

300519

U.S.
4
1994

Matematikai Lapok

(13)

1994/1

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 4. évfolyam (1994), 1. szám

(Megjelent 1998-ban)

Tiszteletbeli főszerkesztő: Császár Ákos

Megbízott főszerkesztő: Bárány Imre

Főszerkesztő-helyettes: Pálffy Péter Pál

Tanácsadó Bizottság: Daróczy Zoltán (KLTE), Hajnal András (MKI), Lovász László (ELTE), Szőkefalvi-Nagy Béla (JATE)

Szerkesztő Bizottság: Heteyi Gábor (JPTE), Laczkovich Miklós (ELTE), Nemetz Tibor (MKI), Páles Zsolt (KLTE), Pelikán József (ELTE), Pogáts Ferenc (ELTE), Recski András (BME), Reiman István (BME), Rónyai Lajos (SZTAKI), Sain Márton (nyugdíjas tanár), Staar Gyula (Természet Világa), Székely J. Gábor (BME)

Technikai szerkesztő: Katona Gyula Y.

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201-7656.

Előfizetési díj 1995-re 550 Ft+ÁFA, egyes szám ára 150 Ft+ÁFA.

* Megjegyzés: Korábbi előfizetőknek a lap ára az eddigi befizetés függvénye.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

EGYVÁLTOZÓS REKURZÍV FÜGGVÉNYEK

CSIRMAZ LÁSZLÓ

Az egyváltozós rekurzív függvények egy jellemzését adjuk meg. Az érdekes, és a Church-tézissel — mármint hogy minden egyáltalán kiszámítható függvény rekurzív — összevetve különösen meglepő tétel *Julia Robinson*tól származik. Mivel kizárólag természetes számokon értelmezett függvényekkel foglalkozunk, ezt külön nem fogjuk hangsúlyozni. A természetes számok halmazát ω -val jelöljük.

A rekurzív függvények sok ekvivalens definíciója közül azt választottuk ki, ami az ELTE egyetemi előadásaiban is szerepel; a bizonyítást kis fáradsággal át lehet alakítani hogy tetszőleges más definícióval is működjön. A használt formális definíciót a bizonyítás során fel fogjuk írni.

A tétel kimondását néhány definícióval készítjük elő. Legyen I az (egyváltozós) identitásfüggvény, S az, ami minden természetes számhoz annak rákövetkezőjét rendel, végül E az excess (ráadás) függvény, ami azt mondja meg, hogy argumentuma mennyivel nagyobb az alatta levő legnagyobb négyzetszámnál:

$$I(a) = a, \quad S(a) = a + 1, \quad E(a) = a - [\sqrt{a}]^2 \quad \text{minden } a \in \omega\text{-ra.}$$

Tegyük fel, hogy az $f : \omega \rightarrow \omega$ függvényre $\text{Range}(f) = \omega$. Ekkor beszélhetünk f inverzéről:

$$f^{-1}(a) = \min \{b \in \omega : f(b) = a\}.$$

Legyen \mathcal{S} az egyváltozós $f : \omega \rightarrow \omega$ függvényeknek az a legszűkebb osztálya, amelyre

- (i) az I , S valamint E függvények elemei \mathcal{S} -nek;
- (ii) ha f és $g \in \mathcal{S}$, akkor összegük és kompozíciójuk is \mathcal{S} -beli;
- (iii) ha $f \in \mathcal{S}$ értékül minden természetes számot felvesz, akkor $f^{-1} \in \mathcal{S}$.

1. Tétel (Julia Robinson tétele). \mathcal{S} éppen az egyváltozós rekurzív függvények halmaza.

Bizonyítás. A tételnek azt a felét, hogy az \mathcal{S} -beli függvények rekurzívak, gyakorlatképpen az olvasóra hagyjuk, csak azt bizonyítjuk, hogy minden egyváltozós rekurzív függvény \mathcal{S} -ben van.

A bizonyítás ötlete hogy a többváltozós rekurzív függvényeket egyváltozósakkal „kódoljuk,” és a rekurzív függvények felépítésére vonatkozó indukcióval megmutatjuk, hogy ezek a kódok mind \mathcal{S} -beliek. A kódolás definícióját azzal kezdjük, hogy egy sor függvényről megmutatjuk, hogy eleme \mathcal{S} -nek.

Először is vegyük észre, hogy ha $f \in \mathcal{S}$ és $k \geq 1$ egész szám, akkor f -et k -szor önmagához adva az adódó $k \cdot f$ függvény ugyancsak \mathcal{S} -beli. Ezt az észrevételünket a továbbiakban minden megjegyzés nélkül használjuk.

Mivel az E függvény értékkészlete ω , azért $E^{-1} \in \mathcal{S}$, továbbá $a \in \omega$ -ra

$$E^{-1}(2a) = a^2 + 2a \quad \text{és} \quad E^{-1}(2a - 1) = a^2 + 2a - 1.$$

Az $ESE^{-1}(I + I)$ függvény mint \mathcal{S} -beli függvények összege és kompozíciója ugyancsak eleme \mathcal{S} -nek és értéke az $a \in \omega$ helyen

$$E(1 + E^{-1}(2a)) = E(1 + a^2 + 2a) = 0.$$

Így az azonosan nulla függvény is eleme \mathcal{S} -nek, jelöljük ezt F_0 -lal. Ekkor $\mathcal{S} \circ F_0$ azonosan 1, és általában $\mathcal{S}^k \circ F_0$ az azonosan k értéket veszi fel, és persze ezek is \mathcal{S} -beliek.

Tetszőleges $a, b \in \omega$ számokra

$$\begin{aligned} E^{-1}(2a + 2b) + 3a + b + 4 &= (a + b)^2 + (2a + 2b) + (3a + b + 4) = \\ &= (a + b + 2)^2 + a - b = \\ &= (a + b + 1)^2 + 3a + b + 3, \end{aligned}$$

és ez mindig kisebb $(a + b + 3)^2$ -nél. Így $a \geq b$ esetén

$$E(E^{-1}(2a + 2b) + 3a + b + 4) = a - b.$$

Az f és g egyváltozós függvények „különbségének” nevezzük, és $f \ominus g$ -vel jelöljük a következő függvényt:

$$E(E^{-1}(2f + 2g) + 3f + g + 4).$$

A korábban mondottak alapján az azonosan 4 értéket felvevő függvény eleme \mathcal{S} -nek, tehát ha f és g is \mathcal{S} -beli, akkor $f \ominus g$ is az. Ennek a „különbség” függvénynek az értéke az $a \in \omega$ helyen persze csak akkor lesz az $f(a)$ és $g(a)$ értékek különbsége, ha $f(a) \geq g(a)$, egyébként valamilyen más értéket vesz fel.

Mivel $a^2 + 2a \geq 2a$ minden $a \in \omega$ -ra, azért az \mathcal{S} -beli $E^{-1}(I + I)$ és $(I + I)$ függvények „különbségének” értéke az a helyen a^2 , s mivel a „különbség” is \mathcal{S} -ben van, a négyzetfüggvény eleme \mathcal{S} -nek. Innen adódik, hogy \mathcal{S} -ben van az alábbi *előjel* függvény is:

$$\text{sgn}(x) = E(S(x^2)) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 0, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az E^{-1} függvény értékét ismerjük, ebből könnyű látni, hogy

$$ESSE^{-1}(a) = \begin{cases} 0 & \text{ha } a \text{ páratlan,} \\ 1 & \text{ha } a \text{ páros.} \end{cases}$$

Következésképp minden természetes szám előáll $2E(b) + ESSE^{-1}(b)$ alakban, így ennek a függvénynek inverze ugyancsak \mathcal{S} -beli, és

$$\left[\frac{x}{2} \right] = E^{-1}(2E + ESSE^{-1})^{-1} \in \mathcal{S}.$$

Ebből már közvetlenül adódik, hogy \mathcal{S} zárt a szorzásra: ha $f, g \in \mathcal{S}$, akkor

$$f \cdot g = \left[\frac{(f+g)^2 - f^2 - g^2}{2} \right] \in \mathcal{S}.$$

Legyen $a \dot{-} b$ értéke $a-b$ ha $a \geq b$, és 0 ha $a < b$. A korábban definiált $I \ominus 1 \in \mathcal{S}$ függvény értéke minden $a \geq 1$ helyen $a-1$, ám $a=0$ -ra

$$0 \ominus 1 = E(E^{-1}(0+2) + 0 + 1 + 4) = E(8) = 4,$$

ezért $x \ominus 1$ és $x \dot{-} 1$ különböző függvények. De $(x \ominus 1)$ -ből megkaphatjuk $(x \dot{-} 1)$ -et, ha az előbbit $\text{sgn}(x)$ -szel szorozzuk:

$$x \dot{-} 1 = \text{sgn}(x) \cdot (x \ominus 1),$$

tehát ez is \mathcal{S} -beli. Ha most $x \in \omega$ négyzetszám, akkor az \mathcal{S} -beli

$$\text{sq}(x) = \left[\frac{E(x \dot{-} 1)}{2} \right] + \text{sgn}(x)$$

függvény értéke éppen x négyzetgyöke, tehát

$$[\sqrt{x}] = \text{sq}(x \ominus E(x)) \in \mathcal{S}.$$

A többváltozós függvények kódolásához szükségünk lesz a „rendezett pár” fogalmára. A π „párosító” függvény ω és ω^2 között egy olyan izomorfizmus, melyre π és mindkét inverze „könnyen” számítható. Ennek a követelménynek megfelel a

$$\pi(a, b) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + a$$

függvény. π ráadásul *monoton*: ha $a \leq c$ és $b \leq d$, akkor $\pi(a, b) \leq \pi(c, d)$. A korábbiak szerint $f, g \in \mathcal{S}$ esetén $\pi(f, g) \in \mathcal{S}$ is fennáll, hiszen $\pi(f, g)$ -t f -ből és g -ből összeadással, szorzással és az $[x/2]$ függvénnyel kaphatjuk meg.

Jelölje K azt a függvényt, ami a $\pi(a, b)$ értékhez a -t, L pedig azt, ami $\pi(a, b)$ -hez b -t rendeli. Mivel π izomorfizmus ω^2 és ω között, ez egyértelműen definiálja K -t és L -et. Egy kis számolással adódik, hogy

$$K(a) = a - \left[\frac{[\sqrt{8a+1}]^2 - 1}{8} \right], \quad L(a) = \left[\frac{[\sqrt{8a+1}] - 1}{2} \right] - K(a).$$

Mivel $[x/8] = [[x/2]/2]/2$, azért K \mathcal{S} -beli függvényekből kompozíció és különbség képzéssel áll elő, tehát maga is \mathcal{S} -beli, s természetesen ugyanez áll L -re.

Definiáljuk most $n \geq 1$ -re az ω^n és ω közötti π_n izomorfizmust a következőképpen. Legyen π_1 az identitás, $n \geq 1$ -re pedig

$$\pi_{n+1}(x_0, \dots, x_n) = \pi(\pi_n(x_0, \dots, x_{n-1}), x_n).$$

Így például $\pi_2 = \pi$ és $\pi_3(a, b, c) = \pi(\pi(a, b), c)$. Legyen még $i < n$ -re K_i^n a π_n -nek az i -edik koordinátára vonatkozó inverze, azaz minden $x \in \omega$ -ra

$$x = \pi_n(K_0^n(x), \dots, K_{n-1}^n(x)).$$

Persze K_0^1 az identitás, K_0^2 és K_1^2 pedig a fent definiált K és L függvényekkel esik egybe. n -re vonatkozó indukcióval könnyen adódik, hogy egyrészt $f_0, \dots, f_{n-1} \in \mathcal{S}$ esetén $\pi_n(f_0, \dots, f_{n-1}) \in \mathcal{S}$, másrészt hogy az összes K_i^n függvény \mathcal{S} -beli. Valóban, ez utóbbihoz megjegyezzük, hogy $K_n^{n+1} = L \in \mathcal{S}$ és $i < n$ -re $K_i^{n+1} = K_i^n \circ K$.

Most már megadhatjuk a bizonyítás elején ígért kódolást. $n \geq 1$ -re az n -változós f függvény kódja legyen az

$$F(x) = f(K_0^n(x), \dots, K_{n-1}^n(x))$$

egyváltozós függvény. Persze egyváltozós függvény kódja saját maga. A tétel bizonyítandó fele azonnal következik az alábbi állításból.

2. Állítás. Minden rekurzív függvény kódja \mathcal{S} -beli.

Ennek bizonyítását természetesen a rekurzív függvények felépítésére vonatkozó indukcióval végezzük a következő definíciót használva.

Definíció. A rekurzív függvények \mathcal{R} halmaza a természetes számokon értelmezett függvények legszűkebb osztálya, ami teljesíti a következő feltételeket:

- (i) A következő függvények elemei \mathcal{R} -nek: az összeadás és szorzás (mint kétváltozós függvények), az n -változós $I_i^n(x_0, \dots, x_{n-1}) = x_i$ projekciófüggvény, végül az alábbi $K_<$ függvény:

$$K_<(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{ha } a < b, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- (ii) \mathcal{R} zárt a kompozícióra, azaz ha $g \in \mathcal{R}$ és $i < n$ -re $h_i \in \mathcal{R}$, akkor $f(\mathbf{x}) = g(h_0(\mathbf{x}), \dots, h_{n-1}(\mathbf{x})) \in \mathcal{R}$.
- (iii) \mathcal{R} zárt a μ -operációra, azaz ha az $n + 1$ -változós $g(\mathbf{x}, u)$ \mathcal{R} -beli és minden $\mathbf{x} \in \omega^n$ -hez van olyan $u \in \omega$, amivel $g(\mathbf{x}, u) = 0$, akkor $\mu u g(\mathbf{x}, u) = 0 \stackrel{\text{def}}{=} \min \{u \in \omega : g(\mathbf{x}, u) = 0\}$ szintén \mathcal{R} -beli.

Elsőként azt kell látnunk, hogy a 2. állítás igaz az alapfüggvényekre. Az I_i^n projekciófüggvényekre ez azzal ekvivalens, hogy $K_i^n \in \mathcal{S}$. Az összeadás és szorzás esetén a megfelelő egyváltozós függvények $K(x) + L(x)$ illetve $K(x) \cdot L(x)$. Ezek \mathcal{S} -beliek, mivel $K, L \in \mathcal{S}$ és \mathcal{S} zárt az összeadásra és szorzásra. A hiányzó $K_<$ esethez vegyük észre, hogy

$$\left[\sqrt{E^{-1}(2a + 2b) + 3a + b + 4} \right] = \begin{cases} a + b + 2 & \text{ha } a \geq b, \\ a + b + 1 & \text{ha } a < b, \end{cases}$$

ahogyan azt a függvények „különbségének” definiálásakor láttuk. Ezért

$$\left[\sqrt{E^{-1}(2a + 2b) + 3a + b + 4} \right] - (a + b + 1) = \begin{cases} 0 & \text{ha } a < b, \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Itt a, b helyébe $K(x)$ -et, $L(x)$ -et írva éppen a $K_<(K(x), L(x))$ függvényt állítottuk elő.

Másodjára azt kell látnunk, hogy ha a 2. állítás teljesül az m -változós g -re és $i < m$ esetén az n -változós h_i -re, akkor ez a belőlük helyettesítéssel kapható n -változós

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} g(h_0(\mathbf{x}), \dots, h_{m-1}(\mathbf{x}))$$

függvényre is áll. Jelöljük a függvényekhez tartozó egyváltozós kódokat a megfelelő nagybetűvel. Az indukciós feltevés folytán G és $i < m$ -re H_i is \mathcal{S} -beli, és ekkor

$$\begin{aligned} F(x) &= f(K_0^n(x), \dots, K_{n-1}^n(x)) = g(H_0(x), \dots, H_{m-1}(x)) = \\ &= G(\pi_m(H_0(x), \dots, H_{m-1}(x))) \end{aligned}$$

valóban \mathcal{S} -beli a π_m -ről tett korábbi megállapításunk alapján.

Végül legyen $g : \omega^{n+1} \rightarrow \omega$ olyan függvény, hogy minden $\mathbf{x} \in \omega^n$ -hez van $u \in \omega$, amivel $g(\mathbf{x}, u) = 0$. Legyen még G a g -nek, F pedig az $f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \mu u g(\mathbf{x}, u) = 0$ függvénynek kódja. Ha $x = \pi_n(x_0, \dots, x_{n-1})$, akkor a g -re tett kikötésünk éppen azt jelenti, hogy van $u \in \omega$, amivel $G(\pi(x, u)) = 0$. A π_n bijekció ω^n és ω között, ezért minden $x \in \omega$ -hoz található $u \in \omega$, hogy $G(\pi(x, u)) = 0$, és persze

$$F(x) = \mu u G(\pi(x, u)) = 0.$$

Így a 2. állításhoz azt kell belátnunk, hogy $G \in \mathcal{S}$ esetén $F \in \mathcal{S}$. Ehhez nézzük az $\langle x, G(\pi(x, u)) \rangle$ alakú párokat, amint x és u egymástól függetlenül átfut ω elemein.

A párok között az összes olyan előfordul, ahol a második tag 0, így az $y = \pi(x, u)$ jelöléssel a $H(y) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(K(y), G(y))$ függvény értékkészlete tartalmazza az összes $\pi(x, 0)$ alakú számot. Mivel π még monoton is, azért rögzített $x \in \omega$ -ra a $\pi(x, u)$ értékek közül a minimális olyan, amire $G(\pi(x, u)) = 0$ teljesül, megegyezik a

$$\pi\left(x, \min \{u \in \omega : G(\pi(x, u)) = 0\}\right) = \pi(x, F(x))$$

értékkel. Következésképp

$$\begin{aligned} & \min \{y \in \omega : H(y) = \pi(x, 0)\} = \\ & = \min \{\pi(x, u) : u \in \omega \text{ és } G(\pi(x, u)) = 0\} = \pi(x, F(x)), \end{aligned}$$

tehát

$$F(x) = K(\pi(x, F(x))) = KH^{-1}(\pi(x, 0)).$$

Tudjuk, hogy H \mathcal{S} -beli, azért ennek alapján F is \mathcal{S} -beli volna, ha tudnánk, hogy $H^{-1} \in \mathcal{S}$. Ennek feltétele, hogy H értékkészlete az összes számot tartalmazza. Ez azonban nem feltétlenül van így, mindössze azt tudjuk garantálni, hogy a $\pi(x, 0)$ alakú számok elemei $\text{Range}(H)$ -nak. Ezért legyen

$$H'(\pi(y, z)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} H(y) & \text{ha } z = 0, \\ \pi(y, z) & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A π bijekció ω^2 és ω között, tehát ez egyértelműen definiálja a H' függvényt, ráadásul $\text{Range}(H') = \omega$. A H' a $\pi(x, 0)$ értéket csak úgy veheti fel, ha argumentuma $\pi(y, 0)$ alakú és még $H(y) = \pi(x, 0)$. Vagyis $H'^{-1}(\pi(x, 0)) = \pi(y, 0)$ és $y = H^{-1}(\pi(x, 0))$. Tehát $H^{-1}(\pi(x, 0)) = KH'^{-1}(\pi(x, 0))$, ezért

$$F(x) = KH^{-1}(\pi(x, 0)) = KH'H'^{-1}(\pi(x, 0)).$$

Így annak bizonyítására, hogy $F \in \mathcal{S}$ elég látni, hogy $H' \in \mathcal{S}$. Ez pedig például H' -nek az alábbi felírásából következik:

$$H'(x) = x \cdot \text{sgn}(L(x)) + (1 - \text{sgn}(L(x))) \cdot H(K(x)).$$

Ezzel a 2. állítást és így Julia Robinson tételét is igazoltuk. ■

László Csirmaz: Recursive functions of one variable

The *excess* function, defined on non-negative integers, gives, for each n , the excess over the largest perfect square below n , i.e. $n - [\sqrt{n}]^2$. If f maps natural numbers to natural numbers, and takes all possible values, then the *inverse* of f is also defined, and at place n takes i if i is the smallest argument for which $f(i) = n$.

We prove the following nice theorem of *Julia Robinson*. Consider the smallest set S of functions from natural numbers into natural numbers with the following properties:

- (i) the identity, the successor and the excess functions are in S ,
- (ii) S is closed under composition and taking inverse.

Then S is the set of recursive functions of one variable.

AZ ISMERETLEN ISMERŐS

Algebrai geometriáról — nem algebrai géométereknek

KOVÁCS SÁNDOR

A magyar matematikai életben az algebrai geometria egyedi helyet foglal el. Szinte mindenki tud a létezéséről, de kevesen ismerik behatóan, — amolyan ismeretlen ismerősként él közöttünk. Az utóbbi években az érdeklődés megnőtt iránta, bár a magyar nyelvű irodalom továbbra is igen minimális. [8] az algebrai görbék elméletéről írt kitűnő munka, azok számára, akik komolyabban érdeklődnek a téma iránt, feltétlenül ajánlott. [13] az algebrai geometriának a Fermat-sejtés bizonyításában játszott szerepét mutatja be. [16] az algebrai geometria egyik legfontosabb alaperedményéről, a Riemann–Roch tételről szóló igen részletes írás.

Lássuk mi is az az algebrai geometria valójában. [7] bevezetesként így ír róla:

„Az algebrai geometria két mediterrán kultúrából származó ötletek keveréke. A pozíció és forma görög művészete az arab tudomány egyenletek megoldására kifejlesztett számításainak köntösébe bújtatva. ... Az algebrai geometria a geometriailag hihető és az algebrailag lehetséges közötti finom egyensúlyt tanulmányozza. ... ”

Ezt a jelenséget szépen mutatja be Bezout tétele. Ez azt állítja, hogy a komplex projektív síkon egy m -edfokú és egy n -edfokú görbének — megfelelő multiplicitással számolva — mn metszéspontja van. Néhány példa megvizsgálása után ez az állítás nyilvánvalónak tűnik, de a precíz bizonyítás komoly előkészületeket igényel.

A legfőbb problémát az jelenti, hogy nem teljesen világos, hogy mit kell érteni a „megfelelő multiplicitás” kitételen. Elvárható, hogy ez a „multiplicitás” tükrözze a metszéspont multiplicitását az egyes görbéken, azaz, hogy ha például a metszéspont az egyik görbének p -szeres, a másiknak q -szoros pontja, akkor ez a „multiplicitás” legalább pq legyen. Ugyanakkor azt is elvárjuk, hogy például egy kört érintő egyenes és a kör metszéspontját kétszeres multiplicitással számoljuk. Ezeket figyelembe véve láthatjuk, hogy már az egy nehéz feladat, hogy ezt a bizonyos „multiplicitást” definiáljuk.

A „multiplicitást” klasszikusan a görbék perturbációjával szokás definiálni, azaz megmutatva, hogy létezik olyan perturbáció, amely a görbéket úgy mozgatja el, hogy a metszéspontok egyszeresekké válnak, így a kérdéses „multiplicitás” ezen egyszeres metszéspontok száma. Ekkor még hátra van annak bizonyítása, hogy

az így adódó szám egyértelmű. Ez elég fáradságos és Bezout tétele messze nem nyilvánvaló.

A probléma algebrai megoldása a helyes „multiplicitást” egy megfelelően választott vektortér dimenziójaként adja meg. Ezek után a munka nagy része abban rejlik, hogy belássuk, hogy ez az absztrakt módon definiált „multiplicitás” valóban megfelel azoknak a követelményeknek, amelyeket jogosan elvárunk. Valójában még ennél is több igaz. Bizonyítható, hogy csupán egyetlen értelmes definíció adható, azaz speciálisan ez a definíció megegyezik a perturbációk segítségével kapottal. Az algebrai definíciót követve azonban Bezout tétele már könnyen adódik.

Az algebrai geometria — az eddigieknél kicsit pontosabban, bár kevésbé költőien fogalmazva — polinomokkal definiálható alakzatokkal foglalkozik. Tárnya geometria, eszközei algebraiak. Mindenki számára ismerős példa a kúpszelet, vagyis egy másodfokú síkgörbe, azaz a sík azon pontjainak halmaza, melyek koordinátái kielégítenek egy adott kétváltozós másodfokú polinomot. A kúpszeletek osztályozása elemi példát szolgáltat az algebra szerepére egy geometriai kérdés megoldásában.

Az érdeklődő [8] bevezetőjében talál egy rövid történeti áttekintést, amelyből — az olvasó kényelme kedvéért — idézek egy részt:

„... Az algebrai görbe egy $f(x, y) = 0$ polinommal definiált síkgörbe. Ezek vizsgálata a XVII. században kezdődött. Ekkor azonban még nem beszélhetünk az elmélet kialakulásáról. Az első komoly eredményeket a XIX. század hozta, az analízisből indulva. Algebrai függvényeket szerettek volna integrálni. A többértékűséget kiküszöbölendő a függvényt a komplex sík helyett a függvény Riemann felületén értelmezték, ami egy algebrai görbe volt. Így Abel, Jacobi, Riemann és Weierstrass az analitikus elmélet megalapozói. A század vége felé a geometria került előtérbe, a nagy géométerek, Clebsch, Brill, Max Noether működése nyomán, akik a síkgörbék elméletét lényegében lezárt fejezetté tették.

Századunk elején a felületek vizsgálata folyt a legintenzívebben. Itt elsősorban a nagy olasz géométerek, Castelnuovo, Enriques és Severi nevét kell megemlíteni.

A tárgykör átalakítását, nagyon nagy mennyiségű kommutatív algebra alkalmazásával Zariski és Weil végezték el a negyvenes években. Ezzel egyrészt precíz bizonyításokkal helyettesítették elődeik geometriai heurisztikáját, másrészt nagyon komoly új eredményeket értek el. A fogalmak még messzebb menő általánosítása, és számos új technikai eszköz bevezetése fűződik Grothendieck nevéhez. Azóta ezen fegyvertár alkalmazásaira helyezik a fő hangsúlyt, és számos régi problémát sikerült megoldani. A témakör jelenlegi legkiválóbb művelői közül talán Kodaira, Serre, Hironaka, Mumford, Bombieri és Deligne nevét érdemes leginkább megemlíteni. ... ”

Ezután a 70-es, 80-as évek története röviden a következő: a 60-as évek végére a modern alapokat lefektették, majd a görbék és felületek elméletét az új mód-

szerekkel újra kidolgozták. A felületek osztályozásában az ún. minimális modellek kaptak központi szerepet. A 3-dimenziós sokaságok rendszerezése azonban ekkor még átláthatatlanul bonyolult feladatnak tűnt, és hamar világossá vált, hogy a felületekkel teljesen analóg minimális modell elmélet nem létezik. 1972-ben Iitaka vetett fel néhány merész sejtést magasabb dimenziós sokaságokról. Az Iitaka által javasolt utat követve Ueno bizonyította az első struktúrátételt 3-dimenziós sokaságokról 1977-ben.

A nagy áttörést 1980 hozta meg. Mori új ötletek bevezetésével megtette az első lépéseket egy — a felületekéhez hasonló — minimális modell elmélet kifejlesztése felé. Ugyanebben az időben Reid definiálta a minimális modelleket, és feltételezve létezésüket, azok számos hasznos alkalmazására hívta fel a figyelmet.

A 80-as évek végére a 3-dimenziós sokaságok minimális modell elméletét teljes mértékben kidolgozták. A legjelentősebb eredmények Kawamata, Kollár, Miyaoka, Mori, Reid és Shokurov nevéhez fűződnek.

Ezen írás célja a görbék, felületek és 3-dimenziós sokaságok osztályozásának vázlatos ismertetése. Így tehát a cikk címe valamelyest félrevezető, azaz nem az algebrai geometria egészéről lesz szó, hanem (csak) osztályozási eredményekről. Az algebrai geometria (egyik) alapproblémája az algebrai varietások osztályozása, tehát ez a megszorítás azért széles teret hagy az elmélyedésre.

Végül, mielőtt a lényegre térnénk, egy mentegetőzés: algebrai geometriáról nehéz közérthetően írni, mert rengeteg definíció szükséges a korrekt tárgyaláshoz. Így a követhetőség kedvéért a pontos definíciók helyett számos helyen csak közelítő fogalmat próbálok adni arról, amire szükségünk van. Ebben az esetben a kulcsszó melletti * mutatja, hogy a függelékben további információ található az adott fogalomról, de ez sem éri el feltétlenül az általában megkövetelt szigorot.

A cikk néhány feladatot is tartalmaz, amelyek megoldásához a függelékben útmutatást talál az olvasó.

Köszönetnyilvánítás. Szeretném megköszönni Badics Tamásnak, Erdős Lászlónak, Kollár Jánosnak, Kovács Annamáriának, Mayer Richárdnak, Pálffy Péter Pálnak, Rónyai Lajosnak, Szabó Tibornak, Szenes Andrásnak és Tihanyi Tímeának hasznos észrevételeiket, javaslataikat és tanácsaikat. Sok hibától óvtak meg és az írás színvonala lényegesen javult segítségük eredményeképpen.

1.§ Alapok

Polinomokkal definiált alakzatokkal foglalkozunk. Ha ezt egy nem algebrailag zárt test felett tesszük, akkor bizonyos jelenségeket nem tudunk kielégítően megmagyarázni, és a sokféle ágazó esetek kezelése rendkívül nehézkes. Természetes tehát a komplex számok teste felett dolgozni. Ez részint megkönnyíti a dolgunkat, de sokkal fontosabb, hogy egyes állítások nem is teljesülnének, ha nem algebrailag zárt test felett tekintenénk őket.

Egy másik fontos észrevétel, hogy néha látszólagos különbségeket fedezünk fel, amikor valójában csak figyelmen kívül hagytuk az alakzatok viselkedését a végtelenben. Az eredmények gyakran egyszerűbbek, ha projektív geometriában mondjuk ki őket. Erre egy ismert példa a kúpszeletek osztályozása. Míg hagyományosan 3 affin, nem elfajuló kúpszeletről tanulunk (ellipszis, hiperbola, parabola), azok projektív geometriai szempontból csupán abban különböznek, hogy az ideális egyenest hány pontban metszik. Itt érdemes megemlíteni, hogy az ellipszis és a hiperbola már affin ekvivalensek is, ha a komplex test felett dolgozunk.

1.1 Definíció. Az n -dimenziós komplex projektív tér, \mathbb{CP}^n , a komplex számokból alkotott rendezett $(n+1)$ -esek halmaza, kivéve a $(0, \dots, 0)$ -t, ahol két rendezett $(n+1)$ -est azonosítunk, ha egymás skalárszorosai, azaz $\mathbb{CP}^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) / \sim$, ahol minden $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ -re

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n).$$

Az $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ pontot tartalmazó ekvivalencia osztályt $(x_0 : \dots : x_n)$ fogja jelölni.

Legyen most $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{CP}^n \mid x_i \neq 0\}$. Könnyen látható, hogy a

$$\begin{aligned} \phi_i : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathbb{CP}^n \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto (y_1 : \dots : y_i : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n) \end{aligned}$$

leképezés* egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés \mathbb{C}^n és U_i között. Így az is látható, hogy \mathbb{CP}^n egy n -dimenziós komplex¹ differenciálható sokaság.

Következő lépésként szeretnénk polinomok zérushelyeit definiálni. Ehhez elsősorban le kell szűkíteni a megengedett polinomok halmazát, hiszen egy tetszőleges polinom esetleg eltűnik egy adott (x_0, \dots, x_n) helyen, de annak λ -szorosán nem, így a polinom \mathbb{C}^n -beli zérushelye nem feltétlenül áll teljes ekvivalenciaosztályok egyesítéséből. Ha azonban homogén* polinomokat tekintünk, akkor azokra

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^{\deg f} f(x_0, \dots, x_n),$$

tehát van értelme arról beszélni, hogy egy homogén polinom a \mathbb{CP}^n mely pontjaiban tűnik el.

1.2 Definíció. A \mathbb{CP}^n egy V részhalmazát *projektív algebrai halmaznak* nevezzük, ha léteznek olyan f_1, \dots, f_k homogén polinomok, hogy

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{CP}^n \mid f_1(\mathbf{x}) = \dots = f_k(\mathbf{x}) = 0\}.$$

¹ Ezentúl dimenzión mindig *komplex* dimenziót fogunk érteni.

Algebrai halmazok közötti *izomorfizmus** annyit jelent — ahogy az izomorfizmus általában —, hogy a rendelkezésünkre álló eszközökkel nem tudunk különbséget tenni az adott algebrai halmazok között. Nem egészen pontosan, de szemléletesebben fogalmazva két varietás izomorf, ha van köztük mindkét irányban egy-egy leképezés, amelyek lokálisan polinomokkal reprezentálhatóak és ezek egymásutánja a megfelelő varietás identitását adja.

1.2.1 Megjegyzés. Érdekes megjegyezni, hogy Chow egy tétele szerint minden kompakt komplex sokaság, amely beágyazható a komplex projektív térbe algebrai, azaz kielégíti a fenti definíciót. Ez azt jelenti, hogy valójában nem veszítünk nagyon sokat az általánosságból azzal, hogy algebrai varietásokra szorítkozunk.

A definícióból könnyen látszik, hogy projektív algebrai halmazok metszete és véges egyesítése is projektív. Két projektív algebrai halmaz különbsége általában nem projektív, ezeket *kváziprojektív*nek hívjuk.

Egy fontos speciális eset a következő: legyen V egy projektív algebrai halmaz, és tekintsük $V \cap U_i$ -t. Ez izomorf a $\phi_i^{-1}(V) \subseteq \mathbb{C}^n$ halmazzal, továbbá, ha f_1, \dots, f_k a V -t definiáló polinomok, akkor $\phi_i^{-1}(V)$ éppen az $f_j(y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n)$ $j = 1, \dots, k$ polinomok közös zérushelye. A \mathbb{C}^n ilyen részhalmazait *affin algebrai halmazoknak* nevezzük. A projektív algebrai halmazokat ezek szerint tekinthetjük úgy, mintha affin részekből lennének összeragasztva.

Ha U kváziprojektív, X projektív és $U \subset X$, akkor \bar{U} jelöli a legkisebb projektív algebrai halmazt, amely tartalmazza U -t, azaz

$$\bar{U} = \bigcap_{\substack{Z \text{ projektív} \\ Z \subset X}} Z.$$

Érdekes megjegyezni, hogy \bar{U} megegyezik az U lezártjával az euklideszi topológiában.

Egy projektív algebrai halmaz *irreducibilis*, ha nem áll elő két valódi projektív algebrai részhalmaz egyesítéséeként. Az U kváziprojektív algebrai halmaz *irreducibilis*, ha \bar{U} irreducibilis. Az irreducibilis algebrai halmazokat *varietásoknak* nevezük. Ha egy varietás 1-dimenziós* akkor *görbének*, ha 2-dimenziós, akkor *felületnek* hívjuk.

1.3 Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha X irreducibilis és $Z \subset X$ egy projektív algebrai részhalmaz, akkor $X \setminus Z$ is irreducibilis.

1.4 Definíció. A $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ -ben egy $f(x_0, \dots, x_n) = 0$ d -edfokú egyenlettel definiált algebrai halmazt *d -edfokú hiperfelületnek* hívunk. Egy elsőfokú hiperfelületet *hipersíknak* nevezünk. Így tehát az

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

egyenlet, ahol nem mindegyik $a_i = 0$, egy hipersíkot definiál $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ -ben. Minden hipersík izomorf $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ -gyel.

1.5 Definíció. Az

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$$

egyenlet egy másodfokú görbét, azaz egy *kúpszeletet* definiál $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ -en.

1.6 Példa. Az

$$y^2z = x(x^2 + z^2)$$

egyenlet egy harmadfokú, ún. elliptikus* görbét definiál $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ -en. Ezen görbék rendkívül sok szép és érdekes tulajdonsággal rendelkeznek, a velük foglalkozó elmélet igen kiterjedt. Többek között a Fermat-sejtés bizonyításában is központi szerepet játszanak (vö. [13]).

Az algebrai geometria tehát az algebrai varietások vizsgálata. Az algebrai geometria egyik alapproblémája a következő:

Osztályozzuk az algebrai varietásokat izomorfia erejéig.

Ez így túlságosan nehéz kérdés, amely talán soha nem lesz teljes mértékben megoldva, ezért részfeladatokat kell kitűznünk, és azok megoldásával foglalkoznunk.

Például egy ilyen — viszonylag egyszerű — részfeladat a kúpszeletek osztályozása. Következő lépésként lehet a 3-dimenziós térben a másodfokú² felületeket osztályozni. Ez az osztályozás — legalábbis a valós test felett — ismerős lehet az egyetemi geometria órákról.

Továbbá, osztályozhatjuk általában a másodfokú hiperfelületeket, vagy tekinthetünk magasabb fokú egyenleteket. Ez utóbbi már igen komoly feladat. A továbbiakban mi más módon szorítjuk meg a feladatot. Először bevezetünk egy — az izomorfizmusnál gyengébb — ekvivalenciarelációt, majd az osztályozási feladatot több lépésre bontjuk.

1.7 Definíció. Legyenek X és Y algebrai varietások, $Z \subset X$ egy valódi algebrai részhalmaz és $\phi : X \setminus Z \rightarrow Y$ egy leképezés. Ekkor ϕ -t az X -ről az Y -ra képező *raciónalis leképezésnek* nevezzük.

Ha ezenfelül létezik olyan $W \subset Y$ valódi algebrai részhalmaz, hogy ϕ izomorfizmust ad meg $X \setminus Z$ és $Y \setminus W$ között, akkor ϕ -t *biracionális leképezésnek* vagy röviden *biracionálisnak* hívjuk.

Az elnevezést az indokolja, hogy ekkor $\phi^{-1} : Y \setminus W \rightarrow X$ ad egy Y -ről X -be képező racionális leképezést.

² Hagyományosan ezeket szokás „másodrendű” felületeknek nevezni.

Ez természetes módon definiál egy ekvivalenciarelációt. Az ekvivalenciaosztályokat *biracionális osztályok*nak hívjuk. Ha X egy adott biracionális osztály tagja, akkor azt mondjuk, hogy X a biracionális osztály *modellje*. Ha X és Y azonos biracionális osztályhoz tartoznak, akkor azt mondjuk, hogy X biracionális Y -nal.

1.7.1 Megjegyzés. Ha $Z = \emptyset$, akkor azt fogjuk mondani, hogy ϕ mindenütt értelmezett (bi)racionális leképezés. Ez természetesen ugyanaz, mint ha ϕ -t az X -ről az Y -ba képező (közönséges) leképezésnek tekintjük.

Lényeges észrevétel a következő: mivel Z illetve W kisebb dimenziósak, mint X illetve Y , azt mondhatjuk, hogy két algebrai varietás biracionális, ha „majdnem mindenütt” izomorf.

1.8 Példa. Legyen $Z \subset X$ az X varietás valódi projektív részvarietása. Ekkor $X \setminus Z$ biracionális X -szel.

1.9 Példa. Tekintsük a következő leképezést:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C}P^1 &\longrightarrow \mathbb{C}P^2 \\ (u : t) &\longmapsto (ut^2 - u^3 : u^2t - t^3 : u^3). \end{aligned}$$

Ekkor $\phi(\mathbb{C}P^1)$ azon pontok halmaza, melyek koordinátáira $y^2z = x^2(x+z)$. Legyen $X = \mathbb{C}P^1$ és $Z = \{(1 : 1), (1 : -1)\} \subseteq X$, illetve $Y = \phi(X)$ és $W = \{(0 : 0 : 1)\} \subseteq Y$. Ekkor az

$$\begin{aligned} Y \setminus W &\longrightarrow X \setminus Z \\ (x : y : z) &\longmapsto (-x : y) \end{aligned}$$

leképezés mutatja, hogy $X \setminus Z$ és $Y \setminus W$ izomorfak, azaz X biracionális Y -nal. Ugyanakkor ϕ nem 1 – 1 értelmű, tehát nem izomorfizmus.

1.10 Példa. Legyen

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}P^1 &\longrightarrow \mathbb{C}P^2 \\ (u : t) &\longmapsto (u^3 : u^2t : t^3). \end{aligned}$$

Ekkor $\mathbb{C}P^1$ biracionális $\psi(\mathbb{C}P^1)$ -gyel, ami az $x^2z = y^3$ egyenlettel definiált görbe. Ez a leképezés 1 – 1 értelmű, mégsem izomorfizmus, mert az

$$(x : y : z) \longmapsto (x : y)$$

leképezés nem terjed ki $(0 : 0 : 1)$ -re.

Az utóbbi két példában ϕ és ψ mindenütt értelmezett biracionális leképezések. Nem szükséges azonban, hogy biracionális varietások között létezzen mindenütt értelmezett biracionális leképezés.

1.11 Példa. A fenti jelöléssel $\phi(X)$ és $\psi(X)$ biracionális varietások, de nem létezik közöttük mindenütt értelmezett biracionális leképezés.

1.11.1 Megjegyzés. Ebből is következik, hogy ϕ és ψ egyike sem izomorfizmus.

Lássunk végül példát *nem* biracionális varietásokra.

1.12 Példa. Az $y^2z = x(x^2 + z^2)$ egyenlettel definiált elliptikus görbe nem biracionális $\mathbb{C}P^1$ -gyel.

Ezt az állítást a következő fejezetben fogjuk bizonyítani.

1.13. Most már készen állunk, hogy az osztályozási problémát megfelelően részekre bontsuk.

- (i) Osztályozzuk a projektív algebrai varietásokat biracionális ekvivalencia erejéig.
- (ii) Minden biracionális osztályból válasszunk ki egy projektív modellt, amely valamilyen jól definiált értelemben egyszerű.
- (iii) Írjuk le az osztály tagjai és a (ii)-ben kiválasztott modell közötti biracionális ekvivalenciát megadó leképezéseket.

1.13.1 Megjegyzés. Érdemes (ii)-vel kezdeni a munkát, mert akkor (i)-t lehet úgy végezni, hogy csak a (ii)-ben kiválasztott modelleket vizsgáljuk. Ilyen módon nem kapunk osztályozást abban az értelemben, hogy nem állítunk fel egy listát. Ennek ellenére mégis kapunk egy bizonyos fajta osztályozást ugyanis lesz egy „receptünk”, ami megmondja, hogy bizonyos, már osztályozott lépések elvégzése után eljutunk egy olyan objektumhoz, ami már szerepel egy listán, azaz már szintén osztályozva van.

Először is azt kell meghatározni, hogy mikor tekintünk egy modellt „egyszerűnek”.

1.14 Definíció. Legyen X egy algebrai varietás. Az $x \in X$ pont *sima**, ha x -nek van olyan környezete X -ben, ami egy komplex differenciálható sokaság. Az $x \in X$ pontot, ha nem sima, *szinguláris pontnak* vagy *szingularitásnak* hívjuk. X *sima*, ha minden pontja sima, *szinguláris*, ha van nem sima pontja.

A következő tétel mutatja, hogy a simaság jó jelölt a keresett „egyszerű” tulajdonságra.

1.15 Tétel. Legyen X egy projektív algebrai varietás. Ekkor létezik \tilde{X} *sima projektív algebrai varietás és egy mindenütt értelmezett $\tilde{X} \rightarrow X$ szürjektív biracionális leképezés. Azaz minden algebrai varietásnak van sima modellje.*

Sok neves matematikus foglalkozott ezzel a problémával. A következő egy valószínűleg nem teljes listája ezeknek: Riemann, Kronecker, Max Noether, Albanese,

Jung, Walker, Hirzebruch, Zariski, Abhyankar adtak részleges vagy teljes bizonyítást az egy-, két-, illetve háromdimenziós esetre (Abhyankar majdnem minden pozitív karakterisztikában). Az általános esetet végül Hironaka bizonyította 1964-ben. Részletesebb történeti áttekintés található pl. [12]-ben.

1.15.1 Megjegyzés. Ez a tétel talán a leggyakrabban használt tétel az algebrai geometriában. Jelentősége abban áll, hogy megengedi, hogy sima varietások vizsgálatára szorítkozzunk. A tétel legerősebb formája nagyon pontos információt ad az állításban szereplő biracionális leképezésről. Így (iii)-ra már adhatunk egy részleges választ és ezzel a továbbiakban elég egy sima projektív varietás és a (ii)-ben kiválasztott modell közötti leképezést leírni.

2.§ Görbék

2.1 Tétel. *Legyenek X és Y sima projektív görbék. Ha X biracionális Y -nal, akkor X és Y izomorfak.*

Ezek szerint már választ is tudunk adni (ii)-re, hiszen a fenti tétel és (1.15) alapján minden biracionális osztályban pontosan egy sima projektív görbe van. (iii)-ra is könnyű válaszolni ebben az esetben, hiszen (1.15) alapján a sima modellről az adott görbére képező leképezés szürjektív, és ez 1-dimenziós alakzatok esetében megfelelően leírja, hogy mi történik. Egy ilyen leképezésre láttunk példát (1.9)-ben.

Hátra van tehát a sima projektív görbék osztályozása. Egy sima komplex projektív görbe valós dimenziója 2, ezért szokás Riemann felületnek is hívni. A $\sqrt{-1}$ -gyel való szorzás természetes irányítást ad a Riemann felületnek. A kompakt irányítható felületek gömbök, néhány fogantyúval ellátva. Az egyetlen topológiai invariáns a fogantyúk száma, ez a felület *neme* (genus), jele g .

2.2 Példa. $X = \mathbb{CP}^1$. Ekkor X topológiailag egy gömb, tehát $g(X) = 0$.

Ennek a megfordítása is igaz.

2.3 Tétel. *Legyen X egy sima projektív görbe. Tegyük fel, hogy $g(X) = 0$. Ekkor X izomorf \mathbb{CP}^1 -gyel.*

2.4 Példa. Legyen E egy elliptikus görbe (pl. az (1.6)-ban definiált). Ekkor E izomorf \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 -tel (ld. [13]), azaz E topológiailag egy tórusz, tehát $g(E) = 1$.

Ebből az is következik, hogy E nem lehet izomorf \mathbb{CP}^1 -gyel, hiszen nem is homeomorf vele. Következésképpen (2.1) alapján E és \mathbb{CP}^1 nem is biracionálisak. Ezzel beláttuk (1.12)-t.

2.5 Tétel. Legyen $A \subseteq \mathbb{C}P^2$ egy d -edfokú sima projektív síkgörbe. Ekkor

$$g(A) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

Ebből a formulából rögtön látszik, hogy $d = 1$ és $d = 2$ esetben $g = 0$, ami (2.3) alapján azt jelenti, hogy a görbe izomorf $\mathbb{C}P^1$ -gyel. Ez azonban nem meglepő, hiszen a $d = 1$ esetben a görbe egy projektív egyenes, a $d = 2$ esetben pedig egy kúpszelet. Az is következik a formulából, hogy 2-nél magasabb fokú görbék neme pozitív, tehát nem lehetnek a $\mathbb{C}P^1$ -gyel izomorfak, azaz ismét (2.1) szerint nem is biracionálisak vele.

2.6 Feladat. Bizonyítsuk be (2.3) gyenge változatát: Legyen X egy sima projektív síkgörbe. Tegyük fel, hogy $g(X) = 0$. Ekkor X izomorf $\mathbb{C}P^1$ -gyel.

Elevenítsük most fel a poliéderekről szóló Euler tételt. Adott egyszerű poliéderre jelölje c a csúcsok, e az élek és l a lapok számát. Ekkor

$$c - e + l = 2.$$

Egy poliéder egyszerű, ha topológiailag a gömbbel ekvivalens. A fenti tétel általánosítható a következő módon: olyan poliédereket tekintünk, melyek topológiailag ekvivalensek egy kompakt irányítható felülettel. A fenti jelöléssel ekkor

$$c - e + l = 2 - 2g.$$

Az itt fellépő $2 - 2g$ mennyiséget szokás a Riemann felület *Euler–Poincaré karakterisztikájának* nevezni.

2.7 Feladat. Legyen $f : Y \rightarrow X$ egy nem konstans leképezés sima projektív görbék között. Tegyük fel, hogy véges sok pont kivételével minden $x \in X$ -nek d ősképe van.³ Bizonyítsuk be, hogy

$$2g(Y) - 2 \geq d(2g(X) - 2).$$

2.8 Feladat. Legyen $f : Y \rightarrow X$ egy nem konstans leképezés sima projektív görbék között. Bizonyítsuk be, hogy

$$g(Y) \geq g(X).$$

Ez egy nagyon hasznos eredmény a görbék közötti leképezések tanulmányozására. (2.3)-mal egybevetve például a következő állítást kapjuk.

³ Igazolható, hogy a fenti f -re mindig létezik egy ilyen d . Használjuk fel ezt a tényt a következő feladat megoldásához!

2.9 Tétel. Legyen X egy sima projektív görbe, és legyen $f : \mathbb{C}P^1 \rightarrow X$ egy nem konstans leképezés. Ekkor X izomorf $\mathbb{C}P^1$ -gyel.

2.9.1 Megjegyzés. f nem feltétlenül izomorfizmus. A

$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^1 &\longrightarrow \mathbb{C}P^1 \\ [z : t] &\longmapsto [z^r : t^r] \end{aligned}$$

leképezésnél egy általános pontnak r ősképe van.

A sima projektív görbéket tehát topológiailag a nem különbözteti meg egymástól. Így a görbék egyik legfontosabb paramétere a nemük. Ez már ad egy durva osztályozást, amit tovább lehet folytatni az egyes osztályok speciális tulajdonságait felhasználva.

Ha $g = 0$, akkor a görbe egyértelműen meg van határozva, azaz izomorf $\mathbb{C}P^1$ -gyel. Ha $g > 0$, akkor találunk egymással nem izomorf, azonos nemű görbéket.

Ha $g = 1$, akkor megmutatható, hogy még egy numerikus invariáns – az ún. j -invariáns – egyértelműen meghatározza a görbét.

Ha $g > 1$, akkor újabb módszerekre van szükség a további tanulmányozáshoz, de erre itt nem tudunk kitérni.

3.§ A kanonikus divizor

E fejezet célja a kanonikus divizor és a metszési szám fogalmának bevezetése.

3.1 Definíció. Az X n -dimenziós sima algebrai varietáson *divizornak** nevezünk egy $(n - 1)$ -dimenziós részvarietásokból alkotott formális összeget. Ezek nyilvánvalóan Abel csoportot alkotnak és értelmezünk közöttük egy ekvivalenciarelációt, az ún. *lineáris ekvivalenciát*. Ez hozzávetőlegesen a következőt jelenti. Ha X be van ágyazva egy projektív térbe, akkor két különböző hipersík által kimetszett divizort szeretnénk ekvivalensnek tekinteni. Lineáris ekvivalencia az a legszűkebb ekvivalenciareláció, amelyre ez teljesül és ami invariáns a csoportműveletre.

A lineáris ekvivalencia szokásos definíciója a következő: Legyen X egy algebrai varietás, és legyen f egy nem azonosan nulla racionális függvény* X -en. Ekkor lehet definiálni minden 1-kodimenziós részvarietásra az f multiplicitását Y mentén, $\text{mult}_Y(f)$ -et, ami rendelkezik az összes olyan tulajdonsággal, amit egy multiplicitás fogalomtól elvárhatunk, így például $\text{mult}_Y(f) > 0$, ha $f|_Y = 0$ és $\text{mult}_Y(f) < 0$, ha $f^{-1}|_Y = 0$.

Az f *divizorát*, $\text{div}(f)$ -et a következő módon definiáljuk:

$$\text{div}(f) = \sum \text{mult}_Y(f) Y \in \text{Div}(X),$$

ahol Y végigfut az 1-kodimenziós részvarietások halmazán.

Ekkor a $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ divizorokat *lineárisan ekvivalens*nek nevezzük, ha létezik olyan f racionális függvény, hogy

$$D_1 = D_2 + \text{div}(f).$$

3.2 Definíció. Legyen $D \subseteq X$ egy divizor és $C \subseteq X$ egy görbe. A D és a C *metszési számát** a következő módon definiáljuk. Válasszunk egy D -vel lineárisan ekvivalens divizort, amely C -t transzverzálisan* metszi. Az így kapott metszéspontok száma független a választott divizortól, ezt a számot a D és a C metszési számának nevezzük, és $D \cdot C$ -vel jelöljük.

Ha $\dim X = 1$, akkor X az egyetlen görbe, tehát csak egy metszési számot kell megadnunk. Ezen a következőt értjük: egy divizor most pontok formális összege, azaz $D = \sum n_i P_i$, ahol $P_i \in X$. Ekkor $D \cdot X = \sum n_i \in \mathbb{Z}$. Ezt a számot szokás *deg* D -vel jelölni.

Figyeljük meg, hogy felületek esetében a divizorok görbékkel alkotott formális összegek, tehát értelmezhetjük két divizor metszési számát. Ez hasznos lehet még akkor is, ha — az eredeti definíció szerint — csak a divizorok és görbék metszési számát akarjuk tudni, hiszen így több lehetőségünk van a számolásra.

3.3 Példa. $\mathbb{C}P^n$ -ben két hiperfelület pontosan akkor lineárisan ekvivalens, ha azonos fokúak.⁴ Ez azt jelenti, hogy egy d -edfokú hiperfelület lineárisan ekvivalens dH -val, ahol H egy hipersík. Látjuk tehát, hogy lineáris ekvivalencia erejéig minden divizort írhatunk aH , $a \in \mathbb{Z}$ alakba, tehát egy görbe és egy tetszőleges divizor metszési számának kiszámolásához csupán a görbe *fokának* ismerete szükséges, amit a következő módon definiálunk:

$$\text{deg } C = H \cdot C.$$

3.3.1 Megjegyzés. Ha $n = 2$, akkor C maga is egy hiperfelület, tehát már definiáltuk C fokát. Szerencsére az újonnan definiált fok megegyezik a régivel.

3.4 Példa. Legyen most $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{C}P^2$ egy d_1 - és egy d_2 -fokú görbe. Az előző példa alapján C_1 lineárisan ekvivalens d_1L -l és C_2 lineárisan ekvivalens d_2L -l, ahol L egy tetszőleges egyenes. Két egyenes egy közös pontban találkozik, tehát $L \cdot L = 1$ a definíció alapján. Ezek szerint $C_1 \cdot C_2 = d_1L \cdot d_2L = d_1d_2$, tehát $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.

3.5 Példa. Tekintsük az $X \subseteq \mathbb{C}P^3$, $xy = zt$ egyenlettel definiált felületet. Legyenek

$$R_1 = \{(u : 0 : v : 0) \mid (u : v) \in \mathbb{C}P^1\} \subseteq X,$$

$$R_2 = \{(u : 0 : 0 : v) \mid (u : v) \in \mathbb{C}P^1\} \subseteq X.$$

⁴ Az úgynevezett d -szeres beágyazás — ami az $(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \dots : x_n^d)$ hozzárendelésnek megfelelő leképezés — a $\mathbb{C}P^n$ -et úgy ágyazza be egy $\binom{n+d}{d}$ - 1-dimenziós projektív térbe, hogy az eredeti d -edfokú hiperfelületek előállnak hipersíkmetszetként.

Könnyen látható, hogy $R_1 \cap R_2 = \{(1 : 0 : 0 : 0)\}$ és, hogy $R_1 \cup R_2$ megegyezik X és a $H = (y = 0)$ sík metszetével. Jelölje H' az $(x = z)$ síkot. Ekkor $R_1 + R_2$ lineárisan ekvivalens $X \cap H'$ -vel, azaz $(R_1 + R_2) \cdot (R_1 + R_2)$ definíció szerint az

$$(R_1 \cup R_2) \cap (X \cap H')$$

metszet számossága. Ez a metszet nem más, mint

$$(X \cap H) \cap (X \cap H') = X \cap H \cap H'.$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy a fenti metszet két pontból — $(1 : 0 : 1 : 0)$ és $(0 : 0 : 0 : 1)$ — áll, azaz

$$(R_1 + R_2) \cdot (R_1 + R_2) = 2.$$

$R_1 \cap R_2$ egy pontból áll, tehát

$$\begin{aligned} R_1 \cdot R_2 &= 1, \\ (R_1 + R_2) \cdot (R_1 + R_2) &= R_1 \cdot R_1 + 2R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_2 = R_1 \cdot R_1 + 2 + R_2 \cdot R_2, \\ R_1 \cdot R_1 + R_2 \cdot R_2 &= 0. \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy z és t felcserélése a \mathbb{CP}^3 -nek egy olyan automorfizmusát adja meg, amely X -et önmagára képezi le, és R_1 -et és R_2 -t felcseréli. Ezek szerint

$$R_1 \cdot R_1 = R_2 \cdot R_2 = 0.$$

3.6 Feladat. Bizonyítsuk be, hogy R_1 és R_2 nem lineárisan ekvivalensek X -en.

Érdeemes megjegyezni, hogy $R_1, R_2 \subset H \simeq \mathbb{CP}^2$. A síkon bármely két egyenes (hipersík) lineárisan ekvivalens, tehát ott $(R_1 \cdot R_1)_H = (R_2 \cdot R_2)_H = 1$. Láthatjuk tehát, hogy két görbe metszési száma, illetve lineáris ekvivalenciája nagy mértékben függ attól, hogy mely felületen tekintjük őket.

Következő lépésként választunk egy divizor osztályt, amelynek elemeit kanonikus divizoroknak⁵ hívjuk. Ennek a jelentősége a következő: választunk egy divizor osztályt minden X sima algebrai varietásra egyszerre, ugyanazzal a módszerrel, azaz „kanonikusan”.

Legyen X n -dimenziós sima algebrai varietás, azaz egy komplex sokaság. Egy *racionális n -forma* X -en egy olyan ω n -differenciálforma, melynek esetleg pólusa lehet, de egyébként holomorf módon változik. Ez pontosabban annyit jelent, hogy egy (U, z_1, \dots, z_n) lokális térképen $\omega = f dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$, ahol f egy alkalmas racionális függvény* X -en.

⁵ Az alábbtól eltérő, algebrai definíciót ld. [16].

Ekkor f definiál egy $\text{div}(f)$ divizort U -n. Igazolható, hogy ha U végigfut az X egy nyílt halmazokból álló fedésén, akkor az így definiált divizorok a megfelelő halmazok metszetein megegyeznek, ezzel definiálva egy divizort X -en.

Fontos megjegyezni, hogy egy racionális n -formát leíró lokális függvények általában nem ragadnak össze egy globális racionális függvénné, tehát az így kapott divizor nem $\text{div}(f)$ alakú divizor.

Egy racionális n -forma által definiált divizort *kanonikus divizornak* nevezünk. Igazolható, hogy különböző racionális n -formák különböző, de egymással lineárisan ekvivalens divizorokat adnak, ezért a kanonikus divizorok osztálya jól definiált.

Az X (bármely) kanonikus divizorát K_X -szel jelöljük. A továbbiakban az X -en található görbék K_X -szel való metszési számát fogjuk vizsgálni, és látni fogjuk, hogy ez meglepően sokat árul el X geometriájáról. Érdemes megjegyezni, hogy a definíció alapján K_X és egy görbe metszési száma jól definiált, annak ellenére, hogy K_X -nek csak a lineáris ekvivalenciaosztálya van pontosan meghatározva.

3.7 Példa. Legyen $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ az x_0, \dots, x_n koordinátákkal és legyen minden $i = 0, \dots, n$ -re $U_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$. A bevezetőben láttuk, hogy U_i azonosítható \mathbb{C}^\times -nel az $\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}$ koordinátákkal. (Értelemszerűen $\frac{x_i}{x_i}$ -t kihagyjuk. Ez a megjegyzés a továbbiakra is érvényben marad külön említés nélkül.) Tekintsük az

$$\omega_i = (-1)^i \frac{1}{\frac{x_0}{x_i} \dots \frac{x_n}{x_i}} d\left(\frac{x_0}{x_i}\right) \wedge \dots \wedge d\left(\frac{x_n}{x_i}\right)$$

racionális n -formát U_i -n. Ekkor tetszőleges i, j -re az $U_i \cap U_j$ halmazon két koordinátarendszerünk is van. Írjuk fel ω_i -t az $\frac{x_0}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j}$ koordinátarendszerben! A törtek differenciálására vonatkozó szabály szerint

$$d\left(\frac{x_l}{x_i}\right) = d\left(\frac{\frac{x_l}{x_j}}{\frac{x_i}{x_j}}\right) = \frac{\frac{x_i}{x_j} d\left(\frac{x_l}{x_j}\right) - \frac{x_l}{x_j} d\left(\frac{x_i}{x_j}\right)}{\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^2}.$$

Így

$$\begin{aligned} \omega_i &= (-1)^i \frac{1}{\frac{x_0}{x_i} \dots \frac{x_n}{x_i}} d\left(\frac{x_0}{x_i}\right) \wedge \dots \wedge d\left(\frac{x_j}{x_i}\right) \wedge \dots \wedge d\left(\frac{x_n}{x_i}\right) \\ &= (-1)^i \frac{1}{\frac{x_0}{x_i} \dots \frac{x_n}{x_i}} d\left(\frac{\frac{x_0}{x_j}}{\frac{x_i}{x_j}}\right) \wedge \dots \wedge d\left(\frac{1}{\frac{x_i}{x_j}}\right) \wedge \dots \wedge d\left(\frac{\frac{x_n}{x_j}}{\frac{x_i}{x_j}}\right) \\ &= (-1)^{i+1} \frac{1}{\frac{x_0}{x_j} \dots \frac{x_n}{x_j}} d\left(\frac{x_0}{x_j}\right) \wedge \dots \wedge \\ &\quad \wedge d\left(\frac{x_{j-1}}{x_j}\right) \wedge d\left(\frac{x_i}{x_j}\right) \wedge d\left(\frac{x_{j+1}}{x_j}\right) \wedge \dots \wedge d\left(\frac{x_n}{x_j}\right) \\ &= (-1)^j \frac{1}{\frac{x_0}{x_j} \dots \frac{x_n}{x_j}} d\left(\frac{x_0}{x_j}\right) \wedge \dots \wedge d\left(\frac{x_n}{x_j}\right) = \omega_j \end{aligned}$$

Látjuk tehát, hogy az U_i halmazokon egyenként definiált racionális n -formák a megfelelő halmazok metszetein megegyeznek. Ez annyit jelent, hogy így megadtunk egy, az egész X -en értelmezett ω racionális n -formát, melynek az egyes U_i -kre való megszorítása éppen ω_i . Az ω_i -t definiáló racionális függvényeknek, $\frac{1}{\frac{x_0}{x_i} \dots \frac{x_n}{x_i}}$, zérushelyük nincs, de egyszeres pólusuk van a koordinátahipersíkok mentén⁶. Így könnyen látható, hogy az ω által definiált divizor nem más, mint $-(H_0 + H_1 + \dots + H_n)$, ahol $H_i = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{C}P^n \mid x_i = 0\}$, azaz ha H egy tetszőleges hipersík, akkor

$$K_X = -(n+1)H.$$

Az $n = 1$ speciális esetben tehát $K_{\mathbb{C}P^1} = -2P$, ahol $P \in \mathbb{C}P^1$ egy tetszőleges pont. Így

$$\deg K_{\mathbb{C}P^1} = -2.$$

Legyen most X egy sima projektív felület, $C \subseteq X$ egy projektív görbe. Ekkor a $K_X + C$ és a C görbe metszési száma nagyon fontos összefüggést ad meg a felület kanonikus divizora és a görbe kanonikus divizora között.

3.8 Tétel. $(K_X + C) \cdot C = \deg K_C$.

Először is ellenőrizzük, hogy ez $\mathbb{C}P^1$ -re azt az eredményt adja, amit várunk.

3.9 Példa. Legyen $\mathbb{C}P^1 \simeq L \subseteq \mathbb{C}P^2$. $K_{\mathbb{C}P^2} = -3L$, így valóban

$$(K_{\mathbb{C}P^2} + L) \cdot L = -2L \cdot L = -2 = \deg K_L.$$

3.10 Példa. Legyen $\mathbb{C}P^1 \simeq C \subseteq \mathbb{C}P^2$ egy kúpszelet. C lineárisan ekvivalens $2L$ -l, tehát

$$(K_{\mathbb{C}P^2} + C) \cdot C = (-3L + 2L) \cdot 2L = -L \cdot 2L = -2 = \deg K_C.$$

(3.8) segítségével sok esetben ki tudjuk számolni a görbe kanonikus divizorának fokát.

3.11 Példa. Legyen $E \subseteq \mathbb{C}P^2$ az (1.6)-ben definiált elliptikus görbe. Ekkor E lineárisan ekvivalens $3L$ -l, azaz $K_{\mathbb{C}P^2} + C = 0$, tehát

$$\deg K_E = 0.$$

3.12 Példa. Legyen $A \subseteq \mathbb{C}P^2$ egy d -edfokú sima projektív síkgörbe. Ekkor A lineárisan ekvivalens dL -l, azaz $K_{\mathbb{C}P^2} + A$ lineárisan ekvivalens $(d-3)L$ -l, tehát

$$\deg K_A = d(d-3).$$

Ha ezeket a példákat összehasonlítjuk a (2.2), (2.4), (2.5) példákkal, akkor látjuk, hogy K foka és a görbe neme között szoros összefüggés van. Nevezetesen K foka éppen az Euler–Poincaré karakterisztika (-1) -szerese.

⁶ Ezt természetesen az U_i -nek \mathbb{C}^K -nel való azonosítása mellett kell érteni.

3.13 Tétel. Legyen X egy sima projektív görbe. Ekkor

$$\deg K_X = 2g(X) - 2.$$

Ennek a tételnek a segítségével új formába önthetjük, amit a görbék osztályozásáról tudunk.

3.14 Tétel. Legyen X egy algebrai görbe. Ekkor egyértelműen létezik \tilde{X} , az X -szel biracionálisan ekvivalens sima projektív görbe, amely a következő típusok közül pontosan az egyikhez tartozik:

$$(3.14.1) \deg K_{\tilde{X}} = -2, \text{ ekkor } \tilde{X} \text{ izomorf } \mathbb{CP}^1\text{-gyel.}$$

$$(3.14.2) \deg K_{\tilde{X}} = 0, \text{ ekkor } \tilde{X} \text{ egy elliptikus görbe.}$$

$$(3.14.3) \deg K_{\tilde{X}} > 0.$$

3.14.1 Megjegyzés. (1.15) utáni megjegyzés értelmében ezzel a görbék egy majdnem teljes osztályozását kapjuk. Ugyanakkor érdemes megjegyezni, hogy (1.15)-öt görbékre nem nehéz bizonyítani és az X és az \tilde{X} közötti kapcsolat is könnyen leírható. Ami hiányzik a teljességhez, az a fenti tétel harmadik osztályába eső görbék pontosabb rendszerezése. Erre már nincs alkalmunk kitérni, de annyit azért érdemes megjegyezni, hogy ezek a görbék — rögzített g -re — $3g - 3$ komplex paramétertől függenek.

4.§ Felületek

Felületek esetében is először (ii)-t próbáljuk megoldani, azaz adott biracionális osztályból szeretnénk kiválasztani egy „egyszerű” modellt. (1.15) alapján tudjuk, hogy választhatunk sima modellt, de a görbékkel ellentétben itt egy sima modell már nem egyértelmű.

4.1 Példa. Legyen $X \subseteq \mathbb{CP}^3$ az $xy = zt$ egyenlettel definiált sima másodfokú felület. Legyen $P = (0 : 0 : 0 : 1) \in X$ és

$$\sigma : X \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{CP}^2$$

a P -ből való vetítés, azaz

$$(x : y : z : t) \mapsto (x : y : z).$$

Legyen $Z = (z = 0) \cap X \subseteq \mathbb{CP}^3$ és $W = (z = 0) \subseteq \mathbb{CP}^2$. Könnyen látható, hogy σ izomorfizmust ad meg $X \setminus Z$ és $\mathbb{CP}^2 \setminus W$ között, azaz X biracionális \mathbb{CP}^2 -tel.

Legyenek most

$$L_1 = \{(u : 0 : v : 0) \mid (u : v) \in \mathbb{CP}^1\} \subseteq X,$$

$$L_2 = \{(0 : u : 0 : v) \mid (u : v) \in \mathbb{CP}^1\} \subseteq X.$$

L_1 és L_2 két olyan projektív görbe X -en, melyek nem metszik egymást, tehát $L_1 \cdot L_2 = 0$. (3.4) alapján tehát X és $\mathbb{C}P^2$ biracionálisak, de nem izomorfak. Érdemes megjegyezni, hogy nem is homeomorfak. Ennek bizonyítását azonban az olvasóra bizzuk.

A következő feladat segítségével egy — a metszési számtól független — bizonyítást adunk arra, hogy $\mathbb{C}P^2$ -en bármely két görbe metszi egymást.

4.2 Feladat. (a) Legyen $\mathfrak{M} \triangleleft \mathbb{C}[x, y, z]$ egy maximális ideál és $I \triangleleft \mathbb{C}[x, y, z]$ egy tetszőleges ideál, amelyre $\mathfrak{M}^r \subseteq I \subseteq \mathfrak{M}$ valamilyen $r \in \mathbb{Z}$ -re. Bizonyítsuk be, hogy I nem generálható két elemmel.

(b) Legyenek $X, Y \subseteq \mathbb{C}^3$ felületek. Bizonyítsuk be, hogy ha $X \cap Y \neq \emptyset$, akkor $X \cap Y$ nem állhat egy pontból.

[Használjuk fel a következő állítást (ld. [8, F.2]): minden $\mathfrak{M} \triangleleft \mathbb{C}[x, y, z]$ maximális ideálhoz létezik olyan $a, b, c \in \mathbb{C}$ konstansok, hogy $\mathfrak{M} = (x - a, y - b, z - c)$.]

4.2.1 Megjegyzés. Ez az állítás nem igaz \mathbb{R} felett, ahogy azt egy gömb és egy azt érintő sík példája mutatja.

Tekintsünk most két projektív görbét $\mathbb{C}P^2$ -en, C_1 -et és C_2 -t. Legyen $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{C}^3$ az a két felület, amelyeket úgy kapunk, hogy a C_1 -et és C_2 -t definiáló polinomok \mathbb{C}^3 -beli zérushelyét tekintjük. $(0, 0, 0) \in F_1 \cap F_2$, tehát $F_1 \cap F_2$ nem üres, azaz (4.2) alapján tartalmaz egy $0 \neq P \in F_1 \cap F_2$ pontot. Ez a P meghatároz egy pontot $\mathbb{C}P^2$ -en, amely közös pontja lesz C_1 -nek és C_2 -nek. Ezzel beláttuk, hogy $\mathbb{C}P^2$ -en bármely két görbe metszi egymást.

Biracionálisan ekvivalens sima felületek tehát nem feltétlenül izomorfak, így további munkára van szükség, hogy a keresett modellt megtaláljuk.

4.3 Definíció. Legyen X egy sima projektív felület. Egy $C \subseteq X$ projektív görbét (-1) -görbének hívunk, ha C izomorf $\mathbb{C}P^1$ -gyel és $K_X \cdot C = -1$.

4.3.1 Megjegyzés. Egy (-1) -görbét általában úgy szokás definiálni, hogy az egy olyan $\mathbb{C}P^1$ -gyel izomorf görbe, amelyre $C \cdot C = -1$. Ez (3.7) és (3.8) miatt ekvivalens a fenti definícióval.

4.4 Példa. Legyen $\Sigma_0 = \{(x, \sigma(x)) \mid x \in X \setminus \{P\}\} \subset \mathbb{C}P^3 \times \mathbb{C}P^2$, ahol σ a (4.1)-ben definiált leképezés. Legyen továbbá $\Sigma = \bar{\Sigma}_0$ és $q : \Sigma \rightarrow X$ a $\mathbb{C}P^3$ -ra való projekcióból adódó leképezés. Ekkor $q^{-1}(P)$ egy (-1) -görbe.

X sima, azaz P egy alkalmas környezetében megegyezik $0 \in \mathbb{C}^2$ egy alkalmas környezetével. Így $q : \Sigma \rightarrow X$ lokálisan a következő példával egyezik meg.

4.5 Példa. Legyen $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ a 0 -ból való vetítés. Legyen továbbá $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1 \supset \Gamma = \{(x, \pi(x)) \mid x \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}$, $X = \bar{\Gamma}$ és $p : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}^2$ az első tényezőre való projekció.

4.6 Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $C = X \cap p^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^1$.

Igazolható, hogy $K_X \cdot C = -1$, azaz C egy (-1) -görbe. Érdekes megjegyezni, hogy lokálisan (az euklideszi topológia értelmében) minden (-1) -görbe izomorf ezzel a példával.

4.6.1 Megjegyzés. A fenti példákban szereplő konstrukció az úgynevezett felfújás. Részletesebben erről ld. [8].

A (-1) -görbék fontos szerepét mutatja a következő tétel.

4.7 Castelnuovo Tétele. Legyen X egy sima projektív felület, és $C \subseteq X$ egy (-1) -görbe. Ekkor létezik egy

$$f : X \rightarrow X_0$$

mindenütt értelmezett szürjektív biracionális leképezés egy X_0 sima projektív felületre, ahol C egy pontra képződik le, azaz $f(C) = P \in X_0$ és az

$$f : X \setminus C \rightarrow X_0 \setminus P$$

megszorítás izomorfizmus.

Ez a tétel azt mondja, hogy egy (-1) -görbét össze tudunk húzni. Létezik azonban olyan felület, amelyen végtelen sok (-1) -görbe van. A következő tétel mutatja, hogy ennek ellenére a fenti módszerrel véges sok lépésben elérhető, hogy ne maradjon egyetlen (-1) -görbe sem. Ezek a tények nem ellentmondóak, ugyanis K_X , és így annak a görbékkel való metszési számai is változnak, tehát egy (-1) -görbe összehúzásával esetleg más görbék is megszűnnek (-1) -görbéknek lenni.

4.8 Tétel. Legyen X sima projektív felület. Ekkor létezik leképezéseknek olyan

$$X \rightarrow X_0 \rightarrow X_1 \rightarrow \dots \rightarrow X_k$$

sorozata, hogy minden $X_i \rightarrow X_{i+1}$ egy (-1) -görbe összehúzása, és X_k -n nincs egyetlen (-1) -görbe sem.

4.9 Definíció. Egy \mathbb{CP}^2 -tel biracionális sima felületet *racionalis* felületnek hívunk.

4.10 Definíció. Legyen X egy sima projektív felület. X -et *vonalfelületnek* (ruled surface) hívjuk, ha létezik egy $f : X \rightarrow S$ leképezés, ahol S egy sima görbe, és minden $s \in S$ -re $f^{-1}(s)$ izomorf \mathbb{CP}^1 -gyel.

4.11 Példa. Legyenek $f : X \rightarrow S$ és $g : Y \rightarrow S$ vonalfelületek ugyanazzal az S bázisgörbével. Ekkor X és Y biracionálisak. Így például minden vonalfelület biracionális $S \times \mathbb{CP}^1$ -gyel.

4.12 Példa. Legyen $X \subseteq \mathbb{CP}^3$ az $xy = zt$ által definiált felület. Azt már láttuk (4.1)-ben, hogy X racionalis. Legyen most $L \subseteq X$ egy egyenes (pl. $\{(0 : u : 0 : v) \mid$

$(u : v) \in \mathbb{CP}^1 \}$). Definiálunk egy $f : X \rightarrow L$ leképezést. Legyen $x \in X$. Ha $x \in L$, akkor legyen $f(x) = x$. Ha $x \notin L$, akkor legyen H az x és az L által kifeszített sík. Ekkor $X \cap H$ egy olyan másodfokú algebrai halmaz a $H \simeq \mathbb{CP}^2$ -en, ami tartalmaz egy egyenest és rajta kívül egy pontot. Tehát $X \cap H$ két egyenes uniója. Legyen most $f(x)$ ezen két egyenes metszéspontja. Vegyük észre, hogy x helyett az $X \cap H$ L -től különböző komponensének bármely pontjára ugyanazt az $f(x)$ -t kapjuk, tehát minden $l \in L$ -re $f^{-1}(l)$ izomorf \mathbb{CP}^1 -gyel, azaz X egy vonalfelület.

(3.7) szerint $K_{\mathbb{CP}^2} = -3L$, ahol L egy tetszőleges egyenes, tehát minden C projektív görbére

$$K_{\mathbb{CP}^2} \cdot C < 0,$$

de \mathbb{CP}^2 nem tartalmaz (-1) -görbét.

Hasonlóan, ha X egy tetszőleges vonalfelület, legyen C a vonalazást adó leképezés egy rostja ($= f^{-1}(s)$). Ekkor

$$K_X \cdot C = -2.$$

Racionális- és vonalfelületeken tehát találunk olyan C projektív görbét, melyekre

$$K \cdot C < 0,$$

még olyan esetben is, amikor a felület nem tartalmaz (-1) -görbét.

Érdekes megfigyelni, hogy ez a tulajdonság jellemzi ezeket a felületeket.

4.13 Tétel. Legyen X egy tetszőleges algebrai felület. Ekkor létezik \tilde{X} , az X -szel biracionálisan ekvivalens sima projektív felület, amely nem tartalmaz (-1) -görbét, és a következő típusok közül pontosan az egyikhez tartozik:

$$(4.13.1) \quad \tilde{X} = \mathbb{CP}^2.$$

$$(4.13.2) \quad \tilde{X} = S \times \mathbb{CP}^1 \text{ alkalmas } S \text{ sima projektív görbére, mely nem izomorf } \mathbb{CP}^1\text{-gyel.}$$

$$(4.13.3) \quad K_{\tilde{X}} \cdot C \geq 0 \text{ minden } C \subseteq \tilde{X} \text{ projektív görbére.}$$

Hogyan válasszunk tehát modellt? Ha X racionális, kézenfekvő \mathbb{CP}^2 -et választani. Ha X biracionális egy vonalfelület tel, akkor válasszuk a tétel által adott $\tilde{X} = S \times \mathbb{CP}^1$ -et.

4.14 Definíció. Legyen X egy sima projektív felület. X -et *minimálisnak* hívjuk, ha nem tartalmaz (-1) -görbét. Ha ezen felül X nem izomorf \mathbb{CP}^2 -tel és nem vonalfelület, akkor (4.13) alapján következik, hogy minden $C \subseteq X$ projektív görbére, $K_X \cdot C \geq 0$.

A továbbiakban a (4.13.3) esettel foglalkozunk, azaz olyan felületeket tekintünk, melyek nem racionálisak, és nem biracionálisak egy vonalfelülettel.

4.15 Tétel. Legyenek X és Y minimális felületek. Tegyük fel, hogy X és Y egyike sem vonalfelület, és nem izomorfak $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ -tel. Ekkor, ha X biracionális Y -nal, akkor egyben izomorfak is.

4.15.1 Megjegyzés. (4.1), (4.7) és (4.11) mutatják, hogy a tétel feltételei szükségesek.

(4.13) szerint a tétel feltételei ekvivalensek azzal, hogy $K_X \cdot C \geq 0$ minden $C \subseteq X$ projektív görbére és $K_Y \cdot D \geq 0$ minden $D \subseteq Y$ projektív görbére. Azaz a tétel úgy is fogalmazható, hogy egy biracionális osztályban legfeljebb egy ilyen tulajdonságú felület lehet. Ez pontosan az a tulajdonság, amire szükségünk van. Látjuk tehát, hogy (4.13) ebben az esetben is szolgáltat egy egyértelmű modellt.

Ezzel tehát megtaláltuk a keresett modellt, azaz választ adtunk (ii)-re. Figyeljük meg, hogy (iii)-t is megválaszoltuk, hiszen (1.15) alapján tudjuk, hogy hogyan kapunk egy sima modellt, majd pedig (4.8) írja le, hogy egy tetszőleges sima modell hogyan képeződik le a minimális modellre.

Hátra van (i), azaz a minimális felületek vizsgálata. Ennek egyik fő eszköze a következő:

4.16 Tétel. Legyen X egy minimális felület, amely nem izomorf $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ -tel és nem vonalfelület. Ekkor minden elég nagy $m \in \mathbb{N}$ -re létezik egy

$$\phi_{mK_X} : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{N(m)}$$

leképezés, hogy mK_X úgy adódik, mint $\phi_{mK_X}(X)$ és egy $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N(m)}$ -beli hipersík metszetének az ősképe, kivételesen tehát minden $C \subseteq X$ projektív görbére

$$mK_X \cdot C = \deg \phi_{mK_X}(C).$$

Továbbá, ha $m, m' \in \mathbb{N}$ megfelelően nagyok, akkor $\phi_{mK_X}(X)$ és $\phi_{m'K_X}(X)$ izomorfak.

4.16.1 Megjegyzés. Itt \deg a (3.3)-ben definiált $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ -beli fokszámot jelöli.

4.17 Definíció. $\phi_{mK_X}(X)$ az X kanonikus modellje (elég nagy $m \in \mathbb{N}$ -re). X Kodaira dimenzióját a $\kappa(X) = \dim \phi_{mK_X}(X)$ képlettel definiáljuk és ϕ_{mK_X} -et az X m -kanonikus leképezésének hívjuk.

Ezután a minimális felületeket osztályokba lehet sorolni Kodaira dimenziójuk szerint, majd az egyes osztályokat külön-külön vizsgálni a fenti ϕ_{mK_X} leképezés segítségével.

A durva osztályozás a következő:

4.18 Tétel. Ha $\kappa(X) = 0$, akkor X a következő osztályok egyikéhez tartozik:

- (1) $K3$ felület, azaz X olyan egyszeresen összefüggő felület, amelyre $K_X = 0$.

- (2) *Enriques felület*, azaz X olyan felület, melyre $H_1(X, \mathbb{R}) = 0$ és teljesül, hogy $K_X \neq 0$, de $2K_X = 0$.⁷
- (3) *Abel felület*, azaz X rendelkezik egy komplex Lie csoport struktúrával.
- (4) *hiperelliptikus felület*, azaz X rendelkezik egy $\mathbb{C}P^1$ -re való leképezéssel, amire minden pont ősképe egy elliptikus görbe.

4.19 Tétel. Ha $\kappa(X) = 1$, akkor X egy ún. *elliptikus felület*, azaz X rendelkezik egy (tetszőleges) görbére való leképezéssel, amire majdnem minden pont ősképe egy elliptikus görbe.

4.20 Tétel. Ha $\kappa(X) = 2$, akkor X egy ún. *általános típusú felület*, azaz olyan felület, amelyre a fenti tétel által adott ϕ_{mK_X} leképezés biracionális.

A felsorolt osztályok mindegyike rendelkezik valamilyen speciális tulajdonsággal, ami alapot nyújt további tanulmányozásukra. Bizonyos kérdések még tisztázásra várnak annak ellenére, hogy a felületek osztályozása befejezettnek tekinthető.

5.§ 3-dimenziós varietások

Az első lépés ismét az, hogy (1.15)-et használva a sima 3-dimenziós varietások vizsgálatára szorítkozunk. Ezután hasonlóan szeretnénk eljárni, mint a felületek esetében.

5.1 Definíció. Az X sima projektív varietást *minimálisnak* nevezzük, ha minden $C \subseteq X$ projektív görbére, $K_X \cdot C \geq 0$.

A célunk az, hogy kiindulva egy tetszőleges sima projektív varietásból, „egyszerű” transzformációk segítségével találjunk egy minimális modellt. Az első lépés Castelnuovo tételének általánosítása.

5.2 Gyenge Összehúzási Tétel. Legyen X egy legfeljebb 3-dimenziós sima projektív varietás. Ha X nem minimális, akkor létezik egy $\mathbb{C}P^1$ -gyel izomorf $C \subseteq X$ projektív görbe, amelyre $K_X \cdot C < 0$ és egy $\phi : X \rightarrow Y$ leképezés, amely C -t egy pontra képezi le. Továbbá minden ϕ által összehúzott görbe K_X -et negatívan metszi.

Vegyük észre, hogy ez a tétel nem teljesen analóg Castelnuovo tételével. Ha X -et egy felületnek választjuk, akkor a tétel lényegében azt mondja, hogy vagy van egy (-1) -görbe, amit össze tudunk húzni, vagy X egy vonalfelület, és a tétel által adott ϕ éppen az a leképezés, ami X -et azzá teszi, vagy $X \simeq \mathbb{C}P^2$, és minden görbét

⁷ $H_1(X, \mathbb{R})$ az X első homológia csoportja valós együtthatókkal. Könnyen belátható, hogy egy Enriques felület fundamentális csoportja \mathbb{Z}_2 és az univerzális fedőtere egy $K3$ felület. Az itt használt topológiai fogalmakról bővebben ld. [14].

összehúzzunk. Így ez a tétel inkább Castelnuovo tételének és (4.13)-nak az együttes analógja.

A következő természetes lépés az lenne, hogy az (5.2) ismételt alkalmazásával eljutunk egy minimális modellhez. Ez azonban nem működik, mert azt nem tudjuk biztosítani, hogy Y sima legyen, ezért a tétel Y -ra már nem alkalmazható.

Tehát, amire szükségünk van, az egy szinguláris varietás okra vonatkozó összehúzási tétel. Ennek természetesen vannak korlátai, mert például K_X és $K_X \cdot C$ értelmezéséhez elengedhetetlen, hogy a szingularitások ne legyenek nagyon kezelhetetlenek (vö. Függelék).

Végül is létezik szingularitásoknak egy olyan osztálya – az ún. *terminális* szingularitások (ld. [9, 11.9]) –, melyekre K_X és $K_X \cdot C$ értelmezhető, továbbá (5.2) is — kisebb módosításokkal — igaz marad olyan X projektív varietásokra, melyeknek legfeljebb ilyen szingularitásaik vannak.

Felmerül azonban egy újabb probléma. Ha elemezzük az összehúzások fajtáit, akkor azt találjuk, hogy egy típus kivételével Y -nak is legfeljebb terminális szingularitásai vannak. Abban az esetben azonban, ha $\dim X = 3$ és ϕ csak egy görbét húz össze, akkor Y szingularitása már olyan kezelhetetlen lesz, hogy a metszési számot nem lehet értelmesen definiálni. Ezért szükség van egy új típusú transzformációra.

5.3 Definíció. Legyen X egy 3-dimenziós projektív varietás legfeljebb terminális szingularitásokkal. Tegyük fel, hogy $C \subseteq X$ egy olyan projektív görbe, amelyre

$$K_X \cdot C < 0.$$

Tegyük fel továbbá, hogy az (5.2) által adott $\phi : X \rightarrow Y$ leképezés olyan, hogy $\phi(C) = P \in Y$ egy pont, és a

$$\phi : X \setminus C \rightarrow Y \setminus P$$

megszorítás izomorfizmus.

Amennyiben létezik egy X^+ 3-dimenziós projektív varietás legfeljebb terminális szingularitásokkal, és egy $C^+ \subseteq X^+$ projektív görbe, amelyre

$$K_{X^+} \cdot C^+ > 0,$$

továbbá létezik egy olyan $\phi^+ : X^+ \rightarrow Y$, hogy $\phi^+(C^+) = P \in Y$ és a

$$\phi^+ : X^+ \setminus C^+ \rightarrow Y \setminus P$$

megszorítás izomorfizmus, akkor a $\phi^+ : X^+ \rightarrow Y$ leképezést a $\phi : X \rightarrow Y$ flipjének nevezzük.

Ennek a transzformációnak (flip) a lényege a következő: Ha egy olyan görbére akadunk, amelyre az összehúzási tétel egy olyan ϕ -t ad, ami semmi mást nem húz

össze, mint ezt az egy görbét, akkor a keletkező varietás szingularitása már nem lesz olyan, amit még kezelni tudunk, ezért az eddigi úton nem haladhatunk. Ennek ellenére a görbét el szeretnénk tüntetni. Ezért a görbét „kivágjuk”, és egy másikkal helyettesítjük, úgy, hogy az új görbe már pozitívan metszi K_X -et. Az természetesen nem nyilvánvaló, hogy ez végrehajtható. Az a tény hogy igen, az úgynevezett Flip Tétel (Mori), a magasabb dimenziós geometria egyik legmélyebb eredménye.

A követendő módszer most már világos. Amit lehet összehúzzunk, ha elakadunk, kerestünk egy flipet, majd ismét összehúzzunk, amíg el nem érünk egy minimális modellt.

Ezt az egyszerűen hangzó tervet azonban nem olyan egyszerű megvalósítani. Először is be kell látni, hogy a flip létezik. Másodszor pedig, hogy a fent vázolt módszer egyszer véget ér. Ezek nagyon komoly, nehéz állítások, de szerencsére bizonyítottan igazak.

Most már ki tudjuk mondani tételünket, amely egészen hasonló lesz a két-dimenziós esethez. Lényeges különbség, hogy a minimális modellt nem tudjuk simának választani, hanem meg kell engednünk terminális szingularitásokat. Érdekes megjegyezni, hogy egy felület, amelynek legfeljebb terminális szingularitásai vannak, mindig sima, tehát tekinthetjük úgy, hogy a minimális modelleknek mindig legfeljebb terminális szingularitásai vannak, csak éppen ez kis dimenziókban nem különbözteti meg őket a sima varietásoktól. Ezért először is kiterjesztjük a minimális modell fogalmát.

5.4 Definíció. Az X projektív varietást, melynek legfeljebb terminális szingularitásai vannak, *minimálisnak* nevezzük, ha $K_X \cdot C \geq 0$ minden $C \subseteq X$ projektív görbére.

5.5 Tétel. Legyen X egy 3-dimenziós varietás. Ekkor létezik \tilde{X} , az X -szel biracionálisan ekvivalens, legfeljebb terminális szingularitásokkal rendelkező 3-dimenziós projektív varietás, amely a következő típusok közül pontosan az egyikhez tartozik.

(5.5.1) Létezik egy $\phi : \tilde{X} \rightarrow Z$, hogy $\dim Z < \dim X$, és $K_{\tilde{X}} \cdot C < 0$ minden olyan $C \subseteq \tilde{X}$ projektív görbére, amelyre $\phi(C)$ egy pont.

(5.5.2) Minden $C \subseteq \tilde{X}$ projektív görbére $K_{\tilde{X}} \cdot C \geq 0$, azaz \tilde{X} minimális.

Ez tehát megválaszolja (ii)-t. A válasz (iii)-ra kissé bonyolultabb, mint a felületek esetében, de ez nem meglepő, hiszen a dimenzió növekedésével a struktúrák várhatóan bonyolódnak. (1.15) megadja, hogy hogyan jutunk el egy sima modellhez. A sima modelltől a minimális modellig olyan lépésekkel tudunk eljutni, melyek mindegyike vagy az (5.2) által adott összehúzás, vagy pedig egy flip.

Marad tehát (i). Az (5.5.1) esetben visszavezettük a problémát alacsonyabb dimenziós varietások vizsgálatára, (5.5.2)-ben pedig találtunk egy minimális modellt.

A minimális modellek vizsgálatát a felületekéhez hasonlóan végezzük. Ismét létezik kanonikus leképezés, a tétel formája (4.16)-hoz hasonló, a Kodaira dimenziót

is ugyanúgy tudjuk definiálni. A 3-dimenziós varietásokra azonban az ismert tételek nem adnak olyan teljes leírást, mint a felületek esetében.

6.§ Epilógus

Emlékeztetni szeretném az olvasót, hogy ez az írás csupán ismeretterjesztő jellegű, és nem ajánlatos eredmények forrásaként használni. A definíciók és tételek nem a komoly kutatáshoz szükséges pontossággal és szigorral szerepelnek.

A témáról az olvasó részletes és sokkal pontosabb ismertetőt talál [9]-ben. Ez nehezebb olvasmány, de feltétlenül megéri a befektetett energiát.

A már említett magyar nyelvű irodalomban – [8], [13] és [16] — további referencia található bevezető jellegű írásokra. [9] irodalomjegyzéke bőséges további olvasnivalót ajánl az érdeklődőknek.

Néhányat én is megemlítenék: [5] bevezető jellegű könyv sok érdekes példával fűszerezve. [3] és [7] könnyen olvasható bevezetést adnak az algebrai geometria modern nyelvzetébe. [4] és [17] minimális előismeretet igénylő, az algebrai görbékről szóló könyvek. Az általános algebrai geometria iránt komolyan érdeklők számára további olvasnivalót kínál [15] és [6]. Ez utóbbi komolyabb kommutatív algebrai tudást feltételez, cserébe szigorú bevezetést ad a modern algebrai geometria felépítésébe. A szükséges kommutatív algebrai ismereteket tartalmazzák például [2] és [1]. Végül, de nem utolsósorban [10] és [11] a legmodernebb technikákról és kérdésekről adnak részletes leírást. Ez utóbbiak olvasása azonban már komoly előismereteket igényel.

Hadd idézzem ismét Kollár Jánost. [9]-ben olvashatjuk a következőt:

„... M. Noether mondta egyszer, hogy az algebrai görbéket Isten teremtette, míg az algebrai felületeket az Ördög. Ez kevés helyet hagyott a 3-dimenziós algebrai varietások számára. ...”

Jelen írás talán nem mutatja be teljes mértékben, miért mondta ezt M. Noether, azt azonban megfigyelhette az olvasó, hogy a felületek osztályozása nagyságrendekkel nehezebb feladat, mint a görbék osztályozása. Azt váránk tehát, hogy a 3-dimenziós algebrai varietások osztályozása már szinte lehetetlen. A közelmúlt eredményei azonban, — ahogy ezt [9]-ben is olvashatjuk — mást mondanak. A minimális modell program — ami Mori elmélet néven is ismert — egy olyan megközelítést adja az osztályozási problémának, ami várhatóan eredményes lesz minden dimenzióban. Azt mondhatjuk tehát, hogy a korábban vártakkal ellentétben

„... létezik egy mély és sokatmondó elmélet a 3-dimenziós algebrai varietások osztályozására, ami sok tekintetben emlékeztet a felületek osztályozásának elméletére. Minden ezen a területen dolgozó kutató közös reménye, hogy az eddig bizonyított eredmények csupán a kezdetét jelentik egy részletes struktúraelmélet kifejlődésének.”

Befejezésül azt remélem, hogy sikerült néhány olvasó érdeklődését olyan mértékben felkelteni, hogy ne érje be ezzel a szerény bepillantással, hanem tovább folytassa az algebrai geometria megismerését.

Függelék

§A. Adalékok a nem definiált fogalmakhoz

dimenzió.⁸ Varietások *kodimenzióját* és *dimenzióját* a következőképpen definiáljuk:

$$\text{codim}(Y, X) = \sup \{k \mid Y = Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_k, \text{ ahol} \\ Z_i \subseteq X \text{ irreducibilis részvarietások}\}$$

$$\dim X = \text{codim}(\emptyset, X)$$

divizor. Legyen X egy algebrai varietás. Jelölje $\text{Div}(X)$ az X 1-kodimenziós irreducibilis részvarietásai által generált szabad Abel csoportot. $\text{Div}(X)$ elemeit *divizoroknak* hívjuk.

elliptikus és hiperelliptikus görbék. Legyen X egy görbe, amely biracionális az $y^2 = f(x)$ által definiált síkgörbével, ahol f többszörös gyök nélküli d -edfokú polinom. X -et *elliptikusnak* nevezzük, ha $d = 3$ vagy 4 , és *hiperelliptikusnak*, ha $d \geq 5$.

Megjegyzések. (a) Egy elliptikus görbe *nem* hiperelliptikus.

(b) A $d \geq 4$ esetben az $y^2 = f(x)$ által definiált síkgörbének a végtelenben van egy szinguláris pontja.

(c) Valójában a $d = 4$ eset nem ad új elliptikus görbéket. Ezen görbék sima modelljei szerepelnek a $d = 3$ esetben.

(d) Egy sima projektív hiperelliptikus görbe nem ágyazható be $\mathbb{C}P^2$ -be.

homogén polinom. Egy $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ polinomot d -edfokú *homogén polinomnak* nevezünk, ha minden $\lambda \in \mathbb{C}$ -re

$$f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, \dots, x_n).$$

Ez ekvivalens azzal, hogy az f -et alkotó összes monom foka d .

izomorfizmus. Egy $\phi : X \rightarrow Y$ morfizmust *izomorfizmusnak* nevezünk, ha létezik olyan $\psi : Y \rightarrow X$ morfizmus, hogy $\phi \circ \psi = \text{id}_Y$ és $\psi \circ \phi = \text{id}_X$.

leképezés. Ha a vizsgált objektumok osztályát megszorítjuk — jelen esetben a polinomokkal definiált alakzatokra —, akkor a megengedett leképezéseket — *morfizmusokat* — is definiálni kell.

⁸ Az alaptest \mathbb{C} , a komplex számok teste, ezért a dimenzió is \mathbb{C} felett értendő.

Egy $\phi : X \rightarrow Y$ affin varietások közötti leképezést *affin morfizmusnak* nevezünk, ha minden $f \in A(Y)$ reguláris függvényre*, $f \circ \phi$ reguláris X -en. Egy $\phi : X \rightarrow Y$ tetszőleges varietások közötti leképezést *morfizmusnak* nevezünk, ha affin részekre megszorítva affin morfizmust kapunk.

metszési szám. A szövegben közölt definíció nem pontos. Valójában így csak akkor tudjuk a metszési számot definiálni, ha D egy olyan divizor, ami az X egy alkalmas projektív térbe való beágyazásánál megegyezik X és egy hipersík metszetével. Igazolható azonban, hogy minden divizor előáll, mint két ilyen tulajdonságú divizor különbsége, tehát ezen a közvetett úton tudjuk a metszési számot általában definiálni.

Itt érdemes megjegyezni azt is, hogy miért fontos, hogy X sima legyen. Ellenkező esetben ugyanis előfordul, hogy nem minden divizor áll elő, mint két olyan divizor különbsége, melyek az X egy alkalmas projektív térbe való beágyazásánál megegyeznek X és egy hipersík metszetével.

Egy elegendő feltétel ahhoz, hogy metszési számot tudjunk értelmezni az, hogy minden divizornak egy alkalmas többszöröse előálljon a fenti módon.

reguláris és racionális függvények. Legyen $X \subseteq \mathbb{C}^n$ egy affin algebrai varietás. Jelölje

$$I(X) = \{f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid f(x) = 0, \quad \forall x \in X\}.$$

Ekkor az

$$A(X) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / I(X)$$

gyűrűt az X koordináta gyűrűjének, a gyűrű elemeit pedig *reguláris függvényeknek* nevezzük. Az $A(X)$ hányadosteste, $K(X)$, az X *racionális függvényteste*, elemei a *racionális függvények*. Ha X egy tetszőleges algebrai varietás, akkor $K(X)$ -et az X egy sűrű affin részvarietásának a racionális függvénytesteként definiáljuk.

sima. Legyen $x \in X$, és tekintsük x -nek egy $U \subseteq X$ affin környezetét. Legyenek f_1, \dots, f_k az $U \subseteq \mathbb{C}^n$ affin varietást definiáló polinomok. Ekkor x *sima* pontja X -nek, ha

$$\text{rk} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right] = n - \dim U.$$

Megjegyzés. Ekkor az implicit függvény tétel szerint x -nek van olyan környezete X -ben, amely egy differenciálható sokaság.

transzverzális metszés. Egy D hiperfelület és egy C görbe transzverzálisan metszik egymást, ha minden $P \in D \cap C$ sima pontja D -nek és C -nek, és D P -beli érintőtere nem tartalmazza C P -beli érintőterét.

§B. Útmutató a feladatok megoldásához

(1.3) $\overline{X} = \overline{X \setminus Z} \cup Z$ és \overline{X} irreducibilis, tehát $\overline{X} = \overline{X \setminus Z}$, azaz $X \setminus Z$ irreducibilis.

(2.6) (2.5) alapján X vagy egy egyenes, ami nyilván izomorf \mathbb{CP}^1 -gyel, vagy egy másodfokú görbe. Legyen tehát X egy másodfokú görbe. Egy görbe definíció szerint irreducibilis, tehát X nem tartalmazhat egyenest. Rögzítsünk egy $x_0 \in X$ pontot, és egy $x_0 \notin L \subseteq \mathbb{CP}^2$ egyenest. Tetszőleges $x \in X$ -re legyen $\phi(x)$ az x és az x_0 által meghatározott egyenes (az x_0 -beli érintő, ha $x = x_0$) és az L metszéspontja. Ez a ϕ izomorfizmus X és $L \simeq \mathbb{CP}^1$ között.

(2.7) Rajzoljunk egy gráfot X -re úgy, hogy a kivételes pontok a gráf csúcsai közé tartoznak. Emeljük fel ezt a gráfot Y -ra, azaz tekintsük az X -en megadott gráf ősképeként adódó, Y -on lévő gráfot. Ekkor az élek és lapok száma d -vel szorozódik, míg a csúcsok száma legfeljebb a d -szeresére nő. Azaz Euler tétele miatt

$$2 - 2g(Y) \leq d(2 - 2g(X)).$$

(2.8) Ha $g(X) = 0$, akkor az állítás nyilván igaz, hiszen $g(Y) \geq 0$ mindig teljesül. Ha $g(X) \geq 1$, akkor (2.7) alapján:

$$g(Y) \geq g(X) + (d - 1)(g(X) - 1) \geq g(X).$$

(3.6) $R_1 \cdot R_2 = 1$, azaz ha lineárisan ekvivalensek lennének, akkor $R_1 \cdot R_1 = 1$ lenne, de láttuk, hogy valójában $R_1 \cdot R_1 = 0$.

(4.2) (a) Ha I generálható lenne két elemmel, akkor $\mathbb{C}[x, y, z]$ transzcendencia foka legfeljebb 2 volna.

(b) $X \cap Y \neq \emptyset$ azt jelenti, hogy az X -et illetve Y -t definiáló f illetve g polinomok eltűnnek egy közös $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ pontban, azaz

$$f, g \in (x - a, y - b, z - c) = \mathfrak{M}.$$

Az f és g által generált ideál (a) miatt nem tartalmazhatja \mathfrak{M} egyetlen hatványát sem, tehát van egy \mathfrak{M} -től különböző maximális ideál, $\mathfrak{M}' = (x - a', y - b', z - c')$, ami tartalmazza f -et és g -t. Ez éppen azt jelenti, hogy $(a', b', c') \in X \cap Y$.

Valójában több is igaz: ha $X \cap Y \neq \emptyset$, akkor $X \cap Y$ tartalmaz egy görbét.

(4.6) Legyen $z = (u : v) \in \mathbb{CP}^1$ és $(\lambda_n) \subset \mathbb{C}$ olyan, hogy $\lambda_n \rightarrow 0$ és $x_n = (\lambda_n u, \lambda_n v) \in \mathbb{C}^2$. Ekkor $(x_n, \pi(x_n)) \rightarrow (0, z) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{CP}^1$, tehát $\mathbb{CP}^1 \subseteq C \subseteq p^{-1}(0) \simeq \mathbb{CP}^1$.

Irodalom

- [1] Atiyah, M. F., Macdonald, I. G., *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Co., 1969.
- [2] Eisenbud, D., *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [3] Eisenbud, D., Harris, J., *Schemes: the language of modern algebraic geometry*, Wadsworth & Brooks, 1992.
- [4] Fulton, W., *Algebraic curves*, Mathematics Lecture Notes Series, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969; Addison-Wesley reprint, 1989.
- [5] Harris, J., *Algebraic geometry: a first course*, Graduate Texts in Math., vol. 133, Springer-Verlag, 1992.
- [6] Hartshorne, R., *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, 1977.
- [7] Kempf, G. R., *Algebraic varieties*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 172, Cambridge University Press, 1993.
- [8] Kollár J., *Algebrai görbék*, Matematikai Lapok **28** (1980), 153–198.
- [9] Kollár, J., *The structure of algebraic threefolds — an introduction to Mori's program*, Bull. Amer. Math. Soc. **17** (1987), 211–273.
- [10] Kollár, J., *Shafarevich Maps and Automorphic Forms*, Princeton Univ. Press, 1995.
- [11] Kollár, J., *Rational Curves on Algebraic Varieties*, Springer-Verlag, 1996.
- [12] Lipman, J., *Introduction to resolution of singularities*, Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974), pp. 187–230. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.
- [13] Rónyai L., *Elliptikus görbék és a Fermat-sejtés*, Matematikai Lapok (Új sorozat) **2/3.-4.** (1992), 1–22.
- [14] Rotman, J., *An introduction to Algebraic Topology*, Graduate Texts in Math., vol. 119, Springer-Verlag, 1988.
- [15] Shafarevich, I., *Basic algebraic geometry 1–2*, Second edition. Translated from the 1988 Russian edition and with notes by Miles Reid, Springer-Verlag, 1994.
- [16] Szamuely T., *A Riemann-Roch tételről*, Matematikai Lapok (Új sorozat) **3/1.-2.** (1996), 38–92.
- [17] Walker, R., *Algebraic curves*, Princeton University Press, 1950; Dover reprint, 1962; Springer-Verlag reprint, 1978.

Department of Mathematics
Massachusetts Institute of Technology
Room 2-265 Cambridge
MA 02139
U.S.A.
E-mail: kovacs@math.mit.edu

Sándor Kovács: The Unknown Acquaintance — Algebraic Geometry for Non-Algebraic Geometers

This article is a light introduction to algebraic geometry, in particular to the birational classification of algebraic varieties.

After a short basic introduction the paper overviews the classification of algebraic curves by their genus. The next section is devoted to the canonical divisor which plays a central role in birational algebraic geometry. The curve classification is reformulated in terms of the canonical divisor. Next the minimal model theory of surfaces is discussed, again with special emphasis on the behavior of the canonical divisor. In the final section one can glimpse into the difficulties of carrying out the analogous theory in dimension 3.

The presentation is intended for a general audience and the interested reader can find some exercises with hints to their solution.

KÖNYVISMERTETÉS

Szili László — Tóth János: Matematika és Mathematica

Valószínűleg minden olvasónak van elképzelése arról, mi a matematika, azonban talán nem mindenki tudja, mi a Mathematica. Nos, az első ebben a témában megjelent magyar nyelvű könyvből erre természetesen fény derül. Egy olyan program csomag, amely nagyon megkönnyíti a matematika felhasználóinak az életét, akár a matematikában, akár mérnöki feladatokban, akár program íráshoz, akár az oktatásban van szükségük valamilyen már ismert feladat megoldására.

A könyv hátsó borítóján ennél kicsit részletesebb bemutatást is találhatunk. Néhány lehetőség:

- **Szimbolikus műveletek** végzése, például kifejezések egyszerűsítése, primitív függvények keresése, algebrai és differenciálegyenletek megoldása.
- A hagyományos programnyelvekkel szemben akár több ezer értékes jeggyel is végezhetünk **numerikus számításokat**.
- **Grafikai lehetőségei** egészen kiválóak. Két dimenziós vektorteret vagy három dimenziós testeket is többféleképp ábrázolhatunk, akár mozgó képpel is.
- **Magas szintű programnyelv**: Írhatunk procedurális, szabályalapú, objektumorientált és funkcionális elven készült programokat, ráadásul a Mathematica függvényeit is használhatjuk.
- Több népszerű program kapcsolható hozzá: C, EXCEL, FORTRAN, T_EX, VisualBasic, Word.

A könyv először egy rövid áttekintést ad a szimbolikus programcsomagok történetéről és más ilyen programcsomagokról. A 2. fejezetben ismerkedhetünk meg a Mathematica alapelveivel, például hogyan kell értéket adni, hogyan történik a kiértékelés, milyen opciók vannak. Ezt a részt feltétlenül érdemes elolvasni, bár lehet érdekesebb előbb néhány példát megnézni a későbbi fejezetekből és később visszatérni ide. Sajnos elég kevés információt találhatunk az ablakos felhasználói felülettel kapcsolatos tudnivalókról. Pedig ez kezdő felhasználónak sok fejtörést okozhat, mivel sokszor nem a más programokban szokásos a Mathematica használata.

A 3. fejezet (ami a könyv nagy részét kiteszi) az, amelyet az olvasó a legtöbbet fog forgatni. Például ha az olvasó egy lineáris algebrai feladatot akar megoldani, akkor a 3.8. szakaszban találja meg, hogy milyen utasításokat használhat, hogyan kell megadni egy mátrixot és hogyan lehet ortogonalizálni sorvektorait. Mindenne

láthatunk példákat is. Ez különösen azért jó, mert bár a Mathematica-ba beépített *help* minden utasításról leírja, hogyan kell használni, példákat nem ad. Az egyes szakaszok végén feladatokat is találunk, ami segíti az adott rész jobb megértését.

A szerzők feltételeznek bizonyos matematikai előismereteket, de ez természetes is, hiszen aligha akar valaki differenciálegyenletet megoldani, ha nem tudja mi az. Ugyanakkor a kevésbé közismert, de a leíráshoz szükséges matematikai ismereteket megtalálhatjuk a könyvben vagy legalább egy referenciát kapunk.

A 4. fejezetben a program íráshoz szükséges legfontosabb tudnivalók találhatóak, talán egy kicsit szűkszavúan, az 5. fejezet pedig néhány érdekességet tartalmaz, ami nem szorosan értelmezett matematika.

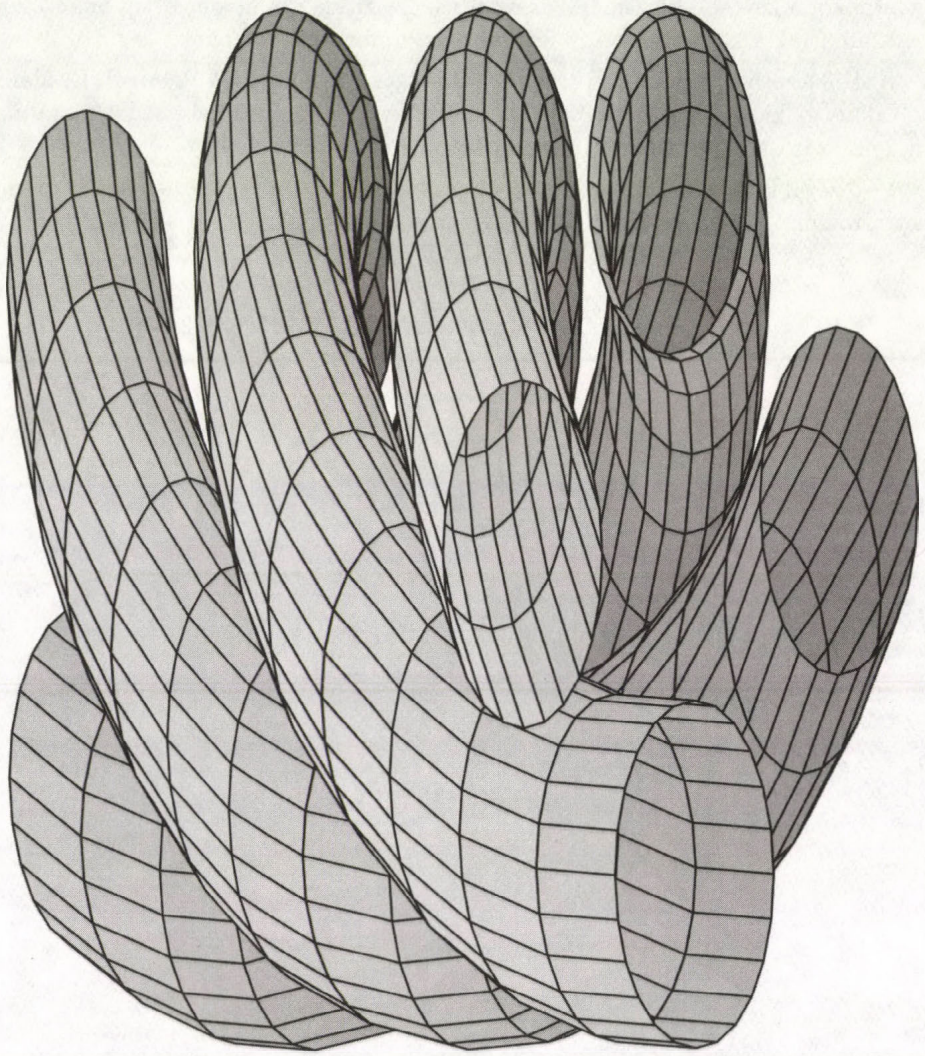
Végezetül kedvcsinálásként néhány konkrét példa, amit a Mathematica-val meg lehet csinálni:

$$\left(1 - \frac{7}{9}\right)^{40} = \frac{1099511627776}{147808829414345923316083210206383297601}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 1 & a^3 & a^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^3+a^2-a-1} & \frac{a^2}{a^2-1} & -\frac{a^2+a+1}{a^3+a^2-a-1} \\ -\frac{1}{(a^2-1)a} & 0 & \frac{1}{(a^2-1)a} \\ \frac{a}{a^3+a^2-a-1} & -(a^2-1)^{-1} & (a^3+a^2-a-1)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\int \frac{x}{x^3-1} dx = \frac{1}{3} \ln(-1+x) - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{3}\right)$$

Katona Gyula Y.



FELADATROVAT

Szerkeszti LACZKOVICH MIKLÓS

A feladatrovatnak szánt küldemények a következő címre küldendőek: Laczkovich Miklós, ELTE Analízis Tanszék, 1088 Bp. Múzeum krt. 6-8. A kitűzésre javasolt feladatok szerzőit kérjük, hogy mellékeljék a feladat megoldását, valamint a feladat keletkezésének hátterét megvilágító esetleges észrevételeiket.

Kitűzött feladat

247. Nevezzünk egy síkbeli halmazt sokszögnek, ha a határa véges sok szakasz egyesítése.

- (i) Mutassuk meg, hogy minden $0 < c < 1$ -hez van olyan $S \subset [0, 1] \times [0, 1]$ sokszög, amelyre az $S^y = \{x \in [0, 1] : (x, y) \in S\}$ és $S_x = \{y \in [0, 1] : (x, y) \in S\}$ halmazok mértéke c minden $x, y \in [0, 1]$ -re.
- (ii) Van-e minden $0 < c < 1$ -hez olyan fenti tulajdonságú sokszög, amelynek minden határszakasza vízszintes vagy függőleges?

LACZKOVICH MIKLÓS

Megoldott feladatok

237. feladat. Legyen p $4k + 3$ alakú prímszám, és jelölje $F_p(x, y)$ az $(x + iy)^p$ komplex együtthatós polinom valós és képzetes részének összegét. Bizonyítsuk be, hogy bármely a, b egész számra $F_p(a, b)$ minden $a - b$ -hez relatív prím osztója $2kp \pm 1$ alakú.

GYÓRY KÁLMÁN, SURÁNYI JÁNOS és VÁRNAI FERENC

Megoldás. Nyilván elég belátni, hogy ha q olyan prímosztója $F_p(a, b)$ -nek, mely nem osztja $a - b$ -t, akkor $q = 2kp \pm 1$. Először is belátjuk, hogy itt $q = 2$ nem lehetséges. Ez világos, ha $a - b$ páros. Ha viszont $a - b$ páratlan, akkor $F_p(a, b)$ is páratlan, ugyanis

$$F_p(a, b) = \sum_{i=0}^p \varepsilon_i \binom{p}{i} a^i b^{p-i}$$

ahol $\varepsilon_i = \pm 1$, tehát a jobb oldalon álló tagok közül pontosan egy lesz páratlan.

Alkalmass rationális egész együtthatós $A_p(x, y)$, $B_p(x, y)$ polinomokkal

$$(1) \quad (x + iy)^p = A_p(x, y) + iB_p(x, y)$$

írható. (1) mindkét oldalát $i^p = -i$ -vel megszorozva

$$(2) \quad (ix - y)^p = -iA_p(x, y) + B_p(x, y)$$

adódik. (2) mindkét oldalának komplex konjugáltját véve

$$(3) \quad (-ix - y)^p = iA_p(x, y) + B_p(x, y).$$

Mivel $F_p(x, y) = A_p(x, y) + B_p(x, y)$, (1) és (3) összege

$$(4) \quad (x + iy)^p - (ix + y)^p = (1 + i)F_p(x, y).$$

Legyenek most x_0, y_0 különböző racionális egész számok, és legyen q az $F_p(x_0, y_0)$ egy olyan prímosztója, melyre $q \nmid (x_0 - y_0)$. Ha $d = (x_0, y_0)$ és $x_0 = dx_1$, $y_0 = dy_1$, úgy $F_p(x_0, y_0) = d^p F_p(x_1, y_1)$ és $q \nmid (x_0 - y_0)$ miatt $q \mid F_p(x_1, y_1)$.

Tegyük fel először, hogy $q > 2$. Jelölje π a q egy tetszőleges prímosztóját a Gauss-egészek gyűrűjében. Ha $q \equiv 3 \pmod{4}$, úgy $\pi = q$ vehető, míg ha $q \equiv 1 \pmod{4}$, úgy $\pi\bar{\pi} = q$. Legyen $\alpha = x_1 + y_1i$ és $\beta = y_1 + x_1i$. Ekkor (4)-ből

$$(5) \quad \alpha^p \equiv \beta^p \pmod{\pi}$$

adódik. Mivel q páratlan és $q \nmid (x_0 - y_0)$, ezért

$$(6) \quad \pi \nmid (\alpha - \beta) = (1 - i)(x_1 - y_1).$$

Ebből következik, hogy π nem osztója α és β egyikének sem. Ekkor viszont van olyan β' Gauss-egész, melyre $\beta\beta' \equiv 1 \pmod{\pi}$, és így a $\gamma = \alpha\beta'$ jelöléssel (5)-ből $\gamma^p \equiv 1 \pmod{\pi}$ folyik. Továbbá, (6) miatt $\gamma \not\equiv 1 \pmod{\pi}$, ezért a mod π redukált maradékosztályok multiplikatív csoportjában a γ -t tartalmazó maradékosztály rendje p . Mivel ezen csoport rendje $N(\pi) - 1$ (ahol $N(\pi)$ a π elem normáját jelöli), így Lagrange tétele szerint $p \mid N(\pi) - 1$. Viszont

$$N(\pi) = \begin{cases} q^2 & \text{ha } q \equiv 3 \pmod{4}, \\ q & \text{ha } q \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases}$$

amiből a feladat állítása következik.

Végül megmutatjuk, hogy $q = 2$ nem lehetséges. Tegyük fel, hogy $2 \mid F_p(x_1, y_1)$, és jelöljük most π -vel az $1 - i$ prímelemet. Mivel $2 = i\pi^2$ és $1 + i = i\pi$, ezért (4)-ből

$$\alpha^p \equiv \beta^p \pmod{\pi^3}$$

következik. Könnyen látható, hogy $2 \nmid (x_1 - y_1)$ következtében $\pi \nmid \alpha, \beta$ és $\alpha \not\equiv \beta \pmod{\pi^3}$). Ekkor viszont a fentiekhez hasonlóan adódik

$$\gamma^p \equiv 1 \pmod{\pi^3}$$

és $\gamma \not\equiv 1 \pmod{\pi^3}$). Mivel p prím, ezért a $\text{mod } \pi^3$ redukált maradékosztályok multiplikatív csoportjában a γ -t tartalmazó maradékosztály rendje p . Ám a $\text{mod } \pi^3$ redukált maradékosztályok száma 4, így Lagrange tétele szerint $p \mid 4$. Ez pedig a p -re tett feltevés miatt nem lehetséges.

GYŐRY KÁLMÁN

Megjegyzések. 1. A feladat állításából adódik, hogy tetszőleges x_0 racionális egész szám esetén $F_p(x_0, x_0 - 1)$ bármely prímosztója $2kp \pm 1$ alakú. Ebből következik, hogy a fenti tulajdonságú p mellett az $\ell p + 1$ vagy az $\ell p - 1$ számtani sorozat végtelen sok prímszámot tartalmaz.

2. Ha egy p prímszámra $q \mid (x_0 - y_0)$, akkor (4) miatt $q \mid F_p(x_0, y_0)$. Az ilyen q prímszámokra tehát a feladat állítása érvényét veszti.

GYŐRY KÁLMÁN

238. feladat. (i) Mutassuk meg, hogy minden zárt térgörbén van négy komplanáris pont, és van olyan zárt térgörbe, amely nem tartalmaz öt komplanáris pontot. (ii) Konstruáljunk olyan zárt térgörbét, amely minden n -re tartalmaz n komplanáris pontot, de nem tartalmaz végtelen sok komplanáris pontot.

RÓKA SÁNDOR

Megoldás. (i) Válasszuk ki a G térgörbe két különböző A és B pontját. Vetítsük merőlegesen a görbét egy, az AB egyenesre merőleges S síkra. A V vetület vagy egy szakasz vagy egy konkáv alakzat. Feltehetjük, hogy a második eset következik be. Ekkor a V halmaznak van olyan e támaszegyenes az S síkban, amely V -nek legalább két pontját tartalmazza, de nem tartalmazza az A és B pontok vetületét. Legyen az S' sík merőleges az S síkra, és messe azt e -ben. Ekkor az S' sík olyan támaszsíkja G -nek, amelynek legalább két közös pontja van G -vel. Könnyű belátni, hogy ha az S' síkot önmagával párhuzamosan eltoljuk az AB egyenes irányában, akkor elég kis eltolás esetén az eltolt síknak legalább négy közös pontja lesz G -vel.

A második állítást bizonyítandó legyen E egy ellipszis, és jelöljük H -val azt a hengerfelületet, amelynek az E síkjára való merőleges vetülete éppen E . Messük el H -t egy olyan gömbbel, amelynek a középpontja H belsejébe esik, és amelynek a sugara elég nagy. Ekkor két olyan térgörbét kapunk, amelyek egyike sem tartalmaz öt komplanáris pontot. Tegyük fel ugyanis, hogy az S síknak legalább öt közös pontja van ezen görbék valamelyikével. Ezek a pontok egyrészt rajta vannak azon a körön, amelyet S a gömbből metsz ki, másrészt a $H \cap S$ ellipszisen. Könnyű belátni, hogy ha a gömb sugara elég nagy, akkor a $H \cap S$ ellipszis nem lehet kör. Ez azonban lehetetlen, hiszen egy körnek és egy ellipszisnek csak négy közös pontja lehet.

Egyébként az is könnyen ellenőrizhető, hogy a

$$t \mapsto ((t-1)t, (t-1)t^2, (t-1)t^3) \quad (t \in [0, 1])$$

zárt térgörbe. Ez legfeljebb négy komplanáris pontot tartalmaz, ugyanis $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$ esetén az

$$a(t-1)t + b(t-1)t^2 + c(t-1)t^3 + d$$

polinomnak legfeljebb négy gyöke lehet.

RÓKA SÁNDOR

(ii) Könnyen látható, hogy ha egy görbe paraméterezésének koordinátafüggvényei polinomok, és ha a teljes görbe nem fekszik egy síkban, akkor a görbe csak véges sok komplanáris pontot tartalmazhat. Legyen Γ a $t \mapsto (t, t^2, t^3)$ ($t \in [0, 1]$) paraméterezéssel megadott egyszerű ív. Az előző megjegyzés szerint Γ csak véges sok (legfeljebb 3) komplanáris pontot tartalmazhat. Jelöljük P_n -nel a $t = 1/(n+1)$ -nek megfelelő pontot Γ -n, legyenek r_n (alkalmasan megválasztandó) pozitív számok, és jelölje B_n a P_n középpontú és r_n sugarú gömböt. Könnyű belátni, hogy ha az r_n számokat elég kicsire választjuk, akkor teljesülnek az alábbi állítások.

- (a) A B_n gömbök mindegyike az $y = z$ sík alatt van.
- (b) Ha $m > n$, $P \in B_n$ és S jelöli az x -tengelyen és a P ponton átmenő síkot, akkor B_m az S sík alatt van.
- (c) Ha $Q_n \in B_n$ ($n = 1, 2, \dots$), akkor az origóból Q_n felé mutató egységvektorok konvergálnak az $(1, 0, 0)$ vektorhoz (Γ érintőjéhez az origóban).

Most vágjuk ki Γ -ből a B_n -be eső részét, és helyettesítsük azt egy olyan ívvel, amely B_n -be esik, nem fekszik egy síkban, koordinátafüggvényei polinomok, és tartalmaz n komplanáris pontot. Ekkor kapunk egy Γ' egyszerű ívet, amely az origótól az $(1, 1, 1)$ pontig halad és amely a végpontjaitól eltekintve az $y = z$ sík alatt fekszik. Belátjuk, hogy Γ' nem tartalmaz végtelen sok komplanáris pontot. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, és legyen T olyan sík, amely Γ' végtelen sok pontját tartalmazza. Mivel $T \cap \Gamma$ véges, és $T \cap B_n \cap \Gamma'$ is véges minden n -re, ezért $T \cap B_n \neq \emptyset$ végtelen sok n -re. Ebből (c) alapján következik, hogy T tartalmazza az x -tengelyt. Ez azonban lehetetlen, hiszen ha $m > n$ olyan indexek, amelyekre $T \cap B_m \neq \emptyset$ és $T \cap B_n \neq \emptyset$, akkor ellentmondásba kerülünk (b)-vel. Így Γ' nem tartalmaz végtelen sok komplanáris pontot, másrészt a B_n -be eső részíve tartalmaz n komplanáris pontot. Végül, ha Γ' -t tükrözzük az $y = z$ síkra és egyesítjük Γ' -vel, akkor egy kívánt tulajdonságú egyszerű zárt görbét kapunk.

LACZKOVICH MIKLÓS

239. feladat. Legyen Φ olyan $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ függvényekből álló halmaz, hogy $f, g \in \Phi$ esetén $\max(f, g) \in \Phi$ és $\min(f, g) \in \Phi$. Mutassuk meg, hogy ha

$$f = \sup_{i \in \mathbf{N}} \left\{ \inf_{j \in \mathbf{N}} \{g_{ij}\} \right\} = \inf_{i \in \mathbf{N}} \left\{ \sup_{j \in \mathbf{N}} \{h_{ij}\} \right\},$$

ahol $g_{ij}, h_{ij} \in \Phi$, akkor vannak olyan $f_n \in \Phi$ függvények, hogy $f = \lim f_n$.

CSÁSZÁR ÁKOS

Megoldás. Legyen $g_i = \inf_{j \in \mathbf{N}} \{g_{ij}\}$, $h_i = \sup_{j \in \mathbf{N}} \{h_{ij}\}$. Feltehető, hogy $h_i \geq h_{i+1}$, mivel

$$\min \left(\sup_{k \in K} \{u_k\}, \sup_{\ell \in L} \{v_\ell\} \right) = \sup_{k \in K, \ell \in L} \{ \min(u_k, v_\ell) \},$$

és így h_i helyébe $\min(h_1, \dots, h_i)$ tehető. Legyen most

$$f_n = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\min \left(\min_{1 \leq j \leq n} g_{ij}, \max_{1 \leq j \leq n} h_{ij} \right) \right).$$

Nyilván $f_n \in \Phi$; belátjuk, hogy $\limsup f_n \leq f \leq \liminf f_n$.

Legyen $x \in X$ tetszőleges. Ha $c < f(x)$, akkor $g_{i_0}(x) > c$ és $h_{i_0 j_0}(x) > c$ alkalmas i_0, j_0 -ra, hiszen $h_{i_0}(x) \geq f(x) > c$. Így $n > \max(i_0, j_0)$ esetén

$$g_{i_0 j}(x) \geq g_{i_0}(x) > c \quad (1 \leq j \leq n), \quad h_{i_0 j_0}(x) > c,$$

tehát $f_n(x) > c$. Ezzel megmutattuk, hogy $\liminf f_n(x) \geq c$.

Ha $c > f(x)$, akkor $h_{i_0}(x) < c$ alkalmas i_0 -ra, és minden i -hez van olyan j_i , amelyre $g_{ij_i}(x) < c$ (hiszen $g_i(x) \leq f(x) < c$). Legyen $j_0 = \max(j_1, \dots, j_{i_0})$, és $n > \max(i_0, j_0)$. Ekkor $1 \leq i \leq i_0$ esetén $g_{ij_i}(x) < c$ folytán $\min_{1 \leq j \leq n} g_{ij}(x) < c$, $i_0 < i \leq n$ esetén pedig $h_{ij}(x) \leq h_i(x) \leq h_{i_0}(x) < c$ folytán $\max_{1 \leq j \leq n} h_{ij}(x) < c$. Így $f_n(x) < c$, és $\limsup f_n(x) \leq c$.

CSÁSZÁR ÁKOS

Megjegyzés. Sierpiński egy tétele szerint (Sur une propriété des limites d'ensembles, *C. R. Paris* **192** (1931), 1625–1627), ha $M = \cup_n \cap_k A_{nk} = \cap_n \cup_k B_{nk}$, ahol A_{nk}, B_{nk} tetszőleges halmazok, akkor $M = \lim_i C_i$, ahol a C_i halmazok megkaphatók az A_{nk}, B_{nk} halmazokból unió- és metszetképzés segítségével. A feladat ezt a tételt általánosítja: Sierpiński tételét a feladatból úgy kaphatjuk meg, ha áttérünk a halmazok karakterisztikus függvényeire.

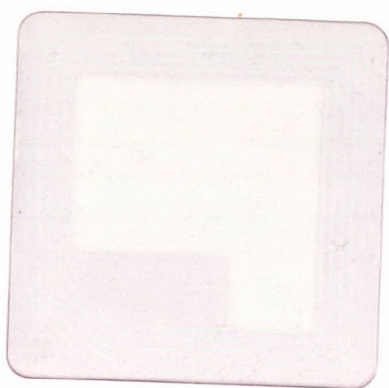
CSÁSZÁR ÁKOS

TARTALOMJEGYZÉK

CSIRMAZ LÁSZLÓ: Egyváltozós rekurzív függvények	1
KOVÁCS SÁNDOR: Az ismeretlen ismerős	7
Könyvismertetés	36
Feladatrovat	39

CONTENTS

LÁSZLÓ CSIRMAZ: Recursive functions of one variable	1
SÁNDOR KOVÁCS: The Unknown Acquintance	7
Book review	36
Problems	39



300519

Matematikai Lapok

8/15)

1994/2-3

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 4. évfolyam (1994), 2–3. szám

(Megjelent 1998-ban)

Tiszteletbeli főszerkesztő: Császár Ákos

Megbízott főszerkesztő: Bárány Imre

Főszerkesztő-helyettes: Pálfy Péter Pál

Tanácsadó Bizottság: Daróczy Zoltán (KLTE), Hajnal András (MKI), Lovász László (ELTE), Szőkefalvi-Nagy Béla (JATE)

Szerkesztő Bizottság: Heteyi Gábor (JPTE), Laczkovich Miklós (ELTE), Nemetz Tibor (MKI), Páles Zsolt (KLTE), Pelikán József (ELTE), Pogáts Ferenc (ELTE), Recski András (BME), Reiman István (BME), Rónyai Lajos (SZTAKI), Sain Márton (nyugdíjas tanár), Staar Gyula (Természet Világa), Székely J. Gábor (BME)

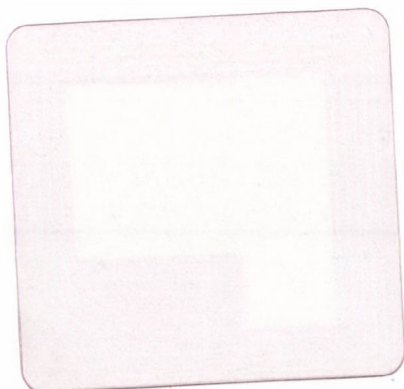
Technikai szerkesztő: Domokos Mátyás

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201-7656.

Előfizetési díj 1995-re 550 Ft+ÁFA, egyes szám ára 150 Ft+ÁFA.

* Megjegyzés: Korábbi előfizetőknek a lap ára az eddigi befizetés függvénye.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.



VENN-DIAGRAMOK SZERKESZTÉSE GRÁFEL- MÉLETI ESZKÖZÖKKEL¹

HAMBURGER PÉTER

1. Bevezetés

Szitamódszerek és ezek geometriai illusztrálása sok száz éves múltra tekint vissza. Felfedezéstük olyan híres nevekkel függ össze – többek között – mint a görög Arisztotelész (i. e. 384–322) [4], a német Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) [17, 18] és Gottfried Ploucquet (1716–1790) [56], a svájci Leonhard Euler (1707–1783) [25], a francia Joseph Diaz Gergonne (1771–1859) [29] és Johann Heinrich Lambert (1728–1777) [49], az ír Sir William Rowan Hamilton of Edinburgh (1805–1865) [44], az angol George Boole (1815–1864) [8], Lewis Carroll (1823–1898) [11] és John Venn (1834–1923) [64, 65].

Margaret E. Baron angol matematikatanár és történész a következőket írja érdekesítő tanulmányában² [5]:

Az ókori görög logika megalapítója Arisztotelész művében („Organon”, „Szillogizmusok Tana” [4]) határozza meg és foglalja össze korának logikai módszereit. Előadásainak írásos anyaga csak későbbi forrásokból maradt ránk, és ezek nem tartalmazznak geometriai illusztrálásokat. Ennek ellenére számos logikus állítja, hogy – mivel ezen írások előadásmódja és nyelvezete olyan szemléletes – Arisztotelész nyilvánvalóan használt geometriai formákat előadásának illusztrálására.

Továbbiakban így folytatja:

Izolált diagramok, amelyek bizonyos geometriai formákat használnak arra, hogy proposíciókat vagy szillogizmusokat ábrázoljanak, megtalálhatók néhány tizenhatodik századi logikus munkájában [1]... Azonban a német Gottfried Wilhelm Leibniz volt az, aki először szentelt komoly tanulmányokat arra, hogy analizáljon logikai proposíciókat diagramok segítségével.

¹Ezt a cikket egyetemi tanárainknak Rényi Alfrédnek, Rényi Katónak és Surányi Jánosnak ajánlom.

²Az idézetek nem szó szerinti fordítások, a fordítás tőlem származik.

Baron szerint:

Leibniz nemcsak olyan diagramokat használt amelyek egy, két, három kört vagy ellipszist tartalmaztak – aszerint, hogy melyikeket találta jobbnak –, hanem olyanokat is, amelyek három végtelen egyenessel ábrázoltak szitamódzsereket.

Baron a továbbiakban azt állítja:

Azonban a svájci Leonhard Euler [25] volt az, akinek munkássága végül is közismertté tette a köröket tartalmazó diagramokat és rajta keresztül ezek a diagramok nagy hatással voltak a tizenkilencedik században... Matematikusok munkáiban, (mint például a francia Joseph Diaz Gergonne [29] és Johann Heinrich Lambert [49]), diagramok lényeges kiinduló pontok voltak szillogizmusok vizsgálatában... Angliában a diagramos reprezentációkat nagyon fontosnak tartották és számos könyv külön fejezetet szentelt nekik, mint például az ír Sir William Rowan Hamilton of Edinburgh könyve [44]... Euler nem próbálta meg a halmazosztályokat algebrailag jellemezni.

Baron végül kijelenti:

John Venn (1834–1923) [64, 65] volt azonban az, aki a legrészletesebb figyelmet szentelte a diagramok kérdésének és az ő érdeme, hogy minden lehetséges lépést megtett, hogy összefoglalja kortársai hozzájárulását a témához, annak ellenére, hogy csak kevesekről volt egy jó szava. A diagramok kérdésének tisztázása – amely Venn érdeme – természetesen összefüggött a szimbolikus logika fejlődésével és a halmazosztályok algebrajában alapult, amelyet néhány évvel korábban az angol George Boole [8] dolgozott ki.

Venn a köröket tartalmazó diagramokat Euler híres köreinek nevezi [64]. Számos matematikus kollégám, aki érdeklődik a téma iránt úgy véli, hogy a történelem igazságtalanul nevezi ezeket a diagramokat Venn-diagramoknak. Azt hiszem ezek a vélemények túlzóak, hiszen Venn volt az, aki pontos geometriai meghatározását adta az úgynevezett Venn-diagramoknak, habár néha hibásan eltért saját definíciójától. Továbbá Venn volt az, aki először mutatta meg, hogy létezik Venn-diagram tetszőleges sok görbével, és számos hibás állítása ellenére ő volt az első, aki Venn-diagramok geometriai tulajdonságát kezdte vizsgálni.

A legtöbb ember hallott Venn-diagramokról, tanult róluk középiskolában, látott egy, két és három kört, amely illusztrálja az ötletet egyszerű esetekben. Számos egyetemi analízis, algebra, halmazelmélet, kombinatorika és logika könyv bevezető fejezetben ismerteti a halmazok algebraját és ezeket Venn-diagramokkal illusztrálja. Jól ismert tény az is, hogy a híres három-körös diagram gyakran használt egyszerű szitamódzserek geometriai ábrázolására, alkalmazásuk kiterjed a leszámolási módszerektől a biztosítási szakmáig [6], a biológia tudományától [21] az angol dráma elemzéséig. Azonban azt hiszem nagyon kevesen tudják azt, hogy Venn-diagramoknak komoly alkalmazásuk van komputerizált ipari tervezésben, kompu-

terizált sík- és térbeli testgeometriai modellezésben és automatizált ipari gyártási eljárásokban is [47], [59].

A komplikáltabb sík- és gömbi Venn-diagramok geometriai és topológiai tulajdonságainak tanulmányozása – ezek alkalmazása az algebrában [59], a gráfelméletben [12, 13, 14, 42, 43], [68], a geometriában [35], [36, 37, 38, 39], a halmazelméletben, [3], [66], a mértékelméletben [52], a logikában [2], [10], [53], a kombinatorikában [37], [40, 41], [57], [58], a topológiában [19] és a matematika számos más területén – ebben a században vált fontossá és meglehetősen imponáló publikációs listát eredményezett. Ezek a vizsgálatok elváltak a szillogizmusok illusztrálásának tanulmányozásától és a matematika egy önálló területét alakították ki. Azt hiszem, hogy világszerte, de Magyarországon is csak nagyon kevesen tudják azt, hogy hasonlóan a kombinatorika néhány más területéhez az első lényeges modern eredmény ebben a témában is magyar matematikusok nevéhez fűződik. E. Marczewski cikkének [52] hatására – amelyben a szerző független síkbeli görbeseregeket és ezek többdimenziós analógiáját használta bizonyos mértékelméleti kiterjesztési problémák megoldására – Rényi Alfréd (1921–1970), Rényi Kató (1929–1969) és Surányi János cikke [58] nyitotta meg az új eredmények sorozatát. Azóta számos más matematikus, mint például az amerikai Branko Grünbaum [34, 35, 36, 37, 38, 39] és Peter Winkler [68], a lengyel P. Nowicki [54], az angol R. Rado [57] és a szintén angol genetika professzor Anthony W. F. Edwards [19, 20, 21, 22, 23], a magyar Gyárfás András és Lehel Jenő [40, 41] komoly figyelmet szenteltek ezeknek vagy ezekhez közelálló diagramok kombinatorikus geometriai vizsgálatának. Konvex Venn-diagramok létezését és tulajdonságait, a lehetséges k -oldalú vagy a k -nál nem több oldalú sokszögek számát egy n darab görbét tartalmazó Venn-diagramban, továbbá különböző típusú Venn-diagramok számát és létezését vizsgálták. Ismeretes, hogy komputergeometriában és térbeli testek modellezésében csak konvex diagramokra léteznek jó algoritmusok, ezért ezek jellemzései napjainkban gyakorlatban alkalmazható eredmények, nem csak érdekes különbségei a geometriának.

Ebben a főleg ismertető jellegű cikkben ezeket az eredményeket összegeztem. Ez az összefoglalás hiányos. Ezért próbáltam az irodalomjegyzéket úgy összeállítani, hogy az érdeklődő olvasó ott megtalálhasson minden olyan jelentős más eredményt is, amit én ismerek. Azt hiszem, az itt közölt irodalomjegyzék meglehetősen teljes. A legtöbb figyelmet azonban azoknak az új módszereknek és eredményeknek az ismertetésére szentelem, amiket magam dolgoztam ki két kollégámmal, az indiai Kiran B. Chilakamarri és az amerikai Raymond E. Pippert matematikusokkal [12, 13, 14, 15], [42, 43]. Ezek az új módszerek döntő változást eredményeztek a speciális, sík- és gömbi, egyszerű, zárt, Jordan-görbeseregek vizsgálatában és lehetővé tették számunkra azt, hogy számos olyan sejtést és problémát oldjunk meg, amelyek megoldatlanok voltak hosszú ideig, néhányuk több mint száz évig. Többek között módszereink segítségével sikerült egy Venn-től származó – de számos más neves matematikus által is sokszor megismételt – téves állítást véglegesen helyesbítünk (lásd 3., 6., 31., 40, 45. ábrát, és 11.2., 12.2. Tételt). (Ezt a hibás állítást nemcsak számos cikk, sok híres egyetemi tankönyv, hanem néhány enciklopédia is közölte.)

Megválasztottuk még Branko Grünbaum és Peter Winkler egy olyan közös sejtését is, amely visszanyúlik Venn eredeti cikkéhez, amelyet 116 évvel ezelőtt írt (lásd 9.1. Tételt). A legtöbb itt ismertetett eredmény és ezek bizonyítása más külföldi folyóiratban is megjelent. Néhány saját eredményt azonban itt publikálok először. Számos itt közölt eredményünk és eredményem egy folyamatban lévő kutatási téma eredményei vagy részeredményei, ezek kutatását tovább folytatom. Mivel ennek a területnek a kutatása – mint a geometria és a kombinatorika más számos ága sem – nem igényel nagy előtanulmányokat, csak főleg jó ötleteket, ismertetek számos megoldatlan sejtést és problémát is. Úgy gondolom néhány ezek közül felkeltheti az érdeklődését nemcsak a szakembereknek, hanem olyan középiskolai tanároknak, középiskolai és egyetemi diákoknak is, akik szeretnék kipróbálni bizonyító erejüket a szokásos tananyagon túl is.

2. Geometriai definíciók

Egyszerű, zárt Jordan-görbe a síkban a körvonal többszörös pont nélküli folytonos képe. Camille Jordan francia matematikus (1883–1921) híres tétele – ami magától értetődőnek tűnik, de meglehetősen komplikált bizonyítani – azt állítja, hogy minden egyszerű, zárt Jordan-görbe két részre bontja a síkot, az egyik egy korlátos rész, amit a *görbe belsejének*, a másik pedig egy a végtelenbe nyúló rész, amit a *külsejének*, a görbét pedig ezek közös határának nevezzük.

Zárt (nyílt) ív alatt a síkban a $[0, 1]$ zárt ($(0, 1)$ nyílt) intervallum, önmagát nem metsző, folytonos képét értjük.

A különböző síkbeli Jordan-görbeseregek definícióit és ezek különböző osztályainak meghatározásait Grünbaum [38] cikkéből idézzük.

2.1. Definíció. Az $\mathcal{F} = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ n darab halmazt tartalmazó halmazrendszert *független halmazrendszernek* nevezzük, ha az összes lehetséges (2^n darab) különböző $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$ halmaz nem üres, ahol az X_i halmaz vagy az S_i vagy az S_i halmaz komplementer halmaza ($i = 1, 2, \dots, n$). Az $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$ halmazokat a rendszer *atomjainak* nevezzük. Ha a C_i halmazok egyszerű, zárt Jordan-görbék a síkban, az X_i halmazok pedig ezek belsejét vagy külsejét jelölik, az $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ halmazrendszert *görbék független halmazának* nevezzük. Ebben az esetben az atomokat *síkbeli lapoknak* vagy *lapoknak* hívjuk. Egy lapot *k-lapnak* hívunk, ha a lap határát pontosan k darab különböző görbeponti ív határolja.

2.2. Definíció. *Venn-diagram* (vagy *n-Venn-diagram*) a síkban n darab görbének a független halmaza, amelynek minden lapja nyílt, összefüggő tartománya a síknak.

Jegyezzük meg, nem nehéz megmutatni, hogy egy Venn-diagram minden lapja nemcsak összefüggő, hanem egyszeresen összefüggő³ tartomány is, kivéve azt a lapot, amelyet akkor kapunk, ha X_i -t minden i -re a C_i Jordan-görbe külsejének választjuk. Az is igaz azonban, hogy ez a lap – amit a Venn-diagram *külsejének* (*külső* vagy *végtelen lapjának*) hívunk – pedig a komplementere egy egyszeresen összefüggő tartománynak. A többi lapot *véges lapnak* nevezzük.

Nagyon fontos észrevétel az, hogy az összes 2^n darab különböző atomot (lapot) egyértelműen azonosítani tudjuk egy n elemű rendezett 0-ás és 1-es sorozattal, ahol 0-át vagy 1-et írunk aszerint, hogy X_i a halmazt vagy a komplementerét (a görbe külsejét vagy belsejét) jelenti. Ezt a rendezett n -est az atom (a lap) *kódjának* hívjuk.

További megkötéseket téve Venn-diagramok speciális osztályait nyerhetjük.

2.3. Definíció. Egy Venn-diagramot *közönséges* Venn-diagramnak nevezünk, ha minden pontban maximum két görbe metszi egymást, ahol metszés alatt „valódi” metszést, nem érintést értünk. Ezeket a metszéseket *átlós metszéseknek* nevezzük. Olyan Venn-diagramot, amelyben több mint két görbe metszheti egymást egy pontban, vagy pedig két görbe érintheti egymást, *nem közönséges* Venn-diagramnak nevezünk. A nem közönséges diagramok közül csak olyanokat engedünk meg, ahol két görbe érintheti egymást véges sok izolált pontban, de nem ívben vagy ívekben. Feltéve ezeket a megkötéseket egyszerű belátni, hogy ha egy Venn-diagram két lapjának van egy közös ívhatára, akkor a két lap kódja pontosan egy koordinátában különbözik. Ugyancsak igaz, hogy ha két lap kódja több mint egy koordinátában különbözik, akkor a két lapnak nincs közös ívhatára.

2.4. Definíció. Egy síkbeli Venn-diagram sztereografikus⁴ vetítése a gömb felszínére *gömbi Venn-diagramot* ad. Két síkbeli Venn-diagramot – amelynek létezik sztereografikus vetítése ugyanabba a gömbi Venn-diagramba-, *azonos osztályhoz tartozó* (vagy *közös osztályhoz tartozó*) Venn-diagramnak nevezünk.

Sok esetben hasznos és egyszerűbb lesz ha azonos osztályhoz tartozó síkbeli Venn-diagramokról úgy gondolkozunk mint egy gömbi Venn-diagramról, ekkor úgy képzeljük, hogy az osztályt reprezentáló Venn-diagram a gömbre van rajzolva. Ennek többek között az az előnye, hogy minden lap, a végtelen lap is, korlátos, egyszeresen összefüggő tartomány a gömbfelszínen.

³ *Egyszeresen összefüggő tartomány* a síkban olyan tartomány, ahol bármely egyszerű, zárt Jordan-görbe folytonosan összehúzható egy ponttá a tartományon belül.

⁴ *Sztereografikus vetítés* alatt a gömbfelszín egy olyan kölcsönösen egyértelmű leképezését értjük a síkra, ahol a következők teljesülnek. A gömböt a „déli-sark” pontjánál a síkra helyezzük. A déli-sarknak a képe a síkon az érintési pont lesz. Az „északi-sark” pontjának a sík „végtelen” pontját feleltetjük meg. A gömbfelszín többi pontjának a képét úgy nyerjük a síkon, hogy a gömb északi-sarkpontját a gömbfelszíni ponttal összekötő félegyenes és a sík metszéspontját választjuk a képpontnak.

2.5. Definíció. Két síkbeli Venn-diagramot *izomorf*nak nevezünk, ha egyiket a másikba vagy annak tükörképébe tudjuk transzformálni a sík folytonos transzformációinak sorozatával.

Jegyezzük meg, hogy ez a definíció különbözik a szokásos gráfelméleti izomorfizmustól.

2.6. Definíció. Egy Venn-diagramot a síkon *konvexnek* nevezünk, ha a Venn-diagram izomorf egy olyan Venn-diagrammal, aminek minden görbéje konvex görbe. *Erősen konvexnek* nevezzük azokat a konvex Venn-diagramokat, amelyeknek minden véges lapja konvex tartománya a síknak, míg a végtelen lap komplementere egy síkbeli konvex tartománynak.

(Grünbaum nem használja következetesen a „konvex Venn-diagram” elnevezést cikkeiben [34] [38], ezért eltértem az általa használt meghatározástól.)

2.7. Definíció. *Feszített n -Venn-diagram*nak nevezünk minden olyan n -Venn-diagramot, amelynek a külső lapja egy n -lap.

Később megmutatjuk (6.1. Lemma), hogy egy Venn-diagramban minden görbének legfeljebb csak egy íve lehet határa egy rögzített lapnak. Ez azt jelenti, hogy minden feszített n -Venn-diagram külső lapját pontosan n darab különböző görbéhez tartozó ív határolja.

2.8. Definíció. Egy n -Venn-diagramot *csökkenthetőnek* hívunk, ha létezik legalább egy olyan görbe, amit elhagyva, a megmaradó $n - 1$ görbe egy $(n - 1)$ -Venn-diagramot ad. Különbözik a diagramot *minimálisnak* nevezzük. Egy n -Venn-diagramot *kiterjeszhetőnek* hívunk, ha létezik a síkban egy olyan egyszerű, zárt görbe, amelyet a diagramhoz adva egy $(n + 1)$ -Venn-diagramot nyerünk. Az így kapott diagramot a diagram *kiterjesztésének* hívjuk.

Jegyezzük meg, hogy egy n -Venn-diagramnak létezhet több nem izomorf kiterjesztése a síkban.

3. Gráfelméleti definíciók és tételek

Gráfelméleti fogalmakat és tételeket szabadon használunk tárgyalásaink során, ezeket ismertnek tekintjük. Itt csak néhány olyan meghatározást és tételt sorolunk fel, amelyeket gyakran használunk vagy amelyek eltérnek a szokásos használatától. A gráfelméletben járatlan olvasó figyelmébe ajánljuk a következő magyar nyelvű tanácskönyveket: [69], [70].

3.1. Definíció. Azokat a gráfokat, amelyek síkba rajzolhatók úgy, hogy az élei egyszerű ívek, a szögpontjai az ívek végpontjai és bármely két él csak szögpontban metszi egymást, *síkba rajzolható gráfoknak* hívjuk. Egy ilyen rajtot *síkgráfnak* nevezünk.

Egy G síkgráf úgy tekinthető, mint a kétdimenziós euklideszi tér egy részhalmaza. A G gráf komplementerhalmaza a síkban a G gráf úgynevezett *lapjainak* az egyesítése. Ha a G gráf egy véges gráf, akkor van a G gráfnak a síkban egy olyan rajzolása, amelyben minden lapja egy kivételével véges és egyszeresen összefüggő tartomány. Hasonlóan a geometriai definícióhoz egy lapot *n-lapnak* nevezünk, ha a lapot pontosan n különböző él határolja.

3.2. Definíció. Egy G gráfot *páros gráfnak* hívunk, ha a szögpontjait be lehet úgy osztani két halmazba, hogy egyik halmazban sincsenek éllel összekötött szögpontok.

Jól ismert tény, hogy egy G síkgráf *maximális páros gráf* akkor és csak akkor, ha minden lapja 4-lap [55, 45. oldal].

3.3. Definíció. A G gráf egy körét, amely egy lapot határol *körlapnak* nevezzük. Egy kört *átlómentesnek* hívunk a gráfban, ha bármely két nem szomszédos szögpontját él nem köti össze. Egy kör *szétvágó* kör a gráfban, ha a kör szögpontjainak és éleinek elhagyása szétvágja a gráfot diszjunkt, nem üres komponensekre.

3.4. Definíció. Egy egyszerű gráf (hurok és többszörös él mentes gráf) *maximális síkgráf*, ha minden új él hozzáadása a gráfhoz egy nem síkba rajzolható gráfot eredményez. *Egyszerű háromszögelés* alatt egy olyan összefüggő, síkba rajzolható gráfot értünk, amelynek minden körlapja 3-lap. Ezeket *háromszögelésnek* is hívjuk.

Jól ismert tény, hogy egy síkgráf akkor és csak akkor maximális, ha a gráf egy háromszögelés [55, 6. oldal].

3.5. Definíció. Egy G gráfot *k-összefüggőnek* hívunk, ha k vagy k -nál kevesebb szögpont (vagy él) elhagyásával a gráf nem vágható kettő vagy több nem üres komponensre vagy nem redukálható egyetlen szögponttá. A legnagyobb k számot, amelyre a gráf k -összefüggő, a gráf *összefüggőségi számának* hívjuk.

Euler híres gráfelméleti tétele a következőket állítja [55, 48. oldal].

3.6. Tétel. Ha egy sík- vagy egy gömbfelszíni gráf csúcsainak számát c , éleinek számát e és lapjainak számát l jelöli, akkor

$$l + c - e = 2.$$

Jegyezzük meg, hogy ezen tételnek létezik geometriai megfogalmazása [71], továbbá a tétel általánosítható más felületekre is.

3.7. Tétel ([55, 6. és 45. oldal]). Egy maximális G síkgráf 2-összefüggő. A G gráf 3-összefüggő is, ha nincs többszörös éle. Egy G maximális páros gráf 2-összefüggő, ha nem tartalmaz többszörös élt. Jelölje S_1 és S_2 a G páros gráf szögpontjainak azt a két részhalmazát, amely a 3.2. Definíciónak felel meg. A G gráf ugyancsak 3-összefüggő, ha a gráf bármely két x és y szögpontja nem tartozik egyszerre az

S_1 vagy az S_2 halmazba, feltéve, hogy a két szögpont a G gráf két olyan lapjának a közös határán fekszik, amely közös határ az x és y szögpontokon kívül nem tartalmaz egyetlen másik szögpontot sem. (Lásd a 12. ábrát.)

3.8. Definíció. Egy kört Hamilton-körnek hívunk a gráfban, ha a kör tartalmazza a gráf minden szögpontját.

3.9. Tétel ([67]). *Minden szétvágó 3-kör mentes, maximális G síkgráfban van Hamilton-kör.*

3.10. Tétel ([32, 49. oldal]). *Egy 3-összefüggő, síkba rajzolható gráfot (izomorfizmustól eltekintve) egyetlenegy módon lehet a síkba rajzolni, ha rögzítjük a külső lapot.*

Ugyancsak használjuk Tutte következő két fontos tételét:

3.11. Tétel ([61]). *Ha a G gráf 3-összefüggő, síkba rajzolható gráf, akkor a gráf minden síkbeli rajzában a körlapok azok a lapok, amelyek átlómentesek és nem szétvágóak.*

3.12. Tétel ([62]). *Minden 4-összefüggő síkgráfban van Hamilton-kör.*

4. Korai eredmények síkbeli Venn-diagramokról

Már Venn számára is ismertek voltak a következő tények [64]. Egyetlen Venn-diagram létezik a síkban egy vagy két görbével. Ezeket egybevágó körökkel lehet ábrázolni. Egyetlen közöséges 3-Venn-diagram létezik a síkban, ez szintén megrajzolható három egybevágó körrel. Tudta, hogy nem létezik n -Venn-diagram körökkel, ha n legalább négy. Ismert volt számára az is, hogy létezik 4-Venn-diagram, amit négy egybevágó ellipszissel lehet megszerkeszteni. Továbbá tévesen azt állította, hogy nem létezik 5-Venn-diagram ellipszisekkel. Ezt a téves állítást majdnem egy évszázadon keresztül senki sem ellenőrizte, sok neves matematikus, híres egyetemi tankönyv és enciklopédia kritikátlanul elfogadta és közölte. Erre a későbbiekben (3., 6., 31., 40, 45. ábra, 11.2., 12. 2. Tétel) visszatérünk. Most megmutatjuk, hogy a síkban nem létezhet 4-Venn-diagram körökkel, illetve 6-Venn-diagram ellipszisekkel. Számos bizonyítás ismert, itt Grünbaum cikkéből [38] idézem azt, amelyik a kedvencem. Csak a körökre bizonyítjuk az állítást, az ellipszisekre a bizonyítás teljesen hasonlóan végezhető el. Tekintsük a Venn-diagramot mint egy síkbeli gráfot, ahol a szögpontok a görbék metszéspontjai, az élek pedig az őket összekötő ívek. Tegyük fel egy pillanatra, hogy a 4-Venn-diagram közöséges. Mivel maximum két görbe metszheti egymást minden pontban, az élek száma pontosan a kétszerese lesz a szögpontok számának. Ekkor Euler tételét a következőképpen írhatjuk:

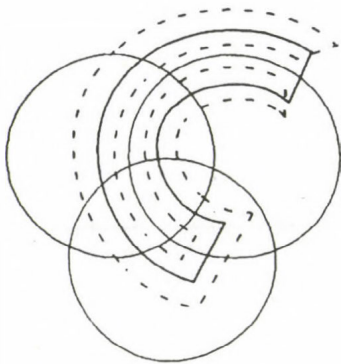
$$l - c = 2.$$

Egy 4-Venn-diagramban a lapok száma $2^4 = 16$. Mivel két kör maximum két pontban metszheti egymást, ezért négy körnek legfeljebb 12 metszéspontja lehet a szükséges 14 helyett. Ez ellentmond a feltevésnek. Még megjegyezzük, hogy ha a 4-Venn-diagram nem közönséges, akkor a lapok és szögpontok aránya rosszabbá válik. (Ellipszisek esetére csak azt kell tudnunk, hogy két ellipszis maximum négy pontban metszheti egymást.)

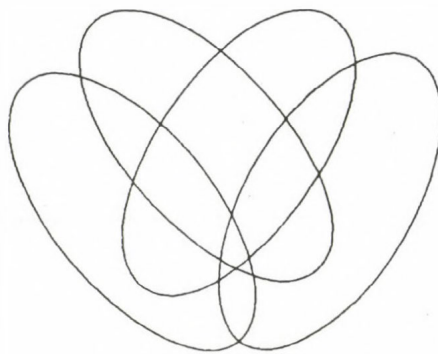
Grünbaum a következőket írja [36]: „*J. Venn 1880-ban definiálta a Venn-diagramokat (lásd [64]) és népszerűsítette azokat könyvében [65]. Venn igenis vizsgálta Venn-diagramok létezésének kérdését tetszőleges n görbére, és cikkében [64] egy induktív konstrukciót adott ilyen diagramokra. Azonban, sokak által jobban ismert könyvében [65], Venn nem említette a konstrukciót tetszőleges sok görbét tartalmazó diagramokra, ezt hibásan gyakran úgy vélték, hogy Venn nem tudott ilyen diagramokat találni és az elmúlt században sok cikket közöltek, amelyekben Venn-diagramok létezését bizonyították tetszőleges n görbével.*” Irodalomjegyzékünkben a következő cikkek ilyenek: [2], [3], [6], [10], [19], [27], [46], [53], [54], és [66]. Az igazság kedvéért hozzá kell tenni, hogy néhány szerző egyetemista korában publikálta cikkét, néhány másik cikk más érdekes eredményt és problémát is közöl, továbbá azt is, hogy néhány cikk nemcsak akármilyen Venn-diagramot, hanem „esztétikailag szép” diagramokat akart találni tetszőleges sok görbével. (Számomra érthetetlen az a tény, hogy néhány cikk meglehetősen jó hírű folyóiratban jelent meg.)

Venn induktív konstrukciója a következő. Kiindult a három-körös diagramból. Ezt kiterjesztette egy görbe hozzáadásával egy 4-Venn-diagrammá a következőképpen (lásd 1. ábra): Az általa patkónak nevezett új görbét úgy rajzolta meg, hogy az egyik kiválasztott körívet kívülről követve addig rajzolta, amíg bejárta a körívvel határos lapokat, mielőtt visszatért abba a külső lapba amiből kiindult, a kört átlósan keresztülmetszette, majd a körívet belülről ellenkező irányba követve addig haladt, amíg bejárta a körívvel határos összes belső lapot, majd mielőtt visszatért a kiinduló belső lapba újra átlósan keresztülmetszette a kört és összekötötte a görbe két végét. Mivel a kiválasztott körív határolja a 3-Venn-diagram összes lapját, ezért a patkó görbe minden lapot két részre (belső és külső) bont. Könnyű látni, hogy az így konstruált diagram 4-Venn-diagram. Ezt az eljárást megismételte a 4-Venn-diagramra, a patkó görbét használva a kiválasztott kör helyett, így konstruált egy 5-Venn-diagramot. Ha egy n -Venn-diagram csökkenthető, egy olyan görbét követve – a Venn által adott eljárásban –, aminek az elhagyásával egy $(n - 1)$ -Venn-diagramot kapunk, az új görbe minden lapot két részre (belső, külső) vág, ezért az itt leírt konstrukció egy $(n + 1)$ -Venn-diagram kiterjesztését adja az n -Venn-diagramnak.

Jegyezzük meg, hogy ez a konstrukció csak akkor vihető keresztül ha a Venn-diagram csökkenthető. A fentiekben felsorolt összes cikk többé-kevésbé ezt az induktív eljárást vagy ehhez nagyon hasonló eljárást használt tetszőleges sok számú görbével rendelkező Venn-diagram szerkesztésére. Sokáig ez volt az egyetlen szerkesztési mód, ugyanis azt hitték, hogy minden n -Venn-diagramot le lehet „bontani” megfelelő görbe elhagyásával egy $(n - 1)$ -Venn-diagramra, majd újra elhagyva egy



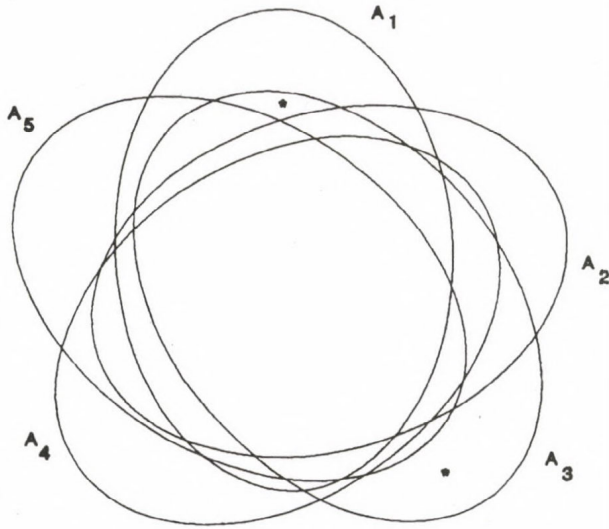
1. ábra



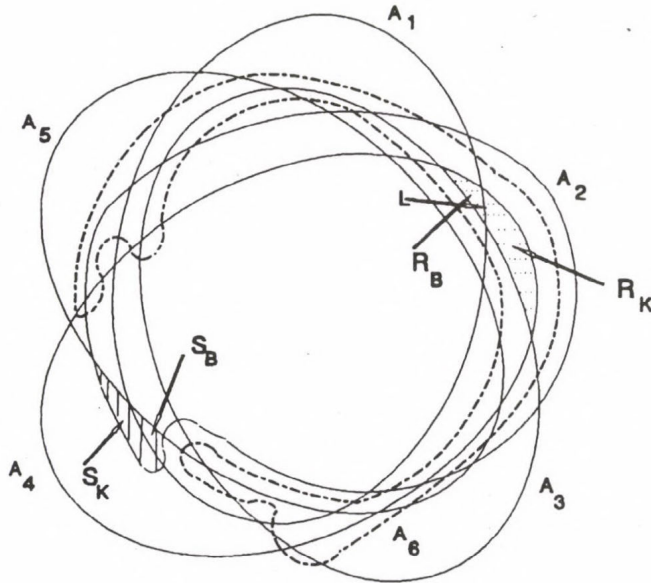
2. ábra

megfelelő görbét, egy $(n - 2)$ -Venn-diagramra, folytatva ezt, végül is el lehet jutni egy 3-Venn-diagramhoz, 2-Venn-diagramhoz végül egyetlen görbéhez. Az 1. ábra egy 5-Venn-diagram konstrukcióját mutatja. A 2. ábra szemlélteti a Venn cikkében közölt négy egybevágó ellipszissel rajzolt Venn-diagramot. P. Nowicki [54] lengyel matematikus 1975-ben kérdezte azt, hogy létezik-e más eljárás is, azaz léteznek-e nem csökkenthető Venn-diagramok minden n -re. Ezt a kérdést közönséges Venn-diagramokra B. Grünbaum [36] válaszolta meg 1984-ben. Megmutatta, hogy minden $5 \leq n$ -re léteznek minimális, közönséges n -Venn-diagramok. Későbbi eredményeiből kiderült, hogy $n < 5$ -re azonban ilyen diagram nem létezhet. Továbbá látni fogjuk, hogy léteznek minimális, nem közönséges 3- és 4-Venn-diagramok is (41. ábra). A történethez tartozik még, hogy B. Grünbaum [34] 1975-ben közölt egy Venn-diagramot, amelyről nem vették észre, hogy minimális. Ezt mutatja a 3. ábra. Jegyezzük meg, hogy ez az 5-Venn-diagram öt egybevágó ellipszissel rajzolt. Ez ellentmond Venn eredeti állításának. Későbbiekben (6., 31., 40., 45. ábra, 11.2., 12.2. Tétel,) erre újra visszatérünk. Ez a diagram szimmetrikus, az öt ellipszis elforgatással egymásba transzformálható. Ahhoz, hogy minimális, elég belátni a szimmetria miatt azt, hogy a csillaggal jelölt két tartomány egy nem összefüggő atomja a független halmazrendszernek, amelyet úgy nyertünk, hogy elhagyjuk a Venn-diagramból az A_1 ellipszist.

A következőkben Grünbaum induktív bizonyítását mutatom meg. Először kissé megváltoztatva az A_2 ellipszist a 3. ábrán, majd a diagramot kiterjesztve egy görbe hozzáadásával szerkesztünk egy minimális 6-Venn-diagramot. A 4. ábra ezt ábrázolja. Ha ebből a diagramból elhagyunk egy A_j görbét, $j = 1, \dots, 5$, akkor a megmaradó független halmazrendszer nem lesz Venn-diagram. Ez könnyen látszik a 3. ábrából. Ha az A_6 görbét hagyjuk el, akkor az A_1 -es, A_2 -es, A_4 -es görbe belseje az A_3 -as és A_5 -ös görbék külsejével metszve egy nem összefüggő tartományra bomlik, amelyet az ábrán R_B és S_B jelöl. Hasonlóan az R_K és az S_K síkrész, egy atom két nem összefüggő tartománya lesz. Az A_1, A_6 görbe, az R_B, R_K, S_B és S_K tartományok különleges szerepet játszanak az általános esetben.



3. ábra



4. ábra

Ha egy Venn-diagramban létezik két görbe B, C és négy lap R_B, R_K, S_B, S_K úgy, hogy ezek kielégítik a következő öt követelményt, akkor azt mondjuk, hogy

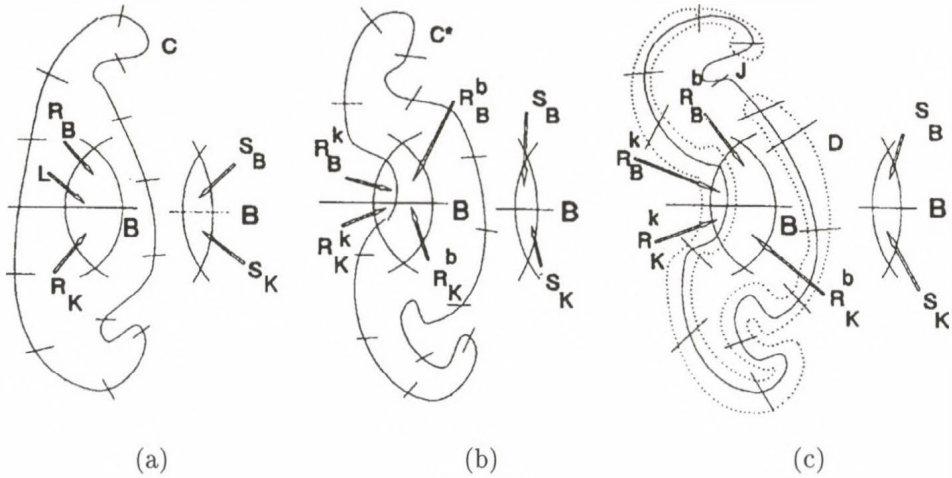
a Venn-diagram teljesíti Grünbaum minimális Venn-diagram induktív módszerének feltételét:

- (1) Az R_B, S_B lapok a B görbe belsejében, míg az R_K, S_K lapok a görbe külsejében vannak.
- (2) Az R_B, R_K valamint az S_B, S_K lapoknak van közös határa és ezek ívei a B görbének.
- (3) Az R_B és R_K lapokat a Venn-diagramban csak a B görbe választja el, azaz a két lap csak akkor van egy B -től különböző görbe belsejében vagy külsejében, ha a másik is itt van. Hasonlóan az S_B és S_K lapokat is csak a B görbe választja el.
- (4) A Venn-diagram minden lapjának határa, kivéve az R_B, R_K, S_B és S_K lapokét, tartalmazza a C görbének egy ívét. Az R_B, R_K lapok a C görbe belsejében, az S_B és S_K lapok pedig a C görbe külsejében vannak.
- (5) A B görbe L -lél jelölt ívének meghosszabbítása az egyik irányban – amely szétválasztja R_B és R_K lapokat – legelőször a C görbét metszi mielőtt bármilyen más görbét metszene.

(A 4. ábrán B és C görbe szerepét az A_1 és A_6 görbék játsszák.

A bizonyítás indukcióval történik. Tegyük fel, hogy egy \mathcal{F} n -Venn-diagram kielégíti Grünbaum minimális Venn-diagram induktív módszerét. Az általános esetben ezt az 5. ábra (a) része illusztrálja. Először megváltoztatjuk a C görbét úgy, hogy az új C^* görbe messe az R_B és R_K lapot. Ezt a lépést az 5. ábra (b) része mutatja. A C^* görbe az R_B lapot két részre, az R_B^b és az R_B^k , az R_K lapot pedig ugyancsak két részre, az R_K^b és az R_K^k lapra bontja, ahol b és k jelöli a C^* görbe belsejét illetve külsejét. Az így kapott \mathcal{F}^* diagram – amelyben a C görbét kicseréljük a C^* görbével – nem lesz Venn-diagram, mivel az $R_K^b \cup S_K$ atom nem összefüggő. Az így nyert \mathcal{F}^* független görbesereghez adva egy új D görbét, egy minimális \mathcal{F}' ($n+1$)-Venn-diagramot nyerünk. Az 5. ábra (c) része mutatja ezt a lépést. A D görbét a következőképpen nyerjük:

- (i) A C^* görbének azon az ívén, amely megegyezik a C görbe ívével – a D görbe belülről, illetve kívülről – megfelelően közel, körülhatárolja a C^* görbét két oldalról úgy, hogy ne tartalmazza teljesen az \mathcal{F}^* független görbesereg egyetlen atomját sem. Az egyetlen kivétel ettől a C^* görbe egy olyan pontjának kis környezetében történik, ahol egy másik, a rajzon J -vel jelölt görbe metszi a C^* görbét. Itt, közel a metszésponthoz, mindkét oldalán a pontnak, a D görbe C^* belsejében és külsejében haladó íveit összekötjük egymással átmetszve átlósan a C^* görbét.
- (ii) A C^* görbe azon íve mentén ahol a görbe különbözik a C görbétől a D görbe követi a C^* görbét belülről megfelelően közel. A C^* külsejében – ahol C^* keresztülmetszi az R_B és R_K lapot – a D görbe nem követi C^* görbét, hanem megfelelően közel, teljesen körülhatárolja az R_B^k és az R_K^k tartományokat.



5. ábra

A fent leírt módon egy egyszerű, zárt Jordan-görbét kapunk, amely nem érint egyetlen görbét sem, valamint nem metsz egyetlen másik görbét már meglévő metszéspontban. A (4)-es feltétel miatt könnyű látni, hogy az így nyert \mathcal{F}' görbesereg egy közöséges $(n + 1)$ -Venn-diagramot ad, hiszen a D görbe két részre metszett minden lapot, kivéve az R_B^k , R_K^k , S_B és S_K lapokat, ezeket pedig különválasztja belsejével illetve külsejével. Azt is könnyű látni, hogy az így nyert \mathcal{F}' $(n + 1)$ -Venn-diagram teljesíti Grünbaum minimális induktív módszerének feltételeit, ahol a B és C görbék szerepét a B és a D görbék veszik át, az R_B és R_K lapok szerepét az R_B^k és az R_K^k lapok kapják, míg az S_B és S_K megmarad a feltételben. Ez biztosítja, hogy az eljárást folytatni tudjuk minden n -re. Végül ahhoz, hogy ellenőrizzük, az \mathcal{F}' diagram minimális, a következőt kell meggondolnunk. Ha elhagyunk egy D -től vagy C^* -től különböző görbét \mathcal{F}' -ből, akkor az \mathcal{F} diagram minimális volta miatt keletkezik egy független görbesereg, ami nem egy Venn-diagram, míg ha a D görbét hagyjuk el, akkor az $R_K^k \cup S_K$ egy nem összefüggő atom. Hasonlóan, a C^* görbe elhagyása a diagramból $R_B^b \cup S_B$ nem összefüggő atomot eredményez. Ezzel befejeztük Grünbaum tételének bizonyítását.

A megfelelő fejezetekben később még ismertetünk korai eredményeket. Most rátérünk Branko Grünbaum és Peter Winkler azon sejtéseinek és kérdéseinek ismertetésére, amelyeket módszereinkkel sikerült részben vagy teljesen megválaszolnunk.

5. Grünbaum és Winkler sejtései és problémái Venn-diagramokról

Grünbaum a következő néhány problémát és sejtést vetette fel [34, 38].

5.1. Sejtés. Minden n -Venn-diagram kiterjeszthető $(n + 1)$ -Venn-diagrammá egy megfelelő görbe hozzáadásával.

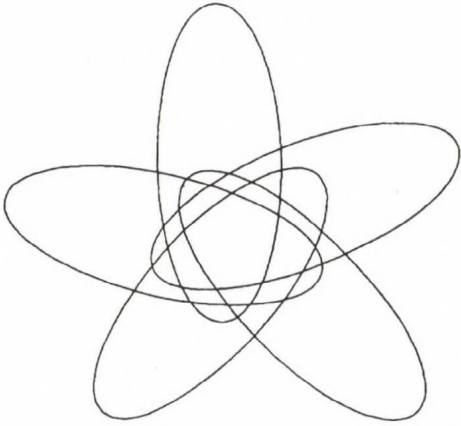
Ez a sejtés Winkler [68] következő sejtésének a módosítása:

5.2. Sejtés. Minden közönséges n -Venn-diagram kiterjeszthető közönséges $(n+1)$ -Venn-diagrammá egy megfelelő görbe hozzáadásával.

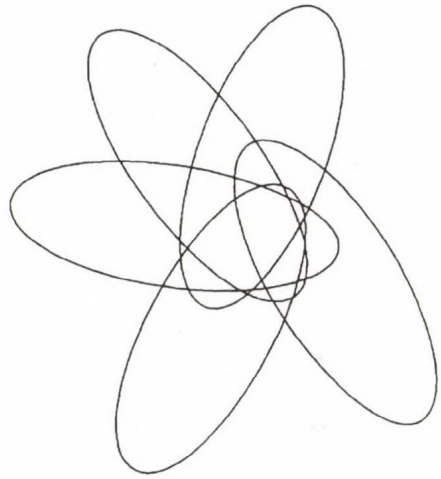
Grünbaum [38] a következőket írja: „Venn [64] példát adott cikkében egy 4-Venn-diagramra négy ellipszissel. Azonban, hibásan azt állította, hogy öt ellipszis nem alkothat 5-Venn-diagramot; valójában csak egy kis türelemre van szükség ahhoz, hogy valaki ellenőrizze, hogy az [ábrán] adott összes rajzon az öt egybevágó ellipszis 5-Venn-diagramot ad. Venn hibás állítását ellenőrzés és kritika nélkül számos szerző⁵ megismételte majdnem egy századon keresztül. Az első Venn-diagramot öt ellipszissel ... csak 1975-ben közölték [34]; egy nem közönséges példát Schwenk [60] talált 1985-ben. Euler tételét és azt a tényt használva, hogy két ellipszis legfeljebb négyszer metszheti egymást, – egy a körök esetére használt okoskodáshoz hasonló érveléssel –, könnyű megmutatni, hogy nem létezik Venn-diagram hat vagy több ellipszissel. Egy lehetséges magyarázat Venn tévedésére lehet az, hogy Venn valószínűleg azt hihette, hogy minden Venn-diagramot egyfajta „mohó” eljárással lehet konstruálni: ahhoz, hogy kapj egy n -Venn-diagramot, csinálj egy $(n-1)$ -Venn-diagramot és aztán adj hozzá egy utolsó görbét. Azonban, könnyű belátni, hogy egyetlen az [ábrán] látható Venn-diagram (sem egyetlen másik közönséges Venn-diagram öt ellipszissel) nem nyerhető úgy, hogy egy négy ellipszist tartalmazó Venn-diagramhoz hozzáadunk egy ötödik ellipszist [a kiemelés tőlem származik]. Valószínűleg hasonló igaz nem közönséges diagramokra.” Grünbaum, aki ezért a cikkéért elnyerte a Lester R. Ford díjat 1975-ben és a Mathematical Association of America, Carl B. Allendoerfer-ről elnevezett díját 1978-ban, a huszadik század egyik legnagyobb hatású geometere. Az ő érdeme, hogy helyesbítette Venn tévedését és először közölt egy közönséges, minimális Venn-diagramot öt egybevágó ellipszissel. Azonban, mint látni fogjuk, Grünbaum igaznak fogadta el Venn tévedését közönséges, csökkenthető diagramok esetére (lásd a 11.2. Tételt és a 30. ábrát). A 6. ábra a Grünbaum által öt egybevágó ellipszissel szerkesztett négy darab különböző 5-Venn-diagramot mutatja. Grünbaum [38] bizonyítás nélkül közli, hogy csak egyetlenegy közönséges, gömbi 4-Venn-diagram létezik, amelynek két különböző beágyazása lehetséges a síkba. Majd így folytatja: „Ellenben nem ismert, hogy hány különböző (közönséges vagy nem közönséges) sík vagy gömbi Venn-diagram létezik három görbével, továbbá az sem, hogy hány különböző típusú közönséges Venn-diagram létezik öt vagy több görbével.”

5.3. Kérdés. Hány különböző (közönséges vagy nem közönséges) Venn-diagram létezik három (vagy több) görbével?

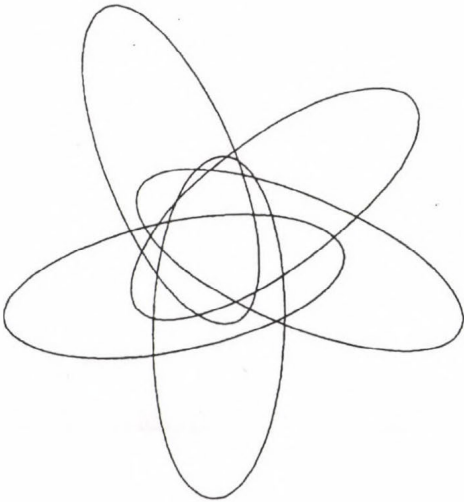
⁵Többek között a P. Edwards által szerkesztett *Encyclopedia of Philosophy*, Macmillan, New York, 1967, M. Gardner által írt “Logic Diagrams” 5. kötet, 77–81. oldal.



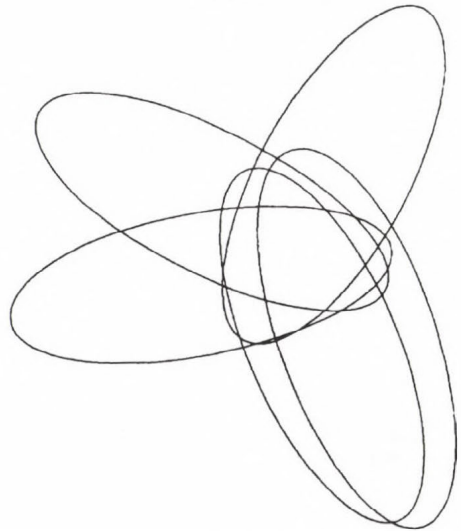
(a)



(c)



(b)



(d)

6. ábra

5.4. Kérdés. *Hány különböző közösleges Venn-diagram létezik öt (vagy több) görbével?*

5.5. Sejtés. *Minden konvex, közösleges 5-Venn-diagram izomorf a 6. ábrán látható egyik Venn-diagrammal.*

5.6. Sejtés. *Minden konvex 5-Venn-diagram izomorf egy öt egybevágó ellipszissel szerkesztett diagrammal.*

5.7. Kérdés. *Igaz-e, hogy minden közösleges Venn-diagram egy osztályba tartozik egy feszített diagrammal, vagy legalább egy konvex diagrammal?*

A megfelelő fejezetekben még ismertetni fogunk néhány más sejtést és kérdést is. Most rátérünk azonban új módszereink ismertetésére.

GRÁF-MODELLEK

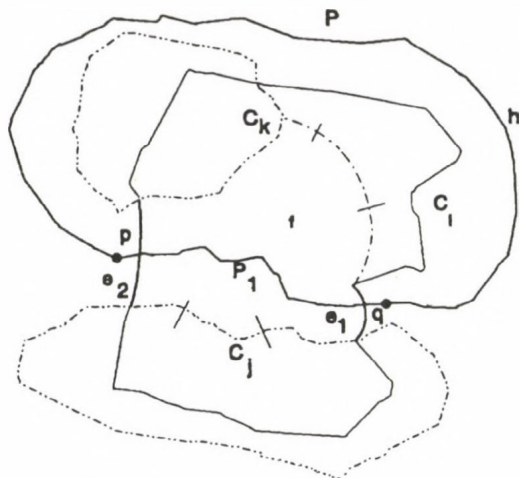
A cikk további részében ismertetett eredmények, ha másképp nem állítjuk, a saját eredményeink, melyeket cikkeinkben [12, 13, 14, 15, 42, 43] közöltünk. Sík- és gömbi görbeseregek tanulmányozására három síkbeli gráfot vezettünk be.

6. Venn-diagram gráf

Egy $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ Venn-diagram maga úgy tekinthető, mint egy síkbeli gráf, ahol a gráf szögpontjai a görbék metszéspontjai és a gráf élei a szögpontok között lévő Jordan-ívek. Ezt a gráfot *Venn-diagram gráfnak*, vagy röviden *Venn-diagramnak* hívjuk és $V(\mathcal{F})$ -fel jelöljük. A továbbiakban az \mathcal{F} és $V(\mathcal{F})$ jelöléseket szabadon felcseréljük akkor, amikor nem fontos, hogy gráfról beszélünk. Jegyezzük meg, hogy a $V(\mathcal{F})$ gráf egy multigráf, egyes szögpont párok között több él is lehetséges, de nem tartalmaz hurkot. Jelölje $m(x, y)$ a $V(\mathcal{F})$ gráf x és y szögpontjai között lévő élek számát. Ezt az (x, y) él $V(\mathcal{F})$ gráfbeli *multiplícitásának* nevezzük. Jegyezzük meg azt is, hogy a $V(\mathcal{F})$ gráf függ attól, hogy hogyan rajzoljuk a Venn-diagramot a síkba. A Venn-diagram gráfnak a következő tulajdonságait bizonyítottuk be. Először egy sokszor használt, fontos topológikus lemmát és ennek sokszor igen hasznos következményét mutatjuk meg.

6.1. Lemma. *Egy Venn-diagram egyetlen lapjának határa sem tartalmazhatja egy rögzített Jordan-görbe két különböző ívét.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram f lapja tartalmaz négy vagy több élt, és legalább kettő, jelöljük ezeket e_1 és e_2 -vel, ugyanahhoz a C_i Jordan-görbéhez tartozik. Először tegyük fel, hogy a két él nem szomszédos. Jelöljön p és q két



7. ábra

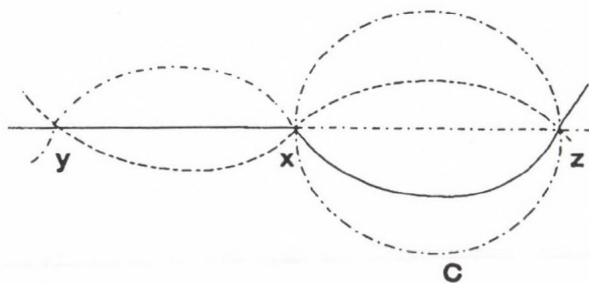
olyan pontot a síkon, melyek az f lapon kívül, de az e_1 és az e_2 ívekhez megfelelően közel vannak. Azoknak a lapoknak a kódja, amely a p illetve a q pontot tartalmazza, megegyezik, hiszen ezek kódja pontosan az i -edik koordinátában különbözik az f lap kódjától. Így a p, q pontokat a $V(\mathcal{F})$ gráf egyetlen h lapja tartalmazza. Mivel a h lap egy összefüggő tartomány a síkon, ezért létezik egy P Jordan-ív, amely összeköti a p és q pontokat, nem metszi a $V(\mathcal{F})$ gráf egyetlen élet sem és teljesen a h lapban fekszik. Továbbá létezik egy olyan P_1 Jordan-ív is, amely a p és q pontokat úgy köti össze, hogy a P ívet p -tól és q -tól különböző pontban nem metszi, az f és h lap határát pontosan két pontban, az e_1 és e_2 élek belsejében metszi, keresztülszeli az f lapot és teljes egészében az f és h lapok egyesítésében halad. (A két ív létezését Jordan tétele és annak következményei biztosítják.) Az így nyert $P \cup P_1$ görbe egy Jordan-görbe, amely az \mathcal{F} diagram C_i görbét metszi, de nem metsz egyetlen más görbét sem. (A 7. ábra ezt ábrázolja.) Mivel az e_1 és e_2 élek nem szomszédosak, elválasztja őket két görbe. Így léteznek C_i -től különböző görbék C_j és C_k \mathcal{F} -ben úgy, hogy az egyik görbe teljesen $P \cup P_1$ belsejében, a másik pedig a külsejében van. Tehát a C_j, C_k görbék nem metszhetik egymást, ez ellentmond annak a feltételnek, hogy \mathcal{F} egy Venn-diagram. Tegyük most fel, hogy az e_1 és e_2 élek szomszédosak a $V(\mathcal{F})$ gráfban és a közös szögpontjuk az x pont. Válasszuk meg a p és q pontot mint az előbb, de az x ponthoz megfelelően közel. Válasszuk meg a P és P_1 görbét mint az előbb, valamint úgy, hogy a $P \cup P_1$ Jordan-görbe belsejében tartalmazza az x szögpontot. (Ez a Jordan tétel és következményei miatt lehetséges.) A $P \cup P_1$ Jordan-görbe speciális megválasztása miatt nem metsz egyetlen, a C_i görbétől különböző \mathcal{F} -beli görbét sem. Mivel az e_1 és e_2 élek különbözőek, könnyű látni, hogy létezik legalább egy C görbe az \mathcal{F} diagramban, amely áthalad az x ponton, valamint teljesen a $P \cup P_1$ görbe belsejében van. Így C csak érinti a C_i görbét az x pontban, de nem metszi azt. Ez ellentmond

annak, hogy \mathcal{F} egy Venn-diagram. Mivel az utolsó gondolatban nem használtuk, hogy az f lapnak legalább négy éle van, ezért a bizonyítás teljes, hiszen egy lap két vagy három éle mindig szomszédos. ■

6.1. Lemmából rögtön látszik a következő:

6.2. Következmény. Legyen $V(\mathcal{F})$ egy Venn-diagram és x egy szögpontja. Ha $e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_k}, e_{j_1}$ az x szögpontban találkozó $V(\mathcal{F})$ -beli élek egy felsorolása, (amit úgy kapunk, hogy órajárással ellentétes irányban, a síkon körüljárjuk az x pontot egy megfelelően kis sugarú körön és minden találkozáskor a következő élt a sorba rakjuk), akkor ebben a felsorolásban bármely két egymásutáni él különböző \mathcal{F} -beli görbéhez tartozik.

6.3. Lemma. Tegyük fel, hogy $V(\mathcal{F})$ egy Venn-diagram, $|\mathcal{F}| \geq 3$, és x ennek egy olyan szögpontja, amely pontosan két másik szögponttal, y -nal és z -vel van összekötve a gráfban. Ekkor az (x, y) és az (x, z) élek multiplicitása a gráfban megegyezik. ($|A|$ az A halmazba tartozó elemek számát jelöli.)



8. ábra

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $m(x, z) > m(x, y)$. Ekkor létezik egy C görbe \mathcal{F} -ben, ami keresztülhalad az x és z szögpontokon, de nem halad át az y szögponton vagy egyetlen másik szögponton sem. (A 8. ábra ezt ábrázolja.) Tegyük fel, hogy a C görbe belsejében van egy \mathcal{F} -beli D görbe két íve. Mivel az x pont csak a z és y pontokkal van összekötve, ezért a D görbe teljesen a C görbe belsejében van, továbbá a D görbe pontosan csak az x és z pontban érintheti a C görbét. Így a D görbe belsejének és a C görbe külsejének a metszete üres. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy az \mathcal{F} egy Venn-diagram. Tehát az \mathcal{F} diagram minden görbéjének csak egy íve lehet a C belsejében. Ha $|\mathcal{F}| = n$, akkor a C görbe belseje legfeljebb n tartományra bomlik. De mivel $V(\mathcal{F})$ egy Venn-diagram, minden görbe belseje, így természetesen a C görbe belseje is, pontosan 2^{n-1} tartományra bomlik. $2^{n-1} \leq n$ csak $n \leq 2$ esetén teljesül. Ez ellentmond az $|\mathcal{F}| \geq 3$ feltételnek. ■

Az előző 6.3. Lemma bizonyítása kis módosítással a következőket adja:

6.4. Következmény. Ha $V(\mathcal{F})$ egy n -Venn-diagram, akkor $m(x, y) \leq n$ minden x és y szögpontjára.

6.5. Tétel. Minden $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram 2-összefüggő, ha $|\mathcal{F}| \geq 3$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az x pont elhagyása szétvágja a $V(\mathcal{F})$ gráfot legalább két nem üres komponensre. Jelölje H és K két olyan nem üres részgráfját a $V(\mathcal{F})$ gráfnak, amelynek az egyetlen közös szögpontja az x pont és semmi más nem közös bennük. Mivel H is és K is tartalmazza legalább egy élét $V(\mathcal{F})$ -nek, így létezik két \mathcal{F} -beli görbe C és D , amelyek vagy diszjunktak, vagy csak érintik egymást az x pontban. Mindkét eset ellentmond annak, hogy \mathcal{F} egy Venn-diagram. ■

A következőkben néhány olyan könnyen levezethető formulát sorolunk fel, amelyek hasznosak lesznek. Legyen $V(\mathcal{F})$ egy n -Venn-diagram. Jelölje l , c és e , a $V(\mathcal{F})$ gráf lapjainak, szögpontjainak és éleinek számát. Nyilvánvaló, hogy $l = 2^n$. Jelölje minden $1 \leq i$ -re d_i a $V(\mathcal{F})$ gráf azon szögpontjainak a számát, amelyeknek a foka pontosan i . Nyilvánvaló, hogy $d_2 = 0$ és az is igaz, hogy $d_i = 0$, ha i páratlan egész szám vagy $i \geq 2n + 1$. A következő formulákat kis számolás adja:

$$(*) \quad 4d_4 + 6d_6 + \dots + 2nd_{2n} = 2e,$$

$$(**) \quad d_4 + d_6 + \dots + d_{2n} = c$$

Euler 3.6. Tételét, valamint a (*), (**) azonosságokat használva kapjuk a következő azonosságot:

$$c + d_6 + 2d_8 + \dots + (n - 2)d_{2n} = 2^n - 2.$$

Rögtön adódik, hogy közösleges Venn-diagramokra $d_4 = c$, $d_j = 0$, minden 4-től különböző j -re, végül $c = 2^n - 2$.

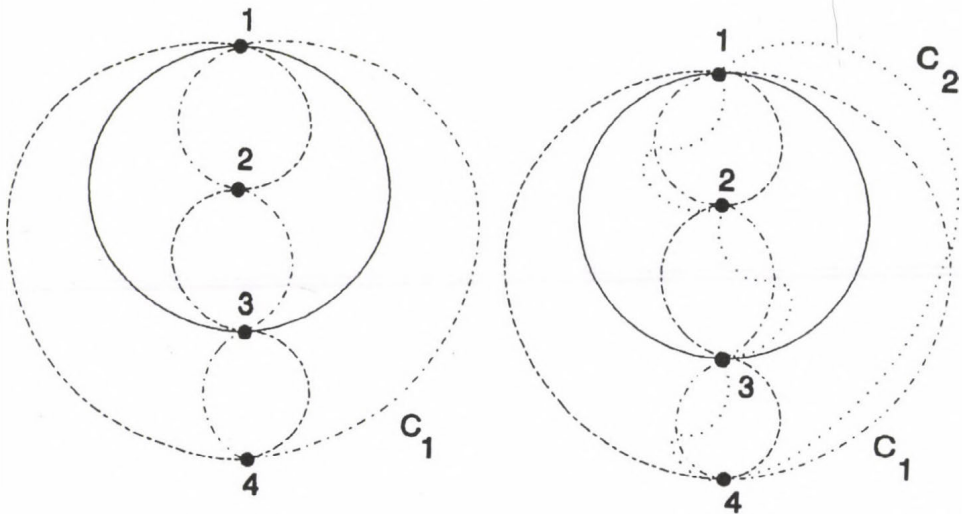
Most rátérünk a közösleges Venn-diagram tulajdonságainak felsorolására.

6.6. Tétel. Közösleges $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram 3-összefüggő, ha $|\mathcal{F}| \geq 3$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az állítás hamis. Ekkor létezik két szögpont, x és y , aminek az elhagyása a gráfból két vagy több, nem üres komponensre bontja a gráfot. Mivel bármely két \mathcal{F} -beli görbe legalább két pontban metszi egymást, ezért kell, hogy legyen két \mathcal{F} -beli görbe, C_1 és C_2 , amelyek tartalmazzák x és y pontokat. (Különben a két pont nem vágná szét a gráfot.) Továbbá még az is igaz – a Venn-diagram közösleges volta miatt –, hogy minden más \mathcal{F} -beli görbe elkerüli az x , y pontokat, azaz a $V(\mathcal{F})$ gráf minden x -et és y -t tartalmazó éle a C_1 és a C_2 görbék része. Így azt kaptuk, hogy az x és y pontok elhagyása a $V(\mathcal{F})$ gráfot pontosan két nem üres komponensre bontja. Jelölje ezeket H_1 és H_2 . Jelölje G_1 és G_2 a $V(\mathcal{F})$ gráf két részgráfját, amit a $H_1 \cup \{x, y\}$ és a $H_2 \cup \{x, y\}$ indukál. (Az $\cup\{x, y\}$ jelöli a két szögpontú halmaz és a H_1 illetve H_2 gráfokból az x és y pontokba haladó

élek hozzávételét a megfelelő gráfokhoz.) Tekintsünk egy tetszőleges v szögpontot a G_1 gráfban. Ha a v pont a C_1 és C_2 görbék egyik metszéspontja, akkor a C_1 és C_2 görbék G_1 részgráfba eső része legalább két $V(\mathcal{F})$ -beli lapot határol körbe. Máskülönben a v pont másik két görbe C' és C'' metszéspontja (egyik közülük lehet C_1 vagy C_2). Mivel a C' és C'' görbék közül legfeljebb csak az egyik haladhat az x vagy y ponton keresztül és mivel a $V(\mathcal{F})$ gráfot az $\{x, y\}$ pontok elhagyása két részre bontja, ezért a C' és C'' görbéknek metszeniük kell egymást egy v -től, x -től és y -től különböző u szögpontban, továbbá az u pont a G_1 gráfban lesz. Ez azt jelenti, hogy a C', C'' görbék a $V(\mathcal{F})$ gráfnak legalább két G_1 -beli lapját határolják. Így a G_1 és a G_2 gráfnak (hasonló okok miatt) legalább két lapja van.

Mivel $|\mathcal{F}| \geq 3$, ezért van egy olyan C_3 görbe, amely a H_1 vagy a H_2 gráfban van. Tegyük fel, hogy ez a H_2 gráf, a másik eset teljesen hasonlóan gondolható meg. A C_3 görbe, mint minden más görbe az \mathcal{F} Venn-diagramban vagy szétválaszt két lapot vagy kettévág egy lapot G_1 gráfban. Ez ellentmond annak a feltételnek, hogy a C_3 görbe a H_2 gráfban van. ■



9. ábra

Jegyezzük meg, hogy minden n -re létezik nem közösleges n -Venn-diagram, amelynek az összefüggőségi száma pontosan kettő. A 9. ábra mutat két ilyen diagramot három illetve négy görbével. Figyeljük meg, hogy a C_2 görbe követi a C_1 görbét, alternálva belül és kívül minden éllel összekötött szögpont között, így kettévág minden lapot, amit C_1 érint. Mivel C_1 határolja a diagramnak minden lapját, ezért C_2 kettévág minden lapot. Ez biztosítja, hogy a diagram egy 4-Venn-diagram. Az összefüggőségi száma mindkét gráfnak kettő, mivel az 1-es és 3-as

szögpontok elhagyása kettévágja a gráfot. A fenti eljárást követve egy új C_3 görbe hozzáadásával egy hasonló tulajdonságú 5-Venn-diagramot kapunk. Könnyű látni, hogy ez az eljárás folytatható minden n -re, így szerkeszthetők nem közöséges n -Venn-diagramok, amelyeknek az összefüggőségi száma pontosan kettő.

Végül jegyezzük meg, hogy a 7.5. Lemmából következni fog:

6.7. Lemma. *Közöséges \mathcal{F} Venn-diagramnak nincs 2-lapja, ha $|\mathcal{F}| \geq 3$.*

7. Venn-gráf

A második síkgráf, amit az \mathcal{F} Venn-diagramhoz rendeltünk a $V(\mathcal{F})$ gráf duális gráfja. A duális gráfot $D(\mathcal{F})$ -vel jelöljük és *Venn-gráfnak* nevezzük. A $D(\mathcal{F})$ gráfot úgy kapjuk, hogy a $V(\mathcal{F})$ gráf minden lapjának megfeleltetünk egy szögpontot, ezek lesznek a $D(\mathcal{F})$ gráf szögpontjai. A szögpontot és a lapot egymás *megfelelőinek* nevezzük. A $D(\mathcal{F})$ gráf két x és y szögpontját akkor kötjük össze egy éllel, ha az x és y szögpontoknak megfelelő két lapnak a $V(\mathcal{F})$ Venn-diagramban van egy közös ívhatára. (Meggondolásaink során sokszor úgy fogjuk képzelni, hogy a $D(\mathcal{F})$ gráf a síkban a $V(\mathcal{F})$ diagram „belsejében” van. Ilyenkor olyan szemléletes – matematikailag teljesen pontosítható – állításokat fogunk használni, mint például: az \mathcal{F} -beli görbe metszi a $D(\mathcal{F})$ gráf egy élet vagy keresztülhalad egy lapján.) Később megmutatjuk (7.3. Tétel), hogy az így nyert $D(\mathcal{F})$ gráf egy egyszerű síkgráf. Jegyezzük meg, hogy a $D(\mathcal{F})$ gráf minden x szögpontjához hozzárendelhetünk egy rendezett 0-ákból és 1-esekből álló n hosszú sorozatot. Ezt az x szögpont *kódjának* nevezzük. Ezt a kódot úgy kapjuk, hogy az x szögpontnak a $V(\mathcal{F})$ Venn-diagramban megfelelő lap kódját választjuk az x kódjának a $D(\mathcal{F})$ gráfban. Könnyű látni, hogy két szögpont a $D(\mathcal{F})$ gráfban csak akkor van összekötve egy éllel, ha a kódjaik pontosan egy koordinátában különböznek. Ebből következik, hogy ha $V(\mathcal{F})$ egy Venn-diagram, akkor a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráfja egy olyan részgráfja az n -dimenziós kockának⁶, amely tartalmazza az n -dimenziós kocka összes szögpontját. (Az olyan részgráfokat, amelyek tartalmazzák a gráf minden szögpontját *feszítő részgráfoknak* hívjuk.) Köztudott, hogy az n -dimenziós kocka egy páros gráf, így a $D(\mathcal{F})$ gráf is páros. Most rátérünk a Venn-gráf tulajdonságainak ismertetésére.

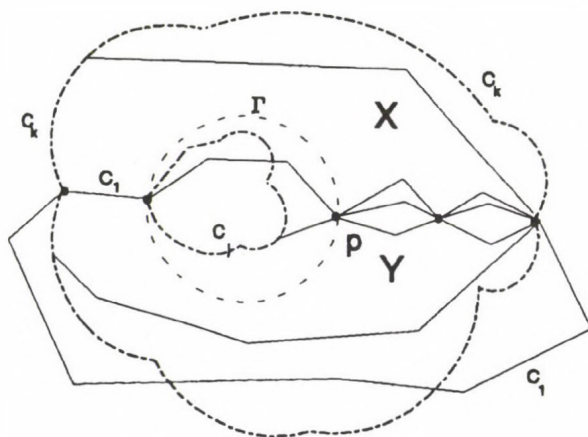
7.1. Tétel. *A $D(\mathcal{F})$ gráfban nincs többszörös él.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik két szögpont, x és y a $D(\mathcal{F})$ gráfban, amelyet több él köt össze. Legyenek X és Y azon lapjai a $V(\mathcal{F})$ Venn-diagramnak, amelyek

⁶Az n -dimenziós kocka (vagy a *hyperkocka*) a következő gráf: Szögpontjai 0-ákból és 1-esekből álló n hosszú sorozatok. Két szögpont akkor és csak akkor van összekötve, ha pontosan egy koordinátában különböznek. Ezt a gráfot nagyon sokat vizsgálták, többek között azért, mert bizonyos parallel komputerek szerkezetét az n -dimenziós kocka gráf szerint tervezték.

az x és y szögpontoknak felelnek meg. Mivel az x és y pontok között halad el a $D(\mathcal{F})$ gráfban, ezért az X és Y lapoknak a kódja pontosan egy koordinátában különbözik. Tegyük fel, hogy ez a j -edik koordináta. Ez azt jelenti, hogy az egyik lap a C_j görbe belsejében, míg a másik a külsejében van. Így az X és Y lap közös határát alkotó ívek mind a C_j görbe részei. Mivel feltevésünk szerint az x és y pontokat több él köti össze, kapjuk, hogy az X és Y lapok közös határa a C_j görbe több diszjunkt ívét tartalmazza. Ez ellentmond 6.1. Lemmának. ■

7.2. Tétel. A $D(\mathcal{F})$ gráf éllel összekötött két szögpontjának és a beléjük futó éleknek az elhagyása nem vágja szét a gráfot.



10. ábra

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy x és y a $D(\mathcal{F})$ gráf két olyan szögpontja, amelyek éllel vannak összekötve és amelyeknek az elhagyása szétvágja a $D(\mathcal{F})$ gráfot. Legyenek X és Y azon lapjai a $V(\mathcal{F})$ diagramnak, amelyek az x és y pontoknak felelnek meg. Ekkor a 6.1. Lemmából és a 7.1. Tételből következik, hogy az X és Y lapok határának pontosan egy közös íve van. Ez az \mathcal{F} Venn-diagram egyik, mondjuk C_1 görbéjének az íve. Az X és Y síktartományok határának van egy közös íve és legalább egy p (vagy több, de mindenesetre véges sok) közös pontja. A C_1 görbe tartalmazza ezt az ívet és keresztülhalad minden közös ponton. Az X és Y lapok elhagyása a határukkal együtt két vagy több részre vágja a síkot. Találhatunk egy olyan Γ Jordan-görbét a síkon, amelyet az X és Y lapok belseje és határaik lefednek, továbbá metszi a C_1 görbét és áthalad a p ponton, ahogy ezt a 10. ábra mutatja. (Ez újra Jordan tétele és annak következményei miatt igaz.) A C_1 görbe X és Y lap határával közös ívének végpontjain keresztülhalad két C_j és C_k \mathcal{F} -beli görbe. A C_j és C_k görbe egy-egy íve határa az X illetve Y lapoknak (lásd a 10. ábrát). A 6.1. Lemma miatt ezek az ívek különböznek a C_1 görbe ívétől. Másrészt ezek

különböznek egymástól is. Az utóbbi azért igaz mert, ha ez nem így volna, akkor a p pontban önmagát metszené egy \mathcal{F} Venn-diagrambeli görbe, ami lehetetlen. Mivel a C_j görbe egyetlen lehetséges kijárat pontja a Γ görbe belsejéből a p pont lehet, ezért a C_j görbe teljesen a Γ belsejében van. Így a C_j görbe teljesen a C_k görbe belsejében vagy külsejében fekszik. Ez ellentmond annak a ténynek, hogy a $V(\mathcal{F})$ egy Venn-diagram.

Jegyezzük meg, hogy az a feltétel, hogy a két szögpont éllel összekötött, nem elhagyható a 7.2. Tételben. Például a közöséges 2-Venn-diagramnak a Venn-gráfja egy négy szögpontú kör, amelyet bármely két átellenes szögpontja szétvág két diszjunkt nem üres komponensre.

7.3. Tétel. *A $D(\mathcal{F})$ Venn-gráf egy egyszerű gráf, amelyet egy szögpont elhagyása nem vág szét.*

Bizonyítás. A 7.1. Tétel miatt a $D(\mathcal{F})$ gráfban nincs többszörös él és nyilvánvalóan nem lehet hurok sem. A 7.2. Tételből pedig következik, hogy egyetlen szögpont nem metszi szét a $D(\mathcal{F})$ gráfot. ■

7.4. Következmény. *A $D(\mathcal{F})$ gráf minden lapja határának körüljárása egy egyszerű, zárt körüljárás⁷.*

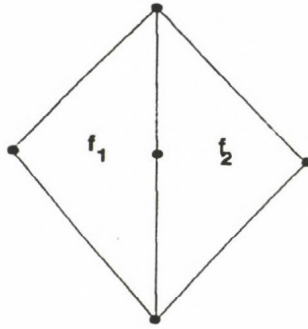
Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $D(\mathcal{F})$ gráf valamelyik lapjának határa nem egy egyszerű körüljárás. Legyen x egy olyan szögpont, amely legalább kétszer szerepel a felsorolásban. Ekkor az x szögpont elhagyása szétvágná a $D(\mathcal{F})$ gráfot. Ez a 7.3. Tétel miatt lehetetlen. ■

Rátértünk közöséges Venn-diagramokhoz rendelt Venn-gráfok tulajdonságainak vizsgálatára. Ha a $V(\mathcal{F})$ diagram közöséges, akkor legfeljebb két görbe metszheti egymást egy pontban. Így a $D(\mathcal{F})$ gráf minden lapjának pontosan négy éle van, ezért a $D(\mathcal{F})$ gráf maximális páros, egyszerű síkgráf. Ha L , C , és E jelöli a $D(\mathcal{F})$ gráf lapjainak, szögpontjainak illetve éleinek számát, akkor $C = 2^n$, $E = 2L$ és így Euler 3.6. Tételéből következik, hogy $E = 2^{n+1} - 4$.

7.5. Lemma. *Ha $V(\mathcal{F})$ közöséges Venn-diagram, $|\mathcal{F}| = 3$, akkor a $D(\mathcal{F})$ gráfban két lapnak nem lehet két olyan közös éle, amelyek találkoznak egy szögpontban.*

Tegyük fel, hogy a $D(\mathcal{F})$ gráfban az f_1 és az f_2 lapoknak van két közös éle és ezek egy pontban találkoznak, ahogy ezt a 11. ábra mutatja. A $D(\mathcal{F})$ gráf minden élén pontosan egy Jordan-görbe halad keresztül. Ezért legfeljebb csak két \mathcal{F} -beli görbe metszheti az f_1 és f_2 lapokat. Valóban, minden olyan görbe, amely belép

⁷Egyszerű, zárt körüljárás alatt szögpontok és élek olyan alternáló sorozatát értjük, amelyben minden szögpontot illetve élt egyszer sorolunk fel, kivéve a sorozat első és utolsó elemét, ami ugyanaz a szögpont. Továbbá bármely két szögpont között felsorolt él összeköti a két szögpontot a gráfban.



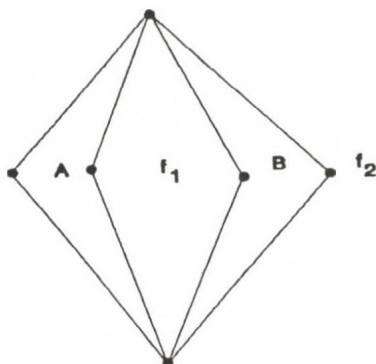
11. ábra

egy élen keresztül egy lapba, ki is lép egy másik élen a lapból. A feltevés szerint $V(\mathcal{F})$ egy Venn-diagram, ezért a $D(\mathcal{F})$ gráf bármely két szögpontjából az egyiket legalább egy \mathcal{F} -beli görbe a belsejében, a másikat a külsejében tartalmazza. A 11. ábrán látható gráfnak öt szögpontja van, ezeket két görbe nem választhatja szét a kívánt módon. ■

Nyilvánvalóan, a 7.5. Lemmából következik, hogy egy közöséges n -Venn-diagramban nincs 2-lap, ha $n \geq 3$, ahogy ezt állítottuk a 6.7. Lemmában. Alkalmazva a 6.7. Lemmát kapjuk, hogy a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráf minden szögpontjának foka legalább három. Másrészt, ha $|\mathcal{F}| = n$, akkor mivel a $D(\mathcal{F})$ gráf egy (feszített) részgráfja az n -dimenziós kockának, ezért minden szögpontjának foka legfeljebb n . Látni fogjuk később, hogy a $D(\mathcal{F})$ gráf szögpontjainak foka fontos szerepet játszik Grünbaum több sejtésének és kérdésének megoldásában, de különösen érdekes és meglepő lesz az 5.7. Kérdés megválaszolásában.

7.6. Tétel. Minden közöséges $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram $D(\mathcal{F})$ Venn-gráfja 3-összefüggő, ha $|\mathcal{F}| \geq 3$.

Bizonyítás. Mivel a $D(\mathcal{F})$ gráf egy maximális páros gráf, használhatjuk a 3.7. Tétel második részét. Ez azt állítja, hogy egy maximális páros gráf 3-összefüggő, ha nincs benne a 12. ábrán látható részgráf, ahol f_1, f_2 jelöli a lapokat, míg A és B jelöli a sík azon két tartományát, amelyek tartalmazzák a $D(\mathcal{F})$ gráf többi részét. Pontosán két \mathcal{F} -beli C_1, C_2 görbe belsejével és külsejével szétválasztja az f_1 lap négy szögpontját. A C_1 és a C_2 görbe is keresztülhalad mindkét tartományon. Így a C_1 és C_2 görbék keresztülszelik az A és B síktartományt határoló összes élt. Mivel a $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram tételünk szerint közöséges, ezért egyetlen más görbe sem haladhat ezen éleken keresztül. Így minden más görbe vagy az A vagy a B tartomány belsejében van. Mivel két görbe egy Venn-diagramban nem lehet diszjunkt, ezért minden más \mathcal{F} -beli görbe csak az A vagy csak a B belsejében fekszik. Tegyük fel, hogy ez az A tartomány, a másik eset teljesen hasonlóan gondolható meg. A $D(\mathcal{F})$ gráfnak



12. ábra

a B tartományban van egy f lapja. Valóban, ha ez nem teljesülne, akkor a B tartományon keresztülhaladó C_1 és C_2 görbék metszenék egymást a tartományon belül, eredményezve egy 2-lapot. Ez a 6.7. Lemma szerint lehetetlen. Mármost az f és az f_1 lap közös határa tartalmazna két egy szögponthoz találkozó élt, ami ellentmond a 7.5. Lemmának. ■

7.7. Lemma. Ha $V(\mathcal{F})$ egy egyszerű Venn-diagram, $|\mathcal{F}| \geq 3$, akkor a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráfban van legalább nyolc darab három fokú szögponthoz, továbbá a szögpontok fokának átlaga $4 - 1/2^{n-3}$.

Bizonyítás. Könnyű látni, hogy

$$3d_3 + 4d_4 + \dots + nd_n = 2E,$$

ahol d_i jelöli a $D(\mathcal{F})$ gráfban lévő i -fokú pontok számát, E pedig az élek száma. Nyilvánvaló, hogy ha C a szögpontok száma a $D(\mathcal{F})$ gráfban, akkor

$$C = d_3 + d_4 + \dots + d_n,$$

ezért

$$3C + d_3 + d_4 + 2d_5 + \dots + (n-3)d_n = 2E + d_3.$$

Fentiekben láttuk, hogy $C = 2^n$, $E = 2^{n+1} - 4$, így kapjuk, hogy

$$d_3 + d_4 + 2d_5 + \dots + (n-3)d_n = 2^n - 8 + d_3.$$

De

$$d_3 + d_4 + 2d_5 + \dots + (n-3)d_n \geq d_3 + d_4 + \dots + d_n = C = 2^n,$$

amely mutatja, hogy $d_3 \geq 8$.

Mivel a szögpontok fokának összege minden gráfban egyenlő az élek számának kétszeresével, ezért azt kapjuk, hogy ez az összeg $2E = 2^{n+2} - 8$. Mivel a $D(\mathcal{F})$ gráfnak 2^n szögpontja van, ezért

$$(2^{n+2} - 8)/2^n = 4 - 1/2^{n-3}. \quad \blacksquare$$

Jegyezzük meg, hogy a 7.6. Tétel és a 7.7. Lemma szerint ha egy közösleges $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram tartalmaz legalább három görbét, akkor a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráf összefüggőségi száma három.

Mint láttuk, ha $V(\mathcal{F})$ egy közösleges Venn-diagram, $|\mathcal{F}| \geq 3$, akkor a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráf egy 3-összefüggő síkgráf, így Steinitz tétele [33, 235. oldal] szerint egy 3-dimenziós poliéder⁸ határa. Ez a szemléletmód nagyon hasznos az alábbi gondolatmenetben; ez adja az egyik általános módszerünket különböző közösleges n -Venn-diagramok szerkesztésére. Legyen $V(\mathcal{F})$ egy közösleges n -Venn-diagram. Ha az egyik \mathcal{F} -beli C görbét körüljárva, felsoroljuk a $D(\mathcal{F})$ gráf éleit, azon sorrendben, ahogy a körüljárás során találkozunk velük, akkor láthatjuk, hogy minden egymásutáni két él a felsorolásban, a $D(\mathcal{F})$ gráf egyik 4-lapjának határát alkotó, egymást nem metsző, „szembenlévő” élpárja. Továbbá, a felsorolásban szereplő élek száma megegyezik a C görbe más görbékkel alkotott metszéspontjainak a számával. Végül, a $D(\mathcal{F})$ gráf így felsorolt éleinek halmaza független élek halmaza, amit *független élhalmaznak* nevezünk. Ez az észrevétel az alapja a következő definíciónak:

7.8. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy G maximális páros gráf kielégíti a *párosítási feltételt*, ha a G gráf éleinek halmazát be lehet osztani M_1, M_2, \dots, M_k halmazokba úgy, hogy minden M_i halmaz egy független élhalmaz, amelynek éleit olyan $e_1, e_2, \dots, e_{|M_i|}, e_1$ ciklikus sorozatba lehet rendezni, hogy minden egymás után következő két éle a sorozatnak a G gráf egy lapjának szembenlévő élei. Az M_i halmazok által indukált részgráfokat *öveknek*, magukat az M_i halmazokat pedig *övbeli párosításnak* hívjuk.

Mivel egy közösleges Venn-diagramban a görbék nem metszik önmagukat, ezért a fent elmondottakból a következő tétel könnyen látható.

7.9. Tétel. Ha $V(\mathcal{F})$ egy közösleges n -Venn-diagram, $n \geq 3$, akkor a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráf egy olyan maximális páros gráf, amely kielégíti a párosítási feltételt. A $D(\mathcal{F})$ gráf összefüggőségi száma három, a gráfban lévő övek száma pedig n .

7.10. Tétel. Legyen G egy maximális, 3-összefüggő, páros gráf. Ekkor minden övben páros sok él van.

⁸Az euklideszi tér egy K kompakt, konvex részhalmazát *poliédernek* nevezzük, ha az extrémális pontjainak halmaza véges. A K konvex halmaz egy x pontját *extrémális pontnak* nevezzük, ha az x pont nem belső pontja egyetlen a K halmazban lévő szakasznak sem.

Bizonyítás. Legyen M egy öv. Hagyjuk el az M öv éleit a gráfból. Ekkor a G gráf szétesik két olyan G_1 és G_2 részgráfra, amelyekben egy lap egy $|M|$ -lap, a többi pedig 4-lap lesz. Jelölje l_i az i -lapok, E az élek számát a G_1 részgráfban. Ekkor

$$2E = \sum_{1 \leq i} il_i = 4l_4 + |M|.$$

Fenti azonosságból azonnal látszik, hogy $|M|$ páros. ■

Legyen $V(\mathcal{F})$ egy közösleges n -Venn-diagram, M_1, M_2, \dots, M_n a $D(\mathcal{F})$ gráf övei. Könnyű látni, hogy $|M_i| \leq 2^{n-1}$. Mivel minden görbe a Venn-diagramban legalább kétszer metsz minden másik görbét, ezért $|M_i| \geq 2(n-1)$ igaz minden i -re, $1 \leq i \leq n$. Legyen X_i azon $D(\mathcal{F})$ gráfbeli öveknek a száma, amelyekben az övbéli párosítás pontosan i élt tartalmaz. A 7.10. Tétel szerint $x_i = 0$, ha i páratlan egész szám. Jegyezzük meg, hogy

$$\sum_{2(n-1) \leq i} x_i = n$$

és

$$(***) \quad \sum_{2(n-1) \leq i} ix_i = |E(D(\mathcal{F}))| = 2^{n+1} - 4.$$

7.11. Tétel. Legyen $V(\mathcal{F})$ egy gömbi, közösleges n -Venn-diagram, és $D(\mathcal{F})$ a megfelelő Venn-gráf. Legyen M_1, M_2, \dots, M_n a $D(\mathcal{F})$ gráf n darab különböző öve. Ha elhagyjuk az M_i övet ($i = 1, 2, \dots, n$) a $D(\mathcal{F})$ gráfból, akkor a gráf szétesik pontosan két G_1, G_2 részgráfra. A G_1 részgráfban lévő szögpontok, élek, illetve lapok száma megegyezik a G_2 részgráfban lévő szögpontok, élek illetve lapok számával.

Bizonyítás. Mivel $V(\mathcal{F})$ egy Venn-diagram, ezért minden görbe belsejében, külsejében pontosan 2^{n-1} darab lap van. Ez azonnal mutatja, hogy a G_1, G_2 gráfban a szögpontok száma megegyezik. Jelölje l_4^i a G_i gráfban a 4-lapok számát. Ekkor a lapok száma a G_1 részgráfban $l_4^1 + 1$. A 7.10. Tétel bizonyításában láttuk, hogy ha e_1 az élek száma a G_1 gráfban, akkor

$$e_1 = 2l_4^1 + (|M_i|/2),$$

ahol M_i jelöli az elhagyott övet. A G_1 gráf egy síkgráf, ezért alkalmazva Euler 3.6. Tételét kapjuk, hogy

$$l_4^1 = c_1 - (|M_i|/2) + 1.$$

(A c_1 és a c_2 a szögpontok számát jelöli.) Hasonló gondolattal kapjuk, hogy

$$l_4^2 = c_2 - (|M_i|/2) + 1.$$

Mivel a szögpontok száma megegyezik G_1 és G_2 gráfokban, azonnal adódik, hogy az élek száma is megegyezik. Végül a két egyenlőségéből kapjuk, hogy a lapok száma is megegyezik. ■

7.12. Definíció. A 7.11. Tételben kapott két részgráfot *fél-Venn-gráfnak* nevezzük.

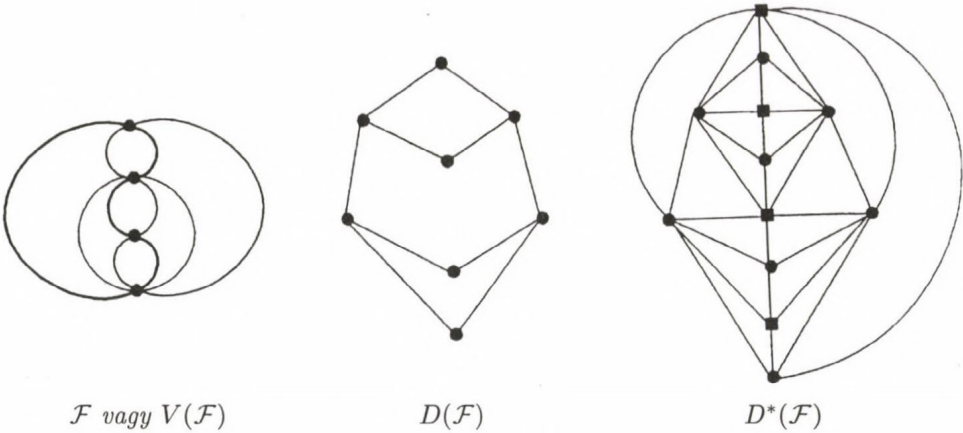
Az önmagukban is érdekes 7.13. és 8.3. Tételeket mostanában bizonyítottam be. A tételeket bizonyítás nélkül ebben a cikkben közlöm először:

7.13. Tétel. Ha $|\mathcal{F}| \geq 3$, $V(\mathcal{F})$ egy közösleges Venn-diagram, akkor három szögpont csak akkor vágja szét a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráfot, ha a három szögpont egy három fokú szögponthoz csatlakozik. Továbbá, a gráf pontosan két komponensre esik szét, az egyik komponens a három fokú szögpont, míg a másik komponens a gráf többi része.

8. Térképgráf

A harmadik síkgráf, amit bevezetünk, az általam térképgráfnak nevezett gráf. (Az angol nyelvű irodalomban ezt a gráfot „radial” gráfnak neveztem el. Ennek az az oka, hogy ez a gráf a duális (angolul dual) és az úgynevezett küllőgráf [55, 46. oldal] (angolul radial) gráfok egyesítése. Mindkét gráf a híres négyszínsejtéssel kapcsolatban vált ismertté az irodalomban. A duális gráf ma is sokat vizsgált és alkalmazott a gráfelmélet különböző területén, míg a küllőgráf feledésbe merült. A magyar nyelvben a két szó összekapcsolása nagyon rosszul hangzik, ezért próbáltam találni valami olyan nevet, ami a fogalom lényegére tör.) A térképgráf, ami valójában egy nagyon egyszerű észrevétel eredménye, lényeges áttörést eredményezett a speciális síkbeli Jordan-görbeseregek vizsgálatában. Többek között egy könnyű, mechanikus, általános módszert ad minden n -re, az összes nem minimális n -Venn-diagram (közösleges vagy nem közösleges) szerkesztésére. A térképgráf bevezetése előtt, ez egy hosszadalmas, fárasztó feladat volt. Például A. J. Macula [51] cikkét a következőkkel vezeti be: „*Valaha is próbáltál rajzolni egy Venn-diagramot négy, öt, vagy hat görbével úgy, hogy ábrázold az összes lehetséges metszést? Ez egy meglehetősen terhes feladat.*” Térképgráfok játszanak döntő szerepet Grünbaum sejtéseinek és kérdéseinek megoldásában is.

A $D^*(\mathcal{F})$ térképgráfot úgy kapjuk, hogy a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráf minden f lapjába belerajzolunk egy x_f szögpontot, majd minden f lap határát az óra járásával elmentéses irányban körüljárva, az x_f szögpontot összekötjük egy éllel, minden az f határán található $D(\mathcal{F})$ -beli y szögponttal annyiszor, ahányszor találkozunk az y ponttal a körüljárás során. Az így kapott x_f szögpontokat a $D^*(\mathcal{F})$ térképgráf új szögpontjainak, míg a $D(\mathcal{F})$ gráfból „örökölt” $D^*(\mathcal{F})$ -beli szögpontokat a térképgráf régi szögpontjainak nevezzük. Jegyezzük meg, hogy a térképgráf új szögpontjait kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetjük a $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram szögpontjainak. Ezért az új szögpontokat úgy tekintjük, mint a Venn-diagrambeli Jordan-görbék metszéspontjait. Ugyancsak jegyezzük meg, hogy a térképgráf két



13. ábra

új szögpontja soha nincs összekötve éllel. A 13. ábra egy 3-Venn-diagramot, Venn-gráfját és térképgráfját szemlélteti. A 13. ábrában, a harmadik rajzon látható régi szögpontok pontokkal, míg az új szögpontok kockákkal vannak jelölve.

8.1. Tétel. Minden $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram $D^*(\mathcal{F})$ térképgráfja szétvágó 3-kör mentes háromszögelés.

Bizonyítás. Mivel a 7.3. Tétel szerint a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráf egyszerű, továbbá a 7.4. Következmény miatt a $D(\mathcal{F})$ minden lapjának határa egy egyszerű, zárt körüljárás, ezért a $D^*(\mathcal{F})$ térképgráf egy egyszerű gráf. Így a $D^*(\mathcal{F})$ térképgráf konstrukciójából azonnal látható, hogy a $D^*(\mathcal{F})$ egy egyszerű háromszögelés. Tegyük fel, hogy x, y és z olyan három különböző szögpontja a $D^*(\mathcal{F})$ térképgráfnak, amely egy xyz -vel jelölt 3-kört alkot. Megmutatjuk, hogy az xyz kör nem szétvágó a $D^*(\mathcal{F})$ gráfban. Mivel a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráf egy páros gráf, ezért az x, y és z szögpontok közül csak maximum két szögpont lehet régi. Mivel két új szögpont nincs összekötve éllel, így az x, y és z szögpontok közül pontosan kettő, mondjuk x és y régi, míg z új szögpontja a $D^*(\mathcal{F})$ gráfnak. Tegyük fel, hogy az u és a v szögpontok a $D^*(\mathcal{F})$ gráf x, y, z szögpontjaitól különbözőek. Ha az u és v is régi szögpont, akkor létezik egy $D^*(\mathcal{F})$ -beli olyan út, amely összeköti az u és v szögpontokat, valamint elkerüli az x, y, z pontokat. Valóban, a 7.2. Tétel szerint a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráf éllel összekötött két x és y szögpontja nem vágja szét a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráfot, így az x, y és z szögpontok elhagyása a $D^*(\mathcal{F})$ gráfból nem vághatja szét az u és v pontokat. Ha az u és a v szögpontok közül az egyik vagy mindkettő új szögpont, akkor ugyancsak találhatunk egy olyan, az u, v szögpontokat összekötő $D^*(\mathcal{F})$ -beli utat, amely elkerüli az x, y és z szögpontokat. Ez nagyon könnyen belátható; mivel a 7.1. Tétel miatt, a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráfnak nincs 2-lapja, így minden új szögpont legalább három régi szögponttal éllel össze van kötve. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $D^*(\mathcal{F})$ térképgráf szétvágó 3-kör mentes. ■

8.2. Tétel. Minden $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram $D^*(\mathcal{F})$ térképgrájában van Hamilton-kör.

Bizonyítás. Ha $|\mathcal{F}| = 1$, akkor a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráf a két szögpontú teljes gráf, a $D^*(\mathcal{F})$ térképgráf pedig a három szögpontú teljes gráf, azaz egy háromszög. Ha $|\mathcal{F}| = 2$, akkor a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráf a négy szögpontú kör, míg a $D^*(\mathcal{F})$ térképgráf a hat szögpontú teljes gráf egy él kivételével. (A két új szögpont nincs éllel összekötve.) Ebben a két esetben a tétel állítása nyilvánvaló. Ha $|\mathcal{F}| \geq 3$, akkor a 8.1. Tétel szerint a $D^*(\mathcal{F})$ térképgráf egy szétvágó 3-kör mentes háromszögelés, így Whitney 3.9. Tétele szerint tartalmaz Hamilton-kört. ■

8.3. Tétel. Ha $|\mathcal{F}| \geq 2$, akkor egy $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram $D^*(\mathcal{F})$ térképgrájja 4-összefüggő.

Jegyezzük meg, hogy ez az újonnan bizonyított és először közölt tétel, Tutte 3.12. Tételével együtt, egy másik bizonyítását adja a 8.2. Tételnek.

9. Venn-diagramok kiterjeszthetőségének kérdése, Grünbaum 5.1. sejtésének megoldása

9.1. Tétel. Minden n -Venn-diagram egy megfelelő Jordan-görbe hozzáadásával kiterjeszthető egy $(n + 1)$ -Venn-diagrammá.

Bizonyítás. Legyen \mathcal{F} egy n -Venn-diagram. A 8.2. Tétel szerint az \mathcal{F} Venn-diagram $D^*(\mathcal{F})$ térképgrájában van egy H Hamilton-kör. Ez a H Hamilton-kör a $D^*(\mathcal{F})$ térképgráfban pontosan egyszer keresztülhalad minden régi szögponton, ezért a H' Jordan-görbe az \mathcal{F} Venn-diagram minden lapját pontosan két részre (a görbe belsejére és külsejére) bontja. Tehát az így kapott \mathcal{F}' görbesereg egy $(n + 1)$ -Venn-diagram. ■

Most rátérünk Peter Winkler [68] 5.2. Sejtésének vizsgálatára. Mint a 9.1. Tételből rögtön látható, az általunk kapott kiterjesztések keresztülhaladnak a térképgráf minden új szögpontján is. Ezért minden a 9.1. Tételben kapott kiterjesztés egy nem közönséges Venn-diagram, még abban az esetben is, ha az n -Venn-diagram közönséges diagram volt. Így ez a módszer nem ad választ Winkler sejtésére, a sejtés ma is megoldatlan. A következőben Winkler [68] egyik tételét bizonyítás nélkül közöljük. Ez a tétel, mint látni fogjuk, speciális esete az általunk bizonyított 9.3. Tételnek.

9.2. Tétel. Minden $1 < n$ -re egy közönséges n -Venn-diagram akkor és csak akkor terjeszthető ki egy megfelelő Jordan-görbe hozzáadásával $(n + 1)$ -Venn-diagrammá, ha a Venn-diagram duális grájában van Hamilton-kör.

9.3. Tétel. Minden $1 < n$ -re egy $V(\mathcal{F})$ n -Venn-diagram akkor és csak akkor terjeszthető ki egy $V(\mathcal{F}')$ $(n+1)$ -Venn-diagrammá, ha létezik a térképgráfnak egy olyan köre, amely keresztülhalad minden régi szögponton.

Bizonyítás. Ha a $V(\mathcal{F})$ n -Venn-diagram kiterjeszthető egy C Jordan-görbének a diagramhoz vételével egy $V(\mathcal{F}')$ $(n+1)$ -Venn-diagrammá, akkor a C görbe áthalad a $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram minden lapján. A görbe (belsejével és külsejével) két részre vágja a $V(\mathcal{F})$ diagram minden lapját. A C görbe keresztülhaladhat néhány (vagy az összes) meglévő metszésponton is, de csak egyszer. Ez azért teljesül, mert a feltételek szerint egyetlen Venn-diagrambeli görbe sem metszheti önmagát.

A C görbét körüljárjuk az óra járásával ellentétes irányban a síkon. Ezalatt, a térképgráfon megjelöljük a szögpontokat (régi és újak) olyan sorrendben, ahogy a C görbe körüljárásakor találkozunk velük. Így a fentiek miatt egy K kört nyerünk a térképgráfon. Mint tudjuk, a C görbe a Venn-diagram minden lapját metszi, így a K kör minden régi pontot tartalmaz.

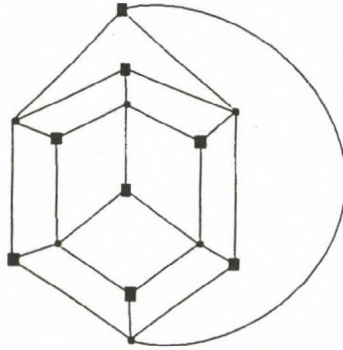
A tétel második felét a 9.1. Tétel bizonyításához hasonló megfontolással azonnal láthatjuk. ■

Winkler [68] megválaszolta sejtésének egy speciális esetét:

9.4. Tétel. Minden $1 < n$ -re egy közönséges, nem minimális $V(\mathcal{F})$ n -Venn-diagram, egy megfelelő Jordan-görbe hozzáadásával, kiterjeszthető egy közönséges $V'(\mathcal{F})$ $(n+1)$ -Venn-diagrammá.

Ez az eredmény a 7.9. és a 9.3. Tételünk nyilvánvaló következménye. (Valóban, ez azonnal látszik abból, hogy egy csökkenthető Venn-diagram egy elhagyható görbéje által meghatározott öv tartalmazza a gráf minden szögpontját.) A 9.1. és a 9.3. Tételek végleges választ adnak egy olyan sokak által, sokszor vizsgált kérdésre, amely visszanyúlik Venn [64] 1880-ban írt cikkéhez. A 9.3. Tétel pedig egy eljárást ad minden nem minimális $(n+1)$ -Venn-diagram megszerkesztésére. Az így nyert algoritmus az a „mohó” algoritmus, aminek létezését Grünbaum olyan jól megsejtette.

Tutte 3.12. Tétele azt mondja, hogy minden 4-összefüggő síkgráfban van Hamilton-kör. Azonban, mint láttuk (7.9. Tétel), minden $D(\mathcal{F})$ Venn-gráfnak az összefüggőségi száma három. Ezért nagyon csábító azt sejtteni, hogy minden olyan 3-összefüggő, maximális, páros síkgráf, amely kielégíti a párosítási feltételt, tartalmaz egy Hamilton-kört. A 14. ábra mutatja, hogy ez nem így van. Az ábrán látható gráf kielégíti az összes feltételt, de nincs benne Hamilton-kör. A gráfnak nyolc darab négyzettel és hat darab körrel jelölt szögpontja van. Ezek a szögpontok a páros gráf különböző részalmazait alkotják. Ez kizárja a Hamilton-kör létezését.



14. ábra

10. Konvex, erősen konvex és feszített Venn-diagramok

Először Rényi Alfréd, Rényi Kató és Surányi János [58] közös eredményeit ismertetjük. Az itt közölt bizonyítások Grünbaumtól [34] származnak. Ezek ismertetéséhez néhány definícióra van szükségünk.

10.1. Definíció. Jelölje $n(k)$ a k vagy k -nál kevesebb oldalú, konvex sokszögek maximális számát egy n darab Jordan-görbét tartalmazó független halmazrendszerben. Jelölje $k(n)$ azt a legkisebb k egész számot, amelyre létezik egy olyan n görbét tartalmazó független halmazrendszer, amelyben a Jordan-görbék k vagy k -nál kevesebb oldalú, konvex sokszögek.

Hasonlóan lehet definiálni az $n^*(k)$, $k^*(n)$, $n_k^*(k)$, $k_k^*(n)$, $n^{**}(k)$ és $k^{**}(n)$ paramétereket, ha független halmazrendszer helyett Venn-diagramot, közös Venn-diagramot, illetve erősen konvex Venn-diagramot helyettesítünk az $n(k)$ és $k(n)$ paraméterek definíciójába. Azonnal adódik, hogy $n^{**}(k) \leq n_k^*(k) \leq n^*(k) \leq n(k)$ és $k^{**}(n) \leq k_k^*(n) \leq k^*(n) \leq k(n)$ teljesül.

10.2. Lemma. *Ha egy n elemű független görbeseregben bármely két Jordan-görbe csak legfeljebb j -szer metszi egymást, akkor*

$$j \geq (2^n - 2) / \binom{n}{2} = 4(2^{n-1} - 1) / n(n-1).$$

Bizonyítás. Ha három görbe nem metszi egymást egy pontban, akkor Euler 3.6. Tételét ($l - 2 = c$) használva kapjuk, hogy

$$l - 2 = c \leq j \binom{n}{2}.$$

Mivel a görbék független görbesereget alkotnak, ezért a lapok száma legalább 2^n . Az állítás rögtön adódik az előző egyenlőtlenségből. Az általános esethez csak azt kell megjegyeznünk, hogy ha három vagy több görbe metszi egymást egy pontban, akkor az élék, szögpontok aránya csak rosszabb lesz.

10.3. Tétel ([58]).

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(k)}{\log_2 k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n^*(k)}{\log_2 k} = 1.$$

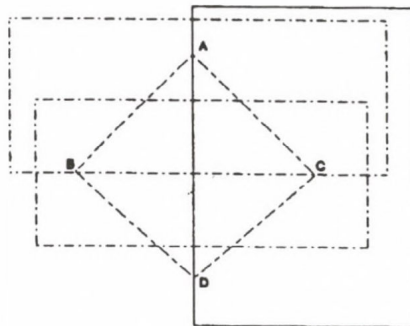
Bizonyítás. Mivel bármely két konvex sokszög, amelynek k vagy k -nál kevesebb oldala van, legfeljebb $2k$ -szor metszheti egymást, így alkalmazhatjuk a 10.2. Lemmát $j = 2k$ -ra. Kapjuk, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(k)}{\log_2 k} \leq 1.$$

Láttuk, hogy ha $n \leq 3$, akkor létezik konvex n -Venn-diagram. Minden $4 \leq n$ -re szerkesztünk egy $V(\mathcal{F})$ közöséges n -Venn-diagramot, n darab 2^{n-2} vagy kevesebb oldalú konvex sokszöggel. Ez adja a tétel második felének bizonyítását, hiszen így azt kapjuk, hogy

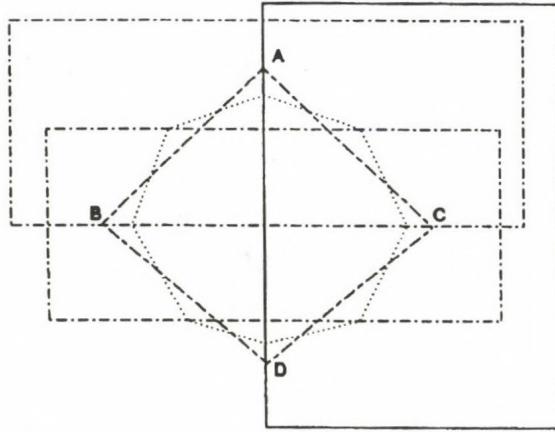
$$n^*(k) \geq n = 2 + \log_2 k.$$

A szerkesztés kiterjesztéssel történik: A 15. ábra négy darab négyszöggel szerkesztett közöséges, konvex Venn-diagramot mutat.



15. ábra

Ha $n > 4$, akkor az új $V(\mathcal{F}')$ $(n + 1)$ -Venn-diagramot úgy kapjuk, hogy a $V(\mathcal{F})$ n -Venn-diagramhoz hozzáadunk egy $P(n + 1)$ -gyel jelölt 2^{n-1} oldalú konvex sokszöget. Ezt a konvex sokszöget úgy szerkesztjük meg, hogy a már előzőleg az n -edik lépésben a diagramhoz adott 2^{n-2} oldalú, konvex sokszög minden élét kétszer átlósan keresztülmetsszük, ügyelve arra, hogy az így nyert sokszög konvex legyen. A 16. ábra ezt az eljárást illusztrálja $n = 5$ -re, azaz azt mutatja, ahogy a közöséges, konvex 4-Venn-diagramhoz hozzáadunk egy konvex nyolcszöget. (Ebben az esetben a 2^{n-2} oldalú sokszög szerepét a 15. ábrán $ABCD$ -vel jelölt négyszög játssza.) ■



16. ábra

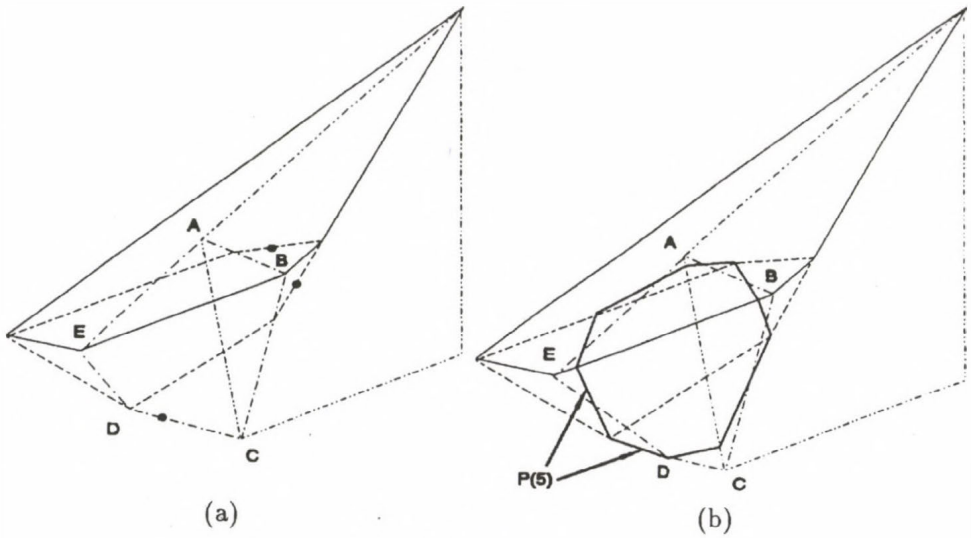
Jegyezzük meg, hogy az előbb ismertetett eljárás közöséges Venn-diagramokat eredményez. Ez azt mutatja, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k^*(k)}{\log_2 k} = 1$$

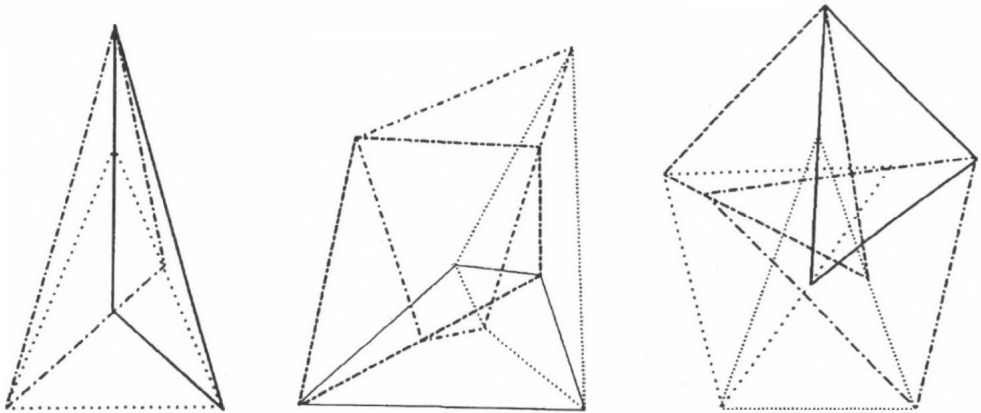
is teljesül. Grünbaum [34] bizonyítás nélkül közli, hogy

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n^{**}(k)}{\log_2 k} = 1$$

állítás igaz, megjegyezve, hogy ez a 16. ábra egyszerű módosításával belátható. Grünbaum professzor, kérésemre, egy nehezen leírható eljárást mutatott erősen konvex diagramok szerkesztésére. A 17. ábra ezt mutatja az $n = 5$ esetre. Az ábrán (a) jelöl egy erősen konvex 4-Venn-diagramot. Az $ABCDE$ ötszög határa érint minden lapot. Az ábrán D -vel jelölt pontban „kinyitjuk” a konvex idomot és a pontokkal jelölt helyeken a sokszögeken egy új csúcsot alkotunk, ahogy azt a (b) ábra mutatja. Majd egy új $P(5)$ -tel jelölt sokszöget adunk a diagramhoz. Az „új” $ABCDE$ sokszög minden élét átmetszük egy új éllel, vigyázva, hogy a kapott $P(5)$ sokszög konvex legyen. Ügyelni kell arra is, hogy az új sokszög minden csúcsát egy élre tegyük. Az eredményt, egy erősen konvex 5-Venn-diagramot, a (b) ábra illusztrálja. Ezzel az eljárással a $P(5)$ sokszöget használva az $ABCDE$ sokszög helyett egy erősen konvex 6-Venn-diagramot kapunk. Ha már megszerkesztettük az erősen konvex $(n - 1)$ -Venn-diagramot, akkor az eljárást megismételve az újonnan kapott $P(n - 1)$ sokszögre, egy erősen konvex n -Venn-diagramot kapunk minden n egész számra.



17. ábra

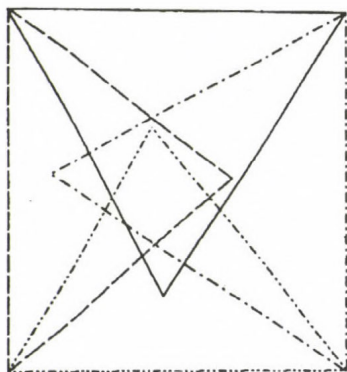


18. ábra

Ugyancsak ebben a cikkben [34] Grünbaum azt írja: „[az ábra] azt mutatja, hogy $k^{**}(3) = 3$, $k^{**}(4) \leq 4$; valójában megmutatható, hogy $k^{**}(4) = 4$ és **nagyon valószínű, hogy $k^{**}(5) = 5$.**”

A 18. ábra mutatja, hogy a fenti két első állítás igaz, de a harmadik téves. Valójában $k^{**}(5) = 3$ teljesül. (A 18. ábra első két gráfját Grünbaum [34] szerkesztette, a harmadikat ebben a cikkben közlöm először.) A következő eredményeket Grünbaum [34] 1975-ben közölte, az utolsó állítást kivéve:

10.4. Tétel. $k(3) = k^*(3) = k_k^{**}(3) = 3$; $k(4) = k^*(4) = k_k^*(4) = 3$; $k(5) = k^*(5) = 3$; $k(6) \leq k^*(6) \leq 4$; $k(7) \leq 6$; $k_k^{**}(5) = 3$.



19. ábra

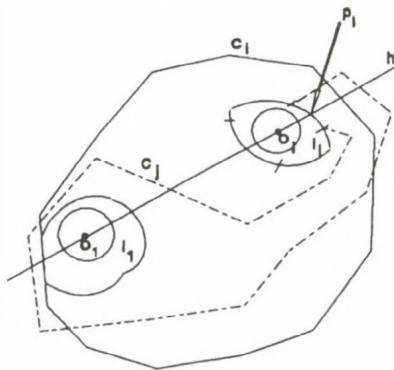
Bizonyítás. A 18. ábra bizonyítja az $n = 3$, az $n = 5$ és az utolsó állítást. A 19. ábra mutatja az $n = 4$ esetet. Az $n = 6$ és $n = 7$ eseteket bizonyító ábrák [34]-ben találhatóak. Erre a két esetre később még visszatérünk. ■

A következő hasznos megjegyzést Grünbaum [38] bizonyítás nélkül közölte, az alábbi bizonyítást itt közlöm először.

10.5. Lemma. *Ha egy közönséges Venn-diagram konvex, akkor a diagram feszített is.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az \mathcal{F} Venn-diagram konvex, de nem feszített, azaz egy C_i görbe teljes egészében a többi görbe belsejében van. Tekintsük az \mathcal{F} Venn-diagram egy olyan izomorf $V(\mathcal{F})$ diagramját a síkban, amelynek minden Jordangörbéje egy korlátos, konvex, nyílt tartomány határa. Ezt megtehetjük, mivel síkbeli Venn-diagramok izomorf képe a tartalmazást nem változtatja meg. Tekintsük azt az l_i lapot, amely a C_i görbe belsejében de minden más görbe külsejében van, azaz amelynek kódja csupa 0, kivéve az i -edik koordinátát, amely 1. Mivel a C_i görbe a többi görbe belsejében van, ezért az l_i lapnak a C_i görbe egyetlen íve sem lehet határán. A $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram közönséges, ezért az l_i lapnak a C_i görbe egyetlen pontja sem lehet az l_i lap határán. Tekintsük azt az l_1 lapot, amelynek kódja csupa 1-es, azaz minden görbe a belsejében tartalmazza. A feltételek szerint mind az l_i , mind az l_1 lap korlátos, nyílt tartomány a síkon. Ezért létezik K_i, K_1, O_i, O_1 középpontú kör, amely az l_i illetve az l_1 lap belsejében van. Kössük össze az O_i és O_1 pontokat egy h egyenessel a síkon. Mivel az l_i lap korlátos, ezért a h egyenes azon felegyenes, amely az O_i pontból indul és nem tartalmazza az O_1 pontot, metszi az

l_i lap határát legalább egy p_i pontban. A p_i pont, egy a C_i görbétől különböző C_j görbén helyezkedik el. (Valójában, a metszéspont lehet két különböző görbe metszéspontja is, ekkor válasszuk az egyik görbét.) A C_j görbe belsejében tartalmazza az l_1 lapot, ezért tartalmazza az O_1 pontot is. (A 20. ábra sematikusán illusztrálja a bizonyítás gondolatmenetét.) A feltétel szerint a $V(\mathcal{F})$ Venn-diagram minden görbéje, így a C_j görbe is egy korlátos, konvex tartomány határa. Ezért a belsejében lévő O_1 és a görbén lévő p_i pontok egy a C_j görbe belsejében haladó egyenes szakasszal összeköthetők. De az őket összekötő egyetlen szakasz átmegy az O_i ponton, ami a C_j görbe külsejében van. Így azzal a feltevésünkkel, hogy a tetszőleges C_i görbe egyetlen íve sincs a külső lap határán, ellentmondásra jutottunk. ■

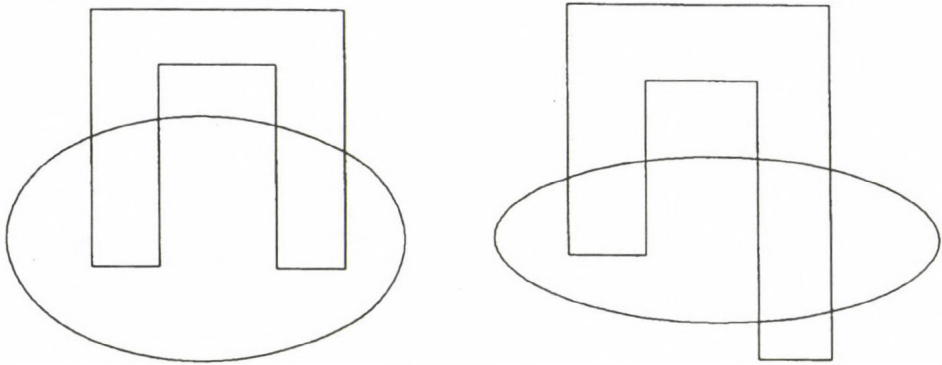


20. ábra

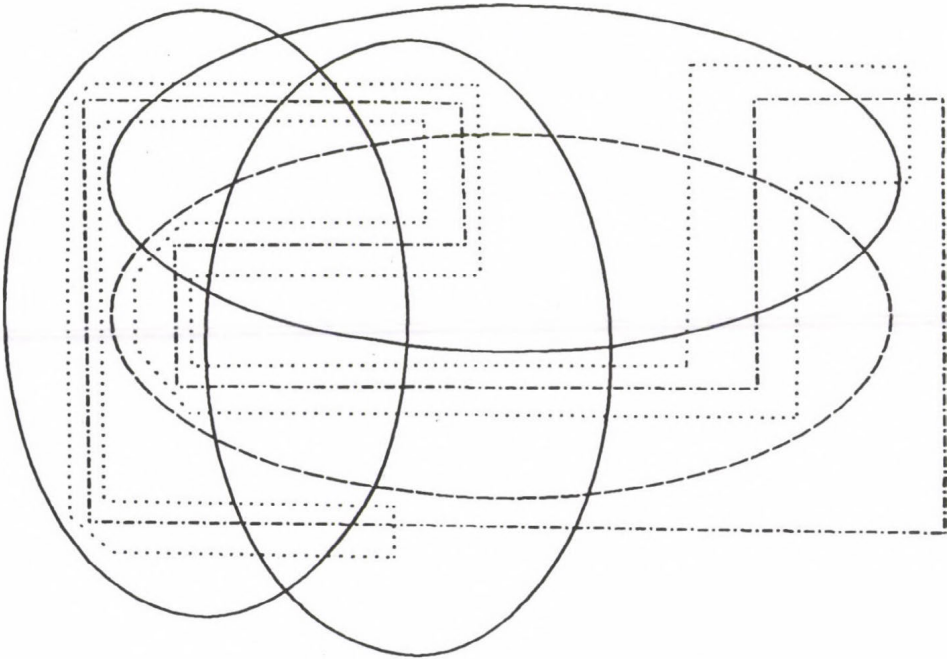
Jegyezzük meg, hogy a 10.5. Lemma megfordítása nem igaz, azaz egy feszített Venn-diagram még nem feltétlenül konvex. Erre több példát fogunk látni a következőkben (26. ábra). Most két magától értetődő, egyszerű, de a későbbiekben hasznos észrevételt ismertetek. Az első észrevétel Grünbaum-tól [38] származik, a második ennek egy általunk [43] bevezetett általánosítása.

10.6. Lemma. *Ha egy síkbeli \mathcal{F} Venn-diagram két Jordan-görbéjének a belseje két (vagy több) diszjunkt, nem üres komponensben metszi egymást, akkor az \mathcal{F} Venn-diagram nem konvex. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az \mathcal{F} Venn-diagramban létezik egy Grünbaum konstrukció. Ha az \mathcal{F} gömbi Venn-diagramnak létezik két Jordan-görbéje úgy, hogy a görbék belsejének és külsejének az összes lehetséges, négy különböző metszete mind Grünbaum konstrukciót képez, akkor az \mathcal{F} Venn-diagram minden síkrajzában van egy Grünbaum konstrukció, ezért az \mathcal{F} Venn-diagram egyetlen síkrajza sem lehet konvex. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az \mathcal{F} Venn-diagramban van egy konvexitást kizáró konstrukció.*

A 21. ábra mutatja mindkét konstrukciót. Most rátérünk Grünbaum 5.7. Kérdésének megválaszolására [13]. A 22. ábra negatív választ ad erre a kérdésre. Az ábrán egy közös 6-Venn-diagramot látunk, amely nincs közös osztályban egyet-

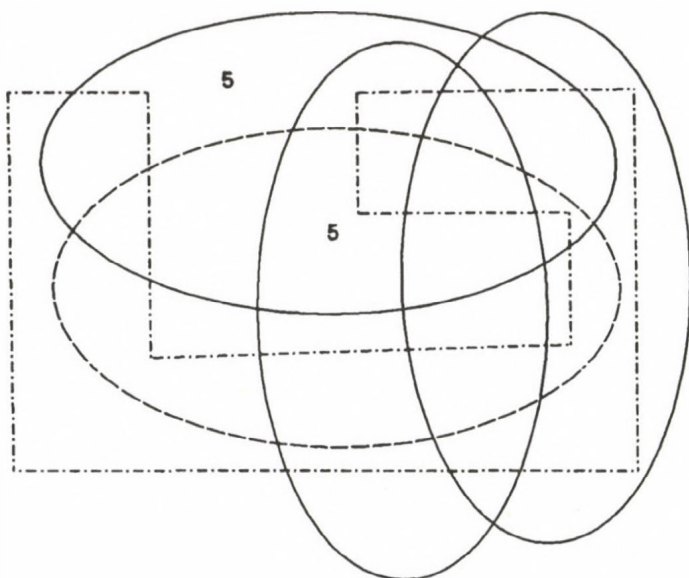


21. ábra



22. ábra

len feszített (és így a 10.5. Lemma szerint egyetlen konvex) diagrammal sem. Mivel az ábrán látható Venn-diagramnak nincs 6-lapja, így azonnal adódik állításunk. Még általánosabban a következő állítás igaz: minden $6 \leq n$ -re létezik olyan közös, nem minimális n -Venn-diagram, amely nincs közös osztályban egyetlen feszített (és így egyetlen konvex) diagrammal sem.



23. ábra

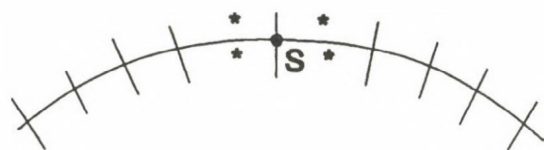
10.7. Tétel. Minden n pozitív egész számra létezik egy közös, nem minimális $V(\mathcal{F})$ n -Venn-diagram, amelynek nincs k -lapja, ha $k > 5$.

Bizonyítás. A bizonyítás indukcióval történik. A tétel nyilván igaz, ha $n = 1$. Egy, a tétel állításánál kissé erősebb állítást bizonyítunk be. Azt mutatjuk meg, hogy minden n -re létezik egy olyan $V(\mathcal{F})$ n -Venn-diagram, amely kielégíti a következő három feltételt:

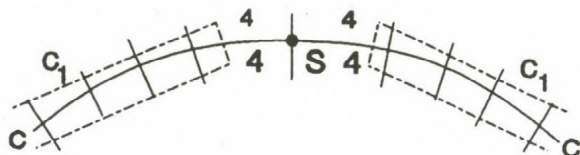
- (1) A $V(\mathcal{F})$ diagramban nincs k -lap, ha $k > 5$.
- (2) A $V(\mathcal{F})$ diagramban az 5-lapok száma kevesebb mint az összes lap számának negyede.
- (3) A $V(\mathcal{F})$ diagram közös n -Venn-diagram, egy $(n - 1)$ -Venn-diagram kiterjesztése.

Ha $n < 5$, akkor nagyon könnyű szerkeszteni olyan n -Venn-diagramot, amely kielégíti az (1)–(3) feltételt. Például a 23. ábra egy olyan közös 5-Venn-diagram, amelyben összesen két 5-lap van.

Tegyük fel, hogy $V_p = V(\mathcal{F})$ egy olyan közös, nem minimális n -Venn-diagram, $n = p \geq 5$, amely kielégíti (1)–(3) feltételt. Mivel V_p nem minimális, ezért létezik egy olyan C görbe, amelynek az elhagyása a V_p diagramból egy V_{p-1} $(n - 1)$ -Venn-diagramot eredményez. A C görbén található egy olyan S szögpontja a $V(\mathcal{F})$ Venn-diagramnak, amely a V_p diagram négy olyan lapjának határán van, amely



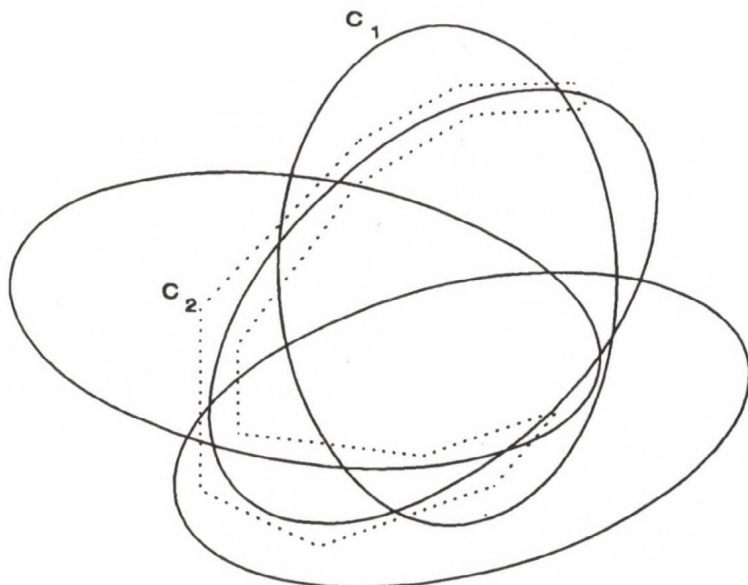
24. ábra



25. ábra

lapok mind 3- vagy 4-lapjai a diagramnak. Ez teljesül a (2) indukciós feltétel miatt. A 24. ábra ezt illusztrálja. Szerkesztünk egy $V_{p+1} = V(\mathcal{F}_{p+1})$ közöséges, nem minimális $(p + 1)$ -Venn-diagramot úgy, hogy a V_p Venn-diagramhoz hozzáadunk egy C_1 Jordan-görbét, amelyet a következőképpen szerkesztünk meg: A C_1 görbe követi a C görbét, a C görbe mindkét oldalán. Így minden k -lapot a C görbe mentén – a négy *-gal jelölt lap kivételével – a C_1 görbe kettévág, mégpedig egy 4-lapra, amely a C és a C_1 görbék között keletkezik, és egy k -lapra, amely a C_1 görbén kívül jön létre. A C_1 görbe az S szögpont mindkét oldalán, átlósan keresztülmetszi a C görbét, ahogy ez a 25. ábrán látható. Így maximum négy új 5-lapot kapunk. Ez abban az esetben lesz, ha a 24. ábrán *-gal jelölt lapok mindegyike 4-lap volt. Jegyezzük meg, hogy minden új 5-lap, egy 3-lapot is eredményez, ami biztosítja a 7.7. Tételben bizonyított arány teljesülését; azaz a 3-lapok száma az 5-lapok számánál pontosan 8-cal több. A V_{p+1} Venn-diagram nyilvánvalóan kielégíti (1)–(3) feltételt, biztosítva az indukciós bizonyítás működését. ■

Jegyezzük meg, hogy a 10.7. Tétel azt állítja, hogy (ötnél nagyobb) akármilyen nagy n egész számhoz található olyan közöséges, nem minimális n -Venn-diagram, amelyben minden lapot maximum öt különböző görbe íve határol. Ez azt is jelenti, hogy az n -Venn-gráfban minden szögpont foka maximum öt. Ilyen különleges diagramoknak a létezése meglepetés volt a témával foglalkozó kutatók számára. Mint később látni fogjuk, ha $n < 5$, akkor minden közöséges n -Venn-diagram egy osztályban van egy konvex (és így egy feszített) Venn-diagrammal. Mint láttuk, minden $5 < n$ -re létezik egy közöséges, nem minimális n -Venn-diagram, amely nincs közös osztályban egyetlen feszített (és így konvex) Venn-diagrammal sem. Ezért az $n = 5$ eset különleges figyelmet érdemel. A 26. ábra egy olyan közöséges, minimális 5-Venn-diagramot ábrázol, amely feszített diagram, de nincs egy osztályban egyetlen konvex diagrammal sem. Ezt az állítást könnyen beláthatjuk,



26. ábra

hiszen az ábrán C_1 -gyel és C_2 -vel jelölt görbék, egy a konvexitást kizáró konstrukciót alkotnak. Később megmutatjuk, hogy minden közösleges 5-Venn-diagram egy osztályban van egy feszített diagrammal.

11. Közösleges, nem minimális 5-Venn-diagramok

A 11. és 12. fejezetben megválaszoljuk Grünbaum 5.4. Kérdését, 5.5. és 5.6. Sejtését [43], [15]. Jegyezzük meg, hogy az 5.4. Kérdésre csak részleges választ adunk. Módszereink elvileg lehetővé teszik a kérdés megválaszolását, de $5 < n$ -re az eljárás hosszadalmas és körülményes lenne. A gömbi 5-Venn-diagramok számát megadjuk, de a közösleges síkbeli 5-Venn-diagramok száma meglehetősen sok (60 és 640 közé becsüljük), ezért ezt a nem nehéz, és nem is érdekes, de hosszadalmas eljárást soha nem végeztük el.

11.1. Lemma. *Egy közösleges $V(\mathcal{F})$ n -Venn-diagram akkor és csak akkor nem minimális, ha a $D(\mathcal{F})$ Venn-gráfban van egy övbéli párosítás, amely egy 1-faktor⁹.*

Bizonyítás. A 7.9. Tétel szerint a $D(\mathcal{F})$ gráf egy maximális páros gráf, amely kielégíti a párosítási feltételt. Ha a C görbe olyan, hogy elhagyva a $V(\mathcal{F})$ n -Venn-diagramból, egy $V(\mathcal{F}')$ $(n - 1)$ -Venn-diagramot kapunk, akkor a C görbe által

⁹Egy G gráfban lévő élek egy K halmazát 1-faktornak nevezzük, ha a gráf minden szögpontja végpontja egy K -beli élnek, és bármely két különböző K -beli élnek nincs közös szögpontja.

meghatározott öv élei egy 1-faktort alkotnak. Ha a $D(\mathcal{F})$ gráfban van egy övbeli 1-faktor, akkor az övet meghatározó C görbét el lehet hagyni a diagramból, a megmaradó görbesereg egy $(n - 1)$ -Venn-diagram. ■

11.2. Tétel. (a) *Tizenegy különböző közönséges, nem minimális gömbi 5-Venn-diagram létezik. Ezeket a 27. és a 28. ábra mutatja.*

- (b) *A tizenegy diagram mindegyike egy osztályban van egy feszített síkbeli diagrammal. Öt közülük nincs egy osztályban egyetlen konvex diagrammal sem. Ezek a diagramok a 28. ábrán láthatók.*
- (c) *A tizenegy gömbi diagram sztereografikus vetítése a síkra tizenkét nem izomorf, közönséges, nem minimális, konvex, síkbeli 5-Venn-diagramot ad. Tíz diagram öt háromszöggel, a megmaradó két diagram pedig öt négyszöggel szerkeszthető meg. Ezeket a 29. és a 30. ábra mutatja.*
- (d) *A tizenkét síkbeli konvex diagram közül pontosan kettő öt hasonló ellipszissel rajzolható meg a síkon. A két diagram ugyanabba az osztályba tartozik. Ezeket a 31. ábrán láthatjuk.*

A 11.2. és a 12.2. Tétel véglegesen helyesbíti azt a téves állítást, amelyet Venn [64] állítása indított el, illetve amit még Grünbaum [38] is igaznak fogadott el közönséges, nem minimális diagramok esetére.

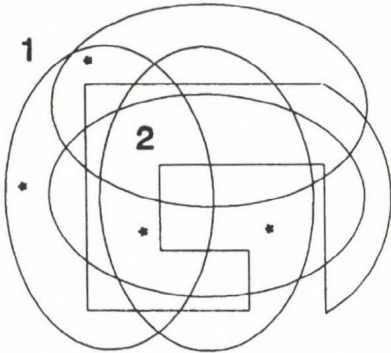
Bizonyítás. A tétel bizonyítását lemmák és megjegyzések sorozatára bontjuk. Először az (a) állítást látjuk be.

A következő fejezet 12.1. Tételében megmutatjuk, hogy egyetlenegy $V(\mathcal{F}_4)$ gömbi közönséges 4-Venn-diagram létezik. A 2. ábrán $V(\mathcal{F}_4)$ látható. Mivel minden nem minimális n -Venn-diagram egy $(n - 1)$ -Venn-diagram kiterjesztéseként jön létre egy megfelelő görbe hozzáadásával, így ahhoz, hogy belássuk (a)-t, elég meghatározni az összes olyan görbét, amely kiterjeszti a $V(\mathcal{F}_4)$ diagramot. Winkler 9.3. Tétele miatt ehhez elég meghatározni a $V(\mathcal{F}_4)$ diagramhoz tartozó egyetlen $D(\mathcal{F}_4)$ gömbi 4-Venn-gráf összes Hamilton-körét.

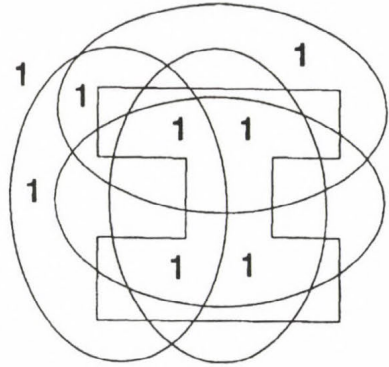
11.3. Lemma. *Gömbi szimmetriától eltekintve, a $D(\mathcal{F}_4)$ gömbi 4-Venn-gráfnak tizenegy különböző Hamilton-köre van.*

Bizonyítás. A bizonyítás vázlata a következő: Először egy kitüntetett külső lappal meghatározzuk a $D(\mathcal{F}_4)$ Venn-gráf egy síkbeli $D_s(\mathcal{F}_4)$ rajzát. Mivel a $D(\mathcal{F}_4)$ gráf 3-összefüggő, ezért Whitney 3.10. Tétele miatt, a $D_s(\mathcal{F}_4)$ rajz (izomorfizmustól eltekintve) egyértelmű. Ezután, forgatási szimmetriától eltekintve, a $D_s(\mathcal{F}_4)$ gráfban meghatározzuk az összes Hamilton-kört.

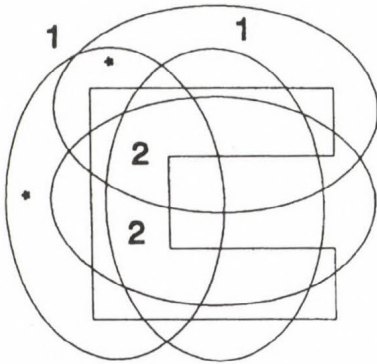
Végül felhasználva azt a tényt, hogy a $D_s(\mathcal{F}_4)$ gráf azon két lapja, amelyben minden szögpont foka négy ekvivalens a gömbön, azonosítjuk azokat a Hamilton-köröket, amelyek ekvivalensek a gömbi szimmetriában.



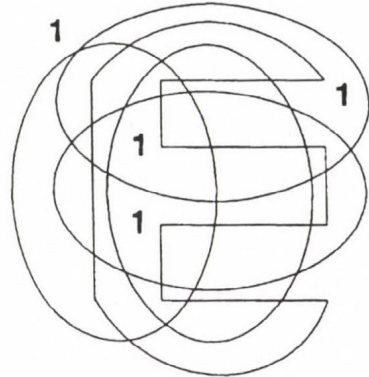
Bohóc



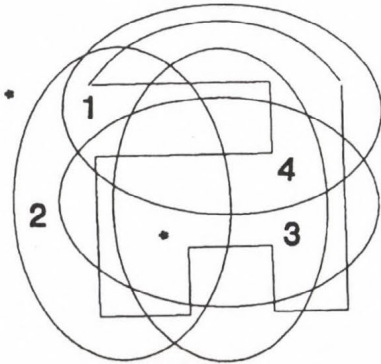
Gyémánt



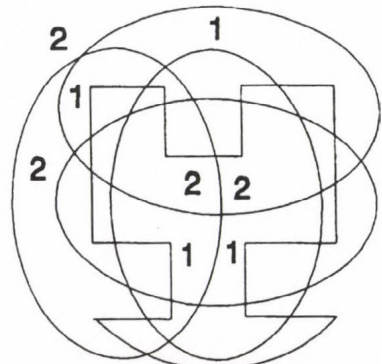
C



E

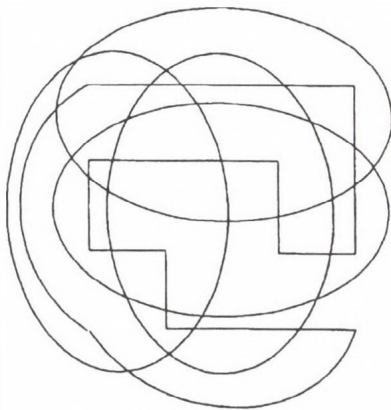
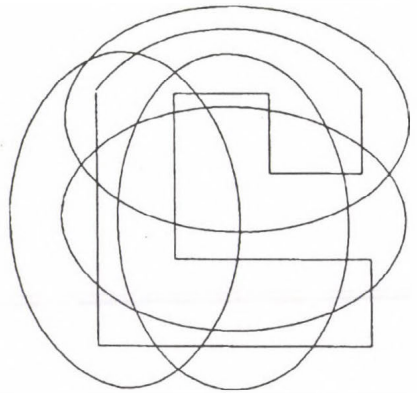
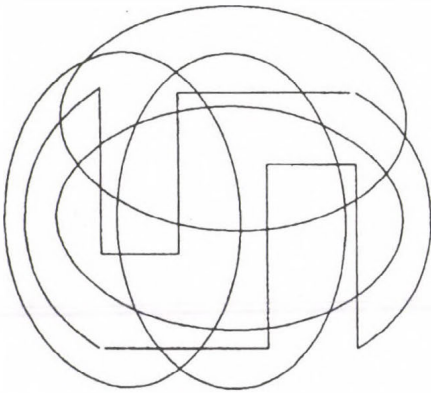
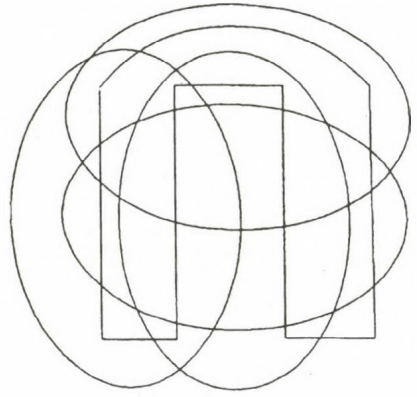
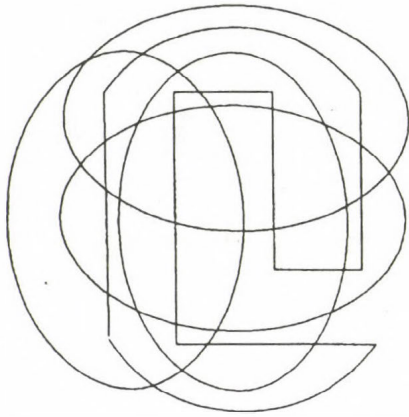


Szék

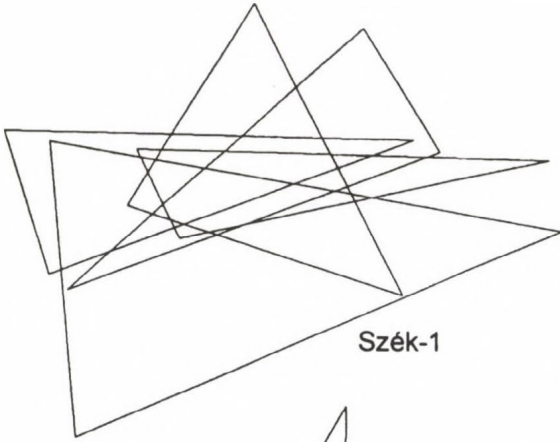


Rögbi-kapu

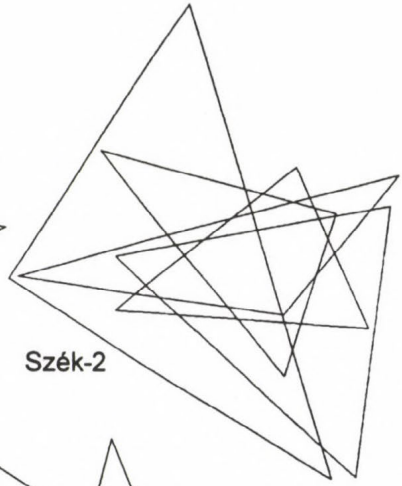
27. ábra



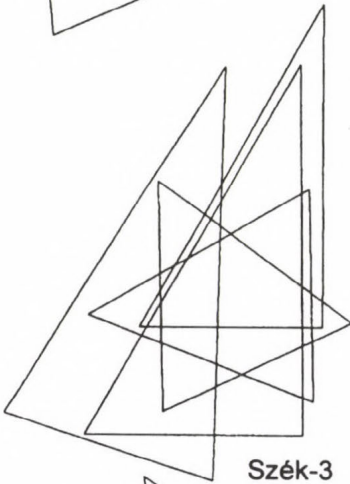
28. ábra



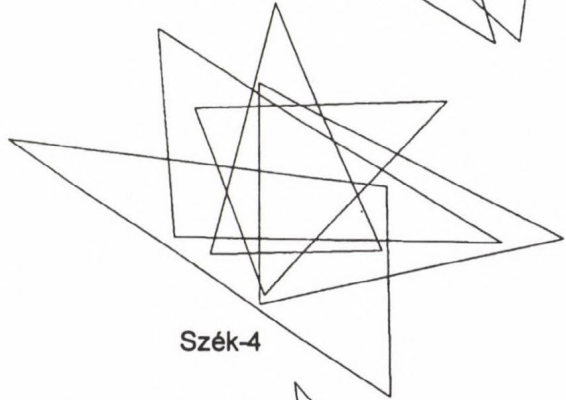
Szék-1



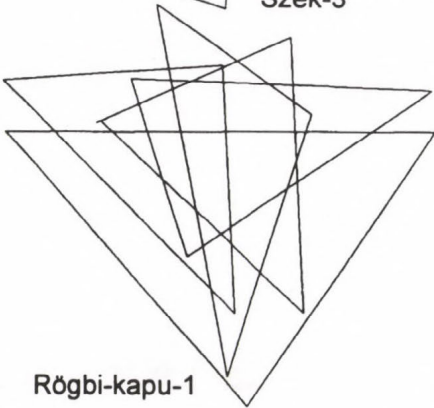
Szék-2



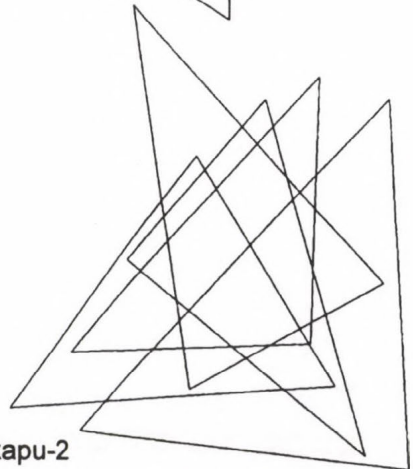
Szék-3



Szék-4

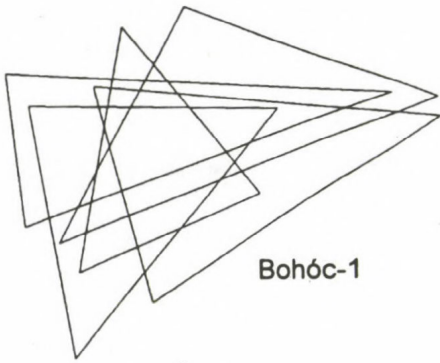


Rögbi-kapu-1

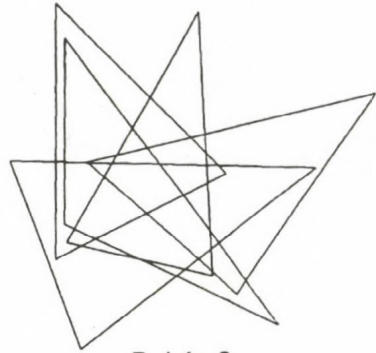


Rögbi-kapu-2

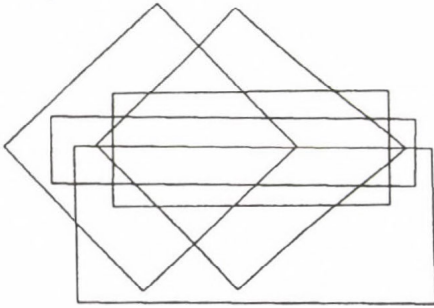
29. ábra



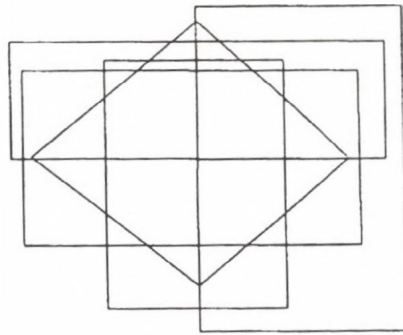
Bohóc-1



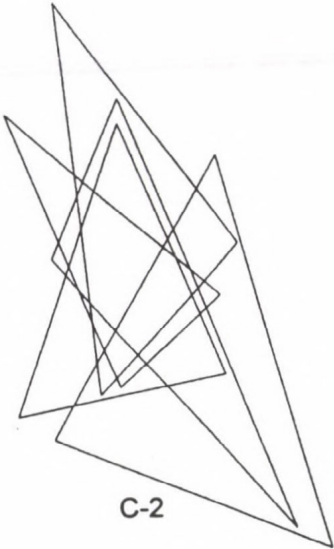
Bohóc-2



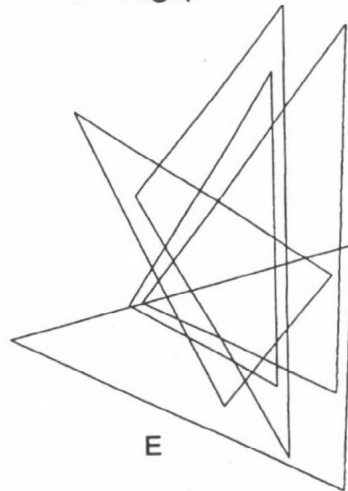
Gyémánt



C-1

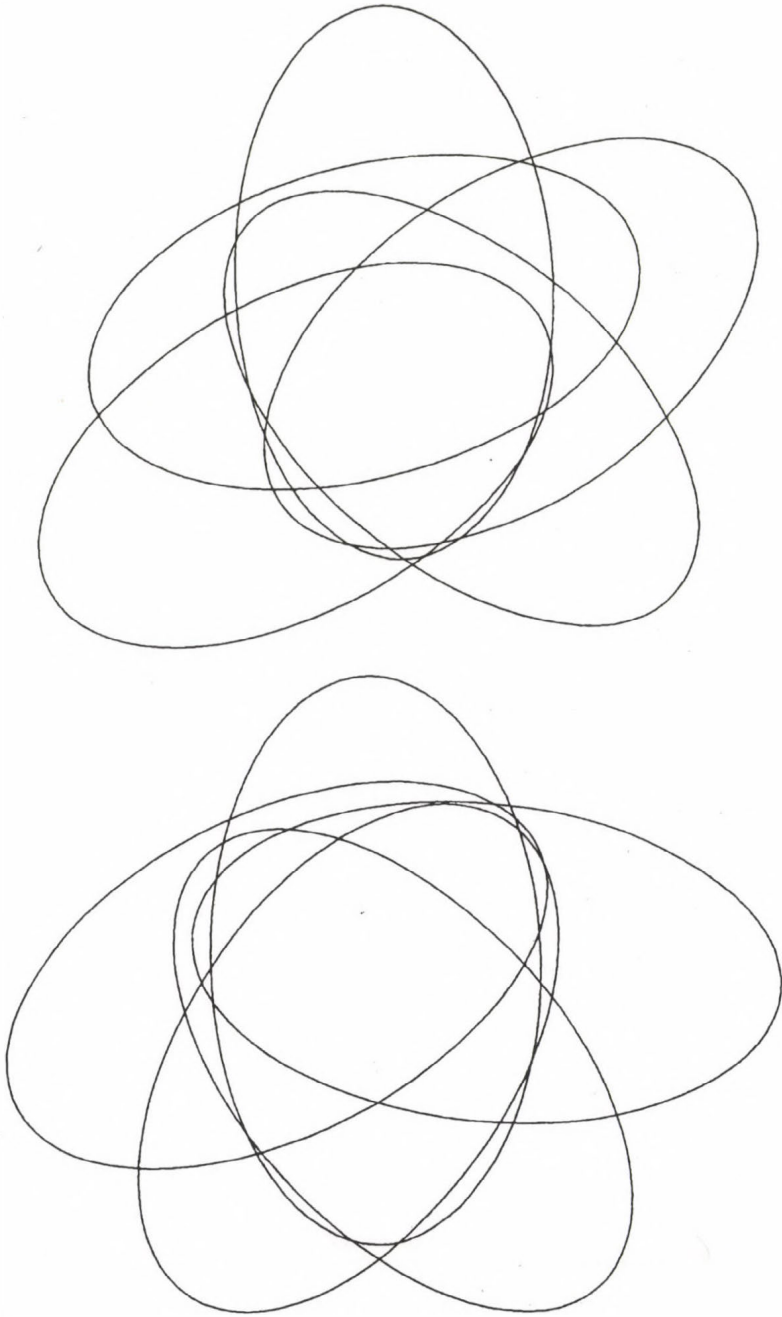


C-2



E

30. ábra



Bohóc-1 és 2

31. ábra

Annak belátása, hogy a 11.3. Lemmában kapott tizenegy Hamilton-kör tizenegy különböző, közönséges, nem minimális, gömbi 5-Venn-diagramot ad, nem igényel különösebb ötletet. Ha minden egyes diagramban megszámloljuk az 5-lapok számát, valamint minden görbe metszéseinek számát minden más, a diagramba tartozó görbével, akkor azonnal kapjuk, hogy a tizenegy 5-Venn-diagram különböző. Ezzel beláttuk a tétel (a) állítását.

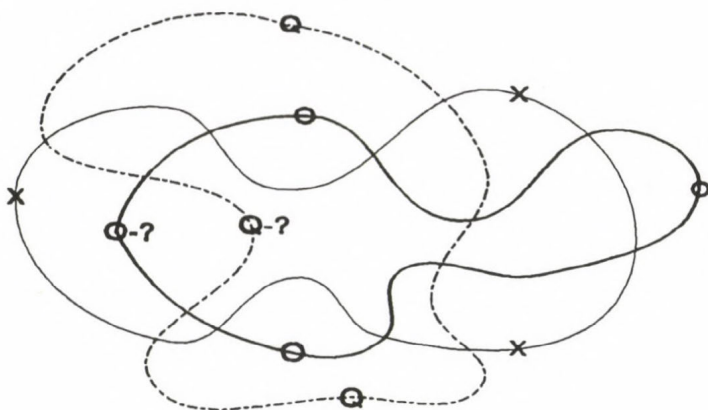
Mivel a 27. és a 28. ábrán minden diagram feszített, hogy belássuk a tétel (b) részét, csak azt kell megmutatnunk, hogy a 28. ábrán látható diagramok nincsenek egy osztályban egyetlenegy konvex diagrammal. Ehhez csak azt kell észrevennünk, hogy a 28. ábra minden diagramjában a Hamilton-kör és legalább egy ellipszis egy, a konvexitást kizáró konstrukciót formál. Ezzel beláttuk a (b) állítást is.

Rátérünk a (c) állítás bizonyítására. Az nyilvánvaló, hogy különböző gömbi Venn-diagramok nem adhatnak izomorf síkbeli Venn-diagramokat. A 10.5. Lemma szerint, ha egy közönséges Venn-diagram konvex, akkor feszített is, ezért elég a feszített diagramokat, azaz azokat a diagramokat vizsgálni, amelyek külső lapja egy 5-lap. A 27. ábrán minden Venn-diagramban minden 5-lapot egy csillaggal vagy egy számmal jelöltünk meg. Ugyanabban a diagramban ugyanazzal a számmal megjelölt 5-lapok izomorf Venn-diagramot adnak a síkban, ha a síkbeli Venn-diagramot úgy kapjuk, hogy az azonos számmal megjelölt 5-lapokat használjuk a diagram külső lapjának. Ha a 27. ábra egy Venn-diagramját úgy rajzoljuk a síkba, hogy az egyik csillaggal megjelölt 5-lapját használjuk külső lapnak, akkor a síkgráfban a Hamilton-kör legalább az egyik ellipszissel egy Grünbaum konstrukciót alkot, ezért a síkdiagram nem lesz konvex. Az utóbbi állítást egyszerű ellenőrizni az ábrán.

Jegyezzük meg, hogy a 29. és a 30. ábrán látható összes diagramot (kettő kivételével) öt háromszöggel rajzoltunk meg. A megmaradó két diagram pedig öt négyszöggel szerkesztett. Megmutatjuk, hogy az utóbbi két diagram nem rajzolható meg háromszögekkel. Ez nyilvánvaló a „Gyémánt” nevű diagramról, hiszen a Hamilton-kör az egyik ellipszist nyolcszor metszi, míg két háromszög egymást maximum hatszor metszheti.

A 27. ábrán, a „C” diagramban van három görbe, amelyek úgy metszik egymást, ahogy azt a 32. ábra mutatja. Ha a három görbét három konvex sokszöggel rajzolnánk meg, akkor a három sokszögnek lenne egy csúcsa az O -val, Q -val és X -szel megjelölt görbeszakaszokban. (A különböző sokszögek csúcsait különböző betűkkel (O , Q , X) jelöltük meg.) Ez tényleg teljesül, mert ha két konvex (vagy akár nem konvex) sokszög egymásután kétszer metszi egymást, akkor a két metszéspont között egy csúcspontnak kell lennie. A két O -? és a Q -? jelekkel megjelölt szakaszok közül az egyikben kell lennie egy csúcsnak. De ez a csúcs vagy a negyedik csúcs lenne az O görbén, vagy egy nem konvex szöveget adna a Q -val jelölt görbén. Ez mutatja, hogy a két diagram nem rajzolható meg háromszögekkel. Ezzel befejeztük a tétel (c) állításának bizonyítását.

A (d) állítás belátásához jegyezzük meg, hogy a 27. ábrán látható összes diagramban – egy kivétellel („Bohóc”) – található legalább egy olyan ellipszis, amely



32. ábra

több mint négyszer metszi a Hamilton-kört. Így ezek a diagramok nem rajzolhatók meg ellipszisekkel, hiszen két ellipszis maximum négyszer metszheti egymást. A 31. ábrán a „Bohóc” nevű diagram két nem izomorf konvex síkdiagramját az úgynevezett „Drawperfect 1.1” komputer program segítségével öt egybevágó ellipszissel rajzoltuk meg. A következő öt egyenlet, öt olyan egybevágó öt ellipszisnek az egyenlete, amely például egy közösleges, síkbeli, konvex, nem minimális 5-Venn-diagram görbéit határozza meg. (A másik diagramhoz nem nehéz hasonló egyenleteket találni.) Az első ellipszis egyenlete; $x^2 + y^2/4 = 1$. A megmaradó négy egyenletet az első ellipszis transzformációival adjuk meg. Az első szám, az alábbi rendezett hármasokban az x irányba történő, a második szám az y irányba történő transzformáció hosszát jelöli. A harmadik szám pedig a forgatás fokokban mérve; $(-26, 16, 95)$, $(-70, -145, 127)$, $(28, -83, 32)$ és $(60, -31, 43)$. A vízszintes és függőleges transzformációkat a 0,009 számmal kell megszorozni.

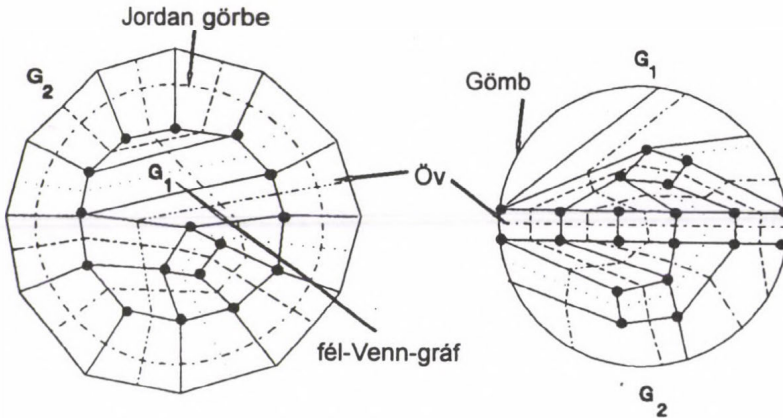
Ezzel a 11.2. Tétel bizonyítását befejeztük. ■

A 11.2. Tétel választ ad Grünbaum 5.4. Kérdésére közösleges, nem minimális, gömbi és közösleges, nem minimális, konvex, síkbeli 5-Venn-diagramok esetében. A 29. és a 30. ábrán látható Venn-diagramok tizenkét különböző ellenpéldát adnak Grünbaum 5.5. Sejtésére. Egy másik ellenpéldát mutatunk a 12.2. Tételben. Ugyancsak itt láthatjuk, hogy nincs több ilyen ellenpélda. Meglepetést okozott az a tény, hogy a 30. ábrán látható „C-1” és „Gyémánt” konvex diagram nem rajzolható meg háromszögekkel. A „C-1” diagram nagyobb meglepetés volt, mert itt az akadály nem a különböző görbék metszéspontjainak száma, hanem a görbék egymáshoz viszonyított topológikus helyzete volt. A 28. ábra öt olyan közösleges, nem minimális, síkbeli 5-Venn-diagramot ad, amely nincs egy osztályban egyetlen konvex Venn-diagrammal sem. A 29. és a 30. ábra, tíz ellenpéldával, negatív választ ad Grünbaum 5.6. Sejtésére. A 12.2. Tételben megmutatjuk, hogy ellentétben a

közösleges, nem minimális, konvex, síkbeli 5-Venn-diagramok esetével, minden közösleges, minimális, konvex, síkbeli 5-Venn-diagram öt egybevágó ellipszissel szerkeszthető. Végül a legnagyobb meglepetés a 31. ábra; két olyan közösleges, nem minimális, konvex, síkbeli 5-Venn-diagram, öt egybevágó ellipszissel, amelyeknek „nem szabadott léteznie”.

12. Közösleges, minimális 5-Venn-diagramok

A közösleges, nem minimális Venn-diagramok szerkesztésének általunk kidolgozott módszere [13] fél-Venn-gráfokat használ. Először megszerkesztjük az összes fél-Venn-gráfot a síkban, majd a gömbön meghatározzuk az összes lehetséges párt, kiválasztjuk azokat, amelyek „összeparosíthatók”, végül ellenőrizzük, hogy a kapott gráf egy Venn-gráf. A Venn-gráfból azután a Venn-diagram megrajzolása már nagyon egyszerű. Az 33. ábra az első két lépést mutatja szematikusan. A módszer illusztrálására megmutatjuk az $n = 3$ és $n = 4$ eseteket. (Az $n = 1$ és 2 esetek triviálisak.)



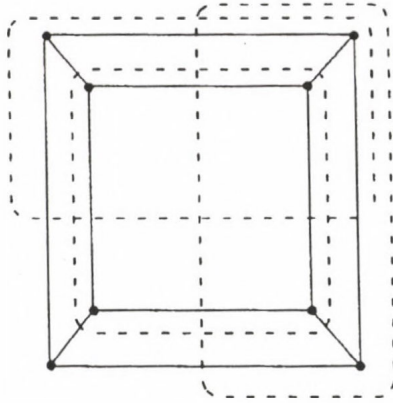
33. ábra

Ha $n = 3$, akkor három övbeli párosítás van és teljesül, hogy

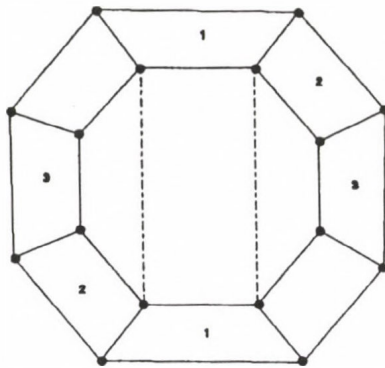
$$|M_1| = |M_2| = |M_3| = 4.$$

A $D(\mathcal{F})$ Venn-gráf mind a tizenkét éle az övben található, így a G_1 és a G_2 fél-Venn-gráfok a megmaradt 4-lapok. Így egyetlenegy $D(\mathcal{F})$ gráf van három görbével, ezért egyetlenegy közösleges $V(\mathcal{F})$ 3-Venn-diagram létezik, ami a 34. ábrán látható.

Ha $n = 4$, akkor a 7.10. Tétel után következő megjegyzésekből következik, hogy $6 \leq |M_i| \leq 8$ minden $1 \leq i \leq 4$ indexre. A 7. fejezet (***) egyenlete pedig



34. ábra



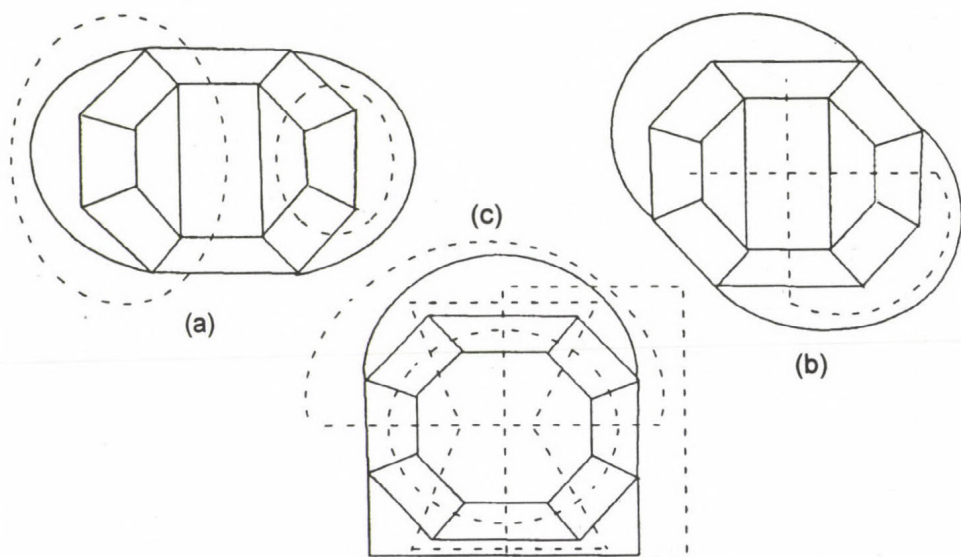
35. ábra

azt mondja, hogy $6x_6 + 8x_8 = 28$ és $x_6 + x_8 = 4$, ahol x_6 és x_8 a 6, illetve a 8 hosszú övbeli párosítások száma. Az egyenletrendszernek az egyetlen megoldása $x_6 = x_8 = 2$.

Megkonstruáljuk az összes fél-Venn-gráfot. Egy nyolc hosszúságú övbeli párosításból indulunk ki. Az övnek huszonnégy éle és tizenhat szögpontja van. A $D(\mathcal{F})$ Venn-gráfban az élek száma huszonnnyolc, így az övben lévő éleken kívül még két él található mindkét fél-Venn-gráfban. Az egyetlen lehetséges fél-Venn-gráf a 35. ábrán látható.

Szimmetria miatt csak három különböző párosítása van a gömbi fél-Venn-gráfnak önmagával a gömbön. Összerakhatjuk az 1-es lapot az 1-es lappal, az 1-es lapot a 2-es lappal vagy az 1-es lapot a 3-as lappal. Más eset nincs. A kapott Venn-gráfok a 36. ábrán láthatók. Az (a)-val és (b)-vel jelölt gráfok nem adnak

Venn-diagramot, mert az (a) gráfban haladó görbék közül kettő diszjunkt, míg a (b) gráfban haladó egyik görbe metszi önmagát. Könnyű ellenőrizni, hogy a (c) gráf egy gömbi Venn-diagram. A diagramnak van 3- és 4-lapja. Ezeket használva a síkban külső lapoknak, két nem izomorf síkbeli közöséges 4-Venn-diagramot kapunk.



36. ábra

12.1. Tétel. Egyetlenegy közöséges gömbi és két síkbeli nem izomorf 4-Venn-diagram létezik. A gömbi diagram két izomorf változatát a 2. ábra mutatja.

Jegyezzük meg, hogy az $n = 3$ és az $n = 4$ eseteket másképpen is elvégezhettük volna, hiszen ezek nem minimális diagramok. Mivel az $n = 5$ eset sokkal hosszabb és komplikáltabb, ezért választottuk a fenti két esetet az eljárás részletes bemutatására.

Az $n = 5$ esetet csak vázlatosan mutatjuk meg. (Az érdeklődő olvasó részére a részletes okoskodást szívesen rendelkezésre bocsátjuk [15].) Az eljárás teljesen hasonló a bemutatott esetekhez, azzal a különbséggel, hogy a nem minimális Venn-diagramokat nem kell külön tárgyalnunk, hiszen azokra az eljárást a 11. fejezetben láttuk.

Ha $n = 5$, akkor a $D(\mathcal{F})$ 5-Venn-gráfban teljesülnek a következő feltételek: $c = 32$, $e = 60$, $8 \leq |M_i| \leq 16$, minden $1 \leq i \leq 5$ indexre. Továbbá teljesül, hogy

$$(1) \quad x_8 + x_{10} + x_{12} + x_{14} + x_{16} = 5,$$

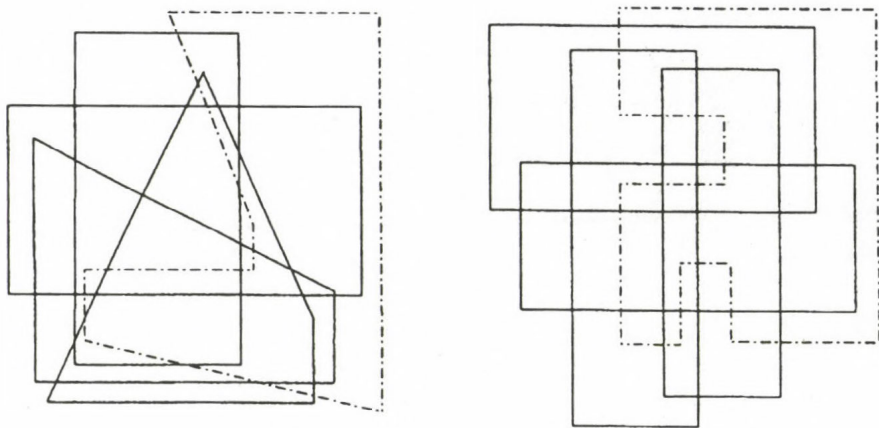
$$(2) \quad 8x_8 + 10x_{10} + 12x_{12} + 14x_{14} + 16x_{16} = 60.$$

(Az x_i az i hosszú övbeli párosítások számát jelöli, $8 \leq i \leq 16$.) Az (1)–(2) egyenletrendszer összes nem negatív egész megoldását a következő táblázat tartalmazza:

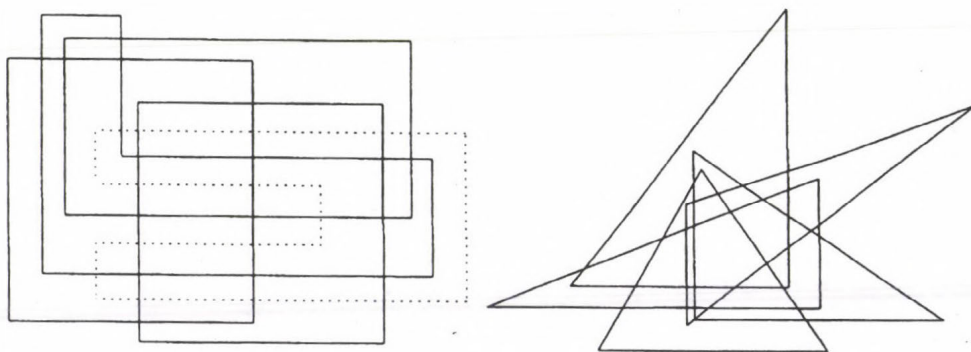
Övbeli párosítás hossza:	8	10	12	14	16
	2	0	1	0	2
	1	2	0	0	2
	2	0	0	2	1
	1	1	1	1	1
	0	3	0	1	1
	1	0	3	0	1
	0	2	2	0	1
	1	1	0	3	0
	1	0	2	2	0
	0	2	1	2	0
	0	1	3	1	0
	0	0	5	0	0

A táblázatban vízszintes vonal választja el azokat az eseteket, amelyeknél a leghosszabb övbeli párosítás hossza megváltozik.) Mint látjuk három eset van. A leghosszabb övbeli párosítás hossza 16, 14 vagy 12. A 11.1. Lemma szerint azok az esetek, amelyekben az övbeli párosítás hossza 16, nem minimális esetek. Ezt az esetet a 11. fejezetben megtárgyaltuk. Így csak két különböző eset maradt hátra. Az összes fél-Venn-gráfot három módon lehet megszerkeszteni hasonló logikai okoskodással, ahogy az $n = 4$ esetben tettük. Lehetséges az összes fél-Venn-gráfot kézzel megrajzolni vagy lehet írni egy komputer programot, amely megrajzolja ezeket. Az $n = 5$ esetre mi mindhárom módot végigjártuk. Mindhárom eljárásban felhasználtuk a következő, a 7. fejezetben bebizonyított tényeket: a Venn-gráfban minden szögpontra foka minimum három és maximum öt. Minden lap egy 4-lap. Minden $k \leq n$ nem negatív egész számra k darab görbe által meghatározott tartományban (azaz k görbe belsejének vagy külsejének metszete) a szögpontok száma mindig 2^{n-k} . Mindhárom mód hosszadalmas, komplikált és nem nagyon szórakoztató.

A leghosszabb övbeli párosítás hossza tizennégy. Anélkül, hogy a részleteket ismertetnénk a következőket találtuk. A fenti táblázat szerint négy különböző módon lehet a leghosszabb övbeli párosítás hossza tizennégy. Meglepő módon csak három esetre találtunk megfelelő közönséges, minimális 5-Venn-diagramot, nem létezik olyan 5-Venn-diagram, amelyben a három övbeli párosítás hossza tizennégy. Négy olyan Venn-diagramot találtunk, amely egy osztályban van egy konvex diagrammal. Három közülük egy osztályban van a Grünbaum által talált négy diagram közül a megmaradt hárommal, amelyeket (b), (c) és (d) jelöl a 6. ábrán. A negyedik diagram egy új diagram, amelyet a 39. ábra mutat. Továbbá találtunk még négy diagramot, amelyek nincsenek egy osztályban egyetlen konvex diagrammal sem. Ezek a 26., 37., illetve a 38. ábrán találhatóak. Jegyezzük meg, hogy mindegyik ábrán mindegyik diagram feszített. A 39. ábrán látható diagram pedig öt



37. ábra

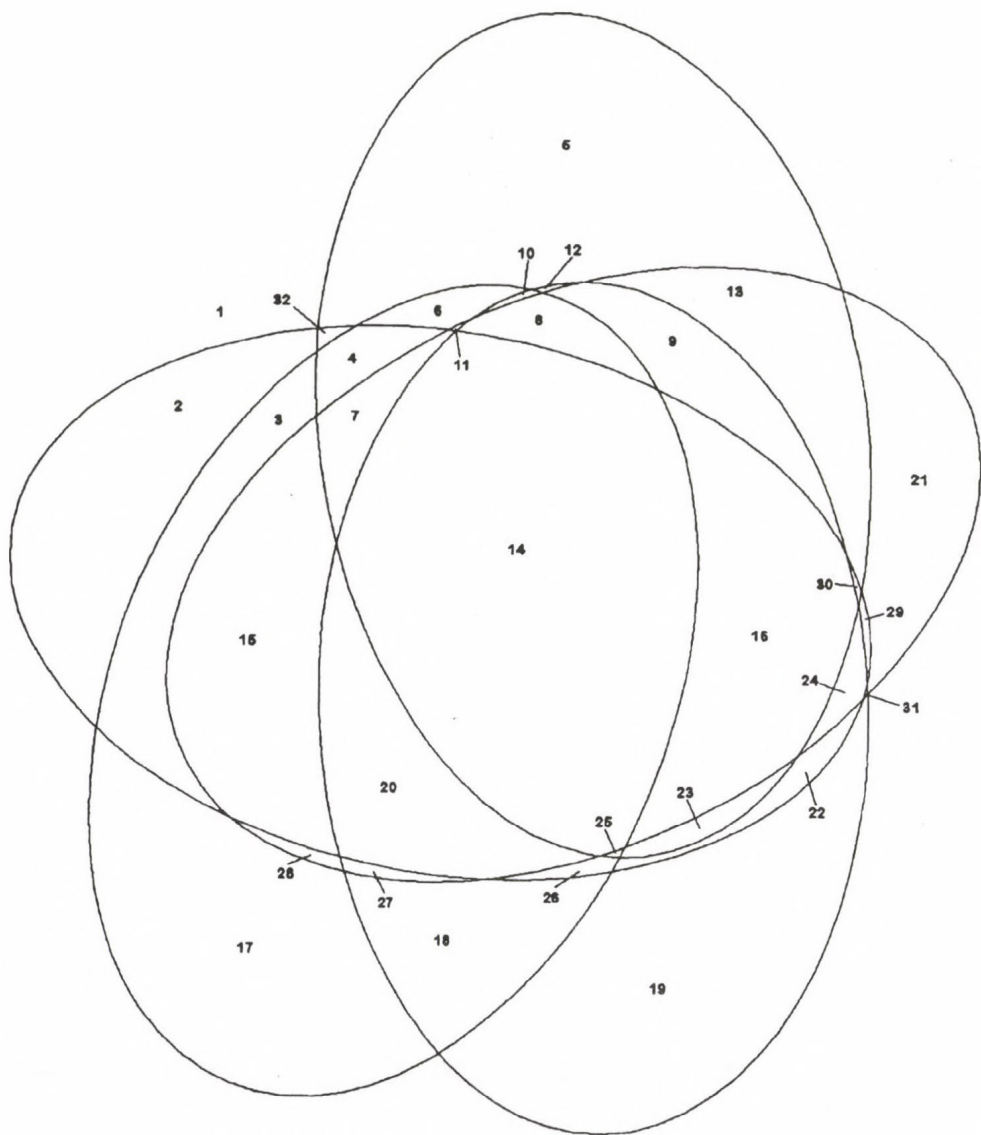


38. ábra

39. ábra

háromszöggel és öt egybevágó ellipszissel szerkesztett. Az öt egybevágó ellipszissel szerkesztett diagram a 40. ábrán látható. A 26., 37., és a 38. ábrán látható diagramok nincsenek egy osztályban egyetlen konvex diagrammal. Ez azonnal adódik, ha észrevesszük, hogy mindegyikben van egy a konvexitást kizáró konstrukció.

A leghosszabb övbeli párosítás hossza tizenkettő. Ha a leghosszabb párosítás hossza tizenkettő, akkor minden övbeli párosítás hossza tizenkettő. Az előző esethez hasonlóan, nem írjuk le a részleteket, ezek [15]-ben találhatóak meg. Ebben az esetben egyetlenegy Venn-diagramot létezik. Az így nyert közönséges, minimális 5-Venn-diagram egy osztályban van a Grünbaum által talált egyik diagrammal, amelyet a 6. ábrán (a)-val jelöltünk.



40. ábra

12.2. Tétel. *Kilenc különböző közönséges, minimális gömbi 5-Venn-diagram létezik. Ezek közül öt egy osztályban van egy konvex diagrammal. Ezen öt diagram mindegyike egyetlenegy konvex síkbeli diagramot ad. Mind az öt nem izomorf diagram öt egybevágó ellipszissel rajzolható. Egyik közülük különbözik Grünbaum 5.6. Sejtésében meghatározott négy diagramtól. A négy nem konvex diagram mindegyike egy osztályban van egy feszített diagrammal.*

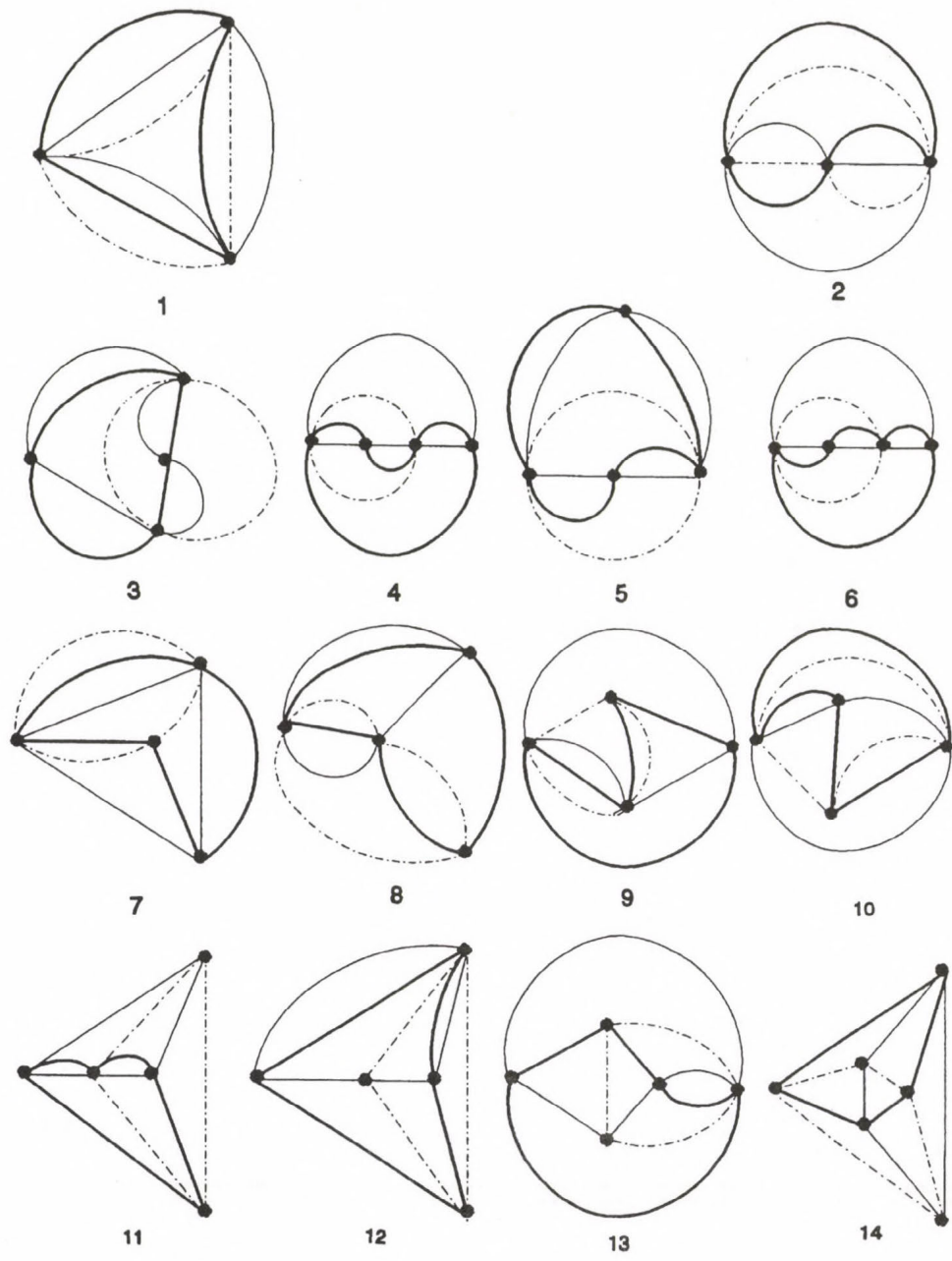
Összefoglalva a 11.2. és a 12.2. Tételeket a következőket kapjuk:

12.3. Következmény. *Húsz közönséges gömbi 5-Venn-diagram létezik. Tizenegy egy osztályban van egy konvex diagrammal. A tizenegy diagram tizenhét nem izomorf konvex síkbeli diagramot ad. Tizenöt konvex diagram öt háromszöggel, kettő pedig öt négyszöggel szerkeszthető meg. Hét diagram öt egybevágó ellipszissel rajzolható meg a síkon. Tíz ellipszisekkel nem szerkeszthető meg. Mind a húsz gömbi diagram egy osztályban van egy feszített diagrammal.*

(Mivel a húsz gömbi diagramnak van 3-, 4- és 5-lapja, ezért legalább háromszor húsz, azaz hatvan, síkbeli nem izomorf közönséges 5-Venn-diagram létezik. Mindegyik diagramban harminckét lap van, ezért maximum hatszáznegyven síkbeli közönséges 5-Venn-diagram van.) A 40. ábrán látható közönséges, minimális, konvex 5-Venn-diagramot (öt egybevágó ellipszissel) Grünbaum nem találta meg. Megtekintve az ábrát láthatjuk, hogy ez nem véletlen. A diagram nem szimmetrikus, néhány lapja (például az ábrán 11, 30 és 31 számokkal jelölt lap) nagyon kicsi. Ezeket nem is lehet lényegesen nagyobbak szerkeszteni egy szabvány papír méretén, még akkor sem, ha ezt valaki kézzel és nem komputer programmal csinálja, ami még nehezíti a feladatot. Aki valaha is próbált öt ellipszist (egybevágó vagy akár nem egybevágó) egymással összerakni tudja, hogy ezt nagyon sok módon lehet csinálni, így biztosan értékeli a feladat nehézségét. Azt is tudja, hogy az összes ilyen diagram megkeresését pedig csak egy matematikailag előre bizonyított eljárás teheti sikeressé.

13. Nem közönséges Venn-diagramok

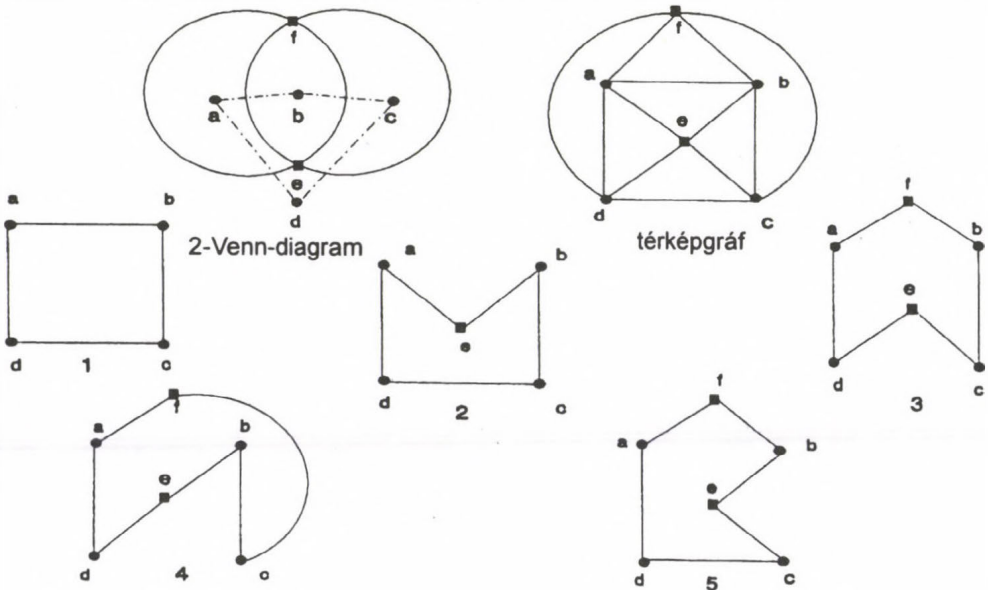
Először megválaszoljuk Grünbaum 5.3. Kérdését. Az itt leírt eljárás ismét elvégezhető akármilyen nagy n egész számra. Mi ezt csak az $n = 3$ esetre mutatjuk meg. Ennek az oka az, hogy már az $n = 3$ esetre is sok diagram létezik, és ezek száma rohamosan nő az n növekedésével. Az eljárás hosszadalmas. A legfontosabb ok pedig az, hogy ezt a kérdést én csak addig tartottam érdekesnek, amíg a kereséssel más geometriailag, illetve topológiailag is érdekes kérdéseket is meg tudtunk oldani. Mint a bevezetésben említettem, Venn-diagramoknak fontos szerepük van automatizált gyártási eljárások tervezésében és végrehajtásában, illetve komputerizált geometriai modellezésben. Azonban csak konvex diagramokra ismertek algoritmusok. Konvex diagramok (nagyon egyszerű és „sima” görbékkel, mint például kör,



41. ábra

ellipszis vagy háromszög, négyszög stb.) geometriai, illetve topológiai jellemzése napjainkban nem csak érdekes különbségei a geometriának, hanem gyakorlatban is alkalmazható eredmények. Az itt közölt bizonyítás egy általam most talált új, egyszerűbb bizonyítás, amit itt közlök először [13].

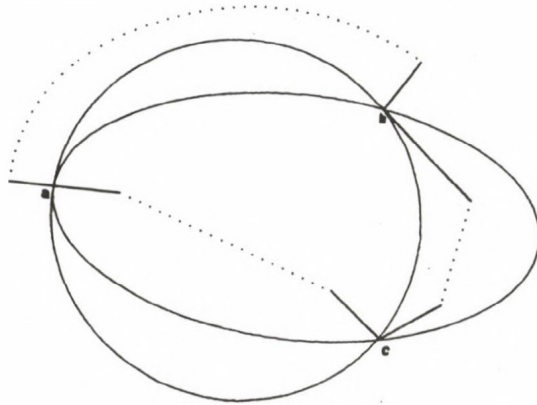
13.1. Tétel. *Hat különböző (közönséges vagy nem közönséges) gömbi 3-Venn-diagram létezik. A hat diagram tizennégy nem izomorf síkbeli 3-Venn-diagramot ad. Ezek a 41. ábrán láthatók. Az ábrán 1-gyel és 2-vel jelölt diagramok minimálisak, a többi (az egyetlen létező) 2-Venn-diagram kiterjesztése. Az ábrán az 1, a 3, az 5, a 7, a 11 és a 14 diagramok a különböző gömbi diagramok. Az utánuk egy sorban következő diagramok ezekkel egy osztályban lévő, a síkban nem izomorf diagramok. A 14-es diagram az egyetlen közönséges 3-Venn-diagram.*



42. ábra

Bizonyítás. Ahhoz, hogy megtaláljuk az összes nem minimális, gömbi 3-Venn-diagramot, a 9.4. Tétel szerint meg kell találnunk az összes olyan (a gömbön különböző) kört a térképgráfban, amely tartalmazza a térképgráf összes régi szögpontját. Ezt az eljárást a 11.2. Tétel bizonyításához hasonlóan végezhetjük el. A különbség az, hogy itt az öt különböző esetet a körben használt régi élek száma szerint különböztetjük meg. (Ez lehet négy, három, két szembenlévő vagy két szomszédos él. A két szembenlévő él két különböző esetet ad.) Ezt az egyszerű eljárást ugyancsak az olvasóra hagyjuk. A térképgráf és a kapott körök a 42. ábrán láthatók. A 42. ábrán az 1 kör a 41. ábrán a 14 diagramot, a 2 kör a 11 diagramot, a 3 kör az 5 diagramot, a 4 kör a 3 diagramot, az 5 kör pedig a 7 diagramot adja. Ezzel megkaptuk az

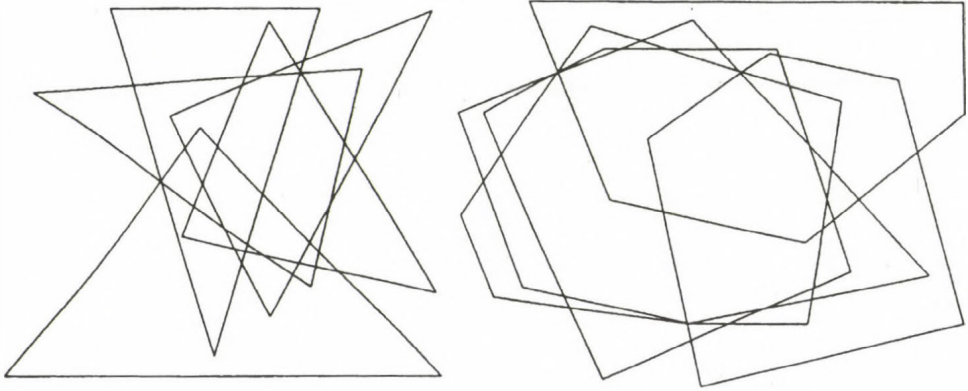
összes nem minimális, gömbi 3-Venn-diagramot. Belátjuk, hogy minimális gömbi 3-Venn-diagram csak egy van. Mivel egy Venn-diagramban egyik görbe sem lehet a másik belsejében, ezért bármely két görbe két pontban átlósan metszi egymást. Ha a diagramban van két görbe, amely pontosan két pontban metszi egymást, akkor ez egy 2-Venn-diagram és így a 3-Venn-diagram nem minimális. Könnyű látni, hogy egy 3-Venn-diagramban két görbe maximum négy pontban metszheti egymást (mivel a lapok száma nyolc).



43. ábra

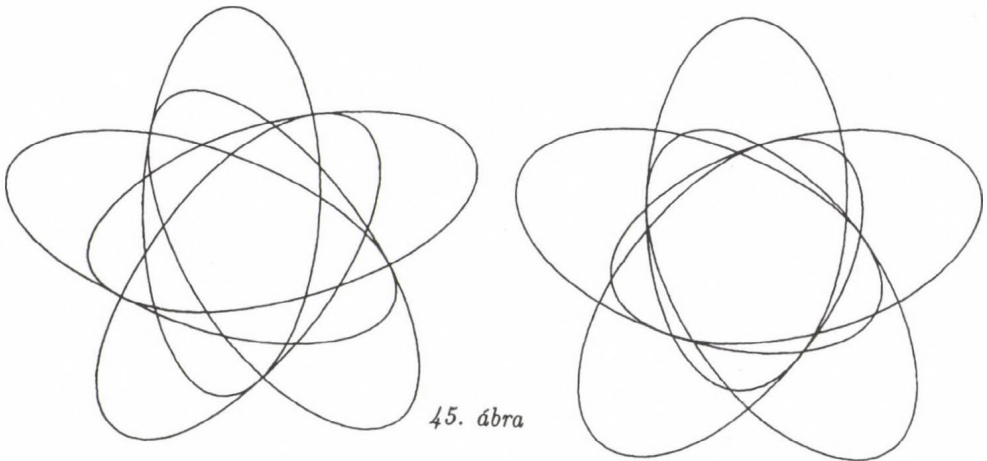
Ha a diagram két görbéje négy pontban metszi egymást, akkor kell lennie két olyan görbének is, amely pontosan kétszer metszi egymást. Valóban, ha a két görbének legalább négy metszéspontja van, akkor ezek legalább hat különböző lapot határolnak körbe. A harmadik görbe a másik két görbét átlósan kell messe két közös érintési pontban. Más metszés több, mint nyolc lapot adna. Tehát csak azt az esetet kell megvizsgálnunk, amikor bármely két görbe pontosan háromszor metszi egymást. A 43. ábrán egy körrel és egy ellipszissel ábrázoltunk két egymást három pontban metsző görbét. Mivel két metszéspontnak átlósan, egynek pedig érintő pontnak kell lennie, ezért az ábra az általános esetet mutatja. Az ábrán a -val jelölt pontban – a 6.1. Lemma miatt – a harmadik görbe átlósan keresztülhalad, ahogy ezt rajzoltuk. A harmadik görbe a másik két görbét, a már meglévő másik három metszésponton kívül egyetlen másik pontban sem metszheti. Ez a 6.3. Lemma miatt teljesül. Mivel a b és a c pont szimmetrikusan helyezkedik el az ábrán, ezért rajzunk az egyetlen lehetséges minimális, gömbi 3-Venn-diagram (szimmetriától eltekintve). (A 41. ábrán ez az 1 diagram.) Ezzel beláttuk, hogy maximum hat különböző gömbi 3-Venn-diagram van. Ezeknek a 2-, illetve a 3-lapjaikkal, mint külső lapokkal történő sztereografikus vetítésük a síkra adja a maradék nyolc diagramot. A diagramokban lévő metszéspontok számából, a külső lapok határán lévő élek és szögpontok fokából azonnal látható, hogy a tizennégy diagram nem izomorf

a síkon. Annak belátását, hogy a sztereografikus vetítés során más ezekkel nem izomorf diagram nem adódik, ugyancsak az olvasóra bizzuk. ■

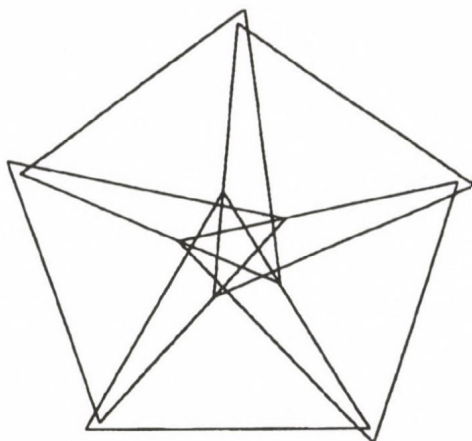


44. ábra

Jegyezzük meg, hogy a 41. ábrán látható összes diagram egy osztályban van egy konvex diagrammal. A nem közönséges 4- és 5-Venn-diagramokról csak annyit szeretnék megjegyezni, hogy ezek között sok van, amely konvex, vagy egybevágó ellipszisekkel rajzolható meg. Példaként a következő fejezetben a 45. ábrán láthatunk két nem közönséges, konvex 5-Venn-diagramot öt egybevágó ellipszissel. A 44. ábrán pedig mutatunk két különböző nem közönséges 5-Venn-diagramot, amely nem rajzolható meg ellipszisekkel. (A két diagramban van két görbe, amely hatszor metszi egymást.) Ezek a példák negatív választ adnak Grünbaum 5.6. Sejtésére nem közönséges diagramok esetében. A két ellenpéldát ebben a cikkben közlöm először.



45. ábra

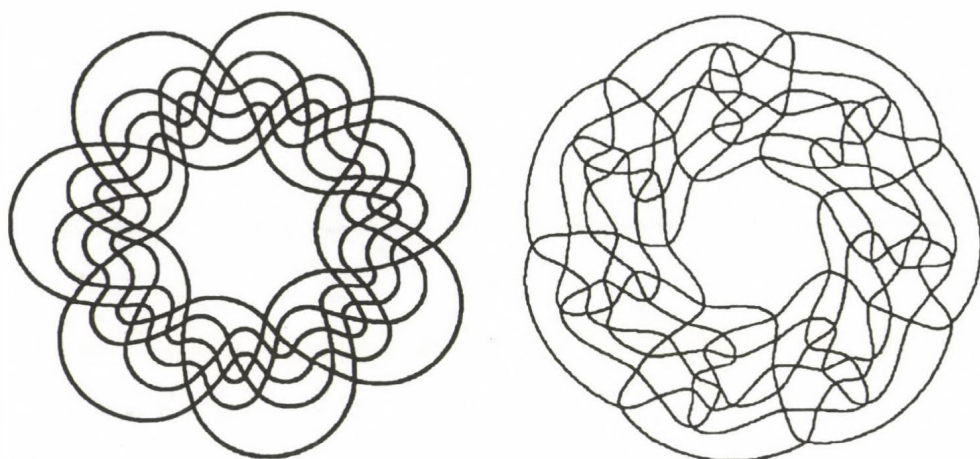


46. ábra

14. Esztétikailag szép diagramok

Grünbaum [39] *attraktív*nek nevezi azokat a Venn-diagramokat, amelyek egybevágó görbékkel szerkeszthetők meg. Az előző fejezetekben az összes körrel vagy ellipszissel szerkesztett diagramunk attraktív. Henderson [46] *szimmetrikus*nak nevez egy Venn-diagramot, ha a diagram minden görbéje egy adott görbe egy pont körüli elforgatásával szerkeszthető meg. Nyilvánvaló, hogy a forgatás szöge radiánban mérve $2\pi/n$. A 6. ábra (a) diagramja, öt egybevágó ellipszissel szerkesztett közöséges, minimális, szimmetrikus, konvex 5-Venn-diagram. A 19. ábra pedig négy háromszöggel szerkesztett közöséges, nem minimális, konvex, szimmetrikus 3-Venn-diagram. A 45. ábrán két, öt egybevágó ellipszissel szerkesztett nem közöséges, minimális, szimmetrikus 5-Venn-diagramot láthatunk. Az elsőt A. Schwenk [60] szerkesztette 1984-ben, a másodikat Grünbaum publikálta [39]. Ugyancsak ő közölte a 46. ábrán látható diagramot öt egyenlő oldalú háromszöggel. (Ez izomorf a 6. ábrán található diagrammal.) Mivel egy szimmetrikus diagramban minden lap, amelynek kódjában az 1-esek száma egy rögzített p szám, egy olyan adott lap elforgatásával keletkezik, amelynek a kódjában pontosan p darab 1-es van, ezért az n elem p -edik kombinációjának $C(n, p) = \binom{n}{p}$ száma osztható kell legyen n -nel, minden p pozitív egész n -nél kisebb számra. Ez csak akkor teljesül, ha n prímszám [74, 64. oldal]. Így szimmetrikus Venn-diagram csak prímszámú sok görbével létezhet. Henderson [46] állította, hogy szerkesztett szimmetrikus 7-Venn-diagramot, de ezt soha nem publikálta. Grünbaum először azt sejtette, hogy ilyen diagram nem létezhet, majd konstruált egyet.

A. W. F. Edwards [21] ugyancsak szerkesztett számos esztétikailag csodálatosan szép 7-Venn-diagramot. F. Ruskey [74] megadott egy komputer algoritmust, amely (állítólag?) megtalálta az összes – azt hiszem 39 darab – szimmetrikus nem izomorf 7-Venn-diagramot. Engedélyével kettőt megmutatok a 47. ábrán. Felhívom



47. ábra

az olvasó figyelmét, hogy az Interneten a [73] alatt megadott címen egy szórakoztató, érdekes, esztétikailag csodálatos, színes képekkel illusztrált rövid bemutató található Venn- (főleg szimmetrikus) diagramokról. Szimmetrikus n -Venn-diagram tizenegy vagy több görbével jelenleg nem ismert.

15. Speciális és magasabb dimenziós Venn-diagramok és alkalmazásaik

Ebben a fejezetben röviden ismertetek néhány eredményt n -dimenziós Venn-diagramokról. Ezek tanulmányozásánál gráfmodelljeink nem voltak hatásosak, habár csak nagyon kevés erőfeszítést tettünk ezek alkalmazására. Minden ebben a fejezetben említett eredmény mások eredménye, ezeket bizonyítás nélkül ismertetem. Az érdeklődő olvasó számára a bizonyításokat tartalmazó cikkek irodalomjegyzékbeli számát közlöm a tételek előtt.

Rényi Alfréd, Rényi Kató és Surányi János 1949-ben bizonyították be a következő tételeket [58]:

15.1. Tétel. Minden $1 \leq n$ egész számra, az n -dimenziós euklideszi tér intervallumaiból álló független halmazrendszer maximális számossága $2n$.

15.2. Tétel. Minden $1 \leq n$ egész számra, az n -dimenziós euklideszi tér gömbjeiből álló független halmazrendszer maximális számossága $n + 1$.

A lengyel J. Anusiak [3] bizonyította a következő tételket:

15.3. Tétel. Az n -dimenziós euklideszi tér k darab gömbje akkor és csak akkor alkot független halmazrendszert, ha a metszetük egy $(n - k)$ -dimenziós gömb.

15.4. Tétel. Az n -dimenziós euklideszi tér minden gömbökből álló független halmazrendszere kiterjeszthető egy maximális, $n + 1$ darab gömböt tartalmazó független halmazrendszerre.

15.5. Tétel. Az n -dimenziós euklideszi tér minden gömbökből álló független halmazrendszerének minden atomja összefüggő. (Ez azt jelenti, hogy ezek Venn-diagramok. Ez azt is mutatja, hogy Rényiék eredményei is Venn-diagramokról szólnak.)

15.6. Tétel. Ha az n -dimenziós euklideszi tér gömbjeinek egy halmaza Venn-diagramot alkot, akkor a gömbök középpontjai a tér lineárisan független halmazrendszerét alkotják.

15.7. Tétel. Ha az n -dimenziós euklideszi térben a p_1, p_2, \dots, p_k pontok lineárisan független halmazrendszert alkotnak, akkor azok a gömbök, amelyeknek középpontjai a p_i pontok, sugaruk pedig ugyanaz az $r > 0$ szám, – amely legalább akkora mint annak a $(k - 1)$ -dimenziós gömbnek a sugara, amely tartalmazza a p_1, p_2, \dots, p_k pontokat – egy Venn-diagramot alkotnak a térben.

B. Grünbaum [36] többértékű logikák geometriai szemléltetése érdekében egy olyan n részre való felbontását adta meg a (3-dimenziós) gömb felszínének, amelyben minden halmazt a gömbfelszínen egybevágó, ekvivalens k darab részhalmaz alkot. Ezzel bebizonyította a következő tételt:

15.8. Tétel. Minden pozitív egész n és k számhoz, $k \geq 3$, létezik egy n -Venn-diagram, amelyben minden lap k lehetőséget illusztrál.

Végül a halmazelmélet, a Boole- vagy absztrakt algebra, a mértékelmélet, illetve az algebrai topológia iránt érdeklődő olvasóknak a figyelmébe szeretném ajánlani az irodalomjegyzékben a [40, 41], [52, 75, 76], [57] és [66] cikkeket. Ezekben a cikkekben sok olyan érdekes eredményt találhatnak, amelyek független halmazrendszerekkel vagy ezek alkalmazásával foglalkoznak.

16. Sejtések és kérdések

Mint már említettük Peter Winkler 5.2. Sejtése ma is megválaszolatlan. A továbbiakban Grünbaum olyan sejtéseit, kérdéseit és problémáit ismertetem, amelyeket az 5. fejezetben nem soroltam fel. Ezek a [34, 35, 36, 37, 38, 39] cikkekben találhatók meg.

16.1. Sejtés. Ha egy közönséges, feszített Venn-diagramnak megvan az a tulajdonsága, hogy a diagramhoz tartozó k darab görbe belsejének metszete összefüggő (minden k -ra, $1 < k < n$), akkor a diagram konvex.

A következő sejtés módosítása Grünbaum egy sejtésének, amiről bebizonyítottuk, hogy nem teljesül (lásd 12.1. Tétel).

16.2. Sejtés. Ha egy közönséges 5-Venn-diagram megrajzolható öt egybevágó ellipszissel, akkor megrajzolható öt akármilyen excentricitású ellipszissel is.

Grünbaum következő sejtései nem publikáltak, ezek személyes beszélgetéseink és levelezésünk eredményei.

16.3. Sejtés. Ha egy közönséges n -Venn-diagram minden részhalmaza egy Venn-diagramot alkot, akkor a diagram konvex.

16.4. Sejtés. Minden n egész számra lehet szerkeszteni olyan közönséges n -Venn-diagramot, amelyben az 5-lapok száma nem több, mint a lapok számának $1/16$ -od része.

16.5. Sejtés. Létezik pozitív c és d szám úgy, hogy minden közönséges n -Venn-diagramban a 3-lapok száma $cn + d$. Igaz-e, hogy $c = 4$?

16.6. Kérdés. Igaz-e, hogy ha egy közönséges n -Venn-diagramban nincs két olyan görbe, amely egy konvexitást kizáró konstrukciót formál, akkor a diagram konvex?

16.7. Kérdés. Létezik-e minden $5 \leq n$ egész számra egy közönséges, nem konvex n -Venn-diagram, amelyből bármelyik görbét elhagyva egy közönséges, konvex diagramot kapunk?

A következő sejtések publikáltak.

16.8. Sejtés. Minden $7 < p$ prímszámra létezik szimmetrikus p -Venn-diagram.

16.9. Sejtés. Nem létezik 6-, 7-Venn-diagram hat, illetve hét háromszöggel.

Megjegyzem, nem nehéz megmutatni, hogy ez igaz közönséges Venn-diagramok esetére. Továbbá be tudom bizonyítani, hogy az állítás igaz nem közönséges, nem minimális diagramokra is.

16.10. Sejtés. $k(n) = k^*(n)$ minden n pozitív egész számra.

16.11. Kérdés. Mi igaz $k^{**}(n)$ -re ha $n > 5$? Mi igaz a $k_k^*(n)$, illetve $k_k^{**}(n)$ függvényekre, ha $n > 5$? Igaz-e, hogy a $k(n)$ egyenlő azzal a legkisebb egész számmal, amely nagyobb mint $2^{n-2}/(n-1)$?

16.12. Sejtés. Minden ívenként sima Jordan-görbe használható egy szimmetrikus 3-Venn-diagram szerkesztésére.

16.13. Sejtés. Nincs szimmetrikus 5-Venn-diagram öt darab négyzettel.

16.14. Sejtés. Minden n pozitív egész számhoz található attraktív n -Venn-diagram.

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani Branko Grünbaum professzornak segítségéért, hasznos tanácsaiért, amit az évek során kutatásomhoz nyújtott. Ugyancsak szeretném megköszönni azokat a tanácsait, amelyeket ezen cikk megírása során nyújtott. Néhány bizonyítást, illetve ábrát segítése nélkül nem tudtam volna leírni, azaz megrajzolni.

Szeretném két diákunknak, Chris Carlin Lomont graduate és Hao Wu undergraduate diáknak megköszönni munkáját. Chris számította ki az öt egybevágó ellipszis egyenletét a 11.2. Tételünkben. Hao rajzolta meg komputerrel a 45. és 46. ábrát. Ugyancsak ő szerkesztette meg a 40. ábrát, ami nem csak ügyes komputer technikát, hanem matematikai élelmességet is igényelt. (Ezekhez az ábrákhoz a CORAL DRAW 5 rajzoló programot használta.)

Köszönetet érdemel Frank Ruskey, hogy rendelkezésemre bocsátotta a 47. ábrán látható esztétikailag szép Venn-diagramokat. (Az ábrát az Internetről másoltam le.)

Heppes Aladár, Katona Gyula és feleségem Hamburger Hepp Edit nem csak azért érdemelnek köszönetet, mert segítettek az Egyesült Államokban töltött tíz év során felvett magyartalan nyelvhasználatomat kijavítani, hanem azért is, mert bízattak ennek a cikknek a megírására. Nélkülük ez a cikk soha nem jött volna létre.

Péter Hamburger: Constructing Venn-diagrams using graphs

Using planar and spherical graph models this paper investigates special families of Jordan-curves on the plane as well as on the sphere. Those families are: independent families of Jordan-curves and different types of Venn-diagrams. The graph models that are introduced and studied in [12, 13, 14, 15, 43] are the Venn-diagram itself as a planar graph, the dual graph of the Venn-diagram (that is called the Venn-graph), and the so-called radual graph of a Venn-diagram. The paper is mostly a survey paper with some new results. In the introduction the paper presents a brief review of the history of inclusion and exclusion arguments and the development of their diagrammatic representations and especially the history of Venn-diagrams. Sections 2 and 3 cover the necessary definitions and theorems of geometry and graph theory that are needed in this paper. Section 4 shows the early results of Venn and Grünbaum on the existence of reducible and irreducible Venn-diagrams with arbitrarily many curves. In Section 5 the author states the problems and conjectures of Grünbaum and Peter Winkler that are answered fully or partially in this paper. In Sections 6, 7, and 8, the Venn planar diagram, the Venn-graph, and the radual graph of a Venn-diagram are introduced respectively. In these sections their properties are shown as well. Section 9 addresses Grünbaum's Conjecture 5.1 and Peter

Winkler's Conjecture 5.2 on the extension of Venn or simple Venn-diagrams. In Section 10 the known properties of convex and strongly convex Venn-diagrams are studied. First the results of Alfréd Rényi, Kató Rényi, and János Surányi are shown with the results of Grünbaum, and then Problem 5.7 of Grünbaum is answered. In Sections 11 and 12 a complete investigation of simple Venn-diagrams with three, four or five curves is presented. Section 11 addresses the reducible case, Section 12 the irreducible case. Questions such as drawability with circles, ellipses, triangles, rectangles and convex curves are raised and answered. In Section 13 nonsimple Venn-diagrams with three, four or five curves are studied. In Section 14 some of the aesthetically nice diagrams of Grünbaum, D. W. Henderson, and Frank Ruskey are shown. In Section 15 results on the n -dimensional Euclidean space's Venn-diagrams are investigated. Results such as those of Alfréd Rényi, Kató Rényi, János Surányi, Branko Grünbaum, J. Anusiak, E. Marczewski, and B. Weglorz are presented without proofs. In Section 16 there are open problems and conjectures. Most of them are conjectures of Grünbaum, but some are the results of personal communication of Grünbaum with the author. Some of the problems or conjectures are suitable for research of undergraduate or graduate students as well as experts in the field.

A few results (in some sections) that were published by others than the author without proof have a thorough proof (such as Lemma 10.5 or the result of Grünbaum after Theorem 10.5 that says that there are strongly convex simple, reducible n -Venn-diagrams for every positive integer n). This paper focuses first and foremost on the survey of the methods and results that were done by the author, in collaboration with Kiran B. Chilakamarri and Raymond E. Pippert (Indiana-Purdue University at Fort Wayne). These new methods let them solve many conjectures and problems of Grünbaum on Venn-diagrams. Theorem 9.1 with Theorem 9.4 fully answers one conjecture of Grünbaum (Conjecture 5.1) on the extension of Venn-diagrams with the addition of a suitable closed Jordan-curve, that goes back to John Venn in 1880 and has been investigated by many others since then. Theorem 11.2 with Theorem 12.2 and Corollary 12.3 corrects some erroneous statements that started with John Venn more than a century ago and have been repeated frequently by others. In Theorem 11.2 a simple, reducible Venn-diagram with five congruent ellipses is constructed. This diagram is unique on the sphere and produces two different plane diagrams. Theorem 7.13 and Theorem 8.3 are new results of the author. Theorem 7.13 states that the Venn-graph is 3-connected, but the only way to separate the graph by the deletion of three vertices is to delete three vertices that are adjacent to a vertex with degree three. There are two resulting components: one a single point and the other the rest of the graph. Theorem 8.3 says that the radial graph of a Venn-diagram with at least two curves is 4-connected. This theorem with Tutte's famous Theorem 3.12 gives a new proof of Grünbaum's Conjecture 5.1. These theorems are stated without proof; the lengthy and technical proofs will be published elsewhere. Figure 18 and the last statement of Theorem 10.4 are new, they prove that $k^{**}(5) = 3$, disproving a conjecture of Grünbaum. Also Figure 44 is published here first; this disproves

Grünbaum's Conjecture 5.6 in the irreducible case. (Grünbaum conjectured that every convex Venn-diagram with five curves can be drawn with five (congruent) ellipses.) These counterexamples were found by the author earlier than the similar ones published first in [43] for the simple case, but have not been published before. The proof of Theorem 13.1 is a new, simpler proof of the theorem given by the author first here, using some of the lemmas of the previous proof.

I would like to express my gratitude for the help of Professor Branko Grünbaum. In particular, I am grateful for his advice on the proof of his statement on the existence of strongly convex Venn-diagrams with arbitrarily many curves, and for his remarks regarding Figure 44. I also would like to thank two of our students at Indiana-Purdue University Fort Wayne for their work. They are Chris Carlin Lomont graduate student in our Masters' program, and Hao Wu undergraduate student. Chris set up the equations of the five congruent ellipses in Theorem 11.2. Hao drew Figures 40, 45, and 46. Especially Figure 40 required not only excellent computer technology but mathematical innovation as well. My gratitude to Frank Ruskey for letting me use some of his beautiful Venn-diagrams. Finally, I would like to thank Aladár Heppes and Gyula Katona, my two long standing Hungarian friends and colleagues, and my wife Edit Hepp Hamburger for their support and continuous encouragement to write this paper. Without their help this paper could not exist.

Irodalomjegyzék

- [1] J. R. Alsted, "*Elementale Mathematicum*", Frankfurt, (1611).
- [2] D. E. Anderson, F. L. Cleaver, "Venn-type Diagrams for Arguments of n Terms", *Journal of Symbolic Logic*, Vol. **30** #2 (1965), 113–118.
- [3] J. Anusiak, "On Set-theoretically Independent Collections of Balls", *Colloquium Mathematicum*, Vol. **13** (1965), 223–233.
- [4] Arisztotelész, "*Organon*", "*Szillogizmusok Tana*".
- [5] M. E. Baron, "A Note on the Historical Development of Logic Diagrams: Leibniz, Euler and Venn", *Mathematical Gazette*, Vol. **53** (1969), 113–125.
- [6] E. C. Berkeley, "Boolean Algebra and Applications to Insurance", *The Record of the American Institute of Actuaries*, Vol. **26** (1937), 373–414.
- [7] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, "*Graph Theory With Applications*", North Holland, 1976.
- [8] G. Boole, "*The Mathematical Analysis of Logic*", Cambridge, 1847.
- [9] A. V. Boyd, "Venn Diagrams of rectangles" *Mathematics Magazine*, **58** (1985), 251.
- [10] L. J. Bowles, "Logic Designs for up to n Classes", *Mathematical Gazette*, Vol. **55** #394 (1971), 370–373.
- [11] Lewis Carroll, "*The Mathematical Recreations of Lewis Carroll*", Dover Publications, Mineola, New York, 1985.

- [12] K. B. Chilakamarri, P. Hamburger and R. E. Pippert, "Venn Diagrams: Announcement of Some New Results", *Geombinatorics*, Vol. 4, April (1995), 129–137.
- [13] K. B. Chilakamarri, P. Hamburger and R. E. Pippert, "Venn Diagrams And Planar Graphs", *Geometriae Dedicata*, Vol. 62 (1996), 73–91.
- [14] K. B. Chilakamarri, P. Hamburger and R. E. Pippert, "Hamilton Cycles in Planar Graphs and Venn Diagrams", *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 67 (1996), 296–303.
- [15] K. B. Chilakamarri, P. Hamburger and R. E. Pippert, "Analysis of Venn Diagrams Using Cycles in Graphs", (in preparation).
- [16] Collings, "Further Logic Diagrams in Various Dimensions", *Mathematical Gazette*, Vol. 56 #396 (1972), 309–310.
- [17] L. Couturant, "*La Logique de Leibniz*", Paris (1901).
- [18] L. Couturant, "*Opuscles et Fragments Inédits de Leibniz*", Paris (1903), 301–312.
- [19] A. W. F. Edwards, "Venn Diagrams for Many Sets", *New Scientist*, 121 (1989), 51–56.
- [20] A. W. F. Edwards and C. A. B. Smith, "New 3-set Venn Diagram", *Nature*, 339 (1989), 263.
- [21] A. W. F. Edwards, "The Sevenfold Symmetric Venn Diagrams", *XVIIth International Biometric Conference Proceedings*, 2 (1994), 238.
- [22] A. W. F. Edwards, "Venn Diagrams in Many Dimensions", (preprint).
- [23] A. W. F. Edwards, "7-set Venn Diagrams with Rotational and Polar Symmetry", (preprint), 1996.
- [24] P. Edwards (editor), "*Encyclopedia of Philosophy*", Macmillan, New York, "Logic Diagrams" by M. Gardner, Vol. 5 77–81.
- [25] L. Euler, "*Lettres á une Princesse d'Allemagne*", St. Petersburg, (1768). (English translation H. Hunter, "Letters to a German Princess", London, (1795).)
- [26] J. A. Faris, "The Gergonne Relations", *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 20 (1955), 207–231.
- [27] J. C. Fisher, E. L. Koh, and B. Grünbaum, "Diagrams, Venn and How", *Mathematics Magazine*, 61 (1988), 36–40.
- [28] M. Gardner, "*Logic Machines, Diagrams and Boolean Algebra*", Dover, New York, (1968).
- [29] J. D. Gergonne, "Essai de Dialectique Rationelle", *Annales Mathématiques*, Vol. 7 (1816–1817), 189–228.
- [30] S. W. Golomb, "Connected Logic Diagrams", unpublished note.
- [31] M. C. Golumbic, "*Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*", Academic Press, New York, 1980.
- [32] J. L. Gross and T. W. Tucker, "*Topological Graph Theory*", Wiley-Interscience, New York, 1987.
- [33] B. Grünbaum, "*Convex Polytopes*", John Wiley and Sons, London, 1967.
- [34] B. Grünbaum, "Venn Diagrams and Independent Families of Sets", *Mathematics Magazine*, Vol. 1 (1975), 12–23.

- [35] B. Grünbaum and P. Winkler, "A Simple Venn Diagram of Five Triangles", *Mathematics Magazine*, Vol. **55** #5 (1982), 311.
- [36] B. Grünbaum, "The Construction Of Venn Diagrams", *College Mathematics Journal*, Vol. **15** (1984), 238–247.
- [37] B. Grünbaum, "On Venn Diagrams and the Counting of Regions", *College Mathematics Journal*, Vol. **15** (1984), 433–435.
- [38] B. Grünbaum, "Venn Diagrams I", *Geombinatorics*, Vol. **1** (1992), 5–12.
- [39] B. Grünbaum, "Venn Diagrams II", *Geombinatorics*, Vol. **2** (1992) 25–32.
- [40] A. Gyárfás, J. Lehel, and Zs. Tuza, "The Structure of Rectangle Families Dividing the Plane Into Maximum Number of Atoms", *Discrete Mathematics*, **52** (1984), 177–198.
- [41] A. Gyárfás, J. Lehel, and Zs. Tuza, "How many Atoms Can Be Defined By Boxes?", *Combinatorica*, **3** (1985), 193–204.
- [42] P. Hamburger and R. E. Pippert, "Venn Said It Couldn't Be done", (submitted for publication).
- [43] P. Hamburger and R. E. Pippert, "Simple, Reducible Venn Diagrams on Five Curves and Hamiltonian Cycles", (submitted for publication to the *Geometriae Dedicata*).
- [44] Sir W. Hamilton of Edinburgh, "*Lectures*", Edinburgh, 1860.
- [45] G. C. Harrison and Mou-Ling Kung, "Is the Venn Diagram Good Enough?", *College Mathematics Journal*, **15** (1984), 48–50.
- [46] D. W. Henderson, "Venn Diagrams For More Than Four Classes", *Mathematics Magazine*, Vol. **4** (1963), 424–426.
- [47] C. Hoffmann, G. Vanecek, "Fundamental Technic for Geometric and Solid Modeling", *Control and Dynamic Systems*, Vol. **48**, C. T. Leonedis, Editor, Academic Press (1991).
- [48] W. M. Kneale, "*The Development of Logic*", Oxford, 1962.
- [49] J. H. Lambert, "*Neues Organon*", Leipzig, 1764.
- [50] F. A. Lange, "*Logische Studien*", Iserlohn, 1877.
- [51] A. J. Macula, "Lewis Carroll and the Enumeration of Minimal Covers", *Mathematics Magazine*, **68** (1995), 269–274.
- [52] E. Marczewski, "Indépendance d'ensembles et Prolongement de Mesures", *Colloquium Mathematicum*, Vol. **1** (1947), 122–132.
- [53] T. Moor, Jr., "On the Construction of Venn Diagrams", *Journal of Symbolic Logic*, Vol. **24** (1959), 303–304.
- [54] P. Nowicki, "Koniczynka n -listna", *Wiadomosci Matematyczne*, Vol. **19** (1975), 11–18.
- [55] O. Ore, "*The Four-Color Problem*", Academic Press (New York, London, 1967).
- [56] G. Ploucquet, "*Sammlung der Schriften Welche den Logischen Betreffen*", Tübingen, 1773.
- [57] R. Rado, "Atoms of Families of Sets", *Combinatorica*, **2** (1982), 311–314.
- [58] A. Rényi, V. Rényi and J. Surányi, "Sur l'indépendance des Domaines Simples dans l'espace Euclidien á n dimensions", *Colloquium Mathematicum*, Vol. **2** (1951), 130–135.

- [59] V. Shapiro, "Representation of Semi Algebaric Sets in Finite Algebras Geneated by Space Decompositions", Ph. D. Dissertation, *Cornell Programmable Automation, Mechanical Engineering*, 1991.
- [60] A. J. Schwenk, "Venn Diagram For Five Curves", *Mathematics Magazine*, Vol. **57** (1984), 297.
- [61] W. T. Tutte, "How To Draw A Graph", *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. **13** (1963), 743–768.
- [62] W. T. Tutte, "A Theorem On Planar Graphs", *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. **82** (1965), 99–116.
- [63] W. T. Tutte, "Bridges and Hamiltonian Circuits in Planar Graphs", *Aequationes Mathematicae*, Vol. **15** (1977), 1–33.
- [64] J. Venn, "On The Diagrammatic And Mechanical Representation Of Propositions And Reasonings", *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. **9** (1880), 1–18.
- [65] J. Venn, "*Symbolic Logic*", Macmillan, London, 1881, second edition 1894.
- [66] B. Weglorz, "Nerves and Set-theoretical Independence", *Colloquium Mathematicum*, Vol. **13** (1964), 17–19.
- [67] H. Whitney, "A Theorem On Graphs", *Annals of Mathematics*, Vol. **32** (1931), 378–390.
- [68] P. Winkler, "Venn Diagrams: Some Observations And An Open Problem", *Congressus Numerantium*, Vol. **45** (1984), 267–274.

Magyar nyelvű tankönyvek

- [69] B. Andrásfai, "*Ismerkedés a Gráfelmélettel*", Tankönyvkiadó (Budapest, 1985).
- [70] B. Andrásfai, "*Gráfelmélet, Folyamok, Mátrixok*", Akadémiai Kiadó (Budapest, 1983).
- [71] Gy. Hajós, "*Bevezetés a Geometriába*", Tankönyvkiadó (Budapest, 1966).
- [72] Gy. Katona, A. Recski, "*Bevezetés a Véges Matematikába*", Egyetemi Jegyzet, ELTE (1993), Budapest.

Elektronikus és a témához nem közvetlenül tartozó, de a cikkben említett irodalom

- [73] F. Ruskey, <http://www.csc.uvic.ca/~cos/venn/venn.html>
- [74] G. H. Hardy and E. M. Wright, "*Introduction to the Theory of Numbers*", 3rd Edition, Clardon Press (Oxford, 1954).
- [75] E. Marczewski, "Independence in Algebras of Sets and Booleans Algebras", *Fundamenta Mathematicae*, Vol. **48** (1960), 135–140.
- [76] E. Marczewski, "Independence and Homomorphisms in Abstract Algebras", *Fundamenta Mathematicae*, Vol. **50** (1961), 45–61.

Hamburger Péter

Indiana-Purdue University Fort Wayne

Department of Mathematics

2101 Coliseum Blvd. East

Fort Wayne, IN 46805

e-mail: hamburge@cvax.ipfw.indiana.edu

PUKÁNSZKY LAJOS (1928–1996) MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGÁRÓL

SZEMÉLYES MEGEMLEKEZÉS

HAJNAL ANDRÁS és KORÁNYI ÁDÁM

Az alábbi megemlékezést Pukánszky Lajos matematikai munkásságáról a Lie csoportok előállítás elméletének két vezető szakértője írta. Szakmai részéhez hozzátenni, vagy belőle elvenni, semmiképp sem a mi feladatunk, de szeretnénk hozzátenni néhány szót a szükséges élettrajzi részhez, miután azon kevesek közé tartozunk, akik a reflektorfénytől és minden indiszkréciótól irtózó Pukánszky Lajos magánéletéről valamit tudnak.

Nekünk közeli barátunk volt; többször hosszú évekre elszakadtunk ugyan egymástól, de kapcsolatunk mindig újra kezdődött és mindig úgy tudtuk folytatni a beszélgetést, mintha csak tegnap hagytuk volna abba. 1953 és 1956 között kezdő matematikusokként rendszeresen együtt ebédeltünk a szegedi egyetemi menzán és utána együtt kávéztunk egy eszpresszóban; a körhöz Pollák György és az utolsó évben Kovács István is hozzátartozott. Lajos akkor is és később is, mindig segítőkész jóbarát volt, de ez nem jelentette, hogy időpazarlásra rá lehetett volna venni. A legszigorúbb normák őrzője volt a magánéletben és a tudományos munkában egyaránt. A kompetenciát mindenben megkövetelte; jaj volt annak, aki pl. Thomas Mann-ról állított valamit, de kiderült, hogy nem ismerte Mann levelezését Kerényi Károllyal. Életét úgy szervezte, hogy a matematikát az általa megszabott szinten művelhesse. Szigorú időbeosztással, állandó álmatlansággal küzdve, szinte erején felül dolgozott, pedig tudott barátok között vidáman szórakozni is. Ezt azonban csak előre eltervezett pihenőnapokon engedte meg magának. Ha ugrattuk, hogy Sylvestre Bonnard-ként a lemondás kegyetlen édességét („l'austere douceur du sacrifice”) keresi, ő csak kedvesen mosolygott és folytatta a munkát.

Visszatérve Thomas Mann-ra, akiről sokszor volt szó Szegeden, meg kell, hogy említsük a rokonságot, amit Lajos és Mann Doktor Faustus-ának hőse közt mindnyájan éreztünk. Ez nem csak egyéniségére vonatkozott, hanem arra is, hogy Lajost is a matematikán kívül elsősorban a zene és a teológia érdekelte. Szenvedélyes zenehallgató volt egész életében; teológiával, mégpedig fiatalkorában katolikus, öregkorában zsidó teológiával igen komolyan foglalkozott, bár maga nem volt vallásos,

legalábbis amióta mi ismertük. Direkt kérdést erre vonatkozólag azért sohasem mertünk volna feltenni neki.

1957 januárjában hagyta el Magyarországot, egyikünk társaságában, majd néhány hónap jugoszláviai tábor után az Egyesült Államokba került. Ekkor már ismert matematikus volt. Egy-két átmeneti állás után úgy látszott, hogy végleg letelepszik Los Angeles-ben, az University of Californián, de 1965-ben R. Kadison az operátoralgebrák néhány más komoly szakemberével együtt az University of Pennsylvania-ra csábította; innen is ment nyugdíjba 1994-ben.

Karakteréhez tartozott, hogy a matematika legnagyobb tudást igénylő részeivel foglalkozott, azokkal amiket legközpontibb fontosságúnak tartott. Egyedül dolgozott, de már 1953-tól kezdve rendszeresen megtárgyalta matematikai terveit Jacques Dixmier-vel. Dixmier nyugalomba vonulása alkalmából írt cikkének ajánlása a horatiusi sor: „O mi presidium et dulce decus meum”.

Az 1970-es nizzai nemzetközi matematikai kongresszuson meghívott előadó volt. 1965-ben egy évet Párizsban töltött, de különben nem szeretett utazni és szerepelni. Egészségére hivatkozva nem ment el arra a nemzetközi konferenciára sem, amelyet hatvanadik születésnapja alkalmából rendezett Koppenhágában Niels Vigand Pedersen. Viszont minket meglátogatni még 1964-ben többször is eljött Los Angeles-ből Berkeley-be, ahol akkor éppen együtt voltunk.

1994 óta megint mindnyájan elég közel éltünk egymáshoz. Meglátogattuk Philadelphiában is, de általában New-Yorkban találkoztunk, ahol Lajos ragaszkodott a szigorú rituáléhoz: találkozás két órakor a Metropolitan Museum-ban Michelangelo arcképe alatt, később vacsora a Mocca nevű magyar vendéglőben, ahonnan 7 órakor rohant el taxival a vonatához. Azonos volt önmagával, memóriája is majdnem a régi volt, bár már nem tudta megmondani, mint régen Szegeden, hogy melyik év melyik napján pontosan mit csinált.

Beteg volt, de nem sokat panaszkodott. Változatlanul dolgozott, tervezett új könyvének négy teljesen kész fejezetét, azaz igen nagy részét találták meg halála után. Súlyos vérszegénységben szenvedett, és az orvosok sem az okot nem találták, sem a megfelelő gyógymódot. Élete utolsó két vagy három hetében nagyon legyengült, ezt már csak később tudtuk meg. Úgy látszik nem bírta tovább, és mi nem figyeltünk rá eléggé. Most már csak az emlékét tudjuk megőrizni.

MATEMATIKAI MUNKÁSSÁG

JACQUES DIXMIER és MICHEL DUFLO
(fordította KRÁMLI ANDRÁS)

Pukánszky Lajos 1928-ban született Budapesten. Kandidátusi értekezését 1955-ben védte meg, témavezetője Szőkefalvi-Nagy Béla volt. 1956-ban elhagyta Magyarországot. Különböző posztokat töltött be az Egyesült Államokban és Franciaországban. 1965-től nyugdíjazásáig a University of Pennsylvania professzora volt. 1996. február 15-én halt meg Philadelphióban.

I. Pukánszky Lajos dolgozatai

- [1] L. Pukánszky, A. Rényi, On the approximation of measurable functions, *Publ. Math. Debrecen*, **2** (1951), 146–149.
- [2] L. Pukánszky, On a theorem of Mautner, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1954), 145–148.
- [3] L. Pukánszky, The theorem of Radon-Nikodym in operator rings, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1954), 149–156.
- [4] L. Pukánszky, On the theory of quasi-unitary algebras, *Acta Sci. Math. Szeged*, **16** (1955), 103–121.
- [5] L. Pukánszky, Some examples of factors, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 135–156.
- [6] L. Pukánszky, On maximal abelian subrings of factors of type II_1 . *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 289–296.
- [7] L. Pukánszky, On the Kronecker products of irreducible representations of the 2×2 real unimodular group. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **100** (1961), 116–152.
- [8] L. Pukánszky, On the Kronecker product of irreducible unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, *J. Math. Mech.*, **10** (1961), 475–491.
- [9] L. Pukánszky, On the Plancherel theorem of the 2×2 real unimodular group, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 504–512.
- [10] A. Koranyi and L. Pukánszky, Holomorphic functions with positive real part on polycylinders, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108** (1963), 449–456.
- [11] L. Pukánszky, The Plancherel formula for the universal covering group of $SL(R, 2)$. *Math. Ann.*, **156** (1964), 96–143.
- [12] L. Pukánszky, On the characters and the Plancherel formula of nilpotent groups, *J. Functional Analysis*, **1** (1967), 255–280.

- [13] L. Pukánszky, *Leçons sur les représentations des groupes*, Monographies de la Société Mathématique de France, No. 2 Dunod, Paris, 1967, viii+178 pp.
- [14] L. Pukánszky, On the theory of exponential groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **126** (1967), 487–507.
- [15] L. Pukánszky, On the unitary representations of exponential groups, *J. Functional Analysis*, **2** (1968), 73–113.
- [16] L. Pukánszky, Characters of algebraic solvable groups, *J. Functional Analysis*, **3** (1969), 435–494.
- [17] L. Pukánszky, Sur la représentation régulière des groupes de Lie résolubles connexes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **268** (1969), 1077–1079.
- [18] L. Pukánszky, Sur la représentation régulière des groupes de Lie résolubles connexes, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser.*, **268** (1969), 1172–1173.
- [19] L. Pukánszky, *New results in the representation theory of solvable groups*, In Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, pp. 413–417. Gauthier-Villars, Paris.
- [20] L. Pukánszky, Unitary representations of solvable Lie groups, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **4** (1971), 457–608.
- [21] L. Pukánszky, Action of algebraic groups of automorphisms on the dual of a class of type I groups, In: *Conference on Harmonic Analysis* (Univ. Maryland, College Park, Md., 1971), pp. 273–279. Lecture Notes in Math., Vol. 266 Springer, Berlin.
- [22] L. Pukánszky, Action of algebraic groups of automorphisms on the dual of a class of type I groups, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **5** (1972), 379–395.
- [23] L. Pukánszky, The primitive ideal space of solvable Lie groups, In: *Harmonic analysis on homogeneous spaces* (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVI, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1972), pp. 233–234. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1973.
- [24] L. Pukánszky, The primitive ideal space of solvable Lie groups, *Invent. Math.*, **22** (1973), 75–118.
- [25] L. Pukánszky, Characters of connected Lie groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80** (1974), 709–712.
- [26] L. Pukánszky, Characters of connected Lie groups, *Acta Math.*, **133** (1974), 81–137.
- [27] L. Pukánszky, Lie groups with completely continuous representations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **81** (1975), 1061–1063.
- [28] L. Pukánszky, Unitary representations of Lie groups with cocompact radical and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **236** (1978), 1–49.
- [29] L. Pukánszky, On Kirillov's character formula, *J. Reine Angew. Math.*, **311/312** (1979), 408–440.
- [30] L. Pukánszky, Unitary representation of Lie groups and generalized symplectic geometry. In: *Operator algebras and applications*, Part 1 (Kingston, Ont., 1980), pp. 435–466. Proc. Sympos. Pure Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.

- [31] L. Pukánszky, Symplectic structure on generalized orbits of solvable Lie groups, *J. Reine Angew. Math.*, **347** (1984), 33–68.
- [32] L. Pukánszky, Quantization and Hamiltonian G -foliations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **295** (1986), 811–847.
- [33] L. Pukánszky, On a property of the quantization map for the coadjoint orbits of connected Lie groups. In: *The orbit method in representation theory* (Copenhagen, 1988), 187–211. Progr. Math., 82, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [34] L. Pukánszky, On the characters of connected Lie groups. In: *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory* (Paris, 1989), 63–71. Progr. Math., 92, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [35] L. Pukánszky, On the characters of exponential groups, *J. Funct. Anal.*, **100** (1991), 381–399.
- [36] L. Pukánszky, On the coadjoint orbits of connected Lie groups, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **56** (1992), no. 3–4, 347–358 (1993).

II. A dolgozatok ismertetése

Az [1] dolgozat a folytonos függvényekre vonatkozó Stone-Weierstrass tétel szellemében élesíti Rényiének egy a mérhető függvényekre bizonyított tételét.

A [2]–[6] dolgozatok a Neumann-algebráknak vannak szentelve.

A [2] dolgozat a Neumann-algebrák direkt integrálokra való felbontásával foglalkozik.

A [3] dolgozat a nem sokkal korábban Segal által bevezetett nem-kommutatív integrálás szellemében íródott.

A [4] dolgozat a kvázi-unitér algebrák elméletét mélyíti el. Az eredmények előfutárai Tomita és Takesaki tételeinek, melyek fontossága közismert.

Az [5] dolgozat hozta meg Pukánszky Lajos számára az igazi elismerést: egy nagyon szellemes módszerrel két nemizomorf III típusú faktort konstruált. Abban az időben ez az eredmény áttörést jelentett, bár később lényegesen meghaladták. Pukánszky Lajos leírta a III típusú faktorok maximális Abel-féle részalgebráinak tulajdonságait, amelyek addig csak a II_1 típusú faktorokra voltak ismertek. Ez a dolgozat abban a megtiszteltetésben részesült, hogy F. J. Murray ismertette a *Mathematical Reviews*-ban.

A [6] dolgozatban Pukánszky Lajos bebizonyítja, hogy egy II_1 típusú hipervéges faktorban végtelen sok páronként nem konjugált maximális szinguláris Abel-féle részalgebra létezik. E célból a II_1 típusú faktorok Abel-féle részalgebráinak egy új invariánsát vezeti be.

Pukánszky Lajos további munkássága során – legalábbis direkt módon – nem foglalkozott Neumann-algebrákkal. Látható, hogy hat év alatt olyan kutatásokat

indított meg ezen a területen, amelyek fontossága a későbbiekben szüntelenül növekedett.

Pukánszky Lajos majdnem minden további dolgozatát a Lie-csoportok unitér reprezentációinak szentelte. A kivételek: a [10], [31], [32], [33] és [36] dolgozatok. A [10] dolgozat a klasszikus Riesz-Herglotz és Pick-Nevanlinna tételeket általánosítja többváltozós komplex függvényekre. A [31], [32], [33] és [36] dolgozatokat a reprezentáció-elmélet erősen motiválta, annak ellenére, hogy tisztán geometriai témájúak; a tartalmukat később ismertetjük.

A [8] dolgozat az inhomogén G Lorentz-csoportot tanulmányozza. A G csoport unitér reprezentációit Wigner Jenő osztályozta; közülük bizonyosakat $T_{l,m}$ -mel jelölnék, ahol $l = 0, 1, 2, \dots$ és m egy nullánál nagyobb szám. Pukánszky Lajos megadja a $T_{l_1, m_1} \otimes T_{l_2, m_2}$ -nek és a $T_{l, m}$ szimmetrikus négyzetének irreducibilis reprezentációkra való direkt integrál felbontását.

A [7], [9], [11] dolgozatok az $SL(2, \mathbb{R})$ reprezentációit vizsgálják. Legyen G az $SL(2, \mathbb{R})$ -nek a centrum szerinti faktorcsoportha. Legyen S és T a G két olyan irreducibilis unitér reprezentációja, amely a folytonos szériához tartozik. Pukánszky Lajos [7]-ben megadja az $S \otimes T$ unitér irreducibilis reprezentációkra való integrálfelbontását. E célból bizonyos differenciál operátorok spektrális tulajdonságainak finom analizisét alkalmazza. (Ennek a dolgozatnak a második és harmadik részét, amely azt az esetet tárgyalja, amikor S és T az $SL(2, \mathbb{R})$ tetszőleges unitér irreducibilis reprezentációi, Pukánszky Lajos sohasem publikálta). A [9] és [11] az $SL(2, \mathbb{R})$ -re és mindenekelőtt az $SL(2, \mathbb{R})$ univerzális fedőcsoportjára érvényes explicit Plancherel formulával foglalkozik. (Az első esetben a formula Bargmann és Harish-Chandra munkáinak nyomán már ismert volt). Az utóbbi esetre Pukánszky Lajosnak előbb meg kellett határoznia az irreducibilis unitér reprezentációkat, amelyek korábban nem voltak ismertek. Módszereinek nagy része új és a „kemény analizis” körébe tartozik.

Legyen G egy valós összefüggő Lie-csoport. A G irreducibilis unitér reprezentációnak halmazát jelölje \hat{G} . A féligegyszerű nem kompakt G csoportokra a \hat{G} meghatározása 1947 körül kezdődött el, és azóta is folyik. Ha tetszőleges G -re akarjuk kiterjeszteni \hat{G} vizsgálatát, akkor először a feloldható G -ket kell tekinteni. 1962-ben Kirillov a pályamódszerrel teljesen megoldotta a feladatot akkor, amikor G nilpotens: \hat{G} a \mathfrak{g}^*/G -vel azonosítható (\mathfrak{g} a G Lie-algebrája; \mathfrak{g}^* a \mathfrak{g} duálisa a koadjungált reprezentációval ellátva). [12]-ben Pukánszky Lajos egy fontos tétellel egészíti ki Kirillov eredményeit: bebizonyítja, hogy ha G nilpotens, az $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ pályához rendelt reprezentáció karakterének kiszámításához az Ω -n értelmezett, a szimplektikus struktúrából származtatott – csak az Ω dimenziójától függő konstans szorzótól eltekintve meghatározott – mértéket lehet felhasználni. Ezen az úton azt is megmutatja, hogy a $\hat{G} = \mathfrak{g}^*/G$ -n értelmezett Plancherel-mérték egy racionális differenciál formával definiálható. A [13] könyv, amely az 1964-65-ben Párizsban tartott egyetemi előadásain alapul, tartalmazza a teljes Kirillov-elmélet kifejtését, több kiegészítéssel, egyszerűsített, vagy új bizonyítással. Ez a rendkívül világos

könyv számos fiatal kutatót nyert meg az unitér reprezentációk elmélete tanulmányozásának.

1967-től kezdve Pukánszky Lajos egy cikksorozatban – amelynek eredményei megkoronázták kitartó kutató munkáját – a nilpotens esetről áttért a feloldható esetre. Ez az áttérés a nehézségek egész sorával állította szembe.

Legyen G egy egyszerűen összefüggő feloldható Lie-csoport és \mathfrak{g} a csoport Lie-algebrája. A G csoport exponenciális, ha az \exp leképezés \mathfrak{g} -nek bijekciója G -re. Egy ilyen G irreducibilis reprezentációinak \hat{G} halmazát Bernat határozta meg Kirillov módszerének kiterjesztésével. A G irreducibilis reprezentációinak konstrukciója során a \mathfrak{g} algebrán értelmezett l lineáris formának alárendelt részalgebrát kell választani. Ez a választás nilpotens G esetén nem okoz nehézséget. Az exponenciális G esetén alkalmazott Bernat-féle módszer komplikált. Pukánszky Lajos a [14] dolgozatban egy nagyon világos módszert ad erre, egy olyan geometriai feltétel bevezetésével, amely a további vizsgálatokban nagy szerepet játszik, és amely hamarosan „Pukánszky feltétel” néven válik ismertté.

A [15] dolgozatban Pukánszky Lajos ismét az exponenciális esetet vizsgálja. Legyen $T \in \hat{G}$, amely az Ω pályának felel meg. A dolgozat számos eredménye közül csak arra térünk ki, amely lehetővé teszi T karakterének kiszámítását ha az Ω zárt. Ha $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$, T_ϕ egy Hilbert-Schmidt operátor, és

$$\text{Tr}(T_\phi^* T_\phi) = \int_{\Omega} \psi(l) dv(l)$$

ahol dv az Ω -n értelmezett kanonikus mérték, és ahol ψ az alábbi módon adódik:

1) $\tilde{\phi} * \phi$ -t megszorozzuk $\lambda(\exp l)$ -lel, ahol

$$\lambda(\exp l) = \Delta(\exp l)^{\frac{1}{2}} \prod_{\alpha \in \mathcal{F}} \frac{\exp\left(\frac{1}{2}\alpha(l)\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha(l)\right)}{\alpha(l)},$$

\mathcal{F} a \mathfrak{g} gyökeinek egy bizonyos halmaza és Δ a G moduláris függvénye.

2) az így kapott függvényt az \exp leképezés segítségével átvisszük \mathfrak{g} -re;

3) képezzük a \mathfrak{g}^* -on értelmezett Fourier-transzformáltat.

Technikai okokból Pukánszkyknak fel kell tennie, hogy \mathfrak{g} algebrai.

A [16] dolgozatban G továbbra is feloldható és egyszerűen összefüggő, \mathfrak{g} algebrai, de az exponencialitás már nincs feltéve. (Tehát nem állunk messze az I típusú feloldható csoportoktól, amelyekre \hat{G} -t nem sokkal korábban Auslander és Kostant határozta meg.) A [15] dolgozatban alkalmazottnál még sokkal nehezebb analízis segítségével Pukánszky Lajos megmutatja, hogy ha $T \in \hat{G}$ egy zárt pályának felel meg, akkor T karaktere az exponenciális esethez hasonló módon számítható ki. Minthogy \exp nem bijektív, fel kell tenni, hogy a fent említett ϕ függvény tartója a G egy bizonyos, a \mathfrak{g} gyökei által meghatározott nyílt részében van, amely független T választásától.

[20]-ban G egy tetszőleges feloldható egyszeresen összefüggő csoport. Pukánszky Lajos minden pályához hozzárendel egy tórusz által paraméterezett félig-véges faktor reprezentáció családot. Ha minden pálya lokálisan zárt (az I típusú G esetén ez a helyzet), akkor ezek a reprezentációk elegendőek arra, hogy létrehozzák a reguláris reprezentáció egy centrális felbontását. De bizonyos pályák nem lokálisan zártak, ezért elkerülhetetlen a pálya fogalmának általánosítása: Pukánszky Lajos bevezeti a kvázipályákat: a pályáknak olyan halmazait („csomagjait”), amelyeken G ergodikusan hat. Mint az Auslander-Kostant elméletben, ha Ω egy kvázipálya, akkor létezik olyan kanonikus principális nyaláb $B(\Omega)$, amelynek bázisa Ω és struktúra csoportja egy tórusz és amely egy G -tér. A $B(\Omega)$ -beli G -pályák lezártját Pukánszky Lajos egy későbbi cikkben általánosított pályáknak nevezi. Az általánosított pályákhoz rendeli Pukánszky Lajos a félig-véges faktor reprezentációkat, amelyeket centrálisnak nevez, és amelyek lehetővé teszik a reguláris reprezentáció felbontását. Az eredményeknek egy meglepő korolláriuma, hogy a reguláris reprezentáció vagy teljesen I vagy teljesen II típusú. Ez a dichotómia nem volt előre látható. A [20] dolgozat bevezetője tartalmaz olyan sejtéseket, amelyek előrevetítik Connes-nak a Lie-csoportok reprezentációja és az injektív faktorok közötti kapcsolatról elért mély eredményeit. (A [20] cikk eredményeinek egy részét Pukánszky Lajos a [17] [18] és [19] dolgozatokban már bejelentette.)

Legyen G egy lokálisan kompakt csoport. Legyen $R(G)$ az $L^2(G)$ operátorainak a bal-eltolások által generált Neumann algebrája. Régóta ismert volt (Godelement és Segal), hogy ha G unimoduláris, akkor $R(G)$ félig-véges és egy kanonikus nyom definiálható rajta. A [17] és [18] dolgozatokban Pukánszky Lajos bejelenti, hogy ha G feloldható és összefüggő (nem feltétlenül unimoduláris), akkor $R(G)$ félig-véges és $R(G)$ -n egy „kvázikanonikus” nyom konstruálható. Dixmier 1969-ben bebizonyította, hogy tetszőleges összefüggő G Lie-csoport esetén $R(G)$ félig-véges. De Dixmier bizonyítása nem volt teljes, Pukánszky Lajos a rendkívül nehéz [22] dolgozatában bebizonyítja azokat az eredményeket, amelyek Dixmier bizonyításának teljesség tételéhez szükségesek. (A [22] eredményeit Pukánszky Lajos [21]-ben jelentette be).

Pukánszky Lajos [24] dolgozatában kiegészítette a [20] dolgozatot (az eredményeket [23]-ban jelentette be). Legyen G továbbra is egyszeresen összefüggő és feloldható. Minden $T \in \hat{G}$ -ra legyen $\ker T$ a T magja G C^* -algebrájában. Legyen $\text{Prim } G$ a $C^*(G)$ primitív ideáljainak halmaza. Legyen \hat{G}_{cent} a G centrális reprezentációi kvázi-ekvivalencia osztályainak a halmaza. Ekkor $T \mapsto \ker T$ a \hat{G}_{cent} -nek egy bijekciója $\text{Prim } G$ -re.

A [26] dolgozatban – amelyre még visszatérünk – Pukánszky Lajos bebizonyítja, hogy a centrális reprezentációk pontosan a hű nyommal rendelkező faktor reprezentációk. A [20], [24], [26] cikkek eredményei, bizonyos szempontból a G csoport feletti harmonikus analízis teljes leírását adják.

A [26] dolgozat (eredményeit a [25] cikkben jelentette be) Pukánszky Lajos munkásságában egy új korszak kezdetét jelenti: a tetszőleges összefüggő Lie-

csoportok reprezentációinak leírását tűzi ki célul. Valószínűleg kezdettől fogva ez volt a szándéka.

Legyen G egy összefüggő Lie-csoport. Legyen G^\cap a G faktor reprezentációi kvázi-ekvivalencia osztályainak a halmaza. A $T \mapsto \ker T$ leképezés a G^\cap egy δ szűrjekciója Prim G -re. Legyen G_{tr}^\cap a G^\cap hű nyommal rendelkező elemeinek a halmaza. Ekkor δ a G_{tr}^\cap -nek a Prim G -re való szűrjekcióját indukálja. Ez az eredmény (amely Guichardet példája miatt nem igaz tetszőleges lokálisan kompakt csoportra) és amely egy nagyon bonyolult bizonyítás eredményeképp született, a reprezentáció elmélet egyik csúcsteljesítménye. (Az itt ismertetett dolgozatok eredményeinek egy részét foglalják össze a [30] és [34] előadások.)

Legyen G egy lokálisan kompakt szeparábilis csoport. Azt mondjuk, hogy G egy CCR-csoport ha minden $T \in \hat{G}$ -ra és minden $\phi \in L^1(G)$ -re $T(\phi)$ kompakt. [28]-ban Pukánszky Lajos a pályákkal kifejezve geometriailag karakterizálja az egyszerűen összefüggő CCR Lie csoportokat. Egy ilyen csoportnak, feltéve hogy nincs féligegyszerű direkt faktora, kokompakt radikálja van (ez a feltétel távolról sem elégséges), innen a dolgozat címe. Az eredmény általánosabb tételek következménye. A G egy T faktor reprezentációját GCCR-nek nevezzük (G : „generalised”) ha $T(C^*(G))$ minden eleme „kompakt” a $T(G)$ által generált faktor értelmében. Feltéve, hogy G -nek nincs féligegyszerű direkt faktora az alábbi feltételek ekvivalensek:

- (i) Prim G minden pontja zárt;
- (ii) G minden hű nyommal rendelkező faktor reprezentációja GCCR;
- (iii) G minden hű nyommal rendelkező irreducibilis reprezentációja CCR;
- (iv) G radikálja kompakt és gyökei tiszta imagináriusak;
- (v) G pályái kielégítenek egy geometriai feltételt (amelynek a leírása túl hosszadalmas ahhoz, hogy itt ismertessük).

Pukánszky Lajos karakterizálja a kokompakt radikállal rendelkező egyszerűen összefüggő Lie-csoportok közül az I típusúakat ([28] dolgozat, bejelentve [27]-ben).

A [29] dolgozatban Pukánszky Lajos visszatér az egyszerűen összefüggő nilpotens Lie-csoportokhoz. Legyen G egy ilyen csoport, $T \in \hat{G}$, Ω a neki megfelelő koadjungált pálya, χ_Ω pedig a T karaktere. Ez a karakter gyakran igen egyszerűen viselkedik a G egy elemével való eltolás hatására. Pukánszky Lajos megmutatja, hogy ez a viselkedés optimális, ha fennáll a következő egyenlőség:

$$(1) \quad \int_{\mathfrak{g}} \phi(\exp l) \chi_\Omega(\exp H(l+e, -e)) dl = \int_{\mathfrak{g}} \phi(\exp l) \chi_\Omega(\exp J(e)l) dl$$

minden $\phi \in C_c^\infty(G)$ -re és minden $e \in \mathfrak{g}$ -re. A jelölések a következők: $H(l, k) = \log(\exp l \exp k)$ ($l, k \in \mathfrak{g}$) a Campbell-Hausdorff sor és $J(e) = h(\text{ad } e)$, ahol $h(x) = (e^x - 1)/x$.

Legyen $K_j(l, e)$ az l -ben legfeljebb j -edfokú homogén komponensek összege $H(l+e, -e)$ -ben; ekkor $K_1(l, e) = J(e)l$. Minthogy \mathfrak{g} nilpotens, $H(l+e, -e) =$

$K_j(l, e)$ elég nagy j -re. Mindezt feltéve Pukánszky Lajos $d(\Omega)$ -val jelöli azt a legkisebb j egész számot, amelyre (1) igaz úgy, hogy $J(e)l$ -t $K_j(l, e)$ -vel helyettesítjük. Az ideális eset az, amikor $d(\Omega) = 1$. Legyen $V = \{v \in \mathfrak{g}^* | \Omega + v = \Omega\}$. Legyen $\mathfrak{m}(\Omega) = V^\perp$, ami egy számos ekvivalens definícióval rendelkező ideál \mathfrak{g} -ben. Legyen $s(\Omega)$ a legkisebb olyan k egész szám, hogy $\mathfrak{m}(\Omega)^k$ ortogonális Ω -ra (a k exponens a centrális leszálló sorozatra vonatkozik). Ekkor 1) $d(\Omega) \leq s(\Omega)$; 2) $d(\Omega) = s(\Omega)$ ha $\dim \mathfrak{g} \leq 7$; ez az állítás $\dim \mathfrak{g} = 8$ -ra nem igaz. A dolgozat még számos ezekkel a fogalmakkal kapcsolatos olyan eredményt tartalmaz, amelyek a Campbell-Hausdorff formula mély alkalmazását igénylik.

A [31], [32], [33] és [36] dolgozatok teljesen geometriai tárgyúak. Legyen G egy egyszeresen összefüggő feloldható Lie-csoport, \mathfrak{g} a Lie-algebrája és Ω egy koadjungált pálya. Pukánszky Lajos [31]-ben megmutatja, hogy a $\Lambda\pi_1(\Omega) \rightarrow H_*(\Omega, \mathbb{Z})$ kanonikus leképezés bijektív (Λ a külső algebrát jelöli). Legyen ω_Ω a kanonikus szimplektikus forma az Ω pályán, $g \in \Omega$, G_g a g stabilizátora G -ben, G_{g_0} ennek a neutrális komponense, \mathfrak{g}_g a Lie-algebrája, χ_g G_{g_0} -nak az a karaktere, amelynek a differenciálja $-2\pi g|_{\mathfrak{g}_g}$. Ha $a, b \in G_g$, legyenek α, β a $\pi_1(\Omega) \simeq G_g/G_{g_0}$ nekik megfelelő elemei. Ekkor $\chi_g(aba^{-1}b^{-1}) = \exp 2\pi i(\alpha \wedge \beta, [\omega_\Omega])$, ahol $[\omega_\Omega]$ az ω_Ω képe $H^2(\Omega)$ -ban. Ez visszaadja Kostant tételét, mely szerint χ_g akkor és csak akkor folytatható a G_g egy karakterévé, ha $[\omega_\Omega]$ egész. A tétel legfontosabb alkalmazása a [20] dolgozatban definiált kvázi-pályákra vonatkozik. Legyen Ω' egy ilyen kvázi-pálya. Továbbra is fennáll az izomorfizmus: $\Lambda\pi_1(\Omega') \rightarrow H_*(\Omega', \mathbb{Z})$. Általában nem létezik Ω' -n kanonikus 2-forma, de Pukánszky Lajos megkonstruálja $\mathbb{Z}^2(\Omega')$ az alábbi értelemben „megengedhető” ω elemeit: ω megengedhető, ha minden Ω' -ben lévő Ω koadjungált pályára való megszorítása egyenlő ω_Ω -val. Emlékeztetünk arra, hogy [20]-ban Pukánszky Lajos bevezetett egy $B(\Omega') \xrightarrow{\tau} \Omega'$ principális nyalábot, amelynek a struktúra csoportja a $\pi_1(\Omega')$ egy bizonyos Π részcsoportjának a $\tilde{\Pi}$ duálisa; $B(\Omega')$ egy G -tér és az általánosított pályák a G -pályák lezártjai $B(\Omega')$ -ben. Pukánszky Lajos egy érdekes τ -nak megfelelő szelést konstruál, és az egyik következmény az, hogy ha $[\omega]$ egésznek választható, akkor τ megszorítása egy általánosított pályára bijekció Ω' -re.

A [32] dolgozatban Pukánszky Lajos bevezeti a Hamilton-féle G -fóliázásokat: ezek a Kostant által bevezetett tranzitív Hamilton-féle G -terek általánosításai. Pukánszky Lajos karakterizálja a Hamilton-féle G -fóliázások közül azokat, amelyek izomorfak az általánosított pályákkal. A momentum operátor ebben a kontextusban definiálható. Mindenesetre, amint ezt példák mutatják, számos, a tranzitív esetben igaz eredmény nem terjeszthető ki az általános esetre.

A [33] cikk célja N. V. Pedersen (Pukánszky Lajos tanítványa) bizonyos eredményeinek az általánosítása. Legyenek G , g és Ω , mint korábban. Tegyük fel, hogy ω_Ω egész, ami lehetővé teszi egy Ω feletti L komplex vonalnyaláb konstrukcióját. Így a Kostant féle masinéria (prekvantizáció, kvantizáció) teljes egészében alkalmazható. Tegyük fel, hogy \mathfrak{g} -nek van egy valós G -invariáns polarizációja. Ekkor a kvantizáció egy izomorfizmust definiál \mathcal{E}^1 (az Ω Poisson-algebrájának egy bizonyos

részalgebrája) és az L szeléseinek egy terén vett ≤ 1 rendű differenciáloperátorok Lie-algebrája között. Pukánszky Lajos általánosításában ω_Ω -ról nincs feltéve, hogy egész, ezért Ω -t egy „standard fedő”-jével kell helyettesíteni. Ekkor létezik egy g komplex polarizáció, amelyre Pedersen tételei – megfelelően módosítva – érvényesek maradnak. Pukánszky Lajos bebizonyítja, hogy ha Ω egyszeresen összefüggő, akkor Ω -n léteznek globális Darboux-koordináták (Pedersen ezt igazolta exponenciális G -re). A [36] dolgozat a Darboux-koordináták létezésének egy egészen más bizonyítását adja. Egy olyan tételen alapszik, amely tetszőleges G Lie-csoportra igaz: g egy bizonyos m ideáljának kiválasztása révén Ω principális nyalábbá tehető az m^\perp struktúra csoporttal. Ez a nyaláb kanonikusan izomorf a $T^*\Omega$ koérintő nyalábjának egy résznyalábjával.

A [35] dolgozatban fel van téve, hogy G feloldható és gyökei valósak. Mint-hogy az Ω -n értelmezett G -invariáns mérték nem mindig temperált, g^* -ban az Ω -nak megfelelő T reprezentáció terén értelmezett bizonyos A pozitív önadjungált operátorokat kell tekinteni és a $\text{Tr}(T_\phi)$ -re vonatkozó megfontolásokat a $\text{Tr}(AT_\phi A)$ -ra vonatkozó megfontolásokkal kell helyettesíteni (ahol $\phi \in C_c^\infty(G)$). Pukánszky Lajos bebizonyítja, hogy minden pozitív t -re az $A^t T_\phi A^t$ nyomoperátor és a $t \mapsto \text{Tr}(A^t T_\phi A^t)$ függvény olyan meromorf függvénné folytatható \mathbb{C} -re, amelynek pólusai a valós tengelyen vannak. A bizonyítás korolláriuma: ha Ω egy algebrai halmaz összefüggő komponense, az Ω -n értelmezett mérték temperált.

Ez a mély benyomást keltő matematikai munkásság nagyarányú és kitartó erőfeszítésről tanúskodik. Középpontjában az unitér reprezentációk elmélete áll. E koncentrálttság ellenére Pukánszky Lajos kimeríthetetlen matematikai kultúrával rendelkezett, dolgozataiban nemcsak a funkcionálanalízis és a Lie-csoportok elméletének a teljes fegyvertárát használta fel, hanem a matematikának olyan változatos eszközeit, mint a konnexiók, a szingularitások feloldása, a parciális differenciálegyenletek, a disztribúciók osztása, homológiák elmélete. . . Pukánszky Lajos nagyon korán kivívta a nemzetközi matematikus közösség elismerését. 1988-ban 60-adik születésnapja tiszteletére a Koppenhágai Egyetem „The orbit method in representation theory” címmel kollokviumot rendezett. A kollokvium előadásait a Birkhäuser Kiadó publikálta (Progress in Mathematics, vol. 82).

A matematikus társadalom kiemelkedő alakját vesztette el.

(A megemlékezés angol fordítása megjelent a *Notices of the American Mathematical Society*, **45** (4) 1998, 492–499. számában.)

A MATHEMATICA® PROGRAMCSOMAG

Discrete Mathematics rutinyűjteménye

ERDŐS PÉTER

A Wolfram Research Inc. *Mathematica*® nevű terméke az egyik leghatékonyabb matematikai manipulációs programcsomag. Képes szimbolikus és numerikus számítások gyors és pontos elvégzésére, és az eredmények akár grafikus megjelenítésére.

A csomag egyik legfontosabb erényét nyitottsága jelenti. A *Mathematica*éhoz ma már több száz kiegészítő rutincsomag született, melyek egy-egy speciális terület sajátos igényeinek kielégítésére szolgálnak. Ezek közül jó néhány programcsomag bekerült a Wolfram Research által támogatottak közé: a cég elősegíti (egyébként ingyenes) terjesztésüket, illetve támogatja a programokat leíró kézikönyvek tüzletbe kerülését.

A csomagok egyik prominens példája Steven Skiena, a State University of New York, Stony Brook professzorának 1989/1990-ból származó *Discrete Mathematics; Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*® csomagja, amely elérhető a `cs.sunysb.edu` anonymous FTP forrásból, de a *Mathematica* újabb változataihoz már mellékelik.

Jelen leírás a csomag szolgáltatásait ismerteti röviden és némi értékelést is megkísérel adni, közben a csomagra mint DM-csomagra fog hivatkozni. Alapját Steve Skiena könyve [1] képezi.

A könyv (és a programcsomag) két fő témáját a diszkrét matematika két különböző területe jelenti: a *kombinatorikus analízis*, azon belül bizonyos speciális objektumok leszámblálása, illetve a *gráfelmélet* alapvető alakzatainak megkonstruálása illetve megjelenítése. Ez utóbbi téma kiruccanást jelent az algoritmikus gráfelmélet területére is. Az egyes témákat részletesebben a fentebb idézett könyv sorrendjében és alapján ismertetjük.

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a programcsomag függvényeinek eléréséhez először a csomagot be kell tölteni a következő paranccsal:

```
In[1]:= <<DiscreteMath'Combinatorica'
```

I. Kombinatorikus analízis

1. Permutációk és kombinációk

A *permutáció* n megkülönböztethető objektum (általában az első n természetes szám) valamely rögzített sorrendje – illetve az az eljárás, amely az objektumokat az alaphelyzetből ebbe a sorrendbe viszi. A *kombináció* az előző n objektum közül néhánynak a részhalmaza, ahol a kiválasztás sorrendje nem játszik szerepet.

Az előző objektumok igen alapvetőek a *diszkrét matematikában* (vagy másképpen a *kombinatorikában*).

1.1. Permutációk. Ez a szakasz olyan műveleteket tartalmaz, melyek konkrét permutációkat hoznak létre – azaz adott tulajdonságú permutációkat konstruálnak meg.

- A `PermutationQ` függvény azt ellenőrzi, hogy adott n elemű lista az első n szám egy permutációját adja-e meg, a `Permute` függvény pedig objektumok egy rendezett listáját képes átrendezni a második paraméterként bevitt permutáció szerint (az előző tesztfüggvény alkalmazásával azt is észleli, ha a második paraméter mégsem egy érvényes permutáció).
- A *Mathematica* eredetileg beépített `Permutation` függvénye alkalmas adott objektumok összes sorrendjének szisztematikus meghatározására. A kiegészítő csomag `LexicographicPermutations` parancsa viszont a listát lexikografikus sorrendben generálja.
 - Az alkalmazott algoritmus jól ismert (pl. R. Sedgewick [2], 1977), és kételemű transzpozíciókon alapul.
- Az összesen $n!$ féle permutációt sok módon lehet sorbarendezi (definiálni rajtuk egy teljes rendezést). Ez a teljes rendezés a `DM`-csomagban a lexikografikus rendezés. Az `NthPermutation` függvény megadja ezen rendezés szerinti n -edik permutációt, míg a `RankPermutation` függvény az előzőnek éppen az inverze, megadja, hogy egy adott permutáció hányadik a lexikografikus rendezés szerint.
- A `RandomPermutation?` függvények ($?=1$ vagy 2) véletlen permutációkat állítanak elő. Az első eljárás n darab véletlen valós számból indul ki és ezek nagysága határozza meg a permutációt, míg a második egy tetszőleges, de adott permutáció digitjeit cseréli ki valahogyan.
 - Meg kell említenünk, hogy mindkét eljárás (mint minden számítógépes eljárás) csak „pseudo-véletlennek” tekinthető. Ugyanis a véletlenszám-generátorok algoritmusai szintén csak pseudo-véletlennek tekinthetők, és sokszoros alkalmazásuk egymással korrellációban álló számokat produkálhat. (A megfelelő definíció szerint egyébként egy véletlen permutációt úgy kapunk, hogy az összes lehetséges permutáció valamelyikét vesszük ki, egyenlő valószínűséggel.) A felhasznált algoritmusok használhatóságát

nem túl egyszerű bebizonyítani, de erről a könyv még csak említést sem tesz.

- Megemlíti viszont a könyv, hogy a *Mathematica* programozási környezete nem igazán konform a szokott RAM-gépes modellel, ezért gyakran előfordul, hogy a kifejlesztett program nem éri el az elmélet megígért gyorsaságot. Pl. a második randomizációs eljárás elvi korlátja $O(n)$, míg a tényleges implementáció $O(n^2)$ komplexitású.
- A `MinimumChangePermutations` függvény úgy sorolja fel a permutációkat, hogy a szomszédosak között csupán egyetlen transzpozíció a különbség.
- A halmazoknál bonyolultabb objektumok a *multisetek* (halmazok ismétlésekkel) – ilyenkor az univerzum elemek egy listája, ahol minden elemnél meg van adva, mekkora multiplicitással szerepelhet az adott elem a multisetben. Ha multisetek permutációit vizsgáljuk, akkor (a magyar terminológiát követve) az elemek *ismétléses permutációját* vizsgáljuk.
 - Ezek számát a polinomiális együtthatók írják le, és őket a `DistinctPermutations` függvény konstruálja meg. A konstrukcióra használt algoritmus alapját az általános célú `Backtrack` függvény képezi, amelyet tetszőleges olyan más feladat megoldására is használhatunk, amely visszalépéses kereséssel megoldható.
- A szakasz utolsó pontja elemek rendezésével illetve rendezett listák visszakeresésével foglalkozik. A téma persze eléggé szerteágazó, hisz Donald Knuth egy hétszáz oldalas könyvet [3] írt róla. A DM-csomag mindössze két további rendező algoritmust kínál (a belső `Sort` eljáráson kívül): a *kiválasztásos rendezést* a `SelectionSort`, a *kupacrendezést* a `HeapSort` valósítja meg. A csomag egyetlen visszakereső eljárást (`BinarySearch`) tartalmaz. Ez utóbbi persze csak rendezett listákon működik.
 - A könyv megjegyzése szerint a *Mathematica* beépített rendező eljárása sokkal gyorsabb, mint a DM-csomagé.
 - A kupacrendezés egy megvalósítása a következő fejezetben található meg.

1.2. Permutációcsoportok. A permutációcsoport a kombinatorikus csoportelmélet talán legfontosabb objektuma. Kezelése régóta a szimbolikus számítási problémakör homlokterében van. Kifinomult programcsomagok vannak a piacon. (Pl. a Cayley csomag, vagy az, amit az utolsó 4 évben Aachenben fejlesztettek ki. Ennek egyik mozgató ereje a Babai László nevével fémjelzett magyar iskola, benne például a jelenleg Ohioan élő Seress Ákos.)

- Permutációk (algebrai) szorzatát állítja elő (többek között) a `Permute` parancs. A könyv ennek illusztrálására egy szimmetrikus csoport szorzótábláját állítja elő.
- Egy adott permutáció inverzének előállítására az `InversePermutation` függvény szolgál. A permutáció szerkezetét az ekvivalenciaosztályok, azaz az elemek

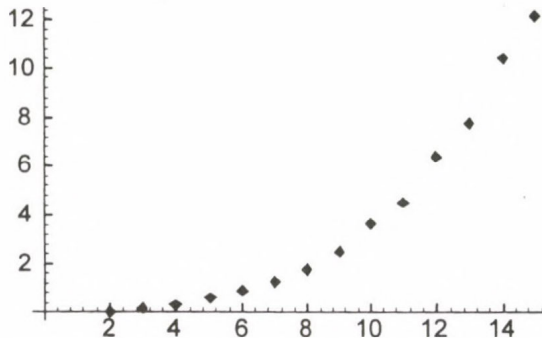
pályái írják le. Ennek kiszámítását illetve ellenőrzését intézik az EquivalenceRelationQ, ReflexiveQ, TransitiveQ, EquivalenceClasses, PermutationGroupQ valamint a SamenessRelationQ parancsok. Például

```
PermutationGroupQ[1,2,3,2,1,3]
```

```
True
```

- Az alkalmazott algoritmusok teljesen maguktól értetődőek, nem tartalmaznak semmi különlegességet. Komplexitásukról sem tudunk meg sokat a szövegből. Megjegyzendő, hogy a hasonló rekurzív megfogalmazások általában lassúak, tipikusan exponenciálisak.

```
exp[n_]:=Table[Random[Integer, {0,1}],{i,n},{j,n}]
adat=Table[{n,First[Timing[TransitiveQ[exp[n]]]]/Second},{n,2,15}]
ListPlot[adat,PlotStyle->AbsolutePointSize[2]]
```



- A permutációk közismerten ciklusokra bonthatók. A ToCycle parancs végzi el a felbontást, a FromCycle parancs pedig helyreállítja a permutációt a ciklusszerkezetéből, végül a HydeCycle függvény egy másik eljárással készíti el az adott ciklusokból álló permutációt.
- A NumberOfPermutationsByCycle határozza meg a pontosan adott számú ciklust tartalmazó permutációk számát (ismét csak a szokott rekurzív előállítás alapján). A rekurzió (mellesleg) definiálja az ún. elsőfajú Stirling számokat (lásd pl. Jordán Károly klasszikus könyvét [4] a részletekért). Megemlítendő, hogy a másodfajú Stirling-számok halmazok partíciónálásánál lépnek fel. Mindkét típusú Stirling-számra többféle rekurzió is ismert, de nem létezik zárt formula. A DM-csomag a StirlingFirst és a StirlingSecond eljárásokat biztosítja a számításokhoz. Az eredeti Mathematica csomag a SS1, SS2 függvényeket használja.
- A permutáció *paritását* (azaz a benne található inverziók számát) a SignaturePermutation függvény határozza meg.

- Végezettil a csomag tartalmazza a Pólya-tétel egy megvalósítását, azaz képes leszámolni objektumok ciklikus permutációit, amikor megkülönböztethetetlen elemek vannak jelen. Ezt a Pólya függvény hajtja végre.
 - A Pólya tétel talán legtipikusabb két alkalmazása a kémiában illetve a gráfelméletben található: a kémiában a lehetséges különféle molekulák számát határozzák meg vele, a gráfelméletben pedig a címkézetlen fák leszámolására használják.

1.3. Inverziók és inverzióvektorok. Egy permutációban két elem *inverzióban* áll egymással, ha sorrendjük ellentétes nagyságukkal. Az *inverzióvektor* i -edik eleme az i -hez inverzióban álló elemek számát adja meg. Marshall Hall adott meg egy könnyen számítható bijekciót a permutációk és az inverzióvektorok között.

- A TolInversionVector és a FromInversionVector függvény éppen ezt a bijekciót valósítja meg. Az Inversions függvény az inverziók számát határozza meg adott permutációban.
 - A könyv az inverziók számának átlagát abból a tényből vezeti le, hogy minden permutáció a megfordítottjával együtt összesen $n(n-1)/2$ inverziót tartalmaz (hiszen bármely elempár pontosan az egyik permutációban van inverzióban). Ezen egyszerű tény a könyvben példa igazolja (de nem bizonyítja).
- Az Index függvény kiszámítja a permutáció inverzét (a könyv itt MacMahon egy tételére hivatkozik).
- A Runs függvény adott permutációkban a *futamok*, azaz egymásutáni elemekből álló, maximális monoton növekvő részpermutációk számát adja meg. Mint ismeretes, a híres Euler-számok éppen a pontosan k -futamot tartalmazó permutációk számát adják meg. Ezt az Eulerian eljárás állítja elő. (Az eredeti csomag EulerE függvénye a definiáló generátorfüggvényből adja meg ezen számokat, az itteni eljárás viszont egy dinamikus program alapú rekurzióból, ezért hatékonysága jobb.)

1.4. Speciális permutációk. Miként a cím is mutatja, itt speciális tulajdonságú (és nevesített) permutáció osztályokat állítunk elő, illetve ellenőrünk.

- Az InvolutionQ függvény ellenőrzi, hogy egy adott permutáció *involúció*-e. (Ez olyan eleme a permutációcsoportnak, amely önmaga inverze, azaz kétszeres alkalmazása az identitással azonos.)
- A Derangements függvény a fixpont nélküli permutációkat állítja elő, a DerangementQ függvény pedig azt ellenőrzi, hogy egy adott permutáció *kielégíti-e* ezt a feltételt. Végül a NumberOfDerangements az ilyenek számát határozza meg.
- A Josephus-probléma annak meghatározása, hogy ha n ciklikusan sorbarakott objektumból minden m -ediket kivesszük, akkor melyik objektum kerül sorra csak a végén. Ezt a Josephus függvény adja meg.

- A *kupacok* (angolul *heap*) nagyon hatékony adatstruktúrák bináris fák tárolására. (Pl. a Windows operációs rendszer legfontosabb belső változóit ilyenek tárolják, lásd pl. a GDI-heapet). Ilyenek megkonstruálása és főleg kezelése nehéz feladat. Pl. két kupac „összefésztülése” nevezetes probléma. Floyd fejlesztette ki az első hatékony algoritmust ennek megoldására. A DM-csomag ezt a Heapify függvénnyel valósítja meg. A kupacoknak egy jelentős alkalmazása az ún. *heapsort*, amely egyike a leggyorsabb rendezési algoritmusoknak. Ennek megvalósítása a HeapSort eljárás.

- A szöveg szerint a *Mathematica* belső adatszervezése miatt, az elméleti korlátokkal ellentétben, a megvalósított kupacrendezési algoritmus nem ad lényegesen gyorsabb eljárást, mint az eredetileg is beépített SelectionSort. Itt persze megint felmerül a kérdés, hogy ez csak implementációs „ügyetlenség”, vagy pedig immanensen jelen lévő nehézség.

1.5. Kombinációk. Ebben a szakaszban a DM-csomag egy sereg eljárást ad meg n elem kombinációinak adott sorrendű generálására.

- A leírás valamely okból itt említi egy m elemű ábécéből (alphabet) képezhető *karakterfüzerek* (string) generálását. (Nem tévesztendő össze a karakterfüzér adattípussal!) Ezek nem mások, mint az adott hosszúságú, korlátozás nélküli (azaz nem multiset típusú) ismétléses variációk. A Strings függvény ilyeneket állít elő.
 - A „valamilyen okból” kifejezés arra utal, hogy a kombináció éppen sorrend nélküli objektum, ellentétben a variációkkal. Továbbá a későbbiekben említésre kerülő kombinációk mind „ismétlés nélküliek”, ellentétben a karakterfüzerekkel.

Egy *kombináció* nem más, mint az adott alaphalmaz egy részhalmaza. Egy részhalmaz belső reprezentálása karakterisztikus vektorával történik. Ezek szerint egy n elemű alaphalmaz minden részhalmaza megfelel egy 0 és $2^n - 1$ közötti egész számnak. Ez a reprezentáció meghatározza a részhalmazok egy sorrendjét.

- Részhalmazokkal a DM-csomag Subsets, NthSubset, BinarySubsets, NextSubset és RankSubset függvényei dolgoznak. A függvények alkalmazása értelemszerű. Véletlen részhalmazokat véletlen valós számokon keresztül állíthatunk elő, alkalmazva a részhalmazok bináris reprezentációját.
- A Gray féle kód részhalmazok olyan sorbarendezése, ahol a szomszédos halmazok egyetlen elemben különböznek egymástól. Ilyet állít elő a GrayCode függvény. A LexicographicSubsets a részhalmazokat értelemszerűen lexikografikus sorrendjükben állítja elő.
 - Itt érdemes megjegyezni, hogy ez a sorbarendezés fontos szerepet játszik az extrémális halmazrendszerek elméletében, mint a kanonizálás eszköze. Ott azonban kétféle lexikografikus rendezést is használnak. Az egyik egy teljes, a másik azonban csak parciális rendezés (ez utóbbi csak az azonos

elemszámú részhalmazok sorrendjét határozza meg). Az idézett könyv azonban nem említi ezen lehetőségeket.

- A `KSubsets` függvény az alaphalmaz adott elemszámú (a függvényhívás második paramétere) részhalmazait sorolja fel lexikografikusan növekvő sorrendben, a `NextKSubset` pedig a lexikografikus rendezés szerinti következőt.
A `RandomKSubset` függvény egy véletlen k -részhalmazt ad vissza.

2. Partíciók és Young Tableau-k

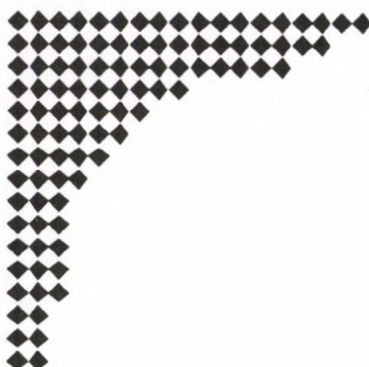
A *partíció* kifejezést két értelemben is használják. Az egyik a halmazok partíciója, ami az előző részben tárgyalt dolgokkal van kapcsolatban: pl. az $S(n, k)$ másodfajú Stirling szám azt adja meg, hány módon lehet egy n elemű alaphalmazt k nem-üres, diszjunkt részhalmazának uniójára bontani. Egy ilyen felbontás egy *halmazpartíció*.

A partíció szó másik értelmét még Euler vezette be, és egy természetes szám pozitív számok összegére való felbontását értette rajta. Ilyen objektumok leszámolása volt a kiindulópont a kombinatorikus analízis kifejlesztésére. A partíciók kiterjedt elméletéről több jó könyvet is írtak, ezek közül a legalapvetőbb Andrews könyve [5], amely a híres oxfordi Matematikai Enciklopédia sorozat második kötete volt. Skiena kiterjedten használja ezt a forrást.

2.1. Partíciók.

- A `Partitions` függvény egy adott természetes szám összes partícióját állítja elő. Megfelelően paraméterezve azon partíciók is előállíthatók a segítségével, ahol előírjuk a legnagyobb felhasználható tagot is. A partíciók multisetként sorbarendeázhetők (másképpen szólva lehet venni lexikografikus sorrendjüket), így a `NextPartition` megint csak értelemszerűen működik.
 - A `Partition` beépített függvény listákat bont megadott módon részlistákba.
- A partíciók ábrázolására a Ferrer-diagramot szokás felhasználni. Ez egyszerűen fekete pontok egy rendszere: az összeadandókat fogyó sorrendbe rendezik, majd az első sorba az első nagyságával megegyező számú pontot tesznek, a második sorban hasonlóan járnak el a második összeadandóval, stb. A Ferrer diagram rendkívül alapvető eszköz különböző típusú partíciók közötti bijekciók előállításához. A `FerrersDiagram` nevű függvény egy adott partíció megjelenítésére szolgál.

FerrersDiagram[RandomPartition[100]]



- Partíciók átalakítására és generálására számos eljárás van beépítve a DM-csomagba. Ilyen a `TransposePartition`, `DurfreeSquare` vagy a `RandomPartition` művelet. Ilyen módon azonban eléggé reménytelen új partícióbijekciók előállítására, ezért ezek az eszközök is (hasonlóan a permutációkkal kapcsolatban tárgyaltakhoz) leginkább demonstrációs célokra használhatók.
- A `NumberOfPartitions` függvény a híres Euler-rekurzió alapján határozza meg adott szám partícióinak számát (mint ismeretes, erre megint csak nem létezik zárt formula). Szerepe és működése hasonló a `PartitionP` beépített függvényével. A `PartitionQ` belső függvény pedig az eltérő tagokba történő különböző partíciók számát adja meg.

2.2. Kompozíciók. Ezek természetes számok nemnegatív egészek összegekénti előállítására szolgálnak, de itt megengedünk nulla összeadandót is. A számok sorrendje szintén lényeges, de általában korlátozva van az összeadandók száma. Ez a struktúra nem játszik lényeges szerepet a kombinatorikus analízisben (legfőbbképpen, mert könnyű problémákat vet csak fel), és talán csak a teljesség igénye hozta elő. A problémának nyilván köze van elemek ismétléses kombinációihoz.

A bevezetett műveletek az előzőkhöz hasonlatosak, a DM-csomag képes ilyeneket generálni, megszámlolni, véletlen módon előállítani.

2.3. Young Tableau-k. Mint már említettük, a jelenlegi kombinatorikus analízisbeli kutatások legtöbb erőfeszítése ezen struktúrák vizsgálatára összpontosul. Ezek olyan kétdimenziós, természetes számokból álló (nem mátrix-alakú) táblázatok, ahol minden sor és minden oszlop monoton növekvő sorrendű, a sorokat pedig balra igazítják, továbbá az egy-egy sorban álló értékek száma az adott n szám egy rögzített partícióját adja.

- A `TableauQ` függvény eldönti, hogy az argumentumaként megadott táblázat T-e (ezen kívül ezt a rövidítést alkalmazzuk). A `TableForm` belső függvény síkba rajzolja a megfelelő T-t. A `TransposeTableau` pedig azt vizsgálja, hogy a sorok

és oszlopok cseréjével mit kapok. Végül a `ShapeOfTableau` az adott T alakját adja vissza.

- (Ezek persze mind csak leíró jellegű funkciók, még csak nem is gyorsítanak semmit. Közben bevisszük az adatokat, már el is végezhetnénk a megkívánt vizsgálatot.)
- Ismeretes egy, a permutációk és azonos alakú `Tableau` párok között ható bijekció. Az ehhez szükséges eljárásokat valósítja meg az `InsertIntoTableau`, `ConstructTableau` valamint a `DeleteFromTableau` függvény. Végül a `TableuToPermutation` függvény valósítja meg a teljes eljárást.
 - Itt megfigyelhető a *Mathematica* csomag beépített programozási nyelvének hatékonysága, hiszen igen tömör programmal lehet előállítani a szükséges algoritmust.
- A `NumberOfTableaux` parancs az adott alakú táblák számát tudja meghatározni (megint csak közismert, de nagy elméleti apparátust megmozgató rekurzió alapján). Ennek kapcsolata van a jól ismert Catalan-számokkal is. Az érték (igen egyszerű) meghatározására a `DM`-csomag a `CatalanNumber` eljárást tartalmazza. (Vigyázat, a `Catalan` belső függvény a `Catalan` féle állandót, azaz egy végtelen sor összegét adja meg.)
- Mellesleg ez a mennyiség rengeteg leszámplálási feladatban megjelenik. Pl. egy konvex n -szög háromszögeléseinek számát, vagy egy n -tagú szorzat helyes zárójelzéseinek számát éppen a megfelelő Catalan-szám adja meg. Hasonlóan, az 1974-es Kürschák matematikai verseny ismert feladata (hány olyan sorbanállása van n lánynak és n fiúnak, hogy a sor végén fordul elő először az az eset, hogy addig a lányok száma megegyezik a fiúk számával) szintén egy származtatott mennyiség.
- `ARandomTableau` véletlen T -t generál (az argumentumban megadjuk a T alakját). Ez az eljárás egyáltalán nem triviális, Nijenhuis és Wilf nevéhez fűződik.
- A `TableauClasses` és a `LongestIncreasingSubsequence` adott T vizsgálatára szolgál.
 - Az 1935-re datált híres Erdős–Szekeres tétel azt állítja, hogy minden $n^2 + 1$ elemű számsorozatban létezik egy legalább $n + 1$ elemű monoton részsorozat. Ennek tetszőleges részben rendezett halmazra vett általánosítása a jól ismert Dilworth-tétel. Az első állítást demonstrálja Skiena egy példája.
rp=RandomPermutation[37];
LongestIncreasingSubsequence/@
{rp,Reverse[rp]}
{ {7, 9, 11, 12, 13, 16, 27, 36},
{1, 3, 5, 8, 15, 17, 18, 29, 34, 35, 37} }
- Látható, hogy most növekvő és csökkenő hosszú sorozatot is találtunk.
- A fejezet végén a kutatási problémák listája különösen esetlegesnek tűnik.

II. Gráfelmélet

3. Gráfok reprezentációja

A gráfokat (mint sok egyebet is) Leonhard Euler vezette be a matematikába, mikor megoldotta a „Könisbergi hidak problémájaként” ismertté vált feladatot. Azonban hosszú ideig ez volt az egyetlen ismert eredmény. Vagy száz évvel később kezdett Kirchhoff újra gráfokkal (illetve, pontosabban szólva, hálózatokkal) foglalkozni. A gráfelmélet felvirágoztatását nagyrészt König Dénes nevéhez, illetve 1930 körül kiadott könyvéhez lehetett kötni. Az általa megalapított magyar iskola ma is a világ talán legerősebb ilyen iskolája.

A gráfok definiálására két lehetőség kínálkozik. Az egyik a pontok illetve az élek listás felsorolása (ez a kombinatorikusnak tekintett út) vagy a *szomszédsági mátrix* bevezetése (ez a szokásos mód algebrai vizsgálatok esetén); ezt az utat követi a DM programcsomag is. A harmadik mód a dolgok vizualizálása lenne. Ezt használja minden gráfelméletész, ha valamit meg akar vizsgálni, de ennek számítógépes követése eléggé reménytelennek tűnik.

A számítógépes vizsgálatok megkívnának egy jó adatstruktúra, valamint a gráfműveletek hatékony megvalósítását, de evvel ez a program sajnos adós marad.

Úgy tűnik, ebben az irányban a saarbrückeni egyetemen fejlesztés alatt álló LEDA programcsomag ígéri a legtöbbet, amely C++ nyelven definiált megfelelő adatosztályokat és eljárásokat. Mindamellet ez inkább programozási segédletnek tekintendő, azaz felhasználói programokból hívható rutinok gyűjteménye.

Az érdeklődő olvasónak a témakörrel való részletesebb megismerkedéshez több könyvet is ajánlhatunk: a (világon) első könyv König Dénes alapvető műve [6], a talán legjobb magyar nyelvű könyvek pedig Andrásfai Béla művei [7].

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a DM-csomag milyen segítséget nyújthat gráfokkal kapcsolatos munkáinkban.

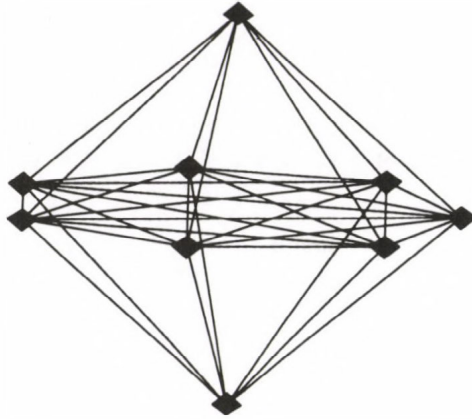
3.1. Adatstruktúrák gráfok ábrázolására. A DM-csomag döntően az algebrai utat követi.

- Gráfokat szomszédsági (azaz *adjacencia*-) mátrixukkal ad meg, méghozzá irányított gráfként. Egy sorozat eljárás szolgál arra, hogy ebből az adatstruktúrából kinyerjük a gráfra jellemző mennyiségeket. Ilyenek az Edges, Vertices, ChangeVertices, ChangeEdges függvények. Egy adott gráfot a ShowGraph parancs mutat meg. A parancs irányított gráfokra is alkalmazható.
 - Enélkül a gráf csúcsainak koordinátáit kapjuk vissza, ami bizony nem segít túl sokat valamely probléma megoldásában.
- A $V[]$ illetve az $M[]$ függvény a csúcsok illetve élek számával tér vissza.
- Az AddEdge, DeleteEdge függvény segítségével új éleket lehet bevinni, vagy régiakat törölni. Az InduceSubgraph függvény valamely csúcshalmaz indukálta

részgráfot adja meg. Végül a Connected-Components megadja az összefüggő komponenseket

- A Spectrum az adott gráf sajátértékeivel tér vissza (azaz a szomszédsági mátrix sajátértékeivel). Ezek fontos mennyiségek, mert gráfelméleti jelentésük van. A kémiában a molekulák ábrázolásánál a spektrum az energia szintekkel van kapcsolatban.
- Speciális gráfokat állít elő a Star, a Cycle és a $K[x]$ (teljes gráf) függvény. Egyéb műveletek: GraphUnion (két gráf diszjunkt egyesítése), illetve a 4. fejezetben közölt (és később ismerttetendő) műveletek. A RealizeDegreeSequence (ez egy adott érvényes fokszámsorozatotól konstruál egy olyan gráfot, amelynek fokszámsorozata megegyezik az eredetivel). Mód van irányított és nem-irányított gráfok közötti átalakításra is.
 - Figyelem, az Union belső függvény listaművelet, eltér az előbbitől.
- További elemi operációk: hurkok és többszörös élek eltávolítása, üres és teljes gráf előállítása, továbbá gráf tulajdonságok ellenőrzése (pl. üres-e valami, stb.).
- Élek összehúzását a Contract, gráfok komplementálását a GraphComplement függvény végzi.
 - Mindezek a műveletek ismeretesek a gráfelméletből, de megvalósításuk csak arra alkalmas, hogy a géppel is meg tudjuk ismételni a kézzel végrehajtható dolgokat, de nem nyújt automatizált eljárást valami megtalálására.
- A két legalapvetőbb gráfalgoritmus a Breadth-First-Search illetve Depth-First-Search, amelyek a gráfok adott tulajdonságú bejárásán alapuló keresési eljárások. Az első olyan bejárás alapul, amely minél tovább igyekszik a kiinduló pont közelében maradni. A második pont fordítva, igyekszik minél messzebb kerülni a kiinduló ponttól. Az eljárások a BFS illetve DFS függvények. A keresések (a BreadthFirstTraversal illetve a DepthFirstTraversal) bejárásokon alapulnak.
- Kellően ellenőrizhető a gráfok megjelenítése is, azonban itt is túl sok mindent kell kézzel előírni.
 - Másképpen fogalmazva, ha egy konkrét gráfot szépen akarunk megjeleníteni, akkor bevisszük az adatait, majd addig alakítjuk, amíg gyönyörű nem lesz. De ez nem alkalmas gráfosztályok megjelenítésének automatikus megszépítésére. Ez annyira így van, hogy maga Skiena sem ezeket az eljárásokat alkalmazta könyve ábráinak előállítására, hanem a SPREMB programcsomag GED szerkesztőjét.
- A gráfok végleges megjelenítésére a *Mathematica* beépített PostScriptTM grafikája használatos.

ShowGraph[SpringEmbedding[GraphJoin[EmptyGraph[2],K[7]]]]



- Gráfok beágyazására több eljárás is van. A beágyazás itt több mindent is jelenthetne, részben felületekbe „felesleges” metszés nélküli beágyazást, részben pedig adott típusú univerzális gráf pontjaiba való beágyazást. A DM-csomagban ez utóbbi a beágyazás. Pl. a csúcsokat körben rendezhetjük el (ez persze csak kicsiny pontszám esetén lehetséges).
- Külön rutincsomag van fák (azaz körmentes gráfok) kezelésére, ábrázolására, beágyazására, stb. A gyökeres vagy gyökértelen fákat eltérően kezelik.
- A csomag kellően jó export/import szolgáltatást nyújt egy sor egyéb gráfokkal dolgozó csomaghoz. Pl. ilyen a SPREMB, amellyel képes adatokat cserélni.
 - Megemlíthető a GRAFFITI program, amely egy sor olyan sejtést állított elő, amely elméleti szempontból is érdekesnek bizonyult, és további kutatásokat implikált.

4. Gráfok generálása

Ebben a fejezetben paraméterezhető gráfosztályok generálásáról van szó.

4.1. Gráfok építése egyéb gráfokból.

- Gráfok egyesítése és metszete: GraphUnion, GraphIntersection
- Gráfok összege és különbsége: GraphDifference, GraphSum, GraphJoin
- Gráfok szorzata: GraphProduct, ProductVertices
- Incidenciamátrix előállítása: IncidenceMatrix
- Az élgráf előállítása: LineGraph

4.2. Reguláris struktúrák

- Tudunk teljes, tûres vagy *circulans* gráfot előállítani. (Ez utóbbi a kör egy általánosítása, ahol minden pont több csúcscsal is össze van kötve, de forgásszimmetrikus módon.) Van továbbá teljes k -részes gráf (közte a teljes kétrészes-, azaz párosgráf is). Van egy speciális függvény a megfelelő Turán-gráfok előállítására, amelyek olyan k -részes gráfok, ahol minden osztály (majdnem) azonos méretű.
- Van továbbá kör-, csillag- és kerékgráfot előállító függvény.
- Adott a rács-gráf is (mint a Path, GridGraph) továbbá a hiperkocka.

4.3. Fák

- Az egyik legfontosabb eljárás címkézett fák esetén a Prüfer-kód előállítása. A LabeledTreeToCode függvény adott fát kódol, míg a másik irányt a CodeToLabeledTree függvény valósítja meg.
 - Egyébként a Prüfer-kód nyújtja a leggyorsabb eljárást annak bizonyítására, hogy az n címkézett ponton megadható különböző fák száma éppen n^{n-2} .

4.4. Véletlen gráfok. A véletlen gráfokat Erdős Pál vezette be híres bizonyításában, ahol a (máig is) legjobb alsó becslést adta a teljes gráfra vonatkozó Ramsey-számra. Ő és Rényi Alfréd kezdte meg a terület szisztematikus vizsgálatát. A véletlen gráfok vizsgálata ma is a magyar iskola egyik központi területe. A DM-csomag a három lehetséges véletlen modellből kettőt támogat.

- A RandomGraph az egyenletesen generált élek modellje. Ekkor minden csúcspárra azonos eloszlással, nevezetesen p valószínűséggel, és egymástól függetlenül fektetünk élt.
- Az ExactRandomGraph függvény az összes, pontosan m élű gráf közül választ egyet véletlenül. Itt igen nehéz megvalósítani az uniform választást. Ekkor ugyanis komoly gond a izomorf gráfosztályok meghatározása.
 - A harmadik modell esetén az összes lehetséges n -pontú gráf közül kell egyet, egyenletes elosztás mellett, kiválasztani. Nagyobb pontszám mellett ennek megvalósítása a legnehezebb.

5. Gráftulajdonságok

Gráfinvariánsokat, azaz izomorfia erejéig meghatározott tulajdonságokat vizsgál ebben a fejezetben.

5.1. Összefüggőség

- A `ConnectQ` függvény ellenőrzi az adott gráf összefüggőségét, a `ConnectedComponents` függvény pedig megadja az összefüggő komponenseket. Irányított gráfok esetén megkülönböztetik a gyenge és erős összefüggőséget. Előbbi az irányított gráf nemirányítottkénti összefüggését jelenti, az utóbbi tulajdonság pedig akkor igaz, ha bármely pontból bármely pontba el lehet irányított úton jutni. A megfelelő komponenseket a `WeaklyConnectedComponents` illetve a `StronglyConnectedComponents` függvény állítja elő.
- Az `OrientGraph` eljárás egy irányítatlan gráfot próbál erősen összefüggővé irányítani.
- A `FindBiconnectedComponents` eljárás az adott gráf kétszeresen összefüggő (azaz elvágópont nélküli) komponenseit határozza meg. Az ezzel összefüggő tulajdonságok a `ArticulationVertices`, `Bridges`, `BiconnectedComponents`, `BiconnectedQ` (ez utóbbi ellenőrzi, hogy a gráf kétszeresen összefüggő-e). Ide tartozik annak ellenőrzése is, hogy a gráf rendelkezik-e Hamilton-körrel, vagyis minden csúcspontot pontosan egyszer érintő körrel. Erre való a `HamiltonianQ` kritérium.
 - Megjegyzendő, hogy ennek eldöntése általában NP-teljes probléma, és így nagyobb gráfokra reménytelen.
- Irányítatlan gráfokra külön eljárás adja meg a csúcs- illetve élösszefüggőségeket. Ezek az `EdgeConnectivity` illetve a `VertexConnectivity`.

5.2. Gráfok izomorfizmusa. A gráfelmélet egyik nehéz kérdése két gráf izomorfizmusának eldöntése, bár nem világos, hogy ez vajon NP-teljes-e. A kérdés talán leghíresebb kutatója a magyar Babai László.

- Az `IdenticalQ` és `IsomorphismQ` két teszteljárás, de a második csak kicsi gráfokra effektív. (Az első kérdés csak címkézett gráfokon értelmes, és annak eldöntése ott viszonylag könnyű.)
- Az `Automorphism` egy gráf automorfizmusait hivatott felderíteni. A `SelfComplementaryQ` eljárás azt ellenőrzi, hogy egy gráf vajon önmaga komplementere-e.

5.3. Gráfok körei. A kör egy zárt út (vagy másképpen séta). Ez lehet irányított vagy irányítatlan. Algoritmikus megtalálásuk nagyon hasonló (csak a továbblépés szabálya különbözik).

- A `FindCycle` függvény megtalál egy ilyen ciklust (másképpen kört). Egyéb eljárások: `AcyclicQ`, `TreeQ`, `ExtractCycles`, `DeleteCycle`.
- A gráf *derékbősége* (girth) a legrövidebb kör hossza. A `Girth` eljárás ezt keresi meg. Az eljárás azon alapul, hogy `breadth first search`-t indít a gráf minden pontjából. Ezek mindegyike megtalálja a ponton átmenő legrövidebb kört. Ezek minimuma a keresett ciklus.

- Euler-körök előállítása szintén könnyű feladat, már maga Euler is leírt egy használható algoritmust. Az Euler-kör egy minden élt pontosan egyszer magába foglaló kör. Az EulerianCycle előállít egy ilyet (az ALL opcióval pedig az összeset produkálja), míg az EulerianQ ellenőrzi a tulajdonság meglétét.
 - Mint ismeretes, ilyen kör akkor és csakis akkor létezik, ha minden pontra a be- és kifokok megegyeznek (irányítatlan gráf esetén minden fokszámnak párosnak kell lennie).
- Az Euler-körök egyik legszebb felhasználása deBruijn-sorozatok előállítása. Ez pl. bináris esetben egy olyan $2n$ hosszú (ciklikus) $0-1$ sorozat, amely részszorozatként tartalmazza az összes különböző n hosszúságú $0-1$ sorozatot. Mint deBruijn kimutatta, ezt legkönnyebben Euler-körök rekurzív megkonstruálásával lehet előállítani. Ezt teszi meg a DeBruijnSequence nevű eljárás.
- Már volt szó a Hamilton-körökről. Ezek minden csúcsot pontosan egyszer ejtenek útba. Megtalálásuk, vagy akár létezésük eldöntése NP-teljes. Kis gráfokra a HamiltonianQ teszti, míg a HamiltonianCycle megpróbál egyet előállítani (az ALL opció megint az összesre vonatkozik).
- Hasonlóan nehéz az Utazó Ügynök (Travelling Salesman) problémája: itt egy súlyozott élekkel ellátott gráfban kell megkeresni a legkisebb összsúlyú Hamilton-kört. Persze ebből úgy tűnik, hogy ez akár még az előzőnél is nehezebb probléma. (Ez nincsen egészen így, a kettő azonos nehézségű: bármelyik gyors megoldhatósága a másik gyors megoldhatóságát vonná maga után.) A TravellingSalesman eljárás ilyesmit kísérel meg.
 - Megjegyzendő, hogy erre a problémára, az előzőhöz hasonlóan, rengeteg, többé-kevésbé sikeres közelítő eljárás ismert. Ezekkel általánosságban nem foglalkozik a DM-csomag, de mutat egy jó közelítő eljárást a síkbeli TSP-re.
- Vannak még általános becslő rutinok is a csomagban. Ilyenek a TravellingSalesmanBounds, az UpperBoundTSP továbbá a Lower-BoundTSP korlátok. Ezek közül az alsó korlát igen gyengének tűnik, mivel ez nem más, mint a legkisebb feszítő fa összsúlya.

5.4. Részben rendezett halmazok

- A PartialOrderQ kritérium eldönti egy relációról, hogy az vajon részbenrendezés-e. Ha nem, akkor a TransitiveQ, ReflexiveQ és AntiSymmetricQ az egyes tulajdonságok ellenőrzésére szolgál. (A ReflexiveQ függvény nevét a nyilvános függvények listájához hozzá kell venni a programcsomag elején ahhoz, hogy kívülről is látható legyen.)
 - (A reláció e három tulajdonság együttes fennállása esetén lesz részben rendezés.)
- Egy irányítatlan gráf tranzitív lezártja ekvivalenciarelációvá terjeszti ki a gráf által leírt relációt. Annak megtalálása azonban, hogy egy tranzitív gráfot

melyik legkisebb részgráfja feszíti ki, már eléggé nehéz probléma.

A TransitiveClosure a megfelelő lezártat állítja elő, míg a TransitiveReduction ezen minimális generáló gráfot állítja elő.

- Ez utóbbi Aho, Garey és Ulmann egy ismert eljárásán alapul [8].
- A HasseDiagram egy részbenrendezés ábrázolására szolgál (gráfelméleti fogalmakkal ez éppen egy minimális redukciót jelent színtezett – és így irányított, gráfra).
- A TopologicalSort eljárás a részbenrendezés egy lineáris kiterjesztését határozza meg (azaz olyan lineáris elrendezést, amelynek része az eredeti részbenrendezés).
- Ilyen lineáris kiterjesztés mindig létezik.

5.5. Gráfszínezések. Egy gráf jó *csúcsszínezése* (vertex colouring) úgy rendel színeket minden csúcshoz, hogy nincsen két azonos színű pont éllel összekötve. A *kromatikus szám* a jó színezéshez szükséges legkevesebb színszám.

- A ChromaticPolynomial eljárás egy gráf *kromatikus polinomját* határozza meg. (Ez egy jól definiált polinom, amely minden k -ra megadja az adott gráf jó k -színezéseinek számát.
 - A kifejezés egyszerű rekurzióból számolható, és még G. Birkhoff vezette be. Leghíresebb kutatója W.T. Tutte volt. A rekurzió lépésszáma azonban a gráf élei számának exponenciális függvénye.
- Az előzők felhasználásával a ChromaticNumber meghatározza a gráf kromatikus számát.
- A VertexColoring egy eléggé gyors heurisztikus csúcsszínezést valósít meg (Brelaz egy cikke alapján). Az EdgeColoring eljárás jó élszínezést állít elő (és ez megegyezik az élgráf egy jó csúcsszínezésével).

5.6. Egyéb NP-teljes problémák. A komplexitás elmélete igen sok NP-teljes problémát ismer. Ilyen a maximális klikk meghatározása, a maximális független halmaz megadása vagy klikkek egy minimális csúcsfedésének meghatározása. Ezek könnyen egymásba alakítható problémák. A MaximumClique, a MinimumVertexCover illetve a MaximumIndependentSet eljárások ezen értékeket határozzák meg. Végül a PerfectQ eljárás egy adott gráf perfektségét ellenőrzi.

6. Algoritmikus gráfelmélet

Itt a DM-csomag szűk, de jól válogatott eljárásegyüttest ajánl.

- A Dijkstra eljárás egy adott pontból megtalálja az összes többi ponthoz vezető legrövidebb utat.
- Az AllPairShortestPath eljárás ugyanezt teszi egyszerre az összes csúcspárra a Floyd-algoritmus alapján.

- Az u csúcsból a v csúcsba vezető k -hosszú utak számát (egyszerre minden u, v párra) a gráf szomszédsági mátrixa k -edik hatványának (u, v) eleme adja meg. A GraphPower ezen hatvány meghatározására szolgál.
- A legrövidebb feszítőfa megtalálására a Kruskal-algoritmus alapján a MinimumSpanningTree eljárás szolgál. A feszítő fák számát Kirchoff eljárása alapján a NumberOfSpanningTrees eljárás adja meg.
- A NetworkFlow eljárás megtalálja a maximális értékű hálózati folyamatot a forrás és a nyelő között (és az Edmonds-Karp eljáráson alapul).
- A BipartiteMatching a szokott párosgráfos párosító algoritmust adja – míg a MaximalMatching az Edmonds-algoritmus alapján ugyanezt teszi általános gráfokon.
- A Dilworth-tétel alapján a MinimumChainPartition eljárás minimális láncok úniójára bont fel egy parciális rendezést, míg MaximumAntiChain a hozzátartozó maximális antiláncot biztosítja.
- A StableMarriage stabil párosításokat talál meg (ez népszerű, de nem igazán fontos terület).
- Végül a PlanarQ egy gráf planaritását (síkbeliségét) ellenőrzi. Ez gyors eljárás (bár nehéz implementálni).

Következtetések

A tárgyalt DiscreteMathematics programcsomag értékeléséhez tisztázni kell, milyen célra akarjuk felhasználni.

A csomag nagyon jónak tűnik, mint bevezetés a *Mathematica* fejlesztői nyelvnek oktatásához. Az persze külön elemzést igényelne, hogy a megvalósított eljárások mennyire effektívek.

Ha a csomagot tematikusan értékeljük, akkor még mindig két lehetséges nézőpont van. Kiválóan használható demonstrációs eszköznek látszik. Könnyen lehet példákat gyártani vele ismert jelenségek bemutatására (ha és amennyiben az alkalmazója előre tudja, mit is akar előállítani). Szintén jó lehet erősen szimmetrikus struktúrák vizsgálatához. Hasonlóan alkalmazható jó néhány, az algoritmikus gráfelmélet körébe tartozó probléma kezelésére (bár ez utóbbiakra sokkal hatékonyabb eljárások állnak rendelkezésre, különösen az NP-nehéz problémák heurisztikus vagy közelítő megoldásaira). Ugyanakkor nem felel meg annak a célnak, amit a szerző kitűzött az előszóban, nevezetesen ez nem alkalmazható bevezető könyvnek a kombinatorika oktatásához. Ennek fő oka, hogy nem tartalmaz bizonyításokat, vagy akár csak részletesebb háttérinformációkat sem. Ezért a diszkrét matematika oktatására csak, mind segédkönyvet lehetne ajánlani, egyéb anyagok kiegészítőjeként. Ráadásul az összeválogatott feladat- (és kutatási probléma-) anyag rettenetesen esetleges. A kelleténél sokkal jobban tükrözi összeállítójának érdeklődését.

Ugyanakkor a DM csomag nem tűnik túlzottan hasznos eszköznek elméleti matematikai kutatások támogatására. Ennek több oka is van:

1. Kombinatorikus analízisben nagyon hasznos tulajdonság a szimbolikus manipuláció képessége, de ez az eredeti *Mathematica* csomagban már kellően erős, ehhez sok újat nem nyújt ez a kiegészítő csomag.
2. A megcélzott témakörökben csak olyan objektumokat képes hatékonyan előállítani, amelyeket szinte kézzel is könnyű csinálni (pl. a Stirling-számokat).
3. A gráfokkal kapcsolatban rengeteg eljárást, műveletet vezet be, de ezekkel általában nem konkrétan szokás számolni, hanem „elméletben”. Azaz jelentőségük inkább elméleti, és nem gyakorlati konstrukciókban van.
4. A felkínált adatszerkezetek nem eléggé hatékonyak – bonyolult bennük megvalósítani szokatlan lekérdezéseket. Pl. helyből nem képes kevert gráfok kezelésére sem. Hasonló probléma, hogy súlyozott gráfokra sincs igazán felkészítve.
5. Az algoritmikus része, mint említettük, jól átgondolt, de ebben a témában már sok jó rendszer érhető el, és ez nem nyújt semmi speciális szolgáltatást, sőt. . .

Ennek megfelelően a csomagot melegen ajánlanám egyetemisták vagy Ph.D. hallgatók oktatására, illetve demonstrációs anyagok elkészítésére, de ennél többre nem alkalmas.

Irodalom

- [1] Steve Skiena, *Implementing Discrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1990.
- [2] R. Sedgewick, Permutation generation methods, *Computing Surveys*, **9** (1977), 137–164.
- [3] D. E. Knuth, *A számítógépprogramozás művészete 3.*, (Rendezés és keresés), Második kiadás, Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 1994).
- [4] Jordán Károly, *Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból*, Akadémiai Kiadó.
- [5] G. Andrews, *The Theory of Partitions*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1976).
- [6] Kőnig Dénes, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936).
- [7] Andrásfai Béla, *Ismerkedés a gráfelmélettel*, Tankönyvkiadó, (Budapest, 1971) és *Gráfelmélet. Folyamok. Mátrixok*, Akadémiai Kiadó (Budapest, 1983).
- [8] A. Aho, M. R. Garey, and J. D. Ullman: The transitive reduction of a directed graph, *SIAM J. Computing*, **1** (1972), 131–137.

Erdős Péter
MTA Matematikai Kutató Intézete

KÖNYVISMERTETÉS

Jeffery M. Cooper: „Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB, Birkhauser, Boston–Basel–Berlin, 1998” c. könyvéről

GARAY BARNA

Ismét egy bevezető parciális differenciálegyenletek tankönyv! A szerző 540 oldalon át sorra veszi a szokásos egyenlet típusokat, megadja azok levezetését és részletesen tárgyalja a fizikai hátteret is. Ami Cooper könyvét – valamint a University of Maryland hallgatói számára tartott előadásait, melyek kibővített változataként ez a könyv megíródott – különösen érdekessé teszi, az a szerzőnek az a törekvése, hogy a parciális differenciálegyenletek elemeit a szokásosnál sokkal tágabb perspektívában mutassa be. Az előadást tartó és a tankönyvíró Cooper beemeli a tananyag nemlineáris és numerikus vonatkozásait az alapkursus menetébe, így számos olyan szempontra és jelenségre tud rámutatni, amelyek tradicionálisan kimaradnának, sokkal később jönnének, tankönyv és egyetemi félév végére idegen testként hozzábiggyesztődnének. A legfontosabb numerikus módszerek (véges differenciál, véges elemek, Ritz, Galerkin) ismertetése természetes módon illeszkedik a tananyag egészébe. Az egyes fejezetek végén nagyszámú és gondosan kidolgozott numerikus feladat várja a kísérletező kedvű olvasót, hogy a MATLAB programcsomagjainak – a Cooper által írt kiegészítések letölthetők az INTERNET-ről – segítségével maga is megoldja a tárgyalt egyenleteket, saját számítógépe képernyőjén demonstrálja a vizsgált kvalitatív tulajdonságokat. A szerző tudatosan elkerüli a keményebb matematikai eszközök alkalmazását (összességében vagy 120 oldalon keresztül ismerteti a változók szátválasztásának módszerét, mint sajátfüggvények szerinti Fourier-sorfejtéseit szakaszonként folytonos függvényeknek; az alapmegoldások tárgyalásánál nem használ disztribúciókat, csak a Dirac-deltát, stb.). Amit vállal és felvállal, azt matematikai igényességgel, a természettudományi és műszaki szakokon tanuló diákok érdeklődésére is számítva, őket további munkára ösztönözve teljesíti. Kifejezetten hasznos könyvet írt!

Garay Barna
Műfegytem, Matematikai Intézet

TARTALOMJEGYZÉK

HAMBURGER PÉTER: Venn-diagramok szerkesztése gráfelméleti eszközökkel ...	1
HAJNAL ANDRÁS, KORÁNYI ÁDÁM, JACQUES DIXMIER és MICHEL DUFLO: Pukánszky Lajos matematikai munkásságáról	71
ERDŐS PÉTER: A Mathematica programcsomag Discrete Mathematics rutingyű- teménye	82
Könyvismertetés	100

CONTENTS

PÉTER HAMBURGER: Constructing Venn-diagrams using graphs	1
ANDRÁS HAJNAL, ÁDÁM KORÁNYI, JACQUES DIXMIER and MICHEL DUFLO: Pukánszky Lajos	71
PÉTER ERDŐS: Book review	82
Book review	100

300519

u

Matematikai Lapok

(13)

1994/4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 4. évfolyam (1994), 4. szám

(Megjelent 1999-ben)

Tiszteletbeli főszerkesztő: Császár Ákos

Megbízott főszerkesztő: Bárány Imre

Főszerkesztő-helyettes: Pálffy Péter Pál

Tanácsadó Bizottság: Daróczy Zoltán (KLTE), Hajnal András (MKI), Lovász László (ELTE), Szókefalvi-Nagy Béla (JATE)

Szerkesztő Bizottság: Heteyi Gábor (JPTE), Laczkovich Miklós (ELTE), Nemetz Tibor (MKI), Páles Zsolt (KLTE), Pelikán József (ELTE), Pogáts Ferenc (ELTE), Recski András (BME), Reiman István (BME), Rónyai Lajos (SZTAKI), Staar Gyula (Természet Világa), Székely J. Gábor (BME)

Technikai szerkesztő: Domokos Mátyás

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201-7656.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

TÁRSULATI HÍREK

1. Az 1994. évi nagyrendezvényekről

a) Csillag Pál találkozó (Balatonlelle, június 9–13.)

A találkozót a szokásos helyszínen, a balatonlellei ex-KISz-táborban rendeztük (sajnos az időjárás nagyon mostoha volt, hol viharos szél fúj, hol az eső esett, hol mindkettő). Emiatt néhányan, különösen a családosok, korábban hazamentek.

A résztvevők gyakorlatilag azok voltak, akik minden évben el szoktak jönni. Sajnos nagyon kevés olyan fiatal volt jelen, aki ténylegesen matematikai kutatással foglalkozik, a legtöbben már évek óta csak számítógépet programoznak. Így nem lehetett azt a koncepciót megvalósítani, hogy elmeséljük egymásnak, miket csinálunk mostanság matematika címszó alatt, hiszen zömmel semmit.

Szerencsére a meghívott előadók sokat emeltek a találkozó tudományos színvonalán és értékén. Laczkovich Miklós négyzetek hasonló téglalapokra való felbonthatóságáról beszélt (megadta a pontos feltételt), Petruska György pedig a tipikus folytonos függvényekről tartott előadást. Mindkét előadás érthető és érdekes volt azoknak is, akik már régen távol kerültek a matematikától és azoknak is, akik hasonló témákkal foglalkoznak.

A résztvevők előadásai: Mócsy Miklós a biztosítási matematikáról beszélt, Lukács András „Véletlen séták gráfokon” címmel tartott előadást, jómagam pedig matematikai játékok nyerő stratégiáiról meséltem.

Petruska György az előadása után mesélt a Csillag Pál találkozó ősről, az „OH-zium”-okról. Hazafelé jövet megállapítottuk, hogy jó volna valamit visszacsempészni ezek hangulatából, tudományos pezsgéséből a mai Csillag Pál találkozókra. Ennek érdekében a következő találkozóra hívja a többi régi OH tagot. (Erre remek apropóul szolgál, hogy most lesz 30 éves jubileumuk.) Remélhetőleg ez elég lesz ahhoz, hogy sok ténylegesen kutató fiatal is eljöjjön, és megvalósuljon valami abból az eredeti koncepcióból, hogy a Csillag Pál találkozókon megtudhatjuk miféle matematikát csinálnak a többiek.

(Keleti Tamás beszámolója alapján)

b) Ordered structures and universal algebra (Budapest, június 13–17.)

A Bolyai János Matematikai Társulat és a Magyar Tudományos Akadémia felkérésére rendeztük meg a konferenciát Fuchs László hetvenedik születésnapja alkalmából.

A rendezvényen, melyet az aquincumi Vénusz Motelben rendeztünk összesen negyvennégy résztvevő volt; hét egyórás főelőadás és mintegy harminc huszonöt perces előadás hangzott el, ezek jó része survey jellegű volt. Tekintettel arra, hogy Fuchs László jelenlegi témája és itthoni tanítványainak témája elég messze áll egymástól, ezért a részvételi szám igen magasnak mondható. Valószínűleg akik eljöttek, különböző személyes okok miatt (ez Fuchs László és az ő hazai tanítványait jelenti) jöttek el.

A konferencián elhangzott előadásokat a BJMT Periodica Mathematica folyóiratának külön számaiban fogjuk közölni; mégpedig várhatóan igen hamar. Már több kézirat beérkezett; a munka dandárját a technikai szerkesztő végzi.

A konferenciát a Soros Alapítvány és az ELTE támogatta.

A szervező bizottság tagjai a következők voltak: Fried Ervin elnök és Schmidt Tamás társelnök; Hermann Péter titkár, valamint Ágoston István és Szabó Csaba a titkár segítői; a többi tagok George Grätzer, Wayne Powell, Szendrei Ágnes, Wiegandt Richárd. A szervező bizottság sok segítséget adott a konferencia lebonyolításához.

(Fried Ervin beszámolója alapján)

c) Rátz László vándorgyűlés (Pécs, július 5–9.)

A vándorgyűlésen, a Pollack Mihály Műszaki Főiskolán, 554-en (közülük 25-en határainkon túlról érkeztek) vettek részt.

A rendezvényt Katona Gyula nyitotta meg, a Beke Manó Emlékdíjakat Surányi János adta át.

A KöMaL centenáriuma alkalmából a vándorgyűlés kiemelten foglalkozott a folyóirat bemutatásával (Surányi János, Radnai Gyula előadásai, valamint Kántor Sándorné kiállítása és az Ács Katalin – Herczeg János szerkesztette videó).

A szekcióülések a hagyományos tagozódásban zajlottak, de a szerkezetváltó iskolák matematikaoktatási műhelyei (egy Somfai Zsuzsa, Tóth Tiborné készítette országos felmérés tapasztalatait bemutató posztersorozattal és a hozzá kapcsolódó előadással) is lehetőséget kaptak a bemutatkozásra.

Az alsótagozatos szekcióban C. Neményi Eszter és Perlaki Ernőné előadásai, valamint a feladatmegoldó szemináriumok (Gyapjas Ferencné, Kovács Éva, Wéber Anikó) emelkedtek ki.

A felsőtagozatos szekcióban nagy sikert aratott Nagy Gyula „Térgeometriai problémák és Vancsó Ödön „A rizikóbecslés tudománya” c. előadása.

A középiskolai szekcióban Péter Gyula „A gondolkodás fejlesztése” c. előadása különleges élményt nyújtott a hallgatóságnak, mert nemcsak szakmai és módszertani mondanivalója, hanem az előadó embersége és életpéldája is lenyűgöző volt.

Matematikai szenzációt jelentett Rónyai Lajos „Elliptikus görbék és a Fermat-sejtés” c. előadása, amely a felsőoktatási ankét és a középiskolai szekció közös előadása volt.

A felsőtagozatos és középiskolai feladatmegoldó szemináriumok a szerkezetváltó iskolák igényeit is igyekeztek kielégíteni; mindegyik hasznosnak bizonyult (vezették: Katz Sándor, Nagy Gyula, Német József, Orosz Gyula, Róka Sándor, Sztrókay Kálmánné).

Az Informatikai bizottság rendezvényeit is sokan látogatták. Jól hasznosítható anyagot ismertetett Klincsik Mihály (MAPLE), a szemináriumok iránt is volt érdeklődés.

A szekcióüléseket poszterbemutatók (könyvismertetések, regionális versenyek listája) és könyvadások (TypoTeX, Mozaik, Nemzeti Tankönyvkiadó) egészítették ki.

A szakmai programok mellett megszerveztük a szokásos városnézést, valamint a megyében három útvonalon fakultatív kirándulások is voltak.

A rendezvényhez július 8–9-én MAT-KAPOCS konferencia csatlakozott. A vándorgyűlés befejezéseként az Oktatási bizottság ülést tartott, melyen kiemelt napirendi pontként, Urbán János előterjesztésében, a két szintű érettségi tervezetével foglalkozott.

(Békefi Zsuzsa beszámolója alapján)

d) Numerikus módszerek konferencia (Miskolc, augusztus 21–26.)

A konferenciát, 74 fő részvételével a Miskolci Egyetemen tartottuk. (Bár két, részben hasonló tematikájú, közeli konferenciával is egybeesett az időpont (Prága, Várna), részben a hazai érdeklődés, részben a korábbi konferenciák sikere, részben a meghívott előadók listája, részben a megfelelő helyen (na-net digest, ilas digest) és időben közzétett tájékoztatóknak köszönhetően résztvevőink száma és összetétele a várakozásnak megfelelően alakult. Az előzetesen összeállított program szorosán, de belefért a rendelkezésre álló időbe. Minden jelentkezőnek lehetőséget adtunk, legalább a poszter szekcióban, hogy eredményeit ismertethesse. A konferencia valamennyi nagyobb szakterületének világhírű szaktekintélye elfogadta a meghívást és plenáris előadást tartottak. A szekciókban 9 félórás és 36 rövid (15 perces) kiselőadás hangzott el, (ebből 30 külföldi előadás volt) és 6 posztert állítottak ki. A pályakezdők részére pályázatot hirdettünk. Hat pályázat érkezett, három szerzőt részvételi díj elengedésével jutalmaztunk.

Az egyetem részéről minden segítséget megkaptunk. Határozottan úgy éreztük, hogy fontosnak tartják, hogy a konferenciának ne csupán helyet, hanem otthont is adjanak. Ezért külön köszönet illeti őket.

A rendezvény publikációjaként a *Computer and Mathematics with Applications* c. folyóirat különszámának előkészítése folyamatban van, a kötet szerkesztői: Rózsa Pál, Schmidt J. W. (Drezda) és Szabó B. (St. Louis), technikai szerkesztő: Stoyan Gisbert.

A konferenciához a Chemoltravel utazási iroda 75.000 Ft támogatást adott.

Egészében úgy értékjük, hogy a konferencia a várakozásoknak megfelelt, sőt, szakmai tekintetben a várakozásokat felül is múlta.

(Balla Katalin beszámolója alapján)

2. Az 1994. évi társulati díjak odaítéléséről

a) Szele Tibor Emlékérem

Az 1994. évi Szele Tibor Emlékérmét, az odaítélésére kiküldött bizottság határozata alapján *Prékopa András*, az ELTE TTK és a Rutgers University professzora kapja.

Prékopa András 1956 szeptemberétől 1968-ig az ELTE TTK Valószínűségszámítási Tanszékén előbb adjunktus, majd docens; 1968-ban a BME Villamosmérnöki Kar Matematika Tanszékének egyetemi tanára lett. 1977-ben átment a Gépészmérnöki Kar Matematika Tanszékére, hogy részt vegyen a matematikus-gépészmérnök szakirányú képzésben. 1983-ban visszakerült az ELTE-re miután ott létrejött az Operációkutatási Tanszék.

Abból a célból, hogy a korábban végzett matematikusok, mérnökök és közgazdászok is elsajátíthassák azokat az ismereteket, amiket egy ilyen szakirány nyújtani tud, továbbá, hogy az ELTE operációkutatási szakirányt megalapozza, 1967–1969 között megszerezte a Bolyai Társulatban.

Legnagyobb oktatási érdeme a nemzetközi viszonylatban is ismert és nagyra értékelt magyar operációkutatási iskola létrehozása. 1975-ben Alex Orden amerikai professzor ír az általa vezetett kutató csoportról: „Jóllehet az amerikai operációkutatási aktivitás mérete és változatossága a magyarországinál sokkal nagyobb, nehéz olyan amerikai egységet találni, melyben a matematikai kutatás, algoritmus és számítógépes program fejlesztés és az operációkutatás alkalmazásai ily harmóniában élne együtt ennyire széles területen”. Iskolateremtő hatása az alkalmazott matematika más ágaira is kiterjedt. Összesen 33-an szereztek kandidátusi, vagy egyetemi doktori fokozatot vezetése alatt. Ezek között ma több egyetemi tanár, illetve akadémikus van akik, Magyarországon kívül, a következő országokból jöttek, illetve országokban élnek: Jugoszlávia, Litvánia, NSZK, Mongolia, USA, Vietnam.

De sokan vannak, akik formálisan nem voltak tanítványai, mégis tudományos munkásságuk elindulását nagyrészt neki köszönhetik: Kovács László Béla, Vízvári Béla, Turchányi Piroska, Maros István, Terlaky Tamás.

Prékopa András iskolateremtő hatásának egyik összetevője, hogy különösen széles spektrumú kutató. 111 tudományos dolgozata mellett számos könyvet, könyvrészletet, tanulmányt írt. Kiemelendő tankönyveinek hatása, pl. Valószínűségelmélet könyve már négy kiadást ért meg, és mind a valószínűségelmélet, mind a statisztika oktatásában ma is alapkönyv.

b) Grünwald Géza Emlékdíj

A Grünwald Géza Emlékdíj bizottsága 1994. október 15-én tartott ülésén egyhangú szavazással úgy döntött, hogy az 1994. évi Grünwald Géza Emlékdíjban részesíti *Bíró András*, *Domokos Mátyás*, *Erdős László* és *Pintér Ákos* fiatal matematikusokat az alábbi indoklás alapján.

1. *Bíró András* 1994-ben végzett az ELTE TTK matematikus szakán és 1994-ben az ELTE TTK Doktori iskola ösztöndíjasa. *Bíró András* három tudományos dolgozatot írt, amelyek közül kettő már megjelent. Első dolgozatában egy önállóan felvetett sorelméleti kérdéssel foglalkozik, amit ötletesen és tökéletesen old meg. Második dolgozatának témája egy hatványösszeg-tétel, amely Turán Pálhoz nyúlik vissza. A harmadik dolgozatban a Turán-Kubilius egyenlőtlenséget általánosította egy új, elemi módszer alkalmazásával.

2. *Domokos Mátyás* 1992-ben végzett az ELTE TTK matematikus szakán és azóta az MTA Matematikai Kutató Intézete doktori ösztöndíjasa, majd munkatársa. Kutatási területe a gyűrűelmélet. Egy dolgozata jelent meg, és további 5 van közlésre elfogadva jónevű nemzetközi folyóiratokban. Első dolgozatában involúciós gyűrűkkel, a többiben mátrix gyűrűk Euler-féle polinom azonosságaival foglalkozik. Legújabb eredményei az invariáns-elmülethez tartoznak.

3. *Erdős László* 1990-ban végzett az ELTE TTK matematikus szakán és a Princetoni Egyetemen lett ösztöndíjas, ahol 1994-ben doktorált matematikai fizikából. 7 dolgozata jelent meg, ill. van megjelenés alatt. Kutatásainak témája inhomogén mágneses térbe helyezett kvantumrészecske mozgását leíró Pauli-féle operátor spektrális tulajdonságai. Fő eredménye az 1994. évi Lieb-Thirring egyenlőtlenség bizonyítása inhomogén mágneses térre. Erről 1994. évi Matematikai Fizikai Kongresszuson is beszámolt. *Erdős László* amerikai tartózkodása alatt is nagy hangsúlyt fektetett arra, hogy tartsa a kapcsolatot az MTA Matematikai Kutató Intézet Statistikus Fizikai Osztályával.

4. *Pintér Ákos* 1991-ben végzett a KLTE matematikus szakán és azóta az ot-tani Algebra és Számelmélet Tanszék tanársegédje. Már 9 tudományos dolgozata

jelent meg és további 4 van megjelenés alatt. Munkái többségében diofantikus problémákkal foglalkozik, Stirling számok diofantikus tulajdonságait tanulmányozza, és érdekes diofantikus eredményeket nyert függvénytestek felett.

c) Farkas Gyula Emlékdíj

A Farkas Gyula Emlékdíjat a Társulat Farkas Gyula Emlékdíj bizottsága döntésének értelmében 1994-ben két fiatal matematikus nyerte el:

Mihálykó Csaba, Veszprém, valamint *Kánnai Zoltán*, Budapest.

Mindketten az ELTE-n tanultak, de egyébként életútjuk, tevékenységük eléggé különböző.

Mihálykó Csaba 32 éves, Veszprémben született, 1982–87 között az ELTE-n folytatta matematikai tanulmányait, 1987 óta a Veszprémi Egyetemen dolgozik, de eközben 1990–92-ben az ELTE posztgraduális szakinformatikus továbbképzésén vett részt.

Jelenleg előadásokat és gyakorlatokat tart a Veszprémi Egyetemen. Kutatási területei a közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása spline függvények segítségével, a vegyiparban érdekes szemcsediszperziós rendszerek matematikai modellezése, a szakaszos őrlés analitikus és numerikus vizsgálata (ami integro-differenciálegyenleteknek a vizsgálatát jelenti). Ennek során több új módszert fejlesztett ki, negyedik rendig, a modellezett folyamat több tulajdonságát figyelembe véve, valójában diszkrét modelleket felállítva a folytonos fizikai, kémiai valóság hű leírásához; módszereit ki is tesztelte alaposan. Cikkei és előadásai ezt a szerteágazó tevékenységet tükrözik; összesen 9 cikke jelent meg alkalmazott matematikai és kémiai folyóiratokban, ebből 4 sajátja, 5 társszerzős. Disszertációja majdnem elkészült.

Kánnai Zoltán viszont már megszerezte az egyetemi doktori címet is. 31 éves, 1983–88 között az ELTE-n tanult, 1988–92-ig az ELTE Számítóközpontjában dolgozott, 1992 óta a Közgazdasági Egyetemen oktat.

Kutatási területe a Banach-terekben értelmezett differenciálegyenletek, közelebbről az ilyen egyenletek egzisztencia kérdése (valamint a kezdeti értékektől való folytonos függése) akkor, amikor a differenciálegyenletek jobboldala halmazértékű. Erről írt 8 cikket (4 saját és a többi társszerzős; ezen cikkekből 5 nemzetközi folyóiratban jelent meg), és a disszertációját is. Így munkássága közelebb áll az analízishez, a tiszta matematikához. Ugyanakkor viszont eredményeinek alkalmazhatósága azonnal látható; arról van szó, vajon többértelmű differenciálegyenletek megoldásai adott halmazban maradnak-e vagy sem (a szakterület „életképességi elmélet” neve is erre utal).

d) Rényi Kató Emlékdíj

Az 1994. évi Rényi Kató Emlékdíj bizottság a beérkezett javaslatok alapján a következő határozatot hozta:

A díj első fokozatában részesíti:

– *Hausel Tamást*

(az Eötvös Loránd Tudományegyetem IV. éves matematikus szakos hallgatóját),

– *Vu Ha Vant*

(az ELTE V. éves matematikus hallgatóját),

a díj második fokozatát pedig

– *Harcos Gergelynek*

(az Eötvös Loránd Tudományegyetem III. éves matematikus szakos hallgatójának) és

– *Lévai Leventének*

(az ELTE V. éves matematikus hallgatójának) ítéli oda.

Indoklás:

Hausel Tamás gömbök pakolásával ill. konvex terek rácspontjainak fedésével ért el eredményeket. Eddig 2 cikke jelent meg és további három van sajtó alatt. 1991-ben TDK dolgozata 2. díjat nyert. Számos versenyen ért el kiváló eredményt, így többek között az 1990-es Matematikai diákolimpián, az 1989-es és 1990-es Kürschák-, az 1990-es Schweitzer és az 1992-es Hajós-versenyen.

Vu Ha Van elsősorban extrémális halmazrendszerekkel kapcsolatban végzett kutatásokat, többek között megoldott egy Bierbrauer-féle sejtést. Ezen kívül több igen erős tételt bizonyított reguláris gráfokkal kapcsolatosan.

Vu Ha Van a díj második fokozatát 1992-ben nyerte el. 1990-ben Riesz versenyen harmadik díjat, Schweitzer versenyen pedig második díjat nyert. Öt cikke van benyújtva, illetve előkészületben. Egy Bierbrauer által felvetett problémát megoldó dolgozatát szemináriumi előadás keretében is ismertette. Egyik munkájáért Tudományos Diákköri első díjat nyert (1992-ben).

Harcos Gergely élesített egy, a hatványösszeg módszerrel kapcsolatos becslést. Eddig két cikke jelent meg és egy további van sajtó alatt, egy pedig előkészületben. 1993-ban TDK dolgozata 2. díjat nyert. Számos versenyen ért el kiváló eredményt, így többek között az 1990-es és az 1991-es matematikai olimpián, az 1990-es Kürschák- és az 1991-es Schweitzer-versenyen.

Lévai Levente érdeklődési területe az algebra, elsősorban a csoportelmélet, de foglalkozik komputer-algebrával és Lie csoportokkal is.

Az alábbi három dolgozatában a következő eredmények vannak:

All finite generalized triangle groups (beküldve Trans. Amer. Math. Soc.): a probléma arról szól, hogy bizonyos definiáló relációkkal megadott csoportok végesek, vagy végtelenek. Számítógépes módszereket is felhasználva Lévai Leventének sikerült az utolsó két nyitvamaradt esetet is elintéznie.

Ciklikus algebrák, szakdolgozat (1994): önálló kezdeményezésként kezdte vizsgálni azokat az algebrai struktúrákat, amelyek a csoportokban definiálható $a * b = (ab)$ művelethez hasonló alaplóművelettel vannak ellátva.

On binary minimal clones (előkészületben): a minimális klónok iránt megélt az érdeklődés, de teljes leírásuktól még távol vagyunk. A Pálfi Péter Pál által kezdeményezett irányban továbbhaladva Lévai Levente meghatározta az összes olyan minimális klónt, amely pontosan hat kétváltozós műveletet tartalmaz, és ezáltal több, eddig ismeretlen minimális klónt is felfedezett.

(A jelentésben szereplő adatok (pl. publikációk száma) az 1994. évvel bezárólag értendők.)

CSÁSZÁR ÁKOS 75 ÉVES

GYŐRY KÁLMÁN

Császár Ákos akadémikus, a nemzetközileg elismert tudós 1999. február 26-án tölti be 75. életévét. Ebből az alkalomból a magyar matematikus társadalom nevében tisztelettel köszöntjük az Eötvös Loránd Tudományegyetem professor emeritusát, a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Tudományok Osztályának elnökét, a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnökét, az iskolateremtő mestert, a magyar tudományos közélet kiemelkedő alakját.

Alig van a magyar tudományos életnek még egy olyan alakja, aki annyit tett az általa művelt tudományért, annak oktatásáért, szervezéséért és népszerűsítéséért, mint Császár Ákos. Rendkívül eredményes és gazdag munkásságának néhány fontos területét szeretnénk kiemelni és méltatni a következő írásokban.

Császár Ákos 1924. február 26-án született Budapesten. Középiskolai tanulmányait a Ciszterci Rend Budai Szent Imre Gimnáziumában végezte 1934 és 1942 között. Ezt követően a Pázmány Péter Tudományegyetem hallgatója volt, ahol 1947-ben matematika-fizika szakos középiskolai tanári oklevelet szerzett. Még ugyanabban az évben „Sub Laurea Almae Matris” kiltintetési bölcészdoktorrá avatták.

Császár Ákos két fő kutatási területe a valós függvénytan és a topológia. A 40-es és 50-es években írt valós függvénytani munkái a mai napig a témakör kiemelkedő, és immár klasszikus eredményeinek számítanak. Az 50-es évek végén Császár Ákos érdeklődése a topológia felé fordult. E témában írt munkái hamarosan az általános topológia nemzetközileg elismert szaktekintélyévé avatták. Egyik legkiemelkedőbb és legnagyobb hatású eredménye a topologikus terek, az uniform terek és a szomszédsági terek közös általánosításaként bevezetett szintopogén tér fogalma, valamint a szintopogén terek elméletének alapos kidolgozása. Tudományos eredményeit több könyvben és mintegy 130 tudományos közleményben publikálta. Matematikai munkásságát Makai Endre ismerteti dolgozatában.

Császár Ákos a matematikai közélet és a matematika oktatásának szinte valamennyi területén páratlanul kiemelkedő szerepet játszott és játszik. A Magyar Tudományos Akadémia 1970-ben levelező tagjává, 1979-ben rendes tagjává választotta. Az elmúlt évtizedekben számos akadémiai bizottságnak, testületnek volt tisztségviselője vagy tagja. 1973 és 1976, majd 1990 és 1993 között elnöke volt a Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának. Az Osztály szétválása, 1993 óta elnöke a Matematikai Tudományok Osztályának és tagja az MTA Elnökségének.

Kiemelkedő szerepet játszott a matematikai felsőoktatásban. Egyetemi oktatói pályafutását 1946-ban a Budapesti Műszaki Egyetemen kezdte. 1952-től 40 évig (!) tanszékvezetőként dolgozott az Eötvös Loránd Tudományegyetemen. Kezdetben az Analízis Alkalmazásai Tanszék, majd megváltozott név alatt az Analízis I. Tanszék vezetője, melyet azonban inkább „Császár-tanszék” néven ismertek. 1957-ben nevezték ki egyetemi tanárnak, 1994-ben az ELTE emeritus professoraként vonult nyugalomba. Császár Ákosnak az ELTE-n kifejtett páratlanul értékes oktatói és vezetői tevékenységét tanszékvezető utódja, Petruska György méltatja cikkében.

1960 és 1993 között mellékállásban vezette a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutatóintézetében a Topológiai Osztályt, és megteremtette a magyar topológiai iskolát.

Óriási részt vállalt a Bolyai János Matematikai Társulat vezetésében. 1966-tól 1980-ig főtitkára, ezt követően 1990-ig elnöke volt a Társulatnak. 1990 óta a Társulat tiszteletbeli elnöke. A Társulatban végzett munkásságát Katona Gyula méltatja írásában.

1970-től 1992-ig tagja, 1974 és 1977 között elnöke volt a Nemzetközi Banach Központ tudományos tanácsának. Főszerkesztője az Acta Mathematica Hungarica és az Annales Univ. Sci. Budapest. Eötvös, Sectio Mathematica folyóiratoknak, és tagja több más nemzetközi folyóirat szerkesztőbizottságának. Mindezek mellett óriási szerepet vállalt a tudományos ismeretterjesztésben. Hosszú idő óta elnöke a Tudományos Ismeretterjesztő Társulat, valamint a Magyar Természettudományi Társulat Matematikai Választmányának.

Ilyen sokrétű, gazdag és eredményes munkássághoz kivételes kutatói, oktatói és vezetői képességekre, erényekre van szükség. Császár Ákos rendkívüli matematikai tehetsége hatalmas munkabírással párosult. Tevékenységére az emberi tisztesség, lelkiismeretesség, a tudomány és a közösség szolgálata, a kollégák és tanítványok megbecsülése jellemző. Rendíthetetlen nyugalma, kompromisszum készsége, higgadt és határozott döntései, a mindenkor világos, tiszta, lényegre törő gondolkodása, szép, szabatos beszéde hosszú idő óta példaként szolgál a fiatalabb nemzedéknek.

Császár Ákos tudományos eredményeiért, iskolateremtő tevékenységéért, valamint a matematikai felsőoktatásban és a matematikai közéletben végzett kiemelkedő munkásságáért számos kitüntetésben részesült. 1962-ben Akadémiai Díjat, 1963-ban Kossuth-díjat kapott. 1983-ban neki ítéltek a Szele Tibor Emlékérmét. 1984-ben elnyerte a Munka Érdemrend Arany fokozatát, 1992-ben az ELTE aranyérmét, 1994-ben a Magyar Köztársasági Érdemrend Középkeresztjét. 1981-ben a Csehszlovák Tudományos Akadémia Bolzano aranyéremmel tüntette ki.

CSÁSZÁR ÁKOSNAK 75. SZÜLETÉSNAPJÁN

PETRUSKA GYÖRGY

Császár Ákos matematikusi munkásságának még oly vázlatos áttekintése is csapatmunkát igényel, különösen, ha a „matematikus” jelzőt annak megfelelően értelmezzük, ahogy ő ezt a hivatást betölti. Hiszen matematikusként dolgozott és dolgozik ma is tucatnyi bizottságban, testületben, matematikusként végzi tudományos kutató munkáját.

E rövid írásban egy szegmens, a tanszékvezetői munka méltatására szorítokozom, mégpedig — a szubjektivitás veszélyét is vállalva — sokkal inkább személyes emlékekre és tapasztalatokra, mint hivatalos dokumentumokra támaszkodva.

Császár Ákos 1946 óta egyetemi oktató, kezdetben a Budapesti Műszaki Egyetemen, majd 1952-től tanszékvezető az ELTE Természettudományi Karán. Melyik tanszéken is? A tanszék hivatalos neve többször is változott, most éppen Analízis Tanszék, de ha valakivel gyorsan és pontosan tudatni akarom, hogy hol dolgozom, ma is legegyszerűbb úgy válaszolni, hogy a Császár-tanszéken.

1957–1994 között egyetemi tanár, 1994 óta Karunk emeritus professzora. A tanszéket megalakulásától 1992-ig vezeti, ez bizony aranyjánosi értelemben több mint egy emberöltő. E hosszú idő nem csak országunk, de az egyetem, a kar életében, a matematikai közéletben sem volt éppen a csendes, nyugodt meditáció korszaka. Császár Ákos a viharok, megrázkódtatások közepette is úgy irányította a tanszéket, hogy annak tudományos és oktatói tekintélye növekedjék. Annak idején a tanszék oktatói ezt magától értetődőnek tartották, mint ahogy azt is, hogy jól érzik magukat a tanszéken, véleményükre leginkább vezetőjük figyel oda. Amit akkor mint természetesen adottat fogadtunk, a mából visszatekintve lehetetlen teljesítménynek tűnik fel, csodálkozva kérdezhetjük, hogy lehetett ezt elérni?

Nem hiszem, hogy a jó vezetők titkát teljesen meg lehetne fejteni, ez valahol mélyen a jellemében gyökeredző képesség, mégis igyekeznünk kell, hogy minél többet eltanuljunk tőlük.

Egyetemi működését (is) néhány nagyon egyszerű (csak éppen sokszor nagyon nehezen követhető) elv szerint rendezte el: az emberi tisztesség, a tudományos kutatói és az egyetemi oktatói hivatás mélységes tisztelete, a köz odaadó, fáradhatatlan szolgálata, a tanszéki munkatársak megbecsülése.

A nagyon magasra állított mércéhez mindig és minden körülmények között ragaszkodik. Szerencsére másokkal szemben sokkal megértőbb, gyengéseinket türellemmel elviseli. Tudja és érzi, hogy saját példájánál jobb nevelő erő nem létezik.

Már az én hallgató koromban is híres volt rendíthetetlen nyugalmáról. Nyugalmát talán az alapozta meg, hogy tudta, a tanszék élén lényeges küldetést teljesít. Matematikai ismereteink szélesítése, az ismeretek átadása mindennél fontosabb, ehhez képest egyetemi viharok, tanszékek közötti torzsalkodások, pozícióharcok, intrikák, rágalmak és méltatlan támadások mind-mind elhanyagolható semmiségek. Ez adott a tanszék számára belső biztonságérzetet, ennek köszönhető, hogy a tanszék nem hasogatta szét érdekellentét, világnézeti különbség, ellenszenv vagy alantasság. Az, hogy a tanszéktől magas szakmai teljesítményt követel, az ő példájából volt mindenki számára világos, ugyanakkor minden beosztottját arra ösztönözte, hogy saját egyénisége szerint építse pályafutását, és ehhez minden segítséget megadott.

A tanszékre új oktatók soha sem a vezető egyéni és kizárólagos választása alapján kerültek be. Azoknak a munkatársaknak a véleményére támaszkodott, akik a jelöltet a legjobban ismerték. Császár Ákos a tanszékot inkább építette, mint vezette, és az épület fundamentuma a többi oktatóval kialakított kölcsönös bizalom. A vezetés számára a közösség, és ezen keresztül a tudomány szolgálatát jelenti, és nem a hatalom gyakorlását vagy éreztetését.

Matematikus nemzedékek sora tanulta tőle az analízist, a topológiát, a valós függvénytant. A kristálytiszta felépítés, a matematikai gondolatok pontos elemzése jellemzik oktatói egyéniségét, mely azokban a hallgatókban is mély nyomot hagy, akik később más tárgyakban folytatják kutatói pályájukat. Analízis tankönyve állandó hiánycikk, eddig minden utánnomás két nap alatt elfogyott. Tanítványait, beosztott oktatóit „császármorzsnak” nevezték a hallgatók, ha dicsérni akarták őket.

Mit mondhatnánk még? Talán most egy kicsit szidni is kellene az ünnepeltet: Ákos, miért is vagy már 75 éves? Sokkal jobb lenne, ha most is te vezetnéd a Tanszékot.

CSÁSZÁR ÁKOS TEVÉKENYSÉGE A BOLYAI TÁRSULATBAN

KATONA GYULA

Császár Ákos hihetetlenül sokat tett Társulatunkért. 1949 óta tag. Kezdeti tevékenységéről saját korom miatt nem tudhatok sokat, de a későbbiek alapján feltekezem, hogy már akkor is sokat dolgozott a Társulatért. 1965-ben választották főtitkárrá, és ezt a sok munkával és felelősséggel járó feladatot 1980-ig látta el. Utána 10 évig volt a Társulat elnöke, 1990 óta pedig tiszteletbeli elnöke. Tehát 25 évig kellett igen aktívan foglalkoznia a Társulat apróbb-nagyobb ügyeivel. Nincs olyan magyar matematikus, aki csak hasonlóan sokat tett volna Társulatunkért, mint Ő. Amióta „csak” tiszteletbeli elnök, azóta is rendszeresen jár az ülésekre, bölcs, valóban megfontolt tanácsaival aktívan segíti a munkát, és az elnök hiánya esetén mindig Őt kérjük meg az ülés levezetésére.

Császár Ákos az ideális elnök. A vita végén kitűnően foglalja azt össze, pillanatok alatt képes a választható variánsok szétválasztására. Tudja mikor kell a kérdést szavazásra feltenni, és mikor kell a nyilvánvaló egyetértés miatt „fejbólintás” után továbbmenni. Mindig pontosan emlékszik a Társulat legutóbbi alapszabályában és ügyrendjében foglaltakra. (Hja, volt ideje megtanulni!) Számomra a legcsodálatosabb, és leginkább követhetetlen az, hogy mondanivalóját mindig pontos, kerek mondatokban képes előadni. Nem csak a gondolat hajszálpontos, hanem a megfogalmazás is. Mondatait sose kell újrakezdeni, mindig be tudja fejezni a mondatot úgy, ahogy elkezdte. Ebből arra kell következtetnem, hogy a mondat elején már tudja a mondat végét is. Mindehhez járul még szép, erőteljes hangja. Ezt is irigylem, de nem csodálom annyira, hiszen ez születési adottság. Talán a pontos fogalmazás képessége is?

De nem csak pontosan fogalmazott, hanem ugyanilyen pontosan dolgozott is. Számtalan bizottságnak voltunk együtt tagjai. Ő volt az, aki mindig készült, mindig odafigyelt. A feladatokat nem halogatta, hanem elvégezte. Lényeges új szempontokat vett észre. És ami talán a legjellemzőbb rá, sosem engedte, hogy valamilyen „szent cél” érdekében szabálytalanságokat kövessünk el.

Ha ez eredményeimen nem is látszik, a társulati munka legtöbb területén példaképe.

CSÁSZÁR ÁKOS MATEMATIKAI MUNKÁSSÁGA

MAKAI ENDRE

Örömmel teszek eleget a szerkesztőbizottság kérésének, hogy Császár Ákos matematikai munkásságáról ismertetést írjak. Jelen cikk a Juhász István–Petruska György által a Matematikai Lapok 23. évfolyamában megjelent hasonló cikk folytatásának tekinthető, és az azóta eltelt időszak eredményeit öleli fel (az irodalomjegyzék számozásában az [5] könyvtől, ill. az [59] cikktől kezdve), a jelen cikk megírásának kezdetéig.

Az [5] könyv a magyar nyelvű [4] könyv fordítása, bizonyos kiegészítésekkel. Szemléletén erősen látszik a szintopogén struktúrák elméletének hatása, amennyiben a topologikus, szomszédsági és uniform tereket párhuzamosan tárgyalja, ámbar a szintopogén struktúrák maguk nem szerepelnek benne. A közel 500 oldal terjedelmű könyv alapos bevezetést nyújt az általános topológiába, és sok témában igen messzire eljut.

A [6] könyv egyetemi tankönyv, a bevezető analízis és valós függvénytan témaköréből, míg [67] a szögfüggvények bevezetésének problémakörét tárgyalja, egy precíz felépítésben.

* * *

Császár Ákos [59]-től [124]-ig terjedő idegennyelvű cikkeit a továbbiakban bizonyos témacsoportok szerint ismertetjük. Ezek, sorrendben, a következők lesznek:

1) Valós függvénytan; 2) uniform terek; 3) bitopologikus terek; 4) szintopogén terek; 5) $C(X)$ függvényhalmazok; 6) folytonos függvények félcsoportjai; 7) topologikus terek; 8) kváziuniform terek; 9) merotópiák és ezekkel kapcsolatos egyéb struktúrák. A valós függvénytan kivételével a többiek sorrendje bizonyos időbeli sorrendet is tükröz.

1. Valós függvénytan

[65]-ben Laczkovich Miklóssal egy X halmazon értelmezett valós függvényekre a diszkrét és egyenlő konvergencia fogalmát vezetik be. Az $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek egyenlő limesze, ha $\exists \varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, hogy $\forall x \in X$ $\exists n_0(x)$, hogy $n \geq n_0(x)$ esetén $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon_n$, ill. diszkrét limesze, ha

ugyanaz a feltétel $\varepsilon_n = 0$ esetén teljesül. Ha most $\Phi \subset \mathbb{R}^X$ (= az X -ből \mathbb{R} -be menő összes függvények halmaza) egy függvényosztály, akkor $\Phi^\lambda, \Phi^e, \Phi^d$ jelöli a Φ -beli függvények sorozatainak pontonkénti limeszei, egyenlő limeszei, ill. diszkrét limeszei halmazát. A szokásos Baire klasszifikáció analógiájára lehet definiálni a $\Phi_\alpha^{(e)}$ egyenlő és $\Phi_\alpha^{(d)}$ diszkrét Baire függvényosztályokat, ahol $\alpha \leq \omega_1$ rendszám. Ha Φ az X -en egy topológiára a folytonos függvények halmaza, ill. ennél általánosabban *közönséges, teljes függvényosztály* (azaz $\Phi \mathbb{R}^X$ -nek, azaz az összes X -ből \mathbb{R} -be menő függvény halmazának a kontansokat tartalmazó részgyűrűje és részhálója, amely seholsem eltűnő elemei reciprokait is tartalmazza, azonkívül zárt az egyenletes konvergenciára), akkor $\Phi_{\omega_1}^{(e)} = \Phi_{\omega_1}$ (ahol Φ_α a szokásos Baire osztályokat jelenti, a Φ -ből kiindulva). Ugyanezen esetben a $\Phi_{\omega_1}^{(d)}$ függvényosztályt is jellemzik. Ha Φ az X -en egy topológiára folytonos függvények halmaza, $\Phi_1^{(e)} = \Phi_1^{(d)}$, és bizonyos topológiák esetén karakterizálják ezen függvényhalmazt.

[69]-ben ugyancsak Laczkovich Miklóssal egy X halmazon egy Φ közönséges és teljes függvényosztályt vizsgálnak. A Borel halmazosztályok és ezeknek megfelelő Baire függvényosztályok kapcsolatának vizsgálata után minden $\alpha < \omega_1$ rendszámra tudják jellemezni a $\Phi_\alpha^{(d)}$ függvényosztályt. A $\Phi_\alpha^{(e)}$ függvényosztályra, $\alpha = \beta + 1$ esetén teljesül $\Phi_\beta \subset \Phi_{\beta+1}^{(e)} \subset \Phi_{\beta+1}$ (míg általában $\Phi_1 \subset \Phi_{\omega_1}^{(d)}$ sem teljesül). Ezek [65] megfelelő állításait élesítik.

[95]-ben megint Laczkovich Miklóssal közösen egy X halmazon egy Φ közönséges és teljes függvényosztályt vizsgálnak. Definiálnak $\alpha < \omega_1$ -re módosított Baire, egyenlő Baire és diszkrét Baire függvényosztályokat, ahol a definícióban a limesz rendszám esetén van eltérés az eredetitől. Ezen függvényosztályok $\alpha < \omega$ esetén az eredetiekkel megegyeznek, $\alpha \geq \omega$ esetén az α -dik eredeti függvényosztály az $(\alpha + 1)$ -dik módosított függvényosztállyal egyezik meg ($\Phi_\alpha^{(e)}$ esetén csak $\alpha = \beta + 1$ -re). Ezek kicsit természetesebb definíciók, a rájuk vonatkozó állítások egyszerűbbek, és a Borel-halmazokkal való kapcsolatuk is egyszerűbb. Belátják, hogy a módosított α -dik diszkrét Baire-osztály egyenletes konvergenciára való lezárása a módosított α -dik Baire-osztály. Karakterizálják a módosított α -dik diszkrét Baire-osztályt és $\alpha = \beta + 1$ -re az α -dik egyenlő Baire-osztályt. Így az eredeti $\Phi_\alpha^{(e)}$ függvényosztályokat tudják karakterizálni, $\alpha = \beta + 1$ esetén.

[96]-ban a következő kérdés analógja van vizsgálva. Ha Y egy metrikus tér, és $B \subset Y$, akkor tekinthetjük a $C(Y)$ és $C(B)$ halmazt (Y -on, ill. B -n folytonos valós függvények halmazát). Ezekre $C(Y)|_B \subset C(B)$, és vizsgálható az egyenlőség esete, azaz hogy mikor lehet folytonos valós függvényeket B -ről X -re kiterjeszteni. Továbbá az analóg kérdés felvethető az α -dik Baire függvényosztály esetére is. A cikkben ennek analógiájára egy X halmazon egy Φ közönséges és teljes függvényosztályból indul ki. Legyen $\mathcal{P}(\Phi) = \{ \{x \in X | f(x) \leq c\}, \{x \in X | f(x) \geq c\} | f \in \Phi, c \in \mathbb{R} \}$, és tekinti egy $A \subset X$ esetén a $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(\Phi)|_A$ halmazrendszert, azaz $\mathcal{P}(\Phi)$ -nek A -ra való megszorítását. Ezután legyen $\Phi(\mathcal{P}_0) = \{ f \in \mathbb{R}^A | \forall c \in \mathbb{R} \{x \in X | f(x) \leq c\}, \{x \in X | f(x) \geq c\} \in \mathcal{P}_0 \}$. (Ezek a fenti $C(Y)$, az Y -beli ill. B -beli zárt halmazok, és $C(B)$ analógiái.) $\Phi_0 = \Phi(\mathcal{P}_0)$ is közönséges teljes függvényosztály,

és vizsgálja a módosított α -dik Baire-osztályt, egyenlő Baire-osztályt, ill. diszkrét Baire-osztályt, Φ -re, ill. Φ_0 -ra. Egy ilyen, Φ -re vonatkozó osztályban levő függvény megszorítása A -ra ugyanolyan típusú, Φ_0 -ra vonatkozó α -dik osztályban van. Fordítva, egy ilyen, Φ_0 -ra vonatkozó osztályban levő függvény X -re való kiterjesztésének lehetőségéről bizonyít tételeket. A tételekben vagy olyan feltétel van, hogy A egy alkalmas Borel-halmazosztályban legyen, vagy pedig ha A tetszőleges, akkor a kiterjesztett függvény az $(\alpha + 1)$ -edik ugyanolyan típusú függvényosztályban van. Ezenkívül α -ra is esetenként vannak megszorítások.

[103]-ban és [105]-ben (amelyek közül a második cikk az elsőnek kis korrekcióját is tartalmazza) additív halmazfüggvényeket vizsgál. Legyen \mathcal{A} egy halmazrendszer egy X halmazon. \mathcal{A} metszet félháló, ill. háló, ill. gyűrű, ha $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ esetén $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$, ill. $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$, ill. még ezeken kívül $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$. Legyen \mathcal{R} az \mathcal{A} -t tartalmazó legkisebb halmazgyűrű X -en, és $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény. Azt vizsgálja, mikor van φ -nek additív $\psi: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kiterjesztése. Ha \mathcal{A} háló, ennek ismert szükséges és elégséges feltétele (1) $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - \varphi(A_1 \cap A_2)$, és (2) $\emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \varphi(\emptyset) = 0$. Ha \mathcal{A} metszet-félháló, akkor a szükséges és elegendő feltétel a következő: (1) jobboldalának értéke csak $A_1 \cup A_2$ -től függ, és hasonló szitaformula jellegű feltétel minden $n \geq 2$ -re, és (2).

2. Uniform terek

Az uniform terek és közöttük az egyenletesen folytonos leképezések a metrikus tereknek és közöttük az egyenletesen folytonos leképezéseknek általánosításai. Mivel az uniform tereknek később többféle általánosítása fog szerepelni, a későbbi hivatkozások kedvéért itt megadjuk az uniform terek definícióját. Egy *uniform tér* egy (X, \mathcal{U}) pár, ahol X egy halmaz, \mathcal{U} $X \times X$ -en egy filter, amelyre a következő axiómák teljesülnek:

$$(U1): \forall U \in \mathcal{U} \quad U \supset \Delta = \{(x, x) | x \in X\} \quad (= \text{átló})$$

$$(U2): U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U} \quad (\text{„szimmetria”})$$

$$(U3): U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{U}, U_1 \circ U_1 = U_1^2 \subset U \quad (\text{„háromszögegyenlőtlenség”}).$$

($U \subset X^2$ -re $U^{-1} = \{(x_1, x_2) | (x_2, x_1) \in U\}$, és $U_1, U_2 \subset X^2$ -re $U_1 \circ U_2 = \{(x_1, x_2) \in X^2 | \exists x' \in X, (x_1, x') \in U_1, (x', x_2) \in U_2\}$) \mathcal{U} *szeparált*, ha $\cap \mathcal{U} = \Delta$. (Ha csak (U1), (U3) teljesül, *kváziuniform térről* beszélünk; ha csak (U1), (U2), *szemiuniform térről*.) Egy $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ leképezés egyenletesen folytonos, ha $V \in \mathcal{V} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$. Példaként egy (X, d) metrikus tér uniform struktúrája az az \mathcal{U} filter, melynek bázisa $\{U_c | c \in (0, \infty)\}$, ahol $U_c = \{(x_1, x_2) | d(x_1, x_2) < c\}$. Egy (X, \mathcal{U}) uniform, vagy kváziuniform tér topológiája egy $x \in X$ pontban a következő környezetbázissal rendelkezik: $\{Ux | U \in \mathcal{U}\}$, ahol $Ux = \{x' | (x, x') \in U\}$. (Általában $A \subset X$ -re $U(A) = \{x' | \exists x \in A, (x, x') \in U\}$.) Egy (X, \mathcal{U}) uniform tér teljes, ha benne minden Cauchy filter konvergens (ekvivalensen: van torlódási pontja), ahol egy \mathcal{F} filter Cauchy, ha $\forall U \in \mathcal{U} \exists F \in \mathcal{F}, F \times F \subset U$.

Ezek után rátérünk [62] ismertetésére. Ebben a teljesség fogalmának különféle erősítéseit vizsgálja. Egy (X, \mathcal{U}) uniform tér hipertere $(2^X \setminus \{\emptyset\}, \mathcal{V})$, ahol 2^X X hatványhalmaza, és \mathcal{V} bázisa $\{\{(A, B) | A, B \subset X, B \subset U(A), A \subset U(B)\} | U \in \mathcal{U}\}$. (Ez a formula a metrikus tér részhalmazain értelmezett Hausdorff távolság definíciójával analóg.) (X, \mathcal{U}) szuperteljes, ha hipertere teljes. A Cauchy szűrők fogalmának általánosítása a stabil szűrő, míg ennek általánosítása a Corson-szűrő. Az \mathcal{F} X -beli szűrő stabil, ha $\forall U \in \mathcal{U} \cap \{U(F) | F \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{F}$, ill. Corson-féle, ha $\forall U \in \mathcal{U} \exists A \subset X, A \times A \subset U, \forall F \in \mathcal{F} F \cap A \neq \emptyset$. (X, \mathcal{U}) erősen teljes, ill. ultrateljes, ha minden stabil, ill. Corson-féle szűrőnek van torlódási pontja. Egy uniform térre fennállnak a következő implikációk: kompakt \Rightarrow ultrateljes \Rightarrow szuperteljes \Rightarrow erősen teljes \Rightarrow teljes. Karakterizálja az ultrateljes uniform tereket, és azon szeparált uniform tereket, amelyeknek teljes burka erősen teljes, ill. ultrateljes.

3. Bitopologikus terek

[64] egy konferenciakötetben egy kivonat, tartalmi ismertetését illetően utalunk a Juhász–Petruska cikk 233. oldalára, az [53] ismertetésére (ott [59]-cel jelölve).

4. Szintopogén terek

A Császár Ákos által bevezetett szintopogén terek a három klasszikus topológiai struktúrafajta, a topológiák, az uniformitások is a (Jefremovics) szomszédságok közös általánosítása.

Mivel a szomszédsági struktúrák kevésbé ismertek, valamint később általánosításukra is sor kerül, definiálni fogjuk őket. Példaként említhetjük az (X, d) metrikus tereket, ahol $A, B \subset X$ szomszédos, ha a $d(A, B)$ távolságuk 0. Ennek analógiájára egy (X, \mathcal{U}) uniform térben $A, B \in X$ szomszédos, ha $\forall U \in \mathcal{U} U(A) \cap B \neq \emptyset$. Egy másik példa egy X normális topologikus tér, ahol $A, B \subset X$ szomszédos, ha $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

Egy *Jefremovics szomszédsági tér* egy (X, δ) pár, ahol X halmaz, δ reláció a 2^X hatványhalmazon (közelség), amelyre a következő axiómák teljesülnek, ahol $\not\delta$ a δ tagadását jelenti:

$$(P1): \emptyset \not\delta X$$

$$(P2): \forall x \in X \{x\} \delta \{x\}$$

$$(P3): A \delta B, A \subset A', B \subset B' \Rightarrow A' \delta B'$$

$$(P4): A_1 \not\delta B, A_2 \not\delta B \Rightarrow (A_1 \cup A_2) \not\delta B$$

$$(P5): A \delta B \Rightarrow B \delta A$$

$$(P6): A \not\delta B \Rightarrow \exists A', B', A' \cup B' = X,$$

$$A \not\delta A', B' \not\delta B \text{ („normalitás”).}$$

Čech-szomszédságról beszélünk, ha (P6)-ot elhagyjuk. Egy Jefremovics szomszédság topológiájának definíciója: $x \in \bar{A} \iff \{x\} \delta A$. (Megjegyeztük, hogy Čech-féle szomszédságból kiindulva ugyanez a formula nem definiál topológiát, csak egy Čech-féle lezárást, azaz egy $2^X \rightarrow 2^X$ leképezést, amelyre $\bar{\emptyset} = \emptyset$, $A \subset \bar{A}$, $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2$.) Például egy adott X Tyihonov T_0 topológiát indukáló Jefremovics szomszédságok kölcsönösen egyértelműen megfelelnek az X tér Hausdorff kompaktifikációinak. Az $f: (X_1, \delta_1) \rightarrow (X_2, \delta_2)$ leképezés az (X_1, δ_1) , (X_2, δ_2) (valamelyik fajta) szomszédsági terek között szomszédságtartó, ha $A \delta_1 B \Rightarrow f(A) \delta_2 f(B)$.

Ha $A \not\delta B$, akkor $X \setminus B$ -t A szomszédsági környezetének mondjuk, jelben $A < X \setminus B$. Erre a $<$ relációra természetesen átfogalmazhatók a fenti (P1)–(P6) axiómák. Ha (P5)-öt elhagyjuk, és viszont (P1), (P4) duális formáját is feltesszük (amikor is a kváziuniform terek analógiájára kváziszomszédságról beszélünk), az átfogalmazott axiómák a topogén tér definícióját adják. (Megjegyeztük, hogy újabban az ezzel ekvivalens kváziszomszédság elnevezés inkább elterjedt.) Tehát $(X, <)$ topogén tér, ha $<$ reláció 2^X -en, amelyre

$$(T1): \emptyset < \emptyset, X < X$$

$$(T2): A < B \Rightarrow A \subset B$$

$$(T3): A' \subset A < B \subset B' \Rightarrow A' < B'$$

$$(T4): A_1 < B_1, A_2 < B_2 \Rightarrow A_1 \cap A_2 < B_1 \cap B_2, A_1 \cup A_2 < B_1 \cup B_2$$

$$(T5): A < B \Rightarrow \exists C, A < C < B.$$

Ha (T5)-öt elhagyjuk, a topogén rendezés fogalmát kapjuk.

Egy szintopogén struktúra egy X halmazon $<$ topogén rendezéseknek egy \mathcal{S} családjá, amelyre teljessül

$$(S1): <', <'' \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists < \in \mathcal{S}, A <' B \Rightarrow A < B, A <'' B \Rightarrow A < B \text{ (azaz } < \text{ finomabb } <', <''\text{-nél)}$$

$$(S2): < \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists <' \in \mathcal{S}, A < B \Rightarrow \exists C, A <' C <' B.$$

A szintopogén struktúrák közül egyesek (lényegében) kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a topologikus, ill. uniform, ill. Jefremovics-féle szomszédsági tereknek, úgy, hogy az azok közötti folytonos, egyenletesen folytonos, szomszédságtartó leképezések (lényegében) a megfelelő szintopogén terek között természetes módon definiált szintopogén folytonos leképezéseknek felelnek meg, kölcsönösen egyértelműen. ($f: (X_1, \mathcal{S}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{S}_2)$ szintopogén folytonos, ha $\forall <_2 \in \mathcal{S}_2 \exists <_1 \in \mathcal{S}_1, A <_2 B \Rightarrow f^{-1}(A) <_1 f^{-1}(B)$.)

Ezek után rá tudunk térni a szintopogén terekkel foglalkozó dolgozatok ismeretetésére.

[59]-ben transzformációcsoportokat vizsgál, azaz egy X halmazt egy Γ csoporttal, melynek elemei X -nek bizonyos bijekciói önmagára, ahol a csoportművelet a kompozíció, és a csoportegység az identikus transzformáció. Felteszi, hogy Γ tranzitív, azaz $x_1, x_2 \in X \Rightarrow \exists \gamma \in \Gamma, \gamma(x_1) = x_2$. Erre példa egy $X = \Gamma$ csoport, ahol egy $x_0 \in X$ elem az $x \mapsto x_0 x$ bijekciót indukálja. Ha X -en van egy Γ -invariáns

struktúra, amely egy másik, „egyszerűbb” struktúrát indukál, akkor természetes elvárni, hogy ez is Γ -invariáns legyen. Fordítva, megkérdezhető, hogy egy Γ -invariáns struktúra X -en indukálható-e Γ -invariáns „bonyolultabb” struktúrával. Egy topológia, ill. Jefremovics-szomszédság Γ -invariáns, ha $\forall \gamma \in \Gamma$ homeomorfizmus, ill. szomszédsági izomorfizmus. Egy uniformitás Γ -invariáns, ha van bázisa Γ -invariáns U halmazokból (azaz $\forall \gamma \in \Gamma (x_1, x_2) \in U \iff (\gamma(x_1), \gamma(x_2)) \in U$). Egy *d* *pseudometrika* (azaz olyan valós függvény, amely teljesíti a metrika axiómáit, kivéve $d(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ -t) Γ -invariáns, ha $\forall \gamma \in \Gamma d(x_1, x_2) = d(\gamma(x_1), \gamma(x_2))$. Elégséges (és többnyire szükséges) feltételeket ad Γ -invariáns topológia indukálhatóságára Γ -invariáns Jefremovics-szomszédsággal, ill. uniformitással, és Γ -invariáns Jefremovics-szomszédság indukálhatóságára Γ -invariáns uniformitással. Minden Γ -invariáns \mathcal{U} uniformitás indukálható Γ -invariáns pseudometrikák egy $\{d_\alpha \mid \alpha \in A\}$ halmazával, azaz a $\left\{ \{(x_1, x_2) \mid d_{\alpha_i}(x_1, x_2) < \varepsilon, i = 1, \dots, n\} \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in A, \varepsilon > 0 \right\}$ halmazrendszer \mathcal{U} -nak egy bázisa.

[61]-ben a szintopogén csoportokról szóló korábbi vizsgálatait ([52], [56], [57], [58], ismertette a Juhász–Petruska cikk 232–233. oldalán, [55], [60], [61] szám alatt) terjeszti ki a fentiekben említett transzformációcsoportok esetére. Egy *rendezésstruktúra* az X halmazon topogén rendezéseknek egy nemüres családja, amely csak a fenti (S1). axiómát elégíti ki. Vizsgál (X, Γ) transzformációcsoportokat, és X -en szintopogén, ill. rendezésstruktúrákat. Egy \mathcal{R} rendezésstruktúra Γ -invariáns, ha $\langle \in \mathcal{R}$ és $\gamma \in \Gamma$ esetén $A < B \iff \gamma(A) < \gamma(B)$. Ezen fogalom felhasználásával módszert ad a Γ -invariáns halmazokból álló pseudouniformitás bázisok előállítására. (Egy *pseudouniformitás* $X \times X$ -en csak (U1)-et kielégítő filter.) Ily módon bizonyításokat nyer a szintopogén struktúrák elméletének segítségével az [59]-beli állításokra is.

Jól ismert, hogy két normális topologikus tér szorzata nem feltétlen normális. [72]-ben meglepő módon megmutatja, hogy a szintopogén terek körében más a helyzet. A normalitás definícióját a topologikus terek normalitásának egy, a topogén rendezések nyelvére való lefordítása adja. Egy X topologikus térhez hozzárendelt topogén rendezés a következő: $A < B \iff A \subset \text{int } B$. A normalitás a következőképpen írható fel ennek segítségével: $\exists C, \bar{A} \subset C \subset \text{int } B \Rightarrow \exists D, A \subset \text{int } D, \bar{D} \subset B$, azaz

$$(1) \quad A(\langle^c \circ \langle)B \Rightarrow A(\langle \circ \langle^c)B,$$

ahol $A \langle^c B \iff X \setminus B \langle X \setminus A$, és \circ a szokásos reláció-kompozíciót jelöli (l. a 2.§-t). Egy topogén rendezés normalitását (1)-gyel definiálva, egy \mathcal{S} szintopogén struktúra *normális*, ha van egy vele *ekvivalens* \mathcal{S}' szintopogén struktúra (azaz közös az alaphalmazuk, és azon az identikus leképezés mindkét irányban folytonos), amelyre $\langle \in \mathcal{S}' \Rightarrow \langle$ normális. Az \mathcal{S} szintopogén struktúra *gyengén normális*, ha $\langle \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists \langle_1 \in \mathcal{S}, A(\langle^c \circ \langle)B \Rightarrow A(\langle_1 \circ \langle_1^c)B$. Az (X_i, \mathcal{S}_i) szintopogén struktúrák *szorzata* az (egyik) legdurvább $(\prod X_i, \mathcal{S})$ szintopogén struktúra, amelyre a $\prod X_i \rightarrow X_i$ projekciók mind folytonosak, ahol (X, \mathcal{S}) *durvább* (X, \mathcal{S}') -nél, ha az

identikus leképezés X -en $(X, S') \rightarrow (X, S)$ folytonos. Belátja, ha (X_i, S_i) (gyengén) normális, akkor szorzatuk is ugyanilyen tulajdonságú.

[70]-ben zéró-halmaz tereket (más néven kozéró-tereket) vizsgál. Ezekre példa egy metrikus, vagy általánosabban tökéletesen normális topologikus tér zárt halmazainak rendszere. (X, \mathcal{Z}) zéró-halmaz tér, ha $\mathcal{Z} \subset 2^X$ (amelynek elemeit zéró-halmazoknak, és ezek komplementereit kozéró halmazoknak nevezzük), és teljesül

$$(Z1): \emptyset, X \in \mathcal{Z}$$

$$(Z2): Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z} \Rightarrow Z_1 \cup Z_2 \in \mathcal{Z}$$

$$(Z3): Z_i \in \mathcal{Z} (i \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcap_{i \in \mathbb{N}} Z_i \in \mathcal{Z}$$

$$(Z4): Z \in \mathcal{Z} \Rightarrow \exists Z_i \in \mathcal{Z} (i \in \mathbb{N}), X \setminus Z = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} Z_i$$

(„tökéletesség”)

$$(Z5): Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}, Z_1 \cap Z_2 = \emptyset \Rightarrow \exists C_1, C_2, X \setminus C_i \in \mathcal{Z}, Z_i \subset C_i, C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

(„normalitás”).

$f: (X_1, \mathcal{Z}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{Z}_2)$ zéró-halmaz leképezés, ha $Z_2 \in \mathcal{Z}_2 \Rightarrow f^{-1}(Z_2) \in \mathcal{Z}_1$.

(Megjegyezzük, hogy a zéró-halmaz terek és az 1.§-ban említett közönséges és teljes függvényosztályok között van egy bijekció: az 1.§, [96] ismertetésében leírt $\Phi \rightarrow \mathcal{P}(\Phi)$, és $\mathcal{P}_0 \rightarrow \Phi(\mathcal{P}_0)$ hozzárendelésekkel. Továbbá (X, \mathcal{Z}) zéró-halmaz tér pontosan akkor, ha van X -en egy uniformitás, amelyre az egyenletesen folytonos függvények zéró-halmazainak rendszere \mathcal{Z} .) Hasonlóan, mint [72] ismertetésében egy topológiához egy topogén rendezés van hozzárendelve, egy (X, \mathcal{Z}) zéró-halmaz térhez hozzárendel egy $(X, <)$ topogén teret: $A < B \iff \exists C, A \subset C \subset B, X \setminus C \in \mathcal{Z}$. Ez egy beágyazását adja a zéró-halmaz terek osztályának a topogén terek osztályába. Karakterizálja az így kapott topogén tereket, vizsgálja az előbb említett beágyazásnak egy bal-inverzét, amely az $(X, <)$ topogén térnek megfelelteti az (X, \mathcal{Z}) zéró-halmaz teret, ahol $\mathcal{Z} = \{f^{-1}(0) | f: (X, <) \rightarrow (\mathbb{R}, <^*)\}$, ahol $A, B \subset \mathbb{R}$ -re $A <^* B \iff \exists \varepsilon > 0, (A \varepsilon\text{-környezete}) \subset B$. Továbbá a fentebb kapott topogén terek osztályának az összes topogén tér osztályával való különféle kapcsolatait vizsgálja.

[74]-ben [70] vizsgálatait fejleszti tovább. Mivel egy topogén tér szintopogén tér is, így [70] szerint a zéró-halmaz terek osztálya beágyazható a szintopogén terek osztályába is. Ennek is vizsgálja egy balinverzét (a fenti balinverz kiterjesztését), amely az (X, S) szintopogén térnek megfelelteti az (X, \mathcal{Z}) zéró-halmaz teret, ahol $\mathcal{Z} = \{f^{-1}(0) | f: (X, S) \rightarrow (\mathbb{R}, \{<_\varepsilon | \varepsilon > 0\})\}$, ahol $A, B \subset \mathbb{R}$ -re $A <_\varepsilon B \iff (A \varepsilon\text{-környezete}) \subset B$. A beágyazás képenként kapott szintopogén terek osztályának az összes szintopogén terek osztályával való kapcsolatait vizsgálja, kiterjesztvén [70] eredményeit. Vizsgál a zéró-halmaz terek körében különféle operációkat.

5. $C(X)$ függvényhalmazok

Jól ismert a $C(X)$ (X -en folytonos valós függvények) függvénygyűrűknek Gelfand-tól származó karakterizációja a Banach-algebrák körében, X kompakt T_2 terek esetén. [63]-ban egy ezzel analóg helyzetet vizsgál. Legyen X teljesen reguláris tér; ekkor jól ismert kölcsönösen egyértelmű és rendezéstartó megfeleltetés van az X tér Y T_2 kompaktifikációi(nak ekvivalencia osztályai), valamint $C^*(X) = \{f|f: X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ korlátos}\}$ olyan Φ részhalmazai között, amelyekre a) $\{X \setminus f^{-1}(0)|f \in \Phi\}$ X -nek bázisa, b) Φ zárt az egyenletes konvergenciára, c) Φ tartalmazza a konstans függvényeket, d) Φ a pontonkénti műveletekkel gyűrű (vagy vektortér és háló). Az Y -hoz hozzárendelt Φ a $C(Y)|X$ függvényhalmaz. Itt $\Phi_1 \leq \Phi_2 \iff \Phi_1 \subset \Phi_2$, és Y_1, Y_2 T_2 kompaktifikációkra $Y_1 \leq Y_2 \iff \exists f: Y_2 \rightarrow Y_1, f$ X -en identitás (és Y_1, Y_2 ekvivalens, ha $Y_1 \leq Y_2 \leq Y_1$). Továbbá ezek szintén kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban állnak az X -en levő és X topológiáját indukáló *prekompakt* uniformitásokkal (azaz $\forall U \in \mathcal{U} \exists n, \exists A_1, \dots, A_n, X = \bigcup^n A_i, A_i \times A_i \subset U$); mégpedig a szóbanforgó kompaktifikációk ezen uniformitások teljes burkai. Célja ezen eredmény átvitele a $C(X) = \{f|f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$ függvényosztályok esetére, a Φ függvényhalmazra tett, alkalmas operációkra való zártság feltételezésével. Az X -et tartalmazó Y *bővítéseket* (azaz $X \subset Y, X$ sűrű Y -ban) most a *reálkompakt* terek (azaz \mathbb{R} hatványainak zárt alterei) osztályából keresi, amely osztály a $C(X)$ függvényhalmazokhoz úgy viszonyul, mint a kompakt T_2 terek osztálya a $C^*(X)$ függvényhalmazokhoz. Egy $\Phi \in \mathbb{R}^X$ függvényosztály *kompozíciózárt* (erősen kompozíciózárt), ha bármilyen I indexhalmaz és bármilyen $f_i \in \Phi$ ($i \in I$) esetén, tekintve az $F = (f_i): X \rightarrow R^I$ leképezést (amelynek i -edik koordinátája f_i), bármely $g: \overline{F(X)} \rightarrow \mathbb{R}$ ($g: F(X) \rightarrow \mathbb{R}$) esetén $g \circ F \in \Phi$. Φ erősen kompozíciózárt akkor és csak akkor, ha van egy \mathcal{T} topológia az X halmazon, amelyre $C((X, \mathcal{T})) = \Phi$. Egy X teljesen reguláris térre $\Phi \subset \mathbb{R}^X$ $C(Y)|X$ alakú, X -nek egy Y reálkompakt bővítésére, akkor és csak akkor, ha $\Phi \subset C(X)$, $\{X \setminus f^{-1}(0)|f \in \Phi\}$ X -nek bázisa, és Φ kompozíciózárt. Ez az $Y \mapsto \Phi$ megfeleltetés ugyancsak kölcsönösen egyértelmű az Y reálkompakt bővítések (ekvivalencia osztályai) és a fenti tulajdonságú Φ függvényhalmazok között, továbbá rendezéstartó, a kompaktifikációknál megadott értelemben. Végül az X teljesen reguláris tér összes reálkompakt bővítését megkonstruálja bizonyos, X -en levő uniform struktúrák teljes burkaiként. A szóbanforgó uniform struktúrák a következők: X topológiáját indukálják, maguk valós függvényosztályok által indukált gyenge uniformitások, továbbá a teljes burkukra folytonosan kiterjeszthető valós függvények rajtuk egyenletesen folytonosak.

[66]-ban a következő kérdés van tovább vizsgálva. Legyen egy X halmazon (vagy topologikus téren) megadva egy $\Phi \subset \mathbb{R}^X$ ($\Phi \subset C(X)$) függvényosztály. Kérdés: mikor lesz ez $C((X, \mathcal{T}))$ alakú, ahol \mathcal{T} egy topológia X -en, illetve $C(Y)|X$ alakú, ahol $X \subset Y, Y$ topologikus tér, ill. $X \subset Y, Y$ topologikus tér, $\overline{X} = Y$. A korábbi, ezekre vonatkozó eredményeket általánosabb formában hozza. A karakterizációkban részben különféle kompozíció-zártság tulajdonságok szerepelnek, [63] analógiájára. Egy másik típusú jellemzés: $\Phi \subset \mathbb{R}^X$ $C((X, \mathcal{T}))$ alakú $\iff \Phi$

a pontonkénti műveletekkel gyűrű, amely a nem-eltűnő elemeinek reciprokait is tartalmazza, és $f_i \in \Phi$ ($i \in I$), $g_j \in \Phi$ ($j \in J$), $\sup f_i = \inf g_j \Rightarrow \sup f_i \in \Phi$. ($\Phi = C((X, T))$ -re $\{x | \sup f_i(x) > c\}$, $\{x | \inf g_j(x) < c\}$ nyíltak, így a feltétel szükséges). Végül gyűrűkre ad szükséges és elégséges feltételeket, hogy izomorfak legyenek függvénygyűrűkkel, ill. $C(X)$, $C(Y)|X$ alakú függvénygyűrűkkel.

[83]-ban megint $\Phi \subset C(X)$ függvényosztályokat vizsgál. Egy X -en levő \mathcal{F} filter Φ -filter, ha $\forall f \in \Phi$ $f(\mathcal{F})$ konvergens \mathbb{R} -ben. Φ filter-zárt, ha $f \in \mathbb{R}^X$, $\forall \mathcal{F}$ Φ -filter $f(\mathcal{F})$ konvergens $\Rightarrow f \in \Phi$. $\Phi C(Y)|X$ alakú, ahol $Y \supset X$, Y topologikus tér, $\overline{X} = Y \iff \Phi$ filter-zárt. Ha X T_1 -tér, akkor $\Phi C(Y)|X$ alakú, ahol $Y \supset X$, Y T_1 -tér, $\overline{X} = Y$, pontosan akkor áll fenn, ha Φ a filter-zárt tulajdonságnak egy kicsit erősebb változatát elégíti ki. X lokálisan kompakt T_2 -tér esetén $\Phi C(Y)|X$ alakú, ahol $Y \supset X$, Y T_2 -tér, $\overline{X} = Y$, pontosan akkor, ha Φ a filter-zártságnak egy további erősítését elégíti ki.

6. Folytonos függvények félcsoportjai

A $C(X)$ függvénygyűrűknek X kompakt T_2 -terek esetén Gelfandtól származó karakterizációja egyik következménye az, hogy amennyiben két ilyen függvénygyűrű, $C(X_1)$, $C(X_2)$ gyűrűelméleti értelemben izomorf, akkor X_1 és X_2 homeomorf. (Pontosabban a Banach-algebrák Gelfand-reprezentációinak segítségével lehet ezt bebizonyítani.) Ennek egy általánosítása a Milgram-tétel, amely szerint már a $C(X_1)$, $C(X_2)$ multiplikatív félcsoportok félcsoport izomorfája maga után vonja az X_1 , X_2 kompakt T_2 -terek homeomorfiáját. A most ismertető cikksorozat ennek különféle további általánosításait tárgyalja.

Először definiáljuk azt a térosztályt, amelyre ezt a kérdést természetes fölteni. Az X tér reálkompakt, ha homeomorf \mathbb{R} egy hatványának zárt alterével. Egy X $T_{3\frac{1}{2}}$ tér vX Hewitt-féle reálkompaktifikációja az $\overline{F(X)}$ tér, ahol $F: X \rightarrow \mathbb{R}^{C(X)}$ az a leképezés, amelynek az f ($\in C(X)$)-edik koordinátája éppen f . Minden $f \in C(X)$ egyértelműen kiterjeszthető egy $g \in C(vX)$ függvényé, ami $C(X)$ és $C(vX)$ között félcsoport izomorfát létesít. (Mindez analóg a kompakt T_2 terekkel, ill. a Stone-Čech kompaktifikációval, amelyek definiálhatók a fentivel analóg módon, \mathbb{R} helyett $[0,1]$, és $C(X)$ helyett $C(X, [0,1])$ segítségével.) Ezért a fenti kérdést csak reálkompakt terek esetén érdemes vizsgálni.

[84]-ben reálkompakt terekre a Milgram tétel egy általánosítását bizonyítja. Bevezeti két félcsoport, S_1 , S_2 d -izomorfijának fogalmát, ami az izomorfizmus fogalmának gyengítése. S_1 , S_2 d -izomorf, ha van köztük egy $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ bijekció, amelyre $\forall f, g \in S_1$ $[\exists h \in S_1, g = hf \iff \exists h' \in S_2, \varphi(g) = h'\varphi(f)]$. (Azaz φ az „oszthatóság” reláció szempontjából izomorfizmus.) Bebizonyítja, hogy X_1 , X_2 reálkompakt terek esetén a $C(X_1)$, $C(X_2)$ félcsoportok d -izomorfája maga után vonja X_1 és X_2 homeomorfiáját.

[82]-ben a [84]-beli tételt a következőképpen általánosítja. Legyenek S_1 , S_2 ú.n. kvázi-valós topologikus félcsoportok. Ennek definícióját itt nem adjuk meg, de

pl. ilyen \mathbb{R} vagy \mathbb{C} . Ekkor X_1, X_2 reálkompakt terekre $C(X_1, S_1)$ és $C(X_2, S_2)$ d -izomorfiája maga után vonja X_1 és X_2 homeomorfiáját. Vizsgálja továbbá a kvázi-valós topologikus félcsoportok osztályát.

[87]-ben kompakt T_2 terekre a Milgram tétel egy másik általánosítását bizonyítja be. Az S_1 és S_2 félcsoportot *u-izomorfnak* hívja, ha létezik közöttük egy $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ bijekció, amelyre $\forall f, g \in S_1 [f = fg \iff \varphi(f)\varphi(g)]$. (Azaz φ a „ g relatív jobb egység a -ra” relációra nézve izomorfizmus.) Ez az izomorfia fogalmának általánosítása, sőt, legalábbis $C(X)$ alakú félcsoportokra nézve, a d -izomorfia fogalmának is. Legyenek most S_1, S_2 ú.n. *szakaszszerű topologikus félcsoportok*. Ezek definíciójától megint eltekintünk, de pl. $[0, 1]$, vagy $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ ilyen, és minden kvázi-valós félcsoport is ilyen. Bebizonyítja X_1, X_2 kompakt T_2 terek esetén, hogy $C(X_1, S_1)$ és $C(X_2, S_2)$ u -izomorfiája maga után vonja X_1 és X_2 homeomorfiáját.

[92]-ben a [87]-ben vizsgált kérdés egy variánsát vizsgálja. Legyenek X_1, X_2 lokálisan kompakt, nem-kompakt, T_2 -terek, és S_1, S_2 szakaszszerű félcsoportok. Legyen $C_\infty(X_i, S_i)$ azon X_i -ből S_i -be menő folytonos függvények félcsoportja, amelyek folytonosan kiterjeszthetők X_i egy-pontú kompaktifikációjára $X_i \cup \{\infty\}$ -re, és a kiterjesztéstük a ∞ -ben a 0 értéket veszi fel. Ekkor $C_\infty(X_1, S_1)$ és $C_\infty(X_2, S_2)$ u -izomorfiája maga után vonja X_1, X_2 homeomorfiáját.

[97]-ben E. Thümmellel együtt a félcsoportok izomorfizmusának egy másik gyengítését vezetik be. Az S_1 és S_2 0-elemes félcsoport *t-izomorf*, ha létezik $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ bijekció, amelyre $\forall f, g \in S_1 f >_t g \iff \varphi(f) >_t \varphi(g)$, ahol a $>_t$ reláció a következőképpen van definiálva: $f >_t g \iff \exists h \in S_1 [gh = g, (k \in S_1, fk = 0 \Rightarrow hk = 0)]$. A definíció motivációja: a $C(X)$ multiplikatív félcsoportok esetén ($X T_{3\frac{1}{2}}$ tér) a kerek zárójelben levő implikáció az $\overline{X \setminus f^{-1}(0)} \supset \overline{X \setminus h^{-1}(0)}$ tartalmazással ekvivalens, így $f >_t g \iff [\overline{X \setminus g^{-1}(0)} \text{ és } \text{int } Z(f) \text{ folytonos függvénnyel elválaszthatók}]$. Ha S_1, S_2 *gyengén szakaszszerű topologikus félcsoportok* (ez a szakaszszerű topologikus félcsoportok fogalmának egy általánosítása), és X_1, X_2 kompakt T_2 terek, akkor $C(X_1, S_1)$ és $C(X_2, S_2)$ t -izomorfiája maga után vonja X_1 és X_2 homeomorfiáját. Az analóg állítás igaz X_i lokálisan kompakt, nem kompakt T_2 terek, S_i gyengén szakaszszerű félcsoportok, és a $C_\infty(X_i, S_i)$ félcsoportok esetén. A [82]-ben bizonyított tétel egy variánsát bizonyítja: ha X_1, X_2 reálkompakt, S_1, S_2 egy, a [82]-beli félcsoportosztály által nem tartalmazott félcsoportosztályban van, és $C(X_1, S_1), C(X_2, S_2)$ izomorf, akkor X_1, X_2 homeomorf.

[93]-ban áttekintést ad a fenti témaköréről, és teljessé teszi a (0-elemes) félcsoportokra a fenti d -, u - t -izomorfia tulajdonságok kapcsolatának vizsgálatát: ezen tulajdonságok egyikéből sem következik egyetlen másikuk sem.

7. Topologikus terek

[60]-ban és [112]-ben topologikus terek úgynevezett hiperbővítéseit vizsgálja. Ezek definíciója előtt célszerű lesz felidézni egy $X T_{3\frac{1}{2}}$ tér βX Stone–Čech kompakti-

fikációjának egy konstrukcióját. Legyen $\mathcal{Z}(X) = \{f^{-1}(0) | f: X \rightarrow \mathbb{R}\}$ az X zéró-halmazainak rendszere. Ekkor βX pontjai azonosíthatók az \mathcal{F} z -ultraszűrőkkel, azaz maximális szűrőkkel $\mathcal{Z}(X)$ -ben, és egy zárt bázis βX -ben $\{\{\mathcal{F} \in \beta X | \mathcal{F} \ni Z\} | Z \in \mathcal{Z}(X)\}$. Itt egy $x \in X$ pontnak megfelel a $\{Z \in \mathcal{Z}(X) | Z \ni x\}$ ultraszűrő, és ez adja X -nek βX -be való beágyazását. Ezzel analóg konstrukció egy X T_1 -tér wX Wallman kompaktifikációja. Itt az összes zárt halmaz $\mathcal{F}(X)$ rendszerét kell tekinteni, a fenti $\mathcal{Z}(X)$ helyett, és ezekből maximális szűrőket, amelyek wX pontjai lesznek. Egy zárt bázis a fentivel analóg módon $\{\{\mathcal{F} \in wX | \mathcal{F} \ni F\} | F \in \mathcal{F}(X)\}$, és az $X \hookrightarrow wX$ beágyazás is a fentivel analóg módon történik. A wX tér általában csak a T_1 axiómát teljesíti.

A fentieket két irányban is tovább általánosítva, legyen \mathcal{S} az X térnek szubbázisa, $\mathcal{S} \ni \emptyset, X, \mathcal{T} = \{X \setminus S | S \in \mathcal{S}\}$ és $\mathcal{V} = \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$. Filterek helyett most ú.n. \mathcal{V} -szitákat tekint, azaz olyan $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ halmazrendszereket, amelyekre $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, és $A \in \mathcal{A}, V \in \mathcal{V}, A \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{A}$. Az $x \in X$ pontokhoz hozzárendelhetők a $\{V \in \mathcal{V} | V \ni x\}$ maximális \mathcal{V} -sziták, amelyeket triviálisaknak nevez. Legyen az $(X, \mathcal{S})^h$ halmaz az X halmaznak és az összes nemtriviális maximális \mathcal{V} -szita halmazának uniója. Ezen egy nyílt szubbázis legyen $\{\{\mathcal{H} \in (X, \mathcal{S})^h | S \in \mathcal{H}\} | S \in \mathcal{S}\}$. Az így kapott $(X, \mathcal{S})^h$ tér az X térnek \mathcal{S} szubbázisához tartozó hiperbővítése. $(X, \mathcal{S})^h$ általában csak szupertere X -nek (azaz X neki altere), de nem bővítés, azaz X nem sűrű. Vizsgálja $(X, \mathcal{S})^h$ -nak különféle, X -et tartalmazó altereit is, amelyek úgy állnak elő, hogy X -hez csak bizonyos tulajdonságú nemtriviális \mathcal{V} -szitákat vesz hozzá. Ez a tulajdonság lehet pl.: \mathcal{H} centrált, vagy \mathcal{H} \mathcal{T} -szitából, ill. \mathcal{S} -szitából származik (azaz $\forall A \in \mathcal{H} \exists T \in \mathcal{T} \cap \mathcal{H}, T \subset A$, ill. $\exists S \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}, S \subset A$). Bizonyos vizsgált alterekben tekinti X lezárását is. A fő célja: a fenti szuperterek közül bizonyosakat jellemezni, ill. a tér és bizonyos fenti szuperterek közötti összes szuperteret jellemezni. Az esetek jó részében fel van téve az \mathcal{S} szubbázisról, hogy $S \in \mathcal{S} \Rightarrow X \setminus \bar{S} \in \mathcal{S}$. Pl. ezen pótlólagos feltevés mellett X -nek Y lezárása $(X, \mathcal{S})^h$ -nak azon alterében, amely X -ből és a torlódáspont nélküli \mathcal{H} \mathcal{S} -szitákból származó \mathcal{V} -szitákból áll (azaz $\cap \{\bar{H} | H \in \mathcal{H}\} = \emptyset$), így jellemezhető: $y \in Y \setminus X \Rightarrow \{y\}$ zárt, $\{\bar{T} | T \in \mathcal{T}\}$ zárt szubbázis Y -ban, $V_1, V_2 \in \mathcal{V}, V_1 \cap V_2 = \emptyset \Rightarrow \bar{V}_1 \cap \bar{V}_2 \subset X$ (a lezárások természetesen Y -ban értve), és Y majdnem kompakt, azaz minden nyílt fedésének van véges része, amelynek uniója sűrű Y -ban.

[73]-ban és [75]-ben Baire terek speciális osztályaival foglalkozik. (Meggjegyezzük, hogy a trieszti konferenciakötetben megjelent [73] tulajdonképpen a [75] könyv rövid, bizonyítások nélküli kivonata.) Először is felidézzük a Baire-féle kategóriátételt. Ha X teljes metrikus tér, vagy lokálisan kompakt T_2 tér, és A benne első kategóriájú halmaz (azaz megszámlálhatóan sok sehohsem sűrű halmaz uniója), akkor \bar{A} nem tartalmaz nem üres nyílt halmazt X -ben. Egy X topologikus tér Baire-tér, ha rá érvényes a fenti Baire-kategóriátétel. A Baire terek osztálya nem zárt szorzásra: van X Baire-tér, amelyre X^2 nem Baire-tér. Mindamellet teljes metrikus tereknek, vagy lokálisan kompakt T_2 tereknek tetszőleges szorzatai Baire-terek, anélkül, hogy általában (teljesen) metrizablek vagy lokálisan kompakt T_2 terek lennének. Ez

motiválja Baire-terek olyan részosztályainak definiálását, amelyek egyrészt tartalmazzák a teljes metrikus és a lokálisan kompakt T_2 tereket, másrészt pedig zártak tetszőleges szorzatra. Ezt a feladatot oldja meg az ú.n. $\alpha\beta\gamma\delta$ -kompakt terek bevezetésével, amely terek osztálya az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ választásának többségére zárt a szorzatra, és a többi esetben is zárt a szorzatra a reguláris terek körében. Itt $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bizonyos jelek, amelyek véges sok féle értéket vehetnek fel, az összes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ -sorozatok száma 88. Az így adódó térosztályoknak bizonyos tulajdonságai elég hasonlóak.

Először megjegyezzük, hogy a teljes metrikus és a lokálisan kompakt T_2 terek egy közös általánosítása az ú.n. Čech-teljes terek osztálya. Egy X $T_{3\frac{1}{2}}$ tér Čech-teljes, ha valamely (ekvivalensen: minden) T_2 kompaktifikációjában G_δ részhalmaz. Ez azzal ekvivalens, hogy létezik nyílt fedéseknek egy $\{G_n\}$ sorozata, amelyre, ha \mathcal{A} centrált rendszer és $\forall n \exists A_n \in \mathcal{A}, \exists G_n \in G_n, A_n \subset G_n$, akkor \mathcal{A} -nak van torlódáspontja (azaz $\cap \{\bar{A} | A \in \mathcal{A}\} \neq \emptyset$). Egy X Čech-teljes térre legyen $\mathcal{B}_n = \{B_n \subset X | B_n \neq \emptyset \text{ nyílt}, \exists G_n \in G_n, B_n \subset G_n\}$, ami X -nek bázisa. Ekkor speciálisan minden $\{B_n\}$ centrált rendszernek, ahol $B_n \in \mathcal{B}_n$, van torlódási pontja. Egy ilyen tulajdonságú $\{B_n\}$ bázissorozattal rendelkező teret nevez gyengén gq -kokompaktnak. (α =gyengén, $\beta = g, \gamma = q, \delta = \text{ko}$).

Az összes definiált $\alpha\beta\gamma\delta$ -kompaktság definíciójától itt eltekintünk. Csak megjegyezzük, hogy ezek egymással többé-kevésbé analógak, és megadjuk a (T_3 esetben) legerősebbnek ($\emptyset r q$ -kokompaktság) és a leggyengébbnek (enyhén $\emptyset p$ -szubkompaktnak) a definícióját. X $\emptyset r q$ -kokompakt, ha van \mathcal{B} bázisa, amelyre, ha \mathcal{A} centrált rendszer és $\mathcal{A} \subset \{\bar{B} | B \in \mathcal{B}\}$, akkor \mathcal{A} -nak van torlódási pontja. X enyhén $\emptyset p$ -szubkompakt, ha van pszeudobázisainak egy $\{P_n\}$ sorozata, amelyre, ha $P_n \in \mathcal{P}_n$, és $\emptyset \neq \bar{P}_{n+1} \subset \text{int } P_n$, akkor $\{P_n\}$ -nek van torlódási pontja. Egy \mathcal{P} halmazrendszer pszeudobázis, ha $P \in \mathcal{P} \Rightarrow \text{int } P \neq \emptyset$, és $\emptyset \neq G \subset X \text{ nyílt} \Rightarrow \exists P \in \mathcal{P}, P \subset G$. Az így adódó $\alpha\beta\gamma\delta$ -kompaktsági tulajdonságok közül többet már, különböző neveken, vizsgáltak.

Fennáll: X lokálisan kompakt T_2 vagy teljes metrikus tér $\Rightarrow X \emptyset r q$ -kokompakt (a második esetben ez Aarts–de Groot–McDowell tétele), X enyhén $\emptyset p$ -szubkompakt és $T_3 \Rightarrow X$ Baire-tér. Vizsgálja a különböző $\alpha\beta\gamma\delta$ -kompaktsági tulajdonságok egymáshoz való kapcsolatát, bebizonyítja a fent már említett szorzattételt. Vizsgálja ezen tulajdonságok öröklődését; pl. T_3 terek esetén ezek nyílt altérre öröklődnek, és a T_3 esetben egyesek sűrű G_δ alterekre is öröklődnek. Fordítva, ha egy X T_3 -térnek van nyílt fedése $\alpha\beta\gamma\delta$ -kompakt halmazokból, akkor az $\alpha\beta\gamma\delta$ -kompaktsági tulajdonságok többsége esetén X ugyanolyan tulajdonságú.

[85]-ben és [104]-ben egy-egy speciális térosztályt vizsgál. [85] vizsgálatának tárgya az ú.n. T_1 -zárt terek. Ezek definíciója előtt idézzük fel a következőket. Ha X kompakt T_2 tér, akkor X minden öt tartalmazó Y T_2 térben zárt, vagy, ami ezzel ekvivalens, X -nek nincs Y valódi T_2 bővítése (azaz $X \subsetneq Y, \bar{X} = Y$). Egy X T_2 teret H -zártnak mondunk, ha teljesül rá a fenti két ekvivalens állítás. Ezek nem feltétlenül kompakt T_2 terek. Legyen pl. N egy megszámlálható diszkrét tér, βN ennek Stone–Čech kompaktifikációja, és definiáljuk ezen egy, a szokásosnál

finomabb topológiát a következőképpen. Egy $n \in N$ pont legyen izolált, és egy $\mathcal{F} \in \beta N \setminus N$ szabad ultraszűrő környezetbázisa legyen $\{\{\mathcal{F}\} \cup F \mid F \in \mathcal{F}\}$. Így egy nem kompakt, H -zárt T_2 teret kapunk.

Tetszőleges X topologikus térre a H -zárttság definícióját Császár Klára a következőképpen terjesztette ki. X -nek egy Y bővítését T_2 -redukálnak nevezzük, ha $x \in Y$, $y \in Y \setminus X$, $x \neq y$ esetén x -nek és y -nak vannak diszjunkt környezeteik. Egy X topologikus tér H -zárt, ha nincs valódi T_2 -redukált bővítése. Analóg módon, X -nek egy Y bővítése T_1 -redukált, ha $x \in Y$, $y \in Y \setminus X$, $x \neq y$ esetén x és y bármelyikének van a másikat nem tartalmazó környezete. (A T_2 -, ill. T_1 -redukáltság szemléletes megfogalmazása: a T_2 , ill. T_1 tulajdonság az X által megengedett „maximális lehetséges mértékben” teljesül Y -on.) Egy X topologikus tér T_1 -zárt, ha nincs valódi T_1 -redukált bővítése. X T_1 -zárt pontosan akkor, ha benne minden \mathcal{F} maximális nyílt szűrő fix, azaz $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Ámbár az ilyen terek elég speciálisak, de minden topologikus tér beágyazható (zárt) altérként egy T_1 -zárt térbe. Viszont T_1 -zárt bővítése egy X topologikus térnek pontosan akkor van, ha benne csak véges sok maximális nyílt szűrő van; ha ez a feltétel teljesül, X -nek egy T_1 -zárt bővítése a szabad (azaz nem fix) maximális nyílt szűrők segítségével konstruálható. Ez a konstrukció egy „minimális” T_1 -zárt bővítést szolgáltat: X bármely másik T_1 -zárt bővítésének altere.

[104] vizsgálatának tárgya a Thompson által bevezetett ún. S -zárt terek. Az X topologikus tér S -zárt, ha minden félig nyílt halmazokból való fedésének van véges részrendszere, amelynek elemeinek lezártjai lefedik X -et. Egy $A \subset X$ halmaz félig nyílt, ha létezik G nyílt halmaz, amelyre $G \subset A \subset \overline{G}$. Az S -zárttság egy kompaktság jellegű tulajdonság, de még a T_2 esetben sem következik az S -zárttság és kompaktság egyikéből sem a másikuk. Sőt, egy S -zárt T_2 -tér extrémálisan széteső, azaz benne minden nyílt halmaz lezárása nyílt. Egy X topologikus tér S -zárt pontosan akkor, ha benne minden \mathcal{F} maximális reguláris-nyílt szűrő fix, azaz $\cap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Egy $G \subset X$ halmaz reguláris-nyílt, ha $G = \text{int } \overline{G}$. Megjegyezzük, hogy két reguláris-nyílt halmaz metszete szintén reguláris-nyílt, ezért beszélhetünk reguláris-nyílt szűrőkről. Bármely topologikus térnek van S -zárt bővítése, amely a szabad maximális reguláris-nyílt szűrők segítségével konstruálható meg. Másrészt, egy X topologikus térnek pontosan akkor van S -zárt T_2 (és így extrémálisan széteső) bővítése, ha X extrémálisan széteső T_2 tér.

[102]-ben és [107]-ben topologikus terek abszolútumairól van szó. Mielőtt ezt definiálnánk, felidézzük $T_{3\frac{1}{2}}$ terekre a Stone-Čech kompaktifikáció egy jellemző tulajdonságát. Ha X $T_{3\frac{1}{2}}$ tér, akkor X előállítható, mint egy βX kompakt T_2 térnek altere, $i: X \hookrightarrow \beta X$ beágyazással, és ennek a beágyazásnak univerzalitási tulajdonsága van az összes kompakt T_2 terekbe vezető összes leképezésre: Ha Y kompakt T_2 tér, és $f: X \rightarrow Y$, akkor létezik egyetlen $g: \beta X \rightarrow Y$ leképezés, amelyre $f = g|X = gi$. Ez az univerzalitási tulajdonság karakterizálja is az $i: X \hookrightarrow \beta X$ leképezést (beágyazást), aminek következtében $\beta(\beta X) = \beta X$, azaz a β operáció idempotens. Ha

$X, Y T_{3\frac{1}{2}}$ tér, $i: X \hookrightarrow \beta X$, $j: Y \hookrightarrow \beta Y$ beágyazásokkal, akkor minden $f: X \rightarrow Y$ leképezésnek van $g: \beta X \rightarrow \beta Y$ kiterjesztése, azaz $g|_X = gi = jf: X \rightarrow \beta Y$.

Ennek egy duális változata, hogy X nem altereként, hanem kvóciens-tereként van előállítva bizonyos speciális térosztályból való alkalmas térnek, és lehetőleg a fenti univerzalitási tulajdonság duálisa is teljesüljön, a térosztály egy tetszőleges teréből az X térbe vezető lehetőleg általános leképezés esetén (ez nem fog maradtalanul megvalósulni).

Ha most csak kompakt T_2 X terekre szorítkozunk, egy X kompakt T_2 tér előállítható βX_d folytonos, szürjektív képeként (X_d : az X halmaz, diszkrét topológiával ellátva), azaz van egy $\beta X_d \rightarrow X$ kvóciens leképezés. Viszont az $X \mapsto \beta X_d$ hozzárendelés nem idempotens. $(\beta[(\beta X_d)_d] \neq \beta X_d)$, így βX_d -t X -hez „közelebbi” ösképpel kell helyettesíteni. Erre az ad módot, hogy a βX_d alakú terek extrémálisan szétesők (azaz bennük nyílt halmaz lezárása nyílt), és így kereshetünk általánosabban egy $P \rightarrow X$ szürjektív leképezést, azaz ekvivalens módon kvóciens leképezést, ahol P extrémálisan széteső kompakt T_2 tér. (Megjegyezzük, hogy, algebrai analógiával élve, βX_d a szabad algebrának felel meg, P a projektív algebrának — azaz a szabad algebrák olyan részalgebráinak, amelyekre van olyan leképezése a szabad algebrának, amely az illető részalgebrán identikus, és amelynek képtere az illető részalgebra —, és a keresett $P \rightarrow X$ leképezés a projektív feloldásnak.)

Ha most ki akarunk lépni a kompakt T_2 terek köréből, akkor nem tekinthetünk tetszőleges folytonos leképezéseket, hanem időnként csak *perfekt leképezéseket* (azaz $f: X \rightarrow Y$ folytonos, *zárt* — azaz $F \subset X$ zárt $\Rightarrow f(F) \subset Y$ zárt —, és $y \in Y \Rightarrow f^{-1}(y)$ kompakt; kompakt T_2 terek között minden folytonos leképezés perfekt). Viszont továbbra is $P \rightarrow X$ alakú kvóciens leképezést kerestünk, ahol P extrémálisan széteső. (Megjegyezzük, hogy, legalábbis a T_3 terek körében, az extrémálisan széteső terek egy olyan tulajdonsággal karakterizálhatók, amely a projektív algebrák egy karakterizációjával analóg.)

A fenti heurisztika alapján először Gleason kompakt T_2 terek abszolútumait definiálta, majd Ponomarjov tetszőleges T_2 terekre, és Uljanov tetszőleges topologikus terekre terjesztette ki az abszolútum definícióját. Valójában T_3 terekre mennek a bizonyítások könnyebben, már T_2 tereknél igazából két fajta abszolútum definiálható.

Az egyik, amelyet *Ponomarjov-abszolútumnak* hívunk és PX -szel jelölünk (X topologikus tér esetén), extrémálisan széteső, és van egy $p_X: PX \rightarrow X$ leképezés, amely perfekt, *irreducibilis* (azaz szürjektív, de $F \subsetneq PX$ zárt halmazra $p_X(F) \subsetneq X$; így a szürjektivitás és a zárttság miatt p_X kvóciens leképezés), és *szeparált* (azaz $x_1, x_2 \in PX$, $x_1 \neq x_2$, $p_X(x_1) = p_X(x_2) \Rightarrow x_1, x_2$ -nek vannak diszjunkt környezeteik PX -ben). Továbbá, a fenti tulajdonságok karakterizálják PX -et; speciálisan X extrémálisan széteső esetben $p_X: PX \rightarrow X$ homeomorfizmus.

A másik abszolútum definíciója előtt definiáljuk a ϑ -folytonos leképezéseket. Ez a folytonosság fogalmának gyengítése: X és Y topologikus terek között $f: X \rightarrow Y$ halmazleképezés ϑ -folytonos, ha $f(x) \in V$, $V \subset Y$ nyílt esetén van $x \in U$,

$U \subset X$ nyílt, amelyre $f(\overline{U}) \subset \overline{V}$. Ha Y reguláris, a ϑ -folytonosság ekvivalens a folytonossággal. Egy $f: X \rightarrow Y$ halmazleképezés ϑ -perfekt, ha ϑ -folytonos, zárt, és $y \in Y \Rightarrow f^{-1}(y)$ kompakt.

Ha X reguláris tér, akkor PX is reguláris. Ekkor PX , mint reguláris extrémálisan széteső tér, egyszersemind sokkal jobb szétválasztási axiómát is teljesít: teljesen reguláris, sőt van bázisa zárt-nyílt halmazokból. Ha X nem reguláris topologikus tér, akkor PX sem reguláris. Ha mégis reguláris extrémálisan széteső tereket szeretnénk PX helyett, akkor a p_X leképezés folytonosságát kell gyengítenünk. Így kapjuk az *Iliadis-abszolútum* fogalmát, amelyet EX -szel jelöltünk. Ez reguláris, extrémálisan széteső, és van egy $e_X: EX \rightarrow X$ leképezés, amely ϑ -perfekt, irreducibilis és szeparált. Továbbá, a felsorolt tulajdonságok karakterizálják EX -et; speciálisan X reguláris, extrémálisan széteső esetben $e_X: EX \rightarrow X$ homeomorfizmus. Iliadis EX -et csak $X T_2$ tér esetén definiálta és vizsgálta.

[102]-ben EX , és EX -nek PX -szel való kapcsolata általános topologikus tér esetében van vizsgálva.

Most rátérünk PX és EX , valamint $p_X: PX \rightarrow X$ és $e_X: EX \rightarrow X$ definíciójára. Legyen egy X topologikus tér esetén UX a maximális nyílt szűrők halmaza. Ezen egy topológia bázisa $\{\{\mathcal{F} \in UX | G \in \mathcal{F}\} | G \subset X \text{ nyílt}\}$. Az UX tér kompakt T_2 és extrémálisan széteső. Tekintjük az $X \times UX$ szorzatteret, és abban a $PX = \{(x, \mathcal{F}) | \mathcal{F} \rightarrow x \text{ } X\text{-ben}\}$ alteret, és ezen definiáljuk a $p_X: PX \rightarrow X$ folytonos leképezést a $p_X(x, \mathcal{F}) = x$ formulával. Ha X helyett IX -et vesszük (azaz X alaphalmazán az indiszkrét topológiát), és tekintjük az $IX \times UX$ szorzatterben a fentivel analóg $EX = \{(x, \mathcal{F}) | \mathcal{F} \rightarrow x \text{ } X\text{-ben}\}$ alteret, akkor ezen az $e_X: EX \rightarrow X$ ϑ -folytonos leképezést a fentivel analóg módon az $e_X(x, \mathcal{F}) = x$ formulával definiáljuk. Így PX és EX ugyanazon az alaphalmazon definiált topológiák, és PX finomabb EX -nél.

Ha X, Y topologikus terek, és $f: X \rightarrow Y$ ϑ -folytonos, zárt, irreducibilis, akkor létezik egyetlen $g: EX \rightarrow EY$ folytonos leképezés, amely az f -nek „felemelése”, azaz amelyre $e_Y g = f e_X$. Ha X reguláris és extrémálisan széteső, és $f: X \rightarrow Y$ ϑ -folytonos, zárt és irreducibilis, akkor létezik egyetlen $g: X \rightarrow EY$ folytonos leképezés, amelyre $f = e_Y g$. (Ez az univerzalitási tulajdonság duálisának egy „gyengített” változata.)

Egy X topologikus térben a reguláris-nyílt halmazok (azaz amelyekre $A = \text{int } \overline{A}$) egy, az X topológiájánál durvább topológia bázisát alkotják, amelyet X szemiregularizációjának hívunk. Egy X topologikus tér esetén EX a PX tér szemiregularizációja.

[107]-ben a Ponomarjov-féle és az Iliadis-féle abszolútumok egy közös általánosítását vizsgálja. Egy Y tér egy X topologikus térnek *abszolútuma*, ha Y extrémálisan széteső, és van egy $k_{YX}: Y \rightarrow X$ ϑ -perfekt, irreducibilis, szeparált leképezés. (Ha k_{YX} folytonos, a Ponomarjov-féle abszolútumot kapjuk, ha Y reguláris, az Iliadis abszolútumot.) Egy X topologikus tér összes abszolútumai megkaphatók

(izomorfia erejéig) a következő módon: veszünk a PX és EX terek közös alaphalmazán egy Y topológiát, amelyik PX -nél durvább és EX -nél finomabb (PX finomabb EX -nél). Továbbá $k_{YX}(x, \mathcal{F}) = x$.

Ezután definiál egy RX -szel jelölt abszolútumot, $r_X: RX \rightarrow X$ ϑ -perfekt, irreducibilis, szeparált leképezéssel. Az RX tér, a [102]-beli jelölésekkel, az $r_X \times UX$ szorzattérnek $RX = \{(x, \mathcal{F}) | \mathcal{F} \rightarrow x \text{ } X\text{-ben}\}$ altere, és $r_X(x, \mathcal{F}) = x$. Itt r_X az X tér szemiregularizációja. Az X, Y topologikus terek között egy $f: X \rightarrow Y$ halmazleképezés *majdnem folytonos*, ha minden $G \subset Y$ reguláris-nyílt halmazra $f^{-1}(G)$ nyílt. Fennáll: f folytonos $\Rightarrow f$ majdnem folytonos $\Rightarrow f$ ϑ -folytonos. Egy X topologikus tér azon Y abszolútumai, amelyekre a definícióban szereplő k_{YX} leképezés majdnem folytonos, (izomorfia erejéig) pontosan azok az Y topológiák PX és EX közös alaphalmazán, amelyek PX -nél durvábbak és RX -nél finomabbak.

[121]-ben az irodalomban korábban tárgyalt különféle általánosított nyílt halmazoknak egységes tárgyalását adja. Az általa használt definíció a következő. Legyen egy X halmazra $\gamma: \exp X \rightarrow \exp X$ monoton leképezés ($\exp X$: az X hatványhalmaza), azaz $A \subset B \Rightarrow \gamma(A) \subset \gamma(B)$; ezen leképezések halmazát Γ -val jelöli. Egy A halmaz γ -nyílt, ha $A \subset \gamma A$. Példák egy X topologikus térben a $\gamma = \text{int}$ esetén kívül (amelyre int -nyílt \iff nyílt) a $\gamma = \text{int cl}$, $\text{cl } f$, $f \text{ cl } f$, $\text{cl } f \text{ cl}$ leképezések (amelyekre $\text{nyílt} \Rightarrow \gamma\text{-nyílt}$ — így ezekre a γ -nyíltság a nyíltság általánosítása — ahol cl most a lezárást jelöli), amelyeknek megfelelő γ -nyílt halmazok mind voltak már korábban vizsgálva, különféle elnevezések alatt. További feltevések a γ leképezésről, amelyek közül bizonyosakat különféle állításoknál feltesz: $\gamma(\emptyset) = \emptyset$, $\gamma(X) = X$, $\gamma^2 = \gamma$, $A \subset \gamma(A)$, $A \supset \gamma(A)$, $\gamma^2(A) \subset \gamma(A)$, ill. ha X topologikus tér, $G \subset X$ nyílt, $A \subset X$ tetszőleges, akkor $G \cap \gamma(A) \subset \gamma(G \cap A)$ (ami $\gamma = \text{cl}$, int esetén teljesül).

Vizsgálja több Γ -beli γ_i leképezés kompozícióját, és azt, hogy a fenti tulajdonságok milyen feltételek mellett teljesülnek a kompozícióra, ill. hogy a különféle kompozíciókra a megfelelő γ -nyíltsági tulajdonságok között milyen kapcsolat van. Bizonyos γ' , γ'' kompozíciókra alkalmas feltételek mellett egy γ' -nyílt és egy γ'' -nyílt halmaz metszetének alkalmas γ''' -re γ''' -nyíltságát bizonyítja. γ -nyílt halmazok tetszőleges uniója γ -nyílt, és bizonyos feltételek mellett a γ -nyílt halmazok topológiát alkotnak.

Egy A halmaz γ -reguláris, ha $A = \gamma A$; ennek speciális esetei a nyílt és a zárt halmazok mellett pl. a reguláris-nyílt és a reguláris-zárt halmazok (azaz $A = \text{int cl } A$, ill. $A = \text{cl int } A$). Vizsgálja a különféle γ' kompozíciókra a γ' -regularitási tulajdonságok kapcsolatát, ill. két halmaz metszetének γ' -regularitását.

Legyen $X_0 \subset X$, $\gamma \in \Gamma$. Ekkor γ indukál egy $\gamma_0: \exp X_0 \rightarrow \exp X_0$ monoton leképezést, $\gamma_0 A = \gamma(A) \cap X_0$ ($\gamma = \text{cl}$ esetén γ_0 az altérbeli lezárás). Vizsgál γ -ból, ill. γ_0 -ból, valamint egyéb, X -en, ill. X_0 -n értelmezett γ_i , γ_0 leképezésekből származó kompozíciókat. Bizonyos ilyen γ' , γ'_0 kompozíciókra, alkalmas feltételek mellett A γ' -nyíltségéből következtet $A \cap X_0$ γ'_0 -nyíltségára, ill. $A \subset X_0$, A γ'_0 -nyílt, X_0 γ' -nyílt esetében következtet A γ' -nyíltségára.

[125]-ben egy $A \subset X$ halmaz által tartalmazott maximális γ -nyílt halmazt vizsgálja; ilyen létezik, mert γ -nyílt halmazok tetszőleges uniója γ -nyílt. Belátja, hogy bizonyos feltételek mellett ez megegyezik $A \cap \gamma(A)$ -val. A feltételek teljesülnek pl. egy X topologikus térre $\gamma = \text{cl int, int cl, int cl int, cl int cl}$ esetén.

8. Kváziuniform terek

Felidézük a 2.§-ből, hogy egy kváziuniform tér egy (X, \mathcal{U}) pár, ahol X halmaz, \mathcal{U} $X \times X$ -en filter, amelyre

$$(U1) \quad \forall U \in \mathcal{U} \quad U \supset \Delta = \{(x, x) | x \in X\},$$

$$(U3) \quad U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{U}, U_1^2 \subset U.$$

(Jelölések magyarázatát és példákat l. a 2.§-ban.) Tehát az uniformitás szokásos axiómái közül a szimmetria van elhagyva. Egy $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$, kváziuniform terek közötti leképezés egyenletesen folytonos, ha $V \in \mathcal{V} \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$. Egy (X, \mathcal{U}) kváziuniform tér indukál egy topológiát, egy $x \in X$ pont környezetbázisa $\{Ux | U \in \mathcal{U}\}$, ahol $Ux = \{x' | (x, x') \in U\}$. Pontosabban, a szimmetria hiánya miatt, az X halmazon topológiák egy rendezett párját is indukálja (amit *bitopologikus térnek* nevezünk), az első topológia a fenti, a másodikra egy $x \in X$ pont környezetbázisa $\{U^{-1}x | U \in \mathcal{U}\}$, ahol $U^{-1} = \{(x_1, x_2) | (x_2, x_1) \in U\}$.

A kváziuniform terek elmélete részben az uniform terekével analóg, részben attól erősen eltér. Pontosabban a „kétoldali” kérdések egy része megy hasonlóan, mint az uniform tereknél.

Pl. az uniformitások indukálhatók pszeudometrikákkal, azaz létezik egy $\{d_\alpha(x, y)\}$ pszeudometrika-család X -en (a *pszeudometrika* a metrika szokásos axiómáit elégíti ki, kivéve $d(x, y) = 0 \iff x = y$ -t, ehelyett csak $d(x, x) = 0$ van feltéve), amelyre egyrészt $\forall \alpha \forall \delta > 0 \{(x, y) | d_\alpha(x, y) < \delta\} \in \mathcal{U}$, másrészt $\forall U \in \mathcal{U} \exists \alpha, \exists \delta > 0, U \supset \{(x, y) | d_\alpha(x, y) < \delta\}$. Kváziuniformitásokra ennek szószerinti megfelelője igaz, d_α pszeudokvázimetrikákkal (*pszeudokvázimetrika* a pszeudometrika axiómáit elégíti ki, kivéve a szimmetriát, azaz $d(x, x) = 0, d(x, y) \geq 0$, és $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$).

Egy másik példa: az uniformitásokkal indukálható topologikus terek pontosan a teljesen reguláris terek. Kváziuniformitással indukált topológiáknak semmi jó tulajdonságuk nincs; minden topológia indukálható kváziuniformitással. Mivel minden T_0 tér beágyazható az S Sierpiński tér alkalmas hatványába ($S = \{0, 1\}$), és a nyílt halmazok $\emptyset, S, \{0\}$), elég belátni, hogy S topológiája indukálható kváziuniformitással; ez egy triviális esetvégnézéssel adódik. Az X topologikus térben ebből adódik az úgynevezett *Pervin-kváziuniformitás*, \mathcal{U} , amelynek szubbázisa $\{(G \times G) \cup ((X \setminus G) \times X) | G \subset X \text{ nyílt}\}$ (azaz $U \in \mathcal{U} \iff \exists n, \exists U_1, \dots, U_n$ a

szubbázisból, $\bigcap^n U_i \subset U$). Viszont ha az indukált bitopológiát tekintjük, az teljesen reguláris lesz, és fordítva, minden teljesen reguláris bitopológia indukálható kváziuniformitással. (A *teljesen reguláris* (pairwise completely regular) *bitopológia* definícióját nem adjuk meg, az a topologikus terekre vonatkozó definícióból származik, miközben a nyílt halmaz szerepét módszeresen hol a T_1 -nyílt halmaz, hol a T_2 -nyílt halmaz veszi át, ahol (T_1, T_2) a bitopológia.)

A teljesség és teljes burok kérdése a (szeparált) uniformitásoknál könnyen kezelhetők. Kváziuniformitásokra a Cauchy filter definícióját az uniform esetből többféleképpen lehet átvinni, ennek megfelelően többféle teljességfogalom van, amelyek általában nem viselkednek annyira jól, mint az uniform esetben.

Császár Ákos kváziuniform terekkel foglalkozó dolgozataiban az „egyik oldalú” kérdésekkel foglalkozik, ezen belül többségükben a kváziuniform terek bővítéseivel. Ezért először az uniform terekre vonatkozó analóg eredményt ismertetjük.

Legyen (X, \mathcal{U}) uniform tér, amely a \mathcal{T} topológiát indukálja X -en. Legyen az (X, \mathcal{T}) topologikus térnek egy bővítése az (Y, \mathcal{T}') topologikus tér, azaz (X, \mathcal{T}) altere (Y, \mathcal{T}') -nek, és sűrű benne. Kérdés: mikor létezik \mathcal{U}' uniformitás Y -on, amely egyrészt a \mathcal{T}' topológiát indukálja Y -on, másrészt $\mathcal{U}'|_X := \{U'|X \ (= U' \cap (X \times X)) \mid U' \in \mathcal{U}'\} = \mathcal{U}$. (Ha ilyen van, az egyértelműen meghatározott, mivel $U' \in \mathcal{U}' \iff \exists U \in \mathcal{U}, \bar{U} \subset U'$, ahol a lezárás $Y \times Y$ -ban értendő.) Egy ilyen \mathcal{U}' uniformitást az $(\mathcal{U}, \mathcal{T}')$ párral *kompatibilis uniformitásnak* nevez.

Egy ilyen uniformitás létezése feltételének megadása előtt szükségünk van egy-két definícióra. Legyen az (X, \mathcal{T}) topologikus térnek egy bővítése az (Y, \mathcal{T}') topologikus tér. Ha $y \in Y \setminus X$, ennek $\mathcal{F}(y)$ *nyomszűrője* a környezetszűrőjének nyoma az X -en, azaz $\{B \cap X \mid B \subset Y, \text{int}_{\mathcal{T}'} B \ni y\}$.

Ha csak a nyomszűrők $\{\mathcal{F}(y) \mid y \in Y \setminus X\}$ rendszerét ismerjük (mint egy $Y \setminus X$ -ből az X -beli filterek halmazába való leképezést), ebből a \mathcal{T}' topológia nem konstruálható meg egyértelműen az Y halmazon. Adott nyomszűrőrendszerhez egy fenti \mathcal{T}' topológia Y -on pontosan akkor létezik, ha $\forall y \in Y \setminus X \ \forall A \in \mathcal{F}(y) \ \exists G \in \mathcal{F}(y), G \subset A, G$ nyílt. Ha ez a feltétel teljesül, akkor van az adott nyomszűrőrendszert szolgáltató bővítések között egy legdurvább, az ú.n. *szoros* (strict) bővítés, és egy legfinomabb, az ú.n. *laza* (loose, simple) bővítés. A szoros bővítés bázisa $\{s(G) \mid G \subset X \text{ nyílt}\}$, ahol $s(G) = \{y \in Y \mid G \in \mathcal{F}(y)\}$ (itt $y \in X$ esetén $\mathcal{F}(y)$ az y környezetszűrője X -ben), a laza bővítés bázisa $\{G \mid G \subset X \text{ nyílt}\} \cup \{\{y\} \cup G \mid y \in Y \setminus X, G \in \mathcal{F}(y), G \text{ nyílt}\}$. Ha az Y bővítés reguláris, akkor automatikusan szoros.

Egy \mathcal{F} szűrő egy (X, \mathcal{U}) (kvázi)uniform térben *kerek*, ha $F \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists F_1 \in \mathcal{F}, \exists U \in \mathcal{U}, U(F_1) := \{x' \mid \exists x \in F_1, (x, x') \in U\} \subset F$. Az $(\mathcal{U}, \mathcal{T}')$ párral kompatibilis \mathcal{U}' uniformitás létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy \mathcal{U} uniformitás legyen, (Y, \mathcal{T}') szoros bővítése legyen (X, \mathcal{T}) -nek, és $\forall y \in Y \setminus X$ az $\mathcal{F}(y)$ nyomszűrő kerek és Cauchy legyen.

Egy X Tyihonov tér *finom uniformitása* a legfinomabb \mathcal{U} uniformitás, amely X topológiáját indukálja, vagy (formálisan erősebben, de) ekvivalens módon, amelyből

bármely (Y, \mathcal{V}) uniform térbe vezető, (X) topológiája és a \mathcal{V} által indukált topológia között) folytonos leképezés egyenletesen folytonos. Ez minden X Tyihonov térre létezik. Domiatyval közös [71] cikkében ennek kváziuniform analógiát vizsgálja, egy X topologikus téren.

[76], [78], [79] témája a kváziuniformitások bővítése. Egy (X, \mathcal{U}) kváziuniformitás bővítése az (Y, \mathcal{U}') kváziuniformitás, ha $X \subset Y$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}'|X := \{U'|X\} | U' \in \mathcal{U}'\}$, és X sűrű Y -ban, az \mathcal{U}' által indukált topológiában.

Ha adva van egy (X, \mathcal{U}) kváziuniformitás, amely a T topológiát indukálja, és az (X, T) topologikus térnek (Y, T') bővítése, az (\mathcal{U}, T') párral kompatibilis kváziuniformitást keres: tehát egy (Y, \mathcal{U}') kváziuniformitást, amely által indukált topológia T' , és amelyre $\mathcal{U}'|X = \mathcal{U}$. Ha T' laza bővítés, ilyen kváziuniformitás létezésének szükséges és elégséges feltételét megadja. Ha T' szoros bővítés, részleges eredményeket nyer ugyanerre a kérdésre vonatkozólag.

Ha \mathcal{U}' -t speciális tulajdonságú kváziuniformitások között keresi — \mathcal{U}' egyenletesen szoros bővítése \mathcal{U} -nak (ami a topologikus terekre vonatkozó szoros bővítésnek „egyenletes” változata), vagy \mathcal{U}' egyenletesen reguláris (ami a topologikus terek regularitásának „egyenletes” változata) — akkor az ilyen tulajdonságú kompatibilis \mathcal{U}' létezésének szükséges és elégséges feltételét megadja. Ha $Y \setminus X$ véges, akkor az \mathcal{U}' egyenletesen reguláris bővítés egyértelmű is.

[77]-ben Matolcsy Kálmánnal közösen az utoljára ismertett cikkekben vizsgált problémának azt az analogonját vizsgálják, amikor a kváziuniformitásokat szintopogén struktúrákkal helyettesítik. Pontosabban, az (X, \mathcal{S}) és (Y, \mathcal{S}') szintopogén struktúrákra $\mathcal{S}'|X$ és \mathcal{S} ekvivalenciáját kívánják csak meg, azaz hogy az identikus leképezés $\mathcal{S}'|X \rightarrow \mathcal{S}$ és $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}'|X$ irányban szintopogén folytonos legyen (1. 4.§). Itt $\mathcal{S}'|X = \{(\langle |X \rangle \in \mathcal{S}')\}$, ahol $A, B \subset X$ -re $A(\langle |X \rangle)B \iff A \in [B \cup (Y \setminus X)]$. Továbbá az \mathcal{S}' által indukált topológiában $y \in Y \supset C$ esetén $y \in \text{int } C \iff \exists \langle \in \mathcal{S}'$, $\{y\} \in C$; ennek a topológiának kell T' -vel megegyeznie. Megadják az Y -on keregett \mathcal{S}' szintopogén struktúra létezésének szükséges és elégséges feltételét, és ha \mathcal{S}' -t különféle speciális tulajdonságú szintopogén struktúrák között keresik, akkor is megválaszolják ugyanezt a kérdést. Ha az uniformitások szimmetriatulajdonságának egy analogonja teljesül \mathcal{S}' -re, akkor (ekvivalencia erejéig) unicitás van \mathcal{S}' -re (mint fenn az uniform esetben).

[80]-ban ismét kváziuniform terek bővítéseivel foglalkozik. Egy X szeparált uniform tér teljes pontosan akkor, ha bármelyik, őt tartalmazó Y szeparált uniform térben zárt, az Y uniformitás által indukált topológiában. Ez egy „abszolút zártság” jellegű tulajdonság. Egy X kváziuniform tér H -teljes, ha zárt altér minden, őt tartalmazó Y kváziuniform térben, amely T_2 -redukált X -re nézve (azaz $x \in Y$, $y \in Y \setminus X$, $x \neq y$ esetén x -nek és y -nak vannak diszjunkt környezeteik), mindez az Y kváziuniformitás topológiájában értve. Karakterizálja a H -teljes kváziuniform tereket és belátja, hogy minden kváziuniformitásnak van H -teljes, T_2 -redukált bővítése. Sőt, az ilyen bővítések között (ezekből általában több van) van egy, amelyik a szeparált uniform terek teljes burka univerzalitási tulajdonságának (azaz, hogy X

szeparált uniform térre és Y teljes szeparált uniform térre bármely $f: X \rightarrow Y$ leképezés egyértelmű módon kiterjeszthető X teljes burkából Y -ba menő leképezéssé) egy gyengébb analogonjával rendelkezik. Bizonyos Cauchy jellegű tulajdonsággal rendelkező filterek segítségével definiált teljesség esetén megmutatja, hogy minden kváziuniform térnek van ilyen értelemben teljes bővítése, továbbá az ilyenek között van egy, amelyik a szeparált uniform terek teljes burka univerzalitási tulajdonságának egy gyengített változatával rendelkezik.

[81]-ben bevezeti a H -teljesség fogalmát a szintopogén terekre, a [80]-belivel analóg módon, és ezeket a szintopogén tereket karakterizálja. Tetszőleges szintopogén struktúrára létezik H -teljes, T_2 -redukált bővítés, sőt az ilyenek között van egy, amelyik a szeparált uniform terek teljes burka univerzalitási tulajdonságának egy gyengébb analogonjával rendelkezik.

[106]-ban filtereknek egy másik, Cauchy jellegű tulajdonságára alapozott teljességet, illetve teljes bővítést vizsgál. A vizsgált (X, \mathcal{U}) kváziuniform terek nem tetszőleges kváziuniform terek, hanem a fent definiált Pervin-féle kváziuniformitásoknak kissé általánosított variánsai (szubbázisuk $\{(G \times G) \cup ((X \setminus G) \times X) \mid G \in \mathcal{B}\}$, ahol $\mathcal{B} \ni \emptyset$, X egy bázis az X topologikus téren, amely véges unióra és véges metszetre zárt; ekkor az (X, \mathcal{U}) kváziuniformitás által indukált topológia az X topológiájával megegyezik). Egy ilyen kváziuniform térnek a vizsgált értelemben vett egyik teljes (szoros) bővítését egy bizonyos konstrukció kiadja, és ez a teljes bővítés ugyanilyen típusú kváziuniform tér, a bővítés topológiáján egy alkalmas, fenti tulajdonságú bázis segítségével definiálva. Az itt megkonstruált teljes bővítés topológiája kompakt, mégpedig az X topologikus térnek a \mathcal{B} bázisra vonatkozó ú.n. *Wallman-típusú kompaktifikációja*. (Ennek definíciójától eltekintünk, csak annyit jegyzünk meg, hogy ha X T_1 -tér és \mathcal{B} az összes nyílt halmazok rendszere, akkor ez az X topologikus térnek a 7.§-ban említett Wallman-kompaktifikációja.)

[111]-ben megint a [106]-ban vizsgált teljességfogalmat tekinti, és belátja, hogy tetszőleges X kváziuniform térnek van ilyen értelemben teljes Y bővítése (még hozzá olyan, hogy Y topológiája laza bővítése X topológiájának), és ezek között van olyan, amelyik a szeparált uniform terek teljes burka univerzalitási tulajdonságának egy gyengített változatával rendelkezik.

[124]-ben megint (X, \mathcal{U}) kváziuniformitások (Y, \mathcal{U}') bővítéseit vizsgálja. Korábban olyan kompatibilitási feltételek mellett keresett bővítést, hogy $\mathcal{U} = \mathcal{U}'|_X$ legyen, és az \mathcal{U}' által indukált topológia egy adott \mathcal{T}' topológia legyen az adott $Y \supset X$ halmazon. Most \mathcal{U}' -re más kompatibilitási feltételeket ír elő. Az $Y \supset X$ halmaz rögzítése mellett megkívánja, hogy \mathcal{U}' -nek legyen egy \mathcal{U}'_0 bázisa (azaz $U' \in \mathcal{U}' \iff \exists U'_0 \in \mathcal{U}'_0, U'_0 \subset U'$), amelyre a $\{U'_0 \cap (Y \times X) \mid U'_0 \in \mathcal{U}'_0\}$ halmazrendszer egy előre megadott Ψ halmazrendszerrel egyezzen meg. Ennek egy variánsa, amikor a fenti halmazrendszer helyett a $\{U'_0 \cap [(Y \times X) \cup (X \times Y)] \mid U'_0 \in \mathcal{U}'_0\}$ halmazrendszert tekinti, és megkívánja, hogy ez egy előre megadott Φ halmazrendszerrel egyezzen meg. A Φ halmazrendszerre vonatkozó kompatibilitási feltétel esetén megadja az \mathcal{U}' bővítés létezésének szükséges és elégséges feltételét, valamint

egyenletesen szoros \mathcal{U}' bővítés (ami a topologikus terekre vonatkozó szoros bővítésnek „egyenletes” változata) létezésének szükséges és elégséges feltételét. A Ψ halmazrendszerrel kapcsolatos kompatibilitási feltétel esetén az egyenletesen szoros bővítés esetén oldja meg az analóg feladatot. Mind a Φ , mind a Ψ halmazrendszerre vonatkozó kompatibilitási feltétel esetében az egyenletesen szoros bővítésre unicitás áll fenn.

9. Merotópiák és ezekkel kapcsolatos egyéb struktúrák

Császár Ákos további 23 dolgozata általánosabb folytonossági struktúrákkal foglalkozik. Itt a cikkek részletes ismertetése helyett célszerűbb lesz a témakör általános bemutatása, és a vizsgált struktúrafajták fontosságának megindokolása.

Történetileg az első részletesen kidolgozott folytonossági struktúra a topologikus tereké, a második az uniform tereké. Kétségtelenül a topológia alkalmazásaiban ezeknek van a legfontosabb szerepük, és az összes ilyen struktúrafajták között a topologikus terek elmélete a leginkább kidolgozott. Más szempontból viszont a már nagyszámú vizsgált struktúrafajta között eleve nehéz eldönteni, melyik milyen szempontból természetesebb, és mely struktúrafajtáknak vannak jobb tulajdonságaik.

Hogy nem csak a klasszikus folytonossági struktúrák vizsgálata indokolt, azt mutatja az a tény is, hogy pl. az analízisben is többféle konvergenciafogalom ismeretes, amelyek nem származtathatók topológiából. Pl. a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett mérhető valós függvénysorozatokra a majdnem mindenütt konvergencia fogalma, ami alapvető az analízisben, semmilyen topológiára vonatkozóan sem lesz az arra a topológiára vonatkozó konvergencia. Pontosabban, ha a fenti függvények F halmazán egy topológiát akarunk tekinteni, amelyben a majdnem mindenütt konvergens függvénysorozatok a majdnem mindenütti határértékükhöz konvergálnak, akkor ez természetes módon elvezet a mértékben konvergens függvénysorozatokhoz; mégpedig a mértékben konvergens F -beli függvénysorozatok is konvergálni fognak a mértékbeni határértékükhöz, a tekintett topológiában.

Másrészt előfordul, hogy a topologikus tereknél szűkebb térosztályokat vizsgálunk. Így pl. az algebrai topológiában fontos szerepe van a k -tereknek, azaz az olyan X topologikus tereknek, amelyekre egy $A \subset X$ altér pontosan akkor zárt X -ben, ha X -nek minden K kompakt alterére $A \cap K$ zárt K -ban.

A különféle struktúrafajták közös jellegzetessége, hogy a topologikus és uniform tereknél szokásos alapvető konstrukciók elvégezhetők bennük; így mindegyikük esetében létezik összeg, szorzat (amelyek alaphalmaz az alaphalmazok diszjunkt uniója, ill. szorzata), altér, kvóciénstér, ill. halmazleképezés által indukált inverz kép struktúra, továbbá adott alaphalmazon levő struktúrák tetszőleges rendszerének létezik szuprémuma és infimuma, azaz a legdurvább (legfinomabb) struktúra amelyik az adott struktúrák mindegyikénél finomabb (durvább). (Egy X alaphalmazon

levő S_1 és S_2 struktúrákra S_1 finomabb S_2 -nél, vagy más szóval S_2 durvább S_1 -nél, ha az identikus leképezés X -en az (X, S_1) struktúrának az (X, S_2) struktúrába való, az illető struktúrafajta szerint folytonos — tehát pl. folytonos, egyenletesen folytonos, stb. — leképezése.) Ezenkívül minden konstans leképezés az adott struktúrafajta értelmében folytonos. A fenti tulajdonságok, hozzávetőlegesen, azt fejezik ki, hogy a szóbanforgó fajtájú struktúrák, a struktúrafajtaához megfelelő módon definiált folytonos leképezésekkel, ú.n. *topologikus kategóriát* alkotnak. (A pontos definíciótól eltekintünk; mindenesetre a fent felsorolt tulajdonságok nem függetlenek egymástól.) A topologikus kategóriákra vonatkozóan, pusztán a definíciójukra támaszkodva, sok tételt lehet bebizonyítani, amelyeket korábban a különféle struktúrafajtákra külön-külön, ámbár analóg módon bizonyítottak.

Másrészt természetesen az egyes struktúrafajták osztályainak (kategóriáinak) vannak különböző tulajdonságaik is. Pl. a topologikus terek esetében az összegnek és szorzatnak van egy disztributivitási tulajdonsága: ha az X_α topologikus terek összegét $\coprod_\alpha X_\alpha$ -val jelöljük, akkor fennáll $(\coprod_\alpha X_\alpha) \times Y = \coprod_\alpha (X_\alpha \times Y)$. Ugyanez a tulajdonság az uniform terek esetében nem érvényes. Ugyanis ha $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ -k uniform terek, akkor ezek uniform összege azon \mathcal{U} uniformitás az X_α alaphalmazok X diszjunkt unióján, amelyre $U \in \mathcal{U} \iff \forall \alpha \exists U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha, \bigcup_\alpha U_\alpha \subset U$, míg az $(X, \mathcal{U}), (Y, \mathcal{V})$ uniform terek szorzata azon \mathcal{W} uniformitás $X \times Y$ -on, amelyre $W \in \mathcal{W} \iff \exists U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{V}, U \times V \subset W$. Így a $(Z, \mathcal{W}_1) = (\coprod_\alpha (X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)) \times (Y, \mathcal{V})$ szorzat uniformitásra $W \in \mathcal{W}_1 \iff [\forall \alpha \exists U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha], \exists V \in \mathcal{V}, (\bigcup_\alpha U_\alpha) \times V \subset W$. Másrészt, a $(Z, \mathcal{W}_2) = \coprod_\alpha ((X, \mathcal{U}_\alpha) \times (Y, \mathcal{V}))$ összeg uniformitásra $W \in \mathcal{W}_2 \iff \forall \alpha \exists U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha, \exists V_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha, \bigcup_\alpha (U_\alpha \times V_\alpha) \subset W$. Tehát \mathcal{W}_2 finomabb \mathcal{W}_1 -nél, és $\mathcal{W}_2 \neq \mathcal{W}_1$ pl. ha az α -k egy megszámlálható indexhalmazból vannak, mindegyik $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha)$ egy pontból álló uniform tér, és $(Y, \mathcal{V}) = [0, 1]$, a szokásos uniformitással. Tehát a fenti tulajdonság szempontjából a topologikus terek osztálya jobban viselkedik, mint az uniform tereké.

Másrészt viszont a topologikus terek esetében, ha $f_1: X_1 \rightarrow Y_1, f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ kvóciens leképezések, akkor az $f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ leképezés (amelyre $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$) általában nem kvóciens leképezés. Viszont uniform terek esetében kvóciens leképezések szorzata kvóciens leképezés és ez nemcsak két tényezőre, hanem akárhány tényezőre is igaz, így ebből a szempontból az uniform terek osztálya jobban viselkedik, mint a topologikus tereké.

Így egy természetesen adódó, és az utóbbi két évtizedben sokat vizsgált kérdés, hogy mely struktúrafajtáknak milyen kívánatos tulajdonságaik vannak meg, ill. olyan struktúrafajták keresése, amelyek lehető sok ilyen kívánatos tulajdonsággal rendelkeznek.

Az alábbiakban csak azon struktúraosztályokról lesz szó, amelyekkel Császár Ákos foglalkozott. Az alább szereplő struktúrafajták mind az ú.n. merotópiák osztályával vannak kapcsolatban, amely struktúraosztályt M. Katětov vezette be az

1960-as években, és intenzívebb kutatásuk az 1970-es években indult meg, H. Herrlich és munkatársai által.

A merotópiák definíciója előtt idézzük fel a 2.§-ből az uniform terek definícióját. Az ottani definíció szerint egy uniform tér egy (X, \mathcal{U}) pár, ahol \mathcal{U} $X \times X$ -en egy filter, amely eleget tesz az (U1), (U2), (U3) axiómáknak. \mathcal{U} elemeit *környékeknek* mondjuk. Legyen $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ egy halmazrendszer az (X, \mathcal{U}) uniform térben. Ez fedés, ha $\bigcup_\lambda U_\lambda = X$, azaz ha $\forall x \in X \exists \lambda \in \Lambda, x \in U_\lambda$, és *uniform fedés*, ha az ennél erősebb

$$(*) \quad \exists U \in \mathcal{U}, \quad \forall x \in X \exists \lambda \in \Lambda, \quad Ux = \{x' | (x, x') \in U\} \subset U_\lambda$$

feltétel teljesül. (Speciálisan egy metrikus térből származó uniformításra: $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in X \exists \lambda \in \Lambda, x \varepsilon$ -környezete része U_λ -nak. Így pl. az összes x pont körüli fix ε sugarú nyílt gömb rendszere uniform fedést alkot.) Az uniform fedések $\{\{U_{\lambda_\alpha} | \lambda \in \Lambda_\alpha\} | \alpha \in A\}$ rendszere egyértelműen meghatározza a kiindulási uniform teret:

$$(**) \quad U \in \mathcal{U} \iff \exists \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \text{ uniform fedés, } \bigcup_\lambda (U_\lambda \times U_\lambda) \subset U.$$

Tehát az uniform fedések segítségével is definiálhatók az uniform terek. Ráadásul egy $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ leképezés az $(X, \mathcal{U}), (Y, \mathcal{V})$ uniform terek között pontosan akkor egyenletesen folytonos, ha (Y, \mathcal{V}) -nek bármely $\{V_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ uniform fedésére annak inverz képe, $\{f^{-1}(V_\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$ uniform fedése (X, \mathcal{U}) -nak. Ily módon az egyenletesen folytonos leképezések is igen egyszerűen leírhatók az uniform fedések segítségével.

A célból, hogy az uniformításokat az uniform fedések segítségével definiáljuk (azaz, hogy egy uniformítást egy X halmazon fedéseknek egy nem-üres $\{\{U_{\lambda_\alpha} | \lambda \in \Lambda_\alpha\} | \alpha \in A\}$ rendszerével adjunk meg — azaz $A \neq \emptyset$ —, amely fedéseket definíció szerint uniform fedéseknek nevezünk), le kell fordítani a fent említett \mathcal{U} filter-tulajdonságát, és az (U1), (U2), (U3) axiómákat az uniform fedések nyelvére. Mielőtt ezt megtennénk, két definícióra van szükségünk. Ha $\{U_\lambda\}$ és $\{V_\mu\}$ fedései egy X halmaznak, akkor $\{U_\lambda\}$ *finomítása* $\{V_\mu\}$ -nek, jelben $\{U_\lambda\} < \{V_\mu\}$, ha $\forall \lambda \exists \mu, U_\lambda \subset V_\mu$ (így $(*)$ -ban $\{Ux | x \in X\} < \{U_\lambda\}$ szerepel), ill. $\{U_\lambda\}$ *csillagfinomítása* $\{V_\mu\}$ -nek, jelben $\{U_\lambda\} <^* \{V_\mu\}$, ha a következő erősebb feltétel teljesül: $\forall \lambda \exists \mu, \text{St}(U_\lambda, \{U_\lambda\}) := \bigcup \{U_{\lambda'} | U_\lambda \cap U_{\lambda'} \neq \emptyset\} \subset V_\mu$. (A $\text{St}(U_\lambda, \{U_\lambda\})$ halmaz az U_λ csillaga $\{U_\lambda\}$ -ra vonatkozóan.)

Az uniform fedések nem-üres $\{\{U_{\lambda_\alpha} | \lambda \in \Lambda_\alpha\} | \alpha \in A\}$ rendszere segítségével definiált uniformításokra a fenti filter-tulajdonság és az (U1), (U2), (U3) axiómák a következőképpen fordítódnak le:

(CU1): $\{U_\lambda\}$ uniform fedés, $\{V_\mu\}$ fedés X -en, $\{U_\lambda\} < \{V_\mu\} \Rightarrow \{V_\mu\}$ uniform fedés („felszálló tulajdonság”)

(CU2): $\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}, \{V_\mu | \mu \in M\}$ uniform fedés $\Rightarrow \{U_\lambda \cap V_\mu | \lambda \in \Lambda, \mu \in M\}$ uniform fedés („metszet-tulajdonság”)

(CU3): $\{U_\lambda\}$ uniform fedés $\Rightarrow \exists \{V_\mu\}$ uniform fedés, $\{V_\mu\} <^* \{U_\lambda\}$ („csillagfinomítás tulajdonság”).

(Itt (CU1) a környékekkel definiált (X, \mathcal{U}) uniformitásnál az \mathcal{U} felszálló tulajdonságára emlékeztet, (CU2) az \mathcal{U} metszet-tulajdonságára, és (CU3) az (U3) háromszögegyenlőtlenség axiómára. (U1)-nek és (U2)-nek itt nincs megfelelője; ezek automatikusan teljesülni fognak egy uniform fedések által definiált uniformitásból (**) segítségével származtatott, környékekkel definiált uniformitásra.) Ha az X , ill. Y halmaz a $\{\{U_{\lambda\alpha} | \lambda \in \Lambda_\alpha\} | \alpha \in A\}$, ill. $\{\{V_{\mu\beta} | \mu \in M_\beta\} | \beta \in B\}$ uniform fedések nem-üres rendszerével lefedéses uniformitás, egy $f: X \rightarrow Y$ leképezés egyenletesen folytonos, ha $\beta \in B \Rightarrow \{f^{-1}(V_{\mu\beta}) | \mu \in M_\beta\} \in \{\{U_{\lambda\alpha} | \lambda \in \Lambda_\alpha\} | \alpha \in A\}$.

Mindez azt jelenti, hogy az uniform tereket két teljesen egyenértékű módon lehet definiálni, ilyen módon ugyanazt a térosztályt, és ugyanazt az egyenletesen folytonos leképezésoosztályt kapjuk. Az áttérés az U környékek rendszeréről a $\{U_\lambda\}$ uniform fedések rendszerére, ill. fordítva a fent megadott (*) és (**) formulák segítségével történik (amelyek a környékek rendszerének segítségével definiálják az uniform fedések rendszerét, ill. az uniform fedések rendszerének segítségével definiálják a környékek rendszerét). Megjegyezzük, hogy újabban eléggé elterjedt az uniformitásoknak az uniform fedések rendszerével való megadása, szemben az eredeti, környékekkel történő definícióval.

Megjegyezzük, hogy ha fedések egy nem-üres rendszere helyett véges fedéseknek egy nem-üres $\{\{U_{\lambda\alpha} | \lambda \in \Lambda_\alpha\} | \alpha \in A\}$ rendszerét vesszük, és erre kívánjuk meg a (CU1), (CU2), (CU3) axiómák analogonjait ((CU1)-ben $\{V_\mu\}$ véges fedéssel), a Jefremovics-féle szomszédsági tereknek (l. 4.§) egy új definícióját kapjuk. Itt nem adjuk meg a δ Jefremovics-féle szomszédsági reláció és a véges fedések fenti $\{\{U_{\lambda\alpha} | \lambda \in \Lambda_\alpha\} | \alpha \in A\}$ rendszere közötti oda-vissza való áttérés formuláit, csak arra utalunk, hogy a Jefremovics-féle szomszédságok kölcsönösen egyértelműen és izomorf módon megfeleltethetők a prekompakt uniformitásoknak. Egy (X, \mathcal{U}) uniformitás *prekompakt* (vagy *teljesen korlátos*), ha $\forall U \in \mathcal{U} \exists n, \exists A_1, \dots, A_n \subset X, A_i \times A_i \subset U (i = 1, \dots, n), \bigcup A_i = X$. Így a Jefremovics-féle szomszédságok eredeti definíciójának és lefedéses definíciójának ekvivalenciája a prekompakt uniformitások lefedéses definíciójának figyelembevételéből adódik.

Megjegyezzük még, hogy a környékekkel történő definíció az uniformitást egy X alaphalmazon mint $2^{X \times X}$ -nek (bizonyos axiómáknak eleget tevő) \mathcal{U} részhalmazát definiálja, míg a lefedésekkel történő definíció az uniformitást mint 2^{2^X} -nek (bizonyos axiómáknak eleget tevő) $\{\{U_{\lambda\alpha} | \lambda \in \Lambda_\alpha\} | \alpha \in A\}$ részhalmazát definiálja. (2^Y az Y halmaz hatványhalmaza.) Így az utóbbi definíció kicsit bonyolultabb, viszont egyszerűsége miatt az általánosításokra alkalmasabbnak bizonyul.

Ezután megadjuk a merotópia definícióját. Egy X halmaz, és rajta fedéseknek egy nem-üres $\{\{U_{\lambda\alpha} | \lambda \in \Lambda_\alpha\} | \alpha \in A\}$ rendszere *merotópia*, ha ezekre teljesül a fenti (CU1), (CU2) axióma (tehát az uniform fedésekkel definiált uniformitások axiómái közül az (CU3) csillagfinomítás axiómát elhagyjuk).

Megjegyezzük, hogy ha a környékekkel definiált uniformitásoknál elhagyjuk az (U3) háromszögegyenlőtlenség axiómát, akkor az ú.n. szemiformitások fogalmát kapjuk, l. 2.§. Ámbár a lefedéses uniformitásoknál (CU3) a háromszögegyenlőtlenségre emlékeztet, mégis a szemiformitások és merotópiák osztálya nem ugyanaz; a szemiformitások természetes módon egy valódi részosztályát képezik a merotópiáknak.

Ha fedések helyett véges fedéseknek egy nem-üres $\{\{U_\lambda | \lambda \in \Lambda_\alpha\} | \alpha \in A\}$ rendszerét tekintjük, amelyekre (CU1) ($\{V_\mu\}$ véges fedéssel) és (CU2) teljesül, akkor *kontiguitásról* beszélünk. Szemben a Jefremovics-féle szomszédságok eredeti definíciójának (l. 4.§) és az előbb említett lefedéses definíciójának ekvivalenciájával, a Čech-féle szomszédságok (l. 4.§, amikor a (P6) normalitás axiómát hagyjuk el a Jefremovics szomszédságok definíciójából) és a kontiguitások (amikor a háromszögegyenlőtlenségre emlékeztető (CU3) csillagfinomítási axióma véges analogonját hagyjuk el a Jefremovics szomszédságok véges lefedésekkel történő definíciójából), már nem ekvivalens struktúrák: minden Čech-féle szomszédság természetes értelemben indukálható kontiguitással, de általában többel is.

Egy másik általánosítási lehetőség a következő. Legyen (X, \mathcal{U}) uniform tér, és tekintsük benne az \mathcal{F} Cauchy filterek \mathcal{C} rendszerét (az \mathcal{F} filter Cauchy, ha $\forall U \in \mathcal{U} \exists F \in \mathcal{F}, F \times F \subset U$). Ezek rendszere eleget tesz a következő axiómáknak:

$$(C1): \forall x \in X \{A \subset X | A \ni x\} \in \mathcal{C},$$

$$(C2): \mathcal{F} \in \mathcal{C}, \mathcal{F}' \text{ filter } X\text{-en}, \mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \Rightarrow \mathcal{F}' \in \mathcal{C},$$

$$(C3): \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{C}, \forall F_1 \in \mathcal{F}_1 \forall F_2 \in \mathcal{F}_2 F_1 \cap F_2 \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \in \mathcal{C}.$$

Megjegyezzük, hogy az $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ filterre $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{F_1 \cup F_2 | F_1 \in \mathcal{F}_1, F_2 \in \mathcal{F}_2\}$. A (C3) axióma teljesülése a háromszögaxióma következménye. Megjegyezzük továbbá, hogy egy T_2 topologikus térben az összes konvergens filterek rendszere is eleget tesz a fenti három axiómának.

Egy X halmazt, és rajta filtereknek egy \mathcal{C} rendszerét, amely kielégíti a (C1), (C2), (C3) axiómákat, *Cauchy-struktúrának* nevezzük. Cauchy-struktúrák között egy $f: (X_1, \mathcal{C}_1) \rightarrow (X_2, \mathcal{C}_2)$ leképezés folytonos, ha $\mathcal{F} \in \mathcal{C}_1 \Rightarrow f(\mathcal{F}) \in \mathcal{C}_2$. ($f(\mathcal{F})$ az X_2 -ben $\{f(F) | F \in \mathcal{F}\}$ által generált filter.) Ha csak a (C1), (C2) axiómákat követeljük meg, *filter-térről* (filter-merotópia, grill, screen) beszélünk.

A fenti struktúrák közül néhányat sorba állítunk, kezdve a legáltalánosabbal, és folytatva az egyre speciálisabbakkal: merotópiák, filter-terek, kontiguitások, Čech-szomszédságok (4.§), Čech-féle lezárások (4.§). (Ez analogonja a klasszikus uniformitások, Jefremovics-féle szomszédságok, topológiák sorozatnak.) Itt mindegyik fajta struktúra természetes módon indukál egy következő fajta struktúrát (analog módon, mint ahogy egy uniformitás indukál egy Jefremovics szomszédságot, és egy Jefremovics szomszédság indukál egy topológiát (l. 4.§)).

Az előző bekezdésben felsorolt struktúráknál fel lehet még tenni, hogy a „háromszögaxiómának valamilyen gyöngített formája” teljesül. Merotópiák esetén az egyik így adódó struktúra a H. Herrlich által bevezetett ú.n. „nearness” terek, amelyek az utóbbi húsz évben kiterjedt vizsgálatok tárgya voltak.

Császár Ákosnak a fent ismertetett és egyéb általános folytonossági struktúrákkal foglalkozó dolgozatai vizsgálják a különféle struktúrafajták egymással való kapcsolatát. Egy adott speciálisabb struktúrának adott fajtájú általánosabb struktúrákkal való indukálása esetén sokszor van ezen indukáló struktúrák között legfinomabb, vagy legdurvább (mint ahogy pl. adott teljesen reguláris topológiát — ill. Jefremovics szomszédságot — indukáló uniformitások között mindig van legfinomabb — ill. legdurvább); ezeket is vizsgálja. Több dolgot szentel, részben az azóta elhunyt Deák Jenővel közösen, az úgynevezett szimultán kiterjesztési problémának. Ennek egy speciális esete szerepelt a 8.§-ban, amikor is adva volt egy Y topologikus tér, annak egy X sűrű altere, és X -en adva volt egy \mathcal{U} (kvázi)uniformitás, úgy, hogy \mathcal{U} az X altér topológiáját indukálta. Keresendő volt ekkor egy \mathcal{U}' (kvázi)uniformitás Y -on, amely egyrészt Y topológiáját indukálja, másrészt X -re való megszorítása \mathcal{U} .

Az általános szimultán kiterjesztési probléma azt jelenti, hogy van egy Y halmaz és ennek tetszőleges X_i részhalmazai ($i \in I$). Az Y halmazon meg van adva egy speciálisabb struktúra, az X_i halmazokon pedig egy-egy adott fajtájú általánosabb struktúra, amelyek kielégítik a következő két kompatibilitási feltételt:

(1): az X_i halmazokon adott általánosabb struktúra által indukált speciálisabb struktúra X_i -n megegyezik az Y speciálisabb struktúrájának X_i -re való megszorításával; valamint

(2): $i, j \in I, i \neq j$ esetén az X_i -n, ill. X_j -n megadott általánosabb struktúrák megszorításai $X_i \cap X_j$ -re egymással megegyeznek.

Kérdés: mi a feltétele annak, hogy létezzen egy, az adott fajtájú általánosabb struktúra Y -on, amely egyrészt Y speciálisabb struktúráját indukálja, másrészt az X_i részhalmazokra való megszorításai az X_i -ken előre megadott általánosabb struktúrákkal egyeznek meg.

CSÁSZÁR ÁKOS TUDOMÁNYOS MUNKÁI

Könyvek

- [1] Á. Császár, *Fondements de la topologie générale*, Akadémiai Kiadó és Gauthier-Villars (Budapest és Paris, 1960), 232 old.
- [2] Á. Császár, *Foundations of General Topology*, Pergamon Press (Oxford-London-New York-Paris, 1963), xix+380 old.
- [3] Á. Császár, *Grundlagen der allgemeinen Topologie*, Akadémiai Kiadó és Teubner Verlag (Budapest és Leipzig, 1963), 367 old.
- [4] Á. Császár, *Bevezetés az általános topológiába*, Akadémiai Kiadó (Budapest, 1970), xiv+424 old.
- [5] Á. Császár, *General topology*, Akadémiai Kiadó és Adam Hilger Ltd. (Budapest és Bristol, 1978), 488 old.
- [6] Á. Császár, *Valós analízis*, Tankönyvkiadó (Budapest, I. 1983 és II. 1984), 521 és 667 old.

Folyóiratcikkek

- [1] Á. Császár, An elementary proof of a theorem of H. E. Vaughan, *Det Kongelige Norske Videnskabens Selskabs Forhandlinger*, **20** (1947), No.1.
- [2] Á. Császár, Sur les dérivées approximatives d'ordre supérieur, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **21** (1948), 253-260.
- [3] Á. Császár, Sur les fonctions à variation bornée d'ordre supérieur, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (3)*, **64** (1948), 275-284.
- [4] Á. Császár, Sur une classe de fonctions non mesurables, *Fundamenta Mathematicae*, **36** (1949), 72-76.
- [5] Á. Császár, Sur les fonctions internes, non monotones, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **13** (1949), 48-50.
- [6] Á. Császár, A polyhedron without diagonals, *Acta Sci. Math.*, **13** (1949), 140-142.

- [7] Á. Császár, Sur les nombres de Lipschitz approximatifs, *Acta Sci. Math.*, **12B** (1950), 211–214.
- [8] Á. Császár, Sur les formes quadratiques positives, *Publicationes Mathematicae*, **1** (1950), 186–188.
- [9] Á. Császár, Sur les nombres de Lipschitz généralisés, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **1** (1950), 277–302.
- [10] Á. Császár, A Darboux-féle tulajdonságról — Sur la propriété de Darboux, *Az első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei*, (Budapest, 1952), 551–560.
- [11] Á. Császár, A feltételes valószínűségi mezőkről, *Az MTA Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei*, **4** (1954), 427–428.
- [12] Á. Császár, Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à deux variables, *Acta Sci. Math.*, **15** (1954), 183–202.
- [13] Á. Császár, Sur la structure des espaces de probabilité conditionnelle, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 337–361.
- [14] Á. Császár, Sur les fonctions localement monotones au sens généralisé, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 451–461.
- [15] Á. Császár, Sur une généralisation de la notion de dérivée, *Acta Sci. Math.*, **16** (1955), 137–159.
- [16] Á. Császár, Sur la structure des ensembles de niveau des fonctions réelles à une variable, *Colloquium Mathematicum*, **4** (1956), 13–29.
- [17] Á. Császár, Sur une caractérisation de la répartition normale de probabilités, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1957), 359–382.
- [18] Á. Császár, A topologikus tér fogalmáról, *Mat. Lapok*, **8** (1957), 37–60, 211–231, **9** (1958), 37–63.
- [19] Á. Császár, Quelques remarques sur un ouvrage de M. V. Pták, *Publ. Math.*, **5** (1957), 154–161.
- [20] Á. Császár, Megjegyzés Geőcze Zoárd függvényéhez, *Mat. Lapok*, **8** (1957), 268–271.
- [21] Á. Császár, Sur une classe de structures topologiques générales, *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées*, **2** (1957), 399–407.
- [22] Á. Császár, Sur les polynomes orthogonaux classiques, *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica*, **1** (1958), 32–39.
- [23] Á. Császár, J. Czipszer, Sur les courbes irramifiées, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), 315–328.
- [24] Á. Császár, Sur les courbes atriodiques, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **9** (1958), 329–332.
- [25] Á. Császár, Konvex halmazokról és függvényekről, *Mat. Lapok*, **9** (1958), 273–282.

- [26] Á. Császár, Sur les singularités des fonctions continues, *Bulletin de Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques et Physiques de la R. P. R.*, **2** (50) (1958), 133–135.
- [27] Á. Császár, Sur les courbes irramifiées, *Lucrările Consfătuirii de Geometrie și Topologie (București)*, (1959), 79–80.
- [28] Á. Császár, S. Mrówka, Sur la compactification des espaces de proximité, *Fund. Math.*, **46** (1959), 195–207.
- [29] Á. Császár, Sur la représentation canonique des fonctionnelles linéaires, *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **2** (1959), 85–92.
- [30] Á. Császár, S. Marcus, Sur les théorèmes de J. Mycielski et W. Gustin concernant les décompositions de l'intervalle, *Coll. Math.*, **7** (1960), 255–256.
- [31] Á. Császár, Monotonité locale et dérivabilité approximatives de fonctions quelconques, *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **3–4** (1960–61), 41–52.
- [32] Á. Császár, Sur la représentation topologique des graphes, *Fund. Math.*, **50** (1962), 249–256.
- [33] Á. Császár, A komplex függvénytan elemeinek topológiai segédeszközéről, *Mat. Lapok*, **13** (1962), 73–94.
- [34] Á. Császár, Complétion et compactification d'espaces syntopogènes, *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra* (Praha, 1962), 133–137.
- [35] Á. Császár, Sur les critères locaux de monotonité, *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **5** (1962), 43–50.
- [36] Á. Császár, J. Czipser, Sur des critères généraux d'approximation uniforme, *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **6** (1963), 17–26.
- [37] Á. Császár, Transposition de structures syntopogènes, *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **6** (1963), 55–70.
- [38] Á. Császár, Sur un critère d'approximation uniforme, *Az MTA Matematikai Kutatóintézetének Közleményei*, **8** (1963), 413–416.
- [39] Á. Császár, Sur les limites extrêmes de fonctions d'intervalle, *Rev. Roumaine Math.*, **9** (1964), 39–45.
- [40] Á. Császár, Szőkefalvi–Nagy Béla tudományos munkásságának ismertetése, *Mat. Lapok*, **15** (1964), 1–22.
- [41] Á. Császár, Czipser János (1930–1963), *MTA Mat. Kut. Int. Közl.*, **8B** (1964), 491–497.
- [42] Á. Császár, Double compactifications d'espaces syntopogènes, *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **7** (1964), 3–11.
- [43] Á. Császár, Supplément à la note "Sur les limites extrêmes de fonctions d'intervalle", *Rev. Roumanie Math.*, **10** (1965), 405–407.

- [44] Á. Császár, Structures syntopogènes et tramails, *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **8** (1965), 101–117.
- [45] Á. Császár, Contributions à la transposition de structures syntopogènes, *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **9** (1966), 27–43.
- [46] Á. Császár, Syntopogene Halbgruppen, *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra II (Prague, 1967)*, 101–102.
- [47] Á. Császár, Erweiterung, Kompaktifizierung und Vervollständigung syntopogener Räume, *Proceedings of the I. International Symposium on Extension Theory (Berlin, 1968)*, 51–54.
- [48] Á. Császár, On the characterization of completely regular spaces, *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **11** (1968), 79–82.
- [49] Á. Császár, Über die doppelte Kompaktifizierung gewisser topogener Räume, *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **11** (1968), 83–103.
- [50] Á. Császár, Double compactification and Wallman compactification, *Topology and its Applications (Beograd, 1969)*, 113–117.
- [51] Á. Császár, Gleichmässige Approximation und gleichmässige Stetigkeit, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **20** (1969), 253–261.
- [52] Á. Császár, Syntopogene Gruppen I., *Mathematische Nachrichten*, **39** (1969), 1–20.
- [53] Á. Császár, On approximation theorems for uniform spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **22** (1971), 177–186.
- [54] Á. Császár, Wallman-type compactifications and superextensions, *Periodica Mathematica Hungarica*, **1** (1971), 55–80.
- [55] Á. Császár, Doppelkompakte bitopologische Räume, *Theory of Sets and Topology (Berlin 1972)*, 59–67.
- [56] Á. Császár, Syntopogene Gruppen II., *Mathematica Cluj*, **13 (36)** (1971), 25–50.
- [57] Á. Császár, Syntopogene Gruppen III., *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **14** (1971), 23–52.
- [58] Á. Császár, Syntopogene Gruppen IV., *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **14** (1971), 53–65.
- [59] Á. Császár, Invariant structures and transformation groups, *Topics in Topology (Budapest, 1973)*, 165–172.
- [60] Á. Császár, On some subspaces of hyperextensions, *Annal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **15** (1972), 111–119.
- [61] Á. Császár, Syntopogenous structures and transformation groups, *Symposia Mathematica*, **16** (1975), 143–179.
- [62] Á. Császár, Strongly complete, supercomplete and ultracomplete spaces, *Mathematical structures — Computational mathematics — Mathematical modelling (Sofia, 1975)*, 195–202.

- [63] Á. Császár, Function classes, compactifications, realcompactifications, *Anal. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **17** (1974), 139–156.
- [64] Á. Császár, Doubly compact bitopological spaces, *Topology and its Applications II. (Beograd, 1973)*, 71.
- [65] Á. Császár, M. Laczkovich, Discrete and equal convergence, *Studia Sci. Math. Hung.*, **10** (1975), 463–472.
- [66] Á. Császár, Some problems concerning $C(X)$, *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra IV (Berlin–Heidelberg–New York 1977)*, 43–55.
- [67] Á. Császár, Szögek és szögfüggvények, *Mat. Lapok*, **25** (1974), 307–328.
- [68] Á. Császár, Discrete Baire classes, *Topology and its Applications III (Beograd)*, (sajtó alatt).
- [69] Á. Császár, M. Laczkovich, Some remarks on discrete Baire classes, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **33** (1979), 51–70.
- [70] Á. Császár, Topogenous spaces and zero-set spaces, *Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften der DDR 1979, Nr. 4N*, 19–24.
- [71] Á. Császár, R. Domiaty, Fine quasi-uniformities, *Ann. Univ. Budapest, Sectio Math.*, **22–23** (1979–1980), 151–158.
- [72] Á. Császár, Normality is productive, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, **23** (1978), 323–341.
- [73] Á. Császár, Some classes of Baire spaces, *Proceedings of the Meeting on General Topology, Trieste (1978)*, 47–66.
- [74] Á. Császár, Syntopogenous spaces and zero-set spaces, *Studies in pure mathematics (Budapest, 1983)*, 103–126.
- [75] Á. Császár, $\alpha\beta\gamma\delta$ -compact spaces, *Seminar Notes of the Torino University 1979*, 152.
- [76] Á. Császár, Extensions of quasi-uniformities, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **37** (1981), 121–145.
- [77] Á. Császár, K. Matolcsy, Syntopogenous extensions for prescribed topologies, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **37** (1981), 59–75.
- [78] Á. Császár, Extensions of quasi-uniform spaces, *Mitteil. Math. Ges. DDR, 1980/4*, 33–36.
- [79] Á. Császár, Regular extensions of quasi-uniformities, *Studia Sci. Math. Hung.*, **14** (1979), 15–26.
- [80] Á. Császár, Complete extensions of quasi-uniform spaces, *General Topology and its Applications to Modern Analysis and Algebra, V. Praha, 1981* (Berlin, 1982), 104–113.
- [81] Á. Császár, Absolutely closed syntopogenous spaces, *Studia Sci. Math. Hung.*, **16** (1981), 163–174.

- [82] Á. Császár, Semigroups of continuous functions, *Acta Sci. Math.*, **45** (1983), 131–140.
- [83] Á. Császár, Filter-closed function classes, *Math. Structures-Computational Math. — Math. Modelling 2* (Sofia, 1984), 131–135.
- [84] Á. Császár, $C(X)$ determines vX , *Proc. of the Leningrad Topological Conference, 1982*, (Lecture Notes in Math. 1060, Berlin, 1984), 211–216.
- [85] Á. Császár, T_1 -closed spaces, *Acta Math. Hung.*, **45** (1985), 341–352.
- [86] Á. Császár, RE -proximities, *Acta Math. Hung.*, **47** (1986), 201–221.
- [87] Á. Császár, u -isomorphic semigroups of continuous functions, *Acta Math. Hung.*, **48** (1986), 213–222.
- [88–91] Á. Császár, Proximities, screens, merotopies, uniformities I–IV., *Acta Math. Hung.*, **49** (1987), 459–479, **50** (1987), 97–109, **51** (1988), 23–33, 151–164.
- [92] Á. Császár, u -isomorphic semigroups of continuous functions in locally compact spaces, *Acta Math. Hung.*, **51** (1988), 337–340.
- [93] Á. Császár, Multiplicative semigroups of continuous mappings into topological semigroups, *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra VI, Proc. Sixth Prague Topological Symposium 1986*, (Berlin, 1988), 109–114.
- [94] Á. Császár, Extensions of closure and proximity spaces, *Acta Math. Hung.*, **55** (1990), 285–300.
- [95] Á. Császár, M. Laczkovich, Discrete and equal Baire classes, *Acta Math. Hung.*, **55** (1990), 165–178.
- [96] Á. Császár, Extensions of discrete and equal Baire functions, *Acta Math. Hung.*, **56** (1990), 93–99.
- [97] Á. Császár, E. Thümmel, Multiplicative semigroups of continuous mappings, *Acta Math. Hung.*, **56** (1990), 189–203.
- [98] Á. Császár, J. Deák, Simultaneous extensions of proximities, semi-uniformities, contiguities and merotopies I, *Math. Pannon.*, **1/2** (1990), 67–90.
- [99] Á. Császár, J. Deák, Simultaneous extensions of proximities, semi-uniformities, contiguities and merotopies II, *Math. Pannon.*, **2/1** (1991), 19–35.
- [100] Á. Császár, J. Deák, Simultaneous extensions of proximities, semi-uniformities, contiguities and merotopies III, *Math. Pannon.*, **2/2** (1991), 3–23.
- [101] Á. Császár, J. Deák, Simultaneous extensions of proximities, semi-uniformities, contiguities and merotopies IV, *Math. Pannon.*, **3/1** (1992), 57–76.
- [102] Á. Császár, Iliadis absolutes for arbitrary spaces, *Acta Math. Hung.*, **57** (1991), 111–120.
- [103] Á. Császár, Additive extensions of set functions, *Ann. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **34** (1991), 21–26.

- [104] Á. Császár, Some remarks on S -closed spaces, *Acta Math. Hungar.*, **65** (1994), 203–207.
- [105] Á. Császár, Remarks on additive set functions, *Ann. Univ. Budapest, Sect. Math.*, **36** (1993), 31–34.
- [106] Á. Császár, D -completions of Pervin-type quasi uniformities, *Acta Sci. Math.*, **57** (1993), 335–341.
- [107] Á. Császár, General absolutes of topological spaces, *Acta Math. Hungar.*, **58** (1991), 141–151.
- [108] Á. Császár, Simultaneous extensions of Cauchy structures, *Acta Math. Hungar.*, **65** (1994), 365–377.
- [109] Á. Császár, Simultaneous extensions of screens, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **55** (1989), 107–126.
- [110] Á. Császár, Cauchy structures in closure and proximity spaces, *Acta Math. Hungar.*, **66** (1995), 201–215.
- [111] Á. Császár, D -complete extensions of quasi-uniform spaces, *Acta Math. Hungar.*, **64** (1994), 41–54.
- [112] Á. Császár, Almost compact subspaces of hyperextensions, *Acta Math. Hungar.*, **65** (1994), 51–68.
- [113] Á. Császár, Chain-complete screens, *Acta Math. Hungar.*, **67** (1995), 275–287.
- [114] Á. Császár, λ -complete filter spaces, *Acta Math. Hungar.*, **70** (1996) (1–2), 75–87.
- [115] Á. Császár, m -contiguities I, *Acta Math. Hungar.*, **71** (1996) (3), 241–262.
- [116] Á. Császár, m -contiguities II, *Acta Math. Hungar.*, **71** (1996) (4), 275–291.
- [117] Á. Császár, m -contiguities III, *Acta Math. Hungar.*, **72** (1996) (1–2), 45–59.
- [118] Á. Császár, Riesz and Lodato reflections I, *Acta Math. Hungar.*, **73** (1996) (1–2), 111–128.
- [119] Á. Császár, Riesz and Lodato reflections II, *Acta Math. Hungar.*, **73** (1996) (3) 201–212.
- [120] Á. Császár, Riesz and Lodato reflections III, *Acta Math. Hungar.*, **73** (1996) (4), 287–300.
- [121] Á. Császár, Generalized open sets, *Acta Math. Hungar.*, **75** (1997) (1–2), 65–87.
- [122] Á. Császár, Riesz and Lodato reflections IV, *Acta Math. Hungar.*, **77** (1997) (3), 275–286.
- [123] Á. Császár, Cauchy structures and (m) -contiguities, *Acta Math. Hungar.*, **78** (1998) (4), 269–285.
- [124] Á. Császár, Quasi-uniform extensions for prescribed traces of sections of entourages, *Acta Math. Hungar.*, **79** (1998) (3), 237–252.
- [125] Á. Császár, On the γ -interior and γ -closure of a set, *Acta Math. Hungar.*, **80** (1998) (1–2), 89–93.

AZ EMBERI MOZGÁS SZABÁLYOZÁSÁNAK MATEMATIKAI MODELLJEI

LACZKÓ JÓZSEF

Az alábbi áttekintő jellegű cikk ismert matematikai módszerek, elsősorban geometriai és lineáris algebrai módszerek alkalmazását mutatja be egy viszonylag új kutatási területen, az emberi mozgás idegrendszeri szabályozásának, vezérlésének modellezésében.

Az utóbbi években a számítástechnika fejlődése előtérbe helyezte az összetett idegrendszeri funkciók közvetett megismerését segítő matematikai modellek [13,16] alkalmazását és elterjedését. Ilyen központi idegrendszeri feladat sok-komponensű csont- és izom-rendszerek (végtagok) jól koordinált mozgásának vezérlése. Hogyan oldja meg az idegrendszer ezt a feladatot? Hogyan érthető meg egy ilyen bonyolult feladat idegrendszer általi megoldása?

A kérdés visszavezet egy vektormennyiség több komponensre való felbontására, pl. egy pont elmozdulásának a fizikai térben három derékszögű komponensre való felbontására. A koordinációs probléma érdekesebbé válik abban az esetben ha a komponensek száma meghaladja a minimum szükségeset, azaz ha nincs egyértelmű megoldás. Ez az eset áll fenn ha egy testrész, pl. az emberi kar elmozdulását kell létrehozni ízületi elfordulásokkal illetve izomösszehúzódnásokkal, tehát annyi összetevőre kell az elmozdulást felbontani, ahány ízület illetve izom vesz részt a mozgásban. Ekkor az ízületek illetve az izmok nagy száma miatt a testrész egy adott elmozdulása létrejöhet a komponensek mozgásának végtelen sok különböző kombinációjaként. Nyomkövető vagy célt elérő mozgások jól koordinált vezérlésének kérdése felveti a következő feladatot.

Feladat: határozzuk meg egy sokizületű végtag ízületeiben az ízületi elfordulásokat úgy, hogy a végtag végpontja

- a) egy adott pályán mozogjon (nyomkövető mozgás);
- b) egy adott pontot érjen el a térben (célt elérő mozgás).

Az alábbiakban ezzel a két feladattal kapcsolatos kutatásokról és a megoldásban alkalmazható matematikai módszerekről lesz szó. Ezek a kutatások a nyolcvanas években kezdtek gyorsan fejlődni, amikor egyrészt a számítógépvezérelt mozgásanalizáló berendezésekkel egyre több kísérletet végeztek és adatot gyűjtöttek, másrészt lehetővé vált különböző hipotéziseken alapuló vezérlési algoritmusok gyors számítógépes szimulációja.

Kísérleti eredmények szerint például az emberi kar természetes, akadály nélküli mozgása során a kéz egy kezdeti pontból egy adott tervezett célpontba egyenes pályán mozog [2]. Az egyenes pályát azonban sokféleképpen meg lehet valósítani ízületi hajlásszög-változásokkal. Mely megoldást választja egy egészséges emberi idegrendszer? Ilyen kérdések igen bonyolult biológiai, fiziológiai problémákat is felvetnek, hiszen pl. az ízületeket mozgató izmokban ébredő erők és az izmok hosszának megváltozása közti kapcsolat bonyolult módon függ nagyon sok tényezőtől, pl. az izmok szerkezetétől, az izmokat ingerlő motoros idegsejtek tulajdonságaitól és az ízületek merevségétől. Ez a közlemény a biológiai mozgás-koordinációval kapcsolatos matematikai problémákkal foglalkozik.

Először áttekintést adunk a direkt kinematikai és inverz kinematikai feladat néven robotikából ismert kérdésekről [9] és az a) feladatra lokálisan lineáris, közelítő megoldást mutatunk. Utalunk arra, hogy a bemutatott módszert hogyan használták fel emberi végtagok egészséges (optimális) mozgásának modellezésére.

Ezután a b) feladat megoldására egy ismert variáció-számítási módszert alkalmazunk. Végül az egészséges emberi karmozgások egy újonnan megfigyelt sajátosságát fogalmazzuk meg. A megfigyelés a jelen közlemény írójának számítógépes szimulációján és külföldi laboratóriumokban végzett kísérletek eredményein alapul [5]. Az egészséges emberi karmozgások egy olyan geometriai tulajdonságára hívjuk fel a figyelmet amely idegrendszeri sérülés következtében károsodott mozgás esetén vagy mesterségesen generált mozgások esetén általában nem teljesül. További kutatások tárgya lehet, hogy ez a sajátosság milyen matematikai feltétel mellett, az ízületi elfordulásokat leíró függvények milyen választása mellett lehet igaz?

Sokízületű végtag reprezentálása törött-vonallal

Használjunk egy köznapi fogalmat, a végtag fogalmát az alábbi értelemben:

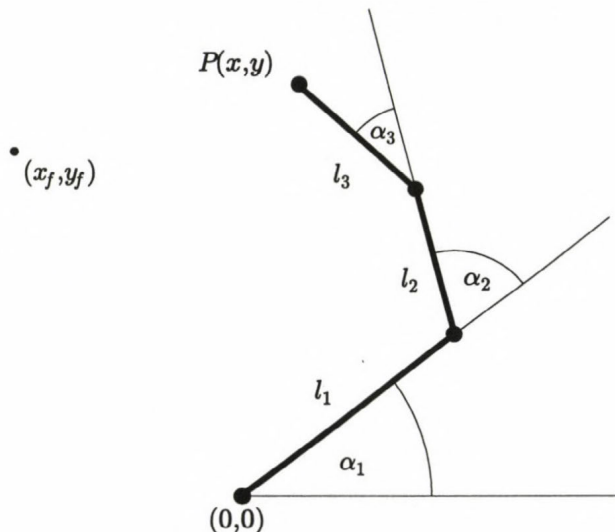
Végtag: több csuklópontra rendelkező, a csuklópontokban elágazás nélkül egymáshoz csatlakozó és egymás körül elforduló részekből álló geometriai alakzat.

Így például végtag az emberi kar, ahol a felkar, az alkar és a kéz egymáshoz ízületekben kapcsolódó forgó részek, ahol a kezdet egyetlen résznek tekintjük, de ebben az értelemben végtag a fej-nyak rendszer is, ahol a kapcsolódó forgó részek a nyakcsigolyák és a koponya.

A végtagokat töröttvonallal fogjuk reprezentálni, ahol a töröttvonalat alkotó szakaszok a végtag szegmenseinek és a töréspontok az ízületeknek (csuklópontoknak) felelnek meg.

Tekintsünk példaként egy n csuklópontú végtagot, amelyet reprezentáló töröttvonal egy síkra illeszkedik (1. ábra), majd vizsgáljuk a végtag síkbeli mozgását.

Jelölje $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a végtag csuklópontjaiban a hajlásszögeket és (x, y) a végtag végpontjának (pl. a kéz egy kijelölt pontjának) a koordinátáit. Tegyük fel, hogy a végtag kezdőpontja (pl. a váll) helyben marad. Kérdés, hogyan változnak



1. ábra. Síkbeli, három csuklópontú töröttvonal. A csuklópontokban mért $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ hajlásszögek és a vonalak hossza (l_1, l_2, l_3) meghatározzák a P pont helyét a síkon. A P pont (x, y) koordinátái azonban nem határozzák meg egyértelműen az $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ szögeket.

az ízületli hajlásszögek, ha a végtag végpontját egy $(\alpha_1 0, \dots, \alpha_n 0)$ kezdeti állapot által meghatározott (x_0, y_0) pontból egy adott (x_f, y_f) pontba mozgatjuk?

A következőkben megemlítünk néhány ehhez a kérdéshez kapcsolódó feladatot. A kar végpontjának pillanatnyi helyét egy $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ vektorral, a kar pillanatnyi helyzetét (állapotát) pedig egy $\alpha \in \mathbb{R}^n$ vektorral jelöljük. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathbf{p} = (x, y)$.

Direkt kinematikai feladat

Ha ismerjük a pillanatnyi $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ hajlásszögeket, akkor hogyan számíthatók ki a végpont (x, y) koordinátái? Tehát hogyan függ a kar pillanatnyi a helyzetétől a kar \mathbf{p} végpontjának helye? Ezt a feladatot direkt kinematikai feladatnak nevezzük.

A direkt kinematikai feladat könnyen megoldható pl. n csuklópontú, síkbeli kar esetén.

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n l_i \cos \beta_i, \sum_{i=1}^n l_i \sin \beta_i \right)$$

ahol $\beta_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j$.

A \mathbf{p} vektort az α függvényében a fentiek szerint megadó függvény folytonos és differenciálható.

Jelöljük ezt a függvényt f -fel.

$$(1) \quad \mathbf{p} = f(\boldsymbol{\alpha})$$

Ez a függvény azonban általában nem invertálható.

Az inverz kinematikai feladat

Ha adottak a végtag végpontjának koordinátái, akkor hogyan határozhatók meg a szomszédos szegmensek által bezárt szögek?

Mivel az (1) egyenletben szereplő f függvény nem invertálható, ennek a feladatnak sok megoldása lehet. Hogyan találhatunk egyet, és vajon mely megoldások vezetnek természetes emberi végtagok helyzetéhez?

Robotkarok vezérlésénél a végtag mozgásának leírásához lokálisan linearizálni szokták a hajlásszögek és a végpont koordinátái közötti kapcsolatot [9]. Ez fizikailag a sebességekre való áttérést jelenti. A végpont sebességének ismeretében kellene kiszámítani az ízületi szögsebességeket, majd ebből integrálással az ízületi szögeket.

Lokális inverz kinematikai feladat

Differenciálva (1)-et, a

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right] \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt}$$

egyenletet kapjuk. Itt a pozíció változását a hajlásszögek változása határozza meg.

A $\mathbf{J} = \left[\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \right] \in R^{2 \times n}$ mátrixot Jacobi-mátrixnak nevezzük.

Az n csuklópontú végtag síkbeli mozgása esetén:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^n l_i \sin \beta_i, & -\sum_{i=2}^n l_i \sin \beta_i, & \dots, & -\sum_{i=n}^n l_i \sin \beta_i \\ \sum_{i=1}^n l_i \cos \beta_i, & \sum_{i=2}^n l_i \cos \beta_i, & \dots, & \sum_{i=n}^n l_i \cos \beta_i \end{bmatrix}$$

Jelölje $\Delta \mathbf{p}$ a végtag végpontjának egy előre megadott pálya mentén tervezett infinitezimális elmozdulását. Határozzuk meg a $\Delta \mathbf{p}$ elmozduláshoz szükséges $\Delta \boldsymbol{\alpha} = (\Delta \alpha_1, \dots, \Delta \alpha_n)$ hajlásszögváltozás vektort, ha ismerjük $\boldsymbol{\alpha}$ pillanatnyi értékét. Tehát oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert:

$$(3) \quad \mathbf{J} \Delta \boldsymbol{\alpha} = \Delta \mathbf{p}$$

Ha J négyzetes, nem szinguláris, akkor

$$(4) \quad \Delta \alpha = \mathbf{J}^{-1} \Delta \mathbf{p}$$

Ha síkbeli példánkban $n > 2$, akkor J szinguláris és (3)-nak végtelen sok megoldása létezik. Ezek közül általában valamilyen biológiailag, fizikailag releváns optimalizációs feltételt kielégítő megoldásokat vizsgáltak és hasonlították össze kísérleti megfigyelésekkel [2, 10, 11, 12, 18]. Például a forgási energia az ízületi szögsebességek négyzetével kapcsolatos, így természetesnek tűnt (3)-nak minimális normájú megoldását keresni [11, 14]. Tehát olyan megoldást, amelyre

$$(5) \quad \|\Delta \alpha\|^2 = \sum \Delta \alpha_i^2$$

minimális.

Ez a megoldás \mathbf{J} Moore–Penrose pszeudo inverze segítségével adódik. Az alábbiakban szólnék \mathbf{J} oszlopainak geometriai jelentéséről, majd a (3) egyenletnek a J mátrix M–P pszeudo inverzen alapuló megoldásáról.

J oszlopai természetes (biológiai) generátor-rendszert alkotnak

A (3) egyenlet geometriailag azt jelenti, hogy a végtag végpontjának pillanatnyi elmozdulását kell felbontani a \mathbf{J} mátrix oszlopait alkotó vektorokkal párhuzamos összetevőkre.

\mathbf{J} oszlopai általában generátor-rendszert alkotnak R^3 -ben.

Tehát $\Delta \mathbf{p}$ -t egy generátor-rendszerre vonatkozó koordinátákkal kell megadni:
 $\Delta \mathbf{p} = \Delta \alpha_1 \mathbf{J}_1 + \Delta \alpha_2 \mathbf{J}_2 + \dots + \Delta \alpha_n \mathbf{J}_n$.

Azt az izgalmas kérdést vizsgáltuk, hogy hogyan definiálhatók a biológiai rendszer geometriai tulajdonságait tükröző generátorok. A \mathbf{J} mátrix oszlopai példát mutatnak egy egyszerű „motoros” generátor-rendszerre, amelyet a mozgó végtag definiál.

Ha elfordulás jön létre az i -edik ízületben, akkor ennek hatására a végpont egy olyan körön mozdul el, amelynek középpontja az i -edik ízület (\mathbf{c}_i), és sugara a \mathbf{p} végpontnak az ízülettől mért távolsága. A \mathbf{J} mátrix i -edik oszlopa ennek a körnek a \mathbf{p} ponthoz tartozó érintőjének az irányába mutató vektor. Ezt szemlélteti a 2. ábra síkbeli töröttvonallal reprezentálható emberi kar esetén.

\mathbf{J}_i egyszerűen számítható az i -edik ízület (\mathbf{c}_i), a végtag végpontja (\mathbf{p}), és az ízület pillanatnyi forgástengelyének (\mathbf{a}_i) ismeretében:

$$(6) \quad \mathbf{J}_i = \mathbf{a}_i \times (\mathbf{p} - \mathbf{c}_i)$$

ahol \times vektoriális szorzást jelöl és \mathbf{a}_i a forgástengely irányába mutató egységvektor.

A \mathbf{J} mátrix oszlopainak (6) szerinti definíciójában az ízületi forgástengelyek is szerepeltek. Ha a mozgás során minden ízület egy síkban marad, akkor \mathbf{a}_i állandó és megegyezik minden i -re (nevezetesen, merőleges arra a síkra, amelyen a végtag mozog).

Háromdimenziós mozgások esetén, még biomechanikai korlátozások figyelembe vételével is, a forgástengelyek elméletileg sokféleképp választhatók és térben és időben változnak.

A \mathbf{c}_i ízületben létrejövő elfordulás \mathbf{a}_i forgástengelye mindig felbontható két komponensre oly módon, hogy az egyik komponens a $\mathbf{p} - \mathbf{c}_i$ vektor irányába esik, a másik pedig erre a vektorra merőleges síkra illeszkedik. Ha \mathbf{p} -nek a $\mathbf{p}_f \neq \mathbf{p}$ pont irányába való mozgatása a cél, akkor a $\mathbf{p} - \mathbf{c}_i$ körüli elforgatás biztosan nem viszi \mathbf{p} -t közelebb a célhoz, hanem \mathbf{p} -t helyben hagyja. Ezen tengely körüli forgatás tehát felesleges, és ezért várható, hogy \mathbf{a}_i a $\mathbf{p} - \mathbf{c}_i$ -re merőleges.

A $\mathbf{p} - \mathbf{c}_i$ -re merőleges síkból pedig azt az irányt célszerű forgástengelynek választani amely $\mathbf{p} - \mathbf{p}_f$ -re is merőleges. Tehát

$$(7) \quad \mathbf{a}_i = (\mathbf{p} - \mathbf{c}_i) \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_f)$$

Feltételezhető, hogy egészséges mozgások esetén, tanulási folyamat eredményeként kialakult neurális kényszerek hatására, a forgástengelyek ily módon választottak. Ez szemmozgások esetén kísérletileg bizonyítható [17], és sok-ízületű mozgásoknál is célszerűnek látszik [3].

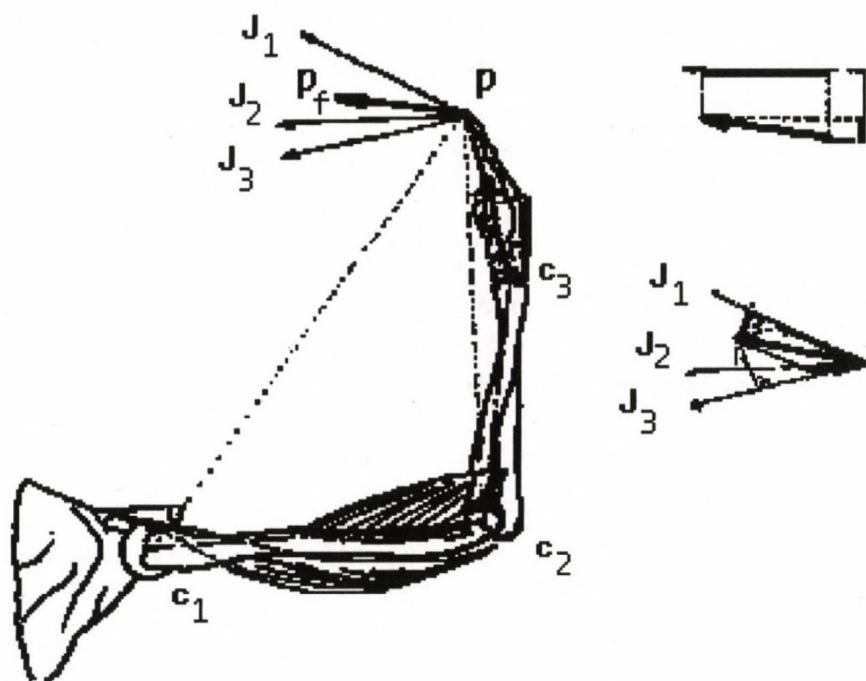
Ez a választás az egyes ízületek szintjén optimális forgástengelyt ad. Az inverz kinematikai feladat azonban további optimalizálási kérdést vet fel, mégpedig azt, hogy sok ízület esetén hogyan viszonyulnak egymáshoz a választott tengelyek körüli elfordulások.

A lokális inverz kinematikai feladat Moore–Penrose pszeudoinverzen alapuló megoldása.

Ha legalább annyi ízület van, mint a külső tér dimenziója (síkbeli mozgások esetén kettő), akkor \mathbf{J} oszlopai egy generátor-rendszert definiálnak, amely annyi elemű, ahány forgó ízülete van a végtagnak.

Ha a generátorok száma nagyobb, mint a külső tér dimenziója, akkor \mathbf{J} szinguláris, és ekkor általánosított inverz alkalmazásával adható egy megoldás a (3) egyenletre. Ez a módszer a \mathbf{J} mátrixnak egy olyan altérre való megszorításán alapul, amelyen invertálható [1]. Ilyen altér a \mathbf{J} nullterének ($N(\mathbf{J})$ -nek) minden direkt kiegészítő altére.

Geometriailag indokolható a (3) egyenlet olyan megoldását keresni, amely az ortogonális direkt kiegészítő altérnek eleme. A (3) egyenlet homogén megoldásai



2. ábra. Az emberi kar által definiált természetes generátor-rendszer (J_1, J_2, J_3). Minden ízülethez a generátor-rendszer egy eleme tartozik, és az merőleges az ízületet az ujj végpontjával összekötő egyenesre, valamint az ízület pillanatnyi forgástengelyére. (Síkbeli mozgások esetén a forgástengely minden ízületben a mozgás síkjára merőleges).

($N(\mathbf{J})$ elemei) ugyanis olyan $\Delta\alpha_i$ szögváltozásokat adnak, amelyek a végtag végpontját helyben hagyják. Ezért a végpont adott irányba történő kis elmozdulása esetén (3)-nak olyan megoldását célszerű keresni, amelynek nincs $N(\mathbf{J})$ -beli összetevője.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogyan számítható ki egy ilyen megoldás. Ehhez definiáljuk a Moore–Penrose pszeudinverzet

Jelöljük egy A mátrix képterét $R(A)$ -val és rangját $r(A)$ -val.

Jelölje egy U altér ortogonális direkt kiegészítő alterét U^\perp .

Jelölje $A|_{N(A)^\perp}$ az A mátrixnak az $N(A)^\perp$ altérre való megszorítását.

Definíció. Legyen $A \in R^{n \times m}$. Defináljuk az $A^+ \in R^{m \times n}$ mátrixot illetve a neki megfelelő lineáris leképezést a következőképpen:

$$A^+v = 0, \quad \text{ha } v \in R(A)^\perp, \quad \text{és } A^+v = (A|_{N(A)^\perp})^{-1}v, \quad \text{ha } v \in R(A)$$

Az A^+ mátrixot az A mátrix Moore–Penrose pszeudoinverzének (M–P pszeudoinverz) nevezzük. ■

Az $Ax = y$ egyenlet M–P pszeudoinverzrel adódó, $x = A^+y$ megoldása a minimális normájú megoldást adja. Ugyanis, ha $r(A) = k$, akkor az általános megoldás $x = \sum_{i=1}^k c_i e_i + \sum_{i=k+1}^n c_i e_i$ alakban írható, ahol $e_1, \dots, e_k \in N(A)^\perp$ és $e_{k+1}, \dots, e_n \in N(A)$.

Az egyetlen $N(A)^\perp$ -beli megoldáshoz egy rá merőleges $N(A)$ -beli komponenst adva egy másik megoldást kapunk, de minden így adódó megoldás normája nagyobb, mint az $N(A)^\perp$ -beli megoldásé.

Ha $A \in R^{n \times m}$, $m > n$ és $r(A) = n$, akkor $r(AA^T) = n$, tehát AA^T invertálható. Ekkor A^+ kiszámítható a következőképpen:

$$(8) \quad A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$$

Ezt mutatjuk meg az alábbiakban.

Állítás. Legyen $A \in R^{n \times m}$ és $r(A) = n$, ekkor az $Ax = y$ egyenlet minimális normájú megoldása $x = A^T(AA^T)^{-1}y$ alakú.

Az állítás a Lagrange-multiplikátor szabály segítségével bizonyítható [9] a következőképpen:

Azt keressük, hogy mely x esetén lesz minimális a $g(x) = \langle x, x \rangle$ függvény az $Ax - y = 0$ feltétel mellett. (\langle, \rangle skaláris szorzatot jelöl.)

Legyen

$$F = \langle x, x \rangle + \langle \lambda, Ax - y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle A^T \lambda, x \rangle - \langle \lambda, y \rangle$$

Differenciálva F -et:

$$dF/dx = 2x + A^T \lambda = 0.$$

Tehát ha F minimális, akkor

$$x = -1/2(A^T \lambda).$$

Ha $Ax - y = 0$, akkor

$$A(-1/2(A^T \lambda)) - y = 0$$

tehát az adott feltétel esetén:

$$\lambda = -2(AA^T)^{-1}y$$

$$x = A^T(AA^T)^{-1}y$$

Tehát az $Ax = y$ egyenlet legkisebb normájú megoldása $x = A^T(AA^T)^{-1}y$. ■

Alkalmazzuk ezt az állítást az inverz kinematikai feladatra.

A (3) egyenletben szereplő \mathbf{J} mátrix maximális rangú (síkbeli mozgás esetén rangja 2, térbeli mozgáskor 3), kivéve ha a végtag teljesen nyújtott helyzetben van. Tehát általában $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ invertálható, tehát a lokális inverz kinematikai feladat minimális normájú megoldása:

$$(9) \quad \Delta\alpha = \mathbf{J}^+ \Delta\mathbf{p} = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \Delta\mathbf{p}$$

Megjegyezzük, hogy ha $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ szinguláris, akkor \mathbf{J}^+ a $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ pszeudoinverzének segítségével számítható: $\Delta\alpha = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^+ \Delta\mathbf{p}$.

Ha a forgási energia minimalizálása a cél, akkor az $\|\Delta\alpha\| = \sum w_i \Delta\alpha_i^2$ célfüggvényt kell minimalizálni, ahol a w_i súlyok a végtag szegmenseinek tehetetlenségi nyomatékaira utalnak. A fenti állításhoz hasonlóan igazolható, hogy ekkor a lokális inverz kinematikai feladat megoldása:

$$\Delta\alpha = (W^T W)^{-1} J^T (J(W^T W)^{-1} J^T)^{-1} \Delta\mathbf{p},$$

ahol W diagonális mátrix, amelynek főátlójában a súlyok szerepelnek.

A lokális inverz kinematikai feladat megoldása tehát általában egy valós szimmetrikus mátrix inverzének kiszámítására vezethető vissza. Ilyen mátrixok inverze a sajátvektorok tenzorszorzatainak a sajátértékek inverzével képzett lineáris kombinációja.

Szinguláris valós szimmetrikus mátrix M-P pszeudoinverzének kiszámítására is alkalmas az alábbi módszer.

Legyen A valós szimmetrikus mátrix. Jelölje E_1, E_2, \dots, E_n az A mátrix lineárisan független, egységnyi hosszúságú sajátvektorait és λ_i az E_i sajátvektorhoz tartozó sajátértéket ($i = 1, \dots, n$).

$$A^+ = \sum_{i=1}^n \lambda'_i (E_i^T \cdot E_i), \quad \text{ahol} \quad \lambda'_i = \begin{cases} 1/\lambda_i, & \text{ha } \lambda_i \neq 0 \\ 0, & \text{ha } \lambda_i = 0. \end{cases}$$

A sajátvektorok kiszámítására ismert iterációs módszer alkalmazható, amelynek során először a legnagyobb sajátértékhez tartozó sajátvektor, majd a többi sajátvektor is meghatározható [15]. Ennek az algoritmusnak az idegrendszer általi (pontosabban kisagyi idegsejthálózatok általi) implementálhatóságát feltételezzük [14].

Az M-P pszeudoinverz segítségével megoldottuk a lokális inverz kinematikai feladatot. A végtag végpontjának egy hosszabb pályán való mozgásához szükséges hajlásszögváltozásokat úgy számíthatjuk, hogy a pályát kis részekre osztjuk, és a fenti módszert lépésenként alkalmazzuk. Minden lépés végén az optimálisan választott \mathbf{a}_i forgástengelyek körül végrehajtjuk az optimális szögű $\Delta\alpha_i$ ízületi elforgatásokat. Ezáltal a végtag új helyzete áll elő, amelyből az új helyzetnek megfelelő forgástengelyeket és Jacobi-mátrixot kiszámítjuk, majd a következő lépéshez szükséges elforgatási szögeket a fent leírt módon (9) meghatározzuk.

Infinitezimális elmozdulásokat tekintve, az M-P pszeudoinverz egy $\frac{d\alpha}{dt}$ vektort rendel egy $\frac{dp}{dt}$ sebességvektorhoz. Kérdés, hogy ha a végpont sebességének ismeretében az M-P pszeudoinverzrel egyértelműen meghatározzuk az ízületi szögsebességeket, akkor ebből integrálással adódik-e egy függvény, amely összefüggést ad a végtag végpontjának $\mathbf{p} = (x, y)$ koordinátái és az $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ízületi hajlásszögek között?

Az M-P pszeudoinverzet a végpontnak egy zárt görbén való mozgására alkalmazva Klein és Huang bizonyította [4], hogy bár a végpont pozíciója a mozgás kezdetén és végén ugyanaz, a végső helyzetben adódó ízületi hajlásszögek nem egyeznek meg a kiindulási állapotban mért ízületi hajlásszögekkel. Tehát ha a végpont egy zárt pályát ír le, ebből nem következik, hogy a kar ugyanabba az állapotba kerül a mozgás végén, mint amelyben a kezdetekor volt. Azaz $\int p'(t) = 0$, de $\int J^+ p'(t) \neq 0$. Ez komoly problémát jelenthet robotok vezérlése esetén. Az emberi mozgást tekintve azonban a fenti módszerrel kiszámított ízületi hajlásszögváltozások megjósoltak nyomkövető karmozgások esetén létrejött ízületi hajlásszögváltozásokat [6, 7, 8].

Megfigyelések is azt mutatják, hogy a végpont által leírt zárt görbének a kar állapotterében nem feltétlenül zárt görbe felel meg.

Az n ízületű végtag állapottere a kar állapotát leíró $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ változókból felépített Riemann-tér. Ennek a térnek a pontjaival azonosítható a kar egy-egy állapota. Az $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ponthoz tartozó kovariáns metrikus alaptenzort $\mathbf{J}_\alpha^T \mathbf{J}_\alpha$ adja, ahol \mathbf{J}_α az α pont által definiált állapotnak megfelelő Jacobi-mátrix. Ennek segítségével ívhosszat értelmezhetünk az állapotterben. Az $\alpha(t)$ görbe s ívhossza:

$$(10) \quad s = \int_0^T \sqrt{|\alpha'(t) \cdot \mathbf{J}^T(\alpha(t)) \mathbf{J}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)|} dt$$

Az állapotterbeli $\alpha(t)$ görbének megfelelő $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$ ízületi hajlásszögváltozások a végtag végpontját egy $\mathbf{p}(t)$ görbén mozgatják. Az s ívhossz segítségével a végtag végpontjának R^3 -beli pályájának hossza $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$ ismeretében kiszámítható. Az állapotterbeli ívhossz és a végtag végpontja által leírt R^3 -beli görbe ívhossza (2) alapján megegyezik:

$$\int_0^T \sqrt{|\alpha'(t) \cdot \mathbf{J}^T(\alpha(t)) \mathbf{J}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)|} dt = \int_0^T \sqrt{\langle \mathbf{p}'(t), \mathbf{p}'(t) \rangle} dt.$$

A kar végpontjának (R^3 -beli) elmozdulásai által bezárt szögek az állapotterben is meghatározhatók: Legyen $\Delta\alpha$ és $\Delta\beta$ a kar azonos állapotából induló két állapotváltozás, ezen állapotváltozások hatására létrejövő $(\Delta\mathbf{p}_1, \Delta\mathbf{p}_2)$ elmozdulások által bezárt szög:

$$\frac{\Delta\alpha(t) \mathbf{J}^T \mathbf{J} \Delta\beta(t)}{\Delta\alpha(t) \mathbf{J}^T \mathbf{J} \Delta\alpha(t) \cdot \Delta\beta(t) \mathbf{J}^T \mathbf{J} \Delta\beta(t)}$$

A mozgásnak R^3 -ban megfigyelhető jellemzői tehát számíthatók olyan változók (ízületi hajlásszögek) ismeretében, amelyeket az idegrendszer szabályozni képes idegsejteken érkező információkkal.

A legsimább mozgás

Tekintsünk most egy adott célt elérő mozgást (pl. egy adott térbeli pontot a kézzel elérő karmozgást) és azt az optimalizációs feltételt, hogy a végtag végpontja a legsimábban mozogjon. A legsimább mozgás azt jelenti, hogy a végpont gyorsulása nem változik hirtelen, tehát a végpont elmozdulásának harmadik deriváltja minimális. Ez követelmény lehet a b) típusú mozgáskoordinációs feladat esetén. Az ilyen mozgást a követő mozgástól való megkülönböztetésül „elérő” karmozgásnak nevezzük. Ekkor a kéz pályája előre nem ismert. Kísérleti megfigyelések szerint azonban az emberi karmozgások egészséges esetben igen simák, nincsenek rángások, a végpont egyenes pályán mozog és a kar végpontjának gyorsulása nem változik hirtelen. Ennek alapján javasolta Flash és Hogan a „minimum jerk hipotézis”-t [2], mely szerint a rángás normája négyzetének a mozgás tartama alatti idő szerinti integrálja, tehát az alábbi integrál minimális:

$$(11) \quad \int_0^T \|\mathbf{p}'''(t)\|^2 dt.$$

Síkbeli mozgás esetén ez lokálisan a következő mennyiség minimalizálását jelenti:

$$\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3y}{dt^3}\right)^2$$

Vegyük észre, hogy $\|\mathbf{p}'''(t)\|^2$ egyszerűbb mint a követő mozgásoknál (5)-ben minimalizálni javasolt $\|\Delta\alpha\|^2$ abban az értelemben, hogy nem függ a töröttvonal szerkezetétől, a szegmensek hosszától, és a szomszédos szegmensek által bezárt szögek szögfüggvényeitől, hanem csak a végpont koordinátáitól. A (11)-ben megadott optimalizációs kritérium meghatározza a végtag végpontjának egy $\mathbf{p}(0)$ kezdőpontból egy $\mathbf{p}(T)$ célpontba való mozgásának pályáját, ha adottak a kezdőpontban és a célpontban a $\mathbf{p}'(0)$, $\mathbf{p}'(T)$, $\mathbf{p}''(0)$, $\mathbf{p}''(T)$ peremértékek. Az integrandus egyszerűsége a (11) optimalizációs kritériumot kielégítő pálya variációszámítási módszerekkel való kiszámítását kínálja [2]. Ugyanakkor fiziológiai szempontból különös hogy az optimális pálya független a mozgó végtag szerkezetétől.

Állítás. A (11) célfüggvényt minimalizáló $\mathbf{p}(t)$ trajektória a $\mathbf{p}(0)$ és $\mathbf{p}(T)$ pontot összekötő egyenes.

Az állítás azon a fontos tételre alapul, mely szerint ha $p(t)$ n -szer folytonosan differenciálható a $(0, T)$ intervallumon, és adott egy $L(t, p(t), p'(t), \dots, p^{(n)}(t))$ alapfüggvény amely integrálható $(0, T)$ -n, és a

$$C(p(t)) = \int_0^T L(t, p, p', \dots, p^{(n)}) dt$$

célfüggvény szélsőértéket vesz fel $p(t)$ -n, akkor a $p(t)$ függvénynek ki kell elégítenie az alábbi Euler-Lagrange egyenletet:

$$\frac{\partial L}{\partial p} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial (p')} \right) + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{\partial L}{\partial (p^{(n)})} \right) = 0$$

Ha a (11) célfüggvényt kell minimalizálnunk, akkor

$$L = \left(\frac{d^3 x}{dt^3} \right)^2 + \left(\frac{d^3 y}{dt^3} \right)^2$$

és ebből adódik, hogy a célfüggvény minimális, ha

$$\frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial x^{(3)}}{dt^3} \right) + \frac{d^3}{dt^3} \left(\frac{\partial y^{(3)}}{dt^3} \right) = 0$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\frac{d^6 x}{dt^6} = 0, \quad \frac{d^6 y}{dt^6} = 0.$$

Ezeknek a differenciálegyenleteknek a megoldásai ötödfokú polinomok:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 \\ y(t) &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + b_5 t^5. \end{aligned}$$

Ha a mozgás 0 sebességgel és 0 gyorsulással indul és úgy is fejeződik be, akkor a következő trajektóriát kapjuk:

$$(12) \quad \begin{aligned} x(t) &= x_0 + (x_0 - x_T)(15\tau^4 - 6\tau^5 - 10\tau^3) \\ y(t) &= y_0 + (y_0 - y_T)(15\tau^4 - 6\tau^5 - 10\tau^3) \end{aligned}$$

ahol

$$\tau = t/T, \quad (x_0, y_0) = p(0), \quad (x_T, y_T) = p(T), \quad \text{és} \quad (x(t), y(t)) = p(t).$$

Látható, hogy (12) egy egyenes pályát határoz meg $p(0)$ és $p(T)$ között. ■

Bár a (11) optimalizációs kritériummal sikeresen megjósolták a kar végpontjának trajektóriáját, de biológiai, idegi vezérlési szempontból ezzel a kritériummal szemben jogos felvetés, hogy független a végtag egyedi szerkezetétől. Kérdés, hogy az idegrendszer képes-e közvetlenül a végpont koordinátáit szabályozni? Valószínűbb, hogy a sima mozgás az ízületek mozgásának megfelelő szabályozásával kapcsolatos. Ezt a problémát megoldani látszik, hogy $\|\mathbf{J}(t)\alpha'''(t)\|^2$ minimalizálásával

olyan mozgás jöhet létre, amely a végpont legsimább mozgását jól közelíti. Láttuk, hogy

$$(13) \quad \mathbf{p}'(t) = \mathbf{J}(t)\alpha'(t)$$

Kétszer differenciálva ezt az egyenletet:

$$(14) \quad \mathbf{p}'''(t) = \mathbf{J}''(t)\alpha'(t) + 2\mathbf{J}'(t)\alpha''(t) + \mathbf{J}(t)\alpha'''(t)$$

A teljes rángás négyzetének integrálját is tagokra bonthatjuk.

Jelölje G, G_1, G_2, G_3 a (14) egyenletben szereplő kifejezéseket:

$$G(t) = \mathbf{p}'''(t); \quad G_1(t) = \mathbf{J}''(t)\alpha'(t); \quad G_2 = 2\mathbf{J}'(t)\alpha''(t); \quad \text{és} \quad G_3 = \mathbf{J}(t)\alpha'''(t).$$

A (14) egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve majd integrálva a következő egyenletet kapjuk:

$$(15) \quad \int |G(t)|^2 dt = \int |G_1(t)|^2 dt + \int |G_2(t)|^2 dt + \int |G_3(t)|^2 dt + \\ + 2 \cdot \int (\langle G_1(t), G_2(t) \rangle + \langle G_1(t), G_3(t) \rangle + \langle G_2(t), G_3(t) \rangle) dt$$

ahol \langle, \rangle jelölés a vektorok skaláris szorzatát jelöli,

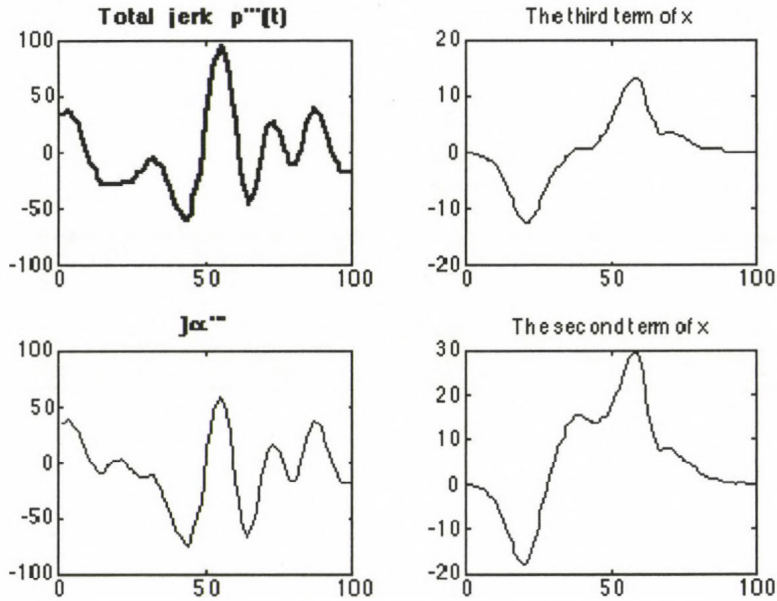
Egészséges karmozgások esetén $\mathbf{p}'''(t) \approx \mathbf{J}(t)\alpha'''(t)$.

A (14) egyenlet szerint a végpont rángása függ a rendszer Jacobi-mátrixától, annak első és második deriváltjától valamint az ízületi szögsebességektől, szöggyorsulásoktól és az ízületi szögek harmadik deriváltjától (az utóbbit forgási rángásnak nevezzük).

Kísérleti eredmények és számítógépes szimuláció alapján sejthető azonban, hogy egészséges emberi karmozgások esetén a fenti összegben $\mathbf{J}(t)\alpha'''(t)$ a domináns tag. Kísérletek során goniométerekkel mérték az ízületi szögeket, majd a mért szögekből kiszámították az ízületi szögsebességeket, szöggyorsulásokat, forgási rángásokat, a Jacobi-mátrixot és annak első és második deriváltját, majd a (14) képlet szerint a végpont rángását.

A (14) egyenlettel számított rángás minden esetben jól egyezett a (14)-ben szereplő összeg harmadik tagjával:

$$(16) \quad \mathbf{p}'''(t) \approx \mathbf{J}(t)\alpha'''(t)$$



3. ábra. Bal felső diagram: a kéz elmozdulásának harmadik deriváltja első koordinátájának időbeli változását mutatja ($\mathbf{p}'''(t)$). A többi diagram a (14) egyenlet jobb oldalán szereplő három R^2 -beli vektor ($J''\alpha'$, $J'\alpha''$ és $J\alpha'''$) első koordinátájának időbeli változását mutatja. Jobb felső ábra az első tagra, jobb alsó a második tagra, bal alsó a harmadik tagra vonatkozik. A domináns vektor az ízületi szögváltozások harmadik deriváltjait adó vektor és a Jacobi mátrix szorzata ($J\alpha'''$).

Erre mutat példát egy célpontot elérő karmozgás esetén a 3. ábra.

A (15) egyenlet bal oldalán levő integrál értékét jól közelítette a jobb oldalon szereplő összeg harmadik tagja. Megvizsgáltuk a jobb oldalon szereplő négy integrál százalékos megoszlását (a teljes rángás négyzetének százalékában). Különböző sebességű és amplitúdójú mozgásokat tekintettünk. Mindig a harmadik tag volt a domináns.

$$(17) \quad \int_0^T \|\mathbf{p}'''(t)\|^2 dt \approx \int_0^T \|\mathbf{J}(t)\alpha'''(t)\|^2 dt$$

A táblázatban egy egészséges ember karmozgására vonatkozó értékek szerepelnek.

Ebben a közleményben nem foglalkozunk azzal, hogy matematikailag magyarázható-e ez a megfigyelés. Csupán felhívjuk a figyelmet arra, hogy a \mathbf{J} mátrix minden eleme az ízületi szögek trigonometrikus függvénye. A \mathbf{J} deriváltjának elemei

sebesség	távolság	első összegtag	második összegtag	harmadik összegtag	negyedik összegtag
gyors	hosszú	2,69%	15,37%	93,56%	-11,62%
gyors	hosszú	2,51%	13,87%	90,45%	-6,82%
gyors	közép	2,40%	10,48%	100,40%	-13,28%
gyors	közép	2,32%	9,99%	89,67%	-2,01%
gyors	rövid	0,66%	2,55%	99,23%	-2,49%
gyors	rövid	0,77%	2,96%	98,06%	-1,80%
normál	hosszú	2,54%	10,75%	87,91%	-1,20%
normál	hosszú	3,28%	14,96%	91,98%	-10,22%
normál	közép	1,74%	7,32%	98,57%	-7,63%
normál	közép	2,18%	8,97%	95,08%	-6,23%
normál	rövid	0,28%	1,17%	103%	-4,44%
normál	rövid	1,11%	4,30%	102,70%	-8,15%

Táblázat. A végpont ránkása négyzetének integrálja a (15) egyenlet szerint négy tagra bontható. A táblázat kísérletileg mért karmozgásokból kiszámított négy tag nagyságát mutatja a teljes ránkás négyzete integráljának százalékában. A vizsgált esetekben a kéz különböző hosszúságú (rövid, közép, hosszú) pályán és különböző sebességgel (normál, gyors) mozgott.

pedig trigonometrikus függvényeknek íztéleti szögek deriváltjával vett szorzatainak az összege. Pl. n csuklópontú síkbeli végtag esetén:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}'_{11}(t) = & \left(\sum_{i=1}^n -l_i \cos \beta_i \right) \alpha'_1(t) + \\
 & + \left(\sum_{i=2}^n -l_i \cos \beta_i \right) \alpha'_2(t) + \dots + \left(\sum_{i=n}^n -l_i \cos \beta_i \right) \alpha'_n(t)
 \end{aligned}$$

A (15) egyenlet jobboldala tehát igen összetett módon definiált. Kérdés, hogy az α_i függvények milyen választása mellett teljesül, hogy a (15) egyenlet jobb oldalán szereplő harmadik integrál majdnem megegyezik a baloldali integrállal, a többi összegtag pedig nem számottevő.

Felvetődő feladatok

1.) Felvetődő kérdés, hogy vajon matematikailag kivethetőek-e az $\alpha_i(t)$ függvényekre olyan feltételek, amelyekből következik az egészséges karmozgásoknak a megfigyelt sajátsága.

2.) Felvetődő kérdés, hogy általában milyen kapcsolat van a

$$(19) \quad \int_0^T \|\mathbf{J}(t)\alpha'''(t)\|^2 dt$$

célfüggvényt minimalizáló mozgásból adódó végpont-pálya és a $\int_0^T \|\mathbf{p}'''(t)\|^2 dt$ célfüggvényt minimalizáló pálya között?

A (19) célfüggvény lényegesen bonyolultabb, mint (11), de egyszerűbb, mint a (15) egyenlet jobboldalán szereplő négytagú kifejezés.

Itt nem vizsgáljuk a (19) célfüggvény minimalizálásával foglalkozó variációs számítási feladatot. A megfigyeléseken alapuló feltételezésből itt azt a következtetést vonjuk le, hogy ha igaz a „minimal jerk” hipotézis, akkor egészséges mozgás esetén a végtag végpontjának rángását jó közelítéssel $\|\mathbf{J}(t)\alpha'''(t)\|^2$ minimalizálásával meg lehet határozni.

Láttuk, hogy előírva, hogy a végtag végpontjának mozgása a legsimább legyen, meghatározható a $\int_0^T \|\mathbf{p}'''(t)\|^2 dt$ célfüggvényt minimalizáló végpont-pálya és annak harmadik deriváltja. Az ilyen mozgásnak megfelelő ízületi rángások ($\alpha'''(t)$) azonban sokfélék lehetnek. Megjegyezzük, hogy ha

$$\mathbf{p}'''(t) \approx \mathbf{J}(t)\alpha'''(t)$$

akkor a végtag sima mozgását eredményező minimális normájú $\alpha'''(t)$ vektort jó közelítéssel kapjuk a végpont elmozdulásának harmadik deriváltjából az M-P pszeudo inverz segítségével.

$$\alpha'''(t) \approx \mathbf{J}(t)^+ \mathbf{p}'''(t)$$

($\alpha'''(t)$ koordinátái az $\alpha_1'''(t), \dots, \alpha_n'''(t)$ ízületi rángások).

Ezzel a végpont legsimább mozgása úgy állítható elő, hogy az ízületi hajlásszögek változása is közel legyen a lehető legsimábbhoz.

3.) Elsősorban fiziológiai kérdés, hogy a modellekben javasolt algoritmus implementálható-e az idegrendszeri vezérlés során.

Az emberi mozgást mozgásanalizáló rendszerekkel vizsgálják. Látható, hogy a rejtett idegrendszeri algoritmusok és a mozgási feladat lényeges paramétereinek vizsgálatát jelentősen segítik a matematikai modellek. Az egészséges és kóros mozgások közvetlenül nem mérhető különbözőségének geometriai elemzése új módszert ad a mozgásbetegségek klasszifikációjához.

Hivatkozások

- [1] Campbell S. L. and Meyer C. D. (1979), *Generalized inverses of linear transformations*, Pitman Publ. Ltd.
- [2] Flash T. and Hogan N. (1985), The coordination of arm movements: An experimentally confirmed mathematical model, *The Journal of Neuroscience*, **5**(7), 1688–1703.
- [3] Hore J., Watts S. and Tweed D. (1994), Arm position constraints when throwing in three dimensions, *J. of Neurophysiology*, **72**, 1171–1180.
- [4] Klein C. A. and Huang C. H. (1983), Review of pseudoinverse control for use with kinematically redundant manipulators, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **13**, 245–250.
- [5] Laczkó J., Jaric S., Latash M. L. and Zatsiorsky V. M. (1997), The relation between individual joint kinematics and the minimal jerk principle as applied to the hand during planar movements. *Soc. Neurosci. Abstr.*, **23**, 2089.
- [6] Laczkó J., Quintern J. and Krafczyk S. (1996), Modeling of joint-rotations during line tracking arm movements, in: *Neuroprosthetics, From basic research to clinical application*, Eds. A. Pedotti, M. Ferrarin, J. Quintern, Springer-Verlag, 305–314.
- [7] Laczkó J. (1996), *Mathematical algorithms for well coordinated control of neuroprostheses*. A számítástechnika orvosi és biológiai alkalmazásai. XX. Neumann Kollokvium Kiadványa. Szerk. Kozmann György, 113–115.
- [8] Laczkó J., Pellionisz A., Jongen H. and Gielen C. C. A. M. (1988), Computer Modeling of Human Forelimb Muscle Activation in Multidimensional Intrinsic Coordinate Frames, *Soc. Neurosci. Abstr.*, **14/2**, 955.
- [9] Lantos Béla (1991), *Robotok irányítása*, Akadémiai Kiadó, Budapest.
- [10] Latash M. L. (1993), *Control of Human Movement*, Human Kinetics: Urbana, IL.
- [11] Mussa-Ivaldi F. A., Morasso B., Hogan N. and Bizzi E. (1990), *Network models of motor systems with many degrees of freedom*, in: *Advances in Control Networks and Large Scale Parallel Distributed Processing Models*, Fraser (ed.), Ablex. Publ. Corp., Norwood NJ.
- [12] Nelson W. L. (1983), Physical principles for economies of skilled movements, *Biological Cybernetics*, **46**, 136–145.
- [13] Neumann J. (1958), *The Computer and the Brain*, Yale Univ. Press, New Haven CT.
- [14] Pellionisz A. J. and Llinas L. (1985), Tensor Network Theory of the metaorganization of functional geometries in the central nervous system, *Neuroscience*, **16**, 245–273.
- [15] Rózsa Pál (1984), *Lineáris algebra*, Műszaki könyvkiadó, Budapest.
- [16] Szentágothai J. and Arbib M. A. (1975), Conceptual models of neural organization, *Neurosci. Res. Program Bull*, **12**, 307–510.
- [17] Tweed D. and Vilis T. (1990), Geometric relations of eye position and velocity vectors during saccades, *Vision Research*, **30**, 111–127.
- [18] Uno Y., Kawato M. and Suzuki R. (1989), Formation and control of optimal trajectory in human arm movement — minimum torque — change model, *Biological Cybern.*, **61**, 89–101.

Mathematical models of human movement control

This paper gives an overview about mathematical methods applied in the studies of control of human limb movements. Particularly the movements of a redundant open kinematic chain (limb) is studied. Two types of movements are considered: (a) reaching movements when the endpoint of the limb must reach a target and (b) smooth pursuit movements when the endpoint of the limb pursues a given trajectory. The use of linear algebraic methods and variational calculus is presented here and simulated movements are compared with data derived from biological experiments.

KÖNYVISMERTETÉS

Integrable Systems and Foliations — Feuilletages et Systèmes Intégrables

Claude Albert, Robert Brouzet, Jean Paul Dufour (szerkesztők)
Progress in Mathematics Vol. 145, Birkhäuser, 1997

(Cikkszerzők: Y. Benoist, G. Cairns, B. Jessup, J. Pitkethly, V. Cavalier, A. Haefliger, H. Flaschka, T. Raitu, É. Ghys, A. Lichnerowicz, G. Meigniez, I. Moerdijk, F. J. Turiel, I. Vaisman, P. Vanhaecke.)

Számos matematikai elmélet valamilyen fizikai problémából született és csak később tisztult azzá az axiomatikus rendszerré, amellyel a legtöbb matematikus — a fizikai háttér teljes megértése nélkül — találkozik. A *szimplektikus geometria* vagy *szimplektikus topológia* azonban mindig is közel maradt fizikai gyökeréhez, a klasszikus mechanika talán legelegánsabb megfogalmazásához, az ún. Hamilton-formalizmushoz. Ugyanez a szimplektikus formalizmus bizonyult megvilágító erejűnek a fizika egyéb ágaiban is, pl. a termodinamikában, a kvantum-elméletben, a geometriai optikában.

Mi is ez a Hamilton-formalizmus? Mielőtt ezt megválaszolnánk, gondoljuk el, hogy egy hegyoldalon eleresztünk egy golyót. A golyó persze arra fog elindulni, amerre a hegyoldal a legmeredekebb. Ezt úgy is mondhatjuk, hogy az adott pontban elképzeljük a hegyoldal érintősíkját, ezt egy vízszintes síkkal elmetsszük, majd az így kapott metszet-egyenesre merőlegest állítunk az érintősíkban. Ebbe az irányba mutat (lefelé) a golyó sebességvektora. Látható, hogy a fizikai szituációból csak arra volt szükségünk, hogy adva legyen egy felület (általánosabban egy „*n*-dimenziós sokaság”, vagyis egy olyan „*tér*”, mely elég sima ahhoz, hogy minden pontban legyen érintőtere), minden érintőtérben legyen rögzítve egy skaláris szorzás, és legyen még adva a magasság-függvény ($f : M \rightarrow R$ differenciálható függvény). Ha most eleresztünk egy golyót a sokaság P pontjában, ennek a kezdeti sebességét a következőképpen kaphatjuk: az f meghatározza a P -beli érintőtér egy df lineáris leképezését R -be, s a sebesség ezen lineáris leképezés magjára lesz merőleges. Ezen fogalmak a Riemann-geometria fogalomkörébe tartoznak.

Kiderült, hogy sokkal gyümölcsözőbb, ha nem közönséges szimmetrikus skaláris szorzást rögzítünk minden érintőtérben, hanem annak az antiszimmetrikus

párját, egy *ferde skaláris szorzást* (= szimplektikus formát). Tekintsük a fenti mozgásegyenletet, a sebesség legyen a df magjára *ferdemerőleges* irányú. Némi lineáris algebrai tűnődés után arra jutunk, hogy ez az antiszimmetria azt eredményezi, hogy a sebességvektor benne lesz df magjában, s ezért a golyó nem fog kimozdulni az f szintfelületéről.

A klasszikus mechanika Hamilton-féle leírása a következő: egy fizikai rendszer összes lehetséges mozgásállapotának M sokaságán adott egy $H : M \rightarrow R$ energiafüggvény, valamint minden érintőtérben egy szimplektikus forma (egy bizonyos integrálhatósági feltétellel). A rendszer mozgását a fenti mozgásegyenlet adja: a sebesség merőleges dH magjára. Pontos definíciók után bizonyítható, hogy mindez ekvivalens az iskolából ismert newtoni mechanikával. (Az energiamegmaradás törvényét v.ö. az előző bekezdés végével.) A fenti mozgásegyenlet koordinátákba írva egy parciális differenciálegyenlet-rendszer, melynek integrálása általában nem könnyű. A szimplektikus geometria azonban elegáns definíciókat, technikákat és tételeket tartalmaz erre az integrálhatóságra vonatkozóan („teljesen integrálható rendszerek”).

Nem igaz azonban, hogy a szimplektikus geometria a differenciálegyenletekhez hasonló analitikus elmélet lenne. Inkább geometria és topológia termékenyíti meg, valamint a szimmetria és az antiszimmetria furcsa egymásbafonódása. Van még egy kettősség, mely a modern szimplektikus eredmények fényében egyre markánsabb: az eredmények egy része a szimplektikus sokaságok egyfajta *képlékenységét* fogalmazza meg, míg mások ugyanezek bizonyos *merevségét*.

Itt az ideje, hogy szót ejtsünk a Birkhäuser által kiadott 11 dolgozatot tartalmazó kötetről, mely egy 1995-ös, P. Molino tiszteletére rendezett konferencia cikkgyűjteménye. A dolgozatok témája a szimplektikus geometrián belül igen szerteágazó. Néhány igen speciális, egymástól is távol álló kutatási területet ismerhetünk meg a (többnyire francia nyelvű) cikkekből, melyek integrálható rendszerekről, Poisson-struktúrákról (a szimplektikus geometria egy általánosításáról), fólizásokról, Lie-transzverzális és tranzitív struktúrákról valamint klasszifikációs problémákról szólnak. Említsünk meg két, inkább-összefoglaló jellegű cikket. Az egyik Y. Benoist műve (*Orbites des structures rigides (d'après M. Gromov)*), melyben a szimplektikus struktúra merevségét általánosító fogalmakat talál. A másik, melyből talán leginkább profitálhat az olvasó, I. Vaisman *A Lecture on Poisson-Nijenhuis Structures* című összefoglaló cikke, mely Gelfand, Dorfman és a szerző, Vaisman munkáit mutatja be. Világos motivációt ad a Poisson-struktúrákra és arra, hogyan határoz meg két ilyen struktúra involúcióban álló függvényeket, ezzel biztosítva bizonyos fontos (végtelen-dimenziós) Hamilton-rendszerek teljes integrálhatóságát.

Rimányi Richárd

Dimitri Vvedensky, Partial Differential Equations with *MATHEMATICA*, Addison-Wesley, 1992.

A könyv anyaga a szerző által a londoni Imperial College harmadéves fizikaszakos hallgatóinak tartott lineáris és nemlineáris parciális differenciálegyenletek bevezető előadásain nyugszik. Habár az előforduló egyenletek, egyenlettipusok erős fizikai háttérrel kerülnek bevezetésre — hiszen a szerző maga is fizikaprofesszor —, haszonnal forgathatják mindazok, akik a matematika vagy a *MATHEMATICA* iránt érdeklődnek. Az előbbi csoportba tartozók a parciális differenciálegyenletek elméletének „pratikusabb” részeit ismerhetik meg; de az utóbbi csoporthoz tartozó olvasó is talál hasznos ismereteket, sőt segítséget is ezek megkereséséhez, hiszen a *MATHEMATICA*-hoz kapcsolódó részek külön szedve jelennek meg.

A bevezetőben Vvedensky az első nyolc fejezetet a lineáris egyenleteknek, az utolsó kettőt pedig a nemlineárisoknak ígéri. Az első nyolcból szigorúan véve azonban csak öt foglalkozik a lineáris egyenletekkel. Egy rövid bevezető fejezet után az elsőrendű egyenleteket tárgyalja a karakterisztikák módszerével, ami után a másodrendű egyenletek következnek: Cauchy-feladat a síkon, a Cauchy-feladat geometriája, állandó együtthatós egyenletek osztályozása.

A további fejezetek tartalmazzák a már említett „praktikus” részeit az elméletnek, itt lesz — habár az első három fejezet is tartalmazott — hangsúlyosabb a *MATHEMATICA*-ra írt hosszabb-rövidebb programok szerepe. Cooper könyvével ellentétben itt csak mindegy 40 oldal foglalkozik a változók szétválasztásának módszerével, és az is a Sturm–Liouville problémára való alkalmazási igénnyel, de helyet kapott külön fejezetben a megoldások sorfejtéses alakban való előállítására, valamint a speciális függvények és ortogonális polinomok témaköréről is bőven lehet olvasni. A hetedik fejezet témája a transzformációs módszerek, melyekkel a másodrendű egyenletekre alapmegoldásokat nyerhetünk. Ehhez szorosan kapcsolódik (Green-függvény) az integrálreprezentációk témaköre, mely a nyolcadik fejezet anyaga. Az utolsó két fejezetben egy rövid, de tömör bevezetést kapunk a nemlineáris egyenletekre alkalmazható transzformációs módszerekbe. Két egyenletet, a Burgers, ill. a Korteweg–de-Vries egyenletet vizsgál részletesebben a Hopf–Cole, ill. a Bäcklund transzformáció segítségével. Míg a Hopf–Cole transzformáció képletet ad a Burgers egyenlet megoldására, a Bäcklund transzformáció elvezet a nemlineáris szuperpozícióig.

Az egyes fejezetek végén található az irodalomjegyzékeket, a könyv jellegeből adódóan többségében tankönyvekre való hivatkozással, és a feladatokat a megoldásukat segítő útmutatásokkal. Egy, a parciális differenciálegyenletek alkalmazásait, megoldási módszereit bemutató előadássorozathoz mindenképp hasznos segédkönyv lehet.

Farkas Gyula

Erratum:

Az ismeretlen ismerős

Algebrai geometriáról — nem algebrai geometereknek

A fenti cikk bevezetőjében a magyar nyelvű algebrai geometriai irodalom felsorolásából sajnos egy fontos írás kimaradt.

Buzási Károly fordításában jelent meg ugyanis I. R. Safarevics „Az algebrai geometria alapjai” című cikke magyarul az MTA III. Osztály Közleményei 22 (1973), 79–184. és 283–360. oldalakon. A fordítás alapja az Uszpehi Mat. Nauk. XXXIV 6 (150) 1969, 3–184. cikk.

Erre a hiányosságra Pethő Attila hívta fel a figyelmemet, akinek ezúton szeretném kifejezni hálás köszönetemet.

Egyúttal szeretném azok figyelmét felhívni erre a fordításra, akik szeretnének az alapoktól kezdve komolyan megismerkedni az algebrai geometriával. Erre igen megfelelőnek látszik ez a dolgozat, és megvan az a ritka előnye, hogy magyar nyelven íródott.

Kovács Sándor

TARTALOMJEGYZÉK

Társulati hírek	1
GYŐRY KÁLMÁN: Császár Ákos 75 éves	9
PETRUSKA GYÖRGY: Császár Ákosnak 75. születésnapján	11
KATONA GYULA: Császár Ákos tevékenysége a Bolyai Társulatban	13
MAKAI ENDRE: Császár Ákos matematikai munkássága	14
Császár Ákos tudományos munkái	40
LACZKÓ JÓZSEF: Az emberi mozgás szabályozásának matematikai modelljei .	47
Könyvismertetés	65

CONTENTS

Society news	1
KÁLMÁN GYŐRY: Ákos Császár is 75 years old	9
GYÖRGY PETRUSKA: To Ákos Császár on his 75th birthday	11
GYULA KATONA: Ákos Császár in the Bolyai Society	13
ENDRE MAKAI: The mathematical work of Ákos Császár	14
List of publications of Ákos Császár	40
JÓZSEF LACZKÓ: Mathematical models of human movement control:	47
Book review	65

MTA Könyvtára
Periodika 2000/1678

