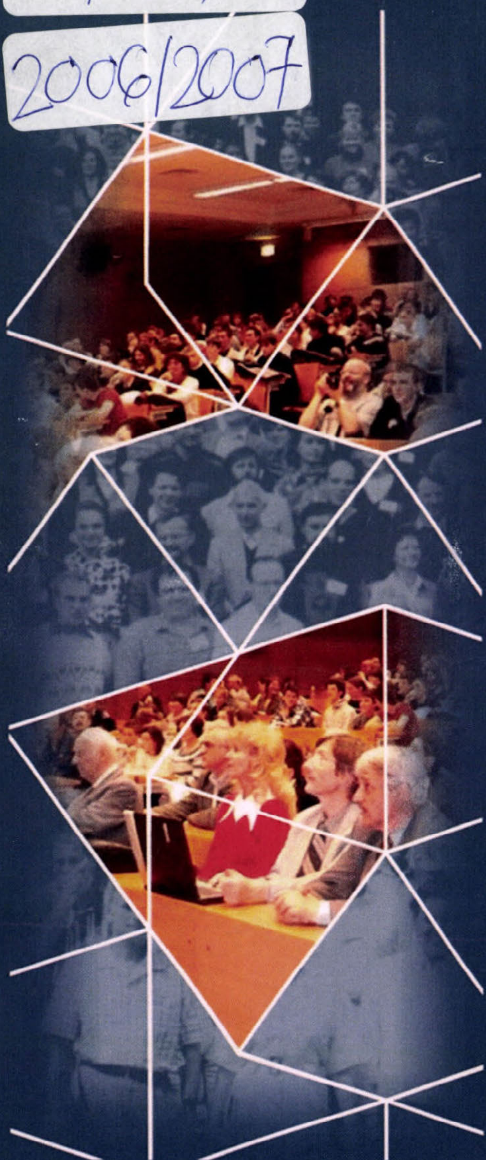
Matematikai Lapok



EGRES-különszám

Vendégszerkesztő:
Frank András

2006-2007/1

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 13. évfolyam (2006–2007), 1. szám

(Megjelent 2007-ben)

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

ELŐSZÓ

FRANK ANDRÁS[1]

Az Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport (angol neve utáni rövidítéssel EGRES) 2001-ben alakult, 2003-tól MTA-ELTE akadémiai kutatócsoportként működik. A csoport a magyar kombinatorikus iskola optimalizálási irányzatát képviseli, amelynek alapjait Kőnig Dénes és Egerváry Jenő rakták le, és amelyhez Gallai Tibor majd Lovász László járult hozzá alapvetően. Az EGRES kutatásainak fókuszában a kombinatorikus optimalizálásnak az az irányzata áll, amelyet leginkább A. Schrijver 2003-ban megjelent Combinatorial Optimization című háromkötetes műve fémjelez. Ennek lényege az, hogy az adott feladatra vonatkozó polinomiális futásidejű megoldó algoritmus létrehozásához az út a probléma mélyreható strukturális vizsgálatán keresztül vezet.

Az EGRES 2005 októberében egynapos ünnepi konferenciát szervezett az Akadémián a Magyar Módszer 50. évfordulója alkalmából. Mint ismeretes, páros gráfban maximális súlyú párosítás keresését Egerváry Jenő oldotta meg 1931-ben egy minimax formula révén. Egerváry bizonyítását hatékony algoritmikus formába Harold W. Kuhn öntötte, az 1955-ben megjelent „The Hungarian method for the assignment problem" című munkájában. Kuhn a Magyar Módszer elnevezést Egerváry és Kőnig úttörő munkájának tiszteletéül adta.

Az MTA az egyetemi kutatócsoportjainak további támogatására kiírt pályázata kapcsán 2006 során elkészítettünk egy terjedelmesebb kiadványt, amely áttekinti az EGRES-nek az elmúlt öt év során elért kutatási eredményeit, a főbb irányokat, motivációkat, keresztkapcsolatokat. (A kiadvány letölthető a `www.cs.elte.hu/egres` címről, de kívánságra bekötött példányt is szívesen postázunk).

A jelen összeállítás célja, hogy fiatal kutatóink néhány új, rövidebb eredményének bemutatásával adjunk ízelítőt csoportunk tevékenységéből.

Japán kutatók adtak elvi választ arra a forrástelepítési feladatra, amelyben a cél egy irányított gráfban a csúcsok olyan minimális elemszámú részhalmazának a meghatározása, amelyből minden pontba vezet k élidegen út. Nyitva maradt azonban a szóbanforgó mennyiségek algoritmikus meghatározása. Csoportunknak ezt sikerült megoldania, és a megkonstruált algoritmus hatékonyságának vizsgálata kapcsán vetődött fel az az újszerű extrém halmazrendszeres probléma, amelynek megoldását Bernáth Attila írása tartalmazza.

[1] Az Egerváry Kutatócsoport vezetője

Közismert a teljesen unimoduláris hipergráfok (pl. páros gráfok, intervallumrendszerek) egyenletes színezhetőségét kimondó eredmény. Fekete Zsolt és Szabó Jácint munkája jóval bonyolultabb körülmények között igazol egy fákra vonatkozó egyenletes színezési tételt.

A H. Kuhn által bevezetett (erősen polinomiálisnak bizonyuló) Magyar Módszer kiindulópontja Egerváry tétele volt. Jüttner Alpár cikkében kimutatja, hogy Egerváry bizonyításának eredeti, generikus alakja nem szolgáltat polinomiális algoritmust, sőt nem-racionális költségfüggvény esetén még csak nem is biztosan véges. Igazán meglepő, hogy ez nem volt korábban ismert.

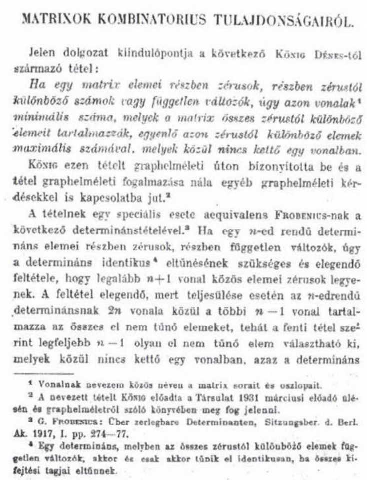
A frissen felbukkanó kombinatorikus optimalizálási problémák döntő többségéről hamar kiderül, hogy vagy NP-teljes vagy pedig visszavezethető olyan korábbról ismert jól kezelhető modellek valamelyikére, mint amilyenek például a folyamok, párosítások, matroid metszetek. Ebben a tükörben jelentősnek tekinthető az a másfél évtizede tett felismerés, hogy megannyi összefüggőség-növelési problémára létezik jó karakterizáció és polinomiális algoritmus, ugyanakkor ezek a kérdések a korábbi ismert eszközökkel nem kezelhetők. Arra is fény derült, hogy a háttérben szupermoduláris függvények minimális fedésére vonatkozó olyan új típusú eredmények állnak, melyek függetlenek az Edmonds által megalapozott szub- és szupermoduláris függvényekre vonatkozó elmélettől. Király Tamás dolgozata rendkívül elegáns bizonyítást ad Szigeti Zoltán egy ilyen jellegű tételére szupermoduláris függvénynek minimális összméretű hipergráffal történő fedéséről (amelynek például egy nagyon speciális következménye arra a messze nem triviális kérdésre ad választ, hogy egy élkapacitásos teljes gráfban miképp lehet a kapacitásokat minimálisan megnövelni úgy, hogy a folyamérték minden pontpár között egy előre megadott küszöböt elérjen).

Az irányított összefüggőség-növelési eredmények, illetve a mögöttük álló szupermoduláris függvények fedéséről szóló tételek hosszú sorában egy újabb állomás Király Tamás és Makai Márton cikke. A dolgozat szép példája annak, hogy a megfelelő fogalmak kialakítása után viszonylag egyszerű technikai apparátussal miként lehet amúgy igencsak nehéz tételeket igazolni.

Tutte teljes párosításokra vonatkozó tétele volt az első olyan eredmény, amely felhívta a figyelmet a paritás központi szerepére a kombinatorikus optimalizálásban. A területen a Lovász László által kidolgozott matroid partner (parity) elmélet igen mély eredményeket szolgáltat, de ezek direkt kombinatorikus felhasználhatóságát nagyban csökkenti a bennük rejlő geometriai háttér. Egyik fő kutatási célkitűzésünk éppen az olyan szituációk felderítésére irányul, melyekben a válasz tisztán kombinatorikus. Egy ilyen esetet mutat be Király Tamás és Szabó Jácint munkája, amelyben közös általánosítását adják az említett Tutte tételnek és Nebeský egy szép eredményének gráfok maximális génuszáról.

Általános tapasztalat, hogy polinomiális futásidejű algoritmust ott érdemes keresni, ahol a problémára már ismert jó karakterizáció vagy min-max tétel. Pap Gyula egy ilyen esetet old meg. Hartvigsen egy eredményét megjavítva Király Zoltán adott min-max formulát egy páros gráf olyan részgráfjának maximális élszámára, amelyben minden pont foka legfeljebb 2, és amely nem tartalmaz 4-élű kört (négyszöget). Erre a Király-féle eredményre ír le Pap egy rendkívül elegáns algoritmikus bizonyítást. Érdemes ezt Hartvigsennek a JCT-nél időközben megjelent igencsak bonyodalmas algoritmusával összevetni, hogy újabb megerősítést nyerjen a természetes elvárásunk: ahol létezik szép, áttekinthető jellemzés, ott kell lennie szép, áttekinthető algoritmusnak is.

Ugyanez a cél áll az utolsó cikk hátterében is, amely Végh Lászlóval közös munka. Algoritmikus választ adunk arra a kérdésre, hogy legkevesebb hány új él hozzáadásával lehet egy k-összefüggő irányított gráfot $(k+1)$-összefüggővé tenni.



MATRIXOK KOMBINATORIUS TULAJDONSÁGAIRÓL.

Jelen dolgozat kiindulópontja a következő KÖNIG DÉNES-től származó tétel:

Ha egy matrix elemei részben zérusok, részben zérustól különböző számok vagy független változók, úgy azon vonalak[1] minimális száma, melyek a matrix összes zérustól különböző elemeit tartalmazzák, egyenlő azon zérustól különböző elemek maximális számával, melyek közül nincs kettő egy vonalban.

KÖNIG ezen tételt graphelméleti úton bizonyította be és a tétel graphelméleti fogalmazása nála egyéb graphelméleti kérdésekkel is kapcsolatba jut.[2]

A tételnek egy speciális esete aequivalens FROBENIUS-nak a következő determinánstételével.[3] Ha egy n-ed rendű determináns elemei részben zérusok, részben független változók, úgy a determináns identikus[4] eltűnésének szükséges és elegendő feltétele, hogy legalább $n+1$ vonal közös elemei zérusok legyenek. A feltétel elegendő, mert teljesülése esetén az n-edrendű determinánsnak $2n$ vonala közül a többi $n-1$ vonal tartalmazza az összes el nem tűnő elemeket, tehát a fenti tétel szerint legfeljebb $n-1$ olyan el nem tűnő elem választható ki, melyek közül nincs kettő egy vonalban, azaz a determináns

[1] Vonalnak nevezem közös néven a matrix sorait és oszlopait.

[2] A nevezett tételt KÖNIG előadta a Társulat 1931 márciusi előadó ülésén és graphelméletről szóló könyvében meg fog jelenni.

[3] G. FROBENIUS: Über zerlegbare Determinanten, Sitzungsber. d. Berl. Ak. 1917, I. pp. 274–77.

[4] Egy determináns, melyben az összes zérustól különböző elemek független változók, akkor és csak akkor tűnik el identikusan, ha összes kifejtési tagjai eltűnnek.

Egerváry eredeti cikke 1931-ből

THE HUNGARIAN METHOD FOR THE ASSIGNMENT PROBLEM[1]

H. W. Kuhn
Bryn Mawr College

Assuming that numerical scores are available for the performance of each of n persons on each of n jobs, the "assignment problem" is the quest for an assignment of persons to jobs so that the sum of the n scores so obtained is as large as possible. It is shown that ideas latent in the work of two Hungarian mathematicians may be exploited to yield a new method of solving this problem.

1. INTRODUCTION

Stated informally, the problem of personnel-assignment asks for the best assignment of a set of persons to a set of jobs, where the possible assignments are ranked by the total scores or ratings of the workers in the jobs in which they are assigned. Variations of this problem, both mathematical and non-mathematical, have a long history (see the Bibliography appended). However, recent interest in the question, when posed in the terms of linear programming, seems to stem from the independent work of Flood, J. Robinson, Votaw, and Orden. Flood's work [12], begun in 1949, regards the problem as the most "degenerate" case of the transportation problem. Robinson regarded it as a relative of the travelling salesman problem; her work is available only in the form of RAND Corporation memoranda. The problem was discussed from various points of view in the work of Votaw and Orden (see [9]) presented to the SCOOP Symposium on Linear Inequalities and Programming, June 14-16, 1951. The computational advantages to be gained by considering the problem in combination with the dual linear program have been stressed by Dantzig, von Neumann and others (see [8], [10], and [12]). The purpose of this paper is to develop a computational method that uses this duality in a particularly effective manner. One interesting aspect of the algorithm is the fact that it is latent in work of D. König and E. Egerváry that predates the birth of linear programming by more than 15 years (hence the name, the "Hungarian Method").

The theoretical basis of the algorithm is laid in Sections 2 and 3. Section 2 (which is derived from the proof of König in "Theorie der Graphen" (1936) Chelsea, 1950, pp. 232-233) treats the problem of assignment when there are but two ratings, 1 and 0, indicating that a worker is qualified or not. Section 3 (which is derived from the work of Egerváry in [3]) shows that the general problem of assignment can be reduced to this special case by a procedure that is computationally trivial.

The algorithm is given an independent (and self-contained) statement in Section 4 and Section 5 is devoted to a detailed example to illustrate its application.

2. THE SIMPLE ASSIGNMENT PROBLEM

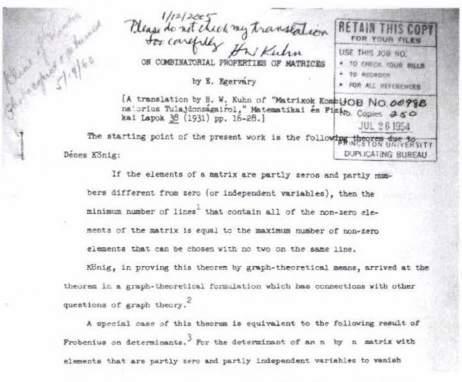
The problem of Simple Assignment is illustrated by the following miniature example:

Four individuals (denoted by i = 1, 2, 3, 4) are available for four jobs (denoted by j = 1, 2, 3, 4). They qualify as follows:

[1] The preparation of this report was supported, in part, by the ONR Logistics Project, Department of Mathematics, Princeton University.

83

Kuhn 1955-ös cikke



1/12/2005
Please do not check my translation too carefully H W Kuhn

RETAIN THIS COPY
FOR YOUR FILES
USE THIS JOB NO.
• TO CHECK YOUR BILLS
• TO REORDER
• FOR ALL REFERENCES
JOB NO. 00988
No. Copies 250
JUL 26 1954
PRINCETON UNIVERSITY
DUPLICATING BUREAU

ON COMBINATORIAL PROPERTIES OF MATRICES

by E. Egerváry

[A translation by H. W. Kuhn of "Matrixok Kombinatorius Tulajdonságairól," Matematikai és Fizikai Lapok 38 (1931) pp. 16-28.]

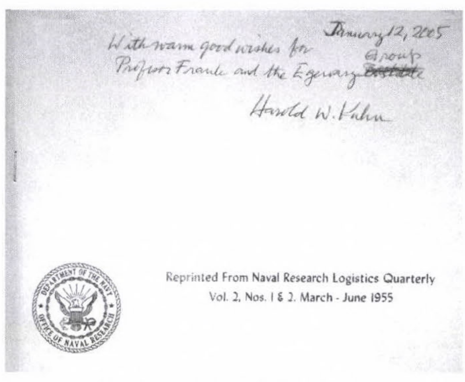
The starting point of the present work is the following theorem due to Dénes König:

If the elements of a matrix are partly zeros and partly numbers different from zero (or independent variables), then the minimum number of lines[1] that contain all of the non-zero elements of the matrix is equal to the maximum number of non-zero elements that can be chosen with no two on the same line.

König, in proving this theorem by graph-theoretical means, arrived at the theorem in a graph-theoretical formulation which has connections with other questions of graph theory.[2]

A special case of this theorem is equivalent to the following result of Frobenius on determinants.[3] For the determinant of an n by n matrix with elements that are partly zero and partly independent variables to vanish

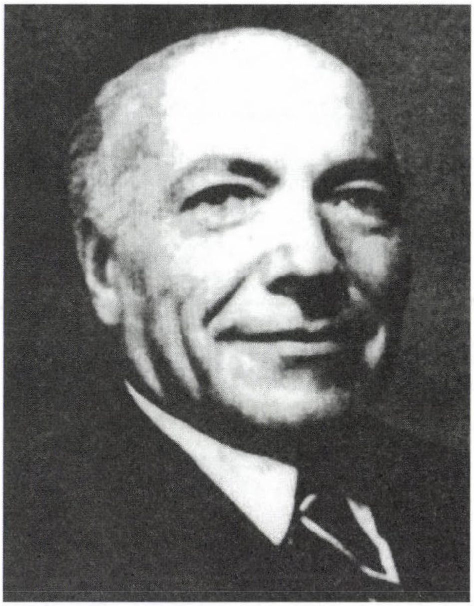
Egerváry cikkének Kuhn általi fordítása



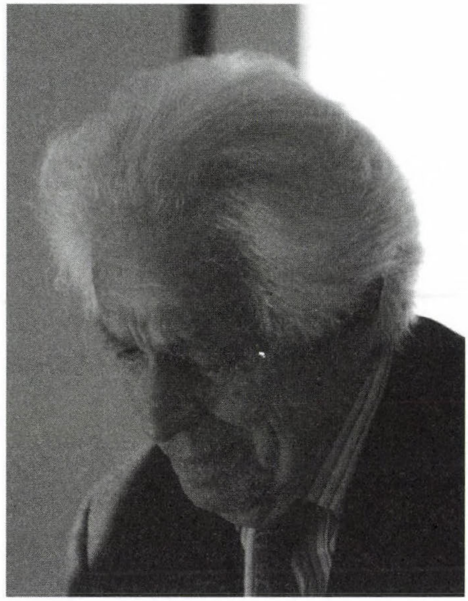
January 12, 2005
With warm good wishes for Professor Frank and the Egerváry ~~Institute~~ Group
Harold W. Kuhn

Reprinted From Naval Research Logistics Quarterly
Vol. 2, Nos. 1 & 2. March - June 1955

Kuhn cikkének borítója

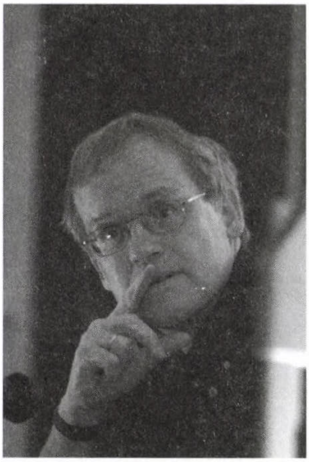


Egerváry Jenő



Kuhn professzor

Képek a Magyar Módszer 50. évfordulójára rendezett konferenciáról



Lex Schrijver

Tardos Éva

Lovász László

A hallgatóság

Frank András, Harold W. Kuhn és Jack Edmonds

METSZŐ HALMAZRENDSZEREK REPREZENTÁLÁSA

BERNÁTH ATTILA[1]

Legyen adott egy $\mathcal{F} \subseteq 2^V - \{\emptyset\}$ halmazrendszer a következő tulajdonsággal: ha X és Y az $\mathcal{F}$ keresztező elemei, akkor $X \cup Y$ is $\mathcal{F}$-ben van. Könnyen látható, hogy ilyenkor a

$$\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{F} : X \text{ maximális } s\text{-elkerülő } \mathcal{F}\text{-beli halmaz valamely } s \in V\text{-re}\}$$

halmazrendszernek legfeljebb $n(n-1)$ eleme van. Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy ennél sokkal jobb becslés adható: belátjuk, hogy $|\mathcal{H}| \leq 2n-2$, ahol $|V| = n$. A tétel általánosítja a jól ismert eredményt egy lamináris halmazrendszer maximális méretéről. A tételből következik, hogy segítségével tetszőleges metsző (vagy keresztező) halmazrendszert el tudunk kódolni $O(n^2)$ helyen, aminél jobb nem is várható. Egy másik alkalmazási lehetőség az Irányított Forrás-Telepítési Algoritmus, amelynek meggyorsítására a tétel reményt nyújt, azonban az alkalmazás módja még nem világos.

1. Bevezetés

Legyen V egy n elemű halmaz és legyen adott ezen az alaphalmazon egy hipergráf, amelynek $\mathcal{F}$ élhalmaza nem tartalmazza az üres halmazt. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ teljesíti a következő tulajdonságot:

($*$) Ha X és Y az $\mathcal{F}$ olyan elemei, amikre $X \cap Y \neq \emptyset, X \cup Y \neq V$, akkor $X \cup Y$ is $\mathcal{F}$-ben van.

Származtassuk $\mathcal{F}$-ből a következő halmazrendszereket:

$$\mathcal{H}_s = \{X \in \mathcal{F} : X \text{ tartalmazásra maximális } s\text{-elkerülő halmaz } \mathcal{F}\text{-ben}\}$$

ahol $s \in V$ tetszőleges elem, és legyen $\mathcal{H} = \cup_{s \in V} \mathcal{H}_s$.

A ($*$) tulajdonság miatt $\mathcal{H}_s$ egy részpartíciója a $V - s$ halmaznak, következésképpen $|\mathcal{H}_s| \leq n-1$, amiből $|\mathcal{H}| \leq n(n-1)$. Felmerül a kérdés, hogy vajon tudunk-e jobb korlátot adni $\mathcal{H}$ méretére. A válasz igen, az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy $|\mathcal{H}| \leq 2n-2$, ami viszont már nem javítható.

Az alábbiakban bevezetünk néhány hasznos jelölést.

[1] A kutatást az OTKA K60802 és TS049788 pályázatai, valamint az ADONET Marie Curie RTN (504438 sz. FP6 szerződés) támogatta.

Jelölések. Az $X, Y \subseteq V$ halmazok különbségét az $X - Y$ jelöli. Ha $r \in V$, akkor $X - \{r\}$ helyett egyszerűen csak $X - r$-et írunk. Ha $X \cap Y = \emptyset$, akkor azt mondjuk, hogy az X egy Y*-elkerülő* halmaz, $\{r\}$-elkerülő helyett egyszerűen r-elkerülőt írunk. Az egyelemű halmazokat *szingletonoknak* is hívjuk. Ha egy X halmazra használjuk azt a szót, hogy valamilyen tulajdonságra *maximális*, akkor azon azt értjük, hogy nem létezik X-et tartalmazó ilyen tulajdonságú halmaz. Hasonló értelemben használjuk halmazokra a *minimális* szót is.

Az itt ismertetendő eredmény (2.1. tétel) motivációja a következő feladatból ered:

Irányított Forrás-Telepítési Probléma. Adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf, valamint k, l pozitív egész számok. Találjunk minimális méretű $R \subseteq V$ ponthalmazt, amelyet összehúzva egy r ponttá olyan gráfot kapunk, amely r-ből (k, l)-élösszefüggő.

A teljesség kedvéért megadjuk az alábbi definíciókat, a problémával (és változataival) kapcsolatosan további részletek [3], [2] és [1]-ben találhatók.

1.1. definíció. Legyen adott egy $D = (V, A)$ irányított gráf. Ekkor egy $X \subseteq V$ halmazra $\varrho(X)$ $\big(\delta(X)\big)$ jelöli az X halmazba belépő (abból kilépő) élek számát. Ha $r \in V$ egy pont, és k, l pozitív egész számok, akkor D-t (k, l)*-élösszefüggőnek* mondjuk r-ből, ha minden $X \subseteq V - \{r\}$ nemüres halmazra $\varrho(X) \geq k$ és $\delta(X) \geq l$.

Az Irányított Forrás-Telepítési Problémára Bárász Mihály, Becker Johanna és Frank András nemrégiben erősen polinomiális algoritmust adott, amit az érdeklődők megtalálhatnak [1]-ben. A megoldás során bevezetik a *tömör* halmazok fogalmát, amit a következőképpen definiálnak:

1.2. definíció. Egy nemüres $X \subseteq V$ halmazt *be-tömörnek* hívunk, ha $\varrho(Y) > \varrho(X)$ minden $Y \subsetneq X$ nemüres részhalmazra. Egy nemüres $X \subseteq V$ halmazt *ki-tömörnek* hívunk, ha $\delta(Y) > \delta(X)$ minden $Y \subsetneq X$ nemüres részhalmazra. Az X halmazt *tömörnek* hívjuk, ha be-tömör, vagy ki-tömör.

A megoldás egyik kulcsészrevétele az alábbi lemma volt.

1.3. lemma (Bárász, Becker, Frank [1]). *Ha X és Y egymást metsző tömör halmazok, akkor $X \cup Y$ is tömör.* ∎

Tehát $\mathcal{F}$-fel jelölve a tömör halmazok rendszerét az teljesíti a fent megfogalmazott $(*)$ tulajdonságot: definiáljuk hozzá a fent megfogalmazott módon a $\mathcal{H}_s$ $(s \in V)$ és $\mathcal{H}$ halmazrendszereket. Az [1]-ben ismertetett Irányított Forrás-Telepítési Algoritmus egyik lépése az, hogy meghatározza a $\mathcal{H}$ hipergráfot, és ezt úgy teszi, hogy minden $s \in V$-re egyesével meghatározza $\mathcal{H}_s$-et. Mivel ez az algoritmus leginkább időigényes lépése, az itt ismertetendő eredmény (2.1. tétel) reményt ad arra, hogy ennél ügyesebben is el lehet járni, kihasználva, hogy a $\mathcal{H}_s$ hipergráfok nem függetlenek egymástól. Sajnos még nem tudjuk, hogy ezt a tényt hogyan lehetne kiaknázni az algoritmus meggyorsítására.

Megemlítjük a tömör halmazoknak még egy fontos tulajdonságát, amiről később még lesz szó.

1.4. definíció. Az $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ halmazrendszer rendelkezik a *Helly-tulajdonsággal,* ha bármely $X_1, X_2, \ldots X_t$ páronként egymást metsző $\mathcal{F}$-beli halmazokra teljesül, hogy $\bigcap_{i=1}^t X_i \neq \emptyset$.

1.5. tétel (Bárász, Becker, Frank [1]). *A tömör halmazok hipergráfja rendelkezik a Helly-tulajdonsággal.* ■

Más területen viszont már most alkalmazható a 2.1. tétel – ezt írja le részletesen a 3. fejezet. Röviden ismertetjük a feladatot, előbb azonban néhány definícióra van szükségünk.

1.6. definíció. Azt mondjuk, hogy az $X, Y \subseteq V$ halmazok *metszők,* ha az $X - Y$, $Y - X$ és $X \cap Y$ halmazok egyike sem üres. Ha továbbá $X \cup Y \neq V$, akkor azt mondjuk, hogy az X és Y halmazok *keresztezik* egymást (vagy *keresztezők*). Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ halmazrendszer metsző (keresztező), ha tetszőleges X, Y metsző (keresztező) $\mathcal{F}$-beliekre az $X \cap Y$ és $X \cup Y$ halmazok is $\mathcal{F}$-ben vannak. Egy $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ halmazrendszerre jelölje $\mathrm{co}(\mathcal{F}) = \{X \subseteq V : V - X \in \mathcal{F}\}$.

Kombinatorikus optimalizálási feladatokban gyakran kell kezelnünk metsző (keresztező) halmazrendszereket. Egyes esetekben szükségünk lehet egy ilyen halmazrendszer elkódolására minél kisebb tárterületen. Könnyen adhatunk olyan módszert, amely $O(n^3)$ helyen tárol el egy ilyen halmazrendszert. Először Gabow ([4]) mutatott olyan konstrukciót, amely $O(n^2)$ tárhelyet használ csak, ami az elméletileg elérhető legjobb korlát. A 2.1. tétel segítségével egyszerűen elkódolhatunk egy metsző halmazrendszert $O(n^2)$ helyen, amit át lehet vinni keresztező halmazrendszerekre is. Ráadásul a kapott konstrukció lényegesen egyszerűbb, mint Gabow reprezentációja. A részleteket lásd a 3. fejezetben.

2. A fő eredmény

2.1. tétel. *Legyen V egy n elemű halmaz, és legyen adott ezen az alaphalmazon egy hipergráf, amelynek $\mathcal{F}$ élhalmaza nem tartalmazza az üres halmazt. Tegyük fel, hogy $\mathcal{F}$ teljesíti a következő tulajdonságot:*

(∗) *Ha X és Y az $\mathcal{F}$ keresztező elemei, akkor $X \cup Y$ is $\mathcal{F}$-ben van.*

Ekkor a $\mathcal{H} = \cup_{s \in V} \mathcal{H}_s$ halmazrendszernek legfeljebb $2n - 2$ eleme van, ahol

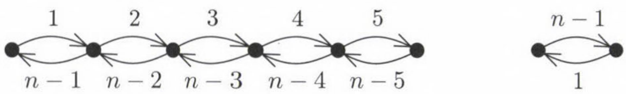
$$\mathcal{H}_s = \{X \in \mathcal{F} : X \text{ tartalmazásra maximális } s\text{-elkerülő halmaz } \mathcal{F}\text{-ben}\}$$

tetszőleges $s \in V$ esetén.

Következmény. *Egy $D = (V, A)$ irányított gráfban a*

$$\mathcal{H} = \{X \subseteq V : X \text{ maximális } s\text{-elkerülő tömör halmaz valamely } s \in V\text{-re}\}$$

halmazrendszer tagjainak a száma legfeljebb $2n-2$ (ahol $|V|=n$). Megemlítjük, hogy könnyű példát mutatni arra, hogy ez a korlát éles. Tekintsük például a következő digráfot. A ponthalmaz legyen az $1,2,\ldots,n$ számokkal indexelve, az élhalmaz pedig a következő: minden $i \in \{1,2,\ldots n-1\}$ esetén mutasson i párhuzamos él az i-edik pontból az $i+1$-edik pontba, és mutasson $n-i$ párhuzamos él az $i+1$-edik pontból az i-edikbe (lásd az ábrát: a számok az élek multiplicitását jelölik). Ebben a példában a be-tömör halmazok pontosan azok, amelyek egymás utáni számokkal indexelt pontokból állnak (azaz az $1,2,\ldots,n$ út részútjai), a ki-tömör halmazok pedig az egyelemű halmazok.



Megjegyzés. A 2.1. tétel bizonyítása kicsivel egyszerűbbé válik, ha feltesszük, hogy az $\mathcal{F}$ halmazrendszer rendelkezik a *Helly-tulajdonsággal,* ami igaz a tömör halmazok hipergráfjára. Az alábbi bizonyításban kitérünk ezekre az egyszerűsítésekre.

A 2.1. tétel bizonyítása. A tételt n szerinti indukcióval fogjuk bizonyítani. Az $n=1,2$ eset könnyen ellenőrizhető. Tegyük fel tehát, hogy $n>2$.

Nevezzük az egyelemű halmazokat *triviálisnak.* Ha $\mathcal{H}$ minden tagja triviális, akkor készen vagyunk, hiszen $|\mathcal{H}| \leq n$. Tehát tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$-ban vannak nemtriviális halmazok is. Legyen $X \in \mathcal{H}$ egy minimális nemtriviális $\mathcal{H}$-beli halmaz, azaz minden $Y \in \mathcal{H}$ triviális, amelyre $Y \subsetneq X$. Legyen $s \in V$ olyan elem, amire $X \in \mathcal{H}_s$. A $\mathcal{H}$ elemeit két diszjunkt részre osztjuk az alábbi szempont szerint:

$$\mathcal{H}^1 = \{Y \in \mathcal{H} \,:\, X \cap Y = \emptyset \text{ vagy } X \subseteq Y\},$$

$$\mathcal{H}^2 = \{Y \in \mathcal{H} \,:\, X \cap Y \neq \emptyset \text{ és } X \nsubseteq Y\}.$$

Számoljuk össze először a $\mathcal{H}^2$-be eső halmazokat: azt szeretnénk belátni, hogy ezek száma legfeljebb $2|X|-2$. Ha $v \notin X$, akkor $\mathcal{H}_v \subseteq \mathcal{H}^1$, hiszen $X \in \mathcal{F}$. Ha $v \in X$, akkor a $\mathcal{H}_v$ egy tagja

- vagy diszjunkt X-től (ezek a halmazok $\mathcal{H}^1$-be esnek),
- vagy X-be esik (azaz egyelemű),
- vagy metszi X-et, de nem esik teljesen X-be: egy ilyen halmaz szükségképpen tartalmazza az s pontot a $(*)$ tulajdonság miatt, azaz csak egy ilyen lehet $\mathcal{H}_v$-ben (ismét az $\mathcal{F}$ rendszer $(*)$ tulajdonsága miatt): jelöljük ezt a halmazt Z_v-vel, ha létezik.

Vezessük be az $X_1 = \{v \in X \,:\, Z_v \text{ nem létezik}\}$ jelölést. A következő esetek lehetségesek:

- Az $|X_1| \geq 2$ eset egyszerű, hiszen $\mathcal{H}^2$ legfeljebb $|X|$ szingletont tartalmaz és legfeljebb $|X|-2$ különböző Z_v-t.

- Ha $X_1 = \{x\}$, akkor észrevehetjük, hogy $\{x\} \notin \mathcal{H}^2$, hiszen ha létezne egy $v \in X$, amelyre $\{x\} \in \mathcal{H}_v$, akkor Z_v nemtriviális x-elkerülő $\mathcal{F}$-beli halmaz lenne, ellentmondásban az $x \in X_1$ feltevéssel. Újra csak készen vagyunk, hiszen $\mathcal{H}^2$ legfeljebb $|X|-1$ szingletont, és legfeljebb $|X|-1$ különböző Z_v-t tartalmazhat, tehát $\mathcal{H}^2$-ben nem lehet több, mint $2|X|-2$ halmaz.
- Ha $X_1 = \emptyset$ (azaz Z_v létezik minden $v \in X$-re), akkor tekintsük a $\{Z_v : v \in X\}$ halmazrendszert. Azt állítjuk, hogy ebben legalább két minimális halmaz van. Tegyük fel, hogy nem ez a helyzet, azaz a halmazrendszer egyértelmű minimális tagja Z_a, valamely $a \in X$-re. Tehát $Z_a \subseteq Z_v$ minden $v \in X$-re. Azonban egy $v \in Z_a \cap X$ pontra ez nem állhat fenn, ellentmondás.

  Tekintsünk egy minimális Z_a elemet a $\{Z_v : v \in X\}$ halmazrendszerből. Ekkor
  1. vagy $\{a\} \notin \mathcal{H}^2$,
  2. vagy $\{a\} \in \mathcal{H}_b$ valamely b-re, de ekkor $b \in X - Z_a$ (a Z_a minimalitása miatt), így $Z_b = Z_a$ (nem lehet bővebb).

  Bármelyik eset is áll fenn, azt kapjuk, hogy $\mathcal{H}^2$ különböző elemeinek a száma legfeljebb $2|X|-2$ (felhasználva azt a megállapítást, hogy legalább két minimális tagja van a $\{Z_v : v \in X\}$ halmazrendszernek).

Megjegyzés. Megemlítjük, hogy az X_1 halmaz nem lehet üres, amennyiben az $\mathcal{F}$ halmazrendszer rendelkezik a Helly-tulajdonsággal is. Ha ugyanis ez lenne a helyzet, akkor az $\emptyset = X \cap \left(\bigcap_{v \in X} Z_v\right)$ egyenlőség ellentmondana a Helly-tulajdonságnak, mivel ezek egymást páronként metsző $\mathcal{F}$-beli halmazok ($Z_v \cap X \neq \emptyset$ a Z_v definíciója miatt, és ha $v_1, v_2 \in X$, akkor Z_{v_1} és Z_{v_2} egyaránt tartalmazzák s-et). Valójában könnyen belátható, hogy $X_1 = \left(\bigcap_{v \in X - X_1} Z_v\right) \cap X$, de mi ezt nem fogjuk itt kihasználni.

A $\mathcal{H}^1$ halmazrendszer méretére az indukciós hipotézis felhasználásával akarunk felső korlátot adni. Ennek érdekében bizonyítjuk a következő állítást:

Állítás.

$$\mathcal{H}^1 \subseteq \bigcup_{v \notin X} \mathcal{H}_v \cup \{\textit{maximális } X\textit{-elkerülő } \mathcal{F}\textit{-beli halmazok }\}$$

Az állítás bizonyítása. Vegyünk egy $Z \in \mathcal{H}^1$ halmazt. Ekkor létezik egy $v \in V$, amelyre $Z \in \mathcal{H}_v$. Ha $v \notin X$, akkor készen vagyunk, tehát feltehető, hogy $v \in X$, következésképpen Z diszjunkt X-től. Tehát Z maximális v-elkerülő $\mathcal{F}$-beli halmaz, ezért maximális X-elkerülő $\mathcal{F}$-beli halmaz is. ∎

Megjegyzés. Megemlítjük, hogy itt nem feltétlenül teljesül egyenlőség, amint azt az $\mathcal{F} = 2^{\{1,2,3\}} - \{\emptyset\}$ halmazrendszer példája mutatja, tetszőleges nemtriviális $X \in \mathcal{H}$ választásával. Ez arra is példa, hogy a fent definiált X_1 halmaz lehet üres általános esetben. Azonban ha $\mathcal{F}$ rendelkezik a Helly-tulajdonsággal, akkor az állításban egyenlőség bizonyítható. Ezt ellenőrizendő vegyünk egy Z halmazt, ami eleme a jobb oldalnak. Ha $Z \in \bigcup_{v \notin X} \mathcal{H}_v$, akkor tudjuk, hogy $Z \in \mathcal{H}^1$ is teljesül, tehát tegyük fel, hogy Z maximális X-elkerülő $\mathcal{F}$-beli halmaz. De ekkor $Z \in \mathcal{H}_v$ tetszőleges $v \in X_1$-re, tehát $Z \in \mathcal{H}^1$ teljesül.

A bizonyítás befejezése a következő. Húzzuk össze az X halmazt egy ponttá, és álljon az $\mathcal{F}'$ halmazrendszer azon $Z \in \mathcal{F}$ halmazok képeiből, amelyek vagy diszjunktak voltak X-től, vagy tartalmazták X-et. Kapunk egy halmazrendszert egy $n - |X| + 1$ elemű alaphalmazon, amelynek $\mathcal{F}'$ élhalmaza könnyen ellenőrizhetően teljesíti a $(*)$ tulajdonságot. Tehát definiálhatjuk a $\mathcal{H}'$ halmazrendszert az $\mathcal{F}'$ tagjainak segítségével ugyanolyan módon, ahogy $\mathcal{H}$-t definiáltuk $\mathcal{F}$-fel, és észrevehetjük, hogy a fenti állítás következményeképpen $\mathcal{H}'$ tartalmazza a $\mathcal{H}^1$ elemeinek képét. Az indukciós hipotézis felhasználásával tehát azt kapjuk, hogy

$$|\mathcal{H}^1| \leq |\mathcal{H}'| \leq 2\bigl(n - |X| + 1\bigr) - 2 = 2n - 2|X|.$$

Ezt egybevetve a $|\mathcal{H}^2|$-re adott korláttal a tétel adódik. ∎

3. Egy alkalmazás

Tekintsük a következő feladatot: adott egy $\mathcal{F}$ metsző (vagy keresztező) halmazrendszer, tároljuk el minél kisebb tárterületen. Harold Gabow [4]-ben bemutat egy módszert, ami $O(n^2)$ tárterületen oldja meg ezt a feladatot: az úgynevezett *posetek-fája (tree-of-posets)* reprezentációt. Ezt a meglehetősen bonyolult konstrukciót az alkalmazásokban kiválthatjuk a 2.1. tétel segítségével a következő észrevétel alapján:

3.1. lemma. *Legyen $\mathcal{F}$ egy metsző halmazrendszer a V alaphalmazon, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} - \{\emptyset\}$. Ekkor*

$$\mathcal{H}^{\cap} \cup \{\emptyset, V\} = \mathcal{F} \cup \{\emptyset, V\},$$

ahol

$$\mathcal{H} = \{X \subseteq V \,:\, X \text{ maximális } s\text{-elkerülő } \mathcal{F}'\text{-beli halmaz valamely } s \in V\text{-re}\}$$

és

$$\mathcal{H}^{\cap} = \left\{ \bigcap_{j=1}^{t} X_j \,:\, t \in \mathbb{N},\ X_1, X_2, \ldots X_t \text{ elemei } \mathcal{H}\text{-nak} \right\}. \quad ∎$$

Tehát az $\mathcal{F}$ metsző halmazrendszer elkódolásához elegendő a $\mathcal{H}$ halmazrendszert elkódolni, amihez a 2.1. tétel alapján legfeljebb $2n^2 - 2n$ bitre van szükségünk, majd még esetleges további 2 bitben megmondjuk, hogy $\emptyset$ és V valamelyike $\mathcal{F}$-ben van-e. Ezt keresztező halmazrendszerre a következőképpen vihetjük át: az $\mathcal{F}$ keresztező halmazrendszert előállíthatjuk két metsző halmazrendszer segítségével az alábbi módon: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_s \cup \mathrm{co}\,(\mathcal{F}^s)$, ahol

$$\mathcal{F}_s = \{X \in \mathcal{F} \,:\, s \notin X\}, \quad \mathcal{F}^s = \{V - X \,:\, s \in X \in \mathcal{F}\},$$

amikről könnyen látható, hogy tényleg metsző halmazrendszerek, tehát reprezentálhatók $O(n^2)$ tárterületen, így velük együtt $\mathcal{F}$ is.

Köszönetnyilvánítás. Köszönöm Frank Andrásnak, Bárász Mihálynak, Becker Johannának és Szabó Jácintnak a sok és sokféle segítséget, amit tőlük kaptam.

Hivatkozások

[1] Mihály Bárász, Johanna Becker, András Frank: An algorithm for source location in directed graphs, *Operations Research Letters,* **33** (2005) pp. 221–230.

[2] Hiro Ito, Kazuhisa Makino, Kouji Arata, Shoji Honami, Yuichiro Itatsu, and Satoru Fujishige, Source location problem with flow requirements in directed networks, *Optimization Methods and Software,* Vol. **18**, No. 4 (August 2003), pp. 427–435.

[3] M. Labbe and F. V. Louveaux, Location problems, in: *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization,* eds.: M. Dell' Amico, F. Maffioli and S. Martello, Wiley (1997) pp. 261–281.

[4] Harold N. Gabow: Centroids, Representations and Submodular Flows, *Journal of Algorithms,* **18** (1995), pp. 586–628.

Attila Bernáth: A representation for intersecting families

Suppose we are given a system $\mathcal{F} \subseteq 2^V \setminus \{\emptyset\}$ that satisfies the following condition: if X and Y are crossing elements of $\mathcal{F}$ then $X \cup Y$ is also in $\mathcal{F}$. It is easy to check that the hypergraph

$$\mathcal{H} = \{X \subseteq V : X \text{ is a maximal } s\text{-avoiding set in } \mathcal{F} \text{ for some } s \in V\}$$

has cardinality at most $n(n-1)$, where $n = |V|$. In this paper we prove a much better bound on $|\mathcal{H}|$: we show that $|\mathcal{H}| \leq 2(n-1)$ (this bound is already tight as examples show). This observation can be used to give a representation for a general intersecting (or crossing) subfamily of 2^V using $O(n^2)$ space. This matches the theoretical bound for such a representation and is much simpler than the solution known before.

Bernáth Attila

MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
ELTE TTK Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/C.

bernath@cs.elte.hu

FÁK EGYENLETES SZÍNEZÉSE

FEKETE ZSOLT ÉS SZABÓ JÁCINT[1]

Adott egy G gráf és abban egy S független csúcshalmaz. Tegyük fel, hogy G élhalmaza két éldiszjunkt feszítőfára bontható. Azt a kérdést fogjuk vizsgálni, hogy igaz-e, hogy ekkor úgy is felbomlik két F_1, F_2 éldiszjunkt feszítőfára, hogy S minden v csúcsában a v-re illeszkedő F_1-beli és F_2-beli élek száma legfeljebb eggyel tér el. Megmutatjuk, hogy ha S legfeljebb háromelemű, akkor igaz, egyébként nem feltétlenül.

1. Bevezetés

Tegyük fel, hogy adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és egy $S \subseteq V$ független csúcshalmaz. A rövidség kedvéért *2-fának* nevezünk egy gráfot, ha az élhalmaza két éldiszjunkt feszítőfa uniója. A két fára úgy gondolunk, mint a gráf éleinek két színnel való megszínezésére, ahol mindkét színosztály élei egy feszítőfát alkotnak. Nevezzük a két színt kéknek és pirosnak! Azt mondjuk tehát, hogy (F_1, F_2) a G gráf egy *2-fa-színezése*, ha F_1, F_2 két éldiszjunkt fesztőfája G-nek, és $E = F_1 \cup F_2$. Megjegyezzük, hogy egy 2-fában lehetnek párhuzamos élek, de csak kétszeresek; hurkok pedig nincsenek benne.

Azt mondjuk, hogy egy 2-fa-színezés *S-egyenletes*, ha

$$\left|d_{F_1}(v) - d_{F_2}(v)\right| \leq 1 \quad \text{minden } v \in S \text{ esetén.}$$

A kérdésünk az, hogy tetszőleges $G = (V, E)$ 2-fa és $S \subseteq V$ független csúcshalmaz esetén létezik-e G-nek S-egyenletes 2-fa-színezése. Ezt a kérdést fogjuk körüljárni cikkünkben.

Megfogalmazunk egy valamivel általánosabb kérdést. Tegyük fel, hogy adott egy $G = (V, E)$ 2-fa és $\mathcal{P}$ az E élhalmaz egy részpartíciója. Azt mondjuk, hogy egy (F_1, F_2) 2-fa-színezés *$\mathcal{P}$-egyenletes*, ha

$$\text{tetszőleges } P \in \mathcal{P} \text{ esetén} \quad \big||F_1 \cap P| - |F_2 \cap P|\big| \leq 1 \quad \text{teljesül.}$$

A kérdés az, hogy vajon milyen $G = (V, E)$ 2-fára és éleinek $\mathcal{P}$ részpartíciójára igaz, hogy létezik $\mathcal{P}$-egyenletes 2-fa-színezése.

[1] A kutatást az OTKA K60802 és TS049788 pályázatai, valamint az ADONET Marie Curie RTN (504438 sz. FP6 szerződés) támogatta.

Egy $v \in V$ csúcs csillagjának a rá illeszkedő élek halmazát nevezzük és $\Delta(v)$-vel jelöljük. Ha adott egy S független csúcshalmaz egy $G = (V, E)$ 2-fában, akkor $\mathcal{P} := \{\Delta(v) : v \in S\}$ egy részpartíciója E-nek, és egy 2-fa-színezés pontosan akkor S-egyenletes, ha $\mathcal{P}$-egyenletes.

Megemlítjük, hogy a kérdés egyik motivációja Edmonds fenyők pakolásáról szóló tételének [2] a következő folyománya. Ha $G = (V, E)$ egy 2-fa, és van egy olyan irányítása, amire egy r csúcs kivételével minden befok 2, akkor létezik ebben az irányított gráfban két éldiszjunkt feszítőfenyő. Legyen $\mathcal{P} := \{\Delta^+(v) : v \in V - r\}$, ahol $\Delta^+(v)$ a v-be belépő élek halmazát jelenti. A két feszítőfenyő ekkor irányítatlan értelemben egy $\mathcal{P}$-egyenletes 2-fa-színezése G-nek.

Másik motivációt szolgáltat a kérdés vizsgálatához az a tény, hogy tetszőleges $G = (V, E)$ 2-fa esetén, ha $v \in V$, akkor viszonylag könnyen – egyszerű kicserélési gondolatokkal – igazolható, hogy létezik $\{v\}$-egyenletes 2-fa-színezése G-nek (ezt a bizonyítást nem részletezzük, mivel ennél általánosabb tételeket is belátunk).

Röviden kitérünk arra, hogy miként definiálhatnánk tetszőleges matroid esetén az eddig felvetett kérdéseket. Legyen $\mathcal{M}$ egy matroid az E alaphalmazon, és legyen $\mathcal{P}$ az E egy részpartíciója. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{M}$ egy $E = B_1 \cup B_2$ partíciója a B_1, B_2 bázisokra *$\mathcal{P}$-egyenletes,* ha

$$\big||B_1 \cap P| - |B_2 \cap P|\big| \leq 1 \quad \text{teljesül minden } P \in \mathcal{P} \text{ esetén.}$$

Legyen k egy pozitív egész. Egy $\mathcal{M}$ matroidot *k-egyenletesnek* nevezünk, ha feltéve, hogy $\mathcal{M}$ két diszjunkt bázis uniója, az E tetszőleges k-elemű $\mathcal{P}$ részpartíciója esetén van az E-nek olyan két diszjunkt bázisra történő partíciója, ami $\mathcal{P}$-egyenletes. Felmerül a kérdés, hogy bizonyos matroidosztályok matroidjai milyen k egészek esetén k-egyenletesek.

Azt mondjuk, hogy a G gráf $\mathcal{M}_G$ körmatroidja *k-csillag-egyenletes,* ha feltéve, hogy G 2-fa, tetszőleges k elemű S független csúcshalmaz esetén létezik S-egyenletes 2-fa-színezése G-nek.

Említettük, hogy egy gráf körmatroidja mindig 1-csillag-egyenletes. A 2. szakaszban belátjuk, hogy a körmatroidok 1-egyenletesek de nem feltétlenül 2-egyenletesek. A 3. szakaszban belátjuk, hogy a körmatroidok 2-csillag-egyenletesek, de nem feltétlenül 4-csillag-egyenletesek. Megjegyezzük, hogy a körmatroidok 3-csillag-egyenletesek is, de ennek bizonyítása hosszadalmas és meghaladja jelen cikk kereteit. A részletes tárgyaláshoz lásd [3], ahol lényegében a jelen cikkben bemutatott eszközökkel belátjuk, hogy a körmatroidok 3-egyenletesek is.

Nyitott az a kérdés, hogy vajon tetszőleges matroid 1-egyenletes-e. Megemlítünk itt még egy ide kapcsolódó sejtést (lásd [4]-ban). Ehhez kimondjuk először a 2-fáknak Nash-Williams-től származó karakterizációját [1]. Egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és egy $X \subseteq V$ csúcshalmaz esetén jelölje $i_G(X)$ azon G-beli élek számát, amelyek mindkét végpontja X-beli.

1.1. tétel (Nash-Williams) [1]. *Egy G gráf pontosan akkor 2-fa, ha $|E(G)| = 2|V(G)| - 2$ és $i_G(X) \leq 2|X| - 2$ teljesül minden $\emptyset \neq X \subseteq V(G)$ esetén.*

1.2. sejtés. *Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf, melyre $|E| = 2|V| - 2$. Tegyük fel, hogy $i_G(X) \leq 2|X| - 3$ teljesül minden $\emptyset \neq X \subsetneq V$ esetén, és G minden csúcsa legfeljebb 4-ed fokú. Ekkor E felbomlik két Hamilton-út diszjunkt uniójára.*

Az E két éldiszjunkt Hamilton-útra való particionálás felfogható olyan 2-fa-színezésnek, ami minden csúcs csillagán egyenletes. Tehát érdekes lenne nemcsak a 2-fák egyenletes színezhetőségnek vizsgálata, hanem az olyan 2-fáké is, amik az $i_G(X) \leq 2|X| - 3$ extra tulajdonságot is teljesítik.

Azaz érdekes lehet speciális gráfosztályok vizsgálata. Most megemlítünk két olyan matroidosztályt, amikkel kapcsolatban bizonyíthatóak bizonyos egyenletes színezhetőségi tulajdonságok: a gyengén bázis-rendezhető és az erősen bázis-rendezhető matroidokat. Ezek olyan matroidok, amik a bázis-kicserélési tulajdonságot erősebb formában teljesítik.

1.3. definíció. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{M}$ matroid *gyengén bázis-rendezhető,* ha teszőleges két B_1, B_2 bázis esetén létezik egy $f : B_1 \to B_2$ bijekció úgy, hogy minden $v \in B_1$ esetén a $B_1 - v + f(v)$, $B_2 + v - f(v)$ halmazok az $\mathcal{M}$ bázisai. Azt mondjuk, hogy egy $\mathcal{M}$ matroid *erősen bázis-rendezhető,* ha teszőleges két B_1, B_2 bázis esetén létezik egy $f : B_1 \to B_2$ bijekció úgy, hogy minden $X \subseteq B_1$ esetén a $B_1 - X + f(X)$ halmaz az $\mathcal{M}$ bázisai.

Megjegyezzük, hogy az erős bázis-rendezhetőségből következik a gyenge-bázis-rendezhetőség, mert két bázis esetén ugyanaz az f bijekció megteszi (az $X = \{v\}$ és az $X = B_1 - \{v\}$ választásokból látszik).

A következő állítások igazak – és könnyen igazolhatóak is.

1.4. tétel. *Minden gyengén bázis-rendezhető matroid 1-egyenletes.*

1.5. tétel. *Minden erősen bázis-rendezhető matroid k-egyenletes tetszőleges k-ra.*

2. A körmatroid 1-egyenletes

Ebben a szakaszban belátjuk, hogy a körmatroid 1-egyenletes. Megjegyezzük, hogy nem feltétlenül 2-egyenletes, ugyanis a K_4 körmatroidja, és annak az élhalmazának két éldiszjunkt teljes párosításból álló részpartíciójához nem létezik egyenletes diszjunkt bázispár.

Szükségünk lesz néhány tényre a 2-fákkal kapcsolatban.

2.1. definíció. Egy $X \subseteq V(G)$ halmaz *pontos,* ha $i_G(X) = 2|X| - 2$.

Az i_G szupermodularitásából könnyen következik a következő állítás.

2.2. állítás. *Ha G egy 2-fa, akkor két metsző pontos halmaz uniója is pontos. Sőt, ha X pontos és $u \notin X$, akkor $d_G(X, u) \leq 2$.*

Az alább értelmezett *leemelés* műveletét gyakran fogjuk alkalmazni. Azt mondjuk, hogy egy leemelés *megengedett*, ha a művelet végrehajtása után a gráf 2-fa lesz. Az inverz-műveletet *felemelés*nek fogjuk nevezni. Legyen $v \in V(G)$ amire $\deg_G(v) \leq 4$. A következő konvenciót gyakran alkalmazzuk: egy élet xy*-élnek* nevezzük, és úgy jelöljük, hogy $e = xy$, ha e két végpontja x és y.

- Ha $\deg_G(v) = 2$, akkor a v *leemelése* egyszerűen a v törlését jelenti G-ből. Világos, hogy $G - v$ szintén 2-fa lesz. $G - v$ tetszőleges 2-fa-színezése kiterjeszthető a G 2-fa-színezésévé, méghozzá kétféleképpen.
- Ha $\deg_G(v) = 3$, akkor legynek a v-re illeszkedő élek $e_i = vu_i$ ahol $i = 1, 2, 3$. Az e_i, e_j $(i \neq j)$ *élpár leemelésén* azt értjük, hogy töröljük v-t és a rá illeszkedő éleket a gráfból, és a maradékhoz hozzáadunk egy $e = u_iu_j$ élet. Jelölje a keletkező gráfot H. Azt mondjuk az előző művelet esetén, hogy *a* v*-t leemeltük egy* u_iu_j*-be*. Az 1.1. tétel miatt egy e_i, e_j élpár leemelése pontosan akkor nem megengedett, ha G-ben van olyan X pontos halmaz, amire $u_i, u_j \in X$ és $v \notin X$. Tehát a 2.2. állításból azonnal következik, hogy legalább kétféle megengedett leemelése is létezik a v csúcsnak (feltéve, hogy v-nek három különböző szomszédja van, mert ha két párhuzamos él illeszkedik v-re, akkor ez a kettő egybeesik). Megint láthatjuk, hogy H tetszőleges 2-fa-színezése kiterjeszthető G egy 2-fa-színezésévé a következőképpen (*a* v *felemelésével*). Ha a leemelt e él mondjuk kék színű, akkor G-ben az e_i, e_j legyen kék, és a harmadik v-re illeszkedő él pedig piros.
- Ha $\deg_G(v) = 4$, akkor legyenek a v-re illeszkedő élek $e_i = vu_i$ ahol $1 \leq i \leq 4$. Az e_1, e_2 *élpár leemelése* azt jelenti, hogy töröljük v-t G-ből, és hozzáadunk a kapott gráfhoz két élet, az $e = u_1u_2$ és az $f = u_3u_4$ éleket. A kapott gráfot jelölje H. Könnyen látható, hogy ez a leemelés pontosan akkor nem megengedett, ha létezik olyan pontos X halmaz G-ben, amire $v \notin X$, és vagy $u_1, u_2 \in X$, vagy $u_3, u_4 \in X$. A 2.2. állításból könnyen következik, hogy a három lehetséges leemelés közül legalább az egyik megengedett. Ekkor H tetszőleges 2-fa-színezéséből kaphatunk a G-nek egy 2-fa-színezését (*a* v *felemelésével*). A G gráfot színezzük úgy, hogy az e_1, e_2 kapja meg e színét és e_3, e_4 pedig az f színét. Ha e és f különböző színűek voltak, akkor ez a színezés jó lesz. Ha pedig mindketten mondjuk kékek voltak, akkor a G színezésében a kék élhalmazban lesz egy kör, és ennek valamely v-re illeszkedő élét átszínezve pirosra egy 2-fa-színezést kapunk.

Az 1.1. tételből következik, hogy egy (legalább 2 csúcsú) 2-fának vagy van másodfokú csúcsa, vagy van harmadfokú csúcsa (mert $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = 4|V| - 4$). Tehát mindig végrehajtható valamelyik csúcsán egy megengedett leemelés.

2.3. tétel. *A 2-fák körmatroidjai 1-egyenletesek.*

Bizonyítás. Legyen G egy 2-fa és $P \subseteq E(G)$. Az G élszámára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy G-nek létezik $\{P\}$-egyenletes 2-fa-színezése. Ha $E(G) = \emptyset$, akkor az állítás triviálisan igaz. Emlékeztetünk rá, hogy az 1.1. tételből következően G-nek létezik 2 vagy 3 fokú csúcsa.

Tegyük fel, hogy G-nek van 2 fokú csúcsa. Legyen $\Delta(v) = \{e, f\}$. Ha mondjuk $e \in P$ és $f \notin P$, akkor az indukciós feltevés szerint $G - v$-nek létezik egy (F_1, F_2) $\{P - e\}$-egyenletes 2-fa-színezése. Tegyük fel mondjuk, hogy $|F_1 \cap (P - e)| \leq |F_2 \cap (P - e)|$. Ekkor $(F_1 + e, F_2 + f)$ G-nek egy $\{P\}$-egyenletes 2-fa-színezése. Ha $\{e, f\} \subseteq P$ vagy $\{e, f\} \cap P = \emptyset$, akkor alkalmazzuk az indukciós feltevést a $G - v$ gráfra és a $P - \{e, f\}$ halmazra.

Tegyük fel, hogy G-nek v egy 3 fokú csúcsa. Legyen $\Delta(v) = \{e_1, e_2, e_3\}$, ahol $e_i = vu_i$ $i = 1, 2, 3$-ra. Tudjuk tehát, hogy ekkor $G - v + u_iu_j$ 2-fa legalább két különböző $1 \leq i < j \leq 3$ választás esetén.

Ha $|\Delta(v) \cap P| = 0$, akkor alkalmazzuk az indukciós feltevést a v csúcs bármely megengedett leemelése után a P halmazra. Ekkor a leemelt gráfban teszőleges P-egyenletes 2-fa-színezésből kaphatunk egy G-beli P-egyenletes 2-fa-színezést.

Ha $|\Delta(v) \cap P| = 1$, akkor feltehetjük, hogy mondjuk $G - v + u_1u_2$ 2-fa és $e_1 \in P$. Alkalmazzuk az indukciós feltevést a $G - v + u_1u_2$-ben a $P - e_1 + u_1u_2$-re. A $G - v + u_1u_2$ egy $P - e_1 + u_1u_2$-egyenletes 2-fa-színezésének egy felemelése a G-nek egy P-egyenletes 2-fa-színezését adja.

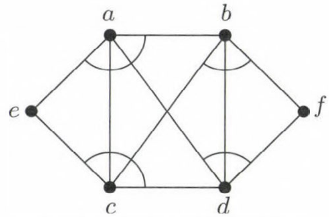
Ha $|\Delta(v) \cap P| = 2$, akkor feltehetjük, hogy mondjuk $G - v + u_1u_2$ 2-fa és $e_1, e_3 \in P$. Alkalmazzuk az indukciós feltevést a $G - v + u_1u_2$-ben a $P - \{e_1, e_3\}$-ra. Mint az előbb, most is a $G - v + u_1u_2$ egy $P - \{e_1, e_3\}$-egyenletes 2-fa-színezésének a felemelése a G-nek egy P-egyenletes 2-fa-színezését adja.

Végül, ha $|\Delta(v) \cap P| = 3$, akkor v tetszőleges az u_iu_j-be történő megengedett leemelése után az indukciós feltevést alkalmazva a $P - \Delta(v) + u_iu_j$ halmazra, a felemelés után a G egy P-egyenletes 2-fa-színezését kapjuk. ■

3. A körmatroid 2-csillag-egyenletes

Először egy ellenpéldával megmutatjuk, hogy egy körmatroid nem feltétlenül 4-csillag-egyenletes. Tekintsük az 1. ábrán adott H gráfot és a $\mathcal{P} = \{\{ab, ae\}, \{bc, bf\}, \{da, df\}, \{ce, cd\}\}$ részpartíciót. Könnyen ellenőrizhető, hogy H 2-fa, de nincsen $\mathcal{P}$-egyenletes 2-fa-színezése. Figyeljük meg, hogy $\mathcal{P}$ illeszkedő élpárokból áll. Minden $\{e_i^1 = uv, e_i^2 = uw\} \in \mathcal{P}$ párhoz $(1 \leq i \leq 4)$ vegyünk fel egy-egy új v_i csúcsot és helyettesítsük az e_i^1, e_i^2 élpárt négy új éllel: két párhuzamos uv_i éllel és a vv_i, wv_i élekkel. Ezek után egy G 2-fát kapunk, amiben az új v_i csúcsok függetlenek. Azt állítjuk, hogy G-ben nincs ezen négy független csúcs csillagai által meghatározott részpartícióhoz egyenletes 2-fa-színezés. Indirekt tegyük fel, hogy van $\{\Delta(v_i) : 1 \leq i \leq 4\}$-egyenletes 2-fa-színezés. Minden egyes v_i csúcsra G-ben illeszkedik pontosan egy párhuzamos élpár. Ezek összehúzása után a H-nak egy olyan 2-fa-színezését kapjuk, ami $\mathcal{P}$-egyenletes. Ellentmondás.

3.1. tétel. *A 2-fák körmatroidjai 2-csillag-egyenletesek.*



1. ábra. A H gráf

Bizonyítás. Adott egy $G = (V, E)$ gráf és $u, v \in V$ két független csúcs. Azt akarjuk belátni, hogy létezik a G-nek egy $\{\Delta(u), \Delta(v)\}$-egyenletes 2-fa-színezése. Egyszerűbb lesz egy ennél általánosabb állítást belátni: ha $G = (V, E)$ 2-fa és $u, v \in V$ két tetszőleges csúcs (nem feltétlenül függetlenek), és $A \subseteq \Delta(u)$, $B \subseteq \Delta(v)$ úgy, hogy $A \cap B = \emptyset$, akkor létezik $\{A, B\}$-egyenletes 2-fa-színezése. Nevezzük mostantól az A és B elemeit lényeges éleknek.

Indirekt tegyük fel, hogy az állítás nem igaz. Tekintsünk egy olyan ellenpéldát, aminek csúcsszáma minimális. Megállapítjuk majd ennek az ellenpéldának néhány tulajdonságát, végül kiderül, hogy ez a gráf csak néhány bizonyos gráf lehet, amikre viszont leellenőrizzük az állítás igaz voltát, és ez szolgáltatja az ellentmondást.

3.2. állítás. *Tegyük fel, hogy $G = (V, E)$ egy minimális csúcsszámú ellenpélda. Ekkor $V - \{u, v\}$ minden legfeljebb negyedfokú csúcsa az u és v csúcsokkal össze van kötve legalább egy-egy lényeges éllel. Az u, v csúcsok legalább negyedfokúak, valamint legfeljebb egy másodfokú csúcs van G-ben.*

Bizonyítás. Tegyük fel először indirekt, hogy van G-ben egy másodfokú $w \in V - \{u, v\}$ csúcs, amire legfeljebb egy lényeges él illeszkedik. Ekkor $G - w$ már kevesebb csúcsszámú gráf, azaz nem ellenpélda, tehát létezik egy 2-fa-színezése, ami egyenletes az A', B' halmazokhoz, ahol $A' := A - uw, B' := B - vw$ (azaz A, B-ből kihagyjuk a w-ből kiinduló élet, ha van ilyen). Könnyen látható, hogy meg lehet úgy színezni a w-re illeszkedő éleket, hogy a kapott 2-fa-színezés $\{A, B\}$-egyenletes legyen (a w-re illeszkedő lényeges él színét megválasztjuk, és a másik legyen ellenkező színű). Ez pedig ellentmond annak, hogy G ellenpélda.

Tegyük fel indirekt, hogy w olyan másodfokú csúcs, amiből kiindul két lényeges él, és ezek párhuzamosak. Definiáljuk megint az A', B'-t úgy, hogy A, B-ből kihagyjuk a w-re illeszkedő éleket. Ekkor $G - w$-nek egy $\{A', B'\}$-egyenletes 2-fa-színezését kiterjesztve a G egy 2-fa-színezésévé, automatikusan $\{A, B\}$-egyenletes 2-fa-színezést kapunk. Ellentmondás.

Tegyük fel indirekt, hogy G-ben van legalább két olyan másodfokú csúcs w_1, w_2, amire csak lényeges élek illeszkednek, és amiknek szomszédai az u és v csúcsok. Ekkor tehát a w_1, w_2-re illeszkedő két-két él lényeges. Definiáljuk az A', B'-t úgy, hogy A, B-ből kihagyjuk a w_1, w_2-re illeszkedő éleket. Ha $G - w_1 - w_2$-nek vesszük egy $\{A', B'\}$-egyenletes 2-fa-színezését, akkor ezt úgy egészíthetjük ki a G-nek egy $\{A, B\}$-egyenletes 2-fa-színezésévé, hogy a w_1v, w_2u éleket pirosra, és a w_1u, w_2v éleket kékre színezzük. Ellentmondás.

Ezzel beláttuk, hogy $V - \{u, v\}$-ben legfeljebb egy másodfokú csúcs lehet, és arra két lényeges él illeszkedik, és szomszédai az u és v csúcsok.

Tegyük fel indirekt, hogy van G-ben egy olyan harmadfokú $w \in V - \{u, v\}$ csúcs, amire legfeljebb egy lényeges él illeszkedik. Ha w-re nem illeszkedik lényeges él, akkor w tetszőleges leemelése után kapott gráf egy $\{A, B\}$-egyenletes 2-fa-színezését kiterjesztve a G egy 2-fa-színezésévé, egy $\{A, B\}$-egyenletes 2-fa-színezést kapunk, ami ellentmondás. Ha w-re pontosan egy lényeges él illeszkedik, akkor legyen mondjuk az az $e = wu$ él. Legyen a w-re illeszkedő másik két él $f_1 = wt_1$, $f_2 = wt_2$. Tudjuk, hogy ekkor létezik a w csúcsnak legalább kétféle leemelése, tehát valamely $i \in \{1, 2\}$ esetén $G - w + ut_i$ egy 2-fa. Tekintsük a $G - w + ut_i$-nek egy $\{A - e + ut_i, B\}$-egyenletes 2-fa-színezését. Ezt a színezést kiterjeszthetjük a G-nek egy $\{A, B\}$-egyenletes 2-fa-színezésévé (e és f_i olyan színt kap, mint ut_i és f_{1-i} az ellenkező színt). Ellentmondás.

Indirekt tegyük fel, hogy van G-ben egy olyan harmadfokú $w \in V - \{u, v\}$ csúcs, amire pontosan kettő lényeges él illeszkedik, és azok párhuzamosak. Legyenek ezek az e, f élek, és tegyük fel, hogy ezek w és u között futnak. Legyen a w-re illeszkedő másik él $g = wt$. Tudjuk, hogy ekkor $G - w + ut$ egy 2-fa. Tekintsük a G-nek egy $\{A - e - f, B\}$-egyenletes 2-fa-színezését. Ezt a színezést kiterjeszthetjük a G-nek egy $\{A, B\}$-egyenletes 2-fa-színezésévé (e és g olyan színt kap, mint ut; f az ellenkező színt). Ellentmondás.

Ezzel beláttuk, hogy minden $V - \{u, v\}$-beli harmadfokú csúcsot két lényeges él köt össze az u és v csúcsokkal.

Tegyük fel indirekt, hogy van G-ben egy olyan negyedfokú $w \in V - \{u, v\}$ csúcs, amire legfeljebb egy lényeges él illeszkedik. Ha w-re nem illeszkedik lényeges él, akkor w tetszőleges leemelése után kapott gráf egy $\{A, B\}$-egyenletes 2-fa-színezését kiterjesztve a G egy 2-fa-színezésévé, egy $\{A, B\}$-egyenletes színezést kapunk, ami ellentmondás. Ha w-re pontosan egy lényeges él illeszkedik, akkor legyen mondjuk az az $e = wu$ él. Legyen a w-re illeszkedő másik három él $f_1 = wt_1$, $f_2 = wt_2$, $f_3 = wt_3$. Tudjuk, hogy ekkor létezik a w csúcsnak leemelése, tehát valamely $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ esetén $G - w + ut_i + t_jt_k$ egy 2-fa. Tekintsük a $G - w + ut_i + t_jt_k$-nak egy $\{A - e + ut_i, B\}$-egyenletes 2-fa-színezését. Ez a színezés kiterjeszthető a G-nek egy $\{A, B\}$-egyenletes 2-fa-színezésévé (e és f_i olyan színt kap, mint ut_i és f_j, f_k pedig az ellenkező színt kapja). Ellentmondás.

Indirekt tegyük fel, hogy van G-ben egy olyan negyedfokú $w \in V - \{u, v\}$ csúcs, amire pontosan kettő lényeges él illeszkedik, és azok párhuzamosak. Legyenek mondjuk ezek az e, f élek, és tegyük fel, hogy ezek w és u között futnak. Legyen a w-re illeszkedő másik két él $g_1 = wt_1$, $g_2 = wt_2$. Tudjuk, hogy ekkor $G - w + ut_1 + ut_2$ egy 2-fa. Tekintsük a ennek egy $\{A - e - f, B\}$-egyenletes 2-fa-színezését. Ez a színezés pedig kiterjeszthető a G-nek egy $\{A, B\}$-egyenletes 2-fa-színezésévé (e és g_1 olyan színt kap, mint ut_1 és f és g_2 pedig az ellenkező színt). Ellentmondás.

Ezzel beláttuk, hogy minden $V - \{u, v\}$-beli negyedfokú csúcsot két lényeges él köt össze az u és v csúcsokkal.

Tegyük fel indirekt, hogy u és v közül legalább az egyik másodfokú, mondjuk u. Definiáljuk az B'-t úgy, hogy B-ből kihagyjuk az u-ra illeszkedő éleket. Ekkor tekintsünk egy teszőleges $\{B'\}$-egyenletes 2-fa-színezést, ami létezik a 2.3. tétel miatt. Ez automatikusan kiterjeszthető $\{A, B\}$-egyenletes színezéssé is (mert A vagy egyelemű, vagy ha kételemű, akkor minden 2-fa-színezés egyenletesen színezi őt). Ellentmondás.

Azt állítjuk, hogy u, v legalább negyedfokúak G-ben. Tegyük fel indirekt, hogy mondjuk u harmadfokú. Ha $|A| = |\Delta(u)| = 3$, akkor színezzük meg G-t úgy, hogy B-egyenletes legyen, és ekkor ez a színezés automatikusan A-uniform is. Ha $|A| = 2$, akkor legyen $e_1 = uw_1$, $e_2 = uw_2$, $e_3 = uw_3$ a három u-ra illeszkedő él és $A = e_1, e_2$. Tudjuk, hogy az u-nak van legalább két megengedett leemelése, tehát valamely $i \in \{1, 2\}$ esetén $G - u + w_iw_3$ 2-fa. Ha $e_3 \in B$, akkor legyen $B' := B - e_3 + w_iw_3$, ha $e_3 \notin B$, akkor $B' := B$. Ekkor a $G - u + w_iw_3$-nak egy B'-uniform 2-fa-színezése természetes módon kiterjeszthető a G egy $\{A, B\}$-uniform 2-fa-színezésévé.

Ezzel beláttuk, hogy u, v legalább negyedfokúak, és ezzel az állítás bizonyítását befejeztük. ■

Legyen G egy minimális ellenpélda, és legyen $G' = (V', E')$ az a gráf, amit G-ből kapunk az esetleges egy darab másodfokú csúcs kihagyásával. Jelölje l a $V' - \{u, v\}$-beli harmadfokú csúcsok számát, és legyen k a $V' - \{u, v\}$-beli negyedfokú csúcsok száma. A fentiek miatt tudjuk, hogy $2k + 2l \leq d(u) + d(v)$.

Ekkor:

$$
\begin{aligned}
5\big(|V'| - k - l - 2\big) + 4k + 3l + 2k + 2l &\leq d(u) + d(v) + \sum_{w \in V-u-v} d(w) \\
&= 2|E| = 4|V'| - 4.
\end{aligned}
$$

Ebből

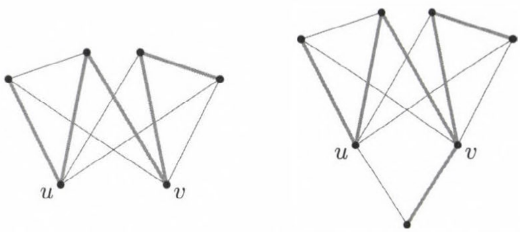
$$
\big(|V'| - k - l - 2\big) + 2k + l \leq 4.
$$

A $\big(|V'| - k - l - 2\big)$ a $V' - \{u, v\}$ legalább ötödfokú csúcsainak száma. Ebből az egyenlőtlenségből látni fogjuk, hogy tényleg csak kevés kis gráfot kell konkrétan leellenőriznünk.

Mivel u és v is legalább harmadfokú G'-ben (hiszen legalább negyedfokúak G-ben), így G'-ben van legalább 4 darab harmadfokú csúcs (mert $\sum_{v \in V} d_v = 2|E| = 4|V| - 4$), tehát $l \geq 2$.

Ha $l = 4$, akkor $k = 0$ és $|V'| - k - l - 2 = 0$, ekkor könnyen látható, hogy G' csak a 2. ábrán baloldalt lerajzolt gráf lehet. Tehát G a 2. ábrán látható gráfok valamelyike. Tudjuk, hogy minden u, v-re illeszkedő él lényeges (különben lehetett volna valamelyik leemelést alkalmazni). Ezeknek pedig létezik megfelelő színezésük az ábra szerint. Ellentmondás.

Ha $l = 3$, akkor $k = 0$ és $|V'| - k - l - 2 \leq 1$, és u, v közül az egyik harmadfokú. Ha $|V'| - k - l - 2 = 0$, akkor tehát a G' u, v-ből és három harmadfokú csúcsból áll. Ezek közül legalább az egyik – jelöljük ezt w-vel – olyan, hogy neki két szomszédja



2. ábra. $l = 4$, $k = 0$, $|V'| - k - l - 2 = 0$

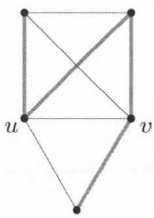
van: u, v. Legyenek a w-re illeszkedő élek mondjuk $e = wu$, $f = wu$, $g = wv$. Tudjuk, hogy w-ből megy u-ba és v-be is lényeges él, tehát mondjuk f és g lényeges. Ha e is lényeges, akkor tekintsük $G - w + uv$-nek egy $\{A - e - f, B\}$-egyenletes 2-fa-színezését, ha e nem lényeges, akkor tekintsük $G - w + uv$-nek egy $\{A - e - f + uv, B\}$-egyenletes 2-fa-színezését; ezekből könnyen adható egy $\{A, B\}$-egyenletes 2-fa-színezése G-nek. Ez ellentmondana annak, hogy G ellenpélda. Ha $|V'| - k - l - 2 = 1$, az azt jelenti, hogy G' u, v-ből, három harmadfokú csúcsból és egy w legalább ötödfokú csúcsból áll. Mivel u, v közül az egyik harmadfokú, ezért w-ből csak a másikba mehet él, oda is legfeljebb kettő, valamint a három harmadfokúba is legfeljebb 1–1. Tehát w pontosan ötödfokú. Ekkor viszont G'-nek 11 éle van és 6 csúcsa, tehát nem is 2-fa. Ellentmondás.

Ha $l = 2$, akkor $k \leq 1$ és u és v is harmadfokú. Ha $k = 1$, akkor $|V'| - k - l - 2 = 0$. Ellenőrizhető, hogy hogy G' csak a 3. ábra bal oldalán lerajzolt gráf lehet. Tehát G a 3. ábrán látható gráfok valamelyike. Tudjuk, hogy minden u, v-re illeszkedő él lényeges. Ezeknek pedig létezik megfelelő színezésük az ábra szerint. Ellentmondás.

3. ábra. $l = 2$, $k = 1$, $|V'| - k - l - 2 = 0$

Ha $k = 0$, akkor $|V'| - k - l - 2 \leq 2$. Ha $|V'| - k - l - 2 = 2$, akkor a két legalább ötödfokú csúcsból máshová legalább 6 él megy (egymással legfeljebb két él köti őket össze), de u, v-be és a másik két harmadfokúba is csak legfeljebb 1–1, azaz összesen 4 mehetne. Ellentmondás. $|V'| - k - l - 2 = 1$, akkor a legalább ötödfokú csúcsból u, v-be és a másik két harmadfokúba is csak legfeljebb 1–1, él azaz összesen legfeljebb 4 él mehetne, ellentmondás. Ha $|V'| - k - l - 2 = 0$, akkor G' a K_4. Ekkor G vagy a K_4, vagy a 4. ábrán látható gráf. De K_4 valójában nem lehet, mert tudjuk, hogy u, v legalább negyedfokúak. Az uv-élen kívül minden u, v-re illeszkedő él lényeges. Lehetséges, hogy uv nem lényeges, illetve az is, hogy lényeges és A-beli vagy B-beli. Mindhárom esetben a 4. ábrán feltüntetett színezés megfelelő.

Tehát G-nek van megfelelő színezése, azaz G mégsem ellenpélda, ellentmondás. ∎



4. ábra. $l = 2$, $k = 0$, $|V'| - k - l - 2 = 0$

Hivatkozások

[1] C. St. J. A. Nash-Williams, Decomposition of finite graphs into forests, *J. London Math. Soc.*, **39** (1964), 12.

[2] J.Edmonds, DEdge-disjoint branchings, *Combinatorial algorithms (Courant Comput. Sci. Sympos. 9, New York)* (1973), 91–96.

[3] Zs. Fekete, J. Szabó, Uniform partitioning to bases in a matroid, EGRES Technical Report TR-2003-11, `www.cs.elte.hu/egres`

[4] Jack Graver, Brigitte Servatius, Herman Servatius, Combinatorial rigidity, *Graduate Studies in Mathematics,* **2** (1993).

Zsolt Fekete and Jácint Szabó: Uniform coloring of trees

Given a graph G and a stable set S. Assume that the edge set of G can be partitioned into two spanning trees. We rise the question, whether it can be partitioned to spanning trees F_1 and F_2 in such a way that at every vertex the degrees in F_1 and in F_2 differ in at most 1. We show that if $|S| \leq 3$ then such a partition indeed exists, while otherwise not necessarily.

Fekete Zsolt és Szabó Jácint

MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
ELTE TTK Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/C.

`{fezso, jacint}@cs.elte.hu`

AZ EGERVÁRY-ALGORITMUS HATÉKONYSÁGA

JÜTTNER ALPÁR[1]

E cikk két példát mutat arra, hogy az Egerváry Jenő eredeti művében implicit szereplő maximális súlyú teljes párosítás algoritmus önmagában nem hatékony. Az első példa egy olyan gráfot és egész élsúlyokat mutat, amin az algoritmusnak exponenciális lépésszámra lehet szüksége az optimális megoldás megtalálásához. A második példa pedig azt mutatja, hogy valós élsúlyok esetén az algoritmus véges futási ideje sem biztosított.

1. Bevezetés

Legyen $G = (A, B, E)$ páros gráf, és az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $|A| = |B|$. Egy $M \subseteq E$ halmazt *párosításnak* nevezünk, ha minden pontot legfeljebb egyszer fed. M *teljes párosítás,* ha párosítás és $|M| = |A|$.

Egy $X \subseteq A$ halmazra $\Gamma_G(X)$ jelölje az X szomszédainak halmazát a G gráfban, azaz $\Gamma_G(X) := \{b \in B : \exists a \in X,\ (a, b) \in E\}$.

1.1. tétel (Hall). *G-ben pontosan akkor van teljes párosítás, ha*

$$\big|\Gamma_G(X)\big| \geq |X| \tag{1}$$

teljesül minden $X \subseteq A$ részhalmazra.

Egy, az (1) egyenlőtlenséget sértő halmazt *hiányos halmaznak,* az

$$|X| - \big|\Gamma_G(X)\big|$$

számot az X *hiányának* nevezzük.

Tegyük most fel, hogy G tartalmaz teljes párosítást, és legyen adott egy $w : E \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény az éleken.

Ekkor egy $\pi : A \cup B \to \mathbb{R}$ súlyozást *megengedett potenciálnak* nevezünk, ha $\pi(a) + \pi(b) \geq w(a, b)$ teljesül minden $(a, b) \in E$ élre. Egy $(a, b) \in E$ él *π-pontos,* ha $\pi(a) + \pi(b) = w(a, b)$. Jelölje E_π a π-pontos élek halmazát.

[1] A kutatást az OTKA K60802 pályázat, valamint az ADONET Marie Curie RTN (504438 sz. FP6 szerződés) támogatta.

Könnyen látható, hogy minden M teljes párosításra és minden π megengedett potenciálra

$$w(M) \leq \sum_{v \in A \cup B} \pi(v) \tag{2}$$

teljesül, amiből

(3)

$$\max\left\{w(M) \,:\, M \text{ teljes párosítás}\right\} \leq \min\left\{\sum_{v \in A \cup B} \pi(v) \,:\, \pi \text{ megengedett pot.}\right\}$$

következik. Egerváry híres cikkében ([1]) megmutatta, hogy (3)-ban valójában egyenlőség teljesül, vagyis:

1.2. tétel (Egerváry). *Egy M teljes párosítás pontosan akkor w-maximális, ha létezik egy π megengedett potenciál, amire $M \subseteq E_\pi$.*

E tétel bizonyítása a következő algoritmust sugallja a maximális súlyú teljes párosítás megtalálására.

Először választunk egy tetszőleges π megengedett potenciált. Ezután keresünk egy teljes párosítást E_π-ben. Ha találtunk, akkor az 1.2. tétel alapján ez egy maximális párosítás, tehát megállhatunk. Amennyiben E_π-ben nincs teljes párosítás, akkor vegyünk egy tetszőleges X hiányos halmazt, és módosítsuk π-t a következőképpen. Legyen

$$\alpha := \min\left\{\pi(a) + \pi(b) - w(a,b) \,:\, a \in X, b \notin \Gamma(X)\right\} \tag{4}$$

és

$$\pi'(v) := \begin{cases} \pi(v) - \alpha, & \text{ha } v \in X, \\ \pi(v) + \alpha, & \text{ha } v \in \Gamma(X), \quad \text{különben} \\ \pi(v). \end{cases} \tag{5}$$

Azonnal adódik, hogy π' szintén megengedett potenciál, és az összege (azaz a $\sum_{v \in A \cup B} \pi(v)$ mennyiség) szigorúan kisebb a π összegénél. Ezután a fenti lépéseket ismételjük, amíg egy teljes (következésképpen maximális) párosítást nem találunk E_π-ben. Könnyen látható, hogy egész élsúlyok (és egész kezdeti potenciál) esetén a fenti algoritmus véges időn belül megtalál egy maximális súlyú párosítást.

Sajnos ez önmagában még nem lesz hatékony algoritmus, még akkor sem, ha minden lépésben egy maximális hiányú X halmaz mentén módosítjuk a potenciált.

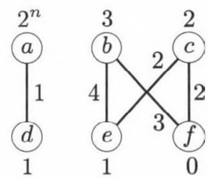
Ez a cikk erre a jelenségre mutat két példát. Az első példa megmutatja, hogy egész súlyok mellett az X szerencsétlen választása esetén az algoritmus exponenciálisan sok lépést is tehet. A második példa pedig megmutatja, valós súlyok esetén még az is előfordulhat, hogy az algoritmus nem áll meg véges időben, sőt, a duális megoldás (azaz a potenciálösszeg) még csak nem is konvergál az optimumhoz.

A második jelenségre mutat egy példát Julián Aráoz és Jack Edmonds cikke ([4]) is, de ott a csökkentések nem maximális hiányú halmazon történnek.

2. Exponenciális lépésszám egész súlyok esetén

Tekintsük az 1. ábrán látható gráfot. Az élekre írt számok az élsúlyokat, a pontokra írtak a kezdeti potenciált mutatják.

Először válasszuk az $X_1 := \{a, c\}$ hiányos halmazt, a következő iterációban pedig $X_2 := \{a, b\}$-t. Ezután felváltva válasszuk X_1-et és X_2-t. Könnyű ellenőrizni, hogy ezek maximális hiányú halmazok lesznek, és $\alpha = 1$ lesz minden iterációban. Ebből következően (a, d) csak $2^n - 2$ iteráció után válik pontossá.



1. ábra. Példa egész súlyokkal

3. Végtelen futásidő valós súlyok esetén

Tekintsük az

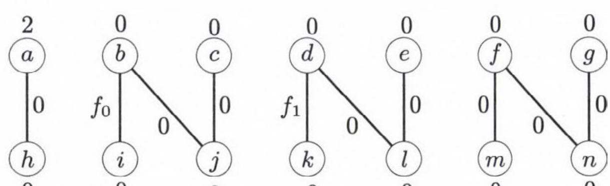
$$f_n := \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n \qquad \forall n = 1, 2, \dots \tag{6}$$

sorozatot, ami a következő könnyen bizonyítható tulajdonsággal rendelkezik:

3.1. lemma. *$f_n - f_{n+1} = f_{n+2}$ teljesül minden n-re ($n = 0, 1, 2, \dots$). Továbbá*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2} < 2. \quad \blacksquare \tag{7}$$

Tekintsük most a 2. ábrán látható gráfot. A számok megint az élsúlyokat, illetve a kezdeti potenciált jelölik.



2. ábra. Példa valós súlyokkal

Most az n-edik iterációban ($n = 1, 2, \dots$) a következő hiányos halmazokat választjuk:

$$
(8) \qquad X_n := \begin{cases} \{a, b, d, g\}, & \text{ha } n = 3k + 1 \\ \{a, b, e, f\}, & \text{ha } n = 3k + 2 \\ \{a, c, d, f\}, & \text{ha } n = 3k. \end{cases}
$$

Itt is könnyen ellenőrizhető, hogy minden i iterációban X_i maximális hiányú, továbbá

$$
(9) \qquad \alpha_n = f_n
$$

lesz.

Végül a (7) egyenlőtlenség mutatja, hogy az (a, h) él soha nem válik pontossá, következésképpen az algoritmus nem áll meg véges lépésben és az potenciál sem konvergál az optimumhoz.

4. Elégséges feltétel az erős polinomialitásra

A fenti példák mutatják tehát, hogy még a maximális hiányú halmazokon való csökkentés sem biztosítja az Egerváry-algoritmus polinomialitását.

Másrészről viszont jól ismert tény, hogy a Kuhn maximális teljes párosítás algoritmusa ([2]) által megtalált hiányos halmazok mentén való módosítás biztosítja az erős polinomialitást.

Ebből kiindulva megadhatunk egy olyan feltételt a maximális hiányú halmazok kiválasztására, ami biztosítja az erős polinomialitást.

4.1. állítás. *Ha minden lépesben a maximális hiányú halmazok közül az (egyértelműen meghatározott) tartalmazásra nézve minimális mentén módosítjuk a potenciált, erősen polinomiális algoritmust kapunk.*

Valójában Kuhn eljárása is éppen ezeket a halmazokat választja, így a fenti állítás következik a Magyar módszer erős polinomialitásából. Másrészt [3]-ban egy elemi, alternáló utakat nem használó bizonyítást is találhatunk.

Hivatkozások

[1] Egerváry Jenő, Mátrixok kombinatorius tulajdonságairól, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **38** (1931), 16–28.

[2] H. W. Kuhn, The Hungarian Method for the assignment problem, *Naval Research Logistic Quarterly,* **2** (1955), 83–97.

[3] Frank A., A Magyar Módszer és általánosításai, *Szigma,* **XXXIII, 1–2** (2002), 13–44.

[4] Julián Aráoz, Jack Edmonds, A Case of non-Convergent Dual Changes in Assignment Problems, *Discrete Applied Mathematics,* **11** (1985), 95–102.

Alpár Jüttner: On the efficiency of Egerváry's perfect matching algorithm

This paper presents two examples on which the original version Jenő Egerváry's maximum matching algorithm is not polynomial. The first one is a graph with integer weights on which the algorithm needs exponentially many steps to find the optimum. The second example shows that enabling real number weights, the algorithm may fail to find an optimal solution in finite number of steps.

Jüttner Alpár

MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
ELTE TTK Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/C.

e-mail: alpar@cs.elte.hu

ÉLÖSSZEFÜGGŐSÉG-NÖVELÉS HIPERÉLEK ÖSSZEVONÁSÁVAL

KIRÁLY TAMÁS[1]

Rövid bizonyítást adunk Szigeti Zoltán hipergráfok élösszefüggőség-növeléséről szóló egy eredményére [1], csekély mértékben általánosítva is azt.

1. Bevezetés

Szigeti Zoltán [1]-ben megoldotta a lokális élösszefüggőség-növelési feladatot hipergráfokra abban az esetben, amikor a cél a hiperélek összméretének (azaz méreteik összegének) minimalizálása. A feladat a következőképpen fogalmazható meg: adott egy $H_0 = (V, \mathcal{E}_0)$ hipergráf, és minden $u, v \in V$ csúcspárra egy $r(u, v)$ élösszefüggőség-igény a két csúcs között. Olyan minimális összméretű $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráfot keresünk, amire $H_0 + H$ az összes pontpárra teljesíti az élösszefüggőség-igényt, azaz tetszőleges u és v csúcsokra az őket elválasztó vágások mérete legalább $r(u, v)$.

Szigeti egy minimax formulát bizonyított H minimális összméretére. Ennek kimondásához vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathrm{val}\,(H) := \sum_{e \in \mathcal{E}} |e|,$$

$$d_H(X) := \left|\{e \in \mathcal{E} \,:\, e \cap X \neq \emptyset,\ e \cap (V - X) \neq \emptyset\}\right| \qquad (X \subseteq V),$$

$$p_0(X) := \max\{r(u, v) \,:\, u \in X,\ v \notin X\} - d_{H_0}(X) \qquad (X \subseteq V).$$

Könnyű látni, hogy $H_0 + H$ pontosan akkor teljesíti az összes élösszefüggőség-igényt, ha $d_H(X) \geq p_0(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra.

[1] A kutatást az OTKA K60802 pályázat, az NKTH Öveges program, valamint az ADONET Marie Curie RTN (504438 sz. FP6 szerződés) támogatta.

1.1. tétel (Szigeti, [1]). *A fenti jelölésekkel*

$$\text{(1)}\quad \min\{\operatorname{val}(H) : d_H(X) \geq p_0(X)\ \forall X \subseteq V\}$$

$$= \max\Big\{\sum_{i=1}^{t} p_0(V_i) : \{V_1, \dots V_t\} \text{ a } V \textit{ részpartíciója}\Big\}.$$

A tételnek egy általánosabb alakja is kimondható. Egy V véges alaphalmazon definiált $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ halmazfüggvényt *ferdén szupermodulárisnak* nevezünk, ha minden $X, Y \subseteq V$ halmazpárra a következő két egyenlőtlenség legalább egyike teljesül:

$$\text{(2)}\qquad p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y),$$

$$\text{(3)}\qquad p(X) + p(Y) \leq p(X - Y) + p(Y - X).$$

Belátható, hogy a p_0 halmazfüggvény rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Szigeti valójában azt az általánosabb tételt bizonyította be, hogy az (1) formula p_0 helyén tetszőleges szimmetrikus ferdén szupermoduláris halmazfüggvénnyel igaz. Bizonyításának lényegi része a következő, önmagában is érdekes fokszámelőírt hipergráfokra vonatkozó tétel, amiből az eredmény már megszokott módszerekkel következik:

1.2. tétel [1]. *Legyen $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ egy szimmetrikus ferdén szupermoduláris halmazfüggvény, és $m : V \to \mathbb{Z}_+$ egy fokszámelőírás. Pontosan akkor létezik olyan H hipergráf, amire $d_H(v) = m(v)$ minden $v \in V$ csúcsra és $d_H(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra, ha*

$$\text{(4)}\qquad \sum_{v \in X} m(v) \geq p(X) \quad \textit{minden } X \subseteq V \textit{ halmazra.}$$

Célunk rövid bizonyítást adni erre a tételre. Ehhez az alábbiakban megfogalmazunk egy csekély mértékű általánosítást, ami rendkívül egyszerű indukciós lépéseket tesz lehetővé.

Legyen $H = (V, \mathcal{E})$ egy hipergráf. Két diszjunkt hiperél *összevonásának* nevezzük azt a műveletet, hogy H-ból kihagyjuk őket, és bevesszük az uniójukat. „Bizonyos hiperélek összevonása H-ban" ennek a műveletnek a többszöri megismétlését jelenti. Definiáljuk a

$$b_H(X) := \big|\{e \in \mathcal{E} : e \cap X \neq \emptyset\}\big|$$

halmazfüggvényt. Könnyen látható, hogy b_H teljesen szubmoduláris, és

$$b_H(X) + b_H(Y) \geq b_H(X - Y) + b_H(Y - X) + \big|\{e \in \mathcal{E} : \emptyset \neq e \cap Y \subseteq X \cap Y\}\big|.$$

1.3. tétel. *Legyen $H = (V, \mathcal{E})$ egy hipergráf, és $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ egy szimmetrikus ferdén szupermoduláris halmazfüggvény, amire*

$$\text{(5)}\qquad b_H(X) \geq p(X) \quad \textit{minden } X \subseteq V \textit{ halmazra.}$$

Ekkor H-ból bizonyos hiperélek összevonásával kapható egy olyan $H_* = (V, \mathcal{E}_*)$ hipergráf, amire

$$d_{H_*}(X) \geq p(X) \quad \textit{minden } X \subseteq V \textit{ halmazra.} \tag{6}$$

Az 1.2. tétel annak a speciális esetnek felel meg, amikor H minden hiperéle egyetlen csúcsból áll, és $m(v)$ a $\{v\}$ hiperél multiplicitása H-ban.

2. A tétel bizonyítása

Az 1.3. tétel bizonyítása. A tételt H hiperéleinek a számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk (a tétel nyilvánvalóan igaz, ha $\mathcal{E} = \emptyset$). Nevezzünk egy $X \subseteq V$ halmazt *szorosnak*, ha $b_H(X) = p(X)$. A b_H és p halmazfüggvények tulajdonságaiból következik, hogy ha X és Y szoros, akkor vagy $X \cap Y$ és $X \cup Y$ is szoros, vagy $X - Y$ és $Y - X$ is szoros. Ezenfelül, ha X és Y szoros, és létezik egy olyan e hiperél amire $\emptyset \neq e \cap Y \subseteq X \cap Y$, akkor $X \cap Y$ és $X \cup Y$ szoros.

Legyen e_0 a H egy tetszőleges hiperéle. Ha nincs olyan Z pontos halmaz, amire $e_0 \subseteq Z$, akkor legyen $H' := H - e_0$ és

$$p'(X) := \begin{cases} p(X) - 1 & \text{ha } e_0 \cap X \neq \emptyset \text{ és } e_0 \cap (V - X) \neq \emptyset, \\ p(X) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A p' halmazfüggvény szimmetrikus és ferdén szupermoduláris, és $b_{H'}(X) \geq p'(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra, így az indukciós feltétel szerint H' bizonyos hiperéleinek az összevonásával kapható egy olyan H'_* hipergráf, amire $d_{H'_*}(X) \geq p'(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra. Ekkor persze a $H_* := H'_* + e_0$ hipergráf kielégíti a (6) feltételt. Feltehetjük tehát, hogy van egy olyan X_0 szoros halmaz, amire $e_0 \subseteq X_0$.

Legyen $\mathcal{Y}$ azon szoros Y halmazoknak a rendszere, amikre $e_0 \cap Y \neq \emptyset$. Ha $Y \in \mathcal{Y}$, akkor $\emptyset \neq e_0 \cap Y \subseteq X_0 \cap Y$, tehát $X_0 \cap Y$ és $X_0 \cup Y$ szintén benne vannak $\mathcal{Y}$-ban. Ha Y_1 és Y_2 két tartalmazásra nézve maximális halmaz $\mathcal{Y}$-ban, akkor $e_0 \subseteq Y_1 \cap Y_2$ az előbbi megfigyelés szerint, tehát $Y_1 \cap Y_2$ és $Y_1 \cup Y_2$ szintén $\mathcal{Y}$-beli, azaz a maximalitás miatt $Y_1 = Y_2$. Ezek szerint $\mathcal{Y}$-ban van egy egyértelmű maximális Y_0 halmaz.

Tegyük fel hogy nincs olyan $e \in \mathcal{E}$ hiperél, ami diszjunkt Y_0-tól. Ekkor $p(V - Y_0) = p(Y_0) = b_H(Y_0) > b_H(V - Y_0)$ (mivel $e_0 \subseteq Y_0$), ami ellentmond az (5) feltételnek. Tehát van egy Y_0-tól diszjunkt $e_1 \in \mathcal{E}$ hiperél. Tekintsük a $H' := (V, \mathcal{E} - \{e_0, e_1\} + (e_0 \cup e_1))$ hipergráfot, azaz vonjuk össze H-ban az e_0 és e_1 hiperélt. Ha $b_{H'}(X) < p(X)$ valamilyen $X \subseteq V$ halmazra, akkor $e_0 \cap X \neq \emptyset$, $e_1 \cap X \neq \emptyset$, és X szoros halmaz. De ekkor $X \in \mathcal{Y}$, ami ellentmondás, mert $e_1 \cap Y = \emptyset$ minden $Y \in \mathcal{Y}$ halmazra.

Beláttuk, hogy H' kielégíti a tétel feltételeit, tehát az indukciós feltétel szerint H' bizonyos hiperéleinek összevonásával (azaz egyben H bizonyos hiperéleinek összevonásával) kapható egy olyan H_* hipergráf, ami kielégíti a (6) feltételt. ∎

Hivatkozások

[1] Z. Szigeti, Hypergraph connectivity augmentation, in: *Connectivity Augmentation of Networks: Structures and Algorithms, Mathematical Programming* (ed. A. Frank), Ser. B, Vol. 84, No. 3 (1999), 519–527.

Tamás Király: Merging hyperedges to meet edge-connectivity requirements

We give a short proof of Szigeti's theorem on hypergraph connectivity augmentation, by considering a slight generalization that enables the use of a very simple inductive step.

Király Tamás
MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
ELTE TTK Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/C.
`tkiraly@cs.elte.hu`

IRÁNYÍTOTT HIPERGRÁFOK ÉLÖSSZEFÜGGŐSÉG-NÖVELÉSE

KIRÁLY TAMÁS ÉS MAKAI MÁRTON[1]

Berg, Jackson és Jordán [1] irányított hipergráfokra vonatkozó leemelési tételének bizonyítjuk egy absztrakt alakját. Megmutatjuk továbbá, hogy ez hogyan használható irányított hipergráfok élösszefüggőségének növelésére.

1. Bevezetés

Berg, Jackson és Jordán egy érdekes, irányított hipergráfokra vonatkozó leemelési tételt bizonyított [1]-ben. Ennek alkalmazásaként jellemzést adtak rá, hogy egy irányított hipergráfnak mikor létezik k-élösszefüggővé növelése adott ki- és befoksorozattal. Megmutatjuk, hogy ez a leemelési tétel kimondható egy általánosabb alakban (és hasonlóan bizonyítható). Következésképp, irányított hipergráfok élösszefüggőség-növelési problémáinak egy szélesebb osztályára kapunk megoldást.

Legyen V véges alaphalmaz. Használjuk az $m(X) := \sum_{v \in X} m(v)$ jelölést, amennyiben $m : V \to \mathbb{R}$ és $X \subseteq V$. A továbbiakban az e *hiperélen* az $e : V \to \mathbb{Z}_+$ multiplicitás-függvénnyel definiált multihalmazt értjük, azaz a v pont $e(v)$ multiplicitással szerepel e-ben; $v \in e$ alatt azt értjük, hogy $e(v) > 0$, és az $|e \cap X|$ jelölést használjuk $e(X)$-re.

Az a *irányított hiperél* alatt egy kijelölt $h(a) \in a$ *fejjel* rendelkező hiperélet értünk; a *tövek* multihalmazán pedig $t(a) = a - h(a)$-t, azaz azt a multihalmazt értjük, melyet a-ból kapunk $h(a)$ multiplicitásának eggyel való csökkentésével. A $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráf egy *irányítását* kapjuk, ha minden $e \in \mathcal{E}$ hiperélre kijelölünk egy $h(e) \in e$ fejet. Az e hiperélet ν*-hiperélnek* hívjuk ha $|e| = \nu$, s az a irányított hiperélet $(r,1)$*-hiperélnek* hívjuk, ha $|t(a)| = r$. Hasonlóan, egy ν-hiperélekből álló hipergráfot ν*-hipergráfnak,* s egy $(r,1)$-hiperélekből álló irányított hipergráfot $(r,1)$*-hipergráfnak* hívunk.

Az e hiperél *belép* az X halmazba, ha $e \cap X \neq \emptyset$ és $e \cap (V - X) \neq \emptyset$. Az a irányított hiperélről akkor mondjuk ugyanezt, ha $h(a) \in X$ és $t(a) \cap (V - X) \neq \emptyset$. A $H = (V, \mathcal{E})$ hipergráf és $D = (V, \mathcal{A})$ irányított hipergráf esetén a következőeket

[1] A kutatást az OTKA K60802 és TS049788 pályázatai, az NKTH Öveges program, valamint az ADONET Marie Curie RTN (504438 sz. FP6 szerződés) támogatta.

definiáljuk: $d_H(X) := \big|\{e \in \mathcal{E} \mid e \text{ belép } X\text{-be}\}\big|$, $\varrho_D(X) := \big|\{a \in \mathcal{A} \mid a \text{ belép } X\text{-be}\}\big|$ és $\delta_D(X) := \varrho_D(V - X)$. Ezen mennyiségek teljesítik a következő szubmodularitási egyenlőtlenségeket:

$$d_H(X) + d_H(Y) \geq d_H(X \cap Y) + d_H(X \cup Y) \quad \text{ha } X, Y \subseteq V, \tag{1}$$

$$\varrho_D(X) + \varrho_D(Y) \geq \varrho_D(X \cap Y) + \varrho_D(X \cup Y) \quad \text{ha } X, Y \subseteq V, \tag{2}$$

$$\delta_D(X) + \delta_D(Y) \geq \delta_D(X \cap Y) + \delta_D(X \cup Y) \quad \text{ha } X, Y \subseteq V. \tag{3}$$

A V részhalmazainak egy $\mathcal{F}$ rendszerére legyen $\operatorname{co}(\mathcal{F}) := \{V - X \mid X \in \mathcal{F}\}$. Az X és Y halmazokat *keresztezőnek* mondjuk, ha $X - Y$, $Y - X$, $X \cap Y$, $V - (X \cup Y)$ mind nemüresek. Egy halmazrendszert *keresztezésmentesnek* hívunk, ha nem tartalmaz keresztező halmazokat. Legyen $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ egy halmazfüggvény, (mindig feltesszük, hogy $p(\emptyset) = 0$). Azt mondjuk, hogy a H hipergráf (D irányított hipergráf) *fedi* p-t, ha $d_H(X) \geq p(X)$ $\big(\varrho_D(X) \geq p(X)\big)$ minden $X \subseteq V$ halmazra. A p halmazfüggvényt *keresztezőn szupermodulárisnak* hívjuk, ha

$$p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y) \tag{4}$$

fennáll, amennyiben $X \cap Y \neq \emptyset$ és $V - (X \cup Y) \neq \emptyset$.

2. Irányított leemelés

A következő tétel egy speciális esetét bizonyítja Berg, Jackson és Jordán [1]-ben (ahol $p(X) = k - \varrho_D(X)$ minden $\emptyset \neq X \subsetneq V$ halmazra valamely adott pozitív egész k-ra és D irányított hipergráfra).

2.1. tétel. *Legyen $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ keresztezőn szupermoduláris függvény, $m_i : V \to \mathbb{Z}_+$ és $m_o : V \to \mathbb{Z}_+$ fokelőírások, $rm_i(V) \leq m_o(V) < (r+1)m_i(V)$ valamely pozitív egész r-re, és*

$$m_i(X) \geq p(X) \quad \text{minden } X \subseteq V\text{-re}, \tag{5}$$

$$m_o(V - X) \geq p(X) \quad \text{minden } X \subseteq V\text{-re}. \tag{6}$$

Ekkor létezik olyan $(r, 1)$-hiperélekből és $(r+1, 1)$-hiperélekből álló D irányított hipergráf, melyre $\delta_D(v) = m_o(v)$ és $\varrho_D(v) = m_i(v)$ minden $v \in V$ pontra, és

$$\varrho_D(X) \geq p(X) \quad \text{minden } X \subseteq V\text{-re}.$$

Az érthetőség kedvéért emlékeztetünk rá, hogy a 2.1. tétel gráfokra vonatkozó speciális esete Frank következő tétele.

2.2. tétel (Frank [2]). *Legyen* $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ *keresztezőn szupermoduláris függvény,* $m_i : V \to \mathbb{Z}_+$ *és* $m_o : V \to \mathbb{Z}_+$ *fokelőírások, ahol* $m_i(V) = m_o(V)$*, és*

$$(7) \qquad m_i(X) \geq p(X) \quad \text{minden } X \subseteq V\text{-re,}$$

$$(8) \qquad m_o(V - X) \geq p(X) \quad \text{minden } X \subseteq V\text{-re.}$$

Ekkor létezik olyan D *irányított gráf, amire* $\delta_D(v) = m_o(v)$ *és* $\varrho_D(v) = m_i(v)$ *minden* $v \in V$ *pontra, és*

$$\varrho_D(X) \geq p(X) \quad \text{minden } X \subseteq V\text{-re.}$$

A 2.1 tétel bizonyítása. Legyen a egy irányított hiperél, melyre $m_i(h(a)) > 0$ és $m_o(v) \geq |t(a) \cap \{v\}|$ minden $v \in t(a)$ pontra. Definiáljuk az $m_i^a : V \to \mathbb{Z}_+$, $m_o^a : V \to \mathbb{Z}_+$ foksorozatokat, és a $p^a : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ halmazfüggvényt a következőképp: m_i^a-t m_i-ből kapjuk $h(a)$-n való eggyel csökkentéssel, m_o^a-t pedig m_o-ból úgy, hogy minden ponton $t(a)$ ottani multiplicitásával csökkentünk. Végül p^a-t úgy kapjuk, hogy csökkentjük p-t eggyel minden halmazon, melybe a belép. Az így definiált műveletet az a *leemelésének* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az a *leemelhető*, ha $m_i^a(X) \geq p^a(X)$ és $m_o^a(V - X) \geq p^a(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra. A leemelést $(l, 1)$-*leemelésnek* hívjuk, ha $|t(a)| = l$. Érdemes megfigyelni, hogy a leemeléskor keletkező p^a is keresztezőn szupermoduláris (2) miatt. A következő lemma arra ad jellemzést, hogy mikor létezik viszonylag kis pontszámú leemelhető irányított hiperél.

2.3. lemma. *Legyen* $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ *keresztezőn szupermoduláris,* $m_i : V \to \mathbb{Z}_+$ *és* $m_o : V \to \mathbb{Z}_+$ *fokelőírások, melyekre* $m_i(V) \leq m_o(V) \leq r m_i(V)$ *valamely* r *egészre, és*

$$(9) \qquad m_i(X) \geq p(X) \quad \text{minden } X \subseteq V\text{-re,}$$

$$(10) \qquad m_o(V - X) \geq p(X) \quad \text{minden } X \subseteq V\text{-re.}$$

Legyen továbbá $u \in V$*,* $m_i(u) > 0$*. Ekkor létezik olyan leemelhető* a *irányított hiperél, melyre* $h(a) = u$ *és* $|t(a)| \leq r$*.*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $m_i(V) \geq 2$. Az X halmazt *be-kritikusnak* mondjuk, ha $u \in X$ és $m_i(X) = p(X)$. A (tartalmazásra) maximális be-kritikus halmazok páronként ko-diszjunktak (azaz uniójuk V), hisz metszetük nemüres, és p keresztezőn szupermodularitása miatt két keresztező be-kritikus metszete és uniója is be-kritikus. A maximális be-kritikus halmazok komplementereit *szirmoknak* nevezzük. Legyen $\mathcal{F}$ a maximális be-kritikus halmazok rendszere és $\alpha := |\mathcal{F}|$; ekkor $\mathcal{F}$-et α-*virágnak* nevezzük.

2.4. állítás. $\alpha \leq r$.

Bizonyítás. Különben

$$\sum_{X\in\mathcal{F}} p(X) = \sum_{X\in\mathcal{F}} m_i(X) > rm_i(V) \geq m_o(V) \geq \sum_{X\in\mathcal{F}} m_o(V-X),$$

ami ellentmond (10)-nek. ■

Amennyiben $\alpha = 0$, akkor $a = \{u\}$ leemelhető, tehát legyen először $\alpha = 1$. Legyen P az egyetlen szirom, ekkor világos, hogy $m_o(P) \geq m_i(V-P) > 0$. Az X halmazt *ki-kritikusnak* hívjuk, ha $u \notin X$ és $m_o(V-X) = p(X) > 0$. Ha nincs ki-kritikus halmaz, akkor bármely $v \in P$-re, amelyre $m_o(v) > 0$ teljesül, az $a = vu$ irányított él leemelhető. Mivel p keresztezőn szupermoduláris, két ki-kritikus nemüres metszete is ki-kritikus. Mivel $u \notin X$ és $m_i(X) \geq m_o(V-X)$ minden ki-kritikus halmazra, nincs két diszjunkt ki-kritikus halmaz, következésképp létezik egy egyértelmű minimális ki-kritikus halmaz Y. A $P-Y$ és $Y-P$ halmazok egyike üres, különben $m_o(P-Y)+m_i(Y-P) < m_o(V-Y)+m_i(V-P) = p(Y)+p(V-P) \leq p(Y-P)+p\big(V-(P-Y)\big) \leq m_i(Y-P)+m_o(P-Y)$, ami ellentmondás. Emellett $m_o(Y) = m_o(V) - m_o(V-Y) \geq m_i(V) - m_o(V-Y) \geq m_i(V) - m_i(Y) > 0$, tehát $m_o(P) > 0$ miatt $m_o(Y \cap P) > 0$. Legyen $v \in Y \cap P$ egy pont, amire $m_o(v) > 0$. Ekkor az $a = vu$ élet le lehet emelni.

Ha $\alpha \geq 2$, akkor definiáljuk a-t úgy, hogy minden sziromból választunk tetszőlegesen egy v tövet, melyre $m_o(v) > 0$. Belátjuk, hogy a-t le lehet emelni. A konstrukció miatt (9) fennmarad a leemelés után.

Tegyük fel, hogy van olyan X halmaz, mely megsérti (10)-et a leemelés után, azaz $m_o^a(V-X) < p^a(X)$. Ha a belép X-be, akkor $p(X) > m_o(V-X) - \big|t(a) \cap (V-X)\big| + 1$, ha pedig a nem lép be X-be, akkor $u \notin X$ és $p(X) > m_o(V-X) - \big|(t(a)) \cap (V-X)\big|$. Mindkét esetben $p(X) > m_o(V-X) - \big|a \cap (V-X)\big| + 1$.

Állítjuk, hogy van olyan P szirom, melyre $P - X \neq \emptyset$ és $X - P \neq \emptyset$. Ez világos, ha X része valamely sziromnak, különben pedig bármelyik P szirom jó, amire $P \cap a \notin X$. Ilyen szirom pedig van, különben $m_o(V-X) = m_o^a(V-X) < p^a(X) \leq p(X)$, ami ellentmondana (10)-nek. Mivel $\big|a \cap (P-X)\big| \leq 1$, és p keresztezőn szupermoduláris, ezért

$$\begin{aligned} m_i(X-P) + m_o(P-X) &\leq m_i(V-P) + m_o(V-X) - \big|a \cap (V-X)\big| + 1 \\ &< p(V-P) + p(X) \leq p(X-P) + p\big(V-(P-X)\big), \end{aligned}$$

azaz $V-(P-X)$ megsérti (10)-et, ami ellentmondás. ■

Térjünk vissza a 2.1. tételhez. A 2.3. lemma alkalmazásával egymás után leemelhető hiperélek sorozataként kaphatunk egy D^* irányított hipergráfot, melyre $\delta_{D^*}(v) = m_o(v)$, $\varrho_{D^*}(v) = m_i(v)$ minden $v \in V$ pontra, és $\varrho_{D^*}(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra. Világos, hogy $rm_i(V) \leq m_o(V)$ miatt $|a| \geq r+1$ fennáll a D^* legalább egy irányított hiperélére, tehát van egy leemelhető $(r_1, 1)$-hiperél $h(a)$ fejjel valamilyen $r_1 \geq r$-re. Ugyanakkor a 2.3. lemma miatt van olyan leemelhető $(r_2, 1)$-hiperél is $h(a)$ fejjel, ahol $r_2 \leq r$, ha $rm_i(V) = m_o(V)$, és $r_2 \leq r+1$, ha $rm_i(V) < m_o(V)$.

2.5. lemma. *Ha létezik leemelhető* $(r_1, 1)$*-hiperél* u *fejjel és leemelhető* $(r_2, 1)$*-hiperél* u *fejjel, és* $r_1 > r > r_2$*, akkor létezik leemelhető* $(r, 1)$*-hiperél is* u *fejjel.*

Bizonyítás. Legyen a az $(r_1, 1)$-leemelésnél kapott irányított hiperél. Indukció miatt ekkor elég azt igazolni, hogy valamely $v \in t(a)$-ra a $h(a') = u$ és $t(a') = t(a) - v$ által definiált a' leemelhető. Ha $a(v) \geq 2$ valamely v-re, akkor készen vagyunk; legyen tehát minden pont multiplicitása legfeljebb 1 a-ban. Ha $r_1 > 2$ akkor tegyük fel indirekt, hogy minden $v \in t(a)$ ponthoz létezik be-kritikus X_v halmaz, amelyre $a - v \subseteq X_v$ és $v \notin X_v$. Feltehető, hogy ezek tartalmazásra maximálisak. Tehát $\{X_v \mid v \in t(a)\}$ egy r_1 szirmú u-ra illeszkedő virág, ami ellentmond annak, hogy létezik leemelhető $(r_2, 1)$-hiperél u fejjel.

Ha $r_1 = 2$, akkor $r_2 = 0$, tehát nincsenek be-kritikus halmazok. Korábban láttuk, hogy van egy egyértelmű minimális ki-kritikus Y halmaz, amelyre $u \notin Y$. Ekkor $t(a) - Y = \emptyset$, különben a nem lenne leemelhető. De így mindkét $(1, 1)$-hiperél leemelhető. ∎

A 2.1. tételt $m_i(V)$-re vonatkozó indukcióval igazoljuk. A 2.5. lemmának megfelelően van olyan $u \in V$ pont, melyre $m_i(u) > 0$, és létezik leemelhető $(r, 1)$-hiperél u fejjel, ha $rm_i(V) = m_o(V)$, és leemelhető $(r, 1)$-hiperél vagy $(r + 1, 1)$-hiperél u fejjel, ha $rm_i(V) < m_o(V)$. Legyen a a leemelésnél kapott hiperél. Ekkor $rm_i^a(V) \leq m_o^a(V) \leq (r + 1)m_i^a(V)$. Indukció miatt létezik olyan D' irányított hipergráf mely $(r, 1)$-hiperélekből és $(r + 1, 1)$-hiperélekből áll, és kielégíti a feltételeket m_i^a, m_o^a és p^a-ra vonatkozóan. Az a irányított hiperél D'-höz adásával kapott irányított hipergráf kielégíti a 2.1. tétel feltételeit. ∎

3. Élösszefüggőség-növelés

Ebben a részben az [1]-ben látott technikához hasonlóan vezetünk le egy élösszefüggőség-növelési eredményt a 2.1. tételből, Fujishige következő tételét használva.

3.1. tétel (Fujishige, [4]). *Legyen* $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ *keresztezőn szupermoduláris függvény, és legyen*

$$B(p) := \{x \in \mathbb{R}^V \mid x(Z) \geq p(Z) \text{ minden } Z \subseteq V\text{-re, és } x(V) = p(V)\}. \tag{11}$$

Ekkor $B(p)$ *pontosan akkor nemüres, ha*

$$\sum_{i=1}^{t} p(X_i) \leq p(V), \quad \sum_{i=1}^{t} p(V - X_i) \leq (t - 1)p(V)$$

fennáll a V *minden* $\{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$ *partíciójára. Amennyiben* $B(p)$ *nemüres, akkor csúcsai egész vektorok.*

3.2. tétel. *Legyen $p : 2^V \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ keresztezőn szupermoduláris függvény. Pontosan akkor létezik p-t fedő $(r,1)$-hipergráf γ irányított hiperéllel, ha*

$$\gamma \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} p(X), \tag{12}$$

$$r\gamma \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} p(V - X), \tag{13}$$

$$\big(|\mathcal{G}| - 1\big)\gamma \geq \sum_{X \in \mathcal{G}} p(V - X) \tag{14}$$

fennáll a V minden $\mathcal{F}$ részpartíciójára és minden $\mathcal{G}$ partíciójára.

Bizonyítás. A feltételek szükségessége könnyen látható. Az elégségességhez megkonstruálunk a 2.1. tétel feltételeit kielégítő m_i és m_o fokelőírásokat. Definiáljuk a $p' : 2^V \to \mathbb{Z}_+$ halmazfüggvényt úgy, hogy $p'(V) = \gamma$, $p'(x) = \max\{0, p(x)\}$ egyelemű halmazokra, és $p'(X) = p(X)$ egyébként. Jegyezzük meg, hogy p' keresztezőn szupermoduláris. Ha $\mathcal{F}$ a V partíciója, akkor (12) miatt

$$\sum_{X \in \mathcal{F}} p'(X) \leq \sum_{X \in \mathcal{F},\ p(X) > 0} p(X) \leq \gamma,$$

és ha (14)-t alkalmazzuk, vagy (12)-t egyelemű részpartíciókra, akkor

$$\sum_{X \in \mathrm{co}\,(\mathcal{F})} p'(X) \leq \sum_{X \in \mathrm{co}\,(\mathcal{F}),\ p(X) > 0} p(X) \leq \big(|\mathcal{F}| - 1\big)\gamma.$$

Tehát a 3.1. tétel p'-ra való alkalmazásával kapjuk az m_i nemnegatív egész vektort, amire $m_i(X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra, és $m_i(V) = \gamma$.

Az m_o megkonstruálásához tekintsünk egy nemnegatív vektort, melyre $m_o(V - X) \geq p(X)$ minden $X \subseteq V$ halmazra; legyen ez továbbá minimális abban az értelemben, hogy minden $v \in V$, $m_o(v) > 0$ pontra létezik X halmaz, amire $v \notin X$ és $m_o(V - X) = p(X)$. Legyen $\mathcal{G} = \{X_1, X_2, \ldots, X_l\}$ ilyen halmazok egy rendszere, melyre l minimális. Két halmaz tehát nem keresztezhet, hisz akkor a metszetükkel helyettesíthetnénk őket. Ha $\mathcal{G}$ ko-diszjunkt halmazokból áll, akkor

$$m_o(V) = \sum_{i=1}^{l} m_o(V - X_i) = \sum_{i=1}^{l} p(X_i) \leq r\gamma,$$

(13) miatt. Ha lenne két diszjunkt halmaz, X_i és X_j, akkor pedig

$$m_o(V) \leq m_o(V - X_i) + m_o(V - X_j) = p(X_i) + p(X_j) \leq \gamma.$$

Ezek után megnövelhetjük m_o-t egy tetszőleges ponton, hogy $m_o(V) = r\gamma$ legyen. Végül alkalmazzuk a 2.1. tételt, hogy konstruáljunk egy p-t fedő $(r,1)$-hipergráfot m_i és m_o fokelőírásokkal. ■

Jól ismert, hogy irányított gráfok, azaz $(1,1)$-hipergráfok esetén a (14) feltétel elhagyható, hisz az következik (13)-ból.

A következő példa mutatja, hogy irányított hipergráfok esetén ez általában nem tehető meg. Legyen $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $p(\{v_1, v_2\}) = p(\{v_1, v_3\}) = p(\{v_2, v_3\}) = 2$ és $p(X) = 0$ a többi halmazra, $r = 3$, $\gamma = 2$. Látható, hogy (12) és (13) teljesülnek, de (14) nem, és nincs p-t fedő $(3,1)$-hipergráf 2 irányított hiperéllel.

Egy másik speciális eset, amikor (14) következik (12)-ből, a (k,l)-élösszefüggőség-növelés irányított hipergráfoknál ($l \leq k$), ami az [1]-ben vizsgált k-élösszefüggőség-növelés általánosítása. A D' irányított hipergráfot (k,l)-élösszefüggőnek nevezzük, ha valamely rögzített $s \in V$-re $\varrho_{D'}(X) \geq k$, ha $s \notin X \neq \emptyset$, és $\varrho_{D'}(X) \geq l$, ha $s \in X \neq V$. Legyen D irányított hipergráf, rögzítsünk egy $s \in V$ pontot, legyen $p(X) = k - \varrho_D(X)$ ha $s \notin X \neq \emptyset$, $p(X) = l - \varrho_D(X)$ ha $s \in X \neq V$, és $p(X) = 0$ különben. Legyen $\mathcal{F} = \{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$ a V egy partíciója ($t \geq 2$). Ha (12) fennáll, akkor

$$\sum_{X \in \mathrm{co}(\mathcal{F})} p(X) = (t-1)l + k - \sum_{X \in \mathrm{co}(\mathcal{F})} \varrho_D(X) \leq l + (t-1)k - \sum_{X \in \mathrm{co}(\mathcal{F})} \delta_D(X)$$

$$= l + (t-1)k - \sum_{X \in \mathcal{F}} \varrho_D(X) = \sum_{X \in \mathcal{F}} p(X) \leq \gamma.$$

3.3. következmény. *A $D = (V, \mathcal{A})$ irányított hipergráf pontosan akkor tehető (k,l)-élösszefüggővé γ új $(r,1)$-hiperél hozzávételével, ha*

$$\gamma \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} p(X),$$

$$r\gamma \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} p(V - X)$$

fennáll a V minden $\mathcal{F}$ részpartíciójára, ahol p a fent definiált halmazfüggvény.

Megjegyzés. Ha a 2.1. tételt kombináljuk Frank és Király [3]-ban leírt eredményeivel, akkor polinomiális algoritmust és minimax formulát kapunk hipergráfok partíció-összefüggőségének növelésére. Ennek az alkalmazásnak a leírása az [5] Technical Reportban szerepel részletesen.

Hivatkozások

[1] Alex R. Berg, Bill Jackson, and Tibor Jordán, Edge splitting and connectivity augmentation in directed hypergraphs, *Discrete Math.*, **273(1-3)** (2003), 71–84. EuroComb'01 (Barcelona).

[2] András Frank. Connectivity augmentation problems in network design, in: J. R. Birge and K. G. Murty, editors, *Mathematical Programming: State of the Art 1994* (1994), pp. 34–63.

[3] András Frank and Tamás Király, Combined connectivity augmentation and orientation problems, *Discrete Appl. Math.*, **131(2)** (2003), 401–419. Submodularity.

[4] Satoru Fujishige, Structures of polyhedra determined by submodular functions on crossing families, *Math. Programming,* **29(2)** (1984), 125–141.

[5] Tamás Király and Márton Makai, A note on hypergraph connectivity augmentation, Technical Report TR-2002-11, Egerváry Research Group, Budapest (2002). `www.cs.elte.hu/egres`.

Tamás Király and Márton Makai: Connectivity augmentation problems of directed hypergraphs

We prove an abstract version of an edge-splitting theorem of Berg, Jackson and Jordán. We also show that this can be used to derive connectivity augmentation results of directed hypergraphs.

Király Tamás és Makai Márton
MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
ELTE TTK Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/C.
`{tkiraly, marci}@cs.elte.hu`

SZUPERMODULÁRIS FÜGGVÉNYT FEDŐ ADOTT BEFOK-PARITÁSÚ IRÁNYÍTÁSOK

KIRÁLY TAMÁS ÉS SZABÓ JÁCINT[1]

Nebeský egy eredményét kiterjesztve Frank, Jordán és Szigeti karakterizálták, hogy mikor létezik egy gráfnak olyan irányítása, amely tartalmaz k élidegen fenyőt, és amelynek minden csúcsban a befoka előírt paritású. Ezen eredményt kiterjesztve ebben a cikkben jellemezzük olyan adott befok-paritású irányítás létezését, amely egy p nemnegatív, metszőn szupermoduláris halmazfüggvényt fed. Megmutatjuk, hogy egy partíciós formula adja meg a rossz paritású befokkal rendelkező csúcsok számának minimumát a p-t fedő irányítások között.

1. Bevezetés

Tutte [9] híres éldiszjunkt feszítőfás tétele szerint az irányítatlan $G = (V, E)$ gráfban pontosan akkor létezik k éldiszjunkt feszítőfa, ha V-nek minden $\mathcal{F}$ partíciójára az $\mathcal{F}$ osztályai között futó élek $e_G(\mathcal{F})$ számára $e_G(\mathcal{F}) \geq k(|\mathcal{F}| - 1)$ teljesül. Tutte tétele alapján megfogalmazhatunk egy gráfirányítási tételt. Rögzítsünk egy $r \in V$ csúcsot, és definiáljuk a $p : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{Z}$ halmazfüggvényt úgy, hogy $X \subseteq V$-re legyen

$$p(X) = \begin{cases} 0, & \text{ha } r \in X, \\ k, & \text{egyébként.} \end{cases} \tag{1}$$

Egy irányítást *p-t fedő irányításnak* hívunk, ha minden $X \subseteq V$-re $\varrho(X) \geq p(X)$ – itt $\varrho(X)$ az X csúcshalmazba belépő irányított élek számát jelenti. Tutte tételéből rögtön következik, hogy G-nek pontosan akkor létezik p-t fedő irányítása, ha V-nek minden $\mathcal{F}$ partíciójára

$$e_G(\mathcal{F}) \geq k(|\mathcal{F}| - 1) = \sum_{X \in \mathcal{F}} p(X)$$

teljesül.

Tetszőleges p halmazfüggvényre p-t fedő irányítás létezését már nem tudjuk mindig karakterizálni. A következő speciális esetben viszont igen.

[1] A kutatást az OTKA K60802 és TS049788 pályázatai, az NKTH Öveges program, valamint az ADONET Marie Curie RTN (504438 sz. FP6 szerződés) támogatta.

1.1. definíció. A $p : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{Z}$, $p(\emptyset) = 0$ halmazfüggvény *metszőn szupermoduláris,* ha

$$p(X) + p(Y) \leq p(X \cap Y) + p(X \cup Y) \tag{2}$$

teljesül minden $X \cap Y \neq \emptyset$ halmazpárra. p *szupermoduláris,* ha (2) tetszőleges halmazpárra áll.

Frank egy eredménye szolgáltatja az ígért karakterizációt nemnegatív, metszőn szupermoduláris halmazfüggvényt fedő irányítás létezésére [2].

1.2. tétel. *Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, és $p : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{Z}_+$ egy nemnegatív, metszőn szupermoduláris halmazfüggvény. G-nek pontosan akkor létezik p-t fedő irányítása, ha V-nek minden $\mathcal{F}$ partíciójára*

$$e_G(\mathcal{F}) \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} p(X). \tag{3}$$

A kérdés bonyolultabbá válik, és egy nehéz, eddig csak részben feltárt területre, a *matroid partner problémára* vezet, ha olyan p-t fedő irányítást keresünk, amelynek minden pontban a befoka előírt paritású. Egy irányítást T*-páratlannak* mondunk, ha $T \subseteq V$ pontosan a páratlan befokú csúcsok halmaza. Nebeský [8] egy eredményét – amely gráfok 2 dimenziós felületekre való beágyazásáról szól – kiterjesztve és egyszerűsítve Frank András, Jordán Tibor és Szigeti Zoltán [3] belátták, hogy pontosan akkor létezik T-páratlan, az (1)-ben definiált p halmazfüggvényt fedő irányítás, ha V-nek minden $\mathcal{F}$ partíciójára

$$e_G(\mathcal{F}) \geq \sum_{X \in \mathcal{F}} p^T(X),$$

ahol

$$p^T(X) = \begin{cases} p(X), & \text{ha } p(X) + i_G(X) + |T \cap X| \text{ páros,} \\ p(X) + 1, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Itt $i_G(X)$ az $X \subseteq V$ csúcshalmaz által feszített G-beli élek számát jelenti.

Jelen dolgozatban azt igazoljuk, hogy ezen tétel nemnegatív, metszőn szupermoduláris p halmazfüggvényre is igaz. Eredményünk magában foglalja olyan irányítás keresését is, amelynek minden pontban a befokára adott egy alsó korlát és egy paritáselőírás (Frank, Sebő, Tardos [4]). Ez általánosan is igaz: egy metszőn szupermoduláris függvény értékét egyelemű halmazokon megnövelve nem rontjuk el a metszőn szupermodularitást.

Mint említettük, nemnegatív, metszőn szupermoduláris p halmazfüggvényt fedő előírt befok-paritású irányítás létezése megfogalmazható a *matroid partner* (más néven matroid parity) problémaként. Ez a következő. Adott V véges halmaz és $h : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{Z}$ szupermoduláris függvény mellett feladat eldönteni, hogy létezik-e olyan $m \in \mathbb{Z}^V$ vektor, amelyre $m(V) = h(V)$ és $m(X) \geq h(X)$ minden

$X \subseteq V$ halmazra, továbbá amelynek koordinátái előírt paritásúak. A matroid partner problémára Lovász László dolgozott ki polinomiális algoritmust és minimax formulát arra az esetre, amikor h *lineárisan reprezentált* [6, 7]. A h függvényt akkor hívjuk *lineárisnak,* ha reprezentálható egy vektortér altereivel, és h *lineárisan reprezentált,* ha adott is ez a reprezentáció. Megjegyezzük, hogy majdnem minden a gyakorlatban előforduló, matroid partner problémára vezető kérdés lineáris h-t ad, azonban egyrészt nem ismeretes eljárás reprezentáció megadására, másrészt Lovász módszere csak igen nehezen ad kombinatorikus választ tisztán kombinatorikus matroid partner problémákra. Néhány kombinatorikus alkalmazást Lovász is levezetett. Azóta megoldás született néhány további matroid partner problémára, de átfogó elmélet nincs – dacára annak, hogy többen foglalkoztak már a kérdéssel, mivel számos, a legkülönbözőbb típusú fontos nyitott kombinatorikus optimalizálási probléma esik a matroid partner probléma körébe. Ilyen kérdés például erősen összefüggő adott befok-paritású irányítás keresése, amelyre a jelenleg ismert technikákkal eddig nem sikerült választ adni. Megjegyezzük, hogy ez utóbbi probléma egy a metszőnél általánosabb halmazfüggvény, egy keresztezőn szupermoduláris függvény adott befok-paritású fedéseként fogalmazható meg. Fontos és nehéz kutatási terület általánosabb halmazfüggvényt fedő adott befok-paritású irányítások vizsgálata. Mind Frank, Jordán és Szigeti fent említett eredménye [3], mind az eredményünk alkalmazásaként tárgyalt Berge–Tutte-formula [1] levezethető a Lovász által kidolgozott elméletből. Fő eredményünkre azonban, amely e két probléma közös általánosítása, nem ismert sem algoritmus, sem a Lovász által kidolgozott elméleten alapuló bizonyítás. Ezen cikk eredménye – azon túl, hogy a matroid partner problémára vonatkozó minden részeredmény előrelépés – azért lehet lényeges, mert ez az első olyan gyakorlati szempontból is érdekes eset, amely nem csak lineáris halmazfüggvényről szól.

2. Tétel

Fő eredményünk kimondása előtt szükségünk van néhány megfigyelésre és definícióra. Könnyen belátható a következő karakterizáció egy tetszőleges p halmazfüggvényt fedő irányítások befok-sorozataira. Az $m : V \to \mathbb{N}$ függvényre bevezetjük az $m(X) = \sum \{m(x) : x \in X\}$ jelölést, $X \subseteq V$-re.

2.1. lemma. *Legyen $G = (V, E)$ gráf, $p : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{Z}$ egy nemnegatív halmazfüggvény, és $m : V \to \mathbb{N}$ egy befok-előírás úgy, hogy $m(V) = |E|$ teljesül. G-nek pontosan akkor létezik olyan p-t fedő irányítása, hogy $\varrho(v) = m(v)$ minden $v \in V$ csúcsra, ha*

$$m(X) \geq p(X) + i_G(X) \quad \textit{minden } X \subseteq V\textit{-re.}$$

A $p : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{Z}$ halmazfüggvény *monoton csökkenő,* ha $p(X) \geq p(Y)$ minden $\emptyset \neq X \subseteq Y$ halmazpárra. Ha $p(V) = 0$ és p monoton csökkenő, akkor p nyilván nemnegatív. Metszőn szupermoduláris függvényekre ennek fordítottja is igaz.

2.2. állítás. *Ha p nemnegatív, metszőn szupermoduláris és $p(V) = 0$, akkor p monoton csökkenő.*

Bizonyítás. Legyen $\emptyset \neq X \subsetneq Y \subseteq V$ és $Z = (V - Y) \cup X$. Ekkor $p(Y) \leq p(Y) + p(Z) \leq p(Y \cap Z) + p(Y \cup Z) = p(X) + p(V) = p(X)$. ∎

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf, $T \subseteq V$ a páratlan befok-előírású pontok halmaza, és $p : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{Z}$ egy nemnegatív, metszőn szupermoduláris halmazfüggvény, amire $p(V) = 0$. Egy $U \subseteq V$ halmazra G egy irányítása *(p, U)-megengedett,* ha U-páratlan, és fedi p-t. Egy $X \subseteq V$ halmaz *(p, T)-páros,* röviden páros, ha $p(X) + i_G(X) + |X \cap T|$ páros; és *(p, T)-páratlan,* röviden páratlan, ha $p(X) + i_G(X) + |X \cap T|$ páratlan. Világos, hogy G minden (p, T)-megengedett irányítására $\varrho(X) \geq p(X) + 1$ minden páratlan X halmazra. Legyen ezért

$$p^T(X) = \begin{cases} p(X), & \text{ha } X \text{ páros,} \\ p(X) + 1, & \text{ha } X \text{ páratlan.} \end{cases}$$

p^T tehát G-től is függ. Nyilván

$$p^T(X) \equiv i_G(X) + |X \cap T| \pmod 2 \tag{4}$$

minden $X \subseteq V$ halmazra. A V csúcshalmaz egy $\mathcal{F}$ partíciójára legyen

$$\mu_T(\mathcal{F}) = \sum_{Z \in \mathcal{F}} p^T(Z) - e_G(\mathcal{F})$$

az $\mathcal{F}$ *hiánya,* ami T-n kívül függ persze p-től és G-től is. Az egyelemű partíció hiánya $p^T(V) = 0$ vagy 1.

2.3. állítás. *Adott G, T és p mellett minden partíció hiányának paritása $|T| + |E|$.*

Bizonyítás. (4) szerint

$$\sum_{Z \in \mathcal{F}} p^T(Z) - e_G(\mathcal{F}) \equiv \sum_{Z \in \mathcal{F}} p^T(Z) + \sum_{Z \in \mathcal{F}} i_G(Z) - |E| \equiv |T| + |E| \pmod 2. \quad ∎$$

Cikkünk fő eredménye az, hogy egy (p, T)-megengedett irányítás létezésének egyetlen akadálya egy hiányos partíció lehet.

2.4. tétel. *$G = (V, E)$ egy gráf, $T \subseteq V$ és $p : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{Z}$ egy nemnegatív, metszőn szupermoduláris halmazfüggvény, amire $p(V) = 0$. Tegyük fel, hogy G-nek létezik p-t fedő irányítása, azaz (3) teljesül. Ekkor G-nek pontosan akkor létezik egy (p, T)-megengedett irányítása, ha V-nek minden $\mathcal{F}$ partíciójára*

$$\sum_{Z \in \mathcal{F}} p^T(Z) \leq e_G(\mathcal{F}).$$

A bizonyítás [3] módszerein alapul és a következő fejezetben található. Megemlítjük, hogy a tétel hipergráfokra vonatkozó változata is igaz [5].

3. Bizonyítás

Könnyű látni, hogy G minden (p,U)-megengedett irányítására $|T\triangle U| \geq \max\{\mu_T(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ partíció}\}$. ($\triangle$ a két halmaz szimmetrikus differenciáját jelenti.) A 2.4. tételnél erősebbet fogunk bizonyítani, mégpedig azt, hogy itt egyenlőség is elérhető.

3.1. tétel. *Létezik olyan $U \subseteq V$ halmaz, hogy G-nek van (p,U)-megengedett irányítása, és*

$$|T\triangle U| = \max\{\mu_T(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ partíció}\}.$$

Indirekt dolgozunk, tekintsünk egy ellenpéldát, ahol $|V| + |E|$ minimális. Legyen $\mu_T = \max\{\mu_T(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \text{ partíció}\}$. Az $\mathcal{F} = \{V\}$ partíció mutatja, hogy $\mu_T \geq 0$. Belátjuk, hogy létezik egy olyan $|\mathcal{F}| \geq 2$ partíció, amelyre $\mu_T(\mathcal{F}) = \mu_T$. Töröljünk ki egy tetszőleges $e = uv \in E$ élt, és legyen $T' = T\triangle\{v\}$. Világos, hogy $\mu_{T'} = \mu_T$ vagy $\mu_{T'} = \mu_T + 2$. Ha $\mu_{T'} = \mu_T$, akkor feltevésünk szerint az új $G' = (V, E - e)$ gráfnak létezik egy (p,U)-megengedett irányítása, amire $|T\triangle U| = \mu_{T'}$. Ezen irányításhoz hozzávéve az $\overrightarrow{uv}$ irányított élt, egy megfelelő irányítását kapjuk G-nek. Ha viszont $\mu_{T'} = \mu_T + 2$, akkor azon $\mathcal{F}$ partícióra, amelyre $\mu_{T'}(\mathcal{F}) = \mu_{T'}$ áll, nyilván $\mu_T(\mathcal{F}) = \mu_T$ is teljesül. Ekkor persze $|\mathcal{F}| \geq 2$.

Legyen $\mathcal{F}^* = \{V_1, \ldots, V_t\}$ egy olyan partíció, amelyre $\mu_T(\mathcal{F}^*) = \mu_T$ és t maximális. Az előzőek miatt $t \geq 2$. Legyen $G_* = (V_*, E_*)$ az a gráf, amelyet G-ből a V_i osztályok új v_i csúcsokká való összehúzásával kapunk. p-t a természetes módon kiterjesztjük $\mathcal{P}(V_*)$-ra, és hasonlóan, $T_* \subseteq V_*$ álljon azon v_j csúcsokból, amelyekre $|V_j \cap T| + i_G(V_j)$ páratlan (ekkor tehát $p^{T_*}(v_i) = p^T(V_i)$ minden i-re). $\mathcal{F}^*$ választása miatt $\sum_{v\in X} p^{T_*}(v) - p^{T_*}(X) - i_{G_*}(X)$ nemnegatív, és persze páros minden $X \subseteq V_*$-re.

Először T-ből készítünk egy U halmazt, hogy $|T\triangle U| = \mu_T$, $\sum_{i=1}^t p^{U_*}(v_i) = |E_*|$ és $\sum_{v\in X} p^{U_*}(v) - p^{U_*}(X) - i_{G_*}(X) \geq 0$ minden $X \subseteq V_*$-ra. Ha $\mu_T = 0$, akkor $U = T$ megfelel, így tegyük fel, hogy $\mu_T > 0$. Egy $X \subseteq V_*$ halmaz *kritikus,* ha páros és $b(X) := \sum_{v\in X} p^{T_*}(v) - p^{T_*}(X) - i_{G_*}(X) = 0$. Minden egyelemű páros halmaz kritikus, és minden kritikus X halmazra $p(X) = p^{T_*}(X)$ a párosság miatt. Legyenek X és Y metsző kritikus halmazok. Ekkor i_{G_*} és p szupermodularitása miatt

$$0 = b(X) + b(Y) = \sum_{v\in X} p^{T_*}(v) - p(X) - i_{G_*}(X) + \sum_{v\in Y} p^{T_*}(v) - p(Y) - i_{G_*}(Y) \geq$$

$$\geq \sum_{v\in X\cap Y} p^{T_*}(v) - p(X\cap Y) - i_{G_*}(X\cap Y) +$$

$$+ \sum_{v\in X\cup Y} p^{T_*}(v) - p(X\cup Y) - i_{G_*}(X\cup Y) \geq$$

$$\geq b(X\cap Y) + b(X\cup Y) \geq 0,$$

vagyis $X \cup Y$ is kritikus. Ha V_* minden csúcsa benne volna egy kritikus páros halmazban, akkor tehát V_*-nak létezne egy kritikus páros halmazokból álló partíciója, ami viszont V-nek egy (3)-at sértő partícióját adná $\mu_T > 0$ miatt. Ezért létezik egy páratlan $v_j \in V_*$ szingleton, amit nem tartalmaz kritikus páros halmaz. Legyen $T' = T \triangle \{v\}$ egy tetszőleges $v \in V_j$ csúcsra. Ekkor $\sum_{i=1}^{t} p^{T'_*}(v_i) = |E_*| + \mu_T - 1$, és $\sum_{v \in X} p^{T'_*}(v) - p^{T'_*}(X) - i_{G_*}(X) \geq 0$ minden $X \subseteq V_*$-ra. A fenti eljárást ismételve μ_T-szer, a végül kapott T' halmaz egy megfelelő $U \subseteq V$ lesz.

3.2. állítás. *G_*-nak létezik egy (p, U_*)-megengedett irányítása, ahol v_i befoka $p^{U_*}(v_i)$, $i = 1, \ldots, t$-re.*

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\sum_{i=1}^{t} p^{U_*}(v_i) = |E_*|$. A 2.1. lemma alapján pontosan akkor létezik a kívánt irányítás, ha $\sum_{v \in X} p^{U_*}(v) \geq p^{U_*}(X) + i_{G_*}(X)$ minden $X \subseteq V_*$-re. Ez teljesül U választása miatt. ■

Legyen D_* egy (p, U_*)-megengedett irányítása G_*-nak, és jelöljük a G gráf G_*-ban is szereplő éleinek megfelelő irányítását D_0-lal. Ezentúl egy halmaz párosságát U határozza meg. A következő lépésben megmutatjuk, hogy minden páratlan $\{v_i\}$ szingletonra kitörölhetünk egy belépő élt úgy, hogy a kapott D'_* irányításban $\varrho_{D'_*}(X) \geq p(X)$ továbbra is áll minden $X \subseteq V_*$-ra. Legyen $\{v_i\}$ egy páratlan szingleton. Annak az oka, hogy egy v_i-be lépő a élt nem lehet kitörölni az, hogy létezik egy $X_a \subseteq V_*$ halmaz, hogy a belép X_a-ba és $\varrho_{D_*}(X_a) = p(X_a)$. Hívjuk az ilyen tulajdonságú halmazokat *szorosnak*. Vegyük észre, hogy minden szoros halmaz páros. A D_* gráf (p, U_*)-megengedett, $-\varrho_{D_*}$ és p metszőn szupermodulárisak, így metsző szoros halmazok metszete is szoros. Vagyis ha egyetlen v_i-be lépő él sem törölhető, akkor létezik egy szoros $X \subseteq V_*$ halmaz, hogy D_* minden v_i-be lépő éle belép X-be is. Ez viszont ellentmond annak, hogy V_i páratlansága és p monoton csökkenése miatt $\varrho_{D_*}(X) = p(X) \leq p(V_i) < p^U(V_i) = \varrho_{D_*}(v_i)$. Vagyis kitörölhetünk G_*-ból egy v_i-be lépő élt, és U-t megváltoztathatjuk $U \triangle v_i$-vé, hogy $\{v_i\}$ páros halmazzá váljon.

A fenti eljárást elvégezve minden páratlan $\{v_i\}$ szingletonra, végül kapunk egy D_*^- irányítást. Legyen D_0^- a megfelelő irányítás V-n, és legyen G^- az a gráf, amelyet G-ből kapunk, miután kitöröltük $D_0 - D_0^-$ éleit. Legyen továbbá $U^- = U \triangle \{v : \varrho_{D_0 - D_0^-}(v) = 1\}$. Világos, hogy $\varrho_{D_0^-}(X) \geq p(X)$ ha X néhány $\mathcal{F}^*$-beli osztály uniója, és $\varrho_{D_0^-}(V_i) = p(V_i) = p^{U^-}(V_i)$ minden i-re. Továbbá, ha D_0^- kiterjeszthető egy (p, U^-)-megengedett irányítássá G^--ban, akkor D_0 kiterjeszthető G-nek egy (p, U)-megengedett irányításává.

Most minden i-re megkonstruáljuk $G[V_i]$-nek egy olyan irányítását, amelyek D_0^--szal együtt egy (p, U^-)-megengedett irányítását adják G^--nak. Legyen $p_i : \mathcal{P}(V_i) \to \mathbb{Z}$ az alábbi módon definiálva:

$$p_i(X) := p(X) - \varrho_{D_0^-}(X), \quad X \subseteq V_i\text{-re.}$$

Ekkor p_i metsző szupermoduláris, monoton csökkenő, és $p_i(V_i) = 0$, mivel $\varrho_{D_0^-}(V_i) = p(V_i)$. Legyen továbbá

$$U_i = (U^- \cap V_i) \triangle \{v \in V_i : \varrho_{D_0^-}(v) \equiv 1 \pmod 2\}.$$

Definiáljuk a $p_i^{U_i} : \mathcal{P}(V_i) \to \mathbb{Z}$ függvényt hasonlóképpen, mint p^T-t tettük, csak $G[V_i]$, p_i és U_i használatával.

3.3. állítás. *V_i minden $\mathcal{F}$ partíciójára*

$$e_{G[V_i]}(\mathcal{F}) \geq \sum_{Z \in \mathcal{F}} p_i^{U_i}(Z). \tag{5}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik egy $\mathcal{F}$ partíció, amelyre az egyenlőtlenség nem teljesül. Ekkor $e_{G[V_i]}(\mathcal{F}) \leq \sum_{Z \in \mathcal{F}} p_i^{U_i}(Z) - 2$ a 2.3. állítás miatt. Definiáljuk V egy partícióját, $\mathcal{F}^i := \mathcal{F} \cup \mathcal{F}^* - \{V_i\}$. Ekkor

$$\mu_T(\mathcal{F}^i) = \mu_T(\mathcal{F}^*) - p^T(V_i) + \sum_{Z \in \mathcal{F}} p^T(Z) - e_{G[V_i]}(\mathcal{F}) \geq \mu_T(\mathcal{F}^*) +$$

$$+ \sum_{Z \in \mathcal{F}} p_i^{U_i}(Z) - e_{G[V_i]}(\mathcal{F}) - 2 \geq \mu_T(\mathcal{F}^*) = \mu_T,$$

mivel $\sum_{Z \in \mathcal{F}} p_i^{U_i}(Z) \leq \sum_{Z \in \mathcal{F}} p^T(Z) - \varrho_{D_0^-}(V_i) + 1 \leq \sum_{Z \in \mathcal{F}} p^T(Z) - p^T(V_i) + 2$. Ez utóbbi egyenlőtlenség azért áll, mert Z pontosan akkor (p, T)-páratlan, ha (p_i, U_i)-páratlan. Vagyis $\mu_T(\mathcal{F}^i) = \mu_T(\mathcal{F}^*)$ és $|\mathcal{F}^i| > |\mathcal{F}^*|$, ami ellentmond $\mathcal{F}^*$ választásának. ■

Indukciós feltevésünk miatt a 3.1. tétel igaz $G[V_i]$, p_i, U_i-re. Vagyis a 3.3. állítás szerint létezik $G[V_i]$-nek egy D_i irányítása, hogy $\varrho_{D_i}(X) \geq p_i(X)$ minden $X \subseteq V_i$-re, és $\varrho_{D_i}(v)$ páratlan pontosan akkor, ha $v \in U_i$.

Legyen D^- az az irányított gráf, amit D_0^- és $D_1, \ldots, D_t$ összetevésével kapunk. A fentiek alapján $\varrho_{D^-}(X) \geq p(X)$, ha $X \subseteq V_i$ valamely i-re, és $\varrho_{D^-}(v)$ pontosan akkor páratlan, ha $v \in U^-$. D_0^- konstrukciója alapján az is világos, hogy $\varrho_{D^-}(X) \geq p(X)$ akkor is, ha X előáll $\mathcal{F}^*$ néhány osztályának uniójaként.

Tegyük fel, hogy létezik egy $X \subseteq V$ halmaz, amire $\varrho_{D^-}(X) < p(X)$. Válasszuk X-et olyannak, hogy maximális sok $\mathcal{F}^*$-beli V_i osztályra álljon az, hogy $X \subseteq V_i$ vagy $V_i \subseteq X$ vagy $X \cap V_i = \emptyset$. $\mathcal{F}^*$-nak persze létezik egy olyan V_i osztálya, hogy a fentiek egyike sem igaz. $\varrho_{D^-}(V_i) = p(V_i)$, így p metsző szupermodularitása alapján vagy $\varrho_{D^-}(X \cap V_i) < p(X \cap V_i)$, vagy $\varrho_{D^-}(X \cup V_i) < p(X \cup V_i)$. Mindkét eset ellentmond X választásának.

D^- tehát egy (p, U^-)-megengedett irányítása G^--nak, és így D_0 valamint $D_1, \ldots, D_t$ uniója egy (p, U)-megengedett irányítása G-nek. Ezzel bebizonyítottuk a 3.1. és így a 2.4. tételt.

4. Egy alkalmazás

Alkalmazásként levezetjük a jól ismert Berge–Tutte-formulát maximális párosítások méretéről [1]. Legyen $G = (V, E)$ egy irányítatlan gráf. Minden $e \in E$ élt osszunk fel egy új u_e csúccsal, és a kapott gráfot jelöljük $G' = (V', E')$-vel. $v \in V$-re legyen $p(\{v\}) = \deg_G(v) - 1$, és legyen $p(X) = 0$ minden más $X \subseteq V'$ halmazon. Álljon $T \subseteq V'$ azon $v \in V$ csúcsokból, amelyekre $\deg_G(v) - 1$ páratlan.

4.1. tétel [1].

$$|V| - 2\nu(G) = \max\{\mathrm{odd}_G(W) - |W| : W \subseteq V\},$$

ahol $\mathrm{odd}_G(W)$ *jelöli a* $G - W$ *páratlan csúcsú komponenseinek számát.*

Bizonyítás. A nemtriviális irányt bizonyítjuk. Legyen $\mathcal{F}$ egy olyan partíciója V'-nek, amelyre $\mu_T(\mathcal{F}) = \sum_{Z \in \mathcal{F}} p^T(Z) - e_{G'}(\mathcal{F})$ maximális, és ezen feltétel mellett $|\mathcal{F}|$ minimális. Legyen $W = \{v \in V : \{v\} \in \mathcal{F}\}$, és álljon $\mathcal{F}'$ az $\mathcal{F}$ azon osztályaiból, amelyek nem szerepelnek W-ben. Ekkor $p(X) = 0$ minden $X \in \mathcal{F}'$ halmazra. Vegyük észre, hogy nem fut él semely két $\mathcal{F}'$-beli osztály közt, hisz akkor kicserélhetnénk őket az uniójukra, ellentmondva $\mathcal{F}$ választásának. Emiatt $X \in \mathcal{F}'$-re $p^T(X) \equiv \sum_{v \in X \cap V}(\deg_G(v) - 1) + i_{G'}(X) \equiv |X \cap V| \pmod 2$, vagyis pontosan $\mathrm{odd}_G(W)$ olyan $X \in \mathcal{F}'$ osztály van, amelyre $p^T(X) = 1$. Így

$$\mu_T(\mathcal{F}) = \sum_{Z \in \mathcal{F}} p^T(Z) - e_{G'}(\mathcal{F}) = \sum_{v \in W} \big(\deg_G(v) - 1\big) + \sum_{Z \in \mathcal{F}'} p^T(Z) - e_{G'}(\mathcal{F}) =$$
$$= \mathrm{odd}_G(W) - |W|.$$

Másfelől a 3.1. tétel szerint létezik G'-nek egy olyan irányítása, amely fedi p-t, és amely $\mu_T(\mathcal{F})$ csúcson hibás befok-paritású. Feltehető, hogy minden $e \in E$ élre $\varrho(u_e) \neq 1$, különben a belépő élt átirányítva továbbra is fedjük p-t, és a rossz befok-paritású csúcsok száma is változatlan. Ekkor azon $e \in E$ élek, amelyekre $\varrho(u_e) = 2$, egy párosítást alkotnak, amely által fedett csúcsok száma $|V| - \mu_T(\mathcal{F})$. Tehát $2\nu(G) \geq |V| - \mu_T(\mathcal{F}) = |V| - \mathrm{odd}_G(W) + |W|$. ■

Hivatkozások

[1] C. Berge, Sur le couplage maximum d'un graphe, *C.R. Acad. Sci. Paris,* **247** (1958), 258–259.

[2] A. Frank, On the orientation of graphs, *J. Combin. Theory B,* **28** (1980), 251–261.

[3] A. Frank, T. Jordán and Z. Szigeti, An orientation theorem with parity conditions, *Discrete Applied Mathematics,* **115** (2001), 37–45.

[4] A. Frank, A. Sebő and É. Tardos, Covering directed and odd cuts, *Mathematical Programming Study,* **22** (1984), 99–112.

[5] T. Király and J. Szabó, *A note on parity constrained orientations,* EGRES Technical Report TR-2003-11, `www.cs.elte.hu/egres`

[6] L. Lovász, *The matroid matching problem,* Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II (Szeged, 1978), 495–517.

[7] L. Lovász, Selecting independent lines from a family of lines in a space, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **42** (1980), 121–131.

[8] L. Nebeský, A new characterization of the maximum genus of a graph, *Czechoslovak Math. J.,* **31** (106) (1981), 604–613.

[9] W. T. Tutte, On the problem of decomposing a graph into n connected factors, *The Journal of the London Math. Soc.,* **36** (1961), 221–230,

Tamás Király and Jácint Szabó: Orientations covering a supermodular function with prescribed in-degree parities

Extending a result of Nebeský, Frank and Jordán and Szigeti characterized when a graph has an orientation, which contains k edge-disjoint spanning arborescences, and whose in-degree has prescribed parity at every vertex. Extending this result, we characterize the existence of an orientation with prescribed in-degree parity, which covers a non-negative, intersecting supermodular function p. We show that a partition formula describes the minimum number of wrong in-degree parity vertices among the orientations covering p.

Király Tamás és Szabó Jácint

MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
ELTE TTK Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/C.
`{tkiraly, jacint}@cs.elte.hu`

NÉGYZETMENTES 2-PÁROSÍTÁSOK PÁROS GRÁFOKBAN

PAP GYULA[1]

Adunk egy egyszerű algoritmust páros gráfban maximális elemszámú négyzetmentes 2-párosítás keresésére. Ez egy új bizonyítás Király Z. min-max formulájára.

1. Bevezetés

A 2-párosítások, és általánosabban a b-párosítások páros gráfokban alaposan kivizsgált területe a kombinatorikus optimalizálásnak. Ismertek min-max formulák, algoritmusok, poliéderes leírások. Ezeket az eredményeket számos irányban általánosították, például nem páros gráf esetére, illetve absztrakt szinten a matroid-metszet tétel felé. Ebben a cikkben egy kevésbé ismert, újabb keletű általánosítást veszünk elő, melyben a b-párosítások egy részhalmazából kell maximális elemszámút találni. A cikk célja egy egyszerű, algoritmikus bizonyítási módszer bemutatása.

Adott egy G egyszerű páros gráf és a csúcshalmazán értelmezett $\{0, 1, 2\}$ értékű b függvény. b-párosításnak olyan élhalmazt nevezünk, amely legfeljebb $b(v)$ élt tartalmaz a v csúcsra illeszkedő élek közül, tetszőleges v csúcs esetén. Minden b-párosítás bizonyos diszjunkt körök és utak élhalmaza. Négyzetmentesnek nevezünk egy b-párosítást, ha nem tartalmazza semelyik 4-hosszú kör minden élét.

Maximális elemszámú b-párosítást, illetve négyzetmentes b-párosítást szeretnénk keresni. Kiindulunk egy tetszőleges megoldásból, ismételten áttérünk egyre nagyobb elemszámúakra, amíg nem találunk egy legnagyobbat. Ekkor a talált megoldás optimalitását tanúsítjuk egy felső becsléssel, így egy min-max formulát is bizonyítunk. Az, hogy hogyan térünk át egyre jobb és jobb megoldásra az algoritmus során, a feladattól függ, de számos feladat esetén úgynevezett alternáló utak szoktak segíteni. Ehhez meg kellene fogalmazni egy alternáló utas lemmát, mely szerint vagy található egy növelő alternáló út, vagy már optimumban vagyunk. Magának a bizonyításnak, vagy az algoritmusnak az alternáló út nem pottyan az ölébe, hanem felépít egy keresési struktúrát a gráfban, például párosítás algoritmusokban az alternáló erdőt. Ebben a keresési struktúrában aztán vagy egy alternáló utat találunk, vagy az optimalitás tanúsítványát.

[1] A kutatást az OTKA K60802 és TS049788 pályázatai, valamint az ADONET Marie Curie RTN (504438 sz. FP6 szerződés) támogatta.

Ez az algoritmikus séma célravezető lehet, ugyanis optimalitási tanúsítványként szolgálhat Hartvigsen [4] leírása vagy Király frappáns min-max formulája [6]. Ezen cikk előtt ismert volt egy polinomiális futásidejű algoritmus, ugyanis a négyzetmentes b-párosítások visszavezethetők Frank és Jordán halmazpárok fedésének elméletére [2, 3]. Erre az általános feladatra Benczúr és Végh [1] adott nemrég polinomiális futásidejű algoritmust. Ebben a cikkben négyzetmentes b-párosításokra egy egyszerűbb, közvetlen megoldást adunk.

A négyzetmentes 2-párosítások feladatára azonban nem olyan könnyű megfogalmazni alternáló utas lemmát. Hartvigsen [4] ugyan megfogalmaz egy ilyet, de definíciói, és bizonyításai igen összetettek. Módszerünk a fenti sémától eltér abban az értelemben, hogy nem közvetlenül keresünk alternáló utat, hanem más módon keresünk jobb megoldást, egy egyszerűbb módszer reményében. Az újszerű megközelítés igénye azért merül fel, ugyanis a négyzetmentes b-párosítások feladata bizonyos szempontból nehezebbnek tűnik, mint a b-párosításoké. Míg maximális súlyú b-párosítás keresése megoldható polinomidőben, a súlyozott feladat a négyzetmentes esetben NP-nehéz.

A cikk fő eredményét, a 3.2. tételt a 3.1. lemma segítségével bizonyítjuk be. A bizonyításból egy polinomiális futásidejű algoritmikus szerkeszthető maximális elemszámú négyzetmentes b-párosítás keresésére. A 3.1. lemma segítségével vagy növelni tudunk, vagy egy optimalitási tanúsítványt kapunk, vagy egy redukcióra alkalmas konfigurációt – egy ún. illeszkedő négyzetet – találunk. Így az algoritmus lelke a 3.1. lemma bizonyításába van rejtve – utána vázoljuk, hogyan tehető ez valójában algoritmikussá.

2. b-párosítások

Tekintsünk egy $G = (A, B; E)$ egyszerű páros gráfot a $V = A \cup B$ ponthalmazán $b : V \to \{0, 1, 2\}$ pontkapacitással. *b-párosításnak* olyan $M \subseteq E$ élhalmazt nevezünk, melynek a foka minden $v \in V$ pontban teljesíti a $b(v)$ fokkorlátot, azaz a v-re illeszkedő M-élek száma $d_M(v) \leq b(v)$. Vezessük még be a következő jelöléseket. Egy $U \subseteq V$ ponthalmazra legyen $b(U) := \sum_{v \in U} b(v)$, és jelölje $i_G(U)$ az U-ban feszített G-beli élek számát. Egy $F \subseteq E$ élhalmaz és egy $U \subseteq V$ ponthalmaz esetén jelölje $F[U]$ az U-ban feszített F-beli élek halmazát.

A következő tétel segítségével meghatározhatjuk egy b-párosítás lehető legnagyobb elemszámát.

2.1. tétel. *G-ben egy b-párosítás lehető legnagyobb elemszáma*

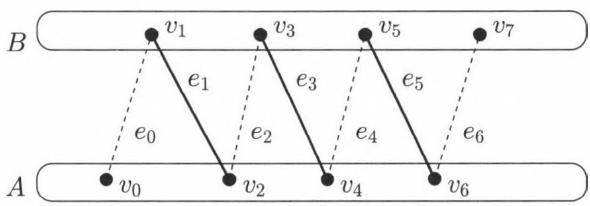
$$\min_{Z \subseteq V} b(V - Z) + i_G(Z). \tag{1}$$

Tetszőleges M b-párosításra nyilván fennáll $|M[Z]| \leq i_G(Z)$ és $|M - M[Z]| \leq b(V - Z)$, amikből következik a 2.1. tétel könnyű iránya. A nehéz irányt a következő alternáló utas tétel segítségével bizonyítjuk, melyre a teljesség kedvéért egy sztenderd, közvetlen bizonyítást adunk.

2.2. tétel. *Adott egy M b-párosítás G-ben. Ekkor az alábbiak közül legalább egy eset fennáll:*

1. *Van egy $Z \subseteq V$ ponthalmaz melyre $|M| = b(V - Z) + i_G(Z)$.*

2. *Létezik egy ún.* növelő *M-*alternáló út, *azaz egy P út melyre $V(P) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{2m+1}\}$, $E(P) = \{e_0, e_1, \ldots, e_{2m}\}$, $e_i = v_i v_{i+1}$, melynek élei $e_{2i} \in E - M$, $e_{2i+1} \in M$, a pontjai páronként különbözőek, melyekre $v_{2i} \in A$, $v_{2i+1} \in B$, és $d_M(v_0) < b(v_0)$, $d_M(v_{2m+1}) < b(v_{2m+1})$.*



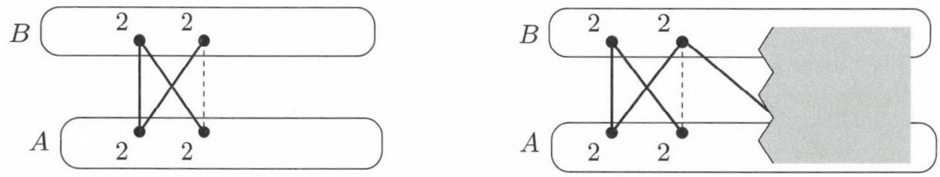
1. ábra. Egy alternáló út

Vegyük észre, hogy egy P növelő M-alternáló útra $M \Delta E(P)$ egy b-párosítás.

Bizonyítás. Jelölje $D = (A, B; F)$ azt az irányított gráfot, melyet G-ből úgy kapunk, hogy az M-beli éleket megirányítjuk A felé, a többi élt pedig B felé. Jelölje $A_0 := \{v \in A : d_M(v) < b(v)\}$ illetve $B_0 := \{v \in B : d_M(v) < b(v)\}$ a *laza* pontok halmazát. Ha létezik egy irányított út egy A_0-beli pontból egy B_0-beli pontba, akkor annak a P ősképe egy növelő M-alternáló út lesz. Jelölje W az A_0-ból D-ben elérhető pontok halmazát, és indirekt tegyük fel, $B_0 \cap W = \emptyset$. Legyen $Z := W \Delta B$. Azt szeretnénk kimutatni, hogy $|M| = b(V - Z) + i_G(Z)$. W definíciója miatt $M[Z] = E[Z]$, azaz $\big|M[Z]\big| = i_G(Z)$. W definíciója miatt minden $v \in V - Z$-re pontosan $b(v)$ darab M-beli él illeszkedik. W definíciója miatt a semelyik $V - Z$-ben feszített él nincs M-ben, tehát a Z-beli pontokra illeszkedő élek csupa különbözőek. Mivel a Z-ben nincsen laza pont, ezért $\big|M - M[Z]\big| = b(V - Z)$.
■

3. Négyzetmentes b-párosítások

A négyélű köröket *négyzetnek* is fogjuk hívni. Egy M b-párosítást *négyzetmentesnek* hívunk, ha a (V, M) gráfnak nincs négyzet részgráfja – vagy ami ezzel ekvivalens, (V, M)-nek semelyik komponense sem négyzet. Azt mondjuk, hogy egy *K négyzet illeszkedik az N négyzetmentes b-párosításra,* ha $V(K) = \{x_1, x_2; y_1, y_2\}$, $N \cap E(K) = \{x_1y_2, x_2y_2, x_2y_1\}$, $x_i \in A$, $y_i \in B$, $b(x_i) = b(y_i) = 2$, és nincs olyan $x_1 v \in M$ él, melyre $v \in B - \{y_1, y_2\}$.

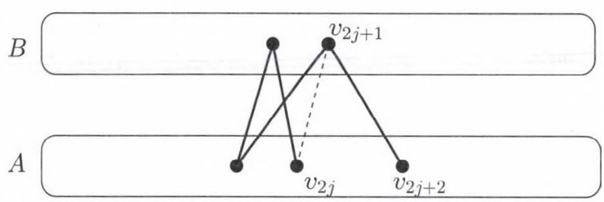


2. ábra. Így nézhet ki egy illeszkedő négyzet

3.1. lemma. *Adott egy M négyzetmentes b-párosítás G-ben. Ekkor az alábbiak közül legalább egy eset fennáll:*

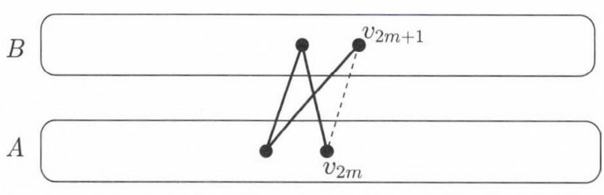
1. *Van egy N négyzetmentes b-párosítás, melyre $|M| = |N| + 1$.*
2. *Van egy $Z \subseteq V$ ponthalmaz, melyre $|M| = b(V - Z) + i_G(Z)$.*
3. *Van egy N négyzetmentes b-párosítás, melyre $|M| = |N|$, és van egy K négyzet, ami illeszkedik N-re.*

Bizonyítás. Ha M maximális b-párosítás, akkor a 2.1. tétel szerint készen vagyunk. Különben létezik egy P M-alternáló növelő út, használjuk a 2.2. tétel jelöléseit. Az $M\Delta E(P)$ egy nagyobb elemszámú b-párosítás. Ha $M\Delta E(P)$ négyzetmentes, akkor az 1. eset áll fenn, készen vagyunk. Különben tekintsük a P út kezdőszeleteit, jelöljük P_i-vel a $v_0 \in A$-ban kezdődő, i élű kezdőszeletet. Ekkor $M_i := M\Delta P_{2i}$ b-párosítás minden i-re. Legyen j a legnagyobb index, amire M_j négyzetmentes. Azt fogjuk kimutatni, hogy valamely négyzet illeszkedik M_j-re.



3. ábra. A $j < m$ esetben M_j egy részlete

Először tegyük fel, hogy $j < m$. j választása miatt M_{j+1} egy olyan b-párosítás, amely nem négyzetmentes. Az $M_j\Delta M_{j+1}$ szimmetrikus differencia két szomszédos $v_{2j}v_{2j+1}$, $v_{2j+2}v_{2j+1}$ élből áll, melyek közös pontja $v_{2j+1} \in B$. Így egyetlen négyzet van M_{j+1}-ben, és könnyen ellenőrizhető, hogy illeszkedik M_j-re.



4. ábra. A $j = m$ esetben $M_j = M_m$ egy részlete

Most tegyük fel, hogy $j = m$. Ekkor $M_j + v_{2m}v_{2m+1} = M\Delta E(P)$ nem négyzetmentes. Hasonló okfejtés szerint létezik egyértelmű négyzet $M\Delta E(P)$-ben, és ez illeszkedik M_j-re. ■

D. Hartvigsen [4] adta az első karakterizációt négyzetmentes 2-faktor (azaz négyzetmentes teljes 2-párosítás) létezésére, és megfogalmazott egy min-max formulát is a négyzetmentes 2-párosítás maximális elemszámára. Később Király Z. egy erősebb min-max formulát bizonyított.

3.2. tétel (Király Z., [6]). *Adott egy $G = (A, B; E)$ egyszerű páros gráf $b \in \{0, 1, 2\}^V$ pontkapacitásokkal. Ekkor a négyzetmentes b-párosítások legnagyobb lehetséges elemszáma*

$$\min_{Z \subseteq V} b(V - Z) + i_G(Z) - c\big(G[Z]\big), \tag{2}$$

ahol $c\big(G[Z]\big)$ a $G[Z]$ részgráf négyzet komponenseinek számát jelöli.

Bizonyítás. Először a „könnyű irányt" bizonyítjuk, azaz egy M négyzetmentes b-párosítás elemszámára felső becslés a (2) képletbeli kifejezés tetszőleges $Z \subseteq V$ esetén. A fokkorlátok szerint $\big|M - M[Z]\big| \leq b(V - Z)$, továbbá $\big|M[Z]\big| \leq i_G(Z) - c\big(G[Z]\big)$ abból következik, hogy $M[Z]$ nem tartalmazhatja egy négyzet minden élét. Egy Z ponthalmazt M *tanújának* nevezzük, ha $|M| = b(V - Z) + i_G(Z) - c\big(G[Z]\big)$. Ha Z tanúja M-nek, akkor $\big|M - M[Z]\big| = b(V - Z)$ és $\big|M[Z]\big| = i_G(Z) - c\big(G[Z]\big)$ következik, sőt, ezekből az alábbi optimalitási feltételeket kapjuk. Ha M egy négyzetmentes b-párosítás, melynek Z egy tanúja, akkor

1. minden $v \in V - Z$ pontra $d_M(v) = b(v)$, és M-nek nincs Z-től diszjunkt éle, továbbá
2. $M[Z]$ tartalmazza $E[Z]$ minden élét, kivéve pontosan egyet $G[Z]$ minden négyzet komponenséből.

Tekintsünk egy M négyzetmentes b-párosítást, amely illeszkedik a K négyzetre. Egy $G' = (A', B'; E')$ egyszerű páros gráfot konstruálunk úgy, hogy kitöröljük a K éleit, azonosítjuk egymással az x_1 és az x_2 pontokat, illetve az y_1 és y_2 pontokat, keletkező párhuzamos élek közül egyet-egyet megtartva. Jelölje az új pontokat x, y, értelemszerűen. Vegyük észre, hogy a definíció szerint az új x és y pontok között nem lesz él. Definiálunk új pontkapacitásokat $b' : A' \cup B' \to \{0, 1, 2\}$ úgy, hogy

$$b'(u) := \begin{cases} b(u) & \text{ha } u \in A' \cup B' - \{x, y\} \\ 1 & \text{ha } u \in \{x, y\}. \end{cases}$$

Az $E - E(K)$ éleinek van egy egyértelmű képe E'-ben, jelölje M' az $M - E(K)$ élhalmaz képét. Könnyen látható, hogy M' egy négyzetmentes b'-párosítás G'-ben.

3.3. lemma. *A fenti jelöléseket használva az alábbiak következnek.*

1. *Ha M maximális, akkor M' is maximális.*
2. *Ha Z' tanúja M'-nek, akkor van egy Z tanúja M-nek is.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy $|M'| = |M| - 3$. Most tegyük fel, hogy van egy N' négyzetmentes b'-párosítás G'-ben, melyre $|N'| > |M'|$. Jelölje N' őisképét M''. A definíciókból következik, hogy a K négyzet élei közül valamelyik három hozzávehető M''-höz, hogy G-ben egy egyszerű b-párosítást kapjunk; jelölje ezt M'''. M''' négyzetmentes, ugyanis tetszőleges komponense megegyezik N valamelyik komponensével, kivéve azt az egyetlen komponensét, amiben a K négyzet három hozzávett éle van. Az a komponense sem lehet négyzet, hiszen K negyedik éle nincs benne. Ezzel az első állítást beláttuk.

A második állításhoz tekintsünk egy tartalmazásra nézve minimális Z' halmazt, mely tanúja M'-nek. Jelölje Z' őisképét Z. Azt fogjuk kimutatni, hogy Z tanúja M-nek. A definícióból következik, hogy $d_{M'}(x) = 0$. Az 1. optimalitási feltételből $x \in Z'$ következik. Továbbá $b'(x) = 1$, így a 2. optimalitási feltétel azt adja, hogy egy maximális négyzetmentes b'-párosításnak tartalmaznia kell $E'[Z']$ minden x-re illeszkedő élét. Tehát nincs $xt \in E'$ él, melyre $t \in Z'$.

Ha $y \notin Z'$, akkor $b(A \cup B - Z) = b'(A' \cup B' - Z') + 3$; továbbá $c\big(G[Z]\big) = c\big(G'[Z']\big)$ és $i_G(Z) = i_{G'}(Z')$ következik. Ha $y \in Z'$, akkor $b(A \cup B - Z) = b'(A' \cup B' - Z')$ és $i_G(Z) = i_{G'}(Z') + 4$. Azt állítjuk még, hogy $c\big(G[Z]\big) = c\big(G'[Z']\big) + 1$. Ehhez elég lenne kimutatni, hogy nincs olyan $xt \in E'$ vagy $yt \in E'$ él, melyre $t \in Z'$. Azt már beláttuk, hogy nincs $xt \in E'$ él, melyre $t \in Z'$. Tegyük fel, hogy van egy $yt \in E'$ él, melyre $t \in Z'$. Ekkor azonban $Z' - y$ tanúja lenne M'-nek, ami ellentmond Z' választásának. A fenti megfigyelésekből az alábbiakat kapjuk.

$$|M| \leq b(A \cup B - Z) + i_G(Z) - c\big(G[Z]\big) =$$

$$= b'(A' \cup B' - Z') + i_{G'}(Z') - c\big(G'[Z']\big) + 3 = |M'| + 3 = |M|. \quad \blacksquare$$

4. Algoritmus

Az eddig bemutatott bizonyításokból algoritmust szeretnénk szerkeszteni. A 2.1. lemma bizonyítása során a D irányított gráfban az A-beli laza pontokból irányított úton elérhető pontokat kell megkeresni, ami $O\big(|V| + |E|\big)$ futásidőben megtehető. A 3.1. lemma bizonyításában egyszer kell az 2.1. lemmát elsütni, majd aztán legfeljebb $|V|$ darab M_j-t kell konstruálnunk. A 3.1. lemmára egyszeri alkalmazása így legfeljebb $O\big(|V| + |E|\big)$ futásidőt vesz igénybe.

Az eddigi eredményekből össze lehet állítani egy algoritmust maximális négyzetmentes b-párosítás keresésére. Az algoritmusunk fenntart egy G, b, M hármast, mely egy G gráfból, annak a csúcsain értelmezett b vektorból, és egy M négyzetmentes b-párosításból áll. Ekkor elsütjük a 3.1. lemmát G, b, M-re, azaz kapunk egy nagyobb négyzetmentes b-párosítást vagy egy tanút vagy egy ugyanakkora négyzetmentes b-párosítást egy illeszkedő négyzettel. Az első esetben áttérünk a G, b, N hármasra, ez egy növelés. A második esetben készen vagyunk, találtunk egy maximális megoldást, és a maximalitásának egy tanúját. A harmadik esetben áttérünk a korábban definiált G', b', M' hármasra. Ott a fentieket rekurzíve alkalmazva vagy növelni tudunk, vagy egy tanút találunk. Ezeket pedig a 3.3. lemmában mutatott konstrukciókkal fel tudjuk emelni az eredeti G, b, N hármasra vonatkozó növeléssé, vagy tanúvá.

Az algoritmus futásidejét a következőképpen becsülhetjük. Legfeljebb $|V|$ növelés fordulhatott elő. Két növelés között legfeljebb $|V|$-szer alkalmaztunk $G, b, N \to G', b', M'$ redukciót. Tehát a 3.1. lemmát legfeljebb $|V|^2$-szer kellett alkalmaznunk. A teljes futásidő így legfeljebb $O(|V|^3 + |V|^2|E|)$.

5. Egy általánosítás

Azon b-párosításokat vizsgáljuk, melyekben bizonyos négyzeteket megengedünk, bizonyosokat pedig megtiltunk. Adott tehát a G gráfon és a b pontkapacitásokon kívül a négyzeteknek egy tetszőleges $\mathcal{Q}$ listája. Egy M b-párosítást *$\mathcal{Q}$-mentesnek* nevezünk, ha M nem tartalmazza semelyik $\mathcal{Q}$-beli négyzet mind a négy élét. Azonnal látszik, hogy a 3.2. tétel alábbi általánosításában a minimumban szereplő kifejezés felső becslés egy $\mathcal{Q}$-mentes b-párosítás elemszámára. A min-max formulában az egyenlőség teljesen hasonlóan bizonyítható, mint a 3.2. tétel esetén.

5.1. tétel. *Adott egy $G = (A, B; E)$ egyszerű páros gráf $b \in \{0, 1, 2\}^V$ pontkapacitásokkal. Ekkor az $\mathcal{Q}$-mentes b-párosítások legnagyobb lehetséges elemszáma*

$$\min_{Z \subseteq V} b(V - Z) + i_G(Z) - c^{\mathcal{Q}}(G[Z]), \tag{3}$$

ahol $c(G[Z])$ a $G[Z]$ részgráf azon komponenseinek számát jelöli, melyek szerepelnek $\mathcal{Q}$-ban.

Köszönetnyilvánítás. A szerző köszönettel tartozik Frank Andrásnak a hasznos tanácsokért.

Hivatkozások

[1] A. Benczúr and L. Végh, Primal-dual approach for directed vertex-connectivity augmentation and generalizations, in: *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms,* SODA 2005, Vancouver, British Columbia, Canada, 186–194. (továbbá az ACM Transactions on Algorithms, megjelenés alatt)

[2] A. Frank, Restricted t-matchings in bipartite graphs, *Discrete Applied Mathematics,* **131/2** (2003), 337–346.

[3] A. Frank and T. Jordán, Minimal edge-coverings of pairs of sets, *Journal of Combinatorial Theory Ser. B,* **65** (1995), 73–110.

[4] D. Hartvigsen, The square-free 2-factor problem in bipartite graphs, in: *Integer Programming and Combinatorial Optimization* (eds. G. Cornuéjols, R. Burkard, G. J. Woeginger) Springer Verlag, Lecture Notes in Computer Science, 1610 (1999), pp. 234–240. (Extended abstract.)

[5] D. Hartvigsen, Finding maximum square-free 2-matchings in bipartite graphs, *Journal of Combinatorial Theory Ser. B,* **96/5** (2006), 693–705.

[6] Z. Király, *C_4-free 2-factors in bipartite graphs,* EGRES Technical Report TR-2001-13.

Gyula Pap: Square-free 2-matchings in bipartite graphs

We provide a simple algorithm to find a maximum square-free 2-matching in a given bipartite graph, and thus we obtain a new proof for a min-max formula of Z. Király.

Pap Gyula
MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
ELTE TTK Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
gyuszko@cs.elte.hu

KOMBINATORIKUS ALGORITMUS PONTÖSSZEFÜGGŐSÉG EGGYEL VALÓ NÖVELÉSÉRE

FRANK ANDRÁS ÉS VÉGH A. LÁSZLÓ[1]

Megadunk egy kombinatorikus algoritmust egy $(k-1)$-összefüggő irányított gráf k-összefüggővé növelésére minimális számú új él hozzáadásával. Ez a probléma a [6]-ban megadott általános min-max formula speciális esete, algoritmusunk a formulára alapozott duál módszer. Szintén a min-max formula speciális esete páros gráfok k-többletessé való növelése, ami a pontösszefüggőség-növelés általánosítása. A cikkben erre a feladatra adunk algoritmust. Előzménye az [5]-ben leírt algoritmus, mely Győri [8] utak generálására vonatkozó tételére keresi meg az optimális megoldást.

1. Bevezetés

Egy $D = (V, H)$ irányított gráfot k*-élösszefüggő*nek nevezünk, ha a csúcsok minden X nemüres valódi részhalmazára az X-be belépő élek száma legalább k. Az 1-élösszefüggő gráfokat más néven *erősen összefüggő*nek hívjuk. D akkor k*-pontösszefüggő,* ha legalább $k+1$ csúcsa van, és tetszőleges k-nál kevesebb csúcsot elhagyva erősen összefüggő marad. Menger tételének különböző verziói alapján ismert, hogy D akkor és csak akkor k-él/pontösszefüggő, ha tetszőleges két pont közt legalább k éldiszjunkt/belül pontdiszjunkt út vezet (és a pontösszefüggőség esetén legalább $k+1$ csúcsa van). k-összefüggő gráf alatt mindig k-pontösszefüggőt fogunk érteni.

Az irányított él/pontösszefüggőség-növelés problémája az, hogy találjunk minimális számú olyan élt, akiket a gráfhoz véve k-él/pontösszefüggő gráfot kapunk. Általános növelési feladat esetén tetszőleges gráfból indulhatunk, eggyel való növelés alatt pedig azt értjük, hogy egy $(k-1)$-él/pontösszefüggő gráfból indulunk ki.

Élösszefüggőség növelésére Frank [4] megadott egy min-max tételt és egy kombinatorikus polinomiális algoritmust. A pontösszefüggőség vonatkozásában Frank és Jordán [6] ad meg egy min-max formulát. Ez a formula az általános esetet is magában foglalja, most azonban csak az eggyel növelés speciális esetére írjuk le. Egy

[1] A kutatást az OTKA K60802 pályázat, valamint az ADONET Marie Curie RTN (504438 sz. FP6 szerződés) támogatta. Az első szerző továbbá a Traffic Lab Ericsson Hungary, H-1037 Budapest Laborc u. 1. munkatársa.

$D = (V, H)$ irányított gráf esetén az (X, Y) diszjunkt nemüres csúcshalmazokból álló párt irányított pontvágásnak hívjuk, ha D-ben nem megy él X-ből Y-ba. X-et az irányított pontvágás tövének, Y-t a fejének nevezzük. D akkor és csak akkor $(k-1)$-összefüggő, ha minden irányított pontvágásra $|V - (X \cup Y)| \geq k-1$. Egy $(k-1)$-összefüggő digráfban azokat az irányított pontvágásokat nevezzük *szoros vágásnak,* melyekre $|V - (X \cup Y)| = k-1$. Két szoros vágás *független,* ha vagy a fejeik, vagy a töveik diszjunktak.

1.1. tétel [6]. *Legyen $D = (V, H)$ egy $(k-1)$-összefüggő digráf, $|V| \geq k+1$. Azon élek minimális száma, amelyeket D-hez adva k-összefüggő digráfot kapunk, megegyezik a páronként független szoros vágások maximális számával.*

[6] a formula segítségével megad egy algoritmust is az általános növelési feladatra. Ezen algoritmus az ellipszoid módszert használja, a tisztán kombinatorikus algoritmus létezésének kérdése pedig nyitott maradt.

Az első, kombinatorikus algoritmussal megoldott speciális eset Eswaran és Tarjan [1] eredménye a $k = 1$-re. Frank és Jordán [7] megad egy kombinatorikus algoritmust az általános feladatra, tetszőleges rögzített k-ra. Ez azt jelenti, hogy az algoritmus futásideje polinomiális a csúcsok számában, de k-ban exponenciális. Szintén az általános feladatra Végh és Benczúr [9] megad egy olyan kombinatorikus algoritmust, amely k-ban is polinomiális.

Ebben a cikkben az eggyel való növelés speciális esetére adunk egy kombinatorikus polinomiális algoritmust. Az eredmény előnye [9]-hez viszonyítva, hogy koncepcionálisan sokkal egyszerűbb. Megjegyezzük azonban, hogy [9]-hez képest rosszabb futásiidő-becslést adunk. Az algoritmus motivációja Frank [5] algoritmusa Győri tételére. Frank és Jordán [6] min-max formulája ugyanis nemcsak az összefüggőség-növelés problémakörét fedi le, hanem következik belőle Győri tétele is [8], mely egy út részútjainak generálásáról szól. (Győri tételének egy különlegesen szép alkalmazása derékszögű függőlegesen konvex poligonok téglalapokkal való fedéséről szól.)

Jelen közelítésben az összefüggőség-növelés helyett az alábbi, kicsit általánosabb problémát fogjuk vizsgálni. Legyen $G = (A, B, E)$ egy páros gráf. Tudjuk, hogy akkor és csak akkor létezik A-t fedő párosítás, ha teljesül a Hall-feltétel: minden $X \subseteq A$-ra $|X| \leq |\Gamma(X)|$. G-t akkor hívják elemi páros gráfnak, ha $|A| = |B|$ és minden $\emptyset \neq X \subset A$ halmazra $|X| + 1 \leq |\Gamma(X)|$ is teljesül. Ez azzal ekvivalens, hogy G tetszőleges élét elhagyva is van benne teljes párosítás. Ezen fogalom általánosításaként, nevezzük a $G = (A, B, E)$ páros gráfot *k-többletes*nek, ha minden $\emptyset \neq X \subset A$ halmazra $|X| + k \leq |\Gamma(X)|$ vagy $\Gamma(X) = B$. Az összefüggőség-növeléssel analóg feladat: adott egy $(k-1)$-többletes páros gráf, tegyük minimális számú él hozzávételével k-többletessé.

Megmutatjuk, hogy erre a feladatra visszavezethető összefüggőség eggyel való növelése is. Egy $D = (V, H)$ irányított gráfhoz készítsünk egy $G = (A, B, E)$ páros gráfot az alábbi módon. Minden $v \in V$ csúcsnak feleljen meg egy $v' \in A$ és $v'' \in B$ csúcs. Minden $uv \in H$-hoz legyen egy $u'v'' \in E$ él, és minden $u \in V$-hez egy $u'u'' \in$

E él. D k-összefüggősége éppen azt jelenti, hogy a G páros gráf k-többletes. Ezen $(k-1)$-többletes páros gráf k-többletessé való növelése tehát a $(k-1)$-összefüggő digráf k-összefüggővé növelésének felel meg.

Frank és Jordán [6] min-max formulájának következménye az alábbi min-max formula $(k-1)$-többletes páros gráf k-többletessé való növelésére. Legyen $\tau(G)$ azon élek minimális száma, melyeket G-hez adva k-többletes gráfot kapunk. Nevezzük az ilyet javító élhalmaznak. Másrészt, nevezzük *szoros*nak az olyan $\emptyset \neq X \subseteq A$ halmazokat, melyekre $\Gamma(X) \neq B$ és $|\Gamma(X)| = |X| + k - 1$. Minden szoros halmaz megjavításához szükségünk lesz egy olyan uv élre, amire $u \in X$, $v \in B - \Gamma(X)$. Az X és Y szoros halmazokat függetlennek mondjuk, ha $X \cap Y = \emptyset$ vagy $\Gamma(X \cup Y) = B$. Jelölje $\nu(G)$ a páronként független szoros halmazok maximális számát.

1.2. tétel. *Legyen $G = (A, B, E)$ egy $(k-1)$-többletes páros gráf. Ekkor $\nu(G) = \tau(G)$.*

A cikkben megadunk egy szubrutint, mely meghatározza $\nu(G)$-t. Figyeljük meg, hogy e szubrutin segítségével egy $\tau(G)$ elemű javító élhalmaz is könnyen meghatározható. Számítsuk ki $\nu(G)$-t, majd válasszunk egy tetszőleges $e \notin E$ élet, és számoljuk ki $\nu(G+e)$-t. Ha $\nu(G) = \nu(G+e) + 1$, akkor adjuk hozzá e-t G-hez, ha pedig nem, akkor válasszunk egy másik élt helyette. Így egy lépésben eggyel csökkentjük $\nu(G)$-t, és a tétel garantálja, hogy mindig tudunk megfelelő e-t találni.

A $\nu(G)$-t meghatározó szubrutin fő ötlete a Dilworth tételére való visszavezetés lesz. Megkeressük a szoros halmazoknak egy olyan speciális $\mathcal{K}$ részhalmazát, ami egyrészt kis elemszámú, másrészt benne ugyanannyi a páronként független elemek maximális száma, mint az összes szoros halmaz között. Harmadik és legfontosabb tulajdonsága, hogy $\mathcal{K}$-ban a tartalmazásra mint részbenrendezésre nézve az antiláncok éppen a páronként független elemekből álló részhalmazok lesznek. Így Dilworth tétele alapján $\mathcal{K}$-ban könnyen meg tudjuk határozni a független szoros halmazok számának maximumát.

A fejezet hátralevő részében bevezetünk néhány fogalmat és jelölést. Tetszőleges X és Y halmazok esetén $X \subset Y$ alatt azt értjük, hogy X részhalmaza Y-nak, és $X \neq Y$. Legyen $G = (A, B, E)$ egy $(k-1)$-többletes páros gráf. Álljon $\mathcal{C}$ a szoros halmazokból, vagyis:

$$\mathcal{C} := \left\{X : \emptyset \neq X \subseteq A,\ \Gamma(X) \neq B,\ |X| + k - 1 = |\Gamma(X)|\right\}.$$

Az $X, Y \in \mathcal{C}$ halmazok viszonyának jellemzésére vezetjük be az alábbi fogalmakat. X-et és Y-t akkor nevezzük *független*nek, ha vagy $X \cap Y = \emptyset$, vagy $\Gamma(X \cup Y) = B$. A nem független párokat *összefüggő*nek hívjuk. Ha $X \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq X$, akkor X és Y *összehasonlíthatóak.* Akkor mondjuk, hogy X és Y *keresztezőek,* ha $X \cap Y \neq \emptyset$ és $\Gamma(X \cup Y) \neq B$, továbbá X és Y nem összehasonlíthatóak. Ilyenkor azt is mondjuk néha, hogy X *keresztezi* Y-t, illetve Y *keresztezi* X-et.

Az $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ részhalmazt *zártnak* mondjuk, ha $X, Y \in \mathcal{F}$ keresztező elemekre $X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{F}$. $\mathcal{C}$ maga is zárt, ami egyszerűen látható $|\Gamma(X)|$ szubmodularitását használva:

$$(1) \qquad |X \cup Y| + k - 1 + |X \cap Y| + k - 1 \leq |\Gamma(X \cup Y)| + |\Gamma(X \cap Y)| \leq$$
$$\leq |\Gamma(X)| + |\Gamma(Y)| = |X| + k - 1 + |Y| + k - 1.$$

Itt végig egyenlőség kell hogy álljon, tehát $\Gamma(X \cup Y), \Gamma(X \cap Y) \in \mathcal{C}$.

Egy $K \in \mathcal{F}$ elem esetén legyen $\mathcal{F} \div K$ az $\mathcal{F}$ azon elemeinek halmaza, melyek nem keresztezik K-t. Hasonlóan, egy $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{F}$ halmazra $\mathcal{F} \div \mathcal{K}$ álljon azon elemeiből $\mathcal{F}$-nek, akik $\mathcal{K}$ egyetlen elemét sem keresztezik. Egy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}$ halmazt *váznak* mondunk, ha nincsen két eleme, melyek kereszteznék egymást. Egy $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}$ vázat akkor mondunk *teljes váznak*, ha $\mathcal{C} \div \mathcal{H} = \mathcal{H}$, ami éppen azt jelenti, hogy $\mathcal{H}$ tartalmazásra nézve maximális váz.

Az $e = uv$ él *javítja* az $X \in \mathcal{C}$ párt, ha $u \in X$, $v \notin \Gamma(X)$. Egy $F \subseteq E$ élhalmazt *javítónak* mondunk a $\mathcal{F}$ zárt részhalmazra nézve, ha $\mathcal{F}$ minden elemét javítja egy F-beli él. Jelölje $\tau(\mathcal{F})$ az F-et javító élek minimális számát, $\nu(\mathcal{F})$ pedig $\mathcal{F}$ páronként független elemeinek maximális számát.

Szintén Frank és Jordán [6] min-max tételének egyszerű következménye az alábbi, az 1.2. tételnél kicsit általánosabb állítás.

1.3. tétel [6]. *Ha $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}$ egy zárt részhalmaz, akkor $\tau(\mathcal{F}) = \nu(\mathcal{F})$.*

2. Duál Algoritmus

A duál algoritmus lényege az alábbi tétel.

2.1. tétel. *Legyen $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$ teljes váz. A páronként független halmazok maximális száma ugyanannyi, ha $\mathcal{K}$-ra vagy $\mathcal{C}$-re nézzük, vagyis $\nu(\mathcal{K}) = \nu(\mathcal{C})$.*

A teljes vázak kitüntetett szerepe abban áll, hogy ha két eleme nem független, akkor összehasonlítható. Tehát ha a $\mathcal{K}$ vázra alkalmazzuk Dilworth tételét a tartalmazásra mint részbenrendezésre nézve, akkor az antiláncok páronként független elemekből állnak, vagyis a maximális antilánc éppen $\nu(\mathcal{K})$-t adja meg. A későbbiekben megadunk egy kombinatorikus algoritmust teljes váz keresésére. A 2.1. tétel bizonyítása előtt néhány elemi állítást kell belátnunk.

2.2. állítás. *Ha $X, Y \in \mathcal{C}$ összefüggő halmazok, akkor $\Gamma(X) \cap \Gamma(Y) = \Gamma(X \cap Y)$.*

Bizonyítás. Egyszerűen következik abból, hogy (1)-ben végig egyenlőség áll. ∎

2.3. állítás. *Tegyük fel, hogy $X, Y \in \mathcal{C}$, és $\Gamma(X) \subseteq \Gamma(Y)$. Ekkor $X \subseteq Y$.*

Bizonyítás. Ha X nem részhalmaza Y-nak, akkor $|X \cup Y| > |Y|$. Másrészt $\left|\Gamma(Y)\right| = |Y| + k - 1$, és $\Gamma(Y) = \Gamma(X \cup Y)$, ahonnan $\left|\Gamma(X \cup Y)\right| < |X \cup Y| + k - 1$, ellentmondásban azzal, hogy G $(k-1)$-többletes. ∎

2.4. lemma. *Ha $\mathcal{F}$ zárt, akkor tetszőleges $K \in \mathcal{C}$-re $\mathcal{F} \div K$ is zárt lesz.*

Bizonyítás. Legyen $X, Y \in \mathcal{F} \div K$ két keresztező elem. Azt kell belátnunk, hogy sem $X \cap Y$, sem $X \cup Y$ nem keresztezheti K-t.

Tegyük fel először, hogy K összehasonlítható mind X-szel, mind Y-nal. $X \subseteq K \subseteq Y$ vagy $Y \subseteq K \subseteq X$ esetén X és Y is összehasonlíthatóak lennének, tehát csak $K \subseteq X, Y$ vagy $K \supseteq X, Y$ lehet. Az első esetben K tartalmazva van $X \cup Y$-ban és $X \cap Y$-ban is, a második esetben tartalmazza mindkettejüket.

Tegyük fel most, hogy K független X-től és Y-tól is. Ha $K \cap X = \emptyset$, $K \cap Y = \emptyset$, akkor K diszjunkt $X \cup Y$-tól és $X \cap Y$-tól is. Ha $K \cap X = \emptyset$ és $\Gamma(K \cup Y) = B$, akkor $K \cap (X \cap Y) = \emptyset$ és $\Gamma\big(K \cup (X \cup Y)\big) = B$. Végül ha $\Gamma(K \cup X) = \Gamma(K \cup Y) = B$ teljesülne, akkor természetesen $\Gamma\big(K \cup (X \cup Y)\big) = B$, és $\Gamma\big(K \cup (X \cap Y)\big) = B$ is fennáll a 2.2. állítás következményeként.

Utolsó esetként vizsgáljuk azt, amikor K független X-től és összehasonlítható Y-nal. Ha $K \cap X = \emptyset$, akkor csak $K \subseteq Y$ lehetséges, mivel X és Y nem függetlenek. Ekkor $K \cap (X \cap Y) = \emptyset$, $K \subseteq (X \cup Y)$. Ha pedig $\Gamma(K \cap X) = B$, akkor csak $Y \subseteq K$ lehet. Ebben az esetben $\Gamma\big(K \cap (X \cup Y)\big) = B$, $X \cap Y \subseteq K$. ∎

2.5. lemma.

(i) *Legyenek $K, L, M \in \mathcal{C}$ olyanok, hogy $K \cap L$ és M összefüggőek, de L és M függetlenek. Ekkor $\big(\Gamma(L) - \Gamma(K)\big) - \Gamma(M) \neq \emptyset$ és $K - L \subseteq M$.*

(ii) *Legyen L és M független, de $K \cup L$ és M összefüggő. Ekkor $\big(\Gamma(L) - \Gamma(K)\big) \cap \Gamma(M) = \emptyset$ és $M \cap (K - L) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. (i) Vegyük észre, hogy $K \cap L \cap M \neq \emptyset$, így L és M csak úgy lehetnek függetlenek, ha $\Gamma(M \cup L) = B$. Másrészt $\Gamma\big(M \cup (K \cap L)\big) \neq B$, amiből adódik az állítás első része. $\Gamma(K) \subseteq B = \Gamma(M \cup L)$, innen a 2.3. állítás alapján $K \subseteq M \cup L$, ami épp az állítás második része.

(ii) L és M csak úgy lehet független, ha $L \cap M = \emptyset$. Minthogy $M \cap (K \cup L) \neq \emptyset$, így $M \cap (K - L) \neq \emptyset$. A 2.2. állítás szerint $\Gamma(K \cup L) \cap \Gamma(M) = \Gamma\big((K \cup L) \cap M\big) = \Gamma(K \cap M) \subseteq \Gamma(K)$, amiből adódik az első feltétel is. ∎

2.1. Teljes vázak

Készen állunk, hogy belássuk a 2.1. tételt. A bizonyítás az alábbi lemma alapján történik:

2.6. lemma. *Ha $\mathcal{F}$ zárt és $K \in \mathcal{F}$, akkor $\nu(\mathcal{F}) = \nu(\mathcal{F} \div K)$.*

Először azt mutatjuk meg, hogyan következik a tétel ebből a lemmából. Legyen $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_\ell\}$ a teljes váz. Alkalmazzuk a lemmát először $\mathcal{C}$-re és K_1-re, majd az i. lépésben $\mathcal{C} \div \{K_1, \dots K_{i-1}\}$-re és K_i-re. Vegyük észre, hogy a 2.4. lemma alapján $\mathcal{C} \div \{K_1, \dots K_{i-1}\}$ zárt. Tehát $\nu(\mathcal{C}) = \nu(\mathcal{C} \div K_1) = \dots = \nu(\mathcal{C} \div \mathcal{K})$, amiből $\mathcal{C} \div \mathcal{K} = \mathcal{K}$ alapján adódik az állítás.

A 2.6. lemma bizonyítása. Legyen $\mathcal{L}$ az $\mathcal{F}$-nek egy olyan maximális független részhalmaza, aminek a lehető legtöbb eleme esik $\mathcal{F} \div K$-ba. Tegyük fel indirekten, hogy $\mathcal{L} - (\mathcal{F} \div K) \neq \emptyset$, és válasszunk egy tetszőleges $L \in \mathcal{L} - (\mathcal{F} \div K)$ elemet. Ekkor L keresztezi K-t. Azt állítjuk, hogy vagy $\mathcal{L} - L + L \cap K$, vagy $\mathcal{L} - L + L \cup K$ független rendszer lesz. Ez ellentmondás, mivel az új rendszernek eggyel több közös eleme lesz $\mathcal{F} \div K$-val.

Tegyük fel, hogy sem $\mathcal{L} - L + L \cap K$, sem $\mathcal{L} - L + L \cup K$ nem független. Ekkor van olyan $M \in \mathcal{L} - L$, ami összefügg $L \cap K$-val, és egy másik $M' \in \mathcal{L} - L$, ami összefügg $L \cup K$-val. Könnyű ellenőrizni, hogy $M = M'$ esetén M és L nem lennének függetlenek. Tehát csak $M \neq M'$ lehetséges. Ekkor a 2.5. lemma (i) esete áll a K, L és M párokra, a (ii) eset pedig K, L és M'-re alkalmazható. Azt állítjuk, hogy M és M' nem lehetnek függetlenek. Valóban, $\Gamma(L) - \Gamma(K)$ tartalmaz olyan elemet, ami nincs benne $\Gamma(M \cup M')$-ben, $K - L$ viszont tartalmaz olyan elemet, ami $M \cap M'$-ben is benne van. ∎

2.2. Vázépítés

Teljes váz keresésére az lenne a legkézenfekvőbb, ha mohón választanánk halmazokat úgy, hogy ne keresztezzék egymást. Amikor nem tudunk újat választani, akkor készen vagyunk: megtaláltunk egy teljes vázat. A nehézség abban rejlik, hogyan döntsük el egy tetszőleges vázról, hogy bővíthető-e még. Éppen ezért speciális formájú vázakat fogunk építeni. Egy $\mathcal{H}$ vázat *alváz*nak nevezünk, ha teljesül az alábbi tulajdonság:

(2) Ha $K \in \mathcal{H}$, $Z \subset K$, $Z \in \mathcal{C} - \mathcal{H}$, akkor Z keresztezi $\mathcal{H}$ egy elemét.

Ez azt jelenti tehát, ha már van $\mathcal{H}$-nak egy Z-t tartalmazó eleme, akkor $\mathcal{H}$ nem bővíthető Z-vel.

2.7. állítás. *Egy alváz akkor és csak akkor teljes váz, ha tartalmazza $\mathcal{C}$ összes tartalmazásra nézve maximális elemét.*

Bizonyítás. $\mathcal{C}$ egy maximális eleme nem keresztezhet senkit, tehát minden teljes váznak tartalmaznia kell mindannyiójukat. Másrészt, tegyük fel indirekten, hogy a $\mathcal{H}$ alváz tartalmazza az összes maximális $\mathcal{C}$-beli halmazt, mégsem teljes. Ekkor valamely $Z \notin \mathcal{H}$-ra $\mathcal{H} + Z$ is váz lesz. Legyen $K \in \mathcal{H}$ egy Z-t tartalmazó maximális eleme $\mathcal{C}$-nek. Ekkor $\mathcal{H}$, K és Z ellentmond (2)-nek. ∎

Az algoritmusunk olyan $K_1, \dots, K_\ell$ elemeket fog keresni, hogy minden j-re $\mathcal{K}_j = \{K_1, \dots, K_j\}$ alváz lesz, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\ell$ pedig teljes váz. Adott tehát egy nem teljes $\mathcal{K}_j$ alváz. Kellene egy olyan $K_{j+1} \in \mathcal{C} - \mathcal{K}_j$, amire $\mathcal{K}_j + K_{j+1}$ is alváz. Legyen M egy tartalmazásra maximális eleme $\mathcal{C}$-nek úgy, hogy $M \notin \mathcal{K}_j$. A 2.7. állítás értelmében létezik ilyen M. Legyen

$$\mathcal{L}_1 := \{K \in \mathcal{K}_j : K \subset M\}; \quad \mathcal{L}_2 := \{K \in \mathcal{K}_j : K \not\subset M\}. \tag{3}$$

Azt mondjuk, hogy Z *illik* $(\mathcal{K}_j, M)$-hez, ha (a) $Z \in \mathcal{C} - \mathcal{K}_j$, $Z \subseteq M$; (b) Z független $\mathcal{L}_2$ minden elemétől; (c) tetszőleges $K \in \mathcal{L}_1$-re vagy $K \subset Z$, vagy $K \cap Z = \emptyset$.

2.8. állítás. *Legyen $Z \in \mathcal{C} - \mathcal{K}_j$, $Z \subseteq M$. Ekkor az alábbi két tulajdonság ekvivalens: (i) Z illik $(\mathcal{K}_j, M)$-hez; (ii) $\mathcal{K}_j + Z$ váz.*

Bizonyítás. (i) $\Rightarrow$ (ii) a definícióból adódik. A másik irányhoz a definícióban szereplő (b) és (c) tulajdonságokat kell belátnunk. Mivel $\mathcal{K}_j$ alváz, így tetszőleges $K \in \mathcal{K}_j$-re vagy $K \subset Z$, vagy pedig K és Z függetlenek. (b)-hez azt kell megmutatnunk, hogy ha $K \in \mathcal{L}_2$, akkor nem lehet $K \subset Z$. Ez pedig abból adódik, hogy $K \subset Z \subseteq M$ ellentmondana $K \in \mathcal{L}_2$-nek. (c)-hez azt kell belátni, hogy ha $K \in \mathcal{L}_1$-re K és Z függetlenek, akkor $K \cap Z = \emptyset$. Ez abból következik, hogy $K, Z \subseteq M$, így $\Gamma(K \cup Z) \subseteq \Gamma(M) \subset B$. ■

2.9. következmény. *Ha Z minimális $(\mathcal{K}_j, M)$-hez illő elem, akkor $\mathcal{K}_j + Z$ alváz.*

Vegyük észre, hogy maga M illik $(\mathcal{K}_j, M)$-hez, így mindig létezik ilyen Z. Erre tehát $K_{j+1} := Z$ választható. A következő fejezetben megmutatjuk, hogyan lehet megfelelő Z-t találni.

2.3. Faktorok

Valamely $f : A \cup B \to \mathbb{N}$ függvényre $F \subseteq E$-t f-faktornak nevezzük, hogyha minden $x \in A \cup B$-re $d_F(x) = f(x)$.

2.10. állítás. *Adott egy $G = (A, B, E)$ páros gráf és $f : A \cup B \to \mathbb{N}$ súlyozás úgy, hogy $f(A) = f(B)$ és minden $xy \in E$ esetén $f(x) = 1$ vagy $f(y) = 1$. Akkor és csak akkor létezik f-faktor, hogyha minden $X \subseteq A$ részhalmazra $f(X) \le f\big(\Gamma(X)\big)$.*

Bizonyítás. A Hall-tétel egyszerű következménye, minden $x \in A \cup B$ pontot $f(x)$ példányba széthúzva. ■

Elsőként azt vizsgáljuk meg, hogyan találhatóak meg $\mathcal{C}$ maximális elemei. Válasszunk egy $a \in A$ és egy $b \in B$ elemet úgy, hogy $ab \notin E$. Nevezzük $X \in \mathcal{C}$-t ab-halmaznak, ha $a \in X$ és $b \notin \Gamma(X)$. Legyen most f úgy definiálva, hogy $f(a) = f(b) = k + 1$, $c \in A \cup B - a - b$ esetén pedig $f(c) = 1$. Ha erre az f-re létezik f-faktor, azt k-ab-faktornak fogjuk hívni. Ha G egy $(k-1)$-többletes páros gráf, akkor a 2.10. állítás következményeként létezik egy $(k-1)$-ab-faktor. Legyen ez F_{ab}.

2.11. állítás. *Ha létezik k-ab-faktor, akkor nincsen ab-halmaz.*

Bizonyítás. Legyen egy X egy ab-halmaz. Erre $X \in \mathcal{C}$ miatt $|\Gamma(X)| = |X| + k - 1$. Mivel $a \in X$, $b \notin \Gamma(X)$, így $f(X) = |X| + k$, $f(\Gamma(X)) = |X| + k - 1$, vagyis a 2.10. állítás szerint nem létezik k-ab-faktor. ∎

Könnyen látható, hogy ha léteznek ab-halmazok, akkor van köztük egy egyértelmű tartalmazásra nézve minimális és egy egyértelmű maximális. Most megmutatjuk, hogyan lehet ezeket algoritmikusan megtalálni. Az $U = x_0y_0x_1y_1 \ldots x_ty_t$ utat az F élhalmazra nézve *alternáló útnak* nevezzük, ha $x_i \in A$, $y_i \in B$ és $x_iy_i \notin F$ minden $i = 0, \ldots, t$-re, továbbá $y_ix_{i+1} \in F$ minden $i = 0, \ldots, t-1$-re. F-nek az U-val való javításán az

$$F' = F - \{y_ix_{i+1},\ i = 0, \ldots, t-1\} + \{x_iy_i,\ i = 0, \ldots, t\}$$

élhalmazt értjük.

2.12. állítás. (a) *Ha létezik a és b között F_{ab}-re nézve alternáló út, akkor nem létezik ab-halmaz.* (b) *Tegyük fel, hogy nem létezik a és b közt F_{ab}-re nézve alternáló út; legyen S az a-ból alternáló úton elérhető pontok halmaza, és legyen $X = S \cap A$. Ekkor X az egyértelmű minimális ab-halmaz.* (c) *Tegyük fel, hogy nem létezik a és b közt F_{ab}-re nézve alternáló út; legyen S' a b-ből alternáló úton elérhető pontok halmaza, és legyen $Y = A - S'$. Ez az Y az egyértelmű maximális ab-halmaz.*

Bizonyítás. (a) Legyen U egy alternáló út F_{ab}-re nézve a és b közt. Vegyük észre, hogy F_{ab}-nek az U-val való javítása egy k-ab-faktor, melynek létezése esetén a 2.11. állítás szerint nem létezik ab-halmaz. (b) Legyen Z egy ab-halmaz. Minden $x \in Z - a$-ra $\Gamma(Z)$ tartalmazza azt az egyértelmű y-t, amire $xy \in F_{ab}$, és azt a k darab y-t, amire $ay \in F_{ab}$. Mivel $|\Gamma(Z)| = |Z| + k - 1$, Z-nek ezeken kívül nincsen több eleme. Ebből egyszerűen látható, hogy Z tartalmaz minden olyan $x \in A$-t, ami egy a-val kezdődő alternáló úton szerepel, ezért $X \subseteq Z$. Azt kell még igazolnunk, hogy $X \in \mathcal{C}$. Ehhez elég azt látni, hogy minden $y \in \Gamma(X)$-re létezik $x \in X$, hogy $xy \in F_{ab}$. Ez viszont következik X definíciójából. (c) Ez a (b) ponthoz teljesen hasonlóan igazolható. ∎

Az algoritmus kezdéseként minden $a \in A$, $b \in B$, $ab \notin E$-re határozzuk meg maximális folyam algoritmus segítségével az F_{ab} élhalmazokat. Innen a 2.12. állítás alapján szélességi kereséssel nyerhetjük a maximális ab-halmazokat. Ezek közül kiválasztva a tartalmazásra nézve maximálisakat, azok épp $\mathcal{C}$ maximális elemei lesznek.

Legyen most $\mathcal{K}_j$ egy nem teljes alváz, $M \in \mathcal{C} - \mathcal{K}_j$ maximális elem, $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ pedig (3) szerint definiálva. Feladatunk egy olyan K_{j+1} halmaz találása, ami illik $(\mathcal{K}_j, M)$-hez, és minimális erre a tulajdonságra nézve. Legyen $\mathcal{T}$ az $\mathcal{L}_1$ maximális elemeinek halmaza.

2.13. állítás. *$\mathcal{T}$ elemei páronként diszjunktak.*

Bizonyítás. Legyen $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$. Mint maximális elemek, függetlenek, tehát vagy $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, vagy $\Gamma(T_1 \cup T_2) = B$. Az utóbbit azonban kizárja az, hogy $T_1, T_2 \subset M$, tehát $\Gamma(T_1 \cup T_2) \subseteq \Gamma(M) \subset B$. ∎

Készítsük el G-ből az alábbi G' gráfot: minden $X \in \mathcal{L}_2$-re húzzuk be az összes élt X-ből $B - \Gamma(X)$-be. Továbbá minden $T \in \mathcal{T}$-re húzzunk be minden élt T és $\Gamma(T)$ közt.

2.14. állítás. *Legyen $Z \in \mathcal{C} - \mathcal{K}_j$, $Z \subseteq M$. Z akkor és csak akkor illik $(\mathcal{K}_j, M)$-hez, ha Z szoros halmaz G'-ben.*

Bizonyítás. Z akkor illik $(\mathcal{K}_j, M)$-hez, ha Z független $\mathcal{L}_2$ minden elemétől, és tetszőleges $T \in \mathcal{T}$-re $T \cap Z = \emptyset$ vagy $T \subset Z$. Ha ezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik, akkor egyetlen új él sem rontja el Z szorosságát. Másik irányba, ha Z nem lenne független valamely $X \in \mathcal{L}_2$-től, akkor egy X és $B - \Gamma(X)$ közti él behúzásával $\Gamma(Z)$ nőne. Ha pedig valamely $T \in \mathcal{T}$-re T és Z keresztezőek, akkor a 2.3. állítás alapján $\Gamma(T) - \Gamma(Z) \neq \emptyset$, ezért a T és $\Gamma(T)$ közti új élek valamelyike növelné $\Gamma(Z)$-t. ∎

Legyen most $Q \subseteq M$ egy tetszőleges halmaz. Legyen $Z(Q)$ az egyértelmű minimális X, ami rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:

$$X \in \mathcal{C},\ Q \subseteq X, \text{ és } X \text{ illik } (\mathcal{K}_j, M)\text{-hez.} \tag{4}$$

$Z(Q)$ létezése következik egyrészt abból, hogy M-re teljesül (4); másrészt ha X-re és X'-re teljesül (4), akkor X és X' összefüggőek, és könnyen láthatóan $X \cap X'$-re is fennáll (4). Az alábbi állítás alapján $Z(Q)$-t könnyen meg tudjuk találni:

2.15. állítás. *Legyen $a \in Q$, $b \in B - \Gamma(M)$. G'-höz adjunk hozzá minden élt a és $\Gamma(Q)$ között, legyen az így kapott gráf G''. Legyen S az a-ból F_{ab}-re nézve G''-ben alternáló úton elérhető pontok halmaza, és legyen $X = A \cap S$. Ekkor $Z(Q) = X$.*

Bizonyítás. A 2.12. állítás (b) részét G helyett G''-re alkalmazva látható, hogy X a minimális ab-halmaz G''-ben. Vegyük észre, hogy $Q \subseteq X$. Ugyanis $\Gamma(X \cup Q) = \Gamma(X)$, így ha $X \subset Q \cup X$ lenne, akkor $|\Gamma(X \cup Q)| = |\Gamma(X)| = |X| + k - 1 < |X \cup Q| + k - 1$ ellentmondást adna. A 2.14. állítás alapján X a minimális olyan halmaz G-ben, amire (4) teljesül, és $b \notin \Gamma(X)$. $Z(Q) \subseteq M$ miatt $b \notin \Gamma\big(Z(Q)\big)$ is fennáll, ebből pedig már adódik, hogy $Z(Q) = X$. ∎

Legyen L a $\mathcal{T}$ elemeinek uniója. Először megkeresünk egy olyan minimális Z_1 halmazt, ami illik $(\mathcal{K}_j, M)$-hez, és amire $Z_1 - L \neq \emptyset$. Minden $a \in M - L$-re tekintsük a 2.15. állítás alapján megtalálható $Z(a)$ halmazt. Megfelelő Z_1-et kapunk, ha egy tartalmazásra nézve minimálisat választunk a $\{Z(a) : a \in M - L\}$ halmazból.

Ennek alapján Z_1-et meg tudjuk határozni összesen $M - L = O(|A|)$ darab szélességi kereséssel. Ekkor vagy Z_1 egy minimális $(\mathcal{K}_j, M)$-hez illő halmaz, vagy pedig létezik egy $Z_2 \subseteq L \cap Z_1$, ami szintén illik $(\mathcal{K}_j, M)$-hez. Z_2 tehát $\mathcal{T}$ néhány elemének az uniójaként állhat elő. Ha Z_1 a $\mathcal{T}$-nek csak egyetlen elemét tartalmazza, akkor ez nem lehetséges. Tegyük fel tehát, hogy Z_1 a $\mathcal{T}$-ből legalább két halmazt tartalmaz. Ahhoz, hogy megkapjuk Z_2-t, minden $T_i, T_j \in \mathcal{T}$, $T_i, T_j \subset Z_1$-re határozzuk meg $Z(T_i \cup T_j)$-t. Ezek közül tartalmazásra nézve minimálisat választva megfelelő Z_2-t kapunk; ehhez $O(|A|^2)$ szélességi keresésre van szükségünk.

Z_2 egy minimális $(\mathcal{K}_j, M)$-hez illő halmaz, ezért $K_{j+1} := Z_2$ megfelelő választás.

2.4. A duál algoritmus leírása

A fenti vázépítő szubrutin segítségével az alábbi duális algoritmusunk van $\nu(G)$ meghatározására. Felépítünk egy teljes vázat, és erre alkalmazzuk Dilworth algoritmusát. (Jól ismert, hogy egy részbenrendezett halmaz maximális antiláncát és minimális láncfelbontását egy páros gráf maximális párosításának kiszámítására vezethetjük vissza.) A maximális antilánc mérete éppen $\nu(G)$ lesz.

A javító élek minimális számának kiszámítására legyen H az E komplementere. Minden lépésben választunk egy $e \in H$-t, kiszámítjuk $\nu(G+e)$-t, és elhagyjuk e-t H-ból. Ha $\nu(G+e) = \nu(G) - 1$, akkor e-t hozzávesszük G-hez, egyébként G-t változatlanul hagyjuk.

2.5. Bonyolultság

Tekintsük most azt az esetet, amikor $|A| = |B| = n$. (Ez éppen ekvivalens az összefüggőség-növeléssel.) [6] 4.7. következménye alapján tudjuk, hogy van olyan javító halmaz, ami egy párosítás. Ezért az 1.1. tétel alapján a maximális független halmaz mérete legfeljebb n. Egy egymásba ágyazott halmazokból álló láncnak is legfeljebb n eleme lehet, tehát Dilworth tételét alkalmazva egy teljes váz mérete legfeljebb n^2. A vázhoz először $O(n^2)$ darab egyenként $O(n^3)$ idejű folyam kiszámításával megkapjuk $\mathcal{C}$ maximális elemeit és az F_{ab} élhalmazokat. Ezek után $O(n^2)$-szer kell K_{j+1} meghatározásához egyenként $O(n^2)$ darab $O(n^2)$ idejű szélességi keresést végezni. Vagyis a teljes váz megkeresésének ideje $O(n^6)$. Ezt a szubrutint alkalmazva $O(n^2)$-szer a teljes futási idő $O(n^8)$ lesz.

3. Záró megjegyzések

Az itt leírt módszerekkel kezelni tudunk általánosabb összefüggőség-növelési feladatokat is, mint az ST-él/pontösszefüggőség eggyel való növelése. (Egy $D = (V, H)$ irányított gráfot $\emptyset \neq S, T \subseteq V$ halmazokkal k-ST-él/pontösszefüggőnek hívunk, ha tetszőleges S-beli és T-beli pontok közt van k éldiszjunkt/belül pontiszjunkt út.) Itt azonban némely technikai bonyodalmakkal szembesülünk: a teljes váz elemeit nem választhatjuk tetszőlegesen, hanem még egy további tulajdonságot is meg kell követelnünk.

Ha az élekre költségeket írunk, akkor a feladat NP teljessé válik: a $(V, \emptyset)$ erősen összefüggővé növelése általánosítja az utazó ügynök problémáját. Pontindukált költségfüggvény esetére azonban a jelen módszer kiterjeszthető. Ez azt jelenti, hogy adott egy $c : V \to \mathbb{R}$ függvény, és az uv él behúzásának költsége $c(u) + c(v)$. Ennek részleteiről ld. [3].

Hivatkozások

[1] K. P. Eswaran és R. E. Tarjan, Augmentation problems, *SIAM J. Computing,* Vol. **5**, No. 4 (1976), pp. 653–665.

[2] L. R. Ford és D. R. Fulkerson, *Flows in Networks,* Princeton Univ. Press, Princeton NJ. (1962).

[3] A. Frank, An algorithm to increase the node-connectivity of a digraph, *Proceedings of the 3rd Hungarian-Japanese Symposium on Discrete Mathematics and Its Applications,* Tokyo (2003), pp. 378–387.

[4] A. Frank, Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements, *SIAM J. Discrete Mathematics,* Vol. **5** (1992), No. 1., pp. 22–53.

[5] A. Frank, Finding minimum generators of path systems, *J. Combinatorial Theory, Ser. B,* Vol. **75** (1999), pp. 237–244.

[6] A. Frank és T. Jordán, Minimal edge-coverings of pairs of sets, *J. Combinatorial Theory, Ser. B,* Vol. **65**, No. 1 (1995), pp. 73–110

[7] A. Frank és T. Jordán, Directed vertex-connectivity augmentation, *Connectivity Augmentation of Networks: Structures and Algorithms, Mathematical Programming* (ed. A. Frank) Ser. B, Vol. **84**, No. 3 (1999), pp. 537–553

[8] E. Győri, A minimax theorem on intervals, *J. Combinatorial Theory, Ser. B,* Vol. **37** (1984), 1–9.

[9] L. A. Végh és A. A. Benczúr, Primal-dual Approach for Directed Vertex Connectivity Augmentation and Generalizations, *Proceedings of SODA* (2005), pp. 186–194.

András Frank and László Végh A.: An algorithm to increase the node-connectivity of a digraph by one

We develop a combinatorial polynomial-time algorithm to make a $(k-1)$-connected digraph k-connected by adding a minimum number of new edges. This problem is a special case of the min-max theorem described in [5]. We also define the notion of the k-elementary bipartite graph, and formulate a corresponding augmentation question, which generalizes the connectivity augmentation problem. We present a dual method for this problem based on the min-max formula. A motivation is the algorithm described in [5] for theorem of E. Győri to find a minimum set of generators of a family of subpaths of a circuit.

Frank András és Végh A. László
MTA-ELTE Egerváry Kutatócsoport
ELTE TTK Operációkutatási Tanszék
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C.
`{frank,veghal}@cs.elte.hu`

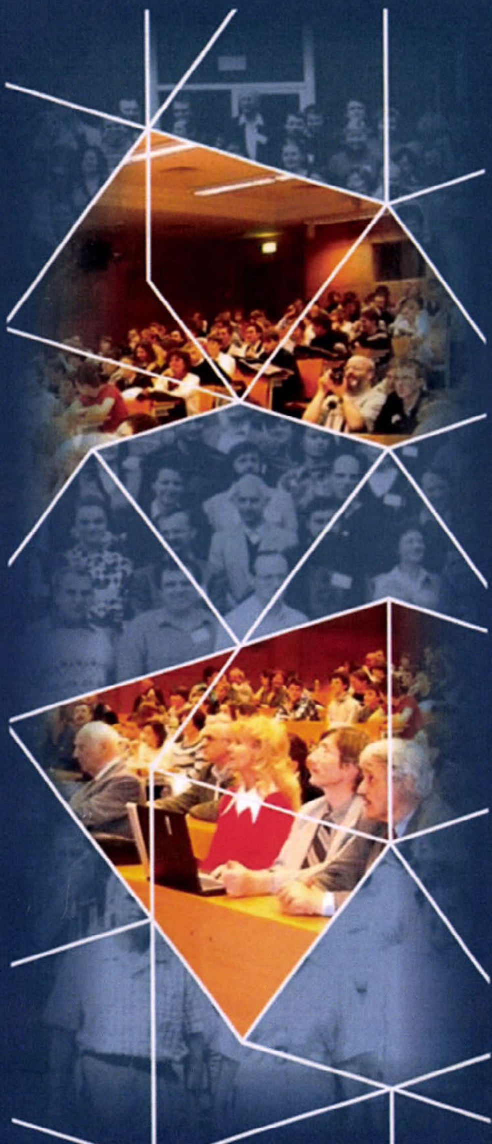
TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Modok és Társa Nyomda, Kiskunhalas

Matematikai Lapok

13



Különszám

Vendégszerkesztő:
Szabó Csaba

2006-2007/2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 13. évfolyam (2006–2007), 2. szám

(Megjelent 2008-ban)

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A Matematikai Lapok megjelenését rendszeresen támogatta és támogatja a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

BEVEZETÉS

„ . . . soha a földnek golyóbisán egy nemzet sem tehette addig magáévá a bölcsességet, mélységet, valameddig a tudományokat a maga anyanyelvébe bé nem húzta. Minden nemzet a maga nyelvén lett tudós, de idegenen sohasem."

(Bessenyei György: Magyarság (1778))

Mindenki az anyanyelvén tanul meg gondolkodni. A különböző nyelvek másmás gondolkodást szülnek. A magyar nyelv sajátosságai megjelennek az emberek, tudósaink gondolkodásmódjában. Bessenyei óta többen megfogalmazták a magyar szaknyelv tudatos és mélyreható művelésének fontosságát. A magyar matematikai nyelv fejlesztése a magyar gondolkodásmód megőrzésének kulcsa. Így fontos és elvárható kutatóinktól, hogy eredményeiket vagy legalább azok kivonatát magyar nyelven is ismertessék.

Ezért is örültem, amikor *Katona Gyula* megkért, hogy tanítványaim munkáit jelentessük meg magyar nyelven is. Azonban meglepődtem, hiszen a fiatal tehetséges kutatókat, akikkel együtt dolgozom, sosem tekintettem tanítványaimnak. Mindig kutatótársak voltunk, és általában társszerzőkké lettünk. Mitöbb, a nyolc nálam fiatalabb társszerzőm közül csak hárman jártak általam tartott egyetemi órákra.

Négy dolgozat témája egy-egy algebrai indíttatású bonyolultsági probléma. Az alapkérdés a következő: egy (véges) algebra fölött milyen nehéz megoldani egy egyenletet, illetve milyen nehéz eldönteni, hogy egyáltalán megoldható-e az egyenlet. A másik kérdés ennek a társa: adott két algebrai kifejezés, milyen nehéz eldönteni, hogy e két kifejezés ugyanazt a függvényt határozza-e meg. Gyűrűk felett fogalmazva az első kérdés annak eldöntése, van-e egy adott polinomnak gyöke. A második pedig lényegében azt kérdezi, azonosan nulla-e egy polinom az adott gyűrű fölött.

Büki Judit, Vértesi Vera, Pluhár Gabriella és *Horváth Gábor* munkái félcsoport-elméleti indíttatásúak, bár ez nem mindegyiken látszik.

Molnár-Sáska Ildikó matematika tanárszakon írt szakdolgozatában kifejlesztette a kétdimenziós osztójátéknak (Chomps) egy új elemzési módszerét. E módszerrel lényegesen közelebb kerültünk a nyerő stratégia megismeréséhez. Ugyanekkor *Andries Brouwer* (Eindhoven) nagyon hasonlóan közelítette meg a játék menetének leírását. A két munkából egy sokszerzős dolgozat született, amely az *Integers*ben jelent meg.

Mérai László az ENIGMA második világháborús történetének elemzése kapcsán jutott el az azonosságteljesülési problémához véges csoportok fölött. Ugyanezt az eredményt *John Lawrence* (Waterloo, Kanada) is megfogalmazta. Az egyszerű csoportokra adott bizonyítás Lawrence-nél 11 oldalt, míg Horváth Gábornál és Mérai Lacinál mindössze háromnegyed oldalt tesz ki. A többszerzős közös dolgozat a *Bullettin of The London Mathematical Society*ben jelent meg.

Horváth Gábor három dolgozatban is (társ)szerző. Önálló dolgozatában az azonosságteljesülési probléma bonyolultságát vizsgálja metaciklikus csoportok, például S_3, fölött. Gondolhatnánk, hogy erről a hat elemű csoportról, ami ráadásul izomorf a háromszög szimmetriáinak csoportjával, mindenki mindent tud. Érdekes módon S_3-nál akadtak el mind a csoportelméleti, mind a formális nyelvek kapcsán elkezdett kutatások. Csoportok közül a nilpotens csoportokról lehetetett tudni, hogy az azonosságteljesülési probléma polinom időben megoldható. A legkisebb nem-nilpotens csoport S_3. Formális nyelvek kapcsán az összes legfeljebb hat elemű monoidról ismert volt a probléma bonyolultsága, kivéve S_3-ról. Gábor ezt a kérdést válaszolja meg dolgozatában.

Vértesi Vera számos korai eredményéből a *Svetlana Pleschevával* (Jekatyerinburg) közös, félcsoportelméleti indíttatású munkáját választotta. Mindkét lány hallgató volt, amikor egy montreali nyári iskolán nekiláttak egy bonyolultsági probléma megoldásának, amellyel Sveta témavezetője, Mihail Volkov, évek óta nem boldogult. Hogy a női nem bájának vagy a fiatal gondolkodásmódnak köszönhető-e, nem tudni, de annyi biztos, hogy a két ifjú kutatójelölt egy este alatt frappáns bizonyítás adott Volkov sejtésére.

Pluhár Gabriella véletlenül csöppent bele a szabad spektrumok vizsgálatába. Itt az a kérdés, hogy hány különböző algebrai függvény van egy adott véges algebra fölött. Dolgozatában a kötegvarietások szabad spektrumát jellemzi.

Svetlana Plescheva azóta férjhez ment és Goldberg néven publikál tovább. Molnár-Sáska Ildikó is férhez ment, Horváth Gábor és Mérai László megnősültek, ők hárman nem változtatták meg a nevüket. Büki Judit is elkötelezte magát. Diplomája megszerzése után elment apácának. Pluhár Gabriella e pillanatban harmadéves egyetemi hallgató.

Szabó Csaba

GRÁFHOMOMORFIZMUSOK

BÜKI JUDIT[1]

Legyen H egyszerű gráf, f részleges leképezés G-ből H-ba, ahol G egyszerű gráf. Az OAL-HOM H jelöli a következő problémát: kiterjeszthető-e f leképezés gráfhomomorfizmussá G-ből H-ba.

Pavol Hell sejtése az, hogy az OAL-HOM-probléma, szemben más gráfhomomorfizmus-problémákkal, nem osztja fel a gráfok osztályát két csoportra, úgymint P-beli és NP-teljes részre. Ebben a dolgozatban megmutatjuk, hogy bár OAL-HOM H-ról még nem tudunk semmi biztosat, OAL-HOM $H \times H$-ra igaz a következő: P-beli, ha H fa, és NP-teljes egyébként.

1. Bevezetés – Eldöntési problémák

1.1. Színezési problémák

1. feladat. Kiszínezhetők-e egy $G = (V, E)$ gráf pontjai n színnel úgy, hogy bármely él két végpontja különböző színű legyen. Azaz, létezik-e egy $f : V \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ leképezés úgy, hogy $v, w \in V$, $v \sim w$ esetén $f(v) \neq f(w)$.

A probléma $n = 2$-re P-beli. Ha $n = 3$, akkor közvetlenül visszavezethető a $3 - SAT$-ra, amelyről Cook (lásd [5]) elsőként bebizonyította, hogy NP-teljes. Ha $n > 3$, a probléma visszavezethető a 3-színezésre, azaz NP-teljes. Az n-színezhetőség tehát NP-teljes $n \geq 3$-ra. A probléma általánosítására két lehetőség kínálkozik. Első lehetőség az Erdős Pál által kitalált listás színezés.

2. feladat. Kiszínezhetőek-e a G gráf csúcsai n színnel, ha a gráf minden csúcsához adott a színek egy listája, mely színekkel lehet színezni. Azaz ha $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf, és $l : V \longrightarrow P(\{1, 2, \ldots, n\})$ leképezés a csúcshalmazból az $\{1, 2, \ldots, n\}$ hatványhalmazába, akkor kiszínezhető-e V n színnel, úgy, hogy minden v csúcs színe $l(v)$-ben van.

A listás színezés NP-teljes probléma $n \geq 3$-ra. Annak eldöntése ugyanis, hogy G gráf kiszínezhető-e n színnel, nehéz. Ha G-vel együtt egy l lista is adott, a feladat még nehezebb.

[1]Köszönet a Magyar Nemzeti Bank „A közjóért" Alapítványának, valamint az NSERC Kanadai Tudományos Alapnak, hogy az utazást és a kutatómunkát lehetővé tették. A kutatást az OTKA N67867 és K67870 számú pályázatai támogatták.

1.2. Gráfhomomorfizmus-probléma. Az általánosítás másik módja a gráfhomomorfizmus: HOM H. Vegyük észre, hogy az n-színezés nem más, mint annak eldöntése, létezik-e homomorfizmus K_n-be.

3. feladat. Adott két gráf: $H = \big(V(H), E(H)\big)$ és $G = \big(V(G), E(G)\big)$. Létezik-e homomorfizmus G-ből H-ba, vagyis van-e leképezés G-ből H-ba, mely csúcsot csúcsba, élt élbe visz.

Azaz létezik-e egy $h : V(G) \to V(H)$ leképezés, melyre $\forall v, w \in V(G)$, $v \sim w$ esetén $h(v) \sim h(w)$.

4. tétel. *Tetszőleges H páros gráf esetén* HOM H *P-beli.*

5. tétel (lásd [4]). *Ha H nem páros gráf, akkor* HOM H *NP-teljes.*

1.3. Listás gráfhomomorfizmusok. A fenti két problémakör (listás színezés és gráfhomomorfizmus) közös általánosítása a listás gráfhomomorfizmus.

6. feladat. Létezik-e gráfhomomorfizmus G-ből H-ba, ha G minden v pontjához megadjuk $V(H)$ egy részhalmazát, mint v lehetséges képeinek halmazát.

Adott: $H = \big(V(H), E(H)\big)$ egyszerű gráf.

Input: $G = \big(V(G), E(G)\big)$ egyszerű gráf, és egy $l : V(G) \to P\big(V(H)\big)$ leképezés a G csúcshalmazából $V(H)$ hatványhalmazába.

Kérdés: van-e listahomomorfizmus G-ből H-ba l listára szorítkozva? Azaz létezik-e egy $h : G \to H$ gráfhomomorfizmus úgy, hogy minden $v \in V(G)$ csúcsra $h(v) \in l(v)$.

A probléma jelölésére L-HOM H-t használjuk.

Az L-HOM H probléma speciális esete CL-HOM H. Ez az L-HOM H leszűkítése azokra az esetekre, amikor tetszőleges $v \in V(G)$-re $l(v)$ H-nak összefüggő részgráfja.

Foglaljuk össze az L-HOM H és CL-HOM H problémák bonyolultságával kapcsolatos eredményeket.

7. tétel (lásd [3]). *Az* L-HOM H *P-beli, ha H intervallumgráf. Ha H nem intervallumgráf, akkor NP-teljes.*

8. tétel (lásd [3]). *Ha H minden 4-nél hosszabb körében van húr, akkor* CL-HOM H *P-beli. NP-teljes egyébként.*

1.4. Az OAL-HOM**-probléma.** Az OAL-HOM H-probléma az L-HOM H leszűkítése azokra az esetekre, amikor $l(v)$ egyelemű vagy az egész $V(H)$.

9. feladat. Kiterjeszthető-e egy $l : G \to H$ részleges leképezés gráfhomomorfizmussá. Azaz létezik-e olyan gráfhomomorfizmus G-ből H-ba, ami az l által meghatározott $v \in V(G)$ pontokat $l(v)$-be viszi.

Adott: $H = \big(V(H), E(H)\big)$ egyszerű gráf.

Input: $G = \big(V(G), E(G)\big)$ egyszerű gráf és egy $l : V(G') \to V(H)$ (ahol $G' \subseteq G$) részleges leképezés.

Kérdés: létezik-e $h : G \to H$ homomorfizmus, amely minden $v \in V(G')$-re $h(v) = l(v)$?

Az OAL-HOM-probléma még megoldatlan. Azt sem tudjuk, hogy az előző problémákhoz hasonlóan két csoportba sorolhatók-e a gráfok: az egyik csoportba tartoznak azok, melyekre OAL-HOM H P-beli, a másikba pedig azok, melyekre OAL-HOM H NP-teljes. Feder és Hell sejtése (lásd [3]) az, hogy a gráfok nem oszthatók fel így két részre.

Hell és Nešetřil (lásd [4]) fentebb említett tételéből következik:

10. tétel. *Ha H nem páros gráf, akkor* OAL-HOM H *NP-teljes.*

Az OAL-HOM-probléma tehát megoldott nem páros gráfok esetén.

A páros gráfokról a következőket tudjuk.

11. lemma (lásd [3]). *Ha H gráf k-hosszú kör és $k \geq 4$, akkor* OAL-HOM H *NP-teljes.*

A fenti tétel általánosítása a következő.

12. tétel (lásd [2]). *Ha H gráfnak létezik két éle: (a, b) és (c, d) úgy, hogy*

$$d(a, c) = d(b, d) \geq 2,$$

és $I(a, c)$, $I(b, d)$ intervallumok között csak két él van: (a, b) és (c, d), akkor OAL-HOM H *NP-teljes.*

Pozitív irányban ezidáig kevés eredmény született. Ami CL-HOM-ról elmondható, igaz OAL-HOM-ra is.

13. következmény (lásd [3]). *Ha H intervallumgráf, akkor* OAL-HOM H *P-beli.*

A P-beli gráfok eddig ismert legnagyobb osztálya az abszolút retrakt.

14. definíció. Legyen H páros gráf. Legyen G részhalmaza H-nak. Az $f : V(H) \to V(G)$ leképezés *retrakció* H-ból G-be, ha minden $u, v \in V(H)$ csúcsra $(u, v) \in E(H)$ esetén $\big(f(u), f(v)\big) \in E(G)$, és minden $w \in V(G)$ esetén $f(w) = w$.

15. definíció. Legyen G gráf H részgráfja. A G *izometrikus részgráfja* H-nak, ha minden $u, v \in V(G)$ esetén a G-beli $d(u, v)$ távolság megegyezik u és v H-beli távolságával.

16. definíció. Egy G gráf *abszolút retrakt*, ha bármely H gráfba ($G \subset H$) izometrikusan beágyazva G retraktuma H-nak.

A továbbiakban használni fogjuk a következő tételt, mely az abszolút retrakt vizsgálatához nyújt segítséget.

17. tétel (lásd [1]). *Legyen G páros gráf. A G gráf pontosan akkor abszolút retrakt, ha kielégíti az alábbi intervallum-feltételt: tetszőleges $u, v \in V(G)$, $d(u, v) \geq 3$ csúcsokra az $I(u, v)$ intervallumban v szomszédainak van további $x \in I(u, v)$ közös szomszédjuk.*

18. tétel. *Ha H gráf abszolút retrakt, akkor* OAL-HOM H *P-beli.*

Megemlítjük itt az alábbi tételt, melyre a későbbiekben lesz szükségünk. Jelölje B_n azt a $2n$ csúcsú páros gráfot, melynek csúcsai $\{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n\}$, és a_i, b_j csúcsok össze vannak kötve, ha $i \neq j$.

19. tétel (lásd [6]). *Ha $n \geq 3$, akkor* OAL-HOM B_n *NP-teljes.*

1.5. Gráfösszehúzási probléma

20. feladat. Létezik-e gráfhomomorfizmus $G = \big(V(G), E(G)\big)$-ből $H = \big(V(H), E(H)\big)$-ba, ha G-ben létezik $H' \subseteq G$ egy H-val izomorf részgráf. Azaz van-e gráfhomomorfizmus, ami a gráfot összehúzza H-ra.

A probléma jelölésére RET H-t használjuk.

A gráfösszehúzási probléma az OAL-HOM-problémához hasonlóan még megoldatlan.

21. tétel (lásd [3]). *Minden H gráfra* OAL-HOM H *és* RET H *polinomiálisan ekvivalens.*

2. Gráfok direkt szorzata

A gráfoknak kétféle direkt szorzatáról beszélhetünk. Az egyik jobban megfelel az algebrai szemléletnek, a másik inkább gráfelméleti jellegű.

Kezdjük az előbbivel.

22. definíció. A G és H gráf *teljes direkt szorzata* $\Gamma = G \oplus H$ gráf, amelynek csúcsai a G és H csúcsaiból álló pontpárok, $V(\Gamma) = \big\{(g, h) \mid g \in V(G),\, h \in V(H)\big\}$, és $\big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big) \in E(\Gamma)$, ha $g_1 = g_2$ és $h_1 \sim h_2$, vagy $g_1 \sim g_2$ és $h_1 = h_2$, vagy $g_1 \sim g_2$ és $h_1 \sim h_2$.

23. definíció. A G és H gráf *direkt szorzata* $\Gamma = G \times H$ gráf, amelynek csúcsai a G és H csúcsaiból álló pontpárok, $V(\Gamma) = \{(g,h) \mid g \in V(G),\ h \in V(H)\}$, és $((g_1,h_1),(g_2,h_2)) \in E(\Gamma)$, ha $g_1 = g_2$ és $h_1 \sim h_2$, vagy $g_1 \sim g_2$ és $h_1 = h_2$.

A kérdés a következő: abból, hogy G, H milyen nehéz, lehet-e következtetni $G \times H$, illetve $G \oplus H$ bonyolultságára, és fordítva: $G \times H$, illetve $G \oplus H$ bonyolultságából lehet-e következtetni a komponensekére.

2.1. Teljes direkt szorzat. Vegyük észre, hogy $K_2 \oplus K_2 = K_4$, amely nem páros gráf, így a 10. tétel alapján OAL-HOM $K_2 \oplus K_2$ NP-teljes.

A gondolatmenetből látszik a következő tétel.

24. tétel. *Amennyiben G és H egyike sem az üres gráf,* OAL-HOM $G \oplus H$ *NP-teljes. Ha G az üres gráf,* OAL-HOM $G \oplus H$ *bonyolultsága megegyezik* OAL-HOM H *bonyolultságával.*

2.2. Direkt szorzat. A $\Gamma = G \times H$ kérdése kicsit bonyolultabb lesz.

A következő észrevétel egyszerűsítheti a problémát.

25. állítás. *Legyen H a diszkrét gráftól különböző páros gráf. Ekkor tetszőleges G esetén $G \times K_2$ előáll a $G \times H$ direkt szorzat retraktumaként.*

Bizonyítás. Legyen $\Gamma = G \times H$. Legyen H két osztálya A és B, $(a,b) \in E(H)$. Ekkor (a,b) retraktuma H-nak, létezik egy $\varepsilon : H \to (a,b)$ homomorfizmus úgy, hogy

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} a, & \text{ha } x \in V(A) \\ b, & \text{ha } x \in V(B). \end{cases}$$

Legyen

$$\delta : \Gamma \to G \times K_2$$

$$\delta((g,h)) = (g, \varepsilon(h)).$$

Ekkor δ homomorfizmus és elemenként helybenhagyja $G \times (a,b)$-t, azaz $G \times (a,b)$ előáll Γ retraktumaként. ∎

Ennek a tételnek a jelentősége a következő tételből derül ki.

26. állítás. *Legyen H_r a H gráf retraktuma. Ha* OAL-HOM H_r *NP-teljes, akkor* OAL-HOM H *is NP-teljes.*

Bizonyítás. Legyen G tetszőleges gráf, $h : G \to H_r$ részleges leképezés. Meg kell mutatnunk, hogy OAL-HOM H nehezebb, mint OAL-HOM H_r. Megmutatjuk, hogy G gráfból pontosan akkor van homomorfizmus H-ba, ha H_r-be is.

Először tegyük fel, hogy h kiterjeszthető $G \to H_r$ gráfhomomorfizmussá. Ekkor nyilván van G-ből H-ba is, mert $H_r \subseteq H$. Ha pedig létezik $f : G \to H$ homomorfizmus h részleges leképezés figyelembevételével, akkor megmutatjuk, hogy van G-ből H_r-be is. A H_r ugyanis retraktuma H-nak, tehát létezik $g : H \to H_r$ homomorfizmus. Ekkor $g \circ f : G \to H_r$ gráfhomomorfizmus. ■

Külön figyelmet érdemes szentelni tehát $G \times K_2$-nek.

27. lemma. *Ha G tartalmaz négyszöget, akkor* OAL-HOM $G \times K_2$ *NP-teljes.*

Bizonyítás. Legyen G két osztálya A és B. Legyen G-ben egy négyszög G', csúcsai $V(G') = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$. Létezik $\varepsilon : G \to G'$ homomorfizmus, mely elemenként helybenhagyja G'-t:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} a_1, & \text{ha } x = a_1, \\ b_1, & \text{ha } x = b_1, \\ a_2, & \text{ha } x \in V(A),\ x \neq a_1, \\ b_2, & \text{ha } x \in V(B),\ x \neq b_1. \end{cases}$$

Azaz G' előáll G retraktumaként. Legyen

$$\delta : G \times K_2 \to G' \times K_2$$

$$\delta\big((g, h)\big) = \big(\varepsilon(g), h\big).$$

Ekkor δ homomorfizmus és elemenként helybenhagyja $G' \times K_2$-t. Azaz $G' \times K_2$ retraktuma $G \times K_2$-nek.

A $G' \times K_2$ gráf a kocka él-csúcs gráfja, amely izomorf B_3-mal. A 19. tétel szerint OAL-HOM B_3 NP-teljes. A 26. állítás alapján OAL-HOM $G \times K_2$ is NP-teljes. ■

A tétel további általánosításához szükségünk van az alábbi lemmára.

28. lemma. *A $G \times H$ gráfban $I\big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big)$ intervallum megegyezik $I(g_1, g_2)$ és $I(h_1, h_2)$ intervallumok direkt szorzatával.*

A következőkben felhasználjuk ennek a lemmának egy speciális esetét, ezért ezt külön megemlítjük.

29. következmény. *A $G \times H$ gráfban $I\big((g_1, h), (g_2, h)\big)$ intervallum megegyezik $\big(I(g_1, g_2), h\big)$-val.*

30. lemma. *Ha G-ben van kör, akkor* OAL-HOM $G \times K_2$ *NP-teljes.*

Bizonyítás. A bizonyításhoz felhasználjuk a 12. tételt.

Ha G-ben van négyszög, akkor a 27. lemma miatt készen vagyunk.

Ha G-ben nincs négyszög, akkor a legrövidebb kör legyen $2n$ hosszú: $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$. Jelölje $N(A)$ A szomszédait. A 12. tétel miatt elég megmutatni, hogy $N(A_1) \cap I(A_1, A_{n+2})$ és $N(A_2) \cap I(A_2, A_{n+1})$ között nincs él. A 29. következmény értelmében e feltételt $G \times K_2$ helyett elég G-n vizsgálni:

$$I\big((A_1, h), (A_{n+2}, h)\big) = \big(I(A_1, A_{n+2}), h\big)$$

és

$$I\big((A_2, h), (A_{n+1}, h)\big) = \big(I(A_2, A_{n+1}), h\big),$$

ahol $h \in K_2$.

Az $I(A_1, A_{n+2})$ intervallum az $A_1, A_{2n}, A_{2n-1}, \dots, A_{n+2}$ út, és $I(A_2, A_{n+1})$ az $A_2, A_3, A_4, \dots, A_{n+1}$ út.

$$N(A_1) \cap I(A_1, A_{n+2}) = A_{2n}$$

és

$$N(A_2) \cap I(A_2, A_{n+1}) = A_3.$$

Az A_3 és A_{2n} pontok közt pedig nincs él, ellenkező esetben a G-ben lenne négyszög. ■

31. állítás. *Ha G nem fagráf, és H tetszőleges nemüres gráf, akkor* OAL-HOM *$G \times H$ NP-teljes.*

Bizonyítás. A feltétel szerint H a diszkrét gráftól különböző páros gráf, ezért a 25. állítás alapján $G \times K_2$ előáll $G \times H$ retraktumaként. Ha G nem fagráf, akkor van benne kör. A 30. lemma szerint ekkor OAL-HOM $G \times K_2$ NP-teljes. Ebből következik a 26. állítás alapján, hogy OAL-HOM $G \times H$ is NP-teljes. ■

Beláttuk tehát, hogy ha G gráf tartalmaz kört, akkor tetszőleges H nemüres gráfra OAL-HOM $G \times H$ NP-teljes. Most azt az esetet vizsgáljuk, amikor G gráfban nincs kör.

32. tétel. *Ha G és H fagráfok, akkor $G \times H$ abszolút retrakt.*

Bizonyítás. A 17. tétel alapján azt kell megmutatni, hogy $G \times H$ bármely (g_1, h_1) és (g_2, h_2) pontjára az $I\big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big)$ intervallumban (g_1, h_1) szomszédainak van további közös szomszédjuk. A 28. lemma szerint $I\big((g_1, h_1), (g_2, h_2)\big)$ intervallum két intervallum direkt szorzata. Kihasználjuk, hogy fagráfban az intervallum egy út. Ha a két út hossza l_1, illetve l_2, a két út direkt szorzata egy l_1-szer l_2-es négyzetháló. Itt a (g_1, h_1) pontnak pontosan két szomszédja van: a négyzet oldalai mentén két irányba indulhatunk. Egy négyzet két átellenes csúcsába jutunk. Ezeknek pedig nyilván van közös szomszédjuk: a négyzet negyedik csúcsa. ■

A következő tétel nem csak a fagráfok egy új jellemzését adja, hanem az alábbiakra is rámutat: bár valószínűtlen, hogy OAL-HOM NP-teljes és P-beli részre osztaná a gráfok osztályát, ugyanez igaz a $G \times K_2$ és a $G \times G$ alakú gráfokra: Minden gráfra OAL-HOM $G \times G$ vagy P-beli, vagy NP-teljes.

33. tétel. *Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Ekkor egy G gráfra az alábbiak ekvivalensek:*

(1) *G fa;*

(2) OAL-HOM $G \times K_2$ *P-beli;*

(3) OAL-HOM $G \times G$ *P-beli;*

(4) OAL-HOM $G \times T$ *P-beli teszőleges nemüres T fa esetén;*

(5) OAL-HOM $G \times K_2$ *nem NP-teljes;*

(6) OAL-HOM $G \times G$ *nem NP-teljes;*

(7) OAL-HOM $G \times T$ *nem NP-teljes teszőleges nemüres T fa esetén.*

Bizonyítás. A fenti állítások ekvivalenciáját két lépésben mutatjuk meg: az 1. állításból következik a többi hat, illetve a 2–7. állítások mindegyikéből levezethető az 1.

1. $\Rightarrow$ 2., 3., 4. Ha G fa, akkor a 32. állítás alapján tetszőleges nemüres T fa esetén $G \times T$ abszolút retrakt. Azaz OAL-HOM $G \times T$ P-beli. Ez igaz tetszőleges T fára, így K_2-re és G-re is.

1. $\Rightarrow$ 5., 6., 7. Az előbb beláttuk, hogy OAL-HOM $G \times T$ P-beli tetszőleges nemüres T fa esetén, azaz nem NP-teljes (feltevésünk szerint).

5., 6., 7. $\Rightarrow$ 1. Ha G nem fa, akkor a 31. állítás alapján OAL-HOM $G \times H$ NP-teljes minden H nemüres gráfra. Ez ellentmond a feltételünknek, miszerint OAL-HOM $G \times K_2$, OAL-HOM $G \times G$, illetve OAL-HOM $G \times T$ (T teszőleges fa) nem NP-teljes. Tehát G fa.

2., 3., 4. $\Rightarrow$ 1. Ismét a 31. állítást alkalmazzuk. Ha G nem fa, akkor OAL-HOM $G \times H$ NP-teljes. Feltettük azonban, hogy OAL-HOM $G \times T$ ($T = K_2$, $T = G$ is lehet) P-beli, azaz nem NP-teljes. Tehát G fa. ∎

Megmutattuk, hogy $G \times G$-re az OAL-HOM-probléma (és a 21. tétel alapján a gráfösszehúzási probléma is) két csoportba sorolja a gráfokat: P-beli és NP-teljes osztályba. Nyitva maradt a kérdés, hogy ugyanez elmondható-e G-ről is. Az eddigi tételek jellege azt mutatja, hogy ennek eldöntése akár pozitív, akár negatív irányban nehéz.

Hivatkozások

[1] H. J. Bandelt, A. Dählmann and H. Schütte, Absolute retracts of bipatite graphs, *Discrete Applied Math.*, **16** (1987), 191–215.

[2] J. Büki, S. Seif and Cs. Szabó, *On the complexity of the retraction-problem,* kézirat (1998).

[3] T. Feder and P. Hell, List homomorphisms to reflexive graphs, *J. Combin Th. series B,* beküldve.

[4] P. Hell and J. Nešetřil, On the complexity of H-colouring, *J. Combin. Theory B,* **48** (1990), 92–110.

[5] Lovász L., *Algoritmusok bonyolultsága,* ELTE TTK Egyetemi jegyzet (1992), 59–64.

[6] Oláh Á., *Diplomamunka,* kézirat (1998).

Büki Judit

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Algebra és Számelmélet Tanszék
1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/c.

VÉGES CSOPORTOK AZONOSSÁGAI

HORVÁTH GÁBOR[1]

A G csoport fölötti ekvivalenciaprobléma annak eldöntése, hogy egy azonosság teljesül-e G fölött. Az már ismert, hogy véges nilpotens csoportok fölött a probléma polinomiális, nem feloldható csoportokra coNP-teljes. Feloldható, nem nilpotens csoportok nagy osztályára (pl. metaciklikus csoportok, diéder csoportok, S_3, A_4) megmutatjuk, hogy az ekvivalenciaprobléma polinomidőben ellenőrizhető.

1. Bevezetés

Napjainkban az algebrai, számítógépalgebrai és automataelméleti kutatások legfőbb iránya a különböző algebrai kérdések bonyolultságelméleti vizsgálata. Az univerzális algebra, automataelmélet és formális nyelvek egyik legfontosabb kérdésköre az azonosságok vizsgálata a különböző algebrai struktúrákban. Egy adott $\mathcal{A}$ algebrára többféle problémát is megfogalmaztak. A Term-EQ két kifejezés azonosságát vizsgálja, a Pol-EQ problémában konstansok is lehetnek a kifejezésekben, a Pol-SAT egy egyenlet, a Pol-SYS egyenletrendszernek a megoldhatóságát vizsgálja.

Azon túl, hogy ezek a problémák önmagukban is érdekesek, komoly alkalmazásaik vannak a matematika különböző területein. Az univerzális algebra egyik legfontosabb megoldatlan kérdése, hogy egy algebra benne van-e egy adott algebra által generált varietásban. A probléma kínálja, hogy azonosságok vizsgálatával próbáljuk megoldani. Az egyenletek megoldhatóságával kapcsolatos eredményeket automataelméletben használják, szintaktikus monoidok vizsgálatára, de a gyakorlati életben is fontos szerepet játszó programkielégíthetőség-probléma is visszavezethető polinomok kielégíthetőségére.

A Term-EQ probléma esetén két, csak változókból álló kifejezésről kell eldönteni, hogy a két kifejezés azonosan egyenlő-e $\mathcal{A}$-ban, azaz minden $\mathcal{A}$-beli helyettesítés esetén ugyanazt az értéket veszik-e fel. Például A_4-ben, a 4-edfokú alternáló csoportban $x^6 = \left([x_1, x_2]\right)^2$ azonosság, mivel minden A_4-beli helyettesítés esetén mindkét oldal az egységelemet veszi fel értékként. Véges algebrák esetén ez a probléma mindig eldönthető, ám nem mindegy, hogy az azonosság hosszától függően mennyi időre van ehhez szükség. Ennek a problémának a bonyolultságát jelöljük Term-EQ($\mathcal{A}$)-val.

[1]A kutatást az OTKA N67867 és K67870 számú pályázatai támogatták.

A Pol-EQ problémában egy konstans és egy, akár konstansokat is tartalmazó kifejezésről (polinom) kell eldönteni, hogy $\mathcal{A}$-ban azonosan egyenlők-e. Természetesen véges algebrákra ez is eldönthető, itt is a bonyolultság az érdekes a polinom hosszának függvényében. Pol-EQ($\mathcal{A}$)-val jelöljük ezt a bonyolultságot egy adott $\mathcal{A}$ algebra esetén. Ezekben a problémákban (és a továbbiakban is) az $\mathcal{A}$ algebra a művelettáblájával van adva.

Klasszikus algebrai kérdés, hogy egy adott $\mathcal{A}$ algebrában egy egyenletnek, egyenletrendszernek van-e megoldása. Ha igen, akkor hány megoldás van, valamint mik ezek a megoldások? Ezeket a problémák a kielégíthetőség (satisfiability) témakörébe tartoznak. Adott algebrában azt kell tehát eldöntenünk, hogy t és s polinomokra a $t = s$ egyenlet megoldható-e, azaz van-e a változóknak olyan $\mathcal{A}$-beli kiértékelésük, mely mellett t értéke és s értéke megegyezik. Ennek a problémának a bonyolultságát jelöljük Pol-SAT($\mathcal{A}$)-val. Egyenletrendszerek esetén $t_1, t_2, \ldots, t_n, s_1, s_2, \ldots, s_n$ polinomokra kell megállapítani, hogy a $t_1 = s_1$, $t_2 = s_2, \ldots, t_n = s_n$ egyenletrendszer kielégíthető-e $\mathcal{A}$-ban. Adott $\mathcal{A}$ algebrára jelöljük Pol-SYS($\mathcal{A}$)-val.

Dolgozatomban csoportokra vizsgálom az ekvivalenciaproblémákat. Korábban csak annyi volt ismert, hogy nilpotens csoportokra a Pol-EQ probléma P-beli, nem feloldhatókra coNP-teljes. A dolgozat egyik fő eredménye, hogy feloldható, nem nilpotens csoportok nagy osztályában (pl. metaciklikus csoportok, diéder csoportok, S_3, A_4) polinomidőben ellenőrizhető, hogy két, akár konstansokat is tartalmazó kifejezés azonosan egyenlő-e.

2. Korábbi eredmények

Az alábbiakban felsoroljuk a klasszikus struktúrákra vonatkozó eredményeket. Világos, hogy a kielégíthetőségproblémák mindig NP-beliek, míg az ekvivalenciaproblémák minden algebrára coNP-beliek.

2.1. Gyűrűk. Kommutatív gyűrűkre ismert [3], hogy a term ekvivalenciaprobléma P-beli, ha a gyűrű nilpotens, egyébként pedig coNP-teljes. Burris és Lawrence [1] belátta, hogy ez minden gyűrűre igaz, vagyis egy $\mathcal{R}$ gyűrű esetén a Term-EQ($\mathcal{R}$) probléma P-ben van, ha $\mathcal{R}$ nilpotens, egyébként pedig a probléma coNP-teljes.

Ez a bizonyítás összegek hosszú szorzatát használta, ami kibontva monomok összegére már lehet akár exponenciális hosszú is. Ezért Willard és Lawrence bevezette a $_\Sigma$ változatát ezeknek a problémáknak, ahol tehát minden polinomot úgy tekintünk, mint monomok összegét, vagyis például $(x + y)^n$ nem megengedett polinom, mivel kibontva már 2^n hosszú. A Term$_\Sigma$-EQ (Pol$_\Sigma$-EQ) probléma tehát annak a bonyolultságát kérdezi, hogy két adott p és q term (polinom) megegyezik-e minden behelyettesítésre. [4]-ben az alábbit bizonyították be:

1. tétel. *Legyen $\mathcal{R}$ gyűrű, $\mathbf{J}(\mathcal{R})$ a Jacobson radikálja.*

Ha $\mathcal{R}/\mathbf{J}(\mathcal{R})$ kommutatív, akkor a Pol-EQ($\mathcal{R}$) probléma P-beli.

Ha $\mathcal{R} = M_n(F)$ véges mátrixgyűrű, amelyben az invertálható elemek nem feloldható csoportot alkotnak, akkor Term$_\Sigma$-EQ$(\mathcal{R})$ *coNP-teljes. Vagyis ha $n \geq 3$ vagy $|F| \geq 4$, akkor* Term$_\Sigma$-EQ $\big(M_n(F)\big)$ *coNP-teljes.*

Szabó és Vértesi bizonyították a kimaradó két esetre ([5]-ben $n = 2$ és $|F| = 2$ esetben, [6]-ben $n = 2$ és $|F| = 3$-ra), hogy Term$_\Sigma$-EQ $\big(M_2(Z_2)\big)$ valamint Term$_\Sigma$-EQ $\big(M_2(Z_3)\big)$ szintén coNP-teljes, ráadásul a bizonyításban nem használtak összeadást. 2004-ben Szabó és Vértesi [7] bebizonyították az alábbi tételt:

2. tétel. *Legyen $\mathcal{R}$ gyűrű, $\mathbf{J}(\mathcal{R})$ a Jacobson radikálja.*
Ha $\mathcal{R}/\mathbf{J}(\mathcal{R})$ kommutatív, akkor Term$_\Sigma$-EQ$(\mathcal{R})$ *P-beli.*
Ha $\mathcal{R}/\mathbf{J}(\mathcal{R})$ nem kommutatív, akkor Term$_\Sigma$-EQ$(\mathcal{R})$ *coNP-teljes.*

Ezzel a tétellel a Term$_\Sigma$-EQ probléma is karakterizálva lett gyűrűk esetén.

2.2. Csoportok. A probléma csoportokra még sok tekintetben nyitott. Burris és Lawrence [1] bizonyította az alábbi tételt:

3. tétel. *Ha G nilpotens, akkor G-ben a* Term-EQ *probléma P-beli.*
Ha G nem feloldható, akkor G-ben a Term-EQ *probléma coNP-teljes.*

Például A_5, az 5-ödfokú alternáló, 60 elemű csoportra a Term-EQ probléma coNP-teljes. Megmutatták továbbá, hogy a diéder csoportokra a probléma P-beli.

Goldmann és Russell [2] az egyenletrendszerek megoldhatóságát vizsgálták, és sikerült igazolniuk a következőt:

4. tétel. *Ha G nilpotens, akkor G-ben a* Pol-SYS *probléma P-beli.*
Ha G nem feloldható, akkor G-ben a Pol-SYS *probléma coNP-teljes.*

Ebből a tételből persze következik, hogy a Pol-EQ probléma P-ben van a nilpotens csoportokra. Ha ugyanis $p = q$-t kell eldöntenünk, akkor csak annyi a dolgunk, hogy megnézzük, hogy $pq^{-1} = g$ mely g csoportelemekre elégíthető ki. Ha csak az egységelemre, akkor $p = q$ azonosság, ha egy másikra is, akkor nem azonosság.

A nem nilpotens de feloldható csoportok viszont mindeddig ellenálltak a támadásoknak. Kezdetnek érdemes lehet a metaciklikus csoportokat vizsgálni közülük, mert nekik van a legegyszerűbb szerkezetük. A dolgozat elsősorban ilyen csoportokra próbálja megoldani a fenti problémákat.

3. Metaciklikus csoportok

A dolgozat ezen fejezetében azt vizsgáljuk, hogy mi mondható metaciklikus csoportokra. Elsősorban a Pol-EQ problémára koncentrálunk, ezen belül is azt vizsgáljuk, hogy mikor P-beli a probléma. Természetesen ha egy csoportra a Pol-EQ probléma P-beli, akkor arra a csoportra a Term-EQ probléma is P-beli.

5. állítás. *Csoportokra a polinomekvivalencia-probléma ekvivalens egy $w_1w_2\dots w_n = 1$ egyenlőség vizsgálatával, ahol w_i-k változók valahányadik (akár negatív kitevős) hatványai, vagy valamilyen csoportbeli konstansok.*

Bizonyítás. A polinomekvivalencia-probléma során olyan egyenlőséget akarunk megoldani, hogy $v_1v_2\dots v_s = u_1u_2\dots u_t$, ahol v_i és u_j változók, azok inverzei vagy csoportbeli konstansok. Ez az egyenlőség ekvivalens azzal, hogy $u_t^{-1}u_{t-1}^{-1}\dots u_1^{-1}v_1 v_2\dots v_s = 1$, ami éppen olyan alakú, mint az állításban megfogalmazott egyenlőség, miután összevontuk az azonos szomszédos változókat, valamint a szomszédos konstansokat. ∎

Elegendő tehát csak a $p = 1$ alakú azonosságokat tekinteni. Ezentúl csak ezeket vizsgáljuk.

6. állítás. *Ha $G = A\times B$, valamint* Pol-EQ(A) *is és* Pol-EQ(B) *is P-beli, akkor* Pol-EQ(G) *is P-beli.*

Bizonyítás. A direkt szorzatban a szorzás koordinátánként történik. Egy szorzat pontosan akkor 1, ha minden koordinátában 1. Vagyis a feladat visszavezetődik a komponensekben való vizsgálatra. ∎

Vagyis azon véges csoportok osztálya, melyre a Pol-EQ probléma P-ben van, zárt a direkt szorzatra.

Az alábbi tételben bővítjük azon csoportok osztályát, melyekről ismert, hogy a Pol-EQ probléma P-beli.

7. tétel. *Ha $G \simeq A \rtimes B$, ahol $A \simeq Z_p$ valamilyen p prímre, valamint* Pol-EQ(B) *P-beli, akkor* Pol-EQ(G) *is P-beli.*

Bizonyítás. Legyen a az A generátora. A szemidirekt szorzás miatt adott $B \to \operatorname{Aut} A$ homomorfizmus a B-beli elemmel való konjugálás. Mivel A ciklikus, ezért minden $b\in B$ elemmel való konjugálás egy b-től függő kitevőjű hatványraemelést jelent. Továbbá minden G-beli csoportelem egyértelműen felírható $b\cdot a^k$ alakban, ahol $b \in B$, valamint $k\in\{0,1,\dots,p-1\}$. Vizsgáljuk, hogy $w_1w_2\dots w_l = 1$ azonosság-e. Írjunk be ide $w_i = b_ia_i$-t (ahol tehát $b_i\in B$, $a_i\in A$), majd a kommutálást felhasználva hozzuk előre a b-ket ($a_{i-1}b_i = b_ia_{i-1}^{b_i}$), ezáltal az alábbi szót kapjuk:

$$(b_1b_2\dots b_l)\cdot\left(a_1^{b_2b_3\dots b_l}a_2^{b_3\dots b_l}\dots a_{l-1}^{b_l}a_l\right).$$

Ez a szorzat pontosan akkor 1, ha mindkét tényező 1, hiszen az első tényező B-beli, a második tényező pedig A-beli. A feltétel miatt az első tényezőről polinomidőben eldönthető, hogy azonosan 1, vagy sem.

Vizsgáljuk most csak a második tényezőt. Mivel A kommutatív, ezért az azonos a_i változók (konstansok) egymás mellé hozhatók, vagyis ez a szorzat az alábbi alakra hozható:

$$a_1^{h_{11}} a_1^{h_{12}} \dots a_1^{h_{1l_1}} a_2^{h_{21}} a_2^{h_{22}} \dots a_2^{h_{2l_2}} \dots a_k^{h_{l1}} a_k^{h_{l2}} \dots a_k^{h_{kl_k}} = 1,$$

ahol a h_{ij}-k B-beli tetszőleges szavak, az a_i-k pedig páronként különböző A-beli ismeretlent vagy konstanst jelölnek. Belátjuk, hogy polinomidőben eldönthető, hogy ez azonosság-e.

Ha azonosan 1 ez a szó minden behelyettesítésre, akkor 1-et kapunk akkor is, ha az a_i helyébe a-t írunk, a többi a_j helyébe pedig 1-et. Másrészt, világos, hogy ha tetszőleges B-beli behelyettesítésre $a^{h_{i1}} a^{h_{i2}} \dots a^{h_{il_i}} = 1$ minden egyes i-re, akkor teljesül az is, hogy $(a^t)^{h_{i1}} (a^t)^{h_{i2}} \dots (a^t)^{h_{il_i}} = 1$, azaz $(a_i)^{h_{i1}} (a_i)^{h_{i2}} \dots (a_i)^{h_{il_i}} = 1$. Így

$$a_1^{h_{11}} a_1^{h_{12}} \dots a_1^{h_{1l_1}} a_2^{h_{21}} a_2^{h_{22}} \dots a_2^{h_{2l_2}} \dots a_k^{h_{l1}} a_k^{h_{l2}} \dots a_k^{h_{kl_k}} = 1$$

pontosan akkor azonosság, ha külön-külön $a^{h_{i1}} a^{h_{i2}} \dots a^{h_{il_i}} = 1$ minden i-re. Vagyis elegendő csak az $a^{h_1} a^{h_2} \dots a^{h_l} = 1$ alakú egyenlőségekről eldönteni, hogy azonosságok-e.

Jelöljük az ismeretleneket (és a konstansokat is) x_j-vel. Legyen h_i-ben az x_j B-beli ismeretlen (vagy konstans) kitevője k_{ij}.

Mivel $\operatorname{Aut} A$ Abel, ezért $a^{b_1 b_2} = a^{b_2 b_1}$, így a fenti szó pontosan ugyanaz, mint az $a^{x_1^{k_{11}} x_2^{k_{12}} \dots x_n^{k_{1n}}} a^{x_1^{k_{21}} x_2^{k_{22}} \dots x_n^{k_{2n}}} \dots a^{x_1^{k_{l1}} x_2^{k_{l2}} \dots x_n^{k_{ln}}}$ szó. Ekkor minden egyes B-beli x_j változóhoz (vagy konstanshoz) létezik egy 1 és $p-1$ közé eső y_j egész szám, hogy $a^{x_j} = a^{y_j}$, amiből következik, hogy a fenti szó megegyezik az

$$a^{y_1^{k_{11}} y_2^{k_{12}} \dots y_n^{k_{1n}}} a^{y_1^{k_{21}} y_2^{k_{22}} \dots y_n^{k_{2n}}} \dots a^{y_1^{k_{l1}} y_2^{k_{l2}} \dots y_n^{k_{ln}}}$$

szóval. Ez viszont pontosan akkor 1, ha

$$p \mid y_1^{k_{11}} y_2^{k_{12}} \dots y_n^{k_{1n}} + y_1^{k_{21}} y_2^{k_{22}} \dots y_n^{k_{2n}} + \dots + y_1^{k_{l1}} y_2^{k_{l2}} \dots y_n^{k_{ln}},$$

ahol tehát y_j egy olyan (ismeretlen vagy fix) egész szám, mely 1 és $p-1$ közé esik, k_{ij} pedig nemnegatív egész szám, amiket meghatározott az eredeti egyenlőség.

Persze itt az y_j-k nem biztos, hogy tetszőleges 1 és $p-1$ közötti számot felvehetnek, hanem Z_p multiplikatív csoportjának egy (a G által) meghatározott H részcsoportjából vehet fel értékeket.

A bizonyítás befejezését az alábbi lemma szolgáltatja:

8. lemma. *Legyen F_q a $q = p^\alpha$ elemű véges test, $H \le F_q^*$ a multiplikatív csoport egy részcsoportja. Ekkor polinomidőben ellenőrizhető az $y_1^{k_{11}} y_2^{k_{12}} \dots y_n^{k_{1n}} + y_1^{k_{21}} y_2^{k_{22}} \dots y_n^{k_{2n}} + \dots + y_1^{k_{l1}} y_2^{k_{l2}} \dots y_n^{k_{ln}}$ polinomról, hogy minden H-beli behelyettesítésre 0 lesz-e.*

Bizonyítás. F_q^* ciklikus, legyen a generátora g. Ekkor H is ciklikus, legyen az ő generátora g^t. Ez azt jelenti, hogy y_j éppen g^t hatványait veheti fel. Írjunk most minden y_j helyébe z_j^t-t. Ekkor az eredeti polinom egy H-beli behelyettesítéséhez létezik az új polinomnak egy F_q^*-beli behelyettesítése, amire a két polinom ugyanaz, és fordítva, az új polinom egy F_q^*-beli behelyettesítéséhez van az első polinomnak egy H-beli behelyettesítése (konkrétan pl. $y_j = z_j^t$), amelyre a két polinom egyenlő. Vagyis elegendő a $z_1^{tk_{11}} z_2^{tk_{12}} \dots z_n^{tk_{1n}} + z_1^{tk_{21}} z_2^{tk_{22}} \dots z_n^{tk_{2n}} + \dots + z_1^{tk_{l1}} z_2^{tk_{l2}} \dots z_n^{tk_{ln}}$ polinomot vizsgálni F_q^*-beli behelyettesítésekkel. Mivel $z_j^{q-1} = 1$, ezért elegendő a kitevőket mod $q-1$ nézni.

Állítjuk, hogy ez a polinom pontosan akkor lesz minden F_q^*-beli behelyettesítésre 0, ha minden F_q-beli behelyettesítésre 0. Az egyik irány persze triviális.

A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy a fenti polinom minden F_q^*-beli behelyettesítésre 0, de van egy olyan $z_j = u_j$ behelyettesítés, amire nem 0 a polinom értéke. Legyen olyan ez a behelyettesítés, melyre az u_j-k között a legkevesebb 0 van, és legyen pl. $u_r = 0$. Ekkor z_r kivételével írjunk minden z_j helyébe u_r-t, így kapunk egy z_r-ben legfeljebb $q-2$-odfokú polinomot, melynek a 0 nem gyöke, F_q többi eleme viszont igen (az u_j-ki minimális választása miatt). Viszont F_q felett nincs olyan legfeljebb $q-2$-odfokú polinom, melynek pontosan $q-1$ gyöke van.

Vagyis a lemmában szereplő polinom pontosan akkor lesz minden H-beli behelyettesítésre 0, ha a $z_1^{tk_{11}} z_2^{tk_{12}} \dots z_n^{tk_{1n}} + z_1^{tk_{21}} z_2^{tk_{22}} \dots z_n^{tk_{2n}} + \dots + z_1^{tk_{l1}} z_2^{tk_{l2}} \dots z_n^{tk_{ln}}$ polinom 0 lesz minden F_q-beli behelyettesítésre. Ám mivel F_q kommutatív gyűrű, ezért az 1. tétel alapján ez a probléma polinomiálisan eldönthető. ∎

A lemma igazolásával a tétel bizonyítását is befejeztük. ∎

A tételből könnyen adódik az alábbi következmény:

9. következmény. *Ha $G \simeq A \rtimes B$, ahol $A \simeq Z_m$ valamilyen m négyzetmentes számra, valamint* Pol-EQ(B) *P-beli, akkor* Pol-EQ(G) *is P-beli.*

Bizonyítás. Ilyenkor A egyértelműen felírható páronként különböző Z_p-k direkt szorzatára. Ha most tekintjük egy $b \in B$ hatását egy ilyen Z_p-nek a_p generátorán, akkor azt állapíthatjuk meg, hogy a_p^b mindenképpen Z_p-n belül marad. Következésképpen tekintjük minden $p \mid m$-re a megadott polinomot $Z_p \rtimes B$ felett, ami pontosan akkor lesz $A \rtimes B$ felett azonosan 1, ha minden p-re $Z_p \rtimes B$ felett azonosan 1. Az előző tétel alapján viszont ezeket a problémákat el tudjuk dönteni polinomidőben. ∎

Olvasva a tétel bizonyítását, az embernek óhatatlanul is az az érzése támad, hogy az ötlet nincs teljesen kiaknázva. Vegyük észre, hogy a bizonyítás eleje ugyanígy elmondható, ha A is és B is Abel. Ebben az esetben azt kapjuk, hogy az eredeti $A \rtimes B$-beli azonosság ellenőrzése polinomiálisan visszavezethető egy

$$a^{x_1^{k_{11}} x_2^{k_{12}} \dots x_n^{k_{1n}}} a^{x_1^{k_{21}} x_2^{k_{22}} \dots x_n^{k_{2n}}} \dots a^{x_1^{k_{l1}} x_2^{k_{l2}} \dots x_n^{k_{ln}}} = 1$$

alakú azonosság ellenőrzésére, ahol $a \in A$, $x_i \in B$, k_{ij}-k pedig egészek. Követve bizonyításunk gondolatmenetét az x_i-knek megfeleltettünk y_i egészeket, ahol x_i pont úgy hatott a-n konjugálással, mint az y_i-edik hatványraemelés. Általában minden $x_i \in B$ elemnek meg tudunk feleltetni egy y_i elemet A endomorfizmusgyűrűjéből úgy, hogy x_i úgy hat konjugálással az A-beli elemeken, mint az y_i endomorfizmus. Ezzel az ötlettel polinomiálisan vissza tudjuk vezetni a problémánkra az $\mathrm{End}\, A$ egy speciális részgyűrűjében (amit a B-nek megfelelő endomorfizmusok generálnak) azonosságok vizsgálatának problémáját.

Sajnos általában nehéz ezt a bizonyos részgyűrűt meghatározni, ám bizonyos esetekben könnyű kezelni. Például olyankor, ha az endomorfizmusgyűrű mátrixgyűrű. Ezen az ötleten alapul az alábbi tétel:

10. tétel. *Ha $G \simeq A \rtimes B$, ahol $\big(|A|, |B|\big) = 1$, B kommutatív, valamint A elemi Abel, akkor* Pol-EQ(G) *P-beli.*

Bizonyítás. Legyen $A \simeq Z_p^m$. A 7. tétel bizonyításában leírt módot követve tehát elegendő csak azt ellenőrizni, hogy

$$a^{x_1^{k_{11}} x_2^{k_{12}} \ldots x_n^{k_{1n}}} a^{x_1^{k_{21}} x_2^{k_{22}} \ldots x_n^{k_{2n}}} \ldots a^{x_1^{k_{l1}} x_2^{k_{l2}} \ldots x_n^{k_{ln}}} = 1$$

azonosság-e, ahol tehát $a \in A$ változó vagy konstans, x_i-k pedig B-beli változók vagy konstansok. A félig direkt szorzat ad egy $\varphi\colon B \to Aut(Z_p^m) \simeq GL_m(Z_p)$ homomorfizmust, vagyis egy $b \in B$ elemmel való konjugálás tekinthető egy mátrixszal való szorzásnak. Legyen $B' = \mathrm{im}\, \varphi$. Ha most az $x_i \in B$ elemmel való konjugálásnak az $y_i \in B'$ mátrixszal való szorzás felel meg, akkor igazából azt kell ellenőrizni, hogy tetszőleges $a \in A$, valamint $y_i \in B'$ behelyettesítés esetén a

$$\big(y_1^{k_{11}} y_2^{k_{12}} \ldots y_n^{k_{1n}} + y_1^{k_{21}} y_2^{k_{22}} \ldots y_n^{k_{2n}} + \cdots + y_1^{k_{l1}} y_2^{k_{l2}} \ldots y_n^{k_{ln}}\big)(a)$$

vektor 0-e. Ez ekvivalens azzal, hogy tetszőleges $y_i \in B'$ behelyettesítésre a

$$y_1^{k_{11}} y_2^{k_{12}} \ldots y_n^{k_{1n}} + y_1^{k_{21}} y_2^{k_{22}} \ldots y_n^{k_{2n}} + \cdots + y_1^{k_{l1}} y_2^{k_{l2}} \ldots y_n^{k_{ln}}$$

mátrix 0.

Legyen $R \leq M_m(Z_p)$ a B' által generált gyűrű. és tekintsük ezeket a mátrixokat Z_p algebrai lezártja felett (F). Mivel $\mathrm{char}\, F = p \nmid |B|$, ezért a Maschke-tétel alapján R féligegyszerű, azaz felbomlik mátrixgyűrűk direkt összegére. Viszont R kommutatív (hisz B kommutatív), amiből következik, hogy éppen 1×1-es mátrixgyűrűk, azaz testek direkt összege: $R = \oplus_{i=1}^{s} F_{q_i}$. $(B', \cdot) \leq (R, \cdot)$, vagyis $B' \simeq \oplus_{i=1}^{s} H_i$, ahol H_i multiplikatív részcsoportja $F_{q_i}^*$-nak. A fenti kifejezés tehát pontosan akkor adja minden lehetséges behelyettesítésre a 0 mátrixot, ha minden egyes koordinátában 0-t ad. Vagyis minden $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$-re meg kell vizsgálni, hogy az $y_1^{k_{11}} y_2^{k_{12}} \ldots y_n^{k_{1n}} + y_1^{k_{21}} y_2^{k_{22}} \ldots y_n^{k_{2n}} + \cdots + y_1^{k_{l1}} y_2^{k_{l2}} \ldots y_n^{k_{ln}}$ polinom minden egyes H_i-beli behelyettesítésre 0-t ad-e. Ezt viszont a 8. lemma megoldja nekünk. Továbbá ez polinomiális visszavezetés, mivel $s \leq |B|$ szükségképpen teljesül. ■

11. következmény. *Ha $G \simeq A \rtimes B$, ahol A, B kommutatívak, $\big(|A|, |B|\big) = 1$, és A exponense négyzetmentes, akkor* Pol-EQ(G) *P-beli.*

Bizonyítás. Ilyenkor $A \simeq Z_{p_1}^{m_1} \times Z_{p_2}^{m_2} \times \cdots \times Z_{p_k}^{m_k}$-val, ahol $i \neq j$ esetén $p_i \neq p_j$ prímek. Tekintsük most egy $b \in B$ elemnek egy $a_i \in Z_{p_i}^{m_i}$ elemre való hatását. Mivel a p_j prímek páronként relatív prímek, ezért biztosan $a_i^b \in Z_{p_i}^{m_i}$ lesz, hiszen a p_i-Sylow egyértelmű. Vagyis elegendő megvizsgálnunk minden egyes i-re, hogy a megadott polinom minden egyes behelyettesítés esetén 1 lesz-e $Z_{p_i}^{m_i} \rtimes B$-ben. Amennyiben igen, úgy $A \rtimes B$-ben is, ha pedig nem, akkor világos módon $A \rtimes B$-ben sem. Ezzel adtunk egy polinomiális visszavezetést az előző tételben polinomiálisan megoldott problémára. ■

Ezzel nem nilpotens, feloldható csoportok egy meglehetősen nagy osztályáról igazoltuk, hogy a polinomekvivalencia-probléma bonyolultsága P-beli. Ilyen csoportok pl. D_m, ahol m négyzetmentes, a meta-ciklikus csoportok nagy része, S_3, A_4.

Jelenleg a legkisebb csoport, amire a fenti problémák bonyolultsága nem megoldott, az S_4.

Hivatkozások

[1] S. Burris and J. Lawrence, The equivalence problem for finite rings, *Journal of Symbolic Computation,* **15** (1993), 67–71.

[2] M. Goldmann and A. Russell, The complexity of solving equations over finite groups, *Information and Computation,* **178** (2002), 253–262.

[3] H. Hunt and R. Stearns, The complexity for equivalence for commutative rings, *Journal of Symbolic Computation,* **10** (1990), 411–436.

[4] J. Lawrence and R. Willard., *The complexity of solving polynomial equations over finite rings,* kézirat (1997)

[5] Cs. Szabó and V. Vértesi, The complexity of checking identities for finite matrix rings, *Algebra Universalis,* **51** (2004), 439–445.

[6] Cs. Szabó and V. Vértesi, The complexity of the word-problem for finite matrix rings, *Proceedings of the American Mathematical Society,* **132** (2004), 3689–3695.

[7] Cs. Szabó and V. Vértesi, *The* Term$_\Sigma$ *problem for finite rings,* kézirat.

Horváth Gábor

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Algebra és Számelmélet Tanszék
1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/c.

ghorvath@cs.elte.hu

SZÓPROBLÉMA NEM FELOLDHATÓ CSOPORTOK FÖLÖTT

HORVÁTH GÁBOR ÉS MÉRAI LÁSZLÓ[1]

A G csoport fölötti szóprobléma annak eldöntése, hogy egy azonosság teljesül-e G fölött. Az már ismert, hogy véges nilpotens, illetve más feloldható csoportok fölött a probléma polinomiális. Megmutatjuk, hogy a szóprobléma co-NP teljes a véges, nem feloldható csoportok fölött. A problémát a gráf k-színnel való színezésére vezetjük vissza, ahol k a G csoport rendje.

1. Bevezetés

Napjainkban a számítógépek terjedésével és fejlődésével egyre inkább előtérbe kerül az a kérdés, hogy egy adott probléma megoldható-e, eldönthető-e számítógéppel, illetve ha igen, mennyi idő alatt. Az úgynevezett szóprobléma bonyolultsága egyre nagyobb teret hódít algebrai vizsgálatokban.

Azon túl, hogy ezek a problémák önmagukban is érdekesek, komoly alkalmazásaik vannak a matematika különböző területein. Az univerzális algebra egyik legfontosabb megoldatlan kérdése, hogy egy algebra benne van-e egy adott algebra által generált varietásban. A probléma kínálja, hogy azt az azonosságok vizsgálatával próbáljuk megoldani.

Eleinte a számítástudományi berkekben foglalkoztak különböző algebrai strukrúrák fölött az úgynevezett szóproblémával. Legelőször a Syracuse-i Egyetem Computer Science tanszékének kutatói találkoztak a problémakörrel, ők vezették be a szóprobléma (*the term equivalence problem*) elnevezést is. A kérdést eredetileg csak véges kommutatív gyűrűk és véges hálók fölött vizsgálták. Kutatásaiknak gyakorlati háttere volt: gyógyszeripari kísérletek összehangolása vezetett a fenti kérdésekre. Bebizonyították, hogy véges kommutatív gyűrűk ($\mathbf{R}$) esetén a szóprobléma P-beli, ha $\mathbf{R}$ nilpotens és NP-teljes egyébként [3]. Később Burris és Lawrence [2] bebizonyították, hogy ugyanez teljesül tetszőleges (nem feltétlenül kommutatív) gyűrűkre is.

A véges csoportok fölötti szóprobléma nagyobb kihívásnak bizonyult. 2004-ben Burris és Lawrence [1] bebizonyította, hogy ha G nilpotens, vagy páratlan n esetén $G \simeq D_n$, akkor a szóprobléma P-beli. Később Horváth és Szabó [4] kidolgoztak

[1]A kutatást az OTKA N67867 és K67870 számú pályázatai támogatták.

egy módszert metaciklikus csoportokra. Bebizonyították például, hogy $G \simeq A \rtimes B$ esetén a szóprobléma G fölött P-beli, ha A, B kommutatív, A exponense négyzetmentes és $\big(|A|, |B|\big) = 1$.

Ross Willard egy 1996-ban Torontóban tartott előadásán említette a következő tételt, mint Lawrence egy eddig még nem publikált eredményét:

1. tétel. *A szóprobléma véges, nem feloldható csoport esetén co-NP teljes.*

A dolgozatban az 1. tételt fogjuk bizonyítani.

2. Csoportok fölötti szóprobléma

Csoport fölötti *kifejezés* $\big(t(x_1, \dots, x_n)\big)$ az x_i változókból, illetve azok inverzéből álló véges szorzat. Minden $t(x_1, \dots, x_n)$ kifejezéshez és G csoporthoz természetes módon definiálhatjuk a $t^G : G^n \to G$ kifejezésfüggvényt. Egy G csoport kielégíti az $s(\vec{x}) \equiv t(\vec{x})$ egyenlőséget, ha a kifejezésekhez tartozó s^G és t^G függvények megegyeznek. Egy G csoport fölötti szóprobléma esetén a $s \equiv t$ egyenlőség teljesülését kell eldönteni. Például A_4-ben, a 4-edfokú alternáló csoportban $x^6 = \big([x_1, x_2]\big)^2$ azonosság, mivel minden A_4-beli helyettesítés esetén mindkét oldal az egységelemet veszi fel értékként.

Véges algebrák fölött ezek a kérdések könnyen eldönthetőek. Ellenőrizni kell az összes lehetséges behelyettesítést, és ha a két kifejezés mindegyiknél megegyezik, akkor ekvivalensek, egyébként pedig nem ekvivalensek. Ha pedig találunk egy behelyettesítést, ahol a két kifejezés értéke nem egyezik meg, akkor polinom időben eldönthető, hogy a két kifejezés nem ekvivalens. Tehát véges algebrák esetén a probléma coNP-beli.

Annak belátása előtt, hogy nem feloldható csoportok esetén a probléma nem csak coNP-beli, hanem co-NP teljes, következzék néhány definíció és egyszerűbb állítás (További részleteket ld. [5].)

2. definíció.

(a) *Kommutátor* alatt a következő kifejezést értjük:
$$[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy.$$

(b) Indukció segítségével definiáljuk a $c_r(x_1, \dots, x_{2^r})$ kommutátor kifejezést: $r = 1$ esetén legyen $c_1(x_1, x_2) := [x_1, x_2]$, és $r > 1$ esetén
$$c_r(x_1, \dots, x_{2^r}) := \big[c_r(x_1, \dots, x_{2^{r-1}}), c_r(x_{2^{r-1}+1}, \dots, x_{2^r})\big].$$

(c) G pontosan akkor feloldható, ha létezik olyan $r > 1$, hogy $G \models c_r = 1$, a legkisebb ilyen r a G csoport feloldható hossza.

(d) $a \in G$ esetén legyen
$$[a, G] := \big\langle [a, g] : g \in G \big\rangle.$$

3. lemma.

(a) *Ha* $N \trianglelefteq G$, N *és* G/N *feloldható, akkor* G *is az.*

(b) *Ha* N_1 *és* N_2 *két feloldható normálosztó* G*-ben, akkor az* $N_1 \cdot N_2$ *szorzat is az.*

(c) $[a, G]$ *normálosztó* G*-ben.*

(d) *Ha* G *nem kommutatív, egyszerű csoport, akkor*

$$[a, G] = \begin{cases} 1, & \text{ha } a = 1 \\ G, & \text{ha } a \neq 1. \end{cases}$$

Következzék néhány jelölés és állítás a verbális részcsoportokra vonatkozóan [6].

4. definíció.

(a) Adott a kifejezések egy T halmaza. Legyen

$$T(G) := \bigcup_{t \in T} Rf(t^G).$$

(b) A $T(G)$ által generált részcsoportot verbális részcsoportnak nevezzük, és a következő módon jelöljük:

$$T^\star(G) := \langle T(G) \rangle.$$

(c) $\{1\}$ és G verbális részcsoportok. Ha ezeken kívül nincs más verbális részcsoport, akkor G verbálisan egyszerű részcsoport.

(d) Adott két $s(x_1, \ldots, x_m)$, $t(x_1, \ldots, x_m)$ kifejezés. Ekkor az s_t kifejezést a következőképpen definiáljuk:

$$s_t(x_1, \ldots, x_{mn}) := s\big(t(x_1, \ldots, x_n), t(x_{m+1}, \ldots, x_{2n}), \ldots,$$
$$t\big(x_{(m-1)n+1}, \ldots, x_{mn}\big)\big).$$

(e) G véges csoport esetén legyen d_G olyan pozitív egész, melyre G generátorainak minden X halmazára

$$G = \bigcup_{0 \leq k \leq d_G} X^k.$$

(f) Adott $s(x_1, \ldots, x_m)$ kifejezés és G véges csoport esetén legyen

$$s_G(x_1, \ldots, x_{md_G}) = \prod_{i=0}^{d_G - 1} s\big(x_{im+1}, \ldots, x_{(i+1)m}\big),$$

ahol $x_1, \ldots, x_{md_G}$ páronként különböző változók.

5. lemma.

(a) *Minden verbális részcsoport normálosztó.*

(b) *Minden véges csoportnak létezik maximális feloldható verbális részcsoportja.*

(c) *G véges csoport esetén, ha $T = \{t_1, \dots, t_k\}$, legyen $t := t_1 \cdot \ldots \cdot t_k$. Ekkor*

$$T^\star(G) = t_G(G).$$

(d) *Ha G csoport, $V < G$ verbális részcsoport, akkor előáll egy kifejezés értékkészleteként.*

A bizonyítás során fontos fogalom a kifejezés hossza. Egy kifejezés hosszát a következőképpen definiálhatjuk:

6. definíció. Indukció segítségével definiáljuk egy kifejezés hosszát: Egy változó, vagy annak inverzének hossza legyen 1. Továbbá, ha s, t két kifejezés, melyek hossza a, b, akkor az $s \cdot t$ szorzat hossza legyen $a + b$.

7. lemma.

(a) *Az s_t hossza az s, illetve t kifejezések hosszának szorzata.*

(b) *Az s_G hossza az s hosszának és d_G-nek a szorzata.*

Mivel $G \models s \equiv t$ pontosan akkor teljesül, ha $G \models st^{-1} \equiv 1$, elég a $t \equiv 1$ típusú egyenlőségekkel foglalkozni. A következő állítás kitüntetett szerepet játszik az 1. tétel bizonyításában.

8. állítás. *Legyen G véges csoport.*

(a) *V verbális részcsoport esetén legyen s olyan kifejezés, hogy $s(G) = V$. Ekkor minden t kifejezésre:*

$$V \models t \equiv 1 \iff G \models t_s \equiv 1.$$

(b) *Tegyük fel, hogy G nem feloldható, de az összes valódi verbális részcsoportja az. Legyen V a maximális feloldható részcsoport G-ben. Legyen r a V feloldható hossza. Ekkor minden t kifejezésre:*

$$G/V \models t \equiv 1 \iff G \models c_{rt_G} \equiv 1.$$

(c) *Ha G-nek nincs valódi verbális részcsoportja és $N \lhd G$, akkor minden t kifejezés esetén*

$$G \models t \equiv 1 \iff G/N \models t \equiv 1.$$

Bizonyítás.

(a) Legyen $t = t(x_1, \dots, x_n)$ és $s = s(x_1, \dots, x_m)$. Legyen továbbá

$$\vec{y}_i = (y_{i1}, \dots, y_{im}), \quad i = 1, \dots, n$$

és

$$t_s(y_1,\dots,y_{nm}) = t\big(s(\vec{y}_1),\dots,s(\vec{y}_n)\big).$$

Mivel $\vec{y}_i$ végigfut a G^m elemein, ezért $s(\vec{y}_i)$ végigfut a V elemein. Így a $(h_1,\dots,h_n) \in V^n$ esetén ha $t(h_1,\dots,h_n) \neq 1$, akkor $s(\vec{y}_i) = h_i$ választással $t_s \neq 1$.

Másrészről, ha $t_s \not\equiv 1$ G fölött, akkor létezik olyan $\vec{y}_1,\dots,\vec{y}_n$ helyettesítés, hogy $t_s \neq 1$. Ekkor $h_i = \vec{y}_i$ választással kapjuk, hogy $t(h_1,\dots,h_n) \neq 1$, azaz $t \not\equiv 1$ V fölött.

(b) Legyen $t_G = t_G(x_1,\dots,x_m)$. Ha $t \equiv 1$ G/V felett, akkor $t_G(G) \leq V$, így $t_G(G)$ feloldható és $c_{rt_G} \equiv 1$ G felett. Másrészről, ha $t \not\equiv 1$ G/V fölött, akkor $t_G(G)$ nem föloldható, és $t_G(G) = G$. Tehát léteznek $g_1,\dots,g_{2^r} \in G$ elemek, hogy $c_r(\vec{g}) \neq 1$, illetve $\vec{y}^i$ m-esek, hogy $t_G(\vec{y}^i) = g_i$. Ekkor $c_{rt_G}(\vec{y}^1,\dots,\vec{y}^{2^r}) \neq 1$, azaz $c_{rt_G} \not\equiv 1$ G fölött.

(c) Ha $t \equiv 1$ G felett, akkor nyilván $t \equiv 1$ G/N fölött. Tegyük fel, hogy $t \equiv 1$ G/N fölött. Ekkor $t_G(G) \leq N$. Mivel $t_G(G)$ verbális, így $t_G(G) = \{1\}$, adódik, hogy $t \equiv 1$ G fölött. ∎

3. Co-NP teljesség bizonyítása

A szóprobléma egy véges G csoport fölött nyilván co-NP-beli: annak ellenőrzéséhez, hogy $t(\vec{x}) \equiv 1$ nem teljesül G fölött, elég egy $\vec{g}$ tanú melyre $t^G(\vec{g}) \neq 1$. Adott $\vec{g}$ esetén a $t^G(\vec{g})$ érték kiszámítása pedig polinomiális időben végezhető. A tétel bizonyításához elég mutatni egy NP-teljes problémát és egy polinomiális visszavezetést a G fölötti szóproblémára. A legelegánsabb választásnak a k-színezés problémája bizonyult, ahol k a G csoport rendje, és G egyszerű, nem kommutatív csoport. Ezután az általános esetet a nem feloldható részcsoportokra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk.

9. tétel. *Legyen G véges, egyszerű, nem kommutatív csoport. Ekkor a szóprobléma co-NP teljes.*

Bizonyítás. Legyen $k = |G|$. A csoport egyszerű és nem kommutatív, így $k \geq 60$. Polinomiálisan visszavezetjük a gráf k színnel való színezését a szóproblémára. Legyen $\Gamma = (V, E)$ egy tetszőleges egyszerű gráf többszörös és hurokél nélkül, $V = \{v_1,\dots,v_n\}$ és $E = \{e_1,\dots,e_m\}$. Γ pontjait szeretnénk színezni G elemeivel. v_i színe legyen g_i. Megadunk egy t kifejezést G fölött, hogy $t(g_1,\dots,g_n) \neq 1$ pontosan akkor, ha a gráf k-színezhető.

A 3. lemma alapján $[g, G] = G$ minden $g \neq 1$ csoportelemre. Legyen d_G a 4. definícióban definiált konstans. Ez a konstans csupán G-től függ, és minden $g \in G$ elemre

$$G = [g, G] = \prod_{i=1}^{d_G} [g, y_i].$$

Legyen

$$S(x, y_1, \ldots, y_{d_G}) = S(x, \vec{y}) = \prod_{k=1}^{d_G} [x, y_k].$$

Minden $v_i \in V$ ponthoz rendeljük hozzá az x_i változót, és minden $e = (v_i, v_j)$ él esetén legyen

$$S_{i,j}(\vec{y}) = S(x_i x_j^{-1}, \vec{y}).$$

Ekkor $S_{i,j}(G) = 1$ pontosan akkor, ha $x_i = x_j$ és $S_{i,j}(G) = G$ pontosan akkor, ha $x_i \neq x_j$. $S_{i,j}$ hossza csupán G-től függ: minden kommutátor 3 változót tartalmaz, kétszer ismételve, a d_G tagú szorzat összesen $6d_G$ hosszú.

Definiáljuk most a t kifejezést. Legyen $e = (v_i, v_j)$ Γ egy éle, és legyen

$$t_e(\vec{y}) = S_{i,j}(\vec{y}) = S(x_i x_j^{-1}, \vec{y}).$$

Legyenek $e_1, \ldots, e_m$ Γ élei, és r olyan, hogy $2^{r-1} < m \leq 2^r$, továbbá

$$t = c_r(t_{e_1}, t_{e_2}, \ldots, t_{e_{m-1}}, t_{e_m}, \ldots, t_{e_m}).$$

Itt a t_{e_i} kifejezésekben az $\vec{y}$ változók páronként különböznek. Így összesen $d_G 2^r$ darab „y" változó szerepel. Ekkor t hossza $6d_G \cdot 4^r \leq 6d_G(2m)^r = 24 d_G m^2$ tehát Γ méretének polinomja.

Igazoljuk, hogy $t \not\equiv 1$ G fölött pontosan akkor, ha Γ k-színezhető. Először tegyük fel, hogy Γ k színezhető a G elemeivel és legyen a v_i színe g_i. Ekkor az $x_i = g_i$ helyettesítéssel minden e élre kapjuk, hogy $t_e(G) = G$. Mivel G nem feloldható, $c_r \neq 1$ G fölött, így $t \neq 1$. Másrészről tegyük fel, hogy Γ nem k-színezhető. Ekkor minden színezésnél van egyszínű e él. Ekkor $t_e = 1$, így $t = 1$ is minden helyettesítésnél, azaz $t \equiv 1$. ∎

10. lemma. *Legyen V a G egy verbális részcsoportja. Ha a szóprobléma V fölött co-NP teljes, akkor G fölött is az.*

Bizonyítás. Polinomiálisan visszavezetjük a V fölötti problémát a G fölötti problémára. Minden V-beli $t(x_1, \ldots, x_n)$ kifejezés esetén mutatunk egy G-beli t' kifejezést, hogy $t \equiv 1$ V fölött pontosan akkor, ha $t' \equiv 1$ G fölött.

Mivel V verbális, ezért létezik G fölött olyan $s(x_1, \ldots, x_n)$ kifejezés, hogy $s(G) = V$. Legyen $t' := t_s$. Ekkor $t \equiv 1$ V fölött pontosan akkor, ha $t' \equiv 1$ G fölött.

A visszavezetés polinomiális, ugyanis t' hossza a t és az s hosszának szorzata, ahol a második tag csupán a csoporttól függ. ∎

Ezek után már bizonyíthatjuk az 1. tételt.

Az 1. tétel bizonyítása. G rendje szerinti indukcióval bizonyítjuk a tételt.

Első eset: Létezik egy V nem triviális, nem feloldható verbális részcsoport G-ben. Mivel $|V| < |G|$, ezért az indukciós feltevés miatt a probléma V fölött co-NP teljes. Ekkor azonban G fölött is a 10. lemma alapján.

Második eset: Nincsen nem triviális, nem feloldható, verbális részcsoport, de van nem triviális feloldható részcsoport. Legyen V a legnagyobb feloldható verbális részcsoport, és jelölje r a csoport feloldható hosszát. A G/V faktorcsoport nem feloldható. Mivel $|G/V| < |G|$, ezért az indukciós feltétel miatt G/V fölött a probléma co-NP teljes. Polinomiálisan visszavezetjük a G/V fölötti szóproblémát a G fölötti problémára.

Legyen t egy G/V feletti kifejezés. A 8. állítás alapján $t \equiv 1$ G/V felett pontosan akkor, ha $c_{rt_G} \equiv 1$ G fölött. c_{rt_G} hossza a c_r és a t_G hosszának szorzata, ahol az utóbbi a t hosszának és a d_G-nek a szorzata. Az utolsó tag és a c_r hossza csak a csoporttól függ, így a t hosszának polinomja.

Harmadik eset: Nincs verbális részcsoport G-ben. Ha G egyszerű akkor a 9. tétel alapján készen vagyunk. Ellenkező esetben legyen N normálosztó G-ben, és t egy kifejezés. A 8. állítás alapján tudjuk, hogy $t \equiv 1$ G fölött pontosan akkor, ha $t \equiv 1$ G/N fölött. A G/N faktorcsoport nem feloldható, mert G' verbális, így $G' = G$. Így az indukciós feltevés miatt a G fölötti probléma co-NP teljes. ∎

4. Problémák

A véges csoportok fölötti szóproblémák vizsgálata még közel sem teljes.

11. probléma. Adjon algebrai jellemzést a véges csoportok osztályára, melyekben a szóprobléma polinomiális illetve co-NP teljes!

Az még máig nem világos, hogy vajon minden véges csoport besorolható-e ebbe a két osztályba.

12. probléma. Van-e polinomiális/co-NP teljes dichotómia a véges csoportok fölötti szóprobléma esetén?

Máig nem tudjuk, mely osztályba soroljuk a legkisebb csoportot, mely se nem nilpotens, se nem metaciklikus:

13. probléma. Találja meg az S_4 fölötti szóprobléma komplexitását!

Hivatkozások

[1] S. Burris and J. Lawrence, Results on the equivalence problem for finite groups, *Algebra Universalis,* **52** (2004), no. 4, 495–500 (2005).

[2] S. Burris and J. Lawrence, The equivalence problem for finite rings, *Journal of Symbolic Computation,* **15** (1993), 67–71.

[3] H. Hunt and R. Stearns, The complexity for equivalence for commutative rings, *Journal of Symbolic Computation,* **10** (1990), 411–436.

[4] G. Horváth and Cs. Szabó, The complexity of checking identities in groups, *International Journal of Algebra and Computation,* **16** (2006), no. 5, 931–940.

[5] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups,* Springer-Verlag (New York, Berlin, Heidelberg, 1995).

[6] H. Neumann, *Varieties of groups,* Springer-Verlag (Berlin, 1967).

Horváth Gábor és Mérai László

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Algebra és Számelmélet Tanszék
1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/c.

ghorvath@cs.elte.hu
merai@cs.elte.hu

A MÉRGEZETT CSOKOLÁDÉ REJTÉLYE

HORVÁTH GÁBOR ÉS MOLNÁR SÁSKA ILDIKÓ[1]

A mérgezett csoki nevű 50 éves játék megjelenésétől kezdve a matematikusok érdeklődésének középpontjában áll. Már akkor sincs szinte semmi információnk a nyerő stratégiáról, amikor egy $3 \times n$-es táblán játszunk. Mutatunk egy új megközelítést és egy köbös algoritmust a nyerő mezők megkeresésére. Többek között bebizonyítjuk, hogy végtelen sok kezdő nyerő mező van a harmadik sorban.

1. Bevezetés

A mérgezett csoki játék évtizedek óta a figyelem középpontjában áll. A játéknak egyszerű szabályai vannak, ám ennek ellenére már több mint 20 éve dacol az összes próbálkozással, ami az elemzésére irányul. Bizonyos esetekben ismerjük a stratégiát, általában azonban nem.

Csákány Béla könyve alapján a játék a következő: „Számtanfüzetben keretezzünk be egy m és n egység oldalú téglalapot. Mezői megadására ... a nemnegatív egész számokat használhatjuk. A játék kezdete előtt jelöljük meg – »ikszeljük ki« – a délnyugati sarokban álló $(0,0)$ négyzetet. A játszma abban áll, hogy Anna és Balázs felváltva kiikszelnek egy még üres (i,j) négyzetet, és azzal együtt az összes olyan (s,t) négyzetet is, amelyek (i,j)-ből északra és keletre haladva elérhetők, vagyis az összes olyan (s,t) négyzetet, amelyre $i \leq s$, $j \leq t$. Aki nem tud ikszelni, az veszít." [5]

A játékot David Gale [8] találta ki 1982-ben, és GNIM-nek nevezte el. Ám a G betű hozzáadás a jól ismert NIM játékhoz nem volt jogos, ugyanis a játék speciális esete a korábban Fred Schuh [10] által bevezetett ún. osztójátéknak. A játék mégsem GNIM, vagy divisor game néven vált ismertté a világon, hanem CHOMP néven. A „chomp" angol szó jelentése: csámcsog, rágcsál. De mi köze van ennek a szónak a játékhoz? Thomas S. Ferguson [7] cikkében elmeséli, hogy a játékot egy tábla csokoládéval játsszák, melynek bal felső sarka mérgezett. A két játékos felváltva törhet a csokoládéból úgy, hogy kijelöl egy mezőt, s mindent letör, ami ettől a mezőtől jobbra vagy alatta van. Az veszít, aki kénytelen a mérgezett darabot letörni. Ferguson említést tesz egy internetes cikkről is, ahol a játékot ki lehet próbálni. (`http://207.106.82.89/Puzzles/Chomp/Chomp.htm`)

[1] A kutatást az OTKA N67867 és K67870 számú pályázatai támogatták.

Ismert, hogy mindig a kezdőnek van nyerő stratégiája, valamint ismert egyszerű nyerő stratégia $n \times 2$-es, valamint $n \times n$-es csokoládék esetén. Annál meglepőbb, hogy már $n \times 3$-as csokoládé esetén sem tudunk mondani szinte semmit. David Gale 100 \$-t ajánlott fel az $n \times m \times k$-as játék teljes elemzéséért.

A problémát a fent említetteken túl vizsgálta J. H. Conway ([4], [1]). Hivatkozik David Gale és Fred Schuh munkáira. Azonban a játékkal kapcsolatban csak néhány nyerő állást említ meg, lényegesen nem jut közelebb a nyerő stratégiához.

Az egyik legutolsó cikket, ami a játékkal kapcsolatban megjelent, Doron Zeilberger [13] írta. Ő is megfogalmaz egy-két szabályt, amelyek speciális elrendezések esetén mondanak valamit, valamint feltérképezte a nyerő állásokat, ha az utolsó oszlopban 115-nél kevesebb mező van. Zeilberger [11] cikkében tárgyalja, hogy hogyan használható fel a számítógép a játék elemzéséért folytatott harcban. Írt is egy programot [12], mely az összes nyerő mezőt kilistázza egy adott táblára.

Az ezzel kapcsolatos kérdéskör Magyarországon is nagy népszerűségnek örvend. Noha Csákány Béla [5] könyvében úgy emlegeti, mint Gale lefedős játéka, a köztudatba inkább téglalapos játékként, vagy mérgezett csoki játékként vonult be. Pósa Lajos a tehetséggondozó táboraiban rendszeresen fel szokta adni általános iskolás gyerekeknek a 2×8-as, 4×4-es, valamint a 3×4-es speciális eseteket. A Dienes Zoltán kéziratát feldolgozó, Dienes professzor játékai című könyvben is megtalálható, mint „lefedős játék" [6]. Ő is, mint sokan mások, leírja, hogy miért mindig a kezdőnek van nyerő stratégiája, megmutatja a $2 \times n$-es és az $n \times n$-es táblákra a nyerő stratégiát, illetve beszél a speciális 3×4-es tábláról. Megmutatja azt is, hogy az osztójáték és a téglalapos játék ugyanaz. Megmutatja még néhány játékállásról is, hogy az nyerő, de ennél többet ő sem ír. A dolgozat a fenti terminológiák közül végig a mérgezett csokoládé verziót fogja használni.

A játék tehát mind a mai napig aktívan foglalkoztatja az embereket, különösen az $n \times 3$-as eset. Megdöbbentő ugyanis a tény, hogy a játék rendkívül egyszerű, mégsem tudunk hasznos dolgokat mondani a nyerő stratégiáról. Értelmes kérdés például, hogy egyértelmű-e egy adott helyzetben, hogy hova kell lépnünk, hogy biztosan nyerjünk? A válasz azonban nemleges, már $n \times 3$-as csokoládé esetén is van olyan játékállás, amiből elérhető két nyerő mező is. Akkor vajon egyértelmű-e az első nyerő lépés? A válasz erre a kérdésre is tagadó: 10×8-as csokoládé esetén két kezdeti nyerő lépés van. Az $n \times 3$-as esetben nem tudjuk a választ. Valószínűleg egyértelmű a kezdő nyerő lépés, de bizonyítani eddig senki nem tudta.

A dolgozatban (mely [9] átdolgozott változata) az $n \times 3$-as játékot új megközelítésben elemezzük. Előállítjuk a nyerő mezőket egy parciális rekurzív függvény segítségével, majd a továbbiakban ezen függvényt vizsgáljuk tovább. Elsősorban a kezdő nyerő mezőkre koncentrálunk. Csak két kezdő lépés lehet: vagy a középső oszlopba törünk, vagy az utolsóba. Jelölje (A, B, C) azt a játékállást, amikor az első oszlopban A, a második oszlopban B, a harmadik oszlopban pedig C mező van. Ekkor a kezdő lépés (A, B, B) vagy (A, A, C) típusú lehet. Részlet az (A, B, B) nyerő mezők sorozatából: $(3, 1, 1)$, $(4, 2, 2)$, $(6, 3, 3)$, (8,4,4), $(10, 5, 5)$, $\ldots$, $(87, 50, 50)$. Idáig minden szám előfordult (1-től 50-ig), valamint a táblák mérete is monoton nőtt, így az sejthető, hogy ez a két tulajdonság később is megmarad. A sorozat következő eleme azonban $(88, 52, 52)$, vagyis a két sejtés egyike biztosan megdől, konkrétan: a monotonitás. A következő kezdő nyerő lépés ugyanis $(89, 51, 51)$. A 18. tételben belátjuk, hogy a másik sejtés mindig áll. Az (A, A, C) típusú kezdő nyerő mezőket vizsgálva rájöhetünk, hogy itt nem fog minden C előfordulni, sikerült viszont igazolni a 21. tételben, hogy végtelen sok ilyen típusú nyerő kezdő lépés van. Továbbá a 27. állításban megfogalmazunk egy elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy csak 1 nyerő kezdő lépés legyen minden $n \times 3$-as csokoládé esetén.

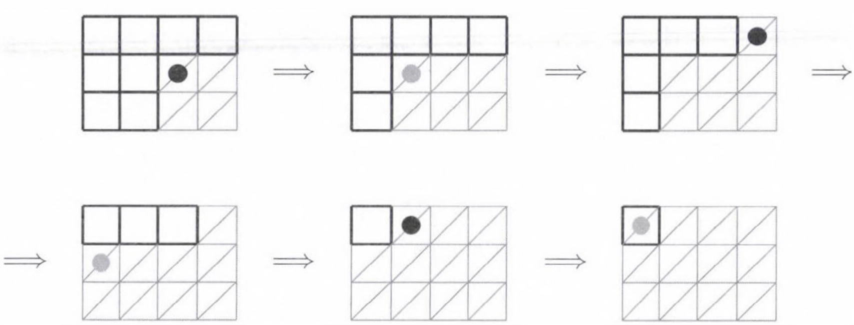
A játék tehát további elemzésre szorul, remélhetőleg ezzel az új megközelítéssel könnyebben meg lehet majd fogni a nyerő stratégiát.

2. Az általános játék

Adott egy $n \times m$-es csokoládé, melynek bal felső sarka mérgezett. Két játékos felváltva tör a csokoládéból egy darabot úgy, hogy kijelöl egy kockát a még meglevő táblán, majd letöri a kijelölt kockát, valamint mindazokat, melyek tőle jobbra és/vagy lefele esnek. Az a játékos veszít, aki kénytelen a mérgezett darabját letörni a csokoládénak.

Jelöljük az i-edik sor j-edik kockáját (i, j)-vel.

1. példa. A két játékos egy 3×4-es táblán játszik. Az **első** játékos letöri a $(2, 3)$-as mezőt, s vele együtt a $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(3, 4)$ mezőket is. Erre a második játékos letöri a $(2, 2)$-es, s vele együtt a $(3, 2)$-es mezőket. Erre az első játékos az $(1, 4)$ mezőt töri le. A második játékos letöri a $(2, 1)$, valamint $(3, 1)$ mezőket, majd az első játékos letöri az $(1, 2)$ és $(1, 3)$ mezőket, és ezzel nyert, hisz a második játékosnak már csak az $(1, 1)$ (mérgezett) kocka maradt (1. ábra).



1. ábra. Példajáték

A játék különböző csokoládéméretekre más és más, különböznek a nyerő stratégiák is. A „stratégialopás" módszerével azonban könnyen látható, hogy az első játékosnak mindig van nyerő stratégiája.

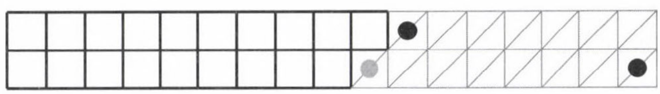
2. állítás. *Az első játékosnak tetszőleges $n \times m$-es csokoládéméret esetén nyerő stratégiája van.*

Bizonyítás. A játékról azonnal látszik, hogy véges, hiszen legfeljebb nm lépésben véget ér, és döntetlen nem fordulhat elő. A véges, kétszemélyes játékok esetén mindig van valamelyik játékosnak nyerő stratégiája [14].

Tegyük fel, hogy nem az első, hanem a második játékosnak van nyerő stratégiája. Ez azt jelenti, hogy bármelyik mezőt törje is le kezdetben az első játékos, arra van egy olyan lépése a második játékosnak, melyből biztosan tud nyerni. Vagyis ha az első játékos az (n, m) mezőt töri le, arra is van egy nyerő lépése, mondjuk (i, j). Azonban ha az első játékos az (i, j) kockát törte volna le kezdésnél, akkor ezzel a lépéssel az előző helyzet állt volna elő, csak most a második játékos következik. Viszont innen a feltételezés miatt az első játékos biztosan nyer, ellentmondásban azzal, hogy a második játékosnak erre is van nyerő válaszlépése. Az ellentmondás bizonyítja az állítást. ■

A játék stratégiája két speciális esetben ismert, ezen esetek elemzése meglehetősen egyszerű [5].

2.1. A $2 \times n$-es játék. Az első játékos játsszon a következőképpen: kezdetben a $(2, n)$ kockát (a jobb alsó sarkot) töri le, majd a továbbiakban ha a második játékos az $(1, i)$ kockát töri, akkor az első játékos az $(2, i-1)$-et, ha pedig a második játékos az $(2, i)$ kockát töri le, akkor válaszul az első játékos az $(1, i+1)$-et töri le.



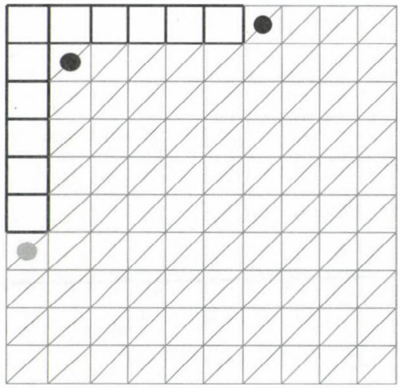
2. ábra. Stratégia a $2 \times n$-es csokoládén

Könnyű látni, hogy a fenti módon az első játékos mindig nyer, mert a játék folyamán végig fenn tudja tartani azt az állapotot, hogy a lépése után az első sorban 1-gyel több mező legyen, mint a másodikban.

2.2. Az $n \times n$-es játék. Az első játékos letöri a $(2, 2)$ mezőt, majd ha a második játékos az $(i, 1)$ mezőt töri le, akkor ő az $(1, i)$ mezőt, ellenkező esetben pedig pont fordítva.

Ez a módszer is egy szimmetrikus helyzet fenntartásán alapszik, amivel végül az első játékos nyer.

A továbbiakban csak az $n \times 3$-as esetet fogjuk vizsgálni, ám ott már sajnos nem fogunk tudni hasonlóan szép elvet mutatni, mely egy szimmetrikus struktúra megőrzésén alapszik.



3. ábra. Stratégia az $n \times n$-es csokoládén

3. Az $n \times 3$-as játék

3.1. Nyerő mezők. Mostantól a játéknak csak azzal a speciális esetével foglalkozunk, melyben a csokoládénak 3 oszlopa van.

Jelölés. Jelöljünk (A, B, C)-vel egy olyan játékállást, melyben a csokoládé első oszlopában A, a második oszlopban B, míg a harmadik oszlopban C mező van még meg. Továbbá ha az egyik játékos törése után az (A, B, C) játékállás állt elő, akkor azt mondjuk, hogy a játékos (A, B, C)-t lépte.

A játék szabályaiból azonnal adódik, hogy egy (A, B, C) játékállásra $A \geq B \geq C$.

3. definíció. Nevezzük (A, B, C)-t *nyerő mezőnek*, ha az egyik játékos ezt lépve képes ezután nyerni, bárhogyan játsszon is a másik játékos. A többi játékállást nevezzük *vesztő mezőnek*.

Nyilván $(1, 0, 0)$ nyerő mező, hiszen ekkor a másik már csak a bal felső sarkot törheti. A definícióból az is világos, hogy nyerő mezőről csak vesztő mezőre léphetünk, viszont minden vesztő mezőről tudunk legalább egy nyerő mezőre lépni. Ez lehetőséget ad a nyerő- és vesztő mezők rekurzív megállapítására.

4. következmény. *Ha (A, B, C) nyerő mező, akkor az alábbiak vesztő mezők:*

(1) (A, B, C_1), ha $C > C_1$,

(2) (A, C_1, C_1), ha $C > C_1$,

(3) (C_1, C_1, C_1), ha $C > C_1$,

(4) (A, B_1, C), ha $B > B_1 \geq C$,

(5) (B_1, B_1, C), ha $B > B_1 \geq C$,

(6) (A_1, B, C), ha $A > A_1 \geq B$.

Bizonyítás. Az (A, B, C) állásból csak a fent felsorolt állásokba léphetünk. ∎

Világos, hogy egy nyerő stratégia ismeretéhez a nyerő mezőket kell ismernünk, egy nyerő stratégia ugyanis abból áll, hogy minden egyes lépésünkkel nyerő mezőkre lépünk. A nyerő mezők felderítését segítik az alábbi függvények.

5. definíció. Legyen $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az alábbi kétváltozós parciális függvény: $f(0,0) = 1$. $B < C$ esetén f nem értelmezett; $B \geq C$-re akkor értelmes, ha nincs B-nél kisebb B_1, melyre $f(B_1, C) = B_1$, valamint nincs C-nél kisebb C_1, melyre $f(C_1, C_1) = C_1$, ekkor az értéke legyen

$$f(B,C) = \min \left\{ A \geq B : \begin{array}{ll} A \neq f(B_1, C), & \text{ha } C \leq B_1 < B \\ A \neq f(B, C_1), & \text{ha } C_1 < C \\ A \neq f(C_1, C_1), & \text{ha } C_1 < C \end{array} \right\}.$$

A fenti definícióból kiviláglik, hogy f parciális *rekurzív* függvény, aminek a legnagyobb előnye, hogy kiszámolható (a későbbiekben látni fogjuk, hogy a bonyolultnak tűnő definíció ellenére meglehetősen egyszerűen).

6. definíció. Legyen $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ az a kétváltozós parciális függvény, melyre $g(B, C) = A$ pontosan akkor, ha (A, B, C) nyerő mező. Amennyiben (B, C)-hez nincs megfelelő A, úgy g nem értelmezett.

$B < C$ esetén tehát g nincs értelmezve, valamint a 4. következmény 6. pontja miatt nem fordulhat elő, hogy egy (B, C) párhoz legyen A és A_1 is, melyre (A, B, C) is és (A_1, B, C) is nyerő mezők lennének, vagyis g definíciója értelmes.

Világos, hogy g ismeretében ki tudunk alakítani nyerő stratégiát, hiszen g valamilyen értelemben „elkódolja" a nyerő lépéseket.

Az alábbi tétel megadja a fenti két függvény közötti kapcsolatot.

7. tétel. *A fent definiált f és g függvények ugyanott vannak értelmezve, és ha egy (B, C) páron értelmesek, akkor $f(B, C) = g(B, C)$.*

Bizonyítás. A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk. Tudjuk, hogy $f(0,0) = g(0,0) = 1$. Világos továbbá, hogy $B < C$ esetén $f(B, C)$ és $g(B, C)$ egyike sincs definiálva.

Tegyük most fel, hogy $f(B_1, C_1) = g(B_1, C_1)$ minden olyan $B_1 \leq B$, $C_1 \leq C$ esetén, ahol $(B, C) \neq (B_1, C_1)$. Belátjuk, hogy ekkor $f(B, C) = g(B, C)$ is teljesül.

Ha $f(B, C)$ nincs értelmezve valamilyen $B \geq C$ esetén, akkor a definíció alapján van $B_1 < B$, hogy $f(B_1, C) = B_1$, vagy van $C_1 < C$, melyre $f(C_1, C_1) = C_1$. Az első esetben az indukció miatt (B_1, B_1, C) nyerő mező, ahova léphetünk az (A, B, C) játékállásból, vagyis (A, B, C) semmilyen A esetén nem lehet nyerő mező, tehát $g(B, C)$ sincs definiálva. A másik esetben (C_1, C_1, C_1) nyerő mező az indukció miatt, és az (A, B, C) játékállásból szintén tudunk mindig ide lépni, vagyis (A, B, C) szintén nem lehet nyerő mező, így $g(B, C)$ ekkor sincs értelmezve.

Tegyük most fel, hogy $f(B,C) = A$. Belátjuk, hogy (A,B,C) nyerő mező, így $g(B,C) = f(B,C)$. Az (A,B,C) játékállásból csak a 4. következményben leírt játékállásokba léphetünk (ha mindegyik vesztő mező, akkor (A,B,C) valóban nyerő mező):

(1) (A,B,C_1), ahol $C > C_1$, de $A \neq f(B,C_1) = g(B,C_1)$, így (A,B,C_1) vesztő mező.

(2) (A,C_1,C_1), ahol $C > C_1$, de $A \neq f(C_1,C_1) = g(C_1,C_1)$, így (A,C_1,C_1) vesztő mező.

(3) (C_1,C_1,C_1), ahol $C > C_1$, de $C_1 \neq f(C_1,C_1) = g(C_1,C_1)$, így (C_1,C_1,C_1) vesztő mező.

(4) (A,B_1,C), ahol $B > B_1 \geq C$, de $A \neq f(B_1,C) = g(B_1,C)$, így (A,B_1,C) vesztő mező.

(5) (B_1,B_1,C), ahol $B > B_1 \geq C$, de $A \neq f(B_1,B_1) = g(B_1,B_1)$, így (A,B_1,B_1) vesztő mező.

(6) (A_1,B,C), ahol $A > A_1 \geq B$, de mivel f definíciójában a legkisebb lehetséges A-t választjuk, ezért léteznek $B_1 \leq B, C_1 \leq C$, hogy tudunk lépni az (A_1,B_1,C_1) játékállásra az (A_1,B,C) játékállásból, valamint $A_1 = f(B_1,C_1) = g(B_1,C_1)$, vagyis (A_1,B,C) vesztő mező kell, hogy legyen.

Az (A,B,C) játékállásból csak vesztő mezőkre léphetünk, így (A,B,C) nyerő mező. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. ■

3.2. A táblázat. Most már rekurzívan ki tudjuk számítani az f függvényt (a nyerő mezőket), amit ábrázolhatunk egy táblázatban úgy, hogy az oszlopok adják az első koordinátát, a sorok pedig a második koordinátát, vagyis $f(B,C) = A$ azt jelenti, hogy A szerepel a C-edik sor B-edik oszlopában (4. ábra).

Lássuk, miként jelentkezik az 5. definíció a táblázatban: Ha $f(B,C)$ definiált, akkor $f(B,C)$ a legkisebb olyan természetes szám, ami legalább B, valamint nem szerepel B-edik oszlopban följebb, nem jelenik meg a C-edik sorban korábban, valamint nem szerepel a főátlóban a C-edik sorral bezáróan.

8. példa. $f(13,11) = 22$, ugyanis $f(13,11)$ az a legkisebb pozitív egész, mely legalább 13, és nem szerepel a 4. ábrában szürke színnel.

A függvény nincs definiálva a C-edik sor B-nél nagyobb oszlopaiban, ha $f(B,C) = B$, vagy ha valahol is előfordul, hogy $f(A,A) = A$. Belátjuk, hogy az utóbbi eset azonban lehetetlen.

9. lemma. *A főátlóban szereplő elem mindig nagyobb, mint a közvetlen felette levő (amennyiben mindkettő létezik), azaz $f(C,C-1) < f(C,C)$. Továbbá $f(C,C)$ és $f(C,C-1)$ egyszerre értelmezett.*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		3	*2*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3				6	7	*5*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
4					8	9	10	*7*	*	*	*	*	*	*	*	*
5						10	**9**	11	12	13	14	15	16	17	18	19
6							11	12	13	*9*	*	*	*	*	*	*
7								13	14	**12**	15	16	17	18	19	20
8									15	14	16	17	*12*	*	*	*
9										16	17	**14**	18	19	20	21
10											18	19	20	21	*14*	*
11												20	19	**22**	**17**	23
12													21	23	22	24
13														24	23	22
14															25	26
15																27

4. ábra. A táblázat eleje

Bizonyítás. $f(C,C)$ és $f(C,C-1)$ definíciója mindössze annyiban tér el egymástól, hogy az előbbiben eggyel több elemet zárunk ki, konkrétan $f(C,C-1)$-et. Vagyis $f(C,C)$ pontosan akkor értelmezett, mint $f(C,C-1)$, és $f(C,C) > f(C,C-1)$. ∎

10. következmény. *Semmilyen A-ra nem lesz $f(A,A)=A$, vagyis (A,A,A) mindig vesztő mező. Így a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája.*

Bizonyítás. Indirekt módon legyen A a legkisebb természetes szám, melyre $f(A,A)=A$. Ekkor $f(A,A-1)$ is definiált, és $f(A-1,A-1)\neq A-1$ a feltevés miatt. Az f függvény definíciójából $A \le f(A,A-1) < f(A,A) = A$, ellentmondás. ∎

A következmény alapján az f függvényt egyszerűbben is definiálhatjuk:

11. definíció. Legyen $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ az alábbi kétváltozós parciális függvény: $f(0,0)=1$. $B<C$ esetén f nincs definiálva; $B\ge C$-re akkor van definiálva, ha nincs B-nél kisebb B_1, melyre $f(B_1,C)=B_1$, ekkor az értéke legyen

$$f(B,C)=\min\left\{A\ge B:\begin{array}{ll} A\neq f(B_1,C), & \text{ha } C\le B_1<B\\ A\neq f(B,C_1), & \text{ha } C_1<C\\ A\neq f(C_1,C_1), & \text{ha } C_1<C\end{array}\right\}.$$

Látható tehát, hogy a táblázat meglehetősen egyszerűen és gyorsan tölthető ki: Ha fel akarjuk tölteni az első n sor első m oszlopát, akkor $O(nm)$ helyen kell kiszámolnunk az f függvény értékét, egy érték kiszámolása pedig $O(n+m)$ lépésben megtehető, így a táblázat első $n \times m$-es része $O\big(nm(n+m)\big)$ időben tölthető ki. Ha $n \times 3$-as csokoládéval játszunk, akkor a táblázatnak legfeljebb első n sorára és n oszlopára van szükségünk, amit tehát $O(n^3)$ lépésben kiszámíthatunk.

Továbbá, ha már kiszámoltuk előre a táblázatot, és játszanunk kell a segítségével, akkor sincs nehéz dolgunk. Ha az ellenfél az (A, B, C) mezőre tört, akkor vizsgáljuk meg $f(B, C)$-t! Ha nincs definiálva, akkor annak az az oka, hogy van $B_1 < B$, melyre $f(B_1, C) = B_1$, vagyis (B_1, B_1, C) nyerő mező, törjünk oda! Ha $A_1 = f(B, C)$, és $A = A_1$, akkor nincs mit tenni, törhetünk bárhova, hiszen az ellenfél nyerő mezőre tört, így mi nem tudunk. Ha $A_1 < A$, akkor (A_1, B, C) nyerő mező, valamint elérhető az aktuális játékállásból, ezért törjünk oda! Ha pedig $A < A_1$, akkor ez azt jelenti, hogy amikor kiszámoltuk $f(B, C)$-t (a táblázat C-edik sorának és B-edik oszlopának elemét), akkor ott azért szerepel A-nál nagyobb szám, mert A-t kizártuk, vagyis szerepel a B-edik oszlopban korábban, vagy a C-edik sorban korábban, esetleg a főátlóban korábban. A fenti esetek közül bárhol legyen is A, az egy olyan nyerő mezőt jelent, ahova tudunk törni az (A, B, C) játékállásból, így törjünk oda!

Ez világos módon nyerő stratégia, és az is látszik, hogy az (A, B, C) mezőről a következő lépés kiszámítása $O(B + C)$ műveletet igényel.

Ez a táblázat minden információt tartalmaz a játék nyerő stratégiájáról, így a továbbiakban elegendő ezt a táblázatot vizsgálni.

3.3. A kezdő nyerő mező. Az első nyerő lépés szintén érdekes kérdés: hova törjünk először? Az (A, A, A) játékállásból 3 féle pozícióba tudunk törni: (A, A, C)-be, (A, B, B)-be és (B, B, B)-be, ám az utóbbiról beláttuk, hogy mindig vesztő mező. Az (A, B, B) típusú nyerő kezdőlépések a táblázat főátlójában találhatók, míg az (A, A, C) típusúak a véges sorok végén. Az utóbbiakat *dőlt* számmal jelöltük a 4. ábrában.

Érdekes kérdés, hogy egyértelmű-e mindig a nyerő lépés. Sajnos nem, bizonyos helyekről több nyerő mezőre is törhetünk. Kérdezhetjük azt, hogy egyértelmű-e a nyerő kezdőlépés. Ám erre a kérdésre is nemleges a válasz. Ismert, hogy 8×10-es csokoládé esetén két nyerő kezdő lépés van. Akkor: egyértelmű-e a nyerő kezdő lépés $n \times 3$-as csokoládé esetén? Valószínűleg igen, ám még senkinek sem sikerült bizonyítania. Világos azonban a következő:

12. állítás. *Legfeljebb két kezdő nyerő mező létezhet az $n \times 3$ csokoládé esetén, és ha valóban kettő van, akkor azok (A, B, B) és (A, A, C) alakúak, ahol $C < B$ (5. ábra).*

13. példa. $(14, 14, 10)$ nyerő mező. Ahhoz, hogy legyen egy $(14, B, B)$ típusú nyerő mező is, az kell, hogy a 14-es szám előforduljon a táblázatban a vastagon, szürke színnel szedett helyeken, vagyis $10 < B < 14$ szükséges (5. ábra).

A 12. állítás bizonyítása. Ha (A, B, B) nyerő mező, akkor A szerepel a főátlóban. Ha (A, A, C) nyerő mező, akkor A szerepel az A-adik oszlopban. A főátlóban is,

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1		3	2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2			4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3				6	7	5	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
4					8	9	10	7	*	*	*	*	*	*	*	*
5						10	9	11	12	13	14	15	16	17	18	19
6							11	12	13	9	*	*	*	*	*	*
7								13	14	12	15	16	17	18	19	20
8									15	14	16	17	12	*	*	*
9										16	17	14	18	19	20	21
10											18	19	20	21	*14*	*
11												20	19	22	17	23
12													21	23	22	24
13														24	23	22
14															25	26
15																27

5. ábra. Két nyerő kezdőlépés lehetséges elhelyezkedése

valamint egy oszlopban is legfeljebb egyszer fordulhat elő minden szám, így kettőnél több kezdő nyerő mező nem lehet. Továbbá ha (A, B, B) nyerő mező, akkor az A szám nem fordulhat elő a táblázatban a $B+1$-edik sortól kezdődően, vagy akár a B-edik sorban később, így ha (A, A, C) is nyerő mező, akkor $C < B$. ■

14. tétel. *Minden (B, C) párra, amelyre $f(B, C)$ értelmezett, fennáll az $f(B, C) \leq B + C + 1$ egyenlőtlenség.*

Bizonyítás. A tételt indukcióval bizonyítjuk. A kezdeti eset: $f(0,0) = 1 \leq 0+0+1$. Tegyük fel, hogy a fenti egyenlőtlenség teljesül minden olyan $B_1 \leq B$, $C_1 \leq C$ esetén, ahol $(B_1, C_1) \neq (B, C)$. Amikor kiszámítjuk $f(B, C)$ értékét (ha értelmezve van), bizonyos számokat kizárunk, melyek egyike sem lehet több $B + C$-nél az indukció szerint, vagyis $f(B, C)$-nek nem fogunk $B + C + 1$-nél nagyobb számot választani. Ez pedig éppen a bizonyítandó volt. ■

Hasonlóan igazolhatók az alábbiak:

15. állítás. *Ha $2 \leq C$, akkor $f(B, C) \leq B + C$.*

16. állítás. *Ha $5 < C$, akkor $f(B, C) \leq B + C - 1$.*

17. következmény. *Ha (A, B, B) nyerő mező (és $5 < B$), akkor $A/B < 2$.*

Ha megvizsgáljuk az (A, B, B)-típusú kezdő nyerő mezőket, azt sejtjük, hogy minden B-hez létezik egy megfelelő A, melyre (A, B, B) nyerő mező, valamint

$B = 50$-ig felírva ezeket a nyerő mezőket (ezek éppen a főátlóban megjelenő számok), azt is sejtjük, hogy nagyobb B-hez nagyobb A tartozik, hogy (A, B, B) nyerő mező legyen:

$$(1,0,0),(3,1,1),(4,2,2),(6,3,3),(8,4,4),(10,5,5),(11,6,6),$$
$$\dots$$
$$(72,41,41),(73,42,42),(74,43,43),(76,44,44),(78,45,45),$$
$$(80,46,46),(82,47,47),(83,48,48),(85,49,49),(87,50,50).$$

Érdekes módon a következő (A, B, B) típusú nyerő mező $(88,52,52)$, így a fent megfogalmazott két sejtés legalább egyike hamis. Vajon melyik marad érvényben a táblázat további részében? A monotonitás, vagy minden lehetséges B érték előfordul? A következő (A, B, B) típusú nyerő mező $(89,51,51)$, így a monotonitás megdőlt. A másik sejtés viszont mindig fennáll, precízen:

18. tétel. *Minden B-hez létezik egy $A \geq B$, hogy (A, B, B) egy kezdő nyerő mező.*

Bizonyítás. Az állítás világos az f függvény definíciójából, ugyanis $f(B, B)$ minden B esetén definiálva van. ∎

Vizsgáljuk most az (A, A, C) típusú kezdő nyerő mezőket! Az első szembetűnő tény, hogy $(A, A, 2)$ mindig vesztő mező:

19. állítás. *Ha $B \geq 2$, akkor $f(B, 2)$ értelmezett, és $f(B, 2) = B + 2$.*

Bizonyítás. Könnyű látni, hogy $f(B, 0) = B + 1$ (ez tulajdonképpen az $n \times 2$-es játék), valamint $B > 2$ esetén $f(B, 1)$ nincs definiálva. f definíciójából így már világosan adódik, hogy $f(B, 2) = B + 2$. ∎

Ez azt jelenti, hogy nem minden C esetén tudunk találni megfelelő A-t, hogy (A, A, C) nyerő mező lenne. Nem világos azonban, hogy mely C-kre tudunk megfelelő A-t mutatni, azt azonban be tudjuk bizonyítani, hogy végtelen sok C-hez van A.

Az alábbi megfigyelés egyszerűen következik a táblázat képzési szabályából:

20. állítás. *Ha (A, A, C) nyerő mező, akkor csak véges sok (pontosan $A - C + 1$ darab) olyan (E, F) pár létezik, melyre (E, F, C) nyerő mező. Továbbá: ha (A, A, C) nyerő mező, és $C \leq F \leq A$, akkor egyértelműen létezik hozzá E, hogy (E, F, C) is nyerő mező legyen.*

21. tétel. *Végtelen sok C esetén található olyan A, hogy (A, A, C) nyerő mező legyen.*

Bizonyítás. Tegyük fel az állítással ellentétben, hogy csak véges sok (A, A, C) típusú nyerő mező van. Ez azt jelenti, hogy van olyan N, hogy ha $A \geq N$, akkor nincs (A, A, C) típusú kezdő nyerő mező, így ezekre a A-kra (A, B, B) típusú nyerő mező kell, hogy legyen. Tehát ha $A \geq N$, akkor van hozzá B, hogy $A = f(B, B)$. Legyen M a főátló első N elemének maximuma, azaz $M = \max\{f(B, B) \mid B \leq N\}$. Legyen továbbá P az a szám, ami legfeljebb M, és ezek közül a legutoljára fordul elő a főátlóban; legyen éppen a D-edik sor D-edik oszlopában. Formálisan $D = \max\{B \mid f(B, B) \leq M\}$, és legyen $P = f(D, D)$. Ha most $B > D$, akkor $f(B, B) > M$, így $B > N$ is teljesül, amiből $N \leq D$. Vizsgáljuk most az $X = f(D, D-1)$ elemet. A 9. lemma miatt $X = f(D, D-1) < f(D, D) = P \leq M$, vagyis P definíciója miatt X már nem fordulhat elő a D-edik sor után a főátlóban, a D-edik sor előtt pedig f definíciója miatt nem fordulhat elő. Ám $N \leq D \leq f(D, D-1) = X$ miatt valamikor fel kellene bukkannia a főátlóban X-nek. Az ellentmondás bizonyítja a tételt. ■

3.4. A sorok minimuma

22. definíció. A továbbiakban a véges sorokat *rövid sor*nak, a végtelen hosszú sorokat pedig *hosszú sor*nak nevezzük.

Úgy tűnik, hogy a sorok minimumértékeit és minimumhelyeit érdemes vizsgálni, ugyanis rendkívül érdekes sajátosságokat mutatnak. Először is, az összes kiszámolt értékre igaz, hogy a rövid sorok minimumai éppen a sorok végén helyezkednek el. Ez azt jelenti, hogy ha (A, A, C) kezdő nyerő mező, akkor minden $C \leq B < A$ esetén van C_1, hogy (A, B, C_1) nyerő mező. Másodszor, a minimumok monoton nőnek, a minimumhelyek jobbra tolódnak, valamint a hosszú sorok minimuma éppen a következő rövid sor vége (és egyben minimuma is). A fentiekből már az is következik, hogy csak egyetlen kezdő nyerő mező van $n \times 3$-as csokoládé esetén, ám sajnos a fentiek közül nem tudjuk mindet bizonyítani.

23. definíció. Jelölje M_C a C-edik sor minimumát, valamint B_C azt az oszlopot, amiben M_C fellép. Ekkor $f(B_C, C) = M_C$. A sorok minimumait (ha nem a sor végére esnek) **vastag** betűvel jelöltük a 4. ábrában.

Először a következőt látjuk be:

24. állítás. *A sorok minimumai növekednek, valamint jobbra tolódnak:*

(1) *Ha* $C_1 < C_2$, *akkor* $M_{C_1} \leq M_{C_2}$,

(2) *ha ekkor* $M_{C_1} = M_{C_2}$, *akkor* $B_{C_1} < B_{C_2}$.

Bizonyítás. Jelölje $M = M_{C_1}$ és $B_1 = B_{C_1}$. Tekintsünk egy $C > C_1$-et, és vizsgáljuk, hogy mi lehet $f(B, C)$!

Ha $f(B, C_1)$ értelmezett, akkor $f(B, C_1) \geq M$ azt jelenti, hogy az összes $B \leq K < M$ számot kizártuk valahol a 11. definícióban. Ám mivel a C_1 sor minimuma M, ezért csak az lehet, hogy véve egy fenti K-t, az szerepel a főátlóban, vagy a

B-edik oszlopban már valahol a C_1-edik sor előtt. Mindkét eset azt jelenti, hogy K nem kerülhet be a C-edik sor és a B-edik oszlop metszetébe. Ha még $B < B_1$ is teljesül, akkor $K = M$-re is elmondható a fenti gondolatmenet, $B = B_1$ esetén pedig $f(B, C) \neq M$, mivel a B-edik oszlopban M már szerepelt egy korábbi sorban.

Ha $f(B, C_1)$ nincs definiálva, akkor van olyan $B > L \geq B_1$, hogy $f(L, C_1) = L \geq M$. Viszont ekkor $f(B, C) \geq B > L \geq M$.

A két részt összetéve kapjuk mindkét állítás bizonyítását. ■

25. következmény. *Ha $M_C = B_C$ (azaz a sor minimuma éppen a sor végén van), akkor $M_C < M_{C+1}$, vagyis M_C többé nem lép fel a táblázatban.*

Bizonyítás. A 24. állítás miatt $M_C \leq M_{C+1}$, és ha $M_{C+1} = M_C$ lenne, akkor $M_C = B_C < B_{C+1} \leq f(B_{C+1}, C+1) = M_C$ ellentmondást ad. ■

26. következmény. *Ha $f(C, C) = M_C$ (azaz a sor minimuma a sor legelején van), akkor $M_{C-1} < M_C < M_{C+1}$.*

Bizonyítás. M_C megjelent a főátlóban, vagyis a táblázat további soraiban nem léphet fel, így a 24. állítás miatt $M_C < M_{C+1}$. Tudjuk, hogy $M_{C-1} \leq M_C$, és ha $M_{C-1} = M_C$ lenne, akkor $C - 1 \leq B_{C-1} < B_C = C$, így $B_{C-1} = C - 1$, vagyis $f(C-1, C-1) = M_{C-1}$, de ebben az esetben $M_{C-1} = M_C$ nem léphetne már fel a C-edik sorban. ■

A táblázat ismert részei azt sugallják, hogy a rövid sorok minimumai a sor végén vannak, valamint a rövid sorok hossza nő. Amennyiben ezt tudnánk, úgy az alábbi fontos dolgot bizonyíthatnánk:

27. állítás. *Ha a rövid sorok minimumai éppen a sor végén vannak, akkor $n \times 3$-as csokoládén játszva egyértelmű a kezdő nyerő mező.*

Bizonyítás. A 12. állításban beláttuk, hogy ha (A, A, C) és (A, B, B) egyaránt nyerő mezők, akkor $C < B$ teljesül. Ám ekkor A a C-edik sor végén lenne, vagyis a sor minimuma lenne, és ekkor a 25. következmény miatt többet nem lépne fel a táblázatban. ■

A fenti két észrevétel egyébként nem független egymástól, pontosan:

28. állítás. *Tekintsük az alábbi két állítást:*

(1) *A rövid sorok minimuma éppen a sor végén van.*

(2) *Ha a $C_1 < C_2$ sorok rövidek, a végük a B_1, illetve B_2 oszlopban van, akkor $B_1 < B_2$.*

Ha az első állítás teljesül a C-edik sorig, akkor a második is.

Ha sor minimuma (a harmadik sortól kezdődően) nem lehet a főátlóban, valamint a második állítás teljesül a táblázatban, akkor az első is.

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy az első állítás teljesül. Ekkor egy $C_1 \leq C$ rövid sor vége egyben a minimuma is (legyen ez M_1), és ekkor a 25. következmény miatt a későbbi $C_2 \leq C$ rövid sor M_2 minimuma nagyobb: $M_1 < M_2$, valamint ez a minimum egyben a sor vége is, vagyis az M_2-edik oszlopban lép fel, vagyis valóban később.

Ha a második állítás teljesül a táblázatban, akkor legyen C_1 az első olyan rövid sor, melyre az M_1 minimuma nem a sor végén van. Legyen a sor vége B_1. M_1 fel kell, hogy lépjen a főátlóban, vagy valahol egy sor végén, hiszen az $M_1 \times 3$-as csokoládé esetén az első játékosnak van egy kezdő nyerő lépése. Viszont a főátlóban nem fordulhat elő: a C_1-edik sorig azért nem, mert M_1 fellép később a C_1-edik sorban, később pedig a 24. állítás miatt. Ez viszont azt jelenti, hogy M_1 valamikor a C_1-edik sor után sor végén lép fel, ami viszont $M_1 < B_1$ miatt ellentmond a második állításnak. ■

Látható, hogy a fenti két állítás majdnem ekvivalens a táblázatban, nem világos azonban, hogy a közbeszúrt technikai feltétel (miszerint sor minimuma nem esik a főátlóba) hogyan hagyható el.

4. További megjegyzések

Mint láttuk, a táblázat minden információt tartalmaz a 3 soros mérgezett csoki játékról, így csak a táblázat tulajdonságait kell vizsgálnunk. Már most is rengeteg információnk van a táblázatról, és még több megfigyelésünk.

Megmaradtak a következők:

1. probléma. Teljesülnek-e az alábbi állítások a teljes táblázatra? (Az első 100 000 sorig igen.)

(1) A rövid sorok minimuma a sor végén van;

(2) A rövid sorok hossza nő;

(3) Sor minimuma nem esik a főátlóba (ez a 0. és 2. sorra nem teljesül);

(4) Egy hosszú sor minimuma éppen a következő rövid sor minimuma.

Ha jobban megfigyeljük a hosszú sorokat, akkor észrevehetjük, hogy egy idő után egy hosszú sorban szereplő számok 1-gyel nőnek, ami azt jelenti, hogy ha a C-edik sor hosszú, akkor van egy α, hogy $(A+\alpha, A, C)$ nyerő mezők, ha A elég nagy. Ha ez igaz lenne, akkor közelebb lennénk ahhoz, hogy belássuk, hogy a rövid sorok hossza nő (ám ez a feltétel még nem elegendő). A táblázatnak azonban ez a tulajdonsága nem áll fenn, a $C = 120$-as sor az első, melyben más minta lép fel a hosszú sorban. Konkrétan megfelelően nagy A-ra az fog teljesülni, hogy $\big(A+\alpha+(-1)^A, A, 120\big)$ lesz nyerő mező (alkalmas α konstanssal). Ami viszont igaz, hogy egy hosszú sorban a nyerő mezők (A, B, C) sorozatára teljesül, hogy $A - B$ periodikus lesz. Ezt a tételt Byrnes bizonyította [3]-ban, ám a periódus hossza meglehetősen változatos lehet: $C = 120$ esetén például 2 a hossz, ám előfordul 3-as (pl. $C = 2027$), 4-es (pl. $C = 402$), sőt 9-es periódus is (pl. $C = 6541$). [2]

A táblázat elejét vizsgálva egy másik kérdés is felmerül a hosszú sorokkal kapcsolatban: van-e két egymást követő hosszú sor a táblázatban? Van: a $C = 119$ és a $C = 120$-hoz tartozó sorok egyaránt hosszú sorok.

Vizsgáljuk most közelebbről a főátlót és a fölötte levő átlót! Több érdekes megfigyelést is tehetünk: először is, ha valamikor megtörik a főátlóbeli elemek monotonitása, az azonnal korrigálódik a következő elemmel. Másodszor, az összes természetes szám előfordul a főátlóban vagy a fölötte levő átlóban (ami ekvivalens azzal, hogy ha (A, A, C) nyerő mező, akkor A előfordul valamikor a főátló feletti átlóban). Első ránézésre úgy tűnik, hogy ezen átló elemei növekednek, ám ez nem így van: amikor megtörik a főátló monotonitása, akkor megbomlik a fölötte levő átlóé is.

Tekintsük a kezdő nyerő mezőket, és koncentráljunk elsősorban az A/B és A/C arányokra, ahol (A, B, B), illetve (A, A, C) nyerő mezők. Úgy tűnik, hogy a fenti hányadossorozatok konvergálnak:

2. probléma. Igazoljuk, hogy

(1) az A/C sorozat határértéke $\sqrt{2}$,

(2) az A/B sorozat határértéke $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$!

Egy másik érdekes észrevétel, hogy ha egy adott A-ra B és C azok a természetes számok, melyekre $\left|A/B - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right|$ és $\left|A/C - \sqrt{2}\right|$ minimális, akkor a kezdő nyerő mezők az alábbi hat közül kerülnek ki:

(1) $(A, B-1, B-1)$,

(2) (A, B, B),

(3) $(A, B+1, B+1)$,

(4) $(A, A, C-1)$,

(5) (A, A, C),

(6) $(A, A, C+1)$.

Ez $A \leq 100\,000$ esetén fennáll, valószínűleg később is. Nyilván rengeteg következménye lenne, ha valóban igaz lenne. [2]-ben további információk találhatók ezen arányokkal kapcsolatban.

Látható továbbá, hogy az itt megfogalmazott módszer a nyerő mezők kiszámolására használható az általános esetben is. $n \times m$-es csokoládé esetén a parciálisan rekurzív függvényünknek $m-1$ argumentuma lesz, és a rekurzió abból fog adódni, hogy csak vesztő mezőkről tudunk nyerő mezőre lépni. Vagyis nyerő mező lesz az első olyan mező, amelyről nem tudunk nyerő mezőre lépni. Az 5. definíció mintájára tehát definiálható a nyerő mezőket megadó függvény, amivel már a kezünkben lesz a nyerő stratégia is konkrét n, m-ek esetén. Persze a nyerő mezők kiszámítása, valamint a játék közben annak eldöntése, hogy melyik nyerő mezőre tudunk lépni az aktuális játékállásból, jóval több időt vehet igénybe.

Nem világos azonban, hogy mennyivel jutottunk közelebb egy expliciten megfogalmazható nyerő stratégiához. Remélhetőleg a fenti megközelítés hozzá fog majd segíteni valakit ahhoz, hogy megfossza David Gale-t 100 $-tól.

Hivatkozások

[1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays,* Academic Press (London, 1982).

[2] Andries E. Brouwer, *The game of Chomp,* `http://www.win.tue.nl/ aeb/games/chomp.html`.

[3] Steven Byrnes, Poset game periodicity, *Electr. J. Combin. Number Th.,* **3** (2003).

[4] J. H. Conway, *On Numbers and Games,* Academic Press (London, 1976).

[5] B. Csákány, *Diszkrét matematikai játékok,* Polygon Kiadó (1998), 86–88.

[6] Z. Dienes és, T. Varga, *Dienes Professzor játékai,* Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 1989).

[7] Thomas S. Ferguson, *Game Theory,* Class Notes for Math, **167**, Fall 2000.

[8] D. Gale, A Curious Nim-type game, *Amer. Math. Monthly,* **81** (1974), 876–879.

[9] Andries E. Brouwer, G. Horváth, I. Molnár-Sáska és Cs. Szabó, On the three-rowed Chomp, *INTEGERS, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory,* **5(1)** (2005).

[10] Fred Schuh, The game of divisions, *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde,* **39** (1952), 299–304.

[11] Doron Zeilberger, *Don't ask what can the computer do for Me?, but rather: What can I do for the computer?,* `http://www.math.temple.edu/ zeilberg/Opinion36.html`.

[12] Doron Zeilberger, *Programming Computers to Do Math is at least as much fun as Proving Theorems,* `http://www.math.temple.edu/ zeilberg/Opinion37.html`.

[13] Doron Zeilberger, Three-Rowed CHOMP, *Advances in Applied Mathematics,* **26** (2001), no. 2, 168–179.

[14] Nagy Sára, Fekete István és Gregorics Tibor, *Bevezetés a mesterséges intelligenciába,* LSI Oktató Központ (Budapest, 1999).

Horváth Gábor és Molnár Sáska Ildikó

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Algebra és Számelmélet Tanszék
1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/c.

`ghorvath@cs.elte.hu`
`msi@ludens.elte.hu`

SZAVAK SZÁMA IDEMPOTENS FÉLCSOPORTOKBAN – KÖTEG VARIETÁSOK SZABAD SPEKTRUMA

PLUHÁR GABRIELLA[1]

Megmutatjuk, hogy a köteg varietásokban a szabad algebra méretének logaritmusa $\frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n - \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\sum_{j=1}^{k-3}\frac{1}{j} + O(n^{k-4}\log n)$, ahol k egy, a varietástól függő állandó.

1. Bevezetés

Lokálisan véges varietásoknál gyakran szoros kapcsolat van a varietásban levő algebrák struktúrája és a varietás szabad spektruma között. Egy varietás lokálisan véges, ha benne minden végesen generált (szabad) algebra véges. A leggyakrabban vizsgált eset, amikor a varietás végesen generált. Legyen **A** egy k elemszámú véges algebra, és $\mathcal{V}$ jelölje az **A** által generált varietást. Közismert, hogy az n elem által generált szabad algebra mérete, $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)$ $\mathcal{V}$-ben legfeljebb k^{k^n}. Ha $k \geq 2$, akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$ legalább n. A $\mathcal{V}$ varietás szabad spektrumán a $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sorozatot értjük. Például, a Boole-algebrák varietásának szabad spektruma: $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = 2^{2^n}$.

Ha **G** egy véges csoport, akkor a **G** által generált varietásban az n elem által generált relatív szabadcsoport mérete exponenciális n-ben, ha **G** nilpotens, és dupla-exponenciális, ha **G** nem nilpotens ([9] és [15]). Egy másik eredmény, Theorem 12.3 [10]-ben kongruencia disztributív varietásokkal foglalkozik: ha $\mathcal{V}$ egy nem triviális lokálisan véges kongruencia disztributív varietás, akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| \geq 2^{2^{cn}}$ minden $0 < c < 1$-re és minden elég nagy n-re.

Félcsoport varietásokra eddig kevés eredmény van. 0-egyszerű félcsoportok által generált varietások szabad spektruma [12]-ben, [13]-ben, és [14]-ben található. Mi az idempotens félcsoportok, ún. kötegek, által generált varietások szabad spektrumát vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy a köteg varietásokban a szabad algebra méretének logaritmusa $\frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n - \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\sum_{j=1}^{k-3}\frac{1}{j} + O(n^{k-4}\log n)$, ahol k egy, a varietástól függő állandó.

[1] A szerző köszönetet mond Tóth Árpádnak ([17]) és Balog Antalnak ([1]), amiért módszereket mutattak két változós rekurzív formulák megoldására és becslésére. A kutatást az OTKA N67867 és K67870 számú pályázatai támogatták.

2. Kifejezések

Általában egy $\mathbf{A}$ algebra fölött kifejezésnek nevezünk egy olyan többváltozós műveletet, amely a projekciók és az alapműveletek segítségével kifejezhető. Ha $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ egy n-változós kifejezés, akkor A elemeinek behelyettesítése a változókba meghatároz egy *n-változós kifejezésfüggvényt*, $t^{\mathbf{A}}\ A^n \to A$, $\overline{a} \mapsto t^{\mathbf{A}}(\overline{a})$ $(\overline{a} \in A^n)$.

Az n-változós kifejezésfüggvények halmazát $\mathrm{Clo}_n\,\mathbf{A}$-val jelöljük. Ha $\mathcal{V}$ egy $\mathbf{A}$ által generált varietás, akkor $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = |\operatorname{Clo}_n \mathbf{A}|$.

Legyen $t = t(x_1, \ldots, x_n)$ egy n-változós kifejezés. Egy kifejezésfüggvényt, $t^{\mathbf{A}}$-t, *valódi n-változós*nak hívunk, ha minden változótól függ, pl, ha minden $1 \leq i \leq n$ esetén léteznek olyan $a_1, \ldots, a_{i-1}, a, b, a_{i+1}, \ldots, a_n \in A$ elemek, hogy

$$t^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq t^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

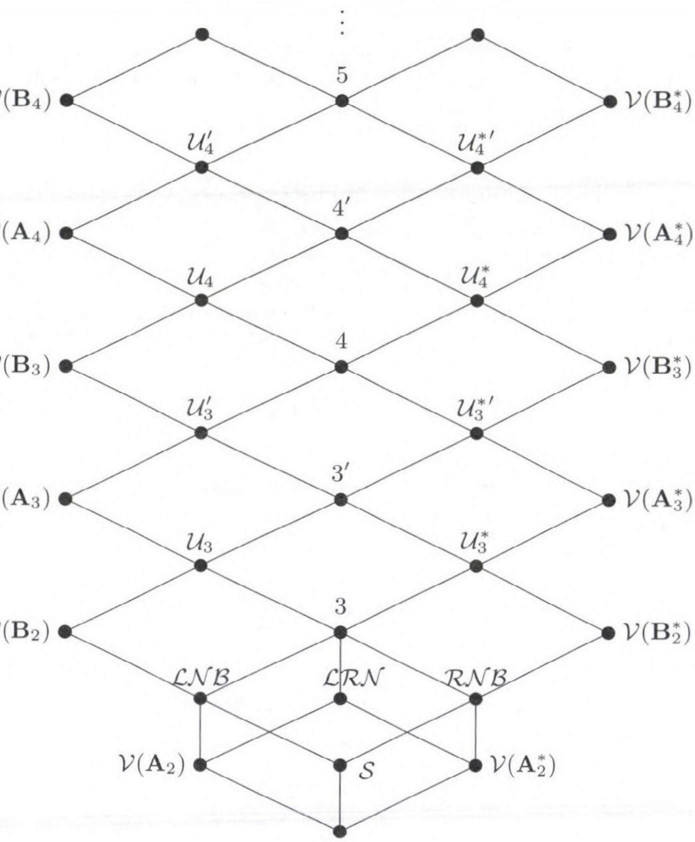
Jelöljük az $\mathbf{A}$ fölötti valódi n-változós kifejezésfüggvényeket $E_n(\mathbf{A})$-val. Itt $E_0(\mathbf{A})$ jelöli $\mathbf{A}$ konstansait. Legyen $p_n(\mathbf{A}) = |E_n(\mathbf{A})|$. Így, az

$$|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)| = |\operatorname{Clo}_n \mathbf{A}| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(\mathbf{A})$$

egyenlőség fennáll. Félcsoportok p_n sorozatával kapcsolatos általános tudnivalók [3]-ban találhatók.

3. Kötegek

A köteg idempotens félcsoport, azaz olyan félcsoport, amelyben az $x^2 = x$ azonosság teljesül. A kötegek fontos szerepet játszanak a félcsoportelméletben. Kötegekkel kapcsolatos általános tudnivalók [11]-ban találhatók. A köteg varietásokat több különböző szempontból jellemezték. A köteg varietások hálójának leírása megtalálható [2]-ben, [4]-ben és [5]-ben. A háló a varietásoknak tíz végtelen sorozatát tartalmazza, valamint hét varietást a háló alján (lásd 1. ábra). Az ábra jobb oldalán és bal oldalán levő varietások unió-felbonthatatlanok, és mindegyiket egy-egy szubdirekt-irreducibilis algebra generálja, $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{A}_i^*$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{B}_i^*$. Ezek leírása [7]-ben megtalálható. Az algebrák az $\{1, 2, \ldots, i\}$ halmaz önmagára képező függvényeinek egy részhalmazával vannak megadva. Minden varietás előáll legfeljebb kettő unió-felbonthatatlan varietás uniójaként. Mindegyik köteg varietás definiálható egyetlen azonossággal (lásd [4]). Hagyományosan a középen levő varietásokat $3, 3', 4, 4', \ldots$-val jelöljük, és a másik két sorozat kisebb sorozatokra bomlik, amiket $\mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4, \ldots, \mathcal{U}_3', \mathcal{U}_4', \ldots, \mathcal{U}_3^*, \mathcal{U}_4^*, \ldots$ és $\mathcal{U}_3^{*\prime}, \mathcal{U}_4^{*\prime}, \ldots$-val jelölünk.



1. ábra. A köteg varietások hálója

4. Szabad spektrum

A háló alján levő kilenc varietás szabad spektruma jól imert.

1. állítás. *A háló alján levő kilenc varietás szabad spektruma a következő*

- $F_{\mathcal{T}}(n) = 1$,
- $F_{\mathcal{V}(A_2)}(n) = F_{\mathcal{V}(A_2^*)}(n) = n$,
- $F_{\mathcal{S}}(n) = 2^n - 1$,
- $F_{\mathcal{LNB}}(n) = F_{\mathcal{RNB}}(n) = n2^{n-1}$,
- $F_{\mathcal{LRN}}(n) = n^2$,
- $F_{\mathcal{V}(B_2)}(n) = F_{\mathcal{V}(B_2^*)}(n) = \sum \binom{n}{k} k!$.

Ezen szint felett levő köteg varietások p_n sorozatait a következő módon lehet kiszámolni (lásd [6] Theorems 4.4 és 5.1).

2. tétel. *Legyen $\mathcal{V}$ egy köteg varietás. Ekkor*

$$p_n(\mathcal{V}) = \sqrt{p_n(\overline{\mathcal{V}})p_n(\underline{\mathcal{V}})},$$

ahol $n \geq 0$, $\overline{\mathcal{V}}$ a legkisebb varietás k vagy k' formájában, ami tartalmazza $\mathcal{V}$-t és $\underline{\mathcal{V}}$ a legnagyobb ilyen, amit $\mathcal{V}$ tartalmaz. Továbbá, ha $k \geq 3$ és $n \geq 0$, akkor

$$p_n(k') = \sqrt{p_n(k)}\sqrt{p_n(k+1)}.$$

Ezért a következő egyenlőségek fennállnak.

3. lemma. *Bármely köteg varietás p_n sorozata kiszámolható $p_n(k)$ $(k \in \mathbb{N})$ sorozatok segítségével.*

$$p_n(\mathcal{V}(A_k)) = p_n(\mathcal{V}(A_k^*)) = \sqrt{p_n(k)}\sqrt{p_n(k+1)},$$
$$p_n(\mathcal{V}(B_k)) = p_n(\mathcal{V}(B_k^*)) = \sqrt{p_n(k')}\sqrt{p_n(k+1')} = \sqrt[4]{p_n(k)p_n^2(k+1)p_n(k+2)},$$
$$p_n(\mathcal{U}_k) = p_n(\mathcal{U}_k^*) = \sqrt{p_n(k)}\sqrt{p_n(k')} = \sqrt[4]{p_n(k)^3 p_n(k+1)},$$
$$p_n(\mathcal{U}_k') = p_n(\mathcal{U}_k^{*\prime}) = \sqrt{p_n(k')}\sqrt{p_n(k+1)} = \sqrt[4]{p_n(k)p_n(k+1)^3}.$$

Tehát elég kiszámolni $p_n(k)$ értékét, és abból könnyen megkapható bármely köteg varietás szabad spektruma.

Az összes köteg által generált varietás p_n sorozatára Gerhard a $p_n(\infty)$ jelölést vezette be. A $p_n(\infty)$ sorozatra a követekező rekurzív formula teljesül (lásd [8]):

$$p_n(\infty) = n^2 p_{n-1}^2(\infty). \tag{1}$$

Továbbá, $p_1(\infty) = 1$, emiatt $p_2(\infty) = 4$, $p_3(\infty) = 144$ stb. $p_n(k)$-ra a formula sokkal bonyolultabb (lásd [6] és [16]):

$$p_n(k) = n^2 p_{k-2}^2(\infty) \prod_{j=k-1}^{n-1} j^2 p_j(k-1), \quad n \geq k \geq 4 \text{ esetén.} \tag{2}$$

A kezdeti értékek

$$p_n(3) = n^2 \quad \text{és} \quad p_n(k) = p_n(\infty), \quad \text{ha } n < k.$$

Alkalmazzuk (2)-t k-ra és $k-1$-re; osztás után azt kapjuk, hogy

$$\frac{p_n(k)}{p_{n-1}(k)} = n^2 p_{n-1}(k-1), \quad n \geq k \geq 4 \text{ esetén.}$$

Megmutatjuk, hogy ez igaz minden n-re és k-ra. Ha $k > n$, akkor (1)-be behelyettesíthetjük $p_n(k) = p_n(\infty)$-t, valamint $p_{n-1}(k) = p_{n-1}(\infty)$ az egyik $p_{n-1}(\infty)$ helyébe és $p_{n-1}(k-1) = p_{n-1}(\infty)$ a másik $p_{n-1}(\infty)$ helyébe. Kapjuk, hogy

$$p_n(k) = n^2 p_{n-1}(k-1) p_{n-1}(k), \quad k > n, \ k \geq 4 \text{ esetén is.}$$

Emiatt

$$p_n(k) = n^2 p_{n-1}(k) p_{n-1}(k-1) \tag{3}$$

általában igaz $n \geq 1$-re és $k \geq 4$-re. Legyen $p(n,k) = \log p_n(k)$. (3)-ban mindkét oldal logaritmusát véve kapjuk, hogy

$$p(n,k) = 2 \log n + p(n-1,k) + p(n-1,k-1) \tag{4}$$

$n \geq 1$, $k \geq 4$ esetén és

$$p(n,3) = 2 \ \log n \quad \text{és} \quad p(1,k) = 0. \tag{5}$$

A (4)-es rekurzív formula megoldásának zárt alakja az (5)-ben levő kezdeti értékekkel

$$p(n,k) = 4 \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=0}^{k-4} \binom{n-m-1}{t} \log m + 2 \log n. \tag{6}$$

4. tétel. *A köteg varietások p_n sorozatára*

$$\log p_n(k) = \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \log n - \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \sum_{j=1}^{k-3} \frac{1}{j} + O(n^{k-4} \log n)$$

teljesül.

Bizonyítás. Rendezük át (6)-ot úgy, hogy különválasztjuk a főtagot.

$$p(n,k) = 4 \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n-m-1}{k-4} \log m +$$
$$+ \left(4 \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{t=0}^{k-5} \binom{n-m-1}{t} \log m + 2 \log n \right)$$

Írjunk $\log n$-et $\log m$ helyébe a hibatagban, és használjuk a

$$\sum_{n=t}^{k} \binom{n}{t} = \binom{k+1}{t+1} \tag{7}$$

azonosságot. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$p(n,k) = 4\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n-m-1}{k-4}\log m + O(n^{k-4}\log n).$$

Felhasználva a

$$\log m = \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{m}\right) \tag{8}$$

egyenlőséget,

$$p(n,k) = 4\sum_{m=1}^{n-1}\binom{n-m-1}{k-4}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{m}\right)\right) + O(n^{k-4}\log n)$$

adódik. Felcserélve az összegzéseket, (7)-t alkalmazva, és a

$$\sum\frac{1}{m}\binom{n-m-1}{k-4} \le n^{k-4}\sum\frac{1}{m}$$

egyenlőtlenséget alkalmazva a hibatag becsléséhez, adódik, hogy

$$\begin{aligned} p(n,k) &= 4\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l}\sum_{m=l}^{n-1}\binom{n-m-1}{k-4} - 4\gamma\sum_{m=l}^{n-1}\binom{n-m-1}{k-4} + O(n^{k-4}\log n) = \\ &= 4\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l}\binom{n-l}{k-3} - 4\gamma\binom{n-1}{k-3} + O(n^{k-4}\log n). \end{aligned}$$

Az $\binom{n-l}{k-3} = \frac{(n-l)^{k-3}}{(k-3)!} + O(n^{k-4})$-t behelyettesítve

$$p(n,k) = \frac{4}{(k-3)!}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{(n-l)^{k-3}}{l} - \frac{4\gamma}{(k-3)!}n^{k-3} + O(n^{k-4}\log n) \tag{9}$$

adódik. Kifejtve a számlálót a binomiális tétel segítségével, csak a fő tagokat megtartva, és a (8)-t újra alkalmazva megkapjuk, hogy

$$\log p_n(k) = \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n + O(n^{k-3}).$$

Ha pontosabb eredményt szeretnénk kapni, akkor (9)-ben minden együtthatót ki kell számolni.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(k-3)!}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{(n-l)^{k-3}}{l} &= \frac{4}{(k-3)!}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{t=0}^{k-3}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}\frac{n^t l^{k-3-t}}{l} = \\
&= \frac{4}{(k-3)!}\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{1}{l}n^{k-3}+\sum_{t=0}^{k-4}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}\frac{n^t l^{k-3-t}}{l}\right) = \\
&= \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\sum_{l=1}^{n-1}\frac{1}{l}+\frac{4}{(k-3)!}\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{t=0}^{k-4}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}n^t l^{k-4-t}.
\end{aligned}$$

(8)-at újra alkalmazva, és az összegzést felcserélve megkapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n &+ \frac{4}{(k-3)!}\sum_{t=0}^{k-4}\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}n^t l^{k-4-t} = \\
&= \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n+\frac{4}{(k-3)!}\sum_{t=0}^{k-4}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}n^t\sum_{l=1}^{n-1}l^{k-4-t}.
\end{aligned}$$

Most helyettesítsünk be $\sum_{l=1}^{n-1} l^{k-4-t} = \frac{n^{k-3-t}}{k-3-t} + O(n^{k-4})$-et.

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n &+ \frac{4}{(k-3)!}\sum_{t=0}^{k-4}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}n^t\frac{n^{k-3-t}}{k-3-t}+O(n^{k-4}) = \\
&= \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n+\frac{4}{(k-3)!}\sum_{t=0}^{k-4}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}\frac{n^{k-3}}{k-3-t}+O(n^{k-4}) = \\
&= \frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\log n+\frac{4}{(k-3)!}n^{k-3}\sum_{t=0}^{k-4}(-1)^{k-3-t}\binom{k-3}{t}\frac{1}{k-3-t}+O(n^{k-4}).
\end{aligned}$$

Vizsgáljuk meg n^{k-3} együtthatójában szereplő összeget. Az összeg $\sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^s\binom{m}{s}}{s}$ az $f(x)=\sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^s\binom{m}{s}x^s}{s}$ függvény értéke az $x=1$ helyen. Deriválva $f(x)$-et

$$f'(x)=\sum_{s=1}^{m}(-1)^s\binom{m}{s}x^{s-1}$$

adódik. Átalakítva az összeget, az

$$f'(x) = \sum_{s=1}^{m} (-1)^s \binom{m}{s} x^{s-1} = \sum_{s=1}^{m} \frac{(-1)^s \binom{m}{s} x^s}{x} = \frac{(1-x)^m - 1}{x} =$$

$$= -\frac{(1-x)^m - 1}{(1-x) - 1} = -\big((1-x)^{m-1} + (1-x)^{m-2} + \ldots + 1\big) = -\sum_{j=0}^{m-1} (1-x)^j$$

összefüggést kapjuk. Az $f'(x)$ függvényt integrálva

$$f(x) = -\sum_{j=1}^{m} \frac{(1-x)^j}{j} + c, \text{ valamilyen } c\text{-re.}$$

Tehát,

$$f(x) = \sum_{s=1}^{m} \frac{(-1)^s \binom{m}{s} x^s}{s} = -\sum_{j=1}^{m} \frac{(1-x)^j}{j} + c. \tag{10}$$

Behelyettesítve $x = 0$-t (10)-be, azt kapjuk, hogy

$$c = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}.$$

Most (10)-be x helyére 1-et helyettesítve megkapjuk, hogy

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{(-1)^s \binom{m}{s}}{s} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}.$$

Végül, helyettesítsünk be $m = k-3$-at és $s = k-3$-at. Ekkor

$$\log p_n(k) = \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \log n - \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \sum_{j=1}^{k-3} \frac{1}{j} + O(n^{k-4} \log n). \quad \blacksquare$$

A többi köteg varietás p_n sorozata kiszámolható a 3. lemma segítségével. A szabad spektrumra, $\mathbf{F}_k(n)$-re kapjuk

5. következmény.

$$\log \mathbf{F}_k(n) = \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \log n - \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \sum_{j=1}^{k-3} \frac{1}{j} + O(n^{k-4} \log n).$$

Bizonyítás.

$$\log \mathbf{F}_k(n) = \log\left(\sum_t \binom{n}{t} p_t(k)\right) = \log\left(\sum_t \binom{n}{t} e^{p(t,k)}\right) = p(n,k) + O(1) =$$
$$= \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \log n - \frac{4}{(k-3)!} n^{k-3} \sum_{j=1}^{k-3} \frac{1}{j} + O(n^{k-4} \log n). \blacksquare$$

Bebizonyítottuk, hogy a köteg varietások szabad spektrumának logaritmusa polinomszor $\log n$ nagyságú. Ez csak egy lépéssel vitt minket közelebb a fő célhoz, a félcsoport varietások szabad spektrumának jellemzéséhez.

1. probléma. Osztályozzuk a félcsoport varietások szabad spektrumát!

Hivatkozások

[1] A. Balog, *személyes kommunikáció.*

[2] A. P. Biryukov, Varieties of idempotent semigroups, *Algebra Logic,* **9** (1970), 153–164.

[3] S. Crvenković, I. Dolinka and N. Ruškuc, The Berman conjecture is true for finite surjective semigroups and their inflations, *Semigroup Forum,* **62** (2001), 103–114.

[4] C. Fennemore, All varieties of bands, *Math. Nachr.,* **48** (1971), 237–262.

[5] J. A. Gerhard, The lattice of equational classes of idempotent semigroups, *J. Algebra,* **15** (1970), 195–224.

[6] J. A. Gerhard, The number of polynomials of idempotent semigroups, *J. Algebra,* **18** (1971), 366–376.

[7] J. A. Gerhard, Some subdirectly irreducible idempotent semigroups, *Semigroup Forum,* **5** (1973), 362–369.

[8] J. A. Green and D. Rees, On semigroups in which $x^r = x$, *Proc. Cambr. Phil. Soc.,* **48** (1952), 35–40

[9] G. Higman, *The order of relatively free groups,* Proc. Internat Conf. Theory of Groups, Canberra 1965, Gordon and Breach Pub., (1967), 153–163.

[10] D. Hobby and R. McKenzie, *The structure of finite algebras,* Contemporary Mathematics no. 76, Amer. Math. Soc., Providence (1988).

[11] J. M. Howie, *An introduction to semigroup theory,* L. M. S monographs, no. 7, Academic Press, London–New York Providence (1976).

[12] K. Kátai and Cs. Szabó, *The free spectra of the variety generated by the 5 element Bandt-semigroup,* Semigroup Forum, végleges formában elfogadva (2006).

[13] K. Kátai and Cs. Szabó, The free spectra of the variety generated by the completely 0-simple semigroups, *Glasgow Journal of Mathematics,* megjelenés alatt (2007).

[14] K. Kátai and Cs. Szabó, *The free spectra of exact varieties,* kézirat (2006).

[15] P. Neumann, Some indecomposable varieties of groups, *Quart. J. Math. Oxford,* **14** (1963), 46–50.

[16] S. Seif and J. Wood, *Asymptotic growth of free spectra of band monoids,* kézirat (2006).

[17] Á. Tóth, *személyes kommunikáció.*

Pluhár Gabriella

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Algebra és Számelmélet Tanszék
1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/c.

plugab@cs.elte.hu

AZONOSSÁGOK 0-EGYSZERŰ FÉLCSOPORTOKBAN

VÉRTESI VERA ÉS SVETLANA PLESCHEVA[1]

A szóprobléma vagy másnéven ekvivalenciaprobléma félcsoportok felett azt a kérdést vizsgálja, hogy két kifejezés mikor vesz fel minden behelyettesítésre azonos értéket. Ebben a cikkben belátom Volkov (2001) sejtését, amely szerint egy konkrét 19 elemű 0-egyszerű félcsoportra a szóprobléma coNP-teljes.

1. Bevezetés

A számítógépek egyre nagyobb térhódítása tapasztalható a matematikai, speciálisan az algebrai kérdések bonyolultságának elemzésében. Azt gondolhatnánk, hogy egy adott algebrai struktúrára vonatkozó állítás ellenőrzése mindössze egy alkalmas program megírásának kérdése. Egy ilyen programnak azonban nemcsak a számítógépek képességei, hanem a matematikai logika is határt szab. Az egyik legtöbbet vizsgált ilyen kérdés a szóprobléma: a feladat annak eldöntése, hogy két adott kifejezés megegyezik-e tetszőleges behelyettesítés mellett.

2002-ig nem volt ismert olyan félcsoport, amelyre a szóprobléma coNP-teljes lenne. Végül Volkov (2002) mutatott egy körülbelül 2^{1700} elemszámú félcsoportot, amelyre a feladat coNP-teljes. Nem sokkal később Kisielewicz (2002) konstruált egy néhány ezer elemű példát. Szabó Csabával (2003) megadtunk egy 13 elemű félcsoportot, amelyre a probléma coNP-teljes. A legkisebb elemszámú példa Klima (2003) eredménye: az úgynevezett Brandt-monoid, amely hatelemű. A 0-egyszerű félcsoportok olyan építőkövei a félcsoportoknak, mint a csoportok körében az egyszerű csoportok. Mindkét esetben a struktúra fő faktorairól van szó. Így remélhető, hogy azon 0-egyszerű félcsoportok karakterizálása, amelyekre a szóprobléma polinomiális, segíthet a félcsoportok általános karakterizálásában is.

Az eddigiekben a 0-egyszerű félcsoportok közül csak olyanokra voltak eredmények, amelyek struktúracsoportjára a szóprobléma coNP-teljes, és ebből automatikusan adódott az eredeti félcsoportra is a coNP-teljesség; illetve a kombinatorikus 0-egyszerű félcsoportokra, amelyekre a probléma polinomiális (Seif, Szabó 2000). E cikkben belátom Volkov (2001) sejtését, amely szerint egy konkrét 19 elemű

[1] A kutatást az OTKA N67867 és K67870 számú pályázatai támogatták.

0-egyszerű félcsoportra a szóprobléma coNP-teljes. Ez a legkisebb olyan példa, amelynek struktúracsoportjára polinomiális a szóprobléma, de magára a félcsoportra mégis coNP-teljes.

2. Előzmények, alapfogalmak

Mivel a szóprobléma bonyolultságelméleti vizsgálata a számítástudomány és az algebra határterületén van, ezért mindkét témakörben rögzíteni kell a jelöléseket, definiálni kell az alapfogalmakat. Ennek a fejezetnek ez az egyik fő célja. Ugyanakkor betekintést szeretnénk adni a szóproblémával kapcsolatos eddigi eredményekbe is.

2.1. Számítási bonyolultság. Nem célunk a bonyolultságelmélet egzakt felépítése, inkább csak a szükséges fogalmak felelevenítése. A témát kimerítően tárgyalja a szakirodalom [15, 17]. A számítási bonyolultság a számítástudomány azon területe, amely annak okát kutatja, hogy egyes problémákat miért olyan nehéz számítógéppel megoldani. Ezen nehézség mértéke alapján az eldöntési problémák, vagy más néven nyelvek, bonyolultsági osztályokba sorolhatók. Most csak azon bonyolultsági osztályokat fogjuk áttekinteni, melyekre a későbbiekben szükségünk lesz, ilyen a P, NP, coNP nyelvosztályok és az NP-teljes, coNP-teljes nyelvek. Azt mondjuk, hogy egy algoritmus polinomiális, ha futásideje a bemenet méretének egy polinomjával becsülhető[1]. Eldöntendő kérdések egy halmaza P-ben van, ha van egy minden bemenetre polinomidőben válaszoló algoritmus. Ilyen például az OSZTÓ nyelv, mely az a és b bemenetekről azt kérdezi, hogy a osztója-e b-nek. A kérdésekre pl. az Euklideszi algoritmus polinomidőben választ ad. Eldöntendő kérdésekből álló halmazt NP-belinek nevezünk, ha az igen válasz egy polinomidőben ellenőrizhető tanúval bizonyítható (ez az osztály épp abban különbözik a P-től, hogy ebben az esetben a tanút nem az algoritmus szolgáltatja, hanem adottnak vesszük, pl. egy orákulum súgja). NP-beli például az ÖSSZETETT nyelv, amely során egy bemenetként kapott a számról kell eldönteni, hogy összetett-e. Hiszen ha a válasz igen, akkor tanúként megadhatjuk egy osztóját, amelyről az előbbiek szerint polinomidőben ellenőrizhető, hogy valóban osztó. Hasonlóan, egy nyelv coNP-ben van, ha a nem válasz bizonyítható polinomiális tanúval. Ilyen például a PRÍM [2] nyelv, melynél egy bemenetként kapott a számról azt kell eldönteni, hogy prím-e. Általában véve, ha egy A nyelv NP-beli, akkor az A^C nyelv, amely azt kérdezi egy bemenetről, hogy nem teljesül-e A, coNP-beli. Azt mondjuk, hogy egy A nyelv polinomiálisan redukálható B nyelvre ($A \preceq_P B$), ha A minden bemenetéhez polinomidőben adható B-nek egy olyan bemenete, amelyre B pontosan akkor igaz, ha A igaz volt az eredeti problémára. A és B polinomiálisan ekvivalens ($A \equiv_P B$), ha $B \preceq_P A$ és $A \preceq_P B$. Egy nyelv NP-teljes, ha minden NP-beli nyelv redukálható rá polinomiáli-

[1] Nem térünk ki rá, hogy pontosan mit is nevezünk algoritmusnak, és milyen egységekben mérjük a tárat, illetve az időt.

[2] A közelmúltban a PRÍM nyelvről megmutatták [1], hogy valójában P-beli is.

san. Tehát valamilyen értelemben az NP-teljes nyelvek a legnehezebbek az NP-beli nyelvek közül. A coNP-teljes nyelvosztály hasonlóan definiálható. Jól ismert NP-teljes problémák: a SAT, mely egy bemenetként kapott konjunktív normálformában adott Boole-formuláról kérdezi, hogy kielégíthető-e; A 3SAT, mely a SAT megszorítása az olyan konjunktív normálformában adott Boole-formulákra, melyekben minden klóz pontosan három literált tartalmaz; Valamint az r-COLOR ($r \geq 3$), melynél egy bemenetként kapott gráfról kell eldönteni, hogy színezhető-e r színnel.

A bonyolultságelmélet egyik legtöbbet vizsgált problémája az úgynevezett *relációhomomorfizmus-probléma* (Constraint Satisfaction Problem, CSP). Egy $B = (S, \varrho)$ relációs struktúra az S alaphalmazból, és egy az S-en adott r-változós, $\varrho \subseteq S^r$, relációból áll. $\text{CSP}(B)$ egy adott $B = (S, \varrho)$, relációs struktúrára a következő: minden bemenetként kapott $A = (T, \nu)$ ugyanolyan típusú relációs struktúráról el kell dönteni, hogy van-e relációtartó $T \longrightarrow S$ leképezés? A probléma nyilvánvalóan NP-beli. A CSP legismertebb esetei a SAT, a gráfhomomorfizmus-probléma és a színezettgráfhomomorfizmus-probléma. Ugyanakkor, mint azt Feder és Vardi [5] belátta minden CSP redukálható egy páros gráf színezettgráfhomomorfizmus-problémájára is. A kutatások mai fő célja dichotómia tételek bizonyítása általános esetben. Sokan azt gondolják, hogy ha van bonyolultsági osztály P és NP között, akkor van ilyen bonyolultságú CSP probléma is.

2.2. Gráfok. A klasszikus gráfelméleti fogalmakon kívül, mint a *gráf, páros gráf, csúcs (pont), él, többszörös él, hurokél, egyszerű gráf, pont foka, részgráf, út, séta, ciklus, kör, összefüggő gráf, összefüggőségi komponens, színezés,* szükségünk lesz néhány kevésbé ismert gráfelméleti fogalomra is. A $G(A, B, E)$ páros gráf *szomszédsági mátrixa* egy olyan $|A| \times |B|$-es 0-1 mátrix, melynek az $M(a, b)$ eleme 1, ha a megfelelő $a \in A$ és $b \in B$ csúcsok között él fut G-ben, és 0 egyébként. Két azonos csúcshalmazú, $G(V, E)$ és $H(V, F)$, esetleg többszörös éleket tartalmazó gráf uniója: $(G \uplus H)(V, E \uplus F)$, tehát csúcshalmaza megegyezik G, illetve H csúcshalmazával, az élhalmaz az élhalmazok uniója, és egy adott $e \in E \uplus F$ él multiplicitása a két gráfbeli multiplicitásának összege. A $G(V, E)$ és $H(W, F)$ gráfok közötti *(gráf)homomorfizmus* a csúcshalmazok olyan $\varphi : V \longrightarrow W$ leképezése, mely élt élbe visz, azaz $(u, v) \in E$-ből következik $\big(\varphi(u), \varphi(v)\big) \in F$. Ha H részgráfja G-nek, és a $\varphi : G \longrightarrow H$ gráfhomomorfizmus fixen hagyja H csúcsait ($\varphi|_H \equiv id$), akkor φ G-nek H-ra való *retrakciója.*

Rögzítsünk egy $H(W, F)$ gráfot. A H-ra vonatkozó *gráfhomomorfizmus-probléma,* $\text{HOM}(H)$ során egy bemenetként kapott $G(V, E)$ gráfról azt kell eldönteni, hogy van-e G-nek H-ba menő homomorfizmusa. Természetesen ez a probléma NP-beli. Ha H tartalmaz hurokélet, akkor mindig létezik ilyen homomorfizmus. Ugyanakkor általában a kérdés nehezen megválaszolható, hiszen például ha $H = K_r$ az r csúcsú teljes gráf, akkor ez épp G r-színezhetőségének kérdése, ami NP-teljes ($r \geq 3$). Hurokélet nem tartalmazó gráfokra Hell és Nešetřil [8] bebizonyította, hogy ha a gráf páros, akkor HOM P-beli, nem párosokra pedig NP-teljes. A H-ra vonatkozó *retrakciós probléma,* $\text{RET}(H)$ esetben az a kérdés, hogy egy bemenetként kapott G, H-val izomorf H' részgráfot tartalmazó gráfnak létezik-e retrakciója

H'-re. Büki és Szabó [2] által bizonyítottak szerint, ha J_n az $n \times n$-es csupa 1-esből álló mátrix, I_n pedig $n \times n$-es egységmátrix, akkor, ha H szomszédsági mátrixa $J_n - I_n$, akkor RET(H) NP-teljes. Tehát például a hatszögre NP-teljes a probléma. A *színezettgráfhomomorfizmus-probléma*, OAL(H) annak eldöntése, hogy egy bemenetként kapott $G(V, E)$ gráfhoz és $f : V \dashrightarrow W$ részleges leképezéshez található-e olyan $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, mely f-nek kiterjesztése. Azon G-beli csúcsokat, amelyekre f meg van adva, nevezzük színezettnek. Ez a kérdéskör magában foglalja a HOM(H) és RET(H) problémákat is, így legalább olyan bonyolult. Feder, Hell és Huang belátták [6], hogy minden hurokélet nem tartalmazó nem páros gráfra OAL(H) NP-teljes. Páros gráfok esetében csak a legalább 6 hosszú páros körökre, azaz például a hatszögre sikerült NP-teljességet bizonyítaniuk. Feder és Vardi [5] belátta, hogy a CSP redukálható a páros gráfok színezettgráfhomomorfizmus-problémájára.

A továbbiakban szükségünk lesz még egy H-ra vonatkozó eldöntendő kérdésre, ehhez definiáljuk a *páros homomorfizmus* fogalmát: egy $G \to H$ homomorfizmus páros, ha az összes $f \in F$ él inverzképének elemszáma páros, azaz $\varphi^{-1}(f) \equiv 0 \pmod 2$. Az úgynevezett *pároshomomorfizmus-probléma*, 2HOM(H), során egy bementként kapott G gráfról kell eldönteni, hogy minden $\varphi : G \to H$ homomorfizmusra páros-e. Mint azt majd a 31. tételben belátjuk, ez a probléma coNP-teljes a hatszögre.

2.3. A szóprobléma. Az algebra napjainkban egyre szélesebb körben vizsgált területe az algebrai bonyolultságelmélet, amely az algebra tárgykörében felmerülő kérdések megoldására adható algoritmusok nehézségének mértékével foglalkozik. Ide tartozik a *szóprobléma* is, amely egy effektív módon (pl. a Cayley-táblájával) adott A algebra fölött azt a kérdést vizsgálja, hogy teljesül-e két tetszőleges kifejezésre (u és v), hogy minden behelyettesítésre egyenlő értéket vesznek fel, azaz, hogy $u \equiv v$ azonosság-e A-ban. A szóproblémának több változata fogalmazható meg aszerint, hogy milyen fajta kifejezéseket engedünk meg bemenetként (mi lehet u és v). Egy adott algebra felett egy kifejezést *term*nek nevezünk, ha az adott algebra feletti alapműveletekből, és változókból áll; formálisan a típushoz tartozó kifejezésalgebra elemeiről van szó. Például félcsoportok esetében egy term $x_1 x_2 \ldots x_m$ alakú. Egy kifejezés *polinom,* ha algebrabeli konstansok is szerepelhetnek benne. Így a két – univerzális algebrai szempontból – legfontosabb változat a term-ekvivalenciaprobléma (TERM-EQ) és a polinom-ekvivalenciaprobléma (POL-EQ), amikor tehát a bemenetként kapott kifejezések termek, illetve polinomok. Amennyiben a 0 benne van az algebrában, értelmezhetőek a TERM $\equiv 0$ és a POL $\equiv 0$ problémakörök is, amelyek során egy bemenetként kapott t termről, illetve p polinomról kell eldönteni, hogy azonosan 0-e. A POL $\equiv 0$ a POL-EQ egy megszorítása, és ha a 0 konstans A-ban, akkor a TERM $\equiv 0$ a TERM-EQ megszorítása. Az *egyenletmegoldhatósági probléma,* POL-SAT, TERM-SAT pedig az előzőekhez hasonlóan azt kérdezi, hogy az $u = v$ egyenletnek van-e megoldása. Véges struktúrákra mindkét problématípus behelyettesítéssel eldönthető, ezért ilyenkor a feladat bonyolultsága a kérdés. Mivel minden term egyben polinom is, ezért a TERM-EQ (TERM-SAT) mindig legfeljebb olyan nehezen eldönthető, mint a POL-EQ (POL-SAT). A szóprobléma változatai természetesen coNP-ben vannak, hiszen ha a két kifejezés nem egyenlő, akkor ennek egy gyorsan ellenőrizhető bizonyítéka az a behelyettesítés, amelyre a kifejezések különböző értékeket vesznek fel. Hasonlóan látható, hogy az egyenletmegoldhatósági probléma NP-beli. Az eddigieket összefoglalva:

1. állítás. *Tetszőleges A algebrára*

(1) TERM-EQ$(A) \preceq_P$ POL-EQ$(A) \in$ coNP;

(2) TERM-SAT$(A) \preceq_P$ POL-SAT$(A) \in$ NP;

(3) *Ha* $0 \in A$, *akkor* POL $\equiv 0(A) \preceq_P$ POL-EQ(A);

(4) *Ha pedig* 0 *konstans is* A*-ban, akkor* TERM $\equiv 0(A) \preceq_P$ TERM-EQ(A).

Adott struktúratípusoknál általában a dichotómia bizonyítása a cél, azaz, hogy a szóprobléma (egyenletmegoldhatósági probléma) a struktúrák egy részére P-beli, a többire coNP-teljes (NP-teljes). A továbbiakban a szóproblémával kapcsolatos eddigi eredményeket foglaljuk össze. Minden a továbbiakban szereplő struktúra végesnek tekintendő.

2.3.1. Gyűrűk. Régóta ismert [12], hogy kommutatív gyűrűkre a szóprobléma P-beli, ha a gyűrű nilpotens, és coNP-teljes egyébként. Burris és Lawrence [3] belátta, hogy ugyanez igaz a gyűrűkre általában is: a TERM-EQ P-beli, ha a gyűrű nilpotens, és coNP-teljes egyébként. Így persze nem nilpotens gyűrűkre a POL-EQ is coNP-teljes. Kiderült továbbá, hogy nilpotens gyűrűk esetében a [3]-beli algoritmus még a POL-EQ-ra is polinomiális lefutású. Azaz gyűrűk esetében a két szóprobléma azonos bonyolultságú. Ez az összefüggés nem minden algebrai struktúrára igaz: kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportokra a TERM-EQ probléma mindig P-beli, azonban van olyan kombinatorikus 0-egyszerű félcsoport, amelyre a POL-EQ coNP-teljes, erre konstruálunk példát a 3.1.1., illetve a 3.2.2. fejezetekben.

A 2 elemű gyűrűre, $\mathbb{Z}_2$-re a TERM-EQ coNP-teljessége a 3SAT NP-teljességének egyszerű következménye. Azonban a visszavezetés során összegek magas hatványait használják, melyeket monomok összegeként kifejtve már nem polinomiális visszavezetést kapnánk. Ezért Willard definiálta a szóproblémának egy másik változatát, az úgynevezett Σ-verziót (TERM$_\Sigma$-EQ, POL$_\Sigma$-EQ) amikor a két megadott szó csak monomok összege lehet. Ez a mód természetesebb, hiszen például – a klasszikus algebrában – a polinomokat is ilyen formában szoktuk megadni. A kérdés ebben az esetben is a szokásos, csak bizonyos szavak kifejtve lényegesen hosszabbak lehetnek, így a bemenő adatok mérete változik. Ha egy gyűrűre az eredeti szóprobléma P-beli, akkor nyilván polinomiális a Σ-verziója is. Willard és Lawrence [14] igazolták, hogy ha a Jacobson-radikál szerinti faktor kommutatív, akkor a TERM$_\Sigma$-EQ P-beli; azon $M_n(\mathbb{F}_q)$ mátrixgyűrűkre pedig coNP-teljes, amelyekre az invertálható elemek csoportja nem feloldható. Ezzel megoldották az $n \geq 3$, illetve $q \geq 4$ eseteket. Az eddig még megoldatlan esetekre, az $M_2(\mathbb{Z}_2)$ és az $M_2(\mathbb{Z}_3)$ mátrixgyűrűkre a [21] és a [20] cikkekben Szabó Csabával beláttuk, hogy a probléma ekkor is coNP-teljes, tehát TERM$_\Sigma$-EQ coNP-teljes a nemkommutatív teljes mátrixgyűrűkre, és persze polinomiális a kommutatívokra. Valójában ennél erősebb állítást sikerült igazolni; azt, hogy a fenti mátrixgyűrűk multiplikatív félcsoportjában is coNP-teljes a szóprobléma. Ez az addig ismerteknél nagyságrendileg kisebb példát adott olyan félcsoportra, amelyben a szóprobléma coNP-teljes. Beláttuk még [22] hogy a nemkommutatív mátrixgyűrűknek már a multiplikatív félcsoportjában is coNP-teljes a probléma. Ezen eredmény felhasználásával bizonyítható véges gyűrűkre a dichotómia: a TERM$_\Sigma$-EQ bonyolultsága is csak a Jacobson-radikál szerinti faktortól függ: P-beli, ha a faktor kommutatív, és coNP-teljes egyébként.

2.3.2. Csoportok. Csoportokra a kérdés koránt sincs megoldva. Horváth, Lawrence, Mérai és Szabó [9] megmutatták, hogy nem feloldható csoportokra a TERM-EQ coNP-teljes, valamint tudjuk, hogy nilpotens csoportokra P-beli [7]. Itt ugyanis, ha van „ellenpélda", akkor van korlátos elemszámú is. A nem nilpotens, de feloldható csoportokra nincsenek általános eredmények, a kérdés még S_4-re is nyitott. Horváth Gábor [10] egy TDK dolgozatában megmutatta, hogy bizonyos metaciklikus csoportokra a TERM-EQ coNP-teljes.

2.3.3. Félcsoportok. 2001-ben Szabó és Seif [18] megmutatták, hogy minden CSP-hez van egy olyan S 0-egyszerű félcsoport hogy az adott CSP polinomiálisan ekvivalens POL-SAT(S)-sel. Ettől kezdve mindkét szóprobléma gyors karriert futott be. Először Popov és Volkov [16] mutattak egy olyan (2^{1700} elemű) félcsoportot, amelyre a TERM-EQ coNP teljes, majd ugyanebben az évben Kisielewicz mutatott egy párezer elemszámú példát ugyanerre. Szabó Csabával [21, 20] igazoltuk, hogy TERM-EQ $\left(M_2(\mathbb{Z}_2)\right)$ és TERM-EQ $\left(M_2(\mathbb{Z}_3)\right)$ coNP-teljes, és ennek kapcsán mutattunk egy 13 elemű példát is. Ezután elkezdődtek a szisztematikus kutatások. Klíma [13], illetve Szabó és Seif [19] igazolták, hogy a legkisebb elemszámú ilyen félcsoport a hatelemű Brandt-monoid. Szabó és Seif [19] pedig megmutatták, hogy kombinatorikus 0-egyszerű félcsoportokra a TERM-EQ mindig P-beli. Nagy kérdés volt, hogy teljesül-e ez minden olyan 0-egyszerű félcsoportra, amely alapcsoportja feloldható. Erre a kérdésre keresem a választ ezen cikk 3.3. fejezetében.

2.3.4. Egy újabb szóprobléma. Pawel Idziak és Szabó Csaba új szemszögből vizsgálták a szóprobléma változatait: arra keresték a választ, hogy mi történik akkor, ha megengedjük véges sok művelet hozzávételét a típushoz (pl. csoport estén a kommutátort). Ez az úgynevezett *- (csillag-) problémakör. Az új műveletek, művelettáblái az előkészítés során kiszámíthatóak, majd később bemenetként elfogadhatóak az ezen műveletekkel alkotott kifejezések is. A probléma bonyolultságát ez jelentősen megváltoztathatja. Idziak és Szabó megvizsgálták a POL-SAT* probléma bonyolultságát kongruenciamoduláris-varietásokra. A prímhatványrendű algebrák direkt összegeként nem előálló kettes típusú nilpotens algebrák kivételével sikerült dichotomiát bizonyítaniuk.

2.4. 0-egyszerű félcsoportok. Ebben a fejezetben rövid leírást adunk a *teljesen 0-egyszerű-,* illetve *Rees-mátrix félcsoportokról,* alapvető tulajdonságaikról, bemutatva közben további vizsgálataink fő tárgyát, $\mathcal{M}_{19}$-et. Bizonyos alapvető félcsoportelméleti fogalmakat eleve ismertnek feltételezünk; ezek és a fejezetben tárgyalt egyéb fogalmak, illetve állítások megtalálhatók a szakirodalomban [4, 11]. Adott egy G csoport, és egy M mátrix, melynek elemei a $G \cup \{0\}$ halmazból kerülnek ki, és minden sora, illetve oszlopa legalább egy nem nulla elemet tartalmaz. Jelölje Λ az M mátrix oszlopainak, I a sorainak indexhalmazát. Az M mátrixhoz tartozó G struktúracsoportú Rees-mátrix félcsoport, $\mathcal{M}(I, \Lambda, G; M)$ alaphalmaza $I \times G \times \Lambda \cup \{0\}$. A 0 elnyelő elemként viselkedik: $0(i, g, \lambda) = (i, g, \lambda)0 = 0$. A nem nulla elemek szorzását az alábbi képlettel definiáljuk:

$$(i, g, \lambda)(j, h, \mu) = \begin{cases} (i, gM(\lambda, j)h, \mu) & \text{ha } M(\lambda, j) \in G, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ellenőrizhető, hogy a fent definiált szorzás asszociatív, így $\mathcal{M}(I, \Lambda, G; M)$ valóban félcsoport. A félcsoport elemeire az (i, g, λ) jelölés helyett gyakran az $\langle i, \lambda \rangle$ jelölést használjuk, amennyiben a csoportelem nem lényeges. Jelölje π_I, π_G, π_Λ a nem nulla elemek első-, második, illetve harmadik koordinátájára való vetítést. Egy adott Rees-mátrix félcsoportot több különböző mátrixszal is lehet reprezentálni; erről szól az alábbi lemma:

2. lemma. *Legyen $\mathcal{M}(I, \Lambda, G; M)$ egy Rees-mátrix félcsoport, ekkor:*

(1) *Az M mátrix két oszlopát, illetve sorát felcserélve izomorf Rees-mátrix félcsoportot kapunk;*

(2) *Az M mátrix egy oszlopát, illetve sorát egy csoportelemmel megszorozva izomorf Rees-mátrix félcsoportot kapunk.*

A Rees-mátrix félcsoportnál a szorzás egyszerűen kiszámolható művelet: amennyiben az eredmény nem 0, csak az első és az utolsó tényezőktől függ az értéke. A következő lemma ezt az összefüggést hivatott formalizálni:

3. lemma. *Legyen $\mathcal{M}(I, \Lambda, G; M)$ egy Rees-mátrix félcsoport, $b = \langle i, \lambda \rangle$, $d = \langle j, \mu \rangle$, $c_1 = (i_1, g_1, \lambda_1)$, $c_2 = (i_2, g_2, \lambda_2)$, ..., $c_n = (i_n, g_n, \lambda_n) \in \mathcal{M}(I, \Lambda, G; M)$, ekkor:*

(1) *$b \cdot d = 0$ pontosan akkor, ha $M(\lambda, j) = 0$;*

(2) *$c_1 c_2 \dots c_n = 0$ pontosan akkor, ha található olyan $k \in \{2, 3, \dots n\}$ index, melyre $c_{k-1} c_k = 0$;*

(3) *Ha $c_1 c_2 \dots c_n \neq 0$, akkor $c_1 c_2 \dots c_n = \big\langle \pi_I(c_1), \pi_\Lambda(c_n) \big\rangle = \langle i_1, \lambda_n \rangle$.*

A Rees-mátrix félcsoportok definíciója az alábbi, egyszerű példán szemléltethető, amely egyben ezen cikk tárgya is:

4. példa. Legyen $G = \mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle$, és legyen:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ekkor $\Lambda = I = \{1,2,3\}$. Legyen $\mathcal{M}_{19} = \mathcal{M}(I,\Lambda,\mathbb{Z}_2;P)$. $\mathcal{M}_{19}$-ben a szorzás a következőképpen működik: $(1,a,1)(2,1,1) = (1,1,1)$, hiszen $P(1,2) = a$, és mivel $P(2,2) = 0$, $\langle 1,2\rangle\langle 2,1\rangle = 0$. Általában $\mathcal{M}_{19}$-ben az $\langle i,\lambda\rangle\langle j,\mu\rangle$ szorzat, akkor és csak akkor 0, ha $\lambda = j$.

Van egy jól ismert, klasszikus példa is Rees-mátrix félcsoportokra: $L_n(\mathbb{F})$, a legfeljebb 1 rangú $n \times n$-es mátrixok multiplikatív félcsoportja az $\mathbb{F}$ véges test felett.

5. tétel. *$L_n(\mathbb{F})$ Rees-mátrix félcsoport.*

Bár a bizonyítás ismert és nem is nehéz, a teljesség kedvéért álljon itt.

Bizonyítás. Legyen $V = \mathbb{F}^n$, legyenek $\{l_i = \langle v_i\rangle : i \in I\}$, V egydimenziós alterei, azaz $|I| = \frac{|\mathbb{F}|^n-1}{|\mathbb{F}|-1}$. Legyen továbbá $I = \Lambda$. Definiáljuk az M $|\Lambda| \times |I|$-es mátrixot $\mathbb{F}^* \cup \{0\}$ felett a következőképpen: $M(\lambda,i) = v_\lambda^T v_i$. Minden A 1 rangú mátrix diád, így egyértelműen írható fel $A = \alpha v_i v_\lambda^T$ alakban, ahol $\alpha \in \mathbb{F}^*$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Az $A = \alpha v_i v_\lambda^T \mapsto (i,\alpha,\lambda)$ és a $0 \mapsto 0$ leképezés izomorfizmust létesít $L_n(\mathbb{F})$ és az $\mathcal{M}(I,\Lambda,\mathbb{F}^*;M)$ Rees-mátrix félcsoport között. ∎

A Rees-mátrix félcsoportoknak van egy kevésbé formális tárgyalásmódjuk is, az úgynevezett szendvicsmátrixos reprezentáció. Ekkor $\mathcal{M}(I,\Lambda,G;M)$ elemei a legfeljebb 1 nemnulla elemet tartalmazó $|I| \times |\Lambda|$-es mátrixok, szorzásukat pedig a szokásos mátrixszorzásból öröklik az M, mint szendvicsmátrix beiktatásával. Pontosabban:

$$A \circ B = AMB.$$

A dimenziókat összehasonlítva rögtön látszik, hogy a szorzás értelmes. A $\circ$ művelet asszociativitása a mátrixok szorzásának asszociativitásából azonnal következik. A két definíció valóban ugyanaz: a 0 mátrixnak feleljen meg a 0, egyébként egy $A \neq 0$-nak pontosan egy eleme nem nulla, legyen pl. az i-edik sor λ-adik eleme g; feleltessük meg ekkor A-nak az (i,g,λ) félcsoportelemet. Ez tényleg izomorfizmust ad. Az előbbi példa a szendvicsmátrixos terminológiában:

6. példa.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A *kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportok* olyan Rees-mátrix félcsoportok, melyeknek struktúracsoportja triviális. Tehát egy adott M, csupa 0 sort, illetve oszlopot nem tartalmazó $|\Lambda| \times |I|$-as 0-1 mátrixhoz tartozó $S_M = \mathcal{M}(I,\Lambda,1;M)$ kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoport alaphalmaza:

$$I \times \Lambda \cup \{0\} = \{\langle i,\lambda\rangle : i \in I,\ \lambda \in \Lambda\} \cup \{0\}.$$

A 0 elnyelő elem, azaz $0\langle i,\lambda\rangle = \langle i,\lambda\rangle 0 = 0$, a többi elem szorzata pedig:

$$\langle i,\lambda\rangle\langle j,\mu\rangle = \begin{cases} \langle i,\mu\rangle & \text{ha } M(\lambda,j)\neq 0,\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Minden $S = \mathcal{M}(I,\Lambda,G;M)$ Rees-mátrix félcsoport redukálható kombinatorikus 0-egyszerű félcsoporttá: egyszerűen az M struktúramátrix minden nem nulla elemét kicseréljük egyesre, jelölje ezt $M|_1$, legyen ekkor a kombinatorikus redukált $S|_1 = S_{M|_1}$. Így például a 4. példában tárgyalt félcsoport kombinatorikus redukáltja az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

mátrixhoz tartozó S_A teljesen kombinatorikus 0-egyszerű félcsoport. Definiálható általában egy tetszőleges $\vartheta : G \to H$ csoporthomomorfizmus szerinti redukált is: Legyen $M|_\vartheta$, az a mátrix, melyet M-ből úgy kapunk, hogy M-ben minden $g\in G$ elemet kicserélünk $\vartheta(g)$-re; ekkor S ϑ-redukáltja $S|_\vartheta = \mathcal{M}\big(I,\Lambda,H;M|_\vartheta\big)$. Természetes módon definiálható egy $\widehat{\vartheta} : S \to S|_\vartheta$ félcsoporthomomorfizmus is, a $\widehat{\vartheta}(0) = 0$, $\widehat{\vartheta}\big((i,g,\lambda)\big) = \big(i,\vartheta(g),\lambda\big)$ képlettel. A redukált félcsoport elég sok információt megőriz az eredeti félcsoportról, például egy kifejezés nemnullaságát. Így ha csak erre vagyunk kíváncsiak, akkor elég csak a kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportokat vizsgálni.

7. megjegyzés. Tetszőleges $S = \mathcal{M}(I,\Lambda,G;M)$ Rees-mátrix félcsoportra:

(1) TERM-EQ $\big(S|_\vartheta\big) \preceq_P$ TERM-EQ(S);

(2) POL-EQ $\big(S|_\vartheta\big) \preceq_P$ POL-EQ(S);

(3) TERM $\equiv 0\,\big(S|_\vartheta\big) \equiv_P$ TERM $\equiv 0(S)$;

(4) POL $\equiv 0\,\big(S|_\vartheta\big) \equiv_P$ POL $\equiv 0(S)$.

2.4.1. Miért épp $\mathcal{M}_{19}$? A teljesen 0-egyszerű félcsoportok olyan építőkövei a félcsoportoknak, mint a csoportok körében az egyszerű csoportok (mindkét esetben a struktúra fő faktorairól van szó). Így remélhető, hogy azon 0-egyszerű félcsoportok karakterizálása, amelyekre a TERM-EQ polinomiális, segíthet a félcsoportok általános karakterizálásában is; ez a cikk tekinthető egy kezdő lépésnek ebben az irányban. Természetes kérdés, hogy van-e egyáltalán olyan 0-egyszerű félcsoport, amelyre TERM-EQ coNP-teljes? Mi lehet a legegyszerűbb ilyen félcsoport? A kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoportokra TERM-EQ polinomiális, így köztük nem is érdemes a példát keresni. Ha egy 0-egyszerű fécsoport struktúramátrixában nem is jelennek meg az 1-en kívül más csoportelemek, akkor felette a szóprobléma ekvivalens a kombinatorikus redukáltja, és a struktúracsoportjabeli szóproblémával. Mivel a csoportok szóproblémájáról még kevesebbet tudunk, mint a félcsoportokéról, és amúgy is inkább félcsoportokról szóló eredményt szeretnénk bizonyítani, így ezektől az esetektől is eltekintünk. Fogadjuk el, hogy egy 0-egyszerű félcsoport annál egyszerűbb, minél több nullát tartalmaz a struktúramátrixa, és minél „egyszerűbb" a struktúracsoportja. A 2. lemma többszöri alkalmazásával megmutatható, hogy a fennmaradó 0-egyszerű félcsoportok közül a legegyszerűbb valóban $\mathcal{M}_{19}$.

Még egy ok, amiért talán érdemes $\mathcal{M}_{19}$-et vizsgálni, hogy van egy természetes reprezentációja transzformációkkal. Vegyük ehhez a három elemen ható transzformáció-félcsoportot, T_3-at ($|T_3| = 3^3 = 27$)! Soroljuk az elemeit rangjuk szerint 3 csoportba: $T_3(3) = S_3$ a 3 rangúak, $T_3(2)$ a 2 rangúak és $T_3(1)$ az 1 rangúak. Mivel kompozíció során a rang nem nőhet, így $T_3(1)$ ideál T_3-ban. Vegyük $T_3(2)$ $T_3(1)$ szerinti Rees-faktorát, azaz húzzuk össze $T_3(1)$-et egyetlen 0-elemmé. A kapott félcsoport 19 elemű, és mint az Clifford és Preston [4] híres félcsoportelméleti könyvében bizonyítva van, izomorf $\mathcal{M}_{19}$-cel. A cikkben a következő tételt látjuk be:

8. tétel. TERM-EQ($\mathcal{M}_{19}$) *coNP-teljes.*

Végezetül leírjuk $\mathcal{M}_{19}$ néhány fontos tulajdonságát:

9. lemma. *Legyen* $b = \langle i, \lambda \rangle$, $d = \langle j, \mu \rangle \in \mathcal{M}_{19}$ *és* $c_1 = (i_1, g_1, \lambda_1)$, $c_2 = (i_2, g_2, \lambda_2)$, $\ldots$, $c_n = (i_n, g_n, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{19}$; *ekkor:*

(1) $b \cdot d = 0$ *pontosan akkor, ha* $P(\lambda, j) = 0$, *azaz ha* $\lambda = i$;

(2) $\mathcal{M}_{19}$ *idempotens elemei:* $\{(i, g, \lambda) : \lambda \neq i\}$;

(3) $c_1 c_2 \ldots c_n = 0$ *pontosan akkor, ha található olyan* $k \in \{2, 3, \ldots n\}$ *index, melyre* $c_{k-1} c_k = 0$, *azaz* $\lambda_{k-1} = i_k$;

(4) *Jelölje* $l = \big|\{1 \leq k \leq n-1 : i_k = 1,\ \lambda_{k+1} = 2\}\big|$ *(a szorzatban fellépő „extra" a-k számát). Ekkor, ha* $c_1 c_2 \ldots c_n \neq 0$, *akkor*

$$c_1 c_2 \ldots c_n = (i_1, g_1 g_2 \ldots g_n \cdot a^l, \lambda_n).$$

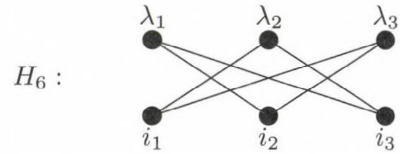
3. Mi könnyű? Mi nehéz?

A számítástudomány szemszögéből könnyű az, amire van polinomiális algoritmus, azaz P-ben van, nehéz pedig, ami coNP-teljes. A továbbiakban a szóproblémát próbáljuk ebből a nézőpontból vizsgálni, különös figyelmet fordítva eredeti témánkra, a Rees-mátrix félcsoportok szóproblémájára.

3.1. P-beli problémák. Azt, hogy egy adott struktúrára a szóprobléma P-beli, mi sem bizonyítja jobban, mint hogy megadunk egy tényleges polinomidejű algoritmust az eldöntésére. Általában ez az algoritmus, mint az alábbi 3.1.1. fejezetben is, az azonosságok pontos karakterizációját használja. Nem mindig szükséges a teljes karakterizáció, elég azt belátni, hogy csak polinomsok behelyettesítést kell ellenőrizni az azonosság igazolásához a „Brute Force" exponenciálissok helyett. Goldmann és Russel [7] például ezt a módszert alkalmazza a nilpotens csoportok szóproblémájának P-beliségének bizonyításához.

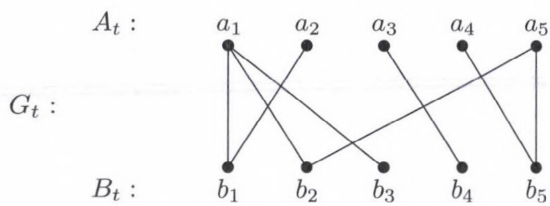
3.1.1. TERM-EQ(S_A). A továbbiakban teljesen kombinatorikus 0-egyszerű félcsoportok feletti azonosságokat vizsgálunk. Mint látszani fog, jó megközelítés adódik ehhez a gráfokon keresztül. Ezért most az eddigi fogalmakat átültetjük a gráfelmélet területére.

Tetszőleges S_M kombinatorikus teljesen 0-egyszerű félcsoporthoz természetes módon definiálható egy $H_M(\Lambda, I, F)$ páros gráf: az a gráf, amelynek szomszédsági mátrixa épp M, így például a 2.4. fejezetben definiált S_A-hoz tartozó páros gráf épp egy hatszög:



Ismert, hogy a félcsoportok felett egy term egyszerűen $t = x_1x_2 \dots x_n$ alakú, ahol az x_i-k nem feltétlenül különbözőek. Jelölje $X_t = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ a t-ben előforduló változók halmazát. Tetszőleges t termhez konstruálunk egy $G_t(A_t, B_t, E_t)$ páros gráfot a következőképpen: legyen $A_t = \{a_x : x \in X_t\}$, $B_t = \{b_x : x \in X_t\}$, és fusson él a_x és b_y között, ha az xy kifejezés részszava t-nek. A könnyebb érthetőség kedvéért álljon itt egy példa erre.

10. példa. Legyen $t = x_1x_2{x_1}^2x_3x_4{x_5}^2x_2{x_1}^2x_2x_1x_2$. A t-hez tartozó gráf:



Ezen gráfkonstrukciók segítségével vizsgálhatjuk az S_M feletti termeket:

11. lemma. *Legyen $t = x_1x_2 \dots x_n$, ahol az x_i-k nem feltétlenül különbözőek. Legyen továbbá $\varepsilon : X_t \to S_M$ t egy kiértékelése. Ekkor a fenti jelölésekkel:*

(1) *$\varepsilon(t) \neq 0$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon(xy) \neq 0$ t semelyik xy alakú részszavára sem;*

(2) *Ha $\varepsilon : X_t \to S_M$ nem veszi fel a 0-át semmilyen x-re sem, akkor definiálható egy $\varphi_t : G_t \to H_M$ leképezés a következő formulával: $\varphi_t(a_x) = \pi_\Lambda\big(\varepsilon(x)\big)$ és $\varphi_t(b_x) = \pi_I\big(\varepsilon(x)\big)$;*

(3) *$\varepsilon(t) \neq 0$ pontosan akkor, ha ε nem veszi fel a 0-át, és az ekkor definiálható $\varphi_t : G_t \to H_M$ leképezés gráfhomomorfizmus.*

Ezen leírás segítségével már pontososan karakterizálhatók S_A azonosságai. A pontos leírást Szabó es Seif [19] cikke tartalmazza, most az egyszerűség kedvéért ezeket az eredményeket már csak az előbbi példában adott S_A félcsoportra tárgyaljuk.

12. állítás. *Legyenek $t = x_1x_2 \ldots x_n$, $s = y_1y_2 \ldots y_m$ termek. Ekkor a fent bevezetett jelölésekkel $t \equiv s$ pontosan akkor teljesül S_A-ban, ha mindkét alábbi feltétel teljesül:*

(I): $G_t = G_s$;

(II): $x_1 = y_1$ *és* $x_n = y_m$.

Valójában ez az állítás egy az egyben igaz az olyan struktúramátrixú félcsoportokra, amelyek nem csak néhány, csupa 1-esből álló blokkot tartalmaznak, azaz amelyekhez tartozó H_M páros gráf nem teljes páros gráfok diszjunkt uniója.

Bizonyítás. Láttuk, hogy $H_A = H_6$ épp egy hatszög. Ha (I) teljesül, akkor a két termben ugyanazok az xy kifejezések szerepelnek részszóként, azaz a 3. lemma 2. pontja alapján t és s ugyanakkor nulla. (II) teljesülése pedig a 3. lemma 3. pontja szerint azt biztosítja, hogy ha egy behelyettesítésre a termek nem nullák, akkor egyenlőek.

A „csak akkor" irányhoz elég konkrét behelyettesítéseket adni, melyekre a két term nem egyenlő.

Tegyük fel, hogy (I) nem teljesül, azaz $G_t \neq G_s$. Ez kétféleképpen fordulhat elő: vagy a két gráf csúcshalmaza különbözik, vagy az élhalmazuk. Az első esetben $X_t \neq X_s$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $x \in X_t \setminus X_s$. Tekintsük ekkor a következő behelyettesítést:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} 0 & \text{ha } z = x, \\ \langle 2, 3 \rangle & \text{egyébként;} \end{cases}$$

ekkor $\varepsilon(t) = 0 \neq \langle 2, 3 \rangle = \varepsilon(s)$.

Ha az élhalmaz nem egyezik meg, akkor megint feltehető, hogy $(x, y) \in E_t \setminus E_s$, azaz az xy kifejezés részszava t-nek, de s-nek nem; ekkor az

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \langle 2, 1 \rangle & \text{ha } z = x, \\ \langle 1, 3 \rangle & \text{ha } z = y, \\ \langle 2, 3 \rangle & \text{egyébként} \end{cases}$$

behelyettesítésre $\varepsilon(t) = 0 \neq \varepsilon(s)$.

Tegyük fel, hogy (II) valamelyike nem teljesül, és tekintsük a következő behelyettesítéseket:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \langle 1, 2 \rangle & \text{ha } z = x_1, \\ \langle 3, 2 \rangle & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ha $x_1 \neq y_1$, akkor $\varepsilon(t) = \langle 1, 2\rangle \neq \langle 3, 2\rangle = \varepsilon(s)$.

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \langle 3, 2\rangle & \text{ha } z = x_n, \\ \langle 3, 1\rangle & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor $x_n \neq y_m$ esetén $\varepsilon(t) = \langle 3, 2\rangle \neq \langle 3, 1\rangle = \varepsilon(s)$. ∎

Mivel ezek a tulajdonságok polinomidőben tesztelhetők, így:

13. következmény. TERM-EQ(S_A) *P-beli.*

Az azonosságok hasonló karakterizációjával belátható, hogy:

14. tétel. *Minden teljesen kombinatorikus 0-egyszerű félcsoportra,* TERM-EQ *P-beli.*

3.2. coNP-teljes problémák. A coNP-teljesség bizonyítására lényegében egyetlen módszer létezik: visszavezetjük egy már ismerten coNP-teljes problémára, azaz megmutatjuk, hogy amennyiben az eredeti probléma gyorsan megoldható, akkor az ismert probléma is (ez az úgynevezett Karp-redukció). A bizonyítások csak abban térhetnek el, hogy az eredeti kérdést milyen módszerekkel, és milyen ismert problémára vezetjük vissza.

3.2.1. Az első példa. Popov és Volkov [16] muatott először példát olyan félcsoportra, melyben a szóprobléma coNP-teljes. Mint minden első példa ez is akármilyen bonyolult lehetett. A konstrukció a SAT-ra való visszaveztéssel ment. „Egyszerűen" definiáltak egy olyan félcsoportot, amelyben minden Boole-formula elkódolható; ez két elem által generált $\langle a, b\rangle$ szabad félcsoport egy faktora lesz. A $P_j = ab^{15+j}a^2$ $(0 \leq j \leq 14)$ elemek segítségével adhatók meg a kifejezések alkotóelemei:

$$\begin{array}{lll} (= P_0P_2P_1 &) = P_0P_3P_1 & \\ \neg = P_0P_4P_1 & \vee = P_0P_5P_1 & \wedge = P_0P_6P_1 \\ 1 = P_0P_{10}P_1 & 0 = P_0P_{11}P_1 & \end{array}$$

A kifejezések ($\mathcal{L}$):

$$(0), (1), (\neg 0), (\neg 1)$$

$$(V_1 \wedge V_2 \wedge \ldots \wedge V_k), \text{ ahol } V_i \in \{0, 1, \neg 0, \neg 1\}$$

$$W_1 \vee W_2 \vee \ldots \vee W_l, \text{ ahol } W_j \text{ a fenti alakú}$$

A relációk:

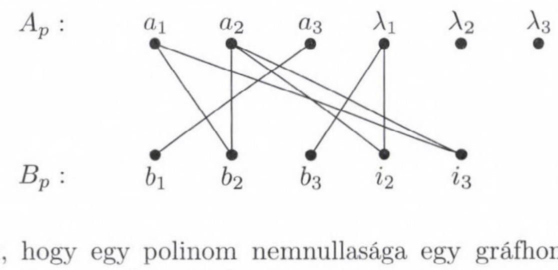
$$U = W, \text{ ha } U, W \notin \mathcal{L}$$

$$\begin{array}{cc}
\neg 0 = 1 & \neg 1 = 0 \\
(0 \wedge 0 = (0 & (0 \wedge 1 = (0 \\
(1 \wedge 0 = (0 & (1 \wedge 1 = (1 \\
\wedge 0 \wedge 0 = \wedge 0 & \wedge 0 \wedge 1 = \wedge 0 \\
\wedge 1 \wedge 0 = \wedge 0 & \wedge 1 \wedge 1 = \wedge 1 \\
(0) \vee (0) = (0) & (0) \vee (1) = (1) \\
(1) \vee (0) = (1) & (1) \vee (1) = (1).
\end{array}$$

Így kapunk egy félcsoportot, ami elkódolja a Boole-formulákat, és mindenesetre teljesülnek benne a Boole-formulák alapvető azonosságai. A kérdés az, hogy ezektől a relációktól nem esik-e túlságosan össze a félcsoport, azaz a különböző Boole-formulákat tényleg különböző félcsoportelemek reprezentáják-e? Ennek bizonyítása nagyon hosszú és technikai, ezért nem részletezzük. Közben adható egy felső becslés a félcsoport méretére is: kijön, hogy legfeljebb 2^{1700} elemű lehet.

3.2.2. **POL-EQ**(S_A). Ezt a problémakört is érdemes visszavezetni a gráfokra, ugyanúgy, mint azt a TERM-EQ esetében tettük. A polinomok a félcsoportok körében a következő általános alakba írhatók: $p = e_1 e_2 \ldots e_n$, ahol az e_i-k ($1 \leq i \leq n$) vagy változók, vagy félcsoportbeli konstansok, és nem feltétlenül különbözőek. Feltehető, hogy p-ben nem szerepel a nulla konstansként, ekkor ugyanis $p \equiv 0$, azaz minden rá vonatkozó kérdés triviálisan eldönthető. Jelölje X_p a p-ben előforduló változók, $C_p \subseteq I \times \Lambda$ a p-beli konstansok halmazát. Definiáljuk továbbá a p-ben szereplő konstasok első, illetve utolsó tagjainak halmazát: $I_p = \pi_I(C_p)$ és $\Lambda_p = \pi_\Lambda(C_p)$. A 3.1.1. fejezetben mutatott konstrukció mintájára most is definiálható egy gráf az adott p polinomhoz. Legyen tehát $G_p(A_p, B_p, E_p)$ a p-hez tartozó gráf, ahol $A_p = \{a_x : x \in X_p\} \cup \Lambda_p$, $B_p = \{b_x : x \in X_p\} \cup I_p$, továbbá $a \in A_p$ és $b \in B_p$ között fusson él, ha az a-nak és b-nek megfelelő változók vagy konstansok egymás mellett szerepelnek p-ben. Persze ha p egy term, akkor ez a konstrukció visszaadja a 3.1.1. fejezetben tárgyalt gráfot. Nézzünk erre is egy példát:

15. példa. Legyen $p = x_1 x_2 \langle 2,3 \rangle x_2^2 \langle 3,1 \rangle \langle 2,1 \rangle x_3 x_1 \langle 3,2 \rangle$, a p-hez tartozó gráf:



Ismét azt látjuk, hogy egy polinom nemnullasága egy gráfhomomorfizmusproblémára vezethető vissza, csak ezúttal színezettre.

16. lemma. *Legyen p egy polinom, amelyben a 0 nem szerepel konstansként; ekkor a fenti jelölésekkel:*

(1) $C_p \subseteq I \times \Lambda$, *így az identitás definiál egy* $f_p : I_p \cup \Lambda_p \to H$ *leképezést;*

(2) *Ha* $p \not\equiv 0$, *akkor* f_p *részleges gráfhomomorfizmus.*

Tegyük fel, hogy f_p *részleges gráfhomomorfizmus és legyen* $\varepsilon : X_p \to S_M$ *p egy kiértékelése; ekkor:*

(3) $\varepsilon(p) \neq 0$ *akkor és csak akkor, ha* $\varepsilon(ef) \neq 0$ *p semelyik* ef *alakú részszavára sem;*

(4) *Ha* ε *nem veszi fel a 0-át semmilyen* x*-re sem, akkor definiálható egy* $\varphi_p : G_p \to H$ *leképezés a következő formulával:* $\varphi|_{I_p \cup \Lambda_p} \equiv f_p$ *és* $\varphi_p(a_x) = \pi_\Lambda(\varepsilon(x))$ *és* $\varphi_p(b_x) = \pi_I(\varepsilon(x))$*;*

(5) $\varepsilon(t) \neq 0$ *pontosan akkor, ha* ε *nem veszi fel a 0-át, és az ekkor definiálható* $\varphi_t : G_t \to H$ *leképezés gráfhomomorfizmus.*

A lemma azonnali következménye:

17. következmény. $p \not\equiv 0$ *pontosan akkor, ha* f_p *kiterjeszthető* G_p*-re.*

Láttuk, hogy minden $p \not\equiv 0$ problémához természetes módon deifiniálható egy színezettgráfhomomorfizmus-probléma. Mint azt Seif és Szabó [19] igazolta, ennek a megfordítása is igaz:

18. állítás. *Legyen* H_M *olyan gráf, melynek szomszédságimátrixa nem tartalmaz csupa nulla sort, illetve oszlopot. Ekkor* $\mathrm{OAL}(H_M)$ *minden input-problémájához definiálható olyan p polinom, amellyel pontosan akkor létezik a színezetthomomorfizmus, ha* $p \not\equiv 0$.

Bizonyítás. Legyen $G(V, E)$ és $f : V \to I \cup \Lambda$ részleges homomorfizmus $\mathrm{OAL}(H_M)$ egy bemenete. Ha a színezettgráfhomomorfizmus-problémának nem triviálisan nincs megoldása (ilyenkor például a $p = (1, 1, 1)$ polinom megfelel az állításbeli követelményeknek), akkor G páros gráf, és van a csúcsainak egy olyan $V = A \cup B$ felosztása, hogy egyrészt A-n és B-n belül nem megy él, másrészt $f(A) \subseteq \Lambda$ és $f(B) \subseteq I$. Jelölje az A-beli színezett csúcsokat Λ', a B-belieket I', az A-beli nem színezetteket A' és a B-belieket B'. Esetleg néhány új csúcs hozzávételével feltehető, hogy $|\Lambda'| = |I'|$ és $|A'| = |B'|$. Legyen $X_p = X \cup^\star \{x_e : e \in E\}$ változók egy halmaza, melyre $|X| = |A'| = |B'|$. Ekkor persze A' és B' halmazok indexelhetők X-szel: $A' = \{a_x : x \in X\}$, $B' = \{b_x : x \in X\}$. Továbbá legyen $|C| = |\Lambda'| = |I'|$; ekkor Λ' és I' indexelhető C-vel: $\Lambda' = \{\lambda_c : c \in C\}$, $I' = \{i_c : c \in C\}$. Jelölje az így kapott páros gráfot $G'(A' \cup^\star \Lambda', B' \cup^\star I', E)$. Definiáljunk minden $e = (a, b) \in E$ élhez egy w_e szót:

$$w_e = \begin{cases} xyx_e & \text{ha } a = a_x \in A' \text{ és } b = b_y \in B', \\ x\langle\lambda_d, i_d\rangle x_e & \text{ha } a = a_x \in A' \text{ és } b = i_d \in I', \\ \langle\lambda_c, i_c\rangle yx_e & \text{ha } a = \lambda_c \in \Lambda' \text{ és } b = b_y \in B', \\ \langle\lambda_c, i_c\rangle\langle\lambda_d, i_d\rangle x_e & \text{ha } a = \lambda_c \in \Lambda' \text{ és } b = i_d \in I'. \end{cases}$$

Legyen

$$p = \prod_{e \in E} w_e.$$

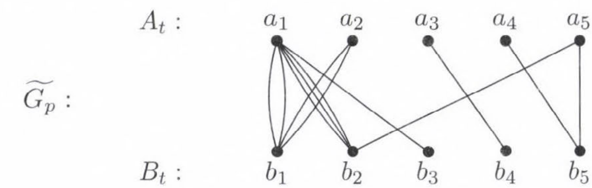
Ekkor a p-hez tartozó G_p gráf, G'-ből és még $2|E|$ darab G' egy-egy pontjához kapcsolódó pontból áll. És, mivel M minden sora, illetve oszlopa tartalmaz nem 0 elemet, így a H gráf tetszőleges csúcsának van szomszédja, azaz pontosan akkor létezik $G' \to H_M$ színezett-gráfhomomorfizmus, ha van $G_p \to H_M$ színezett-gráfhomomorfizmus is. Tehát p megfelel a követelményeknek. ∎

És így mivel $\text{POL} \equiv 0 \preceq_P \text{POL-EQ}$, és a 2.2. fejezetbeli megjegyzés szerint $\text{OAL}(H_6)$ NP-teljes:

19. tétel. $\text{POL-EQ}(S_A)$ *coNP-teljes.*

3.3. TERM-EQ($\mathcal{M}_{19}$). A 3.1.1. és a 3.2.2. fejezetekhez hasonlóan ez a probléma is sikeresen vizsgálható gráfhomomorfizmusokon keresztül, azonban mivel már nem teljesen kombinatorikus 0-egyszerű félcsoportról van szó, így egy termhez tartozó gráfnak nemcsak az xy részszavakat, hanem azok multiplicitását is kódolnia kell. Ezért most egy t termhez a 3.1.1. fejezetbeli $G_t(A_t, B_t, E_t)$ gráfon kívül egy többszörös éleket is tartalmazó $\widetilde{G_t}(A_t, B_t, \widetilde{E_t})$ páros gráfot is definiálunk: legyen az $(a_x, b_y) \in E_t$ multiplicitása $\widetilde{E_t}$-ben az xy részszó t-beli előfordulásainak száma.

20. példa. Így a 10. példában adott t-hez tartozó gráf:



Az eddigiekhez hasonlóan G_t és $\widetilde{G_t}$ gráfkonstrukciók segítségével tudjuk vizsgálni az $\mathcal{M}_{19}$ feletti termeket:

21. lemma. *Legyen $t = x_1 x_2 \ldots x_n$, ahol az x_i-k nem feltétlenül különbözőek. Legyen $\varepsilon : X_t \to \mathcal{M}_{19}$ t egy kiértékelése; ekkor a fenti jelölésekkel:*

(1) *$\varepsilon(t) \neq 0$ akkor és csak akkor, ha $\varepsilon(xy) \neq 0$ t semelyik xy alakú részszavára sem;*

(2) *Ha $\varepsilon : X_t \to \mathcal{M}_{19}$ nem veszi fel a 0-át semilyen x-re sem, akkor definiálható egy $\varphi_t : G_t \to H_6$ és egy $\widetilde{\varphi_t} : \widetilde{G_t} \to H_6$ leképezés a következő formulával: $\varphi_t(a_x) = \widetilde{\varphi_t}(a_x) = \pi_\Lambda(\varepsilon(x))$ és $\varphi_t(b_x) = \widetilde{\varphi_t}(b_x) = \pi_I(\varepsilon(x))$;*

(3) *$\varepsilon(t) \neq 0$ pontosan akkor, ha ε nem veszi fel a 0-át, és az ekkor a definiálható $\varphi_t : G_t \to H_6$, illetve $\widetilde{\varphi_t} : \widetilde{G_t} \to H_6$ leképezések gráfhomomorfizmusok;*

(4) *Jelölje* $l_t = \left|\{2 \le k \le n : \varphi_t(a_{x_k}) = 1,\ \varphi_t(b_{x_{k+1}}) = 2\}\right|$, *és definiáljuk az* η : $X_t \to \mathbb{Z}_2$ *leképezést a következőképpen:* $\eta(x) = \pi_G(\varepsilon(x))$. *Ekkor ha* $\varepsilon(p) \neq 0$, *akkor*

$$\varepsilon(t) = \big(\varphi_t(a_{x_1}), \eta(x_1)\eta(x_2)\ldots\eta(x_n)\cdot a^{l_t}, \varphi_t(b_{x_n})\big);$$

(5) $l_t = |\widetilde{\varphi_t}^{-1}(\lambda_1, i_2)|$;

(6) *Ha* $\varepsilon(t) \neq 0$, *akkor*

$$\varepsilon(t) = \Big(\varphi_t(x_1), \eta(x_1)\eta(x_2)\ldots\eta(x_n)\cdot a^{|\widetilde{\varphi_t}^{-1}(\lambda_1,i_2)|}, \varphi_t(x_n)\Big).$$

A további vizsgálathoz egy technikai definícióra van szükségünk. H_6 a 3.1.1. fejezetben definiált hatszög. Legyen $G(A, B, E)$ egy (esetleg többszörös éleket tartalmazó) páros gráf, jelölje $G_i(A_i, B_i, E_i)$ $(1 \le i \le k)$ az összefüggő komponenseit. Azt mondjuk, hogy két $\varphi, \psi : G \to H_6$ homomorfizmus *forgatás-ekvivalens* ($\varphi \sim \psi$), ha vannak a H_6 hatszögnek olyan $\omega_i : H_6 \to H_6$ izomorfiái, melyekre $\varphi|_{G_i} = \omega_i \circ \psi|_{G_i}$. Ekkor φ a ψ egy *elforgatása.* Könnyen látszik, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció a G-ből H_6-ba menő homomorfizmusok halmazán.

22. lemma. *Legyen t egy term, jelölje G_t a t-hez definiált gráfot. Legyen továbbá adva egy $\varphi : G_t \to H_6$ homomorfizmus; ekkor:*

(1) *$\varphi : G_t \to H_6$-nek pontosan egy olyan elforgatása van, melyre $\psi(A_t) \subseteq \Lambda$ és $\psi(B_t) \subseteq I$;*

(2) *Van egy olyan $\varepsilon : X_t \to \mathcal{M}_{19}$ kiértékelés, amelyhez tartozó $\varphi_t : G_t \to H_6$ homomorfizmus φ egy elforgatottja.*

A következőkben a 12. állításhoz hasonlóan leírjuk $\mathcal{M}_{19}$ azonosságait, majd fokozatosan feltárjuk a TERM-EQ($\mathcal{M}_{19}$) és a 2HOM(H_6) közötti szoros összefüggést.

23. állítás. *Legyenek $t = x_1x_2\ldots x_n$, $s = y_1y_2\ldots y_m$ termek, a fent bevezetett jelölésekkel: $t \equiv s$ pontosan akkor teljesül $\mathcal{M}_{19}$-ben, ha a következő négy feltétel mindegyike teljesül:*

(I): $G_t = G_s$;

(II): $x_1 = y_1$ *és* $x_n = y_m$;

(III): *Minden változó előfordulásának paritása megegyezik t-ben, illetve s-ben;*

(IV): *Tetszőleges $\mathcal{M}_{19}$ feletti kiértékelésre az egymásutáni $\langle ., 2\rangle\langle 1, .\rangle$ tagok előfordulásának paritása megegyezik t-ben, illetve s-ben, azaz $l_t \equiv l_s \pmod 2$ minden behelyettesítésre;*

Bizonyítás. A 9. lemma alapján ezek a feltételek tényleg elégségesek. Az (I) és (II) feltételek a 12. állítás szerint már S_A felett is szükségesek voltak, így $\mathcal{M}_{19}$ felett is. A többi feltétel szükségességét konkrét behelyettesítésekkel bizonyítjuk:

Tegyük fel, hogy x nem felel meg a (III) feltételnek, azaz pl. páros sokszor szerepel t-ben, és páratlanszor s-ben. Tekintsük az alábbi behelyettesítést:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} (2, a, 3) & \text{ha } z = x, \\ (2, 1, 3) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor $\varepsilon(t) = (2,1,3) \neq (2,a,3) = \varepsilon(s)$.

A (IV) feltétel szükséges a (III) feltétel teljesülése és a 16. lemma szerint. ■

Az (I), (II) és (III) feltételek polinomidőben ellenőrizhetők, így valójában elég csak a (IV) feltétel ellenőrzésével foglalkozni. És ha ez a három feltétel tényleg teljesül, akkor nem kell minden behelyettesítést külön kezelni:

24. lemma. *Tegyük fel, hogy $t \equiv s$ a* TERM-EQ *egy bemenete; ekkor a* (III) *feltétel teljesülése esetén elég az $\langle i, \lambda\rangle$ alakú behelyettesítéseket ellenőrizni a $t \equiv s$ azonosság $\mathcal{M}_{19}$-beli teljesülésének bizonyításához.*

A továbbiakban mindent átfogalmazunk a gráfok nyelvére.

(III′): Minden csúcs fokszámának paritása megegyezik $\widetilde{G_t}$-ben, illetve $\widetilde{G_s}$-ban;

(IV′): Minden $\mathcal{M}_{19}$ feletti kiértékelésre a (λ_2, i_1) él ősképének paritása megegyezik $\widetilde{\varphi}_t$-nél, illetve $\widetilde{\varphi}_s$-nél, azaz:

$$\left|\widetilde{\varphi}_t^{-1}(\lambda_2, i_1)\right| \equiv \left|\widetilde{\varphi}_s^{-1}(\lambda_2, i_1)\right| \pmod 2.$$

Mivel a hatszög forgásszimmetrikus, így a (IV′) feltétel ekvivalens az alábbival:

(IV″): Minden $\mathcal{M}_{19}$ feletti kiértékelésre az összes (λ, i) él ősképének paritása megegyezik $\widetilde{\varphi}_t$-nél, illetve $\widetilde{\varphi}_s$-nél, azaz

$$\left|\widetilde{\varphi}_t^{-1}(\lambda, i)\right| \equiv \left|\widetilde{\varphi}_s^{-1}(\lambda, i)\right| \pmod 2.$$

Vezessük be a $\widetilde{G_{t\equiv s}}(A_{t\equiv s}, B_{t\equiv s}, \widetilde{E_{t\equiv s}}) = \widetilde{G_t} \uplus \widetilde{G_s}$ jelölést. Ekkor a 22. lemma segítségével újabb ekvivalens feltételek fogalmazhatók meg:

(III″): Minden $\widetilde{G_{t\equiv s}}$-beli csúcs foka páros.

(IV‴): Minden $\psi : \widetilde{G_{t\equiv s}} \to H_6$ homomorfizmusra az összes (λ, i) él ősképe páros, azaz

$$\left|\psi^{-1}(\lambda, i)\right| \equiv 0 \pmod 2.$$

25. megjegyzés. A (IV‴) feltételből következik a (III″) feltétel.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van egy páratlan fokú csúcs: v; az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $v \in A_{t\equiv s}$. Vegyük a következő homomorfizmust:

$$\varphi(u) = \begin{cases} \lambda_3 & \text{ha } u = v, \\ i_2 & \text{ha } u \in B, \\ \lambda_2 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Azaz ilyenkor a (IV‴) feltétel sem teljesül. ■

Arra jutottunk tehát, hogy:

26. állítás. *Legyenek* $t = x_1x_2 \dots x_n, s = y_1y_2 \dots y_m$ *termek, a fent bevezetett jelölésekkel:* $t \equiv s$ *pontosan akkor teljesül* $\mathcal{M}_{19}$*-ben, ha az* (I), (II) *és* (IV$'''$) *feltétel teljesülnek.*

Kijött tehát, hogy a TERM-EQ($\mathcal{M}_{19}$) minden bemenetéhez társítható egy, a 2.2. fejezetben definiált pároshomomorfizmus-probléma. Most belátjuk, hogy ennek a megfordítása is igaz. Mivel eddig a gráfoknak csak paritási tulajdonságait használtuk, így tekinthetünk két gráfot azonosnak, ha mod 2 nem különböznek. Azt mondjuk, hogy $G(V, E_G)$ és $H(V, E_H)$ gráfok mod 2 megegyeznek, $G \equiv H \pmod 2$, ha minden (u, v), csúcspárra az (u, v) él multiplicitásának paritása megegyezik E_G-ben és E_H-ban.

27. állítás. *Legyen* $G(A, B, E)$ *egy páros gráf, melynek minden csúcsának foka páros. Ekkor létezik olyan* $t \equiv s$ *azonosság, amelyre az* (I) *és a* (II) *feltételek teljesülnek, és* $\widetilde{G_{t\equiv s}} \equiv G \pmod 2$.

Bizonyítás. Esetleg néhány új csúcs hozzávételével feltehető, hogy $|A| = |B|$. Definiáljuk a $G_{t\equiv s}(A_{t\equiv s}, B_{t\equiv s}, E)$ gráfot az $A_{t\equiv s} = A \cup^\star \{c\}$ és a $B_{t\equiv s} = B \cup^\star \{d\}$ egyenlőségekkel. Legyen $X \cup^\star \{z\}$ változók egy halmaza úgy, hogy $\left|X \cup^\star \{z\}\right| = |A_{t\equiv s}| = |B_{t\equiv s}|$. Ekkor tehát a csúcsok indexelhetők $X \cup^\star \{z\}$-vel: $A_{t\equiv s} = \{a_x : x \in X\} \cup^\star \{c\}$ és $B_{t\equiv s} = \{b_x : x \in X\} \cup^\star \{d\}$, és c, illetve d tartozzanak z-hez. Egy $e = (a_x, b_y) \in E$ élhez definiáljuk a $w_e = xy$ szót. Legyen

$$h = \prod_{e \in E} (w_e y^2).$$

Tekintsük a

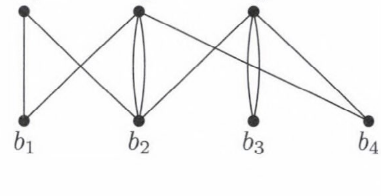
$$t := y^2 h$$
$$s := y^2 hh$$

termeket. Ekkor $G_{t\equiv s} \equiv G \pmod 2$, azaz $t \equiv s$ a feltételeknek megfelelő azonosság. ■

A könnyebb érthetőség kedvéért a fenti bizonyítást egy példán keresztül szemléltetjük.

28. példa. Legyen

G :



A fenti G gráfhoz konstruált termek a következőképpen néznek ki:

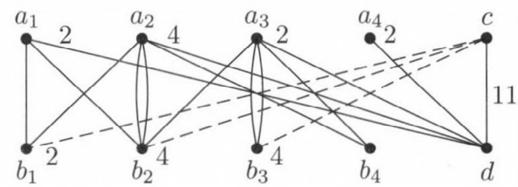
$$h = x_1^2y^2x_1x_2y^2x_2y^2x_2x_1y^2x_2^2y^2x_2^2y^2x_2x_3y^2x_3^2y^2x_3^2y^2x_4x_2y^2x_4x_3y^2$$

$$t = y^2x_1^2y^2x_1x_2y^2x_2y^2x_2x_1y^2x_2^2y^2x_2^2y^2x_2x_3y^2x_3^2y^2x_3^2y^2x_4x_2y^2x_4x_3y^2$$

$$\begin{aligned} s = {} & y^2x_1^2y^2x_1x_2y^2x_2y^2x_2x_1y^2x_2^2y^2x_2^2y^2x_2x_3y^2x_3^2y^2x_3^2y^2x_4x_2y^2x_4x_3y^2 \cdot \\ & \cdot x_1^2y^2x_1x_2y^2x_2y^2x_2x_1y^2x_2^2y^2x_2^2y^2x_2x_3y^2x_3^2y^2x_3^2y^2x_4x_2y^2x_4x_3y^2. \end{aligned}$$

Például a t-hez tartozó gráf:

$\widetilde{G_t}$:



Hasonlóan felrajzolható $\widetilde{G_t}$ és $\widetilde{G_{t\equiv s}}$ is.

A 16. és 22. lemmákból az alábbi következik:

29. következmény. *Legyen $G(A, B, E)$ olyan páros gráf, melynek minden fokszáma páros. Ekkor megadható egy az (I) és (II) feltételeket teljesítő $t \equiv s$ azonosság, melyre $t \equiv s$ igaz $\mathcal{M}_{19}$ felett pontosan akkor, ha minden $\varphi : \widetilde{G_{t\equiv s}} \to H$ homomorfizmus páros.*

Mostantól a $2\text{HOM}(H_6)$ coNP-teljességét szeretnénk belátni. Ehhez, mivel $\text{RET}(H_6)$ NP-teljes a 2.2. fejezetbeli megjegyzés szerint, elég a következőt bizonyítani:

30. állítás. *Minden, egy H_6' hatszöget tartalmazó G egyszerű gráfhoz definiálható egy olyan $\widetilde{G}$ páros gráf, melynek minden fokszáma páros, és pontosan akkor létezik $\varphi : G \to H_6$ retrakció, ha létezik $\psi : \widetilde{G} \to H_6$ nem páros homomorfizmus.*

Bizonyítás. Legyen G az állításbeli páros gráf. Ekkor $\widetilde{G}$-ot úgy kapjuk, hogy G minden nem a H_6' hatszöghöz tartozó élét megduplázzuk. Ekkor persze $\widetilde{G}$ minden csúcsa valóban páros fokú lesz. Azt állítjuk, hogy $\widetilde{G}$ megfelel az állítás követelményeinek.

Tegyük fel, hogy $\varphi : G \to H_6'$ retrakció; ekkor ugyanez a leképezés megad egy $\widetilde{\varphi} : \widetilde{G} \to H_6$ homomorfizmust is. Legyen ekkor $\psi = \omega \circ \widetilde{\varphi}$, ahol ω az izomorfizmus H_6 és H_6' között.

A másik irányhoz tegyük fel, hogy $\psi : \widetilde{G} \to H_6$ nem páros homomorfizmus. Mivel a hatszög éleit kivéve minden élet megdupláztunk, így $\psi|_{H_6} : H_6' \to H_6$ szintén egy nem páros homomorfizmust ad, ami izomorfizmus is, hiszen a hatszög bármely nem szürjektív homomorfizmusa páros. Ekkor $\varphi = \left(\psi|_{H_6}\right)^{-1} \circ \psi$ G egy H_6-ra való retrakcióját definiálja. ∎

Az eddigiekkel tehát azt sikerült igazolni, hogy:

31. tétel. 2HOM(H_6) *coNP-teljes.*

Ezekből pedig rögtön következik a 8. tétel, miszerint TERM-EQ($\mathcal{M}_{19}$) NP-teljes.

4. Záró megjegyzések

Mint az eddigiekből kiderült, a TERM-EQ nehézségének megállapításához nincs jól bevállt, mindig működő módszer. Érdekes kérdés, hogy a félcsoportok körében van-e egyáltalán remény a dichotómia bizonyítására, vagy van-e esély legalább a 0-egyszerű félcsoportok esetében? A későbbiekben egy ezzel kapcsolatos negatív eredményt szeretnénk bizonyítani, mely szerint a probléma nehezebb az eddig még megoldatlan CSP problémakörnél: sejtésünk, hogy minden CSP problémához van olyan 0-egyszerű félcsoport, amelyre a szóprobléma ekvivalens az adott CSP problémával.

Irodalom

[1] M. Agrawal, N. Kayal and N. Saxena, PRIMES is in P, *Annals of Mathematics,* **160** (2004), no. 2, 781–793.

[2] J. Büki and Cs. Szabó, Colored homomorphisms for direct products of graphs, *Information Processing Letters,* **81/4** (2002), 175–178.

[3] S. Burris and J. Lawrence, The equivalence problem for finite rings, *Journal of Symbolic Computation,* **15** (1993), 67–71.

[4] A. Clifford and G. Preston, *The algebraic theory of semigroups,* vol. 1, American Mathematical Society (1961).

[5] M. Y. Feder and T. Vardy, *Monotone monadic* SNP *and constraint satisfaction,* 25th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (1993), 612–622.

[6] T. Feder, P. Hell and J. Huang, List homomorphism and circular arc graphs, *Combinatorica,* **19** (1999), 487–505.

[7] M. Goldmann and A. Russel, The complexity of solving equations over finite groups, *Information and Computation,* **178** (2002), 253–262.

[8] P. Heel and J. Nešetřil, On the complexity of h-coloring, *Journal of Combinatorial Theory,* **B 48** (1990), 92–110.

[9] G. Horváth, J. Lawrence, L. Mérai and Cs. Szabó, The complexity of the equivalence problem for non-solvable groups, *Bull. Lond. Math. Soc.,* **39(3)** (2007), 433–438.

[10] G. Horváth, *Véges csoportok azonosságai,* TDK dolgozat (2003).

[11] J. M. Howie, *Fundamentals of semigroup theory,* Claredon (1995).

[12] H. Hunt and R. Stearns, The complexity for equivalence for commutative rings, *Journal of Symbolic Computation,* **10** (1990), 411–436.

[13] O. Klíma, On the solvability of equations in semigroups with $x^r = x$, *Contributions to general algebra,* **12** (1999), 237–245.

[14] J. Lawrence and R. Willard, *The complexity of solving polynomial equations over finite rings,* kézirat (1997).

[15] C. H. Papadimitrou, *Számítási bonyolultság,* Novadat Bt. (1999).

[16] V. Yu. Popov and M. V. Volkov, Complexity of checking identities and quasi-identities in finite semigroups, *Journal of Symbolic logic,* megjelenés alatt.

[17] L. Rónyai, G. Ivanyos és R. Szabó, *Algoritmusok,* Typotex (1999).

[18] S. Seif and Cs. Szabó, Algebra complexity problems involving graph homomorphism, semigroups and the constraint satisfaction problem, *Journal of Complexity,* **19** (2003), no. 2, 153–160.

[19] S. Seif and Cs. Szabó, The computational complexity of checking identities in simple semigroups and matrix semigroups over finite fields, *Semigroup Forum,* végleges formában elfogadva (2005).

[20] Cs. Szabó and V. Vértesi, The complexity of checking identities for finite matrix rings, *Algebra Universalis,* **51** (2004), 439–445.

[21] Cs. Szabó and V. Vértesi, The complexity of the word-problem for finite matrix rings, *Proceedings of the American Mathematical Society,* **132** (2004), 3689–3695.

[22] V. Vértesi, *Azonosságok gyűrűkben,* TDK dolgozat (2004).

Vértesi Vera
Eötvös Loránd Tudományegyetem
Algebra és Számelmélet Tanszék
1117 Budapest
Pázmány Péter sétány 1/c.
wera@szit.bme.hu

Svetlana Plescheva
Ural State University
Jekatyerinburg
sv_goldberg@mail.ru

TÁRSULATI ÉLET – 2005

Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2005. évi érmet **Sárközy András**nak ítélte oda.

Indoklás: *Sárközy András* 1963-ban végzett kitüntetéses oklevéllel az ELTE TTK matematikus szakán, 1969-ben szerzett kandidátusi fokozatot, 1982-ben lett a matematikai tudományok doktora, 1998-ban az MTA levelező tagjának választották, 2004 óta pedig az MTA rendes tagja. 1995-től egyetemi tanár az ELTE TTK algebra és számelmélet tanszékén (ahol 1963-tól 1971-ig tanársegéd, majd adjunktus volt, de másodállásban, illetve óraadóként akkor is oktatott itt, amikor 1971 és 1994 között főállásban az MTA Matematikai Kutatóintézetében dolgozott tudományos főmunkatársként, majd tudományos tanácsadóként), 1995 és 2005 között a tanszék vezetője volt. Számos vendégprofesszori, illetve vendégkutatói meghívást kapott az USA, Kanada, Franciaország, Németország és Anglia neves egyetemeire; ezek időtartama összességében mintegy 11 évet tesz ki. A Marseille-i Université de la Méditerranée egyetem díszdoktora.

Tudományos munkájának eredménye 203 tudományos dolgozat és 4 könyv. A dolgozatok nagyrészt számelméleti témájúak (az analitikus, a kombinatorikus és a számítógépes számelmélet területéről), az ezekre való hivatkozások száma meghaladja az 1130-at. Kiemelkedő jelentőségűek a különbségsorozatokra vonatkozó eredményei, köztük a ma már klasszikusnak számító Fürstenberg–Sárközy-tétel. Alapvető fontosságúak az összegsorozatok aritmetikai szerkezetére vonatkozó tételei, valamint ezek multiplikatív analogonjai is. Számos alkalmazása van a véges sorozatokra vonatkozó addíciós tételeinek, különösen a részhalmazösszegekre vonatkozó eredményeinek. Az utóbbi időben pszeudovéletlen sorozatokkal kapcsolatban ért el jelentős és gyakorlati szempontból is fontos eredményeket.

A tehetséges fiatalok bevezetését a matematikai kutatásba, megfelelő szintű és témájú problémákkal való ellátásukat olyan magas szintre fejlesztette, hogy tanítványai rendszeresen (és gyakran egyszerre több dolgozattal is) első díjasok a kari és az Országos Tudományos Diákköri Konferenciákon, sőt többségüknek már hallgató korában megjelenik első tudományos dolgozatuk (néhányuknak már első, illetve másodévesként, egy harmadévesnek pedig az egyik legrangosabb folyóirat, az *Acta Arithmetica* fogadta el közlésre a dolgozatát). Ezen kiemelkedő diákköri munkájáért az Országos Diákköri Tudományos Tanács mestertanári címmel tüntette ki.

Legsikeresebb fiatal magyar tanítványai (betűrendben felsorolva): *Bérczi Gergely, Dombi Gergely, Gyarmati Katalin, Harcos Gergely, Horváth Gábor, Valkó Benedek* és *Zábrádi Gergely*. Ezen kívül közreműködött többek között *Balog Antal, Freud Róbert* és *Sándor Csaba* kutatói pályájának elindításában is.

Sárközy András egy-egy sok fáradsággal járó COST, OTKA, FKFP, PFP, illetve TéT program vezetőjeként lehetővé tette magyar tanítványai utazását külföldi tanítványaihoz, illetve társszerzőihez is további tudományos munkára. Sárközy András társszerzőinek a száma mintegy 50, és különösen gyümölcsöző együttműködést alakított ki francia kutatókkal (néhány francia tanítvány-munkatársa: *J. Cassaigne, C. Dartyge, S. Ferenczi, C. Mauduit, J. Rivat, P. Hubert*).

Sárközy András munkásságát a már említett díszdoktori, valamint mestertanári címen kívül számos további kitüntetéssel is elismerték: Grünwald-díj, Rényi-díj, Erdős-díj, Akadémiai Díj, Ipolyi Arnold Tudományfejlesztési Díj.

Sárközy András igen szerteágazó tudományos közéleti tevékenységet is folytat, többek között elnöke az MTA Matematikai Bizottságának, korábban elnöke volt az ELTE TTK Matematikus Professzori Tanácsának, konferenciák szervezője, számos folyóirat szerkesztője és matematikai zsűrik (OTKA, SZPÖ) elnöke, illetve tagja.

Beke Manó-emlékdíj

A 2005. évi Beke Manó-emlékdíj bizottság a díj első fokozatában részesítette **Pálfalvi Józsefnét**; a díj második fokozatát kapták: **Gyengéné Beé Andrea, Lippai Gergelyné, Pintér Klára, Poronyi Gábor, Szoldatics József, Udvarhelyi Csaba.**

Indoklás: *Pálfalvi Józsefné* 1963-ban végzett az ELTE matematika–fizika szakán. 1963–65 között Budapesten az Irinyi János Gimnáziumban, 1965–75 között a Szilágyi Erzsébet Gimnáziumban tanított. 1975-től a Budapesti Tanárképző Főiskolán adjunktusként, majd docensként dolgozott. 1989-től a matematika tanszék vezetője. Ezen időszakban is 15 éven át tanított a Veres Pálné Gimnáziumban.

Egyik előkészítője a Varga Tamás által fémjelzett tanítási kísérlet középiskolai bevezetésének. Ennek nyomán született a Bartal–Pálfalvi gimnáziumi munkatankönyv-sorozat és négy tankönyvi útmutató. E tankönyvek már a 70-es évek végén elsősorban a tanulói aktivitást, a problémamegoldó gondolkodás fejlesztését tűzték ki célul. Igen jól használható a „Barátkozzunk a számokkal" c. szakköri füzete.

Pálfalvi Józsefné 30 év óta igen sokat tesz annak érdekében, hogy a főiskoláról jól felkészült, helyes matematikai szemlélettel és megfelelő módszertani kultúrával rendelkező általános iskolai tanárok kerüljenek ki. Rendszeresen tartott tanítóknak és általános iskolai tanároknak továbbképző előadásokat a számfogalom és a függvényfogalom fejlesztéséről és egyéb fontos módszertani kérdésekről Budapesten és vidéken. Számos cikke is megjelent.

Kiemelkedő érdeme az általa 15 éve minden év novemberében megszervezett Varga Tamás-napok, a Varga Tamás Akadémia. Kezdeményezésére több hasznosítható pályázati írás született tanítóktól, tanároktól közvetlenül a tanítási gyakorlatból. 1978-ban a Beke Manó-emlékdíj második fokozatában részesült.

Gyengéné Beé Andrea matematika–fizika szakos tanári diplomáját kitüntetéssel szerezte meg 1985-ben. Azóta a budapesti Eötvös Gimnázium tanára. Egyik közreműködője volt a Pósa Lajos vezette matematika tanítási módszertani kísérletnek. Az ELTE TTK vezetőtanári munkát, az Arany Dániel-versenybizottsági tagságot kollégái és az érintett diákok, hallgatók megelégedésére végzi több éve. Iskolájának pedagógiai koncepciójának és matematika szaktárgyi programjának kidolgozója. A kerettantervi munkálatok egyik legaktívabb tagja.

Szakmailag kiemelkedően felkészült, a tanulói felfedezésre építő matematikatanítási módszer iránt elkötelezett tanár. Alapvető célja a tárgy megszerettetése és szépségének minél több diák számára láthatóvá tétele. Ezek segítségével formálja tanítványainak gondolkodását. Felelősséggel és eredményesen vezeti az iskola matematika munkaközösségét. Sokat tesz azért, hogy az új tantervi fejezetek tanítását a munkaközösség felkészülten kezdje el, a szaktárgyi követelmények egységesek és reálisak legyenek. Több osztályt vezetett osztályfőnökként. Ezt a feladatot is empátiával, igényesen, a tanulók személyiségének komplex fejlesztéséért érzett nagy felelősséggel végezte.

A hatosztályos gimnáziumi osztályok számára 7. és 8. osztályos tankönyvet is írt. Szaktárgyi, módszertani felkészültsége, a matematikai nevelés országos feladataiban való sikeres közreműködése, iskolafejlesztő tevékenysége kiemelkedő.

Lippai Gergelyné (Orbán Edit) 1974-ben kapott tanítói diplomát a Bessenyei György Tanárképző Főiskolán. Tiszanagyfalun, Nyíregyháza-Sóstóhegyen tanított majd 1982-ben nyert kinevezést mai iskolájába, a Móricz Zsigmond Általános Iskolába, ahol tanítói munkája mellett az úttörőcsapat helyettes vezetőjeként is tevékenykedett, több évig volt munkaközösség-vezető, 1998-tól igazgatóhelyettes.

Céltudatos személyiség. Állásfoglalásaiban megbízható. Reális gondolkodású. Kitartása, szorgalma, lendülete példa a nevelőtestület előtt. Kollégáival való kapcsolatát a nyugodtság, türelem, és a szakmaiság jellemzi. Elsősorban a matematika és a készségtárgyak oktatásában, az osztályfőnöki nevelőmunkában mélyült el. Munkájára az alaposság, a nagyfokú igényesség és a lelkiismeretesség jellemző. Tanítási óráit módszertani gazdagság, életszerűség, jó hangulat és a szemléletesség teszik utolérhetetlenné. Tanítványaival kapcsolata példaértékű, gyermekközpontú, közösségfejlesztő. Számtalan tanítási órán kívüli programot, túrát, táborozást szervez osztályközösségének. Szívesen segíti munkatársait, bemutató tanításokat vállal. Számítógépes matematikatanítása egyedülálló, melyhez több oktatóprogramot is készített. Alsós gyerekek és tanítóik számára több kiadványt is készített. Iskolája 1990-ben kezdte meg az emelt szintű matematika–informatika oktatást. Eddig 3 egyedi tantervet készített e területen. A pedagógiai programok tervezőmunkáiból is kivette részét: a személyiségfejlesztés-közösségfejlesztés területének egyik alkotója. Iskolája több mint egy évtizede, hogy évente megrendezi a 4-500 résztvevős

Dienes Pál megyei matematikaversenyt. Ezt a versenyt ő indította el és a mai napig oroszlánrészt vállal a szervezésben. Az, hogy iskolája az utóbbi években a város egyik legjobb hírű, legeredményesebb iskolája lett, az ő munkájának is köszönhető. Ezt miniszteri, városi kitüntetések is elismerik.

Pintér Klára Szegeden, a JATE Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziumának fizika tagozatán érettségizett. 1975-től a JATE programtervező matematikus hallgatója, 1980-ban szerzett diplomát. 1980 és 1986 között a Szegedi Orvostudományi Egyetem Számítóközpontjában dolgozott. 1986-tól tanít a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola matematika tanszékén, 1996-tól adjunktusként. 1988-ban középiskolai matematika–számítástechnika szakos tanári oklevelet szerzett. 1994 és 1996 között óraadó tanárként tanított a JATE Ságvári Endre Gyakorló Általános Iskolájában. Publikációs tevékenysége igen jelentős. Számos cikke jelent meg különböző magyarországi és külföldi szakdidaktikai folyóiratokban. Ezen cikkek témája zömében fő érdeklődési területeivel, a tehetséggondozással és a problémamegoldási képességek fejlesztésével kapcsolatosak. Tankönyvek és feladatgyűjtemények szerzője illetve társszerzője, ezek közül is kiemelhetjük a méltán közkedvelt Matematikai problémakalauzt és a Sokszínű matematika tankönyvsorozatot. Pintér Klára az általános matematikai tehetséggondozás országosan elismert alakja. Számos tehetséggondozó táborban tartott foglalkozásokat (Vác, Kőszeg), ezek mellett hosszú évek óta minden augusztus végén tehetséggondozó tábort szervez Csongrád megye tehetséges általános iskolásainak. Rendszeresen kérik fel előadónak konferenciákon, tanártovábbképzéseken. Előadásai, tehetséggondozó foglalkozásai érdekesek, újszerűek és igen magas szakmai színvonalúak. Nagyon sok helyre hívják, és ő zömében elfogadja ezeket a meghívásokat. A főiskolán felkarolja a tehetséges, érdeklődő tanár szakos hallgatókat, mindig van TDK dolgozatot író hallgatója. Egyik hallgatója 2005-ben az OTDK tantárgy-pedagógiai szekciójában II. díjat kapott dolgozatáért. Főiskolai órái, előadásai, gyakorlatai, speciálkollégiumai igen népszerűek, a hallgatók szeretik. Tagja a Bolyai János Matematikai Társulat választmányának és oktatási bizottságának, valamint a Polygon folyóirat szerkesztőbizottságának. Pintér Klára mind emberi, mind szakmai szempontból kiváló kolléga.

Poronyi Gábor 1964-ben végzett a Pécsi Tanárképző Főiskola matematika–fizika–műszaki ismeretek és gyakorlatok szakán. Munkáját a nagynyárádi iskolában kezdte. Munka mellett végezte el az ELTE fizika tanári, majd a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem számítástechnika tanár szakot. 1979-ben az ELTE-n matematikából egyetemi doktori címet szerzett. 1968 óta tanít középiskolában, szaktárgyai közül főleg matematikát. Dolgozott a Baranya megyei pedagógiai intézetben módszertani munkatársként, majd 1991-ben igazgató lett az Árpád Fejedelem Gimnázium és Általános Iskolában.

Szervezőmunkájának köszönhetik a baranyai gyerekek, hogy elsők között kapcsolódhattak be a Zrínyi Ilona-versenybe 1992-ben. Középiskolai kollégákkal, barátokkal a matematika versenyek gondozására alapítványt hozott létre. Fő szervezője a kárpát-medencei Gordiusz-versenynek. A szervezés mellett feladatokat is készít, az általa kitűzött feladatok könyvekben is megjelentek. Az évek során ezeken kívül is publikált, több módszertani cikke jelent meg. Tanítványait a tantárgy szeretetére, magas szintű művelésére nevelte. Sok fiatal kollégája tőle tanulta meg a gyerekekkel való mértéktartóan gondoskodó, türelmes, következetes bánásmódot. Kiemelt feladatának tekinti igazgatóként is a tehetséges tanulók fejlesztését, segítését, gondozását. Rendszeresen vezet szakkört, ahová tanítványai szívesen járnak. Munkatársaitól elvárja az igényes, következetes pedagógiai, szaktárgyi munkát, ahhoz igyekszik megteremteni az optimális feltételeket. A hosszú időn át végzett kiváló és eredményes, a tantárgyát népszerűsítő oktató-nevelő munkáját ismeri el a Beke Manó-emlékdíj.

Szoldatics József már középiskolai diákként kiemelkedett társai közül szorgalmával, tudásával, tehetségével. A megyei csúcsszakkör leglelkesebb látogatója. 1986-ban matematika–fizika szakos, 1996-ban számítástechnika szakos tanári diplomát szerzett az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. Jelenleg a kapuvári Felsőbüki Nagy Pál Gimnázium tanára, dolgozik a Veszprémi Egyetem Műszaki Informatikai Kar Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskolájában. 1992-ben a Győr-Moson-Sopron Megyei Pedagógiai Intézet középiskolai matematika szakértőnek kérte fel. Aki csak ismeri, kiváló, rutinos pedagógust tisztelhet benne. Aktivitása páratlan, teherbírása példaértékű. A napi tanítási munka mellett iskolájának számítógépes rendszerét gondozza, a matematika munkaközösség vezetője. Bármely tehetséggondozó foglalkozáson ott van, hozza tanítványait, magas színvonalon tanít, előadásokat tart többek között a Rátz László-vándorgyűlésen is, cikke jelent meg a Matematika Tanításában. Tudományos kutatómunkát folytat Tuza Zsolt professzor irányítása mellett. Az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola valamint a saját iskolája honlapját is szerkeszti. Szerénysége példamutató. OKTV bizottsági tagként hozzájárult a verseny színvonalas munkájához. Személyében olyan ember kap kitüntetést, aki eddig is sokat tett a matematikáért, és másoknak is lendületet adott, hogy végezze ezt a nemes feladatot sok-sok diák örömére!

Udvarhelyi Csaba matematika–fizika–számítástechnika szakos tanár jelenleg Szegeden, a Bálint Sándor Általános Iskolában tanít. Általános iskolai, matematika–fizika szakos tanári oklevelét 1983-ban a szegedi Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán szerezte. 1988-ban a Kossuth Lajos Tudományegyetemen általános iskolai számítástechnika szakos tanári diplomát is szerzett. Pedagógus pályáját a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Gyakorló Általános Iskolában kezdte. Tanóráit az alaposan megszervezett tanulói tevékenykedtetés és a jól tervezett fogalomalkotás, gyakorlás jellemzi. Sikeresen él a pedagógiai és módszertani szabadság lehetőségeivel. Tanítványait képességeik szerint igyekszik foglalkoztatni, erre ösztönzi kollégáit is. Nagy gondot fordít az önképzésre. A tehetséges tanulókkal való kiemelt foglalkozás szívügye. 1990-től a szegedi Gutenberg János Általános Iskolában személyére építve indítottak csoportbontásban szervezett matematika tagozatot. Tevékeny részese volt az iskolájában már akkor beindított számítástechnika tantárgyszerű oktatásának. Az eredményesebb munka érdekében megszerezte a számítástechnikai szoftverüzemeltető szakképesítést. Az 1994/95-ös tanévtől a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Matematika Tanszéke külső szakvezető tanárnak kérte fel. Azóta a matematika szakos tanárjelöltek tanítási gyakorlatát is irányította, segítette több éven át. E mellett rendszeresen fogad a februári külső gyakorlatra negyedéves hallgatókat. A kezdő tanárok szakmai és beilleszkedési problémáiról módszertani előadásra is felkérték a főiskolán. Tanítványai rendszeresen részt vesznek a helyi, területi és országos szervezésű matematika-, számítástechnika- és természettudományos versenyeken, ahol rendszeresen elismerésre méltó eredményeket érnek el. Mindig fontos feladatának tekintette a tehetséggondozást, a tehetségekkel való rendszeres foglalkozást. Immár 13 éve végzi nagy odaadással Csongrád megyében a Kis Matematikusok Levelező Versenyének szervezését. A versenyt egy éve Bonifert Domonkos-matematikaversenynek nevezték el és az Interneten is hozzáférhető a sulinet oldalain. Támogat minden kezdeményezést, ami a matematikát, mint tudományt és mint tantárgyat népszerűsíti. Több más verseny szakmai munkájából is alaposan kiveszi a részét. A tehetséges tanulókkal való törődés a tanéven túl is szívügye. A Csongrád Megyei Matematika-, Fizikatanárok Szegedi Alkotóműhelye által az érdeklődő tanulók számára több éven keresztül szervezett nemzetközi matematika–fizika tehetséggondozó szaktábor tartalmas lebonyolításában aktívan részt vett minden évben. A tehetséggondozás mellett mindennapi munkájában nem hanyagolja el a szerényebb képességű tanulók fejlesztését, felzárkóztatását sem. Számukra tanórán kívül is igyekszik biztosítani az esélyegyenlőséget a biztonságos továbbhaladásban. A Gutenberg János Általános Iskola bezárása után került a Bálint Sándor Általános Iskolába, jelenlegi munkahelyére, ahol matematikát, fizikát és számítástechnikát tanít. Idén újabb diplomát szerzett közoktatás vezető szakon.

Grünwald Géza-emlékérem

A 2005. évi bizottság határozata alapján az Emlékéremben a következők részesülnek: **Bessenyei Mihály, Braun Gábor, Kálmán Tamás, Waldhauser Tamás.**

Indoklás: *Bessenyei Mihály,* a Debreceni Egyetem Temészettudományi Kara analízis tanszékének tanársegédje, 1975-ben született Debrecenben, 2000-ben a KLT-n szerzett matematikus szakon diplomát.

Már egyetemi hallgatóként bekapcsolódott az analízis tanszék oktató- és tudományos kutatómunkájába. Jelenleg a „Matematika” című tárgy előadásait és gyakorlatait tartja informatikatanár szakos hallgatóknak. Tudományos kutatómunkáját – Páles Zsolt irányítása mellett – függvényegyenlőtlenségek témakörben végzi. Eddig négy dolgozata jelent meg referált nemzetközi folyóiratokban, egy áll megjelenés alatt, és további egy-egy van beküldve, illetve előkészületben. Eredményei, amelyeket 11 alkalommal mutatott be nemzetközi szemináriumokon, illetve konferenciákon, jelentős érdeklődést keltettek. Az „Hermite–Hadamard-type inequalities for generalized convex functions” címmel angol nyelven írt PhD disszertációjában, az Hermite–Hadamard-egyenlőtlenséghez kapcsolódó kutatásairól ad számot. Az egyenlőtlenség klasszikus változata szerint korlátos zárt intervallumon értelmezett konvex függvény integrálátlaga alulról és felülről becsülhető a függvény értelmezési tartományának középpontjában felvett értékével, illetve az értelmezési tartomány végpontjaiban felvett értékek számtani közepével. Értekezésében

Hermite–Hadamard-típusú egyenlőtlenségeket igazol általánosított konvex függvényekre, vagyis alsó és felső becslést ad általánosított konvex függvények integrálátlagára az értelmezési tartomány bizonyos alappontjai segítségével. Tehetségét és szorgalmát eddig több alkalommal elismerték: már egyetemi hallgató korában nyári ösztöndíjban részesült, megosztott első díjat kapott házi TDK konferencián, a Debreceni Egyetem TTK Tanácsa emlékérmének tulajdonosa és 2003-ban elnyerte az „ISFE-Medált", a „Függvényegyenletek és -egyenlőtlenségek" elnevezésű nemzetközi konferenciasorozat Tudományos Tanácsának díját.

A fentiek alapján ítélte a Bizottság az emlékérmet Bessenyei Mihálynak.

Braun Gábor, az Eötvös Loránd Tudományegyetem algebra és számelmélet tanszékének tudományos munkatársa, 1978-ban született, 2002-ben végzett az ELTE matematikus szakán, majd Németországban, az Esseni Egyetemen szerzett doktori fokozatot 2003-ban. Jelenleg az Oktatási Minisztérium posztdoktori ösztöndíjasa. Braun Gábornak eddig 6 dolgozata jelent meg, egyet közlésre elfogadtak, egyet benyújtott, egy további pedig előkészületben van. Munkáit vezető nemzetközi szakfolyóiratok (pl. Journal of Algebra, Proceedings of the American Mathematical Society) közölték.

Braun Gábor jelentős eredményeket ért el mind az algebrában, mind a topológiában, amelyek közül az alábbiak emelendők ki: Rüdiger Göbellel közös munkáiban lokálisan véges p-csoportok automorfizmus-csoportját vizsgálta. Legfigyelemreméltóbb eredményük szerint minden csoporthoz található olyan lokálisan véges p-csoport, amelynek az adott csoport a külső automorfizmus-csoportja.

Braun Gábor bebizonyította Philip Higginsnek egy 1971-es nevezetes sejtését, amely közös általánosítását adja a csoportok szabad szorzataira vonatkozó Kurostételnek és Higgins kapcsolódó eredményének.

Közös általánosítását adta Hirzebruch virtuális index formulájának és az immerziók r-szeres pontjainak karakterisztikus osztályait megadó, Szűcs Andrástól származó formulának.

Lippner Gáborral közös cikkében egy immerzió r-szeres pontjainak lehetséges kobordizmusosztályait vizsgálja, és becsléseket ad azon elemek alkotta részcsoport indexére a kobordizmuscsoportban, melyek tartalmaznak ilyen r-szeres pontsokaságot.

Legújabb, Némethi Andrással közös munkájában azt vizsgálja, hogy mennyire határozza meg egy f komplex kétváltozós függvény analitikus tulajdonságait a $\{z \mid f(z) = \varepsilon\}$ sokaság topológiája.

A matematika több területén elért mély eredményeiért kapja Braun Gábor az Emlékérmet.

Kálmán Tamás 1975-ben született, jelenleg a Los Angeles-i Egyetemen posztdoktor. Eddig összesen 4 munkája van. Kettő megjelent még diákkorában a *Topology and it's Applications*-ben. A harmadik, egy több mint 40 oldalas cikk, már megjelenés alatt van az igen színvonalas *Geometry and Topology* c. folyóiratban, mely a 3 és 4 dimenziós topológia témakörében a vezető folyóirat.

A negyedik, kb. 30 oldalas cikke az interneten olvasható, elfogadásról még nincs visszajelzés.

Stable maps of surfaces into the plane című cikkében leegyszerűsítette Eliashberg és Levine bizonyítását a cusp-ok (csúcsszingulariások) eltávolíthatóságáról és megoldott egy Haefliger által kb. 30 éve felvetett problémát a szinguláris görbék lehetséges számáról.

Disszertációja készítése során egy teljesen új és modern elméletbe tanult bele, így be tudott kapcsolódni a legmodernebb kutatási irányokba.

Explicit számítási algoritmust sikerült kifejlesztenie a Chekanov-féle kontakt homológiák kiszámítására a csomók egy széles osztályára.

Ennek segítségével be tudta látni, hogy a Legendre-csomók R^3-ban egy nem egyszeresen összefüggő teret alkotnak.

Negyedik cikkében becslést sikerült adnia e tér fundamentális csoportjának rendjére.

Rendkívül nehéz és modern területen ért el nemzetközi érdeklődést kiváltó eredményt.

Waldhauser Tamás, a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének tanársegédje 1975-ben született. A szegedi egyetemen (akkor még JATE) szerzett kitüntetéses matematikus oklevelet 1998-ban. Az Országos Tudományos Diákköri konferencián második díjat nyert 1997-ben. 1998-tól a JATE-n, majd 2000-től a University of New Hampshire-en doktori tanulmányokat folytatott; majd PhD fokozatot szerzett 2004-ben. Kutatási eredményeiről több nemzetközi konferencián tartott előadást. Eddig 5 dolgozata jelent meg, illetve van közlés alatt.

A véges halmazok minimális klónjai csak a 2 és 3 elemű esetben ismertek. Leírásuk a 4 elemű halmazon Rosenberg egy eredménye alapján három eset vizsgálatát kívánja. Ezek közül az elsőt Szczepara intézte el 1995-ben, a másodikat pedig Waldhauser az első szép és mély meggondolásokat tartalmazó cikkében.

A nemasszociatív műveletek távolságát az asszociativitástól egy végtelen számsorozat, az ún. asszociatív spektrum mutatja, amelynek n-edik eleme azt mondja meg, hogy a szóban forgó műveletből különböző zárójelezésekkel hány n-változós művelet származtatható. (Asszociatív esetben csak egy.) A második cikke bevezeti az asszociatív spektrum fogalmát, leírja legfontosabb tulajdonságait, meghatározza számos klasszikus nemasszociatív művelet spektrumát, és vizsgálja a műveletek más tulajdonságaival való kapcsolatát.

Harmadik cikkében a szerző bonyolult gondolatmenettel bebizonyítja, hogy K. Kearnes klónok Abel-algebrákban való reprezentációjára vonatkozó 1995-ben közzétett eredményei gyengébb feltevések mellett is érvényesek.

A negyedik – korábbi cikkeitől teljesen független – dolgozatban a díjazott megmutatja, hogy Liming Ge és Yitang Zhang eredménye, mely szerint a Riemann-sejtés egy alkalmas Hilbert-téren értelmezett operátor önadjungáltságával ekvivalens, érvényben marad, ha alaptestnek a racionális számtest helyett annak tetszőleges algebrai bővítését tekintjük.

Az ötödik dolgozatban a szerző leírja azokat a spektrum-értelemben majdnem asszociatív műveleteket, valamint azokat az asszociativitáshoz ugyancsak közeli Szász-Hájek-grupoidokat, amelyek minimális klónt generálnak. Waldhauser Tamás különböző területeken ért el érdekes és értékes eredményeket, melyekért méltán kapja az Emlékérmet.

Farkas Gyula-emlékdíj

A Bizottság a beérkezett javaslatok alapján 2005-ben három Farkas Gyula-emlékdíjat adományoz. A díjazottak: **Kocsor András** (MTA-SZTE, Mesterséges Intelligencia Kutatócsoport), Marót Mihály Csaba (Szegedi Tudományegyetem), **Szeszlér Dávid** (BME számítástudományi és informatikai tanszék).

Indoklás: *Kocsor András* 1971-ben született. Egyetemi tanulmányait Szegeden végezte, 1995-ben kapott programtervező matematikus diplomát. A Szegedi Tudományegyetemen 2004-ben szerzett PhD fokozatot. Jelenleg a Mesterséges Intelligencia Kutatócsoportban tudományos főmunkatársként dolgozik mint csoportvezető-helyettes. Több projekt témavezetője, illetve szegedi szakmai vezetője. Érdeklődési területe a gépi tanulás és ennek alkalmazásai. Elméleti kutatásai során újszerű nemlineáris, optimalizációalapú klasszifikációs, vizualizációs, regressziós és tulajdonságkinyerő gépi tanulási algoritmusokat vizsgált és dolgozott ki. Gyakorlati eredményei leginkább beszédfelismeréshez, jelfeldolgozáshoz és bioinformatikához kapcsolódnak. Ezek közül a legismertebb *a Beszédmester* szoftver, amit számos helyen alkalmaznak halláskárosult gyerekek beszédtanulásának segítésére és olvasásfejlesztésre is.

Már 98 közleménye jelent meg, ezek közül néhány külföldi folyóiratokban, illetve konferenciakötetekben.

Markót Mihály Csaba 1976-ban született. Egyetemi tanulmányait Szegeden közgazdasági programozó matematikus szakon végezte, 1999-ben kapott diplomát. A Szegedi Tudományegyetemen 2004-ben szerzett PhD fokozatot. Jelenleg kutatóösztöndíjas az Európai Űrügynökségen. Fő kutatási területe a globális optimalizálás és az intervallum analízisre épülő megbízható numerikus számítások. Már hallgató korában is foglalkozott körpakolási problémákkal, ebben a témában TDK dolgozatot is írt. Azóta is több cikkében foglalkozik azzal a kérdéskörrel, hogy ha pontosan k egyforma méretű kört rakunk bele az egységnégyzetbe, akkor mekkora lehet a sugár maximuma. Egyik e témában írt cikke a *SIAM Journal of Optimization* folyóiratban fog megjelenni.

Szeszlér Dávid 1975-ben született. Az ELTE-re járt egyetemre, ahol 1998-ban kapott matematikatanár és angol szakfordító diplomát. A BME számítástudományi és információelméleti tanszékén volt doktorandusz, a doktori értekezését novemberben sikeresen megvédte. Jelenleg a BME SZIT tanársegédje. Kutatási területe a diszkrét matematika és alkalmazásai. Elsősorban nagy bonyolultságú integrált áramkörök huzalozásának algoritmikus kérdéseivel foglalkozik. Első önálló eredményét még egyetemi hallgató korában érte el. Már akkori munkájára, és a későbbről származó 3 dimenziós VLSI-huzalozással kapcsolatos eredményeire is jellemzőek az algoritmikus bizonyítások. A klasszikus gráfelmélet egy több évtizede lezártnak hitt területén, a Hamilton-körök létezését biztosító fokszámfeltételek témakörében is vannak új eredményei. Társszerzője a *Rendszeroptimalizálás* című egyetemi tankönyvnek.

Rényi Kató-emlékdíj

A 2005. évi Rényi Kató-díj I. fokozatában részesül **Glavosits Tamás** (Debreceni Egyetem, 2005-ben végzett).

Indoklás: *Glavosits Tamás* cikkeiben relációk különböző tulajdonságait vizsgálja. A [3] cikk egy csoportokra vonatkozó tulajdonságot vizsgál, ebből a [6] cikkben szükséges és elégséges feltételt adnak arra, hogy mikor létezik csoportok közötti relációnak páratlan szelekciófüggvénye. A [4] cikkben relációk pontonkénti és globális összegének, illetve negatívjának tulajdonságait vizsgálják. A [7] cikk, egy a valószínűség-számításból eredő függvényegyenletet old meg. A [12] dolgozatban szükséges és elégséges feltételt adnak meg a prerendezési, a tolerancia-, illetve az ekvivalenciarelációk felcserélhetőségére vonatkozólag. A kéziratban levő [8–11] cikkek szubadditív és szuperadditív relációkkal foglalkoznak.

Cikkei:

[1] Generated preorders and equivalences, *Acta Acad. Ped. Agriensis, Sect. Math.*, **29** (2002), 95–103.

[2] Preorders and equivalences generated by commuting relations, *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyiregyhazi (N.S.)*, **18** (2002), 53–56. (elektronikus)

[3] Decompositions of commuting relations, *Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis*, **11** (2003), 25–28. (Száz Árpáddal)

[4] Pointwise and global sums and negatives of binary relations, *An. St., Univ. Ovidius Constanta*, **11** (2003), 87–94. (Száz Árpáddal)

[5] On the existence of nonnegative domains of subsets of groups, *Demonstr. Math.*, **37** (2004), 505–516. (Száz Árpáddal)

[6] On the existence of odd selections, *Adv. Stud. Contemp. Math.*, (Kyunggshang), **8** (2004), 155–164. (Száz Árpáddal)

[7] The general solution of a functional equation related to the characterizations of bivarite distributions, *Aequationes Math.*, **70** (2005), 88–100. (Száz Árpáddal)

[8] *A few Basic facts on subadditive and superadditive relations,* kézirat. (Száz Árpáddal)

[9] *General conditions for the subadditivity and superadditivity of relations,* kézirat. (Száz Árpáddal)

[10] *Some further observations on subadditive and superadditive relations,* kézirat. (Száz Árpáddal)

[11] *Sublinear relations defined by multiplications with sets of vectors,* kézirat. (Száz Árpáddal)

„Patai László Alapítvány" díja

A 2005. évi díjat **Varjú Péter** kapta.

Indoklás: *Varjú Péter* a Szegedi Tudományegyetem V. éves matematikus hallgatója. Az International Mathematical Competition for University Students versenyen 2003-ban, 2004-ben és 2005-ben egyaránt I. díjat szerzett, 2005-ben közel 250 hallgató között elért 4. helyezésével fődíjat kapott. Ugyancsak sikeresen szerepelt a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyen, 2003-ban III. díjat, 2004-ben II. díjat kapott.

Kezdeti publikációi a kombinatorika és számelmélet határterületére, valamint a matematikai analízis területére esnek. Első publikációja még középiskolás korában jelent meg a *Polygon* didaktikai folyóiratban. Az *Egy szakköri feladat általánosítása* című munkájában először megad egy olyan képlettel leírt sorozatot, amely értékei pontosan azok a természetes számok, amelyek nem négyzetszámok. Majd a képletet beágyazza egy képletseregbe és megvizsgálja, hogy az így kapott sorozatok értékkészletei milyen természetes számokat hagynak ki. Már másodéves hallgatóként sikeresen szerepelt a helyi és országos TDK találkozón. Itt Fraenkel egy több mint 30 éves sejtésével foglalkozott. A sejtés azt vizsgálja, hogy hogyan lehet felírni a pozitív egész számok halmazát diszjunkt Beatty-sorozatok uniójaként. Fraenkel sejtése azt mondja ki, hogy ha véges sok (legalább három) sorozatot használunk a partícionálásra és ezek a paramétere különbözők, akkor ezen a paraméterek a partícionáló sorozatok számából egyértelműen meghatározhatók. A sejtés vizsgálata 2000-ben felgyorsult. Három cikk is megjelent a témában, amelyek bebizonyítják a sejtést, ha a benne szereplő sorozatok száma 3, 4, 5 vagy 6. A sorozatok számának emelkedése lényeges technikai problémákkal jár együtt. Varjú Péter számítógép segítségét is igénybe véve igazolta Fraenkel sejtését hét sorozat esetére (ezt az eredményt az *Indag. Mathem.* folyóiratban publikálta). Egy további publikációja is van megjelenés alatt Beatty-sorozatokkal kapcsolatban.

Varjú Péter második TDK dolgozata már gráfelmélet témában született. Egy gráf jó színezésénél azt követeljük meg, hogy két szomszédos csúcs ne kaphassa ugyanazt a színt. Mi van, ha utak mentén olvassuk le a színeket, és azt követeljük meg, hogy a kapott színsorozat ne tartalmazzon olyan színintervallumot, ami rögtön utána megismétlődik? A kérdést (bővebb sétaosztályokra és élszínezésekre is felvetve) Noga Alon és társszerzői kezdték el vizsgálni. A klasszikus színezési problémához hasonlóan itt is nagyon érdekes a síkgráfok színezésének problémája: vajon a megfelelő kromatikus szám korlátos-e? A sok színezési változat mindegyike egy-egy optimalizálási kérdéshez vezet. Varjú Péter vizsgálatai előtt az sem volt ismert, hogy ezek a változatok különböző gráfparaméterekhez vezetnek-e. A TDK dolgozatban tisztázódott a kromatikus változatok különbözősége. Továbbá a síkgráfok több fontos részosztályaira belátta, hogy a nem ismétlődő színezésekhez kapcsolódó kromatikus szám korlátos. Ebből a TDK munkából született publikációt (Barát Jánossal közösen) a *Combin. Probab. Comput.* folyóirathoz nyújtották be.

Legújabb eredményei homogén polinomokkal történő approximációval kapcsolatosak. Kroó András sejtette, hogy ha S az R^d térben egy centrálszimmetrikus konvex tartomány határa, akkor S-en minden folytonos függvény egyenletesen approximálható két homogén polinom összegével. Varjú Péter több ekvivalens átfogalmazást adott a problémára, és igazolta a sejtést két dimenzióban, valamint tetszőleges dimenzióban, ha S sima, illetve ha poliéder. Ezek nagyon szép eredmények, amelyek a rangos *Constructive Approximation* folyóiratban jelennek meg, és amelyekkel Varjú Péter az approximációelméleti kutatások nemzetközi élvonalába került.

Kiigazítás. A 2004–2005. évi 2. szám 4. oldalába sajtóhiba került. Reményi Gusztáv észrevétele alapján helyesen: Rátz Tanár Úr Életműdíj.

JELENTÉS A 2005. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 2005. október 28. és november 7. között rendezte meg a 2005. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt.

A verseny megrendezésére a Bolyai János Matematikai Társulat a következő bizottságot jelölte ki: *Nagy Péter* (elnök), *Lovas Rezső László, Tengely Szabolcs* (titkárok), *Arató Mátyás, Bácsó Sándor, Bódi Béla, Bódi Viktor, Boros Zoltán, Daróczy Zoltán, Dömösi Pál, Fazekas István, Gaál István, Gilányi Attila, Győry Kálmán, Hajdu Lajos, Kormos János, Kozma László, Lajkó Károly, Lakatos Piroska, Losonczi László, Major Péter, Maksa Gyula, Molnár Lajos, Páles Zsolt, Pap Gyula, Pethő Attila, Pintér Ákos, Ruzsa Imre, Szabó József, Száz Árpád, Székelyhidi László, Szilasi József, Sztrik János, Tamássy Lajos, Tran Quoc Binh.*

A bizottság 12 feladatot tűzött ki. A feladatokat – sorrendben – *Tardos Gábor, Sigeki Akiyama – Pethő Attila – Wolfgang Steiner, Győry Kálmán, Abért Miklós, Figula Ágota – Karl Strambach, Figula Ágota – Karl Strambach, Daróczy Zoltán – Maksa Gyula – Páles Zsolt, Daróczy Zoltán – Páles Zsolt, Totik Vilmos, Fleiner Tamás, Szilasi József – Lovas Rezső* valamint *Major Péter* bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A versenyre 10 versenyző 41 megoldást nyújtott be, melyek közül 24 teljes megoldás. A legtöbb teljes megoldás (hat) a 6. feladatra érkezett, a legkevesebb (egy-egy) a 4. és 11. feladatokra érkezett. A beérkezett megoldások értékelése után a versenybizottság 2005. december 5-i ülésén a következő döntést hozta:

I. díjban részesül **Varjú Péter.**

III. díjban részesül **Harangi Viktor.**

Dicséretben részesül **Pach Péter Pál.**

Indoklás:

Varjú Péter mind a 12 feladatra teljes megoldást adott, a 4. feladatra beadott (egyedüli) megoldása különösen elegáns, továbbá az 1., 8., 9., 11. és 12. feladatra teljes megoldása csak neki volt.

Harangi Viktor teljes megoldást adott a 2., 5., 6. valamint a 10. feladatra, majdnem teljes megoldást adott a 7. feladatra, a 3. feladatra benyújtott megoldása nem teljes.

Pach Péter Pál teljes megoldást adott a 6. és 10. feladatra, majdnem teljes megoldást adott a 3. feladatra. A 10. feladatot általánosította.

A feladatok és megoldásaik

1. feladat (Tardos Gábor). *Jelölje $[n]$ az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt. Tetszőleges $a, b \in \mathbb{N}$ esetén jelentse $G(a, b)$ a következő előírással definiált (nem irányított) gráfot: A csúcsok (i, f) alakúak, ahol $i \in [a]$, és $f : [a] \to [b]$. Egy (i, f) és egy (j, g) csúcsot akkor köt össze él, ha $i \neq j$, és $f(k) \neq g(k)$ pontosan a szigorúan i és j közötti k értékekre teljesül, a többi k-ra $f(k) = g(k)$. Igazoljuk, hogy bármely $c \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $a, b \in \mathbb{N}$, hogy $G(a, b)$ csúcsai nem színezhetők jól c számú színnel.*

A kitűző megoldása. Nyilván sok megoldás lehet, egy olyat ismertetünk, amiből elég jó korlát jön ki a kromatikus számra. Megjegyezzük még, hogy $G(a, b)$ gráf háromszögmentes, valamint, hogy a gráf nem összefüggő, az (i, f) csúcsokat $f(1)$ és $f(a)$ szerint osztályozva b^2 izomorf komponenst találunk. Nyilván mindegyik komponens kromatikus számára igaz a bizonyítandó alsó becslés.

Legyen a és b fix, és válasszunk egy független F csúcshalmazt $G(a, b)$-ben. F méretét becsüljük felülről, ebből következik majd az alsó becslés a kromatikus számra. Az i számot az (i, f) csúcs típusának hívjuk.

Az (i, f) csúcs rákövetkezőjét definiáljuk $i < a$ esetén. Ez az $(i + 1, f')$ csúcs lesz, ahol

(1) $(i, f) \in F$ esetén $f' = f$.

(2) $(i, f) \notin F$ esetén

   (a) $f'(k) = f(k)$ ha $k \neq i$

   (b) $(i, f') \notin F$

   (c) $f'(i) = f(i) + x$ modulo b a legkisebb x pozitív egészre, amivel ((a) mellett) (b) teljesül.

Azaz $(i, f) \notin F$ esetén f'-t úgy kapjuk f-ből, hogy a k-nál felvett értéket addig növeljük egyesével (modulo b), míg $(i, f') \notin F$ újra teljesül. Legkésőbb b lépés után ez bekövetkezik, amikor visszaérünk f-hez. Álljon H az olyan csúcsokból, amelyekre ez következik be, tehát az olyan (i, f) csúcsokból, amik nincsenek F-ben, de rákövetkezőjük mégis $(i + 1, f)$. Ha $(i, f) \in H$, akkor az a $b - 1$ darab (i, f') alakú csúcs, ahol f' csak az i helyen felvett értékében különbözik f-től (de ott igen), mind F-beli kell, hogy legyen a definíció szerint. Így

$$|H| \leq \frac{|F|}{(b - 1)}.$$

Láncnak nevezünk egy $v_1, v_2, \ldots, v_a$ csúcssorozatot, ha v_i rákövetkezője v_{i+1} minden $0 < i < a$ esetén (azaz v_i típusa i lesz). Vegyük észre, hogy különböző csúcsok rákövetkezője is különböző, így a $G(a, b)$ csúcshalmazát b^a darab a elemű láncra bontottuk.

Tekintsünk egy $v_1, \ldots, v_a$ láncot. Állítjuk, hogy benne bármely két F-beli között van H-beli is. Tegyük fel ugyanis, hogy valamely $i < j$ esetén v_i F-beli, de v_i és v_j között sem F-beli, sem H-beli nincs a láncban. Könnyű látni, hogy ebben az esetben v_i és v_j össze van kötve, így v_j már nem lehet a független F halmazban. Így egy láncban legfeljebb eggyel több F-beli, mint H-beli van. Összesen tehát csak b^a-val több eleme lehet F-nek, hiszen ennyi lánc van:

$$|H| \geq |F| - b^a.$$

A két kiemelt egyenlőtlenségből:

$$|F| \leq \frac{b^a(b-1)}{(b-2)}.$$

Ezt összevetve a csúcsszámmal, ami ab^a, azt kapjuk, hogy a kromatikus szám legalább

$$\frac{a(b-2)}{(b-1)}.$$

Persze az utolsó két becslés csak $b > 2$ esetén értelmes. Érdemes megjegyezni, hogy $G(a, 2)$ páros gráf, így $b = 2$ esetén nem véletlenül nem kaptunk értelmes alsó becslést. Viszont $b = 3$ esetén már nem korlátos a kapott alsó becslés. Érdekes még, hogy $b > a + 1$ esetén a kapott alsó becslés nagyobb $a - 1$-nél, így a kromatikus szám pontosan a, hiszen csúcsokat típusuk szerint színezve a színű jó színezést kapunk. ■

2. feladat (Akijama Sigeki, Pethő Attila, Wolfgang Steiner). *Legyen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egész számok olyan sorozata, amely minden $n \geq 2$-re eleget tesz a*

$$0 \leq a_{n-1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n + a_{n+1} < 1$$

egyenlőtlenségnek. Bizonyítsuk be, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ periodikus.

Jankó András megoldása. Ha ismerjük a sorozat a_n és a_{n-1} elemeit, a megadott egyenlőtlenség egyértelműen meghatározza a_{n+1}-et, mivel egész szám, így $a_{n+1} = -\left\lfloor a_{n-1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right\rfloor$.

Vizsgáljuk a sorozat két egymás utáni eleméből alkotott párokat! Ha $(a, b) = (a_{n-1}, a_n)$, akkor a következő pár:

$$N(a, b) := (a_n, a_{n+1}) = \left(b, -\left\lfloor a + \frac{1-\sqrt{5}}{2}b\right\rfloor\right).$$

Legyen

$$H_k = \Big\{(a, b) : a \overset{(1)}{\leq} f_{2k}, b \overset{(2)}{\leq} f_{2k}, -a - \frac{1-\sqrt{5}}{2}b \overset{(3)}{\leq} f_{2k},$$

$$-a - b \overset{(4)}{\leq} f_{2k+1}, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}a - b \overset{(5)}{\leq} f_{2k}\Big\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N},$$

ahol f_k a k-adik Fibonacci-szám, azaz $f_k = \frac{\varphi^k - (1-\varphi)^k}{\sqrt{5}}$, ahol $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Azt látjuk be, hogy ha $(a, b) \in H_k$, akkor $N(a, b) \in H_k$. Mivel a H_k halmazok véges sok pontot tartalmaznak, ezért az (a_n) sorozat szomszédos párjaiból alkotott sorozat periodikus lesz, ha $(a_1, a_2) \in H_k$, és így az (a_n) sorozat is periodikus. Viszont $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} H_k = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, azaz minden (a_1, a_2) számpárra $(a_1, a_2) \in H_k$ teljesül elegendően nagy k esetén. Így az (a_n) sorozat periodikus tetszőleges $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ kezdőszámokkal.

$N(a,b) \in H_k$ igazolásához a H_k definíciójában szereplő 5 egyenlőtlenséget kell megmutatnunk a $\left(b, -\lfloor a + \frac{1-\sqrt{5}}{2}b \rfloor\right)$ számpárra. Ezeket az egyenlőtlenségeket jelöljük az $(1^*), \dots, (5^*)$ jelekkel.

$$b \overset{(1)}{\le} f_{2k} \Rightarrow (1^*)$$

$$-\left\lfloor a + \frac{1+\sqrt{5}}{2}b \right\rfloor \overset{(3)}{\le} -\lfloor -f_{2k} \rfloor = f_{2k} \Rightarrow (2^*)$$

$$-b + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left\lfloor a + \frac{1-\sqrt{5}}{2}b \right\rfloor \le \frac{1-\sqrt{5}}{2}a + \left(-1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)b =$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}(-a-b) \overset{(4)}{\le} \frac{\sqrt{5}-1}{2}f_{2k+1} \le f_{2k} \Rightarrow (3^*);$$

az utolsó egyenlőtlenség a Fibonacci-számok explicit alakjából következik, mivel

$$\frac{f_{2k}}{f_{2k+1}} = \frac{\varphi^{2k} - (1-\varphi)^{2k}}{\varphi^{2k+1} - (1-\varphi)^{2k+1}} \le \frac{\varphi^{2k}}{\varphi^{2k+1}} = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

$$-b + \left\lfloor a + \frac{1-\sqrt{5}}{2}b \right\rfloor \le \left\lfloor a - \frac{1+\sqrt{5}}{2}b \right\rfloor =$$

$$= \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}a - b\right) \right\rfloor \overset{(5)}{\le} \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2}f_{2k} \right\rfloor = f_{2k+1} \Rightarrow (4^*)$$

$$-\frac{1-\sqrt{5}}{2}b + \left\lfloor a + \frac{1-\sqrt{5}}{2}b \right\rfloor \le a \overset{(1)}{\le} f_{2k} \Rightarrow (5^*)$$

Így, $N(a,b) \in H_k$, és azt már beláttuk, hogy ebből következik a feladat állítása. ■

3. feladat (Győry Kálmán). *Legyen $\alpha \le 22$ nemnegatív egész szám. Melyik α esetén lesz a*

$$8x^{23} - 5^{\alpha}y^{23} = 1 \tag{1}$$

egyenletnek a legtöbb x, y egész megoldása? Mit mondhatunk $\alpha \ge 23$ esetén?

Varjú Péter megoldása. *Ha $\alpha = 0$, akkor az egyenletnek van megoldása: $x = 0$, $y = -1$.* Megmutatjuk, hogy $0 < \alpha \le 22$ esetén nincs megoldás, így $\alpha = 0$ esetén van a legtöbb. Ha van az egyenletnek megoldása, akkor a $8x^{23} - 5^{\alpha}y^{23} \equiv 1 \pmod{p}$ kongruenciának is van tetszőleges $p \ge 2$ egész esetén.

Legyen $p = 47 = 2\cdot 23 + 1$, ami prím. A 23-adik hatványmaradékok mod 47 a $0, 1, -1$. Tehát a kongruenciának, és így az egyenletnek csak akkor lehet megoldása, ha 5^{α} mod $47 \in \{\pm 1, \pm 7, \pm 9\}$. Ez pedig csak $\alpha = 9$ és 17 esetén teljesül.

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy $\alpha = 9$ esetén $p = 139$, míg $\alpha = 17$ esetén $p = 277$ választással a kongruenciának nincs megoldása. *Tehát $0 < \alpha \le 22$ esetén tényleg nincs az egyenletnek megoldása.*

Ha $x = x_0$ és $y = y_0$ az egyenlet megoldása valamely $\alpha \ge 23$ esetén, akkor $x = x_0$, $y = 5y_0$ megoldása a $8x^{23} - 5^{\alpha-23}y = 1$ egyenletnek. Tehát annyi megoldás van, ahány olyan (x, y) megoldás van $\alpha - 23$ esetén, amire $5 \mid y$. $23 \nmid \alpha$ esetén ez nulla, $23 \mid \alpha$ esetén pedig véges a Thue – Siegel-tétel miatt (lásd Gyarmati, Turán: Számelmélet, Tankönyvkiadó 1980), és szigorúan kevesebb, mint $\alpha = 0$ esetén, mert az $x = 0$, $y = -1$ megoldásra $5 \nmid -1$. ■

4. feladat (Abért Miklós). *Legyen F megszámlálható szabad csoport, és legyen $F = H_1 > H_2 > H_3 > \ldots$ az F csoport véges indexű részcsoportjainak egy leszálló lánca. Tegyük fel, hogy a lánc $\cap_{i \in \mathbb{N}} H_i$ metszete nem tartalmazza F egyetlen nemtriviális normálosztóját sem. Lássuk be, hogy léteznek olyan $g_i \in F$ elemek, amelyekre a $H_i^{g_i}$ konjugált részcsoportok szintén láncot alkotnak, és $\cap_i H_i^{g_i} = \{1\}$.*

Varjú Péter megoldása.

1. lemma. *Legyenek $N_1, N_2, \ldots, N_k$ az F szabad csoport normálosztói. Ha $\bigcap_{j=1}^{k} N_j = \{1\}$, akkor $N_j = \{1\}$ valamely j-re.*

Bizonyítás. Ha $N_1 \neq \{1\}$, akkor van olyan $l \geq 1$, amire $N = \bigcap_{j=1}^{l} N_j \neq \{1\}$, de $N \cap N_{j+1} = \{1\}$. Ekkor $NN_{j+1} = N \times N_{j+1}$. Ha $N_{j+1} \neq \{1\}$, akkor NN_{j+1}-nek van $C_\infty \times C_\infty$-nel izomorf részcsoportja, ami lehetetlen, ugyanis a Nielsen – Schreier-tétel szerint szabad csoport minden nemtriviális részcsoportja szabad. $C_\infty \times C_\infty$ pedig egy C_∞-nel nem izomorf kommutatív csoport, tehát nem szabad. ■

2. lemma. *Legyen G az F szabad csoport részcsoportja. Ha G-nek van olyan $A \neq \{1\}$ részcsoportja, aminek F-beli $N_F(A)$ normalizátora véges indexű F-ben, akkor tartalmazza F valamelyik nemtriviális normálosztóját.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekten, hogy G nem tartalmazza F egyetlen nemtriviális normálosztóját sem. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_k$ az $N_F(A)$ jobboldali mellékosztályainak reprezentánsai. Ekkor $A^{a_j} = a_j^{-1} A a_j$ az A összes konjugált részcsoportja F-ben. Mivel $\cap_j A^{a_j} \lhd F$, $\cap_j A^{a_j} = \{1\}$. Legyen $N = \bigcap_j (N_F(A))^{a_j}$. Ekkor N az F véges indexű, ezért nemtriviális normálosztója. Mivel $N_F(A)$-nak A is normálosztója, az 1. lemma miatt $N \cap A \neq \{1\}$. Legyen $A_j = N \cap A^{a_j}$. Ekkor $A_j = (N \cap A)^{a_j}$ nemtriviális normálosztója N-nek. Ez viszont $\cap_j A_j \subseteq \cap_j A^{a_j} = \{1\}$ miatt ellentmond az 1. lemmának. ■

Most rátérünk a feladat állításának bizonyítására.

Legyen $f_1, f_2, \ldots$ az F elemeinek egy felsorolása. Legyen $k_0 = 1$, $\hat{g}_0 = 1$. Tegyük fel, hogy már megadtuk a $k_0 < k_1 < \ldots < k_n$ pozitív egészeket és a $\hat{g}_0, \hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_n \in F$ elemeket úgy, hogy $0 < i \leq n$ esetén $\hat{g}_i = \hat{g}_{i-1} h_i$ valamely $h_i \in H_{k_i-1}^{\hat{g}_{i-1}}$-gyel, és $f_i \notin H_{k_i}^{\hat{g}_i}$. Ekkor $\bigcap_{j \geq k_n} H_j^{\hat{g}_n} = (\cap_{j \geq 1} H_j)^{\hat{g}_n}$ nem tartalmazza F egyetlen nemtriviális normálosztóját sem. Ekkor a 2. lemma miatt $H_{k_n}^{\hat{g}_n}$ egyetlen nemtriviális normálosztóját sem tartalmazza, hiszen $H_{k_n}^{\hat{g}_n}$ véges indexű. Tehát van olyan $h_{n+1} \in H_{k_n}^{\hat{g}_n}$, hogy $f_{n+1} \notin \left(\cap_{j \geq k_n} H_j^{\hat{g}_n}\right)^{h_{n+1}}$, ezért van olyan $k_{n+1} > k_n$, hogy $f_{n+1} \notin H_{k_{n+1}}^{\hat{g}_n h_{n+1}}$. Legyen $\hat{g}_{n+1} = h_{n+1}$. Miután rekurzívan megadtuk a $k_0 < k_1 < \ldots$-kat és $\hat{g}_0, \hat{g}_1, \ldots$-ket, legyen $g_j = \hat{g}_{k_l}$ arra az l-re, amire $k_{l+1} < j = k_l$. Világos, hogy ezekre a g_j elemekre teljesül a feladat állítása. ■

5. feladat (Figula Ágota, Karl Strambach). *Legyen $GL(n, K)$ a K test feletti lineáris csoport ellátva a K test egy $x \mapsto |x|$ nem arkhimédészi abszolút értéke által indukált topológiával. Igazoljuk, hogy ha az $M \in GL(n, K)$ mátrixot tartalmazza $GL(n, K)$ valamely kompakt részcsoportja, akkor M minden sajátértéke 1 abszolút értékű.*

Harangi Viktor megoldása. Nem arkhimédészi abszolút értéken egy olyan $|\cdot| : K \to \mathbb{R}^+$ leképezést értünk, melyre

$$\left.\begin{aligned} &|x| = 0 \iff x = 0 \\ &|xy| = |x| \cdot |y| \\ &|x+y| \le \max\big(|x|, |y|\big) \end{aligned}\right\}$$

Következmény:

- $|1| = |1 \cdot 1| = |1| \cdot |1| \Longrightarrow |1| = 0$ v. 1, de $|1| = 0 \Longrightarrow 1 = 0$. Így $|1| = 1$.
- Ha $x \ne 0$, akkor $|1| = |x \cdot x^{-1}| = |x| \cdot |x^{-1}| \Longrightarrow |x^{-1}| = \frac{1}{|x|}$.

Vegyünk egy K test feletti invertálható, $n \times n$-es $M \in GL(n, K)$ mátrixot. Tegyük fel, hogy $\exists \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ és $\lambda \in K$, $|\lambda| \ne 0$ úgy, hogy $M\underline{x} = \lambda\underline{x}$. ($\lambda \ne 0$, mert a mátrix invertálható, így $0 < |\lambda| < 1$, vagy $|\lambda| > 1$.) Ha a $0 < |\lambda| < 1$ eset áll fenn, akkor vegyük M helyett az M^{-1}-et. Erre $M^{-1}(\lambda\underline{x}) = \underline{x} = \lambda^{-1}(\lambda\underline{x})$, így M^{-1}-nek már λ^{-1} a sajátértéke: $|\lambda^{-1}| = \frac{1}{|\lambda|} > 1$. Persze M és M^{-1} egyszerre vannak benne egy részcsoportban vagy sem. Tehát feltehető, hogy $|\lambda| > 1$. Ekkor

$$M^k\underline{x} = M^{k-1}M\underline{x} = \lambda \cdot M^{k-1}\underline{x} = \ldots = \lambda^k \cdot \underline{x},$$

így λ^k sajátértéke M^k-nak, és $|\lambda^k| = |\lambda| \cdot |\lambda| \cdot \ldots \cdot |\lambda| = |\lambda|^k$. Az indukált mátrixnorma:

$$\|A\| = \sup_{\underline{x} \ne 0} \frac{|A\underline{x}|}{|\underline{x}|}.$$

Esetünkben $\|M^k\| = \sup_{\underline{x} \ne 0} \frac{|M^k\underline{x}|}{|\underline{x}|} \ge |\lambda|^k \to \infty$ $(k \to \infty)$, hiszen $|\lambda| > 1$.

Tegyük fel indirekten, hogy $M \in H < GL(n, K)$, ahol H kompakt halmaz az indukált topológia szerint. Ekkor $M^k \in H$ $(\forall k)$.

$$G_m := \big\{A \in GL_n(K) : \|A\| < m\big\} \text{ nyílt halmaz, } G_1 \subset G_2 \subset \ldots$$

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} G_m = GL(n, K) \supset H \overset{\text{kompaktság}}{\Longrightarrow} \exists m_0 : G_{m_0} \supset H \Longrightarrow \forall A \in H : \|A\| < m_0.$$

A fentiek szerint $\|M^k\| \to \infty$ $(k \to \infty)$, ellentmondásra jutottunk. ■

6. feladat (Figula Ágota, Karl Strambach). *Tegyük fel, hogy az*

$$SU_2(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C},\ z\overline{z} + w\overline{w} = 1 \right\}$$

mátrixcsoport A elemének $e^{i\theta_1}$ és $e^{-i\theta_1}$, a B elemének pedig $e^{i\theta_2}$ és $e^{-i\theta_2}$ a sajátértékei, ahol $0 \le \theta_i \le \pi$. Bizonyítsuk be, hogy ha $e^{i\theta_3}$ sajátértéke AB-nek, akkor teljesül a

$$|\theta_1 - \theta_2| \le \theta_3 \le \min\big\{\theta_1 + \theta_2, 2\pi - (\theta_1 + \theta_2)\big\}$$

egyenlőtlenség.

A kitűzők megoldása. Jelölje $\mathbb{H}$ a kvaternióalgebrát, $\mathbb{Q}$ pedig az egységkvaterniók csoportját. Legyenek i, j, $k = ij \in \mathbb{Q}$ egymással antikommutáló képzetes egységkvaterniók. A

$$\phi : \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \mapsto z + wj : SU_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{Q},$$

leképezés csoportizomorfizmus, ahol az $i \in \mathbb{C}$ komplex képzetes egységet azonosítjuk az $i \in \mathbb{Q}$ képzetes egységkvaternióval, és így tekinthetjük a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ tartalmazást. A $\lambda \in \mathbb{C}$ komplex szám a $\phi^{-1}(x + yi + uj + vk) \in SU_2(\mathbb{C})$ mátrix sajátértéke akkor és csak akkor, ha $\lambda = x \pm i\sqrt{y^2 + u^2 + v^2}$. Mivel a belső automorfizmusok tranzitívan hatnak a képzetes egységkvaterniók $S^3 \subset \mathbb{Q}$ halmazán, azt kapjuk, hogy $e^{\theta i} \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{Q}$ egységkvaternióhoz tartozó $\phi^{-1}(q) \in SU_2(\mathbb{C})$ mátrixnak akkor és csak akkor sajátértéke, ha q valós része $\cos\theta$ és q átkonjugálható $e^{\theta i}$-be.

Legyenek $\phi(A) = q_1$, $\phi(B) = q_2$, $\phi(AB) = q_3$. Ekkor q_1 átkonjugálható alkalmas kvaternióval $q_1' = e^{\theta_1 i}$-be, ugyanazon elemmel való konjugálás a q_2 és q_3 elemet q_2' és q_3' elemekbe viszi. Az $e^{\theta_1 i}$ egységkvaterniót az e^{ti} alakú egységkvaternióval való konjugálások fixen hagyják. Viszont az e^{ti} elemmel való konjugálással a j és k vektorok által kifeszített sík tetszőleges forgatása előállítható. Így alkalmas konjugálással az is elérhető, hogy $q_1' = e^{\theta_1 i}$ és $q_2' = \cos\theta_2 + i\sin\theta_2(\cos\beta + k\sin\beta)$ alkalmas β-val. Az a feltétel, hogy $q_1'q_2' = q_3'$, azt adja, hogy $q_1'q_2' = e^{\theta_1 i}\big(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2(\cos\beta + k\sin\beta)\big)$ valós része $\cos\theta_3$, azaz

$$\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\beta = \cos\theta_3.$$

Mivel $\sin\theta_1\sin\theta_2 \geq 0$, adott θ_1, θ_2, θ_3 értékekhez akkor és csak akkor létezik az előző egyenlőtlenségnek eleget tevő β, ha

$$-\sin\theta_1\sin\theta_2 \leq \cos\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_3 \leq \sin\theta_1\sin\theta_2,$$

vagy másképpen $\cos(\theta_1 + \theta_2) \leq \cos\theta_3 \leq \cos(\theta_1 - \theta_2)$, amely ekvivalens a

$$|\theta_1 - \theta_2| \leq \theta_3 \leq \min\{\theta_1 + \theta_2, 2\pi - (\theta_1 + \theta_2)\}$$

feltétellel. ∎

7. feladat (Daróczy Zoltán, Maksa Gyula, Páles Zsolt). *Legyen $t \in \mathbb{R}$. Bizonyítsuk be, hogy akkor és csak akkor létezik olyan $0 \neq A : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szimmetrikus, biadditív függvény, melyre*

$$A(tx, x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ha t nem algebrai, vagy algebrai és a definiáló polinomjának $-t$ is zérushelye.

Varjú Péter megoldása. Tegyük fel, hogy t transzcendens, vagy t minimálpolinomjának $-t$ is gyöke. Mindkét esetben van olyan $\varphi : \mathbb{Q}(t) \to \mathbb{Q}(t)$ $\mathbb{Q}$ feletti automorfizmus, amire $\varphi(t) = -t$. Ugyanis az algebrai esetben a t és $-t$ közös (irreducibilis) definiáló polinomjának gyökein a Galois-csoportja tranzitívan hat, ha pedig t transzcendens, akkor $-t$ is az. Legyen x_ξ, $\xi \in c$ egy bázis $\mathbb{R}$-ben mint $\mathbb{Q}$ feletti vektortérben, melyre $x_0 = 1$. Jelölje $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}(t)$ a $\mathbb{Q}(t)$-re való „vetítést", azaz legyen $\alpha(a_0x_0 + a_1x_{\xi_1} + \ldots + a_nx_{\xi_n}) = a_0$. α nyilván additív, és $\forall x \in \mathbb{R}$-re $\alpha(tx) = t\alpha(x)$.

Legyen $A(x, y) = \alpha(x)\varphi(\alpha(y)) + \varphi(\alpha(x))\alpha(y)$. Ez nyilván szimmetrikus és biadditív, és $\forall x \in \mathbb{R}$-re

$$A(tx, x) = \alpha(tx)\varphi(\alpha(x)) + \varphi(\alpha(tx))\alpha(x) = t\alpha(x)\varphi(\alpha(x)) + (-t)\varphi(\alpha(x))\alpha(x) = 0.$$

Továbbá $A(1,1) = 2 \neq 0$ miatt $A \neq 0$.

Most tegyük fel, hogy $A \neq 0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ szimmetrikus, biadditív, és $A(tx, x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$-re egy rögzített t algebrai számmal, amely minimálpolinomja $P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Megmutatjuk, hogy $P(-t) = 0$.

Először belátjuk, hogy A bilineáris $\mathbb{Q}$ fölött. Ha $r = p/q$ valamely p, q pozitív egészekkel, akkor:

$$\underbrace{A\left(x, \frac{p}{q}y\right) + \ldots + A\left(x, \frac{p}{q}y\right)}_{q \text{ db}} = A(x, py) = \underbrace{A(x,y) + \ldots + A(x,y)}_{p \text{ db}},$$

ahonnan $A(x, ry) = rA(x,y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$-re. Továbbá $A(x,0) + A(x,0) = A(x,0)$ miatt $A(x, 0 \cdot y) = A(x,0) = 0$. Ekkor $A(x,y) + A(x,-y) = 0$, ahonnan

$$A\big(x, (-1)y\big) = (-1)A(x,y).$$

Ezzel beláttuk a bilinearitást.

Tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$-re:

$$0 = A\big(t(x+y), x+y\big) = A(tx, y) + A(ty, x), \quad \text{ahonnan}$$

$$A(tx, y) = -A(x, ty).$$

Ekkor tetszőleges n, k egészekre és $x \in \mathbb{R}$-re

$$A\big(t^{2n+1}x, t^{2l}x\big) = (-1)^{2n+1-2l} A\big(t^{2l}x, t^{2n+1}x\big) = -A\big(t^{2n+1}x, t^{2l}x\big), \quad \text{így}$$

$$A(tx, y) = -A(x, ty).$$

Ekkor $\forall$ l nemnegatív egészre és $x \in \mathbb{R}$-re:

$$A\big(t^{2l}x, P(-t)x\big) = A\big(t^{2l}x, \big[P(-t) - P(t)\big]x\big) = \sum_{j=0}^{n} \big[(-1)^j - 1\big] a_j A\big(t^{2l}x, t^j x\big) = 0.$$

Hasonlóan $\forall$ l nemnegatív egészre és $x \in \mathbb{R}$-re:

$$A\big(t^{2l+1}x, P(-t)x\big) = A\big(t^{2l+1}x, \big[P(-t) + P(t)\big]x\big) = 0.$$

Mivel $\forall s \in \mathbb{Q}(t)$ t hatványainak lineáris kombinációja $\mathbb{Q}$ felett,

$$A\big(sx, P(-t)x\big) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

Speciálisan $A\big(P(-t)x, P(-t)x\big) = 0$. Ha $P(-t) \neq 0$, akkor $x = y/P(-t)$-vel kapjuk, hogy $A(y,y) = 0$ $\forall y$-ra. Ekkor viszont $\forall u, v \in \mathbb{R}$-re

$$A(u,v) = \frac{1}{2}\big[A(u+v, u+v) - A(u,u) - A(v,v)\big] = 0,$$

ami ellentmondana $A \neq 0$-nak. Tehát $P(-t) = 0$, és ezzel beláttuk az állítást. ■

8. feladat (Daróczy Zoltán, Páles Zsolt). *Határozzuk meg mindazon $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton függvényeket, amelyekre az*

$$F(x,y) = \varphi^{-1}\left(\frac{x\varphi(x)+y\varphi(y)}{x+y}\right) + \varphi^{-1}\left(\frac{y\varphi(x)+x\varphi(y)}{x+y}\right) \qquad x,y \in \mathbb{R}_+$$

függvény homogén, azaz $F(tx,ty) = tF(x,y)$ minden $t,x,y \in \mathbb{R}_+$ esetén.

A kitűzők megoldása. Ha φ generálja F-et, akkor legyen ez F_φ.

Elsőként megmutatjuk az alábbiakat. Ha $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ folytonos és szigorúan monoton és $F_\varphi(x,y) = F_\psi(x,y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}_+$-ra, akkor létezik $a \neq 0$ és b konstans, hogy

$$\psi(x) = a\varphi(x) + b \quad \text{minden} \quad x \in \mathbb{R}_+\text{-ra.}$$

Bizonyítás. Felhasználjuk az alábbi alternatívatételt. Ha φ, ψ adott, akkor vagy

$$A_\varphi(x,y) \le A_\psi(x,y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}_+\text{-ra,}$$

vagy létezik $t,s \in \mathbb{R}_+$, hogy

$$\varphi^{-1}\big(p\varphi(t) + (1-p)\varphi(s)\big) > \psi^{-1}\big(p\psi(t) + (1-p)\psi(s)\big) \tag{1}$$

minden $p \in \,]0,1[$-re.

Megmutatjuk, hogy $(*)$ $F_\varphi(x,y) \le F_\psi(x,y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}_+$-ra akkor és csak akkor igaz, ha $(**)$ $A_\varphi(x,y) \le A_\psi(x,y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}_+$. Ha $(**)$ igaz, akkor $A_{\varphi,p}(x,y) \le A_{\psi,p}(x,y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}_+$-re és $p \in \,]0,1[$-re. Legyen itt $p = \frac{x}{x+y}$ és $p = \frac{y}{x+y}$, akkor ebből $F_\varphi(x,y) \le F_\psi(x,y)$, azaz $(*)$ igaz. Ha $(*)$ igaz, akkor tegyük fel, hogy $(**)$ nem igaz. Ekkor létezik $t,s \in \mathbb{R}_+$, hogy (1) igaz minden $p \in \,]0,1[$-re. Legyen $p = \frac{t}{t+s}$ és $p = \frac{s}{t+s}$, akkor (1)-ből $F_\varphi(t,s) > F_\psi(t,s)$, ami ellentmondás.

Ebből nyilvánvalóan adódik: $F_\varphi(x,y) = F_\psi(x,y)$ akkor és csak akkor, ha $A_\varphi(x,y) = A_\psi(x,y)$. Ez viszont csak akkor igaz, ha $\psi(x) = a\varphi(x) + b$, ahol $b \neq 0$. ■

A homogenitás miatt $\psi(x) := \varphi(xt)$ ($t > 0$ fix) jelöléssel tehát $\varphi(xt) = a(t)\varphi(x) + b(t)$ $\forall x,t \in \mathbb{R}_+$-ra, ahol φ folytonos és szigorúan monoton, $a(t) \neq 0$. Ismert ennek megoldása:

$$\varphi(x) = Ax^\alpha + B \qquad A \neq 0 \qquad \alpha \neq 0$$

vagy

$$\varphi(x) = C\log x + D \qquad C \neq 0 \qquad (\alpha = 0).$$

Itt $A_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}\big(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\big)$ a kvázi-aritmetikai, $A_{\varphi,p}(x,y) = \varphi^{-1}\big(p\varphi(x) + (1-p)\varphi(y)\big)$ a súlyozott kvázi-aritmetikai közép.

Lemma. *Legyen $f : J \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Akkor vagy f konvex, vagy pedig létezik olyan $a,b \in J$, hogy*

$$f\big(pa + (1-p)b\big) > pf(a) + (1-p)f(b) \tag{2}$$

minden $p \in \,]0,1[$ esetén.

Bizonyítás. Ha f nem konvex J-n, akkor van olyan $u_0, v_0 \in J$, hogy

$$f\Big(\frac{u_0+v_0}{2}\Big) > \frac{f(u_0)+f(v_0)}{2}.$$

Világos, hogy $u_0 \neq v_0$. Tegyük fel, hogy $u_0 < v_0$. Definiáljuk a $g : J \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen:

$$g(u) := f(u) - \frac{f(v_0)-f(u_0)}{v_0-u_0}(u-u_0) - f(u_0)$$

minden $u \in J$ esetén. Akkor g folytonos J-n, és

(3) $$g(u_0) = g(v_0) = 0, \quad g\Big(\frac{u_0+v_0}{2}\Big) > 0.$$

Legyen

$$a := \sup\Big\{u \,\Big|\, u_0 \le u < \frac{u_0+v_0}{2},\ g(u) = 0\Big\},$$

és

$$b := \inf\Big\{u \,\Big|\, \frac{u_0+v_0}{2} < u \le v_0,\ g(u) = 0\Big\}.$$

Ekkor (3) alapján

$$g(a) = g(b) = 0, \quad \text{és} \quad g(u) > 0, \quad \text{ha} \quad u \in \,]a,b[\,.$$

Ebből következik, hogy

$$\frac{f(v_0)-f(u_0)}{v_0-u_0}(u-u_0) + f(u_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(u-a) + f(a)$$

minden $u \in [a,b]$ esetén, tehát

$$0 < g\big(pa+(1-p)b\big) = f\big(pa+(1-p)b\big) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(pa+(1-p)b-a) - f(a)$$

minden $p \in \,]0,1[$ esetén, ami a (2) állítás. ■

Tétel (Alternatívatétel). *Legyen $\varphi, \psi \in CM(I)$. Akkor vagy*

(4) $$A_\varphi(x,y) \le A_\psi(x,y)$$

minden $x, y \in I$ esetén, vagy pedig van olyan $t, s \in I$, hogy

(5) $$A_{\varphi,p}(t,s) > A_{\psi,p}(t,s)$$

minden $p \in \,]0,1[$ esetén.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy ψ *növekvő*. Ha ψ nem növekvő, akkor $-\psi$ növekvő, és mivel $A_{-\psi,p} = A_{\psi,p}$ I^2-en minden $p \in]0,1[$ esetén, így a tétel állítása érvényben marad.

Legyen $J := \varphi(I)$, ami nem üres nyílt intervallum. Legyen

$$f := \psi \circ \varphi^{-1} \tag{6}$$

a J intervallumon, ami folytonos függvény J-n. Ekkor a lemma szerint vagy

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \le \frac{f(u)+f(v)}{2} \tag{7}$$

minden $u, v \in J$ esetén (ez azt jelenti, hogy f konvex J-n), vagy pedig van olyan $a, b \in J$, hogy

$$f\bigl(pa + (1-p)b\bigr) > pf(a) + (1-p)f(b) \tag{8}$$

minden $p \in]0,1[$ esetén.

(7)-ből (6) alapján azt kapjuk, hogy vagy

$$\psi \circ \varphi^{-1}\left(\frac{u+v}{2}\right) \le \frac{\psi \circ \varphi^{-1}(u) + \psi \circ \varphi^{-1}(v)}{2} \tag{9}$$

minden $u, v \in J$ esetén, vagy pedig van olyan $a, b \in J$, hogy

$$\psi \circ \varphi^{-1}\bigl(pa + (1-p)b\bigr) > p\psi \circ \varphi^{-1}(a) + (1-p)\psi \circ \varphi^{-1}(b) \tag{10}$$

minden $p \in]0,1[$ esetén.

Az $x = \varphi^{-1}(u)$, $y = \varphi^{-1}(v)$ helyettesítésekkel ($x, y \in I$ tetszőleges) és a $t := \varphi^{-1}(a)$, $s = \varphi^{-1}(b)$ ($t, s \in I$) jelölésekkel, mivel ψ növekvő, (4)-ből következik (9), és (5)-ből következik (10). ■

9. feladat (Totik Vilmos). *Igazoljuk, hogy ha r_n olyan komplex racionális törtfüggvény, amelyben mind a számláló, mind a nevező fokszáma legfeljebb n, akkor*

$$\|r_n\|_{1/2} + \left\|\frac{1}{r_n}\right\|_2 \ge \frac{1}{2^{n-1}},$$

ahol $\|\cdot\|_a$ az origó körüli a sugarú körön vett szuprémumot jelöli.

Varjú Péter megoldása. Ha $\|r_n\|_{1/2} + \|r_n^{-1}\|_2 < 1/2^{n-1}$ lenne, akkor elég kis ε esetén $r_n(z+\varepsilon)$-ra se teljesülne az állítás, így feltehetjük, hogy $z = 0$ r_n-nek nem zéróhelye, és nem is pólusa. Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$, illetve $\eta_1, \dots, \eta_l$ az r_n $|z| < 2$ körlapra eső zéróhelyei, illetve pólusai abszolút érték szerint növekvő sorrendben úgy, hogy mindent a multiplicitásának megfelelő számú példányban szerepeltetünk. Tegyük fel, hogy a zéróhelyek és pólusok közül $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k'}$, illetve $\eta_1, \ldots, \eta_{l'}$ esik a $|z| < 1/2$ körlapra. Ekkor r_n nevezőjére és számlálójára alkalmazva a Poisson–Jensen-formulát:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|r_n\left(\frac{1}{2}e^{it}\right)\right| dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|r_n\left(2e^{it}\right)\right| dt =$$

$$= \left[\log|r_n(0)| + \log\prod_{j=1}^{k'}\frac{1}{2}|\xi_j|^{-1} - \log\prod_{j=1}^{l'}\frac{1}{2}|\eta_j|^{-1}\right] -$$

$$- \left[\log|r_n(0)| + \log\prod_{j=1}^{k} 2|\xi_j|^{-1} - \log\prod_{j=1}^{l} 2|\eta_j|^{-1}\right] =$$

$$= \log\prod_{j=1}^{k'}\frac{1}{4} + \log\prod_{j=k'+1}^{k}\underbrace{\frac{|\xi_j|}{2}}_{\geq 1/4} + \log\prod_{j=1}^{l'} 4 + \log\prod_{j=l'+1}^{l}\underbrace{2|\eta_j|^{-1}}_{\geq 1} \geq \log\frac{1}{4^k} \geq \log\frac{1}{4^n}.$$

Ekkor

$$\sup_{|z|=1/2}\log|r_n(z)| \geq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|r_n\left(\frac{1}{2}e^{it}\right)\right| dt$$

$$\text{és} \quad \sup_{|z|=2}\log\left|\frac{1}{r_n(z)}\right| \geq -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|r_n(2e^{it})|\, dt$$

miatt:

$$\log\|r_n\|_{1/2} + \log\left\|\frac{1}{r_n}\right\|_2 \geq \log\frac{1}{4^n},$$

ahonnan

$$\frac{\|r_n\|_{1/2} + \|1/r_n\|_2}{2} \geq \sqrt{\|r_n\|_{1/2}\left\|\frac{1}{r_n}\right\|_2} \geq \frac{1}{2^n},$$

amit bizonyítani kellett.

Vegyük észre, hogy az egyenlőtlenség igaz tetszőleges olyan meromorf függvényre, aminek legfeljebb n zérója van a $|z| < 2$ körlapon. ■

10. feladat (Fleiner Tamás). *Adva van 5 nemzérus vektor a háromdimenziós euklideszi térben. Bizonyítsuk be, hogy a páronként bezárt szögeik összege legfeljebb 6π.*

Pach Péter Pál megoldása.
Általánosítás. Legyen $\Phi(2k) = k^2\pi$, $\Phi(2k+1) = k(k+1)\pi$, ($k \geq 0$ egész). Ha meg van adva a térben $n > 1$ nemzérus vektor, akkor a páronként bezárt szögeik összege (röviden szögösszege) legfeljebb $\Phi(n)$.

Megjegyzés. Van a térben $n > 1$ olyan vektor, amelyek szögösszege $\Phi(n)$. Legyen ugyanis $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tetszőleges vektor. Ha $n = 2k$, akkor legyen k darab vektor $\mathbf{v}$, a másik k darab vektor pedig $-\mathbf{v}$. Ha $n = 2k+1$, akkor legyen $k+1$ darab vektor $\mathbf{v}$, a másik k darab vektor pedig $-\mathbf{v}$. Ezek szögösszege nyilván $\Phi(n)$.

Szükségünk lesz az alábbi két lemmára:

1. lemma. *Jelölje $\mathfrak{v}_n$ az adott térbeli vektor n-est, $A_{\mathfrak{v}_n}$ pedig annak szögösszegét. Ekkor van olyan sík, amelyre $\mathfrak{v}_n$-t merőlegesen vetítve olyan síkbeli vektor n-est kapunk, amelynek szögösszege $\geq A_{\mathfrak{v}_n}$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{v}_n = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ és $S^2 = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| = 1\}$. Minden $\mathbf{x} \in S^2$ vektorra képezzük a $\mathfrak{v}_n$ vektorainak az $\mathbf{x}$ normálvektorú síkra való merőleges vetületeit. Jelölje $g(\mathbf{x})$ a levetített vektorok szögösszegét. Ha a levetített vektor $\mathbf{0}$, akkor a hozzátartozó szögeket 0-nak számítjuk. Megmutatjuk, hogy $\int_{S^2} g = 4\pi \geq A_{\mathfrak{v}_n}$. Vizsgáljuk először az $n = 2$ esetet. Elég belátni, hogy ha $\mathfrak{v}_2 = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ szöge $A_{\mathfrak{v}_2}$, és ha $h_{\mathfrak{v}_2}(\mathbf{x})$ jelöli az $\mathbf{x}$ normálvektorú síkra való merőleges vetületek szögét, akkor $\int_{S^2} h_{\mathfrak{v}_2} = 4\pi A_{\mathfrak{v}_2}$. A $h_{\mathfrak{v}_2}(\mathbf{x})$ függvény az $\mathbf{x} \in S^2$ vektornak korlátos és véges sok ponttól eltekintve differenciálható függvénye. Nyilvánvaló, hogy az $\int_{S^2} h_{\mathfrak{v}_2}$ integrál invariáns a tér S^2-t megőrző forgásaival szemben, ezért értéke nem függ $\mathfrak{v}_2$ síkjától, hanem csak az $\alpha = A_{\mathfrak{v}_2}$ szögtől, aminek differenciálható függvénye. Tekintsük az

$$f(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} h_{\mathfrak{v}_2}$$

függvényt. Könnyen meggondolható, hogy $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi$, és $f(\alpha) \geq 0$ minden $0 \leq \alpha \leq \pi$ szögre.

Belátjuk, hogy az $f(\alpha)$ függvény additív, azaz $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ teljesül minden $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ szögre. Valóban, mivel az $f(\alpha)$ függvény értéke nem függ az α szöget meghatározó vektoroktól, hanem csupán $f(\alpha)$ értékétől, ezért feltételezhetjük, hogy az α, β és $\alpha + \beta$ szögeket olyan $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokkal adjuk meg, amelyek egy síkban vannak, és teljesül, hogy az $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ vektorpár szöge α, a $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ vektorpár szöge β, és az $(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ vektorpár szöge $\alpha + \beta$. Ekkor a szögösszeg vetülete megegyezik a vetületek összegével, tehát $h_{(\mathbf{a},\mathbf{c})}(\mathbf{x}) = h_{(\mathbf{a},\mathbf{b})}(\mathbf{x}) + h_{(\mathbf{b},\mathbf{c})}(\mathbf{x})$, amiből következik $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$. Kaptuk, hogy az $f(\alpha)$ folytonos függvény kielégíti a Cauchy-féle függvényegyenletet a $[0, \pi]$ intervallumon $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi$ és $f(\alpha) \geq 0$ mellékfeltételekkel, tehát $f(\alpha) = \alpha$ teljesül minden $0 \leq \alpha \leq \pi$ szögre.

Ebből következik $\int_{S^2} h_{(\mathbf{a},\mathbf{b})} = 4\pi\alpha$, azaz $\int_{S^2} g = 4\pi A_{(\mathbf{a},\mathbf{b})}$ teljesül az $n = 2$ esetben. Ha $n > 2$, akkor a kapott összefüggést alkalmazzuk a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorokból képezett vektorpárokra, majd összeadva a kapott egyenleteket nyerjük az $\int_{S^2} g = 4\pi A_{\mathfrak{v}_n}$ összefüggést. Az integrálszámítás középértéktétele szerint következik, hogy van olyan sík, amelyre a vektorokat merőlegesen vetítve nemzérus vektorokat kapunk, melyek szögösszege legalább $A_{\mathfrak{v}_n}$. Ezzel a lemmát igazoltuk. ∎

2. lemma. *Jelölje $A_{\mathfrak{v}_n}$ az adott síkbeli $\mathfrak{v}_n$ vektor n-es szögösszegét. Ekkor van olyan síkbeli vektor n-es, amely tartalmaz előjelben különböző vektorpárt, és szögösszege $\geq A_{\mathfrak{v}_n}$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{v}_n = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ egy olyan vektor n-es a síkon, amely nem tartalmaz előjelben különböző vektorpárt. A $\mathbf{v}_1$ irányú egyenes meghatározta két félsík egyikének belsejébe a $\mathfrak{v}_n$-beli vektorok közül legfeljebb $\frac{n-1}{2}$ vektor mutat. Az indexek esetleges átjelölésével feltehetjük, hogy ezek $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i$, $(i - 1 \leq \frac{n-1}{2})$. Jelöljük át a $\mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+2}, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok indexeit úgy, hogy $\mathbf{v}_{i+1}$ legyen az a vektor, amely a legkisebb δ szöget zárja be a $-\mathbf{v}_1$ vektorral. Legyen $\mathbf{v}'_1 = -\mathbf{v}_{i+1}$, és tekintsük a $\mathfrak{v}'_n = (\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_n)$ vektor n-est, melyben a $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_{i+1}$ vektorok előjelben különböznek. A $\mathbf{v}'_1$ vektornak a $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i$, $(i - 1 \leq \frac{n-1}{2})$ vektorokkal bezárt szögösszege legfeljebb $\frac{n-1}{2} \cdot \delta$ szöggel kisebb, mint a $\mathbf{v}_1$ vektornak ugyanezekkel a vektorokkal bezárt szögösszege, ugyanakkor a $\mathbf{v}'_1$ vektornak a $\mathbf{v}_{i+1}, \mathbf{v}_{i+2}, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorokkal bezárt szögösszege legalább $\frac{n-1}{2}\cdot\delta$ szöggel nagyobb, mint a $\mathbf{v}_1$ vektornak ugyanezekkel a vektorokkal bezárt szögösszege. Ebből következik, hogy $\mathfrak{v}'_n$ vektor n-es $A_{\mathfrak{v}'_n}$ szögösszege eleget tesz az $A_{\mathfrak{v}'_n} \geq A_{\mathfrak{v}_n}$ egyenlőtlenségnek. ■

Visszatérünk az $A_{\mathfrak{v}_{2k}} \leq k^2\pi$, illetve $A_{\mathfrak{v}_{2k+1}} \leq k(k+1)\pi$ állítások igazolására. $k=1$ esetben mindkét állítás nyilvánvaló. Feltesszük, hogy a $\mathfrak{v}_n$ vektor n-es egy síkba esik, és $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_{i+1}$. Ekkor $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{i+1})$ szöge, továbbá a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j)$ és $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_{i+1})$ szögösszege π, ahol $j = 2, \ldots, i, i+2, \ldots, n$, azaz együttesen $(n-1)\pi$. A további $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+2}, \ldots, \mathbf{v}_n)$ páronként bezárt szögeinek összege az indukciós feltevés szerint legfeljebb $(k-1)^2\pi$, illetve $k(k-1)\pi$, attól függően, hogy $n = 2k$, vagy $n = 2k+1$. A $(k-1)^2\pi + (2k-1)\pi = k^2\pi$ és a $k(k-1)\pi + 2k\pi = k(k+1)\pi$ összefüggésekből most már következik a feladat állítása. ■

11. feladat (Szilasi József, Lovas Rezső). *Legyen $E : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$ akárhányszor differenciálható, másodfokú pozitív homogén (azaz tetszőleges λ pozitív valós szám és $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pont esetén az $E(\lambda p) = \lambda^2 E(p)$ relációnak eleget tevő) függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha az $E''(p) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ második derivált bármely $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pontban nemelfajuló bilineáris forma, akkor $E''(p)$ $(p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ pozitív definit.*

Varjú Péter megoldása. Legyen A azon $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pontok halmaza, ahol $E''(p)$-nek van negatív sajátértéke, és B azoké, ahol $E''(p)$ minden sajátértéke pozitív. Mivel $E''(p)$ sehol sem szinguláris, $A \cup B = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, és E'' pontosan a B pontjaiban pozitív definit.

Megmutatjuk, hogy A nyílt. Legyen $p \in A$, és K egy olyan kör a komplex számsík negatív valós részű számokból álló félsíkján, amely belsejében van $E''(p)$-nek sajátértéke, a határán viszont nincs. $E''(p)$ karakterisztikus polinomja folytonosan függ p-től, ezért Rouché tétele miatt p-nek van olyan U környezete, hogy tetszőleges $q \in U$-ra $E''(q)$-nak van sajátértéke K belsejében. Ez a sajátérték csak egy negatív valós szám lehet, mert $E''(q)$ szimmetrikus. Ekkor $U \subset A$, és így U nyílt.

Teljesen hasonlóan belátható, hogy B is nyílt. Ekkor $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ összefüggősége miatt $A = \emptyset$, vagy $B = \emptyset$.

Tehát elegendő megmutatni azt, hogy van olyan pont, ahol $E''(p)$ pozitív definit. Legyen $p_0 \in S^{n-1}$ egy olyan pont, ahol E felveszi az S^{n-1} egységgömb fölötti minimumát. Jelölje $\vec{p}_0$ az origóból p_0-ba mutató vektort. Legyen $v \neq 0$ a $\vec{p}_0$-ra merőleges tetszőleges vektor. Jelölje Σ_λ $\lambda > 0$ esetén a $\vec{p}_0$-ra merőleges és a λp_0 ponton áthaladó hipersíkot.

Mivel $E|_{\Sigma_\lambda}$ minimális a λp_0 pontban, $E'_v(\lambda p_0) = 0$, és $E''_{v,v}(p_0) \geq 0$. Ekkor

$$E''_{v,\vec{p}_0}(p_0) = \frac{d}{d\lambda} E'_v(\lambda p_0)\Big|_{\lambda=1} = 0.$$

Legyen most $u \neq 0$ tetszőleges vektor. Ekkor $u = \alpha\vec{p}_0 + v$ valamely $\alpha \in \mathbb{R}$ számmal és $\vec{p}_0$-ra merőleges v vektorral. Így

$$E_{u,u}(p_0) = E''_{\alpha\vec{p}_0,\alpha\vec{p}_0}(p_0) + 2E''_{v,\alpha\vec{p}_0}(p_0) + E''_{v,v}(p_0) = 2\alpha^2 E(p_0) + E''_{v,v}(p_0) \geq 0.$$

Mivel $E''(p_0)$ nemelfajuló, a fenti egyenlőtlenség szigorú. Ezzel az állítást beláttuk. ■

12. feladat (Major Péter). *Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$.*

(a) *Legyen* $P(|\xi_1| \le 1) = 1$, $E\xi_1 = 0$, $E\xi_1^2 = \sigma^2 > 0$. *Mutassuk meg, hogy minden* $u \ge 2n\sigma^2$ *számra* $P(S_n \ge u) \le e^{-Cu\log(u/n\sigma^2)}$ *alkalmas (univerzális)* $C > 0$ *számmal.*

(b) *Legyen speciálisan* $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = -1) = \frac{\sigma^2}{2}$, $P(\xi_1 = 0) = 1 - \sigma^2$ *valamely* $1 > \sigma^2 > 0$ *számmal. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan* $B_1 < 1$, $B_2 > 1$ *és* $B_3 > 0$ *konstansok, hogy ha valamely* $n \ge 1$ *és* $u \ge 1$ *egész számokra érvényesek a* $B_1 n \ge u \ge B_2 n\sigma^2$ *egyenlőtlenségek, akkor* $P(S_n \ge u) > e^{-B_3 u\log(u/n\sigma^2)}$.

Varjú Péter megoldása.

(a) Rényi Alfréd Valószínűségszámítás című könyvének [Tankönyvkiadó, Budapest, 1966] VI. fejezet, 4. §, (4) formulája (320. oldal):

$$P\left(\xi \ge \frac{t + \frac{\varepsilon^2 D^2}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon K e^{\varepsilon K}}{3}\right)}{\varepsilon}\right) \le e^{-t},$$

ahol ξ K-nál majdnem biztosan nem nagyobb abszolút értékű, D várható értékű független véletlen változók összege, $D^2 = E\xi^2$, és ε és t tetszőleges pozitív valós számok.

Ezt alkalmazhatjuk $\xi = S_n$, $D^2 = n\sigma^2$ és $K = 1$ mellett.

Legyen $t = \frac{1}{16}u\log\left(\frac{u}{n\sigma^2}\right)$ és $\varepsilon = \frac{1}{2}\log\left(\frac{u}{n\sigma^2}\right)$. $u \ge 2n\sigma^2$ esetén ezek tényleg pozitívak, továbbá $1 < \frac{8}{6}\log\left(\frac{u}{n\sigma^2}\right)\sqrt{\frac{u}{n\sigma^2}}$. Ekkor

$$\frac{t + \frac{\varepsilon^2 D^2}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon e^{\varepsilon}}{3}\right)}{\varepsilon} \le \frac{1}{8}u + \frac{1}{4}\log\left(\frac{u}{n\sigma^2}\right)n\sigma^2\left[\left(\frac{8}{6} + \frac{1}{6}\right)\log\left(\frac{u}{n\sigma^2}\right)\sqrt{\frac{u}{n\sigma^2}}\right] \le$$

$$\le \frac{1}{8}u + \frac{7}{8}n\sigma^2\frac{u}{n\sigma^2} = u.$$

Itt használtuk, hogy $(\log x)^2 < \frac{7}{3}\sqrt{x}$, ha $x > 1$.

Innen adódik, hogy

$$P(S_n \ge u) \le e^{-\frac{1}{16}u\log\left(\frac{u}{n\sigma^2}\right)},$$

ami a bizonyítandó állítás $C = \frac{1}{16}$-dal.

(b) Legyen $\lambda = \frac{u}{n}$. Ekkor $1 \ge \lambda > 0$, és $\frac{\lambda}{\sigma^2} \ge B_2 > 1$.

Válasszuk meg a konstansokat úgy, hogy $\frac{1}{30B_2^2} > \left(\frac{1}{B_2}\right)^{B_3}$. Ekkor $\frac{\sigma^2}{30\lambda} \ge \left(\frac{\sigma^2}{\lambda}\right)^{B_3}$.

Először vizsgáljuk a $\lambda = 1$ esetet. Ekkor $u = n$, és

$$P(S_n \ge u) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^u = \left(\frac{\sigma^2}{2\lambda}\right)^u > \left(\frac{\sigma^2}{\lambda}\right)^{B_3 u} = e^{-B_3 u\log\left(\frac{u}{n\sigma^2}\right)}.$$

Most legyen $\lambda < 1$. $P(S_n \ge u)$ nagyobb, mint annak a valószínűsége, hogy $\xi_j = 1$ u darab j-re és $\xi_j = 0$ a többi esetben, azaz:

$$P(S_n \ge u) > \binom{n}{u}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^u(1-\sigma^2)^{n-u} = \binom{n}{\lambda n}\left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^{\lambda n}(1-\sigma^2)^{(1-\lambda)n}.$$

Felhasználva, hogy $k \geq 1$ esetén $\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} < k! < 2\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$,

$$\binom{n}{\lambda n} = \frac{n!}{(\lambda n)!(n-\lambda n)!} = \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{2\sqrt{2\pi\lambda n}\left(\frac{\lambda n}{e}\right)^{\lambda n} 2\sqrt{2\pi(1-\lambda)n}\left(\frac{(1-\lambda)n}{e}\right)^{(1-\lambda)n}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{4\sqrt{2\pi\lambda n}}\left[\frac{1}{\lambda^\lambda(1-\lambda)^{1-\lambda}}\right]^n.$$

Ekkor $\frac{1-\sigma^2}{1-\lambda} > 1$ miatt:

$$P(S_n \geq u) > \frac{1}{4\sqrt{2\pi\lambda n}}\left(\frac{\sigma^2}{2\lambda}\right)^{\lambda n} > \left(\frac{\sigma^2}{30\lambda}\right)^{\lambda n} > \left(\frac{\sigma^2}{\lambda}\right)^{B_3\lambda n} = e^{-B_3 u \log\left(\frac{u}{n\sigma^2}\right)}.$$

A második egyenlőtlenségnél azt használtuk, hogy $\lambda n \geq n$, és

$$\frac{1}{4\sqrt{2\pi x}} > \frac{1}{15^x}, \quad \text{ha } x \geq 1. \qquad \blacksquare$$

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Modok és Társa Nyomda, Kiskunhalas