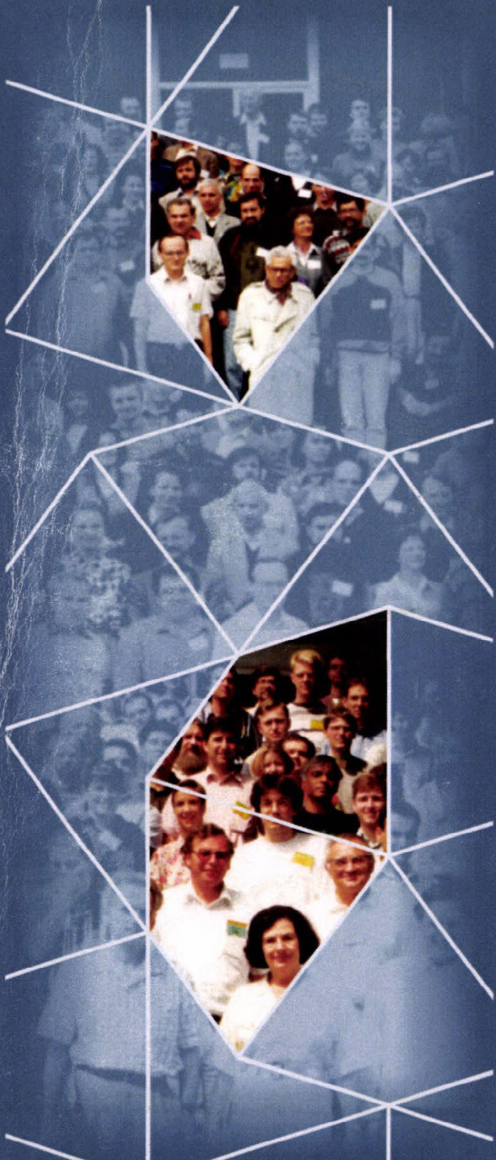
Matematikai Lapok



2000-2001/1

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 10. évfolyam (2000-2001), 1. szám
(Megjelent 2004-ben)

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
– A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
– nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

Címlap grafika: Archidesign és Visualia Stúdiók

KEDVES OLVASÓ!

Tisztelettel köszöntöm abból az alkalomból, hogy folyóiratunk belépett, ha még nem is a huszonegyedik századba, de a kétezres évekbe. Ez egy jó pillanat néhány változás bevezetésére.

Az első a Matematikai Lapok új külseje. Sok kritika ért bennünket az eddigi, túlságosan puritán borítóért. A bal oldalon sok-sok matematikus látható, ők jelképezik a Társulatot. A nehézség itt az, hogy csak nemzetközi konferenciákról vannak csoportképeink. Ezért a képen több kínai van, mint magyar. Az olvasókhoz fordulunk, csináljanak csoportképeket intézetek, tanszékek tagjairól. A Társulat tagjainak jelentős része tanár, az ő csoportképeikre is szükségünk volna. Remélem, hogy a Vándorgyűlés alkalmából készül egy remek kép sok-sok kiváló matematikatanárról. Technikailag igen könnyű a csoportképek időről időre történő változtatása. A képeket küldhetik postán, de e-mailen is, a főszerkesztőnek, vagy a szervező szerkesztőnek. A jobb oldalon viszont az *absztrakt matematikus* látható: Szám Bácsi. Grätzer József generációknak sokat jelentő könyvéből másoltuk.

A következő változás a számozásban történt. Továbbra is két évszámot tüntetünk fel mindaddig, míg „be nem hozzuk" az elmaradást. Viszont szakítunk azzal a furcsa hagyománnyal, hogy évenként négy szám jelenik meg, de azokból az első kettő, illetve a második kettő együtt van. Ezentúl évente csak két számunk lesz, számozásuk 1, illetve 2.

Végül, szép, jó és érdekes cikkeket kérünk. Kis- és nagydoktori disszertációk 10-20 oldalas összefoglalóit szívesen olvasná mindenki. Fiatalok első cikkeit is jó lenne leközölni: jóval hamarabb megjelenik, mint a külföldi változat, a hazai matematikai közvélemény gyorsabban tudomást szerez az újabb tehetségekről. Ha valaki idegen nyelvű érdekes összefoglaló cikket, matematikai-filozófiai fejtegetést talál, kérjük hívja fel a figyelmünket rá. De legjobb, ha ő maga lefordítja, és úgy küldi el. A matematika tanításával kapcsolatos cikkek sem hiányozhatnak Társulatunk folyóiratából. Kérjük tanártársainkat, hogy ötleteiket, gondolataikat írják le számunkra. Társulati híreket is közlünk. Eddig csak az egész Társulatot érintő eseményekről adtunk hírt. Ha úgy találják, hogy saját tagozatuknak is vannak olyan hírei, amelyek mindenkit érdekelnek, írják le azokat is. (Hogy a hír 2001-es vagy 2004-es legyen, döntsék el, vagy vitassuk meg.)

Segítsen mindenki, hogy a magyar matematikai nyelv fennmaradjon!

Budapest, 2004. március 21. **Katona Gyula**

TÁRSULATI ÉLET – 1999

Szele Tibor-emlékérem

Az 1999. évi Szele Tibor-emlékérmet a bizottság **Pálfy Péter Pálnak** ítélte oda.

Indoklás: *Pálfy Péter Pál* a MTA Rényi Alfréd Matematika Kutatóintézetének tudományos munkatársa, 1978-ban végzett az ELTE TTK matematika szakán. 1980-ban doktorált ugyanott. Csoportelméleti módszerek a kombinatorikában és az univerzális algebrában c. kandidátusi értekezését 1983-ban védte meg. Hallgató kora óta oktat az ELTE TTK Algebra és Számelmélet tanszékén, 1997-ben nevezték ki egyetemi tanárnak és védte meg akadémiai doktori értekezését. Külföldi vendégprofesszor vagy ösztöndíjas volt hosszabb, rövidebb ideig számos egyetemen, többek között: Vanderbilt Univ., Univ of Hawai, TH Darmstadt, Johannes-Gutenberg-Universität.

Fő kutatási területe az algebra, ezen belül elsősorban a véges csoportok elmélete és az univerzális algebra. E két elmélet határterülete vizsgálatának elindítása igen nagy mértékben fűződik nevéhez. 1999-ig megjelent 46 tudományos dolgozata közül kiemelkedő P. Pudlakkal írt közös dolgozata, amely a „szelíd kongruenciák" elméletének a kiinduló pontja volt. Ez az igen mély elmélet tartalmazza talán az univerzális algebra legkomolyabb eredményeit. Valamint Szabó Csabával írt dolgozatai, amelyekben egy több évtizedes problémát oldanak meg; eszerint van olyan háló, amely lehet egy csoport normálosztóhálója, de nem lehet egy Ábel-csoport részcsoporthálója.

Kétszer nyert harmadik díjat a Schweitzer Miklós-emlékversenyen; 1982-ben Grünwald-Géza díjat, 1985-ben az MTA Ifjúsági díjat, 1993-ban matematikai díjat, 1999-ben Bolyai Farkas Szakkuratóriumi díjat kapott.

Az MTA Matematikai Bizottságának 1985 óta tagja, 1990–96-ig titkára volt. 1994 óta az MTA köztestületének választott közgyűlési képviselője. 1997-től a Magyar akkreditációs bizottság tagja. Tagja a BJMT választmányának, a Matematikai Lapok főszerkesztő-helyettese, Kürschák bizottsági tagságáról elfoglaltságai miatt mondott le, amikor 1998-ban az Erdős Központ igazgatója lett.

Pálfy Péter Pál tanítványok hosszú sorát nevelte és igen nagy része van abban, hogy ma a csoportelméletben Magyarország a térképen van. Külön kiemelendő, hogy ő volt Pyber László mentora a csoportelmélet egyik kimagasló tekintélye.

Számos fiatal kandidátusi, Ph.D., illetve egyetemi doktori témavezetője, többek között: Abért Miklósnak, Hegedűs Pálnak, Lévai Leventének, Lukács Erzsébetnek, Szabó Csabának, Szegedy Balázsnak, Tardos Gábornak.

A fentiek alapján Pálfy Péter Pál méltán kapta az 1999. évi Szele Tibor-emlékérmet.

Grünwald Géza-emlékérem

A bizottság határozata szerint az 1999. évi Grünwald Géza-emlékérmet **Baran Sándor, Takách Géza** és **Vincze Csaba** kapja meg.

Indoklás: *Baran Sándor* 1973. február 25-én született Ungváron, Kárpátalján, magyar állampolgárságot 1998-ban kapott. 1995-ben matematikus diplomát szerzett a Kossuth Lajos Tudományegyetemen. Ugyanebben az évben nyert felvételt a szervezett doktori képzésbe. 1996-ban matematika tanári és az angol-magyar szakfordítói oklevelet szerzett. 1998. július 1. és 1999. július 30. között számítástechnikai munkatársként dolgozott a KLTE MII Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás tanszékén. 1998. decemberében 100%-os eredménnyel tette le a doktori szigorlatot. 1999. július 1-től egyetemi tanársegéd a KLTE MII-ben.

1999-ben a doktori értekezésén dolgozott, melyet Fazekas István vezetése alatt írt *Asymptotic properties of estimators in regression models* címmel.

Egyetemi tanulmányainak megkezdése óta Baran Sándor ösztöndíjasként több külföldi tanulmányúton vett részt: Newcastle upon Tyne, Nagy-Britannia; Universitá degli Studi di Trento, Trento, Olaszország; Chalmers University of Technology, Göteborg, Svédország; University of Nijmegen, Nijmegen, Hollandia.

Baran Sándor fő kutatási területe a hiba a változóban jellegű regressziós modellek vizsgálata. Születtek eredményei mind a strukturális, mind pedig a funkcionális modell esetén. Az első Lee és Sepanski (1995) egy becslésének általánosítása, mely az általános strukturális modell ismeretlen paraméterének meghatározására szolgál abban az esetben, amikor a becsléshez ellenőrző adatok is rendelkezésre állnak.

A funkcionális modell esetén Fazekas és Kukush (1997) egy korábbi, a hagyományos legkisebb négyzetestől eltérő becslését általánosítja ismét csak keverő hibatagok esetére. Mindkét dolgozatban megvizsgálja mind az időbeli, mind pedig a térbeli modellt abban az esetben, mikor a megfigyeléseket egy végtelenbe növő tartományból vesszük.

Később a funkcionális modellnél használt becslést általánosította arra az esetre, amikor a modell hibája és a magyarázó változók megfigyelésénél fellépő hibatagok sem függetlenek egymástól. Ezen becslés speciális esetenként megkapta azt a becslést is, amit a polinomiális regressziós modellre Cheng és Schneeweiss (1998) javasoltak.

Eredménye egy, a lineáris regressziós modellre kidolgozott új becslés általánosítása arra az esetre, mikor a magyarázó változókat hibával figyelik meg.

A másik nagy téma, amit vizsgál az Ornstein–Uhlenbeck paramétereinek becslése. Ebből a témából íródott első dolgozatában a komplex Ornstein–Uhlenbeck-folyamat különböző funkcionáljai eloszlásának táblázatait számolja ki.

Elméleti eredményein kívül foglalkozott a statisztika gyakorlati alkalmazásaival is. Göteborgi útjai alkalmával részt vett a Chalmers Egyetem statisztikai tanácsadójának munkájában. Első alkalommal egy olyan programot készített, mely egy konkrét orvosi vizsgálat eredményeinek kiértékelésében segített. Másodszor egy geológiai kutatáshoz készített olyan számítógépes programot, melyet az Simulated Annealing algoritmus segítségével becsli meg hiányosan figyelt Markov-láncok átmeneti valószínűségeit és stacionárius eloszlását.

Ennek eredményeiről nemzetközi konferenciákon is beszámolt.

Takách Géza 1994-ben a JATE-n szerzett matematikus diplomát. Azt követően három évig a JATE Matematika Doktori Iskolájának Ph.D. hallgatója volt, Czédli Gábor témavezetése mellett. 1997 őszétől a JATE Algebra és Számelmélet tanszékén tanársegédként dolgozik, sikerrel védte meg Ph.D. értekezését.

Szorgalmas, kiváló képességű algebrista. Ezt 5 megjelent és három közlésre elfogadott dolgozatán túl egyrészt az is bizonyítja, hogy kétszer is hosszabb időtartamú külföldi meghívást kapott: 3 hónapot töltött Kaiserslautenben, ezt követően 10 hónapot Darmstadban kutatott.

Kutatási témája a hálóelmélet. Ezen belül részhálóhálókkal, kvázirendezéshálókkal, projektív geometriákkal, részmodulushálókkal és Desargues-féle hálók koordinátázásával kapcsolatban ért el értékes eredményeket.

Grätzer György *General Lattice Theory* című könyvének új, második kiadása áttekinti, hogy az első kiadásban közreadott problémáknak mi lett a sorsuk. Három probléma kapcsán is hivatkozik Takách Géza eredményeire.

Néhány eredménye:

Egyik tétele szerint ha A olyan halmaz, hogy nincs A számosságánál kisebb vagy egyenlő erősen elérhetetlen számosság, akkor A kvázirendezéseinek teljes involucióhálója már három elemmel generálható. Involucióhálón olyan hálót értünk, amelyhez alapműveletként hozzávettünk egy involutív hálóautomorfizmust.) Innen az is adódik, hogy teljes hálóként (involúciót nem használva) a generáláshoz hat elem elegendő.

Egy másik cikkében a klasszikus Hessemberg-tétel hálóelméleti általánosítását adja, és igazolja, hogy moduláris hálókban a Papposz-tétel (mint feltétel) hálóelméleti alakja implikálja a Desargues-tulajdonságot. Jelenleg Ch. Hermannal együtt fogalmazzák a legújabb cikket, amelyben azt igazolják, hogy a primer Desargues-féle hálókat a típusuk izomorfia erejéig meghatározza. (Ezek azok a véges hosszúságú Desaurgues-féle hálók, amelyekben minden elem olyan elemek egyesítése, amelyek alatt nincs antilánc, ezen feltétel duálisa is teljesül, és nincs olyan kettő magasságú elem, amely négyelemű ideált határoz meg. (Típuson a maximális láncok hosszainak rendszerét, plusz a koordináta-gyűrűt értjük.)

Vincze Csaba 1996-ban szerzett a KLTE-n matematika-filozófia szakos tanári oklevelet; 1996-tól 1999-ig ösztöndíjas Ph.D. hallgató volt. Munkáját Szilasi József irányítása mellett végezte a Finsler-geometria területén. 1999 őszétől az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetének ösztöndíjasa. 1999 februárjában a Debreceni Akadémiai Bizottságtól pályakezdők tudományos munkásságának elismerésére szolgáló DAB díjban részesült.

Már egyetemi hallgatóként ért el biztató eredményeket a geometria egymástól meglehetősen távol fekvő területein. Munkájának előterében az a célkitűzés áll, hogy a Finsler-geometria klasszikus, lokális koordinátákkal megadott definícióit, tételeit átírja a modern differenciálgeometria koordinátamentes nyelvezetére. Dolgozata jelent meg a Banach-féle tükrözésgeometria és a projektív síkgeometria összekapcsolásáról. Egy másik dolgozatában a vektorértékű differenciálformák „pull-back"-megfeleltetésére vezet le összefüggőségeket és alkalmazza ezeket egy részsokaságon indukált horizontális struktúra különböző adatainak leírására.

Doktori tanulmányainak ideje alatt a Finsler-geometriai problémák globális tárgyalásának kérdése került előtérbe. Ebben alapvető szerepet játszik a nemlineáris konnexiók Grifone-féle elmélete, szoros összefüggésben a vektorértékű differenciálformák A. Fröchlik és A. Nijenhuis által kidolgozott kalkulusával; segítségükkel a Finsler-geometria több klasszikus területén sikerült elegáns, új formában megfogalmazni eredményeket (Riemann–Finsler-metrikák konform relációja, Finsler-konnexiók elmélete, speciális Finsler-sokaságok). További dolgozatban – egyebek mellett – bevezetésre kerül a konform kapcsolatban álló Riemann–Finsler-metrikákhoz tartozó kanonikus sprayk közötti explicit formula. Szép és elegáns folytatása az itt megkezdett munkának a konform változtatással szemben invariáns Wagner-sokaságok és Wagner-konnexiók modern elmélete. Későbbi cikke a konform reláció egy speciális esetét tárgyalja. A szerző itt elegáns jellemzését adja az ún. C-konformitás M. Hashiguchi által bevezetett fogalmának. Ennek birtokában sikerült pontosítania és bizonyos fokig élesítenie Hashiguchi egy geometriailag érdekes és fontos tételét. Publikációra való előkészítés stádiumában van a szóban forgó tétel figyelemreméltó általánosítását tartalmazó, a Finsler-sokaságok Riemann-sokaságokra való redukálhatóságával kapcsolatos dolgozata.

Vincze Csaba tudományos munkája a konkrét eredményeken túl egy általánosabb, modern szemlélet következetes végigvitelének értékét is képviseli.

Farkas Gyula-emlékdíj

A bizottság határozata szerint az 1999. évi Farkas Gyula-emlékdíjat **Bukszár József** (Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet), **Ispány Márton** (KLTE, alkalmazott matematika és valószínűségszámítás tanszék), **Mályusz Levente** (Budapesti Műszaki Egyetem, építéskivitelezési tanszék) és **Simon Péter** (ELTE, alkalmazott analízis tanszék) kapják meg.

Indoklás: *Bukszár József* 1969-ben született. Az ELTE matematikus szakán szerzett diplomát 1994-ben. Az ELTE Alkalmazott Matematika Doktori Iskoláján Prékopa András témavezetése mellett 1999-ben szerzett Ph.D. fokozatot.

Kutatásai nagyrészt egy kérdés köré csoportosulnak: hogyan lehet események uniójának valószínűségére jó alsó és felső becslést adni, ha bizonyos, de nem túl sok, metszet valószínűségét ismerjük. Ennek kapcsán bevezette a hipermultifák fogalmát, melynek segítségével a korábban ismerteknél sokkal jobban kezelhető becsléseket sikerült nyernie.

Eredményeiről nemzetközi konferenciákon is beszámolt, több cikket írt. 1998-ban meghívták előadást tartani az ausztriai Technische Universitaet Graz-ra.

Ispány Márton 1966-ban született. A KLTE-n szerzett matematikus diplomát 1989-ben. 1995-ben védte meg egyetemi doktori disszertációját, 1997-ben kapott Ph.D. fokozatot.

Kutatási területe az idősorok analízise. Diplomamunkájában bilineáris idősorokkal foglalkozott. Később nemlineáris sztochasztikus folyamatokat is vizsgált stacionaritási szempontból adott rájuk nemlineáris spektrál előállítást. Az elméleti kutatásokon túlmenően gyakorlati alkalmazásokkal is foglalkozik, munkakapcsolatban áll orvos, meteorológus és agrárszakemberekkel is.

Eredményeiről már több publikációt is írt, számos konferencián tartott előadást. Társszerzője a Bevezetés a matematikai statisztikába című egyetemi jegyzetnek.

Mályusz Levente 1965-ben született. Felsőfokú tanulmányait a Budapesti Műszaki Egyetemen végezte, 1960-ban kapott építőmérnöki diplomát. 1998-ban szerzett Ph.D. fokozatot.

Munkáiban az operációkutatásnak nem csak elméleti kérdéseivel foglalkozik, az alkalmazások is nagy hangsúlyt kapnak. Gazdasági és mérnöki feladatokhoz készít matematikai modelleket, matematikai módszereket alkalmaz megoldásukhoz. Foglalkozik különböző matematikai programozási modellek vizsgálatával és alkalmazásukkal a statikában, továbbá például hálózati folyamatokkal, és hogy ezek hogyan alkalmazhatók az építőipari menedzsmentben.

Az elért elméleti eredményekről és az alkalmazásokról számos cikket publikált.

Simon Péter 1966-ban született. 1990-ben kapott az ELTE-n matematikus diplomát. 1993-ban védte meg egyetemi doktori értekezését, 1997-ben kapott Ph.D. fokozatot.

Kutatási területe dinamikai rendszerek és ezeknek elsősorban kémiai alkalmazásai. Már egyetemista korában elkezdett kémiai dinamikai rendszerek matematikai vizsgálatával foglalkozni a BME kémiai fizika tanszékén. Az együttműködés azóta is folytatódik, ennek keretében jelenleg bifurkációelmélettel foglalkozik. A kémiai hullámokkal kapcsolatban a hullámterjedés vizsgálata során sikerült megmutatnia, hogy a hullámfrontok mozgása dinamikai rendszerként írható le.

Munkáját nemzetközileg is elismerik. Eredményeiről több konferencián is beszámolt, számos publikációja jelent már meg.

Rényi Kató-emlékdíj

I. fokozatban részesül **Csörnyei Marianna** és **Megyesi Zoltán Kristóf.**

II. fokozatot kap: **Rakaczki Csaba** és **Tengely Szabolcs.**

Indoklás: *Csörnyei Marianna* számos mély és fontos tételt bizonyított a valós függvénytan területén, jelenleg a terület egyik legerősebb bizonyítóerejű kutatója.

Eredményei: Új bizonyítást ad Argyros tételére: nincs korlátos lineáris projekció a korlátos valós függvények teréről a korlátos Lebesque-mérhető függvények alterére. Az új bizonyítás lényegesen általánosabb, adja például a Baire-tulajdonságú függvények esetét is.

Megjavítja Preiss egy sűrűségi tételét. Bár Banach-terekben nincs mérték, a 70-es évek eleje óta három különböző nullmértékűség fogalmat tartanak számon. Az intenzív kutatások ellenére nem sikerült eldönteni, hogy azonosak-e ezek. Csörnyei kimutatta, hogy igen, és ez máris komoly eredményt szerzett számára. Tétele már most több könyvbe, így a „Handbook of Banach Spaces"-be bekerült. Egy síkbeli halmaz láthatatlan, ha majdnem minden irányban vett vetülete nullmértékű. Egy adott pontból láthatatlan, ha majdnem minden, a ponton átmenő egyenes legfeljebb csak a pontban metszi a halmazt. P. Mattila mondta ki a következő (Csörnyei szerint költői hangzású) sejtést: azon pontok halmaza, amelyekből egy adott láthatatlan halmaz látható, láthatatlan. Dolgozatában Csörnyei nagyon erős, kompakt ellenpéldát ad. Később Davies egy tételére ad új bizonyítást: minden síkbeli Borel-halmaz lefedhető egyenesekkel úgy, hogy az egyenesek a halmaz komplementeréből csak nullmértékű halmazt fednek. Ezután észrevette azt a meglepő tényt, hogy Davies eredménye minden Borel-mértékre igaz.

Megyesi Zoltán a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika határeloszlásinak tárgykörében folytat vizsgálatokat.

Eredményei: A Rényi-féle aszimptotikus konfidenciasávok Csörgő-féle kiterjesztéseinek lefedésvalószínűségeit vizsgálja új elméleti módszerekkel és számítógépes szimulációkkal. A valószínűségszámítás legklasszikusabb fejezetének, a független, egyforma eloszlású véletlen változók összegeire vonatkozó határeloszláselmélet kiterjesztését adja. A moderáltan megnyírt összegek Csörgő-féle elmélet jelentős továbbvitelét tartalmazza. A majdnem biztos centrális határeloszlások vizsgálatával foglalkozik.

Rakaczki Csaba a diofantoszi egyenletek elméletének modern, mély módszereit alkalmazva végességi tételeket igazolt arra a problémára, hogy milyen x, y egészek esetén alkot

$$f(x)+g(x), \quad \binom{x}{n}, \quad \binom{y}{l}$$

számtani sorozatot, ahol $f(x), g(x)$ bizonyos tulajdonságú polinomok, n és l pedig pozitív számok. Elintézte azt az esetet, amikor

$$f(x)+g(x)=k \quad \text{konstans,} \quad \text{vagy} \quad l=2, \quad \text{vagy} \quad l=4.$$

Számos esetben az összes megoldást megadta.

Tengely Szabolcs számos korábbi eredmény kiterjesztésével új módszert adott a

$$2x^2 = y^2 \quad \text{és a} \quad 2x^2 = y^2 + k$$

diofantoszi egyenletek megoldására (itt $k \neq 0$, egész, $|k| \leq 10$ esetén le is írta a megoldásokat). Pink Istvánnal közösen a-ban polinomiális korlátot adott az $x^2 + a^2 = 2y^n$ egyenlet egész gyökeire ($a \neq 0$, $n > 3$ egészek), amelyek expliciten meg is adnak $n \leq 10$, $|a| \leq 5$ esetén.

TÁRSULATI ÉLET – 2000

Szele Tibor-emlékérem

A 2000. évi Szele Tibor-emlékérmet a bizottság **Schipp Ferenc** kapja.

Indoklás: *Schipp Ferenc* 1939. június 4-én született Sombereken. 1962-ben az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett diplomát, ez évtől kezdve az ELTE oktatója. 1976-ban egyetemi tanári kinevezést kap, 1984 óta a numerikus analízis tanszék vezetője.

Tudományos munkásságát a harmonikus analízis területén fejti ki, a Walsh–Fourier-sorok, a martingál-elmélet, a Hardy-terek elméletének nemzetközileg is elismert szaktekintélye. 1976-ban megszerzi a matematikai tudományok doktora fokozatot.

Munkásságát az Akadémiai Díjjal (1978), majd Akadémiai Díjjal (1990) ismerte el, 1995-ben Szent-Györgyi Albert-díjat kapott.

Több, mint 90 tudományos dolgozata, két társszerzős monográfiája és a közel ötszáz hivatkozás jelzi irodalmi munkásságának súlyát.

Schipp Ferenc kiemelkedő tanáregyéniség, aki mindig gondot fordított arra, hogy tehetséges hallgatókat vonjon be a tudományos kutatásba. A harmonikus analízis témáiban nagy hatású tudományos iskolát teremtett, melynek a mai napig is szellemi irányítója.

Tanítványai közül heten szereztek kandidátusi fokozatot, és többen is kiemelkedő színvonalú, nemzetközileg jegyzett tudományos kutatóvá értek. Név szerint: Gát György, Fridli Sándor, Pál Jenő, Simon Péter, Szili László, Weisz Ferenc. A kiváló tanítványok neveléséért, a folyamatosan intenzíven működő tudományos iskola megteremtéséért és vezetéséért Schipp Ferenc méltán részesült Szele Tibor-emlékérembem.

Farkas Gyula-emlékdíj

A Bizottság a beérkezett javaslatok alapján 2000-ben 4 Farkas Gyula-emlékdíjat adományoz. A díjazottak:

Csallner András Erik (Szegedi Tudományegyetem Juhász Gyula Tanárképző Főiskolai Kar számítástechnika tanszék), **Farkas Gyula** (Széchenyi István Főiskola, matematika tanszék), **Karátson János** (ELTE alkalmazott analízis tanszék) és **Németh Sándor Zoltán** (MTA SZTAKI Operációkutatás és Döntési Rendszerek Laboratórium).

Indoklás: *Csollner András Erik* 1966-ban született. A szegedi József Attila Tudományegyetemen kapott 1991-ben matematikus diplomát. A JATE Informatika Doktori programjának elvégzése után 2000-ben szerzett Ph.D. fokozatot.

Szakterülete a matematikai programozás és ennek alkalmazásai. Ezen belül elsősorban globális optimalizáló eljárások vizsgálatával foglalkozik. Jelentős eredményeket ért el a különböző intervallumfelosztásos módszerek konvergenciasebességének vizsgálatában, az eljárások összehasonlításában.

Több nemzetközi konferencián is beszámolt eredményeiről, számos publikációja jelent már meg nemzetközi folyóiratban. Van olyan cikke, amire már egy 1996-ban kiadott könyvben is hivatkoznak.

Farkas Gyula 1972-ben született. 1997-ben az ELTE-n szerzett matematikus diplomát, majd a Budapesti Műszaki Egyetem Differenciálegyenletek Tanszékén volt Ph.D. ösztöndíjas.

Első három cikkét még az ELTE hallgatójaként írta differenciálegyenletek reakciókinetikai alkalmazásaiból. A doktori iskola ideje alatt a numerikus analízis és a dinamikai rendszerek határterületei, késleltetett egyenletek diszkretizációi felé fordult az érdeklődése. Tehetségét és eredményességét mutatja, hogy fiatal kora ellenére, 2000-ben már 10 cikke jelent meg, vagy 2000-ben publikálás alatt volt nemzetközi folyóiratokban. Nemcsak eredményei kiemelkedőek, hanem írásainak világos de tömör stílusa is.

Karátson János 1966-ban született. Matematikus diplomáját 1990-ben az ELTE-n szerezte. Itt kapott Ph.D. fokozatot is.

Fő kutatási területe a gradiens-módszerek alkalmazása differenciálegyenletek numerikus megoldására. Az elméleti háttér funkcionálanalízisbeli eszközöket is használó vizsgálata a korábbi módszerek jobb megértéséhez, és újabb módszerek kidolgozásához is hozzásegítette. Owe Axelsonnal, az iterációs módszerek kiemelkedő nemzetközi szaktekintélyével is van közös eredménye, publikációja.

Újabban biológiai és kémiai modellekben megjelenő reakció-diffúzió-egyenletekkel is foglalkozik, itt is ígéretes eredményei vannak.

Németh Sándor Zoltán 1968-ban született. Egyetemi diplomáját a kolozsvári Babes-Bolyai Tudományegyetem matematika szakán szerezte 1993-ban. Ph.D. fokozatot 1999-ben kapott az ELTE-n.

Gyakorlati feladatok modellezése során jutott el az egyensúlyi rendszerek, variációs egyenletek és egyenlőtlenségek kutatásához. A strukturális vizsgálat során a monotonitást kiterjesztette Riemann-sokaságokra és ennek segítségével számos eredményt sikerült általánosítania. Az utóbbi időben, szintén gyakorlati problémákhoz kapcsolódva, többszempontú döntési problémák modellezésével kezdett foglalkozni. Ennek során számos fontos matematikai kérdést vetett fel, kezdeményezte vizsgálatukat.

Rényi Kató-emlékdíj

I. fokozatban részesül **Valkó Benedek.**

II. fokozatot kap: **Braub Gábor** és **Mann Zoltán.**

Indoklás: *Valkó Benedeknek* két cikke jelent meg, egy elbírálás alatt van, egy pedig előkészületben. TDK konferenciákon 3 kari első, két országos és egy országos második díjat nyert.

Dombi Gergellyel közös publikációjukban Erdős Pál alábbi kérdésével foglalkoztak: jelölje $f(n)$ az n szám 2^a3^b alakú számok összegeként való olyan előállításainak számát, ahol az összeg egyik tagja sem osztja a másikat; igaz-e, hogy $f(n)$ korlátos, ill. mi mondható $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(n)$ végességéről. A cikkben mindkét kérdést megválaszolják.

Az Acta Arithmetica-ban megjelent cikkében összegsorozatok számtani sorozatokban való eloszlásának irregularitásairól bizonyít tételeket, technikailag is érdekes, újszerű módon.

Braun Gábor két diákköri dolgozatot írt. Az elsőben, mely a Discrete Mathematics-ben fog megjelenni, egy univerzális algebrából eredő kombinatorikai problémával foglalkozik, bizonyos típusú irányított gráfok minimális generátorrendszerének méretére ad becslést. Második dolgozatában Kollár János azon eredményét fejleszti tovább, mely szerint minden algebrai kategória beágyazható az egyértelmű faktorizációs gyűrűk kategóriájába. Braun Gábor megmutatja, hogy a beágyazás úgy is megvalósítható, hogy az algebrák képének tartóhalmaza független az eredeti algebrák struktúrájától, sőt, az is elérhető, hogy az algebrákhoz tartozó gyűrűkben akár az összeadás, akár a szorzás művelete független legyen az eredeti struktúráktól.

Mann Zoltán négy kari első díjas diákköri dolgozatot írt. Eredményei erősen műszaki alkalmazás-orientáltak. Egyik dolgozatában elliptikus görbéken alapuló kriptográfiai módszerre adott matematikai elemzést.

Egy másik művében az úgynevezett Magas szintű szintézis (HLS) ütemezési problémáját gráfelméleti feladattá alakította és bebizonyította annak NP-teljességét, valamint két heurisztikus megoldó algoritmust is adott; az egyik egy genetikus algoritmus, a másik pedig ún. korlát-logikai programozáson alapszik.

Patai László-díj

A 2000. évi Patai László-díjat **Szakál Szilvia** kapja meg.

Indoklás: *Szakál Szilvia* 2000-ben a Debreceni Egyetem Matematikai és Informatikai Intézetének alkalmazásában állt, eközben második éve levelező úton doktori (Ph.D.) tanulmányokat folytat a „Differenciálgeometria és alkalmazásai" alprogram keretében. A tudományos munkát már negyedéves hallgatóként elkezdte, a Finsler-geometriai kutatásokba kapcsolódott be. Első eredményeit tudományos diákköri dolgozata tartalmazza. Ezt a munkát az a tudományos esemény inspirálta, hogy 1996-ban bebizonyították, hogy a Hanno Rund által a klasszikus tenzorkalkulus eszközeivel 1951-ben megkonstruált Finsler-konnexió egybeesik a S. S. Chern által 1948-ban (igaz, egészen más módon) bevezetett Finsler-konnexióval. A diákköri dolgozat e „Chern–Rund-konnexió" egy igen természetes általánosítását tárgyalja. Megmutatja, hogy a a Finsler-struktúrából származó metrikus tenzor által meghatározott Levi–Civita-konnexió a horizontális résznyalábon egybeesik a Chern–Rund-konnexióval. Tekintettel a Levi–Civita-konnexió „természetes" voltára, így érthetővé válik a Chern–Rund-konnexió kitüntetett jellege.

A new approach to generalized Berwald manifolds című, témavezetőjével közös, kétrészes dolgozata egy új megközelítést ad a speciális Finsler-sokaságok egy speciális, de az alkalmazások szempontjából is fontos és érdekes osztályának vizsgálatára. A Finsler-geometriában mind a mai napig ritkák a struktúratételek. A talán egyetlen igazán mély struktúratételt Szabó Zoltán találta a 70-es évek második felében, teljes leírását adva az ún. definit Berwald-sokaságoknak. A Berwald-sokaságok esetében az alapsokaságon létezik – egy és csakis egy! – olyan torziómentes lineáris konnexió, amelyhez tartozó párhuzamos eltolás megőrzi a vektorok Finsler-formáját. Kézenfekvőnek látszik elhagyni a torziómentesség feltételét – így jutunk az általános Berwald-sokaságokhoz. Érdemes megjegyezni, hogy a Finsler-sokaságoknak ezt az osztályát rendszeresen vizsgáló japán kutatók a tárgyalást egy lényegesen komplikáltabb, geometriailag sokkal nehezebben érzékelhető definícióra alapozták. A megközelítés tehát már a kiindulópontjában új, de döntően újak a technikai eszközök is: a vektorértékű differenciálformák, s a hozzájuk csatolt derivációk Frölicher–Nijenhuis-féle (az 50-es évek második felében egészen más indítékokkal kifejlesztett) kalkulusa. A nézőpontváltásnak köszönhetően sikerült egy sor olyan alapvető tényt föltárni az általánosított Berwalf-sokaságokkal kapcsolatban, amelyek megvilágítására az eddigi eszközök nem voltak alkalmasak.

Sikerült a szerzőknek bizonyítaniuk, hogy két lineáris konnexió akkor és csak akkor vezet ugyanahhoz az általánosított Berwald-sokasághoz, ha a torziótenzoraik megegyeznek.

Szakál Szilviának az alapsokaságon megadott lineáris konnexió segítségével sikerült olyan speciális Finsler-konnexiót megkonstruálnia, amely a vizsgált problémák tárgyalásához a leginkább megfelelő eszköznek tűnik. Ennek segítségével egyben további speciális – de az általánosított Berwald-sokaságok osztályába tartozó – Finsler-sokaságokra váltak leszármazhatóvá új, tenzoriális jellemzések.

NÉHÁNY KOMBINATORIKUS PROBLÉMÁRÓL III. RÉSZ: TÁVOLSÁGOK ÉS EGYSÉGKÖRÖK

ELEKES GYÖRGY

Sorozatunkon belül jelen cikk megszakítja az illeszkedési kérdések vizsgálatát (melyekre még visszatérünk), és metrikus, ezen belül távolságokkal kapcsolatos problémákat és eredményeket láthatunk.

Egyrészt a téma fontossága indokolja, hogy kitérjünk rá (ide tartozik a kombinatorikus geometria két legnevezetesebb megoldatlan kérdése, lásd 1.1. és 2.1. probléma); ugyanakkor jó lehetőséget ad arra is, hogy meglepő környezetben mutassuk be az illeszkedési becslések két szép alkalmazását (1.3. és 1.5. tétel).

1. Az egységtávolság-probléma

Erdős klasszikus cikkével [3] kezdődött a ponthalmazokban fellépő távolságok eloszlásának vizsgálata. „Elég szabálytalan" ponthalmaz esetén persze mind az $\binom{n}{2}$ távolság különböző lehet; a kérdés az, milyen sokszor ismétlődhet ugyanaz a – pl. egységnyi – távolság, vagy milyen *kevés* lehet a különbözőek száma.

1.1. probléma. *A sík n pontja között legfeljebb hány távolság lehet egységnyi?*

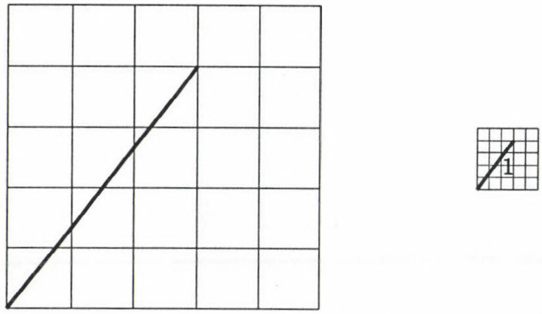
A kérdésnek látszólag semmi köze illeszkedési becslésekhez; azonban kiderül majd, hogy a legjobb ismert felső korlát ilyen módszerrel adódik (lásd 1.3. tétel).

Alsó becslésként legjobb példának Erdős a $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$-es négyzetrácsot találta. Persze nem az egységnyi élhosszúságút, mert abban csak $\approx 2n$ egységtávolság van, hanem annak egy alkalmasan kicsinyített példányát. Igaz ugyanis, hogy az eredeti egységrácsban a leggyakoribb távolság

$$\sim n^{1+c/\log\log n}$$

-szer fordul elő. (Ez azon múlik, hányféleképpen áll elő egy egész szám két négyzetszám összegeként.) Ez az érték nemcsak n-nél, de még $n\log^{\alpha} n$-nál is nagyobb – tetszőleges rögzített α-ra – ha n elég nagy. Valóban,

$$n^{c/\log\log n} = e^{c\log n/\log\log n} > e^{\alpha\cdot\log\log n} = \log^{\alpha} n \qquad (\text{ha } n > n_0),$$



1. ábra. Sok egységtávolság készítése a leggyakoribból

ahol az $x > \log^2 x$ egyenlőtlenséget $\log n > (\log\log n)^2$ formában alkalmaztuk. Alkalmas kicsinyítéssel $\sim n^{1+c/\log\log n}$ egységtávolság adódik, lásd 1. ábra. Ez persze bármely $n^{1+\varepsilon}$-nál kisebb marad, ha n elég nagy, pl. $\log\log n > c/\varepsilon$.

Felső becslésként azonban Erdős csak az ettől igen messze eső $\sim n^{3/2}$-t találta. Elegáns bizonyítása az úgynevezett „cseresznye-módszert" használja. Bár később mutatunk jobb korlátot is, e módszert érdemes megjegyezni:

2. ábra. Cseresznye egy gráfban

Egy gráfban nevezzünk cseresznyének két csatlakozó élet (lásd 2. ábra). Ha a gráf fokszámai rendre $d_1, d_2, \ldots, d_n$, akkor a benne található cseresznyék száma

$$\binom{d_1}{2} + \binom{d_2}{2} + \ldots + \binom{d_n}{2}.$$

A számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenség miatt innen a cseresznyék számára a következő becslés adódik:

$$\text{(1)} \qquad \#\,\text{cseresznye} \geq n \cdot \binom{\frac{\sum d_i}{n}}{2} =$$

$$= n \cdot \binom{\frac{2e}{n}}{2} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2e}{n} \cdot \left(\frac{2e}{n} - 1\right) = \frac{e(2e-n)}{n},$$

ahol e a gráf élszáma. Érdemes megjegyezni, hogy ebből a becslésből egyszerűen igazolható a következő: *ha egy n csúcsú, e élű gráf nem tartalmaz négy élű kört, akkor $e \leq Cn^{3/2}$.* (Ezt eredetileg Erdős használta egy számelméleti cikkében; a bizonyítás majdnem ugyanaz, mint az alábbi állításé.)

1.2. állítás. *n síkbeli pont között az egységtávolság legfeljebb $Cn^{3/2}$-szer fordul elő.*

Bizonyítás. Definiáljunk egy gráfot az n ponton úgy, hogy azokat a párokat kötjük össze, melyek távolsága egységnyi. Ebben a gráfban bármely pontpár legfeljebb két cseresznyében szerepelhet „gyümölcsként", hiszen két adott ponttól legfeljebb két másik pont lehet egyszerre egységnyi távolságra. Így a cseresznyék száma legfeljebb $2 \cdot \binom{n}{2} = n(n-1)$. Erre (1) szerint fennáll, hogy

$$\frac{e(2e-n)}{n} \leq \# \text{ cseresznye} \leq n(n-1),$$

az így adódó $e(2e-n) \leq n^2(n-1)$-ból már könnyen igazolható az állítás. ■

Sajnos mind a fenti becslés, mind a számos azóta született javítás igen messze van a négyzetrácsból adódó legjobb ismert alsó korláttól. A pillanatnyilag legjobb eredmény Spencer–Szemerédi–Trotter becslése.

1.3. tétel. *A sík n pontja között az egységtávolság legfeljebb $Cn^{4/3}$-szor fordul elő.*

Bizonyítás. Rajzoljunk egységköröket a pontok köré! Minden egységtávolságú pár két illeszkedést ad a körök és a pontok között: az egyik pontra illeszkedik a másik körüli kör és viszont. Elég tehát megmutatnunk, hogy n egységkör és n pont között legfeljebb $Cn^{4/3}$ illeszkedés lehetséges. Ez pedig nyivánvaló abból, hogy a II. rész 1.7. és 4.3. tételei szerint n pont és m egységkör – utóbbiak mint kétparaméteres sereg – legfeljebb

$$C \cdot \max\{n^{2/3}m^{2/3},\ n,\ m\} \tag{2}$$

illeszkedést adhatnak. ■

A szellemes ötlet, azaz az egységtávolságok pont-egységkör illeszkedésekkel való reprezentálása jobb becslést is adhatna az előbbiek számára, ha jobb korlátot találnánk az utóbbiakra. Ez azonban csak akkor sikerülhet, ha az egységkörök valamilyen speciális tulajdonságát is felhasználjuk, nemcsak annyit, hogy kétparaméteres sereget alkotnak – hiszen az egyenesek halmaza is ilyen sereg és azokra éles a Szemerédi–Trotter-féle felső korlát (lásd II. rész 1.5. tétel és II. rész 1.2. példa). Másszóval a probléma: *hogyan lehet a pont–egyenes illeszkedéseket megkülönböztetni a pont–egységkör illeszkedésektől?*

„Szabad szemmel" sem mindig könnyű megállapítani, hogy köröket vagy egyeneseket látunk-e; például ha egy rajz pont–egyenes illeszkedéseket ábrázol, nem zárhatjuk ki, hogy az egyenesek csak „majdnem egyenesek", valójában nagyon nagy (legalábbis az ábra méretéhez képest nagy) sugarú körök ívei. Sajnos ez a megkülönböztetés (az illeszkedések kombinatorikus tulajdonságait használva) még senkinek sem sikerült!

Az egységtávolságok problémáját magasabb dimenziókban is fel lehet vetni. Már a háromdimenziós térről is érdekes részeredmények születtek: meg lehet mutatni például, hogy ugyanaz a távolság itt legfeljebb $n^{3/2+\varepsilon}$-szor fordulhat elő. Ezekre azonban nem térünk ki részletesen.

Drámai változást láthatunk viszont négy- és még magasabb dimenzióban. Itt ugyanis már az összes távolság több, mint fele(!) ugyanakkora lehet.

1.4. példa (Lenz). Tekintsük a négydimenziós tér következő n pontját:

$$(x_1, y_1, 0, 0)$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$(x_{n/2}, y_{n/2}, 0, 0)$$
$$(0, 0, z_1, w_1)$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$(0, 0, z_{n/2}, w_{n/2}),$$

ahol $x_i^2 + y_i^2 = z_j^2 + w_j^2 = 1/2$ legyen, minden $1 \leq i, j \leq n/2$-re. Közöttük legalább $n^2/4$ egységtávolságú pár lesz, hiszen bármely $(x_i, y_i, 0, 0)$ és bármely $(0, 0, z_j, w_j)$ távolságának négyzete $x_i^2 + y_i^2 + z_j^2 + w_j^2 = 1$.

Érdekes kérdést vetett fel a háromdimenziós térben Erdős, Hickerson és Pach: *egy gömbfelület n pontja között hányszor fordulhat elő ugyanaz a távolság?*

Meglepő módon itt meghatározható a pontos nagyságrend!

1.5. tétel. *Egy egységsugarú gömb felületén elhelyezkedő n pont között a $\sqrt{2}$ távolság legfeljebb $Cn^{4/3}$-szor fordulhat elő.*

1.6. megjegyzés. Megoldatlan, mi a helyzet más távolságokkal; az alábbi ötlet lényegesen kihasználja, hogy éppen a $\sqrt{2}$-t vizsgáljuk.

A tétel bizonyítása. Ismét pont–kör illeszkedésekre vezetjük vissza a kérdést. Az egységgömb felületének rögzített P pontjától $\sqrt{2}$ távolságra levő pontok mértani helye főkör; azaz olyan kör, melynek síkja átmegy a gömb O középpontján. Vetítsük O-ból egy síkra a pontokat is és a főköröket is! Előbbiekből legfeljebb kettő esik egybe; utóbbiakból pedig egyenesek lesznek. Ismét sikerült becsempésznünk a pont–egyenes illeszkedéseket.

(1) A felső korlát a korábban az 1.3. tétel bizonyításának (2) képletében idézett Szemerédi–Trotter-féle becslésből adódik (azaz a II. rész 1.7. tételéből);

(2) Az alsó korlát olyan $n/2$ darab A_i pontból és $n/2$ darab e_j egyenesből kapható, melyek között $Cn^{4/3}$ illeszkedés van (pl. az $(n/2)^{1/3} \times (n/2)^{2/3}$ pontú $\{1, 2, \ldots, (n/2)^{1/3}\} \times \{1, 2, \ldots, (n/2)^{2/3}\}$ rács pontjaiból és azon $y = mx + b$ egyenletű egyenesekből, melyekre $m \leq n^{1/3}/2$ és $b \leq n^{2/3}$; ez a II. rész 1.2. példa speciális esete $k \sim n^{1/3}$-nal). „Vetítsük vissza" a pontokat és egyeneseket a gömbre és az e_j-kből így keletkező főkörökhöz vegyünk egy-egy B_j pontot, melytől a főkör $\sqrt{2}$ távolságra van. Ekkor az A_i-k képei és a B_j-k együtt jó konstrukciót adnak. ∎

1.7. probléma (J. Matoušek). *Lehetséges-e a térben n pont és n, azonos sugarú (de egyébként teszőlegesen elhelyezkedő) kör között lényegesen több, mint $cn^{4/3}$ illeszkedés?*

2. A különböző távolságok problémája

Ugyancsak az említett [3] cikkében kérdezte Erdős a következőt.

2.1. probléma. *A sík n pontja között legalább hány különböző távolság fordul elő?*

Számelméleti módszerekkel igazolható, hogy a négyzetrácsban csak $\sim n/\sqrt{\log n}$ különböző távolság lép fel. (Itt is a két négyzetszám összegeként való előállítások kapnak szerepet.) Ennél jobb példát azóta sem talált senki. Erdős azt sejtette, hogy bármely ε-ra mindig lesz legalább $n^{1-\varepsilon}$ különböző távolság, ha $n > n_0$. Az ismert alsó korlátok azonban messze elmaradnak a sejtettől. Például az eddig látottakból mindössze az alábbi becslés következik.

2.2. állítás. *n pont között mindig van legalább $cn^{2/3}$ különböző távolság.*

Bizonyítás. Az 1.3. tétel szerint egy távolság legfeljebb $Cn^{4/3}$-szor ismétlődhet; így az $\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$ távolságból legalább $\frac{1}{2C}n^{2/3}$ különböző lesz. ■

Igen sokan foglalkoztak azóta ezzel a kérdéssel. Fokozatosan javították a kitevőt 2/3-ról 3/4-re, 4/5-re, majd a közelmúltban (az eredmény még meg sem jelent) Solymosi József és Tóth Csaba új – számelméleti – ötletek bevetésével 6/7-re.

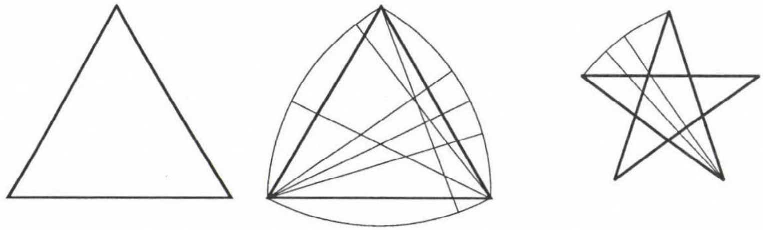
Módszerüket továbbfejlesztve Tardos Gábor további 0,006-ot tett a kitevőhöz (trükkös, egyáltalán nem egyszerű bizonyítással). Így a pillanatnyi legjobb alsó korlát $n^{0,863}$.

3. Maximális és minimális távolságok

Ki kell térnünk még a legnagyobb és a legkisebb távolságok számára is. E kérdések külön érdekessége, hogy – a kombinatorikus geometriában megszokottól eltérően – itt a *pontos* szélső értékeket is ismerjük. Az alábbi eredmény 1967-ben OKTV-feladat volt (lásd [7], 167–169. oldal).

3.1. tétel (Hopf–Panwitz). *A sík n pontja között a legnagyobb távolság legfeljebb n-szer fordul elő.*

Érdekes, hogy ezt a maximumot igen sokféle konfiguráció eléri. A kézenfekvő szabályos háromszög mellett jók lesznek a páratlan oldalszámú csillagsokszögek, sőt ezeknek „kicsit eltorzított" példányai is. (A leghosszabb szakaszokat képzeljük merev rudaknak, melyek végpontjaikban rugalmasan rögzülnek egymáshoz.) Ha egy ilyen sokszög csúcsai körül köríveket húzunk a leghosszabb távolsággal mint sugárral, ezeken az íveken további tetszőleges számú pontot is felvehetünk, lásd 3. ábra. Megjegyezzük, hogy az ábrán ú.n. ***állandó szélességű*** alakzatok (is) láthatók; az ilyenekről sok érdekességet találhat a t. Olvasó I. M. Jaglom – V. G. Boltyanszkij: *Konvex alakzatok* c. könyvében (ford. Deák Péter, a BJMT kiadása 1983.?) Azt gondolhatnánk, hogy a sokfajta esetet csak bonyolultan szerteágazó bizonyítás képes összefogni. Két egyszerű észrevétel azonban minden akadályt áthidal.



3. ábra. n pont n maximális távolsággal

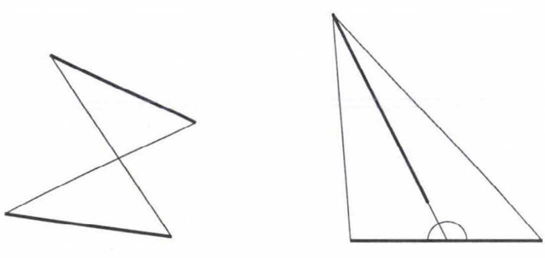
3.2. lemma.

(i) *bármely két maximális távolságú pontpárt összekötő két szakasznak létezik közös (esetleg vég-)pontja;*

(ii) *ha egy P_0 pontból legalább három maximális hosszúságú szakasz indul, akkor van olyan P_j, ahonnan csak egy indul.*

Bizonyítás.

(i) ha a két szakasz négy végpontjának konvex burka négyszög, akkor a 4(a) ábra két háromszögére alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget és ezeket összeadva, valamelyik átló hosszabb lenne a maximális távolságnál, ami ellentmondás.
Ha pedig a konvex burok háromszög, akkor még egyszerűbb „túl hosszú" szakaszt találni; a 4(b) ábrán jelölt két szög közül valamelyik legalább derékszög.



4. ábra. Ha két maximális (vastag) szakasznak nem lenne közös pontja ...

(ii) Ha pedig P_0-ból P_i, P_j, P_k-ba megy (ilyen sorrendben) leghosszabb szakasz, akkor a középsőből, P_j-ből nem indulhat további maximális, hiszen vagy P_0P_i-t, vagy P_0P_k-t nem metszhetné – ami pedig (i) miatt szükségszerű. ■

A 3.1. tétel bizonyítása. Alkalmazzunk teljes indukciót n szerint; az $n = 3$ eset nyilvánvaló.

Tekintsünk egy tetszőleges pont-n-est! Ha minden pontra legfeljebb két maximális szakasz illeszkedik, akkor még az indukciós feltételre sincs szükségünk; a szakaszok száma $\leq (n \cdot 2)/2 = n$. (Itt azért kellett 2-vel osztanunk, mert minden szakaszt mindkét végén összeszámoltunk.)

Ha pedig létezik legalább harmadfokú pont, akkor a lemma (ii) része miatt található elsőfokú is. Ezt elhagyva és az indukciós feltételt használva $\leq (n-1)$ leghosszabb szakasz maradhatott, ami az *egyetlen* elhagyottal együtt is csak n. ∎

Megjegyezzük még, hogy a *minimális* távolságok száma $\leq 3n$. Ez kétféleképpen is belátható.

I. minden ponthoz legfeljebb 6 másik lehet ilyen közel (így jön ki $6n/2 = 3n$);

II. a minimális távolságok gráfja síkbarajzolható (két minimális távolság sosem metszheti egymást); tehát az élszám legfeljebb $3n-6$.

A szabályos háromszögrács alkalmas ponthalmaza éppen eléri ezt a nagyságrendet: $3n - \lceil \sqrt{12n-3} \rceil$ darab minimális távolságot tartalmaz, l. [5]. (Itt az „alkalmas" azt jelenti, hogy a pontok többségének hat szomszédja is a halmazba esik; más szóval kevés pont van a halmaz „határán". Ebben az értelemben alkalmas halmaz keresése az „izoperimetrikus problémának" – adott kerülethez maximális területű, sőt inkább adott területhez minimális kerületű alakzat keresésének – „diszkrét" változata.)

A háromdimenziós térben Eggleston, Grünbaum és Heppes igazolta egymástól függetlenül [1, 4, 6], hogy a maximális távolság legfeljebb $2n-2$-szer fordul elő. Ez el is érhető például egy szabályos tetraéder csúcsaira, vagy a 3. ábrához hasonlóan, alkalmas térbeli köríveken hozzájuk felvett további tetszőleges számú pontra.

Háromnál magasabb dimenzióban azonban itt is lényeges ugrás van: az 1.4. példa ponthalmazában $n^2/4$-szer előforduló egységtávolság ugyanis egyben maximális is lesz, ha egymáshoz elég közel helyezzük el az $(x_i, y_i, 0, 0)$ pontokat és ugyancsak egymáshoz közel a $(0, 0, z_j, w_j)$ pontokat. A leghosszabb távolság tehát innen kezdve *négyzetes* nagyságrendben fordulhat elő.

Ezzel szemben a minimális távolságról minden dimenzióban tudható, hogy csak lineáris darabszámban, azaz legfeljebb Cn-szer fordulhat elő, ahol C persze függ a dimenziótól, de n-től nem. A pontos C együttható azonban nem ismeretes – ez a legsűrűbb gömb-elhelyezés (megoldatlan) problémájával függ össze: azonos sugarú, egymásba nem nyúló gömbök érintkezései a középpontok között fellépő minimális távolságoknak felelnek meg.

4. Ismét egységkörök

Végül még egy Erdős-kérdést ismertetünk, amely a gyümölcsösök eredeti problémájának egységkörökre vonatkozó változata.

4.1. probléma (Erdős). *Helyezzünk el a síkon n pontot úgy, hogy a lehető legtöbb egységkör tartalmazzon közülük hármat (vagy többet).*

Nyilván nem érdemes a pontokat egyetlen egységkörre tenni, hiszen akkor egyáltalán nem található további alkalmas kör.

Érdekes, hogy a kérdés – bár szintén kétparaméteres seregre vonatkozik – sokkal nehezebbnek tűnik, mint az egyenesekre vonatkozó volt: itt még a pontos *nagyságrend* sem ismeretes!

Felső becslésként ugyan ismét könnyű másodfokú korlátot mutatni: az ilyen körök száma legfeljebb $n(n-1)/3$. Valóban, minden alkalmas körön legalább három pontpár található; ugyanakkor egy pár csak két egységkörön szerepelhet – innen adódik a $2 \cdot \binom{n}{2}/3 = n(n-1)/3$ becslés.

Hasonló nagyságrendű alsó korlát azonban nem ismeretes; talán nincs is? A legjobb ismert konstrukció $\sim n^{3/2}$ egységkört ad [2]; nincs kizárva, hogy ez egyben a pontos nagyságrend is lesz.

4.2. példa. Válasszunk $m \approx \sqrt{2n}$ darab olyan „elég általános helyzetű" $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_m$ egységvektort, amelyekből az összes lehetséges részhalmaz összegét képezve, csupa különböző vektort kapunk.

Ponthalmazunk álljon a

$$\{\overline{v}_i + \overline{v}_j \; ; \; i < j \leq m\}$$

helyvektorú pontokból; ezek száma $\binom{m}{2} \approx n$. Ekkor minden egyes

$$\{\overline{v}_i + \overline{v}_j + \overline{v}_k \; ; \; i < j < k \leq m\}$$

helyvektorú pont alkalmas kör-középpont lesz, hiszen tőle egységnyi távolságra lesz a $\overline{v}_i + \overline{v}_j$, $\overline{v}_i + \overline{v}_k$ és $\overline{v}_j + \overline{v}_k$ helyvektorú három kiválasztott pont mindegyike. A ponthalmazhoz tehát legalább

$$\binom{m}{3} \approx \frac{m^3}{6} \approx \frac{2\sqrt{2}}{6} \cdot n^{3/2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot n^{3/2}$$

darab megfelelő, különböző középpont körüli egységsugarú kör található.

Mint említettük, nyitott kérdés, lehetséges-e ennél lényegesen több egységkör. Ugyanakkor arra sem ismert ellenérv, miért ne lehetne akár n^2 a pontos nagyságrend.

Irodalom

[1] H. G. Eggleston, Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter, *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 11–24.

[2] György Elekes, n points in the plane can determine $n^{3/2}$ unit circles, *Combinatorica,* **4 (2–3)** (1984), 131.

[3] Paul Erdős, On sets of distances of n points, *Am. Math. Monthly,* **53** (1946), 248–250.

[4] Branko Grünbaum, A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **53** (1957), 776–778.

[5] Heiko Harborth, Ein Extremalproblem Fuer Gitterpunkte. (German), *J. Reine Angew. Math.*, **262/263** (1973), 356–360.

[6] Aladár Heppes, On the partitioning of three-dimensional point-sets into sets of smaller diameter. (Hungarian), *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **7** (1957), 413–416.

[7] Reiman István, *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–1994*, TypoTeX (1997).

György Elekes: On Some Combinatorial Problems
Part III: Distances and unit circles

In this paper we start a detour (returning to incidences later) and study metric questions, i.e. problems and results concerning distances.

On the one hand, this is justified by the importance of the topic (e.g. the two most famous unsolved problems of Combinatorial Geometry will be mentioned, see Problems 1.1 and 2.1); while, on the other hand, we can also show two surprising and nice applications of incidence bounds (Theorems 1.3 and 1.5).

POLINOM-EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYEK

LACZKOVICH MIKLÓS

1. tétel. *Egy G topologikus Abel-csoporton értelmezett folytonos, komplex értékű f függvény eltoltjai akkor és csak akkor generálnak véges dimenziós alteret $C(G)$-ben, ha f polinom-exponenciális függvény.*

A fenti tétel a $G = \mathbb{R}$ speciális esetben L. Schwartz híres tételének [8] nyilvánvaló következménye. Schwartz tétele szerint a számegyenesen értelmezett folytonos, komplex értékű függvények terében *bármely* eltolás-invariáns zárt V altér tartalmaz polinom-exponenciális függvényeket; sőt, ezek V sűrű részhalmazát képezik. Ha V véges dimenziós, akkor persze V minden eleme polinom-exponenciális függvény kell, hogy legyen.

Az 1. tételre a $G = \mathbb{R}$ speciális esetben viszonylag egyszerű bizonyítást adott P. M. Anselone és J. Korevaar 1964-ben [1]. Valójában Loewner [6] már 1959-ben belátta ezt, sőt általánosította is $\mathbb{R}^n$-re. A jelek szerint a tételt J. J. Stone tetszőleges topologikus kommutatív félcsoportra is bebizonyította a hozzáférhetetlen [9] dolgozatban. M. Engert [2] megmutatta, hogy ha G σ-kompakt és lokálisan kompakt, akkor f folytonossága helyett elég mérhetőséget feltenni. Sajnos Engert bizonyítása rendkívül komplikált. Az 1. tételre Székelyhidi László adott egyszerű bizonyítást [10]-ben; ez a cikk azonban az érthetetlenségig tömör.

Az alábbiakban a [2] és [10] dolgozatok gondolatainak kombinálásával és módosításával egyszerű bizonyítást adunk az 1. tételre, majd megmutatjuk, hogy a polinom-exponenciális függvények osztálya rendelkezik az ún. kettős differenciatulajdonsággal.

Definíciók. $C(G)$ jelöli a G-n értelmezett komplex értékű folytonos függvények vektorterét. Az $a : G \to \mathbb{C}$ függvény *additív,* ha homomorfizmus. A $q : G \to \mathbb{C}$ függvény *polinomfüggvény* (röviden polinom), ha $q(x) = Q\big(a_1(x), \dots, a_n(x)\big)$, ahol $Q \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ és $a_1, \dots, a_n$ folytonos additív függvények. (Ismeretes, hogy $\mathbb{R}^n$-ben minden folytonos és additív függvény lineáris, azaz $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ alakú. Így a polinomfüggvény fenti definíciója a $G = \mathbb{R}^n$ esetben megegyezik a komplex együtthatós polinomfüggvény szokásos fogalmával.)

Az $m : G \to \mathbb{C}$ függvény *multiplikatív,* ha homomorfizmus $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ multiplikatív csoportjába. A folytonos multiplikatív függvényeket *exponenciális függvényeknek* nevezzük. (Nem nehéz belátni, hogy a $G = \mathbb{R}^n$ speciális esetben az exponenciális függvények $e^{c_1x_1+\dots+c_nx_n}$ alakúak.)

A $\sum_{i=1}^n p_i m_i$ alakú függvényeket, ahol p_i polinom és m_i exponenciális függvény minden $i = 1, \dots, n$-re, *polinom-exponenciális függvényeknek* nevezzük.

Ha a G csoport a diszkrét topológiával van ellátva, akkor G-n minden függvény folytonos. Ebből következik, hogy egy diszkrét Abel-csoporton a polinom-exponenciális függvények az additív és a multiplikatív függvények által generált algebra elemei lesznek.

Szükségünk lesz a fenti fogalmaknak olyan általánosításaira, melyek tetszőleges (tehát topológiamentes) Abel-csoportokon értelmezhetők.

Δ_h-val jelöljük a differencia-operátort G-n, tehát $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$ minden $f : G \to \mathbb{C}$ függvényre és $x, h \in G$-re. A $p : G \to \mathbb{C}$ függvény *általánosított polinomfüggvény* (röviden általánosított polinom), ha alkalmas n-re $\Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_{n+1}} p \equiv 0$ minden $h_1, \dots, h_{n+1} \in G$-re. A p általánosított polinomfüggvény foka az a legkisebb n, amelyre ez teljesül. Könnyen látható, hogy a 0-adfokú általánosított polinomfüggvények a konstansok, a legfeljebb elsőfokúak pedig az $a(x) + b$ alakú függvények, ahol a additív és b konstans.

Könnyen bizonyítható, hogy az általánosított polinomok algebrát alkotnak. (Ez a $\Delta_h(cf) = c \cdot \Delta_h f$, $\Delta_h(f+g) = \Delta_h f + \Delta_h g$ és $\Delta_h(fg) = \Delta_h f \cdot \Delta_h g + f \cdot \Delta_h g + g \cdot \Delta_h f$ formulák egyszerű következménye). Így minden $q(x) = Q\big(a_1(x), \dots, a_n(x)\big)$ alakú függvény általánosított polinom, ahol $Q \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ és $a_1, \dots, a_n$ additív függvények. (Ennek a megfordítása általában nem igaz.) Ha tehát G topologikus Abel-csoport, akkor G-n a polinomok egyszersmind általánosított polinomok is lesznek. (A megfordítás általában nem igaz, még a folytonos függvények körében sem.)

Az $F : G^k \to \mathbb{C}$ függvény *k-additív,* ha mindegyik változójában külön-külön additív. A 0-additív függvények definíció szerint a G-n értelmezett konstans függvények. Ismeretes, hogy ha az $F : G^k \to \mathbb{C}$ függvény szimmetrikus és k-additív, továbbá $f(x) = F(x, \dots, x)$, akkor

$$(1) \qquad \Delta_{x_1} \dots \Delta_{x_k} f(x) = k! \cdot F(x_1, \dots, x_k) \quad \text{minden} \quad x_1, \dots, x_k, x \in G\text{-re.}$$

(Lásd [4, 394. oldal]). Bármely k-adfokú általánosított polinomfüggvény előállítható $\sum_{i=0}^k f_i(x)$ alakban, ahol $F_i(x_1, \dots, x_i)$ szimmetrikus i-additív, és $f_i(x) = F_i(x, \dots, x)$ minden $i = 0, \dots, k$-ra. (Lásd [4, 395. oldal].)

A $\sum_{i=1}^n p_i m_i$ alakú függvényeket, ahol p_i általánosított polinom és m_i multiplikatív minden $i = 1, \dots, n$-re, ***általánosított polinom-exponenciális függvényeknek*** nevezzük.

2. tétel. *Legyen f komplex értékű függvény G-n. Ha $f(x+y) - f(x) - f(y)$ általánosított polinom $G \times G$-n, akkor f is az G-n. Ha $f(x+y) - f(x) - f(y)$ polinom $G \times G$-n, akkor f egy polinomnak és egy additív függvénynek az összege.*

Bizonyítás. Legyen $\phi(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$. Ha ϕ általánosított polinom és $\Delta_{u_1} \dots \Delta_{u_n} \phi \equiv 0$ minden $u_1, \dots, u_n \in G \times G$-re, akkor $\Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_n} f \equiv 0$ minden $h_1, \dots, h_n \in G$-re. Valóban, könnyen látható, hogy

$$\Delta_{(h_{n-1},0)} \Delta_{(0,h_n)} \phi(x,y) = \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{h_n} f(x+y),$$

amiből

$$\Delta_{h_1} \dots \Delta_{h_n} f(x+y) = \Delta_{(h_1,0)} \dots \Delta_{(h_{n-2},0)} \Delta_{(h_{n-1},0)} \Delta_{(0,h_n)} \phi(x,y) \equiv 0.$$

Ezzel beláttuk, hogy f általánosított polinom.

Most tegyük fel, hogy ϕ polinom. Ekkor $\phi(x,y)$ előáll alkalmas $(G \times G) \to \mathbb{C}$ folytonos homomorfizmusok (igazi) polinomjaként. Mivel minden $(G \times G) \to \mathbb{C}$ homomorfizmus $a(x) + b(y)$ alakú, ahol a és b G homomorfizmusai, ezért

$$\phi(x,y) = p\big(a_1(x), \dots, a_n(x), b_1(y), \dots, b_n(y)\big), \tag{2}$$

ahol $p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{2n}]$ és $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n : G \to \mathbb{C}$ folytonos homomorfizmusok. Már beláttuk, hogy f általánosított polinom. Legyen $f = \sum_{i=0}^{k} f_i(x)$, ahol $F_i(x_1, \dots, x_i)$ szimmetrikus i-additív és $f_i(x) = F_i(x, \dots, x)$ minden $i = 0, \dots, k$-ra. Az állítást, miszerint f egy polinomnak és egy additív függvénynek az összege, k szerinti indukcióval látjuk be. A $k = 0, 1$ esetek nyilvánvalóak. Legyen $k > 1$, és tegyük fel, hogy az állítás igaz $k-1$-re.

Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\phi(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y) = \sum_{i=0}^{k} \left[f_i(x+y) - f_i(x) - f_i(y) \right]$$

előállítható mint $F_i(x, \dots, x, y, \dots, y)$ alakú függvények egész együtthatós lineáris kombinációja. Ha az $F_i(x, \dots, x, y, \dots, y)$ tagban j darab x és $i-j$ darab y van, akkor rögzített y-ra ez a függvény x-ben j-edfokú általánosított polinom. Könnyen látható, hogy ϕ ezen előállításában az $F_k(x, \dots, x, y)$ tag k együtthatóval szerepel (ez x-ben $k-1$-edfokú), az összes többi tag x-beli foka pedig $k-1$-nél kisebb. Ha tehát a (2) egyenlőség mindkét oldalára alkalmazzuk a $\Delta_{(x_1,0)} \dots \Delta_{(x_{k-1},0)}$ operációt, akkor (1) szerint azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (3) \quad & k! \cdot F_k(x_1, \dots, x_{k-1}, y) = \\ & = \Delta_{(x_1,0)} \dots \Delta_{(x_{k-1},0)} p\big(a_1(x), \dots, a_n(x), b_1(y), \dots, b_n(y)\big). \end{aligned}$$

Itt a jobb oldal nem függ x-től (hiszen a bal oldal sem függ), és nyilvánvalóan az $x_1, \dots, x_{k-1}, y$ változók polinomja. Ezzel beláttuk, hogy $F_k(x_1, \dots, x_k)$ polinom G^k-n, tehát $f_k = F_k(x, \dots, x)$ is polinom G-n. Legyen $f - f_k = g$. Mivel $g = \sum_{i=0}^{k-1} f_i(x)$ és $g(x+y) - g(x) - g(y) = \phi(x,y) - \big(f_k(x+y) - f_k(x) - f_k(y)\big)$ polinom, ezért az indukciós feltevés szerint g egy polinomnak és egy additív függvénynek az összege. Így ugyanez igaz f-re is, amivel a bizonyítást befejeztük. ∎

A következő (közismert) tétel kommutáló lineáris transzformációk szimultán normálalakját adja meg.

3. tétel. *Legyen X véges dimenziós komplex vektortér, és legyen $\mathcal{A}$ az X teret önmagába képező lineáris transzformációk egy kommutáló halmaza. Ekkor vannak $V_1, \ldots, V_k$ alterek úgy, hogy X a direkt összegük, mindegyik V_i invariáns mindegyik $A \in \mathcal{A}$-ra nézve, és mindegyik V_i-nek van olyan bázisa, amelyben $\mathcal{A}$ mindegyik elemének V_i-beli mátrixa olyan háromszög-mátrix, amelyben a főátló feletti elemek 0-val, a főátlóban levő elemek pedig egymással egyenlőek.*

Bizonyítás. Először azt látjuk be, hogy kommutáló lineáris transzformációknak mindig van közös sajátvektoruk. Ezt a tér dimenziója szerinti indukcióval bizonyítjuk. A $\dim X = 1$ eset világos. Tegyük fel, hogy $n = \dim X > 1$ és hogy az állítás igaz a kisebb dimenziókra. A bizonyításban nyilván feltehetjük, hogy $\mathcal{A}$ nem minden eleme az identitás konstansszorosa. Legyen $A \in \mathcal{A}$, $A \neq c \cdot I$, és legyen A egyik sajátértéke λ. Ekkor $E = \{x \in X : Ax = \lambda x\}$ olyan altér, amelynek d dimenziójára $0 < d < n$, és amely mindegyik $B \in \mathcal{A}$-nak invariáns altere. Valóban, ha $x \in E$ és $B \in \mathcal{A}$, akkor

$$A(Bx) = B(Ax) = B(\lambda x) = \lambda(Bx),$$

tehát $Bx \in E$. Az indukciós feltevést az E altérre alkalmazva kapunk egy közös sajátvektort.

Most belátjuk, hogy ha mindegyik $A \in \mathcal{A}$ transzformációnak egyetlen sajátértéke a 0, akkor X-nek van olyan bázisa, amelyben mindegyik $A \in \mathcal{A}$ transzformáció mátrixának mind az átló feletti, mind pedig az átlóban fekvő elemei nullával egyenlőek. Az állítást a tér dimenziója szerinti indukcióval fogjuk bizonyítani. A $\dim X = 1$ eset nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $n = \dim X > 1$ és hogy az állítás igaz $n - 1$-re.

Könnyű ellenőrizni, hogy az A^* $(A \in \mathcal{A})$ adjungáltak szintén kommutálnak. Mivel $\det(A^* - \lambda I) = \overline{\det(A - \overline{\lambda} I)}$, ezért az A^* adjungáltaknak szintén egyetlen sajátértékük a 0. Legyen b az A^* adjungáltak egy közös sajátvektora. Ekkor tehát $b \neq 0$ és $A^*(b) = 0$ minden $A \in \mathcal{A}$-ra.

Az $Y = \{x \in X : \langle x, b \rangle = 0\}$ altér dimenziója $n - 1$. Mivel $x \in X$ és $A \in \mathcal{A}$ esetén $\langle Ax, b \rangle = \langle x, A^* b \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$, ezért A képtere része Y-nak minden $A \in \mathcal{A}$-ra. Ebből következően Y invariáns altere mindegyik $A \in \mathcal{A}$-nak. Az indukciós feltevés szerint van olyan $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ bázis Y-ban, amelyben mindegyik $A \in \mathcal{A}$ transzformáció mátrixában minden elem 0 az átlóban és felette. Belátjuk, hogy $\{b, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ hasonló tulajdonságú bázis X-ben. Valóban, ha A mátrixa $[a_{ij}]$, akkor $Ab = a_{11} b + a_{21} b_1 + \ldots + a_{n1} b_{n-1} = a_{11} b + y$, ahol $y \in Y$. Mivel $Ab \in Y$, ezért $a_{11} = 0$. Az $a_{ij} = 0$ $(i \leq j,\, 2 \leq j)$ egyenlőségek a $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ bázis választásából adódnak.

Most rátérünk a tétel bizonyítására. Ismét a tér dimenziója szerinti indukcióval bizonyítunk. A $\dim X = 1$ eset világos. Tegyük fel, hogy $\dim X > 1$ és hogy az állítás igaz a kisebb dimenziókra. Minden $A \in \mathcal{A}$ transzformációnak válasszuk ki egy λ_A sajátértékét, és helyettesítsük A-t $A-\lambda_A I$-vel. Az új transzformációk szintén kommutálnak, és világos, hogy elég a tétel állítását az új rendszerre igazolni.

Feltehetjük tehát, hogy mindegyik $A \in \mathcal{A}$ transzformációnak sajátértéke a 0. Ha mindegyik $A \in \mathcal{A}$ transzformációnak 0 az egyetlen sajátértéke, akkor, mint láttuk, az állítás igaz. Feltehetjük tehát, hogy van olyan $A \in \mathcal{A}$, amelynek a 0-n kívül van más sajátértéke is.

Tudjuk, hogy X felbontható a V és W alterek direkt összegére úgy, hogy V ás W mindketten invariánsak A-ra nézve, A invertálható V-n és nilpotens W-n. (Lásd [3, 58. § 1. tétel].) Mivel A-nak van 0-tól különböző sajátértéke, ezért $\dim V > 0$, és mivel A-nak 0 is sajátértéke, ezért $\dim W > 0$. Megmutatjuk, hogy V és W mindegyike invariáns mindegyik $B \in \mathcal{A}$-ra nézve. Tegyük fel, hogy $A^k w = 0$ minden $w \in W$-re.

Legyen $v \in V$ tetszőleges. Mivel A invertálható V-n, így $v = A^k v'$ alkalmas $v' \in V$-re. Ha $Bv' = v'' + w$ ahol $v'' \in V$ és $w \in W$, akkor

$$Bv = BA^k v' = A^k(Bv') = A^k(v'' + w) = A^k v'' \in V,$$

amivel beláttuk, hogy V invariáns B-re nézve. Most legyen $w \in W$ tetszőleges. Ha $Bw = v + w'$, akkor

$$0 = B(A^k w) = (A^k B)w = A^k(v + w') = A^k v,$$

és mivel A invertálható V-n, így $v = 0$. Ezzel beláttuk, hogy W is invariáns B-re nézve. Ha most alkalmazzuk az indukciós feltevést a V és W terekre, akkor megkapjuk a tétel állítását. ■

Az 1. tétel bizonyítása. A tétel „akkor" állítása abból következik, hogy ha az f, illetve g függvény eltoltjai legfeljebb n, illetve legfeljebb m-dimenziós alteret generálnak $C(G)$-ben, akkor $f \cdot g$ eltoltjai legfeljebb $n \cdot m$-dimenziós alteret generálnak. Mármost az additív, illetve multiplikatív függvények eltoltjai legfeljebb 2, illetve 1-dimenziós alteret generálnak, tehát a polinom-exponenciális függvények eltoltjai véges dimenziós alteret generálnak.

A másik irány bizonyításához azt kell belátnunk, hogy ha X a $C(G)$ vektortér egy eltolás-invariáns és véges dimenziós altere, akkor X minden eleme polinom-exponenciális függvény.

Jelöljük T_y-nal az eltolás-operátort, azaz legyen $T_y f(x) = f(x+y)$ minden $f \in C(G)$ és $y, x \in G$ esetén. Ekkor $\{T_y : y \in G\}$ az X tér lineáris transzformációinak egy kommutáló halmaza. A 3. tétel szerint X előáll a $V_1, \dots, V_s$ alterek direkt összegeként úgy, hogy mindegyik V_t altér eltolás-invariáns, és van olyan bázisa, amelyben a T_y-ok mátrixa a tételben leírt alakú. Nyilván elég belátni, hogy V_t elemei polinom-exponenciális függvények minden $t = 1, \dots, s$-re.

Legyen t rögzített, és legyen $\{b_1, \dots, b_n\}$ olyan bázis $V = V_t$-ben, amelyre teljesül, hogy minden $y \in G$-re a T_y transzformáció mátrixa $[m_{i,j}(y)]$ $(i, j =$

$1,\dots,n)$, ahol $m_{i,j} \equiv 0$ minden $i < j$-re és $m_{1,1} \equiv \dots \equiv m_{n,n}$. Megmutatjuk, hogy az $m_{i,j}$ függvények V-beliek, tehát folytonosak. Minden $j = 1,\dots,n$-re

$$b_j(x+y) = T_y b_j(x) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}(y) b_i(x) \quad (x, y \in G). \tag{4}$$

Mivel $b_1,\dots,b_n$ lineárisan függetlenek, ezért vannak $x_1,\dots,x_n \in G$ pontok úgy, hogy a $|b_i(x_p)|$ $(i, p = 1,\dots,n)$ determináns nem nulla. Ha a (4) egyenlőségben $x = x_p$-t helyettesítünk minden $p = 1,\dots,n$-re, akkor egy lineáris egyenletrendszert kapunk, amely megoldható az $m_{i,j}(y)$ $(i = 1,\dots,n)$ ismeretlenekre nézve. Azt kapjuk, hogy az $m_{i,j}$ függvények b_j eltoltjainak lineáris kombinációi, tehát V-beliek.

Vezessük be az $m(y) = m_{1,1}(y)$ jelölést. Mivel T_y invertálható V-n, ezért $m(y) \neq 0$ minden $y \in G$-re. A $T_{z+y} = T_y T_z$ összefüggésből azt kapjuk, hogy m multiplikatív. Legyen $a_{i,j} = m_{i,j}/m$ minden $i, j = 1,\dots,n$-re, ekkor az $a_{i,j}$ függvények folytonosak. Belátjuk ($i-j$ szerinti indukciót alkalmazva), hogy az $a_{i,j}$ függvény polinom. Ez világos, ha $i - j \leq 0$, hiszen $i < j$ esetén $a_{i,j} \equiv 0$, $i = j$ esetén pedig $a_{i,j} \equiv 1$. Legyen $i-j > 0$, és tegyük fel, hogy az $a_{p,q}$ függvény polinom valahányszor $p - q < i - j$. Mivel $T_{y+z} = T_y T_z$, ezért

$$m_{i,j}(y+z) = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(y) m_{k,j}(z),$$

tehát

$$a_{i,j}(y+z) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(y) a_{k,j}(z) = a_{i,j}(y) + \sum_{k=j+1}^{i-1} a_{i,k}(y) a_{k,j}(z) + a_{i,j}(z) \tag{5}$$

minden $y, z \in G$-re. Mármost az indukciós feltevésből következik, hogy $a_{i,k}$ és $a_{k,j}$ polinom minden $j < k < i$-re, így (5)-ből azt kapjuk, hogy $a_{i,j}(y+z) - a_{i,j}(y) - a_{i,j}(z)$ polinom $G \times G$-n. A 2. tétel szerint $a_{i,j} = p + a$, ahol p polinom és a additív. Mivel $a_{i,j}$ folytonos, ezért a is folytonos, amivel beláttuk, hogy $a_{i,j}$ polinom minden i-re és j-re.

Ha (4)-ben $m_{i,j}$ helyett $a_{i,j} \cdot m$-et és x helyett 0-t írunk, akkor azt kapjuk, hogy

$$b_j(y) = \sum_{i=1}^{n} b_i(0) a_{i,j}(y) m(y),$$

tehát b_j polinom-exponenciális. Ez minden j-re igaz, ezért V elemei, lévén a b_j függvények lineáris kombinációi, szintén polinom-exponenciális függvények. Ezzel a tételt beláttuk. ■

* * * * *

Az 1. tételt diszkrét csoportokra alkalmazva adódik az alábbi tétel.

4. tétel. *Ha G tetszőleges Abel-csoport, és az $f : G \to \mathbb{C}$ függvény kielégíti az*

$$f(x+y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)g_i(y) \quad (x, y \in G) \tag{6}$$

azonosságot alkalmas $f_i, g_i : G \to \mathbb{C}$ függvényekkel, akkor f polinom-exponenciális függvény, azaz eleme az additív és multiplikatív függvények által generált algebrának.

A (6) függvényegyenlet összes megoldását megkaphatjuk, ha végigkövetjük az 1. tétel bizonyítását. Ez megtalálható McKiernan dolgozatában [7]. Az 1. tétel birtokában a következőképpen egészíthetjük ki a 2. tétel állítását.

5. tétel. *Ha $f \in C(G)$ és $f(x+y) - f(x) - f(y)$ polinom-exponenciális függvény $G \times G$-n, akkor f is polinom-exponenciális függvény G-n.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy minden $G \times G$-n értelmezett polinom-exponenciális függvény előállítható $\sum_{i=1}^{n} p_i(x)q_i(y)$ alakban, ahol p_i és q_i polinom-exponenciális függvények G-n. Így, ha $f(x+y) - f(x) - f(y)$ polinom-exponenciális függvény $G \times G$-n, akkor f-re teljesül (6) alkalmas $f_i, g_i \in C(G)$ függvényekkel. Ez azt jelenti, hogy f eltoltjai elemei az f_i függvények által generált altérnek, tehát véges dimenziós teret generálnak. Az 1. tétel szerint ebből következik, hogy f polinom-exponenciális függvény. ∎

Felmerül a kérdés, hogy mit állíthatunk akkor, ha f folytonosságának feltételét elhagyjuk. Világos, hogy ekkor meg kell engednünk egy additív összeadandót (a 2. tétel második állításához hasonlóan). Megmutatjuk, hogy ezzel minden megoldást megkapunk, tehát igaz a következő.

6. tétel. *Legyen f komplex értékű függvény G-n. Ha $f(x+y) - f(x) - f(y)$ polinom-exponenciális függvény $G \times G$-n, akkor f előáll mint egy polinom-exponenciális függvény és egy additív függvény összege.*

Legyenek $\mathcal{F}_1$ és $\mathcal{F}_2$ komplex értékű függvények halmazai, melyek G-n, illetve $G \times G$-n vannak értelmezve. Azt mondjuk, hogy az $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ pár rendelkezik a *kettős differencia-tulajdonsággal*, ha valahányszor egy $f : G \to \mathbb{C}$ függvényre teljesül $f(x+y) - f(x) - f(y) \in \mathcal{F}_2$, akkor f előáll mint egy $\mathcal{F}_1$-beli függvény és egy additív függvény összege. A 2. tétel szerint a G-n, illetve $G \times G$-n értelmezett polinomok (illetve általánosított polinomok) halmazainak párja rendelkezik a kettős differencia-tulajdonsággal. A 6. tétel ugyanezt állítja a polinom-exponenciális függvények osztályairól.

Ha a $\big(C(G), C(G \times G)\big)$ pár rendelkezik a kettős differencia-tulajdonsággal, akkor a 6. tételt azonnal visszavezethetjük a 5. tételre. Valóban, ha $f(x+y) - f(x) - f(y)$ polinom-exponenciális függvény, akkor folytonos is $G \times G$-n. Így ekkor $f = g + a$, ahol g folytonos függvény és a additív. Mivel $g(x+y) - g(x) - g(y) =$

$f(x+y) - f(x) - f(y)$ polinom-exponenciális függvény, ezért a 5. tétel szerint g is polinom-exponenciális függvény.

A fenti okoskodás minden lokálisan kompakt Abel-csoportra elvégezhető; ezekben a csoportokban ui. a $\big(C(G), C(G \times G)\big)$ pár rendelkezik a kettős differencia-tulajdonsággal [5]. Azonban vannak csoportok, melyekben ez nem igaz; ilyen pl. az l_1 Banach-tér additív csoportja. Ezért a 6. tétel bizonyításához más utat kell követnünk.

7. lemma. *Ha $p_1, \ldots, p_n$ általánosított polinomok, $m_1, \ldots, m_n$ különböző multiplikatív függvények és $\sum_{i=1}^{n} p_i m_i \equiv 0$, akkor $p_1 \equiv \ldots \equiv p_n \equiv 0$.*

Bizonyítás. Ha az m multiplikatív függvény általánosított polinom, akkor $m \equiv 1$. Valóban, elég nagy N-re

$$\big(m(h) - 1\big)^N m(x) = \Delta_h^N m(x) = 0$$

minden $x, h \in G$-re, ami csak úgy lehetséges, ha $m \equiv 1$.

Ha p általánosított polinom, és m multiplikatív, akkor $\Delta_h(pm) = p_h m$, ahol p_h is általánosított polinom, hiszen $p_h(x) = p(x+h) \cdot m(h) - p(x)$. Jegyezzük meg, hogy ha $m \not\equiv 1$ és $p \not\equiv 0$, akkor alkalmas h-ra $p_h \not\equiv 0$. Valóban, ha $p_h \equiv 0$ minden h-ra, akkor $p(x+h) \cdot m(h) = p(x)$ minden x-re és h-ra, tehát $p(0) \cdot m(h) = p(-h)$ minden h-ra. Ha $p(0) = 0$, akkor $p \equiv 0$, ha pedig $p(0) \neq 0$, akkor m általánosított polinom, így első megjegyzésünk szerint $m \equiv 1$.

A Lemma állítását n szerinti indukcióval bizonyítjuk. Az $n = 1$ eset világos. Legyen $n > 1$, és tegyük fel, hogy az állítás $n-1$-re igaz. Legyenek $p_1, \ldots, p_n$, $m_1, \ldots, m_n$ mint a Lemmában. Feltehetjük, hogy $m_n \equiv 1$, mert különben leosztunk m_n-nel. Azt is feltehetjük, hogy $p_1 \not\equiv 0$, mert különben az állítás nyilvánvaló az indukciós feltevésből. Alkalmas N-re $\Delta_{h_1} \ldots \Delta_{h_N} p_n \equiv 0$ minden $h_1, \ldots, h_N \in G$-re. Így

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Delta_{h_1} \ldots \Delta_{h_N}(p_i m_i) \equiv 0$$

a h_i-k tetszőleges választása mellett. Második megjegyzésünk szerint ezek az azonosságok $\sum_{i=1}^{n-1} q_i m_i$ alakúak, ahol a q_i-k általánosított polinomok. Mivel $m_1 \not\equiv m_n \equiv 1$, ezért ugyanezen megjegyzés szerint a h_i-k alkalmas választása mellett $q_1 \not\equiv 0$. Ez azonban ellentmond az indukciós feltevésnek, amivel a bizonyítást befejeztük. ∎

A következő tétel szerint az általánosított polinom-exponenciális függvények osztálya rendelkezik a kettős differencia-tulajdonsággal.

8. tétel. *Legyen f komplex értékű függvény G-n. Ha $f(x+y) - f(x) - f(y)$ általánosított polinom-exponenciális függvény $G \times G$-n, akkor f is általánosított polinom-exponenciális függvény G-n.*

Bizonyítás. Legyen $\phi(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$. Könnyű ellenőrizni, hogy

$$\phi(x+y,z) + \phi(x,y) = \phi(x,y+z) + \phi(y,z) \tag{7}$$

teljesül minden $x,y,z \in G$-re. Mivel minden $(G \times G) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ multiplikatív függvény $m(x) \cdot n(y)$ alakú, ahol $m,n : G \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ multiplikatív, ezért $\phi(x,y) = \sum p(x,y)m(x)n(y)$, ahol mindegyik p nemnulla általánosított polinom $G \times G$-n, és mindegyik m és n multiplikatív G-n. Feltehetjük, hogy az (m,n) párok különbözőek. Ekkor (7)-ből azt kapjuk, hogy

$$\sum \left[p(x+y,z)m(x)m(y)n(z) + p(x,y)m(x)n(y)\right] = \tag{8}$$

$$= \sum \left[p(x,y+z)m(x)n(y)n(z) + p(y,z)m(y)n(z)\right]$$

minden $x,y,z \in G$-re. Tegyük fel, hogy a $\sum p(x,y)m(x)n(y)$ összegben van olyan tag, amelyben $m \not\equiv 1$, $n \not\equiv 1$, $m \not\equiv n$. Ekkor $m(x)m(y)n(z)$ olyan multiplikatív függvény $G \times G \times G$-n, amely (8) bal oldalán csak egyszer fordul elő, míg a jobb oldalon egyszer sem. Így a 7. Lemma szerint a megfelelő p azonosan nulla, ami lehetetlen. Ezzel beláttuk, hogy $\phi \sum p(x,y)m(x)m(y) + \sum q(x,y)n(x) + \sum r(x,y)s(y)$ alakú. Ezt (7)-be helyettesítve egy olyan azonosságot kapunk, amelynek bal oldalán szerepel $p(x+y,z)m(x)m(y)m(z)$, a jobb oldalon pedig szerepel $p(x,y+z)m(x)m(y)m(z)$. Ha m nem azonosan 1, akkor ebből azt kapjuk, hogy $p(x+y,z) = p(x,y+z)$. Így $p(y,z) = p(0,y+z) = t(y+z)$, tehát $p(x,y) = t(x+y)$, ahol t általánosított polinom G-n. Ha f-ből levonjuk a $t(x)m(x)$ tagot, akkor $\phi(x,y)$-ből a $p(x,y)m(x)m(y)$ tag eltűnik. Feltehetjük tehát, hogy $\phi(x,y) = \sum q(x,y)n(y) + \sum r(x,y)s(y)$. Ezt (7)-be helyettesítve egy olyan azonosságot kapunk, amelynek bal oldalán szerepel $q(x+y,z)n(x)n(y)$, a jobb oldalon pedig ilyen tag nincs. Ha n nem azonosan 1, akkor ez lehetetlen. Ugyanígy adódik, hogy mindegyik s azonosan 1, tehát ϕ általánosított polinom. Így a 2. tétel szerint f maga is általánosított polinom. ■

A 6. tétel bizonyítása. Tegyük fel, hogy $\phi(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$ polinom-exponenciális függvény. A 8. tétel szerint ebből következik, hogy f általánosított polinom-exponenciális függvény. Legyen $f(x) = \sum p(x)m(x)$, ahol a p-k általánosított polinomok és az m-ek különböző multiplikatív függvények. Ekkor

$$\phi(x,y) = \sum \left[p(x+y)m(x)m(y) - p(x)m(x) - p(y)m(y)\right].$$

Mivel az előállítás egyértelmű, ebből azt kapjuk, hogy ha $m \not\equiv 1$, akkor m folytonos, és a megfelelő p együttható polinom. Ha f előállításában van olyan tag, amelyben $m \equiv 1$, akkor pedig a megfelelő p_0 együtthatóra teljesül, hogy $p_0(x+y) - p_0(x) - p_0(y)$ polinom. A 2. tétel szerint ebből következik, hogy p_0 egy polinom és egy additív függvény összege. A fentiekből világos, hogy f egy polinom-exponenciális függvény és egy additív függvény összege. ■

Irodalom

[1] P. M. Anselone and J. Korevaar, Translation invariant subspaces of finite dimension, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964), 747–752.

[2] M. Engert, Finite dimensional translation invariant subspaces, *Pacific J. Math.*, **32** (1970), 333–343.

[3] P. R. Halmos, *Véges Dimenziós Vektorterek,* Műszaki Könyvkiadó (1984).

[4] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality,* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Uniw. Ślaski (Warszawa–Kraków–Katowice, 1985).

[5] M. Laczkovich, The difference property, in: *Paul Erdős and his Mathematics* (editors: G. Halász, L. Lovász, M. Simonovits and V. T. Sós), Springer (2002), Vol. I, pp. 363–410.

[6] C. Loewner, On some transformation semigroups invariant under Euclidean or non-Euclidean isometries, *J. Math. Mech.*, **8** (1959), 393–409.

[7] M. A. McKiernan, Equations of the form $H(x \circ y) = \sum_i f_i(x)g_i(y)$, *Aequationes Math.*, **16** (1977), 51–58.

[8] L. Schwartz, Théorie génerale des fonctions moyenne-périodiques, *Ann. of Math.*, **48** (4) (1947), 857–929.

[9] J. J. Stone, Exponential polynomials on commutative semigroups, *Appl. Math. and Stat. Lab. Technical Note,* No. 14, Stanford University (1960).

[10] L. Székelyhidi, Note on exponential polynomials, *Pacific J. Math.*, **103** (1982), 583–587.

Miklós Laczkovich: Exponential polynomials

A complex valued function on a topological Abelian group is said to be a *polynomial* if it can be obtained by substituting continuous additive functions into a complex polynomial. By an *exponential* we mean a continuous multiplicative function. A function is called an *exponential polynomial* if it is the sum of products of polynomials and exponentials.

By a well-known theorem, a continuous function is an exponential polynomial if and only if the linear span of its translates is of finite dimensional. We reconstruct and simplify the proof. We show that each of the classes of (i) all polynomials, (ii) generalized polynomials, (iii) exponential polynomials and (iv) generalized exponential polynomials has the double difference property.

ERDŐS PÁL VERSEI

BORISZ SZ. SZTYECSKIN

1982 nyarát és őszét Budapesten töltöttem, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézetében dolgoztam a Reáltanoda utcában. Nyár lévén sokan a világot járták, az Intézetben nagyon kevesen voltak. Reggelenként azután végképp senki sem volt bent, gyakran kettesben ültünk egy szobában Erdős professzorral. Mindketten még kilenc előtt bejöttünk, és egymással szomszédos asztalnál dolgoztunk. Dél felé elkezdtek szállingózni a kollégák, megkezdődött a munka: kérdések, viták, eredmények, majd elérkezett az ebédidő.

Az egyik kora reggel összeszedtem a bátorságomat, és elhatároztam, hogy egy nem-triviális kérdéssel fogom zavarni Erdőst.

– Igaz-e, ahogy valamelyik magyar kollégától hallottam, hogy Professzor Úr verseket is írt?

– Igaz, de természetesen csak keveset, és nem komoly verseket, inkább csak versikéket, vagy ahogy maguk oroszok mondják, *csasztuskákat.*

Az utóbbi szót orosz kiejtéssel mondta, majd folytatta.

– Nem beszélek oroszul, de ismerem, és nagyon tetszik az egyik orosz mondás: *gluposzty i sztaroszty – odna radoszty* (butaság és öregség – egyazon öröm).

Ezt a mondást ismét oroszul mondta, valamilyen nagyon meleg akcentussal.

Ekkor én áttettem a munkafüzetemet az ő asztalára, új lapra lapoztam és megkértem.

– Pali Bácsi! Nem lenne olyan kedves leírni nekem emlékül néhány versét?

Erdős közelebb húzta a füzetet és szép nyugodtan teleírt két oldalt, amiknek a másolatát itt közreadom. Visszaadva a füzetet, hozzátette, hogy ez talán az összes, vagy majdnem az összes, mindenesetre e pillanatban többre nem emlékszik.

Később, ősszel, már Moszkvában Bárány Imrével és Pach Jánossal közösen megkíséreltük ezeket a versikéket oroszra átültetni. 10 évvel később a otthoni dolgozószobámban tűz ütött ki. Bár a munkafüzeteim igencsak megszenvedték ezt a tűzvészt, Erdős verseit megkímélte. Ezek szerint igaz: *a kéziratok nem égnek el!*

(Oroszból fordította: Katona Gyula)

Butaságban szenvedek
nagyon sok pénzt küldenek
nép új tételt kaphatnám
100 ilyenért nem adnám

vagy Erdős – Turán

Öregségben szenvedek
érdemrendet küldenek
20 új évet kaphatnám
100 ilyenért nem adnám

...dős – Turán

Butul az öreg eliramlik a tétel
nem fog az agy nem ízlik az étel
de a legnagyobb baj és ezen kell csak
sírni, sírni
hogy nem tud mást mint venni át magát
írni

Megöregedve megbutultam
inkább lennék homan hizultan
vagy bár már

Erdős–Turán

AZ ÚJJÁÉLEDT BOLYAI-DÍJ
SAHARON SHELAH – SZUBJEKTÍV BEMUTATÁS*

KOMJÁTH PÉTER

Meglepő, örömteli fordulat a magyarországi matematika történetében: poraiból újjáéledt a Magyar Tudományos Akadémia majdnem száz évvel ezelőtti, a világ legkiválóbb matematikusainak adandó díja, a Bolyai-díj. Kőnig Gyula kezdeményezésére eredetileg 1902-ben hozták létre ezt a díjat, hogy minden ötödik évben „bárhol és bármely nyelven megjelent legkiválóbb" matematikai értekezés szerzőjét aranyéremmel és 10 000 korona pénzjutalommal tüntessék ki. Az első két díjazott *Henri Poincaré* (1905) és *David Hilbert* (1910) volt. Az első világháború és a XX. századi magyar történelem későbbi eseményei elsöpörték a további kiosztásokat. Megjegyzem, talán éppen Poincaré és Hilbert volt az utolsó két matematikus, akiket a kortárs és későbbi szakmai közvélemény a „legnagyobb"-nak tekintett. Tevékenységük mind mélységében, mind kiterjedésében olyan volt, amit csak egymáshoz lehetett hasonlítani.

A Magyar Tudományos Akadémia 1994-ben döntést hozott a díj felújításáról. Ez tehát független és korábbi az 1997-ben magánvállalkozók által létrehozott, 1999-ben először kiosztott Bolyai János Alkotói Díjtól, attól számos paraméterben különbözik. A jelenlegi Bolyai-díjat minden ötödik évben adományozzák egy, az előző 10 évben megjelent, önálló matematikai eredményeket tartalmazó monográfia szerzőjének, olyan bírálóbizottság döntése alapján, melyben egyenlő számban vesznek részt a Magyar Tudományos Akadémia tagjai és külföldi matematikusok. Az első kiosztásra 2000. november 4-én került sor. A díjazott *Cardinal Arithmetic* című műve alapján *Saharon Shelah,* a jeruzsálemi Héber Egyetem professzora.

Saharon Shelah 1945. július 3-án született Jeruzsálemben. Tanulmányait a Tel Aviv-i, majd a jeruzsálemi Héber Egyetemen végezte. Témavezetői *H. Gaifman* és *M. O. Rabin* voltak. Végzése óta a Héber Egyetem munkatársa, amit csak néhány hosszabb külföldi útja szakított meg. 29 évesen lett professzor. Néhány éve az amerikai New Jersey állam egyetemének, a Rutgers Egyetemnek részidős munkatársa, minden évben két hónapot tölt ott. 1988 óta tagja az Izraeli Tudományos Akadémiának, 1991 óta külföldi tagja az Amerikai Tudományos és Művészeti Akadémiának.

Tudományos pályája, vagy helyesebben üstökösszerű emelkedése 1968-ban kezdődött. Figyelme M. O. Rabin vezetésével a modellelmélet felé fordult, ahol éppen

*Az eredeti cikk a Természet Világa 132. évfolyam 1. számában (2001. január) jelent meg.

nemrégiben bizonyított be *M. Morley* – nem éppen könnyen – egy megszámlálható elméletekre vonatkozó eredményt. Ezt Shelah jelentős nehézségeket leküzdve azonnal általánosította, tetszőleges elméletre. Ezután néhány év alatt kidolgozott egy minden matematikai elméletre vonatkozó klasszifikáció-elméletet. Ez élesen két részre osztja azokat: egyrészt olyanokra, amik dimenzióval vagy más módon egyszerűen leírhatók (mint például a vektorterek), illetve azokra, amelyeknek egy jól meghatározott módon maximális számú modelljük van, és nem is jellemezhetők paraméterekkel. Eredményeit 1978-ban 500 oldalas, ötletes ideákkal sűrűn teleírt könyvben tette közzé.

Shelah ugyancsak korán kezdett érdeklődni a halmazelmélet iránt. *Erdős Pál* és *Hajnal András* a hatvanas évek végén nevezetes cikkben gyűjtötte össze a kombinatorikus halmazelmélet nyitott kérdéseit, másfél évtizednyi közös kutatásaik nyomán. Shelah majdhogynem egymás után, sorozatban oldotta meg ezeket a nevezetes problémákat, a legtöbb esetben új kutatási irányokat nyitva. Ettől datálódik Erdős és Hajnal barátsága és együttműködése az izraeli matematikussal. A munka Shelahra eső része legtöbbször az volt, hogy (sokszor teljesen eredeti, új módszer alkalmazásával) megoldotta a felvetett problémát. De nemcsak a kombinatorikus halmazelméletben, majd a halmazelméleti topológiában alkotott nagyot, hanem gyakorlatilag forradalmasította a függetlenségi módszereket. Cohen nyomán ezek mindig egy struktúra („kényszerképzet") meghatározását követelik, amelynek meghatározott logikai-kombinatorikai tulajdonságai lehetnek. Shelah számára a logikai tulajdonságok meghatározása, változtatása nem jelentett szokatlan feladatot, ugyanakkor rendkívüli invencióval és munkabírással határozta meg, küzdötte le a technikai feladatokat, melynek nyomán (többek között) született egy könyv: Proper forcing (1982). Ennek hatása már rendkívüli: cikkek százaiban használták fel és fejlesztették tovább a módszereket, számos esetben a halmazelmélet legfontosabb problémáinak megoldására. Már itt jelentkezett Shelah néhány jelentős újítása, köztük a logikai módszerek erőteljes használata halmazelméleti bizonyításokban (elemi részmodell).

Erdős és Shelah találkozásával kapcsolatban érdemes megjegyezni, hogy míg Erdős a problémafelvetések, -sejtések géniusza volt, Shelah mindenekelőtt varázslatos megoldó. Shelah mesélte, hogy amikor először hallotta az elsőrendű nyelv definícióját, azonnal tudta, hogy az az igazi. Erdős viszont azt mondta egyszer, hogy sosem barátkozott meg ezzel a fogalommal. Míg Shelah lubickolt a függetlenségi tételek között, Erdős sosem szerette, ha egy matematikai probléma eldönthetetlen. („A függetlenség ismét fölütötte rút fejét" – szokta volt mondogatni.)

Shelah figyelme 1987 körül fordult a számossághatványozás („számosság aritmetika") felé. Ez a halmazelmélet centrumának nevezhető problémakör számos meglepő paradigmaváltáson esett át. Cantor eredeti problémája, hogy az általánosított kontinuumhipotézis levezethető-e vagy cáfolható-e, eldönthetetlennek bizonyult (Gödel, Cohen). Egy ideig úgy tűnt, hogy a forszolási módszerekkel belátható lesz, hogy az általános probléma esetei függetlenek egymástól. *Silver* 1974-es felfedezése, majd ennek nyomán *Fred Galvin* és *Hajnal András* 1975-ös tétele azt mutatta meg, hogy egyes szinguláris számosságokra a számossághatványozás értéke nem térhet el nagyon az általánosított kontinuumhipotézis általi minimumtól.

Shelah először ezeket a tételeket általánosította, majd egy technikailag mély, rafinált módszer kidolgozásával olyan jó becslést sikerült adnia, hogy azt első látásra minden halmazelmélet-kutató hihetetlennek (vagy hibásnak) tartotta. E módszert (ami a Bolyai-díjas könyv tárgya), a pcf-elméletet továbbfejlesztve nemcsak a matematika számos ágában ért el gyönyörű eredményeket, hanem kialakított egy meglepő új képet is, ami szerint noha lehet egy halmaznak nagyon sok részhalmaza, ez csak a rossz kérdésfeltevés következménye. Ha azt nézzük, hogy hány részhalmaz kell ahhoz, hogy bizonyos értelemben mindet megkapjuk, olyan számossághoz jutunk, ami nem lehet tetszés szerinti nagy. Shelah tétele szerint az általánosított kontinuumhipotézis (helyesebben egy ravaszan megfogalmazott változata) mégis igaz. Az új szemléletmód lényege tehát az, hogy a függetlenségi eredményekkel kikutatjuk a helyes abszolút eredményt, amit azután bebizonyítunk.

Nincs mód arra, hogy akár vázlatosan is ismertessem Shelah fontos tételeit az algebra, topológia stb. területén, csak annyit jegyzek meg, hogy sok modellelméleti bizonyítása véges kombinatorikai okoskodás, így nem meglepő, hogy időről időre megoldott egy-egy nevezetes véges kombinatorikai problémát is.

E kiváló kutató speciális problémája, hogyan juttassa el bizonyításait matematikustársaihoz. Gondolatainak, ötleteinek sokaságát képtelenség mind leírnia, csiszolt, átgondolt megfogalmazásáról nem is szólva. Dolgozataiban, könyveiben tömören leírt, rendkívül általános bizonyítások sorakoznak, sokszor eredeti, mély ötletet fogalmaz meg néhány sorban. Ezért nehéz, de igen tanulságos olvasmányok az írásai, én is sokat profitáltam belőlük. Természetes, hogy sok cikkében a társszerzők levették Shelah vállairól a fogalmazás, leírás terhét. Shelah publikációinak listája és számos cikke az interneten is megtekinthető.

Shelah matematikai tevékenységét elképesztő ötletgazdagság jellemzi, ami párosul egy ugyancsak rendkívüli technikai szervező és kivitelező erővel. Kedvvel készít bonyolult és még bonyolultabb definíciókat, hogy azután virtuóz módon igazoljon egyes nehezebb tulajdonságokat. (Nekünk, egyszerű földi halandóknak ilyenkor még ezen dilemmák leellenőrzése is nehéz feladat, hiszen a barokkosan bonyolult definíciókat nemigen tudjuk egyszerre a fejünkben tartani.) Előfordult, hogy egyik-másik bizonyítását bonyolultnak gondoltam, egészen addig, amíg meg nem ismertem a folytatást. Sokszor, amikor megértettem egy-egy definíciót, tételt, hirtelen minden a helyére ugrott. A világ átrendeződött, s az új rendben korábban távolinak tűnő eredmények közötti új összefüggések váltak láthatóvá.

Shelah sok magyar matematikussal dolgozott együtt, társszerzői voltak: Balogh Zoltán, Bíró Balázs, Erdős Pál, Fuchs László, Hajnal András, Juhász István, Komjáth Péter, Makkai Mihály és Soukup Lajos.

A felújított Bolyai-díjjal Shelah személyében olyan kutatót érdemesítettek, kinek indíttatásában szerepet játszott a magyar matematika, s aki később erőteljesen visszahatott matematikánkra.

JELENTÉS AZ 2000. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

GÁCS ANDRÁS

A Bolyai János Matematikai Társulat 2000. október 27. és november 6. között rendezte meg a 2000. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt.

A verseny megrendezésére a társulat a következő bizottságot jelölte ki: Laczkovich Miklós (elnök), Gács András (titkár), Buczolich Zoltán, Császár Ákos, Freud Róbert, Fried Ervin, Halász Gábor, Komjáth Péter, Makai Endre, Michaletzky György, Pálfy Péter Pál, Ruzsa Imre, T. Sós Vera.

A versenyen a bizottság 10 feladatot tűzött ki. A feladatokat sorrendben Soukup Lajos, Hajnal Péter – Barát János, Pach János – Károlyi Gyula – Tóth Géza, Ruzsa Imre, Totik Vilmos, Laczkovich Miklós, Jean-Pierre Kahane, Juhász István, Moussong Gábor – Szűcs András és Móri Tamás bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A versenyre 25 versenyző 96 megoldást nyújtott be, amiből 66 bizonyult teljesnek.

A beérkezett megoldások értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta:

I. díjban és 35 000 Ft pénzjutalomban részesül *Frenkel Péter,* az ELTE IV. éves hallgatója.

II. díjban és 25 000 Ft pénzjutalomban részesül *Pap Gyula,* az ELTE IV. éves hallgatója.

III. díjban és 15 000 Ft pénzjutalomban részesülnek *Kun Gábor,* az ELTE III. éves hallgatója, *Lippner Gábor,* az ELTE III. éves hallgatója, *Mátrai Tamás,* az ELTE IV. éves hallgatója.

Dicséretben részesülnek *Bérczi Gergely,* az ELTE III. éves hallgatója, *Lukács László,* az ELTE II. éves hallgatója.

Indoklás:

Frenkel Péter helyesen oldotta meg a 2., 3., 4., 5., 6., 8., 9. és 10. feladatot és részeredményt ért el a 7. feladatban. Kiemelkedő a 6. feladatra adott megoldása.

Pap Gyula helyesen oldotta meg az 1., 2., 4., 5., 6., 8. és 10. feladatot és részeredményt ért el a 7. feladatban. Kiemelkedő az 1. feladatra nyújtott megoldása.

Kun Gábor helyesen oldotta meg a 2., 3., 4., 6., 8. és 10. feladatot.

Lippner Gábor helyesen oldotta meg a 2., 3., 4., 8., és 10. feladatokat, nem teljes, de befejezhető megoldást nyújtott be a 6. feladatra. A 3. feladatra adott megoldása kiemelkedő.

Mátrai Tamás helyesen oldotta meg az 1., 2., 3., 6. és 8. feladatot, részeredményt ért el a 7. feladatban. A 6. feladatra adott megoldása kiemelkedő.

Bérczi Gergely helyesen oldotta meg az 2., 8. és 10. feladatot, valamint a 4. feladat első felét.

Lukács László helyesen oldotta meg a 3., 5. és 8. feladatot, valamint a 4. feladat első felét.

A verseny feladatai

1. (Soukup Lajos) *Lássuk be, hogy van olyan* $f : [\omega_1]^2 \to \omega_1$ *függvény, amelyre*

(i) $f(\alpha,\beta) < \min\{\alpha,\beta\}$, *ha* $\min\{\alpha,\beta\} > 0$*;*

(ii) *ha* $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_i < \ldots < \omega_1$, *akkor*

$$\sup\{\alpha_i \,:\, i < \omega\} = \sup\{f(\alpha_i,\alpha_j) \,:\, i,j < \omega\}.$$

Megoldás: Minden $0 < \beta < \omega_1$ limeszrendszámhoz válasszunk egy hozzá tartó megszámlálható $f_n(\beta)$ szigorúan monoton növő sorozatot. Mivel minden ω_1-nél kisebb számosság megszámlálható, ez megtehető. Ezek után a β megszámlálható limeszrendszámra és $\alpha < \beta$ rendszámra legyen $N_\beta(\alpha) = \inf\{n \in \omega \mid \alpha \leq f_n(\beta)\}$. Vegyük észre, hogy ez α monoton függvénye.

Minthogy $\bigcup_{n\in\omega} f_n(\beta) = \beta > \alpha$, a fenti definíció nem-üres halmaz szuprémumát adja, azaz $N_\beta(\alpha) \in \omega$. Legyen végül

$$f(\alpha,\beta) = \begin{cases} f_{N_\beta}(\alpha), & \text{ha } \alpha \text{ és } \beta \text{ limeszrendszámok, } \alpha < \beta; \\ \alpha - 1, & \text{ha } \alpha \text{ rákövetkező, } \alpha \leq \beta; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor az (i) feltétel nyilván teljesül f-re. Lássuk be a (ii) feltétel teljesülését! Legyen

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_i < \ldots < \omega_1$$

$$\sup\{\alpha_i \mid i < \omega\} = \alpha$$

$$\sup\{f(\alpha_i,\alpha_j) \mid i,j < \omega\} = \alpha^*$$

Elég azt belátni, hogy $\alpha \leq \alpha^*$. Mivel α limeszrendszám, ehhez $\gamma < \alpha \Rightarrow \gamma \leq \alpha^*$ elegendő. Legyen tehát $\gamma < \alpha$ tetszőleges. Persze feltehetjük, hogy rögtön $\gamma < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$

Ha valamelyik α_i rákövetkező, akkor $\gamma \leq \alpha_i - 1 = f(\alpha_i,\alpha_i) \leq \alpha^*$ és kész vagyunk. Ha mindegyik limeszrendszám, akkor legyen $N(j) = N_{\alpha_j}(\gamma) = \inf\{k \in \omega \mid \gamma \leq f_k(\alpha_j)\}$.

Persze N_{α_j} monotonitásából $i < j$ esetén $N(j) \leq N_{\alpha_j}(\alpha_i)$ és így $f_{N(j)}(\alpha_i) \leq f(\alpha_i, \alpha_j) \leq \alpha^*$. Ha valamely $i < j$ indexekre $N(i) \leq N(j)$, akkor $N(i)$ definíciója és az iménti megjegyzés szerint

$$\gamma \leq f_{N(i)}(\alpha_i) \leq f_{N(j)}(\alpha_i) \leq f(\alpha_i, \alpha_j) \leq \alpha^*.$$

Ez esetben is kész vagyunk, márpedig az $N(i)$ sorozat nem lehet szigorúan monoton csökkenő. Így a (ii) feltétel valóban teljesül.

(Érkezett: 9 dolgozat. Megoldotta: Pap Gyula, Mátrai Tamás, Juhász András, Tímár Ádám, Mester Péter.)

2. (Barát János, Hajnal Péter) *Adott egy körön n piros és n kék ív úgy, hogy bármely piros ív metsz bármely kék ívet. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pont a körön, melyet legalább n színes ív fed le.*

Megoldás (több versenyző és Tardos Gábor megoldása alapján): Feltehető, hogy íveink zártak és körünkön adott egy irányítás. Ezek után beszélhetünk egy ív első pontjáról (az ív elejéről), illetve utolsó pontjáról (az ív végéről), továbbá pontok egy $\mathcal{H}$ véges halmazának egy eleme után következő $\mathcal{H}$-beli pontról.

Indirekten bizonyítunk. Legyen $\mathcal{I}$ egy olyan ellenpélda ívrendszer, amelyre n (a piros és kék ívek közös száma) minimális. Legyen $\mathcal{P}$ az ívek végpontjai által adott pontrendszer a körünkön. $\mathcal{I}$ ellenpélda volta pontosan azzal ekvivalens, hogy $\mathcal{P}$ egyik eleme sincs n-szeresen lefedve.

Addig rövidítjük az intervallumokat, amíg a rövidített ívek is ellenpéldát alkotnak, azaz a piros-kék metsző tulajdonságuk megmarad. A tovább nem rövidíthető $\mathcal{I}'$ ívrendszer $\mathcal{P}'$ végponthalmazának minden eleme vagy piros ív vége és egyben néhány kék ív eleje is, vagy kék ív vége és egyben néhány piros ív eleje is. Továbbá az együtt kezdődő egyszínű ívek együtt érnek véget.

Ha egy piros és egy kék intervallum együtt lefedi $\mathcal{P}'$-t, akkor az $\mathcal{I}'$-ből ezek elhagyásával kapott ívrendszer is ellenpélda, ami ellentmond $\mathcal{I}$ választásának. Így $\mathcal{I}'$ rendelkezik a következő tulajdonsággal:

($\star$) Bármely kék és piros ív együtt nem fedi le $\mathcal{P}'$-t.

Nem lehet, hogy egy piros ív vége utáni végpont egy kék ív eleje, hiszen metszőknek kellene lenniük és ez ellentmondana a ($\star$) tulajdonságnak. Így két típusú $\mathcal{P}'$-beli pont van: „piros eleje–kék vége", illetve„kék eleje–piros vége", továbbá ezek felváltva következnek a körön.

Legyen $X \in \mathcal{P}'$. Ekkor az X végpontú piros és kék ív együtt nem fedheti le $\mathcal{P}'$ összes elemét. Továbbá nem lehet, hogy az általuk le nem fedett pontok között legyen X-től eltérő típusú Y pont. Valóban, tegyük fel, hogy X egy kék ív végpontja és egy piros ív kezdőpontja, míg Y egy piros ív végpontja és egy kék ív kezdőpontja. Az X-ből induló piros ív végpontja az Y előtti Y^- pont. Ezt az ívet metszenie kell az Y-ból induló kék ívnek, azaz az Y-ból induló kék ív tartalmazza X-et. Hasonlóan az Y-ban végződő piros ív is tartalmazza X-et. Azaz az Y végpontú piros, illetve kék ív lefedi $\mathcal{P}'$ összes elemét, ami ellentmond a ($\star$) tulajdonságnak. Így kapjuk, hogy

($\star\star$) bármely közös végpontú kék és piros ív pontosan egy $\mathcal{P}'$-beli pontot nem fed le.

Definiáljuk egy ív hosszát mint a $\mathcal{P}'$-beli pontjainak száma. Ekkor minden piros ív egyforma hosszú. Valóban, a ($\star\star$) tulajdonság miatt, ha egy piros ív eleje E, vége V, akkor E-be a kék ív a V utáni második $\mathcal{P}'$-beli pontból, V^{++}-ból indul. Ugyancsak ezen tulajdonság miatt a V^{++}-ban végződő piros ív az E-t követő második, E^{++} pontból indul. Azaz az E-ből és E^{++}-ból induló piros ívek hossza azonos. Ebből következik, hogy az összes piros ív hossza közös.

Legyen ℓ a piros ívek közös hossza. Legyen $|\mathcal{P}'| = k$. Ekkor ($\star\star$) miatt a kék íveknek is közös a hossza: $k - \ell$. Így a $\mathcal{P}'$-beli pontok és íveink között $n\ell + n(k-\ell) = nk$ illeszkedés van, azaz a $\mathcal{P}'$-beli pontok átlagosan n ívre illeszkednek. Így lennie kell olyan $\mathcal{P}'$-beli pontnak is, amelyen legalább n ív halad át.

(Érkezett: 13 dolgozat. Megoldotta: Frenkel Péter, Pap Gyula, Mátrai Tamás, Kun Gábor, Lippner Gábor, Bérczi Gergely, Gröller Ákos. Részmegoldást adott: Végh László, Pálvölgyi Dömötör, Szabó Szilárd.)

3. (Károlyi Gyula, Pach János, Tóth Géza) *Mutassuk meg, hogy minden $n \geq 3$ egész számra van olyan $N(n)$ egész, hogy teljesül a következő: ha P egy legalább $N(n)$ elemű síkbeli ponthalmaz, melynek bármely három pontja olyan valódi háromszöget határoz meg, mely a belsejében legfeljebb egy P-beli pontot tartalmaz, akkor P pontjai közül kiválaszthatók egy olyan konvex n-szög csúcsai, melynek belsejébe egyetlen további pontja sem esik P-nek.*

Megoldás (Lippner Gábor): A keresett sokszöget úgy fogjuk megtalálni, hogy először keresünk egy nagy konvex sokszöget, amelyben még lehetnek P-beli pontok, ebből legyártunk egy kisebbet úgy, hogy a belső P-beli pontok száma csökkenjen, majd az eljárást iterálva elérjük, hogy a sokszög üressé váljon, de még mindig elég sok csúcsa legyen.

Tegyük fel, hogy találtunk P-ben egy m csúcsú sokszöget, melynek belsejében k P-beli pont van. Legyen $(l-1)(k-1) < n-2 \leq l(k-1)$. Háromszögeljük a sokszöget egy C csúcsából induló átlókkal és osszuk be a keletkezett $m-2$ háromszöget $k-1$ csoportba úgy, hogy minden csoport $l-1$ vagy l egymás melletti háromszögből álljon. Skatulyaelv szerint lesz egy csoport, melybe legalább 2 P-beli pont esik, legyen ez $A_1, \ldots, A_i$, ahol $i = l-1$ vagy $i = l$ (tehát a háromszögek C csúcsa közös, a maradék két csúcs pedig A_1 és A_2, A_2 és $A_3, \ldots, A_{i-1}$ és A_i). Ekkor a feladat feltételei szerint a CA_1A_i háromszögbe legfeljebb egy pont eshet, tehát legalább egy P-beli pont az $A_1A_2\ldots A_i$ sokszög belsejében kell legyen. Legyen j az a legkisebb index, melyre az $A_1A_{j-1}A_j$ háromszögben van (pontosan egy) ilyen B pont. $j = l$ esetén cseréljük le az m-szög $A_1 \ldots A_j$ ívét az A_1BA_j ívre, míg $j < l$ esetén egyszerűen az A_1A_j szakaszra. Így egy legalább $m - l + 2$ oldalú konvex sokszöget kaptunk, melynek belsejében $k-1$ pont van.

Játsszuk el ezt addig, amíg az aktuális m' és k' értékekre $(l-1)(k'-1) < m'-2 \leq l(k'-1)$ teljesül. Mivel k' minden lépésben eggyel, míg m' legfeljebb $(l-2)$-vel csökken, a bal oldali egyenlőtlenség nem romolhat el. Másrészt viszont $l(k'-1)$ és $(m'-2)$ minden lépésben legalább 2-vel közelebb kerül egymáshoz, tehát legfeljebb $\dfrac{l(k-1)-(m-2)}{2}+1$ lépés után az aktuális m', k' értékekre $l(k'-1) < m'-2$ fog teljesülni. Mivel minden lépésben eggyel csökkent a sokszög belsejében lévő P-beli pontok száma,

$$k' \geq k - \left(\frac{l(k-1)-(m-2)}{2}+1\right) > k - \frac{k-1}{2} - 1 = \frac{k-1}{2}.$$

Tehát a leírt eljárás egy, a belsejében k P-beli pontot tartalmazó, P-beli csúcsokból álló konvex m-szögből legyárt egy k' P-beli pontot tartalmazó, P-beli csúcsokból álló konvex m'-szöget úgy, hogy ha $(k-1)(l-1) < m < (k-1)l$, akkor $m' > (k'-1)l$ és $k' \geq \frac{k-1}{2}$.

Legyen P egy legalább $N(n) = 2^{4n}$ pontú halmaz, mely eleget tesz a feladat feltételeinek. Ekkor P konvex burka egy m csúcsú konvex sokszög, melynek belsejében $k \leq m-2$ P-beli pont van (hiszen a sokszög $m-2$ háromszögre bontható), ahol $m+k = 2^{4n}$. Legyen $(l-1)(k-1) < m-2 \leq l(k-1)$ és $2^u \leq k < 2^{u+1}$. Ha eljárásunkat többször lefuttatjuk (l-et mindig újradefiniálva), végül elérhetjük, hogy $2 \leq k'' \leq 3$ teljesüljön (persze ha már eredetileg is $k \leq 1$, akkor könnyen kiválaszthatunk n csúcsot a legalább 2^{2n}-ből úgy, hogy üres sokszöget kapjunk). Ekkor a kapott m'', l'' értékekre $m'' > (l''+u-2)$, hiszen minden lépésben k legfeljebb feleződött, míg l legalább eggyel nőtt. Könnyű látni, hogy skatulyaelv miatt a kapott m'' szög csúcsaiból kiválaszthatók egy legalább $\frac{m''+3}{4}$ csúcsú üres konvex sokszög csúcsai.

$$\frac{m''+3}{4} > \frac{(k''-1)(l+u-2)+3}{4} \geq \frac{l+u+1}{4}.$$

Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy ez legalább n (az $m-2 \leq l(k-1)$ és $m \geq 2^{4n-1}$ feltételek alapján).

(Érkezett: 9 dolgozat. Megoldotta: Frenkel Péter, Mátrai Tamás, Kun Gábor, Lippner Gábor, Tímár Ádám, Lukács László, Haász Sándor, Zábrádi Gergely.)

Megjegyzés: A feladat kitűzői és a legtöbb versenyző is az Erdős–Szekeres illetve valamilyen Ramsey tételt használtak, ami általában a leírtnál rövidebb bizonyítást adott, viszont az $N(n)$-re itt kapott exponenciális felső becslésnél sokkal rosszabbat. Lippner Gábor megoldása azért kiemelkedő, mert közel van a kitűzők által $N(n)$-re adott legjobb alsó becsléshez (amely $2^{n/2}$ nagyságrendű).

4.(Ruzsa Imre) *Legyenek $a_1 < a_2 < a_3$ pozitív egész számok. Bizonyítsuk be, hogy vannak olyan x_1, x_2, x_3 egész számok, nem mindegyik 0, hogy $\sum a_i x_i = 0$ és*

$$\max |x_i| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a_3} + 1.$$

Mutassuk meg, hogy a $2/\sqrt{3}$ helyébe kisebb számot írva az állítás nem marad igaz.

Megoldások a feladat első felére.

1a. megoldás (Juhász András, Lippner Gábor, Pap Gyula): Feltehetjük, hogy

$$\text{lnko}\,(a_1, a_2, a_3) = 1.$$

Tekintsük a $\sum a_i x_i = 0$ egyenletet kielégítő vektorokat. Ezek síkrácsot alkotnak, melynek alapparallelogrammája (rutin módon látható, hogy) $|\overline{a}|$ területű, ahol $\overline{a} = (a_1; a_2; a_3)$ jelöli a számainkból képzett vektort. Célunk belátni, hogy ennek a rácsnak van nemtriviális pontja az $|x_i| \leq M = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a_3}$ egyenlőtlenségekkel leírt kockában. Minkowski alaptétele miatt ehhez elég kiszámolni, hogy a rács síkjának és a kockának metszete legalább $4|\overline{a}|$ területű. A terület kiszámítása kicsit macerás.

1b. megoldás (Frenkel Péter, Pálvölgyi Dömötör): A metszet területének kiszámítása elkerülhető az alábbi trükkel. Vegyük észre, hogy a metszet mindenképpen tartalmaz pontot a kocka függőleges oldalfelezőin, valamint a függőleges élek közül két átellenesen. Ez úgy látható, hogy tekintjük a $\sum a_i x_i$ függvényt a $(-M, M, \pm M)$, $(0, M, \pm M)$ stb. pontpárokon. Mivel a_3 a legnagyobb, az értékek ellentétes előjelűek, van tehát valahol közbül egy 0 érték.

Így a metszet vetülete az xy síkra mindenképpen tartalmazza az alábbi 6 pontot: $(\pm M, \pm M)$, $(0, \pm M)$, $(\pm M, 0)$. A metszet vetületének területe legalább az ezek által kifeszített hatszög területe, vagyis $3M^2 = 4a_3$. A metszet területe tehát legalább $4a_3/\cos\alpha$, ahol α a mi síkunk és az xy sík szöge. Ez pedig annyi, mint a normálisok szöge, vagyis $\cos\alpha = a_3/|\overline{a}|$, a metszet területe legalább $4|\overline{a}|$.

2. megoldás (Terpai Tamás): Tekintsük a síkon az $a_3 \mid a_1x_1 + a_2x_2$ oszthatóságot kielégítő (x_1, x_2) rácspontokat. Ez egy parallelogrammarács, melyben az alapparallelogramma területe a_3. Azt kell belátni, hogy ennek van pontja az

$$|x_1| \leq M, \quad |x_2| \leq M, \quad |a_1x_1 + a_2x_2| \leq Ma_3$$

egyenlőtlenségek által leírt síkidomban. Evégett elég megmutatni, hogy ennek területe legalább $4a_3$.

Ha $a_1 + a_2 \leq a_3$, a harmadik egyenlőtlenség nem számít, a síkidom négyzet, területe $4M^2$. Ha $a_1 + a_2 > a_3$, a síkidom hatszög. A négyzetből levágott két derékszögű háromszög befogói $M(a_1 + a_2 - a_3)/a_2$ és $M(a_1 + a_2 - a_3)/a_1$, mindegyik $\leq M$ a feltevés miatt. Így a hatszög területe $\geq 4M^2 - 2(M^2/2) = 3M^2 = 4a_3$.

3. megoldás (Bérczi Gergely, Kiss Gergely, Kun Gábor, Lukács László, illetve a kitűző eredeti megoldása):

Legyen $K = [M]$, és tekintsük a síkon a következő halmazt:

$$Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2 \,:\, 0 \leq y_i \leq K,\ K/2 \leq y_1 + y_2 \leq 3K/2\}.$$

Ezen halmaz elemszáma

$$(K+1)^2 - \left[\frac{K-1}{2}\right]\left[\frac{K+1}{2}\right] \geq \frac{3}{4}(K+1)^2 > \frac{3}{4}M^2 = a_3.$$

Így az $a_1y_1 + a_2y_2$ számok nem adhatnak mind különböző maradékot modulo a_3, vagyis lesz olyan (y_1, y_2) és $(y_1', y_2') \in Y$, hogy

$$a_1y_1 + a_2y_2 \equiv a_1y_1' + a_2y_2' \pmod{a_3}.$$

Legyen

$$x_1 = y_1 - y_1', \quad x_2 = y_2 - y_2'.$$

Ekkor $|x_i| \leq K$ és

$$|x_1 + x_2| = \left|(y_1 + y_2) - (y_1' + y_2')\right| \leq 3K/2 - K/2 = K.$$

Legyen

$$x_3 = -\frac{a_1x_1 + a_2x_2}{a_3}.$$

Ez egész lesz a fenti kongruencia miatt, és persze $\sum a_i x_i = 0$.

Megbecsüljük x_3-at. Ha x_1, x_2 különböző előjelűek, akkor

$$|a_1x_1 + a_2x_2| \le \max\left(|a_1x_1|, |a_2x_2|\right) \le Ka_2,$$

ha pedig azonos előjelűek, mondjuk mindkettő pozitív, akkor

$$0 < a_1x_1 + a_2x_2 \le a_2(x_1 + x_2) \le Ka_2,$$

tehát mindenképpen

$$|x_3| \le \frac{Ka_2}{a_3} \le K.$$

Mindegyik megoldás mutatja, hogy a feladat szövegében a $+1$ felesleges. Ha a 3. megoldást kicsit ügyetlenebbül csináljuk, akkor jön ki így.

Megoldás a feladat második felére: Megmutatjuk, hogy a konstans nem javítható. Evégett legyen

$$a_1 = 3m^2, \quad a_2 = 3m^2 + m, \quad a_3 = 3m^2 + 2m + 1.$$

Be fogjuk látni, hogy $\max |x_i| \ge 2m$.

Tegyük fel, hogy

$$3m^2x_1 + (3m^2 + m)x_2 + (3m^2 + 2m + 1)x_3 = 0.$$

Az egyenlőséget modulo m véve látszik, hogy $m \mid x_3$. Ha $|x_3| \ge 2m$, készen vagyunk. Megvizsgáljuk az $x_3 = 0, \pm m$ eseteket.

Ha $x_3 = 0$, egyenletünk

$$(3m + 1)x_2 + 3mx_1 = 0$$

formát ölt. Innen $3m \mid x_2$, továbbá $x_1 = 0$ nem lehet, mert akkor $x_2 = 0$ következnék. Így $|x_2| \ge 3m$.

Legyen $x_3 = m$. Ekkor az egyenlet

$$3mx_1 + (3m + 1)x_2 + 3m^2 + 2m + 1 = 0$$

lesz, átrendezve

$$3m(x_2 + x_1 + m) = -(x_2 + 2m + 1).$$

Tehát $3m \mid x_2 + 2m + 1$. Ennek az egyetlen olyan megoldása, melyre $|x_2| < 2m$, az $x_2 = m - 1$, és ekkor $x_1 = -2m$.

Az $x_3 = -m$ eset nyilván a fentire visszavezethető.

(Érkezett: 12 dolgozat. Megoldotta: Frenkel Péter, Pap Gyula, Kun Gábor, Lippner Gábor, Terpai Tamás. Az egyik felét megoldotta: Bérczi Gergely, Kiss Gergely, Devecsery András, Juhász András, Lukács László, Pálvölgyi Dömötör.)

5. (Totik Vilmos) *Igazoljuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan n, és vannak olyan pozitív $\{a_k\}_{k=1}^n$ számok, hogy $\varepsilon < x < 2\pi - \varepsilon$ esetén*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx < -\frac{1}{\varepsilon}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right|.$$

Megoldás: Tekintsük a

$$g(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1 = \left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} z^k\right)^2 - 1$$

függvényt, amely pozitív együtthatós, és az egységkört a $(-\infty, -1]$ mentén felvágott síkra képezi. Direkt számolás mutatja, hogy ha $z = re^{it}$ és itt $r \nearrow 1$, akkor

$$g(z) \to -\cot^2 \frac{t}{2} - 1,$$

és itt a konvergencia egyenletes az $\varepsilon \le t \le 2\pi - \varepsilon$ halmazon. De ez azt jelenti, hogy egy jó nagy indexű $S_N(z)$ részletösszege a $g(z)$ sorfejtésének olyan lesz, hogy $z = e^{it}$, $\varepsilon < t < 2\pi - \varepsilon$ esetén

$$\Re S_n(z) < -\frac{1}{\varepsilon}\left|\Im S_n(z)\right|,$$

és ez éppen a feladat megoldását adja.

(Érkezett: 5 dolgozat. Megoldotta: Frenkel Péter, Pap Gyula, Lukács László, Máthé András. Részeredményt ért el: Terpai Tamás.)

6. (Laczkovich Miklós) *Adott a számegyenes felbontása két nem-megszámlálható Borel-halmazra. Mutassuk meg, hogy az egyik halmaznak van olyan eltoltja, amely a másikat nem-megszámlálható halmazban metszi.*

Megoldás: Legyen $\mathbb{R} = A \cup B$, ahol A és B nem-megszámlálható Borel-halmazok. Ekkor legalább az egyikük második kategóriájú; a szimmetria miatt feltehetjük, hogy B az. Mivel minden Borel-halmaz Baire tulajdonságú, ezért van olyan I intervallum, amelyben B reziduális, azaz amelyre $I \setminus B$ első kategóriájú. Legyen C egy első kategóriájú F_σ halmaz, amely tartalmazza $I \setminus B$-t.

Mivel A nem-megszámlálható és Borel, ezért tartalmaz nem-üres perfekt halmazt. Legyen P ilyen. Nyilván feltehetjük, hogy P átmérője kisebb, mint $|I|$, és így van egy J intervallum úgy, hogy $P + x \subset I$ minden $x \in J$-re. Legyen $M \subset P$ sűrű, megszámlálható halmaz P-ben. Ekkor $D = \{x \in J : (M + x) \cap C \neq \emptyset\}$ első kategóriájú, mert része az $\bigcup_{m \in M} (C - m)$ halmaznak, amely megszámlálhatóan sok első kategóriájú halmaz uniója, tehát maga is első kategóriájú. Így $J \setminus D \neq \emptyset$; legyen $x \in J \setminus D$. Ekkor $P + x \subset I$ és $(M + x) \cap C = \emptyset$, tehát $(P + x) \cap B \supset (P + x) \cap (I \setminus C) \supset M + x$. Mivel $M + x$ sűrű $P + x$-ben és $I \setminus C$ G_δ halmaz, ezért $(P + x) \cap (I \setminus C)$ a $P + x$ perfekt halmaz egy sűrű G_δ részhalmaza. Ezért $(P + x) \cap (I \setminus C)$ reziduális a $P + x$ altérben, és így tartalmaz nem-üres perfekt halmazt. Ez egyszersmind $(A + x) \cap B$-nek is részhalmaza, amiből következik, hogy $(A + x) \cap B$ nem-megszámlálható.

(Érkezett: 8 dolgozat. Megoldotta: Frenkel Péter, Pap Gyula, Mátrai Tamás, Kun Gábor. Részeredményt ért el, illetve hiányos megoldást adott: Juhász András, Lippner Gábor.)

7. (Jean-Pierre Kahane) *Legyen $H(D)$ a $D = \{z : |z| < 1\}$ komplex egységkörön holomorf függvények tere a D-beli kompakt halmazokon való egyenletes konvergencia által megadott topológiával ellátva. Vezessük be $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ esetén az $S_n(f, z) = \sum_{m=0}^{n} a_m z^m$ jelölést. Nevezzünk egy $f \in H(D)$ függvényt univerzálisnak, ha tetszőleges, az egységkör határán folytonos, komplex értékű g függvényt* *véve, alkalmas $S_{n(j)}(f,z)$ részletösszegek minden $A_\varepsilon = \{z = e^{it} : 0 \le t \le 2\pi - \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ íven egyenletesen approximálják a g függvényt.*

Bizonyítsuk be, hogy $H(D)$-nek van olyan sűrű G_δ részhalmaza, melynek minden eleme univerzális.

Megoldás: Legyen P tetszőleges polinom, $\delta > 0$ és

$$g(P,\delta,\varepsilon) = \Big\{ f \in H(D) \,:\, \exists N \;\big|P(z) - S_N(f,z)\big| < \delta \text{ az } A_\varepsilon\text{-on} \Big\}.$$

Ez a halmaz $H(D)$-ben nyílt és megmutatjuk, hogy sűrű. Legyen $h \in H(D)$. Mergelján tételét használva $H(D)$-ben h-t és $C(A_\varepsilon)$-ban P-t egyidejűleg közelíthetjük egy Q polinommal úgy, hogy Q egyidejűleg tartozzon $g(P,\delta,\varepsilon)$-hoz és h egy adott környezetéhez. Így $g(P,\delta,\varepsilon)$ sűrű.

Legyen

$$\mathcal{H} = \bigcap_{P,\delta,\varepsilon} g(P,\delta,\varepsilon),$$

ahol δ, ε racionálisak és P együtthatói racionálisak. Legyen $f \in \mathcal{H}$. Minden $f \in C(\partial D)$ A_ε-on közelíthető racionális együtthatós polinomokkal, és így az f Taylor-sorának egy alkalmas részletösszegével. Választásunk szerint ha δ és ε nullához tartanak, akkor választhatunk egy $n(j)$ sorozatot, melyre $S_{n(j)}(f,z)$ egyenletesen $g(z)$-hez tart minden A_ε íven.

(4 részmegoldás érkezett: Frenkel Péter, Pap Gyula, Mátrai Tamás, Braun Gábor.)

8. (Juhász István) *Bizonyítandó, hogy ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezésre teljesül, hogy összefüggő halmaz képe összefüggő és kompakt halmaz képe kompakt, akkor f folytonos.*

Megoldás: Tegyük fel indirekt módon, hogy f nem folytonos valamely x pontban. Ekkor nem is sorozatfolytonos, azaz $\exists\, x_n \to x$ sorozat, hogy $f(x_n) \not\to f(x)$. Ezért $\exists \varepsilon > 0$: $\forall n \exists n' > n$: $\|f(x_{n'}) - f(x)\| > 2\varepsilon$. Alkalmas ritkítás után $\|f(x_n) - f(x)\| > 2\varepsilon$. Tekintsük az $[x, x_n]$ szakaszt. Ez összefüggő, így képe is az. $f([x,x_n])$ metszi a $B_{\varepsilon\cdot(1+\frac{1}{n})}(f(x))$ nyílt gömböt és a komplementerének belsejét is. Ezek nem-üres, diszjunkt, relatív nyílt részeket metszenek ki belőle, azaz nem fedhetik le. Tehát

$$\exists\, \xi_n \in [x, x_n] \,:\, \|f(\xi_n) - f(x)\| = \varepsilon \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Tekintsük a $K = \{\xi_n \mid n \in \mathbf{Z}_+\} \cup \{x\}$ halmazt. Mivel $\xi_n \to x$, ez kompakt. Viszont a $K' = \Big\{ y \in \mathbf{R}^m \mid \|y - f(x)\| = \varepsilon \Big\}$ kompakt halmaztól vett távolsága $f(x)$-nek ε, ξ_n-nek $\dfrac{\varepsilon}{n}$, tehát a K'-től vett távolság nem veszi fel a minimumát $f(K)$-n. Ezért $f(K)$ nem kompakt, ami ellentmond az f-re tett feltevésnek.

(Érkezett: 22 dolgozat. Megoldotta: Frenkel Péter, Pap Gyula, Kun Gábor, Lippner Gábor, Mátrai Tamás, Bérczi Gergely, Lukács László, Máthé András, Tímár Ádám, Gröller Ákos, Végh László, Devecsery András, Terpai Tamás, Juhász András, Mester Péter, Braun Gábor, Szabó Szilárd, Nagy Béla, Gueth Krisztián, Bozi Imre.)

9. (Moussong Gábor és Szűcs András) *Legyen M zárt, irányítható 3 dimenziós differenciálható sokaság, és tegyük fel, hogy G az M irányítástartó diffeomorfizmusainak egy véges csoportja. Jelölje P, illetve Q azon M-beli pontok halmazát, amelyek stabilizátora G-nek több, mint egyelemű, illetve nem-ciklikus részcsoportja. Bizonyítsuk be, hogy P Euler-karakterisztikája osztható G rendjével, továbbá, hogy a Q halmaz $-2\frac{\chi(P)}{|G|}$ darab G szerinti orbit egyesítése, ahol $\chi(P)$ jelöli a P Euler-karakterisztikáját.*

Első megoldás: Először is jegyezzük meg, hogy a feladat hiányosan lett kitűzve: M-ről persze fel kell tenni, hogy összefüggő.

Megadható M-en egy olyan Riemann-metrika, melyre nézve a G csoport elemei izometriákként hatnak. (Pl.: Vegyünk egy tetszőleges Riemann-metrikát M-en, jelöljük ezt $(\ ,\ )$-vel, majd átlagoljuk ezt a G csoport hatása szerint, azaz legyen

$$(u,v)_{\text{átl}} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(g_*u, g_*v),$$

ahol $|G|$ a G csoport rendje, és g_* a g diffeomorfizmus differenciálja. Ezen átlagolt metrikában G minden eleme izometria.)

Egy ilyen metrikában az exponenciális leképezés a G minden g elemét átviszi a differenciáljába, azaz $\exp\big(g_*(u)\big) = g\big(\exp(u)\big)$. Tudjuk, hogy lokálisan az exponenciális leképezés diffeomorfizmus. Ezért, ha x az M egy pontja, és G_x e pont stabilizátora G-ben, akkor G_x izomorf a T_xM 3 dimenziós, irányított euklideszi tér irányítástartó izometriáinak, azaz $SO(3)$-nak egy véges részcsoportjával. Ebből következik, hogy a Q halmaz pontjai izoláltak, a $P - Q$ halmaz pontjainak stabilizátorai ciklikusak, és P egy gráf az M^3 sokaságban, melynek csúcsai a Q pontjai. (P-nek lehetnek S^1-gyel homeomorf komponensei is.)

Legyen $U(P)$ a P halmaz egy olyan kicsiny ε környezete M-ben, melynek P deformációs retraktuma, ennek lezárását jelöljük $\bar{U}(P)$-vel.

Lemma: $\chi(M - U(P)) = \chi(P)$.

Bizonyítás: Legyen $0 \to C_*(\bar{U}(P)) \to C_*(M^3) \to C_*(M^3, \bar{U}(P)) \to 0$ a megfelelő lánckomplexusok egzakt sorozata. Ennek léte nyilvánvalóan implikálja, hogy e lánckomplexusok Euler-karakterisztikáinak alternáló összege nulla, azaz

$$\chi(\bar{U}(P)) - \chi(M^3) + \chi(M^3, \bar{U}(P)) = 0$$

Ismeretes, hogy $\chi(M^3) = 0$ tetszőleges zárt 3-sokaságra, így $\chi(\bar{U}(P)) = -\chi(M^3, \bar{U}(P))$. Másrészt:

$$H^i(M^3, \bar{U}(P)) = H^i(M^3 - U(P), \partial U(P)) = H_{3-i}(M^3 - U(P))$$

Az első egyenlőség a kivágási tuljdonságból, a második a Poincaré-dualitásból következik.

Tehát $\chi(M^3, \bar{U}(P)) = \chi(M^3 - U(P))$. Végül is $\chi(M^3 - U(P)) = \chi(\bar{U}(P)) = \chi(P)$. A lemmát beláttuk.

$M - U(P)$-n a G csoport szabadon hat, ezért $\chi\big(M - U(P)\big)$ osztható $|G|$-vel. Tehát $\chi(P)$ is osztható $|G|$-vel.

Minden H nem-ciklikus részcsoportjára a G-nek legyen $\alpha(H) = \#\{[x] \mid G_x \cong H\}$. (Azaz $\alpha(H)$ azon orbitok száma, melyek stabilizátorai H-val izomorfak.)

Ha c és e jelöli a P csúcsainak ill. éleinek a számát akkor

$$c = \sum_{G_x \neq \text{ciklikus}} \alpha(G_x) \cdot \frac{|G|}{|G_x|} \quad \text{és} \quad e = \sum_{G_x} \alpha(G_x) \cdot \frac{|G|}{|G_x|} t(G_x),$$

ahol $t(G_x)$ a G_x csoport elemeihez tartozó tengelyek száma és az összegzés mindkét formulában az összes nem-ciklikus stabilizátor részcsoportra történik. Minthogy $SO(3)$ véges részcsoportjai jól ismertek, minden nem-ciklikus G_x részcsoportra könnyen ellenőrizhető, hogy teljesül a következő:

$$2\big(t(G_x) - 1\big) = |G_x|.$$

Ezért

$$\frac{\chi(P)}{|G|} = \frac{c-e}{|G|} = \sum \alpha(G_x) \frac{1 - t(G_x)}{|G_x|} = -\frac{1}{2} \sum \alpha(G_x).$$

(Az összegzés ismét a nem-ciklikus G_x stabilizátor részcsoportokra történik.) Ezt akartuk belátni.

Második megoldás (Frenkel Péter – Moussong Gábor): Egy q pont stabilizátorát G_q-val, pályáját $G(q)$-val jelöljük. Ha belátjuk, hogy $SO(3)$ minden véges, nem ciklikus részcsoportjának rendje kettővel kevesebb a pólusok számánál (ahol póluson a csoport egy nem-triviális eleme tengelyének az S^2 egységgömbbel vett metszéspontját értjük), akkor a második állítással készen leszünk: Q nyilván G-invariáns, benne az orbitok száma

$$\sum_{\text{orbitok}} 1 = \sum_{q \in Q} \frac{1}{|G(q)|} = \sum_{q \in Q} \frac{|G_q|}{|G|},$$

míg

$$\chi(P) = |Q| - (\text{élek száma}) = Q - \frac{1}{2} \sum_{q \in Q} \big(\{T_q g \,:\, g \in G_q\}(\text{pólusainak száma}\big) = \frac{1}{2} \sum_{q \in Q} |G_q|.$$

Legyen tehát $\bar{G} < SO(3)$ véges, nem ciklikus. $\bar{G}$ hat a pólusok X halmazán. Az x pólus m_x rendjén stabilizátorának a rendjét értjük. Nyilván $m_x = m_{g(x)}$ tehát értelmes fogalom az orbitok rendje. Legyen O a pólusok orbitjainak halmaza. Ekkor:

$$2\big(|\bar{G}| - 1\big) = \sum_{g \in \bar{G} \setminus 1} \sum_{g(x) = x} 1 = \sum_{x \in X} (m_x - 1) = \sum_{o \in O} |o|(m_o - 1) = \sum_{o \in O} \frac{|\bar{G}|}{m_o}(m_o - 1).$$

Tehát $2\left(1 - \frac{1}{|\bar{G}|}\right) = \sum_{o \in O} \left(1 - \frac{1}{m_o}\right)$.

Itt $\frac{3}{2} \leq$ bal oldal < 2 és $1 >$ a jobb oldal minden tagja $\geq \frac{1}{2}$, ezért legfeljebb három orbit van és legalább kettő. Ha kettő, akkor $\bar{G}$ elemeinek közös a tengelyük, ezért $\bar{G}$ ciklikus, ami ellentmondás.

Tehát három orbit van. Így

$$2\big(|G| - 1\big) = \sum_{o \in O} |o|(m_o - 1) = \sum_{o \in O} |o| \left(\frac{|\bar{G}|}{|o|} - 1\right) = 3|\bar{G}| - |X|,$$

ahonnan $|\bar{G}| = |X| - 2$, ahogy állítottuk.

Abból, hogy minden nem ciklikus csoport pólusai három orbitot alkotnak, rögtön adódik a feladat első állítása is: G hatása szerint faktorizálva a P gráfot egy 3-reguláris gráfot kapunk. E gráfban a csúcsok száma páros, minthogy minden csúcs páratlan fokú. Ám e gráf csúcsainak száma épp a Q orbitjainak száma.

(Érkezett: 2 dolgozat. Megoldotta: Frenkel Péter. A feladat első felét megoldotta: Gröller Ákos.)

10. (Móri Tamás) *Ákos 4, egymástól független véletlen számot generál a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlás szerint. Ezek közül az egyiket megmutatja Bálintnak, akinek meg kell tippelnie, hogy a látott szám „szélső”-e, azaz a négy szám közül a legkisebb vagy a legnagyobb valamelyike. Van-e Ákosnak olyan determinisztikus stratégiája, amely mellett Bálint találati valószínűsége nem haladhatja meg az 1/2-et, akárhogyan okoskodjék is?*

Megoldás (Máthé András, Kiss Gergely): A következő stratégia megfelelő: Ákos a négy szám közül mindig azt mutatja meg, amelyik az $\frac{1}{2}$-től második legtávolabb van (annak a valószínűsége 0, hogy az $\frac{1}{2}$-től való távolságok nem páronként különbözők, így ezzel nem kell foglalkozni).

Legyen a négy szám a, b, c és d úgy, hogy

$$\left|\frac{1}{2} - a\right| < \left|\frac{1}{2} - b\right| < \left|\frac{1}{2} - c\right| < \left|\frac{1}{2} - d\right|.$$

Két esetet különböztetünk meg $c - \frac{1}{2}$ előjele szerint.

1. eset: $c < \frac{1}{2}$. Ekkor $a, b \in (c, 1-c)$, $d \notin (c, 1-c)$. c pontosan akkor szélső, ha $d \in (0, c)$ és akkor nem az, ha $d \in (1-c, 1)$; könnyen látható, hogy ezek valószínűsége éppen 1/2.

2. eset: $c > \frac{1}{2}$. Az előzőhöz hasonló.

Azt is könnyű ellenőrizni, hogy a feladat általánosítása is ugyanígy intézhető el: ha Ákos n számot generál és megint az $\frac{1}{2}$-től második legtávolabbra lévőt mutatja meg Bálintnak, akkor Bálint találati valószínűsége legfeljebb $\frac{1}{2}$.

(Érkezett: 12 dolgozat. Megoldotta: Frenkel Péter, Pap Gyula, Kun Gábor, Lippner Gábor, Bérczy Gergely, Végh László, Kiss Gergely, Devecsery András, Máthé András. Hiányos megoldást nyújtott be: Pálvölgyi Dömötör.)

Végül szeretnék köszönetet mondani Gröller Ákosnak a jelentés elkészítésében nyújtott óriási segítségért.

KÖNYVISMERTETÉS

Róka Sándor (szerkesztő): Miért lettem matematikus?
Visszaemlékezések
TypoTeX Kiadó, Budapest, 2003.*

„Nagy fejtörést okozott, hogy hogyan tud a villamosvezető olyan pontosan vezetni, hogy a kocsi nem ugrik ki a sínből (ma már értem!)." Mi pedig végiglapozva ezt a kicsi könyvet, valamivel jobban értjük, hogyan kerül sínre egy-egy tehetség. (Az idézett 4-5 éves kisgyereket a pálya a „Matkutató" igazgatóságáig vezette.) Persze, az volna az igazi, ha arról is hallanánk, hogy miért nem lettem matematikus, arról azonban sok szó esik, hogy majdnem nem lettem matematikus, és ezek nagyon fontos esetrajzok ezekben a kis önvallomásokban. Azok a diákok, akik az unalom hasonló csendes vizeire kerültek a nemtörődömség eredményeként, netán felkészítetlenül versenyeztetve beszereztek néhány kudarcot, talán felfigyelnek arra, más miképpen találkozott össze azzal az élménnyel, amitől minden megváltozott. Sokféle módon történtek e találkozások, megvilágosodások, ettől érdekes a könyv, és e személyes sokszínűségben mutatkoznak bizonyos hasonlóságok, ettől hasznos a könyv. Nem kell minden matematikai tehetséggel megáldott emberből matematikusnak lenni. (Nem is szabad!) További riporttémák lehetnének: miért szeretem a matematikát, vagy mit kaptam a matematikától. Ám félő, hogy ezekre kérdezve el lehet-e jutni egy könyvhöz. Íróknál volna érdemes próbálkozni: Ottliktól megtudtuk, hogyan dőlt el a Kálvin téren, hogy a lélek búvó patakjait íróként kutatja a továbbiakban, és nem azt várja, hogy matematikai problémák megoldásaiban bukkanjanak időnként felszínre. Jó néhány írónk járt valamikor a matematika környékén. Mint ahogy jó néhány matematikusunkban ott lappang az írói képesség, ez a kötet bizonyíték erre. Az írások között esszék, sőt novellák is akadnak. Persze, vannak lakonikus tárgyilagosságú jegyzetek is, amelyek inkább szociográfiai nyersanyagnak tekinthetők, de mint ilyenek nem érdektelenek. A könyv olvasása után kedvem támadt statisztikát csinálni bizonyos ismétlődő momentumokról. Nem tettem meg, de világos, hogy korunk magyar matematikusainak tehetségükre ébredését elsősorban a KöMaL váltotta ki. Szinte mindenki ír róla, külön tanulmány állna össze, ha egymás mellé vágnánk, kinek mit jelentett. A második legtöbbet említett intézmény a Reiman-szakkör, ahol az olimpiai csapatba esélyeseket foglalkoztatta

*Az eredeti cikk az Élet és Tudomány 2003. évi 48-as számában jelent meg.

Reiman István tanár úr (a Gondolkodás iskolája mostani rovatvezetője is ő), de nem eredménycentrikus versenyistálló volt az a központi szakkör, hanem a matematika megismerésére és megszeretésére alkalmas műhely. Sokan említenek egy kis könyvet: Rademacher – Toeplitz: *Számokról és alakzatokról.* Ez a rácsodálkozás élményét adta meg azoknak, akiket a számolások száraz kenyerével tömtek a matekórákon. Vajon miért nem lehet ezt a kis füzetet megkapni ma is? Kellene egy ajánlott olvasmányok listája, és az ilyen alapkönyveket állandóan a piacon kellene tartani. Nem folytatom az összegző megállapításokat, könnyen igazságtalanná válhatnék, hiszen egyszeri elolvasáskor leginkább az ismerős személyek, dolgok, események ragadnak meg az emberben. Szerencsére a matematika érdekességével, szépségével hazánkban nagyon sokféle módon lehet és lehetett összetalálkozni, nagy kultúrája és szerteágazó hálózata alakult ki ennek a múlt században. Róka Sándort, a kötet összeállítóját is arra bíztatom, hogy folytassa a visszaemlékezések gyűjtését. Meglehet, lesznek, akik ezt a kötetet olvasva kapnak kedvet, hogy elmondják a maguk esetét. Talán kötelességüknek is érzik majd, hogy megnevezzenek olyan személyeket, könyveket, feladatokat, akik, amelyek itt nem kerültek elő, vagy nem kellő hangsúllyal: A magyar matematikai csoda (ha volt ilyen) megérdemelné a további dokumentálást. Már csak azért is, mert a statisztikában a leggyakrabban említettek között szerepelne a tanító, a tanár, de korántsem azonos előjelű súlyokkal. Ha pozícióink (vannak ilyenek?) megőrzésére törekszünk, az iskolában még nagy tartalékok rejlenek.

Herczeg János

A visszaemlékezések fenti gyűjteményébe még sokan mások is írhattak volna. A felkérés nem jutott el hozzájuk. Vagy akkor úgy gondolták, hogy ők nem tudnak erről érdekeset írni. Vagy szerettek volna írni, de éppen nem volt rá idejük. Ezért egy új sorozatot szeretnénk indítani a Matematikai Lapokban, mintegy a fenti kötet folytatásaként. Kérünk mindenkit, aki érintve érzi magát, írjon néhány oldalt lapunk számára.

– Miért lettem matematikus?

– Miért lettem matematikatanár?

vagy akár

– Miért nem lettem matematikus?

címmel. A fenti kötet szerkesztője talán egy új válogatást is tud készíteni ezen további írások felhasználásával.

A szerkesztőség

Aposztolosz Doxiadisz: Petrosz bácsi és a Goldbach-sejtés (Fordította Papolczy Péter), Európa, 2004.

Az átlagolvasót bizony idegesíti, amikor az irodalmi mű egy írói élet rejtelmeiről szól, az átlagnéző bambán néz, amikor a színpadon egy másik színpad van. Nem túl izgalmas az olyan irodalom, amely az irodalom belső életéről tájékoztat. Annál nagyobb a sikere az olyan írónak, aki életének korábbi szakaszában valami olyan foglalkozást űzött, aminek rejtelmeiről nekünk egyszerű olvasóknak sejtelmünk sincs. Ha egy volt székely elletőjuhász tollat ragad, és még tehetsége is van az íráshoz, akkor nagy sikerre számíthat. De igazán az elletőjuhászok olvassák könyvét nagy izgalommal. Jól írja-e le a mesterség fogásait, élethelyzeteit.

Ez a helyzet a jelen könyvvel. Szerzője matematikai csodagyerekként indult: 15 évesként vették fel a New York-i Columbia Egyetemre, a párizsi École Pratique Des Hautes Études-ön szerzett doktori címet. Ezek után azonban író, műfordító, film- és színházi rendező lett belőle. Jelen regénye a matematikai kutatásról, a matematikusokról szól. Nagy írói és matematikai szakértelemmel, de azért kívülről nézve a matematikusokra.

A regényben a matematikai élet valódi nagyságai közé helyez be két képzeletbelit. Magát és nagybátyját, Petrosz bácsit. Petrosz bácsi egész életét a Goldbach-sejtés megoldásának szenteli. Mint tudjuk, sikertelenül.

Nem véletlenül választotta a szerző a Goldbach-sejtést. Ugyanis mindenki megérti a matematikai kérdést. A regény eredményesen törekszik arra, hogy az olvasóval megértesse a szükséges matematikai fogalmakat. Eljut például a a Gödel-féle nemteljességi tétel megmagyarázásáig is. A mű ebben az értelemben is tekinthető ismeretterjesztőnek. Azonban célja a más értelemben való ismeretterjesztés. Az olvasóval a matematikai alkotás folyamatát kívánja megismertetni. „Természetesen" egy végletes példával, a sikertelenség esetére. Bemutatja, milyen belső erők, szenvedélyek működnek a matematikus lelkében, mi készteti arra, hogy életét szentelje egy probléma megoldásának.

Petrosz bácsi, amikor már feladja, hogy a sejtést megoldja, kibúvókat keres, miért nem érdemes rajta gondolkozni. Unokaöccse (a „szerző maga") erre azt mondja neki: „savanyú a szőlő!". Az az érzésem, ugyanez mondható a szerzőről is. Nagy remények után nem lett nagy matematikus, ezért alkotott egy kissé negatívan elfogult képet a matematikusokról. Bár nagyon tiszteli a matematikai óriásokat, a legnagyobbakat mind őrült vagy legalábbis félőrült színben tünteti fel (pontosabban főleg azokról ír).

Bár – mint említettem – a szerző jól tájékozott a matematikában, sőt a Goldbach-sejtés témakörében is, nem tud, nem tudhat mindent. Sajnálatos módon a könyvben egyetlen szó sem esik magyar matematikusokról. Pedig még a Goldbach-sejtés témakörében is kétszer volt magyar matematikus a csúcstartó. Korábban Rényi Alfréd, jelenleg pedig Pintz János.

A regény matematikusoknak „kötelező olvasmány", éppúgy, mint a Goodwill Hunting, és a Nash-film. Azt, hogy a szélesebb olvasóközönség számára is érdekes olvasmány, misem bizonyítja jobban, mint az, hogy a könyv több mint húsz országban jelent meg.

Katona Gyula

FELHÍVÁS
INTERNETES ELÉRÉSSEL RENDELKEZŐ MATEMATIKÁT OKTATÓK ÉS ALKALMAZÓK RÉSZÉRE

Az EU MINERVA program keretében a Bolyai Társulat közreműködésével elkészült az internetes **Matematikai fogalomtár** *teszt verziója,* amelyet a

`http://mbuttons.bolyai.hu`

honlapról lehet kipróbálni. Ez egy – lehetőség szerint minél több – matematikai kifejezést tartalmazó és magyarázó web-szótár és lexikon. Az angol kiinduló szókészlet nagy részét további hét nyelvre lefordították és most országonként a tantervek, tanítási módszerek különböző igényei szerint lehetőség nyílik a definíciók pontosítására, tételek, levezetések, példák, ábrák, fogalmak közötti kapcsolatok hozzáadására, a hibák kijavítására.

Az internetes lexikon a tervek szerint alap- közép- és felsőfokon is használható lesz diákok, tanárok, szülők vagy éppen kutató matematikusok számára, akár mint matematikai szövegek fordításához nélkülözhetetlen szakszótár, akár mint magyar nyelvű tudásbázis. Használatáról a KöMaL márciusi számában jelent meg tájékoztató.

Kérjük, ha Ön is tud tenni azért, hogy ez az európai matematikai fogalomtár a magyar matematika hagyományos és az új tantervet is segítő meghatározásait tartalmazza, vegyen részt az egyes témakörök részletes kidolgozásában. A szótár hibáira, a módosítási javaslatokra elég, ha egy e-mailben hívja fel a szerkesztők figyelmét. Küldjön e-mailt „mbuttons" tárggyal az `olahvera@komal.hu` címre, vagy írjon a KöMaL (`http://komal.hu`) Fórumának megfelelő rovatába. Közreműködését köszöni a BJMT!

Aki a tanárok közül szívesen felhasználná a Matematikai fogalomtárat az órán, szakkörön vagy otthoni feladathoz, szintén e-mailben jelentkezzen.

Oláh Vera

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Modok és Társa Nyomda, Kiskunhalas