Matematikai Lapok

1992/1

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 2. évfolyam (1992), 1. szám

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201-7656.
Előfizetési díj 1992-re 450 Ft, egyes szám ára 130 Ft.
Megrendelhető a szerkesztőségtől.

VARIÁCIÓK A RAMSEY TÉMÁRA

In memoriam Gallai Tibor

GYÁRFÁS ANDRÁS[1]

1. KLIKKFEDÉS TÉTEL ÉS GALLAI SZÁMOK

1.1. Intervallumuniók Gallai számai

Az első fejezetben szereplő vizsgálatok előzménye és bizonyos fokig ihletője Gallai egy kérdése volt 1968-ban. Tekintsük a sík két párhuzamos egyenesét, R_1-et és R_2-t. *Szeparált intervallumpárok* rendszerén értsünk olyan véges halmazrendszert (hipergráfot), melynek elemei (élei) R_1 és R_2 egy-egy zárt intervallumának egyesítéseként írhatók. Gallai kérdése az volt, igaz-e, hogy páronként metsző szeparált intervallumpárok rendszerét két pont lefogja? Vezessük be [DGK] nyomán hipergráfok $\mathcal{H}$ családjának $g(\mathcal{H},t)$ Gallai számait:

$$g(\mathcal{H},t) = \sup_{H\in\mathcal{H}} \{\tau(H) : \nu(H) = t\}$$

ahol $\tau(H)$ jelöli H minimális lefogó ponthalmazának számosságát, $\nu(H)$ pedig H páronként diszjunkt éleinek maximális számát.[2]

Szeparált intervallumpárok mintájára vezessük be a szeparált k-intervallumok $\mathcal{S}^k$ családját: ezek olyan véges halmazrendszerek, melynek elemei $R_1, R_2, \ldots, R_k$ párhuzamos egyenesekről vett zárt intervallumok egyesítéseként írhatók. A $k = 1$ esetben $\mathcal{S}^1$ nem más, mint az intervallumrendszerek $\mathcal{I}$ családja, és Gallai egy közismert (publikálatlan) tétele szerint $g(\mathcal{I},t) = t$ minden t természetes számra (ez alapvető tétel a gráfok elméletében). Gallai már említett kérdése az volt, hogy fennáll-e $g(\mathcal{S}^2, 1) = 2$. Ez, valamint $g(\mathcal{S}^k,t) < \infty$ (k és t fix) a következő tétel folyománya.

1.1.1 tétel. *([GYL1])* $g(\mathcal{S}^k,t) \leq g(\mathcal{S}^{k-1},T) + t$, *ahol* $T = \left((t+1)^{k-1} - 1\right)t$.

A tétel bizonyítása a következő lemmán alapszik, mely k szerinti indukcióval könnyen bizonyítható.

---

[1] Az ELTE matematikus szakán 1968-ban szerzett diplomát. Az MTA SZTAKI tudományos főmunkatársa.

[2] A cikk végén, a függelékben ismertetjük a gyakrabban használt jelöléseket és definíciókat.

1.1.2 lemma. *([GYL1]) Legyen $t \geq 2$ és $H_1, H_2, \ldots, H_t \in \mathcal{S}^k$. Ha $\nu(\{A_1, A_2, \ldots, A_t\}) < t$ minden $A_j \in H_j$ választásra, akkor valamely $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$-re $\nu(H_i) < t^k$.*

1.1.3 kérdés. Milyen kisebb függvény írható t^k helyett az 1.1.2 lemmában?

A $k = 1$ esetben a lemma és Gallai tétele ezt adja:

1.1.4 következmény. *Ha $H_1, H_2, \ldots, H_t \in \mathcal{I}$ ($t \geq 2$) és $\nu(\{A_1, A_2, \ldots, A_t\}) < t$ minden $A_j \in H_j$ választásra, akkor valamely $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$-re $\tau(H_i) < t$.*

Ez a következmény a Gallai tétel és a Helly tétel Lovász-féle általánosításának ([LO1]) közös megfogalmazása ($H_1 = H_2 = \ldots = H_t$ esetén az előbbi, $t = 2$ esetén az utóbbi).

1.1.1 tétel bizonyítása. Legyen $H = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ szeparált k-intervallumok rendszere, $\nu(H) = t$. Írjuk A_i-t $A_i = I_i \cup B_i$ alakban, ahol $I_i \subset R_1$, B_i pedig $(k-1)$-intervallum. Definiáljunk R_1-en egy pontsorozatot. Legyen $P_o = -\infty$ és legyen P_j a lehető legjobbra a következő tulajdonság mellett:

$$\nu\Big(\{B_i : I_i \subset (P_{j-1}, P_j)\}\Big) = (t+1)^{k-1} - 1$$

Legyen $H_j = \{B_i : I_i \subset (P_{j-1}, P_j]\}$. Ekkor P_j definíciója miatt $\nu(H_j) = (t+1)^{k-1}$ és 1.1.2 lemma miatt $P_{t+1} = \infty$. Ezért a $P_1, \ldots P_t$ pontokkal le nem fogott H-beli k-intervallumok az $R_2, R_3, \ldots, R_k$ egyeneseken olyan H' $(k-1)$-intervallumrendszert alkotnak, melyre $\nu(H') \leq t\big((t+1)^{k-1} - 1\big)$. Ebből a tétel következik. ■

A $k = 2$, $t = 1$ esetben az 1.1.1 tételből $g(\mathcal{S}^2, 1) \leq 2$ adódik. Mivel $g(\mathcal{S}^2, 1) \geq 2$ triviális példából következik, kapjuk:

1.1.5 következmény. *([GYL1]) $g(\mathcal{S}^2, 1) = 2$.*

Az 1.1.1 tétel bizonyítási módszere már $k = 3$, $t = 1$ esetén is durva, $g(\mathcal{S}^3, 1) \leq$ ≤ 43-at ad. Ezzel szemben az igazság:

1.1.6 tétel. *([GYL1]) $g(\mathcal{S}^3, 1) = 4$.*

Mivel a bizonyítás elég komplikált, mellőzzük. Mindenesetre jó tudni, hogy általában $g(\mathcal{S}^k, 1) \neq k$.

1.1.7 probléma. Kívánatos lenne $g(\mathcal{S}^k, 1)$ jó becslése, esetleg olyan, mely közvetlenül $g(\mathcal{S}^{k-1}, 1)$ függvényében korlátozza $g(\mathcal{S}^k, 1)$-et. Érdekes lenne még $g(\mathcal{S}^2, t)$ helyes nagyságrendje (az 1.1.1 tételből $g(\mathcal{S}^2, t) \leq t^2 + t$ adódik).

1.1.8. Intervallumgráfok uniójának klikkfedése

A $g(\mathcal{S}^k, t)$ Gallai szám interpretálható a következőképpen is. Tekintsük azon G gráfokat, melyekre $\alpha(G) = t$ és melyek felírhatók k intervallumgráf, $G_1, \ldots, G_k$

egyesítéseként. Ekkor $g(S^k,t)$ a minimális m, melyre minden ilyen G gráf csúcsai lefedhetők legfeljebb m olyan teljes gráffal, melyek valamely G_i-ben vannak. Az 1.1.1 tétel szerint m csak k-tól és t-től függ. A klikkfedés tétele (1.2.3') szerint ez akkor is igaz marad, ha csak annyit teszünk fel, hogy nem tartalmaznak a G_i gráfok feszített részgráfként C_4-et (négy pontú kört).

1.1.9. Nem szeparált k-intervallumok Gallai számai

Azt a természetes kérdést is megvizsgáltuk a [GYL1] dolgozatban, hogy mi történik, ha nem követeljük meg a k-intervallumok szeparáltságát, azaz $R_1 = R_2 = = \ldots = R_k = R$. Jelölje $\mathcal{I}^k$ a k-intervallumok családját, tehát $H \in \mathcal{I}^k$, ha H véges sok olyan halmazból áll, melyek R k zárt intervallumának egyesítéseként írhatók.

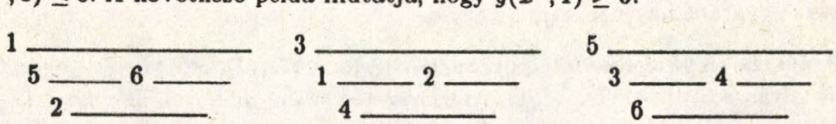
1.1.10 tétel. *([GYL1]) Fix k és t esetén $g(\mathcal{I}^k,t) < \infty$.*

Bizonyítás. (k-intervallumok szeparációja). Legyen $H \in \mathcal{I}^k$, $\nu(H) = t$. Legyen H_1 az a rendszer, melyet H-ból kapunk a k-intervallumok első két komponensét uniójuk konvex burkával pótolva. Ekkor H_1-nek van T_1 transzverzálisa, melyre $|T_1| \leq g(\mathcal{I}^{k-1},t)$. A T_1 által lefogott halmazokat H-ból elhagyva, a maradék második és harmadik komponenseit pótoljuk konvex burkukkal, így kapjuk a H_2 rendszert, melynek megint van $|T_2| \leq g(\mathcal{I}^{k-1},t)$-nek eleget tevő T_2 transzverzálisa. Az eljárást $(k-1)$-szer iteráljuk. Azok a k-intervallumok H-ban, melyeket nem fog le a $T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_{k-1}$ halmaz, szeparálhatók az $x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1}$ pontrendszerek valamelyikével, ahol az x_i-k egymástól függetlenül végigfutnak T_i elemein. Így a bizonyítás az 1.1.1 tételre való hivatkozással fejezhető be. ■

A $k = 2$, $t = 1$ esetben pontos tétel adódik.

1.1.11 tétel. *([GYL1]) $g(\mathcal{I}^2,1) = 3$.*

Bizonyítás. Legyen $H \in \mathcal{I}^2$, $\nu(H) = 1$ és legyen H_1 az az intervallumrendszer, melyet H-ból kapunk az intervallumpárokat konvex burkukkal helyettesítve. Ekkor H_1 lefogható egy $x \in R$ ponttal és H-ból elhagyva az x által lefogott párokat, a többi párt x szeparálja, így 1.1.5 alapján két ponttal lefogható a többi pár. Tehát $g(\mathcal{I}^2,1) \leq 3$. A következő példa mutatja, hogy $g(\mathcal{I}^2,1) \geq 3$:



1.1.12. Fák részerdői

Az előző szakaszok minden kérdése általánosítható úgy, hogy a számegyenes intervallumai helyett egy fa részfáit tekintjük. A [GYL1] eredményei azt mutatják, hogy egyes tételek változatlanul igazak ebben az általánosabb formában. Például az 1.1.5 és 1.1.11 tételekkel ez a helyzet ([GYL1]). Az utóbbi esetben az általánosítás bizonyítása azonban jóval nehezebb az 1.1.11 tételénél. Az egzisztenciatételek

(1.1.1 és 1.1.10) általánosítására a klikkfedés tétel használható (1.3.3 A, 1.3.5). Nem ismert azonban olyan módszer, mellyel Gallai számok egyenlőségét lehetne bizonyítani.

1.1.13 probléma. ([LE]) Igaz-e, hogy k-intervallumok és k komponensű erdők Gallai számai egyenlők?

1.2. Klikkfedés tétel

A szeparált k-intervallumok Gallai számainak korlátossága (1.1.1 tétel) felveti, hogy nem lehetne-e olyan általánosítást találni, mely az intervallumrendszernek csupán bizonyos struktúrális tulajdonságait használja. A [GY1] dolgozatban ilyen egzisztenciatétel szerepel, mely a gráfokra vonatkozó Ramsey tétel lényeges általánosítása és több szempontból is a lehető legtágabb általánosítás. Ezt a tételt fogjuk kimondani és bebizonyítani ebben a szakaszban. Alkalmazásait az 1.3 szakaszban tekintjük át (de az 1.4.2 tételnél is alkalmazzuk). Először szükség van néhány definícióra.

1.2.1. A Q gráfosztály

Jelölje Q azon gráfok osztályát, melyek komplementerében nincs két élnek közös pontja. Ez a gráfosztály igen közel áll a teljes gráfokhoz, $Q = \bigcup_{p,q} Q_{p,q}$ ahol $Q_{p,q}$ jelöli azt a gráfot, melynek komplementere p független élből és q izolált pontból áll. Legyen $Q_p = Q_{p,0}$, ezt szokás $2p$ pontú koktélparti gráfnak, vagy oktaéder gráfnak nevezni. A Q_2 gráf nem más, mint C_4, a négypontú kör. A $Q_{0,q}$ gráf pedig a q pontú teljes gráf, K_q.

1.2.2. Színezett élű gráfok klikkfedési száma

Legyenek a G gráf élei k színnel színezve, egy él több színt is kaphat. Ekkor G klikkfedési száma, $\theta(G)$, jelentse azt a legkisebb m számot, melyre G pontjai lefedhetők m egyszínű teljes részgráf pontjaival. A $k = 1$ esetben a definíció és a jelölés összhangban van a színezetlen gráfok $\theta(G)$ klikkfedési számával, vagyis G komplementerének kromatikus számával. Ezért a $\theta(G)$ jelölést színezett és színezetlen élű gráfokra egyaránt használhatjuk.

1.2.3 tétel. *(Klikkfedés tétel, [GY1]) Rögzített $G_1, G_2, \ldots, G_k \in Q$ gráfokhoz létezik olyan $s = s(G_1, G_2, \ldots, G_k)$ természetes szám, melyre igaz a következő: ha K teljes gráf éleit úgy színezzük k színnel, hogy $\theta(K) \geq s$, akkor valamely i-re $(1 \leq i \leq k)$ K feszítve tartalmazza G_i-t az i színben.*

Megjegyzések.

1. Ha $G_1, G_2, \ldots, G_k$ teljes gráfok és a hozzájuk tartozó Ramsey számot $R = R(G_1, G_2, \ldots, G_k)$ jelöli, akkor

$$s < R \leq \left(\max_{1 \leq i \leq k} |V(G_i)| - 1\right)(s-1) + 1$$

tehát s létezéséből triviálisan következik R létezése.

2. A tételben a $\mathcal{Q}$ gráfosztály nem bővíthető „diagonális" értelemben: ha olyan $\mathcal{H}$ gráfosztályt keresünk, melyre minden $G_1, G_2, \ldots, G_k \in \mathcal{H}$ választás esetén fennáll a tétel, akkor $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Q}$ ([GY1]). Lehetséges azonban „nem diagonális" kérdés, melyre az 1.4.1 szakaszban térünk vissza.

3. A tételben K teljes gráf helyett nyilván tetszőleges G gráfot írhatunk, azon az áron, hogy s nem csak $G_1, G_2, \ldots, G_k$-tól, hanem $\alpha(G)$-től is függ. Így az 1.2.3 tétel következő variánsát kapjuk.

1.2.3' tétel. *([GY1]) A $G_1, G_2, \ldots, G_k \in \mathcal{Q}$ gráfokhoz és α_o természetes számhoz létezik olyan $s = s(G_1, G_2, \ldots, G_k, \alpha_o)$ szám, melyre igaz: ha egy G gráfra $\alpha(G) \leq \alpha_o$ és G éleit úgy színezzük k színnel (egy él több színt is kaphat), hogy $\theta(G) \geq s$, akkor valamely i-re ($1 \leq i \leq k$) G feszítve tartalmazza G_i-t az i színben.*

1.2.3 tétel bizonyítása (osztályozó struktúra keresése).

a. Nyilván elég azt az esetet tekinteni, amikor $G_i = Q_{p_i}$ $(1 \leq i \leq k)$, hiszen tetszőleges $\mathcal{Q}$-beli gráf feszített részgráfja Q_p-nek valamely p-re.

b. A bizonyítás egyszerűbb eleme a Ramsey tételből ismert indukció a $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ vektor komponenseire. A kezdőeset triviális, hiszen $s(Q_{p_1}, Q_{p_2}, \ldots, Q_{p_k}) = 1$ ha bármelyik $p_i = 1$.

c. A bizonyítás lelke az „osztályozó struktúra" rekurzív definíciója. A $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ színhalmazzal színezett K teljes gráfban $H(C)$ osztályozó struktúrát így definiáljuk: ha $C = \{c_i\}$ (azaz $|C| = 1$), akkor $H(C)$ egy olyan él K-ban, mely nincs a c_i színnel színezve. Ha $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ és $k \geq 2$ akkor legyen $H(C)$-nek egy kitüntetett x pontja, melyet $H(C)$ centrumának nevezünk. A $H(C) - x$ legyen felírható $T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k$ alakban, ahol tetszőleges $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$--re igaz:

— T_i osztályozó struktúra a $C - \{c_i\}$ színhalmazra

— ha $y \in V(T_i)$, akkor az xy élen nincs c_i szín

Példa:

$C = \{1\}$ $\qquad\qquad$ $C = \{1,2\}$

(A felülvonás azt jelenti, hogy az élen nem szerepel az illető szín.)

Az osztályozó struktúra definíciójából bizonyíthatók az alábbi állítások.

d. állítás. Egy osztályozó struktúra pontszáma felülről becsülhető a színszám (k) függvényében.

e. állítás. Tegyük fel, hogy K élei a $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ színhalmazzal vannak színezve és $H(C)$ egy osztályozó struktúra K-ban. Ekkor minden $y \in V(K) - V(H)$ beosztható $H(C)$ valamely u, v pontpárjához úgy, hogy valamely i-re $(1 \le i \le k)$ az uv élen nincs c_i szín, de az yu és yv éleken van c_i szín.

Ha K $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ színhalmazzal való színezésében van $H(C)$ osztályozó struktúra, akkor **e.** alapján $V(K) - H(C)$ pontjai legfeljebb $k\binom{|H|}{2}$ csoportba oszthatók és minden csoport klikkfedése korlátos **b.** alapján. A csoportok száma a **d.** állítás miatt korlátos. Így a bizonyítás teljes, ha belátjuk:

f. állítás. Ha K teljes gráf $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ színhalmazzal színezésében nincs $H(C)$ osztályozó struktúra, sem Q_{p_i} feszítve az i színben, akkor $\theta(K)$ korlátos.

Ezt az állítást a **b.** indukció és k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Jelölje L_{c_i} K azon pontjait, melyek $\overline{c}_i$-környezetében nincs $C - \{c_i\}$ színekre osztályozó struktúra. (Az u pont $\overline{c}_i$-környezete azon v pontokból áll, melyekre uv nem c_i színű.) Elég $\theta(L_{c_i})$ korlátosságát belátni, mert az L_{c_i} halmazok egyesítése $V(K)$. Legyen uv olyan él L_{c_i}-ben, melyen nincs c_i szín. Az L_{c_i} definíciója miatt u (és v) $\overline{c}_i$-környezetei L_{c_i}-ben nem tartalmaznak $C - \{c_i\}$-re osztályozó struktúrát, így k-ra vonatkozó indukcióra hivatkozhatunk. Az L_{c_i} azon pontjainál, melyek mind u, mind v c_i-környezetében benne vannak, a korlátos fedés **b.**-ből következik.

1.3. A klikkfedés tétel alkalmazásai

Legyen G egy gráf. A H hipergráfot G-mentesnek nevezzük, ha metszésgráfja, $L(H)$, nem tartalmazza G-t feszített részgráfként. Egy hipergráfcsalád G-mentes, ha minden hipergráfja G-mentes. A klikkfedés tételt először arra alkalmazzuk, hogy hipergráfok összegének részhipergráfjaira bizonyítsuk a Gallai számok korlátosságát.

1.3.1. Hipergráfok összege, többszörözése

Legyenek $H_1, H_2, \ldots, H_k$ hipergráfok. Összegük, $\sum H_i$, az a hipergráf, melynek ponthalmaza $\cup V(H_i)$, élhalmaza pedig $\{e = e_1 \cup e_2 \cup \ldots \cup e_k : e_i \in H_i\}$. Amennyiben $H_1 = H_2 = \ldots = H_k = H$, akkor H többszörözéséről (k-szorozásáról) beszélünk, melyet H^k-val jelölünk. Az összeg ezen definíciója ugyanaz, mint a „join" ([BERGE] 488.old.) vagy „union" ([WELSH] 288.old.). Ha például $R_1, R_2, \ldots, R_k$ a sík párhuzamos egyenesei és H_i az R_i összes zárt intervallumainak hipergráfja, akkor $\sum H_i$ részhipergráfjainak családja nem más, mint S^k, a szeparált k-intervallumok családja. Ha a példát úgy módosítjuk, hogy $R_1 = R_1 = \ldots = R_k = R$ és H az R összes zárt intervallumából álló hipergráf, akkor H^k részhipergráfjainak családja $\mathcal{I}^k$ lesz, a k-intervallumok családja.

1.3.2. Diszjunkt összeg részhipergráfjainak Gallai számai

A klikkfedés tétel közvetlen alkalmazása az

1.3.3-tétel. *([GY1]) Legyenek $G_1, G_2, \dots, G_k \in Q$ gráfok és $H_1, H_2, \dots, H_k$ pont-diszjunkt hipergráfok. Tegyük fel, hogy H_i G_i-mentes és $g(\text{rész}(H_i), 1) < \infty$. (rész$(H)$ jelöli H véges sok élből álló részhipergráfjainak családját, lásd 4.1). Ekkor $g(\text{rész } (\sum H_i), t) < \infty$.*

Bizonyítás. Legyen $H \in$ rész $(\sum H_i)$ és $\nu(H) = t$. Jelölje G H metszésgráfját, ekkor $\alpha(G) = \nu(H) = t$. Színezzük ki G éleit a következőképpen. Ha $e, f \in H$ és $e = e_1 \cup e_2 \cup \dots \cup e_k$, $f = f_1 \cup f_2 \cup \dots \cup f_k$, továbbá $e \cap f \neq \emptyset$, akkor G $v_e v_f$ élét színezzük mindazon j színekkel, melyekre $e_j \cap f_j \neq \emptyset$. A H_i hipergráfok diszjunktsága miatt G minden éle színezve van és 1.2.3' tételt alkalmazva kapjuk, hogy $\theta(G)$ korlátos. A G klikkfedésének egyszínű klikkjei viszont páronként metsző éleknek felelnek meg H_i-ben, melyek $g(\text{rész}(H_i), 1) < \infty$ ponttal lefoghatók.

Az 1.3.3. tétel olyan H hipergráfra alkalmazható, mely G-mentes valamely $G \in Q$-ra és $g(\text{rész}(H), 1) < \infty$. A következő példák az intervallumok különböző irányú általánosításai, így ezekre alkalmazva az 1.3.3 tételt, az 1.1.1 tétel különböző általánosításait kapjuk.

A. Fák részfái. Legyen H egy fa részfáiból álló hipergráf. Ekkor H Q_2-mentes (sőt, metszésgráfja merevkörű) és $g(\text{rész}(H), 1) = 1$ (Helly tulajdonság).

B. A d dimenziós tér téglái (boxai). Ha H hipergráf élei a d dimenziós tér tengelypárhuzamos oldalú téglái (boxok), akkor H Q_{d+1}-mentes ([RO]) és nyilván $g(\text{rész}(H), 1) = 1$.

C. Homotetikus konvex sokszögek. Legyen P a sík egy konvex sokszöge. Ha $H = H(P)$ hipergráf élei azok a sokszögek, melyek P-ből pozitív homotéciával állnak elő, akkor $g(\text{rész}(H), 1) < \infty$ ([DGK]). Másrészt H Q_{h+1}-mentes, ahol h jelöli P oldalirányainak számát ([GY1]).

1.3.4. Többszörözés részhipergráfjainak Gallai száma

Az 1.3.3 tételben lényeges a hipergráfok diszjunktsága, így az csak szeparált rendszerek Gallai számainak korlátosságát mutathatja. A Q_2-mentes hipergráfokra viszont többszörözés esetén is igaz az 1.3.3 megfelelője. A következő tétel ezért 1.1.10 általánosítása.

1.3.5 tétel. *([GYL3]) Ha H hipergráf Q_2-mentes és $g(\text{rész}(H), 1) < \infty$, akkor $g(\text{rész}(H^k), t) < \infty$. ($k, t$ rögzített.)*

Bizonyítás. Legyen $M \in \text{rész}(H^k)$, $\nu(M) = t$. Minden $e_i \in M$ él felírható $e_i = e_{i1} \cup e_{i2} \cup \dots \cup e_{ik}$ alakban, ahol $e_{ij} \in H$. Nevezzük e_{ij}-t e_i j-edik komponensének. Jelölje G M metszésgráfját és színezzük ki G éleit a következő módon. Ha e_i és e_j M két metsző éle, i és j jelölje G megfelelő pontjait. Színezzük G ij élét

— p színnel ($1 \leq p \leq k$) ha e_i és e_j p-edik komponensei metszők (egy él itt több színt is kaphat),

— kékkel, ha e_i-nek és e_j-nek van közös komponense,

— pirossal, ha az előzőkben nem kapott színt.

Ilymódon G minden élét kiszíneztük legalább egy színnel, legfeljebb $k+2$ színt használva. Az $1,2,\dots,k$ színekben G nem tartalmazhatja feszítve Q_2 gráfot, mert H Q_2-mentes. Könnyű belátni, hogy G kék színben nem tartalmazhat k^2-nél több pontú klikket. Tegyük fel, hogy G piros színben tartalmaz egy K_s klikket, az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy K_s pontjai $1,2,\dots,s$. Tekintsük azt a T gráfot, melynek x_{ij} pontjai $e_{ij} \in H$ éleknek felelnek meg, $i = 1,2,\dots,s$ és $j = 1,2,\dots,k$. Ha $i_1 \neq i_2$ akkor az $x_{i_1j_1}$ és $x_{i_2j_2}$ pontok között T-ben pontosan akkor legyen él, ha $e_{i_1j_1} \cap e_{i_2j_2} \neq \emptyset$. A piros élek definíciójából következik, hogy $j_1 = j_2$ esetén $x_{i_1j_1}$ és $x_{i_2j_2}$ közt nincs él T-ben, továbbá bármely $i_1 \neq i_2$ esetén van olyan j_1 és j_2, hogy $x_{i_1j_1}$ és $x_{i_2j_2}$ között van él T-ben. Ezért T k-osztályú gráf, melynek legalább $\binom{s}{2}$ éle van, így van két olyan osztálya, melyek között legalább $\binom{s}{2}/\binom{k}{2}$él van. Jól ismert sűrűségtétel szerint ([GRS]) 95.old.) e két osztály közötti élek C_4-et határoznak meg, ha s elég nagy, ez pedig ellentmond annak, hogy H Q_2-mentes. Tehát s nem lehet nagyobb ck^2-nél.

A G gráf tehát $k+2$ színnel színezett, $\alpha(G) = t$, és minden színben tiltott Q osztály valamely gráfja. Ebből 1.2.3' tétellel következik tételünk. ■

Az 1.3.5 tétel Q_2 helyett Q_3-mal már nem igaz, ezt a következő példa mutatja ([GYL3]). Legyen H a sík függőleges és vízszintes egyeneseiből álló hipergráf, H Q_3-mentes és $g(\text{rész}(H),1) = 1$. Viszont az $x = i$, $y = i$ egyenespárok $i = 1,2,\dots,n$-re H^2-nek olyan M részhipergráfját adják, melyre $\nu(M) = 1$, $\tau(M) = \lceil n/2 \rceil$ és így $g(\text{rész}(H^2),1) = \infty$.

1.3.6. Magasabb dimenziós Gallai számok

Definiáljuk $\mathcal{H}$ hipergráfcsalád p-dimenziós Gallai számait $1 \leq p \leq t$ esetén:

$$g(\mathcal{H},t,p) = \sup_{H\in\mathcal{H}} \{\tau(H) : \nu_p(H) = t\}$$

ahol $\nu_p(H)$ jelenti H azon éleinek maximális számát, melyek között nincs $p+1$ élnek közös pontja. Mivel $\nu_1(H) = \nu(H)$, az eddig definiált Gallai számok az egydimenziós Gallai számok. A klikkfedés tételt az 1.3.5 tétel bizonyításában látott módon használva, Lehel bebizonyította az 1.3.5 következő általánosítását.

1.3.7 tétel. *([LE]) Legyen H Q_{d+1}-mentes hipergráf, $g(\text{rész}(H),1) < \infty$ és $p = \min(k,d)$. Ekkor (fix t,d,k – ra) $g(\text{rész}(H^k),t,p) < \infty$.*

Ez a tétel $d = 1$ esetén az 1.3.5 tételt adja. Fő alkalmazása az, amikor H a d dimenziós téglák hipergráfja.

Régi nyitott kérdés, hogy igaz-e $g(\text{rész}(H),3,2) < \infty$ a sík konvex halmazaiból álló H hipergráfra ([DGK]). Ennél gyengébb állítást be lehet látni a klikkfedés tétel segítségével.

1.3.8 tétel. *Jelölje $\mathcal{H}_j$ a sík konvex halmazaiból álló olyan H hipergráfok családját, melyekhez van olyan $H' \subset H$, melyre $|H'| \leq j$ és $\tau(H') = 3$. Ekkor $g(\mathcal{H}_j, 3, 2) < \infty$ (j fix).*

1.4. A klikkfedés tétel általánosítási lehetőségei

1.4.1 Nem diagonális eset gráfokra

A klikkfedés tételnél azt a legszélesebb gráfosztályt határoztuk meg (a $\mathcal{Q}$ gráfosztályt), melyre minden $G_1, G_2, \ldots, G_k \in \mathcal{Q}$ esetén a K teljes gráf éleinek minden $\theta(K) \geq f(G_1, G_2, \ldots, G_k)$ feltételnek eleget tevő k-színezésében valamely i-re $(1 \leq i \leq k)$ K az i színben feszítve tartalmazza G_i-t. Ez diagonális Ramsey típusú tétel. A nem-diagonális esetnek az felel meg, hogy olyan $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_k$ gráfosztályokat keressük, melyekre $G_i \in \mathcal{G}_i$ tetszőleges választására K teljes gráf éleinek minden „nagy klikkfedésű" k-színezésében lesz G_i feszítve az i színben. A [GY2] konstrukció alapján kiderül, hogy triviális esetektől eltekintve csak két lehetőség van a $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_k$ osztályok választására:

(1) Minden $\mathcal{G}_i = \mathcal{Q}$

(2) Egy kivételével minden $\mathcal{G}_i$ teljes gráfokból áll, a kivételes osztály pedig olyan gráfokból, melyek komplementerében nincs kör.

Az (1) esetet a klikkfedés tétel elintézi. A (2) esetben egyszerű megfontolás mutatja, hogy elég a $k = 2$ esetre szorítkozni, továbbá feltételezhető, hogy K olyan 2-színezéséről van szó, melyben minden élnek egyetlen színe van. Ezen redukciók után a (2) feltételnek megfelelő klikkfedési probléma a következő sejtéshez vezet.

1.4.2. Feszített fa sejtés. ([GY2], [SU]) Legyen F körnélküli gráf, p pedig természetes szám. Van olyan $m = m(F, p)$ szám, hogy amennyiben G gráfra $\omega(G) \leq p$ és $\chi(G) \geq m$, akkor F feszített részgráfja G-nek.

Ez a sejtés vezetett a χ-korlátos gráfok vizsgálatához, melyet a második fejezetben tárgyalunk.

1.4.3. Nem-diagonális klikkfedés hipergráfokra

A [GY1]-ben már szerepel az a megjegyzés, hogy a diagonális klikkfedés tétel hipergráfokra már nem ad újat a Ramsey tételhez képest. Pontosabban, r-uniform hipergráfok esetén a diagonális klikkfedés tétel csak arra az osztályra áll, mely a teljes r-uniform hipergráfokat és azt a (triviális) hipergráfot tartalmazza, melynek r pontja van és nincs éle. A gráfokhoz hasonlóan, itt is csak akkor van remény klikkfedés tételre, ha $\mathcal{H}_1$ teljes hipergráfokból áll, $\mathcal{H}_2$ pedig olyan hipergráfokból, melyek komplementerében nincs kör. A legelső eset a 3-uniform hipergráfok esete, $H_1 = K_4^3$, $H_2 = K_4^3 - e$ választással. Ebben az esetben igaz a klikkfedés tétel és a bizonyítás a gráfok diagonális klikkfedés tételét használja $Q_2 \in \mathcal{Q}$ választással, két színre. Az 1.4.4 tétel után két kunstrukció következik, melyek azt mutatják, hogy a tétel nem általánosítható bizonyos értelemben.

1.4.4 tétel. *Van olyan c konstans, melyre igaz: ha H 3-uniform hipergráfra $\alpha(H) = 3$ és $K_4^3 - e$ nem feszített részhipergráfja H-nak, akkor $\theta(H) \leq c$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $ABC \notin H$. A $V(H) - \{A, B, C\}$ partícionálható X_1, X_2, X_3 halmazokra, hogy $PAB \notin H$ ha $P \in X_1$, $PAC \notin H$ ha $P \in X_2$, $PBC \notin H$ ha $P \in X_3$. Elég belátni, hogy X_1 lefedhető c klikkel. Legyen $D, E \in X_1$, $D \neq E$. Mivel $DAB, EAB \notin H$, $DEA \in H$ vagy $DEB \in H$ ($\alpha(H) = 3$ feltétel miatt). Ezért X_1 felfogható egy két színnel (A és B) színekkel színezett teljes gráfnak, melyet K_1-el jelölünk (egy él két színt is kaphat). A K_1 egyszínű klikkjei H-ban is klikket feszítenek a $K_4^3 - e$ tiltása miatt. Tegyük fel, hogy K_1-ben van egy egyszínű feszített Q_2, mondjuk A színben. Mivel $\alpha(H) = 3$, Q_2 valamely hárompontú részhalmaza él H-ban. Ezen él pontjaihoz A-t hozzávéve $K_4^3 - e$ keletkezik H-ban, ami ellentmondás. Tehát K_1 színezésében nincs egyszínű Q_2, ezért a klikkfedés tétel (1.2.3) alapján a tétel következik.

1.4.5 kérdés. Mi c legkisebb értéke 1.4.4-ben?

1.4.6 konstrukció. Az 1.4.4 tétel $\alpha(H) = 4$ esetén már nem igaz. Tetszőleges p pozitív egészre legyen G_p olyan gráf, melyre $\theta(G_p) \geq p$ és G_p komplementere nem tartalmaz 3,4,5 hosszúságú köröket ([EH2]). Ekkor G_p pontjain definiáljuk H 3-uniform hipergráfot úgy, hogy $ABC \in H$ akkor és csak akkor, ha ABC a G_p gráfban K_3-mal izomorf.

1.4.7 konstrukció. Az 1.4.4 tétel nem igaz r-uniform hipergráfra $r \geq 4$ esetén. Legyen $r \geq 4$ és H' olyan $(r-1)$-uniform hipergráf, melynek komplementerében nincs 2 és 3 hosszúságú kör, továbbá $\theta(H') = p$. Ilyen hipergráf létezése jól ismert ([LO4], [NERÖ]). Definiáljuk H-t H' ponthalmazán úgy, hogy H egy r elemű részhalmaza pontosan akkor él, ha H'-ben klikket határoz meg.

1.4.8. Klikkfedés tiltott részhipergráf nélkül

Korlátos klikkfedést tiltott részgráf (vagy részhipergráf) nélkül is lehet garantálni, ha elég erős metszetfeltételt teszünk fel. Érdekes, hogy a korlátosság határa pontosan megállapítható.

1.4.9 tétel. *([GY3]) Legyenek $r, m \geq 2$ természetes számok, $M = rm + i$, $0 \leq i < r$. Ha H r-uniform hipergráf, melyben bármely M pont között van $M - m + 1$ pontú klikk, akkor $\theta(H) \leq m + 1$. Ha csak azt tesszük fel, hogy bármely M pont között $M - m$ pontú klikk van, akkor $\theta(H)$ tetszőleges nagy lehet (nem függ r, m, i-től).*

A tétel egyszerűen bizonyítható, és a következő kérdést veti fel.

1.4.10 kérdés. Igaz-e 1.4.9 tétel $\theta(H) \leq m$ következtetéssel? (Könnyű látni, hogy $\theta(H) \leq m - 1$ már nem igaz.) Az $r = 2$ eset könnyű (1.4.11). A legérdekesebbnek az $m = 2$ eset látszik, mivel ekkor $\theta(H) \leq 2$-t kellene bizonyítani, ami a

2-színezhetőség komplementer fogalma. Ebben az alakban a kérdés így szól: ($m = 2$, $i = 0$) ha H r-uniform hipergráf legalább $2r$ pontú és bármely $2r$ pontja közti élek egy ponttal lefoghatók, akkor H 2-színezhető?

1.4.11 tétel. *(GYUP1) Ha a G gráfra $|V(G)| \geq 2m$ és G bármely $2m$ pontja közt van $m+1$ pontú klikk, akkor $\theta(G) \leq m$.*

Bizonyítás. Indukció $|V(G)|$-re. Ha $|(V(G)| = 2m$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $|V(G)| = n > 2m$, akkor legyen $x \in V(G)$. Indukció miatt $\theta(G - x) = m$ és feltehető, hogy x nincs összekötve legalább m ponttal G-ben. Ezért G egy m pontú teljes részgráfjának $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pontjaihoz válaszhatók $b_1, b_2, \ldots, b_m$ különböző pontok úgy, hogy $a_i b_i \notin E(G)$ $i = 1, 2, \ldots, m$. Az a_i és b_i pontok által feszített részgráf megsérti a tétel feltételét. ■

2. χ-KORLÁTOS GRÁFOSZTÁLYOK

Definiáljuk a χ-korlátos gráfok osztályát, ennek előzményei az 1. fejezetben, illetve [GY2], [GYL3] dolgozatokban szerepeltek. A fogalom és a felmerülő alapproblémák szisztemetikus vizsgálata [GY6] és [GY7]-ben történt, sok nyitott kérdést kitűzve. Itt nagyjából [GY7] tárgyalását követem, kiegészítve χ-korlátos gráfosztályok on-line színezési algoritmusaihoz kapcsolódó eredményekkel ([GYL5], [GYL7], [GYL8]).

A χ-korlátosság komplementáris fogalma a θ-korlátosság. Kérdés, hogy a perfekt gráf tételhez ([LO3]) hasonló tétel összekapcsolja-e a két fogalmat (2.6). A χ-korlátossággal analóg (és ahhoz kapcsolódó) fogalmak hipergráfokra is vizsgálhatók. Ilyen fogalom például a τ-korlátosság, melynek duális fogalma a ρ-korlátosság ([GYL3]). Az előbbi a Gallai számok korlátosságának felel meg (1. fejezet), az utóbbira [GYL3]-ban és [BL]-ben vannak példák.

2.1. χ-korlátos és θ-korlátos gráfok

Egy $f : N \to N$ függvényt χ-korlát függvénynek nevezünk $\mathcal{G}$ gráfcsaládra, ha minden $G \in \mathcal{G}$ és minden $G' \subset G$ feszített részgráfra

$$\chi(G') \leq f(\omega(G')).$$

A $\mathcal{G}$ gráfcsalád χ-korlátos, ha létezik χ-korlát függvénye. Ha $\mathcal{G}$ család χ-korlátos, akkor van legkisebb χ-korlát függvénye, nevezetesen

$$f^*(x) = \max\{\chi(G') \ : \ G' \subset G \in \mathcal{G},\ \omega(G') = x\}$$

A χ-korlátosság komplementáris fogalma a θ-korlátosság. Egy $\mathcal{G}$ gráfcsalád θ-korlátos f θ-korlát függvénnyel, ha

$$\theta(G') \leq f\big(\alpha(G')\big)$$

teljesül minden $G' \subset G \in \mathcal{G}$-re ($G'$ feszített részgráfja G-nek). Nyilván $\mathcal{G}$ θ-korlátos f θ-korlát függvénnyel pontosan akkor, ha $\overline{\mathcal{G}}$ χ-korlátos f χ-korlát függvénnyel ($\overline{\mathcal{G}}$ jelöli $\mathcal{G}$ komplementereiből álló családot).

Példaként tekintsünk néhány geometriailag definiált hipergráfcsalád metszésgráfjait.

A. Húrgráfok (kör húrjainak metszésgráfjai, lásd[GO]). Itt a legkisebb χ-korlát legfeljebb exponenciális ([GY5], [KO]), de nem lineáris ([KO]). Ugyancsak Kostochka tétele, hogy a legkisebb θ-korlát $\Omega(x \log x)$.

B. Box gráfok (a sík tengelypárhuzamos oldalú téglalapjaiból álló hipergráfok metszésgráfjai). A legkisebb χ-korlát függvény legfeljebb $O(x^2)$ és $f^*(2) = 6$ ([AG]). Igen meglepő, hogy a 3-dimenziós box gráfok osztálya nem χ-korlátos ([BUR]). A legkisebb θ-korlátra Károlyi nemrég bebizonyította, hogy legfeljebb $O(x \log x)$.

C. k-intervallum gráfok (k-intervallumok metszésgráfjai). A θ-korlátosság itt 1.1.10 tételből következik. A χ-korlátosság bizonyítása egyszerűbb, és lineáris $\big(2k(x-1)\big)$ korlátfüggvény van ([GY5]).

2.2. A feszített fa sejtés

Jelölje $\mathcal{G}(G)$ a G gráfot feszítve nem tartalmazó gráfok osztályát. Ekkor a feszített fa sejtés (1.4.2) így fogalmazható.

2.2.1 sejtés Ha F erdő, akkor $\mathcal{G}(F)$ χ-korlátos.

A sejtést elég fákra belátni, hiszen minden F erdő feszített részgráfja egy fának. Így azonban minden T fára igazolni kellene $\mathcal{G}(T)$ χ-korlátosságát ahhoz, hogy $\mathcal{G}(F)$ χ-korlátossága következzen. Ezért hasznos a következő

2.2.2 propozíció. *Ha F erdő minden C komponensére $\mathcal{G}(C)$ χ-korlátos, akkor $\mathcal{G}(F)$ is χ-korlátos.*

2.2.3 tétel. *([GY7]) Jelölje P_n az n pontú utat. A $\mathcal{G}(P_n)$ osztály χ-korlátos és legkisebb $f_n^*(x)$ korlátfüggvényére fennáll*

$$\frac{R(\lceil \frac{n}{2} \rceil, x+1) - 1}{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \leq f_n^*(x) \leq (n-1)^{x-1}$$

Megjegyzés. Az $n = 3$ és $n = 4$ esetekben az alsó korlát x és ez pontos, mivel $\mathcal{G}(P_3)$ és $\mathcal{G}(P_4)$ perfekt gráfosztályok. Az $n = 5$ esetben azonban csak exponenciális felső korlát ismeretes $f_5(X)$-re. Érdekes lenne eldönteni, hogy van-e polinomiális korlát.

Ha van, következne belőle Erdős és Hajnal egy problémájának speciális esete: van olyan ε, hogy ha $g \in \mathcal{G}(P_5)$, $|V(G)| = n$, akkor G vagy $\overline{G}$ tartalmaz egy legalább n^{ε} pontú teljes részgráfot (sejtés szerint ez P_5 helyett tetszőleges gráfra igaz).

2.2.3 bizonyítása. Fix n mellett $\omega(G)$-re vonatkozó indukció, melynek kezdő esete $(\omega(G) = 1)$ triviális. Az indukciós feltételt használva a következő állítást lehet bizonyítani, mely ($R_1R_2 \dots R_n$ feszített utat mutatva G-ben) ellentmondásra vezet.
Állítás. Ha $G \in \mathcal{G}(P_n)$ és $\chi(G) > (n-1)^{\omega(G)-1}$ akkor definiálhatók $V(G) \supset V(G_1) \supset V(G_2) \supset \dots \supset V(G_n)$ részgráfok és $R_i \in V(G_i)$ pontok, melyekre minden $i \in \{1, 2, \dots, n\}$-re teljesül:

(i) G_i összefüggő részgráf G-ben

(ii) $\chi(G_i) > (n-i)(n-1)^{\omega(G)-1}$

(iii) Ha $1 \le j < i$ és $R \in V(G_i)$ akkor R_jR pontosan akkor éle G-nek, ha $j = i-1$ és $R = R_i$. ■

A csillag esete jóval egyszerűbb az úténál. Ha $K_{1,n}$ jelöli az n élű csillagot, akkor igaz

2.2.4 propozíció. *([GY7]) A $\mathcal{G}(K_{1,n})$ legkisebb $f_n^*(x)$ χ-korlát függvényére*

$$\frac{R(n, x+1) - 1}{n-1} \le f_n^*(X) \le R(n, x)$$

A faktor, mK_2 esetén a klikkfedés tétel bizonyítása $O(x^{2(m-1)})$ χ-korlát függvényt ad a $\mathcal{G}(mK_2)$ osztályra, ez explicit formában szerepel [WA]-ban.

2.2.5. Kis erdők χ-korlát függvényei

Kis erdők esetén a legkisebb χ-korlát függvények Ramsey számok közelében vannak. A következő eredmények [GY7]-ből valók (az első két esetben a korlátok kielégítőek, az utóbbi két esetben nem világos a helyes nagyságrend).

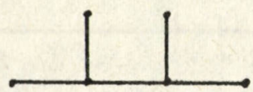
1. $\mathcal{G}(4K_1)$ $\qquad \frac{R(4, x+1) - 1}{3} \le f^*(x) \le \frac{R(4, x+1) + 2R(3, x+1)}{3}$
2. $\mathcal{G}(P_3 + K_1)$ $\qquad \frac{R(3, x+1) - 1}{2} \le f^*(x) \le \frac{R(3, x+1) + x - 2}{2}$
3. $\mathcal{G}(K_2 + 2K_1)$ $\qquad \frac{R(3, x+1) - 1}{2} \le f^*(x) \le \binom{x+1}{2} + x - 1$
4. $\mathcal{G}(2K_2)$ $\qquad \frac{R(C_4, K_{x+1})}{3} \le f^*(x) \le \binom{x+1}{2}$

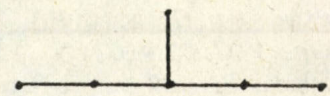
A 4. esetben a felső korlátot a klikkfedés tétel módszere adja, explicit formában szerepel [WA]-ban. Az alsó becslés (ahol a négyes kör-teljes gráf Ramsey száma áll) Chung ([CHU]) eredménye alapján legalább $cx^{1+\varepsilon}$. A probléma újra felmerül

Erdős és El-Zahar ([EEL]) dolgozatában, melynek kapcsán Nagy és Szentmiklóssy 20 dollárt keresett $f^*(3) = 4$ bizonyításával.

Legfeljebb öt pontú F erdőkre $\mathcal{G}(F)$ χ-korlátossága miatt ismert, hatpontúak között van két hiányzó eset.

5. Probléma. Bizonyítsuk $\mathcal{G}(F)$ χ-korlátosságát, ha F a következő két fa valamelyike:





2.2.6. Háromszögmentes gráfok

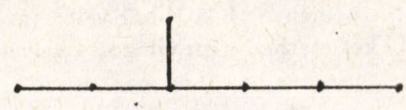
A feszített fa sejtés még akkor is nyitott a legtöbb fára, ha háromszögmentes gráfokra szorítkozunk. Itt az út mellett a kétszintes fákra van megoldva a sejtés. Egy fa kétszintes, ha valamely pontjából minden más pont elérhető legfeljebb két élű úton.

2.2.7 tétel. *([GYSZT]) Legyen F rögzített kétszintes fa. Ha $G \in \mathcal{G}(F)$ és $K_3 \not\subset G$, akkor $\chi(G) \leq c = c(F)$.*

A bizonyítás nehéz, ezért mellőzöm. Ha C_3 mellett C_4 is tiltott gráf, akkor a feszített fa sejtés könnyen bizonyítható minden fára.

2.2.8 tétel. *([GYSZT]) Legyen F rögzített k pontú fa. Ha $G \in \mathcal{G}(F)$, $C_3, C_4 \not\subset G$, akkor $\chi(G) \leq k$.*

2.2.9 probléma. Háromszögmentes gráfok esetén a legkisebb fa, melyre a feszített fa sejtés nyitott:



2.3. Irányított részfák tiltása

Érdekes lehet annak vizsgálata, mi történik, ha irányított fákra nézzük a feszített fa sejtést. Ennek ötlete más témából ered. Egy irányított D gráf k-tranzitív, ha bármely k élű $P_1P_2 \ldots P_kP_{k+1}$ irányított útjára P_1P_{k+1} él D-ben. Ez a fogalom Hararytól származik, néhány eredmény van [GYJK]-ban. Igaz-e, hogy a k-tranzitívan irányítható gráfok osztálya χ-korlátos. (A $k = 2$ esetben a tranzitívan irányítható gráfok osztályáról van szó, ami perfekt.) A $k = 3$ esetben ahhoz a problémához jutunk, hogy χ-korlátos-e az irányított P_4-et feszítve nem tartalmazó irányított gráfok osztálya. Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen T egy irányított fa és

$\mathcal{G}(T)$: azon gráfok osztálya, melyek irányíthatók úgy, hogy nincs bennük T feszített részként

$\mathcal{G}_{AC}(T)$: azon gráfok osztálya, melyek aciklikusan irányíthatók feszített T nélkül.

Kérdés, hogy $\mathcal{G}_{AC}(T)$ (vagy általánosabban) $\mathcal{G}(T)$ mikor lesz χ-korlátos. Az eredmények és kérdések a következők. (Irányított részgráfokat feszítve tartalmazó gráfok és Ramsey elmélet kapcsolatáról lásd [CD]-t.)

2.3.1. P_4 **irányításai** ([GY9]

A. A $\mathcal{G}_{AC}$ ($\bullet\!\to\!\bullet\!\to\!\bullet\!\leftarrow\!\bullet$) osztály Chvátal tétele ([CH2]) szerint perfekt. **Kérdés:** $\mathcal{G}$ ($\bullet\!\to\!\bullet\!\to\!\bullet\!\leftarrow\!\bullet$) χ-korlátos?

B. Kérdés: $\mathcal{G}_{AC}$ ($\bullet\!\to\!\bullet\!\to\!\bullet\!\to\!\bullet$) χ-korlátos?

C. Meglepetés: $\mathcal{G}_{AC}$ ($\bullet\!\to\!\bullet\!\leftarrow\!\bullet\!\to\!\bullet$) **nem** χ-korlátos.

Tekintsük a jól ismert Erdős–Hajnal gráfot ([EH1]), melynek pontjai az (i,j) párok $1 \leq i < j \leq n$ esetén és (a,b), (c,d) pontok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $b = c$ vagy $a = d$. Az előbbi esetben legyen az irányítás $(a,b) \to (b,d)$, az utóbbiban $(c,d) \to (b,d)$. Ennél az irányításnál nincs ($\bullet\!\to\!\bullet\!\leftarrow\!\bullet\!\to\!\bullet$) feszítve, $\omega(G_n) = 2$, $\chi(G_n) = \lfloor \log n \rfloor$ ([LO2]).

2.3.2. Csillagok. Jelölje $S_{i,j}$ azt az irányított csillagot, melynek befoka i, kifoka j. Könnyen bizonyítható, hogy $\mathcal{G}(S_{0,j})$ χ-korlátos, kevésbé egyszerű, hogy $\mathcal{G}_{AC}(S_{1,j})$ is az. Nem világos azonban, hogy $\mathcal{G}(S_{1,2})$ és $\mathcal{G}_{AC}(S_{2,2})$ χ-korlátos-e.

2.4. Több részgráf tiltása

Egy részgráf helyett több (esetleg végtelen sok) részgráf tiltásának is fontos szerepe van a χ-korlátosságnál. Például Kierstead bebizonyította, hogy $K_{1,3}$ és K_5-e tiltása esetén $x + 1$ a legkisebb χ-korlát függvény ([KI2]), és ez általánosan is igaz ([KI3]). Hasonló eredmény van [DH]-ban. Nyitott kérdés például, hogy χ-korlátos-e a négynél hosszabb köröket feszítve nem tartalmazó gráfok osztálya ([GY7]). Egyik legmeglepőbb kérdés, hogy χ-korlátos-e a Berge gráfok osztálya ([GYL3]).

Ha (mint a Berge gráfok esetén) a tiltott gráfok osztálya komplementerképzésre zárt, akkor a χ- és θ-korlátosság (és a legkisebb χ- és θ-korlát függvény) ugyanazt jelenti. A következő két tétel [GY7]-ből való.

2.4.1 tétel. *$\mathcal{G}(K_{1,3}, \overline{K}_{1,3})$ legkisebb korlátfüggvénye $\lfloor 3x/2 \rfloor$.*

Bizonyítás. Ha $G \in \mathcal{G}(K_{1,3}, \overline{K}_{1,3})$ és G nem perfekt, akkor Parthasarathy és Ravindra tétele ([PARA]) miatt G-ben van feszített részgráfként legalább öt pontú páratlan kör, vagy komplementere. Nem nehéz belátni, hogy a többi pontja G-nek vagy teljesen össze van kötve ezzel a részgráffal, vagy egyáltalán nincs vele összekötve. Ebből indukcióval adódik a tétel. ∎

2.4.2 tétel. *$\mathcal{G}(2K_2, \overline{2K_2})$ legkisebb korlátfüggvénye $x+1$.*

Bizonyítás. Azt elég bebizonyítani, hogy $G \in \mathcal{G}(2K_2, \overline{2K_2})$ esetén $V(G)$ két klikkre és egy független halmazra partícionálható. Legyen S független halmaz G-ben, melyre $|S| = \alpha(G)$. Ha $x, y \in V(G) - S$, $xy \notin E(G)$ akkor $2K_2 \not\subset G$ miatt $\Gamma(x) \cap S$ és $\Gamma(y) \cap S$ nem üres, tartalmazkodó halmazok, mondjuk $\Gamma(x) \cap S \subseteq \Gamma(y) \cap S$. Mivel $\overline{2K_2} \not\subset G$, ezért $|\Gamma(x) \cap S| = 1$. A fentiek miatt $K_1 = \{x : x \in V(G) - S, |\Gamma(x) \cap S| > 1\}$ klikk. Belátjuk, hogy $V(G) - (S \cup K_1)$ is klikk. Ha $u, v \in V(G) - (S \cup K_1)$ és $uv \notin E(G)$ akkor $|\Gamma(u) \cap S| = |\Gamma(v) \cap S| = 1$. De $\Gamma(u) \cap S = \Gamma(v) \cap S$ ellentmond S maximalitásának, $\Gamma(u) \cap S \neq \Gamma(v) \cap S$ pedig a $2K_2 \not\subset G$ feltételnek. ■

2.5. Komplementáris korlátfüggvények

Jelölje $\mathcal{G}_f$ azon gráfok osztályát, melyekre az f függvény θ-korlát. Az f függvénynek létezik ***komplementáris*** korlátfüggvénye, ha $\mathcal{G}_f$ χ-korlátos. Ekkor $\mathcal{G}_f$ legkisebb χ-korlát függvényét f komplementáris korlátfüggvényének nevezzük. Vegyük észre, hogy χ és θ szerepet cserélhet a definícióban.

Milyen függvényeknek van komplementáris korlátfüggvényük? A perfekt gráf tétel ([LO3]) szerint az $f(x) = x$ önmagának komplementere. A következő tétel szerint csak kis függvényeknek lehet komplementáris korlátfüggvényük.

2.5.1 tétel. *([GY7]). Ha $f(x)$-nek van komplementáris korlátfüggvénye, akkor* $\inf f(x)/x = 1$.

Bizonyítás. Elég belátni, hogy az $f_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon)x$ függvénynek nincs komplementáris korlátfüggvénye, ahol ε tetszőleges valós szám, $0 < \varepsilon \leq 1$. Erdős és Hajnal ([EH3]) bizonyította olyan G_k^ε gráfok létezését (minden $\varepsilon \in (0,1]$ és minden pozitív egész k esetén), melyekre

(1) $\quad \chi(G_k^\varepsilon) = k$

(2) $\quad \dfrac{|V(G)|}{\alpha(G)} < 2+\varepsilon \quad$ bármely $G \subset G_k^\varepsilon$ feszített részgáf esetén.

Mivel (2) miatt $\omega(G_k^\varepsilon) = 2$, (1) alapján a $\mathcal{G}_\varepsilon = \{G_1^\varepsilon, G_2^\varepsilon, \ldots, \mathcal{G}_m^\varepsilon, \ldots\}$ osztály nem χ-korlátos. Belátjuk, hogy ugyanakkor $f_\varepsilon(x)$ θ-korlát függvény $\mathcal{G}_\varepsilon$-ra.

Legyen ugyanis $G \subset G_k^\varepsilon$ (feszítve). Azt kell igazolni, hogy $\theta(G) \leq (1+\varepsilon)\alpha(G)$. A Tutte–Berge formula segítségével ($\theta(G) = |V(G)| - \nu(G)$ használatával) így írható át az egyenlőtlenség:

$$\alpha(G) \geq \frac{|V(H)| + \sigma(H)}{2(1+\varepsilon)}$$

minden $H \subset G$ feszített részgráfra, ahol $\sigma(H)$ H páratlan komponenseinek száma. Legyenek $H_1, H_2, \dots, H_m$ H komponensei és partícionáljuk $\{1, 2, \dots, m\}$ indexhalmazt három részre:
$i \in I_1$ ha H_i páros gráf és $|V(H_i)|$ páros
$i \in I_2$ ha H_i páros gráf és $|V(H_i)|$ páratlan
$i \in I_3$ ha H_i nem páros gráf.
Ekkor fennáll:

$$\alpha(H_i) \geq \frac{|V(H_i)|}{2} \quad \text{ha} \quad i \in I_1,$$
$$\alpha(H_i) \geq \frac{|V(H_i)|+1}{2} \quad \text{ha} \quad i \in I_2,$$
$$\alpha(H_i) \geq \frac{|V(H_i)|+1}{2(1+\varepsilon)} \quad \text{ha} \quad i \in I_3,$$

és itt csak az utolsó egyenlőtlenség nem triviális, de (2)-ből könnyen következik. E három egyenlőtlenséget használva

$$\alpha(G) \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha(H_i) = \sum_{i \in I_1} \alpha(H_i) + \sum_{i \in I_2} \alpha(H_i) + \sum_{i \in I_3} \alpha(H_i) \geq$$
$$\geq \frac{|V(H)| + |I_2 \cup I_3|}{2(1+\varepsilon)} \geq \frac{|V(H)| + \sigma(H)}{2(1+\varepsilon)} \qquad \blacksquare$$

Nem sikerült azonban megválaszolni a következő alapkérdést.

2.5.2 kérdés. ([GY7]) Van-e az $f(x) = x + 1$ függvénynek komplementáris korlátfüggvénye?

Ezt a részt a perfekt gráf tétel stabilitását mutató egyszerű tétellel zárjuk.

2.5.3 tétel ([GY7]). *Ha $f(x)$ komplementáris korlátfüggvénye önmaga, akkor $f(x) = x$.*

Bizonyítás.
A. $f(2) = 2$. Ha $f(x) \neq x$ valamely $x \in N$-re, akkor $k \in N$ legyen a legkisebb szám, melyre $f(k) > k$. Ekkor f nyilván θ-korlát függvény a C_{2k+1} gráfra, de nem χ-korlát függvény. Az ellentmondás azt mutatja, hogy $f(x) = x$ minden $x \in N$-re.
B. $f(2) > 2$ és valamely $k \in N$-re $f(k) < \lceil \frac{3k-1}{2} \rceil$. Tekintsük azt a G_k gráfot, melynek komplementere $\lfloor k/2 \rfloor$ diszjunkt C_5 és páratlan k esetén még van egy minden más ponttal összekötött pontja. Ekkor f θ-korlát függvény G_k-ra, de nem χ-korlát függvény, mivel $\omega(G_k) = k$, $\chi(G_k) = \lceil \frac{3k-1}{2} \rceil$.
C. $f(k) \geq \lceil \frac{3k-1}{2} \rceil$ minden $k \in N$-re. Ekkor 2.5.1 tétel szerint f-nek egyáltalán nincs komplementáris korlátfüggvénye. ■

2.6. Korlátos közelítő és on-line algoritmusok

A χ-korlátossághoz közvetlenül kapcsolódik a *korlátos színező algoritmus* fogalma. Nevezzünk egy színező algoritmust $\mathcal{G}$ gráfosztályon korlátosnak, ha van olyan f függvény, hogy az algoritmus minden $G \in \mathcal{G}$ gráfot legfeljebb $f(\chi(G))$ színnel jól színez. Általában persze könnyebb azt igazolni, hogy G-nek van jó színezése $f(\omega(G))$ színnel és a korlátos színező algoritmusok ezen alapulnak.

2.6.1. Korlátos közelítő algoritmusok

Különböző perfekt gráfcsaládokra polinomiális algoritmusok vannak a pontok $\chi(G) = \omega(G)$ színnel történő színezésére ([GO]). Kiderült, hogy ilyen polinomiális algoritmus az összes perfekt gráfok osztályán is létezik ([GLS]).

A χ-korlátos gráfosztályok természetes jelöltek polinomiális közelítő algoritmusokra a színezési problémában. Mivel itt szinte mindig olyan $\mathcal{G}$ osztályokról van szó, ahol a színezési probléma NP-teljes, indokolt közelítő algoritmus keresése. Tipikus eset, hogy egy f χ-korlát függvény létezésének bizonyítása egy $\mathcal{G}$ családra polinomiális algoritmust szolgáltat $\mathcal{G}$ gráfjainak jó színezésére legfeljebb $f(\omega(G))$ színnel. Ebben az esetben korlátos polinomiális algoritmusunk van, melynek hatásaránya (performance ratio) legfeljebb $f(\omega(G))/\chi(G) \leq f(\omega(G))/\omega(G)$. Ez a becslés persze annál jobb, minél kisebb az f függvény. A legkedvezőbb esetben f lineáris függvény, ekkor a hatásarány konstans.

A fentiek ugyanúgy érvényesek a klikkfedési problémára θ-korlátos gráfosztály esetén. Ilyenkor persze olyan klikkfedési algoritmust nevezünk korlátosnak, mely minden $G \in \mathcal{G}$ gráfot legfeljebb $f(\alpha(G))$ klikkel tud fedni.

Illusztrációképpen megemlítjük, hogy a k-klikkintervallumgráfok színezésére konstans ($2k$) hatásarányú közelítő polinomiális algoritmus van ([GY5], a probléma $k \geq 2$ esetén NP-teljes, lásd [GJMP]). A klikkfedési problémára viszont az 1.1.1 tételből kiolvasható korlátos algoritmus nem „jó”, mert a θ-korlát függvény igen nagy.

2.6.2. Korlátos on-line algoritmusok

Egy színezési algoritmus *on-line*, ha úgy színezi jól egy gráf pontjait, hogy a pontokat egyesével kapja és a pont színét a következő pont beérkezése előtt véglegesen el kell döntenie (az eddig beérkezett pontok részgráfjának ismeretében). A legismertebb on-line színezési algoritmus a „first fit”, alias „mohó” algoritmus, mely az $1, 2, \ldots$ színekkel színez és minden lépésben azt a legkisebb színt használja, amelyre az addig színezett részgráf jól színezett.

A χ- és θ-korlátosság és az on-line algoritmusok viszonyával foglalkoznak [GYL5], [GYL7], [GYL8] és [KI1], ehhez kapcsolódó további cikkek [LST], [KI4], [KIT1].

A 2.2.3 tétel alapján $\mathcal{G}(P_n)$ χ-korlátos. A korlátos on-line algoritmusok szempontjából a következőket mondhatjuk.

2.6.3 tétel. *([GYL3]) $\mathcal{G}(P_4)$-en a first fit színezés tökéletes, azaz a kromatikus számnyi színnel színez.*

Bizonyítás. Csak azt a közismert állítást kell ismerni, hogy $\mathcal{G}(P_4)$-ben bármely nem növelhető független halmaz és nem növelhető klikk metsző ([BEDU]).

2.6.4 tétel. *([GYL8]) A $\mathcal{G}(P_5)$ osztályon van korlátos on-line algoritmus.*

A 2.6.4 tétel bizonyítás a 2.2.3 bizonyításának on-line változata, de sok nehézséget kell leküzdeni. A [GY5]-ben kitűztük azt a problémát, hogy a first fit színezés korlátos-e $\mathcal{G}(P_5)$ osztályon. Legújabb hírek szerint ezt Kierstead, Trotter és Penrose bebizonyították.

2.6.5 tétel. *([GYL5]) A $\mathcal{G}(P_6)$ osztályon nincs korlátos on-line algoritmus. Sőt, minden k-hoz van olyan $G_k \in \mathcal{G}(P_6)$ páros gráf, melyet bármely on-line algoritmus legalább k színnel színez.*

A 2.2.2 propozíció szerint $\mathcal{G}(H)$ osztály χ-korlátossága következik abból, ha $\mathcal{G}(C)$ χ-korlátos H minden C komponensére. Ez igaz marad on-line algoritmusokra a következő értelemben.

2.6.6 tétel. *([GYL7)] A $\mathcal{G}(H)$ osztályon van korlátos on-line algoritmus, ha H minden C komponensére a $\mathcal{G}(C)$ osztályon van korlátos on-line algoritmus.*

A 2.6.6 tétel értelmében például a $\mathcal{G}(mK_2)$ osztályon van korlátos on-line színező algoritmus. A $\mathcal{G}(2K_2)$ osztályon még a first fit algoritmus is korlátos, de a $\mathcal{G}(3K_2)$ osztályon (sőt a $\mathcal{G}(K_2 + 2K_1)$ osztályon) már nem ([GYL5)].

Az on-line (speciálisan a first fit) algoritmusok szempontjából a perfekt gráfok különösen érdekesek, hiszen itt egy $f(\omega(G))$ színnel történő színezés esetén $f(\omega(G))/\omega(G) = f(\omega(G))/\chi(G)$ pontosan az algoritmus hatásaránya. A legegyszerűbb perfekt gráfokra, a páros gráfokra, sőt a fákra sincsenek korlátos on-line algoritmusok.

2.6.7 tétel. *([GYL5)] A fák osztályán nincs korlátos on-line színező algoritmus, sőt minden n-re van olyan T_n fa, melyre bármely on-line színező algoritmus legalább n színt használ.*

Bizonyítás. T_n konstrukciója emlékeztet Zykov háromszögmentes nagy kromatikus gráfot konstruáló módszerére ([ZY]). Legyen T_{n-1} olyan fa, melyen minden on-line algoritmus legalább $n-1$ színt használ. Tekintsük T_{n-1} $|V(T_{n-1})|(n-1)$ diszjunkt példányát és minden példányban jelöljünk ki egy gyökeret úgy, hogy T_{n-1} minden pontja pontosan $n-1$ példányban legyen gyökér. Az így kapott erdőhöz adjunk egy új pontot, melyet a gyökerekkel kötünk össze. Az így definiált fa lesz T_n.

Legyen A on-line színező algoritmus. Adjuk be T_{n-1} $n-1$ diszjunkt példányát rendre olyan sorrendben, mely $n-1$ színt kényszerít. Ekkor találunk $n-1$ különböző példányon $n-1$ különböző színt. Ezután beadunk egy pontot, mely ezen $n-1$ ponttal van összekötve. Beadott gráfunknak T_n részgráfja és már eddig is n színt használt az A algoritmus. ■

Vannak viszont olyan perfekt gráfosztályok, melyeken már a first fit színezés is konstans hatásarányú. A hatásarány split gráfoknál 1, páros gráfok komplementerén 3/2, merevkörű gráfok komplementerén 2 ([GYL5)]. Intervallumgráfok esetén sokáig nyitott kérdés volt, hogy a first fit színezés hatásaránya konstans-e. Ezt nemrégiben Kierstead oldotta meg ([KI4)]. Egy régebbi szép eredmény, hogy intervallumgráfokon egy egyszerű on-line algoritmus 3 hatásaránnyal működik ([KIT1)].

3. FÜGGELÉK

Gyakrabban használt jelölések, definíciók.

H *hipergráfon* értünk egy (V, E) párt, ahol V tetszőleges halmaz, a *pontok* halmaza, E pedig V bizonyos részhalmazaiból áll, melyeket *éleknek* nevezünk. Megengedünk többszörös éleket is. Hipergráfot $H=(V,E)$ jelöléssel, vagy $H=\big(V(H), e(H)\big)$ jelöléssel adhatunk meg. Geometriai jellegű hipergráfoknál sokszor megengedjük, hogy $|V(H)|=\infty$ és $e\in E(H)$ esetén $|e|=\infty$ legyen. Viszont az élek száma szinte mindig véges. Rövidség kedvéért $e\in H$ jelentse azt, hogy $e\in E(H)$, azaz e éle H-nak, továbbá $|H|$ jelölje a hipergráf élszámát, $|E(H)|$-t.

Írott nagy betűk hipergráfcsaládokat (osztályokat) jelölnek. Például $\mathcal{I}$ azon hipergráfok családja, melyek ponthalmaza a számegyenes, élhalmaza pedig zárt intervallumokból áll.

Egy H' hipergráf H *részhipergráfja*, ha $V(H')\subseteq V(H)$ és $E(H')\subseteq E(H)$. Ha H hipergráf és $S\subseteq V(H)$ akkor H_S legyen az a H' részhipergráfja H-nak, melyre $V(H')=S$ és $e\in H'$ pontosan akkor, ha $e\subseteq S$ és $e\in H$. A H hipergráf *feszített részhipergráfjai* a H_S hipergráfok, ahol S végigfut $V(H)$ részhalmazain. A részhipergráfra (és a feszített részhipergráfra is) a $H'\subset H$ jelölést alkalmazzuk. Ha H egy hipergráf, rész(H) jelöli H összes véges sok élű részhipergráfjából álló családot.

Egy H hipergráf x pontjának *foka*, $d(x)$, az x-et tartalmazó élek száma. A maximális fokszám, $D(H)=\max\limits_{x\in V(H)} d(x)$. Egy H hipergráfban $T\subset V(H)$ *transzverzális*, vagy *lefogó halmaz*, ha $T\cap e\neq 0$ minden $e\in H$ esetén. A minimális számosságú lefogó halmaz számosságát $\tau(H)$ jelöli. Egy páronként diszjunkt élhalmazt H-ban matchingnek nevezünk, $\nu(H)$ jelöli a lehető legtöbb élű matching élszámát. Nyilván $\nu(H)\leq\tau(H)$ bármely H hipergráfra.

Egy H hipergráf *összefüggő*, ha nem lehet $V(H)$-t úgy partícionálni két részre, hogy minden $e\in H$ teljesen az egyik részben van. Nem összefüggő hipergráf egyértelműen felbontható páronként idegen összefüggő hipergráfokra, melyeket H komponenseinek nevezünk.

Egy H hipergráf *duálisa*, H^*, az a hipergráf, melyet H-ból a pontok és az élek felcserélésével kapunk, a pont-él illeszkedéseket megtartva.

Egy H hipergráf *metszésgráfja*, $M(H)$, az a G gráf, melynek pontjai H éleinek felelnek meg és G-ben két pont pontosan akkor határoz meg élt, ha H megfelelő élei metszők.

Egy H hipergráf r-uniform, ha $|e| = r$ minden $e \in H$ esetén. A 2-uniform hipergráfokat nevezzük gráfoknak. A K_n^r hipergráfot, melynek n pontja van és minden r elemű részhalmaz (egyszeres) éle, *teljesnek*, vagy *klikknek* nevezzük. A K_n^2 helyett gráfoknál K_n-et szokás használni.

Továbbiakban legyen minden hipergráf r-uniform. A H hipergráf *komplementere*, $\overline{H}$, az a hipergráf, melyre $V(\overline{H}) = V(H)$ és egy r elemű részhalmaz pontosan akkor él $\overline{H}$-ban, ha nem él H-ban. A H *klikkmérete*, $\omega(H)$, a legnagyobb m szám, melyre van H-ban K_m^r-el izomorf részhipergráf. Az $S \subset V(H)$ *független halmaz*, ha bármely $e \in H$-ra $e \not\subset S$, azaz S klikk $\overline{H}$-ben. A H *kromatikus száma*, $\chi(H)$, a legkisebb m, melyre $V(H)$ partícionálható m független halmazra. A *klikkfedési szám*, $\theta(H)$, az a legkisebb m, melyre $V(H)$ partícionálható m klikkre. A H legnagyobb független halmazának számosságát $\alpha(H)$-val jelöljük. Gráfok esetén $\omega(G) \leq \chi(G)$, $\alpha(G) \leq \theta(G)$. Azokat a G gráfokat, melyekre $\omega(G') = \chi(G')$ minden $G' \subset G$ feszített részgráf esetén, perfekt gráfoknak nevezik. Lovász perfekt gráf tétele szerint ([LO3]) a definícióban $\alpha(G') = \theta(G')$ is írható.

Még néhány jelölés gráfokra. Ha $xy \in E(G)$, ezt gyakran úgy fejezzük ki, hogy „x és y szomszédos", vagy „x és y össze van kötve". Ha $x \in V(G)$, akkor $\Gamma(x)$ jelöli az x-el szomszédos pontok halmazát.

Végül még néhány jelölés:

C_i: i pontú kör

P_i: i pontú út

K_n: n pontú klikk

$K_{m,n}$: teljes páros gráf, osztályaiban m és n ponttal

$G_1 + G_2$: két pontdiszjunkt gráf egyesítése

mG: G m diszjunkt példányának egyesítése

$G_{m,n}$: páros gráf m és n ponttal a két osztályban

$\overline{G}$: G gráf komplementere

Hivatkozások

AG. E. Asplund, B. Grünbaum, On a coloring problem, Math. Scand. **8**. (1960) 181–188.

BEDU. C. Berge, P. Duchet, Strongly perfect graphs, Annals of Discrete Math. **21**. (1984) 57–61.

BERGE. C. Berge, Graphs and Hypergraphs (1982), North Holland.

BL. I. Bárány, J. Lehel, Covering with Euclidean boxes, Europ. J. Combinatorics **8**. (1987) 113–119.

BUR. J. P. Burling, On coloring problem of families of prototypes, PhD. Thesis, Univ. Colorado, 1965.

CD. M. Cochand, P. Duchet, Some remarks on orientation of graphs and Ramsey theory, Irregularities of Partitions, Alg. and Combinatorics **8**. 39–46.

CH2. V. Chvatal, Perfectly ordered graphs, Ann. of Discrete Math. **21**. (1984) 63–65.

CHU. F. R. K. Chung, On the covering of graphs, Discrete Math. **30**. (1980) 89–93.

DGK. L. Danzer, B. Grünbaum, V. Klee, Helly's theorem and its relatives, in Proc. Sympos. Pure Math., vol. VII, Providence, (1963) 101–180.

DH. M. DHurandhar, On the chromatic number of a graph with two forbidden subgraphs, J. Comb. Theory **B.46**. 1–6.

EEL. P. Erdős, M. El-Zahar, On the existence of two non-neighboring subgraphs in a graph, Combinatorica **5**. (1985) 295–300.

EH1. P. Erdős, A. Hajnal, Some remarks on set theory, IX. Michigan Math. J. **11**. (1964) 107–127.

EH2. P. Erdős, A. Hajnal, On chromatic number of graphs and set systems, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **17** (1976) 61–99.

GJMP. M. R. Garey, D. S. Johnson, G. L. Miller, C. H. Papadimitrou, The complexity of coloring circular arcs and chords, SIAM J. Alg. Disc. Methods **1**. (1980) 216–227.

GO. M. C. Golumbic, Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs, Academic Press, 1980.

GLS. M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization, Combinatorica **1**. (1981) 169–197.

GYL1. A. Gyárfás, J. Lehel, A Helly-type problem in trees, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **4**. Combinatorial Theory and its Applications (1969) 571–584. MR 45,7602

GY1. A. Gyárfás, A Ramsey-type theorem and its applications to relatives of Helly's theorem, Periodica Math. Hung. **3**. (1973) 261–270. MR 49, 112

GYL2. A. Gyárfás, J. Lehel, A Ramsey type problem in directed and bipartite graphs, Periodica Math. Hung. **3** (1973) 299–304. MR 49, 136

GY2. A. Gyárfás, On Ramsey covering numbers, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **10**. Infinite and Finite sets, (1973), 801–816. MR 52,2939

GY3. A. Gyárfás, Partition covers and blocking sets in hypergraphs, Ph. D. Thesis, MTA SZTAKI Tanulmányok, **71**. (1977) (in Hungarian). MR 58, 5392

GYSZT. A. Gyárfás, E. Szemerédi, Zs. Tuza, Induced subtrees in graphs of large chromatic number, Discrete Math. **30**. (1980) 235–244. MR 81e,05060

GYL3. A. Gyárfás, J. Lehel, Hypergraph families with bounded edge cover or transversal number, Combinatorica **3**. (1983) 351–358. MR 85d 05186

GY5. A. Gyárfás, On the chromatic number of multiple interval graphs and overlap graphs, Discrete Math. **55**. (1985) 161–166. MR 86k, 05052

GY6. A. Gyárfás, Problems from the world surrounding perfect graphs, MTA SZTAKI tanulmányok, **177**. (1985) MR 88a, 05066

GYL5. A. Gyárfás, J. Lehel, On-line and first fit colorings of graphs, Journal of Graph Theory, **12**. (1988) 217–227. MR 89c, 05037

GY7. A. Gyárfás, Problems from the world surrounding perfect graphs, Zastowania Matematyki, Applicationes Math. **XIX, 3–4**. (1987) 413–441. MR 89e, 05089

GY9. A. Gyárfás, Problem 115, Discrete Math. **79**. (1989) 109–110.

GYL7. A. Gyárfás, J. Lehel, First fit and on-line chromatic number of families of graphs, Ars Comb.

GYL8. A. Gyárfás, J. Lehel, Effective on-line coloring of P_5-free graphs, Combinatorica.

FGY. Z. Füredi, A. Gyárfás, Covering t-element subsets by partitions, subm. to European J. of Comb.

GYJK. A. Gyárfás, M. S. Jacobson, L.F. Kinch, On a generalization of transitivity for digraphs, Discrete Math. **69**. (1988) 35–41.

KI2. H.A. Kierstead, On the chromatic index of multigraphs without large triangles, J. Comb. Theory **B, 36**. (1984) 156–160.

KI3. H. A. Kierstead, Application of edge coloring of multigraphs to vertex colorings of graphs, Discrete Math. **74**. (1989) 117–124.

KI4. H.A. Kierstead, The linearity of first fit for coloring interval graphs, SIAM J. on Disc. Math. **1**. (1988) 526–530.

KIT1. H. A. Kierstead, W. T. Trotter, Jr. An extremal problem in recursive combinatorics, Congressus Numerantium **33**. (1981) 143–153.

KO. A. V. Kostochka, personal communication.

KO2. A. V. Kostochka, Sequences of dominating sets, manuscript.

LE. J. Lehel, Gallai type results for multiple boxes and forests, Europ. J. Combinatorics, **9**. (1988) 113–120.

LO1. L. Lovász, Problem 206. Mat. Lapok (1983) 394–395.

LO2. L. Lovász, Combinatorial problems and exercises, North Holland, 1979.

LO3. L. Lovász, Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, Discrete Math. **2**. (1972) 253–267.

LO4. L. Lovász, On chromatic number of finite set systems, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **19**. (1968) 59–67.

LST. L. Lovász, M. Saks, W. T. Trotter, An on-line graph coloring algorithm with sublinear performance ratio, Discrete Math. **75**. (1989) 47–53.

NERÖ. J. Nesetril, V. Rődl, A short proof of the existence of highly chromatic hypergraphs without short cycles, J. Comb. Theory.

PARA. K. R. Partasarathy, G. Ravindra, The strong perfect graph conjecture is true for $K_{1,3}$-free graphs, J. Comb. Theory **B 21**. (1976) 212–223.

RO. F. S. Roberts, On the boxicity and cubicity of graphs, Recent Progress in Combinatorics AP. (1969) 301–310.

SU. D. P. Sumner, Subtrees of a graph and the chromatic number, in Theory and Applications of Graphs, John Wiley (1981) 557–576.

WA.. S. Wagon, A bound on the chromatic number of graphs without certain induced subgraphs, J. Combin. Theory **B 29**. (1980) 345–346.

WELSH. D. J. A. Welsh, Matroid theory, Academic Press, (1976).

WI. J. E. Williamson, A Ramsey-type problem for paths in digraphs, Math. Ann. **203** (1973) 117–118.

ZY. A. A. Zykov, On some properties of linear complexes, (in Russian), Russian Math. Sb. N. S. **24**. (1949) 163–188.

JELENTÉS AZ 1990. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére az alábbi bizottságot kérte fel: Császár Ákos (elnök), Fejes Tóth László, Freud Róbert, Halász Gábor, Károlyi Gyula (titkár), Kiss Emil, Komjáth Péter, Laczkovich Miklós, Michaletzky György, Ruzsa Imre, T. Sós Vera.

A versenyzőknek 1990. november 2. és 12. között tíz teljes napjuk volt a tíz feladat megoldására. A feladatok kitűzői (a feladatok sorrendjében): Ruzsa Imre, Ruzsa Imre, Pyber László, Szabados József, Laczkovich Miklós, Halász Gábor, Halász Gábor, Csikós Balázs, Juhász István és Móri Tamás.

Sajnos a verseny iránt az utóbbi években tapasztaltnál lényegesen kisebb volt az érdeklődés. A feladatokra 17 versenyző mindössze 46 megoldást nyújtott be, és ezeknek is csak közel fele teljes értékű. Nem érkezett megoldás a 6. feladatra, és csak egy-egy helyes megoldás érkezett a 3., 5. és 9. feladatra.

A versenybizottság a díjak odaítéléséről december 6-i ülésén döntött.

I. díjban és 5000 Ft jutalomban részesül *Benczúr András*, az ELTE III. éves matematika szakos hallgatója. Benczúr hét feladatra nyújtott be megoldást. Helyes a 7. és 8. feladatra adott megoldása, lényegében jól oldotta meg a 2., 5. és 9. feladatot, részeredményt ért el a 10. feladatban. Megoldásai egyszerűek, rövidek, néha a túlzott tömörség nehezíti a megértést. Kiemelkedő a 7. feladatra nyújtott megoldása.

II. díjban és 4000 Ft jutalomban részesül *Drasny Gábor*, az ELTE III. éves matematika szakos hallgatója. Drasny öt feladatra nyújtott be megoldást. Helyes az 1., a 8. és a 10. feladatra adott megoldása, és jelentős részeredményt ért el a 2. és a 9. feladatban. Megoldásai világosak, érthetőek, külön kiemelkedő a 8. feladatra nyújtott megoldása.

III. díjban és 3000 Ft jutalomban részesül *Bíró András*, az ELTE II. éves matematika szakos hallgatója. Bíró négy feladatra adott be dolgozatot. Helyes a 3. és a 4. feladatra adott megoldása. A 10. feladatra adott megoldása nem teljes, de könnyen befejezhető. Értékes részeredményt ért el a 9. feladatban is. A 3. feladatra egyedül ő adott be dolgozatot.

A versenybizottság *dícséretben* részesíti *Hausel Tamást*, az ELTE I. éves matematika szakos hallgatóját, és *Makay Gézát*, a JATE V. éves matematika szakos hallgatóját. Mindketten két feladatra nyújtottak be megoldást. Hausel kifogástalanul oldotta meg az 1. és a 2. feladatot, Makay a 7. és a 8. feladatra adott kissé bonyolult, de hibátlan megoldást.

Az 1990. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Legyen A véges ponthalmaz a d dimenziós térben ($d \geq 2$). Legyen minden $j = 1, \ldots, d$-re B_j az A halmaz vetülete az $x_j = 0$ egyenletű $d-1$ dimenziós altérre. Bizonyítsuk be, hogy

$$\prod_{j=1}^{d} |B_j| \geq |A|^{d-1}.$$

2. Igazoljuk, hogy minden K pozitív számhoz van végtelen sok olyan m és N természetes szám, hogy az $m+1, m+4, \ldots, m+N^2$ számok között a prímszámok száma legalább

$$K \frac{N}{\log N}.$$

3. Legyen $n = p^k$, ahol p prím, és legyen G az S_n szimmetrikus csoport egy tranzitív részcsoportja. Bizonyítandó, hogy G-nek S_n-beli normalizátora legfeljebb $|G|^{k+1}$ elemű.

4. Legyen P olyan polinom, amelynek minden gyöke valós és $P(0) > 0$. Igazoljuk, hogy ha m páratlan természetes szám, akkor minden valós x-re

$$\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k > 0,$$

ahol $f = P^{-m}$.

5. Azt mondjuk, hogy az x, y valós számok összeköthetők k hosszúságú δ-lánccal (ahol $\delta : \mathbf{R} \to (0, \infty)$ adott függvény), ha van egy $x_0, x_1, \ldots, x_k$ sorozat úgy, hogy $x_0 = x$, $x_k = y$ és

$$|x_i - x_{i-1}| < \delta\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)$$

minden $i = 1, \ldots, k$-ra.

Mutassuk meg, hogy minden $\delta : \mathbf{R} \to (0, \infty)$ függvényhez van olyan intervallum, amelyben bármely két elem összeköthető 4 hosszúságú δ-lánccal. Mutassuk meg azt is, hogy nem mindig található olyan intervallum, amelyben bármely két elem összeköthető legfeljebb 2 hosszúságú δ-lánccal.

6. Adjunk meg olyan, az egységkörben meromorf ϕ és ψ függvényeket, amelyekre teljesül, hogy bármely, az egységkörben reguláris f függvényre az $f - \phi$ és $f - \psi$ függvények közül legalább az egyiknek van gyöke.

7. Jelölje $B[0,1]$ és $C[0,1]$ a $[0,1]$ intervallumon értelmezett korlátos, illetve folytonos függvények Banach-terét a szuprémum normával. Van-e olyan

$$T : B[0,1] \to C[0,1]$$

korlátos lineáris operátor, amelyre $Tf = f$ minden $f \in C[0,1]$ esetén?

8. Legyen $A_1^{(0)}, \ldots, A_n^{(0)}$ $n \geq 3$ elemű pontsorozat az $\mathbf{R}^2$ euklideszi síkon. Definiáljuk az $A_1^{(i)}, \ldots, A_n^{(i)}$ pontsorozatot ($i = 1, 2, \ldots$) rekurzióval a következő módon: $A_j^{(i)}$ legyen az $A_j^{(i-1)} A_{j+1}^{(i-1)}$ szakasz felezőpontja, ahol $A_{n+1}^{(i-1)} = A_1^{(i-1)}$. Mutassuk meg, hogy egy nulla Lebesgue-mértékű halmaz kivételével minden $(A_1^{(0)}, \ldots, A_n^{(0)}) \in (\mathbf{R}^2)^n$ kezdő pontsorozathoz létezik olyan N természetes szám, melyre az $A_1^{(N)}, \ldots, A_n^{(N)}$ pontok egy konvex n-szög egymás utáni csúcsai.

9. Bizonyítandó, hogy ha egy X Hausdorff-tér minden altere δ-kompakt, akkor X megszámlálható.

10. Legyenek X és Y valós értékű, független, azonos eloszlású, véges várható értékű valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy

$$E(|X+Y|) \geq E(|X-Y|),$$

ahol E a várható értéket jelöli.

A megoldások ismertetése

Az 1. feladat megoldása

A bizonyítást az A halmaz elemszámára vonatkozó teljes indukcióval végezzük el; $|A| = 0$ vagy 1 esetén az állítás nyilvánvaló.

Ha $|A| > 1$, akkor az A halmaz egyik alkalmas koordináta-tengelyre való vetülete tartalmaz két különböző pontot. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy ez éppen a d-edik koordináta; ez azt jelenti, hogy egy alkalmas $x_d = \alpha$ egyenletű hipersík A-t két nem üres részre vágja: $A = X \cup^* Y$. Jelölje X és Y vetületét az $x_j = 0$ egyenletű altérre rendre C_j és D_j, ekkor $|C_i| + |D_i| = |B_i|$ minden $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ esetén, valamint $|C_d| \leq |B_d|$ és $|D_d| \leq |B_d|$.

Az indukciós feltevés alapján

$$|X|^{d-1} \le |B_d| \cdot \prod_{j=1}^{d-1} |C_j| \qquad \text{és}$$

$$|Y|^{d-1} \le |B_d| \cdot \prod_{j=1}^{d-1} |D_j|.$$

Használjuk fel a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség következő ekvivalens alakját: ha a_i, b_i nem-negatív valós számok és k pozitív egész akkor

$$(a_1 \dots a_k)^{\frac{1}{k}} + (b_1 \dots b_k)^{\frac{1}{k}} \le \left[\prod_{i=1}^{k} (a_i + b_i)\right]^{1/k}.$$

Ennek alapján

$$\prod_{j=1}^{d} |B_j|^{\frac{1}{d-1}} = |B_d|^{\frac{1}{d-1}} \cdot \prod_{j=1}^{d-1} \left(|C_j| + |D_j|\right)^{\frac{1}{d-1}} \ge$$

$$\ge |B_d|^{\frac{1}{d-1}} \cdot \left(\prod_{j=1}^{d-1} |C_j|^{\frac{1}{d-1}} + \prod_{j=1}^{d-1} |D_j|^{\frac{1}{d-1}} \right) \ge |X| + |Y| = |A|,$$

$$\text{vagyis} \qquad \prod_{j=1}^{d} |B_j| \ge |A|^{d-1},$$

amit bizonyítani akartunk.

Sustik Mátyás megoldása alapján

Érkezett 11 dolgozat. Megoldotta Bíró Zsolt, Drasny Gábor, Hausel Tamás, Rimányi Richárd és Sustik Mátyás.

A 2. feladat megoldása

A bizonyítás alapgondolata az, hogy egyszerre több lehetséges m értékre átlagoljunk úgy, hogy közben a kis prímekkel való oszthatóságot kizárjuk.

Legyen $Q = 3 \cdot 5 \dots p_l$ az első l db. páratlan prímszám szorzata, c pedig olyan Q-nál nem nagyobb természetes szám, amelyre $-c$ kvadratikus nem-maradék a $3, 5, \dots, p_l$ modulusokra nézve, a kínai maradéktétel alapján ilyen c létezik. Keressük m-et $c + kQ$ alakban, ahol $1 \le k \le N^2$.

Legyen $1 \le i \le N$, c választása miatt nyilván $(i^2 + c, Q) = 1$. Ezért Dirichlet tétele alapján az $i^2 + c + Q$, $i^2 + c + 2Q, \dots$ számtani sorozatban végtelen sok prímszám van, sőt a sorozat első N^2 eleme között aszimptotikusan $\frac{1}{\varphi(Q)} \cdot \frac{N^2 Q}{\ln N^2 Q}$ a prímek száma. Ha tehát N elég nagy (rögzített Q esetén), akkor az

$$i^2 + c + Q,\ i^2 + c + 2Q, \dots, i^2 + c + N^2 Q$$

számok között található több mint $\frac{Q}{3\varphi(Q)} \cdot \frac{N^2}{\ln N}$ prímszám. Így (multiplicitással számolva) az

$$i^2 + c + kQ \qquad (1 \le i \le N, \quad 1 \le k \le N^2)$$

számok között a prímek száma nagyobb mint $\frac{Q}{3\varphi(Q)} \cdot \frac{N^3}{\ln N}$, ezért valamely $m = c + kQ$-ra az $m+1, m+4, \ldots, m+N^2$ számok között több, mint $\frac{Q}{3\varphi(Q)} \cdot \frac{N}{\ln N}$ prímszám található.
Minthogy

$$\frac{Q}{\varphi(Q)} = \prod_{i=1}^{l} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} >$$

$$> \prod_{i=1}^{l}\left(1+\frac{1}{p_i}\right) > \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{p_i}$$

és $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i}$ divergens, tetszőleges nagy K pozitív szám esetén Q megválasztható úgy, hogy $\frac{Q}{3\varphi(Q)} > K$ teljesüljön. Ekkor pedig elegendően nagy N esetén, mint azt láttuk, m megválasztható úgy, hogy az

$$m+1, m+4, \ldots, m+N^2$$

számok között a prímek száma legalább $K \cdot \frac{N}{\ln N}$ legyen.

Benczúr András és Hausel Tamás dolgozata alapján

Érkezett 5 dolgozat. Helyes Hausel Tamás megoldása, lényegében megoldotta a feladatot Benczúr András. Jelentős részeredményt ért el Drasny Gábor.

A 3. feladat megoldása

Először belátjuk, hogy ha T G-nek minimális tranzitív részcsoportja, akkor T generálható k elemmel. T tranzitív tehát $p^k \mid |T|$. Legyen P T-nek p-Sylow részcsoportja, ekkor P tranzitív , tehát $T = P$ p-csoport. Valóban, ha G_α jelöli egy α pont stabilizátorát G-ben, akkor $|G : G_\alpha| = p^k$, ezért

$$p^k \mid |G : G_\alpha| \cdot |G_\alpha : G_\alpha \cap P| = |G : P| \cdot |P : G_\alpha \cap P|.$$

Mivel $(|G:P|, p) = 1$, kapjuk, hogy $p^k \mid |P : G_\alpha \cap P|$, vagyis $p^k \mid |P : P_\alpha|$, tehát P valóban tranzitív. Legyen most M maximális részcsoportja T-nek. Ekkor M nem tranzitív, így $M \cdot T_\alpha$ sem lehet az. Ezért $MT_\alpha = M$, $T_\alpha \le M$. Így T_α része T maximális részcsoportjai metszetének, a Frattini részcsoportnak. Vagyis $|T : \Phi(T)| \le |T : T_\alpha| = p^k$, így Burnside ismert tételét alkalmazva kapjuk, hogy T valóban generálható k elemmel, $T = \langle g_1, \ldots, g_k \rangle$.

G S_n-beli normalizátorának, $N(G)$-nek az elemei a konjugálás útján hatnak G elemein, azokat egymás között permutálják. Ekkor a $(g_1, \ldots, g_k)$ rendezett k-as lehetséges képeinek a száma kisebb, mint $|G|^k$. Az $n, m \in N(G)$ elemekkel való konjugálás pedig pontosan akkor hat ugyanúgy $(g_1, \ldots, g_k)$-n, ha $nm^{-1} \in C(T)$, T S_n-beli centralizátorának. Ezért $|N(G)| < |G|^k |C(T)|$. $C(T)$ azonban szemireguláris: ha $\pi \in C(T)$ az 1-et helyben hagyja, akkor tetszőleges $i \in \{1, \ldots, p^k\}$ esetén válasszunk $t \in T$ elemet úgy, hogy $t(1) = i$ legyen. Ekkor $i = t(1) = \pi^{-1} t \pi(1) = \pi^{-1}(i)$, $\pi(i) = i$, tehát π az identikus permutáció. Így $|C(T)| \le p^k$, és $|N(G)| < |G|^k \cdot p^k \le |G|^{k+1}$.

Bíró András és a feladat kitűzőjének megoldása alapján

A feladatra egyedül Bíró András adott be dolgozatot, megoldása hibátlan.

A 4. feladat megoldása

Legyen $F(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ és tekintsük a $Q(x) = P(x)^m \cdot F(x)$ polinomot. Ha P fokát n-nel jelöljük, akkor (multiplicitással számolva) a P^m tényezőből Q-nak $n \cdot m$ valós gyökét kapjuk.

Tegyük fel a feladat állításával ellentétben, hogy F-nek is van valós gyöke. Különböztessünk meg két esetet:

1) F fokszáma $m-1$, ekkor F-nek két valós gyöke is van, hiszen fokszáma páros.

2) F fokszáma legfeljebb $m-2$.

Rolle tétele miatt Q'-nek az első esetben legalább $mn+1$, a másodikban legalább mn gyökét számolhatjuk össze (ugyancsak multiplicitással véve). Megjegyezzük, hogy $P(0) \neq 0$ és $F(0) \neq 0$ miatt a 0 gyököt legfeljebb egyszer számolhattuk. A 0 valóban gyöke Q'-nek, méghozzá legalább $(m-1)$-szeres, mivel $j = 1, 2, \ldots, m-1$ esetén

$$\begin{aligned} Q^{(j)}(0) &= \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \left[(P^m)^{(l)}(0)\right] \cdot \left[F^{(j-l)}(0)\right] = \\ &= \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \left[(P^m)^{(l)}(0)\right] \cdot \left[f^{(j-l)}(0)\right] = \\ &= (P^m \cdot f)^{(j)}(0) = 0, \end{aligned}$$

hiszen $P^m \cdot f$ a konstans 1 függvény.

Ezért az eddig összeszámolt gyökökhöz még legalább $(m-2)$-t számolhatunk hozzá, tehát Q'-nek az első esetben legalább $nm+m-1$, a másodikban legalább $nm+m-2$ gyöke van. Minthogy azonban Q' foka az első esetben $nm+m-2$, a másodikban pedig legfeljebb $nm+m-3$, kapjuk, hogy Q' azonosan 0, tehát Q konstans polinom, így az is azonosan 0, ellentétben azzal, hogy $Q(0) \neq 0$.

Tehát F-nek nem lehet valós gyöke, és mivel, $F(0) = P(0)^{-m} > 0$, $F(x) > 0$ teljesül minden valós x-re.

Domokos Mátyás és a feladat kitűzőjének megoldása alapján

Érkezett 5 dolgozat. Helyes Bíró András, Domokos Mátyás és Vu Ha Van megoldása. Részeredményt ért el Pásztor Gábor és Sustik Mátyás.

Az 5. feladat megoldása

Az első állítás igazolásához válasszunk a Baire-féle kategóriatétel alapján olyan n természetes számot és I intervallumot, melyekre $H_n = \left\{x : \delta(x) > \frac{1}{n}\right\}$ sűrű I-ben; az is feltehető, hogy I hossza $|I| < \frac{1}{10n}$. Legyen K az I intervallum középső harmada, megmutatjuk, hogy benne bármely két elem összeköthető 4 hosszúságú δ-lánccal. Legyen tehát $x, y \in K$. Ha $c \in K \cap H_n$ és $b = c + \frac{y-x}{2}$, akkor a b-re, majd a c-re történő tükrözés egymásutánja $(x-y)$-nal való eltolást eredményez. Ha ezt két a-ra való tükrözés közé ékeljük, $(y-x)$-szel történő eltolást kapunk, ami az x-et y-ba viszi. Ahhoz, hogy ilyen módon x-et y-nal összekötő δ láncot kapjunk, csak a következő két dologra kell ügyelni: egyrészt $a \in H_n$ legyen, másrészt $2a - x$ b-nek $\frac{\delta(b)}{2}$ sugarú környezetébe essen. Minthogy azonban H_n sűrű I-ben, ez könnyen elérhető.

A feladat második felének bizonyítása kicsit hosszabb megfontolást igényel. Legyen B a véges sok bináris számjeggyel leírható valós számok halmaza. Úgy adjuk meg B-nek pontpárjait, hogy alkalmas δ-ra ne legyenek összeköthetők legfeljebb 2 hosszúságú δ-lánccal, és minden intervallum tartalmazzon ilyen pontpárt. E célból legyen $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$, ahol

$$P_i = \left\{ \left(\frac{-2^{2i}}{2^{2i}}, \frac{-2^{2i}+2}{2^{2i}}\right), \ldots, \left(\frac{2^{2i}-2}{2^{2i}}, \frac{2^{2i}}{2^{2i}}\right) \right\}.$$

Definiáljuk δ-t először B elemein a következő kézenfekvő módon: ha $x \in B$ $\frac{1}{2^i}$-re végződik, akkor legyen $\delta(x) = \frac{1}{2^{i+1}}$ (egész x-ek esetén i-t 0-nak tekintjük), ekkor P-beli pontpárok nyilván nem köthetők össze 1 hosszúságú δ-lánccal, és olyan 2 hosszúságúval sem, amely B-beli elemen halad keresztül.

A következő módon terjesszük ki δ-t R-re. B additív részcsoportja R-nek, így R $a+B$ alakú mellékosztályok diszjunkt uniója. Ha $a \notin B$, akkor az $a+B$ mellékosztályon definiáljuk úgy δ-t, hogy $b \in a+B_i$ esetén $\delta(b)$ kisebb legyen $\min\left\{2|x-b|, 2|y-b|\right\}$-nél minden $(x,y) \in \bigcup_{j=1}^{i} P_j$ esetén, ahol $B = \bigcup_{i=0}^{\infty}{}^{*} B_i$ és B_i a pontosan i törtjeggyel leírható számokból áll. Könnyen meggondolható, hogy δ-t így definiálhatjuk. A bizonyítás befejezéséhez igazoljuk, hogy tetszőleges $(x,y) \in P$, $z \in a+B$ esetén $x, 2z, y$ nem lehet δ-lánc. Tegyük fel, hogy $(x,y) \in P_i$, ekkor $\frac{y-x}{2} = \frac{1}{2^i}$. Ha $x, 2z, y$ δ-láncot alkot akkor

$$\delta\left(\frac{x}{2}, z\right) > |x-2z| = 2\left|x - \left(\frac{x}{2}+z\right)\right|,$$

ezért δ definíciója miatt $j \geq i$ esetén $\frac{x}{2}+z \notin a+B_j$. Hasonlóképp adódik $\frac{y}{2}+z \notin a+B_j$ is. Ekkor azonban $\frac{y-x}{2}$ leírható legfeljebb $i-1$ törtjeggyel, ami ellentmond $\frac{y-x}{2} = \frac{1}{2^i}$-nek.

Megjegyzés: nem ismeretes, mi a helyzet, ha legfeljebb 3 hosszúságú δ-láncok létezését kívánjuk meg.

Benczúr András dolgozata alapján

Érkezett 3 dolgozat. A feladatot megoldotta Benczúr András, helyes bizonyítást adott a feladat első részére Pásztor Gábor.

A 6. feladat megoldása

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\kappa(z) = \psi(z) - \varphi(z) \not\equiv 0$$
$$g(z) = f(z) - \varphi(z)$$
$$h(z) = \frac{g(z)}{\kappa(z)}.$$

Vizsgáljuk a következő feltételeknek eleget tevő függvényeket:

1) $f = h\kappa + \varphi$ reguláris,

2) $h\kappa$ seholsem 0,

3) $(h-1)\kappa$ seholsem 0.

Állítjuk, hogy léteznek olyan φ és κ az egységkörben meromorf függvények, hogy $\kappa(z) \neq 0$ ha $|z| < 1$ és a fenti feltételegyüttes nem teljesülhet semmilyen h függvényre. Ebből a feladat állítása közvetlenül leolvasható.

Ha φ-t és κ-t úgy választjuk meg, hogy pólusaik helye és rendje megegyezzék, akkor az 1) feltétel teljesülése maga után vonja azt, hogy h reguláris. Ha a három kitűzött feltétel teljesül, akkor $h(z)$ értéke csak κ pólushelyein lehet 1, és ezt is kizárhatjuk κ és φ ügyes megválasztásával. Ha elsőrendű pólusokat feltételezünk, akkor csak arra kell ügyelnünk, hogy κ ill. φ reziduumát a z_0 pólusban $A(z_0)$ ill. $B(z_0)$-lal jelölve $\frac{B(z_0)}{A(z_0)}$ értéke (-1)-től különbözzék. Az 1) feltétel alapján ugyanis ekkor $h(z_0) = -\frac{B(z_0)}{A(z_0)} \neq 1$.

A h reguláris függvény tehát az egységkörben sehol sem veszi fel a 0 ill. 1 értéket, így Schottky tétele alapján $|h(z)|$ egy, csak $|h(0)|$-tól és $|z|$-től függő korlát alatt marad. Ez azonban elképzelhetetlen, ha a következő függvénysorozatokat tekintjük:

$$\varphi_n = \varphi = \frac{1}{z} + \frac{1}{z - \frac{1}{2}}$$

$$\kappa_n = \frac{(1-z)^n}{z(z-\frac{1}{2})}.$$

A 2 pólusban a reziduumokat kiszámolva

$$A_n(0) = -2,\ B_n(0) = 1,\ A_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{-n+1},\ B_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

így könnyen látható, hogy a κ_n, φ_n függvények kielégítik az irántuk eddig támasztott kritériumokat. A kitűzött három feltétel teljesülése esetén azonban $h_n(0) = \frac{1}{2}$ és $h_n(\frac{1}{2}) = -2^{n-1}$, ellentétben a Schottky-tétel következményével. Ha tehát n elég nagy, akkor a κ_n és φ_n, ill. a belőlük származtatható $\psi_n = \kappa_n + \varphi_n$ függvényekre teljesül az állítás.

A feladat kitűzőjének megoldása

A feladatra nem érkezett megoldás.

A 7. feladat megoldása

Tételezzük fel egy ilyen T operátor létezését.

Tetszőleges $0 < a < 1$ esetén tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a \\ 1 & \text{ha } x \geq a \end{cases}$$

függvényt. A $h_a = f_a - Tf_a$ függvény az a pontbeli 1 nagyságú ugrásától eltekintve folytonos és $T(h_a) = T(f_a - Tf_a) = 0$.

Szükség esetén h_a-t $-h_a$-val helyettesítve feltehető, hogy a-nak egy kis jobb- vagy baloldali pontozott környezetében $h_a > \frac{1}{3}$.

Legyen $a_1 = \frac{1}{2}$ és készítsük el az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot úgy, hogy $a_i \in (0,1)$ és minden $i \geq 2$ esetén a_i az a_{i-1} megfelelő kis környezetéből való. Ekkor a $g_n = \sum_{i=1}^{n} h_{a_i}$ függvényre $g_n \in B[0,1]$, g_n folytonos az $a_1, \ldots, a_n$ pontokbeli 1 nagyságú ugrásoktól eltekintve, és $g_n > \frac{n}{3}$ az a_n pont egy kis egyoldali pontozott környezetében. Könnyen konstruálható olyan f_n folytonos függvény, melyre $\|f_n - g_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{2}$. (Egész pontosan itt egyenlőség áll.) Ekkor a T operátor normájára a

$$\|T\| \geq \frac{\|T(f_n - g_n)\|}{\|f_n - g_n\|} \geq 2 \cdot \|Tf_n - Tg_n\| = 2 \cdot \|f_n\| \geq \frac{2}{3}n - 1$$

becslés adódik, tetszőleges n természetes számra. T tehát nem lehet korlátos operátor, vagyis a feladatban támasztott követelményeknek eleget tevő T operátor nem létezik.

Benczúr András és a feladat kitűzőjének megoldása alapján

Érkezett 7 dolgozat. Helyes Benczúr András és Makai Géza megoldása.

A 8. feladat megoldása

Lényegében minden megoldás az alábbi algebrai gondolatmenetre épül. Ha R^2-et természetes módon azonosítjuk a $\mathbb{C}$ komplex számsíkkal, akkor pontsorozataink a $\mathbb{C}^n$ tér vektorainak tekinthetők, a rekurziós lépés pedig az

$$L(z_1,\ldots,z_n) = \left(\frac{z_1+z_2}{2},\ldots,\frac{z_n+z_1}{2}\right)$$

homogén lineáris transzformációnak felel meg.

$\mathbb{C}^n$-nek létezik L sajátvektoraiból álló bázisa: az $e_j = (1,\varepsilon^j,\varepsilon^{2j},\ldots,\varepsilon^{(n-1)j})$ vektorokra és $\lambda_j = \frac{1+\varepsilon^j}{2}$ skalárokra

$$L(e_j) = \lambda_j e_j \qquad /j = 1,2,\ldots,n/$$

ahol $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ primitív n-edik egységgyök.

$\mathbb{C}^n$ tetszőleges v vektora $v = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$ alakba írható. Minthogy $e_n = (1,1,\ldots,1)$, az $a_n e_n$ vektor hozzáadása az eredeti $\mathbb{R}^2$ síkon pontrendszerünknek egy rögzített vektorral történő eltolását jelenti. Ezért könnyen látható, hogy elég a feladatot az $e_1,\ldots,e_{n-1}$ vektor által generált altérre megszorítva vizsgálni. Tegyük fel tehát, hogy

$$\left(A_1^{(0)},\ldots,A_n^{(0)}\right) = v = \sum_{j=1}^{n-1} a_j e_j.$$

A rekurziós lépést N-szer egymás után alkalmazva kapjuk:

$$\left(A_1^{(N)},\ldots,A_n^{(N)}\right) = L^N(v) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \lambda_j^N e_j.$$

Elemi számolás mutatja, hogy $1 < j < n-1$ esetén $|\lambda_j| < |\lambda_1|$ és $|\lambda_{n-1}| = |\lambda_1|$. Így $1 < j < n-1$ esetén $\frac{|\lambda_j|^N}{|\lambda_1|^N} \to 0$, ha $N \to \infty$. Ezért elég azt látni, hogy majdnem minden esetben $a_1 e_1 + a_{n-1} e_{n-1}$ egy konvex n-szög egymást követő csúcsainak megfelelő vektor. És ez valóban így is van, ha $|a_1| \neq |a_{n-1}|$, ugyanis e_1 egy szabályos n-szög egymást követő csúcsaihoz tartozó vektor, $a_1 e_1 + a_{n-1} e_{n-1}$ pedig ahhoz a pontsorozathoz tartozik, melyet az előbb említett konvex n-szög egymás utáni csúcsaiból nyerünk, alkalmazva R^2-en a $z \to a_1 z + a_{n-1}\bar{z}$ lineáris transzformációt. Ez a transzformáció nem elfajuló, mert $a_1 z + a_{n-1}\bar{z} = 0$ csak $z = 0$ vagy $|a_1| = |a_{n-1}|$ esetén teljesülhet; így konvex n-szöget konvex n-szögbe visz.

Összegezve, a $\mathbb{C}^n$ tér vektoraira, melyek $\sum_{j=1}^{n} a_j e_j$ alakba írhatók, $|a_1| = |a_{n-1}|$ kivételével teljesül a feladatban megfogalmazott tulajdonság, a kivételes halmaz pedig valóban nullmértékű.

A feladatra megoldást nyújtott be Benczúr András, Drasny Gábor és Makay Géza. Mindhárom dolgozat helyes.

A 9. feladat megoldása

Minthogy X maga is megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítése, elegendő az állítást kompakt X terek esetén igazolni.

Tegyük fel, hogy X-nek nincs önmagában sűrű részhalmaza. Ekkor X jólrendezhető úgy, hogy minden kezdőszelete egy nyílt halmaz legyen. Valóban, tegyük fel, hogy $\beta < \alpha$ esetén $p_\beta \in X$ már definiált és $X_\alpha = \{p_\beta | \beta < \alpha\} \neq X$. Ekkor létezik olyan $p_\alpha \in X \setminus X_\alpha$, ami nem torlódási pontja $X \setminus X_\alpha$-nak, tehát egy alkalmas G_α nyílt környezetére $p_\alpha \in G_\alpha \subseteq X_\alpha \cup \{p_\alpha\}$. Ily módon definiáltuk X-nek egy jólrendezését és minden α-ra $\bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta \subseteq X_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} \{p_\alpha\} \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} G_\alpha$ mutatja, hogy $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$ nyílt halmaz. Ha X-nek lenne ω_1 típusú kezdőszelete, úgy az nem lehetne kompakt, ám minden valódi része megszámlálható, tehát nem lehet megszámlálható sok kompakt halmaz egyesítése sem. Így ez nem lehetséges, $|X| < \aleph_1$.

Elég tehát bebizonyítani, hogy X-nek nem lehet önmagában sűrű része. Tegyük fel indirekt, hogy van ilyen részhalmaz: Y. Ekkor $\overline{Y}$ önmagában sűrű és zárt. Ekkor megadható egy $f : \overline{Y} \to [0,1]$ folytonos függvény a következő módon. $\overline{Y}$ kompakt T_2 tér, így bármely két különböző p és q pontjához megadhatók így G_p, G_q nyílt és F_p, F_q zárt halmazok, hogy $p \in G_p \subset F_p$ és $q \in G_p \subset F_q$, valamint $F_p \cap F_q = \emptyset$. Ezért tetszőleges véges $\{\varepsilon_i\}$ 0-1 sorozatra definiálható az $A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} \subset \overline{Y}$ zárt halmaz úgy, hogy minden n természetes szám és $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0,1\}$ esetén

$$A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,0} \cup^* A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,1} \subseteq A_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$$

teljesüljön. Tetszőleges $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ végtelen 0-1 sorozat esetén az

$$A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n}$$

halmaz nem üres zárt halmaz, $x \in A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ esetén legyen

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \frac{1}{2^i}.$$

Az $A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ halmazok diszjunkt uniója is zárt, hiszen előállítható zártak metszeteként, és az f függvény folytonosan ráképezi a $[0,1]$ intervallumra. Ezért f kiterjeszthető folytonosan az egész $\overline{Y}$-ra, $\operatorname{Im} f = [0,1]$. Azonban könnyen látható, hogy a $[0,1]$ intervallumnak csak kontinuum sok σ-kompakt (másszóval: F_σ) része van, hiszen csak kontinuum sok zárt részhalmaza van. Van tehát $Z \subset [0,1]$, ami nem σ-kompakt, ennek $f^{-1}(Z) \subset \overline{Y}$ őseképe sem lehet σ-kompakt, ellentmondásra jutottunk. Tehát X-nek tényleg nem lehet önmagában sűrű része, és ezt akartuk bizonyítani.

A feladat kitűzőjének megoldása alapján

Érkezett 4 dolgozat. Lényegében jó Benczúr András megoldása, értékes részeredményeket tartalmaz Drasny Gábor és Bíró András dolgozata.

A 10. feladat megoldása

Tetszőleges α és β valós számokra fennáll az

$$|\alpha + \beta| - |\alpha - \beta| = 2 \cdot \operatorname{sign}(\alpha\beta) \cdot \min\big\{|\alpha|, |\beta|\big\}$$

egyenlőség. Ezért

$$E\big(|X+Y|\big) - E\big(|X-Y|\big) = E\big(|X+Y| - |X-Y|\big) =$$
$$= 2 \cdot E\Big(\min\big\{|X|, |Y|\big\} \cdot \operatorname{sign}(XY)\Big) =$$
$$= 2 \cdot \int_0^\infty \Big\{P\big(|X| \geq t,\ |Y| \geq t,\ XY \geq 0\big) - P\big(|X| > t,\ |Y| > t,\ XY < 0\big)\Big\}\, dt.$$

Minthogy X és Y független, azonos eloszlású valószínűségi változók és $P(Z \geq t) = P(Z > t)$ majdnem mindenhol,

$$E(|X+Y|-|X-Y|) =$$

$$=2 \cdot \int_0^{\infty} \left\{ \left[P(X \geq t)\right]^2 + \left[P(X \leq -t)\right]^2 - 2 \cdot P(X \geq t) \cdot P(X \leq -t) \right\} dt =$$

$$=2 \cdot \int_0^{\infty} \left[P(X \geq t) - P(X \leq -t)\right]^2 dt \geq 0,$$

vagyis $E(|X+Y|) \geq E(|X-Y|)$.

Benczúr András dolgozata alapján

Érkezett 7 dolgozat. Kifogástalan Drasny Gábor megoldása, lényegében helyes Kós Géza és Bíró András dolgozata. Jelentős részeredményt ért el Benczúr András.

FELADATROVAT

Szerkeszti Laczkovich Miklós

Feladatsorozatunk folytatódik. Kérjük kedves olvasóinkat, hogy megoldásaikat küldjék a rovatvezető címére: ELTE, Analízis Tanszék, 1088 Budapest, Múzeum krt. 6–8. Felhívjuk továbbá olvasóink figyelmét az 1991/2 szám 50-ik, illetve az 1991/3 szám 41-ik oldalán szereplő feladatokra, amelyeket 243. ill. 244. sorszámmal illesztünk a kitűzött feladatok sorába.

Kitűzött feladatok

245. Legyenek A_{ij} $(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m)$ az n-dimenziós euklidészi tér olyan konvex részhalmazai, hogy minden $0 \leq j_0, \ldots, j_n \leq m$ esetén $A_{0j_0} \cap \ldots \cap A_{nj_n} \neq \emptyset$. Bizonyítandó, hogy van olyan $0 \leq i \leq n$, amelyre

$$A_{i0} \cap A_{i1} \cap \ldots \cap A_{im} \neq \emptyset.$$

LOVÁSZ LÁSZLÓ

(*Megjegyzés.* Ezt a feladatot 206-os sorszámmal a Matematikai Lapok egyszer már kitűzte. Most azért közöljük ismét, mert amint azt Bollobás Béla nemrég felfedezte, a feladatra adott megoldás hibás volt.)

Megoldott feladatok

232. feladat. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ olyan divergens sor, amelynek tagjai pozitívak és nullához tartanak, és legyen $\sum_{i=1}^{k} a_i = s_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Bizonyítandó, hogy $n \to \infty$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{s_k}} \sim 2\sqrt{s_n}.$$

PETRUSKA GYÖRGY

1. Megoldás. Ha $m_i = \sqrt{s_i} - \sqrt{s_{i-1}}$ $(i = 1,2,\dots;\ s_0 = 0)$, akkor $a_i > 0$ miatt $m_i > 0$ és $m_1 + \dots + m_n = \sqrt{s_n}$. Legyen $\delta_i = a_i/(\sqrt{s_i}\cdot m_i)$. Ekkor

$$\delta_i = \frac{a_i\sqrt{s_i}}{s_i\left(\sqrt{s_i}-\sqrt{s_{i-1}}\right)} = \frac{a_i\sqrt{s_i}\left(\sqrt{s_i}+\sqrt{s_{i-1}}\right)}{s_i(s_i-s_{i-1})} = \frac{s_i+\sqrt{s_is_{i-1}}}{s_i} =$$

$$= 1+\sqrt{\frac{s_{i-1}}{s_i}} = 1+\sqrt{\frac{s_{i-1}}{s_{i-1}+a_i}} = 1+\sqrt{\frac{1}{1+(a_i/s_{i-1})}} \to 2.$$

Ebből a Cauchy féle határértéktétel szerint (lásd Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei, Budapest, 1951, 545. oldal)

$$\frac{m_1\delta_1+\dots+m_n\delta_n}{m_1+\dots+m_n} = \frac{\dfrac{a_1}{\sqrt{s_1}}+\dots+\dfrac{a_n}{\sqrt{s_n}}}{\sqrt{s_n}} \to 2.$$

DOBÓ ANDOR

2. Megoldás. Legyen f alulról korlátos monoton függvény $(0,1]$-ben. Könnyű belátni, hogy ha f (improprius) integrálja véges, ekkor $[0,1]$ bármely minden határon túl finomodó felosztássorozatát véve, f ezekhez tartozó alsó összegei az integrálhoz tartanak. Legyen $f(x) = 1/\sqrt{x}$, ekkor $\int_0^1 f\,dx = 2$. Mivel

$$0 < s_1/s_n < s_2/s_n < \dots < s_n/s_n = 1 \qquad (n = 1,2,\dots)$$

minden határon túl finomodó felosztássorozatot alkot, továbbá f ezekhez tartozó alsó összege

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{s_k/s_n}}\cdot\left(\frac{s_k}{s_n}-\frac{s_{k-1}}{s_n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{s_n}\cdot\frac{a_k}{\sqrt{s_k}},$$

így a fentiek szerint ez az összeg 2-höz tart.

PETRUSKA GYÖRGY

A 232. feladat megoldását beküldte még HARCOS GERGELY és SZABÓ SÁNDOR.

Megjegyzés. Mindkét megoldásból következik, hogy $a_n \to 0$ helyett elég feltenni, hogy $a_n/s_{n-1} \to 0$. Ez biztosan teljesül, ha a_n korlátos.

233. feladat. Legyen P a 19-edrendű alternáló csoport olyan eleme, amely előáll nyolc kételemű és egy háromelemű diszjunkt ciklus szorzataként. Bizonyítsuk be, hogy P nem állítható elő két hetedrendű permutáció szorzataként.

J. L. BRENNER

Megoldás. Tegyük föl, hogy léteznének olyan $a, b, c \in \mathrm{Alt}(19)$ permutációk, hogy a és b hetedrendű elemek, $c = ab$ ciklusfelbontásában pedig nyolc 2-ciklus és egy 3-ciklus szerepel. Jelölje a fixpontjainak halmazát A_0, b-ét pedig B_0.

(1) $A_0 \cap B_0 = \emptyset$, hiszen egy közös fixpont c-nél is fixen maradna.

Most a következőt látjuk be:

(2) c minden ciklusa tartalmaz olyan elemet, amit sem a sem b nem hagy fixen.

Legyen a szóbanforgó ciklus tartóhalmaza C. Ha $C \subset A_0$, akkor $b = a^{-1}c$ ciklusfelbontásában is előfordul ez a 2- vagy 3-ciklus, ami nem lehet. Ugyanígy következik, hogy $C \not\subset B_0$. Tegyük föl, hogy $C \subset A_0 \cup B_0$, ekkor C-ben mind A_0-beli, mind B_0-beli pontok előfordulnak. Legyen a ciklus $(\ x\ y\ )$ és tegyük föl, hogy mondjuk $b(x) = x$. Ekkor $y = c(x) = ab(x) = a(x)$, így $a(y) \neq y$, tehát $b(y) = y$, ellentétben az eddig megállapítottakkal. Legyen a ciklus $(\ x\ y\ z\ )$ és tegyük föl, hogy $b(x) = x$. Ekkor az előzőekhez hasonlóan kapjuk, hogy $a(y) \neq y$, tehát $b(y) = y$, és ugyanígy $b(z) = z$, ismét ellentmondás.

A (2) megállapításból következik, hogy $|A_0 \cup B_0| \leq$ pontok száma $-c$ ciklusainak száma $= 19 - 9 = 10$. Ezért

(3) mind a mind b két 7-ciklus szorzata, tehát öt-öt fixpontjuk van, így az előbbi egyenlőtlenségben $=$ áll, s ez azt jelenti, hogy

(4) c minden ciklusában egy és csak egy olyan pont van, amit sem a sem b nem hagy fixen.

Jelölje a két 7-ciklusának tartóhalmazát A_1 és A_2. Megmutatjuk, hogy

(5) nincs c-nek olyan ciklusa, amely A_1-ből és A_2-ből is tartalmaz pontot.

Indirekten bizonyítunk. Legyen először a ciklus $(\ x\ y\ )$, $x \in A_1$, $y \in A_2$, ekkor $b(x) = a^{-1}c(x) = a^{-1}(y) \in A_2$, $b(y) = a^{-1}c(y) = a^{-1}(x) \in A_1$, tehát $x, y \notin A_0 \cup B_0$, ellentmondás. Ha a ciklus $(\ x\ y\ z\ )$, akkor az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $x \in A_1$, $y \in A_2$, $z \notin A_2$. Most $b(x) = a^{-1}c(x) = a^{-1}(y) \in A_2$, tehát $x \notin B_0$, továbbá $b(y) = a^{-1}c(y) = a^{-1}(z) \in A_0 \cup A_1$, tehát $y \notin B_0$. Azt kaptuk, hogy $x, y \notin A_0 \cup B_0$, ami ellentmond a (4) állításnak.

Vegyük most — (5) alapján — a-nak azt a 7-ciklusát, A_i-t ($1 \leq i \leq 2$), ami diszjunkt c egyetlen 3-ciklusától. Tekintsük azokat a 2-ciklusokat c-ből, amelyek metszik ezt a 7-ciklust. Legyen ezeknek a 2-ciklusoknak a száma k, tartóhalmazaik egyesítése K. Világos, hogy $|K| = 2k$, valamint — lásd (5) — $A_i \subseteq K \subseteq A_i \cup A_0$, így $7 \leq |K| \leq 12$. A K halmaz mind c-nek mind a-nak egyes ciklusaiból áll, így ugyanez igaz $b = a^{-1}c$-re is. Csak az fordulhat elő, hogy K b egy ciklusából és néhány fixpontjából áll. K-ban a-nak $2k - 7$ fixpontja van, b-nek ugyanannyi. Ugyanekkor (4) szerint az összes fixpontok száma K-ban (c ciklusfelbontásából számolva) k-nak adódik, azaz

$$2(2k - 7) = k,$$

ám ilyen k egész szám nincs. Ezzel megkaptuk a végső ellentmondást.

PÁLFY PÉTER PÁL

KÖNYVISMERTETÉS

Collected Papers of Paul Turán
Akadémiai Kiadó, 1990

„Teli poggyásszal távozott közülünk" — hangzott el az 1976-ban elhunyt Turán Pál búcsúztatásakor. De amit ránk hagyott, közel 250 cikke összegyűjtve is három terjedelmes kötetben jelent meg nemrég az Akadémiai Kiadónál.

A cikkek angol, német és francia nyelven íródtak, a magyar nyelvű dolgozatok angol fordításban kerültek a kötetbe.

Érdekes és egyben igen tanulságos belelapozni a kötetekbe; Turán sok tétele ma már a matematikai kézikönyvek és előadások fontos és alapvető része. Nem egy a matematika új fejezetének alaptétele. Említsünk csak néhányat itt mutatóba: Hardy és Ramanujan tételének Turántól származó bizonyítása, a Sidon sorozatokra vonatkozó tétel, a Van der Waerden tétel általánosítását célzó, Erdőstől és Turántól származó eredmények és sejtések, vagy az extrémális gráfelmélet híres Turán tétele.

Legtöbb cikke természetesen az általa felfedezett hatványösszeg módszerrel és annak különböző alkalmazásaival foglalkozik, analitikus számelméleti ill. approximáció-elméleti témájú. E besorolások sem precízek egészen. Turán híres volt arról, ahogy egy volt tanítványa mondta, hogy „egymástól távol eső területek között találta meg a kapcsolatot". Hatványösszeg módszerét sikeresen alkalmazta a Riemann-féle zeta-függvények elméletében éppúgy, mint az ettől oly távol eső tárgykörben, az egyenletek közelítő megoldásában. Vagy említhetnénk azt a ciklussorozatot (On some applications of graph-theory I, II, III), amelyekben gráfelméleti módszerekkel bizonyít geometriai, potenciál-elméleti és függvénytani tételeket.

A kötetet a már említett hatványösszeg módszer és alkalmazásai, elemi és analitikus számelméleti, komplex függvénytani, approximáció- és interpolációelméleti, kombinatorika témájú cikkeket, differenciálegyenletek, statisztikus csoport- és partícióelméleti, Fourier sorokkal kapcsolatos és numerikus módszerek tárgyú dolgozatokat, valamint matematikusokról szóló megemlékezéseket tartalmaz.

Számos cikk után a tárgykör kiemelkedő hazai szakembere fűz megjegyzést a felvetett kérdések utóéletéről, az elért további eredményeket megemlítve, vagy egyszerűen rögzítve a tényt: jobb eredmény, mint a cikkben elértek nem ismeretesek.

Így a cikkek önmagukban is újabb megoldandó problémák kiindulópontjai lehetnek. Meg kell említeni Turán azon cikkét, amelyet közvetlen e célból, problémafelvető dolgozatként publikált (On some open problems of approximation theory).

Ezen enciklopédikusnak is mondható cikkében csaknem 90, az approximációelmélet tárgykörébe tartozó problémát vet fel.

E három kötettel Turán cikkeinek csaknem teljes gyűjteményét kapja kézhez az olvasó; néhány ismeretterjesztő cikke, fordítások és néhány külföldi előadás írott változata maradt ki a kötetből.

Mindazokat, ahogy e sorok íróját is, akik nem ismerték Turánt személyesen, a kötetet lapozgatva megérintheti az az eredetiség és egyedülállóság, ami e tudóst jellemezte.

„Olvassunk Eulert", hangzott a XIX. század matematikusainak a felhívás. Olvassunk Turánt, ajánlható e három kötet minden érdeklődő számára.

Hegyvári Norbert

ÚJ PRÍMSZÁM

Lapzártakor érkezett (London, 1992. március 26, MTI).

Új prímszámot fedeztek fel brit matematikusok. A csak eggyel és önmagával osztható számnak 227 832 helyiértéke van, és úgy lehet megkapni, hogy a kettőt 756 839-szer megszorozzuk önmagával, majd kivonunk belőle egyet.

Az Oxfordshire-i Harwell-laboratórium kutatói minden gyakorlati jelentőséget nélkülöző felfedezésüket egy CRAY–2 típusú szuperszámítógép segítségével érték el. Az új prímszám 162 782-vel több számjegyből áll, mint az eddigi ismert legnagyobb prímszám, amelyet egy amerikai kutatóközpontban fedeztek fel.

Az 1991. évi Szele Tibor emlékérem

A Szele Tibor Emlékérem Bizottság határozata: a Bizottság az 1991. évi Szele Tibor Emlékérmet Lovász Lászlónak itélte oda.

Indoklás:

Lovász László matematikai munkásságát röviden méltatni elég nehéz. Mintegy 150 cikkében és 7 könyvében rengeteg fontos új eredmény, új elmélet, módszer van.

Kezdjük talán az általa megoldott híres sejtésekkel. Mindhárom felsorolt probléma hosszú ideig állt az érdeklődés középpontjában. 1) Bebizonyította Berge sejtését, hogy egy perfekt gráf komplementere is gráf. 2) Kneser sejtését, amely megadta annak a gráfnak a kromatikus számát, amelynek pontjai egy n-elemű halmaz k-elemű részhalmazai, s kettő össze van kötve, ha diszjunktak. 3) Meghatározta az u.n. Shannon-ötszög zéró-hiba kapacitását. Ez utóbbi váltotta ki a legnagyobb érdeklődést, hiszen Shannon a 40-es évek végén vetette fel a problémát, és igen széles körben ismert volt mérnökök között is. El is nyerte általa az év legjobb információelméleti (!) cikkének járó díjat.

Már egyetemista korában elkezdte kifejleszteni a matching theoryban áttörő eredményeket hozó elméletét, amit Plumerrel írt könyvében teljesített ki. Kifejlesztette a gridoidok elméletét, jelentősen fejlesztette a geometriai algoritmusok elméletét, a konvex halmazok algebrai elméletét.

7 könyve igen nagy jelentőségű, de talán emeljük ki a „feladatgyűjteményét", amely feladatokon keresztül mutatja be a kombinatorika 1979-es állását, s amely hosszú ideig a legjobb iskola lesz a kombinatorikát kutatni szándékozók számára.

Lovász sok új módszert is hozott létre, amit nagyon kevés matematikusról lehet elmondani. Emeljük ki ezek közül azt az algebrai módszert, ami a Shannon- és Kneser-problémák megoldásához vezetett el.

Munkásságának nemzetközi elismeréseit sem lehet ilyen rövid méltatásban teljesen felsorolni. Amellett, hogy Akadémiánk és az Európai Tudományos Akadémia Tagja, már második időszakban tagja a Nemzetközi Matematikai Unió Végrehajtó Bizottságának, ami rendkivül nagy elismerés mind matemaikai teljesítményének, mind szervezőkészségének. Állami díjas, több külföldi egyetem dísz-doktora, elnyerte a Fulkerson-díjat. Megszámlálhatatlan rangos egyetemen volt vendégprofesszor, a nagytekintélyű Princeton-i egyetemen félállása van. Az Amerikában kiadott „Classic Papers in Combinatorics" című gyűjteményben két cikke is szerepel.

Hatalmas tudása, gyors gondolkozása lehetővé teszi, hogy néhány perces gondolkodás után olyan ötleteket adjon tanítványainak, vagy az alkalmanként hozzáfordulóknak, amikből azok némi munkával egy-egy cikket tudnak kidolgozni. Kár, hogy nincs olyan összesítés, ami a köszönetnyilvánításokat tartalmazza. Lovász neve mellett hatalmas sor állna.

Őmaga tanítványának tekinti Frank Andrást (tud. doktora), Turán Györgyöt (kand.), Juhász Rozáliát (kand.), a kínai Yi-t, Szőnyi Tamást (kand.), Király Zoltánt, kisebb mértékben Tardos Évát (kand.), Hajnal Pétert (kand.), Pyber Lászlót (kand.), Bacsó Gábort, Don Greenwellt, Törőcsik Jenőt. Ez is egy szép lista, de ide lehetne sorolni sok olyan matematikust, aki nála idősebb, vagy vele egykorú, tehát nem lehet a hagyományos értelemben tanítványának tekinteni, de „új matematikai életre" keltette őket a közös munka során, és szívesen vállalnák a tanítványságot. Ilyenek A. Schrijver, M. Grötschel, B. Korte, M. Plummer. Évfolyamtársa, Recski András és a csak kissé fiatalabb Babai László is Lovász tanítványának vallja magát.

Lovász László publikációinak listája

Könyvek:

Kombinatorika (Pelikán J. és Vesztergombi K.) Tankönyvkiadó, Budapest, 1977 (Német fordítás: Teubner, 1977; Japán fordítás: 1985)

Algoritmusok (Gács P.), Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978; Tankönyvkiadó, Budapest, 1987.

Combinatorial Problems and Exercises, Akadémiai Kiadó - North Holland, Budapest, 1979 (Japán fordítás: Tokai Univ.Press, 1988)

Matching Theory (M.D.Plummer), Akadémiai Kiadó - North Holland, Budapest, 1986.

An Algorithmic Theory of Numbers, Graphs, and Convexity, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics 50, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania 1986.

Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization (M. Grötschel, A. Schrijver), Springer, 1988; kínai kiadás: World Publishing Corp., Beijing, 1990.

Greedoids (B. Korte, R. Schrader), Springer, 1991.

Cikkek:

1965:

Független köröket nem tartalmazó gráfokról, *Mat. Lapok* **16**, 289–299.

1966:

On decomposition of graphs, *Studia Math. Hung.* **1**, 237–238.

1967:

On connected sets of points, *Annales Univ. R. Eötvös* **10**, 203–204.

Über die starke Multiplikation von geordneten Graphen, *Acta Math. Hung.* **18**, 235–241.

Operations with structures, *Acta Math. Hung.* **18**, 321–328.

1968:

Graphs and set-systems, in: *Beiträge zur Graphentheorie*, Teubner, Leipzig, 99–106.

On chromatic number of graphs and set-systems, *Acta Math. Hung.* **19**, 59–67.

On covering of graphs, in: *Theory of Graphs* (ed. P. Erdös, G. Katona), Akad. Kiadó, Budapest, 231–236.

1969:

Kapcsolatok polinomoknak és helyettesítési értékeiknek számelméleti tulajdonságai között, *Mat. Lapok* **20**, 129–132.

1970:

Generalized factors of graphs, in: *Combinatorial Theory and its Applications*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **4**, 773–781.

Subgraphs with prescribed valencies, *J. Comb. Theory* **8**, 391–416.

A generalization of König's theorem, *Acta Math. Hung.* **21**, 443–446.

A remark on Menger's theorem, *Acta Math. Hung.* **21**, 365–368.

The factorization of graphs, in: *Combinatorial Struc. Appl.*, Gordon and Breach, 243–246.

Representation of integers by norm-forms II, (K. Győry), *Publ. Math. Debrecen* **17**, 173–181.

1971:

On the cancellation law among finite relational structures, *Periodica Math. Hung.* 1 (1971), 145–156.

On finite Dirichlet series, *Acta Math. Hung.* **22**, 227–231.

On the number of halving lines, *Annales Univ. Eötvös* **14**, 107–108.

A matroidelmélet rövid áttekintése, *Mat. Lapok* **22**, 249–267.

1972:

Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Math.* **2**, 253–267; reprinted *Annals of Discrete Math.* **21** (1984) 29–42.

On the structure of factorizable graphs, *Acta Math. Hung.* **23**, 179–195.

The factorization of graphs II, *Acta Math. Hung.* **23**, 223–246.

On the structure of factorizable graphs II, *Acta Math. Hung.* **23**, 465–478.

Direct product in locally finite categories, *Acta Sci. Math. Szeged* **23**, 319–322.

A characterization of perfect graphs, *J. Comb. Theory* **13**, 95–98; reprinted in: *Classic Papers in Combinatorics* (ed. I. Gessel and G.C. Rota), Birkhäuser, 1987, 447–450.

A note on the line reconstruction problem, *J. Comb. Theory* **13**, 309–310; reprinted in: *Classic Papers in Combinatorics* (ed. I. Gessel and G.C. Rota), Birkhäuser, 1987, 451–452.

A note on factor-critical graphs, *Studia Sci. Math.* **7**, 279–280.

A szitaformuláról, *Mat. Lapok* **23** 53–69.

1973:

On the eigenvalues of trees (J. Pelikán), *Periodica Math. Hung.* **3**, 175–182.

Antifactors of graphs, *Periodica Math. Hung.* **4**, 121–123.

Dissection graphs of planar point sets (P. Erdös, G.J.Simmons, E.G.Strauss) in: *A Survey of Comb. Theory* (ed. S. Srivastava) Springer, 139–149.

A note to a paper of Dudley (P. Major), *Studia Sci. Math.* **8**, 151–152.

Permutation groups and almost regular graphs (L. Babai), *Studia Sci. Math.* **8**, 141–150.

Finite homeomorphism groups of the 2-sphere (L. Babai, W. Imrich), in: *Topics in Topology*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **9**, 61–75.

Connectivity in digraphs, *J. Comb. Theory* **15**, 174–177.

Independent sets in critical chromatic graphs, *Studia Sci. Math.* **8**, 165–168.

On the sum of matroids (A. Recski), *Acta Math. Hung.* **24**, 329–333.

Coverings and colorings of hypergraphs, in: *Proc. 4th Southeastern Conf. on Comb.*, Utilitas Math., 3–12.

Factors of graphs, in: *Proc. 4th Southeastern Conf. on Comb.*, Utilitas Math., 13–22.

1974:

Valencies of graphs with 1-factors, *Periodica Math. Hung.* **5**, 149–151.

Minimax theorems for hypergraphs, in: *Hypergraph Seminar* (ed. C. Berge and D.K.Ray–Chaudhuri), Lecture Notes in Math. **411**, Springer, 111–126.

Every directed graph has a semi-kernel (V. Chvátal), in: *Hypergraph Seminar* (ed. C. Berge and D.K.Ray–Chaudhuri), Lecture Notes in Math. **411**, Springer, 175.

Applications of product coloring (D. Greenwell), *Acta Math. Hung.* **25**, 335–340.

A family of planar bicritical graphs (M.D.Plummer), in: *Combinatorics*, London Math. Soc. Lecture Notes **13**, 103–108.

1975:

Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions (P. Erdős), in: *Infinite and Finite Sets*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **11**, 609–627.

On bicritical graphs (M.D.Plummer), in: *Infinite and Finite Sets*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **11**, 1051–1079.

A characterization of cancellable k-ary structures (R. Appleson), *Periodica Math. Hung.* **6**, 17–19.

A family of planar bicritical graphs (M.D.Plummer), *Proc. London Math. Soc.* **30**, 160–176.

Three short proofs in graph theory, *J. Comb. Theory* **19**, 269–271.

Spectra of graphs with transitive groups, *Periodica Math. Hung.* **6**, 191–195.

2-matchings and 2-covers of hypergraphs, *Acta Math. Hung.* **26**, 433–444.

On the ratio of optimal fractional and integral covers, *Discrete Math.* **13**, 383–390.

A kombinatorika minimax tételeiről, *Mat. Lapok* **26**, 209–264.

1976:

The number of values of Boolean functions (D.E.Daykin), *J. London Math. Soc.* **30**, 160–176.

On two minimax theorems in graph theory, *J. Comb. Theory B* **21**, 93–103.

On graphs of Ramsey type (S.A.Burr, P.Erdös), *Ars Combinatoria* **1**, 167–190.

On some connectivity properties of Eulerian graphs, *Acta Math. Hung.* **28**, 129–138.

Covers, packings and some heuristic algorithms, in: *Combinatorics*, Proc. 5th British Comb. Conf. (ed. C.St.J.A.Nash-Williams, J.Sheehan), Utilitas Math., 417–429.

On the number of complete subgraphs of a graph (M. Simonovits), in: *Combinatorics*, Proc. 5th British Comb. Conf. (ed. C.St.J.A.Nash-Williams, J.Sheehan), Utilitas Math., 439–441.

A forbidden substructure characterization of Gauss codes (M. Marx), *Bull. Amer. Math. Soc.* **82**, 121–122.

A forbidden substructure characterization of Gauss codes (M. Marx), *Acta. Sci. Math. Szeged* **38**, 115–119.

Chromatic number of hypergraphs and linear algebra, *Studia Sci. Math.* **11**, 113–114.

1977:

Some remarks on generalized spectra (P. Gács), *Zeitschr. f. math. Logik u. Grundlagen d. Math.* **23**, 547–554.

Certain duality principles in integer programming, *Annals of Discrete Math.* **1**, 363–374.

A homology theory for spanning trees of a graph, *Acta Math. Hung.* **30**, 241–251.

On minimal elementary bipartite graphs (M.D.Plummer), *J. Comb. Theory B* **23**, 127–138.

Flats in matroids and geometric graphs, in: *Combinatorial Surveys*, Proc. 6th British Comb. Conf., Academic Press, 45–86.

Polynomes de la matrice des distances d'un arbre (R.L.Graham), in: *Problèmes Combinatoires et Théorie de Graphes*, CNRS, 189–190.

1978:

Distance matrices of trees (R.L.Graham), in: *Theory and Appl. of Graphs*, Lecture Notes in Math. **642**, Springer, 186–190.

Distance matrix polynomials of trees (R. L. Graham), *Adv. in Math.* **29**, 60–88.

Mengerian theorems for paths with bounded length (M.D.Plummer, V.Neumann-Lara), *Periodica Math. Hung.* **9**, 269–276.

Some finite basis theorems in graph theory, in: *Combinatorics*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **18**, 717–729.

Restricted permutations and the distribution of Stirling numbers (K.Vesztergombi), in: *Combinatorics*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **18**, 731–738.

Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy, *J. Comb. Theory A* **25**, 319–324.

1979:

Topological and algebraic methods in graph theory, in: *Graph Theory and Related Topics*, Academic Press, 1–14.

Strong independence of graphcopy functions (P. Erdős, J. Spencer), in: *Graph Theory and Related Topics*, Academic Press, 165–172.

Graph theory and integer programming, *Annals of Discrete Math.* **4**, 141–158.

On the Shannon capacity of graphs, *IEEE Trans. Inform. Theory* **25**, 1–7.

An algorithm to prevent the propagation of certain diseases at minimum cost (A. Hajnal), in: *Interfaces between Computer Science and Operations Research*, Amsterdam Math. Centr. Tract **99**, 105–108.

Gráfelmelet és diszkrét programozás, *Mat. Lapok* **27**, 69–86.

Determinants, matchings, and random algorithms, in: *Fundamentals of Computation Theory, FCT'79* (ed. L. Budach), Akademie-Verlag Berlin, 565–574.

Random walks, universal travelling sequences, and the complexity of maze problems (R. Aleliunas, R.M.Karp, R.J.Lipton, C.W.Rackoff), *Proc. 20th Ann. Symp. on Foundations of Computer Science*, 218–223.

1980:

On a product dimension of graphs (A. Pultr, J. Nesetril), *J. Comb. Theory B* **29**, 47–67.

Selecting independent lines from a family of lines in a space, *Acta Sci. Math. Szeged* **42**, 121–131.

Matroid matching and some applications, *J. Comb. Theory B* **28**, 208–236.

The matroid matching problem, in: *Algebraic Methods in Graph Theory*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **25**, 495–517.

Matroids and Sperner's Lemma, *Europ. J. Combin.* **1**, 65–66.

Efficient algorithms: an approach by formal logic, in: *Studies on Math. Programming* (ed. A. Prékopa), Akadémiai Kiadó, 119–126.

Kombinatorikus optimalizáció, *Magyar Tudomány* **25**, 736–742.

A new linear programming algorithm: better or worse then Simplex Method? *Math. Intelligencer* **2**, 141–146.

1981:

Mathematical structures underlying greedy algorithms, (B. Korte), in: *Fundamentals of Computation Theory* (F. Gécseg, ed.) Lecture Notes in Comp. Sci. **117**, Springer, 205–209.

On additive arithmetic functions satisfying a linear recursion (A. Sárközi, M. Simonovits), *Annales Univ. Eötvös* **24**, 205–215.

The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization, (M. Grötschel, A. Schrijver), *Combinatorica* **1**, 169–197.

Remarks on a theorem of Rédei, (A. Schrijver) *Studia Sci. Math. Hung.* **16**, 449–454.

Cycles through given vertices of a graph (A. J. Bondy) *Combinatorica* **1**, 117–140.

Khachiyan's algorithm for linear programming (P. Gács), *Math. Prog. Study* **14**, 61–68.

1982:

Factoring polynomials with rational coefficients (A. K. Lenstra, H. W. Lenstra) *Math. Annalen* **261**, 515–534.

Brick decompositions and the matching rank of graphs (J. Edmonds, W. R. Pulleyblank), *Combinatorica* **2**, 247–274.

On generic rigidity in the plane (Y. Yemini), *SIAM J. Alg. Discr. Methods* **1**, 91–98.

Some combinatorial applications of the new linear programming algorithms, in: *Combinatorics and Graph Theory* (ed. S.B.Rao), Lecture Notes in Math. **885**, Springer, 33–41.

Bounding the independence number of a graph, *Ann. of Discr. Math.* **16**, 213–223.

Selected topics of matroid theory and its applications (A. Recski), *Suppl. Rendiconti del Circ. Mat. Palermo* **2**, 171–185.

1983:

Perfect graphs, in: *More Selected Topics in Graph Theory* (ed. L. W. Beineke, R. L. Wilson), Academic Press, 55–67.

Ear-decompositions of matching-covered graphs, *Combinatorica* **3** (1983) 105–117.

Structural properties of greedoids (B.Korte), *Combinatorica* **3** (1983) 359–374.

Submodular functions and convexity, in: *Mathematical Programming: the State of the Art* (ed. A.Bachem, M.Grötschel, B.Korte), Springer, 235–257.

Self-dual polytopes and the chromatic number of distance graphs on the sphere, *Acta Sci. Math. Szeged* **45**, 317–323.

On the number of complete subgraphs of a graph II (M. Simonovits), in: *Studies in Pure Math.*, To the memory of P. Turán (ed. P. Erdős), Akadémiai Kiadó, 459–495.

1984:

Algorithmic aspects of combinatorics, geometry and number theory, in: *Proc. Int. Congress Warsaw 1982*, Polish Sci. Publishers – North-Holland (1984) 1591–1595.

Geometric methods in combinatorial optimization (M.Grötschel, A.Schrijver), in: *Progress in Combinatorial Optimization* (ed.W.R.Pulleyblank), Academic Press, 167–183.

Greedoids - a structural framework for the greedy algorithm (B.Korte), in: *Progress in Combinatorial Optimization* (ed.W.R.Pulleyblank) Academic Press, 221–243.

Polynomial algorithms for perfect graphs (M.Grötschel, A.Schrijver), *Annals of Discrete Math.* **21**, 325–256.

A polynomial-time test for total dual integrality in fixed dimension (W.Cook, A. Schrijver), *Math. Programming Study* **22**, 64–69.

Corrigendum to our paper "The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization" (M.Grötschel, A.Schrijver), *Combinatorica* **4**, 291–295.

Greedoids and linear objective functions (B.Korte), *SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods* **5**, 229–238.

The mathematical notion of complexity, *Proc.IFAC Symposium*, Budapest.

Polynomial factorization and the nonrandomness of bits of algebraic and some transcendental numbers (R.Kannan, A.K.Lenstra), in: *Proc. 16th ACM SIGACT Symp. on Theory of Computing*, 191–200.

Shelling structures, convexity, and a happy end (B.Korte), in: *Graph Theory and Combinatorics* (ed.B.Bollobás), Acad.Press, 219–232.

1985

A note on selectors and greedoids (B.Korte), *Eur. J. Combinatorics* **6**, 59–67.

Posets, matroids, and greedoids (B.Korte), in: *Matroid Theory*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **40** (ed.L.Lovász, A.Recski), North-Holland, 239–265.

Polymatroid greedoids (B.Korte), *J. Comb. Theory B* **38**, 41–72.

Basis graphs of greedoids and 2-connectivity (B.Korte), *Math.Programming Study* **24**, 158–165.

Computing ears and branchings in parallel, *26th Annual Symp. on Found. of Computer Science*, IEEE Computer Soc., 464–467.

Some algorithmic problems on lattices, in: *Theory of Algorithms*, (eds. L. Lovász and E. Szemerédi), Coll. Math. Soc. J. Bolyai 44, North-Holland, 323–337.

Vertex packing algorithms, *Proc. ICALP Conf.*, Springer.

Homotopy properties of greedoids (A. Björner, B. Korte), *Advances in Appl. Math.* **6**, 447–494.

Relations between subclasses of greedoids (B.Korte), *Zeitschr. f. Oper. Res. A: Theorie* **29**, 249–267.

1986:

Algorithmic aspects of some notions in classical mathematics, in: *Mathematics and Computer Science* (ed. J.W.de Bakker, M.Hazewinkel, J.K.Lenstra) CWI Monographs **1**, North-Holland, Amsterdam, 51–63.

Relaxations of vertex packing (M.Grötschel, A.Schrijver), *J. Combin. Theory B* **40**, 330–343.

Discrepancy of set-systems and matrices (J.Spencer, K.Vesztergombi), *Europ. J. Combin.* **7**, 151–160.

Non-interval greedoids and the transposition property (B.Korte), *Discrete Math.* **59**, 297–314.

A note on perfect graphs (K.Cameron and J.Edmonds), *Periodica Math. Hung.* **17** (1986), 173–175.

A physical interpretation of graph connectivity (N.Linial, A.Wigderson), *Proc. 27th Annual Symp. on Found. of Computer Science*, IEEE Computer Soc. (1986), 39–48.

Covering minima and lattice point free convex bodies (R.Kannan), *Proc. Conf. on Foundations of Software Technology and Theoretical Comp. Sci.*, Lecture Notes in Comp. Sci. **241**, Springer (1986) 193–201.

Connectivity algorithms using rubber bands, *Proc. Conf. on Foundations of Software Technology and Theoretical Comp. Sci.*, Lecture Notes in Comp. Sci. **241**, Springer (1986) 394–411.

Searching in trees, series-parallel and interval orders (U.Faigle, R.Schrader, G.Turán), *SIAM J. Computing* **15** (1986) 1075–1084.

Homomorphisms and Ramsey properties of antimatroids (B.Korte), *Discrete Appl. Math.* **15**, 283–290.

1987:

The chromatic number of Kneser hypergraphs (N.Alon, P.Frankl), *Trans. Amer. Math. Soc.* **298**, 359–370.

On some combinatorial properties of algebraic matroids (A.Dress), *Combinatorica* **7**, 39–48.

Matching structure and the matching lattice, *J. Comb. Theory B* **43**, 187–222.

Pseudomodular lattices and continuous matroids (A.Björner), *Acta Sci. Math. Szeged* **51**, 295–308.

1988:

Rubber bands, convex embeddings, and graph connectivity, (N.Linial, A.Wigderson) Combinatorica 8 (1988) 91–102.

Geometry of numbers: an algorithmic view, in: *ICIAM '87: Proc. 1st Internatl. Conf. on Industr. Appl. Math.* (ed. J. McKenna, R. Teman), SIAM, Philadelphia 1988, 144–152.

Lattices, Möbius functions and communication complexity (M. Saks), 29th Annual Symp. on Found. of Computer Science, IEEE Computer Soc., 1988, 81–90.

The chromatic number of the graph of large distances (P.Erdős, K.Vesztergombi), in: *Combinatorics*, Proc. Coll. Eger 1987, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **52**, North-Holland, 547–551.

Algorithmic mathematics: an old aspect with a new emphasis, in: *Proc. 6th ICME, Budapest, 1988*, J. Bolyai Math. Soc., 67–78.

How to tidy up your set-system? (C.A.J.Hurkens, A.Schrijver, Éva Tardos) in: *Combinatorics*, Proc. Coll. Eger 1987, Coll. Math. Soc. J. Bolyai **52**, North-Holland, 309–314.

The intersection of matroids and antimatroids (B. Korte) *Discrete Math.* **73**, 143–157.

The complexity of communication, Bonn Yearbook

Covering minima and lattice point free convex bodies (R.Kannan), *Annals of Math.* **128**, 577–602.

1989:

Extremal problems for discrepancy (K.Vesztergombi), in: *Irregularities of Partitions*, (ed. G. Halász, V.T.Sós) Algorithms and Combinatorics **8**, Springer, 107–113.

Orthogonal representations and connectivity of graphs (M.Saks, A.Schrijver) *Linear Alg. Appl.* **114/115**, 439–454.

Examples and algorithmic properties of greedoids (B. Korte, O. Goecke), in: Combinatorial Optimization, Como 1986 (ed. B. Simeone), *Lecture Notes in Math.* **1403**, Springer 1989, 113–161.

Disks, balls and walls: The analysis of a combinatorial game (R.Anderson, P.Shor, J.Spencer, É.Tardos, S.Winograd), *Amer. Math. Monthly*

An on-line graph coloring algorithm with sublinear performance ratio (M. Saks, W. T. Trotter) *Discrete Math.* **75**, 319–325.

Faster algorithms for hard problems, *Information Processing '89* (ed. G. X. Ritter), Elsevier, 135–141.

Polyhedral results for antimatroids (B.Korte), in: *Combinatorial Mathematics*, Proc. 3rd Intern. Conf., (ed. G.S. Bloom, R. L. Graham, J. Malkevitch), *Ann. NY Academy of Sciences* **555**, 283–295.

On the graph of large distances (P.Erdös, K.Vesztergombi) *Discr. Comput. Geometry* **4** (1989) 541–549.

Geometry of numbers and integer programming, in: *Mathematical Programming, Recent Developments and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 177–201.

Singular spaces of matrices and their application in combinatorics, *Bol. Soc. Braz. Mat.* **20**, 87–99.

Some recent results on graph matching (M.D.Plummer), in: *Graph Theory and its Applications: East and West*, (ed. M. F. Capobianco, M. Guan, D. F. Hsu, F. Tian), *Ann. NY Acad. Sci.* **576**, 389–398.

1990:

Matrix cones, projection representations, and stable set polyhedra (with A. Schrijver), in: *Polyhedral Combinatorics*, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science I, 1–17.

The shapes of polyhedra (R. Kannan, H. E. Scarf) *Math. of Oper Res.* **15**, 364–380.

The mixing rate of Markov chains, an isoperimetric inequality, and computing the volume (with M. Simonovits) *Proc. 31st Annual Symp. on Found. of Computer Science*, IEEE Computer Soc., 1990, 346–354.

Communication complexity: a survey, in: *Paths, flows, and VLSI-Layout*, (ed. B. Korte, L. Lovász, H. J. Prömel, A. Schrijver), Springer, 235–265.

Entropy splitting for antiblocking pairs and perfect graphs (I. Csiszár, J. Körner, K. Marton, G. Simonyi) *Combinatorica* **10**, 27–40.

On the number of halving planes (I. Bárány, Z. Füredi) *Combinatorica* **10**, 175–183.

1991:

Graphs with given automorphism group and few edge orbits (with L. Babai and A.J. Goodman), *Europ. J. Combin.* **12** (1991), 185–203.

Chip-firing games on graphs (A. Björner, P.Shor) *Europ. J. Comb.* **12** (1991), 283–291.

Cones of matrices and set-functions, and 0-1 optimization (with A. Schrijver), *SIAM J. Optim.* **1**, 166–190.

Geometric algorithms and algorithmic geometry, *Proc. of Int. Congress of Math, Kyoto, 1990*, Springer-Verlag, 139–154.

The work of A. A. Razborov, *Proc. of Int. Congress of Math, Kyoto, 1990*, Springer-Verlag, 37–40.

Approximating clique is almost NP-complete (with U. Feige, S. Goldwasser, S. Safra and M. Szegedy), *Proc. 32nd IEEE FOCS*

Search problems in the decision tree model (with M. Naor, I. Newman, A. Wigderson), *Proc. 32nd IEEE FOCS* .

1992:

A matching algorithm for regular bipartite graphs (J. Csima), *Discrete Appl. Math.* **35**, 197–203.

MTESZ-egyesületi használatra!

Kiadja: Bolyai János Matematikai Társulat

Készült: 500 példányban

426/92 MTESZ Házinyomda, Budapest

Felelős vezető: Boncza Gábor

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Matematikai Lapok

1992/2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 2. évfolyam (1992), 2. szám

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201-7656.

Előfizetési díj 1993-ra 500 Ft, egyes szám ára 140 Ft.

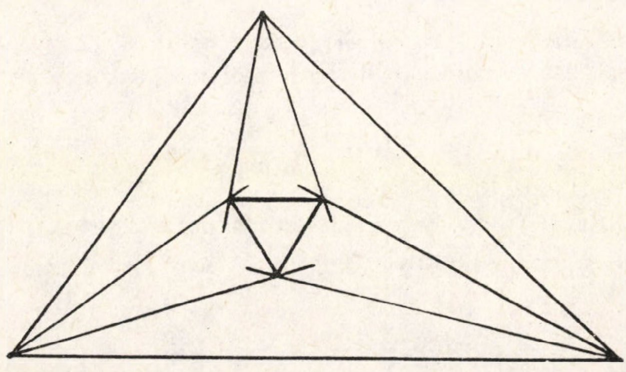
Megrendelhető a szerkesztőségtől.

NÉHÁNY MEGOLDATLAN ELEMI GEOMETRIAI PROBLÉMÁRÓL

ERDŐS PÁL

Hosszú életem során sok cikket írtam geometriai problémákról, de magyar nyelven csak két ilyen publikációm ([10] és [11]) jelent meg. Itt főleg olyan kérdésekről lesz szó, amelyek magyarul még nem jelentek meg, és amelyek megértéséhez semmi előismeret nem kell, csak egy kis matematikai érettség. Remélem azonban, hogy az alább közlendő megoldatlan problémák, melyeknek többsége tíz évnél régebbi, nem könnyűek.

Dieudonné és Branko Grünbaum között többször volt vita a geometria értékéről az oktatásban. Dieudonné híres jelszava így szólt: „Euklidész halott". Talán tényleg igaz, hogy az utóbbi száz évben nem sok igazán szép olyan tételt találtak, melyek Euklidész tetszését is megnyerték volna. Mindenestre az itt felsorolandó problémák kombinatorikus és metrikus természetűek, és a múlt században ilyen kérdéseket nemigen vizsgáltak. Hadd említsem meg azonban Morley gyönyörű tételét, melyet a század elején talált. Harmadoljuk az ABC háromszög szögeit, és legyenek a szomszédos harmadoló félegyenesek metszéspontjai A_1, B_1, C_1. Meglepetés: az $A_1B_1C_1$ háromszög mindig egyenlőoldalú!



Cikkünkben $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n különböző pont lesz a síkon. Ha nincs három egy egyenesen és négy egy körön, akkor azt mondjuk, hogy pontjaink általános helyzetben vannak. $d(x_i, x_j)$ jelenti x_i és x_j távolságát, $D(x_1, \ldots, x_n)$ pedig az $x_1, \ldots, x_n$ halmaz átmérőjét, azaz $D(x_1, \ldots, x_n) = \max_{1 \le i < j \le n} d(x_i, x_j)$.

1. Legyen $x_1, \ldots, x_n$ n pont. Tegyük fel, hogy ha $d(x_i, x_j) \neq d(x_k, x_l)$, akkor

$$|d(x_i, x_j) - d(x_k, x_l)| \geq 1. \tag{1}$$

Azaz ha két távolság különböző, akkor különbségük legalább egy. Igaz-e, hogy ha (1) fennáll, akkor

$$D(x_1, \ldots, x_n) > cn. \tag{2}$$

Sőt, talán ha $n \geq n_0$, akkor már $D(x_1, \ldots, x_n)$ minimuma $n-1$. Lehet, hogy ez már $n \geq 8$-ra is igaz. [1] (2) első bizonyításáért vagy megcáfolásáért 10000 forintot adok. Igaz marad-e (2), ha (1) csak olyan pontnégyesekre van feltéve, ahol mind a négy pont, x_i, x_j, x_k, x_l különböző? Vagy talán (1) akkor is igaz marad, ha e négy pont között csak három különböző van?

Ha pontjaink a háromdimenziós térben vannak, akkor (2) talán $cn^{2/3}$-dal igaz.

Makai Endrével észrevettük, hogy ha pontjaink általános helyzetben vannak, akkor talán

$$D(x_1, \ldots, x_n)/n \to \infty, \tag{3}$$

de van olyan általános helyzetű $x_1, \ldots, x_n$, hogy

$$D(x_1, \ldots, x_n)/n^2 \to 0. \tag{4}$$

Könnyű belátni, hogy $D(x_1, \ldots, x_n) < n^2 + o(1)$ lehetséges, de sem (3) sem (4) nem látszik egyszerűnek.

2. Még 1945-ben sejtettem [9], hogy ha $f(n)$ az a legnagyobb szám, hogy a $d(x_i, x_j)$ számok között van legalább $f(n)$ különböző, akkor

$$f(n) > c\frac{n}{\sqrt{\log n}}.$$

E sejtés bizonyításáért vagy megcáfolásáért 500 dollárt ígértem.

Jelölje $D(x_i)$ az x_i ponttól való különböző távolságok számát. Talán már

$$\max_{1 \le i \le n} D(x_i) > c\frac{n}{\sqrt{\log n}} \tag{5}$$

---

[1] Nemrég hallottam, hogy Harborth és egy tanítványa $n = 9$-re talált 9 ilyen pontot, melyeknek átmérője kisebb mint 5.

is igaz. Sőt, lehet, hogy (5) „majdnem minden" i-re is igaz. Nagyon érdekes lenne kivizsgálni, hogy hány olyan i lehet, melyre $D(x_i)$ lényegesen kisebb mint $cn/\sqrt{\log n}$. Itt még sejtésem sincs.

Igaz-e, hogy azon pontpárok száma, melyekre $d(x_i, x_j) = 1$ legfeljebb

$$n^{1+c/\log\log n}.$$

E sejtés bizonyításáért vagy cáfolásáért szintén 500 dollárt adok. A síkrács példája mutatja, hogy sejtésünk, ha igaz, nem javítható. E sejtések, melyeket először 1946-ban mondtam ki [9], biztosan igen nehezek, mert bár sok kiváló matematikus foglalkozott velük, nagyon messzire vagyunk a megoldásuktól.

Még egy érdekes sejtést szeretnék kimondani. Legyen $n > 5$. Sejtem, hogy van legalább két nem hasonló pontrendszer, $x_1, \ldots, x_n$ és $y_1, \ldots, y_n$, melyek $f(n)$ különböző távolságot határoznak meg. $n = 3$ és $n = 5$ esetén a szabályos sokszög az egyetlen ilyen ponthalmaz, de már $n = 4$-re a négyzet és a közös élű két egyenlőoldalú háromszög mutatja a két pontrendszer létezését. 5000 forintot adok egy ellenpéldáért és 10000-t egy bizonyításért.

3. Tegyük fel, hogy $x_1, \ldots x_n$ konvex sokszöget alkot. Sejtettem, hogy ebben az esetben a különböző távolságok száma legalább $n/2$. E sejtést Altman be is bizonyította [1] és [2]. Továbbá sejtettem, hogy

$$\max_{1 \le i \le n} D(x_i) \ge n/2.$$

Ez még mindig nyitott, 5000 forintot adok a bizonyításáért vagy cáfolásáért. Fishburn sejti, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} D(x_i) \ge \binom{n}{2},$$

és egyenlőség csak a szabályos sokszög esetén áll fenn. Fishburn sejtése egy közös cikkünkben [14] fog megjelenni.

Leo Moser és én több mint harminc évvel ezelőtt sejtettük, hogy egy konvex n-szögben a $d(x_i, x_j) = 1$ párok száma kisebb mint cn. Ezért is 10000 forintot adok. Füredi [16] nemrég cn helyett $cn \log n$-et bizonyított. Edelsbrunner és Hajnal Péter [7] konstruált olyan n-szöget, melyben ugyanaz a távolság $2n - 7$-szer fordul elő. Fishburnnel sejtjük, hogy itt $2n$ a helyes fölső határ. A következő élesebb sejtésem van: Minden konvex n-szögben van legalább egy olyan x_i szögpont, melytől nincs 4 pont egyenlő távolságra. Eredetileg ezt hárommal sejtettem (négy helyett), de erre Danzer ellenpéldát adott [13]. Jelölje $d(x_i)$ azt a legnagyobb számot, melyre van $d(x_i)$ pont egy x_i középpontú körön. Talán

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) \le 4n.$$

10000 forintot adok a bizonyításért, és 10000-t az előbbi sejtés cáfolatáért $c = 4$ helyett minden $c > 0$-ra.

Szemerédi [13, 100. oldal] bebizonyította, hogy ha $x_1, \ldots, x_n$ n pont a síkon, melyek között nincs három egy egyenesen, akkor közöttük legalább $n/3$ különböző távolság fellép. Sejti továbbá, hogy legalább $n/2$ különböző távolság lép fel köztük. Mindegyik problémánál meg kellene vizsgálni, mi történik, ha konvexség helyett csak azt tesszük fel, hogy nincs három pont egy egyenesen.

4. Legyenek az $x_1, \ldots, x_n$ pontok általános helyzetben. Sejtem, hogy $n > n_0$-ra a $d(x_i, x_j)$ távolságok eloszlása nem lehet olyan, hogy a leggyakrabban előforduló távolság $(n-1)$-szer fordul elő, a második leggyakrabban előforduló $(n-2)$-ször, stb. Palásti Ilona [23] $n = 8$-ra még konstruált 8 pontot ezzel a tulajdonsággal. 5000 forintot adok bizonyításért vagy ellenpéldáért. Talán a következő sokkal erősebb sejtés is igaz. Jelölje $f(x_1, \ldots, x_n)$ az $x_1, \ldots, x_n$ pontok által meghatározott különböző távolságok számát. Legyen $x_1, \ldots, x_n$ általános helyzetben. Igaz-e, hogy

$$f(x_1, \ldots, x_n)/n \to \infty.$$

10000 forintot adok bizonyításért vagy ellenpéldáért. Egyelőre $f(x_1, \ldots, x_n)$-re nincs nemtriviális becslésem. Triviális, hogy $d(x_i) \geq \frac{n-1}{3}$. Lehet, hogy

$$\max_{1 \leq i \leq n} d(x_i) = (1 + o(1))n. \tag{6}$$

Talán (6) túl optimista, de biztosra veszem, hogy $\max d(x_i) > n/2$, és hogy azon i indexek száma, melyekre

$$d(x_i) > (1/3 + \epsilon)n,$$

nagyobb mint cn. Itt c és ϵ becslésére egyelőre nincs sejtésem.

5. Legyen $x_1, \ldots, x_n$ n pont a síkban. Erika Pannwitz több mint 60 évvel ezelőtt bebizonyította, hogy azon pontpárok száma, melyekre

$$d(x_i, x_j) = D(x_1, \ldots, x_n)$$

legfeljebb n. A bizonyítás nem nehéz, és könnyű belátni, hogy n nem javítható. Pach János és én [15] azt sejtjük, hogy $n \geq 5$-re nem lehet megadni olyan $x_1, \ldots, x_n$ pontokat, melyre minden, az átmérőnél kisebb távolság n-nél többször fordulna elő. $n = 4$-re a sejtés nem lenne igaz, mint azt a közös élű két egyenlőoldalú háromszög példája mutatja.

6. Fishburn és én [14] felvetettük a következő problémákat. Legyen $x_1, \ldots, x_n$ n pont és $r_1 \geq r_2 \geq \ldots \geq r_m$ jelölje az előforduló távolságok multiplicitását. Természetesen $m = f(x_1, \ldots, x_n)$ és $\sum r_j = \binom{n}{2}$. Kérdeztük, hány r_k lehet n-nél nagyobb. Először tegyük fel, hogy $x_1, \ldots, x_n$ konvex pozícióban vannak. Beláttuk, hogy $n \geq 25$-re $r_1 > n$ és $r_2 > n$ lehetséges, de nem tudtuk eldönteni, hogy

$r_3 > n$ lehetséges-e valamilyen n-re. E kérdés eldöntéséért 1000 forintot adok. Ha a pontokról semmit nem teszünk fel, tudjuk, hogy $r_k > n$ körülbelül $n/6$ k-ra lehetséges. Érdekesek még a következő sejtések. Ha $x_1, \dots, x_n$ konvex, akkor

$$\sum_1^m r_k^2 < cn^3, \tag{7}$$

továbbá, ha $n > 8$, akkor $\sum r_k^2$ a szabályos konvex n-szög esetén maximális. Végül, ha $x_1, \dots, x_n$-ről nem teszünk föl semmit, akkor

$$\sum_1^m r_k^2 < c_1 n^3 (\log n)^{c_2}. \tag{8}$$

Sajnos (8) reménytelennek látszik: (8) bizonyításáért 500 dollárt adok, (7)-ért pedig 5000 forintot.

Régi kérdésem, hogy ha az $x_1, \dots, x_n$ pontok között nincs három egy egyenesen, legalább hány olyan x_i, x_j, x_k ponthármas van, hogy e háromszög belsejében ne legyen pont. Bárány és Füredi [4] bebizonyították, hogy ha $h(n)$ ennek minimuma, akkor

$$n^2 \le h(n) \le 2n^2.$$

Az itteni felső becslést Valtr [27] nemrég $1{,}8n^2$-re javította. Bárány a következő szép problémát vetette fel. Minden x_i, x_j pontpárhoz legyen $\ell(x_i, x_j)$ azon x_k pontok száma, melyekre az x_i, x_j, x_k háromszög üres, azaz belsejében nincs pont. Legyen továbbá

$$L(x_1, \dots, x_n) = \max_{1 \le i < j \le n} \ell(x_i, x_j).$$

Bárány sejti, hogy $L(x_1, \dots, x_n) \to \infty$, ha $n \to \infty$ minden általános helyzetű pontrendszerre.

7. Tíz ével ezelőtt kérdeztem: Legyen $k(n)$ az a legnagyobb szám, melyre megadhatók olyan $x_1, \dots, x_n$ pontok a síkon, melyek között nincs három egy egyenesen, és amelyek $k(n)$ különböző egységkört határoznak meg. Sejtettem, hogy

$$\frac{k(n)}{n} \to \infty \text{ és } \frac{k(n)}{n^2} \to 0.$$

Elekes [8] nagyon szellemes bizonyítást adott arra, hogy $k(n) > cn^{3/2}$. A bizonyítás így megy: Legyen $e_1, \dots, e_m$ m egységvektor általános helyzetben. Az $n = \binom{m}{2}$ pont legyen az $e_i + e_j$ alakú összegek halmaza $(1 \le i < j \le m)$. $\binom{n}{3}$ kör adódik; középpontjaik az $e_i + e_j + e_k$ pontok $(1 \le i < j < k \le m)$. Lehet, hogy Elekes konstrukciója már az extremális esetet adja. Kérdés még, hogy megváltozik-e a helyzet, ha feltesszük, hogy az $x_1, \dots, x_n$ pontok általános helyzetben vannak.

8. Egy egységnyi oldalú négyzetbe beírunk n^2+1 négyzetet, melyeknek nincs közös belső pontja. A négyzetek oldalhossza legyen a_i, $i = 1, \dots, n^2+1$. Igaz-e, hogy

$$\sum_{i=1}^{n^2+1} a_i \leq n. \tag{9}$$

Könnyű belátni, hogy n^2 ilyen négyzetre (9) triviális, de n^2+2-re már nem is igaz.

9. Legyenek az $x_1, \dots, x_n$ úgy megadva, hogy $d(x_i, x_j) \geq 1$ minden különböző i, j párra. Milyen elhelyezés mellett lesz $D(x_1, \dots, x_n)$ minimális? E kérdés természetesen nem új. Első pillanatban azt lehetne remélni, hogy $n > n_0$-ra pontjaink a háromszögrács részhalmaza lesznek, de valószínűleg ez nem igaz, és elképzelhető, hogy $n > n_0$-ra sohase lesz a ponthalmaz a háromszögrács része. Az viszont talán igaz lesz, hogy ha $D(x_1, \dots, x_n)$ minimális, akkor pontjaink elhelyezhetők úgy, hogy a háromszögráccsal $n - o(n)$ közös pontjuk legyen. Tudtommal ezt a kérdést még nem vizsgálták.

10. Sylvester problémájáról. Legyen $x_1, \dots, x_n$ n pont a síkon, melyek között nincs négy egy egyenesen. Jelölje $e_3(n)$ azon egyenesek maximális számát, melyek három ponton mennek át. Nyilván

$$e_3(n) \leq \binom{n}{2}/3.$$

Már Sylvester tudta azt a szerintem nagyon meglepő eredményt, hogy

$$e_3(n) \geq \frac{n^2}{6} - cn. \tag{10}$$

c pontos értéke még nem ismeretes, lásd Burr, Grünbaum és Sloane szép cikkét [6] a „faiskola problémáról" (Orchard problem=a faiskola problémája), lásd még Füredi–Palásti [17]. Legyen $E_k(n)$ az a legnagyobb szám, melyre van n olyan pont a síkon, hogy a pontosan k pontot tartalmazó különböző egyenesek száma $E_k(n)$. Jelölje $e_k(n)$ ugyanezt a számot, ha az n síkbeli pont között nincs $k+1$ pont egy egyenesen. Valószínűnek látszik, hogy $e_3(n) = E_3(n)$, de a helyzet teljesen megváltozik, ha $k > 3$. Régi sejtésem, hogy $e_4(n) = o(n^2)$, 10000 forintot adok a bizonyításért és 50000 forintot egy ellenpéldáért. Biztosra veszem, hogy a sejtés igaz. Kárteszi [21] talált példát $e_4(n) > cn \log n$-re és Grünbaum [18] $e_4(n) > cn^{3/2}$-re. Lehetséges, hogy $e_4(n) < c'n^{3/2}$. Grünbaum példája $e_k(n) > cn^{(k-1)/(k-2)}$-t ad, és talán ez a helyes nagyságrend minden $k > 3$-ra. A rácspontok példája viszont azt mutatja, hogy

$$E_k(n) > c_k n^2,$$

de $\lim E_k(n)/n^2$ értékét még $n = 4$-re sem tudom. Lehet, hogy $E_k(n)$ a négyzetrács esetén a legnagyobb. Ezt talán érdekes volna n kis értékeire ellenőrizni. Valószínűnek tartom, hogyha azon egyenesek száma, melyeken legalább 4 pont van, nagyobb mint cn^2, akkor kell olyan egyenesnek lennie, melyen „sok" pont van, a „sok" esetleg $\varepsilon n^{1/2}$.

A már említett $e_3(n) = E_3(n)$ sejtés talán még akkor is igaz marad, ha $E_k(n)$-ben megengedjük, hogy egy egyenesen $k+1$-nél több pont is legyen: azaz legyen $E'_k(n)$ az a maximális szám, melyre van n olyan pont a síkon, hogy a legalább k pontot tartalmazó egyenesek száma $E'_k(n)$. Bizonyára $k > 3$ esetén

$$\lim E'_k(n)/n^2 > \lim E_k(n)/n^2.$$

Még egy ide vonatkozó kérdést szeretnék megemlíteni. Sejtettem, hogy azon különböző egyenesek száma, melyeken $\sqrt{n}$-nél több x_i van, kisebb mint $c\sqrt{n}$. Ezt a sejtést Beck [5], valamint Szemerédi és Trotter [26] be is bizonyították, de c-re csak nagyon nagy értéket találtak. A síkrács mutatja, hogy ezen egyenesek száma lehet $2\sqrt{n}+2$, és azt hittem, hogy $(2+o(1))\sqrt{n}$ a helyes nagyságrend. De Sah [24] talált n olyan pontot, amelyeknél $3\sqrt{n}$ egyenes tartalmaz $\sqrt{n}$ pontot. Lehet, hogy $3\sqrt{n}$ már a helyes nagyságrend.

11. Tegyük fel, hogy az $x_1, \ldots, x_n$ pontok nincsenek mind egy egyenesen. Legalább hány különböző $0 < \alpha < \pi$ szöget határoznak meg ezek a pontok? Ez a kérdés, mely Corráditól, Hajnaltól és tőlem való, egy sajtóhiba folytán keletkezett. A Középiskolai Matematikai Lapokban a következő (triviális) gyakorlatot tűztem ki. Ha az $x_1, \ldots, x_n$ pontok között nincs három egy egyenesen, akkor legalább $n-2$ 0 és π közé eső szöget határoznak meg. Legnagyobb meglepetésemre Corrádi és Hajnal mondták, hogy nem tudják megcsinálni, és kérdezték, hogy én hogy csináltam meg. Gyorsan kiderült, hogy a „nincs három egy egyenesen" helyett az állt, hogy „nincs mind egy egyenesen". Így már én se tudtam megcsinálni. Lehet, hogy a szabályos sokszög adja az extrémumot, és a válasz $n-2$, ha n elég nagy.

12. Anning és én [3] bebizonyítottuk, hogy ha $x_1, x_2, \ldots$ végtelen sok pont a síkban és $d(x_i, x_j)$ mindig egész szám, akkor ez csak úgy lehet, ha a pontok mind egy egyenesen vannak. Ugyanez igaz marad akárhány dimenzióban is. Többen vizsgálták a következő kérdést: Megadható-e n pont, $x_1, \ldots, x_n$ általános helyzetben úgy, hogy minden $d(x_i, x_j)$ egész szám. Harborth és Kemnitz [20] találtak hat ilyen pontot, melyre az átmérő 174, és ez a minimális átmérő. Tudtommal nem ismeretes, hogy van-e hét ilyen pont.

Ulam sejtette, hogy ha $x_1, \ldots$ a síkban mindenütt sűrűn van, akkor nem lehet valamennyi távolság racionális. E sejtés valószínűleg igaz, de talán nehéz lesz bebizonyítani. Talán az is igaz, hogy van egy mindenütt sűrű részsorozat, melyben egyetlen távolság sem racionális. Besicovich Ulamtól függetlenül kérdezte: Van-e minden ε-hoz és n-hez egy szabályos n-szög $y_1, \ldots, y_n$ és minden $i = 1, \ldots, n$-re egy z_i, melyre $d(y_i, z_i) < \varepsilon$ és minden $d(z_i, z_j)$ racionális. Tudtommal a válasz már $n = 5$-re sem ismert. Talán ha $x_1, x_2, \ldots$ mindenütt sűrű halmaz, akkor mindig van mindenütt sűrű részhalmaza, melyben minden távolság racionális.

13. Legyenek most $x_1, \ldots, x_n$ pontok a d-dimenziós térben. Legyen $f(n;d)$ a legnagyobb szám, melyre ezen pontok legalább $f(n;d)$ különböző távolságot határoznak meg. Könnyű bebizonyítani, hogy minden d-re és elég nagy n-re $f(n;d) > n^{\varepsilon_d}$. Persze ε_d pontos értékét egyetlen d-re sem tudjuk meghatározni, de most nem ezzel fogunk foglalkozni, hanem a következő talán újszerű és érdekes kérdéssel. Az $x_1, \ldots, x_n$ pontokat osszuk két egyenlő csoportba, az egyik $y_1, \ldots, y_{n/2}$, a másik $z_1, \ldots, z_{n/2}$. Legyen $g(n;d)$ az a legnagyobb szám, melyre $d(y_i, z_j)$ legalább $g(n;d)$ különböző értéket vesz föl. Lenz egy jól ismert példája szerint $g(n;4) = n^2/4$; a pontokat két ortogonális körön kell fölvenni. Igaz-e három vagy akár két dimenzióra, hogy

$$f(n;3)/g(n;3) \to \infty,$$
$$f(n;2)/g(n;2) \to \infty.$$

Ha ez nem igaz (amit egyébként valószínűnek tartok), akkor mi lehet a limesz értéke? A kérdés értelme persze az, hogy már két vagy három dimenzióban is sokkal kevesebb távolságot kapunk, ha teljes gráf helyett egy teljes páros gráfot vizsgálunk. E kérdésről egyelőre semmit sem tudok.

14. Régi klasszikus Nelsontól és Hadwigertől [19] való probléma, hogy ha a síkban két pontot összekötünk, ha távolságuk egy, akkor mekkora e gráf kromatikus száma. Ismert, hogy ez 4 és 7 között van, és valószínűleg nagyobb mint 4. Valószínűnek látszik az is, hogy ha az r sugarú körben egy halmazban nincs két pont egységnyi távolságra, akkor a halmaz mértéke $< \pi r^2/4$. Általában legyenek $x_1, \ldots, x_n$ pontok a síkban, és jelölje $f(n)$ azt a legnagyobb számot, hogy ezen n pont között mindig van több mint $f(n)$, melyre bármely kettő távolsága egytől különbözik. L. és W. Moser [22] egy példája mutatja, hogy $f(n) < 2n/7$. Másrészt Székely László bebizonyította [25], hogy $f(n) \geq n/4$. Valószínűleg $f(n) = n/4$. Bizonyításért vagy ellenpéldáért 5000 forintot adok. Érdekes lenne $f(n)$ értekét kis n-ekre meghatározni.

Tegyük fel mármost, hogy az $x_1, \ldots, x_n$ pontok minimális távolsága egy. Kössünk össze két pontot, ha távolságuk pontosan egy. Legyen $g(n)$ az a legnagyobb szám, melyre e gráfban legalább $g(n)$ független pont van. Azt gondoltam, hogy $g(n) = n/3$. De Fan Chung és Graham (publikálatlan, lásd [12]), és tőlük függetlenül Pach (publikálatlan, lásd [12]) egy szellemes példát talált, melyre $g(n) \leq 6n/19$. Pollack (publikálatlan, lásd [12]) egy egyszerű bizonyítást adott $g(n) \geq n/4$-re. Érdekes lenne $g(n)$-t meghatározni, ez talán nem lesz könnyű.

Hivatkozások

1. Altman, E., *On a problem of P. Erdős*, Amer. Math. Monthly **70** (1963), 148–158.
2. Altman, E., *Some theorems on convex polygons*, Canad. Math. Bull. **15** (1972), 329–340.

3. Anning, W. H. és Erdős Pál, *Integral distances*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 598–600.

4. Bárány Imre és Füredi Zoltán, *Empty simplices in euclidean space*, Canad. Math. Bull. **30** (1987), 436–445.

5. Beck József, *On the lattice property of the plane and some problems of Dirac, Motzkin and Erdős*, Combinatorica **3** (1983), 281–299.

6. Burr, S. A., B. Grünbaum és N. J. A. Sloane, *The orchard problem*, Geometriae Dedicata **2** (1974), 397–424.

7. Edelsbrunner, H. és Hajnal P., *The lower bound on the number of unit distances between n points of a convex polygon*, J. Comb. Theory A **56** (1990), 312–316.

8. Elekes György, *n points in the plane can determine $n^{3/2}$ unit distances*, Combinatorica **4** (1984), 131–132.

9. Erdős Pál, *On sets of distances of n points*, Amer. Math. Monthly **53** (1946), 248–258.

10. Erdős Pál, *Néhány geometriai problémáról*, Matematikai Lapok **8** (1957), 86–92.

11. Erdős Pál, *Néhány elemi geometriai problémáról*, Középiskolai Matematikai Lapok **24** (1962), 193–201.

12. Erdős Pál, *Some combinatorial and metric problems in geometry*, Intuitive Geometry, Colloquia Math. Soc. J. Bolyai **48** (1987), 167–178.

13. Erdős Pál, *On some problems of elementary and combinatorial geometry*, Annali Mat. Pura Appl. (4) **103** (1975), 99–108.

14. Erdős Pál és P. Fishburn, *Multiplicities of interpoint distances in finite planar sets* (to appear, 1992).

15. Erdős Pál és Pach János, *Variations on the theme of repeated distances*, Combinatorica **10** (1990), 261–269.

16. Füredi Zoltán, *The maximum number of unit distances in a convex n-gon*, J. Comb. Theory A **56** (1990), 316–320.

17. Füredi Zoltán és Palásti Ilona, *Arrangements of lines with a large number of triangles*, Proc. Amer. Math. Soc. **92** (1984), 561–566.

18. Grünbaum, B., *New view on some old questions of combinatorial geometry*, Colloquio Int. sulla Teorie Combinatorie, Tomo 1, Atti dei Convegni Lincei, Accad. Naz. Lincei **17** (1973), 451–468.

19. Hadwiger, H., *Ungelöste Probleme No. 40*, Elemente Math. **16** (1961), 103–104.

20. Harborth, H. és A. Kemnitz, *Diameters of integral point sets*, Intuitive Geometry, Colloquia Math. Soc. J. Bolyai **48** (1987), 225–266.

21. Kárteszi Ferenc, *Sylvester egy tételéről és Erdős egy sejtéséről*, Középiskolai Mat. Lapok **26** (1963), 3–10.

22. Moser, L. és W. Moser, *Solution to Problem 10.*, Canad. Math. Bull. **4** (1961), 103–104.

23. Palásti Ilona, *Lattice-point examples for a question of P. Erdős*, Periodica Math. Hung. **20** (1989), 187–190.

24. Sah, Chih-han, *The rich line problem of P. Erdős*, Intuitive Geometry, Colloquia Math. Soc. J. Bolyai, **48** (1987), 123–125.

25. Székely László, *Measurable chromatic number of geometric graphs and sets without some distances in euclidean space*, Combinatorica 4 (1984), 213–218.

26. Szemerédi Endre és W. T. Trotter, Jr., *Extremal problems in discrete geometry*, Combinatorica **3** (1983), 381–393.

27. Valtr, P., *On the minimum number of empty polygons in planar point sets* (to appear, 1992).

AZ EÖTVÖS-KÜRSCHÁK VERSENYRŐL

SURÁNYI JÁNOS

Magyarországon a múlt században indult meg a tudományok fejlődése és ennek nyomán a század második felétől a tudományos szervezeteké is. A Matematikai és Fizikai Társulat alapcélkitűzései között szerepelt a tudományos és tanári utánpótlás nevelésének segítése.

Ezt a célt szolgálta a megalakulás után nem sokkal, 1894-ben a br. Eötvös Loránd Matematikai Tanulóverseny, majd kevéssel később a fizikai tanulóverseny megindítása is, a tárgyak iránti érdeklődés felkeltésére és a tehetséges fiatalok mielőbbi felismerésére. A versenyeket évente rendezte a Társulat az azévben érettségizettek részére.

A 2. világháború után a tudományok fejlődésének megfelelően különvált a Fizikai és a Matematikai Társulat. Azóta Eötvös nevét értelemszerűen a Fizikai társulat és versenye viseli. A matematikai verseny neve Kürschák Józsefnek, a Műegyetem neves professzorának, kiváló pedagógusnak, haláláig a versenyek lelkes szervezőjének emlékét őrzi. A versenyen az érettségizettek mellett iskolai tanulók is részt vehetnek és vesznek. Évente országszerte ötszáz körül van az indulók száma.

Kürschák feldolgozta könyv alakban (Matematikai Versenytételek címen) az 1928-ig rendezett versenyek feladatait és megoldásaikat. Egyes feladatokhoz fűzött jegyzetekben egyrészt szélesítette az olvasók ismereteit, másrészt fényt vetett a matematika olyan ágaira, amelyekről nem esik szó az iskolában. A mű azóta ismételten megjelent egy 2. kötettel bővítve, amelyik utolsó kiadásában 1963-ig dolgozza fel a versenyeket, továbbra is az eredeti mű elgondolásait követve. Örömmel tudatom, hogy az 1964–1987. közti versenyeket feldolgozó 3. kötet már ki van szedve.

Versenyünket jól ismerik határainkon túl is. A Versenytételeknek megjelent angol, japán, orosz és román fordítása is. A nemrég elhunyt Hans Freudenthal professzor beszámolót készített a világszerte rendezett versenyekről. Ebben az Eötvös versenyt időrendben elsőnek a Leningrádban (ma Szentpétervár) 1934 óta rendezett verseny követi. (Egy későbbi cikk a Romániában már 1906 óta folyó versenyekről számol be.)

Statisztikai adatok és általában elég jól ismert részletek ismertetése helyett legyen szabad még elmondanom néhány gondolatomat általában a versenyekkel kapcsolatban.

A verseny a vele nagyjából egyidőben megindult Középiskolai Matematikai Lapokkal együtt jól szolgálta az eredeti célkitűzést, számos, későbben híressé vált kutató tűnt már itt fel. Van azonban a versenyeknek számos ellenzője is, és indokaik közt olyanok, amelyeket komolyan mérlegelni kell. Legkevésbé talán az az ellenérv fogadható el, hogy ezeken a versenyeken is elsősorban kitartó edzéseken múlik a jó eredmény elérése, csak kérdés, hogy megéri-e.

Valójában ez az edzés feladatmegoldást jelent, és aki egyszer megérezte az eredményes problémamegoldás örömét, egy életre megőrzi azt; és amit ez kifejleszt, a hajlékony gondolkodás, az az embert egész életén végigkísérő értékes képesség.

Jó eredmények eléréséhez azonban jó felkészültségen túl versenyezni kell a rendelkezésre álló idővel is, megbírkózni az ebből adódó idegfeszültséggel, tudni gyorsan gondolkozni. Van akinek ez örömet okoz, de nem mindenki, akinek jók a matematikai képességei, rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal is. Eredménytelen versenyzés pedig kedvét szegheti a matematikai munkától.

Ez a felismerés vezetett ahhoz is sok évvel ezelőtt, hogy a többfordulós versenyek első fordulóját 3-nál több, különböző nehézségű feladattal rendezzék, hogy minden, némi matematikai érzékkel rendelkező tanulónak lehessen valami sikere.

A versenyeknek lehet élénkítő hatása az iskolai munkára is, például azzal, hogy feladatainak változatosságával segít a példatárak feladatainak felélénkítésében. Tapasztalni vélek azonban egy nagyon káros jelenséget, azt, hogy gyakran szinte az iskolai teljesítmény mércéjének tekintik a tanulók versenyeredményeit. Ennek megfelelő nagy súlyt kap ez az egyes tanárok munkájának jellemzésében is. (És ez nem elsősorban a versenyek hibája.) Márpedig önmagában is nagy csábítás elsősorban a jó képességű, a matematika iránt spontán érdeklődő tanulókkal foglalkozni és „megértőnek" lenni a gyengébbek iránt, kevéssel beérni részükről.

Az iskolának fontos feladata azonban, hogy a nem különösen matematikára hangoltakkal is megkedveltesse a tárgyat. Ehhez persze hozzátartozik az is, hogy ne próbáljuk agyontömni őket matematikával, de tőlük is erejükhöz mért erőfeszítést, hangsúlyozom, erőfeszítést kívánó követelmények támasztásával érzékeltessük, hogy képesek egyre jobb eredményekre.

Valami igazat azoknak is kell adnom, akik a versenyekre való edzést hibáztatják. A feladatmegoldó készség fejlesztését, mint mondtam, fontos feladatnak, a matematikai nevelés lényeges részének tartom, túlhangsúlyozása azonban torz képet nyújt a matematikáról. A matematika kialakulásában azonban a rendszerezés, erre lehetőséget adó szempontok felfedezése; a problémafelvetés, felismerés képessége, és sok egyéb is fontos szerepet játszott és játszik. A versenyek ezek fejlesztésére már kevésbé alkalmasak.

Mindezeket mérlegelve úgy gondolom, hogy a versenyeknek nálunk tapasztalható túlburjánzása már veszélyes. Azon túl, hogy gerjeszthetik azt a túlértékelést, amit említettem, azzal is jár, hogy sokan megcsömörlenek a matematikától. És ne nyugtassuk magunkat azzal, hogy nem kötelező minden versenyen elindulni. Ugyan hányan hajlandók lemondani a siker lehetőségéről, ha egyszer fel van kínálva?

A versenyekben rejlő veszélyekről beszéltem, de semmiképpen sem azok káros voltáról. Bűn volna lemondani azokról az ösztönző élményekről amiket a versenyek adhatnak. Ha másképp gondolnám, nem vennék aktív részt versenyek szervezésében. Ez az élmény azonban a túl sok versenyzés során elveszhet, és az eredményes megoldás fölötti öröm helyét fokozatosan a puszta győzni akarás foglalja el, ami nem kívánatos. Párhuzamos versenyeknek elsősorban akkor van értelme, ha mindegyiknek megvan az egyéni sajátossága, csak arra a versenyre jellemző igénye.

Egy véleményt mondtam el, bizonyára akadnak, akik egyik-másik részével, esetleg az egésszel nem értenek egyet. Talán akadnak olyanok is, akik sokban egyetértenek, és ekkor már hasznos vita alakulhat ki.

HOGYAN TEGYÜK TÖNKRE KONFERENCIÁKON TARTOTT ELŐADÁSAINKAT AZ ÍRÁSVETÍTŐ ALKALMAZÁSÁVAL?

RECSKI ANDRÁS

(Mivel írjunk?) Az igazi pancser már a tollak vásárlásánál megteszi az első lépéseket. Ha arra kell a toll, hogy az előadás utáni vitában a fóliára írjunk pár szót, képletet vagy ábrát — mert az előadóteremben nincs tábla —, akkor vízben nem oldható (water resistant, wasserfest) festékkel töltött tollat használjunk: az esetleges hibát hiába próbáljuk letörölni (ujjunkkal, zsebkendővel, akármivel), csak magunkat kenjük össze. Ha viszont az előadás közben bemutatandó fóliák elkészítéséhez kezdünk hozzá, csak vízben oldódó (water soluble, wasserlöslich) festékkel dolgozzunk. Minél nagyobb gonddal rajzolunk meg egy bonyolult ábrát, annál valószínűbb, hogy az előadás közben — amikor az izgalomtól az átlagosnál jobban izzadunk — rátenyerelünk, és hallgatóságunk csak egyetlen izgalmas színes pacát fog látni.

(Mire írjunk?) Az írásvetítő felülete egy 25 cm élhosszúságú négyzet. Ez azt jelenti, hogy az A4 méretű szokásos fóliáknak vagy az alja, vagy a teteje nem látszik — feltétlenül ide írjuk a legfontosabb dolgokat. Az se bízza el magát, aki véletlenül négyzetes, épp jó méretű fóliát tud szerezni. Ennek ugyanis a szélessége nagyobb az A4-es szabvány lapokénál, így bármilyen aktatáskában, mappában, reklámszatyorban visszük, az oldala felgyűrődik, összetöredezik.

(Mit írjunk?) Sok lényegtelen dolgot, mert akkor a hallgatóság 1–2 perc után már nem tudja követni. Ha túl sok teleírt fóliánk van, úgyis időzavarba kerülünk és csak annyi ideig fogjuk fennhagyni a fóliát a vetítőn, hogy a közönség ha akarná sem tudná elolvasni. Az az előadó, aki 10 cm/sec sebességgel keresztülhúz néhány sűrűn teleírt fóliát a vetítőn, és közben azt mondja, hogy „még nagyon sok további eredményt is ismertetni akartam", biztos belopja magát mindenki szívébe.

Egyetlen fóliát hagyjunk sokáig az írásvetítőn: amin felsoroljuk, munkánk előzményeként, hogy kik csináltak már valamit ebben a témában. Így a téma nem biztos, hogy a legjobb, de biztosan leghiúbb szakértőjének bőséges ideje lesz kétszer ellenőrizni, hogy őt bizony kifelejtettük, és már most utálni fog minket, holott csak fél év múlva fogják őt felkérni cikkünk lektorálására.

(Hogyan írjunk?) Mindenekelőtt: apró betűkkel. Olyan betű, mely a fólia teljes hosszának 5%-ánál kisebb, már nem nagyon olvasható az előadóteremben. Mivel a sorok között távolságot is kell tartani, 10–12 sor férhet egy fóliára — írjunk kétszer ennyit, és biztos a siker. Gyakorlottabbak a különféle színű tollak váltogatásával is kísérletezhetnek. Mindig a hasonló jellegű adatokat írjuk különböző színnel, hogy mindenkit megzavarjunk. Ha folytonos szövegben a leglényegesebb szót ki akarjuk hangsúlyozni, akkor azt az egyet fekete, sötétkék vagy sötétzöld helyett írjuk sárgával vagy halványlilával, hogy senki ne lássa. Persze sokkal kisebb fáradsággal is megoldható a dolog: használjunk öreg, majdnem kiszáradt tollakat, és akkor semmi sem látszik, még a lényegtelen információ sem.

(Hogyan tároljuk az elkészült fóliákat?) E tekintetben három uralkodó nézet van. Egyesek nem tesznek közéjük papírt. Így a fóliák összeragadnak és az előadás közben legalább kettőt teszünk fel egyszerre, majd elnézést kérve levesszük a jót és fennhagyjuk a rákövetkezőt, amivel lelőhetjük előadásunk egyetlen jó poénját.

Mások mindenféle használt papírt (újságot, már nem szükséges teleírt jegyzetlapokat) használnak, ennek az az előnye, hogy egészen addig, amíg már a hallgatóság látja kivetítve, nem lehetünk biztosak benne, hogy mi is van a fólián és mi volt csak alatta. Ezt egyesek tökélyre fejlesztik: papíron megtervezik, mi legyen a fólián, ráteszik a fóliát a papírra, hogy a különféle színű tollakkal az egyes részeket tényleg megrajzolják, majd ezt a papírt hagyják a fólia alatt elválasztónak. Csak amikor leveszik a fóliát a papírról és felteszik a vetítőre, akkor derül ki, hogy a legfontosabb dolog hiányzik, mert azt pirossal akarták rajzolni és épp akkor szólt a telefon. Az összekészítés során még nem derülhetett ki, mert ami hiányzott a fólián, az is ott volt alatta a papíron.

A harmadik csoport tiszta fehér papírral választja el a fóliákat. Ilyenkor még abban reménykedhetünk, hogy a papírvastagság megválasztásával rontunk el mindent. A papírt ugyanis arra is használjuk, hogy előadás közben a fóliának letakarjuk az a részét, amit csak később akarunk „felfedni". Túl vékony papír esetén azt hisszük, hogy csak mi látjuk a letakart részt, holott a hallgatóink is látják, túl vastag papír esetén pedig mi sem látjuk, hogy mit fogunk felfedni.

(Közvetlenül az előadás előtt) Ha repülőgépen utazunk a konferenciára, a fóliát a feladott poggyászba tegyük, ne a kézitáskába. A feladott csomagot csak ritkán szokták ugyan túlbuzgó biztonsági őrök felrobbantani, de esetleg más városba irányítják és csak a konferencia vége után jutunk hozzá.

Ha már a teremben vagyunk, a fóliáink is rendben vannak, akkor jön a ventillátor-effektus. A legtöbb írásvetítő sok hőt fejleszt, így állandóan működik benne egy ventillátor. Fóliáinkat az asztalnak mindig arra az oldalára helyezzük, ahol állandóan „fúj a szél". Általában akkor fogja fóliáinkat, de legalábbis a köztük levő papírokat szétszórni a terem minden lehetséges irányába, amikor a legjobban kellene koncentrálnunk, vagy amikor rájövünk, hogy kevés az idő és gyorsítani kell.

(Előadás közben) Az írásvetítőnek az a lényege, hogy a vetítőnél állva, a hallgatósággal szembenézve beszélhetünk, és mégis látjuk, mi van mögöttünk a vásznon. Ha rá kell mutatnunk valamire, akkor is elég ceruzával tenni egy pár centiméteres mozdulatot a fólián, és a vásznon a ceruza árnyéka pont jó helyre fog mutatni. Ehelyett a vászon felé fordulva beszéljünk, sokkal kevesebbet fognak hallani belőle.

Ha nagy az előadóterem belmagassága, és így a vászon jó magasan van, akkor különösen látványos, amikor nem a fólián, hanem a vásznon mutogatunk. Régi egyetemi előadótermekben, ahol dobogó is van, de nem a terem teljes szélességében, ilyenkor a nyújtózkodás közben egy könnyed hátralépéssel borzasztó nagyot lehet esni.

A modern előadótermeknek viszont kicsi a belmagassága. Így a vászon elég alacsonyan van, és előadás közben testünkkel úgyis mindent eltakarunk.

Gyakorlottabbak más trükkökkel is próbálkozhatnak. Sokan szeretnek mondanivalójuknak úgy adni súlyt, hogy a legfontosabb szót aláhúzzák vagy bekeretezik beszéd közben. Ilyenkor esetleg megtehetjük, hogy a fólia helyett a vetítővászonra rajzolunk, persze vízben nem oldható festékkel töltött tollat használva. Az még sokkal gyakoribb, hogy miután több fólia egymásrahelyezésével jutottunk el ahhoz a látványhoz, amelyben ki akarunk emelni valamit, nem vesszük észre, hogy nem azt a fóliát firkáltuk össze, amin csak az a pár szó van, hanem a felette lévő, sok gonddal elkészítettet.

(És végül...) Ha az előadás előtti este megszállott minket az ihlet, és a legfontosabb gondolatot már csak fóliára írtuk, akkor ezt a fóliát tegyük fel utoljára és az előadás után felejtsük a vetítőn. Soha többet nem fogjuk tudni rekonstruálni a bizonyítást.

A szerző ezúton mond köszönetet mindazon kollégáinak, akik elviselték azokat az előadásait, melyek során a fenti szabályokat kikísérletezte. Következhetne még egy hosszabb lista is, hogy kiknek az előadásait hallgatva határozta el a szerző jelen dolgozat összeállítását, de ez csak fóliára van írva, hogy gyorsan lekaphassa a vetítőről, mielőtt valaki megtalálja rajta magát vagy legkedvesebb ellenségét.

JELENTÉS AZ 1991. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat 1991. október 18. és 28. között rendezte meg az 1991. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi vagy főiskolai hallgatók, valamint 1991-ben egyetemet vagy főiskolát végzettek vehettek részt.

A verseny megrendezésére a Bolyai János Matematikai Társulat a következő bizottságot jelölte ki: Tandori Károly (elnök), Hajnal Péter (titkár), Czédli Gábor, Csákány Béla, Csirik János, Durszt Endre, Ésik Zoltán, Gécseg Ferenc, Gehér László, Hatvani László, Hegedűs Jenő, Imreh Balázs, Kérchy László, Kincses János, Klukovits Lajos, Krisztin Tibor, Kuba Attila, Leindler László, Makay Árpád, Megyesi László, Móricz Ferenc, Nagy Péter, Németh József, Pintér Lajos, Pollák György, Stachó László, Szabó László, Szalay István, Szendrei Ágnes, Szendrei János, Szőkefalvi-Nagy Béla, Terjéki József.

Az 1991. október 18-a és 28-a között rendezett versenyre a bizottság 12 feladatot tűzött ki. A feladatokat sorrendben Totik Vilmos, Szabó I. László, Czédli Gábor – Csákány Béla, Szendrei Ágnes, Totik Vilmos, Krisztin Tibor, Leindler László, Móricz Ferenc, Hatvani László – Totik Vilmos, Krisztin Tibor, Kérchy László és Csörgő Sándor bocsátotta a bizottság rendelkezésére.

A versenyre 17 versenyző 103 megoldást nyújtott be, amiből 74 bizonyult teljesnek.

A beérkezett megoldások értékelése után a versenybizottság a következő döntést hozta:

I. díjban és 8.000 Ft pénzjutalomban részesül

Bíró András, az ELTE III. éves hallgatója.

II. díjat a bizottság nem ad ki.

III. díjban és 4.500–4.500 Ft pénzjutalomban részesül

Fleiner Tamás, az ELTE III. éves hallgatója,

Kós Géza, az ELTE 1991-ben végzett hallgatója.

Dícséretben és 1.000 Ft pénzjutalomban részesül

Domokos Mátyás, az ELTE V. éves hallgatója,

Hajdú Gábor, az ELTE IV. éves hallgatója, *Harcos Gergely,* az ELTE I. éves hallgatója,

Keleti Tamás, az ELTE IV. éves hallgatója,

Vu Ha Van, az ELTE III. éves hallgatója.

Indoklás

Bíró András megoldotta az 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 9., 10. és 11. feladatot.

Fleiner Tamás megoldotta az 1., 4., 5., 6., 7., 10. és 11. feladatot. A 3. feladatra beadott megoldása hiányos.

Kós Géza megoldotta az 1., 2., 5., 6., 9., 10. és 11. feladatot. A 4. és 7. feladatra adott megoldásai hiányosak.

Domokos Mátyás megoldotta az 1., 2., 3., 6. és 7. feladatot.

Hajdú Gábor megoldotta az 1., 2., 5., 6., és 10. feladatot. A 3. és 7. feladatra adott megoldása hiányos.

Harcos Gergely megoldotta az 1., 2., 5., 6b, 7. és 10a feladatot.

Keleti Tamás megoldotta az 1., 3., 5., 6., 7. és 10. feladatot. A 6. feladatra adott megoldása kiemelkedő.

Vu Ha Van megoldotta a 2., 6., 7. és 10. feladatot. A 9. feladatra adott megoldásában egy könnyen javítható hiba van. Az 5. feladatra adott megoldása hiányos, az 1. feladatot rosszul értelmezte és a kitűzöttnél gyengébb állítást igazolt. A 2. és 9. feladatra adott megoldása kiemelkedő.

Az 1990. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. n testvér egy örökség elosztása érdekében egy pártatlan bíróhoz fordul (tehát a bíró, ha nem kap megvesztegetést, akkor igazságosan itél, azaz mindegyik testvér az örökség n-ed részét kapja). Mindegyik testvér szeretné azonban a bíró döntését számára kedvezően befolyásolni egy általa adott pénzösszeggel. Az egyes testvérek örökségét ezen vesztegetési összegek folytonos és megfelelő értelemben szigorúan monoton függvénye írja le (tehát egy adott testvér része az általa adott pénz monoton növekvő, míg a többiek által adott összegek monoton csökkenő függvénye). Igazoljuk, hogy ha a legidősebb testvér nem ad túl sokat a bírónak, akkor a többiek adhatnak neki úgy, hogy a döntés igazságos legyen.

2. Legyen adva n pont az egységkör kerületén úgy, hogy az egységkör bármely pontja tőlük vett távolságainak szorzata nem nagyobb mint kettő. Bizonyítsuk be, hogy a pontok egy szabályos n-szöget alkotnak.

3. Ha a G véges csoport 3 exponensű Abel-csoportnak 2 exponensű Abel-csoporttal való bővítése, akkor G beágyazható a harmadfokú teljes permutációcsoport egy véges direkt hatványába.

4. Tetszőleges $n \geq 2$ egészre tekintsük a $G = (Z_n \cup \{\infty\}, \circ)$ gruppoidot, ahol

$$x \circ y = \begin{cases} x+1 & \text{ha } x = y \in Z_n, \\ \infty & \text{különben.} \end{cases}$$

Bizonyítandó, hogy a G által generált varietásban G az egyetlen szubdirekt irreducibilis algebra.

5. Konstruáljunk olyan végtelen $H \subseteq C[0,1]$ halmazt, hogy H bármely végtelen részhalmazának lineáris burka sűrű $C[0,1]$-ben.

6. Legyen $\alpha > 0$ irracionális.

(a) Mutassuk meg, hogy léteznek a_1, a_2, a_3, a_4 valós számok úgy, hogy az $f : \Re \to \Re$, $f(x) = e^x(a_1 + a_2 \sin x + a_3 \cos x + a_4 \cos \alpha x)$ függvény pozitív minden elegendően nagy x-re és $\liminf_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(b) Igaz-e a fenti állítás, ha $a_2 = 0$?

7. Ha $a_n \geq a_{n+1} > 0$ és létezik olyan μ természetes szám, hogy

$$(\alpha =) \overline{\lim_n} \frac{a_n}{a_{n\mu}} < \mu,$$

akkor minden $\epsilon > 0$-hoz létezik olyan N természetes szám, hogy ha $n > n_0$, akkor

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \epsilon \sum_{k=1}^{nN} a_k$$

teljesül.

8. Bizonyítsuk be, hogy ha $\{a_k\}$ olyan valós számsorozat, amelyre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} = \infty \qquad \text{és} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} k(a_k - a_{k+1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

akkor

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \right| dx = \infty.$$

9. Legyen $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ mérhető, lokálisan integrálható függvény és vezessük be a

$$H(t) := \int_0^t h(s)ds \qquad (t \geq 0)$$

jelölést.

Bizonyítsuk be, hogy ha van olyan B konstans, amellyel $H(t) \leq Bt^2$ teljesül minden t esetén, akkor

$$\int_0^{\infty} e^{-H(t)} \int_0^t e^{H(u)}\, du dt = \infty.$$

10. Tekintsük az $f'(x) = f(x+1)$ egyenletet. Mutassuk meg, hogy

(a) minden $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ megoldás exponenciális nagyságrendű, azaz léteznek $a > 0$, $b > 0$ számok úgy, hogy $|f(x)| \le a \cdot e^{bx}$, $x \ge 0$;

(b) van nem exponenciális nagyságrendű $f : [0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ megoldás.

11. Megadható-e egy H Hilbert téren olyan T korlátos lineáris operátor, amelyre $\cap_{n=1}^{\infty} T^n(H) = \{0\}$, de $\cap_{n=1}^{\infty} T^n(H)^{-} \ne \{0\}$, ahol a $^{-}$ a lezárást jelenti?

12. Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ független, azonos eloszlású véletlen változók, amelyekre valamely $0 < \alpha < 1$ konstanssal

$$P\{X_1 = 2^{\frac{k}{\alpha}}\} = \frac{1}{2^k}, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Karakterisztikus függvényeik által vagy más módon meghatározandó korlátlanul osztható, nem (egy pontban) elfajult G_n eloszlásfüggvények egy sorozata úgy, hogy ha $n \to \infty$, akkor

$$\sup_{-\infty < x < \infty} \left| P\left\{ \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \le x \right\} - G_n(x) \right| \to 0.$$

A feladatok megoldásai

Az 1. feladat megoldása.

I. megoldás.

A feladat a következőképpen fogalmazható meg függvények segítségével. Adottak a $[0,\infty)^n$-en definiált $g_1(x_1,\ldots,x_n)$, $g_2(x_1,\ldots,x_n),\ldots$, $g_n(x_1,\ldots,x_n)$ folytonos függvények ($g_j(x_1,\ldots,x_n)$ azt jelöli, hogy ha az első testvér x_1 Ft-ot, a második x_2 Ft-ot stb. ad a bírónak, akkor a j-edik testvér öröksége mennyivel fog eltérni az egész örökség $1/n$ részétől) amelyek összege 0, és $g_j(x_1,\ldots,x_n)$ az x_j változónak szigorúan növekvő, míg minden más x_k, $k \ne j$ változónak szigorúan csökkenő függvénye. Tudjuk továbbá, hogy a bíró eredetileg pártatlan, tehát $g_j(0,\ldots,0) = 0$ minden j-re. Azt kell igazolnunk, hogy létezik olyan $a_n > 0$, hogy ha $0 \le x_n \le a_n$ tetszőleges, akkor van olyan $x_1 = x_1(x_n),\ldots,x_{n-1} = x_{n-1}(x_n)$, amelyekre $g_j(x_1,\ldots,x_n) = 0$ minden j-re. Ennél többet igazolunk (pontosabban ennél többet kell igazolnunk, hogy az alábbi bizonyítás érvényben maradjon), nevezetesen azt, hogy olyan $x_1 = x_1(x_n),\ldots,x_{n-1} = x_{n-1}(x_n)$-ek is léteznek, amelyekre a fentieken túl az is teljesül, hogy 0-hoz tartanak ha $x_n \to 0$.

n szerinti indukciót használunk. $n = 1$ esetén nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n-1$ függvény esetén. Állítjuk, létezik olyan $b > 0$, hogy ha $0 \le x_2,\ldots,x_n \le b$ tetszőlegesek, akkor van egy és csakis egy $y = y(x_2,\ldots,x_n)$ úgy, hogy $g_1(y,x_2,\ldots,x_n) = 0$, továbbá y az $x_2,\ldots,x_n$ változók szigorúan növekvő folytonos függvénye. Valóban, y unicitása abból következik, hogy g_1 az első változójában szigorúan monoton nő. Ha $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$, akkor $y = 0$ megfelel, míg más értékekre y létezése így látható be: $g_1(1,0,\ldots,0) > 0$, ezért a feltételezett folytonosság alapján van olyan $b > 0$, hogy ha $0 \le x_2,\ldots,x_n \le b$, akkor $g_1(1,x_2,\ldots,x_n) > 0$. Mivel másrészről $g_1(0,x_2,\ldots,x_n) < 0$, ismét a folytonosság alapján a fenti y-nak léteznie kell. Ha $x'_j > x_j$, $j \ne 1$, akkor

$$g_1(y(x_2,\ldots x'_j \ldots,x_n),x_2,\ldots,x'_j,\ldots,x_n) = 0 = g_1(y(x_2,\ldots,x_n),x_2,\ldots,x_n)$$
$$> g_1(y(x_2,\ldots,x_n),x_2,\ldots,x'_j,\ldots,x_n),$$

és ez mutatja, hogy $y(x_2,\dots,x_n)$ az x_j-nek növekvő függvénye. y folytonossága így látható be:

$$g_1(y(x_2,\dots,x_n)-\epsilon,x_2,\dots,x_n)<0<g_1(y(x_2,\dots,x_n)+\epsilon,x_2,\dots,x_n),$$

ezért van olyan $\delta>0$, hogy ha $|x_j-x'_j|\le\delta$, $j=2,3,\dots,n$-re, akkor

$$g_1(y(x_2,\dots,x_n)-\epsilon,x'_2,\dots,x'_n)<0<g_1(y(x_2,\dots,x_n)+\epsilon,x'_2,\dots,x'_n).$$

Ez a fentiek alapján igazolja, hogy az

$$y(x_2,\dots,x_n)-\epsilon<y(x'_2,\dots,x'_n)<y(x_2,\dots,x_n)+\epsilon,$$

egyenlőtlenségnek fenn kell állnia.

Ezen előkészítések után tekintsük most a

$$h_j(x_2,\dots,x_n)=g_j(y(x_2,\dots,x_n),x_2,\dots,x_n),\qquad j=2,\dots,n$$

$n-1$ db. függvényt. y tulajdonságai alapján ezek folytonosak és összegük 0, valamint $h_j(0,\dots,0)=0$ minden j-re. Állítjuk, hogy megfelelő értelemben szigorúan monotonok. Valóban, ha $k\ne j$, és x_k nő, akkor $y(x_2,\dots,x_n)$ is nő, és ezért h_j csökken. Ezek szerint viszont ha x_j nő, akkor minden h_k, $k\ne j$ csökken, és így h_j-nek nőnie kell, mivel a h_l-ek összege zéró. Teljesülnek tehát a feladat feltételei az $n-1$ db. h_j függvényre, és így az indukciós feltevés szerint van olyan $a'_n>0$, hogy ha $0\le x_n\le a'_n$ tetszőleges, akkor léteznek olyan $x_2=x_2(x_n),\dots,x_{n-1}=x_{n-1}(x_n)$, amelyekre $h_j(x_2,\dots,x_n)=0$ minden $j\ge 2$-re, továbbá itt minden egyes $x_j(x_n)$ 0-hoz tart ha $x_n\to 0$. Van tehát olyan $\min(a'_n,b)>a_n>0$, ahol b a fenti előkészítés során használt konstans, hogy ha $0\le x_n\le a_n$, akkor minden $j=2,\dots,n-1$-re $0\le x_j(n)\le b$. Ekkor azonban az $x_1=x_1(x_n):=y(x_2(x_n),\dots,x_{n-1}(x_n),x_n)$, $x_2=x_2(x_n),\dots,x_{n-1}=x_{n-1}(x_n)$ értékekre $g_j(x_1,\dots,x_n)=0$ teljesül minden j-re ($j=1$-re az y választása miatt), és itt minden $x_j(x_n)$ 0-hoz tart ha $x_n\to 0$ (használjuk ismét y folytonosságát). Ezzel az állítást igazoltuk n függvény esetére is.

A szerző megoldása.

II. megoldás.

Legyenek a g_i-k ($i=1,2,\dots,n$) az első megoldásban definiált függvények.

Legyen $e_i=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ az i-edik egységvektor $\mathbb{R}^n$-ben (az i-edik koordináta 1, a többi 0). A feltételekből $i>1$ esetén $g_1(e_i)<0$. g_1 folytonosságából következően létezik olyan $\epsilon_i>0$ szám, hogy minden $0\le x_1<\epsilon_i$ esetén $g_1(x_1e_1+e_i)<0$ teljesüljön. Legyen $\epsilon=\min\{\,\epsilon_i:2\le i\le n\,\}$. Belátjuk, hogy ha $0\le x_1<\epsilon$, akkor léteznek nemnegatív $x_2,x_3,\dots,x_n$ számok, hogy minden $1\le i\le n$ esetén $g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ legyen. Az állításunkhoz elegendő belátni, hogy $g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$ minden $i\ge 2$ esetén (ekkor $\sum_i g_i\equiv 0$ alapján készen vagyunk).

Legyen $0\le x_1<\epsilon$ tetszőleges szám, a továbbiakban rögzített. Legyen

$$G(x_2,\dots,x_n)=\max_{2\le i\le n} g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

és

$$H=\{\,(x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}_{\ge 0}:G(x_1,x_2,\dots,x_n)\le 0\,\}.$$

Ekkor

a) $H\subset[0,1]^{n-1}$, mert ha $x_i\ge 1$ valamilyen $i\ge 2$-re, akkor $0>g_1(x_1e_1+e_i)\ge g_1(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Így $\sum_i g_i\equiv 0$ alapján $G(x_2,\dots,x_n)>0$.

b) H zárt, hiszen egy folytonos függvény nívóhalmaza.

c) H nem üres, hiszen $(0,0,\ldots,0) \in H$.

A fentiekből $g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ felveszi minimumát H-n, $(x_2^0,x_3^0,\ldots,x_n^0)$ legyen egy minimumhely. Belátjuk, hogy $g_i(x_1,x_2^0,x_3^0,\ldots,x_n^0) = 0$ minden $i \geq 2$ esetén. H választása folytán $g_i(x_1,x_2^0,\ldots,x_n^0) \leq 0$ $(i = 2,\ldots,n)$ világos. Tegyük fel, hogy valamely $i \geq 2$-re $g_i(x_1,x_2^0,\ldots,x_n^0) < 0$. Ekkor x_i^0-t kicsit megnövelve továbbra is H-ban maradunk, de g_1 értéke csökken és ez ellentmond $(x_2^0,\ldots,x_n^0)$ választásának. Az ellentmondás az állítást igazolja.

Hajdú Gábor megoldása.

Megjegyzés. 1. Könnyű példát mutatni arra, hogy az állítás elveszti érvényét, ha a szigorú monotonitás helyett csak tágabb értelemben vett monotonitást tételezünk fel.

2. Itt egy egyszerű példa arra, hogy ha $a > 0$ teszőleges, akkor már nem lehet igazságos döntés abban az esetben, ha a legidősebb (pl. n-edik) testvér legalább a Ft-ot fizet a bírónak: legyen

$$g_j(x_1,\ldots,x_n) = (n-2)x_j + \frac{ax_j}{x_j+1} - x_1 - \cdots - x_{j-1} - x_{j+1} - \cdots - x_n$$

ha $j = 1,2,\ldots,n-1$, és legyen

$$g_n(x_1,\ldots,x_n) = (n-1)x_n - \frac{ax_1}{x_1+1} - \frac{ax_2}{x_2+1} - \cdots - \frac{ax_{n-1}}{x_{n-1}+1}.$$

Érkezett 14 megoldás. Helyes Bíró András, Domokos Mátyás, Fleiner Tamás, Gács András, Hajdú Gábor, Harcos Gergely, Hausel Tamás, Keleti Tamás, Kondacs Attila, Kós Géza és Prokaj Vilmos megoldása. Hiányos 2 dolgozat. 1 megoldó félreértette a feladatot.

A 2. feladat megoldása.

A feladatban szereplő egységkör legyen a komplex számsík origó körüli egységköre. A pontokat reprezentáló komplex számok legyenek $z_1,z_2,\ldots,z_n$. Az ábra elforgatásával elérhetjük, hogy $z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = (-1)^n$ legyen.

Tekintsük a következő polinomot:

$$P(w) = (w-z_1)(w-z_2)\ldots(w-z_n) = w^n + a_1w^{n-1} + \ldots + a_{n-1}w + 1 = w^n + Q(w) + 1.$$

Ekkor $|P(z)|$ a z komplex szám által reprezentált pontnak az adott pontoktól vett távolságainak szorzata. Tehát ha z egy 1 abszolútértékű komplex szám, akkor $|P(z)| \leq 2$.

Legyenek $w_1,w_2,\ldots,w_n$ az n-edik egységgyökök. Közismert, hogy $w_1^k + w_2^k + \ldots + w_n^k = 0$, minden $k = 1,2,\ldots,n-1$-ra. Ebből következik, hogy $Q(w_1) + \ldots + Q(w_n) = 0$. Ha $Q(w)$ nem azonosan 0 polinom, akkor valamely j-re $Q(w_j)$ egy nem 0, nem negatív valós résszel rendelkező komplex szám. Ekkor $|P(w_j)| = |2 + Q(w_j)| > 2$. Ez ellentmond a feltevésnek. Tehát Q azonosan 0, azaz $P(z) = z^n + 1$. Így valóban a $P(z)$ polinom $z_1,z_2,\ldots,z_n$ gyökei egy szabályos n-szöget alkotnak.

A szerző megoldása

Érkezett 9 megoldás. Helyes Birkás György, Bíró András, Domokos Mátyás, Gács András, Hajdú Gábor, Harcos Gergely, Hausel Tamás, Kós Géza és Vu Ha Van megoldása. Kiemelkedő Vu Ha Van megoldása.

A 3. feladat megoldása.

A Schur-Zassenhaus tétel szerint a bővítés felhasadó, azaz szemidirekt szorzat. Mivel minden 2 exponensű csoport kommutatív, így a véges Abel-csoportok alaptétele szerint – izomorfiától eltekintve – $G = \mathbf{Z}_3^m \overset{\xi}{\rtimes} \mathbf{Z}_2^n$, ahol ξ egy $\mathbf{Z}_2^n \to \mathrm{Aut}\ \mathbf{Z}_3^m = \mathrm{GL}(m,3)$ homomorfizmus. (Itt $\mathrm{GL}(m,3)$ a $\mathbf{Z}_3^m$, mint a 3-elemű test feletti vektortér automorfizmuscsoportját jelöli.) Maschke tételét a ξ csoportábrázolásra alkalmazva adódik, hogy van olyan $b_1, b_2, \ldots, b_m$ (vektortéri) bázis $\mathbf{Z}_3^m$-ben, melynek elemei $\xi(\mathbf{Z}_2^n)$ minden elemének sajátvektorai. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egy bázis $\mathbf{Z}_2^n$-ben; ekkor b_j a $\xi(a_i)$-nek mondjuk a $c_{ij} \in \{1,2\}$ sajátértékekhez tartozó sajátvektora. Az S_3 harmadfokú szimmetrikus csoport $(1,2,3)$ és $(1,2)$ elemét jelölje σ és τ. Tetszőleges $b = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \in \mathbf{Z}_3^m$-re legyen

$$\bar{b} = (\sigma^{\lambda_1}, \ldots, \sigma^{\lambda_m}, 1, \ldots, 1) \in S_3^{m+n},$$

és legyen

$$\hat{a}_i = (\tau^{c_{i1}-1}, \tau^{c_{i2}-1}, \ldots, \tau^{c_{im}-1}, 1, \ldots, \underset{m+i}{\breve{\tau}}, 1, \ldots, 1) \in S_3^{m+n}.$$

Ekkor $B := \{\bar{b} : b \in \mathbf{Z}_3^m\}$ egy $\mathbf{Z}_3^m$-mel izomorf normálosztója S_3^{m+n}-nek. Az $a_i \mapsto \hat{a}_i$ leképezés kiterjeszthető egy $\mathbf{Z}_2^n \to S_3^{m+n}$ homomorfizmussá, s ekkor $A := \{\bar{a} : a \in \mathbf{Z}_2^n\}$ egy $\mathbf{Z}_2^n$-nel izomorf részcsoport lesz S_3^{m+n}-ben. Jelölje η azt az $A \to \mathrm{Aut}\ B$ homomorfizmust, amely $x \in A$-hoz az x-szel való konjugálást rendeli. Ekkor az S_3^{m+n} BA részcsoportjára $BA \cong B \overset{\eta}{\rtimes} A$. Másfelől $a \in \mathbf{Z}_2^n$ és $b \in \mathbf{Z}_3^m$ esetén

$$\overline{b^{\xi(a)}} = \bar{b}^{\eta(\hat{a})}$$

(ezt elegendő tetszőleges b_i és a_j báziselemekre ellenőrizni). Így a szemidirekt szorzat egyértelmű meghatározottságából $G \cong BA$ adódik.

Birkás Gyögy megoldása alapján

Megjegyzés. A Schur-Zassenhaus tételre történő hivatkozás elkerülhető, ha tekintünk egy 2-Sylow részcsoportot.

Érkezett 11 megoldás. Helyes Birkás György, Bíró András, Domokos Mátyás és Keleti Tamás megoldása. Hiányos 2, hibás 5 dolgozat.

A 4. feladat megoldása.

A ∞ értékű (unér) konstans művelet — melyet szintén ∞ fog jelölni — nyilván kifejezésfüggvénye G-nek: pl.

(0) $\qquad \infty = (x \circ x) \circ x \qquad$ (és teljesül az $(x \circ x) \circ x = (y \circ y) \circ y$ azonosság).

Egyszerűen ellenőrizhető továbbá, hogy G-nek az

(1) $\qquad f(x) = x \circ x \quad$ és $\quad x \vee y = f^{n-1}(x \circ y)$

kifejezésfüggvényeire fennállnak az alábbiak:

(2) $\vee$ félháló művelet, melyre nézve ∞ legnagyobb elem;

(3) f automorfizmus az $\vee$-re vonatkozóan; és

(4) teljesülnek az alábbi azonosságok:

$$f^n(x) = x, \qquad f^k(x) \vee f^l(x) = \infty, \qquad \text{ha } k \neq l \ (0 \leq k, l < n).$$

Az is igaz, hogy $\vee$ és f segítségével kifejezhető az eredeti $\circ$ művelet, hiszen G-ben érvényes az

$$x \circ y = f(x \vee y) \tag{5}$$

azonosság is.

Legyen $\mathbf{C} = (C; \circ)$ tetszőleges algebra a $\mathbf{G}$ által generált varietásban, s tekintsük a $\mathbf{C}' = (C; \vee, f, \infty)$ algebrát, melynek alapműveletei a $\mathbf{C}$ algebra (0)–(1) szerint definiált kifejezésfüggvényei. Mivel a felsorolt tulajdonságok mindegyike azonosságokkal leírható, ezek $\mathbf{C}$-re illetve $\mathbf{C}'$-re is teljesülnek. Az (5) azonosság (a (0)–(1)-beli definíciókkal együtt) biztosítja, hogy egy $\varphi: C \to \mathbf{Z}_n \cup \{\infty\}$ leképezés akkor és csak akkor $\varphi: \mathbf{C} \to \mathbf{G}$ homomorfizmus, ha $\varphi: \mathbf{C}' \to \mathbf{G}'$ homomorfizmus. Ezért $\mathbf{G}$ illetve $\mathbf{C}$ helyett a kényelmesebben kezelhető $\mathbf{G}'$, $\mathbf{C}'$ algebrákkal dolgozhatunk. Jelöljük $\leq$-vel a $(C; \vee)$ félháló természetes rendezését.

Legyen a a C halmaz tetszőleges, ∞-től különböző eleme, s tekintsük C alábbi részhalmazait:

$$C_i = \{c \in C \colon c \leq f^i(a)\} \ (i \in \mathbf{Z}_n), \quad C_\infty = C \setminus \bigcup_{i \in \mathbf{Z}_n} C_i.$$

Megmutatjuk, hogy $\{C_0, \ldots, C_{n-1}, C_\infty\}$ osztályozás C-n. Nyilván e halmazok egyesítése C, s egyikük sem üres, hiszen $f^i(a) \in C_i$ $(i \in \mathbf{Z}_n)$ és $\infty \in C_\infty$. Ha $c \in C_i \cap C_j$ valamely $0 \leq i \leq j < n$-re, azaz $c \leq f^i(a)$ és $c \leq f^j(a)$, akkor (2)–(3) felhasználásával

$$f^{j-i}(c) \vee c \leq f^{j-i}(f^i(a)) \vee f^j(a) = f^j(a) \vee f^j(a) = f^j(a) < \infty,$$

ahonnan (4) miatt következik, hogy $j - i = 0$. Tehát $C_0, \ldots, C_{n-1}$ páronként diszjunkt, C_∞ pedig nyilván mindegyiküktől diszjunkt.

Így jóldefiniált az alábbi leképezés:

$$\varphi_a \colon \mathbf{C}' \to \mathbf{G}', \quad c\varphi_a = i \quad \text{ha} \quad c \in C_i.$$

Nyilván φ_a szürjektív, fölcserélhető az f művelettel és $\infty\varphi_a = \infty$. Tetszőleges $c, d \in C$-re és $l \in \mathbf{Z}_n$-re

$$(c \vee d)\varphi_a = l \quad \Leftrightarrow \quad c \vee d \leq f^l(a) \quad \Leftrightarrow \quad c, d \leq f^l(a) \quad \Leftrightarrow \quad c\varphi_a = l, \ d\varphi_a = l.$$

Ebből következik, hogy φ_a az $\vee$ művelettel is fölcserélhető, tehát φ_a: $\mathbf{C}' \to \mathbf{G}'$ szürjektív homomorfizmus.

Mivel $a\varphi_a = 0$, tetszőleges $b \in C$ elemre $a\varphi_a = b\varphi_a \Leftrightarrow b \leq a$. Ha tehát a, b a $\mathbf{C}'$ algebra különböző elemei — mondjuk $a \neq \infty$ —, akkor $b \nleq a$ esetén $a\varphi_a \neq b\varphi_a$, $b < a$ esetén pedig (ekkor $b \neq \infty$) $a\varphi_b \neq b\varphi_b$. Következésképpen a φ_a $(a \in C \setminus \{\infty\})$ homomorfizmusok megadják $\mathbf{C}'$ egy előállítását $\mathbf{G}'$ szubdirekt hatványaként. Ezzel beláttuk, hogy $\mathbf{C}'$ csak akkor lehet szubdirekt irreducibilis, ha izomorf $\mathbf{G}'$-vel.

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathbf{G}'$ egyszerű algebra, s így valóban szubdirekt irreducibilis. Ha ugyanis $\mathbf{G}'$-nek a σ kongruenciájára $a \,\sigma\, b$, $a \neq b$ — mondjuk $a \neq \infty$ —, akkor $a = a \vee a \,\sigma\, a \vee b = \infty$, s így bármely $0 \leq k < n$-re $f^k(a) \,\sigma\, f^k(\infty) = \infty$.

Fleiner Tamás és a kitűző megoldása alapján

Érkezett 5 megoldás. Helyes Bíró András és Fleiner Tamás megoldása. Hiányos 1, hibás 2 dolgozat.

Az 5. feladat megoldása.

Legyen $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ sűrű $C[0,1]$-ben ($g_k \not\equiv 0$). Megmutatjuk, hogy a $H = \{h_n\}_{n=2}^{\infty}$ halmaz, ahol

$$h_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{g_k}{\|g_k\|_\infty} \right) \frac{1}{n^k},$$

teljesíti a feltételeket.

Egy $C[0,1]$ feletti L korlátos lineáris funkcionálra legyen

$$h_L(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{Lg_k}{\|g_k\|_\infty} \right) z^k.$$

Ekkor h_L analitikus az egységkörben, és $Lh_n = h_L\left(\frac{1}{n}\right)$. Legyen $H' = \{h_{n_1}, h_{n_2}, h_{n_3}, \dots\}$ a H halmaz tetszőleges végtelen részhalmaza, és legyen $L \in C[0,1]^*$ egy tetszőleges H'-t annulláló funkcionál. Ekkor $h_L(\frac{1}{n_m}) = Lh_{n_m} = 0$ minden m-re, ezért $h_L \equiv 0$ következik h_L analitikussága miatt. Így $Lg_k \equiv 0$ ($k = 1,2,\dots$), azaz $L \equiv 0$. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy H' sűrű $C[0,1]$-ben.

Megjegyzés. A bizonyítás természetesen bármely szeparábilis Banach térre jó.

A szerző megoldása

Érkezett 9 megoldás. Helyes Benczúr András, Bíró András, Fleiner Tamás, Hajdú Gábor, Harcos Gergely, Hausel Tamás, Keleti Tamás és Kós Géza megoldása. Részeredményeket tartalmaz 1 dolgozat.

A 6. feladat megoldása.

a) Legyen $f(x) = e^x\,(2 - \cos(x - 2\pi a) - \cos\alpha x)$, ahol a-t később definiáljuk. Ekkor $f(x) \geq 0$ és $f(x) = 0$, ha a k és n egészekre $\alpha x = 2k\pi$, $x - 2\pi a = 2n\pi$. Innen $\alpha(n + a) = k$ következik. Ha valamely $x' \neq x$ helyen is $f(x') = 0$ lenne, akkor $\alpha(n' + a) = k'$ következne valamely $n' \neq n$, $k' \neq k$ egészekre. Az $\alpha(n + a) = k$, $\alpha(n' + a) = k'$ egyenlőségekből $\alpha = \frac{k-k'}{n-n'}$, ellentmondás. Tehát $f(x) > 0$ minden elég nagy x-re.

Válasszuk $a \in [0,1)$-et úgy, hogy a természetes számok egy $\{n_k\}$ részsorozatára

$$\left| \frac{n_k}{\alpha} - a \right| \leq \frac{e^{-n_k\pi/\alpha}}{n_k} \qquad (\text{mod } 1)$$

teljesüljön. Ilyen a létezése a következőképpen igazolható. Legyen K az 1 kerületű körvonal és $p_0 \in K$. p_0-ból indulva mérjük $\frac{1}{\alpha}$-t K-ra n-szer (adott irányban), kapjuk p_n-et. Legyen I_n a $\left[p_n - \frac{e^{-n\pi/\alpha}}{n}, p_n + \frac{e^{-n\pi/\alpha}}{n}\right]$ intervallum K-n. Legyen $n_0 = 1$ és tegyük fel, hogy $\{n_k\}_{k=0}^{m}$ adott. Definiáljuk n_{m+1}-et úgy, hogy $n_{m+1} > n_m$ és $I_{n_{m+1}} \subset I_{n_m}$. Ilyen n_{m+1} van, mert $\{p_n\}_{n=k}^{\infty}$ sűrű K-n és $\frac{e^{-n\pi/\alpha}}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$. $I_{n_0} \supset I_{n_1} \supset \dots$ és $|I_n| \to 0 \quad (n \to \infty)$. Legyen $a = \cap_{k=0}^{\infty} I_{n_k}$. Ekkor

$$f\left(\frac{2n_k\pi}{\alpha}\right) = e^{2n_k\pi/\alpha}\left[2 - \cos\left(\frac{2n_k\pi}{\alpha} - 2\pi a\right) - \cos 2n_k\pi\right] = e^{2n_k\pi/\alpha}\left[1 - \cos 2\pi\left(\frac{n_k}{\alpha} - a - m_k\right)\right],$$

ahol m_k olyan egész szám, hogy

$$\left| \frac{n_k}{\alpha} - a - m_k \right| \leq \frac{e^{-n_k\pi/\alpha}}{n_k}.$$

Így, a $\cos u \geq 1 - \frac{u^2}{2}$ egyenlőtlenséget használva

$$f\left(\frac{2n_k\pi}{\alpha}\right) \leq e^{2n_k\pi/\alpha}\frac{1}{2}\left[2\pi\left(\frac{n_k}{\alpha} - a - m_k\right)\right]^2 \leq \frac{2\pi^2}{n_k^2} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

Tehát $\liminf_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) Megmutatjuk, hogy az $e^x, e^x\cos x, e^x\cos\alpha x$ függvények lineáris burkában pontosan akkor van egy függvény a megkövetelt tulajdonságokkal, ha bármely $\epsilon > 0$ esetén az

$$(*) \qquad \left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \epsilon\frac{e^{-\pi n/2}}{n}$$

egyenlőtlenség végtelen sok $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$, racionális számra teljesül.

Legyen $g(x) = e^x(a_1 + a_3\cos x + a_4\cos\alpha x)$ egy ilyen függvény. Akkor szükségképpen $a_1 = |a_3| + |a_4|$ és $a_i \neq 0$, $i = 1,3,4$. Legyen $\{x_k\}$ olyan ∞-be tartó sorozat, amelyre $g(x_k) \to 0$, $k \to \infty$. Mivel $a_1 = |a_3| + |a_4|$,

$$x_k = \pi n_k + \delta_k \qquad , \qquad \alpha x_k = \pi m_k + \Delta_k,$$

ahol n_k, m_k természetes számok, $n_k \to \infty$, $m_k \to \infty$ és $\delta_k \to 0$, $\Delta_k \to 0$, $k \to \infty$. Legyen $\beta \in (0,1)$ és $b = \min\{|a_3|, |a_4|\}$. Ha k elegendően nagy, akkor

$$\begin{aligned}
\beta \geq g(x_k) =& e^{\pi n_k + \delta_k}\left(a_1 + a_3\cos(\pi n_k + \delta_k) + a_4\cos(\pi m_k + \Delta_k)\right) = \\
=& e^{\pi n_k + \delta_k}\left(a_1 - |a_3|\cos\delta_k - |a_4|\cos\Delta_k\right) = \\
=& e^{\pi n_k + \delta_k}\left(a_1 - |a_3| + |a_3|\frac{\delta_k^2}{2} + o(\delta_k^2) - |a_4| + |a_4|\frac{\Delta_k^2}{2} + o(\Delta_k^2)\right) \geq \\
\geq& e^{\pi n_k - 1}\frac{1}{3}\left(|a_3|\delta_k^2 + |a_4|\Delta_k^2\right) \geq e^{\pi n_k}\frac{b}{3e}\left(\delta_k^2 + \Delta_k^2\right),
\end{aligned}$$

mivel $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, $u \to 0$. Innen, elég nagy k-ra

$$|\delta_k|, |\Delta_k| \leq \sqrt{\frac{3e\beta}{b}}e^{-\pi n_k/2},$$

és így

$$\left|\alpha - \frac{m_k}{n_k}\right| = \left|\frac{\pi m_k + \Delta_k}{\pi n_k + \delta_k} - \frac{m_k}{n_k}\right| = \left|\frac{\Delta - \frac{m_k}{n_k}\delta_k}{\left(\pi + \frac{\delta_k}{n_k}\right)n_k}\right| \leq \frac{|\Delta_k| + 2\alpha|\delta_k|}{(\pi - 1)n_k} \leq \frac{2\alpha + 1}{\pi - 1}\sqrt{\frac{3e\beta}{b}}\frac{e^{-\pi n_k/2}}{n_k}.$$

Mivel $\beta \in (0,1)$ tetszőleges, kapjuk, hogy bármely $\epsilon > 0$ esetén $(*)$ végtelen sok $\frac{m}{n}$ racionális számra fennáll.

Legyen $\epsilon > 0$ rögzített és tegyük fel, hogy $(*)$-nak végtelen sok $\frac{m_k}{n_k}$, $m_k \in \mathbf{N}$, $n_k \in \mathbf{N}$, $k = 1,2,\ldots$, racionális megoldása van. Kiválasztva részsorozatokat, ha szükséges, feltehető, hogy mindegyik n_k ugyanolyan paritású, mindegyik m_k ugyanolyan paritású, és

$$\left|\alpha - \frac{m_k}{n_k}\right| < \epsilon\frac{e^{-\pi n_k/2}}{n_k} \qquad (k = 1,2,\ldots).$$

Legyen $a_1 = 2$,

$$a_3 = \begin{cases} 1, & \text{ha } \{n_k\} \text{ tagjai páratlanok,} \\ -1, & \text{ha } \{n_k\} \text{ tagjai párosak,} \end{cases} \qquad a_4 = \begin{cases} 1, & \text{ha } \{m_k\} \text{ tagjai páratlanok,} \\ -1, & \text{ha } \{m_k\} \text{ tagjai párosak.} \end{cases}$$

Ekkor $g(x) = e^x(a_1 + a_3 \cos x + a_4 \cos \alpha x) > 0$, $x > 0$, és

$$\begin{aligned} g(n_k\pi) &= e^{n_k\pi}\left[2 + a_3 \cos n_k\pi + a_4 \cos \alpha n_k \pi\right] = e^{n_k\pi}\left[1 - \cos \pi(\alpha n_k - m_k)\right] = \\ &= e^{n_k\pi}\left[\frac{1}{2}\pi^2(\alpha n_k - m_k)^2 + o\big((\alpha n_k - m_k)^2\big)\right] \le e^{n_k\pi}\pi^2\epsilon^2 e^{-\pi n_k} = \epsilon^2\pi^2 \end{aligned}$$

elegendően nagy k-ra. Tehát $\liminf_{x\to+\infty} g(x) \le \epsilon^2\pi^2$. Ha tetszőleges $\epsilon > 0$-ra $(*)$-nak végtelen sok megoldása van, akkor a fentiek alapján $\liminf_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Ha α algebrai szám, akkor a Thue-Siegel-Roth tétel szerint bármely $\delta > 0$-ra csak véges sok $\frac{m}{n}$ van úgy, hogy

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^{2+\delta}}.$$

Tehát, ha $(*)$-nak minden $\epsilon > 0$ esetén van végtelen sok $\frac{m}{n}$ racionális megoldása, akkor α szükségképpen transzcendens. Van ilyen α. Például, legyen $N > e^{\pi/2}$ egész, $n_1 = N$ és $n_{k+1} = N^{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, továbbá $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}$, Ekkor az $\alpha_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{m_k}{n_k}$ jelöléssel $\alpha - \alpha_k < \frac{2}{n_{k+1}} = \frac{2}{N^{n_k}}$, és ezért

$$\left|\alpha - \frac{m_k}{n_k}\right| < \frac{2}{N^{n_k}} = \frac{2n_k}{\left(Ne^{-\pi/2}\right)^{n_k}} \frac{e^{-\pi n_k/2}}{n_k}.$$

Mivel $2n_k/\left(Ne^{-\pi/2}\right)^{n_k} \to 0$, $k \to \infty$, bármely $\epsilon > 0$ esetén

$$\left|\alpha - \frac{m_k}{n_k}\right| < \epsilon \frac{e^{-\pi n_k/2}}{n_k}$$

teljesül minden elegendően nagy k indexre.

Több versenyző és a kitűző megoldása alapján

Érkezett 11 dolgozat. Helyes Benczúr András, Bíró András, Birkás György, Domokos Mátyás, Fleiner Tamás, Hajdú Gábor, Keleti Tamás, Kós Géza, Pásztor Gábor és Vu Ha Van megoldása. Harcos Gergely csak a feladat b) részére adott helyes megoldást. Kiemelkedő Keleti Tamás megoldása.

A 7. feladat megoldása.

Bizonyítandó a feladatbeli feltétel mellett, hogy létezik n_0 természetes szám, hogy bármely $\epsilon > 0$-ra létezik egy N természetes szám úgy, hogy ha $n > n_0$, akkor

$$\frac{1}{\epsilon} \le \frac{\sum_{k=1}^{nN} a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

teljesül.

Legyen ν valós szám a $(\overline{\lim}_n(a_n/a_{n\mu}),\mu)$ intervallumban és M egy természetes szám úgy, hogy $a_n/a_{n\mu} \le \nu$ minden $n \ge M$-re. Ebből könnyen következik, hogy $a_n/\nu^l \le a_{n\mu^l}$ minden $l \ge 0$ és $n \ge M$ természetes számra. Először is belátjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{n} a_k$ sor divergens. Valóban,

$$\sum_{k=1}^{M\mu^l} a_k \ge \sum_{k=1}^{M\mu^l} a_{M\mu^l} \ge \sum_{k=1}^{M\mu^l} \frac{a_M}{\nu^l} = M\mu^l \frac{a_M}{\nu^l} \ge Ma_M \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^l.$$

M, a_M rögzített és $l \to \infty$, így, mivel $\nu < \mu$, az egyenlőtlenség jobb oldala tart végtelenhez, tehát a $\sum_{k=1}^{n} a_k$ sort egy divergens sorozattal alulról becsültük. A sor divergenciája biztosít egy K természetes számot úgy, hogy $\sum_{k=1}^{M} a_k \le \sum_{k=M+1}^{K} a_k$, amiből következik, hogy $\sum_{k=1}^{n} a_k \le 2\sum_{k=M+1}^{n} a_k$ minden $n \ge K$-ra.

Legyen N később meghatározandó, ϵ-tól függő természetes szám μ^l alakú, ahol l természetes szám, és legyen $n \ge K$. Ekkor

$$\frac{\sum_{k=1}^{nN} a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \ge \frac{\sum_{k=M\mu^l}^{n\mu^l-1} a_k}{2\sum_{k=M+1}^{n} a_k} \ge \frac{\sum_{k=M\mu^l}^{n\mu^l-1} a_{([k/\mu^l]+1)\mu^l}}{2\sum_{k=M+1}^{n} a_k} \ge$$

$$\frac{\sum_{k=M\mu^l}^{n\mu^l-1} a_{[k/\mu^l]+1}/\nu^l}{2\sum_{k=M+1}^{n} a_k} = \frac{\mu^l\sum_{k=M+1}^{n} a_k/\nu^l}{2\sum_{k=M+1}^{n} a_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^l,$$

ahol $[\cdot]$ az egészrész függvényt jelenti. Ha $l \to \infty$, az egyenlet jobb oldala végtelenhez tart, így bármely $\epsilon > 0$-hoz találhatunk olyan l természetes számot, amelyre $(\mu/\nu)^l/2 \ge 1/\epsilon$. Ez az előző egyenlőtlenséggel együtt igazolja az állítást az $N = \mu^l$ választással.

Makay Géza megoldása

Érkezett 16 dolgozat. Helyes Benczúr András, Bíró András, Birkás György, Domokos Mátyás, Fleiner Tamás, Gács András, Harcos Gergely, Hausel Tamás, Keleti Tamás, Kondacs Attila, Makay Géza, Pásztor Gábor, Prokaj Vilmos és Vu Ha Van megoldása. Hiányos 2 dolgozat.

A 8. feladat megoldása.

Bár a

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \tag{1}$$

feltétel nem szerepelt a feladat kitűzésében, ez következik a jólismert Cantor-Lebesgue tétel alapján abból, hogy a

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \tag{2}$$

sor majdnem mindenütt konvergál. Megjegyezzük, hogy ezen tétel alkalmazásához az is elegendő lenne, ha a (2) sor pozitív mértékű halmazon konvergálna. A későbbi hivatkozások kedvéért, felsoroljuk a további feltételeket is:

$$\sum_{k=1} \frac{|a_k|}{k} = \infty, \tag{3}$$

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} k|\Delta a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

ahol

$$\Delta a_k := a_k - a_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

(4)-ből következik, hogy az $\{a_k\}$ sorozat korlátos változású, vagyis

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty.$$

Ugyanis, a Cauchy-féle egyenlőtlenség szerint

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} |\Delta a_k| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{n-1}\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} |\Delta a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} k|\Delta a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tekintsük a (2) sor n-edik részletösszegét. Abel-átrendezéssel nyerjük, hogy

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \tilde{D}_k(x)\Delta a_k + a_{n+1}\tilde{D}_n(x),$$

ahol $\tilde{D}_n(x)$ a konjugált Dirichlet-féle magfüggvény:

$$\tilde{D}_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Bevezetjük a

$$\bar{D}_n(x) := -\frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \qquad (n = 0, 1, \dots)$$

jelölést. Ekkor

$$\tilde{D}_n(x) = \bar{D}_n(x) - \bar{D}_0(x) \qquad (n = 0, 1, \dots, \tilde{D}_0(x) = 0)$$

és (6)-ból nyerjük, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx = \sum_{k=1}^{n} \bar{D}_k(x)\Delta a_k - \bar{D}_0(x)\sum_{k=1}^{n}\Delta a_k + a_{n+1}\bar{D}_n(x) - a_{n+1}\bar{D}_0(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \bar{D}_k(x)\Delta a_k - a_1\bar{D}_0(x) + a_{n+1}\bar{D}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \bar{D}_k(x)\Delta a_k + a_{n+1}\bar{D}_n(x),$$

azzal a megállapodással, hogy $a_0 := 0$ és ezért $\Delta a_0 = -a_1$. Innen következik, hogy a (2) sor konvergál:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{D}_k(x)\Delta a_k =: f(x) \tag{7}$$

minden x-re, esetleg az $x = 0 \pmod{2\pi}$ esetet kivéve.

A továbbiakban felhasználunk egy Sidon-típusú egyenlőtlenséget: Tetszőleges $n \geq 2$ egész szám és $\{ b_k \}$ számsorozat esetén

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left| \sum_{k=n}^{2n-1} b_k \bar{D}_k(x) \right| dx \leq C \left(\sum_{k=n}^{2n-1} k b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

ahol C pozitív állandó. Ennek belátásához alkalmazzuk először a Cauchy-Schwarz egyenlőtlenséget, majd használjuk ki a $\{ \cos(k + \frac{1}{2})x \}$ rendszer ortogonalitását:

$$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left| \sum_{k=n}^{2n-1} b_k \bar{D}_k(x) \right| dx = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \left| \sum_{k=n}^{2n-1} b_k \frac{\cos(k+1/2)x}{2\sin(x/2)} \right| dx \leq$$

$$\leq \left(\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{dx}{(2\sin(x/2))^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} b_k \cos(k+1/2)x \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C n^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\sum_{k=n}^{2n-1} k b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Legyen $s \geq 1$ egész szám. (7) szerint

$$\int_{\pi 2^{-s}}^{\pi} |f(x)| dx \geq \sum_{j=1}^{2^s-1} \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \left| \sum_{k=0}^{j-1} \bar{D}_k(x)\Delta a_k \right| dx - \sum_{j=1}^{2^s-1} \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \left| \sum_{k=j}^{\infty} \bar{D}_k(x)\Delta a_k \right| dx := \mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2. \tag{9}$$

Felhasználva az

$$\left| \bar{D}_k(x) + \frac{1}{x} \right| \leq k+1 \qquad (0 < x \leq \pi; \;\; k = 0, 1, \ldots)$$

egyenlőtlenséget, nyerjük, hogy

$$\mathcal{I}_1 \geq \sum_{j=1}^{2^s-1} \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \left| \sum_{k=0}^{j-1} \Delta a_k \right| \frac{dx}{x} - \sum_{j=1}^{2^s-1} \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \sum_{k=0}^{j-1} (k+1)|\Delta a_k| dx =: \mathcal{I}_{11} - \mathcal{I}_{12}.$$

Mivel

$$\ln\left(1 + \frac{1}{j}\right) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{j(j+1)},$$

a fentiek szerint

$$\mathcal{I}_{11} \geq \sum_{j=1}^{2^s-1} \left(\frac{|a_j|}{j} - \frac{|a_j|}{j(j+1)} \right).$$

Egyszerűen adódik, hogy

$$\sum_{j=1}^{2^s-1} \frac{|a_j|}{j(j+1)} \le \max_{j\ge 1} |a_j| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)} \le \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k|,$$

amelynek felhasználásával,

$$\mathcal{I}_{11} \ge \sum_{j=1}^{2^s-1} \frac{|a_j|}{j} - \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k|.$$

Hasonlóan,

$$\mathcal{I}_{12} = \pi \sum_{j=1}^{2^s-1} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{k+1}{j(j+1)} |\Delta a_k| \le \pi \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| \le 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k|.$$

Összefoglalva,

$$\mathcal{I}_1 \ge \sum_{j=1}^{2^s-1} \frac{|a_j|}{j} - (1+2\pi) \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k|. \tag{10}$$

Áttérünk $\mathcal{I}_2$ becslésére:

$$\mathcal{I}_2 = \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=2^{l-1}}^{2^l-1} \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \left| \left(\sum_{k=j}^{2^l-1} + \sum_{n=l+1}^{\infty} \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \right) \bar{D}_k(x) \Delta a_k \right| dx \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=2^{l-1}}^{2^l-1} \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \left| \sum_{k=j}^{2^l-1} \bar{D}_k(x) \Delta a_k \right| dx + \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=2^{l-1}}^{2^l-1} \sum_{n=l+1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \left| \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \bar{D}_k(x) \Delta a_k \right| dx =:$$

$$=: \mathcal{I}_{21} + \mathcal{I}_{22}.$$

Felhasználva a

$$\sin x \ge \frac{2}{\pi} x \qquad (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$$

elemi egyenlőtlenséget, nyerjük, hogy

$$\mathcal{I}_{21} \le \sum_{l=1}^{s} \sum_{j=2^{l-1}}^{2^l-1} \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \frac{1}{2\sin(x/2)} \sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} |\Delta a_k| dx \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{s} \int_{\pi 2^{-l}}^{\pi 2^{-l+1}} \frac{\pi}{2x} \sum_{k=2^{l-1}}^{2^l-1} |\Delta a_k| dx = \frac{\pi \ln 2}{2} \sum_{k=1}^{2^s-1} |\Delta a_k|.$$

Most alkalmazzuk a (8) egyenlőtlenséget:

$$\mathcal{I}_{22} = \sum_{l=1}^{s} \sum_{n=l+1}^{\infty} \int_{\pi 2^{-l}}^{\pi 2^{-l+1}} \left| \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \bar{D}_k(x) \Delta a_k \right| dx \le$$

$$\le \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=1}^{n-1} \int_{\pi 2^{-l}}^{\pi 2^{-l+1}} \left| \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \bar{D}_k(x) \Delta a_k \right| dx =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\pi 2^{-n+1}}^{\pi} \left| \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \bar{D}_k(x) \Delta a_k \right| dx \le C \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} k |\Delta a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Összefoglalva,

$$(11)\qquad \mathcal{I}_2 \le \frac{\pi \ln 2}{2} \sum_{k=1}^{2^s-1} |\Delta a_k| + C \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=2^n-1}^{2^n-1} k|\Delta a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

(9), (10) és (11) alapján nyerjük, hogy

$$\int_{\pi 2^{-s}}^{\pi} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx \right| dx \ge \sum_{k=1}^{2^s-1} \frac{|a_k|}{k} - \left(1 + 2\pi + \frac{\pi \ln 2}{2}\right) \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta a_k| -$$

$$-C \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=2^n-1}^{2^n-1} k|\Delta a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Figyelembe véve a (3), (4) és (5) feltételeket, innen már adódik a feladat állítása.

A szerző megoldása

Érkezett 4 megoldás. Hiányos 1, hibás 3 megoldás.

A 9. feladat megoldása.

I. megoldás

Az integrálás sorrendjének felcserélésével kapjuk:

$$\int_0^\infty e^{-H(t)} \int_0^t e^{H(u)} du\, dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-[H(t)-H(u)]} du\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-[H(t)-H(u)]} dt\, du =$$

$$= \int_0^\infty \int_u^\infty \exp\left[- \int_u^t h(s) ds \right] dt\, du.$$

Elegendő bizonyítani, hogy létezik olyan $c > 0$ állandó, amellyel

$$I(T) := \int_T^{2T} \int_u^{u+\frac{1}{T}} \exp\left[- \int_u^t h(s) ds \right] dt\, du \ge c$$

elég nagy T esetén.

$$I(T) \ge \int_T^{2T} \int_u^{u+\frac{1}{T}} \exp\left[- \int_u^{u+\frac{1}{T}} h(s) ds \right] dt\, du = \frac{1}{T} \int_T^{2T} \exp\left[- \int_u^{u+\frac{1}{T}} h(s) ds \right] du.$$

Vezessük be a

$$Q_T := \{\, u \in [T, 2T] : \int_u^{u+\frac{1}{T}} h(s) ds \ge 10B \,\}$$

jelölést és becsüljük meg felülről a Q_T halmaz $\mu(Q_T)$ Lebesgue-mértékét:

$$10B\mu(Q_T) \le \int_T^{2T} \int_u^{u+\frac{1}{T}} h(s)ds\, du \le \int_T^{2T+\frac{1}{T}} \int_{s-\frac{1}{T}}^{s} h(s)du\, ds =$$

$$= \frac{1}{T} \int_T^{2T+\frac{1}{T}} h(s)ds \le \frac{1}{T} B \left(2T + \frac{1}{T}\right)^2,$$

tehát

$$\mu(Q_T) \le \frac{1}{10}\left(2T + \frac{4}{T} + \frac{1}{T^3}\right).$$

Ezt felhasználva kapjuk:

$$I(T) \ge \frac{1}{T} \int_{[T,2T]\setminus Q_T} e^{-10B} du \ge \frac{e^{-10B}}{T}(T - \mu(Q_T)) \ge e^{-10B}\left(1 - \frac{9}{10}\right) =: c > 0,$$

feltéve, hogy $T \ge 1$.

A szerzők megoldása

II. megoldás

Először belátjuk, hogy ha $g : [1, \infty) \to (0, \infty)$ mérhető, lokálisan integrálható, és

$$\int_1^t g(s)ds \le B_1 t^2 \qquad (B_1 = \text{konstans})$$

minden t esetén, akkor

$$\int_1^\infty \frac{1}{g(s)} ds = \infty.$$

Legyen $T > 1$ tetszőleges valós szám. A Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség szerint:

$$T^2 = \left(\int_T^{2T} 1 dt\right)^2 = \left(\int_T^{2T} \sqrt{g(t)} \frac{1}{\sqrt{g(t)}} dt\right)^2 \le \left(\int_T^{2T} g(t)dt\right)\left(\int_T^{2T} \frac{1}{g(t)} dt\right) \le$$

$$\le B_1 4T^2 \int_T^{2T} \frac{1}{g(t)} dt,$$

tehát

$$\int_T^{2T} \frac{1}{g(t)} dt \ge \frac{1}{4B_1} \qquad (T > 1),$$

amiből az állítás adódik.

Legyen

$$g(t) := \frac{e^{H(t)}}{\int_0^t e^{H(u)} du} \qquad (t \ge 1).$$

A feladat szerint azt kell bizonyítani, hogy

$$\int_1^\infty \frac{1}{g(t)} dt = \infty.$$

Az első megjegyzés szerint ehhez elegendő a

$$\int_1^t g(s)ds \le B_1 t^2 \qquad (t \ge 1)$$

egyenlőtlenséget belátni alkalmas B_1-gyel. Ez nagyon egyszerű:

$$\int_1^t g(s)ds = \int_1^t \frac{e^{H(s)}}{\int_0^s e^{H(u)}du} ds = \ln \int_0^t e^{H(u)}du - \ln \int_0^1 e^{H(u)}du.$$

Mivel H monoton növő

$$\int_1^t g(s)ds \le \ln\left[te^{H(t)}\right] = \ln t + H(t) \le Bt^2 + \ln t \le B_1 t^2$$

alkalmas B_1-gyel.

Vu Ha Van ötlete alapján Hatvani László

4 dolgozat érkezett. Helyes Bíró András és Kós Géza megoldása. Vu Ha Van megoldása könnyen javítható hibát tartalmaz. Részeredményeket tartalmaz 1 dolgozat. Vu Ha Van dolgozatának gondolata kiemelkedő.

A 10. feladat megoldása.

A feladatbeli egyenletből kimaradt egy c állandó. Helyesen: $f'(x) = cf(x+1)$, ahol $0 < c \le \frac{1}{e}$. Ekkor létezik $\lambda > 0$ úgy, hogy $\lambda = ce^{\lambda}$ és $e^{\lambda x}$ pozitív megoldás. Ezzel szemben az $f'(x) = f(x+1)$ egyenletnek nincs pozitív f megoldása. Ha lenne, akkor f szigorúan monoton növő lenne és a Lagrange-féle középérték tétel szerint $f(1) > f(1) - f(0) = f'(\xi) = f(\xi+1) > f(1)$, ellentmondás. Az $f'(x) = cf(x+1)$ egyenletnek pontosan akkor van pozitív megoldása $[0,\infty)$-en, ha $c \le \frac{1}{e}$ (lásd a kitűző "Exponential bound for positive solutions of functional differential equations" című megjelenés alatt álló dolgozatát).

a) Az exponenciális nagyságrend bizonyítása. Ha $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ kielégíti az $f'(x) = cf(x+1)$ egyenletet, akkor legyen $\alpha(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, amiből $f(x) = f(0)\exp\left(\int_0^x \alpha(s)ds\right)$ és α-ra fennáll $\alpha(x) = c\exp\left(\int_x^{x+1} \alpha(s)ds\right) > 0$, azaz $\ln(\alpha(x)/c) = \int_x^{x+1} \alpha(s)ds$, $x \ge 0$. Válasszuk k-t úgy, hogy $k \ge \alpha(0)$ és $k \ge \ln(k/c)$. Definiáljuk az $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot a következőképpen. $x_0 = 0$, $x_1 = \max\{x \in (0,1] : \alpha(x) \le k\}$. $\int_0^1 \alpha(s)ds = \ln(\alpha(0)/c) \le \ln(k/c) \le k$-ból adódik, hogy x_1 jól definiált. Ha $x_0, \dots, x_n$ adott, akkor definiáljuk x_{n+1}-et az $x_{n+1} = \max\{x \in (x_n, x_n+1] : \alpha(x) \le k\}$ relációval. $\int_{x_n}^{x_n+1} \alpha(s)ds = \ln(\alpha(x_n)/c) \le \ln(k/c) \le k$-ból kapjuk, hogy x_{n+1} jól definiált. Mivel $\alpha(x) > k$ az $(x_{n+1}, x_n+1]$ intervallumon, $x_{n+2} > x_n + 1$ következik. Innen $[0,n] \subset \cup_{l=1}^{2n}[x_{l-1}, x_l]$. Ezért, ha $x \in [n-1, n)$, akkor

$$\int_0^x \alpha(s)ds \le \int_0^n \alpha(s)ds \le \sum_{l=1}^{2n} \int_{x_{l-1}}^{x_l} \alpha(s)ds \le \sum_{l=1}^{2n} \int_{x_{l-1}}^{x_{l-1}+1} \alpha(s)ds =$$

$$= \sum_{l=1}^{2n} \ln\frac{\alpha(x_{l-1})}{c} \le 2n\ln\frac{k}{c} \le 2nk \le 2xk + 2k.$$

Tehát

$$f(x) = f(0)\exp\left(\int_0^x \alpha(s)ds\right) \le f(0)e^{2k}e^{2kx} \qquad (x \ge 0).$$

b) Van olyan $\varphi \in C^\infty[0,1]$ nem azonosan nulla függvény, hogy $\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(1) = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Például $\varphi(x) = \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)$, ha $x \in (0,1)$ és $f(0) = f(1) = 0$. Ekkor $f(x+n) = \frac{1}{c^n}\varphi^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, $x \in [0,1]$, az $f'(x) = cf(x+1)$ egy megoldását definiálja. Legyen $x \in (0,1)$ olyan,hogy $\varphi(x) \neq 0$. A Taylor tétel szerint van $\eta \in (0,x)$ úgy, hogy

$$\varphi(x) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(l)}(0)}{l!}x^l + \frac{\varphi^{(n)}(\eta)}{n!}x^n = \frac{\varphi^{(n)}(\eta)}{n!}x^n.$$

Innen

$$|f(\eta+n)| = \frac{1}{c^n}|\varphi^{(n)}(\eta)| = |\varphi(x)|\frac{n!}{(cx)^n},$$

amely gyorsabban nő, mint bármely ae^{bn}, amint $n \to \infty$. Tehát f nem exponenciális nagyságrendű.

A szerző és Benczúr András megoldása

Érkezett 10 megoldás. Helyes Benczúr András, Bíró András, Fleiner Tamás, Gács András, Hajdú Gábor, Keleti Tamás, Kós Géza, Pásztor Gábor és Vu Ha Van megoldása. 5 dolgozat csak a feladat a) részét oldja meg.

A 11. feladat megoldása.

Megadható ilyen T operátor. Legyen ugyanis H megszámlálhatóan végtelen dimenziós Hilbert tér, és legyen $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ ortonormált bázis H-ban. A T operátort először a bázisvektorokon definiáljuk. Legyen

$$Te_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 1, \\ e_{n+1}, & \text{ha } n \geq 2 \text{ nem négyzetszám}, \\ \alpha_j e_1 + \frac{\alpha_j}{j}e_{n+1}, & \text{ha } n = j^2 \text{ alakú négyzetszám, ahol } j \geq 2 \text{ egész.} \end{cases}$$

Az $\{\alpha_j\}_{j=2}^\infty$ sorozatról azt tesszük fel, hogy $0 < |\alpha_j| \leq 1$ minden j-re és $\alpha = \sum_{j=2}^\infty |\alpha_j|^2 < \infty$.

Most kiterjesztjük T definicióját az egész H Hilbert térre. Tetszőleges $x \in H$ vektor esetén legyen $Tx := \sum_{n=1}^\infty \xi_n Te_n$, ahol $\xi_n = \langle x, e_n\rangle$. Be kell látnunk először, hogy a Tx vektort definiáló sor konvergens, vagyis, hogy a részletösszegekből álló sorozat Cauchy-sorozat. Legyenek $k < l$ pozitív egészek. Ekkor

$$\left\|\sum_{n=k}^{l} \xi_n Te_n\right\|^2 \leq \sum_{n=k}^{l} |\xi_n|^2 + \left|\sum_{k \leq j^2 \leq l} \alpha_j \xi_{j^2}\right|^2,$$

ugyanis a $\sum_{n=k}^{l} \xi_n Te_n$ kifejezésbe beírva a Te_n vektorok definició szerinti értékét, a bázisvektorok ily módon nyert lineáris kombinációjában az $\{e_n\}_{n=k+1}^{l+1}$ vektorok mindegyikének együtthatója legfeljebb 1 abszolútértékű, az e_1 vektor együtthatója éppen $\sum_{k\leq j^2 \leq l} \alpha_j \xi_{j^2}$, a többi bázisvektort pedig e lineáris kombináció nem tartalmazza. Következésképpen, a Cauchy-egyenlőtlenség alkalmazásával

$$\left\|\sum_{n=k}^{l} \xi_n Te_n\right\|^2 \leq \sum_{n=k}^{l} |\xi_n|^2 + \left(\sum_{k \leq j^2 \leq l} |\alpha_j|^2\right)\left(\sum_{k \leq j^2 \leq l} |\xi_{j^2}|^2\right) \leq (1+\alpha)\sum_{n=k}^{l} |\xi_n|^2$$

adódik. Mivel $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2 = \|x\|^2 < \infty$, ezért a $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n Te_n$ sor konvergens. T linearitása ezek után nyilvánvaló, s ha az előző egyenlőtlenségben $k = 1$-et írunk és l-et tartatjuk a végtelenbe, akkor a T operátor korlátossága is adódik: $\|T\| \leq 1+\alpha$.

Megmutatjuk, hogy $e_1 \in T^l(H)^-$ minden l természetes számra teljesül. Valóban, $j \geq 2$ esetén $e_{j^2} = T^{2j-2}e_{(j-1)^2+1}$, s így

$$e_1 + \frac{1}{j}e_{j^2+1} = \frac{1}{\alpha_j}Te_{j^2} = T^{2j-1}\left(\frac{1}{\alpha_j}e_{(j-1)^2+1}\right) \in T^{2j-1}(H).$$

Következésképpen $2j-1 \geq l$ esetén

$$e_1 + \frac{1}{j}e_{j^2+1} \in T^{2j-1}(H) \subset T^l(H),$$

s így a j indexet a végtelenbe tartatva nyerjük, hogy

$$e_1 = \lim_{j\to\infty}\left(e_1 + \frac{1}{j}e_{j^2+1}\right) \in T^l(H)^-.$$

Azt kell még megmutatni, hogy $\cap_{l=1}^{\infty}T^l(H) = \{0\}$. Tegyük fel, hogy $x \in \cap_{l=1}^{\infty}T^l(H)$. A T operátor definíciójából világos, hogy bármely l esetén az $\{e_n\}_{n=2}^{l+1}$ vektorok mindegyike merőleges a $T^l(H)$ lineáris sokaság vektoraira. Így $\langle x, e_n\rangle = 0$ teljesül minden $n \geq 2$ egészre. Másrészt viszont, ha $Ty \neq 0$ valamely $y \in H$ vektorra, akkor szükségképpen létezik olyan $n \geq 2$ egész, melyre $\langle y, e_n\rangle \neq 0$. De ekkor $\langle Ty, e_{n+1}\rangle \neq 0$, s így az előzőek miatt $x = T0 = 0$.

Bíró András megoldása

6 dolgozat érkezett. Helyes Bíró András, Fleiner Tamás és Kós Géza megoldása.

A 12. feladat megoldása.

I. megoldás.

Legyen $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Az alapeloszlás karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = E\left(e^{itX_1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{it2^{\frac{k}{\alpha}}}\frac{1}{2^k} \qquad , t \in \mathbb{R}.$$

Vezessük be a

$$\gamma_n = \frac{n}{2^{\lceil \log n \rceil}} \qquad , n = 1, 2, \ldots,$$

sorozatot, ahol $\lceil u \rceil = \min\{n \in \mathbf{N} : u \leq n\}$ az $u \geq 0$ szám "felső egész része". Nyilvánvaló, hogy $\frac{1}{2} < \gamma_n \leq 1$ minden n-re. A kérdéses $\frac{S_n}{n^{1/\alpha}}$ véletlen változó φ_n karakterisztikus függvényére a függetlenség miatt tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ pontban azt kapjuk, hogy

$$\varphi_n(t) = E\left(e^{it\frac{S_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}}}\right) = \varphi^n\left(\frac{t}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{it2^{\frac{1}{\alpha}k}/n^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right)\frac{1}{2^k}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^{\lceil \log n \rceil}}\sum_{k=1}^{\infty}\left(e^{it2^{\frac{1}{\alpha}(k-\lceil \log n \rceil)}/\gamma_n^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right)\frac{1}{2^{k-\lceil \log n \rceil}}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\sum_{r=-\lceil \log n \rceil+1}^{\infty}\left(e^{it2^{\frac{r}{\alpha}}/\gamma_n^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right)\frac{\gamma_n}{2^r}\right)^n.$$

Adott $\frac{1}{2} \le \gamma \le 1$ számra tekintsük a

$$h_\gamma(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(e^{it\frac{2^{\frac{r}{\alpha}}}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}} - 1 \right) \frac{\gamma}{2^r}, \qquad t \in \mathbf{R},$$

függvényt és legyen

$$\xi_\gamma(T) = e^{h_\gamma(t)}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Mivel tetszőleges $t \in \mathbf{R}$ esetén

$$|h_\gamma(t)| \le 2\gamma \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} + \gamma^{1-\frac{1}{\alpha}} |t| \sum_{r=0}^{-\infty} 2^{(\frac{1}{\alpha}-1)r} \le 2\gamma + \frac{\gamma^{1-\frac{1}{\alpha}}}{1-2^{1-\frac{1}{\alpha}}} |t|,$$

ez a definició értelmes, és $\xi_\gamma(.)$ a

$$Z_\gamma := \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{2^{\frac{r}{\alpha}}}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}} Y_r(\gamma)$$

véletlen változó karakterisztikus függvénye, ahol $Y_r(\gamma)$ független, $E\left(Y_r(\gamma)\right) = \frac{\gamma}{2^r}$ várható értékű Poisson eloszlású véletlen változók, $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. (Egyszerűség kedvéért Z_γ értelmezhető mint a

$$\sum_{r=-n}^{n} \frac{2^{\frac{r}{\alpha}}}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}} Y_r(\gamma)$$

részletösszegek eloszlásbeli határértéke. P. Lévy folytonossági tételének alkalmazásával könnyen látható, hogy ez lehetséges.) Nyilvánvaló, hogy Z_γ korlátlanul osztható véletlen változó.

A későbbiek kedvéért azt is megjegyezzük, hogy, amint ez könnyen látható, $\xi_\gamma(t)$ bármely rögzített $t \in \mathbf{R}$ esetén mint γ függvénye folytonos az $[\frac{1}{2}, 1]$ intervallumon. (Valójában $\xi_\gamma(t)$ mint kétváltozós függvény folytonos az $[\frac{1}{2}, 1] \times \mathbf{R}$ tartományon.)

Belátjuk, hogy a

$$\xi_\gamma(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dH_\gamma(x), \qquad t \in \mathbf{R},$$

relációval egyértelműen megadott H_γ eloszlásfüggvény, vagyis Z_γ eloszlásfüggvénye, tetszőleges $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$ esetén az egész egyenesen folytonos. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma^{-\frac{1}{\alpha}}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_\gamma(t)| dt &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \exp\left(\gamma \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(e^{is2^{\frac{r}{\alpha}}} - 1 \right) \frac{1}{2^r} \right) \right| ds = \\
&= \int_0^{\infty} \exp\left(-\gamma \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left(1 - \cos(s2^{\frac{r}{\alpha}}) \right) \frac{1}{2^r} \right) ds \le \\
(*) \qquad &\le \int_0^{\infty} \exp\left(-\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \cos(s2^{-\frac{k}{\alpha}}) \right) 2^k \right) ds \le \\
&\le \int_0^{\infty} \exp\left(-\gamma \sum_{k=\mathcal{K}(s)}^{\infty} \left(1 - \cos(s2^{-\frac{k}{\alpha}}) \right) 2^k \right) ds,
\end{aligned}$$

ahol tetszőleges $s > 0$ esetén $\mathcal{K}(s)$ jelöli a legkisebb olyan $k \geq 1$ egész számot, amelyre $\log\left(\frac{s}{\pi}\right) < k-1$. Minthogy ekkor $\mathcal{K}(s) \leq 2 + \log\left(\frac{s}{\pi}\right)$ és $s2^{-k} < \frac{\pi}{2}$, ezért $s2^{-\frac{k}{\alpha}} < \frac{\pi}{2}$, valahányszor $k \geq \mathcal{K}(s)$, így az

$$1 - \cos x \geq \frac{4}{\pi^2}x^2 \qquad (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$$

egyenlőtlenség alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$(**) \quad \sum_{k=\mathcal{K}(s)}^{\infty}\left(1 - \cos\left(s2^{-\frac{k}{\alpha}}\right)\right)2^k \geq \frac{4}{\pi^2}s^2 \sum_{k=\mathcal{K}(s)}^{\infty} 2^{(1-\frac{2}{\alpha})k} \geq \frac{4}{\pi^2}s^2 \sum_{k=\mathcal{K}(s)}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k =$$
$$= \frac{4}{\pi^2}s^2 2^{1-\mathcal{K}(s)} \geq \frac{2}{\pi}s.$$

Ezért,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi_\gamma(t)|dt \leq 2\gamma^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\gamma}{\pi}s} ds < \infty.$$

Ebből a karakterisztikus függvényekre vonatkozó inverziós formulából (lásd pl. Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás, II. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1968, 266.old.) könnyen következik, hogy H_γ folytonos.

Tekintsük a Z_{γ_n} véletlen változókat, rendre a $\psi_n(t) := \xi_{\gamma_n}(t)$, $t \in \mathbf{R}$, karakterisztikus és $G_n(x) = H_{\gamma_n}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, eloszlásfüggvényekkel, $n = 1, 2, \ldots$. Mivel $n \to \infty$ esetén, bármely $t \in \mathbf{R}$ pontban,

$$h_{\gamma_n}(t) - \sum_{r=-\lceil \log n \rceil + 1}^{\infty}\left(e^{it2^{\frac{r}{\alpha}}/\gamma_n^{\frac{1}{\alpha}}} - 1\right)\frac{\gamma_n}{2^r} \longrightarrow 0,$$

könnyen látható, hogy tetszőleges $t \in \mathbf{R}$ esetén

$$(***) \qquad \varphi_n(t) - \psi_n(t) \longrightarrow 0$$

amint $n \to \infty$. Legyen végül

$$\Delta(F_n, G_n) = \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - G_n(x)|,$$

ahol

$$F_n(x) = \mathrm{P}\left\{\frac{S_n}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \leq x\right\}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

és tekintsük a természetes számok egy végtelenbe tartó $\{n'\}$ részsorozatát. Mivel $\frac{1}{2} < \gamma_{n'} \leq 1$, a Bolzano-Weierstass tétel szerint található olyan további $\{n''\} \subset \{n'\}$ részsorozat, hogy valamely $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$ számra $\gamma_{n''} \to \gamma$ midőn $n'' \to \infty$. Ekkor

$$\Delta(F_{n''}, G_{n''}) \leq \Delta(F_{n''}, H_\gamma) + \Delta(G_{n''}, H_\gamma),$$

és a fentebbi megjegyzés miatt $\psi_{n''}(t) = \xi_{\gamma_{n''}}(t) \to \xi_\gamma(t)$ bármely $t \in \mathbf{R}$ esetén, amint n'' tart a végtelenbe. Lévy folytonossági tétele szerint így $G_{n''}(x) = H_{\gamma_{n''}}(x) \to H_\gamma(x)$ a határfüggvény minden folytonossági pontjában. Tekintve, hogy H_γ mindenütt folytonos, Pólya egy jól ismert tételéből következik, hogy a konvergencia egyenletes. Tehát

$$\Delta(G_{n''}, H_\gamma) \to 0, \qquad \text{ha } n'' \to \infty.$$

Figyelembe véve a $(***)$ relációt, ugyanígy adódik, hogy

$$\Delta(F_{n''}, H_\gamma) \to 0, \qquad \text{ha } n'' \to \infty.$$

Minthogy az $\{n'\}$ részsorozat tetszőleges volt, ebből kapjuk, hogy

$$\Delta(F_n, G_n) \to 0, \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Csörgő Sándor megoldása

II. megoldás

Definiáljuk a Z_{γ_n} véletlen változó sorozatot ugyanúgy, mint Csörgő Sándor megoldásában:

$$\gamma_n = \frac{n}{2^{\lceil \log n \rceil}} \qquad L_n = \lceil \log n \rceil \qquad Z_{\gamma_n} = n^{-1/\alpha} \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{L_n + r}{\alpha}} Y_r(\gamma_n),$$

ahol $Y_r(\gamma_n)$ független, $\frac{\gamma_n}{2^r} = n2^{-L_n - r}$ várható értékű Poisson eloszlású véletlen változók sorozata. Megjegyezzük, hogy a háromsor-tétel miatt a Z_{γ_n}-t definiáló összeg konvergens. Felhasználjuk még a Csörgő Sándor megoldásában adott $(*)$ és $(**)$ becsléseket, melyek azt biztosítják, hogy a Z_{γ_n} véletlen változó $G_n(x)$ eloszlásfüggvénye $\xi_n(t)$ karakterisztikus függvényének abszolút értéke integrálható és ez az integrál egy n-től független korlát alatt marad.

A $G_n(x)$ eloszlásfüggvények nyilvánvalóan korlátlanul oszthatók, megmutatjuk,hogy teljesítik a feladat feltételeit. Ez az alábbi két állításból következik. Legyen $S_n = n^{-1/\alpha} \sum_{k=1}^{n} X_k$ és $F_n(x)$ ennek eloszlásfüggvénye.

a) Létezik olyan $\varepsilon_n \to 0$ pozitív számsorozat, hogy minden $x \in (-\infty, \infty)$-re

$$G_n(x - \varepsilon_n) - \varepsilon_n < F_n(x) < G_n(x + \varepsilon_n) + \varepsilon_n.$$

b) Minden n-re $G_n(x)$-nek létezik a $g_n(x)$ sűrűségfüggvénye, és van olyan n-től független M, hogy minden $x \in (-\infty, \infty)$-re $g_n(x) < M$.

Először megmutatjuk, hogy a feladat állítása a) és b) következménye. Valóban,

$$(1) \qquad F_n(x) - G_n(x) = F_n(x) - G_n(x + \varepsilon_n) + G_n(x + \varepsilon_n) - G_n(x) \le \varepsilon_n + M\varepsilon_n,$$

$$(2) \qquad G_n(x) - F_n(x) = G_n(x - \varepsilon_n) - F_n(x) + G_n(x) - G_n(x - \varepsilon_n) \le \varepsilon_n + M\varepsilon_n.$$

Mivel $\varepsilon_n \to 0$, az (1) és (2) egyenlőségekből következik $\sup_x |G_n(x) - F_n(x)| \to 0$, ami a bizonyítandó volt.

A b) állítás következik Csörgő Sándor már idézett $(*)$ és $(**)$ becsléseiből.

Az a) állítás bizonyítása a következő észrevételekből adódik. Legyen d_n egy elegendően lassan ∞-hez tartó számsorozat: legyen

$$\begin{aligned}
Z_n^{(1)} &= n^{-1/\alpha} \sum_{r=-\infty}^{L_n - d_n} 2^{\frac{L_n + r}{\alpha}} Y_r(\gamma_n), \\
Z_n^{(2)} &= n^{-1/\alpha} \sum_{r=L_n+d_n}^{\infty} 2^{\frac{L_n + r}{\alpha}} Y_r(\gamma_n), \\
Z_n^{(3)} &= Z_{\gamma_n} - Z_n^{(1)} - Z_n^{(2)}, \\
S_n^{(1)} &= n^{-1/\alpha} \sum_{k=1}^{n} X_k I_{\left(X_k < 2^{\frac{L_n - d_n}{\alpha}}\right)} Y_r(\gamma_n), \\
S_n^{(2)} &= n^{-1/\alpha} \sum_{k=1}^{n} X_k I_{\left(X_k > 2^{\frac{L_n + d_n}{\alpha}}\right)} Y_r(\gamma_n), \\
S_n^{(3)} &= S_n - S_n^{(1)} - S_n^{(2)}.
\end{aligned}$$

(I_A az A halmaz indikátorfüggvénye.)

Mivel $P(S_n^{(2)} \neq 0) \to 0$, $P(Z_n^{(2)} \neq 0) \to 0$, $ES_n^{(1)} \to 0$ és $EZ_n^{(1)} \to 0$, egyszerű számolással adódik, hogy

$$S_n - S_n^{(3)} \Rightarrow 0 \text{ és } Z_{\gamma_n} - Z_n^{(3)} \Rightarrow 0 \tag{3}$$

(a $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelent).

Másrészt $S_n^{(3)}$ a következő alakban írható fel:

$$S_n^{(3)} = \sum_{l=L_n-d_n}^{L_n+d_n} 2^{l/\alpha} \nu_l n^{-1/\alpha},$$

ahol $\nu_l = \sharp\{j, 1 \leq j \leq n,\ x_j = 2^{l/\alpha}\}$, $l = 1, 2, \ldots$ ($\sharp A$ jelöli az A halmaz számosságát). Jelölje $F_n^{(3)}(x)$ az $S_n^{(3)}$, $G_n^{(3)}(x)$ a $Z_n^{(3)}$ eloszlásfüggvényét. Ekkor állítjuk, hogy

$$\mathrm{Var}(F_n^{(3)}(x), G_n^{(3)}(x)) \to 0. \tag{4}$$

($\mathrm{Var}(\{p_i\}, \{q_i\})$ a $\{p_i\}$ és $\{q_i\}$ diszkrét eloszlások $\sum_i |p_i - q_i|$ variációs távolságát jelöli.)

A (3) és (4) relációkból következik az a) állítás. Hátra van még a (4) konvergencia bizonyítása.

Jelölje $\mathrm{distr}\{Y_j(\gamma_n),\ |j| \leq d_n\}$ ill. $\mathrm{distr}\{\nu_{l+L_n},\ |l| \leq d_n\}$ az $\{Y_j(\gamma_n)\}$ ill. $\{\nu_{l+L_n}\}$ véletlen változók ($|j| \leq d_n, |l| \leq d_n$) együttes eloszlását. A (4) konvergencia a

$$\mathrm{Var}(\mathrm{distr}\{Y_j(\gamma_n),\ |j| \leq d_n\},\ \mathrm{distr}\{\nu_{l+L_n},\ |l| \leq d_n\}) \to 0 \tag{5}$$

konvergenciából adódik. Ez utóbbi az alábbi becsléssorozat következménye.

Mivel d_n elegendően lassan tart a végtelenhez, az (5) relációban szereplő véletlen változók $\{p_l, |l| \le d_n\}$ értékkészletét $\log^2 n$-nel korlátozva, az elkövetett hiba nem befolyásolja a becsléssorozat érvényességét.

$$P(\nu_{l+L_n} = p_l,\ |j| \le d_n) = \frac{n!}{\prod_{l=-d_n}^{d_n} p_l! \left(n - \sum_{l-d_n}^{d_n} p_l\right)!} \cdot$$

$$\cdot \prod_{l=-d_n}^{d_n} 2^{-p_l(L_n+l)} \cdot \left(1 - \sum_{l=-d_n}^{d_n} 2^{(-L_n+l)}\right)^{n-\sum_{l=-d_n}^{d_n} p_l} =$$

$$= \prod_{l=-d_n}^{d_n} \frac{(n2^{-L_n-l})^{p_l}}{p_l!} e^{-n2^{-L_n-l}} \cdot \left(1 + O\left(\frac{\log^3 n}{n}\right)\right) =$$

$$= \left(1 + O\left(\frac{\log^3 n}{n}\right)\right) \prod_{l=-d_n}^{d_n} P(Y_l(\gamma_n) = p_l) =$$

$$= \left(1 + O\left(\frac{\log^3 n}{n}\right)\right) P(Y_l(\gamma_n) = p_l,\ |l| \le d_n).$$

Major Péter megoldása

A feladatra megoldás nem érkezett be.

TÁRSULATI HÍREK

a. Csillag Pál Találkozó (Balatonlelle, 1992. június 12–16.; résztvevők száma kb. 45 fő)

A rendezvényt a szokásos helyen tartottuk, a BME balatonlellei táborában. A fiatal matematikusokon kívül 10–15 fő családtag is volt a találkozón. A résztvevők között volt egy TEMPUS keretében posztgraduális képzésben résztvevő olasz diák, ezért az előadások felét angolul tartották.

A találkozó első napján Katona Gyula, a BJMT főtitkára tartott rövid megnyitót.

A rendezvényen három meghívott előadó volt, egyórás előadásaikat az alábbi címekkel tartották:

Totik Vilmos: Csebisev konstans és transzfinit átmérő

Hajnal Péter: Döntési fák

Kiss György: Segre tétele.

A fentieken kívül további 6, egyenként 30–45 perces előadás volt, különböző témakörökből.

A szakmai program mellett jutott idő fürdésre, focizásra, bridzselésre, szalonnasütésre is.

Az idei Csillag Pál Találkozó szervezését (a BJMT apparátusa segítségével) Buczolich Zoltán, Illés Tibor és Kiss György végezték.

(A beszámolót Kiss György készítette.)

b. Rátz László vándorgyűlés (Zalaegerszeg, 1992. július 6–10.; kb. 620 fő)

A rendezvényt a Pénzügyi és Számviteli Főiskola Zalaegerszegi Intézetében rendeztük.

A július 7-iki megnyitó ülésen a Beke Manó Emlékdíjakat a Társulat Elnöksége nevében Pálmay Lóránt adta át.

A plenáris ülésen hangzott el Recski András: A gráfelmélet minimax tételei és alkalmazásaik, és András Vera: Kommunikáció pszichológus szemmel című előadása. Plenáris előadásba illett volna Bonifert Domokos: „Vadócba rózsát" c. előadása is, erre az előadásra megduplázódott ugyanis a felső tagozatos szekció hallgatósága.

Július 8–9–10-ikén szekcióüléseken folytatta a vándorgyűlés a munkát.

Az alsó tagozatos szekcióban a 6–10 évesek számolási technikáinak lehetséges kialakítási módozatairól hangzott el előadás. Mátyásné Kokovay Jolán „Szorobán elmélet” c. előadása és az ehhez a témához kapcsolódó szemináriumok nagy érdeklődést váltottak ki, de kiemelkedő szinvonalúnak tartották a résztvevők Zsinkó Erzsébet, Vassné Varga Edit és C. Neményi Eszter előadásait is.

A felső tagozatos és középiskolai szekcióban fontos témát igyekezett körüljárni a „Matematika versenyek szerepe és lehetőségei” című ankét. A versenybizottságok által delegált témavezetők tartottak vitaindító előadásokat, ill. számoltak be a versenyek helyzetéről „csúcsbizottsági” szinten. A felső tagozaton megvitatták a Varga Tamás verseny tapasztalatait, a KMBK versenyek új lehetőségeit, az Észkerék c. folyóirat tehetséggondozó szerepét. A középiskolai szekcióban az OKTV versenyek problémái és az Arany Dániel versenyek új koncepciója kerültek megvitatásra. E viták legfontosabb „hozadéka”, hogy a versenyre előkészítő tanárok megismerkedhettek a versenybizottságok munkájával és problémáival, a versenybizottságok döntéshelyzetben lévő vezetői és tagjai pedig meghallgathatták a tanári véleményeket a verseny szerepéről, feladatairól. A vitákat a tárgyszerűség, szakmai hozzáértés és nagyfokú felelősségérzet vezérelte.

Az ankétokat feladatmegoldó szemináriumok egészítették ki. Pogáts Ferenc a Varga Tamás versenyek, Sztrókay Vera és Urbán János a KMBK versenyek, Surányi János és Surányi László a Kürschák versenyek, Lehel Jenő az Arany Dániel — haladó verseny feladataiból válogattak. Ezek a szemináriumok igen népszerűek voltak, mert magas színvonalon, teljes mélységében mutatták be a versenyfeladatok matematikai holdudvarát is.

Surányi János, a versenyekről szóló gondolatait (betegsége miatt) írásban juttatta el a szervezőbizottságnak. Az ankét résztvevői kérték, hogy ezt a fontos gondolatokat tartalmazó írást a Társulat jelentesse meg.

A vándorgyűlés plenáris ankéton foglalkozott az iskolarendszer szerkezetátalakításának lehetséges módozataival, a tankönyvkérdésekkel, a tanulói, tanári segédanyagok problémáival. Ez az ankét a problémák felszínre hozásában segített, elindíthatta a legjobb megoldások megtalálásának igényét. A szervezőbizottságnak e témákhoz is illesztett elképzelése — a tankönyvet kiadó cégek árusítással történő megjelenése — az eddigi módszerek finomítására és új utak keresésére ösztönzi a következő vándorgyűlések szervezőit.

A résztvevők hasznosnak tartották a tudományegyetemeken bevezetett egyszakos matematikatanári képesítésről szóló, a Felsőoktatási ankét keretében megtartott ankétot.

A Felsőoktatási ankét és a középiskolai szekció összevont előadásán Klepp Ferenc (Temesvári Egyetem) számolt be felvételi tapasztalataikról. Részvételét alapítványi támogatás tette lehetővé.

Nagy érdeklődés kísérte Vancsó Ödön elképzeléseit, amelyet előadása során részletesen fejtett ki. Sokan támogatták a matematikaoktatási adatbank létrehozására tett lépéseit.

Az Informatikai bizottság legsikeresebb előadása Simonovits Miklós „Matematika – számítástechnika" c. előadása volt. (Sajnálatos, hogy Horváth László – Zsakó László előadása elmaradt.)

A Péter Rózsa emlékére készült videófilmet sokan megnézték. Tanítványai, munkatársai emlékeztek a professzor asszonyra halálának 15. évfordulója alkalmából. (Az anyagot Ács Katalin és az Amerikai Alapítványi Iskola készítette.) A teljes plenáris ülésről és 9 előadásról, ill. szemináriumról videófelvétel készült. Megfelelő technikai előkészítés után ezeket az anyagokat a megyei, ill. fővárosi pedagógiai intézeteknek másolásra felajánljuk.

A vándorgyűlés résztvevői önkéntes felajánlásokkal („+n Ft") segítették a környező országokból érkezett magyar nemzetiségű matematikatanárok (idén 41-en voltak) részvételét.

A vándorgyűlés szakmai programját zalaegerszegi városnézések, nagysikerű kórushangverseny és négy útvonalon Zala megyébe szervezett kirándulások egészítették ki.

A vándorgyűlés befejezésekor, a szokásoknak megfelelően ülést tartott az Oktatási Bizottság. Az ülés legfontosabb határozatairól az Elnökség ülésén esik majd szó.

(A beszámolót Békefi Zsuzsa készítette.)

c. **XXXIII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia** (Moszkva, 1992. július 10–21.)

Az ezévi Matematikai diákolimpiát Oroszország rendezte meg Moszkvában. A versenyen 64 ország 351 diákja vett részt, országonként 6–6 tanulóval, az ettől eltérő csapatlétszámokat zárójelben közöljük. A csillaggal jelzett országok nem hivatalosan vettek részt; versenyzőiket nem díjazták és részvételük általában önköltséges volt.

A résztvevők: Argentína, Ausztrália, Ausztria, Azerbajdzsán*(1), Belgium, Brazília, Bulgária, Ciprus, Csehszlovákia, Dánia (5), Dél-Afrika, Dél-Korea, Észak-Korea, Észtország*(4), Fehéroroszország*(3), Finnország, Franciaország, Független Államok Közössége, Fülöp-szigetek(4), Görögország, Hollandia, Hongkong, India, Indonézia, Irán, Írország, Izland(3), Izrael, Japán, Jugoszlávia, Kanada, Kazahsztán*, Kína, Kolumbia, Kuba(3), Lengyelország, Lettország*(2), Litvánia(3), Magyarország, Makaó, Marokkó, Mexikó, Mongólia, Nagy-Britannia, Németország, Norvégia, Olaszország, Oroszország, Örményország*(4), Portugália, Románia, Spanyolország, Svájc(3), Svédország, Szingapúr, Tajvan, Törökország, Thaiföld, Trinidad és Tobagó, Tunézia(4), Új-Zéland, Ukrajna*, USA, Vietnam.

A csapatokat Moszkvában jó körülmények között helyezték el, és ellátásuk is kielégítő volt. A magyar csapat, több válogatóverseny alapján a következőkből állt össze:

Faragó Gergely 3.o.

Kálmán Tamás 3.o.

Lakos Gyula 4.o.

Pór Attila 4.o.

Szendrői Balázs 4.o.

Ujvári-Menyhárt Zoltán 4.o., valamennyien a Fazekas M. Gyakorló Gimnázium tanulói.

A magyar csapat vezetője Pelikán József, helyettese Reiman István volt.

A verseny feladatait igen jól készítették elő. Összességükben kissé nehezeknek bizonyultak, hiszen a diákoknak csak 7,4 százaléka teljesített 75 százalékon felül, és 50% feletti teljesítményt is csak 27,1 százalékuk ért el. A résztvevők 33,9%-ának a teljesítménye 20 százalék alatt maradt, ez azt is mutatja, hogy a mezőny első harmadát jelentő élmezőny és az utolsó harmad között igen nagy a különbség.

A verseny zsürije a kétnapos (3–3 feladatos) versenyen elérhető $6 \times 7 = 42$ pontból a legalább 32 pontot elérteknek ítélt I. díjat (26 versenyző), a 31–24 pont közötti eredmény II. díjat (56 versenyző), a 14–23 pont közötti pedig III. díjat jelentett.

A magyar diákok közül Pór Attila I. díjat (32 pont) kapott, II. díjasok: Ujvári-Menyhárt Zoltán (30 pont), Szendrői Balázs (25 pont) Lakos Gyula (24 pont), III. díjas : Faragó Gergely.

A legtöbb pontot elért tíz ország:

1. Kína 240, 2. USA 181, 3. Románia 177, 4. FÁK 176, 5. Nagy-Britannia 168, 6. Oroszország 158, 7. Németország 155, 8–9. Magyarország és Japán 142, 10. Franciaország 139.

A magyar diákok ebben az igen erős mezőnyben is megőrizték azt a helyet, amit az utóbbi években elértek; különösen értékelhetjük ezt, ha figyelembe vesszük, hogy számos nagy lehetőséggel rendelkező országot sikerült megelőznünk, és Oroszország ebben az évben két csapatot is indíthatott.

Amiben a magyar diákok nagyon lemaradtak az élcsoporttól, az az írásbeli közlési készségüknek az igen gyenge színvonala; a jövőben a válogatás szempontjainak erre is ki kell terjedniük.

Az egyes résztvevő országok státusza sok vitára adott okot, de elfogadott nemzetközi egyezmények hiányában a rendező országnak jelenleg lehetősége van arra, hogy a meghívottakat kiválassza és meghatározza azok státuszát. Így történhetett meg, hogy pl. a balti államok csak „fizető vendégként” versenyezhettek (összesen 9 emberre futotta a pénzük) míg Szerbia csapata Jugoszlávia néven meghívottként vett részt.

A versenyzők számára több moszkvai és környékbeli kirándulást szerveztek.

Kétségkívül dicsérendő törekvés volt, hogy Oroszország jelenlegi helyzetében is vállalkozott egy nagy tömegeket mozgató rendezvény megszervezésére. A matematikai jellegű előkészítés és a feladatok megoldásának az ellenőrzése (koordináció) egy komolyabb hiba kivételével mintaszerű volt. A koordinációban mintegy negyven, nyelveket tudó matematikus vett részt. Az írásbeli versenyek, a zsüri üléseinek és a versenyeket övező rendezvényeknek a lebonyolítása azonban már sokszor tette próbára — és sokszor haladta is meg — a szervezők erejét. Időnként akkora zűrzavart sikerült produkálniuk, hogy az még az e téren nagy tapasztalatokkal rendelkezők bámulatát is kiváltotta.

A dolgozatok írására pl. a 351 versenyzőt három középnagyságú terembe terelték be. Az egy nemzethez tartozókat egymás mellé ültették. A feladatokat csak a versenykezdés után másfél órával közölték a diákokkal, akik addig a közel 30 fokos hőségben főttek. Felügyelet a versenyen szinte nem volt, a meg nem engedett eszközök használatát senki sem ellenőrizte. Az ilyen versenyeztetés kétségessé teheti az eredmény realitását.

A következő évi olimpia szervezését Törökország vállalta.

(A beszámolót Pelikán József és Reiman István készítette.)

d. ASL'92 (Veszprém, 1992. augusztus 9–16., 150 fő)

A Szimbolikus Logika Szövetség (ASL) megbízásából az 1992. évi rendezvényt Társulatunk rendezte meg, az Államigazgatási Főiskola Veszprémi Intézetében. Társrendezők voltak: MTA Matematikai Kutatóintézete, ELTE BTK Szimbolikus Logika Tanszéke.

A konferenciát, melynek 21 országból 150 résztvevője volt, anyagi támogatásban részesítette az ASL IUHPS/DLMPS, az UNESCO, az MTA és az OMFB.

A nemzetközi programbizottság a következőkből állt: J. Baumgartner, J. van Benthem, S. Givant, D. Monk, J. Paris, V. Pratt, P. Pudlák, S. Shelah. A bizottság magyar tagjai: Dragálin Albert, Gergely Tamás, Hajnal András, Madarász Tiborné, Németi István.

A konferencia szervező bizottsága az alábbiakból tevődött össze: Hajnal András elnök, Csirmaz László titkár, Andréka Hajnal, Demetrovics János, Dragálin Albert, Fazekas Gábor, Gergely Tamás, Gécseg Ferenc, Juhász István, Komjáth Péter, Madarász Tiborné, Németi István, Ruzsa Imre, Sain Ildikó, Soukup Lajos, Surányi János, Szőts Miklós, Úry László.

A programot plenáris és szekcióelőadások alkották. A meghívott előadók és plenáris előadásaik a következők voltak:

Andréka Hajnal: Recent trends in algbraic logic, language and information

M. Cresswell: Restricted quantification

K. Fine: Progressive reasoning

M. Foreman: An ideal on small ultrapowers and chromatic numbers

D. Gabbay: Fibred semantics for LDS

M. Gitik: The singular cardinal problem

R. Goldblatt: A framework infinitary modal logic

Yu. Gurevich: Finite model theory

Komjáth Péter: Paradoxical decomposition of Euclidean spaces

H. Kotlarsky: Automorphisms of countable, recursively saturated models for Peano arithmetic

L. Levin: Randomness and non-determinism in computing

R. Maddux: On the derivation of identities involving projection functions and direct products

Ruzsa Imre: Intensional logic admitting semantic value gaps.

Az időnként öt párhuzamos szekcióban összesen 74 előadás hangzott el.

A támogatásoknak köszönhetően a meghívott előadók és a nemzetközi programbizottság megjelent tagjai költségének fedezésén felül részvételi díj csökkentésében, illetve részleges támogatásban tudott további 6 főt részesíteni a szervező bizottság.

A szakmai programot egy állófogadás, egy fakultatív kirándulás és egy, szintén fakultatív búcsú-vacsora egészítette ki.

A konferencia — a visszajelzések szerint — jól sikerült, amihez nagy mértékben járult hozzá az is, hogy a helyszín ideálisnak bizonyult ekkora rendezvény megtartásához.

(A beszámolót Csirmaz László készítette.)

MTESZ - egyesületi használatra !

Kiadja: Bolyai János Matematikai Társulat
Készült: 500 példányban
153/93 MTESZ Házinyomda, Budapest.
Felelős vezető: Boncza Gábor

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

Matematikai Lapok

1992/3-4

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként négyszer.

Új sorozat 2. évfolyam (1992), 3–4 szám

Megjelenés időpontja 1995. június

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 201–7656.

Előfizetési díj 1995-re 550 Ft + ÁFA, egyes szám ára 150 Ft + ÁFA.*

* Megjegyzés: Korábbi előfizetőknek a lap ára az eddigi befizetés függvénye.

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

ELLIPTIKUS GÖRBÉK ÉS A FERMAT-SEJTÉS[1]

RÓNYAI LAJOS

1993. június 23-án Cambridge-ben a Newton Intézetben Andrew Wiles angol matematikus bejelentette, hogy bebizonyította a *Fermat-sejtést.* A hír igazi szenzációvá vált. A világ nagy napilapjaiban hosszú cikkek jelentek meg a nevezetes eseményről. Néhány hónappal később kiderült, hogy a nyári szemináriumon vázolt gondolatmenetben egy jelentős hiányosság van. Már megint a szokásos történet — mondták sokan a Fermat-sejtésre adott számos korábbi kérészéletű „megoldásra" gondolva. A szakértők másként vélekedtek, rámutatva, hogy Wiles munkája órási előrelépést hozott a terület egyik központi problémájával kapcsolatban. Néhányan közülük úgy látták, hogy a bizonyításban levő lyuk is befoltozható pár hónap, esetleg pár év alatt. Most, 1995 februárjában úgy tűnik, igazuk volt. Már 1994 nyarán voltak olyan hírek (pl. [17]), hogy létezhet egy kerülőút, ami mentén teljessé tehető a bizonyítás. 1994. október 24-én azután Wiles nyilvánosságra hozta a [30] és [31] kéziratokat. Az első tartalmazza annak az elliptikus görbékre vonatkozó eredménynek a bizonyítását, amelyből következik a Fermat-sejtés. A második — Richard Taylorral közös — munka foglalkozik a kerülőutat jelentő algebrai állítással.

Ebben az írásban az elsődleges célunk olyan matematikai fogalmak és gondolatok rövid, vázlatos bemutatása, melyek jelentős szerepet kaptak Wiles munkájában. Emellett kitérünk a bizonyítás szempontjából érdekes eseményekre is.

---

[1] Köszönetet mondok Bródy Ferencnek és Ivanyos Gábornak értékes észrevételeikért. Ez a munka részben az OTKA 2581. sz. szerződés támogatásával készült.

1 A Fermat-sejtés régi története

A Fermat-sejtés egy lefegyverzően egyszerűen megfogalmazható állítás:
Ha x, y, z, n *egész számok,* $n > 2$ *és* $x^n + y^n = z^n$*, akkor* $xzy = 0$.

A kérdés eredetét kutatva i.e. 250-ig tekinthetünk vissza. Ezidőtájt született Diophantosz nagyhatású munkája, az *Aritmetika*, ami — ismereteink szerint — először adott közre rendszerbe foglalva számelméleti és algebrai eredményeket. A II. Könyvből való a következő probléma: *osszunk fel egy adott négyzetet két négyzetre.* A közölt megoldás a következő pontosabb megfogalmazást sugallja: *keressük az* $x^2 + y^2 = z^2$ *egyenlet egész megoldásait*, szokásos nevükön a pitagoraszi számhármasokat.

Pierre Fermat (1601–1665) toulouse-i jogász csak kedvtelésből foglalkozott matematikával, de olyan sok és fontos eredmény fűződik a nevéhez, hogy méltán tartják kora egyik legjelentősebb matematikusának. Fermat olvasta az *Aritmetikát*, mégpedig nagy figyelemmel, amire számos, a könyv margójára írt megjegyzéséből következtethetünk. A fenti, a négyzet felosztásával kapcsolatos részhez az alábbi széljegyzetet fűzte:

Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere; cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caparet.

Magyarul mindez így hangzik:

Nincsen mód viszont felosztani köböt két köbre, sem négyzetes négyzetet két négyzetes négyzetre, és általában a négyzeten túl a végtelenig semmiféle hatványt két ugyanolyan nevezetűre; mely dolognak igazán csudálatos bizonyítását találtam. Szűkebb a margó, semhogy befogadná.[2]

A Fermat-sejtést tehát egy olyan állításként fogalmazta meg, melyet igazolni tud. Azóta eltelt kb. 350 év, és egészen napjainkig senkinek sem sikerült bizonyítást találnia. Ezért általános a vélemény, hogy Fermat valószínűleg tévedett, elnézett valamit, és nem volt *igazán csudálatos bizonyítása*. Az 1800-as évek elejére minden más (levelekben és margójegyzetekben fennmaradt) állítását sikerült tisztázni, csak ez az egy állt ellen makacsul minden kísérletnek. Innen származik a sejtés másik gyakran használt elnevezése: Fermat Utolsó Tétele.

[2] Bródy Ferenc fordítása.

A következőkben megemlítünk néhány nevezetesebb eseményt a sejtés történetéből. A téma iránt bővebben érdeklődő olvasónak Edwards [3] és Ribenboim [14] kitűnő munkáit ajánljuk. Az $n = 3$ és $n = 4$ esetekkel Fermat maga is foglalkozott, utóbbira adott gondolatmenete fennmaradt (szintén lapszéli jegyzetek formájában). Pontosabban azt mutatta meg, hogy ha x, y, z egészek, és $x^4 + y^4 = z^2$, akkor $xyz = 0$. Módszere más problémákra is alkalmazható, és a ma használt igen kifinomult változatait *Fermat-leszállásnak* nevezik. A leszállás lényege, hogy egy (indirekt feltevés szerint létező) x_0, y_0, z_0, $x_0y_0z_0 \neq 0$ megoldásból mindig kapható egy olyan x_1, y_1, z_1, $x_1y_1z_1 \neq 0$ megoldás, melyre $|x_1| < |x_0|$.

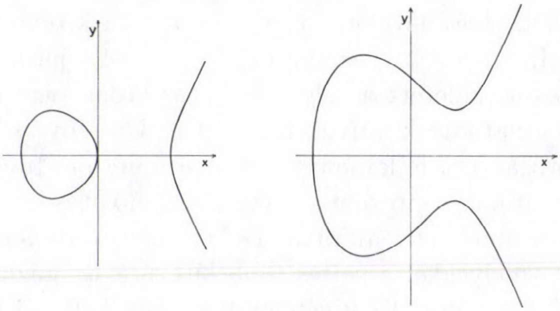
Fermatnak az Utolsó Tétel bizonyításával kapcsolatos tévedéséről több elképzelés is van. Egy népszerű nézet szerint feltehetőleg úgy vélte, hogy a leszállás módszere könnyen átvihető tetszőleges n kitevőre. Ilyen általánosítást azonban senki sem talált.

Az $n = 4$ kitevő kizárása után elég a kérdést azokban az esetekben nézni, amikor $n > 2$ egy prímszám. Az $n = 3$ esetet L. Euler oldotta meg 1753-ban. L. Dirichlet és A. M. Legendre találtak bizonyítást $n = 5$-re 1825-ben. Ugyancsak Dirichlet nevéhez fűződik az $n = 14$ kitevő (1832), az $n = 7$ esetet pedig G. Lamé tudta kezelni 1839-ben. 1847 jeles év volt a sejtés történetében. Ekkor született az első nevezetes hibás bizonyítás, méghozzá olyan ismert matematikusok műveként, mint A. Cauchy és G. Lamé. A másik — sokkal fontosabb — fejleményt E. E. Kummer eredményei jelentették. Kummer a kvadratikus reciprocitási tétel általánosításán dolgozva megvetette az *algebrai számelmélet* alapjait. Ebben az új elméleti keretben talált olyan eszközöket, melyekkel a sejtés több kitevőre is igazolható. Módszere működik például a 37, 59 és 67 kivételével minden 100-nál kisebb n prímre. Kummer eredményeire építve H. S. Vandiver (1920 körül) igazolta a sejtést $n < 100$-ra. A nevek és az évszámok mutatják, hogy bár kiváló matematikusok foglalkoztak a problémával, a haladás meglehetősen lassú volt. Komoly előrelépést jelentettek az olyan feltételek, melyek révén számítógépes módszerekkel lehet vizsgálni a problémát nagyobb kitevőkre. Ezek segítségével 1992-re $n < 4\ 000\ 000$-ig igazolták a sejtést.

Fontos mérföldkő Gerd Faltings (1983) egy általános, sok egyenletre érvényes végességi tétele, melyből következik, hogy egy adott $n > 2$-re az $x^n + y^n = z^n$ egyenletnek csak véges sok (relatív prím egészekből álló) megoldása lehet.

2 Elliptikus görbék

A történet jelenkori folytatásában főszerep jutott az *elliptikus görbéknek*. Mielőtt az eseményekről beszélnénk, ismerkedjünk meg ezekkel a rendkívül érdekes, gazdag struktúrájú objektumokkal. Legyen K egy test. Az $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in K$ alakú egyenlettel definiált síkbeli görbe elliptikus görbe a K test felett, ha az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ polinomnak nincs többszörös gyöke. A görbe *diszkriminánsa* a $\Delta = (a_1 - a_2)^2(a_1 - a_3)^2(a_2 - a_3)^2$ mennyiség, ahol a_1, a_2, a_3 az $f(x)$ polinom gyökei. A gyökök különbözősége egyenértékű a $\Delta \neq 0$ feltétellel. A következő ábra két ($\mathbf{R}$ feletti) elliptikus görbe grafikonját mutatja.

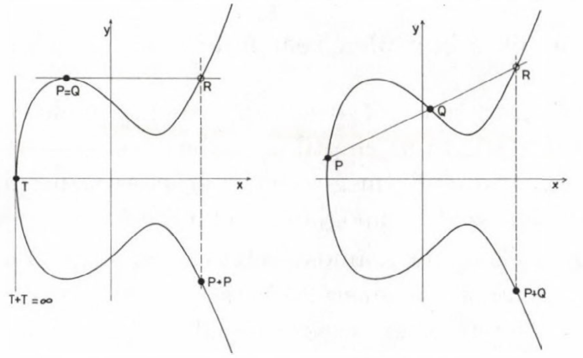


Elliptikus görbék

Az elliptikus görbéknek sok szép geometriai és számelméleti tulajdonsága van. Egy ilyen érdekes tulajdonság, hogy lehet egy az összeadásra emlékeztető műveletet definiálni a görbe pontjain. A művelet jól szemléltethető a valós test feletti görbék esetén. Vegyünk a görbéhez egy ∞-nel jelölt „pontot". Erről a mágikus pontról feltételezzük, hogy rajta van minden az y-tengellyel párhuzamos egyenesen,[3] továbbá, hogy az x-tengelyre vonatkozó tükörképe önmaga. Ezután a görbe P és Q pontjainak $P \oplus Q$ összegét a következő recepttel határozhatjuk meg: legyen a P, Q pontokon átmenő

[3] A projektív geometria nyelvén: ∞ a függőleges egyenesek ideális pontja.

egyenes és a görbe harmadik metszéspontja R; ennek az x-tengelyre való S tükörképe (ami szintén pontja a görbének) a $P \oplus Q$ összeg. Ha $P = Q$, akkor az összekötő egyenesükön a görbe P-beli érintőjét kell érteni. Előfordulhat az is, hogy R megegyezik a P, Q pontok valamelyikével, ekkor az egyenes R-ben érinti a görbét. Végül legyen $\infty \oplus \infty = \infty$.



Összeadás elliptikus görbe pontjain

A $\oplus$ műveletre teljesülnek az összeadás szokásos azonosságai, és ∞ játssza a 0 szerepét: a görbe tetszőleges P, Q, R pontjaira $P \oplus Q = Q \oplus P$, $\infty \oplus P = P$, $(P \oplus Q) \oplus R = P \oplus (Q \oplus R)$. Ezek a tulajdonságok, kivéve az utolsót, az asszociatív szabályt, könnyen igazolhatók. Szintén egyszerű belátni, hogy a görbe tetszőleges P pontjához a P-nek az x-tengelyre való R tükörképe az egyetlen olyan pont, melyre $P \oplus R = \infty$ teljesül. Az összeadásnál megszokott értelemben használhatjuk tehát az $R = \ominus P$ jelölést.

Két pont összegének a koordinátái kifejezhetők az összeadandók koordinátáival és az elliptikus görbe a, b, c, d együtthatóival, mégpedig csak a $+, -, \cdot, /$ műveletek segítségével. Ebből két fontos következtetés vonható le. Egyik, hogy a $\oplus$ művelet definiálható algebrai úton, koordinátákkal. Másfelől, ha az a, b, c, d együtthatók és a P, Q pontok koordinátái benne vannak egy L testben, akkor $P \oplus Q$ koordinátái is L-beliek (a ∞ is L-beli pontnak tekintendő). Ha L egy a K-t (és ekkor az a, b, c, d együtthatókat is) tartalmazó test, akkor jelölje $E(L)$ az $E : y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ görbe

L-beli koordinátájú pontjainak összességét. Az előző fejtegetés szerint $E(L)$ csoport a $\oplus$ művelettel.

Példa. Az $y^2 = x^3 - 2x$ görbe egy $P = (x, y)$ pontjára a $P \oplus P$ pont u, v koordinátáit így számíthatjuk:

$$(*) \qquad u = -2x + \left(\frac{3x^2-2}{2y}\right)^2, \qquad v = -y + \frac{3x^2-2}{2y}(x-u).$$

A kifejezések nem értelmesek, ha $y = 0$. Ez azt a tényt tükrözi, hogy ekkor $P \oplus P = \infty$; másképpen fogalmazva, a görbe P-beli érintője függőleges.

3 Elliptikus görbék a komplex test felett

A következőkben egy olyan megközelítést vázolunk, mellyel viszonylag természetesen származtatható az elliptikus görbék pontjain értelmezett összeadás. Az uniformizáció-tételt még azért is érdemes ismerni, mert a Wiles által bizonyított tény szelíd analógjának tekinthető.

Legyenek ω_1, ω_2 komplex számok, és tegyük fel, hogy az ω_1/ω_2 hányados nem valós. Az ω_1, ω_2 által generált Λ rács az $a\omega_1 + b\omega_2$ alakú pontok halmaza, ahol a és b tetszőleges egész számok.

Az $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ meromorf függvény *elliptikus függvény* (a Λ rácsra nézve), ha
$f(z + \omega) = f(z)$ teljesül minden z komplex szám és $\omega \in \Lambda$ rácspont esetén (f kettősen periodikus).

Első hallásra talán meglepő, hogy vannak nem konstans elliptikus függvények. Két klasszikus példa a Weierstraß $\wp$-függvény és a deriváltja $\wp'$. A Λ rács $\wp$-függvényét az alábbi sorral definiáljuk:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda,\ \omega\neq 0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right).$$

Nem nehéz megmutatni, hogy a sor abszolút kovergens, ha z nem rácspont, továbbá a kovergencia egyenletes $\mathbf{C} \setminus \Lambda$ minden korlátos zárt részhalmazán. Innen kapjuk, hogy $\wp$ reguláris a $\mathbf{C} \setminus \Lambda$ halmazon. A sor alakjából ezután rögtön látható, hogy $\wp$-nek a rácspontokban kétszeres pólusai vannak.

Az egyenletes konvergencia miatt $\wp'(z)$ a sor tagonkénti differenciálásával kapható:

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega\in\Lambda} \frac{1}{(z-\omega)^3}.$$

A $\wp'$-nek harmadrendű pólusai vannak a rácspontokban, a $\mathbf{C} \setminus \Lambda$ halmazon pedig reguláris. A sor alakjából azonnal adódik, hogy $\wp'$ kettősen periodikus, így tényleg egy elliptikus függvény. Innen könnyű megmutatni, hogy $\wp$ is kettősen periodikus. Mivel $\wp'$ elliptikus, a $\wp(z+\omega_i) - \wp(z)$ különbség állandó. Használva, hogy $\wp$ páros függvénye z-nek, a $z = -\frac{1}{2}\omega_i$ helyettesítés mutatja, hogy az állandó 0.

Ezzel lényegében áttekintést kaptunk az összes a Λ rácsra nézve elliptikus függvényről. Igazolható ugyanis, hogy minden ilyen függvény megkapható a konstansokból, $\wp$-ből és $\wp'$-ből a négy alapművelettel.

A $\wp$ függvény eleget tesz egy

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$$

alakú differenciálegyenletnek, ahol $g_2 = g_2(\Lambda)$ és $g_3 = g_3(\Lambda)$ a rácstól függő állandók. Az egyenletből az $y = \wp'(z)$, $x = \wp(z)$ helyettesítésekkel egy E elliptikus görbe egyenletét kapjuk:

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

A Weierstraß-függvények az E görbe egy *paraméterezését* adják. Ennek pontosabb értelmezéséhez vegyük először szemügyre a $\mathbf{C}/\Lambda$ halmazt. A $\mathbf{C}/\Lambda$ elemei a komplex számok ekvivalencia-osztályai arra a relációra nézve, mely szerint z_1 és z_2 akkor ekvivalensek, ha a $z_1 - z_2$ különbség rácspont. A $\mathbf{C}/\Lambda$ halmaz elképzelhető úgy, hogy a $0, \omega_1, \omega_1+\omega_2, \omega_2$ paralelogramma szemközti oldalait összeragasztjuk. A kapott alakzat egy *tórusz*.

A $\mathbf{C}/\Lambda$ *halmaz*

A hajtogatás és ragasztás után a paralelogramma négy csúcsa a tórusz ugyanazon P pontjának felel meg. A Weierstraß-függvények tekinthetők olyan leképezéseknek, melyek a P kivételével a tórusz minden pontjában értelmezettek. Nézzük ezután a következő $\phi : \mathbf{C}/\Lambda \to E$ leképezést:

$$\phi(z) = \begin{cases} (\wp(z), \wp'(z)), & \text{ha } z \in \mathbf{C}/\Lambda \setminus \{P\}, \\ \infty, & \text{ha } z = P. \end{cases}$$

Megmutatható, hogy ϕ egy kölcsönösen egyértelmű leképezése a $\mathbf{C}/\Lambda$ tórusznak az E elliptikus görbére. Ennél több is igaz: a ϕ egy komplex analitikus izomorfizmus is a két objektum között (tehát például a tóruszon közeli pontok képei közeli pontok lesznek a görbén).

Algebrai szemmel nézve $\mathbf{C}/\Lambda$ a komplex számok additív csoportjának a Λ részcsoport szerinti faktorcsoportja. (A tórusz z_1 és z_2 pontjainak összegét úgy kaphatjuk meg, hogy a $z_1 + z_2$ komplex számot alkalmas rácsvektorral visszatoljuk a $0, \omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2$ paralelogrammába.) A ϕ megfeleltetés talán legszebb tulajdonsága, hogy *izomorfizmus a* $\mathbf{C}/\Lambda$ *és az* $(E, \oplus)$ *csoportok között.* Ez könnyen következik a Weierstraß-függvényekre vonatkozó alábbi addíciós tételből:

$$\begin{vmatrix} \wp(z_1) & \wp'(z_1) & 1 \\ \wp(z_2) & \wp'(z_2) & 1 \\ \wp(z_1 + z_2) & -\wp'(z_1 + z_2) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Az összefüggés azt mondja, hogy a $\phi(z_1)$, $\phi(z_2)$, $\ominus\phi(z_1 + z_2)$ pontok egy egyenesen vannak, amiből az E-beli összeadás definíciója szerint $\phi(z_1) \oplus \phi(z_2) = \phi(z_1 + z_2)$.

Természetesen merül fel a kérdés, hogy mely elliptikus görbék kaphatók meg az itt vázolt módon egy alkalmas $\mathbf{C}$-beli rácsból. Az *uniformizáció-tétel* néven ismert eredmény szerint minden[4] komplex együtthatós elliptikus görbét megkaphatunk így. Nevezetesen, ha g_2 és g_3 két komplex szám, melyekre a $4x^3 - g_2 x - g_3$ polinomnak nincs többszörös gyöke, akkor van olyan $\Lambda \subset \mathbf{C}$ rács, melyre $g_2 = g_2(\Lambda)$ és $g_3 = g_3(\Lambda)$.

Az uniformizáció-tétel segítségével számos, az $(E, \oplus)$ csoportra vonatkozó állítás egyszerűen igazolható. Példaként legyen $m > 1$ egész és nézzük az $E[m]$ részcsoportot, melynek az elemei az E azon P pontjai, melyekre $[m]P \stackrel{\text{def}}{=} P \oplus P \oplus \cdots \oplus P = \infty$ (az összeg m-tagú). A $\mathbf{C}/\Lambda$ csoportban a megfelelő elemek éppen az $(i/m)\omega_1 + (j/m)\omega_2$ alakúak, ahol $0 \leq i, j < m$ egészek. Innen következik, hogy $E[m]$ két m-edrendű ciklikus csoport direkt szorzata.

Az itt vázolt, elliptikus függvényeken alapuló megközelítés használható az $\oplus$ összeadás bevezetésére (pl.[18]). Tudomásom szerint ez a legkevesebb eszközt igénylő út, követéséhez elegendő a komplex függvénytan elemeinek ismerete (pl. [27] a Weierstraß függvényeket is tárgyalja).

---

[4] Két görbét nem tekintünk különbözőnek, ha egyik a másikból $x \mapsto rx + s$ alakú változócseréjével kapható, ahol $r, s \in \mathbf{C}$. Ilyen helyettesítéssel tetszőleges harmadfokú polinom átalakítható $4x^3 - g_2 x - g_3$ alakúra.

4 Elliptikus görbék aritmetikája

Ha az a, b, c, d számok egészek, akkor tetszőleges p prímszámra tekinthetjük az $y^2 \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d \pmod p$ kongruenciát. Ennek megoldásait a ∞ ponttal együtt szokás a görbe modulo p pontjainak nevezni. Az $y^2 = x^3 - 2x$ görbe modulo 5 pontjait rövid számolás után megkaphatjuk: ∞, $(0,0)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,4)$, $(4,1)$, $(4,4)$.

Néhány rosszul viselkedő prímszámot kivéve — ezek a prímek mind osztói a Δ diszkriminánsnak — értelmezhető a $\oplus$ összeadás egész-együtthatós görbék modulo p pontjain is. Itt is szükség van a ∞ pontra, és két pont összegét ugyanazokkal az algebrai kifejezésekkel számíthatjuk ki, amelyek a valós pontokra megadják az összeg koordinátáit. Például a $C : y^2 = x^3 - 2x$ görbe modulo 5 pontjaira használhatók a $(*)$ formulák, ha a $P \oplus P$ összeget akarjuk meghatározni. A modulo p redukált görbe fogalma kiterjeszthető racionális görbékre, ha eltekintünk azoktól prímektől, melyek osztják a, b, c, d valamelyikének a nevezőjét. A raconális együtthatós E görbe modulo p pontjainak halmazát $E(\mathbf{F}_p)$-vel szokás jelölni. $E(\mathbf{F}_p)$ egy véges kommutatív csoport a $\oplus$ művelettel. Így tekintve $C(\mathbf{F}_5)$ izomorf a tízelemű ciklikus csoporttal.

Az elliptikus görbék számelméleti tulajdonságainak vizsgálata (egész és racionális koordinátájú pontok, modulo p pontok, a $\oplus$ művelet hatása ezeken) ebben a században vált intenzívvé. Érdekességként azért megemlítjük, hogy az egyik első ilyen természetű állítást szintén Fermat margószéli feljegyzései között találták. Arról a tényről van szó, hogy az $y^2 = x^3 - 2$ egyenletnek csak két egész megoldása van, nevezetesen $(3, \pm 5)$. Igen szép és fontos eredmény L. J. Mordell tétele (1921): egy racionális együtthatós görbének van véges sok racionális koordinátájú pontja, melyekből az összes racionális pont megkapható a $\oplus$ művelet alkalmazásával; másképpen fogalmazva, a racionális pontok csoportja végesen generálható.

B. Mazur (1978) megadta azokat a véges csoportokat, melyek előfordulhatnak, mint véges rendű elemek csoportjai $E(\mathbf{Q})$ alakú csoportokban (E tetszőleges racionális görbe.) Ezek a csoportok legfeljebb 16 eleműek.

A modulo p pontokkal kapcsolatban Emil Artin a doktori disszertációjában fogalmazta meg sejtésként a $|p + 1 - |E(\mathbf{F}_p)|| \le 2\sqrt{p}$ egyenlőtlenséget, amit egy analógia alapján az elliptikus görbékre vonatkozó Riemann-sejtésnek nevezett. Ennek a sejtésnek és általánosításainak vizsgálata vezetett az aritmetikai algebrai geometria kialakulásához, és fantasztikus sikereihez. Talán elegendő itt Pierre Deligne és Gerd Faltings Fields-érmes eredményeire utalni. Az elliptikus görbékre vonatkozó Riemann-sejtést H. Hasse igazolta 1934-ben.

Az elliptikus görbék aritmetikája bővelkedik érdekes nyitott kérdésekben. Ezek kutatása igen aktív területe a jelenkori matematikának. Egy ilyen kérdést most alaposabban szemügyre veszünk. 1955-ben Taniyama Yutaka japán matematikus megfogalmazott egy a racionális együtthatós elliptikus görbékre vonatkozó sejtést. Később Shimura Goro japán és André Weil francia matematikusok a sejtés pontosabb megfogalmazását adták. Ezt a hipotézist Taniyama–Shimura–Weil-sejtésnek (röviden TSW-sejtés) fogjuk nevezni.

5 Moduláris függvények és a TSW-sejtés

Következő célunk a Taniyama–Shimura–Weil sejtés ismertetése. Ennek egyik megfogalmazása sok tekintetben hasonlít a komplex görbék Weierstraß-elmélete kapcsán megismert uniformizáció-tételre. A Weierstraß-elmélet szerint tetszőleges E komplex görbéhez létezik egy Λ rács és egy $\phi : \mathbf{C}/\Lambda \to E$ leképezés.

A Λ rácsot tekinthetjük úgy, mint az euklideszi sík egybevágóságainak, még pontosabban eltolásainak egy (diszkrét) részcsoportját. A $\mathbf{C}/\Lambda$ halmaz, vagyis a $0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$ paralelogramma az élei mentén összeragasztva egy *alaptartomány* a Λ hatására nézve: egy $z \in \mathbf{C}$ komplex számhoz pontosan egy $z' \in \mathbf{C}/\Lambda$ van, melyre $z - z' \in \Lambda$.

Vegyük most a Bolyai–Lobacsevszkij geometria *felső félsík modelljét*. Ennek ponthalmaza a valós tengely feletti komplex számokból álló $\mathbf{H}$ félsík. Az egyenesek a képzetes tengellyel párhuzamos nyílt félegyenesek és az olyan félkörívek, melyekhez tartozó kör-középpontok a valós tengelyen vannak.

A $\mathbf{H}$ modell pontjaira és egyeneseire teljesülnek a síkgeometria szokásos axiómái, kivéve a párhuzamosokra vonatkozót. Egy adott ponton keresztül egy adott egyeneshez több párhuzamos is húzható.

Ismert, hogy a $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ alakú leképezések, melyekre a, b, c, d valósak és $ad - bc = 1$, a $\mathbf{H}$ modell egybevágóságai. Ezeket úgy is tekinthetjük, hogy az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alakú, 1-determinánsú valós mátrixok hatnak $\mathbf{H}$-n. Számunkra most azok az egybevágóságok lesznek fontosak, melyeknél a, b, c, d egészek. Legyen

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ;\ a, b, c, d \text{ egészek és } ad - bc = 1 \right\}.$$

A Γ tekinthető a $\mathbf{H}$ mozgatásaiból álló diszkrét részcsoportnak. Megmutatható, hogy a határoló vonalak mentén való megfelelő összeragasztás után (ennek mikéntjét az olvasóra hagyjuk) az

$$F = \left\{ z \in \mathbf{H};\ |\mathrm{Re} z| \le \frac{1}{2} \text{ és } |z| \ge 1 \right\}$$

halmazból a Γ egy $\mathbf{H}$-beli alaptartományát kapjuk.

Számelméleti szempontból igen fontosak a Γ csoport következő részcsoportjai. Legyen $N > 0$ egy egész szám és

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & d \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma;\ N|c \right\}.$$

A $\Gamma_0(N)$ véges indexű részcsoportja Γ-nak. Nem nehéz megmutatni, hogy $|\Gamma : \Gamma_0(N)| = N \prod(1 + \frac{1}{p})$, ahol p végigfut az N prímosztóin. Az F halmazból kiindulva $\Gamma_0(N)$ egy alaptartományát kaphatjuk a következő módon: legyenek az $\alpha_1, \ldots \alpha_m \in \Gamma$ elemek a $\Gamma_0(N)$ baloldali mellékosztályainak reprezentánsai ($m = |\Gamma : \Gamma_0(N)|$). Ekkor az

$$F_0(N) = \alpha_1^{-1}(F) \cup \cdots \cup \alpha_m^{-1}(F)$$

halmaz (a határpontok megfelelő azonosítása után) a $\Gamma_0(N)$ egy $\mathbf{H}$-beli alaptartománya lesz. Az α_i elemek választhatók úgy is, hogy $F_0(N)$ egyszeresen összefüggő legyen.

Példa. Nézzük meg alaposabban az $N = 2$ esetet. Az index-formula szerint $|\Gamma : \Gamma_0(2)| = 3$. Tekintsük a Γ következő elemeit:

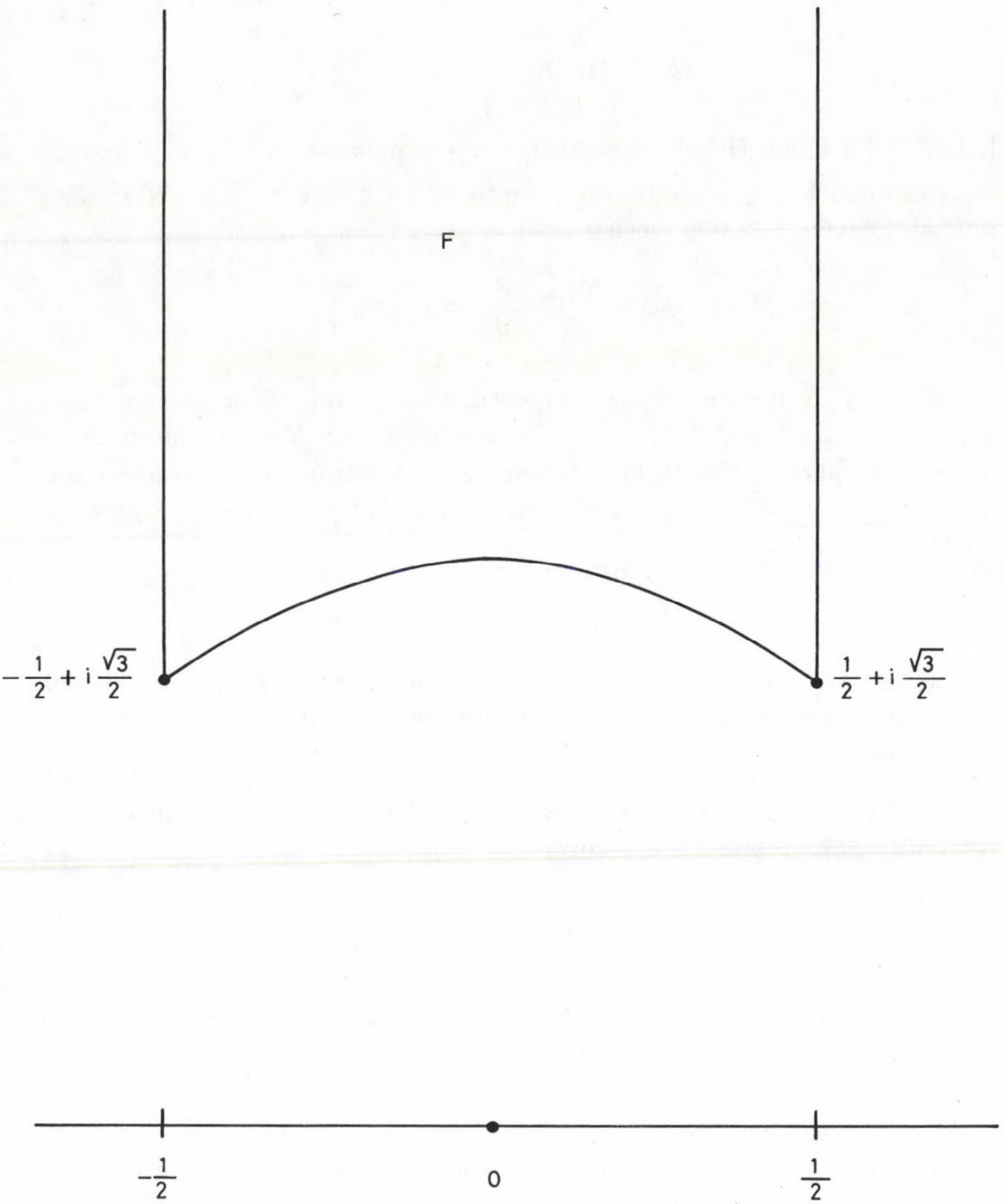
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A T-nek megfelelő leképezés $\mathbf{H}$-n az 1-gyel való eltolás. S hatása pedig az egységkörre vonatkozó inverzió, majd a képzetes tengelyre való tükrözés összetételének tekinthető.

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy az I egységmátrix, valamint S és $T^{-1}S$ a $\Gamma_0(2)$ részcsoport Γ-beli baloldali mellékosztályainak egy reprezentánsrendszere. Figyelembe véve, hogy S^2 a $\mathbf{H}$ identikus leképezése, kapjuk, hogy

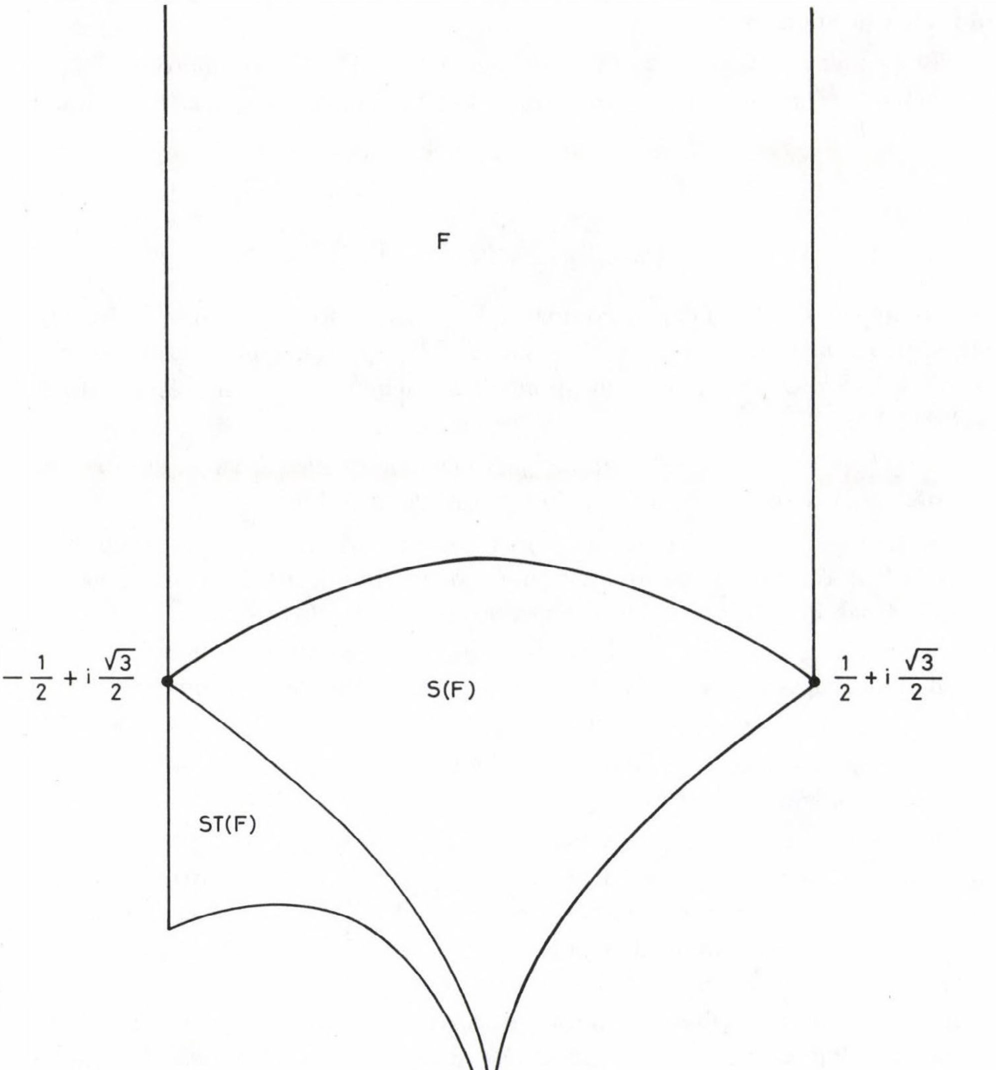
$$F_0(2) = F \cup S(F) \cup ST(F).$$

Az $F_0(N)$ halmaz néhány határpontja a valós tengelyen van. Ezeket a függőleges egyenesek végtelen távoli pontjával (jele $i\infty$) együtt a $\Gamma_0(N)$



68%

Az F tartomány



Az $F_0(2)$ tartomány

csúcspontjainak nevezzük. Megmutatható, hogy $\Gamma_0(p)$-nek (p prím) pontosan két csúcspontja van.

Legyenek $k \geq 0$ és $N > 0$ pozitív egészek. A $\mathbf{H}$ félsíkon meromorf $f(z)$ függvény *k-súlyú moduláris függvény* a $\Gamma_0(N)$ csoportra nézve, ha minden $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ transzformációra teljesül az

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

összefüggés, továbbá $f(z)$ meromorf a $\Gamma_0(N)$ csúcspontjaiban. (Ez utóbbi tulajdonság értelmezésétől a rövidség kedvéért eltekintünk; ezek az ún. csúcsfeltételek az $f(z)$-nek a csúcspontok közelében való viselkedésére adnak kikötést.)

Az $f(z)$ *k-súlyú csúcsforma* a $\Gamma_0(N)$ csoportra nézve, ha az előbbieken túl még $f(z)$ reguláris $\mathbf{H}$-n és eltűnik a csúcspontokban.

A *Taniyama–Shimura–Weil sejtés* szerint minden racionális együtthatós elliptikus görbe paraméterezhető 0-súlyú moduláris függvényekkel. Pontosabban fogalmazva, tetszőleges racionális együtthatós $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ görbéhez van olyan $N > 0$ egész, és vannak olyan nem állandó, 0-súlyú, a $\Gamma_0(N)$-re moduláris $f(z), g(z)$ függvények, hogy $f(z)^2 = ag(z)^3 + bg(z)^2 + cg(z) + d$ teljesül.

A sejtés finomabb — de az eredetivel egyenértékű — megfogalmazása a legkisebb alkalmas N értéket is megadja.

Érdemes összevetni a TSW-sejtést az uniformizáció-tétellel. Ott az euklideszi sík egy diszkrét mozgáscsoportja segítségével tudtunk komplex elliptikus görbéket paraméterezni. A TSW-sejtés egy ezzel analóg állítást fogalmaz meg racionális görbékre. A hiperbolikus sík $\Gamma_0(N)$ alakú diszkrét mozgáscsoportjait használva az euklideszi esetre megismert eljáráshoz hasonlóan kaphatunk paraméterezést moduláris függvényekkel. A Weierstraß-függvényekkel való paraméterezhetőséget szokás *euklideszi uniformizáció*nak nevezni, a TSW-sejtésbelit pedig *aritmetikai típusú hiperbolikus uniformizáció*nak (erről a párhuzamról további részletek találhatók a [11] dolgozatban). A TSW-sejtésnek eleget tevő elliptikus görbéket *moduláris* görbéknek nevezzük. A moduláris görbék a kétfajta uniformizációból hihetetlenül gazdag, kettős (euklideszi, illetve hiperbolikus) geometriai struktúrát örökölnek, aminek sok érdekes számelméleti következménye van.

A TSW-sejtésnek van egy másik, tisztán számelméleti ízű megfogalmazása is. Ennek kimondásához szükség van néhány további tényre és fogalomra. Jelölje $S(N)$ a $\Gamma_0(N)$ 2-súlyú csúcsformáinak (komplex) vektorterét.

Ismert, hogy $S(N)$ véges dimenziós vektortér (pl. $S(N)$ dimenziója 0, ha $N < 11$, és 1, ha $N = 11$).

A T eltolás eleme a $\Gamma_0(N)$ csoportnak, ezért tetszőleges $f(z)$ moduláris függvényre teljesül az $f(z) = f(z+1)$ összefüggés. Komplex függvénytanból jól ismert, hogy az ilyen értelemben periodikus függvények Fourier-sorba fejthetők:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n,$$

ahol $q = e^{2\pi iz}$, és az a_i együtthatók komplex számok. Ha f egy csúcsforma, akkor az $i\infty$-beli csúcsfeltétel szerint a kifejtésben $a_n = 0$, ha $n \leq 0$.

Az $S(N)$ téren hatnak a T_m ($m \geq 1$ egész) *Hecke-operátorok:*

$$T_m f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{(d,N)=1 \\ d|(n,m)}} d a_{nm/d^2} \Big) q^n,$$

ahol (a, b) az a és b egészek legnagyobb közös osztója.

Az $f(z) \in S(N)$ egy *sajátforma*, ha $T_m f(z) = a_m f(z)$ teljesül minden m-re.

A moduláris tulajdonság számelméleti megfogalmazása: Legyen E egy racionális együtthatós elliptikus görbe, p egy prím. Jelölje $E(\mathbf{F}_p)$ a modulo p redukált görbe pontjainak halmazát (beleértve a ∞ pontot is). Az E moduláris, ha van olyan $N > 0$ és $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \in S(N)$ sajátforma, melyre véges sok p prím kivételével igaz az

$$a_p = p + 1 - |E(\mathbf{F}_p)|$$

egyenlőség. A TSW-sejtés tehát kifejezhető tisztán csak az $|E(\mathbf{F}_p)|$ $p = 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ sorozat tulajdonságaként.

Példa. Legyen C az $y^2 = x^3 - 4x^2 + 16$ egyenletű elliptikus görbe. A $p = 2, 11$ eseteket kivéve a modulo p redukált görbe elliptikus lesz. Megmutatható, hogy az

$$F(q) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^2 (1 - q^{11n})^2 = \sum c_n q^n = q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + \ldots$$

végtelen szorzat kifejtésével kapott sor együtthatóira

$$c_p = p + 1 - |C(\mathbf{F}_p)|$$

teljesül, ha $p > 2$. Igaz továbbá, hogy $F(e^{2\pi iz})$ a $\Gamma_0(11)$ csoport egyetlen sajátformája.

6 Shimura, Frey, Serre, Ribet és Wiles

A TSW-sejtéssel kapcsolatos első jelentős eredményt Shimura érte el 1971-ben, megmutatva, hogy teljesül azokra az E görbékre, melyeknek van *komplex szorzása*.

A komplex szorzás fogalmának értelmezéséhez nézzük az $(E(\mathbf{C}), \oplus)$ csoport algebrai endomorfizmusait. Algebrai endomorfizmuson egy olyan $h : E \to E$ leképezést értünk, melyre $h(\infty) = \infty$ és h minden $P \in E$ pont egy környezetében alkalmas racionális függvényekkel definiálható. Ebből a két tulajdonságból következik, hogy h csoport-homomorfizmus is. Az eddigiek alapján nyilvánvaló, hogy az $[m] : P \mapsto [m]P$ alakú leképezések algebrai endomorfizmusok (m egy egész). Az E-ről akkor mondjuk, hogy komplex szorzása van, ha rendelkezik olyan algebrai endomorfizmussal, ami nem $[m]$ alakú.

Példa. Az $y^2 = x^3 - x$ görbe $(x, y) \mapsto (-x, iy)$ leképezése egy komplex szorzás.

Az euklideszi uniformizáció-tétel alkalmazásával nem nehéz megmutatni, hogy $E(\mathbf{C})$ algebrai endomorfizmusainak a gyűrűje vagy $\mathbf{Z}$-vel izomorf, vagy pedig algebrai egészek egy $\mathbf{Z}$-nél bővebb gyűrűjével valamely $Q(\sqrt{M})$ testből, ahol M egy negatív négyzetmentes egész. (Az euklideszi uniformizáció inverze ϕ^{-1} az E algebrai endomorfizmusainak éppen azokat az α komplex számokat felelteti meg, melyekre $\alpha\Lambda \subseteq \Lambda$.)

Ismert, hogy csak véges sok racionális együtthatós görbének van komplex szorzása. (A megfelelő invertálható transzformációkkal egymásból megkapható görbéket azonosaknak tekintjük.)

A következő fontos esemény már összefűzi a két szálat, az Utolsó Tételt és az elliptikus görbéket. 1985-ben Gerhard Frey német matematikus meglepő kapcsolatot talált. Tegyük fel, hogy $\ell > 3$ prím, és a páronként relatív prím a, b, c egészekre teljesül, hogy $a^\ell + b^\ell = c^\ell$, b páros és $a + 1$ osztható 4-gyel. Könnyű meggondolni, hogy ha az Utolsó Tétel nem igaz, akkor ilyen ℓ, a, b, c négyes létezik. Egy ilyen „megoldáshoz" Frey a következő egész-együtthatós elliptikus görbét rendelte (ún. Frey-görbe[5]):

$$y^2 = x(x - a^\ell)(x + b^\ell).$$

---

[5] Ezeket a görbéket Yves Hellegouarch (pl. [6]) már korábban vizsgálta; céljai azonban fordított irányúak voltak. A Fermat-sejtéssel kapcsolatos eredményeket alkalmazott elliptikus görbékre.

A görbe diszkriminánsa $\Delta = a^{2\ell}b^{2\ell}c^{2\ell}$ szép szimmetrikusan függ az a, b, c számoktól. A német kutatót számításai ahhoz a meggyőződéshez vezették, hogy *a Frey-görbékre nem teljesülhet a TSW-sejtés*. A Frey által vázolt heurisztikus gondolatmenetet pontosítva Jean-Pierre Serre két sejtést fogalmazott meg, melyeket C_1-nek és C_2-nek nevezett [22]. Megmutatta továbbá, hogy a C_1, C_2 és a TSW-sejtésekből *következik a Fermat-sejtés.*

A C_1 és C_2 sejtéseket Kenneth A. Ribet amerikai matematikus igazolta a következő évben (1986) ([15], [16]). Ribet munkája nyomán világossá vált, hogy a TSW-sejtésből következik az Utolsó Tétel.

Andrew Wiles pályája kezdete óta foglalkozik elliptikus görbék aritmetikájával. Első messzire szóló — tanárával, John Coates-szal közösen elért - eredménye [1] e tárgyban 24 esztendős korában, 1977-ben jelent meg. A princetoni egyetem professzoraként már régóta a kérdéskör egyik vezető szaktekintélyének számít. A hírek szerint Ribet eredményének közzététele óta dolgozott a TSW-sejtés igazolásán. 1993. június 23-án Cambridge-ben tartott előadásán bejelentette, hogy igazolta a TSW-sejtést elliptikus görbék egy nagy osztályára, melybe, ha léteznének, beletartoznának a Frey-görbék is. Ez az osztály a *félig stabil* görbékből áll. A félig-stabilitás feltétele a modulo p redukált görbékre vonatkozó kikötés, ahol $p|\Delta$. A feltételt nem nehéz megérteni $y^2 = (x - A)(x - B)(x - C)$ alakú görbék esetén, ha A, B, C egészek. A modulo p redukált görbe akkor tesz eleget a kikötésnek, ha az A, B, C számok nem mind adják ugyanazt a maradékot p-vel osztva ($p = 2, 3$-ra valamivel bonyolultabb a helyzet, ezt nem részletezzük). Használva, hogy a, b, c páronként relatív prímek, a Frey-görbére $p > 3$ esetén egyszerű ellenőrizni a félig-stabilitás feltételét.

7 Galois-reprezentációk

Wiles bizonyításában stratégiai szerepet játszanak a *Galois-reprezentációk*. Legyen G az összes algebrai számból álló Alg test automorfizmusainak csoportja. Például a komplex konjugálás eleme G-nek. Valamely R gyűrű esetén jelölje $GL_m(R)$ az R gyűrű feletti m-szer m-es invertálható mátrixok (multiplikatív) csoportját. A Galois-reprezentációk $G \rightarrow GL_m(R)$ alakú homomorfizmusok.[6]

Alapvető konstrukció. Legyen E egy racionális együtthatós elliptikus görbe. A G hat az $E(Alg)$ pontjain: ha $\sigma \in G$ és $P = (u, v)$, akkor $\sigma(P) =$

[6] A definíció még egy folytonossági feltételt is tartalmaz; ettől itt eltekintünk.

$(\sigma(u), \sigma(v))$. Abból, hogy a $P \oplus Q$ pont koordinátái az összeadandók koordinátáiból racionális műveletekkel számolhatók, kapjuk, hogy σ egy homomorfizmusa lesz az $(E(Alg), \oplus)$ csoportnak. Legyen n egy pozitív egész és tekintsük az E görbe $E[n]$ részcsoportját. A Weierstraß-elmélet következményeként láttuk, hogy $E[n] \cong (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$. Az $E[n]$ végességéből könnyen következik, hogy pontjai algebrai pontok. $E[n]$ elemei az $E(Alg)$ csoportnak éppen azok a pontjai, melyek n-szerese eltűnik. Ezért a $\sigma \in G$ automorfizmusok az $E[n]$ részcsoportot önmagába képezik. Jelölje $\rho_n(\sigma)$ a σ hatásából adódó leképezését $E[n]$-nek. A σ invertálhatósága miatt $\rho_n(\sigma)$ is invertálható, vagyis automorfizmusa az $(E[n], \oplus)$ csoportnak. A $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$ csoport automorfizmus-csoportja pedig éppen $GL_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$. A ρ_n így egy $G \to GL_2(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ leképezésnek tekinthető, ami egy *Galois-reprezentáció.*

Példa. Legyen E az $y^2 = x^3 + x$ egyenletű görbe. Ekkor

$$E[2] = \{\infty, (0,0), (i,0), (-i,0)\} = \{\infty, P_1, P_2, P_3\}.$$

A $\rho_2(G)$ részcsoport meghatározásához nyilván elegendő G helyett a P_i pontok koordinátái által generált Galois-bővítést és annak automorfizmusait nézni. Ez $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})$, a Gauß-racionálisok teste, melynek automorfizmusai az id identikus leképezés és a σ komplex konjugálás. Egyszerű számolással kapjuk, hogy $\sigma(P_1) = P_1$ és $\sigma(P_2) = P_1 \oplus P_2$. Ha most rögzítjük $E[2]$-ben a P_1, P_2 bázist, akkor az alábbi $GL_2(\mathbf{F}_2)$-beli mátrixok adódnak:

$$\rho_2(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_2(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A ρ_2 reprezentáció képtere kételemű. Valamivel több számolgatással igazolható, hogy az $y^2 = x^3 - 2$ görbénél $\rho_2(G) = GL_2(\mathbf{F}_2)$.

ℓ-adikus és moduláris reprezentációk. Legyen E egy racionális együtthatós elliptikus görbe, ℓ egy prímszám, és nézzük az E-ből kapott $\rho_{\ell^n} : G \to GL_2(\mathbf{Z}/\ell^n\mathbf{Z})$ reprezentációkat. Ezek az ℓ-adikus egészek konstrukciójához hasonló eljárással összerakhatók (inverz limesz) egy $\varrho_\ell : G \to GL_2(\mathbf{Z}_\ell)$ Galois-reprezentációvá; itt $\mathbf{Z}_\ell$ jelöli az ℓ-adikus egészek gyűrűjét. ϱ_ℓ az E-hez tartozó *ℓ-adikus reprezentáció.*[7] A ϱ_ℓ reprezentáció a ρ_ℓ egy *felemelése* abban az értelemben, hogy $\rho_\ell = r \circ \varrho_\ell$, ahol $r : GL_2(\mathbf{Z}_\ell) \to GL_2(\mathbf{F}_\ell)$ a modulo ℓ redukció.

---

[7] Már korábban említettük, hogy a TSW-sejtés első változatát Taniyama Yutaka fogalmazta meg. Ő vizsgálta először az ℓ-adikus reprezentációkat is. Az általa elindított két gondolat-fonal néhány évtizeddel később csattanósan összetalálkozott. Taniyama tragikusan rövid, de igen termékeny pályájára emlékezik Shimura [24].

A $\mathbf{Z}_\ell$-hez hasonló gyűrűket a TSW-sejtés szempontjából az teszi érdekessé, hogy a sajátformák felől is megközelíthetők. Valamivel pontosabban: M. Eichler és Shimura G. tetszőleges $f \in S(N)$ sajátformához konstruáltak $\rho_{f,A} : G \to GL_2(A)$ Galois-reprezentációkat, ahol A egy az f-től és ℓ-től függő, a $\mathbf{Z}_\ell$-hez hasonló[8] gyűrű. A $\rho_{f,A}$ alakban megkapható Galois-reprezentációk a *moduláris reprezentációk.*

Wiles gondolatmenetében központi szerepet játszik a következő hipotézis. Legyen ℓ egy páratlan prím.

Felemelési sejtés (ℓ): *Legyen E egy félig stabil racionális együtthatós elliptikus görbe, és tegyük fel, hogy*
(i) ρ_ℓ egy irreducibilis reprezentáció,
(ii) ρ_ℓ-nek van moduláris felemelése.
Ekkor E egy moduláris görbe.

Az (i) feltétel azt jelenti, hogy nincs $E[\ell]$-nek valódi $\rho_\ell(G)$-invariáns részcsoportja. A (ii) feltétel egy $\rho_{f,A}$ alakú reprezentáció létezését írja elő, melyre $\rho_\ell = r \circ \rho_{f,A}$, ahol r az A-ból az $\mathbf{F}_\ell$ algebrai lezártjába vivő redukció kiterjesztése mátrixokra.

A bizonyítás egyik részében megmutatja, hogy ha a felemelési sejtés igaz az $\ell = 3, 5$ esetekben, akkor igaz a TSW-sejtés félig stabil görbékre. A felemlési sejtés alkalmazásánál a fő nehézséget a (ii) követelmény jelenti. Az egyetlen ismert mód moduláris felemelés találására R. Langlands és J. Tunnell mély eredménye ([10], [28]), ami $\ell = 3$ esetén ad megfelelő reprezentációt (tetszőleges racionális görbére, melyre ρ_3 irreducibilis). A gondolatmenetnek ez a része boszorkányosan ötletes, ugyanakkor követhető tankönyv-szintű ismeretek (pl. [7], [8], [13], [25], [23]) birtokában is.

A 134 oldalas [30] kézirat nagyobbik része $\rho : G \to GL_2(\mathbf{F}_\ell)$ alakú Galois-reprezentációk ϱ felemeléseivel foglalkozik. A ρ és ϱ reprezentációkra megfogalmazott bonyolult kikötések mellett bizonyítani tudja, hogy utóbbi moduláris lesz (0.2. és 0.3. tételek a [30] kéziratban). Az eredményből viszont következik a felemelési sejtés az $\ell = 3, 5$ esetekben, tehát a TSW-sejtés igaz félig stabil görbékre.

A bizonyításnak ez a része igen nehéz, valószínűleg csak az aritmetikai algebrai geometria néhany tucat szakértője ismeri kellő alapossággal azt a hatalmas arzenált, amit a dolgozat használ. Az eszközök között van például Viktor A. Kolyvagin [9] és Karl Rubin [19] néhány éve kidolgozott módszere,

---

[8] A kommutatív algebrát kedvelő olvasó számára: A egy teljes lokális Noether-algebra $\mathbf{Z}_\ell$ felett.

mellyel nagyon szép új összefüggéseket találtak diofantikus egyenletek (racionális) megoldhatósága és kongruenciaként való megoldhatósága között (lásd pl. [12]). A [30] kézirat első, 1993-as változatában éppen a Kolyvagin–Rubin-módszer alkalmazásában találtak hiányosságot.[9] A rés közvetlen betöméséhez egy csoport rendjére kellett volna korlátot bizonyítani. A hiányzó állításról többen úgy vélekedtek, hogy az igaz,[10] és csak idő kérdése a bizonyítás.

Wiles más utat választott. Visszatért egy korábbi elgondolásához, mely szerint egy a Hecke-operátorok segítségével megadott gyűrű vizsgálata adhatja hiányzó láncszemet. A megfelelő gyűrűelméleti állítást Richard Taylorral [31] sikerült igazolniuk. A [30] és a kiegészítő eredményt tartalmazó [31] kéziratokat 1994. október 24-én tették közzé.

Tudomásom szerint a két kéziratot az *Annals of Mathematics*-hoz nyújtották be közlésre. A szerkesztők *négy* bírálót kértek fel a dolgozatok átnézésére. Még nincs hivatalos hír a bírálatok eredményéről, de minden eltelt nappal egyre valószínűbb, hogy a bizonyítás állja a sarat. Bármi is lesz az eredmény, az már ma is bizonyos, hogy Wiles munkája óriási áttörést hozott a TSW-sejtéssel és általában a Galois-reprezentációk moduláris felemeléseivel kapcsolatos kutatásokban. Ezek közül az egyik leglátványosabb fejlemény, hogy ma már végtelen sok racionális együtthatós elliptikus görbéről tudjuk, hogy moduláris. Utolsó példánk ezt illusztrálja.

Példa. (K. Rubin–A. Silverberg [21] nyomán.) Jelölje E_t a következő görbét:

$$y^2 = x^3 + (27t^4 - 18t^2 - 1)x + 4t(27t^4 + 1),$$

ahol t egy racionális szám. Megmutatható, hogy E_t egy elliptikus görbe tetszőleges $t \in \mathbf{Q}$ esetén. Igaz továbbá, hogy $E_t[3]$ és $E[3]$ izomorf G-modulusok, ahol $E = E_0$ az $y^2 = x^3 - x$ egyenletű görbe. Az utolsó állítás azt jelenti, hogy van olyan $\eta : E_t[3] \to E[3]$ csoport-izomorfizmus, melyre tetszőleges $x \in E_t[3]$ és $\sigma \in G$ esetén $\sigma(\eta(x)) = \eta(\sigma(x))$.

E-nek komplex szorzása van, ezért Shimura idézett tétele szerint moduláris. Wiles eredményeiből következik, hogy ha t nevezője nem osztható 3-mal (vagy, ami ezzel egyenértékű: E_t modulo 3 redukáltja elliptikus görbe), akkor E_t is moduláris.

---

[9] A hírek szerint a kézirat egyik bírálója, Nicholas M. Katz akadt rá.

[10] Ezt tette John Coates is az 1994 tavaszán Budapesten tartott előadásában.

Irodalom

Megjegyzések. Az elliptikus görbék elmélete iránt érdeklődő olvasó több igen jó, újabb keletű könyv közül válogathat: [25], [8], [7], [26]. Moduláris függvényekkel és aritmetikai alkalmazásaikkal foglalkoznak a [13], [8], [23], 29] munkák. Wiles cambridge-i előadása nyomán születtek az ismertető jellegű [2], [4], [5], [20] dolgozatok.

[1] Coates, J., Wiles, A., *On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer*, Invent. Math. **39** (1977) 223–251.

[2] Cox, D., *Introduction to Fermat's Last Theorem*, American Math. Monthly **101** (1994) 3–14.

[3] Edwards, H. M., Fermat's Last Theorem. A genetic introduction to algebraic number theory, Graduate Texts in Math. **50**, Springer-Verlag, New York (1977).

[4] Gouvea, F. Q., *"A marvelous proof"*, American Math. Monthly **101** (1994) 203–222.

[5] Hayes, B., Ribet, K., *Fermat's Last Theorem and modern arithmetic*, American Scientist **82** (1994) 144–156.

[6] Hellegouarch, Y., *Points d'ordre fini sur les courbes elliptiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **273** (1971) A540–A543.

[7] Husemöller, D., Elliptic curves, Graduate Texts in Math. **111**, Springer-Verlag, New York (1987).

[8] Koblitz, N., Introduction to elliptic curves and modular forms, Graduate Texts in Math. **97**, Springer-Verlag, New York (1984).

[9] Kolyvagin, V. A., *Euler systems*, in The Grothendieck Festschrift (Vol. II), P. Cartier, et. al., eds., Birkhäuser, Boston (1990) 435–483.

[10] Langlands, R., Base change for $GL(2)$, Ann. of Math. Studies **96**, Princeton University Press, Princeton (1980).

[11] Mazur, B., *Number theory as gadfly*, Amer. Math. Monthly **98** (1991) 593–610.

[12] Mazur, B., *On the passage from local to global in number theory*, Bull. A.M.S. **29** (1993) 14–50.

[13] Miyake, T., Modular forms, Springer-Verlag, Berlin, New York, (1989).

[14] Ribenboim, P., 13 lectures on Fermat's Last Theorem, Springer-Verlag, New York (1979).

[15] Ribet, K., *On modular representations of* $Gal(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ *arising from modular forms*, Invent. Math. **100** (1990) 431–476.

[16] Ribet, K., *From the Taniyama–Shimura Conjecture to Fermat's Last Theorem*, Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse **11** (1990) 116–139.

[17] Ribet, K., *Galois representations and modular forms*, kézirat, 1994.

[18] Robert, A., Elliptic curves, Lecture Notes in Math., **326**, Springer-Verlag, New York (1973).

[19] Rubin, K., *The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields*, Invent. Math. **103** (1991) 25–68.

[20] Rubin, K., Silverberg, A., *A report on Wiles' Cambridge Lectures*, Bulletin of the AMS, **31** (1994) 15–38.

[21] Rubin, K., Silverberg, A., *Families of elliptic curves with constant mod p representations*, kézirat, 1994.

[22] Serre, J-P., *Lettre à J-F. Mestre (13 août 1985)*, Contemporary Mathematics **67** (1987) 263–268.

[23] Shimura, G., Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Princeton Univ. Press, Princeton (1971).

[24] Shimura, G., *Yutaka Taniyama and his time. Very personal recollections*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989) 186–196.

[25] Silverman, J. H., The arithmetic of elliptic curves, Graduate Texts in Math. **106**, Springer-Verlag, New York (1986).

[26] Silverman, J. H., Tate, J., Rational points on elliptic curves, Undergraduate Texts in Math., Springer-Verlag, New York (1992).

[27] Szőkefalvi-Nagy B., Komplex függvénytan; Egységes jegyzet (16. kiadás), Tankönyvkiadó (1985).

[28] Tunnell, J., *Artin's conjecture for representations of octahedral type*, Bull. A.M.S. **5** (1981) 173–175.

[29] Vlăduţ, S. G., Kronecker's Jugendtraum and modular functions, Gordon and Breach (1991).

[30] Wiles, A., *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, kézirat, 1994 november.

[31] Wiles, A., Taylor, R., *Ring theoretic properties of certain Hecke algebras*, kézirat, 1994 november.

ELLIPTIC CURVES AND FERMAT'S LAST THEOREM

L. RÓNYAI

The paper gives an account of the most important developments leading to the recent proof of Fermat's Last Theorem by Andrew Wiles. Some key concepts related to the proof are introduced and briefly discussed. These include elliptic curves, modular functions and Galois representations.

RUGALMAS PÉNZÉRMÉK†

SZALKAI ISTVÁN‡ és DAN VELLEMAN

Képzeljünk el egy olyan érmét, amely $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ valószínűséggel[1)] fej, és $1-p = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ valószínűséggel írás. No jó, de lássuk, mire jó egy ilyen érme! Háromszor feldobva annak a valószínűsége, hogy három azonos dobást kapunk (három fej vagy három írás) nem más, mint

$$p^3 + (1-p)^3 = \frac{9+5\sqrt{3}}{36} + \frac{9-5\sqrt{3}}{36} = \frac{1}{2},$$

azaz, érménk háromszori feldobásával egészen pontosan tudunk egy közönséges (fej=írás=1/2 valószínűséggel) érmét szimulálni. Azonban, ha csak kétszer dobjuk fel az érmét, mi annak a valószínűsége, hogy egy írást és egy fejet kapunk? Pontosan $2p(1-p) = 1/3$, azaz érménket egy olyan érmét is tudunk szimulálni, amely 1/3 valószínűséggel fej, 2/3 valószínűséggel írás. A fenti eredményeket úgy is összegezhetnénk, hogy érménkkel a $p = 1/2$ és a $p = 1/3$ valószínűséggel fejre eső érmék helyett is használhatjuk. Hát ezért nevezhetjük rugalmasnak a $p = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ valószínűséggel fejre eső érmét!

A továbbiakban ezt úgy fogalmazzuk, hogy $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ **szimulálja** mind az 1/2-et, mind az 1/3-ot. Általában pedig mondjuk azt, ha p és q mindketten 0 és 1 közé eső valós számok, hogy **p szimulálja q** -t, ha találunk egy olyan $n \in \mathbb{N}$ természetes számot, és az n hosszúságú fej-írás dobássorozatoknak ki tudjuk jelölni egy olyan E részhalmazát úgy, hogy a p valószínűséggel fej érmét n-szer feldobva a kapott dobássorozat E-nek pontosan q valószínűséggel lesz eleme.

---

† A cikk az American Mathematical Monthlyban jelent meg először (**100**(1993), 26–33). A szerzők ezért a munkájukért a Mathematical Association of America 1994. évi Lester Ford Díját nyerték el. (Évente öt díjat osztanak ki a Monthlyban megjelent legjobb cikkek szerzőinek.)

‡ Jelen cikk a Peregrinatio I. Alapítvány 2/1991. sz. támogatásával készült

1) A 0 és 1 közötti valós számokat nevezzük valószínűségeknek.

Persze ezt a valószínűséget könnyen ki is tudjuk számolni:

$$P(E) = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i (1-p)^{n-i},$$

ahol a_i jelöli E azon elemeinek (azon dobássorozatoknak) a számát, amelyekben a fej i-szer (és így az írás $n-i$-szer) fordul elő. Az elemi valószínűségszámításban jártas Olvasó könnyen látja, hogy bármely dobássorozatban a fejek és írások sorrendje lényegtelen, és hogy az ilyen dobássorozatok valószínűsége pontosan $p^i(1-p)^{n-i}$. Összegezés után kapjuk a fenti képletet. Az is belátható, hogy $a_i \leq \binom{n}{i}$ (binomiális együttható), sőt tetszőlegesen választott ilyen $\{a_i\}_{i=0}^{n}$ számsorozathoz található dobássorozatok egy megfelelő E halmaza.
Így kimondhatjuk az alábbi definíciót:

0. DEFINÍCIÓ Tetszőleges $p, q \in [0,1]$ valós számok esetén **p szimulálja q**-t, ha található olyan $n \in \mathbb{N}$ természetes szám, és olyan $a_i \leq \binom{n}{i}$ természetes számok $0 \leq i \leq n$, amelyekre

$$q = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i (1-p)^{n-i} \qquad \blacksquare$$

Dolgozatunkban a következő kérdést feszegetjük: a $[0,1]$ halmaz mely részhalmazai szimulálhatóak egyszerre (egyetlen p számmal), illetve adott p szám a $[0,1]$ halmaz milyen részhalmazát szimulálja?

Néhány észrevételt máris tehetünk. A „p szimulálja q-t" reláció nyilván reflexív (azaz minden p szimulálja önmagát), és könnyen láthatóan tranzitív (ha p szimulálja q-t n hosszú dobásokkal, és q szimulálja r-et m hosszú dobásokkal, akkor p szimulálni fogja r-et $n \cdot m$ hosszú dobásokkal). Ennek belátását az Olvasóra bízzuk. Az ilyen tulajdonságú relációkat a matematikában **előrendezésnek**, angolul preorder-nek nevezzük. Nyilvánvalóan 0-át és 1-et minden $p \in [0,1]$ valós szám szimulálja, és általában p egyszerre szimulálja (vagy nem szimulálja) q-t és $(1-q)$-t. Továbbá, ha p egyszerre szimulálja q-t és r-et,akkor szorzatukat, $q \cdot r$-et is. A fentiekből az is következik, hogy ha p szimulálja a $q, r, s \in [0,1]$ számokat, akkor a $qr + (1-q)s$ számot is. Ezt a különös tényt a 6. Tétel bizonyításában majd használni fogjuk, ezért nevezzük (@) **tulajdonság**nak. Megemlítjük még azt az önmagában is érdekes algebrai tényt, hogy: tetszőleges $p \in [0,1]$ szám által szimulált valós számok halmaza nem más, mint a $\{0,1\}$ halmaz (algebrai) lezártja egyetlen kétváltozós műveletre, nevezetesen az $f(x,y) := px + (1-p)y$ műveletre nézve.

Mit állíthatunk még a „p szimulálja q-t" relációról? Mint a bevezetőben is látjuk, olyan érméket érdemes terveznünk, melyek egyszerre több, számunkra „hasznos" valószínűséget egyszerre szimulálnak. Mint például az 1/2-et és az 1/3-ot. De miért kellett olyan bonyolult számot választanunk, mint a $\frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0,7886$? Például, racionális számot nem találhattunk volna? Sajnos nem. Először is: 1/2 nem szimulálja 1/3-ot. Márpedig azért nem, mert az 1/2 által szimulált számok, a $\sum_{i=0}^{n} a_i p^i (1-p)^{n-i}$ alakú kifejezések, olyan racionális számok, melyek nevezői 2-nek hatványai. Másodszor pedig: 1/2-et csak egyetlen racionális szám tudja szimulálni: önmaga. Legyen ugyanis $p = \frac{j}{k}$ olyan racionális szám, mely szimulálja 1/2-et, persze j és k relatív prímek. Ekkor

$$\frac{1}{2} = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i (1-p)^{n-i}$$

Ha most $b_i = \binom{n}{i} - a_i$, akkor a binomiális tétel miatt

$$\sum_{i=0}^{n} b_i p^i (1-p)^{n-i} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ne feledjük, hogy $a_0 + b_0 = \binom{n}{0} = 1$, vagyis egyikük 0, mondjuk a_o Ekkor

$$\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{n} a_i p^i (1-p)^{n-i} = p \sum_{i=1}^{n} a_i p^{i-1} (1-p)^{n-i} = \frac{j}{k} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i j^{i-1} (k-j)^{n-i}}{k^{n-1}}$$

vagyis $k^n = 2j \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i j^{i-1} (k-j)^{n-1}$, azaz $j \mid k^n$ amiből $j = 1$ következik, hiszen k és j relatív prímek. De mivel $1 - p = (k-j)/k = (k-1)/k$ szintén szimulálja 1/2-et, így hasonló okoskodással azt is kapjuk, hogy $k - 1 = 1$. Vagyis $j = 1$, $k = 2$, azaz $p = 1/2$, Q.E.D. Végül harmadszor: hasonló, bár kissé hosszadalmasabb gondolatmenettel az is megmutatható,hogy 1/3-ot csak két racionális szám tudja szimulálni: az 1/3 és a 2/3.
A fenti három tényből pedig valóban az látszik, hogy 1/2 és 1/3 semmilyen racionális számmal nem szimulálhatók egyszerre.
(Általában az a tény is a fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy tetszőleges 1-nél nagyobb N négyzetmentes szám esetén az $1/N$ számot csak két racionális szám szimulálhatja: $1/N$ és $(N-1)/N$).

A fentiek azt mutatják, hogy a racionális számok által szimulált valószínűségekre nagyon erős (oszthatósági) feltételek kell, hogy teljesüljenek. Azonban irracionális (de még mindig algebrai) számokkal sokkal rugalmasabban lehet akárhány (de véges) számot egyszerre szimulálni, mint azt az alábbi tételek mutatják.

1. TÉTEL *Legyen $F \subseteq \mathbb{Q}$ a racionális számok egy tetszőleges véges részhalmaza, és $F \subseteq [0,1]$. Ekkor létezik egy olyan $p \in [0,1]$ valós szám, amely egyszerre szimulálja F minden elemét.*

A Tétel bizonyítását az alábbi két állításra alapozzuk:

2. ÁLLÍTÁS Tetszőleges $n > 1$ természetes szám esetén $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} > \frac{1}{e}$

BIZONYÍTÁS: Tekintsük az $f(x) := \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x-1}$ függvényt.
Mivel $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{e}$ és $\lim_{x\to o+o} f(x) = +\infty$ könnyen látszik, ezért elegendő azt megmutatnunk, hogy f monoton csökkenő. Ha deriválunk:

$$f'(x) = f(x) \cdot \left[\frac{1}{x} + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right].$$

Mivel $\ln(x) < x - 1$ minden $x \in (0,1)$ valós számra, ezért $\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$ ha $x > 1$. Ebből pedig $f'(x) < 0$, vagyis f monoton csökkenése következik. ■

3. ÁLLÍTÁS Tetszőleges $z \in [0, 1/e]$ valós és $n \in \mathbb{N}$ természetes számhoz található olyan $p \in [0,1]$ valós szám, amelyekre

$$np(1-p)^{n-1} = z$$

(azaz az egyenlet p-re megoldható).
BIZONYÍTÁS: $n = 1$ esetén egyszerűen $p = z$. Legyen most $n > 1$. Ekkor $p = 0$ esetén az egyenlet bal oldala 0, ami z-nél kisebb; $p = 1/n$ esetén pedig a bal oldala $1/e$-nél nagyobb (az 1. Állítás alapján), így z-nél is nagyobb. Márpedig a bal oldal p-nek folytonos függvénye, vagyis valóban létezik 0 és $1/n$ között olyan p valós szám, mely kielégíti az egyenletet. ■

Ez utóbbi állítás azt mondja, hogy ha egy érmét, (mely p valószínűséggel fej), n-szer feldobunk, pontosan z annak a valószínűsége, hogy egy fejet dobunk. n-et pedig a Tétel bizonyításában választjuk meg, a szimulálni kívánt racionális számok F halmazától függően.

Az 1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA: Legyen F elemei nevezőinek maximuma N, mondjuk $N \geq 4$, és legyen $n = N!/3$. A 3. állítás szerint az $np(1-p)^{n-1} = 1/3$ egyenletnek van $p \in [0,1]$ megoldása. Ebből már következik az, hogy p minden

$$ap(1-p)^{n-1} = \frac{a}{3n} = \frac{a}{N!}$$

alakú racionális számot szimulál, ha $0 \leq a \leq \binom{n}{1} = n = N!/3$. Például az $1/3, 1/4, \ldots, 1/N$ számokat. Mint az 1. Tétel kimondása előtt megállapítottuk, ha p szimulálja q-t, akkor $(1-q)$-t is, sőt ha még r-et is, akkor a qr szorzatot is szimulálja p. Vagyis esetünkben p még a $2/3, 3/4, \ldots, (N-1)/N$ számokat is szimulálja. Sőt, $2/3 \cdot 3/4 = 1/2$-et is. (Itt használtuk ki az $N \geq 4$ feltevést.) Mivel tetszőleges j/k alakú racionális szám előáll az eddig szimulált racionális számok véges szorzataként:

$$\frac{j}{k} = \frac{j}{j+1} \cdot \frac{j+1}{j+2} \cdot \frac{j+2}{j+3} \cdot \ldots \cdot \frac{k-1}{k}$$

(feltéve, hogy $1 \leq j < N$), ezért p valóban minden olyan j/k törtet szimulál, melynek nevezője N-nél nem nagyobb. N választása miatt ez pedig azt jelenti, hogy p valóban szimulálja F minden elemét. ∎

Módszerünkkel irracionális valószínűségek bizonyos halmazairól is megmutatható, hogy a halmaz minden eleme szimulálható egyetlen p valószínűséggel: Legyen F tetszőleges olyan véges részhalmaza a $[0, 1/e]$ intervallumnak, hogy F bármely két elemének hányadosa racionális. (Azaz $F \subseteq \mathbb{Q} \cdot \xi$ valamilyen $\xi \in \mathbb{R}$ valós számra, ahol $\mathbb{Q} \cdot \xi := \{r \cdot \xi | r \in \mathbb{Q}\}$.) Legyen F legnagyobb eleme z. Ekkor F minden eleme z-nek racionális többszöröse, azaz valamilyen N közös nevezővel

$$F = \left\{z, \frac{zj_1}{N}, \frac{zj_2}{N}, \ldots, \frac{zj_m}{N}\right\}$$

ahol persze $j_1, j_2, \ldots, j_m$ N-nél kisebb egész számok. Mivel $z \leq 1/e$, így a 3. Állítás miatt az $Np(1-p)^{N-1} = z$ egyenlőség teljesül valamilyen $p \in [0,1]$ valós számra. Ez a p szám minden zj/N számot szimulál, ha $j \leq N$, vagyis p szimulálja F minden elemét.

Az F-re tett $1/e$ felső becslés is kiküszöbölhető. Mi eddig csak az $np(1-p)^{n-1} = z$ egyenlőséget oldogattuk meg p-re, azaz a szimuláláskor *egyetlen* fejet írtunk elő, a többi dobás írás volt. n sajnos elég nagy is lehetett, pl. a nevezők közös többszöröse. Az $1/e$ felső becslés pedig a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}$ egyenlőségből adódott (ld. 2. Állítás). Azonban, ha több fejet is megengedünk, az $1/e$ korlát várhatóan átléphető.
Ezt a

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i} \left(\frac{x}{n}\right)^i \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{e^x}$$

egyenlőség ($x \in \mathbb{R}$ tetszőleges) teszi lehetővé, hiszen így minden $z \in [0,1]$ szám esetén k-t és n_0-át elég nagynak választva ($n_0 > k$) a

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = z$$

egyenlet minden $n > n_0$ szám esetén megoldható p-re, $p \in [0,1]$, és a fenti bizonyítás gondolatmenete megismételhető. Ez bizonyítja alábbi Tételünket:

4. TÉTEL *Legyen $F \subseteq [0,1]$ egy olyan véges részhalmaz, amelynek bármely két elemének hányadosa racionális. (Azaz $\exists \xi \in \mathbb{R}$ $F \subseteq \mathbb{Q} \cdot \xi$.) Ekkor létezik egy olyan $p \in [0,1]$ valós szám, amely szimulálja F minden elemét.*

A Tételre most egy másik bizonyítást adunk:

BIZONYÍTÁS: A számolások egyszerűsítése végett tegyük fel, hogy $1 \notin$F. Legyen F legnagyobb eleme z, és írjuk fel F elemeit z racionális többszöröseiként:

$$F = \left\{ z, \frac{zj_1}{N}, \frac{zj_2}{N}, \ldots, \frac{zj_m}{N} \right\}$$

ahol $j_1, j_2, \ldots, j_m < n$ és $N \in \mathbb{N}$. $z < 1$ miatt találhatunk olyan elég nagy n egész számot, amelyre

$$1 - \frac{1+nN}{2^n} > z$$

Osszuk el maradékosan $\binom{n}{i}$-t N-el, legyen q_i a hányados, $r_i < N$ pedig a maradék ($i = 1, 2, \ldots, n$), azaz $\binom{n}{i} = N \cdot q_i + r_i$. A bizonyítás kulcsa az a tény, hogy az alábbi (*) egyenletnek van $p \in [0,1]$ valós gyöke:

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} N q_i p^i (1-p)^{n-i} = z$$

Ha már megtaláltunk egy ilyen p-t, akkor persze p az összes

$$\frac{zj}{N} = \sum_{i=1}^{n} j q_i p^i (1-p)^{n-i}$$

alakú számot szimulálja, azaz F minden elemét is, q.e.d.

Már csak a (*) egyenletet kell megoldanunk. $p = 0$ esetén a bal oldal 0, ami z-nél kisebb; $p = 1/2$ esetén pedig nem más, mint

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{Nq_i}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{n} \left[\binom{n}{i} - r_i \right] = \frac{1}{2^n} \left[2^n - 1 - \sum_{i=1}^{n} r_i \right]$$
$$> \frac{1}{2^n} [2^n - 1 - nN] = 1 - \frac{1+nN}{2^n} > z$$

Mivel pedig az egyenlet bal oldala p-nek folytonos függvénye, így valóban létezik 0 és 1/2 között olyan p valós szám, mely kielégíti az egyenletet. Így teljes mértékben beláttuk a 4. Tételt. ■

Vegyük észre, hogy az 1. Tétel bizonyításában szereplő p egy *racionális* együtthatójú polinom gyöke, az ilyen valós számokat *algebrai* számoknak nevezzük. (Közismert, hogy az algebrai számok halmaza testet alkot a szokásos $+$ és $\cdot$ műveletekkel, résztestként tartalmazza $\mathbb{Q}$-t és részteste $\mathbb{R}$-nek. Mivel az 1. Tételben F elemei is racionális számok voltak, így p nem is lehet más, mint algebrai. A „p szimulálja q-t" reláció definíciója miatt ha $p, q \in [0,1]$ és p szimulálja q-t, akkor $f(p) = q$ valamilyen egész együtthatójú polinomra, vagyis ha p és q valamelyike algebrai szám, akkor a másik sem lehet más. Általában még az is igaz: ha $p, q \in [0,1]$ és p szimulálja q-t akkor $\mathbb{Q}[p] = \mathbb{Q}[q]$, ahol tetszőleges $z \in \mathbb{R}$ valós számra

$$\mathbb{Q}[z] = \{r \in \mathbb{R} \mid r \text{ algebrai } \mathbb{Q}(z) \text{ felett}\}$$

és

$$\mathbb{Q}(z) = \mathbb{R} \text{ legkisebb azon részteste, mely tartalmazza } \mathbb{Q} - \text{t és } z - \text{t.}$$

Ebből az is következik, hogy ha p szimulálja valamely $F \subseteq [0,1]$ halmaz elemeit, akkor $F \setminus \{0,1\}$ minden q elemére $\mathbb{Q}[p] = \mathbb{Q}[q]$ feltétlenül teljesül. Vagyis tetszőleges $F \subseteq [0,1]$ halmaz elemeit csak akkor lehet egyetlen p valószínűséggel szimulálni, ha $F \setminus \{0,1\}$ minden q, r elemeire $\mathbb{Q}[q] = \mathbb{Q}[r]$. Nem tudjuk azonban, hogy a fenti feltétel elegendő-e. Például azt sem tudjuk, hogy $\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\frac{1}{\sqrt{3}}$, vagy pl. $\frac{1}{e}$ és $\frac{1}{e+1}$ szimulálhatók-e egyszerre.

Mely $F \subseteq [0,1]$ halmazok elemeit lehet egyetlen p valószínűséggel szimulálni? Tételeink erre nem adnak általában teljes választ.

Pontosabban, $\mathbb{R}$ tetszőleges részhalmazaira ugyan nem tudjuk a választ, azonban ha csak racionális számokra szorítkozunk, akkor pontosan le tudjuk írni azon $F \subseteq \mathbb{Q}$ részhalmazokat, melyeket egy (tetszőleges valós) szám szimulál. Eredményünk az alább következő két Tételből fog következni. Mindezekhez két jelölésre lesz szükségünk.

Ha $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám, akkor jelölje $\mathbf{Q_N}$ azon racionális számok halmazát, melyek nevezői N-nek hatványai, azaz legyen

$$Q_N := \left\{ \frac{j}{N^k} : j, k \in \mathbb{Z} \right\} \qquad (N \in \mathbb{N})$$

Jelölje továbbá $\mathbf{S_p}$ a p által szimulált számok halmazát, azaz legyen

$$S_p := \{q \in [0,1] \, : \, p \text{ szimulálja } q - \text{t}\} \qquad (p \in [0,1])$$

5. TÉTEL *Legyen* $p \in [0,1]$ *tetszőleges. Ekkor* $S_p \cap \mathbb{Q} \subseteq Q_N$ *valamilyen* $N \in \mathbb{N}$ *számra.*

BIZONYÍTÁS: A bizonyítás alapötlete Martin Goldsterntől származik.

Ha p nem algebrai, akkor, mint már észrevettük, $S_p \cap \mathbb{Q} = \{0,1\}$, vagyis a Tétel állítása nyilvánvalóan teljesül.

Tehát p algebrai. Legyen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

egy olyan minimális fokú egész együtthatós polinom (nem azonosan nulla), melynek p gyöke, és $a_n > 0$. Megmutatjuk, hogy $S_p \cap \mathbb{Q} \subseteq Q_{a_n}$.
0 és 1 nyilván elemei Q_{a_n}-nek. Legyen tehát $q \in S_p \cap \mathbb{Q} \setminus \{0,1\}$. Mivel p szimulálja q-t, ezért $q = g(p)$ valamely

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

egész együtthatós polinomra. Ekkor $g(p) - q = 0$, de mivel $f(x)$ minimális fokú polinom volt, ezért $f(x)$ osztója $g(x) - q$-nak, azaz

$$(^*) \qquad g(x) - q = f(x) \cdot h(x),$$

ahol

$$h(x) = c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

egy racionális együtthatós polinom. A $(^*)$ egyenlet a polinomok fokszámaira és együtthatóira a következő egyenletrendszert jelenti:

$$\begin{aligned}
m &= n + k \\
b_m &= a_n \cdot c_k \\
b_{m-1} &= a_n \cdot c_{k-1} + a_{n-1} \cdot c_k \\
b_{m-2} &= a_n \cdot c_{k-2} + a_{n-1} \cdot c_{k-1} + a_{n-2} \cdot c_k \\
&\cdots \\
b_1 &= a_1 \cdot c_o + a_o \cdot c_1 \\
b_o - q &= a_o \cdot c_o
\end{aligned}$$

ÁLLÍTÁS: $(a_n)^{i+1} \cdot c_{k-i}$ mindig egész szám, ha $i = 0, 1, \ldots, k$.
BIZONYÍTÁS: i-re vonatkozó indukcióval. Az $i = 0$ esetet a fenti második egyenlőség igazolja. Más i index esetén pedig induljunk ki a

$$b_{m-i} = a_n \cdot c_{k-1} + a_{n-1} \cdot c_{k-i+1} + a_{n-2} \cdot c_{k-1+2} + \cdots$$

egyenlőségből. Mindkét oldalt $(a_n)^i$-vel szorozva kapjuk, hogy

$$(a_n)^i \cdot b_{m-i} = (a_n)^{i+1} \cdot c_{k-i} + (a_n)^i \cdot a_{n-1} \cdot c_{k-i+1} + (a_n)^i \cdot a_{n-2} \cdot c_{k-1+2} + \cdots .$$

Az egyenlőség bal oldala egész szám, és az indukciós feltétel szerint a bal oldal mindegyik tagja is egész, az első kivételével, így az első tag is egész szám. Ez bizonyítja állításunkat.

Az állítás szerint $(i = k)$ $j = (a_n)^{k+1} \cdot c_0$ egész szám, de így a $b_0 - q = a_0 \cdot c_0$ egyenlőség miatt

$$q = b_0 - a_0 \cdot j/(a_n)^{k+1} \in Q_{an},$$

mint állítottuk. ■

6. TÉTEL *Minden $N \in \mathbb{N}$ természetes számhoz van olyan $p \in [0,1]$ valós szám, amelyre $S_p \cap \mathbb{Q} \supseteq Q_N \cap [0,1]$.*

BIZONYÍTÁS: Legyen $N \in \mathbb{N}$ adott. Az 1. Tétel szerint van olyan $p \in [0,1]$, mely szimulálja az $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}$ számokat. Megmutatjuk, hogy p szimulálja $Q_N \cap [0,1]$ minden elemét, azaz p szimulál minden N^k nevezőjű törtet.

k-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. A $k = 1$ esetet p választása igazolja. Az indukciós lépéshez legyen k rögzített, és tegyük fel, hogy p szimulál minden N^k nevezőjű törtet, és legyen $j < N^{k+1}$. Megmutatjuk, hogy p szimulálja a j/N^{k+1} törtet is. Osszuk el j-t maradékosan N^k-val, azaz legyen $j = qN^k + r$, $0 \leq q < N$ és $0 \leq r < N^k$.
Az indukciós feltétel és p választása miatt p szimulálja az $x = \frac{q}{N}$, $\frac{1}{N-q}$ és az $\frac{r}{N^k}$ racionális számokat, és a két utolsó szorzatát, $z = \frac{1}{N-q} \cdot \frac{r}{N^k}$ számot is. Ha $y = 1$, akkor a bevezetőben említett @ tulajdonság miatt p szimulálja a

$$\frac{q}{N} + \left(1 - \frac{q}{N}\right) \cdot \frac{r}{(N-q)N^k} = \frac{q}{N} + \frac{r}{N^{k+1}} \frac{qN^k + r}{N^{k+1}} = \frac{j}{N^{k+1}}$$

számot is, mint állítottuk. ■

A fenti két Tételt összevetve szükséges és elégséges feltételt kapunk arra, hogy racionális számok mely részhalmazai szimulálhatók egyetlen $p \in [0,1]$ valós számmal:

7. KÖVETKEZMÉNY Tetszőleges $F \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1]$ részhalmazhoz pontosan akkor létezik egy $p \in [0,1]$ szám, mely F minden elemét szimulálja, ha valamilyen $N \in \mathbb{N}$ természetes számra F minden elemének nevezője N-nek hatványa, azaz $F \subseteq Q_N$. ■

Most részletesebben megvizsgáljuk, hogy a bizonyításainkban felhasznált p számok milyen racionális számokat szimulálnak. Legyen $N \geq 4$ pozitív egész, $n = N!/3$ és legyen p az $np(1-p)^{n-1} = \frac{1}{3}$ egyenlet megoldása. Az 1. Tétel bizonyításában láttuk, hogy p szimulálja az összes, N-nél nem nagyobb nevezőjű törtet. (Valójában ez $N = 3$ esetén is igaz, mint cikkünk bevezetőjében írtuk.) A 6. Tétel bizonyításában láttuk, hogy ekkor p $Q_N \cap [0,1]$ elemeit is szimulálja. Sőt, az érvelést továbbfejlesztve az is belátható, hogy $Q_{N!} \cap [0,1]$ elemeit is szimulálja p. Ez következik az alábbi Állításból:

8. ÁLLÍTÁS: Legyenek p és N mint fent, M és k pozitív egészek, $2 \leq k \leq N$, és tegyük fel, hogy p szimulálja az összes j/M alakú törtet,ha $0 < j < M$. Ekkor p a j/Mk alakú törteket is szimulálja minden $0 < j < Mk$ esetén.

BIZONYÍTÁS: Legyen $0 < j < Mk$. Osszuk el j-t maradékosan M-el, azaz legyen $j = Mq + r$, $0 \leq q < k$ és $0 \leq r < M$. A feltétel szerint p szimulálja a $\frac{q}{k}$, $\frac{1}{k-q}$ és az $\frac{r}{M}$ racionális számokat. Mint a 6. Tétel bizonyításában láttuk, p szimulálja a

$$\frac{q}{k} + \left(1 - \frac{q}{k}\right) \cdot \frac{1}{k-q} \cdot \frac{r}{M} = \frac{Mq + r}{Mk} = \frac{j}{Mk}$$

számot is, mint állítottuk. ■

Az 5. Tétel bizonyítását alaposabban megvizsgálva a következőket mondhatjuk: p nyilván algebrai, hiszen a $g(x) = 3nx(1-x)^{n-1} - 1 = N!x(1-x)^{n-1} - 1$ egyenlet gyöke. Legyen $f(x)$ olyan minimális fokú (nem azonosan nulla) egész együtthatós polinom, melynek p gyöke, és legyen f főegyütthatója $\mathbf{a}$. Az 5. Tétel bizonyításakor láttuk, hogy p csak a $Q_a \cap [0,1]$ halmazban levő racionális számokat szimulálja.
Mit tudunk mondani $\mathbf{a}$ értékéről?

Egy egész együtthatós polinom együtthatóinak legnagyobb közös osztóját nevezzük a polinom **tartalmá**nak, és nevezzünk egy polinomot **primitív**nek, ha tartalma 1. Az ún. *Gauss Lemma* szerint (pl.[Fr] 100. old. 3.39 Tétel) primitív polinomok szorzata is primitív polinom.

$g(x)$ polinomunk nyilván primitív, hiszen konstans tagja -1, és $f(x)$-ről is feltehetjük, hogy primitív. Mivel $f(x)$ minimális fokszámú, ezért $g(x)$-nek osztója, azaz $g(x) = f(x) \cdot h(x)$ valamilyen $h(x)$ racionális együtthatójú polinomra. Hozzuk $h(x)$ együtthatóit közös nevezőre, majd emeljük ki a számlálók legnagyobb közös osztóját, ekkor $h(x)$-et $\frac{j}{k}h^*(x)$ alakban írhatjuk, ahol $h^*(x)$ primitív egész együtthatós polinom. Ekkor $K \cdot g(x) = j \cdot f(x) \cdot h^*(x)$. A bal oldal tartalma k, a jobb oldalé j a Gauss Lemma alapján, vagyis $j = k$, így $h(x) = h^*(x)$. Ebből következik, hogy $h(x)$ egész együtthatós primitív polinom. Továbbá, $g(x)$ főegyütthatója $\pm N!$, és $g(x) = f(x) \cdot h(x)$, így $\mathbf{a} \mid N!$ amiből $Q_a \subseteq Q_{N!}$ következik. Mivel tudjuk, hogy p szimulálja $Q_{N!} \cap [0,1]$ minden elemét, és p csak a $Q_a \cap [0,1]$ halmazban levő racionális számokat szimulálja, ezért

$$S_p \cap \mathbb{Q} = Q_{N!} \cap [0,1]$$

Például, $N = 3$ esetén kapjuk, hogy a bevezetőben említett $p = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$ szám által szimulált racionális számok halmaza pontosan $Q_6 \cap [0,1]$.

Az 5. Tételt könnyen általánosíthatjuk $\mathbb{Q}$ helyett $\mathbb{Q}z$-re is, ahol $z \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós szám, és

$$\mathbb{Q}z := \{qz \mid q \in \mathbb{Q}\}$$

9. TÉTEL . *Legyenek $z \in \mathbb{R}$ és $p \in [0,1]$ tetszőlegesek, $z \neq 0$. Ekkor van olyan $N \in \mathbb{N}$ természetes szám, amelyre $S_p \cap \mathbb{Q}_N z \subseteq (Q_n z) \cap [0,1]$, ahol $Q_N z = \{qz \mid q \in Q_N\}$.*

BIZONYÍTÁS: (I) Legyen először z transzcendens, azaz nem algebrai. Ha p z-nek egyetlen nemnulla többszörösét sem szimulálja, akkor nincs mit bizonyítanunk. Tegyük fel tehát, hogy p szimulálja z-nek valamely nemnulla többszörösét. Ekkor p algebrai $\mathbb{Q}(z)$ felett ($\mathbb{Q}(z)$-vel jelöljük a $\mathbb{Q}$ számtest z számmal való transzcendens bővítését), ezért van egy minimális fokú $f(x)$ polinom, melynek együtthatói $\mathbb{Q}(z)$-ből valók, és melynek p gyöke. $f(x)$ együtthatói z-nek racionális együtthatós törtfüggvényei[2)] de a nevezők közös többszöröseivel bővítve feltehetjük, hogy $f(x)$ egész együtthatójú polinom. Azaz

$$f(x) = a_n(z)x^n + a_{n-1}(z)x^{n-1} + \cdots + a_0(z)$$

ahol $a_i(z)$ egész együtthatós polinomok ha $i = 0, 1, \ldots, n$. Legyen $a_n(z)$ főegyütthatója N, $f(x)$-et esetleg -1-gyel beszorozva feltehetjük, hogy N pozitív. Megmutatjuk, hogy $S_p \cap \mathbb{Q}z \subseteq Q_N z$.

---

2) Racionális törtfüggvénynek nevezzük két polinom hányadosát. Tehát $f(x)$ együtthatói racionális együtthatójú polinomok hányadosai.

Legyen tehát $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$ olyan, hogy p szimulálja qz-t. Valamely

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b \cdots + b_1 x + b_0$$

nemnulla egész együtthatós polinomra $qz = g(p)$, azaz $g(p) - qz = 0$. Ekkor $f(x)$ minimális fokszáma miatt $g(x) - qz$ osztható $f(x)$-szel, vagyis

$$g(x) - qz = f(x) \cdot h(x)$$

valamely $h(x)$ polinomra, melynek együtthatói $\mathbb{Q}z$-nek elemei. Azaz $h(x)$ együtthatói z-nek racionális együtthatójú racionális törtfüggvényei, vagyis

$$h(x) = c_n(z)x^n + c_{n-1}(z)x^{n-1} + \cdots + c_0(z)$$

ahol $c_i(z)$ racionális együtthatójú racionális törtfüggvények, $i = 0, 1, \ldots, n$. Az 5. Tétel bizonyításához hasonlóan az alábbi Állítást látjuk be:

9. ÁLLÍTÁS: Minden $i = 0, 1, \ldots, k$ esetén $(a_n(z))^{i+1} \cdot c_{k-i}(z) = d_i(z)$ teljesül valamely egész együtthatós $d_i(x)$ polinomra.

BIZONYÍTÁS: i-re vonatkozó teljes indukcióval. $i = 0$ esetén a $a_n(z)c_k(z) = b_m$, ami egész szám, vagyis $d_0(z) = b_m$ konstans polinom. Az indukciós lépéshez használjuk fel a

$$b_{m-i} = a_n(z) \cdot c_{k-i}(z) + a_{n-1}(z) \cdot c_{k-i+1}(z) + \cdots$$

egyenlőséget. Mindkét oldalt $(a_n(z))^i$-vel szorozva kapjuk:

$$(a_n(z))^i \cdot b_{m-i} = (a_n(z))^{i+1} \cdot c_{k-i}(z) + (a_n(z))^i \cdot a_{n-i}(z) \cdot c_{k-i+1}(z) + \cdots$$

amiből az állítás az indukciós feltétel miatt következik. ■

Mivel $g(x) - qz = f(x) \cdot h(x)$, így $b_0 - qz = a_0(z) \cdot c_0(z)$ Ha mindkét oldalt $(a_n(z))^{k+1}$-vel beszorozzuk, az Állítás $i = k$ esetét alkalmazva kapjuk: $(a_n(z))^{k+1} \cdot (b_0 - qz) = a_0(z) \cdot (a_n(z))^{k+1} \cdot c_0(z) = a_0(z) \cdot d_k(z)$.
Így

$$b_0 \cdot (a_n(z))^{k+1} - qz \cdot (a_n(z))^{k+1} - a_0(z) \cdot d_k(z) = 0$$

De z transzcendens lévén a bal oldali polinom azonosan 0 kell hogy legyen (e ponton használjuk csak fel z transzcendens voltát).
Mivel pedig b_0 egész szám, szintúgy az $a_n(x)$, $a_0(x)$ és a $d_k(x)$ polinomok is egész együtthatósak, ezért a $q \cdot x \cdot (a_n(x))^{k+1}$ polinom együtthatói is szükségképpen egész számok. Speciálisan a főegyüttható, qN^{k+1} is egész szám, vagyis $q \in \mathbb{Q}_N$, ami bizonyítja Tételünket.

(II) Már csak azon eset maradt hátra, mikor z algebrai, de nem racionális (a racionális eset éppen az 5. Tétel). Ez esetben Greg Call segített át minket a holtponton. Legyen tehát

$$j(x) = d_r x^r + d_{r-1} x^{r-1} + \cdots + d_0$$

olyan egész együtthatós nemnulla polinom, melynek z gyöke. Mint az (I) esetben, ha p z-nek egyetlen nemnulla többszörösét sem szimulálja, akkor nincs mit bizonyítanunk. Ha pedig igen,akkor,mint a bevezetőben láttuk, p is algebrai. Legyen tehát

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

p minimálpolinomja, azaz egy olyan minimális fokszámú nemnulla, egész együtthatós polinom, melynek p gyöke. Megmutatjuk, hogy ez esetben $N = d_0 a_n$ igazolja a Tétel állítását ($z \neq 0$ miatt $d_0 \neq 0$). Mint eddig, feltehetjük, hogy d_0 és a_n mindegyike pozitív.

Legyen $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$ olyan, hogy p szimulálja qz-t. Ekkor $g(p) = qz$ valamely egész együtthatós nemkonstans $g(x)$ polinomra. Így $z = g(p)/q$, és $j(z) = 0$ miatt kapjuk:

$$0 = q^r \cdot j\left(\frac{g(p)}{q}\right) = d_r \cdot (g(p))^r + q \cdot d_{r-1} \cdot (g(p))^{r-1} + \cdots + q^r \cdot d_0.$$

Legyen most $q = \frac{s}{t}$ ahol s és t relatív prímek. A fenti egyenlőség mindkét oldalát t^{r-1}-el szorozva az alábbit kapjuk:

$$0 = t^r \cdot d_r \cdot (g(p))^r + s \cdot t^{r-1} \cdot d_{r-1} \cdot (g(p))^{r-1} + \cdots + s^r \cdot d_0/t$$

ami azt jelenti, hogy p gyöke valamely egész együtthatós (az utolsó tag kivételével) $u(x)$ polinomnak. Pontosabban:

$$u(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \frac{s^r d_0}{t}$$

ahol b_i mind egész számok. Mivel $f(x)$ minimális fokszámú polinom, melynek p gyöke, ezért $u(x)$ osztható $f(x)$-el, azaz $u(x) = f(x) \cdot h(x)$ valamely racionális együtthatójú

$$h(x) = c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \cdots + c_0$$

polinomra. Az 5. Tétel bizonyításában szereplő Állítás most is ugyanúgy igazolható, mint az 5. Tételben. Így találunk olyan e egész számot, amelyre $c_o = e/(a_n)^{k+1}$. Ezért

$$b_0 + \frac{s^r d_o}{t} = a_0 c_0 = \frac{e a_o}{(a_n)^{k+1}}$$

amiből $t(ea_0 - b_0(a)^{k+1}) = s^r d_0(a_n)^{k+1}$ következik. Így t osztója a baloldali mennyiségnek, de mivel t és s relatív prímek, ezért $t \mid d_0(a_n)^{k+1}$, amiből $t \mid N^{k+1}$ következik, hiszen $N = d_0 a_n$. Így $q = s/t \in Q_N$. ■

Mint említettük, sok megoldatlan kérdésre nem ismerjük a választ, ha irracionális számokat akarunk szimultán szimulálni. Például szimulálható-e két tetszőleges $[0,1]$-beli algebrai szám egyszerre? Még az $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{3}$ pár esetén sem tudjuk a választ!

Végezetül megemlítjük a probléma általánosítását három- és több- oldalú érmék esetére. Egy **k-oldalú érme** $p_1, p_2, \ldots, p_k$ valószínűségekkel esik oldalaira, ahol természetesen $0 < p_i < 1$ és $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. Az Olvasóra bízzuk annak definiálását, hogy egy $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$-érme mikor szimulál egy $(q_1, q_2, \ldots, q_k)$-érmét. Az 1. Tétel szerint ha a $p_1, p_2, \ldots, p_k$ számok mindegyike racionális, akkor a $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$-érme szimulálható egy kétoldalú érmével. A következő feladat megoldását az Olvasóra bízzuk. Nem nehéz belátni, hogy ha p szimulálja $\frac{1}{2}$-et és $\frac{1}{3}$-ot, akkor az $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ háromoldalú érmét is szimulálja. (Pl. a bevezetőben említett $p = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$.) Továbbá az is könnyen belátható, hogy ha p szimulálja az $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ háromoldalú érmét, akkor az $\frac{1}{3}$ valószínűséghez tartozó kétoldalú érmét is. A feladat: találjunk olyan $p \in [0,1]$ számot, amelyhez tartozó kétoldalú érme szimulálja az $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ háromoldalú érmét, de nem szimulálja az $\frac{1}{2}$ valószínűséghez tartozó kétoldalú érmét!

A dolgozatunkban tárgyalt problémát már [SzV]-ben is tárgyaltuk, megoldatlan problémáinkat [Sz1]-ben és [Sz2]-ben is terjesztettük. Hasonló érdekes témákról olvashatunk még a [P1], [P2] cikkekben, sőt [CV]-ben kimerítően körüljárják a szerzők a jelen cikkünkben (lényegében) központi szerepet játszó

$$\sum_{i=0}^{n} a_i p^i (1-p)^{n-i},$$

alakú polinomokat. (Sajnos ott sem találnak a szerzők olyan valószínűséget, mely egyszerre szimulálná az $1/\sqrt{2}$ és $1/\sqrt{3}$ számokat!)

Irodalom

[CV] Call, G. S., Velleman, D. J., *Pascal's Matrices*, Amer. Math. Monthly **100** (1193), 217–256.

[Fr] Fried Ervin, *Klasszikus és Lineáris Algebra*, Tankönyvkiadó, Budapest 1977.

[P1] Pinch, R. G. E., *Binomial Equivalence of Algebraic Integers*, J. of the Indian Math. Soc. **58** (1992), 33–38.

[P2] Pinch, R. G. E., *a-Convexity*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **97** (1985), 63–68.

[Sz1] Szalkai István, *Probléma*, jelen folyóirat, 1991/4, 18. old.

[Sz2] Szalkai István, *Problem*, in Combinatorics: Paul Erdős is eighty, International Conf. in Keszthely, 1993, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, megjelenőben.

[SzV] Szalkai, I., Velleman, D. J., *Versatile Coins*, Amer. Math. Monthly, **100** (1993), 26–33.

VERSATILE COINS

I. SZALKAI and D. VELLEMAN

Imagine a coin which, when flipped, comes up heads with probability $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$. Flipping it three times, the probability of getting either three heads or three tails would be $1/2$, while flipping it twice the probability of getting one head and one tail would be exactly $1/3$. We say that this funny coin *simulates* both the coins with probabilities of heads $1/2$ and $1/3$. In general we say that p *simulates* q if there is some positive integer n and positive numbers $0 \leq a_i \leq \binom{n}{i}$ for $i = 0, \ldots, n$ such that

$$q = \sum_{i=0}^{n} a_i p^i (1-p)^{n-i}.$$

The main results of the present paper are:

THEOREM 1. *Suppose F is a finite set of rational numbers and $F \subseteq [0,1]$. Then ther is a (sungle) number $p \in [0,1]$ such that p simulates every element of F.*

THEOREM 4. *Suppose $F \subseteq [0,1]$, F is finite, and the ratio of any two nonzero elements of F is rational. Then there is a (single) number $p \in [0,1]$ such that p simulates every element of F.*

COROLLARY 7. *Suppose* $F \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1]$. *Then there is a (single) number* $p \in [0,1]$ *such that* p *simulates every element of* F *iff for some positive integer* N, *all the denominatots of the elements of* F *are powers of* N.

There are still many unanswered questions. E.g. *if* q *and* r *are algebraic numbers between 0 and 1, must there be a number* $p \in [0,1]$ *such that* p *simulates both* q *and* r*?* For example, $1/\sqrt{2}$ and $1/\sqrt{3}$ can be simulated by a single p, or the two numbers $\frac{1}{e}$ and $\frac{1}{e+1}$?

FELADATROVAT

Szerkeszti LACZKOVICH MIKLÓS

Kitűzött feladatok

246. Legyen Φ az X halmazon értelmezett valós értékű és korlátos függvények egy olyan osztálya, amely zárt az egyenletes konvergenciára, és amelyre teljesül, hogy $f, g \in \Phi$ és $c \in \mathbf{R}$ esetén $f+c$, cf, $\max(f,g) \in \Phi$. Legyen $f : X \to \mathbf{R}$, és tegyük fel, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van $m \in \mathbf{N}$ és vannak $g_1, \ldots, g_m \in \Phi$ függvények úgy, hogy valahányszor $x, y \in X$ és $|g_i(x) - g_i(y)| \leq \varepsilon$ minden $i = 1, \ldots, m$-re, akkor $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Mutassuk meg, hogy ekkor $f \in \Phi$.

CSÁSZÁR ÁKOS

Megoldott feladatok

234. feladat. Tetszőleges valós x esetén definiáljuk az $a_n(x)$ sorozatot az alábbi rekurzióval:

$$a_0(x) = x \quad \text{és} \quad a_{n+1}(x) = a_n(x) - \frac{1}{a_n(x)} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

a) Mutassuk meg, hogy ha az $a_n(x)$ sorozat végtelen (azaz $a_n(x) \neq 0$ minden n-re), akkor a sorozat végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagot tartalmaz.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha az $(e_n)_{n=0}^{\infty}$ előjelsorozat végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagot tartalmaz, akkor létezik egy és csak egy olyan x valós szám, amelyre az $a_n(x)$ sorozat végtelen és $a_n(x)$ előjele e_n minden $n \geq 0$-ra.

LACZKOVICH MIKLÓS

Megoldás. Tegyük fel, hogy az $a_n(x)$ sorozat végtelen és $a_k(x) > 0$ minden $k \geq n$-re. Ekkor $a_k(x) > 1$ minden $k \geq n$ esetén, hiszen ha $0 < a_k(x) \leq 1$, akkor $a_{k+1}(x) \leq \leq 0$. Így az $\{a_k(x)\}_{k=n}^{\infty}$ sorozat csökkenő és alulról korlátos, tehát konvergens. Ha $A = \lim_{k\to\infty} a_k(x)$, akkor $A \geq 1$ és $A = \lim_{k\to\infty} a_{k+1}(x) = \lim_{k\to\infty}(a_k(x) - (1/a_k(x))) = A - (1/A) < A$, ami lehetetlen. Ezzel beláttuk, hogy $a_n(x) < 0$ végtelen sok n-re. Hasonlóan bizonyítható, hogy $a_n(x)$ végtelen sokszor pozitív, amivel az a) állítást beláttuk.

A b) állítást bizonyítandó először is megmutatjuk, hogy minden $(e_0, \ldots, e_n)$ véges előjelsorozathoz létezik pontosan egy olyan $z = z(e_0, \ldots, e_n)$ szám, amelyre $a_k(z)$ előjele e_k minden $k = 0, \ldots, n$-re, valamint $a_{n+1}(z) = 0$. Ezt n szerinti indukcióval látjuk be. Ha $n = 0$, akkor könnyen láthatóan $z(1) = 1$ és $z(-1) = -1$ megfelel. Legyen $n > 0$, tegyük fel, hogy az állítás $n-1$-re igaz, és legyen $(e_0, \ldots, e_n)$ adott. Legyen $y = z(e_1, \ldots, e_n)$. Az $x - (1/x) = y$ egyenletnek két, különböző előjelű megoldása van. Könnyű ellenőrizni, hogy ezek közül az e_0 előjelű megoldás lesz az egyetlen, $z(e_0, \ldots, e_n)$-nek választható szám. Az így definiált $z(e_0, \ldots, e_n)$ számokra könnyen láthatóan $a_k(z(e_0, \ldots, e_n)) = z(e_k, \ldots, e_n)$ teljesül minden $0 \leq k \leq n$-re.

Legyen $(e_0, e_1, \ldots)$ olyan előjelsorozat, amelyben végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tag van, és legyen $T_k = \{z(e_k, \ldots, e_n) : n \geq k\}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Vezessük be az $a(x) = x - (1/x)$ $(x \neq 0)$ jelölést. Mivel $a(z(e_k)) = a(\pm 1) = 0$ és $a(z(e_k, \ldots, e_n)) = z(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ ha $n > k$, ezért $a(T_k) = T_{k+1} \cup \{0\}$ teljesül minden k-ra.

Megmutatjuk, hogy a T_k halmazok mindegyike korlátos. Ha $m \geq 1$ és $x > m$, akkor $a_i(x) > 0$ minden $i \leq m$-re. Ebből következik, hogy $a_i(x) < 0$ esetén $x \leq i$. Ha tehát $e_{k+i} = -1$, akkor $a_i(z(e_k, \ldots, e_n)) < 0$, és így $z(e_k, \ldots, e_n) < i$ minden $n \geq k + i$ esetén. Ezzel beláttuk, hogy T_k felülről korlátos, és az alulról való korlátosság ugyanígy bizonyítható.

Ha $|z| \leq M$ teljesül T_{k+1} elemeire, akkor $|z| > 1/(M+1)$ minden $z \in T_k$-ra, hiszen $|z| \leq 1/(M+1)$ esetén $|a_1(z)| > M$ és $a_1(z) \in T_{k+1}$, ami lehetetlen. Legyen z_k a T_k halmaz egy torlódási pontja, ekkor tehát $z_k \neq 0$ minden k-ra. Megmutatjuk, hogy $a_k(z_0)$ torlódási pontja T_k-nak. Ez $k = 0$-ra nyilvánvaló. Ha az állítás k-ra igaz, akkor $a_k(z_0) \neq 0$, hiszen az előbb beláttuk, hogy 0 nem torlódási pontja T_k-nak. Mivel az a függvény folytonos és lokálisan egy-egyértelmű $\mathbf{R} \setminus \{0\}$-n, ebből következik, hogy $a_{k+1}(z_0) = a(a_k(z_0))$ torlódási pontja T_{k+1}-nek. A T_k halmaz definíciójából következően minden $z \in T_k$ szám előjele e_k. Így $a_k(z_0)$ előjele is e_k minden k-ra, és ezzel a b) állításnak az x szám létezésére vonatkozó részét beláttuk.

Az egyértelműséget bizonyítandó tegyük fel, hogy $x \neq y$, az $a_k(x)$ és $a_k(y)$ sorozatok végtelenek, továbbá $a_k(x)$ és $a_k(y)$ előjele megegyezik minden k-ra. Ha $a_k(x) > 0 > a_{k+1}(x)$, akkor $0 < a_k(x) < 1$, továbbá $a_k(y) > 0 > a_{k+1}(y)$, és így $0 < a_k(y) < 1$. Hasonlóan, ha $a_k(x) < 0 < a_{k+1}(x)$, akkor $-1 < a_k(x) < 0$ és $-1 < a_k(y) < 0$. Mivel végtelen sok előjelváltás van, ezzel beláttuk, hogy $|a_k(y) - a_k(x)| < 1$ teljesül végtelen sok k-ra. Másrészt meg fogjuk mutatni, hogy $k \to \infty$ esetén $|a_k(y) - a_k(x)| \to \infty$. Valóban,

$$|a_{k+1}(y) - a_{k+1}(x)| = \left| a_k(y) - a_k(x) - \frac{1}{a_k(y)} + \frac{1}{a_k(x)} \right| =$$

$$|a_k(y) - a_k(x)| \cdot \left| 1 + \frac{1}{a_k(x)a_k(y)} \right| > |a_k(y) - a_k(x)|,$$

hiszen $a_k(x)$ és $a_k(y)$ azonos előjelűek. Mint az imént láttuk, előjelváltásnál $0 < a_k(x) \cdot a_k(y) < 1$, tehát a fenti egyenlőtlenség szerint ekkor $|a_{k+1}(y) - a_{k+1}(x)| > 2|a_k(y) - a_k(x)|$. Mivel végtelen sok előjelváltás van, ebből következik, hogy $|a_k(y) - a_k(x)| \to \infty$. Ez azonban ellentmond annak, hogy $|a_k(y) - a_k(x)| < 1$ végtelen sok k-ra, és ezzel a b) állítást is bebizonyítottuk.

FÖLDVÁRI CSONGOR

235. feladat. Mutassuk meg, hogy az $xy + z = 3$, $xz + y = 1$, $yz + x = 0$ egyenletrendszer a racionális számok teste fölött gyökjelekkel megoldhatatlan, bár van valós x, y, z megoldása.

LACZKOVICH MIKLÓS és PETRUSKA GYÖRGY

Megoldás. Az első és harmadik egyenletet felhasználva kifejezhetjük x-et és z-t y-nal: $x = -3y/(1 - y^2)$, $z = 3/(1 - y^2)$. Ezeket a második egyenletbe helyettesítve az

$$f(y) = y^5 - y^4 - 2y^3 + 2y^2 - 8y - 1 = 0$$

egyenlethez jutunk. A feladat annak kimutatása, hogy az $f(y)$ polinomnak van valós gyöke (hiszen ez az eredeti egyenletrendszernek azonnal adja egy valós megoldását), de e polinom egyik gyöke sem gyökkifejezés a racionális számok teste felett. Az első állítás persze nyilvánvaló, hiszen $f(y)$ páratlanfokú polinom.

Ami a második állítást illeti, azt a közismert kritériumot fogjuk használni, hogy ha egy egész együtthatós, irreducibilis és prímfokú polinomnak pontosan két nem valós gyöke van, akkor Galois-csoportja nem feloldható. Egyszerű függvényvizsgálat mutatja, hogy $f(y)$-nak pontosan három valós gyöke van. Ami az irreducibilitást illeti, a normáltság miatt elég az egészek feletti irreducibilitást bizonyítani. Ha $f(y)$-nak lenne elsőfokú faktora, akkor volna egész gyöke; de $f(n)$ minden n egészre páratlan. Így csak az lenne lehetséges, hogy $f(y)$-nak volna egy $g(y)$ normált másodfokú faktora. $f(0) = -1$ miatt e faktor konstans tagja ± 1. Így $g(y) = y^2 + ay \pm 1$. Behelyettesítéssel azonnal látható, hogy $f(3) = 101$ és $f(-3) = -229$; mindkettő prímszám. $g(3) | f(3)$ és $g(-3) | f(-3)$ alapján $g(3) + g(-3) = 18 \pm 2$ ($= 20$ vagy 16) megegyezne 101 és 229 egy-egy osztójának az összegével, ami lehetetlen.

FRIED ERVIN

236. feladat. Jelöljük A_n-nel azon pontok maximális számát $\mathbf{R}^n$-ben, melyek közül bármely kettő távolsága 0,99 és 1 közé esik. Mutassuk meg, hogy alkalmas $c > 1$-gyel $A_n > c^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

LACZKOVICH MIKLÓS

Megoldás. Legyenek ε és a rögzített, 0 és 1 közé eső számok, és legyen $\mathcal{A}_n$ az $\{1, \ldots, n\}$ halmaz $[an]$-elemű részhalmazainak egy maximális olyan rendszere, amelyben bármely két halmaznak εan-nél kevesebb közös eleme van. Ha $H \in \mathcal{A}_n$, akkor legyen $x_H = (h_1, \ldots, h_n)$, ahol $h_i = 1$ ha $i \in H$ és $h_i = 0$ ha $i \notin H$. Könnyű ellenőrizni, hogy $H, K \in \mathcal{A}_n$, $H \neq K$ esetén

$$\sqrt{2[an] - 2\varepsilon an} \leq |x_H - x_K| \leq \sqrt{2[an]}.$$

Legyen $\eta = 1/\sqrt{2[an]}$ és $A = \{\eta \cdot x_H : H \in \mathcal{A}_n\}$, ekkor $1 - \varepsilon < |a - b| \leq 1$ teljesül minden $a, b \in A$, $a \neq b$-re. Így elég megmutatni, hogy minden ε-hoz megválaszthatjuk a-t úgy, hogy alkalmas $c > 1$-gyel $|\mathcal{A}_n| > c^n$ teljesül minden elég nagy n-re.

Az $\mathcal{A}_n$ halmazrendszer maximalitásából következik, hogy minden $[an]$-elemű $B \subset \{1, \ldots, n\}$ halmazhoz van olyan $H \in \mathcal{A}_n$, amelyre $|B \cap H| \geq [\varepsilon an]$. Nyilvánvaló, hogy egy adott $H \in \mathcal{A}_n$-hez legfeljebb

$$\binom{[an]}{[\varepsilon an]}\binom{n-[\varepsilon an]}{[an]-[\varepsilon an]}$$

ilyen B létezik, amiből azt kapjuk, hogy

$$|\mathcal{A}_n| \cdot \binom{[an]}{[\varepsilon an]}\binom{n-[\varepsilon an]}{[an]-[\varepsilon an]} \geq \binom{n}{[an]}. \tag{1}$$

Ezt felhasználva be fogjuk látni, hogy ha a elég kicsi, akkor $|\mathcal{A}_n| > c^n$ valamely $c > 1$-gyel. Ehhez szükségünk lesz az elemi $(m/e)^m < m! < m \cdot (m/e)^m$ $(m \geq 7)$ becslésre. Először is megmutatjuk, hogy ha $x > 8$, k egész, és $|x-k| \leq 1$, akkor

$$(x/e)^x/x < k! < 3x^2(x/e)^x.$$

Valóban,

$$k! < \left(\frac{k}{e}\right)^k \cdot k \leq \left(\frac{x+1}{e}\right)^{x+1}(x+1) =$$
$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}\left(\frac{x}{e}\right)^{x+1}(x+1) < 8x\left(\frac{x}{e}\right)^{x+1} < 3x^2\left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

Az alsó becslés hasonlóan adódik. Ha most (1)-ben a binomiális együtthatókat kifejezzük a megfelelő faktoriálisokkal, majd ezeket a fenti egyenlőtlenségek segítségével megbecsüljük, akkor azt kapjuk, hogy $|\mathcal{A}_n| \geq Kn^M C^n$, ahol a K és M konstansok csak ε-tól és a-tól függnek (tehát n-től nem), továbbá

$$C = \frac{\varepsilon^{\varepsilon a}(1-\varepsilon)^{2(a-\varepsilon a)}}{(1-\varepsilon a)^{1-\varepsilon a} a^{\varepsilon a}}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy $\lim_{a \to +0} C^{1/a} = \infty$, tehát elég kis a-ra $C > 1$. Ha a-t és C-t ily módon rögzítjük, és választunk egy $1 < c < C$ számot, akkor azt kapjuk, hogy $|\mathcal{A}_n| > c^n$ minden elég nagy n-re.

LACZKOVICH MIKLÓS

Megjegyzés. A feladat kitűzőjének (és megoldójának) csak utólag jutott tudomására, hogy a feladat állítása Erdős Pál és Füredi Zoltán tétele. Közös dolgozatukban (P. Erdős and Z. Füredi, The greatest angle among n points in the d-dimensional Euclidean space, *Annals of Discrete Mathematics* 17 (1983), 275-283) számos érdekes eredmény található azon szögek maximumáról, amelyeket n pont határoz meg. A feladat állítása azzal egyenértékű, hogy alkalmas $c = c(\varepsilon) > 1$-re $\mathbf{R}^n$-ben meg lehet adni c^n pontot úgy, hogy az általuk meghatározott szögek mindegyike kisebb $(\pi/3) + \varepsilon$-nál. Erdős és Füredi azt is megmutatták, hogy ha $0 < c < 1$, akkor $\mathbf{R}^n$-ben bármely $(1 + c)^n$ pont között van három olyan, hogy az általuk meghatározott szög nagyobb $(\pi/3) + (c/4) - o(1)$-nél.

BESZÁMOLÓ AZ 1992-ES PÁRIZSI ELSŐ EURÓPAI MATEMATIKAI KONGRESSZUSRÓL

KRÁMLI ANDRÁS

1992. július hatodika és tizedike között rendezték meg Párizsban az első Európai Matematikai Kongresszust. Dolgozatomban az elhangzott előadások egy részéről — szubjektív válogatás alapján — kívánok tömören beszámolni. A kongresszusnak két magyar előadója volt: *Babai László* és *Laczkovich Miklós*: mindkettőjük előadása (az áttetsző bizonyításokról, illetve a paradox felbontásokról) nagy sikert aratott. Részletesebb ismertetésükre azért nem térek ki, mert a hazai matematikus társadalom jól ismeri mindkét matematikusunk munkásságát.

Elsősorban a matematikai fizikai előadásokról szerzett benyomásaimat foglalom össze; a kongresszuson elhangzott 50 előadás fele valamilyen formában kapcsolódott a fizikához, ami azt bizonyítja, hogy az elmúlt századokhoz hasonlóan a matematika fejlődésének jelenleg is a fizika a legjelentősebb „külső" forrása. A matematikai fizikai előadásokat méltó keretbe foglalta *M. Donaldson* nyitó- és *V. I. Arnold* záróelőadása.

Donaldsont 1986-ban Fields-éremmel tüntették ki a 4-sokaságok leírása terén elért eredményeiért. Bebizonyította, hogy léteznek úgynevezett egzotikus négydimenziós euklideszi terek, azaz olyan terek, amelyek topológiailag ekvivalensek, de nem diffeomorfak (nincs olyan inverzével együtt sima leképezés ami egymásba átvinné őket). Ilyen terek csak négy dimenzióban léteznek, érdekességük, hogy van olyan kompakt részhalmazuk, amelyet nem tartalmazhat egyetlen differenciálhatóan beágyazott 3-gömbfelület belseje sem. Módszereit a matematikai fizikából „kölcsönözte": tömören azt mondhatjuk, hogy a Maxwell-egyenletek nem-lineáris általánosításaiként felfogható Yang–Mills-egyenletekhez tartozó variációs probléma megoldásai — az instantonok — paramétertere (moduláris tér) hordozza a geometriailag érdekes információt. A differenciálegyenletek elméletének geometriai alkalmazásában ez a módszer mindeddig egyedülálló. Fizikus nyelvre lefordítva

Donaldson elméletének lényege a részecske–mező kettősség. Emellett Donaldson olyan új invariánsokat vezetett be, amelyekkel a topológikusan ekvivalens, de nem diffeomorf 4-sokaságok megkülönböztethetők. Donaldson előadásában összefoglalta az elméletben 1986 óta elért legfontosabb eredményeket; ezeknek két fő irányuk van:

1. az invariánsok kiszámítási módszereinek fejlesztése;

2. újabb alkalmazások a 4-sokaságok, és a beágyazott 3-sokaságok topológiai tulajdonságainak vizsgálatára.

Arnold ismertette a Vasziljev-féle diszkrimináns elméletet, amely több meglepő matematikai alkalmazás mellett lehetőséget teremt a csomóknak a Jones polinomokkal megadott topológiai osztályozásnál finomabb topológiai osztályozására (Jones 1990-ben kapott Fields-érmet a csomók — nem teljes — osztályozásáért). A diszkriminánsok — tömören szólva — függvénytereknek olyan részhalmazai, amelyek a többieknél „szingulárisabb" objektumokból (függvények, sokaságok, leképezések) állnak.

M. Kontsevich eredményei szinte lefedik a modern kvantumtérelmélet Jones és Arnold által körvonalazott szerteágazó matematikai apparátusát.

M. Berry a kvantumkáosz elméletenek egyik úttörője: a hetvenes évek óta vizsgálja a kérdéskört. A kvantumkáosz elméletének alapfeladata a kaotikusan viselkedő klasszikus mechanikai rendszerekhez rendelt Schrödinger-operátorok spektrális tulajdonságainak leírása: annak az általánosan elfogadott hipotézisnek az igazolása, illetve cáfolata konkrét mechanikai rendszerekre, hogy az energia-spektrum eloszlása a véletlen mátrixok spektrumának eloszlásához (Wigner-eloszlás) hasonlóan viselkedik. Ez a jelenség jelenleg a leghatékonyabban a Riemann-féle számelemélet ζ-függvénynek dinamikai analogonjai segítségével tanulmányozható. M. Berry az e tárgykörben elért legújabb eredményeit ismertette. Számos ilyen analogont definiáltak, ezek a kvantummechanika mellett a statisztikus mechanikában is fontos szerepet játszanak . Példaként álljon itt a -1 görbületű kompakt felületeken a geodétikus áramláshoz rendelt Selberg-féle ζ-függvény definíciója: Legyen P a γ periodikus geodétikusok halmaza, $T(\gamma)$ a γ hossza.

$$\zeta(s) = \prod_{\gamma \in P} (1 - \exp(-sT(\gamma)))^{-1}$$

A $Z(s) = \left[\prod_{n=0}^{\infty} \zeta(s+n) \right]^{-1}$ függvény analitikus egész függvény, melynek „nemtriviális" zérushelyei szoros kapcsolatban állnak a felületen értelmezett Laplace–Beltrami-operátor (a szabad részecske Schrödinger-operátora) sajátértékeivel.

D. Zagier előadásában a klasszikus számelméleti ζ-függvény speciális helyeken történő kiértékelésének algebrai geometriai alkalmazásáról beszélt, demonstrálva a ζ-függvény „univerzális" jelentőségét.

J. Fröhlich a fizikai mértékelméletben (gauge elmélet) alapvető fontosságú Kac–Moody algebrák reprezentációelméletének módszereivel ad magyarázatot az 1980-ban felfedezett kvantum Hall-effektusra. *Hall* a múlt században vizsgálta a mágneses térbe helyezett, a térre merőleges irányú árammal átjárt vezető ellenállását a fenti irányokra merőleges irányban. Alacsony hőmérsékleten, erős mágneses térben az ún. Hall ellenállás nem a klasszikus — lineáris — módon függ a térerősségtől, hanem lépcsősfüggvényszerűen, és a lépcsősfüggvény ugrásai a Planck állandó jól meghatározott többszörösei.

Michèle Vergne előadása — a Lie-csoportok reprezentációelméletében elért új eredményeiről — közvetve szintén a matematikai fizikához kapcsolódott.

A fentiekben ismertetett előadások a kvantumfizika matematikai megalapozásához kapcsolódtak. Végül két olyan előadásra hívom fel a figyelmet, amelyek a klasszikus fizikai káosz elméletéhez járultak hozzá.

J.-M. Bony a Boltzmann-egyenlet egy olyan változatára igazolja a Cauchy-feladat időben globális megoldásának létezését, amelyben a sebességek értékkészlete diszkrét, az ütközési integrált egy Markov-típusú valószínűségi átmenet helyettesíti. Az eredeti Boltzmann-egyenlet — a közepesen ritkított gázok statisztikus mechanikájának alapegyenlete — több mint 100 éve ellenáll a matematikusok megoldási kisérleteinek: csak az egydimenziós változatra létezik hasonló eredmény, három dimenzióban csak időben lokális megoldás létezését sikerült igazolni.

J.-C. Yoccoz a látványos Mandelbrot-halmazok révén nagy népszerűségre szert tett komplex dinamikai rendszerekről adott elő.

Beszámolómat azzal az örömteli magyar vonatkozású eseménnyel zárom, hogy *Tardos Gábor* kapta a fiatal matematikusoknak Párizs polgármestere által adományozott díjak egyikét. Az indoklás kiemeli, hogy Tardos Gábor jelentős eredményeket ért el algoritmuselméleti és algebrai kérdések vizsgálatában, részben vagy teljesen megoldva számos ismert nyitott problémát.

BESZÁMOLÓ AZ EURÓPAI MATEMATIKAI TÁRSULAT VÁLASZTMÁNYÁNAK 1992-ES PÁRIZSI ÜLÉSÉRŐL

KATONA GYULA

Az ülésen társulatunk két jelentős diplomáciai sikert ért el. Egyrészt *Márki Lászlót* az Európai Matematikai Társulat alelnökévé választották, másrészt elfogadták jelentkezésünket (Barcelona ellenében) a második Európai Kongresszus budapesti, 1996-os megrendezésére. Ez a nagy kitüntetés a magyar matematika nagyszerű hagyományainak és a jól megrendezett konferenciáknak köszönhető. Ugyanakkor hatalmas feladat. Csak tagjaink aktív segítségével tudjuk jól megszervezni a két-háromezer fős kongresszust. Kérek mindenkit, akinek a szervezéssel kapcsolatos ötletei vannak, vagy részt tud venni a szervezés munkájában, jelentkezzen a Társulat főtitkár-helyettesénél, Kulcsár Ceciliánál.

JELENTÉS AZ 1992. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS MATEMATIKAI EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat a verseny megrendezésére az alábbi bizottságot kérte fel: Császár Ákos (elnök), Fejes Tóth László, Freud Róbert, Halász Gábor, Kiss Emil, Komjáth Péter, Kós Géza (titkár), Laczkovich Miklós, Michaletzky György, Ruzsa Imre, T. Sós Vera. A bizottság munkájából egyéb elfoglaltságai miatt kimentette magát Fejes Tóth László és Ruzsa Imre.

A versenybizottság 10 feladatot (lásd alább) tűzött ki, melyek megoldására október 16. és 26. között 10 teljes nap állt a versenyzők rendelkezésére. Az első feladat Hajnal Andrástól, a második Erdős Páltól, a harmadik Fried Ervintől, a negyedik Bárány Imrétől és Károlyi Gyulától, az ötödik Totik Vilmostól, a hatodik Halász Gábortól, a hetedik Juhász Istvántól, a nyolcadik Császár Ákostól, a kilencedik Károlyi Gyulától és Lovász Lászlótól, a tizedik Komlós Jánostól és Ajtai Miklóstól származik.

A tíz feladatra 17 versenyző összesen 77 megoldást adott be. A 10. feladat bizonyult a legnehezebbnek, nem érkezett rá helyes megoldás. Egy-egy versenyző oldotta csak meg az 1. és a 6. feladatot. A 3. feladatra egy lényegében helyes és egy hiányos megoldás érkezett. Ketten-ketten oldották meg lényegében a 4. és a 8., hatan a 7. feladatot. A 2., 5. és 9. feladatot a versenyzőknek több, mint a fele megoldotta.

A versenybizottság november 17-i ülésén döntött a díjak odaítéléséről.

I. díjat és 6000 Ft. pénzjutalmat nyert

Bíró András, az ELTE IV. éves hallgatója.

II. díjat és 4000-4000 Ft. pénzjutalmat nyert

Prokaj Vilmos, az ELTE V. éves hallgatója

Vu Ha Van, az ELTE IV. éves hallgatója.

III. díjban és 2000-2000 Ft. pénzjutalomban részesül

Benczúr András,

Drasny Gábor

Keleti Tamás, mindhárman az ELTE V. éves hallgatói.

Indoklás

Bíró András hibátlan megoldást adott az 1., 2., 5., 7., 8. és 9. feladatra. A 3. feladatra adott megoldásában az egyik állítás bizonyítása hiányos. A 10. feladatban szereplő sorozatról csak annyit bizonyított be, hogy monoton nő.

Prokaj Vilmos jó, illetve lényegében jó megoldást adott a 2., 5., 7. és 9. feladatra, és a 3. feladat megoldásában is csak könnyen javítható technikai hiányosságok vannak. A 8. feladatban egy esettel nem foglalkozik.

Vu Ha Van a 2., 4., 5., 6., 7., 8., 9. és 10. feladatra adott be megoldást, ezek közül a 2., 4., 5., 6. és 9. teljes. A 8. feladatban csak a véges alaphalmaz esetével foglalkozik. A versenyzők közül egyedül ő oldotta meg a 6. feladatot.

Benczúr András az 1., 2., 4., 5., 6., 7., 8. és 9. feladatra adott be megoldást. Ezek közül a 2., 4., 7. és 8. helyes, illetve lényegében helyes, míg az 5. feladat megoldásában javítható hiba van, amely a megoldás menetét nem befolyásolja.

Drasny Gábor lényegében helyesen megoldotta az 5., 7. és 9. feladatot, és egy számítási hibából eredő minimális hiányosságtól eltekintve a 2. feladatot. Ezen kívül az 1. feladat könnyebbik állítását is bebizonyította, és megmutatta, hogy a 10. feladatban szereplő sorozat monoton nő. A 8. feladatban csak a véges alaphalmaz esetével foglalkozik.

Keleti Tamás megoldotta a 2., 7. és 9. feladatot. Az 5. feladatban ugyanazt a javítható hibát követte el, mint Benczúr András. Az 1. feladatban ő is bebizonyította a könnyebbik állítást. A 8. feladat megoldásában helyesen sejti meg az eredményt, de a nehezebbik irány bizonyítása hibás. A 10. feladatban bebizonyította, hogy a sorozat monoton nő.

Dícséretben és 1000-1000 Ft. jutalomban részesül *Hajdú Gábor,* az ELTE V. éves és *Kondacs Attila,* az ELTE III. éves hallgatója.

Hajdú Gábor az 1., 2., 4., 5., 7. és 9. feladatra adott be megoldást. Jól oldotta meg a 2., 5. és a 9. feladatot (az ötödiket kétféleképpen). Az 1. feladatban a könnyebbik irányt jól bizonyítja, a megfordítást viszont egy hibás ellenpéldával próbálja cáfolni. A 4. feladatban csak az alsó becslést bizonyítja.

Kondacs Attila a 2., 5., 6., 7., 8. és 9. feladatra adott be megoldást, ezek közül a 2., 5. és 9. helyes. A 8. feladatban csak a véges alaphalmaz esetével foglalkozik.

Könyvjutalomban részesül *Csörnyei Marianna*, a Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium III. osztályos tanulója, aki a mezőny egyetlen középiskolás résztvevője volt, megoldotta az 5. feladatot és a 9. feladatban is megtalálta a helyes gondolatmenetet.

Az 1992. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny feladatai

1. Készítsünk gráfot a megszámlálható rendszámok hármasainak halmazán mint szögponthalmazon a következőképpen. $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ és $\{\alpha', \beta', \gamma'\}$ össze van kötve, ha $\alpha < \beta < \alpha' < \gamma < \beta' < \gamma'$ vagy $\alpha' < \beta' < \alpha < \gamma' < \beta < \gamma$. Bizonyítsuk be, hogy az alaphalmaz egy részhalmaza akkor és csak akkor feszít ki megszámlálható kromatikus részgráfot, ha rendtípusa — a lexikografikus rendezésben — kisebb, mint ω_1^3.

2. Legyen p prím és $a_1, a_2, ..., a_k$ páronként inkongruensek modulo p. Bizonyítsuk be, hogy az a_i-k közül kiválasztható $[\sqrt{k-1}]$ darab úgy, hogy a kiválasztottak közül akárhány különbözőt összeadva sohasem kapunk p-vel osztható számot.

3. Nevezzünk egy (nem triviális) hálóosztályt álvarietásnak, ha zárt a homomorf kép, direkt szorzat és konvex rész képzésére. Bizonyítsuk be, hogy a legkisebb disztributív álvarietás nem definiálható elsőrendű formulahalmazzal.

4. Mutassuk meg, hogy léteznek c_1 és c_2 pozitív konstansok úgy, hogy tetszőleges $n \geq 3$ esetén, valahányszor T_1 és T_2 két fa az $X = \{1, 2, ..., n\}$ szögponthalmazon, létezik olyan $f : X \to \{-1, +1\}$ függvény, melyre

$$\left| \sum_{x \in P} f(x) \right| < c_1 \log n$$

tetszőleges P útra, mely T_1-nek vagy T_2-nek részgráfja, de $c_2 \log n / \log \log n$ felső korláttal már nem igaz hasonló állítás.

5. Igazoljuk, hogy ha az a_i-k különböző természetes számok, akkor

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \prod_{k \neq j} \frac{a_j + a_k}{a_j - a_k} \tag{1}$$

négyzetszám.

6. Legyen $E \subset [0,1]$ Lebesgue-mérhető halmaz, amelynek Lebesgue-mértéke, $|E| \leq \frac{1}{2}$. Legyen

$$h(s) = \int_{\overline{E}} \frac{dt}{(s-t)^2},$$

ahol $\overline{E} = [0,1] \setminus E$. Igazoljuk, hogy van olyan $t \in \overline{E}$, amelyre

$$\int_E \frac{ds}{h(s)(s-t)^2} \leq c|E|^2$$

valamely c abszolút konstanssal.

7. Bizonyítandó, hogy ha az X topologikus tér minden diszkrét alterének lezártja kompakt, akkor X maga is kompakt.

8. Legyen $\mathcal{F}$ X-beli szűrőknek olyan halmaza, hogy ha $\sigma, \tau \in \mathcal{F}$ és $S \in \sigma$, $T \in \tau$ esetén $S \bigcap T \neq \emptyset$, akkor $\sigma \bigcap \tau \in \mathcal{F}$. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{F}$ kompatibilis egy X-beli topológiával, ha $x \in X$ pontosan akkor érintkezési pontja $A \subset X$-nek, amikor van olyan $\sigma \in \mathcal{F}$, hogy $x \in S$ és $S \bigcap A \neq \emptyset$ minden $S \in \sigma$-ra.

Mikor van ilyen kompatibilis $\mathcal{F}$ X-nek ama topológiájához, amelyben zártak X és X-nek véges részhalmazai?

9. Legyen K olyan korlátos, d-dimenziós konvex poliéder, amely nem szimplex, P pedig K-nak egy pontja. Mutassuk meg, hogy ha a $P_1, \ldots, P_k$ csúcsok nem esnek K-nak ugyanarra a lapjára, akkor közülük valamelyik elhagyható úgy, hogy K maradék csúcsainak konvex burka még mindig tartalmazza P-t.

10. Az egységnégyzetben egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint elhelyezünk n pontot. A G_n gráf csúcsai legyenek ezek a pontok. Két pontot akkor kötünk össze éllel, ha az őket összekötő szakasz meredeksége nemnegatív. Jelölje M_n azt az eseményt, hogy a G_n gráfnak van 1-faktora. Bizonyítsuk be, hogy $\lim_{n \to \infty} P(M_{2n}) = 1$.

A megoldások ismertetése

Az 1. feladat megoldása

(a) Legyen A részhalmaza ω_1 hármasai halmazának. Könnyű látni, hogy A típusa a lexikografikus rendezés szerint ω_1^3 éppen akkor, ha

$$\exists^*\alpha\,\exists^*\beta\,\exists^*\gamma\,(\{\alpha,\beta,\gamma\}\in A),$$

ahol $\exists^*$ a „létezik megszámlálhatónál több" kvantor. Innen azonnal következik, hogy megszámlálható sok ω_1^3-nél kisebb rendtípusú halmaz egyesítése is ω_1^3-nél kisebb rendtípusú. A feladat egyik feléhez elég tehát azt bizonyítani, hogy ha A ω_1^3 típusú, akkor van benne él. Legyen $\alpha<\beta<\omega_1$ olyan, hogy $\exists^*\gamma(\{\alpha,\beta,\gamma\}\in A)$. Legyen $\alpha'>\beta$ olyan, hogy $\exists^*\beta'\exists^*\gamma'(\{\alpha',\beta',\gamma'\}\in A)$. Ezután találhatunk $\gamma>\alpha'$-t, amire $x=\{\alpha,\beta,\gamma\}\in A$, végül választunk $\gamma<\beta'<\gamma'$-t, amire $x'=\{\alpha',\beta',\gamma'\}\in A$ s ekkor x, x' össze vannak kötve.

(b) Ha A rendtípusa $<\omega_1^3$, a fenti észrevétel szerint

$$\forall^*\alpha\,\forall^*\beta\,\forall^*\gamma\,(\{\alpha,\beta,\gamma\}\notin A),$$

ahol $\forall^*$ a „minden elég nagyra" kvantor. Mivel azonos első koordinátájú pontok nincsenek összekötve, a megszámlálható sok „kivételes" első koordináta megszámlálható sok független halmazt határoz meg, ezért rögtön feltehetjük, hogy

$$\forall\alpha\,\forall^*\beta\,\forall^*\gamma\,(\{\alpha,\beta,\gamma\}\notin A).$$

hogy van olyan $f(\alpha)$ és $g(\alpha,\beta)$ függvény, hogy $\beta>f(\alpha)$, $\gamma>g(\alpha,\beta)$ esetén $\{\alpha,\beta,\gamma\}\notin A$.

A Löwenheim–Skolem tétel ismételt alkalmazásával találhatunk olyan $\{\delta_\xi:\xi<\omega_1\}$ növő rendszámsorozatot, hogy $\delta_0=0$, $\delta_\xi=\sup\{\delta_\zeta:\zeta<\xi\}$ limesz ξ esetére, továbbá $\alpha<\delta_\xi$-re $f(\alpha)<\delta_\xi$ és $\alpha,\beta<\delta_\xi$-re $g(\alpha,\beta)<\delta_\xi$. Ha most $B_\xi=\delta_{\xi+1}-\delta_\xi$, akkor $\{B_\xi:\xi<\omega_1\}$ intervallumokra való partíciója ω_1-nek és $\{\alpha,\beta,\gamma\}\in A$ esetén α, β, γ nem lehet három különböző B_ξ-ben.

Nevezzük $\{\alpha,\beta,\gamma\}\in A$-t első típusúnak, ha $\{\alpha,\beta,\gamma\}\in B_\xi$ valamely ξ-re. Nevezzük második vagy harmadik típusúnak, ha $\alpha,\beta\in B_\eta$, $\gamma\in B_\xi$, illetve $\alpha\in B_\eta$, $\beta,\gamma\in B_\xi$ alkalmas $\eta<\xi$-re. Elég külön-külön jólszínezni az egyes típusokat. Az első típusú hármasok jólszínezéséhez elég a halmazokat úgy színezni, hogy az egy B_ξ-ben levő (megszámlálható sok) hármast különböző színekkel színezzük. Ha $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ második típusú hármas, $\alpha,\beta\in B_\eta$, $\gamma\in B_\xi$, $\eta<\xi$-re, színezzük $h(\alpha,\beta,\gamma)=F(\eta,\xi)$-vel , ahol az F függvény olyan tulajdonságú, hogy $\eta_0<\eta_1<\eta_2$-re $F(\eta_0,\eta_1)\neq F(\eta_1,\eta_2)$.

Ilyen F a következőképpen kapható: legyenek $\{r_\eta:\eta<\omega_1\}$ különböző valós számok, $\{q_i:i<\omega\}$ a racionális számok felsorolása. Ezután $\eta_0<\eta_1$-re, ha q_i r_{η_0}

és r_{η_1} között van, legyen $F(\eta_0, \eta_1) = 2i$ illetve $2i+1$ aszerint, hogy $r_{\eta_0} < r_{\eta_1}$ illetve fordítva.

A harmadik típusú hármasok színezése hasonlóan adható meg.

Bíró András megoldása alapján.

Részeredményt ért el Drasny Gábor, Keleti Tamás és Hajdú Gábor.

A 2. feladat megoldása

Az állítás $k \le 4$-re nyilván igaz. Legyen $t = k-1$. Feltehető, hogy $(a_i, p) = 1$ ha $i = 1, 2, ..., t$. Szorozzuk végig mindegyik a_i-t $1, 2, ..., p-1$-gyel és tekintsük a legkisebb nemnegatív maradékukat modulo p.

Belátjuk, hogy van olyan $1 \le j \le p-1$, amelyre $ja_1, ..., ja_t$ maradékai közül legalább $[\sqrt{t}]$ darab nagyobb mint 0 és kisebb mint $[p/\sqrt{t}]+1$. Ezek az a_i-k meg fognak felelni, hiszen a ja_i-k maradékai pozitívak, $(j,p) = 1$ miatt különbözőek és összegük legfeljebb

$$[\frac{p}{\sqrt{t}}] + \left([\frac{p}{\sqrt{t}}] - 1\right) + \left([\frac{p}{\sqrt{t}}] - 2\right) + ... < [\sqrt{t}] \cdot [\frac{p}{\sqrt{t}}] \le p.$$

tehát sehány ja_i összege sem lehet p-vel osztható, amiből következik, hogy az a_i-k is jók.

Visszatérve a bizonyítandó megoldáshoz; ha nem lenne megfelelő j, akkor minden j-re kevesebb, mint $[\sqrt{t}]$ darab ja_i maradék esne az adott határok közé, és így összesen is legfeljebb $(p-1)([\sqrt{t}]-1)$-szer fordulnának elő ilyen maradékok. Másrészt bármely i-re $(a_i, p) = 1$ miatt ja_i pontosan $[\sqrt{t}]$-szer esik az adott határok közé, az összes ja_i pedig pontosan $[\sqrt{t}] \cdot (p-1)$-szer. Mivel ez nagyobb, mint az előbb kapott becslés, ellentmondásra jutottunk.

Benczúr András, Bíró András, Drasny Gábor, Hajdú Gábor, Hegedűs László, Keleti Tamás, Kondacs Attila, Prokaj Vilmos és Vu Ha Van megoldása alapján.

Részeredményt ért el László Ákos.

A 3. feladat megoldása.

(A "komolyabb" lépések Ralph McKenzie-től valók.) Tetszőleges $\mathcal{K}$ hálóosztály esetén jelölje $H(\mathcal{K})$, $C(\mathcal{K})$ és $P(\mathcal{K})$ megfelelően a $\mathcal{K}$-beli hálók homomorf képeinek, konvex részeinek és direkt szorzatainak az osztályát. Könnyű belátni, hogy a $\mathcal{K}$-t tartalmazó legkisebb álvarietás $H(C(P(\mathcal{K})))$. Mivel minden disztributív hálónak homomorf képe a kételemű $\mathbf{2}$ háló, ezért a legkisebb disztributív álvarietás $\mathcal{K}_0 = H(C(P(\mathbf{2})))$.

Tegyük fel, hogy a korlátos L háló eleme $\mathcal{K}_0$-nak. Ez azt jelenti, hogy van olyan $L_1 \in C(P(\mathbf{2}))$, $L_2 \in P(\mathbf{2})$, hogy L az L_1-nek homomorf képe, L_1 az L_2-nek konvex része. Legyen 0 és 1 az L háló legkisebb és legnagyobb eleme. Ezek előállnak, mint egy-egy L_1-beli 0_1 és 1_1 elem képe. Mivel az ezek meghatározta intervallum is konvex, ezért eleve feltehető, hogy ezek L_1 korlátelemei. Legyen $L_2 = \prod_{i \in I} \mathbf{2}_i$ és legyen $J = \{j \in I \mid \pi_j(0_1) < \pi_j(1_1)\}$. A konvexitásból azonnal következik, hogy $L_1 = \prod_{j \in J} \mathbf{2}_j$. Ebből következik, hogy L kételemű hálók direkt szorzatának, azaz a J halmaz részhalmazai hálójának homomorf képe.

1. állítás: Egy megszámlálható halmaz véges és kovéges részhalmazainak B_0 hálója nincs benne $\mathcal{K}_0$-ban.

Mivel B_0 korlátos, ezért csak úgy lehet eleme $\mathcal{K}_0$-nak, hogy létezik egy φ : $L_1 \to B_0$ homomorfizmus. Legyenek $a_1, ..., a_n, ...$ a B_0 atomjai, és legyenek az $A_1, ..., A_n, ... \subset J$ halmazok úgy választva, hogy $\varphi(A_i) = a_i$ minden természetes i-re. Az $A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_2 \setminus A'_1$, $A'_3 = A_2 \setminus (A'_1 \cup A'_1)$,... választással egy olyan $A'_1, ..., A'_n, ... \subset J$ részhalmaz sorozatot kapunk, amely az előző sorozathoz képest azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy elemei diszjunktak. Legyen $A^* = \cup A'_{2i+1}$ és $A^+ = \cup A_{2i}$, ahol i a természetes számokon fut végig. Mivel ezek egymás komplementerei, ezért a φ-nél vett a^* és a^+ képük is egymás komplementerei. Mivel mindegyikük végtelen sok atomnak felső korlátja, ezért mindegyikük csak kovéges lehetne; de kovégesek metszete nem lehet az üres halmaz.

2. állítás: A megszámlálható sok elemmel generált B_1 szabad Boole-háló nem eleme $\mathcal{K}_0$-nak.

B_0 a B_1-nek homomorf képe. Ha tehát B_1 a $\mathcal{K}_0$-ban volna, akkor a homomorfizmusra való zártság miatt B_1 is benne lenne, ami az 1. állítás miatt lehetetlen.

3. állítás: Tekintsük egy megszámlálható halmaz összes részhalmazainak Boole-algebráját. Ebben egy kongruenciarelációt definiálunk a következőképpen: két halmazt akkor sorolunk egy osztályba, ha szimmetrikus differenciájuk véges. Az eszerinti B_2 faktorháló egy olyan Boole-háló, amely $\mathcal{K}_0$-hoz tartozik és bármely két összehasonlítható eleme között van egy tőlük különböző (azaz a háló sűrű).

Az állítás első része triviális, hiszen B_2 kételemű hálók direkt szorzatának faktora. Tegyük fel most, hogy U és V olyan nem kongruens halmazok, amelyekre $U < V$ a faktorhálóban. Ez azt jelenti, hogy alkalmas véges P és U-hoz diszjunkt végtelen Q halmazra $V \cup P = U \cup Q$. Legyen $R \cup S$ a Q két végtelen diszjunkt halmazra való felbontása. Ekkor $U < U \cup R < V$ teljesül a faktorhálóban.

4. állítás: B_1 és B_2 elemien ekvivalensek.

B_2 egy sűrű Boole-háló. Ezek a tulajdonságok megfogalmazhatóak elsőrendű formulahalmazzal. A Leszálló Lövenheim–Skolem tétel szerint elemien ekvivalens egy megszámlálható sűrű Boole-hálóval. Mivel pedig bármely két megszámlálható sűrű Boole-háló izomorf és a megszámlálhatóan generált szabad Boole-háló is sűrű, ezért a jelzett elemi ekvivalencia fennáll.

B_1 és B_2 ugyanazokat az elsőrendű axiómákat elégítik ki, egyikük eleme $\mathcal{K}_0$-nak, másikuk nem, tehát a hálóosztály nem definiálható elsőrendű formulahalmazzal.

Érdemes megjegyezni, hogy a Boole-hálók mint hálók álvarietást alkotnak. Valószínű, hogy e háló és $\mathcal{K}_0$ között végtelen sok álvarietás van, de hogy ezek számossága megszámlálható-e, az nem világos.

Lényegében megoldotta Prokaj Vilmos. Részeredményt ért el Bíró András.

A 4. feladat megoldása.

a) Tetszőleges T fához definiáljuk az X halmaz egy π_T permutációját. Legyen $\pi_T(1) = 1$. Tegyük fel, hogy $\pi_T(1), \ldots, \pi_T(s)$ már definiált ($s < n$). Ekkor létezik maximális $r \leq s$ úgy, hogy $\pi_T(r)$-nek van $\pi_T(1), \ldots, \pi_T(s)$-től különböző szomszédja. Jelölje $\pi_T(r)$-nek ezeket a szomszédait $v_1(s), \ldots, v_{i_s}(s)$. Hagyjuk el T-nek $\pi_T(r)v_j(s)$ éleit ($1 \leq j \leq i_s$) és jelölje $T_j(s)$ az így kapott gráf $v_j(s)$-t tartalmazó komponensét; ez is nyilván egy fa. Rögzítsük azt az indexet, melyre $T_j(s)$ csúcsainak száma maximális, és legyen $\pi_T(s+1) = v_j(s)$.

A $\pi \in S_X$ permutáció intervallumai alatt a $\{\pi(i), \pi(i+1), \ldots, \pi(j)\}$ típusú halmazokat értjük, ahol $1 \leq i \leq j \leq n$.

Állítás: A T fa minden részútja $O(\log n)$ darab π_T-intervallum diszjunkt uniója.

Bizonyítás. Egy utat hívjunk monotonnak, ha csúcsai mind különböző távolságra vannak az 1 ponttól, nyilván minden út legfeljebb két monoton út diszjunkt uniója. Indukcióval pedig könnyen bebizonyítható, hogy

1. lemma. Ha P monoton részútja T-nek, akkor P diszjunkt uniója π_T legfeljebb $[\log(n+1)]$ számú intervallumának. (A bizonyításhoz nyilván feltehető, hogy a P út egyik végpontja 1.)

Tehát a feladat első részének bizonyításához elég megmutatni, hogy ha $\pi, \sigma \in S_X$, akkor létezik olyan $f : X \to \{-1, +1\}$, hogy π és σ minden I részintervallumára

$$\left| \sum_{x \in I} f(x) \right|$$

nem nagyobb, mint egy univerzális konstans.

Nyilván feltehető, hogy n páros. Nézzük a következő G gráfot az X szögponthalmazon. G élei:

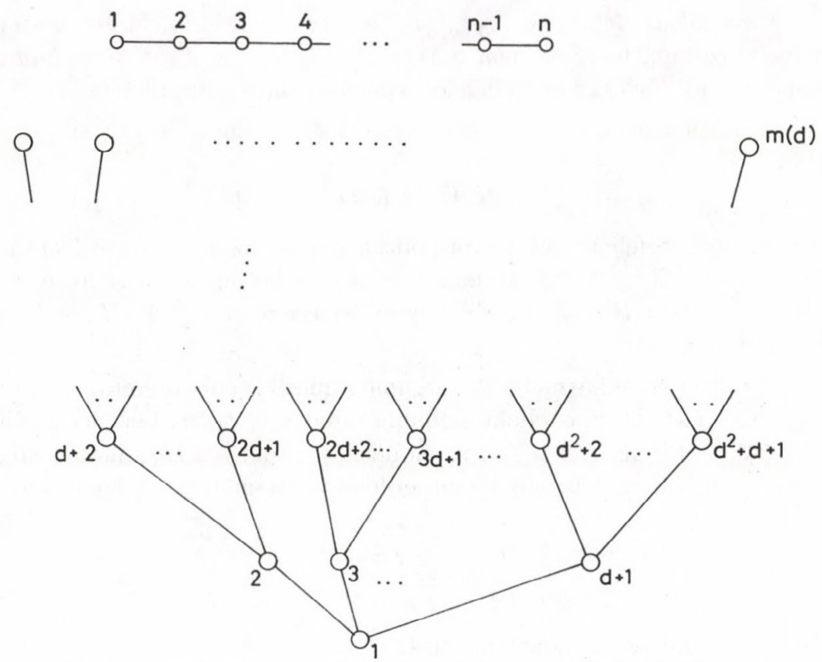
$$\pi(1)\pi(2),\ \pi(3)\pi(4),\ \pi(5)\pi(6),\ \ldots,\ \pi(n-1)\pi(n),$$

$$\sigma(1)\sigma(2),\ \sigma(3)\sigma(4),\ \sigma(5)\sigma(6),\ \ldots,\ \sigma(n-1)\sigma(n).$$

Ebben minden pont foka legalább 1, nem tartalmaz páratlan kört (Tetszőleges körben az élek felváltva vannak a két csoportból!), és az 1 fokú pontok szomszédja is 1 fokú, tehát tartalmaz teljes párosítást. Az egyik osztály pontjait +1-gyel, a másik osztály pontjait −1-gyel színezve megfelelő konstrukciót kapunk.

T_1:

T_2:



b) Tetszőleges $d \geq 2$-re legyen $m(d) = 1 + d + d^2 + ... + d^{d-1}$. Tekintsük $X = \{1, 2, ..., m(d) = n\}$-ben a következő két fát:

(T_2 egy d magasságú fa, amelyben a két szélső szint kivételével minden pont foka $d + 1$, és a pontokat szintenként sorban számoztuk meg.)

Könnyű látni, hogy ha nincs T_1-ben olyan d hosszú út, amelynek pontjait csupa 1-gyel megegyező színűre színeztük, akkor létezik T_2-ben olyan 1-ből induló d hosszú út, amelynek pontjait mind 1-gyel megegyező színűre színeztük. Tehát van olyan d hosszú P út T_1-ben vagy T_2-ben, amelyre

$$\left| \sum_{x \in P} f(x) \right| = d.$$

Mivel $d > \log n / \log \log n$, ebből az állítás következik.

Benczúr András és Vu Ha Van megoldása alapján.

Részeredményt ért el Hajdú Gábor.

Az 5. feladat megoldása.

I. megoldás. Jelölje $h_n(a_1, ..., a_n)$ az (1)-ben levő kifejezést. n szerinti indukcióval igazoljuk, hogy ez nem más, mint $(a_1 + ... + a_n)^2$. $n = 2$-re ez könnyen ellenőrizhető, így csak az indukciós lépés igazolása marad hátra.

h_n argumentumait tekintsük komplex számoknak. Rögzített $a_2, ..., a_n$ esetén a

$$H_n(z) = h_n(z, a_2, ..., a_n)$$

függvénynek legfeljebb elsőrendű pólusai vannak az $a_2, ..., a_n$ helyeken, de egyszerűen látható, hogy h_n reziduuma 0 ezeken a helyeken, ezért h_n egész függvény. Mivel nagy z-re $|H_n(z)| \le 2|z|^2$, egy jól ismert tétel alapján H_n legfeljebb másodfokú polinom.

Mindez persze bármely más argumentumról is elmondható, amivel azt kapjuk, hogy h_n legfeljebb másodfokú polinom minden egyes a_j-ben, ha a többi változót rögzítjük. Jól ismert (és n szerinti indukcióval könnyen igazolható), hogy ekkor h_n az $a_1, ..., a_n$ változók legfeljebb másodfokú polinomja, és h_n homogenitása alapján

$$h_n(a_1, ..., a_n) - (a_1 + ... + a_n)^2 = \sum_{j \le k} c_{ij} a_i a_j \tag{2}$$

adódik valamilyen c_{ij} konstansokkal.

Vegyük észre, hogy ha $a_j = 0$ valamilyen j-re, akkor

$$h(a_1, ..., a_n) = h_{n-1}(a_1, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, ..., a_n),$$

és így az indukciós feltevés alapján (2) baloldala 0. Mármost az $a_k = 1$, $a_j = 0$ $(j \ne k)$ helyettesítésből $c_{kk} = 0$, majd az $a_l = a_k = 1$, $a_j = 0$ $(j \ne k, l)$ helyettesítésből $c_{kl} = 0$ adódik. Tehát (2) jobb oldala 0, amivel az indukciós lépést igazoltuk.

II. megoldás. Legyen

$$p(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z + a_k}{z - a_k}.$$

A $zp(z)$-nek az a_j-kben van szingularitása

$$a_j \cdot 2a_j \prod_{k \ne j} \frac{a_j + a_k}{a_j - a_k}$$

reziduummal, ezért a kérdéses összeg $\frac{1}{2}zp(z)$ véges reziduumainak összege,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{1}{2} zp(z) \quad (R > max|a_j|).$$

Ha $p(z)$ ∞ körüli Laurent-sora

$$p(z) = 1 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + ...,$$

akkor ez másfelől $b_2/2$.

$|z| > max|a_j|$ esetén

$$p(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{a_k}{z}}{1-\frac{a_k}{z}} = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{a_k}{z}\right)\left(1+\frac{a_k}{z}+\frac{a_k^2}{z^2}+...\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(1 + 2\frac{a_k}{z} + 2\frac{a_k^2}{z^2} + ...\right),$$

amiből leolvasható, hogy $b_2 = 2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 4\sum_{1\le k<l\le n} a_k a_l = 2(\sum a_k)^2$.

III. megoldás. Legyen $w(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-a_k)$. A Lagrange interpolációs formula szerint

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{w(z)}{(z-a_j)\prod_{k=1}^{n}(a_j-a_k)} = r(z)$$

az a legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinom, amire $r(a_j) = b_j$. Legyen $b_j = a_j^2 \prod_{k=1}^{n}(a_j + a_k) = a_j^2 q(a_j)$, ahol $q(z) = \prod_{k=1}^{n}(z + a_k)$.

Látjuk, hogy a feladatban szereplő összeg nem más, mint $-r(0)/2w(0)$. $z^2 q(z) - r(z)$ tehát eltűnik az a_j-kben, és így $s(z)w(z)$ alakú, ahol a fokszámok alapján $s(z)$ másodfokú, $s(z) = z^2 + az + b$. Mivel $q(z) = z^n + \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} + ...$, ahol $\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\sigma_2 = \sum_{1\le k<l\le n} a_k a_l$, $w(z) = z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} + ...$, az együtthatók összehasonlításával a $z^2 q(z) - r(z) = s(z)w(z)$ azonosságban:

$$z^{n+2} + \sigma_1 z^{n+1} + \sigma_2 z^n + ... = (z^2 + az + b)(z^n - \sigma_1 z^{n-1} + \sigma_2 z^{n-2} + ...)$$

$$\sigma_1 = a - \sigma_1, \quad a = 2\sigma_1,$$

$$\sigma_2 = b - a\sigma_1 + \sigma_2, \quad b = a = sigma_1 = 2\sigma_1^2.$$

Innen $-r(0) = s(0)w(0) = bw(0) = 2\sigma_1^2 w(0)$ és

$$-\frac{r(0)}{2w(0)} = \sigma_1^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2.$$

Itt felhasználtuk, hogy egyik a_j sem 0; ellenkező esetben az n csökkenthető, mint az I. megoldásban.

Balogh József, Bíró András, Csörnyei Marianna, Drasny Gábor, Hajdú Gábor, Kondacs Attila, László Ákos, Maróti Miklós, Podoski Károly, Prokaj Vilmos, Szepesvári Csaba és Vu Ha Van megoldása alapján.

Könnyen javítható hibát vétett Benczúr András és Keleti Tamás.

A 6. feladat megoldása.

Legyen $E_1 = \{t \in \overline{E} :$ minden $I \ni t$ intervallumra $|I \cap E| \leq K|E| \cdot |I|\}$. A maximálegyenlőtlenség szerint K lerögzíthető abszolút konstansnak úgy, hogy $|E_1| \geq \frac{1}{2}$. A definíció alapján $|E_1 \cap E| = \emptyset$. Az

$$\int_{E_1} \int_E \frac{ds}{h(s)(s-t)^2} dt = \int_E \frac{1}{h(s)} \int_{E_1} \frac{dt}{(s-t)^2} ds$$

integrált fogjuk felülről becsülni.

Legyen I_s olyan $I_s \ni s$ intervallum, amelyre $|I_s \cap E| = \frac{1}{2}|I_s|$. Ilyen m. m. $s \in E$-re van, ha $|E| \leq \frac{1}{2}$.

Ha $s \in E$ ilyen és $t \in E_1$ tetszőleges, akkor

$$\frac{1}{2}|I_s| \leq K|E|(|t-s| + |I_s|),$$

azaz

$$|t-s| \geq \frac{1}{4} \frac{|I_s|}{K|E|}$$

ha $K|E| \leq \frac{1}{4}$. Tehát

$$\int_{E_1} \frac{dt}{(s-t)^2} \leq 2 \int_{\frac{1}{4}\frac{|I_s|}{K|E|}}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{8K|E|}{|I_s|}.$$

Másrészt

$$h(s) = \int_{\overline{E}} \frac{dt}{(s-t)^2} \geq \int_{I_s \cap \overline{E}} \frac{dt}{(s-t)^2} \geq \frac{1}{|I_s|} \frac{1}{2}|I_s| = \frac{1}{2|I_s|},$$

és így

$$\int_{E_1} \frac{dt}{(s-t)^2} \leq 16h(s)K|E|.$$

Ha $K|E| \geq \frac{1}{4}$, akkor

$$\int_{E_1} \frac{dt}{(s-t)^2} \leq \int_{\overline{E}} \frac{dt}{(s-t)^2} = h(s) \leq 4h(s)K|E| < 16h(s)K|E|.$$

Mindkét esetben

$$\int_E \frac{1}{h(s)} \int_{E_1} \frac{dt}{(s-t)^2} ds \leq 16K|E|^2,$$

azaz

$$\int_{E_1} \int_E \frac{ds}{h(s)(s-t)^2} dt \leq 16K|E|^2.$$

Van tehát olyan $t \in E_1$, amelyre

$$\int_E \frac{ds}{h(s)(s-t)^2} \leq \frac{16K|E|^2}{|E_1|} \leq 32K|E|^2.$$

Vu Ha Van megoldása alapján.

A 7. feladat megoldása.

Nyilván elég a feltétel szükségességét bizonyítani.

Tegyük fel, hogy X nem kompakt, és legyen κ a legkisebb számosság, amelyre igaz, hogy X-nek van olyan κ számú nyílt halmazból álló fedése, amelyből nem választható ki véges fedés. Nyilván κ reguláris számosság.

Legyen $\{G_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ szigorúan növekvő nyílt fedés. Válasszunk ki minden $\alpha \in \kappa$-ra egy $p_\alpha \in G_{\alpha+1} \setminus G_\alpha$ pontot, nyilván $p_\alpha \notin \overline{\{p_\beta : \alpha < \beta < \kappa\}} \subset X \setminus G_{\alpha+1}$.

Azt állítjuk, hogy van olyan $A \subset \kappa$ végtelen indexhalmaz, amelyre

(i) $\overline{\{p_\alpha : \alpha \in A\}}$ nem kompakt,

(ii) $\alpha \in A$ esetén $p_\alpha \notin \overline{\{p_\beta : \beta \in A \text{ és } \beta < \alpha\}}$.

Mivel $\{p_\alpha : \alpha \in A\}$ így diszkrét altér, ezzel készen leszünk.

Tegyük fel, hogy nincs ilyen A. Transzfinit rekurzióval definiálunk egy $\{\alpha_\nu\} \subset \kappa$ növekvő rendszámsorozatot, mely kofinális lesz κ-ban és ($A = \{\alpha_\nu\}$-re) kielégíti (ii)-t.

Legyen $\alpha_0=0$, és ha valamely μ-re $A_\mu = \{\alpha_\nu : \nu < \mu\}$ definiálva van úgy, hogy A_μ kielégíti (ii)-t és nem kofinális κ-ban, akkor $\overline{\{p_\alpha : \alpha \in A_\mu\}}$ kompakt, így van olyan $\alpha_\mu > \sup A_\mu$, melyre $\overline{\{p_\alpha : \alpha \in A_\mu\}} \subset G_{\alpha_\mu}$. Nyilván $p_{\alpha_\mu} \notin \overline{\{p_\alpha : \alpha \in A_\mu\}}$.

A rekurzió akkor akad meg, ha A_μ kofinális κ-ban. Ekkor (ii) teljesül, tehát $\overline{\{p_\alpha : \alpha \in A_\mu\}}$ kompakt, így része valamely G_γ-nak, ami viszont ellentmond annak, hogy van olyan $\alpha \in A_\mu$, melyre $\alpha > \gamma$.

Benczúr András, Bíró András, Drasny Gábor, Juhász Géza, Keleti Tamás és Prokaj Vilmos megoldása alapján.

A 8. feladat megoldása

A válasz: akkor, ha $|X| \leq 2^{2^\omega}$.

Ha X véges, megfelel $\mathcal{F} = \{\dot{x} : x \in X\}$ (itt $\dot{x} = \{S \subset X : x \in S\}$).

Legyen $\omega \leq |X| \leq 2^{2^\omega}$. Tekintsük az (x, B) párokat, ahol $x \in X - B$, $B \subset X$ pedig megszámlálhatóan végtelen; ezek száma $\leq 2^{2^\omega}$. Legyen (x_α, B_α) e pároknak kezdőszámtípusú jólrendezése. Minden α-ra válasszunk egy B_α-t tartalmazó $\breve{v}_\alpha$ szabad ultraszűrőt. Ezt rekurzióval megtehetjük úgy, hogy $\beta < \alpha$ esetén $\breve{v}_\beta \neq \breve{v}_\alpha$ legyen. Valóban, B_α-ban 2^{2^ω} szabad ultraszűrő van (lásd Gillman–Jerison: Ring of continuous functions, 9.2), s mivel az α-nál kisebb β-k száma $< 2^{2^\omega}$, van köztük olyan is, amely különbözik az $\breve{v}_\beta$-k $(\beta < \alpha)$ B_α-n vett nyomaitól, s ezt folytathatjuk X-beli $\breve{v}_\alpha$ ultraszűrővé. Legyen $\sigma_\alpha = \dot{x}_\alpha \bigcap \breve{v}_\alpha$.

Álljon $\mathcal{F}$ a $\bigcap_1^n v_i$ alakú szűrőkből, ahol $n \in \mathbf{N}$, minden v_i σ_α alakú és a megfelelő x_α pontok minden i-re azonosak. Jelölje két X-beli **a** és **b** halmazrendszerre **a**||**b** azt, hogy $A \bigcap B \neq 0$ minden $A \in$ **a**-ra és $B \in$ **b**-re.

Ha $\mathcal{F}$ két elemére $\bigcap_1^n v_i || \bigcap_1^m v'_j$ és az v_i-k közös x_α-ja x, az v'_j-ké x', akkor von olyan i és j, hogy $v_i || v'_j$, ami azonban csak $x = x'$ esetén állhat elő, hiszen az $\breve{v}_\alpha$-k szabad szűrők, továbbá $\alpha \neq \beta$ esetén $\breve{v}_\alpha$ és $\breve{v}_\beta$ különböző ultraszűrők. Ilyenkor tehát $\bigcap_1^n v_i \cap \bigcap_1^m v'_j \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ kompatibilis X-nek tekintett (szokásos elnevezéssel kovéges) topológiájával. Ha $x \in \overline{A}$ és $x \in A$ is áll, akkor egy x-et nem tartalmazó megszámlálhatóan végtelen B-t választva, $(x, B) = (x_\alpha, B_\alpha)$ egy α-ra, és $\{x\}||\sigma_\alpha$, $\{A\}||\sigma_\alpha$, $\sigma \in \mathcal{F}$. Ha $x \notin A$, akkor A végtelen; választunk egy megszámlálhatóan végtelen $B \subset A$ halmazt, erre $(x, B) = (x_\alpha, B_\alpha)$ és σ_α ismét jó, mert $B \in \breve{v}_\alpha$.

Ha viszont $\sigma = \bigcap_1^n v_i \in \mathcal{F}$, $\{x\}||\sigma$, $\{A\}||\sigma$, akkor x éppen az v_i-k közös x_α-ja (ismét az $\breve{v}_\alpha$-k szabad volta folytán), továbbá vagy $x \in A$, vagy $\{A\}||v_i$ egy i-re, ami $v_i = \sigma_\alpha$ esetén (az $x \notin A$ esetben) csak $\{A\}||\breve{v}_\alpha$ esetén lehetséges. Így azonban A végtelen (mert $\breve{v}_\alpha$ szabad), és $x \in \overline{A}$.

Legyen végül $|X| > 2^{2^\omega}$. $A \subset X$ megszámlálhatóan végtelen. Minden $x \in X$-re áll most $x \in \overline{A}$, tehát van olyan $\sigma_x \in \mathcal{F}$ (egy feltételezetten jó $\mathcal{F}$-re), hogy $\{x\}||\sigma_x$, $\{A\}||\sigma_x$. Legyen $\breve{v}_x$ egy az σ_x A-beli nyománál finomabb A-beli ultraszűrő. Mivel ilyen csak 2^{2^ω} számú van, kell lenni $x \neq y$ pontoknak, amelyekre $\breve{v}_x = \breve{v}_y$, s akkor $\sigma_x||\sigma_y$, úgyhogy $\sigma_x \cap \sigma_y \in \mathcal{F}$. Csakhogy $\{x\}||\sigma_x \cap \sigma_y$, $\{y\}||\sigma_x \cap \sigma_y$ folytán ebből $y \in \overline{\{x\}}$ következnék, pedig a kovéges topológia T_1.

Bíró András megoldása alapján.

Lényegében helyes Benczúr András megoldása. Prokaj Vilmos megoldásából egy eset vizsgálata hiányzik. Részeredményt ért el Keleti Tamás.

A 9. feladat megoldása.

Legyenek $\{p_1, ..., p_k, v_1, ..., v_l\}$ K csúcsainak halmaza. Ha $l = 0$, akkor $k \geq d+2$ és az állítás Caratheodory tételéből következik. Feltehetjük tehát, hogy $l > 0$.

Megmutatjuk, hogy $\mathrm{aff}\{p_1, ..., p_k\} \cap \mathrm{conv}\{v_1, ..., v_l\} \neq \emptyset$. Ez nyilvánvaló, ha $\mathrm{aff}\{p_1, ..., p_k\} = R^d$. Egyébként létezik egy olyan hipersík, amely elválasztja $\mathrm{aff}\{p_1, ..., p_k\}$-t $\mathrm{conv}\{v_1, ..., v_l\}$-től. Ez a hipersík párhuzamos kell legyen $\mathrm{aff}\{p_1, ..., p_k\}$-val, ezért eltolhatjuk úgy, hogy tartalmazza $\mathrm{aff}\{p_1, ..., p_k\}$-t. Ezzel viszont K-nak egy olyan támaszhipersíkját konstruáltuk meg, amely tartalmazza $p_1, ..., p_k$-t, ami ellentmond annak a feltételnek, hogy ezek nincsenek ugyanazon a lapon.

Legyen $w \in \mathrm{aff}\{p_1, ..., p_k\} \cap \mathrm{conv}\{v_1, ..., v_l\}$. Felírva p-t K csúcsainak konvex lineáris kombinációjaként, léteznek olyan $\alpha_1, ..., \alpha_k, \theta_1, ..., \theta_l \geq 0$, számok, amelyekre $\sum_{i=1}^k \alpha_i + \sum_{j=1}^l \theta_j = 1$ és $p = \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i + \sum_{j=1}^l \theta_j v_j$.

Ha $\alpha_i = 0$ valamelyik $1 \leq i \leq k$-ra, akkor elhagyhatjuk p_i-t és a maradék csúcsok konvex burka is tartalmazza p-t. Tegyük fel tehát, hogy $\alpha_i > 0$ minden i-re. Mivel a p_i-k nincsenek K-nak ugyanazon a lapján, ebből következik, hogy $p \in \int K$. De akkor azt is feltehetjük, hogy $\theta_j > 0$ minden j-re. Legyen

$$u = \frac{\sum_{i=1}^k \alpha_i p_i}{\sum_{i=1}^k \alpha_i} \in \mathrm{conv}\{p_1, ..., p_k\},$$

$$u' = \frac{\sum_{j=1}^l \theta_j v_j}{\sum_{j=1}^l \theta_j} \in \mathrm{conv}\{v_1, ..., v_l\}.$$

Az u-t és w-t összekötő egyenes $\mathrm{aff}\{p_1, ..., p_k\}$-ban fekszik, így metszi $\partial\, \mathrm{conv}\{p_1, ..., p_k\}$-t (a relatív topológiában) két pontban: s-ben és s'-ben. Feltehetjük, hogy $u \in \mathrm{conv}\{w, s\}$. Mivel $k \geq 2$, létezik egy i, amire $s \in \mathrm{conv}\{p_1, ..., p_{i-1}, p_{i+1}, ..., p_l\}$. Tehát

$$u \in \mathrm{conv}\{p_1, ..., p_{i-1}, p_{i+1}, ..., p_k, v_1, ..., v_l\}$$

és

$$p = \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i\right) u + \left(\sum_{j=1}^l \theta_j\right) u' \subset \mathrm{conv}\{p_1, ..., p_{i-1}, p_{i+1}, ..., p_k, v_1, ..., v_l\}.$$

Bíró András, Drasny Gábor, Hajdú Gábor, Keleti Tamás, Kondacs Attila, Maróti Miklós, Prokaj Vilmos és Vu Ha Van megoldása alapján.

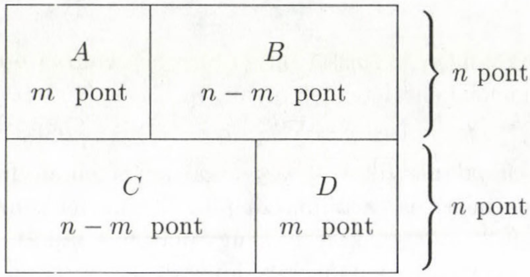
Csörnyei Marianna megoldásának gondolatmenete helyes, de két állítás bizonyítása hiányos.

A 10. feladat megoldása.

Bármely pontpár 0 valószínűséggel esik egy vízszintes vagy függőleges egyenesre, ezért feltehetjük, hogy a pontok abszcisszái és ordinátái mind különbözők.

Legyen $N \geq 16$ pozitív egész és $\varepsilon > 0$ rögzített. Legyen $m = \left[\frac{2n}{N}\right]$.

Osszuk fel az egységnégyzetet egy vízszintes vágással két részre úgy, hogy a két felébe egyaránt n pont essen. Ezután pedig osszuk fel a két "fél" négyzetet egy-egy függőleges vágással úgy, hogy az egyes részekben m, $n-m$, $n-m$, m pont legyen az ábra szerint.



Megpróbáljuk összepárosítani az A tartomány pontjait a B-be eső pontok egy részével, D pontjait C egy részével, majd B és C maradékát egymással.

Rendezzük sorba $A \cup B$ pontjait a függőleges koordinátájuk szerint. A pontjait akkor nem tudjuk párosítani B egy részével, ha valamilyen k-ra az utolsó $2k-1$ pont közül legalább k darab A-ból való. (Ilyenkor persze van olyan k is, amikor az utolsó $2k-1$ pont közül pontosan k darab való A-ból.) Ennek valószínűsége nem lehet nagyobb, mint

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\binom{2k-1}{k}\binom{n-2k+1}{m-k}}{\binom{n}{m}} < \sum_{k=1}^{m} \frac{\binom{2k-1}{k}\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}} <$$

$$< \sum_{k=1}^{m} 2^{2k-2} \frac{m(m-1)...(m-k+1)}{n(n-1)...(n-k+1)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} 2^{2k-2} \left(\frac{m}{n}\right)^k = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{4m}{n}\right)^k \leq$$

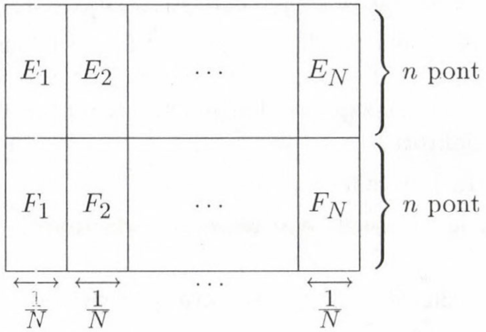
$$\leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{8}{N}\right)^k < \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{4}{N},$$

ha $N \geq 16$.

Ugyanígy becsülhetjük annak valószínűségét, hogy D-t nem párosítható össze C egy részével.

Most megvizsgáljuk B és C maradékának összepárosíthatóságát. Először is megjegyezzük, hogy eddig csak a pontok függőleges eloszlását vizsgáltuk, most pedig csak a vízszintes eloszlásra van szükségünk. A B-ben, illetve C-ben levő párosítatlan pontok vízszintes eloszlása ugyanúgy egyenletes, mintha az A és D párosításához szükséges pontokat véletlenszerűen választottuk volna közülük.

Most a négyzet alsó és felső felét máshogy osztjuk fel, mégpedig $N-1$ függőleges vágással $2N$ darab egyenlő szélességű téglalapra.



Eredetileg a pontok számának várható értéke minden egyes téglalapban $\frac{n}{N}$. Ha n elég nagy, akkor legalább $1-\varepsilon$ valószínűséggel mindegyik téglalapban a pontok száma

$$\frac{n}{N} - \frac{n}{3N^3} \text{ és } \frac{n}{N} + \frac{n}{3N^3}$$

közé esik.

Hagyjuk el a már összepárosított pontokat. A megmaradt pontok vízszintes koordinátája ugyanúgy oszlik el, mintha a felső sorból az m legbaloldalibb, az alsók közül az m legjobboldalibb elhagyása után még m-m darabot véletlenszerűen hagytunk volna el.

A négyzet felső felében az $m = \left[2\frac{n}{N}\right]$ legbaloldalibb pont elhagyása után az E_1 téglalap üres, az E_2-ben legfeljebb $\frac{n}{N^3}$ pont van, a többiben pedig a pontok száma $\frac{n}{N} - \frac{n}{N^3}$ és $\frac{n}{N} + \frac{n}{N^3}$ közé esik.

Hasonlóan a négyzet alsó felében az m legjobboldalibb pont elhagyása után F_N üres, F_{N-1}-ben legfeljebb $\frac{n}{N^3}$ pont van, a többiben pedig a pontok száma $\frac{n}{N} - \frac{n}{N^3}$ és $\frac{n}{N} + \frac{n}{N^3}$ közé esik.

A párosítás során felhasznált további $2m$ pont lényegében egyenletesen oszlik el a E_3, E_4,..., E_N illetve F_1, F_2,..., F_{N-2} között. Ha n elég nagy, akkor m is elég nagy, és akkor legalább $1-\varepsilon$ valószínűséggel mindegyik téglalapból legalább $\left(1-\frac{1}{N}\right)m/(N-2)$, de legfeljebb $\left(1+\frac{1}{N}\right)m/(N-2)$ pontot hagyunk el, tehát az összes már párosított pont elhagyása után E_1 üres, E_2-ben legfeljebb $\frac{n}{N^3}$ pont van, $E_3, \ldots, E_N$-ben pedig a pontok száma

$$\frac{n}{N} + O\left(\frac{n}{N^3}\right) - \left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right)\frac{m}{(N-2)} =$$

$$= \frac{n}{N} - \frac{2n}{N(N-2)} + O\left(\frac{n}{N^3}\right).$$

Hasonló a helyzet az F_N, F_{N-1} illetve $F_1, \ldots, F_{N-2}$ téglalapokkal.

Mindezekből következik, hogy a négyzet felső felében megmaradt pontok közül balról a k-adik minden $1 \leq n - 2m$-re megelőzi az alsó félben megmaradtak közül k-adikat, így ezeket összepárosíthatjuk. Ha tehát az összes feltételünk teljesül, találtunk egy 1-faktort.

A számunkra kedvezőtlen esetek:

— ha nem lehet A-t B egy részével párosítani, ennek valószínűsége kisebb, mint $\frac{4}{N}$;

— ha nem lehet D-t C egy részével párosítani, ennek valószínűsége szintén kisebb, mint $\frac{4}{N}$;

— ha az $E_1, \ldots, E_N, F_1, \ldots, F_N$ téglalapokban között elég egyenletesen oszlanak el a pontok, ennek valószínűsége kisebb, mint ε;

— ha az elején párosított pontok nem elég egyenletesen oszlanak el az $E_3, \ldots, E_N$, $F_1, \ldots, F_{N-2}$ téglalapokban, ennek valószínűsége is kisebb, mint ε.

Ha tehát n az N-től és ε-tól függően elég nagy, akkor

$$P(M_n) \geq 1 - \frac{8}{N} - 2\varepsilon.$$

Ezzel az állítás kész.

Komolyabb részeredményt senki sem ért el. A sorozat monotonitását bebizonyította Bíró András, Drasny Gábor és Keleti Tamás.

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS