Matematikai Lapok

1995/1–2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 5. évfolyam (1995), 1–2. szám

(Megjelent 2000-ben)

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201–7656.

Egyes szám ára 400 Ft+ÁFA.

* Megjegyzés: Korábbi előfizetőknek a lap ára az eddigi befizetés függvénye.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

HIPERGRÁFOK ÖSSZEFÜGGŐSÉGÉNEK VIZSGÁLATA A SPEKTRUMON KERESZTÜL

BOLLA MARIANNA ÉS TUSNÁDY GÁBOR

Hipergráfok klaszteresedési tulajdonságait vizsgáljuk lineáris algebrai segédeszközökkel. Általánosítjuk a Laplace-mátrix fogalmát és ennek sajátértékeiből vonunk le következtetéseket a hipergráf összefüggőségére és a klaszterek számára vonatkozóan. Maguknak a klasztereknek a megkonstruálásához a sajátvektorokat, ill. a hipergráf általuk definiált euklideszi reprezentációját használjuk. Egy iterációs eljárást is ismertetünk.

Bevezetés

A kromatikus szám mellett az összefüggőség a gráfok másik gyakran vizsgált tulajdonsága. Mindkettő a gráf csúcsainak particionálását (felosztását, diszjunkt lefedőrendszerét) jelenti, csak ellentétes szempontokból.

Ha egy gráf kromatikus száma k, akkor a csúcsoknak létezik olyan k-partíciója (a lefedőrendszer k elemű), hogy élek csak a partíció különböző tagjai közt futnak (nincsenek „belső élek"), és k-nál kisebb elemű, ilyen tulajdonságú partíció nem létezik. Ha egy partíció elemeinek különböző színeket feleltetünk meg, akkor a partíció a csúcsok ún. k-színezésének is tekinthető. Bebizonyított tény, hogy síkgráfok kromatikus száma legfeljebb 4, így bármely térkép kiszínezhető 4 különböző szín felhasználásával.

A fenti követelménnyel szemben, ha egy gráf k összefüggő komponensből áll, akkor csúcsainak létezik olyan k-partíciója, amelyben egyáltalán nincsenek köztes (különböző színű csúcsokat összekötő) élek, azaz élek csak a partíció elemein belül futnak. Ez a tulajdonság persze nagyon könnyen felismerhető, hiszen ilyenkor a partíció elemei a bennük futó élekkel együtt külön kis autonom gráfokat alkotnak, és az egész gráf nem más, mint ezek összessége. A színezések nyelvén: itt k különböző színű ún. *klasztert* tapasztalhatunk.

Az összefüggőségi tulajdonságot most statisztikusan fogjuk tekinteni. Ez azt jelenti, hogy egy gráfot jól klaszteresíthetőnek nevezünk akkor is, ha ugyan összefüggő, de valamely k pozitív egészre csúcsainak létezik olyan k-partíciója, hogy a partíció által definiált részgráfok „tömörek" (sok a belső él), a köztes élek száma pedig ehhez képest „elenyészően kevés". A köztes élek mennyiségét a gráf különböző módon súlyozott vágásaival lehet mérni. Ez azonban bonyolult leszámlálási feladatokhoz vezetne, ráadásul az összes szóbajövő k-ra ($1 < k < n$, ahol n a csúcsok száma) ki kellene számolni ezeket a mennyiségeket és minimalizálni az összes lehetséges partícióra. Ezért ezirányú vizsgálatainkat a spektrumon keresztül fogjuk végezni.

A gráfon belüli összefüggőség szorosságának mérésére Fiedler [10] 1973-ban bevezette az incidenciamátrixból számolt ún. Laplace-mátrixot, és ennek legkisebb pozitív sajátértékét vizsgálta. Juhász és Mályusz [12] az előbb említett sajátértékhez tartozó sajátvektor kordinátáinak előjele alapján meg is találta a két lazán összefüggő komponenst. Ennek általánosításaként mi a k-klaszteresíthetőség mérésére a Laplace mátrix $k-1$ legkisebb pozitív sajátértékét fogjuk vizsgálni, maguknak a klasztereknek a megtalálásához pedig a hozzájuk tartozó sajátvektorok alapján meghatározzuk a csúcsok ún. *euklideszi reprezentánsait.* Ezek $(k-1)$-dimenziós vektorok, melyek metrikus klaszteresítése a matematikai statisztika klaszteranalízis című fejezetének jól körüljárt problémája, ld. McQueen [14], Dunn [8], Lengyel [13].

Vizsgálatainkat persze bármely k-ra ($1 < k \leq n$) elvégezhetjük, de k értékének növelése csak a dimenzió növelését jelenti olyan módon, hogy újabb komponenseket adunk hozzá a csúcsok reprezentánsaihoz, a már meglevő komponensek változatlanok maradnak. Azért előzőleg érdemes a spektrumbeli rés(ek) alapján tájékozódni az optimális k-ról.

A kromatikus számot is szokták a gráf incidenciamátrixának legnagyobb sajátértékével kapcsolatba hozni. A Laplace-mátrix alapján is kijön, hogy ha van k db. elég jól elkülönülő nagy sajátérték (itt a legnagyobb sajátértéktől lefelé haladva keressük a rést), akkor a gráf kromatikus száma ugyan nem biztosan k, de néhány belső él elvételével ez megoldható, azaz van olyan k-partíció, hogy „kevés" él fut a partíció elemein belül és sok a „köztes" él. Ha a kromatikus számot egy ilyen statisztikus „kvázi-kromatikus számmal" helyettesítenénk, akkor azt jellemezhetnénk a Laplace-mátrix nagy sajátértékeivel, a hozzájuk tartozó sajátvektorok segítségével pedig az optimális partíció metrikus szemlélet alapján lenne nyerhető. A térképészeti problémát ez természetesen nem oldaná meg, de nyilván vannak olyan particionálási feladatok a gyakorlatban, ahol azt szeretnénk, hogy az egy csoportba tartozás laza, a különbözőkbe való tartozás pedig szorosabb kapcsolatot fejezzen ki (pl. úgy akarunk klubokat létrehozni, hogy az egy klubba tartozó emberek lehetőleg ne ismerjék egymást, viszont sok legyen a kivezető szál). Ezzel a kérdéskörrel, mivel kevésbé természetes mint a másik, itt nem akarunk foglalkozni. Megjegyezzük még, hogy a statisztikus vizsgálatokhoz mind a csúcsok, mind az élek számát tekintve nagyméretű gráfokra van szükség.

A klaszteresítési feladat lépten-nyomon felvetődik a gyakorlatban, pl. ismerősöket vagy hasonló tulajdonságokat szeretnénk egy klaszterbe sorolni, egyáltalán felismerni a hasonló tulajdonságokat. Számunkra egy ilyen probléma újszülöttek veleszületett rendellenességeinek statisztikai analízisekor állt elő, amikor kapcsolódási csoportokat (ún. szindrómákat) szerettünk volna találni a sokféle (csaknem 50) rendellenesség közt. Mintául mintegy 10 000 rendellenesen született újszülöttön regisztrált megfigyelések szolgáltak, melyek nem is egy közönséges gráffal, hanem egy hipergráffal írhatók le. Míg egy gráfnál mindig két csúcs van éllel összekötve, addig egy hipergráf hiperéle több csúcsot is magában foglalhat, a továbbiakban ezeket is egyszerűen csak élnek nevezzük. Esetünkben a hipergráf csúcsai a rendellenességek, élei pedig az egyes újszülötteken regisztrált rendellenességeknek megfelelő csúcs-részhalmazok voltak.

Így a Laplace-mátrix fogalmát hipergráfokra általánosítjuk, és az összefüggőség kérdését is hipergráfokra fogjuk vizsgálni tetszőleges k $(1 < k < n)$ egész szám esetén. A $k = 2$ eset, vagy közönséges gráfok esete ebből speciálisan adódik. Eredményeink fejezetek szerint a következőkben foglalhatók össze:

1. Definiálunk egy célfüggvényt, melynek minimalizálásával a csúcsok és élek olyan reprezentánsait kapjuk, hogy egy él reprezentánsa euklideszi távolságban mérve közel van az általa tartalmazott csúcsok reprezentánsaihoz. A célfüggvény lineáris algebrai segédeszközökkel minimalizálható, természetes módon adódik a Laplace-mátrix és annak spektrálfelbontása.

2. Definiálunk a k-partíciókat jellemző különbözőképpen súlyozott vágásokat, és ezekkel hozzuk összefüggésbe a Laplace-mátrix sajátértékeit. Nevezetesen, a $k-1$ legkisebb pozitív sajátérték összegére adunk alsó- és felső becslést a fenti kombinatorikus mérőszámok segítségével. A felső becslés valójában azt fejezi ki, hogy k „kicsi" sajátérték megléte szükséges feltétele a „jó" klaszteresíthetőségnek. Az alsó becslés más konstansokat is tartalmaz, és tudunk konstruálni példát arra, hogy bár az alsó becslés eléretik, a gráf mégsem klaszteresedik jól. Így ebből az alsó becslésből nem vonható le a következtetés, hogy a k „kicsi" sajátérték megléte elégséges is lenne.

3. Ugyanakkor vizsgáljuk a megfelelő sajátvektorokból adódó reprezentánsokat. Ezek metrikus „jó" klaszteresíthetősége (a klaszterátmérőkre tett korlátozásokkal) már elégséges a hipergráf jó klaszteresíthetőségéhez.

4. Létezik egy sejtés, hogy a spektrumbeli „rés" megléte önmagában is elégséges, de ehhez nem tudunk belátni egy lemmát, csak $k = 2$-re. Örömmel vennénk, ha $k > 2$-re valaki bebizonyítaná vagy ellenpéldát konstruálna.

5. Végül egy számítógépes algoritmust javaslunk nagyméretű hipergráfok klaszteresítésére. Az algoritmus az eredeti particionálási feladatot csak részként tartalmazza, eredményként pedig nem feltétlenül diszjunkt csúcs-klasztereket produkál.

A 6. fejezet néhány érdekes, de felhasználásra nem kerülő tényt közöl hipergráfok sajátértékeivel kapcsolatban, és megadjuk néhány speciális gráf euklideszi reprezentációját. A 7. fejezet a főbb tételek bizonyítását tartalmazza, ami érdekes lehet azok számára, akik lineáris algebrával foglalkoznak.

A cikkünkben közölt eredmények megtalálhatóak a [6] dolgozatban, egyes részleteket [3]-ban és [4]-ben közöltünk, a [16] egyetemi jegyzetben egy fejezet foglalkozik témánkkal. A gráfok spektrumával sokan mások is foglalkoznak, közülük az [1], [2], [7], [11] cikkeket említjük.

1. Hipergráfok euklideszi reprezentációja

Jelölje a $H = (V, E)$ hipergráf csúcsainak és éleinek halmazát $V = \{v_1 \dots v_n\}$ és $E = \{e_1 \dots e_m\}$. H egyértelműen megadható az A $n \times m$-es incidenciamátrixszal, melynek általános eleme $a_{ji} = \mathcal{I}(v_j \in e_i)$, ahol a $v \in e$ reláció azt jelöli, hogy a v csúcs benne van az e hiperélben:

$$\mathcal{I}(v \in e) = \begin{cases} 1, & \text{ha } v \in e \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen k $(1 < k \leq n)$ rögzített egész. Keressük a csúcsok $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ és az élek $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ k-dimenziós reprezentánsait a

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T = \mathbf{I}_k \tag{1.1}$$

kényszerfeltétel mellett úgy, hogy az élek költségösszegét kifejező

$$Q = \sum_{i=1}^{m} K(e_i) \tag{1.2}$$

célfüggvény minimális legyen, ahol

$$K(e_i) := \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \|\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_i\|^2. \tag{1.3}$$

az e_i hiperél reprezentálásának költsége.

A célfüggvény konstrukciója olyan, hogy a hipergráf élei össze szeretnék húzni a csúcsok reprezentánsait, míg a kényszerfeltétel kifeszíti azokat. Az optimális reprezentáció bizonyos kompromisszum: azok a csúcsok kerülnek közel egymáshoz, amelyek sok közös élben benne vannak.

Ezekután a célfüggvényt a következő lépésekben minimalizáljuk. Jelölje $\bar{\mathbf{x}}(e)$ az e hiperélet alkotó csúcsok reprezentánsainak átlagát:

$$\bar{\mathbf{x}}(e) := \frac{1}{|e|} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{I}(v_j \in e) \mathbf{x}_j. \tag{1.4}$$

Jelölje $\mathbf{X} := (\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_n)$ és $\mathbf{Y} := (\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_m)$ a csúcsok és élek reprezentánsaiból, mint oszlopvektorokból álló $k \times n$-es ill. $k \times m$-es mátrixokat, továbbá $\mathbf{D}_v$ ill. $\mathbf{D}_e$ a csúcs- ill. él-fokszámokat tartalmazó $n \times n$-es ill. $m \times m$-es diagonálmátrixokat (a diagonálisban álló elemek valójában az incidenciamátrix marginálisai). Feltehető, hogy $\mathbf{D}_e$ nem szinguláris (nincsen üres él).

Ezekkel a jelölésekkel $K(e)$ csökkenthető és a Steiner-formula alapján a következő átalakítás végezhető:

$$K(e) \geq \sum_{j=1}^{n} \mathcal{I}(v_j \in e)\left\|\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}}(e)\right\|^2, \quad e \in E.$$

A jobb oldalt $L(e, \mathbf{X})$-szel jelölve egy kis számolással

$$L(e, \mathbf{X}) = \frac{1}{2|e|} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{I}(v_i \in e)\mathcal{I}(v_j \in e)\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2, \quad e \in E \tag{1.5}$$

adódik. Az $L(\mathbf{X}) := \sum_{e \in E} L(e, \mathbf{X})$ jelöléssel a $Q \geq L(\mathbf{X})$ egyenlőtlenség a csúcsok bármely $\mathbf{X}$ reprezentációjára fennáll. $L(\mathbf{X})$ viszont általánosított kvadratikus alakká alakítható:

(1.6)
$$L(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{1}{2} \sum_{e \in E} \mathcal{I}(v_i \in e)\mathcal{I}(v_j \in e)\frac{1}{|e|}\right] \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j,$$

ahol

$$c_{ij} = \begin{cases} -\sum_{e \in E} \mathcal{I}(v_i \in e)\mathcal{I}(v_j \in e)\frac{1}{|e|}, & \text{ha } i \neq j, \\ s_i - \sum_{e \in E} \mathcal{I}(v_i \in e)\frac{1}{|e|} = s_i' - \sum_{\substack{e \in E \\ |e|>1}} \mathcal{I}(v_i \in e)\frac{1}{|e|}, & \text{ha } i = j, \end{cases} \tag{1.7}$$

és $s_i' = \#\{e \in E : v_i \in e, \ |e| > 1\}$.

1.1. Definíció. A (1.6)-beli kvadratikus alak mátrixát a H hipergráf *Laplace-mátrixának* nevezzük és $\mathbf{C}$-vel jelöljük.

$\mathbf{C}$ elemei (1.7) alapján számolhatók, mátrix jelöléssel pedig $\mathbf{C} = \mathbf{D}_v - \mathbf{A}\mathbf{D}_e^{-1}\mathbf{A}^T$.

Minimalizáljuk a fenti $L(\mathbf{X})$-szel jelölt általánosított kvadratikus alakot az (1.1) kényszerfeltétel mellett! Könnyen látható, hogy a minimalizálandó kifejezés nem más, mint $\operatorname{tr} \mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{X}^T$, a kényszerfeltétel pedig $\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{I}_k$. Mivel az $n \times n$-es $\mathbf{C}$ mátrix szimmetrikus és pozitív szemidefinit, egy — homogén kvadratikus alakok szélsőértékeire vonatkozó — tétel szerint (megtalálható pl. Rao [15]-ben) bebizonyítottuk a következő ún. *Reprezentációs Tételt:*

1.2. Tétel. *Az* (1.2) *célfüggvény minimuma az* (1.1) *kényszerfeltétel mellett*

$$(1.8) \qquad \sum_{j=1}^{k} \lambda_j,$$

ahol $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ *jelöli a* $\mathbf{C}$ *Laplace-mátrix sajátértékeit. A minimum arra az* $\mathbf{X}$ k*-dimenziós euklideszi reprezentációra éretik el, amely a* $\mathbf{C}$ *mátrix* k *legkisebb pozitív sajátértékéhez tartozó páronként ortogonális, normált sajátvektorait tartalmazza soraiban, a sajátértékek növekvő sorrendje szerint. Egy ilyen optimális* $\mathbf{X}$*-et* $\mathbf{X}^*$*-gal jelölve, az élek optimális reprezentációjára* $\mathbf{Y}^* = \mathbf{X}^*\mathbf{A}\mathbf{D}_e^{-1}$ *adódik.* ∎

Az optimális reprezentáció egyértelműségéről a következők mondhatók el. Ha $\mathbf{R}$ tetszőleges $k \times k$-as ortogonális mátrix ($\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}_k$), akkor sem a célfüggvény, sem a kényszer nem változik az $\mathbf{X}' = \mathbf{R}\mathbf{X}$ helyettesítés hatására (nyilvánvaló, hogy a reprezentások rendszerét elforgatva, kölcsönös helyzetük változatlan marad). Így $\mathbf{X}^*$ csak forgatás erejéig egyértelmű, amennyiben a sajátvektorok azok (vagyis, ha a $\mathbf{C}$ mátrix sajátértékei mind egyszeres multiplicitásúak). Egyébként, ha többszörös sajátérték is van, akkor $\mathbf{X}^*$ megfelelő sorai tetszőlegesen választhatók (persze ortogonális módon) a megfelelő sajátaltéren belül.

Megjegyezzük, hogy k értéke itt még nem játszik különösebb szerepet, mivel bármely k-ra $(1 < k < n)$ egy optimális $(k+1)$-dimenziós euklideszi reprezentáció könnyen nyerhető a k-dimenziósból egy újabb sajátvektor hozzávételével $\mathbf{X}^*$ soraihoz.

Az (1.7) képletből az is látszik, hogy a hurkok (élek, melyekre $|e| = 1$) nem járulnak hozzá a Laplace-mátrixhoz, így a továbbiakban csak hurokmentes hipergráfokkal foglalkozunk.

Vegyük észre, hogy a Laplace-mátrix mindig szinguláris (ui. sorösszegei 0-k). A 0 sajátértékhez tartozó normált sajátvektor az $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{e}$, vektor, ahol $\mathbf{e}$ jelöli az összes koordinátájában 1-et tartalmazó n-dimenziós vektort. Így ennek a koordinátának alapján a reprezentánsok nem különíthetők el, a k-dimenziós reprezentáció valójában az $\mathbf{e}$-re ortogonális $(k-1)$-dimenziós altérben történik.

Az is nyilvánvaló, hogy a H hipergráf összefüggő komponenseinek száma megegyezik a 0 sajátérték multiplicitásával (ha H összefüggő, csak egy 0 sajátértéke van), hisz az összefüggő komponensek $\mathbf{C}$-t blokkmátrixokra osztják, és mindegyiknek lesz egy 0 sajátértéke. A komponensek külön-külön vizsgálhatók, így a továbbiakban elég összefüggő hipergráfok vizsgálatára szorítkoznunk.

Összefüggő hipergráfok esetén természetesen merül fel a kérdés, vajon hány él elmozdításával szüntethető meg ez az állapot, és hogyan derül ki az összefüggés lazasága magából a spektrumból, továbbá hogyan tudjuk konstruktíve megtalálni az egymással lazán összefüggő komponenseket. Már Fiedler [10] megmutatta közönséges gráfokra, hogy λ_2 „kicsisége" két összefüggő komponens meglétét jelzi. Juhász és Mályusz [12] meg is konstruálták a két komponenst a λ_2-höz tartozó sajátvektor koordinátáinak előjele alapján. Mi a továbbiakban megmutatjuk, hogy a két komponens szétválásába λ_2 és λ_3 aránya is beleszól, több komponens szétválasztásához pedig a rákövetkező sajátértékeket is vizsgáljuk.

2. Hipergráfok spektruma és kombinatorikus tulajdonságai közti összefüggések

Legyen $H = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$ egy összefüggő, hurokmentes hipergráf, Laplace-mátrixának sajátértékeit jelölje $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Bevezetünk néhány kombinatorikus mérőszámot, amelyek a hipergráf összefüggőségét karakterizálják.

H csúcsainak $(V_1, \ldots, V_k)$ nem-üres, diszjunkt részhalmazokra való felosztását *k-partíciónak* nevezzük és röviden P_k-val jelöljük. Jelölje $\mathcal{P}_k$ a hipergráf összes k-partícióinak halmazát.

2.1. Definíció. A $P_k = (V_1, \ldots, V_k)$ partíció $v(P_k)$ *sűrűségét* a

$$v(P_k) := \sum_{e \in E} \frac{1}{|e|} \sum_{1 \leq i < j \leq k} a_i(e)\, a_j(e),$$

$u(P_k)$-val jelölt *súlyozott sűrűségét* pedig az

$$u(P_k) := \sum_{e \in E} \frac{1}{|e|} \sum_{1 \leq i < j \leq k} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right) a_i(e)\, a_j(e),$$

összefüggés definiálja, ahol $a_i(e) = |e \cap V_i|$ és $n_i = |V_i|$.

Ezek után legyen a H hipergráf *minimális k-sűrűsége*

$$\mu_k(H) = \min_{P_k \in \mathcal{P}_k} v(P_k), \tag{2.1}$$

minimális súlyozott k-sűrűsége pedig

$$\nu_k(H) = \min_{P_k \in \mathcal{P}_k} u(P_k). \tag{2.2}$$

2.2. Definíció. A $P_k = (V_1, \ldots, V_k)$ partíció *k-vágása* azoknak az e éleknek az összessége, melyekre $|e \cap V_i| \neq \emptyset$ teljesül legalább két különböző V_i-vel. Ezt a halmazt $H(P_k)$-val jelöljük.

A P_k partíció tekinthető a csúcsok *k-színezésének* is: a v csúcs színe $c(v) := i$, ha $v \in V_i$. Egy e hiperélet „tarkának" nevezünk ebben a színezésben, ha van legalább két különböző színű csúcs benne. Így a $H(P_k)$ halmaz éppen az ilyen tarka élekből áll.

A H hipergráf *minimális k-vágása* az, amelynek számossága (a benne levő hiperélek száma) a legkisebb. Egy ilyen minimumot adó partíciót P_k^*-gal jelölve (nem biztos, hogy egyértelmű), $\theta_k(H) := |H(P_k^*)|$.

2.3. Megjegyzés. A fent definiált mennyiségekre nyilvánvalóan

$$
\begin{aligned}
&\mu_2(H) \le \mu_3(H) \le \cdots \le \mu_{n-1}(H) \le \mu_n(H),\\
&\nu_2(H) \le \nu_3(H) \le \cdots \le \nu_{n-1}(H) \le \nu_n(H),\\
&\theta_2(H) \le \theta_3(H) \le \cdots \le \theta_{n-1}(H) \le \theta_n(H) = m.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$
■

2.4. Tétel. *A H hipergráf k legkisebb sajátértékének összegére a fenti kombinatorikus mennyiségekkel*

$$c_n\theta_k(H) \le \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \le \nu_k(H) \tag{2.4}$$

teljesül, ahol $c_n = \frac{6}{n(n^2-1)}$.

A tétel bizonyítása a 7. fejezetben található.

Ha $\nu_k(H)$ „kicsi", ez azt jelenti, hogy a minimális súlyozott k-sűrűséget adó k-partíció olyan tulajdonságú, hogy „kevés" benne a tarka él és azok is viszonylag kisméretű csúcs-klaszterek között futnak. Ezért a fenti felső becslés azt jelzi, hogy ilyen esetben a k legkisebb sajátérték összege is kicsi. Azaz k viszonylag kis sajátérték megléte szükséges feltétele a jó klaszteresíthetőségnek.

Az alsó becslés egy, a csúcsok számától függő konstanst is tartalmaz. Vannak gráfok (ld. a 6. fejezet szalagjai, hálói és pókjai, 6.7.–6.10. példák), melyekre az alsó becslés nagyságrendileg eléretik, mégsem klaszteresednek jól semmilyen k-ra. Persze, itt a sajátértékek eloszlása egyenletes, nincsen rés a spektrumban.

$k = 2$ esetén precízebb becslés adható λ_1 és λ_2 összegére, azaz λ_2-re:

2.5. Tétel. *Legyen H összefüggő hipergráf és jelölje λ_2 a legkisebb pozitív sajátértékét. Akkor*

$$\lambda_2 \ge \begin{cases} 2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\mu_2(H), & \text{ha } 0 \le \mu_2(H) \le \frac{1}{2}s_{\max} \\ c_1\mu_2(H) - c_2 s_{\max}, & \text{ha } \frac{1}{2}s_{\max} < \mu_2(H), \end{cases} \tag{2.5}$$

ahol $c_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{2\pi}{n}\right)$, $c_2 = 2\cos\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ *és* $s_{\max} = \max_j s_j$.

Közönséges gráfokra ez az alsó becslés megegyezik a Fiedler által [10]-ben adottal.

3. A reprezentánsok klaszterei

Most az optimális k-partíciókat szeretnénk felismerni. Ehhez válasszunk egy olyan k-t, melyre λ_k és λ_{k+1} között viszonylag nagy rés van a spektrumban. Tekintsük a hipergráf optimális k-dimenziós euklideszi reprezentációját, ahol az $\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_n^*$ csúcs-reprezentánsok valójában $(k-1)$-dimenziós vektorok. Klaszteresítsük őket a k-közép módszerrel (ld. McQueen [14]). Tegyük fel, hogy a fenti pontoknak létezik az alább definiált jó tulajdonságokkal rendelkező k-partíciója.

3.1. Definíció. A $P_k = (V_1, \dots, V_k)$ partíciót a csúcsok $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ euklideszi reprezentációjában *jól-szeparáltnak* nevezzük, ha vele $\alpha(P_k) > 1$ teljesül, ahol

$$\alpha(P_k) := \frac{\min_{c(v_i) \neq c(v_j)} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}{\max_{c(v_i) = c(v_j)} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \tag{3.1}$$

Ez azt jelenti, hogy az egy klaszteren belüli reprezentánsok maximális távolsága is kisebb, mint a különböző klaszterbeliek közti minimális távolság. (Ha ilyen jól-szeparált k-partíció létezik, akkor Dunn [8], [9]-ben bebizonyította, hogy az egyértelmű, és algoritmust adott a meghatározására.)

A következő tétel arról szól, hogy amennyiben létezik a reprezentánsoknak egy „nagyon" jól-szeparált k-partíciója, (ezalatt a klaszterátmérőkre tett további korlátozásokat értünk), akkor ugyanaz a mennyiség, amivel az előző fejezetben a k legkisebb sajátérték összegét felülről becsültük, most alsó becslést ad a k legkisebb sajátérték összegének konstansszorosára.

3.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy valamely $1 < k < n$ egészre létezik az optimális k-dimenziós reprezentánsoknak olyan jól-szeparált klaszteresítése, melyben a klaszterátmérők ε-nál kisebbek, ahol $\varepsilon < \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Akkor*

$$\nu_k(H) \le q^2 \sum_{j=1}^{k} \lambda_j, \tag{3.2}$$

ahol $q = 1 + \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon\sqrt{n}}$.

A tétel bizonyítása szintén a 7. fejezetben található.

Összehasonlítva a 2.4. és 3.2. Tételek eredményeit azt kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \le \nu_k(H) \le q^2 \sum_{j=1}^{k} \lambda_j, \quad \text{ahol} \quad 1 < q < 2.$$

Tehát az előbbi tétel feltételei mellett $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j$ és $\nu_k(H)$ legfeljebb csak egy 4-es faktorban különböznek, azaz a reprezentánsok metrikusan jó klaszteresedése esetén $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j$ kicsisége elégséges is a kombinatorikus értelemben vett jó klaszteresíthetőséghez.

4. Becslések súlyozott gráfokra

További vizsgálatainkat a spektrumbeli rés elégségességével kapcsolatban egyszerűbb súlyozott gráfokra megfogalmazni, mivel ott bizonyos folytonosság teljesül (a súlyok ui. tetszőleges valós számok, melyekkel könnyebb perturbációs eredményeket bizonyítani). Az eredmények érvényben maradnak hipergráfokra is, hiszen minden hipergráfhoz egyértelműen hozzárendelhető egy, az alábbiakban definiált súlyozott gráf.

Legyen tehát $G = (V, \mathbf{W})$, egy súlyozott gráf a $V := \{v_1, \dots v_n\}$ csúcshalmazon a $\mathbf{W}$ súlymátrixszal megadva. $\mathbf{W}$ egy $n \times n$-es szimmetrikus mátrix, diagonálisa azonosan zéró, míg a nemdiagonális $w_{ij} = w_{ji} \geq 0$, $i \neq j$ elem a $\{v_i, v_j\}$ él súlya (ha v_i és v_j nincsenek éllel összekötve, akkor ez a súly 0). Egy közönséges gráf ennek speciális esete, ahol a súlymátrix a szokásos $0-1$ adjacencia-mátrix.

A G súlyozott gráf euklideszi reprezentációjában csak a csúcsokhoz rendelünk reprezentánsokat. Az $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ $(k-1)$-dimenziós reprezentánsokra a $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T = \mathbf{I}_{k-1}$ kényszerfeltétel mellett még a $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ kikötést is tesszük, így az első koordináták egyenlőségét kizárjuk. (Az 1. fejezetbeli k-dimenziós reprezentánsokról is láttuk, hogy valójában egy $(k-1)$-dimenziós altérben helyezkednek el.)

A minimalizálandó célfüggvény most

$$Q := \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_{ij} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 = \operatorname{tr} \mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{X}^T, \tag{4.1}$$

ahol az $\mathbf{X}$ $(k-1) \times n$-es mátrix a reprezentánsokat tartalmazza oszlopaiban, a $\mathbf{C}$ $n \times n$-es mátrix pedig a súlyozott gráf Laplace-mátrixa. Könnyű látni, hogy $\mathbf{C} = \mathbf{D} - \mathbf{W}$, ahol a $\mathbf{D}$ diagonálmátrix diagonális elemei $d_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$, $(i = 1, \dots, n)$. Az is könnyen látható, hogy az ugyanezen a csúcshalmazon definiált $H = (V, E)$ hipergráfhoz

$$w_{ij} = w_{ji} = \sum_{e \in E} \mathcal{I}(v_i \in e)\mathcal{I}(v_j \in e)\frac{1}{|e|}, \qquad (1 \leq i < j \leq n).$$

súlyokkal hozzárendelt súlyozott gráf Laplace-mátrixa azonos a hipergráféval. Egy összefüggő súlyozott gráf (súlymátrixa nem hasad blokkokra) Laplace-mátrixának pontosan egy 0 sajátértéke van és rendelkezik a jól ismert tulajdonságokkal.

Q minimuma itt is a Laplace-mátrix k legkisebb (vagy ami ekvivalens, $k-1$ legkisebb pozitív) sajátértékének összege, és eléretik, ha az $\mathbf{X}$ mátrix soraiba a hozzájuk tartozó sajátvektorokat tesszük (itt a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektort kihagyjuk a reprezentációból).

A csúcsok egy $P_k = (V_1, \dots, V_n)$ partíciójának sűrűsége és súlyozott sűrűsége itt is hasonlóan definiálható:

$$v(P_k) := \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=l+1}^{k} w'_{lm}, \quad u(P_k) := \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{m=l+1}^{k} \left(\frac{1}{n_l} + \frac{1}{n_m}\right) w'_{lm},$$

ahol $w'_{lm} = \sum_{v_i \in V_l} \sum_{v_j \in V_m} w_{ij}$, $(1 \le l < m \le k)$ és $n_p = |V_p|$. A μ_k, ν_k mennyiségek pedig ezek $\mathcal{P}_k$-n vett minimumai.

A perturbációs vizsgálatokhoz rögzítsük a P_k partíciót. Ennek megfelelően a G súlyozott gráf két, éldiszjunkt részre bontható: Az egyik tartalmazza az egyszínű, a másik pedig a tarka (itt kétszínű) éleket a P_k partíció által meghatározott színezésben. Mindkét részt ugyanazon a csúcshalmazon tekintve a két súlyozott gráf Laplace-mátrixa összeadódik (ld. 6.1. Állítás): $\mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{P}$. Mivel az egyszínű élekből álló rész k összefüggő komponensre bontható (az egyes színeknek megfelelően), $\mathbf{B}$-nek pontosan k db. 0 sajátértéke lesz. Jelölje ϱ a $\mathbf{B}$ mátrix legkisebb pozitív sajátértékét (ez azonos valamely egyszínű blokk legkisebb pozitív sajátértékével). Legyen továbbá $\varepsilon := \|\mathbf{P}\|$ (ε annál kisebb, minél kevesebb a tarka él). Tegyük fel, hogy $\varepsilon < \varrho$.

4.1. Definíció. Az $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in R^{k-1}$ vektorok k-varianciája a P_k partícióban

$$S_k^2(P_k, \mathbf{X}) := \sum_{i=1}^{k} \sum_{j\,:\,c(j)=i} \left\| \mathbf{x}_j - \frac{\sum_{l\,:\,c(l)=i} \mathbf{x}_l}{n_i} \right\|^2,$$

ahol c a megfelelő színezés és $n_i = |V_i|$. Az $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ vektorok *k-varianciája*

$$S_k^2(\mathbf{X}) := \min_{P_k \in \mathcal{P}_k} S_k^2(P_k, \mathbf{X}).$$

A fenti jelölésekkel a következő állítás látható be:

4.2. Tétel. *Az $\varepsilon < \varrho$ feltevés mellett az*

$$S_k^2(P_k, \mathbf{X}^*) \le k\frac{\varepsilon}{\varrho}$$

felső becslés adható az $\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_n^*$ optimális $(k-1)$-dimenziós reprezentánsok P_k-beli k-varianciájára.

A bizonyítást ld. a 7. fejezetben. Megjegyezzük, hogy

$$\varepsilon = \|\mathbf{P}\| \le \operatorname{tr} \mathbf{P} = \sum_{\substack{i,j \\ c(i)\neq c(j)}} w_{ij} = v(P_k)$$

és

$$\varrho = \min_i \lambda_1(\mathbf{B}_i) \geq \begin{cases} 2\left(1-\cos\frac{\pi}{n_i}\right)\mu_2(G_i), & \text{ha } 0 \leq \mu_2(G_i) \leq \frac{1}{2}d_{i_{\max}} \\ c_{i1}\mu_2(G_i) - c_{i2}d_{i_{\max}}, & \text{ha } \frac{1}{2}d_{i_{\max}} < \mu_2(G_i), \end{cases}$$

ahol $c_{i1} = 2\left(\cos\frac{\pi}{n_i} - \cos\frac{2\pi}{n_i}\right)$, $c_{i2} = 2\cos\frac{\pi}{n_i}\left(1-\cos\frac{\pi}{n_i}\right)$, $d_{i_{\max}} = \max_{j\in V_i} d_j$ — ld. 2.5. Tétel — és $\mathbf{B}_i$ a V_i csúcshalmaz által indukált, G_i-vel jelölt súlyozott részgráf $n_i \times n_i$-es Laplace-mátrixa. $\mathbf{B}_i$ a $\mathbf{B}$ mátrix i-edik diagonális blokkja. Ezért minél kisebb a P_k partíció sűrűsége és minél nagyobb az egyszínű részgráfok 2-vágása (azaz a G_i részgráfok erősen összefüggőek), annál jobban klaszteresíthetők az optimális $(k-1)$-dimenziós reprezentánsok k klaszterbe.

A fenti becslés egy adott k-partícióra vonatkozik, ϱ és ε az adott P_k-tól függ. A következő állítás az optimális $(k-1)$-dimenziós reprezentánsok k-varianciájára vonatkozik.

4.3. Állítás. *Legyen $\mathbf{X}^*$ optimális $(k-1)$-dimenziós reprezentációja a fenti súlyozott gráfnak. A csúcs-reprezentánsok k-varianciájára az*

$$S_k^2(\mathbf{X}^*) \leq S_k^2(P_k, \mathbf{X}^*) \leq \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}}{\varrho(P_k)}$$

összefüggés teljesül bármely P_k partícióval, ahol $\varrho(P_k)$ a P_k partíció által indukált részgráfok tömörségére jellemző, az előbbiekben bevezetett konstans.

Szeretnénk most a fenti k-varianciát közvetlenül a λ_k és λ_{k+1} sajátértékek hányadosával felülbecsülni. Ez $k = 2$ esetén sikerülni is fog. Az eredményt még általánosabban, súlyozott csúcsú súlyozott gráfokra mondjuk ki.

Legyenek a $G = (V, \mathbf{W})$ súlyozott gráf csúcsai az $d_1, \ldots, d_n$ súlyokkal ellátva, ahol $d_j = \sum_{i\neq j} w_{ij}$. Jelölje $\mathbf{D}$ az ezeket a súlyokat ilyen sorrendben diagonálisában tartalmazó diagonálmátrixot. Most a (4.1)-beli Q célfüggvényt a $\sum_{j=1}^n d_j \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^T = \mathbf{I}_k$ és $\sum_{j=1}^n d_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ kényszerfeltételek mellett minimalizáljuk. Mivel Q most

$$\operatorname{tr} \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^T = \operatorname{tr}(\mathbf{X}\mathbf{D}^{1/2})[\mathbf{D}^{-1/2}\mathbf{C}\mathbf{D}^{-1/2}](\mathbf{X}\mathbf{D}^{1/2})^T$$

alakban írható, és az $\mathbf{X}\mathbf{D}$ mátrix sorai a kényszer miatt ortonormáltak, Q minimumát most a szögletes zárójelben álló, a továbbiakban $\mathbf{C}_D$-vel jelölt *súlyozott Laplace-mátrix* (amely szintén szimmetrikus, szinguláris, pozitív szemidefinit) $k-1$ legkisebb pozitív sajátértékének összege adja, az optimális $(k-1)$ dimenziós reprezentánsok pedig az $\mathbf{X}^*\mathbf{D}^{1/2}$ mátrixból nyerhetők, mely a megfelelő sajátvektorokat tartalmazza soraiban. $\mathbf{C}_D$ sajátértékeire egyébként 2 felső korlát, így ha G még összefüggő is, akkor

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq 2.$$

4.4. Tétel. *Legyen* $\mathbf{X}^*$ *optimális 1-dimenziós reprezentációja a fenti módon súlyozott gráfnak (*$\mathbf{X}^*$ *a* λ_2*-höz tartozó sajátvektorból nyerhető transzformációval). Akkor az optimális reprezentánsok 2-varianciájára a spektrumbeli réssel a következő becslés adható:*

$$S_2^2(\mathbf{X}^*) \leq \frac{\lambda_2}{\lambda_3}.$$

Felmerül a kérdés, vajon a $(k-1)$-dimenziós optimális euklideszi reprezentánsok k-varianciáját nem lehetne-e felülről becsülni a λ_k és λ_{k+1} közti spektrumbeli réssel vagy annak esetleg k-tól függő konstansszorosával. Sejtésünk a következő:

4.5. Sejtés.

$$S_k^2(\mathbf{X}^*) \leq (k-1) \cdot \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k}{\lambda_{k+1}}, \qquad 1 \leq k < n-1.$$

A 4.4. Tétel bizonyítása és a 4.5. Sejtés bizonyításához szükséges lemma a 7. fejezetben van leírva.

5. Egy ad hoc algoritmus hipergráfok klasztereinek megállapítására

Mintául a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bináris (0–1) változókra tett $e_1, e_2, \ldots, e_m$ megfigyelések szolgálnak ($n \ll m$). Ezek a $H = (V, E)$ hipergráfot alkotják, ahol $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ és $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, $\mathcal{I}(v \in e) = v(e)$ pedig 1 vagy 0 aszerint, hogy az e objektumon a v tulajdonságot megfigyelték-e vagy sem.

Legyen $E' \subset E$ egy al-minta, amely a $H' = (V, E')$ hipergráfot generálja. Jelölje $0 = \lambda_1(H') \leq \lambda_2(H') \leq \ldots \leq \lambda_n(H')$ a H' hipergráf Laplace-spektrumát és az $n \times n$-es $\mathbf{X}^*(H')$ mátrix tartalmazza soraiban a hozzájuk tartazó teljes ortonormált sajátvektorrendszert. Az 1.2. Reprezentációs Tétel szerint bármely d egészre ($1 \leq d \leq n$) a $d \times n$-es $\mathbf{X}_d^*(H')$ mátrix, amely $\mathbf{X}^*(H')$ első d sorát tartalmazza, a H' hipergráf optimális d-dimenziós reprezentációját adja. Az E'-beli élek összvarianciája ebben a reprezentációban

$$L\big(\mathbf{X}_d^*(H')\big) = \sum_{e \in E'} L\big(e, \mathbf{X}_d^*(H')\big) = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j(H').$$

A H' hipergráf beágyazásának költségét a

$$K(H') := \min_{d \in \{1,\ldots,n\}} \left[c2^{n-d} + L\big(\mathbf{X}_d^*(H')\big)\right]$$

célfüggvénnyel definiáljuk, ahol a c konstanst előre választjuk meg (a probléma méretének megfelelően), és a $c2^{n-d}$ tag a túlságosan nagy dimenziókat bünteti (az élek összvarianciáját kifejező $L\big(\mathbf{X}_d^*(H')\big)$ tag — épp ellenkezőleg — a dimenzió növelésével csökkenthető). A minimumot adó d^* dimenziót az E' *él-klaszter dimenziójának* nevezzük.

Jelölje $\mathcal{S}$ az E élhalmaz összes lehetséges partícióit. Keressük azt az $S \in \mathcal{S}$ partíciót, melyre a $K = \sum_i K(H_i)$ célfüggvény minimális, ahol $H_i = (V, E_i)$. Most válasszunk és rögzítsünk egy k egészet $(1 \le k \le n)$. Definiálunk egy iterációt, amely a fenti célfüggvény egy relatív minimumához vezet, ha csak az $\mathcal{S}_k$-val jelölt k-partíciók körében keressük a minimumot. Legyen tehát $(E_1, \ldots, E_k) \in \mathcal{S}_k$ az E élhalmaz egy k-partíciója. Az előző jelöléseket alkalmazva az indukált $H_i = (V, E_i)$, $(i = 1, \ldots, k)$ rész-hipergráfokra a

$$Q_{d_i}(H_i) := c2^{n-d_i} + L\big(\mathbf{X}_{d_i}^*(H_i)\big), \quad (i = 1, \ldots, k)$$

jelöléseket bevezetve a $Q = \sum_{i=1}^{k} Q_{d_i}(H_i)$ költségfüggvényt fogjuk minimalizálni a $\mathcal{S}_k$-beli partíciók és a $d_1, \ldots, d_k$ dimenziók körében.

A minimumot kereső iteráció a következő lépésekből áll:

0. Kiindulásul tekintsük az E élhalmaz tetszőleges $E_1, \ldots, E_k$ partícióját (egy ilyet nyerhetünk pl. a k-közép módszerrel, ld. [13], [14]).

1. Az $E_1, \ldots, E_k$ klasztereket rögzítve: meghatározzuk a $H_i = (V, E_i)$ hipergráfok Laplace-mátrixainak spektrálfelbontását. Ezután $Q_{d_i}(H_i)$-t a d_i dimenzióban minimalizáljuk (minden i-re külön). Mivel $1 \le d_i \le n$ egész, ez egy diszkrét minimalizálási feladat. Jelölje d_i^* a minimumot adó (nem feltétlenül egyértelmű) dimenziót, amellyel tehát

$$Q_{d_i^*}(H_i) = c2^{n-d_i^*} + \sum_{j=1}^{d_i^*} \lambda_j(H_i) \quad (i = 1, \ldots, k).$$

2. Most a d_i^*-dimenziókat rögzítve az objektumokat átsoroljuk a klaszterek közt: az e objektumot abba az E_i klaszterbe helyezzük, amelyben a hozzá tartozó $L\big(e, \mathbf{X}_{d_i^*}^*(H_i)\big)$ variancia minimális (ha több klaszterre is minimális, akkor vegyük a legkisebb ilyen i-t). Az objektumok így nyert új klaszteresítését $E_1^*, \ldots, E_k^*$-gal jelölve, ezekkel megismételjük az 1. és 2. lépéseket, amíg csak Q csökkenthető.

Triviális, hogy a fenti lépések Q értékét csökkentik, s mivel az objektumok száma véges, az algoritmus véges lépésben Q relatív minimumához vezet. (Esetünkben, $n = 50$, $m = 10\,000$ értékekkel az iteráció 5–6 lépésben véget ért.)

Bevezethetnénk egy k-ban minimalizáló lépést is, így azonban az algoritmus nagyon hosszadalmas lenne. Inkább végigcsináljuk néhány kiválasztott k-ra (pl. a

k-közép eljárást lefuttatva kaphatunk k-ra ötletet), és összehasonlítjuk a minimumként kapott Q értékeket.

Az iteráció során kiürülhetnek, és általában ki is ürülnek él-klaszterek. A k értéke természetesen ezzel csökken. A $H_i = (V, E_i)$ hipergráfok általában tartalmaznak izolált csúcsokat (nem összefüggőek), jelölje V_i a nem izolált csúcsok halmazát. Ekkor $\cup_{i=1}^{k} V_i = V$, de a $V_1, \dots, V_k$ rendszer nem feltétlenül diszjunkt. Ezek a diszjunkt él-klaszterekre jellemző tulajdonság-asszociációkat tartalmazzák. A mi mintánkon, ahol a tulajdonságok veleszületett rendellenességek, az objektumok pedig érintett újszülöttek voltak, ezek az asszociációk épp a rendellenességek speciális kapcsolódási csoportjait, ún. szindrómáit adták meg.

6. Néhány megjegyzés hipergráfok spektrumához

Az első fejezet jelöléseit használjuk, ill. ha nem egyértelmű, hogy melyik hipergráfról van szó, akkor a Laplace-mátrix, sajátértékek és egyéb mennyiségek argumentumaiban feltüntetjük a hipergráfot.

6.1. Megjegyzés. Legyenek a $H_i = (V, E_i)$, $(i = 1, \dots, k)$ hipergráfok éldiszjunktak ugyazon a csúcshalmazon. Az $E = \cup_{i=1}^{k} E_i$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $H = (V, E)$ jelöléssel a H hipergráf Laplace-mátrixára

$$\mathbf{C}(H) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{C}(H_i) \tag{6.1}$$

teljesül. ■

6.2. Megjegyzés. *Legyenek a $H_i = (V, E_i)$, $i = 1, 2$ hipergráfok él-diszjunkt részhipergráfjai a $H = (V, E)$ hipergráfnak, azaz $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Akkor*

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \geq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{(2)}, \quad (1 \leq k \leq n), \tag{6.2}$$

ahol $\lambda_j^{(i)}$ a H_i hipergráf j-edik sajátértékét jelöli nagyság szerint növekvő sorrendben (i=1,2).

6.3. Megjegyzés. Az előző megjegyzés jelöléseivel

$$\lambda_{j-r_i} \leq \lambda_j^{(i)} \leq \lambda_j, \quad (j = 1, \dots, n), \tag{6.3}$$

ahol r_i a H_i hipergráf $\mathbf{C}_i$ Laplace-mátrixának a rangja $(i = 1, 2)$, továbbá $\lambda_l = 0$, ha $l < 1$.

6.4. Megjegyzés. Legyen e a $H = (V, E)$ hipergráf egy éle, $|e| = z$. Az $E' := E \setminus \{e\}$, $H' := (V, E')$ jelölésekkel

$$\sum_{j=1}^{k-z+1} \lambda_j \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda'_j \leq \sum_{j=1}^{k} \lambda_j, \quad (z \leq k \leq n-1) \tag{6.4}$$

ahol λ'-k jelölik a H' hipergráf Laplace-mátrixának sajátértékeit.

6.5. Következmény. *$z = 2$ esetén a (7.3) összefüggés két egyenlőtlenségét egymás után váltakozva alkalmazva adódik, hogy*

(6.5) $0 \le \lambda'_2 \le \lambda_2 \le \lambda'_2 + \lambda'_3 \le \lambda_2 + \lambda_3 \le \lambda'_2 + \lambda'_3 + \lambda'_4 \le \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \le \cdots.$ ■

Az alábbi megjegyzések az 1. fejezet definíciói és néhány, a pozitív definit mátrixok sajátértékeire vonatkozó tétel (pl. [15]-ben) alapján könnyen bizonyíthatók, a bizonyítások megtalálhatók [6]-ban. A továbbiakban megadjuk néhány jól ismert gráf ill. hipergráf optimális euklideszi reprezentációját.

6.6. Példa. Legyen C_n az n csúcsú *teljes hipergráf* $2^n - n - 1$ hiperéllel. Laplace-mátrixának legkisebb sajátértéke 0, a többi sajátérték pedig mind egyenlő az

$$\frac{n2^{n-1} - 2^n + 1}{n - 1} \tag{6.6}$$

számmal. Ehhez az $(n-1)$-szeres multiplicitású sajátértékhez tartozó sajátvektorok tetszőlegesen választhatók (persze azért úgy, hogy ortonormált rendszert alkossanak) az $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$ vektorra merőleges altérben. ■

6.7. Példa. Legyen P_n a *szalag-gráf.* Tegyük fel, hogy a csúcsok száma páratlan ($n = 2l + 1$), és $v_{-l}, \dots, v_0, \dots, v_l$-ként indexeljük őket. A legkisebb pozitív sajátérték $1 - \cos\frac{\pi}{n}$, az ehhez tartozó sajátvektor koordinátái — melyek az optimális 2-dimenziós reprezentációban lépnek fel — pedig

$$x_j = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \sin(j\frac{\pi}{n}), \quad j = -l, \dots, 0, \dots, l. \tag{6.7}$$ ■

6.8. Példa. Legyen S_d az $n = d+1$ csúcsú *csillag.* Ennek legkisebb pozitív sajátértéke $1/2$, multiplicitása $d - 1$. Egy optimális d-dimenziós euklideszi reprezentációt ad egy d-csúcsú szabályos poliéder, ahol az 1-fokú csúcsok reprezentánsai a poliéder csúcsai, a d-fokú csúcs reprezentánsa pedig a poliéder szimmetriacentruma. ■

6.9. Példa. Jelölje $G_{d,l}$ az S_d gráf finomítását úgy, hogy S_d éleit további csúcsok beiktatásával l élre osztjuk fel, így a csúcsok száma $n = dl + 1$. $G_{d,l}$-t egy d-lábú, minden lábán l ízt tartalmazó *póknak* nevezzük. A fenti pók Laplace-mátrixának legkisebb pozitív sajátértéke $1 - \cos\frac{\pi}{2l+1}$ és multiplicitása $d - 1$. $G_{d,l}$ egy optimális d-dimenziós euklideszi reprezentációja az S_d és P_{2l+1} gráfok reprezentációjából adódik, ahol a szabályos poliéder szimmetriacentrumát a csúcsaival összekötő szakaszok vannak (6.7) szerint szinuszosan felosztva. ■

6.10. Példa. Jelölje $L_{d,l}$ a d-dimenziós *rácsot.* Csúcsainak koordinátái a $-l, \dots, 0, \dots, l$ számokból kiválasztott d-esek; ahol két ilyen d-es akkor van összekötve éllel, ha pontosan egy koordinátájukban különböznek. A csúcsok száma így $n = (2l + 1)^d$. Az $L_{d,l}$ gráf legkisebb pozitív sajátértéke $1 - \cos\frac{\pi}{2l+1}$, multiplicitása d. Egy optimális $(d + 1)$-dimenziós euklideszi reprezentáció egy d-dimenziós rács, szimmetriacentruma az origó, oldalai pedig (6.7) szerint szinuszosan vannak felosztva. ■

6.11. Példa. Legyen $K_{n_1,\dots,n_k}$ a *Turán-gráf,* amely a csúcsok $V_1, \dots, V_k$-val jelölt ún. független részhalmazaiból áll (a függetlenség azt jelenti, hogy a részhalmazokon belül nem futnak élek). Legyen $|V_i| = n_i$, $(i = 1, \dots, k)$ és $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ a csúcsok száma. A színezések nyelvén, ebben a gráfban nincsenek egyszínű élek, viszont az összes lehetséges fajta kétszínű él megtalálható. $K_{n_1,\dots,n_k}$ spektruma: egy db. 0, n_i db. $\frac{1}{2}(n - n_i)$, $(i = 1, \dots, k)$, a legnagyobb sajátérték pedig $\frac{1}{2}n$, multiplicitása $k - 1$. Ha ez utóbbihoz tartozó sajátvektorokkal adjuk meg a $K_{n_1,\dots,n_k}$ euklideszi reprezentációját, akkor az azonos színű csúcsok reprezentánsai ugyanabba a $(k - 1)$-dimenziós pontba esnek össze, így a reprezentáció k különböző pontból áll. Megjegyezzük, hogy a Turán-gráf kromatikus száma k.

A másik véglet az az eset, amikor a hipergráf k összefüggő komponensből áll. Ilyenkor a 0 sajátérték multiplicitása k, és a hozzá tartozó sajátvektorok által meghatározott euklideszi reprezentációban az azonos komponensbe tartozó csúcsok reprezentánsai esnek egybe.

Az első három fejezetben láttuk, hogy ha a hipergráf összefüggő (csak egy 0 sajátérték van), de van $k - 1$ „kicsi" pozitív sajátértéke, akkor várható, hogy a hozzájuk tartozó sajátvektorok által meghatározott reprezentációban a hipergráf jól klaszteresedik. Mikor az 1. fejezetbeli Q célfüggvény maximumát keressük, analóg módon megkérdezhetnénk, vajon $k - 1$ elkülönülten „nagy" sajátérték a spektrumban jelzi-e mindig k db. közel független csúcsklaszter meglétét, és következik-e ebből a megfelelő sajátvektorok által történő reprezentációban a reprezentánsok metrikus értelemben vett jó klaszteresíthetősége? Tudunk-e ebből következtetni a kromatikus számra? Valószínűleg nem, mert a kromatikus szám egy szigorúan kombinatorikus mennyiség. Viszont, ha egy olyan kvázi-kromatikus számot tekintenénk, ahol nem baj, ha van néhány egyszínű él is, akkor ezt tudná jelezni a nagy sajátértékekre adaptált algoritmus, sőt kiadná a közel független csúcsklasztereket is.

7. A fontosabb tételek bizonyítása

7.1. Lemma. *Legyen $\Delta > 0$ valós, n és k pedig rögzített egészek $(1 \le k < n)$. Akkor tetszőleges, a $\mathcal{T}$ tulajdonságot teljesítő $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in R^k$ pont-n-es kiszínezhető $k+1$ különböző színnel oly módon, hogy a különböző színűek közti minimális távolság legalább Δ, ahol a $\mathcal{T}$ tulajdonság a következő: R^k bármely egyenesére vetítve a pontokat, ezen az egyenesen van legalább két szomszédos pont, melyek távolsága legalább Δ.*

Bizonyítás. Teljes indukcióval, $k = 1$-re az állítás maga a $\mathcal{T}$ tulajdonság. Tegyük fel, kogy $(k - 1)$-re már bebizonyítottuk az állítást. k-ra: a $\mathcal{T}$ tulajdonság szerint a pontok kiszínezhetők 2 különböző színnel a kívánt módon. Válasszunk egy-egy pontot mindegyik színből. Kössük össze őket és és vetítsük pontjainkat az összekötő egyenesre merőleges $(k - 1)$-dimenziós altérre.

Ugyanakkor tekintsük az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ pontok Δ-szintgráfját (az egymástól Δ-nál közelebb levőket kötjük össze). Azt kell megmutatnunk, hogy ez a gráf $k+1$ összefüggő komponensből áll. Mivel a pontok a fentiek miatt 2 színnel kiszínezhetők, legalább 2 komponensünk van. A vetítés után azonban ez a 2 komponens össze lesz kötve. Ezért az összefüggő komponensek száma a vetítés után eggyel csökken. De az indukciós feltevést a vetületekre alkalmazva, $k-1$ dimenzióban bennük már van k összefüggő komponens. Ezek összefüggőek maradnak k-dimenzióban is. Viszont a vetítés során, mint láttuk, az összefüggő komponensek száma eggyel csökkent, tehát eredetileg $k+1$ volt. ■

7.2. Lemma. *Legyenek $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in R^k$ tetszőleges pontok a $\sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ és a $\sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T = \mathbf{I}_k$ kényszerfeltételekkel. Ezek kiszínezhetők $k+1$ különböző színnel úgy, hogy a különböző színűek közti minimális távolság legalább $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{n(n^2-1)}}$.*

Bizonyítás. Az előbbi lemmát alkalmazzuk $\Delta = d_n$-nel. Azt kell csak belátnunk, hogy a $\mathcal{T}$ tulajdonság teljesül ezzel a Δ választással. Ui. legyen egy tetszőlegesen választott egyenes irányvektora $\mathbf{f}$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\|\mathbf{f}\| = 1$. Akkor a vetületek az $x_j = \mathbf{f}^T \mathbf{x}_j$ pontok lesznek, melyekre az eredeti pontokra tett kényszerfeltételek miatt

$$\sum_{j=1}^n x_j = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^n x_j^2 = \sum_{j=1}^n \mathbf{f}^T(\mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T)\mathbf{f}^T = \|\mathbf{f}\|^2 = 1.$$

Jelölje $x_1^*, \ldots, x_n^*$ a nagyság szerint rendezett $x_1, \ldots, x_n$ egydimenziós pontokat és legyen

$$\delta := \max_{1 \le i < n} (x_{i+1}^* - x_i^*).$$

Ezzel

$$2n = \sum_{j=1}^n x_i^{*2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i^* - x_j^*)^2 = 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i^* - x_j^*)^2 \le$$

$$\le 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \delta^2 (j-i)^2 = \frac{\delta^2}{6} n^2(n^2-1).$$

Így $\delta^2 \ge d_n^2$, amiből már következik, hogy $\Delta = d_n$ jó választás. ■

A 2.4. Tétel bizonyítása.

A felső becslés: Legyen $(V_1^*, \ldots, V_k^*)$ a minimális súlyozott k-sűrűséget adó partíciója a V csúcshalmaznak, legyen $|V_i^*| = n_i^*$, $(i = 1, \ldots, n)$. Definiáljuk a csúcsok következő k-dimenziós euklideszi reprezentációját:

$$x_j(i) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n_i^*}}, & \text{ha } v_j \in V_i^* \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $x_j(i)$ jelöli az $\mathbf{x}_j$ reprezentáns i-edik koordinátáját. Ezekre a reprezentánsokra $\sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T = \mathbf{I}_k$ szintén teljesül. Az 1. fejezet jelöléseivel az e él varianciája ebben a reprezentációban

$$L(e,\mathbf{X}) = \frac{1}{|e|}\sum_{1\le i<j\le k}\left(\frac{1}{n_i^*}+\frac{1}{n_i^*}\right)a_i^*(e)a_j^*(e), \quad e\in E,$$

ahol $a_i^*(e) = |e\cap V_i^*|$, $(i = 1,\dots k)$. Mivel $\sum_{e\in E} L(e,\mathbf{X}) = u(V_1^*,\dots,V_k^*) = \nu_k(H)$ és $\sum_{j=1}^k \lambda_j = L(\mathbf{X}^*)$ — ahol $\mathbf{X}^*$ az optimális reprezentációja H-nak —, az optimalitás miatt $\sum_{j=1}^k \lambda_j \le \nu_k(H)$.

Az alsó becslés:

1. A költség bármely reprezentációban monoton: az $e'\subseteq e$ relációból következik, hogy $L(e',\mathbf{X}) \le L(e,\mathbf{X})$. Ez egyszerű geometriai meggondolásokkal adódik. Részletesen ld. [6]-ban.
2. Ha $e = \{v_i, v_j\}$, akkor az (1.5) összefüggéssel $L(e,\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j\|^2$ bármely $\mathbf{X}$ reprezentációban.
3. Tekintsük az optimális k-dimenziós euklideszi reprezentációt adó $\mathbf{x}_1^*,\dots \mathbf{x}_n^*$ vektorokat (az első koordináták — mivel egyenlők — el is hagyhatók, a maradék $\hat{\mathbf{x}}_j^*$ vektorok teljesítik a $\sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{x}}_j^*(\hat{\mathbf{x}}_j^*)^T = \mathbf{I}_{k-1}$ kényszert). A 7.2. Lemma szerint $\hat{\mathbf{x}}_j^*$-ok, és így $\mathbf{x}_j^*$-ok is kiszínezhetők k különböző színnel úgy, hogy a különböző színűek közti távolság legalább d_n. Jelölje $(V_1,\dots V_k)$ az ez által a színezés által indukált k-partíciót, az általa generált vágást pedig jelölje $H(V_1,\dots,V_k)$. Egy vágásbeli e él tartalmaz egy kétszínű $e' = \{v_i, v_j\}$ élet, így az 1. és 2. rész eredményeit alkalmazva

$$L(e,\mathbf{X}^*) \ge L(e',\mathbf{X}^*) = \frac{\|\mathbf{x}_i^*-\mathbf{x}_j^*\|^2}{2} \ge \frac{d_n^2}{2}$$

adódik, ahonnan $c_n = \frac{d_n^2}{2} = \frac{6}{n(n^2-1)}$. Mivel azonban $\mathbf{X}^*$ az optimális k-dimenziós euklideszi reprezentáció volt, a 1.2. Reprezentációs Tétel alapján adódik, hogy

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = \sum_{e\in E} L(e,\mathbf{X}^*) \ge \sum_{e\in H(V_1,\dots,V_k)} L(e,\mathbf{X}^*) \ge c_n\big|H(V_1,\dots,V_k)\big| \ge c_n\theta_k(H).$$

■

A 3.2. Tétel bizonyítása. Legyen $\varepsilon < \frac{1}{2\sqrt{n}}$ és legyen $P_k = (V_1,\dots V_k)$ a csúcsok olyan jól-szeparált k-partíciója az $\mathbf{X}^* = (\mathbf{x}_1^*,\dots,\mathbf{x}_n^*)$ optimális k-dimenziós euklideszi reprezentációban, hol a klaszterátmérők ε-nál kisebbek. (Az első koordináták egyenlősége miatt ezek helyett megint csak a $\hat{\mathbf{x}}_j^*$ $(k-1)$-dimenziós pontokat tekintjük, a metrikus távolságok ugyanazok.) A skalárszorzat folytonossága miatt feltehetjük, hogy a 3.2. Tétel feltételei mellett van k olyan „centrum", hogy a reprezentánsok az ezek körüli ε sugarú gömbökben tömörülnek, és — $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}_j^*)$-gal jelölve az $\hat{\mathbf{x}}_j^*$-hoz legközelebb eső „centrumot" — a $\sum_{j=1}^n \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}_j^*)\mathbf{y}^T(\hat{\mathbf{x}}_j^*) = \mathbf{I}_{k-1}$ összefüggés a „centrumokra" is fennáll. Mivel a „centrumok" közt k különböző van (jelölje ezeket $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$) ezekre $\sum_{i=1}^k n_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T = \mathbf{I}_{k-1}$ teljesül, ahol $n_i = |V_i|$, $\sum_{i=1}^k n_i = n$, továbbá ez a feltétel $\mathbf{y}_i$-ket egyértelműen meghatározza:

$$y_i(l) = \begin{cases} \frac{1}{n_i}, & \text{ha } i = l, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Itt az argumentumban a koordinátát jelöltük. Jelölje $\mathbf{Y}(\mathbf{X}^*)$ az $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}_j^*)$ vektorok által meghatározott $(k-1)$-dimenziós euklideszi reprezentációját a csúcsoknak. Könnyen látható, hogy $\sum_{e \in E} L\big(e, \mathbf{Y}(\mathbf{X}^*)\big) = u(P_k)$, így kétszer is alkalmazva az (1.5) összefüggést a következő adódik:

$$\nu_k(H) \le \sum_{e\in E} L\big(e, \mathbf{Y}(\mathbf{X}^*)\big) = \sum_{e\in H(P_k)} L\big(e, \mathbf{Y}(\mathbf{X}^*)\big) =$$

$$= \sum_{e\in H(P_k)} \frac{1}{|e|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathcal{I}(v_i \in e)\mathcal{I}(v_j \in e)\big\|\mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}_i^*) - \mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}_j^*)\big\|^2 \le$$

$$= q^2 \sum_{e\in H(P_k)} \frac{1}{|e|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathcal{I}(v_i \in e)\mathcal{I}(v_j \in e)\|\hat{\mathbf{x}}_i^* - \hat{\mathbf{x}}_j^*\|^2 =$$

$$= q^2 \sum_{e\in H(P_k)} \frac{1}{|e|} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathcal{I}(v_i \in e)\mathcal{I}(v_j \in e)\|\mathbf{x}_i^* - \mathbf{x}_j^*\|^2 =$$

$$= q^2 \sum_{e\in H(P_k)} L(e, \mathbf{X}^*) \le q^2 \sum_{e\in E} L(e, \mathbf{X}^*) = q^2 \sum_{j=1}^k \lambda_j.$$

Itt q onnan határozható meg, hogy a legkisebb távolság a „centrumok" közt

$$\delta = \min \sum_{l=1}^k n_l = n\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}} \ge \frac{2}{\sqrt{n}},$$

továbbá az $\hat{\mathbf{x}}_i^*$ ill. $\hat{\mathbf{x}}_j^*$ reprezentánsok az $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}_i^*)$ ill. $\mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}_j^*)$ centrumok körüli ε-sugarú gömbökben ülnek, és ezért

$$q = \frac{\delta}{\delta - 2\varepsilon} = 1 + \frac{2\varepsilon}{\delta - 2\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{1 - \varepsilon\sqrt{n}}. \quad \blacksquare$$

7.3. Lemma. *Rendelkezzen az $n \times n$-es, szimmetrikus $\mathbf{B}$ mátrix a következő tulajdonsággal: van olyan k-dimenziós $F \subset R^n$ altér, hogy $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} \notin (a, b)$ minden*

$\mathbf{x} \in F$ $\big(\|\mathbf{x}\| = 1\big)$ *vektorra, ahol* $a < b$ *valós számok (esetleg* $a = -\infty$ *vagy* $b = \infty$*). Akkor* $\mathbf{B}$*-nek legalább* k *sajátértéke az* (a, b) *intervallumon kívül esik.*

Bizonyítás. Jelölje m a $\mathbf{B}$ mátrix (a, b)-beli sajátértékeinek számát, H pedig a hozzájuk tartozó sajátvektorok által kifeszített alteret. Akkor

$$k + m = \dim(F) + \dim(H) \leq n,$$

amivel be is bizonyítottuk az állítást, hiszen a $\mathbf{B}$ mátrix (a, b)-n kívüli sajátértékeinek száma $n - m \geq k$. ∎

7.4. Következmény. *Az előbbi jelölésekkel,*

[a] *ha van olyan* k*-dimenziós* $F \subset R^n$ *altér, hogy* $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} \geq a$ *minden* $\mathbf{x} \in F$ $\big(\|\mathbf{x}\| = 1\big)$ *vektorra, akkor* $\mathbf{B}$*-nek legalább* k *db. legalább* a*-nyi sajátértéke van;*

[b] *ha van olyan* k*-dimenziós* $F \subset R^n$ *altér, hogy* $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} \leq b$ *minden* $\mathbf{x} \in F$ $\big(\|\mathbf{x}\| = 1\big)$ *vektorra, akkor* $\mathbf{B}$*-nek legalább* k *db. legfeljebb* b*-nyi sajátértéke van;*

[c] *ha van olyan* k*-dimenziós* $F \subset R^n$ *altér, hogy* $\mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x} \in [a, b]$ *minden* $\mathbf{x} \in F$ $\big(\|\mathbf{x}\| = 1\big)$ *vektorra, akkor* $\mathbf{B}$*-nek legalább* k *db. sajátértéke van* $[a, b]$*-ben.* ∎

7.5. Lemma. *Legyen az* $n \times n$*-es, szimmetrikus, pozitív szemidefinit* $\mathbf{B}$ *mátrix* 0 *sajátértéke* k *multiplicitású, a pozitív sajátértékekre pedig legyen* $\varrho > 0$ *alsó korlát. Legyen a* $\mathbf{P}$ $n \times n$*-es pozitív szemidefinit „perturbációs" mátrix normája* $\|\mathbf{P}\| = \varepsilon$*. Akkor az* $n \times n$*-es pozitív szemidefinit* $\mathbf{C} := \mathbf{B} + \mathbf{P}$ *mátrixnak legalább* k *db. legfeljebb* ε*-nyi sajátértéke van. Továbbá* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$*-val jelölve a* k *legkisebb sajátértékhez tartozó sajátvektorokat, és felbontva őket*

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{z}_i, \qquad \mathbf{u}_i \in F, \quad \mathbf{z}_i \perp F, \tag{7.1}$$

alakban, ahol F *a* $\mathbf{B}$ *magtere, a merőleges komponensekre*

$$\|\mathbf{z}_i\|^2 \leq \frac{1}{\varrho}\varepsilon, \quad (i = 1, \ldots, k)$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{u} \in F$, $\|\mathbf{u}\| = 1$ tetszőleges. Akkor egyrészt

$$\mathbf{u}^T\mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{u}^T\mathbf{P}\mathbf{u} \leq \|\mathbf{P}\| \cdot \|\mathbf{u}\|^2 \leq \varepsilon. \tag{7.2}$$

Mivel F k-dimenziós altere R^n-nek, a 7.4. Következmény [b] része alapján a $\mathbf{C}$ mátrixnak legalább k db. ε-nál nem nagyobb sajátértéke van.

Másrészt, bármely $\mathbf{y} \in R^n$ vektor egyértelműen felbontható $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{z}$ alakban, ahol $\mathbf{u} \in F$ és $\mathbf{z} \perp F$. Tehát

$$\mathbf{y}^T\mathbf{C}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{y}^T\mathbf{P}\mathbf{y} = \mathbf{z}^T\mathbf{B}\mathbf{z} + \mathbf{y}^T\mathbf{P}\mathbf{y} \geq \varrho\|\mathbf{z}\|^2. \tag{7.3}$$

Legyen $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$ a $\mathbf{C}$ mátrix k legkisebb sajátértékéhez tartozó ortonormált sajátvektorrendszer. Akkor (7.2) és (7.3) szerint

$$\varepsilon \geq \mathbf{y}_i^T\mathbf{C}\mathbf{y}_i \geq \varrho\|\mathbf{z}_i\|^2, \quad (i = 1, \ldots, k)$$

teljesül, amivel be is láttuk az állítást. ∎

7.6. Lemma. *Legyen* $\mathbf{A}$ *rögzített* $k \times k$*-as mátrix,* $\mathbf{R}$ *pedig egy* $k \times k$*-as ortogonális mátrix. A* $\operatorname{tr} \mathbf{AR}$ *akkor lesz maximális, ha* $\mathbf{AR}$ *szimmetrikus. Ez esetben a maximum az* $\mathbf{A}$ *mátrix szinguláris értékeinek összege. (A bizonyítást ld. [5] 67. oldalán.)*

7.7. Lemma. *Legyen* $F \subset R^n$ *a* $\mathbf{B}$ *mátrix magtere (az előzőek szerint* F *dimenziója* k*) és* $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$ *egy tetszőleges* R^n*-beli ortonormált vektorrendszer. Bontsuk fel az* $\mathbf{y}_i$ *vektorokat*

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{z}_i, \qquad \mathbf{v}_i \in F, \quad \mathbf{z}_i \perp F, \quad (i = 1, \dots, k)$$

alakban. Akkor létezik az F *altéren belül olyan* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ *ortonormált rendszer, hogy*

$$\sum_{i=1}^{k} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{u}_i\|^2 \leq 2 \sum_{i=1}^{k} \|\mathbf{z}_i\|^2.$$

Bizonyítás. Jelölje $\mathbf{Y}$ és $\mathbf{U}$ az $\mathbf{y}_i$ és $\mathbf{u}_i$ vektorokból, mint oszlopvektorokból alkotott $n \times k$-as mátrixokat, ahol $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ tetszőleges F-beli ortonormált rendszer. Azt kell megmutatnunk, hogy van olyan $k \times k$-as ortogonális $\mathbf{R}$ mátrix, hogy

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{UR}\|^2 \leq 2\Delta,$$

ahol $\Delta := \sum_{i=1}^{k} \|\mathbf{z}_i\|^2$. A bal oldalt $L(\mathbf{R})$-rel jelölve,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{R}) &= \operatorname{tr} (\mathbf{Y} - \mathbf{UR})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{UR}) = \\ &= \operatorname{tr} \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} + tr\mathbf{R}^T\mathbf{U}^T\mathbf{UR} - 2 \operatorname{tr} \mathbf{Y}^T\mathbf{UR} = \\ &= \operatorname{tr} \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} + \operatorname{tr}(\mathbf{U}^T\mathbf{U})(\mathbf{RR}^T) - 2 \operatorname{tr} \mathbf{Y}^T\mathbf{UR} = 2(k - \operatorname{tr} \mathbf{Y}^T\mathbf{UR}). \end{aligned}$$

Másrészt $L(\mathbf{R})$ minimális, ha $\operatorname{tr} \mathbf{Y}^T\mathbf{UR}$ maximális.

A 7.6. Lemmát az $\mathbf{Y}^T\mathbf{U}$ mátrixra alkalmazzuk:

$$\min_{\mathbf{R} \text{ ortogonális}} L(\mathbf{R}) = 2 \sum_{i=1}^{k} (1 - s_i),$$

ahol $0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_k$ az $\mathbf{Y}^T\mathbf{U}$ mátrix szinguláris értékei. Másrészt

$$\begin{aligned} \Delta &= \|\mathbf{Y} - \mathbf{UU}^T\mathbf{Y}\|^2 = \operatorname{tr} (\mathbf{Y} - \mathbf{UU}^T\mathbf{Y})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{UU}^T\mathbf{Y}) = \\ &= \operatorname{tr} \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} - \operatorname{tr} \mathbf{Y}^T\mathbf{UU}^T\mathbf{Y} = k - \|\mathbf{Y}^T\mathbf{U}\|^2 = \sum_{i=1}^{k} (1 - s_i^2). \end{aligned}$$

Már csak azt kell belátnunk, hogy $1 - s_i \leq 1 - s_i^2$, $(i = 1, \dots, k)$. Ez az

$$s_i \leq s_k \leq s_k(\mathbf{Y}) \cdot s_k(\mathbf{U}) = 1,$$

összefüggésből következik, mivel mind $\mathbf{Y}$, mind $\mathbf{U}$ legnagyobb szinguláris értéke 1 (sőt, mivel oszlopaik ortonormáltak, pontosan k db. 1-gyel egyenlő szinguláris értékük van). ∎

7.8. Következmény. *A 7.1., 7.3. és 7.7. Lemmák jelölései és feltételei mellett van olyan* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in F$ *ortonormált rendszer, hogy*

$$\sum_{i=1}^{k} \|\mathbf{y}_i - \mathbf{u}_i\|^2 \le 2k\frac{\varepsilon}{\varrho}.$$

A 4.2. Tétel bizonyítása. Rögzítsük a P_k partíciót. Legyen $F \subset R^n$ a $\mathbf{B}$ mátrix k-dimenziós magtere. Jelölje $\mathbf{y}_1, \dots \mathbf{y}_k$ a $\mathbf{C} = \mathbf{B} + \mathbf{P}$ Laplace-mátrix k legkisebb sajátértékéhez tarozó ortonormált sajátvektorrendszert. Mivel a $\mathbf{C}$ mátrix $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k$-hoz tartozó sajátértékei legfeljebb ε-nyiak, a 7.6. Lemma alkalmazásával

$$d^2(\mathbf{y}_i, F) \le \frac{\varepsilon}{\varrho}, \quad (i = 1, \dots, k).$$

Összegezve $i = 1, \dots, k$-ra, a bizonyítás kész. ∎

A 4.4. Tétel bizonyítása. A feltételek miatt a súlyok összegére

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 1. \tag{7.4}$$

A súlyozott csúcsú és élű gráfok definíciója miatt (ld. 4. fejezet) a λ_2 sajátértékhez tartozó $\mathbf{u}$ sajátvektor koordinátáira a

$$\sum_{i=1}^{n} d_i u_i = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n} d_i u_i^2 = 1$$

feltételek teljesülnek. Most konstruálunk egy olyan $\mathbf{y} \in R^n$ vektort (y_i koordinátákkal), amely kielégíti a következő feltételeket:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i y_i = 0 \tag{7.5}$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} d_i u_i y_i = 0 \tag{7.6}$$

A következő alakban keressük $\mathbf{y}$-t:

$$y_i := |u_i - a| - b, \qquad (i = 1, \dots, n) \tag{7.7}$$

ahol a és b valós számok.

Csak egzisztenciát bizonyítunk. Megmutatjuk, hogy léteznek olyan a és b számok, hogy a velük előállított $\mathbf{y}$-ra a (7.5) és (7.6) feltételek teljesülnek. Érvelésünk a következő: tegyük fel, hogy már megtaláltuk a-t. Akkor (7.4) és (7.5) miatt b-re

$$b = \sum_{i=1}^{n} d_i \big| u_2(i) - a \big|. \tag{7.8}$$

adódik. Ezzel a b választással a (7.6) feltétel teljesítése azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} d_i u_2(i) \big| u_2(i) - a \big| = 0.$$

Mivel a bal oldal a folytonos függvénye és 1-gyel egyenlő, ha $a \leq \min_i u_i$, -1-gyel pedig, ha $a \geq \max_i u_i$, ezért a Bolzano–Weierstrass tétel miatt a bal oldali függvénynek van legalább egy gyöke $\min_i u_i$ és $\max_i u_i$ között. Nevezzünk ki egy ilyen gyököt a-nak, ezután a megfelelő b (7.8) szerint adódik, $\mathbf{y}$ koordinátáit pedig egyértelműen meghatározza a (7.7) összefüggés. Legyen $c_1 := a - b$ és $c_2 := a + b$. Könnyen látható, hogy

$$y_i = |u_i - a| - b = \begin{cases} c_1 - u_i, & \text{ha } u_i < a, \\ u_i - c_2, & \text{ha } u_i \geq a, \end{cases}$$

ezért

$$|y_i| = \min \big\{ |u_i - c_1|, |u_i - c_2| \big\} \tag{7.9}$$

teljesül minden i-re. Jelölje

$$\sigma^2(\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$$

az $\mathbf{y}$ vektor koordinátáinak varianciáját. Mivel az $\mathbf{u}$ vektor 2-varianciája

$$S_2^2(\mathbf{u}) = \min_{c,\alpha} \sum_{i=1}^{n} d_i [u_i - c_{\alpha_i}]^2, \tag{7.10}$$

ahol u_i jelöli az $\mathbf{u}$ vektor i-edik koordinátáját, továbbá $c_{\alpha_i} \in R$ és α_i vagy 1 vagy 2 (annak megfelelően, hogy melyik klasztercentrumtól való távolságot nézzük), ezért $\sigma^2(\mathbf{y})$ egyike azoknak a (7.10)-beli kifejezéseknek, amelyek minimuma $S_2^2(\mathbf{u})$. Így $\sigma^2(\mathbf{y}) \geq S_2^2(\mathbf{u})$.

$\sigma(\mathbf{y}) = 0$ esetén $S_2^2(\mathbf{u})$ szintén 0, amikor a tétel állítása triviálisan teljesül. Ezért feltehető, hogy $\sigma(\mathbf{y}) > 0$. Legyen $z_i := y_i/\sigma(y)$, $(i = 1, \ldots, n)$ és jelölje $\mathbf{z}$ a z_i-kből, mint koordinátákból álló vektort, $\mathbf{x}_i$ pedig legyen az a 2-dimenziós vektor, melynek első koordinátája u_i, második pedig z_i. Jelölje továbbá $\mathbf{X}$ az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{z}$ vektorokat soraiban tartalmazó $2 \times n$-es mátrixot, míg $\mathbf{X}^*$ az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$

vektorokat hasonlóan tartalmazó $2 \times n$-es mátrixot, ahol $\mathbf{v}$ a $\mathbf{C}_D$ Laplace-mátrix λ_3 sajátértékéhez tartózó sajátvektorának transzformáltja (a 4. fejezetbeli feltételek szerint). Akkor egyrészt

$$\max_{u_i \neq u_j} \frac{|z_i - z_j|}{|u_i - u_j|} \leq \frac{1}{\sigma(\mathbf{y})}, \tag{7.11}$$

mivel $y(i)$ definíciójából következik, hogy

$$|y_i - y_j| \leq |u_i - u_j|, \quad (i \neq j),$$

azaz $\mathbf{y}$ (mint $\mathbf{u}$ függvénye) teljesíti a Lipschitz-feltételt. Másrészt a sajátértékek extremális tulajdonsága (ld. [15]-ben) és a (4.1) összefüggés alapján a következő becslés végezhető:

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{X}^* \mathbf{C} \mathbf{X}^{*T}}{\mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u}} \leq \frac{\operatorname{tr} \mathbf{X} \mathbf{C} \mathbf{X}^T}{\mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_{ij} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_{ij} (u_i - u_j)^2}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_{ij} \left[(u_2(i) - u_2(j))^2 + (z(i) - z(j))^2 \right]}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_{ij} (u_i - u_j)^2}$$

$$\leq 1 + \max_{u_i \neq u_j} \frac{(z_i - z_j)^2}{(u_i - u_j)^2} \leq 1 + \frac{1}{\sigma^2(\mathbf{y})} \leq 1 + \frac{1}{S_2^2(\mathbf{u})},$$

amelyből átrendezéssel rögtön adódik a kívánt állítás. ■

A 4.5. Sejtés bizonyításához szükség lenne a következő lemmára:

7.9. Lemma. *Van olyan $y_i = f(\mathbf{x}_i^*)$ transzformáció, melyre az f függvény teljesíti a Lipschitz-feltételt, $\sum_{i=1}^{n} d_i y_i = 0$, $\sum_{i=1}^{n} d_i \mathbf{x}_i^* y_i = \mathbf{0}$ és $\sigma^2(\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 \geq S_{k+1}^2(\mathbf{x}_1^*, \ldots, \mathbf{x}_n^*)$.*

Azt gondoljuk, hogy ilyen $\mathbf{y}$ konstruálható $\sqrt{k}$ Lipschitz-konstanssal. Ezután a sejtés már bizonyítható lenne (ld. [6]-ban).

Irodalom

[1] N. Alon, Eigenvalues and Expanders, *Combinatorica,* **6(2)** (1986), 83–96.

[2] N. L. Biggs, *Algebraic Graph Theory,* Cambridge University Press (Cambridge, 1974).

[3] M. Bolla, Spectra, Euclidean Representations and Vertex-Colorings of Hypergraphs, *Discrete Mathematics,* **117** (1993), 13–39.

[4] M. Bolla, G. Tusnády, Spectra and Optimal Partitions of Weighted Graphs, *Discrete Mathematics,* **128** (1994), 1–20.

[5] Bolla M., „Mátrixok szinguláris felbontásának módszerei és statisztikai alkalmazásai", egyetemi doktori értekezés és MTA SZTAKI Working Paper MS/11, Budapest, 1982.

[6] M. Bolla, „Relations between spectral and classification properties of multigraphs", kandidátusi értekezés, Budapest, 1993.

[7] D. M. Cvetković, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs,* Academic Press (New York–San Francisco–London, 1979).

[8] J. C. Dunn, Well-Separated Clusters and Optimal Fuzzy Partitions, *J. Cybernetics,* **4**, No. 1 (1974), 95–104.

[9] J. C. Dunn, Some Recent Investigations of a New Fuzzy Partitioning Algorithm and its Application to Pattern Classification Problems, *J. Cybernetics,* **4**, No. 2 (1974), 1–23.

[10] M. Fiedler, Algebraic Connectivity of Graphs, *Czechoslovak Math. J.,* **23** (1973), 298–305.

[11] A. J. Hoffman, On Eigenvalues and Colorings of Graphs, in: *Graph Theory and Its Applications* (ed. B. Harris), Academic Press, New York–London (1970), 79–91.

[12] F. Juhász, K. Mályusz, Problems of Cluster Analysis from the Viewpoint of Numerical Analysis, in: *Proc. Conf. Numerical Methods,* Keszthely (1977).

[13] Lengyel, T., „A klaszteranalízis néhány kombinatorikai és valószínűségszámítási problémája", MTA SZTAKI Tanulmányok, Budapest, No. 188, 1986, 1–173.

[14] J. McQueen, Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations. Proc. 5-th Berkeley Symp, *Math. Statist. Prob.,* **1** (1967), 281–297.

[15] C. R. Rao, Separation Theorems for Singular Values of Matrices and their Applications in Multivariate Analysis, *J. Multivariate Analysis,* **9** (1979), 362–377.

[16] Tusnády, G., *Sztochasztikus számítástechnika,* Debrecen, KLTE, egyetemi jegyzet, 1996–1997.

Marianna Bolla, Gábor Tusnády: Investigating the connectivity of hypergraphs via their spectra

Some clustering properties of hypergraphs are investigated by means of linear algebraic tools. The notion of the Laplacian is generalized for hypergraphs and we conclude for the connectivity of the hypergraph by means of its spectrum. Some conclusions for the number of clusters are also made. The clusters themselves can be constructed by means of the Euclidean representation of the hypergrap via the eigenvectors of its Laplacian. An iteration algorithm is also introduced.

Bolla Marianna
BME Matematika Intézet
Sztochasztika Tanszék
e-mail: marib@math.bme.hu

Tusnády Gábor
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutató Intézete
e-mail: tusnady@renyi.hu

LINEÁRIS PARCIÁLIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK IRÁNYÍTÁSELMÉLETE

KOMORNIK VILMOS

0. Bevezetés

A jelen dolgozat célja, hogy rövid bevezetést adjon a lineáris parciális differenciálegyenleteknek a tartomány határán keresztüli megfigyelhetőségét, irányíthatóságát és stabilizálhatóságát vizsgáló elméletről. A dolgozat alapját a szerzőnek a római „Mauro Picone" Intézetben 1996 szeptemberében tartott előadásai képezik. Ha a jelen írás felkelti az olvasó érdeklődését, számos további eredményt találhat a [17], [18], [12] munkákban és azok irodalomjegyzékében.

A szerző köszönetet mond P. Cannarsa-nak és P. Loreti-nek az előadások során tett javaslataikért, valamint a cikk lektorának a hasznos tanácsaiért.

A dolgozat felépítése a következő:

1. Megfigyelhetőség. A multiplikátor módszer
1.1. Az egydimenziós hullámegyenlet megfigyelhetősége
1.2. A többdimenziós hullámegyenlet megfigyelhetősége
1.3. Egy egyszerű lemezmodell megfigyelhetősége

2. Irányíthatóság. A Hilbert unicitási módszer
2.1. A hullámegyenlet irányíthatósága
2.2. A lemezmodell irányíthatósága
2.3. Egy általános eredmény: megfigyelhetőség $\Longrightarrow$ irányíthatóság

3. Stabilizáció „természetes" visszacsatolással
3.1. A hullámegyenlet stabilizációja lineáris visszacsatolással
3.2. Nemlineáris visszacsatolások

4. Stabilizáció tetszőlegesen nagy energiacsökkenési rátával
4.1. Egy általános eredmény: megfigyelhetőség $\Longrightarrow$ stabilizálhatóság
4.2. Alkalmazás a hullámegyenletre
4.3. Alkalmazás a lemezmodellre

5. Irodalomjegyzék

1. Megfigyelhetőség. A multiplikátor módszer

1.1. Az egydimenziós hullámegyenlet megfigyelhetősége. Legyen Ω egy Γ határú korlátos tartomány $\mathbf{R}^n$-ben, és tekintsük a következő problémát:

$$(1.1)\qquad \begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \Omega \times \mathbf{R}\text{-ben,} \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbf{R}\text{-en,} \\ u(0) = u_0 \quad \text{és} \quad u'(0) = u_1 & \Omega\text{-ban.} \end{cases}$$

Sok más egyéb mellett, $n = 2$ esetén (1.1) jó modellje egy Ω nyugalmi helyzetű, határánál rögzített rugalmas membrán kis transzverzális rezgéseinek.

Emlékeztetünk a következő jól ismert eredményekre (lásd például [19]):

- tetszőlegesen adott $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ kezdeti feltételek esetén az (1.1) problémának van egy egyértelműen meghatározott (úgynevezett *gyenge*) megoldása:

$$u \in C\big(\mathbf{R}; H_0^1(\Omega)\big) \cap C^1\big(\mathbf{R}; L^2(\Omega)\big);$$

- a megoldás energiája, amelyet az

$$(1.2)\qquad E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u'(t)^2 + \left|\nabla u(t)\right|^2 dx$$

képlettel definiálunk, valójában független $t \in \mathbf{R}$-től. Ezért a továbbiakban egyszerűen E-vel jelöljük;

- ha Ω C^2 osztálybeli és az (u_0, u_1) kezdeti adatok $\big(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega)$-ba tartoznak, akkor a megfelelő (úgynevezett *erős*) megoldások simábbak:

$$(1.3)\qquad u \in C\big(\mathbf{R}; H^2(\Omega)\big) \cap C^1\big(\mathbf{R}; H^1(\Omega)\big) \cap C^2\big(\mathbf{R}; L^2(\Omega)\big).$$

Most vizsgáljuk a következő problémát. Tegyük fel, hogy a megoldást csak a tartomány határának egy kis környezetében tudjuk megfigyelni. Lehetséges-e ilymódon megkülönböztetni a különböző kezdeti adatokhoz tartozó megoldásokat? Az egydimenziós esetben ez a kérdés könnyen megválaszolható közvetlen számítással. Az egyszerűség kedvéért egy π hosszúságú intervallumot tekintünk.

1.1. Állítás. *Legyen $\Omega = (0, \pi)$. Ekkor az (1.1) probléma erős megoldásaira fennáll az alábbi egyenlőség:*

$$(1.4)\qquad \int_0^\pi u_x(0,t)^2 + u_x(\pi,t)^2\, dt = 4E.$$

Az állításból következik, hogy ha (1.1) két erős megoldása, v és w, amelyek a (v_0, v_1), ill. (w_0, w_1) kezdeti adatokhoz tartoznak, megegyeznek a $(0, \pi)$ intervallum végpontjainak valamely $(0, \varepsilon) \cup (\pi - \varepsilon, \pi)$ környezetében a $0 < t < \pi$

időintervallumban, akkor valójában a v és w megoldások azonosak. Valóban, alkalmazzuk az álítást az $u := v - w$ függvényre (amely szintén megoldása (1.1)-nek, az $(u_0, u_1) = (v_0 - w_0, v_1 - w_1)$ kezdeti adatokkal), (1.4) bal oldala nullával egyenlő a feltevésünk miatt. Innen $E = 0$, és speciálisan $\nabla u(t) = 0$ Ω-ban minden $t \in \mathbf{R}$-re. Minthogy $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, a Poincaré-egyenlőtlenségből adódik, hogy $u(t) = 0$ Ω-ban minden $t \in \mathbf{R}$-re, tehát $v \equiv w$.

Bizonyítás. A Fourier-módszert alkalmazva adódik, hogy (1.1) megoldása alkalmas α_k és β_k valós együtthatókkal:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \sin kx.$$

Innen

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} u_x(0,t)^2 + u_x(\pi,t)^2\,dt &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right)^2 + \\
&\quad + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right)^2 dt = \\
&= \int_0^{\pi} 2\left(\sum_{k \text{ páratlan}} k(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right)^2 + \\
&\quad + 2\left(\sum_{k \text{ páros}} k(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt) \right)^2 dt = \\
&= \int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} 2k^2\alpha_k^2 \cos^2 kt + 2k^2\beta_k^2 \sin^2 kt\,dt = \\
&= \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(\alpha_k^2 + \beta_k^2),
\end{aligned}$$

mert a vegyes szorzatok az integrálás során eltűnnek.

Továbbá

$$\begin{aligned}
4E(0) &= 2\int_0^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k\beta_k \sin kx \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} k\alpha_k \cos kx \right)^2 dx = \\
&= 2\int_0^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k^2\beta_k^2 \sin^2 kx + k^2\alpha_k^2 \cos^2 kx\,dx = \\
&= \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(\alpha_k^2 + \beta_k^2),
\end{aligned}$$

és a két eredményt összevetve megkapjuk az állítást. ■

Sajnos az 1.1. Állítás bizonyítása nem általánosítható $\mathbf{R}^n$ általános tartományaira. A következő szakaszban bevezetünk egy hatékonyabb bizonyítási módszert.

1.2. A többdimenziós hullámegyenlet megfigyelhetősége. Jelöljük ν-vel a Γ határ pontjaiban az Ω-ból kifelé mutató normális egységvektort. E szakasz fő eredménye az

1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy Ω C^2 osztálybeli, és legyen $B(x_0, R)$ a legkisebb, Ω-t magában foglaló x_0 középpontú, R sugarú nyílt gömb. Ekkor bármely $T > 2R$ számhoz találhatók olyan c_1, c_2 pozitív konstansok, hogy az (1.1) probléma erős megoldásaira fennállnak a*

$$c_1 E \le \int_0^T \int_\Gamma |\partial_\nu u|^2 \, d\Gamma \, dt \le c_2 E \tag{1.5}$$

egyenlőtlenségek.

A bizonyítás előtt tegyünk néhány megjegyzést.

(a) Az (1.5)-beli második egyenlőtlenséget gyakran nevezik *direkt* egyenlőtlenségnek. Először Lasiecka és Triggiani [15], valamint Lions [16] igazolták. Ez az egyenlőtlenség lehetővé teszi, hogy egy egyszerű sűrűségi meggondolással (a gyenge megoldást sima függvényekkel közelítve) definiáljuk (1.1) gyenge megoldásainak a $\partial_\nu u$ normális deriváltját mint az $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ Hilbert-tér egy elemét. Vegyük észre, hogy a gyenge megoldások definíciójában szereplő regularitás és a szokásos nyomtételek, mint amilyenek például Lions és Magenes [19] monográfiájában szerepelnek, ezt nem teszik közvetlenül lehetővé. Ezért ezt az eredményt gyakran *rejtett regularitási* tulajdonságnak is nevezik. Vegyük azt is észre, hogy ezzel a definícióval az (1.5) egyenlőtlenségek érvényesek maradnak (1.1) *gyenge* megoldásaira is.

(b) Ez a rejtett regularitási tulajdonság lehetővé fogja tenni, hogy egy alkalmas duális probléma megoldásait meglehetősen irreguláris határfeltételek esetén is definiálni tudjuk. Erre szükségünk lesz a következő fejezetben egy irányítási probléma megoldásához.

(c) Az (1.5)-beli első egyenlőtlenséget gyakran nevezik *inverz* vagy *megfigyelhetőségi* egyenlőtlenségnek. Először Ho [6] igazolta elég nagy T-re, majd Lions [17] a fenti gyengébb $T > 2R$ feltevés mellett.

Megismételve az előző szakaszbeli okoskodást, az inverz egyenlőtlenség a következő megfigyelhetőségi tételre vezet. Tegyük fel, hogy (1.1) két gyenge megoldása megegyezik $\Gamma_\varepsilon \times (0, T)$-ben valamely $\varepsilon > 0$-ra és $T > 2R$-re, ahol Γ_ε a Γ határ ε-környezete:

$$\Gamma_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \Gamma) < \varepsilon\}.$$

Akkor valójában $v \equiv w$ $\Omega \times \mathbf{R}$-ben.

(d) Mivel a hullámegyenletben a hatások véges sebességgel terjednek, az (1.5)-beli első egyenlőtlenség nem állhat fenn tetszőlegesen kis T esetén. Az $\Omega = B(x_0, R)$

speciális esetben egy rövid elemi bizonyítással (lásd [12], Remark 3.6) belátható, hogy az egyenlőtlenség $T < 2R$ esetén már nem igaz. Joó [7] bebizonyította, hogy $n \geq 2$ esetén az inverz egyenlőtlenség már $T = 2R$-re sem érvényes, ellentétben az egydimenziós esettel. Általános tartományok esetén T kritikus értékének a meghatározása nehéz probléma; lásd például Bardos, Lebeau és Rauch [1] és Tataru [22] munkáit. Ezek szerint T kritikus értéke egyenlő az Ω-ban fekvő leghosszabb egyenes szakasz hosszával.

Az 1.2. Tétel bizonyítása a *multiplikátor módszeren* alapul. Fő technikai eszközünk az alábbi lemma, amely lényegében Rellich [20] egy dolgozatához vezethető vissza.

1.3. Lemma. *Legyen u egy (1.3)-beli simaságú függvény, amely eleget tesz az $u'' - \Delta u = 0$ hullámegyenletnek $\Omega \times \mathbf{R}$-ben. Rögzítsünk egy tetszőleges $x_0 \in \mathbf{R}^n$ pontot és vezessük be a rövidség kedvéért az*

$$m(x) = x - x_0 \quad \text{és} \quad Mu := 2m \cdot \nabla u + (n-1)u \tag{1.6}$$

jelöléseket. Ekkor tetszőleges $-\infty < S < T < \infty$ esetén fennáll az alábbi azonosság:

$$\begin{aligned} &\int_S^T \int_\Gamma (\partial_\nu u) Mu + (m \cdot \nu)\big((u')^2 - |\nabla u|^2\big)\, d\Gamma\, dt = \\ &= \Big[\int_\Omega u' Mu\, dx\Big]_S^T + \int_S^T \int_\Omega (u')^2 + |\nabla u|^2\, dx\, dt. \end{aligned} \tag{1.7}$$

(A pont $\mathbf{R}^n$ szokásos skaláris szorzatát jelöli.)

Bizonyítás. Parciális integrálással látható, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S^T \int_\Omega (u'' - \Delta u) Mu\, dx\, dt = \\ &= \Big[\int_\Omega u' Mu\, dx\Big]_S^T - \int_S^T \int_\Gamma (\partial_\nu u) Mu\, d\Gamma\, dt - \\ &\quad - \int_S^T \int_\Omega u' Mu'\, dx\, dt + \int_S^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(Mu)\, dx\, dt. \end{aligned}$$

Itt

$$u' Mu' = 2u' m \cdot \nabla u' + (n-1)(u')^2 = m \cdot \nabla (u')^2 + (n-1)(u')^2$$

és

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \nabla(Mu) &= \partial_i u \partial_i \big(2 m_k \partial_k u + (n-1)u\big) = \\ &= 2(\partial_i u)(\partial_i m_k)(\partial_k u) + 2m_k (\partial_i u)(\partial_k \partial_i u) + (n-1)|\nabla u|^2 = \\ &= m \cdot \nabla\big(|\nabla u|^2\big) + (n+1)|\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Az utolsó számításban alkalmaztuk az ismételt indexek összegzési konvencióját, és felhasználtuk a nyilvánvaló $\partial_i m_k = \delta_{ik}$ összefüggést.

Behelyettesítve ezeket az egyenlőségeket az első azonosságba, a

$$0 = \left[\int_\Omega u' M u \, dx\right]_S^T - \int_S^T \int_\Gamma (\partial_\nu u) M u \, d\Gamma \, dt +$$
$$+ \int_S^T \int_\Omega -m \cdot \nabla (u')^2 - (n-1)(u')^2 + m \cdot \nabla\left(|\nabla u|^2\right) + (n+1)|\nabla u|^2$$

azonosságot kapjuk. Újból parciálisan integrálva és felhasználva a $\operatorname{div} m \equiv n$ összefüggést, megkapjuk a lemma állítását:

$$0 = \left[\int_\Omega u' M u \, \mathrm{dx}\right]_S^T +$$
$$+ \int_S^T \int_\Gamma -(\partial_\nu u) M u + (m \cdot \nu)\left(|\nabla u|^2 - (u')^2\right) d\Gamma \, dt +$$
$$+ \int_S^T \int_\Omega (u')^2 + |\nabla u|^2 \, dx \, dt. \quad \blacksquare$$

Jegyezzük meg, hogy a lemma és bizonyítása érvényben marad, ha (1.3)-ban $\mathbf{R}$-et annak valamely I részintervallumával helyettesítjük és $S, T \in I$.

Szükségünk lesz még [9]-ből egy másik azonosságra is:

1.4. Lemma. *Tetszőleges $u \in H^2(\Omega)$-ra érvényes a következő azonosság:*

$$\int_\Omega (Mu)^2 \, dx = \int_\Omega |2m \cdot \nabla u|^2 + (1-n^2)u^2 \, dx + (2n-2)\int_\Gamma (m \cdot \nu) u^2 \, d\Gamma. \tag{1.8}$$

Bizonyítás. Ismét parciálisan integrálunk, és felhasználjuk az $\operatorname{div} m \equiv n$ összefüggést:

$$\int_\Omega (Mu)^2 \, dx = \int_\Omega \left|2m \cdot \nabla u + (n-1)u\right|^2 dx =$$
$$= \int_\Omega \left|2m \cdot \nabla u\right|^2 + (n-1)^2 u^2 + 4(n-1) u m \cdot \nabla u \, dx =$$
$$= \int_\Omega |2m \cdot \nabla u|^2 + (n-1)^2 u^2 + (2n-2) m \cdot \nabla (u^2) \, dx =$$
$$= \int_\Omega |2m \cdot \nabla u|^2 + (n-1)^2 u^2 - n(2n-2) u^2 \, dx +$$
$$+ (2n-2) \int_\Gamma (m \cdot \nu) u^2 \, d\Gamma. \quad \blacksquare$$

Most már igazolni tudjuk a következő, [9]-ben kapott eredményt:

1.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy* Ω C^2 *osztálybeli, és legyen* $B(x_0, R)$ *egy* Ω*-t magában foglaló nyílt gömb. Ekkor bármely* $T > 2R$ *számra az* (1.1) *probléma erős megoldásai teljesítik az alábbi egyenlőtlenségeket:*

$$2(T-2R)E \leq \int_0^T \int_\Gamma (m \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2 \, d\Gamma \, dt \leq 2(T+2R)E. \tag{1.9}$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk az 1.3. Lemmabeli (1.7) azonosságot $S = 0$-val. Minthogy $u = 0$ $\Gamma \times \mathbf{R}$-en, fennállnak az $u' = 0$ és $\nabla u = (\partial_\nu u)\nu$ egyenlőségek is $\Gamma \times \mathbf{R}$-en. Ezért az azonosság bal oldalán az integráljel alatti kifejezés $(m \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2$-re egyszerűsödik.

Továbbá, felhasználva az energia definícióját és az időtől való függetlenségét, az azonosság jobb oldalán álló utolsó integrál $2TE$-vel egyenlő, úgyhogy az azonosság végül a következő alakot ölti:

$$\int_0^T \int_\Gamma (m \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2 \, d\Gamma \, dt = \left[\int_\Omega u' M u \, dx \right]_0^T + 2TE.$$

Ha megmutatjuk az

$$\left| \int_\Omega u' M u \, dx \right| \leq 2RE \tag{1.10}$$

egyenlőtlenséget, akkor innen a (1.9) becslések már adódni fognak. Az (1.10) egyenlőtlenség igazolásához először is jegyezzük meg, hogy az 1.4. Lemmabeli (1.8) azonosság maga után vonja az

$$\int_\Omega (Mu)^2 \, dx \leq \int_\Omega |2m \cdot \nabla u|^2 \, dx \leq 4R^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

egyenlőtlenséget, mert $u = 0$ Γ-n, $n \geq 1$, és mert $|m| \leq R$ $\overline{\Omega}$-ban. Ezek után (1.10) már könnyen adódik:

$$\int_\Omega |u' M u| \, dx \leq \int_\Omega R(u')^2 + (4R)^{-1}(Mu)^2 \, dx \leq R \int_\Omega (u')^2 + |\nabla u|^2 \, dx = 2RE. \quad \blacksquare$$

Az 1.2. Tétel bizonyítása. A tételt csak abban a speciális estben bizonyítjuk, amikor az Ω tartomány szigorúan csillagszerű x_0-ra nézve, vagyis ha van olyan $r > 0$ szám, hogy $m \cdot \nu \geq r$ Γ-n. Ebben az esetben a tétel azonnal adódik az előző tételből a $c_1 = 2(T-2R)/R$ és $c_2 = 2(T-2R)/r$ konstansokkal.

Az általános esethez egy kicsit általánosítani kell az 1.3. Lemmát, az m függvény helyett egy olyan h függvényt használva, amely Γ-n megegyezik a ν normális vektorral; lásd például [17], [18] vagy [12]. $\blacksquare$

1.3. Egy egyszerű lemezmodell megfigyelhetősége. Most tekintsük a következő problémát:

$$
(1.11) \qquad \begin{cases} u'' + \Delta^2 u = 0 & \Omega \times \mathbf{R}\text{-ben}, \\ u = \partial_\nu u = 0 & \Gamma \times \mathbf{R}\text{-en}, \\ u(0) = u_0 \quad \text{és} \quad u'(0) = u_1 & \Omega\text{-ban}. \end{cases}
$$

A kétdimenziós esetben ez a probléma jól modellezi egy, a határánál fogva rögzített, vékony, rugalmas lemez kis transzverzális rezgéseit.

Emlékeztetünk a következő eredményekre (lásd például [19]):

- tetszőlegesen adott $(u_0, u_1) \in H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ kezdeti feltételek esetén az (1.11) problémának van egy egyértelműen meghatározott *gyenge* megoldása:

$$
u \in C\big(\mathbf{R}; H_0^2(\Omega)\big) \cap C^1\big(\mathbf{R}; L^2(\Omega)\big);
$$

- a megoldás energiája, amelyet az

$$
E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega u'(t)^2 + \big(\Delta u(t)\big)^2 \, dx
$$

képlettel definiálunk, valójában független $t \in \mathbf{R}$-től. Ezért a továbbiakban egyszerűen E-vel jelöljük;

- ha Ω C^4 osztálybeli és ha az (u_0, u_1) kezdeti adatok $\big(H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\big) \times H_0^2(\Omega)$-ba tartoznak, akkor a megfelelő *erős* megoldások is simábbak:

$$
u \in C\big(\mathbf{R}; H^4(\Omega)\big) \cap C^1\big(\mathbf{R}; H^2(\Omega)\big) \cap C^2\big(\mathbf{R}; L^2(\Omega)\big).
$$

Fennáll a következő

1.6. Tétel. *Tegyük fel, hogy Ω C^4 osztálybeli. Ekkor tetszőleges $T > 0$-hoz vannak olyan c_1, $c_2 > 0$ konstansok, hogy*

$$
c_1 E \le \int_0^T \int_\Gamma \big(\Delta u(t)\big)^2 \, d\Gamma \, dt \le c_2 E
$$

(1.11) bármely gyenge megoldására.

A tételből adódik, hogy a különböző kezdeti adatokhoz tartozó megoldások megkülönböztethetők, ha azokat Γ egy tetszőlegesen kis környezetében, tetszőlegesen rövid ideig megfigyeljük. (Nincs ellentmondás, mert a jelen modellben a hatások végtelen sebességgel terjednek.)

Az 1.6. Tételt először Lions [17] igazolta elég nagy T-re, majd az ő feltételét Komornik [9] a gyengébb $T > 2R/\sqrt{\mu_1}$ feltétellel helyettesítette, ahol $B(x_0, R)$ az Ω-t magában foglaló legkisebb gömb, és μ_1 a

$$\Delta^2 v = -\mu \Delta v, \qquad v \in H_0^2(\Omega)$$

sajátérték-probléma legkisebb sajátértéke. Végül, Holmgren egy mély tételét felhasználva és kompaktsági-unicitási meggondolásokat alkalmazva Zuazua [23] bebizonyította a tételt tetszőleges $T > 0$-ra.

Később [10]-ben egy konstruktív és elemibb módszer került bevezetésre, amely lehetővé tette az inverz egyenlőtlenségekre kapott elégséges feltételek gyengítését számos esetben. A módszer egy egyszerű „receptet" szolgáltat: valahányszor egy $T > f(\mu_1)$ alakú elégséges feltételt nyerünk egy inverz egyenlőtlenség teljesülésére, ahol μ_1 egy alkalmas sajátérték-probléma legkisebb sajátértéke, az inverz egyenlőtlenség automatikusan fennáll, a rendszerint gyengébb, $T > f(+\infty)$ feltétel mellett is. A jelen esetben ez a $T > 2R/+\infty = 0$ feltételhez vezet. Az 1.6. Tétel ilymódon történő bizonyítása megtalálható [12]-ben.

2. Irányíthatóság. A Hilbert unicitási módszer

2.1. A hullámegyenlet irányíthatósága. Rögzítsünk egy $T > 0$ számot és tekintsük a következő problémát:

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \Omega \times [0,T]\text{-ben}, \\ y = v & \Gamma \times [0,T]\text{-n}, \\ y(0) = y_0 \quad \text{és} \quad y'(0) = y_1 & \Omega\text{-ban}. \end{cases}$$

E szakasz fő célja Lions [17] alábbi tételének az igazolása:

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy Ω C^2 osztálybeli, és van egy Ω-t magában foglaló T-nél kisebb átmérőjű nyílt gömb. Ekkor tetszőleges $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ kezdeti adatokhoz található olyan $v \in L^2(0,T; L^2(\Gamma))$ függvény, hogy a (2.1) probléma megoldása teljesíti az*

$$\text{(2.2)} \qquad y(T) = y'(T) = 0 \qquad \Omega\text{-ban}$$

„végfeltételeket".

Itt és a továbiakban azonosítjuk az $L^2(\Omega)$ és $L^2(\Gamma)$ Hilbert-tereket a duális tereikkel.

Vizsgáljuk meg először a (2.1) probléma korrektségét. Mivel meglehetősen irreguláris kezdeti és határadatokra lesz szükségünk, az úgynevezett *transzpozíció* módszerével fogunk alkalmas gyenge megoldásokat definiálni. Tekintsük ehhez az 1.1. és 1.2. szakaszokban vizsgált problémát:

$$
(2.3) \qquad \begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \Omega \times \mathbf{R}\text{-ben}, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbf{R}\text{-en}, \\ u(0) = u_0 \quad \text{és} \quad u'(0) = u_1 & \Omega\text{-ban}, \\ \psi = \partial_\nu u & \Gamma \times \mathbf{R}\text{-en}. \end{cases}
$$

Ha y megoldása (2.1)-nek, u pedig (2.3)-nak, akkor tetszőleges $S \in [0, T]$ esetén végezzük el a következő számítást:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_0^S \int_\Omega (y'' - \Delta y) u \, dx \, dt = \\
&= \left[\int_\Omega y'u - yu' \, dx \right]_0^S + \int_0^S \int_\Omega y(u'' - \Delta u) \, dx \, dt + \\
&+ \int_0^S \int_\Gamma -(\partial_\nu y) u + y(\partial_\nu u) \, d\Gamma \, dt.
\end{aligned}
$$

A (2.1)- és (2.3)-beli kezdeti és határfeltételek alkalmazásával innen adódik, hogy

$$
\int_\Omega -y'(S)u(S) + y(S)u'(S) \, dx = \int_\Omega -y_1 u_0 + y_0 u_1 \, dx + \int_0^S \int_\Gamma v\psi \, d\Gamma \, dt,
$$

amelyet az alábbi absztraktabb alakban is írhatunk:

$$
(2.4) \qquad \big\langle \big(-y'(S), y(S) \big), \big(u(S), u'(S) \big) \big\rangle_{H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} =
$$

$$
= \big\langle (-y_1, y_0), (u_0, u_1) \big\rangle_{H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} + (v, \partial_\nu u)_{L^2(0,S;L^2(\Gamma))}.
$$

Ez a formula a következő *definíciót* sugallja: a (2.1) probléma megoldásán egy olyan *folytonos*

$$
(y, y') \, : \, [0, T] \to L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)
$$

függvényt értünk, amely tetszőleges $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ és $S \in [0, T]$ esetén teljesíti a (2.4) azonosságot, ahol u (2.3) gyenge megoldása. A definíció jogosságát a következő eredmény mutatja:

2.2. Állítás. *Tetszőlegesen adott* $(y_0, y_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ *és* $v \in L^2\big(0, S; L^2(\Gamma)\big)$ *esetén a* (2.1) *probléma egyértelmű megoldással rendelkezik.*

Bizonyítás. Rögzítsünk először egy tetszőleges $S \in [0, T]$ számot. Az (1.5)-beli második egyenlőtlenség miatt a (2.4) egyenlőség jobb oldala a $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ mennyiségnek folytonos lineáris formáját definiálja. Minthogy a (2.3) probléma időben reverzibilis, az $(u_0, u_1) \mapsto \big(u(S), u'(S)\big)$ lineáris leképezés az $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

Hilbert-tér automorfizmusa. Ezért a (2.4) egyenlőség jobb oldala tekinthető az $\big(u(S), u'(S)\big) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ mennyiség folytonos lineáris formájának is; jelöljük ezt L_S-sel. A Hilbert-tér duálisának a *definíciója* szerint létezik egyetlen olyan $\big(-y'(S), y(S)\big) \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ pár, amely eleget tesz a (2.4) azonosságnak.

Minthogy az L_S folytonos lineáris forma folytonosan függ az S paramétertől (ez közvetlen számolással könnyen ellenőrizhető), az $S \mapsto \big(-y'(S), y(S)\big)$ függvény is folytonos. ■

A 2.1. Tétel bizonyítása. Az alapgondolat az, hogy egy speciális, $v = \partial_\nu u$ alakú kontrollt keresünk, ahol u a (2.3) probléma alkalmasan választott (u_0, u_1) kezdeti adatokhoz tartozó megoldása. Elegendő megmutatnunk, hogy ha (u_0, u_1) végigfut $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ elemein és ha y-nal jelöljük az

$$(2.5) \qquad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \Omega \times [0,T]\text{-ben}, \\ y = v & \Gamma \times [0,T]\text{-n}, \\ y(T) = y'(T) = 0 & \Omega\text{-ban} \end{cases}$$

probléma megoldását, akkor $\big(y(0), y'(0)\big)$ végigfut $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ elemein. Valóban, ekkor elegendő lesz úgy választani $v = \partial_\nu u$-t (2.1)-ben, hogy a megfelelő $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$-ra $y(0) = y_0$ és $y'(0) = y_1$ teljesüljön.

Ekvivalens módon elegendő megmutatnunk, hogy a $\Lambda(u_0, u_1) = \big(y'(0), -y(0)\big)$ képlettel értelmezett

$$\Lambda : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

lineáris operátor ráképezés. Ennél többet bizonyítunk: igazoljuk, hogy Λ izomorfizmus. A Lax–Milgram lemma miatt elegendő ehhez megmutatnunk, hogy a megfelelő

$$\big\langle \Lambda(u_0, u_1), (v_0, v_1) \big\rangle_{H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}$$

bilineáris forma folytonos és koercitív $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$-n.

A Λ leképezés folytonossága a (2.3) és (2.5) problémák korrektségének következménye. (A hullámegyenlet reverzibilitása miatt a (2.5) probléma korrektsége a (2.1) korrektségéből levezethető a $t \mapsto T - t$ helyettesítéssel.) A Λ operátor koercitivitása az 1.2. Tételből fog következni, ha igazoljuk a

$$\big\langle \Lambda(u_0, u_1), (u_0, u_1) \big\rangle_{H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} = \int_0^T \int_\Gamma |\partial_\nu u|^2 \, d\Gamma \, dt.$$

formulát. Ez viszont könnyen adódik, ha megismételjük a (2.4) azonosság levezetését az $S = T$ esetben, és felhasználjuk a (2.5)-beli határ- és végfeltételeket. ■

2.2. A lemezmodell irányíthatósága Az előző szakasz módszerét alkalmazva, az 1.6. Tétel felhasználásával a következő eredményt kaphatjuk az

$$(2.6)\qquad \begin{cases} y'' + \Delta^2 y = 0 & \Omega \times [0,T]\text{-ben}, \\ y = 0 \quad \text{és} \quad \partial_\nu y = v & \Gamma \times [0,T]\text{-n}, \\ y(0) = y_0 \quad \text{és} \quad y'(0) = y_1 & \Omega\text{-ban} \end{cases}$$

probléma irányíthatóságára:

2.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy Ω C^4 osztálybeli, és rögzítsünk egy tetszőleges $T > 0$ számot. Ekkor bármely $(y^0, y^1) \in L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$ kezdeti adatokhoz van olyan $v \in L^2(0,T; L^2(\Gamma))$ függvény, hogy a (2.6) probléma megoldása teljesíti az*

$$y(T) = y'(T) = 0 \quad \Omega\text{-ban}$$

végfeltételeket.

Ezt a tételt Lions [17] igazolta elég nagy T-re, majd Zuazua [23] tetszőlegesen kis T-re. A részletes bizonyítást az olvasóra bízzuk (vagy lásd [12]).

2.3. Egy általános eredmény: megfigyelhetőség $\Longrightarrow$ irányíthatóság. Tekintsük az

$$(2.7)\qquad x' = Ax + Bv, \qquad x(0) = x_0$$

absztrakt lineáris evolúciós problémát, ahol A egy sűrűn definiált, zárt lineáris operátor egy H Hilbert-térben és B egy sűrűn definiált, zárt lineáris operátor egy másik G Hilbert-térből H-ba. Tekintsük egyúttal a

$$(2.8)\qquad \varphi' = -A^*\varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi_0, \qquad \psi = B^*\varphi$$

duális problémát is, ahol A^* és B^* az A, B operátorok adjungáltját jelölik. Irányításelméleti terminológiával élve B egy *kontroll* operátor, v egy *kontroll,* B^* egy *megfigyelési* operátor és ψ egy *megfigyelés.*

Tegyük fel a következőket (G' és H' a G és H Hilbert-terek duálisait jelölik):

(H1) Az A^* operátor egy e^{sA^*} *csoportot* generál H'-ben;

(H2) $D(A^*) \subset D(B^*)$ és van olyan c konstans, hogy

$$\|B^*\varphi_0\|_{G'} \le c\|A^*\varphi_0\|_{H'}$$

minden $\varphi_0 \in D(A^*)$-ra;

(H3) Vannak olyan pozitív T, c_1, c_2 számok, hogy a (2.8) probléma megoldásai teljesítik a

$$c_1\|\varphi_0\|_{H'} \le \|\psi\|_{L^2(0,T;G')} \le c_2\|\varphi_0\|_{H'}$$

egyenlőtlenségeket minden $\varphi_0 \in D(A^*)$-ra.

Az alkalmazásokban a (H1) hipotézis rendszerint teljesül időben reverzibilis problémákra. A (H2) hipotézis felesleges, ha a B operátor folytonos, és gyakran teljesül határkontroll-feladatokban, ahol a B operátor nem folytonos. Végül a (H3) hipotézis a direkt és inverz egyenlőtlenségeknek egy absztrakt formája.

Később látni fogjuk, hogyan írhatók át a korábban vizsgált konkrét problémák ebben az absztrakt alakban.

• A (H1) feltevésből következik, hogy bármely $\varphi_0 \in H'$-re a (2.8) problémának létezik egy egyértelmű $\varphi \in C(\mathbf{R}; H')$ *gyenge* megoldása, amelyet a $\varphi(s) = e^{-sA^*}\varphi_0$ képlet ad meg.

• Továbbá a (H1) és (H2) feltevésekből következik, hogy bármely $\varphi_0 \in D(A^*)$-ra a (2.8) problémának létezik egy egyértelmű *erős*

$$\varphi \in C\big(\mathbf{R}; D(A^*)\big) \cap C^1(\mathbf{R}; H')$$

megoldása, és hogy $\psi \in C(\mathbf{R}; G')$. Innen adódik speciálisan, hogy a (H3) feltevés értelmes.

• A (H3) feltevésbeli második (*direkt*) egyenlőtlenség lehetővé teszi ezek után, hogy (sűrűségi meggondolással) értelmezzük ψ-t mint az $L^2(0,T;G')$ Hilbert-tér elemét bármely $\varphi_0 \in H'$-re.

Mutassuk most meg, hogy a (H1), (H2) feltevéseknek és a (H3)-beli második egyenlőtlenségnek a felhasználásával *definiálhatjuk* a (2.7) probléma megoldását bármely $x_0 \in H$ és $v \in L^2(0,T;G)$ esetén. Formálisan okoskodva, ha x megoldása (2.7)-nek, φ, ψ pedig (2.8)-nak, akkor minden $S \in [0,T]$-re fennáll az

$$\langle x(S), \varphi(S)\rangle_{H,H'} = \langle x_0, \varphi_0\rangle_{H,H'} + \int_0^S \langle v(s), \psi(s)\rangle_{G,G'}\, ds \tag{2.9}$$

azonosság. Valóban,

$$\int_0^S \langle x(s), \varphi'(s) + A^*\varphi(s)\rangle_{H,H'}\, ds =$$

$$= \big[\langle x(s), \varphi(s)\rangle_{H,H'}\big]_0^S + \int_0^S \langle -x'(s), \varphi(s)\rangle_{H,H'} + \langle x(s), A^*\varphi(s)\rangle_{H,H'}\, ds =$$

$$= \big[\langle x(s), \varphi(s)\rangle_{H,H'}\big]_0^S + \int_0^S \langle -x'(s) + Ax(s), \varphi(s)\rangle_{H,H'}\, ds =$$

$$= \big[\langle x(s), \varphi(s)\rangle_{H,H'}\big]_0^S - \int_0^S \langle Bv(s), \varphi(s)\rangle_{H,H'}\, ds =$$

$$= \big[\langle x(s), \varphi(s)\rangle_{H,H'}\big]_0^S - \int_0^S \langle v(s), \psi(s)\rangle_{G,G'}\, ds.$$

Ezek után *definiáljuk* (2.7) megoldását mint egy olyan *folytonos* $x : [0,T] \to H$ függvényt, amely minden $\varphi_0 \in H'$-re és $S \in [0,T]$-re teljesíti a (2.9) azonosságot. A bizonyítás jogosságát a következő eredmény mutatja:

2.4. Állítás. *Tetszőlegesen adott $x_0 \in H$ és $v \in L^2(0,T;G)$ esetén a (2.7) problémának létezik egy egyértelmű megoldása.*

Bizonyítás. A (H3)-beli második egyenlőtlenség miatt a (2.9) jobb oldala a $\varphi_0 \in H'$ mennyiségnek folytonos lineáris formáját definiálja. Minthogy a (H1) feltevés alapján a $\varphi_0 \mapsto \varphi(T)$ leképezés a H' Hilbert-tér automorfizmusa, (2.9) jobb oldala egyben a $\varphi(S) \in H'$ mennyiségnek is folytonos lineáris formája. Mivel $H'' = H$, ez a folytonos lineáris forma egyértelműen reprezentálható egy $x(S) \in H$ vektorral, úgyhogy (2.9) teljesül. ∎

Mindezidáig nem volt szükségünk a (H3)-beli első (*inverz*) egyenlőtlenségre, amely a (2.8) probléma megfigyelhetőségét fejezi ki. Most igazoljuk, hogy a (2.8) probléma megfigyelhetősége maga után vonja a (2.7) probléma irányíthatóságát:

2.5. Tétel. *A (H1), (H2), (H3) hipotézisek fennállása esetén bármely $x_0 \in H$ kezdeti állapothoz található olyan $v \in L^2(0,T;G)$ függvény, hogy a (2.7) probléma megoldása eleget tesz az $x(T) = 0$ végfeltételnek. (Azt mondjuk, hogy a v kontroll T idő alatt nyugalomba viszi a rendszert.)*

Bizonyítás. A (H1), (H2), (H3) hipotéziseknek köszönhetően a

$$(\varphi_0, \psi_0) \mapsto \int_0^T (B^* e^{-sA^*}\varphi_0, B^* e^{-sA^*}\psi_0)_{G'}\, ds$$

képlet egy folytonos, szimmetrikus és koercitív bilineáris formát definiál H'-n. A Riesz reprezentációs tétel alapján van olyan önadjungált, pozitív definit $\Lambda \in L(H', H)$ izomorfizmus, hogy

$$\langle \Lambda\varphi_0, \psi_0 \rangle_{H,H'} = \int_0^T (B^* e^{-sA^*}\varphi_0, B^* e^{-sA^*}\psi_0)_{G'}\, ds,$$

minden $\varphi_0, \psi_0 \in H'$-re.

Jelöljük $J : G' \to G$-vel a kanonikus Riesz-izomorfizmust. Tetszőlegesen adott $x_0 \in H$ esetén azt álítjuk, hogy a

$$v(s) := -JB^* e^{-sA^*}\Lambda^{-1}x_0$$

kontroll x_0-t T idő alatt nyugalomba viszi. Valóban, tetszőlegesen adott $\varphi_0 \in H'$ esetén, (2.8)-at és (2.9)-et felhasználva az

$$\begin{aligned}\big\langle x(T), \varphi(T) \big\rangle_{H,H'} &= \langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H,H'} + \int_0^T \big\langle v(s), \psi(s) \big\rangle_{G,G'}\, ds = \\ &= \langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H,H'} - \int_0^T (B^* e^{-sA^*}\Lambda^{-1}x_0, B^* e^{-sA^*}\varphi_0)_{G'}\, ds = \\ &= \langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H,H'} - \langle \Lambda\Lambda^{-1}x_0, \varphi_0 \rangle_{H,H'} = 0\end{aligned}$$

egyenlőséget kapjuk. Minthogy a (H1) feltevés miatt φ_0-lal együtt $\varphi(T)$ is befutja az egész H' teret, innen következik, hogy $x(T) = 0$. ∎

Dolecki és Russell [5] bebizonyították, hogy a (H1), (H2), (H3) feltevések mellett a (2.7) probléma irányíthatósága valójában *ekvivalens* a (2.8) probléma megfigyelhetőségével. (Egy rövid bizonyítás található erre [13]-ban is.)

Lions [17], [18] kidolgozott egy általános módszert lineáris parciális differenciálegyenletek irányíthatóságanak a vizsgálatára. Ez az úgynevezett Hilbert unicitási módszer (HUM) lényegében a fenti tételen alapul.

Példa. A 2.1. szakaszban vizsgált problémát átírhatjuk az itt vizsgált absztrakt formába. Vezessük be ehhez a $\varphi = (u, u')$, $\varphi_0 = (u_0, u_1)$ jelöléseket, majd definiáljuk az A^* és B^* lineáris operátorokat az alábi képletekkel:

$$D(A^*) = D(B^*) = \big(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega),$$

$$A^*(z_0, z_1) = -(z_1, \Delta z_0),$$

$$B^*(z_0, z_1) = \partial_\nu z_0.$$

Ekkor a (2.3) probléma a $\partial_\nu u$ megfigyeléssel a (2) bsztrakt alakot ölti.

Mutassuk meg, hogy a $H' = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ és $G' = L^2(\Gamma)$ választással a (H1), (H2), (H3) tulajdonságok mind teljesülnek. A (H1) tulajdonság jól ismert és szorosan kapcsolódik az energia megmaradásához, lásd például [19]. A (H2) tulajdonság A^*, B^* definíciójából és a Laplace-egyenletre vonatkozó elliptikus regularitási elméletből következik: ha $z_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, akkor

$$\big\|B^*(z_0, z_1)\big\|_{L^2(\Gamma)} = \|\partial_\nu z_0\|_{L^2(\Gamma)} \le c\|z_0\|_{H^2(\Omega)} \le c\|\Delta z_0\|_{L^2(\Omega)} \le$$

$$\le c\big\|A^*(z_0, z_1)\big\|_{H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}.$$

Végül (H3) ekvivalens az 1.2. Tételben igazolt egyenlőtlenségekkel.

Összehasonlítva a (2.4) és (2.9) azonosságokat látható, hogy a (2.8) probléma duális problémája éppen (2.1), ha bevezetjük az $x = (-y', y)$, $x_0 = (-y_1, y_0)$ jelöléseket, és ha a G, H Hilbert-tereket a $G := G'' = L^2(\Gamma)$ és $H := H'' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ képletekkel értelmezzük.

Alkalmazva a 2.5. és 1.2. Tételeket, innen újra adódik a 2.1. Tétel.

3. Stabilizáció „természetes” visszacsatolással

Ebben a fejezetben disszipatív „határ*feedback*”-eket tekintünk és becslést adunk az energiacsökkenési rátára. Az itt alkalmazott Ljapunov típusú eljárást Komornik és Zuazua [14] vezette be, majd Komornik [11] fejlesztette tovább a konkrét Ljapunov függvények helyett egy speciális integrálegyenlőtlenséget alkalmazva.

3.1. A hullámegyenlet stabilizációja lineáris visszacsatolással. Rögzítsünk két folytonos $a, b : \Gamma \to (0, +\infty)$ függvényt, és tekintsük az alábbi problémát:

$$
\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \Omega \times [0, +\infty)\text{-ben}, \\ \partial_\nu u + au + bu' = 0 & \Gamma \times [0, +\infty)\text{-en}, \\ u(0) = u_0 \quad \text{és} \quad u'(0) = u_1 & \Omega\text{-ban}. \end{cases} \tag{3.1}
$$

Ilyen típusú határfeltételeket az elsők között Russell [21] tanulmányozott. Emlékeztetünk a következő eredményekre (lásd például [11], [12]):

- tetszőlegesen adott $(u_0, u_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ kezdeti adatok esetén a (3.1) problémának van egy egyértelműen meghatározott *gyenge* megoldása:

$$u \in C\big([0, +\infty); H^1(\Omega)\big) \cap C^1\big([0, +\infty); L^2(\Omega)\big);$$

- a megoldás energiája, amelyet az

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega u'(t)^2 + |\nabla u(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma au(t)^2\,d\Gamma \tag{3.2}$$

képlettel definiálunk, t-nek monoton fogyó függvénye;

- ha Ω C^2 osztálybeli és ha az (u_0, u_1) kezdeti adatokra $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ és $\partial_\nu u_0 + au_0 + bu_1 = 0$ Γ-n, akkor a megfelelő *erős* megoldások simábbak:

$$u \in C\big([0, +\infty); H^2(\Omega)\big) \cap C^1\big([0, +\infty); H^1(\Omega)\big) \cap C^2\big([0, +\infty); L^2(\Omega)\big).$$

Adjunk rögtön pontosabb eredményt az energia csökkenésére:

3.1. Lemma. *A (3.1) probléma erős megoldásai minden $0 \le S < T < +\infty$ esetén teljesítik az*

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_\Gamma bu'(t)^2\,d\Gamma\,dt \tag{3.3}$$

egyenlőséget.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} E' &= \int_\Omega u'u'' + \nabla u \cdot \nabla u' \, dx + \int_\Gamma auu' \, d\Gamma = \\ &= \int_\Omega u'\Delta u + \nabla u' \cdot \nabla u \, dx + \int_\Gamma auu' \, d\Gamma = \\ &= \int_\Gamma u'(\partial_\nu u + au) \, d\Gamma = \\ &= -\int_\Gamma b(u')^2 \, d\Gamma. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ha Ω C^2 osztálybeli csillagszerű tartomány, akkor az energia $t \to +\infty$ esetén exponenciálisan nullához tart. Az egyszerűség kedvéért csak egy nagyon speciális esetben bizonyítjuk be ezt az eredményt; az érdeklődő olvasó [11], [12]-ben találhat általánosabb eredményeket.

3.2. Tétel. *Legyen Ω az $\mathbf{R}^3$ tér $B(x_0, 1)$ egységgömbje, és legyen $a = b \equiv 1$. Ekkor a (3.1) probléma minden megoldására*

$$E(t) \le E(0)e^{1-t/2}, \qquad \forall t \ge 0.$$

Bizonyítás. Elegendő erős megoldásokkal foglalkoznunk, mert az általános eset ebből egyszerű sűrűségi meggondolással következik.

Alkalmazzuk az 1.3. Lemmát (lásd a bizonyítását követő megjegyzést):

$$\begin{aligned} &\int_S^T \int_\Gamma (\partial_\nu u) M u + (m \cdot \nu)\big((u')^2 - |\nabla u|^2\big) \, d\Gamma \, dt = \\ &= \left[\int_\Omega u' M u \, dx \right]_S^T + \int_S^T \int_\Omega (u')^2 + |\nabla u|^2 \, dx \, dt \end{aligned}$$

tetszőleges $0 \le S < T < +\infty$ esetén. Mivel most $m \cdot \nu \equiv 1$, $\partial_\nu u = -u - u'$ és $Mu = 2m \cdot \nabla u + 2u$, az energia definícióját is felhasználva ez az azonosság átírható a következő alakba:

$$\begin{aligned} &\int_S^T \int_\Gamma (u')^2 - |\nabla u|^2 - 2(u + u')(m \cdot \nabla u) - 2(u + u')u + u^2 \, d\Gamma \, dt = \\ &= \left[\int_\Omega u' M u \, dx \right]_S^T + 2 \int_S^T E \, dt. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Minthogy $|m| = 1$ Γ-n, a bal oldali integráljel alatti kifejezés így becsülhető:

$$\begin{aligned}
&(u')^2 - |\nabla u|^2 - 2(u+u')(m \cdot \nabla u) - 2(u+u')u + u^2 \leq \\
&\leq (u')^2 - |\nabla u|^2 + (u+u')^2 + |m \cdot \nabla u|^2 - 2(u+u')u + u^2 \leq \\
&\leq (u')^2 + (u+u')^2 - 2(u+u')u + u^2 = \\
&= 2(u')^2.
\end{aligned}$$

Ezért, felhasználva a 3.1. Lemmát is, (3.4)-ből a következő egyenlőtlenség adódik:

$$2\int_S^T E\,dt \leq 2E(S) - 2E(T) - \Big[\int_\Omega u'Mu\,dx\Big]_S^T. \tag{3.5}$$

Ha megmutatjuk, hogy

$$\Big|\int_\Omega u'Mu\,dx\Big| \leq 2E, \tag{3.6}$$

akkor (3.5)-ből a

$$2\int_S^T E\,dt \leq 2E(S) - 2E(T) + 2E(S) + 2E(T) = 4E(S)$$

egyenlőtlenséget, ebből pedig $T \to +\infty$ határátmenettel az

$$\int_S^{+\infty} E\,dt \leq 2E(S) \quad \text{minden} \quad S \geq 0\text{-ra} \tag{3.7}$$

egyenlőtlenséget fogjuk kapni.

A (3.6) egyenlőtlenség bizonyításához induljunk ki az 1.4. Lemma (1.8) azonosságából:

$$\int_\Omega (Mu)^2\,dx = \int_\Omega |2m \cdot \nabla u|^2 + (1-n^2)u^2\,dx + (2n-2)\int_\Gamma (m \cdot \nu)u^2\,d\Gamma.$$

Mivel $|m| \leq 1$ $\overline{\Omega}$-ban és mivel $n = 3$, innen következik, hogy

$$\int_\Omega (Mu)^2\,dx \leq 4\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + 4\int_\Gamma u^2\,d\Gamma.$$

Ezek után (3.6) egyszerűen adódik:

$$\int_\Omega |u'Mu|\,dx \leq \int_\Omega (u')^2 + (1/4)(Mu)^2\,dx \leq \int_\Omega (u')^2 + |\nabla u|^2\,dx + \int_\Gamma u^2\,d\Gamma = 2E.$$

Mivel az energiafüggvény nemnegatív és monoton fogyó, a tétel a (3.7) egyenlőtlenségekből következik, ha alkalmazzuk az alábbi Gronwall típusú lemmát:

3.3. Lemma. *Legyen $E : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ monoton fogyó függvény, és tegyük fel, hogy alkalmas $T > 0$ konstanssal fennállnak az*

$$\int_t^\infty E(s)\,ds \le TE(t), \qquad \forall t \ge 0 \tag{3.8}$$

egyenlőtlenségek. Ekkor

$$E(t) \le E(0)e^{1-t/T}, \qquad \forall t \ge 0. \tag{3.9}$$

Bizonyítás. Az

$$f(x) := e^{x/T} \int_x^\infty E(s)\,ds, \qquad x \ge 0;$$

függvény lokálisan abszolút folytonos. Továbbá f monoton fogyó, hiszen (3.8) miatt

$$f'(x) = T^{-1}e^{x/T}\left(\int_x^\infty E(s)\,ds - TE(x)\right) \le 0$$

majdnem minden $x \ge 0$-ra. Innen, újra alkalmazva (3.8)-at,

$$f(x) \le f(0) = \int_0^\infty E(s)\,ds \le TE(0), \qquad \forall x \ge 0,$$

tehát

$$\int_x^\infty E(s)\,ds \le TE(0)e^{-x/T}, \quad \forall x \ge 0. \tag{3.10}$$

Mivel E nemnegatív és monoton fogyó,

$$\int_x^\infty E(s)\,ds \ge \int_x^{x+T} E(s)\,ds \ge TE(x+T).$$

Behelyettesítve (3.10)-be azt kapjuk, hogy

$$E(x+T) \le E(0)e^{-x/T}, \qquad \forall x \ge 0.$$

Innen $t := x + T$ helyettesítéssel (3.9) minden $t \ge T$-re adódik. Végül $0 \le t < T$ esetén (3.9) triviálisan teljesül, hiszen $E(t) \le E(0)$. ∎

Természetes kérdés, hogy elérhető-e tetszőlegesen nagy energiacsökkenési ráta az a és b együtthatók alkalmas választásával (3.1)-ben. Koch és Tataru [8] eredményei mutatják, hogy ez lehetetlen. A dolgozat utolsó fejezetében más típusú határfeedback-eket fogunk konstruálni, amelyek segítségével tetszőlegesen magas energiacsökkenési ráta érhető el.

3.2. Nemlineáris visszacsatolások. Az előző szakaszban alkalmazott módszer általánosítható nemlineáris feedback-ek vizsgálatára. Példaként ismertetünk itt egy ilyen típusú eredményt; az érdeklődő olvasó megtalálhatja a bizonyítást [12]-ben.

Legyen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ egy monoton fogyó, folytonos függvény. Tegyük fel, hogy van egy olyan $p > 1$ valós szám és léteznek olyan c_i pozitív konstansok, hogy g eleget tesz az alábbi növekedési feltételeknek:

$$c_1|x|^p \leq |g(x)| \leq c_2|x|^{1/p} \quad \text{ha} \quad |x| \leq 1$$

és

$$c_3|x| \leq |g(x)| \leq c_4|x| \quad \text{ha} \quad |x| > 1.$$

Rögzítsünk egy $a : \Gamma \to (0, +\infty)$ folytonos függvényt és tekintsük a következő problémát:

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \Omega \times [0, +\infty)\text{-ben}, \\ \partial_\nu u + au + g(u') = 0 & \Gamma \times [0, +\infty)\text{-en}, \\ u(0) = u_0 \quad \text{és} \quad u'(0) = u_1 & \Omega\text{-ban}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Ez a probléma korrekt $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$-ban. Értelmezzük a megoldások energiáját ugyanazzal a (3.2) képlettel, mint az előző szakaszban. Ekkor érvényes a következő

3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy Ω egy C^2 osztálybeli, csillagszerű tartomány. Ekkor a* (3.11) *probléma megoldásai teljesítik az*

$$E(t) \leq Ct^{-2/(p-1)}$$

becslést minden $t > 0$-ra, ahol a C konstans csak a kezdeti $E(0)$ energiától függ.

4. Stabilizáció tetszőlegesen nagy energiacsökkenési rátával

Eleganciája és viszonylagos egyszerűsége ellenére az előző fejezetbeli módszernek van két hátránya. Először is, a módszer csak kevés esetben alkalmazható. Másodszor, a módszer nem vezet tetszőlegesen nagy energiacsökkenési rátához. A jelen fejezetben egy új eljárást alkalmazunk, amely nagyon gyakran alkalmazható, és amely lehetővé teszi teszőlegesen nagy energiacsökkenési rátához vezető feedback-ek konstruálását. A jelen fejezet anyagát a [13] dolgozatból kölcsönöztük.

4.1. Egy általános eredmény: megfigyelhetőség $\Longrightarrow$ stabilizálhatóság. Térjünk vissza a 2.3. szakaszban tanulmányozott általános problémához. Tegyük fel ismét a (H1), (H2), (H3) hipotéziseket. Ekkor tetszőleges ω pozitív valós számra a

$$\langle \Lambda_\omega \varphi_0, \psi_0 \rangle_{H,H'} := \int_0^{T_\omega} e_\omega(s)(B^* e^{-sA^*}\varphi_0, B^* e^{-sA^*}\psi_0)_{G'}\, ds$$

képlet, ahol

$$e_\omega(s) = \begin{cases} e^{-2\omega s}, & \text{ha } 0 \leq s \leq T, \\ 2\omega(T_\omega - s)e^{-2\omega T}, & \text{ha } T \leq s \leq T_\omega, \end{cases}$$

egy önadjungált, pozitív definit $\Lambda_\omega \in L(H', H)$ izomorfizmust definiál.

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* (H1), (H2), (H3) *hipotézisek teljesülnek, és rögzítsünk egy tetszőleges* $\omega > 0$ *számot. Ekkor az*

$$x' = (A - BJB^*\Lambda_\omega^{-1})x, \qquad x(0) = x_0 \tag{4.1}$$

problémának tetszőleges $x_0 \in H$*-ra létezik egyetlen* $x \in C(\mathbf{R}; H)$ *megoldása. Továbbá van olyan* M *konstans, hogy a* (4.1) *probléma megoldásai eleget tesznek az*

$$\|x(t)\|_H \le M\|x_0\|_H e^{-\omega t} \tag{4.2}$$

becslésnek minden $x_0 \in H$*-ra és minden* $t \ge 0$*-ra.*

Másszóval a tétel azt állítja, hogy a $v = -JB^*\Lambda_\omega^{-1}$ feedback, ahol $J : G' \to G$ ismét a kanonikus Riesz-izomorfizmust jelöli, egyenletesen stabilizálja az

$$x' = Ax + Bv, \qquad x(0) = x_0$$

problémát, és a megoldások csökkenési rátája legalább ω-val egyenlő.

A speciális $e_\omega(s)$ súlyfüggvényt Bourquin [2] javasolta a szerző által korábban használt $e^{-2\omega s}$ helyett. E súlyfüggvény használata jelentősen leegyszerűsíti a bizonyítást. A tételbeli eljárás numerikus szempontból is jól használható: lásd Bourquin, Briffaut, Collet [3] és Bourquin, Briffaut, Urquiza [4].

A bizonyítás vázlata. Fogadjuk el a megoldások létezését és egyértelműségét, és írjuk a Λ_ω operátort a következő alakban:

$$\Lambda_\omega = \int_0^{T_\omega} e_\omega(s) e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*}\, ds.$$

Ha x a (4.1) probléma megoldása, akkor egy egyszerű (formális) számolás a következő azonossághoz vezet:

$$\frac{d}{dt}\langle \Lambda_\omega^{-1}x, x\rangle_{H',H} = \langle \Lambda_\omega^{-1}x, (A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - 2BJB^*)\Lambda_\omega^{-1}x\rangle_{H',H}. \tag{4.3}$$

Felhasználva a

$$BJB^* = -\int_0^T \frac{d}{ds}\left(e_\omega(s)e^{-sA}BJB^*e^{-sA^*}\right) ds =$$

$$= A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - \int_0^{T_\omega} e_\omega'(s) e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*}\, ds$$

egyenlőséget és a

$$BJB^* \ge 0, \quad e_\omega'(s) \le -2\omega e_\omega(s)$$

egyenlőtlenségeket, innen az

$$A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - 2BJB^* \leq -2\omega\Lambda_\omega$$

egyenlőtlenséget kapjuk. (Ez azt jelenti, hogy a jobb- és baloldal különbsége pozitív szemidefinit.) Ennek felhasználásával a (4.3) azonosságból a

$$\frac{d}{dt}\langle \Lambda_\omega^{-1}x, x\rangle_{H',H} \leq -2\omega\langle \Lambda_\omega^{-1}x, x\rangle_{H',H}$$

egyenlőtlenség adódik. Innen

$$\left\langle \Lambda_\omega^{-1}x(t), x(t)\right\rangle_{H',H} \leq \langle \Lambda_\omega^{-1}x_0, x_0\rangle_{H',H} e^{-2\omega t} \tag{4.4}$$

minden $t \geq 0$-ra. Minthogy $\Lambda_\omega \in L(H', H)$ egy önadjungált, pozitív definit izomorfizmus, van két olyan pozitív c_1 és c_2 konstans, hogy

$$c_1\|x\|_H^2 \leq \langle \Lambda_\omega^{-1}x, x\rangle_{H',H} \leq c_2\|x\|_H^2$$

minden $x \in H$-ra. Ezekből és (4.4)-ből a (4.2) becslés $M = \sqrt{c_2/c_1}$ választással adódik. ∎

A fenti bizonyítás teljesen korrekt a véges dimenziós esetben, a végtelen dimenziós esetben azonban bizonyos technikai nehézségek lépnek fel, mert még az erős megoldások sem elég simák a fenti lépések véghezviteléhez. A teljes bizonyítás megtalálható [13]-ban.

4.2. Alkalmazás a hullámegyenletre. Mint azt a 2.3. szakaszban láttuk, ha az

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \Omega \times \mathbf{R}\text{-ben},\\ u = 0 & \Gamma \times \mathbf{R}\text{-en},\\ u(0) = u_0 \quad \text{és} \quad u'(0) = u_1 & \Omega\text{-ban},\\ \psi = \partial_\nu u & \Gamma \times \mathbf{R}\text{-en} \end{cases}$$

problémát átírjuk a

$$\varphi' = -A^*\varphi, \qquad \varphi(0) = \varphi_0, \qquad \psi = B^*\varphi,$$

absztrakt alakba, akkor a megfelelő

$$x' = Ax + Bv, \qquad x(0) = x_0$$

irányítási probléma az

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \Omega \times \mathbf{R}\text{-ben},\\ y = v & \Gamma \times \mathbf{R}\text{-en},\\ y(0) = y_0 \quad \text{és} \quad y'(0) = y_1 & \Omega\text{-ban} \end{cases} \tag{4.5}$$

problémával ekvivalens. (Most végtelen időintervallumot használunk $[0, T]$ helyett.) Mivel a (H1), (H2), (H3) hipotézisek teljesülnek, alkalmazhatjuk a 4.1. Tételt. Hátra van még a $v = -JB^*\Lambda_\omega^{-1}$ feedback azonosítása. A

$$\Lambda_\omega^{-1} : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

operátort a

$$\Lambda_\omega^{-1} = \begin{pmatrix} P & -Q \\ -R & S \end{pmatrix}$$

mátrix alakban felírva és felhasználva B^* definícióját a

$$v = -JB^*\Lambda_\omega^{-1}x = \frac{\partial}{\partial_\nu}(Py' + Qy)$$

összefüggést kapjuk. (Itt $G = L^2(\Gamma)$-t azonosítottuk a G' duálisával.) Bebizonyítottuk tehát a következő eredményt:

4.2. Tétel. *Legyen Ω egy C^2 osztálybeli tartomány, és rögzítsünk egy tetszőlegesen nagy ω számot. Ekkor megadható két folytonos lineáris leképezés*

$$P : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega), \qquad Q : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

és egy M pozitív konstans úgy, hogy az

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \Omega \times \mathbf{R}\text{-ben}, \\ y = \partial_\nu(Py' + Qy) & \Gamma \times \mathbf{R}\text{-en}, \\ y(0) = y_0 \quad \text{és} \quad y'(0) = y_1 & \Omega\text{-ban} \end{cases}$$

probléma korrekt $\mathcal{H} := L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$-ban, és a megoldások eleget tesznek az

$$\|(y, y')(t)\|_{\mathcal{H}} \le M\|(y_0, y_1)\|_{\mathcal{H}} e^{-\omega t}, \quad \forall t \ge 0$$

becslésnek minden $(y_0, y_1) \in \mathcal{H}$-ra.

4.3. Alkalmazás a lemezmodellre. Alkalmazva az 1.3. szakasz eredményeit, a 4.1. Tétel maga után vonja az alábbi stabilizációs tételt:

4.3. Tétel. *Legyen Ω egy C^4 osztálybeli tartomány, és rögzítsünk egy tetszőlegesen nagy ω számot. Ekkor megadható két folytonos lineáris leképezés*

$$P : H^{-2}(\Omega) \to H_0^2(\Omega), \qquad Q : L^2(\Omega) \to H_0^2(\Omega)$$

és egy M pozitív konstans úgy, hogy az

$$\begin{cases} y'' + \Delta^2 y = 0 & \Omega \times \mathbf{R}\text{-ben}, \\ y = 0 \quad \text{és} \quad \partial_\nu y = \Delta(Py' + Qy) & \Gamma \times \mathbf{R}\text{-en}, \\ y(0) = y_0 \quad \text{és} \quad y'(0) = y_1 & \Omega\text{-ban} \end{cases}$$

probléma korrekt $\mathcal{H} := L^2(\Omega) \times H^{-2}(\Omega)$-ban, és a megoldások eleget tesznek az

$$\|(y, y')(t)\|_{\mathcal{H}} \le M\|(y_0, y_1)\|_{\mathcal{H}} e^{-\omega t}, \quad \forall t \ge 0$$

becslésnek minden $(y_0, y_1) \in \mathcal{H}$-ra.

A bizonyítást lásd [13]-ban.

Irodalom

[1] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Control Opt.*, **30** (1992), 1024–1065.

[2] F. Bourquin, Személyes közlés, 1997.

[3] F. Bourquin, J.-S. Briffaut and M. Collet, On the feedback stabilization: Komornik's method, Proceedings of the Second International Conference on Active Control in Mechanical Enginering, Lyon, 22–23 octobre 1997.

[4] F. Bourquin, J.-S. Briffaut et J. Urquiza, Contrôlabilité exacte et stabilisation rapide des structures: aspects numériques, Actes de l'École CEA INRIA EDF sur les matériaux intelligents, avril 1997.

[5] S. Dolecki and D. L. Russell, A general theory of observation and control, *SIAM J. Control Optim.*, **15** (1977), 185–220.

[6] L. F. Ho, Observabilité frontière de l'équation des ondes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math.*, **302** (1986), 443–446.

[7] I. Joó, On the control of a circular membrane and related problems, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math.*, **34** (1991), 231–266.

[8] H. Koch and D. Tataru, On the spectrum of hyperbolic semigroups, *Comm. Partial Diff. Equations*, **20** (1995), 901–937.

[9] V. Komornik, Contrôlabilité exacte en un temps minimal, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math.*, **304** (1987), 223–225.

[10] V. Komornik, A new method of exact controllability in short time and applications, *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, **10** (1989), 415–464. (Jobb ismertetés található a [12] 5. fejezetében.)

[11] V. Komornik, Rapid boundary stabilization of the wave equation, *SIAM J. Control Optim.*, **29** (1991), 197–208.

[12] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*, Masson, Paris és John Wiley & Sons (Chicester, 1994).

[13] V. Komornik, Rapid boundary stabilization of linear distributed systems, *SIAM J. Control Optim.*, **35** (1997), megjelenés alatt.

[14] V. Komornik and E. Zuazua, A direct method for the boundary stabilization of the wave equation, *J. Math. Pures Appl.*, **69** (1990), 33–54.

[15] I. Lasiecka and R. Triggiani, Regularity of hyperbolic equations under $L_2\big(0,T;L_2(\Gamma)\big)$ boundary terms, *Appl. Math. and Optimiz.*, **10** (1983), 275–286.

[16] J.-L. Lions, *Contrôle des systèmes distribués singuliers*, Gauthiers–Villars (Paris, 1983).

[17] J.-L. Lions, Exact controllability, stabilizability, and perturbations for distributed systems, *Siam Rev.*, **30** (1988), 1–68.

[18] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte et stabilisation de systèmes distribués, Vol. 1*, Masson (Paris, 1988).

[19] J.-L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod (Paris, 1968–70).

[20] F. Rellich, Darstellung der Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u$ durch ein Randintegral, *Math. Z.*, **18** (1940), 635–636.

[21] D. L. Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, *SIAM Rev.*, **20** (1978), 639–739.

[22] D. Tataru, *Carleman estimates,* könyv megjelenés alatt.

[23] E. Zuazua (1988), Contrôlabilité exacte en un temps arbitrairement petit de quelques modèles de plaques, 1. függelék [18]-ban.

Vilmos Komornik: Control theory of linear partial differential equations

We give a short introduction to some aspects of the boundary control theory of reversible linear partial differential equations, developed after the introduction of the so-called Hilbert Uniqueness Method by J.-L. Lions in 1986. We obtain observability theorems by applying the multiplier method. Thanks to a duality relation, this yields exact controllability results. Next we show that the multiplier technique can also be used for proving uniform stabilization theorems. Finally we outline a recent variant of the observability–controllability duality. This approach allows us to construct very efficient stabilizing feedbacks under the assumption that the dual system is observable. The general results are illustrated by two important examples: the wave equation and a simple plate model.

Komornik Vilmos

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cédex
France

E-mail: `komornik@math.u-strasbg.fr`

SÉTA AZ EGYÉRTELMŰ FAKTORIZÁCIÓ KÖRÜL

FRIED ERVIN

0. Előzetes információk

Az egész számok egyértelmű prímtényezős felbontása, illetve a racionális vagy valós vagy komplex együtthatós polinomok irreducibilis faktorokra való felbontása szinte az egész matematikában alapvető szerepet játszik. Ennek köszönhetően mindegyikük fontos része az egyetemi algebra vagy számelméleti előadásoknak. Tekintettel arra, hogy a kétfajta bizonyítás nagyon hasonlít, ezért mindkét tényre egy közös bizonyítást adnak, nevezetesen azt, hogy az egyértelmű faktorizáció minden euklideszi gyűrűben igaz; és a fenti esetekben euklideszi gyűrűkkel állunk szemben[1].

Természetesen felmerülő kívánság megtudni, hogy min múlik az egyértelmű faktorizáció, azaz vele ekvivalens egyszerűbb feltételt találni. Ennek olyan feltételnek kell lennie, amelyik a fentiektől különböző fontos esetekben is könnyen ellenőrizhető. Ilyen feltétel létezik, és az egyetemen tanítjuk is.

A feltételek között szükséges kiindulásként szerepel, hogy a vizsgált *gyűrű*ben[2] legyen *egységelem*, ezért nincs egyértelmű faktorizáció a páros számok körében. Én soha nem szerettem ezt kikötni, hanem úgy „csűrtem-csavartam" a dolgot, hogy ez következmény az egyértelmű faktorizációból. Egyetemi kollégáim mindig „akadékoskodtak", hogy „de ha másképpen definiálnék bizonyos fogalmakat", akkor már ebből esetleg nem is következne az egységelem léte[3]. Ezek után értem el ezeket az eredményeket 1995-ben. Amikor előadást tartottam ebben a témakörben a bécsi Műegyetem algebra szemináriumán, akkor az egyik résztvevő közölte, hogy valaki nemrégiben hasonló eredményeket kapott a nem egyértelmű felbontások esetében, amelyeket különböző folyóiratokban közölt is (l. az irodalomjegyzéket). Úgy éreztem, akkor nekem nem illik ezeket bárhova közlésre benyújtani. Tekintettel

Készült a T16432 és T023186 OTKA és az FKFP 0877/1997 támogatásával.

[1] Ebben a részben nincs szükségünk a fogalmak definíciójára; a szükséges fogalmakat a megfelelő helyen fogjuk definiálni.

[2] Definíciót később adunk.

[3] Különösen *Freud Róbert*tel beszéltünk erről sokat.

azonban arra, hogy a kapott eredmények tanulságosak, úgy hiszem jelen magyar nyelvű folyóiratban mégis érdemes közölni.

1. Bevezetés

Mindenekelőtt előre bocsátunk néhány fogalmat, amelyekre szükség van a szokásos egyértemű faktorizációnál[4].

Gyűrű elemek egy $\mathcal{R}$ halmaza két művelettel, az összeadással és a szorzással; amelyekre a szokásos azonosságok teljesülnek. Az $a, b \in \mathcal{R}$ elemek összegét $a + b$, szorzatukat $a \cdot b$ vagy ab jelöli. 0 a gyűrű nulleleme, $\mathcal{R}^*$-gal fogjuk jelölni a 0-tól különböző $\mathcal{R}$-beli elemek halmazát. Általában a szorzás kommutativitását nem kívánják meg, de mi csak *kommutatív gyűrű*kkel foglalkozunk. Gyűrűk esetén lehetséges, hogy $a, b \in \mathcal{R}^*$ esetén $ab = 0$, azaz a gyűrűben *nullosztók* vannak. Mi ezt az esetet is kizárjuk: csak *nullosztómentes* kommutatív gyűrűkkel foglalkozunk. Ezek neve *integritási tartomány*. Integritási tartomány pontosan azt jelenti, hogy $\mathcal{R}^*$ zárt a szorzásra. A továbbiakban feltesszük, hogy az integritási tartományoknak legalább két elemük van[5]. Ha van olyan $1 \in \mathcal{R}$, amelyre minden $a \in \mathcal{R}$ esetén $1 \cdot a = a$ teljesül, akkor ezt a gyűrű *egységelem*ének nevezzük. Nem minden integritási tartománynak van egységeleme, például a páros számok gyűrűjében nincs egységelem. Ha van az integritási tartományban egységelem, akkor egységelemes integritási tartományról beszélünk. Egy kommutatív gyűrű (kommutatív) *test,* ha bármely nem-0 elemével lehet osztani; más szóval $\mathcal{R}^*$ a szorzásra nézve csoport. Világos, hogy minden test egységelemes integritási tartomány.

Minden integritási tartománynak létezik *hányadosteste*; amely az integritási tartomány elemeiből képezett „törtek"-ből áll. Az $\mathcal{R}$ hányadostestét $\Delta(\mathcal{R})$-rel fogjuk jelölni. Sokszor célszerű nem az összes törtet nézni, csak ezeknek egy olyan részét, amelyek azért gyűrűt alkotnak (a testbeli műveletekre). A műveletek elvégezhetősége végett célszerű megengedni, hogy a nevezők halmaza zárt legyen a szorzásra.

Fel fogjuk használni az *oszthatóság* elemi tulajdonságait, általában minden utalás nélkül. $a|b$ jelöli azt, hogy a osztója b-nek. Néhány tényt és fogalmat azért megemlítünk:

(1) 0-nak minden elem osztója, és 0 egyedül a 0-nak osztója.

(2) Az egységelem osztóit *egység*nek nevezik, ezek pontosan azok, amelyek minden elemnek osztói.

(3) Két elem *asszociált,* ha mindegyik osztója a másiknak, azaz mindegyik a másiknak egységszerese.

---

[4]Feltehetően ezeket minden olvasónk ismeri, de nem történhet baj azzal, hogy felsoroljuk.

[5]Ezzel azt értük el, hogy $\mathcal{R}^*$ félcsoport, mert egy félcsoport nem lehet üres. Amit elvesztettünk, az az egyedül 0-ból álló gyűrű, de az igazán nem nagy veszteség.

(4) Az $\mathcal{R}^*$ egységtől különböző elemeit *valódi elem*eknek fogjuk nevezni.

(5) Az a valódi elem *felbonthatatlan,* ha $a = bc$ esetén b és c valamelyike egység (a másik ekkor a-nak asszociáltja).

(6) Az oszthatóság tranzitív, az asszociáltság erejéig antiszimmetrikus és az egységelemes esetben reflexív.

(7) Az $\mathcal{R}$ egy p eleme *prímtulajdonságú,* ha $p|ab$ esetén $p|a$ és $p|b$ közül legalább az egyik teljesül.

(8) 0 és az egységek eleve prímtulajdonságúak. A többieket *valódi* prímtulajdonságú elemnek nevezzük.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{R}$ egységelemes integritási tartományban érvényes az egyértelmű faktorizáció, ha $\mathcal{R}^*$ minden valódi eleme lényegében egyértelműen felbontható felbonthatatlan elemek szorzatára (egytényezős szorzatot is megengedve).

Az egyértelműség azt jelenti, hogy ha

$$a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_k$$

két felbontás, akkor van egy olyan $\varphi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, hogy $q_{\varphi(i)}$ és p_i asszociáltak[6].

Tétel. *Az $\mathcal{R}$ egységelemes integritási tartományban akkor és csak akkor érvényes az egyértelmű faktorizáció, ha az alábbi két feltétel mindegyike teljesül:*

1) *Ha $\mathcal{R}^*$-ban az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ elemek mindegyike valódi osztója a megelőzőnek, akkor a sorozat véges.*

2) *$\mathcal{R}^*$-ban minden felbonthatatlan elem prímtulajdonságú.*

Az ebben a tételben szereplő első tulajdonságot algebrailag másképpen szokták megfogalmazni. Ehhez a megfogalmazáshoz szükségünk van egy fogalomra, amelyet a későbbiekben úgyis használni fogunk.

Az $\mathcal{R}$ gyűrű elemeinek egy nem-üres $\mathcal{I}$ részhalmazát *ideál*nak nevezzük, ha $a, b \in \mathcal{I}$ esetén $a+b, a-b \in \mathcal{I}$, valamint $a \in \mathcal{I}$ és $r \in \mathcal{R}$ esetén $ra \in \mathcal{I}$ is teljesülnek.

Mivel ideálok közös része ideál, azért minden $a \in \mathcal{R}$ elemhez létezik egy a-t tartalmazó legkisebb ideál, amit (a) jelöl. Az (a) alakú ideálok neve az a generálta *főideál*. Világos, hogy (a) tartalmazza az ra alakú elemek $\mathcal{R}a$-val jelölt halmazát, ahol r végigfut $\mathcal{R}$ elemein. Azonnal látható, hogy $\mathcal{R}a$ is ideál. Egységelemes integritási tartományokban $\mathcal{R}a = (a)$. Ha azonban $\mathcal{R}$-ben nincsen egységelem, akkor a fenti egyenlőség csak az $a = 0$ esetben teljesül. (Például a páros számok gyűrűjében a 2 generálta főideál az egész gyűrű; míg a másik ideál a 4 egész számú többszöröseiből áll.)

[6]Ez a pontos megfelelője annak a kifogásolható megfogalmazásnak, hogy a felbontás sorrendtől és egységektől eltekintve egyértelmű.

Átfogalmazás. *A fenti tétel* 1) *alatti feltétele a következőképpen mondható:*

Ha $(a_1) \subset (a_2) \subset \ldots \subset (a_n) \subset$ *különböző főideálok növő lánca, akkor a lánc véges.*

Erre a tulajdonságra úgy fogunk utalni, hogy a főideálokra érvényes a *maximum feltétel.*

A továbbiakban még egy közismert fogalomra lesz szükségünk:

Az $\mathcal{R}$ gyűrű egy $\mathcal{P}$ ideálját *prímideál*nak nevezik, ha bármely $a, b \in \mathcal{R}$ elemek esetén az $ab \in \mathcal{P}$ feltételből következik, hogy vagy $a \in \mathcal{P}$ vagy $b \in \mathcal{P}$ teljesül.

Ha $\mathcal{P}$ az $\mathcal{R}$ gyűrűnek prímideálja, akkor tehát a gyűrű $\mathcal{P}$-n kívüli elemeinek a halmaza zárt a szorzásra. Tekintsük $\Delta(\mathcal{R})$-ben azokat az elemeket, amelyeknek a nevezője $\mathcal{P}$-n kívül van. A szorzásra való zártság miatt ezek gyűrűt alkotnak, amely természetesen ugyancsak integritási tartomány. Ezt a $\mathcal{S} = \Delta_{\mathcal{P}}(\mathcal{R})$ gyűrűt az $\mathcal{R}$ gyűrű $\mathcal{P}$ szerinti *lokalizált*jának nevezzük. Az ilyen $\mathcal{S}$ gyűrűk neve *lokális gyűrű*[7]. A lokális gyűrűket arról lehet felismerni, hogy valódi ideáljaik között van egy olyan, amelyik minden valódi ideált tartalmaz; ez egy prímideál[8].

2. Egyértelmű faktorizáció egységelem nélkül

Ebben a részben az egyértelmű faktorizáció lehetőségét vizsgáljuk meg abban az esetben, ha az integritási tartománynak nincs egységeleme. Már eleve az oszthatóság is gondot okoz, nem is beszélve az asszociáltságról, amely az egyértelműség megfogalmazásában játszik fontos szerepet.

Azt a tulajdonságot fogjuk felhasználni, hogy egy elem osztójának „több" többszöröse van. Pontosabban szólva, ha $a, b \in \mathcal{R}$ esetében $b|a$, azaz alkalmas $c \in \mathcal{R}$ elemmel $a = bc$, akkor minden $r \in \mathcal{R}$ elemre $ra = (rc)b$. Ennél a felírásnál viszont nem szerepel az oszthatóság, csupán a szereplő elemek többszörösei. Egységelemes $\mathcal{R}$ integritási tartomány esetében tehát $b|a$ pontosan akkor, ha $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}b$.

Definíció 2.1. Legyen $\mathcal{R}$ tetszőleges integritási tartomány és $a, b \in \mathcal{R}$.

(1) b *kváziosztója* a-nak, ha $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}b$.

(2) a és b *ekvivalensek,* ha $\mathcal{R}a = \mathcal{R}b$; ezt $a \sim b$ jelöli.

(3) Ha b kváziosztója a-nak, de nem ekvivalensek, tehát $\mathcal{R}a \subset \mathcal{R}b$, akkor b *valódi* kváziosztó.

(4) $p \in \mathcal{R}$ *prímtulajdonságú,* ha az $\mathcal{R}ab \subseteq \mathcal{R}p$ feltétel esetén $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}p$ vagy $\mathcal{R}b \subseteq \mathcal{R}p$ teljesül.

---

[7] Ez az elnevezés nem a műveletek lokális voltára utal, hanem arra, hogy egy adott helyen (lokálisan) értelmezhető polinom-hányadosok ilyenek.

[8] A továbbiakban az állításokat és definíciókat számozni fogjuk, mert azok nem közismertek, és hivatkozni fogunk rájuk a bizonyítások során.

Mindenekelőtt néhány alapvető elemi tulajdonságát[9] soroljuk fel a kvázioszthatóságnak:

T(0,1). *A kváziszthatóság nyilvánvalóan reflexív, tranzitív és ekvivalencia erejéig antiszimmetrikus.* ■[10]

T(0,2). *Az oszthatóságból következik a kváziszthatóság, azaz, ha $a = bc$, akkor $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}b$ és $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}c$.* ■

T(0,3). 1. *Ha a kvázisztója b-nek, akkor ac kvázisztója bc-nek;* 2. *kvázisztók szorzata kvázisztója a szorzatnak;* 3. *ha $a \sim b$ és $c \sim d$, akkor $ac \sim bd$.*

Bizonyítás. 1. azt állítja, hogy ha $\mathcal{R}b \subseteq \mathcal{R}a$, akkor $\mathcal{R}bc \subseteq \mathcal{R}ac$, ami azonnal következik a definícióból. Ebből és a tranzitivitásból azonnal következik, hogy ha $\mathcal{R}b \subseteq \mathcal{R}a$ és $\mathcal{R}d \subseteq \mathcal{R}c$, akkor $\mathcal{R}bd \subseteq \mathcal{R}ac$, azaz 2.; míg 3. az antiszimmetria alapján adódik 2.-ből. ■

T(0,4). *Ha $\mathcal{R}bd \subseteq \mathcal{R}ac$ és $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}b$, akkor $\mathcal{R}d \subseteq \mathcal{R}c$.*

Bizonyítás. Feltételeinkből a kváziszthatóság definíciója alapján következik, hogy minden $x \in \mathcal{R}^*$ elemhez van olyan $y \in \mathcal{R}^*$, továbbá ehhez van olyan $z \in \mathcal{R}^*$, amelyekre $x(bd) = y(ac)$, továbbá $ya = zb$ teljesül. Ebből következik, hogy $xbd = zbc$, ami a nullosztómentesség miatt az $xd = zc$ összefüggést, végül is a kívánt eredményt adja. ■

T(0,5). *Ha $ac \sim bd$ és $b \sim a$, akkor $c \sim d$.*

Bizonyítás. Az antiszimmetriára való tekintettel azonnal következik **T(0,4)**-ből. ■

T(0,6). *Ha ac valódi kvázisztója bd-nek és b kvázisztója a-nak, akkor c valódi kvázisztója d-nek.*

Bizonyítás. A feltétel szerint $\mathcal{R}bd \subset \mathcal{R}ac$ és $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}b$. **T(0,4)** szerint $\mathcal{R}d \subseteq \mathcal{R}c$. A $c \sim d$ esetben $\mathcal{R}c \subseteq \mathcal{R}d$. **T(0,3)** szerint ebből a $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}b$ feltétellel együtt $\mathcal{R}ac \subseteq \mathcal{R}bd$ következik, ami nem lehet, mert $\mathcal{R}bd \subset \mathcal{R}ac$. Így csak $\mathcal{R}d \subset \mathcal{R}c$ lehet, mint állítottuk. ■

T(0,7). *Osztó kvázisztója és kvázisztó osztója osztó.*

Bizonyítás. Legyen először $b|a$ és $\mathcal{R}b \subseteq \mathcal{R}c$. Ekkor van olyan $x \in \mathcal{R}^*$ és ehhez olyan $y \in \mathcal{R}^*$, amire $a = xb = yc$, tehát $c|a$. A másik esetben, amikor $c|b$ és $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}b$, van olyan $x \in \mathcal{R}^*$ és ehhez olyan $y \in \mathcal{R}^*$, amire $b = xc$ és $xa = yb$. Ebből $xa = yxc$, illetve a nullosztómentesség alapján $a = yc$ következik, mint állítottuk. ■

---

[9] A tulajdonság szó kezdőbetűjét használva ezeket **T(i,j)** fogja jelezni, annak megfelelően, hogy hányadik rész hányadik tulajdonságáról van szó.

[10] A ■ jel a bizonyítás végét jelzi.

A továbbiakban a faktorizációra vonatkozó néhány fogalmat definiálunk, amelyeknél nem használjuk ki azt, hogy az integritási tartomány egységelemes.

A felbonthatatlan elemet itt is ugyanúgy definiáljuk, mint az egységelemes esetben. Megjegyezzük viszont, hogy ha $\mathcal{R}$ nem egységelemes és az $a = bc$ felbontásból következik, hogy b és c valamelyike egység, akkor ez azt jelenti, hogy ilyen felbontás nem létezik.

A faktorizációt ugyanúgy értelmezzük, mint az egységelemes esetben. Az egyértelműségen kívül azonban szükségünk van egy másik fogalomra.

Azt mondjuk, hogy az $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ felbontás *része* a $b = q_1 \cdot \ldots \cdot q_k$ felbontásnak, ha van egy olyan $\varphi : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,k\}$ egyértelmű (azaz injektív) leképezés, amelynél $q_{\varphi(i)} \sim p_i$ (a 2.1 Definíció szerint!). Ha φ kölcsönösen egyértelmű (azaz bijektív), akkor ekvivalens felbontásokról beszélünk.

Azt mondjuk, hogy $\mathcal{R}$-ben *egyértelmű a faktorizáció,* ha ekvivalens elemek faktorizációja is ekvivalens, *amennyiben* létezik faktorizációjuk. Ha $\mathcal{R}^*$ minden valódi elemének létezik is faktorizációja, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{R}$-ben *érvényes az egyértelmű faktorizáció.*

A továbbiakban az ilyen gyűrűk elemi tulajdonságait mutatjuk be. Tekintettel arra, hogy ezek az egységelemes esetben közismertek, ezért most hallgatólagosan feltesszük, hogy a szereplő integritási tartománynak <u>nincs</u> egységeleme.

T(1,1). *Ha b kvázi osztója a-nak, akkor a-nak van olyan felbonthatatlan faktora, amely b egy felbonthatatlan faktorával ekvivalens.*

Bizonyítás. Legyen $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ és $b = q_1 \cdot \ldots \cdot q_k$ egy-egy felbontás. Ha $\mathcal{R}^*$ összes felbonthatatlan eleme ekvivalens a $q_1,\ldots,q_k$ elemek valamelyikével, akkor készen vagyunk. Egyébként legyen x ezekkel nem ekvivalens felbonthatatlan elem. A kvázioszthatóság szerint ehhez létezik olyan $y \in \mathcal{R}^*$, amelyre $xa = yb$. Az egyértelmű faktorizáció alapján a jobb oldalon álló minden q_i felbonthatalan faktor ekvivalens a bal oldalon álló valamelyik felbonthatatlan faktorral. Mivel ez nem lehet x, ezért csak valamelyik p_j lehet. ■

T(1,2). *Ha a p felbonthatatlan elem kvázi osztója a q felbonthatatlan elemnek, akkor ekvivalensek.*

Bizonyítás. A kvázioszthatóság alapján létezik olyan $x \in \mathcal{R}^*$, amelyre $qq = xp$ teljesül. Az egyértelmű faktorizációból következik, hogy p ekvivalens a bal oldal valamelyik tényezőjével. ■

T(1,3). *Az $a \in \mathcal{R}^*$ minden felbonthatalan p valódi kvázi osztója osztója a-nak.*

Bizonyítás. **T(1,2)** szerint a nem lehet felbonthatatlan. Az egyértelmű faktorizáció szerint p ekvivalens a egy osztójával. Ebből pedig **T(0,7)** felhasználásával kapjuk, hogy $p|a$. ■

T(1,4). *A b elem bármely a valódi kváziosztója osztója b-nek.*

Bizonyítás. Legyen $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ és $b = q_1 \cdot \ldots \cdot q_k$ egy-egy felbontás, és legyen $\mathcal{R}b \subset \mathcal{R}a$. Állításunkat n-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. Az $n = 1$ esetben az állítás azonnal következik **T(1,3)**-ból. Egyébként **T(1,1)** miatt feltehető, hogy $p_1 \sim q_1$. Ekkor, **T(0,6)** szerint, $a_1 = p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ valódi kváziosztója a $b_1 = q_2 \cdot \ldots \cdot q_k$ elemnek, ami biztosítja az indukciós lépést. ■

T(1,5). **(M):** *A kvázioszthatóságra teljesül:*

Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozat minden eleme valódi kváziosztója a megelőzőnek, akkor a sorozat véges. (Ideálok $\mathcal{R}a_1 \subset \mathcal{R}a_2 \subset \cdots \subset \mathcal{R}a_n \subset \cdots$ alakú sorozatára teljesül a maximum feltétel.)

Bizonyítás. Az egyértelmű faktorizáció szerint az R^* bármely a elemére az a felbonthatalan faktorainak $\#(a)$ száma a-val egyértelműen meghatározott. Ugyancsak az egyértelmű faktorizációból következik, hogy $\#(ab) = \#(a) + \#(b)$. Ezekből viszont **T(1,4)** miatt azonnal következik az állítás. ■

T(1,6). **(P):** *Minden felbonthatatlan elem rendelkezik a prímtulajdonsággal.*

Bizonyítás. Legyen a p felbonthatatlan elem kváziosztója az ab szorzatnak. Ha ekvivalencia erejéig p az egyetlen felbonthatalan elem, akkor az mind a-nak, mind b-nek kváziosztója. Egyébként legyen q egy p-vel nem ekvivalens felbonthatatlan elem. A kvázioszthatóság definíciója szerint ehhez található olyan $x \in R^*$, amire $qab = xp$. Az egyértelmű faktorizáció szerint p ekvivalens a bal oldal valamelyik felbonthatalan tényezőjével. Mivel az nem q, ezért csak a-nak vagy b-nek az egyik tényezője lehet. ■

A következő állításnál csak azt tesszük fel, hogy létezik faktorizáció, az egyértelműséget nem:

T(1,7). **(P)** *teljesülése esetén a p felbonthatatlan elem minden q kváziosztója ekvivalens vele.*

Bizonyítás. Mindenekelőtt belátjuk, hogy a kirótt feltételek teljesülése esetén:

Két felbonthatatlan elem szorzata legfeljebb két tényező szorzatára bontható, és minden ilyen felbontásban a tényezők ismét felbonthatatlanok.

Legyen pq a megadott szorzat, és tegyük fel, hogy abc ennek egy felbontása. Ez azt jelenti, hogy például p osztója a szorzatnak, így kváziosztója is. Feltétel szerint minden felbonthatatlan elem rendelkezik a prímtulajdonsággal, így például $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}p$. Mivel $ab \in \mathcal{R}a$, ezért van olyan $d \in \mathcal{R}^*$, amire $ab = dp$, azaz $pq = dpc$. A nullosztómentesség miatt p-vel egyszerűsíthetünk, de a kapott $q = dc$ egyenlőség ellentmond q felbonthatatlanságának. Ebből azonnal adódik az is, hogy bármely kéttényezős felbontás tényezői felbonthatatlanok, mert egyébként egy háromtényezős felbontáshoz juthatnánk.

Most rátérünk a $\mathbf{T(1,7)}$ állítás bizonyítására. A kváziszthatóság alapján létezik olyan $x \in \mathcal{R}^*$, amire $pp = qx$. A most belátottak szerint p felbonthatatlanságából következik, hogy q és x is azok. Mivel ezek mindegyike osztója pp-nek, ezért kváziosztója is. Mint láttuk, ezek felbonthatatlanok, így prímtulajdonságúak, tehát mindegyikük kváziosztója p-nek:

$$\mathcal{R}p \subseteq \mathcal{R}q \quad \text{és} \quad \mathcal{R}p \subseteq \mathcal{R}x.$$

(Az első tartalmazás a feltétel szerint is igaz.) A második tartalmazás szerint minden $u \in \mathcal{R}^*$ elemhez van olyan $v \in \mathcal{R}^*$ elem, amire $up = vx$. Ezt q-val szorozva és az eredeti egyenlőséget felhasználva azt kapjuk, hogy $upq = vqx = vpp$. A nullosztómentesség miatt ebből az következik, hogy minden $u \in \mathcal{R}^*$ elemhez van olyan $v \in \mathcal{R}^*$ elem, amire $uq = vp$, azaz $\mathcal{R}q \subseteq \mathcal{R}p$, tehát p és q ekvivalensek. ∎

1. Tétel. *$\mathcal{R}$-ben akkor és csak akkor létezik egyértelmű faktorizáció, ha mind* (**M**) *mind* (**P**) *teljesülnek.*

Bizonyítás. $\mathbf{T(1,5)}$ és $\mathbf{T(1,6)}$ alapján az egyértelmű faktorizációból mindkét tulajdonság következik.

Tegyük most fel, hogy $\mathcal{R}$-ben (**M**) is és (**P**) is teljesül. Ha $\mathcal{R}$-ben létezik egységelem, akkor e két feltételből — mint ismeretes — következik az egyértelmű faktorizáció. Egyébként $\mathcal{R}^*$ nem üres, és az (**M**) feltétel szerint létezik olyan a eleme, amelynek nincs valódi kváziosztója. Ez az elem biztosan felbonthatatlan: Ha ugyanis $a = bc$ volna, akkor $\mathbf{T(0,2)}$ szerint b kváziosztója a-nak, a választása alapján tehát ekvivalensek. Ezért a $c \in \mathcal{R}^*$ elemhez volna olyan $x \in \mathcal{R}^*$, amire $(a =)cb = xa$ következik. Ez integritási tartományban csak úgy lehetne, ha x egységelem — ellentétben feltevésünkkel.

Most megmutatjuk, hogy $\mathcal{R}^*$ minden eleme vagy felbonthatatlan, vagy ilyeneknek a szorzata. Legyen ugyanis A azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek nem ilyenek; és tekintsük A-beli elemeknek egy olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sorozatát, amelyek mindegyike az előzőnek valódi kváziosztója, és folytassuk e sorozatot, amíg lehet. Az (**M**) tulajdonság szerint ez a sorozat véges, tehát van köztük egy olyan $a = a_k$, amely után a sorozat már nem folytatható. Az a elem nem lehet felbonthatalan, mert eleme A-nak. Ha $a = bc$, akkor e tényezők mindegyike a-nak valódi kváziosztója, és a maximalitása miatt egyikük sem lehet A-ban. Ekkor viszont mindegyikük vagy felbonthatatlan, vagy ilyenek szorzata, s ezért a is felbonthatatlanok szorzata lenne. Mivel a nem ilyen, ezért csak az lehetséges, hogy A üres, mint állítottuk.

Végül az egyértelműséget bizonyítjuk. Mivel létezik faktorizáció, ezért a továbbiakban felhasználhatjuk $\mathbf{T(1,7)}$-et. Legyen $a \sim b$. Állításunkat az a egy rögzített felbontásában fellépő felbonthatatlan tényezők számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha a felbonthatatlan, akkor $\mathbf{T(0,7)}$ miatt b is az, ezért a felbontás egyértelmű. Legyen egyébként $a \sim b$ és felbontásuk $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$, valamint

$b = q_1 \cdot \ldots \cdot q_k$. Mivel p_1 kvázi osztója b-nek, ezért **(P)** szerint valamelyik tényezőjének, mondjuk q_1-nek is. Ebből viszont **T(1,7)** alapján következik, hogy $p_1 \sim q_1$. Legyen $a = p_1 \cdot a_1$ és $b = q_1 \cdot b_1$. **T(0,5)** szerint ebből következik $a_1 \sim b_1$, ami bizonyítja az indukciós lépést. ■

Ezek után két kérdés merül fel. A bizonyítás ugyan hibátlan (legalábbis annak tűnik), de van-e egyáltalában ilyen gyűrű? A másik kérdés pedig az, hogy ha létezik ilyen gyűrű, akkor miképpen írhatjuk le az összeset. Természetesen az „összes" általában nem azt jelenti, hogy tényleg az összeset, hanem csak azt, hogy „ha bizonyosakat ismerek" akkor ezek segítségével. Konkrétan esetünkben az az értelmes kérdés, hogy miképpen írhatók le ezek a gyűrűk azoknak az egységelemes integritási tartományoknak a segítségével, amelyekben érvényes az egyértelmű faktorizáció.

2. Tétel. *Legyen $\mathcal{R}$ olyan integritási tartomány, amelyben nincsen egységelem és érvényes az egyértelmű faktorizáció. Álljon $\mathcal{S}$ az $\mathcal{R}$ hányadostestének azokból az $\frac{a}{b}$ elemeiből, amelyekre b kvázi osztója a-nak. Ekkor a következők teljesülnek:*

(1) *A definíció értelmes, $\mathcal{S}$ egységelemes integritási tartomány, amelyben $\mathcal{R}$ ideál.*

(2) *$\mathcal{S}$-ben az $\mathcal{R}$-en kívüli elemek pontosan az $\mathcal{S}$ egységei; $\mathcal{R}$ az $\mathcal{S}$-nek minden valódi ideálját tartalmazza. ($\mathcal{S}$ lokális gyűrű, amelynek $\mathcal{R}$ a legnagyobb ideálja.)*

(3) *$\mathcal{S}$-ben a felbonthatatlanok pontosan az $\mathcal{R}$-beli felbonthatatlanok asszociáltjai.*

(4) *$\mathcal{S}$-ben érvényes az egyértelmű faktorizáció és asszociáltaktól eltekintve ugyanaz, mint $\mathcal{R}$-ben.*

Megfordítva, ha $\mathcal{S}$ egy olyan lokális gyűrű, amelyben érvényes az egyértelmű faktorizáció, akkor ennek az $\mathcal{R}$ legnagyobb ideálja nem egységelemes és érvényes benne az egyértelmű faktorizáció.

Bizonyítás. A definíció értelmessége azt jelenti, hogy ha $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \in \Delta(\mathcal{R})$ és b kvázi osztója a-nak, akkor d is kvázi osztója c-nek. A két tört egyenlősége azt jelenti, hogy $ad = bc$ amiből állításunk **T(0,4)** szerint következik.

A műveletekre való zártsághoz legyenek $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \Delta(\mathcal{R})$ elemei $\mathcal{S}$-nek, azaz $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}b$ és $\mathcal{R}c \subseteq \mathcal{R}d$.

Ebből egyrészt kapjuk, hogy $\mathcal{R}ad, \mathcal{R}bc \subseteq \mathcal{R}bd$, és így $\mathcal{R}(ad - bc) \subseteq \mathcal{R}bd$, tehát $\frac{ad-bc}{bd} \in \mathcal{S}$. Másrészt az adódik, hogy $\mathcal{R}ac \subseteq \mathcal{R}bc = \mathcal{R}cb \subseteq \mathcal{R}db$, és így $\frac{ac}{bd} \in \mathcal{S}$. Tehát $\mathcal{S}$ gyűrű; s mint egy test része, integritási tartomány.

Amennyiben $\frac{a}{b} \in \mathcal{S}$, akkor $\mathcal{R}a \subseteq \mathcal{R}b$. Nyilván $0 \cdot \frac{a}{b} = 0 \in \mathcal{S}$. Ha $c \in \mathcal{R}^*$, akkor tehát létezik olyan $x \in \mathcal{R}^*$, amire $ca = xb$, és így $c \cdot \frac{a}{b} = x \in \mathcal{S}$, ami az ideáltulajdonságot bizonyítja. Ezért (1) valóban igaz.

(2) bizonyításához tekintsünk egy $\frac{a}{b} \in \mathcal{S}$ elemet. Két eset lehetséges. Ha b valódi kvázi osztója a-nak, akkor **T(1,4)** alapján $\frac{a}{b} \in \mathcal{R}$. Ha nem, akkor $b \sim a$, és ezért a is kvázi osztója b-nek, tehát $\frac{b}{a} \in \mathcal{S}$. Mivel ezek szorzata 1 (az egységelem), ezért mindketten egységek. Tehát $\mathcal{S}$-nek az $\mathcal{R}$-en kívüli elemei pontosan az $\mathcal{S}$-beli

egységek. Tekintettel arra, hogy egy egységet tartalmazó ideál csak az egész gyűrű lehet, ezért valóban $\mathcal{R}$ a legnagyobb ideál.

Mivel egy $\mathcal{S}$-beli felbonthatatlan elem nem egység, ezért $\mathcal{S}$ minden felbonthatalan eleme $\mathcal{R}$-ben van. Ezek természetesen $\mathcal{R}$-ben is felbonthatatlanok maradnak. Fordítva, ha $a \in \mathcal{R}$ felbonthatalan és $\mathcal{S}$-ben $a = bc$, akkor nem lehet mindkét tényező $\mathcal{R}$-beli, így valamelyikük egység, azaz a az $\mathcal{S}$-ben is felbonthatatlan. Ezzel (3) is bizonyítást nyert.

(4) bizonyításához tekintsük az $\mathcal{R}$-beli a elemnek az $\mathcal{R}$-beli $a = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$ felbontását. (3) miatt a tényezők $\mathcal{S}$-ben is felbonthatalanok, tehát $\mathcal{S}$-ben minden valódi elem felbonthatatlanok szorzata. Legyen most $a = q_1 \cdot \ldots \cdot q_k$ az a-nak felbontása felbonthatatlanokra. (3) miatt ez felbontás $\mathcal{R}$-ben is, így a két felbontás ekvivalens. Feltehető, hogy az indexek közötti egyértelmű megfeleltetés éppen az $i \to i$. Eszerint $p_i \sim q_i$, ezért $\mathcal{S}$ definíciója szerint $\varepsilon_i = \frac{q_i}{p_i}, \eta_i = \frac{p_i}{q_i} \in \mathcal{S}$. Mivel ezek szorzata 1, mindketten egységek, vagyis $q_i = \varepsilon_i p_i$, tehát ezek asszociáltak.

A megfordítás szinte triviális. Ha az $\mathcal{S}$ lokális gyűrűben érvényes az egyértelmű faktorizáció, akkor $\mathcal{S}$-nek a legnagyobb, $\mathcal{R}$ ideáljában is érvényes; de $\mathcal{R}$-ben nincs egységelem. ■

1. Megjegyzés: Még mindig nyitva van egy kérdés. Sok integritási tartományról jól tudott, hogy érvényes benne az egyértelmű faktorizáció: az egész számok, a test feletti egy- vagy többhatározatlanú polinomok stb. Ezeknek egyike sem lokális gyűrű.

Mint említettük minden $\mathcal{I}$ (egységelemes) integritási tartomány lokalizálható bármely $\mathcal{P}$ prímideálja szerint. Ha $\mathcal{I}$-ben érvényes az egyértelmű faktorizáció, akkor bármely lokalizáltjában is érvényes lesz. Az eljárás folyamán nem történik ugyanis más, mint az, hogy a $\mathcal{P}$-n kívüli felbonthatalan elemek (és így ezek szorzatai is) egységekké válnak. Ezáltal bármely $\mathcal{I}$ integritási tartományból, amelyben érvényes az egyértelmű faktorizáció, készíthetünk olyan lokális gyűrűt, amelyben ugyancsak érvényes. Természetesen, ha lokális gyűrűből indulunk ki, akkor a legnagyobb ideál szerinti lokalizálás önmagát adja, azaz a fenti módon bármely olyan lokális gyűrű előáll, amiben az egyértelmű faktorizáció teljesül.

Ha a kiinduló $\mathcal{I}$ integritási tartományban minden ideál főideál (például az egész számok, vagy a test feletti egyhatározatlanú polinomok gyűrűje), akkor valódi prímideálok nem tartalmazhatják egymást. Ekkor a lokalizálás után egyetlen felbonthatatlan elem marad. Például a páratlan nevezőjű törtek esetében csak a 2-vel ekvivalens számok. Ha azonban nem ilyen integritási tartományból indulunk ki, például a racionális számok feletti x, y határozatlanok polinomjaiból, akkor más lehetőségek is vannak. Tekintsük azokat a hányadosokat, amelyek nevezőjében — egyszerűsítés után — olyan polinom szerepel, amelynek a konstans tagja nem 0. Itt tehát aszerint a $\mathcal{P}$ prímideál szerint lokalizáltunk, amely a 0 konstans tagú polinomokból áll[11]. A $\mathcal{P}$ elemei között nagyon sok nem ekvivalens felbonthatatlan van,

[11] Ezek a $(0,0)$ helyen — lokálisan — eltűnő polinomok.

például az összes $x + r \cdot y$ alakú, ahol r tetszőleges racionális szám. Valóban, az $(x+r\cdot y)\cdot(x+r\cdot y) \in \mathcal{P}\cdot(x+r\cdot y)$ soha nem írható $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\cdot(x+s\cdot y) \in \mathcal{P}\cdot(x+s\cdot y)$ alakba $f(x,y)$, $g(x,y)$ polinomokkal, ha r és s különböző racionális számok és $g(x,y)$ konstans tagja nem 0. ∎

2. Megjegyzés: Felmerül a kérdés, hogy az $\mathcal{R}a$ alakú ideálok helyett nem lenne-e célszerűbb a főideálokat tekinteni. Megmutatjuk, hogy nem.

Legyen $\mathbf{Q}$ a racionális számtest, és tekintsük az efölötti polinomok $\mathbf{Q}[x]$ gyűrűjét. Legyen $\mathcal{P} = (x)$, az x generálta főideál, amely prímideál. Legyen végül $\mathcal{S}$ a polinomgyűrűnek $\mathcal{P}$ szerinti lokalizáltja. Ekkor $\mathcal{R}$ olyan polinomhányadosokból áll, amelyeknek — egyszerűsített alakban — a számlálója x-nek többszöröse, míg nevezőjében a konstans tag nem 0. Az 1. Megjegyzésből következik, hogy ebben a gyűrűben érvényes az egyértelmű faktorizáció, annak ellenére, hogy nincs benne egységelem. Ez azt is jelenti, hogy az $\mathcal{R}a$ alakú ideálokra érvényes a maximum feltétel.

Tekintettel arra, hogy azok a polinomok, amelyeknek a konstans tagja nem 0, egységek, így az ilyenekkel való szorzás (vagy osztás) ekvivalens elemeket produkál, ezért szorítkozhatunk polinomokra. Nézzük a $c\cdot x$ alakú elem generálta $(c\cdot x)$ főideál polinomjait. Könnyen látható, hogy ez az $n\cdot(c\cdot x)+r\cdot(c\cdot x)$ alakú elemekből áll, ahol n egész szám és $r \in \mathcal{R}$. Ennek megfelelően $(c_1\cdot x) \subseteq (c_2\cdot x)$ pontosan akkor teljesül, ha van olyan n egész szám, amelyre $n\cdot c_2 = c_1$. Ezért az egyenlőség csak akkor lehetséges, ha vagy $c_1 = c_2$, vagy $c_1 = -c_2$. Ebből azonnal kapjuk, hogy az

$$(x) \subset \left(\frac{x}{2}\right) \subset \left(\frac{x}{2^2}\right) \subset \cdots \subset \left(\frac{x}{2^n}\right) \subset \cdots$$

főideálok szigorúan növő sorozata végtelen. Ennek megfelelően a főideálokra nem teljesül a maximum feltétel. ∎

3. Megjegyzés: Ezek után esetleg azt lehetne hinni, hogy a főideálokra vonatkozó maximum feltétel erősebb, mint az $\mathcal{R}a$ alakú ideálokra. Ha tehát a maximum feltételt a főideálokra kötjük ki, akkor csupán egy gyengébb tételt kapunk. Megmutatjuk azonban, hogy ez sem igaz.

Induljunk ki a kételemű $\mathbf{Q}_2$ testből[12] és tekintsük az efölötti olyan „törtkitevős" polinomokat[13], amelyekben a nem-konstans tagok kitevője legalább 1. Ezek olyan

$$f(x) = x^{r_1} + x^{r_2} + \cdots + x^{r_n}$$

alakú formális kifejezések, amelyekben $0 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ racionális számok és közülük az első 0-tól különböző legalább 1. Ha véges sok ilyen kifejezést tekintünk, akkor ezek mindegyike egy alkalmas x^r-nek a polinomja lesz, ahol $r = \frac{1}{n}$ alakú.

[12] Ez úgy tekinthető, mint az egész számok maradékosztályai modulo 2.

[13] Tulajdonképpen más test is megfelelne, de ebben az esetben egyszerűbb a számolás.

Ezért a műveleteket itt is a szokásos polinomokhoz hasonlóan lehet végezni. Ezek a kifejezések a fenti műveletekre nézve integritási tartományt alkotnak, amelyet $\mathbf{Q}_2\left[x^{(rac)}\right]$ fog jelölni. A fenti polinom fokán a $d(f) = r_n$ számot értjük. Szükségünk van a fenti polinom „alsó fokára" is, ami nem más, mint a $c(f) = r_1$ szám.

A $\mathbf{Q}_2\left[x^{(rac)}\right]$ pozitív (tehát ≥ 1) alsó fokú elemei egy $\mathcal{P}$ prímideált alkotnak. Legyen $\mathcal{S}$ a $\mathbf{Q}_2\left[x^{(rac)}\right]$ integritási tartománynak a $\mathcal{P}$ szerinti lokalizáltja. Ezek olyan hányadosok, amelyeknek a nevezője (egyszerűsítés után) 1 konstans tagú polinom. Az $\mathcal{S}$ minden eleme felírható $\frac{u}{v}$ alakban, ahol $u, v \in \mathbf{Q}_2\left[x^{(rac)}\right]$, és v konstans tagja 1. Ezekre is átörökíthető az alsó fok: $c\left(\frac{u}{v}\right) = c(u)$. Tekintsük $\mathcal{S}$-nek az egységektől különböző elemeit, vagyis azokat, amelyeknek az alsó foka legalább 1. Könnyen látható, hogy ezek egy $\mathcal{R}$ gyűrűt alkotnak[14].

Nézzük most meg az $\mathcal{R}$ főideáljait. Mivel az $\mathcal{S}$-beli összeadásra $f + f = 0$ teljesül, ezért az $f \in \mathcal{R}$ elemmel generált (f) főideál az $\mathcal{R}f$ elemeiből és azokból az $f + h$ alakú elemekből áll, amelyekre $h \in \mathcal{R}f$. Ezek mindegyike $\frac{u}{v} \cdot f$ alakú, ahol $u, v \in \mathbf{Q}_2\left[x^{(rac)}\right]$ és $c(v) = 0$. Fordítva, legyen g ilyen alakú. Ha $c(u) \neq 0$, akkor $c(u) \geq 1$ és ezért $\frac{u}{v} \in \mathcal{R}$, tehát $g \in \mathcal{R}f$. Ha $c(u) = 0$, akkor $c(v) = 0$ miatt $w = v - u$ konstans tagja 0, és így $\frac{w}{v} \in \mathcal{R}$. Ezért $g = f + \frac{w}{v} \cdot f \in (f)$. Ha mármost $g \notin \mathcal{R}f$, akkor $c(u) = 0$. Ekkor $f = \frac{v}{u} \cdot g$ (a $\mathbf{Q}_2\left[x^{(rac)}\right]$ hányadostestében); s mivel $c(u) = c(v) = 0$, ezért $f \in (g)$. Ezek szerint ha $(g) \subseteq (f)$, akkor vagy $(g) = (f)$, vagy $g \in \mathcal{R}f$. Ez viszont csak úgy lehet, hogy $c(g) \geq c(f) + 1$. Ha mármost $(f_0) \subset (f_1) \subset \cdots \subset (f_n)$, akkor $c(f_1) \leq c(f_0) - 1, \ldots, c(f_n) \leq c(f_0) - n$. Tekintettel arra, hogy az alsó fok nem negatív szám, ezért a fenti sorozat csak véges lehet.

Nézzük most az $\mathcal{R}f$ alakú ideálok növő láncát. Bebizonyítjuk, hogy ez végtelen is lehet. Tekintettel arra, hogy csak egy példát kell mutatni, ezért szorítkozhatunk az $f = x^r$ esetre. Mint láttuk, $\mathcal{R}x^r$ azokból az $\frac{u}{v} \cdot x^r$ alakú elemekből áll, amelyekre $c(u) \geq 1$ és $c(v) = 0$. Legyen $s > r$, azaz $t = s - r > 0$. Ekkor $\mathcal{R}x^s$ tetszőleges eleme

$$\frac{u_1}{v_1} \cdot x^s = \frac{u_1}{v_1} \cdot x^{t+r} = \frac{u_1 \cdot x^t}{v_1} \cdot x^r$$

alakba írható. Mivel $c(u_1) \geq 1$, ezért $c(u_1 \cdot x^t) = c(u_1) + t \geq 1$ is igaz. Eszerint $\mathcal{R}x^s \subseteq \mathcal{R}x^r$ teljesül. Egyenlőség viszont nem állhat fent, hiszen $x \cdot x^r \in \mathcal{R}x^r$, de $x \cdot x^r \notin \mathcal{R}x^s$, hiszen ez utóbbi elemeinek az alsó foka legalább $s + 1$, míg x^{r+1} alsó foka $r + 1 < s + 1$. Így $s > r$ esetén $\mathcal{R}x^s \subset \mathcal{R}x^r$.

Tekintsük most az $r_i = 1 + \frac{1}{i}$ szigorúan monoton csökkenő sorozatot, ahol i pozitív egész. Ezek mindegyike nagyobb, mint 1, ezért minden r_i esetén $x^{r_i} \in \mathcal{R}$. Így

$$\mathcal{R} \cdot x^{r_1} \subset \mathcal{R} \cdot x^{r_2} \subset \ldots \subset \mathcal{R} \cdot x^{r_n} \subset \ldots$$

egy szigorúan növő végtelen sorozat. ■

[14] Ez a gyűrű $\mathcal{S}$-nek prímideálja, a legnagyobb ideál. A konstrukció ugyanaz, mint a tételben, de itt nem érvényes az egyértelmű faktorizáció.

3. Faktorizáció egyértelműség nélkül

A továbbiakban csak egységelemes $\mathcal{R}$ integritási tartományokkal foglalkozunk. Ezek esetében, mint láttuk, az egyértelmű faktorizáció az alábbi két feltétel együttes teljesülésével ekvivalens:

(1) *A főideálok halmazában érvényes a maximum feltétel.*

(2) *Minden felbonthatatlan elem rendelkezik a prímtulajdonsággal.*

Az (1) feltételből azonnal következik a faktorizáció. Valóban, ha $a \in \mathcal{R}^*$ nem egység és nincs felbontása, akkor $a = bc$, ahol $(a) \subset (b)$ és $(a) \subset (c)$; továbbá e két elem valamelyikének szintén nincs felbontása (ellenkező esetben a-nak is volna), ami ellentmond a maximum feltételnek. A szokásos bizonyítással könnyen belátható, hogy az (1) feltétel jelenlétében (2) ekvivalens a faktorizáció egyértelműségével.

Annak a szokásos bizonyítása, hogy az egyértelmű faktorizációból következik (1), azt használja fel, hogy az egyértelmű faktorizáció esetében „osztónak kevesebb felbonthatatlan tényezője van". Ez azt mutatja, hogy a maximum feltétel esetleg határozottan erősebb, mint a faktorizáció létezése. Az alábbi eredmény azt adja meg, hogy a maximum feltétel pontosan mit mond a faktorizációról:

Állítás. Egy $\mathcal{R}$ egységelemes integritási tartományban az alábbi két feltétel ekvivalens:

(1) Főideálokra teljesül a maximum feltétel.

(2) Az $\mathcal{R}^*$ bármely nem-egység elemének bármely felbontása véges sok lépésben véget ér.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a főideálokra teljesül a maximum feltétel és tekintsünk egy olyan a_1 elemet, amelyre (2) nem áll fenn. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $a_1 = bc$ felbontás, hogy a két tényező valamelyikére, jelölje ezt a_2, szintén nem teljesül (2). A felbontás azt jelenti, hogy (a) valódi része mind a (b), mind a (c) ideálnak, így $(a_1) \subset (a_2) \subset \cdots \subset (a_n) \subset \cdots$ főideáloknak egy végtelen, szigorúan növő lánca, ellentétben feltételünkkel.

A megfordításhoz tekintsük főideáloknak egy $(0) \subset (a_1) \subset (a_2) \subset \cdots \subset (a_n) \subset \cdots \subset (1)$ szigorúan növő láncát. A tartalmazás egy $a_i = a_{i+1}b_i$ felbontást ad. Ha a fenti lánc végtelen volna, akkor a_1-nek egy olyan felbontásához jutnánk, amely véges sok lépésben nem érne véget. ∎

Ez a bizonyítás természetesen nem szolgáltatja azt, hogy a (2) feltétel különbözik attól, hogy létezik felbontás; de még azt sem, hogy a (2) feltétel kevesebbet mond, mint azt, hogy minden felbontás ugyanannyi tényezőből áll.

Valójában sok természetes feltétel szerepel a faktorizáció léte és egyértelműsége között.

3. Tétel. *Tekintsük az $\mathcal{R}$ egységelemes integritási tartomány nem-0, nem-egység elemeire vonatkozó alábbi állításokat:*

(1) *Minden elemnek van faktorizációja.*

(2) *Minden elemnek van faktorizációja és bármely faktorizáció véges sok lépésben véget ér.*

(3) *Minden elemnek van faktorizációja és minden a elemhez létezik egy olyan $n(a)$ természetes szám, hogy a bármely faktorizációjában legfeljebb $n(a)$ tényező szerepel.*

(4) *Asszociáltaktól eltekintve minden elemnek véges sok osztója van.*

(5) *Minden elem bármely faktorizációjában megegyezik a tényezők száma.*

(6) *A faktorizáció egyértelmű.*

Ekkor az (i) feltétel teljesüléséből nem következik az $(i+1)$ feltétel teljesülése; míg $i \neq 4$ esetén az $(i+1)$ feltétel teljesüléséből következik az (i) feltételé; továbbá az (5) feltétel teljesüléséből következik a (3) feltétel teljesülése és a (6) feltétel teljesüléséből következik a (4) feltétel teljesülése.

A következőkben ezt a tételt fogjuk bizonyítani.

Azonnal látható, hogy:

$$(6) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} (5) \\ (4) \end{matrix} \right\} \quad \Rightarrow \quad (3) \quad \Rightarrow \quad (2) \quad \Rightarrow \quad (1),$$

ahol $(i) \Rightarrow (j)$ azt jelenti, hogy az (i) tulajdonságból következik a (j) tulajdonság.

Az igazi nehézség olyan példákat adni, amelyek bizonyítják, hogy ezek a tulajdonságok valóban különböznek, tehát „szigorúan növő sorrendben" vannak:

$$(1) \quad \not\Rightarrow \quad (2) \quad \not\Rightarrow \quad (3) \quad \not\Rightarrow \quad (4) \quad \not\Rightarrow \quad (5) \quad \not\Rightarrow \quad (6),$$

ahol $(i) \not\Rightarrow (j)$ azt jelenti, hogy az (i) feltételből nem következik a (j) feltétel.

Ebből következik már, hogy a felsorolt feltételek mindegyike határozottan erősebb, mint az előző; kivéve egyetlen esetet: nem biztos ugyanis, hogy az (5) feltételből következik a (4) feltétel. Az viszont látható, hogy ezek a feltételek is különbözőek.

1. Példa. $(5) \quad \not\Rightarrow \quad (6)$.

Bizonyítás. Ismeretes, hogy például a $\mathbf{Z}\left[\sqrt{-5}\right]$ számgyűrűben bármely elemnek bármely faktorizációjában ugyanannyi a felbonthatatlan tényezők száma, de a faktorizáció nem egyértelmű. (Ezeknek a bizonyítása nem túl egyszerű. Tekintettel arra, hogy ezek a bizonyítások minden algebrai számelmélettel foglalkozó könyvben megvannak, nem tárgyaljuk itt a bizonyítást. Megjegyezzük azonban, hogy közvetlenül ezekhez az eredményekhez a fenti jellegű könyvekben lévő igen általános eredmények nem szükségesek.) ■

2. Példa. (4) $\not\Rightarrow$ (5).

Bizonyítás. Tekintsük például a racionális együtthatós polinomokat (valójában bármely test feletti polinomok megfelelnek). Álljon $\mathcal{R}$ az $a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ alakú polinomokból („nincs x-es tag"). Azonnal látható, hogy ezek a polinomok a polinomösszeadásra és polinomszorzásra gyűrűt alkotnak. Ebben a gyűrűben asszociáltaktól eltekintve minden polinomnak legfeljebb annyi osztója lehet, mint az összes polinomok között — tehát véges sok. Így (4) teljesül. Ezzel szemben az x^6 polinomnak mind az $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$ mind az $x^3 \cdot x^3$ felbontásában csak ($\mathcal{R}$-ben!) felbonthatalan tényező szerepel, ezért (5) nem igaz. ■

Sejtés. (5) $\not\Rightarrow$ (4)[15]. ■

A konstrukciók lényege: A további példáknál a 3. megjegyzésben szereplő $\mathbf{Q}_2\left[x^{(rac)}\right]$ gyűrű részgyűrűit fogjuk tekinteni. Mint említettük $\mathbf{Q}_2$ azt biztosítja, hogy az együtthatókkal „nem sok gondunk akad". Ennek a gyűrűnek nagy előnye, hogy lokálisan úgy viselkedik, mint egy polinomgyűrű. Ha ugyanis véges sok elemet nézünk, akkor ezekben összesen csak véges sok tag lép fel. Ezek kitevőjében véges sok tört állhat, s ezek nevezőjének van egy n legkisebb közös többese. Ekkor viszont a szereplő elemek mindegyike igazi polinomja lesz az $y = x^{\frac{1}{n}}$ elemnek. Ebből az is következik, hogy bármely véges sok elemnek létezik „legnagyobb" közös osztója (azaz olyan közös osztó, amely minden közös osztónak többszöröse). Másik előnye viszont az a „hátránya", hogy a konstans tag nélküli elemei soha nem lehetnek felbonthatatlanok (x^r mindig osztható x^s-sel, ha $s < r$).

A szereplő „polinomok" összeszorozhatóságához az szükséges, hogy a kitevők halmaza az összeadásra nézve zárt legyen. Legyen tehát $\mathcal{M}$ a nem-negatív racionális számoknak részfélcsoportja (azaz $r, s \in \mathcal{M}$ esetén $r + s \in \mathcal{M}$ is teljesüljön). Az $\mathcal{M}$-hez tartozó $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$ gyűrű álljon az

$$f(x) = x^{r_1} + x^{r_2} + \ldots + x^{r_n}; \qquad 0 \le r_1 < r_2 < \ldots < r_n$$

alakú elemekből, ahol $r_i \in \mathcal{M}$, minden szereplő i indexre. Mint már szerepelt, az $f(x)$ alsó fokán a $c(f) = r_1$ számot értjük. Szükségünk lesz a *főtag* fogalmára, ami a fenti $f(x)$ esetében x^{r_1}. Azokat az x^r tagokat, amelyek $f(x)$-ben fellépnek, az $f(x)$ *komponens*einek fogjuk nevezni.

Avégett, hogy a még megmaradt felbonthatalan elemektől megszabaduljunk, tekintsük a pozitív alsó fokú elemek $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ halmazát. Ez a halmaz nyilván prímideál. Legyen $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ az $\mathcal{S}_{\mathcal{M}}$-nek a $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ szerinti lokalizáltja. (Ezáltal az 1 konstans tagú polinomok egységekké váltak — más lényegében nem is történt.)

A lokalizálás után a fenti $f(x)$ polinom $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ alakúvá vált, ahol $v(x)$ egység. A főtag egyértelműsége következtében az $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ gyűrűbeli elemek minden faktorizációjának kölcsönösen és egyértelműen megfeleltethető egy $\mathcal{M}$-beli összegfelbontás.

---

[15] Ezt a sejtést csak azzal tudom indokolni, hogy nem tudtam az ellenkezőjét bizonyítani.

3. Példa. (3) $\not\Rightarrow$ (4).

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{M} = \{0\} \cup \{r \mid r \geq 1\}$. Ha $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ nem egység, akkor $c(f) \geq 1$. Ha f-nek felbontása $f = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$, ahol egyikük sem egység, akkor $c(p_i) \geq 1$ és $c(f) = \sum_i c(p_i)$ miatt $r \leq c(f)$, azaz (3) teljesül. Ezzel szemben x^3 osztható x^r-rel bármely $1 < r < 2$ esetén. Mivel ezek nem asszociáltak, ezért x^3-nek végtelen sok osztója van, következésképpen ebben a gyűrűben (4) nem áll fenn. ■

A következő példához tekintsük azt az $\mathcal{N}$ halmazt, amely azokból a törtekből áll, amelyek előállnak $\frac{1}{p}$ alakú törtek összegeként[16], ahol p tetszőleges prímszám. E halmaz, definíciója szerint, félcsoport. Erről a félcsoportról kell néhány dolgot belátnunk.

T(2,1). *$\mathcal{N}$ minden eleme egyértelműen felírható*

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{p_1} + \cdots + \frac{a_n}{p_n}$$

alakba, ahol $p_1, \ldots, p_n$ különböző prímek, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ olyan egészek, amelyekre $a_0 \geq 0$ és $0 < a_i < p_i$ teljesül minden szóbajövő i index esetén. a_0 neve az α egész része[17].

Bizonyítás. Definíció szerint $\mathcal{N}$ minden eleme olyan törtek összege, amelyeknek a nevezője prímszám. Ezekből leválasztva az egész részeket, és ezeket összeadva pontosan a kívánt felbontáshoz jutunk.

Az egyértelműséghez tekintsünk egy $\alpha = b_0 + \frac{b_1}{p_1} + \cdots + \frac{b_n}{p_n}$ felbontást is. Mindkét felbontásban megengedünk véges sok 0 együtthatót is, így feltehető, hogy mindkét felbontásban ugyanazok a nevezők szerepelnek. Ez azt jelenti, hogy $a_i = 0$ és $b_i = 0$ is megengedett. Az

$$a_0 + \frac{a_1}{p_1} + \cdots + \frac{a_n}{p_n} = b_0 + \frac{b_1}{p_1} + \cdots + \frac{b_n}{p_n}$$

egyenlőséget a nevezők szorzatával megszorozva azt kapjuk, hogy $i > 0$ esetén $a_i \equiv b_i (p_i)$ Tekintettel arra, hogy $-p_i < a_i - b_i < p_i$, ezért ebből a kongruenciából $a_i = b_i$ következik. Ekkor viszont $a_0 = b_0$ is adódik már. ■

T(2,2). *Tekintsük $\mathcal{N}$-nek az*

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{p_1} + \cdots + \frac{a_n}{p_n}, \quad \beta = b_0 + \frac{b_1}{p_1} + \cdots + \frac{b_n}{p_n}, \quad \gamma = c_0 + \frac{c_1}{p_1} + \cdots + \frac{c_n}{p_n}$$

[16] Ezeknek a törteknek a nevezője természetesen négyzetmentes szám. Fordítva azonban nem igaz, mert nem végezhetünk kivonást: például $\frac{1}{6}$ sem áll így elő.

[17] Ez nem a szokásos egész rész, mert itt például $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ egész része 0, míg a „valóságban" az $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$ egész része 1.

elemeit, amelyekre $\alpha = \beta + \gamma$, és az a_i, b_i, c_i számok között 0 is megegedett. Ekkor $a_0 \geq b_0 + c_0$. Ha $a_0 = b_0 + c_0$, akkor pozitív i index mellett $a_i = b_i + c_i$, továbbá minden i-re $b_i, c_i \leq a_i$; s ha $\gamma \neq 0$, akkor van olyan i index, amelyre $b_i < a_i$; továbbá $a_n = 0$ esetén $b_n = c_n = 0$.

Bizonyítás. Végezzük el a $\beta + \gamma$ összeadást. Legyen $a_i' = b_i + c_i$. Ha pozitív i-re $a_i' \geq p_i$, akkor csak $a_i' = p_i + a_i''$ lehet, ahol $0 \leq a_i'' < p_i$. Legyen $a_i'' = a_i'$, ha $a_i' < p_i$. **T(2,1)** szerint pozitív i-re $a_i'' = a_i$; míg a_0 úgy kapható, hogy a $b_0 + c_0$ összeghez annyi darab 1-et adunk hozzá, ahányszor $a_i' \geq p_i$.

Tehát $a_0 \geq b_0 + c_0$; és egyenlőség esetén $a_i = b_i + c_i$ is igaz. A további állítások ebből azonnal adódnak. ■

T(2,3). *Ha az $\mathcal{N}$ egy α elemét összegre bontjuk fel, akkor az eljárás véges sok lépésben befejeződik.*

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítunk. Nevezzük rosszaknak az $\mathcal{N}$ azon α elemeit, amelynek van olyan felbontása, amelyik véges sok lépésben nem fejeződik be. Ha α rossz, akkor van olyan $\alpha = \beta + \gamma$ felbontás, amelyben valamelyik tag, például β, rossz. Ha van $\mathcal{N}$-ben rossz elem, akkor ezek között van olyan is, amelyiknek az egész része minimális. Legyen α ilyen. Ezért, és **T(2,2)** miatt a fenti felbontásnál a β-ban ugyanazok a nevezők szerepelhetnek csak, mint α-ban, és a megfelelő számlálókra $b_i \leq a_i$; továbbá valahol nem állhat egyenlőség. A fellépő rossz elemek között kell lenni olyannak, amelyben a számlálókat már nem lehet csökkenteni, ellentétben a felbonthatósággal. ■

T(2,4). *Van olyan elem $\mathcal{N}$-ben, hogy bármely n természetes számhoz ennek az elemnek van n-nél hosszabb felbontása.*

Bizonyítás. Tekintsük az $1 \in \mathcal{N}$ elemet. Tetszőleges n-hez válasszunk olyan p prímszámot, amelyre $p > n$. Ekkor az

$$1 = \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}$$

felbontás rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. ■

4. Példa. (2) $\not\Rightarrow$ (3).

Bizonyítás. Legyen $f(x) \in \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ tetszőleges polinom. Mint láttuk, $f(x)$ tetszőleges szorzatfelbontása egyértelműen megadja főtagja kitevőjének egy összegfelbontását. **T(2,3)** alapján ez véges sok lépésben véget ér. $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$-ben tehát bármely elemnek bármely felbontása véges sok lépésben befejeződik, azaz (2) igaz. Ezzel szemben **T(2,4)** miatt az x polinomnak akármilyen hosszú felbontása lehet, azaz (3) nem igaz. ■

A legutolsó példa előtt ismét szükségünk van néhány eredményre.

T(3,1). *Legyen $P = \frac{2}{3}$ és legyen $\mathcal{K}$ az $1 = P^0, P, \dots, P^n, \dots$ elemekből képezett összegek halmaza.*

Ekkor $\mathcal{K}$ félcsoport, amelynek minden eleme egyértelműen felírható

$$(*) \qquad \alpha = a_0P^0 + a_1P^1 + \ldots + a_nP^n$$

alakba úgy, hogy $0 \le a_0$, $0 \le a_1, \dots, a_n \le 2$ és $a_n > 0$. A $w(\alpha) = n$ számot az α súlyának nevezzük, a 0 súlya is legyen 0. Ekkor $w(\beta + \gamma) \le \max\left(w(\beta), w(\gamma)\right)$.

Bizonyítás. A felírhatóság, a P-hatványok együtthatóira vonatkozó feltétel nélkül, a $\mathcal{K}$ definíciójából következik. Ezekután, n-től kezdve, csökkenő r kitevővel alkalmazzuk a $3P^r = 2P^{r-1}$ felírást mindaddig, amíg P^r együtthatója nagyobb, mint 2. Ekkor természetesen lesz egy olyan legnagyobb n, amire $a_n > 0$.

Az egyértelműséghez tegyük fel, hogy α-nak adott egy másik $(*)$ alakú felírása, ahol az együtthatókra ugyancsak teljesül a kirótt feltétel. A két felírás különbségét véve a $0 = c_0 + c_1P + \ldots + c_nP^n$ felíráshoz jutunk, ahol minden pozitív indexre $-3 < c_i < 3$ teljesül. Tegyük fel, hogy $k > 0$ mellett a $c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$ egyenlőséget már igazoltuk ($k = n$ is lehet). 3^k-nal szorozva 0-ra olyan összegelőállítást nyerünk, ahol az utolsó tagot kivéve a többi tag osztható 3-mal. Ezért ez a c_k2^k is, következésképpen c_k is osztható 3-mal, ami $-3 < c_k < 3$ miatt csak úgy lehet, ha $c_k = 0$. Ha viszont ez már minden pozitív indexre igaz, akkor a megmaradt $0 = c_0$ egyenlőség biztosítja a $(*)$ alatti felírás egyértelműségét.

$w(\alpha) = n$ azt jelenti, hogy α rövidíthetetlen törtalakjában a nevező 3^n. Mivel törtek összegének a nevezője osztója a nevezők legkisebb közös többesének, ezért a $w(\beta + \gamma) \le \max\left(w(\beta), w(\gamma)\right)$ összefüggés is igaz. ■

Ha valamely i indexre $a_i \ge 2$, akkor azt mondjuk, hogy α sűrű elem. (Természetesen $a_i > 2$ csak az $i = 0$ esetben lehetséges.) Amennyiben minden i indexre $0 \le a_i \le 1$ teljesül, akkor ritka elemről beszélünk.

T(3,2). *Ha a $(*)$ alatt felírt α elem sűrű, akkor minden $k \ge w(\alpha)$ természetes számhoz létezik olyan $\alpha = 2P^k + \beta_k$ felbontás, ahol vagy $\alpha = 2P^k$ és $\beta_k = 0$, vagy $w(\beta_k) \le k$.*

Ha a $(*)$ alatt felírt α ritka elemre $\alpha = \beta + \gamma$, ahol $\beta = b_0 + \cdots + b_rP^r, \gamma = c_0 + \cdots + c_sP^s \in \mathcal{K}$, akkor β és γ mindegyike ritka és minden i indexre a b_i és c_i számok egyike a_i-vel egyezik meg, másikuk pedig 0.

Egy α ritka elem összeg-előállításában legfeljebb $w(\alpha) + 1$ tag szerepel.

Van olyan $\alpha \in \mathcal{K}$ elem, amelynek alkalmas összegfelbontása minden határon túl folytatható.

Bizonyítás. Ha a $(*)$ alatt felírt α sűrű, akkor van olyan $i \le w(\alpha)$ index, amire $a_i = 2$. Legyen γ a $\mathcal{K}$-nak az az eleme, amelyikben minden együttható ugyanaz, mint α-ban, de az i-edik együttható 0. Ez azt jelenti, hogy $\alpha = 2P^i + \gamma$. Ekkor bármely $k \geq w(\alpha)$ mellett

$$2P^i+\gamma = (2P^k+[P^{i+1}+\cdots+P^{k-1}+P^k])+\gamma = 2P^k+([P^{i+1}+\cdots+P^{k-1}+P^k]+\gamma).$$

A $\beta_k = [P^{i+1} + \cdots + P^{k-1} + P^k] + \gamma$ elemre $\alpha = 2P^k + \beta_k$ teljesül. Mivel γ felírásában bármely tört nevezője 3^k osztója, ezért $w(\beta_k) \leq k$ valóban igaz.

Tekintsük most a második esetet. Az állításnál valamivel erősebbet bizonyítunk, nevezetesen azt, hogy

ha valamelyik i indexre $b_i = 0$ és $c_i = 0$ egyike sem igaz, akkor α sűrű.

Legyen k az r és s maximuma, és határozzuk meg a $\beta + \gamma$ összeget:

$$\beta + \gamma = (b_0 + c_0)P^0 + (b_1 + c_1)P^1 + \cdots + (b_k + c_k)P^k.$$

Ezekután végezzük el a $3P^{i+1} \to 2P^i$ átalakításokat az $i = k-1$ esettől kezdve csökkenő sorrendben minden indexre annyiszor, ahányszor lehet. Tegyük fel, hogy egy adott i index mellett ezt d_i-szer tudjuk megtenni. Természetesen az átalakítás után P^i együtthatója **T(3,1)** miatt a_i lesz. A $d_k = 0$ jelöléssel ekkor azt kapjuk, hogy

$$a_i + 3d_{i-1} = b_i + c_i + 2d_i, \qquad i = k, k-1, k-2, \ldots, 2, 1.$$

Ha itt $d_i > 0$ és $a_i < 2$, akkor $3d_{i-1} = b_i + c_i + 2d_i - a_i > b_i + c_i \geq 0$ is igaz. Ha tehát valamelyik d_i pozitív, akkor vagy a megfelelő $a_i = 2$ vagy d_{i-1} is pozitív. Tekintettel arra, hogy a_0 esetében „d_{-1}" nem létezik, ezért ha valamelyik d_i pozitív, akkor van olyan $j \leq i$, amelyre $a_j = 2$. Ez pedig azt jelenti, hogy α sűrű. Marad még az az eset, amikor minden egyes $d_i = 0$. Feltételünk szerint van olyan i index, amire $b_i, c_i > 0$. A fenti összefüggés alapján, a d_i-kre vonatkozó feltétel szerint $a_i = b_i + c_i \geq 1 + 1 = 2$, és így α sűrű.

Ha α ritka és $w(\alpha) = n$, akkor minden összeg-előállításban minden tagnak legalább egyik együtthatója nem-nulla, de ez minden tagban másik indexhez kell, hogy tartozzék. Ezért az összeg tagjainak a száma legfeljebb $1 + w(\alpha)$.

Az utolsó állítás bizonyítására tekintsük például a $2 \in \mathcal{K}$ elemet. Erre:

$$2 = P + 2P = P + P^2 + 2P^2 = P + P^2 + P^3 + 2P^3 = \cdots =$$

$$= P + P^2 + P^3 + \cdots + P^n + 2P^n = \cdots$$

teljesül, így ez a felbontás soha nem ér véget. ∎

T(3,3). *Legyenek $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{K}$ és legyen $r \geq w(\alpha_i)$ minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ indexre. Ekkor van olyan $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathcal{K}$, amelyre $w(\alpha) \geq r$, és $\alpha_1 = \alpha + \beta_1, \ldots, \alpha_n = \alpha + \beta_n$ teljesül, továbbá valamelyik i indexre β_i ritka.*

Bizonyítás. Ha az α_i-k egyike sem ritka, akkor alkalmazzuk a **T(3,2)**-ben szereplő első eljárást a $k = r$ esetre. Ekkor minden i-re $\beta_i < \alpha_i$ adódik. Tekintettel arra, hogy minden $\alpha_i > \frac{1}{3^r}$, ezért ugyanezt alkalmazva, mondjuk t lépés után olyan esethez jutunk, amikor ez már nem alkalmazható. Ez pedig akkor lehetséges, ha a kapott elemek között van ritka. Mivel közben a súly nem növekedhetett, ezért a kapott elemek mindegyikének legfeljebb r a súlya. A választott α nyilván $2tP^r$. ∎

5. Példa. (1) $\not\Rightarrow$ (2).

Bizonyítás. Tekintsük az $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ gyűrűnek egy tetszőleges

$$f(x) = x^{r_1} + x^{r_2} + \cdots + x^{r_n}, \quad 0 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_n, \quad r_i \in \mathcal{K}$$

elemét. Ha $f(x)$ felbontható, akkor mindegyik tagja előáll szorzatként, és így minden r_i-nek is létezik összeg-előállítása. Ekkor **T(3,3)** szerint van olyan, csak a kitevőktől függő r, hogy $r_i = r + s_i$ minden szóbajövő i-re, ahol valamelyik s_i ritka. Ekkor $f(x) = x^r g(x)$, ahol

$$g(x) = x^{s_1} + x^{s_2} + \cdots + x^{s_n}, \quad 0 \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n, \quad s_i \in \mathcal{K},$$

és valamelyik s_i ritka. Ennek következtében $g(x)$-et csak korlátos számú tényező szorzatára bonthatjuk. Nézzük most az x^r tényezőt. Mivel $r \in \mathcal{K}$, ezért r felírható P^i alakú számok összegeként. Bontsuk fel x^r-t ennek megfelelően az összes előforduló x^{P^i} szorzatára. Mint láttuk, P^i egyáltalán nem bontható tovább; így az eredeti $f(x)$ elemet felbontottuk véges sok felbonthatatlan elem szorzatára.

A **T(3,2)** bizonyításának befejező részében látottak alapján:

$$x^2 = x^P \cdot x^{2P^2} = x^P \cdot x^{P^2} \cdot x^{2P^2} = x^P \cdot x^{P^2} \cdot x^{P^3} \cdot \ldots \cdot x^{P^n} \cdot x^{2P^n} = \ldots,$$

ez a felbontás tehát sohasem fejeződik be. ∎

A szerző köszönetét fejezi ki a lektornak gondos, értékes és hozzáértő munkájáért.

Irodalom

[1] A. Geroldinger, Über nicht–eindeutige Zerlegungen in irreduzible Elemente, *Math. Z.*, **197** (1988), 505–529.

[2] A. Geroldinger, F. Halter–Koch, On the asymptotic behaviour of length of factorizations, *Journal of Pure an Applied Algebra,* **77** (1992), 239–252.

[3] F. Halter–Koch, On the asymptotic behaviour of the number of distinct factorizations into irreducibles, *Ark. Mat.*, **31** (1993), 297–305.

Ervin Fried: Walks around unique factorization

Two questions are investigated.

If the integral domain is not unital then the principal ideals are substituted by all multiples of the generating element. This enables us to define unique factorization in non–unital case. All integral domains of this kind can be produced in the following way: Take a unital integral domain with unique factorization. Localize it by a prime ideal. The elements of the image of this prime ideal form a non–unital integral domain with unique factorization.

Consider the following properties of a unital integral domain: 1) Every element has a factorization. 2) The factorization terminates in finitely many steps. 3) The factorizations of an element contain a bounded number of factors. 4) Every element has finitely many divisors, up to association. 5) The number of factors in the decompositions of an element is the same. 6) The factorization is unique. It is shown that every property implies the previous one, except that 5) yields only 3). Examples are given to show that none of these properties imply the next.

Fried Ervin

ELTE TTK Algebra és Számelmélet Tanszék
Budapest

e-mail: efried@cs.elte.hu

JELENTÉS AZ 1994. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

Az 1994. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyre, amelyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, valamint 1994-ben egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt, a Bolyai János Matematikai Társulat a következő bizottságot jelölte ki: Laczkovich Miklós (elnök), Drasny Gábor (titkár), Császár Ákos, Fejes Tóth Gábor, Freud Róbert, Fried Ervin, Halász Gábor, Kiss Emil, Komjáth Péter, Michaletzky György, Ruzsa Imre, T. Sós Vera.

Az 1994. november 4-e és 14-e között megrendezett versenyre a Bizottság 11 feladatot tűzött ki. A feladatokat sorrendben Kós Géza és Károlyi Gyula, Kiss Emil, Ruzsa Imre, Buczolich Zoltán, Laczkovich Miklós, Halász Gábor, Erdős Pál, Juhász István, Bognár Mátyás, Szűcs András, valamint Ruzsa Imre bocsátották a Bizottság rendelkezésére.

Az 5. feladat sajnálatos módon hibásan lett kitűzve, a feladat állítása csak egy kicsit erősebb feltétel mellett igaz.

A kitűzött feladatokra 15 versenyzőtől 81 megoldás érkezett, ezek 55%-a bizonyult helyesnek. November 28-i ülésén a Bizottság a következő döntést hozta:

I. díjban és 7000–7000 Ft pénzjutalomban részesül

Bíró András, az ELTE 1994-ben végzett hallgatója,

Lakos Gyula, az ELTE III. éves hallgatója,

II. díjat a Bizottság nem adott ki,

III. díjban és 4000–4000 Ft pénzjutalomban részesül

Harcos Gergely, az ELTE IV. éves hallgatója,

Csörnyei Mariann, az ELTE I. éves hallgatója,

Csirik A. János, a Cambridge-i Trinity College V. éves hallgatója,

dicséretben és 1500–1500 Ft pénzjutalomban részesül

Fleiner Tamás, az ELTE V. éves hallgatója,

Benkő Dávid, a JATE V. éves hallgatója,

Balogh József, a JATE V. éves hallgatója.

Indoklás:

Bíró András megoldást nyújtott be az 1., 2., 3., 4., 6., 7., 8., 9. és 11. feladatra. Valamennyi megoldása kifogástalan.

Lakos Gyula megoldást nyújtott be az 1., 2., 4., 5., 6., 7., 8., 9. és 11. feladatra. Helyes az 1., 2., 4., 6., 8., 9. és 11. feladatra adott megoldása. Az 5. feladatra adott megoldásában ugyan ő sem vette észre, hogy a feladat a kitűzött formájában nem igaz, azonban a versenyzők közül ő volt az egyetlen, aki megfogalmazta és helyesen bebizonyította a feladatot a szükséges erősebb feltétel fennállása esetén. Megoldásának ez a része igen egyszerű és elegáns. A 7. feladatnak csak a könnyebbik felét oldja meg. Kiemelkedő a 2., 8. és 9. feladatokra adott megoldása.

Harcos Gergely megoldást nyújtott be az 1., 2., 3., 6., 7., 8., 9. és 11. feladatra. Helyes az 1., 3., 6., 7. és 8., kiemelkedő a 6., hiányos a 9., apró részeredményt tartalmaz a 2., hibás a 11. feladatra adott megoldása.

Csörnyei Mariann megoldást nyújtott be az 1., 3., 4., 7., 8. és 11. feladatra. Helyes az 1., 3., 7., 8. és 11., részeredményt tartalmaz a 4. feladatra adott megoldása.

Csirik A. János megoldást nyújtott be az 1., 3., 4., 6., 8., 9. és 11. feladatra. Helyes az 1., 3., 9. és 11., apró hibától eltekintve helyes a 8., kisebb részeredményt tartalmaz a 4. feladatra adott megoldása. A 6. feladatban jó elképzelése van a megoldásról, de nem valósítja meg elgondolását.

Fleiner Tamás megoldást nyújtott be az 1., 3., 4., 6., 7., 8. és 9. feladatra. Helyes az 1., 3., 4., 7., hiányos a 8., hibás a 9. feladatra adott megoldása. A 6. feladatra adott megoldása nem tartalmaz értékelhető részeredményt.

Benkő Dávid megoldást nyújtott be az 1., 4., 5., 7., 8., 9. és 11. feladatra. Helyes a 7. és 11., kis hibától eltekintve helyes a 8. feladatra adott megoldása. A 9. feladatban egy igaz állítást hibásan bizonyít, egyébként megoldása helyes. Az 1. feladatban részeredményt, a 4. és 5. feladatban apró részeredményt ér el.

Balogh József megoldást nyújtott be az 1., 6., 7., 8., 9. és 11. feladatra. Helyes az 1., 7. és 11., részeredményt tartalmaz a 8., hibás a 9. feladatra adott megoldása. A 6. feladatra adott megoldása nem tartalmaz értékelhető részeredményt.

Az 1994. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Egy rendezett számhalmaz *átlagmentes,* ha $x < y < z$ esetén $y \neq \frac{x+z}{2}$. Lehet-e a valós számokat átlagmentesen rendezni?

2. Mely véges G csoportokhoz létezik egy s egész a következő tulajdonsággal: bárhogy vesszük is G egy véges direkt hatványának tetszőleges H részcsoportját, H minden részcsoportja előáll H legfeljebb s indexű részcsoportjainak metszeteként.

3. Legyen p páratlan prímszám, A legyen a mod p maradékosztályok egy nem üres részhalmaza, f pedig egy A-n értelmezett valós értékű függvény. Tegyük fel, hogy f nem konstans, és teljesül rá, hogy

$$f(x) \leq \frac{f(x+h)+f(x-h)}{2},$$

valahányszor $x, x+h, x-h \in A$. Bizonyítandó, hogy $|A| \leq \frac{p+1}{2}$.

4. Adott α irracionális szám esetén legyen $y_{1,\alpha} = \{\alpha\}$. Ha $y_{n-1,\alpha}$ adott, akkor legyen $y_{n,\alpha}$ a $\left(\{k\alpha\}\right)_{k=1}^{\infty}$ sorozat első olyan tagja, mely a $(0, y_{n-1,\alpha})$ intervallumba esik ($\{x\}$ az x szám törtrészét jelöli). Mutassuk meg, hogy létezik olyan $G \subset (0,1)$ nyílt halmaz, amelynek 0 torlódási pontja, és tetszőleges irracionális α esetén az $(y_{n,\alpha})$ sorozat végtelen sok tagja nem tartozik G-hez.

5. Legyen H a számegyenes egy G_δ típusú részhalmaza, melynek lezártja pozitív Lebesgue-mértékű. Bizonyítsuk be, hogy a

$$H+H+H+H = \{x+y+z+u \,:\, x,y,z,u \in H\}$$

halmaz tartalmaz szakaszt.

6. Mutassuk meg, hogy ha n tetszőleges természetes szám és $\sqrt{n} \leq K \leq \frac{n}{2}$, akkor létezik n különböző egész szám, k_j $(j = 1, \ldots, n)$ úgy, hogy

$$\left|\sum_{j=1}^{n} e^{ik_j t}\right| \geq K$$

teljesül a $(-\pi, \pi)$ intervallum egy legalább cn/K^2 Lebesgue-mértékű halmazán, ahol c alkalmas abszolút konstans.

7. Bizonyítsuk be, hogy léteznek $0 < \alpha < \beta < 1$ számok az alábbi tulajdonságokkal.

(i) Minden elég nagy n-re megadható $\mathbf{R}^3$-ban n pont úgy, hogy ezek mindegyike a kiválasztott pontok közül legalább n^α másik ponttól egyenlő távolságra van.

(ii) A fenti állítás n^α helyett n^β-val már nem igaz.

8. Bizonyítandó, hogy egy X Hausdorff-tér pontosan akkor megszámlálhatóan kompakt, ha minden $\mathcal{U}$ nyílt fedéséhez van olyan $A \subset X$ véges halmaz, melyre

$$\mathrm{St}(A, \mathcal{U}) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{U \in \mathcal{U} \,:\, U \cap A \neq \emptyset\} = X.$$

9. Legyen X egy $\mathbf{R}^n$-nel homeomorf sűrű halmaz az Y kompakt Hausdorff-térben. Bizonyítsuk be, hogy $n \geq 2$ esetén $Y \setminus X$ összefüggő, $n = 1$ esetén pedig legfeljebb két komponensből áll.

10. Legyen F^2 egy zárt, irányított 2-dimenziós sima felület, $f : F^2 \to F^2$ egy olyan sima homeomorfizmus, melynek rendje egy p páratlan prím (azaz a p-tagú $f \circ f \circ \ldots \circ f$ kompozíció az identitás). Ekkor az f-nek véges sok fixpontja van: $P_1, \ldots, P_s$. A P_i fixpontban vett érintősíkban választható egy olyan pozitív irányítású (azaz a felület irányításával kompatibilis) bázis, melyben az f differenciálja $2\pi k_i/p$ pozitív szögű forgatás, ahol k_i természetes szám, $0 < k_i < p$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^{s} k_i^{p-2} \equiv 0 \pmod p.$$

11. Legyenek ξ, ξ' azonos eloszlású, független valószínűségi változók. Legyen $\xi + \xi'$ eloszlásfüggvénye F, a $[-1, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásé pedig G. Bizonyítsuk be, hogy

$$\max |F(x) - G(x)| \geq 10^{-1994}.$$

Sajnos, a feladatok megoldása jelenleg nem áll a szerkesztőség rendelkezésére. Reményeink szerint egy későbbi számunkban tudjuk őket közölni.

TÁRSULATI ÉLET

1. Az 1995. évi nagyrendezvényekről

a) Csillag Pál találkozó (Somlyósziget, június 8–12.; kb. 25 fő)

A talalkozót Szirmai Ákos és Keleti Tamás szervezték. Az új hely megfelelőnek bizonyult, az egyetlen problémát a nehéz megközelíthetőség jelentette. Sajnos igen kevesen jöttek el. A most már évek óta állandó résztvevő debreceni „kemény mag"-on kívül szinte csak hallgatók és doktoranduszok jelentek meg. Úgy tűnik, hogy a már dolgozó matematikusoknak nincs igazán kedve/energiája/ideje a találkozóhoz, ezért megfontolandó, hogy a következő években a találkozó a vizsgaidőszak vége után legyen, ugyanis sokkal több diák jött volna el, ha nem vizsgaidőszak lett volna épp. A találkozónak kellemes családias hangulata volt. Sokan tartottak előadást, így végül a kevés résztvevő ellenére igen sűrű és színvonalas volt a találkozó szakmai része.

A következő előadások hangzottak el:

- Gács András: Projektív síkok blokkoló halmazai
- Csörnyei Marianna: $x^2 + dy^2$ alakú számok hányadosai
- Hegedűs Pál: Determinánsok, permanensek
- Montágh Balázs: Abel-csoportok automorfizmusai
- Abért Miklós: Schreier-tétel és szimmetrikus prezentációk
- Lukács András: Csúcstranzitív gráfok
- ifj. Katona Gyula: Szívós és még szívósabb gráfok
- Szirmai Ákos: Kombinatorikus játékok
- Keleti Tamás: Három fraktálgeometriai problémakör

A találkozóra elhívtuk az alapító OH „elemeket" is. (Ennek az szolgált apropóul, hogy egyikük számítása szerint épp 30 éve volt az első egyetem utáni „OHázium".)

Hat OH elem (Halász Gábor, Petruska György, Szász Domokos, Tusnády Gábor, Vértesi Péter, Virág Ildikó) jött le egy napra. Délelőtt előadásokat tartottak:

Halász Gábor véletlen multiplikatív függvényekről, Petruska György a deriváltakról és az ő viszontagságaikról, Szász Domokos pedig a Naprendszer stabilitásáról beszélt. A közös ebéd után az előkerült OH-napló alapján meséltek az Elemek a „régi szép időkről".

Végülis a találkozó egyfelől rosszul sikerült, mert kevesen jöttek el, másfelől viszont jól, mert az a kevés ember jól érezte magát és kellemes körülmények között megismerhettük egymás matematikáját. Úgy tűnik, hogy minden szempontból a diákok a legaktívabbak, így a továbbiakban lehet, hogy inkább rájuk kéne számítanunk.

(készítette: Keleti Tamás)

b) Hipergráfok és szimmetrikus struktúrák (Balatonlelle, június 18–23.; 62 fő)

A konferencián 28 külföldi és 34 magyar matematikus vett részt. A szervező bizottság az alábbi volt: Fazekas Gábor, Füredi Zoltán (elnök), Katona Gyula, Sali Attila, Simonyi Gábor és Szőnyi Tamás (titkár). A rendezvényen tizennégy, 45 perces meghívott előadás és számos 20 perces szekció előadás hangzott el. A meghívott előadók névsora a következő: R. Ahlswede, E. Bannai, A. Blokhuis, E. Boros, S. Dodunekov, D. Fon der Flaass, P. Frankl, J. Körner, K. Metsch, A. Orlitsky, J. Seidel, L. Teirlinck.

A konferencia fő témái gráfelmélet, extremális kombinatorika, véges geometriák és blokkrendszerek, valamint kódelmélet voltak. Az egyik fontos cél az volt, hogy ezen területek művelői kölcsönösen megismerjék egymás eredményeit. Egy másik fontos célkitűzés az volt, hogy minél több hallgató vehessen részt a konferencián. A meghívott előadások igen széles területet fogtak át, s ez a fenti célok szempontjából igen fontos volt. Örömteli, hogy a hallgatók (doktoranduszok és TMB-ösztöndíjasok) nagyon aktívan vettek részt a konferencia munkájában, közülük négyen sikeres előadást is tartottak.

Összefoglalva: családias hangulatú, tudományosan aktív és sikeres konferencia volt a balatonlellei „Hipergráfok és szimmetrikus struktúrák" konferencia.

(készítette: Szőnyi Tamás)

c) Rátz László vándorgyűlés (Békéscsaba, július 3–7 (8); 410 fő)

Az Oktatási Szakosztály 1995. július 4–7-ig Békéscsabán rendezte meg a XXXV. Vándorgyűlést közel 400 matematikatanár részvételével a Kőrösi Csoma Sándor Főiskolán.

A július 4-i plenáris ülést Révész Pál, a Társulat megbízott elnöke nyitotta meg. A Beke Manó Emlékdíjakat Surányi János, a Társulat tiszteletbeli elnöke adta át. A plenáris ülésen a résztvevők a közoktatás aktuális kérdéseiről Szücs Miklóstól (MKM), grafológiai alapismeretekről Szimethné Galaczi Judittól hallottak előadást. Nagy érdeklődés kísérte Erdős Pál Megoldatlan problémáim c. programon kívüli előadását, amelyet a Főiskola videofelvételen rögzített.

A vándorgyűlés július 5–7. között szekcióüléseken folytatta munkáját.

Az alsó- és felsőtagozatos szekciókban az előadások, szemináriumok vezetőinek helyes arányt sikerült kialakítaniok a továbbképzési cél és a napi gyakorlatban jól hasznosítható témák, feldolgozások között.

Nagy sikert aratott Uhrin Jánosné matematikai játékokat bemutató, érzelmekkel teli előadása, Wéber Anikó és Brenyó Mihály szemináriuma, Fehér Istvánné gyerekekkel tartott bemutató foglalkozása (szorobán), Csordás Mihály a Zrínyi versenyről szóló szemináriuma. Escher művészetét matematikus és számítógépes fejjel megközelítő előadása (Radnainé Szendrei Júlia és Zombory József) és szemináriumsorozata érdekesen szemléletformáló volt.

A középiskolai szekció előadásai és szemináriumai közül kiemelkedő volt Uhrin János „Játékosság a matematikaórán" című – gráfelméleti induló énekes-zenés bemutatásával végződő – előadása. A Felsőoktatási Ankéttal közösen rendezett előadások közül magas színvonalú volt Mekis Attila KÁOSZ, Szász Domokos Összeomlik-e a Naprendszer c. előadása. Az analízis elemeinek szakközépiskolában történő lehetséges oktatását, a szaktanári és a tankönyvírói dilemmákat egyaránt bemutató előadást hallottunk Honti Dénestől.

Az Informatikai Bizottság rendezvényei iránt kissé csappant az érdeklődés. Ennek oka talán az is lehetett, hogy számítógépet is használó előadás 30 volt a teljes rendezvényen, és ez megosztotta a hallgatóságot is. Igen jó szemináriumokat tartott a vándorgyűlésen először szereplő Scharnitzky Miklós.

A vándorgyűlés kiemelten kívánt foglalkozni a határon túli magyar anyanyelvű matematikaoktatással. Sajnos a plenáris ülésre nem érkezett meg Elek Ernő Kárpátaljáról. A két erdélyi előadó (Simon János és Szabó Tibor) jól mutatta be saját munkaterületét. Kiemelkedő volt Simon János előadásának a Nagyenyedi Kollégiumot bemutató művelődéstörténeti része. A szerda délutáni kerekasztalbeszélgetés a határontúli magyar anyanyelvű matematikaoktatásról igen hasznos volt, mert a szlovákiai, ukrajnai, romániai, kis-jugoszláviai magyar anyanyelvi matematikaoktatás jelenlévő képviselői jól meg tudták fogalmazni, hogy milyen segítséget várnak Társulatunktól. Példaértékű volt a komarnoi Oláh György vitát elkezdő korreferátuma mindazokról a tevékenységekről, amelyekhez Társulatunk segítséget nyújthat.

A Matematikai diákolimpiák története c. videobemutató sok érdeklődőt vonzott (80–100 fő), a videoanyag nemcsak tartalmában volt érdekes (szerkesztette Ács Katalin és Herczeg János), hanem a kiállítása, formai kivitelezése is jó színvonalú lehetett az MKM anyagi támogatásának köszönhetően.

A szekcióüléseket jól egészítették ki a szemléltető eszközöket is bemutató kiállítások és könyvárusítások (TYPOTEX, MOZAIK, CALIBRA, Nemzeti Tankönyvkiadó).

A vándorgyűléshez július 7–8-án MAT–KAPOCS konferencia csatlakozott.

(készítette: Békefi Zsuzsa)

d) Approximációelmélet konferencia (Budapest, augusztus 20–27.; 122 fő)

A konferenciát a BM Rendőrtiszti Főiskoláján rendeztük. Az előadások két párhuzamos szekcióban folytak, összesen 91 előadást tartottunk Tandori Károly 70. születésnapja tiszteletére. A meghívott előadók közül kiemelkedett A. Pinkus és D. Lubinsky.

Igen sok elismert „világsztár" volt itt: Névai P., A. Leviatan, J. Korevaar, Erdős Pál, S. Nikolskii, B. Kasin, Z. Ciesielski, R. Nessel, G. Mastroianni, H. Stahl, L. Golinskii, J. Musielak, M. F. Timan. A konferencia előadásaiból jó kötet megjelenése várható.

(Vértesi Péter jelentése alapján)

e) Intuitív geometria (Budapest, szeptember 3–7.; 70 fő)

Az immár negyedik Intuitív geometria konferencia előadásai az MTA MKI-ében voltak, a vendégek szálláshelyéül az Államigazgatási Főiskola Kollégiuma szolgált.

A konferenciát a korábbiaknál talán kisebb, de még így is jelentős érdeklődés kísérte. A külföldi vendégek száma 41 fő volt. Sikerült nemzetközi tekintélyű kutatókat megnyerni meghívott előadóknak: P. McMullen (London), V. Klee (Seattle), P. Goodey (Norman), J. Matousek (Prága), J. Wills (Siegen), A. Florian (Salzburg) és Laczkovich Miklós.

A konferencián megünnepeltük Fejes Tóth László 80. születésnapját, már, amennyire az ünnepelt közismert szerénysége ezt lehetővé tette.

Az Intézet adottságai miatt egyetlen szekcióban zajlottak az előadások, összesen 44, közöttük nagyon sok kiváló. Az előadók maguk jelentkeztek előadás tartására és szűrésre nem volt lehetőség. Ez persze a színvonal egyenlőtlen voltát eredményezte. A résztvevők kívánságára volt egy igen sikeres probléma szekció is.

Tervezünk egy kötetet is; több ígéretet kaptunk, így van remény színvonalas cikkegyüttes összehozására.

(készítette: Bárány Imre, Böröczky Károly)

2. Az 1995. évi társulati díjak odaítéléséről

a) Szele Tibor Emlékérem

Az 1995. évi Szele Tibor Emlékérmet az odaítélésére kiküldött bizottság határozata alapján *Szász Domokos,* a Magyar Tudományos Akadémia r. tagja kapta.

Szász Domokos 1941-ben született Budapesten. 1964-ben szerzett matematikusi oklevelet. Az ELTE TTK Valószínűségszámítási Tanszékén szerzett egyetemi doktori címet 1967-ben. Az 1969 és 1971 közötti időszakot a moszkvai Lomonoszov Egyetemen töltötte. Kandidátusi értekezését 1971-ben védte meg kitüntetéssel. 1971-től folyamatosan az MTA Matematikai Kutatóintézetében dolgozik, 1993-tól annak igazgatójaként. A matematikai tudomány doktora címet 1981-ben szerezte meg. A Magyar Tudományos Akadémia 1990-ben levelező, majd 1995-ben rendes tagjainak sorába választotta.

Moszkvából hazajőve néhány kollégával (név szerint Fritz Józseffel, Krámli Andrással és Major Péterrel) kutatócsoportot hoztak létre, elsősorban azzal a céllal, hogy a korszak egyik legpezsgőbb témájának, a matematikailag szigorú statisztikus fizikának és mezőelméletnek fejleményeit kövessék, technikáit elsajátítsák. Szász Domokos érdeme az, hogy e kis csoportból néhány éven belül a nevezett témakörnek világszerte egyik legtekintélyesebb műhelye lett. Az általa alapított és vezetett Statisztikus Fizika Szeminárium több, mint húsz éve nemzetközi szinten is jelentős fóruma e tudományterületnek. E szemináriumok a magas tudományos színvonal mellett igen fontos nevelői/oktatói funkciót is elláttak: tehetséges fiatalok (felsőéves hallgatók, frissen végzettek) mindig aktívan vehettek részt a „nagyok" szakmai megbeszéléseiben, előadhattak eredményeikről. Szász Domokos valóban iskolát teremtett a magyar matematikában. Az ő irányítása alatt írt kandidátusi dolgozatot Vetier András, Tóth Bálint és Simányi Nándor. Egyetemi doktori dolgozatot írtak az ő irányításával: Lukács Pál és Telcs András. Szakdolgozói voltak: Staar Gyula, Szenes András és Erdős László. Szász Domokos irányítása alatt a fiatal kutató olyan témát kapott, amely biztosan az aktuális érdeklődés homlokterében van. Tőle nemcsak technikai eszközöket, hanem szemléletet és a mély összefüggések megértését lehetett elsajátítani. Külföldi tanítványai közül kettőt említünk: Andreas Grevent (Heidelberg) és Peter Doyle (Dartmouth College).

Az ELTE Valószínűségszámítási Tanszékén töltött 60-as évek során aktív részese volt annak a folyamatnak, amely – Rényi Alfréd majd Prékopa András szellemi irányításával – a sztochasztikus folyamatok modern szemléletű oktatását honosította meg Magyarországon. Társszerzője annak a valószínűségszámítási feladatgyűjteménynek, amely ma is a legelterjedtebb a magyarországi matematikus diákok körében.

A matematikai fizika bizonyos ágainak egyetemi oktatása mindig szívügye volt: dinamikai rendszerek és ergodelmélet, illetve statisztikus fizika speciálelőadásai nemcsak a matematikus, hanem a matematikai orientációjú fizikus hallgatók körében is egyre népszerűbbek.

A Magyar Akkreditációs Bizottságban fáradhatatlanul dolgozik a színvonalas matematikus doktori képzés érdekében.

Szász Domokos tudományos kutatói tevékenységének magas színvonalát példásan dokumentálja az a mintegy 80 dolgozat, melynek nagy részét a legrangosabb folyóiratokban publikálta. Tudományos kutatói kvalitásai is szerves részét alkotják annak az inspiratív légkörnek, amely az általa vezetett műhelyt jellemzi. Szász Domokos mint tudományos kutató, oktató és iskolateremtő egyéniség egyaránt kiemelkedőt alkotott a magyar matematikában.

b) Grünwald Géza Emlékdíj

A Bolyai János Matematikai Társulat Grünwald Géza Emlékdíj Bizottsága úgy döntött, hogy az 1995. évi Grünwald Géza Emlékdíjat *Megyesi Gábornak* ítéli oda.

Megyesi Gábor egyetemi tanulmányait Szegeden kezdte, majd Cambridge-ben szerzett matematikusi diplomát 1990-ben. Azóta a JATE tanársegédje. Az amerikai Utah Egyetemen is dolgozott, de kapcsolata a JATE algebrai szemináriumával akkor sem szűnt meg. Kutatási területe az algebrai geometria, amin belül eddig főleg két témával foglalkozott. Az egyik az algebrai felületek invariánsai közötti Miayoka-Yau egyenlőtlenség általánosítása szinguláris felületekre. A másik téma az algebrai varietánsok tanulmányozása prímkarakterisztikájú testek felett. Négy tudományos dolgozata közül 1995-ig kettő jelent meg.

c) Farkas Gyula Emlékdíj

A Társulat Farkas Gyula Emlékdíj bizottsága döntésének értelmében 1995-ben két fiatal matematikus nyerte el a Farkas Gyula Emlékdíjat: *Kiss Krisztina* és *Solymosi Tamás.*

Kiss Krisztina 1965-ben született és 1988-ban szerzett matematikus-mérnöki diplomát a Budapesti Műszaki Egyetemen. 1993-ban megvédte egyetemi doktori (dr. univ.) értekezését.

Számos alkalmazott matematikusi munkában vett részt a BME Általános és Analitikai Kémia, ill. Gépészkari Matematika tanszékén. 1995-ig négy alkalmazott matematikai dolgozata jelent meg idegen nyelven, lektorált folyóiratban és három nemzetközi konferencián (Krakkóban, Budapesten, Hamburgban) tartott előadást kutatási eredményeiről. Ezeken kívül egy egyetemi jegyzet társszerzője.

Kutatási területe a biomatematika, szűkebben populációdinamikai modellek matematikai vizsgálata, ami a differenciálegyenletek elmélete, a stabilitás- és a bifurkációelmélet magasszintű alkalmazását kívánja meg.

Solymosi Tamás 1960-ban született, matematikus diplomáját 1984-ben a szegedi József Attila Tudományegyetemen szerezte. 1993-ban a University of Illinois at Chicago (USA) egyetemen Ph.D. fokozatot szerzett.

A díj odaítéléséig 3 alkalmazott matematikai dolgozata jelent meg idegen nyelven, igen rangos folyóiratokban, és három nemzetközi konferencián (Brüsszelben, Bécsben és az USA-beli Stony Brookban) tartott előadást kutatási eredményeiről.

Fő kutatási területe a kooperatív játékok elmélete és ezen belül is a nucleolus hatékony kiszámítása fontos speciális játékok esetében, valamint a többkritériumú döntések elmélete.

d) Rényi Kató Emlékdíj

Az 1995. évi Rényi Kató Emlékdíj bizottság a beérkezett javaslatok alapján a következő határozatot hozta:

A díj első fokozatában részesíti:

- *Balogh Józsefet* (a JATE V. éves matematikus hallgatóját),
- *Battyányi Pétert* (a KLTE IV. éves matematikus hallgatóját),
- *Nagy Gábort* (a JATE V. éves matematikus hallgatóját).

Balogh József az egységnégyzet egyenlő területű háromszögekre való feldarabolása és a p-adikus számok kapcsolatára lett először figyelmes, ezt az érdekes összefonódást TDK dolgoztában ismertette. Kódoláselmélettel – MDS (maximum distance separable) ciklikus kódok nemlétezésével – foglalkozott. Több díjat kapott TDK dolgozataira.

Battyányi Péter kiemelkedő képességű, a matematika számos területe (elsősorban funkcionálanalízis, algebra) iránt intenzíven érdeklődő fiatalember. A tudományos munkába II. éves korában kapcsolódott be a funkcionálanalízis területén. Kutatási területe főként a Jordan *-derivációk elmélete. OTDK konferencián kiemelt I. díjat ért el.

Nagy Gábor jól felkészült, széles látókörű diák, aki elsősorban az algebrai jellegű módszerek geometriai alkalmazásában tűnik ki. Galois-geometriák teljes süvegeire vonatkozó becslések témakörrel foglalkozik.

e) Patai Alapítvány díja

A Patai Alapítvány 1995. évi támogatásának odaítélésére három javaslat érkezett. A BJMT Elnöksége által kiküldött bizottság többségi határozatával *Aszalós Lászlónak* ítélte oda a támogatást.

Aszalós László 1994-ben szerzett diplomát a Kossuth Lajos Tudományegyetem matematikus szakán, 1995-ben ugyanott Ph.D. hallgató volt. Kutatási területe a matematikai logika, ezen belül az automatikus programbizonyítás. Eddig elért eredményeiről két cikke jelent meg a Bulletin for Applied Mathematics-ben. Harmadéves kora óta gyakorlatot vezet a debreceni egyetemen. Dragálin Alberttel és Vályi Sándorral közösen egyetemi jegyzetet írt Számítógépes oktatóprogramok a mesterséges intelligenciában címmel. Egyetemi évei alatt Önreferáló ítéletkalkulus címmel írt diákköri dolgozatot. A Tempus ösztöndíját elnyerve fél évet Hollandiában töltött.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Nyomdai Munkák: Modok és Társa Kft., Kiskunhalas

Matematikai Lapok

1995/3–4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 5. évfolyam (1995), 3–4. szám

(Megjelent 2000-ben)

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201–7656.

Egyes szám ára 400 Ft+ÁFA.

* Megjegyzés: Korábbi előfizetőknek a lap ára az eddigi befizetés függvénye.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

RÉNYI ALFRÉD SZÜLETÉSÉNEK 75. ÉVFORDULÓJA

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Tudományok Osztálya és a Bolyai János Matematikai Társulat 1996. november 29-én emlékülést rendezett Rényi Alfréd születésének 75. évfordulója alkalmából az MTA Roosevelt téri székházában. Az emlékülés programja a következő volt:

10.00 Glatz Ferenc, a Magyar Tudományos Akadémia Elnöke megnyitotta az emlékülést.
Révész Pál: Rényi Alfréd a magyar valószínűségszámítási iskola megalapítója
Katona Gyula: Rényi Alfréd az ember, az oktató és a vezető

Szünet

14.00 T. Sós Vera: Véletlen fák családjainak fokszám-eloszlásáról
Kátai Imre: A nagy szitáról
Csiszár Imre: A Rényi-féle α-rendű információk kódolási interpretációja

Szünet

16.00 Csáki Endre: Strassen tétele összetett folyamatokra
Csörgő Sándor: A Rényi-féle konfidenciasávok véletlen cenzúra esetén
Michaletzky György, Szeidl László, Várlaki Péter, Vladimir Zolotarev: Valószínűségi változók függőségi mértékének Rényi-féle megközelítéséről
Tusnády Gábor: Dinamikus faktoranalízis

A Matematikai Lapok jelen számában elkezdjük a megemlékezésen elhangzott előadások, illetve az azokkal kapcsolatos cikkek közlését. A többi előadást és cikket a későbbi számokban folyamatosan adjuk közre. A cikkek után egy most előkerült Rényi-dokumentumot is közlünk.

RÉNYI ALFRÉD, AZ EMBER, A VEZETŐ, AZ OKTATÓ*

KATONA GYULA

Elismerem, hogy vannak okok arra, hogy én tartsam a visszaemlékezésnek ezt a nem-matematikai részét, de az előadásomra való készülés közben rájöttem, van egy nagy hiányosságom. Csak kevesebb mint tíz évig ismertem Rényit, nem ismertem azokban a fontos években, amikor a háború után a tudományt újjászervezték, a Matematikai Kutató Intézet létrejött. Izgalmas, nyüzsgéssel teli évek voltak ezek, amikről csak mások elbeszéléséből tudok egy keveset. Bár igyekeztem sokat megtudni azokról az időszakokról is.

Előre is elnézést kérek, hogy az emlékekben sokszor szereplek magam is. De ennek természetes oka, hogy a legerősebb benyomásaim a személyes élményekből keletkeztek.

Rényi Alfréd, az ember

Legfontosabb tulajdonságának határtalan *optimizmusát* tartottam. Ez minden tevékenységében jellemző volt rá. Sok más tulajdonsága is erre volt visszavezethető. Például egyáltalán nem volt pontosnak nevezhető. Szerintem késéseinek elsődleges oka az volt, hogy az utolsó pillanatig bízott benne, hogy minden jól összejön, és ő még időben odaér, ahova akar.

Kezdetben elég rossz híre volt autóvezetésének. A néhány baleset is azért következhetett be, mert optimistán azt hitte, hogy még van elég hely és idő... (Megjegyzem, engem Rényi tanított autót vezetni, Amerikában.)

A matematikában is határtalanul optimista volt. Néha egészen naiv ötletekkel indult harcba egy probléma megoldásáért. És tudott hinni benne, hogy abból is kijön. Többször voltam a kétkedő kritikus, és hányszor lett neki igaza! Valóban elég volt az egyszerű ötlet.

Mindenről úgy képzelte, hogy meg tudja javítani. A lemezjátszót, az autót. Ha nem sikerült, elfelejtette. Ha sikerült, az tovább erősítette optimizmusát.

---

*Ez az írás a Természet Világa 129. évf. 1998. III. (Matematika) különszámában is megjelent.

És ez az optimizmus nagyon egyszerű élettapasztalatokon alapult. Hiszen valóban minden lényeges dolog sikerült neki. Rövid élete sikerek sorozata. Az „egyetlen" balszerencse ami érte, az felesége, Kató és saját maga korai tragikus halála. De ha van másvilág, akkor most *ott* optimista.

Nagyon *kedves, közvetlen, barátságos* ember volt. Ha barátaival, tanítványaival találkozott, akkor is megállt egy kicsit beszélgetni, ha sietett. (Na persze ez is oka volt azután a késéseknek.) A barátságosság nagyon időigényes tevékenység, de neki erre is jutott ideje.

A jobb diákokkal már negyedéves korukban elkezdett tegeződni. Optimizmusa átsugárzott a beszélgetőpartnerre is. Nagyon jó érzés volt vele beszélgetni. Az ember úgy érezte, mi most ketten mindent meg tudunk csinálni. Nem hiszem, hogy sok akadémikust, tanszékvezetőt, intézeti igazgatót hívtak olyan játékos néven, hogy Buba. Negyedéves korunkban meg lehetett velük csinálni, hogy Kató nap alkalmából váratlanul beállított hozzájuk egész 15 főnyi évfolyamunk.

Külseje jól tükrözte fenti jellemvonásait. Kissé kövérkés alakja volt, mindig mosolygott, mosolyránca ettől nagyon erős volt, és mindig azt a benyomást keltette, hogy ráér. Elegánsnak nem volt mondható. Zakóban, alatta pecsétes, cigarettától lukas kék pulóverben, kihajtott ingnyakkal járt. És sajnos nagyon sokat dohányzott.

Nagyszerű *humorérzéke* volt. Egy jó tréfától, beugratástól nem sajnálta az időt, bármilyen elfoglalt is volt. Hadd meséljek el néhányat.

A mátraházai üdülőben meglátogattam a Rényi házaspárt. Több író, költő is volt ott. Némi megbeszélés után Rényi bemutatott Somlyó Györgynek mint egy lengyel irodalomkritikust, aki jól törte a magyart. Hosszasan elbeszélgettünk, megígértem, hogy lefordítjuk, kiadjuk egy kötetét. A beszélgetés csúcspontja az volt, mikor Juhász Ferenc elment az asztal mellett, Somlyó György mutatta nekem, de én megjátszottam, hogy csak Juhász Gyuláról halottam. Somlyó csak másnap tudta meg, hogy vicc áldozata lett.

Amikor egyszer valamilyen ajánlólevelet kellett rólam írnia, megírta rögtön „opponensi véleményét" is még tervbe sem vett kandidátusi értekezésemről. Az általa kezdeményezett kereséselméletből mindössze egyetlen egy cikkem volt, bátorítani akart, hogy folytassam e munkát, ebből a témából írjak kandidátusit. Még egy Rényi mértékű tudósnak is komoly munka lehetett egy kidolgozatlan irányban fogalmakat, tételeket megsejteni.

Egyszer, lakásuk újrafestése előtt Rényiék meghívtak néhányunkat, hogy ideiglenes freskókat fessünk falukra. Vértesi Péternek sikerült egy váteszi művet alkotnia. Egy koponya alatt két cigaretta feküdt keresztbe. Én egy pillangószárnyakon repdeső földgömböt festettem, amit Buba egy lepekehálóval üldöz. Sajnos ezen örökbecsű művek csak néhány napot éltek meg.

Közismert volt Rényi *hatalmas műveltsége.* A humán és a természettudományok területén egyaránt lenyűgöző volt tudása, ismeretanyaga. Diákkorában még ógörögből is nyert versenyt. Jellemző az a Rényi által néha elmesélt történet, hogyan is lett ő matematikus. Eleinte történész akart lenni, az Atlantisz története izgatta. Hamarosan rájött, hogy a geofizika alapos ismerete nélkül labdába sem rúghat. A geofizikát pedig matematika nélkül lehetetlen színvonalasan művelni.

Műveltségéhez hozzátartozott a zene ismerete és szeretete is. Aktív alaptermészetének pedig nem felelt meg a passzív zenehallgatás. Hozzá a játék illett. Jól zongorázott. Abban a szerencsében volt részem, hogy sokat zenélhettem vele együtt. Mozart és Schubert hegedű-zongora szonátáit játszottuk. 1969-ben fél évig együtt laktunk Amerikában. Itt is sokat zenéltünk. Amikor néhány napra meglátogatott bennünket Rényi korábbi zenélőtársa, Szüsz Péter, két hegedűre és zongorára írt műveket játszottunk mindaddig, míg a környéken lakó diákok küldöttsége nem kérte annak abbahagyását.

A pszichológusok szerint az árva gyermekek minden férfiban apát keresnek. Ez erős túlzás, de saját tapasztalatom szerint is fontosabb számukra egy példakép, mint az apa mellett felnövőknek. Én Bubában találtam meg ezt a példaképet, akiben nem csak a matematikust láttam, hanem a sokoldalúan tehetséges, nagy életerejű embert is. Mint ahogy a fiú egy bizonyos életkor után a hibákat is elkezdi keresni apjában, én is kerestem a hibákat Rényiben. Meg kellett állapítanom, hogy hajlamos arra, hogy erősen szubjektív véleménye alapján hozzon döntéseket. De egyrészt ezt a korszellem erősen támogatta, másrészt rendszerint utólag kiderült, hogy neki volt igaza, és végül képes volt belátni, ha tévedett, és korrigálni a hibás döntést. Esetleges egyoldalú döntéseit olyan kedvesen, a meggyőzés szándékával hozta, hogy ezért nem lehetett rá haragudni. De végül is találtam benne egy igazán súlyos hibát. Amikor együtt laktunk Amerikában, mindig ő ébredt fel előbb, és finom célzásaimmal sem sikerült fél év alatt elérnem, hogy ne csapdossa az ajtókat.

Rényi Alfrédról nem lehet felesége, Rényi Kató említése nélkül beszélni. Ő szintén egy tehetséges, szeretetre méltó egyéniség volt. Jó matematikus, kiváló oktató. Rényivel remekül összeillettek, kiegészítették egymást. Bár csipkelődve, de nagyon tisztelték és szerették egymást. Egy jellemző érdekesség életükből. Megállapodtak, hogy Kató nem vezeti a kocsit, de Buba bármikor értemegy, elviszi, ha ő kéri azt. Ezt a megállapodást mindketten maradéktalanul betartották.

Rényi Alfréd, a vezető

Emberi tulajdonságai predesztinálták a vezető szerepre a matematikai életben. Ehhez hozzájárult az, hogy erősen hitt azokban az elvekben, amelyeket akkor a magyar értelmiség egy jelentős hányada magáénak vallott. Hatalmas energiával vetette bele magát a matematikai élet szervezésébe. Volt időszak, amikor egyszerre volt a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára, az MTA III. Osztályának titkára, és az MTA Matematikai Kutató Intézetének igazgatója.

Rengeteget tett a magyar matematikáért. Pusztán tudományszervező munkásságáért is megérdemelné, hogy most megemlékezzünk róla. De ha nem lett volna a tudomány óriása is, nem biztos, hogy ilyen jól rátalált volna a helyes irányokra. Akkor talán már kevesen emlékeznének rá.

Ő harcolta ki, hozta létre ezt az Intézetet. Stílusára, működési rendszerére alapvető hatással volt. Ma is lényegében ugyanazon elvek alapján működik az Intézet, amint azt Rényi létrehozta. A kezdeti időszakban nagyon fontosnak tartotta az alkalmazásokat, maga is sokat foglalkozott ilyen problémákkal. Később érdeklődése jobban elméleti irányba fordult. Az Intézet ezt követte, de ma is erősebb Intézetünkben az a szárny, amelyik az alkalmazásokhoz közelebb álló elméletekkel foglalkozik.

Bár hitt a korszak irányító elveiben, igyekezett annak ostobaságait megkerülni. Így történhetett, hogy az Intézet „osztályidegenek", ideológiai okokból nem kívánatos személyek számára nyugodt kutatási lehetőséget nyújtott.

Az Intézetbe elsősorban a tehetségük alapján vette fel a a kutatókat, persze ebben szabadon hagyta érvényesülni szubjektív véleményét is. De hamar belátta, ha tévedett, és ekkor keresett az illetőnek máshol munkát, szeretettel rábeszélte, hogy jobb lesz neki ott, vagy az Intézeten belül bízta meg valamilyen nem kutatói feladattal, hogy ha az illető kutatásai nem is olyan színvonalasak, mégis hasznos tagja legyen az Intézetnek.

Ma én ülök Rényi intézeti székében. Néha bizony feszengek, nagy nekem ez a szék. Eszembe jut ilyenkor, vajon hogyan döntene egy-egy helyzetben ő. De azután eszembe jut az a szovjet film is, melyben a 40 éves férfi álmában tanácsot kér a háborúban elhunyt apjától, hogyan döntsön egy sorsfordító ügyben. Amire az apa válasza: — Fiam, honnan tudhatnám én azt, 22 éves voltam, amikor meghaltam, nekem sokkal kevesebb az élettapasztalatom, mint neked. Valószínűleg Rényitől is hasonló választ kapnék, nem mintha 49 évesen nem lett volna elég élettapasztalata, hanem a világ, az ország, a környezet, az Akadémia változott meg azóta alaposan. Bár Rényi optimizmusát, önbizalmát, tanulékonyságát figyelembe véve, biztosan tudna jó tanácsokat adni ma is a másvilágról.

Rényi Alfréd, az oktató

Nagyszerű pedagógus is volt. Erről szóló emlékeinket Tusnády Gáborral közös kis cikkünkben már leírtuk a Matematikai Lapok 1970-es évfolyamában. Ezeket most nem akarom megismételni. De feltétlenül meg kell említeni, hogy a tudományos utánpótlás nevelésében is kiemelkedő volt szerepe. Az erős magyar valószínűségszámítási iskola majd minden tagja az Ő tanítványa volt, vagy tanítványának tanítványa.

De mint a matematika ismeretterjesztője, még nagyobb volt a híre. Számtalan népszerű cikke máig is például szolgál, hogyan kell(ene) a matematikáról sokak számára is érthetően írni. Legnagyobb hatású művei azonban trilógiája: Dialógusok a matematikáról, Levelek a valószínűségről, Napló az információelméletről. Ezeket az összes világnyelvre lefordították. Az elsőben a matematika, a matematika és a valóság viszonya, a matematika alkalmazásai filozófiai kérdéseit taglalja mindenki számára élvezetes fomában, híres történelmi személyiségek szájába adva mondanivalóját. Hadd álljon most itt egy, Rényi stílusában általam írt dialógus, melynek egyik szereplője a sajnos már történelmi szereplővé vált Rényi Alfréd.

Dialógus a matematikai ismeretterjesztésről

Szereplők: Rényi Alfréd egyetemi tanár, és Pesszi Mihály (barátainak Pesszi Miska), matematikus kutató.

Rényi Alfréd: (Kezet nyújt) Szerbusz Miska. Mi újság?

Pesszi Mihály: Szerbusz, köszönöm, megvagyok.

R. A.: Mit szólsz a XX. Kongresszushoz?

P. M.: Mit szólnék? Semmi érdekes. Az új nagyfőnök kiteregeti a régi szennyesét, azután folytatja ott, ahol a régi abbahagyta.

R. A.: Nem, nekem meggyőződésem, hogy nagyon fontos változások kezdete ez, aminek nálunk is alapvető következményei lesznek.

P. M.: No igen, Te mindig optimista voltál. De azért erről ne írjál ismeretterjesztő cikket!

R. A.: Ne aggódj, maradok a matematikánál.

P. M.: Szerintem a matematikai ismeretterjesztés reménytelen ügy, de legalább teljesen veszélytelen.

R. A.: Tiltakozom, egyáltalán nem reménytelen!

P. M.: Ugyan Buba, jól tudod, hogy a matematika tudománya egy épület, amiben nem lehet a felső emeleteket megérteni, ha valaki nem tudja az alapokat. Tehát vagy középiskolás szinten maradsz, vagy az olvasó nem érti meg, csak zavaros képzetei lesznek.

R. A.: Egyik pontban sincs igazad. Egyrészt a középiskolákban egyáltalán nem tanítanak meg minden fontos, középiskolai szintű anyagot.

P. M.: Például?

R. A.: Például a kombinatorikát, gráfelméletet, valószínűségszámítást. Ezek mind elemi szinten jól elmagyarázhatók, és roppant fontosak. Ha a számítógépek rohamos fejlődését elnézem, ezek be fognak hatolni mindennapjainkba, s alapelveik megértéséhez pontosan ezen matematikai területekre van szükség.

P. M.: Ha igazad van, akkor ezeket be kell vezetni a középiskolai oktatásba.

R. A.: Bizonyos, hogy be kell őket részben vezetni, de sose lesz annyi tanóra, hogy minden érdekes dologról ott szó is legyen. Érdeklődő diákok, felnőttek pedig vannak, akik többet akarnak megérteni a matematikából akkor is, ha azt szakmájukban nem tudják használni, egyszerűen csak jobban akarják érteni a világot, vagy élvezni képesek a matematika szépségeit.

P. M.: Na jó, ebben lehet valami. De bonyolultabb dolgokat már nem lehet az okos géplakatosnak sem elmondani. Legfeljebb be tudod csapni, azt hiszi, hogy érti, de csak zűrzavart okozol szegény fejében.

R. A.: Én nagyon sajnálom, hogy ismét ellent kell mondanom, de ez sem igaz. Hiszen sokszor nincs szükség a matematika teljes épületét ismerni ahhoz, hogy egy-egy emeleten jól elboldoguljunk. Például, ha valaki egy elemi geometriai feladaton töri a fejét, teljesen matematikus módon gondolkozhat anélkül, hogy a geometria axiómarendszerét ismerné, vagy ha ismeri, figyelembe venné. De tovább mennék. Mindenki számára természetes, hogy az elektromosságot a Maxwell-egyenletek ismerete nélkül tárgyalja, mert a fizika fejlődése olyan, hogy a pontatlan felől a pontosabb modell felé halad. Ez a matematikában, mint tudományban nem így van, mégis sokszor sokat meg lehet érteni anélkül, hogy az alapokat valaki rendesen tudná. Például a differenciálszámítás precíz ismerete nélkül megérthetők a differenciálegyenletek stabilitási problémái. Sokszor persze nehéz szellemi munka egy matematikai elméletet a hozzá nem értő olvasóhoz „közelhozni".

P. M.: Furcsákat mondasz! Precíz differenciálszámítás nélkül differenciálegyenletek! Meg, hogy stabilitás.

R. A.: No azt nem mondtam, hogy az olvasó rögtön a téma kutatójává válik, de valamit megért abból, hogy mit csinál egy matematikus, miért szép, és miért hasznos a matematika.

P. M.: És el is olvassa valaki ezeket a cikkeket?

R. A.: Igen! Nagyon sok váratlan visszajelzést kapok. Meglepő, hogy kik, és mennyien olvasnak ilyen cikkeket. És ne felejtsd el, hogy jön a televízió! Az lesz a tudományos ismeretterjesztés aranykora. Lelki szemeimmel látom, hogy milliók ülnek egy szombat este a televízió előtt, és egy érdekes matematikai előadást néznek!

P. M.: Minden tiszteletem az optimizmusodé. De szerintem a világnak is hasznosabb lenne, ha ilyen ismeretterjesztő cikkek helyett matematikát csinálnál.

R. A.: Sokszor még saját kutatásaim számára is hasznos az ismeretterjesztő cikkek írása, mert más nézőpontból, kívülről nézek a témára, eredeti gondolataim támadnak. De a matematika számára feltétlenül nagyon fontos az, hogy minél több „outsider" értsen meg valamit a matematikából. A matematika erkölcsi és anyagi támogatása függ tőle.

P. M.: No igen, ha nem az lesz az olvasó konklúziója, hogy „nahát ezek a matematikusok micsoda értelmetlen dolgokkal töltik az idejüket. És a mi pénzünkön!"

R. A.: Azt készségesen elismerem, hogy az ismeretterjesztő felelőssége nagy.

P. M.: Bár sok értelmét nem látom, írjál csak. De arra kérlek, hogy híres megoldatlan problémákat ne említs. Mert azután én olvashatom a megoldásokat. Naponta jön egy „cikk", amiben valaki bebizonyítja a négyszín-sejtést, a Fermat-sejtést, a Riemann-sejtést, anélkül, hogy az elemi logikai szabályokat képes volna betartani. Néha egy műben az összes ilyet bebizonyítja. Kár, hogy ezek még legalább száz évig nem lesznek bebizonyítva. Vissza is vonnom, hogy a matematikai ismeretterjesztés veszélytelen. Ezek a fickók nem mindig veszélytelenek. Hál'istennek nálunk az őrültek nem hordanak fegyvert.

R. A.: Részvétem. Hát nem könnyű bánni velük.

P. M.: Szóval nem teljesen győztél meg az ismeretterjesztés értelméről, de azt el kell ismernem, hogy Neked eredeti ötleteid vannak ezen a téren. Hogyan jönnek? Leülsz az íróasztalhoz, és azt mondod magadnak, hogy na most ismeretterjesztek egy nagyot?

R. A.: A budapesti egyetemen volt egy jogászprofesszor, aki szóbeli vizsgákon a következő kérdést tette fel a hallgatóknak: „Mit lát, ha a Gellérthegyről lenéz a városra?" A hallgatóknak ezt kellett válaszolniuk: „Jogtárgyakat és jogalanyokat." Ezt szokta kifacsarni kedvenc professzorom így: „Sztochasztikus folyamatokat!" Én viszont úgy módosítom a kérdést: „Mit látsz a matematika Himalájáról letekintve?" A helyes válasz pedig: „Ismeretterjesztésre alkalmas szép patakokat." Ezzel azt akarom mondani, hogy a matematikai munkám közben jutnak eszembe ötletek: hogyan lehetne ezt a laikus számára is érthetően leírni.

P. M.: Vannak konkrét terveid?

R. A.: Hajjaj, egy csomó terv régóta motoszkál a fejembem. Például szeretnék írni egyszer a matematikának a valósághoz való viszonyáról, a matematika filozófiai alapkérdéseiről, a matematika alkalmazásának nehézségeiről. Mégpedig valamilyen történelmi személyiségek szájába adva a gondolatokat, párbeszéd formájában. Newton és Leibnitz? Hát ezt még nem tudom. Egy másik régi tervem a valószínűségszámítás alapjait bemutatni, de nem úgy, mint egy kész tudományt, hanem valóban a kezdeti alapgondolatokat, a tévedési, eltévedési lehetőségeket is bemutatva. Ezt elmondhatná talán két szerencsejátékos, akik a csalást se, a matematika tanulmányozását se zárják ki, a meggazdagodás érdekében. Egy további nagy tervem, hogy az információelmélet alapjairól írok egy ismeretterjesztő könyvecskét. Sajnos ez — viszonylag bonyolult — képletek nélkül megoldhatatlan, még nem látom, hogyan kerüljem el a nehézségeket. De nagyon fontosnak tartom, mert szerintem az információs társadalom felé haladunk. És a Fibonacci-számok. Sokrétű alkalmazásaik a matematika különböző területein egyszerűen lenyűgöznek. Ezt is össze akarom hozni valamikor. De hát az idő, az idő! Na menjünk is dolgozni.

P. M.: Viszlát taggyűlésen!

R. A.: Viszlát.

RÉNYI-FÉLE KONFIDENCIASÁVOK*

CSÖRGŐ SÁNDOR

Rényi Alfréd eloszlásfüggvényekre és túlélésfüggvényekre vonatkozó aszimptotikus konfidenciasávjainak szélessége minden pontban egyformán arányos a becsülendő függvény természetes torzítatlan becslésével. Megmutatjuk, hogy ezek a sávok messze kiterjeszthetők aszimptotikusan kicsi és nagy mintaelemekig. A kiterjesztett Rényi-féle sávok bizonyos szűkített kombinációival is foglalkozunk.

1. A sávok

Legyen $X_1, \ldots, X_n$ egy n elemű statisztikai minta, $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, azaz $X_1, \ldots, X_n$ független véletlen változók a közös $F(x) := P\{X \le x\}$ eloszlásfüggvénnyel, $x \in \mathbb{R}$, mely $F(\cdot)$ függvényről a dolgozatban mindvégig feltesszük, hogy az egész $\mathbb{R}$ valós számegyenesen *folytonos*. Ha a minta empirikus eloszlásfüggvényét $F_n(\cdot)$-nel jelöljük, ha tehát $F_n(x) := \#\{1 \le j \le n : X_j \le x\}/n$, $x \in \mathbb{R}$, akkor Kolmogorov 1933-ból származó jól ismert eredménye szerint

$$P\Big\{\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \big|F_n(x) - F(x)\big| \le y\Big\} \to K(y) := 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2y^2}$$

minden $y > 0$ esetén, azzal a dolgozatban végig érvényes megállapodással élve, hogy konvergenciára és az aszimptotikus rendre vonatkozó, külön nem specifikált állítások és relációk mind $n \to \infty$ esetén állnak fenn. 1949-ben Doob a $K(\cdot)$ függvényt a $\sup_{0 \le s \le 1} |B(s)|$ véletlen változó eloszlásfüggvényeként azonosította, ahol $\{B(s) : 0 \le s \le 1\}$ egy úgynevezett Brown-híd, vagyis olyan minta-folytonos Gauss-folyamat, amelynek a várható értéke minden pontban nulla, a kovarianciafüggvénye pedig $E\big(B(s)B(t)\big) = \min(s, t) - st$, $0 \le s, t \le 1$. Így, amennyiben $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ jelöli véletlen változók eloszlásbeli konvergenciáját, Kolmogorov tétele úgy is írható, hogy

$$\sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \big|F_n(x) - F(x)\big| \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \le s \le 1} \big|B(s)\big|.$$

---

*Előadásra került a Magyar Tudományos Akadémia Rényi Alfréd Emlékülésén, Budapesten, 1996. november 29-én. A dolgozat angol nyelvű változata a *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* Rényi emlékszámában jelent meg: **34** (1998), 71–87. [Work supported in part by the National Science Foundation U.S.A.; Grant DMS–96-25732 held at The University of Michigan.]

A jelen dolgozat egész tartamára rögzítsünk egy $\alpha \in (0,1)$ értéket. Jelölje ezekután $y_\alpha > 0$ azt az egyértelműen meghatározott számot, amelyre $K(y_\alpha) = 1 - \alpha$. A tiszta illeszkedés hipotézisvizsgálatára vagy az ismeretlen $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény becslésére az eredményül adódó Kolmogorov-féle konfidenciasávra ekkor fennáll, hogy $P\{F(x) \in [F_n(x) - y_\alpha n^{-1/2}, F_n(x) + y_\alpha n^{-1/2}],\ x \in \mathbb{R}\} \to 1 - \alpha$. A hasonló alakú egyoldali konfidenciavonalakra vonatkozó aszimptotikus állítást Szmirnov bizonyította 1939-ben.

Húsz évvel Kolmogorov cikkének megjelenése után, dolgozatát Kolmogorov ötvenedik születésnapjára dedikálva, Rényi [12] bebizonyította, hogy bármely rögzített $p \in (0,1)$ esetén, $y > 0$ tetszőleges választása mellett,

$$P\left\{\sqrt{\frac{np}{1-p}} \sup_{F(x)\leq 1-p} \frac{F_n(x) - F(x)}{1 - F(x)} \leq y\right\} \to 2\Phi(y) - 1, \tag{1}$$

ahol $\Phi(\cdot)$ a standard normális eloszlásfüggvény, és

$$P\left\{\sqrt{\frac{np}{1-p}} \sup_{F(x)\leq 1-p} \frac{|F_n(x) - F(x)|}{1 - F(x)} \leq y\right\} \to L(y), \tag{2}$$

ahol pedig

$$L(y) := \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8y^2}}.$$

Ezek az állítások valójában Rényi 5. és 6. (a [12] dolgozat magyar változatában a 3.1. és 3.2.) Tételeinek az eloszlás jobboldali farkára vonatkozó változatai, melyeket az $1 - F(x) = P\{X > x\}$, $x \in \mathbb{R}$, túlélésfüggvény becslésének problémája motivál. A megfelelő, matematikailag ekvivalens bal-farok változatok (kiterjesztett formái) alább, (5) és (6) alatt kerülnek megfogalmazásra. Rényi Alfréd nevezetes [12] dolgozata, amellett hogy a nemzetközi szakirodalom máig sűrűn idézett műve, igen nagy hatással volt a magyar valószínűségelméleti és matematikai statisztikai iskola fontos kutatási irányainak meghatározására is.

A (bal-farki változathoz tartozó) mögöttes statisztikai gondolatot Rényi ([12] magyar változatában) a következőképpen fejti ki:

> Kolmogorov tétele az $|F_n(x) - F(x)|$ eltérést ugyanolyan súllyal veszi figyelembe, akármekkora is $F(x)$ értéke; ezáltal például az $|F_n(x) - F(x)| = 0{,}01$ eltérés ugyanolyan súllyal esik latba olyan x helyen, ahol $F(x) = 0{,}5$, vagyis ahol ez az eltérés 2%, mint egy olyan x pontban, ahol $F(x) = 0{,}01$, vagyis ahol az eltérés 100%-ot tesz ki. Ezen úgy segíthetünk, hogy $|F_n(x) - F(x)|$ helyett az $|F_n(x) - F(x)|/F(x)$ hányadost, vagyis $F_n(x)$ *viszonylagos hibáját* tekintjük.

Annak a hipotézisnek az ellenőrzésére, hogy a sokaság eloszlásfüggvénye valóban $F(\cdot)$, a baloldalra vonatkozó tételek így tiszta illeszkedési próbákra vezetnek:

> Ezeknek a kritériumoknak a jellegzetessége abban áll, hogy egy olyan sávot adnak meg $F(x)$ körül, amelyben a hipotézis helyessége esetén az $F_n(x)$ empirikus eloszlásfüggvényeknek bizonyos megadott valószínűséggel haladnia kell, amely sávnak a szélessége minden x pontban $F(x)$-szel arányos.

Ezeket az eredményeket bizonyítás nélkül Rényi tankönyveiben is tárgyalja, például a magyar nyelvű [14] könyvben is.

Ha az $F(\cdot)$ és $1 - F(\cdot)$ súlyfüggvényeket a bal- és jobb-farki próbastatisztikákban rendre az $F_n(\cdot)$ és $1 - F_n(\cdot)$ súlyfüggvényekkel helyettesítjük, aszimptotikusan ekvivalens alternatív próbákra jutunk. Hogy ezeket a helyettesítéseket tényleg el lehet végezni, azt Csörgő Miklós [2] látta be, egyúttal számos más változatot is felvetve. Később, az 1953-as dolgozata által kiváltott tizenötéves fejlődés eredményeit áttekintő [13] cikkében Rényi maga is mutatott egy egyszerűbb módszert a fenti helyettesítések elvégezhetőségére. Szintén Csörgő Miklós [3] mutatott rá arra, hogy Rényi tételei következnek az empirikus folyamat gyenge konvergenciájára vonatkozó Donsker-féle tételből, és ezáltal az (1) és (2) alatt megjelenő határeloszlásfüggvényeket rendre a $\sup_{0 \leq t \leq 1} W(t)$ és $\sup_{0 \leq t \leq 1} |W(t)|$ véletlen változók eloszlásfüggvényeiként kapta meg, ahol $\{W(t) : t \geq 0\}$ egy standard Wiener-folyamat, tehát olyan minta-folytonos Gauss-folyamat, amelynek a várható értéke minden pontban nulla, a kovarianciafüggvénye pedig $E(W(s)W(t)) = \min(s,t)$, $s, t \geq 0$. (Lásd még például a [6] könyvben is, p. 165.) A továbbiakban $\{W_*(t) : t \geq 0\}$ egy másik standard Wiener-folyamatot fog jelölni, amely *független* az előző $\{W(t) : t \geq 0\}$ folyamattól. Igen sok szellemes, kombinatorikus természetű munka foglalkozik a Kolmogorov-, Szmirnov- és Rényi-típusú statisztikák pontos eloszlásának meghatározásával. A rögzített mintaméret melletti pontos eloszlások egyesített elméletét Csáki Endre [1] dolgozta ki kandidátusi disszertációjában, ahol az addigi fontosabb irodalom jegyzéke is megtalálható; a jelen cikkben említett, de a hivatkozott dolgozatok között fel nem sorolt referenciák is mind benne vannak Csáki 109 cikket felvonultató listájában vagy a [6] könyv irodalomjegyzékében.

Rényi eredeti tételeiben a relatív hiba használatának az az ára, hogy aszimptotikusan a minta p-ed része, avagy $100p\%$-a kizáródik a statisztikai analízisből, vagy a nagy, vagy pedig a kis megfigyelések. Az eloszlás teljes tartójára a szóbanforgó szuprémumokat nem lehet kiterjeszteni, tekintve, hogy Henry Daniels 1945-ből származó klasszikus tétele szerint

$$P\left\{\sup_{F(x)>0} \frac{F_n(x)}{F(x)} > y\right\} = \frac{1}{y} \quad \text{bármely } y \geq 1 \text{ esetén.}$$

(Megjegyezzük, hogy a már hivatkozott, későbbi [13] dolgozatában Rényi ezt egy fél oldalon bebizonyítja, a rendezett mintaelemeknek a nevéhez fűződő, a [12]-beli módszer alapjául szolgáló reprezentációjával.) Azonban Csáki [1] dolgozatának 2.8. és 2.9. Tételeiben megmutatta, mégpedig a megfelelő pontos eloszlásokat leíró formuláiból történő határátmenettel, hogy (1) és ennek baloldali változata érvényben maradnak akkor is, ha bennük az eddigi rögzített p-t olyan $p_n \in (0,1)$ sorozatra cseréljük, hogy $p_n \to 0$, amennyiben $np_n \to \infty$.

A jelen dolgozat második fejezetében leírásra kerülő súlyozott approximációk egyik legkönnyebb első alkalmazásaként a [4] dolgozatban ezen túlmenőleg beláttuk, hogy ha $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ olyan sorozat, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $0 < p_n \leq p$ valamely $p \in (0,1)$ számra és $np_n \to \infty$, akkor

$$\sqrt{\frac{np_n}{1-p_n}} \sup_{F(x)\leq 1-p_n} \frac{F_n(x)-F(x)}{1-F(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\leq t\leq 1} W(t), \tag{3}$$

$$\sqrt{\frac{np_n}{1-p_n}} \sup_{F(x)\leq 1-p_n} \frac{|F_n(x)-F(x)|}{1-F(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\leq t\leq 1} |W(t)|, \tag{4}$$

$$\sqrt{\frac{np_n}{1-p_n}} \sup_{p_n\leq F(x)} \frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\leq t\leq 1} W_*(t), \tag{5}$$

$$\sqrt{\frac{np_n}{1-p_n}} \sup_{p_n\leq F(x)} \frac{|F_n(x)-F(x)|}{F(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\leq t\leq 1} |W_*(t)|. \tag{6}$$

Ha $p_n \equiv p$, akkor ezekből Rényi eredeti tételeit kapjuk, ha meg $p_n \to 0$ teljesül, akkor (3) és (5) Csáki eredményeit adják. A jelen cikk önmagában való érthetőségét elérendő, a (3) és (4) relációk bizonyításait beiktattuk a következő fejezetbe; ezen bizonyítások bevétele egyébként is megkönnyíti a jelenlegi főeredmények bizonyításainak az előadását. Az eloszlásbeli konvergencia (3)–(6) alatti egyedi állításain túlmenőleg Mason [11] azt is belátta, hogy ezek *együttesen* is teljesülnek, amennyiben $p_n \to 0$. A bal- és jobb-farki statisztikák aszimptotikus függetlenségének ekkor az az oka, miként ezt bizonyítása pontos formában felfedi, hogy a (3)- és (4)-beli legnagyobb eltérések $F(x)$-nek az $1-p_n$ számhoz közeli értékeire lépnek fel, míg az (5)- és (6)-beliek $F(x)$-nek a p_n-hez közeli értékeire, és ha $p_n \to 0$, akkor azok a szélső mintaelemek, amelyek ezeket az $1-p_n$ és p_n közelében felvett szuprémumokat meghatározzák már eléggé távoliakká válnak ahhoz, hogy aszimptotikusan függetlenek is legyenek. A gondolatmenet egy változata az alábbi 1. Tétel itteni bizonyításában is fellelhető.

A (3)–(6) alatti eredményekben megnyilvánuló „folytonosság" igencsak megjegyzésre méltó: p_n csökkenésével megfelelően nő a legnagyobb egyoldali és kétoldali eltérések sztochasztikus rendje, de a határeloszlás ugyanaz marad mindaddig, amíg $np_n \to \infty$. Az $np_n \to \infty$ feltétel szükséges is az utóbbihoz, ugyanis Csáki [1] 2.8. és 2.9. Tételeinek második része azt mutatja, hogy bár ugyan a sztochasztikus rendet illetően a „folytonosság" még akkor is megmarad, amikor $p_n \equiv v/n$ egy tetszőlegesen rögzített $v > 0$ számra, ahogyan ezt Daniels fentebb idézett tétele alapján várhatjuk is, a határeloszlások ekkor már drasztikusan megváltoznak.

Tiszta illeszkedési próbák persze pontosan ugyanúgy alapozhatók a (3)–(6) alatti tesztstatisztikákra, mint korábban; mitöbb, $p_n \to 0$ esetén ezek a próbák mind konzisztenssé válnak. Azonban ha egy nullhipotézis nem specifikálja az F függvényt (és úgy látszik, hogy bizonyos jól alátámasztható okok folytán a *tiszta* illeszkedési próbák az utóbbi két évtizedben a statisztikai gyakorlatból eltűntek), akkor a (3)–(6) baloldalain szereplő statisztikák nincsenek meghatározva. Speciálisan, az $1 - F$ vagy az F függvényre csak olyan intervallumokon szerkeszthetünk konfidenciasávokat, amelyeket a minta határoz meg, nem pedig a becsülendő ismeretlen F. A kérdés tehát az, hogy megmaradnak-e igaznak ugyanazon eredmények, ha F_n-nek az (5) és (6) alatti egy- és kétoldali maximális relatív hibáját az $\{x : p_n \leq F(x)\}$ halmaz helyett az $\{x : p_n \leq F_n(x)\}$ halmazon vesszük, illetve ha az $1 - F_n$ függvény (3) és (4) alatti maximális relatív hibáit az $\{x : F(x) \leq 1 - p_n\}$ halmaz helyett az $\{x : F_n(x) \leq 1 - p_n\}$ halmazon tekintjük. Amikor $p_n \equiv p$, az igenlő választ könnyű belátni; voltaképpen ekkor Rényi [12] eredeti bizonyításaiban éppen annak belátása az első lépés, hogy a kétféle állítások egymással ekvivalensek. Azonban az távolról sem nyilvánvaló, hogy ez *minden* olyan $\{p_n\}$ sorozatra is igaz, amelyre $p_n \to 0$ és $np_n \to \infty$. A jelen dolgozat célja az, hogy Rényi emlékének annak megmutatásával adózzunk, hogy a válasz általában igenlő, és ezáltal *kiterjesztett* Rényi-féle konfidenciasávok szerkesztése válik lehetségessé.

Statisztikai szempontból viszont vonzóbb és kívánatosabb, ha azokat az intervallumokat amelyeken a sávokat rajzoljuk közvetlenül az $X_1, \ldots, X_n$ minta rendezett $X_{1,n} \leq \cdots \leq X_{n,n}$ elemei határozzák meg. Ez magyarázza azt a formát, amelyben a dolgozat főeredményeit az alábbi tételben megfogalmazzuk. Megjegyezzük azt is, hogy a véletlen cenzúra melletti konfidenciasávokra vonatkozó legújabb eredmények is ilyen formában nyertek megfogalmazást a [7] dolgozatban, így lesz tehát a legkönnyebb összehasonlításokat tenni. A tétel azt mondja meg, hogy milyen messzire terjednek ki a Rényi-féle konfidenciasávok.

1. Tétel. *Legyen $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ egész számok olyan sorozata, amelyre minden $n \geq 1/p$ esetén $1 \leq k_n \leq np$ valamely $p \in (0,1)$ értékre és $k_n \to \infty$. Ekkor az eloszlásbeli konvergenciára vonatkozó hat állítás, miszerint*

$$\sqrt{\frac{k_n}{1 - \frac{k_n}{n}}} \sup_{x \leq X_{n-k_n,n}} \frac{F_n(x) - F(x)}{1 - F(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} W(t), \tag{7}$$

$$\sqrt{\frac{k_n}{1 - \frac{k_n}{n}}} \inf_{x \leq X_{n-k_n,n}} \frac{F_n(x) - F(x)}{1 - F(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \inf_{0 \leq t \leq 1} W(t), \tag{8}$$

$$\sqrt{\frac{k_n}{1 - \frac{k_n}{n}}} \sup_{x \leq X_{n-k_n,n}} \frac{F_n(x) - F(x)}{1 - F_n(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} W(t), \tag{9}$$

$$\sqrt{\frac{k_n}{1 - \frac{k_n}{n}}} \inf_{x \leq X_{n-k_n,n}} \frac{F_n(x) - F(x)}{1 - F_n(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \inf_{0 \leq t \leq 1} W(t), \tag{10}$$

$$\sqrt{\frac{k_n}{1-\frac{k_n}{n}}} \sup_{x \le X_{n-k_n,n}} \frac{|F_n(x)-F(x)|}{1-F(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le t\le 1} |W(t)|, \tag{11}$$

$$\sqrt{\frac{k_n}{1-\frac{k_n}{n}}} \sup_{x \le X_{n-k_n,n}} \frac{|F_n(x)-F(x)|}{1-F_n(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le t\le 1} |W(t)|, \tag{12}$$

együttesen teljesül. Az eloszlásbeli konvergenciára vonatkozó hat állítás, miszerint

$$\sqrt{\frac{k_n}{1-\frac{k_n}{n}}} \sup_{x \ge X_{k_n,n}} \frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le t\le 1} W_*(t), \tag{13}$$

$$\sqrt{\frac{k_n}{1-\frac{k_n}{n}}} \inf_{x \ge X_{k_n,n}} \frac{F_n(x)-F(x)}{F(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \inf_{0\le t\le 1} W_*(t), \tag{14}$$

$$\sqrt{\frac{k_n}{1-\frac{k_n}{n}}} \sup_{x \ge X_{k_n,n}} \frac{F_n(x)-F(x)}{F_n(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le t\le 1} W_*(t), \tag{15}$$

$$\sqrt{\frac{k_n}{1-\frac{k_n}{n}}} \inf_{x \ge X_{k_n,n}} \frac{F_n(x)-F(x)}{F_n(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \inf_{0\le t\le 1} W_*(t), \tag{16}$$

$$\sqrt{\frac{k_n}{1-\frac{k_n}{n}}} \sup_{x \ge X_{k_n,n}} \frac{|F_n(x)-F(x)|}{F(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le t\le 1} |W_*(t)|, \tag{17}$$

$$\sqrt{\frac{k_n}{1-\frac{k_n}{n}}} \sup_{x \ge X_{k_n,n}} \frac{|F_n(x)-F(x)|}{F_n(x)} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le t\le 1} |W_*(t)|, \tag{18}$$

szintén együttesen teljesül. Továbbá, ha $k_n/n \to 0$, akkor mind a tizenkét állítás együttesen teljesül.

Legyen most $z_\alpha > 0$ az az egyértelműen meghatározott szám, amelyre $L(z_\alpha) = 1-\alpha$. Lineárisan interpolálva a [8] dolgozatban közölt táblázat szomszédos értékei között és három tizedesjegyre kerekítve, azt találjuk például, hogy $z_{0,01} = 2{,}806$, $z_{0,03} = 2{,}433$, $z_{0,05} = 2{,}241$, $z_{0,07} = 2{,}108$, $z_{0,1} = 1{,}960$, $z_{0,15} = 1{,}780$ és $z_{0,2} = 1{,}599$. Vezessük be a

$$c^-_{n,k_n}(\alpha) := 1 - z_\alpha \frac{\sqrt{1-\frac{k_n}{n}}}{\sqrt{k_n}} \quad \text{és} \quad c^+_{n,k_n}(\alpha) := 1 + z_\alpha \frac{\sqrt{1-\frac{k_n}{n}}}{\sqrt{k_n}}$$

mennyiségeket. Ekkor túlélésfüggvényekre (11) szerint az következik, hogy

$$P\left\{ \frac{1-F_n(x)}{c^+_{n,k_n}(\alpha)} \le 1-F(x) \le \frac{1-F_n(x)}{c^-_{n,k_n}(\alpha)},\ x \le X_{n-k_n,n} \right\} \to 1-\alpha,$$

míg (12) szerint meg az, hogy

$$P\big\{c^-_{n,k_n}(\alpha)\big[1-F_n(x)\big] \le 1-F(x) \le c^+_{n,k_n}(\alpha)\big[1-F_n(x)\big],\ x \le X_{n-k_n,n}\big\} \to 1-\alpha.$$

Mármost vegyük észre, hogy az első sáv alsó határvonala mindenütt a második sáv alsó határvonala felett húzódik, míg a második sáv felső határvonala mindenütt az első sáv felső határvonala alatt van. Ez a tény természetszerűleg veti fel azt az ötletet, hogy esetleg az $I_n^{[1-F]}(\cdot) := \big[\{1-F_n(\cdot)\}/c^+_{n,k_n}(\alpha), c^+_{n,k_n}(\alpha)\{1-F_n(\cdot)\}\big]$ kombinált belső burkolósáv is ugyanúgy érvényes aszimptotikusan, mint az előző kettő. (Ilyen lehetőségek először a [9] dolgozatban vetődtek fel véletlen cenzúra melletti becslési problémákra.) Ugyanez a jelenség lép fel az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény becslésére a (17) és (18) következményeiként adódó $[F_n(\cdot)/c^+_{n,k_n}(\alpha), F_n(\cdot)/c^-_{n,k_n}(\alpha)]$ és $[c^-_{n,k_n}(\alpha)F_n(\cdot), c^+_{n,k_n}(\alpha)F_n(\cdot)]$ sávok esetén is, amelyek mindegyikének ugyancsak $1-\alpha$ az aszimptotikus lefedő valószínűsége az $[X_{k_n,n},\infty)$ félegyenesen. Ekkor meg a mindenütt szűkebb

$$J_n^{[F]}(\cdot) := \left[\frac{F_n(\cdot)}{c^+_{n,k_n}(\alpha)},\ c^+_{n,k_n}(\alpha)F_n(\cdot)\right]$$

kombinált belső burkolósáv kínálkozik $F(\cdot)$ becslésére. Hogy az ötlet valóban működik, az az alábbi 2. Tétel első állítása (19) és (20) alatt.

Bármely $x \le X_{n-k_n,n}$ pontban az $I_n^{[1-F]}(x)$ sáv szélessége $d^{(\alpha)}_{n,k_n}\{1-F_n(x)\}$, vagyis az $1-F_n(x)$ függvényértékkel arányos, a $J_n^{[F]}(x)$ sáv szélessége pedig akármelyik $x \ge X_{k_n,n}$ pontban $d^{(\alpha)}_{n,k_n}F_n(x)$, vagyis az $F_n(x)$ függvényértékkel arányos, ahol $d^{(\alpha)}_{n,k_n} := \big\{\big(c^+_{n,k_n}(\alpha)\big)^2-1\big\}/c^+_{n,k_n}(\alpha)$. Az $I_n^{[1-F]}(\cdot)$ sávot természetesen felírhatjuk az $F(\cdot)$ függvényre vonatkozó sávként, tehát az

$$I_n^{[F]}(\cdot) := \left[1-c^+_{n,k_n}(\alpha)\{1-F_n(\cdot)\},\ 1-\frac{1-F_n(\cdot)}{c^+_{n,k_n}(\alpha)}\right]$$

alakban is. Ekkor $I_n^{[F]}(x)$ várhatólag az $X_{n-k_n,n}$ jobb végponthoz közeli nagy x-ekre lesz jó, $J_n^{[F]}(x)$ pedig az $X_{k_n,n}$ bal végponthoz közeli kis x-ekre. Valóban, tetszőleges $c_n > 1$ számra egyszerű algebra mutatja, hogy $1-c_n\{1-F_n(x)\} < F_n(x)/c_n$ akkor és csak akkor, ha $F_n(x) < c_n/(1+c_n)$, illetve $1-\{1-F_n(x)\}/c_n \le c_nF_n(x)$ akkor és csak akkor, ha $F_n(x) \ge 1/(1+c_n)$. Ezek a tények magyarázzák az eddigi két kombinált sávból kombinált általános célú kétoldali belső burkolósáv határvonalainak alábbi megválasztását.

Ezek bevezetésére, újra használva a (2) alatti $L(\cdot)$ függvényt, legyen most $z^*_\alpha > 0$ az az egyértelműen meghatározott szám, amelyre $L(z^*_\alpha) = \sqrt{1-\alpha}$. Az előző z_α megadott értékeivel történő összehasonlítás kedvéért jegyezzük meg, hogy

$z^*_{0,01} = 3{,}025$, $z^*_{0,03} = 2{,}671$, $z^*_{0,05} = 2{,}495$, $z^*_{0,07} = 2{,}369$, $z^*_{0,1} = 2{,}231$, $z^*_{0,15} = 2{,}064$ és $z^*_{0,2} = 1{,}937$. Ezekután legyen

$$c^*_{n,k_n}(\alpha) := 1 + z^*_\alpha \frac{\sqrt{1-\frac{k_n}{n}}}{\sqrt{k_n}}$$

és jelölje $F_n^{-1}(s) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq s\}$, $0 < s \leq 1$, a minta kvantilisfüggvényét, amelyre így $F_n^{-1}(s) = X_{j,n}$ ha $\frac{j-1}{n} < s \leq \frac{j}{n}$, $j = 1, \ldots, n$, $F_n^{-1}(0) := X_{1,n}$. Tekintsük végül az

$$L^{(\alpha)}_{n,k_n}(x) := \begin{cases} \frac{F_n(x)}{c^*_{n,k_n}(\alpha)}, & X_{k_n,n} \leq x < F_n^{-1}\left(\frac{c^*_{n,k_n}(\alpha)}{1+c^*_{n,k_n}(\alpha)}\right), \\ 1 - c^*_{n,k_n}(\alpha)\left[1 - F_n(x)\right], & F_n^{-1}\left(\frac{c^*_{n,k_n}(\alpha)}{1+c^*_{n,k_n}(\alpha)}\right) \leq x \leq X_{n-k_n,n}, \end{cases}$$

alsó és

$$U^{(\alpha)}_{n,k_n}(x) := \begin{cases} c^*_{n,k_n}(\alpha)F_n(x), & X_{k_n,n} \leq x < F_n^{-1}\left(\frac{1}{1+c^*_{n,k_n}(\alpha)}\right), \\ 1 - \frac{1-F_n(x)}{c^*_{n,k_n}(\alpha)}, & F_n^{-1}\left(\frac{1}{1+c^*_{n,k_n}(\alpha)}\right) \leq x \leq X_{n-k_n,n}, \end{cases}$$

felső határvonalakat, megjegyezve még azt is, hogy $c^*_{n,k_n}(\alpha)/\left[1 + c^*_{n,k_n}(\alpha)\right] \to 1/2$ és $1/\left[1 + c^*_{n,k_n}(\alpha)\right] \to 1/2$ az 1. Tételnek a $\{k_n\}$ sorozatra tett feltételei mellett, $\alpha \in (0,1)$ bármely választására.

2. Tétel. *Legyen $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ egész számok olyan sorozata, amelyre minden $n \geq 1/p$ esetén $1 \leq k_n \leq np$ valamely $p \in (0,1)$ értékre és $k_n \to \infty$. Ekkor*

$$(19)\quad P\left\{\frac{1-F_n(x)}{c^+_{n,k_n}(\alpha)} \leq 1 - F(x) \leq c^+_{n,k_n}(\alpha)\left[1 - F_n(x)\right],\ x \leq X_{n-k_n,n}\right\} \to 1 - \alpha$$

és

$$(20)\quad P\left\{\frac{F_n(x)}{c^+_{n,k_n}(\alpha)} \leq F(x) \leq c^+_{n,k_n}(\alpha)F_n(x),\ X_{k_n,n} \leq x\right\} \to 1 - \alpha.$$

Továbbá, ha $k_n/n \to 0$, akkor

$$(21)\quad P\left\{L^{(\alpha)}_{n,k_n}(x) \leq F(x) \leq U^{(\alpha)}_{n,k_n}(x),\ X_{k_n,n} \leq x \leq X_{n-k_n,n}\right\} \to 1 - \alpha.$$

Természetesen a $\sqrt{(n-k_n)/n}$ faktor mindenütt helyettesíthető 1-gyel amikor $k_n/n \to 0$. Megtartása mindemellett célszerű, tekintettel arra, hogy jelenléte egységesíti az eredményeket, némileg szűkíti a sávokat és, amint ezt a bizonyítások jól mutatják, természetesebbé teszi az aszimptotikus közelítést. Bizonyos statisztikai helyzetekben nem igazán természetes viszont az, hogy ugyanannyi kicsi és nagy extrémális megfigyelést hagyjunk el. Ha $1 \leq m_n < n - k_n < n$ olyan m_n és k_n egész számokra, hogy $m_n \to \infty$ és $k_n \to \infty$, de $m_n/n \to 0$ és $k_n/n \to 0$, akkor a (7)–(18) alatti tizenkét együttes konvergencia-reláció érvényben marad úgy is, hogy (13)–(18) alatt k_n-t mindenütt m_n-re cseréljük. Következésképpen, ahogy ez a bizonyításából látható, a (21) állítás egy alkalmasan módosított formája is érvényben marad az $[X_{m_n,n}, X_{n-k_n,n}]$ intervallumon kombinált sávra, mely sáv határvonalainak „váltópontjait" most a $c^*_{n,m_n}(\alpha)$ és $c^*_{n,k_n}(\alpha)$ értékek együttesen határozzák meg.

Mason [11] fent említett aszimptotikus függetlenségi eredménye valójában egy kissé általánosabb összefüggésben jelenik meg. Ő ugyanis az $1 - F(\cdot)$ és $F(\cdot)$ függvényektől általánosabb súlyfüggvényekre terjesztette ki a (3)–(6) állításokat. Például, ha $p_n \to 0$ és $np_n \to \infty$, akkor megmutatja, hogy

$$\sqrt{n}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{\frac{1}{2}-\theta} \sup_{F(x)\leq 1-p_n} \frac{F_n(x) - F(x)}{\left[1 - F(x)\right]^{1-\theta}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0<t<1} \frac{W(t)}{t^\theta},$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{\frac{1}{2}-\theta} \sup_{F(x)\leq 1-p_n} \frac{\left|F_n(x) - F(x)\right|}{\left[1 - F(x)\right]^{1-\theta}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0<t<1} \frac{|W(t)|}{t^\theta},$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{\frac{1}{2}-\theta} \sup_{p_n\leq F(x)} \frac{F_n(x) - F(x)}{\left[F(x)\right]^{1-\theta}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0<t<1} \frac{W_*(t)}{t^\theta},$$

$$\sqrt{n}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^{\frac{1}{2}-\theta} \sup_{p_n\leq F(x)} \frac{\left|F_n(x) - F(x)\right|}{\left[F(x)\right]^{1-\theta}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0<t<1} \frac{|W_*(t)|}{t^\theta}$$

együttesen teljesülnek bármely $\theta \in [0, 1/2)$ konstansra. (Ilyenirányú későbbi eredményekre és irodalomi utalásokra nézve lásd még az [5] könyv 5.1 és 5.5 részeit.) Mason [11] azt is bebizonyítja, hogy ha (3)–(6) mintájára csak annyit teszünk fel, hogy $0 < p_n \leq p$, $n \in \mathbb{N}$, valamely $p \in (0,1)$ számra és $np_n \to \infty$, akkor az első két együttes konvergencia még mindig igaz marad amennyiben az $\left[F(x)\right]^\theta$ szorzótényezővel kibővítjük a nevezőt, az utolsó két együttes konvergencia pedig úgy, hogy az $\left[1 - F(x)\right]^\theta$ faktorral bővítjük ki a nevezőt. Ha a (3)–(6) állítások helyett ezekből az általánosításokból indulunk ki, akkor az 1. és 2. Tétel összes állításának természetes általánosítására jutunk, amelyek mindegyike a megfelelő jelenlegi állításra redukálódik ha $\theta = 0$.

Tipikus esetekben a (19) és (20) alatti sávok használhatatlanul szélesek lesznek a baloldali és jobboldali farkakon ha a szokásos nominális lefedési valószínűségeket használjuk, például az $1 - \alpha = 0{,}9$ valószínűséget. Ez még olyan x pontokban is gyakran így lesz, ahol $F_n(x) \approx 1/2$, hogyha az érdeklődésünkre számottartó farkon messzire ki akarunk menni, vagyis ha k_n-t kicsinek választjuk. Persze ez még inkább így lesz a (21)-beli kombinált sáv középső részén. Ennélfogva a Rényi-féle sávok igazából farokbecslésre szolgálnak. Erre a célra viszont a k_n adott n melletti változtathatósága igazi előnyt jelent. Érdeklődésre tart számot annak szimulációs kimérése, hogy az n mintaméret és a k_n választásának milyen kombinációi mellett lesznek a valódi és a nominális lefedési valószínűségek elfogadhatóan közel, eltéréseiknek milyen az iránya, és hogy $\theta \in (1/2, 1)$ esetén statisztikailag hasznosak-e az $\left[1 - F(\cdot)\right]^{\theta}$ és $\left[F(\cdot)\right]^{\theta}$ súlyfüggvények ezekben a kérdésekben. Minthogy bármely véges n mintaméretre a lefedés valószínűsége semmilyen kiterjesztett Rényi-féle sáv esetén *nem* függ az ismeretlen folytonos F-től, mely tény a következő fejezetben azonnal világossá válik, mindössze egy ilyen szimulációs vizsgálatra van szükség. Ezt a problémakört már tanulmányozza egy tanítványom.*

2. Bizonyítások

Véletlen változók egy $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatára és pozitív konstansok egy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatára akkor írjuk, hogy $\xi_n = \mathcal{O}_P(a_n)$, ha $\lim_{y\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\{|\xi_n| > y a_n\} = 0$, és akkor írjuk, hogy $\xi_n = o_P(a_n)$, ha $\lim_{n\to\infty} P\{|\xi_n| > y a_n\} = 0$ bármely $y > 0$ esetén, vagyis ha a sztochasztikus konvergencia szokásos jelölésével $\xi_n/a_n \xrightarrow{P} 0$.

A bizonyítások egy olyan speciálisan konstruált $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn történnek, amelyen értelmezve van a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású független véletlen változóknak egy $U_1, U_2, \ldots$ sorozata, amelyre bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $U_{1,n} \leq \cdots \leq U_{n,n}$ jelöli az $U_1, \ldots, U_n$ minta rendezett elemeit, és Brown-hidak egy $B_1(\cdot), B_2(\cdot), \ldots$ sorozata úgy, hogy ha $G_n(s) := \#\{1 \leq j \leq n : U_j \leq s\}/n$ és $U_n(s) := \inf\{t \in [0,1] : G_n(t) \geq s\}$, $0 \leq s \leq 1$, jelölik a megfelelő empirikus eloszlás- és kvantilisfüggvényeket, tehát az utóbbira $U_n(s) = U_{k,n}$ ha $\frac{k-1}{n} < s \leq \frac{k}{n}$, $k = 1, \ldots, n$, és $U_n(0) = U_{1,n}$, akkor az ezekhez tartozó $\alpha_n(s) := \sqrt{n}\left[G_n(s) - s\right]$ és $\beta_n(s) := \sqrt{n}\left[s - U_n(s)\right]$, $0 \leq s \leq 1$, úgynevezett egyenletes empirikus és kvantilis folyamatokra a rögzített $\gamma \in (0, 1/4)$, $\delta \in (0, 1/2)$ és $\lambda > 0$ konstansok akármilyen választása mellett fennáll, hogy

$$\sup_{0<s<1} \frac{\left|\alpha_n(s) - B_n(s)\right|}{\left[s(1-s)\right]^{\frac{1}{2}-\gamma}} = \mathcal{O}_P\left(\frac{1}{n^{\gamma}}\right)$$

és

$$\sup_{\frac{\lambda}{n} \leq s \leq 1-\frac{\lambda}{n}} \frac{\left|\beta_n(s) - B_n(s)\right|}{\left[s(1-s)\right]^{\frac{1}{2}-\delta}} = \mathcal{O}_P\left(\frac{1}{n^{\delta}}\right).$$

Ez a konstrukció, az egyenletes empirikus és kvantilis folyamatok súlyozott approximációja, a [4] dolgozat egyik főeredménye. Az empirikus folyamatokra vonatkozó,

*A vizsgálatok fontosabb része időközben már befejeződött: Megyesi Zoltán, Rényi-féle konfidenciasávok lefedési valószínűségeiről, *Matematikai Lapok,* jelen szám.

a nemzetközi szakirodalomban egyszerűen *magyar konstrukcióknak* nevezett approximációknak a nevezetes Komlós–Major–Tusnády beágyazás mellett ez a másik megjelenési formája. (Arra, hogy az $\alpha_n(\cdot)$-re vonatkozó első szuprémum az egész $(0,1)$ intervallumra kiterjeszthető, a [10] dolgozatban mutattunk rá. Különben az első állítás $\gamma = 0$ esetén is érvényes, amennyiben a $B_n(\cdot)$ folyamatot azzal a $B_n^*(\cdot)$ folyamattal helyettesítjük, amely az $[1/n, (n-1)/n]$ intervallumon belül $B_n(\cdot)$, azon kívül pedig nulla.) Jegyezzük meg egyből, hogy a $\{k_n\}$ sorozatra az 1. Tételben tett feltételek mellett a $\beta_n(\cdot)$-re vonatkozó második relációból azonnal következik, hogy

$$\frac{n}{\sqrt{k_n}}\left\{U_{n-k_n,n} - \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)\right\} = -\sqrt{\frac{n}{k_n}}B_n\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) + \mathcal{O}_P\left(\frac{1}{k_n^\delta}\right) \tag{22}$$

és

$$\frac{n}{\sqrt{k_n}}\left\{U_{k_n,n} - \frac{k_n}{n}\right\} = -\sqrt{\frac{n}{k_n}}B_n\left(\frac{k_n}{n}\right) + \mathcal{O}_P\left(\frac{1}{k_n^\delta}\right),$$

ahol $\mathcal{O}_P(1/k_n^\delta) = o_P(1)$ minthogy $k_n \to \infty$,

$$\begin{aligned}P\left\{-\sqrt{\frac{n}{k_n}}B_n\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) < -x\right\} &= P\left\{-\sqrt{\frac{n}{k_n}}B_n\left(\frac{k_n}{n}\right) < -x\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{-x}{\sqrt{1 - \frac{k_n}{n}}}\right) \leq \Phi(-x)\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}P\left\{-\sqrt{\frac{n}{k_n}}B_n\left(1 - \frac{k_n}{n}\right) > x\right\} &= P\left\{-\sqrt{\frac{n}{k_n}}B_n\left(\frac{k_n}{n}\right) > x\right\} \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1 - \frac{k_n}{n}}}\right) \leq 1 - \Phi(x) = \Phi(-x)\end{aligned}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ és $x > 0$ esetén.

Mivel $\{F_n(x) : x \in \mathbb{R}\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \{G_n(F(x)) : x \in \mathbb{R}\}$, ahol a $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ eloszlásbeli egyenlőség a szóbanforgó két folyamat összes végesdimenziós eloszlásainak egyenlőségét jelöli, az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény mindvégig feltett folytonosságából azonnal következik, hogy a (3)–(6) alatti statisztikák egyikének sem függ az eloszlása F-től. Továbbmenőleg, ha bevezetjük az F-hez tartozó $F^{-1}(s) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\}$ kvantilisfüggvényt, $0 < s \leq 1$, amelyre $F^{-1}(0) := \lim_{s \downarrow 0} F^{-1}(s)$, a (7) formula baloldalára azonnal látjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sup_{x \leq X_{n-k_n,n}} \frac{F_n(x) - F(x)}{1 - F(x)} &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{F(x) \leq F(F^{-1}(U_{n-k_n,n}))} \frac{G_n(F(x)) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \sup_{0 \leq s \leq U_{n-k_n,n}} \frac{G_n(s) - s}{1 - s}\end{aligned}$$

minden értelmes n esetén; sőt, az eloszlásbeli egyenlőségek n-ben együttesen is fennállnak, de erre nem lesz szükségünk a jelen munkában. Ugyanezen a módon világos így az is, hogy a (7)–(18) alatti statisztikák egyikének sem függ az eloszlása a folytonos F-től. Ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük az alábbi bizonyítások mindegyikében, hogy F a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlás eloszlásfüggvénye. Ezt fel is tesszük, mint ahogy ugyanígy azt is, hogy a fent leírt speciálisan konstruált mezőn vagyunk és hogy összes statisztikánk a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású független változók ottani $U_1, U_2, \dots$ sorozatának segítségével van felírva, tehát azéval, amelyre a súlyozott approximációk érvényesek.

A (3)–(6) állítások bizonyítása. Ahogy már mondtuk, ez a bizonyítás a [4] dolgozatból származik. Rögzítsünk le egy $\gamma \in (0, 1/4)$ számot. Ekkor

$$(23) \qquad \sup_{0\le s\le 1-p_n}\left|\sqrt{\frac{np_n}{1-p_n}}\,\frac{G_n(s)-s}{1-s}-\sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}}\,\frac{B_n(s)}{1-s}\right|$$

$$= \sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}}\sup_{0\le s\le 1-p_n}\left|\frac{\alpha_n(s)}{1-s}-\frac{B_n(s)}{1-s}\right|$$

$$\le \sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}}\sup_{p_n\le 1-s\le 1}\frac{1}{(1-s)^{\frac12+\gamma}}\sup_{0\le s\le 1}\frac{|\alpha_n(s)-B_n(s)|}{(1-s)^{\frac12-\gamma}}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{1-p}}\,\frac{p_n^{\frac12}}{p_n^{\frac12+\gamma}}\,\mathcal{O}_P\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

$$= \mathcal{O}_P\left(\frac{1}{(np_n)^\gamma}\right) = o_P(1).$$

De minthogy

$$\left\{\sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}}\,\frac{B_n(s)}{1-s} : 0\le s\le 1-p_n\right\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\{W\left(\frac{p_n}{1-p_n}\,\frac{s}{1-s}\right) : 0\le s\le 1-p_n\right\}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, így az is igaz, hogy

$$\sup_{0\le s\le 1-p_n}\sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}}\,\frac{B_n(s)}{1-s} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{0\le s\le 1-p_n} W\left(\frac{p_n}{1-p_n}\,\frac{s}{1-s}\right) = \sup_{0\le t\le 1} W(t)$$

és

$$\sup_{0\le s\le 1-p_n}\sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}}\,\frac{|B_n(s)|}{1-s} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{0\le s\le 1-p_n}\left|W\left(\frac{p_n}{1-p_n}\,\frac{s}{1-s}\right)\right| = \sup_{0\le t\le 1}|W(t)|.$$

Ezekből (3) és (4) már következik. Az (5) és (6) állítások bizonyítása teljesen hasonlóan történik; formailag ezeket részleteztük a [4] dolgozat 4.5. fejezetében. ■

Az 1. Tétel (9), (12), (15) és (18) összefüggéseinek bizonyítása egy segédtételt kíván meg.

Lemma. *Ha a* $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozat kielégíti az 1. Tétel feltételeit, akkor*

$$\sup_{0\le s\le U_{n-k_n,n}}\left|\frac{1-s}{1-G_n(s)}-1\right|\xrightarrow{P}0 \quad \text{és} \quad \sup_{U_{k_n,n}\le s\le 1}\left|\frac{s}{G_n(s)}-1\right|\xrightarrow{P}0.$$

Bizonyítás. Rögzítsünk most egy $\varepsilon\in(0,1]$ számot. Ekkor Rényi [13] dolgozata 3.§-ának egyszerű ötletével,

$$\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{0\le s\le U_{n-k_n,n}}\left|\frac{1-s}{1-G_n(s)}-1\right|>\varepsilon\right\}\\
&=1-P\left\{-\varepsilon\le\frac{1-s}{1-G_n(s)}-1\le\varepsilon,\quad 0\le s\le U_{n-k_n,n}\right\}\\
&=1-P\left\{-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\le\frac{1-G_n(s)}{1-s}-1\le\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\quad 0\le s\le U_{n-k_n,n}\right\}\\
&\le 1-P\left\{-\frac{\varepsilon}{2}\le\frac{1-G_n(s)}{1-s}-1\le\frac{\varepsilon}{2},\quad 0\le s\le U_{n-k_n,n}\right\}\\
&=P\left\{\sup_{0\le s\le U_{n-k_n,n}}\left|\frac{1-G_n(s)}{1-s}-1\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}\\
&\le P\left\{\sup_{0\le s\le 1-q\frac{k_n}{n}}\left|\frac{1-G_n(s)}{1-s}-1\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{U_{n-k_n,n}>1-q\frac{k_n}{n}\right\},
\end{aligned}$$

és hasonlóan

$$\begin{aligned}
&P\left\{\sup_{U_{k_n,n}\le s\le 1}\left|\frac{s}{G_n(s)}-1\right|>\varepsilon\right\}\\
&\le P\left\{\sup_{q\frac{k_n}{n}\le s\le 1}\left|\frac{G_n(s)}{s}-1\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right\}+P\left\{U_{k_n,n}<q\frac{k_n}{n}\right\}
\end{aligned}$$

akármilyen $q\in(0,1)$ esetén. Mármost az többféle módon is látható, hogy a felső korlátok második tagjai nullához tartanak. (Sőt, tetszőleges $q\in(0,1)$ mellett ezek nem nagyobbak, mint $e^{-C_q k_n}$, olyan $C_q>$ konstansokra, amelyekre $\lim_{q\downarrow 0}C_q=\infty$; lásd a (4.2) relációt és bizonyítását a [7] dolgozatban.) Azok az egymással ekvivalens állítások, hogy a korlátok első tagjai minden $q\in(0,1)$ számra nullához tartanak, jól ismertek. Ezt először Chang Li-Chien bizonyította 1955-ben; talán a legegyszerűbb direkt bizonyítás a [16] cikkben található. ■

Az 1. Tétel bizonyítása. Legyen $p_n := k_n/n$, $n \geq 1/p$. Ekkor $p_n \leq p$ a feltételbeli $p \in (0,1)$ számmal és $np_n \to \infty$, míg $\sqrt{k_n}/n = \sqrt{p_n/n} \to 0$. Ahhoz hogy (7), (8) és (11) bizonyítást nyerjenek azt kell belátnunk, hogy

$$\sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}} \sup_{0 \leq s \leq U_{n-k_n,n}} \frac{[\alpha_n(s)]_l}{1-s} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} [W(t)]_l, \quad l = 1,2,3, \tag{24}$$

ahol minden valós z-re $[\![z]\!]_1 := z$, $[\![z]\!]_2 := -z$ és $[\![z]\!]_3 := |z|$.

Pontosan ugyanúgy, mint a fenti (23) becslésben,

$$\sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}} \sup_{0 \leq s \leq U_{n-k_n,n}} \left| \frac{\alpha_n(s)}{1-s} - \frac{B_n(s)}{1-s} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-p}} \frac{p_n^{\frac{1}{2}}}{[1 - U_{n-k_n,n}]^{\frac{1}{2}+\gamma}} \mathcal{O}_P\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$$

tetszőlegesen rögzített $\gamma \in (0, 1/4)$ számra. Ha most $Y_1, Y_2, \ldots$ független exponenciális eloszlású véletlen változók, amelyek mindegyikének várható értéke 1, akkor $1/[1 - U_{n-k_n,n}] \stackrel{\mathcal{D}}{=} [Y_1 + \cdots + Y_{n+1}]/[Y_{n-k_n+1} + \cdots + Y_n]$ minden n-re, és ezáltal könnyen látható, hogy $p_n^{\frac{1}{2}}/[1 - U_{n-k_n,n}]^{\frac{1}{2}+\gamma} = \mathcal{O}_P(n^\gamma/k_n^\gamma)$, miből következően az egész felső korlát sztochasztikus rendje $\mathcal{O}_P(1/k_n^\gamma) = o_P(1)$. Ahhoz tehát hogy (24)-et bebizonyítsuk, elegendő belátni, hogy

$$\sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}} \sup_{0 \leq s \leq U_{n-k_n,n}} \frac{[B_n(s)]_l}{1-s} \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0 \leq t \leq 1} [W(t)]_l, \quad l = 1,2,3, \tag{25}$$

a speciális konstrukció összetevőire.

Minden $y \geq 0$ és $x > 0$ számra, valamint $l = 1,2,3$ bármelyikére

$$P\left\{\sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}} \sup_{0 \leq s \leq 1 - p_n - x\sqrt{\frac{p_n}{n}}} \frac{[B_n(s)]_l}{1-s} \leq y\right\} - P\left\{U_{n-k_n,n} < 1 - \frac{k_n}{n} - x\frac{\sqrt{k_n}}{n}\right\}$$

$$\leq P\left\{\sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}} \sup_{0 \leq s \leq U_{n-k_n,n}} \frac{[B_n(s)]_l}{1-s} \leq y\right\}$$

$$\leq P\left\{\sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}} \sup_{0 \leq s \leq 1 - p_n + x\sqrt{\frac{p_n}{n}}} \frac{[B_n(s)]_l}{1-s} \leq y\right\}$$

$$+ P\left\{U_{n-k_n,n} > 1 - \frac{k_n}{n} + x\frac{\sqrt{k_n}}{n}\right\}$$

amennyiben n elég nagy ahhoz, hogy az $x \leq \sqrt{n/p_n}$ és $x\sqrt{n/p_n} \leq 1 - p_n$ egyenlőtlenségek teljesüljenek. Mivel

$$\sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}} \sup_{0 \leq s \leq 1-p_n \pm x\sqrt{p_n/n}} \frac{\left[B_n(s)\right]_l}{1-s}$$

$$\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{0 \leq s \leq 1-p_n \pm x\sqrt{p_n/n}} \left[\!\left[W\left(\frac{p_n}{1-p_n}\frac{s}{1-s}\right)\right]\!\right]_l$$

$$= \sup\left\{ \left[W(t)\right]_l : 0 \leq t \leq \frac{1 \pm \frac{x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}}}{1 \mp \frac{x}{\sqrt{np_n}}} \right\}$$

$$\to \sup\left\{ \left[W(t)\right]_l : 0 \leq t \leq 1 \right\},$$

ahol a konvergencia a $W(\cdot)$ folyamat minta-folytonossága következtében majdnem biztosan teljesül, és mivel a $\sup_{0 \leq t \leq 1} \left[W(t)\right]_l$ változó eloszlásfüggvénye folytonos, $l = 1, 2, 3$, (22)-nek a jobboldali farokra vonatkozó része maga után vonja, hogy

$$P\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} \left[W(t)\right]_l \leq y\} - \Phi(-x)$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} P\left\{ \sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}} \sup_{0 \leq s \leq U_{n-k_n,n}} \frac{\left[B_n(s)\right]_l}{1-s} \leq y \right\}$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} P\left\{ \sqrt{\frac{p_n}{1-p_n}} \sup_{0 \leq s \leq U_{n-k_n,n}} \frac{\left[B_n(s)\right]_l}{1-s} \leq y \right\}$$

$$\leq P\left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} \left[W(t)\right]_l \leq y \right\} + \Phi(-x)$$

minden $y \geq 0$ és $x > 0$ számra, valamint $l = 1, 2, 3$ bármelyikére. Ha most $x \to \infty$, akkor (25) már következik.

Így (7), (8) és (11) már bizonyítottak. A (9), (10) és (12) relációknak a $(0, 1)$-en egyenletes eloszláshoz tartozó változatai, amelyek magukkal a (9), (10) és (12) állításokkal ekvivalensek, rendre következnek a (7), (8) és (11) valamint a Lemma első állításának kombinációiból. Az hogy az eloszlásbeli konvergenciára vonatkozó hat állítás együttesen is teljesül, nyilvánvalóan következik az egész bizonyítás szerkezetéből: mindent egyszerre kell csinálni, és ezt persze lehet.

A baloldali (13), (14) és (17) változatok bizonyítása teljesen analóg, avagy matematikailag egyenértékű (7), (8) és (11) bizonyításával, (15), (16) és (18) pedig ismét rendre következik a (13), (14) és (17) valamint a Lemma második állításának összetevésével. Az megintcsak nyilvánvaló, hogy a hat határeloszlás együttesen is fennáll.

Abban az esetben amikor $k_n/n \to 0$, az aszimptotikus függetlenségre vonatkozó legutolsó kijelentés bizonyításához a $j = 0$ és $j = 1$ értékekre vezessük be a

$$\xi_{n,k_n}^{(j)}(s) := \sqrt{\frac{k_n}{1-\frac{k_n}{n}}}\,\frac{G_n(s)-s}{1-G_n^{(j)}(s)} \quad \text{és} \quad \eta_{n,k_n}^{(j)}(s) := \sqrt{\frac{k_n}{1-\frac{k_n}{n}}}\,\frac{G_n(s)-s}{G_n^{(j)}(s)}$$

folyamatokat, ahol $G_n^{(0)}(s) = s$, $0 \le s \le 1$, és $G_n^{(1)}(s) = G_n(s)$, $0 \le s \le 1$, minden n-re. Ekkor

$$V_{n,k_n}^{(3j+l)} := \sup_{0\le s\le U_{n-k_n,n}} \left[\xi_{n,k_n}^{(j)}(s)\right]_l \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le t\le 1}\left[W(t)\right]_l := V_l, \quad j=0,1;\ l=1,2,3,$$

együttes fennállása, valamint

$$W_{n,k_n}^{(3j+l)} := \sup_{U_{k_n,n}\le s\le 1} \left[\eta_{n,k_n}^{(j)}(s)\right]_l \xrightarrow{\mathcal{D}} \sup_{0\le t\le 1}\left[W_*(t)\right]_l := V_l^*, \quad j=0,1;\ l=1,2,3,$$

együttes fennállása jelenti rendre a (7)–(12) alatti hat konvergencia valamint a (13)–(18) alatti hat konvergencia már belátott együttes fennállását. A kérdés az, hogy teljesül-e együtt mind a tizenkettő.

Legyen $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ egész számok olyan sorozata, hogy $1 \le k_n < m_n < n$ ha $n \ge 3$ és $m_n/n \to 0$, de $m_n/k_n \to \infty$. Vezessük be a

$$V_{n,k_n,m_n}^{(3j+l)} := \sup_{U_{n-m_n,n}\le s\le U_{n-k_n,n}} \left[\xi_{n,k_n}^{(j)}(s)\right]_l, \quad j=0,1;\ l=1,2,3,$$

és

$$W_{n,k_n,m_n}^{(3j+l)} := \sup_{U_{k_n,n}\le s\le U_{m_n,n}} \left[\eta_{n,k_n}^{(j)}(s)\right]_l, \quad j=0,1;\ l=1,2,3,$$

véletlen változókat. Ekkor $j = 0, 1$ és $l = 1, 2, 3$ összes társításához tartozó mind a hat esetre

$$(26) \qquad \left|V_{n,k_n,m_n}^{(3j+l)} - V_{n,k_n}^{(3j+l)}\right| \le \sqrt{\frac{k_n}{m_n}}\,\frac{\sqrt{1-\frac{m_n}{n}}}{\sqrt{1-\frac{k_n}{n}}}\,V_{n,m_n}^{(3j+3)} = o(1)\mathcal{O}_P(1) = o_P(1),$$

ahol az első egyenlőség (11) és (12) használatával adódik, vagyis úgy, hogy a $j = 0$ és $j = 1$ eseteket az $l = 3$ esettel párosítjuk a konvergencia-állítások előbbi első hatos csoportjában; mind a két állítást most persze a $\{k_n\}$ sorozat helyett az $\{m_n\}$ sorozattal alkalmazzuk. Hasonlóan látható az is, hogy

$$W_{n,k_n,m_n}^{(3j+l)} - W_{n,k_n}^{(3j+l)} \xrightarrow{P} 0, \quad j=0,1;\ l=1,2,3.$$

Ezért, minthogy

$$\mathbf{V}_{n,k_n} := \left(V_{n,k_n}^{(1)}, \ldots, V_{n,k_n}^{(6)}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} (V_1, V_2, V_3, V_1, V_2, V_3) =: \mathbf{V}$$

és

$$\mathbf{W}_{n,k_n} := \left(W^{(1)}_{n,k_n}, \ldots, W^{(6)}_{n,k_n}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} (V_1^*, V_2^*, V_3^*, V_1^*, V_2^*, V_3^*) =: \mathbf{V}_*$$

az $\mathbb{R}^6$ térben (ahol történetesen jelölésünk szerint $\mathbf{V}$ és $\mathbf{V}_*$ egymástól független változók valamilyen valószínűségi mezőn és $\mathbf{V} \overset{\mathcal{D}}{=} \mathbf{V}_*$, de azt még nem tudjuk itt, hogy az utóbbi két vektorsorozat együttes eloszlása is konvergál; éppen ezt akarjuk bizonyítani), az is igaz, hogy

$$\mathbf{V}_{n,k_n,m_n} := \left(V^{(1)}_{n,k_n,m_n}, \ldots, V^{(6)}_{n,k_n,m_n}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{V} \quad \text{az } \mathbb{R}^6 \text{ térben}$$

és

$$\mathbf{W}_{n,k_n,m_n} := \left(W^{(1)}_{n,k_n,m_n}, \ldots, W^{(6)}_{n,k_n,m_n}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{V}_* \quad \text{az } \mathbb{R}^6 \text{ térben.}$$

Vegyük észre, hogy a $\mathbf{V}_{n,k_n,m_n}$ vektor csak a rendezett minta $U_{n-m_n,n}, \ldots, U_{n,n}$ felső extrémális elemeinek függvénye, míg a $\mathbf{W}_{n,k_n,m_n}$ vektor csak az $U_{1,n}, \ldots, U_{m_n,n}$ alsó extrémális elemeké. Így, mivel $m_n \to \infty$ és $m_n/n \to 0$, Rossberg [15] dolgozatának 4. Tételéből következik, hogy a $\mathbf{V}_{n,k_n,m_n}$ és $\mathbf{W}_{n,k_n,m_n}$ véletlen vektorok aszimptotikusan függetlenek. Mivel azt már beláttuk, hogy

$$(\mathbf{V}_{n,k_n} - \mathbf{V}_{n,k_n,m_n}, \mathbf{W}_{n,k_n} - \mathbf{W}_{n,k_n,m_n}) \xrightarrow{P} (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{12},$$

ezért a $\mathbf{V}_{n,k_n}$ és $\mathbf{W}_{n,k_n}$ véletlen vektorok ugyancsak aszimptotikusan függetlenek, vagy ami ugyanaz, $(\mathbf{V}_{n,k_n}, \mathbf{W}_{n,k_n}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\mathbf{V}, \mathbf{V}_*)$ az $\mathbb{R}^{12}$ térben. ■

A 2. Tétel bizonyítása. Bevezetve a

$$\zeta_{n,k_n}(x) := \sqrt{\frac{k_n}{1-\frac{k_n}{n}}}\,\frac{F_n(x)-F(x)}{1-F(x)} \quad \text{és} \quad \rho_{n,k_n}(x) := \sqrt{\frac{k_n}{1-\frac{k_n}{n}}}\,\frac{F_n(x)-F(x)}{1-F_n(x)}$$

jelöléseket, látjuk, hogy (19) baloldala nem egyéb mint

$$\begin{aligned}
&P\big\{\{-\zeta_{n,k_n}(x) \le z_\alpha,\ x \le X_{n-k_n,n}\} \cap \{\rho_{n,k_n}(x) \le z_\alpha,\ x \le X_{n-k_n,n}\}\big\} \\
&= P\Big\{\Big\{-z_\alpha \le \inf_{x \le X_{n-k_n,n}} \zeta_{n,k_n}(x)\Big\} \cap \Big\{\sup_{x \le X_{n-k_n,n}} \rho_{n,k_n}(x) \le z_\alpha\Big\}\Big\} \\
&\to P\Big\{\Big\{-z_\alpha \le \inf_{0 \le t \le 1} W(t)\Big\} \cap \Big\{\sup_{0 \le t \le 1} W(t) \le z_\alpha\Big\}\Big\} \\
&= P\Big\{\sup_{0 \le t \le 1} |W(t)| \le z_\alpha\Big\} = L(z_\alpha) = 1 - \alpha,
\end{aligned}$$

ahol a határátmenet (8) és (9) együttes alkalmazásából adódik. A baloldali farokra vonatkozó (20) állítás ugyanígy következik (13) és (16) együttes fennáltából.

Végül vezessük be az

$$A_{n,k_n}(x) := \left\{ \frac{1 - F_n(x)}{c^*_{n,k_n}(\alpha)} \leq 1 - F(x) \leq c^*_{n,k_n}(\alpha)\left[1 - F_n(x)\right] \right\}$$

és

$$B_{n,k_n}(x) := \left\{ \frac{F_n(x)}{c^*_{n,k_n}(\alpha)} \leq F(x) \leq c^*_{n,k_n}(\alpha) F_n(x) \right\}$$

eseményeket. Ekkor (21) baloldala megegyezik a

$$p_n := P\big\{\{A_{n,k_n}(x),\ X_{k_n,n} \leq x \leq X_{n-k_n,n}\} \cap \{B_{n,k_n}(x),\ X_{k_n,n} \leq x \leq X_{n-k_n,n}\}\big\}$$

valószínűséggel, ami éppen a szóbanforgó sáv bevezetését motiváló gondolatmenet részleteiből látható. Minthogy (26) és a megfelelő bal-farki változat miatt

$$P\{A_{n,k_n}(x),\ x < X_{k_n,n}\} \to 1 \quad \text{és} \quad P\{B_{n,k_n}(x),\ x > X_{n-k_n,n}\} \to 1,$$

használva (19) és (20) fenti bizonyítását látjuk, hogy

$$p_n \to P\Big\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} \big|W(t)\big| \leq z^*_\alpha,\ \sup_{0 \leq t \leq 1} \big|W_*(t)\big| \leq z^*_\alpha \Big\} = L^2(z^*_\alpha) = 1 - \alpha,$$

nevezetesen (8), (9), (13) és (16) négyváltozós vektoriális alkalmazásával. ■

Hivatkozások

[1] Csáki E., Vizsgálatok az empirikus eloszlásfüggvényről, *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztály Közleményei* **23** (1974), 239–327. [Angol fordítás: Investigations concerning the empirical distribution function, In: *Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability* **15**, 229–317. American Mathematical Society, 1981.]

[2] Csörgő M., Some Rényi type limit theorems for empirical distribution functions, *Ann. Math. Statist.*, **36** (1965), 322–326.

[3] Csörgő M., A new proof of some results of Rényi and the asymptotic distribution of the range of his Kolmogorov–Smirnov type random variables, *Canadian J. Math.*, **19** (1967), 550–558.

[4] Csörgő M., Csörgő S., Horváth L. and Mason, D. M., Weighted empirical and quantile processes, *Ann. Probab.*, **14** (1986), 31–85.

[5] Csörgő M. and Horváth L., *Weighted Approximations in Probability and Statistics*, Wiley (Chichester, 1993).

[6] Csörgő M. and Révész P., *Strong Approximations in Probability and Statistics*, Akadémiai Kiadó (Budapest) and Academic Press (New York, 1981).

[7] Csörgő S., Universal Gaussian approximations under random censorship, *Ann. Statist.*, **24** (1996), 2744–2778.

[8] Csörgő S. and Horváth L., The baboons come down from the trees quite normally, In: *Proceedings of the Fourth Pannonian Symposium on Mathematical Statistics,* Vol. B (W. Grossman, G. Ch. Pflug, I. Vincze and W. Wertz, eds.), pp. 95–106. D. Reidel (Dordrecht, 1985).

[9] Csörgő S. and Horváth L., Confidence bands from censored samples, *Canadian J. Statist.*, **14** (1986), 131–144.

[10] Csörgő S. and Mason, D. M., Bootstrapping empirical functions, *Ann. Statist.*, **17** (1989), 1447-1471.

[11] Mason, D. M., The asymptotic distribution of generalized Rényi statistics, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **48** (1985), 315–323.

[12] Rényi A., A rendezett minták elméletéről, *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztály Közleményei,* **3** (1953), 467–503. [Angol változat: On the theory of order statistics, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **4** (1953), 191–231.]

[13] Rényi A., A rendezett minták elméletének egy problémaköréről, *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztály Közleményei,* **18** (1968), 23–30. [Angol változat: On some problems in the theory of order statistics, *Bull. Inst. Internat. Statist.*, **42** (1969), 165–176.]

[14] Rényi A., *Valószínűségszámítás,* Második kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968.

[15] Rossberg, H.-J., Über das asymptotische Verhalten der Rand- und Zentralglieder einer Variationsreihe (II), *Publ. Math. Debrecen,* **14** (1967), 83–90.

[16] Wellner, J. A., Limit theorems for the ratio of the empirical distribution function to the true distribution function, *Z. Wahrsch. verw. Gebiete,* **45** (1978), 73–88.

Csörgő Sándor

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet
H–6720 Szeged
Aradi vértanúk tere 1.

Sándor Csörgő: Rényi Confidence Bands

Rényi's asymptotic confidence bands for distribution or survival functions, the width of which at each point is proportional to the natural estimator of the function to be estimated, are shown to extend far out to small and large order statistics, respectively. Certain combinations of these bands are also proposed.

RÉNYI-FÉLE KONFIDENCIASÁVOK LEFEDÉSI VALÓSZÍNŰSÉGEIRŐL*

MEGYESI ZOLTÁN

Csörgő Sándor [6]-tal jelölt cikkének folytatásaként az ott tárgyalt kiterjesztett Rényi-féle konfidenciasávok gyakorlati alkalmazhatóságának és az alkalmazás feltételeinek vizsgálata történik egy széleskörű szimuláció alapján. Néhány új sáv is ismertetésre kerül.

1. Bevezetés

Rényi Alfréd 1953-as [8] dolgozatának 5. és 6. (a [8] magyar változatában 3.1. és 3.2.) tételei olyan, az eloszlás– vagy túlélésfüggvényre vonatkozó aszimptotikus konfidenciasávok szerkesztését teszik lehetővé, amelyek szélessége minden pontban a becsülendő függvény torzítatlan becslésével arányos. E tulajdonsággal rendelkező sávokat nevezzük *Rényi-féle konfidenciasávoknak.* Csörgő Miklós [2]-ben megmutatta, hogy Rényi ezen két tételében a nevezőben ill. a szuprémum tartományát meghatározó kifejezésben az $F(\cdot)$ ismeretlen folytonos eloszlásfüggvény az $F_n(\cdot)$ empirikus eloszlásfüggvénnyel helyettesíthető. Ezen behelyettesítések elvégzésével azonos nominális lefedési valószínűségű, de eltérő alakú sávokat kapunk. Csáki Endre [1] disszertációjának 2.8. és 2.9. tételei szerint Rényi egyoldali statisztikákra vonatkozó 5. tétele akkor is érvényben marad, ha az eddigi rögzített p-t egy olyan $p_n \in (0,1)$ sorozatra cseréljük, hogy $p_n \to 0$ és $np_n \to \infty$; továbbá megadja véges mintaelemszám esetén ezen egyoldali statisztikák pontos eloszlásait is. (Itt és a későbbiekben minden konvergenciára vonatkozó állítás $n \to \infty$ mellett értendő.) Csörgő Miklós, Csörgő Sándor, Horváth Lajos és David M. Mason [3] bebizonyította, hogy Rényi *mindkét* tétele érvényben marad tetszőleges $p_n \in (0,p)$ sorozatra, bármely $p \in (0,1)$ valós szám esetén, feltéve, hogy $np_n \to \infty$; azaz még a $p_n \to 0$ feltétel is elhagyható. (Ennek bizonyítása a [6] cikkben is megtalálható.)

Csörgő Sándor [6] megmutatja, hogy Rényi tételeiben a nevezőben szereplő és a szuprémum tartományát meghatározó kifejezésben $F(\cdot)$ helyére $F_n(\cdot)$ sokkal álta-

*Készült a Pro Renovanda Cultura Hungariae Alapítvány „Diákok a tudományért" szakalapítványának részleges támogatásával. A dolgozat angol nyelvű változata a *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* Rényi emlékszámában jelent meg: **34** (1998), 317–332.

lánosabb feltételek mellett behelyettesíthető, s a sávok kiterjeszthetőek aszimptotikusan kicsi mintaelemekig (ez a dolgozatban az 1. tétel); a 2. tétel pedig bizonyos szűkített és kombinált változatok létezését igazolja.

A fenti eredmények mind határeloszlástételek, Csáki [1] egyoldali statisztikák véges eloszlásait megadó formulái kivételével. Bármilyen gyakorlati alkalmazásnál jó tudni, hogy a különböző sávok esetén a nominális, vagyis a limeszben beálló lefedési valószínűséghez a konvergencia milyen irányból történik, és a statisztikai gyakorlatban szokásos mintaméret esetén a tényleges lefedési valószínűségek mikor kerülnek hozzá elfogadhatóan közel; továbbá adott mintaméret és nominális lefedési valószínűség esetén honnan induljanak a Rényi-féle sávok, hogy a tényleges lefedési valószínűség a nominálist elérje vagy meghaladja. Jelen dolgozat tárgya egy ezeknek a kérdéseknek a megválaszolását célzó átfogó szimulációs vizsgálat eredményeinek az ismertetése.

Használni fogjuk Csörgő Sándor [6] jelöléseit, megállapodásait és definícióit, dolgozatunk tehát [6] folytatásának tekinthető. Eredményeinket mindig az eloszlás jobb oldali farka, pontosabban az $1 - F(\cdot)$ túlélésfüggvény becslése által motivált formában írjuk, az ekvivalens bal farki változatokat a 6. fejezetben adjuk meg.

A továbbiak során következetesen fogunk használni néhány kifejezést. Konfidencia*sávról* akkor fogunk beszélni, ha az ismeretlen eloszlásfüggvény lefutására alsó és felső határt egyszerre adunk meg; konfidencia*vonalról* pedig akkor, ha csak az egyiket. (Eddig konfidenciasávra a kétoldali statisztika, konfidenciavonalra az egyoldali statisztika elnevezést használtuk, de ezek a jelzők mást fognak jelenteni.) *Egyoldali* sávról vagy vonalról akkor fogunk beszélni, ha sávunk vagy vonalunk az eloszlás jobb és bal oldali farka közül csak az egyiknek a becslésére hasznos; s *kétoldaliról,* ha mindkettőről egyszerre akarunk valamit mondani. (Mint tudjuk, a Rényi-féle konfidenciasávok elsősorban farokbecslésre szolgálnak.) Ebben az értelemben majdnem az összes sávunk és vonalunk egyoldali lesz; kétoldali például az alább a (8) formulával megadott.

Rögzítsünk valamely $\alpha \in (0,1)$ elsőfajú hibát, s legyenek $y_\alpha, z_\alpha, w_\alpha$ azok az egyértelműen meghatározott pozitív valós számok, melyekre $K(y_\alpha) = L(z_\alpha) = 2\Phi(w_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$, ahol $K(\cdot)$ a Kolmogorov-féle eloszlásfüggvény, $L(\cdot)$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett standard Wiener-folyamat abszolút szuprémumának, $\Phi(\cdot)$ pedig a standard normális eloszlásnak az eloszlásfüggvénye. (Az y_α és w_α számok a $K(\cdot)$ és $\Phi(\cdot)$ függvényekre közölt táblázatokból kiolvashatóak, z_α pedig az $L(\cdot)$-ra [4]-ben adottból. A nagyobb pontosság érdekében azonban programjaink ezeket a kritikus értékeket maguk számolták ki.) Legyenek tetszőleges $p_n \in (0,1)$-re

$$\gamma_{p_n}^{+}(\alpha) := 1 + w_\alpha \sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}; \quad c_{p_n}^{+} := 1 + z_\alpha \sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}; \quad c_{p_n}^{-} := 1 - z_\alpha \sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}.$$

Ha $p_n \equiv p$, akkor Rényi [8] 5. tételéből a következő konfidenciavonalat kapjuk:

$$P\left\{\frac{1-F_n(x)}{\gamma_{p_n}^{+}(\alpha)} \le 1 - F(x), \quad F(x) \le 1 - p_n\right\} \to 1 - \alpha, \tag{1}$$

a 6. tétel pedig a következő sávot adja:

$$(2)\qquad P\left\{\frac{1-F_n(x)}{c^+_{p_n}(\alpha)} \le 1-F(x) \le \frac{1-F_n(x)}{c^-_{p_n}(\alpha)},\quad F(x)\le 1-p_n\right\} \to 1-\alpha.$$

A [6] dolgozat szerint (1) és (2) tetszőleges $p \in (0,1)$ esetén bármely $p_n \in (0,p)$ sorozatra igaz, feltéve, hogy $np_n \to \infty$. Az (1) és (2) sávok tartója, a $\left(-\infty,\ F^{-1}(1-p_n)\right]$ intervallum nem függ a véletlentől; vagyis az $F(\cdot)$ által determinált. Probléma csak ott van, hogy ha egy nullhipotézis nem specifikálja $F(\cdot)$-et, akkor (1) és (2) nincsenek meghatározva. Ennélfogva csak tiszta illeszkedési próbákra használhatóak, és az ismeretlen eloszlásfüggvény becslésére, vagyis valódi sávszerkesztésre alkalmatlanok. Megkülönböztetésül a következő bekezdésben tárgyaltaktól, az ilyen sávokat és vonalakat *tesztelési* sávoknak ill. vonalaknak fogjuk nevezni.

Csörgő [6] 1. tételének (7) formulájából kapjuk a következő konfidenciavonalat:

$$(3)\qquad P\left\{\frac{1-F_n(x)}{\gamma^+_{k_n}(\alpha)} \le 1-F(x),\quad x\le X_{n-k_n,n}\right\} \to 1-\alpha,$$

ahol

$$\gamma^+_{n,k_n} = 1 + w_\alpha\sqrt{\frac{1-\frac{k_n}{n}}{k_n}},$$

$X_{i,n}$ pedig az n elemű rendezett minta i-dik eleme. Ezen állítás egész számok tetszőleges $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatára teljesül, ha minden $n \ge 1/p$ esetén $1 \le k_n \le np$ valamely $p \in (0,1)$ értékre és $k_n \to \infty$. Ezen vonal tartójának a hosszát a véletlen határozza meg, s mivel a tartó meghatározásához nem szükséges az ismeretlen $F(\cdot)$, így annak becslésére is alkalmazható. Az ilyen sávokat és vonalakat fogjuk *valódi* sávoknak és vonalaknak nevezni.

Ugyanakkor $p_n = k_n/n$ választása esetén (1) és (3) tartójuk közös részén egybeesnek; ezért (3)-at (1) *valódi* analogonjának tekinthetjük. A [6] dolgozat (11) és (12) formulái pedig a következőre vezetnek:

$$(4)\quad P\left\{\frac{1-F_n(x)}{c^+_{n,k_n}(\alpha)} \le 1-F(x) \le \frac{1-F_n(x)}{c^-_{n,k_n}(\alpha)},\ x\le X_{n-k_n,n}\right\} \to 1-\alpha,$$

$$(5)\quad P\left\{c^-_{n,k_n}(\alpha)\left[1-F_n(x)\right] \le 1-F(x) \le c^+_{n,k_n}(\alpha)\left[1-F_n(x)\right],\ x\le X_{n-k_n,n}\right\} \to 1-\alpha,$$

a $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatra előbb tett feltételek mellett. A (4) Rényi eredeti (2) sávjának valódi változata. Pusztán analógia alapján is várható, hogy (5) tesztelési változata is működik:

$$(6)\quad P\left\{c^-_{p_n}(\alpha)\left[1-F_n(x)\right] \le 1-F(x) \le c^+_{p_n}(\alpha)\left[1-F_n(x)\right],\ F(x)\le 1-p_n\right\} \to 1-\alpha,$$

a $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatra az előzőekben tett feltételek mellett. Hogy ez valóban így van, azt a következő fejezetben igazoljuk.

Csörgő [6] 2. tételének első része alapján teljesül

$$(7)\quad P\left\{\frac{1-F_n(x)}{c^{+}_{n,k_n}(\alpha)} \le 1-F(x) \le c^{+}_{n,k_n}(\alpha)\big[1-F_n(x)\big],\ x \le X_{n-k_n,n}\right\} \to 1-\alpha,$$

míg a tétel harmadik állítása szerint (7)-ből és a megfelelő bal farki változatból $k_n/n \to 0$ esetén kétoldali sáv szerkeszthető:

$$(8)\qquad P\big\{L^{(\alpha)}_{n,k_n}(x) \le F(x) \le U^{(\alpha)}_{n,k_n}(x),\ X_{k_n,n} \le x \le X_{n-k_n,n}\big\} \to 1-\alpha,$$

Az $L^{(\alpha)}_{n,k_n}$ és $U^{(\alpha)}_{n,k_n}$ alsó ill. fölső kontúrvonalak [6]-ban olvashatóak.

Az első és legfontosabb tény, amit a fönti konfidenciasávokkal és vonalakkal kapcsolatban meg kell említeni az az, hogy a lefedés konkrét valószínűsége *tetszőleges értelmes* n, p_n, k_n, α *esetén sem függ az* $F(\cdot)$ *eloszlásfüggvénytől,* — vagyis az (1)–(8) formulákban megadott konfidenciasávok és vonalak mind eloszlásmentesek minden végesen rögzített n mellett. Ennek belátása [6] bizonyításainak egyik első lépése. Jelen dolgozat során említett minden további sáv ugyanígy eloszlásmentes lesz, s ez a tény nyújt lehetőséget arra, hogy a tényleges lefedési valószínűségeket a $[0,1]$ intervallumon adott egyenletes eloszláson alapuló szimulációs vizsgálattal „kimérhessük". Tehát a továbbiak során $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényünk a $[0,1]$ intervallumon identikusan x, de minden megállapításunk tetszőleges folytonos $F(\cdot)$ esetén is igaz. Nyilvánvaló, hogy az elméleti eloszlásfüggvénynek az empirikus által meghatározott sávon való belülmaradását elegendő az egyenletes eloszlásból származó rendezett minta elemeiben vizsgálni.

Vizsgálataink elsősorban a *sávok* lefedési valószínűségeinek viselkedésére irányulnak, a *vonalak* vizsgálata főként kontrollként szolgált. Több IBM PC 133 MHz Pentium gépen dolgozva szimulációink összesen több ezer óra futási időt vettek igénybe.

2. Egyoldali sávok lefedési valószínűségei

Szimulációs vizsgálatainkat az alkalmazások szempontjából legfontosabb tartományon, $n = 10$ és $n = 2000$ közötti mintaméretre végeztük, a leggyakrabban használatos elsőfajú hibákkal, $\alpha = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}05$ és $\alpha = 0{,}01$ esetén, vagyis rendre 90%, 95% és 99% -os nominális lefedési valószínűségre; minden kvalitatív és kvantitatív megállapításunk erre a leghasználatosabb három esetre vonatkozik. Mivel a Rényi-féle konfidenciasávok és vonalak elsősorban farokbecslésre alkalmasak, ezért vizsgálataink tesztelési sávok esetén a $p_n \in (0, \frac{1}{2})$, valódi sávok esetén a $k_n \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ értékekre vonatkoznak. (Itt $\lfloor x \rfloor$ illetve $\lceil x \rceil$ az x valós szám alsó ill. fölső egész részét jelöli.) A szimulált lefedési valószínűségek 100 000 megfigyelés átlagából származnak: ez azt jelenti, hogy a tényleges és a szimulált értékek eltérése

	$\alpha = 0{,}1$	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}01$
90% valószínűséggel legfeljebb	0,00156	0,00113	0,00052
95% valószínűséggel legfeljebb	0,00186	0,00135	0,00062
99% valószínűséggel legfeljebb	0,00244	0,00177	0,00081

1. Táblázat

Az (1)-(8) sávokkal kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy rögzített n és α esetén p_n illetve k_n csökkentésével a sáv szélessége nő — ezért nem nyilvánvaló, hogy a tényleges lefedési valószínűségek lefutása milyen lesz. Elsőként vizsgáljuk a legszűkebb sávot, (7)-et (ld. 1. ábra). Erre k_n növelésével együtt szimulációnk alapján a lefedési valószínűség is *monoton nő;* de ezzel együtt még $k_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ közelében sem kerül a nominálishoz megfelelően közel; $n = 100$ esetén a tényleges lefedési valószínűségek 0,9; 0,95; 0,99 helyett rendre legfeljebb 0,8656; 0,92; 0,9728. Nagyobb mintaméret esetén a helyzet persze jobb — de az eltérés még így is nagyon nagy, pl. $n = 1000$ esetén a tényleges elsőfajú hiba még $k_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ esetén is még mindig a nominális 1,13–1,44-szerese, annak ellenére, hogy k_n ezen választása már használhatatlanul rövid tartományt jelöl ki. Vagyis a (7) alatti, szűkített sáv esetében a lefedési valószínűségek konvergenciája a nominálishoz alulról történik, s viszonylag lassú — tehát a sáv gyakorlati statisztikai alkalmazásra nem használható.

Vizsgáljuk a (4) és (5) sávokat, amelyekből a (7)-et kaptuk. Mivel az, hogy $F(\cdot)$ (7)-be beleesik, pontosan azt jelenti, hogy (4)-en és (5)-ön is belül marad, ezért (4) és (5) viselkedése várhatóan jobb.

Valóban, a lefedési valószínűségek lefutása (4) és (5) esetén a (7)-hez hasonlóan k_n-nel együtt (a vizsgált tartományon) monoton nő, és (4) esetében közel kerül a nominálishoz, de csak nagy n-ekre éri el, míg (5) lefedési valószínűségei minden n-re elérik azt, s viszonylag kis k_n-től kezdve meg is haladják. (Azzal, hogy ez a „viszonylag kis k_n" valójában mit jelent, a 6. fejezetben foglalkozunk).

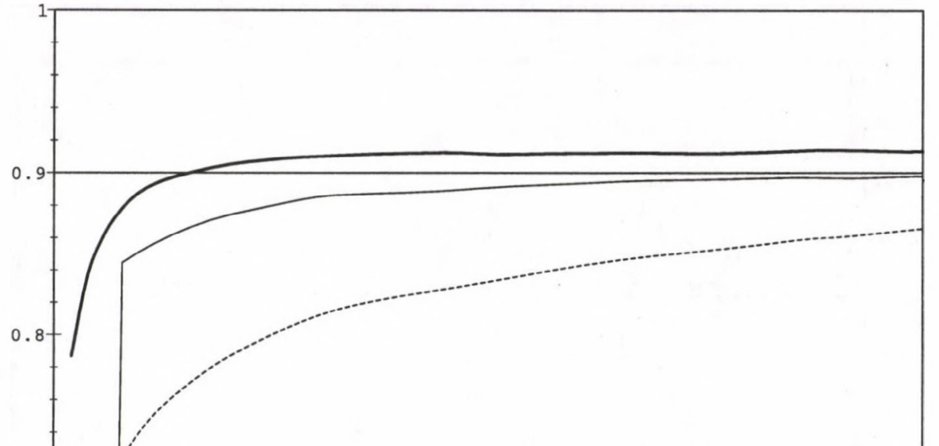
A (4) sáv kapcsán meg kell jegyeznünk (s ez (2)-re is igaz), hogy nagyon kicsi k_n (ill. p_n) esetén $c^-_{n,k_n}(\alpha)$ ill. $c^-_{p_n}(\alpha)$ negatívvá válik, így a sáv felső határolóvonala eltűnik; ez

$$k_n \leq \frac{z_\alpha^2}{1 + \frac{z_\alpha^2}{n}} \quad \text{ill.} \quad p_n \leq \frac{z_\alpha^2}{n + z_\alpha^2}$$

esetén történik meg, ezekben az esetekben a lefedési valószínűséget 0-nak tekintettük.

A (4) sáv szélessége mindig nagyobb, mint az (5) sávé, s ha az $1 - F_n(\cdot)$-nel arányos sávszélességek arányossági együtthatóját rendre $d^{(4)}_{n,k_n}(\alpha)$ ill. $d^{(5)}_{n,k_n}(\alpha)$-val jelöljük, akkor

$$d^{(4)}_{n,k_n}(\alpha) = \frac{2z_\alpha\sqrt{k_n\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)}}{k_n - z_\alpha^2\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)}; \quad d^{(5)}_{n,k_n}(\alpha) = 2z_\alpha\sqrt{\frac{1 - \frac{k_n}{n}}{k_n}},$$



1. ábra. *$n = 100$, $\alpha = 0{,}1$ esetén a (4), (5) és (7) sávok lefedési valószínűségeinek lefutása (k_n függvényében), rendre vékony, vastag és szaggatott vonallal ábrázolva.*

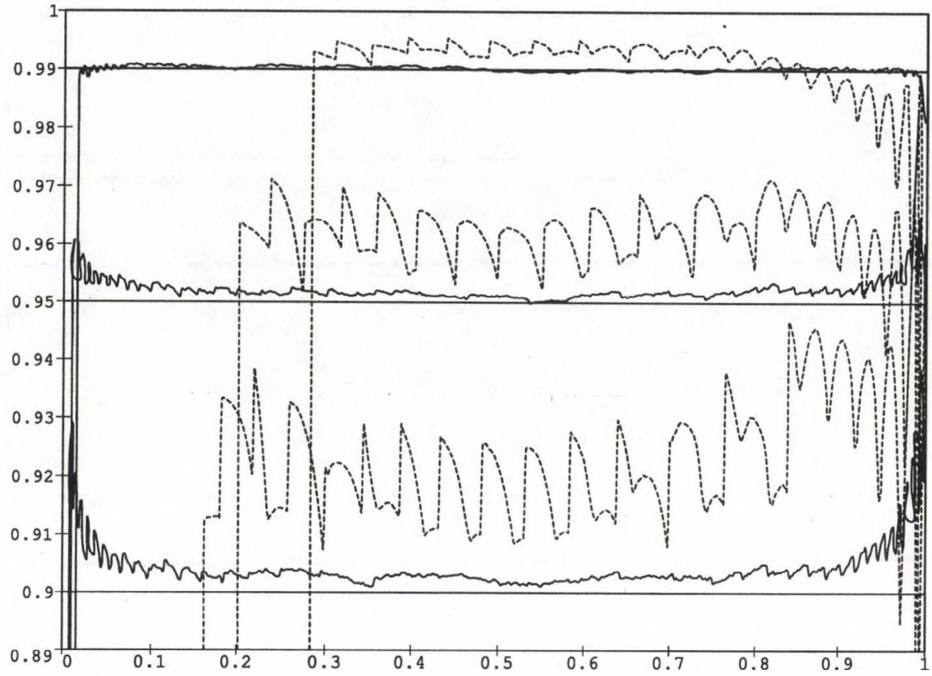
azaz

$$d^{(4)}_{n,k_n}(\alpha) = d^{(5)}_{n,k_n}(\alpha)\frac{k_n}{k_n - z^2_\alpha\left(1 - \frac{k_n}{n}\right)}.$$

Vizsgálataink során mindvégig figyeltük a mindenhol azonos szélességű Kolmogorov-sáv lefedési valószínűségét is. (Ez egyben a szimuláció tesztelésére is szolgált.) A Kolmogorov–Szmirnov statisztikákról régóta köztudott, hogy konzervatívak; tetszőleges véges mintaméret esetén a lefedési valószínűség a nominális felett van. Ezzel az általunk is vizsgált Kolmogorov-sáv esetében szimulációnk eredménye teljes mértékben egybevágott. A Szmirnov-féle konfidenciavonalra a fenti tapasztalati tényt Massart [7] matematikailag igazolta.

Rényi Alfréd (2) sávját vizsgálva ugyanilyen jelenséggel találkozunk — szimulációnk eredménye alapján a (2) sáv n és p_n minden értelmes, 1/2-nél kisebb értékére *konzervatívnak* bizonyult, mindhárom vizsgált α-ra. A 2. ábra alapján látható, hogy ez a konzervativitás minden p_n-re már nem teljesül, 1-hez nagyon közeli p_n-ekre a lefedési valószínűségek „beoszcillálnak".

Mielőtt (6) vizsgálatára rátérnénk, célszerű volna először bebizonyítanunk. Jelölje a (6) sáv tényleges lefedési valószínűségét valamely n,p_n és α esetén $\pi_n(\alpha)$.



2. ábra. *A (2) tesztelési sáv lefedési valószínűségei (p_n függvényében), $n = 20$ (szaggatott vonal) és $n = 500$ (folytonos vonal) esetén, 0,9, 0,95, és 0,99 nominális lefedési valószínűségekre.*

Ekkor, tulajdonképpen Rényi [9] 3.§-ának egy egyszerű ötletét használva,

$$\pi_n(\alpha) = P\{c_{p_n}^-(\alpha)[1 - F_n(x)] \le 1 - F(x) \le c_{p_n}^+(\alpha)[1 - F_n(x)],\ F(x) \le 1 - p_n\}$$

$$= P\left\{\frac{1}{c_{p_n}^+(\alpha)} \le \frac{1 - F_n(x)}{1 - F(x)} \le \frac{1}{c_{p_n}^-(\alpha)},\ F(x) \le 1 - p_n\right\}$$

$$= P\left\{\frac{-z_\alpha\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}}{c_{p_n}^+(\alpha)} \le \frac{F(x) - F_n(x)}{1 - F(x)} \le \frac{z_\alpha\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}}{c_{p_n}^-(\alpha)}, F(x) \le 1 - p_n\right\}$$

vagyis

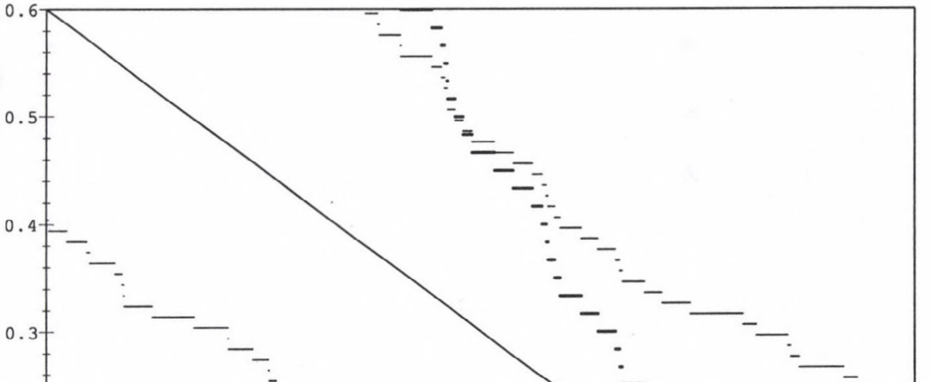
$$P\left\{\sqrt{\frac{np_n}{1 - p_n}} \sup_{F(x)\le 1-p_n} \frac{|F_n(x) - F(x)|}{1 - F(x)} \le \frac{z_\alpha}{1 + z_\alpha\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}}\right\} \le \pi_n(\alpha)$$

$$\le P\left\{\sqrt{\frac{np_n}{1 - p_n}} \sup_{F(x)\le 1-p_n} \frac{|F_n(x) - F(x)|}{1 - F(x)} \le \frac{z_\alpha}{1 - z_\alpha\sqrt{\frac{1-p_n}{np_n}}}\right\},$$

ahol a $np_n \to \infty$ mellett [6] (4) formulája alapján, a határeloszlás folytonosságát felhasználva, az alsó és fölső korlátok egyaránt $1-\alpha$-hoz tartanak, vagyis $\pi_n(\alpha)$ is oda tart; s ez éppen az, amit bizonyítani akartunk.

A (6) sáv lefedési valószínűségei a (4)-éhez hasonlóan viselkednek; p_n-nel együtt nőnek ugyan, de a nominálist csak nagyon nagy mintaméret esetén közelítik meg vagy érik el. Tehát (6) viselkedése (2)-től elmarad, s gyakorlati alkalmazása nem ajánlható.

Tanulságos viszont összevetni (2), (6), (4) és (5) viselkedését. A (4) és (5) formulával megadottak valódi, míg (2) és (6) tesztelési sávok; és $p_n = k_n/n$ választása esetén (2) és (4), ill. (6) és (5) szélessége minden pontban megegyezik; (4) és (5) tartójának várható hossza pedig (felírásunk módjából következő kis eltéréssel) megegyezik (2) és (6) tartóhosszával. Meglepő módon (4) és (5) közül (5) — a keskenyebbik — viselkedett messze jobban, míg (5) tesztelési analogonja, (6) alulmaradt (4) tesztelési változatával, (2)-vel szemben. Ez azt mutatja, hogy még tiszta illeszkedési próbák esetében is, amelyre a fenti sávok mind alkalmazhatóak, nagyon nem mindegy, hogy ugyanannak a sávnak azonos nominális valószínűségű valódi vagy tesztelési változatát választjuk, mivel a tényleges lefedési valószínűségek drasztikusan eltérhetnek.

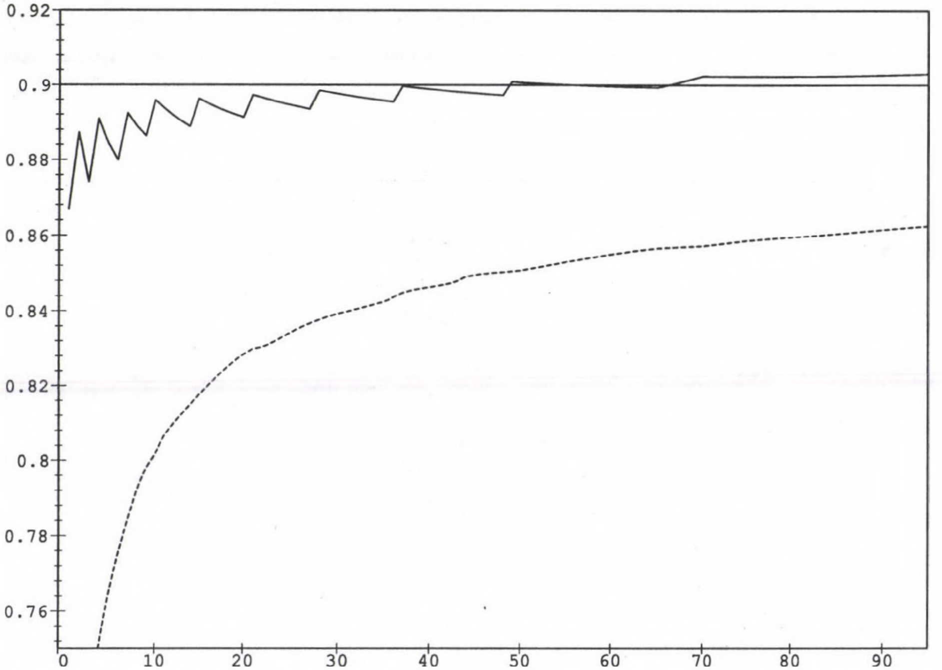


3. ábra. *Az (5) valódi sáv tipikus képe $n = 100$, $k_n = 9$, $\alpha = 0{,}1$ esetén, összehasonlítva a Kolmogorov-sávval (vékony vonal).*

Ez a tény viszont tovább növeli (5) jelentőségét: túl szélesebb alkal- mazhatóságán, az eredeti Rényi-féle (2) sávnak egy olyan *valódi* szűkítését adja, amely (2) konzervatív tulajdonságát nagymértékben megtartja. A (5) sávot a 3. ábra mutatja, egy véletlen mintán. Mivel a Rényi-féle konfidenciasávok elsősorban farokbecslésre alkalmasak, ezért az ábra a jobb farokra koncentrál.

3. Konfidencia-vonalak

A Rényi-féle eredeti (1) vonal vizsgálata egyben szimulációnk ellenőrzését is szolgálta, hiszen Csáki [1] 1.4.2. következménye megadja a pontos lefedési valószínűségeket. A szimulált és számolt valószínűségek összevetése megnyugtató eredményt adott; az eltérések jó közelítéssel 0 várható értékű és a Monte-Carlo méretének megfelelő szórású normális eloszlást követtek.



4. ábra. *Az* (1) *tesztelési vonal számolt és a* (3) *szimulált lefedési valószínűségeinek lefutása (folytonos ill. szaggatott vonal),* $p_n = k_n/n$ *választásával,* $n = 200$, $\alpha = 0{,}1$ *esetén.*

Az (1) vonal lefedési valószínűségeinek lefutása önmagában is érdekes; (ld. a 4. ábrát); mindazonáltal nagyon gyorsan közel kerülnek a nominális értékhez, majd sokáig annak közelében ingadoznak, s csak viszonylag későn haladják meg azt, majd csökkenve ugyan, de felette maradnak. Ami (3)-at, (1) valódi analogonját illeti, a lefedési valószínűségek lefutása itt (1)-el ellentétben monoton; de mind (1)-től, mind a nominális értéktől messze elmarad, vagyis az előző fejezet végén tárgyalthoz hasonló jelenséggel találkozunk.

4. Kétoldali sávok

Az eddigiek során kétoldali sávra az egyetlen példa a (8), amely (7) bal- és jobboldali változatának összetételéből keletkezik; (7)-ről pedig már láttuk, hogy tényleges lefedési valószínűségei a szokásos 10 és 2000 közötti mintaméret mellett elmaradnak a kívánatostól. A szimulációs eredmények alapján (8) örökli (7) ezen gyakorlati szempontból kellemetlen tulajdonságát.

Próbáljunk tehát a „jól viselkedő" (5)-ből kétoldali sávot szerkeszteni.

Teljesüljön z_α^* -ra $L(z_\alpha^*) = \sqrt{1-\alpha}$, és legyenek

$$^*c_{n,k_n}^-(\alpha) := 1 - z_\alpha^* \frac{\sqrt{1-\frac{k_n}{n}}}{\sqrt{k_n}} \quad \text{és} \quad ^*c_{n,k_n}^+(\alpha) := 1 + z_\alpha^* \frac{\sqrt{1-\frac{k_n}{n}}}{\sqrt{k_n}}.$$

Az (5) sávot felírva az eloszlásfüggvényre, ill. [6] (18) alapján a baloldali farokra, kapjuk:

$$(*) \qquad P\{^*c_{n,k_n}^-(\alpha)F_n(x) \le F(x) \le {}^*c_{n,k_n}^+(\alpha)F_n(x),\ x \ge X_{k_n,n}\} \to \sqrt{1-\alpha};$$

$$(**) \qquad P\{1 - {}^*c_{n,k_n}^+(\alpha)[1-F_n(x)] \le F(x) \le 1 - {}^*c_{n,k_n}^-(\alpha)[1-F_n(x)],$$
$$x \le X_{n-k_n,n}\} \to \sqrt{1-\alpha}.$$

Itt a $(*)$ felső határolóvonala pontosan akkor halad $(**)$ felső határolóvonala alatt, ill. $(*)$ alsó határolóvonala $(**)$ alsó határolóvonala felett, ha $F_n(x) \le 1/2$. Ez indokolja az alsó és felső kontúrok alábbi megválasztását:

$$^*L_{n,k_n}^{(\alpha)}(x) := \begin{cases} ^*c_{n,k_n}^-(\alpha)F_n(x), & X_{k_n,n} \le x < X_{\lceil n/2\rceil,n}, \\ 1 - {}^*c_{n,k_n}^+(\alpha)[1-F_n(x)], & X_{\lceil n/2\rceil,n} \le x \le X_{n-k_n,n}, \end{cases}$$

$$^*U_{n,k_n}^{(\alpha)}(x) := \begin{cases} ^*c_{n,k_n}^+(\alpha)F_n(x), & X_{k_n,n} \le x < X_{\lceil n/2\rceil,n}, \\ 1 - {}^*c_{n,k_n}^-(\alpha)[1-F_n(x)], & X_{\lceil n/2\rceil,n} \le x \le X_{n-k_n,n}. \end{cases}$$

Ekkor egész számok bármely olyan $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ sorozatára, amelyre minden $n \ge 1/p$ esetén $1 \le k_n \le np$ valamely $p \in (0,1)$ értékre és $k_n \to \infty$, valamint $k_n/n \to 0$ teljesül, igaz lesz, hogy

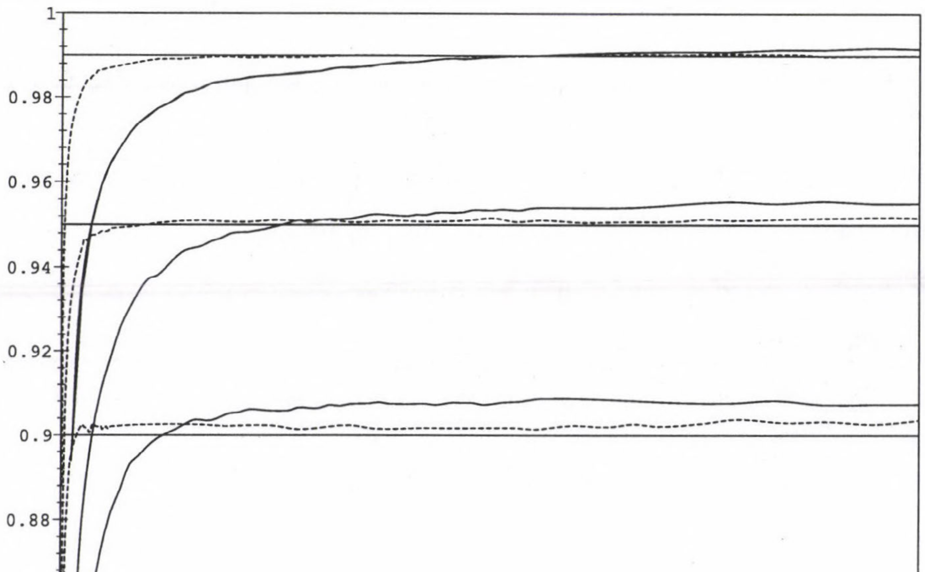
$$(9) \qquad P\{^*L_{n,k_n}^{(\alpha)}(x) \le F(x) \le {}^*U_{n,k_n}^{(\alpha)}(x),\ X_{k_n,n} \le x \le X_{n-k_n,n}\} \to 1-\alpha.$$

Ennek bizonyítása [6] (21) formulájával — amely a jelen dolgozatban (8) — teljesen analóg módon történik, azaz [6] (12) és (18)-ra való visszavezetéssel. Megjegyezzük, hogy ugyanilyen módon a két oldalt tekintve aszimmetrikus sáv is szerkeszthető.

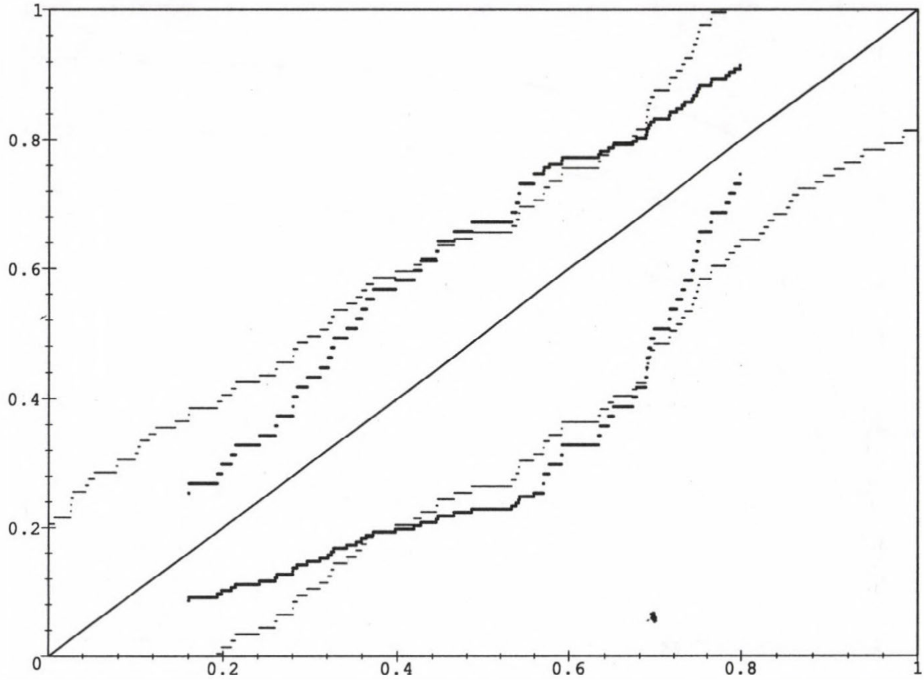
A (9) kétoldali sáv szélessége az $x \in \left[X_{k_n,n},\ X_{\lceil n/2\rceil,n}\right)$ intervalumon $F_n(x)$-szel, az $\left[X_{\lceil n/2\rceil,n},\ X_{n-k_n,n}\right]$ intervallumon pedig $1 - F_n(x)$-szel arányos, s e szélesség arányossági tényezőjét $d^{(9)}_{n,k_n}(\alpha)$-val jelölve

$$d^{(9)}_{n,k_n}(\alpha) = 2z^*_\alpha\sqrt{\frac{1-\frac{k_n}{n}}{k_n}}.$$

A (9) sávtól azt vártuk, hogy örökli (5) jó tulajdonságait, és ez valóban így is történik. A lefedési valószínűségek k_n-nel együtt növekedve hamar közel kerülnek a nominálishoz, amelyet később elérnek és meghaladnak. A lefedési valószínűségek lefutását az 5. ábra, magát a (9) sávot pedig, a Kolmogorov-sávval összehasonlítva a 6. ábra mutatja.



5. ábra. *A* (9) *kétoldali sáv lefedési valószínűségeinek lefutása* $n = 200$ *(folytonos vonal) és* $n = 2000$ *esetén (szaggatott vonal). (Ez utóbbinál a vízszintes tengelyen a tényleges* k_n *értékek* 1/10-*e olvasható.)*



6. ábra. *A (9) sáv tipikus képe egy véletlen minta alapján, $n = 100$, $k_n = 17$, $\alpha = 0{,}1$ esetén, összehasonlítva a Kolmogorov-sávval (vékony vonal).*

5. A Kolmogorov-sáv egy szűkítéséről

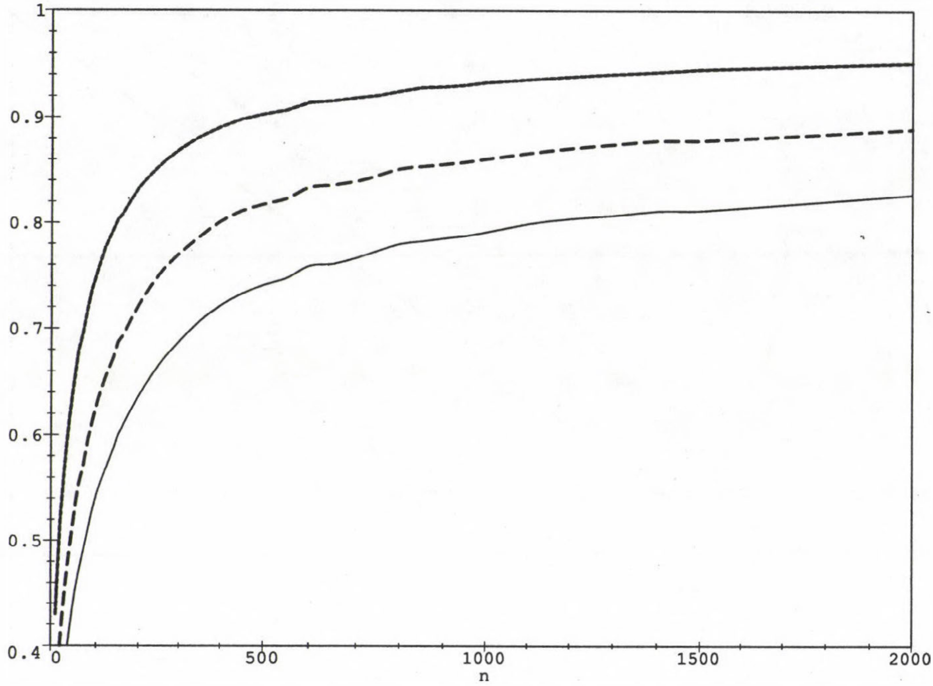
Csörgő S. és Horváth L. [5]-ben közlik a Kolmogorov-féle sáv egy szűkítését, mely szerint

$$(10)\quad P\left\{F_n(x) - \frac{y_\alpha}{n^{1/2}} + \frac{y_\alpha^2}{nF_n(x) + y_\alpha n^{1/2}} \le F(x) \right.$$

$$\left. \le F_n(x) + \frac{y_\alpha}{n^{1/2}} - \frac{y_\alpha^2}{n\left[1 - F_n(x)\right] + y_\alpha n^{1/2}},\ -\infty < x < \infty\right\} \to 1 - \alpha.$$

Szimulációs vizsgálatainkat erre a sávra is kiterjesztettük, s ennek alapján azt állapíthatjuk meg, hogy a szűkítés által a Kolmogorov-sáv elveszíti konzervativitását, a nominális lefedési valószínűséghez való konvergencia alulról fog történni, és rendkívül lassú lesz.

Az [5] szerzői által a cikkben említett $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlásból származó 50 elemű minta 40 példányán végrehajtott szimuláció — amikor is $\alpha = 0{,}1$ mellett a 40 esetből az $F(x) = x$, $x \in [0, 1]$ tényleges eloszlásfüggvény mindössze 1 esetben ment ki — minden bizonnyal rossz volt; tekintve, hogy saját, 100 000 példányon alapuló vizsgálatunk szerint a fenti körülmények mellett a



7. ábra. *A (10) sáv lefedési valószínűségei, $\alpha = 0{,}1$ (folytonos vonal), $\alpha = 0{,}05$ (ritkán szaggatott) és $\alpha = 0{,}01$ (sűrűn szaggatott vonal) esetén.*

tényleges lefedési valószínűség mindössze 0,443; és így a cikkben leírt esemény bekövetkezésének valószínűsége helyes szimuláció esetén kevesebb mint tízezred része annak, hogy a lottón egy szelvénnyel játszva ötös találatot érjünk el.

A (7) és (10) sávok példája okot ad konzervatív sávok szűkítéseinek gyakorlati jelentőségével szemben bizonyos szkepszisre; könnyen előfordulhat, hogy a szűkebb sáv esetében a konzervativitás elveszik, és a tényleges lefedési valószínűségek gyakorlatilag hasznos mintaméret-tartomány esetén messze elmaradnak a nominálistól.

6. Konzervativitási pontok. Néhány egyszerű szabály

Ebben a fejezetben az előzőek alapján „jól viselkedő" sávok gyakorlati alkalmazásának feltételeit vizsgáljuk.

A (2) sáv a $p_n \in \left(\frac{z_\alpha^2}{n+z_\alpha^2}, \frac{1}{2}\right)$ intervallumon az általunk vizsgált α-kra konzervatívnak mutatkozott, tehát a $10 \leq n \leq 2000$ mintaméret-tartományon tiszta illeszkedési próbákra alkalmazható.

Az (5) egyoldali és a (9) kétoldali sávokról láttuk, hogy lefedési valószínűségük k_n-nel együtt növekedve hamar közel kerül a nominálishoz, majd eléri, és $k_n \leq n/2$-

re a továbbiakban afölött marad. Azt a k_n számot, amelyre a tényleges lefedési valószínűség a nominálist eléri, s a nála nagyobbakra meghaladja, *konzervativitási pontnak* fogjuk nevezni, s $\kappa_n(\alpha)$-val jelöljük; ha fontos, hogy melyik sáv konzervativitási pontjáról van szó, akkor $\kappa_n^{(5)}(\alpha)$ ill. $\kappa_n^{(9)}(\alpha)$-t írunk.

Az első észrevétel, amelyet rögzített n mellett $\kappa_n(\alpha)$-kra tehetünk, hogy csökkenő α-ra (vagyis növekvő nominális lefedési valószínűségre) $\kappa_n(\alpha)$ is nő. Az $\alpha = 0{,}1$-t választva $\kappa_n(0{,}1)$ körül a lefedési valószínűségek még viszonylag meredeken nőnek, s így $\kappa_n(0{,}1)$ értéke a szimulációból elég pontosan meghatározható, míg $\alpha = 0{,}05$, de különösen $\alpha = 0{,}01$ esetében pedig a lefedési valószínűségek már olyan helyen érik el a nominálist, ahol azok lefutása sokkal „laposabb" — így $\kappa_n(0{,}05)$ és $\kappa_n(0{,}01)$ szimulációval meghatározott értékeinek véletlen ingadozása sokkal nagyobb; viszont a lefedési valószínűség $\kappa_n(\alpha)$ értékének tág környezetében már nagyon közel van a nominálishoz, s az eltérés gyakorlati szempontból tulajdonképpen elhanyagolható. Ez utóbbi megállapítás $\kappa_n(0{,}1)$-re is igaz $n \geq 200$ esetén.

A konzervativitási pontok táblázatban történő hosszadalmas megadása helyett inkább néhány egyszerű és — reményeink szerint — könnyen megjegyezhető „ökölszabályt" adunk meg, angol szóhasználattal „rule of thumb"-ot. Ezen szabályok $10 \leq n \leq 2000$ esetén érvényesek, és hangsúlyozzuk, hogy a konzervativitási pontok aszimptotikus viselkedéséről nem állítanak semmit.

Az (5) sávra a következők teljesülnek:

$$\kappa_n^{(5)}(0{,}1) \leq 4\,n^{0{,}2}$$

$$\kappa_n^{(5)}(0{,}05) \leq 1{,}5\,n^{0{,}55}$$

$$\kappa_n^{(5)}(0{,}01) \leq 0{,}8\,n^{0{,}8}$$

Vagyis pl. $\alpha = 0{,}1$ esetén 270 elemű mintára az (5) sáv lefedési valószínűsége $n/2 \geq k_n \geq 4 \cdot 270^{0{,}2}$, azaz $135 \geq k_n \geq 13$ esetén a 0,9-t eléri vagy meghaladja. A fenti szabályok $n \leq 200$ esetén ugyan igazak, de nem elég élesek, ezért $\kappa_n^{(5)}(\alpha)$-kat n kis értékeire az alábbi táblázatban adjuk meg.

	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0,9	3	4	5	6	6	7	7	8	8
0,95	3	5	7	8	10 (9)	11	12	13	14
0,99	3	6	9	12	14	17 (16)	19	22 (21)	24 (23)

	100	120	140	160	180	200
0,9	9 (8)	9	10	10	11 (10)	11
0,95	15	17	19 (18)	21 (20)	23 (22)	24 (23)
0,99	26 (25)	31 (30)	34 (33)	40 (38)	44 (42)	46 (44)

2. Táblázat

Amennyiben valamely cellában két elem szerepel, ott a szimuláció alapján nem dönthető el egyértelműen a konzervativitási pont értéke; amennyiben k_n a nagyobbikkal egyenlő, úgy a tényleges lefedési valószínűség 90%-os biztonsággal nagyobb a nominálisnál, de már a kisebb, zárójelben szereplő érték esetén is legalább 10% eséllyel érheti el. A táblázat 2 500 000 Monte-Carlo alapján készült.

A (9) sáv esetén a „rule of thumb"-ok talán meg könnyebben megjegyezhetőek:

$$\kappa_n^{(9)}(0{,}1) \leq 0{,}7\, n^{0{,}7}$$

$$\kappa_n^{(9)}(0{,}05) \leq 0{,}6\, n^{0{,}8}$$

$$\kappa_n^{(9)}(0{,}01) \leq 0{,}5\, n^{0{,}9}$$

Ezen szabályok n kis értékeire is nagyon jó közelítést adnak, ezért kiegészítő táblázat megadásától eltekintünk. Itt (5)-t és (9)-et összehasonlítva láthatjuk, hogy a kétoldali sáv valamivel később válik konzervatívvá.

Az (1) konfidenciavonalra ilyen szabályt megadnunk felesleges, mivel a lefedési valószínűségek explicit módon kiszámolhatók, ezért csak mint érdekességet említjük meg, hogy lefutásának alakjából következően itt olyan állításokat tehetünk, hogy pl. amennyiben 0,9 helyett 0,885 lefedési valószínűséggel megelégszünk, akkor $10 \leq n \leq 400$ esetén $p_n > 7/n$ re, ill. $400 < n \leq 2000$-re $p_n > 10/n$-re ez a valószínűség eléretik, sőt, bármilyen más nominálisnál kisebb valószínűségre hasonló egyszerű szabály található.

Eddig minden állításunkat a jobb oldali farok becslése által motivált formában írtuk; adósak vagyunk az ekvivalens bal farki változatokkal. Tesztelési sávok esetén nyilvánvaló, hogy tetszőleges $0 < c_1 < 1 < c_2 < \infty$ konstansokra és $p_n \in (0,1)$-re bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$P\big\{c_1 F_n(x) \leq F(x) \leq c_2 F_n(x),\ F(x) \geq p_n\big\} =$$
$$= P\big\{c_1\big[1 - F_n(x)\big] \leq 1 - F(x) \leq c_2\big[1 - F_n(x)\big],\ F(x) \leq 1 - p_n\big\},$$

valódi sávok esetén pedig elemi számolás mutatja, hogy

$$P\big\{c_1 F_n(x) \leq F(x) \leq c_2 F_n(x),\ x > X_{k_n+1,n}\big\} =$$
$$= P\big\{c_1\big[1 - F_n(x)\big] \leq 1 - F(x) \leq c_2\big[1 - F_n(x)\big],\ x \leq X_{n-k_n,n}\big\},$$

figyelembe véve, hogy $F_n(\cdot)$-t *jobbról* folytonosnak definiáltuk.

Megjegyezzük, hogy [6]-ban a bal és jobb farki változatok felírása a fentiek alapján nem ekvivalens, jelen dolgozat során a [6]-tal való kompatibilitás okán használtuk a (8) és (9) sávok esetén ezt a bal és jobb oldalt tekintve nem teljesen azonos írásmódot. Természetesen megtehető, hogy a két oldalt a fenti ekvivalens módon írjuk fel, ekkor aszimptotikusan persze minden ugyanúgy van, a véges esetben pedig a lefedési valószínűségek valamelyest javulnak.

7. Konklúzió

Vizsgálataink alapján a farkakon való abszolút eltérés ellenhipotézise elleni tiszta illeszkedési próbákra a Rényi-féle (2) konfidenciasáv α és n bármely értéke esetén $p_n \in \left(\frac{z_\alpha^2}{n+z_\alpha^2}, \frac{1}{2}\right)$ tetszőleges választása mellett alkalmazható. Amennyiben az ismeretlen eloszlásfüggvény egyik farkon való viselkedése különösen érdekes, úgy az (5) sáv annak becslésére alkalmazható; amikor pedig mindkét oldali farok viselkedése fontos, úgy a (9) sáv 10 és 2000 közötti n, tetszőleges $\alpha \in \{0,1; 0,05; 0,01\}$ és — az előző fejezetben közöltek figyelembevételével — k_n-nek $\kappa_n^{(5)}(\alpha)$ ill. $\kappa_n^{(9)}(\alpha)$-nál nagyobb választása esetén használható.

Zárásképpen köszönetet mondok Csörgő Sándor professzornak, aki felhívta figyelmemet a jelen dolgozatban tárgyalt témára, s értékes tanácsokkal segítette annak elkészültét.

Hivatkozások

[1] Csáki E., Vizsgálatok az empirikus eloszlásfüggvényről, *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztály Közleményei* **23** (1974), 239–327. [Angol fordítás: Investigations concerning the empirical distribution function, In: *Selected Translations in Mathematical Statistics and Probability* **15**, 229–317. American Mathematical Society, 1981.]

[2] Csörgő M., Some Rényi type limit theorems for empirical distribution functions, *Ann. Math. Statist.,* **36** (1965), 322–326.

[3] Csörgő M., Csörgő S., Horváth L. and Mason, D. M., Weighted empirical and quantile processes, *Ann. Probab.,* **14** (1986), 31–85.

[4] Csörgő S. and Horváth L., The baboons come down from the trees quite normally, In: *Proceedings of the Fourth Pannonian Symposium on Mathematical Statistics,* Vol. B (W. Grossman, G. Ch. Pflug, I. Vincze and W. Wertz, eds.), pp. 95–106. D. Reidel (Dordrecht, 1985).

[5] Csörgő S. and Horváth L., Confidence bands from censored samples, *Canadian J. Statist.,* **14** (1986), 131–144.

[6] Csörgő S., Rényi-féle konfindenciasávok, *Matematikai Lapok,* jelen szám.

[7] Massart, P., The tight constant in the Dvoretzky–Kiefer–Wolfowitz inequality, *Ann. Prob.,* **18** (1990), 1269–1283.

[12] Rényi A., A rendezett minták elméletéről, *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztály Közleményei,* **3** (1953), 467–503. [Angol változat: On the theory of order statistics, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **4** (1953), 191–231.]

[13] Rényi A., A rendezett minták elméletének egy problémaköréről, *Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztály Közleményei*, **18** (1968), 23–30. [Angol változat: On some problems in the theory of order statistics, *Bull. Inst. Internat. Statist.*, **42** (1969), 165–176.]

Megyesi Zoltán
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet
H–6720 Szeged
Aradi vértanúk tere 1.
e-mail:megyesiz@math.u-szeged.hu

Zoltán Megyesi: Coverage Probabilities of Rényi Confidence Bands

The applicability of Rényi confidence bands, as extended by Sándor Csörgő [6], are investigated by an extensive computer simulation study. Some new bands are also proposed.

ZÉRUS AVAGY NULLA

RÉNYI ALFRÉD

A Természettudományi Lexikon főszerkesztője, Erdey-Grúz Tibor úgy vélte, hogy a „zérus" és a „nulla" kifejezések egyikét kell következetesen használni a készülő műben. Mivel Rényi Alfréd, a matematikus szerkesztő tartósan külföldön volt, Bíró Gábor (korábban a Budapesti Műszaki Egyetemen, ma a Gábor Dénes Főiskolán tanít fizikát) kapta azt a feladatot, hogy meginterjúvolja őt, hogy melyiket tartja helyesnek. A kérdésre Rényi egy „eposz"-szal válaszolt. Íme:

Kedves Gábor, a kérdésed oly mélyen szántó,
Megválaszolni csak hősi eposszal lehet.

Lelki szemeimmel látom, amint Rákos mezejére
Felvonul a két sereg, fényesen csillog a vértjük.

Sokszor látott csatát ez a véröntözte síkság,
Ámde ilyen elszánt csapatokat sohasem.

Zászlóikon látod, hogy magasztos eszme vezérli
Mind a két oldalon a harcosok ezreit.

Nem két nép jövője dől el ebben a harcban,
Az egész emberiség sorsa forog kockán.

Az egyik sereg zászlóin egy óriási 0 van,
A másik seregén: egy ugyanakkora 0.

Azt hinnéd, ugyanaz az eszme vezérli hát őket,
Óriásit tévedsz: csak a jel ugyanaz.

Az egyik szerint az 0 az zérus,
A másik szerint: nulla az ő neve.

Zérus-e a nulla vagy fordítva: nulla a zérus?
Ez itt a nagy kérdés, ezt kell eldönteni!

Hogy is élhettünk tunyán és elpuhultan,
Míg e nyitott kérdés sebként üszkösödött?

De most már elég! Tiszta vizet a pohárba!
Mire lenyugszik a nap, döntsenek a fegyverek.

Hetvenhét napon át tombolt a szavak csatája,
Súlyos, mély érvek repkedtek ide s oda,

Méltatlan nemes lovagokhoz szavakkal vívni,
Sújtson hát le a kard, repüljön a buzogány.

Amíg zérus az 0, az élet értelme nulla,
Amíg nulla az 0, zérót ér életünk.

(Azt hiszed te balga, hogy semmiért ömlik a vér itt?
Értsétek meg ostobák: az O vagy nulla vagy zérus,
Ám bárhogy hívjuk is, semmikép sem „semmi".
Ő a szilárd pont, melyből minden út indul,
A számsor kezdete, s a világ közepe.
Puszta jelenlétével megtízszerez ő téged,
Ha méltón fogadod, s jobbodra ülteted őt.
Jól vigyázz azonban, hogy tisztelettel fogadjad,
Ha balra helyezed, bosszúból megtizedel.
Akit ő megszoroz, az eltűnik nyomban,
Ily hatalmas erő rejlik e „semmi"-ben.
Végtelen hát e kerekképű imposztor hatalma?
Nincs valahol titkos Achilles-sarka neki?
Elárulom neked féltve őrzött titkát:
Ne mondd el senkinek: osztani képtelen ő!)

Megrendült a föld, amikor egymásra rontott
A nullisták és a zéróisták serege.

Senkisem hátrált, hanem küzdött, amíg kihullott
Lenyisszantott kezéből a vérborította kard.

Nullista zérus maradt a véráztatta harctéren.
Zéróistából pedig éppenhogy nulla maradt.

Nem döntötte hát a vitát el a kard sem,
A vita döntötte sírba a harcosokat!

Hádeszbe szállt le hős lelkük, de az O kontra O kérdésre
Léthe vize sem hozott enyhítő feledést.

Egyébként én a zérus tántoríthatatlan híve vagyok. Szeretettel üdvözöl benneteket

Ann Arbor, 1964. május 6. Buba

JELENTÉS

AZ 1995. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENY EREDMÉNYE

Ebben az évben a József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézete rendezte a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A Bolyai Intézet bizottságot nevezett ki a verseny lebonyolítására, amelynek elnöke Csákány Béla, titkára Makay Géza, tagjai Csörgő Sándor, Czédli Gábor, Gehér László, Gécseg Ferenc, Hajnal Péter, Hatvani László, Kérchy László, Kincses János, Krámli András, Krisztin Tibor, Kurusa Árpád, Leindler László, Megyesi László, Móricz Ferenc, Pintér Lajos, Pollák György, Szendrei Ágnes, B. Szendrei Mária, Szőkefalvi-Nagy Béla, Stachó László, Tandori Károly, Totik Vilmos, Viharos László és Zádori László voltak. Köszönjük a bizottság tagjainak a beadott feladat-javaslatok referálásában és a versenyzők megoldásainak javításában végzett munkáját.

A versenyben 12 feladatot tűztünk ki, amelyekre 32 versenyző adott be megoldást. Legnehezebbnek a 12. feladat bizonyult, amelyre nem érkezett be a versenyzőktől helyes megoldás. Ugyancsak a nehezek közé tartozik (nehézségi sorrendben) a 4., a 2., az 5. és a 3. feladat. Legkönnyebbnek a 6., a 10., a 11. és a 7. feladatot találták a versenyzők. A feladat-javaslatot beküldőknek ezúton is szeretnénk megköszönni, hogy a versenyben ilyen sok színvonalas feladat szerepelhetett. Az 5. feladatot Balog Antal és Ruzsa Imre, a 7. feladatot Bódi Béla, a 6. feladatot Erdős Pál és Gyárfás András, a 12. feladatot Halász Gábor, a 3. feladatot Laczkovich Miklós és Ruzsa Imre, a 11. feladatot Szűcs András, az 1., 2., 4., 9. és 10. feladatokat Totik Vilmos, a 8. feladatot pedig Zádori László tűzte ki.

A verseny díjazására a Bolyai János Matematikai Társulat, az ELTE TTK diákköre és a József Attila Tudományegyetem Bolyai Intézete ajánlott fel pénzjutalmat. Ezen kívül a díjat kapott versenyzők megkapnak néhány, a Bolyai Intézet által támogatott Polygon Könyvtár sorozatban megjelent kötetet.

Az első díjat az 1.–11. feladatok helyes megoldásáért és az 5. feladat állításának élesítéséért Lakos Gyula, az ELTE IV. éves hallgatója kapta meg.

Két második díjas versenyzőnk van: Pór Attila, az ELTE IV. éves hallgatója (az 1.–3. és 5.–11. feladatok helyes megoldásáért) és Ujváry-Menyhárt Zoltán, az ELTE IV. éves hallgatója (az 1., 2., 5.–10. feladatok helyes és a 3., 11. feladatok majdnem teljes megoldásáért).

Két harmadik díjat osztunk ki, ezeket Csörnyei Marianna, az ELTE II. éves hallgatója (a 2.–4., 6., 7., 9.–11. feladatok helyes és a 8. feladat majdnem teljes megoldásáért), illetve Abért Miklós, az ELTE IV. éves hallgatója (az 1., 6., 7., 9.–11. feladatok helyes és a 3., 5., 8. feladatok majdnem teljes megoldásáért) kapja.

Három versenyzőt részesítünk első dícséretben: Balogh Józsefet, a JATE Ph.D. hallgatóját (a 2., 5.–7., 9., 10. feladatok helyes és a 8., 11. feladatok majdnem teljes megoldásáért), Benkő Dávidot, a JATE Ph.D. hallgatóját (az 1., 3., 6., 7., 9.–11. feladatok helyes és a 8. feladat majdnem teljes megoldásáért), valamint Maróti Miklóst, a JATE V. éves hallgatóját (a 2., 3., 6.–8., 10., 11. feladatok helyes és a 9. feladat majdnem teljes megoldásáért).

A versenyben második dícséretet kapott Fleiner Tamás, az ELTE Ph.D. hallgatója (az 1., 2., 6., 7., 10., 11. feladatok helyes, a 8. feladat majdnem teljes megoldásáért és az 5. feladatban elért részeredményéért) és Harcos Gergely, az ELTE V. éves hallgatója (az 1., 2., 6., 7., 9.–11. feladatok helyes megoldásáért).

Gratulálunk!

Csákány Béla, Makay Géza
a bizottság elnöke és titkára

Az 1995. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Igazoljuk, hogy a síkon nem azonosan zéró harmonikus függvény nem tűnhet el kétdimenziós pozitív mértékű halmazon.

Megoldás: (több versenyző megoldása)

Legyen u egy az egész síkon harmonikus, nem azonosan konstans függvény. Ekkor van olyan holomorf h függvény, amelynek a képzetes része u. Legyen E a $h'(z) = 0$ egyenlőséggel megadott z pontok halmaza. Mivel u nem azonosan konstans, h sem az, ezért a deriváltja csak megszámlálható sok pontban válhat nullává, azaz E megszámlálható.

Ha $\xi \notin E$, akkor van ξ körül egy olyan D_ξ nyitott körlap, amelyre h-t megszorítva egy egy-egy értelmű h_ξ holomorf függvényt kapunk. Legyen h_ξ értékkészlete (azaz h_ξ^{-1} értelmezési tartománya) H_ξ. A nyílt leképezés tétele szerint H_ξ nyílt halmaz, ezért $H_\xi \cap \mathbf{R}$ megszámlálható sok nyílt intervallumból áll, legyenek ezek $I_{\xi,1}, I_{\xi,2} \dots$. Bármely ilyen D_ξ körlapon azon pontok amelyekben u eltűnik, benne vannak a $\Gamma_\xi = h_\xi^{-1}(\mathbf{R})$ halmazban, amely a megszámlálható sok $h_\xi^{-1}(I_{\xi,j})$ differenciálható Jordan görbe uniója, ezért a kétdimenziós Lebesgue mértéke 0. Mármost a $\mathbf{C} \setminus E$ halmazt a $\{D_\xi\}_{\xi \in \mathbf{C}\setminus E}$ körlapok lefedik, ezért ezek közül kiválasztható megszámlálható sok $\{D_{\xi_i}\}_{i=1}^{\infty}$ úgy, hogy már ezek is lefedik $\mathbf{C} \setminus E$-t. A bizonyításhoz most már csak azt kell megjegyezni, hogy az a halmaz, ahol u eltűnik, biztosan benne van az $E \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} D_{\xi_i}$ unióban, amelynek minden tagja 0 mértékű, így maga is az.

Megjegyzés: Az állítás akkor is igaz (lényegében ugyanezzel a bizonyítással), ha u csak a sík egy összefüggő nyílt részhalmazán értelmezett és ott harmonikus.

Érkezett 15 megoldás, ebből jó 12.

Megoldotta: Abért Miklós, Benkő Dávid, Elekes Márton, Fleiner Tamás, Harcos Gergely, Hegedűs Pál, Járai Antal, Lakos Gyula, Matolcsi Máté, Pál Ambrus, Pór Attila, Ujváry-Menyhárt Zoltán; nem értékelhető 3 megoldás.

2. Az $f, g \in L^1[0,1]$ függvényekről tudjuk, hogy

$$\int_0^1 f = \int_0^1 g = 1.$$

Igazoljuk, hogy van olyan I intervallum, amelyre

$$\int_I f = \int_I g = 1/2.$$

1. megoldás: (Balogh József, Pete Gábor, Maróti Miklós és a kitűző megoldása)

Legyen $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S^2$ a térbeli egységgömb felületének egy pontja, azaz legyen $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$. Tekintsük az alábbi leképezést

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \big(X(f; \xi_1, \xi_2, \xi_3), X(g; \xi_1, \xi_2, \xi_3)\big),$$

ahol

$$X(f; \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \operatorname{sign} \xi_1 \int_0^{\xi_1^2} f + \operatorname{sign} \xi_2 \int_{\xi_1^2}^{\xi_1^2+\xi_2^2} f + \operatorname{sign} \xi_3 \int_{\xi_1^2+\xi_2^2}^1 f.$$

T a gömbfelület egy folytonos és páratlan leképezése a síkba, ezért Borsuk ("antipodal") tétele szerint van olyan $(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$ pont, amelynek képe T mellett a $(0,0)$ pont. A $\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*$ számok közül kettő ugyanolyan előjelű (a 0-t tekintsük pozitívnak). Ha a harmadik szám ξ_j^*, és I jelöli azt a ${\xi_j^*}^2$ hosszú intervallumot amelyre vonatkozó integrált T definíciójában $\operatorname{sign} \xi_j^*$-gal szoroztuk, akkor a T definíciója és $T(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*) = (0,0)$ alapján látható, hogy

$$\int_I f = \int_{[0,1]\setminus I} f \quad \text{és} \quad \int_I g = \int_{[0,1]\setminus I} g.$$

Ha most még figyelembe vesszük a $\int_0^1 f = \int_0^1 g = 1$ feltételt is, adódik a feladat állítása.

2. megoldás: (a kitűző megoldása) A következő geometriai tétel jól ismert: Ha $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ egy folytonos görbe amelyre $\gamma(0) \neq \gamma(1)$, és k természetes szám, akkor van olyan, a $\overline{\gamma(0)\gamma(1)}$ szakasszal párhuzamos húrja γ-nak, amelynek hossza éppen $1/k$-ad része a $\overline{\gamma(0)\gamma(1)}$ szakasz hosszának (lásd az 1954. évi Schewitzer verseny 9. feladatát a Schweitzer könyv 21. és 198–99. oldalán. Bár ez a feladat ugyanezt csak egyszerű töröttvonalakra állítja, a bizonyítás szó szerint igaz bármely folytonos görbére). Ez alapján a feladat igazolása egyszerűen kínálkozik: legyen

$$\gamma(t) = \left(\int_0^t f(u)\,du, \int_0^t g(u)\,du\right).$$

Ekkor $\gamma(0) = (0,0)$ és a feladat feltevése alapján $\gamma(1) = (1,1)$. Ha $0 \le t_0 < t_1 \le 1$ olyan pontok, amelyekre a $\overline{\gamma(t_0)\gamma(t_1)}$ húr párhuzamos a $\overline{\gamma(0)\gamma(1)}$ szakasszal és amelynek hossza éppen fele a $\overline{\gamma(0)\gamma(1)}$ szakasz hosszának (vagyis $\sqrt{2}$-nek), akkor

$$\int_{t_0}^{t_1} f(u)\,du = \int_{t_0}^{t_1} g(u)\,du = \pm\frac{1}{2}$$

fenn kell, hogy álljon. Ha itt a + jel szerepel, akkor ez ez igazolja az állítást.

Sajnos, előfordulhat, hogy az előbbi egyenlőségsorozatban minden integrál $-1/2$ (Ruzsa Imre észrevétele), azaz

$$\int_{t_0}^{t_1} f(u)\,du = \int_{t_0}^{t_1} g(u)\,du = -\frac{1}{2}.$$

Ekkor a következőt tehetjük.

Először húzzunk össze minden olyan intervallumot egy pontra, amelyen mindkét függvény integrálja ugyanaz, es ez nulla vagy a $-1/2$ pozitív egész számú többszöröse (tehát ezen intervallumokat egyszerűen kivágjuk a függvényeink értelmezési tartományából, és az értelmezési tartomány megmaradt részeit összetoljuk egy $[a_0, b_0]$ intervallummá). Ez megtehető, mivel eleve elegendő lépcsősfüggvényekre igazolni az állítást, sőt ezek közül is csak olyanra, amelyekre csak véges sok olyan intervallum van, ahol pl. az első függvény integrálja 0 vagy a $-1/2$ többszöröse. Mármost összehúzva a(z egyik) leghosszabb olyan intervallumot, amelyen mindkét függvény integrálja ugyanaz, es ez nulla vagy a $-1/2$ pozitív egész számú többszöröse, majd ezt (mindig a leghosszabb intervallummal) ismételve végezetül olyan függvények adódnak ($[a_0, b_0]$-on), amelyek integrálja $k/2$ valamilyen 1-nél nagyobb k-val. Ekkor a görbetétel szerint a megfelelő görbén van a végpontokat összekötő szakasszal párhuzamos, annak $1/k$-szorosával megegyező hosszúságú húr. A korábbiak alapján ez ad egy I intervallumot (az összenyomott függvényekre), ahol az integrál $\pm 1/2$. De $-1/2$ nem lehet, mert akkor I-t is eltávolítottuk volna egy további lépésben, és mivel minden lépésben maximális intervallumokat húztunk össze, az I két végpontja között összehúzott intervallum sem fekhet. Tehát I megfelel a feltételeknek.

1. megjegyzés: A második bizonyítás azt is adja, hogy *ha α $1/n$ alakú szám, ahol n egész, akkor van olyan I intervallum, amelyre*

$$(**)\qquad \int_I f = \int_I g = \alpha.$$

Valóban, a görbetétel abban a formában is igaz, hogy ha $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2$ egy folytonos görbe amelyre $\gamma(0) \neq \gamma(1)$, akkor van olyan, a $\overline{\gamma(0)\gamma(1)}$ szakasszal párhuzamos húrja γ-nak, amelynek hossza éppen $1/n$-ed része a $\overline{\gamma(0)\gamma(1)}$ szakasz hosszának.

Más alakú α-kra az állítás nem feltétlenül igaz. Pl. ha $f(x) = (2n+1)/(n+1)$ ha $2k/(2n+1) \le x \le (2k+1)/(2n+1)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ és 0 különben, $g(x) = (2n+1)/n$ ha $(2k-1)/(2n+1) \le x \le 2k/(2n+1)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ és 0 különben, akkor semmilyen $1/(n+1) < \alpha < 1/n$-re nincs olyan I intervallum, amelyre $(**)$ teljesülne.

2. megjegyzés: Az előző megjegyzés általánosításaként az alábbi is igaz: *ha egy* $0 < \alpha <$ *1-ra nincs olyan* I *intervallum amelyre* $(**)$ *teljesül, akkor* $1-\alpha$*-ra feltétlenül van.* Ebből az előző megjegyzés állítása indukcióval igazolható (megint csak a görbetételnek van ilyen változata).

3. megjegyzés: Az első bizonyítás gondolatmenetével adódik a következő (a Borsuk tételt kell magasabb dimenzióban alkalmazni): *ha az* $f_1, \ldots, f_k \in L^1[0,1]$ *függvényekre,*

$$\int_0^1 f_j = 1$$

teljesül minden $1 \le j \le k$*-ra, akkor van olyan* I *halmaz, amely legfeljebb* $(k+1)/2$ *intervallum egyesítése, és amelyre*

$$\int_I f_j = 1/2$$

igaz minden $1 \le j \le k$*-ra.*

4. megjegyzés: A feladatnak speciális esete az 1949. évi Schweitzer verseny 4. feladata: Legyen A és B két pozitív mértékű halmaz a $(0,1)$ intervallumon. Ekkor minden n-re van olyan I intervallum, amelyre $|I \cap A| = |A|/n$, $|I \cap B| = |B|/n$ (alkalmazzuk az állítást a normalizált karakterisztikus függvényekre).

5. megjegyzés: Ha az egyik függvény nemnegatív, akkor a következő elemi folytonossági meggondolás célhoz vezet (általában azonban ez nem működik). Legyen pl. $f \ge 0$. f helyett az $(f+\epsilon)/(1+\epsilon)$ függvényt tekintve, majd $\epsilon \searrow 0$-t véve feltehetjük, hogy f szigorúan pozitív. Ekkor van egy olyan $a \in (0,1)$, hogy minden $0 \le x \le a$ esetén van egy és csakis egy olyan y_x, amelyre

$$\int_x^{y_x} f = 1/2,$$

és itt y_x az x folytonos függvénye. Világos, hogy $y_0 = a$, $y_a = 1$, és ezért amint x-et 0-ból a-ba mozgatjuk folytonosan, lesz egy olyan x, amelyre

$$\int_x^{y_x} g = 1/2$$

is fennáll (ellenkező esetben

$$\int_0^1 g = \int_0^a g + \int_a^1 g$$

vagy kisebb, vagy pedig nagyobb lenne 1-nél).

6. megjegyzés: A feladat egyben megoldja az alábbi gyöngysor-osztozkodási feladatot: adott egy gyöngysorunk melyen kétfajta gyöngyből páros-páros sok van. Igazolandó, hogy a gyöngysor szétvágható legfeljebb két helyen úgy, hogy az egyik összefüggő részen minden gyöngyből éppen fele annyi van, mint amennyi az egész gyöngysoron volt.

Amennyiben k féle gyöngyünk van, akkor a 2. megjegyzés alkalmazható az általánosított osztozkodási feladatra.

Érkezett 23 megoldás, ebből jó 9.

Megoldotta: Csörnyei Marianna, Fleiner Tamás, Harcos Gergely és Lakos Gyula (akiknek a megoldása a fentiektől és egymásétól is lényegesen különböző és szép) valamint Balogh József, Maróti Miklós, Pete Gábor, Pór Attila, Ujváry-Menyhárt Zoltán; kissé hiányos Győry Máté megoldása; nem értékelhető vagy csak részeredményeket ér el 13 megoldás.

3. Jelölje $\langle x\rangle$ az x valós szám távolságát a legközelebbi egész számtól. Legyen f szakaszonként lineáris, 1 szerint periodikus, folytonos valós függvény. Bizonyítsuk be, hogy pontosan akkor vannak alkalmas n-nel olyan $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,c_1,\dots,c_n$ valós számok, hogy

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\langle a_ix+b_i\rangle$$

minden x-re, ha van olyan k, hogy

$$\sum_{j=1}^{2^k} f\left(x+\frac{j}{2^k}\right)$$

konstans.

Megoldás: (a kitűzők megoldása)

(i) Először belátjuk, hogy ha $f(x)$ előállítható $\sum_{i=1}^{n} c_i\langle a_ix+b_i\rangle$ alakban, akkor a_i-k választhatók racionálisaknak is.

Legyen $a_1,\dots,a_m$ racionális, $a_{m+1},\dots,a_n$ irracionális. Mivel f 1 szerint periodikus, ezért tetszőleges pozitív egész K és t mellett

$$(1)\qquad f(x)=\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} f(x+jt)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n} c_i\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K}\big\langle a_i(x+jt)+b_i\big\rangle.$$

Legyen t olyan egész szám, amely az $a_1,\dots,a_m$ számok nevezőinek többszöröse. Ekkor $1\le i\le m$ esetén ta_i egész, így

$$\big\langle a_i(x+jt)+b_i\big\rangle=\langle a_ix+b_i\rangle.$$

Ha pedig $m+1 \le i \le n$, akkor $a_i t$ irracionális, így az $a_i jt$, $j = 1, 2, \dots$ számok egyenletes eloszlásúak moduló 1, tehát $K \to \infty$ esetén

$$c_i \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{K} \langle a_i(x + jt) + b_i \rangle \to \int_0^1 \langle x \rangle \mathrm{d}x = 1/4.$$

Tehát (1)-ből $K \to \infty$ mellett

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle a_i x + b_i \rangle + c$$

adódik, ahol

$$c = \frac{1}{4} \sum_{i=m+1}^{n} c_i.$$

Mivel pedig $\langle x \rangle + \langle x + 1/2 \rangle = 1/2$ azonosan, a c konstans helyettesíthető a $2c\big(\langle x \rangle + \langle x + 1/2 \rangle\big)$ kifejezéssel.

(ii) Most belátjuk a feltétel szükségességét. Feltehetjük, hogy az összes a_i racionális. Az f függvény periodicitása miatt tetszőleges K-val

$$\sum_{j=1}^{2^k} f\left(x + \frac{j}{2^k}\right) = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^{2^k K} f\left(x + \frac{j}{2^k}\right).$$

Elég tehát olyan k, K számokat találni, hogy minden egyes i-re

$$\sum_{j=1}^{2^k K} \langle a_i(x + j/2^k) + b_i \rangle \tag{2}$$

konstans. Mivel $\langle x \rangle + \langle x + 1/2 \rangle$ konstans, ez teljesül, ha az $a_i j/2^k$ számok olyan párokba oszthatók, hogy

$$a_i \frac{j}{2^k} \equiv a_i \frac{j'}{2^k} + \frac{1}{2} \pmod 1. \tag{3}$$

Foglalkozzunk egy fix i-vel. Legyen $a_i = b/c$, ahol b, c relatív prím egészek, és legyen $b = 2^r B$, ahol B páratlan. Vegyük észre, hogy ha $k \ge j+1$ és $j - j' = 2^{k-r-1}c$, akkor

$$a_i \frac{j - j'}{2^k} = \frac{B}{2} \equiv \frac{1}{2} \pmod 1,$$

tehát (3) teljesül. Ha pedig $c|K$, akkor az $1, \dots, 2^k K$ számok beoszthatók ilyen párokba úgy hogy az $1, \dots, 2^{k-r-1}c$ számokat sorban összepárosítjuk a $2^{k-r-1}c + 1, \dots, 2^{k-r}c$ számokkal, és az így kapott blokkot megismételjük $2^r(K/c)$-szer.

Ha tehát K többszöröse az összes a_i szám nevezőjének, k pedig nagyobb, mint a 2 kitevőjének maximuma az a_i számok számlálóiban, akkor az összes (2) alakú kifejezés konstans.

(iii) Hátravan még a feltétel elégségessége. Érdemes a szóban forgó függvények helyett a (mondjuk jobboldali) deriváltjaikat tekinteni. Így

$$f(x) = \int_0^x F(t)\,dt,$$

ahol F 1 periódusú, jobbról folytonos, szakaszonként konstans függvény, amelyre

$$\int_0^1 F(t)\,dt = 0 \qquad \text{és} \qquad \langle x\rangle = \int_0^x g(t)\,dt$$

teljesül, ahol $g(t) = 1$ ha $0 \leq \{t\} < 1/2$, és -1, ha $1/2 \leq \{t\} < 1$. Az $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i\langle a_i x + b_i\rangle$ alakú előállítás azzal ekvivalens, hogy

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i g(a_i x + b_i), \tag{4}$$

a feltétel pedig azzal, hogy

$$\sum_{j=1}^{2^k} F\left(x + \frac{j}{2^k}\right) = 0. \tag{5}$$

Tekintsük először a $k = 1$ esetet. Ekkor $F(x + 1/2) = -F(x)$, vagyis ha F egyik konstancia intervalluma (moduló 1 tekintve) $[u, v)$ és ott az érték s, akkor neki megfelel egy $[u + 1/2, v + 1/2)$ intervallum, melyen az érték $-s$. F tehát előáll

$$F(x) = \sum s_i h_i(x)$$

alakban, ahol h_i ilyen alakú:

$$h_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [u_i, v_i) \text{ (mod 1)}, \\ -1, & \text{ha } x \in [u_i + 1/2, v_i + 1/2) \text{ (mod 1)}, \\ 0 & \text{máskor.} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy

$$h_i(x) = \frac{1}{2}\big(g(x - u_i) - g(x - v_i)\big),$$

és ez azonnal adja F kívánt előállítását, mégpedig úgy, hogy az összes $a_i = 1$.

Az általános esetet teljes indukcióval kezeljük. Tegyük fel, hogy $k-1$-re már ismert a megfelelő előállítás. F-et előállíthatjuk

$$F(x) = F_0(x) + F_1(x)$$

alakban, ahol

$$F_0(x) = \frac{F(x) + F(x+1/2)}{2}$$

1/2 periódusú,

$$F_1(x) = \frac{F(x) - F(x+1/2)}{2}$$

pedig kielégíti az (5) feltételt $k = 1$ mellett. F_1-ről tehát már tudjuk, hogy van a kívánt típusú előállítása. Mivel pedig

$$\sum_{j=1}^{2^k} F\left(x + \frac{j}{2^k}\right) = 2\sum_{j=1}^{2^{k-1}} F_0\left(x + \frac{j}{2^k}\right) = 0,$$

ezért az $F^\star(x) = F_0(2x)$ kielégíti az (5) feltételt k helyet $k-1$-gyel. $F^\star$-nak tehát az indukciós feltevés miatt van (4) típusú előállítása, ami azonnal adja F_0 és így F előállítását is.

Érdemes megfigyelni, hogy a konstruált előállításban az összes a_i 2-hatvány.

1. megjegyzés: Lakos Gyula olyan disztribúcióelméleti megoldást adott, amely egyszerre kiadja a feladat mindkét irányú állítását.

2. megjegyzés: Három versenyző (Csörnyei Marianna, Hegedűs Pál és Matolcsi Máté) a feladat második állítását direkt számolással igazolta. Feltételezték, hogy a_i lehetséges értékei: $1, \dots, 2^{k-1}$, majd az $f(x)$ függvény töréspontjait alkalmasan választott, legfeljebb 2^k elemű $\mathcal{B}_j$ részhalmazokra bontották. Ennek megfelelően az $f(x)$ függvény felírható $f(x) = \sum_j f_j(x)$ alakban, ahol $f_j(x)$ töréspontjai a $\mathcal{B}_j$ halmazba esnek. Majd igazolták, hogy az

$$f_j(x) = \sum_{b\in\mathcal{B}_j;0\le j_b\le 2^{k-1}} c_b\langle 2^{j_b}x + b\rangle$$

előállításban a c_b-kre felírt lineáris egyenletrendszer megoldható.

3. megjegyzés: Maróti Miklós észrevette, hogy már az $f(x+1/2) + f(x+1) = \text{const}$ feltételnek eleget tevő függvénynek is lehet végtelen sok töréspontja. A kitűzők által adott konstrukció tartalmazza ezt a lehetőséget.

Érkezett 15 megoldás, ebből jó 5.

Megoldotta: Benkő Dávid, Csörnyei Marianna, Lakos Gyula, Maróti Miklós, Pór Attila; kissé hiányos Abért Miklós, Matolcsi Máté és Ujváry-Menyhárt Zoltán megoldása; részeredményeket ért el vagy nem értékelhető 7 megoldás.

4. Az $a_1, \dots, a_k$ páratlan és $b_1, \dots, b_k$ páros számokra tudjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^n = \sum_{j=1}^{k} b_j^n$$

teljesül $n = 1, 2, \dots, N$-re. Igazoljuk, hogy ekkor $k \ge 2^N$, és hogy $k = 2^N$ esetén mindig létezik fenti tulajdonságú rendszer.

1. megoldás: (a kitűző megoldása)

Tekintsük a

$$p(x)=\sum_{j=1}^{k}(x^{b_j}-x^{a_j})=\frac{p_1(x)}{x^m}$$

kifejezést, ahol $p_1(x)$ polinom! A feladat feltétele alapján $p(1)=0$, $p'(1)=0$, és így tovább azt kapjuk, hogy az 1 pontban p összes deriváltja eltűnik az N-edikig bezárólag. De ekkor $(1-x)^{N+1}|p_1(x)$, és így $(1+x)^{N+1}|p_1(-x)$ adódik, amiből az $x=1$ helyettesítéssel $2^{N+1}|p_1(-1)=2k$, és ezért $k\geq 2^N$.

A feladat másik részének igazolása indukcióval történhet. $N=1$-re $1+3=2+2$ alapján igaz az állítás. Ha $k=2^N$-re már vannak a fenti tulajdonságú a_j,b_j számok, és ezek mind kisebbek mint a $2M+1$ páratlan szám, akkor tekintsük az

$$a_1,\dots,a_{2^N},2M+1-b_1,\dots,2M+1-b_{2^N}$$

és

$$b_1,\dots,b_{2^N},2M+1-a_1,\dots,2M+1-a_{2^N}$$

2^{N+1} darab páratlan ill. páros számot. Az indukciós feltevés és a binomiális tétel alapján világos, hogy $(*)$ teljesül $j=1,\dots N$-re. De ugyanez igaz $j=N+1$-re is, ha ismét használjuk az indukciós feltevést és a binomiális tételt.

2. megoldás: (Csörnyei Marianna megoldása alapján)

Először néhány egyszerű megjegyzést teszünk.

A feladat feltételei között ott van, hogy a feladatban szereplő páros számokból ugyanannyi van, mint páratlanokból (mindkettőből k darab). Amennyiben tetszőleges egész szám 0-adik hatványát 1-nek definiáljuk, akkor ez a feltétel úgy is megfogalmazható, hogy az a_i számok 0-adik hatványainak összege megegyezik a b_i számok 0-adik hatványainak összegével.

Az a_i és b_i számokat egy c_i sorozatba összegyűjtve számaink eredeti csoportosítását visszanyerhetjük, hiszen a paritás alapján minden szám eredeti csoportja adódik. Az összefésült $\{c_i\}_{i=1}^{l}$ sorozatra a feltételek a következőképpen írhatók fel:

$$\sum_{i=1}^{l}(-1)^{c_i}c_i^n=0,\quad \text{ahol}\quad n=0,1,2,\dots,N.$$

A bizonyítandó, hogy $l=2k\geq 2^{N+1}$, illetve $l=2k=2^{N+1}$ esetén megadható megfelelő $\{c_i\}_{i=1}^{l}$ sorozat.

A továbbiakban a feladat két formáját (a két különálló sorozatra vonatkozó eredeti formát, illetve az összefésülés után kapott sorozatot használó megfogalmazást) felváltva használjuk. A fenti jelöléseket ($l=2k$, illetve $\{c_i\}_{i=1}^{l}$ az összefésüléssel kapott sorozat) a későbbiekben is használjuk.

A feladat második része, $l=2^N$ esetén megfelelő tulajdonságú rendszer konstrukciója, lényegesen egyszerűbb kérdés, mint a k-ra vonatkozó alsó becslés. Megoldásunkat ennek ismertetésével kezdjük.

A fenti 2^{N+1} szám között $\binom{N+1}{i}$ darab i szám lesz, ahol $i = 0, 1, 2, \ldots, N+1$. Hogy ezen sorozat megfelelő, az azt jelenti, hogy

$$\sum_{i=0}^{N+1} (-1)^i \binom{N+1}{i} i^n = 0,$$

tetszőleges N-et meg nem haladó n természetes számra.

A szita formula alapján a bal oldal (egy esetleges előjel váltással) egy n elemű halmaznak egy $N+1$ elemű halmazra történő szürjekcióit számolja meg: Az összes $(N+1)^n$ leképezésből „kiszitáljuk" azokat, amelyek esetén a képek a képtér egy i elemű részhalmazába esnek. Mivel a kérdéses esetekben n kisebb, mint $N+1$, ezért a szürjektív leképezések száma 0-nak adódik. Általában a bal oldal értéke $(-1)^{N+1} n! S(N+1, n)$, ahol $S(N+1, n)$ egy másodfajú Stirling-szám, egy $N+1$ elemű halmaz n osztályba történő partícióinak száma.

Könnyű ellenőrizni, hogy a fenti sorozat elemeihez ugyanazt az s számot hozzáadva is megfelelő sorozatot kapunk. Ebben $\binom{N+1}{i}$ darab $i+s$ szám áll.

Ezek után a feladat nehezebb részének igazolására térünk át. A feladatban szereplő állításnál erősebbet igazolunk. Belátjuk, hogy $2^N \mid k$ vagy $2^{N+1} \mid l$.

Általánosítsuk a feladatot. Ehhez először jelöléseket vezetünk be. A feladatban szereplő $\{c_i\}_{i=1}^l$ sorozatot $C : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvénynek fogjuk fel, ahol $C(j)$ a j szám multiplicitása a $\{c_i\}_{i=1}^l$ sorozatban. Legyen $\mathcal{C}$ a véges tartójú $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvények halmaza. (C tartója $\operatorname{supp}(C) = \{i \in \mathbb{Z} : C(i) \neq 0\}$.) $\mathcal{C}$ modulus az egész számok gyűrűje felett. $C \in \mathcal{C}$ esetén legyen $|C| = \sum_{i \in \mathbb{Z}} C(i)$. (Véges tartójú függvények esetén a fenti összegezésben szereplő nem 0 tagok száma.) Ha C egy véges sorozatot kódoló függvény, akkor $|C|$ a sorozat hossza. Általában $|C|$ lehet negatív szám is. Könnyen adódik, hogy $C, D \in \mathcal{C}$ és α, β egész számok esetén $|\alpha C + \beta D| = \alpha|C| + \beta|D|$.

Ha a $\{c_i\}_{i=1}^l$ sorozatra a $\sum_{i=1}^l (-1)^{c_i} c_i^n$ hatványösszegek $n = 0, 1, \ldots, N$ esetén 0-k, akkor a megfelelő C függvényre

$$(\star) \qquad \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i C(i) i^n = 0, \qquad \text{ahol } n = 0, 1, \ldots, N.$$

Legyen $\mathcal{C}_N$ a $\mathcal{C}$ függvényhalmaz azon elemeinek halmaza, amelyek kielégítik a $(\star)$ feltételt. $\mathcal{C}_N$ egy részmodulus. Ha C egy véges sorozatot kódoló függvény, akkor $C \in \mathcal{C}_N$ éppen azt jelenti, hogy a sorozat (mint a feladatban szereplő páros és páratlan számok összefésüléséből kapott sorozat) kielégíti a feladat feltételeit. Belátjuk, hogy tetszőleges $C \in \mathcal{C}_N$ esetén $2^{N+1} \mid |C|$. Ez nyilván általánosabb a bizonyítandónál.

s egész szám esetén legyen $B_s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $B_s(i+s) = \binom{N+1}{i}$. Azaz a B_s függvények a feladat konstruktív részének megoldásában leírt sorozatokat kódoló függvények, speciálisan $B_s \in \mathcal{C}_N$. Tetszőleges s egész szám esetén $|B_s| = 2^{N+1}$. Belátjuk, hogy a B_s függvények a $\mathcal{C}_N$ modulus egy bázisát adják, azaz tetszőleges $C \in \mathcal{C}_N$ függvény felírható $\sum_{i=1}^d \alpha_i B_{s_i}$ alakban, ahol az α_i számok egészek. Ebből adódik állításunk, hiszen ekkor $|C| = \sum_{i=1}^d \alpha_i |B_{s_i}| = \sum_{i=1}^s \alpha_i 2^{N+1}$.

Legyen C egy tetszőleges függvény $\mathcal{C}_N$-ből. Azt kell belátnunk, hogy C felírható, mint a B_s függvények egész együtthatós kombinációja. $C \not\equiv 0$ esetén legyen $M =$

$\max_{i \in \operatorname{supp}(C)} i$ és $m = \min_{i \in \operatorname{supp}(C)} i$, továbbá legyen $l\big(\operatorname{supp}(C)\big) = M - m + 1$. (Tehát $l\big(\operatorname{supp}(C)\big)$ a C függvény tartóját tartalmazó legkisebb intervallum hossza, amennyiben az intervallum hosszának a benne lévő egész számok számát értjük. $l\big(\operatorname{supp}(B_s)\big) = N+2$.) Az állítást $l\big(\operatorname{supp}(C)\big)$-re vonatkozó teljes indukcióval igazoljuk. $l\big(\operatorname{supp}(C)\big) \leq N+1$ esetén azt igazoljuk, hogy $C \equiv 0$. A $C \in \mathcal{C}_N$ tartalmazás $N+1$ feltétel a C-t leíró $C(m), C(m+1), \ldots, C(M)$, legfeljebb $N+1$ számra. A feltételeket felírva egy lineáris egyenletrendszert kapunk, amely mátrixa egy Wandermonde mátrix. Tehát az egyenletrendszer teljes rangú, azaz csak a $C \equiv 0$ függvény elégítheti ki. $l\big(\operatorname{supp}(C)\big) > N+1$ esetén vegyük észre, hogy $l\big(\operatorname{supp}\,(C - C(m)B_m)\big) < l\big(\operatorname{supp}(C)\big)$. Ezek után indukcióval adódik az állítás.

A 3. és 4. megoldás bizonyításának alapötlete: Csak a feladat nehezebb részét igazoljuk. A feltételekből adódik, hogy tetszőleges legfeljebb N-ed fokú p polinomra

$$\sum_{i=1}^{l} p(a_i) = \sum_{i=1}^{l} p(b_i).$$

Ha megadunk olyan q egész együtthatós, legfeljebb N-ed fokú polinomot, amelynek páros helyeken vett helyettesítési értékei oszthatók 2^N-nel, és páratlan helyeken vett helyettesítési értékei 2^N-nel osztva 1 maradékot adnak (tehát a polinom nem feltétlenül egész együtthatós, de egészek esetén helyettesítési értéke egész), akkor a fenti megjegyzés alkalmazásával nyerjük, hogy

$$l \equiv 0 \pmod{2^N}.$$

A következő két megoldás ilyen alacsony fokú „2-modulus nagyító polinomokat" konstruál.

3. megoldás: (Lakos Gyula megoldása)

Legyen $\underline{a}$ egy egész számokból álló, mindkét irányban végtelen sorozat ($\underline{a} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$). Legyen $\Delta\underline{a}$ az $\{\underline{a}(i+1) - \underline{a}(i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ sorozat. Δ-t *differencia operátornak* szokás nevezni. $\underline{a}$ sorozatot *d-ed fokú polinomiális sorozatnak* nevezzük, ha egy d-ed fokú polinom egész helyeken vett helyettesítési értékeinek sorozata. Könnyen bizonyítható, jól ismert tény, hogy $\underline{a}$ akkor és csak akkor d-ed fokú polinomiális sorozat, ha $\Delta\underline{a}$ $d-1$-ed fokú polinomiális sorozat. Alapötletünk olyan $\underline{q}_N$ N-ed fokú polinomiális sorozat megadását kívánja, amelyben szereplő egész számok felváltva 0 és 1 értékűek modulo 2^N. Ezt fokszámra, azaz N-re vonatkozó teljes indukcióval konstruáljuk. $N = 1$ esetén az x polinom sorozata megfelelő. Az indukciós lépéshez ($\underline{q}_{N+1}$-t szeretnénk definiálni $\underline{q}_N$ ismeretében) a polinomiális sorozatok fenti karakterizációját használjuk. Ez alapján elég egy $\Delta\underline{q}_{N+1}$ N-ed fokú polinomiális sorozatot megadni, amelyben szereplő számok felváltva 1 és -1 értéket vesznek fel modulo 2^N. Ezen sorozatnak megfelel $1 - 2\underline{q}_N$.

4. megoldás: (Hajnal Péter megoldása)

A $x^{2^{N-1}}$ polimom 2-modulus nagyító tulajdonságú, azaz páros helyeken vett helyettesítési értékei oszthatók 2^N-nel, és páratlan helyeken vett helyettesítési értékei 2^N-nel osztva 1 maradékot adnak:

Csak a páratlan számok helyettesítésével kell törődni. Ekkor az

$$x^{2^{N-1}} - 1 = \big(x^{2^{N-2}} + 1\big)\big(x^{2^{N-3}} + 1\big) \ldots \big(x^{2^1} + 1\big)(x+1)(x-1)$$

polinomazonosság alapján adódik az állítás.

Megjegyezzük, hogy $N > 3$ esetén $x^{2^{N-2}}$ is megfelelő polinom.

A fenti polinom egyetlen hibája, hogy a fokszáma nagyon nagy. Mi ugyanilyen polinomot szeretnénk alacsony (N-et meg nem haladó) fokszámmal. Ehhez írjuk fel polinomunkat az $\{x(x-1)\dots(x-k+1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ bázisban. Ismeretes, hogy az együtthatók a másodfajú Stirling-számok lesznek:

$$x^{2^{N-1}} = \sum_{k=0}^{2^{N-1}} S(2^{N-1},k)x(x-1)\dots(x-k+1).$$

Belátjuk, hogy

$$q(x) = \sum_{k=0}^{N} S(2^{N-1},k)x(x-1)\dots(x-k+1)$$

megfelelő, azaz jó polinomot kapunk, ha $x^{2^{N-1}}$ fenti felírásában az N-nél nagyobb fokú tagokat elhagyjuk. Az így kapott polinom nyilván megfelelő fokszámú. Csak azt kell igazolnunk, hogy 2-modulus nagyító tulajdonsága megmarad. Ezt úgy bizonyítjuk, hogy belátjuk az elhagyott tagok egész helyeken vett helyettesítési értékei 2^N-nel oszthatók. Egy elhagyott tag $S(2^{N-1},M)x(x-1)\dots(x-M+1)$, ahol $M > N$. Ez minden x egész értékre osztható $M!S(2^{N-1},M)$-mel. Már láttuk, hogyan adható formula ezekre a számokra. Ennek felhasználásával az oszthatóság könnyen igazolható:

$$M!S(2^{N-1},M) = \sum_{i=0}^{M}(-1)^{M-i}\binom{M}{i}i^{2^{N-1}} \equiv$$

$$\equiv (-1)^{M-1}\sum_{i\ \text{páratlan}}\binom{M}{i} \equiv (-1)^{M-1}2^{M-1} \equiv 0,$$

ahol az $\equiv$ jelek modulo 2^N egyenlőséget jelölnek.

Érkezett 19 megoldás, ebből jó 2.

Megoldották: Csörnyei Marianna és Lakos Gyula; 15 megoldás csak a konstrukciót adja meg; nem értékelhető 2 megoldás.

5. Legyen A az $\{1,2,\dots,n\}$ halmaz legalább $100\sqrt{n}$ elemű részhalmaza. Bizonyítsuk be, hogy van olyan négytagú számtani sorozat, amelynek mindegyik eleme előáll az A halmaz két-két különböző elemének összegeként.

Megoldás: (Lakos Gyula és Sustik Mátyás megoldása alapján)

Legyen A az $\{1,2,\dots,n\}$ halmaz legalább $2k\sqrt{n}$ elemű részhalmaza, amely felbontható két diszjunkt részhalmazra B-re és C-re úgy, hogy $|B|,|C| \geq k\sqrt{n}$ legyen (a feladat szerint $k = 50$).

Minden $(b, c) \in B \times C$ párhoz rendeljük hozzá a $2b + c$ összeget. Mivel ezeknek a száma legalább $k^2 n$ és $1 < 2b + c < 3n$, ezért $k \geq 2$ esetén a skatulya elv szerint találhatók olyan $(b_1, c_1), (b_2, c_2) \in B \times C$ párok, és hogy $(b_1, c_1) \neq (b_2, c_2)$ és

$$2b_1 + c_1 = 2b_2 + c_2. \tag{1}$$

Ha $b_1 = b_2$ (vagy $c_1 = c_2$) lenne, abból a $(b_1, c_1) = (b_2, c_2)$ következne, ami ellentmondás. Ezért, valamint a B és C részhalmazok diszjunkt volta miatt b_1, c_1, b_2, c_2 páronként különböző elemei A-nak.

Tekintsük a következő négy számot:

$$c_1 + b_2 \qquad c_1 + b_1 \qquad c_2 + b_2 \qquad c_2 + b_1$$

Ez a négy szám nemtriviális számtani sorozatot alkot, mivel az 1. és a 2. valamint a 3. és a 4. szám különbsége egyaránt $b_2 - b_1 \neq 0$, és (1) felhasználásával a 2.-ból a 3.-at kivonva ugyanez adódik:

$$c_1 + b_1 - c_2 - b_2 = (c_1 - c_2) - (b_2 - b_1) = 2(b_2 - b_1) - (b_2 - b_1) = b_2 - b_1$$

A számtani sorozat minden tagja két-két különböző elem összege.

Megjegyzés: Amint a megoldásból kitűnik, a feladat szövegében szereplő 100-as szám 4-re csökkenthető.

Érkezett 12 megoldás, ebből jó 6.

Megoldották: Balogh József, Győry Máté, Lakos Gyula, Pór Attila, Sustik Mátyás, Ujváry-Menyhárt Zoltán; kissé hiányos Abért Miklós és Waldhauser Tamás megoldása; részeredményeket ért el vagy nem értékelhető 4 megoldás.

6. Bizonyítsuk be, hogy minden véges háromszögmentes gráf beágyazható feszített részgráfként egy véges háromszögmentes 2 átmérőjű gráfba.

1. megoldás: (Balogh József és Waldhauser Tamás megoldása)

Feltehető, hogy a feladatbeli háromszögmentes G gráf egyszerű. Minden maximális (nem bővíthető) F független halmazhoz vegyünk fel egy új, v_F pontot (ezeket „új pontoknak" nevezzük, szemben G pontjaival, amelyeket „régi pontoknak" hívunk). Ezenkívül legyen z egy „zárócsúcs". G' csúcshalmaza tartalmazza a régi, az új pontokat és a zárócsúcsot. G' tartalmazza G éleit és ezeken kívül pontosan az alábbiakat: z-t kössük össze az összes új ponttal és a v_F új pontot kössük össze az F-beli (régi) pontokkal. Belátjuk, hogy az így kapott véges gráf megfelelő.

G nyilván feszített részgráf.

Tetszőleges új csúcs és a záró csúcs szomszédsága is független, így háromszög nem tartalmazhat új csúcsot, illetve nem tartalmazhatja a zárócsúcsot. Azaz háromszöget csak régi csúcsok alkothatnak. Mivel G háromszögmentes, ezért G' sem tartalmaz háromszöget.

Az, hogy G' bármely két csúcsa legfeljebb 2 távolságra van egymástól, a kiválasztott két csúcs típusa alapján megkülönböztetett esetek vizsgálatával látható be:

1. eset: zárócsúcs–régi pont. Minden régi pont (r) benne van egy F maximális független ponthalmazban. Ekkoz $zv_F r$ egy 2 hosszú út.

2. eset: zárócsúcs–új pont. A definíció alapján összekötött pontok.

3. eset: új pont–új pont. A zárópont közbeiktatásával egy 2 hosszú út vezet köztük.

4. eset: új pont–régi pont. Legyen v_F az új pont és r a régi pont. Ha $r \in F$, akkor készen vagyunk. Ha $r \notin F$, akkor F maximalitása miatt $F \cup \{r\}$ nem egy független halmaz, azaz tartalmaz egy rs élt ($s \in F$). Ekkor $v_F sr$ egy 2 hosszú út.

5. eset: régi pont–régi pont. Ha a két pont összekötött, akkor készen vagyunk. Ha az r és s régi csúcsok nem összekötöttek, akkor egy F maximális független halmaz tartalmazza ezeket. (Minden független ponthalmazt tartalmaz egy nem bővíthető független ponthalmaz.) Ekkor $rv_F s$ mutatja, hogy r és s távolsága 2.

Megjegyezzük, hogy tetszőleges régi pont nincs összekötve a csúcsponttal, így távolságuk pontosan 2. Tehát G' átmérője pontosan 2.

2. megoldás: (Jüttner Alpár és Maróti Miklós megoldása)

Feltehető, hogy G egy legalább három csúcsú egyszerű gráf. G minden össze nem kötött u, v pontpárjára vegyünk fel egy $x_{u,v}$ új csúcsot, amelyet kössünk össze u-val és v-vel. Legyen G' az így kapott gráf. G' háromszögmentes egyszerű gráf, amely feszített részként tartalmazza G-t. Vegyük azon háromszögmentes egyszerű gráfok halmazát, amelyek ponthalmaza $V(G')$, és tartalmazzák G'-t részgráfként. Ezen halmazban legyen G'' egy a részgráf rendezésre nézve maximális elem. Azaz G'' megkapható G'-ből a következő telítési eljárással: a háromszögmentesség megtartásával addig kötünk össze eddig össze nem kötött csúcsokat G'-ben, amíg lehetséges. Belátjuk, hogy a véges G'' gráf megfelelő. Definíciója alapján G'' háromszögmentes.

G feszített részgráf. Elég belátni, hogy G' bővítésénél nem kötöttünk össze két G-beli csúcsot. Csak össze nem kötött csúcsokat kötöttünk össze és a bővítésnél vigyáztunk arra, hogy ne keletkezzen háromszög. Így valóban nem köthettünk össze G-beli u és v pontokat, hiszen ha nem összekötöttek, akkor a köztük vezető él hozzáadása egy háromszöget alkotott volna az $\{u, v, x_{u,v}\}$ halmazon.

G'' legfeljebb 2 átmérőjű. Indirekt módon tegyük fel, hogy az u és v csúcsok távolsága legalább 3. Ekkor G''-t az uv éllel bővítve nem kapunk háromszöget. Ez ellentmond G'' maximalitásának. Ha G'' átmérője nem pontosan 2, akkor G teljes gráf, ami a háromszögmentesség miatt nem teljesülhet, ha G-nek legalább három pontja van.

Megjegyzés: A Zorn lemma egyszerű alkalmazásával mindkét megoldás kiterjeszthető végtelen gráfokra. Jüttner Alpár megjegyzi, hogy a 2. megoldás kiterjesztése a végtelen esetre azt is bizonyítja, hogy egy végtelen gráf beágyazható a feladatnak megfelelően egy ugyanekkora számosságú gráfba. Amennyiben nem szabunk határt azon gráf nagyságának, amelybe a beágyazás történik, akkor adott gráfméret esetén univerzális gráf (azaz olyan gráf, amelybe tetszőleges adott méretű háromszögmentes gráf beágyazható) is megadható.

Érkezett 29 jó megoldás.

Megoldották: Abért Miklós, Balogh József, Barát János, Benkő Dávid, Csörnyei Marianna, Dombi Gergely, Elekes Márton, Fleiner Balázs, Fleiner Tamás, Goldman Júlia, Győry Máté, Harcos Gergely, Hegedűs Pál, Imreh Csanád, Járai Antal, Jüttner Alpár, Küronya Alex, Lakos Gyula, Maróti Miklós, Matolcsi Máté, Pál Ambrus, Pete Gábor, Pór Attila, Réti Géza, Sustik Mátyás, Szabó Szilárd, Tichler Krisztián, Ujváry-Menyhárt Zoltán, Waldhauser Tamás.

7. Legyen R olyan asszociatív gyűrű, amelyben egyetlen nem 0 elem négyzete sem 0. Bizonyítsuk be, hogy ha $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ és $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$, akkor ugyanezen elemek bármely más sorrendben vett szorzata is 0.

1. megoldás: (Fleiner Tamás és Maróti Miklós megoldása alapján)

Legyen $x_1, x_2, \ldots \in R$ tetszőleges. Akkor

(1) $x_1x_2 = 0 \Rightarrow (x_2x_1)^2 = x_2(x_1x_2)x_1 = x_2 0 x_1 = 0 \Rightarrow x_2x_1 = 0.$

Ezt többször alkalmazva

(2) $x_1x_2x_3 = 0 \Rightarrow x_2(x_1x_2x_3) = (x_2x_1x_2)x_3 = 0 \Rightarrow x_3(x_2x_1x_2) = 0 \Rightarrow x_1(x_3x_2x_1x_2) = (x_1x_3x_2x_1)x_2 = 0 \Rightarrow x_2(x_1x_3x_2x_1) = 0 \Rightarrow (x_2x_1x_3x_2x_1)x_3 = (x_2x_1x_3)^2 = 0 \Rightarrow x_2x_1x_3 = 0.$

(1)-ben x_2 helyett $x_2 \ldots x_n$-t írva látjuk, hogy szorzat zérus voltát tényezői ciklikus permutációja nem változtatja. (2)-ben x_3 helyett $x_3 \ldots x_n$-t írva ugyanezt nyerjük az első két tényező transzponálására vonatkozóan. Mivel $1, \ldots, n$ teljes permutációcsoportját $(12 \ldots n)$ és (12) együtt generálja, zérus szorzat tényezőinek bármely permutálása után is zérus marad.

2. megoldás: (Dombi Gergely és Matolcsi Máté megoldása alapján) Legyen $x_1, x_2, x_3 \in R$ tetszőleges. Akkor

(1) $x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_2x_1 = 0$ (lásd az előző bizonyítást),

(2) $x_1x_2 = 0 \Rightarrow x_3(x_1x_2) = (x_1x_2)x_3 = 0,$

(3) $x_1x_2 = 0 \Rightarrow (x_1x_3x_2)^2 = x_1x_3(x_2x_1)x_3x_2 = x_1x_3 0 x_3x_2 = 0 \Rightarrow x_1x_3x_2 = 0,$

azaz szorzat zérus voltán nem változtat, ha tényezői elé, közé, vagy után további tényezőket írunk. Ha $s_1, s_2, \ldots, s_n \in R$, $s_1s_2 \cdots s_n = 0$, π az $1, 2, \ldots, n$ számok egy permutációja, és $s = s_{1\pi}s_{2\pi} \cdots s_{n\pi}$, akkor s^n tartalmazza az $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tényezőket ilyen sorrendben, valamint köztük és esetleg előttük és utánuk további tényezőket; ezért $s^n = 0$. Ekkor azonban $s = 0$, különben $s^2, s^4, \ldots \neq 0$, és $2^k > n$-re a $0 = s^n \cdot s^{2^k - n} = s^{2^k} \neq 0$ ellentmondást kapnánk.

Érkezett 29 megoldás, ebből jó 27.

Megoldották: Fleiner Tamás, Jüttner Alpár, Pál Ambrus, Pete Gábor, Waldhauser Tamás (ők megjegyezték, hogy bizonyításuk bármely zéruselemes félcsoportra is jó); továbbá Abért Miklós, Balogh József, Benkő Dávid, Csörnyei Marianna, Dombi Gergely, Elekes Márton, Fleiner Balázs, Goldman Júlia, Győry Máté, Harcos Gergely, Hegedűs Pál, Imreh Csanád, Járai Antal, Lakos Gyula, Matolcsi Máté, Maróti Miklós, Pór Attila, Réti Géza, Sustik Mátyás, Szabó Szilárd, Ujváry-Menyhárt Zoltán, Vörös Zoltán; nem értékelhető 2 megoldás.

8. Legyen P véges részbenrendezett halmaz, melyben van legnagyobb elem és ez a minimális elemek halmazának egyetlen felső korlátja. Igazoljuk, hogy bármely $f : P^n \to P$ monoton függvény megkapható $g(x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_m)$ alakban, ahol

$c_i \in P$ és g monoton idempotens függvény P-n (g idempotens, ha $g(x, x, \dots, x) = x$ minden $x \in P$-re).

Megoldás: (Benkő Dávid, Pór Attila és Ujváry-Menyhárt Zoltán megoldása alapján)

Ha P egyelemű, a feladat állítása triviális. Tegyük fel, hogy P legalább kételemű. Jelölje 1 a P legnagyobb elemét. Legyen $c_1, \dots, c_m$ a P minimális elemeinek egy felsorolása. Tekintsünk egy tetszőleges f n-változós monoton függvényt P-n. Definiáljuk a következő $g : P^{n+m} \to P$ függvényt:

$$g(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n), & \text{ha } (y_1, \dots, y_m) = (c_1, \dots, c_m) \\ 1, & \text{ha } (y_1, \dots, y_m) > (c_1, \dots, c_m) \\ y_1, & \text{különben.} \end{cases}$$

Legyen

$$A = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) : (y_1, \dots, y_m) = (c_1, \dots, c_m)\} \subseteq P^{n+m},$$
$$B = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) : (y_1, \dots, y_m) > (c_1, \dots, c_m)\} \subseteq P^{n+m},$$

és $C = P^{n+m} \setminus (A \cup B)$. Mivel A, B és C páronként diszjunkt halmazok és uniójuk P^{n+m}, g jól definiált. Világos, hogy $g(x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_m) = f(x_1, \dots, x_n)$ tetszőleges $x_1, \dots, x_n \in P$ esetén.

Figyeljük meg, hogy g az A, B és C halmazok mindegyikére megszorítva monoton. Az A és C olyan részhalmazai P^{n+m}-nek, melyek bármely elemmel együtt az összes nála kisebb P^{n+m}-beli elemet is tartalmazzák. Ezért g monotonitásához elég megmutatni, hogy tetszőleges $s \in A \cup C$ és $t \in B$ elemekre, ha $s < t$, akkor $g(s) \leq g(t)$. Ez viszont $g(t) = 1$ miatt teljesül. Tehát g monoton.

A P-re kirótt feltétel miatt P^{n+m} $(1, 1, \dots, 1)$-től különböző konstans elemei C-be esnek, és mivel P legalább kételemű $(1, 1, \dots, 1) \in B$. Ezért g idempotens is.

Érkezett 14 megoldás, ebből jó 6.

Megoldotta: Benkő Dávid, Fleiner Tamás, Lakos Gyula, Maróti Miklós, Pór Attila és Ujváry-Menyhárt Zoltán; kissé hiányos Abért Miklós, Balogh József, Csörnyei Marianna, Goldman Júlia és Waldhauser Tamás megoldása; nem értékelhető 3 megoldás.

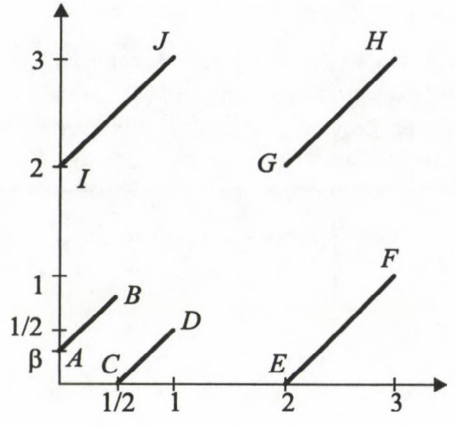
9. Egy síkbeli $P_1, \dots, P_m$ nem feltétlenül különböző pontokból álló pontsorozatot kígyózónak nevezünk, ha P_i és P_{i+1} távolsága legalább 1, és a P_iP_{i+1} szakaszok felváltva vízszintesek ill. függőlegesek. Konstruáljunk olyan kompakt halmazt, amelyben van akármilyen hosszú kígyózó sorozat, de nincs ilyen záródó sorozat (amelyre tehát $P_m = P_i$ valamely $i < m$-re).

1. megoldás: (Ujváry-Menyhárt Zoltán megoldása)

Legyen β egy irracionális szám a $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ intervallumból. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert (vízszintes és függőleges tengelyekkel) és benne a következő pontokat:

$$\begin{array}{llll} A(0;\beta); & B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}+\beta\right); & C\left(\frac{1}{2}, 0\right); & D\left(1, \frac{1}{2}\right); \\ E(2;0); & F(3;1); & G(2;2); & H(3;3); \\ I(0;2); & J(1;3); & & \end{array}$$

A kompakt halmaz legyen az $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$ és $\overline{IJ}$ szakaszok uniója, jelöljük ezt K-val.



Ebben vegyünk egy pontot az $\overline{IJ}$ szakaszról. Ettől vízszintesen a $\overline{GH}$ szakasznak pontosan egy pontja helyezkedik el, pontosan 2 távolságra, nincs más pontja K-nak vízszintesen. Függőleges irányban az $\overline{AB}$ vagy a $\overline{CD}$ pontjai lehetnek, de mindkettőnek csak legfeljebb 1 pontja (legalább 1 távolságra). A $\overline{GH}$ szakasznak egy pontjától vízszintesen az $\overline{IJ}$ egy pontja, függőlegesen az $\overline{EF}$ egy pontja van, mindkettő 2 távolságra. Az $\overline{EF}$ egy pontjától vízszintesen az $\overline{AB}$ egy pontja illetve a $\overline{CD}$ egy pontja helyezkedhet el, de az is lehet, hogy egyetlen ilyen pont sincs (egyébként ezek a távolságok is legalább 1-ek), függőlegesen pedig a $\overline{GH}$ egy pontja helyezkedik el (ez 2 távolságra van). Az $\overline{AB}$ egy pontjától vízszintesen legalább 1 távolságra az $\overline{EF}$ pontosan egy pontja van, függőlegesen pedig az $\overline{IJ}$ szakasznak pontosan egy pontja. Ugyanez áll a $\overline{CD}$ szakasz pontjaira is.

Nézzük meg, hogy mi történik, amikor elindulunk egy kígyózó sorozattal $\overline{EF}$ egy pontjából függőleges irányba. Legyen ez a pont a $(2+a, a)$ pont, innen a $\overline{GH}$ egy pontját kapjuk, a $(2+a, 2+a)$ pontot ($0 \leq a \leq 1$ volt). Innen vízszintesen csak az $\overline{IJ}$ egy pontja van, mégpedig az $(a, 2+a)$ pont. Itt $a < \frac{1}{2}$ esetén az $\overline{AB}$ szakaszon tudjuk csak folytatni, $a > \frac{1}{2}$ esetén csak a $\overline{CD}$ szakaszonon, $a = \frac{1}{2}$ esetén választhatunk.

(1) Az $\overline{AB}$-on folytatódik: az $(a, a+\beta)$ pontba jutunk, innen csak az $\overline{EF}$ szakasz $(2+a+\beta, a+\beta)$ pontjával folytatódhat a sorozat.

(2) A $\overline{CD}$ szakaszon folytatódik a sorozat: az $\left(a, a-\frac{1}{2}\right)$ pontba jutunk, innen csak az $\overline{EF}$ szakasz $\left(2+a-\frac{1}{2}, a-\frac{1}{2}\right)$ pontjával folytatódhat a sorozat.

Ebben a K ponthalmazban nincsen záródó sorozat. Ha ugyanis lenne ilyen, akkor ennek szükségképpen lenne pontja az $\overline{EF}$; $\overline{GH}$ és $\overline{IJ}$ szakaszokon. Így induljunk az $\overline{EF}$ egy $(2+a, a)$ pontjából függőleges irányban. (Ilyen kell legyen egy záródó sorozatban.) Innen indulva azonban az $\overline{EF}$ szakasznak a $\left(2+a+k\cdot\beta-\ell\cdot\frac{1}{2}; a+k\cdot\beta-\ell\cdot\frac{1}{2}\right)$ alakú pontjait kaphatjuk meg, ahol k és ℓ nemnegatív egészek, és mindig amikor újra visszajutunk az $\overline{EF}$ szakaszra $(k+\ell)$ értéke 1-gyel nagyobb lesz, mint az előző $\overline{EF}$-on levő pont esetében (vagy a k vagy az ℓ értéke nőtt 1-gyel, a másik nem változott, a korábbiak alapján). Viszont ekkor nem kaphatjuk vissza az $(a+2, a)$ pontot, mivel ekkor:

$$a+2+k\cdot\beta-\ell\cdot\frac{1}{2} = a+2 \quad \text{és} \quad a+k\cdot\beta-\ell\cdot\frac{1}{2} = a$$

lenne, ami ellentmond β irracionalitásának.

K-ban van végtelen hosszú kígyózó sorozat; mivel $\overline{EF}$ egy tetszőleges pontjából függőlegesen indul a sorozat mindig folytatható (és sosem záródik).

2. megoldás: (a kitűző és Maróti Miklós megoldása) Legyen C a szokásos Cantor–féle triadikus halmaz. C-nek a pontjai egyértelműen felírhatjuk a hármas számrendszerben

$$\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$$

alakban, ahol az α_i számjegyek mindegyike 0 vagy 2. Először igazoljuk, hogy megadható olyan $f : C \longrightarrow C$ folytonos függvény, hogy f semmilyen iteráltjának sincs fix pontja. Legyen pl. $f(1) = 0$, ha pedig α triadikus alakjában az első 0 számjegy az α_n, akkor legyen $f(\alpha)_j = 0$ minden $1 \leq j < n$-re, $f(\alpha)_n = 2$, egyébként pedig $f(\alpha)_j = \alpha_j$ ($j > n$-re); másszóval az első 0 előtti ketteseket kinullázzuk, az első 0 helyett 2-est írunk, és minden más jegyet változatlanul hagyunk. Világos, hogy f folytonos. Megmutatjuk, hogy f semmilyen iteráltjának sincs fix pontja.

Legyenek az α triadikus kifejtésében az n_1-edik, n_2-edik stb. helyeken álló jegyek a zérus jegyek (sorrendben), és először tételezzük fel, hogy α kifejtésében a 0 végtelen sokszor szerepel. Ekkor

$$f(\alpha) = 0, \overbrace{0 \cdots 0}^{n_1 - 1} 2\, \alpha_{n_1+1} \cdots,$$

$$f^{(2)}(\alpha) = 0, 2 \overbrace{0 \cdots 0}^{n_1 - 2} 2\, \alpha_{n_1+1} \cdots,$$

$$f^{(3)}(\alpha) = 0, 02 \overbrace{0 \cdots 0}^{n_1 - 3} 2\, \alpha_{n_1+1} \cdots,$$

$$f^{(4)}(\alpha) = 0, 22 \overbrace{0 \cdots 0}^{n_1 - 3} 2\, \alpha_{n_1+1} \cdots,$$

$$\vdots$$

$$f^{(2^{n_1})}(\alpha) = 0, \overbrace{2 \cdots 2}^{n_2 - 1} 0 \alpha_{n_2+1} \cdots,$$

ezért, az n_1-edik jegy $f^{(j)}$-ben $= 2$ minden $1 \leq j \leq 2^{n_1}$-re, míg ugyanezen jegy $= 0$ az α-ban, tehát ilyen j-kre $f^{(j)}(\alpha) \neq \alpha$. Most

$$f^{(2^{n_1}+1)}(\alpha) = 0, \overbrace{0 \cdots 0}^{n_2 - 1} 2\, \alpha_{n_2+1} \cdots,$$

$$f^{(2^{n_1}+2)}(\alpha) = 0, 2 \overbrace{0 \cdots 0}^{n_2 - 2} 2\, \alpha_{n_2+1} \cdots,$$

$$\vdots$$

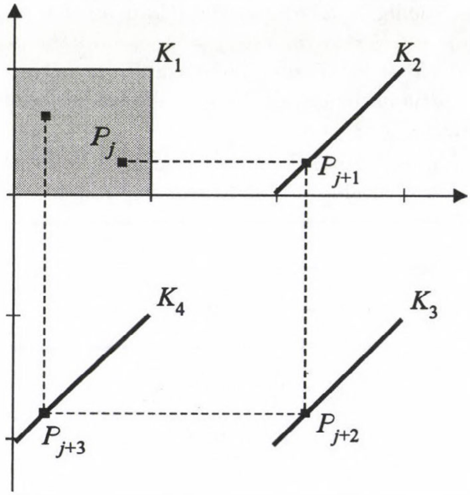
$$f^{(2^{n_1}+2^{n_2})}(\alpha) = 0, \overbrace{2 \cdots 2}^{n_3 - 1} 0\, \alpha_{n_3+1} \cdots,$$

ezért, az n_2-edik jegy $f^{(j)}$-ben $= 2$ minden $2^{n_1} < j \leq 2^{n_1}+2^{n_2}$-re, míg ugyanezen jegy $= 0$ α-ban, tehát ilyen j-kre $f^{(j)}(\alpha) \neq \alpha$. Ezt az eljárást folytatva kapjuk, hogy $f^{(j)}(\alpha) \neq \alpha$ bármely j-re. Ha α-ban csak véges sok 0 szerepel, az igazolás hasonlóan történik.

Álljon mármost a K halmaz az f függvény gráfjából, valamint a

$$\overline{(2,0)(3,1)}, \quad \overline{(2,-2)(3,-1)}, \quad \overline{(0,-2)(1,-1)}$$

szakaszokból. Jelöljük ezen részeit K-nak rendre K_1, K_2, K_3 és K_4-gyel (ld. az ábrát)! Megmutatjuk, hogy ez a K megfelel a feltételeknek.



Megmutatjuk, hogy záródó kígyózó sorozat nincs K-ban. Könnyen látható, hogy ha $P_1, \ldots, P_m$ egy kígyózó sorozat amelyre $P_j = (x_j, y_j) \in K_1$ és a $\overline{P_j P_{j+1}}$ szakasz vízszintes, akkor a P_{j+4} pont x koordinátája megegyezik a P_j pont y koordinátájával, azaz $x_{j+4} = y_j$. De $y_j = f(x_j)$, ezért az $x_{j+4} = f(x_j)$ összefüggéshez jutunk. Mármost a pontsorozat záródása ekkor az f egy iteráltjának egy fixpontjához vezetne, márpedig ilyen nincs. Ha a $\overline{P_j P_{j+1}}$, $P_j \in K_1$ szakasz függőleges, akkor a sorozatot fordítva felírva a fenti gondolatmenet alkalmazható.

Végül megmutatjuk, hogy van viszont végtelen kígyózó sorozat. Valóban, K_1 bármely pontjából felváltva vízszintesen ill. függőlegesen elmehetünk előbb K_2 egy pontjába, majd egy K_3-beli, egy K_4-beli, és végül újra egy K_1-beli pontba (alkalmazzuk a fenti megfontolást P_j és P_{j+4} koordinátáiról és azt, hogy f a Cantor halmazt önmagába képezi le); és innen az eljárás iterálható, ezért K-ban van végtelen kígyózó sorozat.

Megjegyzés: Ha van záródó kígyózó sorozat, akkor persze van végtelen is.

Érkezett 17 megoldás, ebből jó 11.

Megoldotta: Abért Miklós, Balogh József, Benkő Dávid, Csörnyei Marianna, Elekes Márton, Fleiner Balázs, Harcos Gergely, Lakos Gyula, Matolcsi Máté, Pór Attila, Ujváry-Menyhárt Zoltán; kissé hiányos Maróti Miklós megoldása; nem értékelhető 5 megoldás.

10. Legyen $X = \{X_1, X_2, \ldots\}$ megszámlálható halmaz a térben. Mutassuk meg, hogy van olyan $\{a_k\}$ pozitív sorozat, hogy a tér bármely $Z \notin X$ pontjára igaz az, hogy a Z pontnak az $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ halmaztól vett távolsága legalább a_k végtelen sok k-ra.

Megoldás: (több versenyző megoldása)

Legyen $r_k > 0$ olyan kicsi, hogy az $X_1, \cdots, X_k$ pontok köré írt r_k sugarú $D_{r_k}(X_1)$, $\ldots, D_{r_k}(X_k)$ gömbök mind diszjunktak, és még követeljük azt is meg, hogy $r_{k+1} < r_k/2$ fennálljon. Állítjuk, hogy az $\{r_2, r_3, \ldots\}$ sorozat, azaz $a_k = r_{k+1}$ megfelelő (figyelem, ez az eltolt sorozat! Ez a trükk az egészben!)

Legyen Z egy tetszőleges pont a térben, és tegyük fel, hogy a Z pontnak az

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$$

halmaztól vett távolsága kisebb, mint a_k, minden $k \geq k_0$. Azt kell megmutatnunk, hogy Z megegyezik valamelyik X_j-vel. Minden $k \geq k_0$-ra Z benne van a

$$\bigcup_{j=1}^{k} D_{r_{k+1}}(X_j)$$

halmazban, és ez az r_k választása miatt egyben azt is jelenti, hogy létezik egy és csakis egy olyan $j_k(Z) \in \{1, 2, \ldots, k\}$ index, hogy $Z \in D_{r_{k+1}}\left(X_{j_k(Z)}\right)$. Vegyük észre, hogy $D_{r_{k+1}}\left(X_{j_k(Z)}\right)$ még a $D_{r_{k+1}}(X_{k+1})$ gömbtől is diszjunkt, és ez utóbbi tartalmazza a

$$D_{r_{k+2}}(X_{k+1}) = D_{a_{k+1}}(X_{k+1})$$

gömböt. Tehát Z nem lehet eleme a $D_{r_{k+2}}(X_j)$, $j \neq j_k(Z)$, $1 \leq j \leq k+1$ gömbök egyikének sem, így fenn kell állnia a $j_{k+1}(Z) = j_k(Z)$ egyenlőségnek. Tehát van egy olyan j_Z index, hogy $j_k(Z) = j_Z$ minden $k \geq k_0$-ra igaz. Ez viszont azt jelenti, hogy Z minden k-ra benne van az X_{j_Z} körüli r_{k+1} sugarú gömbben, de ez $r_{k+1} \to 0$ $(k \to \infty)$ miatt azt jelenti, hogy $Z = X_{j_Z}$, amivel az állítást igazoltuk.

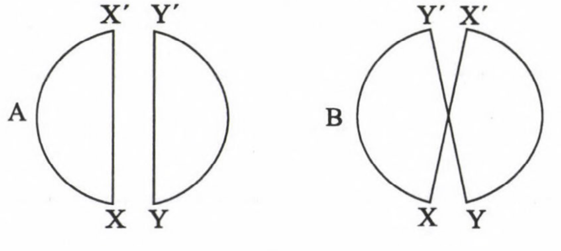
Érkezett 22 megoldás, ebből jó 20.

Megoldotta: Abért Miklós, Balogh József, Benkő Dávid, Csörnyei Marianna, Elekes Márton, Fleiner Balázs, Fleiner Tamás, Győry Máté, Harcos Gergely, Hegedűs Pál, Járai Antal, Jüttner Alpár, Lakos Gyula, Maróti Miklós, Matolcsi Máté, Pete Gábor, Pór Attila, Sustik Mátyás, Tichler Krisztián, Ujváry-Menyhárt Zoltán; kissé hiányos Pál Ambrus megoldása; nem értékelhető 1 megoldás.

11. Egy kör kerületén vegyünk fel $2n$ diszjunkt ívet és állítsuk párba azokat. Az egyes párokat egy téglalap alakú szalag odaragasztásával összekötjük. A ragasztás történhet úgy, hogy a kör és a téglalap együtt körgyűrűvel homeomorf alakzatot ad, és úgy is, hogy Möbiusz-szalaggal homomeomorf alakzatot ad. Az utóbbit csavart, az előbbit nem-csavart ragasztásnak mondjuk. Definiáljunk egy $n \times n$-es (A_{ij}) mátrixot a következő módon: legyen $A_{ii} = 1$, ha az i-edik téglalap odaragasztása csavart, és legyen $A_{ii} = 0$, ha az nem-csavart. Legyen $A_{ij} = 0$, ha a körvonalnak van olyan íve, mely az i-edik téglalap mindkét odaragasztott oldalát tartalmazza, ám a j-edik téglalap odaragasztott oldalaival nincs közös pontja; ellenkező esetben legyen $A_{ij} = 1$. Legyen r az (A_{ij}) mátrix rangja a kételemű test felett, és k az n darab téglalap körlaphoz ragasztásával nyert felület peremköreinek a száma. Igazoljuk, hogy $n = k + r - 1$.

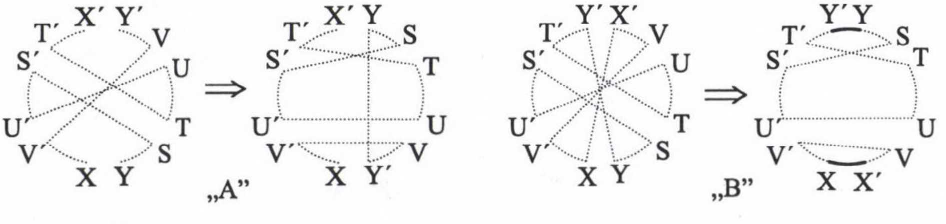
1. megoldás: (Lakos Gyula megoldása)

Vonatkoztassunk el a topológiai formától, és tekintsük az alapobjektumunkat mint egy körvonalat, melyen van $2n$ lyuk, ezek párba vannak állítva és az egy párban levők széleit az ábrán látható módok valamelyike szerint kötjük össze:



(itt **B**-*nél nem számít, hogy alul vagy felül van a keresztezés, csak az a lényeg, hogy egy lyuk adott vége a megfelelő másik lyuk melyik végével van összekötve)*

Ezután egy ilyen ábrához természetes módon hozzárendeljük a k számot, mint az objektum összefüggő komponenseinek számát, illetve az (A_{ij}) mátrixot (ezt persze csak lyukak felsorolásának sorrendjéig egyértelmű, mely a mátrix rangját nem befolyásolja.) Egy **A** illetve **B** típusú lyukpárhoz természetes módon hozzárendelhető egy transzformáció: az **A** esetben az alapkör YY' (jobboldali) ívét tükrözzük a vízszintes tengelyre, a **B** esetben szintén a jobboldali, YX' ívet tükrözzük a vízszintes tengelyre.

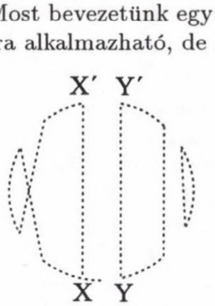


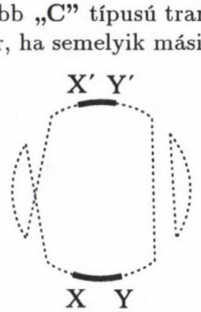
Világos, hogy a k szám invariáns az ilyen transzformációkra. Az (A_{ij}) mátrix következőképpen változik a fenti transzformációk során (a lyukak megfelelő sorrendű felírásával):

$$\begin{array}{c|c|c} 0 & 1\ldots1 & 0\ldots0 \\ \hline 1 & & \\ \vdots & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ 1 & & \\ \hline 0 & & \\ \vdots & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ 0 & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} 0 & 1\ldots\ 1 & 0\ldots0 \\ \hline 1 & & \\ \vdots & \mathbf{C+1} & \mathbf{D} \\ 1 & & \\ \hline 0 & & \\ \vdots & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ 0 & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} 1 & 1\ldots1 & 0\ldots0 \\ \hline 1 & & \\ \vdots & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ 1 & & \\ \hline 0 & & \\ \vdots & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ 0 & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c} \mathbf{C+1} & \mathbf{D} \\ \hline \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{array}$$

Itt **1** a csupa egyesekből álló megfelelő méretű mátrix. Az „**A**" transzformáció esetén n és a rang változatlan marad (az utóbbi azért, mert az új mátrix úgy adódik a régiből, hogy az első oszlopot hozzáadjuk a **C** blokk oszlopaihoz). A „**B**" transzformációnál n és a rang is eggyel csökken. Összességében az $n-(k+r-1)$ mennyiség invariáns mind az „**A**", mind a „**B**" típusú transzformációk során.

Most bevezetünk egy speciálisabb „**C**" típusú transzformációt is. Ez **A** típusú lyukpárokra alkalmazható, de csak akkor, ha semelyik másik lyukpárral sem kereszteződik:





$$\begin{array}{c|c} 0 & 0\ldots0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathbf{C} \\ 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \mathbf{C} \end{array}$$

Ebben az esetben k eggyel csökken, n 1-gyel csökken, a mátrix rangja invariáns. Világos, hogy az $n-(k+r-1)$ mennyiség most is invariáns. A bizonyítandó az, hogy ez az „**A**", „**B**", „**C**" -invariáns $n-(k+r-1)$ mennyiség mindig 0.

A bizonyítás történhet n szerinti teljes indukcióval.

$n=0$-ra az állítás triviális.

$n \geq 1$ esetén: Ha van csavart ragasztás, akkor „**B**" típusú transzformációval $n-1$-re vezetjük vissza.

Egyébként „**C**" típusú transzformációval próbálkozunk, ez $n-1$-re vezet vissza.

Ha sem „**B**" sem „**C**" típusú transformációval nem próbálkozhatunk, akkor egy „**A**"-transzformáció után biztos lehet „**B**" transzformációt alkalmazni és ezzel $n-1$-re vezettük vissza.

2. megoldás: (Hegedűs Pál bizonyítása)

Definiáljunk egy F_2 feletti V vektorteret a következőképpen: $V = \{H \subseteq \{1,2,\ldots, n\}\}$, $H_1, H_2 \in V$ esetén legyen $H_1 + H_2 = H_1 \triangle H_2$ (szimmetrikus differencia), $1 \cdot H = H$, $0 \cdot H = \emptyset$. Ez közismerten vektortér lesz, dimenziója n. Most képzeljük úgy, mintha V elemei olyan halmazok lennének, amelyek elemei a téglalapjaink közül valók. (Vagyis megszámozzuk a téglalapokat, miként a feladat is teszi.) Legyen $B = \{\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}\}$ a standard bázis V-ben. Az A mátrixot képzeljük úgy, mint egy ezen a vektortéren ható transzformációt ebben a bázisban felírva. $H \in V$ tetszőleges, ekkor $HA \in V$ az a halmaz, amelynek azok a téglalapok az elemei, amelyek páratlan sok H-belit metszenek (i-edik metszi az i-ediket, ha csavart a ragasztása, az i-edik metszi a j-ediket ($i \neq j$), ha az $A_{ij} = 1$ esetet leíró állapot teljesül). A dimenziótételt felírva azt kapjuk, hogy $n = r + \dim(\operatorname{Ker} A)$, így elég azt belátni, hogy $\dim(\operatorname{Ker} A) = k - 1$. Képezzünk minden peremkörhöz egy halmazt a következő módon: $i \in H$, ha az i-edik téglalapnak pontosan egy oldalát tartalmazza a peremkör. Legyenek ezek a halmazok $H_1, \ldots, H_k$. Ekkor a következő három állítás szolgáltatja a kívánt eredményt:

1. Néhány különböző H_i összege csak úgy lehet $\emptyset$, ha az összeset összeadjuk.
2. $H_i A = \emptyset$, $\quad i = 1 \ldots k$ esetén.
3. $HA = \emptyset$ esetén $\exists \lambda_i \in \mathbf{F}_2$, hogy $H = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i H_i$

Valóban, 1. miatt $\dim \langle H_i \,:\, i = 1, \ldots, k \rangle = k - 1$, 2. miatt $H_i \in \operatorname{Ker} A$, $i = 1, \ldots, k$, 3. miatt $\operatorname{Ker} A \subseteq \langle H_i \,:\, i = 1, \ldots, k \rangle$.

1. bizonyítása: $\sum_{i=1}^{k} H_i = \emptyset$, hiszen így minden téglalap mindkét oldalát pontosan egyszer számoltuk. Ha pedig néhány H_i összege $\emptyset$, az azt jelenti, hogy az általuk érintett téglalapokat elhagyva olyan felületet kapunk, amelynek a peremkörei elkerülik a perem egy részét (ti. az elhagyott téglalapok ragasztási pontjait), ez pedig képtelenség.

2. bizonyítása: Egy téglalap a kör kerületét két részre osztja, egy belsőre, és egy külsőre. (Ezek az elnevezések akkor hordoznak szemléletes jelentést, ha megpróbáljuk a síkba invertálni a felületüket, erre nekünk most nincsen szükségünk, hívhatnánk a két kerületdarabot A-nak és B-nek is.) Tekintsük most az i-edik téglalapot. Ekkor a j-edik téglalap egy pereme pontosan akkor vált külsőről a belsőre (vagy fordítva), ha metszették egymást a téglalapok, vagyis $A_{ij} = 1$. Ez $i \neq j$-re nyilvánvaló, de $i = j$-re is pont ezt jelenti a csavart/nem csavart ragasztás. $H_i A = \emptyset$ azt jelenti, hogy H_i minden téglalapot páros sokszor metsz, de ez teljesül is a fentiek miatt, vagyis egy peremkört tetszőlegesen irányítva, ha egy téglalap belső oldaláról indul (belső területrészéről, de nem feltétlenül a téglalap valódi oldaláról), akkor oda is érkezik meg, így páros sokszor metszi. (Ugyanúgy, ha külsőről indul, külsőn is ér véget, hiszen eleje = vége.)

3. bizonyítása: Ezt n-re vonatkozó indukcióval látjuk be. $n = 1$-re maga a feladat állítása is triviális, miként ez az állítás is. Most tegyük fel, hogy $n - 1$-re már igaz, be fogjuk látni, hogy n-re is igaz, és ezzel teljessé tesszük az egész bizonyítást. Legyen $H \in V$ olyan, hogy $HA = \emptyset$, vagyis H minden téglalapot páros sokszor metsz. Tegyük fel először, hogy $|H| < n$. Ha most van olyan téglalap, hogy a két él (oldala) különböző peremkörhöz tartozik, és nem eleme H-nak, akkor hagyjuk el ezt a téglalapot, a két peremkör összeolvad az új felületen, az indukció szerint $H = \sum \lambda_i H_i$. Ha itt a H_i-k között szerepel ez az összeolvadt peremkör 1 súllyal, akkor minden súlyhoz 1-et adva szintén előállítását kapjuk H-nak 1. szerint, és ez előállítása lesz neki az eredeti felületen is. Ha nincsen ilyen téglalap, akkor vegyünk egy olyan téglalapot, ami nincs H-ban, ekkor ennek mindkét oldala ugyanahhoz a peremkörhöz (legyen ez az ℓ. peremkör) tartozik. Ennek a megfelelő halmaza legyen H_ℓ. H_ℓ minden eleme olyan téglalap, amelynek egyik éle az ℓ peremkörhöz tartozik, a másik pedig egy másikhoz, így H_ℓ minden eleme eleme H-nak is. Vagyis $H + H_\ell$-nek van olyan nem-eleme, aminek a két éle különböző peremkörhöz tartozik, vagyis az előzőek szerint $H + H_\ell$ benne van $\langle H_i \,|\, i = 1 \ldots k \rangle$-ban, de így H is benne van. Maradt az az eset, hogy $H = \{1, 2, \ldots, n\}$. Ha most $k > 1$, akkor $|H + H_1| < n$, így $H + H_1 \in \langle H_i \,|\, i = 1 \ldots n \rangle$, vagyis $H \in \langle H_i \,|\, i = 1 \ldots n \rangle$. Így már csak azt kéne belátni, hogy $k = 1$ esetén $H = \{1, 2, \ldots, n\}$ nem tud mindent páros sokszor metszeni. Színezzük ki a kerületet (kör kerületet) két színnel, úgy hogy a szomszédos ívek különböző színűek legyenek, és a ragasztási pontok válasszák el egymástól az íveket. Így kapunk $2n$ ívet, n azonos színűt. Mivel minden élet a többi téglalap (az összes téglalap együtt) páros sokszor metsz, így minden él két végpontja azonos színű ívre esik, így egy egyik színű ívről induló peremkör nem mehet át másik színű ívre, vagyis legalább két peremkör van, ellentétben a feltételezéssel. Így az az eset nem állhat fenn, a bizonyítást teljessé tettük.

3. megoldás: (a kitűző megoldása) Írjuk fel az $F, \partial F$ pár homologikus egzakt sorozatát (minden homológia Z_2 fölötti).

$$H_2(F) \to H_2(F, \partial F) \to H_1(\partial F) \to H_1(F) \to H_1(F, \partial F) \to \tilde{H}_0(\partial F) \to \tilde{H}_0(F)$$

Innen következik, hogy a következő sorozat egzakt:

$$0 \to Z_2^{k-1} \to H_1(F) \to H_1(F, \partial F) \to Z_2^{k-1} \to 0$$

A definiált A_{ij} mátrix tulajdonképpen a

$$H_1(F) \otimes H_1(F) \to Z_2$$

metszési mátrix. A Poincaré-dualitás folytán a következő párosítás nem elfajuló:

$$H_1(F) \otimes H_1(F, \partial F) \to Z_2$$

A fenti egzakt sorozatból következik, hogy a

$$H_1(F) \otimes H_1(F) \to Z_2$$

párosítás $k-1$ rendben elfajuló, azaz a rangja $n-k+1$.

Tehát $r = n - k + 1$.

Érkezett 19 megoldás, ebből jó 14.

Megoldotta: Abért Miklós, Benkő Dávid, Csörnyei Marianna, Elekes Márton, Fleiner Tamás, Győri Máté, Harcos Gergely, Hegedűs Pál, Járai Antal, Lakos Gyula, Maróti Miklós, Pál Ambrus, Pór Attila, Waldhauser Tamás; kissé hiányos Balogh József, Fleiner Balázs, Pete Gábor, Sustik Mátyás és Ujváry-Menyhárt Zoltán megoldása.

12. $F(x)$ legyen ismert eloszlásfüggvény, az $\eta_1, \eta_2 \ldots$ valószínűségi változók legyenek függetlenek a közös $F(x-\vartheta)$ eloszlásfüggvénnyel, ahol ϑ az ismeretlen, úgynevezett eltolási paraméter. Nevezzük az eltolási paramétert „jól becsülhetőnek", ha létezik c pozitív konstans úgy, hogy bármely $\varepsilon > 0$-hoz megadható a számegyenesen olyan ε Lebesgue-mértékű E Borel-halmaz („konfidencia halmaz") és olyan $t_n(x_1, \ldots, x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ Borel-mérhető függvény, amelyekkel bármilyen ϑ esetén

$$P(\vartheta - t_n(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in E) > 1 - e^{-cn} \qquad (n > n_0(\varepsilon, F)).$$

Igazoljuk, hogy

a) ha F nem abszolút folytonos, akkor az eltolási paraméter „jól becsülhető",

b) ha F abszolút folytonos és F' folytonos, akkor nem „jól becsülhető".

Megoldás: (a kitűző megoldása) A $c_0, c_1, \ldots$ és $K_0, K_1, \ldots$ betűk mindig pozitív, csak F-től függő konstansokat fognak jelölni.

a) Mivel $F(x)$ nem abszolút folytonos, tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\chi(x)$ folytonos függvény, amelyre

$$\chi(x) = 0, \quad \text{ha} \quad |x| \geq K_0,$$

$$0 \leq \chi(x) \leq 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\, dx \leq \varepsilon,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\, dF(x) \geq c_0.$$

Legyen $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(u-x)\, dF(u)$. Ez 0-ban nagy,

$$h(0) \geq c_0, \tag{1}$$

de általában kicsi: az $E = \{x : h(-x) \geq c_0/3\}$ halmaz Lebesgue mértéke legfeljebb $3\varepsilon/c_0$, — tulajdonképpen ε helyett $c_0\varepsilon/3$-at kellett volna vennünk; az hogy E mértéke legfeljebb ε és nem pontosan, nyilván lényegtelen, hiszen tetszőlegesen kibővíthető, — ugyanis

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) \leq \varepsilon.$$

A $h(x-\vartheta)$ függvényt a $h_n(x) = (1/n)\sum_{i=1}^{n} \chi(\eta_i - x)$ statisztikával próbáljuk becsülni. Ez folytonos, $\pm\infty$-ben eltűnő függvény, van tehát egy legkisebb érték, ahol felveszi a maximumát; legyen ez $t = t(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. A $\chi(\eta_i - x)$ függvények egyenlő mértékben való egyenletes folytonosságából könnyen következik, hogy ez mérhető függvény lesz. $P(\vartheta - t \in E)$ nyilván független ϑ-tól, feltehetjük tehát, hogy $\vartheta = 0$. Be fogjuk látni, hogy ebben az esetben

$$\max_{-\infty < x < \infty} \left| h_n(x) - h(x) \right| \leq c_0/3, \tag{2}$$

ha elhagyunk egy, a feladatban szereplő exponenciálisan kis valószínűségű eseményt. Ha pedig ez fennáll, akkor speciálisan

$$\left| h_n(0) - h(0) \right| \leq c_0/3,$$

tehát (1) és t definíciója alapján

$$h_n(t) \geq h_n(0) \geq 2c_0/3.$$

De ismét (2) miatt ebből

$$h(t) \geq c_0/3,$$

és E definíciója szerint

$$(\vartheta - t) \in E,$$

és készen leszünk.

Ami (2)-t illeti, nagy x-re triviálisan becsülünk. Mivel $\chi(x)$ eltűnik $|x| \geq K_0$-ra,

$$0 \leq h_n(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{|\eta_i| \geq K_1 - K_0} 1 \quad \big(|x| \geq K_1\big), \tag{3}$$

$$0 \leq h(x) \leq \int_{|u| \geq K_1 - K_0} dF(u) \leq c_0/9 \quad \big(|x| \geq K_1\big), \tag{4}$$

ahol K_1-et az utolsó egyenlőtlenségnek megfelelően elég nagynak rögzítjük.

A megmaradó $(-K_1, K_1)$ intervallumot m számú fix x_l osztópontokkal felosztjuk úgy, hogy mindegyik részben mind $h_n(x)$, mind $h(x)$ oszcillációja legfeljebb $c_0/9$ legyen. Ez $\chi(x)$ egyenletes folytonossága alapján pusztán tőle, tehát tulajdonképpen ε-tól és F-től függő m-mel megvalósítható. Kapjuk, hogy

$$\max_{|x| \leq K_1} \big|h_n(x) - h(x)\big| \leq 2c_0/9 + \max_l \big|h_n(x_l) - h(x_l)\big|. \tag{5}$$

A hiányzó becslések a Bernstein egyenlőtlenségből következnek, (l. például Rényi: Valószínűségszámítás):

Ha $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független valószínűségi változók, $0 \leq \xi_i \leq 1$, akkor

$$P\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - E\xi_i)\right| > \delta\right) \leq 2e^{-\delta^2 n/4},$$

ha $0 < \delta \leq 1$.

Alkalmazva ezt $\delta = c_0/9$-cel a

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{ha } |\eta_i| \geq K_1 - K_0, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

változókra, amelyek várható értéke $\int_{|x| \geq K_1 - K_0} dF(x) \leq c_0/9$, adódik, hogy

$$P(\frac{1}{n} \sum_{|\eta_i| > K_1 - K_0} 1 \leq 2c_0/9) \geq 1 - 2e^{-c_0^2 n/324},$$

és (3)-mal és (4)-gyel összevetve

$$P(\max_{|x| \geq K_1} \big|h_n(x) - h(x)\big| \leq c_0/3) \geq 1 - 2e^{-c_0^2 n/324}. \tag{6}$$

Alkalmazva a Bernstein egyenlőtlenséget $\delta = c_0/9$-cel a $\xi_i = \chi(\eta_i - x_l)$ változókra, amelyek várható értéke $\int_{-\infty}^{\infty} \chi(u - x_l)\, dF(u) = h(x_l)$,

$$P\Big(\big|h_n(x_l) - h(x_l)\big| \geq c_0/9\Big) \leq 2e^{-c_0^2 n/324},$$

$$P\Big(\max_l \big|h_n(x_l) - h(x_l)\big| \geq c_0/9\Big) \leq 2me^{-c_0^2 n/324},$$

és (5)-tel összevetve

$$P\Big(\max_{|x|\le K_1}\big|h_n(x)-h(x)\big|\le c_0/3\Big)\ge 1-2me^{-c_0^2n/324}.$$

Figyelembevéve (6)-ot is

$$P\Big(\max_{-\infty<x<\infty}\big|h_n(x)-h(x)\big|\le c_0/3\Big)\ge 1-2(m+1)e^{-c_0^2n/324}\ge 1-e^{-c_0^2n/325}$$

$n\ge n_0(\varepsilon,F)$ esetén, mivel m csak ε-tól és F-től függ. Éppen ezt állítottuk.

b) Legyen P_ϑ az n dimenziós térben az $(\eta_1,\dots,\eta_n)$ által generált valószínűségi mérték. Az állítás tagadása úgy is írható, hogy

$$P_\vartheta\big(t^{-1}(-E-\vartheta)\big)>1-e^{-c_1n}$$

minden ϑ-ra. ($-E-\vartheta$ tükrözést és $(-\vartheta)$-val való eltolást jelent, $^{-1}$ inverz képzést.) A bizonyítás gondolatmenete lényegében az lesz, hogy felhasználjuk ezt $\vartheta=0$-ra: $P_0\big(t^{-1}(-E)\big)$ "nagy", ebből levezetjük, hogy elég kis ϑ-kra $P_\vartheta\big(t^{-1}(-E)\big)$ is "nagy" lesz, majd megmutatjuk, hogy alkalmas ilyen $\vartheta=\vartheta_0$-lal $P_{\vartheta_0}\big(t^{-1}\big((-E)\cap(-E-\vartheta_0)\big)\big)$ "kicsi" lesz, de ekkor nem lehet $P_{\vartheta_0}\big(t^{-1}(-E-\vartheta_0)\big)$ is "nagy", hiszen az együttes P_{ϑ_0} mérték legfeljebb 1.

$f(x):=F'(x)$ folytonossága alapján könnyen megadható olyan H halmaz és c_2 konstans, hogy

$$f(x-\vartheta)\ge e^{-c_1/3}f(x) \tag{7}$$

minden $x\in H$ és $|\vartheta|\le c_2$ esetén, továbbá

$$\int_H f(x)\,dx>e^{-c_1/2}. \tag{8}$$

Mivel P_ϑ sűrűségfüggvénye $\prod_{i=1}^n f(x_i-\vartheta)$, ebből következik, hogy minden $A\subset H^n$ halmazra

$$P_\vartheta(A)\ge e^{-c_1n/3}P_0(A)\qquad\big(|\vartheta|\le c_2\big). \tag{9}$$

Legyen μ a valós tengelyen a következő mérték:

$$\mu(X)=P_0\big(H^n\cap t^{-1}(X)\big),$$

és $\chi(x)$ a $-E$ halmaz karakterisztikus függvénye. Ekkor

$$\mu\big((-E)\cap(-E-\vartheta)\big)=\int_{-\infty}^{\infty}\chi(x)\chi(x+\vartheta)\,d\mu$$

és

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu\big((-E)\cap(-E-\vartheta)\big)\,d\vartheta=|E|\mu(-E).$$

($|\,|$ itt a Lebesgue mérték.) Van tehát olyan $|\vartheta_0| \le c_2$, amelyre

$$\mu\big((-E) \cap (-E - \vartheta_0)\big) \le |E|\mu(-E)/(2c_2) \le \mu(-E)/2 \tag{10}$$

feltéve, hogy $\varepsilon = |E| \le c_2$. Ekkor

$$\mu\big((-E) \setminus (-E - \vartheta_0)\big) \ge \mu(-E)/2.$$

Alkalmazzuk (9)-et $\vartheta = \vartheta_0$-lal és $A = H^n \cap t^{-1}\big((-E) \setminus (-E - \vartheta_0)\big)$-lal. Tudjuk az indirekt feltevésből, hogy $P_0\big(t^{-1}(-E)\big) \ge 1 - e^{-c_1 n}$. Ebből

$$P_0(A) = \mu\big((-E) \setminus (-E - \vartheta_0)\big) \ge \mu(-E)/2 = P_0\big(H^n \cap t^{-1}(-E)\big)/2 \ge$$
$$\ge \big(P_0(H^n) + P_0 = b(t^{-1}(-E)) - 1\big)/2 \ge (e^{-c_1 n/2} - e^{-c_1 n})/2$$

felhasználva (8)-at is. (9) tehát azt adja, hogy

$$P_{\vartheta_0}(A) \ge e^{-c_1 n/3}(e^{-c_1 n/2} - e^{-c_1 n})/2.$$

Tudjuk azt is, hogy $P_{\vartheta_0}\big(t^{-1}(-E - \vartheta_0)\big) \ge 1 - e^{-c_1 n}$. Márpedig A és $t^{-1}(-E - \vartheta_0)$ diszjunktak, tehát

$$1 \ge P_{\vartheta_0}(A) + P_{\vartheta_0}\big(t^{-1}(-E - \vartheta_0)\big) \ge (e^{-5c_1 n/6} - e^{-4c_1 n/3})/2 + 1 - e^{-c_1 n},$$
$$e^{-5c_1 n/6} \le 2e^{-c_1 n} + e^{-4c_1 n/3} \le 3e^{-c_1 n},$$

ami elég nagy n-re ellentmondás.

Érkezett 3 megjegyzés, jó megoldás nem.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

ISSN 0025-519X

Nyomdai Munkák: Modok és Társa Kft., Kiskunhalas - Tel.: 77/421-344/153