

Matematikai Lapok



2013/2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 19. évfolyam (2013), 2. szám

Tiszteletbeli főszerkesztő: Császár Ákos

Főszerkesztő: Katona Gyula

Főszerkesztő-helyettes: Frank András, Surányi László

Tanácsadó bizottság: Daróczy Zoltán (DE), Hajnal András (RI), Lovász László (ELTE)

Szerkesztőbizottság: Bárány Imre (RI), Heteyi Gábor (PTE), Laczkovich Miklós (ELTE), Páles Zsolt (DE), Pálffy Péter Pál (RI), Pelikán József (ELTE), Recski András (BME), Reiman István (BME), Rónyai Lajos (SZTAKI), Staar Gyula (Természet Világa), Szendrei Mária (SZTE)

Szervező szerkesztő: Kisvölcssey Ákos

Nyomdai előkészítés: Miklós Ildikó

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12., I/4. Telefon: 225-8410.

Ára:

- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A Matematikai Lapok megjelenését támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

RUZSA Z. IMRE¹

HALÁSZ GÁBOR

Felkértek, hogy beszéljek egy órát Ruzsa Imre munkásságáról. A felkérést, gondolom, annak köszönhetem, hogy korábban, ebben az intézetben, a munkahelyi főnöke voltam. Félek, hogy manapság már nem a legszerencsésebb választás voltam. Elmondhatom, miféle-fajta matematikusnak ismertem meg Imrét.

Nem volna pontos azt állítani, hogy Erdős Pál fedezte fel, mert Pósa Lajos mutatta be neki gimnazista korában, de Imre Erdőst tekinti mesterének, mentorának. Sok közös vonásuk van. Mindkettő matematikai csodagyerek volt, és extra matematikai képességük az idők folyamán sem halványult. Nagyon sok problémát oldottak meg, és éles szemmel meglátták a jó kérdéseket. Mennyiségileg, a problémák számában, a matematikai diszciplínák sokféleségében Erdőst nem lehet utolérni, Imrét viszont nemcsak maguk a problémák érdeklik, hanem a kapcsolódó elvi kérdések is, a jelenségek és azok összefüggései, a kérdéseit is ezek alapján veti fel. Az összefüggéseket szereti kvantitatív formában, kétoldalú egyenlőtlenségekkel, lehetőleg pontos, végleges alakban kifejezni. Ehhez az alkalmas mérőszámokat is gyakran maga vezeti be. Kíváncsi arra is, hogy a tételek, módszerek milyen legáltalánosabb szituációban, struktúrákban érvényesek. Ezeket a kérdéseket a cikkeiben gondosan körüljárja, a nyelvi megfogalmazásra, az új fogalmak elnevezésére is ügyelve. (Bár van erre komolyabb példa is, kopasznak nevezi az olyan csoportot, amiben nincs Haar-mérték.) Nemcsak a szellemes ötleteiért élvezet hát olvasni.

Mindezek az ismérvek már korai cikkeiben is tetten érhetők. Valóban, a matematikusi habitusában az évek során semmi változást nem tapasztaltam, ebből a szempontból már egyetemistaként, de talán már gimnazista korában, amikor első dolgozatait írta, kiforrott matematikus volt.

Valószínűségi számelmélet. Az első fő témája multiplikatív és additív függvények voltak. Az $f(n)$ számelméleti függvényt akkor mondjuk multiplikatívnak, ha relatív prím m és n esetén $f(mn) = f(m)f(n)$. Nem sokkal pályakezdése előtt jelent meg Wirsing nevezetes eredménye, Erdős egy régi sejtése, aminek nagyon speciális esete szerint minden $-1 \leq f(n) \leq 1$ multiplikatív függvénynek létezik a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \leq N} f(n)$$

¹Elhangzott, ha nem is szó szerint, időkorlátozás miatt kissé rövidített formában a Magyar Tudományos Akadémia Rényi Alfréd Matematikai Intézetében 2013. szeptember 7-én Ruzsa Imre 60. születésnapja alkalmából rendezett ünnepi ülésen. Hasznos háttérinformációkért köszönettel tartozom – mégha nem is találják mindnek a nyomát a szövegben – Balog Antalnak (különösen), Marton Katalinnak, Pintz Jánosnak, Szemerédi Endrének, T. Sós Verának.

középértéke. (A tétel a prímszámtétel messzemenő általánosítása, azzal ekvivalens ugyanis az $f(n) = \mu(n)$ Möbius-függvény középértékének a létezése.) Azt a még speciálisabb esetet, amikor $f(n)$ csak a $+1$ és -1 értékeket veszi fel, egyetemista korában úgy fogalmazta át, hogy az ezen két elemből álló G csoportba képező multiplikatív függvény minden $f^{-1}(g)$ ösképének ($g \in G$) van sűrűsége, és azt kérdezte, hogy igaz-e ez tetszőleges Abel-csoportra. (A multiplikatív szabálynak a természetes számokat absztrakt csoportba képező függvényre is van értelme, az ilyeneket nevezte általános multiplikatív függvényeknek; a természetes számok $\mathcal{A}$ részhalmazának a sűrűségén a

$$d(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A(N)}{N}$$

mennyiséget értjük, ahol

$$A(N) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{n \leq N \\ n \in \mathcal{A}}} 1$$

az $\mathcal{A}$ halmaz számosságfüggvénye.) Később ezt, sok más tény mellett, be is bizonyította. Meglepő módon például az értékeloszlás az algebrai struktúrától függ: ha G félcsoport – a multiplikatívítás ekkor is értelmes –, ez már nem igaz, a logaritmikus sűrűség – egy gyengébb sűrűségfogalom – azonban létezik. ([1], [2])

Hogy kvantitatív eredményt is említsek, legyen $g(n)$ additív számelméleti függvény, azaz Imre szóhasználatával a valós számok additív csoportjába képező általános multiplikatív függvény. Az additív függvények valószínűségi elmélete az első $N \rightarrow \infty$ természetes számon való eloszlásukról szól, ahol azok valószínűségi változónak tekinthetők, minden $n \leq N$ -nek $1/N$ valószínűséget tulajdonítva, és azon alapul, hogy közel független valószínűségi változók összegének tekinthetők: ha az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a függvény szigorúan additív, azaz $g(p^k) = g(p)$ nem függ k -től (p -vel mindig prímszámokat jelölünk), akkor

$$g(n) = \sum_{p \leq N} g_p(n), \quad \text{ahol} \quad g_p(n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g(p), & \text{ha } p|n, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

és ezek a „valószínűségi változók” valóban majdnem függetlenek, a különböző prímekkel való oszthatóság egymástól majdnem független.

Imre egy becslése:

$$g(n) \text{ szórásnégyzete} \begin{cases} \leq c_1 \\ \geq c_2 \end{cases} \min_{-\infty < \lambda < \infty} \left(\lambda^2 + \sum_{p \leq N} \frac{(g(p) - \lambda \log p)^2}{p} \right)$$

pozitív c_1 és c_2 abszolút konstansokkal ([3]).

Ha λ -t 0-nak választjuk – ekkor csak a felső becslés marad meg – visszakapjuk a híres Turán–Kubilius-egyenlőtlenséget. Ezt várjuk, hiszen $g_p(n)$ szórásnégyzete körülbelül megegyezik a jobb oldali összeg tagjával, és független változókat összeadva, a szórásnégyzetek is összeadódnak. Az egyenlőtlenség azonban nem mindig

pontos, például a szintén additív $\lambda \log n$ -re nem. Ennek a szórásnégyzete körülbelül λ^2 . Hogy tehát a minimumot adó λ -t véve már pontos nagyságrendet kapunk, azt jelenti, hogy additív függvény mindig független változók összegeként viselkedik, csak általában a prímeiktől származó „véletlen” összeadandók mellett egy „szabályos”, a prímek függetlenségének a korlátját mérő logaritmikus tag is fellép. A $\log n$ mint ebben a vonatkozásban (is) az egyetlen szabályos additív függvény hallgatólagosan benne van Erdős egy régi tételében, de a logaritmikus összetevőnek a többitől való, a bizonyításban is lényeges szerepet játszó függetlensége Imre észrevétele, és a teljes jelenséget is az ő eredménye fejezi ki a legtökéletesebben.

Gyakorlati szempontból fontosabb az ugyanezen az elven alapuló hasonló becslése additív függvények koncentrációjára, a valószínűságszámítás Kolmogorov–Rogozin-féle koncentráció-egyenlőtlenségének a megfelelője, amelyben szintén megjelenik a kivételes $\log n$ függvény ([4]). Segítségével például megadta a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy additív függvénynek, adott normálás után, legyen egy pontra koncentrált határeloszlása ([5]). Az elmélet egyik fő célkitűzése határeloszlás igazolása minél általánosabb körülmények között. Tudtommal mind a mai napig ez az egyetlen, teljesen általános tétel.

Ez a téma vezette el absztrakt topológikus csoportba képező független valószínűségi változók összegeinek konvergenciájához. A valós esetben Kolmogorov 3-sor-tétele adja meg a konvergencia pontos feltételét, de általános csoportokra is voltak – ha nem is ilyen konkrét – feltételek. Kompakt csoportokra Imre Fourier-analitikus módszere jobb eredményt adott, majd összekombinálva Csizsár Imre egy módszerével, lokálisan kompakt csoportokra is ő bizonyította be az akkor legáltalánosabb tételt ([6]).

Lényeges komponens. Nagy feltűnést keltett azzal, hogy pontosan meghatározta, milyen ritka lehet egy lényeges komponens. (Természetes számok két halmazának, $\mathcal{H}$ -nak és $\mathcal{A}$ -nak az algebrai összegén a $\mathcal{H} + \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{h + a : h \in \mathcal{H}, a \in \mathcal{A}\}$ halmazt értjük. $\mathcal{H}$ -t akkor hívják lényeges komponensnek, ha tetszőleges $\mathcal{A}$ -hoz algebrailag hozzáadva, megnöveli annak sűrűségét, feltéve persze, hogy az szigorúan 0 és 1 között volt; a több rokon lehetőség közül értsük a sűrűségen itt a $\underline{d}(\mathcal{A})$ alsó sűrűséget, $\underline{d}(\mathcal{A})$ fenti definíciójában a határértéket limesz inferiorral helyettesítve.)

Maga az eredmény is meglepő: Tetszőleges pozitív ε -hoz létezik $\mathcal{H}$ lényeges komponens, aminek számosságfüggvénye,

$$H(N) < (\log N)^{1+\varepsilon}$$

minden elég nagy N -re. Fordítva, minden $\mathcal{H}$ lényeges komponenshez létezik pozitív ε úgy, hogy minden elég nagy N -re

$$H(N) > (\log N)^{1+\varepsilon} \quad ([7]).$$

Azelőtt csak sokkal sűrűbb és egyszerűbb módszerekkel készült lényeges komponensek voltak ismertek, az ő felső becslésének a bizonyítása bonyolult kombinatorikus és Fourier-analitikus érvelésen alapuló véletlen konstrukció. Az alsó becslésben nemcsak az utolsó, de szinte az első szót is ő mondta ki: könnyű látni, hogy lényeges

komponens exponenciálisnál nem növekedhet gyorsabban, $H(N) > c \log N$, ennél többet azonban korábban nem lehetett tudni.

Speciális lényeges komponensek (a prímszámok, négyzetszámok) sűrűség-növelő hatását meglepően pontos kvantitatív formában írta le ([8], [9]).

Eloszlások irregularitása. Az utolsó szóról jut eszembe egyike a sok frappáns megjegyzésének. Nem tartozik a legjelentősebb eredményei közé, személyes érintettség okán említem.

Legyen adva N pont, $\{z_k\}_{k=1}^N$ az egység-négyzetben. A diszkrepanciáján, ami a pontok eloszlásának az egyenletestől való eltérését hivatott mérni, a

$$\sup_T \left| \sum_{\substack{k=1 \\ z_k \in T}}^N 1 - N|T| \right|$$

mennyiséget értjük, ahol T az egység-négyzetbe eső, a tengelyekkel párhuzamosan álló téglalapokon fut végig, $|T|$ T területe.

Klasszikus tétel szerint a diszkrepancia mindig nagyobb $c \log N$ -nél pozitív abszolút konstans c -vel, ami a pontos nagyságrend. Ez a „ponteloszlások irregularitása” néven ismert elmélet legalapvetőbb kérdése mind a mai napig: mi a helyzet magasabb dimenzióban, ahol a síkon működő elemi bizonyítás felmondta a szolgálatot. Egy régebbi, Rademacher-szerű függvények szerinti Fourier-sorba való fejtesen alapuló analitikus módszer minden dimenzióban működött ugyan, viszont nem adott pontos eredményt.

Ezen utóbbit módosítottam úgy, hogy a síkon kiadja a pontos $c \log N$ alsó becslést, abban a reményben, hogy majd magasabb dimenzióban is hasznos lesz. Miután nem váltotta be a hozzá fűzött reményeimet, meg kellett elégednem a síkon való alkalmazásaival. Megmutattam például, megjavítva egy korábbi eredményt, hogy a $c \log N$ alsó becslés fennáll a diszkrepancia definíciójában téglalapok helyett négyzetekre szorítkozva is.

Imre megjegyzése: ezt nem kell külön bizonyítani, hiszen tetszőleges ponteloszlás téglalapokra vett diszkrepanciája nagyságrendileg – abszolút konstans szorzótól eltekintve – ugyanakkora, mint négyzetekre ([10]), gyakorlatilag lelőve a tételemet.

Mondd meg őszintén, Imre: ezt érdemeltem tőled? Én, aki egyszer még egy üveg Unicumot is vittem neked ajándékba? Ha náluk otthon is így megy, hogy nem viseli el, ha nem az övé az utolsó szó, akkor nem irigylem a feleségét és a fiait.

Mást sem kímélt azonban.

Sidon-sorozatok. A természetes számok $\mathcal{A}$ részhalmazát akkor nevezzük így, ha az elemeiből képzett kettős összegek mind különbözőek, $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$ ($a_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, 3, 4$) csak úgy fordulhat elő, ha $a_1 = a_3$, $a_2 = a_4$ vagy $a_1 = a_4$, $a_2 = a_3$. Szemben a lényeges komponensekkel, itt az a fő kérdés, hogy milyen sűrűek lehetnek. A mohó algoritmussal, egymás után véve a természetes számokat, és akkor megtartva, ha az előzőleg kiválasztottakkal együtt (véges) Sidon-sorozatot alkot, olyan $\mathcal{A}$ végtelen Sidon-sorozatot kapunk, amelyre – legalábbis egyszerű leszámolással – csak annyi látszik, hogy $A(N) > cN^{1/3}$ minden N -re.

Nagy szenzáció volt, amikor hosszú csend után Ajtai Miklós, Komlós János és Szemerédi Endre $A(N) > c(N \log N)^{1/3}$ alsó korláttal rendelkező Sidon-sorozat létezését bizonyította. Imre, mielőtt hozzányúlt, igaz, 15 évvel később, mindjárt hatványrendű javítást ért el: $A(N) > c(\varepsilon)N^{\sqrt{2}-1-\varepsilon}$ ([11]).

Tipikus esete ez annak is, ahogyan nekiáll a problémáknak.

Vannak ismert, általános, hatékony módszerek: kombinatorika (gráfelmélet), trigonometrikus összegek, véletlen konstrukciók, analitikus prímszámelmélet, hogy csak néhányat említsek Imre közvetlen környezetéből. Az első három a vérében van, lépten-nyomon használja őket, de meglepődve láttam, hogy gyakorlatban ismeri a klasszikus analitikus számelmélet módszereit is – azt hittem ugyanis, azoktól távol tartja magát, mint ahogy Erdős mindvégig távol tartotta magát tőlük.

Rövid kitérő: Pintz Jánossal közös dolgozatukban megmutatták, hogy minden elég nagy páros szám előáll mint két prímszám és legfeljebb nyolc 2-hatvány összege ([12]). Ez ma a rekord ebben a Linnik által kezdeményezett, a Goldbach-sejtést megközelítő irányzatban. Igaz, az újdonság itt nem a prímekben, hanem a 2-hatványok analitikus kezelésében van, de Sanders-szel közös dolgozata ([13]), amelyben lényegesen enyhítik a sűrűségi feltételt Sárközy András nevezetes tételében – „minden elég sűrű sorozat önmagával vett algebrai különbségében van $p-1$ alakú szám” –, már tömény analitikus prímszámelmélet a ζ - és $\mathcal{L}$ -függvényekkel, Siegel-gyökökkel és hasonlókkal.

Mégiscsak akkor van igazán elemében, ha közvetlenül érintkezhet a prímszámokkal, és nem áll közjük az analitikus számelmélet gépezete. Erről tanúskodik a már említett [8] vagy a szóban forgó [11] cikke, de még a prímeknek a különböző maradékosztályokban való együttes eloszlását vizsgáló úgynevezett összehasonlító prímszámelmülethez is így szólt hozzá: Körülbelül a prímek fele $\equiv 1 \pmod{4}$, sejtethető, hogy ezeknek is a fele lesz olyan, amelyet követő prím is ugyanebbe a maradékosztályba esik, N -ig tehát nagyjából $N/4 \log N$. Az is nehéz tétel volt, hogy egyáltalán végtelen sok, még inkább, hogy legalább $\log^c N$ van belőlük. Imre ezt $N \log \log N / \log^2 N$ -re javította ([14]), ami már meglepően jól megközelíti a várható nagyságrendet. Ebben, szintén „elemi”, de más bizonyítással, mennyiségileg gyengébb, de általánosabb formában, időben valaki kicsit megelőzte. (A $3 \pmod{4}$ maradékosztály esete ugyanaz; a különböző maradékosztályokba eső szomszédos prímek számára N^c alsó becslés is ismert volt, ezt az esetet azonban egyikük bizonyítása sem képes kezelni.) Kettejük felfedezése előtt az összehasonlító prímszámelmélet az analitikus számelmélet magánterülete volt.

E kis kitérő után visszatérve az általános számelméleti módszerekhez: Imre gyakran nincs meglegedve velük, és akkor valami egészen szokatlan újjal áll elő, ami esetleg semmi másra nem használható, mint a konkrét problémára – Ajtai–Komlós–Szemerédi másutt is alkalmazták a gráfelméleti eljárásukat –, de arra nagyon jól.

A sűrű Sidon-sorozatának a konstrukciójában a kiindulási pontja, hogy a $\log p$ számok a valós számok egy sűrű Sidon-tulajdonságú sorozata. Ezt értem, a számelmélet alaptételének triviális következménye. Azt is értem, hogy ezen számok diadikus kifejtésében megjelenik a Sidon-tulajdonság. A kifejtések hosszú szeletéből csinál végül olyan egész számokat, amelyek szintén rendelkeznek a Sidon-tulajdonsággal.

Hogy hogy lehet ehhez az úthoz eljutni, és hogy lehet remélni, hogy járható is, az továbbra is rejtély számomra. Egyébként nem olyan egyszerű a bizonyítás, mint a leírásom sejteti: $\log p$ -t azért ő sem tudja diadikusan kifejtetni, egy véletlen konstansszorosát kell vennie, és a kifejtések szeletéből sem tud közvetlenül jó egész számokat csinálni, azokat a boszorkánykonyhájában még jól meg kell kevernie.

Egy trigonometrikus összeg. Mutatok erre a hozzáállására olyan példát is, amelyben nincs technikai nehézség, a rövid bizonyítás minden lépése maga az elegancia. Selbergnek is nagyon tetszett, aki pedig nem volt túl bőkezű a dicséretekkel.

A Möbius-függvény additív tulajdonságait illetően

$$M(x, N) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq N} \mu(n) e^{2\pi i n x}$$

a megfelelő generátorfüggvény. Mind a mai napig megoldatlan probléma az

$$\|M\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 |M(x, N)| dx$$

$\mathfrak{L}_1$ -normájának a nagyságrendje. Az analitikus számelméletben ezt az integrandusnak a racionális pontokban és azok kis környezetében felvett értékeit $\mathcal{L}$ -függvényekkel kifejezve illik vizsgálni. Ezt tette Balog Antal és Perelli közös dolgozatukban, ahol a legjobb ismert, „majdnem” N -hatvány rendű alsó becslést érték el.

Nem úgy Imre, aki megint mindjárt hatványrendű alsó becslést bizonyított ([15]). Nála lényeges a szerepe annak, hogy $\mu(n)$ gyakran (négyzetszámmal osztható egészekben) eltűnik. Ez a tulajdonság általában, például a legelsőként tárgyalt témakörben, teljesen érdektelen. $\mu(n)$ helyett a $\lambda(n)$ úgynevezett Liouville-függvényre – a $\lambda(p^k) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^k$ előírással definiált multiplikatív függvény – a bizonyítása nem is működik, holott Balog és Perelli módszerében ez a kis módosítás nem jelent nehézséget. Imre viszont csak a $\{\mu(n) = 0\}$ színhalmaz számelméleti tulajdonságait használja, $\mu(n)$ multiplikativitását különben egyáltalán nem.

Reprodukálom itt a bizonyítását, ami egy, Baloggal közös cikksorozat első tételeként jelent meg. Az ő engedélyével tulajdonítottam itt a tételt nyilvánosan is Imrének.

Az N -től való függést nem jelölve legyen

$$M(x) = \sum_{n \leq N} \mu(n) e^{2\pi i n x}, \quad G(x) = \sum_{n \leq N} c_n e^{2\pi i n x}.$$

Mivel konvolúció Fourier-együtthatói a Fourier-együtthatók szorzata,

$$\int_0^1 M(x-y) G(y) dy = \sum_{n \leq N} \mu(n) c_n e^{2\pi i n x} = M(x),$$

ha a c_n együtthatókat majd úgy választjuk, hogy $c_n = 1$ legyen mindig, amikor $\mu(n) \neq 0$, más szóval n négyzetmentes (bármilyen is az értékük $\mu(n) = 0$ esetén). Innen

$$\|M\|_\infty \leq \|M\|_1 \|G\|_\infty.$$

A Hölder-egyenlőtlenség (triviális esete):

$$\|M\|_2 \leq \sqrt{\|M\|_\infty \|M\|_1} \leq \sqrt{\|G\|_\infty} \|M\|_1.$$

A Parseval-formula szerint, felhasználva azt is, hogy a négyzetmentes számok sűrűsége pozitív,

$$\|M\|_2^2 = \sum_{n \leq N} |\mu(n)|^2 > cN, \quad \|M\|_1 > \sqrt{\frac{cN}{\|G\|_\infty}}.$$

G konstrukciójához legyen

$$F_d(x) \stackrel{\text{def}}{=} d \sum_{\substack{n \leq N \\ d|n}} e^{2\pi i n x},$$

speciálisan

$$F_1(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \leq N} e^{2\pi i n x}.$$

Fordítva, a d -edik egységgyökök hatványösszegeire vonatkozó elemi képlet szerint

$$F_d(x) = \sum_{a=0}^{d-1} F_1\left(x - \frac{a}{d}\right).$$

$G(x)$ -nek vehetjük $F_1(x)$ -et, de a maximumnormája minimalizálása érdekében levonjuk belőle egy jó közelítést, aminek a Fourier-együtthatói négyzetmentes n -ekre eltűnnek. Minden $F_d(x)$ az egész számok kis környezetében jól közelíti $F_1(x)$ -et, és ha például $d = p^2$, akkor az együtthatóira kirótt feltétel is teljesül. A közelítés a környezeteken kívül elromlik: $F_1(x)$ ott már kicsi lesz, míg $F_d(x)$, $\frac{1}{d}$ szerint periodikus lévén, az $\frac{a}{d}$, $a \not\equiv 0 \pmod{d}$ pontokban ismét nagyra válik. Ezek a pontok azonban különböző d -kre különbözők $\pmod{1}$, és sok ilyen $F_d(x)$ átlaga várhatóan mindenütt jól fog közelíteni: később meghatározandó P -vel legyen

$$G(x) \stackrel{\text{def}}{=} F_1(x) - \frac{1}{\pi(P)} \sum_{p \leq P} F_d(x) = -\frac{1}{\pi(P)} \sum_{p \leq P} \sum_{a=1}^{d-1} F_1\left(x - \frac{a}{d}\right),$$

ahol $d = p^2$, és $\pi(P)$ a $p \leq P$ prímek számát jelöli.

Triviális becsléssel

$$|F_1(x)| = \left| \frac{1 - e^{2\pi i N x}}{1 - e^{2\pi i x}} \right| \leq \min\left(N, \frac{1}{2\|x\|}\right) \quad (\|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \min_{-\infty < n < \infty} |x - n|),$$

$$|G(x)| \leq \frac{1}{\pi(P)} \sum_{p \leq P} \sum_{a=1}^{d-1} \min\left(N, \frac{1}{2\|x - \frac{a}{d}\|}\right).$$

Mivel a kettős összeg két különböző tagjában szereplő $\frac{a}{d}$ törtekre $\left\| \frac{a_1}{d_1} - \frac{a_2}{d_2} \right\| \geq \frac{1}{d_1 d_2} \geq \frac{1}{P^4}$, a $\| \cdot \|$ távolság szerint x -hez (egy) legközelebbi $\frac{a}{d}$ törtet tartalmazó tagot különvéve, a maradékot integrálközelítő összegnek tekintve és összehasonlítva az integrállal látható, hogy

$$\sum_{p \leq P} \sum_{a=1}^{d-1} \min\left(N, \frac{1}{2\|x - \frac{a}{d}\|}\right) \leq N + P^4 \int_0^1 \min\left(N, \frac{1}{2\|u\|}\right) du = N + P^4(1 + \log N).$$

Az elemi prímszámelméletből tudjuk, hogy elég nagy P -re $\pi(P) > P^{1-\varepsilon}$, és a $P^4 = N$ (lényegében) optimális választással

$$\|G\|_\infty < \frac{N^{1+\varepsilon}}{\pi(P)} < N^{\frac{3}{4}+2\varepsilon}, \quad \|M\|_1 > \sqrt{\frac{cN}{N^{\frac{3}{4}+\varepsilon}}} > N^{\frac{1}{8}-\varepsilon}.$$

Freiman tétele. Nem halogathatom tovább, hogy rátérjek a legjelentősebb eredményeire, a Freiman-tétel témakörére, ezen belül elsősorban a tétel új bizonyítására. Ezt én már nem értem, a fejleményeket is alig tudom követni, csak ámulok és bámulok.

A téma a Ruzsa névtől hangos. Fields-érmesek idézik, használják, javítják az eredményeit, és fordítva, ő az övéket. Gowersnek Szemerédi tételére adott új bizonyításában – (részben) ezért kapta a Fields-érmet – például lényeges szerepe van, és így közvetve Tao és Green a prímek halmazában levő számtani sorozatokról szóló tételében is, ami a mai számelmélet egyik legnevezetesebb eredménye. Szinte minden idevágó cikkben felbukkan, ha máshogy nem, hallgatólagosan, de sokan klasszikusan idézik (Fejér terminológiája), azaz a cikk címében. Lépten-nyomon találkozhatunk ilyen fogalmakkal: Ruzsa-féle háromszög-egyenlőtlenség, Ruzsa lefedési lemmája, Bogoljubov–Ruzsa-lemma. Van aki a Freiman-tételt is Freiman–Ruzsa-tételnek nevezi; ez is jogos, mert Imre adta az első teljes bizonyítást ([16]), ami nem utolsó sorban széles körben ismertté és hozzáférhetővé tette a tételt.

Azelőtt – úgy emlékszem –, a nagydoktorijának az írásakor még nem volt kiugróan magas a hivatkozásainak a száma. A témaválasztásában nem annak a fontossága, népszerűsége, hanem a saját ízlése vezérli – nem véletlen persze, hogy ezek a szempontok gyakran összetalálkoztak –, és abban is sokszor a végső szót mondta ki, úgyhogy ezen nem is lehet csodálkozni. (Ha rosszmájú akarok lenni, ennek tulajdonítom, miért tartja értelmetlennek a hivatkozások számolását a tudományos minősítésben.) Mára a helyzet alapvetően megváltozott. A Mathscinet több mint 1000-et tart nyilván – a logikai, filozófiai témájú hivatkozó cikkeket levonva is (ezek apját idézik) –, a teljes szám valószínűleg ennél jóval nagyobb.

Dióhéjban, miről is van szó. Egyszerű tény, hogy egész számokból álló véges $\mathcal{A}$ halmazra $|\mathcal{A} + \mathcal{A}| \geq 2|\mathcal{A}| - 1$ ($| \cdot |$ az elemszámot jelöli), és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\mathcal{A}$ egy intervallumot vagy általánosabban egy számtani sorozatot alkot. Freiman tétele ezen extrémális struktúra stabilitását állítja: ha $|\mathcal{A} + \mathcal{A}| \leq K|\mathcal{A}|$ adott K konstanssal, akkor $\mathcal{A}$ befoglalható kevés számú számtani sorozat direkt összegébe, aminek a mérete $\mathcal{A}$ elemszámával összemérhető. Precízen: létezik

$$\mathcal{A} \subset \{x_0 + l_1 y_1 + \dots + l_d y_d : 0 \leq l_i < L_i \ (i = 1, \dots, d)\}$$

úgynevezett általánosított számtani sorozat, ahol $L_1 \dots L_d \leq c|\mathcal{A}|$, és d, c csak K -tól függő konstansok. (Fordítva, ilyen $\mathcal{A}$ -ra nyilván $|\mathcal{A} + \mathcal{A}| \leq K|\mathcal{A}|$ csak d -től és c -től függő K -val.)

A tételnek számos élesítése (például d és c K -tól való függését illetően), általánosítása (más csoportokra, elemszám helyett mértékre), alkalmazása (a számelméletben, geometriában, számítástudományban) van, amelyekben intenzív kutatás folyik. Ezek majdnem minden ágából Imre is kiveszi a részét.

Közelebbről csak egy látszólag apró részletről szólok. Az említett, sokszor használt „háromszög-egyenlőtlensége” a következő:

$$|\mathcal{A} - \mathcal{C}| \leq \frac{|\mathcal{A} - \mathcal{B}| |\mathcal{B} - \mathcal{C}|}{|\mathcal{B}|},$$

ami az egészek helyett tetszőleges csoportban is érvényes ([17]).

A bizonyítás lényege ez a sor:

$$a - c = (a - b) + (b - c)$$

minden b -re (a, b, c a megfelelő nagybetűs halmazok elemei). $\mathcal{A} - \mathcal{C}$ minden eleméhez válasszunk egyetlen $a - c$ előállítást. Ehhez hozzárendeljük az

$$\{(a - b, b - c) : b \in \mathcal{B}\} \subset (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \times (\mathcal{B} - \mathcal{C})$$

halmazt. Minden ilyen halmaz elemszáma megegyezik $\mathcal{B}$ elemszámával, és a fenti azonosság következménye, hogy $\mathcal{A} - \mathcal{C}$ különböző elemeihez rendelt halmazok diszjunktak. A halmazok egyesítésének az elemszáma tehát $|\mathcal{A} - \mathcal{C}| |\mathcal{B}|$, ami legfeljebb $(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \times (\mathcal{B} - \mathcal{C})$ teljes elemszáma, $|\mathcal{A} - \mathcal{B}| |\mathcal{B} - \mathcal{C}|$, és kész.

Amikor megértettem – egysoros bizonyítást nem könnyű megérteni: ebben valóban elemszámok szerepelnek, nem előállítási számokkal súlyozva, amit egyszerű leszámolás adna –, arra gondoltam, hogy Imre hűtlen lenne önmagához, ha nem nézne utána, milyen legáltalánosabb egyenlőtlenségek vezethetők le ezen az elven. Sok hasonló egyenlőtlenséget bizonyított, részben tanítványaival, Gyarmati Katalinnal, Matolcsi Mátéval együtt, de pont, amit kerestem, nem találtam.

Általánosította viszont valószínűségi változók entrópiájára ([18]). Úgy látom, maga jött rá, hogy ez a természetes általánosítás, de kiderült, hogy additív tételeknek, például a Brunn–Minkowski-egyenlőtlenségnek – ez a korábban említett $|\mathcal{A} + \mathcal{A}| \geq 2|\mathcal{A}| - 1$ többdimenziós változata, elemszám helyett Lebesgue-mértékkel – ismert ilyen megfelelője.

Az általánosításai során többször megesett ez vele, mint egy korábbi példában is, ami persze nem csökkenti az érdemeit. Minden esetben lényegesen továbbvitte azt a területet, amire rátalált. Új entrópia-egyenlőtlenségeket bizonyított, részben a kombinatorikus egyenlőtlenségei következményeként, részben azokétól eltérő bizonyítással, máskor pedig csak sejtésként fogalmazta meg a várható rokon egyenlőtlenséget, és mindezzel felpezsdítette ezt a kutatási irányt.

Additív kombinatorika. Így nevezik manapság az általános sorozatok additív elméletét. A leghíresebb tétel kétségkívül Szemerédi tétele, egykor Erdős és Turán sejtése a sűrű sorozatokban fellelhető számtani sorozatokról, de ide tartozik a Freiman-tétel is csakúgy, mint a Sidon-sorozatok vagy a lényeges komponensek. Ez Imre fő kutatási területe, ami egész pályafutásán végigvonul. Amikor elkezdett vele foglalkozni, még nem sokan művelték, ő azonban makacsul kitartott mellette. Bevallom, nem tetszett, amikor láttam, mennyire elkötelezte magát mellette. A véleményemet azután nagyrészt revideálnom kellett, amikor az utolsó néhány évben

egy széles körű, nem várt kapcsolatokkal rendelkező, dinamikusán fejlődő elméletté nőtte ki magát. Ebben Szemerédi után neki volt a legjelentősebb kezdeményező szerepe (ahogy egy elfogult kívülálló látja). Sokirányú idevágó eredményei közül kettőt említek még a Szemerédi-tétel környékéről.

Brown, Erdős és Sós Vera vetette fel, Turán gráftételének egyfajta általánosításaként, azt a nevezetes problémát, hogy n szögpontú, hármasokból álló hipergráfnak hány hármas kell tartalmaznia, hogy biztosan legyen k szögpont, amelyekből képzett legalább l hármas benne van a hipergráfban. Imre Szemerédivel közösen lényegében elintézte a problémafelvetők által nyitva hagyott első kérdést ($k = 6$, $l = 3$), az egyik irányban azáltal, hogy meglepő, új kapcsolatot találtak ezen tisztán kombinatorikus probléma és a sűrű sorozatokban levő három tagú számtani sorozatok között ([19]) – a Szemerédi-tételnek ezt a speciális esetét elsőnek még Roth bizonyította be. Ennek nyomán fogalmazódott meg az a szép általános sejtés, talán inkább program, hogy a hipergráf probléma $k = l + 3$ esete l tagú számtani sorozatokkal kapcsolatos, a probléma megoldása ilyenek létezését vonná maga után.

Ha a sorozat speciális szerkezetű, például egy halmaz önmagához való hozzáadásával keletkező (kéttagú) összeghalmaz, akkor sokkal hosszabb számtani sorozatot is lehet garantálni benne. Imre példát konstruált arra, hogy az ismert becslések nem állnak túl messze a valóságtól ([20]). Freimannal és Halberstammal közösen pedig megmutatta, hogy – szemben a kéttagú összegek esetével – háromtagú sűrű összeghalmaz már N -hatvány hosszú számtani sorozatot is kell, hogy tartalmazzon ([21]).

Analízis. Az additív kombinatorika révén jutott tisztán függvénytani kérdésekhez is. N tagú, $|a_j| \leq 1$ együtthatójú

$$\sum_{j=1}^N a_j e^{2\pi i n_j x}$$

trigonometrikus polinom $\mathfrak{L}_2$ normája nyilván akkor a legnagyobb, ha $a_j = 1$ ($j = 1, \dots, N$):

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^N a_j e^{2\pi i n_j x} \right|^2 dx = \sum_{j=1}^N |a_j|^2 \leq N = \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^N e^{2\pi i n_j x} \right|^2 dx$$

a Parseval-formula kétszeri alkalmazásával. A polinom hatványozásával látjuk, hogy ugyanez érvényes minden $\mathfrak{L}_p$ normára is, ha p páros egész szám. Hardy és Littlewood kérdezte, mi a helyzet más p -kkel. Egyre több jel mutatott arra, hogy az egyenlőtlenség azokra gyengébb formában sem igaz, míg végül Imre Greenel együtt – egy másik szerzőpárossal egyidőben, tőlük függetlenül – megmutatta, hogy még gyenge nagyságrendi értelemben sem igaz ([22]), ami pedig a legkülönbözőbb problémákban hasznos lett volna.

Littlewood azt sejtette, hogy N tagú, $a_j = 1$ együtthatós trigonometrikus polinom $\mathfrak{L}_1$ normája pedig (nagyságrendileg) akkor a legkisebb, ha az n_j kitevők N hosszú intervallumot alkotnak. (Ez a Dirichlet-mag, és a sejtés azt fejezi ki, hogy a trigonometrikus rendszer szerinti sorfejtés konvergenciája szempontjából nincs jobb a rendszer természetes rendezésénél.) A sejtés gyengítéseként merült

fel a kérdés, hogy N tagú, 1 együtthatós koszinusz összeg milyen nagy negatív értékeket kénytelen felvenni. A „gyengítés” nehezebbnek bizonyult, mint az eredeti probléma: a Littlewood-sejtésre ma már több bizonyítás is létezik, míg a negatív értékek pontos nagyságrendje nem ismert. Tudtommal Imre tartja a rekordot ([23]).

Egyebek. Vannak azután olyan, egyedi cikkei, amikhez nem tudom, hogy jutott. Például Halmos egy problémáját messzemenőleg általánosítva megmutatta, hogy minden Hilbert-térbeli – ha nem is korlátos – operátor korlátos egy alkalmas ortonormált bázis elemein, ami lehetővé teszi valamiféle norma definiálását nem korlátos operátorokra is ([24]). Vagy Tuza Zsolttal közös speciális, majdnem optimális számítástudományi algoritmus ([25]).

Feltételezem, hogy ezek úgy keletkeztek, hogy mások keresték meg a problémájukkal. Bár a számelmélet az első számú kedvence, más matematikai diszciplínák sem állnak távol tőle, és gyorsan belelát számára szokatlan problémákba is. Így indult a közös munkája Székely J. Gáborral is valószínűségi eloszlások félcsoportjának a számelméleti tulajdonságairól, ahol a konvolúció a szorzás. Sok érdekes jelenségre bukkantak: nincs például olyan „prím” eloszlás, amelyik rendelkezne a prímszámoknak azzal a tulajdonságával, hogy ha osztójuk egy szorzatnak, akkor valamelyik tényezőt is osztaniuk kell. Az eredményeikről egy, nemzetközi díjjal kitüntetett könyvet is írtak ([26]).

A matematikai közéletben. A kutatómunkán kívül is került számára szokatlan helyzetekbe a matematika révén. Az utóbbi időben felbukkant a matematikai közélet több területén. Nyilván mások unszolására, de láthatólag csekély ellenállást kifejtve.

Az Akadémia Matematikai Osztályának elnökhelyettesi posztjára is jelölték azzal a hátsó szándékkal, hogy az azt követő ciklusra majd ő legyen az elnök. A jelölést elfogadta, az osztály meg is választotta. Én ellene szavaztam. El kell ismerni, hogy végül ebbe is egész jól beletanult, csak hát az alaptermészete ellentétes egy ilyen beosztással, és a megbízatása lejártával valóban gyorsan vette a kalapját, az osztályelnökségből már nem kért.

Van azonban egy vezető beosztása, ami nagyon jól illik hozzá, a Rényi Intézet Számelméleti Osztályának a vezetése. Igaz, ő nem az az irányító típus, mint az osztály első vezetője, Turán volt, viszont nagyon jól együtt tud működni másokkal, az együttműködést a problémafelvetéseivel is segítve. Az osztály majdnem minden tagjával van közös dolgozata. Szeretném, ha ezt még sokáig tovább folytatná.

És kívánom neki, hogy a kutatómunkáját is sokáig folytathassa a megszokott színvonalán és a megszokott intenzitásával.

Az idézett publikációi

- [1] Absztrakt struktúrába képező számelméleti függvények, kandidátusi értekezés, 1979.
- [2] Semigroup-valued multiplicative functions. *Acta Arithmetica*, **42**:79–90, 1982–83.
- [3] On the variance of additive functions. In: P. Erdős, editor, *Studies in pure mathematics to the memory of P. Turán*, pages 577–586, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983.

- [4] On the concentration of additive functions. *Acta Math. Sci. Hungar.*, **36**:215–232, 1980.
- [5] The law of large numbers for additive functions. *Studia Sci. Math. Hungar.*, **14**:247–253, 1979.
- [6] Infinite convolution and shift-convergence of measures on topological groups. In: *Probability measures on groups* (Proc. Conf.), volume 928 of Lecture Notes in Math., pages 337–353, Oberwolfach 1981, 1982. Springer-Verlag, New York–Berlin.
- [7] Essential components. *Proc. London Math. Soc.*, **54**:38–56, 1987.
- [8] An additive property of squares and primes. *Acta Arithmetica*, **49**:281–289, 1988.
- [9] An additive problem for powers of primes. *J. Number Theory*, **33**:71–82, 1989.
- [10] The discrepancy of rectangles and squares. *Grazer Math. Ber.*, **318**:135–140, 1992. Österr.-Ung.-Slow. Koll. über Zahlentheorie, Graz 1992.
- [11] An infinite Sidon sequence. *J. Number Theory*, **68**:63–71, 1998.
- [12] On Linnik’s approximation to Goldbach’s problem I. *Acta Arithmetica*, **109**(2):169–194, 2003. (Pintz Jánossal)
- [13] Difference sets and the primes. *Acta Arithmetica*, **131**:281–301, 2008. (T. Sanders-szel)
- [14] Consecutive primes modulo 4. *Indag. Math.*, **12**:489–503, 2001.
- [15] A new lower bound for the L_1 mean of the exponential sum with the Möbius function. *Bull. London Math. Soc.*, **31**:415–418, 1999. (Balog Antallal)
- [16] Generalized arithmetical progressions and sumsets. *Acta Math. Hung.*, **65**:379–388, 1994.
- [17] On the cardinality of $A + A$ and $A - A$. In: *Combinatorics*, volume 18 of Coll. Math. Soc. J. Bolyai, pages 933–938, Keszthely 1976, 1978. North-Holland – Bolyai Társulat, Budapest.
- [18] Sumsets and entropy. *Random Structures and Algorithms*, **34**:1–10, 2009.
- [19] On triple systems with no six points carrying three triangles. In: *Combinatorics*, volume 18 of Coll. Math. Soc. J. Bolyai, pages 939–945, Keszthely 1976, 1978. North-Holland – Bolyai Társulat, Budapest. (Szemerédi Endrével)
- [20] Arithmetic progressions in sumsets. *Acta Arithmetica*, **60**:191–202, 1991.
- [21] Integer sum sets containing long arithmetic progressions. *J. London Math. Soc.*, **46**:193–201, 1992. (G. A. Freiman-nal és H. Halberstam-mal)
- [22] On the Hardy–Littlewood majorant problem. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **137**:511–517, 2004. (B. Green-nel)
- [23] Negative values of cosine sums. *Acta Arithmetica*, **111**:179–186, 2004.
- [24] A pseudonorm for unbounded transformations. *Acta Math. Sci. Hungar.*, **34**:297–305, 1979.
- [25] Computing n with a few number of additions. In: *Theory of Algorithms*, volume 44 of Coll. Math. Soc. J. Bolyai, pages 371–373, Pécs 1984, 1986. North Holland – Akadémiai Kiadó, Budapest. (Tuza Zsolttal)
- [26] *Algebraic probability theory*. Wiley and Sons, Chichester–New York, 1988. (Székely J. Gáborral)

A VALÓS SZÁMOK ELMÉLETÉNEK ÖSSZEFOGLALÁSA DEDUKTÍV MÓDSZERREL

GECSE FRIGYES

Bevezetés

E módszertani tanulmány az [1] cikk folytatása. A természetes számokból kiindulva fokozatos bővítéssel a középiskola eljut a valós számok fogalmáig. De a valós számrendszert egzakt módon nem sikerül bevezetni, többek közt nem tárgyalják a rendszer teljességét és annak következményeit. Az [1] cikkben a racionális számokra támaszkodva megszerkesztettük a valós számok rendszerét, ami rendelkezik a szükséges alaptulajdonságokkal, és egyben a rendszer axiomatikus elméletének modelljét is szolgáltatja. Röviden úgy fejezhető ki, hogy a valós számok rendszere egy teljes rendezett test. Ennek értelmét [1]-ben részleteztük, [2]-ben halmazelméleti alapon teljesebb tárgyalást végeztünk.

A középiskolák befejező szakaszában – különösen a matematikai tagozatokon – olyan összefoglaló képet kell adni a valós számokról, amely deduktív módszeren alapszik, és közel áll a jelenlegi tudományos elképzeléshez. Fogadjuk el, hogy az $\mathbb{R}$ valós számrendszer olyan alapfogalom, amely a teljes rendezett test alaptulajdonságaival rendelkezik. A diákok ismerik a műveleteket, a rendezési relációt és azok tulajdonságait – esetleg a teljességi tulajdonság kivételével, – csak azokat rendszerbe kell foglalni. Ezt többféleképpen is el lehet végezni, ajánlani tudjuk az [1] cikkben alkalmazott rendszert, amely 16 alaptulajdonságból (axiómából) áll (ezek az összeadás és szorzás asszociatív, kommutatív és disztributív tulajdonságai, a 0, az 1, a számok ellentettjének és reciprokanak létezése, a $\leq$ rendezési reláció 6 tulajdonsága, valamint a teljességi axióma). Ezen fogalmak részletes magyarázata után (l. [1]-et) négy általános probléma megoldására szeretnénk felhívni a figyelmet, ez a jelenlegi tanulmány tárgya (hasonló problémákkal a [2] könyvben is részletesen foglalkoztunk).

1. Az $\mathbb{R}$ valós számrendszerben definiálni és részletezni kell a természetes, egész, racionális és irracionális számok körét.

2. A teljességi axióma főbb következményeinek levezetése nélkülözhetetlen a határértékek, számsorok, folytonosság, differenciálhatóság tanulmányozása szempontjából.

3. Alapozzuk meg a hatvány fogalmát, igazoljuk annak tulajdonságait.

4. Kerüljenek megalapozásra a naiv módszerekkel bevezetett számelméleti fogalmak, a számok írásmódja és a tizedes törtbeli alakja.

Látni fogjuk, hogy minden valós szám tizedes törtbe fejthető. Nem a teljességre, inkább az irányvonal és a módszerek bemutatására törekszünk, a megoldásokra a legegyszerűbb utat választjuk.

A természetes számok

Az $\mathbb{R}$ számrendszerből kiindulva, amelynek a létezését és egyértelműségét feltételezzük (1. ezzel kapcsolatban a [2] könyv 3. fejezetét), felépítjük a természetes számok $\mathbb{N}$ rendszerét.

Definíció. Az $\mathbb{R}$ halmaz egy A részhalmazát *induktív* nevezzük, ha $0 \in A$ és $a + 1 \in A$ minden $a \in A$ esetén.

Példák. Induktívak az $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\{0\} \cup [1, +\infty[$ halmazok.

Felmerül a kérdés, létezik-e legszűkebb induktív halmaz. Lássuk be, hogy a válasz pozitív, miután élhetünk az alábbi meghatározással.

Definíció. Jelöljük $\mathbb{N}$ -nel azt az induktív halmazt, amely minden induktív halmaznak részhalmaza (azaz $\mathbb{N} \subset A$, ha A induktív; cikkünkben a $\subset$ jel nem zárja ki az egyenlőséget). Az $\mathbb{N}$ halmaz neve: *természetes számok halmaza*; $\mathbb{N}$ elemeit *természetes számoknak* nevezzük.

Természetes számok a 0 (*nulla*), 1 (*egy*), $1 + 1 =: 2$, $2 + 1 =: 3$ (ezeknek neve: *kettő*, illetve *három*) stb.

1. tétel. *Létezik, méghozzá pontosan egy $\mathbb{N}$ halmaz.*

Bizonyítás. Jelöljük $\mathfrak{N}$ -nel az összes induktív halmaz családját. A fenti példák mutatják, hogy az $\mathfrak{N}$ halmaz nem üres. Legyen $\mathcal{N}$ az $\mathfrak{N}$ halmazcsalád halmazainak metszete (ami természetesen létezik). Lássuk be, hogy $\mathcal{N}$ eleget tesz az $\mathbb{N}$ -re kikötött feltételeknek. Nyilvánvaló, hogy $0 \in \mathcal{N}$. Ha $n \in \mathcal{N}$, akkor n eleme minden $A \in \mathfrak{N}$ halmaznak. De mivel A induktív, ezért $n + 1 \in A$ minden A esetén, tehát $n + 1$ eleme a metszetnek is. Ezzel igazoltuk, hogy $\mathcal{N}$ induktív halmaz. A halmazok metszetének definíciójából következik, hogy $\mathcal{N} \subset A$ minden $A \in \mathfrak{N}$ esetén. Ennélfogva $\mathcal{N}$ eleget tesz $\mathbb{N}$ definíciójának.

Az unicitás bizonyítására tegyük fel, hogy $\mathcal{M}$ szintén eleget tesz a természetes számok halmaza definíciójának. Ekkor $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, mert $\mathcal{N}$ induktív halmaz. Viszont $\mathcal{M}$ is az, vagyis $\mathcal{M} \in \mathfrak{N}$. Ezért az $\mathcal{N}$ metszetre igaz, hogy $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Tehát $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathbb{N}$. ■

1. állítás. *Minden 0-tól különböző természetes szám nem kisebb 1-nél.*

Bizonyítás. Mivel $\{0\} \cup [1, +\infty[$ induktív halmaz, ezért $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subset [1, +\infty[$. Ezáltal az 1. állítás nyilvánvaló. ■

Ismert a teljes indukcióra támaszkodó bizonyítási módszer. Ennek értelme, hogy egy, az $\mathbb{N}$ változóját tartalmazó nyitott mondat (másképpen predikátum) A értelmezési tartománya megegyezik $\mathbb{N}$ -nel, ha A induktív halmaz. A módszer jogosultsága abból következik, hogy egyrészt $A \subset \mathbb{N}$, de másrészt, ha A induktív halmaz, akkor az $\mathbb{N}$ definíció alapján $\mathbb{N} \subset A$, így valóban $A = \mathbb{N}$.

Példaként bebizonyítjuk a következő állítást.

- 2. állítás.** 1. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $n - 1 \in \mathbb{N}$.
 2. Minden m, n természetes számra igaz, hogy $m \geq n \Rightarrow m - n \in \mathbb{N}$.
 3. Minden m, n természetes számra igaz, hogy $m > n \Rightarrow m - n \in \mathbb{N}^+$.

Bizonyítás. 1. Legyen $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n = 0 \text{ vagy } n - 1 \in \mathbb{N}\}$. Mivel $A \subset \mathbb{N}$, azt kell belátni, hogy az A halmaz induktív. Nyilván $0 \in A$. Tegyük fel, hogy $n \in A$. Ekkor $n, n + 1 \in \mathbb{N}$, és $(n + 1) - 1 = n \in \mathbb{N}$, vagyis $n + 1 \in A$. Ennélfogva A induktív halmaz, így azonos $\mathbb{N}$ -nel. De $A \setminus \{0\} = \mathbb{N}^+$, ezért az 1. részállítás igaz.

2. Jelöljük $B(n)$ -nel a „minden $m \in \mathbb{N}$ -re igaz, hogy $m \geq n \Rightarrow m - n \in \mathbb{N}$ ” nyitott mondatot, ahol n az $\mathbb{N}$ halmaz változója. Mivel $m - 0 = m$ minden $m \in \mathbb{N}$ -re, ezért $B(0)$ igaz állítás.

Tegyük fel, hogy $B(n)$ igaz tetszőlegesen rögzített n -re $\mathbb{N}$ -ből, és igazoljuk, hogy $B(n + 1)$ igaz. Mivel az implikáció igaz, ha a premissza hamis, ezért azt az esetet kell vizsgálni, amikor $m \geq n + 1$. De ekkor $m \geq n + 1 > n \geq 0$, és az 1. részállítás következtében $m - 1 \in \mathbb{N}$. Az is igaz, hogy $m - 1 \geq n$, így $B(n)$ igaz volta miatt $m - (n + 1) = (m - 1) - n \in \mathbb{N}$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $B(n + 1)$ igaz állítás. A teljes indukció alapján a 2. részállítás igaz.

3. Ha az m, n természetes számokra $m > n$, akkor $m - n \neq 0$, így a 3. részállítás a 2.-nak a következménye. ■

3. állítás. Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor n és $n + 1$ közt nincs természetes szám (másképpen: $]n, n + 1[\cap \mathbb{N} = \emptyset$).

Bizonyítás indirekt módon. Tegyük fel, hogy vannak olyan n, k természetes számok, hogy $n < k < n + 1$. A 2. állítás 3. pontja szerint $k - n \in \mathbb{N}^+$, ezért $0 \neq k - n < (n + 1) - n = 1$. Ez ellentmond az 1. állításnak, tehát a 3. állítás igaz. ■

4. állítás. Az $\mathbb{N}$ halmaz minden nem üres részhalmazának van legkisebb eleme.

Bizonyítás. Legyen $K \subset \mathbb{N}$, $K \neq \emptyset$ és A azon természetes számok halmaza, amelyek K alsó korlátjai. Mivel van olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $m \in K$, ezért $m + 1 \notin A$, tehát A az $\mathbb{N}$ valódi részhalmaza. De $0 \in A$, ezért nem teljesül az induktív halmaz definíciójának második része, azaz van olyan $n \in A$, hogy $n + 1 \notin A$. Ha $n \in K$, akkor $n = \min K$, mert n a K alsó korlátja. Ha $n \notin K$, akkor a 3. állítás szerint n -nel együtt $n + 1$ is a K alsó korlátja, ami lehetetlen $n + 1 \notin A$ miatt. Tehát $n = \min K$. ■

Az $\mathbb{N}$ számkör bővítései

Definíció. A pozitív természetes számok ellentettjei alkotják a *negatív számok* $\mathbb{Z}^-$ halmazát. Az $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}^- =: \mathbb{Z}$ halmaz az *egész számok halmaza*, elemei pedig az *egész számok*.

Rekurzív módon vezetjük be a természetes kitevőjű hatvány fogalmát, aztán pedig osztással definiáljuk a negatív kitevőjű hatványt.

Definíció. Legyen x a nullától különböző valós szám és n természetes szám. Ekkor meghatározásként elfogadjuk, hogy $x^0 := 1$; $x^{n+1} := x^n \cdot x$; $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$. Az elnevezések a megszokottak.

Gyakorlatként bizonyítsuk be az alábbi állításokat (közben vegyük figyelembe a fenti új típusú definíciókat):

1. A $\mathbb{Z}$ halmaz zárt az összeadás, kivonás és szorzás műveletekre.
2. Minden negatív szám kisebb bármilyen természetes számnál.
3. $(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad]k, k+1[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$.
4. Legyenek x, y, z valós számok (de $z \neq 0$), k, n pedig természetes számok (lehetnek egészek is, ha x, y, z a 0-tól különbözők). Ekkor

$$(xy)^n = x^n y^n, \quad \left(\frac{x}{z}\right)^n = \frac{x^n}{z^n}, \quad x^n x^k = x^{n+k}, \quad (x^n)^k = x^{nk}.$$

5. Ha x, y nemnegatív számok és $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $x^n \leq y^n \Leftrightarrow x \leq y$.

Definíció. Egy valós számot *racionalisnak* nevezünk, ha megadható egész számok hányadosaként. A racionális számok halmazának jelölése: $\mathbb{Q}$. A valós szám *irracionalis*, ha nem racionalis.

A racionális szám tört alakja bővíthető és egyszerűsíthető, méghozzá úgy, hogy a nevező pozitív egész szám legyen.

Gyakorlat. Igazoljuk, hogy a $\mathbb{Q}$ halmaz az $\mathbb{R}$ -ből származó műveletekkel és $\leq$ relációval rendezett (de nem teljes) testet alkot.

A teljességi axióma következményei

Az [1] cikkben $\mathbb{R}$ teljességi axiómáját a következő formában adtuk meg.

Teljességi axióma. Legyenek A és B az $\mathbb{R}$ halmaz olyan nem üres részhalmazai, hogy A minden a és B minden b elemére fennáll az $a \leq b$ egyenlőtlenség (röviden: $A \leq B$). Ekkor létezik legalább egy olyan c valós szám, amelyre az $a \leq c \leq b$ egyenlőtlenségrendszer teljesül (röviden: $A \leq c \leq B$).

Az [1] cikkben bebizonyítottuk, hogy ez az axióma ekvivalens azzal, hogy $\mathbb{R}$ minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának van legkisebb felső korlátja, más szóval szupréruma.

Az alábbiakban az axióma mindkét változatát fogjuk alkalmazni. A teljességi axióma alapján [1]-ben bebizonyítottuk az ún. Cantor-féle axiómát és a rendőrszabályt. A [3] és [4] munkában az Olvasó megismerkedhet a teljességi axióma számos ekvivalens változatával.

5. állítás. 1. Minden korlátos monoton számsorozat konvergens.

2. Ha $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ korlátos monoton növekvő (csökkenő) sorozat, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \right).$$

Bizonyítás. Legyen (x_n) korlátos növekvő sorozat és $X := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $a := \sup X$. Ekkor minden n -re $x_n \leq a$. Ha ε tetszőleges pozitív szám, akkor $a - \varepsilon$ nem felső korlátja X -nek, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $x_N > a - \varepsilon$. A sorozat növekvése következtében $x_n \geq x_N > a - \varepsilon$, ha $n \geq N$. Ezek alapján a az (x_n) sorozat határértéke. A csökkenő sorozatra a bizonyítás hasonló. ■

A következő állítások az ún. Arkhimédész axióma általánosításai.

2. tétel. 1. Ha x egy pozitív, y pedig tetszőleges valós szám, akkor van olyan k egész szám, hogy $kx \leq y < (k+1)x$.

2. Minden $x > 1$ és $y > 0$ számpárhoz olyan k egész szám rendelhető, amelyre $x^k \leq y < x^{k+1}$.

Bizonyítás. 1. Tegyük fel először, hogy $y \geq 0$. Igazoljuk, hogy az $A := \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ halmaz felülről nem korlátos. Indirekt módon, ha az A halmaz felülről korlátos, akkor létezik $\sup A =: a$. Ekkor az $a - x$ szám nem felső korlátja A -nak, ezért létezik olyan $m \in \mathbb{N}$, hogy $mx \in A$ és $mx > a - x$. Így $(m+1)x > a$ és $(m+1)x \in A$. Ez ellentmond a $\sup A = a$ egyenlőségnek, tehát A valóban nem korlátos felülről. Ennélfogva létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $nx > y$, vagyis a $K := \{n \in \mathbb{N} \mid nx > y\}$ halmaz nem üres. A 4. állítás alapján létezik $\min K =: k+1$. Nyilván $kx \leq y < (k+1)x$.

Ha $y < 0$, akkor a bizonyítottak alapján létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $nx \leq -y < (n+1)x$, vagyis $-(n+1)x < y \leq -nx$. Ha $y < -nx$, akkor a tétel állítását kielégíti a $k = -n - 1$ szám, ha pedig $y = -nx$, akkor $k = -n$.

2. A bizonyítás hasonló. Az $y \geq 1$ esetben az A halmazt a következőképpen vezettük be: $A := \{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ha A korlátos felülről és $a := \sup A$, akkor $\frac{a}{x}$ nem felső korlátja A -nak, tehát van olyan $x^m \in A$, hogy $x^m > \frac{a}{x}$, azaz $x^{m+1} > a$. Ez lehetetlen $a := \sup A$ miatt. A bizonyítás folytatása nyilvánvaló.

Ha $0 < y < 1$, akkor y helyett $\frac{1}{y}$ -ra alkalmazzuk a bebizonyított állítást. ■

Ha a 2. tétel 1. állítását $x = 1$ -re alkalmazzuk, akkor azt kapjuk, hogy *minden* y valós számhoz pontosan egy olyan $[y] := k$ egész szám tartozik, amelyre $[y] \leq y < [y] + 1$. A $[y]$ számot az y egész részének nevezzük. Az $y - [y]$ szám neve: y törtrésze.

Gyakorlatok. 1. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ($n \in \mathbb{N}^+$).

2. Igazoljuk, hogy bármilyen $]a, b[$ intervallumra

$$\mathbb{Q} \cap]a, b[\neq \emptyset \quad \text{és} \quad (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]a, b[\neq \emptyset.$$

A teljességi axióma fontos következménye a gyökök létezése.

Definíció. Legyen n 1-nél nagyobb egész szám. Egy a nemnegatív valós szám n -edik gyökének olyan b nemnegatív számot nevezünk, amelyre a $b^n = a$ egyenlőség teljesül. Az ilyen b számot az $\sqrt[n]{a}$ szimbólummal jelöljük. Nyilvánvaló, hogy $\sqrt[n]{0} = 0$. Bizonyítsuk be a pozitív számok gyökének létezését is.

3. tétel. Minden nemnegatív számnak létezik pontosan egy n -edik gyöke ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).

Bizonyítás. Az egyértelműséget indirekt módon könnyen bebizonyíthatjuk a $0 \leq b_1 < b_2 \Rightarrow b_1^n < b_2^n$ implikáció alapján. A gyök létezésének bizonyítására pozitív a szám esetén vezessük be az alábbi halmazokat:

$$A := \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^n \leq a\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R}^+ \mid x^n \geq a\}.$$

E halmazok nem üresek, mert ha $0 < b < \min\{1, a\}$, akkor $b^n < b < a$, és $b \in A$, viszont $(1 + a)^n > 1 + a > a$ miatt $1 + a \in B$. Nyilvánvaló, hogy $A \leq B$, ezért a teljességi axióma alapján létezik olyan c valós szám, hogy $A \leq c \leq B$.

Három lehetőség van: $c^n > a$, $c^n < a$ és $c^n = a$. Indirekt módon mutassuk meg, hogy az első kettő lehetetlen. Ezután marad a harmadik lehetőség, ami a bizonyítás tárgya.

Tegyük fel, hogy $c^n > a$. Válasszunk olyan pozitív d számot, hogy teljesüljenek a $d < c^n - a$ és $d < nc^n$ egyenlőtlenségek.

Legyen $c_1 := c(1 - \frac{d}{nc^n})$, és alkalmazzuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget:

$$c_1^n = c^n \left(1 - \frac{d}{nc^n}\right)^n > c^n \left(1 - \frac{d}{c^n}\right) = c^n - d > a.$$

Ezek szerint $c_1 \in B$, vagyis $c_1 \geq c$. De ez lehetetlen, mert $c_1 < c$.

A $c^n < a$ feltevés ugyanúgy ellentmondáshoz vezet. Valóban, ha

$$0 < d < a - c^n \quad \text{és} \quad c_2 := c \left(1 - \frac{d}{n(c^n + d)}\right)^{-1},$$

akkor $c_2 > c$ és a Bernoulli-egyenlőtlenség következtében

$$c_2^n = c^n \left(1 - \frac{d}{n(c^n + d)}\right)^{-n} < c^n \left(1 - \frac{d}{c^n + d}\right)^{-1} = c^n \cdot \frac{c^n + d}{c^n} = c^n + d < a.$$

Ennélfogva $c_2 \in A$, vagyis $c_2 \leq c$. Ismét ellentmondást kaptunk. ■

A gyök fogalmával egyszerűen bevezethető a racionális kitevőjű hatvány, bebizonyíthatók a tulajdonságai, ahogyan ezt a tankönyvekben végzik.

Számrendszerekkel kapcsolatos fogalmak

Néhány megjegyzést teszünk a véges és végtelen halmazokról, erről bővebben a [2] könyvben olvashatunk.

Definíció. Az üres halmaz *számossága* 0. Azt mondjuk, hogy egy X halmaz *n -elemű*, vagy *számossága* n , ahol n pozitív egész szám, ha létezik egy $b : X \rightarrow \overline{1, n}$ bijekció (másképpen: kölcsönösen egyértelmű leképezés X -ről $\overline{1, n} := \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$ -re). Egy halmaz *véges*, ha üres vagy n -elemű ($n \in \mathbb{N}^+$). Ellenkező esetben a halmaz *végtelen*.

Természetesen bizonyítani kell, hogy a halmaz számossága nem függ a definícióban szereplő bijekciótól (l. [2]-t).

Ejtsünk néhány szót a véges vagy végtelen számhalmaz összegéről. Legyenek $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számok, amelyek közt lehetnek egyenlők is. Rendezzük őket valamilyen sorrendben, pl. az indexek növekedése szerint. Azt mondjuk, hogy x_1, x_2 összege az ismert $x_1 + x_2$ szám. Az $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ számok összegén az $(x_1 + x_2 + \dots + x_k) + x_{k+1}$ összeget értjük, $2 \leq k \leq n-1$. Néha azt is mondjuk, hogy egy x_1 szám összege x_1 . Ahogy látjuk, a véges számhalmaz összegét rekurzív módon vezettük be. Az $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ összeget $\sum_{i=1}^n x_i$ szimbólummal is szoktuk jelölni; [2]-ben olvashatunk a definíció korrektségéről és az összeg tulajdonságairól.

Bizonyos végtelen számhalmazokat is összegezhethetünk, ekkor számsorról beszélünk. Számsoron érthetünk $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$ vagy $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ szimbólumot, vagy adhatunk részletesebb definíciót.

Definíció. Legyen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^+}$ egy számsorozat. Rendeljünk hozzá egy (S_k) sorozatot *részletösszegek sorozata* néven rekurzív módon:

$$S_1 = x_1, \quad S_{n+1} = S_n + x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Ekkor *sort* az $((x_k), (S_k))$ rendezett párt értjük. Nemcsak (S_k) adható meg (x_k) -val, de fordítva is (x_k) meghatározható (S_k) -val a következőképpen: $x_1 = S_1$, $x_{n+1} = S_{n+1} - S_n$, $n \in \mathbb{N}^+$. Ha létezik véges $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = S$ határérték, akkor a sort *konvergensnek* nevezzük, az S szám pedig a *sor összege*. A sort *pozitív tagúnak* nevezzük, ha minden x_k tagja nemnegatív szám.

6. állítás. Minden pozitív tagú sor konvergens, ha a részletösszegek sorozata korlátos.

Bizonyítás. Ez az 5. állítás következménye, mert pozitív tagú sor részletösszegeinek sorozata monoton növekvő. ■

A számok írásához számrendszereket használunk. Legelterjedtebb a tízes számrendszer, de számítógépekhez a kettes, nyolcas, tizenhatos stb. számrendszereket is használják. A tízes számrendszerben a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat *számjegyeknek* is nevezik. Ezek segítségével írjuk fel a természetes számokat ismert módon.

A törtbefejtés módszerének átláthatósága szempontjából célszerűnek látjuk bemutatni a természetes számok p alapú helyi értékű számrendszer egzakt bevezetését.

Legyen p egy rögzített 1-nél nagyobb természetes szám, a pedig tetszőleges természetes szám. Rendeljünk a -hoz egy $q = q(a)$ számot a következőképpen: $q = 0$, ha $a < p$; ha pedig $a \geq p$, akkor q -t úgy adjuk meg, hogy a $p^q \leq a < p^{q+1}$ feltétel teljesüljön. A $0, 1, \dots, p-1$ számokat számjegyeknek tekintjük a p -alapú számrendszerben, ezeket valamilyen új szimbólumokkal kell megjelölni, pl. $j_0, j_1, \dots, j_{p-1}$.

4. tétel. Minden a természetes számhoz az

$$(1) \quad a_{q-i} := [ap^{i-q}] - [ap^{i-q-1}] \cdot p, \quad i \in \overline{0, q}$$

egyenlőségekkel olyan $(a_{q-i})_{i \in \overline{0, q}} = (a_q, a_{q-1}, \dots, a_0)$ $q+1$ -tagú sorozatot rendelhetünk, hogy $a_{q-i} \in \{j_0, j_1, \dots, j_{p-1}\}$ minden $i \in \overline{0, q}$ esetén; $a_q = a_0 = 0$, ha $a = 0$; és $a_q \neq 0$, ha $a > 0$, valamint fennáll az alábbi egyenlőség:

$$(2) \quad a = a_q p^q + a_{q-1} p^{q-1} + \dots + a_1 p + a_0.$$

A kifejtés egyértelmű. Pozitív a esetén ez azt jelenti, hogy az

$$(3) \quad a = b_s p^s + b_{s-1} p^{s-1} + \dots + b_1 p + b_0$$

egyenlőségből a $b_s \neq 0$ és $b_j \in \{j_0, j_1, \dots, j_{p-1}\}$ ($j \in \overline{0, s}$) feltételek teljesülésekor az következik, hogy $s = q$ és $b_i = a_i$ minden $i \in \overline{0, q}$ esetén.

Bizonyítás. Adjuk meg az $(a_{q-i})_{i \in \overline{0, q}}$ sorozatot az (1) egyenlőségekkel. Ha b egy valós szám, akkor $b < [b] + 1$, ezért $pb < p[b] + p$ és $[pb] \leq p[b] + p - 1$. Másrészt az egész rész definíciója szerint $p[b] \leq [pb]$, mert $p[b]$ egész szám. Ezek szerint $0 \leq a_{q-i} \leq p - 1$, tehát $a_{q-i} \in \{j_0, j_1, \dots, j_{p-1}\}$ minden $i \in \overline{0, q}$ esetén.

Vegyük figyelembe, hogy (1) szerint $a_0 = a - p[p^{-1}a]$, és $a \neq 0$ esetén q definíciója miatt $a_q = [p^{-q}a] > 0$. Helyettesítsük be a_i értékeit a (2) jobb oldalába és vonjuk össze az egymű tagokat. Ekkor az a számot kapjuk.

A kifejtés egyértelműsége evidens, ha $a = 0$. Legyen $a > 0$. Tegyük fel, hogy $s < q$. Ekkor (2) és (3) szerint azt kapjuk, hogy

$$a \leq (p-1)(p^s + p^{s-1} + \dots + p + 1) = p^{s+1} - 1 \leq p^q - 1 < p^q \leq p^q a_q \leq a.$$

Az $a < a$ ellentmondás miatt $s \geq q$. Hasonlóképpen bizonyítható be, hogy $q \geq s$. Ennélfogva $s = q$. Tegyük fel, hogy van olyan i , amelyre $a_i \neq b_i$. Legyen $j := \max\{i \in \overline{0, q} \mid a_i \neq b_i\}$. Ha $j = 0$, akkor a (2) és (3) jobb oldala csak az a_0 és b_0 tagban különbözik. De ez lehetetlen. Legyen $j > 0$. Ekkor (2) és (3) szerint $a_j > b_j$ esetén

$$\begin{aligned} 0 &= a - a = \sum_{i=0}^j a_i p^i - \sum_{i=0}^j b_i p^i \\ &\geq (a_j - b_j) p^j + \sum_{i=0}^{j-1} 0 \cdot p^i - \sum_{i=0}^{j-1} (p-1) \cdot p^i \geq p^j - (p-1) \sum_{i=0}^{j-1} p^i > 0. \end{aligned}$$

Hasonlóképpen ellentmondást kapunk, ha $a_j < b_j$. Ezzel az egyértelműséget is bebizonyítottuk. ■

Definíció. A (2)-ben szereplő összeget az a szám helyi értékű p alapú számrendszerebeli kifejtésének vagy alakjának nevezzük és az $(\overline{a_q a_{q-1} \dots a_0})_p$ szimbólummal jelöljük. Ha $p = 10$, akkor a zárójelet és a p indexet elhagyjuk. Ha $a_q, a_{q-1}, \dots, a_0$ konkrétan megadott számjegyek, akkor a felső vonást elhagyjuk.

Példa. Ha $a = 1407$, akkor $a = 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 7$, $a = (1010111111)_2 = 2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$ és $a = (4050)_7 = 4 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7$.

Feladat. Mikor osztható egy 16-os alapban felírt természetes szám 5-tel?

Megoldás. Egy a szám 16-os alapban felírható a következőképpen:

$$a = a_q(15 + 1)^q + a_{q-1}(15 + 1)^{q-1} + \dots + a_1(15 + 1) + a_0.$$

A Newton binomiális képlet alapján van olyan természetes b szám, hogy $a = b \cdot 15 + (a_q + a_{q-1} + \dots + a_1 + a_0)$. Innen látható, hogy a osztható 5-tel akkor és csak akkor, ha a számjegyek összege osztható 5-tel.

Gyakorlat. A 21-es alapú számrendszerben foglazzunk meg oszthatósági szabályt a 2, 3, 4, 7, 9, 10, 20, 21, 22, 27 tízes alapú számokkal.

Hatványozás

Ismerkedjünk meg a valós számok megközelítésének egy speciális módszerével. Legyen x egy valós szám, p pedig egynél nagyobb egész szám. Rendeljünk x -hez a korábbihoz hasonlóan olyan $q = q(x)$ természetes számot, hogy $q = 0$, ha $x < p$, és $p^q \leq x < p^{q+1}$ legyen, ha $x \geq p$.

Az egész rész alkalmazásával vezessük be a következő sorozatokat ($\mathbb{Z}_{-q} := \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq -q\}$):

$$(4) \quad u_n(x) := u_n(x, p) := [xp^n]p^{-n}, \quad v_n(x) := v_n(x, p) := u_n(x) + p^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}_{-q}.$$

Példa. Legyen $x = \sqrt{2}$, és $p = 10$. Ekkor $q = 0$ és

$$(u_n(x)) = (1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \dots),$$

$$(v_n(x)) = (2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; \dots).$$

7. állítás. Minden x valós számra igaz, hogy

$$(5) \quad u_n(x) \leq x < v_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}_{-q};$$

$(u_n(x))$ monoton növekvő, $(v_n(x))$ pedig monoton csökkenő sorozat $\mathbb{Q}$ -ban; $u_n(-x) = -u_n(x)$, ha $xp^n \in \mathbb{Z}$, $u_n(-x) = -v_n(x)$, ha $xp^n \notin \mathbb{Z}$;

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = x.$$

Bizonyítás. 1. Ha az $[xp^n] \leq xp^n < [xp^n] + 1$ egyenlőtlenség-rendszert megszorozzuk p^{-n} -nel, akkor megkapjuk az (5) egyenlőtlenség-rendszert.

2. Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $[a]p \in \mathbb{Z}$ és $[a]p \leq ap$, ezért az egész rész definíciója szerint $[a]p \leq [ap]$. Alkalmazzuk ezt az $a = xp^n$ számra:

$$u_n(x) = [a]pp^{-n-1} \leq [ap]p^{-n-1} = u_{n+1}(x).$$

Az $\{a\} = a - [a]$ számra (ami az a törtrésze) $0 \leq \{a\} < 1$ érvényes, ezért

$$[ap] = \left([a] + \{a\}\right)p \leq [a]p + p - 1.$$

Innen az $a = xp^n$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) &= [xp^n p]p^{-n-1} + p^{-n-1} \leq ([xp^n]p + p - 1)p^{-n-1} + p^{-n-1} \\ &= u_n(x) + p^{-n} = v_n(x). \end{aligned}$$

3. Ha $xp^n \in \mathbb{Z}$, akkor nyilván $[-xp^n] = -[xp^n]$ és $u_n(-x) = -u_n(x)$.

Ha pedig $xp^n \notin \mathbb{Z}$, akkor $[-xp^n] = -[xp^n] - 1$ és $u_n(-x) = -v_n(x)$.

4. Az $(u_n(x))$ és $(v_n(x))$ monoton sorozatok korlátosak (alulról $u_{-q}(x)$ -szel, felülről $v_{-q}(x)$ -szel), ezért konvergensek; (4) miatt határértékeik azonosak, (5)-ből pedig (6) következik. ■

Az irracionális kitevőjű hatvány bevezetésére egy új módszert alkalmazunk a racionális kitevőjű hatvány alapján.

Definíció. Legyenek a és x valós számok és $a > 0$. Az

$$(7) \quad a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{u_n(x)}$$

számot az a szám x kitevőjű hatványának nevezzük. Az egyszerűség kedvéért az $(u_n(x))$, $(v_n(x))$ sorozatokat szűkítsük le $\mathbb{N}$ -re. Fogadjuk el, hogy $0^x := 0$, ha $x > 0$.

A racionális kitevőjű hatvány tulajdonságai, valamint a 7. állítás következtében az $(a^{u_n(x)})_{\mathbb{N}}$ sorozat monoton és korlátos, tehát a (7) határérték létezik, nyilván $1^x = 1$ minden x esetén.

8. állítás. Minden x valós számra és 1-nél nagyobb p_1, p_2 egész számokra teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$(8) \quad a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{v_n(x)},$$

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{u_n(x, p_1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{u_n(x, p_2)}.$$

Bizonyítás. Feltételezhetjük, hogy $a \neq 1$. Bizonyítsuk be először a

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{p^{-n}} = 1 \quad (p \geq 2)$$

egyenlőségeket. Ha $a > 1$ és $n > 1$, akkor a Bernoulli-egyenlőtlenség alapján a $c := \sqrt[n]{a} - 1$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$a = (1 + c)^n \geq 1 + nc, \quad c \leq \frac{a-1}{n}, \quad 1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{a-1}{n}.$$

Innen a rendőrelv alapján a (10) alatti első egyenlőség következik. Ha $0 < a < 1$, akkor az egyenlőtlenséget $\frac{1}{a}$ -ra írjuk fel, és a hányadosból veszünk határértéket. A (10) alatti második egyenlőség az elsőből következik, hiszen $0 < p^{-n} < \frac{1}{n}$ és $1 < a^{p^{-n}} < a^{\frac{1}{n}}$, ha $a > 1$, valamint $a^{\frac{1}{n}} < a^{p^{-n}} < 1$, ha $0 < a < 1$.

Mivel $a^{v_n(x)} = a^{u_n(x)+p^{-n}} = a^{u_n(x)}a^{p^{-n}}$, ezért (10) következtében (8) is igaz.

A (9) egyenlőséget először az $a > 1$ feltétel mellett bizonyítjuk be. A p_1 és p_2 számok egyenrangúak, ezért elég belátni, hogy (9) bal oldala nem nagyobb a jobb oldalánál. A $[c] = c - \{c\}$ egyenlőség miatt

$$\begin{aligned} u_n(x, p_1) &= u_n(x, p_2) + (x - \{xp_1^n\}p_1^{-n}) - (x - \{xp_2^n\}p_2^{-n}) \\ &= u_n(x, p_2) + \{xp_2^n\}p_2^{-n} - \{xp_1^n\}p_1^{-n} \leq u_n(x, p_2) + p_2^{-n}. \end{aligned}$$

Innen már a szükséges egyenlőtlenség következik. Ha $0 < a < 1$, akkor a -ról áttérünk $\frac{1}{a}$ -ra, és a már bebizonyított állítást használjuk fel. ■

Megjegyzés. Ha $x \in \mathbb{Z}$, akkor $u_n(x) = x$, $n \in \mathbb{N}$. Ha pedig $x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, $p > 1$, akkor $u_n(x, p) = x$ minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén. Mivel a^x nem függ p megadásától $u_n(x, p)$ -ben, ezért racionális x esetén (7) megegyezik a gyök alapján definiált racionális kitevőjű hatvánnyal.

Az irracionális kitevőjű hatványok tulajdonságai ugyanolyanok, mint a racionális kitevőjű hatványoké. Csak az $a^x a^y = a^{x+y}$ egyenlőséget bizonyítjuk be $u_n(x) + u_n(y) \leq u_n(x+y) \leq u_n(x) + v_n(y)$ alapján (ezek az egyenlőtlenségek pedig a $[c] + [d] \leq [c+d] \leq [c] + [d] + 1$ alakú egyenlőtlenségek következményei):

$$\begin{aligned} a^x a^y &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{u_n(x)} \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{u_n(y)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{u_n(x)} a^{u_n(y)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{u_n(x)+u_n(y)} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{u_n(x+y)} = a^{x+y} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{u_n(x)+v_n(y)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{u_n(x)} a^{v_n(y)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{u_n(x)} \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{v_n(y)} = a^x a^y. \end{aligned}$$

Gyakorlatok. 1. Legyenek a, x valós számok és $a > 1$. Bizonyítsuk be, hogy

$$a^x = \sup\{a^r \mid r \leq x, r \in \mathbb{Q}\} = \inf\{a^r \mid r \geq x, r \in \mathbb{Q}\}.$$

2. Legyenek a, b, x, y valós számok és $a > 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Igazoljuk, hogy

$$u_n(a)u_n(b) \leq u_n(ab) \leq v_n(a)v_n(b); \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

A valós számok törtbefejtése

Először is állapodjunk meg abban, mit értsünk tizedes tört (vagy p -alapú számrendszerbeli tört) alatt. Természetesnek tartjuk elfogadni, hogy a tizedes tört egy speciális típusú sor, a tizedes tört értéke pedig ezen sor összege. Ilyen megkülönböztetéssel többször élünk a matematikában, de gyakran el is kerüljük, például a közönséges törtet definiálhatnánk mint egész számok rendezett párját, a tört értéke pedig a számpárral megadott valós szám lenne (így $\frac{1}{2}$ és $\frac{2}{4}$ különböző törtek, de értékük ugyanaz a szám). Rövidítés céljából fogadjuk el a *péedes* tört terminust (p -edes írással), ami a tizedes tört megfelelője, mikor 10 helyett a p számot használjuk.

Megjegyzések. 1. Írásunkban célszerűnek látjuk minden valós számot, így az egész számokat is, tizedes vagy p -edes tört formájában megadni.

2. Az egyértelműség elérése céljából a p -edes törtet úgy definiáljuk, hogy ne lehessen minden tagja egyenlő $p-1$ -gyel egyetlen indextől kezdve sem. Például nem fogadjuk el, hogy $1 = 0,9999\dots$, ami természetesen különbözik a szakirodalomban elfogadotttól. Továbbá, csak olyan szám p -edes törtje kezdődhet 0-val, amelynek abszolút értéke kisebb 1-nél.

Definíció. Legyen σ természetes szám és $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}_{-\sigma}}$ olyan számsorozat, amelyben b_n a 0-tól $p-1$ -ig terjedő egész számok $0; p-1$ halmazának elemei, és létezik bármilyen nagy indexszel rendelkező $p-1$ -gyel nem egyenlő tag. A c_n általános tagú sort *helyértékű, p -alapú számrendszerbeli törtnek* (röviden: *p -edes törtnek*) nevezzük, ha

- 1) $|c_n| = b_n p^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}_{-\sigma}$;
- 2) $c_{-\sigma} \neq 0$, ha $\sigma > 0$;
- 3) a (c_n) sorozat tagjai azonos előjelűek ($c_n \leq 0$ vagy $c_n \geq 0$ minden n -re).

A c_n szám a p -edes tört n -edik tagja, a b_n pedig a tört n -edik számjegye, vagy n -edik pozícióban lévő számjegye.

A p -edes tört jelölésére a (b_n) vagy $(-b_n)$ sorozat $(b_{-\sigma} b_{-\sigma+1} \dots b_0, b_1 b_2 \dots)_p$, illetve $(-b_{-\sigma} b_{-\sigma+1} \dots b_0, b_1 b_2 \dots)_p$ speciális jelét használjuk attól függően, hogy $c_n \geq 0$ vagy $c_n \leq 0$, $n \in \mathbb{Z}_{-\sigma}$. A zárójelet és a p indexet elhagyjuk, ha $p = 10$. A σ számnak fontos szerepe van: meghatározza az ún. *p -edes vessző* helyét, amit a b_0 után teszünk ki, és elválasztja a pozitív tagú sor összegének egész részét a törtrésztől.

5. tétel. 1. Minden p -edes tört konvergens sor.

2. Minden b valós számhoz kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhető olyan p -edes tört, amelynek értéke egyenlő b -vel.

3. A b értékű p -edes tört részletösszeg-sorozata azonos a $\text{sgn}(b)(u_n(|b|))$ sorozattal; továbbá, $\sigma = q = q(b)$, $b_n = c_n p^n$, $n \in \mathbb{Z}_{-q}$

$$(11) \quad b_{-q} = \lceil |b| p^{-q} \rceil, \quad b_n = \lceil |b| p^n \rceil - \lceil |b| p^{n-1} \rceil p, \quad n \in \mathbb{Z}_{-q};$$

$$(12) \quad b_{n+1} = \lceil |b| p^{n+1} \rceil - b_{-q} p^{q+n+1} - b_{1-q} p^{q+n} - \dots - b_n p, \quad n \in \mathbb{Z}_{-q},$$

itt sgn az előjel függvény jele, c_n a p -edes tört általános tagja.

Bizonyítás. Feltételezhetjük nyilván, hogy $c_n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}_{-q}$. Ekkor a p -edes tört részletösszegeinek sorozata monoton növekvő. Lássuk be, hogy az korlátos is. A definíció szerint $0 \leq b_n \leq p-1$ minden n -re, ezért $n > 0$ esetén

$$\begin{aligned} S_n &= c_{-\sigma} + c_{-\sigma+1} + \dots + c_n \\ &\leq (p-1) \left\{ (p^\sigma + p^{\sigma-1} + \dots + p^0) + \left(\frac{1}{p} + \dots + \left(\frac{1}{p^{n-\sigma}} \right) \right) \right\} \\ &= (p-1) \left\{ \frac{p^{\sigma+1} - 1}{p-1} + \frac{1 - p^{\sigma-n}}{p-1} \right\} < p^{\sigma+1}. \end{aligned}$$

A 6. állítás alapján a p -edes tört konvergens sor.

2., 3. Legyen $b \geq 0$ és nézzük az $(u_n(b))$ részletösszeg-sorozattal megadott sort. A 7. állítás szerint ez a sor konvergens, és összege a b szám. Igazoljuk, hogy ez a sor egy p -edes tört. Legyen (c_n) e sor tagjainak sorozata. Adjuk meg a (b_n) sorozatot a $b_n = c_n p^n$, $n \in \mathbb{Z}_{-q}$ egyenlőségekkel, és bizonyítsuk be a (11) és (12) egyenlőségeket. Nyilván $b_{-q} p^q = c_{-q} = u_{-q}(b) = [b p^{-q}] p^q$, $b_{-q} = [b p^{-q}] \geq 0$, és $b_{-q} > 0$, ha $q > 0$. Ha pedig $n > -q$, akkor a (4.25) egyenlőségek az alábbiakból következnek (feltételeztük, hogy $b \geq 0$):

$$b_n p^{-n} = c_n = u_n(b) - u_{n-1}(b) = [b p^n] p^{-n} - [b p^{n-1}] p^{1-n} = ([b p^n] - [b p^{n-1}] p) p^{-n}.$$

Mivel az $(u_n(b))$ sorozat monoton növekvő, nyilván $c_n \geq 0$, és így $b_n \geq 0$ minden n -re. Ellenőrizzük, teljesülnek-e b_n kötelező tulajdonságai. A q szám definíciójából és a (11) első egyenlőségéből következik, hogy $0 \leq b_{-q} < p$. Ha $n > -q$, akkor a $0 \leq b_n < p$ egyenlőtlenségek (11) és a 7. állítás bizonyításában használt $[ap] \leq [a]p + p - 1$ egyenlőtlenség következményei.

Igazoljuk ezután, hogy a (b_n) sorozat tagjai közt végtelen sok különbözik $p-1$ -től. Indirekt módon, tegyük fel, hogy $b_n = p-1$, ha n nem kisebb egy bizonyos N természetes számnál. Ekkor

$$\begin{aligned} \sum_{n=N}^{\infty} c_n &= (p-1) \sum_{n=N}^{\infty} p^{-n} = (p-1) p^{-N} \frac{1}{1 - p^{-1}} = p^{1-N}, \\ b &= \sum_{n=-q}^{N-1} b_n p^{-n} + p^{1-N} = p^{1-N} \left(1 + \sum_{n=-q}^{N-1} b_n p^{N-1-n} \right) = C p^{1-N}, \end{aligned}$$

ahol C pozitív egész szám. Ha $n \geq N$, akkor

$$u_{n-1}(b) = [C p^{1-N} p^{n-1}] p^{1-n} = [C p^{n-N}] p^{1-n} = C p^{1-N} = b,$$

azaz $c_n = 0$ és $b_n = 0$. Ez azonban ellentmond a $b_n = p-1$ feltevésnek.

A bizonyítottak alapján kimondható, hogy minden valós számhoz p -edes tört rendelhető. Bizonyítani kell, hogy ez a hozzárendelés egyértelmű. A $b = 0$ esetben az állítás nyilvánvaló, ezért feltételezhetjük, hogy $b > 0$. Indirekt módon, tegyük fel,

hogy egy b pozitív számhoz két különböző b összegű $(a_{-s}a_{-s+1}\dots a_0, a_1a_2\dots)_p$ és $(b_{-t}b_{-t+1}\dots b_0, b_1b_2\dots)_p$ p -edes tört rendelhető. Először azt lássuk be, hogy $s = t$. Ha $s < t$, akkor $t > 0$, tehát $b_{-t} > 0$. Van $p - 1$ -nél kisebb a_k számjegy, ezért

$$\begin{aligned} b &= a_{-s}p^s + a_{-s+1}p^{s-1} + \dots < (p-1)p^s(1 + p^{-1} + p^{-2} + \dots) = p^{s+1} \\ &\leq b_{-t}p^t \leq b_{-t}p^t + b_{-t+1}p^{t-1} + b_{-t+2}p^{t-2} + \dots = b. \end{aligned}$$

A $b < b$ egyenlőtlenség lehetetlen, ezért az $s < t$ feltevés hamis. Hasonlóan nem lehet $t < s$, tehát $s = t =: q$. Létezik olyan $k \in \mathbb{Z}_{-q}$, hogy $a_k \neq b_k$, de $a_n = b_n$, ha $n < k$. Feltételezhetjük, hogy $b_k < a_k$, vagyis $b_k + 1 \leq a_k$. A fentiekhez hasonlóképpen kapjuk, hogy

$$d := b_{k+1}p^{-k-1} + b_{k+2}p^{-k-2} + \dots < (p-1)p^{-k-1}(1 + p^{-1} + p^{-2} + \dots) = p^{-k}.$$

Ismét ellentmondáshoz juthatunk a következőképpen:

$$\begin{aligned} b &= b_{-q}p^q + b_{-q+1}p^{q-1} + \dots = b_{-q}p^q + b_{-q+1}p^{q-1} + \dots + b_kp^{-k} + d \\ &< a_{-q}p^q + a_{-q+1}p^{q-1} + \dots + a_{k-1}p^{-k+1} + (b_k + 1)p^{-k} \\ &\leq a_{-q}p^q + a_{-q+1}p^{q-1} + \dots + a_{k-1}p^{-k+1} + a_kp^{-k} \leq b. \end{aligned}$$

Ezzel a hozzárendelés egyértelműségét bebizonyítottuk. A hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű is, mert egy b számhoz rendelt p -edes tört összege egyenlő b -vel.

A (12) képletek könnyen bebizonyíthatók (11) alapján teljes indukcióval. ■

Következmény. Rögzített p esetén a p -edes törtek halmaza és $\mathbb{R}$ között bijekció van.

Megjegyzés. E következmény lehetőséget ad arra, hogy az $\mathbb{R}$ számrendszert a p -edes törtekkel modellezzük. Azonban e módszer körülményes a műveletek és relációk bonyolultsága miatt.

A racionális számok törtbefejtése

A gyakorlatban racionális számokkal számolunk. Ezért szükséges e számok törtbefejtésével részletesebben foglalkozni.

Definíció. Véges p -edes törtről beszélünk, ha a tört egy számjegye után következő minden számjegy 0 értékű.

Egy a szám p -edes törtje véges, ha van olyan $m \in \mathbb{Z}_{-q}$, hogy minden $n \geq m$ esetén $u_n(a) = a$, vagyis $b_{n+1} = 0$; az ilyen b_n , $n \geq m + 1$ számjegyeket a tört jelölésében elhagyjuk. Egész számok esetén a p -edes vessző után csak 0 értékű számjegyek vannak, ezeket a vesszővel együtt elhagyjuk; ekkor nem törtről, hanem az egész szám p -alapú, helyértékű alakjáról szoktunk beszélni.

Definíció. A $(\pm b_{-q} b_{-q+1} \dots b_0, b_1 \dots)_p$ p -edes törtet *periodikusnak*, vagy *szakaszosnak* nevezzük, ha léteznek olyan $m, k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ számok, hogy $a_{n+k} = a_n$ minden $n > m$ esetén. Az m, k számokat úgy választjuk meg, hogy a lehető legkisebbek legyenek. Ekkor a

$$(13) \quad (\pm b_{-q} \dots b_0, b_1 \dots b_m \dot{b}_{m+1} b_{m+2} \dots \dot{b}_{m+k})_p$$

jelölést használjuk. A $b_{m+1} b_{m+2} \dots b_{m+k}$ véges számjegysorozatot a p -edes tört *szakaszának*, a k számot pedig a *szakasz hosszának* nevezzük.

A szakaszos törtetekhez soroljuk a véges p -edes törtet is, és – ebben a cikkben – az egész számokat is, 0 szakasszal.

6. tétel. Egy p -edes tört szakaszos akkor és csakis akkor, ha értéke racionális szám.

Bizonyítás. ($\Leftarrow$) Legyen a pozitív racionális szám. Ekkor $a = [a] + \{a\}$, és az $\{a\}$ törtrész 1-nél kisebb pozitív racionális szám. Ha $a = b_{-q} p^q + \dots + b_0 + b_1 p^{-1} + b_2 p^{-2} + \dots$, akkor $\{a\} = (0, b_1 b_2 \dots)_p$. Elég igazolni, hogy az utóbbi tört szakaszos. Tegyük fel, hogy $b := \{a\} = \frac{s}{t}$, és a tört nem egyszerűsíthető. E szám törtbefejtésének módszere ismert: az $\frac{s}{t}$ közös nevezőjű törtet maradékos osztással alakítjuk p -edes törtté a következőképpen (alkalmazhatjuk a (11), (12) képleteket). Az s számot t -vel osztjuk, a hányados: $[b] = b_0 = 0$, a maradék pedig: $r_0 = s - 0 \cdot t = s$. Az osztás következő (azaz első) lépése: pr_0 -át t -vel osztjuk. Az ekkor kapott hányados a $\left[\frac{ps}{t}\right] = \left[\frac{pr_0}{t}\right] - b_0 p = b_1$ szám, a maradék pedig: $r_1 = ps - b_1 t = (bp - b_1)t$.

Az r_1 maradékot ismét p -vel szorozzuk és t -vel osztjuk. Ezt az eljárást korlátlanul folytathatjuk. Teljes indukcióval igazolhatjuk, hogy az n -edik lépésnél a maradék: $r_n = (bp^n - p^{n-1}b_1 - \dots - b_n)t$, a következő lépésnél pedig a hányados:

$$\left[\frac{pr_n}{t}\right] = [bp^{n+1} - b_1 p^n - \dots - b_n p] = [bp^{n+1}] - b_1 p^n - \dots - b_n p = b_{n+1}.$$

Ha bizonyos lépésnél 0 maradékot kapunk, akkor az eljárás minden további hányadosa nulla, tehát a p -edes tört véges. Ellenkező esetben az eljárás maradékai csak az $1, \dots, t-1$ számok lehetnek. Ezért véges számú lépés után a maradékok közül valamelyik ismétlődik, és így a hányados megfelelő számjegyei is ismétlődnek. Tehát szakaszos p -edes törttel van dolgunk.

($\Rightarrow$) Fordítva, legyen $+$ előjellel a (13) szakaszos p -edes tört összege a . Nyilván elég belátni, hogy a $b := b_{m+1} p^{-m-1} + b_{m+2} p^{-m-2} + \dots$ szám racionális. Ezt a következőképpen igazoljuk:

$$\begin{aligned} b &= (b_{m+1} p^{-m-1} + \dots + b_{m+k} p^{-m-k}) \\ &\quad + (b_{m+1} p^{-m-1-k} + \dots + b_{m+k} p^{-m-2k}) + \dots \\ &= (b_{m+1} p^{-m-1} + \dots + b_{m+k} p^{-m-k}) \frac{p^k}{p^k - 1}. \end{aligned}$$

Innen könnyen látható, hogy a b szám racionális. ■

Következmény. Ha valamilyen egész $p \geq 2$ esetén egy szám p -edes törtbefejtése szakaszos, akkor annak minden törtbefejtése szakaszos (ami lehet véges is). Egy szám irracionális, ha valamely p -edes törtbefejtése nem szakaszos.

A véges p -edes tört könnyen felírható közösleges tört alakjában, hiszen az olyan véges számsorozat összege, amelyben a tagok egész számok vagy közösleges törtek. Alkossunk szabályt a végtelen szakaszos p -edes tört átváltoztatására közösleges törtté. Ne zavarjon bennünket, hogy az alábbi jelölésekben a b_{-q} számjegy 0 is lehet.

9. állítás. A $b = (\overline{b_{-q} \dots b_0}, b_1 \dots b_m \dot{b}_{m+1} b_{m+2} \dots \dot{b}_{m+k})_p$ p -edes tört értéke $b > 0$ esetén közösleges tört alakjában a

$$(14) \quad b = \frac{(\overline{b_{-q} b_{1-q} \dots b_m b_{m+1} \dots b_{m+k}})_p - (\overline{b_{-q} b_{1-q} \dots b_m})_p}{p^m(p^k - 1)}$$

képlettel adható meg. Ha $p = 10$, akkor

$$(15) \quad b = \frac{\overline{b_{-q} b_{1-q} \dots b_m b_{m+1} \dots b_{m+k}} - \overline{b_{-q} b_{1-q} \dots b_m}}{99 \dots 900 \dots 0},$$

itt a tört nevezőjében k darab 9-es és m darab 0 számjegy van.

Bizonyítás. Írjuk fel a b számot $b = c + d$ alakban, ahol

$$\begin{aligned} c &= b_{-q} p^q + b_{-q+1} p^{q-1} + \dots + b_m p^{-m} \\ &= p^{-m} (b_{-q} p^{q+m} + b_{-q+1} p^{q+m-1} + \dots + b_m) = p^{-m} (\overline{b_{-q} b_{1-q} \dots b_m})_p, \\ d &= \frac{1}{p^m} \left(\frac{b_{m+1}}{p} + \frac{b_{m+2}}{p^2} + \dots + \frac{b_{m+k}}{p^k} \right) \left(1 + \frac{1}{p^k} + \frac{1}{p^{2k}} + \frac{1}{p^{3k}} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{p^{m+k}} (b_{m+1} p^{k-1} + b_{m+2} p^{k-2} + \dots + b_{m+k}) \frac{1}{1 - p^{-k}} \\ &= \frac{1}{p^m(p^k - 1)} (\overline{b_{m+1} b_{m+2} \dots b_{m+k}})_p. \end{aligned}$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{p^m(p^k - 1)} \left\{ (\overline{b_{-q} b_{1-q} \dots b_m})_p (p^k - 1) + (\overline{b_{m+1} b_{m+2} \dots b_{m+k}})_p \right\} \\ &= \frac{1}{p^m(p^k - 1)} \left\{ (\overline{b_{-q} b_{1-q} \dots b_m})_p p^k + (\overline{b_{m+1} b_{m+2} \dots b_{m+k}})_p - (\overline{b_{-q} b_{1-q} \dots b_m})_p \right\} \\ &= \frac{(\overline{b_{-q} b_{1-q} \dots b_m b_{m+1} \dots b_{m+k}})_p - (\overline{b_{-q} b_{1-q} \dots b_m})_p}{p^m(p^k - 1)}. \blacksquare \end{aligned}$$

Megjegyzés. Ha $b_{-q} = b_{1-q} = \dots = b_i = 0$, akkor a (14), (15) képletekben e számjegyeket el kell hagyni.

Gyakorlatok. 1. Legyen $b = \frac{s}{t}$ olyan racionális szám, hogy $0 < s < t$, a tört nem egyszerűsíthető, és t nem osztható sem 2-vel, sem 5-tel. Ekkor b tizedes törtje nem véges, és van olyan k pozitív egész szám, hogy $b = 0.\dot{b}_1 \dots \dot{b}_k$. Ha $(r_0, r_1, r_2, \dots)$ az s szám t -vel történő maradékos osztással keletkezett maradékok sorozata, akkor $r_k = r_0 = s$ és $r_0, r_1, \dots, r_{k-1}$ közt nincs két egyenlő.

2. Legyen az $a = \frac{s}{t}$ tört nem egyszerűsíthető és $t > 1$. Igazoljuk, hogy e szám p -edes törtje pontosan akkor véges, ha t minden prímtényezője p osztója.

3. Milyen számokra igaz, hogy a 63-ados törtje végtelen szakaszos és két számjegy van a p -edes vessző és a szakasz közt?

4. Hány számjegy van a $(2^{2015})^{-1}$ szám tizedes törtjében a tizedes vessző és a szakasz között?

Irodalom

- [1] Gecse, F., *A valós számok rendszerének felépítése*, Matematikai Lapok, 2. sz. (2012).
- [2] Gecse, F., *Matematikai alapok*, Z-press Kiadó Kft., Miskolc (2013).
- [3] Гече, Ф. Й., *Основи аналізу. Множини. Дійсні числа. Елементарні функції*, Ужгородск. Нац. Ун-т, Ужгород (2004).
- [4] Németh, Z., *Az arkhimédészi tulajdonságról*, Polygon, XVI. köt., 1. sz. (2007).

Frigyes Gecse: Summary of the theory of real numbers with a deductive method

Starting from the basic properties (axioms) of real numbers, we construct the system of natural, integer, rational and irrational numbers and derive their major properties. We emphasize the consequences of the completeness axiom, especially the foundation of the exponentiation.

We discuss the unique representation of real numbers in the base p numeral system of the form

$$(\pm a_{-q} a_{1-q} \dots a_{-1} a_0, a_1 a_2 \dots)_p = \sum_{k=-q}^{\infty} a_k p^{-k}$$

and study the periodic and non-periodic expansions corresponding to rational and irrational numbers, respectively.

dr. Gecse Frigyes
 Debreceni Egyetem
 fgecse@gportal.hu

VERESS PÁL (1893–1945)

MATEMATIKUS–STATISZTIKUS PROFESSZOR

OLÁH-GÁL RÓBERT

1946-ban, a háború után Turán Pál számba vette a matematikustársadalmat ért veszteséget, névsort készített az elhunytakról, és tervbe vette a róluk való megemlékezéseket. Olyan nevek szerepeltek közöttünk, mint Aczél Ervin, Arany Dániel, Faragó Andor, König Dénes, Klug Lipót, Sándor Gyula, Szűcs Adolf, Valkó István Pál, Veress Pál. Veress Pálról való megemlékezésre Riesz Frigyeset kérte fel, de Riesz elhárította ezt a feladatot. Utána Szőkefalvi Nagy Bélát kérte meg, de Szőkefalvi a mesterére Rieszere való tekintettel maga is elutasította, hogy nekrológot írjon Veress Pál emlékére. Így aztán teljesen feledésbe merült Veress Pál matematika-professzor tevékenysége.

Mi húzódnak meg Riesz Frigyes (és így áttételesen Szőkefalvi Nagy Béla) ódzkodásában? Egészen pontosan 60 év távlatából már nem tudjuk teljes bizonyossággal megállapítani, de amire bizonyítékunk van, az egy nagyon parányi szakmai hiúság. Riesz Frigyes írt egy dolgozatot, amelyben nem Veress Pált, hanem Kolmogorovot idézte, noha azt a fogalmat Veress már Kolmogorov előtt közölte. Ezt aztán Veress Pál meg is írta Riesznek, aki viszont ezt nem vette jó néven. Utána aztán el is hidegült a kapcsolat Riesz és Veress Pál között. Noha még Kolozsvárról ismerték egymást, mert Veress Pál Riesznek hallgatója is lehetett.

Sajnos, senki sem írt nekrológot Veress Pálról, ezért most mi igyekezünk pótolni ezt a hiányosságot. (Szőkefalvi Nagy Bélától azért sem volt szép a nekrológ visszautasítása, mert 1942-ben mikor Szőkefalvi Nagy Béla megkapta a König Gyula-érmet, akkor a laudációt éppen Rédei László és Veress Pál írta!)

De, ezt a parányi kis nézeteltérést azóta békévé oldotta az emlékezet. Mindenképpen Turán Pál emberi nagysága, hogy megtette a tőle telhetőt, és szeretett volna, hogy amíg még személyes emlékeik vannak elhunyt matematikustársaikról, addig emlékezzenek meg róluk. (Később ez már nehezebben ment, és sok téves adat bekerült a késve írt nekrológokba, lásd például Kárteszi Ferencnek a Klugról írt megemlékezését¹.) Nekünk már csak olvasmányaink alapján és az unokák szívességéből áll módunkban, hogy egy halvány, és matematikus szemmel is gyengén approximáló nekrológgal megemlékezzünk Veress Pálról.

¹Kárteszi Ferenc: *Találkozásaim Klug Lipóttal*, Matematikai Lapok, 1973, p. 219–223. Kárteszi ebben a visszaemlékezésében tévesen írja, hogy Klug a faji gyűlölet áldozata lett volna, és hogy 1944-ben hunyt el. Természetes halállal hunyt el 1945. március 24-én, és a Kozma utcai Zsidó Temetőben nyugszik. Lásd: Oláh-Gál Róbert: *Klug Lipót (1854–1945)*, Matematikai Lapok, **18**, 1 (2012) 11–25.

Mit alkotott Veress Pál, mint matematikus? Erre Császár Ákos professzor adott pontos, tömör feleletet! Császár Ákos Staar Gyulának, a Természet Világa főszerkesztőjének részletesen kifejtette, hogy Veress Pál Valós függvények című könyvének hatása meghatározó volt szakmai fejlődésére.

„Császár Ákos: Szegény Veress Pál Budapest ostromakor bombatűzbe került, meghalt. Vízért ment valahova, akkor érte a bombaszilánk. Itt kell elmondanom, egyetemi éveim alatt az ő nevéhez fűződik egyik nagy élményem. Elsőéves voltam, amikor az Egyetemi Könyvtárban kezembe akadt Veress Pál Valós függvények tankönyve. Egyszerűen nem tudtam letenni, habzoltam, nap mint nap futottam a kedvéért a könyvtárba. Végül sikerült megvásárolnom az egyik boltban, odahaza folytathattam az olvasást.

Staar Gyula: Mi volt különleges ebben a könyvben?

Császár Ákos: Maga a könyv nem volt igazán jól megírva, a szemlélete volt az, ami rettenetesen megragadta a fantáziámat. Az egyetemen hallott klasszikus veretű analízis felépítésével szakítva, a halmazelméleti eszközökkel feldolgozott, úgy is mondhatnám, Lebesgue- és Riesz-ízű analízist talált.”²



1. ábra: Veress Pál fiatalkori, 1911. évi kolozsvári fényképe

Sajnos Veress Pál munkássága nagyrészt ismeretlen maradt a tudományos körökben. Eddig sehol sem közölték Veress Pál publikációs listáját! Továbbá szakmai munkásságát sem közölték. Pedig biztos, hogy értékelték, hiszen 1934-ben Kőnig Gyula-éremmel ismerték el matematikai munkásságát.

Őszintén be kell vallanunk, hogy a Kőnig Gyula-érem birtokosai közül (1922: Bauer Mihály, 1924: Szegő Gábor, 1926: Szőkefalvi-Nagy Gyula, 1928: Jordán Károly, 1930: Szász Ottó, 1932: Egerváry Jenő, 1934: Veress Pál, 1936: Kalmár László, 1938: Lipka István, 1940: Rédei László, 1942: Hajós György és Szőkefalvi Nagy Béla, 1944: Varga Ottó) mindegyik matematikusról többet tudunk, mint Veress Pálról.

²Staar Gyula: *A megélt matematika*, Gondolat, Budapest, 1990., pp. 187–188.



2. ábra: Veress Pál Kőnig Gyula-érme. Hujter Mihály fotója

Élete

Veress Pál Kolozsváron született 1893. július 19-én, 120 évvel ezelőtt. Édesapja Veress Vilmos a kolozsvári kereskedelmi akadémia tanára, édesanyja malomvízi Malom Aranka. Bár árkosi, ősi székely unitárius család, Veress Pál középiskolai tanulmányait a kolozsvári piaristáknál és a besztercei német nyelvű evangélikus gimnáziumban végezte. Érdekes, hogy egyetemi tanulmányait nem Kolozsváron, hanem Budapesten a Pázmány Péter Tudományegyetemen folytatta 1911 szeptemberétől 1913 júniusáig. Talán édesapja így látta jónak, talán vonzotta Budapestre Fejér Lipót és Eötvös Loránd nemzetközi híre. Viszont a tehetséges matematikus az 1914-es tanévet Göttingenben járta, majd 1915-ben a kolozsvári Ferenc József Tudományegyetemen fejezte be. Azt tudjuk, hogy Göttingenben tanárai között olyan személyiségek voltak, mint Hilbert, Carathéodory, Hertz és Haar. Azt még nem tudom bizonyosan, hogy Veress Pál göttingai indexében szereplő, és kozmogóniát leadó Haar azonos-e Haar Alfréddel? Nagy valószínűség szerint igen, mert Haar Hilbertnél doktorált, és talán Haar Alfréd győzte meg Veress Pált arról, hogy doktoráljon Riesz Frigyesnél, a kolozsvári egyetemen.

1915 júliusától 1919. decemberig katonai szolgálatot teljesített, tartalékos hadnagyi rangot ért el, és másodosztályú ezüst vitézségi érmet kapott. Bölcsészdoktori szigorlatot 1918-ban tett Kolozsvárt Riesz Frigyesnél és Haar Alfrédnál. Disszertációjának címe: „Az integrális függvényekre értelmezett függvényoperációról”.

1919 áprilisában, ugyancsak Kolozsváron, a tanári vizsgát is letette. 1920-ban mind a négy Veress fiút, mindannyian katonatisztek, kiutasították az új országból, így Budapesten telepedtek le. Itt Veress Pál először állami középiskolai tanárként dolgozott, majd 1928-tól a Tanárképző Intézetbe nevezték ki. 1929 szeptemberében habilitált a Pázmány Péter Tudományegyetem bölcsészeti karán „Valós függvények elmélete” témával. Ez a habilitációs dolgozata könyv formájában is megjelent, és egy nagyon modern irányzatot hozott a magyar matematikai analízis oktatásában. 1938 szeptemberétől címzetes nyilvános egyetemi tanár. Jelentősek és úttörőek voltak közgazdasági matematika dolgozatai. Veress Pál is sokban hozzájárult, hogy a statisztika matematikai diszciplínává vált. (A XX. század elején a statisztika még államtudománynak számított, és csak a jogi fakultáson tanították). Világviszonylatban Wald Ábrahámnak és Neumann Jánosnak köszönhető, hogy a statisztika mára szigorú matematikai diszciplínává vált, még ha ezt a társadalomtudomány

nehezen is tudja megemésztetni. Magyar viszonylatban ehhez Veress Pál is hozzájárult. Tudományos munkái a matematika és a biztosítási matematika köréből jelentek meg magyar és külföldi folyóiratokban.

Dolgozatai

- [1] *Az integrális függvényekre értelmezett függvényoperációkról* (Kolozsvar, 1917).
- [2] *Az absztrakt térről*. Bp. 1934. Matematikai és Fizikai Lapok.
- [3] *A Baire-féle függvényklasszisokról* (Mathem. és Fiz. Lapok 1926, Math. és Phy. Társaság lehet, hogy 1925).
- [4] *Egy Arzelà-féle tétel általánosítása és annak alkalmazása* (Mathem. és Term. tud. Ért. 1919).
- [5] *Diophantosi egyenletek grafikus megoldása*. Bp. 1941. Matem. és Fiz. Lapok Jubiláris kötete.
- [6] *A középérték fogalmáról*. Bp. 1936. Matem. és Fizikai Lapok XLVIII.
- [7] *A mennyiségtan középiskolai oktatása*. Budapest, 1943. Magyar Pedagógia LI.
- [8] *Síkra nem rajzolható gráfokról*. Budapest, 1940. Matem. és Fizikai Lapok XLVII.
- [9] *A Stirling-féle formula egy elemi bizonyítása*. Mat. és Fiz. Lapok, 1935. XLII. Matem. és Fiz. Lapok, 1940.
- [10] *Euler poliédertételéről*. Bp. 1930. Középiskolai Matem. és Fiz. Lapok.
- [11] *Jelentés az 1942. évi König Gyula-jutalomról. Székefalvi Nagy Béla munkáinak ismertetése*. Bp. 1942. Matem. és Fiz. Lapok XLIX.
- [12] *A középértékekről*. Bp. 1943. március 15. Mennyiségtani és Természettudományos Didaktikai Lapok.
- [13] *A Bolyai-féle algoritmus és a járadékszámítási kamatláb-kérdése*. Mennyiségtani és Természettudományos Didaktikai Lapok. 1943. május 1.
- [14] *Aritmetikai közepekre vonatkozó egyenlőtlenségekről*. Középiskolai Matem. és Fiz. Lapok. IX. 5.
- [15] *Über Functionsmengen*, Szegedi Acta, III. kötet p. 177–197.
- [16] *Über kompakte Funktionenmengen und Bairesche Klassen* (Fund. Mathem. VII., 1925).
- [17] *On certain inequalities by Steffensen* (Skandinavisk Aktuarietidskrift, 1926).
- [18] *Die beiden Bolyai und die absolute Geometrie* (Ung. Jahrbücher, 1926).
- [19] *Über eine Beweismethode in der Theorie der abstrakten Räume* (Szegedi Acta, VI., p. 34–45. 1932).
- [20] *Az irracionális egyenletekről és a kúpszeletek egyenletének levezetéséről*. Mennyiségtani és Természettudományi Didaktikai Lapok. 1943. július 15. I. évfolyam 5. szám. (A lapot Porcsalmy Zolán és Veress Pál szerkesztette.)
- [21] Gáspár Ilona: *A magyar matematikai irodalom bibliográfiája 1901–1925.*, Magyar paedagogia, 1930. 39. évf. 252–253. old.

Statisztikai közleményei

- [1] *Contributo alla matematica della assicurazioni sociali*. Róma, 1932; Istituto Italiano degli attuari. Giornale dell’ Istituto Italiano degli Attuari.
- [2] *Statisztikai vizsgálatok a rokkantsági biztosítás köréből*. Előadás a Magyar Biztosítási Társulat szakosztályán, 1932. november 3-án.
- [3] *Közelítő módszerek a társadalombiztosítás matematikájában*, Biztosítási és Közgazdasági Lapok.
- [4] *A Munkabérek hatása a szociális biztosítás díjára*, előadása a Magyar Biztosítástudományi Társulat matematikai-statisztikai szakosztályán. 1928–29 körül.

Könyvei

- [1] *Logaritmus és kamatos-kamat-táblák*. Mennyiségtani segédkönyv. Bp. 1931; 1936; 1938; 1943; 1946; 1948.
- [2] *Elemi mennyiségtan a gimnáziumok és reálgimnáziumok számára*. Bp. 1930. Bernolák–Gyertyánffy–Veress: Mennyiségtani tankönyvsorozat.
- [3] *Elemi mennyiségtan a leánygimnáziumok és leánylíceumok V. és VII. osztály számára*. Bp. 1931. Egyetemi Nyomda.
- [4] *Elemi mennyiségtan magasabb szempontból 1. Aritmetika*. Bp. 1942. Országos Középiskolai Tanáregyesület. Pedagógiai Szakkönyvek 8.
- [5] *Elemi mennyiségtan (Algebra és Geometria) A gimnáziumok és reálgimnáziumok IV. és V. osztálya számára*. Kiadja a Királyi Magyar Egyetemi Nyomda. Budapest. VIII. Múzeum-Körút. Gólyavár
- [6] *Valós függvények* (Budapest, 1934).

A következőkben ismertetném annak a bizonyítékát, hogy miért is neheztelt Riesz Frigyes Veress Pálra.

Veress Pál levele Riesz Frigyeshez¹

„Budapest, 1933. okt. 24.

Mélyen tisztelt Professor Úr,

engedje meg, hogy a szegedi Actában megjelent „*Sur les ensembles compacts le fonctions sommables*” c. szép dolgozatára néhány megjegyzést tegyek, illetve fölhívjam szíves figyelmét néhány olyan körülményre, amely azt elkerülte.

¹Köszönetet mondok Dr. Szabó Péter Gábor szegedi matematikatörténésznek, aki önzetlenül a rendelkezésemre bocsájtotta Veress Pál Riesz Frigyeshez írt levelének fénymásolatát!

Az „en moyenne” konvergens sorozatok alapján értelmezett kompaktság föltételeit első ízben nem Kolmogoroff, hanem én állapítottam meg és pedig egy ugyancsak s szegedi Actában megjelent dolgozatomban (III. kötet p. 177-197. „Über Functionsmengen” I. különösen a C -kompaktbe Funktionmengen C . §-t., melyet, Kolmogoroff érthetetlen módon nem idéz.). Én ott csak egy véges méretű lineáris halmazon értelmezett függvényről foglalkozom, úgyhogy a Professor Úr fejtegetései több tekintetben is általánosabbak. A megállapított föltételek egyike ott (Satz V. és VI.) másképp hangzik, mint a Professor Úr cikkében, nevezetesen a korlátosság helyett egy más föltétel (melyet itt leírni hosszadalmas volna) szerepel, mert akkor én a másféle konvergencia alapján értelmezett (cikkemben A - és B -kompaktnak nevezett) kompaktság föltételeivel való analógia miatt azt tartottam érdekesebbnek. A bizonyításból azonban látható, (191. oldal, 2. bekezdés), hogy a korlátosság az egyenletesen totál-folytonossággal együtt elegendő is. Megjegyzem, hogy a bizonyítás is a Professor Úréhoz hasonló módon történik (189. oldal 4. bekezdéstől kezdve, (annak a (nem Hausdorff, hanem Fréchet-től (Théte, Rend. di Palermo XXII. 1906) származó tételnek a fölhasználásával, hogy a kompakt halmaz „totalbeschränkt”, vagy ahogy én idézett cikkemben mondom (1 §. melyben a bizonyítás is megvan) „véges bázissal” bír. Csak a „totalbeschränkt” elnevezés való Hausdorfftól. Természetesen az általam tárgyalt egyszerűbb értelemben a „báziselemmel” megkonstruálása lényegesen könnyebb.

Megemlítem, hogy én erre a kérdésre még egyszer visszatértem (Über eine Beweismethode ..., ugyancsak szegedi Acta, VI. kötet, p. 34-45.) Ott kimutatom, hogy – durván kifejezve – minden olyan föltétel, melyet egy kompakt, zárt halmaz elemei kielégítenek, e halmazon egyenletesen teljesül, ami a szükséges föltételeket azonnal megadja midőn olyan térben, amelyben a „kompakt” fogalom egy általában definiálható. Az elégséges föltételek megállapításáról is megemlíthetem röviden e cikkeim utolsó pontjában. A föltételeknek ez az „egyenletes” teljesülése vezetett engem épen arra az általános tételre, amely minden térfogalom nélkül kimondható (Satz I. és I' az idézett második dolgozatomban). Szeretném a Professor Úr szíves figyelmét erre a tételre is föl hívni, melynek ismertetése e dolgozatom főcélját képezi s amelynek a kompakt halmazok elméletében is számos alkalmazása van. Az említett dolgozataimat megküldeni már nem tudom, de emlékezetem szerint annak idején elküldtem őket, különben Professor Úrnak bizonyára megvan az Acta.

Szíves üdvözzel maradok a mélyen tisztelt Professor Úrnak, őszinte tisztelője
Veress Pál”

Összegzés

A kolozsvári matematikus, Veress Pál osztrák lányt vett feleségül, (Meisel Dorothea, Korneuburg, Ausztria, 1897–Budapest 1961). Házasságukból két gyermek született: Pál (Budapest, 1920–Budapest, 1999. május 7.) és Éva (Budapest, 1923–Budapest, 1989). Pálból festőművész lett, felesége V. Deák Éva, és három lányuk született (Fruzsina, Anna, Zsóka). Veress Éva Geguss Imréhez ment feleségül és egy Ildikó nevű lányuk született. Geguss Imre Budapest ostromakor vesztette életét, akárcsak

apósa, Veress Pál. (A matematikusoknak érdekes lehet, hogy Veress Fruzsina Gács Péternek a Bostoni Egyetem matematikaprofesszorának a felesége.)

Veress Pál véleményem szerint két tudományterületen alkotott maradandót: a valós analízis oktatásának halmazelméletre és mértékelméletre való alapozásának bevezetésével és a statisztikának matematikára való alapozásával (biztosítási táblák megalkotásával).

Irodalom

- [1] Oláh-Gál Róbert: *Veress Pál, a halk szavú matematikaprofesszor*, Szabadság, Kolozsvár, 2013. március 4.
- [2] Staar Gyula: *A megélt matematika*, Gondolat, Budapest, 1990.
- [3] Szabó Péter Gábor: *A matematikus Riesz testvérek*, Magyar Tudománytörténeti Intézet, Budapest, 2010.
- [4] Szabó Péter Gábor: *Kalmárium Kalmár László levelezése magyar matematikusokkal*, Polygon, Szeged, 2005.

Róbert Oláh-Gál: Pál Veress (1893–1945), professor in mathematics and statistics

Our article’s aim is to present the winner of the “Gyula Kőnig” award, Pál Veress (1893–1945), mathematical professor’s life and publications. Pál Veress was honorary math professor and his precious book, the “Real Functions” (Budapest, 1934) was a great value. His statistical papers were remarkable as well. World-wide it is Abraham Wald’s and John von Neumann’s due that the statistics become a rigorous mathematical discipline. In Hungary Pál Veress has contributed to this.

Oláh-Gál Róbert

Sapientia EMTE,
Gazdaság- és Humántudományok kar

TUTTE VERSÉNEK FORDÍTÁSA

ÁDÁM ANDRÁS

A Matematikai Lapok 2012-es évfolyamának 2. számában megjelent Tutte egy verse, amit Surányi László talált édesapja hagyatékában. A verset Tutte Prágában írta 1959 októberében. Ő onnan egyenesen Dobogókőre utazott, ahol egy gráfelméleti konferencia volt. A konferenciáról a Matematikai Lapok is beszámolt (11 (1960), 202–212). A vers a konferencián kézzől-kézre járt, én megkíséréltem egy magyar változatot készíteni. Íme:

Szavuk csiszolt és biztos
és szemükben fény ragyog,
sok mély sejtést beválnak
gráfkatató magyarok.
Kuszált körök közt, fák közt
útjuk simán vezet,
és egy szép napon megérjük:
elég lesz négy ecset.

Tovább nem foglalkoztam az üggyel, mivel a négyszínsejtés megoldására irányuló kutatásokban sem akkor, sem később nem volt a magyaroknak szerepük. De azért megtisztelő, hogy Tutte a megoldást tőlünk várta. Most, látva a vers megjelenését, előkerestem akkori fordításomat.

EGY RÁKOSI-KÉP KALANDJAI

KATONA GYULA

Az 1970-es évek elején történt a Rényi Intézetben, amit akkor még Matematikai Kutatóintézetnek neveztek. Nemetz Tibor barátommal egy kb. 3×4 méteres, 207 cm-es belmagasságú apró szobában dolgoztunk. De ott dolgozott még az egész didaktikai csoport is, ami Surányi Jánosból és Halmosné Bíró Máriából (röviden Halmos Mari) állt. Mivel Surányinak volt jó szobája az Egyetemen, ő ott igen ritkán jelent meg. De ketten-hárman így is gyakran voltunk az iciripiciri helyiségben.

Mesterünk, Rényi Alfréd tragikusan korai halála után Nemetz Tibi részt vett otthoni könyvtárának átnézésében, feldolgozásában. Ott talált egy Rákosi-képet. Egy egyszerű kis Rákosi-kép volt: nagyobb könyvlap méretű papíron, fekete-fehér kép. Behozta az intézeti szobánkba. Már akkor tulajdonunkban volt egy szép, színes plakát, amit Doma (Szász Domokos, az MTA rendes tagja) hozott nekünk Moszkvából ajándékba. Felirata ez volt: 50 éves a Szovjet Cirkusz. Persze oroszul. Ennek a plakátnak a közepébe belehelyeztük Rákosit, és békésen függött falunkon sokáig, vendégeinket megmosolyogtatva.



Egyszer kiderült, hogy az Intézet akkori igazgatója, Fejes Tóth László a Veszprémi Egyetemen valamikor tanította Korcsog elvtársat, aki 1974-től a Magyar Szocialista Munkáspárt Központi Bizottsága Tudományos, Közoktatási és Kulturális Osztályán osztályvezető-helyettes lett. Fölcsillant a remény, hogy segíteni tud az Intézetben. Fejes Tóth igazgató úr, azaz Laci bátyánk elhívta Korcsog elvtársat az Intézetbe, hogy bemutassa, milyen sanyarú körülmények között dolgozunk. A legjobb példa persze a mi szobánk volt, tehát először is oda vitték a magas rangú

vendéget. A bevonulók Korcsog elvtárs, Fejes Tóth László, az Intézet igazgatóhelyettese, az Intézet párttitkára, és még egy kísérő elvtárs voltak. Alig értek be. Korcsog elvtárs bólogatott, rá se hederített a Rákosi-képre, és kimentek. A párttitkár azonban elsápadt a kép láttán, és kétségbe volt esve a lehetséges következményektől. Már, ha Korcsog elvtárs meglátta a képet, és jelenti. Nagyon hamar párttaggyűlést hívott össze, ahol – mint nekünk elpletykálták – a fő téma a Rákosi-kép volt. Mit lehet és kell tenni, hogy elkerüljék a botrányt? Nem tudjuk, mi volt a határozat, de másnap eltűnt a Rákosi-kép. Egyszerűen ellopta a pártszervezet. Ugyanis az állapotot meg kellett szüntetni, de az Intézetben uralkodó stílus nem tette lehetővé, hogy bárkit is felelősségre vonjanak ilyenért, még szólni is kényelmetlen lett volna. Persze a plakát ott maradt, hirdette a Szovjet Cirkusz dicsőségét. A „tolvaj” talán nem tudott oroszul, vagy nem jött rá, hogy az a szöveg is „rendszerellenes” volt.

Megjegyzem, Korcsog elvtársnak nem sikerült segítséget nyújtania. Legalábbis nem volt feltűnő: még sokáig dolgoztunk a pici szobában.

TARTALOMJEGYZÉK

HALÁSZ GÁBOR: Ruzsa Z. Imre	1
GECSÉ FRIGYES: A valós számok elméletének összefoglalása deduktív módszerrel	13
OLÁH-GÁL RÓBERT: Veress Pál (1893–1945) matematikus–statisztikus professzor	30
ÁDÁM ANDRÁS: Tutte versének fordítása	37
KATONA GYULA: Egy Rákosi-kép kalandjai	38

CONTENTS

GÁBOR HALÁSZ: Imre Ruzsa Z.	1
FRIGYES GECSÉ: Summary of the theory of real numbers with a deductive method ...	13
RÓBERT OLÁH-GÁL: Pál Veress (1893–1945), professor in mathematics and statistics .	30
ANDRÁS ÁDÁM: Translation of the poem by Tutte	37
GYULA KATONA: A picture of Rákosi	38