlnp} - (\lambda'\mu - \nu').G_{ikpnml} + \nu'.G_{ipkmnl} \equiv o \qquad K_{implkn} \text{ »}$$
$$(\lambda\mu' - \nu)\; G_{inplmk} - (\lambda'\mu - \nu).G_{ilmpnk} + \nu.G_{inkmpl} \equiv o \qquad K_{imnlkp} \text{ »}$$

Ezen azonosságok bizonyítják KIRKMAN tételét [1]): a 60 PASCAL-féle egyenes nemcsak a 20 STEINER-féle pontban metszi egymást hármanként, hanem még 60 más pontban is. E pontokat KIRKMAN-féle pontoknak nevezik.

[1]) Cambridge and Dublin Math. Journ. 5 köt. 185 lap.

A 60 PASCAL-féle egyenes és a 60 KIRKMAN-féle pont közt bizonyos vonatkozás van. Az *iklmnp* egyszerű hatszögnek, melynek G_{iklmnp} a PASCAL-féle egyenese, *ik, kl, lm, mn, np, pi* oldalait a teljes hatszög 15 oldalából kihagyván, marad 9 oldal, az *il, im, in, km, kn, kp, ln, lp, mp* oldalok. Ezek három egyszerű hatszöget formálnak, az *ilnkpm, inlpkm, inkmpl* hatszögeket, melyeknek G_{ilnkpm}, G_{inlpkm}, G_{inkmpl} PASCAL-féle egyenesei azon KIRKMAN-féle pontban találkoznak, melyet fönt K_{iklmnp} symbolummal jelöltünk. Egy-egy PASLALféle egyenes és KIRKMAN-féle pont ezen egymásra vonatkozása alapján HESSE [1]) a K_{iklmnp} pontot a G_{iklmnp} egyenes idealis polusának, ezt amannak idealis polarisának nevezte. Mink e vonatkozást a KIRKMAN-féle pontok megjelölésére használtuk fel.

8) A 6-dik számból tudjuk, hogy a $pa_1\ a_2\ a_3$ STEINER-féle pontok a következő egyenes-párok metszőpontjai:

$$p\begin{cases}\lambda' x_1 + \mu' x_2 + x\nu'_3 = o\\ \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = o\end{cases}\qquad a_1\begin{cases}\lambda x_1 + \mu' x_2 + \nu' x_3 = o\\ \lambda' x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = o\end{cases}$$

$$a_2\begin{cases}\lambda' x_1 + \mu x_2 + \nu' x_3 = o\\ \lambda x_1 + \mu' x_2 + \nu x_3 = o\end{cases}\qquad a_3\begin{cases}\lambda' x_1 + \mu' x_2 + \nu x_3 = o\\ \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu' x_3 = o.\end{cases}$$

Az egypárhoz tartozó egyenletek összege mind a négy esetben:

$$(\lambda + \lambda')x_1 + (\mu + \mu')x_2 + (\nu + \nu')x_3 = o. \tag{19}$$

Ez az egyenlet az alakja után ismét egyenes vonal egyenlete és az eredete azt mutatja, hogy a neki megfelelő egyenes mind a négy $pa_1\ a_2\ a_3$ pontot magában foglalja. Ez STEINER következő tételét [2]) bizonyítja:

A 20 STEINER-féle pont négyenként ugyanazon egyes vonalon fekszik.

Ily egyenes, mint mindjárt megmutatjuk, 15 van és ezeket STEINER-féle egyeneseknek nevezik. A (19) alatt álló egyenlet a $pa_1\ a_2\ a_3$ STEINER-féle egyenes egyenlete.

---

[10]) Crelle's Journal, Ueber die Reciprocität. stb. 68 köt. 193 lap. — Hogy a 60 G egyenes és a 60 K pont 6 különböző sarkrendszerben megfelelő elemeknek 10 párját képezi, Gius. Veronese mutatta meg uj tételekben gazdag értekezésben; lásd Fiedler Kegelschnitte. IV. kiadás. 688 lap.

[1]) Syst. Entw. 311. lap.

A 15. STEINER-féle egyenes a következő: [1])

$$\begin{array}{lllll}
pa_1\ a_2\ a_3 & \pi\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1 & b_1\ c_1\ \alpha_2\ \alpha_3 & b_2\ c_2\ \alpha_3\ \alpha_1 & b_3\ c_3\ \alpha_1\ \alpha_2 \\
pb_1\ b_2\ b_3 & \pi\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2 & c_1\ a_1\ \beta_2\ \beta_3 & c_2\ a_2\ \beta_3\ \beta_1 & c_3\ a_3\ \beta_1\ \beta_2 \\
pc_1\ c_2\ c_3 & \pi\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3 & a_1\ b_1\ \gamma_2\ \gamma_3 & a_2\ b_2\ \gamma_3\ \gamma_1 & a_3\ b_3\ \gamma_1\ \gamma_2
\end{array}$$

A többi 14 esetben STEINER most említett tételének helyességét a következő relatiók bizonyítják:

$$pb_1\ b_2\ b_3 \text{ egyenes: } \left.\begin{array}{l}
\lambda\mu\nu\ .\ \sigma'\ .\ G_{iknlpm} - \mu'\nu'\ .\ (\mu - \lambda\nu)(\nu - \lambda\mu)G_{ilnmpk} \equiv \\
\lambda\mu\nu\ .\ \sigma'\ .\ G_{inkplm} - \nu'\lambda'\ .\ (\nu - \lambda\mu)(\lambda - \mu\nu)G_{ipkmln} \equiv \\
\lambda\mu\nu\ .\ \sigma'\ .\ G_{ilpnkm} - \lambda'\mu'\ .\ (\lambda - \mu\nu)(\mu - \lambda\nu)G_{inpmkl} \equiv
\end{array}\right\} \begin{array}{c}
\lambda'\mu'\nu'(\lambda-\mu\nu)(\mu-\nu\lambda)(\nu-\lambda\mu)G_{iklmnp} + \\
+(1-\lambda\mu\nu)\sigma'.G_{imlpnk}.
\end{array}$$

$$pc_1\ c_2\ c_3 \text{ egyenes: } \left.\begin{array}{l}
\lambda'\mu'\nu'\ .\ \sigma\ .\ G_{ipmnlk} - \mu\nu(\mu'-\lambda'\nu')(\nu'-\lambda'\mu').G_{ikmpln} \equiv \\
\lambda'\mu'\nu'\ .\ \sigma\ .\ G_{ipklmn} - \nu\lambda(\nu'-\lambda'\mu')(\lambda'-\mu'\nu').G_{inkpml} \equiv \\
\lambda'\mu'\nu'\ .\ \sigma\ .\ G_{ipnmkl} - \lambda\mu(\lambda'-\mu'\nu')(\mu'-\lambda'\nu').G_{ilnpkm} \equiv
\end{array}\right\} \begin{array}{c}
\lambda\mu\nu(\lambda'-\mu'\nu')(\mu'-\nu'\lambda')(\nu'-\mu'\lambda')G_{imlpnk} + \\
+(1-\lambda'\mu'\nu')\sigma.G_{iklmnp}.
\end{array}$$

$$c_1a_1\beta_2\beta_3 \text{ egyenes: } \left.\begin{array}{l}
\lambda'\mu\nu\ .\ \sigma'_1.\ G_{ikmpln} - \mu'\nu'(\mu - \lambda'\nu)(\nu - \lambda'\mu)\ G_{ipmnlk} \equiv \\
\lambda'\mu\nu\ .\ \sigma'_1.\ G_{inkmlp} - \nu'\lambda(\nu - \lambda'\mu)(\lambda' - \mu\nu)\ G_{ipknlm} \equiv \\
\lambda'\mu\nu\ .\ \sigma'_1.\ G_{imklpn} - \lambda\mu'(\lambda' - \mu\nu)(\mu - \lambda'\nu)\ G_{ilknpm} \equiv
\end{array}\right\} \begin{array}{c}
\lambda\mu'\nu'(\lambda'-\mu\nu)(\mu-\nu\lambda')(\nu-\lambda'\mu).G_{ikpnml} + \\
+(1-\lambda'\mu\nu)\sigma'_1.G_{inplmk}.
\end{array}$$

$$c_2a_2\beta_3\beta_1 \text{ egyenes: } \left.\begin{array}{l}
\lambda\mu'\nu\ .\ \sigma'_2.\ G_{iknmpl} - \mu\nu'(\mu' - \lambda\nu)(\nu - \lambda\mu')\ G_{imnlpk} \equiv \\
\lambda\mu'\nu\ .\ \sigma'_2.\ G_{inkpml} - \nu'\lambda'(\nu - \lambda\mu')(\lambda - \mu'\nu)\ G_{ipklmn} \equiv \\
\lambda\mu'\nu\ .\ \sigma'_2.\ G_{ilknpm} - \lambda'\mu(\lambda - \mu'\nu)(\mu' - \lambda\nu)\ G_{imklpn} \equiv
\end{array}\right\} \begin{array}{c}
\lambda'\mu\nu'(\lambda-\mu'\nu)(\mu'-\nu\lambda)(\nu-\lambda\mu').G_{ikmlnp} + \\
+(1-\lambda\mu'\nu)\sigma'_2.G_{ilmpnk}.
\end{array}$$

$$c_3a_3\beta_1\beta_2 \text{ egyenes: } \left.\begin{array}{l}
\lambda\mu\nu'\ .\ \sigma'_3.\ G_{imnlpk} - \mu'\nu(\mu - \lambda\nu')(\nu' - \lambda\mu)\ G_{iknmpl} \equiv \\
\lambda\mu\nu'\ .\ \sigma'_3.\ G_{ipknlm} - \nu\lambda'(\nu' - \lambda\mu)(\lambda - \mu\nu')\ G_{inkmlp} \equiv \\
\lambda\mu\nu'\ .\ \sigma'_3.\ G_{ilnpkm} - \lambda'\mu'(\lambda - \mu\nu')(\mu - \lambda\nu')\ G_{ipnmkl} \equiv
\end{array}\right\} \begin{array}{c}
\lambda'\mu'\nu(\lambda-\mu\nu')(\mu-\nu'\lambda)(\nu'-\lambda\mu).G_{iklmpn} + \\
+(1-\lambda\mu\nu').\sigma'_3.G_{imlnpk}.
\end{array}$$

[1]) Schröter, Kegelschnitte. 134. lap.

$a_1 b_1 \gamma_2 \gamma_3$ egyenes:
$$\left.\begin{array}{l}
\lambda\mu'\nu' \,.\, \sigma_1 \,.\, G_{ilnmpk} - \mu\nu(\mu' - \lambda\nu')(\nu' - \lambda\mu')\; G_{iknlpm} \equiv \\
\lambda\mu'\nu' \,.\, \sigma_1 \,.\, G_{ipknml} - \nu\lambda'(\nu' - \lambda\mu')(\lambda - \mu'\nu')\; G_{inklmp} \equiv \\
\lambda\mu'\nu' \,.\, \sigma_1 \,.\, G_{ilkpnm} - \lambda'\mu(\lambda - \mu'\nu')(\mu' - \lambda\nu')\; G_{imklnp} \equiv
\end{array}\right\}
\begin{array}{c}
\lambda'\mu\nu(\lambda - \mu'\nu')(\mu' - \nu'\lambda)(\nu' - \lambda\mu') G_{inplmk} + \\
+ (1 - \lambda\mu'\nu')\sigma_1 \,.\, G_{ikpnml}.
\end{array}$$

$a_2 b_2 \gamma_3 \gamma_1$ egyenes:
$$\left.\begin{array}{l}
\lambda'\mu\nu' \,.\, \sigma_2 \,.\, G_{iplnmk} - \mu'\nu(\mu - \lambda'\nu')(\nu' - \lambda'\mu)\; G_{iklpmn} \equiv \\
\lambda'\mu\nu' \,.\, \sigma_2 \,.\, G_{ipkmln} - \nu\lambda(\nu' - \lambda'\mu)(\lambda' - \mu\nu')\; G_{inkplm} \equiv \\
\lambda'\mu\nu' \,.\, \sigma_2 \,.\, G_{imklnp} - \lambda\mu'(\lambda' - \mu\nu')(\mu - \nu'\lambda')\; G_{ilkpnm} \equiv
\end{array}\right\}
\begin{array}{c}
\lambda\mu'\nu(\lambda' - \mu\nu')(\mu - \nu'\lambda')(\nu' - \lambda'\mu) . G_{ilmpnk} + \\
+ (1 - \lambda'\mu\nu') . \sigma_2 \,.\, G_{ikmlnp}.
\end{array}$$

$a_3 b_3 \gamma_1 \gamma_2$ egyenes:
$$\left.\begin{array}{l}
\lambda'\mu'\nu \,.\, \sigma_3 \,.\, G_{iklpmn} - \mu\nu'(\mu' - \lambda'\nu)(\nu - \lambda'\mu')\; G_{iplnmk} \equiv \\
\lambda'\mu'\nu \,.\, \sigma_3 \,.\, G_{inklmp} - \nu'\lambda(\nu - \lambda'\mu')(\lambda' - \mu'\nu)\; G_{ipknml} \equiv \\
\lambda'\mu'\nu \,.\, \sigma_3 \,.\, G_{inpmkl} - \lambda\mu(\lambda' - \mu'\nu)(\mu' - \lambda'\nu)\; G_{ilpnkm} \equiv
\end{array}\right\}
\begin{array}{c}
\lambda\mu\nu'(\lambda' - \mu'\nu)(\mu' - \nu\lambda')(\nu - \lambda'\mu') . G_{imlnpk} + \\
+ (1 - \lambda'\mu'\nu) . \sigma_3 \,.\, G_{iklmpn}.
\end{array}$$

$\pi\alpha_1\beta_1\gamma_1$ egyenes:
$$\begin{array}{l}
\mu(\mu - \lambda\nu) \,.\, G_{imnlpk} - \nu(\nu - \lambda\mu)\; G_{iknmpl} \equiv \\
\mu(\mu - \lambda'\nu) \,.\, G_{iplnmk} - \nu(\nu - \lambda'\mu)\; G_{iklpmn} \equiv \\
\quad \equiv -(\mu\nu' - \mu'\nu)(\lambda - \mu\nu)(\lambda' - \mu\nu)x_1 + \lambda'(\mu - \lambda\nu)(\nu - \lambda\mu) \,.\, [(\mu - \mu')x_2 - (\nu - \nu')x_3].
\end{array}$$

$\pi\alpha_2\beta_2\gamma_2$ egyenes:
$$\begin{array}{l}
\nu(\nu - \mu\lambda) \,.\, G_{inkmlp} - \lambda(\lambda - \mu\nu)\; G_{ipknlm} \equiv \\
\nu(\nu - \mu'\lambda) \,.\, G_{inklmp} - \lambda(\lambda - \mu'\nu)\; G_{ipknml} \equiv \\
\quad \equiv -(\nu\lambda' - \nu'\lambda)(\mu - \nu\lambda)(\mu' - \nu\lambda)x_2 + \mu'(\nu - \mu\lambda)(\lambda - \mu\nu) \,.\, [(\nu - \nu')x_3 - (\lambda - \lambda')x_1].
\end{array}$$

$\pi\alpha_3\beta_3\gamma_3$ egyenes:
$$\begin{array}{l}
\lambda(\lambda - \nu\mu) \,.\, G_{ilknpm} - \mu(\mu - \nu\lambda)\; G_{imklpn} \equiv \\
\lambda(\lambda - \nu'\mu) \,.\, G_{ilkpnm} - \mu(\mu - \nu'\lambda)\; G_{imklnp} \equiv \\
\quad \equiv -(\lambda\mu' - \lambda'\mu)(\nu - \lambda\mu)(\nu' - \lambda\mu)x_3 + \nu'(\lambda - \nu\mu)(\mu - \nu\lambda) \,.\, [(\lambda - \lambda')x_1 - (\mu - \mu')x_2].
\end{array}$$

$b_1 c_1 \alpha_2 \alpha_3$ egyenes:
$$\begin{array}{l}
\lambda'\mu\nu(\lambda' - \mu\nu) \,.\, G_{ikmpln} - \lambda'\mu\nu(\lambda' - \mu'\nu')\; G_{ipmnlk} \equiv \\
\lambda'\mu\nu(\lambda - \mu\nu) \,.\, G_{iknlpm} - \lambda'\mu\nu(\lambda - \mu'\nu') . G_{ilnmpk} \equiv \\
\quad \equiv -(\mu\nu - \mu'\nu')(\mu - \lambda'\nu)(\nu - \lambda'\mu)x_1 + \lambda'(\lambda - \mu\nu)(\lambda' - \mu\nu) \,.\, [(\mu - \mu')x_2 + (\nu - \nu')x_3].
\end{array}$$

$$b_2c_2\alpha_3\alpha_1 \text{ egyenes: } \begin{aligned} &\lambda\mu'\nu(\mu-\nu\lambda)\,.\,G_{inkplm} - \lambda\mu'\nu(\mu-\nu'\lambda')\,.\,G_{ipkmln} \equiv \\ &\lambda\mu'\nu(\mu'-\nu\lambda)\,.\,G_{inkpml} - \lambda\mu'\nu(\mu'-\nu'\lambda')\,.\,G_{ipklmn} \equiv \\ &\equiv -(\nu\lambda-\nu'\lambda')(\nu-\lambda\mu')(\lambda-\mu'\nu)x_2 + \mu'(\mu-\nu\lambda)(\mu'-\nu\lambda)\,.\,[(\nu-\nu')x_3 + (\lambda-\lambda')x_1]. \end{aligned}$$

$$b_3c_3\alpha_1\alpha_2 \text{ egyenes: } \begin{aligned} &\lambda\mu\nu'(\nu-\lambda\mu)\,.\,G_{ilpnkm} - \lambda\mu\nu'(\nu-\lambda'\mu')\,.\,G_{inpmkl} \equiv \\ &\lambda\mu\nu'(\nu'-\lambda\mu)\,.\,G_{ilnpkm} - \lambda\mu\nu'(\nu'-\lambda'\mu')\,.\,G_{ipnmkl} \equiv \\ &\equiv -(\lambda\mu-\lambda'\mu')(\lambda-\mu\nu')(\mu-\lambda\nu')x_3 + \nu'(\nu-\lambda\mu)(\nu'-\lambda\mu)\,.\,[(\lambda-\lambda')x_1 + (\mu-\mu')x_2]. \end{aligned}$$

Az ideírt azonosságok helyességét legalább egy esetben, még pedig a $pb_1b_2b_3$ Steiner-féle egyenes esetében akarjuk kimutatni. Minthogy:

$$\begin{aligned} G_{iklmnp} &\equiv \lambda'x_1 + \mu'x_2 + \nu'x_3 \\ G_{imlpnk} &\equiv \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3, \end{aligned} \qquad \text{lesz:} \qquad \begin{aligned} G_{iklmnp} &\equiv \mu'\nu'(\;x_1 + \nu x_2 + \mu x_3) + (\lambda' - \mu'\nu')x_1 \\ G_{imlpnk} &\equiv \mu\nu(\;x_1 + \nu' x_2 + \mu' x_3) + (\lambda - \mu\nu)x_1 \\ G_{iklmnp} &\equiv \nu'\lambda'(\;\nu x_1 + x_2 + \lambda x_3) + (\mu' - \nu'\lambda')x_2 \\ G_{imlpnk} &\equiv \nu\lambda(\;\nu' x_1 + x_2 + \lambda' x_3) + (\mu - \nu\lambda)x_2 \\ G_{iklmnp} &\equiv \lambda'\mu'(\;\mu x_1 + \lambda x_2 + x_3) + (\nu' - \lambda'\mu')x_3 \\ G_{imlpnk} &\equiv \lambda\mu(\mu' x_1 + \lambda' x_2 + x_3) + (\nu - \lambda\mu)x_3, \end{aligned}$$

és innen:

$$\begin{aligned} (\lambda'-\mu'\nu')G_{iklmnp} + [\mu'\nu'(\mu-\mu')(\nu-\nu')-(\lambda'-\mu'\nu')^2]x_1 &\equiv \mu'\nu'.[(\mu-\mu')(\nu-\nu')x_1 + (\lambda'-\mu'\nu')(\;x_1 + \nu x_2 + \mu x_3)] \\ (\lambda'-\mu\nu)G_{imlpnk} + [\mu\nu(\mu-\mu')(\nu-\nu')-(\lambda-\mu\nu)(\lambda'-\mu\nu)]x_1 &\equiv \mu\nu\,[(\mu-\mu')(\nu-\nu')x_1 + (\lambda'-\mu\nu)(\;x_1 + \nu' x_2 + \mu x_3)] \\ (\mu'-\nu'\lambda')G_{iklmnp} + [\nu'\lambda'(\nu-\nu')(\lambda-\lambda')-(\mu'-\nu'\lambda')^2]x_2 &\equiv \lambda'\nu'\,[(\nu-\nu')(\lambda-\lambda')x_2 + (\mu'-\nu'\lambda')(\;\nu x_1 + x_2 + \lambda x_3)] \\ (\mu'-\nu\lambda)G_{imlpnk} + [\nu\lambda(\nu-\nu')(\lambda-\lambda')-(\mu-\nu\lambda)(\mu'-\nu\lambda]x_2 &\equiv \nu\lambda\,[(\nu-\nu')(\lambda-\lambda')x_2 + (\mu'-\nu\lambda).(\nu' x_1 + x_2 + \lambda' x_3)] \\ (\nu'-\lambda'\mu')G_{iklmnp} + [\lambda'\mu'(\lambda-\lambda')(\mu-\mu')-(\nu'-\lambda\mu')^2]x_3 &\equiv \lambda'\mu'\,[(\lambda-\lambda')(\mu-\mu')x_3 + (\nu'-\lambda'\mu')(\;\mu x_1 + \lambda x_2 + x_3)] \\ (\nu'-\lambda\mu)G_{imlpnk} + [\lambda\mu(\lambda-\lambda')(\mu-\mu')-(\nu-\lambda\mu)(\nu'-\lambda\mu]x_3 &\equiv \lambda\mu\,[(\lambda-\lambda')(\mu-\mu')x_3 + (\nu'-\lambda\mu).(\mu' x_1 + \lambda' x_2 + x_3)] \end{aligned}$$

Mivel: $\mu'\nu'(\mu-\nu')(\nu-\nu')(\lambda'-\mu'\nu')^2 = \nu'\lambda'(\nu-\nu')(\lambda-\lambda')-(\mu'-\nu'\lambda')^2 = \lambda'\mu'(\lambda-\lambda')(\mu-\mu')-(\nu'-\lambda'\mu')^2 =$

$$= 1-\lambda'^2-\mu'^2-\nu'^2 + 2\lambda'\mu'\nu' = \sigma'$$

$$\mu\nu(\mu-\mu')\,(\nu-\nu') - (\lambda-\mu\nu)\,(\lambda'-\mu'(\mu-\lambda\nu) = \lambda\nu)\,(\nu-\lambda\mu)$$
$$\nu\lambda(\nu-\nu')\,(\lambda-\lambda') - (\mu-\nu\lambda)\,(\mu'-\nu\lambda) = \mu'(\nu-\lambda\mu)\,(\lambda-\mu\nu)$$
$$\lambda\mu(\lambda-\lambda')\,(\mu-\mu') - (\nu-\lambda\mu)\,(\nu'-\lambda\mu) = \nu'(\lambda-\mu\nu)\,(\mu-\lambda\nu)$$

és a jobb oldalon a nagy zárjelben foglalt kifejezések azonosak G_{ilnmpk}, G_{iknlpm}; G_{ipkmln}, G_{inkplm}; G_{inpmkl}, G_{ilpnkm} symbolumokkal, utolsó azonosságainkat így irhatjuk:

$$\begin{aligned}
-\lambda'\mu'\nu'.(\lambda-\mu\nu).G_{iklmnp} + \sigma' x_1 &\equiv \mu'\nu'.G_{ilnmpk}\\
(1-\lambda\mu\nu).G_{imlpnk} + (\mu-\nu\lambda)\,(\nu-\lambda\mu)x_1 &\equiv \lambda\mu\nu.G_{iknlpm}\\
-\lambda'\mu'\nu'.(\mu-\nu\lambda).G_{iklmnp} + \sigma' x_2 &\equiv \nu'\lambda'.G_{ipkmln}\\
(1-\lambda\mu\nu).G_{imlpnk} + (\nu-\lambda\mu)\,(\lambda-\mu\nu)x^2 &\equiv \lambda\mu\nu.G_{inkplm}\\
-\lambda'\mu'\nu'.(\nu-\lambda\mu).G_{iklmnp} + \sigma' x_2 &\equiv \lambda'\mu'.G_{inpmkl}\\
(1-\lambda\mu\nu).G_{imlpnk} + (\lambda-\mu\nu)\,(\mu-\lambda\nu)x_3 &\equiv \lambda\mu\nu.G_{ilpnkm}
\end{aligned}$$

Ezen azonosságokat sorban $-(\mu-\lambda\nu)(\nu-\lambda\mu)$, σ', $-(\nu-\lambda\mu)(\lambda-\mu\nu)$, σ', $-(\lambda-\mu\nu)(\mu-\lambda\nu)$, σ' mennyiségekkel szorozván és azután az elsőt és másodikat, harmadikat és negyediket, ötödiket és hatodikat összeadván, a $pb_1\ b_2\ b_3$ STEINER-féle egyenes esetére vonatkozó és fönnebb közlött azonosságok kerülnek elő. Ezekből azt látjuk, hogy az

$$\begin{aligned}
\lambda'\mu'\nu'(\lambda-\mu\nu)(\mu-\nu\lambda)(\nu-\lambda\mu)\ G_{iklmnp} + (1-\lambda\mu\nu)\sigma'.G_{imlpnk} &= 0\\
\lambda\mu\nu.\sigma'.G_{iknlpm} - \mu'\nu'(\mu-\lambda\nu)(\nu-\lambda\mu).G_{ilnmpk} &= 0\\
\lambda\mu\nu.\sigma'.G_{inkplm} - \nu'\lambda'(\nu-\lambda\mu)(\lambda-\mu\nu)\ G_{ipkmln} &= 0\\
\lambda\mu\nu.\sigma'.G_{ilpnkm} - \lambda'\mu'(\lambda-\mu\nu)(\mu-\lambda\nu)\ G_{inpmkl} &= 0
\end{aligned}$$

egyenletek egy ugyanazt az egyenest fejezik ki. De az első egyenlet alkatánál fogva a p pontot, a második a b_1 pontot, a harmadik a b_2 pontot, a negyedik a b_3 pontot foglalja magában. E három pont tehát ugyanazon egyenesben fekszik, melynek egyenletéül a mondott négy egyenlet bármelyikét tekinthetjük. [1])

9) CAYLEY a 60 KIRKMAN-féle pontról kimutatta, hogy e pontok hármanként ugyanazon egyenesben feküsznek és egy-egy ily egyenesen egy STEINER-féle pont is fekszik. Ily egyenes van tehát 20 és ez egyeneseket CAYLEY-féle egyeneseknek nevezik. A p STEINER-féle ponttal ugyanazon egyenesben fekszik az a három KIRKMAN-féle pont, melyek — HESSE műkifejezésével élvén — a π STEINER-féle pontban egybefutó

[1]) A Steiner-féle pontok és egyenesek egymáshoz való fekvésének illustrálására megjegyezzük, hogy ugyanazon síkban fekvő hat körnek $\frac{6.5}{1.2} = 15$ hatványvonala és $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ hatványpontja oly idomot képez, mint a 15 Steiner-féle egyenes és a 20 Steiner-féle pont.

PASCAL-féle egyenesek ideális polusai. A 20 CAYLEY-féle egyenes e szerint a következő:

p	. K_{imlknp}	. K_{iklpnm}	. K_{iplmnk}
a_1	. K_{ilmkpn}	. K_{ikmnpl}	. K_{inmlpk}
a_2	. K_{ilmknp}	. K_{ikmpnl}	. K_{ipmlnk}
a_3	. K_{imlkpn}	. K_{iklnpm}	. K_{inlmpk}
b_1	. K_{iknmpl}	. K_{imnlpk}	. K_{ilnkpm}
b_2	. K_{ipknlm}	. K_{inkmlp}	. K_{inlpkm}
b_3	. K_{imklpn}	. K_{ilknpm}	. K_{inkmpl}
c_1	. K_{iklpmn}	. K_{iplnmk}	. K_{inlkmp}
c_2	. K_{ipknml}	. K_{inklmp}	. K_{ilkpmn}
c_3	. K_{imklnp}	. K_{ilkpnm}	. K_{ipkmnl}
β_1	. K_{iknlpm}	. K_{ilnmpk}	. K_{imnkpl}
β_2	. K_{inkplm}	. K_{ipkmln}	. K_{imknlp}
β_3	. K_{ilpnkm}	. K_{inpmkl}	. K_{implkn}
γ_1	. K_{ikmpln}	. K_{ipmnlk}	. K_{inmklp}
γ_2	. K_{inkpml}	. K_{ipklmn}	. K_{ilknmp}
γ_3	. K_{ilnpkm}	. K_{ipnmkl}	. K_{imnlkp}
π	. K_{iklmnp}	. K_{imlpnk}	. K_{iplknm}
α_1	. K_{ikpnml}	. K_{inplmk}	. K_{ilpkmn}
α_2	. K_{ikmlnp}	. K_{ilmpnk}	. K_{ipmknl}
α_3	. K_{iklmpn}	. K_{imlnpk}	. K_{inlkpm}

CAYLEY tételét hasonló azonosságok bizonyitják, mint a 8) számban STEINER tételét. Ezen azonosságok a következők:

p pontot tartalmazó CAYLEY-féle egyenes:

$$\mu'\nu' . \sigma . G_{ilnmpk} - \mu\nu . \sigma' . G_{ikmpln} \equiv (\lambda' - \mu'\nu')(\sigma . G_{iklmnp} + \lambda\mu\nu . \sigma' . G_{imlpnk})$$
$$\nu'\lambda' . \sigma . G_{ipkmln} - \nu\lambda . \sigma' . G_{inkpml} \equiv (\mu' - \nu'\lambda')(\sigma . G_{iklmnp} + \lambda\mu\nu . \sigma' . G_{imlpnk})$$
$$\lambda'\mu' . \sigma . G_{inpmkl} - \lambda\mu . \sigma' . G_{ilnpkm} \equiv (\nu' - \lambda'\mu')(\sigma . G_{iklmnp} + \lambda\mu\nu . \sigma' . G_{imlpnk})$$

a_1 pontot tartalmazó CAYLEY-féle egyenes:

$$\mu'\nu' . \sigma_1 . G_{ipmnlk} - \mu\nu . \sigma_1' . G_{iknlpm} \equiv (\lambda - \mu'\nu')(\sigma_1 . G_{ikpnml} + \lambda'\mu\nu . \sigma_1' . G_{inplmk})$$
$$\nu'\lambda . o_1 . G_{ipknlm} - \nu\lambda' . \sigma_1' . G_{inklmp} \equiv (\mu' - \nu'\lambda)(\sigma_1 . G_{ikpnml} + \lambda'\mu\nu . \sigma_1' . G_{inplmk})$$
$$\lambda\mu' . \sigma_1 . G_{ilknpm} - \lambda'\mu . \sigma_1' . G_{imklnp} \equiv (\nu' - \lambda\mu')(\sigma_1 . G_{ikpnml} + \lambda'\mu\nu . \sigma_1' . G_{inplmk})$$

a_2 pontot tartalmazó CAYLEY-féle egyenes:

$$\mu\nu' . \sigma_2 . G_{imnlpk} - \mu'\nu . \sigma_2' . G_{iklpmn} \equiv (\lambda' - \mu\nu')(\sigma_2 . G_{ikmlnp} + \lambda\mu'\nu . \sigma_2' . G_{ilmpnk})$$
$$\nu'\lambda' . \sigma_2 . G_{ipklmn} - \nu\lambda . \sigma_2' . G_{inkplm} \equiv (\mu - \nu'\lambda')(\sigma_2 . G_{ikmlnp} + \lambda\mu'\nu . \sigma_2' . G_{ilmpnk})$$
$$\lambda'\mu . \sigma_2 . G_{imklpn} - \lambda\mu' . \sigma_2' . G_{ilkpnm} \equiv (\nu' - \lambda'\mu)(\sigma_2 . G_{ikmlnp} + \lambda\mu'\nu . \sigma_2' . G_{ilmpnk})$$

a_3 pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\mu'\nu\,.\,\sigma_3\,.\,G_{iknmpl} - \mu\nu'\,.\,\sigma_3'\,.\,G_{iplnmk} &\equiv (\lambda'-\mu'\nu)\,(\sigma_2\,.\,G_{iklmpn} + \lambda\mu\nu'\,.\,\sigma_3'\,.\,G_{imlnpk})\\
\nu\lambda'\,.\,\sigma_3\,.\,G_{inkmlp} - \nu'\lambda\,.\,\sigma_3'\,.\,G_{ipknml} &\equiv (\mu'-\nu\lambda')\,(\sigma_3\,.\,G_{iklmpn} + \lambda\mu\nu'\,.\,\sigma_3'\,.\,G_{imlnpk})\\
\lambda'\mu'\,.\,\sigma_3\,.\,G_{ipnmkl} - \lambda\mu\,.\,\sigma_3'\,.\,G_{ilpnkm} &\equiv (\nu-\lambda'\mu')\,(\sigma_3\,.\,G_{iklmpn} + \lambda\mu\nu'\,.\,\sigma_3'\,.\,G_{imlnpk})
\end{aligned}$$

b_1 pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\mu'\nu'.\sigma_1\,.\,G_{ilnmpk} - \mu\nu\,.\,\sigma'.\,G_{iknlpm} &\equiv (\lambda'-\mu'\nu')\sigma_1.\,G_{iklmnp} - (\lambda'-\mu\nu)\sigma'.G_{inplmk}\\
\mu'(\nu'-\nu).\sigma_1\,.\,G_{inpmkl} + \nu(\mu'-\mu).\sigma'.\,G_{inklmp} &\equiv (\lambda\mu'\nu-1)[(\lambda'-\mu'\nu').\sigma_1\,G_{iklmnp} - (\lambda'-\mu\nu)\sigma'.\,G_{inplmk}]\\
\nu'(\mu'-\mu).\sigma_1\,.\,G_{ipkmln} + \mu(\nu'-\nu).\sigma'.\,G_{imklnp} &\equiv (\lambda\mu\nu'-1)[(\lambda'-\mu'\nu').\sigma_1\,G_{iklmnp} - (\lambda'-\mu\nu)\sigma'.\,G_{inplmk}]
\end{aligned}$$

b_2 pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\nu'\lambda'.\sigma_2\,.\,G_{ipkmln} - \nu\lambda\,.\,\sigma'.\,G_{inkplm} &\equiv (\mu'-\nu'\lambda')\sigma_2.G_{iklmnp} - (\mu'-\nu\lambda)\sigma'.\,G_{ilmpnk}\\
\nu'(\lambda'-\lambda).\sigma_2\,.\,G_{ilnmpk} + \lambda(\nu'-\nu).\sigma'.\,G_{ilkpnm} &\equiv (\lambda\mu\nu'-1)[(\mu'-\nu'\lambda')\sigma_2.G_{iklmnp} - (\mu'-\nu\lambda)\sigma'.\,G_{ilmpnk}]\\
\lambda'(\nu'-\nu).\sigma_2\,.\,G_{inpmkl} + \nu(\lambda'-\lambda).\sigma'.\,G_{iklpmn} &\equiv (\lambda'\mu\nu-1)[(\mu'-\nu'\lambda')\sigma_2.G_{iklmnp} - (\mu'-\nu\lambda)\sigma'.\,G_{ilmpnk}]
\end{aligned}$$

b_3 pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\lambda'\mu'.\sigma_3\,.\,G_{inpmkl} - \lambda\mu\,.\,\sigma'.\,G_{ilpnkm} &\equiv (\nu'-\lambda'\mu')\sigma_3.G_{iklmnp} - (\nu'-\lambda\mu)\,\sigma'.\,G_{imlnpk}\\
\lambda'(\mu'-\mu).\sigma_3\,.\,G_{ipkmln} + \mu(\lambda'-\lambda).\sigma'.\,G_{iplnmk} &\equiv (\lambda'\mu\nu-1)[(\nu'-\lambda'\mu')\sigma_3.G_{iklmnp} - (\nu'-\lambda\mu).\sigma'.\,G_{imlnpk}]\\
\mu'(\lambda'-\lambda).\sigma_3\,.\,G_{ilnmpk} + \lambda(\mu'-\mu).\,\sigma'.\,G_{ipknml} &\equiv (\lambda\mu\nu'-1([(\nu'-\lambda'\mu')\sigma_3.G_{iklmnp} - (\nu'-\lambda\mu)\,\sigma'.\,G_{imlnpk}]
\end{aligned}$$

c_1 pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\mu'\nu'.\sigma\,.\,G_{ipmnlk} - \mu\nu.\sigma_1'.\,G_{ikmpln} &\equiv (\lambda-\mu'\nu')\,\sigma.G_{ikpnml} - (\lambda-\mu\nu).\sigma'.\,G_{imlpnk}\\
\mu'(\nu'-\nu).\sigma\,.\,G_{ilknpm} + \nu(\mu'-\mu).\sigma_2'.G_{inkpml} &\equiv (\lambda'\mu'\nu-1)[(\lambda-\mu'\nu')\,\sigma.G_{ikpnml} - (\lambda-\mu\nu)\,\sigma_1'.\,G_{imlpnk}]\\
\nu'(\mu'-\mu).\sigma\,.\,G_{ipknlm} + \mu(\nu'-\nu).\sigma_1'.G_{ilnpkm} &\equiv (\lambda'\mu\nu'-1)[(\lambda-\mu'\nu')\,\sigma.G_{ikpnml} - (\lambda-\mu\nu)\,\sigma_1'.\,G_{imlpnk}]
\end{aligned}$$

c_2 pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\nu'\lambda'.\sigma\,.\,G_{ipklmn} - \nu\lambda.\sigma_2'.\,G_{inkpml} &\equiv (\mu-\nu'\lambda')\,\sigma.G_{ikmlnp} - (\mu-\nu\lambda)\,\sigma_2'.\,G_{imlpnk}\\
\nu'(\lambda'-\lambda).\sigma\,.\,G_{imnlpk} + \lambda(\nu'-\nu).\sigma_2'.\,G_{ilnpkm} &\equiv (\lambda\mu'\nu'-1)[(\mu-\nu'\lambda')\,\sigma.G_{ikmlnp} - (\mu-\nu\lambda)\,\sigma_2'.\,G_{imlpnk}]\\
\lambda'(\nu'-\nu).\sigma\,.\,G_{imklpn} + \nu(\lambda'-\lambda).\sigma_2'.\,G_{ikmpln} &\equiv (\lambda'\mu'\nu-1)[(\mu-\nu'\lambda')\,\sigma.G_{ikmlnp} - (\mu-\nu\lambda)\,\sigma_2'.\,G_{imlpnk}]
\end{aligned}$$

c_3 pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\lambda'\mu'.\sigma\,.\,G_{ipnmkl} - \lambda\mu.\sigma_2'.\,G_{ilnpkm}. &\equiv (\nu-\lambda'\mu')\,\sigma.G_{iklmpn} - (\nu-\lambda\mu)\,\sigma_3'.\,G_{imlpnk}\\
\lambda'(\mu'-\mu).\sigma\,.\,G_{inkmlp} + \mu(\lambda'-\lambda)\sigma_3'.\,G_{ikmpln} &\equiv (\lambda'\mu\nu'-1)[(\nu-\lambda'\mu')\,\sigma.G_{iklmpn} - (\nu-\lambda\mu)\,\sigma_3'.\,G_{imlpnk}]\\
\mu'(\lambda'-\lambda).\sigma\,.\,G_{iknmpl} + \lambda(\mu'-\mu)\sigma_3'.\,G_{inkpml} &\equiv (\lambda\mu'\nu'-1)[(\nu-\lambda'\mu')\,\sigma.G_{iklmpn} - (\nu-\lambda\mu)\,\sigma_3'.\,G_{imlpnk}]
\end{aligned}$$

β_1 pontot tartalmazó CAYLEY-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\mu'\nu.\sigma'_2.\,G_{iknmpl}-\mu\nu'\sigma'_3.\,G_{imnlpk} &\equiv (\lambda'-\mu'\nu)\,\sigma'_2.\,G_{iklmpn}-(\lambda'-\mu\nu')\,\sigma_3.G_{ikmlnp}\\
\nu(\mu'-\mu).\sigma'_2.\,G_{inkmlp}-\mu(\nu'-\nu)\,\sigma'_3.\,G_{imklpn} &\equiv (\lambda\mu\nu-1)[(\lambda'-\mu'\nu).\sigma'_2.\,G_{iklmpn}-(\lambda'-\mu\nu').\sigma'_3.G_{ikmlnp}]\\
\nu'(\mu'-\mu).\sigma'_3.\,G_{ipklmn}-\mu'(\nu'-\nu)\,\sigma'_2.\,G_{ipnmkl} &\equiv (\lambda\mu'\nu'-1)[(\lambda'-\mu'\nu).\sigma'_2.\,G_{iklmpn}-(\lambda'-\mu\nu').\sigma'_3.G_{ikmlnp}]
\end{aligned}$$

β_2 pontot tartalmazó CAYLEY-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\nu'\lambda.\sigma'_3.\,G_{ipknlm}-\nu\lambda'.\sigma'_1.\,G_{inkmlp} &\equiv (\mu'-\nu'\lambda)\,\sigma'_3.G_{ikpnml}-(\mu'-\nu\lambda')\,\sigma'_1.\,G_{iklmpn}\\
\lambda(\nu'-\nu).\sigma'_3.\,G_{ilknpm}-\nu(\lambda'-\lambda).\sigma'_1.\,G_{iknmpl} &\equiv (\lambda\mu\nu-1)[(\mu'-\nu'\lambda).\sigma'_3.G_{ikpnml}-(\mu'-\nu\lambda')\,\sigma'_1.\,G_{iklmpn}]\\
\lambda'(\nu'-\nu).\sigma'_1.\,G_{ipnmkl}-\nu'(\lambda'-\lambda).\sigma_3.\,G_{ipmnlk} &\equiv (\lambda'\mu\nu'-1)[(\mu'-\nu'\lambda).\sigma'_3.G_{ikpnml}-(\mu'-\nu\lambda')\,\sigma'_1.\,G_{iklmpn}]
\end{aligned}$$

β_3 pontot tartalmazó CAYLEY-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\lambda'\mu.\sigma'_1.\,G_{imklpn}-\lambda\mu'.\sigma'_2.\,G_{ilknpm} &\equiv (\nu'-\lambda'\mu)\,\sigma'_1.G_{ikmlnp}-(\nu'-\lambda\mu')\,\sigma'_2.\,G_{ikpnml}\\
\mu(\lambda'-\lambda).\sigma'_1.\,G_{imnlpk}-\lambda(\mu'-\mu).\sigma'_2.\,G_{ipknlm} &\equiv (\lambda\mu\nu-1)[(\nu'-\lambda'\mu)\,\sigma'_1.G_{ikmlnp}-(\nu'-\lambda\mu').\sigma'_2.\,G_{ikpnml}]\\
\mu'(\lambda'-\lambda).\sigma'_2.\,G_{ipmnlk}-\lambda'(\mu'-\mu).\sigma'_1.\,G_{ipklmn} &\equiv (\lambda'\mu'\nu-1)[(\nu'-\lambda'\mu)\,\sigma'_1.G_{ikmlnp}-(\nu'-\lambda\mu').\sigma_2.\,G_{ikpnml}]
\end{aligned}$$

γ_1 pontot tartalmazó CAYLEY-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\mu'\nu.\sigma_3.\,G_{iklpmn}-\mu\nu'.\sigma_2.\,G_{iplnmk} &\equiv (\lambda-\mu'\nu).\sigma_3.G_{ilmpnk}-(\lambda-\mu\nu')\,\sigma_2.\,G_{imlnpk}\\
\nu'(\mu'-\mu).\sigma_2.\,G_{ipknml}-\mu'(\nu'-\nu).\sigma_3.\,G_{ilkpnm} &\equiv (\lambda'\mu'\nu'-1)[(\lambda-\mu'\nu).\sigma_3.G_{ilmpnk}-(\lambda-\mu\nu')\,\sigma_2.\,G_{imlnpk}]\\
\nu(\mu'-\mu).\sigma_3.\,G_{lnkplm}-\mu(\nu'-\nu).\sigma_2.\,G_{ilpnkm} &\equiv (\lambda'\mu\nu-1)[(\lambda-\mu'\nu).\sigma_3.G_{ilmpnk}-(\lambda-\mu\nu').\sigma_2.\,G_{imlnpk}]
\end{aligned}$$

γ_2 pontot tartalmazó CAYLEY-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\nu'\lambda.\sigma_1.\,G_{ipknml}-\nu\lambda'.\sigma_3.\,G_{inklmp} &\equiv (\mu-\nu'\lambda)\,\sigma_1.G_{imlnpk}-(\mu-\nu\lambda').\sigma_3.\,G_{inplmk}\\
\lambda'(\nu'-\nu).\sigma_3.\,G_{imklnp}-\nu'(\lambda'-\lambda)\,\sigma_1.\,G_{iplnmk} &\equiv (\lambda'\mu'\nu'-1)[(\mu-\nu'\lambda).\sigma_1\,G_{imlnpk}-(\mu-\nu\lambda')\,\sigma_3.\,G_{inplmk}]\\
\lambda(\nu'-\nu).\sigma_1.\,G_{ilpnkm}-\nu(\lambda'-\lambda).\sigma_3.\,G_{iknlpm} &\equiv (\lambda'\mu'\nu-1)[(\mu-\nu'\lambda).\sigma_1.G_{imlnpk}-(\mu-\nu\lambda')\sigma_3.\,G_{inplmk}]
\end{aligned}$$

γ_3 pontot tartalmazó CAYLEY-féle egyenes:

$$\begin{aligned}
\lambda'\mu.\sigma_2.\,G_{imklnp}-\lambda\mu'.\sigma_1.\,G_{ilkpnm} &\equiv (\nu-\lambda'\mu)\,\sigma_2.\,G_{inplmk}-(\nu-\lambda\mu')\,\sigma_1.\,G_{ilmpnk}\\
\mu'(\lambda'-\lambda).\sigma_1.\,G_{iklpmn}-\lambda'(\mu'-\mu).\sigma_2.\,G_{inklmp} &\equiv (\lambda'\mu'\nu'-1)[\nu-\lambda'\mu)\,\sigma_2.\,G_{inplmk}-(\nu-\lambda\mu')\,\sigma_1.\,G_{ilmpnk}]\\
\mu(\lambda'-\lambda).\sigma_2.\,G_{iknlpm}-\lambda(\mu'-\mu).\sigma_1.\,G_{inkplm} &\equiv (\lambda\mu\nu'-1)[(\nu-\lambda'\mu)\,\sigma_2.\,G_{inplmk}-(\nu-\lambda\mu')\,\sigma_1.\,G_{ilmpnk}]
\end{aligned}$$

A még hátralevő négy esetben a Cayley-féle egyeneseket így fejezhetjük ki:

π pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes:
$$\begin{vmatrix} (\lambda-\mu\nu)x_1 & 1 & (\lambda-\mu\nu)^2 \\ (\mu-\nu\lambda)x_2 & 1 & (\mu-\nu\lambda)^2 \\ (\nu-\lambda\mu)x_3 & 1 & (\nu-\lambda\mu)^2 \end{vmatrix} = o$$

α_1 pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes:
$$\begin{vmatrix} (\lambda'-\mu\nu)x_1 & 1 & (\lambda'-\mu\nu)^2 \\ (\mu-\nu\lambda')x_2 & 1 & (\mu-\nu\lambda')^2 \\ (\mu-\lambda'\mu)x_3 & 1 & (\nu-\lambda'\mu)^2 \end{vmatrix} = o$$

α_2 pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes:
$$\begin{vmatrix} (\lambda-\mu'\nu)x_1 & 1 & (\lambda-\mu'\nu)^2 \\ (\mu'-\nu\lambda)x_2 & 1 & (\mu'-\nu\lambda)^2 \\ (\nu-\lambda\mu')x_3 & 1 & (\nu-\lambda\mu')^2 \end{vmatrix} = o$$

α_3 pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes:
$$\begin{vmatrix} (\lambda-\mu\nu')x_1 & 1 & (\lambda-\mu\nu')^2 \\ (\mu-\nu'\lambda)x_2 & 1 & (\mu-\nu'\lambda)^2 \\ (\nu'-\lambda\mu)x_3 & 1 & (\nu'-\lambda\mu)^2 \end{vmatrix} = o$$

Most még az azonosságok elsejének helyességét mutatjuk ki és azt, hogy a π pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes egyenletéül föltüntetett egyenlet a már közlött Kirkman-féle pontokat is magában foglalja. Tudjuk, hogy:

$$G_{iklmnp} \equiv \lambda' x_1 + \mu' x_2 + \nu' x_3$$
$$G_{imlpnk} \equiv \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3$$

Innen:

$$\begin{aligned}
G_{iklmnp} &\equiv \mu'\nu'(\ x_1 + \nu x_2 + \mu x_3) + (\lambda' - \mu'\nu')x_1 \\
G_{imlpnk} &\equiv \mu\nu(\ x_1 + \nu' x_2 + \mu' x_3) + (\lambda - \mu\nu)x_1 \\
G_{iklmnp} &\equiv \nu'\lambda'(\ \nu x_1 + x_2 + \lambda x_3) + (\mu' - \nu'\lambda')x_2 \\
G_{imlpnk} &\equiv \nu\lambda(\nu' x_1 + x_2 + \lambda' x_3) + (\mu - \nu\lambda)x_2 \\
G_{iklmnp} &\equiv \lambda'\mu'(\ \mu x_1 + \lambda x_2 + x_3) + (\nu' - \lambda'\mu')x_3 \\
G_{imlpnk} &\equiv \lambda\mu(\mu' x_1 + \lambda' x_2 + x_3) + (\nu - \lambda\mu)x_3
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
&(\lambda'-\mu'\nu')\, G_{iklmnp} + [\mu'\nu'(\mu-\mu')\,(\nu-\nu') - (\lambda'-\mu'\nu')^2]x_1 \equiv \\
&\equiv \mu'\nu'[(\mu-\mu')\,(\nu-\nu')x_1 + (\lambda'-\mu'\nu')\,(x_1 + \nu x_2 + \mu x_3)] \\
&(\lambda-\mu\nu)\, G_{imlpnk} + [\mu\nu(\mu-\mu')\,(\nu-\nu') - (\lambda-\mu\nu)^2]x_1 \equiv \\
&\equiv \mu\nu[(\mu-\mu')\,(\nu-\nu')x_1 + (\lambda-\mu\nu).(x_1 + \nu' x_2 + \mu' x_3)] \\
&(\mu'-\nu'\lambda')\, G_{iklmnp} + [\nu'\lambda'(\nu-\nu')\,(\lambda-\lambda') - (\mu'-\nu'\lambda')^2]x_2 \equiv \\
&\equiv \nu'\lambda'[(\nu-\nu')\,(\lambda-\lambda')x_2 + (\mu'-\nu'\lambda')\,(\nu x_1 + x_2 + \lambda x_3)] \\
&(\mu-\nu\lambda)\, G_{imlpnk} + [\nu\lambda(\nu-\nu')\,(\lambda-\lambda') - (\mu-\nu\lambda)^2]x_2 \equiv \\
&\equiv \nu\lambda[(\nu-\nu')\,(\lambda-\lambda')x_2 + (\mu-\nu\lambda)\,(\nu' x_1 + x_2 + \lambda' x_3)]
\end{aligned}$$

$$(\nu'-\lambda'\mu')\,G_{iklmnp}+[\lambda'\mu'(\lambda-\lambda')\,(\mu-\mu')-(\nu'-\lambda'\mu')^2]x_3\equiv$$
$$\equiv\lambda'\mu'.[(\lambda-\lambda')\,(\mu-\mu')x_3+(\nu'-\lambda'\mu')\,(\mu x_1+\lambda x_2+x_3)]$$
$$(\nu-\lambda\mu)\,G_{imlpnk}+[\lambda\mu(\lambda-\lambda')\,(\mu-\mu')-(\nu-\lambda\mu)^2]x_3\equiv$$
$$\equiv\lambda\mu[(\lambda-\lambda')\,(\mu-\mu')x_3+(\nu-\lambda\mu)\,(\mu' x_1+\lambda' x_2+x_3)].$$

Tekintetbe vévén, hogy:

$$\mu'\nu'(\mu-\mu')(\nu-\nu')-(\lambda'-\mu'\nu')^2=\nu'\lambda'(\nu-\nu')[\lambda-\lambda')-(\mu'-\nu'\lambda')^2=$$
$$=\lambda'\mu'(\lambda-\lambda')(\mu-\mu')-(\nu'-\lambda'\mu')^2=1-\lambda'^2-\mu'^2-\nu'^2+2\lambda'\mu'\nu'=\sigma'$$
$$\mu\nu(\mu-\mu')(\nu-\nu')-(\lambda-\mu\nu^2)=\nu\lambda(\nu-\nu')(\lambda-\lambda')-(\mu-\nu\lambda)^2=$$
$$=\lambda\mu(\lambda-\lambda')(\mu-\mu')-(\nu-\lambda\mu)^2=1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\lambda\mu\nu=\sigma,$$

továbbá, hogy a jobb oldalon levő, a nagy zárjelben foglalt kifejezések G_{ilnmpk}, G_{ikmpln}; G_{ipkmln}, G_{inkpml}; G_{inpmkl}, G_{ilnpkm} symbolumokkal egyenlők, az utolsó identitásokat így irhatják:

$$(\lambda'-\mu'\nu')\,G_{iklmnp}+\sigma' x_1\equiv\mu'\nu'\,G_{ilnmpk}$$
$$(\lambda-\mu\nu)\,G_{imlpnk}+\sigma x_1\equiv\mu\nu\,G_{ikmpln}$$
$$(\mu'-\nu'\lambda')\,G_{iklmnp}+\sigma' x_2\equiv\nu'\lambda'\,G_{ipkmln}$$
$$(\mu-\nu\lambda)\,G_{imlpnk}+\sigma x_2\equiv\nu\lambda\,G_{inkpml}$$
$$(\nu'-\lambda'\mu')\,G_{iklmnp}+\sigma' x_3\equiv\lambda'\mu'\,G_{inpnkl}$$
$$(\nu-\lambda\mu)\,G_{imlpnk}+\sigma x_3\equiv\lambda\mu\,G_{ilnpkm}.$$

Ezen azonosságokat sorban $\sigma, -\sigma'$; $\sigma, -\sigma'$; $\sigma, -\sigma'$ mennyiségekkel szorozván és azután az elsőt és másodikat, a harmadikat és negyediket, az ötödiket és hatodikat összeadván, ered:

$$\mu'\nu'.\sigma\,G_{ilmnpk}-\mu\nu.\sigma'\,G_{ikmpln}\equiv(\lambda'-\mu'\nu').[\sigma.\,G_{iklmnp}+\lambda\mu\nu.\sigma'.\,G_{imlpnk}]$$
$$\nu'\lambda'.\sigma\,G_{ipkmln}-\nu\lambda.\sigma'\,G_{inkpml}\equiv(\mu'-\nu'\lambda').[\sigma.\,G_{iklmnp}+\lambda\mu\nu.\sigma'.\,G_{imlpnk}]$$
$$\lambda'\mu'.\sigma\,G_{inpmkl}-\lambda\mu.\sigma'\,G_{ilnpkm}\equiv(\nu'-\lambda'\mu').[\sigma.\,G_{iklmnp}+\lambda\mu\nu.\sigma'.\,G_{imlpnk}].$$

Ezen azonosságok azt mutatják, hogy a

$$\sigma.\,G_{iklmnp}+\lambda\mu\nu.\sigma'.\,G_{imlpnk}=o$$
$$\mu'\nu'.\sigma.\,G_{ilnmpk}-\mu\nu.\sigma'.\,G_{ikmpln}=o$$
$$\nu'\lambda'.\sigma.\,G_{ipkmln}-\nu\lambda\sigma'.\,G_{inkpml}=o$$
$$\lambda'\mu'.\sigma.\,G_{inpmkl}-\lambda\mu\sigma'.\,G_{ilnpkm}=o$$

egyenletek ugyanazt az egyenes vonalat fejezik ki. De az első a p pontot, a második a K_{imlknp}, a harmadik a K_{iklpnm}, a negyedik a K_{iplmnk} pontot foglalja magában. E négy pont tehát ugyanazon egyenesben fekszik.

A π pontot tartalmazó Cayley-féle egyenes magában foglalja: a K_{iklmnp}, K_{imlpnk}, K_{iplknm} Kirkman-féle pontokat, melyeken sorra a

$$G_{ilnkpm}=o\qquad G_{inlkmp}=o\qquad G_{ilmkpn}=o$$
$$G_{inlpkm}=o\qquad G_{ilkpmn}=o\qquad G_{ikmpnl}=o$$
$$G_{inkmpl}=o\qquad G_{ipkmnl}=o\qquad G_{inlmpk}=o$$

egyenesek keresztül haladnak és még a π pontot, melyben

$$(\mu - \nu\lambda)x_2 - (\nu - \lambda\mu)x_3 = o$$
$$(\nu - \lambda\mu)x_3 - (\lambda - \mu\nu)x_1 = o$$
$$(\lambda - \mu\nu)x_1 - (\mu - \nu\lambda)x_2 = o$$

egyenesek metszik egymást. Ezen egyenletekből azt látjuk, hogy π pont koordinátái

$$\frac{1}{\lambda - \mu\nu}, \frac{1}{\mu - \nu\lambda}, \frac{1}{\nu - \lambda\mu}$$

és K_{iplknm} pont koordinátái:

$$\lambda - \mu\nu, \mu - \nu\lambda, \nu - \lambda\mu,$$

tehát e két pontot összekapcsoló egyenes egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \frac{1}{\lambda - \mu\nu} & \lambda - \mu\nu \\ x_2 & \frac{1}{\mu - \nu\lambda} & \mu - \nu\lambda \\ x_3 & \frac{1}{\nu - \lambda\mu} & \nu - \lambda\mu \end{vmatrix} = o$$

vagy

$$\begin{vmatrix} (\lambda - \mu\nu)x_1 & 1 & (\lambda - \mu\nu)^2 \\ (\mu - \nu\lambda)x_2 & 1 & (\mu - \nu\lambda)^2 \\ (\nu - \lambda\mu)x_3 & 1 & (\nu - \lambda\mu)^2 \end{vmatrix} = o$$

Most meg kell mutatnunk, hogy ezen egyenesben a K_{iklmnp} és K_{iplknm} pontok is feküsznek. E végett tegyük:

$$(\nu - \lambda\mu)^2 - (\mu - \nu\lambda)^2 = \lambda\mu\nu(\mu\nu' - \mu'\nu)(\lambda - \lambda')$$
$$(\lambda - \mu\nu)^2 - (\nu - \lambda\mu)^2 = \lambda\mu\nu(\nu\lambda' - \nu'\lambda)(\mu - \mu')$$
$$(\mu - \nu\lambda)^2 - (\lambda - \mu\nu)^2 = \lambda\mu\nu(\lambda\mu' - \lambda'\mu)(\nu - \nu')$$

akkor az az egyenlet:

20) $$\begin{vmatrix} (\lambda - \mu\nu)(\lambda - \lambda')x_1 & \lambda & \lambda' \\ (\mu - \nu\lambda)(\mu - \mu')x_2 & \mu & \mu' \\ (\nu - \lambda\mu)(\nu - \nu')x_3 & \nu & \nu' \end{vmatrix} = o$$

egyenletté válik. Legyen ez egyszer rövidség kedvéért

$\lambda x_1 + \mu' x_2 + \nu' x_3 = x$ $\quad$ $\lambda' x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = x'$ $\quad$ $\lambda' x_1 + \mu' x_2 + \nu' x_3 = X$

$\lambda' x_1 + \mu x_2 + \nu' x_3 = y$ $\quad$ $\lambda x_1 + \mu' x_2 + \nu x_3 = y'$ $\quad$ és $\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3 = Y$

$\lambda' x_1 + \mu' x_2 + \nu x_3 = z$ $\quad$ $\lambda x_1 + \mu x_2 + \nu' x_3 = z'$

akkor:

$$(\lambda - \lambda')x_1 = x - X \qquad (\lambda - \lambda')x_1 = Y - x'$$
$$(\mu - \mu')x_2 = y - X \quad \text{és} \quad (\mu - \mu')x_2 = Y - y'$$
$$(\nu - \nu')x_3 = z - X \qquad (\nu - \nu')x_3 = Y - z'$$

Ezt behelyettesítve a 20) alatt álló egyenletbe ezt az egyenletet az xyz, illetőleg $x'y'z'$ koordináták rendszerében ezen alakokban fejezhetjük ki:

$$21) \quad \begin{vmatrix} (\lambda - \mu\nu)x & \lambda & \lambda' \\ (\mu - \nu\lambda)y & \mu & \mu' \\ (\nu - \lambda\mu)z & \nu & \nu' \end{vmatrix} = o \quad \text{és} \quad 22) \quad \begin{vmatrix} (\lambda - \mu\nu)x' & \lambda' & \lambda' \\ (\mu - \nu\lambda)y' & \mu' & \mu' \\ (\nu - \lambda\mu)z' & \nu' & \nu' \end{vmatrix} = o$$

De másrészről ez azonosságok is fönnállanak:

$$\mu'(\mu - \nu\lambda)y - \nu'(\nu - \lambda\mu)z \equiv G_{inlkmp}$$
$$\nu'(\nu - \lambda\mu)z - \lambda'(\lambda - \mu\nu)x \equiv G_{ilkpmn}$$
$$\lambda'(\lambda - \mu\nu)x - \mu'(\mu - \nu\lambda)y \equiv G_{ipkmnl}$$

és

$$\mu(\mu - \nu\lambda)y' - \nu(\nu - \lambda\mu)z' \equiv \lambda\mu\nu \,.\, G_{ilnkpm}$$
$$\nu(\nu - \lambda\mu)z' - \lambda(\lambda - \mu\nu)x' \equiv \lambda\mu\nu \,.\, G_{inlpkm}$$
$$\lambda(\lambda - \mu\nu)x' - \mu(\mu - \nu\lambda)y' \equiv \lambda\mu\nu \,.\, G_{inkmpl}$$

melyekből látjuk, hogy az xyz rendszerben K_{imlpnk} pont koordinátái:

$$\frac{\lambda}{\lambda - \mu\nu}, \quad \frac{\mu}{\mu - \nu\lambda}, \quad \frac{\nu}{\nu - \lambda\mu} \quad \text{és}$$

az $x'y'z'$ rendszerben K_{iklmhp} pont koordinátái:

$$\frac{\lambda'}{\lambda - \mu\nu}, \quad \frac{\mu'}{\mu - \nu\lambda}, \quad \frac{\nu'}{\nu - \lambda\mu}.$$

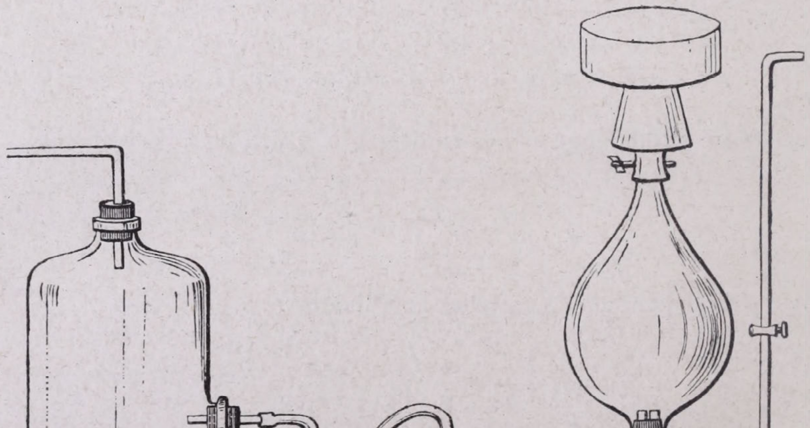
Amazok a (21), emezek a (22) egyenletnek eleget tévén, e két pont a π és K_{iplknm} pontokkal ugyanazon egyenesben feküsznek.

A SIMPSON[1])-FÉLE NITROGÉN-MEGHATÁROZÁSI MÓDNAK EGY ÚJ MÓDOSITÁSA.

Közli: Dr. Hankó Vilmos, dévai főreáliskolai tanár.

Tudva van, hogy a DUMAS-SIMPSON-féle sokszorosan tökéletesített nitrogén-meghatározási mód is annyira körülményes, hogy épen az eljárás körűlményessége igen gyakran a meghatározás pontosságának rovására esik; ismeretes továbbá az is, hogy a higany alkalmazása, mely e meghatározási módoknál gáz-elzáró folyadék gyanánt szokott használtatni több okból a mily mértékben kellemetlen, elkerülése anynyira kívánatos.

Boldogúlt Dr. FLEISCHER ANTAL kolozsvári egyetemi tanár, és assistense Dr. NEMES bizonyos nitro-vegyületek tanulmányozása közben igen sok nitrogén-meghatározást kényszerülvén tenni, munkájok folyamában élénken érezték e meghatározási mód gyengéit. E bajokon egy készülék összeállitásával segítettek, mely készülék a mily szerencsésen egyesíti amannak előnyeit, ép úgy elkerüli hátrányait.



E készülék egy állványhoz erősített, felfordított, 200—250 C.C. űrtartalmu választó tölcsérből áll, melybe alól kétszer átfúrt dugó van

[1]) Annal. d. Chem. u. Pharm. 95. 74.

illesztve. Az egyik nyílásba derékszögűleg meghajlított üvegcső van alkalmazva, mely hosszabb kaucsuk cső által 1—1$^1/_2$ liter tartalmú tömény kálihydrátot tartalmazó kis aspirátorral áll kapcsolatban.

A másik nyilásba *Z* alakúlag hajlított, közepe táján csappal ellátott üvegcső van illesztve, az égető csővel való összeköttetés végett. A közlekedő edények ismert törvényének helyes alkalmazása, az aspirátor kellő emelése által, a választó tölcsér kálihydráttal töltendő meg, valamint a *Z* alakú cső is, mely azután kaucsuk cső segítségével az égető csővel kapcsoltatik össze.

A meghatározásnál eljárásuk folyama, röviden vázolva, a következő: egy körűlbelől 80 cm. hosszú, egyik végén beforrasztott égető csőbe 8—10 cm. hosszú réteg szénsavas mangánt, azután 2—3 cm. tiszta réz oxydot tettek, majd az anyagot rézoxyddal keverték, úgy hogy e keverék 10—15 cm. foglalt el, továbbá mintegy 20 cm. tiszta rézoxydot s végül 10—15 cm. hosszúságban tiszta rézdrótból álló dugaszt. — A cső nyilt vége átfúrt s vékonyabb üvegcsővel ellátott dugóval volt elzárva.

Égetésnél először a szénsavasmangánt hevítették, a csőben foglalt lég kiüzetése végett, mi rendesen 10—15 percz alatt szokott megtörténni. Egyidejűleg azzal, az anyag után következő rézoxyd és rézdrót-dugasz is hevíttetett, miáltal a lég eltávozása könnyíttetett. — Miután a levegőt szénsav által a csőből teljesen ki űzték, ezt kaucsuk csővel össze kötötték a nitrogén-gáz felfogására szolgáló készülékkel.

Ha a kálihydrát a fejlődő összes gázt elnyeli, jele annak, hogy a levegő teljesen ki van űzve a csőből s az anyag elégetéséhez hozzá lehet fogni. — A szénsav fejlődését a szénsavas mangán gyengébb hevítése által mérsékelték, s az anyagot az égetéseknél rendesen használni szokott mód szerint elölről, a beforrasztott végtől hátrafelé, lassankint hevítették. — Az égetés bevégezte után, midőn az egész cső izzó, erősebb szénsav áram által a csőben foglalt nitrogén is a leírt készülékbe hajtatott.

Ezután a többi lángot eloltva, még vagy 5 perczig engedték a szénsavat átmenni a csövön.

Ezek után a készüléket csappal elzárván, az égető csőtől elkapcsolták s a szénsav elnyelése végett a kálihydráttal jól összerázták. — Mintegy 12 órai állás után, a választótölcsér felső felén alkalmazott csészét vizzel megtöltvén, a nitrogéngázt kalibrált csőbe vitték át, s miután ez a záró víz hőmérsékét felvette, a gáz térfogatát leolvasták, az uralkodó hőmérsék és légnyomás észlelése mellett. — Az észlelt gáztérfogat az ismeretes képlet szerint redukáltatott 0°-ra és 760 mm nyomásra.

Az ekkép talált köbcentiméterek száma 0,0125456, vagyis 1 köbcentiméter nitrogén súlyával szorozva, adta az égetett anyagban lévő nitrogén súlyát, mely azután még százalékokra átszámítandó.

E készülék bemutatását nemcsak azért tartám kiváló érdekűnek, mivel eddigelé csupán csak pár szóval érintetett egy a nyilvánosságra nem szánt értekezésben [1], — a mely értekezésből vettem ki szerző beleegyezésével a készülék és eljárás leirását — hanem azért is, mivel közlése által a vegytannal gyakorlatilag foglalkozóknak igen jó szolgálatot véltem tenni. E készülék nemcsak igen könnyen összeállítható, kezelhető, de mint magam is több e mód szerint véghez vitt elemzés után tanúskodhatom, az eredmény pontosság tekintetében is kitünő.

AZ ÜVEG EZÜSTÖZÉSE.

Martin, a párisi observatorium igazgatója, ezüstözött teleskóp-tükröt állított ki a jelenlegi világtárlaton, mit ő maga vont be ezüstréteggel. Minthogy az üveg ezüstözése physikai laboratoriumokban igen gyakran előforduló mütétel, czélszerünek találom Martin eljárását e helyen közzétenni.

Készítünk 4-féle oldatot, melyek külön-külön bomlás nélkül sokáig eltarthatók.

1) Feloldunk 40 gramm salétromsavas ezüstöt 1 liter destillált vizben.

2) 6 gramm salétromsavas ammoniakot 100 gramm vizben.

3) 10 gramm (chlór- és szénsavmentes) maró kálit 100 gramm vizben.

4) 25 gramm czukrot 250 gramm vizben, és hozzáteszünk 3 gramm borsavat. A keveréket felforraljuk és körülbelül 10 perczig folytatjuk a forralást, mi által a nádczukor invert-czukorrá alakul át. Lehülés után 50 köbcentiméter alkoholt keverünk hozzá, meggátolván ezzel a folyadék későbbi erjedését, és meghigítjuk az egészet fél literre, ha télen dolgozunk; és valamivel többre hogyha nyáron akarjuk az oldatot használni.

Tegyük fel, hogy tükröt akarnánk ezüstözni. A puha ecsettel tisztított üvegfelületre nehány csepp concentrált salétromsavat öntünk és fésült gyapótból készített labdával jól megtisztítjuk, mire a salétromsavat vízzel eltávo-

---

[1] Nemes Gyula: A carbanilid és kénvegyületén k viselkedése légenysav iránt. — Túdori értekezés.

lítjuk és a tükröt teljesen tiszta, finom vászonkendővel megszárítjuk. Ugyan-e felületre a harmadik számú kálioldatot, melyet előbb egyenlő rész borszeszszel hígítunk, rá öntjük és gyaputcsomóval jól szétdörzsöljük.

E folyadéknak az a tulajdonsága van, hogy az üvegfelülethez tapad. Az így kezelt tükröt vízzel telt edénybe mártjuk és felületéről a maró folyadékot eczet segélyével eltávolítjuk, mire akkép helyezzük egy porczellántányérra, hogy felülete körülbelől $^1/_2$ centiméternyi távolságban legyen a tányér fenekétől; 3 fa-, vagy halcsont-darabkával ezt könnyen el lehet érni. Óvatos mozgatás közben végre tiszta vizet öntünk az üveg és a tányér közé.

Most már a tükör nagyságához képest, például 10 centiméter átmérőjű tükörhöz mérve: 15 köbcentiméter 1) számú folyadékot; 15 köbcentimétert a 2) számúból keverünk össze.

Egy másik pohárban 15 k.c. a 3) számú és 15 k.c. a 4) számú folyadékból keverünk, mire a két pohár tartalmát egymással elegyítjük.

E keveréket alkalmas porczellántányérra öntjük és az eddig vízbe mártott tükör-felülethez hamarjában hozzá értetjük, mégis azzal az elővigyázattal, hogy a tükörfelület és a tányér feneke közt $^1/_2$ centiméter távolság legyen.

Körülbelül fél percz múlva a folyadék előbb sárga-vörös, később pedig fekete szinűvé válik, miközben a fém-ezüst egyenletes és összefüggő alakban a porczellán, valamint az üveg-felületre lerakódik. Az egész műtétel alatt szükséges a tányért gyenge hullámzó mozgásban tartani, mindaddig, míg a folyadéknak felülete is fényes ezüstréteggel be nem vonódik. A műtétel ekkor be van fejezve. A tükröt a folyadéktól eltávolítjuk, gondosan, előbb közönséges, utóbb destillált vízzel le mossuk és itatós papiros felületére állítva, meghagyjuk száradni. Az ezüst réteg oly szilárd, hogy azt szarvasbőrrel és angol vörössel fényesíteni lehet. Ha azonban gondot viseltünk rá, hogy a kálilúg teljesen szénsavmentes legyen, úgy csak igen gyenge fátyol mutatkozik az ezüst felületén, mit a leggyengébb dörzsölés által teljesen eltávolíthatunk. Így az ezüstfelület csiszolása feleslegessé válik. W. V.

IRODALOM.

A Gauss és Bólyai közt folyt levelezés kiadása ügyében Schmidt Ferencz épitész úr, ki a két Bólyai életének és munkáinak megismertetése körül oly gazdag érdemeket szerzett magának, 1877 október havában fölkérte a m. tud. akadémiát, tenne e dologban lépéseket s legalább azt eszközölné ki, hogy e levelezés másolata a m. tud. akadémia birtokába jusson.

E felszólítás következlében a m. tud. akadémia mathematikai és természettudományi osztálya Schering göttingai egyetemi tanárhoz, Gauss összes munkáinak szerkesztőjéhez levelet intézett, megtudandó tőle, vajjon remélhető-e a szóban forgó levelezés közzététele?

Érdekesnek tartjuk e folyóirat olvasóival megismertetni Schmidt úr beadványát és Schering úr válaszát, melyet 1878 szeptember havában intézett az akadémtához:

Az első így hangzott:

»Folyó évi (1877) april 30-án Németország a jelen század elsőrendű mathematikusának, Gauss Károly Frigyes-nek 100-adik születési évfordulóját ünnepelte.

Eltekintve azon kitünő érdektől, melylyel minden művelt nemzet a lángeszü tudósnak működését követi, Gauss bennünket, magyarokat más oknál fogva is még különösen érdekel.

A mult század végén, midőn Gauss Göttingában az egyetemet látogatta, azon időben tehát, midőn teremtő agyában már fejledeztek a korszak alkotó eszmék, melyek rövid idő mulva megszerzék neki a nagy mathematikus hírnevét; akkor kevés számú barátjainak egyike, tanulótársa, a mi Bólyai Farkas-unk volt, a ki később hazájában elfeledve vagy félreismerve, Erdély egyik rejtett zugában tanárkodott és a kinek igazi jelentőségére mi csak a külföld által lettünk figyelmesek.

Sartorius v. Waltershausen Gauss életírója, ennek ifjukoráról szólva, így nyilatkozik:« Der ältere von Gauss Freunden, Wolfgang Bólyai in Marosvásárhely in Siebenbürgen ist ein Mann von hervorragendem Geiste, über den Gauss in früheren Jahren gesagt haben soll, dass er der einzige gewesene sei, der in seine metaphysischen Ansichten über Mathematik einzugehen verstand.«

Az ifjúkori barátok élethosszig levelezésben állottak egymással, melyből én Sartorius v. Waltershausen után (Bólyainak Gausshoz írt egyik leveléből) a 48-as viharos időből a következőket idézem: »Mittlerweile finde ich mich auf der Erde gleichberechtigt mit meinen Wurmcollegen, deren jeder an seinem Gewebe beflissen ist, bis ich bald in einem namenlosen Grabe, mit meinem Schicksale ausgesöhnt, ruhen werde.«

Midőn a két Bólyainak (atya és fiú) hátrahagyott iratait a Tek. Akadémiának megküldötték, azt reméltem, hogy ott találandom a leveleket is — de nem voltak köztük.

Miután a hazában nem nyerhettem felvilágosítást Göttingába Sartorius v. Waltershausen udv. tanácsos úrhoz fordultam, a ki 1872 deczember 30-ról következőképen válaszolt:

Zwischen Bólyai und Gauss hat zwar ein 57-jähriges Freundschaftsbündniss bestanden, allein in jener langen Zeit sind nur wenige (so viel ich mich erinnere, 11) Briefe gewechselt, welche ich in einer neuen Auflage zur Biographie, soweit sie sich für die Öffentlichkeit eignen, abdrucken lassen werde.

Die Originalbriefe beider Männer sind in der Nachlassenschaft von Gauss auf der hiesigen Bibliothek, augenblicklich auf unserer Sternwarte bewahrt. Die Briefe von Gauss an Bólyai sind ein Vermächtniss des letzteren, und mir zur diskreten Veröffentlichung anvertraut. Bólyai, wie Sie wissen werden, hat viel Familienunglück gehabt.

Die Fundgrube ist, wie Sie sehen, nicht unfangreich, aber von edlem Metall, welches ausgeprägt zu werden verdient. Ich werde für die Publication nach Bólyai's Willen mit grösster Gewissenhaftigkeit und Pietät sorge tragen.

Az óta 5 év mult el, Gauss 100 éves születésnapját megünnepelték, összes művei már megjelentek és egy év előtt maga Sartorius v. Waltershausen is követte Gaussot s Bólyait a sírba; ennélfogva mindegyre fogy a reménység, hogy a levelek valaha a nyilvánosságnak át fognak adatni, hacsak szeretet és tisztelet nem egyesülnek azon szándékban, hogy e kincset a feledéstől megóvják.

Ha a levelek teljes tartalmú kiadása leketetlen is, de kivánatos és a két férfi emlékéhez méltó, hogy a Tek. Akadémia legalább azok másolatát birja.

Ajánlom tehát a Tek. Akadémiának, eszközölné ki a levelezés megszerzését .....

Schering úr föntebb említett levele a m. tud. akadémiához igy hangzik:

»Die ungarische Akademie der Wissenschaften hat die Güte gehabt, an mich die Frage zu richten ob von meiner Seite eine Veröffentlichung der zwischen Gauss und Bólyai gewechselten Briefe ausgeführt werden wird.

Der Hohen Akademie habe ich die Ehre mitzutheilen, *das ich jetzt im Begriffe bin, diesen Schriftwechsel dem Druck zu übergeben.* Ich werde nur diejenigen Stellen auslassen, welche sich auf schmerzliche Familienereignisse beziehen und durch die Rücksicht auf die Angehörigen der beiden Gelehrten sich der Veröffentlichung entziehen. Die ungarische Akademie wird mit Vergnügen sehen, welchen grossen Werth Gauss auf die von deren Landsmann im Gebiete der abstracten höheren Geometrie ausgeführten und leider — bevor sie zur verdienten selbständigen Anerkannung gelangten, — von den Veröffentlichungen Lobatscheffky's überholten Arbeiten legte.

Die ungarische Akademie wird auf geschäftsmässigem Wege den letzten Band der Nachrichten unserer königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen mit meinem Berichte über den am 30-ten April 1877 gefeierten hundertjährigen Geburtstag von Gauss erhalten haben.

Die bei dieser Feier, zu welcher auch dia ungarische Akademie der Wissenschaften uns mit einer Beglückwünsehungsschrift beehrte, von mir im

Auftrage der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen gehaltene Festrede ist der ungarischen Akademie in dem letzten Bande unserer Abhandlungen zugegangen.

Für den Fall, dass *die ungarische Akademie im Besitze einiger besonderer auf Wolfgang Bólyai oder dessen Sohn sich beziehenden Nachrichten sein sollte, welche die Akademie bei meiner bevorstehenden Veröffentlichung des Briefwechsels mit auf zu nehmen für geeignet oder wünschenswerth erachtet, würde ich mich durch deren Mittheilung sehr geehrt fühlen. . . . .*

Most már tehát alapos a remény, hogy eme két nagy szellem, Gauss és Bólyai baráti viszonyára világot vető nagybecsű levelezést nem sokára olvashatni fogjuk. (Sz. K.)

Karl Klekler, Professor an der k. k. Marine-Akademie zu Fiume. »Die Methoden der darstellenden Geometrie«. 13 kőnyomatu táblával. Teubner, Lipcse 1877.

Alig van tudomány, mely nagyobb bennső változáson ment keresztül az ujabb időben, mint az ábrázoló geometria. Egy csupán gyakorlati czéloknak szolgáló segédtudományból az összes mathematikai tanulmányok hatalmas kiegészítő tagjává vált. E változást egyrészt az ujabb geometriának körébe vonásának, másrészt feladata kiszélesítésének köszönheti. Még kevés évvel ezelőtt csak annyit adtak elő az ábrázoló geometriából hazánk és Németország technikai főiskoláin, a mire a technikusnak szüksége volt, hogy a gyakorlatban előforduló tárgyakat ábrázolhassa. Ma már a legtöbb műegyetemen (s a miénken is) e közvetlen gyakorlati czél háttérbe szorult, minthogy kezdik átlátni, hogy ez benne foglaltatik az ábrázoló geometriának Fiedler által ekként formulázott magasabb feladatában: a térbeli szemlélő képesség tudományos kifejlesztése és képzése rajzi ábrázolás alapján, melynek végczélja az, hogy oly biztossá és elevenné tegye a szellemi szemlélést, mikép a rajz vagy egészen, vagy nagyobb részben nélkülözhetővé váljék. Még kevés évvel ezelőtt az ábrázoló geometria főtámasza az analytikai geometria volt; azóta már feloldották ezen, két ellentétes szellemű tudományágat nyügként összekötő kapcsot, s az analytikai helyett hatalmas segédeszközre tett szert az ábrázoló geometria az által, hogy az ujabb geometriával szövetkezett. E szövetség alapján, melyre a két tudományt már irányuk és keletkezésök rokonsága utalta, az ábrázoló geometria bevezető tanulmánynyá vált az ujabb geometriába, melynek fogalmaihoz a legtermészetesebb uton elvezet, s melyekre nézve a legszebb alkalmazásokat adja.

A középiskolai oktatásnak, a mennyiben előkészit a főiskolai tanulmányokra, tekintettel kell lennie az utóbbiak megváltozott szellémére, hogy, ahhoz alkalmazkodva, a kettő közti összefüggést fenntarthassa. Így szükséges, hogy megismertesse az ujabb geometria legfontosabb fogalmait és módszerét. E szükségnek eleget is akartak tenni ugy nálunk mint a külföldön, de nagyon ügyetlen módon. Ugyanis beszúrtak néhány ujabb geometriai tételt az Euklides-féle geometriába, ellátva Euklides szellemű bebizonyításokkal; azonban ezzel megszüntek azok az ujabb geometriához tartozni, melynek lényege nem az anyagban, hanem a módszerben fekszik. Ezen eljárás második hiánya az, hogy míg azokat a fogalmakat és tételeket az ujabb geometriában játszva nyerjük, addig itt az Euklides-féle rendszerben nehézkes bebizonyításaikkal a betetőzőnek és legnehezebbnek jellegét nyerik, úgy hogy már előre is félelem fogja el a tanulót, midőn rájok gondol. Ezzel az elhibázott kisérlettel szemben sokkal természetszerűbb e fogalmak megnyerésére és alkalmazására az ábrázoló geometriai oktatást felhasználni, mely gondolat keresztülvitelét megkisérlették STURM, POHLKE, SCHLESINGER, de legjobban a mi KLEKLER-ünk az előttünk fekvő munkában.

E munka, a középiskolai oktatásnak szánva, szélesebb és tudományosabb alapra fekteti az ábrázoló geometriát, mely czélra előtérbe állítja e disciplina mathematika-geometriai részét, szemben azzal az iránynyal, mely a fősúlyt a műszaki-szerkesztő részre fekteti. Az ujabb geometriai alapfogalmaknak az ábrázoló geometriába való beleszövése szerzőnek teljesen sikerült s az átlátszó s természetes, de mégis szigoruan tudományos rendszer tekintetében az első rész mintaszerűnek mondható. Az elrendezés alapját az ujabb geometria szolgáltatta, a mennyiben a munka eddig megjelent első része a pont-, sugár- és siksort (Büschel) és projectivitásukat, a síkbeli rendszert és sugárkévét (Bündel), a collineátiót, affinitást és hasonlóságot tárgyalja, míg a szerző által igért második rész anyagát a pont-, sugár- és sík-sorbeli alakzatok, a síkban és sugárkévében levő szögletes alakok, a polyéderek és a másodrendű görbék, kúpok és felületek fogják képezni. Ezen elrendezésen belől az ábrázoló geometria anyaga úgy csoportosíttatott, hogy két-két tétel vagy feladat egymásnak a dualitás elve szerint megfelel, mely elv vörös fonálként végig húzódik a könyvön. Ezen elv az egymásnak dualistikusan megfelelő térbeli alakzatoknak síkon való ábrázolásánál is érvényre jut, a mennyiben a képsíkon a térbeli pontok és síkok reciprocitása helyébe pontok és egyenesek reciprocitása lép. Ezáltal a tanuló öntevékenysége hatalmas ösztönzést nyer, mert a dualitás elvének felismerése után alkalma van, hogy a dualistikusan megfelelő tételek és feladatok felkeresésében munkakedvét tanúsítsa. Az első rész két fejezetre oszlik; az első foglalkozik a derékszögű vetítéssel, a második a középpontival. Mindakettőben szerző a geometriai elemek s az első s másodfokú alapalakzatok ábrázolása után ezek viszonyos meghatározására vonatkozó feladatokkal foglalkozik, a végéhez csatolva a mértékmeghatározásokat tárgyaló feladatokat. Különösen kiemelendő, hogy a derékszögű vetítésnél már kezdettől fogva három egymásra merőleges képsíkot használ, a mi, daczára a kezdetbeli nagyobb nehézségnek, azért czélszerűnek mutatkozik, minthogy e képsíkrendszer felező síkjainak és egyeneseinek s egyenlő hajlásu irányainak vizsgálásából igen sok hasznos gyakorlásanyag nyerhető, melynek segítségével a tanuló csakhamar meglehetős biztos térbeli szemléletre tehet szert.

Középiskolai tankönyv létére a tanár és tudománynyal foglalkozó is élvezettel és haszonnal olvashatja e munkát. Különösen ajánlhatom bevezetésül Fiedler ábrázoló geometriájába, melyet az ujabb iránynyal ismeretlenek minden előleges tájékozottság nélkül bajosan tanulmányozhatnak. Klekler munkája igen előnyösen ajánlja magát szép, átlátszó stylusa által, mely seholsem széles, de fölötte röviddé sem válik. A munka kiállítása s a mellékelt rajzok igen szépek.

Suppan Vilmos.

Wilhelm Weber, *Elektrodynamische Maasbestimmungen, insbesondere über die Energie der Wechselwirkung.* (Aus dem XI-ten Bande der Abhandlungen der mathem. physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig bei S. Hirzel 1878. — Ára 2 mark.

Az elméleti természettannak jelenleg napirenden levő kérdései között kétségtelenül legérdekesebb az elektrodynamika alaptörvényének kérdése. Nem egy, hanem mindjárt 3 különböző, úgynevezett alaptörvény versenyez a győzelemért, a nélkül, hogy ma még meg lehetne mondani, hogy melyikök lesz a győztes vagy hogy az *igazi* köztök van-e?

Legrégibb köztök a Weberé. Wilhelm Weber már 1846-ban felállította a róla elnevezett elektrodynamikai alaptörvényt, mely szerint az e_1 és e_2 elektrikus részecskék r távolságból egymásra gyakorolt taszitó ereje:

$$\frac{e_1 e_2}{r^2}\left(1 - \frac{r'^2}{c^2} + \frac{2rr''}{c^2}\right)$$

hol is r' és r'' az r távolságnak az idő (t) szerint vett, első illetőleg második differentiál-quotiensét, c pedig egy állandó mennyiséget jelentenek. [1])

Weber állítólagos törvénye ellen két hatalmas tekintély emelt fegyvert: Helmholtz és Sir William Thomson. Amaz azt igyekezett bebizonyitani, hogy a Weber törvénye ellenkezik az energia megmaradása törvényével, a mennyiben ez utóbbi törvény (ezt állította Helmholtz 1847-ben, az Erhaltung der Kraft czímű művében) csakis akkor igaz, ha a vonzó vagy taszítók erők nem függenek *egyébtől*, mint a pontok távolától, ha tehát függetlenek a pontok sebessé-

---

[1]) Pogg. Ann. Band 73. p. 193—240.

gétől. Sir William Thomson még messzebb ment: Weber törvényére mint afféle jogosulatlan, veszedelmes speculatio szüleményére egyenesen anathemát mond. [1])

Hogy e támadás (legalább ezen az alapon) mily jogosulatlan volt, fényesen kitünt C. Neumann, Maxwell dolgozataiból, kik határozottan Weber pártjára állottak és különösen Weber 1871-ben megjelent védekező dolgozatából, melyben megmutatja, hogy Helmholtz nagyot tévedett, midőn azt állította, hogy az energia megmaradásának törvénye csakis oly erőkre lehet érvényes, melyek csupán a távolságtól függnek.

Helmholtz nem sokára (1873-ban) be is ismerte tévedését, ámbár csak afféle beburkolt szavakkal. [2])

Ezzel a Weberféle törvény létjoga, legalább egyelőre, meg lett mentve. De az, hogy valami *nem ellenkezik* az energia törvényével, nem elegendő bizonyiték arra nézve, hogy az egyszersmind igaz is. Máskép állana a dolog, ha meg lehetne mutatni, hogy az energia törvényéből és egyéb tapasztalati tényekből a Weberféle elektrodynamikai törvény szükségképi folyomány. Ez az a mit Weber a czímül irt dolgozatában meg akar kisérteni. Czélja: az energia törvényének olyan formulázást adni, hogy abból és a Coulombféle elektrostatikai törvényből dedukálni lehessen, mint az egyedüli lehetőt, az ő törvényét. Megvallom, hogy engem sem az energia-törvény Weber szerinti formulázása, sem a deductiója nem elégit ki. Bizony csak ott vagyunk most is, a hol előbb voltunk. Kinek van igaza, Webernek-e, midőn azt állítja, hogy két elektrikus részecske potentiálja:

$$V = \frac{e_1e_2}{r}\left(1 - \left[\frac{x_1-x_2}{r}\cdot\frac{x_1'-x_2'}{c} + \frac{y_1-y_2}{r}\cdot\frac{y_1'-y_2'}{c} + \frac{z_1-z_2}{r}\cdot\frac{z_1-z_2'}{c}\right]^2\right)$$

vagy Riemannak, hogy ugyanez a

$$V = \frac{e_1e_2}{r}\left(1 - \left[\left(\frac{x_1'-x_2'}{c}\right)^2 + \left(\frac{y_1'-y_2'}{c}\right)^2 + \left(\frac{z_1'-z_2'}{c}\right)^2\right]\right)$$

vagy Clausiusnak, hogy:

$$V = \frac{e_1e_2}{r}\left(1 + \frac{x_1'x_2'}{c^2} + \frac{y_1'y_2'}{c^2} + \frac{z_1'z_2'}{c^2}\right)$$

ma még nem lehet megmondani. Vajjon ki fogja az experimentum crucis-t kitalálni? (Sz. K.)

---

[1]) In the present state of science this is wholly unwarrantable, because it is impossible to conceive that the hypothesis of two electric fluids can be true, and besides, because the conclusions are inconsistent with the Conservation of Energy which we have numberless experimental reasons for receiving as a general principle in nature. It only adds to the danger of such theories, when they happen to explain further phenomena, as those of induced currents are explained by that of Weber. — Treatise on Natural Philosophy. Vol. I. p. 312.

[2]) Über die Theorie der Elektrodynamik. Borchardt's Journal Band 75, p. 36.

FÖLADATOK.

39. Bebizonyitandó, hogy:

$$\begin{vmatrix} 2a_1a_2 & a_1b_2+a_2b_1 & a_1c_2+a_2c_1 & \ldots & a_1n_2+a_2n_1 \\ a_1b_2+a_2b_1 & 2b_1b_2 & b_1c_2+b_2c_1 & \ldots & b_1n_2+b_2n_1 \\ a_1c_2+a_2c_1 & b_1c_2+b_1c_1 & 2c_1c_2 & \ldots & c_1n_2+c_2n_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_1n_2+a_2n_1 & b_1n_2+b_2n_1 & c_1n_2+c_2n_1 & \ldots & 2n_1n_2 \end{vmatrix} = 0$$

40. Bebizonyítandó, hogy:

$$\begin{vmatrix} o & a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & n_1 \\ a_2 & 2a_1a_2 & a_1b_2+a_2b_1 & a_1c_2+a_2c_1 & \ldots & a_1n_2+a_2n_1 \\ b_2 & a_1b_2+a_2b_1 & 2b_1b_2 & b_1c_2+b_2c_1 & \ldots & b_1n_2+b_2n_1 \\ c_2 & a_1c_2+a_2c_1 & b_1c_2+b_2c_1 & 2c_1c_2 & \ldots & c_1n_2+c_2n_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ n_2 & a_1n_2+a_2n_1 & b_1n_2+b_2n_1 & c_1n_2+c_2n_1 & \ldots & 2n_1n_2 \end{vmatrix} = 0$$

(HUNYADY.)

41. Bizonyíttassék be, hogy:

$$2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots\ldots$$

a hol az egymásra következő törtek származási törvénye ez: Felbontjuk az egymásra következő páratlan törzsszámokat két egész számú részre, mely részeknek különbsége az egység. Ezek közül az egyik mindig páros, a másik páratlan; a páros a számláló, a páratlan a nevező. (Közli: K. Gy.)

A szerkesztőség levelezése.

P. G. tanár úrnak. A beküldött megoldás a 38-ik számú feladat félreértésén alapszik. A kérdés az, hogy minő feltételnek kell állani a végből, hogy a szóban forgó kifejezés, λ minden értéke mellett, zérus legyen.

— A jelen évfolyam novemberi és deczemberi füzete deczember hónapban kettős füzetben jelenik meg.

Budapest 1878. Nyomatott az Athenaeum r. társ. nyomdájában.

MŰEGYETEMI LAPOK

HAVI FOLYÓIRAT

A MATHEMATIKA, TERMÉSZETTUDOMÁNYOK ÉS A TECHNIKAI TUDOMÁNYOK ELMÉLETE KÖRÉBŐL.

III. kötet. 1878. 29 és 30. füzet.

ADALÉKOK A BOR-ELEMZÉS MÓDSZERÉHEZ.

Dr. Ulbricht Richárdtól, a m.-óvári gazdasági intézet tanárától.

BEVEZETÉS.

Jelenlegi állásom elfoglalásakor magán-tanulmányaim tárgyául a bort választottam.

Ehhez képest első törekvésemet arra irányoztam, hogy elemzések — jó módszereken alapuló elemzések — által én is hozzájáruljak a magyar borok pontosabb ismeretéhez, és hogy — egyúttal tekintetbe véve az ország különböző részeiben divatozó szőlőmüvelési és pinczekezelési módokat, valamint kóstolási próbák alapján, — az e fajta vizsgálatok eredményét a gyakorlat számára értékesithetővé tegyem és végre. hogy adalékokat szolgáltassak a borkóstolás rationális módszeréhez. Mai napig már 70 és nehány borfajt elemeztem a mondott irányban, az országnak majd minden részéből; a nyert eredményeket e helyen később fogom közzé tenni.

Idevágó tanulmányaimnak mindjárt az elején arról győződtem meg, hogy egyfelől a most szokásos analytikai módszerek a szigorúbb követelményeknek nem felelnek meg és hogy másfelől ily módszerek még teljesen hiányzanak is. Ez okból már több mint 6 éve azon fáradózom, hogy a meglevő módszereket beható vizsgálat alá vessem, és egyéb anyagokra biztos módszereket keressek. Ide vonatkozó vizsgálataimból az elsőket az Annalen der Oenologie III-ik kötetének 1 füzetében tettem közzé.

Az utóbb megérintett tárgy nagy fontosságától áthatva, jelenlegi czélom a még meglevő hézagokat kitölteni és előbbi munkálatomat gondos revisio alá vetni, hogy igy először is módszereket adjak a bor, must stb. elemzésére, melyek a szigorúan tudományos követelményeknek is megfeleljenek, s hogy aztán ezen az alapon oly eljárásokat találhassak, melyeket még a gyakorlatlan is használhasson, ha valamely meghatározást gyorsan és az ő szükségletéhez képest elegendő pontossággal akar elvégezni. Módszertani dolgozatok minden tekintetben kiváló szabatosságot és szigorúságot igényelnek, a mi persze még csak szaporitja a különben is tetemes nehézségeket, melyek az elemző elé gördülnek. E nehézségek azonban korántsem legyőzhetetlenek, csak túl ne lépjük hiába való módon a pontosságnnk azt a határát, a mit minden egyes esethez mérve, külön kell megállapítanunk.

Természetes, hogy így tüzve ki a czélt, csak lassan haladhattam előre vizsgálataimban, el annyira, hogy az Annalen der Oenologie-ben megjelent első publikátióim óta csakis a czukor-meghatározással foglalkozhattam és e tárgyat sem hozhattam még egészen tisztába.

Ámbár határozott ellensége vagyok a befejezetlen dolgozatok közzétételének, mégis erre most kényszeritve érzem magamat azon körülménynél fogva, hogy az újabb időben mind gyakrabban jelennek meg munkálatok a borelemzés módszereiről és különösen a czukor meghatározásáról. Egyes egyedül ez okból akarok most az eddig elért vizsgálati eredmények felől részletes jelentést tenni, a későbbi eredményeket is e helyen szándékozván majd publikálni.

Mindenek előtt azonban örömmel ragadom meg ezt az alkalmat, hogy a k. m. Természettudományi Társulat tisztelt választmányának nyilvánosan is kifejezzem köszönetemet bizalmáért, melylyel az 1876-ik évben tett ajánlatomat »a must és borelemzés módszereinek megvizsgálására« vonatkozólag elfogadta, részemre 1000 frt tiszteletdijat biztositott és ez összegből 400 frtot mindjárt előre utalványozott, hogy egy finom analytikai mérleget és pontos súlysorozatot beszerezhessek. E ténye engem annyival inkább megörvendeztetett és hálára kötelezett, mivel ebben elismerés kifejezését láttam eddigi törekvéseimért és mivel e bizalmával rendelkezésem alá juttatott oly eszközöket, melyekre vizsgálataim további folyamában okvetetlenül szükségem volt.

I.

Az 1876-ik évben újból elővett vizsgálatok a must és bor czukortartalmának meghatározását illetőleg arra inditottak, hogy a régóta ismeretes *Parkes-féle mennyileges módszert a réz meghatározására* beható vizsgálat alá vegyem, minthogy a glucose által kiválasztott rezet e módon akartam megállapitani. [1])

---

[1]) A Deutsche chemische Gesellschaft Bericht-jeiben (1876. p. 1939) van egy czikk, mely szerint E. Gerrot a párizsi tudományos Akadémia 1876 november 27-i ülésén javasolta, hogy a Fehling-féle czukorpróbánál a képződött rézoxydult a kimosás után salétromsavban fel kell oldani és a folyadékban a rezet cyánkáliummal volumetrikusan meg kell határozni. E közlemény arra inditott, hogy a

Már LIEBIG [2]) FLECK, [3]) FRESENIUS, [4]) STEINBECK, [5]) WOLSFKRON és KIRPITSCHOW bebizonyitották, hogy e módszer eredményei a jelenlevő ammoniák mennyiségétől és a jelenlevő ammónsók természetétől függenek és hogy csakis akkor szolgáltat teljesen kielégitő eredményeket, ha a cyánkálium-oldat titer-állása és maguk a rézmeghatározások közel egyenlő körülmények között hajtatnak végre.

Mind a mellett nem tartottam fölöslegesnek e tárgyat, tekintettel czéljaimra, ujból megvizsgálni és a vizsgálatot egyéb oly szempontokra is kiterjeszteni, melyeket eddigelé nem vettek figyelembe. Szükségesnek látszott, hogy a jelenlevő salétromsav és ammoniák-mennyiség befolyásán kivül még:

a titrálás utáni higitottságnak,
a titrálás alatti világitásnak,
a cyánkálium-oldat hozzáadása módjának,
a jelenlevő rézmennyiségnek

befolyása is megállapíttassék.

A *normál-salétromsavat* 1 vol. salétromsavnak (fajsúlya 1·2) 1 vol. vizzel való keverése által készítettem. Fajsúlya 1·103 volt, következésképp 14·7 súlyperczentes vagyis 16·2 volum-perczentes volt (azaz 16·2 gramm N_2O_5 a 100^0 fokú [6]) folyadékban), a vízmentes salétromsavhoz képest = 7·13 gramm réz. E szerint 1 gramm réz feloldására 2·275 N_2O_5 = 14·05^0 normál-salétromsav esik, mig a képződött réznitrát 1·71 gramm N_2O_5-nek vagyis 10·55^0 normál-salétromsavnak felel meg.

A *normál-ammoniákot* 1 vol. szalmiakszeszből (fajsúlya 0·92) és 2 vol. vízből állítottam elő. Fajsúlya volt: 0·975 = 6 súlyperczent ammoniák.

A *cyánkálium-oldat* 1 literében 15·5 gramm (*A*), és 32 gramm (*B*) cyánkálium foglaltatott.

Berichte d. d. chem. Ges. (1877, p. 128) kijelentsem, miszerint ez az eljárás a magyar-óvári laboratóriumban már 1876 junius óta használatban van s hogy gondos foganatositás mellett igen kielégitő eredményeket szolgáltat, s hogy ezt a módszert az én ajánlatomra egyik collegám alkalmazta először a diastaz czukorképző hatásának vizsgálatában, s végre hogy 1876 deczember óta általam is használtatik.

[2]) Annal. d, Chem. u. Pharm. XCV. 118.

[3]) Polyt. Centralbl. 1859. 1313.

[4]) Quantit. Analyse 5. Auflg. 282.

[5]) Zeitschr. f. analyt. Chem. 1869. 15.

[6]) Fok alatt — (^{0})-val jelölve — azt a teret értem, mit 1 gramm 17·5 C^0. viz elfoglal.

A *rézoldat* vagy rézsulphátot foglalt magában, többszörös átkristályositás által megtisztitva (*D*), vagy nitrátot, mely egyfelől a salétromsavas oldatából kicsapott réznek a platina-kúpon való feloldása által állíttatott elő (*A*), másfelől pedig ugyanilyen rézből készült, csak hogy a nitráttá alakitás előtt az oldatnak platina-csészében való elpárologtatása és a maradéknak hevitése által oxyddá változott át (*B*), vagy végre 5·856 gramm, gálván-úton lerakódott réznek [1]) 120^0 fokú normál-salétromsavban való feloldása és 1 liternyire higitása által állíttatott elő (*C*). 100^0 tartalmazott:

az *A* oldalban rezet 0·527 g; *Norm.* N_2O_5 6.4^0
» *B* » » 0·439 » » » 7·0^0
» *C* » » 0·586 » » » 12·0^0
» *D* » » 0·176 » » » 0^0

A rézoldat (*Cuol.*) és a cyankáliumoldat (*KCy.*) lemérése huszadrész fokokra osztott büretták segélyével vitetett véghez. De minthogy ezeket akkor, mikor az itt előterjesztendő kisérleteket tettem, még nem kalibráltam, az együvé tartozó kisérleteknél a folyadékot a bürettának mindig egy és ugyanazon pontjától folyattam ki. A leolvasás sohasem történt mindjárt a kifolyás után, hanem utóbb legalább is 10 minutával később a kifolyás megindulása után és az együvé tartozó kisérleteknél mindig ugyanannyi minuta leteltével.

Az első kisérletek a jelenlevő szabadsalétromsav és szabad ammoniák mennyiségének befolyására vonatkoztak. Az eredményeket, minthogy igy átnézetesebb, tabellákba állítom össze:

a.) *A salétromsav-mennyiség befolyása.*

A kisérlet száma	Norm. N_2O_5 ^{0}-ban [2])	Norm. H_3N. ^{0}-bn	Víz-hozzáadás ^{0}-ban	Végső higitottság[3]) ^{0}-ban	*Cuol.* mennyisége ^{0}-ban	*KCy.* mennyisége ^{0}-ban	*KCy.* 100^0 *Cuol.*-ra	Különbség $^0/_0$-ekben	Középek ^{0}-ban	Középek különbsége ^{0}-ban	Megjegyzések
					10·0	10·105	101·05				*Cuol.* és *KCy.* *A.*
1	8	10	—	28	10·0	10·050	100·50	0·55	100·75	—	
					10·01	10·080	100·70				
					10·0	9·970	99·70				
2	4	10	4	28	10·0	9·905	99·05	0·71	99·50	—1·25	
					10·0	9·975	99·75				

[1]) A bécsi cs. kir. államnyomdából.

[2]) Beleértve azt a mennyiséget, mely a réznitrátnak megfelel.

[3]) »Végső higitottság« alatt a kititrált folyadék mennyiségét értem.

A kisérlet száma	Norm. N_2O_5 %-ban	Norm. H_3N. %-ban	Víz hozzáadás %-ban	Végső higitottság %-ban	*Cuol.* mennyisége %-ban	*KCy.* mennyisége %-ban	*KCy.* 100° *Cuol.*-ra	Különbség %-ekben	Középek %-ban	Középek különbsége %-ban	Megjegyzések
3	5·5	10	15·5	50	24·025 24·010	20·670 20·710	86·025 86·255	0·26	86·145	—0·785	*Cuol.* és *KCy. B.* A *Cuol.* a normál N_2O_5 stb. hozzáadása előtt szárazra pároltatott, úgy, hogy a kihülés után a neutrális nitrát maradt hátra.
4	8	10	13	50	24·035 24·015 24·025	20·895 20·830 20·855	86·935 86·140 86·805	0·225	86·825	—	
5	10·5	10	10·5	50	24·050 24·040	20·900 20·855	86·900 86·875	0.03	86·890	+0·075	

Észrevétel. A hőmérséki közepek voltak:

	1. kisérl.	2. kisérl.	3. kisérl.	4. kisérl.	5. kisérl.
a *Cuol.*-é:	18·25° C.	17·15°	12·25°	14·0°	12·9°
a *KCy.*-é:	15·65°	15·85°	15·0°	14·6°	15·0°

Az 5. kisérletnél eleinte elhomályosodás mutatkozott, a mi azonban a *KCy.* további hozzáadására ismét eltünt.

b.) *Az ammoniákmennyiség befolyása.*

A kisérlet száma	Norm. N_2O_5 %-ban	Norm. H_3N. %-ban	Víz-hozzáadás %-ban	Végső higitottság %-ban	*Cuol.* mennyisége %-ban	*KCy.* mennyisége %-ban	*KCy.* 100° *Cuol.*-ra	Különbség %-ekben	Közepek %-ban	Közepek különbsége %-ban	Megjegyzések
6	8	7·5	15·5	50	24·005 24·100	20·800 20·785	86·650 86·245	0·470	86·450	—0·44	*Cuol,* és *KCy. B.* — Cuol. bepárologtatva.
4	8	10	13	50	mint föntebb.				86·825	—	
7	8	12·5	10·5	50	24·0 24·010	20·875 20·870	86·980 86·920	0·065	86·950	+0·14	

Észrevétel. Hőmérséki közepek:

	4. kisérl.	6. kisérl.	7. kisél.
Cuol.-é:	14·0°C	14·55°	11·75°
KCy.-é:	14·6°	15·10°	15·0°

Itt is a 6-ik kisérletnél homályosodás állott be, de több *KCy.* hozzáadására ismét eltünt.

c.) *Az egyidejüleg változtatott salétromsav- és ammoniák-mennyiség befolyása.*

A kisérlet száma	Norm. N_2O_5 °-ban	Norm. H_3N °-ban	Víz hozzáadás °-ban	Végső higitottság °-ban	*Cuol.* mennyisége °-ban	*KCy.* mennyisége °-ban	*KCy.* 100° *Cuol.*-ra	Különbség °/₀-ekben	Közepek °-ban	Közepek különbsége °-ban	Megjegyzések
					10·0	9·925	99·25				
8	8	10	20	58	10·0	9·925	99·25	0·15	99·30	—	*Cuol.*
					10·0	9·940	99·40				és
					10·0	10·150	101·50				
9	16	20	2	58	10·0	10·175	101·75	1·38	102·05	+2·77	*KCy. A.*
					10·0	10·290	102·90				

Észrevétel. Hőmérséki közepek:

	8. kisérl.	9. kisérl.
Cuol.-é:	16.50° *C.*	15·0°
KCy.-é:	14·85°	14·5°

A 6, 4 és 7. számú kísérletek teljesen megegyeznek a Freseniuséivel t. i. hogy több szabad ammoniáknak nagyobb cyánkálium-fogyasztás felel meg. A 8 és 9. kisérletek megerősítik Steinbeck észleletét, mely szerint több salétromsav és ammoniák a cyánkáliumból többet fogyaszt; ő nála a különbség 1·8%-t, nálam 2·8%-t tett. Az 1—5 alatti kisérletekből továbbá kitünik, hogy a salétromsav szaporodása kapcsolatban az ez által okozott csökkenésével az ammoniaknak a *KCy.* fogyasztást szintén növeli, s hogy e növekedés mindenesetre még szembeszökőbb lenne, ha a szükségkép föllépő ammoniákcsökkenés deprimálólag nem hatna.

d.) *A végső higitottság befolyása.*

A kisérlet száma	Norm. N_2O_5 °-ban	Norm. H_3N. °-ban	Víz-hozzáadás °-ban	Végső higitottság °-ban	*Cuol.* mennyisége °-ban	*KCy.* mennyisége °-ban	*KCy.* 100° *Cuol.*-ra	Különbség °/₀-ekben	Közepek °-ban	Közepek különbsége °-ban	Megjegyzések
					10·0	9·825	98·25				
10	8	10	—	38	10·0	9·950	99·50	2·545	99·50	—	*Cuol.*
					10·0	10·075	100·75				és
					10·0	9·750	97·50				*KCy. A.*
11	8	10	18	56	10·0	9·975	99·75	2·31	98·50	—1·0	1876.
					10·0	9·825	98·25				decz. 2.

A kisérlet száma	Norm. N_2O_5 %-ban	Norm. H_3N %-ban	Víz-hozzáadás %-ban	Végső higítottság %-ban	*Cuol.* mennyisége %-ban	*KCy.* mennyisége %-ban	*KCy.* 100° *Cuol.*-ra	Különbség %-ekben	Közepek %-ban	Közepek különbsége %-ban	Megjegyzések
12	8	10	—	38	10·0 10·0 10·0	10·060 10.070 10·100	100·60 100·70 101·0	0·40	100·765	—	Mint a 10 és 11. kisérletnél 1876. decz. 3.
13	8	10	20	58	10·0 10·0 10·0	9·925 9·925 9·940	99·25 99·25 99·40	0·15	99·300	—1·46	
14	7·9	10	—	23	8·045 8·010 7·990	5·320 5·265 5·315	66·13 65·74 66·52	1·19	66·13	--	*Cuol.* és *KCy. B.*
15	7·9	10	27·5	50	8·025 8·005 8·035	5·100 5·045 5·110	63·550 63·025 63·595	0·905	63·39	—4·145	Cuol. elpárolva
16	7·75	10	—	27·5	16·005 16·005 15·995	10·455 10·460 10·410	65·325 65.355 65·075	0·43	65·25	—	Mint a 14 és 15. kisérletnél 1877. jan. 26.
17	7·75	10	23	50	16·080 16·040 16·050	10·180 10·040 10·050	63·310 62·595 62·615	1·14	62·84	—3·695	1877. jan. 26. 1877. jan. 27.
18	7·6	10	—	32	24·025 24·005 24·050 24·200 24·165 24·175 24·115	15·455 15·470 15·620 15·600 15·540 15·520 15·570	64·330 64·445 64·950 64·465 64·310 64·200 64·560	1·17	64·465	—	*Cuol.* és *KCy.* mint a 14 és 15. kisérletnél.
19	7·6	10	18·5	50	24·145 24·200 25·075 24·120	15·255 15·270 15·275 15·250	63·180 63·100 63·450 63·225	0·555	63·240	—1·90	*Cuol.* és *KCy.* mint a 14 és 15. kisérletnél.
20	8	10	8	45	24·030 24·005	20·765 20·755	86.415 86·460	0·050	86·440	—	*Cuol.* és *KCy. B.*
21	8	10	13	50	24·015 24·015	20·875 20·880	86·925 86·945	0·025	86·935	+0·575	Cuol.
22	8	10	18	55	24·020 24·050	20·770 20·720	86·470 86·155	0·370	86·310	—0·150	bepárolva

Észrevétel: A közép-hőmérsékek ezek voltak:

	Cuol.	KCy.		Cuol.	KCy.
kisérl. 10.	15·35°*C.*	14·50°*C.*	kisérl. 12.	17·0°*C.*	14·50°*C.*
» 11.	15·65 »	14·85 »	» 13.	16·50 »	14·85 »

		Cuol.	KCy.			Cuol.	KCy.
kisérl.	14.	13·0°*C.*	14·0°*C.*	kisérl.	18.	13·35°*C.*	14·30°*C*
»	15.	13·5 »	14·50 »	»	19.	13·50°»	13·50 »
»	16.	12·50 »	13·15 »	»	20.	12·25°»	14·90 »
»	17.	13 35 »	13·0 »	»	21.	13·0 »	14·70 »
				»	22.	12·90 »	15·0 »

A hömérsék volt:

		Cuol.	KCy.
kisérl.	16.	12·50°*C.*	13·15°*C.*
»	17. *a.*	13·0 »	14·50 »
»	17. *b.* és *c.*	13·50 »	12·25 »
»	18. *a.* és *b.*	14·0 »	14·50 »
»	18. *c—g.*	13·50 »	15·20 »
»	19.	13·50 »	13·50 »

Mindezeknél, mind az előbbi kisérleteknél a megfigyelt hőmérséki különbségek sokkal csekélyebbek, hogysem észrevehető befolyást gyakorolhatnának az eredményre, mert péld. a 20. kisérletnél + 5·25° *C.* hőmérséki különbség a *Cuol*-ra nézve és + 2·6° *C.* a *KCy*-ra nézve az egész kisérletsorozat végeredményeit következendőképen változtatta volna:

	100 Cuol. = KCy.	*Különbs.*	*Közép*	*Közepek különbs.*
Kisérl. 20	{86·385° {86·420	0·04%	86·40	—
» 21	mint föntebb			+ 0·575 helyett + 0·620
» 22	mint föntebb			— 0·150 helyett — 0·105

A 10—19. kísérletek kétségen kivül helyezik, hogy az egy bizonyos rézmennyiségre eső *KCy* fogyasztás a titrálás után származó folyadéktól, annak végső higitottságától is függ elannyira, hogy pontos eredmények elérése végett a titer-állásoknál és rézmeghatározásoknál mindig ugyanazon végső higitottsággal kell dolgoznunk. Ez az eredmény nemcsak az egy kisérletsorozatba tartozó kisérletek összehasonlításából, hanem különböző sorozatok kisérleteiből is következik; így például a 14, 16 és 18 kisérletekből. A 20—22-ikből e tétel nem vezethető le hasonló biztossággal; azonban inkább vagyok hajlandó azt föltételezni, hogy ezek valami kicsiny, előttem persze teljesen ismeretlen hibában szenvednek, mely a különben is igen kicsiny különbségeknél nyomatékosabban lépnek föl, mintsem hogy az első 10 kisérlet eredményeit kétségbe vonjam.

Kipuhatolandó vajjon:

e.) *A titrálásnál alkalmazott világitásnak van-e befolyása?* és ez észrevehető-e? a *Cuol.*, mely napvilágnál méretett le, egyszer napvilágnál, másszor pedig este gázvilágnál titráltatott. A következő számok mutatják, hogy a Parkes-féle rézmeghatározási módszer nappal és gázvilágitásnál egyaránt használható.

A kisérlet száma	Norm. N_2O_5 %-ban	Norm. H_3N. %-ban	Víz-hozzáadás %-ban	Végső higítottság %-ban	*Cuol.* mennyisége % ban	*KCy* mennyisége %-ban	*KCy.* 100° *Cuol.*-ra	Különbség %-ekben	Közepek %-ban	Közepek különbsége %-ban	Megjegyzések
					19·990	10·37	51·875	Napvilágnál titrálva			*Cuol.*. *D.* *KCy.* *A.* — Cuol. nappal lemérve és bepárolva.
23	8	10	—	28·5	20·0	10·35	51·750	6·22	51·960	—	
					19·990	10·45	52·275				
					20·005	10·34	51·685	Gázvilágnál titrálva			
24	8	10	—	28·5	20·020	10·37	51·800	0·23	51·820	—0·27	
					20·010	10·40	51·975				
19	7·6	10	18·5	50	mint föntebb			0 555	63·240	—	*Cuol.* és *KCy. B.* — Cuol. nappal lemérve és bepárolva.
					24·16	15·25	63·120	Gázvilágnál titrálva			
25	7·6	10	18·5	50	24·15	15·25	63·145	0·065	63·125	—0·18	
					24·15	15·24	63·105	Gázvilágnál titrálva			

Észrevétel. Hőmérsék:

	kisérl. 23,	kisérl. 24,	kisérl. 19,	kisérl. 25.
Cuol.-é:	15·75	16·0	13·5	13·0
KCy.-é:	14·85	14·5	13·5	14·5.

Minden eddig tárgyalt esetben a titrálás »*közönséges módon*« ment végbe, akként, hogy a *KCy.* majdnem szakadatlanul és a teljes elszintelenedésig folyt a *Cuol.*-ba. E közben azt a tapasztalást tettem, hogy a titrálás eredménye más lesz, ha az alatt a *KCy.* hozzáfolyásában késedelem áll be. Ez oknál fogva szükséges volt

f.) *A cyánkálium-oldat mikénti hozzájuttatásának befolyását* a kisérletek eredményére konstatálni és annak a nagyságát különböző viszonyok között megállapítani.

α) A közönséges eljárás eredményei, összehasonlítva azokkal, melyek a KCy. apránkénti hozzájuttatásakor nyerettek.

Szám	Norm N_2O_5 %-ban	Norm. NH_3 %-ban	Víz-hozzáadás %-ban	Végső higgítottság %-ban	A *KCy.* hozzáadás módja	*Cuol.* mennyiség %-ban	*KCy.* mennyiség %-ban	*KCy.* 100 *Cuol*-ra %-ban	Különbség %-ban	Közép %-ban	A közepek különbsége %-ban	Megjegyzések
					A *KCy.* szakadatlan hozzá-	37·995	19·385	51·020				*Cuol. D.*, *KCy. A.* — Cuol. bepárolva. A 26. kisérletnél a itrálás 3, illet. $3^1/_2$ és $2^1/_2$ per. kivánt.
26	8	10	—	37·5	juttatása a folyad.elszin-	38·015	19·425	51·100	0·27	51·095	—	
					telenedéseig.	38·010	19·450	51·160				
					Első hozzáadás 18 5° *KCy,;* az-	39·010	18·955	39·870				
27	8	10	—	37	után 5 p. mulva világ.-lilára hoz-	38·015	18·935	49·785	0·20	49·810	—2·515	
					va és további 2 p. mulv a kititrálva	38·015	18·920	49·770				

Szám	Norm. N_2O_5 %-ban	Norm. NH_3 %-ban	Víz-hozzá-adás %-ban	Végső higí-tottság %-ban	A *KCy*. hozzáadás módja	*Cuol.* mennyis. %-ban	*KCy.* mennyis. %-ban	*KCy.* 100 Cuol.-ra %-ban	Különbség %-ban	Közép %-ban	A közepek különbsége %-ban	Megjegyzések
28	8	10	—	48	úgy mint a 16. kisérletnél.	20·005 20·0 20·0	9·920 9·900 9·910	49·590 49·500 49·550	0·18	49·535	—	*Cuol.* és *KCy*. mint föntebb. — Cuol. nappal lemérve és bepárolva A 28. kisérl.-nél a titrálásra 2 percz kellett.
									Titrálás gázvilágnál			
29	8	10	—	47·5	Első hozzáadás 9·5^0 KCy.; 5 p. mulva vil.-lilára hozva és továb. 3 p. mulva kititrálva.	20·0 20·005 20·0 19·980	9·630 9·600 9·590 10·480	48·150 47·990 47·950 52·450	0·42	48·030	−3·060	
30	8	10	—	28·5	mint a 26-iknál.	19·995 20·010	10·450 10·555	52·265 52·750	0·93	52·490	—	*Cuol.* és *KCy*. mint föntebb. — Cuol. bepárolva.
31	8	10	—	28	Első hozzáadás 9·9^0 KCy.; 6 p. mulva vil.-lilára hozva és tovább 2 p. mulva kititr lva.	20·0 19·980 20·0	10·130 10·200 10·155	50·650 51·060 50·775	0·81	50·830	−3·16	
19	7·6	10	18·5	50	mint 26-nál	mint föntebb			0·555	63·240	—	*Cuol.* és *KCy*. *B.* — Cuol. bepárolva.
32	7·6	10	18·5	49·5	Első hozzáadás 14^0 KCy.; 5 p. mulva 0·5^0; további 2 p. mulva 0·25^0 KCy. s még 2 perc. mulva kititrálva.	24·150 24·155 24·155 24·165	14·785 14·800 14·770 14·795	61·220 61·270 61·145 61·225	0·205	61·215	−3·20	

β) *Változatok α)-hoz.*

Szám	Norm. N_2O_5 %-ban	Norm. N. H_3 %-ban	Víz-hozzá-adás %-ban	Végső higí-tottság %-ban	A *KCy*. hozzáadás módja	*Cuol.* mennyis. %-ban	*KCy.* mennyis. %-ban	*KCy.* 100 Cuol.-ra %-ban	Különbség %-ban	Közép %-ban	A közepek különbsége %-ban	Megjegyzések
33	7·6	10	—	59	Eleinte 19^0, 3 p.-czel utóbb még 0·5^0, 6 p.-czel később még 0.4^0 KCy. és 9 percz mulva kititrálva.	24·070 24·035	20·220 20·080	84·005 83·545	0·550	83·780	—	*Cupl. C., KCy. B.* — Cuol. nem párol. be
34	7·6	10	—	59	Eleinte 19^0, 5 per. mulva 0·5^0, 7 per. mulva még 0·4 KCy, és 9 percz mulva kititrálva.	24·025 24·055	20·055 25·095	83·47[illegible] 83·540	0·075	84·510	−0·32	
35	7·6	10	—	59	Eleinte 19·5^0, 5 percz mulva még 5^0 KCy. és 9 percz mulva kititrálva.	24·040 24·060	20·0 19·975	83·195 83·020	0·210	83·110	−0·80	

γ) *A KCy. hozzáadása idejének befolyása.*

Szám	Norm. N_2O_5 %-ban	Norm. H_3N %-ban	Víz-hozzáadás %-ban	Végső higítottság %-ban	A *KCy*. hozzáadás módja	*Cuol.* mennyis. %-ban	*KCy.* mennyis. %-ban	*KCy.* 100 Cuol.-ra %-ban	Különbség %-ban	Közép %-ban	A Középek különbsége %-ban	Megjegyzések
36	7·6	10	—	59	Eleinte 19°, 5 percz utóbb 0-5°, 7 percz mul a 0·4° KCy. és 9 percz mulva kititrálva. — A *KCy*. leolvasása 10 percz mulva.	24·015 24·015 24·010	20·095 20·080 20·100	83·625 83·615 83·715	0·12	83·650	—	Mint a 33—35 kisérletnél.
37	7·6	10	—	59	Eleinte 17·5°, 5 per. mulva 1°, 10 percz mulva 1°, 15 percz mulva 0·4° KCy, és 19 percz mulva kititrálva. — A *KCy*. leolvasása 20 percz mulva.	24·015 24·020	20·205 20·200	84·135 84·095	0·45	84·115	+0·555	
38	7·6	10	—	59	Eleinte 17°, 10 per. mulva 1°, 15 percz mulva 1°, 20 percz 0·5°, 25 percz 0·4 *KCy*. és 29 percz mulva kititrálva. — A *KCy*. leolvasása 30 percz u án.	24·055 24·030	20·375 20·380	84·700 84·815	0·13	84·760	+1·325	

Hőmérsékek:

	kis. 26.	kis. 27.	kisérl. 28.	kis. 29.	kisérl. 30.	kis. 31.	kisérl. 19.	kis. 32.
Cuol.	16·6°*C.*	17·1°*C.*	16·5°*C.*	16·50°*C.*	17·25°*C.*	13·65°*C.*	13·5°*C.*	12·75°*C.*
KCy.	15·5 »	15·5 »	15·5 »	15·35 »	14·65 »	15·0 »	13·5 »	14·90 »

	kisérl. 33.	kisérl. 34.	kisérl. 35.	kisérl. 36.	kiséri. 37.	kisér. 38.
Cuol.	12·75°*C.*	14·10°*C.*	13·75°*C.*	13·2°*C.*	13·6°*C.*	14·0*C.*
KCy.	13·10 »	14·45 »	13·80 »	13·5 »	13·9 »	13·9 »

E szerint egyáltalában nem közömbös, vajjon a cyánkáliumoldatot a kék szinezet eltünéseig megszakadás nélkül folyatjuk-e a rézoldathoz, vagy pedig apránként adjuk hozzá. A különbségek meglehetős nagyok. Az eredményre kisebb befolyása van azon időtartamnak, mely alatt a KCy. periodikus hozzáadásával a titrálást végezzük. [1])

[1]) Szigoruan véve a 36—38. kisérletek közvetlenül nem hasonlithatók össze, mivel az egyiknél a büretta-csőre tapadt *KCy*-nek hosszabb ideje volt abban öszszegyülekezni mint a másiknál, és igy a leolvasás az első esetben kevesebb, a másodikban több *KCy*-t tartozott adni. Azonban az innen származó hiba csekély és nincs befolyásal a végeredményre. Mi alatt ugyanis egy bürettából, mely huszadrészekre osztva, 25°-os volt, több óra elfolyása alatt — úgy hogy a folyadéknak elég ideje volt összegyülemleni — 24·585° víz csorgott ki, a 10 minuta alatt kifolyt víz 24·55°-ot tett. A fentebbi kisérleteknél is tehát, a leolvasás különböző ideje által okozott különbség nem rughatott többre mint 0·035°-ra. Ha a 36 és 37. kisér-

A 0·555 és 1·325 mennyiségek csekély értéke azt gyaníttatja velem, hogy a *KCy*. fogyasztás végre is állandó lesz, ha a titrálást hoszszabb időre (1 órára vagy többre) kiterjesztjük. E tárgyat nem vizsgáltam meg közelebbről, mivel:

1) nagy időtartamnál a módszer használhatóságából veszitene;

2) a módositás a periodikus hozzáadással egy vagy két előpróbát igényel és az effélék nem mindig foganatosíthatók, vagy legalább csökkentenék az egész eljárás egyszerüségét,

3) mivel a titrálás közönséges módja ép oly vagy legalább majdnem olyan megegyező eredményeket nyujt, mint a KCy apránként való hozzáadása.

Az egyes titrálások közép különbsége:

kisérl. 26, 28, 30 és 19.	0·485°/₀
kisérl. 27, 29, 31 és 32.	0·410 »
kisérl. 1—25 29, 28, 30 és 19.	0·605°/₀
kisérl. 27, 26, és 31—38.	0·315 »

A 26—38 alatti kisérletek mutatják, hogy a PARKES-féle módszer a titrálás közben félbeszakasztást nem tür meg, s hogy a kisérlettevő e munkánál semmiféle képen ne engedje magát háborittatni, ha csak hiába való vagy megint ismétlendő munkát nem akar végezni.

Minthogy nem volt előttem ismeretes, vajjon a PARKES-féle módszer:

g) a rézmennyiség befolyása az eredményre tekintetében már megvizsgáltatott-e, ez okból ez irányban is tettem néhány kisérletet. Ezekből kitünik, hogy az eredmény a jelenlevő réz mennyiségétől, legalább bizonyos határokon belül függetlennek látszik lenni. A következő számok magyarázatánál figyelembe veendő, hogy a »*közepek különbségei*« nem nagyobbak, mint az egyes meghatározások különbségei és hogy a tévedésből származható kicsiny csökkenése a salétromsav hozzáadásának a *KCy*. fogyasztásban valami csekély kisebbedést okozhatott.

---

letnél is 30 minutáig várakoztam volna a *KCy*. leolvasásával és ha ennek következtében 0·0175 és 0·035-tel több *KCy*. fogyasztatott volna, úgy a

36. kisérl.	24·0133°	*Cuol*.-ra	20·1267°	*KCy*.
37. »	24·0175°	»	20·2260°	»
38. »	24·0425°	»	20·3775°	»

esett volna, úgy hogy e szerint 100° *Cuol*-ra 83·815° illet. 84·19° és 84·76° *KCy* jutott volna és e számok különbsége + 0·445 illet. 1·125 lett volna 0·555 illet. 1·225°/₀ helyett.

Szám	Norm. N_2O_5 %-ban	Norm. H_3N %-ban	Viz-hozzáadás %-ban	Vég-higitottság %-ban	*Cuol.* mennyis. %-ban	*KCy.* mennyis- %-ban	*KCy.* 100 Cuol.-ra %-ban	Különbs. %-ban	Közepek %-ban	Közepek különbsége %-ban	Megjegyzések
					3·985	2·540	63·740				
39	7·95	10	30	50	3·995	2·560	64·080	2·600	63·430	−0·140	jan. 26. 1877. *Cuol.* és *KCy. B.* — Cuol. bepárologtatva.
					4·010	2·505	62·470				
15	7·9	11	27·5	50	8·022	5·085	Közép	0·905	63·390	−0·205	»
17	7·75	11	23	50	16·075	10·090		1·140	62·840	−1·070	jan. 26. és 27. 1877.
19	7·6	11	18·5	50	24·135	15·263		0·555	63·240	−0·440	jan. 27. 1877.
					40·15	25·23	62·840				
40	7·35	11	9	11	40·35	25·39	62·925	0·620	650	−0·820	jan. 27. 1877. *Cuol.* és *KCy. B.* — Cuol. bepárologtatva.
					40·17	25·40	63·230				
41	7·1	11	—	50	60·36	38·28	63·520	0·330	63·520	—	»
					60·23	38·32	63·625				

Megjegyz. Mérsékletek.

	kisérl. 39.	kisérl. 15.	kisérl. 17.	kisérl. 19.	kisérl. 40.	kisérl. 41.
Cuol.-é:	13·5°*C.*	13·5°*C.*	13·35°*C.*	13·5°*C.*	14·5°*C.*	14·5°*C.*
KCy.-é:	14·0 »	14·5 »	13·0 »	13·5 »	14·5 »	15·5 »

Végre a föntebbi kisérleti eredmények anyagot is szolgáltatnak a *cyánkálium-oldalt tarthatósága* megitélésére. Elfogyasztatott 100° *Cuol.*-nél.

Kisérl.	deczemberben	klg.	különbs.
10.	2.	99·500	+ 1·27%
12.	3.	100·765	
11.	2.	98·500	+ 0·81%
13.	3.	99·300	
42.	2.	103·050	— 0·97%
9.	3.	102·050	

18. kisérl.

1. és 2. titrálásnál 2. 26. januárban 64·385 } + 0·17%
» 3—7. 27. » 64·495

Átlagban: + 0·32%

Úgy látszik tehát, hogy a cyankáliumoldat már egy napi állásra is szenved valami csekély változást, mely változás azonban igen valószinüleg, 7 nap alatt sem növekszik fel tetemesre, a mint ezt a következő két kisérlet mutatja:

Kisérl. 43, deczemb. 18 = 52·04° KCy.
» 30, deczemb. 25 = 52·49° »
Különbs. + 0·45° KCy = + 0·865%.

Különben a cyánkáliumoldat eltarthatósága alkalmasint függeni fog a használt cyánkálium tisztaságától.

Vizsgálataim eredményeit a következőkbe foglalom össze:

A PARKES-féle módszer igen jó eredményeket szolgáltat és még a szigorúbb követelményeknek is megfelel, föltéve, hogy a cyánkáliumoldat hatásértékének meghatározásánál épen úgy járunk el, mint magánál a réz meghatározásánál, s ha a titrálandó folyadék mind a két esetben:

a) egyenlő mennyiségü szabad és rézhez kötött salétromsavat;

b) egyenlő mennyiségü szabad ammoniákat;

c) egyenlő mennyiségü és egyazon minőségü ammónsókat tartalmaz, ha továbbá;

d) a rézoldat elpárologtatása, esetleg vízzel való meghigitása által arról gondoskodunk, hogy a titrálás után mindig ugyanaz a folyadék mennyiség származzék;

e) a cyánkáliumoldat hozzáadását mindig egyformán és ugyanannyi idő alatt végezzük;

f) ha a folyadék réztartalma a cyánkálium-oldat titerállásánál nem különbözik jelentékenyen az elemezendő folyadék réztartalmától; például az egyik nem foglal magában kevesebbet 0·07-nél, a másik nem többet 0·14 réznél;

g) ha a cyánkálium-oldat és a réztartalom hatás értékének meghatározása egy és ugyanazon a napon vihetik véghez, föltéve, hogy a cyánkálium-oldat tarthatósága nem sokkal tetemesebb, mint a milyennek én találtam.

E föltételek mellett és magától értetődve, hogy mindazon mozzanatok, melyek mennyiségi elemzéseknél figyelembe veendők (a folyadékok hőmérséke, a mérőedények pontos kalibrálása, egyforma eljárás a leolvasásnál stb.) csakugyan figyelembe vétetnek — a PARKES-féle módszer a chemikus kezében kitünően alkalmas a FEHLING-féle czukormeghatározásnál oxydul alakban kiváló réz meghatározására. Kisérleteim arra a föltevésre jogositanak, hogy a föntebbi feltételek szemmel tartása mellett a módszer közép hibái nem rugnak többre mint az egész jelenlevő réz mennyiség $\pm$ 0·29 százalékára. [2]) A laikusnak e módszer, a cyánkálium mérges volta miatt mint tudva van, nem ajánlható.

(A magyaróvári gazd. intézet chemiai laboratoriuma. 1878. nov. 19-én.)

---

[2]) Az egyes titrálások közép különbsége mind a 43 kisérletben 0·585%-ra rug.

VÉGTELEN SOROK ÉS SZORZATOK CONVERGENTIÁJÁRÓL.[1]

Silberstein Salamontól, a budapesti középisk. tanárképző intézet rendes tagjától.

A következőkben WEIERSTRASS-nak a végtelen sorokra és szorzatokra vonatkozó convergentia-vizsgálatait szándékozunk kifejteni.[2] Ezen vizsgálatok nemcsak a módszer mintaszerű volta által tünnek ki, hanem azért is kiváló figyelemre méltók, mivel a sorok és szorzatok jelentékeny csoportjáuál az ide vonatkozó kérdésekre teljes feleletet adnak.

Tárgyalásunkat két szakaszra osztjuk: az elsőben a végtelen szorzatok összetartási viszonyainak meghatározását bizonyos megfelelő végtelen sorok megvizsgálására vezetjük vissza, a második szakaszban magukkal a végtelen sorokkal akarunk foglalkozni és azoknak összetartási föltételeit megállapitani. A nyert szabályok tág alkalmazhatóságának bizonyitásaúl pedig egy néhány példát fogok a kifejtésekhez csatolni.

I.

§. 1. *Ha valamely végtelen sornak egyes tagjai:*

$$u_0, u_1, u_2, \ldots .$$

mind valósak, positivok, az egységnél kisebbek, a sor maga pedig összetartó, akkor a következő szorzatok:

$$P_n = (1-u_0)(1-u_1) \ldots (1-u_n)$$
$$Q_n = (1+u_0)(1+u_1) \ldots (1+u_n)$$

szintén összetartók lesznek azaz meghatározott, a 0-tól különböző, véges ér-

[1] E czikk azon előadások kidolgozása, melyeket szerző a tanárképző intézet mathem. gyakorlataiban tartott s melyeknek feladata volt a WEIERSTRASS-féle convergentia-vizsgálatokat kapcsolatba hozni az algebrai analysis tankönyveiben közönségesen bennfoglalt elemi tárgyalásokkal. Szerk.

[2] Ezen vizsgálatok W. következő czímű értekezésében foglaltatnak: Über die Theorie der analyt. Facultäten. Crelle's Journal. tom. 51.

ték felé közelednek, midőn n bármely adott számnál nagyobb lesz, vagy — mint kevésbbé szabatosan mondják — midőn n a végtelenbe nő.

P_n a tényezők számának szaporodtával szüntelenül fogy, mivel a hozzájáruló tényezők az egységnél kisebbek, Q_n ellenben szüntelenül nagyobbodik, ha tényezőinek száma szaporodik, mivel a hozzájáruló tényezők az egységnél nagyobbak. Tételünk bebizonyitására tehát csak azt kell kimutatni, hogy P_n nem fogy a zérusig és Q_n nem nő a végtelenig, hanem az első egy véges határon felül, a második pedig egy véges határon alul marad. Azt talán fölösleges is megjegyezni, hogy P_n és Q_n mindig positivok.

A következőkben egy segédtételre lesz szükségünk. Ha ugyanis $a, b, c, d \ldots$ csupa valós és egyenlő előjelü mennyiségek, akkor:

$$(1+a)(1+b) = 1+a+b+ab > 1+a+b$$

ab ugyanis positiv mennyiség, mivel a és b egyenlő előjelü mennyiségek, és positiv mennyiség elhanyagolása csökkenti a kifejezés értékét. Hasonlóan:

$$(1+a)(1+b)(1+c) > (1+a+b)(1+c) = 1+a+b+c+ac+bc$$

és az ac meg bc positiv mennyiségek elhanyagolása után, annál inkább

$$(1+a)(1+b)(1+c) > 1+a+b+c$$

Ezt igy folytatva megkapjuk segédtételünket, mely szerint

$$(1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \ldots > 1+a+b+c+d+ \ldots$$

a.) Most áttérhetünk a tétel bebizonyitására és tegyük e czélból

$$n = m+r$$

hol m egy véges egész szám és r az n-nel együtt lesz végtelen nagygyá. Képezzük ezen hányadost:

$$\frac{P_{m+r}}{P_m} = (1-u_{m+1})(1-u_{m+2})(1-u_{m+3}) \ldots (1-u_{m+r}),$$

akkor segédtételünknél fogva.

$$\frac{P_{m+r}}{P_m} > 1-u_{m+1} - u_{m+2} - \ldots - u_{m+r}$$

A mi ezen egyenlőtlenség jobboldalán az egységből levonandó:

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+r},$$

az nem más mint a felvett U sor maradéka, mely ezen sor összetartásánál fogva kisebbnek tartozik lenni egy tetszőleges E valódi törtnél, ha csak m kellő nagynak választatott, bármily nagygyá is legyen különben az r, azaz:

$$E > u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+r}$$

és igy: $1-E < 1-u_{m+1} - u_{m+2} - \ldots - u_{m+r}$, tehát:

$$\frac{P_{m+r}}{P_m} > 1-E$$

vagyis: $P_{m+r} > P_m\,(1-E)$

hol, mint megjegyeztetett, r bármilyen nagy lehet. Ha r minden határon túl nő, P_{m+r} a végtelen szorzatot képviseli; m véges lévén, P_m is véges, ugyszinte $(1-E)$ is véges, tehát az előbbi egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy a végtelen szorzat értéke nagyobb marad (egy zérustól különböző) véges értéknél, a mi kimutatandó volt.

Nem támadhat itten kétely a felett, vajjon P_n valóban *egy* meghatározott értékhez közeledik-e. P_n ugyanis a tényezők számának gyarapodtával szüntelenül kisebbedik, és ezen körülmény az ingadozás lehetőségét teljesen kizárja.

b.) Hogy kimutassuk, miszerint:

$$Q_n = (1-u_0)\,(1+u_1)\ldots(1+u_n)$$

az n-nek határtalan növekedtével egy meghatározott véges értéken alul marad, állítsuk elé reciprók értékét ily alakban:

$$\frac{1}{Q_n} = \left(1 - \frac{u_0}{1+u_0}\right)\left(1 - \frac{u_1}{1+u_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{u_n}{1+u_n}\right)$$

Most az $\frac{1}{Q_n}$ hasonló alakú mint előbb P_n, úgy hogy $\frac{1}{Q_n}$-nel csak ismételnünk kell, mit előbb P_n-nel tettünk. Legyen ismét:

$$n = m + r$$

hol m és r a föntebb kijelölt föltételekhez kötvék, akkor:

$$\frac{1}{Q_{m+r}} : \frac{1}{Q_m} = \left(1 - \frac{u_{m+1}}{1+u_{m+1}}\right)\left(1 - \frac{u_{m+2}}{1+u_{m+2}}\right)\ldots\left(1 - \frac{u_{m+r}}{1+u_{m+r}}\right)$$

segédtételünknél fogva:

$$\frac{1}{Q_{m+r}} : \frac{1}{Q_m} > 1 - \frac{u_{m+1}}{1+u_{m+r}} - \frac{u_{m+2}}{1+u_{m+2}} - \ldots - \frac{u_{m+r}}{1+u_{m+r}}$$

és ha már $U_{m+1} + U_{m+2} + \ldots + U_{m+r} < E$,

hol E egy tetszőleges valódi törtet jelent, akkor ezen egyenletlőnség annál inkább annál ha az egyes összeadandókat az egységnél nagyobb nevezőkkel látjuk el, azaz:

$$\frac{u_{m+1}}{1+u_{m+1}} + \frac{u_{m+2}}{1+u_{m+2}} + \ldots + \frac{u_{m+r}}{1+u_{m+r}} < E,$$

tehát: $\frac{1}{Q_{m+r}} : \frac{1}{Q_m} > 1-E$ és $\frac{1}{Q_{m+r}} > \frac{1}{Q_m}$ $1-E)$ vagy:

$$Q_{m+r} < \frac{Q_m}{1-E}$$

Ezen egyenlőtlenség a bebizonyítandó tételnek kifejezését adja, mely szerint a végtelen szorzat egy véges határon alúl marad. Itt is azonnalbelátható, hogy Q_n *egy* meghatározott véges értékhez közeledik, hisz tudjuk róla, hogy a tényezők számának gyarapodtával szűntelenűl nő, ingadozásról tehát szó sem lehet.

§. 2. Most fel fogjuk tételezni, hogy az:

$$u_0\ , u_1\ , u_2\ , \ldots .$$

végtelen sor széttartó. Ekkor a:

$$\left.\begin{aligned} Q_n &= (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n) \\ P_n &= (1-u_0)(1-u_1)\ldots(1-u_n) \end{aligned}\right\} \text{(hol } n \text{ határtalanúl nő)}$$

végtelen szorzatok közűl az első végtelen nagygyá lesz, míg a második zérushoz közeledik. Ugyanis:

$$Q_n = (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n) > 1+u_9+u_1+u_2+\ldots+u_n$$

Az $u_0+u_1+u_2+\ldots$ sor széttartó lévén, Q_n vég nélkül nő.

Állitsuk elé P_n-nek reciprok értékét ilyalakban:

$$\frac{1}{P} = \left(1+\frac{u_0}{1-u_0}\right)\left(1+\frac{u_1}{1-u_1}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{u_n}{1-u_n}\right),$$

akkor látni, hogy:

$$\frac{1}{P_n} > 1+\frac{u_0}{1-u_0}+\frac{u_1}{1-u_1}+\cdots\cdots+\frac{u_n}{1-u_n}$$

és ha már az $u_0 + u_1 + \ldots$ sor széttartó, annál inkább széttartó lesz az a sor, melyet belőle nyerünk, ha egyes összeadandóit az egységnél kisebb nevezővel látjuk el, tehát az:

$$\frac{u_0}{1-u_0}+\frac{u_1}{1-u_1}+\cdots\cdots$$

sor is széttartó. $\frac{1}{P_n}$ ekkép határtalanúl növekedvén, P_n zérushoz fog közeledni.

§. 3. A lehozott tételek természetesen meg is fordíthatók, azaz a végtelen szorzatnak véges értékhez való közeledéséből, a megfelelő végtelen sor összetartására, mig a végtelen szorrat határtalan növekedéséből vagy fogyásából a megfelelő végtelen sor széttartására lehet következtetést vonni. És ezen következtetésmód néha czélszerűen alkalmazható, a mint ezt a következő példák mutatják.

1) Vajjon a harmonikus sor:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

összetartó-e vagy széttartó, arról a:

$$P_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

adhat felvilágositást, midőn n-et határtalanúl növesztjük. Ugyanis:

$$P_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{1\cdot 3\cdot 4\cdots\quad n}=\frac{1}{n}$$

$$\text{és } lim\left(\frac{1}{n}\right)_{n=\infty}=0 \text{ lévén:}$$

$$lim(P_n)_{n=\infty}=0$$

A végtelen szorzat zérushoz közeledvén, kell, hogy a végtelen sor széttartó legyen.

2) A következő:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

végtelen sorra nézve vizsgáljuk ezen szorzatot:

$$P_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$P_n=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots\quad n}\cdot\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdots(n+1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots\quad n}=\frac{n+1}{2n}$$

$$\frac{n+1}{2n}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2}$$

$$\text{tehát } lim\left(\frac{n+1}{2n}\right)_{n=\infty}=\frac{1}{2}$$

$$\text{és így } lim\,(P_n)_{n=\infty}=\frac{1}{2}$$

A végtelen szorzat véges értékhez közeledvén, kell hogy a végtelen sor összetartő legyen.

A példa gyanánt felhozott sorok speciális esetei a következő nagyfontosságú sornak:

$$1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\frac{1}{4^\mu}+\cdots$$

Ezen sorra nézve most már tudjuk, hogy széttartó, ha $\mu = 1$ és összetartó, ha $\mu = 2$. Vizsgálataink folytában alkalmunk lesz ezen sorra visszatérni és találni fogjuk, hogy mindig összetartó, ha:

$$\mu > 1,$$

ellenben széttartó, ha:

$$\mu \leqq 1$$

§. 4. Az 1. és 2 §. §. tartalmát következőképen foglalhatjuk öszsze. *Ha az:*

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

végtelen sornak tagjai mind valósak, az egységnél kisebbek és bizonyos a végesben fekvő tagtól kezdve egyenlőjelüek, akkor ezen szorzat:

$$P_n = (1+u_0)(1+u_1) \ldots (1+u_n)$$

az n-nek *határtalan növekedtével a végtelen sorral együtt összetartó, azaz egy meghatározott véges értékhez közeledő.*

Ha ellenben a végtelen sor széttartó, akkor:

$$lim\,(P_n)_{n=\infty} = \infty, \text{ vagy } lim\,(P_n)_{n=\infty} = 0$$

a szerint, a mint az $u_0, u_1, u_2, \ldots$ *végtelen sornak tagjai egy bizonyos a végesben fekvő tagtól kezdve mind positivok, vagy mind negativok.*

§. 5. Itt azon esetet akarjuk vizsgálni, midőn az:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

végtelen sor positiv és negativ tagokból áll. Ilyen kevert előjelü soroknál nem elég az összetartás és széttartás eseteit minden további megjegyzés nélkül szétválasztani, a mennyiben itten az összetartás két esete u. m. a föltétlen és a föltétes összetartás szerepelhet. Tudvalevőleg föltétlenül összetartónak a vagy föltétesen összetartónak nevezzük a sort, a szerint a mint ezen véges értékhez való közeledése a tagok sorrendjétől független vagy pedig ettől függő.

Mi a föltétes összetartás esetét ki akarjuk zárni és egész vizsgálatunkon keresztül csakis föltétlenül összetartó sorokkal akarunk foglalkozni. Ez utóbbi sorok azon tulajdonság által vannak jellemezve, hogy tagjaik absolut értékeinek sora:

$$u'_0, u'_1, u'_2, \ldots$$

összetartó sort ád. Itt hol valós tagu sorokról van szó u'_n nem jelenthet egyebet, mint u_n-nek az előjel mellőztével nyert értékét.

Tehát azon föltevésből indulnak ki, hogy az absolut értékek sora

$$u'_0, u'_1, u'_2, \ldots$$

összetartó és ennek alapján kimutatjuk, hogy:

$$Q_n = (1+u_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n) \qquad (n=\infty)$$

meghatározott véges értékhez közeledik Q_n-et mindjárt két határ közé szoríthatjuk:

$$(1+u'_0)(1+u'_1)\ldots(1+u'_n) > Q_n > (1-u'_0)(1-u'_1)\ldots(1-u'_n)$$

és ezen határok végesek az 1. §. szabályainál fogva. Most még csak azt kell bebizonyitani, hogy Q_n *egy* meghatározott véges értékhez közeledik. Azaz ki kell mutatni, kogy $Q_{m+r} - Q_m$ különbség kisebb lesz bármily kicsiny E valódi törtnél, hacsak m kellő nagynak választatik, bármily nagygyá legyen különben r.

$$Q_{n+r} = Q_n(1+u_{n+1})$$

$$\text{vagy: } Q_{n+1} - Q_n = Q_n u_{n+1}$$

és ha itt n helyébe m, $m+1$, $m+2$, ... $m+r-1$ tétetik, a következő egyenlet rendszert nyerjük:

$$\begin{aligned}
Q_{m+1} - Q_m &= Q_m u_{m+1} \\
Q_{m+2} - Q_{m+1} &= Q_{m+1} u_{m+2} \\
Q_{m+3} - Q_{m+2} &= Q_{m+2} u_{m+3} \\
\cdot \quad \cdot \quad & \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad & \quad \cdot \\
Q_{m+r} - Q_{m+r-1} &= Q_{m+r-1} u_{m+r}
\end{aligned}$$

melynek összeadása által:

$$Q_{m+r} - Q_m = Q_m u_{m+1} + Q_{m+1} u_{m+2} + Q_{m+2} u_{m+2} + \cdots + Q_{m+r-1} u_{m+r}$$

Minthogy Q_n-et véges határok közé szorítottuk:

$$Q_m, Q_{m+1}, \ldots .$$

mennyiségek mindegyike csakis véges lehet, és ha legnagyobbikukat Q-val jelöljük, akkor:

$$Q_{m+r} - Q_m < Q(u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+r})$$

Az a mi ezen egyenlőtlenség jobb oldalán zárjelek közé van téve egy föltétlenűl összetartó sornak maradéka, tehát kisebb bármily kicsiny E valódi törtnél. Q végés lévén, be van bizonyítva, hogy $Q_{m+r} - Q_m$ kisebb bármily kis mennyiségnél:

§. 6. Az előbbi § eredményei benfoglaltatnak a most következőkben, a hol az:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots .$$

sor tagjairól földteszszük, hogy tetszőleges complex mennyiségek, úgy hogy az előbbi §-ot mellőzhettük volna, de nem mellőztük, mivel az itt követendő eljárást átlátszóbbá teszi. A sornak tagjai complex mennyiségek lévén, általán:

$$u_n = v_n + iw_n$$

Legyen továbbá a sor föltétlenűl összetartó, mire szükséges, hogy a:

$$v_0, v_1, v_2, \ldots.$$

$$w_0, w_1, w_2, \ldots.$$

sorok föltétlenűl összetartók legyenek, vagyis összetartók legyenek a:

$$v'_0, v'_1, v'_2, \ldots.$$

$$w'_0, w'_1, w'_2, \ldots.$$

sorok, hol a jegyzett betűk a megfelelő nem jegyzett betűknek absolut értékeit képviselik. Ezen sorok összetartásából következik, hogy a tagok egy bizonyos M-ediktől kezdve az egységnél kisebbek, azaz:

$$\left.\begin{array}{l} v'_r < 1 \\ w'_r < 1 \end{array}\right\} \text{ha } r \geqq m$$

Az itt kijelentett feltevések mellett a:

$$P_n = (1+v_0)(1+u_1)\ldots(1+u_n) = p_n + iq_n$$

szorzat n-nek határtalan növekedtével szintén véges meghatározott értékhez közeledik. Térjünk át P_n-nek absolut értékére:

$$[P_n] = \sqrt{p_n^2 + q_n^2}$$

De másrészt a szorzat absolut értéke egyenlő a tényezők absolut értékeinek szorzatával. Egy ily tényező:

$$1 + u_n = 1 + v_n + iw_n,$$

tehát ennek absolut értéke:

$$[1 + u_n] = \sqrt{(1 + v_n)^2 + w_n^2}$$

és így P_n-nek absolut értéke:

$$[P_n] = \sqrt{(1+v_0)^2+w_0^2}\sqrt{(1+v_1)^2+w_1^2}\sqrt{(1+v_2)^2+w_2^2}\cdots\sqrt{(1+v_n)^2+w_n^2}$$

Tegyük ismét, hogy $n=m+r$ és állitsuk elő ezen hányadost:

$$\frac{[P_{m+r}]}{[P_m]} = \sqrt{(1+v_{m+1})^2+w_{m+1}^2}\sqrt{(1+v_{m+2})^2+w_{m+2}^2}\cdots\sqrt{(1+v_{m+r})^2+w_{m+r}^2}$$

Ezen alak még nem elég egyszerű, hogy belőle következtetéseket vonhassunk. Egyszerűsíteni azáltal fogjuk, hogy a gyökmennyiségeket ily alakra hozzuk:

$$\sqrt{(1+v_n)^2+x_n^2} = 1 + v_n + \varepsilon_n w_n\,,$$

hol ε_n egy kellőleg választott valódi tört, mely előjelére nézve a w_n-nel megegyezik, ε_n tehát a következő feltételekhez van kötve:

$$\varepsilon_n < 1$$
$$\varepsilon_n w_n > 0$$

Hogy a tárgyalt gyökmennyiségeket valóban hozhatjuk ezen alakra, azonnal belátható; ugyanis:

$$1 + v_n < \sqrt{(1 + v_n)^2 + w_n^2} < 1 + v_n + w'_n$$

és ép ezen két egyenlőtlenség összefoglalása által nyerjük:

$$\sqrt{(1 + v_n)^2 + w_n^2} = 1 + \varepsilon_n w_n ,$$

tehát:

$$\frac{[P_{m+r}]}{[P_m]} = (1+v_{m+1}+\varepsilon_{m+1}w_{m+1})(1+v_{m+2}+\varepsilon_{m+2}w_{m+2})\cdots(1+v_{m+r}+\varepsilon_{m+r}w_{m+r})$$

A szóban forgó hányados tehát a következő határok közé szorítható:

$$(1-v'_{m+1} + \varepsilon_{m+1}w_{m+1})(1-v'_{m+2} + \varepsilon_{m+2}w_{m+2})\cdots(1-v'_{m+r} + \varepsilon_{m+r}w_{m+r})$$
$$(1+v'_{m+1} + \varepsilon_{m+1}w_{m+1})(1+v'_{m+2} + \varepsilon_{m+2}w_{m+2})\cdots(1+v'_{m+r} + \varepsilon_{m+r}w_{m+r})$$

és ezen határok végesek, mivel a:

$$v'_{m+1} \, , v'_{m+2} \, , \cdots v'_{m+r}$$
$$w_{m+1} \, , w_{m+2} \, , \cdots w_{m+r}$$

sorok r-nek minden határon túl való növekedtével föltétlenűl összetartók, és így a:

$$v'_{m\,1} \pm \varepsilon_{m+1} w_{m+1} \, , v'_{m+2} \pm \varepsilon_{m+2} w_{m+2} \, , \cdots v'_{m+r} \pm \varepsilon_{m+r} w_{m+r}$$

sor is összetartó. $[P_m]$ véges lévén, $[P_{m+r}] = \sqrt{p_n^2 + q_n^2}$-nek is végesnek kell lennie, mi csak úgy lehet, ha p_n és q_n, tehát egyszersmind $p_n + iq_n = P_n$ is véges.

Most még csak azt kell kimutatnunk, hogy $P_n = p_n + iq_n$ *egy* meghatározott véges értékhez közeledik, a mi azáltal történik, hogy bebizonyitjuk, miszerínt:

$$p_{m+r} - p^m$$
$$\text{és} \quad q_{m+r} - q_m$$

kisebbek bár mily kicsiny valódi törtnél, ha csak m kellő nagynak választatik, bármily nagygyá is legyen különben r.

$$P_{n+1} = (1+u_{n+1}) \, P_n \quad \text{vagyis:}$$
$$p_{n+1} + iq_{n+1} = (1 + v_{n+1} + iw_{n+1}) \, (p_n + iq_n),$$

itt a valós és képzetes részeket külön egyenlítve:

$$p_{n+1} - p_n = p_n\, v_{n+1} - q_n\, w_{n+1}$$
$$q_{n+1} - q_n = q_n\, v_{n+1} + p_n\, w_{n+1}$$

Ezen egyenletekbe n helyébe $m, m+1, m+2, \ldots, m+r-1$-et téve, a következő két egyenlet rendszert nyerjük:

$$\begin{array}{lll} p_{m+1} - p_m & = p_m v_{m+1} & - q_m w_{m+1} \\ p_{m+2} - p_{m+1} & = p_{m+1} v_{m+2} & - q_{m+1} w_{m+2} \\ p_{m+3} - p_{m+2} & = p_{m+2} v_{m+1} & - q_{m+2} w_{m+2} \\ \cdot \quad \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot \\ p_{m+r} - p_{m+r-1} & = p_{m+r-1} v_{m+r} & - q_{m+r-1} w_{m+r} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} q_{m+1} - q_m & = q_m v_{m+1} & + p_m w_{m+1} \\ q_{m+2} - q_{m+1} & = q_{m+1} v_{m+2} & + p_{m+1} w_{m+2} \\ q_{m+3} - q_{m+2} & = q_{m+2} v_{m+3} & + p_{m+2} w_{m+4} \\ \cdot \quad \cdot & \quad \cdot & \quad \cdot \\ q_{m+r} - q_{m+r-1} & = q_{m+r-1} v_{m+r} & + p_{m+r-1} w_{m+r} \end{array}$$

összegezés által:

$$p_{m+r} - p_m = p_m v_{m+1} + p_{m+1} v_{m+2} + p_{m+2} v_{m+3} + \cdots + p_{m+r-1} v_{m+r} -$$
$$- (q_m w_{m+1} + q_{m+1} w_{m+2} + q_{m+2} w_{m+3} + \cdots + q_{m+r-1} w_{m+r})$$
$$q_{m+r} - q_m = q_m v_{m+1} + q_{m+1} v_{m+2} + q_{m+2} v_{m+3} + \cdots + q_{m+r-1} v_{m+r} +$$
$$+ p_m w_{m+1} + p_{m+1} w_{m+2} + p_{m+2} x_{m+r} + \cdots + p_{m+r-1} w_{m+r}$$

Ámde a p_m $p_{m+1}, \ldots.$ valamint a $q_m, q_{m+1}, \ldots$ mennyiségek végesek és legyen a legnagyobb köztük p és q, akkor:

$$p_{m+r} - p_m < p(v_{m+1} + v_{m+2} + \cdots + v_{m+r}) - q(w_{m+1} + w_{m+2} + \cdots + w_{m+r})$$
$$q_{m+r} - q_m < q(v_{m+1} + v_{m+2} + \cdots + v_{m+r}) + p' w_{m+1} + w_{m+2} + \cdots + w_{m+r})$$

A zárjelek közti kifejezések föltétlenűl összetartó soroknak maradékai, tehát kisebbek bármily kis mennyiségnél és igy be van bizonyítva, hogy $p_{m+r} - p_m$ és $q_{m+r} - q_m$ tetszőlegesen keveset különböznek zérustól.

II.

§. 7. Áttérünk a végtelen sorokra vonatkozó összetartási vizsgálatokra és mindenek előtt ki akarjuk jelölni, hogy a soroknak minő csoportjával foglalkozunk a következőkben.

Végtelen sorban nem lehet minden egyes tag értékét kijelölni, kell tehát, hogy adva legyen oly általános törvény, mely szerint a sornak minden egyes tagját ki lehet számítani. E törvény legegyszerübb, alakja, ha az:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

sornak általános, azaz n-edik tagja $u_n = f(n)$ alakú képlet által van adva. A sor törvénye akkor is ismeretes, ha tudjuk miként származik egy tetszőleges tag az őt megelőzőből, ha például két szomszédos tag hángadosa igy van meghatározva:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \varphi(n)$$

Ezen utóbbi meghatározásmód visszavehető az elsőre, ugyanis:

$$\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = \varphi(n-1)$$

$$\frac{u_{n-2}}{u_{n-3}} = \varphi(n-2)$$

$$\frac{u_1}{u_0} = \varphi(1)$$

tehát $u_n = u_0\, \varphi(1)\varphi(2)\varphi(3) \cdots \varphi(n-2).\varphi(n-1).\varphi(n)$ és u_n itt is mint a mutató függvénye van adva. Ezen alak már azért is fontos, mivel N-nek végtelenbe való növekedtével u_n, azaz a sornak végtelenben fekvő tagja, egy végtelen szorzat által lesz kifejezve.

Itt azon végtelen sorokkal foglalkozunk, melyeknél kétszomszédos tag hányadosa:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \cdots$$

hol a jobb oldalon álló sor véges vagy végtelen; az a_1, a_2, a_3, pedig az n-től független és általában complex mennyiségek, tehát:

$$a_1 = g_1 + hi,\ a_2 = g_2 + h_2 i, \ldots.$$

Ezen törvény alá tartozik a következő:

$$1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-2)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n-1\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-2)} +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\ \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} + \cdots$$

sor, mely hypergeometrikus vagy felfedője után Gauss-féle sornak neveztetik, ennél ugyanis:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{(\alpha+n-1)(\beta+n-1)}{n\cdot(\gamma+n-1)}=\left(1+\frac{\alpha-1}{n}\right)\left(1+\frac{\beta-\gamma}{n}-\frac{\gamma(\beta-\gamma)}{n^2}+\dots\right)$$

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=1+\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}+\dots$$

itt tehát $a_2=\alpha+\beta-\gamma-1$.

Ide tartozik továbbá a már emlitett:

$$1+\frac{1}{2^\mu}+\frac{1}{3^\mu}+\dots+\frac{1}{(n-1)^\mu}+\frac{1}{n^\mu}+\dots$$

sor, melynél:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^\mu=\left(1-\frac{1}{m}\right)^\mu=1-\frac{\mu}{n}+\frac{\binom{\mu}{2}}{n^2}-\frac{\binom{\mu}{3}}{n^3}+\dots$$

itt tehát $a_1=-\mu$.

§. 8. Sorok összetartására mindenek előtt szükséges (habár nem elégséges) föltétel, hogy $lim(u_n)_{n=\infty}=0$ legyen. Vizsgálatunk tehát első sorban a végtelenben fekvő tagra fog irányulni. Legyen e czélból:

$$u_0\ ,\ u_1\ ,\ u_2\ ,\dots$$

oly végtelen sor, melynél:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=1+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\frac{a_3}{n^3}+\dots$$

Ezen $a_1\ ,\ a_2\ ,\dots,$ mennyiségek közül legyen a_μ az első, mely el nem tünik, úgy hogy:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}}=1+\frac{a_\mu}{n^\mu}+\frac{a_{\mu+1}}{n^{\mu+1}}+\dots$$

Már most két esetet különböztethetünk meg, ugyanis $\mu=1$ vagy $\mu>1$, ez utóbbi esetben μ legalább 2, mert μ mint index csakis egész számot jelenthet.

a) Tárgyaljuk elébb azon esetet, midőn $\mu>1$; ekkor:

$$n^\mu\frac{u_n}{u_{n-1}}=n_\mu+a_\mu+\frac{a_{\mu+1}}{n}+\dots$$

$$\text{és }n^\mu\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}-1\right)=a_\mu+\frac{a_{\mu+1}}{n}+\dots$$

$$\text{tehát } lim\left\{n^\mu\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}-1\right)\right\}_{n=\infty}=a_\mu$$

$$\text{és } lim\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)_{n=\infty}=1+\frac{a_\mu}{n^\mu}\,,$$

úgy hogy tehetjük:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{k_n}{n^\mu},$$

hol k_n oly tulajdonságú, miszerint:

$$lim(k_n)_{n=\infty} = a_\mu$$

Hasonlóan: $$\frac{u_{n-1}}{u_{n-1}} = 1 - \frac{k_{n-1}}{(n-1)^\mu}$$

$$\frac{u_{n-2}}{u_{n-3}} = 1 + \frac{k_{n-2}}{(n-2)^\mu}$$

$$\frac{u_1}{u^0} = 1 + \frac{k_1}{1^\mu}$$

tehát: $$u_n = u_0\left(1 + \frac{k_1}{1^\mu}\right)\left(1 + \frac{k_2}{2^\mu}\right)\cdots\left(1 + \frac{k_{n-1}}{(n-1)^\mu}\right)\left(1 + \frac{k_n}{n^\mu}\right)$$

Ha n nagyobbá lesz bár mily nagy számnál, u_n egy végtelen szorzat alakjában áll elő, mely az I. szakasz szabályainál fogva az:

$$\frac{k_1}{1^\mu} + \frac{k_2}{2^\mu} + \cdots \frac{k_{n-1}}{(n-1)^\mu} + \frac{k}{n^\mu} + \cdots$$

sorral együtt összetartó. Föltételünknél fogva μ legalább 2. Ha $\mu=2$, akkor a sor összetartó, a mint ezt az I. szakaszban kimutattuk, de még annál inkább összetartó, ha $\mu=3$, $\mu=4$, stb, mert ha már az:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

sor összetartó, akkor még összetartóbbá lesz, ha egyes tagjait a 2-iktól kezdve az egységnél kisebb számokkal: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\cdots$ rendre megszorozzuk, tehát összetartó az:

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots \text{ sor.}$$

Ezen okoskodást folytatva, könnyen belátható, hogy az:

$$1 + \frac{1}{2^\mu} + \frac{1}{3^\mu} + \ldots$$

sor összetartó, ha μ egy tetszőleges egész szám a 2-től fölfelé, s ilyennek lett μ valóban föltételezve. A sornak összetartásából következik, hogy azon végtelen szorzat, melyben u_n-et előállítottuk, midőn $n = \infty$, egy véges meghatározott értékhez közeledik, azaz:

$$lim\,(u_n)_{n=\infty} = u,$$

hol u egy véges meghatározott mennyiséget jelent.

A $\mu > 1$ *esetben tehát azon eredményre jutottunk, hogy* u_n *az* n-nek *határtalan növekedtével egy véges meghatározott értékhez közeledik, úgy hogy tehetjük:*

$$u_n = u + \varepsilon_n,$$

hol ε_n oly mennyiség, mely eltünik, ha n minden határon túl nő azaz:

$$lim\,(\varepsilon_n)_{n=\infty} = 0$$

Szükséges lesz a következőkben ezen ε_n-nek az n-től miként való függését közelebbről meghatározni és találni fogjuk, hogy ε_n ily alakra hozható:

$$\varepsilon_n = \frac{l_n}{n^{\mu-1}}$$

hol l_n egy véges meghatározott mennyiség, bármily nagygyá legyen az n. Ugyanis:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{k_n}{n^\mu}$$

egyenletből következik, hogy:

$$u_n - u_{n-1} = \frac{k_n}{n^\mu}\,u_{n-1}$$

vagy: $$u_{n-1} - u_n = -\frac{k_n}{n^\mu}\,u_{n-1}$$

Itt n helyébe $n+1,\ n+2 \ldots n+r$-et téve, nyerjük:

$$u_n - u_{n+1} = -\frac{k_{n+1}}{(n+1)^\mu}\,u_n$$

$$u_{n+1} - u_{n+2} = -\frac{k_{n+2}}{(n+2)^\mu}\,u_{n+1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$u_{n+r-1} - u_{n+r} = -\frac{k_{n+r}}{(n+r)^\mu}\,u_{n+r-1}$$

és összegezés által:

$$u_n - u_{n+r} = \frac{-k_{n+1}\,u_n}{(n+1)^\mu} + \frac{-k_{n+2}\,u_{n+2}}{(n+2)^\mu} + \ldots + \frac{-k_{n+r}\,u_{n+r-1}}{(n+r)^\mu}$$

A jobboldalon lévő számlálók végesek, bármily nagygyá is legyen r. Ha $L_{n,\,r}$ egy középértéket jelent ezen számlálók között, tehát oly értéket, mely nagyobb a számlálók legkisebbjénél és kisebb azoknak legnagyobbjánál, akkor tehetjük:

$$u_n - u_{n+r} = L_{n,r}\left(\frac{1}{(n+1)^\mu} + \frac{1}{(n+2)^\mu} + \ldots + \frac{1}{(n+r)^\mu}\right)$$

Ha itt r minden határon túl nő, akkor u_{n+r}-ből lesz u, az pedig, a mi $L_{n,r}$-ből lesz, jelöltessék L_n-nel, így:

$$u_n = u + L_n\left(\frac{1}{(n+1)^\mu} + \frac{1}{(n+2)^\mu} + \frac{1}{(n+3)^\mu} + \ldots \text{ ad inf.}\right)$$

A jobb oldalon álló végtelen sor jelöltessék σ-val, akkor látni, hogy:

$$\sigma = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{(n+1)^{\mu-2}} + \frac{1}{(n+2)^2}\cdot\frac{1}{(n+2)^{\mu-2}} + \frac{1}{(n+3)^2}\cdot\frac{1}{(n+3)^{\mu-2}} + \cdots$$

tehát:

$$\sigma < \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots\right)\frac{1}{(n+1)^{\mu-2}}$$

és ezen egyenlőtlenség baloldalán álló kifejezés kisebb a következőnél:

$$\left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right)\frac{1}{n^{\mu-2}}$$

ez pedig egyenlő a következővel:

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots\right)\frac{1}{n^{\mu-2}},$$

a kapcsokban álló kifejezés $\frac{1}{n}$-nel egyenlő lévén, az utolsó kifejezés nem más, mint: $\frac{1}{n^{\mu-1}}$, úgy hogy:

$$\sigma > \frac{1}{n^{\mu-1}}$$

és ha S egy valódi törtet jelent, mely kellőleg lett választva:

$$\sigma > \frac{S}{n^{\mu-1}},$$

tohát $u_n = n + \frac{L_nS}{n^{\mu-1}}$ és ha $L_nS = l_n$, akkor:

$$u_n = u + \frac{l_n}{n^{\mu-1}},$$

a miből látható, hogy ε_n valóban ily alakú:

$$\varepsilon_n = \frac{l_n}{n^{\mu-1}},$$

hol l_n mindenkor véges mennyiség, mivel L_nS mindig véges.

b) Foglalkozzunk azon esettel, midőn $\mu = 1$, tehát:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{g_1 + h_1 i}{n} + \frac{g_2 + h_2 i}{n^2} + \dots$$

Ekkor a következő eredményekhez jutunk:

1.) *Ha az* a_1*-nek valós része positiv, azaz* $g_1 > 0$, *akkor* u_n *végtelen nagygyá lesz, ha* $n = \infty$

2.) *Ha az* a_1*-nek valós része eltünik, de képzetes része nem, azaz ha* $g_1 = 0$, $h_1 \gtrless 0$, *akkor* u_n *az* n-nek *határtalan növekedtével ugyan véges marad, de nem közeledik egy meghatározott értékhez, röviden mondva* $(u_n)_{n=\infty}$ *véges határok között ingadozik.* Ha $g_1 = 0$ és egyszersmind $h_1 = 0$, akkor, mint már a) alatt eldöntöttük $(u_n)_{n=\infty}$ meghatározott értékhez közeledik.

3.) *Ha az* a_1*-nek valós része negativ, azaz:* $g_1 < 0$, *akkor:* $(u_n)_{n=\infty} = 0$.

Ezen tételek bebizonyitásánál törekedni fogunk, az $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ hányadoson oly változtatásokat tenni, hogy annak kifejtésében az:

$$a_1 = g_1 + h_1 i = 0$$

legyen, a midőn a)-nak alapján képesek leszünk további következtetéseket tenni. Ezt elérjük, ha az $u_n : u_{n-1}$ viszony helyett a következőt vizsgáljuk:

$$\frac{u_n}{n^{g_1 + h_1 i}} : \frac{u_{n-1}}{(n-1)^{g_1 + h_1 i}} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{g_1 + h_1 i} =$$

$$= \left(1 + \frac{g_1 + h_1 i}{n} + \dots\right)\left(1 - \frac{g_1 + h_1 i}{n} + \dots\right) =$$

$$= 1 + \frac{a_2'}{n^2} + \dots$$

tehát az a_1 valóban kiesett és igy az a) alatti eredmény szerint $\frac{u_n}{n^{g_1 + h_1 i}}$ az n-nek határtalan növekedtével egy véges meghatározott értékhez közeledik és tehetjük:

$$\frac{u_n}{n^{g_1 + h_1 i}} = u + \frac{l_n}{n}$$

$$\text{vagy}: u_n = n^{g_1}\left(u + \frac{l_n}{n}\right) n^{h_1 i}$$

de: $n = e^{\log n}$, tehát: $n^{h_1 i} = e^{h_1 i \log n} = \cos(h_1 \log n) + i \sin(h_1 \log n)$

$$\text{és igy}: u_n = n^{g_1}\left(u + \frac{l_n}{n}\right)\left(\cos(h_1 \log n) + i \sin(h_1 \log n)\right)$$

Ezen utóbbi alakjából az u_n-nek, könnyü kiolvasni a fönt kijelentett tételeket. Ha ugyanis $g_1 > 0$, akkor $(n^g)_{n=\infty}$ végtelen nagygyá lesz, a többi tényezők végesek lévén, $(u_n)_{n=\infty}$ végtelen nagy.

Ha $g_1 = 0$, de $h_1 \gtrless 0$, akkor $n^{g_1} = 1$ és $\left(u + \frac{l_n}{n}\right)_{n=\infty} = u$, tehát az első két tényező véges meghatározott értékhez közeledik, ellenben a harmadik tényező:

$$[\cos(h \log n) + i \sin(h \log n)]_{n=\infty}$$

véges ugyan, de nem vezet egy meghatározott értékhez, hanem bizonyos véges határok között ingadozik.

Ha végre $g_1 < 0$, akkor $(n^{g_1})_{n=\infty} = 0$, a másik két tényező pedig véges lévén, valóban $(u_n)_{n=\infty} = 0$.

§. 9. A végtelenben fekvő tag megvizsgálása után látjuk, hogy a tárgyalásban lévő végtelen soroknál csak akkor remélhetünk összetartást, ha $g_1 < 0$, mert ekkor lesz:

$$lim(u_n)_{n=\infty} = 0$$

A többi esetekben a végtelenben fekvő tag vagy meghatározott véges érték vagy véges határok között ingadozó vagy végtelen, tehát összetartásról szó sem lehet.

Mielőtt azonban a $g_1 < 0$ eset tárgyalására átmennénk, az előbbi § eredményeit más irányban akarjuk értékesiteni.

Ha valamely Π végtelen szorzatnak összetartási viszonyait akarjuk megállapitani, akkor állítsuk elé a következő végtelen sort:

$$\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots \Pi_{n-1}, \Pi_n, \ldots$$

hol Π_n a végtelen szorzat első $n+1$ tényezőjének szorzatát jelenti. Nem kell egyebet tenni, mint ezen sor végtelenben fekvő tagját megvizsgálni, hogy a végtelen szorzat összetartási viszonyairól felvilágositást nyerjünk. E módszert a következő példákban fogjuk alkalmazni.

Az analytikai facultások elméletében, melynek WEIERSTRASS vizsgálatai adtak szilárd alapot, fontos szerepet játszik ezen végtelen szorzat:

$$u \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^u \left(1 + \frac{u}{\alpha}\right) \right\}$$

vagy részletezve:

$$\Pi = u \left(\frac{1}{2}\right)^u \left(1 + \frac{u}{1}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^u \left(1 + \frac{u}{2}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^u \left(1 + \frac{u}{3}\right) \cdots$$

Ezen végtelen szorzatot hozza be Weierstass a facultások elméletében a Γ függvények helyett és most megvizsgáljuk, vajjon összetartó-e vagy széttartó; állítsuk tehot elő a:

$$\Pi_1\,,\,\Pi_2\,.\,.\,,\,\Pi_{n-1}\,,\,\Pi_n\,,\,.\,.\,.$$

végtelen sort és vizsgáljuk annak végtelenbeu fekvő tagját:

$$\frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^u\left(1+\frac{u}{n}\right)$$

vagy mivel itt két szomszédos tag hányadosáról van szó, e helyett;

$$\frac{\Pi_{n-1}}{\Pi_{n-2}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^u\left(1+\frac{u}{n-1}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^u\left(1+\frac{u}{n-1}\right)=$$

$$+\left(1-\frac{u}{n}+\frac{u(u-1)}{2\cdot n^2}-\cdots\right)\left(1+\frac{u}{n}+\frac{u}{n^2}+\cdots\right)$$

$$\frac{\Pi_{n-1}}{\Pi_{n-2}} = 1+\frac{a_2}{n^2}+\cdots$$

Itt tehát $a_1 = 0$, és ekkor az előbbi § szerint:

$$lim(\Pi_n)_{n=\infty} = \Pi$$

egy véges meghatározott értékhez közeledik, azaz a végtelen szorzat összetartó.

A Gauss-féle sornál láttuk, hogy:

$$a_1 = \alpha+\beta-\gamma-1,$$

és ha $\alpha+\beta-\gamma-1=0$, akkor ezen végtelen szorzat:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots \text{ad inf. } \beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots \text{ad inf.}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \text{ad inf. } \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots \text{ad inf.}}$$

véges meghatározott értékhez közeledik.

Ezen végteleu szorzat:

$$\Pi = \left(1+\frac{ki}{1}\right)\left(1+\frac{ki}{2}\right)\left(1+\frac{ki}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{ki}{n}\right),\,.\,.$$

ingadozó, mert itt:

$$\frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} = 1+\frac{ki}{n}$$

az a_1-nek valós része zérus.

Természetes, hogy ezen módszert csak akkor lehet használni, ha ha a végtelen szorzat oly tulajdonságú, miszerint annak egy tetszőleges tényezője:

$$\frac{\Pi_n}{\Pi_{n-1}} = 1+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots$$

alakra hozható.

§. 10. Megállapítottuk, hogy az $u_0, u_1, u_2, \ldots$ végtelen sornál, mely az:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \frac{g_1 + h_1 i}{n} + \frac{g_2 + h_2 i}{n^2} + \ldots$$

által kifejezett törvényt követi, csak akkor várhatunk összetartást, ha $g_1 < 0$, mert csak akkor lesz $lim\,(u_n)_{n=\infty} = 0$. Ez utóbbi föltétel azonban még nem elégséges arra, hogy a sor összetartó legyen, és a közelebbi vizsgálat mutatni fogja, hogy:

1.) a sor összetartó, ha $g_1 < -1$

2.) a sor ingadozó, ha $g_1 = -1$ és $h_1 \gtrless 0$, ellenben széttartó ha $g_1 = -1$ és $h_1 = 0$.

Minden más esetben a sor széttartó.

A vizsgálat alatt lévő sor egyidejüleg összetartó a következővel:

$$p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$$

hol: $$p_n = \left(1 + \frac{g_1 + h_1 i}{m}\right)\left(1 + \frac{g_1 + h_1 i}{m+1}\right)\ldots\left(1 + \frac{g_1 + h_1 i}{m+n}\right)$$

m positiv egész szám és $m > g_1$, $m > h$.

Ugyanis:

$$\frac{u_n}{p_n} : \frac{u_{n-1}}{p_{n-1}} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_n} = \left(1 + \frac{g_1 + h_1 i}{n} + \frac{g_2 + h_2 i}{n^2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{g_1 + h_1 i}{m+n}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{g_1 + h_1 i}{n} + \frac{g_2 + h_2 i}{n^2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{g_1 + h_1 i}{n} + \ldots\right) = 1 + \frac{a_2}{n^2} + \ldots$$

Mivel itt $a_1 = 0$, a §. 8. szabálya szerint $\frac{u_n}{p_n}$ véges meghatározott értékhez közeledik, és tehetjük:

$$\frac{u_n}{p_n} = \left(u + \frac{l_n}{n}\right) \text{ vagy } u_n = p_n\left(u + \frac{l_n}{n}\right),$$

tehát:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n =$$

$$= u_0 + p_1\left(u + \frac{l_1}{1}\right) + p_2\left(u + \frac{l_2}{2}\right) + p_3\left(u + \frac{l_3}{3}\right) + \ldots p_n\left(u + \frac{l_n}{n}\right) =$$

$$= u_0 + u(p_1 + p_2 + p_3 + \ldots p_n) + \left(\frac{p_1}{1}l_1 + \frac{p_2}{2}l_2 + \frac{p_3}{3}l_3 + \ldots + \frac{p_n}{n}l_n\right) \ldots 0)$$

Az u sor összetartására tehát elégséges és szükséges, hogy a:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$$

sor összetartó legyen, mert ha ez convergál, akkor a:

$$\frac{p_1}{1}l_1 + \frac{p_2}{2}l_2 + \frac{p_3}{3}l_3 + \ldots$$

sor is összetartó. Az u sor helyett tehát a p sort vizsgálhatjuk. Erre nézve:

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = 1 + \frac{g_1 + h_1 i}{m+n} \text{ és } p_n - p_{n-1} = p_{n-1}\frac{g_1 + h_1 i}{m+n}$$

$$\text{vagy: } (m+n)p_n - (m+n)p_{n-1} = (g_1 + h_1 i)p_{n-1}$$

és ha ezen egyenlőség mindkét oldalához p_{n-1}-et hozzá adunk:

$$(m+n)p_n - (m+n-1)p_{n-1} = (g_1 + 1 + h_1 i)p_{n-1},$$

n helyébe $1, 2, 3, \ldots$ n-et téve.

$$\begin{aligned}
(m+1)p_1 - mp_0 &= (g_1 + 1 + h_1 i)p_0 \\
(m+2)p_2 - (m+1)p_1 &= (g_1 + 1 + h_1 i)p_1 \\
(m+n)p_n - (m+n-1)p_{n-1} &= (g_1 + 1 + h_1 i)p_{n-1}
\end{aligned}$$

és összegezve:

$$(m+n)p_n - mp_0 = (g_1 + 1 + h_1 i)(p_0 + p_1 + \ldots + p_{n-1}),$$

tehát a p sor összetartó, ha az:

$$[(m+n)p_n]_{n=\infty}$$

végtelen szorzat összetartó, kivéve ha:

$$g_1 + 1 = 0 \text{ vagy: } g_1 = -1$$

és egyszersmind $h_1 = 0$.

Ezen végtelen szorzat összetartási föltételeinek meghatározására használjuk a §. 9.-ben kifejtett módszert, előállítván az:

$$mp_0, (m+1)p_1, (m+2)p_2, \ldots, (m+n)p_n, \ldots$$

sort, melynek végtelenben fekvő tagja, maga a végtelen szorzat. Itt két szomszédos tag hányadosa:

$$\frac{(m+n)p_n}{(m+n-1)p_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{m+n}\right)^{-1}\left(1 + \frac{g_1 + h_1 i}{m+n}\right) =$$

$$\left(1 + \frac{1}{n} + \ldots\right)\left(1 + \frac{g_1 + h_1 i}{n} + \ldots\right) = 1 + \frac{g_1 + 1 + h_1 i}{n} + \ldots$$

és hogy ezen végtelenben fekvő tag egy meghatározott véges értékhez közeledjék, szükséges miszerint:

$$a_1 = g_1 + 1 + h_1 i = 0 \text{ legyen,}$$

vagyis $g_1 + 1 = 0$ és $h_1 = 0$; de ezen eset ki lett zárva. Hogy a végtelenben fekvő tag zérushoz közeledjék, azaz:

$$\{(m+n)p_n\}_{n=\infty} = 0,$$

arra §. 8. alapján szükséges, miszerint:

$$g_1+1 < 0 \text{ vagy } g_1 < -1 \text{ legyen,}$$

ekkor:

$$\{p_0+p_1+\ldots p_{n-1}\}_{n=\infty} = \frac{-mp_0}{g_1+1+h_1 i}$$

véges értékhez közeledik. A p sor tehát összetartó, ha $g_1 < -1$, és ugyanekkor lesz az u sor is összetartó.

Ha:

$$g_1+1 = 0 \text{ vagyis } g_1 = -1, \text{ de } h_1 \lesseqgtr 0,$$

akkor §. 8. szerint $\{(m+n)p_n\}_{n=\infty}$ véges határok között ingadozó, tehát egyszersmind a p sor és ezzel együtt a vizsgált u sor is ingadozó.

Ha végre $g_1 = -1$ és $h_1 = 0$, akkor,

$$p_n = \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{m+1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{m+n}\right) = \frac{m-1}{m+n}$$

$$\text{tehát: } p_0+p_1+p_2+\ldots = m-1\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots\right)$$

ámde a kapcsok között lévő sor, mely nem más, mint a harmonikus sor széttartó, tehát a g sor és ezzel együtt az u sor is széttartó, mind oly eredmények, melyek e § élén felállított tételeket igazolják.

Példák:

1.) Alkalmazzuk ezen szabályokat a Gauss-féle sorra, hol: $a_1 = \alpha+\beta-\gamma-1$, akkor látjuk, hogy a sor összetartó, ha:

$$\alpha+\beta-\gamma-1 < -1$$
$$\text{vagyis: } \alpha+\beta-\gamma < 0$$

2.) Az $1 + \frac{1}{2^{g_1+h_1 i}} + \frac{1}{3^{g_1+h_1 i}} + \frac{1}{4^{g_1+h_1 i}}$ $\quad (g > 0, h > 0)$

sornál $a_1 = -g_1 - h_1 i$ ezen sor tehát összetartó, ha:

$$-g_1 < -1$$
$$\text{vagyis: } g_1 > 1$$

Térjünk vissza az $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$ sorhoz és kutassuk a fellépő viszonyokat, midőn $0 > g_1 > -1$;

ekkor a;

$$\left\{\frac{p_1}{1}l_1 + \frac{p_2}{2} + .. + \frac{p_n}{n}ln\right\}_{n=\infty}$$

sor tovább is összetartó, ha:

$$\frac{p_n}{n}:\frac{p_{n-1}}{n-1} = \frac{p_n}{p_{n-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{g_1+h_1 i}{m+n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{g_1+h_1 i}{n}+..\right)\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{g_1 - 1 + h_1 i}{n} + ..$$

Itten $a_1 = g_1 - 1 + h_1 i$ és a_1-nek valós része $g_1 - 1$, már pedig az előbbiek szerint a sor összetartására szükséges, hogy ezen valós rész kisebb legyen -1-nél, azaz:

$$g_1 - 1 < -1 \text{ vagyis: } g_1 < 0$$

Látjuk tehát, hogy ezen sor mindig összetartó, még csak g_1 negativ. Ellenben a

$$\{p_0 + p_1 + p_2 + .. + p_n\}_{n=\infty}$$

sor a $0 > g_1 > -1$ föltétel mellett széttartó, tehát az:

$$u_0, u_1, u_2, \ldots u_n, \ldots$$

sor is széttartó, midőn:

$$0 > g_1 > -1.$$

Ha pedig $g_1 \overline{\overline{>}} 0$. akkor $(u_n)_{n=\infty}$ nem közeledvén zérushoz, hanem $g_1 = 0$ esetben, mint ezt §. 8-ban kimutattuk, véges értékhez közeledik és a $g_1 > 0$ esetben miuden határon túl növekedik, tehát ezen esetekben a sor széttartó. Igy most teljesen ki van mutatva, hogy az u sor csak akkor összetartó, ha $g_1 < -1$; ingadozó ha $g_1 = -1$ és $h_1 \lesseqgtr 0$ és minden más esetben széttartó, g_1 az a_1-nek valós részét jelentvén.

§. 11. Most az $u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots$ hatványsor összetartási föltételeit akarjuk megállapítani, tovább is föltéve, hogy $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ az ismert törvényt követi. A z complex változó:

$$z = \zeta\,(cos\ \varphi + t\ sin\ \varphi).$$

E hatványsor összetartási körének sugara:

$$\varrho = lim \left(\frac{u_{n-1}}{u_n}\right)_{n=\infty} = 1$$

tehát a sor mindig összetartó, ha z-nek absolut értéke:

$$\zeta < 1$$

ellenben széttartó, ha

$$\zeta > 1.$$

Midőn $\zeta = 1$ és egyszersmind az irány tényező az egységgel egyenlő, a vizsgálat már megejtetett, ugy hogy hátra van azon esettel foglalkoznunk, midőn $\zeta = 1$, de az iránytényező $cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi$ különbözik az egységtől, igy mos $z = cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi$.

Az előbbi §-ban követett eljáráshoz analog uton könnyü leszármaztatni ezen képletet:

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n = u_0 + u(p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z_n) +$$

$$+ \left(\frac{p_1}{1} l_1 z_1 + \frac{p_2}{2} l_2 z^1 + \ldots + \frac{p_n}{n} l_n z_n\right)$$

Ezen egyenlet jobb oldalán kapcsok közé foglalt sorok közül a második mindig összetartó, ha $g_1 < 0$, mivel a

$$\frac{p_1}{1} l_1 + \frac{p_2}{2} l_2 + \ldots$$

sor e föltétel mellett összetartó és $z^n = (cos\ \varphi + i\ sin\ \varphi)^n = cos\ (n\ \varphi) + i\ sin\ (n\ \varphi)$ bár mily nagy n-re nézve véges marad. A $g_1 < 0$ esetben tehát a vizsgált hatványsor akkor lesz összetartó, mikor a

$$S_n = [p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z_n]_{n=\infty}$$

sor convergál. Ez utóbbi sor pedig szintén akkor összetartó, ha:

$$g_1 < 0,$$

mert,

$$(1-z)S_n = p_1 z + (p_2 - p_1)z^2 + (p_3 - p_2)z^3 + \ldots + (p_n - p_{n-1})z^n - p_n z_n{}^{-1} =$$

$$= p_1 z + (g_1 + h_1 i)\left[\frac{p_1}{m+2} z + \frac{p_2}{m+3} z^3 + \ldots + \frac{p_{n-1}}{m+n} z^{n-1}\right] z - p_n z_{n-1}$$

Midőn $g_1 < 0$, $(p_n)_{n=\infty} = 0$ a §. 8. szabálya szerint, tehát egyszersmind:

$$(p_n z^{n+1})_{n=\infty} = 0,$$

a mi pedig a kapcsok közt foglalt sor illeti:

$$\frac{p_{n-1}}{m+n} : \frac{p_{n-2}}{m+n-1} = \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{m+n}\right) = \left(1 + \frac{g_1 + h_1 i}{m+n-1}\right)\left(1 - \frac{1}{m+n}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{g_1 + h_1 i}{n} + \ldots\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \ldots\right) = 1 + \frac{g_1 - 1 + h_1 i}{n} +.$$

és hogy összetartó legyen §. 10. szerint a szükséges föltétel:

$$g_1 - 1 < -1 \text{ vagyis: } g_1 < 0$$

Az $(1-z)\, S_n$ tehát összetartó, midőn $g_1 < 0$, hacsak nem,

$$1 - z = 0 \text{ vagyis: } z = 1,$$

mert ekkor itt semmit sem következtethetünk, a mi nem baj, mert a $z = 1$ eset tárgyalása már megtörtént.

A vizsgált hatványsor S_n-nel együtt lévén összetartó, kimondhatjuk a tételt, hogy midőn:

$$\zeta = 1,$$

de az iránytényező $\cos \varphi + i \sin \varphi$ az egységtől különböző a hatványsor összetartó, mihelyt:

$$g_1 < 0.$$

A sor ingadozó, ha $-g_1 = -1$ vagyis $g_1 = 1$ és $h_1 \lessgtr 0$, ellenben széttartó, ha $g_1 = 1$ és $h_1 = 0$.

IRODALOM.

Die Axiome der Geometrie. Eine philosophische Untersuchung der Riemann-Helmholtz'schen Raumtheorie. Von dr. Benno Erdmann Leipzig, 1877. 8⁰ 174 oldal.

A ki utánunk pár évtizeddel a geometria alaptételei körül folytatott törekvéseken és tudományos vitákon szemlét fog tartani, az alkalmasint csodálkozni fog a felett, mily lassan értek meg a helyes nézetek és fogalmak, mily szenvedélyes támadásokra és czáfolatokra és mennyi félreértésre vezetett a legjózanabb és leghiggadtabb gondolkodáson alapuló geometria természetszerü fejlődése. Az egyedüli tudomány, mely szigoru rendszeres alakban az ó-korból hozzánk átszármazott a nélkül, hogy ezen rendszer alapjait megingatni bárki is megkisérlette volna, utoljára maradt, hogy nagy forradalmán menjen keresztül, valamint ez, annak idejében, a többi tudományon is megtörtént.

A geometria, vagyis a térről való mathematikai tudomány a következtetéseknek oly meg nem szakadó lánczolata, melyből egy láncz-szem sem hiányzik. Minél tovább jutunk e sorban, annál bonyolódottabbak lesznek a térbeli viszonyok, mig a sor kezdetén oly egyszerű tételek foglalnak helyet, melyekről a geometria maga bevallja, hogy ezeket bebizonyitani nem képes, noha hozzá teszi, hogy ezek bebizonyitása ép eszü emberek előtt nem is szükséges. Ezeket a tételeket nevezik axiomáknak vagyis alaptételeknek. Ismeretes, hogy az alaptételeket még ma is Euklides összeállitása szerint tanitják. Eme tételek két csoportra oszthatók. Az elsőbe tartoznak a valóságos axiomák, azaz magukban világos és ép ezért be nem bizonyítható tételek, melyek részint általános mennyiségi relatiok, részint a térre vonatkozó lényeges meghatározásokat foglalnak magukban. A második csoportban találjuk a térbeli szerkesztésekre vonatkozó definitiókat. Ide tartoznak például a pont, a vonal, a felület, a szög, stb. definitiója. Az alaptételek első osztálya az elveket tartalmazza, melyek az összes mathematikai tudományoknak közös alapját teszik. A hét idetartozó Euklid-féle alaptételt Helmholtz kettőre vezeti vissza, melyeket röviden a mennyiségek identitására vonatkozó axiomáknak nevezhetni, t. i.:

I. Ha két mennyiség egy harmadikkal egyenlő, egymásközt is egyenlők.

II. a) Egyenlő mennyiségek egyenlő mennyiségekhez adva, egyenlőt adnak.

b) Egyenlő mennyiségek egyenlőtlenekhez adva, egyenlőtlent adnak.

A mi ezeken kivül még az axiomák sorában előfordul, az a térviszonyok alaptételeit képezi. Ezek közt van az a híres tizenegyedik axioma, mely következőképen hangzik: Ha egy egyenes vonal két más egyenest úgy metsz, hogy a belső szögek összege kisebb két derék-szögnél, akkor a két vonal elegendőképen hosszabbítva, e szögek oldalán metszi egymást. Ez a párhuzamosak ismeretes axiomája, mely valóságos trójai háborut okozott a tudományos irodalomban. Már Proclus, Euklides magyarázója, tudta, hogy ezen tétel a 17. theoremának, mely szerint minden háromszögben két szög összege kisebb két derékszögnél, csak megforditása. Ez oknál fogva megkisérték a 11-ik axiomát vagy másra (egyszerübbre) visszavezetni, vagy a többiből származtatni, vagy végre egészen mellőzni. Azonban ezen kisérleteknek egyike sem sikerült, annak daczára, hogy általános volt a meggyőződés, hogy ezen tétel, legalább az Euklides által adott alakban, nem való az axiomák közé.

A második kérdés, mely szintén nagy mértékben vonta magára a tudósok figyelmét, az volt, hogy melyek a geometriai alaptételek forrásai, honnét veszik eredetöket.

Legendre volt az első, ki a 11 axiomát az alaptételek sorából kiküszöbölte és azt a bebizonyitandó tételek sorába igtatta. Már az »Eléments de Géométrie« czimü híres művének első kiadásában történt e kizárás, mely után csak egy tisztán térbeli viszonyokra vonatkozó tétel maradt hátra axiomának, t. i. az, hogy két pont közt csak egy egyenes húzható. Azonban ezen ott alkalmazott levezetés magát Legendret sem elégitette ki, annyira, hogy 1833-ban ujonnan vizsgálat alá vette, minek eredménye az volt, hogy a párhuzamosok tételét a háromszög szögösszegéről szóló tétel által helyettesítette. Csak hogy ezt teljesen nem lehetett bebizonyítani. Azt, hogy a háromszög három szögének összege nagyobb nem lehet két derékszögnél, azt még lehetett bebizonyitani, de azt már semmiképen sem volt lehetséges kimutatni, hogy két derékszögnél kisebb nem lehetne. Még azt is ki lehetett mutatni, hogy ha csak egy háromszögben a szögek összege két derékszög, akkor ez minden háromszögre nézve áll.

Még Legendre kisérlete előtt, Németországban Gauss szintén foglalkozott e tárgygyal. Már 1792-ben meg volt győződve arról, hogy a 11. axioma a többiből le nem vezethető, hogy azonban más oldalról ez a tétel olyannak sem tekinthető, mely magában világos volna s igy bebizonyitásra nem szorulna. Gauss már ekkor belátta, hogy a párhuzamosok tétele föltevés, melynek elejtése más, az Euklides-féle geometriával nem azonos tanra vezet. A nem euklidicus geometriának néhány tételét Gauss már akkor kifejtette. Tulajdonképeni úttörő munkája, mely a feladat megfejtésében rendkivül fontos szerepet játszott, volt a görbe felületekre vonatkozó vizsgálata: »Disquisitiones generales circa superficies curvas.« Ebben kimutatta, hogy a felületek jellemzésére és okszerü felosztására legalkalmasabban a felületek hajlási és görbülési viszonyait használhatni és hogy ezek a viszonyok a g. ometria alapjainak vizsgálatára nagy jelentőségüek. Ő maga azonban nem tett semmit, hogy erre a tárgyra vonatkozó összes nézeteinek érvényt szerezzen. El voltak azok rejtve és elszórva abban a levelezésben, melyet Schumacherrel évek hosszú során át folytatott. Másoknak maradt a feladat a geometriai axiomák problemáját továbbra kifejteni és azt nagyobb körökkel megismertetni. A harminczas évek elején majdnem egy időben közölt *Lobatsceffsky J. N.* orosz tudós és *Bólyai Farkas* hazánkfia oly vizsgálatokat, melyek az Euklides-féle geometria függését a párhuzamosak tételétől megmutatták és egy magában következetes geometriai rendszert kifejtettek, mely azon tételen alapult, hogy a háromszög három szögének összege két derékszögnél kisebb. Lobatsceffsky már 1829-ben közölt orosz tudományos folyóiratokban néhány értekezést, mely a párhuzamosak tanára vonatkozott, de ezek el nem hatottak a nyugati Európa tudományos köreiig, míg 1837-ben a Crelle-féle folyóiratban közzétett: »Géometrie imaginaire«, és az 1840-ben ugyanott »Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien« czimü értekezése az új felfedezésre felköltötte a figyelmet.

Ebben a dolgozatban Lobatsceffsky világosan mutatja, hol keresendő az ok, melynél fogva ama híres franczia tudós czélt nem érhetett és hogy ez nem az egyenes vonal ki nem elégítő definitiójában található, hanem abban, hogy a párhuzamosak ugynevezett axiomája nem axioma, hanem több lehetséges feltevés közt az egyik.

Hasonló eredményekre jutott ugyanabban az időben Bólyai Farkas, csakhogy müve, mely 1832-ben Maros-Vásárhelyt »Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria introducendi« czím alatt megjelent, ép oly ismeretlen maradt, mint orosz tudós társának vizsgálatai. És midőn ezen dolgozatok, különösen Lobatsceffsky Németországban közölt értekezései folytán ismeretesebbek lettek, valami nagy tetszésben és kellő méltatásban nem részesültek. Az egyik rész egyszerüen annak példa által való illustrálásának tartotta, hogy akármilyen képtelen feltevésekből kiindulva, a mathematikai analysis következetes használata által, formalis tekintetben tökéletesen helyes eredményre vezettetünk, a másik párt ellenben az egész új theoriát veszedelmes és kárhozandó tévedésnek tartotta.

Két értekezés, melyek az utolsóelőtti két decenniumban láttak napvilágot, végre fényt deritett e tárgy fölött, úgy hogy ez gyors fejlődésnek indulhatott.

Az első ezen értekezések közt az volt, melylyel *Riemann* 1854-ben, mint magántanár a göttingai egyetemen magát habilitálta. Az értekezést sokkal későbbben 1867-ben Dedekind közölte, czíme: »Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.« Classicus rövidséggel és szabatossággal vitte keresztül Riemann ez értekezésben a geometria általánosítását és pedig úgy a dimensiok száma, valamint azok összefüggése tekintetében. Ezáltal utat nyitott számos kutatásnak, melyek leginkább a Riemann által kijelölt irányban a feladat analytikai oldalát müvelik, azaz Gaussnak a felületek számára felállitott általános görbültség kifejezését tetszőleges számu dimensióval biró többféleségekre (Mannigfaltigkeiten) keresik. Riemannal egy időben foglalkozott, tőle teljesen függetlenül, *Helmholtz* ugyanevvel a kérdéssel, melyre azonban egészen eltérő uton lett vezetve. Ő egyszersmind azt is kimutatta, hogy milyen philosophiai következtetések húzhatók ezen vizsgálatokból.

A mi Riemann és Helmholtz után e téren történt, az korántsem karolja fel a többféleségek tanának minden ágát. Eddigelé számos megjelent jeles értekezés daczára, leginkább csak két irányban tágultak ismereteink e tárgy fölött: 1) a több méretü többféleségek görbületének ismeretével és 2) néhány kinematikai és dynamikai tétel általánositásával.

Ezekből az előzményekből körülbelül meglehet itélni, hogy milyen állapotban van jelenleg a geometria axiomáira vonatkozó elmélet és átmehetünk arra, hogy röviden ismertessük azt a feladatot, melyet szerzőnk maga elé tűzött és hogy megmutassuk, hogy mennyire sikerült kitüzött czélját elérni.

A könyv előszavában szerzőnk következő szavakkal irja le művének czélját: »Azt a feladatot tűzi maga elé, a Riemann-Helmholtz-féle geometriai theoremák oly felfogását érvényre emelni, mely alkalmatosnak látszik az ezek analytikai jogosultsága és philosophiai jelentősége felett uralkodó, gyakran ellentmondó itéletek kiegyeztetésére.« Főczéljának tekinti annak formális bizonyitását, hogy az új geometriai *tértan* (Raumlehre) pusztán csak a psychologia tekintetéből positiv értékes eredményekre vezet, a mennyiben a jelenkori physiologia empiristicus tértanának alapjául szolgál, hogy ellenben az ismerettheoria (Erkenntnistheorie) számára csak negativ jelentőséggel bír.

Az egész mű négy fejezetre van osztva. Ezeket megelőzi a bevezetés, melyben a jelenkor philosophiai irányait tárgyalja, valamint azokat a törekvéseket is, melyek a philosophia és a természettudományok közt az utolsó félszázadban magasra fejlődött antagonismust kiegyenlíteni óhajtják. E czélra pedig különösen alkalmasnak tartja azokat a vizsgálatokat, melyeket Riemann és Helmholtz a geometriai alaptételek körül végrehajtottak.

A négy fejezetnek a czíme a következő:

1) Az axiomák rendszerének fejlődési története.

2) Az Euklides-féle geometria alaptételei.

3) Philosophiai következtetések, és

4) Vázlatok a geometria elméletéhez.

Az első fejezet körülbelől azt tárgyalja, mit fent az Euklides-féle geometria alaptételeinek kritikus átszitálásáról mondottunk, hogyan keletkezett a kétely, mely az axiomák rendszerének kielégítő volta fölött támadt, midőn egy oldalról a parallelák tételének összefüggését a többi axiomával akarták kideríteni és midőn más oldalról, az alaptételek eredetének kérdésére akartak felelni. Semmiféle tapasztalásra nem szorulnak azok, és semmiféle tapasztalás nem volt képes akármelyik geometriai tételt megdönteni. Ezért már régi időktől fogva belehúzták a geometriát a különböző philosophiai rendszerek ellentétébe, midőn mindegyik oldalról benne erős támaszt látni véltek. Descartes és Locke ideje óta, midőn a realismus és nominalismus régi metaphysikai vitája az empirismus és rationalismus ellentétévé változott át, erős bizonyítási eszköznek használták. Az empirismus követői arra hivatkoztak, hogy a geometria mégis csak a tapasztalati világ tárgyainak alakjával foglalkozik és tapasztalati úton szerzett adatoknak abstractiója, a másik philosophiai irány: a rationalismus ellenben a geometriai theoremák szigoru deductiv levezetésére támaszkodva, annak igazságait az emberrel született aprioristicus természetünek nyilvánította. Ezen viták alkalmával mindig az alaptételekhez szállottak le.

Riemann és Helmholtz a geometriai alaptételek kérdését szintén empiricus szempontból tárgyalták.[1]) Az axiomák összefüggését vizsgálják és magyarázzák, hogyan keletkezett azok rendszerében a sokáig ki nem tölthető hézag.

Az ismertetendő könyv második fejezete az Euklid-féle geometria alaptételeiről szól. Szerző ezen részben azt a feladatot tüzi maga elé, hogy a geometriának alapúl szolgáló alaptételek szükséges és kielégítő rendszerét kimutassa. Ezen axiomák mást nem foglalhatnak magukban, mint a térfogalom (Raumvorstellung) tartalmának állitmányait (praedicatumait). Ennek a követelménynek azonban az Euklides által összeállitott axiomák egyáltalában nem felelnek meg. Euklidesnek ide vágó föltételei: a három postulatum és a három utolsó axioma [2]) nem vonatkoznak annyira térfogalmunk tulajdonságaira, mint

---

[1]) Különösen Helmholtz használja e vizsgálatok eredményeit fegyvernek empiristicus világnézetének támogatására. Lásd ebbeli legujabb véleménynyilvánitását: Die Thatsachen in der Wahrnehmung. Rede von dr. *H. Helmholtz* Berlin, 1879.

[2]) Euklid három postulatuma a következő:

Kivántatik: 1) Minden pontból minden ponthoz egy-egy egyenes vonalt húzni.

2) Egy egyenes vonalt ugyanabban az irányban folyton hoszszabbítani.

3) Minden pont körül minden távolságban kört rajzolni.

inkább bizonyos egyszerü térbeli alakok: szögek és vonalak különös tulajdonságaira.

A feladat akkor lesz megfejtve, ha sikerül a térfogalom lényeges praedicatumait legegyszerübb alakjukban felállithatni, vagyis más szóval, ha képesek leszünk a tér definitióját adni.

Az analytikai geometria oly módszer, melynek segitségével a térbeli viszonyok kifejezése mennyiségi relatiók (egyenletek) által lehetséges. Képesek vagyunk nemcsak bizonyos feladatokban előforduló nagyság viszonyokat kifejezni, hanem a térnek három méretüségét, folytonosságát, végtelenségét, sat. Ezen eljárás folytán képesek vagyunk a térfogalmat, mint quantitást defineálni. Ez azonban csak akkor lesz lehetséges, ha a definitiót képező állitmányok számát és összefüggését pontosan ismerjük és ez ismét csak akkor lehetséges, ha más quantitásokat ismerünk, melyek terünk nagyságviszonyaival összehasonlíthatók. Szerző a színérzetek és a hangérzetek rendszerét hozza fel példaként, mint a melyek a térrel több tekintetben megegyeznek. Mind a háromban ugyanis minden elem három egymástól független adat (coordináta) által meg van határozva. Mind a három folytonos, mind a háromnál a három méretről kettőre vagy egyre lehet leszállani, ha egy, illetve két változó állandóvá lesz stb. De vannak ezen megegyezéseken kivül különbségek is. A tér például végtelen, a szín- és hangérzetek rendszere ellenben nem, a tér coordináták felcserélhetők, a többi kettőé nem, stb.

Ezen példák után áttér szerző az n szeresen meghatározott többféleség értelmezésére, melynek mindegyik eleme n egymástól független adat (coordináta) által meg van határozva.

Ezen fogalomkörbe tartozik tehát a mi terünk is. Csakhogy ez a fogalom: többféleség igen tág, meg kell azt szorítani, hogy a tér fogalmát egész határozottságban megkapjuk. Egyik olyan megszorító állitmány a méretek felcserélhetősége vagy fel nem cserélhetősége. A térben is minden analog, habár több méretü többféleségben a méreteket általában fel lehet cserélni. Ezeket a többféleségeket lehet n szeres kiterjedt vagy n méretü többféleségeknek nevezni, Helmholtz egyszerüen n méretü tereknek nevezi.

A többféleségek azonban nemcsak a dimensiok száma szerint különböz-

---

A három utolsó axioma következőkép hangzik:

10) A derékszögek egymásközt egyenlők.

11) Ha egy egyenes vonal, mely két más vonalat metsz, azt okozza, hogy a belső ellentett fekvésü szögek összege kisebb két derékszögnél, akkor a két vonal elegendőkép hosszabbítva azon szögek oldalán egymást metszi.

12) Két egyenes vonal tért nem rekeszt be.

nek, hanem belső méretkülönbségekre nézve is. Ez azon része az egész tannak, melyben Gauss a felületek görbültségi viszonyaira vonatkozó vizsgálataira támaszkodik.

A régibb mathematikusok a felületeket úgy, mint a görbe vonalakat, két szempontból osztályozták: vagy szerkesztési szempontból vagy egyenleteiknek szempontjából. Gauss más álláspontot foglalt el a felületek csoportosításában. Ő nem testek határfelületeinek, hanem önálló térbeli alakoknak tekintette, oly testeknek, melyek egyik mérete eltűnő csekély, mi által egészen új összefüggéseket és rokonságokat fedezett fel és a felületek sokkal természetszerübb beosztását létesitette. Azáltal t. i., hogy Gauss a felületeknek bizonyos — ámbár eltünő csekély — vastagságot tulajdonít, határozott értelmet nyert a felületek hajtásának fogalma. Egynemüeknek nevezi pedig azokat a felületeket, melyek hajtás által, feszités és nyujtás nélkül egymásba átváltoztathatók. Ugy péld. o. egynemüek a henger, kúpfelület és a sík. Átlátható könnyen, hogy ez az egynemüség csak a felületen levő térbeli alakokra és azok méreteire nézve áll fenn. Valamely külső ponthoz való viszonyai nagyon különbözhetnek egymástól. Gauss két analytikai kifejezést állitott fel, mely a felületek görbültségi viszonyait kifejezni képes, és pedig a *teljes görbültség* és a *görbültség mértékének* fogalmát. Segédfelület gyanánt gömbfelületet vesz fel, mely a kérdéses felületet egy pontban érinti. Teljes görbültség alatt érti a felületelem megfelelő gömbrész területét. A görbültség mértéke pedig vonatkozik a felület egyes pontjaira és jelöli azt a hányadost, melyet kapunk, ha a ponttal szomszédos felületelem teljes görbültségét osztjuk a felületelem területével. Az első egy egyszerü integral, a másik az egység, osztva a két ugynevezett görbültségi fősugár szorzatával.

Ez képezi a kétméretü téralakok mértékviszonyainak lényegét, mert ezáltal állapíttatik meg a mértékviszonyok rendezett systemája — minden geometriának alapja — azaz a *lehető legegyenesebb vonalak* (geradeste Linien) rendszere.

Alkalmazzuk a felhozottakat a lehető legegyszerübb felületcsoportra: a sík-, henger- és kúpköpeny felületeinek csoportjára. Ezek görbültségi mértéke zerus. Két pont közt csupán egy lehető legegyenesebb vonal húzható, mely egyszersmind a legrövidebb is. Erre az egész felületcsoportra a közönséges planimetria sík trigonometria sat. érvényes.

Más viszonyokat találunk a gömbfelületnél és azoknál a felületeknél, melyek a gömbre lefejthetők. Ezek görbültség mértéke positiv, véges és állandó mennyiség. Azért minden a gömbön rajzolt alak eltolható akármely irányban a felületen, a nélkül, hogy eltorzulna. A lehető legegyenesebb vonal azonban itt a két összekötendő ponton keresztülmenő legnagyobb körnek az a része, mely a két pont közé esik. Ilyen körrész van kettő, melyek egymást teljes körhöz kiegészítik. Itt van tehát két lehető legegyenesebb vonal két pont közt. Belátjuk azonkivűl, hogy minden ponthoz találtatik oly megfelelő pont, mely az adottal végtelen sok egyenlő kör, vagyis lehető legegyenesebb vonal által összekapcsolható. Ez a két pont mindig a gömbnek két sarkát képezi. A gömbön a párhuzamosak tétele értelmét teljesen elveszti és evvel változik annak megfelelője; a háromszög szög-összegéről szóló tantétel. Itt a szögek összege mindig nagyobb két derékszögnél és pedig annyival, a gömbfelület minél nagyobb részét foglalja el a háromszög. Ez oknál fogva itt hasonló háromszögekről sem lehet szó. Mentől nagyobb a gömbfelület sugara, annál inkább közelednek a gömbfelület alakjai a síkéhoz.

A felületek egy harmadik osztálya a gömbfelűlet analogonja, az ugynevezett *pseudosphaericus* felületek csoportja, melyekkel különösen *Beltrami* foglalkozott, ki ezen felületeknek geometriáját dolgozta ki. Görbültség mértéke szintén állandó, de mindig negativ. Jellemző ezen felületekre, melyeknek egyik része az ismeretes servietta manchettához hasonló alakban a mi terünkben is előállitható, hogy kétp ont között csak egy lehető legegyenesebb vonal létezik. A párhuzamosak tétele itt sem áll. Míg azonban a gömbön párhuzamosok egyáltalában nem léteznek, addig itt egy pontból valamely adott lehető egyeneshez számtalan oly lehető legegyenesebb vonal húzható, mely azt nem metszi. — A háromszög szögeinek összege itt eltérőleg a gömb-háromszögektől kisebb két derékszögnél.

Ép igy különbözik a pseudosphaericus felület trigonomentriája a síkétől és a gömbháromszög-tantól. A sík trigonometria képezi a kettő közt az átmenetet. Ha a pseudosphaericus háromszög oldalai végtelen kicsinyek lesznek, akkor a planimetriai és siktrigonometriai szabályok körébe esik.

A felhozott három felületosztályon kivül eső valamennyi felület görbültség mértéke nem állandó s igy ezek magukban nem egybevágó alakok. Ezeken a felületeken tehát általában nem lehet geometriai alakot eltorzulás nélkül eltolni.

A gömb-, sík- és pseudosphaericus felületek mérték-viszonyai mutatják az utat a térbeli alakok általánosítására.

Ez az általánosítás két irányban történhetik.

1) A méretek számára, és

2) a méretek mikénti összefüggésére nézve.

A mi a méretek számát illeti, mi csak háromféle térbeli alakot képzelhetünk: az egy, két és háromméretü alakokat, a magasabb rendű alakok képzelő tehetségünket fölülmulják.

A méretek összefüggése, illetőleg ennek analytikai kifejezése megfelel annak, mit Gauss a felületeknél a görbültség mértékének nevezett és mit a generalisatió keresztülvitelénél következetesen szintén annak neveztek. Egy n szeresen kiterjedt többféleség görbültség mértéke szintén tört alakjában fejezhető ki, melynek számlálója az egység, nevezője pedig n, a felületek görbültségi sugarának megfelelő analytikai kifejezés szorzata. Ép ezen módon általánosítható a vonalelem analytikai kifejezése is. A háromméretü közönséges térben ds $= \sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ által fejezhető ki a vonalelem, az n méretü térben, ha állandó görbültségü ds $= \sqrt{\Sigma(dx)^2}$ a vonalelem kifejezése, ha nem állandó-görbültségü, akkor ds akármily tetszőleges függvénye lehet a coordináta differentiáloknak.

Ezek után már fölvethetjük azt a kérdést, a térbeli többféleségek végtelen sokféle osztályainak melyikébe tartozik a mi terünk? Erre nézve akár a vonalelem analytikai kifejezése, akár terünk görbültségi mértéke döntő befolyású. Arra a kérdésre, vajjon állandó vagy változó görbültségü-e a mi terünk, csak a tapasztalásra hivatkozhatunk.

A felületeknél az a kérdés felfoghatóvá lett az által, hogy az állandó görbültség mellett magukban egybevágók voltak a felületek, azaz a felület minden része a felületen minden irányban szabadon eltolható. Tényleg a mi egész geometriánknak az a fölvétel szolgál alapul, hogy a terünk állandó görbültségű. Helmholtzot illeti annak analytikai úton való bizonyítása, hogy a tér állandó görbültségü, midőn »minden egybevágóság független a helytől, az egymást fedő téralakok irányától és végre az uttól, melyen egymáshoz vezettettek.« Más szóval a testek deformatió és méreteik absolut értékének változása nélkül elmozdíthatók. Nem bocsátkozhatunk itt Helmholtz levezetésébe, az eredeti értekezés a »Göttingen Nachrichten« 1868-iki évfolyamában található.

Az eddigiek nyomán már kimondhatjuk, hogy a mi terünk magában congruens, háromméretű többféleség, vagy az analysis nyelvén: oly többféleség, melynek állandó görbültsége van.

Csak az a kérdés, milyen az a görbültség, vajjon positiv vagy negativ értékü-e vagy talán épen zerus.

Kétméretü alakoknál ezen három esetnek megfelel a sphaericus, pseudosphaericus és a síkfelület. Melyiknek e három közt felel meg tehát a mi terünk? Minthogy a planimetriai tételek átvitele a stereometria viszonyaira semmi nehézséget nem okoz és tartalmukra nézve a sík mértékviszonyai a térre való általánosításánál semmi változást nem szenvednek, könnyü a felelet. A mi terünk — legalább az észlelés határain belül — sík tér, melyben az egyenes és a párhuzamosok tétele megfelelő bővités mellett szintén érvényesek. A tér tehát a síknak tökéletes analogonja. Igaz, hogy ez csak tapasztalati tény, és hogy terünk görbültsége még mindig változó és kis positiv vagy negativ értékkel bírhatna. De mindenesetre bármilyen is legyen a görbültség mértéket ez a zerustól csak oly számmal különbözhetik, hogy ezt legfinomabb méréseinkkel sem vehetjük észre. Azért evvel még mindig nincs bebizonyitva, hogy végtelen nagy, vagy végtelen kis méreteknél nem lehetne a térnek észrevehető görbültsége.

»Mindenesetre — úgymond Riemann — a tér háromgörbületi sugarának szorzata oly tér, melyhez képest az, melyet messzelátóinkkal áttekinthetünk, eltünő csekély.«

A mi ellenben a végtelen kis térrészek görbültségének kérdését illeti, erre nézve Riemann a következőket mondja: »a szilárd test és a fénysugár, melyek az egyenes vonalt valósítják, ott elvesztik értelmüket és azért lehetséges, hogy a mi terünk végtelen kis méreteiben görbült. . . .« »És ha ezen hypothesissel« — így fejezi be — »jobban lehetne a tüneményeket magyarázni, azonnal el kellene azt fogadni.« A valószinüség azonban, hogy terünk véges méreteiben sík, igen nagy, nem ismerünk legalább semmiféle tapasztalást, mely az előbb említett két alaptétellel (az egyenes és a párhuzamosak tétele) ellenmondásban volna. Lobatsceffsky erre nézve külön számítási próbákat tett. Megmutatta, hogy oly háromszögben, melynek oldalai a Föld Naptól való távolságával összemérhetők, a szögek összege 180 foktól 00,003 évmásodperczczel nem különbözhetik.

Helmholtz ugyanezen feltevés támogatására felhozza, hogy az álló csillagok parallaxisa mindig egyenlő a zerussal, holott a tér legkisebb negativ görbültsége mellett véges positiv értékkel bírna.

És evvel a tér definitiójára vonatkozó feladat meg van fejtve. A definitió kétféle: az első a térre, mint mennyiségre vonatkozik, a másik a tulajdonképi térviszonyokra. Az első definitió igy hangzik:

A tér folytonos mennyiség, melynek elemei három, egymástól független változó által, egyértelmüen meg vannak határozva. Görbültségi mértéke állandó és értéke zerus.

A másik pedig következőkép hangzik:

A tér háromszoros kiterjedt, magában congruens, sík (végtelen) többféleség.

Ezek a definitiók egyszersmind térfogalmunk legegyszerübb és teljes axioma-rendszerét állapitják meg. Az alaptételek és postulatumok keresett rendszere a következő:

Az Euklides-féle geometria alaptételei:

I. A tér háromszorosan kiterjedt többféleség.

II. A tér magában congruens többféleség.

Postulatumok a II. axiomához:

1) Léteznek magukban szilárd testek.

2) A szilárd testek szabadon mozoghatók.

3) A szilárd testek méretei tengely körül való forgás következtében nem változnak.

III. A tér sík vagy végtelen többféleség.

azaz:

a) A tér két pontja közt csak egy egyenes vonal lehetséges.

b) Minden egyenes vonalu háromszög szögeinek összege két derékszöget tesz.

Az első két axioma az állandó görbültségü sphaericus és pseudosphaericus háromméretü térre nézve is érvényes, a harmadik különbözteti a sik tért az említett kettőtől és pedig az egyenes vonalról szóló tétel megkülönbözteti a sík tért a sphaericustól, melyben két pont közt legalább két lehető legegyenesebb vonal lehetséges; a háromszög szögösszegeinek tétele ellenben megkülönbözteti a sík tért a pseudosphaericustól, melyben a szögek összege kisebb két derékszögnél. Az egyenesre vonatkozó tétel a sík és pseudosphaericus térre nézve áll. A háromszög szögeinek összegéről szóló tétel tekintetében a sík tér képezi az átmenetet a sphaericus és pseudosphaericus tér közt.

Ha a fölállitottuk axiomarendszert avval hasonlitjuk össze, melyet Euklides geometriájának élére állitott, első tekintetre észreveszszük, hogy ebben először az általános mennyiség-relatiok, melyeknek helye az általános számtanban van, elmaradtak, másodszor azt látjuk, hogy a geometriai alaptételek rendszeresen vannak összeállitva.

Az első két axioma a tér méreteinek számát és görbültségének állandóságát fejezi ki, a harmadik két postulatumainak elseje a vonalviszonyoknak, a második a szögviszonyoknak szolgál alapul.

Most már azt is lehet megérteni, hogy milyen értelemben volt hiányos az alaptételek rendszere. A párhuzamosak tételének jelentőségét hamisan fogták fel. Nem látták át, hogy ez a szögekre nézve analog jelentőségü, mint az egyenesről szóló tétel a vonalviszonyokra. Azért maradt hasztalan minden kisérlet, mely a 11. axiomát vagy egyszerüen ki akarta küszöbölni, vagy azt az egyenes tételére vissza akarta vezetni. Világos ebből továbbá az is, hogy miként bizonyíthatta Legendre, hogy a háromszög szögösszege nem lehet nagyobb két derékszögnél, míg az ellenkezőnek bizonyítása sehogy sem sikerült. A Legendre-féle deductió alapszik az egyenesnek alaptételén, ez pedig a pseudophaericus térre nézve úgy áll, mint a sík térre nézve. Ennek segitségével el lehetett ugyan választani a mi terünket a sphaericus tértől, de nem a pseudosphaericustól. A háromszög szögeinek összegét csak a párhuzamosak tételével lehet levezetni, mert ez választja el a sík tért a pseudosphaericustól.

Szerzőnk, művének harmadik fejezetében, az előbbiekben vázolt mathematikai kutatások philosophiai következtetéseit iparkodik vonni. Arra törekszik ezeket a következtetéseket az empiristicus nézet javára magyarázni, habár maga bevallja, hogy a várható eredmény igen szerény.

Minden képzet (Vorstellung) négyféle tekintetből vehető vizsgálat alá:

1) Mint bizonyos tudományszaknak tárgya, mely a hasonló egy csoportba való tárgyakat összefoglalja. Ez a *szaktudomány* feladata.

2) Keletkezésére és a többi képzetekkel való összefüggésére nézve. Ez a *psychologia* tárgya.

3) A képzet alakja és mily értéke van ismereteink formalis összevágására nézve. Ez a *logika* tárgya.

4) Az *ismerettheoretikai* feladat: a képzet jelentősége, ismereteink belső összevágására nézve.

Szerző a tér-problemát veti ezen négyféle, vagy — minthogy a szaktudományi fejtegés már megtörtént — háromféle vizsgálat alá. Vizsgálja Lotze és Helmholtz tértheoriáját és polemizál Becker, Tobias, Hartmann és mások ellen, megmutatja, hogy Riemann és Helmholtz formal empiristicus philosophiai meggyőződésük a geometriai elmélettől teljesen független. Minthogy referáló a geometriai elméletből még sokkal szerényebb philosophiai következtetést vél huzhatni, ezen philosophiai vizsgálatokba nem bocsátkozik, hanem áttér a könyv utolsó fejezetére, melynek czime: »A geometria theoriájának vázlata,« hogy ennek tartalmát pár szóval érintse.

Ez a fejezet a geometria állását a többi tudomány közt iparkodik megállapitani. Szerinte a geometria tárgyának és módszerének sajátsága miatt külön állást foglal el. Törekvése arra irányul, hogy bebizonyítsa, miszerint a geometria és mathematika alapigazságai tapasztalati eredetüek és hogy ennélfogva e két disciplina syntheticus tudomány.

Ez lenne röviden a könyvünk tartalma. Látjuk, hogy tulajdonképen önálló két részből áll: az első a geometriai alaptételek rendszerét tárgyalja, a másik — ámbár beismervén a várható csekély eredményt — abból philosophiai következtetéseket húzni iparkodik.

Az egész műnek kétségkivül nagy érdeme, hogy az egész tárgy irodalmát fölkarolván, ezt világos és szép rendben tárgyalja. Arra nézve, ki ezen tárgy felett tisztába akar jönni, a nélkül, hogy elég idővel és elég ismerettel rendelkeznék, hogy a tárgy egész irodalmát áttanulmányozza, mindenesetre igen használható mű lesz Erdmann könyve. Melegen lehet azt ajánlani szemben azokkal a kisebb-nagyobb terjedelmű dolgozatokkal, melyek a szóban forgó problemát ismeretterjesztés szempontjából tárgyalják.

A fentebbiekben szó volt a Gauss-, Riemann és Helmholtz-féle, a geometria axioma-rendszer megállapitására czélzó vizsgálatokról.

Azokat a kutatásokat, melyeket *Beltrami, Lipschitz, Beetz* stb. végrehajtottak, hogy a geometria általánosítását a kinematikára és a dynamikára átvigyék, e helyen nem méltathatjuk, ha nem akarunk terjedelmes essayt irni e tárgy fölött, mire azonban se hely, se tér nem alkalmas.

Végül azonban nem vélünk hiába való dolgot mivelni, midőn az egész tárgy irodalmát — legalább a lényegesebb értekezésekre nézve — itt fölsoroljuk, a nélkül azonban, hogy e följegyzés tökéletességre tartana igényt.

Legendre. Éléments de géometrie.

— — Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles. — Mém. de l'Acad. Tom. XII. 1833.

Gauss. Briefwechsel mit Schumacher. Bnd. II. pag. 269. Bnd. V. pag. 247.

Lobatsceffsky J. N. Principien der Geometrie. Kasan 1829—30.

— — Géometrie imaginaire. Crelles Journal 1837.

— — Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien Berlin 1840.

Bólyai Wolfg. Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris methodo intuitiva, evidentiaque huic propria introducendi cum appendice triplici. II. Tomi. Maros-Vásárhelyini 1832.

Bólyai J. La science absolue de l'espace, independante de la verité ou de la fausseté de l'Axiome XI. d'Euklide. Paris 1868. trad. p. J. Houël.

Riemann. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Göttinger Abhand. d. kön. Ges. Wiss. 13. Bnd. Götting. 1867.

Helmholtz. Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. Heidelberger Jahrbüch. d. Literatur. 1868. Nr. 46. u. 47.

— — Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen Götting. Nachrichten. 1868. Nr. 9.

— — Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Populäre wissenschaftl. Vorträge. Heft 3. 2. Aufl. Braunschw. 1876.

— — Die Thatsachen in der Wahrnehmung. Rede gehalten zur Stiftungsfeier d. Universität zur Berlin. Berlin 1879.

Beltrami E. Saggio di Interpretazione della Geometria Non-Euklidea. Napoli 1868.

— — (Ugyanez forditásban.) Essai d'interpretation de la géometrie non Euclidienne. Traduit de l'italien par J. Houël.

— — Teoria fondamentale degli Spazij di Curvatura costanti. Armali di Matematica. Ser. II. Tom. II. pag. 232.

Houël J. Essai critique sur l.s principes fondament. de la géom. élém.

Lipschitz. Untersuchungen über die ganzen homogenen Functionen von n Differentialen. Borchardt's Journal f. Mathematik. Bnd. 70. pag. 71. u. Bnd. 72. pag. 1.

— — Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. Borchardt's Journ. Bnd 74. pag. 120.

— — Beitrag zu der Theorie der Krümmung. Borchardt's Journ. Bnd. 81. pag. 241.

Escherich Gust. v. Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung. Wiener Akad. Sitzungsberichte. Math. nat. Cl. II. Abth. 1874. 79. Bnd. pag. 497.

Schering E. Die Schwerkraft im dreifach ausgedehnten Gaussischen Raume Götting. Nachrichten 1870.

— — Linien Flächen u. höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemannschen Räumen. Gött. Nachrichten 1873. Nr. 2.

— — Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen u. Riemannschen Räumen. Gött. Nachrichten 1873. Nr. 6.

Klein F. Über die sog. Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Annalen. 4. Bnd.

Fressdorf. Über die Geometrie und Potential-funktion in Gaussischen und Riemannschen Räumen. Inaugural Dissertation. Gött. 1873.

König J. Über eine reale Abbildung der s. g. Nicht-Euclidischen Geometrie. Götting. Nachrichten 1872. Nr. 9.

Rosanes. Über die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume. Breslau 1870.

———

Helmholtz legújabb müve: »Die Thatsachen in der Wahrnehmung« már a megelőző czikk befejezése után jött kezemhez, ugy hogy a szóban forgó tárgyra vonatkozó, mindenesetre méltánylást érdemlő megjegyzéseinek a czikkben már hasznát nem vehettem. Legyen azért e helyen még megemlítve, mi benne az alaptételek rendszerének feladatára is eredetére vonatkozik.

Két tudományos mellékletben (Beilage II u. III.) adja elő Helmholtz véleményét a geometriai axiomák eredetéről. A második mellékletben a következő tételt állítja fel: A tér lehet transcendental, a nélkül hogy az axiomák szintén transcendental lennének. A harmadik mellékletben törekvése kimutatni, hogy az axiomák tapasztalati úton nyerettek, sőt hogy transcendental eredetü axiomák oly geometriát defineálnának, mely csak akkor lenne a valósá gos térleli viszonyokra alkalmazható, ha a tapasztalati úton nyert legegyszerűbb mértékviszonyokkal összeegyeznék. Felállítja azután egy képzelt tudománynak, melyet physikai geometriának nevez néhány alaptételeit. Ez a physikai geometria tisztán tapasztalati alapon nyugvó természettudomány volna, mint akár a physiologia. Felhozza példának az egyenoldalu háromszöget és annak nagyobb vagy kisebb háromszögre való kibővítését két új pont felvétele által, mely új pontok b és c az AB és AC vonalok hosszabbításán fekszenek. Ha az így nyert Abc háromszög három oldalának hosszát egymással összehasonlítanók, vagy azt találnók, hogy ez a háromszög is egyenoldalu, azaz $bc = Ab$, vagy hogy $bc > Ab$, ha $Ab < AB$ vagy végre hogy $bc < Ab$, ha szintén $Ab < AB$. Hogy ez a három eset közt melyik fog állani, arra nézve semmiféle deductio nem adhat felvilágositást, ez tisztán a tapasztalat dolga. A mérési hibák határán belül ez esetek közt az első áll; az Euklides-féle geometria, a második eset a sphaericus, a harmadik a pseudosphaericus geometria esete lenne.

Nem bocsátkozhatunk mélyebben Helmholtz fejtegetéseibe, melyek mutatják, hogy következetesen halad az empiristicus világnézet ösvényén, mint azt Erdmann — kinek föntismertetett könyvéről Helmholtz elismerőleg nyilatkozik — művében jelezi. Itt még csak az egész értekezés végét igtatjuk be.

Azt mondja, hogy az axiomák transcendentalis forrásból eredő fölvétele:

1. Be nem bizonyitott hypothesis.

2. Szükségtelen hypothesis.

3. A világról való ismereteink megmagyarázására nézve teljesen hasznavehetetlen hypothesis, minthogy az általa felállított tételeket csak tapasztalati megvizsgálásuk után mint objectiv érvényeseket lehet tekinteni.

Kant-nak az a priori adott szemléleti alakokról (Anschauungsformen) szóló tana a tényállás igen szerencsés és világos kifejezése; de ezeket az alakokat tartalom nélkül is elég szabadnak kell tekintenünk, hogy minden az észrevevés illető alakjába lépő tartalmat fölvehessék. A geometria alaptételei azonban a térszemléleti alapot annyira megszorítják, hogy ebbe minden gondolható tartalom már nem vehető fel, ha a geometria a valóságra egyáltalában alkalmazható legyen.

Ha az alaptételek transcendentalitásától eltekintünk, a tér transcendentalitása semmi nehézséget nem okoz. Ebben a tekintetben Kant »kritiká«-jában nem volt eléggé »kritikai«; igaz, hogy itt mathematikai tantételek forogtak fenn, és a kritikai munka ezt a részét csak mathematicusok végezhették.

Heller Ágost.

MEGFEJTETT FÖLADATOK.

41. Bizonyittassék be, hogy:

$$2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots\cdots$$

a hol az egymásra következő törtek származási törvénye ez: Felbontjuk az egymásra következő páratlan törzsszámokat két egész számú részre, mely részeknek különbsége az egység. Ezek közül az egyik mindig páros, a másik páratlan; a páros a számláló, a páratlan a nevező. (Közli: K. Gy.)

Megoldás: Steiner Samu tanárjelölttől.

A feladat képletben kifejezve, igy hangzik: Bebizonyítandó, hogy 2 oly végtelen szorzatban fejezhető ki, melynek tényezői:

$$\left(\frac{\frac{p_r-1}{2}}{\frac{p_r+1}{2}}\right)^{(-1)^{\frac{p_r-1}{2}}}$$

törvény szerint haladnak; hol p_r az r-ik törzsszámot jelenti.

A feladat megfejtése végett befogjuk először bizonyítani a következőket: Legyen:

$$S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots$$

$$\Pi = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r^n}\right) \cdots \quad 1)$$

továbbá:

$$S' = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \cdots \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n} \cdots$$

$$\Pi' = \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 + \frac{1}{7^n}\right)\left(1 + \frac{1}{11^n}\right) \cdots \left(1 - \frac{(-1)^{\frac{p_r-1}{2}}}{p_r^n}\right) \cdots 2)$$

és $n > 0$, akkor áll, hogy:

$$S\Pi = 1 \text{ és } S'\Pi' = 1.$$

Ugyanis 1)-ből következik, hogy:

$$\frac{1}{\Pi}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^n}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p_r^n}}\cdots,$$

minthogy $n>0$, tehát $\frac{1}{p_r^n}<1$, lesz:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_r^n}}=1+\frac{1}{p_r^n}+\frac{1}{p_r^{2n}}+\frac{1}{p_r^{3n}}+\cdots$$

és így:

$$\frac{1}{\Pi}=\left(1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{2^{3n}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{3^{3n}}+\cdots\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_r^n}+\cdots\right)\cdots$$

Itt minden egyes tényező egy végtelen, de föltétlenül összetartó sor, tehát a beszorzást végezhetjük bármily rendben; továbbá, az összes primszámok különböző hatványainak összeszorzásából a közönséges sorszámot kapjuk, következik, hogy a beszorzás eredménye:

$$\frac{1}{\Pi}=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\cdots$$

a mi azt mondja, hogy:

$$\frac{1}{\Pi}=S,\ \text{vagy: } S\Pi=1$$

Ha ezen eljárást ismételjük Π'-re és tekintetbe veszszük, hogy:

$$\frac{1}{1-\frac{(-1)^{\frac{p_r-1}{2}}}{p_r^n}}=1+\frac{(-1)^{\frac{p_r-1}{2}}}{p_r^n}+\frac{(-1)^{\frac{2.p_r-1}{2}}}{p_r^{2n}}+\frac{(-1)^{\frac{3.p_r-1}{2}}}{p_r^{3n}}+\cdots$$

akkor 2) így írható:

$$\frac{1}{\Pi'}=\left(1-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{3^{3n}}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{5^{2n}}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{7^n}+\frac{1}{7^{2n}}-\cdots\right)\cdots;\quad 3)$$

a szorzást, ugyanazon okból mint föntebb, bár mily rendben végezhetjük, és miután a 2-ős primszám itt nem fordul elő, eltekintve a jeltől a szorzás eredménye:

$$1,\ \frac{1}{3^n},\ \frac{1}{5^n},\ \frac{1}{7^n},\ \frac{1}{9^n},\ \cdots$$

Hogy az előjelt is meghatározhassuk, nézzük, hogy egy tetszőleges tag miként áll elő 3)-ból? Ez előáll, ha:

$$\frac{(-1)^{\frac{p_3-1}{2}\cdot k_1}}{p_3^{k_1 n}} \quad \frac{(-1)^{\frac{p_4-1}{2}\cdot k_2}}{p_4^{k_2 n}} \cdots\cdots \frac{(-1)^{\frac{p_r-1}{2}\cdot k_m}}{p_r^{k_m n}} \cdots\cdots \quad 4)$$

tényezőket egymással megszorozzuk; a jel, mint azt közvetlenül belátni, csak is azon tényezőktől függ, melyeknél:

$$\frac{p-1}{2}\cdot k$$

páratlan; még pedig, ha ezen tényezők száma páros, az előjel $+$, ha páratlan számban fordúlnak elő, az előjel — lesz: de $\frac{p-1}{2}$ csak is akkor lehet páratlan, ha p-nek alakja:

$$4n-1,$$

és ha az ily alakú tényezők páratlan hatványa 4)-ben páros számban fordúlna elő, 4)-nek alakja csak is:

$$\frac{1}{(4m+1)}$$

lehet, míg a második esetben:

$$\left(\frac{1}{4m-1}\right)$$

lesz, miből, ha megfordítjuk, következik, hogy a 3) alatti tényezők a szorzás eredményében azon tagok, melyek $\frac{1}{4m+1}$ alakuak, $+$, és azok, melyek $\frac{1}{4m-1}$ alakúak — előjellel birnak; és igy:

$$\frac{1}{\Pi} = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} \cdots\cdots$$

azaz:

$$\frac{1}{\Pi'} = S' \text{ vagy: } S'\,\Pi' = 1$$

Ezek után áttérhetünk tulajdonképeni feladatunkra. Ha S'-ben $n = 1$ tétetik, akkor az ismert:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots\cdots$$

Ludolph-féle számsor alakját kapjuk, mely az előbbiek szerint még ily alakot vesz fel:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{(-1)^{\frac{p^r-1}{2}}}{p_r}\right)\cdots\cdots}$$

vagy ha felszorzunk:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdots \frac{p_r}{p_r - (-1)^{\frac{p_r - 1}{2}}} \cdots,$$

és ha az egészet négyzetre emeljük, lesz:

$$\frac{\pi^2}{16} = \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{4^2} \cdot \frac{7^2}{8^2} \cdots \frac{p_r^2}{\left[p_r - (-1)^{\frac{p_r - 1}{2}}\right]^2} \cdots \alpha)$$

és ha S-ben $n=2$ tétetik, akkor ered:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \cdots = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r^2}\right)} \cdots$$

vagy felszorozva:

$$S_2 = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{5^2}{4.6} \cdots \frac{p_r^2}{(p_r - 1)(p_r + 1)} \cdots;$$

másrészt azonban, ha (lásd König Gy. »Bevezetés a felsőbb Algebrába«)

$$\sin z = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots$$

és

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \cdots$$

z^3-nak együtthatóját összehasonlítjuk, nyerjük, hogy:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

vagy, ez előbbiek szerint:

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdots \frac{p_r^2}{(p_r - 1)(p_r + 1)} \cdots$$

Ha most ezt elosztjuk az α) alattival, lesz:

$$\frac{8}{3} = \frac{2^2}{3} \cdot \frac{4^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{4 \cdot 6} \cdot \frac{8^2}{6 \cdot 8} \cdots \frac{\left[p_r - (-1)^{\frac{p_r - 1}{2}}\right]}{(p_r - 1)(p_r + 1}$$

vagy ha az egyenletet megszorozzuk *3*-mal és elosztjuk *4*-gyel és a számlálót nevezőt kellőleg rövidítjük és tekintetbe veszszük, hogy:

$$\frac{\left[p_r-(-1)^{\frac{p_r-1}{2}}\right]^3}{(p_r-1)(p_r+1)}=\left[\frac{p_r-1}{p_r+1}\right]^{[-1]^{\frac{p_r-1}{2}}}=\left[\frac{\frac{p_r-1}{2}}{\frac{p_r+1}{2}}\right]^{(-1)^{\frac{p_r-1}{2}}},$$

ered:

$$2=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\;\ldots\ldots\left[\frac{\frac{p_r-1}{1}}{\frac{p_r+1}{2}}\right]^{(-1)^{\frac{p_r-1}{2}}}\;\ldots\ldots$$

A 38-dik feladat megfejtése: Schönfeld S. tanárjelölttől.

Ha a P_1 és P_2 pontok öszrendezői $x_1y_1z_1$ és $x_2y_2z_2$ ugy az a viszony, a melyben a P_1P_2 távolságot a

$$(1)\;\ldots\;\varphi(xyz)\equiv a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{13}xz+2a_{12}xy=0$$

kúpszelet metszéspontja osztja a következő egyenlet által van meghatározva:

$$(2)\;\ldots\;\varphi_2\lambda^2+\{x_1\varphi_2'(x_2)+y_1\varphi_2'(y_2)+z_1\varphi_2'(z_2)\}\lambda+\varphi_1=0$$

hol is $\varphi_1=\varphi(x_1y_1z_1)\,..\,\varphi_2=\varphi(x_2y_2z_2)\,..\,\varphi_2'(x_2)=\frac{d\varphi_2}{dx_2}\,..\,\varphi_2'(y_2)=\frac{d\varphi_2}{dy_2}$ .. stb.

A (2) egyenlet λ minden értékére akkor fog identitást kifejezni vagyis függetlenül λ-tól fenállani, ha az egyenlet egyes tagjai külön-külön eltünnek,

$$\text{ha } \varphi_2=0\;\ldots\;\text{I.}$$
$$\varphi_1=0\;\ldots\;\text{II.}$$
$$\varphi_2'(x_2)x_1+\varphi_2'(y_2)y_1+\varphi_2'(z_2)z_1=0\;\ldots\;\text{III.}$$

I, és *II*. azt fejezi ki, hogy mind az x_1, y_1, z_1, és $x_2y_2z_2$ pontok harmonikus pólusok.

Az I, II és III. alatti egyenletekből a következő két egyenlet rendszert képezhetjük;

$$\left.\begin{aligned}x_1\,\varphi_1'(x_1)+y_1\,\varphi_1'(y_1)+z_1\,\varphi_1'(z_1)&=0\\x_2\,\varphi_1'(x_2)+y_2\,\varphi_1'(y_1)+z_2\,\varphi_1'(z_1)&=0\end{aligned}\right\}\;\ldots\;\text{IV.}$$

és

$$\left.\begin{aligned}x_1\,\varphi_2'(x_2)+y_1\,\varphi_2'(y_2)+z_1\,\varphi_2'(z_2)&=0\\x_2\,\varphi_2'(x_2)+y_2\,\varphi_2'(y_2)+z_2\,\varphi_2'(z_2)&=0\end{aligned}\right\}\;\ldots\;\text{V.}$$

az V. alatti rendszer a IV. alattiból ered, ha ez utóbbiban a $\varphi'_1(x_1)$, $\varphi'_1(y_1)$, $\varphi'_1(z_1)$ mennyiségeket a $\varphi'_2(x_2)$, $\varphi'_2(y_2)$, $\varphi'_2(z_2)$ mennyiségek által pótoljuk, a miből következik, hogy a $\varphi'_1(x_1)$ sat. mennyiségek egymáshozi viszonyai egyenlők a $\varphi'_2(x_2)$ sat. mennyiségek egymáshozi viszonyaival, azaz, hogy:

$$\varphi'_1(x_1) : \varphi'_1(y_1) : \varphi'_1(z_1) = \varphi'_2(x_2) : \varphi'_2(y_2) : \varphi'_2(z_2),$$

a honnét a következő egyenleteket nyerjük:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi'_1(y_1)\,\varphi'_2(z_1) - \varphi'_1(z_1)\,\varphi'_2(y_2) = 0 \\ \varphi'_1(z_1)\,\varphi'_2(x_2) - \varphi'_1(x_1)\,\varphi'_2(z_2) = 0 \\ \varphi'_1(x_1)\,\varphi'_2(y_2) - \varphi'_1(y_1)\,\varphi'_2(x_2) = 0 \end{array}\right\} \dots\dots \text{VI.}$$

vagy ha ezekbe a $\varphi'_1(x_1)$ sat. értékeit helyettesítjük és az:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a^1_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

determinánsban az a_{ik} elem együtthatóját α_{ik}-val jelöljük, úgy a VI. alatti egyenletek a következőkbe mennek át:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}(y_1 z_2 - y_2 z_1) + \alpha_{12}(z_1 x_2 - z_2 x_1) + \alpha_{13}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 \\ \alpha_{12}(y_1 z_2 - y_2 z_1) + \alpha_{22}(z_1 x_2 - z_2 x_1) + \alpha_{23}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 \\ \alpha_{13}(y_1 z_2 - y_3 z_1) + \alpha_{23}(z_1 x_2 - z_2 x_1) + \alpha_{33}(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 \end{array}\right\} \text{VII.}$$

a melyekből az $y_1 z_2 - y_2 z_1$, sat. mennyiségeket kiküszöbölve, a következő egyenletet nyerjük:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{32} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0$$

azaz:

$$\Delta^2 = 0$$

vagyis:

$$\Delta = 0,$$

mely egyenlet azt fejezi ki, hogy ekkor a képszelet két egyenesbe fajul el.

39-ik föladat. Megfejtése: Palatin Gergelytől.

Az adott (R) determináns, ha tagjait symetrice elhelyezzük, a következő alakot nyeri:

$$R = \begin{vmatrix} a_1a_2 + a_2a_1 & b_1a_1 + b_2a_1 & c_1a_2 + c_2a_1 & \cdots\cdots & n_1a_2 + n_2a_1 \\ a_1b_2 + a_2b_1 & b_1b_2 + b_2b_1 & c_1b_2 + c_2b_1 & \cdots\cdots & n_1b_2 + n_2b_1 \\ a_1c_2 + a_2c_1 & b_1c_2 + b_2c_1 & c_1c_2 + c_2c_1 & \cdots\cdots & n_1c_2 + n_2c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_1n_2 + a_2n_1 & b_1n_2 + b_2n_1 & c_1n_2 + c_2n_1 & & n_1n_2 + n_2n_1 \end{vmatrix}$$

de ez, mint az egyes columnákban előforduló azonos tényezők mutatják, két determináns szorzási eredménye; ezek pedig:

$$R_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & \cdots\cdots & n_2 \\ a_1 & c_1 & c_1 & \cdots\cdots & n_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{és} \quad R_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots\cdots & n_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots\cdots & n_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{vmatrix}$$

mindkettő »n« sorból áll, de ezek közül (n—2)-nek tagjai egyenlők a zérussal; már pedig a determinánsok elmélete szerint ismeretes, hogyha valamely determinánsban egy sor, vagy egy columna valamennyi tagja egyenként véve a zérussal egyenlő, úgy maga a determináns is egyenlő azzal; tehát:

$$R_2 = 0 \text{ és } R_1 = 0 \quad \text{következőleg:}$$

$$R_2 \cdot R_1 = R = 0.$$

Mondanivaló.

E füzettel a *Műegyetemi Lapok* befejezi pályafutását.

Mathematikai folyóirat, úgy látszik, nálunk még nem élhet meg anyagi segély nélkül.

Persze, ha a mathematikának nálunk csak fél annyi *olvasója* lenne is, mint a mennyi *tanítója* van, máskép állana a dolog,

SZERK.