Matematikai Lapok

2013/1

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 19. évfolyam (2013), 1. szám

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12., I/4. Telefon: 225-8410.

Ára:
– A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes;
– nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A Matematikai Lapok megjelenését támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

EGY ÚJ MÓDSZER AZ $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ MÁTRIX JORDAN-FÉLE NORMÁLALAKJÁNAK[1] ÉS TRANSZFORMÁCIÓMÁTRIXÁNAK ELŐÁLLÍTÁSÁRA, VALAMINT AZ ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓJÚ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLET-RENDSZEREK MEGOLDÁSÁRA

OBÁDOVICS J. GYULA[2]

Tartalom

[1] *Marie Ennemond Camille Jordan* (1838. jan. 5. La Croix–Rousse, Lyon. – 1922. jan. 22. Párizs).

[2] Nyugállományba vonulása előtt a Szent István Egyetem Matematikai és Számítástechnikai Intézet igazgatója és a Matematikai Tanszék tanszékvezető egyetemi tanára volt.

Absztrakt. A dolgozat a klasszikus eljárásoknál hatékonyabb módszereket mutat be a négyzetes mátrixokhoz tartozóan a *Jordan*-féle normálalaknak, a transzformációmátrixnak, a modálmátrixnak és a közelítő modálmátrixnak, az exponenciális mátrixfüggvény normálalakjának, az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszer alaprendszer mátrixának, valamint az általános és kezdeti feltételt kielégítő pontos és közelítő megoldásának előállítására.

Bevezetés

Definíció. Az $n \times n$ méretű négyzetes mátrixokat *n-edrendű mátrixoknak* nevezzük.

Definíció. Ha egy n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak n számú lineárisan független sajátvektora van, akkor azt a mátrixot, amelynek oszlopai a sajátvektorok koordinátáival rendre megegyeznek, az $\mathbf{A}$-hoz tartozó *modálmátrixnak* mondjuk.

Definíció. Az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix *nemderogatórius,* ha az $m(\lambda)$ minimálpolinom megegyezik a $k(\lambda)$ karakterisztikus polinommal, és *derogatórius,* ha ezen polinomok nem egyeznek meg.

Definíció. Egy n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixot *k indexű nilpotens* mátrixnak nevezünk, ha $\mathbf{A}^{k-1} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$. ([D3], [K15], [K18].)

Egerváry Jenő (1953) [D3], (1959) [D4] dolgozatában igazolta, hogy ha egy $\mathbf{A}$ mátrix minimálegyenletének mindegyik gyöke egyszeres, akkor *Lagrange*-féle mátrixpolinommal (l. [K18] 246., 409. oldal), ha pedig a minimálpolinomjának többszörös gyöke is van, akkor *Hermite*-féle mátrixpolinommal (l. [K18] 271., 410. oldal) meghatározható a mátrix kanonikus alakja. Mindkét esetet [D4] és [K18] példával is szemlélteti. (A példákban elírás történt; az első példa $\mathbf{A}$ mátrixában az $a_{22} = -3$ helyett $a_{22} = 3$ a helyes elem (ugyanez ismétlődik [K18] 2. kiadásának 297. oldalán), a 2. példa megoldásában az $\mathbf{x}$ vektor előállításában -25 helyett $+25$ a helyes együttható ([D4], 53. oldal)).

Ozello (1987) [D21] többek között kvadratikus mátrixok *Jordan*-féle normálalakjának direkt előállításával is foglalkozott. *Kaltofen – Krishnamoorthy – Saunders* (1990) [D10], *Villard* (1994) [D25] gyors parallel algoritmusokat fejlesztettek ki *Jordan*-normálalak létrehozásához. *Giesbrecht* (1994) [D6], [D7], *Giesbrecht – Storjohann* (2000) [D8] Monte Carlo típusú algoritmust állítottak elő *Jordan*-normálalak létrehozásához. *Eberly* (2000) [D2] hatékony algoritmust dolgozott ki olyan mátrix kiszámítására, melynek eredményeit a *Jordan*-normálalak, és a transzformációmátrix előállításához alkalmazta.

Ebben a dolgozatban a felsorolt szerzők eredményeitől különböző, olyan módszert mutatunk be, mely egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan*-féle normálalakjának, a hasonlósági transzformáció mátrixának, valamint az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásának előállításához nem használja fel a bonyolult számításokat igénylő klasszikus eljárásokat. A módszer különösen hatékony, ha a jelenséget leíró differenciálegyenlet-rendszer megoldásától függetlenül, az együtthatómátrix összes sajátértékére és sajátvektorára is szükség van. A *MAPLE programcsomag* differenciálegyenlet-rendszert megoldó programjának gyengesége indította el azt a kutatómunkát, amely több lineáris algebrai eredmény mellett végül egy hatékony – állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszert mátrixszorzatokkal megoldó – pontos és közelítő – algoritmushoz vezetett.

Az *eljárás előnye a klasszikus módszerrel szemben:*

a) *általános,* azaz minden $n \times n$-es együtthatómátrixszal meghatározott állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldására alkalmazható;

b) a klasszikus megoldási eljárásokhoz képest *kevesebb műveletszámmal* alkalmazható a gyakorlatban felmerülő mérnöki számításokhoz;

c) a sajátértékek és sajátvektorok ismeretében az alaprendszermátrix mellett, *egyetlen mátrix* felírására (modálmátrix), vagy kiszámítására (transzformációmátrix) valamint inverzére van szükség. Az utóbbira csak akkor, ha kezdeti feltételt kielégítő megoldást keresünk. A klasszikus megoldás alkalmazásához az együtthatómátrix minimálpolinomjának fokszámával megegyező számú mátrixpolinomot kell kiszámítani.

A differenciálegyenlet-rendszerek elmélete szerint a

$$\frac{d\mathbf{x}(\mathbf{t})}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{t})}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t)$$

homogén, illetve inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}, \quad \text{illetve,} \quad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t)}\mathbf{c} + \int_{u=t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-u)}\mathbf{f}(u)\,du,$$

az $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása pedig

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{u=t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-u)}\mathbf{f}(u)\,du$$

alakban előállítható, ahol $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ az együtthatómátrix, $\mathbf{x}(t)$ az ismeretlen függvényvektor, $\mathbf{c}$ vektor elemei pedig tetszőleges állandók [D2], [D3], [K18].

A dolgozatban ismertetésre kerülő módszer a *homogén, illetve az inhomogén rendszer általános megoldását*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{c}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{c} + \int_{u=t_0}^{t} \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}_u\cdot\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{f}(u)\,du$$

mátrixszorzattal, a *kezdeti feltételt kielégítő megoldását* pedig

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0,$$

illetve

$$\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)=\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}\cdot\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{x}_0+\int_{u=t_0}^{t}\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}_u\cdot\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{f}(u)\,du$$

mátrixszorzattal állítja elő, ahol

1. ha az $\mathbf{A}$ mátrix *minimálegyenletének csak egyszeres gyökei* vannak (az $\mathbf{A}$ *Jordan*-féle normálalakja diagonálmátrix), akkor a $\mathbf{T}$ mátrix oszlopvektorait az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{v}_i(\lambda_i)$ sajátvektorai alkotják. Ekkor a $\mathbf{T}$ *modálmátrixot* $\mathbf{Q}$-val jelöljük. A $\mathbf{D}$ diagonálmátrixban az $e^{\lambda_i t}$ elemek a $\mathbf{v}_i(\lambda_i)$ oszlopvektorok sorrendjét követik. Ezt a differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó *diagonális alaprendszermátrixnak* nevezzük, és $\mathbf{D}_d$-vel jelöljük [K14], [K15];

2. ha az $\mathbf{A}$ mátrix *minimálegyenletének többszörös gyökei* is vannak, akkor $\mathbf{T}$ az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{J}$-vel jelölt *Jordan*-féle normálalakját előállító transzformáció mátrixa, a $\mathbf{D}$ mátrix pedig az $e^{\mathbf{A}t}$ *exponenciális mátrixfüggvény normálalakja,* és $\mathbf{D}_e$-vel jelöljük. A $\mathbf{D}_u$ alaprendszermátrixban az $e^{\lambda_i t}$ helyett $e^{\lambda_i(t-u)}$ áll. A $\mathbf{J}$ mátrix ismerete mind a $\mathbf{D}$, mind a $\mathbf{T}$ mátrix kiszámításához szükséges [K15].

Az új megoldási módszer keresésének indokoltságát a következő, három ismeretlen függvényt tartalmazó, elsőrendű, állandó együtthatójú, homogén, lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásakor jelentkezett nehézségek bemutatásával szemléltetjük.

Példa. Állítsuk elő az

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t)&=-4y-2z\\ \dot{y}(t)&=-3x-z\\ \dot{z}(t)&=-y-z\end{aligned}\right\}$$

differenciálegyenlet-rendszer $x(0)=1$, $y(0)=0$, $z(0)=1$ kezdeti feltételrendszert kielégítő megoldását.

A MAPLE V Release 5 differenciálegyenlet-rendszert megoldó módszere 20 perces programfutás után (Windows 95 op. r.) sem adott eredményt, a MAPLE 9.5 pedig (Windows XP op. r.) a megoldást 29 oldal terjedelemben közölte a következő utasítások végrehajtása után:

```
s:={diff(x(t),t)=-4*y(t)-2*z(t),diff(y(t),t)=-3*x(t)-z(t),
    diff(z(t),t)=-y(t)-z(t)}:
Ic:={x(0)=1,y(0)=0,z(0)=1}:
megoldás:=combine(dsolve(s union Ic,{x(t),y(t),z(t)}),trig);
```

A megoldás szemléltetése a modálmátrix felhasználásával:

A differenciálegyenlet-rendszer együtthatómátrixa:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&-4&-2\\-3&0&-1\\0&-1&-1\end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei (λ_i): $\lambda_1 = 3{,}376468081$, $\lambda_2 = -3{,}923562088$, $\lambda_3 = -0{,}4529059982$. A sajátértékekhez tartozó

$$\mathbf{v}(\lambda_1) \approx \begin{bmatrix} -0{,}7150861428 \\ 0{,}6814728728 \\ -0{,}1557129768 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(\lambda_2) \approx \begin{bmatrix} -0{,}7563510517 \\ -0{,}6335458733 \\ -0{,}2167034097 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}(\lambda_3) \approx \begin{bmatrix} -0{,}3811397001 \\ -0{,}5013356936 \\ 0{,}9163611596 \end{bmatrix}$$

lineárisan független sajátvektorokkal képzett $\mathbf{Q}$ modálmátrix és determinánsa:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}(\lambda_1) & \mathbf{v}(\lambda_2) & \mathbf{v}(\lambda_3) \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} -0{,}7150861428 & -0{,}7563510517 & -0{,}3811397001 \\ 0{,}6814728728 & -0{,}6335458733 & -0{,}5013356936 \\ -0{,}1557129768 & -0{,}2167034097 & 0{,}9163611596 \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{Q} = 1{,}000000001 \neq 0.$$

A modálmátrix inverze:

$$\mathbf{Q}^{-1} \approx \begin{bmatrix} -0{,}6891979854 & 0{,}7756849996 & 0{,}1377162950 \\ -0{,}5464107989 & -0{,}7146255644 & -0{,}6182345739 \\ -0{,}2463288091 & -0{,}03718793161 & 0{,}9684725990 \end{bmatrix}.$$

Az alaprendszer diagonálmátrixa:

$$\mathbf{D}_d \approx \operatorname{diag}\left(e^{3{,}376468085t},\ e^{-3{,}923562085t},\ e^{-0{,}459905997t}\right).$$

A kezdeti feltételvektort kielégítő megoldásvektor:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}_d \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0 \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 0{,}3943569148e^{\lambda_1 t} + 0{,}880880752e^{\lambda_2 t} - 0{,}2752376675e^{\lambda_3 t} \\ -0{,}3758198118e^{\lambda_1 t} + 0{,}7378562698e^{\lambda_2 t} - 0{,}3620364578e^{\lambda_3 t} \\ 0{,}08587285565e^{\lambda_1 t} + 0{,}2523826234e^{\lambda_2 t} + 0{,}6617445208e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix},$$

ahol a λ_1, λ_2, λ_3 helyett a kiszámított sajátértékeket kell írni. A megoldás 9 jegyre pontos. Ha behelyettesítjük a megoldásvektort az eredeti egyenletrendszerbe, és például kiszámítjuk a $t = 1$ helyen a bal és jobb oldali vektor komponenseit, akkor azt kapjuk, hogy a két vektor a 8. tizedes jegyre kerekítve azonos:

$$\begin{bmatrix} 38,98120714 \\ -37,09143919 \\ 8,275815806 \end{bmatrix}_b, \quad \begin{bmatrix} 38,98120711 \\ -37,09143913 \\ 8,275815795 \end{bmatrix}_j.$$

A továbbiakban megvizsgáljuk, miként lehet felírni egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeinek ismeretében a mátrix *Jordan*-féle normálalakját, az $e^{\mathbf{A}t}$ exponenciális mátrixfüggvény normálalakját, milyen számítási eljárással kapjuk meg a transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixát, ha az $\mathbf{A}$ minimálpolinomja nemlináris gyöktényezőt is tartalmaz, és ezek ismeretében hogyan oldjuk meg az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszert.

1. A mátrix *Jordan*-féle normálalakjának előállítása

A differenciálegyenlet-rendszer megoldására kidolgozott algoritmus szükségessé teszi az együtthatómátrix *Jordan*-féle normálalakjának felírását.

A *Jordan*-féle mátrix és transzformációmátrixának előállításáról az irodalomjegyzékben felsorolt dolgozatok és könyvek adnak áttekintést. Az ott, valamint a bevezetésben idézett cikkekben leírtaktól eltérő módszert ismertetünk, amely egy n-edrendű mátrix gyöktényezős alakban felírt karakterisztikus polinomjának, minimálpolinomjának és a blokkok darabszámának ismeretében a *Jordan*-féle mátrix felírását – *felső* (*alsó*) *Jordán-blokkokkal* – mindig egyértelműen lehetővé teszi. A dolgozatban a mátrixokat felső *Jordan*-féle normálalakra transzformáljuk. Célul tűztük ki azt is (l. a 2. fejezetet), hogy a *Jordan*-féle mátrix és az együtthatómátrix sajátvektorai felhasználásával, az elemi lineáris algebra ismereteire támaszkodva, a lehető legkevesebb művelettel állítsuk elő a differenciálegyenlet-rendszer megoldásához szükséges transzformáció mátrixát is [K14].

Ismert, hogy minden $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrixhoz található olyan nem szinguláris $\mathbf{T} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrix, amellyel az $\mathbf{A}$ mátrix

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \quad (\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{n\times n},\ \det \mathbf{T} \neq 0) \tag{1}$$

hasonlósági transzformációval

$$\mathbf{J} = \operatorname{diag}\big(\mathbf{B}_1(\lambda_1), \mathbf{B}_2(\lambda_2), \dots, \mathbf{B}_s(\lambda_s)\big) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{B}_s(\lambda_s) \end{bmatrix},$$

kvázidiagonális ***Jordan****-féle alakra hozható,* ahol $(s \le n)$, és $\mathbf{B}_k(\lambda_k)$ $t_k \times t_k$ típusú mátrixok az ún. *felső Jordan-féle blokkok,* melyeknek az alakja:

$$\mathbf{B}_k(\lambda_k) = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix} = \lambda_k \mathbf{E}_{t_k} + \mathbf{C}_{t_k}, \tag{2}$$

$$(k = 1, 2, \dots, s;\ t_1 \ge 1,\ t_2 \ge 1,\ \dots,\ t_s \ge 1),$$

ahol a λ_k sajátértékek multiplicitása t_k, $\mathbf{E}_{t_k}$ egy $t_k \times t_k$ típusú egységmátrix, $\mathbf{C}_{t_k}$ pedig

$$\mathbf{C}_{t_k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$t_k \times t_k$ típusú mátrix.

Röviden jelölve:

$$\mathbf{B}_k(\lambda_k) = (a_{ij}), \quad \text{ahol} \quad a_{ij} = \begin{cases} \lambda_k, & \text{ha} \ \ j = i, \\ 1, & \text{ha} \ \ j = i+1, \ \text{és} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Azt a bázist, amelyben a mátrix felveszi a *Jordan*-féle normálalakot, a mátrix *Jordan-bázisának* nevezzük. A hasonlósági transzformáció tehát a bázis, illetve a koordinátarendszer transzformációját jelenti.

Ha az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mátrix sajátértékei valósak, akkor a *Jordan*-féle normálalakját a mátrix karakterisztikus polinomjának és minimálpolinomjának gyöktényezős alakja alapján az alábbi szabályok szerint közvetlenül előállíthatjuk (a komplex esettel a 6. fejezetben foglalkozunk):

1. eset. Az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix mindegyik λ_i sajátértéke különböző. A karakterisztikus polinom egyenlő a minimálpolinommal: $k(\lambda) = m(\lambda)$.

Ekkor a *Jordan*-féle normálalak olyan *diagonálmátrix,* melynek fődiagonálisában a sajátértékek állnak, éspedig – megállapodás szerint – abszolút értékük monoton növekvő sorrendjében. Abszolút értékben egyenlő sajátértékek esetén a negatív sajátérték megelőzi a pozitív sajátértéket. (Ettől eltérő megállapodás is megadható, l. a 4.3. fejezetet).

Ebben az esetben tehát minden *Jordan*-blokk 1×1-es, azaz $\mathbf{B}_i = [\lambda_i]$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

1. példa. Állítsuk elő az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -6 & -6 & -6 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & -3 & -7 & -5 \end{bmatrix}$$

mátrix *Jordan*-alakját. Az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{5 \times 5}$ mátrix sajátértékei: -3, -1, 2, 1, -2, így a $k(\lambda)$ karakterisztikus polinom és az $m(\lambda)$ minimálpolinom gyöktényezős alakja azonos, gyöktényezői elsőfokúak: $k(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+2)$.

Az $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan*-féle normálalakjának blokkjai, a sajátértékek $|-1| \leq |1| < |-2| \leq |2| < |-3|$ monoton növekvő sorrendjére tekintettel: $\mathbf{B}_1[-1]$, $\mathbf{B}_2[1]$, $\mathbf{B}_3[-2]$, $\mathbf{B}_4[2]$, $\mathbf{B}_5[-3]$, és így a *Jordan*-féle normálalakja:

$$\mathbf{J} = \operatorname{diag}(-1, 1, -2, 2, -3) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. eset. Az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus egyenletének vannak többszörös multiplicitású gyökei, de a minimálegyenletének csak egyszeres multiplicitású gyökei vannak.

A *Jordan*-féle normálalak ekkor is tiszta *diagonálmátrix,* mindegyik blokkja 1×1-es.

A karakterisztikus polinomot és a minimálpolinomot tényezőkre bontott alakban vizsgáljuk. A $\mathbf{J}$ *Jordan*-féle mátrix fődiagonálisának elemeit a minimálegyenlet gyökeinek felhasználásával az 1. eset szabálya szerint beírjuk. Majd a blokkok képzését a minimálpolinomot a karakterisztikus polinommá kiegészítő tényezők alapján folytatjuk, ugyancsak az 1. szabály szerint.

2. példa. Állítsuk elő az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 3 & 3 \\ -3 & -4 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & -3 & -1 & -3 \\ 6 & 9 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix *Jordan*-féle normálalakját.

Az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{5\times5}$ mátrix karakterisztikus polinomjának és minimálpolinomjának gyöktényezős alakja:

$$k(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-2)^3, \quad \text{és} \quad m(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

A minimálpolinom szerint kapjuk a $\mathbf{B}_1 = [-1]$, $\mathbf{B}_2 = [2]$ blokkokat, majd a karakterisztikus polinom másodfokú tényezőjéből kapjuk a $\mathbf{B}_3 = [-1]$, a harmadfokú tényezőjéből a $\mathbf{B}_4 = [2]$ és $\mathbf{B}_5 = [2]$ blokkot (ui. a minimálpolinom lineáris tényezők szorzata, így a $(\lambda-2)^2$ maradék tényezőhöz is 2 darab 1×1-es blokk tartozik).

Egy n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan-blokkjainak számát mindegyik* λ_i *sajátértékhez* (egyben a lineárisan független sajátvektorok számát) a lineáris algebrából ismert

$$(*) \qquad m_i = n - \operatorname{rang}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{E})$$

formulával kiszámíthatjuk ($\mathbf{E}$ az $\mathbf{A}$-val megegyező rendű egységmátrix). A sajátértékekhez tartozó blokkok méretét általános esetben a blokkok száma és a minimálpolinom együtt meghatározza. A blokkok pontos megadásához (sajátértékenkénti darabszám és méret) a 3. példában ismertetendő *Frobenius*-formula is felhasználható [K8].

A vizsgált $\mathbf{A}$ mátrix $\lambda_1 = -1$ sajátértékéhez tartozó blokkok száma:

$$m_1 = 5 - \operatorname{rang}\big(\mathbf{A} - (-1)\mathbf{E}\big) = 5 - 3 = 2.$$

Mivel a $\lambda_1 = -1$ sajátérték multiplicitása 2, így csak két 1×1-es blokk tartozhat hozzá.

A $\lambda_1 = 2$ sajátértékéhez tartozó blokkok száma:

$$m_2 = 5 - \operatorname{rang}\big(\mathbf{A} - (+2)\mathbf{E}\big) = 5 - 2 = 3,$$

és mivel multiplicitása 3, így csak három db 1×1-es blokk tartozhat hozzá. Ennél a példánál is, mivel a minimálpolinom lineáris tényezők szorzata, egyértelmű, hogy az $\mathbf{A}$ *Jordan*-alakja $\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{5\times 5}$ diagonálmátrix:

$$\mathbf{J} = \operatorname{diag}(-1, 2, -1, 2, 2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. eset. Az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus egyenletének és minimálegyenletének is többszörös multiplicitású gyöktényezői vannak, akkor a *Jordan*-féle mátrixa kvázidiagonális mátrix.

Ha $k(\lambda) = m(\lambda)$, és nem csak lineáris tényezőik vannak, akkor az 1-nél magasabb fokszámú tényezők blokkjai (2) alakúak. A blokkokat, az $|\lambda_i|$ sajátértékek monoton növekedése és a *blokkok méretének növekedése* sorrendjét betartva képezzük. Ekkor is érvényes az azonos méretű blokkokra az a szabály, hogy az egyenlő méretűek közül a nagyobb abszolút sajátértékkel rendelkező követi a kisebbet, ha pedig egyenlő abszolút értékűek a sajátértékek, de az egyik negatív, akkor a negatív sajátértékű blokk megelőzi a pozitív sajátértékű blokkot.

3. példa. Állítsuk elő az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 9 & 8 & 8 \\ -5 & -8 & -5 & -5 & -5 \\ -5 & -5 & -7 & -4 & -4 \\ -6 & -10 & -10 & -7 & -9 \\ 11 & 16 & 15 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

mátrix *Jordan*-féle normálalakját.

Az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{5\times 5}$ mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja egyenlő:

$$k(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda + 2)^2 (\lambda - 2)^2 (\lambda + 3);$$

ekkor a *Jordan*-féle normálalak blokkjai: $\mathbf{B}_1 = [-3]$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, tehát

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzésként a $(*)$ formulával számítsuk ki a $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ sajátértékekhez tartozó blokkok számát:

$$m_1 = 5 - \operatorname{rang}\big(\mathbf{A} - (-2)\mathbf{E}\big) = 5 - 4 = 1, \quad m_2 = 5 - \operatorname{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 5 - 4 = 1,$$

tehát mindkét kétszeres sajátértékhez egy-egy 2×2-es méretű blokk (egy-egy sajátvektor) tartozik.

Ha $k(\lambda) \neq m(\lambda)$, és nem csupán lineáris tényezőik vannak, akkor először a minimálpolinom tényezői szerint képezzük a blokkokat, az $|\lambda_i|$ monoton növekedése és a *blokkok méretének növekedése* sorrendjét betartva, továbbá a karakterisztikus polinom kiegészítő tényezői alapján folytatjuk a $\mathbf{J}$ mátrix előállítását. Összehasonlítjuk a $k(\lambda)$ és $m(\lambda)$ tényezőit, és azokhoz a tényezőkhöz, amelyeknek kitevője 1-nél nagyobb eltérést mutat, a blokkok méretének megállapításához, (ha közvetlenül nem állapítható meg), felhasználjuk a sajátértékekhez tartozó W_k^s invariáns sajátalterek dimenziójára vonatkozó *Frobenius-féle* [K8]

$$\dim W_k^{s+1} - 2\dim W_k^s + \dim W_k^{s-1} \leq 0 \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

egyenlőtlenségből képzett

$$(4) \qquad B_k(s) = 2 \cdot \dim W_k^s - \dim W_k^{s+1} - \dim W_k^{s-1}, \quad (s = 1, 2, 3, \ldots),$$

formulát, ahol $B_k(s)$ a λ_k sajátértékhez tartozó s méretű blokkok száma, és

$$(5) \qquad W_k^s = \ker(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{E})^s \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, t_k), \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

a t_k pedig a λ_k sajátérték minimálpolinomban lévő tényezőjének fokszáma. Nyilvánvaló, hogy

$$(6) \qquad W_k^0 = \{0\}, \quad \text{és ha} \quad s > t_k, \quad \text{akkor} \quad W_k^s = W_k^{t_k}.$$

Kiszámítjuk ahhoz a sajátértékhez az invariáns alterek dimenziószámát, amelynek a karakterisztikus polinomban eggyel nagyobb a multiplicitása, mint a minimálpolinomban, és alkalmazzuk a (4) formulát a

$$B_k(1),\ B_k(2),\ B_k(3),\ B_k(4),\ \ldots,\ B_k(t_k)$$

értékek kiszámítására.

A λ_k sajátértékhez a $B_k(1)$ értéke az 1×1-es, $B_k(2)$ értéke a 2×2-es, $\ldots$, $B_k(t_k)$ értéke a $t_k \times t_k$ *méretű blokkok számát* adja meg.

4. példa. Állítsuk elő az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & -8 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 8 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix *Jordan*-féle normálalakját, ha a karakterisztikus polinomjának és minimálpolinomjának gyöktényezős alakja:

$$k(\lambda) = (\lambda+6)^2(\lambda+6)^2, \quad m(\lambda) = (\lambda+6)^2(\lambda+6)^2.$$

Az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{4\times 4}$ mátrix minimálpolinomjának is van másodfokú tényezője, ezért a $\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{4\times 4}$ *Jordan*-alak kvázidiagonális mátrix, és mivel egyik tényezője első fokú, ezért a $\mathbf{J}$ blokkjai a minimálpolinomból:

$$\mathbf{B}_1 = [-2], \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix},$$

a karakterisztikus polinom maradék tényezőjéből: $\mathbf{B}_3 = [-2]$, tehát

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés: a $\lambda_1 = -2$ kétszeres sajátértékhez

$$m_1 = n - \operatorname{rang}(\mathbf{A} + 2\mathbf{E}) = 4 - 2 = 2 \text{ db blokk tartozik, vagyis } 2 \text{ db } 1 \times 1\text{-es.}$$

A $\lambda_2 = -6$ kétszeres sajátértékhez

$$m_2 = n - \operatorname{rang}(\mathbf{A} + 6\mathbf{E}) = 4 - 3 = 1 \text{ db blokk tartozik, vagyis } 1 \text{ db } 2 \times 2\text{-es.}$$

Ellenőrizzük az eredményt a (4) *Frobenius*-formulával.

Tegyük fel, hogy csak a karakterisztikus polinom gyöktényezős alakját ismerjük. Mivel a $(\lambda+2)$ tényezőjének fokszáma $t_k = 2$, így a *Frobenius*-formulát $s = 1, 2$ esetre alkalmazzuk (természetesen a minimálpolinom ismeretében elegendő $s = 1$-re alkalmazni).

Számítsuk ki a $\lambda_1 = -2$ sajátértékhez tartozó invariáns sajátalterek dimenzióit:

$$d_0 = 0,$$

$$d_1 = \dim\big(\ker(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\big) = \dim\big(\ker(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})\big) = 2, \quad \big(\mathbf{E} = \operatorname{diag}(1,1,1,1)\big),$$

$$d_2 = \dim\Big(\ker{(\mathbf{A} + 2\mathbf{E})}^2\Big) = 2, \quad d_i = 2 \quad i \geq 2.$$

A (4) *Frobenius*-formula szerint:

$$B_1(1) = 2 \cdot \dim W_1^1 - \dim W_1^{1+1} - \dim W_1^{1-1} =$$
$$= 2 \cdot d_1 - d_2 - d_0 = 2 \cdot 2 - 2 - 0 = 2,$$
$$B_1(2) = 2 \cdot d_2 - d_3 - d_1 = 2 \cdot 2 - 2 - 2 = 0,$$

tehát a $\lambda_1 = -2$ sajátértékhez nem tartozik 2×2-es blokk, de van 2 darab 1×1-es blokkja.

Mivel a $(\lambda + 6)$ tényezőjének fokszáma $t_k = 2$, így a (4) *Frobenius*-féle formulát $s = 1, 2$ esetre alkalmazzuk.

A $\lambda_2 = -6$ sajátértékhez tartozó invariáns sajátalterek dimenziói:

$$d_0 = 0,$$
$$d_1 = \dim\big(\ker(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E})\big) = \dim\big(\ker(\mathbf{A} + 6\mathbf{E})\big) = 1, \quad \mathbf{E} = \operatorname{diag}(1,1,1,1),$$
$$d_2 = \dim\big(\ker(\mathbf{A} + 6\mathbf{E})^2\big) = 2, \quad d_i = 2 \quad i \geq 2.$$

A (4) formula szerint:

$$B_2(1) = 2 \cdot \dim W_2^1 - \dim W_2^{1+1} - \dim W_2^{1-1} =$$
$$= 2 \cdot d_1 - d_2 - d_0 = 2 \cdot 1 - 2 - 0 = 0,$$
$$B_2(2) = 2 \cdot d_2 - d_3 - d_1 = 2 \cdot 2 - 2 - 1 = 1,$$

tehát a $\lambda_2 = -6$ sajátértékhez 1 darab 2×2-es blokk tartozik. A kétféle számítással kapott *Jordan*-blokkok azonosak.

5. példa. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -8 & -6 & -9 \\ 0 & 4 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 10 & 10 & 8 & 10 \\ 2 & 6 & 6 & 7 & 7 \\ -4 & -12 & -12 & -10 & -12 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja: $k(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^4$, $m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

Az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{5\times5}$ minimálpolinomja alapján a *Jordan*-alak két blokkja felírható:

$$\mathbf{B}_1 = [1], \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A $k(\lambda)$, $m(\lambda)$ tényezőit összehasonlítva látjuk, hogy a $(\lambda - 2)$ tényező kitevői között 2 a különbség, így egy 2×2-es vagy két 1×1-es blokk következhet. Mivel a minimálpolinom $(\lambda - 2)$ tényezőjének fokszáma $t_k = 2$, így a (4) *Frobenius*-formulát elég $s = 1, 2$ esetre alkalmazni.

Számítsuk ki a $\lambda_2 = 2$ sajátértékhez tartozó invariáns sajátalterek dimenzióit:

$$d_0 = 0,$$

$$d_1 = \dim\bigl(\ker(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E})\bigr) = \dim\bigl(\ker(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\bigr) = 3, \quad \bigl(\mathbf{E} = \mathrm{diag}(1,1,1,1,1)\bigr),$$

$$d_2 = \dim\bigl(\ker(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})^2\bigr) = 4, \quad d_i = 4 \quad i \geq 2.$$

A (4) formula szerint:

$$B_2(1) = 2 \cdot \dim W_2^1 - \dim W_2^{1+1} - \dim W_2^{1-1} =$$
$$= 2 \cdot d_1 - d_2 - d_0 = 2 \cdot 3 - 4 - 0 = 2,$$
$$B_2(2) = 2 \cdot d_2 - d_3 - d_1 = 2 \cdot 4 - 4 - 3 = 1,$$

tehát a $\lambda_2 = 2$ négyszeres sajátértékhez 2 darab 1×1-es, és 1 darab 2×2-es blokk tartozik. A 2×2-es blokkot már felírtuk, így

$$\mathbf{B}_3 = [2], \quad \mathbf{B}_4 = [2],$$

vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan*-féle normálalakja:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés: ha pusztán a sajátértékeket ismerem, akkor mivel a $\lambda_2 = 2$ négyszeres sajátértékhez

$$m_2 = 5 - \mathrm{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 5 - 2 = 3 \text{ db blokk},$$

a $\lambda_1 = 1$ egyszeres sajátértékhez pedig 1×1-es blokk tartozik, így az 5×5-ös *Jordan*-alak felírásához még 1 db 2×2-es, és 2 db 1×1-es blokkra van szükség.

6. példa. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -13 & -10 & -11 & -13 \\ 1 & 5 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 11 & 10 & 10 & 11 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 3 \\ -3 & -9 & -7 & -9 & -8 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja:

$$k(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^4, \quad m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2.$$

Az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{5\times5}$mátrix minimálpolinomja alapján két blokk azonnal felírható:

$$\mathbf{B}_1 = [1], \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A $k(\lambda)$, $m(\lambda)$ tényezőit összehasonlítva látjuk, hogy a $(\lambda-2)$ tényező kitevői között most is 2 a különbség, így egy 2×2-es vagy két 1×1-es blokk következhet. Mivel a minimálpolinom $(\lambda-2)$ tényezőjének fokszáma $t_k=2$, így a (4) *Frobenius*-formulát elég $s=1,2$ esetre alkalmazni.

Számítsuk ki a $\lambda_2=2$ sajátértékhez tartozó invariáns sajátalterek dimenzióit $\big(\mathbf{E}=\operatorname{diag}(1,1,1,1,1)\big)$:

$$d_0=0,$$

$$d_1=\dim\big(\ker(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{E})\big)=\dim\big(\ker(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\big)=2,$$

$$d_2=\dim\Big(\ker\left(\mathbf{A}-2\mathbf{E}\right)^2\Big)=4,\quad d_i=4\quad i\geq 2.$$

A (4) formula szerint:

$$B_2(1)=2\cdot\dim W_2^1-\dim W_2^{1+1}-\dim W_2^{1-1}=2\cdot d_1-d_2-d_0=2\cdot 2-4-0=0,$$

tehát a $\lambda_2=2$ sajátértékhez nem tartozik 1×1-es blokk.

$$B_2(2)=2\cdot d_2-d_3-d_1=2\cdot 4-4-2=2,$$

tehát a $\lambda_2=2$ sajátértékhez 2 darab 2×2-es blokk tartozik. Egyet már felhasználtunk, ezért a $\mathbf{J}$ mátrix harmadik blokkja: $\mathbf{B}_3=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$, és az $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan*-féle normálalakja:

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&1\\0&0&0&0&2\end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés: ha pusztán a sajátértékeket ismerem, akkor mivel a $\lambda_2=2$ négyszeres sajátértékhez most

$$m_2=5-\operatorname{rang}(\mathbf{A}-2\mathbf{E})=5-3=2\text{ db blokk},$$

a $\lambda_1=1$ egyszeres sajátértékhez pedig 1×1-es blokk tartozik, így az 5×5-ös *Jordan*-alak felírásához még 2 db 2×2-es, blokkra van szükség. A kétféle számítással kapott eredmény azonos.

Vegyük észre, hogy az 5. és a 6. példa mátrixának karakterisztikus és minimálpolinomja azonos, de a *Jordan*-féle normálalakjuk különböző.

Megjegyzés. A karakterisztikus polinom többszörös sajátértékeihez tartozó blokkok darabszámából a blokkok méretére nem tudunk minden esetben egyértelmű választ adni. Ilyen esetben az egyértelműséget a minimálpolinom segítségével biztosíthatjuk, vagy alkalmazzuk a *Frobenius*-formulát. Tekintsük az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&-1&-1&-1\\0&0&1&1&1\\0&-1&0&1&0\\0&0&1&1&1\\0&1&-1&-2&-1\end{bmatrix}\quad \text{és}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&-1&-1&-2&-2\\0&0&1&1&1\\0&1&1&2&2\\0&1&1&2&2\\0&-1&-2&-3&-3\end{bmatrix}$$

mátrixokat.

Az $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{5\times5}$ mátrix karakterisztikus polinomja: $k(\lambda)=\lambda^5$, azaz a $\lambda_1=0$ 5-szörös sajátérték, és a *Jordan*-alakjához tartozó blokkok száma:

$$m_{\mathbf{A}}=5-\operatorname{rang}(\mathbf{A}-0\cdot\mathbf{E})=5-2=3.$$

A $\mathbf{B}\in\mathbf{R}^{5\times5}$ mátrix karakterisztikus polinomja: $k(\lambda)=\lambda^5$, azaz a $\lambda_1=0$ 5-szörös sajátérték és a *Jordan*-alakjához tartozó blokkok száma:

$$m_{\mathbf{B}}=5-\operatorname{rang}(\mathbf{B}-0\cdot\mathbf{E})=5-2=3.$$

Ennek mindkét esetben eleget lehet tenni 1 db 3×3-as és 2 db 1×1-es blokkal, vagy 2 db 2×2-es és 1 db 1×1-es blokkal.

Az $\mathbf{A}$ mátrix minimálpolinomja: $m(\lambda)=\lambda^2$, és a $\mathbf{B}$ mátrix minimálpolinomja: $m(\lambda)=\lambda^3$, ezért az $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan*-blokkjai: 2 db 2×2-es, és 1 db 1×1-es blokk, a $\mathbf{B}$ mátrix *Jordan*-blokkjai pedig: 1 db 3×3-as, és 2 db 1×1-es blokk. Az $\mathbf{A}$, illetve $\mathbf{B}$ mátrix $\mathbf{J_A}$-val, illetve $\mathbf{J_B}$-vel jelölt *Jordan*-féle normálalakja:

$$\mathbf{J_A}=\left[\begin{array}{cc|cc|c}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0\end{array}\right],\quad \mathbf{J_B}=\left[\begin{array}{ccc|c|c}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

A (4) *Frobenius*-formula alkalmazása:

Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix minimálpolinomja másodfokú, fokszáma $t_k=2$, így a (4) formulát elég $s=1,2$ esetre alkalmazni.

Számítsuk ki a $\lambda_1=0$ sajátértékhez tartozó invariáns sajátalterek dimenzióit $\big(\mathbf{E}=\operatorname{diag}(1,1,1,1,1)\big)$:

$$d_0=0,$$

$$d_1=\dim\big(\ker(\mathbf{A}-0\cdot\mathbf{E})\big)=3,$$

$$d_2=\dim\Big(\ker(\mathbf{A}-0\cdot\mathbf{E})^2\Big)=5,\quad d_i=5\quad i\geq2.$$

A (4) *Frobenius*-formula szerint:

$$B_1(1) = 2 \cdot \dim W_1^1 - \dim W_1^{1+1} - \dim W_1^{1-1} =$$
$$= 2 \cdot d_1 - d_2 - d_0 = 2 \cdot 3 - 5 - 0 = 1,$$
$$B_1(2) = 2 \cdot d_2 - d_3 - d_1 = 2 \cdot 5 - 5 - 3 = 2,$$

tehát az $\mathbf{A}$ mátrix $\lambda_1 = 0$ ötszörös sajátértékéhez 1 *darab* 1×1*-es blokk, és* 2 *darab* 2×2*-es blokk tartozik.*

Mivel az $\mathbf{B}$ mátrix minimálpolinomja harmadfokú, fokszáma $t_k = 3$, így a (4) formulát elég $s = 1, 2, 3$ esetre alkalmazni.

Számítsuk ki a $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó invariáns sajátalterek dimenzióit $\big(\mathbf{E} = \mathrm{diag}(1,1,1,1,1)\big)$:

$$d_0 = 0,$$
$$d_1 = \dim\big(\ker(\mathbf{B} - 0 \cdot \mathbf{E})\big) = 3,$$
$$d_2 = \dim\big(\ker(\mathbf{B} - 0 \cdot \mathbf{E})^2\big) = 4,$$
$$d_3 = \dim\big(\ker(\mathbf{B} - 0 \cdot \mathbf{E})^3\big) = 5, \quad d_i = 5 \quad i \geq 3.$$

A (4) *Frobenius*-formula szerint:

$$B_1(1) = 2 \cdot \dim W_1^1 - \dim W_1^{1+1} - \dim W_1^{1-1} =$$
$$= 2 \cdot d_1 - d_2 - d_0 = 2 \cdot 3 - 4 - 0 = 2,$$
$$B_1(2) = 2 \cdot d_2 - d_3 - d_1 = 2 \cdot 4 - 5 - 3 = 0,$$
$$B_1(3) = 2 \cdot d_3 - d_4 - d_2 = 2 \cdot 5 - 5 - 4 = 1,$$

tehát a $\mathbf{B}$ mátrix $\lambda_1 = 0$ ötszörös sajátértékéhez 2 *darab* 1×1*-es blokk,* 0 *számú* 2×2*-es blokk, valamint* 1 *darab* 3×3*-as blokk tartozik.*

2. A transzformáció mátrixának kiszámítása

Az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszerek pontos megoldásához az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ együtthatómátrix *Jordan*-féle normálalakja mellett arra a reguláris $\mathbf{T} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mátrixra is szükség van, amellyel végzett hasonlósági transzformáció előállítja az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{J}$-vel jelölt

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \cdot (\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{n \times n}) \tag{1}$$

Jordan-féle normálalakját.

Az (1) helyett tekintsük az

$$\mathbf{AT} = \mathbf{TJ}, \quad \text{illetve} \quad \mathbf{AT} - \mathbf{TJ} = \mathbf{0} \tag{2}$$

mátrixegyenletet.

A (2) egyenletből egy n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan*-féle alakra való transzformációjához a $\mathbf{T}$ transzformációs mátrix n^2 számú ismeretlen eleme n számú n ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldásával adható meg, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{J}$ elemei ismertek.

A következő módszer – mint már említettük – különösen előnyösen alkalmazható minden olyan esetben, ha a megoldandó feladathoz a sajátvektorok kiszámítása egyébként is szükséges.

1. lépés. A $\mathbf{J}$ mátrixot az 1. pont szabályai szerint az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei felhasználásával létrehozzuk.

2. lépés. *a*) Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak n számú különböző sajátértéke van, akkor az $\mathbf{A}$ lineárisan független sajátvektorainak száma megegyezik a rendszámával. Ekkor a sajátvektorok alkotják a $\mathbf{Q}$ modálmátrixot, mellyel:

$$\mathbf{J} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}.$$

Ha a $\mathbf{Q}$ mátrix oszlopvektorainak sorrendjét – miként azt már említettük – úgy választjuk meg, ahogy a sajátértékek követik egymást az 1. pont szerint felírt $\mathbf{J}$ mátrixban, akkor *a modálmátrix alakra* megegyezik a más módszerrel számított hasonlósági transzformáció $\mathbf{T}$ *mátrixával.*

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix $|\lambda_i|$ sajátértékek növekvő sorrendjének megfelelő lineárisan független sajátvektorok:

$$\mathbf{v}(\lambda_1),\ \mathbf{v}(\lambda_2),\ \ldots,\ \mathbf{v}(\lambda_n),$$

akkor a $\mathbf{T}$ mátrix oszlopvektorait ezek a sajátvektorok ilyen sorrendben alkotják:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix}\mathbf{v}(\lambda_1) & \mathbf{v}(\lambda_2) & \ldots & \mathbf{v}(\lambda_n)\end{bmatrix}, \quad \text{és így}$$
$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \left(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}\right).$$

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus egyenletének van többszörös gyöke, de a minimálegyenletének mindegyik gyöke egyszeres, akkor is a szabály szerint felírt *Jordan*-féle mátrix fődiagonálisában lévő sajátértékeknek megfelelő sorrendben kell a sajátvektorokat elhelyezni a transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixába.

1. példa. Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus és minimálpolinomja:

$$k(\lambda) = (\lambda - 12)(\lambda - 6)^2, \quad m(\lambda) = (\lambda - 12)(\lambda - 6).$$

Az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ mátrix sajátértékeihez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{v}_1(6) = [-1, 0, 1]^T, \quad \mathbf{v}_2(6) = [2, 1, 0]^T, \quad \mathbf{v}(12) = [1, -2, 1]^T.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix szabályosan felírt *Jordan*-féle normálalakja és a transzformáció mátrixa ($\mathbf{T} = \mathbf{Q}$):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(6) & \mathbf{v}(12) & \mathbf{v}_2(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{T} = 6 \neq 0.$$

A $\mathbf{T}$ mátrix inverze és a számítás eredményének ellenőrzése:

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -6 \\ 2 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \mathbf{J}.$$

b) Ha az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ mátrix minimálegyenletének is van többszörös gyöke – a lineárisan független sajátvektorainak száma kisebb, mint a rendszáma –, akkor általában a $\mathbf{T}$ mátrixba az 1 multiplicitású sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat a sajátértékek $\mathbf{J}$ mátrixbeli 1×1-es blokkjainak megfelelően írjuk be, továbbá a $k \times k$-s blokkok sajátértékeinek sajátvektorait az első oszlopaik $\mathbf{J}$-beli oszlopainak megfelelően vesszük fel. Ezt követően a $k \times k$-s blokk többi oszlopaiba ismeretlen koordinátájú oszlopvektorokat teszünk. Ezzel a módszerrel a meghatározandó ismeretlenek számát lényegesen csökkenthetjük. Ui. legyen az $\mathbf{A}$-nak $m < n$ számú lineárisan független sajátvektora, akkor n^2 számú ismeretlen helyett csak $(n-m)n$ számú ismeretlent kell meghatározni a transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixának felírásához. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{T}$ mátrix ismeretlen elemeire felírt

$$\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{J} = \mathbf{0} \tag{3}$$

mátrixegyenlet megoldása annyi lineáris egyenletrendszer megoldására vezethető vissza, amennyi ismeretlen oszlopvektort kellett $\mathbf{T}$-ben felvenni a sajátvektorok mellett.

2. példa. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & -4 & -3 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus- és minimálpolinomja:

$$k(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^2, \quad m(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2.$$

Az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{4\times 4}$mátrix sajátértékeihez tartozó lineárisan független sajátvektorok (a $\lambda = -1$ kétszeres sajátértékhez csak egy lineárisan független sajátvektor, $\mathbf{v}$ tartozik):

$$\mathbf{v}_1(0) = [3, 0, -3, 1]^T, \quad \mathbf{v}_2(0) = [3, 1, -3, 0]^T, \quad \mathbf{v}(-1) = [-2, 1, 3, -2]^T.$$

Az **A** mátrix *Jordan*-féle normálalakja a sajátértékek ismeretében az 1. pont szerint közvetlenül felírható:

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

A transzformáció **T** mátrixában az oszlopvektorok sorrendje a **J**-re való tekintettel: a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat az 1. és 4. oszlopba, a -1 sajátértékhez tartozó sajátvektort a 2. oszlopba, az ismeretlen **x** vektort pedig a 3. oszlopba kell helyezni, azaz a sorrend:

$$\mathbf{v}_1(0),\quad \mathbf{v}(-1),\quad \mathbf{x}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^T,\quad \mathbf{v}_2(0).$$

A transzformáció **T** mátrixának feltételezett alakja $\mathbf{T}_k$:

$$\mathbf{T}_k=\begin{bmatrix}3&-2&x_1&3\\0&1&x_2&1\\-3&3&x_3&-3\\1&-2&x_4&0\end{bmatrix}$$

és az $\mathbf{AT}_k-\mathbf{T}_k\mathbf{J}=\mathbf{0}$ egyenlet:

$$(*)\qquad \mathbf{AT}_k-\mathbf{T}_k\mathbf{J}=\begin{bmatrix}0&0&3x_1-3x_2+x_3-3x_4+2&0\\0&0&-x_1-5x_2-3x_3-6x_4-1&0\\0&0&-3x_1-3x_2-3x_3-3x_4-3&0\\0&0&2x_1+6x_2+4x_3+7x_4+2&0\end{bmatrix}=\mathbf{0},$$

melyben szükséges, hogy az ismert vektoroknak megfelelő oszlopok minden eleme 0 legyen.

A $(*)$ egyenletből, a **3. oszlop** $=$ **0** egyenletnek megfelelően, felírható a

$$\left.\begin{aligned}3x_1-3x_2+x_3-3x_4+2&=0\\-x_1-5x_2-3x_3-6x_4-1&=0\\-3x_1-3x_2-3x_3-3x_4-3&=0\\2x_1+6x_2+4x_3+7x_4+2&=0\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszer, melynek triviálistól különböző egyparaméteres megoldásvektora:

$$\mathbf{x}=\left[-\frac{5}{2}-2p,\ \frac{5}{2}+3p,\ -2p-1\right]^T.$$

A p paramétert úgy kell megválasztani, hogy lineárisan független vektorrendszert kapjunk. Például $p=1$ választással

$$\mathbf{x}=\left[-\frac{9}{2},\ 1,\ \frac{11}{2},\ -3\right]^T,$$

és a hasonlósági transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixa:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -\frac{9}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & \frac{11}{2} & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

A $\det \mathbf{T} = -\frac{1}{2} \neq 0$, tehát $\mathbf{T}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek.

Ellenőrzésként $\mathbf{T}^{-1}$ kiszámításával végezzük el a hasonlósági transzformációt:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 & -5 \\ 1 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -2 & -6 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & -4 & -3 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -\frac{9}{2} & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & \frac{11}{2} & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}.$$

Az 1. pont szabályai szerint felírt $\mathbf{J}$ és a kiszámított $\mathbf{J}$ azonos.

3. példa. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix *Jordan*-féle normálalakját és a transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixát.

Az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{5\times 5}$ mátrix karakterisztikus- és minimálpolinomja, valamint sajátvektorai:

$$k(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^4, \quad m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2,$$

$$\mathbf{v}_1(3) = [0, -1, 1, 0, 0]^T, \quad \mathbf{v}_2(3) = [0, 0, 0, -1, 1]^T, \quad \mathbf{v}(2) = [-1, 1, 0, 0, 0]^T.$$

(A 2 sajátértékhez 4 helyett 2 sajátvektor tartozik).

A $\mathbf{J}$ mátrix blokkjai: $\mathbf{B}_1 = [1]$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, és így

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Most a $\mathbf{T}$ mátrixot formálisan két ismeretlen oszlopvektorral tudjuk felírni. A $\mathbf{J}$ blokkjaira tekintettel az első oszlopba $\mathbf{v}(2)$-t, a második oszlopba $\mathbf{v}_1(3)$-at, a harmadik oszlopba az ismeretlen $\mathbf{x}$ vektort, a 4. oszlopba $\mathbf{v}_2(3)$-at, az 5. oszlopba az ismeretlen $\mathbf{y}$ vektort helyezzük:

$$\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 \\ 1 & -1 & x_2 & 0 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & y_3 \\ 0 & 0 & x_4 & -1 & y_4 \\ 0 & 0 & x_5 & 1 & y_5 \end{bmatrix}.$$

A (1) egyenletformát használva:

$$\mathbf{A}\mathbf{T}_k - \mathbf{T}_k\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_1 & 0 & -y_1 \\ 0 & 0 & 2x_1 + x_2 + x_3 + 1 & 0 & 2y_1 + y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & -x_1 - x_2 - x_3 - 1 & 0 & -y_1 - y_2 - y_3 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & 0 & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \\ 0 & 0 & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 & 0 & -y_1 - y_2 - y_3 - y_4 - y_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Az ismeretlenek együtthatói mindkét egyenletrendszerben azonosak, csak a konstans tagok különböznek. A

harmadik oszlop = 0, ötödik oszlop = 0 egyenletrendszer

triviálistól különböző kétparaméteres megoldásvektora:

$$\mathbf{x} = [0, -1 - p, p, 1 - q, q]^T, \quad \mathbf{y} = [0, -p, p, -1 - q, q]^T.$$

Például $p = 1$, $q = 1$ választással: $\mathbf{x} = [0, -2, 1, 0, 1]^T$, $\mathbf{y} = [0, -1, 1, -2, 1]^T$, olyan két lineárisan független vektort kaptunk, amelyek az $\mathbf{A}$ mátrix 3 sajátvektorával együtt lineárisan független vektorrendszert alkotnak.

A kiszámított vektorokkal felírt $\mathbf{T}$ mátrix és inverze:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}.$$

Az Egerváry példák ([D4]**, 50–54. oldal) megoldása a dolgozatban leírt algoritmussal:**

1. példa. A nemderogatórius $\mathbf{A}$ mátrix helyes elemekkel ($a_{22} = 3$), a karakterisztikus és a minimálpolinom, valamint a sajátvektorok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} &k(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2, \quad m(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2, \\ &\mathbf{v}_1(-1) = [1, 0, 1, 0]^T, \quad \mathbf{v}_2(2) = [0, 2, 0, 1]^T. \end{aligned}$$

A sajátértékek alapján közvetlenül felírható a *Jordan*-féle normálalak:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{T}$ transzformációmátrix két ismeretlen oszlopvektorát 2. pont b) szerint felvéve:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{x} \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & y_1 \\ 0 & x_2 & 2 & y_2 \\ 1 & x_3 & 0 & y_3 \\ 0 & x_4 & 1 & y_4 \end{bmatrix}.$$

Az

$$\mathbf{A}\mathbf{T} - \mathbf{T}\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 4x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 1 & 0 & 2y_1 - y_2 - 4y_3 + 2y_4 \\ 0 & 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 & 0 & 2y_1 + 2y_2 - 2y_3 - 4y_4 - 2 \\ 0 & 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 1 & 0 & 2y_1 - y_2 - 4y_3 + 2y_4 \\ 0 & x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 & 0 & y_1 + 2y_2 - y_3 - 4y_4 - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

mátrixegyenlet-rendszer megoldása:

2. oszlop = 0 rendszer egyparaméteres megoldása: $\mathbf{x} = [p, 1, p, 1]^T$,

4. oszlop = 0 rendszer egyparaméteres megoldása: $\mathbf{y} = [2, 2p, 1, p]^T$.

$$p = 1 \text{ választással } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ és inverze: } \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az **A** mátrix *Jordan*-alakja a kiszámított **T** és $\mathbf{T}^{-1}$ felhasználásával:

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

mely azonos a szabály szerint felírt **J**-vel.

2. példa. A derogatórius nilpotens

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -10 \end{bmatrix}$$

mátrix, a karakterisztikus és a minimálpolinom, valamint a sajátvektorok:

$$k(\lambda) = \lambda^4, \quad m(\lambda) = \lambda^3, \quad \mathbf{v}_1 = [0, -1, 0, 1]^T, \quad \mathbf{v}_2 = \left[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, 1, 0\right]^T.$$

A sajátértékek alapján közvetlenül felírható a *Jordan*-féle normálalak:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A **T** transzformációmátrix két ismeretlen oszlopvektorát a 2. *b*) szerint helyezzük el:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & y_1 & \frac{1}{5} \\ -1 & x_2 & y_2 & \frac{7}{5} \\ 0 & x_3 & y_3 & 1 \\ 1 & x_4 & y_4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az

$$\mathbf{AT} - \mathbf{TJ} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 & 2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - x_1 & 0 \\ 0 & -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 4x_4 + 1 & -3y_1 + 4y_2 - 5y_3 + 4y_4 - x_2 & 0 \\ 0 & 8x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 4x_4 & 8y_1 - 4y_2 + 4y_3 - 4y_4 - x_3 & 0 \\ 0 & 15x_1 - 10x_2 + 11x_3 - 10x_4 - 1 & 15y_1 - 10y_2 + 11y_3 - 10y_4 - x_4 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

mátrixegyenlet-rendszer megoldása:

2. oszlop = 0 rendszer kétparaméteres megoldása:

$$\mathbf{x} = [p, 7p + 1 - q, 5p + 1, q]^T,$$

$p = -1$, $q = 1$ választással: $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [-1, -7, -4, 1]^T$, melynek felhasználásával a

3. oszlop = 0 rendszer kétparaméteres megoldása:

$$\mathbf{y} = [p, 7p + 12 - q, 5p + 11, q]^T$$

és $p = -1$, $q = 1$ választással: $\mathbf{y} = [-1, 4, 6, 1]^T$, tehát

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \frac{1}{5} \\ -1 & -7 & 4 & \frac{7}{5} \\ 0 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{és inverze:} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -15 & 10 & -11 & 11 \\ 17 & -11 & 12 & -11 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 80 & -50 & 55 & -50 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan*-alakja a kiszámított $\mathbf{T}$ felhasználásával:

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mely a szabály szerint felírttal azonos.

3. Az $e^{\mathbf{A}t}$ exponenciális mátrixfüggvény normálalakja

Ha a

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} \tag{1}$$

egyenlőséget $\mathbf{T}$-vel balról, $\mathbf{T}^{-1}$-gyel pedig jobbról szorozzuk, akkor az $\mathbf{A}$ mátrixot ismert $\mathbf{J}$ esetén

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1} \tag{2}$$

alakban kapjuk.

Legyenek az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ $(m \leq n)$, amelyekhez az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{J}$ *Jordan*-féle normálalakjában a $\mathbf{B}_1(\lambda_1)$, $\mathbf{B}_2(\lambda_2)$, $\ldots$, $\mathbf{B}_m(\lambda_m)$ különböző blokkjai tartoznak. Jelölje $e_1, e_2, \ldots, e_m$ a blokkok rendjét.

A $\mathbf{J}$ mátrixot kvázidiagonális mátrixnak tekintjük, és így a

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{B}_m(\lambda_m) \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\big(\mathbf{B}_1(\lambda_1), \mathbf{B}_2(\lambda_2), \ldots, \mathbf{B}_m(\lambda_m)\big)$$

jelölést használjuk $(m \leq n)$.

Ekkor a t paraméterrel adott $e^{t\mathbf{A}}$ exponenciális mátrixfüggvény alakja:

$$e^{t\mathbf{A}} = e^{\left(t\cdot\mathbf{T}\cdot\mathrm{diag}\left(\mathbf{B}_1(\lambda_1),\mathbf{B}_2(\lambda_2),\ldots,\mathbf{B}_m(\lambda_m)\right)\cdot\mathbf{T}^{-1}\right)} = \tag{3}$$

$$= \mathbf{T}\cdot\mathrm{diag}\left(e^{t\cdot\mathbf{B}_1(\lambda_1)}, e^{t\cdot\mathbf{B}_2(\lambda_2)}, \ldots, e^{t\cdot\mathbf{B}_m(\lambda_m)}\right)\cdot\mathbf{T}^{-1}.$$

Az

$$e^{t\,\mathbf{B}_k(\lambda_k)} = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l(\lambda_k\mathbf{E}_k+\mathbf{C}_{k,1})^l}{l!} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{\mathbf{C}_{k,p}t^p}{p!}\sum_{l=p}^{\infty}\frac{(\lambda_k t)^{l-p}}{(l-p)!}$$

egyenlőség jobb oldala kifejtés és rendezés után, a

$$\mathbf{C}_{k,p} = (\mathbf{C}_{k,1})^p = \mathbf{0}, \quad \text{ha} \quad p \geq e_k, \quad \text{és} \quad \sum_{l=p}^{\infty}\frac{(\lambda_k t)^{l-p}}{(l-p)!} = e^{\lambda_k t}$$

egyenlőségek felhasználásával

$$e^{t\,\mathbf{B}_k(\lambda_k)} = e^{\lambda_k t}\sum_{p=0}^{e_k-1}\frac{t^p}{p!}\mathbf{C}_{k,p} \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{4}$$

alakra hozható, ahol $\mathbf{C}_{k,0} = \mathbf{E}_k$.

A (3) és (4) formulák *az exponenciális mátrixfüggvény normálalakját* adják [K4].

Helyettesítsünk $t = 1$-et a (3) és (4) formulákba. Ekkor látjuk, hogy ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ $(m \leq n)$ számok a sajátértékei, akkor

$$e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_m}, \quad e^{\lambda_k} \neq 0$$

számok az $e^{\mathbf{A}}$ exponenciális mátrix sajátértékei, és $\mathbf{A}$ valamint $e^{\mathbf{A}}$ mátrixok megfelelő *Jordan*-blokkjai azonos rendűek.

Alkalmazzuk a (4) formulát általános alakban $\mathbf{A}$ egy olyan *Jordan*-blokkjára, amely egy q multiplicitású λ sajátértékhez tartozik, azaz írjuk fel az $e^{t\mathbf{A}}$ *exponenciális mátrixfüggvény rögzített* λ sajátértékéhez tartozó blokkjának q-*adrendű* *normálalakját, melyet* $e^{\mathbf{A}(\lambda)t}$-val jelölünk:

$$(5)\qquad e^{\mathbf{A}(\lambda)t} = e^{\lambda t}\left(\mathbf{E} + \frac{t}{1!}\mathbf{C}_1 + \frac{t^2}{2!}\mathbf{C}_2 + \ldots + \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}\mathbf{C}_{q-1}\right) =$$

$$= e^{\lambda t}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}_q + \frac{t}{1!}\begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_q + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!}\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}_q \right) =$$

$$= e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \ldots & \frac{t^{(q-2)}}{(q-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}_q .$$

Tehát, ha ismert az $e^{t\mathbf{A}}$ exponenciális mátrixfüggvény $\mathbf{A}$ mátrixának *Jordan*-féle normálalakja, akkor közvetlenül felírható az $e^{t\mathbf{A}}$ exponenciális mátrixfüggvény normálalakja is, ha a blokkokat (5) szerint képezzük.

Példa. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -6 & 10 & -7 \\ 5 & 4 & -9 & 6 \\ 3 & 2 & -6 & 4 \\ 3 & 3 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix karakterisztikus- és minimálpolinomja:

$$k(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^3.$$

Figyelembe véve a karakterisztikus és minimálpolinom egyenlőségét és az 1. fejezet 3. esete szerint, betartva a $\mathbf{B}_1 = [1]$, $\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ blokkok növekedési sorrendjét:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Az $e^{t\mathbf{A}}$ exponenciális mátrixfüggvény normálalakja (5) szerint képezve:

$$e^{\mathbf{A}t} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-t} \left(\mathbf{E}_4 + \frac{t}{1!}\mathbf{C}_{1,1} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{C}_{1,2} \right) = e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ e^{-t} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t}{1!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t^2}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & \frac{t}{1!}e^{-t} & \frac{t^2}{2!}e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} & \frac{t}{1!}e^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Az (5) egyenlőség utolsó (jobb oldali) tagja alapján – az $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan*-féle normálalakjának ismeretében – közvetlenül is felírhatjuk az $e^{t\mathbf{A}}$ exponenciális mátrixfüggvény normálalakját.

Például, ha egy $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{5\times 5}$ mátrix *Jordan*-féle normálalakja:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\mathbf{B}_1 = \left[e^{2t}\right], \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} e^{4t} & te^{4t} \\ 0 & e^{4t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \left[e^{7t}\right], \quad \mathbf{B}_1 = \left[e^{7t}\right],$$

és így az $e^{t\mathbf{A}}$exponenciális mátrixfüggvény normálalakja:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & te^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{7t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{7t} \end{bmatrix}.$$

4. Az állandó együtthatójú differenciálegyenlet-rendszerek megoldása

Az állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer mátrix alakja:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t), \tag{1}$$

ahol az $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ állandó együtthatókból alkotott $n \times n$-es mátrix,

$$\mathbf{x}(t) = \big[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big]^T$$

pedig az ismeretlen függvényvektor.

A megoldást $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}(t)$ alakban keressük. Behelyettesítve az (1) egyenletbe:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}(t) + e^{\mathbf{A}t}\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v}(t),$$

amelyből

$$e^{\mathbf{A}t}\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

és mivel

$$\det e^{\mathbf{A}t} = e^{t\,\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}} \neq 0$$

(ahol $\mathrm{Tr}\,\mathbf{A}$ az $\mathbf{A}$ mátrix nyoma, azaz a diagonális elemeinek összege), ezért az $e^{\mathbf{A}t}$ mátrix reguláris [D3], [K4].

A (2) egyenletből

$$\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \mathbf{0},$$

és ebből megoldásként a $\mathbf{v} = \mathbf{c}$, $n \times n$ típusú oszlopvektort kapjuk, melynek elemei tetszőleges állandók.

Az (1) állandó együtthatójú differenciálegyenlet-rendszer *általános megoldása:*

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}. \tag{3}$$

Ha a *kezdeti feltétel:* $x(0) = x_0$, akkor

$$\mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}t_0}\mathbf{c}, \quad \text{melyből} \quad \mathbf{c} = e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}_0, \tag{4}$$

és így a kezdeti feltételt kielégítő *megoldás:*

$$\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}_0 = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0, \tag{5}$$

ahol az $e^{\mathbf{A}t}$ *exponenciális mátrixfüggvény.*

Ljapunov szerint az (1) állandó együtthatójú homogén differenciálegyenlet-rendszer *bármely kezdeti feltételt kielégítő megoldása stabilis,* ha az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeinek valós része nempozitív, azaz

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i \leq 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

és a zérus valós részű sajátértékekhez 1×1-es *Jordan*-blokkok tartoznak, továbbá *aszimptotikusan stabilis,* ha mindegyik sajátértékének valós része negatív, azaz

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{7}$$

és *instabilis,* ha a sajátértékek valamelyikének valós része pozitív, vagy valamelyik $\operatorname{Re}\lambda = 0$ sajátértékhez 1×1-nél nagyobb méretű *Jordan*-blokk tartozik [K4].

Az első esetben az (1) minden $\mathbf{x}(t)$ megoldása korlátos a $t_0 \le t < \infty$ intervallumon, a (7) feltétel teljesülése esetén pedig mindegyik megoldása határértékben a 0-hoz tart, azaz

$$\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldásvektort az (5) szerint

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \operatorname{diag}\left(e^{\mathbf{B}_1(\lambda_1)(t-t_0)}, e^{\mathbf{B}_2(\lambda_2)(t-t_0)}, \dots, e^{\mathbf{B}_s(\lambda_s)(t-t_0)}\right)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t_0) = \tag{8}$$

$$= \mathbf{TDT}^{-1}\mathbf{x}(t_0)$$

alakban kapjuk, ahol $\mathbf{T}$ az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix *Jordan*-féle normálalakját előállító transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT},$$

a $\mathbf{D}$ blokkdiagonális mátrix, melynek blokkjai az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeihez tartozó exponenciális mátrixfüggvények normálalakjai, a

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{c}_0 = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$$

vektor koordinátái a kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás együtthatói. A transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixát az 1. és 2. pontokban leírtak alapján célszerű előállítani.

Az *általános megoldásvektort*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \operatorname{diag}\left(e^{\mathbf{B}_1(\lambda_1)(t)}, e^{\mathbf{B}_2(\lambda_2)(t)}, \dots, e^{\mathbf{B}_s(\lambda_s)(t)}\right)\mathbf{c} = \mathbf{TDc} \tag{9}$$

alakban állíthatjuk elő, ahol a $\mathbf{c} = [C_1, C_2, \dots, C_n]^T$ vektor koordinátái az általános megoldás együtthatói.

Két esettel foglalkozunk. Az együtthatómátrix minimálegyenletének gyökei
1. egyszeresek,
2. többszörösek.

Az eljárás alkalmazható n-ismeretlenes n egyenletből álló, közönséges elsőrendű, állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenlet-rendszerre is, de a módszert három, illetve négy ismeretlen függvényt tartalmazó

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1**}$$

homogén rendszer, illetve

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2**}$$

inhomogén rendszer megoldásával szemléltetjük.

4.1. Megoldás modálmátrixszal. A 4. pontban leírtak alapján fennállnak a következő tételek:

1. tétel. *Ha* $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$ *az* (1**) *homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer együtthatómátrixa,* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *az* $\mathbf{A}$ *mátrix sajátértékei, amelyek mind különbözők*

$$\mathbf{v}_1 = [v_{11}, v_{21}, \dots, v_{n1}]^T,\ \mathbf{v}_2 = [v_{12}, v_{22}, \dots, v_{n2}]^T,\ \dots,\ \mathbf{v}_n = [v_{1n}, v_{2n}, \dots, v_{nn}]^T$$

a lineárisan független sajátvektorai, $\mathbf{Q}$ *pedig a sajátvektorokból alkotott modálmátrix, azaz*

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}, \quad (\det \mathbf{Q} \neq 0), \quad \textit{valamint} \tag{1}$$

$$\mathbf{D}_d = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right)$$

az alaprendszernek a sajátvektorok modálmátrixba írt sorrendje szerint rendezett diagonálmátrixa, akkor az (1**) általános megoldás függvényvektora:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}_d \cdot \mathbf{c}, \tag{2}$$

az

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás függvényvektora *pedig*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}_d \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0, \tag{3}$$

ahol a $\mathbf{c} = [C_1, C_2, \dots, C_n]^T$ *oszlopovektor elemei tetszőleges állandók, és*

$$\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{c}_0 \tag{4}$$

a kezdeti feltételt kielégítő megoldás együtthatóinak oszlopvektora.

1. példa. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixszal adott homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = [1, 2, 0]^T$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldását!

A karakterisztikus- és minimálpolinom:

$$k(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+6),$$

a sajátértékekhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{v}(-2) = [-1, 0, 1]^T, \quad \mathbf{v}(-3) = [1, 1, 1]^T, \quad \mathbf{v}(-6) = [1, -2, 1]^T.$$

A sajátértékek negatívak, a megoldások stabilisak.

A *Jordan*-féle normálalak: $\mathbf{J} = \operatorname{diag}(-2, -3, -6)$, az alaprendszer diagonálmátrixa:

$$\mathbf{D}_d = \operatorname{diag}\left(e^{-2}, e^{-3t}, e^{-6t}\right) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}.$$

A modálmátrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

(a -2, -3, -6 sajátértékekhez tartozó sajátvektorok a $\mathbf{Q}$ mátrix 1., 2., 3. oszlopát alkotják); a modálmátrix inverze:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrixszal adott differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása, ha $\mathbf{c} = [C_1, C_2, C_3]^T$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{D}_d\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + C_3e^{-6t} \\ C_2e^{-3t} - 2C_3e^{-6t} \\ C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t} + C_3e^{-6t} \end{bmatrix}.$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldáshoz kiszámítjuk a $\mathbf{c}_0$ oszlopvektort a (4) formula alkalmazásával:

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{tehát} \quad C_1 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = 1, \quad C_3 = -\frac{1}{2},$$

és így már felírható a homogén differenciálegyenlet-rendszer kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-6t} \\ e^{-3t} + e^{-6t} \\ -\frac{1}{2}e^{-2t} + e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-6t} \end{bmatrix}.$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldást közvetlenül az (1) formulával is kiszámíthatjuk:

$$\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{bmatrix}=\mathbf{Q}\mathbf{D}_d\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-2t}+e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-6t}\\ e^{-3t}+e^{-6t}\\ -\frac{1}{2}e^{-2t}+e^{-3t}-\frac{1}{2}e^{-6t}\end{bmatrix}.$$

2. tétel. *Ha az* (1^{**}) *állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerhez tartozó együtthatómátrix karakterisztikus egyenletének többszörös gyökei is vannak, de minimálegyenletének gyökei egyszeresek, akkor az* (1^{**}) *differenciálegyenlet-rendszer megoldása az* 1. *tétel szerint előállítható.*

Ui. az n*-edrendű* $\mathbf{A}$ *együttható mátrixnak ebben az esetben is van* n *lineárisan független sajátvektora.*

2. példa. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-3&3&-2\\1&-5&2\\1&-3&0\end{bmatrix}$$

mátrixszal adott homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer

$$\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_0=[1,0,1]^T$$

kezdeti feltételt kielégítő megoldását!

A karakterisztikus- és minimálpolinom:

$$k(\lambda)=(\lambda+4)(\lambda+2)^2,\quad m(\lambda)=(\lambda+4)(\lambda+2).$$

A sajátértékekhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{v}_1(-2)=[3,1,0]^T,\quad \mathbf{v}_2(-4)=[-1,1,1]^T,\quad \mathbf{v}_3(-2)=[-2,0,1]^T.$$

A *Jordan*-féle normálalak (diagonális): $\mathbf{J}=\operatorname{diag}(-2,-4,-2)$, és az alaprendszer diagonálmátrixa: $\mathbf{D}_d=\operatorname{diag}\left(e^{-2t},e^{-4t},e^{-2t}\right)$.

A modálmátrix:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}3&-1&-2\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},$$

a modálmátrix inverze:

$$\mathbf{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&-1\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&2\end{bmatrix}.$$

A differenciálegyenlet-rendszer általános megoldása:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{D}_d\mathbf{c} = \begin{bmatrix} (3C_1 - 2C_3)e^{-2t} - C_2e^{-4t} \\ C_1e^{-2t} + C_2e^{-4t} \\ C_3e^{-2t} + C_2e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

A differenciálegyenlet-rendszer kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\mathbf{D}_d\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t} \\ -\frac{3}{2}e^{-4t} + \frac{3}{2}e^{-2t} \\ -\frac{3}{2}e^{-4t} + \frac{5}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

3. tétel. *A* (2^{**}) inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ *kezdeti feltételt kielégítő megoldása, ha a* minimálegyenlet gyökei egyszeresek, *az*

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}_d \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0 + \int_{u=t_0}^{t} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}_u \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{f}(u)\, du \tag{5}$$

formulával, általános megoldása *pedig a homogén rendszer általános megoldása és az inhomogén rendszer egy partikuláris megoldása összegeként az*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}_d \cdot \mathbf{c} + \int_{u=t_0}^{t} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}_u \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{f}(u) du \tag{6}$$

formulával előállítható, ahol a **c** *elemei tetszőleges állandók, az integrálban lévő* $\mathbf{D}_u$*diagonálmátrix pedig*

$$\mathbf{D}_u = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1(t-u)}, e^{\lambda_2(t-u)}, \ldots, e^{\lambda_n(t-u)}\right) \tag{7}$$

alakú.

3. példa. Számítsuk ki az

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) + 2y(t) + z(t) + t \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 2y(t) + 2z(t) + 1 \\ \dot{z}(t) &= x(t) + 3y(t) + z(t) \end{aligned}\right\}$$

inhomogén differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = [1, 2, 1]^T$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását!

Az együtthatómátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

és a zavarótag: $\mathbf{f}(t) = [t, 1, 0]^T$.

A karakterisztikus- és minimálpolinom:

$$k(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

A sajátértékekhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{v}(-1) = [1, -5, 7]^T, \quad \mathbf{v}(1) = [-3, 1, 1]^T, \quad \mathbf{v}(5) = [1, 1, 1]^T.$$

A *Jordan*-féle normálalak: $\mathbf{J} = \mathrm{diag}(-1, 1, 5)$.

Az alaprendszer mátrixa a homogén megoldáshoz: $\mathbf{D}_d = \mathrm{diag}\left(e^{-t}, e^t, e^{5t}\right)$.

Az alaprendszer mátrixa az inhomogén megoldáshoz:

$$\mathbf{D}_u = \mathrm{diag}\left(e^{-t+u}, e^{t-u}, e^{5(t-u)}\right),$$

valamint a zavarótag: $\mathbf{f}(u) = [u, 1, 0]$.

A modálmátrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

a modálmátrix inverze:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{11}{24} & \frac{7}{24} \end{bmatrix}.$$

A homogén differenciálegyenlet-rendszer kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$\mathbf{x}_h(t, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}_h = \mathbf{Q}\mathbf{D}_d\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8}e^t + \frac{35}{24}e^{5t} - \frac{1}{12}e^{-t} \\ \frac{1}{8}e^t + \frac{35}{24}e^{5t} + \frac{5}{12}e^{-t} \\ \frac{1}{8}e^t + \frac{35}{24}e^{5t} - \frac{7}{12}e^{-t} \end{bmatrix}_h.$$

Az inhomogén rendszer kezdeti feltételt kielégítő megoldását integrálás és összevonás után kapjuk:

$$\mathbf{x}_i(t,\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_h(t,\mathbf{x}_0) + \int_{u=0}^{t} \mathbf{Q}\mathbf{D}_u\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{f}(u)\,du = \mathbf{x}_h(t,\mathbf{x}_0) +$$

$$+\int_{u=0}^{t}\begin{bmatrix} \left(\frac{3}{4}e^{t-u}+\frac{1}{4}e^{5(t-u)}\right)u-\frac{1}{12}e^{-t+u}-\frac{3}{8}e^{t-u}+\frac{11}{24}e^{5(t-u)} \\ \left(-\frac{1}{4}e^{t-u}+\frac{1}{4}e^{5(t-u)}\right)u+\frac{5}{12}e^{-t+u}+\frac{1}{8}e^{t-u}+\frac{11}{24}e^{5(t-u)} \\ \left(-\frac{1}{4}e^{t-u}+\frac{1}{4}e^{5(t-u)}\right)u-\frac{7}{12}e^{-t+u}+\frac{1}{8}e^{t-u}+\frac{11}{24}e^{5(t-u)} \end{bmatrix} du =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{8}e^{t}+\frac{35}{24}e^{5t}-\frac{1}{12}e^{-t} \\ \frac{1}{8}e^{t}+\frac{35}{24}e^{5t}+\frac{5}{12}e^{-t} \\ \frac{1}{8}e^{t}+\frac{35}{24}e^{5t}-\frac{7}{12}e^{-t} \end{bmatrix}_h +$$

$$+\begin{bmatrix} -\frac{1}{600}\big(-225e^{2t}-61e^{6t}-50+480te^{t}+336e^{t}\big)e^{-t} \\ \frac{1}{600}\big(-75e^{2t}+61e^{6t}-250+120te^{t}+264e^{t}\big)e^{-t} \\ \frac{1}{600}\big(-75e^{2t}+61e^{6t}+350+120te^{t}-336e^{t}\big)e^{-t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{39}{25}e^{5t}-\frac{4}{5}t-\frac{14}{25} \\ \frac{39}{25}e^{5t}+\frac{1}{5}t+\frac{11}{25} \\ \frac{39}{25}e^{5t}+\frac{1}{5}t-\frac{14}{25} \end{bmatrix}.$$

4. példa. Állítsuk elő az

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x(t)-3y(t)+2z(t)+\sin 2t, \\ \frac{dy}{dt} &= -x(t)+5y(t)-2z(t)+t, \qquad\qquad \mathbf{x}(0)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \\ \frac{dz}{dt} &= -x(t)+3y(t)+e^{2t}, \end{aligned}$$

inhomogén differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x}(0)$ kezdeti feltételvektort kielégítő megoldását.

Megoldás. Az együtthatómátrix és determinánsa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \det \mathbf{A} = 16.$$

A homogén rendszer kezdeti feltételt kielégítő megoldása a $\mathbf{0}$ vektor, így csak az inhomogén rendszer kezdeti feltételt kielégítő megoldását kell előállítani.

Az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus egyenletének kettős gyöke van: $(\lambda-4)(\lambda-2)^2 = 0$, de a minimálegyenletének gyökei egyszeresek: $(\lambda-4)(\lambda-2) = 0$.

A *Jordan*-féle normálalak: $\mathbf{J} = \operatorname{diag}(2,4,2)$.

Ekkor van három lineárisan független sajátvektor, melyekkel a modálmátrix és inverze:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

A megoldásvektor:

$$\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0) = \int_{u=0}^{t} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}_u \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{f}(u)\, du =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{73}{160}e^{4t} - \frac{9}{40}\sin(2t) - \frac{3}{8}t - \frac{7}{20}\cos^2 t - te^{2t} - \frac{17}{160} \\ -\frac{73}{160}e^{4t} - \frac{1}{40}\sin(2t) - \frac{1}{8}t - \frac{3}{20}\cos^2 t + te^{2t} + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{17}{160} \\ -\frac{73}{160}e^{4t} - \frac{1}{40}\sin(2t) + \frac{3}{8}t - \frac{3}{20}\cos^2 t + 2te^{2t} + \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{57}{160} \end{bmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{D}_u = \operatorname{diag}\left(e^{2(t-u)}, e^{4(t-u)}, e^{2(t-u)}\right), \quad \text{és} \quad \mathbf{f}(u) = \begin{bmatrix} \sin 2u \\ u \\ e^{2u} \end{bmatrix}.$$

4.2. Megoldás a transzformáció mátrixával

Tétel. *Ha az* $\mathbf{A}$ *együtthatómátrix* minimálegyenletének többszörös gyökei is vannak, *akkor a* 4.1 *pont* (2)–(6) *formuláiban a* $\mathbf{Q}$ *modálmátrix szerepét* a Jordan-*alakot előállító transzformáció* $\mathbf{T}$ *mátrixa, a* $\mathbf{D}_d$*, illetve* $\mathbf{D}_u$ *szerepét pedig az exponenciális mátrixfüggvény normálalakja szerint képzett* $\mathbf{D}_e$*, illetve* $\mathbf{D}_{eu}$ *kvázidia-*

gonális mátrix veszi át:

(2*) $$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{c},$$

(3*) $$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0,$$

(4*) $$\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{c}_0,$$

(5*) $$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0 + \int_{u=t_0}^{t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{eu} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{f}(u)\, du,$$

(6*) $$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_e \cdot \mathbf{c} + \int_{u=t_0}^{t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}_{eu} \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{f}(u)\, du.$$

1. példa. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 15 & -1 & 16 \\ 0 & 10 & -1 & 11 \\ 1 & -37 & 2 & -39 \\ 1 & -18 & 2 & -19 \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixszal adott homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = [1, 0, 1, 1]^T$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását!

A karakterisztikus- és minimálpolinom: $k(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda + 1)(\lambda + 2)^2$.

Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix összes sajátértéke negatív, ezért a megoldások aszimptotikusan stabilisak.

A sajátértékekhez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{v}_1(-1) = [4, -5, -11, 4]^T, \quad \mathbf{v}_2(-3) = [4, 1, -9, -2]^T, \quad \mathbf{v}_3(-2) = [-5, 0, 11, 1]^T.$$

A sajátvektorok száma eggyel kevesebb, mint a mátrix rendszáma. A három sajátvektort felhasználjuk a transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixának kiszámítására. A sajátvektorok helyes sorrendjét a $\mathbf{J}$ alapján döntjük el.

A *Jordan*-féle kvázidiagonális normálalak:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Feltesszük, hogy $\mathbf{T}$ előállítható

$$\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -5 & x_1 \\ -5 & 1 & 0 & x_2 \\ -11 & -9 & 11 & x_3 \\ 4 & -2 & 1 & x_4 \end{bmatrix}$$

alakban.

A $\mathbf{v}_4 = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ negyedik oszlopvektor koordinátáit az

$$\mathbf{AT}_k - \mathbf{T}_k\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 + 15x_2 - x_3 + 16x_4 + 5 \\ 0 & 0 & 0 & 12x_2 - x_3 + 11x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - 37x_2 + 4x_3 - 39x_4 - 11 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 - 18x_2 + 2x_3 - 17x_4 - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

egyenletből, a 4. oszlopvektor $= \mathbf{0}$, illetve rendezve az

$$\begin{bmatrix} 1 & 15 & -1 & 16 \\ 0 & 12 & -1 & 11 \\ 1 & -37 & 4 & -39 \\ 1 & -18 & 2 & -17 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszer egyparaméteres megoldása adja:

$$\mathbf{v}_4 = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [-11 - 5p, 2, 24 + 11p, p]^T.$$

Legyen $p = 1$, akkor

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -5 & -16 \\ -5 & 1 & 0 & 2 \\ -11 & -9 & 11 & 35 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

és $\det \mathbf{T} = -2 \neq 0$, ezért az oszlopvektorok lineárisan függetlenek, $\mathbf{T}$-nek van inverze:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 5 & -\frac{29}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{27}{2} \\ 19 & -40 & 12 & -36 \\ -5 & 9 & -3 & 8 \end{bmatrix}. \quad (\text{Ellenőrzés: } \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{J}.)$$

Az $e^{\mathbf{A}t}$ exponenciális mátrixfüggvény normálalakja:

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldás:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{TD}_e\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -4e^{-t} - 20e^{-3t} + 25e^{-2t} \\ 5e^{-t} - 5e^{-3t} \\ 11e^{-t} + 45e^{-3t} - 55e^{-2t} \\ -4e^{-t} + 10e^{-3t} - 5e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

2. példa. *Egerváry* [D4] 1. példája, l. 2. fejezet. Ha az adott $\mathbf{A}$ mátrixot egy állandó együtthatójú, elsőrendű, homogén, lineáris differenciálegyenlet-rendszer együtthatómátrixának tekintjük, akkor annak $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = [1, 0, 1, 1]^T$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását a

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

alaprendszermátrix (az $e^{\mathbf{A}t}$ exponenciális mátrixfüggvény normálalakja), valamint a 2. fejezetben ugyanezen példára kiszámított $\mathbf{T}$ és $\mathbf{T}^{-1}$ felhasználásával, az

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{T}\mathbf{D}_e\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2te^{-t} \\ 2e^{-t} - 2e^t \\ e^{-t} + 2te^{-t} \\ 2e^{-t} - e^t \end{bmatrix}$$

alakban kapjuk.

A differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását $\mathbf{c} = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T$ konstansvektor felhasználásával

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{D}_d\mathbf{c} = \begin{bmatrix} C_1e^{-t} + C_2\big(te^{-t} + e^{-t}\big) + 2C_4e^t \\ C_2e^{-t} + C_4\big(2te^t + 2e^t\big) + 2C_3e^t \\ C_1e^{-t} + C_2\big(te^{-t} + e^{-t}\big) + C_4e^t \\ C_2e^{-t} + C_4\big(te^t + e^t\big) + C_3e^t \end{bmatrix}$$

rendezett alakban állíthatjuk elő.

3. példa. *Egerváry* [D4] 2. példája, l. 2. fejezet. Ha az adott $\mathbf{A}$ mátrixot egy állandó együtthatójú, elsőrendű, homogén, lineáris differenciálegyenlet-rendszer együtthatómátrixának tekintjük, akkor annak $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = [1, 0, 1, 1]^T$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} e^{0\cdot t} & te^{0\cdot t} & t^2e^{0\cdot t} & 0 \\ 0 & e^{0\cdot t} & te^{0\cdot t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{0\cdot t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{0\cdot t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alaprendszermátrix, valamint a 2. fejezetben ugyanezen példára kiszámított $\mathbf{T}$ és $\mathbf{T}^{-1}$ felhasználásával,

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{T}\mathbf{D}_e\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 + 2t \\ -4t + 2t^2 \\ 8t + 1 \\ 16t - 2t^2 + 1 \end{bmatrix}$$

alakban kapjuk.

A differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását $\mathbf{c} = [C_1, C_2, C_3, C_4]^T$ konstansvektor felhasználásával

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\mathbf{D}_d\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -C_2 + C_3(-1-t) + \frac{1}{5}C_4 \\ -C_1 + C_2(-t-7) + C_3\big(-t^2 - 7t + 4\big) + \frac{7}{5}C_4 \\ -4C_2 + C_3(6-4t) + C_4 \\ C_1 + C_2(t+1) + C_3\big(t^2 + t + 1\big) \end{bmatrix}$$

rendezett alakban kapjuk.

4.3. Megoldás nem szabályosan felírt Jordan-alak alkalmazásával. Az állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása azonosan előállítható akkor is, ha az együtthatómátrixhoz tartozó *Jordan*-féle normálalak blokkjait az 1. fejezetben leírt szabályoktól eltérően, tetszőleges sorrendben vesszük fel és a transzformációmátrix oszlopvektorait a blokkok sorrendje szerint rendezzük.

Passzítás szabálya. Az állandó együtthatójú, lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldása akkor sem változik, ha a *Jordan*-féle $\mathbf{J}$ normálalak blokkjainak tetszőleges sorrendjéhez passzítjuk a transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixában az oszlopvektorok, illetve a sajátvektorok és az ismeretlen oszlopvektor(ok) sorrendjét, valamint egyszeres sajátértékek esetén az alaprendszer $\mathbf{D}_d$ diagonálmátrixában, illetve többszörös gyökök esetén az exponenciális mátrixfüggvény $\mathbf{D}_e$ normál mátrixában fellépő blokkok sorrendjét.

A passzítás szabályának alkalmazása tehát azt jelenti, hogy a differenciálegyenlet-rendszer megoldásához felírt *Jordan*-blokkok sorrendjének vizsgálatára nincs szükség. Egy adott differenciálegyenlet-rendszernek a passzítási szabály betartásával képzett modálmátrixos megoldása mindig ugyanabban az alakban áll elő.

Példa. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

együtthatókkal adott differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x}_0 = [1, 0, 1]$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását szabályos és nem szabályos $\mathbf{J}$ felhasználásával.

Megoldás. 1. Az $\mathbf{A}$ sajátértékei és sajátvektorai: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ (kettős gyök), $\lambda_3 = 6$; $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = [5, 1, 7]^T$, $\mathbf{v}_3 = [0, 1, 2]^T$.

A *szabályos alakban felírt Jordan*-alak:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és a hozzá passzított $\mathbf{D}_e$ és $\mathbf{T}$:

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 7 & x_3 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{AT} - \mathbf{TJ} = \mathbf{0}$ megoldása: $[-6+5p, p, -11+7p]^T$, melyből $p = 0$ választással: $\mathbf{x} = [-6, 0, -11]^T$.

A transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & -11 \end{bmatrix},$$

és inverze:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{11}{25} & \dfrac{13}{25} & \dfrac{6}{25} \\ \dfrac{11}{25} & \dfrac{12}{25} & -\dfrac{6}{25} \\ \dfrac{1}{5} & \dfrac{2}{5} & -\dfrac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

A differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{TD}_e\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} e^t \\ \dfrac{1}{5}\left(e^t - e^{6t}\right) \\ \dfrac{1}{5}\left(7e^t - 2e^{6t}\right) \end{bmatrix}.$$

2. A nem szabályos alakban felírt

$$\mathbf{J}_v = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Jordan-féle normálalakhoz passzított $\mathbf{D}_{ev}$ és $\mathbf{T}_v$:

$$\mathbf{D}_{ev} = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{T}_v = \begin{bmatrix} 5 & x_1 & 0 \\ 1 & x_2 & 1 \\ 7 & x_3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az

$$\mathbf{AT}_v - \mathbf{T}_v\mathbf{J}_\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 & 0 \\ 0 & -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 & 0 \\ 0 & -3x_1 + 8x_2 + x_3 = -7 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

egyenletrendszer megoldása: $[-6+p, p, -11+7p]^T$, melyből $p=0$ választással:

$$\mathbf{T}_v = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & -11 & 2 \end{bmatrix},$$

és inverze:

$$\mathbf{T}_v^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{25} & \frac{12}{25} & -\frac{6}{25} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{11}{25} & \frac{11}{25} & \frac{6}{25} \end{bmatrix}.$$

A differenciálegyenlet-rendszer

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{T}_v \mathbf{D}_{ev} \mathbf{T}_v^{-1} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} e^t \\ \frac{1}{5}\left(e^t - e^{6t}\right) \\ \frac{1}{5}\left(7e^t - 2e^{6t}\right) \end{bmatrix}$$

megoldása azonos az előző megoldással.

Megjegyzés. A modálmátrixos módszernél nem kell a minimálpolinom deriváltjait képezni, nem kell alappolinomokat és mátrixpolinomokat előállítani, nem kell a megoldásban az együtthatók közötti kapcsolat vizsgálatát az egyszerűsítéshez elvégezni. A modálmátrix alkalmazásával végzett számítás a megoldást rendezett alakban adja, sőt az együtthatómátrix minimálpolinomjának kiszámítása is elhagyható, ha a lineárisan független sajátvektorok száma megegyezik a mátrix rendjével. (Ekkor a $\mathbf{J}$ is és az alaprendszermátrix is diagonálmátrix).

A valós szimmetrikus és a hermitikus mátrixok sajátértékei valósak, továbbá a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok ortogonálisak.

5. Egy kísérletező módszer

5.1. Közelítő megoldás, ha a gyöktényezők nem lineárisak

1. definíció. Azt a mátrixot, amelyet egy $\mathbf{A}$ mátrixból bármely elemének $\varepsilon = k \cdot 10^{-m}$ $(1 \le k \le 9,\ 1 \le m \le 9)$ nagyságú megváltoztatásával kapunk *mankómátrixnak* nevezzük.

2. definíció. Azt az egységmátrixot közelítő mátrixot, amelyben a főátló 1-hez közeli elemein kívül 0-hoz közeli elemek is vannak, *szemetes egységmátrixnak* mondjuk.

Olyan speciális közelítő megoldás módszerének alkalmazását mutatjuk be, amely jól használható, ha az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix minimálegyenletének az egyszeres gyökökön kívül van egy kétszeres gyöke is. Ebben az esetben az $\mathbf{A}$ mátrixhoz hozzárendelünk egy $\mathbf{A}$-val azonos rendű olyan mankómátrixot (kísérletezéssel), melynek a sajátértékei mind különbözők, és számuk a mankómátrix rendszámával megegyező. Ekkor a mankómátrixnak rendjével megegyező számú lineárisan független sajátvektora van. Így a mankómátrix modálmátrixának felhasználásával, a differenciálegyenlet-rendszer közelítő megoldása megkapható. A közelítő megoldás hibájának becslésével a 5.2 pontban foglalkozunk. Ennek a módszernek az alkalmazását a mérési eredménnyel kapott együtthatók kerekítési hibáinak feltételezése teszi elfogadhatóvá.

Példa. Az eljárást a

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x(t) - 2y(t) - 3z(t) \\ \frac{dy}{dt} &= 2x(t) + 3y(t) + 4z(t) \\ \frac{dz}{dt} &= -x(t) - y(t) - z(t) \end{aligned}\right\}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer adott kezdeti feltételt kielégítő megoldásával szemléltetjük.

A rendszer mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 0,$$

karakterisztikus- és minimálegyenlete azonos: $k(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1) = 0$, azaz a $\lambda_1 = 1$ egyszeres, a $\lambda_2 = 0$ pedig kétszeres gyök. Így az $\mathbf{A}$ mátrixnak csak két lineárisan független sajátvektora van:

$$\mathbf{v}_1 = [-1, 1, 0]^T \quad \text{és} \quad \mathbf{v}_2 = [1, -2, 1]^T,$$

tehát modálmátrix nem hozható létre.

Kísérletezéssel az $\mathbf{A}$ mátrix egy vagy több elemét zérushoz közeli értékkel megváltoztatva elérhető, hogy a karakterisztikus egyenletnek, és így a minimálegyenletnek is egyszeres gyökei legyenek. Az így előállított mátrixhoz a rendjével azonos számú lineárisan független sajátvektort kaphatunk.

Például az $\mathbf{A}$ mátrix helyett tekintsük az

$$\mathbf{A}_1 \approx \begin{bmatrix} -1{,}00000009 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{A}_1 \approx -9 \cdot 10^{-8}$$

mankómátrixot (közelítő mátrixot). A számítások elvégzése után, a karakterisztikus egyenletnek és a minimálegyenletnek gyöktényezős alakját előállítva látjuk, hogy csak egyszeres gyököket tartalmaznak.

Az $\mathbf{A}_1$ mátrix

$$\lambda_1 \approx -0{,}000300045 \approx 0, \quad \lambda_2 \approx 0{,}000299955\,0 \approx 0, \quad \lambda_3 \approx 1{,}000000000$$

sajátértékeihez tartozó sajátvektorok:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -0{,}4473209331 \\ 0{,}8943735141 \\ -0{,}4471867570 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1862{,}944400 \\ -3727{,}006735 \\ 1863{,}503367 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2{,}000000000 \\ 2{,}000000361 \\ -1{,}80 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A}_1$mankómátrix $\mathbf{Q}$ modálmátrixának oszlopait rendre a λ_1, λ_2, λ_3 sajátértékekhez tartozó (lineárisan független) sajátvektorok koordinátái alkotják:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -0{,}4473209331 & 1862{,}944400 & -2{,}000000000 \\ 0{,}8943735141 & -3727{,}006735 & 2{,}000000361 \\ -0{,}4471867570 & 1863{,}503367 & -1{,}80 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix},$$

$$\det \mathbf{Q} = 1{,}000001 \neq 0.$$

Az alaprendszer diagonálmátrixa:

$$\mathbf{D}_d \approx \operatorname{diag}\left(e^{-0{,}000300045t}, e^{0{,}0002999550t}, e^{1{,}000000000t}\right).$$

A mankómátrix $\mathbf{Q}$ *modálmátrixának* 10 *jegyre kerekített közelítő inverzmátrixát jelölje:* $\widetilde{\mathbf{Q}}^{-1}$, azaz

$$\mathbf{Q}^{-1} \approx \widetilde{\mathbf{Q}}^{-1} = \begin{bmatrix} -3727{,}003009 & -3727{,}002672 & -3728{,}120269 \\ -0{,}8943726200 & -0{,}8943725391 & -0{,}8941041062 \\ 0 & -0{,}4999998000 & 0{,}9999990000 \end{bmatrix}.$$

A kezdeti feltételt kielégítő közelítő partikuláris megoldás függvényvektora:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \approx \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D}_d \cdot \widetilde{\mathbf{Q}}^{-1} \cdot \mathbf{x}_0 \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} -3334{,}832701e^{\lambda_1 t} - 3331{,}832702e^{\lambda_2 t} - 1{,}999998000e^{\lambda_3 t} \\ -6667{,}664804e^{\lambda_1 t} + 6665{,}664804e^{\lambda_2 t} + 1{,}999998361e^{\lambda_3 t} \\ 3333{,}832402e^{\lambda_1 t} - 3332{,}832401e^{\lambda_2 t} - 1{,}799998200e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix},$$

ahol λ_1, λ_2, λ_3 helyébe a kiszámított sajátértékeket kell helyettesíteni.

Számítsuk ki a mankómátrix modálmátrixának és az inverzét közelítő $\widetilde{\mathbf{Q}}^{-1}$ mátrixnak a szorzatát 9 tizedes jegyre pontosan, és vizsgáljuk meg az egységmátrixtól való eltérését. A főátlón kívüli elemekből a megoldás pontosságára nyerhetünk információt. A szorzatként előálló

$$\mathbf{Q} \cdot \widetilde{\mathbf{Q}}^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1{,}000000000 & 4{,}000 \cdot 10^{-7} & 0{,}000001000 \\ 0{,}000000000 & 0{,}9999997805 & -0{,}000001639 \\ 0{,}000000000 & -8{,}999996400 \cdot 10^{-8} & 1{,}000000820 \end{bmatrix}$$

szemetes egységmátrixban a főátlón kívüli elemek közül abszolút értékben a legnagyobb a $-0{,}000001639$ elem, melynek normálalakja: $-1{,}639 \cdot 10^{-6}$. A normálalakból – miként azt a következő pontban bemutatjuk – arra következtethetünk, hogy a megoldás legalább 6 értékes jegyre jó közelítést ad (figyelem! a pontosság nem $1 \cdot 10^{-6}$) (l. az 5.2 fejezetet).

A pontos megoldást állítsuk elő a transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixával.

Az $\mathbf{A}$-hoz rendelt *Jordan*-mátrix blokkjai: [1], $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. A *Jordan*-mátrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alakjára tekintettel a $\mathbf{T}$ mátrix első oszlopába a $\mathbf{v}_1$-et, a második oszlopába a $\mathbf{v}_2$-t, a harmadikba pedig az ismeretlen vektor $\mathbf{v}_3 = [x_1, x_2, x_3]^T$ koordinátáit írjuk.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & x_1 \\ 1 & -2 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AT} - \mathbf{TJ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_1 - x_2 - x_3 - 1 \\ 0 & 0 & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2 \\ 0 & 0 & -x_1 - x_2 - x_3 - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

a **harmadik oszlop** $= \mathbf{0}$ egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

melynek egyparaméteres megoldása:

$$\mathbf{v}_3 = [x_1, x_2, x_3]^T = \begin{bmatrix} -1 + p \\ -2p \\ p \end{bmatrix},$$

és $p = 1$ választással a transzformáció mátrixa:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{és inverze:} \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Az alaprendszer mátrixa:

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{0\cdot t} & te^{0\cdot t} \\ 0 & 0 & e^{0\cdot t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a kezdeti feltételt kielégítő pontos megoldás:

$$\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)=\mathbf{T}\mathbf{D}_e\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0=\begin{bmatrix}3-2t-2e^t\\-2+2e^t+4t\\1-2t\end{bmatrix}.$$

A MAPLE 9.5 **utasításaival képzett megoldás:**

```
s:={diff(x(t),t)=-x(t)-2*y(t)-3*z(t),diff(y(t),t)=2*x(t)+3*y(t)+
4*z(t),diff(z(t),t)=x(t)-y(t)-z(t)}:
Ic:={x(0)=1,y(0)=0,z(0)=1}:
megoldás:=combine(dsolve(s union Ic,{x(t),y(t),z(t)}),trig);
```

megoldás $:=\big\{x(t)=3-2t-2e^t,\ y(t)=-2+2e^t+4t,\ z(t)=1-2t\big\}$.

A transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixával képzett megoldás és a MAPLE 9.5 utasításaival képzett megoldás azonosan egyenlők egymással, a mankómátrixszal képzett megoldása pedig 6 értékes jegyre pontos közelítést állít elő.

Például a $t=1$ és $t=2$ érték behelyettesítésével a pontos ($\mathbf{x}$) és a közelítő ($\mathbf{x}_k$) megoldás koordinátái 6 értékes jegyre kerekítve megegyeznek:

$$\begin{aligned}
&x(1)\approx-4{,}436563656, && x_k(1)\approx-4{,}436559219,\\
&y(1)\approx 7{,}436563656, && y_k(1)\approx 7{,}43655720,\\
&z(1)\approx-1, && z_k(1)\approx-0{,}9999994893,\\
&x(2)\approx-15{,}77811220, && x_k(2)\approx-15{,}77809642,\\
&y(2)\approx 20{,}77811220, && y_k(2)\approx 20{,}77809809,\\
&z(2)\approx-3, && z_k(2)\approx-2{,}999998330.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. 1. Az, hogy a pontosság a jegyek számára vonatkozik, a $t=5$ helyettesítéssel kapott eredménnyel jobban szemléltethető:

$$\mathbf{x}(5,\mathbf{x}_0)\approx[-303{,}8263182,\ 314{,}8263182,\ -9]^T,$$

$$\mathbf{x}_k(5,\mathbf{x}_0)\approx[-303{,}8260174,\ 314{,}8260680,\ -9{,}000022714]^T.$$

A koordináták különbsége:

$$\mathbf{x}_k(5,\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}(5,\mathbf{x}_0)\approx[0{,}0003008,\ -0{,}0002502,\ -0{,}000022714]^T.$$

Az első koordináták különbsége a legnagyobb: $\big\|\mathbf{x}_k(5,\mathbf{x}_0)-\mathbf{x}(5,\mathbf{x}_0)\big\|\approx 0{,}0003008$; a 0-tól eltérő jegy a 4. tizedes jegyben jelentkezik, de a koordináták a 4. tizedes jegyre kerekítve

$$\mathbf{x}(5,\mathbf{x}_0)\approx[-303{,}8263,\ 314{,}8263,\ -9]^T,$$

$$\mathbf{x}_k(5,\mathbf{x}_0)\approx[-303{,}8260,\ 314{,}8261,\ -9{,}0000]^T$$

a 6. jeggyel bezárólag pontos értéket adnak.

2. A *„mankómátrix-módszer”* állandó együtthatójú *inhomogén* lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldására is alkalmazható.

5.2. A közelítő megoldás hibabecslése. Az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszer együtthatómátrixát jelöljük **A**-val. Ha az **A** minimálegyenletének az elsőfokú gyökein kívül van *egy* másodfokú gyöke is, akkor a differenciálegyenlet-rendszer közelítő megoldásához az **A** mátrix helyett olyan *mankómátrixot* választunk melynek a rendjével megegyező számú sajátvektora van. Ekkor a mankómátrix sajátvektoraiból alkotott modálmátrix segítségével előállíthatjuk a feladat közelítő megoldását. Bebizonyítjuk, hogy jól választott mankómátrix esetén, a modálmátrix és inverze 10 értékes jegyre megadott közelítéseinek 9 tizedes jegyre pontosan kiszámított szorzatából – a *szemetes egységmátrixból* – a megoldás pontos jegyszámára következtethetünk.

Megjegyzés. 1. A dolgozatban $\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$ egyenlőséggel értelmezett vektornormát használjuk (a koordináták közül abszolút értékben a legnagyobb szám a vektor normája).
2. A dolgozatban $\|\mathbf{A}\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ egyenlőséggel értelmezett mátrixnormát használjuk (az elemek abszolút értékeit soronként összeadjuk és ezek közül a legnagyobb szám a mátrix normája).

Legyen **A** egy állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszer $n \times n$-es együtthatómátrixa. Tegyük fel, hogy a karakterisztikus egyenlete megegyezik a minimálegyenletével, és az elsőfokú gyöktényezők mellett egyetlen másodfokú gyöktényezőjük van. Ekkor a gyöktényezős alak mindig felírható

$$(*) \qquad k(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots\big(\lambda - \lambda_{n-1}\big)^2$$

alakban. Mivel ilyen feltételek mellett a sajátvektorok száma $n-1$, ezért **A**-hoz nem írhatunk fel modálmátrixot. A differenciálegyenlet-rendszer pontos megoldását azonban megkaphatjuk a **T** transzformációmátrix és a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2 t} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & e^{-\lambda_{n-1} t} & te^{-\lambda_{n-1} t} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & e^{-\lambda_{n-1} t} \end{bmatrix}$$

alakban felírt alaprendszermátrix felhasználásával:

$$(**) \qquad \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0.$$

Képezzünk **A**-hoz egy $\mathbf{A}_1$-gyel jelölt mankómátrixot. Jelöljük az $\mathbf{A}_1$ alapmátrixát $\mathbf{D}_k$-val, a modálmátrixát $\mathbf{Q}_k$-val, a *modálmátrix közelítő inverzmátrixát – az elemek tíz jegyre kerekítésével* – $\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}$-gyel, azaz

$$\mathbf{Q}_k^{-1} \approx \widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}.$$

Ekkor a közelítő megoldásvektor:

(∗∗∗)
$$\mathbf{x}_k(t,\mathbf{x}_0) \approx \mathbf{Q}_k\mathbf{D}_k\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}\mathbf{x}_0.$$

A (∗∗) pontos és a (∗∗∗) közelítő megoldásvektorok különbsége:

(3)
$$\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_k(t,\mathbf{x}_0) \approx \mathbf{TDT}^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{Q}_k\mathbf{D}_k\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}\mathbf{x}_0 = \big(\mathbf{TDT}^{-1}\mathbf{x}_0 - \mathbf{Q}_k\mathbf{D}_k\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}\big)\mathbf{x}_0.$$

$t = 0$ behelyettesítéssel $\mathbf{D}$ is, $\mathbf{D}_k$ is egységmátrixot állít elő, azaz

$$\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_k(t,\mathbf{x}_0) \approx \mathbf{TDT}^{-1}\mathbf{x}_0 - \mathbf{Q}_k\mathbf{D}_k\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{TET}^{-1}\mathbf{x}_0 - \mathbf{Q}_k\mathbf{E}\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}\mathbf{x}_0 =$$
$$= \big(\mathbf{TT}^{-1} - \mathbf{Q}_k\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}\big)\mathbf{E}\mathbf{x}_0 = \big(\mathbf{E} - \mathbf{Q}_k\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}\big)\mathbf{x}_0.$$

A transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixa, a pontosan számított $\mathbf{T}^{-1}$ inverzével szorozva, pontosan az $\mathbf{E}$ egységmátrixot állítja elő, de a $\mathbf{Q}_k\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}$ *nem pontos egységmátrix, hanem szemetes egységmátrix, amelyben, az* $\mathbf{A}_1$ *mankómátrix* ε*-nal megváltoztatott elemei által bekövetkező kerekítési hibahalmozódás következtében, a főátlón kívül* 0*-hoz, és a főátlóban* 1*-hez közeli elemek is megjelennek.*

Mivel
$$\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_k(t,\mathbf{x}_0) \approx \big(\mathbf{E} - \mathbf{Q}_k\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}\big)\mathbf{x}_0,$$
ezért a közelítő megoldásvektor koordinátáinak hibája az $\mathbf{E} - \mathbf{Q}_k\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1} \neq \mathbf{0}$ mátrix normájával becsülhető.

Ha
$$10^{-(n+1)} < \big\|\mathbf{E} - \mathbf{Q}_k\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}\big\| \le 10^{-n},$$
akkor a mankómátrix felhasználásával számított közelítő megoldásvektor koordinátái n-edik jegyig bezárólag pontosak (az egész jegyeket is figyelembe kell venni).

Ha az $\mathbf{A}$ minimálegyenletének kettőnél nagyobb multiplicitású gyökei is vannak, akkor a megoldást a 4.2 pontban leírt módszerrel képezzük.

A hibabecslés alkalmazását egy homogén és egy inhomogén differenciálegyenlet-rendszer megoldásával szemléltetjük.

1. példa. Állítsuk elő az

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= 5{,}0000004y(t) + 1{,}0000007z(t) + 6w(t)\\
\dot{y}(t) &= 10y(t) - 1{,}0000003z(t) + 10w(t)\\
\dot{z}(t) &= -39y(t) - 40w(t)\\
\dot{w}(t) &= x(t) - 20y(t) + 2{,}0000001z(t) - 20w(t)
\end{aligned}\right\}$$

homogén differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = [1, 0, 1, 1]$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

Megoldás. A négy ismeretlen függvényt tartalmazó lineáris differenciálegyenlet-rendszer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5{,}0000004 & 1{,}0000007 & 6, \\ 0 & 10, & -1{,}0000003 & 10, \\ 0 & -39, & 0 & -40, \\ 1, & -20, & 2{,}0000001 & -20, \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixát mérési sorozattal kaptuk. Az $\mathbf{A}$ mátrixot tekintsük pontosnak, és az $\mathbf{A}$ mátrix a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{43} elemeinek $k \cdot 10^{-7}$ $(k = 4, 7, 3, 1)$ nagyságú megváltoztatásával kapott egész elemű

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 10 & -1 & 10 \\ 0 & -39 & 0 & -40 \\ 1 & -20 & 2 & -20 \end{bmatrix}$$

mátrixot közelítőnek. Mindkét együtthatómátrixszal képezzük a differenciálegyenlet-rendszer megoldását, és vizsgáljuk meg az egészre kerekített mátrixszal számított eredményvektorok közelítő pontosságát!

Ezzel a példával azt az esetet is szemléltetjük, amikor mindkét mátrixnak van a rendjükkel azonos számú független sajátvektoruk.

Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei, a $\mathbf{Q}$ modálmátrix, melynek oszlopai az $\mathbf{A}$ sajátvektorai, és a modálmátrix inverzét közelítő $\widetilde{\mathbf{Q}}^{-1}$ mátrix:

$$\lambda_1 \approx -0{,}999992133, \quad \lambda_2 \approx -2{,}000050114,$$

$$\lambda_3 \approx -2{,}999915831, \quad \lambda_4 \approx -4{,}000041920,$$

$$\mathbf{Q} \approx \begin{bmatrix} 0{,}7185522410 & 6{,}818417935 & -414{,}0656006 & 15{,}77350102 \\ -0{,}6736490165 & -2{,}727266078 & 69{,}01763234 & 0{,}0000944487 \\ -1{,}122737882 & -12{,}27327075 & 897{,}1293901 & -39{,}43394354 \\ 0{,}6287395685 & 2{,}045405529 & -0{,}0093755370 & -3{,}943527762 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}}^{-1} \approx \begin{bmatrix} -7{,}422015035 & 3{,}710918548 & -3{,}711003528 & 7{,}421956815 \\ 3{,}666880886 & -6{,}600598541 & 2{,}200148809 & -7{,}333945573 \\ 0{,}07245480210 & -0{,}2101124586 & 0{,}05071784307 & -0{,}2173583063 \\ 0{,}7184086808 & -2{,}831406350 & 0{,}5493726409 & -2{,}873664845 \end{bmatrix}.$$

Az alaprendszer diagonális mátrixa:

$$\mathbf{D}_d \approx \operatorname{diag}\left(e^{-0{,}999992133t}, e^{-2{,}000050114t}, e^{-2{,}999915831t}, e^{-4{,}000041920t}\right)$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldásvektor:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \approx \mathbf{Q}\mathbf{D}_d\widetilde{\mathbf{Q}}^{-1}\mathbf{x}_0 \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} -2{,}666591735e^{\lambda_1 t} - 10{,}00204553e^{\lambda_2 t} + 38{,}99904234e^{\lambda_3 t} - 25{,}33040539e^{\lambda_4 t} \\ 2{,}499953097e^{\lambda_1 t} + 4{,}000669917e^{\lambda_2 t} - 6{,}500471334e^{\lambda_3 t} - 0{,}0001516736110e^{\lambda_4 t} \\ 4{,}166549607e^{\lambda_1 t} + 18{,}00385574e^{\lambda_2 t} - 84{,}49672478e^{\lambda_3 t} + 63{,}32632024e^{\lambda_4 t} \\ -2{,}333291363e^{\lambda_1 t} - 3{,}000437843e^{\lambda_2 t} + 0{,}0008830411507e^{\lambda_3 t} + 6{,}332846252e^{\lambda_4 t} \end{bmatrix},$$

ahol λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 kitevők a megfelelő sajátértékekkel helyettesítendők.

Az egész értékekre kerekítéssel előállított $\mathbf{A}_k$ mátrix sajátértékei: $\lambda_{k1} = -1$, $\lambda_{k2} = -2$, $\lambda_{k3} = -3$, $\lambda_{k4} = -4$, sajátvektorai:

$$\mathbf{v}_1 = \left[\frac{8}{7}, -\frac{15}{14}, -\frac{25}{14}, 1\right]^T, \qquad \mathbf{v}_2 = \left[\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, -6, 1\right]^T,$$

$$\mathbf{v}_3 = [-6, 1, 13, 0]^T, \qquad \mathbf{v}_4 = [-4, 0, 10, 1]^T.$$

(*Megjegyzés.* A sajátértékeknek a karakterisztikus mátrixba való behelyettesítésével kapott homogén egyenletrendszerek megoldásaiban a paramétereket célszerű úgy megválasztani, hogy a sajátvektorok koordinátái kis egész számok hányadosai legyenek).

$\mathbf{A}_k$ modálmátrixa és ennek inverze:

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \frac{8}{7} & \frac{10}{3} & -6 & -4 \\ -\frac{15}{14} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{25}{14} & -6 & 13 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_k^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{3} & \frac{7}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{15}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{9}{2} & -15 \\ 5 & -\frac{29}{2} & \frac{7}{2} & -15 \\ -\frac{17}{6} & \frac{67}{6} & -\frac{13}{6} & \frac{34}{3} \end{bmatrix}.$$

Az alaprendszer diagonális mátrixa:

$$\mathbf{D}_d = \operatorname{diag}\left(e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}, e^{-4t}\right).$$

A kezdeti feltételt kielégítő megoldásvektor:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \approx \mathbf{Q}_k \mathbf{D}_k \widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3}e^{-t} - 10e^{-2t} + 39e^{-3t} - \frac{76}{3}e^{-4t} \\ \frac{5}{2}e^{-t} + 4e^{-2t} - \frac{13}{2}e^{-3t} \\ \frac{25}{6}e^{-t} + 18e^{-2t} - \frac{169}{2}e^{-3t} + \frac{190}{3}e^{-4t} \\ -\frac{7}{3}e^{-t} - 3e^{-2t} + \frac{19}{3}e^{-4t} \end{bmatrix}.$$

Mivel $\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_k^{-1} = \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1)$, azaz egységmátrix, ezért ebben a feladatban az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}_k$ mátrixokkal képzett megoldásvektorok pontos értéket adó jegyszámát a

$$\mathbf{Q}\widetilde{\mathbf{Q}}^{-1} \approx \begin{bmatrix} 0{,}99999977 & -2{,}2 \cdot 10^{-7} & -3{,}8 \cdot 10^{-8} & -5 \cdot 10^{-8} \\ 2{,}476597 \cdot 10^{-8} & 1{,}000000027 & -2{,}46825 \cdot 10^{-9} & -1{,}39088 \cdot 10^{-8} \\ 5{,}8 \cdot 10^{-7} & 5 \cdot 10^{-7} & 1{,}00000014 & 1 \cdot 10^{-7} \\ 2{,}7 \cdot 10^{-8} & 5 \cdot 10^{-8} & 1{,}4 \cdot 10^{-8} & 1{,}00000004 \end{bmatrix}$$

szemetes egységmátrix felhasználásával, a

$$10^{-6} < \left\|\mathbf{E} - \mathbf{Q}\widetilde{\mathbf{Q}}^{-1}\right\| \leq 1{,}32 \cdot 10^{-6} \quad \big(\mathbf{E} = \mathrm{diag}(1,1,1,1)\big)$$

normálalak kitevőjéből becsülhetjük, vagyis 6. jeggyel bezárólag pontos megoldást kapunk.

Például a $t = 1$ helyen számított megoldásvektorok és különbségük:

$$\mathbf{x}(1) \approx \begin{bmatrix} -0{,}8566655149 \\ 1{,}137423817 \\ 0{,}921849892 \\ -1{,}148392201 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_k(1) \approx \begin{bmatrix} -0{,}8566655149 \\ 1{,}137423817 \\ 0{,}921849892 \\ -1{,}148392201 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}_k(1) \approx \begin{bmatrix} -0{,}207 \cdot 10^{-7} \\ -2{,}5 \cdot 10^{-8} \\ 6{,}03 \cdot 10^{-7} \\ -3{,}5 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}.$$

A legnagyobb eltérés $6{,}03 \cdot 10^{-7}$, amiből következik, hogy mindegyik koordináta 6. jeggyel bezárólag pontos.

1. megjegyzés. A t növekedésével a pontosság nem romlik.

Pl. ha $t = 3$, akkor

$$\mathbf{x}_k(3) \approx [-0{,}1528957085,\ 0{,}1335805159,\ 0{,}2420246624,\ -0{,}1235671694]^T;$$

$$\mathbf{x}(3) \approx [-0{,}1528953196,\ 0{,}1335810264,\ 0{,}2420242575,\ -0{,}1235676876]^T,$$

és

$$\mathbf{x}(3) - \mathbf{x}_k(3) \approx \big[3{,}889 \cdot 10^{-7},\ 5{,}105 \cdot 10^{-7},\ -4{,}049 \cdot 10^{-7},\ -5{,}182 \cdot 10^{-7}\big]^T.$$

2. megjegyzés. Ha az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ karakterisztikus mátrix determinánsa a sajátértékek visszahelyettesítésével nem egyenlő nullával, akkor a MAPLE 9.5 `combine(dsolve (...)` programja nem állít elő triviálistól különböző közelítő megoldást. Ebben a példában sem alkalmazható, mivel

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}) \approx 0{,}00000392, \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E}) \approx 0{,}0000024,$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{E}) \approx -2 \cdot 10^{-7}, \qquad \det(\mathbf{A} - \lambda_4\mathbf{E}) \approx -0{,}0000022,$$

de az általam leírt módszer – becsülhető hibával – megoldást ad.

A MAPLE 15

```
egy:={diffrendszer,kezdetifeltltelek}:megold
 :=dsolve(egy,numeric):megold(1);megold(3);
```

utasításaival 15 jegyre kerekítve kapjuk a megoldásvektort $t = 1$, $t = 3$ helyettesítéssel, amely hét jegyre kerekítve a modálmátrix-módszerrel számított hét jegyre kerekített megoldásvektorral azonos.

2. példa. Állítsuk elő a

$$\frac{dx}{dt} = 2x(t) + y(t) + z(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x(t) + 3y(t) + 2z(t) + e^{-2t},$$

$$\frac{dz}{dt} = x(t) - y(t) + 2y(t)$$

inhomogén differenciálegyenlet-rendszer $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ kezdeti feltételvektort kielégítő megoldását.

Megoldás. Az együtthatómátrix és determinánsa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{A} = 9.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja:

$$k(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2.$$

A sajátvektorok száma kettő: $\mathbf{v}(1) = [-1, 0, 1]^T$, $\mathbf{v}(3) = [-1, -2, 1]^T$.

Az inhomogén differenciálegyenlet-rendszer kezdeti feltételt kielégítő pontos megoldása:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{15}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t} + \frac{3}{5}e^{3t} + 2te^{3t} \\ -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{6}{5}e^{3t} + 4te^{3t} \\ -\frac{1}{15}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{t} + \frac{7}{5}e^{3t} - 2te^{3t} \end{bmatrix}.$$

Megkíséreljük a modálmátrix előállítását az

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2{,}000000009 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mankómátrixszal.

A mankómátrix sajátértékei:

$$\lambda_1 \approx 0{,}999999996, \quad \lambda_2 \approx 2{,}999916511, \quad \lambda_3 \approx 3{,}000083485.$$

A mankómátrixnak a sajátvektorokkal felírt modálmátrixa, és inverzének közelítése:

$$\mathbf{Q}_k \approx \begin{bmatrix} -0{,}707106780 & -0{,}4714001463 & 8983{,}571652 \\ 2{,}772348989 \cdot 10^{-9} & -0{,}9428002905 & 17967{,}14328 \\ 0{,}7071067823 & 0{,}4714395026 & -8982{,}821665 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1} = \begin{bmatrix} -1{,}414221562 & 0{,}7071067810 & -0{,}000008000031463 \\ 12704{,}73886 & -0{,}5303430858 & 12704{,}73882 \\ 0{,}6666631030 & 0{,}00002782810945 & 0{,}6666631008 \end{bmatrix}.$$

Az alaprendszer diagonálmátrixa:

$$\mathbf{D}_d = \operatorname{diag}\left(e^{0{,}999999996t}, e^{2{,}999916511t}, e^{3{,}000083485t}\right).$$

A homogén differenciálegyenlet-rendszer megoldása:

$$\mathbf{x}_h(t, \mathbf{x}_0) \approx \mathbf{Q}_k \mathbf{D}_d \widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1} \mathbf{x}_0 \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 0{,}5000113130e^{\lambda_1 t} - 11977{,}78150e^{\lambda_2 t} + 11978{,}28149e^{\lambda_3 t} \\ -1{,}960391128 \cdot 10^{-9} e^{\lambda_1 t} - 23955{,}56293e^{\lambda_2 t} + 23956{,}56293e^{\lambda_3 t} \\ 0{,}5000113143e^{\lambda_1 t} + 11978{,}78150e^{\lambda_2 t} - 11977{,}28148e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix},$$

ahol a kitevőkbe rendre a kiszámított sajátértékeket kell helyettesíteni. A megoldást megkapjuk, ha

$$\mathbf{D}_u = \operatorname{diag}\left(e^{0{,}999999996(t-u)}, e^{2{,}999916511(t-u)}, e^{3{,}000083485(t-u)}\right)$$

és $\mathbf{f}(u) = \left[0, e^{-2u}, 0\right]^T$ felhasználásával kiszámítjuk az integrálandó függvényvektort:

$$\mathbf{Q}_k \mathbf{D}_u \widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1} \mathbf{f}(u),$$

és integrálás után a két részt összegezzük:

$$\mathbf{x}_{ih}(t, \mathbf{x}_0) \approx \mathbf{Q}_k \mathbf{D}_d \widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1} \mathbf{x}_0 + \int_{u=0}^{t} \mathbf{Q}_k \mathbf{D}_u \widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1} \mathbf{f}(u)\, du \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 0{,}3333446464e^{\lambda_1 t} - 11977{,}73150e^{\lambda_2 t} + 11978{,}33149e^{\lambda_3 t} + 0{,}06666674178e^{-2t} \\ -1{,}306942204 \cdot 10^{-9} e^{\lambda_1 t} - 23955{,}46293e^{\lambda_2 t} + 23956{,}66293e^{\lambda_3 t} - 0{,}1999998499e^{-2t} \\ -0{,}3333446472e^{\lambda_1 t} + 11978{,}73149e^{\lambda_2 t} - 11977{,}33147e^{\lambda_3 t} - 0{,}06666674187e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

A megoldásvektor koordinátái a pontos értéktől a

$$\mathbf{Q}_k \widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1{,}000003 & -3{,}756 \cdot 10^{-7} & 0{,}000002 \\ 0 & 0{,}9999992471 & 0 \\ -0{,}000002 & 3{,}756 \cdot 10^{\cdot 7} & 0{,}999999 \end{bmatrix}$$

szemetes egységmátrixszal becsülve, tekintettel a $\left\|\mathbf{E} - \mathbf{Q}_k \widetilde{\mathbf{Q}}_k^{-1}\right\| = 5{,}3756 \cdot 10^{-6}$ normára, várhatóan 6. jegyig megegyeznek. Például a $t = 1$ helyen a pontos ($\mathbf{x}_p$) és a mankómátrixszal számított közelítő megoldás ($\mathbf{x}_k$) koordinátái:

$$\mathbf{x}_p \approx \begin{bmatrix} 53{,}13751228 \\ 104{,}4177249 \\ -12{,}96643844 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_k \approx \begin{bmatrix} 53{,}13772757 \\ 104{,}4184373 \\ -12{,}96642757 \end{bmatrix}.$$

A 6. jegyre kerekítve, csak az első koordináták térnek el $2 \cdot 10^{-4}$ értékkel.

6. Komplex sajátértékek és sajátvektorok

Az előző pontokban leírtak értelemszerűen alkalmazhatók olyan állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldására is, amelynél az együtthatómátrix sajátértékei között komplex számok is vannak, és sajátvektorai komplex komponenseket is tartalmaznak.

A komplex blokkok sorrendjét nem értelmezzük, ezért komplex sajátértékek esetén a *passzítási szabály szerint* (l. a 4.3. fejezetet) *állítjuk elő a **Jordan**-féle normálalakot, a modálmátrixot, illetve a transzformációmátrixot és az alaprendszermátrixot.*

1. példa. Határozzuk meg annak a homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet-rendszernek a megoldását, amelynek együtthatómátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 6 & 1 \\ -6 & -4 & -5 & -1 \\ -3 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

és a kezdeti feltétel vektora:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Kiszámítjuk az **A** mátrix sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = -2i, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = 1,$$

$$\mathbf{v}_1(2i) = \left[-1 - \frac{2}{3}i, \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i, 1, -\frac{1}{3}\right]^T, \quad \mathbf{v}_2(-2i) = \left[-1 + \frac{2}{3}i, \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i, 1, -\frac{1}{3}\right]^T,$$

$$\mathbf{v}_3(-1) = \left[\frac{7}{6}, -\frac{11}{6}, -\frac{1}{2}, 1\right]^T, \qquad \mathbf{v}_4(1) = \left[-\frac{11}{7}, 1, 1, -\frac{4}{7}\right]^T.$$

A negyedrendű **A** mátrixnak négy lineárisan független sajátvektora van, tehát a megoldást modálmátrix alkalmazásával elvégezhetjük.

Ha a *Jordan*-féle normálalakba a sajátértékeket λ_3, λ_4, λ_2, λ_1 sorrendben írjuk be, azaz

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{bmatrix},$$

akkor a *passzítási szabály* szerint a $\mathbf{Q}$ modálmátrix oszlopvektorainak sorrendje: $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1$, azaz

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} \frac{7}{6} & -\frac{11}{7} & -1+\frac{2}{3}i & -1-\frac{2}{3}i \\ -\frac{11}{6} & 1 & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}i & \frac{2}{3}+\frac{2}{3}i \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

és inverze:

$$\mathbf{Q}^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ -\frac{21}{10} & -\frac{21}{10} & -\frac{7}{5} & -\frac{21}{10} \\ \frac{9}{10}-\frac{3}{20}i & \frac{9}{10}+\frac{3}{5}i & \frac{6}{5}-\frac{3}{20}i & \frac{6}{5}-\frac{6}{5}i \\ \frac{9}{10}+\frac{3}{20}i & \frac{9}{10}-\frac{3}{5}i & \frac{6}{5}+\frac{3}{20}i & \frac{6}{5}-\frac{6}{5}i \end{bmatrix}.$$

Az alaprendszer diagonálmátrixa a $\mathbf{J}$-re tekintettel: $\mathbf{D}_d=\operatorname{diag}\left(e^{-t},e^{t},e^{-2ti},e^{2ti}\right)$.

A megoldás oszlopvektora:

$$\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)=\begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}=\mathbf{Q}\mathbf{D}_d\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{x}_0=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{7}{10}e^{-t}+\frac{121}{10}e^{t}-\frac{59}{10}e^{-2ti}+\frac{9}{10}ie^{-2ti}-\frac{59}{10}e^{2ti}-\frac{9}{10}ie^{2ti} \\ -\frac{11}{10}e^{-t}-\frac{77}{10}e^{t}+\frac{22}{5}e^{-2ti}-\frac{8}{5}ie^{-2ti}+\frac{22}{5}e^{2ti}+\frac{8}{5}ie^{2ti} \\ -\frac{3}{10}e^{-t}-\frac{77}{10}e^{t}+\frac{9}{2}e^{-2ti}+\frac{21}{10}ie^{-2ti}+\frac{9}{2}e^{2ti}-\frac{21}{10}ie^{2ti} \\ \frac{3}{5}e^{-t}+\frac{22}{5}e^{t}-\frac{3}{2}e^{-2ti}-\frac{7}{10}ie^{-2ti}-\frac{3}{2}e^{2ti}+\frac{7}{10}ie^{2ti} \end{bmatrix}.$$

A $t=1$ helyen felvett értékek:

$$x_1\approx 39{,}69599377,\qquad x_2\approx -27{,}90728141,$$
$$x_3\approx -20{,}96740625,\qquad x_4\approx 12{,}15659182.$$

Megjegyzés. A számítógép x_1, x_2, x_3 értékeknél $\approx 10^{-9}i$ képzetes részt is kiírt.

A komplex számokra vonatkozó *Euler*-féle képletek alkalmazásával a megoldás valós alakra hozható:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{121}{10}e^t + \frac{7}{10}e^{-t} - \frac{59}{5}\cos 2t + \frac{9}{5}\sin 2t,\\
x_2(t) &= -\frac{77}{10}e^t - \frac{11}{10}e^{-t} + \frac{44}{5}\cos 2t - \frac{16}{5}\sin 2t,\\
x_3(t) &= -\frac{77}{10}e^t - \frac{3}{10}e^{-t} + 9\cos 2t + \frac{21}{5}\sin 2t,\\
x_4(t) &= \frac{22}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{-t} - 3\cos 2t - \frac{7}{5}\sin 2t.
\end{aligned}$$

A $t = 1$ helyen vett helyettesítési értékek csak az x_2 és x_4 utolsó jegyében térnek el:

$$x_1 \approx 39{,}69599377, \qquad x_2 \approx -27{,}90728140,$$
$$x_3 \approx -20{,}96740625, \qquad x_4 \approx 12{,}15659181.$$

2. példa. Határozzuk meg annak a homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet-rendszernek a megoldását, amelynek együtthatómátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & -1 & -1 \\ -10 & -10 & 1 & 2 \\ -17 & -18 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a kezdeti feltétel vektora:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. Kiszámítjuk az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit: $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = -1$ (kétszeres gyök), és sajátvektorait:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1(3i) &= \left[-\frac{19}{37} + \frac{3}{37}i, \frac{20}{37} - \frac{9}{37}i, 1, 0\right]^T,\\
\mathbf{v}_2(-3i) &= \left[-\frac{19}{37} - \frac{3}{37}i, \frac{20}{37} + \frac{9}{37}i, 1, 0\right]^T,\\
\mathbf{v}_3(-1) &= [0, 1, 9, 0]^T.
\end{aligned}$$

Mivel a λ_1-hez és a λ_2-höz 1×1-es blokkok tartoznak és $\lambda_3 < 0$, ezért a megoldások stabilisak.

A *Jordan*-féle normálalak:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

melyhez a passzítási szabály szerint kell felírni a kiszámítandó $\mathbf{T}$ és $\mathbf{D}_e$ mátrixot.

Az $\mathbf{A}$ mátrix rendjénél eggyel kevesebb számú lineárisan független sajátvektor van, ezért először a transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixát számítjuk ki az ismert sajátvektorok felhasználásával:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{37} - \frac{3}{37}i & -\frac{19}{37} + \frac{3}{37}i & 0 & c_1 \\ \frac{20}{37} + \frac{9}{37}i & \frac{20}{37} - \frac{9}{37}i & 1 & c_2 \\ 1 & 1 & 9 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Képezzük az $\mathbf{AT} - \mathbf{TJ} = \mathbf{0}$ mátrixegyenletet:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 9c_1 + 9c_2 - c_3 - c_4 \\ 0 & 0 & 0 & -10c_1 - 9c_2 + c_3 + 2c_4 = -1 \\ 0 & 0 & 0 & -17c_1 - 18c_2 + 2c_3 + 2c_4 - 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

A megoldásvektor: $\mathbf{c} = [9, p, 71 + 9p, 10]^T$.

A $p = 0$ választással megkapjuk a $\mathbf{T}$ mátrix 4. oszlopvektorát. Mivel $\det \mathbf{T} = \frac{600}{37} i \neq 0$, ezért a $\mathbf{T}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{37} - \frac{3}{37}i & -\frac{19}{37} + \frac{3}{37}i & 0 & 9 \\ \frac{20}{37} + \frac{9}{37}i & \frac{20}{37} - \frac{9}{37}i & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 9 & 71 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{T}$ mátrix inverze:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{27}{20} - \frac{143}{60}i & -\frac{9}{20} - \frac{57}{20}i & \frac{1}{20} + \frac{19}{60}i & \frac{43}{50} - \frac{31}{300}i \\ -\frac{27}{20} + \frac{143}{60}i & -\frac{9}{20} + \frac{57}{20}i & \frac{1}{20} - \frac{19}{60}i & \frac{43}{50} + \frac{31}{300}i \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{49}{50} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{J}$-re való tekintettel, az alaprendszer mátrixa:

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} e^{-3it} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3it} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

A megoldásvektor:

$$\mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\end{bmatrix}=\mathbf{TD}_e\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0=$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{2}{5}e^{-3it}+\frac{14}{5}ie^{-3it}-\frac{2}{5}e^{3it}-\frac{14}{5}ie^{3it}+\frac{9}{5}e^{-t}\\ \frac{32}{25}e^{-3it}-\frac{74}{25}ie^{-3it}+\frac{32}{25}e^{3it}+\frac{74}{25}ie^{3it}-\frac{39}{25}e^{-t}+\frac{1}{5}te^{-t}\\ -\frac{2}{25}e^{-3it}-\frac{136}{25}ie^{-3it}-\frac{2}{25}e^{3it}+\frac{136}{25}ie^{3it}+\frac{4}{25}e^{-t}+\frac{9}{5}te^{-t}\\ 2e^{-t}\end{bmatrix}.$$

A $t=1$ helyen felvett értékek:

$$x_1\approx 2{,}244449037,\qquad x_2\approx -3{,}870127280,$$
$$x_3\approx -0{,}6559431842,\qquad x_4\approx 0{,}7357588824.$$

A komplex számokra vonatkozó *Euler*-féle képletek alkalmazásával a megoldás valós alakra hozható:

$$x_1(t)=-\frac{4}{5}\cos 3t+\frac{28}{5}\sin 3t+\frac{9}{5}e^{-t},$$
$$x_2(t)=\frac{64}{25}\cos 3t-\frac{148}{25}\sin 3t+\frac{1}{5}te^{-t}-\frac{39}{25}e^{-t},$$
$$x_3(t)=-\frac{4}{25}\cos 3t-\frac{272}{25}\sin 3t+\frac{9}{5}te^{-t}+\frac{4}{25}e^{-t},$$
$$x_4(t)=2e^{-t}.$$

A $t=1$ helyen vett helyettesítési értékek csak az utolsó egy-két jegyben térnek el:

$$x_1\approx 2{,}244449037,\qquad x_2\approx -3{,}870127279,$$
$$x_3\approx -0{,}6559431837,\qquad x_4\approx 0{,}7357588824.$$

7. Összefoglaló

A modálmátrixos megoldási eljárás *pontos,* ha a minimálegyenletnek csak egyszeres gyökei vannak, más szóval, ha az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet-rendszer $n\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixának van n számú lineárisan független sajátvektora. Ekkor a *Lagrange*-féle mátrixpolinomok (l. [K18], 246. oldal) alkalmazása helyett célszerűbb a modálmátrixszal képezni a megoldást.

A modálmátrixos megoldás *közelítő*, ha pl. a minimálegyenlet egyszeres gyökei mellett egy kétszeres gyök is előfordul, és az együtthatómátrixot olyan közelítő mátrixszal (mankómátrixszal) helyettesítjük, melynek van n számú lineárisan független sajátvektora.

Abban az esetben, ha a minimálegyenlet gyökei között van kettőnél nagyobb multiplicitású, akkor az *Hermite*-féle mátrixpolinomok (l. [K18], 279. oldal) alkalmazása helyett célszerűbb az $e^{\mathbf{A}t}$ exponenciális mátrixfüggvény normálalakjának felhasználásával képezni a pontos megoldást. A megoldáshoz szükséges az $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan*-féle normálalakja és a transzformáció $\mathbf{T}$ mátrixa, melyek a dolgozatban leírtak szerint gazdaságosan előállíthatók.

A differenciálegyenlet-rendszer megoldását a mátrixszorzatok mindkét módszerrel rendezett formában állítják elő.

A pontos modálmátrixszal előállított megoldás a *Jordan*-féle normálalakkal képzett megoldás speciális esete, ha a megoldást a dolgozatban adott szabályok betartásával végezzük. A mankómátrix modálmátrixa és inverzének kilenc-tíz értékes jegyre való közelítésével előállított mátrix szorzata általában nem tiszta egységmátrixot – ún. *szemetes egységmátrixot* – ad eredményül. A szemetes egységmátrix és a pontos egységmátrix különbségét véve, annak abszolút értékben legnagyobb eleméből következtethetünk a megoldás pontos jegyeinek számára.

A szerző őszinte köszönetét fejezi ki a lektornak. Megjegyzései, javaslatai nélkül nem sikerült volna a cikk félreérthető részeit érthetővé fogalmazni.

Irodalomjegyzék

Könyvek

[K1] Beaumont, R. A. – Ball, R. W., *Introduction to modern Algebra and Matrix Theory,* New York, 1954.

[K2] Bellman, R., *Stability Theory of Differential Equations,* New York, 1954.

[K3] Bellman, R., *Introduction to Matrix Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1963.

[K4] Demidovics, B. P., *Osznovi matematicseszkoj teorii usztojcsivoszti,* Izd. „NAUKA” Fiz.-Mat. Lit. Moszkva, 1967.

[K5] Fagyajev, D. K. – Fagyajeva, V. N., *Numerische Methoden der linearen Algebra,* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965., 1966.

[K6] Fox, L., *Numerical Methods in Linear Algebra,* Pergamon, Oxford, 1964.

[K7] Gantmacher, F. R., *Matrizenrechnung. I. és II. kötet,* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1965., 1966.

[K8] Glazman, I. M. – Ljubics, Ju. I., *Konecsnomernij linejnij analiz,* NAUKA” Fiz.-Mat. Lit. Moszkva, 1969.

[K9] Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations,* Dover Publications, New York, 1944.

[K10] Lappo-Danilevszkij, I. A., *Teorija funkcij ot matric i sziszterni linejnih differencialnih uravnenij,* ONTI Goszudarsztvennoe Izdatelsztvo Tehniko-Teoreticseszkoj Literaturi, Leningrád–Moszkva, 1934.

[K11] J. Gy. Obádovics, *Taschenbuch der Elementar-Mathematik,* Akadémiai Kiadó, Budapest és B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig. 2. kiad. 1964.

[K12] Obádovics J. Gyula, *Numerikus módszerek és programozásuk,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1. kiad. 1975., 2. kiad. 1977.

[K13] Obádovics J. Gyula – Szarka Zoltán, *Felsőbb matematika,* 3. bővített kiadás, SCOLAR Kiadó, Budapest, 2009.

[K14] Obádovics J. Gyula, *Lineáris algebra példákkal,* 2. javított kiadás, SCOLAR Kiadó, Budapest, 2010.

[K15] Obádovics J. Gyula, *Mátrixok és differenciálegyenlet-rendszerek,* SCOLAR Kiadó, Budapest, 2005.

[K16] Petrovszkij, I. G., *Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről.,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.

[K17] Ralston, A. – Wilf, H. S., *Mathematical Methods for Digital Computers. I–II. kötet,* John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1967., 1968.

[K18] Rózsa Pál, *Lineáris algebra és alkalmazásai,* 2. kiadás. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.

[K19] Zurmühl, R., *Matrizen und ihre technischen Anwendungen,* Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1964.

[K20] Wilkinson, J. H., *The Algebraic Eigenvalue Problem,* Oxford University Press, London, 1965.

Dolgozatok

[D1] Bickley, W. G. – McNamee, J., Matrix and Other Direct Methods for the Solution of Systems of Linear Difference Equations, *Phil. Trans. of the Roy. Soc., London,* **252** A (1959–60), 69–130. oldal.

[D2] Eberly, W., Asymptotically Efficient Algorithms for the Frobenius Form (preprint), *Department of Computer Science University of Calgary,* 2000. máj. 1.

[D3] Egerváry J., Mátrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról, *MTA III. Osztályának közleményei,* **3** (1953), 417–458. oldal.

[D4] Egerváry J., Über eine konstruktive Methode zur Reduktion einer Matrix auf Jordansche Normalform, *Acta Mathematica Academiae Scientiarium Hungaricae,* **10** (1959), 31–54. oldal.

[D5] Frey T. – Obádovics J. Gy., O neszkolkih principialnih voproszah zadacs o szobsztvennih znacsenijah otnoszitelno szisztem differencialnih uravnenij, *Acta Mathematica Academiae Scientiarium Hungaricae,* 1964. 1–2. füzet, 1–28. oldal.

[D6] Giesbrecht, M., Fast Algorithms for Rational Forms of Integer Matrices, in: *Proc. ISSAC'94,* 305–311. oldal.

[D7] Giesbrecht, M., Nearly Optimal Algorithms For Canonical Matrix Forms, *SIAM Journal on Computing,* **24** (1995), 948–969.

[D8] Giesbrecht, M. – Storjohann, A., Computing Rational Forms of Integer Matrices, *J. Symb. Comput.,* **34** (2002), 157–172.

[D9] Gil, I., Computation of the Jordan canonical form of a square matrix (Using the Axiom Programming Language), in: *Proc. ISSAC'92,* 138–145. oldal, Berkeley, USA, 1992.

[D10] Kaltofen, E. – Krishnamoorthy, M. S. – Saunders, B. D., Parallel Algorithms for Matrix Normal Forms, *Linear Algebra and its Applications,* **136** (1990), 189–208. oldal.

[D11] Karpelevics, F. I., O harakteriszticseszkih kornah matrici s neotricatelnimi elementami, *Izv. AN SzSzSzR Szer. Mat.,* **15** (1951), 361–383. oldal.

[D12] Keller-Gehrig, W., Fast algorithms for the characteristic polynomial, *Theoretical Computer Science,* **36** (1985), 309–317.

[D13] Lax, P. D., Differential Equations, Difference Equations and Matrix Theory, *Commun. Pure Appl. Math.,* vol. **11** (1958), 175–194. oldal.

[D14] Makai, E., A Class of Systems of Differential Equations and its Treatment with Matrix Methods. I., II., *Publ. Mat. Debrecen,* **3** (1957), 5–37. o., **5** (1958), 269–274. oldal.

[D15] Neumann, J. von – Goldstine, H., The Numerical Inverting of Matrices of High Order, *Bull. Amer. Math. Soc.,* vol. **53** (1947), 1021–1099. oldal.

[D16] Obádovics J. Gy., Eigenvalue problems of differential equation systems and the computation of eigenvalues with the use of electronic digital computing machines, *N.-ipari Műszaki Egyetem Közl.,* **XXIII** (1964).

[D17] Obádovics J. Gy., Iszszledovanije najlucseva priblizsenija k reseniju krajevih zadacs obiknovennih linejnih differencialnih uravnenij n-ogo porjadka, *NME Idegennyelvű Közleményei,* **27**. kötet (1967), 71–86. oldal.

[D18] Obádovics J. Gy., Iszszledovanije najlucseva priblizsenija k reseniju krajevih zadacs dlja sziszteм obiknovennih linejnih differencialnih uravnenij v prosztransztve $L_p[a, b]$, *NME Idegennyelvű Közleményei,* **XXXI**. kötet (1970), 373–379. oldal.

[D19] Obádovics J. Gy., Opredelenije i iszszledovanije prosztransztva vektorfunkcii s odnoj peremennoj $W_p^{(n)}[a, b]$, *NME Idegennyelvű Közleményei,* **XXXI**. kötet (1970), 381–395. oldal.

[D20] Obádovics J. Gy., Priblizsenije polinomialnimi vektorami k reseniju krajevoj zadacsi sziszteмi differencialnih uravnenij, *Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Rolando Eötvös nominatae. Sectio Computatorica, Tomus,* **I** (1978), 99–107. oldal.

[D21] Ozello, P., *Calcul Exact des Formes de Jordan et de Frobenius d'une Matrice,* PhD thesis, Université Scientifique, Technologique et Medicale de Grenoble, 1987.

[D22] Steel, A., A new algorithm for the computation of canonical forms of matrices over fields, *Journal of Symbolic Computation,* **24** (1997), 409–432.

[D23] Storjohann, A. – Villard, G., Algorithms for similarity transforms, in: *Seventh Rhine Workshop on Computer Algebra,* Bergenz, Austria, March 2000.

[D24] Turing, A. M., Rounding-Off Errors in Matrix Procsses, *Quart. J. Mech.,* **1** (1948), 287–308. oldal.

[D25] Villard, G., Fast parallel computation of the Smith normal form of polynomial matrices, in: *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation,* Oxford, UK, pages 312–317. ACM Press, July 1994.

[D26] Wilkinson, J. H., The Calculation of the Eigenvectors of Codiagonal Matrices, *Comput. J.,* **1** (1958), 148–152. oldal.

J. Gyula Obádovics: New method for finding the Jordan canonical form and transformation matrix of a given matrix $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, and for solving linear differential equations with constant coefficients

The modal matrix solution method is *exact* if all roots of the minimal equation are simple or, in other words, if the $n \times n$ matrix $\mathbf{A}$ of the system of linear differential equations with constant coefficients has n linearly independent eigenvectors. In this case, instead of applying matrix *Lagrange* polynomials, it is preferable to construct the solution by means of the modal matrix.

The modal matrix solution method is *approximative* if, for instance, besides simple roots there is a double root of the minimal equation, and we replace the coefficient matrix with an approximating matrix (crutch matrix) having n linearly independent eigenvectors.

If the minimal equation has at least one root of multiplicity greater than two then instead of using the matrix *Hermite* polynomials it is better to construct the exact solution by means of the normal form of the exponential matrix function $e^{\mathbf{A}}t$. The solution process requires the *Jordan form* of $\mathbf{A}$ and the transformation matrix $\mathbf{T}$ which can be obtained in an economical way described in the paper.

With both methods, the matrix products give the solution of the system of differential equations in a well-arranged form.

The solution created with the help of the exact modal matrix is a particular case of the solution obtained from the *Jordan* form provided the rules laid down in the paper are observed throughout the procedure. When using an approximation method, the product of the modal matrix and its inverse will in general be a so-called *junk unit matrix* rather than a pure unit matrix. The maximum of the absolute value of elements outside the main diagonal yields information on the number of accurate digits in the solution.

Obádovics J. Gyula
a matematikai tudományok kandidátusa
professor emeritus
e-mail: ojgy33@gmail.com

TÁRSULATI ÉLET – 2012

Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2012. évi érmet **Totik Vilmosnak** ítélte oda.

Indoklás: *Totik Vilmos* tudományos munkásságát csak a legmagasabb szintű jelzőkkel lehet méltatni. Kevés olyan matematikus van ma Magyarországon, aki a matematika ennyi független ágában ilyen magabiztossággal és alkotó erővel dolgozna. Munkásságának már a formális mutatói is tekintélyt parancsolóak (160 dolgozata van, 5 könyvet, 3 feladatgyűjteményt és 10 ismeretterjesztő munkát is írt, 1300-nál több hivatkozása van), de munkássága igazi értékét az adja, hogy a számokkal nem mérhető minőségi színvonal és tudományos hatás tekintetében messze kiemelkedik még a hasonló mutatókkal rendelkező matematikusok közül is. Bizonyosan ennek köszönhető, hogy a European Research Center grantját is elnyerte, amelynek keretében számos fiatal matematikus, posztdoktor munkáját irányítja. Tudományos eredményeinek taglalására, csak azokból a munkáiból emelünk ki néhányat, amelyekkel a Szele Tibor-emlékérem kiírásának szellemében „kiemelkedő fokon segíti és irányítja a tehetséges fiatalokat a matematikai kutatásba való bevezetésben problémákkal való ellátás, tudományos együttműködés révén.”

Komjáth Péterrel végzett tízéves közös munka eredménye a [*Problems and Theorems in Set Theory”,* Problem Books in Mathematics, Springer Verlag, 2006] könyv, amely az egyetlen halmazelméleti feladatgyűjtemény a világon, amely a klasszikus halmazelmélet mellett nagyon sok kapcsolódó feladatot tárgyal az algebra, geometria, topológia, analízis és kombinatorika területéről. A recenziók, kritikák, amelyek mindegyike magasztaló, megegyeznek abban, hogy a könyv vetekedik a legendás Pólya-Szegő-féle analízis-példatárral, annak méltó utóda, folytatása abban az értelemben, hogy ez a könyv is matematikusnemzedékek egész sorát indítja el a kutatás útján. Részt vett a második Schweitzer-könyv [*Contests in Higher Mathematics, II*] elkészítésében és kiadásában. Ismeretterjesztő dolgozatai közül kiemeljük [A tale of two integrals, *Amer. Math. Monthly,* **106** (1999), 227–240.] cikkét, amelyet a Mathematical Association of America Lester Ford-díjjal jutalmazott. [Egy ötlet: Lépjünk ki a térbe, *Polygon,* **2** (1993), 104–111.] dolgozatával elindította az „Egy ötlet” rovatot, amelyben problémamegoldásokban gyakran használt eszközöket publikálnak a szerzők.

Készségesen és önzetlenül vállal feladatokat a matematikai tehetségek felkutatásában, gondozásában. Háromszor volt a Schweitzer Miklós-emlékverseny bizottságának elnöke, a versenyen kitűzött feladatainak száma 25-30 között lehet. Gyakran meghívott népszerű előadója a tehetséggondozó intézményeknek, rendezvényeknek, amelyek közül a legutóbbiak: Fazekas Mihály Gimnázium (2011): Számkitöltésektől a harmonikus függvényekig; Eötvös Loránd Kollégium Matematikai Műhely (2012): Két integrál meséje; Eötvös Loránd Kollégium Matematikai Műhely (2012): Ultraszorzatok és Banach-limeszek; KöMaL Ankét (2012): Térkitöltő görbék.

Alapító tagja a Bolyai Intézet Matematikai Doktori Iskolájának, ahol rendszeresen vezet kurzusokat. Számos speciálkollégiumot tartott a matematikai gondolkodás elterjesztése, a matematika megkedveltetése érdekében a „Híres problémák a matematika történetéből"-től „A politika matematikája"-ig. Legendás a felsőbb évesek (ma mesterszakosok) és doktoranduszok számára tartott feladatmegoldó szemináriuma; ezt legutóbb az elmúlt félévben hirdette meg.

Három magyar (Benkő Dávid, Nagy Béla, Toókos Ferenc) és három amerikai (M. Findley, P. Simeonov, R. Taylor) doktorandusz szerzett irányítása alatt PhD címet; jelenleg is van egy nagyon tehetséges doktorandusza (Varga Tamás), aki közvetlenül védés előtt áll. A kétszeres Schweitzer-győztes Varjú Pétert is ő indította el a pályán, aki három approximációelméleti cikkének birtokában (kettőben társszerző Totik Vilmos) nyugodtan védhetett volna Szegeden is, de éppen Totik Vilmos tanácsára külföldi tanulmányokra indult és végül Princetonban szerzett PhD-fokozatot. Totik Vilmos hosszú ideje vezetője az MTA Analízis és Sztochasztika Kutatócsoportnak, ahol rendszeresen dolgoznak pályájuk elején álló fiatal matematikusok, doktoranduszok és posztdoktorok.

Összefoglalva: Totik Vilmos nemzetközileg rendkívül kiemelkedő tudományos sikerei mellett elévülhetetlen érdemeket szerzett a matematikai tehetségek felkutatásában, gondozásában, tudományos pályára állításában, a matematikai kutatói utánpótlás kinevelésében, amivel feltétlenül érdemessé vált a Szele Tibor-emlékéremre.

Beke Manó-emlékdíj

A 2012. évi Beke Manó-emlékdíj bizottság körültekintő mérlegelés után az alábbi határozatot hozta: a Beke Manó-díj második fokozatát kapják: **Juhász Katalin, Lábodi Gyöngyi, Lángné Juhász Szilvia, Mészáros József, Mihály Mária** és **Székely András Zsolt, Széplaki Györgyné** és **Vági Veronika.**

Indoklás: *Juhász Katalin* a Zsámbéki Tanítóképző Főiskola elvégzése után 1980-tól napjainkig Ráckevén tanít az Árpád Fejedelem Általános Iskolában első évfolyamtól negyedik évfolyamig. Osztályainak minden tantárgyát tanítja az informatika és a nyelv kivételével. Kollégái véleménye szerint teljes életét az iskolának szenteli, sokat segít mind kollégáinak, mind a tanítványainak. Ars poeticája: „minden gyerekben van valami jó, valami érdekes". Sokat tesz a gyerekekben rejlő tehetségek felfedezéséért és annak kibontakoztatásáért. Tanítványai különböző szintű tanulmányi versenyeken sikeresen szerepeltek. Például Monoron a megyei komplex tanulmányi versenyen tanítványa I. helyezést ért el. Ezen kívül a Bolyai János Csapatversenyen és Bendegúz Gyermek – és Ifjúsági Akadémián Szegeden is részt vesznek tanítványai. Az Apáczai komplex levelezős versenyen 2 tanítványa jutott be az országos döntőbe (magyar–matematika–környezetismeret–rajz). Rajzból és nyelvtanból is nagyon szép eredményeket értek el tanítványai. Munkája során sokszor segít az iskolájukban megrendezett tanulmányi versenyeken, például a Zrínyi Ilona Matematikaversenyt 20 éve szervezi. Itt két alkalommal volt országos döntős tanítványa, 2010-ben és 2011-ben. Több szakmai továbbképzésen vett részt. Jelenleg egy Comenius-programban dolgozik segítőként. A gyerekekkel szívvel lélekkel foglalkozó, iskolájáért sokat dolgozó tanítónő.

Lábodi Gyöngyi matematika–orosz nyelvszakos diplomáját 1995-ben a szegedi József Attila Tudományegyetemen szerezte. 1995 óta a nagykanizsai Batthyány Lajos Gimnázium és Egészségügyi Szakközépiskola tanára. Négy éve eredményesen vezeti az iskola matematika munkaközösségét, mely megbízatást kiváló szakmai munkája elismeréseként kapta. Kollegialitása, segítőkészsége példamutató.

Következetes, magas színvonalú és eredményes oktató munkájának köszönhetően tanítványai kiemelkedően teljesítenek az érettségi vizsgákon, majd a felsőoktatási intézményekben. Az igényes és színvonalas tanórai munka mellett mindig nagy gondot fordít a tehetséggondozásra is. Iskolai és városi tehetséggondozó szakkört vezet, tanítványai a megyei, regionális és országos versenyeken eredményesen szerepelnek. A nemzetközi Kenguru Verseny szervezésében, a Zalai Matematikai Tehetségekért Alapítvány munkájában évek óta részt vesz. Folyamatosan képezi magát, rendszeresen vesz részt a matematikatanárok vándorgyűlésein, konferenciáin. Több éve oktat a Veszprémi Pannon Egyetem Nagykanizsai Képzőhelyén. Sokoldalúsága, gyermekszeretete, szakmai tudása avatta őt tanítványai és kollégái körében tekintélyes tanárrá.

Lángné Juhász Szilvia általános iskolai, matematika–fizika szakos tanári oklevelét 1999-ben a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán szerezte, majd 2005-ben elvégezte a számítástechnika szakot is. Pedagógus pályáját Szegeden a Petőfi Sándor Általános Iskolában kezdte, jelenleg a Gregor József Általános Iskola tanára. Tanóráit alapos felkészülés, körültekintő tervezés előzi meg, és fiatalos lendület jellemzi. Mindig nagy hangsúlyt helyez a tanulói tevékenykedtetésére és a jól strukturált fogalomalkotásra. Sikeresen él a pedagógiai és módszertani szabadság lehetőségeivel, azt helyesen értelmezi és alkalmazza. A képességek szerinti foglalkoztatás híve, amit munkájában rendszeresen alkalmaz. Folyamatosan önképzést folytat, törekszik a legújabb szakmai, módszertani ismeretek megszerzésére. A mindennapokban végzett magas színvonalú pedagógiai munkája mellett kiemelkedő szerepet vállal a tehetséggondozásban. A Bendegúz Gyermek és Ifjúsági Akadémia levelező versenyei közül matematika tantárgyból 1–8. osztály számára minden fordulóra a feladatsorokat Ő állítja össze és dolgozza ki hozzájuk a megoldókulcsokat több év óta. Az immár nemzetközivé fejlődött Bonifert Domonkos Matematikaversenynek és a Makkosházi Matematikaversenynek aktív zsűritagja már hallgató kora óta. Számos publikációja jelent meg a szegedi MOZAIK Kiadó gondozásában megjelenő Matematika Tanítása és a Csengőszó c. módszertani folyóiratokban. Társszerzője a Sokszínű matematika tankönyvcsalád alsó tagozatos tankönyveinek, Számolófüzeteinek és Tudásszintmérő feladatlapjainak 1–4. osztályok számára. Ezek utógondozását, az újabb kiadásaik tökéletesítését, a szükséges átdolgozásokat folyamatosan végzi. A kiadó által közzétett alsó tagozatos matematika kerettantervek kidolgozásában aktívan közreműködött. Kiadás alatt áll egy informatikai feladatgyűjteménye alsó tagozatosok számára összeállított számítástechnikai gyakorlatokkal. Évente több alkalommal tart módszertani előadásokat az ország legkülönbözőbb régióiban. A MOZAIK módszertani napoknak rendszeres előadója. Fiatal lendülete, szakmai felkészültsége és értékes pedagógiai munkája – amit három kisgyermek édesanyjaként végez – példaértékű lehet pályatársai számára is.

Mészáros József 1961-ben középiskolai tanári oklevelet szerzett fizika–matematika szakon a pozsonyi Pedagógiai Főiskolán. Két év katonai szolgálat után egykori alma materében kezdte el tanári pályafutását, ahol 39 évet tanított. 2001-től 2010-ig, mint nyugdíjas a Szenczi Molnár Albert Gimnáziumban tevékenykedett, a 2011/12-es tanévtől a dunaszerdahelyi Magángimnáziumban hetente egy alkalommal matematika szakkört vezet. Kezdetektől fogva érdekelte a tehetséges tanulókkal való foglalkozás, ennek érdekében folyamatosan képezte magát, így került a KöMaL, az A Matematika Tanítása, az erdélyi Matematikai Lapok, az orosz Kvant és Matyematyika v skóle, valamint a cseh és szlovák szakfolyóiratok bűvkörébe, de lapozgatott német szakfolyóiratokban is. Többször könyvjutalomban részesült, mert a feladatmegoldó versenyeken előkelő helyeken végzett. Ő vitte el galántai diákjait először a tatai Öveges-emlékversenyre, a nyolcosztályos gimnázium 5–8. évfolyamos tanulóit a bátaszéki matematikaversenyre, a 9–12. évfolyamos tanulókat a Zalamat alapítvány által szervezett matematikai tréningre Balatonberénybe, illetve Fonyódra. Ennek a tehetséggondozó tábornak rendszeres előadója. Többször tartott szlovák kollégáknak és tehetséges diákoknak foglalkozást Budmericében és Gimesen. 1985 óta rendszeres résztvevője a Rátz László-vándorgyűlésnek, egyetlen alkalommal sem hiányzott. Két alkalommal előadást és szemináriumot is tartott. Tartott előadást a Zalamat alapítvány által Nagykanizsán, a kétévente megrendezésre kerülő általános és középiskolai matematikai tehetséggondozó konferencián is. Diákjai többször sikeresen szerepeltek a KöMaL pontversenyében. Két tanítványa a szlovák válogatott keret tagjaként részt vett a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián Horvátországban, illetve Spanyolországban Nagyon aktívan bekapcsolódott a matematika módszertanának népszerűsítésébe oktatóként. Munkáját számos kitüntetéssel is elismerték, többek között:

1983-ban, az akkori Csehszlovákiában országos első díjat nyert Pedagógiai felolvasásból, 1984-ben pedig egy második díjban részesült. 2001-ben megkapta a felvidéki pedagógusok legrangosabb díját, a Czabán Samu-díjat. Életének nagy részét a matematikai tehetséggondozás töltötte ki. Példa lehet a fiatal kollegák számára mind egyénisége, mind szakmai tudása.

Mihály Mária és *Székely András Zsolt* megosztott díjat kapnak, mindketten 1986-ban végztek Szegeden, a József Attila Tudományegyetemen matematika–fizika szakon és mindketten informatika szakos diplomával is rendelkeznek. A gyulai Erkel Ferenc Gimnázium tanárai, ahol mindhárom szaktárgyukat magas színvonalon tanítják. Mindketten munkaközösség-vezetők, Mária az osztályfőnöki munkaközösséget, András pedig a matematika munkaközösséget vezeti. Állandóan képzik magukat. Nemcsak a kötelező programokon vesznek részt, hanem ezeken felül is. Rendszeres résztvevői a Rátz László-vándorgyűléseknek. Mindketten emelt szintű matematika érettségi feladatsorokat szerkesztenek, amelyek a KöMaL-ban meg is jelentek. Munkájukat a precizitás jellemzi. Óráikra mindig lelkiismeretesen felkészülnek, azok színesek, élményszámba mennek. Egyformán figyelnek minden diákra, nem hagyják elkallódni a matematikából gyengébb képességű tanulókat sem. A tehetségekkel is sokat foglalkoznak. Tanítványaik országos szintű eredményeket értek el. A tanítás mellett több helyi, országos, Kárpát-medencei program szervezésében vettek részt. Kezdetektől segítették a Hajnal Imre Matematika Tesztverseny és Módszertani Napok szervezését. Oroszlánrészt vállaltak abban, hogy sikeres legyen Gyulán a 2007-es Rátz László-vándorgyűlés, a 2008-as Általános Iskolai Fizikatanári Ankét és Eszközkiállítás és a 2009-es Nemzetközi Magyar Matematikaverseny. Mária ezen kívül egy látássérült tanítványát is felkarolta, és kapcsolatuk azóta is tart. Megható és példaértékű az is, ahogy nyugdíjas kollégákkal a kapcsolatot tartja, rendszeresen találkozik velük. Székely Andrást a közösség is érdekli, amiben él, dolgozik. Kollégái tiszteletét és elismerését az is bizonyítja, hogy hosszú évek óta választott tagja, jelenleg választott elnöke az iskolája közalkalmazotti tanácsának. Több évtizedes munkásságáért Polgármesteri dicséretet is kapott Gyulán. Mindketten remek pedagógusok, nagyon jó kollégák. Rendkívül színes egyéniségek, egyben kiváló csapatemberek. Igazi példaképek diák, szülő és pedagógus számára egyaránt.

Széplaki Györgyné 1971-ben szerzett matematika–fizika szakon középiskolai tanári diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, majd az ELTE Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumba került tanárnak, 1977-től vezető tanár. Egyaránt lelkiismeretesen tanította a matematika iránt kevésbé fogékony tanulókat és a kiemelkedően tehetséges tanulókat is. 1982-től napjainkig találkozhatunk tanítványaival a legkülönbözőbb matematikaversenyek élvonalában, illetve a KöMaL valamint az ABACUS pontversenyében. Osztályait is lelkesíteni tudja, nem csak a kiemelkedően tehetséges tanulókat, így tanítványai szép sikereket értek el a teljes osztálylétszámot igénylő Matematika Határok Nélkül versenyen is (2003-ban első lett az akkori 9.A osztály, 2008-ban harmadik a 9.B osztálya). Vezetőtanári tevékenységét teljes odaadással, szakmai és emberi elkötelezettséggel végzi. Nagy hangsúlyt helyez az órákra való felkészítésre, a szemléltetésre, az órákat követő tartalmas megbeszélésekre és mindenekelőtt a pedagógus pálya szépségeinek megmutatására. Rendszeresen tart előadást a tanárjelölteknek az interaktív tananyag használatától, a geometriaszemléltető eszközeinek bemutatásáról és még számos izgalmas témakörből. Széplaki Györgyné szakmai tevékenysége messze túlmutat az iskola keretein. 1989 óta jelen van a matematikaoktatás országos fórumain. Egyik megalkotója volt az ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola nyolcosztályos és hatosztályos tantervének, melyhez egy szerzőtárssal tankönyvcsaládot írtak. Tankönyvírói munkáját az Apáczai Kiadónál folytatta, ahol hatodmagával az általános iskola felső tagozata számára írtak egy tankönyvsorozatot, melyhez feladatgyűjtemény, tanári kézikönyv és digitális tananyag is készült. Szerzőként és szakmai lektorként egyaránt részt vett a SuliNova Kht. kompetencia alapú oktatási programcsomagjának kidolgozásában. Rendszeresen tartott akkreditált tanártovábbképzéseket, előadásokat tartott a Varga Tamás Napokon, a Rácz László-vándorgyűlésen is. Széplaki Györgyné teljes ember. Legyen szó matematikáról, tankönyvírásról, módszertani szakértői tevékenységről, elesettek támogatásáról, nyugdíjasok karácsonyáról, szipogó gyerekek vigasztalásáról, éneklésről, játékról, táborozásról, Ő mindenütt ott van. Szívvel, lélekkel, mert számára a világ másként elképzelhetetlen lenne. Elsők között kapta meg az iskola tanárainak titkos szavazataként a Kármán Mór-emlékgyűrűt. 2008-ban Ericsson díjat, 2011-ben Graphisoft díjat kapott. 2013 júniusában nyugdíjba vonul. Az iskolai gyerekserege helyett öt unokájának szenteli szabadidejét, melyhez nagyon jó egészséget és sok boldogságot kívánunk.

Vági Veronika tevékenysége Székesfehérvárhoz kötődik. Több évtizeden át ugyanabban a középiskolában tanított, az Ybl Miklós Középiskolában, majd annak megszűnte után a Kodolányi János Középiskolában. Pályáját szakfelügyelőként, illetve szaktanácsadóként folytatta. Elmélyült matematikai ismereteit jól kamatoztatta továbbképzések szervezésében. Kiemelkedő szakmai felkészültsége, közvetlen modora miatt kollégái nagyra becsülik. Matematikai és módszertani kérdésekben naprakészen tájékozott és szaktanácsadóként jól alkalmazta ezeket az ismereteit. Biztos érzékkel választotta meg a matematikai nevelés aktuális, a tanárok számára fontos témáit. Ezekből továbbképzéseket tartott és szervezett a megye középiskolai tanárainak. Már 28 év óta a tagozat fáradhatatlan titkára. Feladatköréhez tartozik az évenként megrendezett megyei matematika verseny, amelynek előkészítéséhez tartoznak az évfolyamonként és szakmánként megválasztott évfolyambizottságok. Ezek munkáját egy csúcsbizottság fésüli össze és ellenőrzi, melynek megszervezése, a tagok felkérése, sok tapintatot és nagy gyakorlatot igényel. Vági Veronika fogta össze a kétfordulós verseny valamennyi teendőjét a feladatsorok végső összeállításától az eredményhirdetésig. Székesfehérvár önkormányzata a helyi tudományos közélet támogatására, önálló kutatások publikációinak közzétételére hozta létre Szekfü Gyula – Lánczos Kornél Alapítványt. Ezen alapítvány kuratóriumának a természettudományos szakértője Vági Veronika. Munkáját az önkormányzat nagyra értékeli, főtanácsosi címben és Pro Civitate díjban részesítette. Vági Veronika nagyon sokat tett a matematika népszerűsítéséért.

Grünwald Géza-emlékérem

2012-ben a Grünwald Géza-emlékéremre tíz jelölés érkezett. A bizottság örömmel állapította meg, hogy a jelöltek igen magas tudományos színvonalat képviselnek, ami egyben jelzi a Grünwald-emlékérem társadalmi és tudományos elismertségét. A Bolyai Társulat évente legfeljebb négy díjat adhat ki. A bizottság szavazatai alapján az idei a díjazottak a következők: **Balka Richárd, Csikvári Péter, Mérai László** és **Szöllősi Ferenc.**

Indoklás: *Balka Richárd* 1982-ben született, 2006-ban szerzett matematikus diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, majd 2012-ben PhD fokozatot ugyanott Elekes Márton témavezetésével. Jelenleg fiatal kutató a Rényi Intézetben. Balka Richárdnak 7 tudományos publikációja van, valamint további számos cikke van jelenleg elbírálás alatt. Fő kutatási területe a geometriai mértékelmélet és a valós analízis. Legjelentősebb eredményeit Elekes Mártonnal és Buczolich Zoltánnal közös két cikkben érte el, melyekben egy új fraktáldimenzió-fogalmat építenek ki, és érdekes alkalmazásokat is találnak. Mély és érdekes ennek a magasabb dimenziós általánosítása is, amely Balka friss, önálló publikációja. Szintén kiemeljük, hogy a közelmúltban Elekes Mártonnal és Máthé Andrással közösen megoldotta Kolmogorov egy 80 éves problémáját. Megmutatták, hogy nem minden síkbeli halmaz kontrahálható közel ugyanakkora mértékű poligonra, sőt találtak körlappal homeomorf ellenpéldát is.

Publikációinak mélysége mellett sokszínűsége is figyelemreméltó. Fő területe, a geometriai mértékelmélet mellett vannak publikációi a lokálisan kompakt csoportok, a fixpont-tételek, a halmazelmélet, a függvényegyenletek, a kontinuumelmélet és a leíró halmazelmélet területén is. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Balka Richárd a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Csikvári Péter 1984-ben született, 2011-ben szerzett PhD fokozatot az Eötvös Loránd Tudományegyetemen Sárközy András és Szőnyi Tamás témavezetésével. Jelenleg tanársegéd az ELTE számítógéptudományi tanszékén, valamint fiatal kutató a Rényi Intézetben. Csikvári Péternek 12 publikációja van. Kutatási területe elsősorban a kombinatorika, de számelméletben is ért el jelentős eredményeket. Az Acta Arithmetica-ban 2008-ban megjelent cikkében azt vizsgálja, hogy F_p-nek mekkora részhamaza adható meg úgy, hogy a részösszegek között ne szerepeljen kvadratikus nem-maradék. Alsó és felső becslést is ad, és szellemesen kombinál eszközöket a matematika különböző területeiről. Több dolgozatában a Kelmans által bevezetett gráftranszformáció hatását vizsgálja különböző gráfpolinomok esetében. Az eredmények az együtthatók, illetve a legkisebb vagy legnagyobb gyök változásának irányát határozzák meg. Talán legismertebb eredménye a monoton-út fákat használja annak bizonyítására, hogy tetszőlegesen nagy átmérőjű fa létezik, amelynek spektruma egész számokból áll. Legújabban Frenkel Péterrel közös dolgozatában egy új bizonyítási módszert bevezetve messzemenőkig általánosítják Hubai és Abért egy korábbi eredményét gráfsorozatok kromatikus polinomjairól. Összefoglalva, Csikvári Péter munkássága kiemelkedően magas színvonalú, rendkívül értékes eredményekkel, amelyek mutatják szakmai ismereteinek mélységét és rendkívüli bizonyító erejét. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Csikvári Péter a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Mérai László 1982-ben született, 2006-ban szerzett alkalmazott matematikus diplomát az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, majd 2011-ben PhD fokozatot ugyanott Sárközy András témavezetésével. Jelenleg az ELTE komputeralgebra tanszékén valamint a Budapesti Gazdasági Főiskolán dolgozik adjunktusként. Mérai Lászlónak 11 tudományos publikációja van, valamint két szabadalma. Kutatási területe a pszeudovéletlen sorozatok vizsgálata. A téma igen aktuális, mivel az eredmények gyakorlati alkalmazást nyerhetnek kriptográfiában. A két szabadalom is ilyen alkalmazásokhoz kapcsolódik: egy szavazási rendszer és egy árverési rendszer. A sorozatok véletlen voltát általában az eloszlási- és a korrelációs mértékkel jellemzik. A legtöbb konstrukció multiplikatív vagy additív karaktereket használ. Mérai az Acta Arithmetica-ban megjelent cikkében általánosítja az összes eddigi módszert, ennek segítségével kis korrelációs és kis eloszlási mértékkel rendelkező sorozatokat konstruál. Szintén hatékony pszeudo-véletlen sorozatokat készít a Proc. AMS-ben megjelent dolgozatában, ezúttal elliptikus görbék segítségével. Mérai komoly hangsúlyt fektet a kutatási témáinak magyarországi megismertetésére. Ennek érdekében többször tartott népszerűsítő előadásokat, valamint magyar nyelven is publikál. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Mérai László a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Szöllősi Ferenc 1985-ben született, 2008-ban szerzett matematikus diplomát a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen, majd 2012-ben PhD fokozatot a CEU-n Matolcsi Máté témavezetésével. Jelenleg JSPS posztdoktori ösztöndíjas Japánban a Tohoku Universityn. Szöllősi Ferencnek 14 publikációja van. Kutatási területe a komplex Hadamard-mátrixok elmélete. A komplex Hadamard-mátrixok a valós Hadamardoknak olyan általánosításai, ahol az elemek 1 abszolút értékű komplex számok lehetnek. Ezek a mátrixok a matematika számos ágában alkalmazást nyernek, úgymint kombinatorikában, Fourier-analízisben, lineáris algebrában és operátorelméletben. Ez is magyarázza Szöllősi Ferenc számos nemzetközi társszerjőjét, valamint azt az érdeklődést és figyelemreméltó számú hivatkozást, ami az eredményei iránt mutatkozik. Legismertebb eredményét a Journal of the LMS-ben közli, ahol megad egy 4 paraméteres komplex Hadamard-családot 6 dimenzióban, és ezzel igen közel kerül a 6 dimenziós komplex Hadamardok teljes klasszifikációjához. A teljes klasszifikáció mindeddig csak 5 dimenzióig ismert, Haagerup egy eredménye által. A Proc. AMS-ben megjelent másik publikációjában pedig új szellemes bizonyítást ad olyan prím-dimenziós komplex Hadamard-mátrixok létezésére, amelyek a Fourier-mátrixtól különböznek. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Szöllősi Ferenc a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Farkas Gyula-emlékdíj

A Bizottság, a beérkezett javaslatok alapján 2012-ben négy Farkas Gyula-emlékdíjat adományoz. A díjazottak: **Folláth János, Nagy-György Judit, Orlovits Zsanett** és **Süle Zoltán.**

Indoklás: *Folláth János* 1981-ben született Szolnokon. 2005-ben szerzett programtervező matematikus diplomát a Debreceni Egyetemen. Utána nappali tagozatos PhD hallgató volt a DE Matematika és Számítástudományok Doktori Iskolájában. A doktori képzés befejezését követően tanársegéd lett a DE számítógéptudományi tanszékén. A PhD tudományos fokozatot 2012-ben szerezte meg. Témavezetője Pethő Attila volt. Kutatási területe a kriptográfia, ezen belül elsősorban pszeudovéletlen bináris sorozatokkal és hash függvényekkel foglalkozik. Páros karakterisztikájú véges testek felhasználásával konstruált jó tulajdonságokkal rendelkező pszeudovéletlen bináris sorozat családot. Legfontosabb eredménye az UDHash függvény konstrukciója és matematikai elemzése. Eddig 7 tudományos dolgozata jelent meg kutatási területének elismert folyóirataiban. Társszerzőkkel készített egy egyetemi jegyzetet és több szoftvert, amelyben eredményeit hasznosítja.

Nagy-György Judit 2000-ben matematikatanári, 2003-ban pszichológus, 2005-ben programtervező matematikus diplomát szerzett. Ezt követően 2005-től 2008-ig doktorandusz hallgató volt, majd 2009-ben doktori fokozatot szerzett. Diplomáit és a doktori fokozatot is mind Magyarországon, Szegeden szerezte meg. Jelenleg az SZTE TTIK Bolyai Intézetében egyetemi adjunktus a sztochasztika tanszéken. Kutatási munkája az alkalmazott matematikához sorolható, elsősorban algoritmusok fejlesztésével és elemzésével foglalkozik. Ezen belül fő érdeklődési területe és a doktori disszertációjának témája is az online optimalizálás. Ennek több részterületén ért el fontos eredményeket. Cikkei jelentek meg az ütemezés, a gráf és hipergráf színezés, a ládapakolás, a lapozás és k-szerver problémakörökben. Az online optimalizálás témakörén kívül is van két további publikációja, az egyik fák beágyazásáról szól, a másik pedig a nemdeterminisztikus automaták irányító szavaira javítja meg az ismert legjobb becsléseket. Tudományos munkájának magas színvonalát jól mutatja, hogy a folyóirat cikkei az adott szakterületen rangosnak tartott folyóiratokban jelentek meg. A két további cikkéből pedig az egyik az ICALP konferencián lett elfogadva, amely konferencia az elméleti számítástudomány egyik legjelentősebb fóruma. A másik, nem folyóiratban közölt publikációja pedig a Bolyai Society Mathematical Studies sorozatban jelent meg. Összesen 8 cikket publikált, és jelenleg egy további cikke van benyújtva közlésre. A publikált cikkek megjelenési helye mellett még érdemes kiemelni, hogy olyan nemzetközileg is elismert kutatókkal dolgozott együtt, mint Szemerédi Endre, Tuza Zsolt és Leah Epstein. A tudományos cikkein kívül még társszerzője egy valószínűség-számítási és statisztikai példatárnak is.

Orlovits Zsanett középiskolai tanulmányait a tatai Eötvös József Gimnáziumban végezte. Egyetemi diplomáját az ELTE TTK alkalmazott matematikus szakán szerezte 2003-ban. Később ugyanitt doktori képzésben vett részt Gerencsér László szakmai irányításával. 2012-ben summa cum laude minősítéssel védte meg doktori (PhD) disszertációját. Az MTA Fiatal Kutatói Ösztöndíját elnyerve 3 évig volt az MTA SZTAKI munkatársa. 2006 óta a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Matematika Intézetének differenciálegyenletek tanszékén dolgozik, jelenleg adjunktusi munkakörben. Orlovits Zsanett eddig elsősorban sztochasztikus volatilitás modellek pénzügyi alkalmazásaival foglalkozott. Egyik fő eredménye a GARCH folyamatok rekurzív becslésének egy új megközelítése, mely az off-line kvázi-maximum likelihood módszer egy továbbfejlesztése. Az új módszer elemzéséhez a Markov-folyamatok elméletén alapuló sztochasztikus approximációelmélet eszköztárát használja. Ennek segítségével igazolta a javasolt rekurzív algoritmus 1 valószínűségű konvergenciáját. Az előbb említett eszköztár alkalmazásaként két másik jelentős problémát is megoldott, amelyek a véletlen mátrixfolyamatok stabilitásának kérdésköréhez tartoznak. Az elméleti munka mellett eredményesen foglalkozik gyakorlati modellezési feladatokkal is. Eddig 3 dolgozatot publikált rangos nemzetközi tudományos folyóiratokban, ezen felül 4 konferenciaközlemény és 2 egyetemi jegyzet (társ)szerzője.

Süle Zoltán 1980-ban született. 2003-ban szerzett informatikatanári oklevelet a Veszprémi Egyetemen, 2004-ben programozó, 2006-ban programtervező matematikus diplomát vehetett át a Szegedi Tudományegyetemen. 2006 júliusától a Pannon Egyetem rendszer- és számítástudományi tanszékének munkatársa. Kutatómunkájában műszaki folyamatok modellezésével valamint optimalizálási feladatok vizsgálatával és megoldásával foglalkozik. Az integrált információbiztonság és az üzleti folyamatok matematikai modellezésére valamint különféle szempontok szerinti optimalizálására dolgozott ki munkatársaival egy újszerű P-gráf alapú módszertant. Adaptálta ezt az eredetileg folyamathálózat-szintézis feladatok kezelésére kifejlesztett megközelítést a fent említett tudományterületekre, lehetőséget teremtve így azok újszerű vizsgálatára. Megadta a különböző szempontú informatikai biztonságot garantáló rendszereszközök struktúrájának és topológiájának leírási módjait, valamint az üzleti folyamatok BPMN reprezentánsainak lehetséges P-gráffá való átalakítási lehetőségeit is. Ezen túlmenően olyan optimalizáló algoritmusokat, módszereket valamint szoftvereket dolgozott ki, amelyekkel mód nyílik különféle optimalizálási feladatok hatékony és gyors megoldására. Eddig 43 publikációval és tudományos munkával rendelkezik.

Rényi Kató-emlékdíjat 2012-ben nem adtuk ki

Patai László Alapítvány díja

A Bizottság úgy döntött, hogy a „Patai László Alapítvány" díját 2012-ben **Máder Attila** részére ítéli oda.

Indoklás: *Máder Attila* 2004-ben a Szegedi Tudományegyetem Természettudományi Kar matematika szakán szerzett MSc diplomát, 2012-ben a kar Számítástudományi Doktori Iskolájában szerzett PhD fokozatot. Tehetséges fiatal matematika tanár-kutató, aki tanárként meggyőző erővel tartott előadásaival szeretteti meg középiskolás és egyetemi diákjaival a matematikát. Ennek érdekében a legmodernebb informatikai eszközöket és ezek használatának módszereit alkalmazza, azokat továbbfejleszti, és önálló kutatásokat végez. Eredményeiről publikációkban, számos tudományos előadáson számolt be. Intenzív iskolákon, továbbképzéseken tartott előadásokat nagy sikerrel.

A számítógéppel segített oktatás módszertana kiemelt kutatási terület. A hordozható, nagy teljesítményű, kiváló grafikával ellátott informatikai eszközök az élet minden területének, így a tudományos kutatásnak és oktatásnak is szerves részévé váltak. Kérdés, hogyan lehet ezeket az eszközöket kreatív módon alkalmazni az oktatásban? Hogyan lehet a „minek tanulni matematikát, a számítógép úgyis megcsinálja" általános vélekedést legyőzni? Hogyan lehet a klasszikus manuális módszereket hatékonyan ötvözni az új számítógépes kísérletező módszerekkel? Egyáltalán, hogyan lehet tanítani a mostani új informatikában jártas generációt (informatikai bennszülöttek). Kutatásai és oktatásfejlesztési munkája ezen a területen példamutatóak, ezen eredményeinek összefoglalása doktori értekezésének első részében található.

Egy másik probléma, hogyan lehet a számítógépes eszközöket a matematikai kutatásban alkalmazni. Bizonyos problémák, kérdések fel sem merülnek, a megoldásukra pedig esély sincs a számítógépes kísérletezések nélkül. Ehhez kapcsolódik, hogy hogyan lehet absztrakt tudományos eredményeket, éppen az egyszerűbb esetek számítógépes vizsgálata révén a diákoknak is bemutatni, számukra érthetően tanítani. Ezzel a területtel is foglalkozik, tudományos kutatásokat végez egy absztakt algebrai problémakörrel a „szigetek"-kel kapcsolatosan. Ezek gyakorlati alkalmazhatósága inspirálta, hogy középiskolások számára is érthető módon mutassa be a „szigetek” problémáit. Doktori értekezésének második része tartalmazza ezt a témakört.

Tanári és módszertani kutatói munkássága a matematikaoktatás korszerűsítéséhez nagy mértékben hozzájárul.

A bizottság a fentiek alapján döntött úgy, hogy „Patai László Alapítvány” díját 2012-ben Máder Attilának ítéli oda.

JELENTÉS A 2012. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 2012. október 26. és november 5. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2012-ben fejezték be.

A verseny lebonyolítására a Társulat a következő bizottságot kérte fel: *Csikós Balázs, Frenkel Péter* (titkár), *Keleti Tamás, Lovász László* (elnök), *Móri Tamás, Pach János, Rónyai Lajos, Stipsicz András, Szegedy Balázs.*

A bizottság október 19-i ülésén 11 feladatot tűzött ki. A bizottság köszönetét fejezi ki mindazoknak, akik feladatot javasoltak a versenyre; a kitűzött feladatok esetében a következőknek: 1. *Csirmaz László,* 2. *Keleti Tamás,* 3. *Gyárfás András,* 4. *Lovász László,* 5. *Fehér László,* 6.–7. *Csikós Balázs,* 8. *Laczkovich Miklós,* 9. *Kós Géza,* 10. *Stipsicz András,* 11. *Móri Tamás.*

A bizottság örömmel állapítja meg, hogy a versenyt az utóbbi évekhez képest nagyobb érdeklődés kísérte, és lényegesen többen vettek részt: 20 versenyző összesen 101 feladatra adott be dolgozatot.

A versenybizottság a dolgozatok áttanulmányozása után, november 30-i ülésén megállapította, hogy egyetlen versenyző oldott meg lényegében nyolc feladatot. Ennek alapján *I. díjban* és 50 000 forint pénzjutalomban részesül **Mészáros András,** az ELTE matematika alapszakos hallgatója, aki megoldotta az 1., 2., 3., 5., 7., 11. és kis hiányosságtól eltekintve a 9. feladatot, valamint a 8. feladat (a) részét és a 10. feladat (b) részét.

Három versenyző oldott meg lényegében hét feladatot. Ennek alapján *II. díjban* és 25 000 forint pénzjutalomban részesül **Nagy Csaba,** az ELTE matematikus doktorandusza, **Nagy Dániel,** az ELTE matematika mesterszakos hallgatója és **Tomon István,** a Cambridge-i Egyetem matematika mesterszakos hallgatója. Közülük Nagy Csaba a 3., 5., 6., 7., 9., 10. és 11., Nagy Dániel az 1., 2., 3., 5., 7., 10. és 11., Tomon István pedig a 3., 4., 9., 10., kis hiányosságtól eltekintve a 11., továbbá hiányosan a 2., 6. és 7. feladatot oldotta meg.

Öt versenyző oldott meg lényegében hat feladatot. Ennek alapján *III. díjban* és 15 000 forint pénzjutalomban részesül **Backhausz Tibor,** az ELTE matematika alapszakos hallgatója, **Grósz Dániel,** az ELTE matematika alapszakos hallgatója, **Nagy János,** az ELTE matematika alapszakos hallgatója, **Szalkai Balázs,** az ELTE matematika mesterszakos hallgatója és **Wolosz János,** az ELTE matematika mesterszakos hallgatója. Közülük Backhausz Tibor megoldotta a 3., 8., valamint – kis hiányosságtól eltekintve – az 1. és 6. feladatot, továbbá részlegesen a 2., 4. és 10. feladatot, emellett a 8. feladathoz egy érdekes kiegészítő megjegyzést fűzött. Grósz Dániel az 1., 3., 5., 7., 10. és 11. feladatot oldotta meg. Nagy János megoldotta a 3., 8. és minimális hiányosságtól eltekintve a 7., továbbá részlegesen a 2., 4., 6. és 9. feladatot. Szalkai Balázs megoldotta az 1., 3., 5., 6., 7. és 10. feladatot. Wolosz János megoldotta az 1., 3., 5., 9. és 10., valamint – javítható hibától eltekintve – a 2. feladatot.

Két versenyző oldott meg lényegében öt feladatot. Ennek alapján 1. dicséretben részesül **Bodor Bertalan,** az ELTE matematika alapszakos hallgatója és **Gyenizse Gergő,** a Szegedi Tudományegyetem matematika mesterszakos hallgatója. Közülük Bodor Bertalan megoldotta a 2., 3., 5., 8., valamint hiányosan a 6. és 7. feladatot. Gyenizse Gergő megoldotta a 2., 3., 5., 11., valamint hiányosan a 7. és 10. feladatot.

Egy versenyző oldott meg lényegében négy feladatot. Ennek alapján 2. dicséretben részesül **Kalina Kende,** az ELTE matematika alapszakos hallgatója, aki megoldotta a 3., 11., minimális hiányosságtól eltekintve a 6., valamint hiányosan a 7. és 10. feladatot.

A díjakat a Morgan Stanley Magyarország Elemző Kft. támogatta, ezért a versenybizottság köszönetét fejezi ki.

A feladatok és megoldásaik

1. feladat. *Van-e olyan α valós szám, amelyhez vannak olyan $f(n)$ és $g(n)$ ($\mathbb{N}$-ből $\mathbb{N}$-be képező) rekurzív függvények, hogy*

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)},$$

ugyanakkor az α n-edik tizedesjegyét megadó függvény nem rekurzív?

Megoldás. Van ilyen $\alpha \in (0,1)$ szám. Legyen α n-edik tizedesjegye 1, ha az n-edik Turing-gép az üres szalaggal megáll, és legyen 0, ha nem; ez persze nem rekurzív függvény. Csak a megfelelő $f(n)$ és $g(n)$ függvényeket kell megadni. Legyen $\pi(u)$ egy rekurzív bijekció $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ között, a szokásoknak megfelelően $\pi(u) = \big\langle K(u), L(u)\big\rangle$. Definiáljuk racionális számok egy sorozatát a következőképpen. Legyen $a(0) = 0$. Az $a(u+1) - a(u)$ különbség legyen $10^{-L(u)}$, ha az $L(u)$ sorszámú Turing-gép pontosan $K(u)$ lépésben áll meg, különben pedig legyen nulla. Alkalmas f és g rekurzív függvényekkel $a = f/g$. Mivel $a(n)$ a fenti α-hoz konvergál, készen vagyunk.

Megoldotta: Backhausz Tibor, Grósz Dániel, Kocsis Zoltán Attila, Mészáros András, Nagy Dániel, Szalkai Balázs, Wolosz János. Hibás 1 dolgozat.

2. feladat. *Nevezzük a $(\mathbb{Z}_n, +)$ ciklikus csoport egy A részhalmazát* gazdagnak, *ha minden $x, y \in \mathbb{Z}_n$-hez van olyan $r \in \mathbb{Z}_n$, amelyre $x-r$, $x+r$, $y-r$ és $y+r$ mindegyike A-ban van. Milyen α-hoz létezik olyan $C_\alpha > 0$ konstans, amelyre bármely páratlan n-re minden $A \subset \mathbb{Z}_n$ gazdag halmaz legalább $C_\alpha n^\alpha$ elemű?*

Megoldás. Megmutatjuk, hogy pontosan akkor van ilyen konstans, ha $\alpha \le 3/4$.

Az egyik irányhoz azt látjuk be, hogy bármely páratlan n esetén minden $A \subset Z_n$ gazdag halmaz legalább $n^{3/4}$ elemű.

Tegyük fel tehát, hogy n páratlan és $A \subset Z_n$ gazdag halmaz. Legyen

$$S(z) = \big\{(a, a') \in A \times A : \; a + a' = z\big\}.$$

A feltétel szerint tetszőleges $x, y \in Z_n$-hez vannak $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$ elemek, amelyekre

$$a_1 - x = x - a_2 = a_3 - y = y - a_4.$$

Ebből átrendezve

$$a_2 + a_3 = x + y = a_1 + a_4, \quad a_1 + a_2 = 2x, \quad a_3 + a_4 = 2y$$

következik, tehát minden (x, y) számpárhoz hozzárendelhető (legalább) egy $\big((a_1, a_4), (a_2, a_3)\big)$ elem $S(x+y) \times S(x+y)$-ből, és a hozzárendelés injektív (mivel n páratlan, ezért a_1, a_2, a_3, a_4 meghatározzák (x, y)-t). Mivel rögzített $z = x + y$ esetén x értéke n féle lehet, ezért ebből az következik, hogy bármely $z \in Z_n$-re $\big|S(z) \times S(z)\big| \ge n$, tehát $\big|S(z)\big| \ge \sqrt{n}$. Tehát

$$|A|^2 = |A \times A| = \sum_{z \in Z_n} \big|S(z)\big| \ge n\sqrt{n},$$

vagyis $|A| \ge n^{3/4}$, ahogy állítottuk.

A másik irányt kétféleképpen is bizonyíthatjuk: véletlen konstrukcióval is és determinisztikus konstrukcióval is. Bár az utóbbi rövidebb, frappánsabb és erősebbet ad, figyelemre méltó a véletlen konstrukció is, mert az sok más esetben is működik.

I. Determinisztikus konstrukció: $n = k^4$ $(k = 1, 3, 5, \ldots)$ esetén megadunk legfeljebb $4k^3 = 4n^{3/4}$ elemű gazdag halmazt Z_n-ben. Ebből azonnal következik, hogy $\alpha < 3/4$ esetén nincs megfelelő C_n konstans.

Álljon A azon Z_n-beli elemekből, melyek négyjegyű k-as számrendszerbeli alakjában van 0 számjegy. Világos, hogy ekkor A elemszáma legfeljebb $4k^3$. Azt kell csak megmutatnunk, hogy A gazdag. Legyen $x, y \in Z_n$ tetszőleges. Ekkor válasszuk r négyjegyű k-as számrendszerbeli alakjában a negyedik számjegyet úgy, hogy $x - r$ (négyjegyű k-as számrendszerbeli alakjának) negyedik számjegye 0 legyen, a harmadikat úgy, hogy $x + r$ harmadik számjegye 0 legyen, másodikat úgy, hogy $y - r$ második számjegye 0 legyen, végül az elsőt úgy, hogy $y - r$ első számjegye 0 legyen. Ekkor $x - r, x + r, y - r, y + r \in A$.

II. Véletlen konstrukcióval megadunk $C\sqrt[4]{\log n} \cdot n^{3/4}$ elemű gazdag halmazt bármely n-re. Később megválasztandó rögzített p-re válasszuk ki Z_n minden elemét egymástól függetlenül p valószínűséggel.

Először megmutatjuk, hogy adott x, y-ra

$$(1) \qquad P\big((A - x) \cap (x - A) \cap (A - y) \cap (y - A) = \emptyset\big) \le (1 - p^4)^{n/C},$$

ahol C abszolút konstans. Mivel annak valószínűsége, hogy négy adott (különböző) Z_n-beli elem mindegyike A-ban van, p^4, ezért ehhez csak azt kell meggondolni, hogy adott x, y-hoz megadható legalább n/C diszjunkt (a_1, a_2, a_3, a_4) számnégyes, amelyre $a_1 - x = x - a_2 = a_3 - y = y - a_4$.

Tehát (1) alapján a rossz (x, y) párok várható száma legfeljebb $n^2(1-p^4)^{n/C}$, így annak valószínűsége, hogy van rossz (x, y) pár legfeljebb $n^2(1-p^4)^{n/C}$. Tehát ha $n^2(1-p^4)^{n/C} < 1$, akkor pozitív valószínűséggel jó konstrukciót kapunk. Könnyű ellenőrizni, hogy $p^4 = \frac{2C \log n}{n}$ esetén ez teljesül. Ekkor pedig nagy valószínűséggel akkora az A halmaz, amekkorát akartunk (másik C-vel).

Megoldotta: Bodor Bertalan, Gyenizse Gergő, Mészáros András, Nagy Dániel. Részben megoldotta: Backhausz Tibor, Kutas Péter, Nagy János, Tomon István és Wolosz János. Két dolgozat nem tartalmaz érdemi eredményt.

3. feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy k-kromatikus gráf éleit tetszőlegesen két színnel színezve van olyan k pontú részfa, melynek élei ugyanolyan színűek.

Megoldás (Szalkai Balázs megoldása). Jelölje $G = (V, E)$ a gráfot, G_B a fekete élek részgráfját és G_W a fehér élek részgráfját. Készítsük el a következő $H = (S, T, F)$ páros gráfot (melyben esetleg lesznek többszörös élek): Legyen S a G_B összefüggő komponenseinek halmaza, T pedig G_W összefüggő komponenseinek halmaza. Továbbá, minden $v \in V$-re legyen $f_v \in F$ egy él v fekete és fehér komponense között!

Legyen Δ a maximális fokszám H-ban. (Ekkor Δ megegyezik G-ben egy maximális csúcsszámú, összefüggő, egyszínű részgráf csúcsainak számával.) Kőnig élszínezési tétele szerint H felbomlik Δ párosításra, azaz Δ színnel élszínezhető. Mivel az élek a csúcsoknak felelnek meg, ezért ez megad egy csúcsszínezést a G gráfon. Ez a színezés jó színezése lesz G-nek. Ugyanis tegyük fel, hogy $u, v \in V$ össze vannak kötve G-ben – mondjuk – fekete éllel. De ekkor a két csúcs G_B-nek ugyanabban a komponensében van, vagyis f_u és f_v ugyanarra az S-beli csúcsra illeszkedik, tehát különböző színűek.

Kiszíneztük tehát Δ színnel G csúcsait, tehát $\Delta \geq k = \chi(G)$. A Δ definíciója miatt tehát van olyan – mondjuk – fekete komponens, melynek mérete legalább k. Ebben a komponensben tehát létezik $\geq k$-pontú fekete fa. Levelek leszüretelésével pedig ennek a fának a pontszáma lecsökkenthető pontosan k-ra.

Megoldotta: Backhausz Tibor, Bencs Ferenc, Bodor Bertalan, Grósz Dániel, Gyenizse Gergő, Kalina Kende, Kutas Péter, Mészáros András, Nagy Csaba, Nagy Dániel, Nagy János, Soltész Dániel, Szalkai Balázs, Tomon István, Wolosz János.

4. feladat. *Legyen K egységnyi térfogatú konvex test az n-dimenziós térben. Legyen $S \subset K$ olyan Lebesgue-mérhető halmaz, melynek mértéke legalább $1-\varepsilon$, ahol $0 < \varepsilon < 1/3$. Bizonyítandó, hogy K-t a súlypontjából $2\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ arányban kicsinyítve, a kapott test tartalmazza S súlypontját.*

Megoldás. Feltehető, hogy K súlypontja az origó. Vegyük észre, hogy ha $s \notin 2\varepsilon \ln(1/\varepsilon)K$, akkor van olyan H hipersík az $\big(1/\big(2\varepsilon\ln(1/\varepsilon)\big)!\big)s$ ponton át, amely a K testet nem metszi. Feltehetjük, hogy ez az $x_1 = -1$ hipersík. Tehát K minden pontjára $x_1 > -1$. Továbbá $v = -\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}s$ első koordinátája legalább $2\ln(1/\varepsilon)$.

Legyen $F(t)$ az $x_1 = t-1$ hipersík és a K test metszetének mértéke, és $G(t)$ az $x_1 \geq t-1$ féltér és a K test metszetének mértéke. Nyilván $G'(t) = -F(t)$. Mivel K súlypontja az origó,

$$\int_0^\infty tF(t)\,dt = \int_0^\infty G(t)\,dt = 1.$$

Válasszunk olyan β számot, melyre $G(\beta) = \varepsilon$. A Brunn–Minkowski-tételből következik, hogy $G(t)$ log-konkáv. Mivel az $\varepsilon^{t/\beta}$ függvény értéke megegyezik $G(t)$-vel a $t=0$ és $t=\beta$ pontokban, ezért

$$G(t) \begin{cases} \geq \varepsilon^{t/\beta}, & \text{ha } \ 0 \leq t \leq \beta, \\ \leq \varepsilon^{t/\beta}, & \text{ha } \ t > \beta. \end{cases}$$

Így

$$1 \geq \int_0^\beta G(t)\,dt \geq \int_0^\beta \varepsilon^{t/\beta}\,dt = \frac{(1-\varepsilon)\beta}{\ln(1/\varepsilon)},$$

és ezért $\beta \leq \ln(1/\varepsilon)/(1-\varepsilon)$.

Mivel v a K egy ε mértékű részének súlypontja, v első koordinátája akkor a legnagyobb, ha ezt az ε mértékű részt a legnagyobb első koordinátájú pontokra koncentráljuk; így

$$v_1 \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_\beta^\infty (t-1)F(t)\,dt = \frac{1}{\varepsilon}\big[-(t-1)G(t)\big]_\beta^\infty + \frac{1}{\varepsilon}\int_\beta^\infty G(t)\,dt \leq$$

$$\leq \beta - 1 + \frac{1}{\varepsilon}\int_\beta^\infty \varepsilon^{t/\beta}\,dt = \beta - 1 + \frac{\beta}{\ln(1/\varepsilon)} \leq \frac{\ln(1/\varepsilon)+\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2\ln(1/\varepsilon),$$

ami ellentmondás.

Megoldotta: Tomon István. Részlegesen megoldotta Backhausz Tibor, Nagy János, Virosztek Dániel.

5. feladat. *Legyenek V_1, V_2, V_3, V_4 olyan négydimenziós lineáris alterek $\mathbb{R}^8$-ban, amelyek közül bármely kettőnek a metszete csak a nullvektorból áll. Mutassuk meg, hogy van olyan W négydimenziós lineáris altér $\mathbb{R}^8$-ban, amelyre mindegyik $W \cap V_i$ metszet kétdimenziós.*

Megoldás. Felidézzük a *grafikon-konstrukciót* (amely például a Grassmann-sokaság térképeinél is szerepel).

1. definíció. Legyenek A, B, C a D vektortér lineáris alterei. Tegyük fel, hogy $A \cap B = B \cap C = 0$ és $A + B = D$. Ekkor minden $a \in A$-hoz pontosan egy olyan $b \in B$ létezik, hogy $a + b \in C$, tehát a

$$\gamma(A,B,C,D):\ A \to B$$

lineáris leképezést egyértelműen definiálja a

$$\gamma(A,B,C,D)(a) + a \in C$$

tulajdonság. Vagyis C a γ grafikonja.

Ha $A \cap C = 0$ is teljesül, akkor $\gamma(B, A, C, D)$ a $\gamma(A, B, C, D)$ leképezés inverze.

2. definíció. Legyenek V_1, V_2, V_3, V_4 $2k$-dimenziós, páronként csak 0-ban metsző alterei a V $4k$-dimenziós vektortérnek. A W $2k$-dimenziós alteret *jól metszőnek* hívjuk, ha $\dim W_i := W \cap V_i = k$, $i = 1, \ldots, 4$.

3. állítás. *Legyenek V_1, V_2, V_3, V_4 $2k$-dimenziós, páronként csak 0-ban metsző alterei a V $4k$-dimenziós vektortérnek, és legyen W jól metsző altér. Ekkor*

$$\gamma_3(W_1) = \gamma_4(W_1) = W_2,$$

ahol $\gamma_i := \gamma(V_1, V_2, V_i, V)$, $i = 3, 4$.

Az állítás azonnal következik abból, hogy $\gamma_i|_{W_i} = \gamma(W_1, W_2, W_i, W)$, és hogy γ_i invertálható.

4. következmény. *A $W \mapsto W_1 = W \cap V_1$ megfeleltetés bijekció a jól metsző alterek és $\alpha := \gamma_4^{-1}\gamma_3 : V_1 \to V_1$ leképezés k-dimenziós invariáns alterei között.*

Valóban, a 3. állításból következik, hogy W_1 invariáns altér lesz. Másrészt, ha U k-dimenziós invariáns altere α-nak, akkor könnyű ellenőrizni, hogy $W := U + \gamma_3(U) = U + \gamma_4(U)$ jól metsző.

Vagyis a feladat megoldásához az alábbi észrevétel elegendő.

5. állítás. *Egy $\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezésnek mindig van 2 dimenziós invariáns altere.*

Ez leggyorsabban a *valós Jordan-féle normálalak* létezéséből következik: Legyenek α sajátértékei a, b, c, d. Ha minden sajátérték valós, akkor egy saját-bázisban a komplex Jordan-alaknál megszokott lehetőségeink vannak. Ha $a = x + iy$, $b = x - iy$ komplex konjugált sajátértekpár, akkor egy $\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ -y & x \end{smallmatrix}\right)$ blokk jelenik meg. Ha ezek kétszeres gyökök, akkor előfordulhat az

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 & 0 \\ -y & x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & -y & x \end{pmatrix}$$

eset is. Azonnal látszik, hogy minden lehetséges esetben az első két bázisvektor invariáns alteret feszít ki, hiszen van egy $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ blokk a bal alsó sarokban.

Megjegyzések. (a) A γ leképezések projekciók segítségével is definiálhatók. A D tér direkt felbontása A-ra és B-re definiál $\pi_A : D \to A$ és $\pi_B : D \to B$ projekciókat, és

$$\gamma(A, B, C, D) = \pi_B \circ \left(\pi_A|_C\right)^{-1}.$$

(b) A fenti bijekció tetszőleges test fölött érvényes. Vegyük észre, hogy egy tipikus $\mathbb{C}^{2k} \to \mathbb{C}^{2k}$ lineáris leképezésnek $2k$ különböző sajátértéke van, tehát beláttuk a következőt:

6. tétel. *Legyen adott 4 általános helyzetű (beleértve, hogy α sajátértékei különbözőek) $2k$-dimenziós altere $\mathbb{C}^{4k}$-nak. Ekkor $\binom{2k}{k}$ jól metsző altér van.*

Speciális esetként kapjuk $k = 1$-re a 4-egyenes-tételt, $k = 2$-re pedig 6 megoldás van. Schubert-kalkulussal meglepően nehéz a 6. tételt belátni. A $k = 2$ esetet lásd alább.

A valós esetben egy tipikus $\mathbb{R}^{2k} \to \mathbb{R}^{2k}$ lineáris leképezésnek $2k$ különböző sajátértéke van, ezek vagy valósak, vagy konjugált párok, tehát beláttuk a következőt:

7. tétel. *Legyen adott 4 általános helyzetű $2k$-dimenziós altere $\mathbb{R}^{4k}$-nak. Ekkor*

$$N_{\mathbb{R}}(k,a) = \sum_{i=0}^{a} \binom{a}{i} \binom{2k-2a}{k-2i}$$

jól metsző altér van, ahol $a = 0, 1, \ldots, k$ a megfelelő α leképezés konjugált sajátértékpárjainak száma.

$a = 0$-ra a komplex esetből következő $\binom{2k}{k}$ felső becslést kapjuk. A tételből az is kiderül, hogy vannak rések, nem minden páros számot kapunk meg $N_{\mathbb{R}}(k,0)$ és $N_{\mathbb{R}}(k,k)$ között. Például $k = 2$-re tipikusan 2 vagy 6 jól metsző altér van.

(c) Kohomologikus megfontolásokból következik, hogy ha az általános esetben a válasz nem nulla, akkor mindig van megoldás (a többszörös sajátértékek esetén is). A komplex esetből könnyen következtethetünk a valós megoldások számának paritására. Sajnos a 6 páros szám, így ez nem segít.

(d) Bizonyos esetekben létezik valós Schubert-kalkulus $\mathbb{Z}$ fölött is, és a mi esetünk ilyen. Ebből az következik, hogy az általános esetben a megoldások előjeles száma 2 (összhangban a fenti számolásokkal). Erre egyelőre nem tudok jó referenciát adni.

(e) A komplex eset Schubert-kalkulussal:

A definíció végiggondolásával kapjuk, hogy

$$\sigma_{2,2} = \bigl\{ V \in \mathrm{Gr}_4(\mathbb{C}^8) : \dim(V \cap F_4) \geq 4 \bigr\},$$

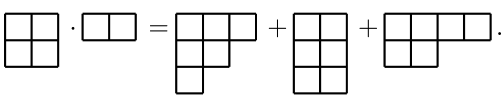
tehát a válasz

$$\int_{\mathrm{Gr}_4(\mathbb{C}^8)} \sigma_{2,2}^4.$$

A Giambelli-formulából $\sigma_{2,2} = \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$, tehát

$$\sigma_{2,2}^2 = \sigma_{2,2}(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3),$$

amit a Pieri-formula kétszeri alkalmazásával tudunk kiszámolni:



Hasonlóan, $\sigma_{2,2}\sigma_3 = \sigma_{4,2,1} + \sigma_{3,2,2}$. A Pieri-formulát még egyszer alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sigma_{2,2}\sigma_2^2 &= \sigma_{4,3,1} + \sigma_{4,2,2} + \sigma_{4,2,1,1} + \sigma_{3,3,2} + \sigma_{3,3,1,1} + \sigma_{3,2,2,1} \\ &\quad + \sigma_{3,2,2,1} + \sigma_{2,2,2,2} + \sigma_{4,2,2} \\ &\quad + \sigma_{4,4} + \sigma_{4,3,1} + \sigma_{4,2,2},\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\sigma_{2,2}\sigma_3\sigma_1 &= \sigma_{4,3,1} + \sigma_{4,2,2} + \sigma_{4,2,1,1} \\ &\quad + \sigma_{4,2,2} + \sigma_{3,3,2} + \sigma_{3,2,2,1}.\end{aligned}$$

Vagyis

$$\sigma_{2,2}^2 = \sigma_{3,3,1,1} + \sigma_{3,2,2,1} + \sigma_{2,2,2,2} + \sigma_{4,4} + \sigma_{4,3,1} + \sigma_{4,2,2}.$$

Mivel ezen partíciók mindegyike önduális, azonnal adódik, hogy

$$\int_{\mathrm{Gr}_4(\mathbb{C}^8)} \sigma_{2,2}^4 = 6.$$

Megoldotta: Bodor Bertalan, Grósz Dániel, Gyenizse Gergő, Mészáros András, Nagy Csaba, Nagy Dániel, Szalkai Balázs, Wolosz János. Nem tartalmaz érdemi eredményt 5 dolgozat.

6. feladat. *Legyenek A, B, C olyan $n \times n$-es, komplex elemű mátrixok, melyekre $[A,B] = C$, $[B,C] = A$ és $[C,A] = B$, ahol $[X,Y]$ az X és Y mátrixok $XY - YX$ kommutátorát jelöli. Bizonyítsuk be, hogy $e^{4\pi A}$ az egységmátrix.*

Megoldás. Az egységkvaterniók $SU(2)$ Lie-csoportjának $\mathfrak{su}(2)$ Lie-algebrája a ferdén önadjungált, 0 nyomú 2×2-es mátrixokból áll. Ebben bázist alkotnak az

$$A_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad B_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad C_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixok, melyek egymással éppen az $[A_0, B_0] = C_0$, $[B_0, C_0] = A_0$ és $[C_0, A_0] = B_0$ szabályok szerint kommutálódnak, tehát a $\phi : \mathfrak{su}(2) \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $\phi(xA_0 + yB_0 + zC_0) = xA + yB + zC$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezés egy Lie-algebra-reprezentáció. Az $SU(2)$ csoport homeomorf az S^3 gömbbel, tehát egyszeresen összefüggő. Ismert, hogy ekkor a ϕ Lie-algebra-reprezentáció egyértelműen megad egy $\hat{\phi} : SU(2) \to GL(n, \mathbb{C})$ Lie-csoport-reprezentációt, melyre $\hat{\phi}\big(e^{xA_0+yB_0+zC_0}\big) = e^{\phi(xA_0+yB_0+zC_0)}$. $x = 4\pi$, $y = z = 0$ helyettesítéssel

$$e^{4\pi A} = e^{\phi(4\pi A_0)} = \hat{\phi}\big(e^{4\pi A_0}\big) = \hat{\phi}\left(\begin{pmatrix} e^{2\pi i} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i} \end{pmatrix}\right) = \hat{\phi}(I_2) = I_n,$$

ahol I_k a $k \times k$-as egységmátrixot jelöli.

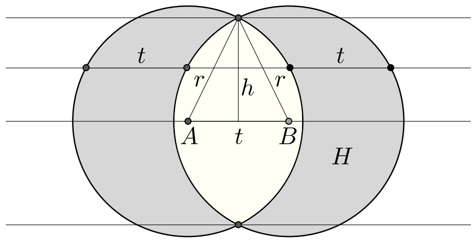
Megoldotta: Backhausz Tibor, Kalina Kende, Kutas Péter, Nagy Csaba, Szalkai Balázs. Részlegesen megoldotta: Bodor Bertalan, Nagy János, Tomon István, Virosztek Dániel.

7. feladat. *Legyen* Γ *egy* r *sugarú körben fekvő, rektifikálható,* l *hosszúságú egyszerű görbeív, és legyen* k *egy természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy ha* $l > kr\pi$*, akkor van olyan* r *sugarú körvonal, mely* Γ*-t legalább* $k+1$ *pontban metszi.*

1. megoldás (Mészáros András dolgozata alapján). Legyen A és B két adott pont a síkon. Tekintsük azon P pontok H halmazát, amelyekre az A és B pontok közül az egyik a P köré rajzolt r sugarú körlap belsejében, míg a másik a külsejében van, azaz

$$H := \{P :\ AP > r > BP \text{ vagy } BP > r > AP\}.$$

Azt állítjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha az A és B pontok t távolsága kisebb, mint δ, akkor $\lambda(H) > (r-\varepsilon)4t$, ahol λ a síkbeli Lebesgue-mérték.



A bizonyításhoz rajzoljunk A és B köré is egy r sugarú zárt körlapot, H éppen ezek szimmetrikus differenciájának a belseje lesz. Ha $t < r$, akkor ez a két kör metszi egymást két pontban. Húzzunk e két ponton keresztül párhuzamost a szakaszunkkal, nézzük csak az ezen két egyenes közé eső részét H-nak. E két egyenes között haladó, velük párhuzamos egyenes mindig 2 darab t hosszú szakaszt metsz ki H-ból, azaz az összes szelés mértéke $2t$. Így e két egyenes közötti része H-nak már önmagában $2t2h = 4th$ mértékű, ahol h az r szárú t alapú egyenlőszárú háromszög alaphoz tartozó magassága. Ez a magasság, ha t elég kicsi, nagyobb, mint $r-\varepsilon$, és ezzel beláttuk az segédállítást.

Vegyük észre, hogy ha $P \in H$, akkor tetszőleges A-t és B-t összekötő folytonos görbe metszeni fogja a P középpontú r sugarú körívet egy A-tól és B-től különböző pontban. Így elegendő egy olyan beírt poligont találni, amelyre ha minden szakaszához tekintjük a megfelelő H halmazt, akkor létezik olyan P pont, mely ezek közül legalább $k+1$-ben benne van, mert egy ilyen P középpontú r sugarú körnek lesz $k+1$ metszéspontja a görbével, és ezek mind különbözőek, mert más-más paraméterintervallumról valók, és a görbe egyszerű.

Legyen $l > l_0 > kr\pi$. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy $(r-\varepsilon)4l_0 > 4kr^2\pi$. Legyen $\delta > 0$ a segédállításunk szerint ehhez tartozó δ.

Most tekintsünk egy olyan beírt töröttvonalat, melyre a töröttvonalat alkotó szakaszok $l_1, l_2, \ldots, l_n$ hosszai mind kisebbek, mint δ, de a szakaszok $l_S =$

$l_1 + l_2 + \cdots + l_n$ összhossza nagyobb, mint l_0. Ekkor a szakaszoknak megfelelő H halmazok mértékei legalább $(r - \varepsilon)4l_i$ nagyok, így mértékeik összege nagyobb, mint $4kr^2\pi$. De vegyük észre, hogy az összes halmaz benne van egy $2r$ sugarú, azaz egy $4r^2\pi$ mértékű körlemezben, ami csak úgy lehet, ha van olyan pont, mely legalább $k + 1$-ben benne van. A halmazok karakterisztikus függvényeinek összege ugyanis nem lehet $\leq k$ mindenütt, mert akkor a körlemezen vett integrálja legföljebb $k4r^2\pi$ volna, ami kisebb, mint a halmazok mértékeinek összege, holott az integrál linearitása miatt azzal egyenlőnek kellene lennie, ami ellentmondás.

2. megoldás. Jelölje $\theta \in [0, 2\pi]$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ esetén $\Phi_{(\theta,\mathbf{x})} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az origó körüli θ szögű forgatás és az $\mathbf{x}$ vektorral való eltolás kompozícióját. A Poincaré-formula szerint (lásd L. A. Santaló, Integral Geometry and Geometric Probability, Chapter 7, §. 2.), ha Γ és $\tilde{\Gamma}$ két rektifikálható, l, illetve $\tilde{l}$ hosszúságú görbeív az $\mathbb{R}^2$ euklideszi síkon, és $m(\theta, \mathbf{x}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ jelöli a Γ és a $\Phi_{(\theta,\mathbf{x})}(\tilde{\Gamma})$ görbék metszéspontjainak számát, akkor

$$\int_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} m(\theta, \mathbf{x})\, d\theta\, d\mathbf{x} = 4 \cdot l \cdot \tilde{l}.$$

Ha a $\tilde{\Gamma}$ görbének az origó középpontú r sugarú kört választjuk, akkor $m(\theta, \mathbf{x})$ csak az $\mathbf{x}$-től függ és $\hat{m}(\mathbf{x}) = m(\theta, \mathbf{x})$ az $\mathbf{x}$ középpontú r sugarú kör és a Γ görbe metszéspontjainak száma. A Poincaré-formula ebben a speciális esetben az

$$\int_S \hat{m}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 4rl > (2r)^2\pi k$$

egyenletet adja. Mivel $\hat{m}$ tartója egy $2r$ sugarú körbe esik, $\hat{m}$-nek egy pozitív mértékű halmazon $k + 1$-nél nagyobbnak kell lennie.

Megoldotta: Grósz Dániel, Mészáros András, Nagy Csaba, Nagy Dániel, Nagy János, Szalkai Balázs. Részlegesen megoldotta: Bodor Bertalan, Gyenizse Gergő, Kalina Kende, Tomon István. Nem tartalmaz érdemi eredményt egy dolgozat.

8. feladat. *Rendeljük hozzá minden $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényhez azt a $\Phi_f : \mathbb{R}^2 \to [-\infty, \infty]$ függvényt, amelyre $\Phi_f(x, y) = \limsup_{z\to y} f(x, z)$ minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$-re.*

(a) *Igaz-e, hogy ha f Lebesgue-mérhető, akkor Φ_f is Lebesgue-mérhető?*

(b) *Igaz-e, hogy ha f Borel-mérhető, akkor Φ_f is Borel-mérhető?*

Megoldás. (a) A válasz negatív. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ nem Lebesgue-mérhető halmaz, és legyen f az $A \times \mathbb{Q}$ halmaz indikátorfüggvénye, ahol $\mathbb{Q}$ jelöli a racionális számok halmazát. Ekkor $A \times \mathbb{Q}$ nullmértékű a síkbeli Lebesgue-mérték szerint, tehát f Lebesgue-mérhető. Másrészt Φ_f az $A \times \mathbb{R}$ halmaz indikátorfüggvénye, amely nem Lebesgue-mérhető.

(b) (Nagy János megoldása alapján.) A válasz szintén negatív. Legyen $B \subset \mathbb{R}^2$ olyan Borel-mérhető halmaz, amelynek az x-tengelyre vett A vetülete nem Borel-mérhető. Legyen f a $D = \bigcup_{y\in\mathbb{Q}} \big(B + (0, y)\big)$ halmaz indikátorfüggvénye, ahol $B + (0, y)$ a B-nek a $(0, y)$ vektorral való eltoltját jelenti. Ekkor D Borel-mérhető halmaz, tehát f Borel-mérhető. Másrészt a Φ_f függvény nem más, mint $A \times \mathbb{R}$ indikátorfüggvénye, amely nem Borel-mérhető.

Megjegyzés (Backhausz Tibor dolgozata alapján). Ha f Borel-mérhető, akkor Φ_f univerzálisan mérhető (így Lebesgue-mérhető). Valóban,

$$\Phi_f^{-1}\big([a,\infty]\big) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, \infty\right)\right) + I_n \right),$$

ahol I_n azon $(0,y)$ pontok halmaza a síkon, amelyekre $0 < |y| < 1/n$. Itt megszámlálható sok analitikus halmaz metszete áll, mert két Borel-halmaz direkt szorzata is Borel, s emiatt két Borel-halmaz Minkowski-összege – a direkt szorzat vetülete lévén – analitikus. Ezért a metszet is analitikus, tehát univerzálisan mérhető.

Megoldotta: Backhausz Tibor, Bodor Bertalan, Nagy János. Az (a) részt megoldotta Mészáros András.

9. feladat. *Legyen* $D = \big\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\big\}$ *a komplex egységkörlemez, és legyen* $0 < a < 1$ *valós szám. Tegyük fel, hogy* $f : D \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *olyan holomorf függvény, amelyre* $f(a) = 1$ *és* $f(-a) = -1$. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sup_{z\in D} \big|f(z)\big| \geq \exp\left(\frac{1-a^2}{4a}\pi\right).$$

Megoldás. Legyen $M = \sup\limits_{z\in D}\big|f(z)\big|$. Mivel f nem konstans, $|f| < M$ a D összes pontjában. Az $f(a) = 1$ feltételből tudjuk, hogy $M > 1$.

Legyen g a $(\log f)$-nek az az ága, amelyre $g(a) = 0$. Ekkor $g(-a) = \log(-1) = k\pi i$ valamilyen páratlan egész k-ra. Továbbá, $|f| < M$ miatt $\operatorname{Re} g < \log M$. Legyen $H = \{z : \operatorname{Re} z < \log M\}$; ekkor tehát g egy holomorf $D \to H$ függvény.

Definiáljuk a következő törtlineáris függvényeket:

$$\varphi : D \to D, \quad \varphi(z) = \frac{z+a}{1+az}, \quad \varphi^{-1}(z) = \frac{z-a}{1-az}$$

és

$$\psi : H \to D, \quad \psi(z) = \frac{z}{2\log M - z}.$$

Tekintsük a $h : D \to D$, $h = \psi \circ g \circ \varphi$ függvényt. Mivel $\varphi(0) = a$, $g(a) = 0$ és $\psi(0) = 0$, teljesül, hogy $h(0) = 0$. Alkalmazzuk a Schwarz-lemmát a h függvényre és a $\varphi^{-1}(-a) = \frac{-2a}{1+a^2}$ pontra; azt kapjuk, hogy $\left|h\left(\frac{-2a}{1+a^2}\right)\right| \leq \frac{2a}{1+a^2}$, tehát

$$\frac{2a}{1+a^2} \geq \Big|h\big(\varphi^{-1}(-a)\big)\Big| = \Big|\psi\big(g(-a)\big)\Big| =$$

$$= \left|\frac{k\pi i}{2\log M - k\pi i}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\log M}{|k|\pi}\right)^2 + 1}},$$

ahonnan

$$\log M \geq \frac{|k|\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^2 - 1} = \frac{|k|\pi}{2} \cdot \frac{1-a^2}{2a} \geq \frac{1-a^2}{4a}\pi,$$

$$M \geq \exp\frac{1-a^2}{4a}\pi.$$

Megjegyzés. A feladat állítása éles; például az

$$f(z) = -i\exp\left(\frac{iz-a^2}{iz+1} \cdot \frac{\pi}{2a}\right)$$

függvényre egyenlőség áll.

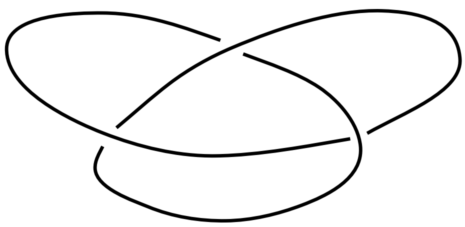
Megoldotta: Nagy Csaba, Tomon István, Wolosz János. Kissé hiányosan oldotta meg Mészáros András és Nagy János. A feladat állításánál jóval gyengébb becslést ad egy dolgozat.

10. feladat. *Legyen K egy csomó a* 3 *dimenziós térben (tehát a körvonal egy differenciálható beágyazása $\mathbb{R}^3$-ba), és D a csomó diagramja (azaz olyan vetülete egy síkra, amely transzverzális duplapontoktól eltekintve szintén differenciálható beágyazása a körvonalnak). Színezzük ki D komplementumát sakktáblaszerűen feketével és fehérrel. Definiáljuk a diagram* $\Gamma_B(D)$ fekete gráfját *a következő módon:* $\Gamma_B(D)$ *csúcsai legyenek a fekete tartományok, és két tartomány minden érintkezési pontján át menjen egy őket összekötő él.*

(a) *Adjuk meg az összes olyan csomót, amelynek van olyan D diagramja, hogy a* $\Gamma_B(D)$ *gráfnak legfeljebb* 3 *feszítőfája van. (Két csomót nem tekintünk különbözőnek, ha az egyik a másikba mozgatható a körvonal beágyazásainak egy* 1 *paraméteres seregével.)*

(b) *Lássuk be, hogy bármely csomó bármely D diagramjára* $\Gamma_B(D)$*-nek páratlan sok feszítőfája van.*

Megoldás. (a) Megmutatjuk, hogy ha a $\Gamma_B(D)$ gráfnak legfeljebb 3 feszítőfája van, akkor a csomó vagy triviális (tehát egy beágyazott körlap pereme), vagy a rajzon ábrázolt háromlevelű csomóba, vagy ennek tükörképébe mozgatható a körvonal beágyazásainak egy 1 paraméteres seregével.



1. ábra. A háromlevelű csomó egy vetülete

Egy levél minden feszítőfában benne van, egy hurok (tehát olyan él, amelynek két vége megegyezik) viszont semelyikben sem. Tehát ezeket elhagyva a feszítőfák száma nem változik. Viszont egy levél olyan tartományhoz tartozik, amelynek csak egy sarka van (tehát ez egy „csavarintás”), úgyhogy a vetület változtatható úgy, hogy a csomó nem változik, de a levél eltűnik. Hasonlóan, egy hurok olyan kereszteződéshez tartozik, amelyet ki lehet „forgatni”. Feltehető tehát, hogy a gráf nem tartalmaz sem levelet, sem hurkot.

Amikor egy feszítőfa van, akkor a gráf egy fa, a fenti átalakítások után tehát egy egypontú gráf, és a csomó nyilván triviális.

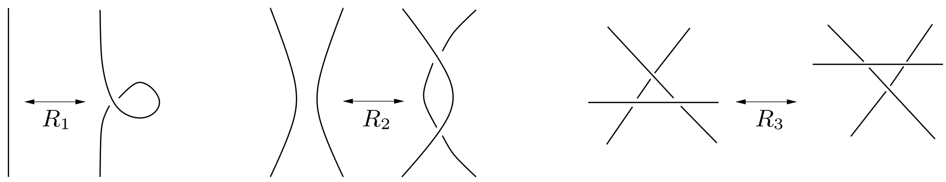
Ha két feszítőfa van, akkor a gráfban csak kettő hosszú ciklus lehet, abból is csak egy. Ilyen gráf csak egy van: két csúcs két éllel összekötve. Ez azonban nem csomót, hanem két komponensű láncot ad, összhangban az alább bizonyítandó (b) állítással.

Meg kell nézni még, hogy mi a helyzet akkor, ha pontosan három feszítőfa van. Ekkor a (levél és hurok nélküli) gráfban legfeljebb három hosszú ciklus lehet, vagy három él köt össze két csúcsot. Ez két lehetséges gráfot ad, amik egyenként 8 vetületből származnak (attól függően, hogy az él milyen kereszteződésnek felel meg a kettőből). A csomók pedig csak azt a három típust engedik meg, amit állítottunk.

Ez a három csomó valóban jó is.

(b) A megoldás két ismert tételt alkalmaz. Az első szerint minden csomó, és valójában minden vetület, kibogozható. Pontosabban, minden vetületet alkalmas kereszteződések megváltoztatásával a triviális csomó vetületévé lehet alakítani. (Induljunk el a csomón, és alakítsuk át úgy, hogy amikor először érünk egy kereszteződéshez, akkor az felül menjen. Nem nehéz látni, hogy a csomó triviálissá vált.) Mivel a kereszteződés cseréje nem változtatja meg a $\Gamma_B(D)$ gráfot, az állítást elég a triviális csomóra belátni.

A másik használandó tétel valamivel nehezebb (de minden csomóelmélet könyv az első lapjain tárgyalja): két vetület pontosan akkor felel meg ugyanannak a csomónak, ha az R_1, R_2, R_3 úgynevezett *Reidemeister-mozgásokkal* egymásba alakíthatók. (A mozgásokat a 2. rajz mutatja be.)



2. ábra. A három Reidemeister-mozgás

A fentiek alapján azt kell tehát belátni, hogy a Reidemeister-mozgások nem változtatják meg a feszítőfák számának paritását (hiszen a triviális csomó kereszteződések nélküli vetületéhez tartozó fekete gráfban egyetlen feszítőfa van).

Az első mozgás nem változtatja meg a feszítőfák számát. A második mozgás egy páros számmal változtatja csak meg: ezt a két lehetséges színezés vizsgálatával könnyű látni. Valóban, a változtatás vagy egy dupla él kihagyásával jár (ami megöli azokat a feszítőfákat, amikben a dupla él valamelyike szerepelt), vagy két egymás utáni él egy pontra ejtését eredményezi; itt azokat a feszítőfákat öljük meg, amelyek a két él közül pontosan az egyiket tartalmazták.

A harmadik mozgás a gráfot úgy változtatja, hogy egy háromszöget átcserél egy „Mercedes-jelre” (4-szögpontú fára egy harmadfokú csúccsal). Itt egy kis esetszétválasztással lehet belátni, hogy a feszítőfák számának paritása nem változik: az esetszétválasztás aszerint megy, hogy a háromszögből 0, 1 vagy 2 él szerepel a feszítőfában. Azon feszítőfák, melyek egy élt sem tartalmaztak a háromszögben, háromszor annyi feszítőfát határoznak meg természetesen az átalakított gráfban (behúzva a Mercedes-jel egy tetszőleges élét). Azon feszítőfák, melyek a háromszögnek egy élét tartalmazták, egyetlen feszítőfát adnak természetesen az új gráfban (alkalmas két élt véve a Mercedes-jelben). Végül a két háromszögbeli élt tartalmazó fák egyértelműen határoznak meg egy feszítőfát az új gráfban, de három feszítőfa ugyanazt a fát fogja meghatározni az új gráfban, így ebben az esetben a számot hárommal osztani kell. A paritás azonban változatlan marad, amivel a bizonyítás teljes.

Megoldotta: Grósz Dániel, Nagy Csaba, Nagy Dániel, Szalkai Balázs, Tomon István, Wolosz János. Hiányosan oldotta meg: Backhausz Tibor, Bencs Ferenc, Gyenizse Gergő, Kalina Kende. A (b) részt megoldotta Mészáros András.

11. feladat. *Legyenek X_1, X_2, ... független, azonos eloszlású valószínűségi változók, és legyen $S_n = X_1 + \dots + X_n$, $n = 1, 2, \dots$. Melyek azok a c valós számok, amelyekre minden n esetén*

$$P\left(\left|\frac{S_{2n}}{2n} - c\right| \le \left|\frac{S_n}{n} - c\right|\right) \ge \frac{1}{2}\,?$$

Megoldás. Meglepő módon az egyenlőtlenség minden valós c-re fennáll. Mivel az X_i-k tetszőlegesek lehetnek, az egyenlőtlenséget elegendő a $c = 0$ esetben bizonyítani. Legyen $S'_n = X_{n+1} + \dots + X_{2n}$, akkor

$$P\left(\left|\frac{S_{2n}}{2n}\right| \le \left|\frac{S_n}{n}\right|\right) = P\big(|S_n + S'_n| \le 2|S_n|\big) \ge$$

$$\ge P\big(|S_n| + |S'_n| \le 2|S_n|\big) = P\big(|S'_n| \le |S_n|\big) \ge \frac{1}{2},$$

ugyanis S_n és S'_n függetlenek és azonos eloszlásúak, ezért

$$1 \le P\big(|S'_n| \le |S_n|\big) + P\big(|S_n| \le |S'_n|\big) = 2P\big(|S'_n| \le |S_n|\big).$$

Megoldotta: Grósz Dániel, Gyenizse Gergő, Kalina Kende, Mészáros András, Nagy Csaba, Nagy Dániel, Tomon István, Virosztek Dániel. Hibás egy dolgozat.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS