Matematikai Lapok

2004-2005/1

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 12. évfolyam (2004–2005), 1. szám

(Megjelent 2006-ban)

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

GRATULÁLUNK!

LOVÁSZ LÁSZLÓ A NEMZETKÖZI MATEMATIKAI UNIÓ ÚJ ELNÖKE

A nemzetközi matematikai élet legjelentősebb szervezete, a Nemzetközi Matematikai Unió (IMU) 25. kongresszusát augusztus 22–29. között tartotta Madridban.

A tanácskozást augusztus 22-én I. János Károly spanyol király nyitotta meg. Az IMU új elnöke **Lovász László** akadémikus, az ELTE Matematikai Intézetének igazgatója lett, aki a következő négy év során, az Indiában tartandó következő kongresszusig tölti be ezt a tisztséget.

Bolyai János
Matematikai Társulat

POLLÁK GYÖRGY EMLÉKÉRE

FRIED ERVIN

Őszintén köszönöm a szegedi algebristáknak, hogy meghívtak, és felkértek arra, hogy *Pollák Gyurka* születésének hetvenötödik évfordulóján Róla én is megemlékezzek.

Ezelőtt öt évvel is hasonló megtiszteltetésben részesültem, amikor a Matematikai Intézetben búcsúztatták Őt, és engem kértek fel a „nekrológ" elmondására. Akkor örültem neki, mert úgy tartottam, hogy a dicsérő szavakat jobb még az életben meghallani. Ahogy a költő mondja: ... *Kiket – midőn már elhunytak s midőn Ingyen tehette – csúf hálàdattal Kezdett imádni a galád világ* ...

Most, ennek a felkérésnek nem örülök, de hát az ember nem ura a sorsnak, és a megtörtént dolgokat nem tudja meg nem történtté tenni.

A felkérés után – mindenekelőtt – elővettem akkori szavaimat, és megállapítottam, hogy akkori érzelmeimmel most is azonosulni tudok. Állítólag Goethe mondta – amikor szemére vetették, hogy egész sorokat átvesz másoktól –, hogy „miért mondjak el valamit rosszul, amit mások jól megírtak". Engedjék meg ezért, hogy azzal kezdjem, amit akkor mondtam.

❄

Nekem jutott az a megtiszteltetés, hogy Pollák Gyurkát a Matematikai Kutatóintézettől elbúcsúztassam. Hadd kezdjem búcsúztatásomat azzal a József Attila idézettel, ami erről óhatatlanul eszembe jut:

... *Ne menj el, mesélj,* ... *Mi hallgatunk és lesz, aki csak éppen néz téged, mert örül, hogy lát ma itt fehérek között egy európait.* Valóban, Pollák Gyurka igazi européer volt; ami sajnos ritkaság. Mindenesetre, a ritkaságokat meg kell, meg kellene, de legalábbis jobban meg kellene becsülni.

Pollák Gyurkát nagyon régóta ismerem. Homályos képem van arról, hogy együtt sakkoztunk a Podmaniczky utcában a gangon, ahol ő lakott; és mérges voltam, mert sokszor megvert. Másik emlékem, ami mély nyomot hagyott bennem, hogy egy Balatonvilágoson tartott konferencia alkalmából – még abban az időben, amikor a matematikusok megértették egymást, nem úgy, mint ma, amikor még az univerzális algebristákat sem értem meg –, szóval ott sétálgattunk és beszélgettünk. Nem is tudom, hogy miről, csak azt tudom, hogy igen mély hatással volt rám, és meghatározta hozzá kapcsolódó emberi érzelmeimet.

„Hivatalos" emlékeim róla 1960-ig nyúlnak vissza, amikor kandidátusi disszertációját opponáltam. A disszertáció az euklideszi gyűrűk általánosításával foglalkozott. Számomra világos volt, hogy a dolgok „miértje" izgatta; kereste az „igazságot". Ha már itt tartok, akkor néhány szóban szeretnék szólni *Pollák Gyurka* „matematikájáról". Úgy találom, hogy mindig az előbbi cél lebegett előtte (természetesen nem csupán a matematikán belül). Talán éppen szerénységből, de leginkább a félcsoportokhoz vonzódott (ott kevés és egyszerű művelet van). Ez nem jelenti azt, hogy másban nem lett volna otthon. Szemináriumokon mindig volt lényeges észrevétele, kérdése (legalábbis én ezt tapasztaltam, amikor én is ott voltam).

Felmerül az emberben a kérdés: hogyan lehetséges, hogy egy ilyen széles látókörű „kultúrmatematikus" nem tudott a tudományos szamárlétrán feljebb kapaszkodni? Legalábbis sokakban felmerült. Persze megkérdezhetjük, *Mi az, mi embert boldoggá tehetne? Kincs? hír? gyönyör? Legyen bár mint özön, A telhetetlen elmerülhet benne, S nem fogja tudni, hogy van szívöröm.* Mi lehetett az, ami Pollák Gyurkának igazi szívörömet jelenthetett.

Mint már említettem, boldoggá tette őt – úgy vélem – a matematika szépsége. De tudjuk, hogy a megosztott öröm duplán számít. És ő igyekezett megosztani a szépséget mindenkivel. Azt hogy ez sikerült neki, leginkább legjobb tanítványa, Szendrei Marika példája mutatja. De tudomásom szerint komoly szerepe volt a szegedi matematikai élet kialakításában ... *S ez az igaz költő* – azaz, hogy matematikus –, *ki a nép ajkára Hullatja keblének mennyei mannáját.* ...

Mint említettem, Pollák Gyurka igazi européer, és humanista szemléletét mindenhova „elszórta". Természetesen elsősorban a JATE Bolyai Intézetében. Az a hangulat és szellem, ami ott uralkodik, nagymértékben tudható be az ő hatásának. Természetesen nem ő volt az egyetlen, aki ilyen irányban hatott. Nemrégiben (az öt évvel ezelőttiekhez képest) Klukovits Lajos mesélte, hogy jelen volt Pollák Gyurka és Csákány Béla egy valami vitát előkészítő beszélgetésén, és egy idő után mindenki csak ámulva hallgatta őket.

Erről jut eszembe, hogy nem értem, miért nem egy szegedi mondja ezt a visszaemlékezést, hiszen ők sokkal jobban ismerik.

Említettem volt, hogy sokan felrótták neki, miért nem jutott előbbre, hiszen erre megvolt a képessége. Ahelyett, hogy nekiült volna, és írta volna a jobbnál rosszabb és a rosszabbnál jobb cikkeket, csupán tanított (nem csak matematikára); csupán olvasott szépirodalmi műveket, idegen nyelven is, és ezekben lelte örömét. S akik szorgoskodnak, és méltatlankodnak, azok számára hadd idézzek egy igen olvasott műből:

> ... *Uram – méltatlankodott (Márta) – nem törődöl vele, hogy húgom elnézi, hogy egyedül szolgáljalak ki? ... Az Úr azonban így válaszolt: „Márta, Márta sok mindenre gondod van, és sok minden nyugtalanít, pedig csak egy a szükséges. Mária a jobbik részt választotta."* ... (Lukács 10.)

Pollák Gyurka is a jobbik részt választotta. Milyen céljai voltak? Valószínűleg – és remélem – soha nem voltak olyan céljai, amelyekért foggal-körömmel küzdött volna; és tudom, hogy soha nem voltak olyan céljai, amelyekért másokat legázolt volna. És ami céljai voltak, azokat minden bizonnyal így fogalmazta, vagy fogalmazta volna meg: ... *Mi dolgunk a világon? küzdeni, És tápot adni lelki vágyainknak. ... Mi dolgunk a világon? küzdeni Erőnk szerint a legnemesbekért* ...

Mindig örömet jelentett, barátnak, kollégának együtt lenni vele, hallgatni észrevételeit a világról, amibe természetesen a matematika is belefért. De benne volt a matematikán kívül az irodalom, a zene, a történelem, a nyelv... , szóval az egész kultúra. Még a politika is belefért.

Ami különlegesen jó volt, ha náluk volt az ember, és érezte az emberszeretetet, a családszeretetet. Ebben viszont már nem volt egyedül, mert felesége *Füleki Mária* is „belesegített".

Azt hiszem nem én voltam az egyetlen, aki sokat nyert azáltal, hogy Pollák Gyurkát ismerte, és barátjának vallhatta.

❄

A mai nap ezekhez a következőket fűzném hozzá:

Sok olyan „nagy" ember van, akit életében is elismernek, és halála után is dicsőítenek, de ha megnézzük, mit adott másoknak, kiderül, hogy nem maradt utánuk semmi. Az olyan embereket, mint Pollák Gyurka életükben sem kíséri sok siker, és úgy tűnik, mintha haláluk után is kissé megfeledkeztek volna róluk. De ez csak a látszat! Mert a hatásuk, észrevétlen szellemi morzsákban nemzedékekig él tovább; akkor is, ha ezt nem vesszük észre ... *Mikor mozdulok, ők ölelik egymást. Elszomorodom néha emiatt – ez az elmúlás. Ebből vagyok. „Meglásd, ha majd nem leszünk! ... " – megszólítanak. ...*

Talán most mégis megértem, miért engem kértek fel ennek a bevezető beszédnek a megtartására. Akik itt vannak, azok talán mind túl közel voltak hozzá. Talán messzebbről inkább látszik az egész, míg közelről jobban látszanak a részletek.

Azért egy részletet mégis megemlítenék. Az évnek ebben a szakában rendszeresen összejöttünk Szegeden közösen ünnepelni. „Hivatalosan" ez családi ünnepféle lehetett: április 23-a Béla-nap, 24-e György-nap és 26-a Ervin-nap – és ekkor van Gyurka születésnapja. Valójában ennél többről volt szó, mert ilyenkor az egész szegedi algebristavilág összejött. Engedtessék meg, hogy ezért a lehetőségért – mint befogadott idegen – köszönetet mondjak. Köszönetet mondjak mindnyájotoknak, de elsősorban Gyurkának. Legutóbbi – azaz sajnos legutolsó – alkalommal a „gödörben" ebédeltünk, és azt firtatta, hogy a magyar matematikus értelmiségre melyik három magyar író volt legnagyobb hatással. Akkor már nagyon beteg volt, de szellemileg teljesen ép. Úgy tűnt, a gyógyulás útjára lépett. Sajnos nem így volt. Nagyon váratlanul távozott – de „csak a teste". Hiszen:

... Nem hal meg az, ki milliókra költi
Dús élte kincsét, ámbár napja múl, ...

Szeretném megköszönni feleségemnek Hay Erzsébetnek, hogy amit írtam, átnézte, nemcsak formailag, hanem tartalmilag is; hiszen mindkettőnket meleg barátság fűzött – fűz – Pollákékhoz.

NÉHÁNY KOMBINATORIKUS PROBLÉMÁRÓL IV. RÉSZ: KOMBINATORIKUS SZÁMELMÉLET

ELEKES GYÖRGY

1. Bevezetés

Jelen rész – látszólag – még az eddiginél is nagyobb kitérő felé vezeti az Olvasót: kilépve a geometriából, számelméleti kérdéseket vizsgálunk. Több oka is van annak, hogy ilyen messzire kóborolunk.

Először is, a kérdések és eredmények önmagukban is szépek és fontosak. Érdekes az is, hogy – bár a számelmélet eredete több ezer évre, a régi görögök korára nyúlik – a természetes számokkal kapcsolatos kombinatorikus kérdések vizsgálata még száz éves múltra sem tekinthet vissza. Érdemes tehát ilyen „viszonylag friss" kombinatorikus eredményekkel is megismerkednünk.

A másik ok arra, hogy egy geometriai tárgyúnak indult cikksorozat kellős közepén ilyen problémakörök tűnjenek fel, az, hogy – a számelmélet és a geometria szoros kölcsönhatásának jó példájaként – a későbbi részek geometriai vizsgálataiban gyakran támaszkodunk majd az alábbiakban ismertetendő fogalmakra és tételekre, elsősorban a „kis összeghalmazok" elméletére, valamint az „általánosított számtani sorozatokra".

Végül, hogy a geometria kedvelői könnyebb szívvel bocsássák meg a kitérőt, a két terület egymásra hatásának újabb, jelen esetben fordított irányú példájaként az utolsó, 3. szakaszban kombinatorikus számelméleti problémák megoldására használunk majd illeszkedés-geometriai módszereket.

1.1. Számtani sorozatok

A kombinatorikus számelmélet egyik legkorábbi eredménye Van der Waerden tétele. Mielőtt megismerkednénk vele, oldjunk meg egy egyszerű feladatot!

1.1. feladat. *Osszuk a természetes számokat két részre úgy, hogy egyik se tartalmazzon végtelen számtani sorozatot!*

A lehetséges megoldások közül valószínűleg az a legegyszerűbb, amikor a számokon végigsétálva, az elsőt az egyik osztályba tesszük, a következő kettőt a másikba, a következő hármat újra az egyikbe, a következő négyet újra a másikba, stb.:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & & 4,5,6 & & 11,\dots,15 & \\ & 2,3 & & 7,8,9,10 & & \dots \end{array}$$

Így valóban nem tartalmazhat végtelen számtani sorozatot egyik rész sem. Ha ugyanis az $a_1, a_1+d, a_2+d, a_1+3d, \dots$ sorozatot nézzük, az mindig állandó d hosszúságú „lépésekkel" halad, így nem maradhat ugyanabban a részben (hiszen a másik részben lesznek d-nél hosszabb blokkok, amelyek a komplementerben hosszú *üres* blokkoknak felelnek meg, s ezeket a sorozat nem tudja „átugorni").

1.2. megjegyzés. Érdemes megpróbálkozni a feladat egy „ikertestvérével" is: *keressünk olyan két részre osztást, hogy egyik rész se tartalmazzon végtelen* mértani *sorozatot!*

Még mielőtt bárkinek az az érzése támadna, hogy az algebrai műveleteknek (összeadás, illetve szorzás) speciális szerepük van, megemlítjük, hogy a következő is igaz: *Ha $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ a természetes számok megszámlálható sok végtelen részhalmaza, akkor a számok két részre oszthatók úgy, hogy egyik rész se tartalmazzon egyetlen A_i-t sem.* Ez persze az előző két állításnál általánosabb, hiszen számtani sorozat is, mértani sorozat is csak megszámlálható sok van.

1.2. Van der Waerden tétele

Az előző feladatban látott kettéosztás persze nem zárja ki az akármilyen hosszú *véges* számtani sorozatok létezését, hiszen egy „elég távoli" blokk már ilyen. (Jó példa ez a „végtelen" és az „akármekkora véges" fogalmának különbözőségére.)

Schur vetette fel a kérdést: *létezik-e olyan kettéosztás, ahol nemcsak végtelen számtani sorozat nincs, de az egy-egy részbe eső véges sorozatok hossza is korlátos?* A választ – kettőnél több rész esetére is – Van der Waerden adta meg.

1.3. tétel (Van der Waerden). *Legyen k és l tetszőleges pozitív egész! Ha a természetes számokat bárhogyan k részre osztjuk, akkor valamelyik osztály tartalmaz l hosszúságú számtani sorozatot.*

A tétel bizonyításával terjedelmi okok miatt nem foglalkozunk – annak ellenére sem, hogy a közelmúltban S. Shelah „viszonylag egyszerűbb", újabb bizonyítást talált, de jelen cikksorozat kereteit még ez is meghaladja.

1.4. megjegyzés. Még az is igaz, hogy a Van der Waerden-tétel érvényességéhez nem szükséges, hogy az *összes* számot felhasználjuk: véges számú is elég, ha megfelelően sokan vannak. Precízen: *minden k, l pozitív egészhez létezik olyan $N = N(k,l)$, hogy az $1, 2, 3, \dots, N$ számokat bárhogyan k részre osztva, valamelyik osztály tartalmaz l hosszúságú számtani sorozatot.*

1.3. Roth és Szemerédi tételei

Erdőst és Turánt is lenyűgözte a fenti eredmény szépsége. Addig-addig forgatták a fejükben, amíg érdekes gondolatra jutottak: *Lehetséges, hogy a Van der Waerden-tétel hátterében az áll, hogy a részek legalább egyike sűrű?* Precíz megfogalmazásban kérdésük a következő volt:

1.5. probléma (Erdős–Turán). *Legyen l tetszőleges pozitív egész! Igaz-e, hogy ha az $1, 2, \ldots, N$ természetes számokból akárhogyan választunk ki $N/1000$-et (általában: fix ε-ra εN-et), akkor lesz köztük l hosszú számtani sorozat – feltéve, hogy N elég nagy l-hez (általában pedig l-hez és ε-hoz) képest?*

A problémára adott igenlő válaszból persze következett volna Van der Waerden tétele is: az $\varepsilon = 1/1000$-es alakból $k \leq 1000$ részre, általános $\varepsilon > 0$-ból pedig tetszőleges k-ra (ha $\varepsilon = 1/k$-ra alkalmazzuk).

A kérdés sokáig megválaszolatlan maradt. Roth tette meg az első lépést a megoldás felé: megmutatta, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén bármely εN szám között létezik $l = 3$ tagú számtani sorozat, ha $N > n_0(\varepsilon)$. Ez az eredménye egyike volt azoknak, amelyekért Fields-érmet kapott. (Mivel nincs matematikai Nobel-díj, a matematikusok általában ezt tekintik a legmagasabb elismerésnek.)

Végül – előbb $l = 4$-re, majd az általános esetre is – Szemerédi igazolta Erdős és Turán sejtését [16]. Az eredmény annyira váratlanul jött, hogy például Erdős is csak akkor kapott észbe: korábban – szokása ellenére – elfelejtett „különdíjat" kitűzni a problémára, mert annyira reménytelennek tartotta, hogy valaki még az ő életében megoldja. (Utólag pótolta.)

Mondjuk hát ki még egyszer, most már nem kérdés, hanem pozitív állítás formájában.

1.6. tétel (Szemerédi). *Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz és l pozitív egészhez létezik olyan $N = N(\varepsilon, l)$, hogy az $1, 2, 3, \ldots, N$ számokból bárhogy választva ki εN darabot, lesz közöttük l tagú számtani sorozat.*

A tételre a közelmúltban Gowers (egy másik Fields-érmes) talált egyszerűbb és a réginél jobb korlátot adó bizonyítást.

Végezetül megemlítjük még Erdős egy ide kapcsolódó régebbi sejtését: *Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ természetes számok között „sok" (legalább $n^2/1000$, vagy általában εn^2 darab) háromtagú számtani sorozat található, akkor van „sokkal több" tagú (tetszőleges k-ra k hosszúságú) is – feltéve, hogy n elég nagy k-hoz képest.*

A bizonyítást a következő szakasz 2.7. tétele ismerteti majd.

2. A Freiman–Ruzsa tételkör

Egyszerűen fogalmazva a probléma a következő: *milyen szerkezetűek azok a számhalmazok, amelyekből csak „kevés" különböző összeg (vagy szorzat) képezhető?* A pontos megfogalmazáshoz egy jelölést vezetünk be.

Legyen $\mathcal{A}$ valós számokból (vagy komplexekből, esetleg vektorokból) álló tetszőleges halmaz. Az $\mathcal{A}$-ból képezhető kéttagú összegek

$$\mathcal{A}+\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \{a+a';\ a,a' \in \mathcal{A}\}$$

halmazát szokás szerint $\mathcal{A}$ *összeghalmazának* nevezzük. Hasonlóan definiálható az $\mathcal{A}-\mathcal{A}=\{a-a';\ a,a'\in\mathcal{A}\}$ *különbséghalmaz* is.

Világos, hogy ha $|\mathcal{A}|=n$, akkor $\mathcal{A}+\mathcal{A}$-nak legfeljebb $\binom{n}{2}+n$ különböző eleme lehet – alkalmasan „szabálytalan" $\mathcal{A}$ esetén – hiszen az $\binom{n}{2}$ páronkénti összeghez az n darab $a+a$ alakú szám jön még. Persze a különböző összegek száma kisebb is lehet, például ha bizonyosak egybeesnek. Első kérdésünk: milyen sok egybeesés lehet; pontosabban: *ha* $|\mathcal{A}|=n$, *milyen kicsi lehet* $\mathcal{A}+\mathcal{A}$? Könnyű megmutatni, hogy ha $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}$, akkor

$$|\mathcal{A}+\mathcal{A}| \geq 2|\mathcal{A}|-1=2n-1. \tag{1}$$

Valóban, ha $\mathcal{A}$ elemei nagyság szerint $a_1<a_2<\ldots<a_n$, akkor

$$a_1+a_1<a_1+a_2<a_2+a_2<a_2+a_3<a_3+a_3<\ldots<a_{n-1}+a_n<a_n+a_n,$$

tehát $2n-1$ különböző számot mindenképpen kapunk. Azt sem nehéz belátni, hogy (1)-ben csakis akkor állhat egyenlőség, ha $\mathcal{A}$ számtani sorozat.

Ebből az egyszerű észrevételből nő ki az additív számelmélet egyik, mostanában sokat vizsgált ága: a kis összeghalmazok struktúráját vizsgáló elmélet.

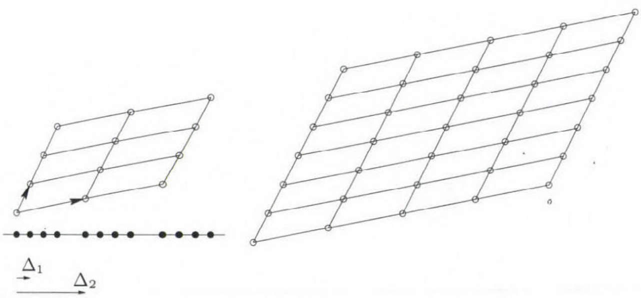
2.1. Általánosított számtani sorozatok

Létezik-e a számtani sorozatokon kívül másfajta sorozat is, melynek összeghalmaza – ha nem is $2n-1$, de – nem sokkal több elemű? Igen, például az ú.n. *általánosított számtani sorozatok.* (Ilyeneket Szemerédi vizsgált először, az 1.5. problémát megoldó, más szóval az 1.6 tételt igazoló cikkében.) Ezeket ismertetjük az alábbiakban.

Ha egy számtani sorozat kezdőtagja a és különbsége Δ, akkor tagjai $a+k\Delta$ alakúak, ahol $0\leq k\leq n-1$. Ha nemcsak egy, hanem $d\geq 2$ darab különbséget is megengedünk, pl. $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_d$-t, továbbá $n_1,n_2,\ldots,n_d$ pozitív egészek, akkor az

$$\{a+k_1\Delta_1+k_2\Delta_2+\ldots+k_d\Delta_d;\ \forall i\leq d\text{-re}\ \ 0\leq k_i\leq n_i-1\}$$

számhalmazt d-dimenziós, $n=n_1\cdot n_2\cdot\ldots\cdot n_d$ „méretű" általánosított számtani sorozatnak nevezzük. (Úgy képzelhetjük, hogy egy d-dimenziós pontrácsot vetítünk egy egyenesre, lásd 1. ábra.) A „méret" azért került idézőjelbe, mert nem feltétlenül azonos a halmaz elemszámával; ezek csak akkor egyeznek meg, ha minden szereplő összeg különböző – egyébként az elemszám kisebb lesz.



1. ábra. Kétdimenziós, $n = 4 \cdot 3$ méretű (és elemszámú) általánosított számtani sorozat mint pontrács vetülete; továbbá összeg- vagy különbséghalmaza (utóbbi kettő ugyanúgy néz ki – bár máshol helyezkednek el)

2.1. megjegyzés. Ha $\mathcal{A}$ általánosított számtani sorozat, akkor $\mathcal{A}+\mathcal{A}$ is az lesz: $\mathcal{A}+\mathcal{A} = \{2a + k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + \ldots + k_d\Delta_d;\ \forall i \leq d\text{-re } 0 \leq k_i \leq 2n_i - 2\}$. Ugyancsak általánosított számtani sorozat lesz $\mathcal{A}-\mathcal{A} = \{k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + \ldots + k_d\Delta_d;\ -n_i + 1 \leq k_i \leq n_i - 1\}$ is, bár ez kevésbé szembeötlő; de az $\overline{a} = -(n_1-1)\Delta_1 - \ldots - (n_d-1)\Delta_d$ kezdőtaggal, $\overline{n}_i = 2(n_i - 1)$ korlátokkal $\mathcal{A}-\mathcal{A} = \{\overline{a} + \overline{k}_1\Delta_1 + \overline{k}_2\Delta_2 + \ldots + \overline{k}_d\Delta_d;\ 0 \leq \overline{k}_i \leq \overline{n}_i - 1\}$.

2.2. állítás. *Tetszőleges d-dimenziós általánosított számtani sorozatra*

$$|\mathcal{A} \pm \mathcal{A}| \leq 2^d|\mathcal{A}|.$$

Bizonyítás. Ez szemléletesen jól látszik az 1. ábrából: a pontrács összeghalmaza minden „irányban" legfeljebb kétszeresére hízik, ezáltal mérete – s vele együtt $\mathcal{A}+\mathcal{A}$ és $\mathcal{A}-\mathcal{A}$ mérete is – legfeljebb 2^d-vel szorzódik. A fenti érvelés persze csak akkor állja meg helyét, ha $\mathcal{A}$ mérete és elemszáma azonos; egyébként a precíz bizonyításhoz célszerű $\mathcal{A}$-nak legfeljebb 2^d darab „sarkát" definiálni:

$$H = \{a + k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2 + \ldots + k_d\Delta_d;\ \forall i \leq d\text{-re}\ \ k_i = 0 \text{ vagy } n_i\}.$$

Ezek közül persze egyesek egybeeshetnek. Számuk azonban $\leq 2^d$, hiszen d-szer van módunk két lehetőségből választani. Az is könnyen látható (a 2.1. megjegyzéshez hasonlóan), hogy

$$\mathcal{A} \pm \mathcal{A} \subseteq H \pm \mathcal{A};$$

a jobb oldalon pedig legfeljebb $2^d|\mathcal{A}|$ elem szerepel. ∎

A fenti állítás szerint tehát egy két-, illetve háromdimenziós általánosított számtani sorozatra $|\mathcal{A}+\mathcal{A}| \leq 4|\mathcal{A}|$, illetve $|\mathcal{A}+\mathcal{A}| \leq 8|\mathcal{A}|$; és általában $\mathcal{A}+\mathcal{A}$ mérete lineáris függvénye $|\mathcal{A}|$-nak, ha d rögzített.

További példák adódnak kis összeghalmazokra úgy is, hogy pl. egy $10n$ méretű d-dimenziós $\mathcal{B}$ általánosított számtani sorozatból kiválasztunk egy n elemű $\mathcal{A}$ részhalmazt akár véletlenszerűen, akár valamilyen szabály szerint. Ekkor

$$|\mathcal{A}+\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}+\mathcal{B}| \leq 2^d|\mathcal{B}| \leq (2^d \cdot 10)n;$$

vagyis az összeghalmaz elemszáma (rosszabb együtthatóval ugyan, de) továbbra is lineáris lesz n-ben. Természetesen hasonló érvényes bármely rögzített C együtthatóval 10 helyett.

Az additív számelmélet nevezetes eredménye Freiman tétele, mely szerint más eset nem lehetséges.

2.3. tétel. *Ha az n elemű $\mathcal{A}$ valós vagy komplex számhalmazra, esetleg vektorhalmazra*

$$|\mathcal{A}+\mathcal{A}| \le Cn \quad \text{vagy} \quad |\mathcal{A}-\mathcal{A}| \le Cn,$$

akkor $\mathcal{A}$ befoglalható egy legfeljebb $d_1(C)$ dimenziós általánosított számtani sorozatba, melynek mérete lineáris n-ben, azaz $\le C_1(C)\cdot n$. Itt $d_1(C)>0$ és $C_1(C)>0$ az n-től független konstansok. (Még az is feltehető, hogy az elemek csupa különbözőek.)

A tétel kommutatív torziómentes csoportokban is igaz marad – erre azonban a továbbiakban nem lesz szükségünk. A bizonyítás eredetileg egy kb. százoldalas könyv fő eredménye volt [9, 10]. Azóta Ruzsa talált „emészthetőbb", áttekinthető bizonyítást [14, 15]. Jelen cikksorozat kereteit azonban ez is meghaladja.

Freiman tétele szorzat- és hányadoshalmazokra is átfogalmazható:

2.4. tétel. *Ha az n elemű $\mathcal{A}$ valós vagy komplex számhalmazra $|\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}|\le Cn$ vagy $|\mathcal{A}/\mathcal{A}|\le Cn$, akkor $\mathcal{A}$ befoglalható egy legfeljebb $d_2(C)$ dimenziós*

$$\{a\cdot q_1^{k_1}\cdot q_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot q_d^{k_d};\ \forall i\le d\text{-re}\ \ 0\le k_i\le n_i-1\}$$

általánosított mértani sorozatba, melynek mérete $\le C_2(C)\cdot n$. Itt $q_1,\ldots,q_d$ a sorozat hányadosai, $d_2(C)>0$ és $C_2(C)>0$ pedig az n-től független újabb konstansok.

Bizonyítás. Pozitív valósak esetén logaritmussal vezethetjük vissza az állítást az eredeti 2.3. tételre. Ha negatívokat is megengedünk, akkor egy új $q_0=-1$ hányadost bevezetve ($n_0=2$ korláttal) találhatunk alkalmas sorozatot. Végül komplex $\mathcal{A}$ számhalmaz a elemét egyértelműen reprezentálhatjuk $a=e^{u+iv}$ alakban, ahol u tetszőleges valós és $v\in[0,2\pi)$. Ugyancsak kifejezhetjük $\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}$ elemeit *kétféleképpen* is: egyszer $v\in[0,2\pi)$-vel, egyszer $v\in[2\pi,4\pi)$-vel. Ha $\mathcal{B}$-vel jelöljük az $\mathcal{A}$ előállításában szereplő kitevők halmazát, akkor $\mathcal{B}+\mathcal{B}$-t tartalmaznia kell az $\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}$-hoz (kétféleképpen) rendelt kitevőhalmaznak. Innen

$$|\mathcal{B}+\mathcal{B}|\le 2|\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}|\le 2Cn.$$

Így ezt is visszavezettük a kis összeghalmazok esetére. ∎

2.2. „Statisztikus" eredmények

Mit mondhatunk az $\mathcal{A}$ halmaz szerkezetéről, ha nem az összes párról, hanem csak bizonyosakról tesszük fel, hogy kevés különböző összeget adnak? A kérdés persze csak akkor érdekes, ha azért a tekintett párok száma nagy (hiszen kevés párból mindenképpen kevés összeg adódik).

A továbbiakban olyan összeghalmazokat vizsgálunk, amelyekben az összeadásra kerülő párok száma az összes lehetséges pár pozitív százaléka, azaz – mivel maximum $\binom{n}{2} \sim n^2/2$ pár lehet – legalább γn^2 összeget tekintünk, valamely rögzített $\gamma > 0$ (és nagy n) mellett. Az ilyen típusú összeghalmazokra vezette be Balog és Szemerédi a „statisztikus" jelzőt.

2.5. definíció. Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges számhalmaz. Vegyünk $\mathcal{A}$ elemein mint csúcsokon egy gráfot; ennek élhalmaza legyen E. Ekkor az E által meghatározott *statisztikus összeghalmaz*

$$\mathcal{A} +_E \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{a + a';\ (a, a') \in E\}.$$

Hasonlóan adódnak a statisztikus szorzat-, különbség- és hányados-halmazok is.

Sajnos az a (gyenge) feltétel, hogy $|E| \geq \gamma n^2$, még nem biztosíthatja, hogy az *egész* $\mathcal{A}$ halmaz struktúráját leírjuk. Például ha az $\mathcal{A}$ egyik fele egy $n/2$ elemű számtani sorozatot alkot, akkor máris lesz $\approx n^2/8$ olyan pár, amelyek csak n különböző összeget adnak – függetlenül a maradék $n/2$ elemtől, amelyek tetszőlegesek lehetnek.

Talán ha még azt is megköveteljük, hogy minden fokszám nagy legyen (azaz minden csúcsra sok él illeszkedjen; másszóval, hogy minden szám sok összegben szerepeljen)? Ez már bíztatóbb, de még egy ilyen gráf is széteshet független részekre. Például, ha két teljes, egyenként $n/2$ csúcsú részgráfból áll, de a két rész között egyetlen él sem fut, akkor még mindig nem lehetünk biztosak abban, hogy az egész számhalmaz belefér egyetlen, nem túl nagy általánosított számtani sorozatba. Konkrét számokkal: álljon $\mathcal{A}$ az $1, 2, \ldots, n/2$ és a $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, \ldots, (n/2)\sqrt{2}$ számokból és csak azokat az összegeket tekintsük, amelyek vagy $i + j$, vagy $i\sqrt{2} + j\sqrt{2}$ alakúak. Ilyen összesen $2\binom{n/2}{2} \sim n^2/4$ van, de közülük csak $\sim n + n = 2n$ különböző. Egyetlen nem túl nagy általánosított számtani sorozatba viszont nem férhet be az egész $\mathcal{A}$, mert akkor csak Cn különböző összeg lehetne összesen, holott az $i + j\sqrt{2}$ alakú számok $(i, j \leq n/2)$ mind különbözőek és $(n/2)(n/2) = n^2/4$ van belőlük.

Az azért igaz, hogy a fenti „statisztikus" feltételek mellett a számhalmaz „jó része" (pozitív százaléka) egyetlen általánosított számtani sorozatba esik. Ezt Balog és Szemerédi mutatta meg; azt a (látszólag kicsi, de) fontos élesítést pedig Laczkovich és Ruzsa igazolta, hogy még azt is megkövetelhetjük, hogy ebbe a részbe sok él essen.

2.6. tétel (Balog–Szemerédi és Laczkovich–Ruzsa). *Ha* $|\mathcal{A}| = n$ *és* $|E| \geq \gamma n^2$, *továbbá*

$$|\mathcal{A} +_E \mathcal{A}| \leq Cn,$$

akkor található olyan $\mathcal{G}$ *általánosított számtani sorozat, melynek elemei csupa különbözőek, továbbá*

(i) *$\mathcal{A}$-nak legalább $\gamma^* n$ elemét tartalmazza* [1];

(ii) *$\mathcal{A} \cap \mathcal{G}$ legalább $\gamma^* n^2$ darab E-beli élt feszít (azaz legalább ennyi élnek tartalmazza mindkét végpontját)* [13];

ugyanakkor $\mathcal{G}$ dimenziója legfeljebb d^*, mérete pedig legfeljebb $C^* n$, ahol $d^* = d^*(C, \gamma) > 0$, $C^* = C^*(C, \gamma) > 0$ és $\gamma^* = \gamma^*(C, \gamma) > 0$ mindnyájan n-től független konstansok.

Természetesen a (ii) tulajdonságból (i) is következik.

A 2.3. és az előző 2.6. tétel közti „hiányzó láncszemet" a következő szakaszban láthatjuk majd. Előbb azonban megmutatjuk, mi célból bizonyította Balog és Szemerédi a fenti tétel (i) részét és ennek – valamint az 1.6 „nagy" Szemerédi-tételnek – segítségével hogyan oldották meg az 1. szakasz végén, az 1.6. tétel után említett Erdős-sejtést.

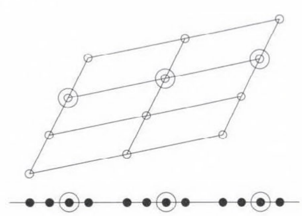
2.7. tétel (Balog–Szemerédi). *Legyen l tetszőleges pozitív egész. Ha az $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ valós számhalmazban legalább εn^2 darab háromtagú számtani sorozat található, akkor van l hosszúságú is – feltéve, hogy $n > n_0(\varepsilon, l)$.*

Bizonyítás. A $\geq \varepsilon n^2$ darab (a_i, a_j, a_k) 3 tagú számtani sorozat mindegyikére $a_i + a_k = 2a_j$. Ha tehát elkészítjük azt a gráfot, melyben a fenti típusú (a_i, a_k) párokat kötjük össze egymással E-beli éllel, akkor egyrészt $\geq \varepsilon n^2$ élt kapunk; másrészt $\mathcal{A} +_E \mathcal{A} \subset 2\mathcal{A}$ (ahol $2\mathcal{A} = \{2a;\, a \in \mathcal{A}\}$), tehát $|\mathcal{A} +_E \mathcal{A}| \leq |A|$. Alkalmazva a 2.6. tétel (i) részét, létezik $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$, $|\mathcal{A}_0| \geq \alpha n$, amely egy „kis", $\leq C^* n$ elemű, $\leq d^*$ dimenziós $\mathcal{G}$ általánosított számtani sorozatba esik (melyről – mint a 2.3 tétel végén – feltehetjük, hogy elemei különbözőek).

Mivel $|\mathcal{G}| \geq |\mathcal{A}_0| \geq \alpha n$, ezért van olyan n_j dimenzió, amelyre

$$n_j \geq \sqrt[d^*]{\alpha n} = \alpha^* \sqrt[d^*]{n}.$$

Tekintsük $\mathcal{G}$ „j-edik irányú fonalait"! Ez azt jelenti, hogy rögzítsük a Δ_i-khez tartozó k_i együtthatókat, az egyetlen k_j kivételével, s utóbbit futtassuk 0-tól $n_j - 1$-ig (lásd 2. ábra). Tudjuk, hogy



2. ábra. Általánosított számtani sorozat egy fonala

$$|\mathcal{A}_0| \geq \alpha n = \frac{\alpha}{C^*} \cdot C^* n \geq \frac{\alpha}{C^*} \cdot |\mathcal{G}|,$$

ezért az is igaz, hogy a j-edik irányú fonalak valamelyikének is legalább α / C^*-szorosát töltik ki $\mathcal{A}_0$ odaeső elemei.

Erre a fonalra és $\varepsilon = \alpha / C^*$-re alkalmazva az 1.6. tételt, a kívánt l hosszúságú számtani sorozat adódik $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ -ban, feltéve, hogy $n_j = \alpha^* \sqrt[d^*]{n} > n_0(\alpha / C^*, l)$. ■

2.3. Sűrű és még sűrűbb gráfok

E szakasz célja, hogy közös általánosítását adjuk a minden párt összeadó 2.3. tételnek és a statisztikus, azaz csak a párok pozitív százalékával törődő 2.6. tételnek. Ezt nemcsak a kérdés érdekessége miatt tesszük, hanem azért is, mert e cikksorozat további részeiben sok olyan eredményt láthatunk majd, amelyek az összeg- (és szorzat-) halmazok itt bemutatott elméletére támaszkodnak – és minden esetben célszerű lesz az állításokat közös, egységes formában kimondani.

E célból olyan gráfokra lesz szükségünk, amelyek „elég közel" vannak a teljes gráfokhoz, de elég kevés élük van ahhoz, hogy minden sűrű gráfban megtalálhatók legyenek.

A továbbiakban *sűrűnek* mondunk egy n csúcsú gráfot, ha legalább γn^2 éle van, valamely fix $\gamma > 0$-ra. (Pontosabb lenne a „γ-sűrű" elnevezés, de inkább az előző a szokásos.) Az ilyen gráfok persze csak akkor érdekesek, ha n nagy.

Az előző pontban láttuk, hogy sem a sűrű, sem a nagy fokú gráfok nincsenek elég közel a teljesekhez, hiszen még az utóbbiak is több részre eshetnek szét. Ezen segít a következő definíció.

2.8. definíció. Legyen $\alpha \in (0, 1]$. Egy gráfot a V csúcshalmazon *α-sűrűn összefüggőnek* nevezünk, ha V bármely $V = V_1 \cup V_2$ diszjunkt részekre vágása esetén V_1 és V_2 között legalább $\alpha|V_1|\,|V_2|$ él megy.

A különböző gráfok mentén képzett, kis összeghalmazokat karakterizáló eredményeket az alábbi táblázat foglalja össze. (Látni fogjuk, hogy közülük a (C) alatti, α-sűrűn összefüggő változat a legerősebb.)

	E, melyre $\mathcal{A} +_E \mathcal{A}$ kicsi	Állítás $\mathcal{A}$-ra
(A)	teljes gráf	tartalmazza egyetlen általánosított számtani sorozat
(B)	teljes páros gráf, mindkét osztályban $\geq \varepsilon n$ csúccsal	ugyanaz
(C)	α-sűrűn összefüggő gráf	ugyanaz
(D)	minden fok nagy (például $\geq \gamma\|\mathcal{A}\|$)	fedhető korlátos számú általánosított számtani sorozattal
(E)	sűrű gráf	nagy rész és sok él egy általánosított számtani sorozatban

Itt (C) valóban általánosítása (A)-nak és (B)-nek, hiszen könnyen kiszámolható, hogy ha egy n csúcsú teljes páros gráf mindkét csúcshalmaza legalább εn elemű, akkor alkalmas $\alpha = \alpha(\varepsilon)$-ra – egy teljes gráf pedig $\alpha = 1$-re – α-sűrűn összefüggő lesz.

Ugyanakkor (C) $\Rightarrow$ (D) $\Rightarrow$ (E) is igaz. Utóbbi következtetés azért helytálló, mert γn^2 élű gráf mindig tartalmaz olyan (nem-üres) részt, amelyben az összes fokszám legalább γn. (Kellemes gyakorló-feladat!) Előbbi pedig arra hivatkozva látható be, hogy ha egy n csúcsú gráfban minden fokszám $\geq \beta n$, továbbá $\alpha \in (0, \beta)$

tetszőleges, akkor a gráf csúcsai lefedhetőek korlátos számú, mondjuk $C = C(\alpha, \beta)$ darab α-sűrűn összefüggő gráffal. (Ezt nem részletezzük.)

Végezetül (C) visszavezethető (A)-ra, azaz a 2.3. tételre – cikkünk kereteit azonban ez is meghaladja.

2.4. Egy nem kommutatív csoport

Az összeghalmazokra vonatkozó fenti állítások tetszőleges kommutatív, torziómentes csoportban igazak maradnak. (Az első feltétel azt jelenti, hogy a csoportművelet tagjainak sorrendje felcserélhető; a második pedig azt, hogy egy nem-nulla a elemből képzett, akárhány tagú $a + a + \ldots + a$ alakú összegek egyike sem nulla.)

Logikus a kérdés: *mi mondható nem-kommutatív csoportokra?* Sajnos ezekről nagyon keveset tudunk. Valószínűleg ilyenekre is „igaz lesz valami”, de a fenti struktúra-tételeket eddig csak az $y = ax + b$ és az $y = (ax + b)/(cx + d)$ alakú függvények kompozíciócsoportjára – vagy (ami lényegében ugyanaz) az $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} u & v \\ w & 1 \end{pmatrix}$ típusú mátrixok szorzáscsoportjára – sikerült átvinni [5, 3]. Ez nem sok; csak azért említjük őket, mert a következő részben lényeges szerepük lesz geometriai (!) kérdések kapcsán.

3. Erdős–Szemerédi „hibrid” problémája és kapcsolata illeszkedési kérdésekkel

Az összeg- és különbséghalmazokhoz hasonlóan szorzat- és hányadoshalmazokat is használtunk már:

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \{a \cdot a';\ a, a' \in \mathcal{A}\} \quad \text{és} \quad \mathcal{A}/\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \{a/a';\ a, a' \in \mathcal{A},\ a' \neq 0\}. \tag{2}$$

Legyen $\mathcal{A}$ a nem-nulla valós vagy komplex számok n elemű részhalmaza. Erdős és Szemerédi vetette fel a következő kérdést [8]:

Adott n-re milyen kicsi lehet $\mathcal{A} + \mathcal{A}$ és $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}$ egyszerre?

Más szóval, keressünk alsó becslést a

$$g(n) \overset{\text{def}}{=} \min_{|\mathcal{A}|=n} \max\big\{|\mathcal{A} + \mathcal{A}|, |\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}|\big\}$$

függvényre.

3.1. megjegyzés. A probléma akkor válik érdekessé, amikor észrevesszük, hogy *külön-külön* $|\mathcal{A} + \mathcal{A}|$ és $|\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}|$ bármelyike könnyen minimalizálható – számtani, illetve mértani sorozatokkal. Viszont mindkét példában nagy (n^2 körüli) lesz a *másik* halmaz. Például az $1, 2, \ldots, n$ sorozatból szorzatként előáll minden olyan szám n^2-ig, melynek nincs n-nél nagyobb prímosztója. Az ilyen egészek száma (a számelmélet itt nem részletezendő erdeményei szerint) $\sim n^2/(\log n)^{\alpha}$, alkalmas $\alpha > 0$ kitevővel. Egy tipikus mértani sorozatból, pl. az $1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}$-ből előálló összegek pedig mind különbözőek lesznek.

Említett cikkükben Erdős és Szemerédi megmutatták olyan pozitív α konstans létezését, melyre

$$g(n) \geq n^{1+\alpha}.$$

A hangsúly a *létezésen* volt; a talált α-t – annak igen kicsiny volta miatt – nem is számolták ki pontosan. (A 3.1. megjegyzésben említett példák azt sugallják, hogy $g(n)$ nagyságrendje sokkal nagyobb; valószínűleg n^2 körüli, pontosabban legalább $n^{2-\varepsilon}$ lesz.)

1996-ban talált M. B. Nathanson explicit alsó becslést: $g(n) \geq n^{32/31}$. Ezt K. Ford javította $n^{16/15}$-re. Megmutatjuk, hogy a Szemerédi–Trotter-tételből lényegesen jobb korlát adódik [4].

3.1. Egy alsó becslés

A módszer, amit alkalmazunk, többször is visszatér majd a következő részekben: *ha sok függvényünk van, de nem elég, készítsünk belőlük újabbakat!*

3.2. tétel. *Létezik olyan pozitív abszolút c konstans, hogy bármely n elemű $\mathcal{A} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ halmazra*

$$c \cdot n^{5/2} \leq |\mathcal{A} + \mathcal{A}| \cdot |\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}|;$$

következésképpen $c_1 \cdot n^{5/4} \leq \max\{|\mathcal{A} + \mathcal{A}|, |\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}|\}$.

Bizonyítás. Tetszőleges $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$-re definiáljuk a következő n^2 darab függvényt (melyek $a_j \neq 0$ miatt mind különbözőek):

$$f_{j,k}(x) \stackrel{\text{def}}{=} a_j(x - a_k) \qquad \text{ha} \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Ezek az $f_{j,k}$-k a „természetes" $t \mapsto t + a_i$ és $t \mapsto t \cdot a_i$ függvényekből készültek úgy, hogy grafikonjuk az $x = g(t) = t + a_k$, $y = h(t) = t \cdot a_j$ paraméteres görbe lett. (Ezt lerajzolni csak a valós számokon végigfutó t paraméter mellett tudjuk – bár komplex változókra is értelmes.) Másképp fogalmazva, a $g(t) = t + a_k$ és $h(t) = t \cdot a_j$ függvényekből komponáltuk őket úgy, hogy $f_{j,k}(x) = h\big(g^{-1}(x)\big)$.

3.3. lemma. *Minden $j, k \leq n$ párra az $f_{j,k}$ függvény $\mathcal{A} + \mathcal{A}$-nak legalább n elemét képezi $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}$-ba.*

(Valóban, minden $a_i \in \mathcal{A}$-ra $f_{j,k}(a_k + a_i) = a_j \cdot a_i \in \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}$.) ■

Geometriai szempontból a fenti lemma azt állítja, hogy bármely $f_{j,k}$ grafikonja legalább n pontot tartalmaz a $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{A} + \mathcal{A}) \times (\mathcal{A} \cdot \mathcal{A})$ Descartes-szorzatból. Legyen $N = |\mathcal{P}| = |\mathcal{A} + \mathcal{A}| \cdot |\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}|$. A Szemerédi–Trotter-tétel (lásd a II. rész 1.5. tételét; komplex számhalmaz esetén pedig ugyanazon rész 1.8. megjegyzését) azt állítja, hogy tetszőleges $k \leq \sqrt{N}$ esetén a sík N pontja közül legalább k-t tartalmazó egyenesek száma nem több, mint $C \cdot N^2/k^3$ – alkalmas C abszolút konstanssal. Ezt a $\mathcal{P}$ halmazra és az n^2 darab $f_{j,k}$ függvény grafikonjára alkalmazva,

$$n^2 \leq C \cdot \frac{N^2}{n^3}$$

adódik, azaz $N \geq C^{-1/2} n^{5/2}$ – amit igazolni akartunk. ■

3.2. Konvex függvények

Érdekes, hogy a 3.2. tétel nem a szorzathalmaz valamely különleges tulajdonságán múlik. Mint az alábbiakban kiderül, csak az számít, hogy az $y = \log x$ függvény szigorúan konkáv.

Legyen $\mathcal{A}$ a valós számok tetszőleges n elemű részhalmaza és f szigorúan konvex (vagy konkáv) függvény egy, az $\mathcal{A}$-t tartalmazó intervallumon. Vezessük be a következő jelölést!

$$f(\mathcal{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(a) : a \in \mathcal{A}\}.$$

3.4. tétel [6].

$$|\mathcal{A} \pm \mathcal{A}| \cdot |f(\mathcal{A}) \pm f(\mathcal{A})| \geq cn^{5/2},$$

ahol a $\pm$-ok helyére tetszőlegesen írhatunk $+$-t vagy $-$-t.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy f szigorúan monoton. (Ellenkező esetben ugyanis két ilyen részre vághatjuk – konvex, illetve konkáv fügvényekkel ez megtehető – és csak azt az intervallumot tekintjük, ahová $\mathcal{A}$-nak több eleme esik. A maradék elemeket kihagyjuk; ez csak egy konstans szorzónyi veszteséget jelent.)

Definiáljuk a következő függvényeket $a_i, a_j \in \mathcal{A}$-ra:

$$f_{ij}(x) = f(x \mp a_i) \pm f(a_j).$$

Ezek mindnyájan az eredeti f eltoltjai, s így grafikonjaik kétparaméteres görbesereget alkotnak. Még az is igaz, hogy ez a sereg (a II. részben használt értelemben) pszeudoegyenes-rendszer, hiszen – mint az könnyen belátható – *szigorúan konvex függvény grafikonjának két eltoltja legfeljebb egyetlen pontban metszheti egymást.*

Ugyanakkor a $\mathcal{P} = (\mathcal{A} \pm \mathcal{A}) \times (f(\mathcal{A}) \pm f(\mathcal{A}))$ halmazból minden $f_{i,j}$ legalább n pontot tartalmaz, éspedig $k \leq n$-re $(a_k \pm a_i, f(a_k) \pm f(a_j))$-t biztosan. A 3.2 tétel bizonyításának végén található számolást szó szerint megismételve a kívánt állítást kapjuk. ∎

3.5. megjegyzés. E becslést az $f(x) = \log x$ függvényre alkalmazva speciális esetként a 3.2. tétel (pontosabban annak pozitív valós változata) adódik.

A fenti eredmény segítségével még egy további Erdős-problémában javítható a legjobb korábbi alsó korlát.

Legyen $\mathcal{B} = \{b_1 < b_2 < \ldots < b_n\}$ a valós számok olyan n elemű részhalmaza, melyre $b_i - b_{i-1} < b_{i+1} - b_i$ teljesül minden $1 < i < n$-re. Erdős kérdezte, igaz-e, hogy

$$\frac{|\mathcal{B} - \mathcal{B}|}{n} \to \infty \quad \text{ha} \quad n \to \infty\,?$$

A választ Hegyvári adta meg, megmutatva, hogy $|B - B| \geq cn\log n / \log\log n$ [12]. Ezt a becslést javítjuk meg most a 3.4. tétel segítségével.

3.6. tétel [6].

$$|B - B| \geq cn^{3/2}.$$

Bizonyítás. A feltételek szerint létezik olyan, alkalmas $I \supset \{1, 2, \ldots, n\}$ intervallumon szigorúan konvex f függvény, melynek grafikonja tartalmazza az összes (i, b_i) pontot ($1 \le i \le n$). Legyen $\mathcal{A} = \{1, 2, \ldots, n\}$; ekkor $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$. Felhasználva a 3.4. tételt és azt, hogy $|\mathcal{A} - \mathcal{A}| = n - 1 < n$,

$$|\mathcal{B} - \mathcal{B}| = \left|f(\mathcal{A}) - f(\mathcal{A})\right| \ge \frac{cn^{5/2}}{|\mathcal{A} - \mathcal{A}|} > cn^{3/2}. \qquad \blacksquare$$

3.3. Két közel pontos nagyságrend

Valószínűleg az eddig látott, javított alsó becslések sem élesek; pl. a fenti problémánál $n^{2-\varepsilon}$ felett lehet az igazság, az $n^{5/2}$-es alsó becsléseknél pedig $n^{3-\varepsilon}$ felett. Ezek a kérdések azonban megoldatlanok. Egy kivételt és egy „majdnem-kivételt" azonban érdemes megemlíteni.

Ügyesebben választott illeszkedési becslésekből lényegében pontos nagyságrendek adódnak Erdős és Szemerédi egy speciálisabb kérdésével kapcsolatban: igaz-e, hogy ha $|\mathcal{A} + \mathcal{A}|$ nagyon kicsi (legfeljebb $C|\mathcal{A}|$), akkor $|\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}|$ nagyon nagy; legalább $c|\mathcal{A}|^{2-\varepsilon}$? A válasz igenlő [7].

3.7. tétel. *Ha* $|\mathcal{A}| = n$ *és* $|\mathcal{A} + \mathcal{A}| \le Cn$, *akkor* $|\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}| \ge cn^2 / \log n$.

Ez a becslés még erősebb is valamivel, mint az eredeti kérdés. A nevezőben szereplő logaritmus – pontosabban annak valamilyen hatványa – „szükséges rossz": mint a 3.1. megjegyzésben említettük, létezik példa, ahol a szorzathalmaznak $\sim n^2/(\log n)^\alpha$ eleme van.

A fentinél általánosabb állítást igazolunk [7].

3.8. tétel. *Ha* $|\mathcal{A}| = n$, *akkor* $\left(|\mathcal{A} + \mathcal{A}|\right)^4 \cdot |\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}| \ge cn^6 / \log n$.

A bizonyítás alapja a következő észrevétel.

3.9. lemma. *$N \times N$ pontú $X \times Y$ Descartes-szorzatban legfeljebb $CN^4 \cdot \log N$ kollineáris ponthármas található.*

Bizonyítás. Ha egy egyenes $k \le N = \sqrt{N \times N}$ pontot tartalmaz a Descartes-szorzatból, akkor $\binom{k}{3} < k^3$ kollineáris hármas helyezkedik el rajta. A legalább k pontú egyenesek száma pedig II. rész 1.5. tétele szerint legfeljebb $C(N^2)^2/k^3$. Következésképpen a legalább k, de legfeljebb $2k$ pontú egyeneseken együttvéve $< k^3 \cdot C(N^2)^2/k^3 = CN^4$ kollineáris hármas található. Ezeket összegezve $k = 2, 4, 8, \ldots, 2^{\lfloor \log N \rfloor}$-re, éppen a kívánt korláthoz jutunk. $\blacksquare$

A tétel bizonyítása. Vezessük be az $s = |\mathcal{A} + \mathcal{A}|$ és $p = |\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}|$ jelöléseket! Ekkor $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ lefedhető p darab $xy = \lambda$ egyenletű ($\lambda \in \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}$) hiperbolával. Egy átlagos ilyen hiperbola tehát n^2/p pontot tartalmaz $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$-ból, azaz $\sim cn^4/p^2$ pontpárt.

A számtani és négyzetes közép közti egyenlőtlenségből könnyen látható, hogy az összes ilyen – azonos hiperbolára eső – pontpárok száma legalább $p \cdot cn^4/p^2 = cn^4/p$.

Ezen $(a_i, a_j), (a_k, a_l)$ párokra tehát $a_i a_j = a_k a_l$. Képezzünk belőlük és bármely $(a_u, a_v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$-ból ponthármasokat a következőképpen:

$$(a_u, a_v),\ (a_i + a_u, a_k + a_v), (a_l + a_u, a_j + a_v) \in \big((\mathcal{A} + \mathcal{A}) \cup \mathcal{A}\big) \times \big((\mathcal{A} + \mathcal{A}) \cup \mathcal{A}\big).$$

Ezek száma $n^2 \cdot cn^4/p = cn^6/p$; a különbözőeké pedig ennek legalább harmada, hiszen mindegyiket legfeljebb háromszor számoltuk. Ugyanakkor minden ilyen ponthármas kollineáris $a_i a_j = a_k a_l$ miatt. A fenti lemma szerint az ilyen hármasok száma nem lehet több, mint $C\big|(\mathcal{A} + \mathcal{A}) \cup \mathcal{A}\big|^4 \log n$; ezt felhasználva

$$\frac{c}{3} \cdot \frac{n^6}{p} \le C(s+n)^4 \log n,$$

amiből a bizonyítandó állítás ($n \le s$ miatt) azonnal következik. ∎

Az 3.7. tételhez hasonló alsó becslés mutatható $\mathcal{A}/\mathcal{A}$-ra is. Más gondolatmenettel azonban ekkor még a nevezőben szereplő logaritmustól is megszabadulhatunk [7].

3.10. tétel. *Ha* $|\mathcal{A}| = n$ *és* $|\mathcal{A} + \mathcal{A}| \le Cn$, *akkor* $|\mathcal{A}/\mathcal{A}| \ge cn^2$.

Bizonyítás. Definiáljuk a $\mathcal{P} = \big((\mathcal{A}+\mathcal{A}) \cup \mathcal{A}\big) \times \big((\mathcal{A}+\mathcal{A}) \cup \mathcal{A}\big)$ ponthalmazt! Ennek elemszáma az $N = (C+1)n$ jelölés mellett legfeljebb N^2. Tekintsük a következő pontpárokat: (a_u, a_v), $(a_u + a_i, a_v + a_j)$, ahol $a_u, a_v, a_i, a_j \in \mathcal{A}$ tetszőleges. Ezek száma $n^4 = N^4/(C+1)^4$; ugyanakkor e párok csupa olyan irányt határoznak meg, melyek meredeksége $\mathcal{A}/\mathcal{A}$-beli: $a_j/a_i \in \mathcal{A}/\mathcal{A}$. Elég tehát annyit igazolnunk, hogy *tetszőleges $N \times N$-es Descartes-szorzatban bárhogyan jelölünk ki $c_1 N^4$ pontpárt, ezek legalább $c_2 N^2$ különböző irányt határoznak meg (ahol $c_2 = c_2(c_1)$ nem függ N-től).* Ebből ugyanis $|\mathcal{A}/\mathcal{A}| \ge c_2 N^2 = c_2(C+1)^2 n^2 = cn^2$ is következik majd.

Beck „két véglet" tételének (II. rész 3.1. tétel) „statisztikus" változatát használhatjuk: *ha a sík p pontja között akárhogyan jelölünk is ki $c_1 p^2$ pontpárt, ezek közül vagy van $c_2 p^2$ pár, amelyek mind ugyanazt az egyenest határozzák meg, vagy van $c_2 p^2$ pár, amelyek mind különböző egyenest határoznak meg.* Esetünkben az $N \times N$-es Descartes-szorzat $p = N^2$ pontja között az előbbi lehetetlen (legfeljebb $N^2 = p < c_2 p^2$-szer kaphatjuk ugyanazt az egyenest). Így a különböző egyenesek száma legalább $c_2 p^2 = c_2 N^4$; közülük pedig legfeljebb N^2 lehet párhuzamos, hiszen mindegyiken van a Descartes-szorzatnak pontja. Arra jutottunk, hogy a különböző irányok száma legalább $c_2 N^4/N^2 = c_2 N^2$ – amit igazolni akartunk. ∎

3.11. megjegyzés. A fenti ötletből általánosabb becslés is következik (bizonyítását nem részletezzük):

$$|\mathcal{A} + \mathcal{A}|^6 \cdot |\mathcal{A}/\mathcal{A}| \ge cn^8.$$

3.12. megjegyzés. Várható, hogy az 3.7. és 3.10. tételekben az összeadás és a szorzás szerepe felcserélhető: ha $\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}$ vagy $\mathcal{A}/\mathcal{A}$ kicsi, akkor $\mathcal{A}+\mathcal{A}$ lesz nagy. Erre az esetre azonban nem ismeretes jobb becslés, mint a 3.2. tételből adódó $|\mathcal{A}+\mathcal{A}| \geq cn^{5/2}/|\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}| \sim n^{3/2}$.

3.4. Üres-e az $[1,2)\times[1,2)$ négyzet?

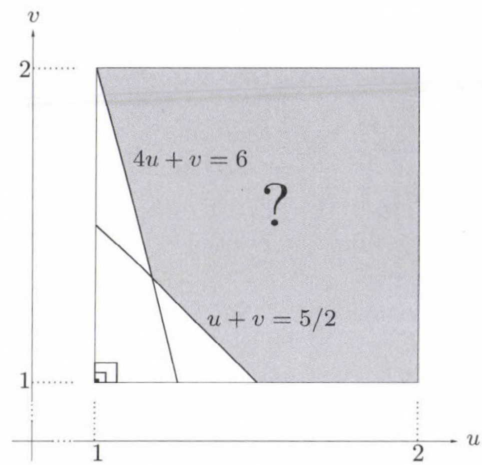
Az összeg- és szorzathalmazokról szóló, eddig megismert alsó becsléseket foglalja össze az 3. ábra.

Képzeljük el, hogy egy koordináta-rendszerben pontot rajzolunk (u,v)-be (ahol $u,v\in[1,2]$), ha n elemű (szám)halmazok összeg-, illetve szorzathalmazát képezve lehetséges, hogy ezek mérete nem haladja meg az n^u, illetve n^v nagyságrendet. Pontosabban – mivel „nagyságrend"-ről csak végtelenhez tartó n mellett beszélhetünk – ha alkalmas rögzített C_1, C_2 konstansokhoz végtelen sok n-re található n elemű $\mathcal{A}$, melyre

$$|\mathcal{A}+\mathcal{A}| \leq C_1 n^u \text{ és } |\mathcal{A}\cdot\mathcal{A}| \leq C_2 n^v.$$

Eddigi példáink alapján nem tudunk olyan (u,v) pontokat rajzolni, melyekre u is, v is kisebb 2-nél, hiszen az összeg-, illetve szorzathalmaz valamelyike mindig legalább $n^2/(\log n)^\alpha$ volt – lásd a 3.1. megjegyzést.

Az, hogy nem is rajzolhatunk akármit, következik pl. az említett megjegyzés után idézett eredményekből: a nagy négyzet bal alsó sarkában látható három kis négyzet rendre Erdős–Szemerédi, Nathanson és Ford eredménye szerint üres. A 3.2., illetve az 3.7. tétel pedig úgy interpretálható, hogy az $u+v<5/2$, illetve a $4u+v<6$ tartományba nem eshet ilyen pont. Sejtés: $\max\{u,v\}=2$.



3. ábra. Alsó becslések összefoglalása. Sejtés: a szürke (nyílt) rész is üres

Epilógus. A közelmúltban Solymosi József talált a 3.2. tételben szereplő $n^{5/4}$ alsó becslésre teljesen elemi (csak leszámlálást használó) új bizonyítást, mely még a komplex esetben is működik. Legújabban pedig a kitevőt 5/4-ről 14/11-re javította. Eredményei nyomtatásban még nem jelentek meg.

Irodalom

[1] Antal Balog and Endre Szemerédi, A statistical theorem of set addition, *Combinatorica,* **14** (1994), 263–268.

[2] Paul Erdős, László Alpár and Gábor Halász, editors, *Studies in Pure Mathematics; To the memory of Paul Turán,* Akadémiai Kiadó – Birkhauser Verlag (Budapest – Basel–Boston, Mass., 1983).

[3] György Elekes and Zoltán Király, On combinatorics of projective mappings, *Journal of Algebraic Combinatorics,* **14** (2001), 183–197.

[4] György Elekes, On the number of sums and products, *Acta Arithmetica,* **LXXXI.4** (1997), 365–367.

[5] György Elekes, On linear combinatorics III, *Combinatorica,* **19 (1)** (1999), 43–53.

[6] György Elekes, Melvyn B. Nathanson and Imre Z. Ruzsa, Convexity and sumsets, *Journal of Number Theory,* **83** (1999), 194–201.

[7] György Elekes and Imre Z. Ruzsa, Few sums, many products, *Studia Math. Hung.,* **40** no. (3) (2003), 301–308.

[8] Paul Erdős and Endre Szemerédi, *On sums and products of integers,* in: Erdős et al. [2] (1983), pages 213–218.

[9] Gregory A Freiman, *Foundations of a Structural Theory of Set Addition* (in Russian), Kazan Gos. Ped. Inst. (Kazan, 1966).

[10] Gregory A Freiman, *Foundations of a Structural Theory of Set Addition, Translation of Mathematical Monographs,* vol. 37, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (USA, 1973).

[11] Ron Graham and Jaroslav Nešetřil, editors, *The Mathematics of Paul Erdős,* Springer (1996).

[12] Norbert Hegyvári, On consecutive sums in sequences, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **48** (1986), 193–200.

[13] Miklós Laczkovich and Imre Z. Ruzsa, *The Number of Homothetic Subsets,* in: Graham and Nešetřil, [11] (1996).

[14] Imre Z Ruzsa, Arithmetical progressions and the number of sums, *Periodica Math. Hung.,* **25** (1992), 105–111.

[15] Imre Z Ruzsa, Generalized arithmetic progressions and sum sets, *Acta Math. Sci. Hung.,* **65** (1994), 379–388.

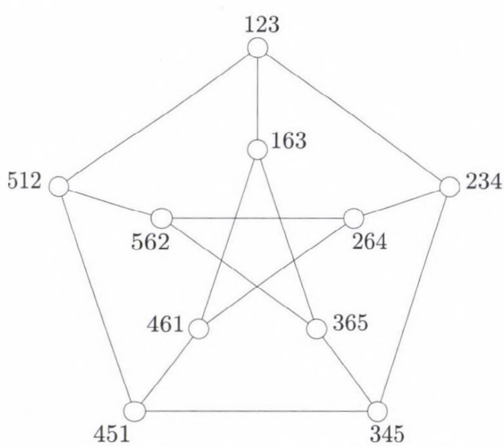
[16] Endre Szemerédi, On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression, *Acta Arithmetica,* **27** (1975), 199–245.

EGY MINIMAX PROBLÉMA HALMAZRENDSZEREKRE

KÉRI GERZSON ÉS TUZA ZSOLT

1. Bevezetés és jelölések

Rendeljük hozzá a Petersen-gráf csúcsaihoz az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből képzett rendezetlen számhármasokat az 1. ábrán látható módon. Ehhez a $\binom{6}{3} = 20$ lehetséges számhármasból 10-et, minden komplementer számhármas-párból a pár egyik tagját használtuk fel. Két számhármas akkor és csak akkor szomszédos a gráfban, ha ezek együttesen négy különböző számjegyet tartalmaznak. Ha a gráf éleihez az így meghatározott számnégyeseket rendeljük hozzá, akkor a 15 lehetséges számnégyes mindegyike pontosan egyszer fordul elő a gráf 15 élén. A Petersen-gráf csúcsaihoz rendelt számhármasok érdekessége, hogy együttesen extremális struktúrát képeznek a $k = 3$ speciális esetben egy általánosabb minimax problémához, amit röviden a bevezetés végén, részletesebben a 2. szakaszban fogalmazunk meg tetszőleges k egészre, majd a 3. és 4. szakaszban megoldjuk $k \leq 5$-re. Ha nagy k-ra nem is ismerjük a pontos megoldást, általános becsléseink aszimptotikusan élesek $(1 + o(1))$-es szorzó erejéig.



1. ábra

A továbbiakban jelöljük $[n]$-nel az $\{1, 2, \ldots, n\}$ számhalmazt, 2^A-val valamely A számhalmaz összes részhalmazának a halmazát, $\binom{A}{k}$-val pedig A összes k számosságú részhalmazának a halmazát.

Ebben a munkában olyan $S \subseteq \binom{[2k]}{k}$ halmazrendszerekkel foglalkozunk, melyekre tetszőleges $A \in \binom{[2k]}{k}$ esetén

$$A \in S \text{ vagy } [2k] \setminus A \in S. \tag{1}$$

Tetszőleges $S \subseteq \binom{[2k]}{k}$ halmazrendszer esetén $\overline{S}$-sel jelölve a $\{[2k] \setminus A \,:\, A \in S\}$ halmazrendszert, definiáljuk a következő két halmazrendszer-családot:

$$\mathcal{F}_k = \left\{ S \,:\, S \cup \overline{S} = \binom{[2k]}{k} \right\} \tag{2}$$

és

$$\mathcal{F}'_k = \left\{ S \,:\, S \cup \overline{S} = \binom{[2k]}{k},\ S \cap \overline{S} = \emptyset \right\}. \tag{3}$$

Az $\mathcal{F}_k$ – és egyúttal az $\mathcal{F}'_k$ – család egyszerűen előállítható tagjai az egy megadott egész számot tartalmazó k-asok együttesei. Ilyen az 1 számot tartalmazó k-asokból álló S_0 halmazrendszer:

$$S_0 = \left\{ A \,:\, A \in \binom{[2k]}{k},\ 1 \in A \right\} \in \mathcal{F}_k. \tag{4}$$

Egy másik példa, kissé lazább megfogalmazásban, a $[2k] = \{1, 2, \ldots, 2k\}$ számhalmaz részhalmazain értelmezett tetszőleges szuperadditív függvény segítségével adható meg. A $\varphi : 2^{[2k]} \to \mathbb{R}$ függvényt szuperadditívnak nevezzük, ha bármely $A, B \in 2^{[2k]}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén $\varphi(A \cup B) \geq \varphi(A) + \varphi(B)$.

Mármost legyen $\Phi = \varphi\big([2k]\big)$ és legyen

$$S = \left\{ A \,:\, A \in \binom{[2k]}{k},\ \varphi(A) \leq \frac{\Phi}{2} \right\}.$$

A φ függvény szuperadditivitása folytán minden $A \in \binom{[2k]}{k}$ halmazra teljesül (1), következésképpen $S \in \mathcal{F}_k$.

Nevezetes szuperadditív függvény a kódelméleti fedési sugár (covering radius), amennyiben egy tetszőleges (de rögzített) kódból kiindulva, a koordináta-alterekre vonatkozó vetület-kódok fedési sugaraként definiáljuk a φ függvényt.

Állapodjunk meg abban, hogy az S halmazrendszerhez tartozó k-asokat jó k-asoknak, az S-hez nem tartozókat pedig rossz k-asoknak nevezzük. A kódos példa esetében jó k-asok az azon k komponensű vetület-kódok koordinátáihoz tartozó indexhalmazok, melyek fedési sugara kisebb vagy egyenlő, mint az alapul vett $2k$ komponensű kód fedési sugarának a fele.

Visszatérve az általános esetre, olyan $S \in \mathcal{F}_k$, illetve $S \in \mathcal{F}'_k$ extremális halmazrendszerek meghatározásának a kérdésével kívánunk foglalkozni, melyekre

$$\max_{B \in \binom{[2k]}{k+1}} \left| S \cap \binom{B}{k} \right|$$

értéke a lehető legkisebb. Ideális esetben itt valamennyi $S \cap \binom{B}{k}$ számossága megegyezik egymással, vagyis mind $(k+1)/2$. Megmutatjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha $k = 2^t - 1$ alakú páratlan egész. Megadunk egy-egy extremális halmazrendszert $k = 1, 2, 3, 4$ és 5 esetére, és megmutatjuk, hogy $k \leq 3$-ra nincs más, a megadott konstrukciótól különböző extremális halmazrendszer a vizsgált probléma szempontjából. Általános k-ra pedig bebizonyítjuk, hogy létezik olyan $S \in \mathcal{F}'_k$, melyre

$$\max_{B \in \binom{[2k]}{k+1}} \left| S \cap \binom{B}{k} \right| \leq \frac{k+1}{2} + O\left(\sqrt{k \ln k}\right).$$

2. A vizsgált probléma megfogalmazása

Adott pozitív egész k-ra tekintsük az olyan tulajdonságú $S \subseteq \binom{[2k]}{k}$ halmazrendszereket, melyekre tetszőleges $A \in \binom{[2k]}{k}$ esetén teljesül (1). Valamely $S \in \mathcal{F}_k$ esetén legyen $B \in \binom{[2k]}{k+1}$ olyan $(k+1)$-es, amely a lehető legtöbb jó k-ast tartalmazza, vagyis

$$\left| S \cap \binom{B}{k} \right| \geq \left| S \cap \binom{C}{k} \right|$$

minden $C \in \binom{[2k]}{k+1}$ esetén.

Célunk olyan $S \in \mathcal{F}_k$ halmazrendszert találni, melyre a fenti értelemben vett maximális számosság a lehető legkisebb. Ehhez adott k esetén az alábbi minimax feladatot kell megoldanunk:

$$f_k = \min_{S \in \mathcal{F}_k} \max_{B \in \binom{[2k]}{k+1}} \left| S \cap \binom{B}{k} \right| = ? \tag{5}$$

Vegyük észre, hogy az (5) minimax probléma megoldására irányuló vizsgálatokat elegendő olyan $S \in \mathcal{F}_k$ halmazrendszerek körében végezni, melyekre $S \cap \overline{S} = \emptyset$. Ellenkező esetben ugyanis S-nek van olyan $S_1 \in \mathcal{F}_k$ részhalmaza, például $S_1 = S \setminus (\overline{S} \cap S_0)$, melyre már $S_1 \cap \overline{S_1} = \emptyset$. E részhalmazra nyilvánvalóan fennáll

$$\max_{B \in \binom{[2k]}{k+1}} \left| S_1 \cap \binom{B}{k} \right| \leq \max_{B \in \binom{[2k]}{k+1}} \left| S \cap \binom{B}{k} \right|.$$

Így a továbbiakban az $\mathcal{F}'_k$ családhoz tartozó extremális halmazrendszerekre korlátozzuk a vizsgálatokat.

Mivel az $\mathcal{F}'_k$ családba tartozó S halmazrendszerek esetén S és $\overline{S}$ elemei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők egymásnak, ezért

$$|S| = |\overline{S}| = \binom{2k}{k} \Big/ 2 = \binom{2k-1}{k-1}$$

teljesül tetszőleges $S \in \mathcal{F}'_k$ esetén.

Ha most $B \in \binom{[2k]}{k+1}$ bármelyike azoknak a $(k+1)$-eseknek, melyek az 1 számot tartalmazzák, akkor a (4) alatt definiált S_0 halmazrendszerre $\left|S_0 \cap \binom{B}{k}\right| = k$, ha viszont B az 1 számot nem tartalmazza, akkor $\left|S_0 \cap \binom{B}{k}\right| = 0$. Eszerint

$$\max_{B \in \binom{[2k]}{k+1}} \left|S_0 \cap \binom{B}{k}\right| = k,$$

amiből f_k-ra az alábbi felső korlát adódik:

$$f_k \leq k. \tag{6}$$

A kitüntetett szerepet kapott S_0 halmazrendszer segítségével az $\mathcal{F}'_k$ és $\mathcal{F}_k$ család többi tagja a következő módon képezhető. Adjuk meg az S_0 halmazt elemei felsorolásával:

$$S_0 = \{A_1, A_2, \ldots, A_N\},$$

ahol $N = \binom{2k-1}{k-1}$. E jelöléssel az $\mathcal{F}'_k$ családhoz tartoznak mindazok a halmazrendszerek, melyekre

$$S = \{X_1, X_2, \ldots, X_N\},$$

ahol $X_i = A_i$ vagy $X_i = [2k] \setminus A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Az $\mathcal{F}_k$ családhoz tartoznak mindazok a halmazrendszerek, melyekre

$$S = Y_1 \cup Y_2 \cup \cdots \cup Y_N,$$

ahol $Y_i = \{A_i\}$ vagy $Y_i = \{[2k] \setminus A_i\}$ vagy $Y_i = \{A_i, [2k] \setminus A_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

Ennek alapján megállapíthatjuk, hogy $\mathcal{F}'_k$, illetve $\mathcal{F}_k$ számossága 2^N, illetve 3^N.

3. Konstrukciók

E szakaszban egy-egy konstrukciót mutatunk $k = 1, 2, 3, 4$ és 5 esetére, melyek az (5) minimax probléma megoldását képezik.

A teljesség kedvéért az evidens (sőt elfajult esetnek is tekinthető) $k = 1$ esettel kezdjük. Az $\mathcal{F}'_1$ családba nyilvánvalóan két egyelemű halmazrendszer tartozik, és az ezekben lévő halmazok maguk is egyeleműek:

$$\mathcal{F}'_1 = \big\{\{\{1\}\}, \{\{2\}\}\big\} \text{ és így } \mathcal{F}_1 = \big\{\{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}\big\}.$$

$\mathcal{F}_1'$ bármelyik eleme optimális ($\mathcal{F}_1$ harmadik eleme viszont nem optimális) az (5) minimax probléma szempontjából, tehát $f_1 = 1$.

A következő, $k = 2$ esetre is még nagyon könnyű az (5) probléma megoldását meghatározni. Az S_0 halmazrendszer most az $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{1,3\}$, $A_3 = \{1,4\}$ halmazokból áll, S_0-ból pedig 8 különböző $\mathcal{F}_2'$-höz tartozó halmazrendszer származtatható. Ezek között azonban csak két lényegesen különböző konstrukció fordul elő, mivel a 8 lehetséges esetet felsorolva látható, hogy $\mathcal{F}_2'$ bármelyik eleme S_0 és $\overline{S_0}$ egyikével ekvivalens (aszerint, hogy páros vagy páratlan számú S_0-beli halmazt cserélünk ki a komplementerére). Mivel

$$\max_{B \in \binom{[4]}{3}} \left| S_0 \cap \binom{B}{2} \right| = 2 \quad \text{és} \quad \max_{B \in \binom{[4]}{3}} \left| \overline{S_0} \cap \binom{B}{2} \right| = 3,$$

ennélfogva az S_0 halmazrendszer extremális és $f_2 = 2$.

Ha k értékét tovább növeljük, az $\mathcal{F}_k'$ család számossága robbanásszerűen növekszik, $k = 3$ esetén 2^{10}-re, $k = 4$ esetén 2^{35}-re, $k = 5$ esetén 2^{126}-ra. Ezekre a k értékekre mégis sikerült f_k értékét meghatározni. Most először azt látjuk be, hogy $f_3 \le 2$, $f_4 \le 3$ és $f_5 \le 4$, tehát a (6)-ban megadott k mint általános felső korlát ezekben az esetekben $(k-1)$-re csökkenthető. Annak igazolását, hogy az alábbi konstrukcióknál (melyekre az extremális jelzőt megelőlegezzük) jobb megoldás nem létezik, a 4. szakaszban fogjuk elvégezni.

A $k = 3$ esetben egy extremális halmazrendszer a cikk elején már körvonalazott struktúra, amely a következő számhármasokból áll:

$$\begin{aligned} &\{1,2,3\}, \{2,3,4\}, \{3,4,5\}, \{4,5,1\}, \{5,1,2\}, \\ &\{1,6,3\}, \{2,6,4\}, \{3,6,5\}, \{4,6,1\}, \{5,6,2\}. \end{aligned} \tag{7}$$

A fenti elrendezésben szándékosan tértünk el a növekvő sorrendtől, így ugyanis sokkal jobban látszik a konstrukció logikája, amely önmagát magyarázza.

A $k = 4$ esetre számítógép segítségével találtuk a következő extremális halmazrendszert:

$$\{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,4,7\}, \{1,2,4,8\}, \{1,2,5,6\}, \{1,2,5,8\},$$

$$\{1,2,6,7\}, \{1,3,4,6\}, \{1,3,4,7\}, \{1,3,4,8\}, \{1,3,5,7\}, \{1,3,6,7\}, \{1,3,7,8\},$$

$$\{1,4,5,6\}, \{1,5,6,7\}, \{1,5,6,8\}, \{1,6,7,8\}, \{2,3,4,6\}, \{2,3,5,6\}, \{2,3,5,7\},$$

$$\{2,3,5,8\}, \{2,3,6,7\}, \{2,3,6,8\}, \{2,4,5,7\}, \{2,4,6,7\}, \{2,4,7,8\}, \{2,6,7,8\},$$

$$\{3,4,5,6\}, \{3,4,5,7\}, \{3,4,6,8\}, \{3,5,7,8\}, \{4,5,6,7\}, \{4,5,6,8\}, \{4,5,7,8\}.$$

A gép által kapott konstrukció, úgy tűnik, nem mutat fel logikát, ezért itt visszatértünk a halmazok elemeinek növekvő sorrendben történő felsorolására.

A $k = 5$ esetre vonatkozó megoldást logikai úton határoztuk meg, a konstrukció helyességének a bizonyítását viszont számítógéppel végeztük. A konstrukció ismertetésének rövidebbé tétele céljából a következő jelölést alkalmazzuk: Tetszőleges $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \in \binom{[2k]}{k}$ számhalmaz esetén legyen

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}_{2k} = \{\{a_1 + i, a_2 + i, \ldots, a_k + i \,:\, i \in \{0, 1, \ldots 2k-1\}\}$$

és

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}_k = \{\{a_1 + 2i, a_2 + 2i, \ldots, a_k + 2i \,:\, i \in \{0, 1, \ldots k-1\}\}.$$

Az összeadást itt természetesen modulo $2k$ értelmezzük, annak biztosítása céljából, hogy mindkét esetben az $\{1, 2, \ldots, 2k\}$ számhalmazon belül maradjunk. E jelölésekkel legyen

$$S = S^{(1)} \cup S^{(2)} \cup S^{(3)} \cup S^{(4)} \cup S^{(5)},$$

ahol

$$S^{(1)} = \{1, 2, 3, 4, 7\}_{10} \cup \{1, 2, 3, 4, 9\}_{10} \cup \{1, 2, 3, 5, 6\}_{10} \cup \{1, 2, 3, 5, 7\}_{10},$$

$$S^{(2)} = \{1, 2, 3, 6, 7\}_{10} \cup \{1, 2, 3, 6, 8\}_{10} \cup \{1, 2, 3, 6, 9\}_{10} \cup \{1, 2, 4, 5, 9\}_{10},$$

$$S^{(3)} = \{1, 2, 4, 6, 8\}_{10} \cup \{1, 2, 4, 6, 9\}_{10} \cup \{1, 2, 4, 7, 8\}_{10},$$

$$S^{(4)} = \{1, 2, 3, 4, 10\}_5 \cup \{1, 2, 3, 5, 9\}_5 \cup \{1, 2, 4, 5, 8\}_5,$$

$$S^{(5)} = \{\{2, 4, 6, 8, 10\}\}.$$

Az ily módon értelmezett 126 elemszámú S halmazrendszerről belátható, hogy $\left|S \cap \binom{B}{5}\right| \leq 4$ bármely $B \in \binom{[10]}{6}$ esetén, s vannak olyan B-k, melyekre itt egyenlőség teljesül. Ennek belátását számítógéppel végeztük, bár gép nélkül is elvégezhető a bizonyítás, csak hosszadalmas diszkussziót igényelne.

4. Általános korlátok f_k-ra

Megfogalmazunk négy általános állítást f_k korlátaira vonatkozóan. Az egyöntetűség kedvéért tételként is újra kimondjuk a 2. szakaszban már levezetett, nagyon egyszerűen adódó felső korlátot. Az ezután következő két (alsó korlátra vonatkozó) tételt, valamint az aszimptotikus felső korlátot a tételek kimondása után ebben a sorrendben fogjuk bizonyítani.

1. tétel. *$f_k \leq k$ minden pozitív egész k-ra.*

2. tétel. *$f_k \geq (k+1)/2$ minden pozitív egész k-ra.*

3. tétel. *Ha k páratlan pozitív egész, de $k+1$ nem 2 hatvány, akkor $f_k \geq (k+3)/2$.*

4. tétel. *Alkalmasan választott $c > 0$ konstans mellett $f_k \leq (k+1)/2 + c\sqrt{k \ln k}$.*

A 2. tétel bizonyítása. Tetszőleges $A \in \binom{[2k]}{k}$ esetén az A-t tartalmazó $(k+1)$-esek száma k. Következésképpen bármely $S \in \mathcal{F}'_k$ halmazrendszer esetén fennáll

$$\sum_{B \in \binom{[2k]}{k+1}} \left| S \cap \binom{B}{k} \right| = |S| \cdot k, \tag{8}$$

és ebből az összegzésben szereplő $\left| S \cap \binom{B}{k} \right|$ kifejezések számtani közepére az

$$\frac{|S| \cdot k}{\binom{2k}{k+1}} = \frac{\binom{2k-1}{k-1} \cdot k}{\binom{2k}{k+1}} = \frac{k+1}{2}$$

érték adódik. Ez egyúttal alsó korlátja az összeg legnagyobb tagjának, tehát

$$\max_{B \in \binom{[2k]}{k+1}} \left| S \cap \binom{B}{k} \right| \geq \frac{k+1}{2}.$$

Ebből a tétel állítása már nyilvánvalóan következik. ■

A 3. tétel bizonyításához felhasználjuk Lucas következő tételét (lásd [3]):

Lucas-tétel. *Ha az a és b pozitív egészeknek a p prímszám alapú kifejezései $a = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_t p^t$ és $b = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_t p^t$, ahol $0 \leq a_i, b_i < p$, akkor*

$$\binom{a}{b} \equiv \prod_{i=0}^{t} \binom{a_i}{b_i} \pmod{p}.$$

A szokásos konvenciónak megfelelően $\binom{a_i}{b_i}$ értékét 0-nak tekintjük, ha $a_i < b_i$.

A 3. tétel bizonyítása. Ha $k+1$ nem 2 hatvány, akkor a $k+2, k+3, \ldots, 2k$ egészek között kell lennie egy 2 hatványnak, tehát van olyan j egész, melyre $k+1 \leq j \leq 2k-1$, $j+1$ pedig 2 hatvány. Ilyen j-re a Lucas-tétel szerint $\binom{j}{k}$ páratlan értékű. Most tegyük fel indirekten, hogy $f_k < (k+3)/2$, ahol k páratlan, de $k+1$ nem 2 hatvány. Ekkor a 2. tétel állításából következik, hogy $f_k = (k+1)/2$. Ebből az egyenlőségből viszont adódik, hogy a (8) bal oldalán álló összeg minden tagjának egyformán $(k+1)/2$ az értéke. Legyen j olyan egész, melyre $k+1 \leq j \leq 2k-1$, $\binom{j}{k}$ pedig páratlan értékű, és legyen $C \in \binom{[2k]}{j}$. Ekkor

$$\sum_{B \in \binom{C}{k+1}} \left| S \cap \binom{B}{k} \right| = \left| \binom{C}{k+1} \right| \cdot \frac{k+1}{2} = \binom{j}{k+1} \cdot \frac{k+1}{2}. \tag{9}$$

Ebből viszont ki tudjuk számítani az $S \cap \binom{C}{k}$ metszet elemeinek a számát is. Mivel a $\binom{C}{k}$ halmazrendszer minden egyes eleme $j-k$ számú olyan B-nek a részhalmaza, melyre $B \in \binom{C}{k+1}$, ezért (9) felhasználásával azt kapjuk, hogy

(10)

$$\left|S \cap \binom{C}{k}\right| = \frac{1}{j-k} \cdot \sum_{B \in \binom{C}{k+1}} \left|S \cap \binom{B}{k}\right| = \frac{1}{j-k} \cdot \binom{j}{k+1} \cdot \frac{k+1}{2} = \binom{j}{k} \Big/ 2.$$

Itt azonban ellentmondás lépett fel, mivel (10) bal oldalán egész érték, jobb oldalán viszont nem egész érték áll. Eszerint a 3. tételben megadott korlát helyes. ■

A 4. tétel bizonyításában fontos szerepet kap Erdős és Lovász [1] alábbi eredménye:

Lokális lemma. *Legyenek $E_1, \ldots, E_n$ véletlen események, bekövetkezésük valószínűsége $P(E_i) = p = p(n)$ minden $i \leq n$ indexre; legyen továbbá $d = d(n)$ egy alkalmasan választott érték, amelynél minden egyes E_i-re teljesül, hogy legfeljebb d másik eseménytől eltekintve az E_i teljesen független az összes többi E_j-től. Ha $4pd < 1$, akkor pozitív a valószínűsége annak, hogy semelyik E_i nem következik be.*

A 4. tétel bizonyítása. Osszuk be a $[2k]$ alaphalmaz k-asait $\{A, [2k] \setminus A\}$ komplementerpárokba. Válasszuk az $S \subset \binom{[2k]}{k}$ halmazrendszert véletlenszerűen úgy, hogy minden egyes párnak az egyik elemét vegyük bele, mégpedig $1/2$ valószínűséggel, azaz $P(A \in S) = P([2k] \setminus A \in S) = 1/2$ és $P(A \in S \wedge [2k] \setminus A \in S) = 0$. Így $S \in \mathcal{F}'_k$ mindenképpen fennáll. Feltesszük, hogy minden komplementer párból a kiválasztás az összes többi pártól függetlenül történik, vagyis az $\mathcal{F}'_k$ család minden egyes tagja $2^{-\binom{2k-1}{k-1}}$ valószínűséggel áll elő. Meg fogjuk mutatni, hogy egy alkalmas (később rögzítendő) $c > 0$ konstans mellett a

(11)
$$\max_{B \in \binom{[2k]}{k+1}} \left|S \cap \binom{B}{k}\right| \leq \frac{k+1}{2} + c \cdot \sqrt{k \ln k}$$

egyenlőtlenség pozitív valószínűséggel teljesül. Ebből azonnal következik, hogy léteznie kell a tétel feltételeit kielégítő S halmazrendszernek.

Legyen $n = \binom{2k}{k+1}$. Minden $B \in \binom{[2k]}{k+1}$ halmazra jelentse E_B azt az eseményt, ami akkor következik be, ha $\left|S \cap \binom{B}{k}\right| > \frac{k+1}{2} + c \cdot \sqrt{k \ln k}$. A továbbiakban a Lokális lemma szerinti $p = p(n)$ és $d = d(n)$ mennyiségekre adunk becslést.

Az utóbbival kezdve, ha az E_B esemény nem független az $E_{B'}$ eseménytől, akkor valamely $A \in \binom{B}{k}$ részhalmazra $A \in \binom{B'}{k}$ vagy $[2k] \setminus A \in \binom{B'}{k}$. Az előbbi esetben $|B \cap B'| = k$, az utóbbi esetben pedig $|B \cup B'| = 2k$. Az első típusú B' halmazok száma $k^2 - 1$ (B-nek minden k elemű részhalmaza $k-1$ módon egészíthető ki B-től különböző $k+1$ elemű halmazzá), míg a második típusúaké $\binom{k+1}{2}$ (ennyi lehetőség van $B \cap B'$ két elemének kiválasztására). Összegezve, ha $k \to \infty$, nagyságrendileg $d = O(k^2)$ adódik.

Másrészt egy tetszőleges $B \in \binom{[2k]}{k+1}$ halmazra és annak bármely $A \in B \cap \binom{[2k]}{k}$ részhalmazára $P(A \in S) = 1/2$, és $k > 1$ esetén B-nek ezen részhalmazai páronként metszők. Így a $\xi := \left|S \cap \binom{B}{k}\right|$ valószínűségi változó binomiális eloszlású és $\frac{k+1}{2}$ várható értékű ($k+1$ független kísérlet $1/2$ valószínűséggel), melyre $P(E_B)$ az ettől $c \cdot \sqrt{k \ln k}$-nál nagyobb mértékű (pozitív irányú) eltérés valószínűségét méri. Alkalmazzuk most az ismert összefüggést (ld. pl. a [2] könyvben a IX.(6.4), VII.(1.6) és VII.(1.8) képleteket), amely szerint minden $\alpha > 1$ esetén teljesül a

$$P\Big(\left|\xi - M(\xi)\right| > \alpha\sqrt{M(\xi)/2}\Big) < e^{-\alpha^2/2}$$

egyenlőtlenség. Vagyis $\alpha = c'\sqrt{2 \ln k}$ és $c' > \sqrt{2}$ mellett $e^{-\alpha^2/2} = k^{-(c')^2} = o(k^{-2})$. Ha tehát egy ilyen c'-re és az E_B definíciójában szereplő c-re egyúttal $c'\sqrt{k+1} \leq c\sqrt{k}$ is teljesül, akkor az aszimptotikus $P(E_B) = o(k^{-2})$ becslést nyerjük. Emiatt c alkalmas megválasztásával a $4pd < 1$ feltétel minden k-ra biztosítható, és így a Lokális lemma alapján pozitív valószínűséggel semelyik E_B nem következik be, vagyis a (11) egyenlőtlenség teljesül. ∎

A 2. tételből következik, hogy $f_3 \geq 2$ és $f_4 \geq 3$, a 3. tételből pedig következik, hogy $f_5 \geq 4$. A fordított irányú egyenlőtlenségeket a 3. szakaszban megadott halmazrendszer-konstrukciókkal bizonyítottuk, ennélfogva bizonyítást nyert, hogy $f_3 = 2$, $f_4 = 3$ és $f_5 = 4$.

Ha valamely k-ra fennáll az $f_k = (k+1)/2$ egyenlőség, akkor az (5) minimax probléma megoldását megvalósító extremális halmazrendszerek egy különösen figyelemre méltó tulajdonsággal rendelkeznek, amit a következő tételben mondunk ki.

5. tétel. *Ha $f_k = (k+1)/2$, akkor az (5) minimax probléma optimális megoldását megvalósító bármely $\mathcal{F}'_k$-hoz tartozó S halmazrendszer esetén $S \cap \binom{C}{k}$ és $\overline{S} \cap \binom{C}{k}$ számossága egyformán $\binom{|C|}{k}/2$ minden $C \subseteq [2k]$, $|C| > k$ esetén.*

Bizonyítás. A 3. tétel bizonyításának gondolatmenetéhez hasonlóan adódik, hogy ha az $f_k = (k+1)/2$ egyenlőség érvényes, akkor (10) fennáll minden olyan j-re, melyre $k+1 \leq j \leq 2k$. Ekkor

$$\left|\overline{S} \cap \binom{C}{k}\right| = \left|\binom{C}{k}\right| - \left|S \cap \binom{C}{k}\right| = \binom{j}{k} - \binom{j}{k}\Big/2 = \binom{j}{k}\Big/2.$$

A gondolatmenetből az is látható, hogy a 4. tétel feltételének teljesülése esetén S és $\overline{S}$ közül vagy mindkettő extremális, vagy egyikük sem. ∎

5. Megjegyzések

Jelenleg nem tudjuk, hogy a $k=1$ és $k=3$ értékeken kívül van-e más olyan $k=2^t-1$ egész, melyre $f_k=(k+1)/2$. Erre a két k értékre ekvivalenciától eltekintve egy-egy extremális S halmazrendszer létezik. A $[2k]$ halmaz részhalmazaiból álló két halmazrendszert ekvivalensnek tekintjük, ha az $1,2,\dots,2k$ számok valamely permutációja az egyik halmazrendszert a másikba viszi. A $k=1$ esetre vonatkozó unicitás triviális, a $k=3$ esetben érvényes unicitást a következő gondolatmenet bizonyítja.

Legyen $S\in\mathcal{F}_3'$ olyan, melyre $\left|S\cap\binom{B}{3}\right|=2$ minden $B\in\binom{[6]}{4}$ esetén. Ekkor fennáll $\left|\overline{S}\cap\binom{B}{3}\right|=2$ is ugyancsak minden $B\in\binom{[6]}{4}$ esetén. Szimmetria miatt feltehetjük, hogy $\{1,2,3\}\in S$ és $\{2,3,4\}\in S$, viszont $\{1,2,4\}\in\overline{S}$ és $\{1,3,4\}\in\overline{S}$. A komplementer halmazokra áttérve, az eddigiekből következik, hogy $\{4,5,6\}\in\overline{S}$, $\{1,5,6\}\in\overline{S}$, illetve $\{3,5,6\}\in S$ és $\{2,5,6\}\in S$.

Ekkor az S és $\overline{S}$ halmazrendszerek extremális tulajdonsága miatt szükségképpen $\{1,4,5\}\in S$ és $\{1,4,6\}\in S$, illetve $\{2,3,5\}\in\overline{S}$ és $\{2,3,6\}\in\overline{S}$. A fenti gondolatmenet szerint

$$S=\bigl\{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{3,5,6\},\{2,5,6\},\{1,4,5\},\{1,4,6\}\dots\bigr\},\tag{12}$$

ahol a kipontozott helyekre további négy alkalmas számhalmazt kell találni. Továbbra is ügyelve az S és $\overline{S}$ halmazrendszerek extremális tulajdonságára, a (12) sor folytatása csak a következő két módon lehetséges:

$$S=\bigl\{\dots\{1,2,5\},\{3,4,5\},\{1,3,6\},\{2,4,6\}\bigr\}\tag{13}$$

vagy

$$S=\bigl\{\dots\{3,4,6\},\{1,2,6\},\{2,4,5\},\{1,3,5\}\bigr\}.\tag{14}$$

Az első esetben megkaptuk a 3. szakaszban már ismertetett konstrukciót, a második alternatíva gyanánt kapott konstrukció pedig úgy is származtatható, hogy az elsőre alkalmazzuk az (135426) ciklust.

Nyitott probléma maradt, hogy 3-nál nagyobb 2^t-1 alakú k-ra létezik-e hasonló konstrukció. Már $k=7$-re sem tudjuk a választ. A probléma nehézségét mutatja, hogy a kérdés eldöntése olyan lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának az eldöntésével ekvivalens, amely az általános esetben $\binom{2k}{k-1}$ egyenletből áll és $\binom{2k-1}{k-1}$ bináris (0 vagy 1 értékű) változót tartalmaz. $k=3$-ra ez 15 egyenletet és 10 változót jelent (de az egyenletrendszer mátrixának a rangja csak 5), $k=7$-re viszont az egyenletek száma már 3003, a változók száma pedig 1716. Könnyű belátni, hogy az egyenletrendszer mátrixa az utóbbi esetben sem teljes rangú, de sokkal nehezebb azt meghatározni, hogy a rang pontosan mennyivel kisebb a feltételek számánál, és hogy netán a változók számánál is kisebb-e, mint $k=3$ esetén. A változókat minden esetben a komplementer párokhoz (az S_0 halmazrendszerhez tartozó egy-egy halmazból és annak komplementeréből álló párhoz) rendeljük, értékük aszerint 0 vagy 1, hogy a pár melyik elemét választjuk. Az egyenletek a $[2k]$ számhalmaz $(k+1)$-eseire vonatkozó követelményeknek felelnek meg.

Irodalom

[1] P. Erdős and L. Lovász, Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions, in: *Infinite and Finite Sets,* Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 10, North-Holland (1975), 609–627.

[2] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* John Wiley and Sons, third edition, revised printing (1968).

[3] N.J. Fine, Binomial coefficients modulo a prime, *Amer. Math. Monthly,* **54** (1947), 589–592.

Gerzson Kéri and Zsolt Tuza: A minimax problem for set systems

Let $[2k]$ denote the set $\{1, 2, \ldots, 2k\}$, $\binom{A}{k}$ the system of all k-element subsets of a set $A \subseteq [2k]$. Consider the minimax problem

$$f_k = \min_{S \in \mathcal{F}_k} \max_{B \in \binom{[2k]}{k+1}} \left| S \cap \binom{B}{k} \right| = ?$$

where $\mathcal{F}_k = \left\{ S : S \cup \overline{S} = \binom{[2k]}{k} \right\}$ and $\overline{S} = \left\{ [2k] \setminus A : A \in S \right\}$. It is shown in the paper that $f_1 = 1$, $f_2 = f_3 = 2$, $f_4 = 3$ and $f_5 = 4$. In general, a lower and an upper bound on f_k are given as follows: $(k+1)/2 \leq f_k \leq k$ where equality regarding the lower bound can hold only if $k = 2^t - 1$ $(t = 1, 2, 3, \ldots)$. For k large, the upper bound is improved to $f_k \leq (k+1)/2 + O\left(\sqrt{k \ln k}\right)$, yielding a tight asymptotic estimate as $k \to \infty$.

TÖBBVÁLTOZÓS LAGRANGE-FÉLE INTERPOLÁCIÓ*

SÁNDOR ISTVÁN

A dolgozat célja annak vizsgálata, hogy mennyiben lehet a jól ismert egy változós Lagrange-féle interpolációs eljárást magasabb dimenziókra általánosítani.

1. A Lagrange-elv alkalmazása magasabb dimenziókban

Az egész dolgozat során a következő jelölést fogjuk használni: egy tetszőleges $n-1$ változós, valós értékű f függvény egy adott $(x_1, \dots x_{n-1})$ pontban felvett helyettesítési értékét az $(x_1, \dots x_{n-1}, x_n)$ n dimenziós vektor jelöli, ahol $x_n = f(x_1, \dots x_{n-1})$. Ilyen jelölés mellett tehát például a klasszikus egyváltozós interpolációs feladat úgy fogható fel, hogy $\mathbb{R}^2$-ben adott N számú pont (amelyeknek első koordinátái különbözők), és keresünk olyan egy-változós $N-1$-edfokú polinomot, amelynek ezek a megfelelő helyettesítési értékei.

Az első részben azt mutatjuk meg, hogy hogyan lehet az egyváltozós Lagrange-elv egy természetes általánosítása segítségével n dimenziós térben adott N darab pontra egy $n-1$ változós $N-1$-edfokú interpolációs polinomot illeszteni. A felírt polinom azonban $n > 2$ esetén nem feltétlenül lesz a ponthalmazra illeszthető legkisebb fokszámú polinom.

A legegyszerűbb interpolációs formula az $\mathbb{R}^2$-ben a Lagrange elve alapján felírt forma. Ez N pontra illeszt $N-1$-edfokú polinomot alappolinomok lineáris kombinációjaként. Az alappolinomok tulajdonsága, hogy az egyik alappontban 1, a többiben pedig 0 értéket vesznek fel. Gauss [1] kimutatta, hogy az így nyert polinom ekvivalens a Newton-féle interpolációs polinommal. Krülov [2] kimutatta, hogy ez a polinom felírható N ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása nélkül. Lagrange olyan pontokra illesztette a polinomot, melyeknek első koordinátái különbözőek. A feladatot meg lehet oldani általános esetre is, lásd [3], [4], [5], [6].

Ismeretes, hogy egy adott ponthalmazra egyértelmű legkisebb fokszámú polinom csak akkor írható fel, ha a pontok száma megegyezik a keresett polinom

*In memoriam Prof. O. Kis

együtthatóinak számával. Ez $\mathbb{R}^2$-ben (azaz az egyváltozós esetben) automatikusan teljesül. Egy $n-1$ változós $N-1$-edfokú polinom együtthatóinak száma:

$$P = C_{N-1}^{N-2+n}, \tag{1}$$

vagyis $n-1$ elemnek $N-1$-ed osztályú ismétléses kombinációja. Ez abból következik, hogy a polinom minden tagja egy $N-1$ tényezős szorzat. Következésképpen nem várhatjuk, hogy $n > 2$ esetén egy N számosságú ponthalmazra egyértelműen legyen illeszthető $N-1$-edfokú polinom, sem pedig azt hogy a ponthalmazra illeszthető legkisebb fokszámú polinom fokszáma $N-1$ legyen. Mégis, az alábbiakban bemutatott eljárás előnye az, hogy az egyváltozós Lagrange-módszer természetes általánosításának tekinthető, hiszen a kapott polinom a Lagrange-elv alapján felírt alappolinomok lineáris kombinációjaként áll elő. Vegyük észre azt is, hogy a felírt polinom fokszáma csak a pontok számától függ, a dimenziótól nem.

Először az alappolinomokat adjuk meg. Az $1 \le k^* \le N$ ponthoz tartozó alappolinom $N-1$ tényezős szorzat alakjában áll elő, ahol a k-dik tényező

$$\left[x^h - x^h(k)\right] / \left[x^h(k^*) - x^h(k)\right], \tag{2}$$

alakú törtek összege, ahol $h = 1, 2, \ldots, n-1$ a változók sorszáma, k pedig az alappont sorszáma, és $k \ne k^*$.

Tehát például az első alappolinom általános alakja:

$$L_1(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = \prod_{k=2}^{N} \left(\sum_{h=1}^{n-1} \left[x^h - x^h(k)\right] / \left[x^h(1) - x^h(k)\right] \right). \tag{3}$$

Ebből a formulából egyrészt jól látható, hogy ez az alappolinom az első alappontban $(n-1)^{N-1}$ értéket vesz fel, míg az összes többi alappontban 0-t, másrészt a tényezők alakját tekintve joggal állíthatjuk, hogy ez az 1 változós Lagrange-interpolációs polinom természetes általánosítása.

Végül a keresett interpolációs polinom az alappolinomoknak a függvényértékekkel súlyozott lineáris kombinációjaként áll elő:

$$L(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = \frac{1}{(n-1)^{N-1}} \sum_{j=1}^{N} x^n(j) L_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}). \tag{4}$$

Ezek után mutatunk egy numerikus feladatot. Legyenek a megadott pontok:

$$A(1,2,3,4),\ B(4,3,2,1),\ C(3,1,4,2),\ D(2,4,1,3),\ E(.5,.5,.5,.1.5).$$

Tehát egy negyedfokú háromismeretlenes polinomot keresünk. A fenti formulák alapján:

$$\begin{aligned} L_1(x,y,z) = {} & (-0{,}33x - y + z + 2{,}33)(-0{,}5x + y - z + 4{,}5) \\ & (-x - 0{,}5y + 0{,}5z + 3{,}5)(2x + 0{,}66y + 0{,}4z - 1{,}53), \end{aligned}$$

$$L_2(x,y,z) = (0{,}33x + 0{,}29y - z + 0{,}5)(x + 0{,}5y - 0{,}5z - 1{,}5)$$
$$(0{,}5x - y + z + 2)(0{,}29x + 4y + 0{,}66z - 67)$$
$$L_3(x,y,z) = (0{,}5x - y + z - 1{,}5)(-x - 0{,}5y + 0{,}5z + 4{,}5)$$
$$(x - 0{,}33y + 0{,}33z - 1)(0{,}4x + 2y + 0{,}29z - 1{,}34)$$
$$L_4(x,y,z) = (x + 0{,}5y - 0{,}5z - 0{,}5)(-0{,}5x + y - z + 1)$$
$$(-x + 0{,}33y - 0{,}33z + 4)(0{,}66x + 0{,}29y + 2z - 1{,}47)$$
$$L_5(x,y,z) = (-2x - 0{,}66y - 0{,}4z + 4{,}5)(-0{,}29x - 0{,}4y - 0{,}66z + 3{,}64)$$
$$(-0{,}4x - 2y - 0{,}29z + 2{,}54)(-0{,}66x - 0{,}29y - 2z + 4{,}66).$$

Így a keresett interpolációs polinom:

$$L(x,y,z) = 1/81\big[4L_1(x,y,z) + L_2(x,y,z) + 2L_3(x,y,z) +$$
$$+ 3L_4(x,y,z) + 1{,}5L_5(x,y,z)\big].$$

Tehát erre az 5 pontra illesztett polinom egyenlete kifejtve:

$$L(x,y,z) = -0{,}006x^4 - 0{,}04x^3y + 0{,}15x^2y^2 + 0{,}1xy^3 + 0{,}01y^4 + 0{,}09x^3z -$$
$$- 0{,}16x^2yz - 0{,}12xy^2z + 0{,}021y^3z + 0{,}18x^2z^2 + 0{,}34xyz^2 -$$
$$- 0{,}023y^2z^2 - 0{,}036xz^3 + 0{,}07yz^3 - 0{,}014z^4 + 0{,}19x^3 + 0{,}31x^2y -$$
$$- 0{,}75xy^2 - 0{,}14y^3 - 1{,}03x^2z - 0{,}49xyz - 0{,}28y^2z - xz^2 -$$
$$- 0{,}09yz^2 + 0{,}064z^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}16xy + 0{,}97y^2 + 4{,}29xz + 2{,}95yz +$$
$$+ 1{,}37z^2 + 0{,}63x - 2{,}38y - 4{,}88z + 3{,}12.$$

Ezek után röviden foglalkozzunk azzal az esettel, amikor 3 dimenzióban elhelyezkedő olyan ponthalmazra akarunk kétváltozós interpolációs polinomot illeszteni, ahol a ponthalmaz első két koordinátája által meghatározott halmaz az alapsíkon téglalap alakú tartományban a koordinátatengelyekkel párhuzamos rácson helyezkedik el. Ez az eset megtalálható az irodalomban, ismertetik pl. a [3], [4] munkák. Ebben az esetben az interpolációs feladat könnyen visszavezethető az egyváltozós esetre, hiszen elég minden rácsvonalon az alkalmas egyváltozós interpolációs polinomot felírni, és ezek szorzatainak lineáris kombinációjából nyerhető a kétváltozós interpolációs polinom. Ebben az esetben nem adunk új eredményt, mindössze megemlítjük és átláthatóbb formába öntjük az irodalomban megtalálható formulát.

A [3], [4] munkákban a következő interpolációs formula található:

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) L_j(x) l_i(y). \tag{5}$$

Mi egy ekvivalens, de talán könnyebben áttekinthető mátrix írásmódban fogjuk felírni ezt a formulát. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a kapott interpolációs polinom nem lesz azonos az előzőekben tárgyalt (4) egyenlettel adott polinommal (a fokszám ebben az esetben jól láthatóan $(n-1)(m-1)$, míg a (4) egyenlettel természetesen $nm-1$-ed fokú polinomot kapnánk).

Legyenek tehát adva $\mathbb{R}^2$-ben az (x_i, y_j) pontok, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$ és $j = 1, 2, \ldots, m$. Legyen továbbá $\mathbf{A}$ az az $n \times m$-es mátrix, amely a megadott $f(x_i, y_j)$ függvényértékeket (azaz az alappontokhoz tartozó harmadik koordinátákat) tartalmazza. Először kiszámítjuk az $X_0 = \big[L_1(x), L_2(x), \ldots, L_m(x)\big]$ és $Y_0 = \big[l_1(y), l_2(y), \ldots, l_n(y)\big]$ egyváltozós interpolációs polinomok rendszerét a megfelelő rácsvonalakon (ezek rendre $n-1$-ed illetve $m-1$-ed fokú polinomok lesznek). Ezek után a keresett kétváltozós interpolációs polinom az

$$F = Y_0^T \mathbf{A} X_0 \tag{6}$$

alakban írható fel.

A második numerikus feladat (6) alatti formulára készült. A $z = x^2/(x^2 + y^2)$ függvényről vettünk 49 darab pontot. Az $X[1,\ 1{,}8,\ 2{,}6,\ 3{,}4,\ 4{,}2,\ 5,\ 5{,}8]$ és az $Y[1,\ 1{,}6,\ 2{,}2,\ 2{,}8,\ 3{,}4,\ 4,\ 4{,}6]$ értékekhez tartozó rácsban számítottuk ki a függvényértékeket. Ezek sorfolytonosan

$$\begin{pmatrix}
0{,}5 & 0{,}28 & 0{,}17 & 0{,}11 & 0{,}08 & 0{,}06 & 0{,}05 \\
0{,}76 & 0{,}56 & 0{,}4 & 0{,}29 & 0{,}22 & 0{,}17 & 0{,}13 \\
0{,}87 & 0{,}73 & 0{,}58 & 0{,}46 & 0{,}37 & 0{,}3 & 0{,}29 \\
0{,}92 & 0{,}82 & 0{,}7 & 0{,}59 & 0{,}5 & 0{,}42 & 0{,}35 \\
0{,}95 & 0{,}87 & 0{,}78 & 0{,}69 & 0{,}6 & 0{,}52 & 0{,}45 \\
0{,}96 & 0{,}91 & 0{,}84 & 0{,}76 & 0{,}68 & 0{,}61 & 0{,}54 \\
0{,}97 & 0{,}93 & 0{,}83 & 0{,}81 & 0{,}74 & 0{,}68 & 0{,}61
\end{pmatrix}.$$

Ezek a sorok alkotják az $\mathbf{A}$ mátrixot. A megfelelő egyváltozós interpolációs polinomok explicit felírásától eltekintünk. Ezek után gépi programmal számíthatjuk a különböző helyekhez tartozó interpolációs függvényértékeket. Kettőt példaként felírunk: (2,3, 2,6, 0,7144), (4,3, 4,2, 0,695).

2. Legkisebb fokszámú interpoláció

A második részben csak olyan ponthalmazra írunk fel polinomot, melynek pontosan annyi eleme van, amennyi a legkisebb fokú interpolációs polinom egyértelműségét biztosítja. Ismeretes, hogy ez a pontok számára vonatkozóan szigorú korlátot ír elő. A szükséges pontszám az egyértelműséghez és a felírható legkisebb fokszámhoz annyi, amennyi együtthatója van a felírandó polinomnak. Maga a polinom ismét előállítható az alappolinomok lineáris kombinációjaként. Az alappolinomok azonban nem állíthatók elő a (3) alatt látott „Lagrange-formában". Ha az alappolinomokra nincs szükségünk, akkor a végeredményt egy egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg.

Tekintettel arra, hogy az alappontok száma megegyezik a keresett polinom együtthatóinak a számával, az i-edik alappolinom együtthatóinak meghatározására egy lineáris egyenletrendszer írható fel, amelynek ismeretlenei a keresett alappolinom együtthatói, az egyenletrendszer együtthatói pedig az alappontok koordinátáinak behelyettesítésével adódnak, az erdeményvektor pedig az i-edik egységvektor (hiszen az i-edik alappolinom az i-edik alappontban 1, a többiben pedig 0 értéket vesz fel). Tehát, ha vesszük az egyenletrendszer együtthatómátrixát (vegyük észre, hogy ez i-től független), és ennek az inverzét (ha létezik), akkor ezen inverz oszlopai az alappolinomok együtthatóit tartalmazzák. Ezeket az alappolinomokat azonban nem lehet felírni a (3) alatti formában. A módszer használhatósága az alacsonyabb fokszám miatt jobb, ugyanakkor a pontok számára tett kikötés miatt ez a módszer csak igen korlátozott esetekben alkalmazható, ellentétben a teljesen általános (4) formulával.

Az elmondottakra mutatunk néhány feladatot. Az első kettőt a [6] alatti dolgozatból vettük. A szerző nem írja fel a polinomot és maga a módszer sem használható tetszőleges dimenzióban. Egy példa pedig a [3] és a [4]-ben mutatott példa analógiája.

1. példa. Legyenek adva a következő pontok: $(1,1,2)$, $(1,-1,1{,}5)$, $(-1,1,2{,}3)$, $(-1,-1,-2)$, $(2,0,1)$, $(-3,0,0{,}5)$. Legyen a keresett polinom $L(x,y) = a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_6$. Az ezekhez a pontokhoz tartozó együtthatómátrix a következő (az $a_1, \dots, a_6$ ismeretlenek együtthatóit úgy kapjuk, hogy az alappontokat sorra behelyettesítve x, y helyére):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ennek alapján az alappolinomok és az interpolációs polinom kiszámíthatók az inverz mátrix segítségével (az alappolinomokra természetesen nincs feltétlenül szükség). Két alappolinomot felírunk:

$$L_1(x,y) = 0{,}25x^2 + 0{,}25xy + 1{,}5y^2 + 0{,}25x + 0{,}25y - 1{,}5$$

$$L_6(x,y) = 0{,}2x^2 + 0{,}6y^2 - 0{,}8.$$

Az interpolációs polinom pedig:

$$L(x,y) = 0{,}7x^2 - 0{,}95xy + 3{,}65y^2 + 0{,}8x + 1{,}2y - 3{,}4.$$

2. példa. Legyen adva a következő tíz pont: $(0,0,1)$, $(1,0,2)$, $(2,0,-1)$, $(0,1,1{,}5)$, $(1,1,1)$, $(2,1,3)$, $(0,2,-2)$, $(3,0,1{,}5)$, $(1,2,1{,}2)$, $(0,3,1{,}3)$. Erre a ponthalmazra harmadfokú kétváltozós polinom írható. Csak a végeredményt írjuk fel.

$$L(x,y) = 1{,}58x^3 + 3{,}25x^2y + 2{,}6xy^2 + 1{,}8y^3 - 6{,}75x^2 - 7{,}35xy - 7{,}4y^2 + \\ + 6{,}17x + 6{,}1y + 1.$$

3. példa. Legyen adva a következő hat pont. Három dimenzióban erre másodfokú kétváltozós polinom írható. A [3] és a [4] alatti dolgozat algoritmusa szerint harmadfokú polinom adódik. A pontok: $(0,0,1)$, $(1,0,0{,}1)$, $(2,0,0{,}3)$, $(0,1,0{,}5)$, $(1,1,2)$, $(2,2,1)$. Itt is két alappolinomot írunk fel:

$$L_1(x,y) = 0{,}5x^2 + xy - y^2 - 1{,}5x + 1$$

$$L_6(x,y) = 0{,}5y^2 - 0{,}5y.$$

A végeredmény:

$$L(x,y) = 1{,}9x^2 + 2{,}4xy - 5{,}3y^2 - 2{,}8x + 4{,}8y + 1.$$

Ezekből a feladatokból látható, hogy megfelelő pontszámú adott ponthalmazra különösebb nehézség nélkül lehet illeszteni legkisebb fokszámú polinomot.

Láthatjuk, hogy az első illetve második részben leírt algoritmusok lényegesen különböznek egymástól. Mindkét esetnek vannak előnyei és hátrányai. Az első esetben az egyváltozós Lagrange-féle polinom formájának általánosításával lehet dolgozni. Igaz itt a fokszám nem a legkisebb, de nincs korlát a ponthalmaz elemszámára. A második esetben elérhető a legkisebb fokszám, de az alappontok száma pontosan meg kell, hogy egyezzen a felírandó polinom együtthatóinak számával. Ellenkező esetben a ponthalmazból csak annyi elem vehető számításba, amennyi tagja van a polinomnak, tehát információvesztéssel kell számolni. Egy N-edfokú $n-1$ változós polinom felírásához szükséges pontok száma egyenlő $N+n-1$ elemnek N-edosztályú kombinációjával. Megjegyezzük még, hogy a [3] és a [6] alatti dolgozatokban található algoritmus csak három dimenzióban alkalmazható, ott is csak speciálisan elhelyezkedő ponthalmazra.

Összefoglalás:

A fentiek alapján az alábbiakat láttuk be. Az első részben adott algoritmusra igazak a következők:

1. Minden olyan N pontra, melyeknek azonos indexű koordinátái különbözők, illeszthető olyan interpolációs polinom, melynek fokszáma $N-1$. Az együtthatók száma $P = C_{N-1}^{N-2+n}$.

2. Minden alappolinom előállítható $N-1$ tényezős szorzat alakban, ahol minden tényező $n-1$ lineáris tag összege.

3. Minden alappolinom előállítható lineáris polinomok szorzataként.

4. A N pontra illeszthető polinom együtthatói egyenletrendszer megoldása nélkül is felírhatók.

5. A polinom együtthatóinak száma nem változik, ha a fokszámot a független változók számával felcseréljük.

A második részben kaptuk:

6. Az alappontok behelyettesítésével kapott egyenletrendszer együtthatómátrixa inverzének az i-edik oszlopa adja az i-edik alappolinom együtthatóit, és ezen alappolinomok lineáris kombinációjaként áll elő a keresett interpolációs polinom. A végeredmény az [1]-ben található egyenletrendszer megoldásával előállítható.

Irodalom

[1] C. F. Gauss, *Werke,* Bd. III. S.273.

[2] A. N. Krülov, *Lekcii o pribliyhennih vitchisleniah* (in Russian), Moscow–Leningrad, 1954.

[3] P. Bajcsay, *Numerikus analízis,* Tankönyvkiadó (Budapest, 1980).

[4] A. Prékopa, Bounds on probabilities and expectations using multivariate moments of discrete distributions, *Stud. Sci. Math. Hung.*, **34** (1998), 349–378.

[5] Cs. Hegedűs, Newton recursive interpolation in R^n, *Numerical methods,* Proc. 4th Conf., Miskolc/Hung. 1986, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, **50** (1988), 605–623.

[6] M. Gasca and J. J. Maeztu, On Lagrange and Hermite Interpolation in $\mathbb{R}^k$, *Numer. Math.,* 39 (1982), 1–14.

Zusammenfassung

Der Aufsatz hat sich zum Ziel gesetzt, auf einige Standpunkte hinzuweisen, die die Herstellung der Formel (5) sowie ihre Verwendung auf jede mehrdimensionale Punktmenege ermőglich machen wo die Koordinate von gleichen Index verschieden sind. Das ergibt eine mőgliche Verallgemeinerungdas Polynom vom geringsten Order ergibt. Dieser Mangel ist zu beseitigen, nur wenn die Punktzahl unter (1) zur Verfugung steht und das auf diese gelegene lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lősung hat. Es ist nicht schwer einzusehen, dass nur in einem zweidimensioalen Raumzu erreichen ist, auf Punkt N ein Polynom von $N-1$ Order zu legen.

KÖNYVISMERTETÉS

DOBOS SÁNDOR

Vasile Berinde:
Exploring, Investigating and Discovering in Mathematics*

Nagy érdeklődéssel vettem kezembe Vasile Berinde könyvét. A cím sokat ígérő, a bevezetőben megfogalmazott elvek, célok még tovább fokozzák az ember kíváncsiságát, étvágyát. A szerző fő törekvése: hidat verni a puszta feladatmegoldás és a matematikai felfedezés, kutatás közé.

A 24 fejezet mindegyike egy feladattal indul. Ezt követi a részletes megoldás. Megjegyzések emelik ki a legfontosabb gondolatokat, irányítják rá a figyelmet a lehetséges általánosításokra. Több helyen olvashatunk kettő, sőt három megoldást ugyanazon problémára, ezzel is bátorítva az olvasót egy-egy kérdés más-más oldalról való megközelítésére. Ezek után találjuk a tanulságok összeszedegetését, s közben gyakran új problémák kerülnek elő, feladatok keletkeznek, kutatási területek nyílnak meg. A fejezeteket egy különleges bibliográfia zárja: a szerző nem törekedett teljességre, inkább azt kívánta bemutatni, hogy az egyes témák mi módon jelentek meg a romániai matematikai folyóiratokban és egyéb szakirodalomban.

A könyvet olvasva három dolgot szeretnék kiemelni. (i) A szerző lelkiismeretesen törekedett a cím és a bevezető szellemében dolgozni. Érezni, komoly tanítási gyakorlat áll a háta mögött. Hosszú évek alatt összeérlelt anyagot adott közre. (ii) A fejezetek között találunk ugyan laza szálakat, mégis inkább különálló mozaikként alkotják a könyvet. Ne lepődjünk meg, ha a 16. és 18. fejezetek primitív függvények keresésével indulnak, míg a közéjük ékelődő 17. fejezetben egy 12 literes hordóból szeretnénk 4 liter bort kimérni egy 5 és 7 literes edény segítségével. (iii) Ízlések és pofonok különbözők. Több fejezet nyitányánál is eltöprenghet az olvasó, vajon ki mit és miért talál szépnek és érdekesnek a matematikában. Alaposabban beleolvasva azonban látjuk, hogy száraznak tűnő témák is rejtegethetnek nem várt fordulatokat. Összevetve a magyarországi szakirodalom hasonló könyveivel örömmel láttam, vannak közös témák.

Kívánom, hogy tanárok, diákok, kíváncsiskodók, érdeklődők és leendő kutatók, tudósok egyaránt hasznosan forgassák e könyvet.

---

*ISBN 3-7643-7019-X, Birkhäuser Verlag

TÁRSULATI ÉLET – 2003

Szele Tibor-emlékérem

A Szele Tibor-emlékérem Bizottság döntése értelmében a 2003. évi érmet **Csiszár Imre** az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet információelméleti osztályának vezetője kapta.

Indoklás: *Csiszár Imre* a magyar információelméleti kutatás és oktatás kiemelkedő alakja.

Sokrétű munkásságából elsősorban az információelméleti funkcionálokhoz kapcsolódó vizsgálatai emelkednek ki. Elméletileg érdekes, és a valószínűségszámítási és statisztikai alkalmazások szempontjából igen lényeges összefüggéseket tárt fel a területen. Ilyen eredmények, pl. a Sanov-tételre igen általános feltételek mellett adott bizonyítása, a maximum-entrópia-elv axiomatikus alátámasztása, és az információelméleti funkcionálok minimumhelyét megkereső algoritmusok terén végzett kutatásai. Körner Jánossal együtt angol nyelven írt könyve a diszkrét, emlékezet nélküli rendszerekről, megjelenése óta az információelmélet egyik alaptankönyve világszerte.

A kriptográfia elméleti megalapozása szempontjából lényeges eredményei vannak a két egymástól távol levő információforrás által generálható ú.n. „közös véletlen" mértékét illetően (R. Ahlswede-vel együtt). Alapvető eredményei vannak a tetszőlegesen változó csatornák kapacitásának pozitivitásával kapcsolatban is (P. Narayannal együtt).

Csiszár Imre 1961 óta dolgozik az MTA Matematikai Kutató Intézetében, 1968 óta az információelméleti osztály vezetője, 1995 óta az MTA rendes tagja. Elnöke a Bolyai János Matematikai Társulatnak.

Csiszár Imre nagy nemzetközi tekintélynek örvend, nemzetközi konferenciák rendszeres meghívott plenáris előadója.

Több nemzetközi és magyar kitüntetés birtokosa: Az IEEE (Institute of Electrical and Electronic Engineering) Információelméleti tagozata, amely a nemzetközi információelméleti közösség elsőszámú fórumának tekinthető, 1988-ban a legjobb publikáció díjával tüntette ki, majd 1996-ban, addigi munkásságáért, Shannon-díjjal. 1989-ben megkapta az MTA interdiszciplináris díját. 1998-ban a Magyar Köztársaság Tiszti Keresztje (polgári tagozat) kitüntetést kapott.

Évekig tanított információelméletet az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, 1995 óta a Budapesti Műszaki Egyetem félállású professzora. Jelentős szerepet vállalt 1997-ben a BME matematikus képzésének elindításakor az igényes tanterv kidolgozásában. Rendszeresen oktat matematikus hallgatókat, illetve doktoranduszokat, 1999-től mint Széchenyi professzori ösztöndíjas. Számos külföldi egyetemen volt vendégprofesszor vagy vendégkutató.

Magyarországon mindenki, aki információelmélettel foglalkozik, az ő tanítványa: némely esetben közvetve, de nagyon sokszor közvetlenül is. (Pl. Körner János – aki jelenleg Rómában él –, Nemetz Tibor, Marton Katalin, Győrffy László.)

Beke Manó-emlékdíj

A 2003. évi díj második fokozatában az alábbiak részesültek: **Dobos Sándor, Halász Ágnes, Dr. Iharos Csabáné, Kuti Gusztávné, Marosszéky Gábor, Paulics Istvánné, Számadó László, Varga József.**

Indoklás: *Dobos Sándor* az egyetem elvégzése óta a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanára, ahol mind normál tantervű, mind speciális matematika tagozatos osztályokat tanít eredményesen.

Nagyszerű pedagógus. Belső indíttatásból folyamatosan továbbképzi magát, az alkotómunka a lételeme. Színvonalas feladatgyűjtemények összeállításával segíti a tehetséges gyerekek képzését. Szakmai tudását kiemelkedő módszertani kultúrája és empatikus készsége következtében nagy hatásfokkal adja át tanítványainak. Tagja az OKTV II. kategória bizottságának, sokáig – Reiman István mellett – segítette, ma már irányítja a diákolimpiai csapat kiválasztását és felkészítését.

Érzékeny, intelligens, sokoldalúan művelt ember. Hiteles személyisége az általa közvetített értékek befogadására készteti a gyerekeket. Keze alól a világra nyitott, tevékeny, önmagukkal szemben igényes diákok kerülnek ki. Tanítványainak nyaranta kerékpártúrát szervez az országhatáron belüli és azon túli természeti kincsek és hagyományok felkutatására. Sokoldalúságát bizonyítja, hogy énekel a Szent István Király Oratóriumkórusban és az iskola énekkarában is.

A BJMT Oktatatási szakosztályának titkára, a Rátz László-vándorgyűlések szakmai szervezésének oszlopos tagja.

Halász Ágnes 1973-ban szerzett tanári diplomát az ELTE-n. Már egyetemista korában kitűnt jó képességével, a szakmódszertani kérdések iránti érdeklődésével. Mint egyetemi hallgató tanított a kőbányai Szt. László Gimnáziumban.

Több mint 20 éve tanít a Bolyai J. Textilipari Szakközépiskolában (illetve utódjában a Zsigmond téri Gimnázium és Szakközépiskolában). Évek óta oktat a budapesti Eötvös Gimnáziumban is, általában emelt óraszámú csoportokban. Teljes áttekintése van a 10–18 éves tanulók életkori sajátosságairól, a leggyengébbekkel és a legjobbakkal való foglalkozás lehetőségeiről, módszereiről. Nagy tapasztalatai alapján lett az Fővárosi Pedagógiai Intézet matematika szaktanácsadója. Ezt a munkát is, mint minden megbízást lelkiismeretesen, a pedagógusok és az iskolavezetők nagy megelégedésére végezte, komoly segítséget nyújtva kollégáinak.

A gyengék eredményes tanítására kidolgozott módszerét különböző előadásokon, köztük a Rátz László-vándorgyűlésen is ismertette, s cikket is írt a témáról. Alapvetőnek tartja, hogy minden gyerek jusson sikerélményhez, merjenek kérdezni. A tanulók aktivitásának elérésére különböző módszereket, köztük vitát, játékot is alkalmaz.

Dr. Iharos Csabáné Kaposváron született, 1966-ban végzett a Zeneművészeti Főiskolán, majd 1970-ben fejezte be tanulmányait az ELTE matematika tanári szakán. 1968 óta tanít a kaposvári Táncsics Mihály Gimnáziumban. A kezdetek óta részt vesz a speciális, illetve az emelt szintű matematikai osztályok tanításában. Tanítványai rendszeresen szerepelnek az Arany Dániel és az OKTV döntőkön, s több díjat kaptak, illetve OKTV 1–10. helyezést értek már el. Ugyancsak jól szerepelnek a KÖMAL feladatmegoldó versenyein is.

Sok energiát fordít arra, hogy tanítványai bejussanak az egyetemekre, és ott helytálljanak. Igyekszik elérni, hogy a tanítványai számára is a matematika szép muzsikává álljon össze, és legalább annyira szeressék is.

Munkájában a magas szintű szakmai tudás és a gyerekek iránti szeretet szerencsésen ötvöződik. Munkája elismeréséül 1985-ben Kiváló Munkáért állami kitüntetésben részesült, majd elnyerte a Graphisoft Alapítvány a Matematika Oktatásáért Díját.

Kuti Gusztávné az esztergomi tanítóképzőt követően az ELTE BTK pedagógia szakán szerzett diplomát, majd tanított a Zugligeti Általános Iskolában az Arany János 12 évfolyamos iskolában. 1981-től a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola vezetőtanítója lett. 1986-tól a Fővárosi Pedagógiai Intézet alsós vezető-szaktanácsadója. 1992-től a „Tanítók a Gyermekekért" egyesület vezetőjeként irányította azt a teljesen egyedi versenyt, mely a tanítók számára szólt, és lényege a jó szemléletű, hibátlan szakmai felkészültséget igazoló írásbeli, szóbeli és gyakorlati tanítói munka bemutatása. Írásai, cikkei, könyvei, tanulmányai nem csak gyermekbarát szemléletét, hanem empátiáját, elhivatottságát és maximális, naprakész felkészültségét igazolják. Munkáját, szakmai megjelenését a barátságos elegancia és a mérhetetlen igényesség jellemzi.

Továbbképzései, előadásai, az általa vezetett szakmai beszélgetések nem csak az alsósok számára kínáltak mindig újdonságokat, hanem számtalan esetben a felső tagozatos, sőt a középiskolás továbbképzéseken is meglepték a résztvevőket. Országos jelentőségű munkái között kiemelkedő a matematika tantervírás.

Marosszéky Gábor 2000 augusztusától tagja a Salgótarjáni Bolyai János Gimnázium nevelő közösségének. Előtte a Borbély Lajos Műszaki Középiskola, majd a Táncsics Mihály Közgazdasági és Kereskedelmi Szakközépiskola tanára volt.

Érettségi után az Egri Tanárképző Főiskola matematika szakára járt, majd a KLTE-n szerzett diplomát. Szívügye a felzárkóztatás, versenyeztetés, tehetséggondozás. Szakmunkástanulók megyei és országos matematikaversenyén mindig voltak tanítványai, kezdetek óta készít fel tanulókat a Peák István Matematikaversenyre, aminek fő szervezője is. Tanítványai, szinte minden matematika tárgyú versenyen ott vannak, közülük sokan az élmezőnyben (Varga Tamás, Zrínyi Ilona, Gordiusz, Abacus, Kenguru).

Délutáni szakkörök, versenyfelkészítők, táborok formájában segíti tanulói felkészülését. Oktat fakultációs csoportokat, emelt óraszámú osztályokat. Előadásokat szervez tanítványai és kollégái számára. Hosszú időn át az iskola matematika munkaközösségének vezetője volt. Színvonalas szakmai munkájáért kollégái elismerik.

A BJMT Nógrád megyei Tagozatának titkáraként számos kollégát vont be a társulat munkájába. A versenyről, eredményekről, több évben is kiadványt szerkesztett. 2002-ben a Bolyai évforduló kapcsán vetélkedőt szervezett a megye középiskolái számára Bolyai életéről, munkásságáról.

Olyan pedagógus, akinek mindene a matematika, szívügye a tehetséggondozás, a matematika iránti érdeklődés felkeltése.

Paulics Istvánné 1949-ben született Tokajban, a Tokaji Ferenc Gimnáziumban érettségizett. Az egri Tanárképző Főiskolai évek alatt már bemutató órákat tartott, s munkát vállalt a gyermekvárosban. A főiskola elvégzése után 1972-ben Káptalanfán kezdett tanítani, s közben a matematika, műszaki ismeretek szakok mellé harmadikként a fizikát is elvégezte. 1973-tól az ajkai 2. számú és a 4. számú általános iskolákban is tanít, majd az utóbbiban 1975-től igazgatóhelyettes.

A kezdetektől fogva sok energiát fordít tanítványai versenyeztetésére, melyet több megyei első helyezés tanúsít. Ugyanilyen odaadással végezte, s végzi ma is a hátrányos helyzetű gyerekek felzárkóztatását. Kis Matematikusok Baráti Köre szakkört szervezett iskolájában, s 1989-ben beindították a matematika tagozatos szintű oktatását. Azóta tanítványai mindig ott vannak a különböző matematikaversenyek döntőiben. Munkaközösség-vezetőként szakmai kapcsolatokat ápol a város középiskoláival. Rendszeresen továbbképzi magát. Többoldalúságát mutatja, hogy több mint 10 éve tagja a városi pedagógus női kórusnak. Munkáját Kiváló Munkáért állami kitüntetéssel ismerték el.

Számadó László 1986-ban végzett a JATE matematika–fizika szakán, majd a budapesti Veres Péter nyolc évfolyamos gimnáziumban kezdett tanítani. Jelentős szerepe van abban, hogy a Veres Péter Gimnázium a matematikai tehetséggondozás egyik országosan is elismert intézménye lett.

2002 szeptemberétől a budapesti Árpád Gimnázium tanára, ahol hat évfolyamos speciális matematika tagozatos csoportot kezdett tanítani. 1990-től nyolc éven át az ELTE Tanárképző Főiskolai Karának vezetőtanáraként foglalkozott matematika szakos tanárjelöltekkel. Évek óta olvashatjuk a KöMaL-ban felvételi mérőlapjait. A tehetséggondozás országos munkájában az Abacus és a KÖMaL szerkesztőbizottsági tagjaként vesz részt 1998, illetve 2000 óta.

A Hajnal család megkeresésére feleségével, Számadóné Békéssy Szilviával elvállalták a Hajnal-féle középiskolai tankönyvsorozat átdolgozását. 1999 szeptembere óta a Fővárosi Pedagógiai Intézet matematika szaktanácsadója középiskolai területen. A Rátz László-vándorgyűlésen többször tartott sikeres előadást. 1999-ben Ericsson-díjat kapott a matematika népszerűsítéséért.

Varga József 1955-ben született Mosonmagyaróváron, egyetemi tanulmányait a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem matematika-fizika szakán fejezte be, majd ugyanott elvégezte a technika szakot, később a Szegedi Tudományegyetemen pedagógiai értékelési szakértő képesítést nyert.

A kecskeméti Bolyai János Gimnázium alapító tanára 1987 óta. Munkaközösség-vezető, a Bolyai János Matematikai Társulat Bács-Kiskun Megyei Tagozatának titkára, a METESZ operatív bizottságának tagja, a Kecskemét és környéke iskolatársulás matematikai munkaközösségének vezetője. Részt vesz a Zrínyi Ilona-matematikaverseny előkészítésében, városi szintű tehetséggondozó szakkört vezet. Megszállott híve a tehetségek felkutatásának és minél teljesebb kibontakoztatásának. Több tanítványa ért el OKTV-n 1–10. helyezést, és rendszeresen szerepelnek tanítványai az Arany Dániel a Kenguru, illetve a Gordiusz versenyek élmezőnyében is. Tanítványai szinte kivétel nélkül felvételt nyernek a különböző felsőoktatási intézményekbe.

Munkáját több díjjal is elismerték: elsőként kapta meg a Kecskemét város által alapított Bolyai-díjat 1994-ben. 1997-ben Kecskemét városért Oktatási Díjat, majd 1999-ben a Graphisoft Alapítvány a Matematika Oktatásáért Díjat kapta.

Grünwald Géza-emlékérem

Az e célból létrehozott bizottság 2003-ban úgy határozott, hogy a jelöltek közül a 2003. évi emlékérmet: **Abért Miklós, Győry Máté, Tóth Imre Péter, Weiner Zsuzsa** kapja.

Indoklás: *Abért Miklós* 1974-ben született, 1998-ban végzett az ELTE matematikus szakán, majd ugyanott három évig doktori tanulmányokat folytatott. „Product decompositions of groups" című értekezését 2002-ben védte meg.

Abért Miklós a csoportelméletben ért el több, nagy érdeklődést kiváltó eredményt. 2003-ig négy dolgozata jelent meg és egy továbbit közlésre elfogadtak. Ezek a cikkek mind vezető nemzetközi folyóiratokban (Bulletin of the London Mathematical Society, Proceedings of the American Mathematical Society, Duke Journal of Mathematics, International Journal of Algebra and Computation) láttak napvilágot, illetve fognak megjelenni.

Az első dolgozata tartalmazza eddigi leghíresebb teljesen meglepő eredményét, miszerint tetszőleges végtelen halmazon ható teljes szimmetrikus csoport előállítható korlátos számú Abel-féle részcsoport szorzataként (a dolgozatban 289 tényezővel igazolja ezt). A véges szimmetrikus csoportokra ilyen korlát nem adható, mivel a szükséges Abel-féle részcsoportok száma $O(\log n)$ nagyságrendű. Azóta többen foglalkoztak a korlát csökkentésével: Komjáth Péter, Seress Ákos, és legutóbb Saharon Shelah, aki mindössze 6 tényezőt használt.

Második dolgozatában Keleti Tamással együtt a előző cikk bizonyításának ötletét terjesztik ki a valós sík esetére; azt mutatják meg, hogy a sík pontjainak bármely permutációja előállítható $(x,y)H\big(x, y+f(x)\big)$, illetve $(x,y)H\big(x+f(y),y\big)$ alakú transzformációk legfeljebb 209 tényezős szorzatként.

A harmadik dolgozatban Emerson egy korábbi eredményét erősítve Abért Miklósnak sikerült teljes leírását adnia azoknak a véges Abel-csoportoknak, amelyeknek van olyan prezentációjuk, ahol a relációk invariánsak a generátorok tetszőleges permutációjára nézve.

Következő dolgozatában társszerzőkkel együtt Alex Lubotzkynak a lineáris csoportok részcsoport-növekedésével kapcsolatos egyik nevezetes problémáját oldották meg.

Az ötödik dolgozatban nagynevű társszerzőkkel együtt egy intenzíven kutatott témában, a korlátosan generált csoportokkal kapcsolatban érnek el fontos eredményeket. Egyebek között bebizonyítják, hogy pozitív karakterisztikájú test fölött egy korlátosan generált lineáris csoportnak mindig van véges indexű Abel-féle részcsoportja. Ezt felhasználva például Rapincsuk egy ismert tételét is sikerül általánosítaniuk.

Abért Miklós dolgozatai zseniális ötleteket tartalmaznak, és nagy tárgyi tudást mutatnak.

Tóth Imre Péter matematikai pályafutása középiskolás korában a Pósa Lajos által vezetett matematika szakkörben kezdődött, itt ismerkedett meg az analízis, az algebra, a gráfelmélet néhány szép bevezető feladatával, és főleg számtalan, a nagy diszciplinákba nehezen besorolható, önmagáért érdekes problémával és megoldásával.

Diplomáját 1998-ban kapta a Kossuth Lajos Tudományegyetem fizikus szakán, ionkristályok kölcsönös diffúziójáról írott szakdolgozata megvédésével. Egyetemi évei alatt számos, a fizikusok számára nem kötelező matematika tárgyat is hallgatott. 1998-tól 2001-ig a Budapesti Műszaki Egyetem matematika szakos PhD-hallgatója. 2001 óta az MTA Támogatott Kutatóhelyek Irodája Sztochasztika Kutatócsoportja tudományos segédmunkatársa. Témája determinisztikus dinamikai rendszerek, elsősorban biliárdok ergodikus tulajdonságainak vizsgálata.

Győry Máté egyetemi tanulmányait a Kossuth Lajos Tudományegyetem természettudományi karán és a Debreceni Egyetem közgazdaságtudományi karán végezte. 1998-ban mint okleveles matematikus és angol-magyar szakfordító, 2002-ben pedig mint okleveles közgazdász szerezett kitüntetéses diplomát, valamint megkapta a Természettudományi Kar Emlékérmét is.

A matematikai kutatómunkába már hallgató korában bekapcsolódott. Eredményeivel az Országos Tudományos Diákköri Konferencián két alkalommal szerepelt sikeresen. Többek között ezen sikereinek köszönheti a „Pro Scientia" Aranyéremmel való kitüntetését, amely az egyetemi hallgatóknak szánt legrangosabb magyar elismerés.

1998 és 2001 között a Debreceni Egyetem Matematikai analízis és függvényegyenletek Ph.D. (doktori) programjában vett részt doktori ösztöndíjasként, s kutatási eredményeinek egy részét 5 rangos nemzetközi folyóiratban (J. Funct. Anal., Linear Algebra Appl., Arch. Math. (Basel), Acta Sci. Math. (Szeged), Publ. Math (Debrecen)) megjelent tudományos publikációkban adta közre (ezek között szerepelnek társszerzős cikkek is Molnár Lajossal, illetve Peter Semrl-lel), s több nemzetközi konferencián tartott róluk előadást. PhD dolgozatát „summa cum laude" minősítéssel védte meg.

1998-tól 2002-ig a Doktoranduszok Országos Szövetségének tudományos osztályvezetőjeként tudományszervezői tevékenységet is végzett. Ugyancsak 4 évig volt a Láthatatlan Kollégium tagja és a DE Matematikus TDK titkára. Tagja a Bolyai János Matematikai Társulatnak.

Weiner Zsuzsa 1974 augusztusában született. Munkái a véges geometria témakörébe tartoznak. Ezen belül a terület legfrissebb kérdéseivel (hézagos polinomok, lefogó ponthalmazok), valamint klasszikus problémákkal ((k, n)-ívek) egyaránt foglalkozik. Összesen 6 dolgozata jelent meg nemzetközi folyóiratban vagy referált konferencia-kiadványban (Journal of Comb. Th. (A); Designs, Codes and Cryptography; Journal of Geometry), egyet közlésre elfogadott a Finite Fields and their Applications, egy dolgozatot nyújtott be (a Journal of Combinatorial Designs-hoz), további három dolgozata van kéziratban. Doktori értekezését 2003 májusában védte meg, témavezetője Szőnyi Tamás volt

Elsőnek megjelent dolgozata, amely jórészt szakdolgozatán alapul, kis nem-Rédei típusú lefogó ponthalmazokkal foglalkozik, egy explicit geometriai konstrukciót ad kis nem-Rédei típusú lefogó ponthalmazok előállítására.

A későbbiekben ezt a kutatási irányt folytatva Leo Storme-val közösen magasabb dimenziós terek lefogó ponthalmazait vizsgálták. A dolgozat a Designs, Codes and Cryptography folyóirat Jaap Seidel 80. születésnapjára dedikált számában jelent meg. Geometriai módszerek segítségével négyzet és köbrendű Galois-terek lefogó ponthalmazait karakterizálják. A négyzetrendű esetben megmutatják, hogy $PG(3, q)$ második legkisebb (síkokra vonatkozó) minimális lefogó ponthalmaza síkbeli.

Később ezt az eredményt témavezetőjével közösen továbbfejlesztette, és az „1 modulo p" eredményt kiterjesztették térbeli lefogó ponthalmazokra. Ez többek között a részgeometriák, mint lefogó ponthalmazok karakterizálását is lehetővé tette.

Weiner Zsuzsa egyik, a díj elnyerésekor előkészületben levő dolgozata azt mutatja meg, hogy ebből az eredményből Bokler és Metsch Baer-részsíkokra emelt kúpokat karakterizáló tétele jelentősen élesíthető (és a bizonyítás is egyszerűbb). Egy másik előkészületben levő kézirat az eredmények többszörösen lefogó ponthalmazokra való kiterjesztését tartalmazza.

Weiner Zsuzsa nemzetközi elismertségét mutatja, hogy meghívást kapott a 2001 decemberében Oberwolfachban megrendezett Véges Geometria konferenciára. Ennek kötetében (mely a Designs, Codes and Cryptography c. újságban jelent meg), Weiner Zsuzsának két dolgozata is van. Az elsőben Aart Blokhuis-szal és Szőnyi Tamással a Segre-féle módszert kombinálják a Rédei-polinom vizsgálatával és ennek segítségével páros rendű Galois-síkokon érintőmentes halmazokra látnak be hézagtételt.

A másik ebben a kötetben szereplő dolgozat Gács Andrással közös. Ebben Korchmáros Gábor és Franco Mazzocca eredményeit fejlesztik tovább.

A hatodik már megjelent cikk részben összefoglaló dolgozat, de új eredményeket is tartalmaz.

Feltétlenül szólni kell a Finite Fields and their Applications dolgozatban elfogadott cikkéről. Ebben (k, n)-ívek (niq) beágyazásával kapcsolatban témavezetőjének eredményeit javítja meg. Módszere az első olyan bizonyítás, amely nem használja a Segre-féle általánosított Menelaosz-tételt. (Talán éppen ez ad reményt a további alkalmazhatóságra.) Az egyik előkészületben levő kézirat is ezt a módszert alkalmazza nagy minimális lefogó ponthalmazokra vonatkozó nem-létezési tételek belátására.

Farkas Gyula-emlékdíj

A Farkas Gyula-emlékdíj Bizottság 2003-ban a következőknek ítélte oda az emlékdíjat:

Bátkai András 1972-ben született. Az ELTE TTK matematika-fizika tanári szakján 1995-ben kapott diplomát. PhD-t a Tübingeni Egyetemen szerzett 2000-ben. Kutatási témája operátorfélcsoportok és alkalmazásaik. Ez a differenciálegyenletek és a lineáris funkcionálanalízis határterülete, és mint ilyen klasszikus témakörnek számít, ahol az eredményekhez komoly, szerteágazó technikai tudás szükséges. Bátkai András ezen a területen már számos eredményt publikált, és több cikke van folyóiratokhoz benyújtva. Külföldi konferenciákon is beszámolt eredményeiről. A sikeres kutatás mellett szerepet vállalt az Analysis and Operators internetszeminárium szervezésében, lebonyolításában is.

Mádi-Nagy Gergely 1973-ban született, 1997-ben végzett az ELTE TTK matematikus szakán. 2002-ben az ELTE TTK Operációkutatás, alkalmazott matematika és statisztika doktori iskoláján kapott PhD-t. Doktori tanulmányai közben a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetemet is elvégezte. Az általa vizsgált témakör az operációkutatáson belül a többváltozó diszkrét momentumproblémákhoz kapcsolódik. Eddigi legfontosabb eredményeit témavezetőjével, Prékopa Andrással közösen érte el. Az eredmények alapján több közös cikkük is született. Ezek közül a legjelentősebb a terület vezető folyóiratában, a Mathematics of Operation Research-ben jelent meg.

Wiener Gábor 1973-ban született, 1996-ban végzett az ELTE TTK matematikus szakán és szintén az ELTE-n, 2003-ban szerzett PhD fokozatott. Kutatási területe a kereséselmélet, ami a kombinatorika, a számítástudomány és az információelmélet között elhelyezkedő alkalmazásorientált elmélet. Jelentős hozzájárulása a témakörhöz, hogy sikeresen összekapcsolta más területekkel, ezzel lehetőséget adva arra, hogy a máshol kidolgozott módszerek a kereséselmélet is hasznosíthatóak legyenek. Ezen kívül a közelítő keresés modelljét, elméleti alapjait is kidolgozta. Munkásságának elismertségét mutatja, hogy több esetben is mint meghívott előadó vehetett részt nemzetközi konferenciákon.

Rényi Kató-díj

A Rényi Kató-díj I. fokozatát **Juhász András,** az ELTE ötödéves hallgatója, **Nyul Gábor,** a DE végzett hallgatója és **Szűcs Gábor,** az SZTE végzett hallgatója kapta.

A II. fokozatot **Hartmann Miklós,** az SZTE végzett hallgatója és **Katona Zsolt,** az ELTE végzett hallgatója kapta.

Indoklás: *Juhász András* az ELTE ötödéves hallgatója belátta, hogy ha f és g ugyanazon zárt felületek generikus leképezései $\mathbb{R}^3$-ba és vannak Whitney-esernyő pontjaik, akkor f és g pontosan akkor köthetők össze a (lokálisan) generikus leképezések terében egyparaméteres családdal, ha ugyanannyi Whitney-esernyő pontjaik vannak. Egy másik cikkében általánosítja ezt a tételt n-dimenziós felületek beágyazására ($n > 3$).

Nyul Gábor a DEgyetem 2001-ben végzett hallgatója, 2001-ben már kapott II. fokozatot. Újabb kutatásaiban belátta, hogy ha egy multikvadratikus algebrai számtest diszkriminánsa páratlan, akkor nincs hatvány egész bázisa. Bizonyos testbeli egészek rendjeiről kimutatja, hogy 2 nagy hatványaival oszthatóak, további általános eredményt ér el az oktikus esetre. Gaál Istvánnal algoritmust ad csak adott prímekkel osztható rendű elemek meghatarozására a bikvadratikus esetben, ez megoldja egy diofantoszi egyenlettípus p-adikus variánsát.

Szűcs Gábor az SZTE végzett hallgatója a matematikai statisztika határeloszlásainak témájában bizonyított tételeket. Kijavította Rémillard és Theodorescu egy, az empirikus generátorfolyamat konvergenciájával kapcsolatos hibás bizonyítását és számos új eredményt is igazolt.

Diplomamunkájában, ami megjelenés alatt áll, a parametrikus bootstrap folyamat konvergenciájára ad az eddig ismerteknél általánosabb feltételek mellett technikailag nehéz és igen inventív bizonyitást.

Hartmann Miklós SZTE végzett hallgatója továbbfejlesztve Szendrei Mária egy példáját igazolta, hogy ha V csoportvarietás, ami nem az összes csoportok varietása, akkor létezik olyan E-unitér reguláris félcsoport, amely egy kötegnek V-beli csoporttal vett bővítése és nincs olyan E-unitér fedője, amely beágyazható köteg és V-beli csoport szemidirekt szorzatába.

Katona Zsolt az ELTE végzett hallgatója dolgozataiban olyan halmazrendszerek nagyságát vizsgálja, ahol r halmaz metszete mindig legalább s elemű, de ℓ halmaz metszete mindig legfeljebb t elemű. Már speciális esetekben is fáradságos, különböző technikák finom összeillesztését igénylő a becslés, a Füredi Zoltánnal nyert általános eset pedig számos új nehézséget hordoz.

Patai Alapítvány díja

Lovas Rezső László 1978-ban született Debrecenben. 1994-ben az Arany Dániel Matematikaversenyen 3. díjat, 1996-ban pedig a matematikai OKTV-n 6. díjat nyert. Szintén 1996-ban a Nemzetközi Fizikai Diákolimpián Oslóban bronzérmet kapott.

1996-ban felvették a KLTE fizikus szakára. Első tudományos munkáját 1998-ban kezdte a káosz témakörében. Ugyanebben az évben, az I. nemzetközi Ortvay Rudolf fizikai problémamegoldó versenyen 2. díjat nyert. 1999-ben jelentkezett diplomamunkára dr. Trócsányi Zoltánnál nagyenergiás részecskefizikai témában. E témában írott Tudományos diákköri dolgozatáért az Országos Tudományos Diákköri Konferencia Atommag- és részecskefizika szekciójában 2. díjat nyert. 2001-ben védte meg Hadronkeletkezés virtuális fotonok egymáson való szóródásakor és a nagyenergiás határesetben szereplő szórási tényezők című diplomamunkáját Ugyanebben az évben, a DE matematika doktori programjának differenciálgeometria és alkalmazásai alprogramjára felvételizett. Témavezetőjével, dr. Szilasi Józseffel a permet- (spray-) és Finsler-geometria jelenleg még tisztázatlan területeinek a kutatásával foglalkoznak. A 2001/02-es tanév folyamán aktívan közreműködött témavezetőjének A Setting for Spray and Finsler Geometry című terjedelmes tanulmányának megírásában, amely a Kluwer Academic Pressnél megjelenés alatt álló Handbook of Finsler Geometry című kötet egy fejezetét fogja képezni. 2002-ben Marosvásárhelyen (Tirgu Mureş) a Bolyai János, Gauss és Lobacsevszkij tiszteletére rendezett Non-Euclidean Geometry in Modern Physics című 3. konferencián előadást tartott Lie derivatives and Killing vector fields in Finsler geometry címmel, amelynek az írott változata megjelent a konferenciakötetben. 2003-ban Debrecenben a Workshop on Finsler Geometry and its Applications című konferencán sikeres előadást tartott, melynek cikkformája a Periodica Mathematikaban jelenik meg.

JELENTÉS A 2003. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS-EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 2003. október 31. és november 10. között rendezte meg a 2003. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2003-ban fejezték be.

A verseny megrendezésére a Társulat a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetét kérte fel. A Bolyai Intézet tanácsa bizottságot nevezett ki a verseny lebonyolítására, amelynek elnöke Csörgő Sándor, titkára Fodor Ferenc, tagjai pedig Bálintné Szendrei Mária, Czédli Gábor, Gehér László, Hajnal Péter, Hatvani László, Hegedűs Jenő, Kérchy László, Kincses János, Krámli András, Krisztin Tibor, Leindler László, Németh József, Pintér Lajos, Simányi Nándor, Stachó László, Szabó László, Szabó László Imre, Terjéki József és Totik Vilmos voltak.

A versenybizottság felhívására összesen 34 kitűzhető feladat érkezett be. Köszönjük mindazoknak a munkáját, akik ezeket a feladatokat javasolták; a verseny sikeréhez akkor is nagyban hozzájárultak, ha feladataik végül nem kerültek be a versenybe. Ellenőrzés és mérlegelés után, a rendelkezésre álló gazdag anyagból a kialakult hagyományok figyelembe vételével a bizottság tíz feladatot tűzött ki.

A 2003. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Legyen $(X,<)$ tetszőleges rendezett halmaz. Bizonyítsuk be, hogy X pontjait ki lehet színezni két színnel úgy, hogy két azonos színű pont között mindig legyen tőlük különböző színű pont.

2. Legyen p prímszám, és M olyan egész számokból álló $n \times m$-es mátrix, hogy $Mv \neq 0 \pmod{p}$ minden olyan $v \neq 0$ oszlopvektorra, amelynek minden komponense 0 vagy 1. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan egészekből álló x sorvektor, amelyre xM semelyik komponense sem $0 \pmod{p}$.

3. Legyen $Z = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$, $n \geq 2$, különböző komplex számok olyan halmaza, amelyben bármely számmal együtt annak komplex konjugáltja is benne van.

a) Bizonyítsuk be, hogy van olyan (a Z halmaztól függő) C konstans, hogy minden $\varepsilon \in (0,1)$ számhoz található olyan n-edfokú x_0 algebrai egész, amelynek $x_1, \dots, x_{n-1}$ konjugáltjaira $|x_1 - z_1| < \varepsilon, \dots, |x_{n-1} - z_{n-1}| < \varepsilon$ teljesül, és amelyre $|x_0| < C/\varepsilon$.

b) Mutassuk meg, hogy van olyan $Z = \{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ halmaz és olyan c_n pozitív szám, hogy minden olyan n-edfokú x_0 algebrai egész számra, amelynek $x_1, \ldots, x_{n-1}$ konjugáltjaira $|x_1 - z_1| < \varepsilon, \ldots, |x_{n-1} - z_{n-1}| < \varepsilon$ teljesül, fennáll az $|x_0| > c_n/\varepsilon$ egyenlőtlenség.

4. Legyenek $\{a_{n,1}, \ldots, a_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ egész számok úgy, hogy $a_{n,i} \neq a_{n,j}$ ha $1 \leq i < j \leq n$, $n = 2, 3, \ldots$, és jelölje $\langle y \rangle \in [0,1)$ az y valós szám törtrészét. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ valós sorozat, hogy az $\langle a_{n,1}x_n \rangle, \ldots, \langle a_{n,n}x_n \rangle$ számok aszimptotikusan egyenletesen oszlanak el a $[0,1]$ intervallumon.

5. Legyen $d > 1$ egész szám, és $0 < r < 1/2$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik véges sok (csak az adott d és r számoktól függő) nem nulla vektor az $\mathbb{R}^d$ euklideszi térben azzal a tulajdonsággal, hogy amennyiben egy $\mathbb{R}^d$-beli egyenes távolsága a $\mathbb{Z}^d$ egész rácstól legalább r, úgy ez az egyenes merőleges e véges sok vektor valamelyikére.

6. Igazoljuk, hogy az $n = x_n(x_{n-1} + x_n + x_{n+1})$, $n = 1, 2, \ldots$, $x_0 = 0$, rekurziónak egyetlen nemnegatív megoldása van.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha r nemnegatív folytonos függvény a számegyenesen, akkor létezik olyan nem azonosan nulla $f \in C^1(\mathbb{R})$, amelyre $f'(x) = f\big(x - r\big(f(x)\big)\big)$, $x \in \mathbb{R}$.

8. Legyenek $f_1, f_2, \ldots$ folytonos valós függvények a számegyenesen. Igaz-e, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor minden x-re divergens, akkor ez az összeg előjelezésének tipikus megváltoztatása után is így marad (vagyis azon $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ sorozatok, amelyekre a $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x)$ függvénysor legalább egy x pontban konvergens, első kategóriájú halmazt alkotnak a $\{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ szorzattérben)?

9. Adott a síkban néhány nyílt félsík, melyek határoló egyenesei a síkot konvex tartományokra osztják. Megadandó olyan $C(q)$ másodfokú polinom, amelyre tetszőleges $q \geq 1$ egész esetén igaz az, hogy ha a félsíkok a sík minden pontját legalább q-szor lefedik, akkor a pontosan q-szor fedett pontok halmaza legfeljebb $C(q)$ darab tartomány egyesítése.

10. Legyenek X és Y független szentpétervári véletlen változók, melyek tehát minden $k = 1, 2, \ldots$ esetén a 2^k értéket $1/2^k$ valószínűséggel veszik fel, és jelölje $I\{A\}$ az A esemény indikátorát. Mutassuk meg, hogy X és Y megadhatók egy olyan, elég bő valószínűségi mezőn, amelyen értelmezhető független szentpétervári véletlen változóknak egy másik, X' és Y' párja is úgy, hogy $X + Y = 2X' + Y'I\{Y' \leq X'\}$ majdnem biztosan.

Az első feladatot *Juhász István,* a másodikat *Szegedy Balázs,* a harmadikat *Ruzsa Imre,* a negyediket *Totik Vilmos,* az ötödiket *Simányi Nándor* és *Szász Domokos,* a hatodikat *Névai Pál* és *Totik Vilmos,* a hetediket *Krisztin Tibor,* a nyolcadikat *Keleti Tamás* és *Mátrai Tamás,* a kilencediket *Elekes György,* a tizediket pedig *Csörgő Sándor* és *Gordon Simons* bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A versenyre 10 versenyző összesen 68 megoldást nyújtott be; ebbe nem számoltuk bele a 2. feladatra érkezett két olyan dolgozatot, amelyek egyéb egyszerű megjegyzések mellett csak a könnyűnek ítélhető $p = 2$ esettel foglalkoztak. Név szerint, *Ambrus Gergely* megoldást küldött az 1., 6., 8. és 9. feladatra, *Csóka Endre* a 4., 5., 6., 9. és 10. feladatra, Juhász András az 1., 3., 4., 5. és 7. feladatra, *Máthé András* az 1., 2., 3., 4., 6., 7., 8., 9. és 10. feladatra, *Pálvölgyi Dömötör* az 1., 3., 4., 5., 6., 9. és 10. feladatra, *Ráth Balázs* az 1., 4., 5. és 10. feladatra, *Terpai Tamás* mind a tíz feladatra, *Varjú Péter* az 1., 3., 4., 5., 6., 7., 9. és 10. feladatra, *Vizer Máté* és *Zábrádi Gergely* pedig az 1., 3., 4., 5., 6., 8., 9. és 10. feladatra. Versenyen kívül megoldást nyújtott be a 6. és 10. feladatra *Lovas Rezső László* III. éves doktorandusz, aki korábban fizikus szakon szerzett diplomát.

A megoldások értékelésében a bizottság tagjain kívül részt vett Keleti Tamás, aki, a probléma egyik kitűzőjeként, a 8. feladatra érkezett öt dolgozat elbírálására ajánlkozott. A versenybizottság a 2003. december 1-jén megtartott ülésén a következő határozatot hozta:

A 2003. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny díjazottjai

I. díjban és 50 000 forint pénzjutalomban részesül **Terpai Tamás,** az ELTE ötödéves matematikus hallgatója;

II. díjban és 40 000 forint pénzjutalomban részesül **Máthé András,** az ELTE negyedéves matematikus hallgatója;

III. díjban és 30 000–30 000 forint pénzjutalomban részesülnek **Varjú Péter,** a SzTE harmadéves és **Zábrádi Gergely,** az ELTE negyedéves matematikus hallgatói;

Dicséretben és fejenként 15 000 forint pénzjutalomban részesülnek **Juhász András,** az ELTE ötödéves, **Pálvölgyi Dömötör,** az ELTE negyedéves, és **Vizer Máté,** az ELTE negyedéves matematikus hallgatói.

Indoklás:

Terpai Tamás kifogástalanul megoldotta mind a tíz feladatot. Kiemelkedő az 5. és 8. feladatra adott megoldása, valamint összes megoldásának világos okfejtése és tömör, tiszta leírása.

Máthé András teljes megoldást adott az 1., 2., 3., 4., 6., 8., 9. és 10. feladatra, és kissé hiányosan megoldotta a 7. feladatot is. A 4. feladatra lényegében két megoldást adott, kiemelkedő a 8. és a 9. feladatra adott megoldása, a 2. feladatot pedig tetszőleges $p \geq 2$ természetes számra általánosította.

Zábrádi Gergely kifogástalanul megoldotta az 1., 3., 4., 5., 6., 8., 9. és 10. feladatot, kiemelkedő az 5. feladatra adott megoldása.

Varjú Péter teljes megoldást adott az 1., 4., 5., 6., 7., 9. és 10. feladatra és megoldotta a 3. feladat b) részét is. Kiemelkedő a 4., 5. és 9. feladatra adott megoldása.

Vizer Máté helyesen megoldotta az 1., 5. és 9. feladatot, kisebb hiányosságokkal a 8. feladatot és lényegében megoldotta a 4. és 10. feladatot.

Pálvölgyi Dömötör jól megoldotta a 4., 5. és 9. feladatot, hiányosan a 6. feladatot, erősen hiányosan az 1. feladatot, és lényegében megoldotta a 10. feladatot.

Juhász András kifogástalanul megoldotta az 1., 3., 4., 5. és 7. feladatot, kiemelkedő a 3. feladatra adott megoldása.

A bizottság külön említésre méltónak tartja *Csóka Endre*, az ELTE matematikus hallgatója jó szereplését, aki elsőéves létére jól oldotta meg a 4., 6., 9. és 10. feladatokat.

A Bolyai János Matematikai Társulat 2003. évi költségvetése az első, második és harmadik díjakra, valamint a dicséretekre rendre 45 000, 30 000, 20 000 és 10 000 forintot irányzott elő fejenként, eredetileg tehát összesen 145 000 forint pénzjutalom kifizetésére volt lehetőség. Ezt az összeget a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete 50 000 forinttal megtoldotta, így alakultak ki a jutalmak fenti összegei.

Csörgő Sándor és *Fodor Ferenc*

A feladatok megoldásai

1. feladat (Juhász István). *Legyen $(X,<)$ tetszőleges rendezett halmaz. Bizonyítsuk be, hogy X pontjait ki lehet színezni két színnel úgy, hogy két azonos színű pont között mindig legyen tőlük különböző színű pont.*

Megoldás (Ráth Balázs). Az $a,b\in X$ elemek esetén $a\sim b$ jelölje azt, hogy az $[a,b]$ intervallum véges. Ez egy ekvivalenciareláció X-en, melynek minden osztálya olyan, hogy az általa indukált rész rendezett halmaz izomorf $(\mathbb{Z},<)$ egy intervallumával. Az osztályokra igaz a feladat állítása, hiszen $(\mathbb{Z},<)$ intervallumaira igaz. Ezt a paritás szerinti színezés mutatja, ami igazából két színezés aszerint, hogy a két színt miként osztjuk el a két paritási osztály között.

A legalább kételemű osztályok esetén a fenti két színezés közül tetszőlegeset követve színezzük ki az osztály elemeit. A többi elem egyelőre színezetlen marad. Az egyelemű osztályok elemeinek vegyük egy jólrendezését, amit rendszámokkal való indexezéssel jelölünk: $\{a_\alpha : \alpha<\xi\}$ valamely ξ rendszámra. Ezeket az elemeket indexük szerinti sorrendben, egyesével színezzük ki: a_α színezésénél vegyük a már színezett elemek (a legalább kételemű osztályok elemei és a $\{a_\beta : \beta<\alpha\}$ halmaz elemei) és a_α által indukált $(R(a_\alpha),<)$ rész rendezett halmazt. Ha ebben az a_α elemnek van kisebb és nagyobb szomszédja is (két elem szomszédos, ha nincs köztük X-beli elem), és ezek azonos színűek, akkor a_α színe legyen szomszédai színétől eltérő. Más esetben a_α színe tetszőleges lehet.

A fenti transzfinit eljárás végeredménye egy, az állítást bizonyító színezés lesz, azaz olyan színezés, amelynek bármely legalább kételemű intervalluma nem egyszínű. Ennek belátásához vegyük $(X,<)$ két különböző elemét, a-t és b-t. Ha az (a,b) intervallum tartalmaz legalább kételemű osztályból vett elemet, akkor ennek valamely szomszédját is tartalmazza az $[a,b]$ intervallum, így az nem lehet egyszínű. Ha az (a,b) intervallum összes eleme egyelemű osztályt alkot, akkor vegyük a fenti jólrendezésben az első (c) és második (d) elemet az (a, b) intervallumból, továbbá a c és d közti elemek közül a legelsőt (e). Ekkor e színezésénél $(R(e), <)$-ben létezik e-nek két szomszédja: c és d. Így eljárásunk biztosítja, hogy nem lehetséges, hogy c-nek és d-nek közös színe legyen, ami e színe is egyben. Azaz most is igaz, hogy az $[a, b]$ intervallum nem lehet egyszínű.

Érkezett 9 dolgozat. Helyes Juhász András, Máthé András, Ráth Balázs, Terpai Tamás, Varjú Péter, Vizer Máté és Zábrádi Gergely megoldása. Erősen hiányos Ambrus Gergely és Pálvölgyi Dömötör megoldása.

2. feladat (Szegedy Balázs). *Legyen p prímszám, és M olyan egész számokból álló $n \times m$-es mátrix, hogy $Mv \neq 0 \pmod p$ minden olyan $v \neq 0$ oszlopvektorra, amelynek minden komponense 0 vagy 1. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan egészekből álló x sorvektor, amelyre xM semelyik komponense sem $0 \pmod p$.*

Megoldás. (Máthé András és Terpai Tamás dolgozatai alapján). Legyen $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$ egy p-edik egységgyök és jelöljön $A = \{a_{i,j}\}$ egy olyan egészek feletti $n \times m$-es mátrixot, amelynek elemei mod p az M mátrix elemeit adják. Legyen

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^{m} \left(\varepsilon^{\sum_{k=1}^{n} a_{k,j} x_k} - 1\right)$$

az egész szám n-eseken értelmezett függvény. Legyen Y az m hosszú $0-1$ sorozatok halmaza. Egy adott $y \in Y$ sorozatra legyen $\delta(y)$ aszerint 1 vagy -1, hogy y páros vagy páratlan sok 1-est tartalmaz. Legyen továbbá $\gamma(y)$ az A mátrix oszlopainak y-lineáris kombinációja. Kifejtve a fenti szorzatot, azt kapjuk hogy

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^m \sum_{\substack{y \in Y, \\ \gamma(y) = (b_1, b_2, \dots, b_n)}} \delta(y) \varepsilon^{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}.$$

Az összegezés felcserélésével feltételünk alapján látszik, hogy

$$\sum_{0 \le x_1, x_2, \dots, x_n \le p-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{0 \le x_1, \dots, x_n \le p-1} (-1)^m \sum_{\substack{y \in Y \\ \gamma(y) = (b_1, b_2, \dots, b_n)}} \delta(y) \varepsilon^{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}$$

$$= (-1)^m \sum_{\substack{y \in Y \\ \gamma(y) = (b_1, b_2, \dots, b_n)}} \delta(y) \sum_{0 \le x_1, x_2, \dots, x_n \le p-1} \varepsilon^{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}$$

$$= (-1)^m p^n + (-1)^m \sum_{\substack{y \in Y \setminus \{0,0,\dots,0\} \\ \gamma(y) = (b_1, b_2, \dots, b_n)}} \delta(y) \left(\sum_{x_1=0}^{p-1} (\varepsilon^{b_1})^{x_1} \right) \dots \left(\sum_{x_n=0}^{p-1} (\varepsilon^{b_n})^{x_n} \right).$$

Ha itt $p \nmid b_j$, akkor $\sum_{x_j=0}^{p-1} (\varepsilon^{b_j})^{x_j} = 0$. Viszont ha $y \in Y \setminus \{0, 0, \dots, 0\}$, akkor feltételünk alapján mindig van olyan k, hogy $p \nmid b_k$. Ezért fenti sorban a második tag értéke 0, s így

$$\sum_{0 \le x_1, x_2, \dots, x_n \le p-1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-1)^m p^n.$$

Ennek alapján léteznek olyan $t_1, t_2, \dots, t_n$ egészek melyekre $f(t_1, t_2, \dots, t_n) \neq 0$. Visszatérve f eredeti szorzat alakjához, ez azt jelenti, hogy $a_{1,j}t_1 + a_{2,j}t_2 + \dots + a_{n,j}t_n$ semmilyen $j \in \{1, \dots, m\}$ esetén nem osztható p-vel, ami pedig ekvivalens azzal, amit bizonyítani akartunk.

Érkezett 2 dolgozat, Máthé András és Terpai Tamás ragyogó fenti megoldásai.

3. feladat (Ruzsa Imre). *Legyen $Z = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$, $n \geq 2$, különböző komplex számok olyan halmaza, amelyben bármely számmal együtt annak komplex konjugáltja is benne van.*

a) *Bizonyítsuk be, hogy van olyan (a Z halmaztól függő) C konstans, hogy minden $\varepsilon \in (0,1)$ számhoz található olyan n-edfokú x_0 algebrai egész, amelynek $x_1, \dots, x_{n-1}$ konjugáltjaira $|x_1 - z_1| < \varepsilon, \dots, |x_{n-1} - z_{n-1}| < \varepsilon$ teljesül, és amelyre $|x_0| < C/\varepsilon$.*

b) *Mutassuk meg, hogy van olyan $Z = \{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ halmaz és olyan c_n pozitív szám, hogy minden olyan n-edfokú x_0 algebrai egész számra, amelynek $x_1, \dots, x_{n-1}$ konjugáltjaira $|x_1 - z_1| < \varepsilon, \dots, |x_{n-1} - z_{n-1}| < \varepsilon$ teljesül, fennáll az $|x_0| > c_n/\varepsilon$ egyenlőtlenség.*

1. megoldás (Juhász András). **a)** Legyen $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$f_t(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n-1})(z - t) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j, \quad \text{ahol} \quad a_n = 1.$$

Mivel Z zárt a komplex konjugálásra és t valós, ezért $f_t(z)$ együtthatói valósak. Legyen továbbá

$$\varepsilon_0 = \Big(\min_{1 \leq j < k \leq n-1} |z_j - z_k| \Big) \left(1 - \sqrt[n-1]{\frac{2}{3}} \right).$$

Mivel Z elemei páronként különbözőek, ezért $\varepsilon_0 > 0$.

Lemma. *Tetszőleges $\delta > 0$ esetén létezik olyan $L = L(Z, \delta)$ konstans, hogy ha $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ és $|t| > \frac{L}{\varepsilon}$, akkor minden olyan valós együtthatós*

$$f(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{n-1})(z - \alpha_0) = \sum_{j=0}^{n} b_j z^j$$

polinomra, melyre $|a_j - b_j| \leq \delta$, $0 \leq j < n$, igaz az, hogy

$$|\alpha_1 - z_1| < \varepsilon, \dots, |\alpha_{n-1} - z_{n-1}| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Legyen $\gamma_k := \big\{ |z - z_k| = \varepsilon \big\}$ a z_k-t megkerülő görbe. Ekkor $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ miatt $f_t(z)$-nek pontosan egy gyöke esik γ_k belsejébe, mégpedig z_k. Ha mármost

$$(*) \qquad \text{minden } z \in \gamma_k \text{ esetén } \big|f_t(z)\big| > \big|f_t(z) - f(z)\big|,$$

akkor Rouché tétele szerint $f(z)$-nek is pontosan egy gyöke esik γ_k belsejébe. Jelölje α_k az $f(z)$ polinom γ_k belsejébe eső gyökét és vezesssük be az

$$M = \max \big\{ |z_1|, \dots, |z_{n-1}| \big\} \quad \text{és} \quad K = \delta \sum_{j=0}^{n} (M+1)^j$$

jelöléseket. Ekkor, ha $z \in \gamma_k$,

$$\left|f_t(z) - f(z)\right| = \left|\sum_{j=0}^{n}(a_j - b_j)z^j\right| \le \delta\sum_{j=0}^{n}(M+\varepsilon)^j < \delta\sum_{j=0}^{n}(M+1)^j = K$$

és

$$\left|f_t(z)\right| = \varepsilon|z-t|\prod_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n-1}|z-z_j|.$$

Most igazoljuk a következő állítást:

$$(**)\qquad \text{ha}\quad |t| \ge 4\varepsilon + M, \quad \text{akkor}\quad |z-t|\prod_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n-1}|z-z_j| \ge \frac{1}{2}|z_k - t|\prod_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n-1}|z_k - z_j|.$$

Valóban, vegyük észre, hogy $\varepsilon \le \varepsilon_0$ választása miatt

$$\left|\frac{z-z_j}{z_k-z_j}\right| = \left|\frac{z-z_k}{z_k-z_j} + 1\right| \ge 1 - \left|\frac{z-z_k}{z_k-z_j}\right|$$

$$= 1 - \frac{\varepsilon}{|z_k - z_j|} \ge 1 - \frac{\varepsilon}{\min_{1\le j<k\le n-1}|z_j - z_k|} \ge \sqrt[n-1]{\frac{2}{3}},$$

és így

$$\prod_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n-1}|z-z_j| \ge \frac{2}{3}\prod_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n-1}|z_k - z_j|.$$

Másrészt

$$\left|\frac{z-t}{z_k-t}\right| = \left|\frac{z-z_k}{z_k-t} + 1\right| \ge 1 - \left|\frac{z-z_k}{z_k-t}\right| = 1 - \frac{\varepsilon}{|z_k-t|} \ge \frac{3}{4},$$

azaz $|z_k - t| \ge 4\varepsilon$, hiszen $|z_k - t| \ge |t| - |z_k| \ge 4\varepsilon + M - |z_k| \ge 4\varepsilon$. Ezzel $(**)$-ot beláttuk.

Legyen most

$$N = \min_{1\le k\le n-1}\prod_{\substack{j=1\\j\ne k}}^{n-1}|z_k - z_j| > 0.$$

Ekkor $(**)$-ból következik, hogy $z \in \gamma_k$ esetén $\left|f_t(z)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}N|z_k - t|$. Ha tehát $|t| \ge \frac{2K}{\varepsilon N} + M$, akkor $|z_k - t| \ge \frac{2K}{\varepsilon N}$ minden k-ra, amiből következik, hogy $\left|f_t(z)\right| \ge K$, tetszőleges k és $z \in \gamma_k$ esetén, de ilyenkor $\left|f_t(z) - f(z)\right| < K$. Legyen végül L olyan nagy, hogy az adott $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ mellett $\frac{L}{\varepsilon} \ge \max\left\{4\varepsilon + M, \frac{2K}{\varepsilon N} + M\right\}$. Ekkor $|t| \ge \frac{L}{\varepsilon}$ és $1 \le k \le n-1$ esetén $(*)$ teljesül. Ezzel a lemmát beláttuk.

Most visszatérünk a feladat a) részének megoldásához. Legyen $|t| = \frac{L+1}{\varepsilon}$, $f_t(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$, $\varepsilon \le \varepsilon_0$. Ekkor minden $1 \le j \le n-1$ és $a_j \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $b_j \in \mathbb{Z}$ páros szám, melyre $|a_j - b_j| \le 2$. Továbbá a_1-hez létezik olyan $b_1 \in \mathbb{Z}$, melyre $b_1 \equiv 2 \bmod 4$ és $|a_1 - b_1| \le 2$. Végül legyen $b_n = 1$. Ekkor az

$$f(z) = (z - x_1)\ldots(z - x_{n-1})(z - x_0) = \sum_{j=0}^{n} b_j z^j$$

polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett a Schönemann–Eisenstein-kritérium miatt, ugyanis $2 \nmid b_n$, $2 \mid b_{n-1}, \dots, b_0$, $4 \nmid b_0$. Tehát x_0 n-edfokú algebrai szám, aminek konjugáltjai $x_1, \dots, x_{n-1}$. Mivel $|t| > \frac{L}{\varepsilon}$, ezért a lemma miatt $|x_1 - z_1| < \varepsilon, \dots |x_{n-1} - z_{n-1}| < \varepsilon$.

A gyökök és együtthatók közötti összefüggésekből

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(z_1 + \ldots + z_{n-1} + t) \quad \text{és} \quad b_{n-1} = (-1)^{n-1}(x_1 + \ldots + x_{n-1} + x_0).$$

Így

$$\begin{aligned} 2 \geq |a_{n-1} - b_{n-1}| &\geq \big|(z_1 - x_1) + \cdots + (z_{n-1} - x_{n-1}) + (t - x_0)\big| \\ &\geq |t - x_0| - |z_1 - x_1| - \cdots - |z_{n-1} - x_{n-1}| > |t - x_0| - (n-1)\varepsilon, \end{aligned}$$

ahonnan

$$|x_0| < |t| + (n-1)\varepsilon + 2 = \frac{L+1}{\varepsilon} + (n-1)\varepsilon + 2.$$

Tehát ha $\widetilde{C}$ elég nagy, akkor $|x_0| < \frac{\widetilde{C}}{\varepsilon}$.

Ezzel a feladat a) részét beláttuk akkor, ha $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Végül legyen $C = \frac{\widetilde{C}}{\varepsilon_0}$. Ekkor $C > \widetilde{C}$ megfelelő $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ esetén. Ha pedig $\varepsilon_0 < \varepsilon < 1$, akkor x_0-t válasszuk ε_0-hoz; ekkor $|x_0| < \frac{\widetilde{C}}{\varepsilon_0} = C < \frac{C}{\varepsilon}$.

b) Először tekintünk egy olyan

$$h(z) = \sum_{j=0}^{n-1} c_i z^j \in \mathbb{Q}[z]$$

polinomot, ahol $c_0 = 1/2$, $c_1 = 1/3$ és $c_n \neq 0$, amelynek nincs többszörös gyöke. Ilyen valóban létezik, ha $(n-1) > 1$. Válasszuk meg a $c_2, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{Q}$ számokat tetszőlegesen ($c_{n-1} \neq 0$). Ha $h(z)$ diszkriminánsa nulla, akkor a c_j-k kis változtatásával elérhető, hogy a diszkrimináns már ne legyen nulla, s ekkor $h(z)$-nek már nincs többszörös gyöke. Jelölje ezeket a gyököket $z_1, \dots, z_{n-1}$.

Az $l = \big\{ -\frac{1}{2}t, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}t \,:\, t \in \mathbb{R} \big\} \subset \mathbb{R}^2$ egyenes racionális meredekségű. Ezért ha megmutatjuk, hogy $l \cap \mathbb{Z}^2 = \emptyset$, akkor $d(l, \mathbb{Z}^2) > 0$. Valóban, ha $(-\frac{1}{2}t, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}t) \in \mathbb{Z}^2$ volna, akkor $-\frac{1}{2}t = k \in \mathbb{Z}$, azaz $t = -2k$, s így $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}t = \frac{3+4k}{6} \in \mathbb{Z}$ lenne. Tehát $6 \mid 3 + 4k$, és így $3 \mid k$, valamint $-\frac{1}{3}t = \frac{2k}{3} \in \mathbb{Z}$, tehát végül $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}t \notin \mathbb{Z}$, ami ellentmondás.

Tegyük fel, hogy az x_0 n-edfokú algebrai egész $x_1, \dots, x_{n-1}$ konjugáltjaira fennáll, hogy $|x_1 - z_1| < \varepsilon, \dots, |x_{n-1} - z_{n-1}| < \varepsilon$. Legyen ekkor

$$f(z) = (z - x_1) \ldots (z - x_{n-1})(z - x_0) = \sum_{j=0}^{n} b_j z^j,$$

továbbá

$$f_{x_0}(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_{n-1})(z - x_0) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} a_j &= (-1)^{n-j} \big(\sigma_{n-j}(z_1, \dots, z_{n-1}) + \sigma_{n-j-1}(z_1, \dots, z_{n-1}) x_0\big), \\ b_j &= (-1)^{n-j} \big(\sigma_{n-j}(x_1, \dots, x_{n-1}) + \sigma_{n-j-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) x_0\big), \end{aligned}$$

végül

$$c_j = (-1)^{n-j-1}\sigma_{n-j-1}(z_1, \dots, z_{n-1}),$$

ahol σ_m az m-edfokú elemi szimmetrikus polinomot jelöli. Tehát $a_j = c_{j-1} - c_j x_0$. Speciálisan $a_0 = -\frac{1}{2}x_0, a_1 = c_0 - c_1 x_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x_0$.

Mivel $d(l, \mathbb{Z}^2) > 0$, ezért létezik olyan $\delta > 0$, melyre tetszőleges $(x, y) \in l$ esetén $d(x, \mathbb{Z}) > \delta$ vagy $d(y, \mathbb{Z}) > \delta$. Minden $0 \le j \le n$ esetén $b_j \in \mathbb{Z}$, de mivel $(a_0, a_1) = \big(-\frac{1}{2}x_0, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}x_0\big) \in l$, ebből következik, hogy $k = 0$ vagy $k = 1$ valamelyikére $|a_k - b_k| > \delta$.

A σ_j polinom C^1-ben van, tehát Lipschitz-folytonos a $\big\{|z| \le 2M\big\}$ körlemezen. Így létezik olyan $L > 0$ konstans, ami csak M-től függ, melyre $m \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ és $|x_1 - z_1| < \varepsilon, \dots, |x_{n-1} - z_{n-1}| < \varepsilon < M$ esetén

$$\big|\sigma_m(x_1, \dots, x_{n-1}) - \sigma_j(z_1, \dots, z_{n-1})\big| \le L \sum_{l=0}^{n-1} |x_l - z_l| < L(n-1)\varepsilon.$$

Ebből

$$\begin{aligned}|a_k - b_k| &\le \big|\sigma_{n-k}(x_1, \dots, x_{n-1}) - \sigma_{n-k}(z_1, \dots, z_{n-1})\big| \\ &\quad + \big|\sigma_{n-k-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) - \sigma_{n-k-1}(z_1, \dots, z_{n-1})\big| x_0 < L(n-1)\varepsilon\big(1 + |x_0|\big).\end{aligned}$$

Tehát $\delta < L(n-1)\varepsilon\big(1 + |x_0|\big)$, amiből következik, hogy $|x_0| > \frac{\delta}{L(n-1)\varepsilon} - 1$. Ezért létezik olyan $c_n > 0$ konstans, hogy $\varepsilon \le \frac{\delta}{Ln}$ esetén $|x_0| > \frac{\delta}{L(n-1)\varepsilon} - 1 \ge \frac{c_n}{\varepsilon}$. Ezzel a feladat b) részét is igazoltuk.

2. megoldás (a kitűző). **a)** Legyen $\delta = \min_{l \ne j} |z_l - z_j|$. Elég az $\varepsilon < \delta/2$ esettel foglalkozni. Ekkor a feladat első fele így fogalmazható: van olyan n-edfokú egész együtthatós irreducibilis 1 főegyütthatójú f polinom, amelynek minden $|z - z_j| < \varepsilon$ körben van gyöke, és az n-ik gyök abszolút értéke is $< C/\varepsilon$.

Legyen most

$$g(z) = (z - A)\prod_{1}^{n-1}(z - z_j) = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j,$$

ahol az A pozitív számot majd később választjuk meg. A Z halmazra tett feltevés miatt az együtthatók valósak. Legyen b_j az a_j-hez legközelebbi olyan egész szám, amely $\equiv 2 \pmod 4$. Ekkor $|a_j - b_j| \le 2$, és tekintsük az

$$f(z) = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} b_j z^j$$

polinomot. Ez irreducibilis a Schönemann–Eisenstein-kritérium miatt.

A továbbiakban a következő tényt használjuk: ha g és h analitikus függvények és egy körvonalon $\big|h(z)\big| < \big|g(z)\big|$, akkor a kör belsejében g-nek és $g + h$-nak ugyanannyi gyöke van. Persze $h = f - g$ lesz. Azt kell belátni, hogy $|h| < |g|$ teljesül egyrészt a $|z| = C/\varepsilon$ körön, másrészt a $|z - z_j| < \varepsilon$ körökön.

Mivel h $(n-1)$-ed fokú és minden együtthatója abszolút értékben ≤ 2, ezért $|z| = C/\varepsilon$ esetén

$$\big|h(z)\big| < 2n(C/\varepsilon)^{n-1}.$$

Nézzük most ugyanitt g értékét. Ha egyrészt $C > 2A\varepsilon$, másrészt $C > 2\max_{1\le j\le n-1}|z_j|$, akkor a g-t definiáló n tagú szorzat mindegyik tényezője abszolút értékben $> C/(2\varepsilon)$, és így

$$|g(z)| > \left(\frac{C}{2\varepsilon}\right)^n.$$

Ha $C > n2^n$, akkor ezekből $|h| < |g|$ következik.

Nézzük most a $|z - z_j| < \varepsilon$ köröket. Ezeken $|z| < 1 + \max|z_j| = C_1$, tehát $|h(z)| < 2nC_1^{n-1} = C_2$; ez csak a Z halmaztól függő konstans.

Tekintsük most a g-t definiáló szorzatot. Ennek az egyik tényezője abszolút értékben pontosan ε. A többi $|z - z_j|$ pedig $> \delta - \varepsilon > \delta/2$. Végül az első tényező $|z - A| > A - C_1 > A/2$, ha $A > 2C_1$. Ekkor tehát

$$|g(z)| > (A/2)\varepsilon(\delta/2)^{n-2} = C_3 A\varepsilon.$$

Így avégett, hogy $|h| < |g|$ fennálljon a kis körökön, elégséges, hogy $C_3A\varepsilon \ge C_2$ legyen. Legyen tehát $A = C_2/(C_3\varepsilon)$. Ezek után a C-re tett feltevések a

$$C > \max\left(n2^n, 2C_2/C_3, 2\max|z_j|\right)$$

formát öltik. Ezzel a feladat első felét beláttuk.

Megjegyezzük, hogy a kis körökhöz kell nagy A érték, és persze nem várható, hogy f legnagyobb gyöke ennél kisebb lesz. Az első okfejtés (a becslés a nagy körön) sokkal kisebb számra is működne. Fontos, hogy a z_j számok mind különbözők: ha például mindegyik 0, akkor, mivel $\left|\prod_{j=1}^{n-1} x_j\right| \ge 1$, ezért $|x_0| > \varepsilon^{-n}$. Az az állítás, hogy minden ε-hoz van ilyen algebrai szám, az x_0 becslése nélkül, Motzkin tétele 1947-ből.

b) Vegyünk olyan z_j valós számokat, hogy $\sum_{j=1}^{n-1} z_j = 0$ és $\sum_{j=1}^{n-1} z_j^2 = 1/2$. Legyen ezután $x_j = z_j + \delta_j$, ahol tehát $|\delta_j| < \varepsilon$. Legyen $\sigma = \sum_{j=1}^{n-1}\delta_j$, amire $|\sigma| < n\varepsilon$. Legyen végül $x_0 = m - \sigma$. Ekkor $m = \sum_{j=0}^{n-1} x_j$ az összes konjugált összege, tehát egész szám.

Szintén egész szám lesz $\sum_{j=0}^{n-1} x_j^2$, és így egész szám lesz

$$\sum_{j=0}^{n-1} x_j^2 - m^2 = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}(\delta_j^2 + 2z_j\delta_j) + \sigma^2 - 2m\sigma$$

is. Itt

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(\delta_j^2 + 2|z_j\delta_j|\right) + \sigma^2 < (n^2+n)\varepsilon^2 + 2\varepsilon\sum_{j=1}^{n-1}|z_j| < \frac{1}{4},$$

ha ε elég kicsi. Ekkor tehát $|2m\sigma| > 1/4$, azaz $|m| > 1/(8\sigma) > 1/(8n\varepsilon)$.

Érkezett 7 dolgozat. Helyes Juhász András, Máthé András, Terpai Tamás és Zábrádi Gergely megoldása. Csak a b) részt oldotta meg Varjú Péter. Részben hibás, részben nem értékelhető két dolgozat.

4. feladat (Totik Vilmos). *Legyenek* $\{a_{n,1},\dots,a_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ *egész számok úgy, hogy* $a_{n,i} \ne a_{n,j}$ *ha* $1 \le i < j \le n$, $n = 2,3,\dots$, *és jelölje* $\langle y\rangle \in [0,1)$ *az* y *valós szám törtrészét. Mutassuk meg, hogy ekkor van olyan* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *valós sorozat, hogy az* $\langle a_{n,1}x_n\rangle,\dots,\langle a_{n,n}x_n\rangle$ *számok aszimptotikusan egyenletesen oszlanak el a* $[0,1]$ *intervallumon.*

Megoldás. (Juhász András). Legyen $m \in \mathbb{Z}$ és $n \geq 1$ esetén

$$\varphi_{m,n}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i m a_{n,k} x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Mivel $a_{n,k} \in \mathbb{Z}$, $1 \leq k \leq n$, ezért bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\varphi_{m,n}(x+1) = \varphi_{m,n}(x)$ és $\varphi_{m,n}(x) = \overline{\varphi_{-m,n}(x)}$. A Weil-kritérium miatt elég találni egy olyan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ valós sorozatot, melyre $m \neq 0$ esetén $\lim_{n\to\infty} \varphi_{m,n}(x_n) = 0$. Mivel $\varphi_{-m,n}(x_n) = \overline{\varphi_{m,n}(x_n)}$, ezért elég olyan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot találni, amelynél $\lim_{n\to\infty} \varphi_{m,n}(x_n) = 0$, ha $m > 0$.

Az $a_{n,i} \neq a_{n,j}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ feltétel miatt a $\varphi_{m,n}$ trigonometrikus polinom minden Fourier-együtthatója 0 vagy $\frac{1}{n}$, továbbá az $\frac{1}{n}$ együtthatók száma $m \neq 0$ esetén n, így a Parseval-formula miatt

$$\int_0^1 \left|\varphi_{m,n}(x)\right|^2 dx = n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Ebből viszont

$$\int_0^1 \left[\sum_{m=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left|\varphi_{m,n}(x)\right|^2\right] dx = \lfloor\sqrt{n}\rfloor\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

ahonnan következik, hogy létezik olyan $x_n \in [0,1]$, melyre $\sum_{m=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \left|\varphi_{m,n}(x_n)\right|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Tehát

$$\left|\varphi_{1,n}(x_n)\right|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \left|\varphi_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor,n}(x_n)\right|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Tehát $n \geq (m+1)^2$ esetén $\left|\varphi_{m,n}(x_n)\right|^2 \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, ahonnan $\lim_{n\to\infty} \varphi_{m,n}(x_n) = 0$ ha $m > 0$.

Megjegyezzük, hogy a fenti megoldás, továbbá Csóka Endre, Varjú Péter és Zábrádi Gergely megoldásai is – anélkül, hogy ezt célul tűzték volna ki – becslésre vezet a $D_n = \sup_{0\leq x\leq 1}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I\{0 \leq \langle a_{n,k}x_n\rangle < x\} - x\right|$ diszkrepancia rendjére: $D_n = O\big(1/\sqrt{n}\big)$.

Érkezett 9 dolgozat. Helyes Csóka Endre, Juhász András, Máthé András, Pálvölgyi Dömötör, Terpai Tamás, Varjú Péter és Zábrádi Gergely megoldása. Nehezen követhető, de lényegében jó Vizer Máté megoldása. Nem értékelhető egy dolgozat.

5. feladat (Simányi Nándor és Szász Domokos). *Legyen $d > 1$ egész szám, és $0 < r < 1/2$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik véges sok (csak az adott d és r számoktól függő) nem nulla vektor az $\mathbb{R}^d$ euklideszi térben azzal a tulajdonsággal, hogy amennyiben egy $\mathbb{R}^d$-beli egyenes távolsága a $\mathbb{Z}^d$ egész rácstól legalább r, úgy ez az egyenes merőleges e véges sok vektor valamelyikére.*

1. megoldás (Terpai Tamás). Jelölje $\|x\|$ az x legközelebbi egésztől való távolságát. Legyen továbbá $e(y) = e^{2\pi i y}$, $\Delta = \frac{r}{\sqrt{d}}$, $\varepsilon = \frac{1}{2}\big(\frac{r}{2\sqrt{d}}\big)^d$ és $f(x) = \max\big\{0, 1 - \frac{\|x\|}{\Delta}\big\}$. Ekkor az f függvény 1 szerint periodikus és $k \neq 0$ esetén k-adik Fourier-együtthatója

$$a_k = \int_0^1 f(x)e(-kx)\,dx = \int_{-\Delta}^{\Delta} f(x)e(-kx)\,dx = \int_0^{\Delta}\left(1 - \frac{\|x\|}{\Delta}\right)\left[e(-kx) + e(kx)\right] dx$$

$$= \int_0^{\Delta}\left(1 - \frac{x}{\Delta}\right) 2\cos 2\pi kx\,dx = 2\left[\frac{\sin 2\pi kx}{2\pi k}\right]_0^{\Delta} - \frac{2}{\Delta}\left[\frac{x\sin 2\pi kx}{2\pi k} + \frac{\cos 2\pi kx}{(2\pi k)^2}\right]_0^{\Delta}$$

$$= \frac{\sin 2\pi k\Delta}{\pi k} - 0 - \frac{2}{\Delta}\frac{\Delta \sin 2\pi k\Delta}{2\pi k} - \frac{2}{\Delta}\frac{\cos 2\pi k\Delta}{(2\pi k)^2} + 0 + \frac{2}{\Delta}\frac{1}{(2\pi k)^2}$$

$$= \frac{1-\cos 2\pi k\Delta}{2\pi^2\Delta k^2} = O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

így a Fourier-sor domináltan egyenletesen konvergens, tehát előállítja f-et és ezért van olyan n pozitív egész, melyre $\left|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} a_k e(kx)\right| = \left|\sum_{|k|>n} a_k e(kx)\right| < \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}$.

Legyen egyenesünk megadva a $t \mapsto (\alpha_1 t + \beta_1, \dots, \alpha_d t + \beta_d)$ paraméterezéssel, ahol $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \neq (0, \dots, 0)$. Mivel ennek távolsága a $\mathbb{Z}^d$ rácstól legalább r, ezért

$$r^2 \le \sum_{j=1}^{d} \|\alpha_j t + \beta_j\|^2,$$

tehát valamely j-re $\|\alpha_j t + \beta_j\| \ge \frac{r}{\sqrt{d}} = \Delta$. Így

$$\left|\prod_{j=1}^{d}\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k e\big(k(\alpha_j t + \beta_j)\big)\right)\right| \le \prod_{j=1}^{d}\left(\left|f(\alpha_j t + \beta_j)\right| + \varepsilon\right) \le (1+\varepsilon)^{d-1}\varepsilon < 2^d\varepsilon$$

minden valós t-re. Ekkor viszont minden $N > 0$ esetén

$$(2^d\varepsilon)^2 N > \int_0^N \left|\prod_{j=1}^{d}\sum_{k=-n}^{n} a_k e\big(k[\alpha_j t + \beta_j]\big)\right|^2 dt$$

$$= \int_0^N \left|\sum_{k_1,\dots,k_d=-n}^{n} a_{k_1}\cdots a_{k_d} e\big(k_1[\alpha_1 t + \beta_1]\big)\cdots e\big(k_d[\alpha_d t + \beta_d]\big)\right|^2 dt$$

$$= \int_0^N \left|\sum_{k_1,\dots,k_d=-n}^{n} a_{k_1}\cdots a_{k_d}\, e\left(t\sum_{j=1}^{d} k_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{d} k_j\beta_j\right)\right|^2 dt$$

$$= \int_0^N \left[\sum_{k_1,\dots,k_d=-n}^{n} a_{k_1}\cdots a_{k_d} e\left(t\sum_{j=1}^{d} k_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{d} k_j\beta_j\right)\right]$$

$$\times \left[\sum_{k_1,\dots,k_d=-n}^{n} \overline{a}_{k_1}\cdots \overline{a}_{k_d}\, \overline{e\left(t\sum_{j=1}^{d} k_j\alpha_j + \sum_{j=1}^{d} k_j\beta_j\right)}\right] dt$$

$$= \int_0^N \sum_{k_1,\dots,k_d=-n}^{n}\ \sum_{l_1,\dots,l_d=-n}^{n} a_{k_1}\cdots a_{k_d} a_{l_1}\cdots a_{l_d}\, e\left(t\sum_{j=1}^{d}(k_j - l_j)\alpha_j + \sum_{j=1}^{d}(k_j - l_j)\beta_j\right) dt$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_d,l_1,\dots l_d=-n}^{n} a_{k_1}\cdots a_{k_d} a_{l_1}\cdots a_{l_d} \int_0^N e\left(t\sum_{j=1}^{d}(k_j - l_j)\alpha_j + \sum_{j=1}^{d}(k_j - l_j)\beta_j\right) dt$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\dots,k_d,l_1,\dots l_d=-n \\ \sum_{j=1}^{d}(k_j-l_j)\alpha_j \neq 0}}^{n} a_{k_1}\cdots a_{k_d} a_{l_1}\cdots a_{l_d} \frac{e\big(N\sum_{j=1}^{d}(k_j - l_j)\alpha_j\big) - 1}{2\pi i\sum_{j=1}^{d}(k_j - l_j)\alpha_j} e\left(\sum_{j=1}^{d}(k_j - l_j)\beta_j\right)$$

$$+N \sum_{\substack{k_1,\dots,k_d,l_1,\dots l_d=-n \\ \sum_{j=1}^d (k_j-l_j)\alpha_j=0}}^{n} a_{k_1}\cdots a_{k_d} a_{l_1}\cdots a_{l_d}\, e\Big(\sum_{j=1}^{d}(k_j-l_j)\beta_j\Big)$$

$$= O(1) + N \sum_{\substack{k_1,\dots,k_d,l_1,\dots l_d=-n \\ \sum_{j=1}^d (k_j-l_j)\alpha_j=0}}^{n} a_{k_1}\dots a_{k_d} a_{l_1}\dots a_{l_d}\, e\Big(\sum_{j=1}^{d}(k_j-l_j)\beta_j\Big)$$

ha $N\to\infty$, tehát N együtthatója az egyenlőség jobb oldalán legfeljebb $2^{2d}\varepsilon^2$. Másrészt ezen együtthatóban az olyan tagok összege, amelyekben minden j-re $k_j=l_j$,

$$\sum_{k_1,\dots,k_d=-n}^{n} a_{k_1}\cdots a_{k_d} a_{k_1}\cdots a_{k_d}\, e(0) = \prod_{j=1}^{d}\sum_{k=-n}^{n} a_k^2 e(0)$$

$$\geq a_0^{2d} = \Big(\int_0^1 f(x)\,dx\Big)^{2d} = \Delta^{2d} = \frac{r^{2d}}{d^d},$$

így ha $\varepsilon^2 2^{2d} < \frac{r^{2d}}{d^d}$, akkor $\varepsilon < r^d/\big(2\pi\sqrt{d}\big)^d$. Az összeg persze más összeadandókat is tartalmaz, azaz vannak olyan $k_1,\dots,k_d,l_1,\dots l_d\in[-n,n]$ egészek, melyekre $(k_1,\dots,k_d)\neq(l_1,\dots,l_d)$ és $\sum_{j=1}^d (k_j-l_j)\alpha_j=0$, tehát $\lambda_j=k_j-l_j\in\mathbb{Z}$ jelöléssel $(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\neq(0,\dots,0)$ és $\sum_{j=1}^d \lambda_j\alpha_j=0$. Ha tehát egyenesünk $\mathbb{Z}^d$-től legalább r távolságra van, akkor merőleges a $\big\{(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\mid(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\neq(0,\dots,0), -2n\leq\lambda_j\leq 2n \text{ minden } j\text{-re}\big\}$ nemnulla vektorok egyikére.

2. megoldás (Ráth Balázs). Megmutatjuk, hogy az $R=R(d,r)=3^{d-1}/r$ szám mellett a $\big(\mathbb{Z}^d\cap B(0,R)\big)\setminus\{0\}$ vektorhalmaz rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, ahol $B(0,R)$ az origó középpontú R sugarú nyitott gömb az $\mathbb{R}^d$-ben. A továbbiakban vektortéren $\mathbb{R}^d$ altereit értjük, norma alatt pedig a $\|\,.\,\|=\|\,.\,\|_2$ norma megszorítását a megfelelő altérre.

Legyen V egy vektortér és $H\subseteq V$ legyen V olyan részhalmaza, mely a vektorösszeadásra nézve csoportot alkot. Ekkor, ha H diszkrét, akkor jelölje $\rho(H)$ a legrövidebb nemnulla H-beli vektor hosszát. Ha $\mathrm{lin}(H)=V$, akkor jelölje $\mu(H)=\sup_{v\in V}\mathrm{dist}(v,H)$, ahol $\mathrm{dist}(v,H):=\inf_{x\in H}\|v-x\|$. Megjegyezzük, hogy $\mathrm{lin}(H)=V$ esetén $\mu(H)<\infty$, illetve hogy H topológiai lezártja, $\overline{H}$ is részcsoportja V-nek. Igaz továbbá az is, hogy $\mu(\overline{H})=\mu(H)$ és $\overline{H}$ esetén használhatnánk infimum helyett minimumot és szuprémum helyett maximumot μ definíciójában. Mivel V-ről feltettük, hogy $\mathbb{R}^d$ altere, így V duális V^* tere azonosítható V-vel a szokásos módon. Továbbá, ha $W\leq V$ altér, akkor a V/W faktortér azonosítható $W^\perp$-el, azaz W-nek a V-beli ortogonális kiegészítőjével.

Legyen $W\leq V$ altér, $H\subseteq V$ részcsoport. Jelölje $H/W^\perp$ a H halmaznak W-re vonatkozó merőleges vetületét, azaz W-nek egy x elemére $x\in H/W^\perp$, ha létezik olyan $y\in W^\perp$, hogy $(x+y)\in H$. Könnyen látható, hogy $H/W^\perp$ is részcsoportja W-nek. Ha $H\subseteq V$ részcsoport, akkor H-nak a H^* duálisa álljon mindazon $v^*\in V^*=V$ vektorokból, amikre minden $v\in H$ esetén igaz, hogy $\langle v,v^*\rangle\in\mathbb{Z}$. Például $\mathbb{Z}^d\subseteq\mathbb{R}^d$ esetén $(\mathbb{Z}^d)^*=\mathbb{Z}^d$.

Legyenek V, W, H olyanok, mint eddig. Ekkor $H/W^\perp\subseteq W$, így jelölje $(H/W^\perp)^*$ a $H/W^\perp$-nek a W-beli duálisát.

1. állítás. $(H/W^\perp)^* = H^*\cap W$.

Bizonyítás. Világos, hogy $w^* \in (H/W^\perp)^* \iff w^* \in W$ és $\forall x \in H/W^\perp$-re $\langle w^*, x\rangle \in \mathbb{Z} \iff w^* \in W$ és $\forall$ olyan $x \in W$-re, amihez $\exists y \in W^\perp$, hogy $(x+y) \in H$, igaz, hogy $\langle w^*, x\rangle \in \mathbb{Z} \iff w^* \in W$ és $\forall$ olyan $x \in W$-re és $y \in W^\perp$-re, amire $(x+y) \in H$, $\langle w^*, x\rangle \in \mathbb{Z} \iff w^* \in W$ és $\forall$ olyan $x \in W$-re és $y \in W^\perp$-re, amire $(x+y) \in H$, igaz, hogy a belső szorzat $\langle w^*, x+y\rangle \in \mathbb{Z} \iff w^* \in W$ és $\forall v \in H$-ra $\langle w^*, v\rangle \in \mathbb{Z} \iff w^* \in H^* \cap W$.

2. állítás. *Legyen $H \subseteq V$, $\overline{H} = H$ és H nem diszkrét. Ekkor létezik olyan $\tilde{v} \in V$, hogy $\|\tilde{v}\| = 1$ és $\mathbb{R}\tilde{v} \subseteq H$, azaz $\forall t \in \mathbb{R}$-re $t\tilde{v} \in H$.*

Bizonyítás. Létezik olyan $v_i \in H$, $i \in \mathbb{N}$, sorozat, hogy $\|v_i\| \to 0$, ha $i \to \infty$. Ekkor a $\frac{v_i}{\|v_i\|}$ vektorok a V-beli egységgömb felszínén vannak, ami kompakt halmaz, így ennek a sorozatnak van torlódási pontja, mondjuk $\tilde{v}$. Ahhoz, hogy igazoljuk, hogy $\forall t \in \mathbb{R}$-re $t\tilde{v} \in H$, elég megmutatni, hogy $\forall \alpha \in [0,1]$-re $\alpha\tilde{v} \in H$, mivel H csoport. Ehhez pedig elegendő azt bizonyítani, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik $v \in H$, hogy $\|\alpha\tilde{v} - v\| \le \varepsilon$, hiszen H zárt.

Legyen $i \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\|v_i\| \le \varepsilon/2$ és $\left\|\frac{v_i}{\|v_i\|} - \tilde{v}\right\| \le \varepsilon/2$. Ekkor $\left\lfloor \frac{\alpha}{\|v_i\|} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$, és így $\left\lfloor \frac{\alpha}{\|v_i\|} \right\rfloor v_i \in H$, és ezért

$$\begin{aligned}
\left\|\alpha\tilde{v} - \left\lfloor \frac{\alpha}{\|v_i\|} \right\rfloor v_i\right\| &\le \left\|\alpha\tilde{v} - \alpha\frac{v_i}{\|v_i\|}\right\| + \left\|\alpha\frac{v_i}{\|v_i\|} - \left\lfloor \frac{\alpha}{\|v_i\|} \right\rfloor v_i\right\| = \\
&= \alpha\left\|\tilde{v} - \frac{v_i}{\|v_i\|}\right\| + \left(\frac{\alpha}{\|v_i\|} - \left\lfloor \frac{\alpha}{\|v_i\|} \right\rfloor\right)\|v_i\| \le \\
&\le \left\|\tilde{v} - \frac{v_i}{\|v_i\|}\right\| + \|v_i\| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

3. állítás. *Legyen $H \subseteq V$, $\overline{H} = H$. Ekkor van olyan $W \le V$ altér, hogy $W \subseteq H$ és H/W diszkrét részcsoportja $W^\perp$-nek.*

Bizonyítás. Legyen W a legbővebb H-beli altér. Ilyen nyilvánvalóan létezik. Ekkor H/W diszkrét, mivel ha nem így lenne, akkor a 2. állítás szerint lenne olyan $\tilde{v} \in W^\perp$, $\|\tilde{v}\| = 1$, hogy ha $\mathrm{lin}(\tilde{v}) \subseteq H/W$, akkor teljesülne $\mathrm{lin}(\tilde{v}) + W \subseteq H$, ami ellentmond W maximalitásának.

4. állítás. *Legyen $\Lambda \subseteq V$ rács és $W \le V$ altér. Ekkor $\Lambda \cap W$ pontosan akkor rács W-ben, ha Λ/W rács V/W-ben.*

Bizonyítás. Legyen $\pi : V \to V/W$ a faktor leképezés. Világos, hogy a V-beli Λ rács $\pi(\Lambda)$ képe torziómentes és végesen generált Abel-csoport (tehát algebrailag a $\mathbb{Z}$ egy véges direkt össszegével izomorf), ami kifeszíti a V/W képteret. Az is jól ismert, hogy

$$(*) \qquad \mathrm{rank}(\Lambda \cap W) + \mathrm{rank}\left(\pi(\Lambda)\right) = \mathrm{rank}(\Lambda) = \dim V,$$

$$(**) \qquad \dim W + \dim(V/W) = \dim V.$$

Itt a $(*)$ bal oldalának első tagja pontosan akkor egyezik meg a $(**)$ bal oldala első tagjával, amikor a $\Lambda \cap W$ metszet egy rács W-ben, valamint a bal oldalak második tagjai pontosan akkor egyeznek meg, ha a $\pi(\Lambda)$ kép egy rács V/W-ben.

Azt tudjuk, hogy ha $\Lambda \subseteq V$ rács, akkor $\Lambda^* \subseteq V$ is rács és $\Lambda^{**} = \Lambda$.

5. állítás. *Ha* $\dim(V) = n$, *akkor* $\mu(\Lambda)\rho(\Lambda^*) \le 3^n$.

Bizonyítás. A bizonyítást n-re való teljes indukcióval végezzük. Tudjuk, hogy $n = 1$ esetén $\mu(\Lambda) = \frac{1}{2}\frac{1}{\rho(\Lambda^*)}$. Most legyen $n > 1$ tetszőleges. Legyen v a Λ^* egyik legrövidebb nemnulla vektora. Ekkor $\|v\| = \rho(\Lambda^*)$. Jelölje Λ^*/v a Λ^*-nak a $v^\perp$-re való vetületét. Ekkor Λ^*/v rács lesz, mivel $\mathrm{lin}(\Lambda^*/v) = v^\perp$ és mivel Λ^*/v diszkrét, sőt az is igaz, hogy $\rho(\Lambda^*/v) \ge \frac{1}{2}\rho(\Lambda^*)$. Ugyanis, ha nem így lenne, akkor lenne olyan $x \in v^\perp$, hogy valamilyen $\beta \in \mathbb{R}$-re $(x + \beta v) \in \Lambda^*$ és $0 < \|x\| < \frac{1}{2}\|v\|$. Jelölje $[\beta]$ a β-hoz legközelebbi egész számot. Ekkor $\left|\beta - [\beta]\right| \le \frac{1}{2}$. Most $x + (\beta - [\beta]v) \in \Lambda^*$ és $\left\|x + (\beta - [\beta])v\right\| \le \|x\| + \frac{1}{2}\|v\| < \|v\|$, ami ellentmondás, ugyanis $x \perp v$ és $x \ne 0$ miatt $x + (\beta - [\beta])v \ne 0$, és ez ellentmond annak, hogy v a legrövidebb Λ^*-beli nemnulla vektor. Tehát Λ^*/v rács $v^\perp$-ben. Így $(\Lambda^*/v)^*$ is rács lesz $v^\perp$-ben. Az 1. állítás és a $\Lambda^{**} = \Lambda$ egyenlőség felhasználásával kapjuk, hogy $(\Lambda^*/v)^* = \Lambda \cap v^\perp$. Tehát $\Lambda \cap v^\perp$ rács $v^\perp$-ben. A v-vel való skaláris szorzás additív csoporthomomorfizmus Λ-ból $\mathbb{Z}$-be és szürjektív, mivel ha csak $k\mathbb{Z}$ lenne a kép, akkor $\frac{1}{k}v \in \Lambda^*$ lenne, ami ellentmond v hossza minimalitásának. Ezek szerint minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén a V-beli $\langle x, v\rangle = k$ hipersík tartalmazza $\Lambda \cap v^\perp$-nek egy eltoltját. Így ha egy x pont rajta van ezen a hipersíkon, akkor van hozzá olyan $y \in \Lambda$, hogy $\langle y, v\rangle = k$ és $\|x - y\| \le \mu(\Lambda \cap v^\perp)$. Továbbá az ilyen hipersíkok $\frac{1}{\|v\|} = \frac{1}{\rho(\Lambda^*)}$ széles csíkokra vágják V-t. Így aztán tetszőleges $x \in V$-re $\mathrm{dist}(x, \Lambda) \le \frac{1}{2}\frac{1}{\rho(\Lambda^*)} + \mu(\Lambda \cap v^\perp)$. Ebből következik, hogy $\mu(\Lambda) \le \frac{1}{\rho(\Lambda^*)} + \frac{3^{n-1}}{\rho(\Lambda^*/v)} \le \frac{1+2\cdot 3^{n-1}}{\rho(\Lambda^*)} \le \frac{3^n}{\rho(\Lambda^*)}$.

6. állítás. *Legyen* $H \subseteq V$ *tetszőleges csoport, amire* $0 < \mu(H) < \infty$. *Ekkor* $0 < \rho(H^*) < \infty$ *és teljesül* $\mu(H)\rho(H^*) \le 3^{\dim(V)}$.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy $\mu(H) < \infty \iff \mathrm{lin}(H) = V \iff H^*$ diszkrét. $\rho(H^*)$ értelmes és $0 < \rho(H^*)$, illetve $\mu(H) = \mu(H^*)$ és $\overline{H}^* = H^*$. Szintén egyszerűen látszik, hogy $\mu(\overline{H}) = 0 \iff \overline{H} = V \iff \overline{H}^* = \{0\} \iff \rho(\overline{H}^*) = \infty$. Így $\mu(H) > 0$ miatt $\rho(H^*) < \infty$. Legyen továbbá $W \le V$ az az altér, amit a 3. állítás biztosít. Mivel H/W diszkrét és $\mathrm{lin}(H) = V$, így $\mathrm{lin}(H/W) = W^\perp$, tehát H/W rács. Természetesen $\mu(H) = \mu(H/W)$. Továbbá az 1. állítás miatt $(H/W)^* = H^* \cap W^\perp$, de $W \subseteq H$ miatt $H^* \subseteq W^\perp$. Mivel H/W és $(H/W)^*$ rácsok, így az 5. állítást alkalmazzuk rájuk: $\mu(H/W)\rho\big((H/W)^*\big) \le 3^{\dim(W^\perp)} \le 3^{\dim(V)}$.

Most visszatérünk a feladat állításának bizonyításához. Legyen egyenesünk az $a\mathbb{R} + b$, ahol $a \ne 0$ és $\langle b, a\rangle = 0$, tehát $b \in a^\perp$. Ekkor $r \le \mathrm{dist}(a\mathbb{R} + b, \mathbb{Z}^d) = \mathrm{dist}(b, \mathbb{Z}^d/a) \le \mu(\mathbb{Z}^d/a)$. Mivel $(\mathbb{Z}^d)^* = \mathbb{Z}^d$, így $(\mathbb{Z}^d/a)^* = \mathbb{Z}^d \cap a^\perp$. Tehát $\rho(\mathbb{Z}^d \cap a^\perp) \le 3^{d-1}/\mu(\mathbb{Z}^d/a) \le 3^{d-1}/r$, így van olyan $3^{d-1}/r$-nél rövidebb nemnulla $\mathbb{Z}^d$-beli vektor, ami merőleges a-ra. Ezt akartuk belátni.

Érkezett 8 dolgozat. Helyes Juhász András, Pálvölgyi Dömötör, Ráth Balázs, Terpai Tamás, Varjú Péter, Vizer Máté és Zábrádi Gergely megoldása. Nem értékelhető egy dolgozat.

6. feladat (Névai Pál és Totik Vilmos). *Igazoljuk, hogy az* $n = x_n(x_{n-1} + x_n + x_{n+1})$, $n = 1, 2, \ldots$, $x_0 = 0$, *rekurziónak egyetlen nemnegatív megoldása van.*

1. megoldás (Lovas Rezső László, versenyen kívül, és a kitűzők). Először megmutatjuk, hogy

$$(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n} \le x_n \le \sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ha ugyanis $x_n > \sqrt{n}$, akkor $x_{n-1}, x_{n+1} \geq 0$ miatt $n = x_n(x_{n-1} + x_n + x_{n+1}) \geq x_n^2 > n$, ami lehetetlen. Ha viszont $x_n < (\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$, akkor

$$\begin{aligned} x_n(x_{n-1} + x_n + x_{n+1}) &< (\sqrt{2}-1)\sqrt{n}\Big[\sqrt{n-1} + (\sqrt{2}-1)\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\Big)\Big] \\ &< (\sqrt{2}-1)\sqrt{n}\Big[2\sqrt{n} + (\sqrt{2}-1)\sqrt{n}\Big] = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)n = n, \end{aligned}$$

ami ismét ellentmond a feltételnek, tehát $x_n \geq (\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$ is teljesül. Ezért az $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatról áttérünk az $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra az

$$y_0 := 1, \quad y_n := \frac{x_n}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1,$$

előírással, aminek eredményeképpen

$$\left(\sqrt{2}-1\right) \leq y_n \leq 1 \quad \text{és} \quad y_n\left(y_{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n}} + y_n + y_{n+1}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) = 1$$

teljesül. Tehát y eleme az $y : \mathbb{N} \longrightarrow \left[\sqrt{2}-1, 1\right]$ sorozatok terének, amely a szuprémum normával teljes metrikus tér; ezt a teret az $l_\infty\left[\sqrt{2}-1, 1\right]$ szimbólummal jelöljük. Definiálunk egy ϕ leképezést, amely az ezen térbeli sorozatokhoz egy másik valós sorozatot rendel: $\phi : \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \left\{(\phi y)_n\right\}_{n\in\mathbb{N}} =: \{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mégpedig úgy, hogy $y'_0 = 1$, és $n \geq 1$ esetén

$$y'_n = \sqrt{\left(\frac{y_{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n}} + y_{n+1}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}\right)^2 + 1} - \frac{y_{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n}} + y_{n+1}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}.$$

Megmutatjuk, hogy ϕ az $l_\infty\left[\sqrt{2}-1, 1\right]$ teret önmagába képezi le, kontrakció, és egy sorozat pontosan akkor fixpontja, ha a vizsgált rekurziónak megoldása.

Annak belátásához, hogy $\phi : l_\infty\left[\sqrt{2}-1, 1\right] \longrightarrow l_\infty\left[\sqrt{2}-1, 1\right]$, definiáljuk az $f : [0,1] \ni t \longmapsto f(t) = -t + \sqrt{t^2+1} \in \mathbb{R}$ függvényt, amelyre

$$y'_n = f\left(\frac{y_{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n}} + y_{n+1}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}\right).$$

Az argumentumban lévő kifejezésre teljesül, hogy

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{y_{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n}} + y_{n+1}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2} \leq 1.$$

Az f függvény szigorúan monoton csökkenő, mivel

$$f'(t) = -1 + \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} < 0, \quad t \in [0,1],$$

továbbá $f(1) = \sqrt{2}-1$ és $f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 1$, tehát $y'_n \in \left[\sqrt{2}-1, 1\right]$.

A ϕ operátor kontrakció voltának bizonyításához legyen $y, z \in l_\infty[\sqrt{2}-1,1]$. Az y'_n és z'_n távolságára a következő becslést kapjuk a Lagrange-féle középértéktétel segítségével:

$$|y'_n - z'_n| =$$

$$= \left| f\left(\frac{y_{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n}} + y_{n+1}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}\right) - f\left(\frac{z_{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n}} + z_{n+1}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{2}|f'(\xi)|\left|y_{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n}} + y_{n+1}\sqrt{1+\frac{1}{n}} - z_{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n}} - z_{n+1}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right|$$

$$= |f'(\xi)|\left|\frac{y_{n-1}-z_{n-1}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{n}} + \frac{y_{n+1}-z_{n+1}}{2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right|$$

$$\leq |f'(\xi)|\left(\left|\frac{y_{n-1}-z_{n-1}}{2}\right|\sqrt{1-\frac{1}{n}} + \left|\frac{y_{n+1}-z_{n+1}}{2}\right|\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$$

$$\leq |f'(\xi)|\frac{\|y-z\|}{2}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) \leq |f'(\xi)| \cdot \|y-z\|,$$

ahol $\xi \in \left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$. Az f mégegyszeri deriválásával ellenőrizhető, hogy f' szigorúan monoton növekvő, tehát

$$|f'(\xi)| \leq \left|f'\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| < 1.$$

Ezzel azt is beláttuk, hogy ϕ kontrakció.

Vegyük észre végül, hogy y'_n a pozitív gyöke az

$$y'_n\left(y_{n-1}\sqrt{1-\frac{1}{n}} + y'_n + y_{n+1}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) = 1$$

másodfokú egyenletnek, és így az $y'_n = y_n$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden n-re, ha $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ megoldása a vizsgált rekurziónak.

Mivel $l_\infty[\sqrt{2}-1,1]$ teljes metrikus tér, ezért a Banach-féle fixponttétel szerint a ϕ kontrakciónak egyetlen fixpontja, és így a rekurziónak egyetlen megoldása van.

2. megoldás (Varjú Péter és Terpai Tamás dolgozatai alapján).

Létezés (Varjú Péter). Legyen $x_1 = t$. A sorozat többi tagját az $x_{n+1} = \frac{n}{x_n} - x_n - x_{n-1}$ képlet alapján egyértelműen kiszámíthatjuk. (Feltéve, hogy nem kell 0-val osztani.) A sorozat tagjait $x_n(t)$ függvényeknek tekintjük.

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy léteznek olyan

$$0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \beta_3 < \beta_2 < \beta_1 = 1$$

számok, hogy pontosan akkor teljesül $x_i(t) \in [0, \sqrt{i}]$ minden $i \leq k$-ra, ha $t \in [\alpha_k, \beta_k]$. Továbbá ha k páratlan, akkor x_k, és $x_k + x_{k-1}$ is monoton növő $[\alpha_k, \beta_k]$-n, $x_k(\alpha_k) = 0$ és $x_k(\beta_k) = \sqrt{k}$, míg ha páros, akkor monoton csökkenőek, $x_k(\alpha_k) = \sqrt{k}$ és $x_k(\beta_k) = 0$. Továbbá x_k folytonos $[\alpha_k, \beta_k]$-n.

Ha $k = 1$, akkor $\alpha_1 = 0$ és $\beta_1 = 1$ választásával mindez triviális. Tegyük fel, hogy k-ra igaz az állítás, és bizonyítjuk $(k+1)$-re. Mivel a másik eset hasonlóan tárgyalható, feltesszük, hogy $k+1$ páros.

Mivel $x_k + x_{k-1}$ monoton növő és $x_{k+1}(t) = \frac{k}{x_k(t)} - x_k(t) - x_{k-1}(t)$, így ha $\alpha_k < \alpha_{k+1} < \beta_{k+1} \le \beta_k$, akkor x_{k+1} folytonos $[\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$-en.

Mivel x_k monoton növő, x_{k+1} monoton csökkenése következik $x_{k+1} + x_k$ monoton csökkenéséből, ezért elegendő ez utóbbit igazolni. Ha $\frac{k}{x_k} + x_k$ monoton csökkenő és $x_k + x_{k-1}$ monoton növekedő, akkor következik, hogy $x_k + x_{k+1}$ monoton csökkenő. Ezért elegendő azt igazolni, hogy $\frac{k}{x_k} + x_k$ monoton csökken. Ehhez használjuk a következő segédfüggvényt. Legyen $f : [0, \sqrt{k}] \ni u \mapsto \frac{k}{u} + u$. Ekkor $f'(u) = -\frac{k}{u^2} + 1 < 0$ pontosan akkor, ha $u < \sqrt{k}$. Ez alapján $\frac{k}{x_k} + x_k$ monoton csökkenő $(\alpha_k, \beta_k]$-n. Ekkor $\lim_{t \to \alpha_k + 0} x_{k+1}(t) = \infty$, és így

$$x_{k+1}(\beta_k) = \frac{k}{x_k(\beta_k)} - x_k(\beta_k) - x_{k-1}(\beta_k) = -x_{k-1}(\beta_k) < 0.$$

Mivel x_{k+1} folytonos, és monoton $(\alpha_k, \beta_k]$-n, nyilván létezik $\alpha_k < \alpha_{k+1} < \beta_{k+1} \le \beta_k$ (a $\le$ a $k = 1$ esetre vonatkozik, máskor $<$ van), hogy $x_{k+1}(\alpha_{k+1}) = \sqrt{k}$ és $x_{k+1}(\beta_{k+1}) = 0$, továbbá, ha $t \in [\alpha_k, \beta_k]$, akkor $0 \le x_{k+1}(t) \le \sqrt{k}$ pontosan akkor teljesül, ha $\alpha_{k+1} \le t \le \beta_{k+1}$. Ezzel beláttuk az állítást $(k+1)$-re.

Olyan t_0 létezik, hogy $\alpha_k < t_0 < \beta_k$ minden $k \ge 1$ esetén. Ekkor $x_k(t_0) \in [0, \sqrt{k}\,]$, $k \ge 1$, így a $0, t_0, x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots$ sorozat a rekurzió egy nemnegatív megoldása.

Egyértelműség (Terpai Tamás). Legyen $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ két nemnegatív megoldása a feladatbeli rekurziónak és legyen $d_n = y_n - x_n$. Ekkor $y_{n+1} = \frac{n}{y_n} - y_{n-1} - y_n$ és $x_{n+1} = \frac{n}{x_n} - x_{n-1} - x_n$ az n-edik rekurziós feltétel alapján, és ezért $d_{n+1} = y_{n+1} - x_{n+1} = \left(\frac{n}{y_n} - y_n\right) - \left(\frac{n}{x_n} - x_n\right) + x_{n-1} - y_{n-1} = (y_n - x_n)f'(\xi_n) - d_{n-1}$ valamely $\xi_n \in [x_n, y_n]$ mellett, ahol $f_n(z) = \frac{n}{z} - z$, $n \in \mathbb{N}$. Így $f_n'(z) = -\frac{n}{z^2} - 1$; mivel pedig $\{x_n\}$ és $\{y_n\}$ nemnegatív sorozatok, $n = x_n(x_{n-1} + x_n + x_{n+1}) \ge x_n^2$, amiből következik, hogy $x_n \le \sqrt{n}$, és ugyanígy $y_n \le \sqrt{n}$, tehát $\xi_n \in [x_n, y_n] \subseteq [0, \sqrt{n}]$, és ezért $f_n'(\xi_n) = -1 - \frac{n}{\xi_n^2} \le -2$. A kezdeti feltétel miatt $d_0 = y_0 - x_0 = 0$. Tehát

$$d_2 = d_1 f_1'(\xi_1) \implies |d_2| \ge 2|d_1|,$$

$$d_3 = d_2 f_2'(\xi_2) - d_1 \implies |d_3| \ge 2|d_2| - |d_1| \ge 2|d_2| - \frac{1}{2}|d_1| = \frac{3}{2}|d_1|,$$

$$d_4 = d_3 f_3'(\xi_3) - d_2 \implies |d_4| \ge 2|d_3| - |d_2| \ge 2|d_3| - \frac{2}{3}|d_3| = \frac{4}{3}|d_3|,$$

és így tovább. Ez a gondolatmenet azt mutatja, hogy

$$|d_n| \ge 2|d_{n-1}| - |d_{n-2}| \ge 2|d_{n-1}| - \frac{n}{n-1}|d_{n-1}|.$$

Tehát

$$|d_n| \ge \frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{4}{3}\frac{3}{2} 2|d_1| = n|d_1|.$$

Másrészt $|d_n| \le 2\sqrt{n}$, és így $|d_1| \le \sqrt{n}/n$ minden $n \ge 1$-re. Innen $d_1 = 0$ következik, de akkor a fentiek alapján mindegyik $d_n = 0$.

Megjegyzés (Totik Vilmos). Tekintsük a $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$, $\deg(p_n) = n$ polinomokat, amelyek a $w(x) = e^{-x^4/4}$ súlyfüggvényre nézve ortogonálisak, azaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)p_m(x)w(x)\,dx = 0 \quad \text{ha } n \neq m, \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} p_n^2(x)w(x)\,dx = 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Ismert, hogy ortogonális polinomok kielégítenek egy háromtagú rekurziót, amelynek alakja jelen esteben $xp_n(x) = a_n p_{n+1}(x) + a_{n-1}p_{n-1}(x)$ valamilyen pozitív számokból álló $\{a_n\}$ sorozattal. Megmutatható (lásd pl. P. Nevai: Orthogonal polynomials associated with $\exp(-x^4)$, in „Second Edmonton Conference in Approximation Theory", *Canadian Math. Soc. Conf. Proc.* **3** (1983), 269.), hogy $x_n = a_n^2$ kielégíti a feladatbeli rekurziót, és így kapható, hogy az egyetlen x_1 érték, amelyre a rekurzió minden tagja pozitív, nem egyéb mint $x_1 = 2\Gamma(3/4)/\Gamma(1/4)$, ahol $\Gamma(\cdot)$ a szokásos gamma függvény.

Érkezett 9 dolgozat. Helyes Ambrus Gergely, Csóka Endre, Máthé András, Terpai Tamás, Varjú Péter, Zábrádi Gergely és (versenyen kívül) Lovas Rezső László megoldása. Hiányos Pálvölgyi Dömötör megoldása. Részben hibás, részben nem értékelhető egy dolgozat.

7. feladat (Krisztin Tibor). *Bizonyítsuk be, hogy ha r nemnegatív folytonos függvény a számegyenesen, akkor létezik olyan nem azonosan nulla $f \in C^1(\mathbb{R})$, amelyre $f'(x) = f\big(x - r\big(f(x)\big)\big)$, $x \in \mathbb{R}$.*

Megoldás (Terpai Tamás dolgozata alapján). Minden $n \neq 2$ egész esetén definiáljuk a $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $g_n(x) = \frac{1}{n}$ minden $x \leq 0$ esetén, ha pedig g_n már definiált, a $\big(-\infty, \frac{k}{n}\big]$ intervallumon valamely $k \geq 0$ egészre, akkor $x \in \big(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\big]$ esetén legyen

$$g_n(x) = g_n\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{k/n}^{x} g_n\left(x - \frac{1}{n} - r\left(g_n\left(x - \frac{1}{n}\right)\right)\right) dt.$$

Könnyű látni, hogy $g_n \in C(\mathbb{R}) \cap C^1\big((0,\infty)\big)$, g_n pozitív, monoton növő,

$$g_n'(x) = g_n\left(x - \frac{1}{n} - r\left(g_n\left(x - \frac{1}{n}\right)\right)\right), \quad x > 0.$$

Ezért $g_n'(x) \geq \frac{1}{n}$, $x > 0$, amiből $g_n(x) \geq \frac{1}{n} + \frac{x}{n}$, $x > 0$ következik. Továbbá

$$\left(e^{-x} g_n(x)\right)' = e^{-x}\left[g_n\left(x - \frac{1}{n} - r\left(g_n\left(x - \frac{1}{n}\right)\right)\right) - g_n(x)\right] \leq 0,$$

így $g_n(x) \leq \frac{1}{n}e^x$ adódik, ha $x > 0$. Tehát létezik egyetlen $t_n \in [\log n, n-1]$ úgy, hogy $g_n(t_n) = 1$. Legyen $f_n(x) = g_n(x + t_n)$, $x \in \mathbb{R}$. Ekkor $f_n \in C(\mathbb{R})$, f_n folytonosan differenciálható $(-\log n, \infty)$-en, $f_n'(x) = f_n\big(x - \frac{1}{n} - r\big(f_n\big(x - \frac{1}{n}\big)\big)\big)$ minden $x > -\log n$ esetén, f_n monoton növő $\mathbb{R}$-en, f_n szigorúan monoton növő $(-\log n, \infty)$-en és $f_n(0) = 1$. Ha $x > -\log n$, akkor $f_n'(x) \leq f_n(x)$ következik, innen pedig $\big(e^{-x}f_n(x)\big)' \leq 0$. Ezért $-\log n \leq x \leq 0$ esetén $e^x \leq f_n(x)$, míg $x \geq 0$ esetén $f_n(x) \leq e^x$.

Legyen $A > 0$. Minden $x \in [-A, A]$ esetén $f_n(x) \in [0, e^A]$. Ha $n > e^A$, akkor f_n differenciálható $[-A, A]$-n, és $f_n'(x) \in [0, e^A]$. Így az Arzelà–Ascoli-tétel és a Cantor-féle diagonalizálási eljárás alkalmazásával kapjuk, hogy $\{f_n\}$-nek van egy $\{f_{n_k}\}$ részsorozata, amely minden kompakt intervallumon egyenletesen konvergál egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez. Az f-re teljesül $e^x \leq f(x)$, ha $x \leq 0$, és $f(x) \leq e^x$, ha $x \geq 0$.

Legyen $-\infty < x < y < \infty$. Ha $t \in [x, y]$, akkor $t - \frac{1}{n} - r\big(f_n\big(t - \frac{1}{n}\big)\big) \in [x - 1 - R, y]$, ahol

$$R = \max_{u \in [0, \max\{1, e^y\}]} r(u).$$

Felhasználva, hogy r egyenletesen folytonos $\big[0, \max\{1, e^y\}\big]$-n, f egyenletesen folytonos $[x - 1 - R, y]$-on, és $\{f_{n_k}\}$ egyenletesen konvergál f-hez $[x - 1 - R, y]$-on, azt kapjuk, hogy

$$f_{n_k}\left(t - \frac{1}{n_k} - r\left(f_{n_k}\left(t - \frac{1}{n_k}\right)\right)\right) \to f(t), \quad \text{amint} \quad k \to \infty,$$

t-ben egyenletesen az $[x, y]$ intervallumon. Innen

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \lim_{k\to\infty} \{f_{n_k}(y) - f_{n_k}(x)\} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left\{ f_{n_k}(0) + \int_0^y f_{n_k}\left(t - \frac{1}{n_k} - r\left(f_{n_k}\left(t - \frac{1}{n_k}\right)\right)\right) dt \right. \\ &\quad \left. - f_{n_k}(0) - \int_0^x f_{n_k}\left(t - \frac{1}{n_k} - r\left(f_{n_k}\left(t - \frac{1}{n_k}\right)\right)\right) dt \right\} \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_x^y f_{n_k}\left(t - \frac{1}{n_k} - r\left(f_{n_k}\left(t - \frac{1}{n_k}\right)\right)\right) dt = \int_x^y f\big(t - r\big(f(t)\big)\big)\, dt. \end{aligned}$$

Mivel x és y tetszőleges volt, $f \in C^1(\mathbb{R})$ és $f'(x) = f\big(x - r\big(f(x)\big)\big)$ következik minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Érkezett 4 dolgozat. Helyes Juhász András, Terpai Tamás és Varjú Péter megoldása, kissé hiányos Máthé András megoldása.

8. feladat (Keleti Tamás és Mátrai Tamás). *Legyenek $f_1, f_2, \ldots$ folytonos valós függvények a számegyenesen. Igaz-e, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor minden x-re divergens, akkor ez az összeg előjelezésének tipikus megváltoztatása után is így marad (vagyis azon $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ sorozatok, amelyekre a $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x)$ függvénysor legalább egy x pontban konvergens, első kategóriájú halmazt alkotnak a $\{-1, +1\}^{\mathbb{N}}$ szorzattérben)?*

A feladat hátterével kapcsolatban először is megjegyezzük, hogy numerikus sorra igaz, hogy ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor tipikusan divergensek a $\sum_{n=1}^{\infty} \pm a_n$ sorok is. Ezt bizonyította Ambrus Gergely dolgozata.

1. megoldás (Terpai Tamás). Konstruálni fogunk egy olyan $\{f_n\} \subset C(\mathbb{R})$ sorozatot, hogy az

$$\left\{ \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x) \text{ legalább egy } x \text{ pontban konvergens} \right\}$$

halmaz reziduális lesz $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$-ben. Ehhez először egy Γ gyökeres fát fogunk konstruálni, melynek éleihez valós számok lesznek rendelve a következő tulajdonságokkal:

1. Minden ág a gyökértől tetszőlegesen távol is elágazik, de mindig csak véges sok csúcs felé;

2. Bármely út mentén véve az élekhez rendelt számokat, divergens sort kapunk;

3. Azon $\{\varepsilon_n\} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ sorozatok, melyekre van olyan ág Γ-ban, hogy a gyökértől n távolságra lévő számot ε_n-nel szorozva konvergens sort kapunk, reziduális.

Tekintsük azt a $\tilde{\Gamma}$ fát, melyben minden csúcs vagy végpont vagy pedig négyfelé ágazik: egy $+1$-gyel ellátott él megy egy végpontba, egy -1-gyel ellátott él megy egy végpontba, és egy $+1$-es, illetve -1-es él megy nem végpontba. ($\tilde{\Gamma}$ egy másik leírása: vesszük a végtelen bináris fát a természetes ± 1 értékekkel az élein, és minden csúcsból kivezetünk még egy $+1$-es és még egy -1-es élt végpontokba.) A $\tilde{\Gamma}$ fa azon éleit, melyek nem végpontba vezetnek, tiszta éleknek fogjuk nevezni. Ezután Γ-t egy $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \ldots$ növő lánc uniójaként fogjuk előállítani, ahol Γ_{j+1}-et Γ_j-ből a következő módon kapjuk: Γ_j minden végpontjához egy $2j+1$ élből álló láncot illesztünk, melynek éleire sorra az $\frac{1}{2j}, \frac{1}{2j}, \ldots, \frac{1}{2j}, z$ értékeket írjuk, ahol $z = 0$, ha az aktuális végpontból páros sok élen keresztül jutunk el először Γ_{j-1}-be (illetve a gyökérbe $j = 1$ esetén) a gyökér felé haladva, és $z = -\frac{1}{j}$ különben. Ezen láncokat ellenőrző láncoknak fogjuk hívni. Ezután az új végpontok mindegyikéhez $\tilde{\Gamma}$ egy példányát illesztjük, mégpedig az éleken szereplő számokat $\frac{1}{j+1}$-gyel szorozva. Az így kapott gráf lesz Γ_{j+1}. Most megvizsgáljuk, hogy Γ teljesíti-e az 1–3. tulajdonságokat.

Az 1. tulajdonságot nyilvánvalóan teljesíti, hiszen minden csúcs foka legfeljebb 4 lesz és minden Γ_j-beli pontból vezet él vagy Γ_j-be, vagy Γ_{j+1}-be; Γ_j-be ráadásul 4, Γ_{j+1}-be pedig 1 ellenőrzőláncon juthatunk át, melynek a vége megintcsak elágazik.

A 2. tulajdonság azért teljesül, mert egy ág vagy végtelen sok ellenőrző láncon halad át, és ekkor a részletösszegek között van legalább $\frac{1}{2j}2j = 1$-es eltérés akármilyen nagy index után is, vagy az ág egy idő múlva egyetlen $\Gamma_{j+1} \setminus \Gamma_j$ részben, tiszta éleken halad, és így a sorban egy idő múlva csak $\pm\frac{1}{j+1}$ tagok vannak. Mindkét esetben a részletösszegek sora divergens.

A 3. tulajdonságot a Banach–Mazur-játék segítségével látjuk be: állítjuk, hogy ha ketten felváltva véges ± 1 sorozatot mondanak, akkor a második játékos elérheti, hogy játék végén a mondott véges sorozatok egymás után írásával keletkező (ε_n) sorozat valamely ágán Γ-nak konvergens részletösszeg-sorozatot adjon. Ugyanis az első lépésben keletkezik egy $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ sorozat; ennek $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1 \setminus \Gamma_0$-ban megfelel egy v_1 végpontban végződő lánc, melynek élein az $\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, (-1)^{k+1}\varepsilon_k$ számok szerepelnek (minden véges sorozatnak pontosan egy ilyen végpont felel meg $\tilde{\Gamma}$ konstrukciójából adódóan.), így e mentén a lánc mentén a sor $1, -1, 1, \ldots, (-1)^k$ alakú. A második játékos ezután az $1, -1, 1$ sorozattal bővíti a sorozatunkat, miáltal a v_1-ből induló ellenőrző láncon az $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j+1}$ elemeket kapjuk. Ezután csak a v_1-ből induló ellenőrző lánc végpontjához illesztett részfára figyelünk, egy $\varepsilon_{k+4}, \ldots, \varepsilon_{k+m+3}$ első játékos által megadott bővítésre az $1, -1, 1, -1, 1$ sorozattal válaszolunk, és így folytatjuk. Ekkor a j-edik lépésben $\Gamma_j \setminus \Gamma_{j-1}$-ben a v_{j-1}-ből induló ellenőrző lánc végéből találunk egy láncot Γ_j egy v_j végpontjába úgy, hogy az élein lévő számok előjelei az első játékos által a j-edik lépésben megadott előjelekkel felváltva egyeznek meg, illetve különböznek. Így a sorba bekerülő részlet

$$\frac{1}{j}, -\frac{1}{j}, \ldots, (-1)^s\frac{1}{j}, \frac{1}{2j}, -\frac{1}{2j}, \ldots, \frac{1}{2j}, -\frac{1}{2j}, -\sum_{i=1}^{s}(-1)^{i+1}\frac{1}{j}$$

alakú, ha a v_{j-1}-ből induló ellenőrző lánc végéből a v_j-ből induló ellenőrző lánc végébe haladó utat nézzük. Ennek viszont a részletösszegekben egy legfeljebb $\frac{3}{2j}$ nagyságú eltérés lesz az eredménye, és a rész végén adódó részletösszegek sorozata 0-hoz konvergál. Ezzel a 3. tulajdonságot is beláttuk.

Most legyen $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ kompakt $\mathbb{R}$-beli halmazok olyan sorozata, mely realizálja a Γ fát abban az értelemben, hogy F_j véges sok szakasz diszjunkt uniója, melyek egy-egyértelmű módon megfeleltethetők Γ j-edik szintjén lévő csúcsoknak úgy, hogy ha a v csúcs a w csúcs felett áll, akkor a megfelelő I_v és I_w szakaszokra $I_v \supset I_w$ teljesül. Legyen $f_j(x)$ egy olyan folytonos függvény, amely az F_j halmaz $\frac{1}{j}$-sugarú környezetén kívül azonosan 1, és a v (j-edik szinten levő) csúcsnak megfelelő I_v szakaszon megegyezik a v-be a gyökér felől befutó élhez hozzárendelt számmal. Ekkor az $\{f_j(x)\}$ sorozat az $F = \cap_{j=1}^{\infty} F_j$ halmazon kívül minden pontban egy idő múlva azonosan 1, hiszen $\{x \mid f_j(x) \neq 1\} \subseteq F_j \oplus (-\frac{1}{j}, \frac{1}{j})$, amiből következik, hogy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} \{x \mid f_j(x) \neq 0\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} \left\{F_j \oplus \left(-\frac{1}{j}, \frac{1}{j}\right)\right\} \subseteq \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} \left\{F_j \oplus \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{F \oplus \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\} = F,$$

ahol az A és B halmazok esetén $A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Tehát a $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ sor az $\mathbb{R} \setminus F$ halmazon divergens. Másrészt F összefüggőségi komponensei egy-egyértelműen megfelelnek a Γ-beli ágaknak $\big(x \in F \mapsto \{v \in \Gamma \mid I_v \ni x\}\big)$, és a

$$\text{gyökér} \underset{e_1}{\longrightarrow} v_1 \underset{e_2}{\longrightarrow} v_2 \underset{e_3}{\longrightarrow} \ldots$$

ágnak megfelelő komponensen $\{f_j(x)\}$ az $e_1, e_2, \ldots$ élekhez rendelt számok sorozata, így a 2. tulajdonság miatt $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ divergens, tehát $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ minden valós x-re divergens. Másrészt viszont

$$\left\{\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j f_j(x) \text{ valamely } x\text{-re konvergens}\right\}$$

$$\supseteq \left\{\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j f_j(x) \text{ valamely } x \in F \text{ esetén konvergens}\right\}$$

$$= \big\{\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} \mid \quad \Gamma \text{ egy ága menti számokat rendre } \varepsilon_1\text{-gyel}, \varepsilon_2\text{-vel}, \ldots$$
$$\text{megszorozva és összeadva konvergens sort kapunk}\big\}$$

tartalmaz egy reziduális halmazt, így maga is reziduális. A feladat kérdésére tehát tagadó a válasz.

2. megoldás (Máthé András). Az alábbiakban azt fogjuk megmutatni, hogy olyan ellenpélda is létezik, amelyre csak arra a megszámlálható sok $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatra lesz $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n$ mindenütt divergens, amelyben $+1$-ből vagy -1-ből csak véges sok van. (Azaz csak azokra a $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatokra, amelyekre $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n$ nyilvánvalóan mindenütt divergens, ha $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mindenütt divergens.) Mivel a $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ tér teljes, továbbá egy megszámlálható halmaz részhalmazai triviálisan első kategóriájúak, egy ilyen példa valóban mutatja, hogy negatív a válasz a feladat kérdésére.

Állítás. *Azon $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ sorozatok halmaza, melyek végtelen sok -1-et és végtelen sok $+1$-et tartalmaznak, nem első kategóriájú halmaz $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$-ben, valójában a komplementere első kategóriájú.*

Bizonyítás. A szóbanforgó komplementer megszámlálható halmaz, ezért első kategóriájú. Mivel $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ teljes metrikus tér, ezért az egész tér második kategóriájú. Tehát a $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ térből megszámlálható pontot elhagyva második kategóriájú halmazt kapunk.

Azt fogjuk tehát bizonyítani, hogy léteznek $f_1, f_2, \dots$ folytonos függvények, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergens, de minden olyan $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ sorozatra, amelyben sem a $+1$-ek, sem a -1-ek száma nem véges, létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergens.

A függvénysorozatot először a C Cantor-halmaz pontjaiban definiáljuk. Legyen $x \in C$. Írjuk fel x-et 3-as számrendszerben úgy, hogy csak 0-s és 2-es számjegyei legyenek. Tekintsük a tizedesvessző utáni számjegysorozatot. Ezt blokkokra osztjuk: egy n-hosszú blokkban ($n \geq 2$) az első $n-1$ helyen az egyik számjegy álljon, az n-edik helyen a másik. Így végtelen sok blokkot kapunk, kivéve, ha csak véges sok 0, vagy véges sok 2-es volt a sorozatban. A blokkok képzését az elején kezdjük, például

$$\boxed{0002}\,\boxed{220}\,\boxed{20}\,\boxed{220}\,\boxed{0002}\,\boxed{02}\,\boxed{20}\dots$$

Ha a szám végtelen sok 0-ra, vagy 2-re végződik, azt is beletesszük egy blokkba. Az n-edik függvény értéke x-nek csak az első $n+1$ jegyétől fog függeni. Jelölje k azt, hogy x hányadik blokkjában szerepel az n-edik számjegy. Legyen d a blokk hossza, és jelölje i azt, hogy x n-edik számjegye e blokkon belül hányadik elem, $1 \leq i \leq d$. Ezek után,

ha $1 \leq i \leq d-2$, akkor legyen $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{ha } i \text{ páratlan,} \\ -\frac{1}{k}, & \text{ha } i \text{ páros;} \end{cases}$

ha $i = d-1$ és i páratlan, akkor legyen $f_n(x) = \frac{1}{k}$;

ha $i = d-1$ és i páros, akkor legyen $f_n(x) = 0$;

és ha $i = d$, akkor legyen $f_n(x) = \frac{1}{k}$.

Ez a definíció akkor is helyes, ha $d = \infty$, amikoris $f_n(x) = \frac{1}{k}$, ha i páratlan, és $f_n(x) = -\frac{1}{k}$, ha i páros. Látjuk, hogy $f_n(x)$ tényleg csak x első $n+1$ jegyétől függ.

Állítás. *Minden $x \in C$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergens.*

Bizonyítás. Ha x végtelen sok 0-ra, vagy 2-esre végződik, akkor $f_n(x)$ nem tart nullához. Ha x nem ilyen, akkor végtelen sok blokk van, a k-adik blokkban a számok összege éppen $\frac{1}{k} + \frac{1}{k}$, és mivel $\sum_{k=1}^{N} \frac{2}{k} \to \infty$, ha $N \to \infty$, látjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergens.

Állítás. *Tetszőleges $x \in C$-hez rendeljük hozzá azt az $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatot, amelyre $\varepsilon_i = 1$, ha hármas számrendszerben x i-edik jegye 2-es, $\varepsilon_i = -1$, ha x i-edik jegye 0. Ha $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ végtelen sok 1-est és -1-est tartalmaz, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x)$ konvergens.*

Bizonyítás. Ha a k-adik blokk x-nek a-adik, $a+1$-edik, $\dots$, $a+d-1$-edik számjegyéből áll, akkor $\sum_{n=a}^{a+d-2} f_n(x) = \frac{1}{k}$, $f_{a+d-1}(x) = \frac{1}{k}$, továbbá $\varepsilon_a, \dots, \varepsilon_{a+d-2}$ azonos előjelű és ε_{a+d-1} velük ellentétes, tehát $\sum_{n=a}^{a+d-1} f_n(x) = 0$. Mivel $f_n(x) \to 0$, ha $n \to \infty$, ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x)$ konvergens, 0-hoz konvergál.

Állítás. *Minden n-re $f_n(x)$ folytonos a Cantor-halmazon.*

Bizonyítás. Ehhez csak annyi kell, hogy az $f_n(x)$ érték x-nek csak az első $n+1$ számjegyétől függ. A $[0,1]$ zárt intervallum felbomlik véges sok diszjunkt zárt szakaszra, amelyek lefedik C-t, és f_n mindegyik ilyen zárt szakasz és C metszetére megszorítva konstans, tehát folytonos.

Állítás. *Az f_n függvények kiterjeszthetők az egész számegyenesre folytonosan úgy, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ minden x-re divergens.*

Bizonyítás. Mivel a Cantor-halmaz zárt, ezért a Cantor-halmazon definiált f_n függvényeket folytonosan kiterjeszthetjük a teljes számegyenesre úgy, hogy továbbra is minden függvény a $[-1, 1]$-be képezzen. (Hivatkozhatunk Tietze tételére vagy kiterjeszthetjük a függvényt lineárisan a kiegészítő intervallumokon és konstansnak $(0, 1)$-en kívül.) Ha f_n így kapott kiterjesztéséhez hozzáadunk $nd(x, C)$-t, ahol $d(x, C)$ a Cantor-halmaztól vett távolságot jelöli, akkor egy másik kiterjesztését kapjuk. Ez a módosított kiterjesztés garantáltan jó lesz, hiszen a kiterjesztett $f_n(x)$ legalább $nd(x, C) - 1$, azaz C-n kívül végtelenbe tart, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ a Cantor-halmazon kívül sem lehet konvergens.

Mivel $f_n(0) = +1$ vagy -1 minden n-re, és $f_n(1)$ szintén, ezért $x < 0$ vagy $x > 1$ esetén is $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergens, tehát $\mathbb{R}$ minden pontjában. Tehát a konstruált f_n sorozat valóban rendelkezik minden ígért tulajdonsággal.

Megjegyzések (Máthé András).

1. Az állítás a számegyenes helyett tetszőleges olyan metrikus téren is igaz, amely tartalmaz a Cantor-halmazzal homeomorf részhalmazt. Ennek igazolására a kiterjesztésre vonatkozó állítás bizonyítása alkalmazható.

2. Az ellenpélda a feladat kérdésére lehet polinomok sorozata is. Valóban, legyenek $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pedig olyan folytonos függvények, amelyekre $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n(x)|$ minden x-ben konvergens. Ekkor az $\{f_n\}$ és az $\{f_n + h_n\}$ függvénysorozatok ekvivalensek: pontosan ugyanazon ε_i előjelezésekre konvergensek valamely pontjukban. A fentiek mintájára, közelítsük most f_n-et $[-n, n]$-en polinommal legfeljebb $1/n^2$ hibával. Ez Weierstrass tétele alapján lehetséges. A kapott polinomsorozatra ugyanazt a $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$-beli halmazt kapjuk, mint f_n-re.

3. Nincs olyan ellenpélda, amelyben minden f_n nemnegatív, sőt, ha $f_1, f_2, \ldots$ folytonos valós függvények a számegyenesen és minden x-re létezik olyan n_0, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $f_n(x) \geq 0$, vagy létezik olyan n_0, hogy minden $n \geq n_0$ esetén $f_n(x) \leq 0$, és a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor minden x-ben divergens, akkor ez az összeg előjelezésének tipikus megváltoztatása után is így marad.

Ennek bizonyítására tekintsük az $1 \leq n \leq N$ egészeket és legyen

$$G_{n,N} = \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \text{valamely } k \in \{n, n+1, \ldots, N\} \text{ esetén } \left| \sum_{i=n}^{k} f_i(x) \right| > 1 \right\}.$$

Minden ilyen $G_{n,N}$ halmaz nyílt és $G_{n,N} \subseteq G_{n,N+1}$. Minden x pontban a függvények egy idő után azonos előjelűek és összegük divergens, ezért minden $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén van olyan $N \geq n$, hogy $x \in G_{n,N}$. Tehát tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $[k, k+1] \subseteq \cup_{N=n}^{\infty} G_{n,N}$. Mivel $G_{n,N} \subseteq G_{n,N+1}$, a $[k, k+1]$ kompakt halmazt egy ilyen halmaz, mondjuk $G_{n,N(n,k)}$, is lefedi. Tehát $x \in [k, k+1]$ esetén $\left| \sum_{i=n}^{l} f_i(x) \right| > 1$ valamilyen $n \leq l \leq N(n, k)$ egészre. Vegyük azokat az $\{\varepsilon_i\}$ előjelsorozatokat, amelyekre létezik x úgy, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x)$ konvergens, és osszuk fel ezek halmazát megszámlálható (nem feltétlenül diszjunkt) részre aszerint, hogy melyik $[k, k+1]$ intervallumban létezik ilyen x. Lévén, hogy minden ilyen x-ben $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x)$ Cauchy-konvergens, ennek alapján válasszunk olyan $\alpha \in \mathbb{N}$ küszöbszámot, hogy minden $n_1, n_2 \geq \alpha$ esetén teljesüljön a $\left| \sum_{n_1}^{n_2} \varepsilon_n f_n(x) \right| \leq 1$ egyenlőtlenség. Bontsuk tovább megszámlálható részre az $\{\varepsilon_i\}$ sorozatok halmazát aszerint, hogy mennyi α értéke. Tehát legyen $A_{k,\alpha}$ az olyan $\{\varepsilon_i\}$ előjelsorozatok halmaza, amelyekre van olyan $x \in [k, k+1]$, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i f_i(x)$ konvergens és $\left|\sum_{n_1}^{n_2} \varepsilon_n f_n(x)\right| \leq 1$ bármely $n_1, n_2 \geq \alpha$ esetén. Azt kell belátni, hogy $\cup_{k=-\infty}^{\infty} \cup_{\alpha=1}^{\infty} A_{k,\alpha}$ első kategóriájú. Megmutatjuk, hogy $A_{k,\alpha}$ sehol sem sűrű.

A $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ térnek bázisa azon nyílt halmazok összessége, melyek véges sok i indexre előírják, hogy mennyi ε_i értéke. Vegyünk $A_{k,\alpha}$-ban egy báziselemet, a megkötött indexek maximuma plusz egy legyen n_0 értéke. Mutatunk ebben a báziselemben olyan nyílt halmazt, amiben nincs $A_{k,\alpha}$-nak pontja. Legyen $n := \max(n_0, \alpha)$. Kössük meg az $n, n+1, n+2, \ldots, N(n,k)$ indexeket 1-re. Ha ebben lenne $A_{k,\alpha}$-nak pontja, pl. az $\{\varepsilon_i\}$ sorozat, akkor legyen $x \in [k, k+1]$ az ehhez tartozó x. Ekkor $\left|\sum_{i=n}^{l} \varepsilon_i f_i(x)\right| \leq 1$ minden $l \geq n$ esetén, de $N(n,k) \geq l \geq n$ esetén ugyanakkor $\sum_{i=n}^{l} \varepsilon_i f_i(x) = \sum_{i=n}^{l} f_i(x)$, ami pedig ellentmond annak, hogy $\left|\sum_{i=n}^{l} \varepsilon_i f_i(x)\right| > 1$ valamilyen $n \leq l \leq N(n,k)$ esetén.

4. Megadható olyan ellenpélda is, amelyben az f_n függvénysorozat pontonként nullához tart. Ez a fenti 2. megoldás módosításával érhető el: a blokkokat ugyanúgy definiáljuk, de a függvényeknek más értékeket adunk. Tegyük fel, hogy a k-adik blokk a-tól $a+d-1$-ig tart. Ekkor $f_a, f_{a+1}, \ldots, f_{a+d-1}$ ilyen sorrendben $\frac{1}{k}$-szorosa a következő értékeknek:

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, 0, \ldots, 0, 1,$$

ahol az első szám az f_a-hoz tartozik, az utolsó pedig az f_{a+d-1}-hez. Tehát i darab $-\frac{1}{i}$-t i darab $\frac{1}{i}$ követ, de ha nem férne ki a végén az összes, akkor ezek helyére 0-kat írunk és az utolsó tag 1-es. Ekkor a-tól $(a+d-1)$-ig összeadva 2-t kapunk, ha pedig az első $n+d-2$ tagot azonos előjellel, az $(a+d-1)$-ediket ezektől különböző előjellel adjuk össze, akkor 0-t. Az x szám 3-as számrendszeri alakjában akár véges sok, akár végtelen sok blokk van, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ divergens lesz (az első esetben oszcillál, a második esetben végtelenhez tart). Az $\{\varepsilon_i\}$ sorozatok és C pontjai között ugyanaz a megfeleltetés működik. Ellenőrizhető, hogy f_n csak x első $2n+2$ jegyétől függ. A kiterjesztés ugyanúgy működik, a kiterjeszett függvényekre $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ mindenhol divergens.

Érkezett 5 dolgozat. Helyes Máthé András, Terpai Tamás és Zábrádi Gergely megoldása. Helyenként nem teljesen világos Vizer Máté jó megoldása. Megmutatván, hogy numerikus sorok esetén igenlő a válasz, az ellenkező irányban ért el eredményt Ambrus Gergely.

9. feladat (Elekes György). *Adott a síkban néhány nyílt félsík, melyek határoló egyenesei a síkot konvex tartományokra osztják. Megadandó olyan $C(q)$ másodfokú polinom, amelyre tetszőleges $q \geq 1$ egész esetén igaz az, hogy ha a félsíkok a sík minden pontját legalább q-szor lefedik, akkor a pontosan q-szor fedett pontok halmaza legfeljebb $C(q)$ darab tartomány egyesítése.*

1. megoldás (Máthé András). A tartomány szó helyett inkább a *cella* szót fogjuk használni, mert tartomány alatt az analízisben nyílt, összefüggő halmazt értenek, a feladatban azonban előfordulhat, hogy a pontosan q-szor fedett pontok halmaza zárt szakasz. Ez nem fordulhat elő, ha feltesszük, hogy a félsíkok határoló egyenesei különbözőek. Nem fordulhatna elő semmilyen nem-kombinatorikai nehézség a bizonyítás során, ha feltennénk, hogy az egyenesek különbözőek és semelyik három nem metszi egymást egy pontban, illetve ekkor a „konvex tartomány" értelmezése nyilvánvaló. Mégis mi az általános esettel foglalkozunk, amelyből az is kiderül, hogy egyértelműen lehet értelmezni a q-szor fedett pontok körében a konvex cellákat.

Legyen innentől q az a maximális szám, amelyre igaz, hogy a félsíkok a sík minden pontját legalább q-szor fedik. Ekkor a legalább $q+1$-szer fedett pontok halmaza nyílt. Ez ugyanis uniója minden $q+1$ darab nyílt félsík metszetének, ami nyílt. Ebből következik, hogy a pontosan q-szor fedett pontok halmaza zárt.

Jelöljük a nyílt félsíkokat B_i-vel, $i = 1, \ldots n$, a komplementerüket A_i-vel, úgyhogy $B_i = \overline{A_i^c}$, ahol a felülhúzás a lezárást jelenti. Konvex cellák alatt a nemüres $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap \overline{A_{j_1}^c} \cap \cdots \cap \overline{A_{j_{n-k}}^c}$ alakú halmazokat értjük, ahol az $i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, \ldots, j_{n-k}$ számok az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja. Ezek zárt sokszögek, vagy zárt szakaszok, vagy pontok lehetnek, beleértve ezek nem korlátos megfelelőit is. Nem feltételenül igaz, hogy egy ilyen cella minden pontja ugyanannyiszor van fedve. Minden cella relatív belseje azonban ilyen tulajdonságú (ha nem üres). Vegyük észre, hogy két különböző q-szor fedett cellának nincs közös pontja. Legyen ugyanis x egy közös pontja, mondjuk, a q-szor fedett C és D celláknak. Ha egy nyílt félsík tartalmazza x-et, akkor az tartalmazza C-t és D-t is. Mivel x q-szor van fedve, ezért a C-t fedő és a D-t fedő nyílt félsíkok megegyeznek, ami ellentmond annak, hogy C és D különbözőek.

Most megmutatjuk, hogy tetszőleges egyenes a síkon legfeljebb $q+1$ darab különböző q-szor fedett cellába metsz bele. Indirekt módon fogunk érvelni. Tegyük fel, hogy egy e egyenes $q+2$ q-szor fedett cellába metsz bele. Ekkor az egyenesen felváltva sorakoznak a q-szor és a legalább $q+1$-szer fedett szakaszok, azaz kiválaszthatunk $q+1$ legalább $q+1$-szer fedett pontot a q-szor fedettek között. Koordinátázzuk e-t $\mathbb{R}$-rel, a $q+2$ darab q-szor fedett pont legyen $x_1, x_2, \ldots, x_{q+2}$, a $q+1$ $(q+1)$-szer fedett pont pedig $y_1, y_2, \ldots, y_{q+1}$ úgy, hogy

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_{q+1} < y_{q+1} < x_{q+2}.$$

Ha egy nyílt félsík metszi e-t és nem tartalmazza az egész egyenest, akkor határoló egyenese is metszi e-t, mondjuk z-ben, és $(-\infty, z]$-t, vagy $[z, +\infty)$-t is tartalmazza. Mivel x_1 q-szor fedett, y_1 pedig $(q+1)$-szer, így létezik olyan nyílt félsík, amely y_1-et tartalmazza, de x_1-et nem, és amelynek határoló egyenese a $z_1 \in [x_1, y_1)$ pontban metszi e-t. Hasonlóan, létezik olyan félsík, amely nem fedi x_2-t, de fedi y_2-t és amelynek határoló egyenese a $z_2 \in [x_2, y_2)$ pontban metszi e-t. Így kapjuk a $z_i \in [x_i, y_i)$ pontokat, $i = 1, \ldots, q+1$. De ekkor x_{q+2}-t már e $q+1$ nyílt félsík mindegyike fedi, ami lehetetlen.

Legyen D egy q-szor fedett cella, x a D egy határpontja és e egy x-en átmenő egyenes, amely egy nyílt félsík határa. Akkor ez a félsík nem tartalmazza D-t, hiszen az x-et és D-t fedő félsíkoknak meg kell egyezniük. Legyen k a q-szor fedett cellák száma és a cellák legyenek $C_1, C_2, \ldots, C_k$. Legyen $c_i \in C_i$ tetszőleges, $i = 1, \ldots, k$, és tekintsük a $[c_1, c_i]$ szakaszokat, ahol $i = 2, 3, \ldots, k$. Legyen d_i a $C_i \cap [c_1, c_i]$-nek c_1-hez legközelebbi pontja. Így d_i a C_i határpontja, ezért létezik olyan e_i egyenes, amely átmegy d_i-n és egy nyílt félsík határoló egyenese. Ez a nyílt félsík tartalmazza c_1-et, de c_i-t nem. Az e_i egyenesek közül legfeljebb $q+1$ eshet egybe, ha ugyanis több esne egybe, akkor ez az egyenes $(q+1)$-nél több q-szor fedett cellába metszene bele. Ezért az e_i-k között van $\lceil \frac{k-1}{q+1} \rceil$ páronként különböző. Az ezekhez tartozó félsíkok fedik c_1-et, azaz

$$q \geq \left\lceil \frac{k-1}{q+1} \right\rceil \geq \frac{k-1}{q+1} \quad \Longrightarrow \quad q(q+1) \geq k-1 \quad \Longrightarrow \quad k \leq q^2 + q + 1.$$

Tehát a q-szor fedett pontok halmaza legfeljebb $q^2 + q + 1$ cella egyesítése. Ezzel a feladat megoldását be is fejeztük.

Most megvizsgáljuk a feladat állításának egy lehetséges általánosítását. Legyenek a $B_1, B_2, \ldots, B_n$ olyan halmazok a síkon, hogy az $A_i = B_i^c$ komplementereik konvexek,

$i = 1, 2, \ldots, n$. Tegyük fel, hogy a B_i halmazok minden pontot legalább q-szor lefednek, és van olyan pont, amit pontosan q-szor fednek. Egy partíción azt értjük, hogy minden i-re A_i-t, vagy B_i-t metszük össze. Bármely $n-q+1$ darab különböző $i_1, i_2, \ldots, i_{n-q+1}$ indexre $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{n-q+1}} = \emptyset$, ugyanis nincs $(q-1)$-szer fedett pont. Vegyük azt is észre, hogy

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{n-q}} = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{n-q}} \cap \Bigg(\bigcap_{j \neq i_1, \ldots, j \neq i_{n-q}} B_j \Bigg).$$

Továbbá különböző $(i_1, i_2, \ldots, i_{n-q})$ index $(n-q)$-asok esetén az $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{n-q}}$ halmazok metszete üres, tehát a nemüres $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_{n-q}}$ halmazok diszjunktak. Ezeket fogjuk celláknak tekinteni. Most megvizsgáljuk, hogy hány cella létezhet. Mivel $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n} = \emptyset$, így a Helly-tétel alapján létezik három halmaz, A_1, A_2, A_3, hogy $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$. Ha egy $n-q$ hosszú indexsorozathoz tartozó cella nem üres, akkor legalább egyet kihagy e három halmaz közül. Legyen mondjuk ez A_1. Ekkor $A_2 \cap \ldots \cap A_n$ még mindig üres $q > 1$ esetén, tehát létezik újabb három halmaz, aminek a metszete üres. Tehát ha a cella nem üres, akkor a cella indexsorozata legalább egyet kihagy ezek közül. És így tovább. Tehát legfeljebb 3^q-féle nemüres q-szor fedett cellát kaphatunk.

Ha A_i és B_i ugyanilyen tulajdonságú halmazsorozat a d dimenziós térben, akkor a q-szor fedett cellák száma legfeljebb $(d+1)^q$. A bizonyítás ugyanaz, mint fent, csak a Helly-tétel d dimenziós változatát használjuk. Megfigyelhető, hogy az eredeti feladat bizonyításában éppen ugyanezen probléma 1 dimenziós változatát oldottuk meg először és annak segítségével oldottuk meg 2 dimenzióban. Így adódik indukció a feladat többdimenziós általánosításának megoldására. Azaz, ha adott a d dimenzós térben néhány féltér és e félterek a tér minden egyes pontját legalább q-szor fedik, akkor a q-szor fedett cellák száma legfeljebb $q^d + q^{d-1} + \cdots + q + 1$.

Ezt dimenzió szerinti indukcióval bizonyítjuk. Az állítást $d = 1$ és $d = 2$ esetén már megmutattuk. (Igaz, hogy ott a cellák definíciója bonyolultabb volt és nem teljesen egyezett meg az itt használttal, de a q-szor fedett cellák ugyanazok mindkét definíció szerint, és az is világos, hogy a definícióbeli különbség lényegtelen mind az állítás, mind a bizonyítás szempontjából.) Tegyük fel, hogy d-re igaz az állítás és tekintsük a $(d+1)$ dimenziós féltereket. Tetszőleges d dimenziós hipersíkra megszorítva a féltereket visszakapjuk a d dimenziós állítást. Tehát minden d dimenziós hipersík legfeljebb $q^d + q^{d-1} + \cdots + q + 1$ q-szor fedett cellába metsz bele. Ha k darab q-szor fedett cellánk van, akkor pontosan ugyanúgy, ahogy $d = 1$-re láttuk a síkon,

$$\frac{k-1}{q^d + q^{d-1} + \cdots + q + 1} \leq q,$$

tehát $k \leq q^{d+1} + q^d + \cdots + q + 1$.

2. megoldás (Varjú Péter). Jelölje E a félsíkokat határoló egyenesek, Q pedig a kialakuló konvex tartományok halmazát. Először azt diszkutáljuk, hogy az E-beli egyenesek pontjait mely Q-beli tartományba tartozónak célszerű tekinteni. Ha egy pontot csak egy E-beli e egyenes tartalmaz, akkor ahhoz a tartományhoz tartozik, ami e másik oldalán van, mint az e-nek megfelelő félsík. Ha egy pont pontosan két E-beli egyenes egyetlen közös pontja, akkor ahhoz a tartományhoz tartozik, ami abban a szögtartományban van, amit egyik megfelelő félsík sem fed le. Ha egy ponton kettőnél több E-beli egyenes is áthalad, amik nem esnek mind egybe, akkor két eset van: ha van olyan szögtartomány, amit egyik megfelelő félsík sem fed le, akkor a pont az ebben levő tartományhoz tartozik, ha pedig minden szögtartomány le van fedve, akkor a pontot egy elfajuló tartománynak tekintjük. Ha néhány félsík egybeesik, akkor ezeket egy félsíknak tekintjük, és a lefedések számát multiplicitással számoljuk. Ha két E-beli egyenes egybeesik úgy, hogy a megfelelő félsíkok nem esnek egybe, akkor az egyenest a többi E-beli egyenes elfajuló tartományokra osztja.

Könnyen igazolható, hogy a tartományok minden pontja ugyanannyiszor van lefedve. Bebizonyítjuk, hogy legfeljebb $C(q) := q^2 + q + 1$ van köztük, amelyek pontosan q-szor vannak lefedve.

Legyen $K \in Q$ olyan, hogy K pontosan q-szor van lefedve. Megmutatjuk, hogy K-t nem fedik le az azt határoló E-beli egyenesekhez tartozó félsíkok. Az elfajuló esetekben ez triviális, ezért csak a nem elfajulókkal foglalkozunk. Tegyük fel indirekten, hogy az e (K-t határoló) egyeneshez tartózó félsík lefedi K-t. Ekkor alkalmasan választható két pont, P és P', az e különböző oldalain úgy, hogy $P \in K$, $P' \notin K$, valamint P és P' között csak e halad az E-beli egyenesek közül, és így P' csak $(q-1)$-szer lenne fedve, ami ellentmond a feltételnek.

Legyen $\widehat{K} \in Q$ egy K-tól különböző, pontosan q-szor lefedett tartomány. Hozzárendeljük $\widehat{K}$-hoz az egyik olyan határoló egyenesét, amelyhez tartozó félsík lefedi K-t, és ezt $e_{\widehat{K}}$-pal jelöljük. Legyen $P \in K$ és $P' \in \widehat{K}$. Ha $\widehat{K}$ nem elfajuló, akkor $e_{\widehat{K}}$-nak válasszuk azt az egyenest, ami a P'-höz legközelebb metszi a PP' szakaszt. Mivel ez nem fedi le P'-t, lefedi P-t, és így K-t is. Ha $\widehat{K}$ elfajuló, akkor mindkét esetben világos, hogy $\widehat{K}$ egy alkalmas határoló egyenese lefedi P-t.

Mivel minden olyan egyeneshez, amit hozzárendeltünk egy tartományhoz, tartozik egy K-t lefedő félsík, legfeljebb q darab ilyen egyenes lehet. Most megmutatjuk, hogy egy egyenest legfeljebb $q+1$ különböző tartományhoz rendeltünk hozzá.

Legyen e egy egyenes, és $K_1, K_2, \ldots, K_n \in Q$ azok a tartományok, melyekhez e-t rendeltük. Tegyük fel, hogy ebben a sorrendben követik egymást e-n. Ha $n \geq i > 1$, akkor legyen e_i a K_i-nek az a határoló egyenese, ami a K_1-hez közelebbi csúcsában metszi e-t. Ha K_i elfajuló, akkor olyan határoló egyenest válasszunk, ami lefedi K_1-et. Mindkét esetben nyilvánvaló, hogy ez megtehető. Világos, hogy az e_i-khez tartozó félsíkok lefedik K_1-et, ugyanakkor ezek a félsíkok különbözőek. Tehát $n \leq q+1$.

Ezért K-n kívül még legfeljebb $q(q+1)$ darab pontosan q-szor lefedett tartomány van, és így összesen legfeljebb $q^2 + q + 1$ darab.

Érkezett 8 dolgozat. Ambrus Gergely, Csóka Endre, Máthé András, Pálvölgyi Dömötör, Terpai Tamás, Varjú Péter, Vizer Máté és Zábrádi Gergely megoldása, tehát mind a nyolc, helyes.

10. feladat (Csörgő Sándor és Gordon Simons). *Legyenek X és Y független szentpétervári véletlen változók, melyek tehát minden $k = 1, 2, \ldots$ esetén a 2^k értéket $1/2^k$ valószínűséggel veszik fel, és jelölje $I\{A\}$ az A esemény indikátorát. Mutassuk meg, hogy X és Y megadhatók egy olyan, elég bő valószínűségi mezőn, amelyen értelmezhető független szentpétervári véletlen változóknak egy másik, X' és Y' párja is úgy, hogy $X + Y = 2X' + Y'I\{Y' \leq X'\}$ majdnem biztosan.*

Megoldás. (Csóka Endre, Lovas Rezső László versenyen kívül, Terpai Tamás, Varjú Péter és a kitűzők). Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ három független szentpétervári játékot leíró valószínűségi mező, amelyen tehát X és Y mellett adva van egy harmadik szentpétervári véletlen változó Z, úgy, hogy X, Y és Z függetlenek. Azt állítjuk, hogy ez a mező eleget tesz a kívánalmaknak. Valóban, vezessük be az

$$X' = X\, I\{X = Y\} + \frac{\max(X, Y)}{2}\, I\{X \neq Y\}$$

és

$$Y' = XZ\, I\{X = Y\} + \min(X, Y)\, I\{X \neq Y\}.$$

véletlen változókat ezen a mezőn. Először az algebrát ellenőrizve, ha $X = Y$, akkor tényleg

$$2X' + Y' I\{Y' \leq X'\} = 2X + XZ\, I\{XZ \leq X\} = 2X = X + Y,$$

és ha $X \neq Y$, akkor ismét

$$\begin{aligned} 2X' + Y' I\{Y' \leq X'\} &= 2\,\frac{\max(X, Y)}{2} + \min(X, Y)\, I\left\{\min(X, Y) \leq \frac{\max(X, Y)}{2}\right\} \\ &= \max(X, Y) + \min(X, Y) \\ &= X + Y, \end{aligned}$$

mivel ha $X \neq Y$, akkor $\max(X, Y)$ legalább kétszer akkora mint $\min(X, Y)$.

Azt ellenőrizendő, hogy X' és Y' a kívánt együttes eloszlást követik, vagyis, hogy függetlenek, és mindkettő tényleg szentpétervári változó, vegyük észre, hogy tetszőleges $j, k = 1, 2, \ldots$ esetén

$$\begin{aligned} &P\{X' = 2^j,\ Y' = 2^k\} \\ &= P\{X' = 2^j,\ Y' = 2^k,\ X = Y\} + P\{X' = 2^j,\ Y' = 2^k,\ X > Y\} \\ &+ P\{X' = 2^j,\ Y' = 2^k,\ X < Y\} \\ &= P\{X = 2^j,\ XZ = 2^k,\ X = Y\} + P\{X = 2^{j+1},\ Y = 2^k,\ X > Y\} \\ &+ P\{Y = 2^{j+1},\ X = 2^k,\ X < Y\} \\ &= P\{X = 2^j,\ Y = 2^j,\ Z = 2^{k-j}\} + 2P\{X = 2^{j+1},\ Y = 2^k,\ X > Y\} \\ &= \begin{cases} P\{X = 2^j,\ Y = 2^j,\ Z = 2^{k-j}\}, & \text{ha } k \geq j + 1, \\ 2P\{X = 2^{j+1},\ Y = 2^k,\ X > Y\}, & \text{ha } k < j + 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} P\{X = 2^j,\ Y = 2^j,\ Z = 2^{k-j}\}, & \text{ha } k \geq j + 1, \\ 2P\{X = 2^{j+1},\ Y = 2^k\}, & \text{ha } k < j + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

úgyhogy mindkét esetben

$$P\{X' = 2^j,\ Y' = 2^k\} = \frac{1}{2^j}\,\frac{1}{2^k} = P\{X = 2^j,\ Y = 2^k\},$$

amiből az állítások következnek.

Megjegyzések. Világos, hogy $i, j \in \mathbb{N}$ esetén a $2^i + 2^j$ érték egyértelműen meghatározza i és j értékeit. Ezt használva, elemi összehasonlításokkal azonnal adódik a feladat állításának az a gyengébb változata, miszerint $X+Y$ és $2X + YI\{Y \leq X\}$, és ennélfogva a bizonyítandó egyenlőség két oldalának az *eloszlása* megegyezik. Ez *Proposition 1.1* a kitűzők egy nemrégi cikkében (The two-Paul paradox and the comparison of infinite expectations. In: *Limit Theorems in Probability and Statistics* Vol. I, pp. 427–455. János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 2002); ennek az eloszlásbeli egyenlőségnek a bizonyításával indul Zábrádi Gergely megoldása, bár a teljes megoldásban (ami nála X, Y, X', Y' megfelelő együttes eloszlásának megadására épül) ez nem játszik szerepet. Minthogy $YI\{Y \leq X\}$ várható értéke 2, az állítás paradox lényege abban áll (amint ezt a fenti cikk bőven elemzi), hogy ha két szentpétervári játékos előre megegyezik, hogy a bank velük játszott egy-egy játékának a nyereményeit maguk között átlagolni fogják, akkor mind a kettő várhatóan egy dukáttal gazdagabb lesz ahhoz képest, mintha külön-külön csak egyszerűen elfogadnák a saját nyereményeiket, annak ellenére, hogy a bank összesen ugyanannyit fizet ki kettejüknek. A feladatban szereplő erős változat a kitűzők egy készülőben levő új dolgozatában (Pooling strategies for St. Petersburg gamblers) az egyik első lépés afelé, hogy még meglepőbb állításokat nyerjenek kettőnél több játékosra.

A fordított irányban, feltételezve, hogy az óhajtott megoldás valamilyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn létezik, Totik Vilmostól ered a következő gondolatmenet, amelyben események egyenlőségén indikátoraik majdnem biztos egyenlőségét értjük. (Indulás előtt jegyezzük meg, hogy $P\{X = Y\} = P\{X < Y\} = P\{X > Y\} = 1/3$, és így ugyanez igaz a vesszős változókra is.) Ha $X \neq Y$, akkor $X + Y$ nem kettőhatvány, és így a feltételezett $X + Y = 2X' + Y'I\{Y' \leq X'\}$ egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha $\{X \neq Y\} = \{Y' \leq X'\}$. Így $\{X = Y\} = \{X' < Y'\}$, és $X' = X$ ha $X = Y$. Ha viszont $\{X \neq Y\} = \{Y' \leq X'\}$ következik be, akkor $X < Y$ esetén a fenti egyértelműségi állítás miatt csak $X' = Y/2$ és $Y' = X$ a lehetséges megoldások, míg $Y < X$ esetén $X' = X/2$ és $Y' = Y$. Tehát $Y' = \min(X, Y)$ ha $X \neq Y$, és általában $X' = XI\{X = Y\} + \max(X, Y)I\{X \neq Y\}/2$. Visszatérve a másik esetre, amikor $\{X = Y\} = \{X' < Y'\}$ teljesül, és így $X' = X$, az X' és Y' változókról feltételezett együttes eloszlás miatt $P\{X = Y = 2^k, Y'/X' = 2^j\} = P\{X' = X = Y = 2^k, Y' = 2^{k+j}\} = P\{X' = 2^k, Y' = 2^{k+j}\} = 1/2^{2k+j}$, bármilyen $j, k = 1, 2, \ldots$ számokra. Minthogy $P\{X' = X = Y = 2^k\} = 1/2^{2k}$, látjuk, hogy $X = Y$ esetén $Z = Y'/X'$ az X-től független szentpétervári változó, amivel ekkor $Y' = ZX$. Tehát a feladatnak lényegében egy megoldása van.

Más formában ugyanerre lyukad ki Máthé András is. A lényegében egyetlen megoldást a legtermészetesebb módon három független játékkal valósíthatjuk meg, ahogy a fenti megoldásban; ez némileg rejtve marad Máthé András, Ráth Balázs és Zábrádi Gergely (egymástól is különböző) jó megoldásaiban.

Érkezett 9 dolgozat. Helyes Csóka Endre, Máthé András, Ráth Balázs, Terpai Tamás, Varjú Péter, Zábrádi Gergely és (versenyen kívül) Lovas Rezső László megoldása. Nem szabatos, de lényegét tekintve elfogadható Pálvölgyi Dömötör és Vizer Máté megoldása.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Modok és Társa Nyomda, Kiskunhalas

Matematikai Lapok

2004-2005/2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 12. évfolyam (2004–2005), 2. szám

(Megjelent 2007-ben)

ISSN 0025-519X

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
– A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
– nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A TÁRSULATRÓL – KÜLFÖLDIEKNEK

CSÁSZÁR ÁKOS

A Matematikai Lapok olvasói számára – gondolom – közismert, hogy a Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) hosszabb ideje (pontosan 1990 óta) tagja az Európai Matematikai Társaságnak (European Mathematical Society, EMS). Ennek a havi folyóirata (Newsletter of the EMS) időnként egy-egy cikkben ismerteti a tagegyesületek működését: a BJMT-ról a 2006. évi márciusi szám közölt egy cikket, amelynek megírására társulatunk vezetősége a szerzőt kérte meg.

Ugyane vezetőségnek az volt a véleménye, hogy az eredetileg természetesen elsősorban külföldi olvasók tájékoztatására szolgáló cikk anyaga, vagy legalábbis annak egy része, érdekelheti a BJMT 2006. május 13-án tartott küldöttgyűlésének résztvevőit is, így felkérte a szerzőt egy, a cikk anyagát röviden ismertető előadásnak az említett küldöttgyűlésen való megtartására.

Ugyancsak a BJMT vezetősége az előadás sikerének hatására úgy vélte, hogy az elhangzott előadás szélesebb kör, a Matematikai Lapok olvasói számára is érdekes lehet, és a szerzőt egy ilyen cikk megírásával is megbízta. Így jött létre az előttünk fekvő írás.

A Newsletterben közölt cikk (The Hungarian Mathematical Society (BJMT)) összeállításához a szerző természetesen felhasználta *Szénássy Barnának* a Matematikai Lapokban 1966-ban megjelent cikkét, amely a BJMT jogelődjének akkor 75 éve történt megalapításáról szólt (Társulatunk 75 éve); a későbbi események áttekintéséhez a BJMT birtokában lévő különféle iratok nyújtottak támpontot. Az utóbbiak összegyűjtésével a BJMT igazgatója, *Kulcsár Cecília* sietett a szerző segítségére, amiért ő őszinte köszönettel tartozik (ezt a Newsletter cikke is, nagyon helyesen, megemlíti).

Magyarországon a matematikai kutatással foglalkozók köre a XIX. század első felében lényegében véve a két Bolyai (Farkas és János) személyére korlátozódott. A század végére azonban a helyzet lényegesen megváltozott, úgyhogy 1885-től kezdve Budapesten a matematikai és fizikai egyetemi oktatók többé-kevésbé rendszeresen találkoztak egy-egy étteremben egy szakmai előadás meghallgatására, amit azután közös vacsora követett. A mintegy 20-30 résztvevő közül kiemelkedik a matematikusok részéről *Kőnig Gyula, Hunyady Jenő, Scholtz Ágoston,* a fizikusok részéről *Eötvös Loránd* és *Szily Kálmán;* néha a Kolozsvárról Budapestre látogató *Réthy Mór* és *Schlesinger Lajos* is csatlakozott a résztvevőkhöz. Ezek az összejövetelek évekig minden hivatalos jelleg nélkül folytak, míg aztán 1890. december 18-án Eötvös Loránd olyan gyűlést szervezett mintegy 100 fő részvételével, amelyen egy matematikai és fizikai kutatókat és oktatókat tömörítő egyesület megalakítását határozták el, és kiküldtek egy bizottságot az alapszabályok megfogalmazására. Ennek eredményeképpen a belügyminiszter 1891. augusztus 21-én az alapszabályokat jóváhagyta, és így 1891. november 5-én 298 fő részvételével megtarthatta alakuló ülését a Mathematikai és Physikai Társulat. Elnöknek Eötvös Lorándot választották, a matematikusok közül Kőnig Gyula alelnök, *Rados Gusztáv* titkár lett.

Az új egyesület talán legfontosabb feladata egy olyan magyar nyelvű folyóiratnak a megindítása volt, amely a matematika és fizika fejlődését volt hivatva a tudományegyetemi és középiskolai oktatók részére ismertetni. Ez az új folyóirat, a Mathematikai és Physikai Lapok, hasznosan egészítette ki a Magyar Tudományos Akadémia (MTA) kiadásában megjelenő Mathematikai és Természettudományi Értesítő működését. Közölt cikkeket új tudományos eredményekkel (így például hasábjain jelent meg *Fejér Lipót* nevezetes doktori értekezése a Fourier-sor szummációjáról, valamint *Riesz Frigyes, Geöcze Zoárd, Haar Alfréd* több fontos cikke), ismertette a két tudomány egy-egy diszciplínájának újabb fejlődését, volt benne feladatrovat (feladatok kitűzése és a megoldások ismertetése), közölt könyvismertetéseket, tájékoztatott a Társulat rendezvényeiről és a tanulóversenyekről (l. alább). A szerkesztést matematikai részről eleinte Rados Gusztáv végezte, tőle 1914-től Fejér Lipót, majd 1932-től *Kőnig Dénes* vette át.

A Társulat egy másik nagy jelentőségű tevékenysége volt matematikai és fizikai tanulóversenyek szervezése. Ilyeneket 1894-től kezdve évenként rendeztek a középiskolai tanulmányaikat éppen befejezett fiatalok részére külön matematikából és fizikából. A matematikai versenyek olyan sikeresek voltak, hogy anyagukat *Kürschák József* 1929-ben Matematikai versenytételek címen megjelent könyvében külön ismertette. Ez a nagy sikerű könyv azután több ízben is folytatást nyert, jelenleg az 1998-ig megrendezett versenyek anyaga van könyv alakban feldolgozva; angol nyelven is megjelent a versenyek ismertetése.

A tanulóversenyekre való felkészítést szolgáló folyóiratnak (Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok) kezdetben nem volt kapcsolata a Társulattal.

Eötvös Loránd 1919-ben bekövetkezett halála után a Társulat 1921-ben felvette az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulat (ELMFT) nevet, és a tanulóversenyeket is röviden Eötvös-verseny néven kezdték emlegetni. Az ELMFT egyik fontos feladata volt a Kőnig Gyula-alapítvány működtetése. Ezt a nevében említett kiváló tudós gyermekei alapították azzal a céllal, hogy kétévenként egy-egy ígéretes eredményeket elért fiatal matematikus (egyetemi tanárok nem jöhettek szóba) az alapítványt forrásként használó Kőnig Gyula-jutalmat átvehesse. Érdemes áttekinteni az 1922-től kétévenként megjutalmazottak névsorát: *Bauer Mihály, Szegő Gábor, Szőkefalvi Nagy Gyula, Jordan Károly, Szász Ottó, Egerváry Jenő, Veress Pál, Kalmár László, Lipka István, Rédei László, Hajós György, Szőkefalvi-Nagy Béla, Varga Ottó.*

Az utolsó, 1944-ben átadott díj után az alapítvány a háború következtében elveszítette vagyonát, s ezzel sajnálatosan megszűnt.

Az ELMFT tevékenységeként rendszeresen szerveztek a matematika és fizika egyes eredményeiről szóló előadásokat Budapesten, matematikából évente mintegy 5-10-et; néha mód volt külföldi előadók megnyerésére is, de ezek száma összevéve is 10 alatt maradt (közéjük tartozott pl. Neumann János). A taglétszám a megalakulás után rövidesen elérte a 400-at, ez a két háború között kb. 200-ra esett vissza.

*

A második világháború pusztításai után hosszabb ideig nem volt mód az egyesületi élet újraindítására; Szegeden jött létre az újjáalakulás olyan formában, hogy 1947. június 21-én megalakították az ELMFT egyik jogutódját, a Bolyai János Matematikai Társulatot (BJMT). A csekély számú jelenlevő mellett többen levélben jelezték csatlakozási szándékukat. A határ menti Szegedről nehéz volt a társulati életet irányítani, így a BJMT már 1949-ben Budapestre tette át székhelyét. A taglétszám hamarosan elérte az 1500-at, ma 2500 körül ingadozik. A BJMT már 1948-ban tagjává vált a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetségének (MTESZ), 1956-tól kezdve tagja a Nemzetközi Matematikai Uniónak (IMU), 1990-től kezdve pedig az Európai Matematikai Társaságnak (EMS).

Az ELMFT másik jogutódjaként hamarosan megalakult az Eötvös Loránd Fizikai Társulat (ELFT) is.

A BJMT működése kezdettől fogva a Tudományos Szakosztály és az Oktatási Szakosztály keretei között folyt; 1963-ban létrejött a Matematika Alkalmazásai Szakosztály is. Az ország egész területén folyó működés lényeges kellékeként rövid idő alatt létrejöttek a ma már nagy számban működő helyi tagozatok is.

A BJMT tevékenységének egyik fontos részeként ismételten rendezett matematikai kongresszusokat – először 1950-ben az I. Magyar Matematikai Kongresszust az MTA részvételével – Fejér Lipót és Riesz Frigyes születésének 70-edik évfordulóját kívánva ezzel emlékezetessé tenni. 200-nál többen vettek ezen részt, köztük kb. 50 külföldi. 1960-ban (ismét az MTA-val együtt) került sor a II. Magyar Matematikai Kongresszusra (600-nál több, köztük 300-nál több külföldi résztvevővel). Csak magyar résztvevőkkel zajlott le a BJMT alakulásának 10-edik évfordulója alkalmából Szegeden, majd 1972-ben a 25-ödik évforduló megünneplésére Debrecenben néhány száz résztvevővel egy-egy kisebb kongresszus. 1996-ban, már az EMS-hez való csatlakozás után, a BJMT-nak jutott a II. Európai Matematikai Kongresszus megrendezése (700-nál több, zömmel külföldi résztvevő). Az 1950-es kongresszus anyaga kötetben is megjelent.

A matematikai tudomány egészét feldolgozó kongresszusok mellett rendszeresen szerveződnek egy-egy tudományág területére kiterjedő, szűkebb anyagot érintő konferenciák. Ezek közül elsőnek említendő a Bolyai János születésének 150-edik évfordulója alkalmából 1952-ben rendezett konferencia, amelynek résztvevői között másokkal együtt P. S. Alexandroff és E. Čech jelenlétét is üdvözölhettük. 1953-tól kezdve évenként 3-4 témában szervez konferenciát a BJMT, többnyire néhány tucat, túlnyomóan külföldi résztvevővel; ezek anyaga sokszor külön kötetben (néha több kötetben is) megjelenik.

A matematika oktatásának elősegítése, színvonalának emelése célját szolgálják az évenként néhány száz hazai résztvevővel megrendezett vándorgyűlések, majd az 1990-től kezdve ugyancsak évenként rendezett Varga Tamás-napok; az utóbbiak anyaga kötet formájában is napvilágot lát. Külön említést érdemel az 1963-ban az UNESCO támogatásával szervezett konferencia, amelynek célja a matematikai tananyag korszerűsítésének megvitatása volt, és hatása máig érződik. Ugyancsak a matematikaoktatás támogatására szolgál a tehetséges tanulókat tömörítő Ifjúsági Matematikai Kör is.

Fontos része a BJMT munkájának különféle matematikai kiadványok szerkesztésében és kiadásában való részvétel. A kongresszusi és konferenciaköteteket már említettük, hozzájuk járult néhány inkább tankönyv jellegű kiadvány is. Több folyóirat szerkesztésében is részt vesz a BJMT; idegen nyelven a *Periodica Mathematica Hungarica* jelenik meg 1971 óta, a *Combinatorica* pedig 1981 óta. Magyar nyelven a *Matematikai Lapok* lépett 1950-től a korábbi *Matematikai és Fizikai Lapok* egyik utódjaként színre, s ettől kezdve már a *Középiskolai Matematikai Lapok* is a BJMT szerkesztésében jelenik meg, 1959-től ismét fizikai rovattal is bővítve. 1997-től az *Alkalmazott Matematikai Lapok* és az *ABACUS* is társulati lap lett, sőt 1953 és 1990 között ilyen volt a *Matematika Tanítása* is. Legújabb fejlemény a matematika magyar kutatóinak munkásságát angol nyelven áttekintő *A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century* első kötetének megjelenése a Springer kiadásában, *Horváth János* szerkesztésében, és folyik a második kötet előkészítése is.

Jelentős része a BJMT tevékenységének a különféle tanulóversenyek megrendezése. A korábbi Eötvös-verseny 1949 óta Kürschák József-verseny néven fut tovább, de most már a középiskolások is részt vehetnek rajta.

Ugyancsak 1949-ben vette kezdetét a Schweitzer Miklós-verseny megrendezése, amelyen egyetemi hallgatók többnapos otthoni munkával oldhatják meg a kitűzött (többnyire 10) feladatot. Ennek az újszerű versenynek anyagát angol nyelven ismertető kötet is megjelent 1961-ben, majd ennek folytatása 1991-ben. Fiatalabb tanulók részére rendezi a Társulat az Arany Dániel-versenyt 1949-től, a Varga Tamás-versenyt pedig 1985 és 1999 között szervezte meg. A BJMT rendezésében folyt az Országos Tanulmányi Verseny matematikai része is 1951-től 1976-ig. A nemzetközi matematikai olimpiára készülő tanulókat ugyancsak a BJMT készíti fel, 1961-ben és 1982-ben mi is rendeztük meg ezt a versenyt. 1990-től folyik váltakozva hazai és izraeli rendezésben a Magyar–Izraeli Matematikai Verseny. A felsorolt országos versenyek sorát sok helyi verseny is kiegészíti egy-egy tagozat szervezésében.

A matematikai kutatásban, illetve a matematikai oktatásban kiemelkedő teljesítményt nyújtó személyek jutalmazására számos díjat oszt ki évente a BJMT. 1950-től Beke Manó-díjat kapnak a legkiválóbb oktatók. A jelentős eredményt elért fiatal matematikusok elismerését szolgálja 1953 óta a Grünwald Géza-díj. 1970-től kezdve kap Szele Tibor-emlékérmet egy kiemelkedő és iskolát nevelő kutató. A már a kutatásban is eredményt felmutató egyetemi hallgatók jutalmazására szolgál 1973 óta a Rényi Kató-díj. A matematika alkalmazásában sikeres fiatal kutatók a Farkas Gyula-díjban részesülhetnek. Egy sikeres egyetemi hallgató évente a Patai-alapítvány díját nyerheti el. Részt vesz a BJMT más szervek által alapított és fenntartott díjak odaítélésében is (Ericsson-díj, Rácz Tanár úr Életműdíj stb.)

Érdemes megemlíteni, hogy volt egy fontos történelmi tényező, amely matematikai társulatunk megerősödéséhez vezetett. A II. világháború utáni politikai rendszer fokozatosan betiltott minden civil kezdeményezést. Csak néhány kivétel volt, többek között a tudományos társulatok. Ezeket, mint tagszervezeteket, a Műszaki és Természettudományos Egyesületek Szövetsége ellenőrizte. Ily módon társulatunknak jogában állt nemzetközi konferenciákat szervezni, konferenciaköteteket kiadni stb., ami általában az állam monopóliuma volt. A másik tudományos irányultságú szervezet a Magyar Tudományos Akadémia volt. Ez azonban – mintegy minisztériumként – nagyon bürokratikusan működött. Ezek a körülmények vezették a matematikai aktivitást a mi társulatunkba, megerősítve azt. A nemzetközi konferenciák szervezése és a kötetek kiadása keményvalutát hozott, aminek annak idején nagy jelentősége volt. Ennek egy részét a társulat maga használhatta fel, például nyugati utazásokra.

A Newsletterben megjelent cikk a BJMT eddigi elnökeinek, főtitkárainak és tiszteletbeli elnökeinek felsorolásával zárul.

BÚCSÚ GEHÉR ISTVÁNTÓL

Kedves Gyászoló Család! Tisztelt Gyászolók! Kedves Barátaim!

Megrendülten állunk atyai barátunk és mesterünk, Gehér István hamvai előtt. Még felfoghatatlan, hogy eltávozott. Számukra Ő mindig kortalan volt, kedves és vidám. Rendkívüli tehetségű embert temetünk.

Zalaegerszegről indult, ott élt a család. Matematikai tehetségére korán felfigyeltek. Az első biztató szavakat és matematikai témájú könyvet a gimnáziumban a hitoktatójától kapta. Még dúlt a háború, amikor 1943-ban megkezdte tanulmányait a Pázmány Péter Tudományegyetemen. Kiemelkedő képességeire hamar felfigyeltek professzorai. A XX. század egyik legnagyobb hatású matematikaprofesszorának, Riesz Frigyesnek lett a tanársegédje. A nehéz körülmények ellenére is minden adott volt a nagy ívű tudományos karrierhez.

A sors azonban közbeszólt. Az 50-es évek elején igaztalan vádak alapján eltávolították az egyetemről. Karrierjét megtörték, de jelleme és gerince egész életében hajlíthatatlan maradt. Elejtett szavaiból tudjuk, hogy többen, nagy befolyással bíró emberek, felajánlották a közbenjárásukat érdekében. De, ahogy Ő mondta, volt önérzete. Dolgos, munkaszerető családban nőtt fel, nem érezte lealacsonyítónak a fizikai munkát. Hitt abban, hogy a sors kárpótolni fogja az igazságtalan bántalmakért.

1957-ben már az István Gimnázium tanára. Ha csak ezzel teljesedett volna be szakmai karrierje, így is teljes életmű lenne. Diákgenerációk sora őrzi Őt emlékeiben tisztelettel és szeretettel.

Az igazi elégtételt számára az 1964-es év hozta meg, amikor munkatársa lett a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai Központjának. Tehetsége szinte szárnyalt. Alig néhány év alatt a funkcionálanalízis legmodernebb területein végzett újra magas szintű kutatómunkát, és tanított bennünket, hiszen egész életében tanár maradt a szó legnemesebb értelmében. Azon kevés és kivételes matematikusokhoz tartozott, akiknek valamely probléma megoldása vagy egy értékes gondolata azért is okozott örömet, mert ezzel mindenki másnak is örömet akart szerezni. Abból az alkotó környezetből, amelynek kimagasló egyénisége volt, akadémikus, tudományok doktorai, kandidátusok sora került ki, mindenki elismerte és tisztelte kivételes tehetségét.

1970-ben a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézete vezetői felismerve kivételes alkotó közösséget teremtő képességét, rá bízták annak az osztálynak a megszervezését, amely az üzembe helyezésre kerülő, akkor nagyon korszerű számítógép szoftverének fogadásával és működtetésével foglalkozott. Amikor elmentek az úgynevezett gépváró szakemberek, magunkra maradtunk. Elhatároztuk, hogy úgy próbáljuk megoldani a feladatokat, hogy a Magyar Tudományos Akadémián folyó kutatások, és az Intézet ne kerüljön kiszolgáltatott helyzetbe a nyugati szakmai partnerek előtt. Nehéz szavakat találni, ahogyan osztályát vezette. Ha kellett bátorított, ha kellett beállt a sorba, nem válogatva a feladatok között. Kivételes, oldott hangulatú alkotó műhely volt, amelyet létrehozott. Csak az elvégzett munka eredménye és a tehetség számított. Eredményesen képviselte az Akadémiát a Control Data Corporation európai fórumain, és arra is futotta erejéből, hogy európai szintű konferenciát szervezzen, gazdagítva ezzel az Akadémia nemzetközi elismertségét.

Életében nem gyűjtött vagyont, hiszen erre nem is volt lehetősége, de ha a sors úgy hozta, hogy viszonylag gondtalanabbul élhetett, minden keresetét szeretteinek, a családjának adta. 1985-ben 60 éves korában vonult nyugdíjba megelégedett emberként. Kapcsolatait mindvégig ápolta volt munkatársaival. A sors megkímélte a betegségektől, jellemzően a legsúlyosabb balesetét akkor szenvedte el, amikor más embertársán akart segíteni.

Amilyen szeretettel nevelte kislányát, olyan odaadással foglalkozott unokáival is. Hűséges feleségéhez mindenkor nagyon ragaszkodott.

Néhányunknak megadatott, hogy 80-adik születésnapja előtt pár héttel találkozhattunk Vele egy baráti összejövetelen. Néhány perc után szelleme a régi volt. Az emelkedett hangulat közepette szólt nekem, hogy elfáradt, induljunk haza. Akkor döbbentem rá, hogy elmúlhatunk. Óvtam, és megszorítottam a kezét. Ezt tettük sorban mindannyian. Így búcsúztunk el Tőle, a hajdani osztálya, akik között olyan jól érezte magát, tőlünk, akik mindig nagyra becsültük, tiszteltük és szerettük.

Kedves Pista! Emléked szívünkben él! Gondolatainkban velünk vagy, és velünk is maradsz! Isten veled, nyugodjál békében!

Tőke Pál

*

Gehér Pista volt az első hallgató, akivel az egyetemre kerülésem után (1949 augusztusában) találkoztam. Ő akkor már negyedéves volt. Öccsével, Lacival a *Középiskolai Matematikai Lapok* révén tudtunk egymásról, és innét ismert Pista is. Én először azt hittem, ő a Laci, és csodálkozva tapasztaltam, hogy két Gehér van (később tudtam meg, hogy három).

Kezdettől fogva nagyon jó barátságban voltunk. Én úgy néztem rá, mint „matematikai bátyámra". Rögtön „szárnyai alá vett", és nagyon sok szépet tanulhattam tőle. Ahogy *Faludy György* írja *Villon Testamentumjában: ... lim-lom, és szemét közt gyöngyöket fogott a levegőben, s aztán megfordult s úgy, mellékesen, úgy félhalkan és félig elmenőben marokra szórta őket énnekem. ...*

Csodákat és „igaz matematikát" mesélt. Sajnos nem emlékszem már mindenre, de köztük volt a hamazelméleti számosságok ekvivalenciájára vonatkozó *Bernstein*-tétel és az izoperimetrikus probléma *Fejes Tóth Lászlótól* származó bizonyítása.

Nem csak szóban tanított; az Ő javaslatára olvastam el a *Rademacher–Töplitz*-könyvet (Von Zahlen und Figuren), és *Dörrie* könyvét (Triumph der Mathematik).

Szépet tudott alkotni is: *Surányi János* beszervezett néhány jobb hallgatót a feladatmegoldások jobb megfogalmazása végett, mert a diákok megoldása akkor sem mindig volt igazán használható. Jelen voltam, amikor Pista megtalálta azt a szép megoldást, ami a Lapok 1951. évi márciusi számában a 274. oldalon szerepel (210. feladat).

Nem csak nekem mesélt csodákat, hanem mindenkinek, akit az érdekelt. Természetesen elsősorban a jó hallgatóknak, akiknek akkor is mesélt, ha nem kérték, mert Ő tele volt közlésvággyal. Ha kellett, másnak is magyarázott, mert ezt kötelességének tartotta. Szertelen volt, talán nem is mondott mindig igazat –, de soha nem hazudott; azt mondta, ami eszébe jutott. Nem tudok róla, hogy valaha is ártott volna valakinek. Hadd mondjak el róla egy esetet, ami pályámat nagymértékben befolyásolta:

Turán-szemináriumon előadta a *Hajós*-tételt. Én is a hallgatóság között voltam, s amikor a második dupla óra végén befejezte, megkérdezte tőlem, hogy „hogy tetszett". Azt mondtam, hogy tetszett, de nem igazán értettem. Hogyhogy nem értetted – mondta –, mikor állandóan beleszóltál, hogy itt vagy ott hibás. Ja – feleltem –, azt láttam, hogy az előzőekből ez nem következhet. Elkezdett kiabálni: *Menj el algebristának! Menj el algebristának!* – És így lőn.

Fried Ervin

EMLÉKEZÉS KLEIN ESZTERRE ÉS SZEKERES GYÖRGYRE

LACZKOVICH MIKLÓS ÉS T. SÓS VERA*

Klein Eszter és *Szekeres György*, az Ausztráliában élő magyar származású matematikus házaspár házasságuk 70. évében, egyazon órában, 2005. augusztus 28-án elhunyt.

Mindketten Budapesten születtek, Klein Eszter 1910-ben, Szekeres György 1911-ben. Szekeres György 1932-ben szerzett vegyészmérnöki diplomát a Budapesti Műszaki Egyetemen, majd mérnökként dolgozott a simontornyai bőrgyárban 1939-ig. Klein Eszter a Pázmány Péter Tudományegyetemen végzett matematika–fizika szakon. 1939-ben az üldözések elől Shanghajba menekültek. 1948-ban Ausztráliába települtek át. Szekeres György 1963-ig a University of Adelaide, majd 1963-tól 1976-ig a Univesity of New South Wales professzora, 1976-tól haláláig az utóbbi egyetem emeritus professzora volt.

Mindketten nagy mértékben hozzájárultak az ausztrál matematikai élet megszervezéséhez és ápolásához. A matematikai tehetséggondozás megteremtésében a magyarországi hagyományokat átültetve középiskolai folyóiratot alapítottak, és elindították a középiskolai és egyetemi matematikai versenyeket. Szekeres György matematikusok több generációját indított el pályáján; közülük többen a nemzetközi matematikai élet élvonalába kerültek.

Szekeres György alapító tagja volt az Ausztrál Matematikai Társulatnak. 1963-ban az Ausztrál Tudományos Akadémia tagjává választotta; 1986-ban lett a Magyar Tudományos Akadémia tiszteleti tagja. Számos területen alkotott maradandót, így többek között a kombinatorikában, geometriában, számelméletben, csoportelméletben, általános relativitáselméletben, ami tudományos munkásságának különlegesen széles spektrumát jelzi.

Szekeres György sosem részesült formális egyetemi szintű matematikai képzésben. Hogyan tett szert akkor ilyen hatalmas matematikai műveltségre? Ő maga erről így beszélt Sidney-ben a 90. születésnapja tiszteletére rendezett banketten: „Ahelyett, hogy egy disszertáció írásával gyötörtem volna magam valamely híresség – mint Fejér vagy Riesz – vezetése alatt, inkább szenvedélyesen matematikát olvastam. Matematikai tudásom nagy részét a kortársaimmal, Erdős Pállal és Turán Pállal való együttműködés révén szereztem.”

*Megjelent az *Emlékbeszédek 2002–2005* című könyvben (MTA, Budapest, 2006).

Klein Eszter Turán Pállal, majd később Erdős Pállal együtt végezte matematika tanulmányait a Pázmány Péter Tudományegyetemen. Mindhárman tagjai voltak annak a fiatal matematikusokból álló csoportnak, amely később Anonimus körként vált ismertté. Valószínűleg Klein Eszter volt az, akin keresztül Szekeres György kapcsolatba került ezzel a csoporttal. De Klein Eszter szerepe ennél több volt. Ahogy Szekeres visszaemlékezett: „Az Eszter által fölvetett geometriai probléma volt az, amelyen keresztül megtanultam, hogy mit jelent teljes koncentrációval kitartóan küzdeni egy matematikai probléma megoldásáért." Ez a maga korában merőben újszerű probléma olyan vizsgálatokat indított el, amelyek a diszkrét matematikának a mai napig intenzíven kutatott, eredményekben és nyitott kérdésekben gazdag témaköreivé váltak.

Már 1933-ban megjelentek Erdős Pállal, illetve Turán Pállal írt közös dolgozatai. Ez az együttműködés, amely három kontinens távolságát áthidalva hosszú évtizedeken át tartott, olyan vizsgálati irányokat indított el, amelyek a matematika fejlődésére döntő hatást gyakoroltak. Valójában a matematikai együttműködés és közös publikálás a teljes Anonimus körre jellemző volt. A matematikai életben ez abban az időben meglehetősen szokatlan volt még, és úgy véljük, hogy ez az intenzív, újszerű munkastílus – amely ma már a nemzetközi tudományos világban mindennapos és nélkülözhetetlen – a magyar matematikai élet karakterének megformálásában is lényeges szerepet játszott.

Meg kell említenünk, hogy ugyancsak Magyarországhoz kötődik Szekeres György híres általános relativitáselméleti dolgozatának keletkezése és publikálása azon első alkalmommal, amikor 20 év távollét után 1958-ban hazalátogatott. Ez lett egyik legismertebb dolgozata, amelyben előremutató módon megalkotta azokat a matematikai eszközöket, amelyek kulcsfontosságúak a kozmológiai fekete lyukak megértéséhez.

Az 1958-as látogatás után Klein Eszter és Szekeres György gyakran visszatértek Magyarországra. Szekeres György már közel a 90-hez, 1996-ban és 1999-ben is hazalátogatott Erdős Pál temetésére, majd az Erdős Pál emlékére rendezett konferencia alkalmából. Ezen két utolsó látogatásán éppoly aktív volt, mint korábban: előadásokat tartott, újra bejárta a 60 évvel korábbi kirándulásainak helyszíneit – a budai és a pilisi hegyeket –, kamarazenélt és matematizált a barátaival. Az aktív zenélés nagyon fontos része volt életének. Hegedűn és brácsán játszott; a rendszeres házimuzsikálásokon kívül több zenekarnak is tagja volt élete végéig.

Sosem vesztették el a szoros kapcsolatot a magyar matematikai élettel és kultúrával, dacára annak, hogy még 30 évesek sem voltak, amikor el kellett hagyniuk Magyarországot, és így életük nagyobb részét szülőföldjükön kívül töltötték. Mégis, ezek a korai évek egész életükre nézve meghatározóak voltak. Szekeres György ezt így fejezte ki az Erdős Pál temetésén mondott beszédében 1996. október 18-án: „Számomra a Palitól való búcsúzás egyúttal búcsút jelent az ifjú éveimtől és a matematikai beszélgetésektől a városligeti Anonimus-szobornál ... Búcsú gyakorlatilag mindattól, amit Budapest jelentett számomra, és amit egész életemben magamban hordoztam."

Mindketten nagy űrt hagytak maguk után. Különleges humanitást, erkölcsi tisztaságot, kultúrát sugárzó egyéniségük mindenkire mély benyomást tett, aki ismerhette őket. Klein Eszterre és Szekeres Györgyre szeretettel és tisztelettel emlékszik a magyar és nemzetközi matematikai világ.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA
1913–1998

KÉRCHY LÁSZLÓ*

Ez az emlékbeszéd a szerzőnek Heinz Langerrel közösen írt, Szőkefalvi-Nagy Béla életét és munkásságát bemutató angol nyelvű cikkén alapszik, amely a Birkhäuser Kiadó *Operator Theory: Advances and Applications* sorozatának 127., *Recent Advances in Operator Theory and Related Topics, Béla Szőkefalvi-Nagy Memorial Volume* című kötetében jelent meg.

Életrajzi vázlat

Szőkefalvi-Nagy Béla 1913. július 29-én született Kolozsvárott. A családi név nemesi származásra utal: Szőkefalva kis falu Erdélyben, nem messze a Küküllő menti Erzsébetvárostól, ahol édesapja született. Édesapja, Gyula szintén neves matematikus volt, aki Kolozsvárott a Szegény Iskolanővérek rendjének iskolájában, a nagy múltú Mariánumban tanított, később pedig a Szegedi Tudományegyetem geometria tanszékét vezette. Édesanyja, Bölöni Jolán matematika–fizika–természetrajz szakos polgári iskolai tanári diplomával rendelkezett. „Számomra gyermekkorom még ma is meseszerűen szépnek tűnik" – mondta egy interjúban Szőkefalvi-Nagy Béla. A kisfiút szinte minden érdekelte. Nagyon vonzódott a növényekhez, állatokhoz, a szülői házban saját kis parcelláját önállóan művelte meg. Később nagy élvezetet talált a különböző nyelvek grammatikai szerkezetének vizsgálatában. Anyanyelvén kívül folyékonyan beszélt franciául, németül, románul és később angolul; az iskolában még görögöt is tanult. Matematikai tehetségének jelei korán megmutatkoztak, a kis Béla már hatéves korában elkápráztatta szüleit a kombinatorikus jellegű játékok, feladványok megoldásában mutatott ügyességével.

Az I. világháború megváltoztatta a határokat, Erdély román fennhatóság alá került. Édesapja, elvesztvén kolozsvári állását, meghívást kapott a Klebelsberg Kunó által újonnan alapított Szegedi Tanárképző Főiskola matematika tanszékére. A család Magyarországra költözött, s két év múlva Szőkefalvi-Nagy Béla beiratkozott a Szegedi Tudományegyetem matematika–fizika szakára. Ezekben az években a modern fizika forradalmi változásokon ment keresztül. Már gimnazista korában Béla kedvenc olvasmányai Neumann Jánosnak a kvantummechanika matematikai

*Megjelent az *Emlékbeszédek 2002–2005* című könyvben (MTA, Budapest, 2006).

alapjairól és B. L. van der Waerdennek a kvantumelmélet és a csoportelmélet kapcsolatáról írt könyvei voltak. Ezeket olyannyira élvezte, hogy egy-egy passzusnál, amelyeket különösen érdekesnek talált, nem tudott tovább olvasni, felpattant, kiszaladt édesanyjához a konyhába elmondani neki, hogy itt valami csodálatos dolog van. Az egyetemen nagyon élvezte Bay Zoltán fizika-előadásait. Ugyanakkor mély hatást gyakoroltak rá matematikaprofesszorai: Riesz Frigyes, Haar Alfréd és Kerékjártó Béla. Neumann könyvéből már tudta, hogy milyen fontos szerepet játszanak a Hilbert-térbeli operátorok a kvantumfizikában, az egyetemen pedig az operátorelméletet eredeti forrásból, Riesz Frigyestől tanulhatta, aki ezen modern kutatási irány egyik megalapozója volt.

Egy interjúban Szőkefalvi-Nagy Béla a következőképpen emlékezett vissza arra az időre, amikor a tanítványból kolléga lett.

„Riesz egyik dolgozatához találni véltem egy jóval egyszerűbb megközelítési módot. Megmutattam neki. Két nap múlva közölte, hogy egy rossz lépés van a munkámban. Nem keseredtem el – éreztem, hogy jó irányba indultam –, hanem nekiláttam kiköszörülni a csorbát. Ez pedig úgy ment, hogy lefeküdtem a díványra, és gondolkodtam. Ha az ember nem tud átkelni a folyón egy helyen, keres egy másik helyet. Pár nap múlva megtaláltam a helyes lépést. Nyár volt. Riesz professzor lent töltötte az időt a Tiszán. Bár tudtam, hogy nem illendő talán a nagy tekintélyű tudós pihenését zavarni, fölkerestem a csónakházon. Azt mondta, menjek vissza másnap. És másnapra megváltozott. Már amikor barátságosan kezet nyújtott, éreztem, hogy ezzel a gesztussal kollégájává fogadja a tanítványát. Számomra persze továbbra is ő volt a Mester."

Szőkefalvi-Nagy Béla külső tagja volt a budapesti mintára alapított Eötvös Loránd Kollégiumnak, ahol szintén élénk szellemi életre talált. Doktori értekezését – Haar Alfréd kutatásaihoz kapcsolódva – az izomorf függvényrendszerekről írta; „sub auspiciis" avatták doktorrá. 1937–38-ban nyolc hónapot töltött Lipcsében, ahol van der Waerden és Heisenberg dolgoztak ebben az időben. 1939 első szemeszterében Grenoble és Párizs egyetemein folytatta tanulmányait, ahol – többek között – Hadamard-ral és Denjoy-val találkozott. 1939-ben az egyetemre távozott édesapja megüresedett katedráját foglalta el a Szegedi Tanárképző Főiskolán, melynek matematika tanszékét kilenc évig vezette. 1940-ben lett a Szegedi Tudományegyetem magántanára, 1948-ban pedig kinevezték az egyetem nyilvános rendes tanárává. (Nem kis büszkeséggel őrizte Neumann János ajánlólevelét, akivel személyesen csak egyszer, Budapesten sikerült találkoznia.) Először az ábrázoló geometria tanszéket irányította, majd az analízis tanszéket vezette 1983-ban történt nyugdíjba vonulásáig.

A világhírnevet számára a Springer Verlag Ergebnisse sorozatában 1942-ben megjelent, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* című tömör összefoglaló munkája hozta meg, melyből generációk tanulták a normális operátorok spektrálelméletét. 1952-ben jelent meg a Riesz Frigyessel közösen írt *Leçons d'analyse fonctionelle* című monográfiájuk, amely hat nyelvre lefordítva a funkcionálanalízis alapvető tankönyvévé és hivatkozási forrásává vált.

1956-ban meghalt Riesz Frigyes, s ugyanebben az évben Szőkefalvi-Nagy Béla megismerkedett a tehetséges fiatal román matematikussal, Ciprian Foiassal. Egy alkalommal életének ezt az eseményét Szőkefalvi-Nagy az új Dalai Láma tibeti felbukkanásához hasonlította. A kvantumfizika számára a normális operátorok az elsődleges fontosságúak. Ugyanakkor a matematika más alkalmazási területei (például a szóráselmélet vagy az elektronikus hálózatok elmélete) a nem-normális operátorok vizsgálatát kívánják meg. Szőkefalvi-Nagy Béla Dilatációs Tételéből kiindulva, Szőkefalvi-Nagy és Foias a nem-normális operátorok elméletének egy új irányát fejlesztették ki. Eredményeiket az 1967-ben megjelent *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* című monográfiájukban foglalták össze, amelyet aztán angolra és oroszra is lefordítottak.

2. Tudományos eredmények

A továbbiakban Szőkefalvi-Nagy Béla munkásságát néhány kiválasztott példán keresztül szeretném ismertetni; matematikai érdeklődésének és eredményeinek sokrétűsége miatt nem térhetek ki minden egyes alkotására.

Első dolgozatok. Első dolgozatai algebrai-analitikus vizsgálatok a csoportelméletben és az ortogonális függvények elméletében. Ezek még szoros kapcsolatban állnak tanárai, Riesz Frigyes és Haar Alfréd kutatásaival. Riesz érdeklődését különösen a [3][1] munka keltette fel, amelyben a 22 éves szerző többek között új bizonyítást adott M. H. Stone-nak az unitér operátorok erősen folytonos $\big(U(t)\big)_{t\geq 0}$ félcsoportjainak

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dE_\lambda$$

spektrális előállításáról szóló tételére és egyúttal kiterjesztette az eredményt normális operátorokból álló félcsoportokra is (lásd még [18]-at). Stone tétele alapvető jelentőségű az elméleti fizikában, a sztochasztikus folyamatok elméletében és más alkalmazási területeken.

Szőkefalvi-Nagy Béla doktori értekezésének eredményeit a [6]–[9] dolgozatok tartalmazzák. Itt, Haar Alfréd egyik munkájához kapcsolódva, többek között a következő állítást bizonyítja be. Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}$ valós egyenes M és $\hat{M}$ részhalmazain definiált (ψ_j) és $(\hat{\psi}_j)$ ortogonális függvényrendszereknek ugyanaz a szorzási táblázata, azaz, hogy

$$\int_{\hat{M}} \hat{\psi}_j \overline{\hat{\psi}_k}\, ds = \int_M \psi_j \overline{\psi_k}\, ds, \qquad \int_{\hat{M}} \hat{\psi}_j \hat{\psi}_k \overline{\hat{\psi}_l}\, ds = \int_M \psi_j \psi_k \overline{\psi_l}\, ds$$

[1] A hivatkozások a tudományos dolgozatok jegyzékére utalnak.

teljesül minden j, k, l indexre. Ekkor a két rendszer egymásba transzformálható az M mérhető részhalmazainak $\hat{M}$ mérhető részhalmazaiba történő, kölcsönösen egyértelmű halmaz- vagy pontleképezése útján.

Fourier-sorok és approximáció. Szőkefalvi-Nagy Béla sokoldalúan járult hozzá a Fourier-sorok és az approximáció elméletéhez. Korán elhunyt kollégájával, Sólyi (Strausz) Antallal közösen, H. Bohr és J. Favard vizsgálataihoz kapcsolódva, 1937-ben új bizonyítást adott az

$$|F(x)| \leq \frac{\pi}{2U} \sup |f(x)|$$

Bohr-féle egyenlőtlenségre ([17], lásd még [57]-et). Itt

$$f(x) = \sum_k (a_k \cos u_k x + b_k \sin u_k x)$$

alakú trigonometrikus polinom, ahol $u_k \geq U > 0$, F pedig a hozzá tartozó integrálfüggvény:

$$F(x) = \sum_k \frac{1}{u_k}(a_k \sin u_k x - b_k \cos u_k x).$$

A kérdéskör tanulmányozását általános formában a [19, 20] munkákban folytatta (lásd még [14, 15]-öt). Az alábbiakban ismertetjük az egyik idevágó eredményt, a periodikus függvények esetére specializálva.

Jelölje K_m azoknak a 2π periódusú, mérhető függvényeknek a halmazát, amelyekre $|f(x)| \leq 1$ és amelyeknek a Fourier-sora a $\cos mx$-et és $\sin mx$-et tartalmazó tagokkal kezdődik, azaz

$$\sum_{k=m}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

alakú, ahol m adott nem negatív egész szám. Megadva egy $\lambda = \big(\lambda(k)\big)_{k=m}^{\infty}$ valós számsorozatot és egy δ valós számot, rendeljük hozzá az (1) sorhoz a

$$\sum_{k=m}^{\infty} \lambda(k)\left(a_k \cos\left(kx + \frac{1}{2}\delta\pi\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{1}{2}\delta\pi\right)\right) \tag{2}$$

transzformált sort. Keressük annak a feltételét, hogy (2) egy folytonos függvény Fourier-sora legyen. Jelölje $T_{\lambda\delta}^m f$ ezt a folytonos függvényt (ha létezik). Ekkor a következő kérdés tehető fel: létezik-e olyan, az m, λ, δ mennyiségektől függő, de az $f \in K_m$ függvény választásától független $M_{\lambda\delta}^m$ állandó, amellyel $|(T_{\lambda\delta}^m f)(x)| \leq M_{\lambda\delta}^m$ teljesül minden x-re? Speciálisan kereshetjük a legkisebb ilyen állandót, valamint azokat az f_0 „extremális függvényeket", amelyek mellett ez a legjobb állandó eléretik. Szőkefalvi-Nagy Béla a [19] dolgozatban megmutatta, hogy ezek a feladatok szabatosan megoldhatók, ha a λ sorozat bizonyos monotonitási tulajdonságokkal rendelkezik. Ha például $m \geq 0, \delta = 0$ és λ egy háromszorosan monoton zérussorozat (azaz λ nullához tart és λ első, második és harmadik differenciasorozata nem-negatív), akkor bármely $f \in K_m$ függvényhez található ilyen $T^m_{\lambda 0} f$ folytonos függvény, az $M^m_{\lambda 0}$ érték explicit módon kifejezhető:

$$M^m_{\lambda 0} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\lambda\big((2k+1)m\big)}{2k+1},$$

és az (eltolástól eltekintve egyetlen) extremális függvény: $f_0(x) = \operatorname{sign} \cos mx$. Hasonló állítás érvényes $\delta = 1$ mellett olyan kétszeresen monoton λ zérussorozatok esetén, amelyekre $\sum \lambda(k)/k < \infty$; ekkor

$$M^m_{\lambda 1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda\big((2k+1)m\big)}{2k+1}.$$

Ezekből az igen általános eredményekből le lehetett vezetni H. A. Schwartz és P. Koebe harmonikus függvényekről szóló tételeinek bizonyos általánosításait, továbbá az (1)-hez tartozó egész vagy nem egész rendű integrálfüggvényekre vonatkozó egyenlőtlenségeket, amelyek tartalmazzák H. Bohr, S. N. Bernstein, J. Favard, N. I. Akhieser és M. G. Krein egyes állításait. Végül bizonyos folytonos függvények trigonometrikus polinomok útján történő approximációjával kapcsolatos következmények voltak nyerhetők, amelyek a három utóbbi szerző állításainak kiterjesztései. Megjegyezzük, hogy ezeket a vizsgálatokat a legutóbbi időkig is gyakran idézik és fejlesztik tovább, főként orosz matematikusok.

Szőkefalvi-Nagy Bélának a Fourier-sorok elméletébe vágó eredményeit számos ilyen irányú monográfia ismerteti. A [39] dolgozat szükséges és elegendő feltételeket ad arra, hogy egy a $[0, \pi]$ intervallumon értelmezett, csökkenő, Lebesgue-integrálható és alulról korlátos g függvény

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \cos nx \, dx, \qquad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx \, dx$$

Fourier-együtthatóival képzett

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^\gamma}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{n^\gamma}$$

sorok konvergensek legyenek. Ezek az eredmények magyar és külföldi matematikusok számos további kutatásainak kiindulópontjává váltak; lásd például R. P. Boasnak az „Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete" sorozatban megjelent *Integrability theorems for trigonometric transforms* című könyvét.

A Fourier-sorok elméletének egyik központi kérdése, hogy mennyire jó az approximáció, ha egy f függvényt Fourier-sora részletösszegeivel vagy a részletösszegek valamilyen szummációs eljárás alapján választott közepeivel közelítünk. A [37] dolgozatban Szőkefalvi-Nagy Béla a szummációs módszereknek egy igen általános osztályát tárgyalja. Becslést ad a

$$\sigma_n = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \big\| \sigma_n(f) \big\|_\infty$$

„Lebesgue-féle állandókra", ahol $\sigma_n(f)$ a vizsgált módszerrel megalkotott n-edik közelítés, és a

$$\rho_n = \sup_f \|f - \sigma_n(f)\|_\infty$$

approximációs állandókra, feltéve, hogy ρ_n definíciójában f vagy valamelyik deriváltja eleget tesz egy 1 állandójú Hölder-feltételnek. Ezek a kutatások Fejér Lipót, S. N. Bernstein, D. Jackson, Ch. de la Vallée Poussin, S. M. Nikolskii, Alexits György és mások eredményeihez csatlakoznak.

Tekintsük egy adott f függvény tetszés szerinti ortogonális rendszerre vonatkozó kifejtését. Jelölje $s_n(f)$ e kifejtés n-edik részletösszegét vagy n-edik Fejér-féle közepét. W. Rudin egyik munkájához kapcsolódva, amely a $p = 2$ esettel foglalkozott, Szőkefalvi-Nagy Béla a [61] dolgozatban alsó becslést ad a

$$\sup \frac{\|f - s_n(f)\|_p}{N(f)}$$

mennyiségre. Itt a felső határt egy bizonyos függvényosztály, például egy Lipschitz-féle osztály összes f elemére kell venni, $N(f)$ egy az osztályhoz tartozó funkcionál, például a legkisebb Lipschitz-állandó, végül $\|f\|_p$ az L^p-beli norma. Az adódik, hogy az összes ortonormált rendszer közül a trigonometrikus rendszer és a Haar-féle rendszer rendelkezik bizonyos értelemben a legjobb approximációs tulajdonságokkal.

Geometria. A [25, 38, 66, 81] munkákban Szőkefalvi-Nagy Béla a geometria területére tett kitérőket. Ezek a művek is a bennük található gondolatok továbbvitelére ösztönöztek más matematikusokat: a [25] dolgozat például irányítás-elméleti feladatokkal kapcsolatban még ma is sokat idézett. Itt csak a [81] dolgozat eredményeinek rövid ismertetésére vállalkozom.

Legyen G tetszés szerinti nem üres ponthalmaz a síkon, amelynek zárt burka nem az egész sík. Ismeretes, hogy a G halmaz $t > 0$ távolsághoz tartozó G_t külső parallelhalmazán az összes G-beli középpontú, t sugarú zárt körlap egyesítését értjük. Konvex és korlátos G esetén, $A(G_t)$-vel, illetve $L(G_t)$-vel jelölve G_t területét, illetve határának hosszát, minden $t > 0$-ra érvényesek az

$$A(G_t) = A(G_0) + L(G_0)t + \pi t^2, \quad L(G_t) = L(G_0) + 2\pi t$$

Steiner-féle képletek. Egy síkbeli nem üres, zárt G ponthalmazt (n, ν) típusúnak nevezünk, ha n számú korlátos és ν számú nem korlátos komponensből áll ($n \geq 0$ egész szám és $\nu = 0, 1$). Feltesszük, hogy a nem korlátos komponens mindig tartalmazza a ∞ pontnak egy teljes környezetét, azaz egy körlap külsejét. Szőkefalvi-Nagy Béla a [81] dolgozatban Makai Endre vizsgálataihoz kapcsolódva megmutatta, hogy (n, ν) típusú G halmazra a

$$t \mapsto A(G_t \backslash G_0) - \pi(n - \nu)t^2$$

függvény, alkalmas $\rho^* > 0$ mellett, a $0 \leq t < \rho^*$ intervallumon folytonos és konkáv. Ebből következik, hogy az

$$L_\pm(G_t) = \lim_{h \to 0\pm} h^{-1} A(G_{t+h} \backslash G_t)$$

egyoldali deriváltak $0 \leq t < \rho^*$, illetve $0 < t < \rho^*$ esetén léteznek, a t változónak monoton függvényei, és fennáll az $L_-(G_t) \leq L_+(G_t)$ egyenlőtlenség. Azokra a t pontokra, ahol $L_+(G_t) = L_-(G_t) =: L(G_t)$ (legfeljebb megszámlálhatóan sok kivétellel minden pont ilyen), az

$$L(G_t) \leq L(G_0) + 2\pi t \quad (t > 0)$$

becslés adódik. Ezt korábban, valamivel speciálisabb tartományokra és a határhalmazok hosszúságának létezését feltételezve, Makai Endre bizonyította be más úton.

Az L^2 függvénytér. A [12, 13, 40] dolgozataiban Szőkefalvi-Nagy Béla belső jellemzéseit adja az L^2 függvénytérbe tartozó nem-negatív valós értékű függvények és a karakterisztikus függvények halmazának. Így például [13]-ban a következőket bizonyítja be.

Legyen $\mathcal{P}$ a szeparábilis $\mathcal{H}$ Hilbert-tér vektorainak egy halmaza. Ahhoz, hogy $\mathcal{H}$-nak létezzék a valós egyenes egy alkalmasan választott σ pozitív Borel-mértékéhez tartozó L^2 térre való lineáris és izometrikus leképezése, amely a $\mathcal{P}$ halmazt az L^2-beli nem-negatív valós függvények halmazába viszi át, a következő feltételek teljesülése szükséges és elegendő:

(A) $\mathcal{H}$ egy u eleme akkor és csak akkor tartozik $\mathcal{P}$-be, ha $\mathcal{P}$ minden v elemére $\langle u, v\rangle \geq 0$;

(B) ha $\mathcal{P}$ valamely elemnégyesére $u_1 + u_2 = v_1 + v_2$, akkor létezik olyan w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22} elemnégyes is $\mathcal{P}$-ben, amelyre $u_i = \sum_k w_{ik}$, $v_k = \sum_i w_{ik}$.

Ha az (A) feltételt a következőre enyhítjük:

(A′) $\mathcal{P}$ 0-csúcsú zárt kúp $\mathcal{H}$-ban, amely reprodukáló (azaz $\mathcal{P} - P = H$) és normális (azaz $\|u\| + \|v\| \leq K\|u + v\|$ igaz minden $u, v \in \mathcal{P}$ elempárra valamely K állandóval),

akkor (A′) és (B) teljesülése szükséges és elegendő ahhoz, hogy $\mathcal{H}$-nak létezzen egy „affin" (azaz mindkét irányban folytonos bijektív, lineáris, de nem szükségképpen izometrikus) leképezése egy L^2 térre, amely $\mathcal{P}$-t az L^2-beli nem-negatív függvények halmazába viszi át [40].

Lineáris operátorok. Szőkefalvi-Nagy Béla matematikai tevékenységében központi helyet foglalnak el azok a művek, amelyek a Hilbert-tér lineáris operátorainak elméletével és ennek a matematikai analízis különböző területein való alkalmazásával foglalkoznak. Az eredmények változatossága miatt itt is néhány kiragadott példára kell szorítkoznom. Szőkefalvi-Nagy Bélának egy mára klasszikussá vált, sokat idézett tétele a [33] dolgozatban bebizonyított következő állítás: ha a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér S operátora invertálható, és S összes pozitív és negatív kitevőjű hatványa közös korlát alatt marad, vagyis

$$\|S^n\| \leq K, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3}$$

teljesül egy alkalmas $K < \infty$ állandóval, akkor S hasonló egy unitér operátorhoz, vagyis van olyan invertálható A operátor, mellyel az $U = ASA^{-1}$ operátor unitér. Analóg tétel érvényes olyan egyparaméteres (S_t), $-\infty < t < \infty$ operátorcsoportokra, melyekre az $\|S_t\| \leq K < \infty$ $(-\infty < t < \infty)$ korlátossági feltétel teljesül.

Ezeket az eredményeket többen általánosították, köztük J. Dixmier és M. M. Day. Ennek során az egész számok, illetve a valós számok additív csoportját helyettesíteni lehetett tetszőleges „amenábilis" csoporttal. Máig nyitott, izgalmas kérdés azon csoportok jellemzése, melyek korlátos reprezentációi unitér reprezentációkhoz hasonlóak.

Bizonyos mértékű kiegészítést nyert az előbb idézett állítás a [83] dolgozatban, amelyben Szőkefalvi-Nagy Béla bebizonyította, hogy minden olyan kompakt S operátor, amelyre a (3)-ban szereplő egyenlőtlenség nem negatív n kitevőkre teljesül, hasonló egy kontrakcióhoz, vagyis olyan operátorhoz, amelynek a normája nem nagyobb 1-nél. Később R. S. Foguel egy példa segítségével megmutatta, hogy tetszés szerinti S operátorra ez az állítás általában hamis.

A perturbációszámítás már J. W. Rayleigh műveiben szerepet kapott önadjungált operátorok izolált sajátértékeivel kapcsolatban, E. Schrödinger óta pedig általánosan használatos a kvantumelméletben. A következő feladatról van szó. Tekintsük operátoroknak egy $A(\varepsilon)$, $|\varepsilon| < \delta$ családját (ε valós vagy komplex paraméter), ahol $A(\varepsilon)$ folytonosan vagy analitikusan függ ε-tól. Tegyük fel, hogy az $A(0)$ operátornak van egy $\lambda(0)$ izolált sajátértéke. Milyen az $A(\varepsilon)$ operátor spektruma $\lambda(0)$ környezetében, ha ε kicsiny? Speciálisan, ha $A(\varepsilon)$ analitikusan függ ε-tól, választhatunk-e szintén analitikus $\lambda_j(\varepsilon)$ függvényeket úgy, hogy $\lambda_j(0) = \lambda(0)$ és $A(\varepsilon)$ spektruma a $\lambda(0)$ egy környezetében pontosan a $\lambda_j(\varepsilon)$ $(j = 1, 2, \dots)$ pontokból áll, ha ε elegendően kicsiny? Hasonló kérdéseket lehet feltenni a spektrum más részeivel kapcsolatban is. Egy a Riesz-féle függvénykalkulust és egy újszerű indukciós következtetést felhasználó módszer kifejlesztésével Szőkefalvi-Nagy Bélának a [29, 30, 34, 50] dolgozatokban sikerült F. Rellich ide vonatkozó eredményeit élesítenie és kiterjesztenie, amennyiben egyrészt a fellépő hatványsorok konvergenciatartományaira adott sokkal kedvezőbb becsléseket, másrészt számos állítást Banach-térbeli zárt operátorokra is általánosított.

A perturbációelmélet kérdésköréhez tartoznak az [52] dolgozatban közölt vizsgálatok is. Itt Szőkefalvi-Nagy Béla elsőként bizonyította be, hogy zárt, nem szükségképpen korlátos operátorok indexe tetszés szerinti kompakt perturbáció esetén stabilis. Mint ismeretes, az indexre vonatkozó ilyenfajta állítások fontos szerepet játszanak többek között a szinguláris integrálegyenletek elméletében.

A [71, 73, 80] munkákban Szőkefalvi-Nagy Béla tanítványával, Korányi Ádámmal együtt szoros összefüggést állapított meg egyrészt a Nevanlinna–Pick-feladat és az analitikus függvények elméletének hasonló kérdésfelvetései, másrészt a Hilbert-térbeli izometrikus vagy hermitikus operátorok általánosított rezolvensei között. Ismeretes, hogy a Nevanlinna–Pick-probléma a következőképpen hangzik: A komplex sík D nyílt egységkörlapjának S részhalmazán értelmezett f függvény kiterjesztendő az egész D-n értelmezett $\tilde{f}$ függvénnyé úgy, hogy $\tilde{f}$ D-ben holomorf, valós része pedig nem-negatív legyen. Ilyen $\widetilde{f}$ kiterjesztés akkor és csak akkor létezik, ha a

$$k(s,t) = \frac{f(s) + \overline{f(t)}}{1 - s\bar{t}}$$

magfüggvény pozitív definit az $S \times S$ halmazon. Az említett kapcsolat az izometrikus operátorok általánosított rezolvensével abban áll, hogy az

$$\widetilde{f}(s) = ib + \langle (I + sU)(I - sU)^{-1}v, v\rangle \quad (s \in S) \tag{4}$$

reláció kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít az f függvény kívánt $\widetilde{f}$ kiterjesztései és egy izometria U unitér kiterjesztései között; itt v a megfelelő $\mathcal{H}$ Hilbert-tér egy vektora, b pedig valós konstans. Ez az eljárás lehetővé teszi, hogy az idézett dolgozatokban operátor értékű f függvényekre vonatkozó analóg kérdések ugyanilyen módon tárgyalásra kerüljenek.

Hilbert-térbeli kontrakciók. Aktív kutatói tevékenységének utolsó 30 évében Szőkefalvi-Nagy Béla vizsgálatainak középpontjában a Hilbert-terek általános típusú (azaz nem szükségképpen önadjungált, unitér vagy normális) kontrakciói álltak. Ebben a témában – a már említett monográfián kívül – több mint 75 dolgozatot publikált, köztük körülbelül 50-et Ciprian Foiassal közösen. A matematika történetében kevés ilyen hosszan tartó és intenzív együttműködés fordult elő két tudós között, amely ráadásul ennyire részletesen kidolgozott elmélethez vezetett. Az ötvenes évekkel kezdődően a kontrakciók elmélete a nem-normális operátorok elméletében a három fő fejlődési irány egyikét jelentette; a másik két irányt N. Dunford és J. T. Schwartz spektráloperátorai, valamint M. G. Krein és iskolája képviselték. Másrészről, Szőkefalvi-Nagy és Foias elmélete szorosan kapcsolódott a szovjet iskolához, nevezetesen M. S. Livsic és M. S. Brodskii vizsgálataihoz. Nem véletlen, hogy Szőkefalvi-Nagy és Foias mély és szép eredményei sok ország számos matematikusát indították az új elmélettel való foglalkozásra. Így napjainkra e tárgykörben rendkívül gazdag irodalom jött létre, a fejlődés vége pedig még nem látható.

E vizsgálatok fő célja Hilbert-téren értelmezett minél általánosabb T korlátos lineáris operátorok szerkezetének tisztázása. Általában feltehető, hogy T kontrakció, azaz $\|T\| \le 1$, hiszen tetszés szerinti korlátos lineáris operátor ilyenné tehető megszorozva őt egy alkalmas pozitív számmal. A kiindulópontot Szőkefalvi-Nagy Béla egy tétele képezte, amely szerint bármely $\mathcal{H}$ Hilbert-téren ható T kontrakciónak létezik unitér dilatációja ([62], lásd még [64, 68, 110]-et különféle további bizonyításokkal). Ez azt jelenti, hogy található egy bővebb $\mathcal{K}$ Hilbert-téren ható U unitér operátor úgy, hogy

$$T^{[n]}f = P_{\mathcal{H}}U^n f, \quad f \in \mathcal{H} \tag{5}$$

teljesül minden $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$ esetén. Itt $P_{\mathcal{H}}$ a $\mathcal{K}$ tér $\mathcal{H}$-ra való merőleges vetítésének operátora, és

$$T^{[n]} = \begin{cases} T^n & \text{ha } n = 0, 1, \dots \\ T^{*|n|} & \text{ha } n = -1, -2, \dots . \end{cases}$$

Ennek az általános tételnek előzménye volt egyrészt Halmos Pál eredménye olyan U_1 unitér operátor létezéséről, amely (5)-öt az $n = 1$ esetén teljesíti, azaz amelyre $Tf = P_{\mathcal{H}} U_1 f$ $(f \in \mathcal{H})$, másrészt M. A. Naimark nevezetes tétele fél-spektrálmérték spektrálmérték ortogonális vetületeként való előállításáról. Mivel az unitér operátorok szerkezete eléggé jól ismert, az (5) összefüggés lehetőséget nyújt arra, hogy a T és U közötti kapcsolat tanulmányozása útján T szerkezetére vonatkozó felismerésekhez jussunk.

Az (5)-ben szereplő T és U közti kapcsolat szemléltetése céljából vegyük a J. J. Schäffertől származó mátrix-konstrukciót U egy lehetséges megválasztására. A $\mathcal{H}$ téren adott T kontrakcióhoz tekintsük a

$$\mathcal{K} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_n \quad (\mathcal{H}_n = \mathcal{H};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

téren az

$$U = \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & I & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & D_{T^*} & T & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & -T^* & D_T & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & I & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

két-irányban végtelen mátrix segítségével definiált U operátort, ahol

$$D_T := (I - T^*T)^{1/2} \quad \text{és} \quad D_{T^*} := (I - TT^*)^{1/2}.$$

Itt a T mátrixelem indexei: $0, 0$. A főátló alatti átlóban a nem jelölt elemek az identikus I operátorral egyenlők, az összes többi nem jelölt mátrixelem a nulla operátor. Meg lehet mutatni, hogy ez az U unitér és rendelkezik az (5) tulajdonsággal. A bal felső és a jobb alsó sarokban álló részmátrixok eltolási operátorokat reprezentálnak, míg a T-től függő részt az

$$\begin{bmatrix} U_{0,-1} & U_{0,0} \\ U_{1,-1} & U_{1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{T^*} & T \\ -T^* & D_T \end{bmatrix}$$

blokk alkotja. Tehát az U operátor szerkezete megfelel annak a (például a villamos hálózatok elméletében) gyakran alkalmazott elvnek, hogy bizonyos rendszerekben a kimenet a bemenetből egyszerű eltolással állítható elő, a rendszer belsejében lejátszódó folyamat pedig egy középen elhelyezkedő „fekete dobozzal" írható le.

Az (5) összefüggésben szereplő U unitér dilatáció speciálisan választható minimálisnak is, vagyis olyannak, hogy az $U^n f$, $f \in \mathcal{H}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ vektorok kifeszítsék a $\mathcal{K}$ teret; ekkor izomorfiától eltekintve U egyértelműen meghatározott. Ha a T kontrakció teljesen nem-unitér, azaz $\mathcal{H}$ nem tartalmaz olyan nem nulla alteret, amelyen T unitér operátort indukálna, akkor megmutatható, hogy az U

minimális unitér dilatáció spektrálmértéke abszolút folytonos a Lebesgue-mértékre nézve. Ennek következtében a függvénykalkulust ki lehet terjeszteni polinomokról a H^∞ függvényosztály összes elemére (azaz az egységkör belsejében korlátos, analitikus függvényekre), továbbá azokra az egységkörlapon nem korlátos függvényekre is, melyek uv^{-1} hányadosként írhatók, ahol $u \in H^\infty$ és $v \in K_T^\infty$. Itt K_T^∞ azoknak a $v \in H^\infty$ függvényeknek a halmaza, amelyekre $v(T)$ kölcsönösen egyértelmű és sűrű képterű. Tetszőleges teljesen nem-unitér T kontrakció esetén K_T^∞ többek között tartalmazza a H^∞-beli „külső" függvényeket (a Beurling-féle értelemben). Szőkefalvi-Nagynak és Foiasnak ezek a hatvanas évek elején elért eredményei lényegesen elősegítették és nagymértékben ösztönözték a kontrakciók további tanulmányozását.

Ismeretes, hogy véges dimenziós térben bármely T lineáris operátorhoz található olyan $u(\not\equiv 0)$ polinom, melyre $u(T) = 0$. E tulajdonság általánosítása céljából Szőkefalvi-Nagy és Foias bevezették azon teljesen nem-unitér T kontrakciók C_0 osztályát, amelyekhez található olyan $w \in H^\infty$ ($w \not\equiv 0$) függvény, hogy $w(T) = 0$. Bármely $T \in C_0$ esetén létezik m_T „minimális" függvény is, pontosabban szólva olyan m_T „belső" függvény (azaz $|m_T(e^{it})| = 1$ teljesül majdnem mindenütt az m_T függvény egységkörön vett határértékeire), amelyre $m_T(T) = 0$, és amely minden, a $w(T) = 0$ feltételt kielégítő $w \in H^\infty$ függvénynek H^∞-beli osztója. A C_0 osztályhoz tartozó T operátorok érdekes tulajdonságai közül mutatóban felsoroljuk a következőket:

(i) bármely $f \in \mathcal{H}$ vektorra $T^n f \to 0$ és $T^{*n} f \to 0$, ha $n \to \infty$;

(ii) a $\sigma(T)$ spektrum m_T-nek az egységkör belsejében elhelyezkedő zérushelyeiből és az egységkörvonal azon pontjaiból áll, amelyeken keresztül m_T nem folytatható analitikusan az egységkör külsejébe;

(iii) T-nek van nem triviális invariáns altere;

(iv) a T és I által generált, az erős operátortopológiában zárt algebra megegyezik a T operátor $(T)''$ bikommutánsával, valamint az $X = v(T)^{-1}u(T)$ ($u \in H^\infty$, $v \in K_T^\infty$) alakban írható operátorok osztályával;

(v) T-nek akkor és csak akkor van ciklikus x_0 vektora (azaz melyre a $T^n x_0, n = 0, 1, 2, \ldots$ vektorok kifeszítik az egész $\mathcal{H}$ Hilbert-teret), ha a T operátor $(T)'$ kommutánsa kommutatív.

Emlékeztetünk rá, hogy a T operátor $(T)'$ kommutánsán azon S operátorok halmazát értjük, amelyek felcserélhetők T-vel (azaz $ST = TS$); a T operátor $(T)''$ bikommutánsa ennek megfelelően azokból az operátorokból áll, amelyek $(T)'$ mindegyik elemével felcserélhetők. A C_0 osztály (i)–(v) tulajdonságai a véges dimenziós terek operátoraira érvényes hasonló tények általánosításai, a bizonyítások azonban az általános esetben mélyek és bonyolultak.

Unitér-ekvivalens modell. Szőkefalvi-Nagy Béla és Ciprian Foias elméletének egyik központi eredménye a teljesen nem-unitér kontrakciók unitér ekvivalens modelljének megadása. E modell leírása céljából jelölje $L^2_{\mathcal{L}}$, egy $\mathcal{L}$ Hilbert-térre, az egységkörvonalon értelmezett, $\mathcal{L}$-beli vektor értékű, mérhető, négyzetesen integrálható u függvények terét az

$$\|u\| = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\| u(e^{it}) \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

normával. A $H^2_{\mathcal{L}}$ Hardy-tér azokból az $u \in L^2_{\mathcal{L}}$ függvényekből áll, amelyeknek Fourier-sora $u(e^{it}) = \sum_{n \geq 0} u_n e^{\mathrm{int}}$ ($u_n \in \mathcal{L}$) alakú. Továbbá legyen Θ a következőkben olyan az egységkör belsejében analitikus függvény, amelynek az értékei egy $\mathcal{L}$ Hilbert-térből egy $\mathcal{L}_*$ Hilbert-térbe ható kontrakciók, és amelyre $\left\| \Theta(0)x \right\| < \|x\|$ ($x \in \mathcal{L}$, $x \neq 0$). Az ilyen Θ függvényt $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_*)$-kontraktív analitikus függvénynek nevezzük. Ha még ezenkívül a $\Theta(e^{it})$ peremértékek majdnem mindenütt izometrikus operátorok, akkor azt mondjuk, hogy Θ belső függvény.

Az említett modellt először arra a speciális esetre adjuk meg, amikor a T kontrakció teljesíti a

$$T^{*n} h \to 0 \quad (h \in \mathcal{H} \text{ és } n \to \infty) \tag{6}$$

feltételt. Legyen Θ $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_*)$-kontraktív analitikus belső függvény. Képezzük a

$$\mathcal{H}_0(\Theta) := H^2_{\mathcal{L}_*} \ominus \Theta H^2_{\mathcal{L}}$$

Hilbert-teret és az

$$S_0(\Theta)u := P_{\mathcal{H}_0(\Theta)}(\chi u) \quad \big(u \in \mathcal{H}_0(\Theta)\big)$$

operátort, ahol $P_{\mathcal{H}_0(\Theta)}$ az $L^2_{\mathcal{L}_*}$ tér merőleges vetítése $\mathcal{H}_0(\Theta)$-ra és $\chi(\lambda) = \lambda$. Ekkor a $T := S_0(\Theta)$ operátor (6) tulajdonságú kontrakció. Megfordítva, ha egy (6) tulajdonságú adott T kontrakcióhoz megalkotjuk a

$$\Theta_T(\lambda) := \left[-T + \lambda D_{T^*}(I - \lambda T^*)^{-1} D_T \right] \mid \overline{D_T \mathcal{H}} \quad \big(|\lambda| < 1\big) \tag{7}$$

úgynevezett karakterisztikus függvényt, amely az $\mathcal{L} := \overline{D_T \mathcal{H}}$ és $\mathcal{L}_* = \overline{D_{T^*} \mathcal{H}}$ választás mellett mindig $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_*)$-kontraktív, belső és analitikus, akkor T unitér ekvivalens az $S_0(\Theta_T)$ operátorral. Az eddig tárgyalt (6) speciális esetben ezt a modellt más úton G. C. Rota, J. Rovnyak és H. Helson is megkapták, bár a Θ függvény (7)-nek megfelelő explicit alakja nélkül.

Ezek után a Szőkefalvi-Nagy és Foias által tetszés szerinti teljesen nem-unitér T kontrakcióra adott általános modell a következőképpen írható le. Tetszőleges $(\mathcal{L}, \mathcal{L}_*)$-kontraktív analitikus Θ függvény esetén képezzük a

$$\Delta(e^{it}) := \left(I_{\mathcal{L}} - \Theta(e^{it})^* \Theta(e^{it}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

függvényt, és tekintsük a

$$\mathcal{H}(\Theta) := \left(H^2_{\mathcal{L}_*} \oplus \overline{\Delta L^2_{\mathcal{L}}} \right) \ominus \left\{ \Theta w \oplus \Delta w \, : \, w \in H^2_{\mathcal{L}} \right\} \tag{8}$$

Hilbert-teret, ahol $\overline{\Delta L^2_{\mathcal{L}}}$ a $\{\Delta v : v \in L^2_{\mathcal{L}}\}$ halmaz $L^2_{\mathcal{L}}$-beli lezártja. A $\mathcal{H}(\Theta)$ téren értelmezzük az

$$(9) \qquad S(\Theta)(u \oplus v) := P_{\mathcal{H}(\Theta)}(\chi u \oplus \chi v)$$

operátort. Ekkor $S(\Theta)$ teljesen nem-unitér kontrakció. Megfordítva, adott T teljesen nem-unitér kontrakcióra a (7)-ből kapott Θ_T-vel és az $\mathcal{L} := \overline{D_T\mathcal{H}}$, $\mathcal{L}_* := \overline{D_{T^*}\mathcal{H}}$ alterekkel (9) szerint megalkotott $S(\Theta_T)$ operátor unitér ekvivalens T-vel.

A kontrakciók Szőkefalvi-Nagytól és Foiastól származó modellje és a vele szoros kapcsolatban álló karakterisztikus függvény fontos szerepet játszik napjainkban a Hilbert-térbeli lineáris operátorok elméletében sok elméleti és gyakorlati kérdés tárgyalásánál. Segítségükkel például szükséges és elegendő feltételeket lehet adni arra, hogy egy kontrakció hasonló legyen valamilyen unitér operátorhoz. Felhasználásukkal a kontrakciók bizonyos osztályaira igazolni lehetett nem triviális invariáns altér létezését, az ilyen alterek ugyanis nagyon szorosan összefüggnek a karakterisztikus függvény szorzatfelbontásaival. Ezen túlmenően a karakterisztikus függvénynek lényeges alkalmazásai vannak a villamos hálózatok már említett elméletében és számos más gyakorlati kérdés kapcsán. Végül megjegyezzük, hogy szóráselméleti vizsgálatai során Lax Péter és R. S. Phillips olyan modellt állított fel bizonyos operátorokra, amely alkalmas transzformáció útján kapcsolatba hozható Szőkefalvi-Nagy és Foias modelljének a (6) kikötés mellett érvényes formájával.

A Lifting Tétel. Hogy megfogalmazhassuk Szőkefalvi-Nagy és Foias egy további idevágó fontos eredményét, emlékeztetünk a $\mathcal{H}$-beli T kontrakció minimális izometrikus dilatációjának definíciójára. Ezen egy bővebb $\mathcal{K}_+ \supset \mathcal{H}$ Hilbert-téren ható olyan V izometrikus operátort értünk, amelyre

$$T^n f = P_{\mathcal{H}} V^n f \quad \text{ha } n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{és } f \in \mathcal{H},$$

és amelyre továbbá a $\mathcal{K}_+$ tér megegyezik a $V^n f$ $(n = 0, 1, 2, \dots;\ f \in \mathcal{H})$ vektorok zárt lineáris burkával. T minimális izometrikus dilatációja mindig létezik és izomorfia erejéig egyértelműen meghatározott. A T kontrakció (8)–(9) modelljében $\mathcal{K}_+ = H^2_{\mathcal{L}_*} \oplus \overline{\Delta L^2_{\mathcal{L}}}$ és $V(u \oplus v) = \chi u \oplus \chi v$.

Szőkefalvi-Nagy és Foias „Lifting Tétele" a következőképpen hangzik [118, 119]: Legyen a $\mathcal{H}_i$ Hilbert-téren ható T_i kontrakció minimális izometrikus dilatációja a $\mathcal{K}_i$ téren ható V_i operátor $(i = 1, 2)$, és legyen adott a $\mathcal{H}_1$ teret a $\mathcal{H}_2$ térbe képező X korlátos lineáris transzformáció, melyre $T_2 X = X T_1$. Ekkor létezik olyan, a $\mathcal{K}_1$ teret $\mathcal{K}_2$-be képező Y korlátos lineáris transzformáció, amelyre $V_2 Y = Y V_1$, $P_2 Y(I - P_1) = 0$, $P_2 Y \mid \mathcal{H}_1 = X$ teljesül, és az is elérhető, hogy $\|Y\| = \|X\|$ legyen. Ez a tétel messzemenően általánosítja D. Sarason egy eredményét, és sok fontos alkalmazással bír. Így például levezethető belőle T. Ando két felcserélhető kontrakció unitér dilatációjának létezését kimondó eredménye. Felhasználták az S és T kontrakciókat tartalmazó $S^* X T = X$ operátoregyenlet tárgyalásánál, Hankel-mátrixokra vonatkozó szélsőérték feladatoknál, a fent bevezetett C_0-osztályú kontrakciók szerkezetének vizsgálatánál, és más területeken. A. E. Frazho és C. Foias

The Commutant Lifting Approach to Interpolation Problems című monográfiája átfogó képet ad azokról az újabb eredményekről, amelyeket e tétel kiaknázásával értek el az utóbbi időben.

Kvázihasonlósági modellek. Azokon a modelleken kívül, amelyek egy adott operátorral unitér ekvivalensek, érdeklődésre tartanak számot a hasonlósági és a kvázihasonlósági modellek is. Például Szőkefalvi-Nagy Bélának egy korábban idézett eredménye úgy is megfogalmazható, hogy a (3) tulajdonságú S operátorok számára az unitér operátorok hasonlósági modellt szolgáltatnak. Szőkefalvi-Nagy és Foias a $\mathcal{H}$ tér T operátorát és a $\mathcal{H}'$ tér T' operátorát kvázihasonlóaknak nevezik, ha léteznek olyan kölcsönösen egyértelmű, sűrű képterű

$$X : \mathcal{H} \to \mathcal{H}', \quad Y : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$$

korlátos lineáris transzformációk, amelyekre

$$T'X = XT, \quad TY = YT'.$$

Véges dimenziójú térben a hasonlóság és a kvázihasonlóság fogalma nyilvánvalóan egybeesik.

A lineáris algebra egy ismert tétele szerint véges dimenziójú térben minden operátor hasonló egy Jordan-féle operátorhoz, vagyis egy olyan operátorhoz, amely ciklikus operátorok ortogonális összege, s ahol a fellépő minimál-polinomok az oszthatóság szempontjából csökkenő sorozatot alkotnak. Kontrakcióelméletük keretében Szőkefalvi-Nagynak és Foiasnak sikerült megadniuk egy operátorosztályt, az úgynevezett Jordan-operátorokét, amely egyrészt általánosítja az előbbi operátorokat, másrészt a kontrakciók egy tág osztálya számára szolgáltat kvázihasonlósági modellt. Ezek a Jordan-operátorok a következő módon jellemezhetők. Legyenek $u_1, u_2, \ldots, u_k$ nem konstans H^∞-beli belső függvények, melyekre u_{j+1} osztja u_j-t H^∞-ben ($j = 1, 2, \ldots, k-1$). Képezzük az

$$S(u_1) \oplus S(u_2) \oplus \cdots \oplus S(u_k) =: S(u_1, u_2, \ldots, u_k) \tag{10}$$

ortogonális összeget, ahol az $S(u_j)$ operátor értelmezése ugyanaz, mint $S(\Theta)$-é volt korábban. A (10) alakú operátorok teljesen nem-unitér C_0-osztálybeli kontrakciók u_1 minimál-függvénnyel. Két ilyen operátor, $S(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ és $S(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ pontosan akkor lesz kvázihasonló, ha egybeesik, azaz ha $k = l$ és $u_j = v_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Ezzel kapcsolatban Szőkefalvi-Nagy és Foias egyik fő eredménye a következő [125, 126]: A (10) alakú Jordan-operátorok kvázihasonlósági modellt szolgáltatnak a véges multiplicitású $T \in C_0$ kontrakciók számára. A véges multiplicitás azt jelenti, hogy létezik véges sok $h_1, h_2, \ldots, h_k \in \mathcal{H}$ vektor úgy, hogy a $T^n h_j$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$; $j = 1, 2, \ldots, k$) vektorok kifeszítik a $\mathcal{H}$ teret; az itt fellépő minimális k szám (ami a T operátor multiplicitása) megegyezik a megfelelő (10) Jordan-operátornál szereplő k indexszel.

Későbbi munkáikban Szőkefalvi-Nagy és Foias, Hari Bercovici közreműködésével, kiegészítették és tovább általánosították a fenti eredményt kvázihasonlósági modellt szolgáltatva minden C_0-beli kontrakcióra, de ennek a részleteire itt nem térek ki. Csak annyit jegyzek meg, hogy az operátorok Jordan-modelljére irányuló vizsgálatok többek között kiindulópontjai voltak az egységkörlapon korlátos analitikus függvények H^∞ algebrája feletti (véges vagy végtelen) mátrixok egy újfajta kváziekvivalencia elméletének, amelyet E. A. Nordgren (véges eset) és Szőkefalvi-Nagy Béla (végtelen eset) fejlesztett ki [146]. H. Bercovici *Operator Theory and Arithmetic in* H^∞ című könyve jó összefoglalását adja a C_0-kontrakciókkal kapcsolatban 1988-ig elért eredményeknek.

3. Díjak, közélet

Szőkefalvi-Nagy Béla kiemelkedő tudományos teljesítménye, amely 167 cikkben és 3 monográfiában öltött testet, méltó elismerésben részesült. Még csak a harmincas évei elején járt, amikor 1945-ben megválasztották a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjának; 1956-ban lett az Akadémia rendes tagja. 1971-ben választották meg a Szovjetunió Tudományos Akadémiája külső tagjává, majd 1973-ban az Ír, 1976-ban pedig a Finn Akadémia tiszteleti tagja lett. 1980-ban elnyerte a Szovjet Akadémia Lomonoszov Aranyérmét, 1987-ben pedig az MTA Aranyérmével tüntették ki. A Drezdai Műszaki Egyetem (1965), a Turkui Egyetem (1970), a Bordeaux-i Egyetem (1987) és a József Attila Tudományegyetem (1988) fogadta Honoris Causa doktorává. Számos kongresszus és konferencia főelőadója volt, s több alkalommal tett eleget külföldi vendégprofesszori meghívásnak.

Szőkefalvi-Nagy Béla kiváló előadó volt, az a világos és elegáns stílus jellemezte, amelyet David Hilbertnél megcsodált. Sikerrel alkalmazta azt a brilliáns technikát, amelyet Hilbert matematikai gondolkodásmódjával kapcsolatban fogalmaz meg egy, a nagy elődöt méltató cikkében: „Témáját először mindig könnyedén megvilágítja, rámutat a nehézségekre, a probléma részletei közötti kapcsolatokra, s csak miután így tökéletes előkészítést és tájékoztatást nyújtott, indul neki – képletesen szólva – a hegy megmászásának, de akkor aztán egyenesen tör felfelé, megállás és kitérők nélkül." Generációk tanulták meg Szőkefalvi professzortól nem csak a tárgy anyagát, hanem a fegyelmezett, logikus gondolkodás örömét is. Szigorú vizsgáztató volt, azt vallotta, hogy ha valaki nem tudja magát világosan kifejezni, akkor nem is érti igazán a visszaadandó anyagot. Egy sikeres Szőkefalvi-vizsga után sokakban támadt olyan érzés, hogy az életben már nem jöhet számukra legyőzhetetlen akadály. *Valós függvények és függvénysorok* tankönyvét angolra is lefordították. Rang és igazi megmérettetés volt előadni a heti rendszerességgel tartott oktatói szemináriumán, melyen sok kiváló külföldi kutató is megfordult. Ennek légkörére a szigorú kritika volt jellemző, nem lehetett átsiklani félig megértett részleteken. Ugyanakkor elismerése és bátorítása szárnyakat adott a fiatal kollégáknak.

Az *Acta Scientiarum Mathematicarum* folyóiratot Haar Alfréd és Riesz Frigyes indították útjára 1922-ben, a kolozsvári egyetem Szegedre való költözése után. Tevékenységüknek köszönhetően hamarosan az egész világon olvasott és keresett folyóirattá vált, melynek cserekapcsolatai révén rövid időn belül a semmiből egy jól használható matematikai könyvtárat és folyóirattárat hoztak létre a Bolyai Intézetben. Az alapító szerkesztőktől 1946-ban Szőkefalvi-Nagy Béla vette át a stafétabotot, s állt főszerkesztőként a szerkesztőbizottság élén 1982-ig, utána pedig haláláig tiszteletbeli főszerkesztőként adott hasznos tanácsokat. Áldozatos munkájának köszönhetően a szegedi Acta megőrizte rangját, magas színvonalát, s cserekapcsolatait. Sok fiatal szerző az ő szerkesztői észrevételei és javaslatai kapcsán tanulta meg, hogy hogyan kell egy matematikai cikket színvonalas módon megírni. Az 1975-ben beindított *Analysis Mathematica* magyar–orosz folyóirat társfőszerkesztője, s emellett számos vezető külföldi folyóirat és könyvsorozat szerkesztőbizottsági tagja is volt.

Kiemelkedő tudományszervezői és közéleti tevékenysége is. Hosszú időn át, 1953 és 1990 között vezette az MTA Matematikai Bizottságát, 1977 és 1985 között elnökségi tag, 1970-től 1985-ig pedig a Szegedi Akadémiai Bizottság elnöke volt. Két periódusban (1951/52 és 1963/66) látta el a JATE TTK dékáni teendőit. Vezetői feladatainak körültekintően, kiváló diplomáciai érzékkel tett eleget. Elismertségére jellemző, hogy 1956-ban megválasztották a Szegedi Egyetemi Forradalmi Bizottság elnökévé. Tudományos kapcsolatainak köszönhetően ezért későbbi büntetése „csupán" annyi volt, hogy nem engedték ki az edinburgh-i matematikai világkongresszusra. Előadását távollétében Halmos Pál olvasta fel, tüntető sikerrel. Tudományos, közéleti tevékenységét állami kitüntetések sorával honorálták: 1950-ben, 1953-ban Kossuth-díjat, 1978-ban Állami Díjat kapott, 1983-ban a Magyar Népköztársaság Zászlórendjével jutalmazták, 1994-ben pedig megkapta a Magyar Köztársasági Érdemrend Középkeresztjét.

A helyi közéletben is kivette a részét: egyebek mellett, meghatározó szerepe volt a szívügyének tekintett Szegedi Vadaspark létrehozásában. Igazi lokálpatrióta és világpolgár volt egyszemélyben. Olyan ember, aki sohasem szakadt el Szegedtől, féltőn óvta környezetét, ifjúkori hajlamának engedve órák hosszat figyelte a közeli Fehértó madárleséből a csodálatos élővilágot. Ugyanakkor otthon volt a világ számos egyetemén, emberi kapcsolatai behálózták az egész földet. A helyi közösségért végzett munkája elismeréseként 1990-ben elnyerte a Szegedért Alapítvány fődíját, 1991-ben pedig Szeged város díszpolgárává választották.

Vallását gyakorló, családszerető ember volt. 1941-ben házasodtak össze feleségével, Jolánnal, aki egy énektehetséggel megáldott történelem szakos tanárnő volt. Hat gyermeket neveltek fel, akik azóta sikeres pályát futottak be. Születésük sorrendjében: Katalin énekművész, a Rádió zenei szerkesztője; Zoltán fizikus, a tudomány doktora; Mária fizikus oklevelet szerzett számítástechnikus; Erzsébet bölcsész oklevéllel a szegedi Somogyi Könyvtár Somogyi Károly által adományozott gyűjteményének gondozója; Ágnes fizikus; Zsuzsanna pedig közgazdász.

Amikor Szőkefalvi-Nagy Béla 1998. december 21-én elhunyt, tucatjával érkeztek a megbecsülést és szeretetet sugárzó részvétnyilvánító üzenetek a Bolyai Intézetbe a világ minden tájáról. Emlékének tiszteletére 1999. augusztus 2. és 6. között nagy sikerű nemzetközi operátorelméleti konferenciát rendeztünk Szegeden 82 külföldi és 9 magyar résztvevővel. E konferencia proceedings-e *Recent Advances in Operator Theory and Related Topics, Béla Szőkefalvi-Nagy Memorial Volume* címmel jelent meg 2001 őszén a Birkhäuser Kiadónál közel 700 oldal terjedelemben, 35 új, tudományos eredményeket tartalmazó dolgozattal és egy Szőkefalvi-Nagy Bélát méltató bevezető résszel.

Elhunytával a világ egy kiváló matematikust veszített el, s egyúttal egy meleg szívű, kivételes karakterű embert. Egyenes tartása, szilárd belső értékrendje azok közé a nagy egyéniségek közé emelik, akik kisugárzásukkal, példájukkal hatnak ránk. Emlékét, tanítását kegyelettel megőrizzük.

Szőkefalvi-Nagy Béla publikációi

I. Könyvek

[1] **B. Sz.-Nagy,** *Spektraldarstellung linearer Tranformationen des Hilbertschen Raumes,* (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, V/5), Springer Verlag, Berlin, 1942, IV + 80 pp. – New edition in the USA made by photographic way: 1947. – Second, revised edition: Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967, VI + 81 pp.

[2] **F. Riesz & B. Sz.-Nagy,** *Leçons d'analyse fonctionnelle,* Akadémiai Kiadó, Budapest. First edition: 1952, VIII + 449 pp. – Second edition: 1953, VIII + 455 pp. – Third edition: 1955, VIII + 488 pp. – Fourth, revised edition: 1965, VIII + 490 pp. – Fifth, unchanged edition: 1968. (Published jointly with Gauthier–Villars beginning with the third edition.)

[3] ——— , *Functional analysis,* Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1955, XII + 468 pp. (English translation of the first edition of [2a].)

[4] ——— , *Lekcii po funcionalnomu analizu,* First edition: Foreign Literary Publ. Co., Moscow, 1954, 499 pp. – Second edition, revised and supplemented by S. A. Teljakovskii: "Mir", Moscow, 1979, 589 pp. (Russian translation of the second edition of [2a].)

[5] ——— , *Vorlesungen über Funktionalanalysis,* (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 27), VEB Deut-scher Verlag der Wissenschaften, Berlin. First edition: 1956, XI + 482 pp. – Second edition: 1968. – Third edition: 1973. – Fourth edition: 1982, 518 pp. (German translation of the third edition of [2a], including the appendices.)

[6] ——— , *Leçons d'analyse fonctionnelle* (in Japanese), Tokyo, 1973, Vol. 1: XII + 282 pp, Vol. 2: XII + 320 pp. (Japanese translation of the fifth edition of [2a], including the appendices.)

[7] ——— , *Funkcionálanalízis,* Tankönyvkiadó, Budapest, 1988, 534 pp. (Hungarian translation of the fourth edition of [2a], including the appendices.)

[8] ——— , *Functional Analysis,* (Dover Books on Advanced Mathematics), Dover Publications, Inc., New York, 1990, XII + 504 pp. (English translation of the second French edition.)

[9] **B. Sz.-Nagy,** *Prolongements des transformations linéaires de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955, 36 pp. (Published separately and as an appendix in the third edition of [2a].)

[10] ——, *Extensions of linear transformations in Hilbert space which extend beyond this space,* Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1960, 37 pp. (English translation of [3a].)

[11] ——, Prodolženija operatorov v gilbertovom prostranstve s vyhodom iz etogo prostranstva, *Matematika,* **9:6** (1965), 109-144. (Russian translation of [3a].)

[12] ——, *Valós függvények és függvénysorok,* (University textbook), Tankönyvkiadó, Budapest, 1954, 307 pp. – Second, expanded edition: 1961, 370 pp. – Seventh reprinting: 1981.

[13] ——, *Introduction to real functions and orthogonal expansions,* Akadémiai Kiadó – Oxford University Press, Budapest – New York, 1964, XI + 447 pp. (English translation of the second edition of [4a].)

[14] ——, *Haar Alfréd összegyűjtött munkái – Alfred Haar Gesammelte Arbeiten,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1959.

[15] **B. Sz.-Nagy** & **C. Foias,** *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert,* Akadémiai Kiadó – Masson et Cie, Budapest – Paris, 1967, XI + 373 pp.

[16] ——, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space,* North-Holland Publishing Co., Amsterdam–London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York; Akadémiai Kiadó, Budapest; 1970, XIII + 389 pp. (Revised and expanded edition of [6a] in English.)

[17] ——, *Garmoničeskij analiz operatorov v gilbertovom prostranstve,* Izdat. "Mir", Moscow, 1970, 431 pp. (Revised and expanded edition of [6a] in Russian, with a foreword by M. G. Krein.)

[18] **B. Sz.-Nagy,** *Unitary dilations of Hilbert space operators and related topics,* (Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at the University of New Hampshire, June 7–11, 1971), American Mathematical Society, Providence R. I., 1974, VIII + 54 pp.

II. Cikkek

[1] **B. Sz.-Nagy,** Ein Verfahren zur Gewinnung von Atomformfaktoren, *Zeitschrift f. Phys.,* **91** (1934), 105–110.

[2] ——, Berechnung einiger neuen Atomfaktoren, *Zeitschrift f. Phys.,* **94** (1935), 229–230.

[3] ——, Über messbare Darstellungen Liescher Gruppen, *Math. Annalen,* **112** (1936), 286–296.

[4] ——, Sur la mesure invariante dans des groupes topologiques, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **202** (1936), 1248–1250.

[5] ——, Über eine Frage aus der Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Zeitschrift,* **41** (1936), 541–544.

[6] ——, Izomorf függvényrendszerekről, *Mat. Term. Tud. Értesítő,* **54** (1936), 712–735.

[7] ——, Über isomorphe vollständige Funktionensysteme, *Math. Zeitschrift,* **43** (1937), 1–16.

[8] ——, Über in sich abgeschlossene Funktionensysteme, *Math. Zeitschrift,* **43** (1937), 17–31.

[9] ——, Önmagában zárt ortogonális függvényrendszer szorzótáblázatáról, *Mat. Term. Tud. Értesítő,* **53** (1937), 574–591.

[10] ——, Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines in sich abgeschlossenen orthogonalen Funktionensystems, *Annali di Pisa,* **6** (1937), 211–224.

[11] ——, Zur Theorie der Charaktere Abelscher Gruppen, *Math. Annalen,* **114** (1937), 373–384.

[12] ——, Über die Gesamtheit der charakteristischen Funktionen im Hilbertschen Funktionenraum, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **8** (1937), 166–176.

[13] ——, On the set of positive functions in L_2, *Annals of Math.,* **39** (1938), 1–13.

[14] ——, Propriétés extrémales des séries de Fourier transformées par des suites absolutment monotones, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **206** (1938), 808–811.

[15] ——, Sur des suites de facteurs multiplement monotones, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **206** (1938), 1342–1344.

[16] ——, Projektív sokszögekről és sokoldalakról, *Mat. Term. Tud. Értsítő,* **57** (1938), 105–120.

[17] **A. Starusz** & **B. Sz.-Nagy,** Egy Bohr-féle tételről, *Mat. Term. Tud. Értesítő,* **57** (1938), 121–135.

[18] **B. Sz.-Nagy,** On semigroups of selfadjoint transformations in Hilbert space, *Proceedings National Acad. USA,* **24** (1938), 559–560.

[19] ——, Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. I. Periodischer Fall, *Berichte Akad. Wiss. Leipzig,* **90** (1938), 103–134.

[20] ——, Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen. II. Nichtperiodischer Fall, *Berichte Akad. Wiss. Leipzig,* **91** (1939), 3–24.

[21] ——, Sur un problème d'extrémum pour les fonctions définies sur tout l'axe réel, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **208** (1939), 1865–1867.

[22] ——, Über ein geometrisches Extremalproblem, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **9** (1940), 253–257.

[23] ——, Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **10** (1941), 64–74.

[24] ——, Egy Carlson-féle és néhány azzal rokon egyenlőtlenségről, *Mat. Fiz. Lapok,* **48** (1941), 162–175.

[25] ——, Sur un problème pour les polyèdres convexes dans l'espace n-dimensionnel, *Bulletin Soc. Math. de France,* **69** (1941), 3–4.

[26] ——, Függvények megközelítése Fourier-sorok számtani közepeivel, *Mat. Fiz. Lapok,* **49** (1942), 122–138.

[27] **F. Riesz** & **B. Sz.-Nagy,** Über Kontraktionen des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **10** (1943), 202–205.

[28] **B. Sz.-Nagy,** A Hilbert-féle tér normális átalakításainak félcsoportjairól, *Szent István Akadémia Értesítője,* **28** (1943), 87–96.

[29] ——, Perturbációk a Hilbert-féle térben. I, *Mat. Term. Tud. Értesítő,* **61** (1942), 755–775.

[30] ______, Perturbációk a Hilbert-féle térben. II, *Mat. Term. Tud. Értesítő,* **62** (1943), 63–79.

[31] ______, Sur les lattis linéaires de dimension finie, *Commentarii Math. Helvetici,* **17** (1944), 209–213.

[32] ______, Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel ihrer Fourierschen Reihen, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **11** (1946), 71–84.

[33] ______, On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **11** (1947), 152–157.

[34] ______, Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, *Commentarii Math. Helvetici,* **19** (1947), 347–366.

[35] ______, Vibrations d'une corde non homogène, *Bulletin Soc. Math. France,* **75** (1947), 193–208.

[36] ______, Expansion theorems of Paley–Wiener type, *Duke Math. Journal,* **14** (1947), 975–978.

[37] ______, Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier, *Hungarica Acta Math.,* **1** (1948), 14–52.

[38] **L. Rédei** & **B. Sz.-Nagy,** Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron, *Publ. Math. Debrecen,* **1** (1949), 42–50.

[39] **B. Sz.-Nagy,** Séries et intégrales de Fourier des fonctions monotones non bornées, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **13** (1949), 118–135.

[40] ______, Une caractérisation affine de l'ensemble des fonctions positives dans l'espace L^2, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **12 A** (1950), 228–239.

[41] ______, Méthodes de sommation des séries de Fourier. I, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **12 B** (1950), 204–210.

[42] ______, Riesz Frigyes tudományos munkásságának ismertetése, *Mat. Lapok,* **1** (1950), 170–181.

[43] ______, Méthodes de sommation des séries de Fourier. II,*Časopis Pest. Mat. Fys.,* **74** (1949), 210–219.

[44] ______, Méthodes de sommation des séries de Fourier. III, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **13** (1950), 247–251.

[45] ______, Über die Konvergenz von Reihen orthogonaler Polynome, *Math. Nachr.,* **4** (1951), 50–55.

[46] ______, Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son intégrale de Poisson, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **1** (1950), 183–187.

[47] ______, Szovjet eredmények a funckionális analízis terén, *Mat. Lapok,* **2** (1951), 5–53.

[48] ______, Ortogonális polinomsorok konvergenciájáról, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Augusztus 27–Szeptember 2, 1950,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952, 249–258.

[49] ______, Sajátértékfeladatok perturbációszámítása, *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.,* **1** (1951), 288–293.

[50] ______, Perturbations des transformations linéaires fermées, *Acta Sci. Math.* (*Szeged*), **14** (1951), 123–137.

[51] ———, Eredmények az analízis területén, *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **2** (1952), 59–71.

[52] ———, On the stability of the index of unbounded linear transformations, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 49–52.

[53] ———, On a spectral problem of Atkinson, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 61–66.

[54] ———, Magyar matematikusok hozzájárulása a spektrálelmélethez, *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **3** (1953), 85–100.

[55] ———, Pozitív polinomok. I, *Mat. Lapok,* **3** (1952), 140–147.

[56] ———, Pozitív polinomok. II, *Mat. Lapok,* **4** (1953), 13–17.

[57] ———, Über die Ungleichung von H. Bohr, *Math. Nachr.*, **9** (1953), 255–259.

[58] ———, A moment problem for selfadjoint operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **3** (1952), 285–293.

[59] ———, Momentumprobléma önadjungált operátorokra, *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **4** (1954), 163–171.

[60] ———, Az 1952. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny, *Mat. Lapok,* **4** (1953), 126–155.

[61] ———, Approximation properties of orthogonal expansions, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **15** (1953), 31–37.

[62] ———, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **15** (1953), 87–92.

[63] ———, O sopražennyh konusah v gilbertovom prostranstve, *Uspehi Matem. Nauk. III,* **5** (57) (1953), 167–168.

[64] ———, Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **15** (1954), 104–114.

[65] ———, Kontrakciók és pozitív definit operátorfüggvények a Hilbert-térben, *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **4** (1954), 189–204.

[66] ———, Ein Satz über die Parallelverschiebung konvexer Körper, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **15** (1954), 169–177.

[67] ———, Riesz Frigyes 1880–1956, *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.*, **6** (1956), 143–156.

[68] ———, Forsetzungen linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes mit Austritt aus dem Raum, *Schr. Forschungsinst. Math.*, **1** (1957), 289–302.

[69] ———, Remark on S. N. Roy's paper "A useful theorem in matrix theory", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **7** (1956), 1.

[70] ———, Contributions en Hongrie à la théorie spectrale des transformations linéaires, *Czechoslovak Math. J.*, **6** (81) (1956), 166–176.

[71] ———, Remarks to the preceding paper of Á. Korányi, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **17** (1956), 71–75.

[72] ———, Preobrazovanija gilbertova prostranstva, položiteljno opredelennye funkcii na polugruppe, *Uspehi Matem. Nauk.*, **11** (1956), 173–182.

[73] **B. Sz.-Nagy & Á. Korányi,** Relations d'un problème de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7** (1956), 295–303.

[74] **B. Sz.-Nagy,** Sur les contractions de l'espace de Hilbert. II, *Acta Sci. Math.,* **18** (1957), 1–14.

[75] ——— , A Hilbert-tér normális transzformációinak gyengén konvergens sorozatairól, *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.,* **7** (1957), 295–303.

[76] ——— , Suites faiblement convergentes de transformations normales de l'espace hilbertien, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **8** (1957), 295–302.

[77] ——— , Note on sums of almost orthogonal operators, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **18** (1957), 189–191.

[78] ——— , Neumann János munkássága az operátorelmélet területén, *Mat. Lapok,* **8** (1957), 185–210.

[79] ——— , Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **19** (1958), 26–45.

[80] **B. Sz.-Nagy & Á. Korányi,** Operatortheoretische Behandlung und Verallgemeinerung eines Problemkreises in der komplexen Funktionentheorie, *Acta Math.,* **100** (1958), 171–202.

[81] **B. Sz.-Nagy,** Über Parallelmengen nichtkonvexer ebener Bereiche, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **20** (1959), 36–47.

[82] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et de l'opérateur adjoint, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **20** (1959), 91–96.

[83] **B. Sz.-Nagy,** Completely continuous operators with uniformly bounded iterates, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.,* **4** (1959), 89–92.

[84] **C. Foias, L. Gehér & B. Sz.-Nagy,** On the permutability condition of quantum mechanics, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **21** (1960), 78–79.

[85] **B. Sz.-Nagy,** Spectral sets and normal dilations of operators, *Proc. Internat. Congress Math., Edinburgh, 1958,* Cambridge Univ. Press, New York, 1960, 412–422.

[86] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **21** (1960), 251–259.

[87] **B. Sz.-Nagy,** Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit des Herrn G. Brehmer, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **22** (1961), 112–114.

[88] ——— , On Schäffer's construction of unitary dilations, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.,* **3–4** (1960/61), 343–346.

[89] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** Sur les contractions de l'espace de Hilbert. V. Translations bilatérales, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **23** (1962), 106–109.

[90] ——— , Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fontionnel, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **23** (1962), 130–167.

[91] ——— , Remark to the preceding paper of J. Feldman, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **23** (1962), 272–273.

[92] **B. Sz.-Nagy,** Hilbert Dávid, *Magyar Tud. Akad. III. Oszt. Közl.,* **12** (1962), 203–216.

[93] ——— , The "outer functions" and their role in functional calculus, *Proc. Internat. Congress Math., Stockholm, 1962,* Inst. Mittag-Leffler, Djurshalm, 1963, 421–425.

[94] ______ , Un calcul fonctionnel pour les opérateurs linéaires de l'espace hilbertien et certaines de ses applications, *Studia Math.,* **1** (1963), 119–127.

[95] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** Modèles fonctionnels des contractions de l'espace de Hilbert. La fonction caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **256** (1963), 3236–3238.

[96] ______ , Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des contractions de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **256** (1963), 3413–3415.

[97] **B. Sz.-Nagy,** Isometric flows in Hilbert space, *Proc. Cambridge Philos. Soc.,* **60** (1964), 45–49.

[98] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VII. Triangulations canoniques. Fonction minimum, *Acta Sci Math. (Szeged),* **25** (1964), 12–37.

[99] ______ , Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VIII. Fonctions caractéristiques. Modéles fonctionnels, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **25** (1964), 38–71.

[100] ______ , Une caracterisation des sous-espaces invariants pour une contraction de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris,* Groupe 1, **258** (1964), 3426–3429.

[101] ______ , Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IX. Factorisations de la fonction caractéristique. Sous-espaces invariants, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **25** (1964), 283–316.

[102] **B. Sz.-Nagy,** Un calcul fonctionnel pour les contractions, *Seminari dell'Instituto Nazionale di Alta Matematica, 1962–63,* Ediz. Cremonese, Rome, 1965, 525–528.

[103] ______ , Sur la structure des dilatations unitaires des opérateurs de l'espace de Hilbert, *Seminari dell'Instituto Nazionale di Alta Mathematica, 1962–63,* Ediz. Cremonese, Rome, 1965, 529–554.

[104] **B. Sz.-Nagy & C. Foias**, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. X. Contractions similaires à des transformations unitaires, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **26** (1965), 79–91.

[105] **B. Sz.-Nagy,** Positive definite kernels generated by operator-valued analytic functions, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **26** (1965), 191–192.

[106] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** Corrections et compléments aux contractions. IX, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **26** (1965), 193–196.

[107] ______ , Sur les contractions de l'espace de Hilbert. XI. Transformations unicellulaires, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **26** (1965), 301–324.

[108] ______ , Quasi-similitude des opérateurs et sous-espaces invariants, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **261** (1965), 3938–3940.

[109] ______ , Décomposition spectrale des contractions presque unitaires, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **262** (1966), 440–442.

[110] **B. Sz.-Nagy,** Positiv-definite, durch Operatoren erzeugte Funktionen, *Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden,* **15** (1966), 219–222.

[111] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** On certain classes of power-bounded operators in Hilbert space, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **27** (1966), 17–25.

[112] ______ , Sur les contractions de l'espace de Hilbert. XII. Fonctions intérieures admettant des facteurs extérieurs, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **27** (1966), 27–33.

[113] ——— , Correction: "Sur les contractions de l'espace de Hilbert. XI. Transformations unicellulaires", *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **27** (1966), 265.

[114] ——— , Forme triangulaire d'une contraction et factorisation de la fonction caractéristique, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **28** (1967), 201–212.

[115] ——— , Echelles continues de sous-espaces invariants, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **28** (1967), 213–220.

[116] ——— , Similitude des opérateurs de classe C_ρ à des contractions, *C. R. Acad. Sci. Paris Série A,* **264** (1967), 1063–1065.

[117] **B. Sz.-Nagy,** Szovjet-magyar matematikai kapcsolatok a szegedi Acta Scientiarum Mathematicarum tükrében, *Ünnepi Acta,* Szeged, 1967, 45–57.

[118] **B. Sz.-Nagy** & **C. Foias,** Dilatation des commutants d'opérateurs, *C. R. Acad. Sci. Paris Série A,* **266** (1968), 493–495.

[119] ——— , Commutants de certains opérateurs, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **29** (1968), 1–17.

[120] **B. Sz.-Nagy,** Products of operators of classes C_ρ, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.,* **13** (1968), 897–899.

[121] **B. Sz.-Nagy** & **C. Foias,** Vecteurs cycliques et quasi-affinités, *Studia Math.,* **31** (1968), 35–42.

[122] ——— , Opérateurs sans multiplicité, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **30** (1969), 1–18.

[123] **B. Sz.-Nagy,** Sur la norme des fonctions de certains opérateurs, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **20** (1969), 331–334.

[124] ——— , Hilbertraum-Operatoren der Klasse C_0, *Abstract Spaces and Approximation,* (Proc. Conf., Oberwolfach, 1968), Birkhäuser, Basel, 1969, 72–81.

[125] **B. Sz.-Nagy** & **C. Foias,** Modèle de Jordan pour une classe d'opérateurs de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **31** (1970), 91–115.

[126] ——— , Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **31** (1970), 287–296.

[127] **B. Sz.-Nagy,** Matematika, *Magyar Tudomány,* 1970, 269–283.

[128] **B. Sz.-Nagy** & **C. Foias,** The "Lifting Theorem" for intertwining operators and some applications, (Proc. Internat. Symposium on Operator Theory, Indiana Univ. Bloomington, 1970), *Indiana Univ. Math. J.,* **20** (1971), 901–904.

[129] ——— , Local characterization of operators of class C_0, *J. Funct. Anal.,* **8** (1971), 76–81.

[130] **B. Sz.-Nagy,** Vecteurs cycliques et commutativité des commutants, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **32** (1971), 177–183.

[131] ——— , Sous-espaces invariants d'un opérateur et factorisations de sa fonctions caractéristique, *Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice, Septembre 1970,* Gauthiers–Villars, Paris, **2** (1971), 459–465.

[132] ——— , Quasi-similarity of operators of class C_0, *Hilbert Space Operators and Operator Algebras,* (Proc. Internat. Conf., Tihany, 1970), North-Holland, Amsterdam, 513–517.

[133] **B. Sz.-Nagy** & **C. Foias,** Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0. II, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **33** (1972), 113–116.

[134] ———, Accretive operators: Corrections, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **33** (1972), 117–118.

[135] ———, Echelles continues de sous-espaces invariants. II, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **33** (1972), 355–356.

[136] **B. Sz.-Nagy,** Cyclic vectors and commutants, *Linear Operators and Approximation,* (Proc. Conf., Oberwolfach, 1971), Birkhäuser, Basel, 1972, 62–67.

[137] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** On the structure of intertwining operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **35** (1973), 225–254.

[138] ———, Regular factorizations of contractions, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **43** (1974), 91–93.

[139] ———, Injection of shifts into strict contractions, *Linear Operators and Approximation. II,* (Proc. Conf., Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1974), Birkhäuser, Basel, 1975, 29–37.

[140] ———, Jordan model for contractions of class $C_{\cdot 0}$, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **36** (1974), 305–322.

[141] **B. Sz.-Nagy,** On a property of operators of class C_0, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **36** (1974), 219–220.

[142] ———, Models of Hilbert space operators, (Spectral Theory Symposium, Trinity College, Dublin, 1974), *Proc. Royal Irish Acad. Sec. A,* **74** (1974), 263–270.

[143] ———, A general view on unitary dilations, (Internat. Conf., Madras, 1973; dedicated to Alladi Ramakrishnan), *Lecture Notes in Math.,* **399** (1974), 382–395.

[144] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** An application of dilation theory to hyponormal operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **37** (1975), 155–159.

[145] **H. Bercovici, C. Foias & B. Sz.-Nagy,** Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0. III, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **37** (1975), 313–322.

[146] **B. Sz.-Nagy,** Digonalization of matrices over H^∞, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **38** (1976), 223–238.

[147] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** Commutants and bicommutants of operators of class C_0, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **38** (1976), 311–315.

[148] ———, On contractions similar to isometries and Toeplitz operators,*Annales Acad. Sci. Fennicae Series A I,* **2** (1976), 553–564.

[149] ———, Vecteurs cycliques et commutativité des commutants. II, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **39** (1977), 169–174.

[150] **B. Sz.-Nagy,** Quasi-similarity of Hilbert-space operators, *Proc. Internat. Conf. on Differential Equations, Uppsala, 1977,* Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1977, 179–188.

[151] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** On injections intertwining operators of class C_0, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **40** (1978), 163–167.

[152] **B. Sz.-Nagy,** Nevanlinna class functions of operators, *Proceedings of the Rolf Nevanlinna Symposium on Complex Analysis, Silivri, 1976,* Univ. Istanbul, Istanbul, 1978.

[153] ———, Diagonalization of matrices over H^∞, *Linear Spaces and Approximation,* (Proc. Conf., Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1977), Birkhäuser, Basel, 1978, 37–46.

[154] **H. Bercovici, C. Foias, L. Kérchy & B. Sz.-Nagy,** Compléments à l'étude des opérateurs de classe C_0. IV, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **41** (1979), 29–31.

[155] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** The function model of a contraction and the space L^1/H_0^1, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **41** (1979), 403–410.

[156] **B. Sz.-Nagy,** A brief review of my work in mathematics (Russian), *Vestnik Akad. Nauk SSSR,* **6** (1980), 50–56.

[157] **C. Foias, C. Pearcy & B. Sz.-Nagy,** The functional model of a contraction and the space L^1, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **42** (1980), 201–204.

[158] **H. Bercovici, C. Foias & B. Sz.-Nagy,** Reflexive and hyper-reflexive operators of class C_0, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **43** (1981), 5–13.

[159] **C. Foias, C. Pearcy & B. Sz.-Nagy,** Contractions with spectral radius one and invariant subspaces, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **43** (1981), 273–280.

[160] **H. Bercovici, C. Foias, C. M. Pearcy & B. Sz.-Nagy,** Functional models and extended spectral dominance, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **43** (1981), 243–254.

[161] **B. Sz.-Nagy,** Some lattice properties of the space L^2, *From A to Z, Leiden, 1982,* Math. Centrum, Amsterdam, 1982, 101–112.

[162] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** Toeplitz type operators and hyponormality, (Dilation theory, Toeplitz operators, and other topics; Timisoara/Herculane, 1982), *Operator Theory: Adv. Appl.* **11**, Birkhäuser, Basel–Boston, 1983, 371–388.

[163] **E. Durszt & B. Sz.-Nagy,** Remark to a paper: "Models for noncommuting operators" by A. E. Frazho, *J. Funct. Anal.,* **52** (1983), 146–147.

[164] **B. Sz.-Nagy & C. Foias,** Contractions without cylic vectors, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **87** (1983), 671–674.

[165] **H. Bercovici, C. Foias, C. Pearcy & B. Sz.-Nagy,** Factoring compact operator-valued functions, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **48** (1985), 25–36.

[166] **B. Sz.-Nagy,** Sets similar to the positive cone in $L^2(m)$, *Operator Theory: Adv. Appl.* **24**, Birkhäuser, Basel, 1987, 313–320.

[167] ——— , Bohr inequality and an operator equation, *Operator Theory: Adv. Appl.* **24**, Birkhäuser, Basel, 1987, 321–327.

EMLÉKEZÉS FEJÉR LIPÓTRA SZÜLETÉSÉNEK SZÁZHUSZONÖTÖDIK ÉVFORDULÓJA ALKALMÁBÓL

HORVÁTH JÁNOS*

1980-ban, Fejér Lipót születésének századik évfordulója alkalmából, Tandori Károly [20] és Jean-Pierre Kahane [18] számoltak be Fejér életéről és méltatták munkásságát. Ezenkívül Fejér életéről és műveiről emlékeznek meg Aczél János [1] és Szász Pál [19], Turán Pál pedig három cikket szentel a tárgynak [21], [22], [23]. Nem szándékom megismételni a könnyen hozzáférhető dolgozatokban elmondottakat, inkább arról akarok szólni miképp alakult Fejér élete a második világháború alatt, közvetlenül előtte, valamint utána. Ez volt az a korszak, amelynek egy részében én és diáktársaim közeli személyes kapcsolatba kerültünk Fejérrel.

Az 1930-as évek nagyszerűen kezdődtek. Az ellenforradalmi idők túlkapásai elcsitultak. 1930-ban Fejér ötvenéves volt, munkaerejének és munkakedvének teljében. 1930 és 1932 közt kilenc cikket publikált, főleg interpolációról, mégpedig az általa bevezetett konjugált pontok szerepéről a Lagrange-féle interpolációnál, valamint az ún. Hermite–Fejér-interpolációról (l. lejjebb).

1933-ban a Rhode Island állam fővárosában, Providence-ben lévő Brown Egyetem alapításának háromszázadik évfordulóját ünnepelte. Ebből az alkalomból több európai tudóst avattak díszdoktorrá, köztük Fejér Lipótot és a nagy angol matematikust, G. H. Hardy-t, akinek önvallomását [17] a nem matematikus is haszonnal forgathatja. Hardyt Fejér az 1912-es cambridge-i Nemzetközi Matematikai Kongresszuson ismerte meg és Hardy azóta is közeli kapcsolatot tartott a magyar matematikusok nagyrészével, Riesz Marcellel és Pólya Györggyel közös könyvet is írt.

Fejér számára az amerikai út nagy élményt jelentett, amelyről szívesen mesélt. Az Olympic nevű gőzhajón utazott Amerikába – ahogy mindig megjegyezte – a szerencsétlenül járt Titanic testvérhajóján. Providence-ben a Narraganset hotelben lakott, amelynek jelmondata „where the guest is a king" volt. A jubileumi ünnepségek keretében rendeztek egy szimfonikus koncertet, ahol persze Brahms Akadémiai ünnepi nyitányát is előadták. Az elegancia igen nagy volt, a férfiak vagy frakkban vagy szmokingban jelentek meg, de mivel nem volt ruhatár „ölükben szorongatták koszos überzieherüket".

*Megjelent az *Emlékbeszédek 2002–2005* című könyvben (MTA, Budapest, 2006).

Fejér előadott az American Association for the Advancement of Science-nek a chicagói világkiállítás keretében tartott kongresszusán, valamint több keleti és középnyugati egyetemen. Az előadások szövege megjelent részben angolul, részben magyarul [6], [7], [8]. Ezek az első cikkek, amelyeket Fejér angolul publikált; utána még két angol nyelvű cikket írt: az egyik egy levél R. E. A. C. Paley-hez [9], a másik egy sokkal későbbi Szegő Gáborral közös cikk [12].

1933-ban még egy másik jelentős esemény is történt: január harmincadikán Hindenburg elnök egy osztrák pojácát nevezett ki Németország kancellárjának. A hatalomátvétel csak lassan éreztette hatását Magyarországon, így Fejér lelkesen tudott tovább alkotni. 1933 és 1936 közt tizenhat cikket publikált, az egyiket Szegő Gáborral mint társszerzővel. Új témakörök merültek fel kutatásaiban:

1) hatványsorok és trigonometrikus sorok többszörösen monoton együtthatókkal;
2) annak vizsgálata, miként tükrözik a Fourier-sor magasabbrendű Cesàro-féle közepei a kifejtett függvény alaki viszonyait (növekvés, konvexitás);
3) mechanikus quadratúra pozitív Cotes-féle számokkal.

Ez utóbbihoz meg kell jegyeznem, hogy a pozitivitás mindig nagy szerepet játszott Fejér eredményeiben: például az interpolációnál, és már az 1900-as korszakalkotó tételének is az a nyitja, hogy a Fourier-féle sor Cesàro-közepeinek magja, az ún. Fejér-féle mag (l. lejjebb (3) alatt), pozitív.

1937-ben egy cikk sem jelent meg Fejér tollából, 1938-ban – abban az évben amelyben a magyar országgyűlés megszavazta „a társadalmi és gazdasági élet hatályosabb biztosításáról" szóló XV. törvénycikket – csak egyetlenegy, amelyik az utolsó volt 1948-ig.

Az 1938-as cikkben [10] a már említett Hardy és annak híres munkatársa, J. E. Littlewood egy tételére ad új bizonyítást. Legyen f egy 2π szerint periodikus, a $[0, 2\pi]$ intervallumban integrálható függvény a számegyenesen, amelyik a ξ pontban folytonos, és legyen $f(\xi) = s$. Jelöljük az f Fourier-féle sora n-edik szeletének értékét a ξ pontban s_n-nel. Fejér klasszikus tételének értelmében az s_n-ek számtani közepei s-hez tartanak, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} = s.$$

Mármost Hardy és Littlewood azt fedezték fel, hogy fennáll az erősebb

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_0^2 + s_1^2 + \ldots + s_n^2}{n+1} = s^2$$

összefüggés.

Hardy és Littlewood eredményét Fejér egy a kétváltozós függvények Fourier-féle soráról szóló tételből vezeti le. Legyen $F(x, y)$ egy a síkban definiált függvény, amelyik a $0 \leq x, y \leq 2\pi$ négyzetben integrálható. A Fourier-sort röviden a $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}(x, y)$ alakban írva, ahol $A_{mn}(x, x) = \sum_{|\mu|=m} \sum_{|\nu|=n} c_{\mu\nu} e^{i(\mu x + \nu y)}$ (v.ö. [24], II. kötet, 301. old.), Fejér a sor főszeleteit:

$$s_{nn}(x, y) = \sum_{\mu=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} A_{\mu\nu}(x, y)$$

tekinti. Tegyük fel, hogy $F(x,y)$ folytonos a (ξ,η) pontban, és legyen $s_{nn} = s_{nn}(\xi,\eta)$. *Fejér tétele* azt mondja ki, hogy az s_{nn} főszeletek harmadrendű Cesàro-féle közepei, azaz az

$$\frac{\binom{n+2}{2}s_{00} + \binom{n+1}{2}s_{11} + \ldots + \binom{2}{2}s_{nn}}{\binom{n+3}{2}}$$

kifejezések az $F(\xi,\eta)$ értékhez tartanak, midőn $n \to \infty$. Ebből a tételből Hardy és Littlewood eredménye két sorban kapható meg ([3], II. kötet, 727. old.).

Fejér az $s_{nn}(x,y)$ főszeletek harmadrendű közepeire a következő zárt előállítást adja:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t,u)k_n(t-x,u-y)\,dt\,du,$$

ahol

$$k_n(t,u) = \frac{1}{\binom{n+3}{2}}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n+2-\nu}{2}\frac{\sin\frac{2\nu+1}{2}t\sin\frac{2\nu+1}{2}u}{sin\frac{1}{2}t\sin\frac{1}{2}u}. \tag{1}$$

Itt megint a Fejér által kedvelt pozitivitás játszik szerepet, ugyanis $k_n(t,u) \geq 0$. Fejér megjegyzi, hogy ez neki egy régebbi tétele, amelyik azon a nem egészen egyszerűen bizonyítható tényen alapszik, amely szerint a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}$$

sor másodrendű Cesàro-közepei pozitívak. Maga a fenti tétel bizonyítása a k_n mag pozitivitásán felül még más tulajdonságait is megkívánja, ezért azt egyebütt kívánja közölni. Viszont bebizonyítja a tételt abban az esetben, amikor $F(x,y) = f(x)f(y)$ alakú, ami elég a Hardy–Littlewood-tétel bizonyításához. Megjegyzi azt is, hogy egy a tételével analóg eredmény érvényes a Laplace-féle sorra is. Fejér a felsorolt négy állítás egyikét sem közölte.

Fejér összegyűjtött munkáihoz fűzött előzetes megjegyzéseiben ([3], I. kötet, 13., 15. old.) Turán Pál megemlíti, hogy Fejér igen terjedelmes kiadatlan kéziratokat hagyott hátra, amelyek 1970-ben „nincsenek definitív állapotban; gondos áttanulmányozásukat az idő rövidsége nem engedte meg". Nem tudom történt-e azóta valami ezekkel a kéziratokkal, és hogy vajon a fentebbi állítások bizonyításai megtalálhatók-e bennük.

1939-ben jelent meg „A zsidók közéleti és gazdasági térfoglalásának korlátozása" című IV. törvénycikk, amely szerint zsidó nem lehetett állami tisztviselő, tehát tanár sem. Kivételt tett olimpiai bajnokokkal, arany vitézségi éremmel kitüntetettekkel és egyes egyetemi tanárokkal, köztük Fejér Lipóttal. A harmadik zsidótörvény, az 1941. évi XV. tc., már a nürnbergi „faji" törvények mintájára készült, de Fejér továbbra is megtarthatta állását.

Én 1942-ben kerültem az akkori Pázmány Péter Tudományegyetem Bölcsészeti Karára mint matematika-fizika szakos hallgató. Az elsőéveseknek tartott differenciál- és integrálszámítás előadást Fejér hirdette meg, de Szász Pál tanította. Ez szerencsés volt, mert Szász kiválóan adott elő: szabatosan, világosan nagy anyagot tárgyalt. Akkor már egy ideje Fejér csak egy tárgyat tanított évente, mégpedig felváltva „A Fourier- és Laplace-féle sorokról" és „Függvénytan" címen. Állítólag sohasem jutott el a Laplace-féle sorokig és a háború után már csak „A Fourier-féle sorról" címen hirdette meg előadását.

Az 1942/43-as tanévben Fejér a Fourier-féle sorokról adott elő. Mivel nagyon kevés matematikát lehetett akkor az egyetemen tanulni – hiszen Fejéren kívül csak egy matematikus rendes tanár volt: Kerékjártó Béla, a geometria professzora, és egy rendkívüli tanár: Szász Pál –, és mivel gimnazista koromban némileg megismerkedtem az infinitézimálszámítás elemeivel, elhatároztam, hogy beülök Fejér óráit hallgatni. Ez rosszul kezdődött. Fejér a Fourier-sor a_k és b_k együtthatóiról magyarázott és azokat persze ákának és békának ejtette ki. Én, aki az első padban ültem, nagyon mulatságosnak találtam, hogy ez a furcsa kis ember békákról mesél és elkezdtem nevetni. Fejér észrevette és rámszólt: „ne tessék nevetni, mi itt komoly dolgokról beszélünk". Szerencsére ennek semmi következménye nem volt, Fejér sohasem említette, valószínűleg elfelejtette.

A következő tanévben Fejér függvénytanról (azaz egy komplex változó holomorf függvényeiről) adott elő, amikor március 19-én beütött a ménkű. Az egyetemet április 15-i hatállyal bezárták, Fejér elvesztette állását, lakását bombatalálat érte, egy „csillagos" házban húzta meg magát, ahol egy december végi napon sorba állították, hogy elvigyék a Dunához agyonlőni. Ettől a sorstól egy katonatiszt közbelépése mentette meg. Az 1945-ös nagy cseberből vederbe jutást súlyos betegen egy szükségkórházban érte meg.

Én távol voltam Budapesttől 1944 novemberétől 1945 júliusáig. Amikor visszaértem, Fejért siralmas körülmények közt találtam. A tanári szobájában az egyetemen lakott minden kényelem nélkül. Egy kis díványon aludt, és az ételt, amelyet barátai hoztak, egy villanyrezsón melegítették meg. Én is gyakran melegítettem meg az ebédjét, sőt még főztem is neki ebédet. Ennek a helyzetnek megvolt az az előnye, hogy mi diákok bejáratosak voltunk nála, és így közeli kapcsolatba kerültünk vele. Különlenyomat-gyűjteménye nagyrészben megmaradt, azt áthozták lakása romjaiból, és mi raktuk abc sorrendbe.

Az 1945/46-os tanév a körülményekhez képest rendezett kerékvágásban indult el. A elméleti fizika professzora, Ortvay Rudolf, az ostrom alatt öngyilkos lett; amíg új tanárt nem neveztek ki, László Zoltán tanársegéd tanította a tárgyat. Kerékjártó Béla megbetegedett és a tanév végén meghalt. Helyette a Kolozsvárról Budapestre került Fejes László tanította a mértant. Akkor kezdte a Fejes Tóth nevet használni, nehogy Fejérrel összetévesszék. Fejér visszakapta katedráját, és a „Fourier-féle sorról" adott elő. Ezúttal megint felvettem a tárgyat és különösen nagy benyomást tett rám bizonyítása Lebesgue egy tételére [5], amelyet részletesen analizált. A három oldal, amelyre feljegyeztem Fejér tárgyalását, még most is megvan.

Legyen f egy 2π szerint periodikus függvény a számegyenesen, amelyik a $[0, 2\pi]$ intervallumban integrálható. Legyen $x \in (0, 2\pi)$ és vezessük be a Fejér által gyakran használt

$$\varphi(t) = \frac{f(x-2t) + f(x+2t) - 2f(x)}{2}$$

jelölést. *Lebesgue tétele* azt mondja ki, hogy ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |\varphi(t)|\, dt = 0, \tag{2}$$

akkor a Fourier-féle sor szeleteinek elsőrendű Cesàro-féle $\sigma_n(x)$ közepei az x helyen tartanak az $f(x)$ értékhez. Fejér felhasználja az általa 1900-ban felfedezett

$$|\sigma_{n-1}(x) - f(x)| \le \frac{2}{\pi n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(t)| \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt \tag{3}$$

egyenlőtlenséget. Bizonyítása mármost abból áll, hogy a (3) egyenlőtlenség jobb oldalát felülről megbecsüli a könnyen kezelhető

$$2\pi\varphi^*\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{n\frac{\pi}{2}}{\left(1+n\frac{\pi}{2}\right)^2} + 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^*(t) \frac{n^2 t}{(1+nt)^2}\, dt \tag{4}$$

kifejezéssel, ahol

$$\varphi^*(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |\varphi(u)|\, du.$$

1946 vége felé a British Council meghívta Fejért egy angliai előadáskörútra, de a budapesti angol hatóságok nem adtak neki vízumot. A mendemonda szerint az angol konzul személyesen találkozott Fejérrel, és úgy vélte, hogy ennek a fáradt öregembernek a látogatása nem hajt hasznot az angol tudomány számára. Fejért kissé lesújtotta ez a visszautasítás, és annál nagyobb örömet jelentett számára, amikor meghívták a francia Association pour l'Avancement des Sciences genfi vándorgyűlésére előadni. Az előadás 1948 júliusában hangzott el. Fejér sok régi ismerőssel, pl. Hadamard-ral és Montellel találkozott Genfben, és érdekes fiatalabb kollégákkal, így Rafael Salemmel ismerkedett meg. Én az 1947/48-as tanévet Párizsban töltöttem, és szerettem volna a gyűlésre elmenni, de ezúttal én nem kaptam vízumot.

Amikor 1948 augusztusában visszaérkeztem Budapestre, Fejér már egy szép villalakásban a Városligeti fasorban egy családnál bérelt két szobát teljes ellátással. Egy napon vendégül látott engem Szegő Gáborral együtt ebédre, és örömmel állapíthattam meg, milyen rendezett körülmények közt él.

Fejér genfi előadásának, amely egyben a háború utáni első publikációja [11], címe „Intégrales singulières à noyau positif". A cikk annak a fejtegetésével kezdődik, hogy vajon kitől származik a neve, és micsoda tulajdonképpen egy szinguláris integrál. Itt meg kell jegyeznem, hogy Calderón és Zygmund korszakalkotó Acta

Mathematica cikke [2] óta mást értünk „szinguláris integrál" alatt, mint Fejér, akinél ezek

$$\int f(t)k_n(x,t)\,dt$$

alakú kifejezések, amelyeknek viselkedésére vagyunk kiváncsiak, amikor n a végtelenhez tart. Fejért főleg azok az integrálok érdeklik, amelyeknél a $k_n(x,t)$ mag pozitív, de belátja, hogy „nem a mag előjele az, amitől a szinguláris integrál konvergenciája vagy divergenciája függ, midőn $n \to \infty$, hanem inkább az abszolút értékének integrálja az, ami elhatározó ebben a kérdésben, ha a mag ezenfelül még más feltételeket is kielégít". A $k_n(x,t) = k_n(x-t)$ alakú magoknál éppen Fejér nevezte az $\int |k_n(t)|\,dt$ számokat Lebesgue-féle állandóknak [4].

Fejér felsorol néhány nagyon régi és néhány nagyon új példát szinguláris integrálok magjaira, köztük az (1) alattit, a (3) egyenlőtlenség jobb oldalán állót (a Fejér-féle magot), és a (4)-beli integrál magját felülről megbecsülő még egyszerűbb

$$\frac{n}{(1+nt)^2}$$

magot. Jean-Pierre Kahane-nak nagyon tetszett Fejérnek az a szólásmódja, amely szerint első látásra a pozitív magokkal rendelkező szinguláris integrálok úgy hasonlítanak egymásra, mint a pingvinek. Azonban mégis lehet őket osztályozni, mégpedig aszerint, hogy a mag deriváltjai egy bizonyos rendig váltakozva pozitívak és negatívak. Bebizonyít egy tételt, amely szerint ha $(-1)^\nu \frac{d^\nu k_n(t)}{dt^\nu} \geq 0$ teljesül a $\nu = 0, 1, \ldots, s$ értékekre, és $k_n(t)$ kielégít még néhány természetes feltételt, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} k_n(t)\,dt = f(x),$$

valahányszor f az x helyen eleget tesz a Lebesgue-féle (2) feltétel abszolút érték nélküli analógja Hardytól és Littlewoodtól származó

$$\lim_{h\to 0} \frac{s}{h^s} \int_0^h \varphi(t)(h-t)^{s-1}\,dt = 0$$

alakú általánosításának.

Fejért már 1946-ban megválasztották a Magyar Tudományos Akadémia tiszteletbeli tagjának, és 1948-ban az elsők között kapott Kossuth-díjat.

1950-ben volt Riesz Frigyes és Fejér Lipót születésének hetvenedik évfordulója. Ebből az alkalomból a szegedi Acta Scientiarum Mathematicarum egy kétkötetes ünnepi számot adott ki, amelyben a világ matematikusainak elitje írt cikket. A számmal két kis probléma merült fel. A sorrend szerint a két kötet az Acta 12. és 13. kötete lett volna. „Nem vagyunk babonásak, de azért mégsem akarjuk kihívni a sorsot" alapon az az elhatározás született, hogy nem lehet valakinek a születésnapját egy 13 számú kötettel megünnepelni, így a kötetek a 12A és 12B megjelölést kapták. A másik baj az volt, hogy egyesek azok közül, akik segítettek

Szőkefalvi Nagy Bélának a szerkesztésben, mint jómagam is, külföldön tartózkodtak és „megtagadták a hazatérést". Így került aztán a neveink helyett a „compluribus adiuvantibus" a tartalomjegyzék végére.

1950. augusztus 27. és szeptember 2. közt zajlott le az Első Magyar Matematikai Kongresszus. Ez mintegy az augusztus 30-tól szeptember 6-ig az USA-beli Cambridge-ben megtartott Nemzetközi Kongresszus ellenkongresszusa volt politikai okokból. A szocialista országokból küldöttségek jöttek amelyeknek összlétszáma 31 volt, ezeken kívül jelen volt még egy külföldi: a belga P. Libois. A Szovjetunió kilenc résztvevőt küldött I. M. Vinogradov vezetésével. A kongresszus megünnepelte Fejér és Riesz születésnapját. Ebből az alkalomból a Szovjet Tudományos Akadémia üdvözletet küldött mindkettőjüknek, amelyet a megnyitó ülésen felolvastak, és díszalbumokba kötve átadtak az ünnepelteknek. Az üdvözleteknek külön pikantériája, hogy azokat Vinogradov írta alá, aki közismerten a szovjet matematikusok közt a legszélsőségesebb zsidógyűlölő volt.

Fejér tartotta az első előadást „Approximáció interpoláció útján" címmel [14]. Áttekintést ad előző munkásságáról, főleg a Hermite–Fejér-interpolációval kapcsolatban. Ha $x_1, \ldots, x_n$ a $[-1,1]$ intervallum különböző pontjai, akkor jelölje

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k h_k(x) + y_k' \mathfrak{h}_k(x)\right) \tag{5}$$

azt a legfeljebb $(2n-1)$-edfokú parabolát, amelyre $H(x_k) = y_k$ és $H'(x_k) = y_k'$. Legyen mármost f a $[-1,1]$ intervallumban értelmezett folytonos függvény. Ehhez Fejér háromfajta parabolát rendel hozzá:

- a *lépcsőparabolát,* amelynél $y_k = f(x_k)$, $y_k' = 0$;
- a *simuló parabolát,* feltéve, hogy f differenciálható, melynél $y_k = f(x_k)$, $y_k' = f'(x_k)$;
- az *interpolutóriusan párhuzamos parabolát,* amelynél

  $$y_k = f(x_k), \qquad y_k' = \check{C}_{2n-1}'(x_k),$$

  ahol $\check{C}_{2n-1}$ az a Čebisov-féle legfeljebb $(2n-1)$-edfokú polinom, amelyik f-től legkevésbé tér el, azaz melyre

  $$\max_{-1\le x\le 1} \left|f(x) - \check{C}_{2n-1}(x)\right| = E_{2n-1}(f) = \min_{P\in\mathcal{P}_{2n-1}} \max_{-1\le x\le 1} \left|f(x) - P(x)\right|,$$

  ha $\mathcal{P}_n$ jelöli a legfeljebb n-edfokú polinomok halmazát.

Pontcsoportsorozatról akkor beszélünk, ha minden természetes n számhoz tartozik egy különböző pontokból álló $x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ pontcsoport a $[-1,1]$ intervallumban. Fejér egyik klasszikus eredménye szerint, ha $x_k^{(n)} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$ $(k = 1, \ldots, n)$, akkor a lépcsőparabolák egyenletesen tartanak f-hez, midőn n minden határon túl nő.

Jelen előadásában Fejér az interpolutóriusan párhuzamos H_{2n-1} parabolákra vonatkozó eredményeire helyezi a hangsúlyt. Egyik amerikai előadásában [8] azt bizonyította be, hogy ha a pontcsoportsorozat normális, azaz $h_k(x) > 0$ minden k-ra és n-re a $[-1, 1]$ intervallumban, akkor $|f(x) - H_{2n-1}(x)| \leq 2E_{2n-1}(f)$, $x \in [-1, 1]$. Egy az előadás időpontjában megjelenőfélben lévő cikkben [13], amelyet Erhard Schmidt hetvenötödik születésnapja tiszteletére írt, azt mutatja ki, hogy a $2E_{2n-1}(f)$ becslés nem javítható.

Fejér élete utolsó cikkét [16] Szegő Gábornak ajánlja hatvanadik születésnapja alkalmából. A cikk dátuma 1955, és tárgya az (5) alatti kifejezésben szereplő h_k és $\mathfrak{h}_k$ *alappolinomok* néhány tulajdonsága. Bebizonyítja, hogy a h_k polinomnak az x_k helyen szigorú lokális maximuma van, és talál egy az $x - x_k$ hatványai szerint haladó sorfejtést h_k-ra. Kimutatja, hogy a $\mathfrak{h}_k$ polinomnak $2n - 1$ valós egyszeres zérushelye van; ezek között szerepelnek természetesen az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontok, amelyeket ha növekvő sorrendben írunk, és a többit szintén növekvő sorrendben az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ szimbólumokkal jelöljük, akkor fennállnak az

$$x_1 < \eta_1 < x_2 < \eta_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < \eta_{n-1} < x_n$$

egyenlőtlenségek.

Egy Szegő Gáborral közös cikke 1949-ben készült, és 1951-ben jelent meg [12]. A dolgozat a $|z| \leq 1$ egységkör konform leképezéseiről szól, főleg a $|z| = 1$ köröknek és az $\arg z =$ konst. sugaraknak megfelelő görbéket tanulmányozza. Miután egy sereg elemi képletet felsorol, a Fejér által bevezetett, a vertikális irányban konvexnek nevezett leképezésekkel foglalkozik, végül pedig a geometriai sor magasabb rendű Cesàro-féle közepeivel.

Fejérnek még egy cikke jelent meg 1951 és 1955 közt [15], ez Riesz Marcel hatvanötödik születésnapjára készült. Egy mindkettőjüknek kedves tárgyról szól: pozitív trigonometrikus polinomokról. A legmeglepőbb benne az az állítás, amelyet Fejér egy H. Burkhardt és E. Esclangon által írt enciklopédiacikkben talált, és talán Fejért magát is meglepte, hogy a

$$\sum_{\mu=1}^{m} \sin \mu t = \frac{\sin \frac{m}{2} t \sin \frac{m+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$$

összegképlet már Archimedesnél megtalálható, természetesen geometriai formában a gömbsüveg felületmértékével kapcsolatban.

Fejér munkáiban 1938 óta ismételten felmerül az a szándéka, hogy egyes kérdésekre másutt részletesen visszatér. Sajnos ezekre nem került sor, 1955 után nem jelent meg több cikke. Élete utolsó két évét elboruló elmével kórházban töltötte, és egy sikerekben és megaláztatásokban gazdag élet után 1959. október 15-én, egy másik emlékezetes esemény tizenötödik évfordulójának napján, meghalt.

Irodalom

[1] Aczél János, Leopold Fejér, In memoriam, *Publicationes Mathematicae Debrecen,* **8** (1961), 1–24.

[2] Calderón, Alberto P. és Zygmund, Antoni, On the existence of certain singular integrals, *Acta Mathematica,* **88** (1952), 85–139.

[3] Fejér Lipót, *Összegyűjtött Munkái – Gesammelte Arbeiten,* Akadémiai Kiadó (Budapest, 1970).

[4] Fejér Lipót, Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **138** (1910), 22–59; [3], I. kötet, 31. szám, 543–572. old.; magyarul: Lebesgue-féle állandók és divergens Fourier sorok, *Matematikai és Természettudomány Értesítő,* **28** (1910), 143–179; [3], I. kötet, 35. szám, 589–620. old.

[5] Fejér Lipót, *Über die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Fourierreihe,* Göttinger Nachrichten (1925), 13–17; [3], II. kötet, 62. szám. 139–143. old.

[6] Fejér Lipót, *On the infinite sequences arising in the theories of harmonic analysis, of interpolation and of mechanical quadratures.* Bulletin of the American Mathematical Society **39** (1933), 521–534; [3], II. kötet, 83. szám, 502–512. old.; magyarul: A harmonikus analízis, az interpoláció és a mechanikus quadratúra elméletében fellépő végtelen sorozatokról, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **40** (1953), 40–53; [3], II. kötet, 86. szám, 540–550. old.

[7] Fejér Lipót, On new properties of the arithmetic means of the partial sums of Fourier series, *Journal of Mathematics and Physics,* **13** (1934), 1–17: [3], II. kötet, 84. szám, 513–526. old.; magyarul: A Fourier-féle sor és a hatványsor számtani közepeinek néhány új tulajdonságairól, *Matematikai és Fizikai Lapok,* **41** (1934), 1–16; [3], II. kötet, 87. szám, 562–575. old.

[8] Fejér Lipót, On the characterization of some remarkable systems of points of interpolation by means of conjugate points, *American Mathematical Monthly,* **41** (1934), 1–14; [3], II. kötet, 85. szám, 527–539. old.

[9] Fejér Lipót, On a theorem of Paley, *Bulletin of the American Mathematical Society,* **40** (1934), 469–475; [3], II. kötet, 88. szám, 576–580. old.

[10] Fejér Lipót, Zur Summabilitätstheorie der Fourierschen und Laplaceschen Reihe, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,* **34** (1938), 503–509; [3], II. kötet, 96. szám, 725–732. old.

[11] Fejér Lipót, Intégrales singulières à noyau positif, *Commentarii Mathematici Helvetici,* **23** (1948), 177–199; [3], II. kötet, 97. szám, 733–754. old.

[12] Fejér Lipót és Szegő Gábor, Special conformal mappings, *Duke Mathematical Journal,* **18** (1951), 535–548; [3], II. kötet, 98. szám, 754–767. old.

[13] Fejér Lipót, Beste Approximierbarkeit einer gegebenen Funktion durch ein Polynom gegebenen Grades, wenn das Polynom sonst beliebig oder wenn es noch einer interpolatorischen Beschränkung unterworfen ist, *Mathematische Nachrichten,* **4** (1950/51), 328–342; [3], II. kötet, 99. szám, 767–782. old.

[14] Fejér Lipót, *Approximáció interpoláció útján,* Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Akadémiai Kiadó (Budapest, 1952), 99–112. old.; [3], II. kötet, 100. szám, 783–801. old.

[15] Fejér Lipót, *Eigenschaften von einigen elementaren trigonometrischen Polynomen, die mit der Flächenmessung aus der Kugel zusammenhängen,* Communications du séminaire mathématique de l'Université de Lund, tome supplémentaire dédié à Marcel Riesz (1952); [3], II. kötet, 101. szám, 801–811. old.

[16] Fejér Lipót, Verschiedene Bemerkungen elementarer Natur über die Grundpolynome die bei den parabolischen Interpolationen auftreten, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* **6** (1955), 227–240; [3], II. kötet, 103. szám, 825–838. old.; magyarul: Néhány elemi természetű észrevétel a parabolikus interpolációnál fellépő alappolinomokra vonatkozólag, *Matematikai Lapok,* **6** (1955), 293–309. old.; [3], II. kötet, 102. szám, 811–825. old.

[17] Hardy, G. H., *A Mathematician's Apology,* With a Forword by C. P. Snow, Cambridge University Press (1967).

[18] Kahane, Jean Pierre, Fejér életművének jelentősége, *Matematikai Lapok,* **29** (1977/81), 21–31; franciául: *Cahiers du séminaire d'Histoire des Mathématiques,* **2** (1981), 67–84.

[19] Szász Pál, Fejér Lipót, *A Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának Közleményei,* **10** (1960), 103–147.

[20] Tandori Károly, Fejér Lipót élete és munkássága, *Matematikai Lapok,* **29** (1977/81), 7–11.

[21] Turán Pál, Fejér Lipót matematikai munkássága, *Matematikai Lapok,* **1** (1950), 160–169.

[22] Turán Pál, Fejér Lipót (1880. febr. 9. – 1959. okt. 15.), *Matematikai Lapok,* **11** (1960), 8–18.

[23] Turán Pál, *Fejér Lipót élete (1880–1959),* Bevezetés Fejér Lipót Összegyűjtött Munkáihoz, [3], I. kötet, 15–20; németül: [3], I. kötet, 21–27.

[24] Zygmund, Antoni, *Trigonometric Series,* Second Edition. Két kötet, Cambridge University Press (1959).

A HATALOM BANZHAF-FÉLE INDEXÉNEK ALKALMAZÁSAI: A BIZTONSÁGI TANÁCS ÉS AZ USA HATALMI RENDSZERÉNEK EGY ELEMZÉSE

CSETE LAJOS

1. Bevezetés

A formális szavazási hatalom mérésére többféle módszert találtak ki. A Shapley–Shubik-féle index mellett [2], [4], [6], [7] például ismert a hatalom Banzhaf-féle indexe, amelyet *John F. Banzhaf III* ügyvéd vezetett be egy 1965-ös cikkében [1], [7].

Talán érdekes lesz tárgyalnunk elemi módon a Banzhaf-indexet különféle példákon keresztül. Ugyanis a Banzhaf-féle hatalmi index a másik említett index mellett kiválóan alkalmas arra, hogy a halmazok és a kombinatorika egy középiskolás szakkörön is tárgyalható gyakorlati alkalmazását ismerhessük meg.

A halmazok témaköréből a részhalmaz fogalmát, míg a kombinatorikából a bizonyos részhalmazok számát megadó binomiális együtthatókat alkalmazzuk sűrűn. A felhasznált segédeszközök egyszerűségéhez képest érdekes elmélet építhető ki bizonyos személyek, csoportok, illetve államok formális szavazási hatalmának a mértékéről, amely általában eltérő szokott lenni a rendelkezésükre álló szavazatok számának arányától.

Mindenkinek van intuitív fogalma egy igen–nem szavazórendszerről, de azért lássuk a következő formális definíciót:

1. definíció. Legyen adva az összes szavazó X halmaza. Szavazásnak nevezzük X egy A részhalmazát. Az A halmazbeli szavazók igennel szavaztak, míg a többi szavazó nemmel szavazott. Egy szavazórendszertől elvárjuk, hogy minden A szavazásra adjon pontosan egy végeredményt, vagyis döntse el, hogy elfogadták a javaslatot vagy nem. Másképpen, a szavazórendszer egy $v : P(X) \to \{i, n\}$ leképezés, ahol $P(X)$ az X halmaz részhalmazainak a halmaza, és $v(A) = i$, ha $A \subseteq X$ szavazás esetén igent mond a szavazórendszer, és $v(A) = n$, ha nemet mond a szavazórendszer [8].

A [2] cikkben tárgyaltuk a Shapley–Shubik-féle hatalmi index működését példákon keresztül. Ezen index egy lehetséges definíciója:

2. definíció. Legyen p egy szavazó egy igen–nem szavazórendszerben, és legyen X az összes szavazó halmaza. Rendezzük az összes lehetséges sorrendbe az X halmazt alkotó szavazókat.

Minden egyes ilyen sorrendben balról jobbra haladva a szereplő szavazókon, kényszerítsük a szavazókat arra, hogy a javaslat elfogadására szavazzanak. Ezt egészen addig végezzük, amíg el nem jutunk egy olyan kulcsszemélynek nevezett szavazóig a sorrendben, akinek a szavazatával a javaslat elfogadottá válik, azaz meg lesz szavazva.

Ekkor a p szavazó hatalmának Shapley–Shubik-féle indexét jelöljük SSI(p)-vel, és ez legyen egyenlő azzal az aránnyal, amit akkor kapunk, ha azon sorrendek számát, amelyben p kulcsszemély, elosztjuk az összes lehetséges sorrend számával.

Megjegyzés. Ha az X halmaz elemeinek száma n, ahol n pozitív egész, akkor az összes lehetséges sorrend, vagyis az összes permutáció száma, mint tudjuk a középiskolából $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ ([2], [4], [6], [7]).

A továbbiakban a Banzhaf-féle hatalmi index működését fogjuk vizsgálni példákon keresztül.

3. definíció. Tegyük fel, hogy p egy szavazó egy igen–nem szavazórendszerben. Ekkor a p szavazó *teljes Banzhaf-hatalma,* amelyet TBP(p)-vel jelölünk, megegyezik azon K szavazókoalíciók számával, amelyekre teljesül a következő három feltétel mindegyike:

1. p tagja a K koalíciónak.
2. K győztes koalíció, azaz $v(K) = i$.
3. Ha p-t tö"öljük a K koalícióból, akkor a maradék koalíció már nem győztes koalíció.

Példa. Legyen egy háromtagú bizottságban a-nak két szavazata, b-nek 1 szavazata és c-nek is egy szavazata. A bizottság egyszerű többséggel hozza meg a döntéseit, vagyis egy döntés elfogadásához 3 szavazat szükséges. Határozzuk meg a bizottság tagjainak teljes Banzhaf-hatalmát!

Megoldás:

Először határozzuk meg TBP(a)-t!
Azon koalíciók, amelyekben a szerepel: $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$.
Ezek közül a győztes koalíciók: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, b, c\}$.
Ha a-t töröljük azon győztes koalíciókból, amelyekben szerepel, akkor a maradék koalíciókból egyik sem lesz győztes koalíció. Ezen halmazok száma 3.

Ezért a-nak a teljes Banzhaf-hatalma 3, vagyis TBP(a) = 3.

Határozzuk meg TBP(b)-t!
Azon koalíciók, amelyekben b szerepel: $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$.
Ezek közül a győztes koalíciók: $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$.
Ha b-t töröljük azon győztes koalíciókból, amelyekben szerepel, akkor a maradék koalíciókból az $\{a\}$ nem lesz győztes. Ezen halmazok száma 1.

Ezért b-nek a teljes Banzhaf-hatalma 1, vagyis $\mathrm{TBP}(b) = 1$.
A szimmetria miatt $\mathrm{TBP}(c) = 1$. Ez a példa a helyesen végigszámolt változata a [3]-ban szereplőnek.

Mivel a TBP számok nem negatív egész számok, ezért érdemes bevezetni egy olyan hatalmi mértéket, amely intuitív módon megadja, hogy a szavazó valamilyen értelemben a hatalom hányad részét birtokolja. Ehhez 0 és 1 közé eső számok kellenek, illetve 0% és 100% közé essen a szavazó hatalmának a mértéke. Ehhez normálni kell a szavazó teljes Banzhaf-hatalmát. Ezt könnyen elvégezhetjük, ha az összes szavazó teljes Banzhaf-hatalmának az összegével elosztjuk az egyes szavazók teljes Banzhaf-hatalmait. (Total Banzhaf Power = teljes Banzhaf-hatalom = TBP).

Tehát az a szavazó Banzhaf-hatalmi indexe $\mathrm{BI}(a) = \frac{3}{3+1+1} = \frac{3}{5}$, hasonlóan $\mathrm{BI}(b) = \mathrm{BI}(c) = \frac{1}{5}$. Ezen példa éppen a [2] cikk 2. példája. Ott azt kaptuk, hogy e rendszer tagjainak Shapley–Shubik-féle hatalmi indexei:

$$\mathrm{SSI}(a) = \frac{2}{3}, \quad \mathrm{SSI}(b) = \frac{1}{6}, \quad \mathrm{SSI}(c) = \frac{1}{6}.$$

A rendszer tagjainak szavazati arányai $2:1:1 = 50\% : 25\% : 25\%$, a Banzhaf-féle hatalmi indexeinek arányai $3:1:1 = 60\% : 20\% : 20\%$, míg a Shapley–Shubik-féle indexek arányai

$$4:1:1 = 66\frac{2}{3}\% : 16\frac{2}{3}\% : 16\frac{2}{3}\%.$$

2. A Banzhaf-féle hatalmi index

4. definíció. Legyenek egy igen–nem szavazórendszer szavazói $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Tegyük fel, hogy p_i tetszőleges szavazó ($i = 1, 2, \ldots, n$) a szavazók közül. Ekkor a p_i szavazó Banzhaf-indexének nevezzük, és $\mathrm{BI}(p_i)$-vel jelöljük a következő számot:

$$\mathrm{BI}(p_i) = \frac{\mathrm{TBP}(p_i)}{\mathrm{TBP}(p_1) + \mathrm{TBP}(p_2) + \ldots + \mathrm{TBP}(p_n)}.$$

Állítás. *Ha egy igen–nem szavazórendszerben a szavazók $p_1, p_2, \ldots, p_n$, akkor tetszőleges p_i szavazó ($i = 1, 2, \ldots, n$) Banzhaf-indexére fennáll, hogy $0 \leq \mathrm{BI}(p_i) \leq 1$.*

Bizonyítás. A bizonyítás a $\mathrm{BI}(p_i)$ definíciójából következik. Esetleg érdemes meggondolnunk, hogy mindig értelmes-e a definíció. Vagyis: $\mathrm{TBP}(p_1) + \mathrm{TBP}(p_2) + \ldots + \mathrm{TBP}(p_n) \neq 0$ mindig fennáll?

Állítás. *Ha egy igen–nem szavazórendszerben a szavazók $p_1, p_2, \ldots, p_n$, akkor fennáll, hogy*

$$\mathrm{BI}(p_1) + \mathrm{BI}(p_2) + \ldots + \mathrm{BI}(p_n) = 1.$$

A bizonyítás nagyon egyszerű. Lásd például [3]-at, ahol egyszerű példákat olvashatunk, végigszámolva a definíció alkalmazására. A [3]-ban és [7]-ben egyaránt megtalálható az 1973 előtti Európai Gazdasági Közösség tagjainak Banzhaf-féle hatalmi indexeinek kiszámolása. Másrészt [3]-ban olvashatunk különféle eredményeket arról, hogy mi történt volna az egyes tagok Banzhaf-féle hatalmi indexeivel, ha megváltoztattuk volna az úgynevezett kvótát, vagyis azt a szavazatszámot, amelyet el kell érni ahhoz, hogy egy javaslatot megszavazzanak.

3. A korai Biztonsági Tanács Banzhaf-típusú elemzése

Az Egyesült Nemzetek Szervezetének, vagyis az *ENSZ*-nek az alapítási napja 1945. október 24. Persze ennek voltak korábbi előzményei is, amelyeket itt nem tárgyalunk. Ekkor a Biztonsági Tanácsot, azaz a *BT*-t is megalapították.

A *Biztonsági Tanács* első ülése 1946. január 17-én volt ([5], 226. oldal). Változatos helyszínek után a *BT* székhelye 1950-től New York lett.

A korai Biztonsági Tanácsnak öt állandó tagja volt: Az Amerikai Egyesült Államok, a Szovjetunió, Kína, Nagy-Britannia és Franciaország. Ezeket a továbbiakban nagyhatalmaknak fogjuk nevezni. Másrészt a Biztonsági Tanácsnak 6 választott ország is tagja volt, amelyek bizonyos ideig voltak csak tagok, és aztán újakat választottak helyettük. Ezeket a nem állandó tagokat kishatalmaknak fogjuk nevezni.

Egy javaslat elfogadásához az kellett, hogy mind az öt nagyhatalom megszavazza a javaslatot, hiszen mindegyik nagyhatalomnak vétójoga volt. Másrészt még az kellett, hogy legalább két kishatalom is a javaslat mellett szavazzon. Érdekes lehet megemlíteni a Szovjetunió aktivitását: az 1965 közepéig leadott 109 darab nagyhatalmi vétóból a Szovjetunió egymaga 103 darab vétót nyújtott be ([5], 215. oldal).

3.1. Először számítsuk ki egy nagyhatalom teljes Banzhaf-hatalmát, vagyis a TBP(nagyhatalom) értéket!

Azon győztes koalíciók számát kell leszámolnunk, amelyben egy kiválasztott nagyhatalom benne van, és ha a kiválasztott nagyhatalmat töröljük a győztes koalícióból, akkor a maradék már nem lesz győztes koalíció.

Az öt nagyhatalom mindegyikének benne kell lennie mindegyik győztes koalícióban és ha egyik is kilép, akkor már a maradék nem lesz győztes koalíció.

3.1.1. eset: Ha az öt nagyhatalom mellett két kishatalom van a győztes koalícióban. A két kishatalmat a 6 kishatalomból kell kiválasztanunk. Mint tudjuk 6 elemű halmaz 2 elemű részhalmazainak a száma: $\binom{6}{2} = 15$ a megfelelő győztes koalíciók száma.

3.1.2. eset: Ha az öt nagyhatalom mellett 3 kishatalom van a győztes koalícióban. Ekkor a 3 kishatalmat 6 kishatalomból kell kiválasztanunk. Ezt $\binom{6}{3} = 20$-féle módon tehetjük meg.

3.1.3. eset: Ha az öt nagyhatalom mellé 4 kishatalmat választunk. Ezt $\binom{6}{4} = 15$-féleképpen tehetjük meg.

3.1.4. eset: Ha az öt nagyhatalom mellé 5 kishatalmat választunk. Ezt $\binom{6}{5} = 6$-féleképpen tehetjük meg.

3.1.5. eset: Ha az öt nagyhatalom mellé 6 kishatalmat választunk. Ezt $\binom{6}{6} = 1$-féleképpen tehetjük meg.

Így egy nagyhatalom teljes Banzhaf-hatalma:

$$\mathrm{TBP}(\text{nagyhatalom}) = \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 15+20+15+6+1 = 57.$$

3.2. Számítsuk ki egy kishatalom teljes Banzhaf-hatalmát!

Válasszunk ki egy tetszőleges kishatalmat és gondoljuk meg, hogyan szerepelhet ez egy győztes koalícióban!

3.2.1. eset: A kiválasztott kishatalom mellett öt nagyhatalom van a győztes koalícióban és még egy kishatalmat kell a győztes koalícióba választanunk. Ezt a kishatalmat már csak öt kishatalom közül választjuk ki, hiszen a 6 kishatalomból 1 már a győztes koalícióban van.

Ötelemű halmazból egy elemet $\binom{5}{1} = 5$-féle módon választhatunk ki. Tehát ez lesz a megfelelő győztes koalíciók száma. Ha egy ilyen győztes koalícióból kiválik a kiválasztott kishatalom, akkor a maradék már nem lesz győztes koalíció.

Gondoljuk meg, hogy hiába szerepel a kiválasztott kishatalom további győztes koalíciókban, ezekből való kiválása már nem lesz kritikus. Vagyis hiába válik ki ezekből, a maradék koalíció továbbra is győztes lesz. Tehát a kiválasztott kishatalom teljes Banzhaf-hatalma

$$\mathrm{TBP}(\text{kishatalom}) = \binom{5}{1} = 5.$$

3.3. A hatalmak Banzhaf-indexei

$$\mathrm{BI}(\text{nagyhatalom}) = \frac{\mathrm{TBP}(\text{nagyhatalom})}{\mathrm{TBP}(\text{nagyhatalom}) \cdot 5 + \mathrm{TBP}(\text{kishatalom}) \cdot 6} =$$

$$= \frac{57}{57 \cdot 5 + 5 \cdot 6} = \frac{57}{315} = \frac{19}{105} \approx 18,10\%.$$

$$\mathrm{BI}(\text{kishatalom}) = \frac{\mathrm{TBP}(\text{kishatalom})}{\mathrm{TBP}(\text{nagyhatalom}) \cdot 5 + \mathrm{TBP}(\text{kishatalom}) \cdot 6} =$$

$$= \frac{5}{315} = \frac{1}{63} \approx 1,59\%.$$

Hasonlítsuk össze egy nagyhatalom Banzhaf-indexét egy kishatalom Banzhaf-indexével!

$$\frac{\mathrm{BI}(\text{nagyhatalom})}{\mathrm{BI}(\text{kishatalom})} = \frac{\frac{57}{315}}{\frac{5}{315}} = \frac{57}{5} = 11{,}4.$$

Tehát a korai Biztonsági Tanácsban egy nagyhatalom hatalmi Banzhaf-indexe 11,4-szer akkora volt, mint egy kishatalomé. Vagyis egy nagyhatalom Banzhaf-indexe egy kishatalom Banzhaf-indexének 1140%-a volt.

Ellenőrző teszt: (2. állítás)

$$5 \cdot \mathrm{BI}(\text{nagyhatalom}) + 6 \cdot \mathrm{BI}(\text{kishatalom}) = 5 \cdot \frac{57}{315} + 6 \cdot \frac{5}{315} = \frac{315}{315} = 1.$$

Eredményeink átmentek az ellenőrzési teszten.

4. A jelenlegi Biztonsági Tanács Banzhaf-típusú elemzése

Még 1966-ban megváltoztatták a Biztonsági Tanács szerkezetét. Az 1966 utáni Biztonsági Tanácsban továbbra is maradt az öt nagyhatalom, mindegyike vétójoggal. Másrészt 10 kishatalmat választanak be a Biztonsági Tanácsba. Ezen kishatalmak állandóan változnak a Biztonsági Tanácsban, csak bizonyos ideig tagok, és aztán újakat választanak helyettük.

A jelenlegi Biztonsági Tanácsnak az öt állandó tagja: az Amerikai Egyesült Államok, Oroszország, Kína, Nagy-Britannia és Franciaország.

Egy döntés elfogadásához az öt nagyhatalom és legalább 4 kishatalom szavazata szükséges.

4.1. Számítsuk ki egy nagyhatalom teljes Banzhaf-hatalmát!

4.1.1. eset: A kiválasztott nagyhatalom szükségképpen benne van minden győztes koalícióban. A győztes koalícióban szereplő öt nagyhatalom mellé $4, 5, 6, \ldots$ stb. kishatalmat választunk a 10 kishatalomból, így a 3.1. számoláshoz hasonló módon kaphatjuk, hogy:

$$\mathrm{TBP}(\text{nagyhatalom}) = \binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6} + \binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} =$$

$$= 210 + 252 + 210 + 120 + 45 + 10 + 1 = 848.$$

4.2. Számítsuk ki egy kishatalom teljes Banzhaf-hatalmát!

4.2.1. eset: A kiválasztott kishatalom mellett öt nagyhatalomnak kell lennie a győztes koalícióban. A kiválasztott kishatalom mellé még 3 kishatalmat választunk a maradék 9 kishatalomból.

Ezt $\binom{9}{3} = 84$-féleképpen tehetjük meg. Minden ilyen győztes koalíció esetén, ha a kiválasztott kishatalom kilép a koalícióból, akkor a maradék koalíció már nem lesz győztes.

Vegyük észre, hogy a kiválasztott kishatalom hiába szerepel még további győztes koalíciókban, azok már szólnak bele a teljes Banzhaf hatalmának az értékébe, hiszen hiába válik ki a kiválasztott kishatalom ezen győztes koalíciókból, a maradék koalíciók továbbra is győztes koalíciók lesznek.

Így TBP(kishatalom) = 84.

4.3. A hatalmak Banzhaf-indexei

$$\begin{aligned}
\mathrm{BI(nagyhatalom)} &= \frac{\mathrm{TBP(nagyhatalom)}}{\mathrm{TBP(nagyhatalom)} \cdot 5 + \mathrm{TBP(kishatalom)} \cdot 10} = \\
&= \frac{848}{848 \cdot 5 + 84 \cdot 10} = \frac{848}{5080} = \frac{106}{635} \approx 16,69\%.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{BI(kishatalom)} &= \frac{\mathrm{TBP(kishatalom)}}{\mathrm{TBP(nagyhatalom)} \cdot 5 + \mathrm{TBP(kishatalom)} \cdot 10} = \\
&= \frac{84}{5080} = \frac{21}{1270} \approx 1,65\%.
\end{aligned}$$

Ellenőrző teszt: (2. állítás)

$$5 \cdot \mathrm{BI(nagyhatalom)} + 10 \cdot \mathrm{BI(kishatalom)} = 5 \cdot \frac{848}{5080} + 10 \cdot \frac{84}{5080} = \frac{5080}{5080} = 1.$$

Eredményeink átmentek az ellenőrző teszten.

Hasonlítsuk össze egy nagyhatalom Banzhaf-indexét egy kishatalom Banzhaf-indexével!

$$\frac{\mathrm{BI(nagyhatalom)}}{\mathrm{BI(kishatalom)}} = \frac{\frac{848}{5040}}{\frac{84}{5040}} = \frac{848}{84} \approx 10{,}1.$$

Tehát a jelenlegi Biztonsági Tanácsban egy nagyhatalom hatalmi Banzhaf-indexe kb. 10,1-szer akkora, mint egy kishatalomé. Vagyis egy nagyhatalom Banzhaf-indexe egy kishatalom Banzhaf-indexének kb. 1010%-a.

Vegyük észre, hogy a 10 kishatalom együttes hatalmi Banzhaf-indexe, kb. 16,5%, kisebb egyetlen nagyhatalom hatalmi Banzhaf-indexénél is, amely kb. 16,69%.

5. Az amerikai elnök, a szenátus és a képviselőház teljes Banzhaf-féle hatalma

5.1. A szavazási rendszer egyszerűsített vázlata

Az amerikai hatalmi rendszerben a politikai hatalom formálisan az elnök, a szenátus és a képviselőház között oszlik meg. A szenátusnak 100 tagja, azaz szenátora van, míg a képviselőháznak 435 tagja, azaz képviselője van. Egy olyan döntést vizsgálunk, amelynek meghozatalához mindhárom hatalmi tényező szavaz.

1. típus:

Egy javaslatot elfogadnak, ha az elnök szavaz mellette, a szenátus legalább 51 tagja és a képviselőház legalább 218 tagja. Ez a szenátus esetében 50% és még 1 szavazat, míg a képviselőház esetében 217,5 az 50%, így ebben az esetben nem követelik meg az $50\% + 1$ szavazatot, hanem azt mondják, hogy 50%-nál több szavazat kell. Ez a megfogalmazás persze érvényes a szenátusra is, erre is mondhatjuk, hogy 50%-nál több szavazat szükséges a döntéshez.

2. típus:

Egy javaslatot akkor is elfogadhatnak, ha az elnök nem szavaz mellette; ebben az esetben a szenátus tagjainak legalább kétharmadának és a képviselőház tagjainak is legalább kétharmadának a javaslat mellett kell szavaznia. Figyeljük meg, hogy itt nem azt mondják, hogy a kétharmadnál több szavazat kell, hanem azt, hogy legalább kétharmad.

Vagyis a szenátus 100 tagja közül legalább 67-nek a javaslat mellett kell szavaznia, míg a képviselőház 435 tagja közül legalább 290-nek kell a javaslat mellett szavaznia.

A továbbiakban a Taylor-könyv (217–220. oldal) elemzését követve indulunk el, majd a könyv tévedését javítva folytatjuk az elemzést.

5.2. A győztes koalíciók száma

Jelöljük S-sel azon koalíciók számát, amelyek tartalmazzák a szenátus tagjainak legalább kétharmadát. Így

$$S = \binom{100}{67} + \binom{100}{68} + \ldots + \binom{100}{100}.$$

Jelöljük s-sel azon koalíciók számát, amelyek tartalmazzák a szenátus tagjainak több mint a felét. Így

$$s = \binom{100}{51} + \binom{100}{52} + \ldots + \binom{100}{100}.$$

Legyen H azon koalíciók száma, amelyek tartalmazzák a képviselőház tagjainak legalább a kétharmadát. Így

$$H = \binom{435}{290} + \binom{435}{291} + \ldots + \binom{435}{435}.$$

Legyen h azon koalíciók száma, amelyek tartalmazzák a képviselőház tagjainak több mint 50%-át. Így

$$h = \binom{435}{218} + \binom{435}{219} + \ldots + \binom{435}{435}.$$

Gondoljuk meg, hogy ekkor a győztes koalíciók száma $S \cdot H + s \cdot h$.

5.3. Az elnök teljes Banzhaf-hatalma

Az elnök $h \cdot s$ darab győztes koalícióban szerepel; ezek mindegyike 1. típusú. Ámde azokat a győztes koalíciókat, amelyekben a szenátorok több mint kétharmada és a képviselők több mint kétharmada a javaslat mellett szavazott, nem tudja az elnök a távozásával „felrobbantani"; ezek száma $H \cdot S$.

Vagyis $\mathrm{TBP(elnök)} = h \cdot s - H \cdot S$.

Attól tartok, hogy a Taylor-könyv a továbbiakban elvi hibát követ el. Folytatjuk a kombinatorikus elemzést, de nem a téves úton.

5.4. Egy szenátor teljes Banzhaf-hatalma

Szemeljünk ki egy szenátort és határozzuk meg azon győztes koalíciók számát, amelyek tartalmazzák a kiválasztott szenátort, és amelyeket a szenátor felrobbant a kilépésével.

Nézzük először az 1. típusú győztes koalíciók esetét! Ha kiválasztottunk egy szenátort, akkor már csak 50 szenátort kell kiválasztanunk ahhoz, hogy meglegyen az 51 szenátor. Az 50 szenátort pedig már csak 99 szenátor közül választhatjuk ki. Ezt $\binom{99}{50}$-féle módon tehetjük meg. Így a kiválasztott szenátor $\binom{99}{50} \cdot h$ darab 1. típusú győztes koalíciót tud felrobbantani kilépésével.

Nézzük most a 2. típusú győztes koalíciók esetét! Ha kiválasztottunk egy szenátort, akkor melléje már csak 66 szenátort kell kiválasztani; ezeket már csak 99 szenátorból választjuk ki. Ezt $\binom{99}{66}$-féle módon tehetjük meg. Így a kiválasztott szenátor $\binom{99}{66} \cdot H$ darab 2. típusú győztes koalíciót tud felrobbantani a távozásával.

Tehát a kiválasztott szenátor teljes Banzhaf-hatalma:

$$\mathrm{TBP(szenátor)} = \binom{99}{50} \cdot h + \binom{99}{66} \cdot H.$$

5.5. Egy képviselő teljes Banzhaf-hatalma

Szemeljünk ki egy képviselőt, és határozzuk meg azon győztes koalíciók számát, amelyek tartalmazzák a kiválasztott képviselőt, és amelyeket a kiválasztott képviselő felrobbant a távozásával.

Nézzük először az 1. típusú győztes koalíciókat! A kiválasztott képviselő mellé már csak 217 képviselőt kell választanunk, hogy megkapjuk a 218 képviselőt. Ezt a 217 képviselőt már csak 434 képviselőből választhatjuk ki. Ezt $\binom{434}{217}$-féleképpen tehetjük meg. Így a kiválasztott képviselő $\binom{434}{217} \cdot s$ darab 1. típusú győztes koalíciót robbanthat fel a távozásával.

Nézzük most a 2. típusú győztes koalíciókat! A kiválasztott képviselő mellé csak 289 képviselőt kell választanunk, hogy 290 képviselő legyen. Ezeket már csak 434 képviselőből választjuk ki, ezt pedig $\binom{434}{289}$-féle módon tehetjük meg. Így a kiválasztott képviselő a távozásával $\binom{434}{289} \cdot S$ darab 2. típusú győztes koalíciót robbanthat fel.

Tehát a kiválasztott képviselő teljes Banzhaf-hatalma:

$$\text{TBP(képviselő)} = \binom{434}{217} \cdot s + \binom{434}{289} \cdot S.$$

A Taylor-könyv a 218–219. oldalon nézetünk szerint azt a hibát követte el, hogy a kiválasztott szenátort és a kiválasztott képviselőt tartalmazó győztes koalíciókat számolja össze a 218. oldalon. De nekünk olyan győztes koalícióknak a száma kell, amelyek nem maradnak győztesek, ha töröljük belőlük a kiválasztott szenátort, illetve a képviselőt.

5.6. Az elnök hatalmának Banzhaf-féle indexe

A definíció szerint:

$$\text{BI(elnök)} = \frac{\text{TBP(elnök)}}{\text{TBP(elnök)} + 100 \cdot \text{TBP(szenátor)} + 435 \cdot \text{TBP(képviselő)}},$$

vagyis $\text{BI(elnök)} \approx 0{,}038\,025\,833 \approx 3{,}8\%$.

5.7. Egy szenátor hatalmának Banzhaf-féle indexe

A definíció szerint:

$$\text{BI(szenátor)} = \frac{\text{TBP(szenátor)}}{\text{TBP(elnök)} + 100 \cdot \text{TBP(szenátor)} + 435 \cdot \text{TBP(képviselő)}},$$

vagyis $\text{BI(szenátor)} \approx 0{,}003\,288\,148 \approx 0{,}33\%$.

5.8. Egy képviselő hatalmának Banzhaf-féle indexe

A definíció szerint:

$$\text{BI(képviselő)} = \frac{\text{TBP(képviselő)}}{\text{TBP(elnök)} + 100 \cdot \text{TBP(szenátor)} + 435 \cdot \text{TBP(képviselő)}},$$

vagyis $\text{BI(képviselő)} \approx 0{,}001\,455\,539 \approx 0{,}146\%$.

Középiskolás szakkörünkkel próbálkozzunk további szavazási rendszerek Banzhaf-indexét meghatározni, illetve próbáljuk megoldani a kitűzött feladatot.

Feladat

Tegyük fel, hogy a Biztonsági Tanács öt állandó tagját hétre növelik Németországgal és Japánnal. Tehát a 7 állandó nagyhatalomnak vétójoga lenne a képzeletbeli Biztonsági Tanácsban. Továbbra is 10 kishatalom lesz a képzeletbeli BT-ben. Egy javaslat elfogadásához a 7 nagyhatalom és legalább 4 kishatalom szavazata kell. Számítsuk ki e képzeletbeli Biztonsági Tanács tagjainak Banzhaf-indexét!

Végeredmények:

$$\text{BI(nagyhatalom)} = \frac{848}{6776} \approx 12{,}51\%, \qquad \text{BI(kishatalom)} = \frac{84}{6776} \approx 1{,}24\%.$$

Irodalom

[1] Banzhaf, John F., Weighted voting doesn't work, a mathematical analysis, *Rutgers Law Review,* **19** (1965), 317–343.

[2] Csete Lajos, A hatalom Shapley–Shubik-féle indexéről, *A Matematika Tanítása* (2004/5). 16–24.

[3] Csete Lajos, A hatalom Banzhaf-féle indexéről, *A Matematika Tanítása* (2006/2), 3–9.

[4] Kemeny, J. G. – Snell, J. L. – Thompson, G. L., *A modern matematika alapjai (Véges struktúrák),* Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 1971), 90–93. és 123–127.

[5] Prandler Árpád, *Az ENSZ Biztonsági Tanácsa,* Közgazdasági és Jogi Kiadó (Budapest, 1974).

[6] Shapley, Lloyd and Shubik, Martin, A Method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System, *American Political Science Review,* **48** (1954), 787–792.

[7] Taylor, Alan D., *Mathematics and Politics. Strategy, Voting, Power and Proof,* Springer- Verlag (New York–Berlin–Heidelberg, etc., 1995).

[8] Theisz György, Igen-nem szavazórendszerek, *Polygon,* XII. kötet, 1–2. szám (2003. június), 63–69.

Köszönöm szépen Pataki Anikó tanárnőnek (Toldy Ferenc Gimnázium, Budapest) és Szoldatics József tanár úrnak (Felsőbüki Nagy Pál Gimnázium, Kapuvár), hogy segítő kérdéseikkel rávezettek arra, hogy a [2] *cikkben megfogalmazott Shapley–Shubik-féle index definíció pontatlan és félreérthető. Köszönöm szépen Varga Ferencné könyvtárvezetőnek (Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete) a Taylor-könyv kölcsönzését.*

Köszönöm szépen a lektor hibajavítását és értékes észrevételeit.

Csete Lajos
Révai Miklós Gimnázium
9021 Győr
Jókai u. 21.
csetelajos@revai.hu

TÁRSULATI ÉLET – 2004

Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2004. évi érmet **Csörgő Sándor**nak ítélte oda.

Indoklás: *Csörgő Sándor* a Szegedi Tudományegyetemen, matematikus szakon végzett 1970-ben, jelenleg az egyetem sztochasztika tanszékének vezetője. A valószínűségszámítás és matematikai statisztika nemzetközileg kiemelkedő művelője, aki a határeloszlások elméletének és alkalmazásának több különböző területén alkotott maradandót. Eddig egy tudományos monográfiát tett közzé, és 155 tudományos cikke jelent meg vagy van sajtó alatt, régóta dolgozik második monográfiáján. Munkáira kétezer-egyszáznál több hivatkozást tart számon, és rákerült a leggyakrabban citált 231 matematikusnak a Science Citation Index 2003-ban közrebocsátott kitüntető listájára. Munkásságát itthon 1970-ben Rényi Kató-díjjal, 1974-ben a Grünwald Géza-díjjal, 1986-ban az Erdős Pál Matematikai Díjjal, 1999-ben pedig Akadémiai Díjjal ismerték el; a Magyar Tudományos Akadémia 2001-ben levelező tagjai közé választotta.

Külföldön az Institute of Mathematical Statistics 1984-ben fellow-vá, az International Statistical Institute pedig 1988-ban taggá választotta. Tagja volt a Bernoulli Society Európai Bizottságának, jelentős nemzetközi szakfolyóiratok szerkesztésében működött és működik közre. Több mint 50 nemzetközi konferencián volt meghívott előadó, és 80-nál több meghívott szemináriumi előadást tartott különböző egyetemeken és kutatóintézetekben itthon és szerte a világon. Számos külföldi egyetemen volt vendégprofesszor.

1970 előtt a valószínűségelméletnek és matematikai statisztikának nem volt kutatói szintű művelője Szegeden. Amellett, hogy ezen tárgyak egyetemi oktatásának rendszerét Tandori Károly vele közösen dolgozta ki, a sztochasztikus matematikai kutatások szegedi iskoláját Csörgő Sándor teremtette meg. Az egyetem Matematikai Intézetének egyik legnépszerűbb és legnagyobb hatású oktatója. Nála diplomázott Pósfai János 1977-ben, aki az első bioinformatikusok egyike. Csörgő Sándor irányításával írott egyetemi doktori disszertációját Pelle László 1981-ben, Szentimrey Tamás pedig 1986-ban védte meg. Csörgő professzor legsikeresebb közvetlen szegedi tanítványai Horváth Lajos, Viharos László és Megyesi Zoltán, akik rendre 1981-ben, 1989-ben és 1999-ben fejezték be egyetemi tanulmányaikat. Ők is nála diplomáztak, és mindhárman a vezetése alatt írott első díjas diákköri dolgozatokkal hívták fel magukra a figyelmet. Csörgő Sándor irányítása mellett Horváth

Lajos 1982-ben szerezte meg az egyetemi doktorátust, 1984-ben pedig a matematikai tudomány kandidátusi fokozatát; Viharos László 1994-ben doktorált Csörgő Sándornál, 1997-ben pedig vezetésével szerezte meg a PhD fokozatot; Megyesi Zoltán 1999 és 2002 között volt Csörgő Sándor doktorandusza, a PhD fokozatot 2002 őszén meg is szerezte.

Csörgő Sándor rendszeresen tűz ki feladatokat a Schweitzer Miklós-emlékversenyre. 1999-es feladata kapcsán kezdett dolgozni Valkó Benedekkel, az ELTE akkor végzős hallgatójával, ami Valkó díjnyertes diákköri dolgozatához és végül egy 2001-ben megjelent közös cikkhez vezetett. A Michigan Egyetemen SzeMan Tse (Honkong) és Wei Biao Wu (Kína) doktoráltak Csörgő Sándornál.

Legújabban Csörgő Sándor bevonta kutatómunkájába Szabó Tamást, aki már a második matematikai statisztikai térmájú közös cikkét írja Csörgővel. Diplomamunkája folytatásaként 2002-ben lett Csörgő Sándor doktorandusza Krauczi Éva. 2003-ban végzett tanítványa, Szűcs Gábor, aki jelenleg Csörgő Sándor doktorandusza.

Csörgő Sándor a Matematikai és Informatikai Doktori Iskola Sztochasztika Alapprogramjának vezetője.

Nem lebecsülendő hatása Szeged tudományos életének egészére sem: biológusok, fizikusok, földrajzosok, vegyészek, bölcsészek és orvoskutatók gyakran veszik igénybe statisztikai tanácsait.

Beke Manó-emlékdíj

A 2004. évi Beke Manó-emlékdíj bizottság a díj első fokozatában részesítette †**Rácz Jánost**; a díj második fokozatát kapták: **Antal Gábor Attila, Ferenczi Éva, †Filep László, Szabó Zsófia, Tarcsay Tamás, Tóth Ferencné.**

Indoklás: *Rácz János* matematika–fizika szakos tanár a díj odaítélésekor 58 éves tanári múlttal rendelkezett, és még tanított a budapesti Szent István Gimnáziumban. 1957-ben lett „Istvános" tanár, 63-ban létrehozta a speciális matematikai osztályt. (2005-ben halt meg.)

Teljesen hivatásának, a nevelő-oktató munkának élő tanár volt. Kiemelkedően felkészült, igen magas fokon oktatta a matematikát. Évtizedeken keresztül a matematika munkaközösség vezetője. Oroszlánrésze volt abban, hogy iskolájában országosan elismert matematikai műhely alakult ki.

Az oktatómunkán túl rengeteget tett a matematika népszerűsítéséért, a tehetségek gondozásáért, kibontakoztatásáért. Különös szeretettel készítette fel tanulóit az országos versenyekre. Nem csupán az OKTV-n értek el diákjai szép eredményeket, de többen a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián is képviselhették hazánkat.

Nagy gonddal foglalkozott fiatal tanárokkal is. 1969 óta, mint az ELTE külső vezetőtanára, a tanárképzésben is igen eredményesen dolgozott. Tapasztalatait számos tanulmányban jelentette meg főleg a geometria tanításával kapcsolatban;

megjelentek példatárai, tankönyvsorozata. Ezekről a kérdésekről többször tartott előadásokat különböző fórumokon.

Antal Gábor Attila a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen 1956-ban szerzett matematika–fizika szakos középiskolai tanári oklevelet. 56–59 között Szécsényben tanított az általános iskolában, délután a Dolgozók Általános Iskolájában tanított, majd az Ipari Szakmunkásképző Intézet matematika és fizika óráit látta el. 1959–69 között Nagybátonyban dolgozott a gimnáziumban, mellette a Bányaipari Technikum tanára is volt, mindezt három műszakban. Ugyanebben az időben még az egri Tanárképző Főiskola kihelyezett konzultációs csoportját is tanította és vizsgáztatta öt éven át. 1969-től 96-ig a salgótarjáni Bolyai Gimnázium tanára, munkaközösség-vezetője, továbbá szakfelügyelő, szaktanácsadó, tanügyi igazgatási szakértői teendőket látott el. Tanított a Pénzügyi és Számviteli Főiskola levelező tagozatán, tevékenykedett a főiskola felvételiztető bizottságában.

Számtalan tanítványát „fertőzte meg" a matematika szeretetével. Tantárgyát nagy hozzáértéssel oktatta, óráit a matematikatörténet anekdotáival, és sajátos humorú vicceivel színesítette. Pontosságra, szakmai alázatra, a tudomány megbecsülésére és tiszteletére nevelt, és ennek volt ő maga is élő példája.

Nógrád megye szakfelügyelőjeként közel 100 iskola tartozott hozzá. A kezdő kollégákat egyenrangú partnerként kezelte, értékelte erőfeszítéseiket, kedvesen irányította helyes útra esetleges túlkapásaikat. Hatalmas munkabírású, fáradhatatlan tanár, segítőkész, megbízható ember.

Ferenczi Éva általános iskolai matematika–kémia szakos tanár 1980-ban végzett Szegeden, 1982-től tanított a Bp. XVII. Ker. Pesti Úti Általános Iskolában. Saját tantestületében és azon túl is hamar kitűnt kiváló szakmai felkészültségével, a matematika tantárgy és a matematikai nevelés iránti elkötelezettségével, jó szervezőkészségével. Ezek alapján felkérést kapott a kerületi munkaközösség-vezetői feladatok ellátására. Szaktanári munkájához hasonlóan ezt a munkát is mintaszerűen, kollegái és szakmai felettesei teljes megelégedésére, mintaszerűen látta el. A kerületi kollegáknak bemutató órákat és más továbbképzéseket tartott és szervezett. Figyelt a tanárok munkájában fellépő problémákra, és segített megkeresni a megfelelő megoldást. A Varga Tamás-versenyek első és második fordulójának kerületi lebonyolítását lelkiismeretesen intézte. 1998-ban a XVII. Ker. Balassi Bálint Nyolc Évfolyamos Gimnáziumba került tanítani, ahol a tehetséggondozás szép tanári feladata került előtérbe. Felkészítő munkájának eredményeképpen tanítványai évről évre egyre jobban szerepelnek a Varga Tamás, a Zrínyi Ilona és az ABACUS feladatmegoldó versenyeken.

†*Dr. Filep László* több mint 40 évvel ezelőtt szerzett matematika–fizika szakos tanári oklevelet a Kossuth Lajos Tudományegyetemen. Ezután 9 évig középiskolában tanított, többek között a tagozatos osztályokban is. Diákjai eredményesen szerepeltek a versenyeken és a KöMaL pontversenyén, miközben ő maga a Matematika Tanítása folyóirat egyik legeredményesebb feladatmegoldója lett.

1973-tól oktatott a nyíregyházi Bessenyei György Tanárképző Főiskolán. Közben folytatta a tehetséggondozást, középiskolai szakkört vezetett Nyíregyházán és

Mátészalkán. Matematikatörténeti kutatómunkájának jelentős állomása doktorálása 1978-ban summa cum laude minősítéssel. Ismeretterjesztő tevékenységét nagyszámú cikk, tanulmány, előadások és könyvek jelzik. *A tudományok királynője* című összefoglaló műve sok évtizedes főiskolai előadásainak tapasztalatait összegzi. Előadásai, írásai nemcsak nagy tudását, szakmai hozzáértését tükrözték, hanem élvezetes fanyar humorát, remek előadói stílusát is. A társadalmi és a szakmai közélet aktív szereplője, a Bolyai Társulat megyei tagozatának elnöke volt 2004-ben bekövetkezett haláláig.

Szabó Zsófia a békéscsabai Rózsa Ferenc Gimnázium matematika–fizika–számítástechnika szakos tanára, ízig-vérig pedagógus. Önzetlenül szorgalmas és tanítványainak sokat nyújtó, igényes tanár. Szerencsés kettősségben ötvözi a következetesen szigorú, ugyanakkor határtalanul empatikus tanító személyiséget. Ennélfogva az önfegyelmet, a szívós munkát, a hosszú távú eredményességet értékelő tanulók és szülők értik és érzik tiszta szigorúságát. Informatikából az elsők között szerzett szakképesítést. Példásan illusztrálja a megújulási lehetőségeket és bizonyító erővel annak szükségességét. Érdekesen tanít, kutató, felfedező oktatási stratégiája példamutató. Lelkesedése és lelkesítő példája erőteljesen hat. A tehetségeseket éppúgy jó érzékkel gondozza, mint ahogyan a gyengébbek előrehaladását segíti. Szívesen vállal osztályfőnöki feladatot. Közösségformáló munkája látványos. Tanítványai számos eredményt értek el a regionális és országos versenyeken. Ő maga a Hajnal Imre Matematikai tesztverseny és Módszertani Nap, valamint a „Matematika Határok Nélkül" csapatverseny egyik szervezője.

Tarcsay Tamás matematika–fizika–technika szakos tanár 1979 óta tanít a szegedi Ságvári Endre Gyakorló Gimnáziumban. A magas színvonalú, sokoldalú oktató-nevelő munkájának eredményeképpen 1985 óta matematika szakvezető tanár.

Munkája során speciális tantervű, fakultatív, valamint alapóratervű matematikát tanuló, különböző tehetségű tanulókkal egyaránt eredményesen foglalkozik. Rendkívül eredményes az a törekvése, hogy tanítványaiban felkeltse a problémaérzékenységet, és ezáltal kialakítsa a tantárgy iránti érdeklődést. Ennek is köszönhető, hogy igen sok tanítványa választotta életpályának a matematika művelését, tanítását.

Folyamatosan nagy figyelmet szentel a számítógépek, a számítástechnika kellő körültekintéssel történő órai alkalmazásának. Sok energiát fektet a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika számítógépes tanításának módszertani kidolgozásába. 1999 nyarától a Sulinet program internetes matematika rovatának vezetője. Az igényes, tanárok és tanulók számára egyaránt rendkívül hasznos elektronikus lap szerkesztésével elévülhetetlen érdemeket szerez a matematika tantárgy népszerűsítésében.

Tóth Ferencné Budapesten a XI. kerületben a Bocskai István Általános Iskolában folytatta kimagasló pedagógiai tevékenységét több évtizeden keresztül, mely hatással volt a kerület szakmai életére is.

Pályafutása alatt az alsó tagozaton tanítóként, munkaközösség vezetőként, majd igazgatóhelyettesként tanította a matematika tantárgyat. Ez irányú nevelő és oktató munkája során sokat tett azért, hogy tanítványaival megszerettesse a matematikát. Hatékonyan alkalmazta a gyerekek életkorának megfelelő, a közvetlen tapasztalatokra, a sokszínű szemléltetésre épülő módszereket. Tanítványai megszerették a matematikát, sikeresen helytálltak a felső tagozaton, jó eredményeket értek el kerületi és fővárosi szintű versenyeken.

Folyamatosan részt vett kísérletekben, több tankönyvnek, taneszköznek a kidolgozásában. Nyugdíjasként is elkötelezettje, fáradhatatlan képviselője az alsó tagozatos matematikatanítás ügyének. Gazdag tapasztalatait kézikönyvekben, a tanulók differenciálását szolgáló munkafüzetekben összegzi. Ezek nagy hiányt pótoltak, ezért igen népszerűek a tanítók, gyermekek, szülők körében.

Grünwald Géza-emlékérem

A 2004. évi bizottság határozata alapján az Emlékéremben a következők részesülnek: **Gyarmati Katalin, Hegedűs Pál, Király Tamás, Valkó Benedek.**

Indoklás: *Gyarmati Katalin* 1978. április 6-án született. 2001-ben fejezte be tanulmányait az ELTE TTK matematikus szakán, „On pseudorandom binary sequences" című doktori értekezését 2005-ben védte meg. A „Cotutele de These" program keretében részt vett az Université Nancy 1 (Franciaország) doktori programjában is.

Első tudományos cikkét (mely az Acta Arithmeticában, a legrangosabb nemzetközi számelmélet folyóiratban jelent meg) harmadéves korában írta. A díj odaítéléséig összesen 13 tudományos cikket írt, valamennyit angolul, közülük 6 jelent meg, és további 6 volt közlésre elfogadva. E cikkek közül 5 társszerzős; társszerzői közt olyan neves matematikusok vannak mint Simonovits, Pethő, Bugeaud, Stewart.

Cikkei két témakör köré csoportosulnak: 7 cikkben diophantikus problémákkal, 6 cikkben pszeudovéletlen bináris sorozatokkal foglalkozik.

Első diophantikus témájú cikkében Diophantosz egy problémájának két sorozat esetére és magasabb hatványokra való általánosításával foglalkozik; a módszert, melyet e kérdések vizsgálatára dolgozott ki, ma már Gyarmati-féle hézagelvnek hívják, és – a Baker módszerrel kombinálva – már mások is alkalmazzák. További cikkeiben folytatta e vizsgálatait, becsülték a megoldások számát, illetve vizsgálták azok kombinatorikai szerkezetét. Későbbi cikkében egy Erdőssel való problémának multiplikatív analogonját vizsgálja, majd Diophantosz problémájának négyzetszámokról polinomokra való kiterjesztésével foglalkozik. Két (Stewarttal és Sárközyvel közös) cikkében egy további rokon kérdéskörrel foglalkozik. Egy további dolgozatában bevezeti a pszeudovéletlenség egy új mértékét, és vizsgálja annak tulajdonságait. Később kiterjeszt egy pszeudovéletlen sorozatokra vonatkozó konstrukciót erős pszeudovéletlen tulajdonságokkal rendelkező bináris sorozatok egy nagy családjára, majd kidolgozza ennek a konstrukciónak egy lényegesen gyorsabban generálható változatát is. A W és C mértékek közti kapcsolatra vonatkozó egyenlőtlenség témában írt cikkei közül kiemelkedik az a dolgozata, melyben megold egy, a másodrendű, illetve harmadrendű korreláció közti kapcsolatra vonatkozó, több éven keresztül nyitott problémát (ez volt e kérdéskör egyik legfontosabb nyitott problémája!). Pethővel és Sárközyvel közös cikkében modulo p lineáris rekurzióval definiált sorozatok pszeudovéletlen tulajdonságaival foglalkozik.

Dolgozataiban számos szellemes és eredeti elemi ötlet található, ügyesen alkalmaz kombinatorikai segédeszközöket is, és egyre gyakorlottabban bánik exponenciális összegekkel és karakterösszegekkel is.

Eredményeit ma már nemzetközileg is széles körben elismerik, számos konferencián és egyetemen volt meghívott előadó, és számos kutatóprogramban vett részt Franciaországban, Németországban, az Egyesült Államokban, Lengyelországban és Magyarországon.

Hegedűs Pál 1974-ben született, 1998-ban végzett az ELTE matematikus szakán, majd ugyanott kezdte meg doktori tanulmányait, amit aztán egy év múltán Cambridge-ben folytatott, ahol témavezetője Jan Saxl volt. „Topics in group theory" című értekezését 2002-ben védte meg ott. A díj odaítélésekor posztdoktori ösztöníjasként dolgozott az ELTE algebra és számelmélet tanszékén.

Hegedűs Pál a csoportelméletben ért el fontos és érdekes eredményeket. Hat dolgozata közül 2004-ig négy jelent meg, egyet közlésre elfogadtak, egy további nemrég készült el.

Az első társszerzős dolgozata még egyetemista korában készült és számelméleti témájú.

Második dolgozatában Domokos Mátyással közösen E. Noether egy 1916-ból származó eredményét élesítik. Noether azt mutatta meg, hogy ha a G véges csoport hat egy V vektortéren, akkor a V feletti G-invariáns komplex együtthatós polinomok algebráját generálják a legfeljebb G polinomok. Ez az eredmény ciklikus csoportok esetén éles, de a szerzőknek azt sikerült megmutatniuk, hogy minden más csoport esetén G javítható.

A 3. rövid dolgozatban Liebeck, Praeger és Saxl egy problémáját oldja meg: az $\mathrm{AGL}(ri, p)$ affin csoportban olyan reguláris részcsoportokat konstruál, amelyek nem tartalmaznak eltolást. Eredménye meglepetést keltett, ugyanis a probléma kitűzői azt gondolták, hogy ilyen részcsoportok nem létezhetnek.

A 4. dolgozatban a $p = 2$ esetben tanulmányozza az utóbbi időben sokat vizsgált úgynevezett Nottingham-csoportot. A korábbi eredmények jelentős része csak a páratlan karakterisztikájú esetre vonatkozott; ebből a cikkből megértjük, hogy ez azért volt így, mert a 2 karakterisztikájú esetben a csoport másképpen viselkedik. Kiemelkedik a cikknek az az eredménye, hogy a Nottingham-csoport pro-2 csoportként tekintve öröklődően éppen végtelen.

Az 5. dolgozat eredményeinek csírái már Hegedűs Pál szakdolgozatában is megtalálhatók; a cikk a doktori disszertációjának egyik fejezetéből készült. Máig megoldatlan probléma azon csoportok jellemzése, amelyeknek minden karakterük racionális értékű. Feloldható csoportokra Gow bizonyította, hogy egy ilyen csoport rendje csak a 2, 3, 5 prímekkel lehet osztható. Hegedűs Pál megmutatta, hogy ebben az esetben az 5-Sylow részcsoport normálosztó és elemi Abel-csoport, továbbá abban az esetben, ha a csoport rendje 3-mal nem osztható, a szóban forgó csoportok teljes leírását adta.

Az univerzális algebra leghíresebb megoldatlan problémája annak eldöntése, hogy vajon minden véges háló előáll-e egy véges algebra kongruenciahálójaként. Ehhez a kérdéshez kapcsolódik Hegedűs Pál 6. dolgozata. Az M háló ragasztásaiból adódó „kígyók" által generált hálóvarietáshoz tartozó véges hálókat sikerült véges algebrák (éspedig operátorcsoportok) kongruenciahálójaként előállítani.

Hegedűs Pál dolgozatai remek ötleteket tartalmaznak, és a csoportelmélet több területének nagyon alapos ismeretét mutatják.

Király Tamás 1975-ben született. Szakdolgozatát Frank Andrásnál írta, majd az ő vezetése mellett volt doktoranduszhallgató, és készítette el Edge-connectivity of undirected and directed hypergraphs című doktori értekezését, melyet 2004 tavaszán „summa cum laude" minősítéssel védett meg. A díj odaítélésekor az MTA-ELTE Egerváry Jenő Kombinatorikus Optimalizálási Kutatócsoport tudományos munkatársa volt.

Munkái közül kiemelendő a *Covering symmetric supermodular functions by uniform hypergraphs* című dolgozata, amely a tekintélyes Journal of Combinatorial Theory folyóiratban jelent meg 2004-ben. A kutatás kiinduló pontja Watanabe és Nakamura egy alapvető eredménye irányítatlan gráfok élösszefüggőségének optimális növeléséről, mely problémával kapcsolatban Király Tamás megoldotta a szupermoduláris függvények uniform hipergráfokkal történő fedésének problémáját. A megoldáshoz a korábbi bonyolult technikák alapos ismeretén túl lényegi új ötletekre volt szükség.

Submodularity címmel S. Fujishige szerkesztésében 2003-ban jelent meg a Discrete Applied Mathematics (DAM) tematikus száma, amelyben Király Tamás három dolgozata is napvilágot látott: A. Frank and T. Király, *Combined connectivity augmentation and orientation problems;* A. Frank, T. Király and Z. Király, *On the orientation of graphs and hypergraphs;* A. Frank, T. Király and M. Kriesell, *On decomposing a hypergraph into k connected sub hypergraphs.* Ezek tartalmával és értékével kapcsolatban megjegyzendő, hogy P. Hammernek, a folyóirat főszerkesztőjének hivatalos levele szerint a három cikk közül kettőt is beválasztottak az év legjobb publikációi közé! Mindhárom dolgozat létrejöttében Király Tamásnak döntő érdemei voltak. A megjelent publikációkon túl három további dolgozata készült el és került folyóirathoz benyújtásra.

Az évek során számos konferencián vett részt és tartott eredményeiről beszámolót.

Valkó Benedek 1978-ban született, 2000-ben végzett az ELTE matematikus szakán. 2004. szeptemberben védte meg PhD dolgozatát a BME Matematika Intézet Doktori Iskolájában. Doktori munkáját Tóth Bálint témavezetésével végezte, 2003-tól az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetének fiatal kutatója.

Nagyon tehetséges és sokoldalúan képzett matematikus. Már egyetemi hallgató korában olyan kutatási eredményeket ért el, amelyeket színvonalas nemzetközi folyóiratokban publikálhatott. Egyetemi TDK dolgozatainak és szakdolgozatának eredményeit négy cikkben publikálta.

Doktoranduszként a hírhedten nehéz hidrodinamikai határátmenetek témakörében kezdett dolgozni. E kutatások a modern valószínűségelmélet teljes technikai fegyvertára mellett komoly ismereteket feltételeznek a hiperbolikus parciális differenciálegyenletek terén is. Valkó Benedek e területen is kiemelkedő eredményeket ért el, ezek a dolgozatok alkották PhD dolgozatának gerincét.

A publikációs lista tanúsága szerint Valkó Benedek cikkeit rangos nemzetközi folyóiratokban publikálja, s a publikációknak máris komoly visszhangjuk van, cikkeit idézik, rangos konferenciákra és külföldi egyetemi szemináriumokra/kollokviumokra hívják meg előadónak.

Kutatási eredményei közül a számelméletieket 3 dolgozata tartalmazza; e cikkeiért 2000-ben Rényi Kató-emlékdíjat kapott. Klasszikus valószínűségelmélet témakörébe tartozó eredményeket egy dolgozatában közölt, 4 további dolgozatában kölcsönható részecskerendszerek hidrodinamikai határátmenetére vonatkozó eredményeket ír le.

Farkas Gyula-emlékdíj

A Bizottság 2004-ben négy Farkas Gyula-emlékdíjat adományozott. A díjazottak: **Baran Sándor** (Debreceni Egyetem, Informatikai Kar, alkalmazott matematikai és valószínűségszámítási tanszék), **Hajdú András** (Debreceni Egyetem, Informatikai Kar, információ technológia tanszék), **Horváth Róbert** (Soproni Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar, Gazdaságmatematikai és Statisztika Intézet), **Marx Dániel** (BME, számítástudományi és információelméleti tanszék).

Indoklás: *Baran Sándor* 1973-ban született. Egyetemi tanulmányait Debrecenben végezte, ott kapott 1995-ben matematikus, 1996-ban matematikatanár és angol szakfordító diplomát. A Debreceni Egyetemen 2001-ben szerzett PhD fokozatot. Érdeklődési köre elméleti kutatásokra és gyakorlati alkalmazásokra is kiterjed. Több, a klasszikus regressziós modellekre kifejlesztett becslési módszert általánosított a hibával terhelt megfigyelések esetére. A biológiai és geológiai alkalmazások szempontjából fontos térbeli autoregressziós modellek paraméter-becsléseivel kapcsolatban is érdekes eredményeket ért el. Baran Sándor részt vett több olyan munkában is, amelyben statisztikai módszereket alkalmaztak konkrét geológiai és orvosi vizsgálatokban. Számos cikket publikált, több esetben neves társszerzőkkel együttműködve. Munkáira már most 13 független hivatkozás van. A sikeres kutatás mellett részt vett egyetemi jegyzet írásában, szerepet vállal konferenciák szervezésében.

Hajdú András 1973-ban született. A debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetemen 1996-ban kapott matematikus, matematikatanár és angol szakfordító diplomát. PhD fokozatot 2003-ban szerzett a Debreceni Egyetemen. Kutatási témája a digitális képfeldolgozáshoz kapcsolódik. Gyakorlati problémák által motiválva sikerült kidolgoznia néhány ígéretes elméleti eredményt. Például a digitális terekben való mozgásokkal kapcsolatos szomszédsági szekvenciákat vizsgálta algebrai, geometriai és analitikus oldalról is, ami korábbi eredmények javításához, általánosításához vezetett. Hajdú Sándor részt vesz egy orvosi képfeldolgozó rendszer kifejlesztésében is, mely lehetőség ad műtéti ötletek szimulációs tesztelésére. Több cikke jelent már meg, illetve van előkészületben. Eredményeiről számos magyar és néhány igen színvonalas nemzetközi konferencián is beszámolhatott már.

Horváth Róbert 1971-ben született. PhD fokozatot 2001-ben az ELTE Doktori Iskolájának alkalmazott matematikai szakirányán szerzett. Már egyetemista korában elkezdett dolgozni a Soproni Erdészeti és Faipari Egyetem Matematikai Intézetében, amely mindmáig (a névváltozásoktól eltekintve) egyetlen munkahelye. A numerikus matematika tantárgy megújításáért megkapta a Nyugat-Magyarországi Egyetem Legjobb Fiatal Oktatója címet. Horváth Róbert igazi matematikussá Eindhovenben vált, ahova ösztöndíjasként ment. A lineáris parabolikus differenciálegyenletek végeselem közelítéseinek tulajdonságait vizsgálta. Az elért eredményeinek éles, vagy részben éles voltát számítógépes kísérletei is jól demonstrálják. Ezen kívül elvégezte néhány, a Maxwell-egyenletnél szokásos alapvető közelítő megoldási módszer elemzését, és újabb közelítő módszert is javasolt.

Marx Dániel 1977-ben született. A BME műszaki informatikai szakát végezte el, 2000-ben kapott diplomát. PhD dolgozata 2004-ben készült el. Kutatási területe az algoritmuselmélet és a számítási bonyolultság. Ezen belül egyik fő témája a gráfszínezéseknek különböző, gyakorlati problémákhoz kapcsolódó változatai. Ezek általában algoritmikusan nehéz feladatok; Marx Dániel igen sikeresen igyekszik feltérképezni, hogy melyek a még hatékonyan megoldható speciális esetek, és mikortól válik a kérdés NP-nehézzé. Egy másik, elméletileg és gyakorlati szempontból is fontos terület a paraméteres bonyolultság; az egyik ilyen tárgyú eredményét a bonyolultságelmélet legfontosabb nemzetközi konferenciáján is előadhatta. Cikkei tanúsítják, hogy Marx Dániel fiatal kora ellenére már érett matematikus. A tudományos munkán kívül programozási versenyek szervezésében is részt vesz, az idei egyetemistáknak szóló ACM nemzetközi programozási verseny kelet-európai fordulójának feladatait is ő állította össze.

Rényi Kató-emlékdíj

2004-ben a Rényi Kató-emlékdíj I. fokozatában részesül **Varjú Péter** (SZTE negyedéves, Barát János tanítványa) és **Vértesi Vera** (ELTE, ötödéves, Szabó Csaba tanítványa). II. fokozatot kap **Kalmár Boldizsár** (ELTE, ötödéves, Szűcs András tanítványa).

Indoklás: *Varjú Péter* Barát Jánossal közösen, más szerzők munkáját kiterjesztve belátja A. Fraenkel egy, a természetes számok majdnem számtani sorozatokra való partícióiról szóló sejtését, ha az osztályok száma legfeljebb hét. Egy másik cikkükben megfogalmazzák azt a sejtést, hogy ha a természetes számok halmazát végtelen sok számtani sorozatra particionáljuk, akkor van kettő, hogy az egyik differenciája osztja a másikét. Ezt igazolják arra az esetre, amikor az összes differencia két prím hatványának szorzata. Egy további, szintén Barát Jánossal közösen írt cikkében Varjú azt vizsgálja, hány színnel színezhető egy gráf, ha nincs út, ami két, azonosan színezett út (ciklikus) összeillesztéséből adódik. Számos észrevétel mellett belátják, hogy ha a „tree-width" k, akkor k-ban exponenciális felső korlát adható.

Vértesi Vera Szabó Csabával írott két cikkében véges mátrixgyűrűk szóproblémájával foglalkozik. A teljes leíráshoz csak két eset hiányzott: a két-, illetve háromelemű test feletti 2×2-es mátrixgyűrűk esete. Belátják, hogy ezekben az esetekben már két monom egyenlőségének kérdése is $co\mathcal{NP}$-teljes. Kun Gábor és Vértesi Vera egy cikkben belátják, hogy bizonyos, hipergráfokból származtatott algebrákra az a kérdés, hogy egy véges algebra benne van-e egy másik véges algebra által generált varietásban, nem dönthető el polinomiálisan.

Kalmár Boldizsár lényegesen leegyszerűsítette a zárt felületen értelmezett Morse-függvények meghatározását. Ezen kívül – Szűcs András egy ötletét megvalósítva – kiszámolta az $M^3 \to R^2$ hajtás-leképezések kobordizmuscsoportját. A bizonyítás erős geometriai intuícióról tanúskodik, és a módszer reményt ad a Pontrjagin–Thom-konstrukció negatív kodimenziós leképzésekre való alkalmazására.

„Patai László Alapítvány" díja

A 2004. évi díjat **Nagy Benedek** kapta.

Indoklás: *Nagy Benedek* már általános iskolás korában több matematikai, fizikai és sakkversenyen ért el sikert, majd középiskolásan részt vett a matematika és a fizika diákolimpiai felkészítő szakkörök munkájában. Egyetemi tanulmányait 1991-ben a KLTE fizikus szakán kezdte. Ebben az évben az országos Eötvös fizika versenyen megosztott 2–3. díjat kapott és megnyerte a Radon–Nikodym–Lebesgue egyetemi matematikaversenyt.

1996-ban végzett fizikusként, 1997-ben végzett programozó matematikusként (dicséretben és jutalomban is részesült), 1998-ban filozófusként (logika specializációval), 1999-ben programtervező matematikusként, 2000-ben fizika tanári, illetve alkalmazott és általános nyelvészi okleveleket szerzett. 1999-től három évig a Debreceni Egyetem, Matematika és Számítástudományi doktori iskola nappali tagozatos hallgatója volt. Tudományos munkássága TDK dolgozataival indult. 1994-ben fizikából (Rényi-entrópiák és gázok), 1996-ban matematikából (Időjátékok) is készített dolgozatot, 1997-ben pedig OTDK különdíjat nyert Intervallum-logika című dolgozatával. További különböző konferenciákon is részt vett. 2004-ben sikeresen védte meg „Neighbourhood sequences in different grids" című doktori értekezését. Különböző folyóiratokban és konferenciakötetekben 26 dolgozata jelent meg. Értékes, új eredményeket ért el digitális geometria területén, a szomszédsági sorozatokkal kapcsolatban végzett számításaiban. A szomszédsági szekvenciákkal definiált távolságok nem mindig generálnak metrikus teret. Nagy Benedek szükséges és elégséges feltételt adott a metrikusság feltételének ellenőrzéséhez. Vizsgálatait a háromszög-és a hatszögrácsra is kiterjesztette, ezzel matematikailag megalapozva a gyakorlati (pl. képfeldolgozási) alkalmazások hátterét. Munkásságának másik fő iránya a logikai fejtörők és gráfok viszonyának vizsgálata. Ennek keretében néhány speciális igazmondó-hazug fejtörőtípust gráfokkal szemléltetett, és gráfmanipulációs eszközökkel oldott meg.

JELENTÉS A 2004. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

FRENKEL PÉTER

A Bolyai János Matematikai Társulat 2004. október 29. és november 8. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2004-ben fejezték be.

A verseny lebonyolítására a Társulat a következő bizottságot kérte fel: *Buczolich Zoltán, Császár Ákos, Frenkel Péter* (titkár), *Freud Róbert, Fried Ervin, Halász Gábor, Laczkovich Miklós, Makai Endre, Michaletzky György, Pálfy Péter Pál, Ruzsa Imre* (elnök), *T. Sós Vera.* Ruzsa Imre végül nem tudott a bizottság munkájában résztvenni, helyette Laczkovich Miklós vállalta az elnöki teendőket.

A bizottság október 12-i ülésén a következő feladatok kitűzése mellett döntött:

1. Egy X topologikus tér $L(X)$ Lindelöf-száma az a legkisebb λ végtelen számosság, amelyre igaz, hogy X minden nyílt lefedéséből kiválasztható legfeljebb λ számosságú részfedés. Bizonyítandó, hogy ha X olyan M_1-tér, amelyben minden nem-megszámlálhatóan végtelen halmaznak van kondenzációs pontja, akkor $L(X) = \sup L(A)$, ahol A az X szeparábilis zárt alterein fut végig.

(A $H \subseteq X$ részhalmaz kondenzációs pontján olyan $x \in X$ pontot értünk, amelynek minden környezete H-nak nem-megszámlálhatóan végtelen sok pontját tartalmazza.)

2. Jelölje $t(G)$ a G gráf teljes négyszögeinek számát és $e_G(S)$ a G gráfban az S ponthalmaz által feszített élek számát. Legyenek G_1 és G_2 egy közös V ponthalmazon értelmezett (egyszerű) gráfok, $|V| = n$, és tegyük fel, hogy bármely $S \subseteq V$ halmazra $\left|e_{G_1}(S) - e_{G_2}(S)\right| \leq n^2/1000$. Bizonyítandó, hogy $\left|t(G_1) - t(G_2)\right| \leq n^4/1000$.

3. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $c > 0$ konstans, hogy minden $n \geq 3$-ra létezik olyan n pontú síkgráf, amelyet akárhogy rajzolunk le egyenes élekkel a síkba, mindig lesz két olyan éle, melyek hosszának aránya legalább cn.

4. Adjuk meg azokat a teljesen multiplikatív és nemnegatív $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényeket, amelyekre teljesül, hogy valahányszor $a, b \in \mathbb{Z}$ és $b \neq 0$, akkor léteznek q és r egészek úgy, hogy $a = qb + r$ és $f(r) < f(b)$.

5. Legyen G nem feloldható véges csoport és $\varepsilon > 0$. Mutassuk meg, hogy van olyan pozitív egész k és olyan $w \in F_k$ szó, melybe k darab, G-n egyenletes eloszlású független változót helyettesítve $w = 1$ valószínűsége kisebb, mint ε. (Itt F_k a k elem által szabadon generált csoport.)

6. Igaz-e, hogy ha $F \subset [0,1]$ nulla Lebesgue-mértékű perfekt halmaz, akkor a $C^1[0,1]$ térben mindenütt sűrű halmazt alkotnak azok a függvények, amelyeknek F-re való megszorítása injektív?

(A $[0,1]$ intervallumon folytonosan differenciálható valós függvények $C^1[0,1]$ terében a topológiát a

$$d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} \left|f(x) - g(x)\right| + \sup_{x\in[0,1]} \left|f'(x) - g'(x)\right|$$

metrika definiálja.)

7. Legyen K olyan centrálszimmetrikus zárt halmaz az

$$S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

gömbfelületen, amely az $S^2 \backslash K$ bármely két átellenes pontját elválasztja. Igazoljuk, hogy minden pozitív ε-hoz van olyan páratlan fokú homogén P polinom, hogy a

$$Z(P) = \left\{(x,y,z) \in S^2 \,:\, P(x,y,z) = 0\right\}$$

halmaznak K-tól vett Hausdorff-távolsága kisebb, mint ε.

8. Igazoljuk, hogy minden $0 < \delta < 2\pi$ számhoz létezik olyan $m \geq 1$, hogy ha n tetszőleges pozitív egész, és az egységkörvonalra eső $z_1, \ldots, z_n$ komplex számokra $z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu = 0$ teljesül minden $1 \leq \nu \leq m$ egész kitevő mellett, akkor az egységkörvonal minden δ hosszúságú íve tartalmazza a $z_1, \ldots, z_n$ számok valamelyikét.

9. Legyen F sima (azaz C^∞), zárt felület. Egy $f : F \to \mathbb{R}^2$ folytonos leképezést nevezzünk *majdnem-immerziónak*, ha létezik egy γ sima, zárt, beágyazott (nem feltétlenül összefüggő) görbe F-ben, melyen kívül az f sima és maximális (azaz 2) rangú, és minden $p \in \gamma$ pontra létezik p körül, illetve $f(p)$ körül olyan (x,y), illetve (u,v) lokális koordinátarendszer, melyekben e pontok az origónak felelnek meg, és az f leképezés az $(x,y) \mapsto (u,v)$, $u = |x|$, $v = y$ alakot ölti.

Milyen génuszú sima, zárt, összefüggő, irányítható F felületeknek létezik olyan majdnem-immerziójuk a síkba, melynél a γ görbe összefüggő komponenseinek száma adott n pozitív egész?

10. Legyen $\mathcal{N}_p$ egy p dimenziós standard normális vektor, és tetszőleges $a \in \mathbb{R}^p$ vektorra jelölje $H_p(a)$ az $E|\mathcal{N}_p + a|$ várható értéket. Bizonyítsuk be, hogy $p > 1$ esetén

$$H_p(a) = (p-1)\int_0^\infty H_1\left(\frac{|a|}{\sqrt{1+r^2}}\right)\frac{r^{p-2}}{(1+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,dr.$$

A bizottság köszönetét fejezi ki mindazoknak, akik feladatot javasoltak a versenyre; a kitűzött feladatok esetében a következőknek: 1. *Juhász István,* 2. *Lovász László,* 3. *Pach János,* 4. *Ruzsa Imre,* 5. *Abért Miklós,* 6. *Buczolich Zoltán,* 7. *Totik Vilmos,* 8. *Biró András,* 9. *Szűcs András,* 10. *Móri Tamás.*

A versenyen induló hat versenyző összesen 27 feladatra adott be dolgozatot. A versenybizottság a dolgozatok áttanulmányozása után, december 9-i ülésén megállapította, hogy a versenyzők közül

Máthé András kiemelkedő megoldást adott az 1. és 6. feladatra, teljes megoldást adott a 3., 4., 5. és 8. feladatra is, és apró pontatlanságoktól eltekintve helyes megoldást adott a 7. és 9. feladatra. Ennek alapján

I. díjban és 50 000 forint pénzjutalomban részesül **Máthé András,** az ELTE ötödéves matematikushallgatója.

Varjú Péter kiemelkedő megoldást adott a 4. és 10. feladatra, továbbá teljes megoldást adott az 1., 3., 6., 7. és 8. feladatra is. Ennek alapján

II. díjban és 40 000 forint pénzjutalomban részesül **Varjú Péter,** a SzTE negyedéves matematikushallgatója.

Vizer Máté teljes megoldást adott a 8. feladatra, és lényegében helyesen oldotta meg az 1., 3. és 6. feladatot is. Ennek alapján

Dicséretben és 10 000 forint pénzjutalomban részesül **Vizer Máté,** az ELTE ötödéves matematikushallgatója.

A feladatok megoldásai

1. Nyilván $L(X) \geq \sup L(A)$. Tegyük fel indirekt módon, hogy $>$ áll, s legyen $\mathcal{U}$ olyan nyílt lefedése X-nek, melyből nem választható ki legfeljebb $\sup L(A)$ számosságú részlefedés. Transzfinit rekurzióval definiálunk $x_\alpha \in X$ pontokat és legfeljebb $\sup L(A)$ számosságú $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ részrendszereket minden $\alpha < \omega_1$ rendszámra. Ha az x_β pontok $\beta < \alpha$ esetén már adottak, akkor legyen ezek halmazának lezártja A_α, és legyen $\mathcal{U}_\alpha \subset \mathcal{U}$ egy legfeljebb $L(A_\alpha)$ számosságú, A_α-t lefedő részrendszer. Legyen $x_\alpha \in X$ olyan pont, melyet egyetlen, α-t meg nem haladó indexű $\mathcal{U}_\beta$ sem fed le. Ilyen van, mert $\alpha < \omega_1$, tehát megszámlálható sok $\sup L(A)$-nál kisebb számosságú $\mathcal{U}_\beta \subset \mathcal{U}$ részrendszerről van szó, így indirekt feltevésünk miatt ezek együttesen sem fedhetik le X-et.

Legyen $x \in X$ kondenzációs pontja a $H = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ halmaznak. Mivel az X tér M_1 tulajdonságú, ezért van $\alpha < \omega_1$, melyre x benne van az $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ halmaz lezártjában. Ez lehetetlen, mert ekkor $\bigcup \mathcal{U}_\alpha$ olyan környezete x-nek, amely megszámlálható sok pontban metszi H-t.

A kitűző (Juhász István) megoldása

Megoldották: Máthé András, Varjú Péter, Vizer Máté.

2. A G gráf csúcshalmazának tetszőleges S, T részhalmazai esetén jelölje $e_G(S,T)$ azon $(s,t) \in S \times T$ rendezett párok számát, amelyekre $\{s,t\} \in E(G)$. Ekkor

$$e_G(S,T) = e_G(S \cup T) - e_G(S \backslash T) - e_G(T \backslash S) + e_G(S \cap T),$$

és innen

$$(1)\qquad \left|e_{G_1}(S,T)-e_{G_2}(S,T)\right| \le 4\frac{n^2}{1000}.$$

Legyen F tetszőleges négycsúcsú gráf, $V(F)=\{1,2,3,4\}$. Jelölje $h(F)$ a V halmaz azon rendezett (v_1,v_2,v_3,v_4) négyeseinek számát, melyekre minden $\{i,j\}\in E(F)$ esetén $\{v_i,v_j\}\in E(G_1)$ és minden $\{i,j\}\notin E(F)$ esetén $\{v_i,v_j\}\in E(G_2)$. Ekkor

$$t(G_1)=\frac{1}{24}h(K_4),\qquad t(G_2)=\frac{1}{24}h(\bar{K}_4).$$

Állítjuk, hogy ha F és F' csak egy élben különböznek, akkor

$$(2)\qquad \left|h(F)-h(F')\right| < 4\frac{n^4}{1000}.$$

Ebből már következik, hogy

$$\left|t(G_1)-t(G_2)\right| = \frac{1}{24}\left|h(K_4)-h(\bar{K}_4)\right| < \frac{1}{24}\cdot 6\cdot 4\frac{n^4}{1000}=\frac{n^4}{1000}.$$

A (2) egyenlőtlenség belátásához feltehetjük, hogy F és F' a $\{3,4\}$ élben különböznek: mondjuk $\{3,4\}\in E(F)$, de $\{3,4\}\notin E(F')$. Legyen mondjuk $\{1,2\}\in E(F)$. Tetszőleges $\{v_1,v_2\}\in E(G_1)$ élhez legyen $T_3\subseteq V$ azon $v\in V$ pontok halmaza, melyekre $i=1,2$ esetén fennáll, hogy ha $\{3,i\}\in E(F)$, akkor $\{v,v_i\}\in E(G_1)$, míg ha $\{3,i\}\notin E(F)$, akkor $\{v,v_i\}\in E(G_2)$. Legyen T_4 hasonlóan definiálva mint azon $v\in V$ pontok halmaza, melyekre $i=1,2$ esetén fennáll, hogy ha $\{4,i\}\in E(F)$, akkor $\{v,v_i\}\in E(G_1)$, míg ha $\{4,i\}\notin E(F)$, akkor $\{v,v_i\}\in E(G_2)$. Ekkor a $h(F)$-ben beszámított (v_1,v_2,v_3,v_4) négyesek száma éppen $e_{G_1}(T_3,T_4)$, míg a $h(F')$-ben beszámított (v_1,v_2,v_3,v_4) négyesek száma éppen $e_{G_2}(T_3,T_4)$. Így adott v_1 és v_2 esetén ez a két szám legfeljebb $4n^2/1000$-rel különbözik (1) szerint. A tekintendő (v_1,v_2) párok száma $2\left|E(G_1)\right|<n^2$, így

$$\left|h(F)-h(F')\right| < n^2\cdot 4\cdot\frac{n^2}{1000}=4\frac{n^4}{1000}.$$

A kitűző (Lovász László) megoldása alapján

Megoldotta Mélykúti Bence.

3. A bizonyítás nyolc részből áll.

1. Először definiálni fogjuk minden $n\ge 3$-ra a G_n gráfot, amelyről majd megmutatjuk a feladat állítását.

Legyen először $n=3k$, ahol $k\ge 1$ egész. Ekkor a gráf csúcspontjai $1\le i\le k$-ra $A_{i,1},A_{i,2},A_{i,3}$. Az élei $A_{i,j_1}A_{i,j_2}$ ($1\le i\le k$, $1\le j_1,j_2\le 3$, $j_1\ne j_2$) és $A_{i,j_1}A_{i+1,j_2}$ ($1\le i< i+1\le k$, $1\le j_1,j_2\le 3$, $j_1\ne j_2$) alakúak. Ha $n=3k+1$ vagy $n=3k+2$, ahol $k\ge 1$ egész, akkor G_n a fent definiált G_{3k} gráfból egy, illetve két izolált pont hozzáadásával kapott gráf. Nyilván elegendő az $n=3k$, $k\ge 1$ esettel foglalkozni, amit ezután fel is teszünk.

2. Először megmutatjuk, hogy $n=3k\ge 6$-ra G_n síkbarajzolható úgy, hogy a maximális és minimális él hosszának aránya $n/\sqrt{3}=0{,}5773\ldots\cdot n$. Legyen $A_{1,1}A_{1,2}A_{1,3}$ pozitív körüljárású szabályos háromszög, amelyre a köréírt kör középpontja O és sugara 1; továbbá legyen $1<i\le k$-ra az $A_{i,1}A_{i,2}A_{i,3}$ háromszög az $A_{1,1}A_{1,2}A_{1,3}$ háromszögnek az O-ból i-szeresre nagyított példánya. Mindegyik ilyen háromszög pozitív körüljárású, és

$1 \le i < k$-ra a pozitív körüljárású $A_{i,1}OA_{i+1,1}$ szög $2\pi/3$. Speciálisan, G_n síkgráf (minden $n = 3k, 3k+1, 3k+2$, $k \ge 1$ egészre).

3. Ezután vizsgáljuk a G_n gráf lehetséges síkbarajzolásait. Sztereografikus projekcióval azonosíthatjuk a síkot az S^2 egységgömb mínusz az északi pólussal. Így G_n síkbarajzolása adja G_n-nek egy S^2-be rajzolását; célszerűbb lesz ezen S^2-be rajzolásokat vizsgálni.

4. Legyen K_i a gráfnak $A_{i,1}A_{i,2}A_{i,3}$ köre. Az S^2-be rajzolásnál ennek egy topologikus kör felel meg, amely S^2-t két topologikus nyílt félgömbre vágja szét. Továbbá $1 \le i < i+1 \le k$-ra K_i és K_{i+1} képei diszjunktak, így K_{i+1} képe az előbb említett két topologikus nyílt félgömb egyikébe esik. Így K_i és K_{i+1} képei S^2-t három összefüggő részre vágják szét: egyiknek határa csak K_i képe, másiknak határa csak K_{i+1} képe (ezek topologikus nyílt körlemezek), míg a harmadiknak a határa K_i és K_{i+1} képei uniója (ez az összefüggő rész tehát a K_i és K_{i+1} képei közötti nyílt gömbsáv). Nyilvánvalóan a K_i és K_{i+1} csúcsai között haladó gráfélek képei a K_i és K_{i+1} képei közötti nyílt gömbsávban vannak, a végpontjaik kivételével. Továbbá könnyen látható, hogy a K_i, K_{i+1} és a csúcsaik között haladó élek képei a K_i és K_{i+1} képei közötti zárt gömbsávot topologikusan egyféle módon triangulálják: a topologikus háromszögek $A_{i,j}A_{i,j+1}A_{i+1,j+2}$ és $A_{i+1,j}A_{i,j+1}A_{i+1,j+2}$ képei, ahol $j = 1, 2, 3$, és az indexekben az összeadás $\bmod 3$ értendő.

5. Legyen most $1 \le i-1 < i < i+1 \le k$. Állítjuk, hogy K_i képe a K_{i-1} és K_{i+1} képeit elválasztja, azaz a két utóbbi kör képe a K_i képe által határolt két topologikus nyílt félgömb egyikébe, illetve másikába esik. Tegyük fel ennek ellenkezőjét, azaz hogy K_{i-1} és K_{i+1} képe ugyanabba a K_i képe által határolt topologikus nyílt félgömbbe esik. Ekkor az $A_{i,1}A_{i,2}$ él képéhez csatlakozik az $A_{i,1}A_{i,2}A_{i-1,3}$ háromszögnek és az $A_{i,1}A_{i,2}A_{i+1,3}$ háromszögnek a képe, méghozzá az $A_{i,1}A_{i,2}$ él képének ugyanazon a partján. Ekkor könnyen láthatóan az egyik fenti háromszög képe a másik fenti háromszög képét tartalmazza. Tegyük fel pl., hogy $A_{i,1}A_{i,2}A_{i+1,3}$ képe tartalmazza $A_{i,1}A_{i,2}A_{i-1,3}$ képét. Ekkor $A_{i-1,3}$ képe benne van a $A_{i,1}A_{i,2}A_{i+1,3}$ háromszög képe belsejében. De az $A_{i-1,3}$ össze van kötve az $A_{i-1,3}A_{i-1,1}$, $A_{i-1,1}A_{i,3}$ élsorozat segítségével az $A_{i,3}$ csúccsal. Márpedig az $A_{i,3}$ képe az $A_{i,1}A_{i,2}A_{i+1,3}$ háromszög képének külsejében van. Ez ellentmondás.

A fentiekből következik, hogy a $K_1, \ldots, K_k$ képei topologikusan úgy követik egymást, mint egyre északabbra haladó szélességi körök.

6. Nézzük meg, hogy mindez mit mond a síkbarajzolásra. A sztereografikus projekció pólusa az S^2-re rajzolt gráf által adott trianguláció bármelyik lapjának belsejébe eshet (él vagy csúcs képére nem). Ha ez a lap a K_1 vagy K_k képe által határolt, a síkon a $K_1, \ldots, K_k$ képei egymásba skatulyázott topologikus körvonalak, amelyek az indexek növekedésével vagy csökkenésével skatulyázódnak egymásba. Ha pedig ez a lap valamely $1 \le k_0 < k_0+1 \le k$-ra a K_{k_0} és K_{k_0+1} képei által határolt nyílt gömbsávba esik, akkor a síkon K_{k_0} és K_{k_0+1} képei egymás külsejében levő topologikus körvonalak, és $K_1, \ldots, K_{k_0}$ képei az indexek csökkenésével egymásba skatulyázódó topologikus körvonalak, míg $K_{k_0+1}, \ldots, K_k$ képei az indexek növekedésével egymásba skatulyázódó topologikus körvonalak. Tehát mindenképpen van $\lceil k/2 \rceil$ db egymásba skatulyázott képű K_i kör.

7. A topologikus viszonyok tisztázása után most térjünk rá a G_n gráf egyenes szakaszokkal való síkbarajzolásaira. Mondjuk, a $K_1, \ldots, K_{\lceil k/2 \rceil}$ körök vannak egymásba skatulyázva, az indexek csökkenésével csökkenő módon. Feltesszük, hogy a G_n gráfnak a fent említett körök által feszített részgráfjában a minimális élhossz 1. Meg fogjuk mutatni, hogy ugyanebben a részgráfban a maximális él hossza legalább cn, valami $c > 0$ konstanssal, ami a feladat állítását bizonyítani fogja.

Tekintsük a gráfunknak a K_i, K_{i+1} $\left(1 \le i < i+1 \le \lceil k/2 \rceil\right)$ csúcsai által feszített részét. A jelölés egyszerűsége céljából feltesszük, hogy $i = 1$. Ekkor tehát a K_1 kör képe, ami geometriailag egy háromszög, benne van a K_2 kör képének belsejében, ami egy nyílt háromszög.

Feltevésünk szerint K_2 oldalai legalább 1 hosszúak, és az $A_{1,j_1}A_{2,j_2}$ $(j_1 \ne j_2)$ élek hossza legalább 1/2 (igaz itt az 1 alsó korlát is, de csak 1/2-et fogunk kihasználni, ami a megoldás egy lényeges eleme). Ekkor a K_2 háromszög csúcsainál tekintünk egyenlő szárú háromszögeket, amelyek alappal szemközti csúcsai a K_2 megfelelő csúcsai, száraik a K_2 háromszög megfelelő csúcsaiból kiinduló oldalain vannak, és a szárak hossza 1/2. Ezeket az egyenlő szárú háromszögeket, kivéve az alapjukat, levonjuk K_2-ből. Azt állítjuk, hogy a maradék (esetleg elfajuló) K_2' zárt konvex hatszög még mindig tartalmazni fogja K_1-et. Legyen az $A_{2,j}$ csúcsnál (az alapja kivételével) levágott kis háromszög T_j $(1 \le j \le 3)$. Meg kell mutatni, hogy K_1 csúcsai nem lehetnek a T_j háromszögekben, kivéve az alapjukon. Ebből már következni fog, hogy K_1 csúcsai, és így az egész K_1 háromszög a K_2' zárt konvex hatszögben van.

Legyen pl. $j = 1$. Mivel $A_{2,1}A_{1,2}$ és $A_{2,1}A_{1,3}$ hossza legalább 1/2, $A_{1,2}$ és $A_{1,3}$ nem lehetnek T_1-ben, kivéve az alapján. Tegyük most fel indirekt módon, hogy $A_{1,1}$ T_1-ben van, de nem az alapján. Tekintsük az $A_{2,2}A_{2,3}A_{1,1}$ háromszöget a gráfunkban. Az $A_{1,2}$, illetve $A_{1,3}$ pontok ennek a háromszögnek a külsejében vannak, és össze vannak kötve $A_{2,3}$-mal, illetve $A_{2,2}$-vel. Így az $A_{1,2}$, illetve $A_{1,3}$ pontok benne vannak a pozitív körüljárású $A_{2,1}A_{2,3}A_{1,1}$, illetve $A_{1,1}A_{2,2}A_{2,1}$ szögtartományoknak K_2 belsejébe eső részében, de nincsenek benne a T_1 zárt háromszögben, esetleg kivéve annak zárt alapját. Ekkor viszont az $A_{1,2}A_{1,3}$ él átmetszi az $A_{1,1}A_{2,2}$ és $A_{1,1}A_{2,3}$ éleket, ami ellentmond a síkbarajzoltságnak. Ezzel beláttuk, hogy $K_1 \subset K_2'$.

8. Jelölje egy P konvex sokszög kerületét $L(P)$. Ekkor $L(K_1) \le L(K_2') = L(K_2) - \left(1 - \sin\left(A_{2,3}A_{2,1}A_{2,2}\sphericalangle/2\right)\right) - \left(1 - \sin\left(A_{2,1}A_{2,2}A_{2,3}\sphericalangle/2\right)\right) - \left(1 - \sin\left(A_{2,2}A_{2,3}A_{2,1}\sphericalangle/2\right)\right) \le L(K_2) - 3 + 3\sin\pi/6 = L(K_2) - 3/2$, ahol az utolsó egyenlőtlenségben a $\sin x$ függvény konkavitását használtuk fel a $[0, \pi/2]$ intervallumban. Tehát $L(K_2) \ge L(K_1) + 3/2$.

Ugyanígy minden $1 \le i < i+1 \le \lceil k/2 \rceil$-re $L(K_{i+1}) \ge L(K_i) + 3/2$. Ezekből

$$L\left(K_{\lceil k/2 \rceil}\right) \ge L(K_1) + \left(\lceil k/2 \rceil - 1\right) \cdot 3/2 \ge 3 + \left(\lceil k/2 \rceil - 1\right) \cdot 3/2.$$

Végül a $K_{\lceil k/2 \rceil}$ háromszög leghosszabb élének hossza legalább

$$L\left(K_{\lceil k/2 \rceil}\right)/3 \ge 1 + \left(\lceil k/2 \rceil - 1\right)/2 \ge k/4 + 1/2 > n/12.$$

Az $n = 3k+1, 3k+2$ esetekben is igaz az utolsó egyenlőtlenség. Tehát választható $c = 1/12 = 0{,}08333\ldots$, amivel a feladat állítását beláttuk.

Vizer Máté és Varjú Péter megoldásai alapján

Megjegyzés. Két megoldó nem a K_{i+1}, K_i kerületeinek, hanem átmérőinek különbségére ad alsó korlátot. Jelölje $\operatorname{diam} K_i$ a K_i háromszög átmérőjét (azaz leghosszabb oldala hosszát). A fenti jelölésekkel belátható, $\operatorname{diam} K_1 \le \operatorname{diam} K_2' \le \operatorname{diam} K_2 - 1/2$, amely becslés, egy lépésben, még pontos is: ha K_2 akármilyen, legalább 1 oldalhosszú szabályos háromszög, $\operatorname{diam} K_2' = \operatorname{diam} K_2 - 1/2$, és K_1 megválasztható úgy, hogy átmérője $\operatorname{diam} K_2'$-vel legyen egyenlő: két csúcsát K_2' egy átmérője két végpontjának választjuk. Ebből az egyenlőtlenségből ugyanaz az alsó becslés jön ki a maximális élhossz és minimális élhossz hányadosára, mint fenn. Viszont ehhez relatíven sokat kell számolni, igaz, hogy ezek a számolások teljesen standardok.

Megoldották: Máthé András, Varjú Péter, Vizer Máté.

4. Minden n egészre $f(0) = f(0 \cdot n) = f(0)f(n)$, ezért $f(0) = 0$, vagy $f(n) = 1$ minden n-re. Mivel az utóbbi esetben már $b = 1$ esetén sem teljesülne a feltétel, csak $f(0) = 0$ lehet. Minden n-re $f(n) = f(1 \cdot n) = f(1)f(n)$, így $f(1) = 1$, vagy $f(n) = 0$ minden n-re. Az utóbbi eset most sem lehetséges. Mivel $1 = f(1) = f\big((-1) \cdot (-1)\big) = f(-1)f(-1)$ és f nemnegatív, így $f(-1) = 1$. Emiatt $f(-n) = f(-1)f(n) = f(n)$ minden n-re.

Megmutatjuk, hogy $x, y > 0$ esetén $f(x+y) > f(x)$ vagy $f(x+y) > f(y)$. Tegyük fel indirekt módon, hogy x, y olyan ellenpélda, amelyre $f(x+y)$ minimális. Ekkor a feladat feltételét $b = x+y$ és $a = y$ választással alkalmazva kapjuk, hogy valamely q egészre $f\big(y - q(x+y)\big) < f(x+y)$. Legyen q minimális abszolút értékű. Az indirekt feltevés miatt $q \neq 0, 1$. Ha $q > 1$, akkor $y - q(x+y) < 0$, és

$$f(qx + (q-1)y) = f\big(y - q(x+y)\big) < f(x+y) \leq f\big((q-1)x + (q-2)y\big),$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség a $|q|$ minimalitásából következik. Így az $x' = x+y$ és $y' = (q-1)x + (q-2)y$ választással ellentmondásra jutunk. A másik eset, amikor $q < 0$, hasonlóan kezelhető.

Tegyük fel indirekt módon, hogy valamely $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pozitív egészekre $f(x_i) \geq f(x_1 + \cdots + x_k)$ minden i-re. Ekkor $f(x_1 + x_2) > \min\big(f(x_1), f(x_2)\big) \geq f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$. Hasonlóan, teljes indukcióval megmutatható, hogy

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_i) > f(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

minden $2 \leq i \leq k$-ra, ami ellentmondás.

Megmutatjuk, hogy ha $0 < n < m < l$, és n, m relatív prímek, akkor $f(n) < f(l)$ vagy $f(m) < f(l)$. Tegyük fel indirekt módon, hogy $f(n) \geq f(l)$ és $f(m) \geq f(l)$. Alkalmas k-ra $l^k > km^{k+1}$. Meg fogjuk mutatni, hogy ekkor

$$l^k = \alpha_0 m^k + \alpha_1 m^{k-1} n + \cdots + \alpha_k n^k \tag{3}$$

alkalmas pozitív α_i egészekkel. Ekkor

$$f(l^k) = f(l)^k < f(m)^{k-i} f(n)^i = f(m^{k-i} n^i) \leq f(\alpha_i m^{k-i} n^i)$$

miatt ellentmondásra jutunk.

Tekintsünk egy (3) alakú felírást nem feltétlenül pozitív együtthatókkal. Ilyen van, mert m^k és n^k relatív prímek. Ha minden együttható pozitív, akkor ez egy alkalmas felírás. Legyen i a legkisebb index, amelyre nem teljesül, hogy $0 < \alpha_i \leq n$. Ha $i < k$, akkor alakítsuk át az összeget a következőképpen. Valamely q és $0 < \alpha_i' \leq n$ egészekre $\alpha_i = \alpha_i' + nq$. Legyen $\alpha_{i+1}' = \alpha_{i+1} + mq$, és $j \neq i, i+1$ esetén $\alpha_j' = \alpha_j$. Ekkor $l^k = \alpha_0' m^k + \alpha_1' m^{k-1} n + \cdots + \alpha_k' n^k$. Az eljárást folytatva olyan (3) alakú felíráshoz jutunk, amelyben $0 < \alpha_i \leq n$ minden $i < k$ index esetén. Ugyanakkor

$$\alpha_k n^k = l^k - (\alpha_0 m^k + \cdots + \alpha_{k-1} m n^{k-1}) > l^k - km^{k+1} > 0,$$

ahonnan $\alpha_k > 0$.

Tegyük fel, hogy valamely P, Q prímhatványokra (megengedjük az első hatványokat is) $P < Q$, de $f(P) \geq f(Q)$. Legyen most r egy tetszőleges prím, mely nem osztója PQ-nak. Ha valamely $\alpha, \beta > 0$-ra $q^\alpha > r^\beta$, akkor $n = \min(P^\alpha, r^\beta)$, $m = \max(P^\alpha, r^\beta)$, $l = Q^\alpha$ választással a fentiek miatt $f(Q^\alpha) > f(r^\beta)$. Ha pedig $Q^\alpha < r^\beta$, akkor $n = P^\alpha$, $m = Q^\alpha$, $l = r^\beta$ választással $f(Q^\alpha) < f(r^\beta)$ adódik. Tehát

$$f\left(Q^{\lfloor \beta \log_Q r \rfloor}\right) < f(r^\beta) < f\left(Q^{\lceil \beta \log_Q r \rceil}\right).$$

Innen

$$\frac{\lfloor \beta \log_Q r \rfloor}{\beta} < \log_{f(Q)} f(r) < \frac{\lceil \beta \log_Q r \rceil}{\beta}.$$

Ekkor $\beta \to \infty$ határátmenettel $\log_{f(Q)} f(r) = \log_Q r$. Azt kaptuk tehát, hogy $f(r) = r^\gamma$, ahol $\gamma = \log_Q f(Q)$ független r-től. Mivel van olyan r prím, amelyre $r > Q$, s így $r^\gamma = f(r) > f(Q) = Q^\gamma$, tehát $\gamma > 0$. Az $f(r) = r^\gamma$ egyenlőség teljesül $r|Q$ esetén is, míg ha p az a prím, amelynek a hatványa P, akkor $f(p) > p^\gamma$, mert $f(P) > f(Q)$. Ha nincsenek olyan $P < Q$ prímhatványok, hogy $f(P) \geq f(Q)$, akkor hasonlóan megmutatható, hogy $f(r) = r^\gamma$ valamely r-től független γ konstanssal, de akkor ez minden r prímre teljesül.

Összefoglalva, azt kaptuk, hogy ha f teljesíti a feladat feltételeit, akkor van olyan p prím, γ pozitív valós szám és $w \geq p^\gamma$ egész, hogy $f(p^\delta s) = w^\delta s^\gamma$ minden $\delta \geq 0$ egész kitevőre és p-vel nem osztható s egészre. Megmutatjuk még, hogy γ pozitív egész. Mivel ebben az esetben az így megadott f függvény teljesíti a feltételeket, ezzel megadtuk az összes lehetséges f-et.

Általánosabban, $k = \lfloor \gamma \rfloor$ szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ha a $\xi_0, \dots, \xi_k$, γ nemnegatív valós számokra és a $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nullához tartó függvényre

$$f(x) = \xi_0 x^\gamma + \dots + \xi_k x^{\gamma-k} + g(x)$$

egész minden $x = pi + 1$ alakú helyen, akkor γ egész.

Ha $k = 0$, akkor van olyan N, hogy minden $i \geq N$-re

$$\xi_0\big(p(i+1)+1\big)^\gamma - \xi_0(pi+1)^\gamma < 1/3,$$

és

$$\max\Big(\big|g(pi+1)\big|, \big|g\big(p(i+1)+1\big)\big|\Big) < 1/3.$$

Ekkor $f(pi+1)$ és $f(p(i+1)+1)$ egymástól 1-nél kevesebbel tér el, de egészek, így megegyeznek. Tehát $f(pi+1) = f(pN+1)$ minden $i \geq N$-re, tehát f nem tart a végtelenbe, így $\gamma = 0$.

Legyen most $k > 0$, és tegyük fel, hogy az állítás igaz $(k-1)$-re. Ekkor a $(x+pz)^\gamma$ függvény z szerinti sorfejtéséből

$$(x+p)^\gamma - x^\gamma = p\binom{\gamma}{1}x^{\gamma-1} + p^2\binom{\gamma}{2}x^{\gamma-2} + \dots + p^k\binom{\gamma}{k}x^{\gamma-k} + o(1),$$

ahol $\binom{\gamma}{j} = \gamma(\gamma-1)\cdots(\gamma-j+1)/j!$. Most $f(x+p) - f(x)$-re alkalmazva az indukciós feltevést, kapjuk, hogy $\gamma - 1$ egész. De ekkor γ is az.

Varjú Péter megoldása

Megoldotta Máthé András és Varjú Péter.

5. Világos, hogy faktorcsoportokra a keresett valószínűség legalább akkora, mint a G csoportra, ezért feltehetjük, hogy G minden valódi faktorcsoportja feloldható. Ekkor G-ben egyetlen minimális normálosztó van, jelöljük ezt M-mel. A G/M faktor feloldható, M maga nem feloldható, ennélfogva, ha N tetszőleges nemtriviális normálosztó G-ben, akkor $N \geq M$. Továbbá az $[M, M]$ kommutátor-részcsoport, nemtriviális normálosztó lévén, megegyezik M-mel.

A behelyettesítés nem más, mint egy $F_k \to G$ homomorfizmus. Azt mutatjuk meg, hogy van olyan $w \in F_k$ szó, amely egyetlen *szürjektív* homomorfizmusnál sem képződik az egységelemre, majd pedig kimutatjuk, hogy $k \to \infty$ mellett nullához tart annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott $F_k \to G$ homomorfizmus nem szürjektív.

Vegyük azokat a $K_i \triangleleft F_k$ normálosztókat, amelyekre $F_k/K_i \simeq G$. Ilyen véges sok van. Legyen $M_i/K_i \simeq M \triangleleft G \simeq F_k/K_i$.

Ha $N \triangleleft F_k$ és $N \not\leq K_i$, akkor $1 \neq NK_i/K_i \triangleleft F_k/K_i \simeq G$, tehát $NK_i \geq M_i$. Ha $N_1, N_2 \triangleleft F_k$, $N_1, N_2 \not\leq K_i$, akkor $[N_1, N_2]K_i/K_i = [N_1K_i/K_i, N_2K_i/K_i] \geq [M_i/K_i, M_i/K_i] = M_i/K_i$, tehát $[N_1, N_2] \not\leq K_i$, még inkább $N_1 \cap N_2 \not\leq K_i$. Innen teljes indukcióval következik, hogy $L_i = \bigcap_{j \neq i} K_j \not\leq K_i$. Legyen $w_i \in L_i \backslash K_i$ és $w = \prod w_i$. Itt a w_i tényező nincs benne K_i-ben, de az összes többi igen, ennélfogva $w \notin K_i$ teljesül az összes K_i homomorfizmusmagra, azaz w nincs benne egyetlen $F_k \to G$ szürjektív homomorfizmus magjában sem.

Végül becsüljük meg annak valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen választott $F_k \to G$ homomorfizmus nem lesz szürjektív. Ehhez az kell, hogy a generátorok képei mind egy valódi részcsoporthoz tartozzanak. Természetesen elég csak a maximális részcsoportokat tekinteni, legyenek ezek $H_1, \ldots, H_m$. Ekkor annak valószínűsége, hogy a homomorfizmus nem szürjektív, legfeljebb

$$\frac{1}{|G|^k} \sum_{i=1}^{m} |H_i|^k \leq \frac{m}{2^k} \to 0.$$

A kitűző (Abért Miklós) bizonyítását egyszerűsítette Pálfy Péter Pál

Megoldotta Máthé András és Patakfalvi Zsolt.

6. A válasz nemleges. Legyen $0 < c < 1/3$. Legyen $F = \bigcap F_i$, ahol $F_0 = [0,1]$, és F_{i+1}-et úgy kapjuk, hogy az F_i zárt intervallumok diszjunkt uniójaként való előállításában szereplő zárt intervallumok mindegyikének elhagyjuk a középső nyílt c-szeres hosszúságú részét. Azt fogjuk belátni, hogy

$$F' = \frac{1}{2}F + \frac{1}{4} \subset \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$

egy ellenpélda a feladat kérdésére.

Először azt igazoljuk, hogy *ha* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *differenciálható, továbbá* $|f(x) - x| \leq 1$ *és* $2c/(1-c) \leq f'(x) \leq (1-c)/2c$ *minden* x*-re, akkor* $f(F) \cap F \neq \emptyset$. Ez azzal ekvivalens, hogy f grafikonja metszi $F \times F$-et. Ez pedig kompaktsági okokból azzal ekvivalens, hogy metszi mindegyik $F_j \times F_j$-t. Az $|f(x) - x| \leq 1$ feltétel biztosítja, hogy $F_0 \times F_0$-t metszi. Tegyük fel indirekt módon, hogy $F_j \times F_j$-t metszi, de $F_{j+1} \times F_{j+1}$-et nem. Az $F_j \times F_j$ szorzat 4^j darab $\left((1-c)/2\right)^j$ oldalú négyzet diszjunkt uniója. Legyen Q ezek közül egy olyan, melyet a grafikon elmetsz. A $Q \backslash (F_{j+1} \times F_{j+1})$ „kereszt” egy középső kis négyzetből és négy olyan téglalapból áll, melyekben a két oldal aránya $(1-c)/2c$. A grafikon metszi legalább az egyik téglalap rövidebbik oldalait (nem csúcsban), így a Lagrange-féle középértéktétel miatt ellentmondásba kerülünk a deriváltra kirótt feltétellel.

Most belátjuk, hogy *ha* $f, g \in C^1[0,1]$ *elég közel vannak az identikus függvényhez, akkor* $f(F') \cap g(F') \neq \emptyset$. Könnyű látni, hogy ha f és g elég közel vannak az identikus függvényhez, akkor szigorúan monoton növőek, az inverzük is folytonosan differenciálható, $g^{-1} \circ f$ értelmezett és folytonosan differenciálható $[1/4, 3/4]$-en, és ott tetszőlegesen előírt pontossággal approximálja az identikus függvényt a C^1-metrika szerint. Az F-ről fent bizonyított állítást $[0,1]$ helyett $[1/4, 3/4]$-re és F helyett F'-re alkalmazva kapjuk, hogy ekkor $g^{-1}\left(f(F')\right) \cap F' \neq \emptyset$, ahonnan $f(F') \cap g(F') \neq \emptyset$.

Végül belátjuk, hogy F' ellenpélda a feladat kérdésére. Legyen $h \in C^1[0,1]$ olyan, hogy

$$h(x) = \begin{cases} x & \left(\dfrac{1}{4} \le x \le \dfrac{2-c}{4}\right), \\ x - \dfrac{2+c}{4} & \left(\dfrac{2+c}{4} \le x \le \dfrac{3}{4}\right). \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy ha $h_1 \in C^1[0,1]$ elég közel van h-hoz, akkor h_1-nek F'-re való megszorítása nem injektív. Valóban, definiáljuk az $f, g \in C^1\left[\frac{1}{4}, \frac{2-c}{4}\right]$ függvényeket az $f(x) = h_1(x)$ és $g(x) = h_1\left(x - \frac{1+c}{4}\right)$ formulákkal (ha például $h_1 = h$, akkor $f = g$ az identikus függvény). Ha h_1 elég közel van h-hoz, akkor f és g tetszőlegesen közel lesznek az identikus függvényhez, így a fent bizonyított állítást $[0,1]$ helyett $\left[\frac{1}{4}, \frac{2-c}{4}\right]$-re és F' helyett annak ide eső F_1' részére alkalmazva kapjuk, hogy F_1'-nek f-nél és g-nél vett képe nem diszjunkt egymástól, ezért h_1 nem injektív F'-n.

Máthé András megoldása

Megoldották: Máthé András, Varjú Péter, Vizer Máté.

7. Első megoldás. Az S^2 egy $\mathcal{Q}$ részhalmazát nevezzük δ-szeparáltnak, ha bármely két pontjának (ívhossz-)távolsága legalább δ. Ekkor a $\mathcal{Q}$ pontjai körüli $\delta/2$ gömbi sugarú gömbsapkák diszjunktak, és mindegyikük területe nagyobb, mint $2(\delta/2)^2 = \delta^2/2$, így $|\mathcal{Q}| < 8\pi/\delta^2$.

Az S^2 egy $\mathcal{Q}$ részhalmazát nevezzük δ-hálónak, ha az S^2 minden T pontjához van olyan $Q \in \mathcal{Q}$, melynek T-től vett $d(T,Q)$ (ívhossz-)távolsága kisebb, mint δ. Ha $0 < \delta < \pi$, akkor bármely maximális centrálszimmetrikus δ-szeparált részhalmaz szükségképpen δ-háló. Speciálisan, létezik $8\pi/\delta^2$-nél kevesebb pontból álló centrálszimmetrikus δ-háló.

Legyen k nagy páratlan egész, és tekintsük minden $Q = (x_0, y_0, z_0) \in S^2$ ponthoz a $P_Q(x,y,z) = P_Q^{(k)}(x,y,z) = (x_0x + y_0y + z_0z)^k$ polinomot. Ha $T \in S^2$, akkor $P_Q(T) = \cos^k d(Q,T)$. Legyen $r = r^{(k)} = \arccos{(1/2)^{1/k}}$ és $R = R^{(k)} = \arccos{(r^2/100)^{1/k}}$. Ekkor r az $1/\sqrt{k}$ két pozitív konstansszorosa között van, így R is nullához tart, ha $k \to \infty$.

Ha $d(Q,T) \le r$, akkor $P_Q(T) \ge 1/2$. Ha $d(Q,T) \le R$, akkor $P_Q(T) \ge 0$. Ha $d(-Q,T) \le r$, akkor $P_Q(T) \le -1/2$. Ha $d(-Q,T) \le R$, akkor $P_Q(T) \le 0$. Ha $d(Q,T) > R$ és $d(-Q,T) > R$, akkor $|P_Q(T)| < r^2/100$. A P polinomot ilyen P_Q polinomok összegeként fogjuk előállítani.

Tekintsünk egy legfeljebb $8\pi/r^2$ pontú centrálszimmetrikus $\mathcal{Q}$ r-hálót. Írjuk az $S^2 \setminus K$ nyílt halmazt $U^+ \cup U^-$ diszjunkt unióként, ahol $U^\pm$ az $S^2 \setminus K$ bizonyos összefüggő komponenseinek uniója úgy, hogy $U^- = -U^+$. Álljon $\mathcal{Q}^\pm$ a $\mathcal{Q} \cap U^\pm$ azon pontjaiból, melyek K-tól $7R$-nél nagyobb távolságra vannak. Álljon $V^\pm$ az $U^\pm$ azon pontjaiból, melyek K-tól $(7R+r)$-nél nagyobb távolságra vannak. Ha $T \in V^\pm$, akkor mindegyik olyan $Q \in \mathcal{Q}$, amelyre $d(T,Q) < r$, szükségképpen $\mathcal{Q}^\pm$-hoz tartozik, mert különben Q-nak K-tól vett távolsága legfeljebb $7R$, így T-nek K-tól vett távolsága $(7R+r)$-nél kisebb volna, ami lehetetlen. Tehát $\operatorname{dist}(T, \mathcal{Q}^\pm) < r$. Másrészt $\operatorname{dist}(T, \mathcal{Q}^\mp) > 14R + r$, mert K elválasztja T-t minden $Q \in \mathcal{Q}^\mp$-tól, ezért az összekötő íven van K-beli pont, s az T-től $(7R+r)$-nél nagyobb, Q-tól pedig $7R$-nél nagyobb távolságra van.

Legyen $\bar{\mathcal{Q}}$ egy maximális centrálszimmetrikus $4R$-szeparált halmaz, mely tehát egy $\pi/2R^2$-nél kevesebb pontból álló $4R$-háló. Legyen $\bar{\mathcal{Q}}'$ a $\bar{\mathcal{Q}}$ azon pontjainak halmaza, melyek K-tól $4R$-nél kisebb távolságra vannak. Minden $\pm Q \in \bar{\mathcal{Q}}'$ antipodális pontpárhoz tekintsünk egy $\pm A$, $\pm B$ pontnégyest úgy, hogy $d(A,Q) = d(B,Q) = R$ és $d(A,B) = 2R$.

Legyen $\bar{\mathcal{Q}}^+$ az A és a $-B$ alakú pontok, $\bar{\mathcal{Q}}^-$ pedig a $-A$ és a B alakú pontok halmaza. Ekkor minden $T \in V^\pm$ pontra

$$\operatorname{dist}(T, \bar{\mathcal{Q}}^+ \cup \bar{\mathcal{Q}}^-) > 7R + r - (4R + R) = 2R + r.$$

Továbbá,

$$\operatorname{dist}(\bar{\mathcal{Q}}^+ \cup \bar{\mathcal{Q}}^-, \mathcal{Q}^+ \cup \mathcal{Q}^-) > 7R - (4R + R) = 2R$$

és

$$\operatorname{dist}(\bar{\mathcal{Q}}^+, \bar{\mathcal{Q}}^-) \geq 4R - (R + R) = 2R.$$

Minden $T \in K$ pontra

$$\operatorname{dist}(T, \bar{\mathcal{Q}}^\pm) < 4R + R = 5R.$$

Legyen

$$P(T) = \sum_{Q \in \mathcal{Q}^+ \cup \bar{\mathcal{Q}}^+} P_Q(T);$$

ez homogén k-adfokú polinom. Az összeg tagjainak száma

$$|\mathcal{Q}^+ \cup \bar{\mathcal{Q}}^+| < |\mathcal{Q}| + |\bar{\mathcal{Q}}| < 8\pi/r^2 + \pi/2R^2 < 50/r^2.$$

Ha $T \in V^+$, akkor $P(T) > 1/2 - (50/r^2)(r^2/100) = 0$. Ha $T \in V^-$, akkor $P(T) < 0$. Ezért $Z(P)$ minden pontja legfeljebb $7R + r$ távolságra van K-tól. Másrészt, ha $T \in K$, akkor van $Q^\pm \in \bar{\mathcal{Q}}^\pm$ tőle $5R$-nél kisebb távolságra; ezekre $P(Q^+) > 0$ és $P(Q^-) < 0$, ezért az összekötő íven van pontja $Z(P)$-nek, s ez szintén $5R$-nél kisebb távolságra van T-től. Ezzel beláttuk, hogy K és $Z(P)$ Hausdorff-távolsága legfeljebb $7R + r$, amely $k \to \infty$ esetén nullához tart, így készen vagyunk.

Varjú Péter megoldása alapján

Második megoldás. A feladat állításának erősebb, kvantitatív változatát bizonyítjuk: a P polinom fokszáma C/ε-nál nem nagyobbnak választható, ahol C alkalmas abszolút konstans. A bizonyítás az approximációelméletből ismert Jackson-tételen alapul. Ha ezt a nála gyengébb Weierstrass-féle approximációs tétellel helyettesítjük, akkor a feladatként kitűzött változat bizonyításához jutunk.

Távolságon most is gömbi távolságot értünk. Rögzítsünk egy $A > 2$ számot, és egyelőre tetszőleges pozitív egész n mellett legyen $T \subset K$ olyan maximális centrálszimmetrikus halmaz, hogy T bármely két pontjának távolsága legalább A/n. Ekkor K minden pontja A/n-nél kisebb távolságra van T-től. A T-nek minden $p, -p$ pontpárjára írjunk elő egy $\operatorname{sign}(p) = \pm 1$ előjelet úgy, hogy ez p-re és $-p$-re ellentétes legyen, és $S^2 \setminus K$ minden L komponensére is írjunk elő egy $\operatorname{sign}(L) = \pm 1$ előjelet úgy, hogy ez az átellenes komponensekre különböző legyen. A T halmaz minden p pontja körüli $A/2n$ sugarú körben definiáljuk az f_n függvényt az $f_n(v) = \operatorname{sign}(p) \sin\big(4n\pi|v - p|/A\big)/n$ formulával, továbbá $S^2 \setminus K$ minden L komponensében legyen $f_n(v) = \operatorname{sign}(L)(\operatorname{dist}(v, K)/A - 1/n)$, ha $\operatorname{dist}(v, K) > A/n$. Mindenütt máshol legyen $f_n = 0$.

Világos, hogy f_n páratlan Lipschitz-függvény $4\pi/A$ Lipschitz-konstanssal, ezért – Jackson tétele szerint – valamilyen abszolút D konstanssal $D4\pi/An$ pontossággal approximálható egy legfeljebb n-edfokú háromváltozós R_n polinommal (először ki kell terjeszteni f_n-et egy kockára a Lipschitz-konstans meghagyásával, és a kockán már ismert a Jackson-tétel). Mivel f páratlan, ezért $\big(R_n(v) - R_n(-v)\big)/2$ is legalább olyan jól approximálja, és ez már páratlan, így feltehető, hogy R_n páratlan. Ezután R_n homogénná tehető úgy, hogy az alacsonyabb fokú tagokat $x^2 + y^2 + z^2$ megfelelő hatványával megszorozzuk (a gömbfelület pontjaiban vett értékén ez nem változtat).

Ha $A > 8\pi D$, akkor $D4\pi/An < 1/2n$, ezért R_n-nek van zérushelye a T bármely pontjától legfeljebb $A/2n$ távolságra. Másrészt, mivel $|f_n(v)| > 1/n$ ha $\mathrm{dist}(v, K) > 2A/n$, az R_n minden zérushelye legfeljebb $2A/n$ távolságra van K-tól. Tehát van olyan C abszolút konstans, mellyel az $n = \lfloor C/\varepsilon \rfloor$ választás már biztosítja, hogy K és $Z(R_n)$ Hausdorff-távolsága kisebb, mint ε.

A kitűző (Totik Vilmos) megoldása

Megoldotta Máthé András és Varjú Péter.

8. Első megoldás. Tegyük fel indirekt módon, hogy minden m-hez vannak $z_1, \dots, z_n$ pontok az egységkörvonalon, amelyekre minden $1 \le \nu \le m$ esetén $\sum z_j^\nu = 0$, de létezik a z_j-k egyikét sem tartalmazó δ hosszú ív. A z_j-ket egy alkalmas, m-től függő, 1 abszolút értékű számmal beszorozva feltehetjük, hogy ez az $I = \{e^{it} : 0 < t < \delta\}$ nyílt ív. Legyen μ_m a z_j pontokra koncentrált, rajtuk egyenletes eloszlású valószínűségi mérték; ekkor $\int z^\nu \, d\mu_m(z) = 0$, s így $\int z^{-\nu} \, d\mu_m(z) = 0$ minden $1 \le \nu \le m$ esetén (az utóbbi az előbbi konjugáltja), továbbá $\mu_m(I) = 0$. Ismeretes, hogy a körvonal valószínűségi mértékeinek tetszőleges sorozatából kiválasztható gyengén konvergens részsorozat. Esetünkben legyen a gyenge limesz μ. Ez olyan valószínűségi mérték a körvonalon, amelyre $\int z^\nu \, d\mu(z) = 0$ minden $\nu \ne 0$ egész kitevő esetén, és $\mu(I) = 0$.

Vegyünk egy olyan folytonos függvényt az egységkörvonalon, amely I-ben mindenütt pozitív, rajta kívül nulla. Ennek μ szerinti integrálja nulla, de Lebesgue-integrálja pozitív. Alkalmas konstanst (a Lebesgue-átlagértéket) kivonva olyan folytonos függvényt kapunk, melynek μ szerinti integrálja negatív, de Lebesgue-integrálja nulla. Weierstrass második approximációs tétele miatt e függvény egyenletesen approximálható (konstans tag nélküli) Laurent-polinomokkal, de ezeknek μ szerinti integrálja nulla. Ez lehetetlen.

Vizer Máté megoldása alapján

Második megoldás. Az állítás azonnal következik Erdős és Turán egy tételéből. Eszerint ugyanis a $z_1, \dots, z_n$ pontsorozat diszkrepanciája (eloszlásfüggvényének az egyenletes eloszlásától való, szuprémum-norma szerinti eltérése) legfeljebb

$$c\left(\frac{1}{m} + \sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu n}\left|\sum_{j=1}^{n} z_j^\nu\right|\right),$$

ahol c abszolút konstans. Ha a z_j számok teljesítik a feladatban kirótt feltételt, akkor itt c/m áll; ez m alkalmas választásával tetszőlegesen kicsivé tehető, s ezért nem létezhet δ hosszú üres intervallum (mert a diszkrepancia nyilván alulról becsülhető a leghosszabb üres intervallum hosszának pozitív abszolút konstansszorosával).

Megoldották: Máthé András, Mélykúti Bence, Varjú Péter, Vizer Máté.

9. Először megmutatjuk, hogy ha F a g nemű felület, ahol g és n különböző paritásúak, akkor F-nek létezik a kívánt tulajdonságú majdnem-immerziója. Ha már adott egy majdnem-immerzió, akkor a γ hajtásgörbe komponenseinek n számát növelhetjük kettővel oly módon, hogy egy az adott majdnem-immerziónál a síkba beágyazódó körlapon megváltoztatjuk a majdnem-immerziót úgy, hogy két új hajtásvonal képződjék. Emiatt feltehetjük, hogy $n = 1$ és g páros, vagy $n = 2$ és g páratlan. Ekkor az F felület a térbe való „szokásos" beágyazásának van olyan szimmetriasíkja, mely F-et n körvonalban metszi. A tükrözéssel faktorizálva egy n helyen kilyukasztott $\lfloor g/2 \rfloor$ nemű felületet kapunk. Ismert, hogy ez immertálható a síkba. Az immerziót a faktorleképezéssel komponálva, F-nek a kívánt tulajdonságú majdnem-immerzióját kapjuk.

Megfordítva, kimutatjuk, hogy ha létezik a kívánt tulajdonságú f majdnem-immerzió, akkor az F felület g neme n-től különböző paritású. Rögzítsük F egy irányítását és a sík standard irányítását. Legyen F_+, illetve F_- azon F-beli pontok halmazának lezártja, amelyekben f sima és a Jacobi-determinánsa pozitív, illetve negatív. Ekkor F_+ és F_- peremes felületek, közös peremük γ, uniójuk F. Mindkettejük Euler-karakterisztikája azonos paritású n-nel, mert n körlap beragasztásával kaphatunk belőlük irányított zárt felületet. Elég belátni, hogy F_+ és F_- Euler-karakterisztikája megegyezik, ekkor ugyanis $1-g=\chi(F)/2=\big(\chi(F_+)+\chi(F_-)-\chi(\gamma)\big)/2=\chi(F_+)$ azonos paritású n-nel, így g különböző paritású n-től.

Ehhez viszont elég belátni, hogy ha egy (nem feltétlenül összefüggő) kompakt peremes felületet immertálunk a síkba, akkor a perem érintővektorának χ körülfordulási száma éppen a felület Euler-karakterisztikája. Ehhez bontsuk a felületet olyan sima oldalú háromszögekre, melyek beágyazódnak a síkba, és amelyek oldalai mentén az érintővektor irányának oszcillációja kisebb, mint 1 fok. Egy ilyen háromszög peremén az érintővektor körülfordulási száma 1, tehát elfordulása 2π. Ezeket összeadva a belső éleken vett elfordulás kiesik, a perem élein összesen a $\chi 2\pi$ értéket kapjuk, míg minden egyes v csúcsnál (akár a peremen van, akár nem) a $(d_v-2)\pi$ értéket kapjuk, ahol d_v a v-ből kiinduló élek száma. Ha l háromszög, e él, c csúcs van, akkor tehát $l2\pi=\sum(d_v-2)\pi+\chi 2\pi=2e\pi-2c\pi+\chi 2\pi$, tehát χ tényleg az Euler-karakterisztika.

A kitűző (Szűcs András) megoldása alapján

Megoldotta Máthé András.

10. Az $r=\tan\phi$ helyettesítéssel a bizonyítandó egyenlőség jobb oldala a

$$(p-1)\int_0^{\pi/2} H_1\big(|a|\cos\phi\big)\sin^{p-2}\phi\,d\phi$$

alakot ölti. Ezt

$$(p-1)\int_{S^{p-1}} H_1\big(\langle a,v\rangle\big)\,dv$$

alakba is írhatjuk, ahol S^{p-1} a p dimenziós tér egységgömbje, és dv azt a felszínnel arányos mértéket jelenti, amelyre $\int_{S^{p-1}} dv=\int_0^{\pi/2}\sin^{p-2}\phi\,d\phi$.

Legyen $y\in\mathbb{R}^p$ tetszőleges. Ekkor

$$\int_{S^{p-1}}\big|\langle y,v\rangle\big|\,dv=\int_0^{\pi/2}|y|\cos\phi\sin^{p-2}\phi\,d\phi=\frac{|y|}{p-1}[\sin^{p-1}\phi]_0^{\pi/2}=\frac{|y|}{p-1}.$$

Ezt $y=\mathcal{N}_p+a$ választással alkalmazva kapjuk, hogy

$$H_p(a)=E|\mathcal{N}_p+a|=(p-1)E\int_{S^{p-1}}\big|\langle\mathcal{N}_p+a,v\rangle\big|\,dv=$$

$$=(p-1)\int_{S^{p-1}}E\big|\langle\mathcal{N}_p+a,v\rangle\big|\,dv.$$

Mivel $\langle \mathcal{N}_p, v\rangle$ standard normális eloszlású, ezért itt

$$E\big|\langle \mathcal{N}_p + a, v\rangle\big| = E\big|\langle \mathcal{N}_p, v\rangle + \langle a, v\rangle\big| = H_1\big(\langle a, v\rangle\big).$$

Ezt beírva és a fentiekkel összevetve éppen a bizonyítandót kapjuk.

Varjú Péter megoldása

Megoldotta Varjú Péter.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Modok és Társa Nyomda, Kiskunhalas