Matematikai Lapok

2009/1

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 15. évfolyam (2009), 1. szám

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A Matematikai Lapok megjelenését támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

NÉHÁNY KOMBINATORIKUS PROBLÉMÁRÓL VI. RÉSZ: DESCARTES-SZORZATOK, ILLESZKEDÉSEK ÉS FÜGGVÉNYKOMPOZÍCIÓK

ELEKES GYÖRGY

Az előző részek kitérője után ismét visszatérünk a fősodorba: az illeszkedési problémákhoz.

A II. részben megismertük a Szemerédi–Trotter-tételt, mely – kissé egyszerűsített formában – azt állítja, hogy a sík N pontjából legalább k darabot $\left(2 \leq k \leq \sqrt{N}\right)$ tartalmazó egyenesek száma nem lehet több, mint

$$C \cdot \frac{N^2}{k^3}, \tag{1}$$

alkalmas pozitív C abszolút konstanssal. Említettük azt is, hogy az optimális (vagy ahhoz közeli nagyságrendet adó) pont- és egyeneshalmazok szerkezete nem ismeretes.

Ebben a részben az eddig talált egyetlen ilyen irányú struktúratétellel ismerkedünk meg. Az eredmény olyan ponthalmazokra érvényes, amelyek $N = n^2$ elemű $n \times n$-es Descartes-szorzatok, továbbá olyan egyenesekre vonatkozik, amelyeken egy ilyen Descartes-szorzatnak legalább cn pontja található. E lényeges megszorítások ellenére a tétel – mint látni fogjuk – a kombinatorikus geometria számos témaköréhez kapcsolódik: egyrészt a kevés irányt vagy kevés különböző távolságot meghatározó ponthalmazokhoz (lásd 1.3. szakasz, illetve III. rész), sőt az I. részben megismert gyümölcsösök problémájához is (1.5. tétel). Ugyanakkor algebrai jellegű alkalmazásait is láthatjuk majd, például az 5.2. tételt és csaknem az egész VI. részt.

Ebből is látható, milyen lényeges áttörést jelentene, ha sikerülne az (1) becslésben a közel optimális nagyságrendet adó pont–egyenes konfigurációk szerkezetét teljes általánosságban leírni.

1.1. Descartes-szorzatok gazdag átlói. Szokás szerint az $X, Y \subset \mathbb{R}$ halmazok Descartes-szorzatának nevezzük a $\mathcal{P} = X \times Y \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y);\ x \in X,\ y \in Y\} \subset \mathbb{R}^2$ ponthalmazt.

Egy ilyen Descartes-szorzat *átlója* olyan egyenes, amelyik se nem vízszintes, se nem függőleges, és amely $X \times Y$-nak legalább két pontját tartalmazza. Ha nemcsak kettő, hanem legalább $k \geq 2$ ponton megy át, akkor *k-gazdag átlónak* nevezzük.

E rész központi kérdése:

mely $n \times n$-es Descartes-szorzatoknak van
sok „nagyon gazdag" ($\geq k = cn$-es) átlójuk?

A kérdés két részből áll.

Első kérdés: *hány cn-gazdag átlója lehet egy $n \times n$-es Descartes-szorzatnak?*

1.1. állítás. *Ha $|X|, |Y| \leq n$, akkor $X \times Y$-ban legfeljebb C^*n darab cn-gazdag átló található (ahol $C^* = C^*(c)$ nem függ n-től).*

Bizonyítás. A Szemerédi–Trotter-féle (1) becslést az $N \leq n^2$ elemű $X \times Y$ ponthalmazra és $k = cn$-re alkalmazva, az egyenesek száma legfeljebb

$$C \cdot \frac{N^2}{k^3} \leq C \cdot \frac{(n^2)^2}{(cn)^3} = C^*n. \ \blacksquare$$

A korlát tehát lineáris n-ben. Mivel $n \times n$-es Descartes-szorzat esetén n darab vízszintes és ugyanennyi függőleges egyenes (az $y = y_j$, illetve $x = x_i$ egyenletűek) mindegyike eleve n ponton megy át, a lényeges információ az, hogy a cn-gazdag *átlókból* sem létezhet ennél lényegesen több.

Azt, hogy ez a nagyságrend el is érhető, két példával illusztráljuk $n \geq 3$-ra és $k = n/2$-re.

1.2. példa. Egy $n \times n$-es négyzetrácsban $\geq n$ (páros $n \geq 4$-re $n + 1$) darab $45°$-os és ugyanennyi $-45°$-os, $n/2$-gazdag átló található.

1.3. példa. Ha X és Y mértani sorozat, például $X = Y = \{1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}\}$, akkor az origón átmenő, $n/2$-gazdag átlók száma ugyanennyi.

A második kérdés: milyen Descartes-szorzatokban található ilyen sok cn-gazdag átló; speciálisan: *létezik-e a fenti kettőtől lényegesen különböző példa?* A válasz negatív [2].

1.4. tétel. *Ha egy legfeljebb $n \times n$-es Descartes-szorzatban létezik c_1n darab c_2n-gazdag átló, akkor ezek között*

- *vagy c_3n darab párhuzamos;*
- *vagy c_3n darab egy közös ponton megy át;*

ahol $c_3 = c_3(c_1, c_2)$ nem függ n-től.

Megjegyezzük, hogy a VII. részben – erősebb feltétel mellett – még finomabb, az X, Y halmazok struktúráját is megkötő karakterizációt mutatunk majd. Az 1.4. tétel – valamint a későbbi részekben ismertetendő további alkalmazásai – a kombinatorikus geometria számos témájához kapcsolódik. Mielőtt a bizonyításra térnénk, ezek közül mutatunk be most kettőt. Magát a (nagyon rövid) bizonyítást – megfelelő előkészítés után – a 4. szakaszban ismertetjük.

1.2. Újra a gyümölcsösök. Az I. rész 3. szakaszának végén (a 3.14. tétel után) mondtuk ki a következő állítást. Most váltjuk be ígéretünket, hogy bizonyítására visszatérünk [4].

1.5. tétel. *Ha egy H ponthalmaz három, egyenként legfeljebb n pontú részre bontható, pl. $H = H_0 \cup H_1 \cup H_2$ úgy, hogy*

(a) *H_0 egy l_0 egyenesre, H_1 egy l_1 egyenesre esik; H_2 pedig diszjunkt $l_0 \cup l_1$-től;*

(b) *legalább cn^2 háromszoros egyenes létezik, azaz olyan, amelyik mindhárom H_i-ből tartalmaz egy-egy pontot,*

akkor alkalmas, csak c-től függő c^* konstanssal H_2-nek is legalább c^*n pontja kollineáris.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy minden H_2-beli pontra legalább $(c/2)n$ darab háromszoros egyenes illeszkedik (különben az ennél kisebb multiplicitású pontokat kidobva minden szempontból csak egy konstans szorzót veszíthetünk).

Az állítás duálisára térünk át: a pontokhoz egyeneseket és az egyenesekhez pontokat rendelünk kölcsönösen egyértelműen és illeszkedés-tartóan, az I. rész 1.7. definíciójában látottakhoz hasonlóan, de más megvalósításban. (A lényeges módosítás az, hogy itt a végtelen távoli pontokat és egyeneseket is bevesszük – vagyis a projektív síkon dolgozunk.) Ez a hozzárendelés úgy is megtehető, hogy a tétel feltételében szereplő l_0 egyenesnek az y tengely végtelen távoli pontja feleljen meg, az l_1 egyenesnek pedig az x tengelyé. Ekkor l_0 (és ezen belül H_0) pontjaiból függőleges, l_1 (és ezen belül H_1) pontjaiból pedig vízszintes egyenesek lesznek. Így H_2 pontjai ($H_2 \cap l_0 = H_2 \cap l_1 = \emptyset$ miatt) se nem függőleges, se nem vízszintes egyeneseknek felelnek meg. Utóbbiak tehát *átlók* a H_0-nak, illetve H_1-nek megfelelő függőleges, illetve vízszintes egyenesek által meghatározott rácsban (Descartes-szorzatban). Sőt az is igaz, hogy ezek az átlók $(c/2)n$-gazdagok, hiszen a háromszoros egyeneseknek azon pontok felelnek meg, ahol egy-egy vízszintes, függőleges és átlós egyenes találkozik.

Az 1.4. tételt használva olyan egyenes-sereget találunk, amely közös – esetleg végtelen távoli – pontra illeszkedik. A megfelelő eredeti, H_2-beli pontok tehát egy *egyenesre* esnek. ■

1.3. Kevés irányt meghatározó ponthalmazok.

1.6. definíció. Tetszőleges véges $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^k$ ponthalmazra legyen

$$D(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \#\{ \text{ az } \overline{A_1 A_2} \text{ szakaszok iránya} \mid A_1, A_2 \in \mathcal{A},\ A_1 \neq A_2\}.$$

Nem különböztetjük meg az $\overline{A_1 A_2}$ és $\overline{A_2 A_1}$ irányokat; más szóval két szakaszt akkor tekintünk azonos irányúnak, ha párhuzamosak.

A kevés irányt meghatározó ponthalmazok vizsgálatát Scott kezdeményezte. Egy négyzet és a középpontja csak négy különböző irányt ad. Ennek általánosítása a következő három végtelen példacsalád.

(1) Egy szabályos $2k$-szög és a középpontja: $2k$ irány;

(2) két párhuzamos egyenesen egy-egy (egybevágó) k tagú számtani sorozat plusz a szimmetria-középpontjuk: $2k$ irány;

(3) a koordináta-rendszer tengelyein „dupla” mértani sorozatok, pl. $-2^{k-1}, -2^{k-2}, \ldots, -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4, \ldots, 2^{k-2}, 2^{k-1}$ (mint látható, itt is bevettük mindkettőbe a 0-t). Ez a $4k+1$ pont $4k$ különböző irányt határoz meg.

Mivel a probléma affin invariáns (a sík „összenyomása” párhuzamos egyeneseket párhuzamos egyenesekbe visz) mindhárom fenti konstrukció affin képei is $D(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}| - 1$-et adnak. (Például egy ellipszisen egy „affin szabályos” sokszög csúcsai és a középpont.)

Scott sejtése az volt, hogy ezeknél kevesebb már nem lehetséges: bármely nem kollineáris ponthalmazra $D(\mathcal{A}) \geq |\mathcal{A}| - 1$ [5]. Ezt végül Ungar igazolta [6] (lásd még [1]). Ismeretes még néhány „sporadikus” konstrukció; megoldatlan viszont az összes, $D(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}| - 1$-et teljesítő ponthalmaz leírása.

A fenti példák mindegyikében a pontok (esetleg egy kivételével) egy kúpszeleten helyezkedtek el – hiszen egy egyenespár is elfajuló kúpszeletnek tekinthető. Megoldatlan, hogy mindig található-e sok pont egy kúpszeleten.

Az viszont ismeretes, hogy ha a pontok pozitív százaléka egy egyenesre esik, akkor a maradékból is sok pont kollineáris. Sőt ez még sokkal általánosabb feltételek mellett is igaz. Egyrészt elég annyit feltenni, hogy $D(\mathcal{A}) \leq C|\mathcal{A}|$ (valamilyen $C > 1$ konstanssal, miközben $|\mathcal{A}|$ nagy). Másrészt nem kell az összes pontpárt figyelembe vennünk: elég, ha a párok pozitív százaléka által meghatározott irányokat tekintjük.

1.7. definíció. $E \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ esetén legyen

$$D_E(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \#\{ \text{ az } \overline{A_1 A_2} \text{ szakaszok iránya} \mid (A_1, A_2) \in E\}.$$

1.8. tétel. *Legyen $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \subset \mathbb{R}^2$ olyan, hogy $\mathcal{A}_1$ egy l_1 egyenesre esik, melyen $\mathcal{A}_2$-nek egyetlen pontja sincs; továbbá $|\mathcal{A}_1|, |\mathcal{A}_2| \leq n$ és $E \subset \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ melyre $|E| \geq cn^2$.*

Ha $D_E(\mathcal{A}) \leq Cn$ valamely fix $C > 1$-re, akkor $\mathcal{A}_2$-nek is legalább $c^* n$ pontja kollineáris, alkalmas $c^* = c^*(C, c)$ konstanssal.

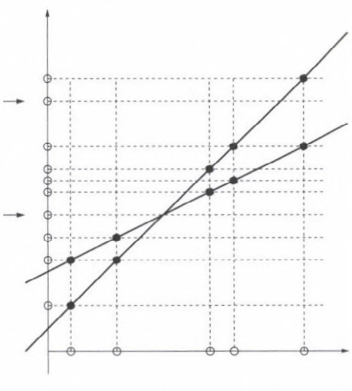
Bizonyítás. Jelölje l_0 a végtelen távoli egyenest és $\mathcal{A}_0$ ennek azon pontjait, melyek az E-beli párok által meghatározott $D_E(\mathcal{A}) \leq Cn$ darab iránynak felelnek meg. Minden ilyen pontpár által meghatározott egyenesen van pontja $\mathcal{A}_0$-nak is, $\mathcal{A}_1$-nek is és $\mathcal{A}_2$-nek is. Mivel a párok száma legalább cn^2, az 1.5. tétel alkalmazható n helyett $(C+2)n$-nel és a H_i-k szerepében az A_i-kal; megtaláltuk a keresett kollineáris ponthalmazt. ∎

2. Csak egy-két lépés az algebra...

E szakaszban azt ismertetjük, miként vezet az 1.4. tétel geometriai problémája függvény-kompozíciókra vonatkozó algebrai kérdésekre.

Olyan Descartes-szorzatokat vizsgálunk tehát, amelyek mérete legfeljebb $n \times n$ és sok $k = c_2n$-gazdag átlójuk van (valamilyen $c_2n > 0$-ra).

2.1. Egy speciális eset tanulságai. Nézzük először azt a végletet, amikor az $X \times Y$ Descartes-szorzat vízszintes mérete éppen az átlók k gazdagsága, azaz $|X| = k$. Ekkor persze az átlók minden függőleges, $x = x_i$ egyenletű egyenesről tartalmaznak egy-egy pontot (1. ábra). Természetes gondolat, hogy az átlókat $y = mx + b$ $(m \neq 0)$



1. ábra. $k \times l$-es Descartes-szorzat k pontú egyenesei

alakú függvények grafikonjának képzeljük. Ha $\varphi_1(x) = m_1x + b_1$ és $\varphi_2(x) = m_2x + b_2$ két ilyen függvény, akkor $\varphi_1(X), \varphi_2(X) \subset Y$. Következésképpen a $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : Y \to Y$ függvény (vagyis a $\varphi_1\big(\varphi_2^{-1}(y)\big)$ „közvetett függvény" vagy „kompozíció") Y-nak legalább $|X| = k = c_2n$ pontját képezi Y-ba – nevezetesen a $\varphi_2(x_i)$ $(x_i \in X)$ alakúakat biztosan. Arra jutottunk, hogy a $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ kompozíciók grafikonjai mind c_2n-gazdagok $Y \times Y$-ban.

Látszólag cseberből vederbe kerültünk: ismét gazdag átlókat találtunk, csak most egy másik Descartes-szorzatban. A lényeges különbség az $y = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(x)$ egyenletű átlók *számában* van! Eredetileg ugyanis a $k = cn$-gazdag átlók

$$\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_s\}$$

halmaza $s = c_1 n$ elemű volt. Most viszont a φ_i, φ_j párokból

$$\binom{s}{2} = \binom{c_1 n}{2} \approx \frac{c_1^2}{2} n^2$$

darab $k = c_2 n$-gazdag átló keletkezett a még mindig $n \times n$-es $Y \times Y$-ban. Ez ellentmondani látszik az 1.1. állítás $C^* n$-es felső becslésének! Hol a hiba?

Csak annyit hagytunk figyelmen kívül, hogy a $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ kompozíciók nem feltétlenül különbözőek. Sőt, az előző észrevétel éppen azt mondja: *nagyon sok egybeesés van!*

A IV. részben látottakhoz hasonló a helyzet. Bevezetve a

$$\Phi \circ \Phi^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi_i \circ \varphi_j^{-1};\ \varphi_i, \varphi_j \in \Phi\}$$

jelölést,

$$|\Phi \circ \Phi^{-1}| \leq C^* n = \frac{C^*}{c_1} \cdot c_1 n \leq \frac{C^*}{c_1} \cdot s = \frac{C^*}{c_1} \cdot |\Phi|.$$

Eszerint a számelméleti IV. rész „kis összeghalmazaihoz” hasonló „kis kompozícióhalmazokra” jutottunk. Ezek egyrészt az 1.4. tétel általános esetének bizonyításában tesznek majd jó szolgálatot, másrészt a VII. részben is újra látókörünkbe kerülnek majd.

Érdemes megjegyezni, hogy a fenti észrevétel újabb példa a IV. részben, az „összeg-szorzatos” 3.2. tétel bizonyításában látott elvre: *ha sok függvényünk van, de nem elég, készítsünk belőlük újabbakat!* Az általános esetben is ezt alkalmazzuk majd.

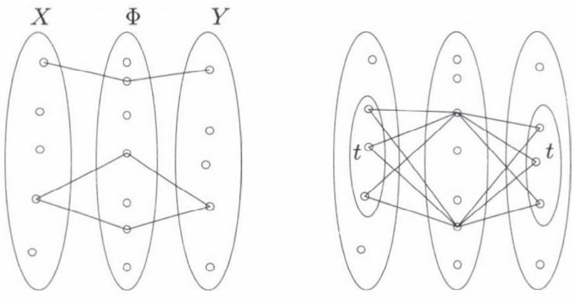
2.2. „Statisztikus” kompozícióhalmazok. A speciális $|X| = k$ eset után visszatérünk az általános $|X| \geq k$ eset elemzésére.

Képzeljük el, hogy egy $n \times n$-es $X \times Y$ Descartes-szorzatba behúzunk (ha lehet) néhány k-gazdag egyenest egymás után, egyenként. Amikor egyet-egyet lerajzolunk, jelöljük meg a rajta levő $\geq k$ pontot és nevezzük ezek vetületét az x-tengelyen az egyenes *X-tartójának.* (Hasonlóan definiálható az Y-tartó is.)

Ha $k = cn$ $(0 < c < 1)$, akkor ezek a tartók eleinte akár teljesen diszjunktak is lehetnek. Amikor azonban már több, mint $1/c$ darab egyenest rajzoltunk be, akkor ($|X| = n$ miatt) szükségképpen keletkezik két, egymásba metsző tartó. Továbbhaladva, ha már több, mint $1/c^2$ darab egyenesünk van, akkor valamelyik tartópárnak legalább *két* közös pontja is lesz. (Valóban, egy tartóba $\geq \binom{cn}{2} \sim c^2 n^2/2$ pontpár esik az összesen $\binom{n}{2} \sim n^2/2$ párból.) Várható, hogy – szemléletesen fogalmazva – sok cn-gazdag egyenes esetén sok olyan tartópár található, melyek közös része nagy (s ekkor az előző szakasz speciális esetében használt kompozícióötlet is működik majd). Várakozásunk teljesül; az alábbi gráfelméleti állítás szerint a párok potitív százalékának tartói nagy (pozitív százaléknyi) részben metszenek egymásba.

2.1. lemma. *Ha $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$ ($s \approx c_1 n$) a legfeljebb $n \times n$-es $X \times Y$ Descartes-szorzat $c_2 n$-gazdag átlói, akkor létezik $c_3 n^2$ darab (i, j) pár, melyekre a φ_i és φ_j egyenesek X-tartóinak is, Y-tartóinak is legalább $c_4 n$ közös pontja van. (Itt $c_3 = c_3(c_1, c_2)$ és $c_4 = c_4(c_1, c_2)$ nem függ n-től.)*

Bizonyítás (vázlat). Definiáljunk az $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ ponthalmazokon és a $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s\}$ egyeneshalmazon mint csúcshalmazokon egy „dupla" páros gráfot (lásd 2. ábra) oly módon, hogy mindegyik $\varphi_i \in \Phi$-t összekötjük X-beli és Y-beli tartójának pontjaival.



2. ábra. **a.** Dupla páros gráf, két élű út és négy élű kör.
b. Pontpár, mindkét oldalon legalább t közös szomszéddal.

Ennek a gráfnak a következő tulajdonságai vannak:

(1) Minden $\varphi_i \in \Phi$-ből legalább $c_2 n$ él indul X-be is, Y-ba is.

(2) Az $x - \varphi_i - y$ típusú, kétélű utak száma X és Y között $\approx c_1 n \cdot (c_2 n)^2 = c_1 c_2^2 n^3 = c' \cdot n^3$.

(3) Egy-egy (x, y) párra ($x \in X$, $y \in Y$) átlagosan $c'n$ ilyen út illeszkedik, ezekből pedig $\approx \binom{c'n}{2} \approx c'' \cdot n^2$ darab $x - \varphi_i - y - \varphi_j - x$ típusú, négyélű kör képezhető (lásd 2. ábra).

(4) A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint összesen legalább $n^2 \cdot c''n^2 = c''n^4$ darab ilyen kör létezik.

(5) Legyen $c_4 = c''/c_1^2$, és tekintsük azon (φ_i, φ_j) párokat, melyekre kevesebb mint $c_4 n^2$ $x - \varphi_i - y - \varphi_j - x$ típusú kör illeszkedik. Az ezek által lefogott körök száma legfeljebb

$$\binom{c_1 n}{2} \cdot c_4 n^2 \leq \frac{c_1^2 n^2}{2} \cdot \frac{c''}{c_1^2} \cdot n^2 = \frac{c''}{2} n^4.$$

(6) A maradék – legalább ennyi – kör olyan (φ_i, φ_j) párokra illeszkedik, melyeken át „sok" (legalább $c_4 n^2$) kör megy. Ehhez persze egyrészt X-ben is és Y-ban is legalább $c_4 n$ közös szomszédra van szükség (vagyis a tartóknak legalább ennyi közös elemük van), másrészt összesen $c''n^4/2$ kör csak úgy gyűlhet össze, ha az ilyen (φ_i, φ_j) párok száma legalább

$$\frac{c''}{2} n^4 \Big/ n^2 = \frac{c''}{2} n^2 = c_3 n. \ \blacksquare$$

A tartók sok közös elemét a 2.1. szakaszhoz hasonlóan használjuk ki. A lényeges különbség az lesz, hogy most nem *minden* $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ kompozíciót veszünk figyelembe, hanem csak azokat, melyekben a két függvény X-tartójának is, Y-tartójának is sok (legalább $c_4 n$) közös eleme van. Jelöljük ezen párok halmazát E-vel! (Ezt a Φ csúcshalmazon egy gráf élhalmazának képzelhetjük.) A számelméleti IV. rész „statisztikus" összegeihez hasonlóan definiáljuk a

$$\Phi \circ_E \Phi^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \quad (\varphi_i, \varphi_j) \in E\}$$

„statisztikus kompozícióhalmazt"!

2.2. következmény. *Ha az $s \approx c_1 n$ darab $\varphi_1(x) = m_1 x + b_1, \dots, \varphi_s(x) = m_s x + b_s$ függvény ($\forall m_i \neq 0$) mindegyikének grafikonja $c_2 n$-gazdag a legfeljebb $n \times n$-es $X \times Y$-ban, akkor létezik olyan gráf a $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_s\}$ csúcshalmazon, melynek élszáma $|E| \geq c_3 n^2$ és*

$$|\Phi \circ_E \Phi^{-1}| \leq C^{**}|\Phi| \qquad \text{és} \qquad |\Phi^{-1} \circ_E \Phi| \leq C^{**}|\Phi|,$$

ahol $C^{**} = C^{**}(c_1, c_2)$ és $c_3 = c_3(c_1, c_2)$ nem függ $|\Phi|$-től.

Bizonyítás. Legyen ismét E a fenti 2.1. lemmából kapott olyan (φ_i, φ_j) párok halmaza, melyek X-tartói is, Y-tartói is legalább $c_4 n$ elemben metszik egymást. Válasszunk egy ilyen párt és jelöljük T_x-szel, illetve T_y-nal a tartók közös részét! Ekkor a $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : Y \to Y$ függvény (vagyis a $\varphi_i(\varphi_j^{-1}(y))$ „közvetett függvény") Y-nak legalább $|T_x|$ pontját képezi Y-ba – nevezetesen a $\varphi_j(x)$ ($x \in T_x$) alakúakat biztosan.

Az ilyen gazdag grafikonú függvények számát az 1.1. állításból becsülve

$$|\Phi \circ_E \Phi^{-1}| \leq C^*(c_4)n = \frac{C^*(c_4)}{c_1} \cdot c_1 n \leq \frac{C^*(c_4)}{c_1} \cdot s = \frac{C^*(c_4)}{c_1} \cdot |\Phi| = C^{**}|\Phi|.$$

A másik becslés hasonlóan adódik a T_y-ok vizsgálatából. ∎

A következő szakaszban megmutatjuk, hogy ilyen sok egybeesés csak akkor fordulhat elő, ha a φ_i függvények „jó részének" grafikonja speciális: vagy párhuzamosak, vagy egy közös ponton mennek át (lásd 3.1. lemma). Ebből pedig már az 1.4. tétel is következik majd (lásd 4. szakasz).

3. Kis kompozícióhalmazok egyenesseregei

Az előző szakasz végén arra jutottunk, hogy az 1.4. tétel visszavezethető függvénykompozíciók bizonyos egybeeséseinek vizsgálatára.

Az alábbiakban ismertetendő gondolatok könnyebb megfogalmazása céljából néhány jelölést vezetünk be és egy fogalmat definiálunk: az ún. „kommutátor gráfot".

Jelöljük $\mathcal{L}$-lel az $x \mapsto mx + b$ $(m \neq 0)$ alakú nem konstans lineáris függvények osztályát. A $\varphi \circ \psi : x \mapsto \varphi(\psi(x))$ kompozíció $\mathcal{L}$-beli függvényekhez $\mathcal{L}$-beli függvényt rendel; még az is igaz, hogy $\mathcal{L}$ a „$\circ$" művelettel csoportot alkot. A továbbiakban Φ és Ψ $\mathcal{L}$-beli lineáris függvények véges halmazait jelöli. A belőlük képezhető kompozíciók halmaza legyen

$$\Phi \circ \Psi = \{\varphi \circ \psi;\ \varphi \in \Phi,\ \psi \in \Psi\}.$$

Hasonlóan, $E \subset \Phi \times \Psi$ esetén (amit egy páros gráf élhalmazának is képzelhetünk Φ-n és Ψ-n mint csúcshalmazokon), az E élhalmaz mentén készített kompozícióhalmaz jelölése:

$$\Phi \circ_E \Psi = \big\{\varphi \circ \psi;\ (\varphi, \psi) \in E\big\}.$$

A 2.2. következményben olyan (i,j) párokat – azaz E élhalmazt – találtunk, melyre $|E| \geq cn^2$, de a kompozícióhalmazok kicsik:

$$|\Phi \circ_E \Phi^{-1}| \leq C^{**}n \qquad \text{és} \qquad |\Phi^{-1} \circ_E \Phi| \leq C^{**}n.$$

Megmutatjuk, hogy ebből már következik sok olyan $\varphi_i \in \Phi$ létezése, melyek grafikonjai mind párhuzamosak vagy mind egy ponton mennek át. Sőt ez akkor is igaz marad, ha nem Φ-ről és Φ^{-1}-ről, hanem utóbbi helyett, Φ mellett valamilyen más Ψ^{-1}-ről teszünk fel hasonlót.

3.1. lemma. *Minden $c, C > 0$-hoz létezik $c^* = c^*(c, C) > 0$ a következő tulajdonsággal.*

Legyen $\Phi, \Psi \subset \mathcal{L}$, $|\Phi|, |\Psi| \leq n$ és $E \subset \Phi \times \Psi$, $|E| \geq cn^2$. (Következésképpen $|\Phi|, |\Psi| \geq cn$.) Tegyük fel, hogy

$$\big|(\Phi \circ_E \Psi^{-1}) \cup (\Psi^{-1} \circ_E \Phi)\big| \leq Cn.$$

Ekkor létezik olyan $\Phi^* \subset \Phi$, melyre $|\Phi^*| \geq c^*n$, és a $\varphi \in \Phi^*$-ok grafikonjai vagy csupa párhuzamos egyenesből állnak, vagy mindnyájan egy közös ponton mennek át.

(Szimmetriaokokból természetesen Ψ-ről is hasonló állítható.)

A bizonyítás – néhány előkészítő észrevételt követően – a 3.7. lemma után található.

Mivel a nem kommutatív $\mathcal{L}$ csoportot vizsgáljuk, kézenfekvő olyan fogalom bevezetése, amely – bizonyos értelemben – az elemek „nem-felcserélhetőségét" kódolja (s így a csoportelméletből ismert szokásos kommutátorok rokona – bár utóbbiakra nem lesz szükségünk).

3.2. definíció. Tetszőleges $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$-re legyen $(\varphi \circ \psi^{-1}, \psi^{-1} \circ \varphi)$ a φ és ψ által meghatározott *kommutátorpár*. (Az elnevezés Simonovits Miklóstól származik.)

3.3. megjegyzés. Természetesen a pár két tagja azonos is lehet; ez pontosan akkor áll fenn, ha φ és ψ^{-1} felcserélhető; ez pedig φ és ψ felcserélhetőségével ekvivalens.

3.4. definíció. Tetszőleges $\Phi, \Psi \subset \mathcal{L}$-re és $E \subset \Phi \times \Psi$-re az E által meghatározott *kommutátorgráf*-nak nevezzük azt a $\hat{G}_E(\hat{V}, \hat{E})$ gráfot, melynek élhalmazát az E-beli φ, ψ párokhoz tartozó kommutátorpárok alkotják, azaz

$$\hat{V} = (\Phi \circ_E \Psi^{-1}) \cup (\Psi^{-1} \circ_E \Phi); \quad \text{és}$$

$$\hat{E} = \{(\varphi \circ \psi^{-1}, \psi^{-1} \circ \varphi);\ (\varphi, \psi) \in E\}.$$

3.5. megjegyzés. Bár E tekinthető irányított gráfnak is, az $\hat{E}$-beli élek mindig irányítatlanok.

3.6. lemma. *A kommutátorgráf minden összefüggő komponensének csúcsai olyan lineáris függvények, melyek meredeksége azonos.*

Bizonyítás. Elég annyit megmutatni, hogy egy $(\varphi \circ \psi^{-1}, \psi^{-1} \circ \varphi)$ él két végpontjának megfelelő egyenesek meredeksége azonos; ez pedig nyilvánvalóan teljesül, hiszen közös értékük φ és ψ meredekségének hányadosa. ∎

3.7. lemma. *Legyen a $\varphi_1, \psi_1 \in \mathcal{L}$ lineáris függvények grafikonjának egyetlen közös (esetleg végtelen távoli) pontja P_1, a $\varphi_2, \psi_2 \in \mathcal{L}$ grafikonjának közös pontja pedig P_2. Ha $P_1 \neq P_2$, akkor a $(\varphi_1 \circ \psi_1^{-1}, \psi_1^{-1} \circ \varphi_1)$ és $(\varphi_2 \circ \psi_2^{-1}, \psi_2^{-1} \circ \varphi_2)$ kommutátorpárok különbözőek.*

Bizonyítás. Ha $P_1 = (a_1, b_1)$ és $P_2 = (a_2, b_2)$ különböző véges pontok, akkor az első párban szereplő függvények fix pontjai b_1, illetve a_1 (azaz $\varphi_1(\psi_1^{-1}(b_1)) = b_1$ és $\psi_1^{-1}(\varphi_1(a_1)) = a_1$), a másodikban szereplőkéi pedig b_2, illetve a_2. Így a párok valóban különbözőek, hiszen azonos függvénypárhoz nem tartozhat különböző fixpontpár. (Az állítás végtelen távoli P_i-k esetén is könnyen ellenőrizhető.) ∎

A 3.1. lemma bizonyítása. Legyen adva a lemmában szereplő $\Phi, \Psi \subset \mathcal{L}$ és $E \subset \Phi \times \Psi$, $|E| \geq cn^2$. Tekintsük e lineáris függvények grafikonjait, és jelöljük ki ezen egyenesek cn^2 darab (esetleg végtelen távoli) metszéspontját; éspedig pontosan a $(\varphi, \psi) \in E$ párokét. Beck „két véglet" tételének (lásd II. rész 3.1. tétel) statisztikus duálisát alkalmazzuk:

(i) vagy van $(c'n)^2$ darab egybeeső metszéspont – ekkor legalább $(c')^2 n$ darab $\varphi \in \Phi$ grafikonja egy közös (esetleg végtelen távoli) ponton megy át –, és készen vagyunk;

(ii) vagy van $(c'n)^2$ darab különböző kijelölt metszéspont, s ekkor az 3.7. lemma szerint a kommutátorgráfnak legalább ennyi különböző éle van.

Könnyen látható, hogy a (ii) esetből adódó $\leq Cn$ csúcsú, $\geq (c'n)^2$ élű gráfnak van legalább $c''n^2$ élű összefüggő komponense. (Dobjuk ki a $(c')^2 n/(2C)$-nél kisebb fokú pontokat; a maradék bármely komponensében található legalább $(c')^4 n^2/(8C^2) = c''n^2$ él.)

Vegyük észre, hogy ennek a $c''n^2$ élű összefüggő komponensnek minden csúcsa azonos m meredekségű lineáris függvényt reprezentál az 3.6. lemma szerint. Jelöljük a komponens élhalmazát $\hat{E}^*$-gal és tekintsük ezen kommutátorpárokat definiáló eredeti $(\varphi, \psi) \in E$ párokat! Legyen ezek halmaza E^*, azaz

$$E^* \stackrel{\text{def}}{=} \{(\varphi, \psi) \in E;\ (\varphi \circ \psi^{-1}, \psi^{-1} \circ \varphi) \in \hat{E}^*\}.$$

$|E^*| = |\hat{E}^*| \geq c''n^2$ miatt létezik olyan $\psi \in \Psi$ csúcs, melynek foka E^*-ban legalább $c''n$. Az ezzel összekötött $\varphi_i \in \Phi$-k halmaza megfelel Φ^*-nak: az összes ilyen $\varphi_i \circ \psi^{-1}$ azonos meredekségű, következésképpen maguk a φ_i-k is párhuzamosak. ■

4. Az 1.4. tétel bizonyítása

A 2.2. következmény szerint sok gazdag átló esetén szükségképpen sok párból készíthetünk két kis kompozícióhalmazt; utóbbiak létezéséből viszont a 3.1. lemma alapján nagy párhuzamos vagy egy ponton átmenő egyenessereg is található. ■

5. Egy következmény, egy átfogalmazás és egy általánosítás

Érdekes, hogy az 1.4. tétel, bár éppen csak hogy megszületett, máris képes egyik szülőjét túlszárnyalni (pontosabban: általánosítani).

5.1. Aszimmetrikus kompozícióhalmazok. Az 3.1. lemma feltételét, nevezetesen hogy $\Phi \circ_E \Psi^{-1}$ is, $\Psi^{-1} \circ_E \Phi$ is kicsi, lényegesen kihasználtuk a kommutátorgráfos bizonyításban. Mi a helyzet, ha csak annyit teszünk fel, hogy pl. az első kicsi, de a másodikról nem kötünk ki semmit? A bizonyítás természetesen nem működik, de az állítás így is igaz marad – és ez éppen a most igazolt geometriai 1.4. tételből következik a legegyszerűbben! [2]

5.1. tétel. *Minden $c, C > 0$-hoz létezik $c^* = c^*(c, C) > 0$ a következő tulajdonsággal.*

Legyen $\Phi, \Psi \subset \mathcal{L}$, $|\Phi|, |\Psi| \leq n$ és $E \subset \Phi \times \Psi$, $|E| \geq cn^2$. (Következésképpen $|\Phi|, |\Psi| \geq cn$.) Tegyük fel, hogy

$$|\Phi \circ_E \Psi| \leq Cn.$$

Ekkor létezik olyan $\Phi^* \subset \Phi$, melyre $|\Phi^*| \geq c^*n$, és a $\varphi \in \Phi^*$-ok grafikonjai vagy csupa párhuzamos egyenesből állnak, vagy mindnyájan egy közös ponton mennek át.

(Szimmetriaokokból természetesen Ψ-ről is hasonló állítható.)

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az E élhalmazban minden $\varphi \in \Phi$ foka legalább $(c/2)n$ (különben az ennél kisebb fokúakat kidobva minden szempontból csak egy konstans szorzót veszíthetünk).

Válasszunk olyan $u \in \mathbb{R}$-et, melyre a $\psi(u)$ értékek ($\psi \in \Psi$-re) mind különbözőek! (Ehhez csak annyi szükséges, hogy a ψ-k grafikonjának metszéspontjai közül egyik se essen az $x = u$ egyenesre.)

Vezessük be az $X = \{\psi(u);\ \psi \in \Psi\}$ és az $Y = \{\varphi(\psi(u));\ (\varphi, \psi) \in E\}$ jelöléseket! Nyilván $|X| = |\Psi| \sim n$ és $|Y| \le |\Phi \circ_E \Psi| \le Cn$. Ugyanakkor minden $\varphi_0 \in \Phi$ grafikonja legalább $(c/2)n$ pontot tartalmaz $X \times Y$-ból; nevezetesen a

$$\big(\psi(u), \varphi_0(\psi(u))\big)$$

alakúakat $(\varphi_0, \psi) \in E$-re. Az 1.4. tételt használva megtaláljuk a keresett szabályos egyenessereget. ■

5.2. Abel-részcsoportok. Bár a lineáris nem konstans függvények $\mathcal{L}$ csoportja nem kommutatív, előfordul, hogy bizonyos elem-(függvény-)párok felcserélhetők. Egyrészt természetesen mindig, ha egyikük az $y = x$ „egységelem". Másrészt, ha egyikük sem az, akkor is – mint az könnyen kiszámolható – marad még két lehetőség:

(i) vagy mindkettő grafikonja 45°-os, azaz $\varphi(x) = x + b$ alakúak;

(ii) vagy grafikonjuk metszéspontja az $y = x$ egyenesre esik.

Eszerint $\mathcal{L}$-nek kétféle Abel-féle (azaz kommutatív) részcsoportja van:

$$S^+ = \{x \mapsto x + b;\ b \in \mathbb{R}\}; \qquad \text{illetve}$$

$$S_u^\bullet = \{x \mapsto m(x - u) + u \quad m \in \mathbb{R} - \{0\}\} \qquad \text{tetszőleges } u \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

E részcsoportok segítségével az 5.1. tétel a következőképpen fogalmazható át.

5.2. tétel. *Minden $c, C > 0$-hoz létezik $c^* = c^*(c, C) > 0$ a következő tulajdonsággal.*

Legyen $\Phi, \Psi \subset \mathcal{L}$, $|\Phi|, |\Psi| \le n$ és $E \subset \Phi \times \Psi$, $|E| \ge cn^2$. (Következésképpen $|\Phi|, |\Psi| \ge cn$.) Tegyük fel, hogy

$$|\Phi \circ_E \Psi| \le Cn.$$

Ekkor létezik olyan S Abel-részcsoport és $\varphi \in \mathcal{L}$, hogy a $\varphi \circ S$ baloldali mellékosztályba Φ-nek legalább $c^* n$ eleme esik.

(Szimmetriaokokból természetesen Ψ-ről is hasonló állítható, jobb oldali mellékosztállyal.)

5.3. Descartes-szorzatok és polinomgörbék. Az 1.4. tétel nemcsak egyenesekre igaz.

5.3. tétel. *Ha egy legfeljebb $n \times n$-es Descartes-szorzatból cn darab egyváltozós, legfeljebb r-edfokú F_i polinom grafikonja tartalmaz egyenként legalább cn pontot, akkor közülük $c^* n$ darab egy egyparaméteres seregből való.*

Pontosabban: léteznek f, g egyváltozós polinomok és $s_i \in \mathbb{R}$ számok, hogy az alábbi két eset valamelyike legalább c^*n darab F_i-re teljesül:

$$F_i(x) = f\big(g(x) + s_i\big); \qquad \text{vagy}$$

$$F_i(x) = f\big(g(x) \cdot s_i\big).$$

A bizonyítás úgy történik, hogy részben kombinatorikus, részben algebrai eszközöket használva visszavezetjük az állítást az 1.4. tételre. Ezt terjedelmi okokból nem részletezzük, de azt megemlítjük, hogy az $F_i \circ F_j^{-1}$ függvénykompozíciók itt is lényeges szerepet kapnak (lásd [3]).

Irodalom

[1] Martin Aigner and Günther M. Ziegler., *Proofs from THE BOOK,* Springer (1998).

[2] György Elekes, On linear combinatorics I. *Combinatorica,* **17 (4)** (1997), 447–458.

[3] György Elekes and Lajos Rónyai, A combinatorial problem on polynomials and rational functions, *Journal of Combinatorial Theory, series A,* **89** (2000), 1–20.

[4] György Elekes and Endre Szabó, Triple lines and cubic curves, *Combinatorica,* to appear in 2004.

[5] Paul R. Scott, On the sets of directions determined by n points, *Am. Math. Monthly,* **77** (1970), 502–505.

[6] Peter Ungar, $2n$ non-collinear points determine at least $2n$ directions, *Journal of Combinatorial Theory,* **33** (1982), 343–347.

NÉHÁNY MEGOLDATLAN ÉS MEGOLDOTT PROBLÉMÁRÓL AZ IRÁNYÍTOTT GRÁFOK ELMÉLETÉBEN. I. RÉSZ

ÁDÁM ANDRÁS*

1. Bevezetés és előzmények

1.1. Az irányított gráfokról – évtizedek során – írt munkáimban több olyan kérdés merült fel, amelyre magam nem adtam választ. Volt olyan a nyitva hagyott kérdések között, amely mások élénk és eredményes érdeklődését váltotta ki; akadt olyan is, amely mindeddig megoldatlan. A jelen áttekintő cikket azzal a céllal írom, hogy ráirányítsam a kollégák figyelmét e problémák közül azokra, amelyek ma is érdekeseknek tűnnek (akár úgy, hogy elintézetlenek, akár úgy, hogy tanulságos lehet megismerkedni a hozzájuk kapcsolódó eredményekkel).

Amikor problémáról beszélek, azon érthetek igenlő vagy tagadó választ igénylő (konkrétan megfogalmazott) sejtést is, de érthetek valamely fontosnak látszó kérdéskör vizsgálatát feladatul kitűző kutatási programot is.

A cikk áttekintő jellegének megfelelően a kimondott állítások bizonyítását általában csak az eredeti munkákban találhatja meg az érdeklődő. Általában, de nem mindig: úgy vélem, az olvasó figyelmének ébren tartását szolgálja, ha alkalmanként kitérek egyes állítások rövid és frappáns igazolására is.

1.2. E munka 2. fejezete számértékű függvények bevezetésével indul; az itt definiált három függvény mindegyike azt méri, mennyire tér el egy G irányított gráf attól, hogy ciklusmentes legyen. Először a téma fő eredményével ismerkedünk meg (ez a három függvény közül kettőnek az egyenlőségét is állítja), majd azt vázolom, történetileg miképpen jött létre a fő eredmény. A témáról való tudásunk fokozatos kialakulása során vetődött fel az él-megfordítási sejtés, amely (habár az alapkérdést e sejtés elintézése nélkül is tisztázni lehetett) ismert nyílt problémája a gráfelméletnek.

A véges ciklusmentes gráfokról egyszerűen adható strukturális áttekintés, ezzel az 1.6. szakaszban ismerkedünk meg. Az is jól áttekinthető, hogy egy tetszőleges gráf miként állítható elő egy ciklusmentes „külső" gráfból és erősen összefüggő

*A munka az OTKA támogatásával készült. Szerződésszám: NK 62321.

„belső" gráfokból (3.3. szakasz). Ezzel szemben az erősen összefüggő gráfok strukturális vizsgálata nehéznek tűnő, kidolgozatlan kutatási irány.

A [3] cikkben típusokra tagoltam az erősen összefüggő gráfok összességét, e típusok bevezetése révén az általános struktúra-problémát részproblémákra lehet felbontani. Kedvező esetben e részproblémák egymás utáni megvilágítása elvezethet minket a struktúra-probléma teljes megoldásához.

A jelen munka 3. fejezetében (és az ehhez csatlakozó függelékben) a [3] cikk gondolatait ismertetem és utalok a témába vágó újabb eredményekre.

A tervezett folytatásban főként a cirkuláns gráfok izomorfia-problémájának megoldását szándékozom vázolni.

A jelen nyitó fejezet után következő fejezetek egymástól függetlenül olvashatók.

1.3. A továbbiakban gráfon – csaknem mindig – véges irányított egyszerű gráfot értünk. A gráf egyszerű volta (vagyis hogy nem multi-gráf) azt jelenti, hogy egy pontpárat ugyanolyan irányítással nem köthet össze egynél több él, továbbá hogy sem 1, sem 2 hosszúságú (irányított) ciklus nem lehet a gráfban. Amikor ezeken a megszorításokon (ritkán) átmenetileg enyhítünk, azt a szöveg mindig félreérthetetlenül világossá teszi.

Ha egy e él az A pontból a B pontba fut, akkor e jelölésére AB-t is írhatunk. Az A pontot *átmenő pont*nak mondjuk, ha a gráfnak pontosan egy éle van, amely A-ba fut be, és olyan éle is pontosan egy, amely A-ból indul ki.

Tekintsünk két különböző élt, legyenek ezek $e_1 = AB$ és $e_2 = CD$. Ha az A, B, C, D pontok között éppen három különböző van, akkor e_1-et és e_2-t *adjacens élpár*nak nevezzük. Ellentétesen adjacens élpárról beszélünk, ha az $A = C$, $B = D$ egyenlőségek egyike érvényes; folytatólagosan adjacens élpárról, ha az $A = D$, $B = C$ egyenlőségek valamelyike áll fenn.

1.4. A felváltva pontokból és élekből álló

$$(1) \qquad A_0, e_1, A_1, e_2, A_2, e_3, \ldots, A_{t-1}, e_t, A_t$$

sorozatot *út*nak (éspedig t hosszúságú útnak) nevezzük, ha az e_i él az A_{i-1} pontból az A_i pontba visz minden i-re (ahol $t \geq 0$ és i 1-től t-ig fut). Az (1) utat *zárt*nak nevezzük, ha $A_0 = A_t$; a zárt utat *ciklus*nak mondjuk, ha $t > 0$ és $A_1, A_2, \ldots, A_t$ páronként különbözők. *Egyszerű*nek hívjuk az utat, ha az $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_t$ pontok különböznek páronként.

Ha az út fenti definícióját azzal gyengítjük, hogy az e_i él az A_{i-1} és A_i pontokat köti össze (de akár egyikük, akár másikuk felé lehet irányítva), akkor *irányítatlan* útról beszélünk.

Amikor a cikkben utat említünk jelző nélkül, azon egyszerű utat értünk.

A G gráf egy A pontját *szétvágó pont*nak nevezzük, ha vannak G-nek olyan (A-tól és egymástól különböző) B, C pontjai, hogy a B és C közötti irányítatlan utak mindegyike átmegy A-n.

A G gráf két különböző A, B pontját *ciklikusan kiegészíthető* pontpárnak nevezzük, ha van G-ben olyan ciklus, amely A-n is, B-n is átmegy. Analóg módon értelmezzük, hogy két különböző él mikor alkot ciklikusan kiegészíthető párt,[1] továbbá hogy egy pontot és egy élt mikor mondunk ciklikusan kiegészíthető párnak.

1.5. A 2. fejezetben lényeges szerepet fog játszani az a $c(G)$ szám, hogy a G gráfban hány ciklus van. Avégett, hogy ennek a fogalomnak pontos értelmet adjunk, szabatosan le kell rögzítenünk, hogy két

$$A_0, e_1, A_1, e_2, A_2, \ldots, e_t, A_0 \tag{2}$$

alakú ciklust mikor tekintünk megegyezőnek és mikor nem. Megállapodunk abban, hogy a (2) ciklus egyenlő az

$$A_1, e_2, A_2, \ldots, e_t, A_0, e_1, A_1$$

ciklussal; két ciklust pontosan akkor tekintünk különbözőnek, ha nem vihető át egyik a másikba ennek az átalakításnak az ismételt alkalmazásával.

A különböző ciklusok ilyen értelemben vett számát G ciklusai teljes számának nevezzük.

1.6. Jól ismert az alábbi módszer a ciklusmentes irányított véges gráfok előállítására.

1. konstrukció. *1. lépés.* Tekintsük a $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_s$ egymástól diszjunkt véges halmazokat ($s \geq 1$). Ezek egyesítése lesz az előállítandó G gráf pontjainak halmaza. Ha $A \in \mathfrak{K}_i$, $B \in \mathfrak{K}_j$ és $i < j$, akkor azt mondjuk, hogy A alacsonyabb szinten van, mint B. Ha $A \in \mathfrak{K}_i$ és $B \in \mathfrak{K}_{i+1}$, akkor azt mondjuk, hogy A eggyel alacsonyabb szinten van, mint B.

2. lépés. Minden olyan B ponthoz, amely a

$$\mathfrak{K}_2 \cup \mathfrak{K}_3 \cup \cdots \cup \mathfrak{K}_s$$

halmazba tartozik, felveszünk egy olyan AB élt, hogy A eggyel alacsonyabb szinten van, mint B.

3. lépés. Tetszőleges számban felveszünk további CD éleket (esetleg egyet sem) úgy, hogy C alacsonyabb szinten van, mint D.

A (nem feltétlenül összefüggő) G gráf előállítása ezzel véget ért.

Az 1. konstrukció egyértelműen szolgáltatja a ciklusmentes véges gráfokat abban az értelemben, hogy a $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_s$ ponthalmazok visszanyerhetőek a kész G gráfból; G egy A pontja ugyanis akkor és csak akkor tartozik a $\mathfrak{K}_i$ halmazba, ha a gráf A-val végződő (irányított egyszerű) útjai közül a leghosszabb éppen $i-1$ hosszúságú.

[1] Ellentétesen adjacens élpár nem lehet ciklikusan kiegészíthető.

1.7. Legyen G egy (nem feltétlenül ciklusmentes) gráf, jelöljük G pontjainak halmazát $\mathfrak{V}$-vel. Válasszunk $\mathfrak{V}$-ben egy nem üres valódi $\mathfrak{H}$ részhalmazt. Azt a G_1 gráfot, amely G-ből a $\mathfrak{H}$ halmaz egy ponttá való összevonásával keletkezik, a következő módon értelmezzük:

2. konstrukció. A konstrukció öt szabályból áll.

(i) Töröljük $\mathfrak{H}$ elemeit és mindazokat az AB éleket, amelyekre A és B legalább egyike $\mathfrak{H}$-ba tartozik.

(ii) Megtartjuk $\mathfrak{V} \setminus \mathfrak{H}$ elemeit és mindazokat a CD éleket, amelyekre C is, D is $(\mathfrak{V} \setminus \mathfrak{H})$-ba tartozik.

(iii) Felveszünk egy $P(\notin \mathfrak{V})$ új pontot.

(iv) Valahányszor egy $(\mathfrak{V} \setminus \mathfrak{H})$-ban levő C ponthoz volt $\mathfrak{H}$-ban legalább egy olyan B pont, hogy létezett G-ben a CB él, úgy felvesszük G_1-ben a CP élt.

(v) Valahányszor egy $(\mathfrak{V} \setminus \mathfrak{H})$-ban levő D ponthoz volt $\mathfrak{H}$-ban legalább egy olyan A pont, hogy létezett G-ben az AD él, úgy felvesszük G_1-ben a PD élt.

Amennyiben $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_q$ diszjunkt nem üres részhalmazok $\mathfrak{V}$-ben, úgy nyilvánvaló, hogy mit értünk (a 2. konstrukció általánosításaként) a $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_q$ halmazoknak egy-egy ponttá való összevonásán.

Megjegyezzük, hogy a 2. konstrukció révén előálló G_1 gráfban felléphet 2 hosszúságú ciklus akkor is, ha G-ben ilyen ciklus nem volt. Olyan körülmények között azonban, mint ahogyan a 2. konstrukcióra a 3.4. szakaszban hivatkozni fogunk, ez a jelenség nem fordulhat elő.

2. Az él-megfordítási probléma és háttere

2.1. Az irányított gráfok közül – amint a bevezető fejezet 1.6. szakaszában láttuk – a ciklusmentesek szerkezete a legjobban áttekinthető. Felmerül az a kérdés, valamely G véges irányított gráf mennyire áll távol attól, hogy ciklusmentes legyen. Ennek a „távolság"-nak a mérésére három mennyiséget vezethetünk be:

legyen $c(G)$ a G gráfban levő ciklusok teljes száma;

legyen $t(G)$ azon n számok legkisebbike, hogy létezik n él G-ben, amely élek törlésével ciklusmentes gráf áll elő;

legyen $f(G)$ azon n számok legkisebbike, hogy létezik n él G-ben, amely élek irányításának megfordításával ciklusmentes gráf áll elő.

Ha nem áll fenn a félreértés veszélye, gyakran (pl.) c-t fogunk írni $c(G)$ helyett.

A $t \leq c$ egyenlőtlenség szinte nyilvánvalóan igaz bármely gráfra, mivel megtehetjük, hogy a ciklusok mindegyikében kiválasztunk egy élt (nem feltétlenül különbözőket), és ezen éleket töröljük. A ciklusmentesség ennélfogva elérhető nem több mint c él törlésével.

A $t \le f$ formulát hasonlóképpen könnyű belátnunk. Legyen ugyanis $\mathfrak{H}$ egy $f(G)$ élből álló halmaz, amely élhalmaz elemeinek megfordításával G ciklusai megszűnnek; amennyiben a $\mathfrak{H}$-ban levő éleket (az irányítás megfordítása helyett) töröljük, azzal éppúgy megszüntettük G ciklusait.

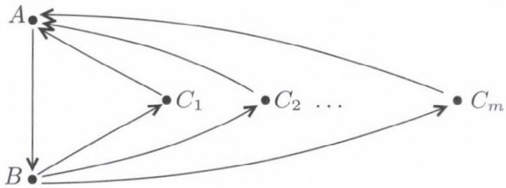
2.2. Az 1960-as évek elején előtérbe került az a kérdés, hogy mi az összefüggés az f és c mennyiségek között – közelebbről, hogy $f \le c$ mindig igaz-e –; néhány évvel később arra is ráterelődött a kutatók figyelme, hogy t és f között van-e erősebb kapcsolat, mint a $t \le f$ egyenlőtlenség.

Szinte triviális példa-sereg adható arra, hogy a $c - f$ különbség felülről nem korlátos:

1. példa. Válasszunk egy m számot. Tekintsük azt az $m+2$ pontból és $2m+1$ élből álló $G^{(m)}$ gráfot, amelynek pontjai $A, B, C_1, C_2, \dots, C_m$, és amelynek élei

$$AB, BC_1, BC_2, \dots, BC_m, C_1A, C_2A, \dots, C_mA$$

(1. ábra). Világos, hogy $f\big(G^{(m)}\big) = t\big(G^{(m)}\big) = 1$ és $c\big(G^{(m)}\big) = m$.



1. ábra

Később fogok szólni a t, f és c mennyiségek kapcsolatára vonatkozó tudásunk fokozatos kialakulásáról. Előbb azonban lássuk azt az összefoglaló eredményt, amely a hatvanas évek végére már általánosan ismertté vált:

1. tétel. *Bármely G irányított gráfra $f(G) = t(G) \le c(G)$ érvényes. Tetszőleges n pozitív számhoz létezik olyan G' gráf, amelyre $c(G') - t(G') > n$.*

Bizonyítás. A 2.1. szakaszban mondottak és az 1. példa után csak az $f \le t$ egyenlőtlenséget kell kimutatnunk.

Legyen $\mathfrak{H}$ olyan részhalmaz G élei halmazában, hogy

(1) G bármely ciklusa átmegy legalább egy $\mathfrak{H}$-beli élen, és

(2) $\mathfrak{H}$ elemeinek száma a lehető legkisebb az (1) feltételt teljesítő halmazok között, azaz $|\mathfrak{H}| = t(G)$.

Amennyiben e él $\mathfrak{H}$-ban van, úgy (2) miatt létezik olyan K_e ciklus, hogy K_e élei közül egyedül e tartozik $\mathfrak{H}$-ba.[2] Jelöljük G_1-gyel azt a gráfot, amely a $\mathfrak{H}$-ba tartozó élek megfordításával áll elő G-ből.

[2]Ezzel a K_e ciklusok páronként különböző volta és így $t \le c$ (amit már beláttunk) is adódik.

Ahhoz, hogy az $f \leq t$ összefüggést igazoljuk, azt kell még belátnunk, hogy G_1 ciklusmentes gráf. Tegyük fel, hogy G_1-ben van (legalább egy) ciklus, ellentmondásra akarunk jutni. Az (1) feltétel folytán

(3) G_1 bármely Z ciklusa átmegy legalább egy $\mathfrak{H}$-beli élen (pontosabban: annak megfordításán).

Rögzítsünk egy Z ciklust. Jelöljük e_1-gyel, e_2-vel, ..., e_m-mel Z azon éleit, amelyek $\mathfrak{H}$-ba tartoznak. Változtassuk meg Z-t úgy, hogy az e_i él helyett K_{e_i}-nek az e_i kihagyásával előálló részén futunk végig (az i számok mindegyikére, $1 \leq i \leq m$). Ezzel egy Y zárt úthoz jutunk, amely nem szükségképpen ciklus (ismétlődés lehet benne), és amely nem tartalmaz $\mathfrak{H}$-beli élt. Y-ból kiválasztható ciklus, ez pedig (3) szerint lehetetlen. ∎

A fenti bizonyítás lényegileg Gallai Tibortól származik.

2.3. Az időrendi áttekintésre rátérve először az érdemel említést, hogy az $f \leq c$ egyenlőtlenség érvényének kérdését – amennyire tudom – Fidrich Ilona vetette fel 1962 táján, és első ízben ő adott rá bizonyítást. Miután ezt a kérdést mint sejtést megismertem, jóideig az alábbi rokon állítás foglalkoztatott:

1. probléma. Döntsük el, igaz-e a következő bármely G gráfra: ha $c(G)$ pozitív, akkor van G-ben olyan e él, hogy az e megfordításával adódó $G^{[e]}$ gráfra $c\big(G^{[e]}\big) < c(G)$ érvényes.

Amennyiben az 1. problémára igenlő a válasz, úgy ebből $f \leq c$ közvetlenül adódik, hiszen G-t élek egyenkénti megfordításával legfeljebb $c(G)$ lépésben ciklusmentes gráffá alakíthatjuk át.

Az 1. problémát az [1] cikkben és a [6] konferenciakötet probléma-rovatában (157. old.) publikáltam. Ez az egyszerűnek tűnő sejtés máig sincs eldöntve (az alapesetben, azaz amikor *nem* multi-gráfokat tekintünk). J. Bang-Jensen és G. Gutin azzal a megjegyzéssel vették bele könyvükbe, hogy „one of the most interesting conjectures on cycles in digraphs" ([4], 587. old.).

Az irányított gráfok bizonyos speciális osztályaira K. B. Reid [16] és J. Jirásek [13] igazolták a sejtést.

2.4. Az $f \leq c$ relációra mind (elsőként) Fidrich [5], mind (kissé később) magam [1] nehézkesebb bizonyításokat adtunk annál az elegáns gondolatmenetnél, amelyet utóbb Gallai Tibor hozott tudomásomra. A három bizonyítás egymás után, egyező „sűrűséggel" megfogalmazva található meg a [2] cikk 2. részében.

2.5. f és t egyenlősége először E. Grīnbergs and J. Dambītis egy közleményében szerepel [9]. Voltaképpen azt mutatták ki, hogy az élek törlésére vonatkozóan minimális ciklus-megszüntető élhalmazok éppen egybeesnek az élek megfordítására vonatkozóan minimális ciklus-megszüntető élhalmazokkal.[3] A két lett matematikusával nagyjából egyező alapgondolattal, tőlük függetlenül Gallai Tibor is igazolta ugyanezt az állítást [7]. Ezek a bizonyítások a ciklusmentes gráfok struktúrájának azt az áttekintését használják fel (a publikált formájukban), amelyet a jelen cikk 1.6. szakaszában láttunk.

2.6. A [7] munkában közölt következtetésnek egy módosított – és a strukturális áttekintésre nem támaszkodó – változata képezi Gallai bizonyítását az $f \leq c$ formulára, amelyre a 2.4. szakaszban utaltam. Gondolatmenete változtatás nélkül alkalmazható $f \leq t$ igazolására, ezt a bizonyítást ismertük meg a 2.2. szakaszban.

2.7. Az eddigiekben csak a többszörös élek nélküli gráfokat vettük figyelembe. Amennyiben vizsgálódásaink körébe a multi-gráfokat is bevonjuk, úgy az 1. problémára *tagadó* a válasz: léteznek olyan G multi-gráfok, hogy $c\big(G^{[e]}\big) \geq c(G)$ igaz, akármelyik e élét fordítjuk is meg G-nek.

Az első ellenpélda-sereget Grīnbergs találta a hetvenes években. Az általa konstruált multi-gráfok publikálására csak jóval az 1982-ben bekövetkezett halála után került sor a Dambītis és J. Nešetřil gondozásában megjelent [8] közleményben. Később C. Thomassen és J. Jirásek szerkesztettek ellenpéldákat ([17], [12], [14]).

A cikk 2. fejezetét egy Jirásek által konstruált multi-gráf bemutatásával zárjuk [14].

2. példa. Legyen G az a gráf, amelynek pontjai $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$, és amelyben az A_iA_j él pontosan akkor létezik, ha a $j - i$ különbség a 2, 3, 8 számok egyikével kongruens mod 12. Jelöljük G^*-gal azt a multi-gráfot, amelyet úgy kapunk G-ből, hogy G minden egyes A_iA_j élét A_i-ből A_j-be menő négy éllel helyettesítjük.

G és G^* pontjainak száma 12, az élek száma G-ben 36, G^*-ban 144.

Jirásek megmutatta, hogy G^*-nak nincs olyan éle, hogy annak megfordításával csökkenne a ciklusok száma. Azon multi-gráfoknak, amelyeket az él-megfordítási sejtés ellenpéldái gyanánt eddig ismerünk, egyike sem tartalmaz 12-nél kevesebb pontot.

3. Az erősen összefüggő gráfok struktúrájának kérdéseiről

3.1. Tekintsünk egy G irányított gráfot. Vezessük be G pontjainak halmazában az ε kétváltozós relációt úgy, hogy $\varepsilon(A, B)$ éppen akkor igaz, ha A-ból B-be is, B-ből A-ba is visz irányított út G-ben. Könnyen belátható, hogy ε ekvivalencia-reláció. G pontjainak halmaza tehát ekvivalencia-osztályokra bomlik ε-ra vonatkozóan.

Észrevehetjük, hogy G egy ciklusának pontjai mind ugyanabban az ε szerinti ekvivalencia-osztályban vannak.

[3] Bizonyításuk A. A. Zikov könyvében is megtalálható ([18], 38. szakasz, 309. oldal).

3.2. A korábbiakban már foglalkoztunk ciklusmentes gráfokkal; áttekintettük az 1.6. szakaszban ezen gráfok szerkezetét. Világos, hogy pontosan azok a gráfok ciklusmentesek, amelyekben az ε szerinti ekvivalencia-osztályok mind egyeleműek.

A ciklusmentes gráfok osztályával szemben álló típust képeznek azok a gráfok, amelyekben az összes pontok egyetlen ekvivalencia-osztályt alkotnak az ε relációra vonatkozóan. Ezeket az irányított gráfokat *erősen összefüggő* gráfoknak mondjuk. Az alábbi tény a gráfelmélet folklórjához tartozik.

1. megállapítás. *Egy G irányított gráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha G összefüggő és G bármely e éléhez van e-n átmenő ciklus.*

Bizonyítás.

Szükségesség. Erősen összefüggő gráfra a feltétel nyilvánvalóan teljesül.

Elegendőség. Azt akarjuk kimutatni, hogy amennyiben G-re az erős összefüggés nem áll fenn, úgy a megállapításban foglalt feltétel sem érvényes.

A 3.1. szakasz utolsó mondatából következik, hogy egy AB élen akkor és csak akkor megy át ciklus, ha A és B közös osztályban vannak ε szerint. Ha tehát G összefüggő, de az erős összefüggőség nem igaz rá, úgy van G-ben olyan él, amelyen egy ciklus sem megy át. ∎

3.3. Ki lehet-e terjeszteni azt a szerkezeti leírást, amelyet a ciklusmentes gráfok esetében ismerünk, az irányított gráfok minél szélesebb osztályára?

A 3.3. és 3.4. szakaszokban következő meggondolásaink azt fogják mutatni, hogy egyrészt a ciklusmentes gráfok (létező), másrészt az erősen összefüggő gráfok (reménybeli) strukturális áttekintésére támaszkodva teljes leírást lehet adni az *összes* véges irányított gráfról.

3. konstrukció. Legyen adva egy F ciklusmentes gráf, jelöljük F pontjait V_1-gyel, V_2-vel, ..., V_n-nel. Vegyünk n számú erősen összefüggő gráfot,[4] legyenek ezek $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Jelöljük H_k pontjainak számát h_k-val ($1 \leq k \leq n$). Építsünk fel egy G gráfot az alábbi négy lépésben:

(1) Képezzük a $H_1, H_2, \ldots, H_n$ gráfok diszjunkt egyesítését, jelöljük az előálló gráfot H-val.

(2) Minden olyan (i, j) indexpárra (ahol $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$), hogy F-ben létezik a V_iV_j él, jelöljük $\mathfrak{L}_{ij}$-vel az összes olyan (A, B) rendezett pontpárból álló halmazt, hogy A H_i-beli és B H_j-beli pont.[5]

(3) Válasszuk ki tetszőlegesen az $\emptyset \neq \mathfrak{M}_{ij} \subseteq \mathfrak{L}_{ij}$ feltételnek eleget tevő $\mathfrak{M}_{ij}$ halmazokat.[6]

(4) Képezzük H-ból a G gráfot úgy, hogy megtartjuk H pontjait és éleit, továbbá felveszünk egy-egy AB élt, valahányszor (A, B) egyike az $\mathfrak{M}_{ij}$ halmazok valamelyikének.

[4]Ezek izomorfak is lehetnek egymással. Nem zárjuk ki az egyetlen pontból álló (él nélküli) gráfot.

[5]$\mathfrak{L}_{ij}$ nyilván h_ih_j elemből áll.

[6]Annyi $\mathfrak{M}_{ij}$-t választunk ki, ahány éle van F-nek.

3.4. A 3. konstrukció a véges irányított gráfokat szolgáltatja. E gráfok mindegyikét pontosan egyszer állítja elő abban az értelemben, hogy az eredményül adódó G gráfból a $H_1, H_2, \ldots, H_n$ gráfok is visszanyerhetők (mint G-nek az ε reláció ekvivalencia-osztályai által indukált részgráfjai) és az F gráf is (mint az ekvivalencia-osztályoknak egy-egy ponttá való összevonásával keletkező gráf).

Az 1. és 3. konstrukciók fényében a struktúraelmélet teljes kiépítéséhez azt a hiányosságot kell még betölteni, hogy az erősen összefüggő gráfokról szerkezeti áttekintést adjunk. Ez a feladat alapvetően nehezebbnek látszik, mint a területnek az eddigi konstrukciókban megvilágított részkérdései. A bonyodalmakat az okozza, hogy egy erősen összefüggő gráf esetében nincs rá természetesen adódó mód, hol kezdjük „felfejteni" annak szerkezetét.

3.5. Hogy a holtpontról elmozduljunk, az tűnik (esetleg) járható útnak, hogy a nehéz kérdést részproblémákra tagoljuk, amelyek külön-külön – remélhetőleg – a siker nagyobb esélyével támadhatóak. Egy ilyen széttagolási lehetőséget kezdeményeztem a [3] cikkben. A javasolt kutatási program vázlata a következő:

(a) tulajdonságokat bevezetni az erősen összefüggő gráfok osztályában;

(b) összefüggéseket igazolni a bevezetett tulajdonságok között;

(c) példákkal megmutatni, hogy a már ismert összefüggéseken túl nincs több kapcsolat;

(d) miután a tulajdonságok hierarchiája teljesen ismertté vált, strukturálisan kivizsgálni a hierarchia egy szűk osztályát, majd ezt fokozatosan kiterjeszteni bővebb osztályokra.

3.6. Tekintsük az erősen összefüggő gráfokra vonatkozóan az alábbi nyolc tulajdonságot, ahol A, B pontok és e, f élek G-ben, továbbá feltesszük, hogy $A \neq B$ és $e \neq f$:

(C) Bármely (A, B) pár ciklikusan kiegészíthető.

(D) Bármely (A, e) pár ciklikusan kiegészíthető.

(E) Bármely olyan (e, f) pár ciklikusan kiegészíthető, hogy e és f nem ellentétesen adjacens élek.

(F) Van olyan A, hogy bármely (A, B) pár ciklikusan kiegészíthető.

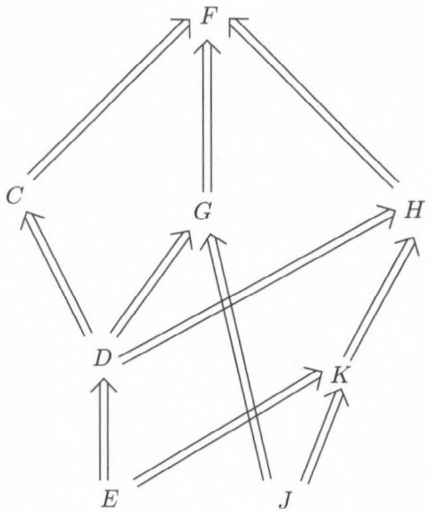
(G) Van olyan A, hogy bármely (A, e) pár ciklikusan kiegészíthető.

(H) Van olyan e, hogy bármely (A, e) pár ciklikusan kiegészíthető.

(J) Van olyan e, hogy bármely (e, f) pár ciklikusan kiegészíthető.

(K) Van olyan e, hogy bármely (e, f) pár ciklikusan kiegészíthető, amennyiben e és f nem ellentétesen adjacens élek.

Világos, hogy a bevezetett tulajdonságok közel állnak egymáshoz, így sok kapcsolat található közöttük. A nyilvánvaló implikációkat áttekintve és igen könnyű meggondolásokkal kiegészítve a [3] cikkben azt kaptam, hogy a 2. ábrában feltüntetett hierarchia érvényes rájuk.



2. ábra

3.7. A (C)–(K) tulajdonságok 2^8 kombinációja közül a 2. ábrán látható implikációk 236 lehetőséget kizárnak; a fennmaradó húsz eset többségéről tudjuk, hogy megvalósítható. Az ezt igazoló példák némelyikét már a [3] cikkben közöltem; e munkához csatlakozva Gyárfás András, (id.) Hetyei Gábor és Hubenko Alice számos további kombinációra adtak példát.

A fejezet további részében (és a függelékben) a tömörség kedvéért azt a jelölésmódot használjuk, hogy pl. (CK) típusúnak nevezünk egy gráfot, ha a (C) és (K) tulajdonságoknak eleget tesz, de azok a tulajdonságok mind hamisak rá, amelyek sem (C)-ből, sem (K)-ból nem következnek a 2. ábra szerint.

Az erősen összefüggő gráfokat ezzel húsz típusba soroltuk; a típusok a következők:

$$(C),\ (D),\ (E),\ (F),\ (G),\ (H),\ (J),\ (K),$$

$$(CG),\ (CH),\ (CJ),\ (CK),\ (DJ),\ (DK),$$

$$(EJ),\ (GH),\ (GK),\ (CGH),\ (CGK),$$

valamint azon erősen összefüggő gráfok osztálya, amelyekre (F) nem teljesül.

2. probléma. Léteznek-e olyan G_1, G_2 gráfok, hogy G_1 a (C) típusba, G_2 a (CG) típusba tartozik?

Ha e két típus egyike sem bizonyulna üresnek, azzal igazolva lenne, hogy a 2. ábra pontosan leírja a nyolc tulajdonság hierarchiáját.

A függelékben példákat fogok felsorolni a 2. problémában nem érintett tizennyolc típusra (néha ugyanazon típusra egynél többet is).

Amennyiben egy gráfban szétvágó pont van, úgy a gráf szerkezetének vizsgálata visszavezethető az e pont által szétválasztott részek külön-külön történő vizsgálatára. Értékesebb példának tekintjük ennélfogva a szétvágó pont nélküli gráfot, mint azt, amelyben van szétvágó pont. A függelékben sorra vett példák sem szétvágó pontot, sem átmenő pontot nem tartalmaznak.[7]

Legújabban Hubenko Alice igazolta a (C)$\Rightarrow$(H) implikációt a gráfok egy speciális osztályára [11].

3.8. A harmadik fejezetben mondottak betetőzéseként egy összetett (és merész kihívást képező) problémával találjuk szemben magunkat. Ha sikerülne ezt a kérdést teljesen tisztázni, az a 3.5. szakaszban vázolt program hiánytalan megvalósítását jelentené. A problémát elég az olyan összefüggő irányított gráfok esetében vizsgálni, amelyekben sem szétvágó pont, sem átmenő pont nincs.

3. probléma. Írjuk le az (EJ) típusú gráfok szerkezetét. Terjesszük ki a leírást

(i) az (E) és a (J) típusú gráfokra,

(ii) majd lépcsőzetesen (a 2. ábra szerinti hierarchiát alulról felfelé követve) egyre bővebb gráf-osztályokra,

(iii) végül az erősen összefüggő gráfok összességére.

A 2. és 3. problémára vonatkozó kutatásokban hasznos lehet támaszkodni A. V. Kosztocska egy eredményére [15], amely a jelen közlemény terminológiájával a következőképpen fogalmazható meg:

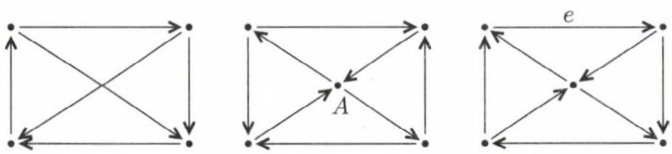
2. tétel. *Ha egy irányított gráfnak nincs meg a (G) tulajdonsága, akkor a gráfban van két diszjunkt ciklus.*

Függelék

A 3.7. szakaszban húsz típusra bontottuk az erősen összefüggő véges irányított gráfok összességét. A jelen függelékben tizennyolc típusra látunk példákat (legalább egy-egy példát mindazon típusokra, amelyek a 2. problémában nincsenek említve). A példaként szolgáló gráfok pontjainak száma 4 és 11 között van.

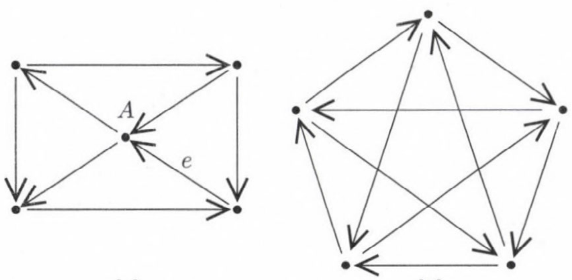
A 3. ábra [a], [b], [c] részein látható gráfok rendre a (CJ), (G), (EJ) típusokat reprezentálják; a 4. ábra [a] és [b] gráfjai a (GK), illetve (E) típusokat.

[7] [3]-ban előfordultak példák, amelyek szétvágó pontot tartalmaznak. Ezek helyett a függelékben Gyárfás András kifogástalan példáit közölhetem.



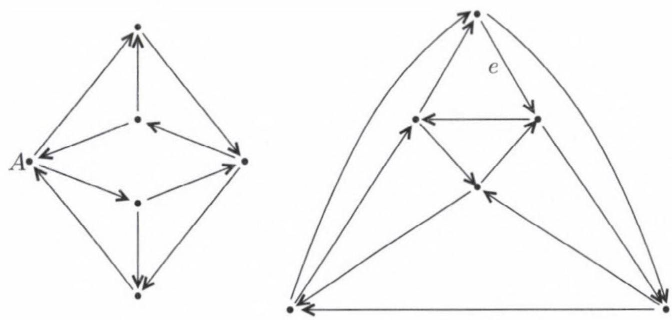
[a] [b] [c]

3. ábra



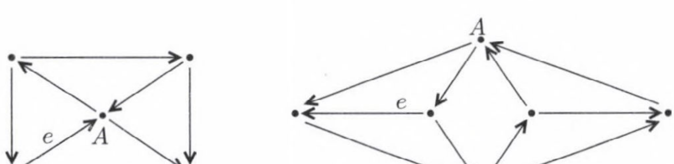
[a] [b]

4. ábra



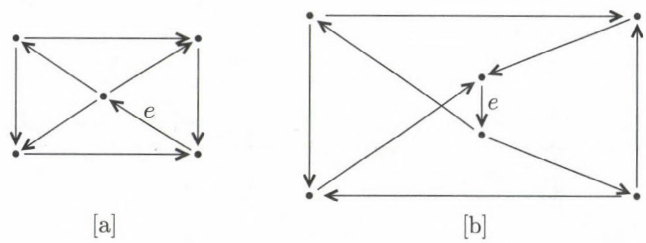
[a] [b]

5. ábra



[a] [b]

6. ábra

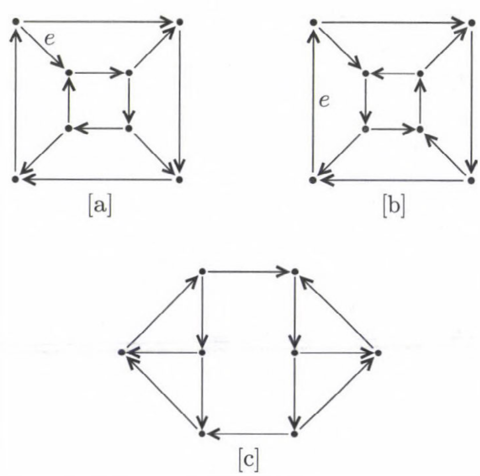


7. ábra

Az 5. ábrán az (F) és (DK) típusokra látunk egy-egy példát.

A 6. ábra két gráfja a (CGK) típusba, a 7. ábra két gráfja a (J) típusba tartozik.

A 8. ábrán megadott [a] és [b] gráfok a (K), illetve (DJ) típusokat képviselik. A 8. ábra [c] gráfjában öt ciklus van; a ciklusok vizsgálatával meggyőződhetünk róla, hogy erre az erősen összefüggő gráfra az (F) tulajdonság nem teljesül (tehát az (F)-nél erősebb tulajdonságok sem).



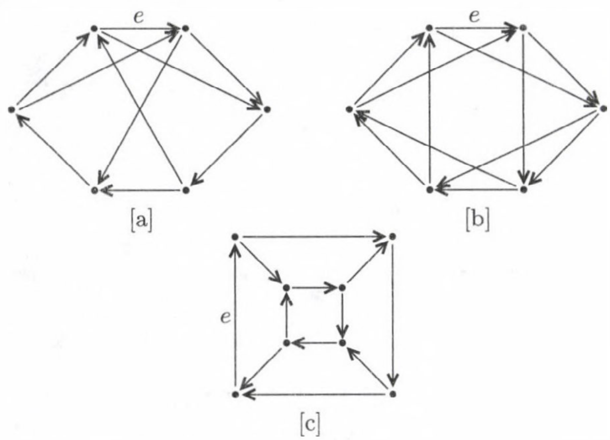
8. ábra

A 9. ábrán három példát láthatunk a (CK) típusra. A 10. ábra [a] és [b] gráfja a (D), illetve (CGH) típusba tartozik.

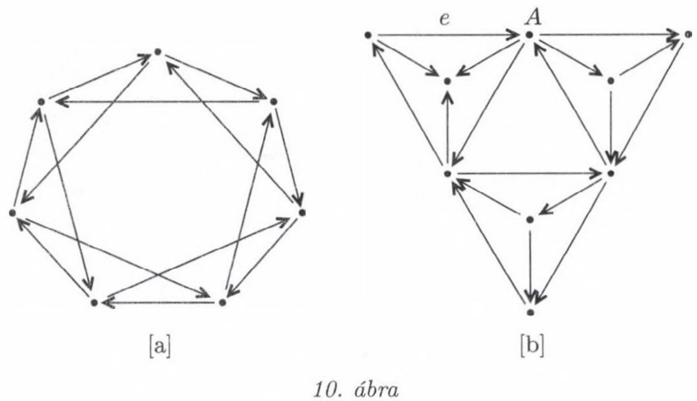
A 11. ábra két gráfja a (H) típust reprezentálja, a 12. ábra két gráfja a (CH) típust. Végül elérkeztünk a legbonyolultabb példához: a 13. ábrán látható gráfhoz; ez a (GH) típusba tartozik.

A látott 24 példa elemzése azt mutatja, hogy a logikailag lehetséges 20 típus közül (legalább) 18 valóban létezik.

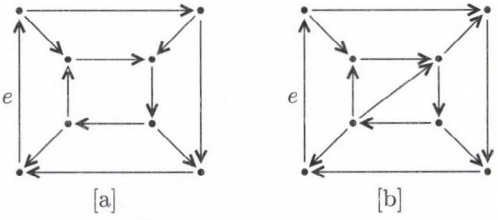
A példa gyanánt felsorolt gráfok közül az 5[a], 8[c], 9[a], 9[b], 10[a] gráfokat Gyárfás András, a 12[b] gráfot Hubenko Alice szerkesztette. Mindkettejüknek köszönetemet fejezem ki azért, hogy ezeket az általuk nem publikált példákat tudomásomra hozták.



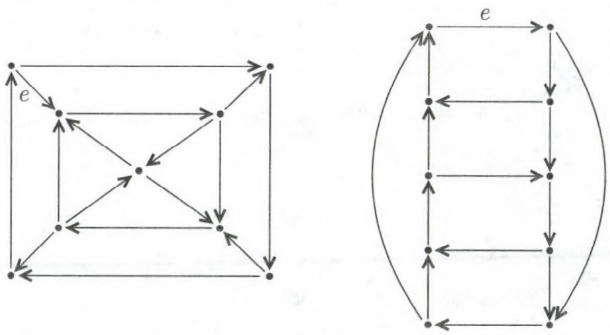
9. ábra



10. ábra

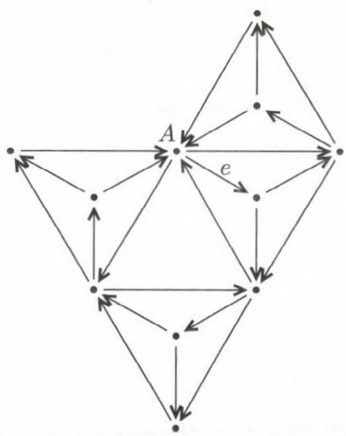


11. ábra



[a] [b]

12. ábra



13. ábra

A példák közel felét Hetyei Gábor [10] munkája nyomán közlöm, éspedig: a 11. és 13. ábrákon szereplő gráfokat (összesen hármat), továbbá az alábbiakat: 5[b], 6[b], 7[b], 8[a], 8[b], 9[c], 10[b] és 12[a].

A fennmaradó példák (azaz a 3. és 4. ábrák gráfjai, 6[a], 7[a]) a [3] cikkben szerepelnek.

Irodalom

[1] Ádám, A., Bemerkungen zum graphentheoretischen Satze von I. Fidrich, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **16** (1965), 9–11.

[2] Ádám, A., Gráfok és ciklusok, *Mat. Lapok,* **22** (1971), 269–282.

[3] Ádám, A., On some cyclic connectivity properties of directed graphs, *Acta Cybernet.*, **14** (1999), 1–12.

[4] Bang-Jensen, J. és Gutin, G., *Digraphs,* Springer (2000).

[5] Fidrich, I., O perenumeracii grafov, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **16** (1965), 1–7.

[6] Fiedler, M. (editor), *Theory of graphs and its applications* (Proc. Symp. Smolenice, 1963), Publishing House of the Czehoslovak Acad. of Sci., Praha (1964).

[7] Gallai, T., On directed paths and circuits, *Theory of graphs* (Proc. Colloq. Tihany, 1966), Academic Press, New York (1968); 115–118.

[8] Grīnbergs, E., Primery neadamovyh mul'tigrafov, *Latv. Mat. Ežegodnik,* **31** (1988), 128–138.

[9] Grīnbergs, E. és Dambītis, J., Nekotorye svoĭstva grafov, soderžaščih kontury, *Latv. Mat. Ežegodnik,* **2** (1966), 65–70.

[10] Hetyei, G., Cyclic connectivity classes of directed graphs, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi,* **17**/2 (2001), 47–59.

[11] Hubenko, A., On a cyclic connectivity property of directed graphs, *Discrete Mathematics,* **308** (2008), 1018–1024.

[12] Jirásek, J., On a certain class of multigraphs, for which reversal of no arc decreases the number of their cycles, *Comment. Math. Univ. Carolin.,* **28** (1987), 185–189.

[13] Jirásek, J., Some remarks on Ádám's conjecture for simple directed graphs, *Discrete Math.,* **108** (1992), 327–332.

[14] Jirásek, J., Arc reversal in nonhamiltonian circulant oriented graphs, *J. Graph Theory,* **49** (2005), 59–68.

[15] Kostočka, A. V., Odna zadača ob orientirovannyh grafah, *Acta Cybernet.,* **6** (1983), 89–91.

[16] Reid, K. B., Monochromatic reachability, complementary cycles, and singe arc reversals in tournaments, *Graph theory* (Singapore, 1983), Springer, Berlin (1984); 11–21.

[17] Thomassen, C., Counterexamples to Ádám's conjecture on arc reversals in directed graphs, *J. Combin. Theory B,* **42** (1987), 128–130.

[18] Zykov, A. A., *Teorija konečnyh grafov, I,* Nauka, Novosibirsk (1969).

András Ádám: On some unsolved and solved problems in the theory of directed graphs. I

In this survey paper two subjects are treated.

After the introductory chapter, the number $c(G)$ of (directed) cycles in a finite digraph G is dealt with in Chapter 2. The connection of $c(G)$ and two other numbers (each of them is a measure of how far G is from being cycle-free) is stated, following the articles of Gallai [7], Grīnbergs and Dambītis [9]. In the course of the genesis of this result, the author has conjectured [1] that, whenever $c(G) > 0$, there exists an edge in G whose reversal diminishes the number $c(G)$. Since then, this conjecture is an open question if simple graphs are considered. It is not valid (in general) when multi-graphs are viewed.

The topics of Chapter 3 is suggested by the endeavour of getting structural results about the strongly connected digraphs. The author has introduced eight properties in [3], any of them is more special than the strong connectedness. Easy inferences show that the eight properties admit at most twenty combinations from among the imaginable 256 ones. The present status of the subject is that eighteen combinations do really exist, the existence of the remaining two ones is not decided. The examples for the eighteen combinations, due to Hetyei (Sr.) [10], Gyárfás, Hubenko (unpublished), and the author [3], are listed in the Appendix. After completing the study of the hierarchy, the difficult problem of structural description will split into a sequence of particular questions.

Ádám András

MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
1053 Budapest, Reáltanoda u. 13–15.

tappancs@renyi.hu

KIMATEKOZNI A LEGJOBB MUNKÁT*

SARAH E. NEEDLEMAN

A matematikusok végeztek az élen a legjobb-legrosszabb amerikai foglalkozásokat bemutató legújabb listán.

19 éve *Jennifer Courter* egy olyan karrierbe kezdett, mely azóta is folyamatos, jól jövedelmező, stresszmentes munkát biztosít számára. Foglalkozása – matematikus – most az élen végzett egy új, a legjobb-legrosszabb amerikai munkákat besoroló tanulmányban.

„Sokkal több, mint egy unalmas kötelező tantárgy az iskolában: a problémamegoldás tudománya!" – nyilatkozta Mrs. Courter, aki kutató matematikus egy Mental Images Inc. nevű San Franciscó-i programfejlesztő cégnél.

A tanulmány, melyet a `CareerCast.com` nevű új állásportál jelentetett meg, 5 közös szempont alapján 200 foglalkozást hasonlít össze a legek megtalálásához: környezet, jövedelem, karrierkilátások, fizikai igénybevétel és stressz. (A `CareerCast.com`-ot az Adicio Inc. adja ki, melyben a Wall Street Journal-tulajdonos News Corp.-nak kisebbségi részesedése van.)

A tanulmányt *Les Kranz,* a Jobs Rated Almanach szerzője állította össze. Az adatok az amerikai munkaügyi hivatal statisztikáiból, a népszámlálási hivataltól, kereskedelmi szövetségek tanulmányaiból és Mr. Kranz saját tapasztalataiból származnak.

A tanulmány szerint a matematikusok – többek között – azért végeztek az élen, mert általában kedvezőek a munkakörülményeik: zárt térben, zaj- és füstmentes helyeken dolgoznak, ellentétben a lista végén állókkal, mint pl. víztisztító-üzemi munkás, festő-mázoló, illetve kőműves. Nem kell továbbá nehéz fizikai munkát végezniük, kúszni-mászniuk, mint a tűzoltóknak, autószerelőknek, vízszerelőknek.

A tanulmány a fizetést is vizsgálja: ezt az egyes munkák átlagfizetésével és növekedési rátájával jellemezték. A matematikusok átlagfizetése évi 94 160 dollár (kb. 21 millió forintnak felel meg), de Ms. Courter 38 évesen ennél többet keres.

Egy virtuális csapat részeként dolgozik, mely matematikai alapokon nyugvó számítógépes programokat tervez. Némelyiket felhasználták olyan filmek készítésekor is, mint a Mátrix vagy a Speed Racer–Totál Turbó. Otthonról végzi a munkáját,

*Sarah E. Needleman: *Doing the Math to Find the Good Jobs – Mathematicians Land Top Spot in New Ranking of Best and Worst Occupations in the U.S.* A cikk a *Wall Street Journalban* jelent meg, 2009. január 26-án. Fordította: *Szécsi Vajk.*

elvétve túlórázik, és csak ritkán van kitéve stressznek. Véleménye szerint „a problémamegoldás sok gondolkodást igényel, és ezt én nyugtató hatásúnak érzem".

Néhány további foglalkozás, mely az élen végzett a tanulmányban: aktuárius, statisztikus, biológus, szoftvermérnök és számítógéprendszer-elemző, történész és szociológus.

Mark Nord szociológus, a washingtoni Földművelésügyi Minisztérium Gazdasági Kutatószolgálatánál dolgozik. Amerikai háztartásokban kutatja a táplálkozási szokásokat, és kutatási beszámolókat ír eredményeiről. Az ő szavaival: „A munka legszebb része az az érzés, hogy valamivel hozzájárulok a megfelelő szabályozás kialakításához. Eredményeimet tanácsadó szervezetek, a média és a kormányzat is felhasználja."

A tanulmány szerint a szociológusok átlag évi 63 195 dollárt (kb. 14 millió forintot) vihetnek haza, bár Mr. Nord, 62 évesen ennek dupláját keresi. Mint elmondta, nem lepődött meg a tanulmány eredményein, hiszen munkája nagyon kevés stresszel jár, és állandó, 7:30–16:00-ig beosztásban dolgozik. „Minden az asztali számítógépemen történik, a legfőbb foglalkozási ártalom a kéztőalagút szindróma."

A munkaválaszték másik végén a favágók állnak. A tanulmány szerint ez a legrosszabb foglalkozás, mivel nemcsak hogy veszélyes tevékenység rossz munkahelyi kilátásokkal, hanem még keveset is lehet vele keresni: átlag évi mindössze 32 124 dollárt (kb. 7 millió forintot).

Új védőfelszerelések (mint a megerősített szövetből készült munkanadrág) és a biztonságra fordított fokozott figyelem segítségével csökkent a sérülések száma a favágók között – nyilatkozta *Paul Branch,* aki az akroni Pike Lumber Co. faipari vállalat fűrészáru részlegét vezeti. Ennek ellenére balesetek időről időre történnek, némelyik akár a halállal is végződhet. Mr. Branch szerint „nem olyan munka, amit bárki el tud végezni".

Erik Nellans 35 éves, és 11 éve vágja a fát a Pike Lumbernek; nagyon szenvedélyes a munkájával kapcsolatban. „Nagyon kielégítő munka, főként a nap végén, amikor szembesülünk az elvégzett munkával." Mr. Nellanst az sem tántorította el, amikor négy éve véletlenül kidöntött egy elhalt fát, és eközben eltörte a lábát. Elmondása szerint „öt héten belül újra az erdőben voltam vágni a fákat".

További munkák a lista végéről: tehenész, taxisofőr, tengerész, mentős műszerész, tetőács.

Mike Riegel, egy 43 éves flemingtoni tetőács szeret odakinn a friss levegőn dolgozni. Mivel saját vállalkozása van, melyet apjától örökölt, a meleg időben korán kezdheti és fejezheti be napját, míg hidegben csinálhatja épp ellenkezőleg.

A tanulmány a tetőácsok átlagos éves jövedelmét 34 164 dollárra teszi (kb. 7,7 millió forint), ami megfelel annak az összegnek, amit Mr. Riegel fizet az új alkalmazottaknak. A tetőácsok a veszélyes munkakörülmények miatt is kerültek a lista aljára. Egy tetőács nyilvánvalóan nem lehet tériszonyos – mondta Mr. Riegel. Ő egyszer két emeletet zuhant, amikor a tetőn dolgozott esős időben, de szerencsére egy puha szemétdombon landolt, 3 méterre a betonfelülettől.

OLVASÓI VÉLEMÉNY

A *Matematikai Lapok* 2008/2. szám (3–13. old.) Csete Lajos „Egy Schur-féle egyenlőtlenségről" c. cikkében az egyenlőtlenségre Watson által vázolt bizonyításról azt állítja, hogy az hibás, és nem csak sajtóhibáról van szó. Állítását arra alapozza, hogy a Watsontól idézett angol nyelvű szövegben és a képletben is három tag szerepel, s szerinte négytagú a helyes kifejezés. Ezzel szemben, ha Watson kifejezésében az utolsó, harmadik tagban az $(x - y)$ tényező helyett $(y - z)$ áll, a helyes azonosság adódik. Ez az elírás bizonyára sajtóhiba.

A szerző néhány idézett bizonyítás után egy új, érdekes bizonyítást is ad.

Bagyinszki János

TÁRSULATI ÉLET – 2008

Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2008. évi érmet **Pethő Attilá**nak ítélte oda.

Indoklás: *Pethő Attila* nemzetközileg elismert, élvonalbeli kutató, aki kimagasló tudományos eredményeket ért el a diofantikus egyenletek elméletében, a lineáris rekurzív sorozatok elméletében, az algebrai számelméletben és a számítógépes számelméletben. A tiszta matematikai kérdések vizsgálatán túl igényesen és eredményesen foglalkozik a kapcsolódó algoritmikus problémákkal is. Több esetben járult hozzá sikeresen alkalmazott számítási módszerek kidolgozásához. Munkássága számítástudományi szempontból is igen értékes. Figyelemre méltó a kriptográfia területén végzett publikációs és tudományszervező tevékenysége. A nemzetközi érdeklődés középpontjában álló, sokak által vizsgált problémákkal foglalkozik, s rendszerint új, eredeti utakat keres és talál azok megoldására. Legkiemelkedőbb tudományos eredményeit a diofantikus egyenletek numerikus, számítógépes megoldása területén folytatott úttörő munkássága során érte el. A 60-as évek végétől kezdve alakult ki a diofantikus egyenletek effektív elmélete, mely a Baker-módszernek más (algebrai számelméleti, geometriai számelméleti és kombinatorikus) módszerekkel való kombinálásával diofantikus egyenletek egy-egy széles osztálya esetén explicit felső korlátot szolgáltat az összes megoldásra. Ezek a korlátok azonban túl nagyok ahhoz, hogy konkrét egyenletek esetén az összes megoldás tényleges meghatározását lehetővé tegyék. Nemzetközi viszonylatban az elsők között kapcsolódott be azokba a kutatásokba, melyek során olyan konkrét egyenletekre alkalmazható hatékony eljárásokat dolgoztak ki, melyekkel a Baker-módszer alkalmazásából adódó igen nagy korlátokat több lépésben redukálni lehet, s végül számítógép segítségével az összes megoldás meghatározható. Új, eredeti, hatékony diofantikus és algebrai számelméleti algoritmusokat és számítógépes eljárásokat alkotott, s ezek segítségével fontos egyenlettípusok esetén számos konkrét egyenlet összes megoldását meghatározta. Ma már klasszikus eredménynek számít a Thue-egyenletek „kis" megoldásainak számítógépes megkeresésére adott eljárása.

Kutatásaiba több fiatal kollégáját is bevonta, s meghonosította Magyarországon ezt a fontos kutatási irányt. Gaál Istvánnal és M. Pohsttal közösen egy cikksorozatban hatékony eljárást dolgozott ki index forma egyenletek megoldására negyedfokú algebrai számtestekben. Ennek segítségével több tízezer számtestben meghatározták a minimális index értékét, és az összes minimális indexű elemet.

Speciális esetként sikerült meghatározniuk az összes hatványegész-bázisokat a szóban forgó számtestekben. Különböző társszerzőkkel közösen, úttörő jellegű eredményeket ért el parametrizált Thue-egyenletekkel, index forma és egységegyenletekkel kapcsolatban. A szóba jöhető paraméterértékek mindegyikére sikerült meghatároznia a tekintett egyenletek összes megoldását. Az elmúlt 25 évben igen színvonalas és eredményes egyetemi oktató munkát végzett itthon és külföldön. A KLTE-n rendszeresen tartott főkollégiumokat és speciálkollégiumokat a matematika és az informatika különböző területeiről. Tanszékvezetőként ő szervezte meg a KLTE-n a programtervező matematikus szakot, kidolgozta annak tantervét. Részt vett a komputeralgebra sáv kidolgozásában. Irányításával épült ki a DOTE számítógépes informatikai rendszere, a vezetésével indult el az orvostanhallgatók informatika oktatása. Meghatározó szerepet játszik a Debreceni Egyetem Diofantikus és konstruktív számelmélet PhD alprogramjának a munkájában. Részt vett a program kidolgozásában, rendszeresen tart előadásokat doktoranduszoknak, több doktorandusz munkáját irányította, illetve irányítja témavezetőként. Tanítványai: Fazekas Attila, Herendi Tamás és Ködmön József PhD fokozatot szereztek. Fazekas Attila 2003-ban habilitált a Debreceni Egyetemen. Doktoranduszai közül Huszti Andrea és Szabó László Zsolt már az értekezéseiken dolgoznak. A DE Informatikai Tudományok Doktori Iskolájának alapító vezetője. Sok olyan fiatal kutató munkáját segítette, akiknek más volt a témavezetőjük.

Jelentős és igen sokrétű tudományszervezői tevékenységet folytat. Tagja volt az OTKA Matematika zsűrinek, az OTKA Élettelen Természettudományi Szakkollégiumnak és az MTA Matematikai Doktori Bizottságának. Tagja a MAB Villamosmérnöki és Műszaki Informatikai Szakbizottságának és a Bolyai János Kutatási Ösztöndíj kuratórium matematikai bizottságának, ennek 2004-től elnöke; társelnöke majd elnöke volt a DAB Matematikai és Fizikai Bizottságának.

Igen kiterjedt nemzetközi kapcsolatokkal rendelkezik. Szoros munkakapcsolatot alakított ki a szakterület vezető szaktekintélyeivel. Számos közös dolgozatot publikált a nevezett matematikusokkal és más hazai és külföldi vezető szakemberekkel. Témavezetője volt több matematikai illetve informatikai tárgyú OTKA és minisztériumi pályázatnak, és magyar részről több magyar-német, magyar-osztrák, magyar-horvát és magyar-japán közös pályázatnak. Több sikeres nemzetközi konferenciát szervezett, konferenciaköteteket szerkesztett. Tudományos eredményeit egy könyvben és 130 tudományos dolgozatban publikálta, négy proceedings társszerkesztője volt. Munkáinak igen jelentős a nemzetközi visszhangja, sokan csatlakoztak kutatásaihoz. Publikációira több mint 800 hivatkozás történt.

Állandó meghívottja, számos esetben főelőadója szakterülete nemzetközi rendezvényeinek. Összesen több mint három évet töltött külföldön vendégprofesszorként Saarbrückenben, Strasbourgban, Tokyoban, Grazban, Barcelonában és Linzben. 2002-től a grazi Műegyetem tiszteletbeli professzora.

Tagja a *Publicationes Mathematicae*, a *Journal of Universal Computer Science* és a *Periodica Mathematica Hungarica* nemzetközi folyóiratok szerkesztőbizottságának, az utóbbinak 2000 és 2006 között felelős szerkesztője volt. Tudományos eredményeiért 1978-ban Grünwald Géza-díjban, 1992-ben Akadémiai Díjban, 1999-

ben Bolyai Farkas Szakkuratóriumi Díjban, 2004-ben Szent-Györgyi Albert-díjban részesült.

Beke Manó-emlékdíj

A 2008. évi Beke Manó-emlékdíj bizottság határozata alapján a következők részesültek a Díjban: **Dr. Bajza Istvánné, Bencze Mihály, Erdős Gábor, Klein Imréné, Kőkuti Ágnes, Mike János** és **Urbán Györgyné.**

Indoklás: *Dr. Bajza Istvánné* 1989-ben végzett a DE (KLTE) matematika–számítástechnika szakán, azóta a Debreceni Református Kollégium Gimnáziumában tanítja szaktárgyait. 1992-től eredményesen vezeti az iskola matematikai munkaközösségét. 2004-ben felkérték az emelt szintű próbaérettségi javítójának és vizsgáztatójának. 2005-től oktatási szakértő. 1992-ben egyik kezdeményezője volt a Református Iskolák Országos Matematika Versenyének, azóta a verseny szervezője, 2007. március 2–3-án 15. alkalommal került megrendezésre a református középiskolák 7–12. évfolyamos tanulói számára. A verseny feladatairól és eredményeiről több alkalommal is beszámolt a KöMaL-ban. A feladatsorokat 1998 óta a DE Matematikai Intézetének oktatói állítják össze, így velük is szoros munkakapcsolatba került. A 15. évfordulóra megjelent Matematika versenyek (1993–2006) Református iskolák országos matematika versenye c. könyv egyik szerkesztője volt. A Bay Zoltán Alapítvány támogatásával indított matematikai pályázatot és megjelentette házi jegyzetben a kitűzött feladatokat és megoldásaikat. Sokat tett a matematika oktatásáért, a tehetséggondozásért. Iskolai szakkört vezet, különböző versenyekre készíti fel a diákokat. 2005-től vezeti a Debrecen vonzáskörzetébe tartozó református általános iskolák (7–8. osztályosok) diákjainak tehetséggondozását. Kitűnő szervező. Az iskola matematikatanárai között meghatározó, aktív vezető egyéniség, aki példamutató munkát végez, szívesen segíti kollégái munkáját, méltán kapja a Beke Manó-díjat.

Bencze Mihály 1978-ban szerzett diplomát a kolozsvári Babeş–Bolyai Egyetem matematika karán. Már az egyetemi évek alatt matematika kört tartott az egyetemistáknak, és egy feladatmegoldó versenyt vezetett. A kolozsvári „Visszhang” diákrádió szerkesztésében is részt vett. 1978 és 1990 között a brassói Vörös Zászló Középiskola matematikatanára volt. 1989 decemberében részt vállalt abban a bizottságban, melynek célkitűzése volt az önálló brassói magyar középiskola létrehozása. Ez ügyben személyesen fordult az Európai Parlamenthez. 1990-től itt, a brassói Áprily Lajos Főgimnáziumban matematikatanár. Matematika szakkört az egyetemi évek után is tartott, 1978 és 1990 között Brassóban magyar diákkört vezetett, sőt tanári szakkört is tartott, heti 6 órában. 1990-től Brassóban heti 4 órában a „Wildt–Corduneanu” matematika szakkört vezeti, egyszer magyar, egyszer román nyelven. A szakkörökön résztvevő diákok a romániai és nemzetközi matematikai versenyek díjazottjai közt szerepelnek. Sok egykori diákja már egyetemi tanár, kutató, középiskolai tanár: Kanada, USA, Ausztrália, Nyugat-Európa, Magyarország, Románia egyetemein és az erdélyi magyar iskolákban. 1974 és 2007 között 150 hazai és főként nemzetközi matematikai konferencián vett részt, tudományos dolgozatok bemutatásával. A Kárpát-medence területén szinte mindenütt, ezen kívül 6-szor Németországban, illetve Zürichben, Amszterdamban, Párizsban. Nem csupán matematikai, de irodalmi lapok főszerkesztője is (például a *Brassói füzetek,* vagy a *Vadrózsák*). 1990-ben megalakította a jogilag hivatalosan bejegyzett Wildt József Tudományos Társaságot, amely középiskolások és egyetemi hallgatók szakmai támogatásával foglalkozik, diákkonferenciákat, tudományos köröket és versenyeket szervez évente többször is. Megalakította a *Fulgur* kiadót, több versenyt kezdeményezett és szervezett, elindította és szerkeszti az *Octogon* nemzetközi matematikai folyóiratot. Matematikai munkássága páratlanul termékeny. Több cikke jelent meg a Matematika tanításában, a Polygonban, a KöMaL-ban, a kolozsvári Matematikai Lapokban, de távolabb is, Kínában és az USA-ban. Különböző lapokban 13 000 problémát tűzött ki. Csak az Octogonban 454 cikke jelent meg. Munkájával már több díjat kiérdemelt az USA-ban, Cambridge-ben. A Romániai Magyar Pedagógusok Szövetségétől Ezüstgyopár díjat és Apáczai-díjat kapott. Magyarországi elismerését jelzi a Beke Manó-díj.

Erdős Gábor 1990-ben végzett az ELTE-n, matematika–fizika–számítástechnika szakon. 1993-tól a nagykanizsai Batthyány Lajos Gimnázium és Egészségügyi Szakközépiskola tanára, majd 2005 nyara óta az iskola egyik igazgatóhelyettese. Kiváló szakmai felkészültségű kolléga, aki jó pedagógiai érzékkel is rendelkezik. A sokrétű matematikai tehetséggondozó munkát magas színvonalon végzi. Részt vesz a Nemzetközi Kenguru Matematika Verseny lebonyolításában: a feladatsorok magyar változatát ő készíti, évről-évre összeállítja a feladatsorok megoldó füzeteit. Tanít a nyolcosztályos gimnáziumi osztályban, iskolai szakkört, olimpiai szakkört vezet. Részt vállal az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola munkájában, megalakulása óta rendszeresen tanít Veszprémben. Előadásokat tart pedagógus továbbképzéseken, a Rátz László-vándorgyűlésen, Gyulán ő bonyolította le a tanárversenyt. Rendszeres előadója a Nagy Károly Matematikai Diáktalálkozónak Rév-Komáromban, Balatonberényben az Országos Matematikai verseny-tréningen, s különböző nyári diáktáborokban. A BJMT Zala megyei tagozatának titkára. Elmélyült, sokrétű tudásával, rendszeres, céltudatos órai és órán kívüli munkájával nagyban hozzájárul a diákok sikeres versenyzéséhez. Volt már Kalmár-, Varga Tamás- és Arany Dániel-versenyen is díjazott tanítványa, az eddigi szép eredmények megkoronázásaként 2006-ban diákja (Németh Zsolt) első helyezett lett az OKTV II. kategóriájában. Két évtizedes odaadó, magas színvonalú szakmai munkája alapján méltó a Beke Manó-díjra.

Klein Imréné 1974-ben végzett a JATE matematika–fizika szakán és több mint három évtizede első munkahelyén a kiskunhalasi II. Rákóczi Ferenc Mezőgazdasági, Közgazdasági, Informatikai Szakközépiskola és Kollégiumban tanít. 1985 óta a természettudományi munkaközösség vezetője. Ezt a megbízást szakmai munkája elismeréseként kapta, mert tanmenetei átgondoltak, órái jól tervezettek tartalmi és nevelési szempontból egyaránt. Mint munkaközösség-vezető tevékenyen részt vesz a szakmai szervező és ellenőrző munkában. Nagy szerepet vállalt az új tantervek bevezetésében, a helyi tantervek elkészítésében. Nagy hangsúlyt fektet a tehetséggondozásra. Tanítványai évről-évre kiemelkedő eredményeket érnek el tanulmányi versenyeken. Munkájának nagymértékben köszönhető, hogy a megyei értékeléseken hosszú idők óta iskolája az elsők között van matematikából. Sikerrel szerepelnek tanítványai a GORDIUSZ matematika versenyen és az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen. Az OKTV-n az utóbbi 8 évben négy alkalommal volt diákja az országos döntőben, közülük 3-an az első tízben végeztek. Következetes, magas szintű szakmai munkájának köszönhetően tanítványai évről-évre kiemelkedően állnak helyt az érettségi vizsgákon. Az eddigi emelt szintű érettségiken diákjai közül mindenki jelest kapott, a csoportja 96%-os eredményt ért el. Mint osztályfőnök olyan közösséget formál, amelyben maximálisan kibontakozhatnak az egyéni képességek, amelyben az emberség, az egyén tisztelete meghatározóvá válik diákjai további életében is. A 25 éves osztályfőnöki tevékenysége során a gyermekek oktatása-nevelése érdekében végzett kiemelkedő munkavégzésével kivívta munkatársai, a tanulók és a szülők megbecsülését. Munkája elismeréseként a Magyar Köztársaság Bronz Érdemkereszt kitüntetést és a Graphisoft Alapítvány a Matematika Oktatásáért Díjat kapta. Mindezek indokolják, hogy megérdemli a Beke Manó-díjat.

Kőkúti Ágnes 1980-ban végezte el a tanítóképző főiskolát Budapesten. Perbálon kezdett tanítani, majd a Krisztina Téri Általános Iskolában töltött több évet, ahol már szakvezetői feladatokat is ellátott. 1999 óta dolgozik a Lauder Javne Zsidó Közösségi Óvoda, Általános Iskola és Gimnáziumban. Jelenlegi munkahelyén az elemi matematika munkacsoport vezetője. Szakmai, módszertani felkészültsége magas szintű, minta lehet minden tanító számára. Tudatos szakember, aki a napi tanítói munkája mellett folyamatosan fogad pedagógusjelölteket is. A tanítójelöltek a főiskolán szakmailag és módszertani ötletekkel feltöltve, rendszeresen lelkesen számolnak be szerzett élményeikről. A főiskola számára készített bemutató órái példaértékűek voltak. Tanítói munkájában egyaránt fontos helyen áll a tehetséges gyerekek fejlesztése és az elakadók maximális segítése. Külön figyelemmel fejleszti tanítványai logikáját, elmélyíti tudásukat, felébreszti kísérletező kedvüket, ily módon elülteti bennük a játékok és a gondolkodás szeretetét. Mindez továbbgyűrűzik a szülők, kollégák és a főiskolások felé. Megszállottként dolgozik, nyitott az új pedagógiai megoldások iránt. Gyakran aktívan részt vesz szakmai fórumokon, Varga Tamás-napokon, Rátz László-vándorgyűlésen, ahol szemináriumi csoportvezetést vállalt. Kapcsolatrendszere szerteágazó, fontos tagja az országot behálózó „logikaijáték-maffiának". Nevéhez kapcsolódik a *Ludens* logikai képességeket fejlesztő játékprogram, amely beépült iskolájának pedagógiai programjába. Az iskola „Jom–sisi" nevű havi játékdélutánjai, és a vasárnapi játszóházak alakításában mind szerepet vállalt. Mindezek alapján méltán kapja a Beke Manó-díjat.

Mike János 1985-ben végzett a József Attila Tudományegyetem matematika–fizika tanári szakán. 1985-től a szegedi Radnóti Miklós Gimnázium tanára. Egyik elindítója volt 1987-ben a hatosztályos matematika tagozatos képzésnek a Radnóti Gimnáziumban.

Több feladatgyűjtemény szerzője, illetve társszerzője, ezek sorra jelentek meg a Mozaik Kiadónál: Érdekes matematikai feladatok, 1991-ben; Matematika összefoglaló feladatgyűjtemény 10–14 éveseknek, 1993-ban; Jól felkészültem-e matematikából? – 7. osztály, 1994-ben. 2007-ben az új típusú érettségi feladatsoraiból nagyon jól használható feladatgyűjteményt állított össze, ami a szegedi Maxim Kiadónál jelent meg.

Mike János diplomája megszerzése óta a szegedi Radnóti Miklós Gimnáziumban tanít zömében matematikát, kisebb óraszámban fizikát. Matematika óráinak többsége tagozatos osztályokban van. Kiváló problémamegoldó, precíz, tudatos tanáregyéniség. Tudását szétosztja, szétszórja tanítványai között, akik (nemcsak ezért) nagyon szeretik. Tanári pályája során számos tanítványa ért el országos versenyeken kiváló eredményeket (pl. Maróti Miklós, Ambrus Gergely, Varjú Katalin, Varjú Péter, Jankó Zsuzsanna, Szűcs Gergely, Nagy Donát), közülük néhányan már nemzetközi szinten is elismert matematikusok. Tanári tevékenysége meghatározó iskolájában, annak ellenére, hogy csendesen, kicsit visszahúzódó módon dolgozik. Nagyon sokat. Elvitathatatlan tekintélyt vívott ki mind a diákok, mind a tanárok körében. A tagozatos osztályok számára, házi használatra készített kiváló feladatai, feladatsorai mind módszertani, mind tartalmi szempontból a matematikai tehetséggondozás csúcsteljesítményei. Óraadóként néhány évig tanított az egyetemen matematikatanár szakos hallgatókat Elemi matematikából. Tanártovábbképzés keretében több kiváló előadást tartott. Eredményes tanári munkájáért megkapta már az Ericsson és Graphisoft díjakat (utóbbit idén második alkalommal), s most megérdemelten a Beke Manó-díjat.

Urbán Györgyné matematika–fizika–technika szakos tanár. Általános iskolai, matematika–fizika szakos tanári oklevelét 1965-ben szerezte meg az akkori Szegedi Tanárképző Főiskolán. 1965. augusztus 1-től nyugdíjba vonulásáig – közel negyven éven keresztül a Kossuth Lajos Általános Iskola és Csongrád város oktatásának meghatározó egyénisége volt, és az ma is. Nevelő-oktató munkáját kiválóan, lelkiismeretesen, példamutatóan végezte évtizedeken át. Véleménynyilvánításában körültekintő, megfontolt és reális. Saját munkájával szemben igényes és következetes, amit megkövetel tanítványaitól is. „Keze alatt" a gyerekek megszerették a matematikát, élvezettel gondolkodnak és oldják meg a problémákat. Óráin a tanulók sokszor jutottak sikerélményhez, amely további inspiráció forrásaként szolgál. Pályája során rendszeresen foglalkozott versenyeztetéssel, diákpályázatok írásával. Ezekre történő felkészítésre szabadidejéből is sokat áldozott. Számtalan tanítványa büszkélkedhet városi, megyei, országos helyezésekkel matematikából. Míg diákjai versenyeznek, ő maga részt vesz a megyei és területi matematikaversenyek zsűrijében. Az immár 20 éves Makkosházi Matematikaverseny értékelő bizottságának kezdetektől alapító tagja, korábban feladatkitűzője is volt. Fontos kiemelni, hogy tanóráin a közepes és gyengébb képességű tanulókkal is eredményesen foglalkozott. 1988-ban – elsősorban az ő eredményeire és személyes szakmai hozzáértésére alapozva – javasolta az akkori szaktanácsadás, hogy iskolájában szakosított tantervű matematika osztály induljon 5. osztálytól felmenő rendszerben. Az emelt szintű matematika oktatása azóta is a csongrádi Kossuth Lajos Általános Iskola egyik vonzó profilja, melyet nyugdíjba vonulásáig döntő többségében ő vezetett. Számos diákja választotta a matematikusi vagy fizikusi hivatást, orientálódott műszaki pályák felé, talán éppen „Blanka néni” óráin elsajátított ismeretek szépsége, érdekessége és hasznossága miatt. 1988-tól iskolája reál munkaközösségének vezetője, majd a városi munkaközösség vezetője is volt. Pályája során nagyon sok főiskolai hallgató leshette el tőle a szakma fortélyait a tanítási szakmai gyakorlatuk során. Rendszeresen tartott bemutató órákat a helyi és városi munkaközösségeknek, a Csongrád Megyei Pedagógiai Intézetnek. Szakértői feladatokat is ellát. Szerény, csendes személyét tisztelet és megbecsülés övezi, 2002-ben Csongrád városa Pedagógiai Díjjal jutalmazta. Méltán részesül a Beke Manó-díjban.

Grünwald Géza-emlékérem

A 2008. évi bizottságnak nyolc igen színvonalas jelölt közül kellett kiválasztania a díjazottakat. Egyöntetű vélemény volt, hogy eredményei alapján minden jelölt érdemes lett volna a díj elnyerésére. Végül a bizottság határozata alapján az Emlékéremben a következők részesülnek: **Frenkel Péter, Juhász András, Kun Gábor** és **Lovas Rezső László.**

Indoklás: *Frenkel Péter* matematikusként végzett az ELTE-n 2002-ben. PhD fokozatot 2008-ban szerzett a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem doktori iskolájában. A Schweitzer-versenyen egyszer III., egyszer II. és háromszor I. díjat kapott.

Eddig hat tudományos dolgozata jelent meg. Az elsőben egy Erdős Páltól származó kombinatorikus számelméleti problémára adott egy új, szellemes, meglepően rövid elemi megoldást. A második dolgozatában Szűcs Andrásnak egy a 3 dimenziós sokaságok véges transzformációcsoportjaira vonatkozó tételét fejlesztette tovább. Két dolgozatot írt – Domokos Mátyással közösen – az ortogonális csoport vektorinvariánsairól. Ezen dolgozatok váratlan eredménye olyan tetszőlegesen magas fokú multilineáris polinominvariánsok konstrukciója, amelyek felbonthatatlanok 2 karakterisztikában vagy az egészek felett. Ötödik dolgozatában új karakterformulákat talált az úgynevezett klasszikus csoportok irreducibilis ábrázolásaira. Ezek a Weyl-féle karakterformulák változatai, de mégis jelentősen eltérnek azoktól abban a tekintetben, hogy a karakterértékét a csoportelem (mátrix) hatványainak elemeiből állítják elő explicit módon (és nem az elem sajátértékeivel fejezik ki a karakter értékét). Utolsó megjelent dolgozatában a valós lineáris funkcionálok pontonkénti szorzatának normájára vonatkozó legerősebb ismert alsó becslést javította meg. Ehhez Elliott Liebnek egy pozitív szemidefinit mátrixok permanenseire vonatkozó egyenlőtlenségét vitte át hafnianokra. Sokoldalú problémamegoldó képességével, érdekes eredményekkel járult hozzá olyan különböző területekhez, mint a számelmélet, a topológia, az algebra, a reprezentációelmélet, és a lineáris algebra és funkcionálanalízis határterülete.

Juhász András az ELTE matematikus szakát 2004-ben végezte el, majd idén májusban védte meg PhD disszertációját Princeton-ban a topológia legaktívabb területén, az alacsony dimenziós sokaságok vizsgálatában érve el olyan eredményt, amivel nagyszámú konferenciameghívás mellett még egy posztdoktori állást is hozott neki az angliai Cambridge-ben. Júliusban egy hónapot a Párizs melletti IHES nemzetközi kutatóközpontban dolgozott, ami szintén elismerésre méltó meghívás. Igen látványos eredményeket ért el disszertációjában. Közel százéves problémákat old meg a disszertációja egyszerű következményeiként. Már az egyetemi szakdolgozata is – melyet a PhD témájától különböző területnek, az ún. globális szingularitáselméletnek szentelt – három publikációra épült, melyek vezető külföldi matematikai folyóiratokban jelentek meg és tulajdonképpen már megfeleltek a PhD követelményeknek. Kétszer nyert eredményeivel OTDK-n első díjat. 2003-ban a Rényi Kató-díj első fokozatában részesült.

Első eredményeként zárt felületek $\mathbf{R}^3$-ba menő lokálisan generikus leképezéseit osztályozta reguláris homotópia erejéig. Ha a leképezés szinguláris, akkor a szingularitások száma teljes invariánst ad. Ezeket az eredményeit később általánosította zárt n-sokaságok $\mathbf{R}^{(2n-1)}$-be menő lokálisan generikus leképezéseire. Később a Heegaard Floer-homológia és a csomó Floer-homológia közös általánosításaként bevezeti egy invariánsát varratos 3-sokaságoknak. Ez az ún. varratos Floer-homológia. Megmutatja, hogy felületek mentén elvágva egy varratos sokaságot a Floer-homológiája az új sokaságnak az eredeti egy részcsoportjával izomorf. Ennek segítségével egyszerűbb bizonyítást ad a Heegaard Floer-elmélet főbb eredményeire, és belátja, hogy a csomó Floer-homológia felismeri a fibrált csomókat. Ezután a csomó Floer-homológia legfelső tagjának rangja segítségével felső becslést ad egy csomó páronként diszjunkt nemizotóp minimális génuszú Seifert-felületeinek számára.

Kun Gábor matematikusként végzett az ELTE-n 2003-ban. PhD fokozatot 2006-ban szerzett az ELTE matematika doktori iskolájában. 2002-ben megnyerte a Schweitzer-versenyt. Kiemelkedő alkotóképességű, kivételesen sokoldalú fiatal matematikus. Eddig 9 tudományos dolgozata jelent meg a matematika különböző területeiről. Fő eredményeit véletlen struktúrák és módszerek vizsgálatában, valamint a bonyolultságelméletben érte el, de munkája kiterjed – többek között – a valós analízisre, az algebrai logikára és a geometriára is.

Disszertációjának témája az ún. Constraint Satisfaction Problem (CSP) vizsgálata: ez a problémaosztály például lineáris egyenletrendszereket és hipergráfszínezési problémákat tartalmaz. Ezen a területen a legfontosabb nyitott probléma az ún. dichotómia-sejtés, amely szerint minden CSP probléma vagy NP-teljes vagy P-beli. Témavezetőjével, Szabó Csabával közös munkáiban elsőrendben definiálható CSP problémákat vizsgál, és ezek algebrai jellemzését használva adnak kombinatorikus-topologikus karakterizációt. Disszertációjának fő eredménye annak bizonyítása, hogy a CSP problémák osztályánál bővebb, másodrendű egzisztenciális formulákkal definiált úgynevezett Monotone Monadic Strict NP (MMSNP) osztály minden problémája egy CSP problémával polinomiálisan ekvivalens. A bizonyítás kulcsa egy expanderfogalom bevezetése hipergráfokra, és ilyen korlátos fokszámú és rövid kör nélküli expanderek hatékony konstrukciója. Disszertációja után is folytatja az ilyen irányú kutatásokat: Jaroslav Nešetřillel kombinatorikus jellemzést adnak az NP és MMSNP osztályokra. Munkájuk rávilágít, hogy kombinatorikus problémák bizonyos intenzíven kutatott osztályainál nem várható a remélt dichotómia. Szegedy Marióval a dichotómia sejtés algebrai változatának egy statisztikus ekvivalensét adják. Ezt felhasználva az irányítatlan gráfok dichotómiájára vonatkozó Hell–Nešetřil-tétel egy teljesen új bizonyítását adják diszkrét Fourier-analitikus eredményeket felhasználva. Munkájuk összeköti a diszkrét Fourier-analízis, a kvadratikus dinamikai rendszerek és a CSP problémák elméletét.

Az úgynevezett Neumann-probléma dinamikai változata az, hogy minden valószínűségi mértéktéren majdnem szabadon és mértéktartóan ható nem amenábilis csoportból kikeverhető-e mérhető majdnem szabad hatás. Ezt kanonikus csoporthatások esetén nemrég látta be Lyons és Gaboriau. Kun ún. szofikus csoportokra bizonyítja a sejtést. (Egy csoport szofikus ha Cayley-gráfja statisztikai, ún. Benjamini–Schramm értelemben approximálható véges gráffal. Nem ismert, hogy vajon minden csoport szofikus-e.) A tétel Kun általánosabb, reguláris gráfsorozatok felbontására vonatkozó tételének következménye: egy reguláris, véges gráf felbontható kevés él elhagyásával korlátos méretű komponensekre és egy olyan részgráfra, ami tartalmaz nagy derékbőségű, 4 reguláris részgráfot Lipschitz értelemben.

Lovas Rezső László 2001-ben a Debreceni Egyetem Természettudományi Karán fizikus és angol-magyar szakfordító szakon szerzett diplomát. Még ebben az évben elkezdte doktori tanulmányait a Debreceni Egyetem TTK Matematikai és Informatikai Doktori Iskolájában a matematika doktori program keretében. 2004-től predoktori státuszt töltött be a Debreceni Egyetem TTK geometriai tanszékén. Egy év múlva tudományos segédmunkatársi, 2006 márciusában pedig tanársegédi kinevezést kapott az analízis tanszékre. A kutatómunkát, elméleti fizikai témában, már egyetemi hallgató korában elkezdte. Ugyanakkor egyetemi tanulmányainak korai szakaszától kezdve intenzíven érdeklődött a differenciálgeometria iránt is, és tanulmányainak befejezésekor már ezen a területen is olyan jól kidolgozott ismeretrendszerrel rendelkezett, amely lehetővé tette, hogy ilyen témában kezdje meg munkáját a doktori program keretében. PhD dolgozatát Szilasi József irányításával készítette el, és *summa cum laude* eredménnyel 2005 nyarán védte meg. Ez a 109 oldalas angol nyelvű munka koherens módon összegezte azokat az eredményeit, amelyeket a pályageometriában (a „spray-sokaságok" elméletében) valamint a Finsler-metrikák és általánosításaik vizsgálatában ért el.

Eddig nyolc, részben társszerzős, de közöttük két igen terjedelmes (45-45 oldalas) dolgozatot publikált nemzetközi folyóiratokban, illetve alaposan lektorált kötetekben. Eredményei határozott figyelmet keltettek a külföldi szakemberek körében is. Prof. Crampin angol kutató fontos fejleményként idézte a Lie-deriválás Lovas Rezső által kidolgozott elméletét s annak alkalmazásait. Prof. Bao, a mai Finsler-geometriai kutatások egyik vezető szaktekintélye meglepő eredményként említette egy most megjelent dolgozatában Lovas Rezsőnek a Finsler–Minkowksi-normákkal kapcsolatban tett észrevételét. Teljes leírását adta bizonyos típusú Ehresmann-konnexiókhoz csatolt metrikus kovariáns deriválásoknak, és megmutatta egy olyan kovariáns deriválásnak a létezését, amelynek a Cartan-féléhez hasonló jó tulajdonságai vannak, csak sokkal általánosabb körülmények között. Azt is leírta, hogyan adják vissza ezek az eredmények egy Finsler-sokaság Cartan-féle kovariáns deriválástlásának egyértelműségéről szóló klasszikus tételt, előre adott Ehresmann-konnexió nélkül. Tudomásunk szerint ennek ez a legelső koordinátamentes bizonyítása. Ezen felül sikeresen tudott bekapcsolódni a függvényegyenletek kutatócsoport munkájába is.

Négy hónapig a DAAD (Német Akadémiai Csereszolgálat) posztdoktori kutatói ösztöndíjasaként dolgozott a Darmstadti Műszaki Egyetemen és a Paderborni Egyetemen Helge Glöckner és Karl-Hermann Neeb irányításával, illetve velük együttműködve. Ennek a kutatási projektnek a célkitűzése végtelen dimenziós Poisson-vektorterek és koadjungált orbitok vizsgálata volt. Lovas Rezső és Helge Glöckner bebizonyított egy olyan Stefan–Sussmann-típusú tételt, amely Banach-sokaságoknak nem feltétlenül komplementált altereiből álló disztribúciók integrálhatóságát jellemzi. Ennek következményeként megkapták a Frobenius-tételnek egy olyan változatát, amely egy Banach-sokaság érintőnyalábjának olyan résznyalábjaira vonatkozik, amelyek nem feltétlenül hasított részsokaságok.

Farkas Gyula-emlékdíj

A Bizottság, a beérkezett javaslatok alapján 2008-ban négy Farkas Gyula-emlékdíjat adományoz. A díjazottak: **Bánhelyi Balázs** (Szegedi Tudományegyetem, informatika tanszék), **Házy Attila** (Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, alkalmazott matematikai tanszék), **Izsák Ferenc** és **Sikolya Eszter** (ELTE TTK, alkalmazott analízis és számításmatematikai tanszék).

Indoklás: *Bánhelyi Balázs* területe az experimentális matematikai analízis. Publikációs jegyzéke hat megjelent folyóiratcikket tartalmaz. Ezek mindegyikének témája dinamikai rendszerek kaotikusságának számítógép által segített bizonyítása. A bizonyításokhoz szükséges úgynevezett megbízható, tehát a kerekítési hibák worst-case elemzését is tartalmazó számítógépes munkát találékonyan, a globális optimalizáció Csendes Tibor által kezdeményezett módszereinek érdemi továbbfejlesztésével, tapasztaltabb matematikus társszerzőinek is gyakorta új elméleti ötleteket adó módon végezte el.

Házy Attila készített egy lineáris kétváltozós függvényegyenletek, illetve differenciál-függvényegyenletek megoldására szolgáló algoritmust és egy Maple programnyelven megírt programot, amely bizonyos természetes feltételek mellett egy egyenletet átalakít közönséges differenciálegyenletté, majd megkeresi ennek megoldásait. A konvexitás fogalmát általánosítva Bernstein–Doetsch-típusú és stabilitási eredményeket bizonyított t-konvex, megközelítőleg t-konvex, illetve Breckner s-konvex függvények esetében. A Jensen-konvexitás, a konvexitás és az Hermite–Hadamard-egyenlőtlenség kapcsolatát vizsgálta abban az esetben, amikor az egyenlőtlenségek stabilitási tagjai függnek a változók távolságától.

Izsák Ferenc kutatási területe a differenciálegyenletek és a numerikus analízis. Tizenkilenc megjelent folyóiratcikke van. Ezek mintegy kétharmada vegyész társszerzővel készült esettanulmány kémiai csapadékok mintázatképződéseiről. Legújabb, Hollandiában tanult kutatási területe a Maxwell-egyenletek végeselem megoldásainak a posteriori hibaanalízise, amelyről a legrangosabbak közé tartozó *SIAM Journal of Numerical Analysis* és a *Mathematics of Computation* folyóiratokban is publikált.

Sikolya Eszter a dinamikus hálózatok és az operátorfélcsoportok művelője. Publikációs jegyzéke kilenc megjelent folyóiratcikket tartalmaz. Egymáshoz a csomópontokban csatolt közönséges és parciális, hullám illetve diffúziós differenciálegyenletek által indukált folyamok kvalitatív tulajdonságaival foglalkozik véges és végtelen hálózatokon. Heidelbergi társszerzőivel együtt az aszimptotikus viselkedés, a periodicitás, a megfigyelhetőség, az irányíthatóság és a rekurrencia kérdéseit tanulmányozta mind technikailag, mind gondolatilag igényes dolgozataiban.

Rényi Kató-emlékdíj

A bizottság döntése alapján a 2008. évi Rényi Kató-emlékdíj első fokozatában **Komjáthy Júlia, Szöllősi Ferenc** és **Tóth Ágnes** részesül, mindhárman a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem alkalmazott matematikus szakának végzett hallgatói. Az Emlékdíj második fokozatában részesülnek **Kovács Tünde,** a Debreceni Egyetem végzett és **Pluhár Gabriella,** az ELTE ötödéves matematika–angol szakos hallgatója.

Indoklás: *Komjáthy Júlia* [1] cikke a konstans rátájú, teljesen aszimmetrikus zero range folyamatokkal foglalkozik. Ez a folyamat kölcsönható részecskerendszerek egy olyan nagyobb osztályába tartozik, amire régi sejtés, hogy a karakterisztikán mért részecskeáram fluktuációja az idő 1/3-adik hatványával skálázódik. A cikk ezt a skálázást igazolja az első olyan folyamatra, amelyben egy rácshelyen több részecske is tartózkodhat. A felhasznált módszerek valószínűségi jellegűek, a folytonos idejű nagy állapotterű rendszerek dinamikájának alapos megismerésén, a csatolási módszerek finom alkalmazásán alapulnak. A [2] dolgozat a következő problémával foglalkozik: A piacon egy bizonyos árucikk kereskedése korlátozott vagy nagy költségekkel jár, de egy hasonló viselkedésű cikk kereskedése jól működik. Mennyire lehet kivédeni a kockázatokat azzal, hogy az első cikk helyett a másodikkal végzünk tranzakciókat? A cikkek árfolyama diszkrét időben mozog, együttes lognormális eloszlású, erősen korrelált. A fő eredmények az optimális stratégia létezéséről, egyértelműségéről és karakterizációjáról szólnak. A dolgozat analitikus, martingál és nagy eltérés típusú érveléseket tartalmaz. Komjáthy Júlia dolgozatai:

[1] M. Balázs and J. Komjáthy: Order of current variance and diffusivity in the rate one totally asymmetric zero range process, *J. Stat. Phys.*, **133** (2008), 59–78.

[2] J. Komjáthy: *The risk of hedging by substitution of a correlated asset,* TDK dolgozat.

Szöllősi Ferenc komplex Hadamard-mátrixokkal (olyan unitér mátrixok, amelyek minden eleme, a mátrix alkalmas normalizálása után, egységnyi abszolút értékű) kapcsolatos kutatásokat végez. Ezek teljes klasszifikációja csak 5 dimenzióig ismert. Szöllősi új konstrukciókat adott meg alacsony dimenziós esetekben, többek között 6 dimenzióban is. Általános és igen alkalmazható módszert adott meg

Hadamard-mátrixok paraméterezésére (adott mátrixból kiindulva folytonos család konstrukciójára). Ma még nem ismert, mely komplex Hadamard-mátrixok indukálnak folytonos családot. Severinivel közös [5] dolgozatában unitér mátrixok nullmintázatait vizsgálja. Többek között belátják, hogy egy szükséges feltétel legfeljebb 5×5-ös mátrixok esetén elégséges is. Szöllősi Ferenc dolgozatai:

[1] D. Petz, K. M. Hangos, A. Szántó and F. Szöllősi: State tomography for two qubits using reduced densities, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **39** (2006), 10901–10907.

[2] M. Matolcsi, J. Réffy and F. Szöllősi: Constructions of complex Hadamard matrices via tiling Abelian groups, *Open Sys. Inf. Dyn.*, **14** (2007), 247–263.

[3] F. Szöllősi: Parametrizing complex Hadamard matrices, *European Journal of Combinatorics*, **29** (2008), 1219–1234.

[4] M. Matolcsi and F. Szöllősi: Towards a classification of 6×6 complex Hadamard matrices, *Open Sys. Inf. Dyn.*, **15** (2008), 93–108.

[5] S. Severini and F. Szöllősi: A further look into combinatorial orthogonality, *Elect. Journal of Lin. Alg.*, **17** (2008), 376–388.

Tóth Ágnes [1] dolgozata Simonyi Gábor egy sejtését igazolja. Eszerint egy véges gráf k-adik lexikografikus hatványa Hall-hányadosának k-adik gyöke a gráf frakcionális kromatikus számához tart, ha k tart végtelenhez. A messze nem magától értetődő bizonyítás diszkrét és folytonos módszereket is használ. A [2] dolgozat J. Brown, R. J. Nowakowski és D. Rall egy cikkében felvetett problémát old meg. Az említett cikk bevezeti és vizsgálja véges gráf hatványai függetlenségi hányadosának határértékét. Megmutatják, hogy teljes többrészes gráf esetén ez a határérték 1, ha valamelyik rész nagyobb, mint az alaphalmaz fele. Tóth Ágnes megadja a határértéket az összes többi esetben, megmutatva, hogy akkor a limesz az eredeti függetlenségi hányadossal esik egybe. Tóth Ágnes dolgozatai:

[1] Á. Tóth: On the ultimate lexicographic Hall-ratio, *Discrete Mathematics*, megjelenés alatt.

[2] Á. Tóth: The ultimate categorical independence ratio of complete multipartite graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, benyújtva.

Kovács Tünde diofantoszi egyenletek kutatásával foglalkozik. [1] dolgozatában számos olyan egyenletet old meg, amelyek különböző oldalain teljes hatványok, binomiális együtthatók, egymás utáni számok szorzatai állnak. [2] cikkében az 1 génuszú görbék egész pontjainak meghatározására szolgáló ismert módszereken javít azáltal, hogy az LLL-algoritmust nem egy, hanem több bázisra alkalmazza. Legújabb dolgozatában számos lineáris rekurzióval nyerhető sorozatban határozza meg a binomiális együtthatókat, teljes hatványokat, egymás utáni számok szorzatait. Kovács Tünde dolgozatai:

[1] T. Kovács: Combinatorial Diophantine equations – the genus 1 case, *Publ. Math. Debrecen*, **72** (2008), 243–255.

[2] L. Hajdu and T. Kovács: Parallel LLL-reduction for bounding the integral solutions of elliptic equations, *Math. Comp.*, megjelenés alatt.

[3] T. Kovács: Combinatorial numbers in binary recurrences, *Periodica Math. Hung.*, benyújtva.

Pluhár Gabriella [1]–[3] dolgozataiban két, univerzális algebrában felmerülő rekurzív sorozatra ad aszimptotikát. További dolgozataiban egy Czédli Gábortól eredő kérdés általánosításaival foglalkozik. Az eredeti feladat az volt, hogy ha egy mátrix elemei valós számok, hány olyan résztéglalap lehet, amiben levő számok mind nagyobbak a téglalappal szomszédos helyeken levő számoknál. Becsléseket ad a magasabb dimenziós esetre, illetve amikor a számokat háromszögrácsban helyezzük el. Pluhár Gabriella dolgozatai:

[1] G. Pluhár and Cs. Szabó: The free spectrum of the variety of bands, *Semigroup Forum*, **76** (2008), 576–578.

[2] G. Pluhár and Japheth Wood: The free spectra of varieties generated by idempotent semigroups, *Algebra and Discrete Mathematics*, **2** (2008), 89–100.

[3] Pluhár Gabriella: Szavak száma idempotens félcsoportokban – köteg varietások szabad spektruma, *Matematikai Lapok*, **13** (2006–2007), 44–53.

[4] Eszter K. Horváth, Zoltán Németh and Gabriella Pluhár: The number of triangular islands on a triangular grid, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, megjelenés alatt.

[5] G. Pluhár: The number of brick islands by means of distributive lattices, *Studia Sci. Math. Hung.*, megjelenés alatt.

„Patai László Alapítvány" díja

A 2008. évi díjat **Máthé András** kapta.

Indoklás: *Máthé András* 1981-ben született Ajkán. Az ELTE matematikus szakát 2005-ben végezte el kitüntetéses diplomával. Jelenleg az ELTE Matematika Doktori Iskola doktorandusza. Már hallgató korában kitűnt rendkívüli matematikai képességével. A Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyen 2002-ben harmadik, 2003-ban második, 2004-ben első helyezést ért el. Tudományos diákköri dolgozatával 2002-ben elnyerte az ELTE TTK TDK első díját. 2004-ben az ELTE TTK kiváló hallgatója volt. 2004-ben a csehországi Jarník Nemzetközi Matematikaversenyen második, az Egyetemi Hallgatók Nemzetközi Matematikaversenyén (IMC) pedig első díjat nyert.

Négy dolgozata jelent meg, egy dolgozatát az *Israel J. Math.* közlésre elfogadta, két dolgozata van benyújtva, két további dolgozata pedig hamarosan benyújtásra kerül. Ez már pusztán mennyiségileg is nagy teljesítmény. Ennél fontosabb, hogy az eredményei közül több is van, amely komoly nemzetközi visszhangot váltott ki. Ilyen a [4] dolgozat eredménye, amely Daniel Mauldin egy régi problémáját oldja meg. A közlésre elfogadott [5] dolgozat szintén egy régi (több mint 20 éves) problémát old meg. Ebben megmutatja, hogy a különböző dimenziókhoz tartozó Hausdorff-mértékek páronként nem izomorf mértéktereket definiálnak a Borel-halmazokon. Ezt a kérdést David Preiss évtizedeken át a mértékelmélet egyik legfontosabb nyitott problémájaként emlegette. A megoldáshoz vezető fő eredmény szintén rendkívül figyelemre méltó. Ezen tétele szerint bármely $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ Borel-mérhető függvényhez és $d \in [0,1]$-hez van olyan d-dimenziós kompakt halmaz, amelynek f általi képe legfeljebb d-dimenziós. Ez a gyönyörű állítás azt mutatja, hogy a mértékelméletben még mindig lehet egyszerűen hangzó és alapvető tételeket találni. Ugyancsak régi problémát old meg egy előkészületben levő dolgozata. Több mint 20 éve nyitott volt az a kérdés, hogy minden folytonos függvény korlátos változású-e valamely „nagy" halmazon. Ismeretes volt, hogy bizonyos folytonos függvények nem korlátos változásúak semmilyen 1/2-nél nagyobb dimenziójú halmazon. Máthé András lezárta a kérdést: a [8] dolgozatban megmutatja, hogy bármely $[0,1]$-en értelmezett folytonos (sőt bármely mérhető) függvény korlátos változású egy 1/2-dimenziós halmazon. Több nemzetközi konferencián is előadott, és az eredményei mindenütt nagy visszhangot váltottak ki. Publikációi:

[1] Máthé András: A nowhere convergent series of functions converging somewhere after everv non-trivial change of signs, *Real Analysis Exchange,* **30** (2004/05), no. 2, 855–859.

[2] Kun Gábor, Olga Maleva és Máthé András: Metric characterization of pure unrectifiability, *Real Analysis Exchange,* **31** (2005/06), no. 1, 195–213.

[3] Buczolich Zoltán és Máthé András: Where are typical C^l functions one-to-one?, *Mathematica Bohemica,* **131** (2006), no. 3, 291–303.

[4] Máthé András: The Angel of power 2 wins, *Combinatorics, Probability and Computing,* **16** (2007), no. 3, 363–374.

[5] Máthé András: Hausdorff measures of different dimensions are not Borel isomorphic, *Israel J. Math.* (elfogadva)

[6] Elekes Márton, Keleti Tamás és Máthé András: Self-similar and self-affine sets; measure of the intersection of two copies (benyújtva).

[7] Elekes Márton és Máthé András: Can we assign the Borel hulls in a monotone way? (benyújtva).

[8] Máthé András: Measurable functions arc of bounded variation on a set of dimension 1/2 (előkészületben).

[9] Máthé András: Covering the real line with translates of a zero dimensional compact set, (előkészületben)

JELENTÉS A 2008. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Versenybizottság a verseny 1. díját **Hubai Tamásnak** és **Strenner Balázsnak** ítéli.

Hubai megoldotta az 1., 2., 3., 5., 6., 7., 10. és 11. feladatot és részeredményt ért el a 9. feladatban; a 6. feladat megoldása kicsit hiányos.

Strenner megoldotta az 1., 2., 3., 5., 6., 7., 9. és 10. feladatot. A 9. feladat megoldása kicsit hiányos.

Második díjban részesül **Paulin Roland** és **Maga Péter.**

Paulin megoldotta az 1., 2., 3., 5., 7., 10. és 11. feladatot.

Maga megoldotta az 1., 2., 3., 5., 6., 8. és 9. feladatot. A 6. és 9. feladat megoldása kicsit hiányos. Kiemelendő, hogy egyedül ő oldotta meg a 8. feladatot.

Harmadik díjban részesül **Rácz Béla.**

Rácz megoldotta az 1., 2., 3., 5., 7. és 11. feladatot és részeredményt ért el a 10. feladatban. A 11. feladat megoldása kicsit hiányos.

Első dicséretben részesül **Horváth Márton, Király Csaba** és **Nagy Csaba.**

Horváth megoldotta az 1., 2., 3., 7. és 11. feladatot és részeredményt ért el a 10. feladatban.

Király megoldotta az 1., 2., 3., 5. és 7. feladatot.

Nagy megoldotta az 1., 2., 3., 5. és 7. feladatot.

Második dicséretben részesül **Puskás Anna** és **Baldur Sigurdsson.**

Puskás megoldotta az 1., 2., 3. és 7. feladatot.

Sigurdsson megoldotta az 1., 7. és 10. feladatot.

A feladatok és megoldásaik

1. feladat (Hajnal András, Pach János). *Adott egy $\mathcal{H} \subset P(X)$ halmazrendszer az X alaphalmazon, valamint egy $\kappa > 0$ számosság úgy, hogy bármely $x \in X$-et kevesebb mint κ darab $\mathcal{H}$-beli halmaz tartalmaz. Bizonyítandó, hogy létezik X-nek olyan $f : X \to \kappa$ színezése, amiben minden nem üres $A \in \mathcal{H}$-nak van „egyedi" pontja, azaz olyan $x \in A$, amelyre bármely $x \neq y \in A$ esetén $f(x) \neq f(y)$.*

Megoldás: Legyen $<$ az X egy jólrendezése. Definiáljunk egy gráfot az X halmazon, amelynek E élhalmaza:

$$E = \Big\{ \big\{ \{\min(A), x\} : \min(A) < x \in A \big\} : A \in H \Big\}.$$

A feltevés miatt X minden pontja X-nek csak κ-nál kevesebb nála $<$ pontjával van összekötve E-ben. Ekkor azonban az E gráf, transzfinit indukcióval, jól kiszínezhető κ színnel. Legyen f a gráf egy κ színű jó színezése. Állítjuk, hogy f kielégíti a feladat követelményét. Valóban, H tetszőleges A elemének $\min(A)$ sajátszínű pontja, mert A tetszőleges $\min(A)$-tól különböző x elemére $\{\min(A), x\}$ E-ben van és így $f(\min(A)) \neq f(x)$.

2. feladat (Károlyi Gyula). *Legyen $t \geq 3$ egész és $1 \leq i < j \leq t$ esetén legyen $A_{ij} = A_{ji}$ az n elemű X halmaz tetszőleges részhalmaza. Igazoljuk, hogy létezik olyan $1 \leq i < j \leq t$, amelyre*

$$\Big|(X \setminus A_{ij}) \cup \bigcup_{k \neq i,j} (A_{ik} \cap A_{jk})\Big| \geq \frac{t-2}{2t-2} n.$$

Megoldás: Legyen $1 \leq i < j \leq t$ esetén

$$S_{ij} = (X \setminus A_{ij}) \cup \bigcup_{k \neq i,j} (A_{ik} \cap A_{jk}).$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy az X halmaz minden pontja eleme legalább

$$c(t) = \binom{\lfloor t/2 \rfloor}{2} + \binom{\lceil t/2 \rceil}{2}$$

számú S_{ij} halmaznak, innen az állítás egyszerű átlagolással adódik, sőt páratlan t esetén az erősebb

$$|S_{ij}| \geq \frac{t-1}{2t} n$$

becsléshez jutunk alkalmas (i, j) párra.

Jelöljön x_{ij} $(1 \leq i < j \leq t)$ tetszőleges 0–1 változót, és legyen $\mathbf{x} = (x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{t-1,t})$ az ezekből alkotott vektor. Az $x_{ji} = x_{ij}$ konvenciót is bevezetve tekintsük $1 \leq i < j \leq t$ esetén az

$$f_{ij}(\mathbf{x}) = \max\{1 - x_{ij},\ x_{ik}x_{jk}\ (k \neq i, j)\}$$

függvényt. Ha most $p \in X$ esetén a változókat az

$$x_{ij} = x_{ij}(p) = 1 \iff p \in A_{ij}$$

előírás szerint értékeljük ki, akkor nyilván

$$p \in S_{ij} \iff f_{ij}(\mathbf{x}(p)) = 1.$$

Elég tehát megmutatni, hogy minden $\mathbf{x}$-hez legalább $c(t)$ számú $1 \leq i < j \leq t$ pár van úgy, hogy $f_{ij}(\mathbf{x}) = 1$.

Rendeljük hozzá $\mathbf{x}$-hez a $G = G(\mathbf{x})$ gráfot az $\{1, 2, \ldots, t\}$ csúcshalmazon úgy, hogy ij pontosan akkor tartozzon a gráf $E = E(G)$ élhalmazához, ha $x_{ij} = 0$. Világos, hogy ha $ij \in E$, akkor $f_{ij}(\mathbf{x}) = 1$. Ha tehát $|E| \geq c(t)$, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben a gráfnak $|E| = c(t) - s$ éle van valamilyen s pozitív egésszel, tehát a gráf G^c komplementerének $|E^c| = T(t) + s$ éle van, ahol $T(t) = \lfloor t^2/4 \rfloor$ a Turán-szám. Mivel $s \geq 1$, a Turán-tétel szerint G^c-ben van legalább egy háromszög. Könnyű tehát megmutatni s szerinti teljes indukcióval, hogy G^c-nek van legalább $s+2$ olyan éle, amire G^c-ben illeszkedik háromszög. Van tehát legalább $s+2$ olyan (i,j) pár, melyhez található $k \neq i,j$ úgy, hogy ijk üres háromszög G-ben. Az ilyen (i,j) párokra is teljesül hogy $f_{ij}(\mathbf{x}) = 1$ és ezeket korábban még nem vettük figyelembe, tehát most is található összesen legalább

$$|E| + (s+2) = \big(c(t) - s\big) + (s+2) > c(t)$$

olyan (i,j) pár, amelyre $f_{ij}(\mathbf{x}) = 1$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

3. feladat (Tardos Gábor). *Egy G páros gráfot az $\{x_1, \ldots, x_n\}$ és $\{y_1, \ldots, y_n\}$ csúcsokon (azaz az élek x_iy_j alakúak) szelídnek nevezünk, ha semelyik $x_iy_jx_ky_l$ útjára $\big(i,j,k,l \in \{1,2,\ldots,n\}\big)$ sem teljesül, hogy $j < l$, de $i + j > k + l$.*

Határozzuk meg az olyan α valós számok infimumát, melyekhez létezik olyan $c = c(\alpha) > 0$ konstans, hogy bármely szelíd gráfra $e \leq c \cdot n^\alpha$, ahol n a csúcsszám fele, és e az élek száma.

Megoldás: A válasz $\alpha = 3/2$. Legyen $s = \big[\sqrt{n}\big]$, ahol $[\cdot]$ az (alsó) egészrészt jelöli. Tekintsük a következő G gráfot: akkor húzzuk be az x_iy_j élt, ha $[i/s] = (j \bmod s)$. Ha $x_iy_jx_ky_l$ egy út G-ben, akkor $[i/s] = (j \bmod s) = [k/s] = (l \bmod s)$. Ezért egyrészt $|i - k| < s$, másrészt $j - l$ osztható s-sel. Ha tehát $j < l$, akkor $l - j \geq s > i - k$, így $i + j < k + l$. Tehát G szelíd. Mivel minden y_j csúcsnak s a foka, ezért $e(G) = ns > n^{3/2} - n$.

Most belátjuk, hogy nagyságrendileg nem is lehet több éle egy szelíd gráfnak. Nevezzünk egy x_ky_j élet picinek, ha minden x_iy_j élre $i < k + s$. A többi élet nevezzük nagynak. Egy y_j csúcshoz legfeljebb s pici él illeszkedik, hiszen a legkisebb és legnagyobb k, melyre x_ky_j pici legfeljebb $(s-1)$-gyel tér el. Így a pici élek száma legfeljebb ns. (Megjegyzés: a fenti konstrukcióban pont ennyi él szerepel, és mindegyik pici.)

Tegyük fel, hogy valamely x_k csúcshoz illeszkedik egy nagy x_ky_j él és még egy x_ky_l él valamely $l > j$ indexre. Legyen x_iy_j az az él, ami miatt x_ky_j nem pici, azaz $i - k \geq s$. Ekkor $x_iy_jx_ky_l$ egy út és $j < l$, tehát G szelídsége miatt $i + j \leq k + l$. Ekkor $i - k \geq s$ miatt $l - j \geq s$ is teljesül. Azaz fix x_k csúcs mellett azon j indexek, melyre x_ky_j nagy él, legalább s távolságra vannak egymástól. Így az x_k-hoz illeszkedő nagy élek száma maximum $n/s + 1$. Az összes nagy él száma maximum $n^2/s + n$.

G-nek tehát legfeljebb $ns + n^2/s + n \leq 2n^{3/2} + 2n$ éle van. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

4. feladat (Pyber László). *Legyen A az S_n szimmetrikus csoport egy részcsoportja, és G normálosztó A-ban. Mutassuk meg, hogy ha G tranzitív, akkor $|A : G| \leq 5^{n-1}$.*

Megoldás: Vegyünk egy ellenpéldát, ahol n minimális. Legyen $B_1, \ldots, B_t$ egy A-invariáns partíció, ahol k, a blokkok mérete minimális ($k > 1$, ha A primitív, akkor legyen $k = n$). Jelölje H_i a B_i blokk A-beli stabilizátorának a B_i-n vett hatását. Legyen K az A csoport blokkokon vett hatásának magja és K_i a K hatása a B_i blokkon. Először a következőt bizonyítjuk.

Lemma: $|K : G \cap K| \leq 5^{n-t}$.

Mivel k minimális, ezért a H_1 permutációcsoport primitív. Praeger és Saxl egy közismert tétele szerint ha P egy k-adfokú primitív permutációcsoport, amely nem tartalmazza az A_k alternáló csoportot akkor $|P| \leq 4^k$ (lásd Dixon–Mortimer: Permutation groups 176. oldal vagy Cameron: Permutation groups 113. oldal).

Tegyük fel most, hogy H_1 nem tartalmazza A_k-t. Ebből következik, hogy $|H_1| \le 5^{k-1}$ (mert $k \ge 8$ esetén $4^k < 5^{k-1}$ és $k \le 7$ esetén $|S_k| \le 5^{k-1}$). Innen az adódik, hogy $|K| \le |H_1|^t \le 5^{n-t}$.

Tegyük fel most, hogy H_1 tartalmazza A_k-t. Mivel K_1 normális H_1-ben, ezért $K_1 = 1, A_k$ vagy S_k. Ha $K_1 = 1$ akkor $K = 1$. A többi esetben a K csoport k-adfokú szimmetrikus illetve alternáló csoportok szubdirekt szorzata. Ebből azt kapjuk hogy a K' kommutátor részcsoport alternáló csoportok szubdirekt szorzata és $|K : K'| \le 2^t$. Mivel A_k nemkommutatív egyszerű csoport, ezért könnyen belátható, hogy a $\{B_1, \ldots, B_t\}$ halmaznak van egy olyan partíciója, hogy K' diagonálisan hat az egy partíciórészhez tartozó blokkokon, és K' az így kapott diagonális részcsoportok direkt szorzata. A blokkok fenti partíciója nyilvánvalóan A-invariáns. Könnyen látható, hogy A tranzitívan hat a fenti direkt szorzat összetevőin és ezért K' az A egy minimális normálosztója. Ha most G tartalmazza K'-t, akkor $|K : G \cap K| \le |K : K'| \le 2^t < 5^{n-t}$. Ha G nem tartalmazza K'-t, akkor G és K' diszjunkt normálosztók A-ban, és így felcserélhetők egymással. Mivel G tranzitív, a centralizátora szemiregularis, és ezért K' is az. Ez ellentmond a feltevésnek, miszerint K' úgy hat B_1-en, mint A_k. Ezzel a Lemmát beláttuk.

A GK/K permutációcsoport tranzitívan hat t ponton és normálosztója az A/K-nak, ezért indukcióval adódik, hogy $|A : GK| = |A/K : GK/K| \le 5^{t-1}$. A Lemmát alkalmazva azt kapjuk, hogy $|A : G| = |A : GK|\,|GK : G| = |A : GK|\,|K : GK| \le 5^{n-1}$.

5. feladat (Ruzsa Imre). *Legyen A a természetes számok végtelen részhalmaza, és jelöljük $\tau_A(n)$-nel az n szám A-beli osztóinak a számát. Konstruáljunk olyan A halmazt, amire $\sum_{n \le x} \tau_A(n) = x + O(\log\log x)$, és mutassuk meg, hogy nincs olyan A halmaz, ahol a fenti képletben a hibatag $o(\log\log x)$.*

Megoldás: Legyen $A = \{a_1 < a_2 < \ldots\}$. Ekkor

$$F(x) = \sum_{n \le x} \tau_A(n) = \sum_i [x/a_i]$$

(itt [ ] az egészrész). Legyen

$$s(A) = \limsup_{x\to\infty} \frac{|F(x) - x|}{\log\log x} \tag{1}$$

Először konstruálunk egy halmazt, amire $s(A) = \log 2$, aztán belátjuk, hogy kisebb nem lehet. Ebből a feladat állítása következik. Definiáljuk az a_i számokat a következő rekurzióval:

$$a_1 = 2, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k - 1} = 1. \tag{2}$$

Két szomszédos egyenletet kivonva kapjuk, hogy

$$a_{k+1} = 1 + a_k(a_k - 1),$$

tehát ezek a számok egészek, a sorozat eleje 2, 3, 7, 43. Ebből továbbá látszik, hogy

$$a_{k+1} - 1 > (a_k - 1)^2,$$

és innen indukcióval $a_k > 2^{2^{k-2}}$. A definícióból pedig kiolvasható, hogy

$$\sum 1/a_i = 1.$$

Emiatt

$$F(x) = \sum [x/a_i] = x - \sum \{x/a_i\}.$$

Most

$$\sum \{x/a_i\} < \sum_{a_i<x} 1 + x \sum_{a_i>x} 1/a_i.$$

Itt az első összeg az a_i-re adott alsó becslés miatt

$$< 2 + {}^2\log{}^2\log x = \log 2 \log\log x + O(1).$$

A második összeg pedig, mivel $i > 1$ esetén $a_{i+1} > 2a_i$, becsülhető így:

$$< x\big(1/x + 1/(2x) + \ldots\big) = 2.$$

Alsó becslés.

Ha $\sum 1/a_i \neq 1$, akkor már $F(x)/x$ sem tart 1-hez, a kérdezett limes persze végtelen. Feltehetjük tehát, hogy $\sum 1/a_i = 1$, és ekkor, mint az imént,

$$G(x) = x - F(x) = \sum \{x/a_i\}.$$

Mindenesetre

$$G(x) \geq x \sum_{a_i>x} 1/a_i = x\left(1 - \sum_{a_i \leq x} \frac{1}{a_i}\right).$$

Legyen $x = a_{k+1} - 1$, ekkor tehát

$$G(x) \geq x\left(1 - \frac{1}{a_1} - \ldots - \frac{1}{a_k}\right) \geq \frac{a_{k+1}-1}{a_1 \ldots a_k}, \tag{3}$$

ugyanis a zárójelben álló kifejezés pozitív racionális szám, amelynek nevezője $a_1 \ldots a_k$. Ha most van olyan $\varepsilon > 0$, hogy

$$a_{k+1} > (a_1 \ldots a_k)^{1+\varepsilon}$$

végtelen sokszor, akkor (3) miatt az ilyenekre

$$G(a_{k+1} - 1) > a_{k+1}^{\varepsilon/2},$$

az (1) határérték tehát végtelen.

Ha ilyen ε nincs, akkor az $a_{k+1} < (a_1 \ldots a_k)^{1+\varepsilon}$ becslésből indukcióval

$$a_k < 2^{2^{k+o(k)}} \tag{4}$$

adódik. Legyen most $x = a_1 \ldots a_k - 1$, akkor $\{x/a_i\} = 1 - 1/a_i$ $i \leq k$ esetén, így

$$G(x) > \sum_{i=1}^{k} 1 - \frac{1}{a_i} > k - 1,$$

tehát $G(x) \geq k$, mert egész. (4) miatt pedig $k > (\log 2 - \varepsilon)\log\log x$.

6. feladat (Csörnyei Marianna). *Meg lehet-e adni úgy köröket a síkon, hogy minden egyenes legalább* 1*-et, de legfeljebb* 100*-at messen közülük?*

Megoldás: Nem lehet megadni. A feladat szempontjából lényegtelen, hogy a kör érintését *metszésnek* tekintjük-e, mindenesetre nevezzük *átmetszésnek* azt, amikor egy egyenes két pontban metsz egy kört.

Tegyük fel, hogy van ilyen körelhelyezés. Tekintsünk egy olyan egyenest, amely maximális sok kört *metsz át*. Ezen egyenes egy pontját nevezzük ki origónak, az egyenes pedig legyen az x tengely. Világos, hogy ha az x tengelyt kicsit megforgatjuk az origó körül, továbbra is átmetszi ugyanazokat a köröket, tehát pontosan ugyanazokat a köröket metszi át. Ezért ha az x tengelyt kicsit megforgatjuk az origó körül, akkor pontosan ugyanazokat a köröket fogja elmetszeni is, mint maga az x tengely. Tehát létezik $\varphi \in (0, \pi/2)$, hogy az

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq |x| \operatorname{tg} \varphi\}$$

szögtartományba csak véges sok kör metsz bele.

Feltehetjük, hogy az origó nem esik bele egyik körbe sem. Mindenképpen megszámlálhatóan végtelen sok kör adott, jelölje sugarukat r_i, középpontjuk távolságát az origótól pedig R_i. Adjuk össze azokat a szögeket, amelyek alatt az egyes körök láthatóak az origóból (kb. r_i/R_i). Nem kaphatunk többet, mint 100-szor 180°, mert minden origón átmenő egyenes legfeljebb 100 kört metsz el. Tehát

$$\sum \frac{r_i}{R_i} < \infty.$$

Az i-edik kör középpontjának y koordinátáját jelölje y_i. Feltehető, hogy minden i-re $y_i \neq 0$. Világos, hogy az $[y_i - r_i, y_i + r_i]$ intervallumok uniója lefedi a számegyenest (mert minden vízszintes egyenes metsz el kört). Azt állítjuk, hogy ekkor

$$\sum \frac{r_i}{|y_i|} = \infty.$$

Ha végtelen sok i van, amelyre $r_i > |y_i|/10$, akkor ez világos. Egyébként pedig ezen véges sok kivételtől eltekintve $r_i/|y_i|$ konstans szorzó erejéig ugyanannyi, mint $\int_{|y_i|-r_i}^{|y_i|+r_i} \frac{1}{t}\, dt$. Mivel $\int_1^\infty \frac{1}{t}\, dt = \infty$, kapjuk, hogy $\sum \frac{r_i}{|y_i|} = \infty$.

Felhasználva a megoldás elején tett megjegyzésünket, véges sok kör kivételével

$$R_i \geq |y_i| \geq R_i \sin \varphi,$$

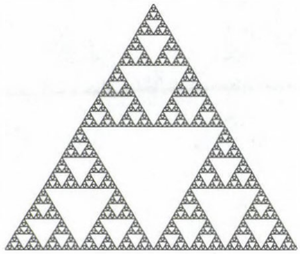
tehát $\sum \frac{r_i}{R_i} < \infty$ és $\sum \frac{r_i}{|y_i|} = \infty$ ellentmond egymásnak.

7. feladat (Bárány Imre). *Legyen* $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ *olyan folytonos függvény, amelyre* $f(x) = f(x+1)$ *minden* x*-re, legyen továbbá* $t \in [0, 1/4]$. *Bizonyítandó, hogy van olyan* $x \in \mathbb{R}$, *hogy az* $f(x-t)$*-ből az* $f(x+t)$ *pontba mutató vektor merőleges az* $f(x)$*-ből az* $f(x+1/2)$*-be mutató vektorra.*

Megoldás: Feltehetjük, hogy $t = p/(2q)$, ahol p és q nagy prímszámok, mert ebből határátmenettel következik az állítás.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, akkor minden $x \in [0, 1]$-re az $f(x+t) - f(x-t)$ és $f(x+1/2) - f(x)$ vektorok skaláris szorzata állandó előjelű. Legyen $x_i = i/(2q)$, $i = 0, 1, \ldots, 2q-1$ és $v_i = f(x_{pi})$ ahol az indexeket mod $2q$ redukáljuk. Az indirekt feltevés szerint a $(v_{i+1} - v_{i-1})(v_{i+q} - v_i)$ skaláris szorzat pozitív (vagy negatív) minden i-re. De, amint azt könnyű ellenőrizni, ezeknek a skaláris szorzatoknak az összege $i = 0, \ldots, 2q-1$-re éppen nulla.

8. feladat (Buczolich Zoltán). *Legyen S az ábrán látható Sierpinski-háromszög. Mit tudunk mondani az S-en értelmezett tipikus folytonos valós függvény $f^{-1}(y)$ szinthalmazainak Hausdorff-dimenziójáról? (Egy tulajdonság akkor teljesül az S-en értelmezett tipikus folytonos valós függvényre, ha az e tulajdonsággal nem rendelkező függvények halmaza első Baire-kategóriájú a folytonos $S \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények metrikus terében a szuprémum normával.)*



Megoldás: A kérdéses dimenzió nulla. Jelölje $\mathcal{R}(k)$ azon $(r_1, \ldots, r_{3^k}) \in \mathbb{Q}^{3^k}$ racionális szám 3^k-asok halmazát, melyekre $\forall i, j$-re ha $i \neq j$, akkor $r_i \neq r_j$. Legyen

$$\delta'_{r_1,\ldots,r_{3^k}} = \min\left\{|r_i - r_j|/3 : i, j = 1, \ldots, 3^k,\ i \neq j\right\}.$$

Ha $(r_1, \ldots, r_{3^k}) \in \mathcal{R}(k)$, akkor $\delta'_{r_1,\ldots,r_{3^k}} > 0$.

Legyen $\delta_{r_1,\ldots,r_{3^k}} = \min\left\{\frac{1}{k}, \delta'_{r_1,\ldots,r_{3^k}}\right\} > 0$.

A következőkben definiáljuk az $f_{k,r_1,\ldots,r_{3^k}} : S \longrightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényeket. A Sierpinski-háromszög k-adik szintjén levő 3^k db kis háromszög legyen $T_1, \ldots, T_{3^k}$. Tegyük fel, hogy T_i egy ilyen háromszög, melynek csúcsai a V_1, V_2 és V_3 pontok. Legyenek a $T_{i,i'}$, $i' = 1, 2, 3$, a T_i kis, 3^{-k^2} oldalhosszúságú, sarokháromszögei, $(V_{i'} \in T_{i,i'})$. Ha a $V_{i'}$ csúcs egy másik T_j háromszöghöz is hozzátartozik, akkor legyen $f_{k,r_1,\ldots,r_{3^k}}(V_{i'}) = \frac{r_i + r_j}{2}$. Ha $V_{i'}$ csak T_i-hez tartozik, akkor legyen $f_{k,r_1,\ldots,r_{3^k}}(V_{i'}) = r_i$.

Ha $x \in (T_i \cap S) \setminus \bigcup_{i'=1}^{3} T_{i,i'}$, akkor legyen $f_{k,r_1,\ldots,r_{3^k}}(x) = r_i$. Ha $x \in \bigcup_{i=1}^{3} T_{i,i'} \cap S$, akkor válasszuk meg $f_{k,r_1,\ldots,r_{3^k}}(x)$-et úgy, hogy legyen $f_{k,r_1,\ldots,r_{3^k}}$ folytonos $T_i \cap S$-en, és értékei essenek az r_i, $f(V_{i,i'})$ számok minimuma és maximuma közé.

Legyen

$$G(K) = \bigcup_{k \geq K} \ \bigcup_{(r_1,\ldots,r_{3^k}) \in \mathcal{R}(k)} B(f_{k,r_1,\ldots,r_{3^k}}, \delta_{r_1,\ldots,r_{3^k}}).$$

$G(K)$ könnyen láthatóan sűrű és nyílt $C(S)$-ben. Legyen $G = \cap_K G(K)$. Azt állítjuk, hogy G a kívánt reziduális halmaz. Legyen $f \in G$. Mivel egy kompakt halmazon értelmezett, tipikus folytonos függvény a minimumát és maximumát csak egy pontban veszi fel, így $y = m \stackrel{\text{def}}{=} \min f$ és $y = M \stackrel{\text{def}}{=} \max f$ esetén a szinthalmaz egyelemű és így 0 dimenziós. Tegyük fel, hogy $m < y < M$. Válasszunk K_0-t, hogy $m + \frac{1}{K_0} < y < M - \frac{1}{K_0}$. Mivel $f \in G(K_0)$ így van olyan $k \geq K_0$ és $(r_1, \ldots, r_{3^k}) \in \mathcal{R}(k)$, hogy $f \in B\left(f_{k,r_1,\ldots,r_{3^k}}, \delta_{r_1,\ldots,r_{3^k}}\right)$. Ekkor $y \in \left(r_i - \delta_{r_1,\ldots,r_{3^k}}, r_i + \delta_{r_1,\ldots,r_{3^k}}\right)$ csak legfeljebb 1 db $i = i_y$-ra állhat fenn. Így

$$f^{-1}(y) \subset T_{i_y} \cup \bigcup_{j=1}^{3^k} \bigcup_{i'=1}^{3} T_{j,i'}.$$

Tegyük fel, hogy $s > 0$ rögzített és $\varepsilon > 0$ adott.

$$|T_{i_y}|^s + \sum_{j=1}^{3^k} \sum_{i'=1}^{3} |T_{j,i'}|^s \leq$$

$$\leq \left(C3^{-k}\right)^s + 3^k \left(C3^{-k^2}\right)^s = C^s \left(3^{-ks} + 3^{-k^2 s + k}\right) < \varepsilon$$

ha K_0 elég nagy és $k \geq K_0$.

9. feladat (Halász Gábor). *Adott $\alpha > 0$ mellett tekintsük a $\{|z| < 1\}$ egységkörben értelmezett, reguláris, sehol sem eltűnő $f(z)$ függvényeket, amelyekre $f(0) = 1$, $\Re z\frac{f'(z)}{f(z)} > -\alpha$ $(|z| < 1)$. Mutassuk meg, hogy közülük a $g(z) = \frac{1}{(1-z)^{2\alpha}}$ függvény értékkészlete tartalmazza az összes többi értékkészletét! A $g(z)$ függvénynek azt a reguláris ágát tekintjük, amelyikre $g(0) = 1$.*

1. megoldás: Ehhez minden szükséges előismeret szerepel az egyetemi bevezető komplex függvénytani előadásban.

Ha $0 \leq r < 1$, akkor az $f(rz)$ függvény is teljesíti a feltételeket. Ha erre már tudnánk az állítást, akkor r-rel tartva 1-hez adódna, hogy minden $f(z)$ $(|z| < 1)$ érték a szóbanforgó értékkészlet lezárásában van. A határára azonban csak akkor eshetne, ha az $f(z)$ függvény konstans volna, amikor pedig minden triviális.

Feltehető tehát, hogy $f(z)$ az egységkörnél nagyobb tartományban is teljesíti a feltételeket, speciálisan

$$u(z) \stackrel{\text{def}}{=} \Re z\frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha > 0$$

a zárt egységkörben is folytonos, a nyíltban harmonikus függvény.

Mint ilyen, sőt az a reguláris függvény is, amelynek ő a valós része, kiszámítható a kerületen felvett értékei segítségével:

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} u(e^{i\varphi})\, d\varphi \quad \left(|z| < 1\right);$$

általában egy additív imaginárius tagra is szükség van, itt azonban $z = 0$-ban mind a bal oldal, α, mind a jobb oldal,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi})\, d\varphi$$

valós.

Ezen utóbbi integrál értéke tehát α, és képletünket így is írhatjuk:

$$z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{z}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\varphi} - z} u(e^{i\varphi})\, d\varphi,$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\varphi}}{1 - e^{-i\varphi}z} u(e^{i\varphi})\, d\varphi,$$

A hatványfüggvény értelmezésével összhangban a $\log \frac{1}{1-z}$ függvényen az origóban eltűnő reguláris ágat fogjuk mindig érteni. Mindkét oldalt 0-tól integrálva

$$\log f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1 - e^{-i\varphi} z} u(e^{i\varphi})\, d\varphi =$$

$$= 2\alpha \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{1 - e^{-i\varphi} z} \frac{u(e^{i\varphi})}{2\pi\alpha}\, d\varphi,$$

a bal oldalon $\log f(z)$-nek az origóban eltűnő reguláris ágával. Azért emeltük ki a 2α-t, mert így az utolsó integrál a $\log \frac{1}{1-z}$ függvény értékeinek pozitív súllyal;

$$\int_0^{2\pi} \frac{u(e^{i\varphi})}{2\pi\alpha}\, d\varphi = 1$$

összsúllyal vett átlagának tekinthető. Mint ilyen, benne van a $\log \frac{1}{1-z}$ $\big(|z| < 1\big)$ függvény értékkészletének konvex burkában.

Ez az értékkészlet azonban maga konvex. Valóban, az $1 - z = \varrho e^{i\vartheta}$ polárkoordinátás alakban az egységkör pontjait $|\vartheta| < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varrho < 2\cos\vartheta$ jellemzi, tehát az értékkészlet a

$$\left\{ \sigma - i\vartheta : |\vartheta| < \frac{\pi}{2},\ \sigma > \log \frac{1}{2\cos\vartheta} \right\}$$

halmaz, és a $\log \frac{1}{2\cos\vartheta}$ $\big(|\vartheta| < \frac{\pi}{2}\big)$ határológörbe valóban konvex függvény.

$\log f(z)$ értékkészlete tehát része a $2\alpha \log \frac{1}{1-z}$ függvényének, $f(z)$-é az $\frac{1}{(1-z)^{2\alpha}}$ függvényének.

A feladat megfogalmazásában az is benne van, hogy az $f(z) = \frac{1}{(1-z)^{2\alpha}}$ függvény is egyike a tekintetteknek, ami

$$z \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{2\alpha z}{1 - z}$$

alapján világos, hiszen a lineáris törtfüggvény a $\{\Re w > -\alpha\}$ félsíkra képezi az egységkört.

2. megoldás: Megmutatjuk, hogy

$$f(z) = \frac{1}{\big(1 - w(z)\big)^{2\alpha}} \qquad \big(|z| < 1\big),$$

alkalmas, az egységkörben reguláris $w(z)$ függvénnyel, amelyre $\big|w(z)\big| < 1$ $\big(|z| < 1\big)$. Ezzel készen leszünk. Azokban az esetekben, amikor $\frac{1}{(1-z)^{2\alpha}}$ konform leképezést valósít meg, egy ilyen előállítás valójában ekvivalens a feladat állításával.

Úgy mondják, hogy $f(z)$ szubordináltja $\frac{1}{(1-z)^{2\alpha}}$-nak. A szubordináció elméletének egy ismert technikáját használjuk.

$w(z)$ értelmezése magától adódik:

$$w(z) \stackrel{\text{def}}{=} 1 - f(z)^{-\frac{1}{2\alpha}}$$

$\log f(z)$-nek azzal a reguláris ágával, amelyik $z = 0$-ban 0-t vesz fel. Azt kell tehát csak megmutatnunk, hogy $\big|w(z)\big| < 1$ $\big(|z| < 1\big)$.

Ellenkező esetben volna egy legkisebb abszolút értékű $z_0 \overset{\text{def}}{=} r_0 e^{i\vartheta_0}$, $0 < r_0 < 1$, amelyre $|w(z_0)| = 1$; $r_0 = 0$ azért nem lehet, mert $w(0) = 0$.

A $z = re^{i\vartheta}$ jelöléssel, ahol $w(z) \neq 0$,

$$\frac{\partial \log |w(re^{i\vartheta})|}{\partial \vartheta} = \Re \frac{\partial \log w(re^{i\vartheta})}{\partial \vartheta} = \Re \frac{w'(z)}{w(z)} rie^{i\vartheta} = -\Im z \frac{w'(z)}{w(z)},$$

$$\frac{\partial \log |w(re^{i\vartheta})|}{\partial r} = \Re \frac{\partial \log w(re^{i\vartheta})}{\partial r} = \Re \frac{w'(z)}{w(z)} e^{i\vartheta} = \frac{1}{r} \Re z \frac{w'(z)}{w(z)}.$$

z_0 definíciójából következik, hogy $|w(z)|$ z_0-ban felveszi a maximumát az r_0 sugarú körvonalon, tehát a most kiszámolt ϑ szerinti parciális eltűnik z_0-ban, más szóval

$$z_0 \frac{w'(z_0)}{w(z_0)} \overset{\text{def}}{=} \varrho$$

tisztán valós.

Ugyancsak z_0 definíciója alapján látjuk, hogy $|w(z)| < 1$ $(|z| < r_0)$, tehát a $w(z_0 z)$ függvény teljesíti a Schwarz-lemma feltételeit, ezért

$$|w(z_0 z)| \leq |z| \quad (|z| < 1), \quad |w(z_0 r)| \leq r = |w(z_0)| r \quad (0 \leq r < 1).$$

Innen

$$\left. \frac{\partial \log |w(re^{i\vartheta})|}{\partial \vartheta} \right|_{z_0} = \lim_{r \to 1-0} \frac{\log \left| \frac{w(z_0)}{w(z_0 r)} \right|}{r_0 - r_0 r} \geq \lim_{r \to 1-0} \frac{\log \frac{1}{r}}{r_0(1-r)} = \frac{1}{r_0},$$

tehát az r szerinti derivált képlete szerint

$$\varrho = z_0 \frac{w'(z_0)}{w(z_0)} = \Re z_0 \frac{w'(z_0)}{w(z_0)} \geq 1.$$

(Amit eddig a $w(z)$-re tett feltevésből levezettünk, azt az elméletben Jack-lemmának nevezik.)

Esetünkben

$$w'(z) = \frac{1}{2\alpha} f(z)^{-\frac{1}{2\alpha}-1} f'(z) = \frac{1}{2\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} \big(1 - w(z)\big),$$

$$\varrho = z_0 \frac{1}{2\alpha} \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \frac{1 - w(z_0)}{w(z_0)},$$

$$z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = 2\alpha\varrho \frac{w(z_0)}{1 - w(z_0)}.$$

Mivel $|w(z_0)| = 1$, és az $s = \frac{w}{1-w}$ lineáris törtfüggvény az egységkörvonalat a $\Re s = -\frac{1}{2}$ függőlegesre képezi, továbbá α és ϱ pozitív valós szám, $\varrho \geq 1$,

$$\Re z_0 \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} \leq -\alpha,$$

ellentmondásban a feladat feltételével.

10. feladat (Szűcs András). Jelölje V az $\mathbb{R}^3$ nem kollineáris rendezett vektorpárjainak halmazát, H pedig az $\mathbb{R}^3$ origón átmenő egyeneseinek a halmazát. Igaz-e, hogy bármely $f : V \to H$ folytonos függvényhez létezik olyan $g : V \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ folytonos függvény, amire $g(v) \in f(v)$ minden $v \in V$ esetén?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy mindig létezik a keresett g függvény. Vegyük észre, hogy H igazából a projektív sík, és jelöljük $p : S^2 \to H$-val azt a leképezést, ami az S^2 egységgömb egy adott pontjához a rajta és az origón átmenő egyenest rendeli. Ez tulajdonképpen a szokásos $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ 2 rétű fedés. Ismeretes, hogy egy $f : X \to \mathbb{R}P^2$ függvényt pontosan akkor lehet „felemelni" egy $g : X \to S^2$ függvénnyé (azaz megadni egy $g : X \to S^2$ folytonos függvényt, amire $p \circ g = f$) ha $f_*(\pi_1(X)) \subset p_*(\pi_1(S^2))$. Mivel ez utóbbi egyelemű, ezért a feladat megoldásához tulajdonképpen pontosan azt kell belátni, hogy bármely $f : V \to H$ leképezés minden V-beli hurkot null-homotóp hurokba visz.

Ehhez először is vegyük észre, hogy V homotóp ekvivalens $\mathbb{R}P^3$-mal, amire az $\mathbb{R}^3$ rendezett ortogonális egységvektor-párjaiként gondolhatunk. Mivel $\pi_1(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}_2$, ezért V-ben egyetlen nem triviális hurokosztály van, erről kellene belátni, hogy f null-homotóp hurokba viszi. (Ez az állítás tulajdonképpen a Borsuk–Ulam-tétel egy átfogalmazása.)

A befejezéshez több út is kínálkozik: A legrövidebb kohomológiát használni: ha $\pi_1(\mathbb{R}P^3)$ generátora nem 0-ba megy, akkor csakis $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ generátorába mehet. Ekkor viszont $f^* : H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2) \to H^1(\mathbb{R}P^3, \mathbb{Z}_2)$ is a generátort a generátorba viszi. De ekkor $0 = f^*(x^3) = f^*(x)^3 \neq 0$, ami ellentmondás ($x \in H^1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$ a generátor).

Elemibb befejezés a következő (vázlatosan): Bármely $f : \mathbb{R}P^3 \to \mathbb{R}P^2$ leképezés felemelhető egy $f' : S^3 \to S^2$ leképezéssé. Ha f a nem triviális hurkot a nem triviális hurokba viszi, akkor f' antipodális, azaz $f'(-x) = -f'(x)$. Szorítsuk meg f'-t az S^3 egyenlítőjére, ekkor kapunk egy $h : S^2 \to S^2$ leképezést, ami még mindig antipodális. Ismert, hogy minden $S^2 \to S^2$ antipodális leképezés foka páratlan. Másrészt mivel h kiterjed az S^3 felső félgömbjére (maga f' a kiterjesztés!), ezért h null-homotóp, tehát a foka nulla. Ez ellentmondás, így a bizonyítást befejeztük.

11. feladat (Major Péter). *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ (nem feltétlenül független) normális eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_j = 0$, $E\xi_j^2 \le 1$, $1 \le j \le n$. Bizonyítsuk be, hogy $E\big(\max_{1\le j\le n} \xi_j\big) \le \sqrt{2\log n}$.*

Megoldás: A Jensen-egyenlőtlenség alapján tetszőleges $t > 0$ számra

$$tE\Big(\max_{1\le j\le n} \xi_j\Big) \le \log E \exp\Big\{t \max_{1\le j\le n} \xi_j\Big\} \le \log E\Big(\sum_{j=1}^{n} e^{t\xi_j}\Big) \le \log ne^{t^2/2}.$$

Innen $E\big(\max_{1\le j\le n} \xi_j\big) \le \big(\frac{\log n}{t} + \frac{t}{2}\big)$ és $t = \sqrt{2\log n}$ választással kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Modok és Társa Nyomda, Kiskunhalas • www.modokestarsa.hu

Matematikai Lapok

Elekes György
Emlékszám

2009/2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 15. évfolyam (2009), 2. szám

(Megjelent 2010-ben)

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
– A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
– nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

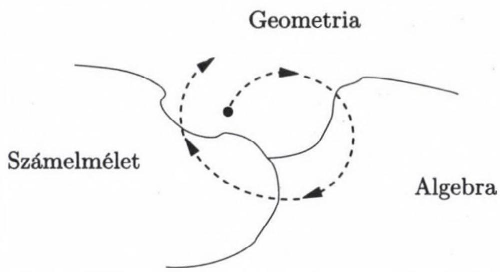
A Matematikai Lapok megjelenését támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

NÉHÁNY KOMBINATORIKUS PROBLÉMÁRÓL VII. RÉSZ: SZABÁLYOS STRUKTÚRÁK A GEOMETRIÁBAN, SZÁMELMÉLETBEN ÉS ALGEBRÁBAN

ELEKES GYÖRGY

Bevezetés

Ismerős vidékekre kalauzoljuk most az Olvasót, de új céllal: aratni indulunk a kombinatorikus geometria, algebra és számelmélet hármas határára.



Jártunk már mindhárom tájon. Az akkor elvetett magok kikeltek, szárba szökkentek és most (szinte erőfeszítés nélkül) bőséges termést takaríthatunk be.

Először idézzünk fel néhány eredményt, amelyekre szükségünk lesz!

1. Előzmények

(a) A számelméletben megismertük az $\{a + k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + \ldots + k_d\Delta_d;\ \forall\, i \leq d\text{-re}\ 0 \leq k_i \leq n_i - 1\}$ általánosított számtani sorozatokat és az $\{a \cdot q_1^{k_1} \cdot q_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot q_d^{k_d};\ \forall\, i \leq d\text{-re}\ 0 \leq k_i \leq n_i - 1\}$ általánosított mértani sorozatokat, ahol d a sorozat dimenziója és $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_d$ a „mérete". Említettük a „nem túl nagy" összeg- vagy szorzathalmazzal rendelkező $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ vagy $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ számhalmazok struktúráját is (lásd IV. rész 2.3. és 2.4. tétel)[1]:

[1] *Matematikai Lapok,* 2004–2005/1.

1.1. állítás ([4], [5], [6], [7], [1]). *Ha $|\mathcal{A}|, |\mathcal{B}| \geq n$ és $|\mathcal{A}+\mathcal{B}| \leq Cn$ vagy $|\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}| \leq Cn$, akkor $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$-t tartalmazza egy általánosított számtani vagy mértani sorozat, melynek dimenziója $\leq d^*$ és mérete $\leq C^*n$ (alkalmas, n-től független $d^* = d^*(C)$ és $C^* = C^*(C)$ konstansokkal). Ugyanez igaz marad akkor is, ha $|\mathcal{A}-\mathcal{B}| \leq Cn$ vagy $|\mathcal{A}/\mathcal{B}| \leq Cn$.*

(**b**) Az algebrában kis kompozícióhalmazokat vizsgáltunk. Az $y = mx + b$ alakú (valós vagy komplex változós) lineáris függvények véges Φ, Ψ részhalmazaira $\Phi\circ\Psi$ jelölte a $\{(\varphi\circ\psi)\,;\ \varphi\in\Phi,\ \psi\in\Psi\}$ kompozícióhalmazt. A VI. rész[2] 5.2. tételében láttuk az alábbit (pontosabban ennél általánosabbat).

1.2. állítás. *Ha $|\Phi|, |\Psi| \geq n$ és $|\Phi\circ\Psi| \leq Cn$, akkor valamelyik $S\subset\mathcal{L}$ Abel-részcsoport szerinti alkalmas φS baloldali mellékosztályba „sok" eleme esik Φ-nek; pontosabban*

$$|\Phi\cap\varphi S| \geq c^*n,$$

ahol c^* csak C-től függ, n-től nem.

(**c**) A geometriában (VI. rész 1.1. állítás és 1.4. tétel) láttuk a következőket.

1.3. állítás.

(i) *Egy legfeljebb $n\times n$-es Descartes-szorzatból legfeljebb C^*n egyenes tartalmazhat egyenként cn pontot (azaz cn-gazdag);*

(ii) *Ha létezik c_1n darab c_2n-gazdag átló (azaz se nem vízszintes, se nem függőleges egyenes), akkor ezek között vagy c_3n darab párhuzamos, vagy c_3n darab egy közös ponton megy át – ahol $c_3 = c_3(c_1, c_2)$ nem függ n-től.*

Ugyancsak geometriai problémákkal foglalkozott az V. rész[3]: a hasonló részhalmazok számával. Láttuk ott, hogy egy rögzített mintának akár n^2 körüli darabszámú példánya is előfordulhat n pont között – bár a valóban négyzetes nagyságrend nem mindig volt elérhető.

Nem látszik ugyan, hogy a fenti (a)–(b)–(c) alatti három téma különösebben erős kölcsönhatásban állna egymással, de meggyőződhetünk majd róla, hogy a kapcsolat erősebb, mint gondolnánk.

Jelen rész eredményeinek közös tulajdonsága, hogy a korábbiaknál erősebb feltételekből kiindulva szigorúbb, a ponthalmazok szerkezetét teljesen leíró struktúrákat találunk. (Ezek a számelméleti általánosított számtani és mértani sorozatok rokonai s egyben általánosításai lesznek.)

Ugyancsak említésre méltó lehet, hogy a 3.3. szakasztól kezdve a bizonyítandó tételek nagy része az 1.1. állítás két, összegekre, illetve szorzatokra vonatkozó alakjának közös általánosítása lesz: ezek tipikusan úgy adódnak majd speciális esetként, ha egyszerű, $y = x + b$ vagy $y = mx$ alakú függvényekre, illetve azok grafikonjaira

[2] *Matematikai Lapok,* 2009/1.
[3] *Matematikai Lapok,* 2008/1.

alkalmazzuk az eredményeket. (Ez nem jelenti azt, hogy a fenti állításra új bizonyítást is kapnánk, mert az ismertetendő eredmények mind a kis összeg- és szorzathalmazok karakterizációján alapulnak.)

Ezen rész körsétájának kiindulópontja az utóbbi geometriai kérdés „nagy hasonló részhalmazokra" vonatkozó változatának vizsgálata.

2. Nagy hasonló részhalmazok

Az V. részben tetszőleges $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ ponthalmazokra $H(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-vel jelöltük $\mathcal{A}$ hasonló példányainak számát $\mathcal{B}$-ben, azaz

$$H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \#\{\mathcal{A}' \subset \mathcal{B};\ \mathcal{A}' \sim \mathcal{A}\},$$

ahol „$\sim$" azt jelöli: azonos körüljárású hasonló; azaz kicsinyített vagy nagyított, esetleg elforgatott vagy eltolt példány.

2.1. definíció. Tetszőleges $k, n \in \mathbb{N}$ természetes számokra legyen

$$h(k,n) \stackrel{\text{def}}{=} \max\big\{H(\mathcal{A}, \mathcal{B});\ |\mathcal{A}| = k,\ |\mathcal{B}| = n\big\}.$$

Ez a legnagyobb darabszám, ami adott méretű, ügyesen választott $\mathcal{A}$-ra és $\mathcal{B}$-re elérhető.

Például megkérdezhetjük, hogy egy n elemű ponthalmaznak hány $\sqrt{n}$ pontú vagy $n/100$ pontú részhalmaza lehet hasonló egymáshoz; ez $h(\sqrt{n}, n)$, illetve $h(n/100, n)$ meghatározását igényli.

A következő általános kérdés, amivel foglalkozunk:

mi a $h(k,n)$ kétváltozós függvény nagyságrendje?

Mint az V. részben láttuk, $h(k,n) \le 2n(n-1)$, hiszen $\mathcal{A}$ egy adott pontja n helyre képződhet; egy másik legfeljebb $n-1$-re és egy harmadik már legfeljebb kettőre. Fix k-ra ez a nagyságrend el is érhető, így ekkor h másodfokú.

Mi a helyzet, ha k végtelenhez tart n-nel együtt, például (mint fentebb), n elemű halmazokban sok hasonló $k = \sqrt{n}$ vagy $k = n/100$ elemű részt keresünk? A pontos nagyságrendet a következő állítás mutatja.

2.2. tétel. *Van olyan $C > 0$ konstans, hogy*

$$h(k,n) \le C\frac{n^2}{k}.$$

Továbbá $n \ge 2k$ esetén

$$h(k,n) \ge \frac{1}{16}\,\frac{n^2}{k}.$$

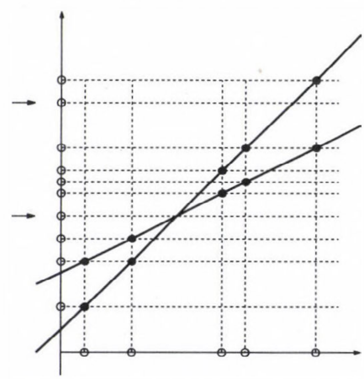
Bizonyítás. Először az alsó becslést igazoljuk. Ez egyszerűen következik abból, hogy egy n tagú számtani sorozat egy k tagúnak legalább $\lfloor n/(2k)\rfloor\lfloor n/2\rfloor$ hasonló példányát tartalmazza (és $\lfloor x\rfloor \geq x/2$, ha $x \geq 1$).

Az felső becslés bizonyítása céljából tegyük fel, hogy valamely k, n számpárra egy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ halmazpár adja a maximumot, azaz $|\mathcal{A}| = k$, $|\mathcal{B}| = n$ és $H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = h(k, n)$. Először azt az esetet igazoljuk, amikor $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ kollineárisak; az egyszerűség kedvéért legyen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$. Jelöljük $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_h$-val $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$-ben előforduló hasonló példányait, és legyen

$$f_i(x) = m_i x + b_i \qquad (i = 1, \ldots, h)$$

az a lineáris leképezés (hasonlóság), amelyik $\mathcal{A}$-t $\mathcal{A}_i$-be viszi, azaz $f_i(\mathcal{A}) = A_i$. (E függvények megjelenése már jelzi, hogy közeledünk az algebra határához!)

Az $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ Descartes-szorzatból minden f_i grafikonja k pontot tartalmaz, éspedig minden $a \in \mathcal{A}$-ra $\big(a, f_i(a)\big)$-t (lásd 1. ábra). A Szemerédi–Trotter-tétel (II. rész



1. ábra. $k \times n$-es Descartes-szorzat k pontú átlói.

1.5. tétele)[4] azt állítja, hogy a sík N pontjából legalább k-t tartalmazó egyenesek száma $\leq CN^2/k$, ha $2 \leq k \leq \sqrt{n}$. Eszerint – felhasználva, hogy $k \leq \sqrt{|\mathcal{A} \times \mathcal{B}|} = \sqrt{kn}$ – az ilyen grafikonok (egyenesek) száma legfeljebb

$$h \leq C\frac{|\mathcal{A} \times \mathcal{B}|^2}{k^3} = C\frac{(kn)^2}{k^3} = C\frac{n^2}{k}.$$

Az általános (nem feltétlenül kollineáris) esetre térve: a bizonyítás ugyanez, csak most $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ elemeit komplex számokkal reprezentáljuk, az f_i függvények m_i és b_i együtthatói is komplex számok lesznek, valamint a valós Szemerédi–Trotter-tétel helyett a II. rész 1.8. megjegyzését alkalmazzuk $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathbb{C}^2$-re. ∎

A bizonyítás nem véletlenül volt ismerős: a VI. részben már szóba kerültek $k \times n$-es Descartes-szorzatok sok k-gazdag egyenessel. Ott láttuk azt is, hogy az ilyen egyenesek száma legfeljebb Cn^2/k, ami éppen a fenti felső becsléssel ekvivalens.

A nagyságrend ismeretében természetes a következő kérdés.

[4] *Matematikai Lapok,* 1998–99/1–2.

2.3. probléma. *Milyen szerkezetű $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ halmazokra lesz $H(\mathcal{A},\mathcal{B})$ aszimptotikusan legjobb, azaz mikor teljesül $|\mathcal{A}| = k$, $|\mathcal{B}| = n$ és $H(\mathcal{A},\mathcal{B}) \geq c_0 n^2/k$, valamely fix $c_0 > 0$-ra?*

I. A „kis" halmazok esetét (amikor k fix és $n \to \infty$) elemeztük az V. részben.

II. A „közepes" halmazok esete, vagyis amikor $k \to \infty$ de $k/n \to 0$, teljesen megoldatlan. Ennek oka valószínűleg az, hogy a Szemerédi–Trotter-tétel aszimptotikusan extrém konfigurációinak leírása még senkinek sem sikerült. (Lehetséges, hogy ez nem is lesz könnyű.)

III. A „nagy" hasonló részhalmazok struktúrája – az előbb vázolt nehézségek ellenére – leírható! Olyan $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$-ket tekintünk tehát, amelyekre $|\mathcal{A}| \geq c_0|\mathcal{B}|$. A jelölést kissé egyszerűsítve (eggyel kevesebb változót használva) a

$$k = |\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}| \leq Ck \quad \text{és} \quad H(\mathcal{A},\mathcal{B}) \geq ck \tag{1}$$

feltételeket teljesítő halmazpárokat vizsgáljuk $k \to \infty$ mellett, miközben $C \geq 1$ és $c > 0$ rögzített. Az (1) képlet éppen azt jelenti, hogy $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ optimális nagyságrendű példát ad.

Az első érdekesség az, hogy ilyenkor a számtani sorozatokon kívül új lehetőség is felmerül: ha $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ azonos hányadosú *mértani* sorozatok, $|\mathcal{A}| = k$ és $|\mathcal{B}| = Ck$, akkor $H(\mathcal{A},\mathcal{B}) \geq (C-1)k = C_0 k$, feltéve, hogy $C > 1$.

Továbbá – bár ez nem meglepő – a számtani és mértani sorozatok mellett az általánosított számtani és mértani sorozatok is megfelelnek.

2.4. példa. Legyen a $\mathcal{G}^+$ általánosított számtani sorozat, illetve a $\mathcal{G}^\bullet$ általánosított mértani sorozat dimenziója d – következésképpen $|\mathcal{G}^+ + \mathcal{G}^+| \leq 2^d|\mathcal{G}^+|$, illetve $|\mathcal{G}^\bullet \cdot \mathcal{G}^\bullet| \leq 2^d|\mathcal{G}^\bullet|$. Válasszunk ki (véletlenszerűen vagy valamilyen szabály szerint) egy $\mathcal{A}$ részhalmazt, melynek elemszáma $k = |\mathcal{A}| \geq \varepsilon|\mathcal{G}|$, és legyen $\mathcal{B} = \mathcal{G}^+ + \mathcal{G}^+$, illetve $\mathcal{B} = \mathcal{G}^\bullet \cdot \mathcal{G}^\bullet$. Ekkor az $f_i(x) = x + g_i$ ($g_i \in \mathcal{G}^+$), illetve $f_i(x) = g_i x$ ($g_i \in \mathcal{G}^\bullet$) függvények grafikonjai $k = |\mathcal{A}|$-gazdagok lesznek $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-ben, hiszen tartalmazzák az $(a_j, f_i(a_j))$ pontokat minden $a_j \in \mathcal{A}$-ra. Ugyanakkor $\mathcal{B}$ mérete

$$|\mathcal{B}| \leq 2^d|\mathcal{G}| \leq 2^d\frac{|\mathcal{A}|}{\varepsilon} = \frac{2^d}{\varepsilon}k = Ck,$$

és az f_i függvények száma $|\mathcal{G}| \geq |\mathcal{A}| = k$.

Ugyanez(ek) a konstrukció(k) nagy hasonló részhalmazokra fogalmazva azt mutatja(ák), hogy

> *a legfeljebb $Ck = (2^d/\varepsilon)k$ méretű $\mathcal{B}$ halmazban előfordulhat a k elemű $\mathcal{A}$-nak legalább k hasonló példánya.*

Az alábbi eredmény azt állítja, hogy lényegében csak ezek a példák léteznek. A „lényegében" úgy értendő, hogy a $\mathcal{B}$ halmazból természetesen csak azon *rész*halmaz szerkezete írható le, melynek pontjai $\mathcal{A}$-nak *legalább egy* hasonló példányába beleesnek (a maradék nyilván bármilyen lehet). Ezért vezetünk be még egy jelölést:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup\{\mathcal{A}' \subset \mathcal{B};\ \mathcal{A}' \sim \mathcal{A}\}.$$

Érdekessége lesz a tételnek, hogy a fenti $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$-nak *kivétel nélkül minden pontjára* vonatkozik – még azokra is, amelyek csak egyetlen $\mathcal{A}'$-be esnek bele [2].

2.5. tétel. *Ha $k = |\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}| \leq Ck$ és $H(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq ck$, akkor létezik $\mathcal{G}$ általánosított számtani vagy mértani sorozat, melyre*

(i) *$\mathcal{G}$ dimenziója legfeljebb d^*, mérete legfeljebb C_1^*;*

(ii) *$\mathcal{G}$ alkalmas eltoltja tartalmazza $\mathcal{A}$-t;*

(iii) *$\mathcal{B}_{\mathcal{A}}$ lefedhető $\mathcal{G} + \mathcal{G}$, illetve $\mathcal{G} \cdot \mathcal{G}$ korlátos számú (legfeljebb C_2^* darab) eltolt és/vagy elforgatott példányával,*

ahol $d^* = d^*(c, C)$, $C_1^* = C_1^*(c, C)$ és $C_2^* = C_2^*(c, C)$ nem függ k-tól.

A bizonyítás a 4.1. szakaszra marad. A 3. szakaszban kidolgozandó algebrai módszerekből (speciálisan a 3.4. tételből) következik majd a fenti állítás (lásd 4.1. tétel).

Megjegyezzük még, hogy magasabb dimenziókban csak a sok *homotetikus* – azaz középpontosan hasonló, tehát kicsinyített vagy nagyított, de *el nem forgatott* – példányt tartalmazó halmazok struktúrája ismert [3].

3. Algebra – kitekintéssel két irányban

3.1. Geometria és kompozíciók. Ismét a VI. részben látott módszert követjük: ha sok függvényünk van, de nem elég, komponáljuk őket egymással!

Szokásunk szerint $\mathcal{L}$-lel jelöljük az $x \mapsto mx + b$ $(m \neq 0)$ alakú nem konstans, lineáris függvények osztályát. A $\varphi \circ \psi : x \mapsto \varphi(\psi(x))$ kompozíció $\mathcal{L}$-beli függvényekhez $\mathcal{L}$-beli függvényt rendel; még az is igaz, hogy $\mathcal{L}$ a „$\circ$" művelettel csoportot alkot. E csoport egységeleme („neutrális eleme") a $\varphi(x) = x$ identitás-függvény; ezt a továbbiakban **id**-del jelöljük.

Legyen $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s\} \subset \mathcal{L}$ ilyen függvények tetszőleges halmaza, és vezessük be a $\Phi \circ \Phi^{-1}$ jelölést a $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ típusú kompozíciók halmazára, ahol $1 \leq i, j \leq s$.

3.1. lemma. *Legyen $k = |\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}| \leq Ck$ és $s \geq ck$, ahol $C > 1$ és $c > 0$ rögzített. Ha a $\varphi_i \in \Phi$ nem konstans, lineáris függvények $(i \leq s)$ grafikonja egyenként k pontot tartalmaz $\mathcal{A} \times B$-ből, akkor*

$$|\Phi \circ \Phi^{-1}| \leq C^{**}|\Phi|. \qquad (2)$$

(Itt $C^{**} = C^{**}(C, c)$ nem függ k-tól.)

Bizonyítás. Ha $\varphi_i(x) = m_i x + b_i$ és $\varphi_j(x) = m_j x + b_j$ grafikonja egyaránt k pontot tartalmaz $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-ből, akkor a $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ kompozíció – vagyis a $\varphi_i(\varphi_j^{-1}(x))$ közvetett függvény – $\mathcal{B}$-nek legalább k elemét viszi $\mathcal{B}$-belibe; éspedig a $\{\varphi_j(x)\,;\ x \in \mathcal{A}\}$ alakúakat mindenképpen. Más szóval, $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ grafikonjára a legfeljebb $Ck \times Ck$ elemű $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ (nem sajtóhiba!) Descartes-szorzat legalább k pontja illeszkedik. Az 1.3.(i) állítást $n = Ck$-ra alkalmazva valóban

$$|\Phi \circ \Phi^{-1}| \le C^*|\mathcal{B}| \le C^*Ck = \frac{C^*C}{c}ck \le \frac{C^*C}{c}|\Phi| = C^{**}|\Phi|. \ \blacksquare$$

3.2. Tiszta algebra: részcsoportok és mellékosztályok. Az előző szakaszban arra jutottunk, hogy a

$$(3) \qquad |\Phi \circ \Phi| \le C|\Phi| \quad \text{vagy} \quad |\Phi \circ \Phi^{-1}| \le C|\Phi|$$

feltételt teljesítő Φ függvényhalmazok szerkezetét kell leírnunk (a 3.1. lemmában az utóbbi típust láttuk).

Mostantól kezdve a $|\Phi| = n$ jelölést használjuk. Továbbá, ha $\varphi \in \mathcal{L}$ és $\Phi \subset \mathcal{L}$ tetszőlegesek, akkor a $\psi\Phi$ „egymás mellé írás" jelentése

$$\psi\Phi = \psi \circ \Phi = \{\psi \circ \varphi\,;\ \varphi \in \Phi\}.$$

A nem konstans, lineáris függvények $\mathcal{L}$ csoportjában a 45°-os grafikonú

$$S^+ = \{x \mapsto x + c\,;\ c \in \mathbb{C}\}$$

függvényhalmaz részcsoportot, éspedig Abel-féle (kommutatív) részcsoportot alkot. Hasonló részcsoport az origón átmenő grafikonú

$$S_0^\bullet = \{x \mapsto cx\,;\ c \in \mathbb{C} - \{0\}\}$$

függvényhalmaz (a $+$, illetve $\bullet$ felső indexekkel a megfelelő műveleteket jelöljük), sőt bármely u-ra az (u, u) ponton átmenő grafikonú

$$S_u^\bullet = \{x \mapsto c(x-u) + u\,;\ c \in \mathbb{C} - \{0\}\}$$

halmaz is Abel-részcsoport. Utóbbiak az $S_0^\bullet$ konjugáltjai az $\eta_u(x) = x + u$ függvényekkel. (Valóban, $\eta_u \circ S_0^\bullet \circ \eta_u^{-1} = S_u^\bullet$.) S^+-nak azért nincsenek hasonló rokonai, mert őt bármivel konjugálva saját magát kapjuk vissza. (Algebrailag: S^+ normális részcsoport, azaz normálosztó.) Az is könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathcal{L}$-nek minden Abel-részcsoportja izomorf a fent említettek egy részcsoportjával.

Ha nem 45°-os, hanem tetszőleges rögzített $m \ne 0$ meredekségű grafikonnal rendelkező lineáris függvényeket tekintünk, ezek S^+ egy mellékosztályát alkotják, éspedig a $\zeta_m(x) = mx$ függvénnyel képezett akár baloldali, akár jobboldali $\zeta_m \circ S^+$ vagy $S^+ \circ \zeta_m$ mellékosztályokat. Hasonlóan, ha egy rögzített (a, b) ponton átmenő grafikonúakat vizsgálunk, ezek (a korábban használt $\eta_u(x) = x + u$ jelöléssel) az $\eta_{b-a} \circ S_a^\bullet$ vagy $S_b^\bullet \circ \eta_{b-a}$ mellékosztályokat alkotják. Az 1.2. állítás szerint éppen ezen két mellékosztálytípus fordul elő szükségképpen minden kis kompozícióhalmazban; még az általánosabb $\Phi \circ \Psi$ alakúakban is.

Megmutatjuk, hogy ennél több is igaz: az *egész* Φ és az *egész* Ψ korlátos számú mellékosztály egyesítésébe esik.

3.2. tétel. *Minden $C > 0$-ra létezik $C^* = C^*(C) > 0$ a következő tulajdonsággal. Legyen $\Phi, \Psi \subset \mathcal{L}$, melyekre $|\Phi|, |\Psi| \geq n$, és tegyük fel, hogy*

$$|\Phi \circ \Psi^{-1}| \leq Cn.$$

Ekkor létezik olyan $S \subset \mathcal{L}$ Abel-részcsoport, éspedig vagy S^+, vagy valamely $S_u^\bullet$, melynek korlátos számú baloldali mellékosztálya lefedi Φ-t és Ψ-t. Más szóval létezik $\Omega \subset \mathcal{L}$, hogy $|\Omega| \leq C^*$ és

$$\Phi \cup \Psi \subset \Omega \circ S. \tag{4}$$

Bizonyítás (vázlat). Azt az ismert tényt használjuk majd többször is, hogy két különböző baloldali (vagy két különböző jobboldali) mellékosztály mindig diszjunkt.

Először alkalmazzuk az 1.2. állítást! Vagy $S = S^+$-nak, vagy valamely $S = S_u^\bullet$-nak egyetlen φS baloldali mellékosztályában olyan $\Phi^* = \Phi \cap \varphi S$-et kapunk, melynek mérete $|\Phi^*| \geq c^* n$.

Ha a $\psi_1^{-1}, \psi_2^{-1} \in \Psi^{-1}$ elemek az S szerinti különböző *jobb*oldali mellékosztályokba esnek, akkor – mint a bizonyítás elején említettük – $S\psi_1^{-1}$ és $S\psi_2^{-1}$ diszjunktak; következésképpen $\varphi S\psi_1^{-1}$ és $\varphi S\psi_2^{-1}$ valamint, utóbbiak részhalmazaiként $\Phi^* \circ \psi_1^{-1}$ és $\Phi^* \circ \psi_2^{-1}$ is diszjunktak lesznek. Eszerint Ψ^{-1} összes eleme legfeljebb $|\Phi \circ \Psi^{-1}|/|\Phi^*| \leq (Cn)/(c^* n) = C/c^*$ darab jobboldali mellékosztályba esik. Mivel ezek valamelyike szükségképpen legalább $(c^*/C)n$ elemű, a gondolatmenetet – a jobb- és baloldal szerepének felcserélésével – megismételve arra jutunk, hogy Φ-t is lefedi korlátos számú baloldali mellékosztály. ∎

3.3. következmény. *A 3.2. tétel feltételei mellett a $\Phi \cup \Psi$-be eső függvények grafikonjai lefoghatóak vagy egy függőleges, vagy a végtelen távoli egyenes $\leq C^*$ pontjával.*

Bizonyítás. S^+ minden mellékosztálya párhuzamos egyenesekből áll; $S_u^\bullet$-nak pedig minden baloldali mellékosztálya egy-egy fix (u, v) pontra illeszkedő egyenessereg. ∎

Már csak egyetlen kérdés maradt: *min múlik az, hogy a* (4)*-et teljesítő Φ és Ψ halmazokra $\Phi \circ \Psi^{-1}$ kicsi lesz-e?*

Az Ω halmaz szerepe mellékes. Például az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy Ω-nak három eleme van: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Ha

$$\varphi = \omega_i \circ s';$$

$$\psi = \omega_j \circ s'',$$

alakú (ahol $s', s'' \in S$ és $i, j = 1, 2, 3$), akkor $\varphi \circ \psi^{-1} = \omega_i \circ s' \circ (s'')^{-1} \circ \omega_j^{-1}$. Itt a jobbról-balról három-három lehetséges elemmel való komponálás legfeljebb kilencszer annyi $\varphi \circ \psi^{-1}$-et ad, mint a megfelelő $s' \circ s''$ kompozíciók száma. Az tehát a kérdés, hogy

> *egy S Abel-részcsoportból hogyan válasszunk elemeket, hogy kis kompozícióhalmazt adjanak?*

Hasonló kérdésekkel – például valós számok összeg- vagy szorzathalmazaival – az additív számelméleti IV. részben már foglalkoztunk.

3.3. Számelmélet és algebra. A számtani és mértani sorozatok analógiájára (és – mint látni fogjuk – bizonyos értelemben közös általánosításukként) „kompozíció-sorozatokat" is definiálhatunk. Ha $\varphi \in \mathcal{L}$ tetszőleges, és

$$\varphi, \; \varphi^2 = \varphi \circ \varphi, \; \varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi, \; \ldots, \; \varphi^{n-1}$$

csupa különböző függvények, akkor $\Phi = \{\varphi, \varphi^2, \ldots, \varphi^{n-1}\}$-et ú.n. *kompozíciósorozatnak* nevezzük. Egy ilyen sorozatra nyilván

$$|\Phi \circ \Phi| = 2n - 1 < 2|\Phi|, \quad \text{és}$$
$$|\Phi \circ \Phi^{-1}| = 2n - 1 < 2|\Phi|.$$

A kompozíciósorozatok egyes speciális esetei számtani, illetve mértanisorozat-szerűek; például

$$\varphi(x) = x + 1 \quad \text{esetén} \quad \Phi = \{x + i\,;\; 1 \le i \le n\}, \quad \text{illetve}$$
$$\varphi(x) = 2x \quad \text{esetén} \quad \Phi = \{2^i x\,;\; 1 \le i \le n\}.$$

(Előbbiek grafikonja párhuzamos, utóbbiaké pedig az origón megy át.)

E kétfajta függvényhalmaz rokonai kapnak fontos szerepet e szakasz további részében:

$$(5) \qquad \Gamma^+ = \{\varphi(x) = x + g\,;\; g \in \mathcal{G}\} \subset S^+,$$

ahol $\mathcal{G}$ általánosított számtani sorozat; illetve

$$(6) \qquad \Gamma_0^\bullet = \{\varphi(x) = gx\,;\; g \in \mathcal{G}\} \subset S_0^\bullet,$$

ahol $\mathcal{G}$ általánosított mértani sorozat – sőt, utóbbi általánosításaként,

$$(7) \qquad \Gamma_u^\bullet = \{\varphi(x) = g(x - u) + u\,;\; g \in \mathcal{G}\} \subset S_u^\bullet.$$

Ezeket – algebrai oldalról nézve – a φ, $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$, $\ldots$, φ^{n-1} kompozíciósorozatok rokonaiként, akár „általánosított kompozíciósorozatoknak" is nevezhetjük. Magyarázat: tegyük fel, hogy (5)-ben az általánosított számtani sorozatot a

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_d$ különbségek (illetve (6)-ben és (7)-ben az általánosított mértani sorozatot a $q_1, q_2, \ldots, q_d$ hányadosok) definiálják. Ekkor $\varphi_i(x) = x + \Delta_i$-re (illetve $\varphi_i(x) = q_i \cdot x$-re), alkalmas $\gamma \in \mathcal{L}$ „kezdőtaggal" mindkét változatban a

$$\Gamma = \{\gamma \circ \varphi_1^{k_1} \circ \varphi_2^{k_2} \circ \ldots \circ \varphi_d^{k_d}\ ;\ \forall i \leq d\text{-re } 0 \leq k_i < n_i\}$$

általánosított kompozíciósorozathoz jutunk. Az ilyen Γ-k nyilván megőrzik azt a régi jó tulajdonságot, hogy $|\Gamma \circ \Gamma| \leq 2^d|\Gamma|$ és $|\Gamma \circ \Gamma^{-1}| \leq 2^d|\Gamma|$. (Ehhez szükséges volt, hogy a definiáló φ_i-k felcserélhetőek voltak egymással.)

Ha a fenti függvényhalmazoknak csak egy (n-től függetlenül rögzített arányú) részét, például 1%-át választjuk ki akár véletlenszerűen, akár valamilyen szabályosság szerint, akkor is igaz marad, hogy $|\Gamma \circ \Gamma^{-1}| \leq C|\Gamma|$ – persze 2^d-nél rosszabb (nagyobb) C együtthatóval. (Az 1%-os konkrét arány esetén $C = 100 \cdot 2^d$ megfelel).

Végül – mivel az előző szakaszban fontosak voltak a mellékosztályok – bevezetünk még egy utolsó(!) elnevezést. Ha $S \subset \mathcal{L}$ Abel-részcsoport (azaz $S = S^+$ vagy $S = S_u^\bullet$) és $\Gamma \subset S$ általánosított kompozíciósorozat, továbbá $\omega \in \mathcal{L}$ tetszőleges, akkor az

$$\omega \circ \Gamma = \{\omega \circ \gamma\ ;\ \gamma \in \Gamma\}$$

halmazt Γ *baloldali mellékosztályának* nevezzük. (Ezt az indokolja, hogy $\omega \circ \Gamma$ az S-nek egyetlen baloldali mellékosztályába, $\omega \circ S$-be esik.)

Most már kimondhatjuk a szükséges és elégséges feltételt, amely a kis kompozícióhalmazokat karakterizálja.

3.4. tétel. *Legyen $\Phi, \Psi \subset \mathcal{L}$, melyekre $|\Phi|, |\Psi| \geq n$, és tegyük fel, hogy*

$$|\Phi \circ \Psi^{-1}| \leq Cn.$$

Ekkor létezik $S \subset \mathcal{L}$ Abel-részcsoport, éspedig vagy S^+, vagy valamely $S_u^\bullet$ és benne olyan $\Gamma \subset S$ általánosított kompozíciósorozat, melynek korlátos számú baloldali mellékosztálya lefedi Φ-t és Ψ-t. Más szóval létezik $\Omega \subset \mathcal{L}$, hogy $|\Omega| \leq C^*$ és

$$\Phi \cup \Psi \subset \Omega \circ \Gamma,$$

ahol $C^* = C^*(C) > 0$ nem függ n-től, és Γ dimenziója legfeljebb $d^*(C)$, mérete pedig legfeljebb $C^{**}(C) \cdot n$.

Bizonyítás (vázlat). Csak a $\Phi = \Psi$ esetet részletezük; az általános $\Phi \neq \Psi$ eset hasonló, de technikailag bonyolultabb.

S-et könnyű megtalálni: a 3.2. tétel éppen ilyen Abel-részcsoport létezését állítja.

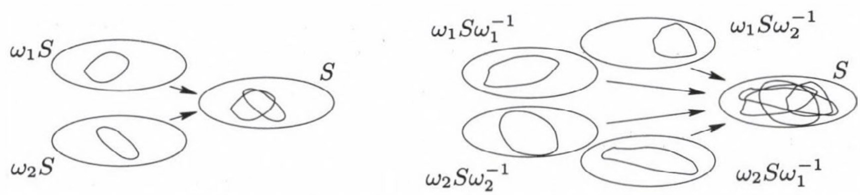
Hogyan keressünk alkalmas általánosított kompozíciósorozatot? Ha véletlenül maga S fedi Φ-t, akkor az S-beli „természetes műveletre" (azaz „+"-ra vagy „ $\cdot$ "-ra) alkalmazva az 1.1. állítást, alkalmas Γ-ra $\Phi \subset \Gamma$ lesz.

Ha Φ egyetlen baloldali mellékosztályába esik S-nek, például $\omega \circ S$-be, akkor „húzzuk vissza" Φ-t S-be! Ezt úgy értjük, hogy Φ tetszőleges φ elemét $\varphi = \omega s$ alakban írjuk ($s \in S$), és a $\varphi \to s$ leképezést használjuk.

Végül, ha Φ-t C^* darab mellékosztály fedi, például

$$\Phi \subset \omega_1 S \cup \omega_2 S \cup \ldots \cup \omega_{C^*} S,$$

akkor mindegyiket visszahúzzuk (lásd 2. ábra). Ezáltal S-ben még mindig legalább $|\Phi|/C^* \geq n/C^* = n^*$ különböző elemet kapunk, melyek különbség-, illetve hányadoshalmaza továbbra sem lehet nagyobb, mint $Cn = C \cdot C^*(n/C^*) = C \cdot C^* \cdot n^*$. Így ismét a kívánt tulajdonságú Γ általánosított kompozíciósorozathoz jutunk. ■



2. ábra. Visszahúzás S-be. **(a)** Φ visszahúzása. **(b)** $\Phi \circ \Phi^{-1}$ visszahúzása.

3.4. Sűrű páros gráfok. Mint a számelméleti IV. részben tettük, az előző tételt is kimondhatjuk úgy, hogy nem az összes kompozíciót vizsgáljuk, hanem csak egy Φ-n és Ψ-n mint csúcshalmazokon definiált, E élhalmazú gráf mentén képezzük a

$$\Phi \circ_E \Psi = \{\varphi \circ \psi;\ (\varphi, \psi) \in E\}$$

„statisztikus" kompozícióhalmazt. Itt is igazak maradnak a megfelelő állítások – és továbbra is C lesz a legerősebb, ami α-sűrűn összefüggő gráfokra vonatkozik (azaz olyanokra, melyek csúcsait tetszőlegesen osztva diszjunkt V_1, V_2 osztályokba, közöttük legalább $\alpha|V_1|\,|V_2|$ él fut).

	E élhalmaz, melyre $\Phi \circ_E \Psi^{-1}$ kicsi	$\Phi \cup \Psi$ fedése általánosított kompozíciósorozatokkal
(A)	teljes gráf	egy sorozat korlátos számú baloldali mellékosztálya fed
(B)	teljes páros gráf	ugyanaz
(C)	α-sűrűn összefüggő gráf	ugyanaz
(D)	minden fok nagy	korlátos számú sorozat egy-egy mellékosztálya fed
(E)	sűrű gráf	nagy rész és sok él egyetlen mellékosztályban

4. Vissza a geometriába

4.1. A 2.5. tétel bizonyítása. A következő (kicsivel erősebb) állítást igazoljuk.

4.1. tétel. *Legyen $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ vagy $\subset \mathbb{C}$ és $k = |\mathcal{A}| \le |\mathcal{B}| \le Ck$. Tegyük fel, hogy a $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s\}$ nem konstans, lineáris függvények (ahol $s \ge ck$) egyenként k pontját tartalmazzák az $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ Descartes-szorzatnak. Ekkor létezik $\mathcal{G}^*$ általánosított számtani vagy mértani sorozat, melyre*

(i) *$\mathcal{G}^*$ dimenziója legfeljebb d^*, mérete legfeljebb C_1^*;*

(ii) *$\mathcal{G}^*$ alkalmas eltoltja tartalmazza $\mathcal{A}$-t;*

(iii) *$\bigcup_{i=1}^{s} \varphi_i(\mathcal{A})$ lefedhető $\mathcal{G}^* + \mathcal{G}^*$, illetve $\mathcal{G}^* \cdot \mathcal{G}^*$ korlátos számú (legfeljebb C_2^* darab) eltolt és/vagy elforgatott példányával,*

(iv) *sőt még az is igaz, hogy Φ-t tartalmazza egy $\mathcal{G}^*$-ra épülő $\Gamma^+ = \{\varphi(x) = x + g\,;\ g \in \mathcal{G}^*\}$, illetve $\Gamma_u^\bullet = \{\varphi(x) = g(x-u) + u\,;\ g \in \mathcal{G}^*\}$ általánosított kompozíciósorozat legfeljebb C_2^* darab baloldali mellékosztálya,*

ahol $d^* = d^*(c, C)$, $C_1^* = C_1^*(c, C)$ és $C_2^* = C_2^*(c, C)$ nem függ k-tól.

Bizonyítás. A feltételekből a 3.1. lemma szerint $|\Phi \circ \Phi^{-1}| \le C^{**}|\Phi|$ következik. Így a 3.4. tétel alkalmazható: létezik Γ általánosított kompozíciósorozat, melynek korlátos számú baloldali mellékosztálya lefedi Φ-t. Ez a Γ persze az (5)–(7) képletekben szereplő definíciók szerint valamilyen $\mathcal{G}$ általánosított számtani vagy mértani sorozatra épül, azaz $\Gamma = \{x + g\,;\ g \in \mathcal{G}\}$ vagy $\Gamma = \{g(x-u) + u\,;\ g \in \mathcal{G}\}$.

Ha véletlenül maga Γ fedi Φ-t, akkor $\mathcal{G} + \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, illetve $\mathcal{G} \cdot (\mathcal{A} - u) + u \subset \mathcal{B}$ (azaz $\mathcal{G} \cdot (\mathcal{A} - u) \subset \mathcal{B} - u$) miatt kis összeg-, illetve szorzathalmazra jutottunk. Így az 1.1. állítás szerint $\mathcal{G} \cup \mathcal{A} \subset \mathcal{G}^*$, illetve $\mathcal{G} \cup (\mathcal{A} - u) \subset \mathcal{G}^*$, alkalmas $\mathcal{G}^*$ általánosított számtani sorozattal, melyre (i)–(iv) könnyen ellenőrizhető.

Ha több baloldali mellékosztályunk van, akkor ismét a 2. ábrán bemutatott „visszahúzós cselt" alkalmazzuk (mely nem azonos az aranycsapat balösszekötőjének kedvencével!). Ezt nem részletezzük. ■

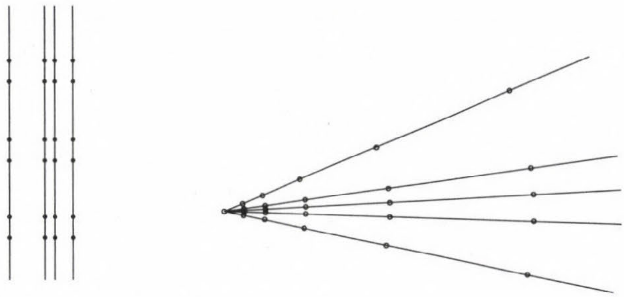
4.2. Egy további alkalmazás: kevés irány. A VI. részben már említettük a kevés irányt meghatározó ponthalmazokat. Most teljes leírását adjuk ezek közül azoknak, melyeknek pozitív százaléka esik egy egyenesre is és azon kívülre is.

Két példa ilyen ponthalmazokra:

(a) Rögzített számú párhuzamos egyenesen egy általánosított számtani sorozat egy-egy példánya;

(b) Rögzített számú, egy ponton átmenő egyenesen egy általánosított mértani sorozatnak egy-egy példánya, mindegyik 0-ja a közös pontban (lásd 3. ábra).

Látszólag általánosabb konstrukciókhoz jutunk, ha (a)-ban a párhuzamos egyeneseken a sorozatokat tetszőlegesen eltoljuk; vagy ha (b)-ben a közös metszéspontból nagyítjuk vagy kicsinyítjük őket. Ezek valóban szintén kevés irányt határoznak meg; azonban mégsem újak, mert az eredetiek tartalmazzák ezeket, ugyanis:



3. ábra. Két, kevés irányt meghatározó konfiguráció

egy általánosított számtani sorozat s darab eltoltja, illetve egy általánosított mértani sorozat s darab 0-ból nagyított/kicsinyített példánya egy legfeljebb s-sel nagyobb dimenziós, legfeljebb 2^s-szeres méretű ugyanilyen sorozatba esik,

hiszen az eltolásvektorokat, illetve a nagyítási arányokat tekinthetjük új Δ_i különbségeknek, illetve g_i hányadosoknak.

4.2. tétel. *Ha $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \subset \mathbb{R}^2$ olyan, hogy $\mathcal{A}_1$ pontjai egy l egyenesre esnek, de $\mathcal{A}_2 \cap l = \emptyset$, továbbá*

(i) $|\mathcal{A}_1|, |\mathcal{A}_2| \geq c|\mathcal{A}|$;

(ii) *$\mathcal{A}$ pontpárjai legfeljebb $C|\mathcal{A}|$ különböző irányt határoznak meg;*

akkor $\mathcal{A}$ lefedhető a fenti (a)–(b) konfigurációk valamelyikével. (Speciálisan $\mathcal{A}_2$ is fedhető legfeljebb $C^* = C^*(c, C)$ egyenessel.)

Bizonyítás. Csak azt vázoljuk, hogyan lehet $\mathcal{A}$-t lefedni C^* egyenessel; utána az általánosított számtani vagy mértani sorozatok már könnyen megtalálhatóak az 1.1. állítás segítségével.

Dualizáljuk a problémát! Más szóval: feleltessünk meg az eredeti egyeneseknek pontokat és a pontoknak egyeneseket, kölcsönösen egyértelműen és illeszkedéstartóan! Hasonlót az I. rész 1.7. definíciójában már láttunk; most viszont még azt is megköveteljük, hogy

(i) az x-tengely pontjainak a függőleges egyenesek feleljenek meg;

(ii) a végtelen távoli pontoknak pedig a vízszintes egyenesek.

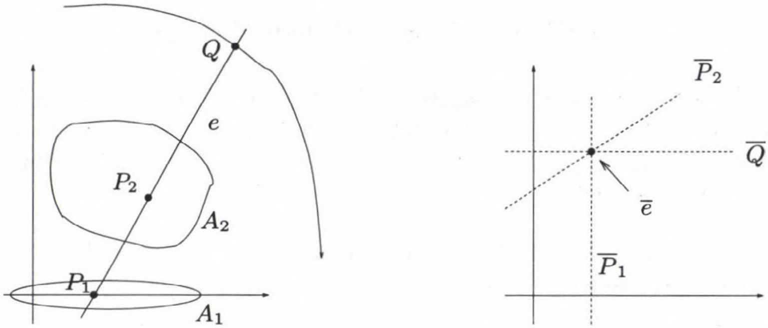
(Csak zárójelben jegyezzük meg, hogy – projektív koordinátákkal megadva – az (a, b, c) pont $\leftrightarrow$ $(cx + by + az = 0)$ egyenes megfeleltetés jó lesz; igazából azonban maga a leképezés érdektelen.)

Az általánosság megszorítása nélkül tegyük fel azt is, hogy az $\mathcal{A}_1$-et tartalmazó l egyenes éppen az x-tengely és legyen $k = |\mathcal{A}|$. Ekkor $|\mathcal{A}_2| \geq c|\mathcal{A}| \geq c|\mathcal{A}_1| \geq ck$; ugyanakkor a meghatározott irányok száma

$$\leq C|\mathcal{A}| = \frac{C}{c} \cdot c|\mathcal{A}| \leq \frac{C}{c} \cdot k = C'k.$$

A dualizálás során $\mathcal{A}_1$ pontjainak függőleges egyenesek felelnek meg; az irányoknak – mint a végtelen távoli egyenes pontjainak – vízszintesek; végül $\mathcal{A}_2$ pontjainak, melyek sem az x-tengelyre nem esnek, se nem végtelen távoliak, szükségképpen se nem függőleges, se nem vízszintes egyenesek.

Az, hogy egy $P_1 \in \mathcal{A}_1$ és egy $P_2 \in \mathcal{A}_2$ pont a végtelen távoli egyenes Q pontja által reprezentált irányt határozza meg, úgy is fogalmazható, hogy P_1, P_2 és Q egy $\mathbf{e}$ egyenesre esik. A nekik megfelelő $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ és $\overline{Q}$ egyenesek tehát az illeszkedéstartás miatt az $\mathbf{e}$-nek megfelelő $\overline{\mathbf{e}}$ ponton mennek át. (Lásd 4. ábra.)



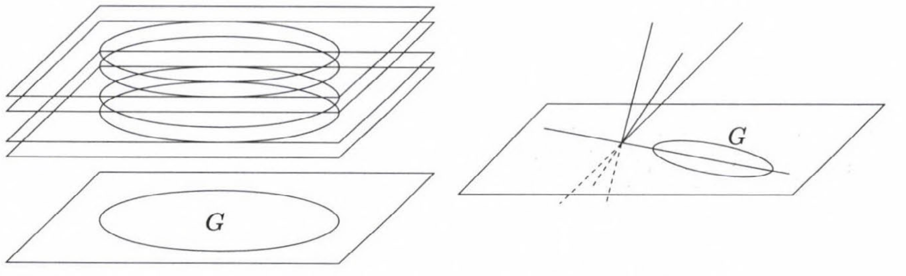
4. ábra. Az (i)–(ii) tulajdonságokkal rendelkező dualitás

Eszerint egy k függőleges és legfeljebb Ck vízszintes egyenes által meghatározott Descartes-szorzatból legalább ck „átló" tartalmaz egyenként k pontot. A 3.2. tétel 3.3. következménye szerint az $\mathcal{A}_2$-nek megfelelő (duális) átlók lefoghatóak legfeljebb C^* darab kollineáris ponttal. Ezekhez hozzávehetjük a függőleges tengely végtelen távoli pontját, ami az $\mathcal{A}_1$ pontjainak megfelelő egyeneseket fogja le. Így az eredeti A pontjai is korlátos számú konkurens (közös véges vagy végtelen távoli pontra illeszkedő) egyenessel fedhetőek. ■

A tétel kettőnél több dimenziós terekre is általánosítható. E célból az általánosított számtani sorozatok természetes módon kiterjeszthetőek, mint sokdimenziós rácsok vetületei kevesebb (de egynél több) dimenzióba. Ugyanakkor az általánosított mértani sorozatoknak ilyen kiterjesztései nem ismeretesek. A legjobb, amit tehetünk, hogy (mint előbb is) egy konkurens, de nem egy síkba eső egyenesseregen helyezünk el közönséges, egyenként kollineáris sorozatokat.

Lehetséges, hogy az általánosított mértani sorozatok lényegüket tekintve egydimenziós objektumok? Ezt az érzést – ami persze nem szigorú matematikai állítás – támasztja alá az a tény is, hogy:

> *magasabb dimenziókban csak az 5. ábrán látható konfigurációk határozhatnak meg kevés irányt – feltéve, hogy a pontok „jó része" egy (hiper)síkon helyezkedik el* [3].



5. ábra. Többdimenziós konfigurációk kevés iránnyal

Irodalom

[1] Yurii Bilu, Structure of sets with small sumset, *Asterisque, SMF,* **258** (1999), 77–108.

[2] György Elekes, On linear combinatorics III, *Combinatorica,* **19 (1)** (1999), 43–53.

[3] György Elekes, On the structure of large homothetic subsets, *DIMACS series in Discrete Mathematics,* **49** (1999), 101–111.

[4] Gregory A. Freiman, *Foundations of a Structural Theory of Set Addition,* Kazan Gos. Ped. Inst., Kazan (1966) (in Russian).

[5] Gregory A. Freiman, *Foundations of a Structural Theory of Set Addition, Translation of Mathematical Monographs,* vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (USA, 1973).

[6] Imre Z. Ruzsa, Arithmetical progressions and the number of sums, *Periodica Math. Hung.,* **25** (1992), 105–111.

[7] Imre Z. Ruzsa, Generalized arithmetic progressions and sum sets, *Acta Math. Sci. Hung.,* **65** (1994), 379–388.

ELEKES GYÖRGY

Mély megrendüléssel tudatjuk, hogy 2008. szeptember 29-én, 60. életévében elhunyt Elekes György, az ELTE TTK Matematika Intézet, számítógép-tudományi tanszékének professzora, az MTA doktora.

Elekes György 1949. május 19-én született Fóton. Matematikai tehetsége korán megmutatkozott. 1963 és 1967 között a budapesti Fazekas Mihály Gimnáziumban a kiváló matematikatanár, Kőváry Károly tanítványa volt. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián 1965-ben harmadik, 1967-ben első díjat kapott. 1966-ban második lett a Kürschák József matematikai emlékversenyen.

Az ELTE matematikus szakát 1967 és 1972 között végezte. Ezután oktatóként az ELTE-n maradt, eleinte az analízis I. tanszéken (1980-ig tanársegédként, majd adjunktusként), majd 1983-ban a számítógép-tudományi tanszék egyik alapító tagja lett (1995-ig adjunktus, 2005-ig docens, majd egyetemi tanár). 1978-ban egyetemi doktori, 1994-ben kandidátusi fokozatot, 2001-ben az MTA doktora címet szerezte. 1999–2002 között Széchenyi ösztöndíjas volt.

Kutatási eredményeinek részletes feldolgozása a jövő feladata, most csak röviden foglaljuk össze kutatói életpályáját.

Elekes első kutatási területe a halmazelmélet volt. Megoldotta Erdős és Hajnal egy végtelen halmazok felbontásaira vonatkozó problémáját, és (részben Erdőssel és Hajnallal közösen) sikerült a kombinatorikus halmazelmélet egy új ágát kiépítenie. Sok szép eredményük ma is publikálatlan.

Egy további fontos eredménye az a Hoffmann Györggyel közösen bizonyított tétel, amely szerint van tetszőlegesen nagy kromatikus számú majdnem diszjunkt halmazrendszer.

A geometria kérdései mindig is nagyon érdekelték, és ehhez az érdeklődéséhez új témaként csatlakozott az 1970-es években kialakuló algoritmuselmélet. A geometriai algoritmusok területén egy alapvető eredmény kapcsolódik a nevéhez. Egy általa talált elegáns egyenlőtlenség segítségével igazolta, hogy egy tetszőleges magas dimenziós euklideszi térben egy konvex test térfogatát polinomiális időben csak igen nagy hibával lehet becsülni. Ez a cikk fontos kutatások sorát indította el.

A geometriai algoritmusok iránti érdeklődése az oktatás szintjén mindig megmaradt, a téma oktatását ő alakította ki az egyetemen. A kutatás területén azonban a nyolcvanas évektől témát váltott, a szintén Erdős által alapított kombinatorikus geometriával kezdett el foglalkozni. Rónyai Lajossal közösen igazolták G. Purdy azon sejtését mely szerint két egyenesen levő $n-n$ csúcsú ponthalmaz csak kevés, legfeljebb Cn különböző távolságot határoz meg akkor a két egyenes párhuzamos vagy merőleges. További igen mély eredményeket ért el Szabó Endrével és Simonovits Miklóssal görbeseregek többszörös pontjairól.

Elekes nemcsak mély eredményeket bizonyított ezen a területen, de ezen téma kapcsolódási pontjait is felfedezte más matematikai területekhez, és ennek révén kutatási területei később a ma additív kombinatorika néven ismert terület, illetve határterületei lettek. Itt sikerült igen jelentős hírnevet kivívnia, pedig ezen az igen aktív területen a számelmélet és a kombinatorika számos jelentős, Fields-éremmel és más díjakkal kitüntetett vezető kutatója is dolgozik. Kutatásai olyan alapvető jelentőségűekké váltak, hogy Terence Tao és Van Vu Additive combinatorics című monográfiájában egy teljes fejezetet szenteltek az incidencia geometria és az additív kombinatorika Elekes által felfedezett kapcsolatának. Elekes nemcsak nehéz tételeket igazolt, de sikerült meglátnia azokat az algebrai és egyéb struktúrákat, amelyek egyes esetekben a vizsgált kombinatorikus jelenségek hátterében rejlettek.

Elekes György kiváló oktató volt, aki a tanítást mindig egyik legszentebb feladatának tartotta. Tanítványai nagyon szerették mint oktatót és mint embert. Egyetemi jegyzeteket írt és újraírt, keresve a gondolatok, példák, részletek legjobb prezentációját. Az általa írt Véges matematika egyetemi jegyzet és feladattár ma is igen népszerű a diákok körében. Az algoritmusokhoz és tételekhez fűzött meséi néha a legabsztraktabb dolgokat is egy csapásra közérthetővé tették.

Súlyos betegségével folytatott majdnem egyéves küzdelme során az egyetem, a tanítás, a tudomány ügyeit mindig figyelemmel kísérte, igyekezett erejéhez képest részt venni bennük.

Sokunknak jó barátja, mindannyiunknak jó kollégája volt. Tudása és a tanítás iránti mély elkötelezettsége nagyon fog hiányozni.

Komjáth Péter
Lovász László

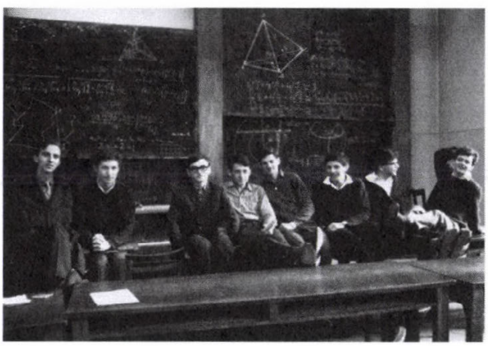
ELEKES GYURI ÉS AZ ILLESZKEDÉSEK

SIMONOVITS MIKLÓS, SZABÓ ENDRE

Elekes Gyuri már nagyon beteg volt, amikor befejeztük vele és Szabó Bandival közös cikkünket. Ez a cikk „Gyurinak állít emléket". Maga a cikk két jól elválasztható részre bomlik. Az első egy személyesebb rész, amit nem lett volna egyszerű közösen megírnunk, így azt én írtam. A másodikat ketten írtuk. Ez kitér az Elekes–Szabó-cikkre is, mely Gyurinak nagyon fontos volt.

Simonovits Miklós

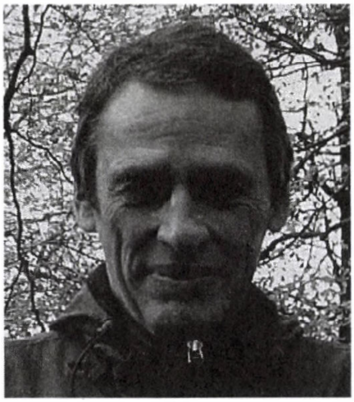
Gyurit nagyon régen ismertem meg, és valamiért mindig kedves emlékeket hordoztam róla. Itt Gyuriról és a közös tételeinkről szeretnék írni. De mielőtt ebbe belefognék, egy képpel kezdem, amelyiken Gyuri még gimnazista korában látható, egy Matematikai Diákolimpiára való felkészülés közben.




A kép az olimpikonokat mutatja, a képet Surányi Lacitól kaptam. A szereplők: Laborczi Zoltán, Szűcs Andris, Csirmaz Laci, Elekes György, Babai Laci, Pintz János, Surányi Laci, Hoffman Kücsük. A jobb oldalon a kép közepe van kinagyítva. A kép Gyurinak is nagyon kedves lehetett, egyetemi szobájában is ott volt a falon.

1. Az ősidők

Amikor elvégeztem az egyetemet, 1967-ben, T. Sós Vera hívására odakerültem az ELTE TTK analízis I tanszékére. Tanszékvezetőm Császár Ákos volt. Nagyon élveztem a tanszék munkalégkörét, baráti hangulatot árasztott és szakmailag olyan embereket gyűjtött össze, akikre csak büszkék lehettünk. Emellett az oktatást is nagyon lelkesen végeztük.



Néhány évvel később, 1972-ben Gyuri ugyanígy itt kezdte a munkáját, itt ismertem meg. (Persze, már diákkorában is ismertem egy kicsit.) Egészen 1985-ig dolgoztunk itt, ugyanazon a tanszéken. A viharos idők, matematikus veszekedések elsodortak bennünket egymástól.

Amikor eljöttem az ELTE-ről, átgondoltam, mi az, amit sajnáltam, hogy ott kellett hagynom. Sajnáltam a tanítást, bizonyos álmaimat, és sajnáltam barátaimat. A barátaim és legkedvesebb munkatársaim között Gyurit is.

2. A vég kezdete

Amikor valakivel közlik valamilyen formában, hogy hamarosan meg fog halni, az, hogy miként reagál, nagyon jellemző lehet rá. Nem tudom pontosan, Gyurival mit és hogyan közöltek, de azt tudta, hogy aránylag keveset fog már élni. És ekkor elkezdte befejezni a megírás alatt levő cikkeit.

Aránylag rövid idő alatt 7 cikket fejezett be, zárt le. Ezek közül egyet Szabó Bandival és egyet Szabó Bandival és velem közösen. Elekes Gyuriról és erről a két cikkről lesz itt szó.

(Persze, Gyurinak ezen utolsó periódusában nem csak a munka maradt. Többször meglátogattam, gyakran Szabó Bandival, hogy befejezzük a cikket, és amikor már befejeztük a cikket, akkor is kiugrottam hozzá néhányszor. Világos volt, hogy Gyurinak nagyon fontos volt mindvégig a családja, az unokái, és a barátai is.)

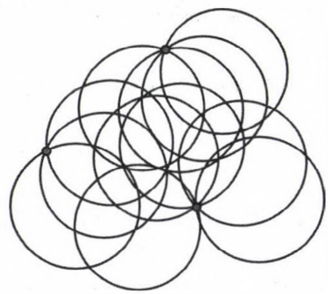
— … —

Valamikor 2006 januárjában Gyuri bejött hozzánk a Rényi Intézetbe, és elkezdtünk matematikáról beszélgetni. Valahol elakadt egy problémájában, és én ajánlottam neki egy „támadási módot". Egy bizonyos függvénykapcsolat lehetetlenségét kellett kimutatni. Azt javasoltam, hogy a tekintett függvények szingularitásainak vizsgálatával „jusson ellentmondásra". Persze, már régebben is gyakran „megtörtént velünk ez", de ez volt az első eset, hogy közös cikkbe kezdtünk.

Kicsit világosabban fogalmazva, azt mondtam, hogy abban az egyenletben, amit Gyuri vizsgálgatott, bizonyos szingularitások lépnek fel az egyik tagban, amit a többi tag nem ejthet ki, és „ez ellentmondás". Az alapötletet részben a Turán jegyzetből vettem, amelyből számelméletet tanultam, részben komplex függvénytani ismereteimből.

Gyuri néhány nap múlva visszajött egy kész cikkel. Ennek a főtétele a következő volt:

1. tétel. *Ha van a síkban 3 pontunk, A, B és C, és mindegyiken átmegy n egységkör*[1]*, akkor a 3-szoros pontoknak, azaz, azon pontoknak, amelyek 3 ilyen körhöz is tartoznak, a száma legfeljebb $cn^{2-\eta}$ valamilyen $c > 0$ és $\eta > 0$ konstansokkal.*



Gyurit ez a kérdés azért izgatta, mert ha egységkörök helyett egyeneseket veszünk, teljesen más választ kapunk:

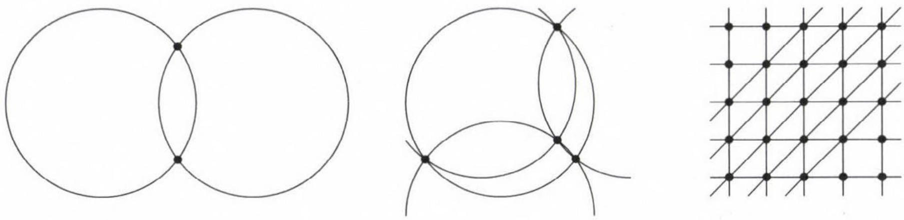
> Ha a síkrácson alkalmasan veszünk fel n pontot és n vízszintes, n függőleges egyenest, és n $45°$-osat, akkor ezeknek lehet cn^2 háromszoros pontjuk. Ezt látjuk az 1.(b) ábrán. Sőt, például 100 irányt használva készíthetünk 100 olyan egyenessereget, melyekre a 100-szoros pontok száma $c_{100}n^2$.

Ez tehát kombinatorikusan is megkülönbözteti az egyeneseket a rögzített sugarú köröktől. Természetesen, ha különböző sugarú köröket is megengedünk, akkor ilyen megkülönböztetést nem tehetünk: ha egy illeszkedési rendszert egyenesekkel meg tudunk valósítani, azt körökkel is meg tudjuk valósítani. Valóban, minden egyenes-pont illeszkedési rendszert inverzióval átvihetünk kör-pont illeszkedési rendszerbe.[2]

---

[1] A továbbiakban ilyenkor azt fogjuk írni, hogy $n + n + n$ görbe.

[2] A fordított irány nem igaz: két ponton akárhány kör mehet keresztül, és átmehet két egységkör is. Ezt egyenesekkel nem valósíthatjuk meg.



1. ábra. (a) Körök (b) és egyenesek

A cikk tehát készen volt, egyáltalán nem volt triviális, de számomra túl speciálisnak tűnt, így elhatároztuk, hogy megpróbáljuk kideríteni, milyen általánosabb tétel áll a háttérben. Azt szerettük volna megérteni, mikor és miért lehet cn^2 3-szoros metszéspont egyik esetben és csak $cn^{2-\eta}$ a másikban. Mint látni fogjuk, ez bizonyos értelemben sikerült is, bár ezzel a tétel publikálását jól elhúztuk.

Azt szerettük volna megmutatni, hogy a tipikus esetekben kevés 3-szoros pont lehet csak, azaz, valamilyen erősen elfajult eset az, amikor sok 3-szoros pont van.

Megtaláltuk az általános tételt is, amelyik nagyon erősen felhasználta az Elekes–Szabó-cikket [2]. Ezért hármasban fejeztük be az Elekes–Simonovits-cikket is, Szabó Endrével. Volt erre egy másik, utólag úgy érzem, fontosabb okunk is: hárman három különböző módon tekintettük a problémát, és Endre szemlélete egyre fontosabb lett hozzáállásunkban. Gyuri utolsó napjaiban nagyon erősen dolgozott ezen a két cikken (is).

A közös cikkünk címe:

On the number of high multiplicity points for 1-parameter families of curves. (Elekes, Simonovits, és Szabó);

... és egy kicsit csaltam, amikor azt mondtam, hogy befejeztük, mert egy bizonyos, elemibb formában fejeztük be: most amikor ezt a visszaemlékezést írom, cikkünk lektorálás alatt áll. Szabó Bandinak és nekem még be kell majd fejeznünk egy másik Elekes–Szabó–Simonovits-cikket: eredményeink és bizonyításaink egy másik változatának a publikálását is.

A fő kérdés tehát az, hogy 1 paraméteres szép görbeseregek esetén mikor lehet sok 3-szoros pont. Láttuk, hogy egyeneseknél lehet, ezért köröknél is lehet, az inverzió miatt, és állítottuk, hogy egységkörsoroknál ez nem lehet. Az inverzió helyett vehetünk persze általánosabb transzformációt is. Ha pl. az

$$u := f(x,y), \qquad v := g(x,y) \tag{1}$$

transzformációt alkalmazzuk az 1.(b) ábrára, akkor olyan 1 paraméteres görbeseregből kapunk $n+n+n$ görbét, ahol szintén $\approx cn^2$ 3-szoros metszéspont van.[3]

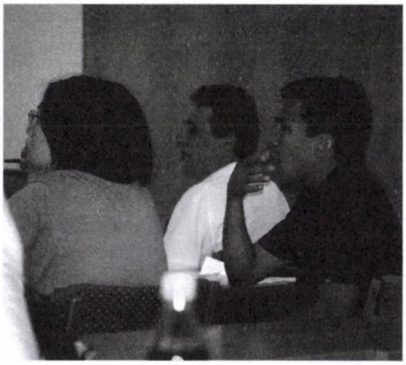
[3]Persze vehetünk tetszőleges transzformációkat is, de bennünket itt a szép görbeseregek érdekelnek, tehát mi csak folytonos transzformációkat használunk.

3. Milyennek láttam Gyurit?

Mielőtt továbblépnénk, hadd írjak egy kicsit Elekes Gyuriról.

- Nagyon okos, gyors, világosfejű.
- Nagyon határozott, talán kedvesen kemény?
- Nagyon kedves, nemcsak azért mert mosolygós volt, hanem mert valóban kedves volt.

3.1. Gyuri és a matematika: „korai" hatások. Gyakran volt, hogy Gyurival matematikáról beszélgettünk, esetleg vitatkoztunk, és Gyuri abban az értelemben túl szerény volt, hogy ha azt kérdeztem, „miért nem tanulod meg ehhez ezt és azt, gondolom, az jó volna, vagy segítene", Gyuri erre néha úgy felelt, mintha úgy érezné, azt nehéz volna megtanulnia. Ennek ellenére nagyon sok mindent megtanult, és azokat fel is használta az oktatásban és kutatásaiban is.



És itt álljunk meg egy pillanatra. Gyurit én mindig pozitív értelemben magabiztosnak éreztem. Ilyenkor, amikor arra hivatkozott, hogy valamit nem tud megtanulni, én inkább arra gondoltam, hogy valójában szeretne csak továbbmenni az eredeti útján.

Ha végigtekintünk munkásságán, azon is egy hosszabb ívet látunk:

- kezdte Erdős–Hajnal-féle kombinatorikus halmazelmélettel,
- majd beletanult az algoritmusokba,
- végül olyan geometriai problémákkal foglalkozott, amelyekben mély eszközöket, gyakran mélyebb algebrai eszközöket kellett felhasználnia.

Saját maga, egyik önéletrajzában ettől kicsit eltérően, ezt írta:

Érdekődési köre: Kombinatorikus geometria és algoritmusok; kombinatorikus számelmélet és kombinatorikus algebra. (A legutóbbiról korábban még nem hallottam.)

Egyik idevonatkozó előadásának a következő címet adta:

The interface between geometry, algebra and number theory.

Talán ennek a cikknek is lehetett volna ez a címe, bár itt a számelméletről nem lesz szó.

3.2. Gyuri és a struktúrált programozás. Gyuri pályáján volt egy matematikai törés. Elhatározta – kicsit az én tanácsomra is –, hogy elmegy Szegedre Lovász László aspiránsának, tanul algoritmuselméletet, és ír egy kandidátusi disszertációt. A felvételiztető bizottság szerintem nem tévedésből, hanem bizonyos elfogultságból Gyuri felvétele ellen döntött. Megkérdezték tőle, mi az a struktúrált programozás, és Gyuri nem tudta. Nem is kellett tudnia. De nem vették fel. Nem akarok itt további részletekbe bonyolódni, de az eset nagyon felháborított.

Ha akkor felveszik, meggyőződésem, hogy sok további szép tételt bizonyított volna, jóval előbb szerzi meg a Tudományok Doktora fokozatot, és az ELTE is sokat nyert volna ezzel.

4. Egy kis matematika

Itt most áttérünk matematikára, és a cikk átváltozik egy kétszerzős cikké.

Ami Gyurit érdekelte, legalábbis azon a területen, amelyikről itt írok, az a következő volt:

> Ha véletlenül kiválasztunk sok adott típusú görbét, a kétszeres pontok száma lehet akár kvadratikusan sok is (azaz $> cn^2$), de a legalább háromszoros pontok száma már aránylag kicsi. Mégis, mint láttuk, az egyenesseregek esetén lehet cn^2 háromszoros pont. Ez egy degenerálódás, valamilyen furcsa összeesés. Milyen degenerációk kizárása esetén lehetünk biztosak abban, hogy csak kevés háromszoros pont van?

Az ilyen jellegű, egyenesseregek (vagy általánosabb görbeseregek) incidencia-struktúrájára vonatkozó vizsgálatok a kombinatorikus geometria alapkérdései közé tartoznak, és kb. 140 évre mennek vissza, Sylvester-hez, a híres angol matematikushoz.

Sylvester lényegében azt vizsgálta, hogy $\mathbb{R}^2$-ben n egyenesnek maximum hány háromszoros pontja lehet. Bebizonyította, hogy

2. tétel (Sylvester). *Ha $\mathcal{L}$ n darab egyenesből áll, akkor a háromszoros pontok maximális száma, $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}(n) = n^2/6 + \mathcal{O}(n)$.*

Ha ugyanezt körökre vizsgáljuk, az világos, hogy nemcsak a háromszoros, de már a kétszeres pontok száma is legfeljebb $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(n) \le n(n-1)$, sőt, ha olyan görbékre szorítkozunk, ahol bármely kettő csak korlátos sok pontban metszi egymást, akkor is igaz, hogy már a kétszeres pontok száma is csak $O(n^2)$.

3. tétel (Elekes). *Megadható n egységkör úgy, hogy a háromszoros pontok száma legalább $cn^{3/2}$ legyen.*

Az alsó és felső becslések elég távol vannak egymástól.

Sejthetnénk azt, hogy valahányszor szép görbéket veszünk, amelyek nem egyenesek, akkor csak kevés 3-szoros pont lehet. Ez nincs így: az egyenesseregek példája átalakítható úgy, hogy parabolaseregeket kapjunk ugyancsak cn^2 háromszoros ponttal.

Mégis, szép görbék esetén, ha egy bizonyos fajta degenerációt kizárunk, akkor bizonyítható, hogy a háromszoros pontok száma $cn^{2-\eta}$, alkalmas $c > 0$ és $\eta > 0$ konstansokkal.

Itt nem törekedve az általánosságra, bemutatjuk tételünket. Két dolgot kell tisztáznunk:

- Mik a szép görbék?
- Mik a kizárandó degenerációk?

Szép görbeseregek. Az alábbiakban az alapgondolatok leírása a legfontosabb számunkra, így néhol kicsit lazán fogunk fogalmazni. Majd amikor az általánosabb 3 szerzős cikket is leírjuk, ott ezeket a részleteket szigorúbban fogjuk megfogalmazni.

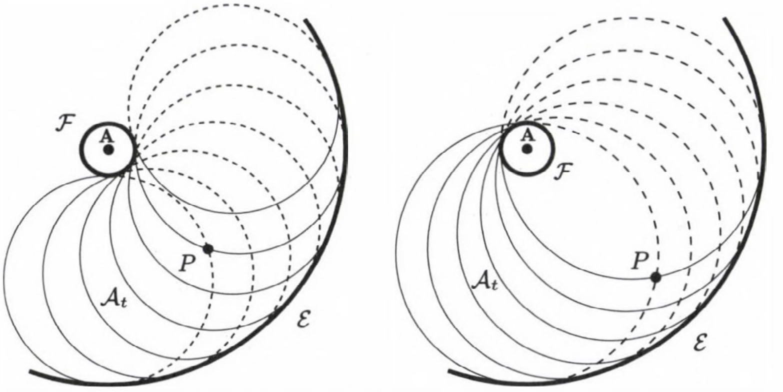
Most megmondjuk, mit nevezünk görbének, görbeseregnek, és pontosan miről szól a tételünk. Itt egy *görbe* mindig egy kétváltozós P polinom zérushelye a síkban:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}.$$

Persze, a kérdéseket tekinthetjük a valós és a komplex test felett egyaránt. Feltételezzük azonban, hogy olvasóink többsége a valós esetet szereti jobban. A görbéket írott nagybetűkkel fogjuk jelölni: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$ stb. Ha egy görbe egyenletében az együtthatókat elkezdjük folytonosan változtatni, akkor a görbe is folytonosan változik – egy *görbesereget* kapunk. Most csak olyan görbeseregekkel foglalkozunk, ahol az együtthatókat egy t *paraméter* polinomjaként adjuk meg. A görbeseregeket rendszerint indexelt írott nagybetűkkel jelöljük, például $\{\mathcal{A}_t\}$, $\{\mathcal{B}_t\}$, ahol az index a paraméter: Ha $t_1 \in \mathbb{R}$ egy konkrét paraméterérték, akkor $\mathcal{A}_{t_1}$ jelöli majd az $\{\mathcal{A}_t\}$ görbesereg $t = t_1$ paraméterhez tartozó tagját.

4. példa. A mondanivalónk tetszőleges görbeseregekre érvényes, de érdemes szem előtt tartani egy konkrét példát, amely egy kicsit általánosabb, mint az egységkörök az 1. tételben. Adott a síkon egy A pont és egy polinomegyenlettel megadható konvex zárt görbe, $\mathcal{A}_0$, amelyik nem feltétlenül megy át az A ponton. A 2. ábrán az $\mathcal{A}_0$ görbét körbeforgatjuk az A pont körül, egy görbesereget kapunk: az α szöggel elforgatott példányt $\mathcal{A}_t$-vel jelöljük, ahol $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Jogosan kérdi az Olvasó: miért nem az α szöggel paraméterezünk? Azért, mert az egyenletekben megjelenik $\sin\alpha$ és $\cos\alpha$, egyik sem polinom-függvény. A tangensvarázslattal viszont minden t-változójú polinommá változtatható. A polinomok



2. ábra. Konvex görbék serege, két változat

konkrét formája számunkra lényegtelen, csak az a fontos, hogy léteznek ilyen polinomok. (A bizonyításokban sem kell ismerni a polinomokat!)

Két változatot is lerajzoltunk: bal oldalon a forgáscentrum a görbéken belül van, jobb oldalon pedig kívülre került. A görbék mindkét esetben egy körgyűrű alakú tartományt súrolnak. Ha viszont a forgáscentrum éppen a görbén volna, akkor a körgyűrű belső köre egy ponttá zsugorodna, így a görbék egy körlapot súrolnának.

Az ábrán látható két különleges görbe: $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$. Egy $\mathcal{E}$ görbét az $\{\mathcal{A}_t\}$ görbesereg *burkolójának* hívunk, ha $\mathcal{E}$ minden pontjában érinti az $\{\mathcal{A}_t\}$ sereg valamelyik tagja $\mathcal{E}$-t, de semelyik $\mathcal{A}_t$-nek sincs $\mathcal{E}$-vel közös íve. (Tehát közeli $\mathcal{E}$-pontokban más-más $\mathcal{A}_t$ görbe érinti $\mathcal{E}$-t, és így $\mathcal{E}$ végtelen sok görbét érint a seregből.)[4] A mi görbecsaládunknak $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ a burkolója.

A 2. ábrán a görbéket két ívre osztottuk: az egyik vékony vonalú, a másik vastagabb (és szaggatott). A görbék által súrolt terület minden pontján (például a P ponton) két-két görbe halad át: az egyik a vastag, a másik pedig a vékony ívével.

Hasznos lenne, ha minden ponton csak egy görbe haladna át. Ezt a síkon belül maradva nem tudjuk elérni. Ezért a 3. ábrán a görbéket kiemeltük a síkból a térbe, az $\mathcal{A}_r$ görbét r magasságba. Ezek a térbeli görbék egy spirálvonalban haladó csővé állnak össze:

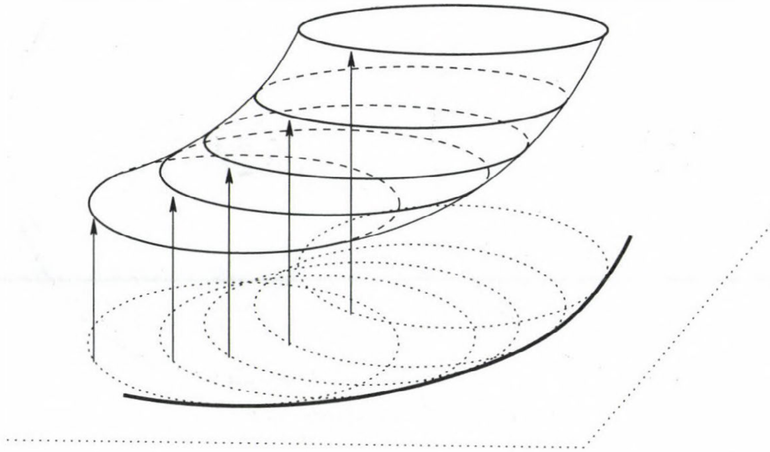
$$V = \{(P, r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid P \in \mathcal{A}_r\}.$$

Látható, hogy ha a görbéinket a sík helyett a V felületre rajzoljuk, akkor ezen a felületen már nem metszik egymást: minden ponton pontosan egy görbe halad át.[5] Térjünk vissza a 3-szoros metszéspontjainkhoz.

5. definíció. Adott három görbesereg: $\{\mathcal{A}_r\}$, $\{\mathcal{B}_s\}$, $\{\mathcal{C}_t\}$. Azt mondjuk, hogy ezek a seregek **„speciálisan illeszkednek"**, ha bármelyik elég nagy n természetes számra találhatunk olyan $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$ paraméter-n-eseket, hogy az $X \times Y \times Z \subset \mathbb{R}^3$

[4] A definíciót úgy fogalmaztuk meg, hogy egy burkoló részíve is burkoló legyen.

[5] Maga ez a spirális cső olyan, mint némely barokk templomoszlop.



3. ábra. A kiemelt görbék spirálvonalban haladó csövet alkotnak

„általánosított rácsban” legalább cn^2 olyan (r, s, t) paraméter-pont van a lehetséges n^3 közül, mely (legalább egy) háromszoros metszéspontot ad:

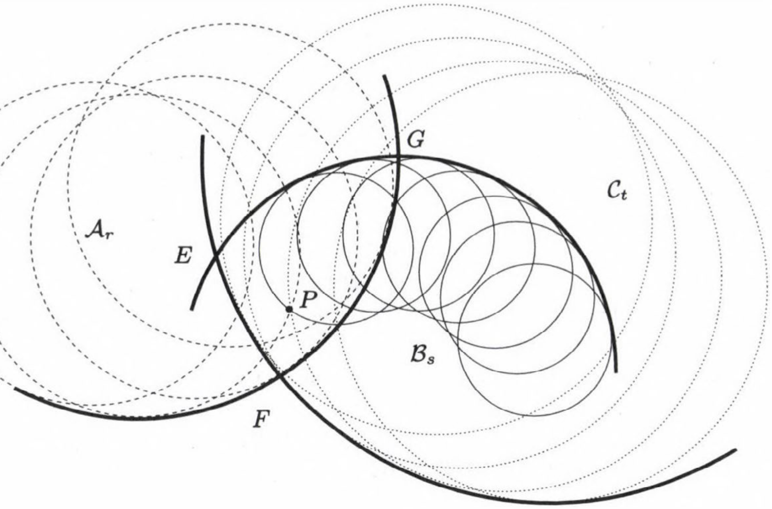
$$\mathcal{A}_r \cap \mathcal{B}_s \cap \mathcal{C}_t \neq \emptyset.$$

Ha a görbéink nem „speciálisan illeszkednek”, akkor azt mondjuk, hogy **„tipikusan illeszkednek”.** A névválasztást az indokolja, hogy a legtöbb esetben kevés a 3-szoros metszéspont. Például az 1. tétel körseregei is „tipikusan illeszkednek”. Meglepő, de igaz: ha három görbecsalád „tipikusan illeszkedik”, akkor akárhogyan is választjuk ki a fenti X, Y és Z n-eseket, az $X \times Y \times Z \subset \mathbb{R}^3$ „általánosított rácsban” legfeljebb $cn^{2-\eta}$ olyan (r, s, t) paraméter-pont van, mely ad háromszoros metszéspontot.[6] A következőkben mindkét fajta viselkedést bemutatjuk. A 6. példában a már korábban megismert egyenesseregeket idézzük fel újra, ezek „speciálisan illeszkednek”. A 7. példában pedig a tipikus viselkedéssel találkozunk, ez majd elvezet az 1. tétel általánosításához.

6. példa. Jelölje $\mathcal{A}_r$ az $y = r$ egyenletű vízszintes egyenest, $\mathcal{B}_s$ az $x = s$ egyenletű függőleges egyenest, és $\mathcal{C}_t$ legyen az $y = x + t$ egyenletű ferde egyenes. Ezek három egyenessereggé állnak össze: $\{\mathcal{A}_r\}$, $\{\mathcal{B}_s\}$ és $\{\mathcal{C}_t\}$. Ez a három egyenessereg látható az 1.(b) ábrán, és a rajzon könnyű megszámolni a háromszoros metszéspontokat is. Világos, hogy ez a három sereg „speciálisan illeszkedik”: ha például $X = Y = Z = \{a, 2a, 3a, \ldots, na\}$ egy tetszőleges $a > 0$ számra, akkor az $X \times Y \times Z$ „rácsban” $\binom{n}{2}$ háromszoros metszéspont van.

Számunkra nagyon fontos ez a három egyenessereg. Később, a 14. tételben látni fogjuk, hogy minden „speciálisan illeszkedő” görbesereg-konfiguráció ebből az egyetlen konfigurációból származtatható.

[6] Azért meglepő, mert ha n nagy, akkor $cn^{2-\eta}$ sokkal kisebb, mint cn^2, tehát egy konfigurációban vagy „nagyon sok” a háromszoros metszéspont, vagy „nagyon kevés”, nincsenek „közbülső” konfigurációk.



4. ábra. Három körsereg

7. példa. A 4. ábrán a 4. példa görbeserege látható három példányban: adott három forgáscentrum, és három konvex zárt görbe. Mindhárom görbét körbeforgatjuk a megfelelő centrum körül, így három görbesereget kapunk, ezeket $\{\mathcal{A}_r\}$-rel, $\{\mathcal{B}_s\}$-sel, illetve $\{\mathcal{C}_t\}$-vel fogjuk jelölni.

A 4. ábrán P-vel jelöltünk egy háromszoros metszéspontot – berajzoltunk egy-egy rajta áthaladó folytonos vonalú, szaggatott, illetve pontozott görbét. A három görbesereg egy-egy körgyűrűn söpör végig, a háromszoros pontok tartománya tehát ezen körgyűrűk metszete. A mi ábránkon ez éppen az EFG „görbevonalú háromszög". De ha pl. a $\mathcal{B}_s$ görbék egy kicsit kisebbek volnának, akkor ez a sereg nem érne el az F csúcsig, a háromszoros metszéspontok nem fednék be a tartomány sarkát. És léteznek olyan elrendezések is, amikor a háromszoros pontok halmaza még bonyolultabb alakzat.

8. tétel. *Tegyük fel, hogy a 7. példában a görbeseregek a 4. ábrán látható módon helyezkednek el: a háromszoros metszéspontok halmaza pontosan az EFG tartomány. Ilyenkor a három sereg „tipikusan" illeszkedik, tehát $n-n-n$ görbének legfeljebb $cn^{2-\eta}$ háromszoros pontja lehet, alkalmas $c > 0$ és $\eta > 0$ konstansokkal.*

Térjünk vissza most a „speciálisan illeszkedő" görbeseregekhez. Természetesen a 6. példán kívül vannak még másféle „speciálisan illeszkedő" konfigurációk is. Láttuk a 21. oldalon, az (1) képlet körül, hogyan kaphatunk folytonos transzformációk segítségével egy „speciálisan illeszkedő" konfigurációból számtalan sok újabb „speciálisan illeszkedő" konfigurációt. Most csak olyan transzformációkat használunk, amelyeket polinomfüggvényekkel adhatunk meg, és a képhalmazuk kétdimenziós (ezzel kizárjuk pl. az egyenesre való vetítést). Ezeket hívjuk *polinomiális transzformációknak.*

9. példa. Legyen a 21. oldalon, az (1) képletben $f(x, y) = x^2$ és $g(x, y) = y^3 - 3y$. Most kivételesen egymástól függetlenül vizsgálható, hogyan viselkedik a transzformációnk függőleges és vízszintes irányban. Az x^2 függvény úgy képezi a számegyenest önmagába, hogy a számegyenes negatív oldalát „ráhajtja" a pozitív oldalára. Ezért a mi transzformációnk is „félbehajtja" a síkot az $x = 0$ egyenes mentén. Az $y^3 - 3y$ függvény monoton nő a $(-\infty, -1)$ félegyenesen, ott „visszafordul", és monoton fogy a $(-1, 1)$ szakaszon, majd megint „megfordul", és monoton nő az $(1, \infty)$ félegyenesen. Tehát a transzformációnk az y az irányban kétszer is „behajtja" a síkot: az $y = -1$ és az $y = 1$ egyenesek mentén. Képzeljük azt, hogy egy lepedőt egy függőleges vonal mentén félbehajtunk, azután két (egymáshoz közeli) vízszintes vonal mentén „ráncot" hajtunk bele, majd az egészet belevasaljuk a síkba. A mi transzformációnk nagyon hasonlít ehhez, de van egy apró különbség. Ha a lepedőt téglalapokra vágjuk a hajtásvonalak mentén, akkor a vasaló az egyes darabokat egybevágóan simítja bele a síkba, a mi transzformációnk azonban vízszintes és függőleges irányban is „eltorzítja" őket: néhol nyújt, máshol pedig zsugorít.

Összefoglalva: a 9. példában szereplő polinomiális transzformáció úgy képezi a síkot önmagába, hogy bizonyos egyenesek mentén összehajtogatja. A hajtásvonalak komplementuma véges sok téglalapból áll, és a transzformáció mindegyik téglalapot egy-egy-értelműen képezi valamilyen síkbeli téglalapra. Ez a viselkedés jellemző minden polinomiális transzformációra, azzal a különbséggel, hogy a hajtásvonalak általában görbék, és így a komplementum is „görbevonalú poligonlemezekből" áll, és az egyes „görbevonalú poligonlemezek" transzformáltja is „görbevonalú poligonlemez".

Egyváltozós polinomoknak általában nincs igazi inverz függvényük, de mégis sokszor használunk „többértékű inverz függvényeket". Jó példa erre a másodfokú egyenlet megoldóképlete, ami kétértékű, vagy a harmadfokú egyenleteket megoldó Cardano-formula, ami háromértékű. Általánosabban, egy d fokú polinom inverze legfeljebb d-értékű. Ugyanígy invertálhatjuk a polinomiális transzformációkat is: az inverzük egy „többértékű transzformáció", tehát a pontokat egyszerre több helyre[7] is eltranszformálja. Felmerül a kérdés, hogy legfeljebb hány helyre. Lehet a síkon véges sok kivételes pont, amelyeknek egy-egy görbe (tehát végtelen sok pont) lesz a képe, de az összes többi pontnak legfeljebb $\deg(f) \cdot \deg(g)$ képe lesz,[8] ahol f és g az eredeti (invertálandó) transzformációt megadó polinomok (lásd a 21. oldalon az (1) képletet). Az alábbi 14. tétel kimondásához nem volna feltétlenül szükségünk ezekre az inverz transzformációkra. Azért alkalmazzuk őket, mert sokkal szemléletesebbé teszik az állításokat.

Van még egy érdekes lehetőség, amit eddig még nem használtunk ki: görbeseregeket nemcsak a síkba rajzolhatunk, hanem gömbfelületre, hengerre, vagy bármilyen más sima felületre is. Egy ilyen rajz látható például a 3. ábrán. Mi most olyan felületekkel foglalkozunk, amelyek „simák", és megadhatók polinomokkal. Ezeket

[7] Pontosabban fogalmazva: nulla, egy vagy több helyre.

[8] Két kétváltozós polinomegyenletből álló egyenletrendszernek vagy végtelen sok megoldása van, vagy legfeljebb annyi, mint az egyenletek fokának szorzata.

sima algebrai felületeknek hívjuk; a pontos definíciót, hely hiányában, inkább nem idézzük.

10. példa. Nézzük meg újra a 6. példát, és a hozzá tartozó 1.(b) ábrát! Ha ezt a síkbeli rajzot függőleges irányban „összetekerjük", akkor egy vízszintesen fekvő hengerfelülethez, és három rárajzolt görbesereghez jutunk: a vízszintes egyenesekből lesznek a henger alkotói, a függőleges egyenesekből függőlegesen álló körvonalak lesznek (ezek a henger keresztmetszetei), a ferde egyenesekből pedig a hengeren körbe-körbe futó spirálvonalak. Világos, hogy ez a három görbesereg is „speciálisan illeszkedik".

Ha a hengert a másik irányban is „feltekerjük", akkor egy vízszintesen fekvő úszógumi alakú felülethez jutunk, ezt hívják *tórusznak*. A henger alkotóiból vízszintes körök lesznek, a henger függőleges körei megmaradnak függőleges köröknek (ezek a tórusz keresztmetszetei), a hengerre rajzolt spirálvonalakból pedig az tóruszt körbe-körbe járó (térbeli) spirálvonalak lesznek. Világos, hogy ez a három görbesereg is „speciálisan illeszkedik".

A tóruszra rajzolt spirálvonalaink lehetnek önmagukba záródók, vagy a végtelenségig körbe-körbe járó vonalak – attól függően, hogy a két „feltekerés" hogyan viszonyul egymáshoz. Számunkra csak az önmagába záródó spirálok fontosak, mert csak ezeket a spirálokat lehet polinomegyenletekkel megadni. (A konkrét polinomok most sem fontosak.)

Érdemes meggondolni, hogy ha egy tóruszra rajzolt spirálvonal nem záródik ömagába, akkor keresztül-kasul bejárja a tóruszt, méghozzá egyenletesen, a képe mindenütt sűrű halmaz lesz. Ebből persze következik, hogy ha egy polinom zérushelye tartalmaz egy ilyen spirálvonalat, akkor az egész felületet is tartalmazza – tehát a sűrű spirálvonalakat nem lehet polinomegyenletekkel megadni.

11. definíció. A 6. és a 10. példákban szereplő háromféle görbesereg-konfigurációt közös névvel *egyenesszerű konfigurációnak* nevezzük. Vegyük észre, hogy az egyenesszerű konfigurációkban semelyik családnak sincs burkolója.

Hamarosan látni fogjuk, hogy minden „speciálisan illeszkedő" konfiguráció megkapható az egyenesszerű konfigurációk valamelyikéből polinomiális transzformációkkal és azok inverzeivel. Valójában persze minden egyenesszerű konfigurációt folytonos transzformációval kaptunk a 6. példa egyenesseregeiből, így végső soron minden „speciálisan illeszkedő" konfiguráció a 6. példából származik. De a 10. példa transzformációja, a „feltekerés", mivel periodikus függvény, nem lehet polinom. Ebben a cikkben mindent polinomokkal akarunk megadni, ezért érdemes mégis többféle „alapvető" konfigurációt használnunk.

12. példa. Adott egy F felületre rajzolt egyenesszerű konfiguráció (tehát F vagy a sík, vagy egy henger, vagy egy tórusz). Szeretnénk belőle minél általánosabb síkbeli konfigurációt gyártani. Válasszunk egy W sima algebrai felület, egy $\varphi : W \to \mathbb{R}^2$ és egy $\psi : W \to F$ polinomiális transzformációt. Jelölje $\varphi(\psi^{-1}(\_))$ azt a „többértékű transzformációt", amit úgy kapunk, hogy először alkalmazzuk a ψ transzformáció inverzét (ez többértékű, ψ^{-1} jelöli), majd utána a φ transzformációt. Ez az összetett transzformáció az F felületet először a W felületre, majd onnan tovább, a síkba transzformálja, és természetesen az F-re rajzolt egyenesszerű konfigurációt áttranszformálja egy síkbeli „speciálisan illeszkedő" konfigurációba.

Ideális esetben azt mondhatnánk, hogy attól speciális egy konfiguráció, hogy tartalmazza a 3 egyenessereg egy képét. Ez lényegében igaz, de nem teljesen.

Attól még, hogy egy konfiguráció „speciálisan illeszkedik", nem várhatjuk el, hogy a konfiguráció minden részlete „szép" legyen. Elképzelhető ugyanis, hogy egy szép konfiguráció görbéihez valaki „fölöslegesen" hozzáad extra íveket[9] – ezzel nyilvánvalóan nem csökkenti a háromszoros metszéspontok számát. Tehát a legtöbb, amire számíthatunk, hogy minden „speciálisan illeszkedő" konfiguráció görbéiből kiválaszthatjuk a „lényeges" íveket, amelyek már valóban „szépen viselkednek".

13. definíció. Legyen $\{\mathcal{A}_r\}$ és $\{\mathcal{B}_s\}$ két görbesereg a síkban. Azt mondjuk, hogy *van közös komponensük*, ha minden r értékhez található olyan s érték, hogy az $\mathcal{A}_r$ és a $\mathcal{B}_s$ görbéknek van közös ívük.

14. tétel. *Tegyük fel, hogy az $\{\mathcal{A}_r\}$, $\{\mathcal{B}_s\}$, $\{\mathcal{C}_t\}$ görbeseregek „speciálisan illeszkednek". Ekkor a 12. példa mintájára létezik*

- *egy F felületre rajzolt egyenesszerű konfiguráció: $\{\overline{\mathcal{A}}_{\overline{r}}\}$, $\{\overline{\mathcal{B}}_{\overline{s}}\}$ és $\{\overline{\mathcal{C}}_{\overline{t}}\}$ (tehát F vagy a sík, vagy egy henger, vagy egy tórusz),*[10]
- *egy W sima algebrai felület, egy $\varphi : W \to \mathbb{R}^2$ és egy $\psi : W \to F$ polinomiális transzformáció*

úgy, hogy a $\varphi(\psi^{-1}(\_))$ „többértékű transzformáció" az $\{\overline{\mathcal{A}}_{\overline{r}}\}$ görbesereget olyan síkbeli görbeseregbe transzformálja, amelynek van közös komponense az $\{\mathcal{A}_r\}$ görbesereggel, és hasonló módon, $\{\overline{\mathcal{B}}_{\overline{s}}\}$, illetve $\{\overline{\mathcal{C}}_{\overline{t}}\}$ transzformáltjának van közös komponense $\{\mathcal{B}_s\}$-sel, illetve $\{\mathcal{C}_t\}$-vel.[11]

Vajon mi lehet a geometriai oka a „tipikus" viselkedésnek? Mi az, ami kizárja a fenti transzformáció létezését? Bizonyára sejti már az olvasó, hogy a háttérben egy nagyon általános elv működik: a burkolók esküdt ellenségei a „speciális illeszkedésnek". Ahhoz, hogy ezt az elvet precízen megfogalmazzuk, szükségünk lesz egy irreducibilitási feltételre. Egy burkoló csak azokról a görbeívekről adhat információt, amelyeket érint – és korábban már láttuk, hogy egy konfiguráció görbéihez bármikor hozzáadhatunk további íveket, amelyek egészen másképpen viselkednek, mint az eredeti konfiguráció. Az irreducibilitás kizárja az ilyen kettős viselkedést.

[9] Az extra ívek lehetnek a korábbi ívek meghosszabbításai is, de lehetnek tőlük teljesen független vadonatúj ívek is.

[10] Azért jelöljük a paramétereket $\overline{r}$-sal, $\overline{s}$-sal, illetve $\overline{t}$-sal, hogy megkülönböztessük az r, s és t paraméterektől. A tétel kimondja majd, hogy mindegyik $\mathcal{A}_r$ görbe kapcsolatban áll valamelyik $\overline{\mathcal{A}}_{\overline{s}}$ görbével, de arról semmit nem mond, hogy a két paraméterérték, s és $\overline{s}$, hogyan viszonyul egymáshoz.

[11] Kicsit pontosabban is fogalmazhatunk: a közös komponenseket úgy is ki lehet választani, hogy már ők is „speciálisan illeszkednek".

15. definíció. Adott a síkban három görbecsalád. Azt mondjuk, hogy **„a háromszoros pontok grafikonja irreducibilis"** ha van egy olyan 3 változós irreducibilis polinom, $\mathcal{P}(r, s, t)$, amelyik a 3-szoros metszéspontokat adó (r, s, t) paraméterpontokban eltűnik.

Ez így nagyon elvontnak tűnik, ezért később megmutatjuk, hogyan lehet ezt a feltételt a gyakorlatban ellenőrizni. A $P(r, s, t) = 0$ egyenlettel megadott térbeli felületet nevezhetnénk a 3-szoros pontok grafikonjának, de ehelyett egy kicsit másként fogalmazunk.

16. tétel. *Adott három görbesereg: $\{\mathcal{A}_r\}$, $\{\mathcal{B}_s\}$ és $\{\mathcal{C}_t\}$. Tegyük fel, hogy az egyik seregnek, mondjuk $\{\mathcal{C}_t\}$-nek, van egy $\mathcal{E}$ burkolója, ez a burkoló egy pontban találkozik a másik két sereg egy-egy görbéjével, mondjuk $\mathcal{A}_{r_0}$-lal és $\mathcal{B}_{s_0}$-lal (tehát r_0 és s_0 konkrét paraméterértékek). Ha a három szóban forgó görbe, $\mathcal{E}$, $\mathcal{A}_{r_0}$ és $\mathcal{B}_{s_0}$ közül semelyik kettő nem érinti egymást, és a háromszoros pontok grafikonja irreducibilis, akkor a görbeseregek „tipikusan illeszkednek", azaz háromszor n görbének legfeljebb $cn^{2-\eta}$ háromszoros pontja lehet.*

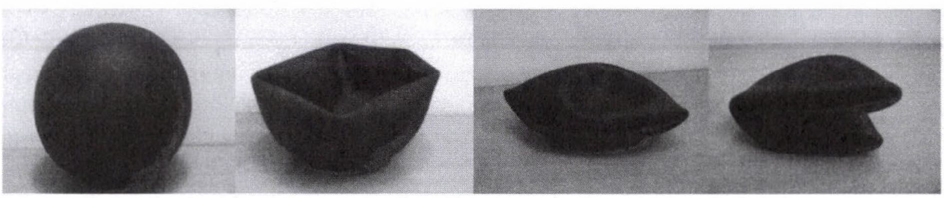
Térjünk vissza a 8. tételhez. Később majd látni fogjuk, hogy ebben az esetben a háromszoros pontok grafikonja irreducibilis. A 4. ábrán három burkolót is látunk: a megvastagított EF, FG és GH íveket. Válasszuk mondjuk az EG ívet: az ábrán jól látszik, hogy mind a szaggatott görbék (az $\{\mathcal{A}_r\}$ család tagjai), mind pedig a pontozott görbék (a $\{\mathcal{B}_s\}$ család tagjai) átmetszik az EF ívet, egyikük sem érinti őt. Ráadásul azok a szaggatott és pontozott görbék, amelyek éppen az EF ív mentén találkoznak, egymást is átmetszik. Ezért alkalmazható a 16. tétel az EF burkolóra. (Persze alkalmazható a másik két burkolóra is.) Tehát a 8. tétel speciális esete 16. tételnek.

Ejtsünk pár szót a 16. tétel bizonyításáról. Tegyük fel, hogy a három görbesereg mégis csak „speciálisan illeszkedik". A 14. tétel szerint van egy $\varphi(\psi^{-1}(\_))$ „többértékű transzformáció" ami egy egyenesszerű konfigurációból állítja elő a mi görbeseregeinket (itt kell az irreducibilitás: az egész konfigurációnkat előállítja, nem csak egy kis darabkáját). Az egyenesszerű konfigurációkban persze nincsenek burkolók, tehát a mi $\mathcal{E}$ burkoló ívünk a transzformáció során „keletkezett". A 28. oldalon, a 9. példa után láttuk, hogy egy polinomiális transzformáció az F hajtásvonalakon kívüli részén nagyon szépen viselkedik: minden egyes K komponenst egy-egy-értelműen képez valamilyen síkbeli tartományba, tehát ha egy görbesereg K-ba eső részének nincsen burkolója (azaz közös érintő görbéje), akkor az ezen rész transzformáltjának sem lesz burkolója. Ez a leírás érvényes marad a mi „többértékű transzformációinkra" is. Ezért burkoló csak a $\varphi(\psi^{-1}(\_))$ hajtásvonalai mentén keletkezhet. De egy ilyen hajtásvonal képe mindhárom családnak burkolója volna, hiszen ott minden görbe „visszafordul" (sőt, az egész „papír" visszafordul). Ezt a lehetőséget kizártuk a 16. tétel másik feltételével: a mi $\mathcal{E}$ burkolónkat a másik két sereg (konkrétan az $\mathcal{A}_{r_0}$ és a $\mathcal{B}_{s_0}$ görbe) átmetszi.[12] Ellentmondásra jutottunk, tehát a három sereg nem lehet „speciálisan illeszkedő".

Most bemutatunk egy általános geometriai módszert, az elágazó fedéseket. Ezt a módszert használjuk majd arra, hogy belássuk (amint megígértük): a 8. tételben a háromszoros pontok grafikonja irreducibilis. De egy ilyen általános módszer sok mindenre használható, például a 14. tétel bizonyítása is ezen alapul (terjedelme miatt azt nem tudjuk bemutatni).

Térjünk vissza a 4. ábrához és a 8. tétel görbeseregeihez. Feltevésünk szerint a háromszoros metszéspontjaink mind az EFG „görbevonalú háromszögben" élnek, ezért csak ezzel a háromszöggel, illetve a belerajzolt ívekkel törődünk. Van egy szembeszökő eltérés a 4. ábra és az 1.(b) ábra görbeseregei között. A 4. ábrán három ívet látunk áthaladni a P ponton, de a rajz hiányos: a 2. ábrával kapcsolatban láttuk, hogy mindhárom seregből két-két ív (tehát összesen hat ív) halad át a P ponton. Ugyanez érvényes az EFG háromszög minden pontjára. Ezzel szemben az 1.(b) ábrán minden pontban mindhárom seregből csupán egy-egy egyenest látunk. Próbáljuk meg ezt az eltérést megszüntetni!

A 3. ábrán láttuk, hogyan lehet egy térbeli trükkel elérni, hogy egy görbesereg tagjai ne találkozzanak egymással. Játsszuk el most is ezt a trükköt mondjuk az $\{\mathcal{A}_r\}$ görbesereggel! A 3. ábrán azt látjuk, hogy egy síkbeli tartományt (ott éppen egy körgyűrűt) az egyik (a megvastagított) határvonala mentén „széthajtjuk", és egy térbeli felületdarabot kapunk (ott éppen egy csőszerűséget), amelyik „duplán fedi" az eredeti tartományt, és az új felület pontjain keresztül már csak egy-egy konvex görbét rajzoltunk. A teljes körgyűrű tartományból minket most csak az EFG háromszög érdekel (lásd a 4. ábrát), a 3. ábra megvastagított „hajtásvonalából" tehát csak egy rövid ívnek, az FG ívnek lesz szerepe.



5. ábra. Labdahajtogatás

Tehát mi is széthajtjuk (megduplázzuk) a háromszögünket az FG ív mentén, és a két háromszög egy gömbgerezd jellegű felületté áll össze. Többek között ezt a széthajtást szemlélteti az 5. ábra: egy lyukas labda 3 lépéses összehajtogatását fényképeztük le. (Négy fázist látunk, a fázisok között egy-egy hajtás történt.) Az utolsó lépésben egy gerezdet hajtunk félbe, és egy gömbháromszög alakú felületet kapunk – erősen megvastagodva, hiszen egy valódi labda rétegei nem simulnak

[12]Miért nem elég, ha csak $\mathcal{A}_r$ metszi át a burkolót? Az érvelésnek ehhez a részéhez elegendő, az itt el nem mondott részletekben használjuk. Vannak a tételnek olyan változatai is, amelyekben csak az egyik családnak kell átmetszenie a burkolót – de azokban is szükség van további (más jellegű) feltételekre.

szorosan egymáshoz. A kapott gömbháromszög nagyon hasonlít a mi EFG háromszögünkhöz. A mi széthajtásunk tehát a valóságban körülbelül úgy néz ki, mintha (visszafelé haladva) egy labdaháromszöget széthajtanánk egy labdagerezddé. Figyeljük meg a fényképen, hogyan duplázódnak meg a háromszög EF és EG élei: egy-egy (tehát összesen két) sima körívvé állnak össze.

Ez a trükk persze csak az $\{\mathcal{A}_r\}$ görbéit „választja szét”, ezek „párhuzamosan vonalkázzák be” az új gerezdünket (lásd a 3. ábrán). Képzeljük el, hogy felrajzoljuk a labdaháromszögre a másik két görbeseregünket is, úgy, ahogyan a 4. ábra EFG háromszögében látszanak. (Jó erősen rányomjuk a ceruzát, hogy mindegyik gumirétegen meglássék.) A széthajtás után, a labdagerezden, az egyes ívek megduplázódnak (de ők most nem állnak össze: mindegyik ívből két-két különálló ív lesz). Részben még most is fennáll az eredeti probléma: minden ponton keresztül két-két ív halad át mind a $\{\mathcal{B}_s\}$, mind pedig a $\{\mathcal{C}_t\}$ seregből.

Sebaj, megismételjük az eljárást még kétszer, „teljesen széthajtogatjuk” a labdánkat (mint az 5. fényképsorozaton, ha jobbról balra követjük a fázisokat). Az első lépésben, mint már láttuk, szétválnak az $\{\mathcal{A}_r\}$ ívei. Könnyű elképzelni (és valóban így is van), hogy a második széthajtással a $\{\mathcal{B}_s\}$ ívei is szétválnak, a harmadik széthajtás pedig a $\{\mathcal{C}_t\}$ íveit is szétválasztja egymástól. Ezért végül a teljesen széthajtogatott labdán minden ponton keresztül csak egy-egy ív halad át mindhárom seregből.

(Az óvatosabb olvasók meggondolhatják, hogy menet közben minden egyes ív megnégyszereződik – hiszen az egyik lépésben, amikor éppen őt „választjuk szét” a társaitól, nem duplázzuk meg. Az is bizonyára feltűnik, hogy a széthajtogatott ívek már nem feltétlenül simák, a hajtásvonalak mentén lehetnek bennük törések.)

És hogy mindez mire volt jó? Hiába dolgoztunk – mondhatja az olvasó – úgysem kaphatjuk meg az 1.(b) ábrát, hiszen a mi konfigurációnk „tipikus”, amaz pedig „speciális”. Így igaz, nem is ez a célunk. Az új, gömbre rajzolt ábrán bármelyik háromszoros metszéspont átmozgatható bámelyik másikba (hiszen a gömb összefüggő), és ebből következik majd, hogy a háromszoros pontok grafikonja irreducibilis.

Az általános esetben is eljátszhatjuk ugyanazt a széthajtogatást, minden egyes burkoló görbe mentén. Ha becsületesen végigcsináljuk, eljutunk egy W felülethez, amelyiket mindhárom görbesereg „egyszeresen” vonalkáz be. De arra nincs semmi garancia, hogy ez a felület gömb lesz. Megtörténhet, hogy mondjuk két gömbből és egy tóruszból áll. Kiderül, hogy ha a W felületnek egyetlen komponense van, akkor a háromszoros pontok grafikonja irreducibilis. Az persze jóval bonyolultabb kérdés, hogy az az egyszem komponens micsoda, de szerencsére az alakját nem kell tudnunk.

A 8. tételben szereplő körseregekre elvégeztük a hajtogatást, és láttuk, hogy W ott egy egyszerű gömb. Ezért a háromszoros pontok grafikonja itt irreducibilis, alkalmazható a 16. tétel. Általában is így szoktuk ellenőrizni az irreducibilitást: széthajtogatjuk a felületünket, és megnézzük, hány komponenst kapunk a végén. Végül, búcsúzóul, eláruljuk az egyik műhelytitkot: akkor sincs semmi baj, ha W-nek több komponense van. A 16. tételt persze nem tudjuk közvetlenül alkalmazni, de az érvelést igen. Ha W mindegyik komponenséhez találunk egy-egy megfelelő burkolót, akkor a konfigurációnk tipikus.

Irodalom

[1] Gy. Elekes, M. Simonovits and E. Szabó, A Combinatorial Distinction between Unit Circles and Straight Lines: How Many Coincidences can they Have? accepted in *Combinatorics, Probability, Computing* (Tom Trotter birthday volume).

[2] György Elekes and Endre Szabó, How to find groups? (And how to use them in Erdős geometry?), submitted.

ELEKES GYURI ÉS A HALMAZELMÉLET

HAJNAL ANDRÁS

1. Első eredmények

Elekes György (Budapest 1949. május 19. – Fót, 2008. szeptember 29.) matematikus professzorra, barátomra emlékezem. Gyuri 1972-ben végezte el az egyetem matematikus szakát. Én ebben az időben egyéves kanadai utamról hazatérve, az egyetemet elhagyva, már a matematikai kutatóban dolgoztam. Erdős, nem sokkal édesanyja halála után, éppen itthon volt. Naphosszat a kutatóban ültünk, rendszerint az igazgatói irodában, melyet tulajdonosa csak ritkán használt.

Rengetegen keresték fel Erdőst, hogy megbeszéljék vele saját matematikai problémáikat, vagy újakat kapjanak tőle. Én meg, közben az előző problémákon gondolkoztam.

A halmazelmélet a Cohen utáni nagy fellendülés korszakát élte. A kombinatorikus halmazelméletnek is ez volt a virágkora, nem kis részben azért, mert EP hihetetlen éleslátással vetett fel problémákat, legtöbbször olyanokat amelyeket éppen nem lehetett a korábbi módszerekkel megoldani. Néhány éve kezdtük intenzíven vizsgálni végtelen halmazokból álló halmazrendszerek kromatikus számát. Ekkor kérdeztük, hogy igaz-e a következő állítás:

Tetszőleges κ végtelen számossághoz létezik olyan, páronként majdnem diszjunkt, megszámlálhatóan végtelen halmazokból álló halmazrendszer, melynek kromatikus száma κ-nál nagyobb.

Már hallottunk róla, hogy két végzős hallgató, Elekes és Hoffman bebizonyította ezt az állítást.

(Erről szól első dogozatuk [1]. Maga a bizonyítás nem volt nehéz, sőt Komjáth [7], 1981-ben, még egyszerűbb bizonyítást is talált. Mégis a dolgozat tovább él: Komjáth, nemrégen a tétel egy érdekes alkalmazását fedezte fel [8].)

Ennek a tételnek az első szerzője jelent meg egy délelőtt körünkben, szerényen, mosolyogva, de érezhető önbizalommal. Mondta, hogy ő bizony be tudja bizonyítani azt a sejtést, amelyet Erdős professzor úr a minap az előadásában kérdezett: Ha a nemnegatív egész számok ω halmaza összes részhalmazai halmazát megszámlálható sok részre bontjuk; azaz

$$\mathcal{P}(\omega) = \bigcup\{S_n : n \in \omega\},$$

akkor létezik olyan $n \in \omega$ „szín", és léteznek A, B halmazok, melyekre

$$A, B, A \cup B \text{ különbözőek és } \{A, B, A \cup B\} \subseteq S_n.$$

Az Erdős által felvetett Ramsey-típusú kérdést – ω alaphalmazra – Gyuri, később, a következő általánosabb tételekkel válaszolta meg:

A. Tétel [3]. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{P}(\omega) = \bigcup\{S_n : n \in \omega\}$. Ekkor létezik olyan $n \in \omega$ és olyan végtelen $Z \subset S_n$, amelyre az összes, a Z elemeiből képezett nem üres véges uniók különbözőek és elemei S_n-nek.*

Definíció. Tetszőleges $S \subset \mathcal{P}(\omega)$ halmazra jelölje $U(S)$ az

$$\left\{\bigcup Z : Z \subseteq S \text{ és } Z \neq 0\right\} \text{ halmazt.}$$

B. Tétel [3]. *Létezik a $\mathcal{P}(\omega)$ halmaz olyan $\mathcal{P}(\omega) = S_0 \cup S_1$ partíciója, melyre $U(Z) \cap S_i$ nem megszámlálható, ha $i < 2$, minden olyan $Z \subset \mathcal{P}(\omega)$-ra, melyre $U(Z)$ nem megszámlálható.*

Kiderült, hogy Gyuri általános módszert talált, pozitív, az A. Tételhez hasonló állítások bizonyítására. Alkalmasan választott halmazrendszerekből alkotott terekben, Baire-típusú sűrűségi tételekkel lehetett homogén halmazokat találni.

2. Közös munkák

A következő években sokat gondolkoztunk hármasban Erdőssel és Gyurival eredményének általánosításain. 1974-ben jelent meg Hindman alapvető eredménye:

Tétel (Hindman, [6]). *Ha ω véges részhalmazait véges sok osztályba osztjuk, azaz ha*

$$[\omega]^{<\omega} = \bigcup\{S_n : n < r\}$$

valamely $r < \omega$-ra, akkor létezik olyan végtelen, páronként diszjunkt *halmazokból álló $Z \subset [\omega]^{<\omega}$, és létezik olyan $n < r$ szín, amelyre a Z elemeiből alkotott összes nem üres véges uniók elemei S_n-nek.*

Kérdéseinket az motiválta, hogy mennyire lehet ezt az eredményt, ω helyett $\kappa > \omega$-ra és $r \geq \omega$-ra általánosítani. Ez a látásmód, amely egyszerre tudta vizsgálni a rokon véges és végtelen problémákat, Erdősre szinte egyedülállóan volt jellemző, és rendkívül hasznosnak bizonyult, még akkor is, ha néha egy-egy érdekes véges kérdés végtelen változata triviálisnak bizonyult, vagy az érdekes végtelen probléma vált végesben érdektelenné.

Általánosítottuk például a Hindman-tételt több reguláris $\kappa > \omega$-ra úgy, hogy a végességet a „κ-nál kisebb számosságú" feltétellel helyettesítettük, de a páronként diszjunkt feltétel helyett Z-ről csak azt tudtuk kikötni, hogy Δ-rendszer.

(A Z halmaz Δ-rendszer, ha létezik olyan D halmaz, melyre Z bármely két különböző elemének metszete D. Homogén Δ-rendszer létezését először K. Prikry cseh-amerikai matematikus vizsgálta és $\kappa > \omega$-ra J. Baumgartner egy módszerét alkalmaztuk.)

Ezekről az eredményekről sajnos csak egy előzetes közlemény jelent meg a Studiában, [4]. Hat oldalon soroltuk a tételeket és definíciókat, a bizonyításokra csak szűkszavú utalásokat téve.

Ez után sokáig nem foglalkoztunk a fenti kérdésekkel. Gyuri, egyelőre, hűtlen lett a halmazelmélethez. Erdőst azonban egyre jobban érdekelte, hogy miért nem tudunk soha *páronként diszjunkt* halmazokat kapni. Szinte valamennyi problémafelvető cikkében megemlítette a következő két kérdés valamelyikét:

A. Kérdés. *Létezik-e olyan κ számosság, amelynek tetszőleges*

$$\mathcal{P}(\kappa) = \bigcup\{S_n : n \in \omega\}$$

színezéséhez létezik végtelen sok páronként diszjunkt halmaz, melyeknek az összes nem üres véges uniója egyszínű?

B. Kérdés. *Létezik-e olyan κ számosság, amelynek tetszőleges*

$$\mathcal{P}(\kappa) = S_0 \cup S_1$$

színezéséhez létezik végtelen sok páronként diszjunkt halmaz, melyeknek az összes nem üres uniója egyszínű?

Általános volt az a vélemény, hogy a válasz talán független az axiómáktól, és az ilyen számosság ha van, feltehetően igen nagy. Konzisztenciabizonyítások is születtek ilyenek „nem létezésére" például a konstruálható halmazok modelljén. 1990-et írhattunk, amikor Gyuri és Kópé (Komjáth) ragyogva jött hozzám, hogy nincsenek ilyen számosságok és már csak néhány kiegészítő pozitív eredményt kell bizonyítani. Így született az [5] dolgozat.

3. Egy szép bizonyítás

Bizonyítjuk, hogy nem létezik az A. Kérdésben keresett κ számosság.

$\mathcal{P}(\kappa)$-t azonosítjuk a κ-n értelmezett karakterisztikus függvények K halmazával.

Definiáljuk a K egy

$$\bigcup\{S_n : n \in \omega\}$$

partícióját:

K-t a kételemű test feletti vektortérnek tekintjük. Választunk benne egy $B = \{b_i : i \in I\}$ bázist. Legyen $b \in S_n$ ha b n báziselem összege. Tegyük fel, hogy

$A_0 \cdots A_r \cdots$ a κ halmaz páronként diszjunkt részhalmazai, és valamennyien az S_n halmazban vannak, valamely $n < \omega$-ra.

Ekkor

$$\chi(A_r) = \Sigma\{b_i \in E_r\}$$

valamely $E_r \subset I$ és $|E_r| = n$-re, minden $r < \omega$-ra. A Δ-rendszer lemma miatt feltehető, hogy az E_r halmazok Δ-rendszert alkotnak. Ekkor azonban használva, hogy diszjunkt halmazok uniójának karakterisztikus függvénye a halmazok karakterisztikus függvényeinek összege, könnyű számolással adódik, hogy már a kettes és hármas uniók sem lehetnek valamennyien az S_n osztályban. ■

Irodalom

[1] G. Elekes, *Colouring of infinite subsets of ω*. Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to Paul Erdős on his 60th birthday), Vol. I, 393–396, Colloq., Math. Soc. János Bolyai, Vol. 10, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[2] G. Elekes, G. Hoffman, *On the chromatic number of almost disjoint families of countable sets.* Infinite and finite sets (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to Paul Erdős on his 60th birthday), Vol. I, 397-402, Colloq., Math.Soc.János Bolyai, Vol.10, North-Holland, Amsterdam, 1975.

[3] G. Elekes, On a partition property of infinite subsets of a set, *Period. Math. Hungar.*, **10** (1974), 215–218.

[4] G. Elekes, P. Erdős, A. Hajnal, On some partition properties of families of sets, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **13** (1978), 151–155.

[5] G. Elekes, A. Hajnal, P. Komjáth, *Partition theorems for the power set.* Sets, graphs and numbers (Budapest, 1991), 211–217, Colloq., Math. Soc. János Bolyai, Vol. 60, North-Holland, Amsterdam, 1992.

[6] N. Hindman, Finite sums from sequences within cells of a partition of N, *J. Combinatorial Theory, Ser. A.*, **17** (1974), 1–11.

[7] P. Komjáth, *Dense systems of almost-disjoint sets,* Finite and infinite sets. (Eger, 1981), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 37, 527–536, North-Holland, Amsterdam, 1984. 527–536.

[8] P. Komjáth, A note on almost disjoint families, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137** (2009), 303–305.

A „KIS GEOMÉTER” ÉS A TÉRFOGATSZÁMÍTÁS NEHÉZSÉGE

LOVÁSZ LÁSZLÓ

Elekes Gyurival először a Fazekas Gimnázium matematika szakkörén találkoztam (egy évvel volt fiatalabb nálam). Amivel már akkor kitűnt, az a geometria feladatok egyszerű, elegáns megoldása volt. El is neveztük magunk között (mi, a nagy másodikosok) „kis geométernek”. Hadd mondjam el az egyik olyan eredményét, amitől a kis geométerből nagy geométer lett.

1. Háttér: konvex halmazok és orákulumok

Az 1980-as évek elején többekkel a konvex testek algoritmikus elméletén dolgoztunk. A kutatást Khachian polinomiális idejű lineáris programozási algoritmusa, az Ellipszoid Módszer motiválta; ez az algoritmus érezhetően minden épeszűen megadott konvex testre működött, de mit jelentett ez matematikailag? Egy n-dimenziós térbeli konvex testet általában nem lehet véges sok adattal megadni, csak speciális osztályok esetén (pl. poliéderek). Hogyan lehet megkerülni, hogy minden ilyen osztályra külön-külön le kelljen írni és elemezni a módszert?

A megoldás az volt, hogy a konvex testet egy *orákulummal* adjunk meg. Sokféle orákulum alkalmazható. A legegyszerűbb az ELEME orákulum: a $K \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex testet egy fekete doboz írja le, melybe egy $x \in \mathbb{R}^n$ vektort beadva, megmondja, hogy x a K testben van-e. Ennek erősebb változata a SZEPARÁCIÓ orákulum, mely abban az esetben, ha a válasz nemleges, megadja ennek egy bizonyítékát is egy x-et K-tól elválasztó hipersík formájában. További érdekes orákulumok: ÉRVÉNYESSÉG, ami egy adott féltérre megmondja, hogy az tartalmazza-e K-t; és OPTIMALIZÁCIÓ, ami egy adott lineáris célfüggvényre megmondja annak maximumát K-n.

Nem célom itt a konvex testek orákulumainak részletes tárgyalása, de Elekes György eredményének ismertetéséhez még néhány megjegyzést kell, hogy tegyek.

– Az orákulumokhoz meg kell még adni néhány adatot (polinomiális számú racionális számot) ahhoz, hogy működjenek. Például az ELEME orákulumhoz meg kell adni egy olyan gömb középpontját és sugarát, ami K-t tartalmazza, és egy olyan gömb középpontját és sugarát, ami K-ban van.

– Mivel véges (sőt n-ben és a többi adatban szereplő számjegyek számában polinomiális) algoritmusok érdekelnek minket, a bemenetek és kimenetek racionálisak kell, hogy legyenek. Az OPTIMALIZÁCIÓ orákulumnál ez nem is mindig lehetséges, ami mindjárt átvezet minket a következő megjegyzéshez:

– Az orákulumoknak gyakran hasznos egy *gyenge* változatuk, aminél az eredményt csak előre megadott hibával kérjük (a hibakorlát része lesz az orákulum inputjának).

Mindezek után kiderült, hogy ezek az orákulumok polinomális időben egymásra visszavezethetők, és ezeknek a visszavezetéseknek legfontosabb elemük Khachian ellipszoid módszere. Például az eredeti eredmény úgy fogalmazható meg, hogy egy (gyenge) SZEPARÁCIÓ orákulummal megadott konvex testre a gyenge OPTIMALIZÁCIÓ orákulum polinomiális időben megvalósítható.

Más fontos algoritmikus kérdések azonban nyitva maradtak, a legfontosabb ezek közül a térfogat kiszámítása volt. Az Ellipszoid Módszert használva, minden (mondjuk gyenge SZEPARÁCIÓ orákulummal megadott) K konvex testhez polinomiális időben ki lehet számítani egy olyan E ellipszoidot, mely a testben van, de ha egy $n^{3/2}$-es faktorral felfújjuk, akkor már tartalmazni fogja K-t. Emiatt

$$\mathrm{vol}\,(E) \le \mathrm{vol}\,(K) \le n^{3n/2}\,\mathrm{vol}\,(E).$$

Mivel E térfogata könnyen kiszámítható, így K térfogatát $n^{3n/2}$ relatív hibával megtudjuk becsülni.

Ez a hiba persze óriási, ha n nagy. Lehet-e jobb módszert találni, és K térfogatát akármilyen kis relatív hibával, vagy legalábbis konstans hibával megbecsülni?

2. Elekes alsó becslése a hibára

Elekes György [4] bebizonyította, hogy a válasz nemleges:

Tétel. *Legyen $\mathcal{A}$ olyan polinomiális algoritmus, mely minden* SZEPARÁCIÓ *orákulummal megadott konvex K testhez egy olyan $V(K)$ számot számít ki, melyre $V(K) \le \mathrm{vol}\,(K)$. Ekkor minden elég nagy n dimenzióban van olyan K test, melyre $V(K) > 2^{0{,}99n}\,\mathrm{vol}\,(K)$.*

(A kitevőben a 0,99 helyett bármely 1-nél kisebb szám írható.)

Ennek az eredménynek gyönyörű bizonyítása teljes egészében elmondható egy ilyen rövid cikkben is. A bizonyítás kulcsa az alábbi lemma.

Lemma. *Legyen B az n dimenziós tér egységgömbje, és legyen $P \subseteq B$ olyan konvex poliéder, melynek p csúcsa van. Ekkor*

$$\mathrm{vol}\,(P) \le \frac{p}{2^n}\,\mathrm{vol}\,(B).$$

A Lemma bizonyítása. A P poliéder minden v csúcsához tekintsük azt a B_v gömböt, melynek a v-t az origóval összekötő szakasz átmérője. Megmutatjuk, hogy ezek a gömbök lefedik a P poliédert. Valóban, legyen $u \in P$, ekkor az $u^{\mathsf{T}}x \geq u^{\mathsf{T}}u$ féltérbe a poliédernek esik pontja (nevezetesen u), és ezért esik ide egy v csúcsa is. De ekkor az $0uv$ szög tompaszög, és ezért $u \in B_v$.

Mivel B_v átmérője legfeljebb fele B átmérőjének, $\mathrm{vol}\,(B_v) \leq 2^{-n}\,\mathrm{vol}\,(B)$. Ezek alapján a P térfogata könnyen becsülhető:

$$\mathrm{vol}\,(P) \leq \sum_v \mathrm{vol}\,(B_v) \leq p2^{-n}\,\mathrm{vol}\,(B).$$

Ezzel a Lemmát bebizonyítottuk.

A Tétel bizonyítása. Alkalmazzuk az $\mathcal{A}$ algoritmust először a B egységgömbre. A kapott $V(B)$ számra a feltételek szerint $V(B) \geq \mathrm{vol}\,(B)$.

Legyen mármost S azon pontok halmaza, amiket az orákulumtól megkérdeztünk, és amik a gömbben vannak, és legyen P az S halmaz konvex burka. Ha az algoritmust most a P konvex testre alkalmazzuk, akkor rendre ugyanazokat a pontokat kérdezzük, és ezért ugyanazokat a válaszokat kapjuk, mint a B esetében. Így a végeredmény is ugyanaz, vagyis $V(P) = V(B)$. Így tehát a Lemma szerint

$$V(P) \geq \mathrm{vol}\,(B) \geq \frac{2^n}{p}\,\mathrm{vol}\,(P).$$

Mivel p az n-nek polinomjával becsülhető felülről, a tétel következik.

3. A tétel utóéletéről

Elekes eredményét megjavította Bárány és Füredi [1]: megmutatták, hogy a tételbeli $2^{0{,}99n}$ együttható helyettesíthető $n^{0{,}99n}$-nel. Így a kitevőben fellépő együtthatótól eltekintve, az Ellipszoid Módszerrel kapott becslés nem javítható.

Az általános negatív eredmény nem mond semmit konkrét speciális konvex testekről. Khachian bebizonyította, hogy egy egyenlőtlenségrendszerrel megadott konvex poliéder térfogatának kiszámítása (pontosan vagy a futási időben exponenciálisan kicsi hibával) NP-nehéz. Nem ismeretes, hogy meg lehet-e becsülni egy ilyen explicite megadott poliéder térfogatát polinomiális időben mondjuk egy 2-es faktoron belül.

Mivel Elekes eredménye szerint a térfogat polinomiális idejű algoritmussal nem becsülhető, egy következő kérdés az, hogy mi történik, ha véletlent használó (randomizált, Monte-Carlo típusú) algoritmusokat is megengedünk. Igazi meglepetéssel szolgált Dyer, Frieze és Kannan [3], akik megmutatták, hogy ilyen algoritmussal egy gyenge ELEME orákulummal megadott test térfogata tetszőlegesen kis relatív hibával polinomiális időben becsülhető. Elekes eredményével együtt ez azt mutatja, hogy legalábbis az orákulummodellben a randomizálás jelentősen segít.

Ezek szerint Elekes fenti gondolatmenete randomizált algoritmusra nem alkalmazható (érdemes végiggondolni, hol bukik meg). De megfelelő módosításával mégis lehet fenti típusú negatív eredményt bizonyítani randomizált algoritmusra is. Például megmutatható [2], hogy egy SZEPARÁCIÓ orákulummal megadott konvex test átmérője a könnyen kapható $O(\sqrt{n})$ hibánál lényegesen jobban nem becsülhető még randomizált algoritmussal sem.

Irodalom

[1] I. Bárány, Z. Füredi, Computing the volume is difficult, *Discrete and Computational Geometry,* **2** (1987), 319–326.

[2] A. Brieden, P. Gritzmann, R. Kannan, V. Klee, L. Lovász, M. Simonovits, Approximation of diameters: randomization doesn't help, *Proceedings 39th Ann. Symp. on Found. of Comp. Sci.* (1998), 244–251.

[3] M. Dyer, A. Frieze, R. Kannan, A random polynomial time algorithm for estimating volumes of convex bodies, *Proc. 21st Annual ACM Symp. on the Theory of Computing* (1989), 375–381.

[4] G. Elekes, A geometric inequality and the complexity of computing volume, *Discrete Comput. Geom.,* **1** (1986), 289–292.

[5] L. G. Khachiyan, The problem of computing the volume of polytopes is NP-hard, *Uspekhi Mat. Nauk, 44* (1989), 199–200.

ELEKES GYÖRGY POLINOMOKKAL KAPCSOLATOS KOMBINATORIKAI EREDMÉNYEIRŐL

RÓNYAI LAJOS

Elekes Gyurival – másfél évtizedes, sportban és matematikai beszélgetésekben gazdag baráti viszony folytatásaként – 1996-ban kezdtem el intenzíven együtt dolgozni, amikor megkeresett a korlátozott polinomokkal kapcsolatos vizsgálataiban felmerülő algebrai természetű kérdésekkel.

Legyen $C > 1$ valós, n pozitív egész, $F \in \mathbb{R}[x, y]$ kétváltozós valós együtthatós polinom. Az F polinom (C, n)-*korlátozott,* ha vannak olyan $X, Y \subset \mathbb{R}$ halmazok, melyekre $|X| = |Y| = n$, és $|F(X \times Y)| \leq Cn$.

Korlátozott polinomok ($C = 2$, n tetszőleges) a következők: $F(x, y) = x + y$ és $G(x, y) = xy$. Az F esetében számtani, a G-nél pedig mértani sorozatok adnak megfelelő X, Y halmazokat. Ezek a példák bizonyos értelemben tipikusak. A [7] dolgozat egyik fő eredménye a következő:

1. tétel. *Tetszőleges $C \geq 1$ valós és pozitív egész d esetén létezik az $n_0 = n_0(C, d)$ egész a következő tulajdonsággal: ha az $F \in \mathbb{R}[x, y]$ polinom (C, n)-korlátozott valamely $n > n_0$ egészre, akkor alkalmas $f, g, h \in \mathbb{R}[z]$ polinomokkal*

$$1. \quad F(x, y) = f(g(x) + h(y)) \quad \text{vagy}$$

$$2. \quad F(x, y) = f(g(x) \cdot h(y)).$$

A tételnek van polinomok helyett racionális függvényekre vonatkozó változata is. A korlátozottság helyett elég, ha valamely $c > 0$ állandóval kellően nagy n-re vannak n elemű $X, Y, Z \subset \mathbb{R}$ halmazok, hogy F grafikonjának $\geq cn^2$ pontja van az $X \times Y \times Z$ halmazon.

Az F korlátozottsága a következő módon ellenőrizhető. Legyen

$$q_1(x, y) := \frac{\partial F}{\partial x} \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Az 1. tétel segítségével megmutatható, hogy F pontosan akkor lesz 1. vagy 2. alakú, ha

$$q_2(x, y) := \frac{\partial^2 \left(\log |q_1(x, y)| \right)}{\partial x \partial y} = 0,$$

mindenütt, ahol q_2 értelmes.

A tétel segítségével sikerült bizonyítanunk G. Purdy következő sejtését:

1. sejtés. *Legyen s és t két egyenes az euklideszi síkon, $\mathcal{U} \subset s$, $\mathcal{V} \subset t$ két ponthalmaz, mindkettő n ponttal. Tegyük fel, hogy az n^2 darab $d(U_i, V_j)$ távolságérték között ($U_i \in \mathcal{U}$, $V_j \in \mathcal{V}$) csupán $\leq Cn$ különböző van. Ekkor, feltéve hogy $n > n_0(C)$, a két egyenes vagy párhuzamos, vagy merőleges.*

A koszinusztételt alkalmazva arra jutunk, hogy az $F(x, y) = x^2 - 2\lambda xy + y^2$ polinom korlátozottságát kell vizsgálni. Egyszerű számolással adódik, hogy $q_2 \equiv 0$ csak akkor lehetséges, ha $\lambda = 0$ vagy ± 1, ami bizonyítja a sejtést. Az [3] dolgozatban Gyuri – P. Brass és J. Matoušek kérdését megválaszolva – élesebb állítást igazolt: ha a két egyenes nem párhuzamos vagy merőleges, akkor legalább $cn^{5/4}$ különböző távolság lép fel $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ pontjai között, ahol $c > 0$ egy alkalmas állandó.

Az 1. tétel bizonyításához használt eszközök több területről valók (a Pach–Sharir-tétel a kombinatorikus geometriából, Lüroth tétele a testelméletből, kombinatorikus érvelések), jelentős részük megjelenik Elekes Gyuri korábbi rokon témájú dolgozataiban [1], [2], [4]. A következő eredmény fontos szerepet játszik az 1. tétel bizonyításában; a segítségével kapható kvalitatív állítás (polinomok alakjára vonatkozó állítás) az eredetileg rendelkezésre álló kvantitatív információból (görbék illeszkedéseinek száma).

2. tétel. *Legyen $C \geq 1$ és d pozitív egész. Van olyan $c^* = c^*(C, d)$, amellyel igaz a következő: legyenek $X, Z \subset \mathbb{R}$, $n \leq |X|, |Z| \leq Cn$ és $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}[t]$ legfeljebb d fokú polinomok halmaza, melyre $|\mathcal{F}| \geq n$. Tegyük fel továbbá, hogy minden $f_i \in \mathcal{F}$ grafikonja legalább n pontot tartalmaz az $X \times Z$ halmazból. Ekkor az f_i polinomok közül legalább c^*n vagy*

$$1. \qquad f_i(x) = f\big(g(x) + s_i\big) \quad \text{vagy}$$

$$2. \qquad f_i(x) = f\big(g(x) \cdot s_i\big)$$

alakú, ahol $s_i \in \mathbb{R}$ és $f, g \in \mathbb{R}[t]$ rögzített (i-től független) polinomok.

A tételnek már a $d = 1$ esete is érdekes, amikor is az f_i polinomok lineárisak, vagyis egyeneseket határoznak meg. Az egyenesekre vonatkozó változat – amit Elekes Gyuri Lineáris Tételnek nevezett – az [1] dolgozatában jelent meg. A Lineáris Tétel azt mondja, hogy a feltételek teljesülése esetén vagy van sok párhuzamos az egyeneseink között (az 1. lehetőség az állításban), vagy pedig kiválasztható közülük sok, egy ponton átmenő egyenes (2. lehetőség).

Hasonló eszközök alkalmazásával, egyebek között a Lineáris Tétel egy projektív változata segítségével kapta Elekes és Király [6] a következő eredményt, amely az additív számelmélet egyik központi vizsgálati irányát terjeszti ki nem kommutatív csoportokra.

Jelölje $\mathcal{P}$ az $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ valós projektív egyenes $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ alakú automorfizmusainak (vagyis $ad - bc \neq 0$) a halmazát.

$\Phi, \Psi \subset \mathcal{P}$ esetén legyen

$$\Phi \circ \Psi = \{\varphi \circ \psi : \varphi \in \Phi, \ \psi \in \Psi\}.$$

3. tétel. *Legyen $C > 0$ és $\Phi, \Psi \subset \mathcal{P}$. Tegyük fel továbbá, hogy $|\Phi|$, $|\Psi| \geq n$ és $|\Phi \circ \Psi| \leq Cn$.*

Ekkor létezik a $\mathcal{P}$-ben egy $S < \mathcal{P}$ Abel-részcsoport úgy, hogy Φ (illetve Ψ) lefedhető az S konstans sok bal (illetve jobb) oldali mellékosztályával.

Az 1. tételt Elekes Gyuri és Szabó Endre az utóbbi években igen erőteljesen általánosították és kiterjesztették. A [8] dolgozat szép eredményeinek egyikét szeretném itt idézni. Jelölje $D \subset \mathbb{C}$ a komplex egységkörlemezt.

4. tétel. *Legyen d pozitív egész. Léteznek olyan $\eta = \eta(d)$, $\lambda = \lambda(d)$ és $n_0 = n_0(d)$ konstansok, amelyekkel a d fokú $V \subset \mathbb{C}^3$ algebrai felületre ekvivalensek az alábbiak:*

(a) *Legalább egy $n > n_0(d)$ esetén vannak olyan n-elemű $X, Y, Z \subset \mathbb{C}$ részhalmazok, amelyekre*

$$\left|V \cap (X \times Y \times Z)\right| \geq n^{2-\eta}.$$

(b) *V vagy tartalmaz egy görbe feletti hengerfelületet (ami $F(x, y) = 0$, vagy $F(x, z) = 0$, vagy $F(y, z) = 0$ alakú), vagy pedig vannak olyan $f, g, h : D \to \mathbb{C}$ invertálható komplex analitikus függvények, hogy*

$$V \supset \Big\{\big(f(x), g(x), h(x)\big) \in \mathbb{C}^3; \ x, y, z \in D, \ x + y + z = 0\Big\}.$$

(c) *Minden pozitív egész n esetén vannak olyan n-elemű $X, Y, Z \subset \mathbb{C}$ részhalmazok, amelyekre*

$$\left|V \cap (X \times Y \times Z)\right| \geq (n-2)^2/8.$$

A tétel igen komoly előrelépést jelent abban, hogy a komplex számok $\mathbb{C}$ teste felett érvényes, míg a korábbi módszerek csak $\mathbb{R}$ felett működtek. Ugyanakkor ennek a tételnek is van valós változata.

Itt a V tetszőleges felület lehet, nem csak egy $F(x, y)$ alakú függvény grafikonja. Sőt, a dolgozatban még általánosabb korlátos fokú algebrai halmazokra vonatkozó eredményt is igazoltak.

A korábbiakkal szemben ugyancsak lényeges előrelépést jelent, hogy cn^2 helyett csupán $n^{2-\eta}$ illeszkedés is elég az (a) $\Rightarrow$ (b) következtetés bizonyításához.

A tétel különös kulturális kapcsolataként említhetjük, hogy egy híres és nehéz modellelméleti tétel – E. Hrushovski Csoport Konfigurációs Tétele – is megjelenik a képben. A Hrushovski-tétel fontos speciális esetére adnak önálló, algebrai geometriai fogalmakon alapuló bizonyítást.

Az eredményeik erejét szép új alkalmazásokkal érzékeltetik: választ adnak Hirzebruch egy kérdésre, ami kúpszeletek közti érintések számával foglalkozik; a 4. tétel közvetlen alkalmazásaként érdekes felső korlátot nyernek körseregek háromszoros pontjainak a számára. A tételeik általánossága és erőssége alapján várható, hogy a jövőben további tartalmas alkalmazások születnek.

Irodalom

[1] Gy. Elekes, On linear combinatorics I, *Combinatorica,* **17** (1997), 447–458.

[2] Gy. Elekes, On linear combinatorics II, *Combinatorica,* **18** (1998), 13–25.

[3] Gy. Elekes, A note on the number of distinct distances, *Period. Math. Hungar.*, **38** (1999), 173–177.

[4] Gy. Elekes, On linear combinatorics III, *Combinatorica,* **19** (1999), 43–53.

[5] Gy. Elekes, SUMS versus PRODUCTS in number theory, algebra and Erdős geometry, in: *Paul Erdős and his mathematics, II* (Budapest, 1999), 241–290, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002.

[6] Gy. Elekes, Z. Király, On the combinatorics of projective mappings, *J. Algebraic Combin.*, **14** (2001), 183–197.

[7] Gy. Elekes, L. Rónyai, A combinatorial problem on polynomials and rational functions, *Journal of Combinatorial Theory, A,* **89** (2000), 1–20.

[8] Gy. Elekes, E. Szabó, How to find groups? (And how to use them in Erdős geometry?), manuscript, 2008.

ÖSSZEG- ÉS SZORZATHALMAZOK

KÁROLYI GYULA

Előadásom tárgyának olyan témát választottam, amely szívemhez nagyon közel áll, és híven tükrözi Elekes György eredeti látásmódját, meglepően gyönyörű bizonyítások iránti fogékonyságát. Ebben a rövid beszámolóban csupán az emlékülésen elhangzottakat kívánom összefoglalni, törekedve az előadás hangulatának megőrzésére. Egy pontos referenciákkal kiegészített részletesebb változattal az Eötvös Loránd Tudományegyetem *Annalesének* lapjain találkozhatnak majd olvasóink.

Legyen A a pozitív egész számok egy n elemű részhalmaza, és jelölje $A + A = \{a + b \mid a, b \in A\}$ az A elemeiből képezhető kéttagú összegek halmazát. Világos, hogy

$$2n - 1 \leq |A + A| \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

Az is könnyen látható, hogy $|A + A| = 2n - 1$ pontosan akkor teljesül, ha A elemei egy számtani sorozatot alkotnak. Továbbmenve, $|A+A| \leq 3n-4$ esetén A része egy legfeljebb $2n - 3$ tagú számtani sorozatnak; Freiman egy mély eredménye szerint pedig, amelyre Ruzsa Imre adott először közérthető bizonyítást, $|A+A| < cn$, vagy az ún. Vinogradov-féle jelölésmódot használva, $|A + A| \ll n$ esetén A része egy alacsony dimenziós, n-ben lineáris elemszámú általánosított számtani sorozatnak, melyet egy téglarács affin képeként képzelhetünk el.

Nyilván ugyanezek a becslések érvényesek az $A \cdot A$ szorzathalmazra is, ahol $|A \cdot A| = 2n - 1$ azzal ekvivelens, hogy A elemei egy mértani sorozatot alkotnak. Ez a két struktúra azonban nagyon távol esik egymástól: ha A elemei egy számtani sorozatot alkotnak, akkor $|A \cdot A| \gg n^2/\log^3 n$, kvadratikus alsó becslés azonban általában nem mondható.

Várhatóan azonban olyan struktúra sem létezik, amely kielégítő módon közelítené egymáshoz a kettőt. Erdőstől és Szemeréditől származik a sejtés, hogy tetszőlegesen kis pozitív epszilonra igaz

$$\max\left\{|A + A|, |A \cdot A|\right\} \gg n^{2-\varepsilon}.$$

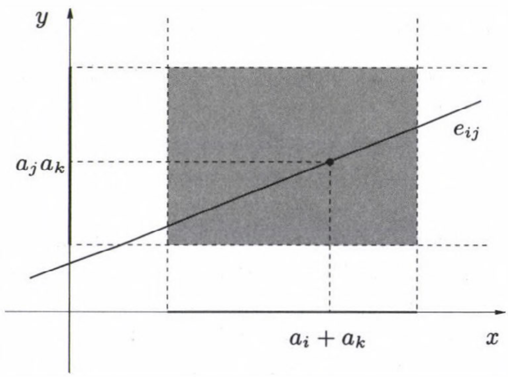
Az A elemeire adott pozitivitási feltételnek világos, hogy nincs különösebb szerepe, és valószínűsíthető az is, hogy a sejtés egészek helyett a valós számok esetében is fennáll. Az első nem triviális alsó becslés a probléma kitűzőitől származik, melyen előbb Nathanson, majd Ford hajtott végre apróbb javítást. Az első igazi áttörés azonban Elekesnek köszönhető, aki egy frappáns ötlettel, az illeszkedési geometria eszközeit használva adott $n^{5/4}$ nagyságrendű alsó becslést, amely a valós számok körében is érvényes.

A bizonyítás Szemerédi és Trotter következő síkgeometriai eredményére vezethető vissza. Legyen adott a síkon P számú pont és E darab egyenes. Ekkor a közöttük megállapítható illeszkedések I számára

$$I \ll \max\left\{E, P, (EP)^{2/3}\right\}.$$

Ha E és P egyike sem túl kicsi a másikhoz képest, akkor itt a domináns tag $(EP)^{2/3}$, ami nem javítható.

Valós számok adott $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ részhalmaza esetén tekintsük a síkon az $(A+A) \times (A \cdot A)$ halmazt, vagyis azon pontokat, melyek első koordinátája az $A+A$ halmaznak, második koordinátája pedig $A \cdot A$-nak eleme. Ez tehát $P = |A+A| \cdot |A \cdot A|$ darab pont.



Tekintsük most azt az $E = n^2$ darab egyenest, amelynek egyenlete

$$e_{ij}: \quad y = a_j(x - a_i)$$

alakú. Mivel az $(a_i + a_k, a_j a_k)$ pont illeszkedik az e_{ij} egyenesre, a pont-egyenes illeszkedések száma $I \geq n^3$. A Szemerédi–Trotter-tétel alapján tehát

$$\max\left\{|A+A|, |A \cdot A|\right\} \geq \sqrt{P} \gg n^{5/4}.$$

A számelmélet és a geometria világa közötti átjárás régi keletű, szisztematikus kiépítése Minkowski érdeme. Elekes Gyuri itt bemutatott megközelítése egy addig rejtett újabb kapcsolatra mutatott rá, amivel a kérdéskört a legjelentősebb nemzetközi kutatások homlokterébe emelte. Erre alapozva sikerült Elekesnek Ruzsa Imrével együtt igazolni az Erdős–Szemerédi-sejtést olyan A valós számhalmazokra, amelyekre az összeghalmaz kicsi, mérete n-ben lineáris. Noha a bizonyítás dualizálását célzó kísérletek nem jártak sikerrel, Mei-Chu Chang az *Annals of Mathematics* folyóiratban megjelent cikkében megmutatta, hogy ha a szorzathalmaz mérete kicsi, akkor az $A+A$ összeghalmaz méretére kvadratikus alsó becslés is érvényes.

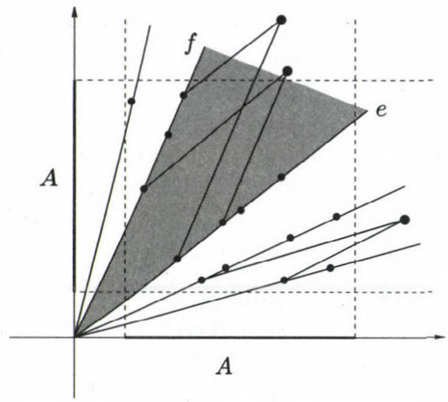
Ez a megoldás már erősen épít arra, hogy A elemei egész számok. Másik fontos aspektusa, hogy a fegyvertárat kibővítette a harmonikus analízis eszközeivel, ezzel lehetőséget teremtve a probléma véges testek fölötti változatának megtámadására. Erre egyik legizgalmasabb példa Bourgain, Katz és Tao fajsúlyos cikke, melyben többek között a diszkrét Kakeya-problémára való alkalmazás is helyet kapott. Túlzás nélkül állíthatjuk tehát, hogy Elekes Györgynek az *Acta Arithmetica* hasábjain 1997-ben megjelent „On the number of sums and products" című dolgozatát egyik legnagyobb hatású munkájaként tarthatjuk számon.

Ezzel azonban a történet még korántsem ért véget. A közelmúltban Helfgott eredményeinek köszönhetően robbanásszerűen továbbszélesedett az összeg- és szorzathalmazok elmélete, valamint annak alkalmazási köre, ami most már az expander gráfok igen fontos elméletét és a Hecke operátorok spektrális elméletét is érinti. Hogy csak egyetlen könnyen érthető példát említsünk, Helfgott igazolta az $SL_2(p)$ és $SL_3(p)$ csoportok Cayley-gráfjainak uniform exponenciális növekedését, először mutatva példát olyan végtelen csoportosztályra, amelyre teljesül Babai egy híres régi sejtése. Helfgott cikkei is olyan rangos folyóiratokban kaptak helyet, mint az *Annals* és az *Inventiones,* legújabb, több mint 70 oldalas kézirata pedig nemrég került fel az arXiv-ra. Ma már szinte heti gyakorisággal jelennek meg az interneten olyan tanulmányok, amelyek közvetve vagy közvetlenül Elekes cikkéhez kapcsolódnak. Gyuri munkájának nyomán tehát egy olyan, dinamikusan fejlődő elmélet alakulhatott ki, melynek hatása éppolyan szerteágazóan növekszik, mint az előbb említett Cayley-gráfok.

Végezetül szeretnék még röviden visszatérni az eredeti Erdős–Szemerédi-problémára és annak geometriai megközelítésére. Pár éve Solymosi József egy logaritmikus faktortól eltekintve $n^{14/11}$-re javította Elekes alsó becslését. Külön érdekessége ennek a szintén illeszkedési geometriára alapuló érvelésnek, hogy a komplex számtest fölött is működik, ami már csak azért is figyelemre méltó, mert a Szemerédi–Trotter-tételnek egyelőre nem ismeretes a komplex síkon érvényes pontos megfelelője. A legújabb fejlemény ebben az irányban Solymosi igen ravasz bizonyítása, amelynek során a kitevőt sikerült 4/3-ra megjavítania. Ennek a megoldásnak az ötletét szeretném még itt felvázolni a technikai részleteket mellőzve.

Az egyik gondolat az, hogy az $A \cdot A$ szorzathalmaz helyett az A/A hányadoshalmazzal foglalkozunk. Gondoljunk arra, hogy ha a szorzathalmaz egy ab eleme cd alakban is felírható, akkor a hányadoshalmaz a/d eleme is reprezentálható c/b alakban. A dolog persze nem ennyire egyszerű, de fogadjuk el munkahipotézisként. Legyen $|A/A| = \ell \gg 1$, és további egyszerűsítés végett – könnyen meggondolható, hogy ezáltal csak egy log-faktor nagyságrendű lehet a hiba –, tegyük fel, hogy a hányadoshalmaz minden eleme körülbelül ugyanannyiszor, vagyis $\approx n^2/\ell$-féleképpen írható fel a/b alakban az A halmaz alkalmas a, b elemeivel. Ez geometriailag azt jelenti, hogy az $A \times A$ Descartes-szorzat pontjai nagyjából egyenletesen oszlanak el ℓ darab, origón áthaladó egyenesen.

Tekintsük az egymással szomszédos e, f egyeneseket. Legyenek a, b, c, d az A halmaz olyan elemei, hogy az (a, b) pont az e egyenesre, (c, d) pedig f-re illeszkedik. Ekkor az $(a + c, b + d)$ pont a két egyenes által meghatározott szögtartományba



esik. A két egyenes irányvektorának függetlensége miatt egy másik hasonló pontpárból kiindulva az $(A+A)\times(A+A)$ halmaz egy újabb pontjához jutunk. Az adott szögtartomány tehát ennek a halmaznak $\gg (n^2/\ell)^2$ különböző pontját tartalmazza. Lévén $\ell-1$ ilyen szögtartomány,

$$\big|(A+A)\times(A+A)\big| \gg n^4/\ell,$$

ahonnan $|A+A|^2\cdot|A/A|\gg n^4$, végül $\max\big\{|A+A|,|A/A|\big\}\gg n^{4/3}$ adódik.

Az imént látott gondolatmenet azt hiszem mindenkit meggyőzött arról, hogy noha Elekes Gyuri már nincs közöttünk, szellemisége, gondolatvilága továbbra is bennünk él. Az előadást megelőzően kaptam egy levelet Solymosi Józsitól, amelyben így ír: „Szeretném megjegyezni, hogy Gyuri bizonyítása inspirálta az én javításomat is. Tőle tanultam, hogy geometriát használjak additív problémák megoldására. Önzetlenül örült az eredményeimnek, nem bánta, hogy megdöntöttem az ő »rekordját«."

Kedves Gyuri! Köszönjük mindazt, amit Tőled kaptunk.

Károlyi Gyula
ELTE TTK Matematikai Intézet

ELEKES GYÖRGY PUBLIKÁCIÓINAK LISTÁJA

G. Elekes: On a partition property of infinite subset of a set, *Period. Math. Hungar.*, **5** (1974), 215–218.

G. Elekes, G. Hoffmann: On the chromatic number of almost disjoint families of countable sets, *Infinite and finite sets,* (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. I, Colloq., Math. Soc. János Bolyai, Vol. **10**, North-Holland, Amsterdam, 1975, 397–402.

G. Elekes: Colouring of infinite subsets of ω, *Infinite and finite sets,* (Colloq., Keszthely, 1973; dedicated to P. Erdős on his 60th birthday), Vol. I, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. **10**, North-Holland, Amsterdam, 1975, 393–396.

G. Elekes, P. Erdős, A. Hajnal: On some partition properties of families of sets, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **13** (1978), 151–155.

G. Elekes: n points in the plane can determine $n^{3/2}$ unit circles, *Combinatorica,* **4** (1984), 131.

G. Elekes: A geometric inequality and the complexity of computing volume, *Discrete Comput. Geom.*, **1** (1986), 289–292.

G. Elekes, A. Hajnal, P. Komjáth: Partition theorems for the power set, *Sets, graphs and numbers,* (Budapest, 1991), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **60**, North-Holland, Amsterdam, 1992, 211–217.

G. Elekes: Generalized breadths, circular Cantor sets, and the least area UCC, *Discrete Comput. Geom.*, **12** (1994), 439–449.

G. Elekes, P. Erdős: Similar configurations and pseudo grids, *Intuitive geometry,* (Szeged, 1991), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **63**, North-Holland, Amsterdam, 1994, 85–104.

G. Elekes: Circle grids and bipartite graphs of distances, *Combinatorica,* **15** (1995), 167–174.

G. Elekes: On the number of sums and products, *Acta Arith.*, **81** (1997), 365–367.

G. Elekes: On linear combinatorics. I. Concurrency – an algebraic approach, *Combinatorica,* **17** (1997), 447–458.

G. Elekes: On some combinatorial problems. I. Classical incidence problems, (Hungarian), *Mat. Lapok,* (N.S.) **7** (1997), 67–80.

G. Elekes: A combinatorial problem on polynomials. Dedicated to the memory of Paul Erdős, *Discrete Comput. Geom.*, **19** (1998), 383–389.

G. Elekes: On linear combinatorics. II. Structure theorems via additive number theory, *Combinatorica,* **18** (1998), 13–25.

G. Elekes: On some combinatorial problems. II. Bounds on incidences, (Hungarian) *Mat. Lapok,* (N.S.) **8/9** (1998/99), 7–19.

G. Elekes: On the structure of large homothetic subsets. *Contemporary trends in discrete mathematics* (Štiřín Castle, 1997), *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.,* **49,** Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 101–111.

G. Elekes: On linear combinatorics. III. Few directions and distorted lattices, *Combinatorica,* **19** (1999), 43–53.

G. Elekes: A note on the number of distinct distances, *Period. Math. Hungar.,* **38** (1999), 173–177.

G. Elekes, L. Rónyai: A combinatorial problem on polynomials and rational functions, *J. Combin. Theory,* (A), **89** (2000), 1–20.

G. Elekes, M. B. Nathanson, I. Z. Ruzsa: Convexity and sumsets. *J. Number Theory,* **83** (2000), 194–201.

G. Elekes: On some combinatorial problems. III. Distances and unit circles, (Hungarian) *Mat. Lapok,* (N.S.), **10** (2000/01), 13–21.

G. Elekes, Z. Király: On the combinatorics of projective mappings, *J. Algebraic Combin.,* **14** (2001), 183–197.

G. Elekes: SUMS versus PRODUCTS in number theory, algebra and Erdős geometry, *Paul Erdős and his mathematics,* II (Budapest, 1999), *Bolyai Soc. Math. Stud.,* **11,** János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 241–290.

G. Elekes: On the number of distinct radii of circles determined by triplets and on parameters of other curves, *Studia Sci. Math. Hungar.,* **40** (2003), 195–203.

G. Elekes, I. Z. Ruzsa: Few sums, many products, *Studia Sci. Math. Hungar.,* **40** (2003), 301–308.

B. M. Ábrego, G. Elekes, S. Fernández-Merchant: Structural results for planar sets with many similar subsets, *Combinatorica,* **24** (2004), 541–554.

G. Elekes: On some combinatorial problems. IV. Combinatorial number theory (Hungarian), *Mat. Lapok,* (N.S.) **12** (2004/05), 4–19.

G. Elekes, I. Z. Ruzsa: The structure of sets with few sums along a graph, *J. Combin. Theory,* (A), **113** (2006), 1476–1500.

G. Elekes, C. D. Tóth: Incidences of not-too-degenerate hyperplanes, *Symposium on Computational Geometry* (2005), 16–21.

G. Elekes: On some combinatorial problems. V. Similar subsets, (Hungarian) *Mat. Lapok (N.S.),* **14** (2008), no. 1, 9–19.

G. Elekes: On the structure of sets with many k-term arithmetic progressions, *Acta Arith.,* **138** (2009), no. 2, 145–164.

G. Elekes: A note on a problem of Erdős on right angles, *Discrete Math.,* **309** (2009), no. 16, 5253–5254.

G. Elekes, M. Simonovits, E. Szabó: A Combinatorial Distinction between Unit Circles and Straight Lines: How Many Coincidences can they Have? *Combin. Probab. Comput.*, **18** (2009), no. 5, 691–705.

G. Elekes, N. Hegyvári, I. Z. Ruzsa: On difference sets in groups and in generalized arithmetic progressions *Journal of Combinatorics and Number Theory,* to appear.

G. Elekes: On some combinatorial problems. VI. Descartes products, incidences and compositions of functions, (Hungarian) *Mat. Lapok,* submitted.

G. Elekes: On some combinatorial problems. VII. Regular structures in geometry, number theory and algebra, (Hungarian) *Mat. Lapok,* submitted.

G. Elekes, E. Szabó: HOW TO FIND GROUPS? (And how to use them in Erdős Geometry?), *Combinatorica,* submitted.

G. Elekes, E. Szabó: On Triple Lines and Cubic Curves – the Orchard Problem revisited, submitted.

G. Elekes: Trapezoids and deltoids in "fat" planar point sets, *Graphs and Combinatorics,* submitted.

G. Elekes: Density version of a theorem of Beck and Szemerédi–Trotter in discrete geometry, submitted.

G. Elekes, H. Kaplan, M. Sharir: On lines, joints, and incidences in three dimensions, *Discrete Comput. Geom.,* submitted.

TARTALOMJEGYZÉK

Nagy és Társa Nyomda és Kiadó Kft., Budapest