Matematikai Lapok

2002-2003/1

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 11. évfolyam (2002–2003), 1. szám
(Megjelent 2006-ban)

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
– A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
– nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

Címlap grafika: Archidesign és Visualia Stúdiók

KEDVES OLVASÓ!

Ebben a számban egy fontos ünnepségről számolunk be. A BIG 5 világhírű tagjai 80. születésnapját ünnepeltük 2004. júniusában. *Győry Kálmán* köszöntő beszéde után az öt ünnepelt írását közöljük, majd *Surányi János* (kortárs) és *Buczolich Zoltán* (tanítvány) előadásait. A füzetünk végén álló írás nem egészen ide tartozik. *Balázs Egont* az MTA 2004-ben választotta külső tagjává. Székfoglaló előadását itt közöljük, hiszen ő nagyjából kortársa a BIG 5-nak, és az előadás tartalma is lehetővé teszi ezt a „keveredést".

2005. december 1. **Katona Gyula**

MEGNYITÓ KÖSZÖNTŐ A „400 ÉV MATEMATIKA (BIG 5 × 80)" SZÜLETÉSNAPI KONFERENCIÁN (2004. június 28. MTA Rényi Alfréd Kutatóintézet)

GYŐRY KÁLMÁN

Tisztelt Ünnepeltek! Kedves ünneplők!

A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Tudományok Osztálya nevében köszöntöm a BIG 5 tagjait, *Aczél Jánost, Császár Ákost, Fuchs Lászlót, Gál Istvánt* és *Horváth Jánost,* valamint jelenlévő hozzátartozóikat.

A BIG 5 tagjait öt évvel ezelőtt, 75. születésnapjuk alkalmából ugyanitt, a Matematikai Kutatóintézetben köszöntöttük. Akkor, azon az ünnepségen Gál István és Horváth János nem tudott részt venni. Külön öröm számunkra, hogy most valamennyien együtt vannak. Úgy tudom, erre nem volt példa az utóbbi évtizedekben.

Egyedülálló esemény a magyar matematika történetében, hogy öt világnagyság, egyben öt barát 80. születésnapját együtt ünnepelhetjük. Valamennyien ma is aktívak, s az idők folyamán szakterületük élő klasszikusává váltak.

Munkásságuk ismertetésére nem vállalkozhatom, ehhez külön-külön egy-egy tudományos konferenciára lenne szükség. Számos területen nyertek világraszóló eredményeket, a matematika több fontos ága nem létezne napjainkban munkásságuk nélkül.

Aczél János a függvényegyenletek és alkalmazásaik terén,

Császár Ákos a valós függvénytanban és a topológiában,

Fuchs László az Abel csoportok és részben rendezett csoportok elméletében és az értékelésgyűrűk feletti modulusok terén,

Gál István a számelméletben, a lineáris analízisben és a reprezentációelméletben,

Horváth János a funkcionálanalízisben, ezen belül is a disztribúcióelméletben

nyerték legkiemelkedőbb, legnagyobb hatású eredményeiket.

Hosszú lenne felsorolni azokat a kutatási ágakat, melyek vizsgálatát ők kezdeményezték, valamint könyveik listáját, melyek szakterületük alapműveivé váltak.

Kiváló tanítványok egész sorát nevelték itthon és külföldön egyaránt. A nevükhöz fűződő tudományos iskolák világszerte ismertek és elismertek. Többen közülük itthon is, majd külföldre távozva külföldön is rangos kutatóbázist teremtettek, melyeknek mindmáig szellemi vezetőik. Sokirányú és rendkívül értékes iskolateremtő és tudományszervezői tevékenységük ismertetése, díjaik, kitüntetéseik, tudományos elismeréseik felsorolása külön előadást igényelne. Mindezek elmaradásáért a BIG 5 tagjai fognak kárpótolni bennünket, amikor előadásaikban ők maguk fognak szólni hozzánk életútjukról, munkásságukról.

Hogy honnan a BIG 5 elnevezés? Erről T. Sós Vera akadémikus köszöntőjében, majd pedig az ünnepeltektől fogunk hallani. Az egykorú és egymással baráti kapcsolatban álló öt huszonéves tehetséget a 40-es években Fejér Lipót nevezte el BIG 5-nak. Bár életpályájuk különbözőképpen alakult – Császár Ákos kivételével idővel valamennyien külföldre távoztak – Fejér ígéretes jóslata bevált, ma már valamennyien a matematika nemzetközileg elismert kiválóságai, a magyar matematika büszkeségei.

Külföldön élő Ünnepeltjeink lehetőségeik szerint mindvégig segítették, támogatták a hazai matematikát, szoros kapcsolatot tartottak az itthoni kollégákkal, aminek elismeréseként a Magyar Tudományos Akadémia Aczél Jánost, Fuchs Lászlót és Horváth Jánost külső tagjává választotta. Császár Ákos akadémikust, a magyar matematika és a hazai tudományos közélet kiemelkedő és meghatározó alakját az idén februárban külön is köszöntöttük 80. születésnapja alkalmából.

Tisztelt Professzor Urak! Kedves Ünnepeltek!

Köszönjük, hogy elfogadtátok meghívásunkat és eljöttetek. Munkásságotok különkülön is követendő példa számunkra. Példát mutattatok arra is, hogy a távolság ellenére a baráti szálak milyen erősen össze tudnak kapcsolni öt kiváló tudóst, öt kiváló embert. Külön öröm számunkra, hogy feleségeitekkel, családotok tagjaival vagytok itt, akik biztosították számotokra a sikeres alkotó életpálya feltételeit.

Kívánom Nektek, hogy éveitek számával együtt tételeitek száma is tovább gyarapodjon. Mindehhez Kívánok jó egészséget és sok örömet a matematikán belüli és a matematikán kívüli életetekben, családotok körében. Isten éltessen Benneteket 80. születésnapotok alkalmából!

MI A TEENDŐ, HA EGY (FÜGGVÉNY-)EGYENLET ÉRVÉNYESSÉGI TARTOMÁNYA TÚL KICSI?

ACZÉL JÁNOS[1]

1. Bevezetés

A mi korosztályunkból a legtöbben a „Hardy–Littlewood–Pólyá"-ból ([6], 66–69. és 73–74. o.) ismerik annak bizonyítását, hogy egy rögzített súlyú

$$Q(x,y) = f^{-1}\big[pf(x) + (1-p)f(y)\big]$$

kvázilineáris közép ($p \in \,]0,1[$ rögzített, $x > 0$, $y > 0$ változók, $f : \,]0,\infty[\, \to I$ szigorúan monoton folytonos függvény, I valós intervallum) akkor és csak akkor homogén (és akkor szükségképen elsőfokú homogén), vagyis

$$Q(zx, zy) = zQ(x,y) \quad (x > 0,\ y > 0,\ z > 0), \tag{1}$$

ha Q vagy (súlyozott) hatványközép vagy (súlyozott) mértani közép. A bizonyítás az

$$f(zx) = B(z) + C(z)f(x) \quad (x > 0,\ z > 0)$$

vagy a vele ekvivalens

$$k(s+t) = \ell(s) + m(s)k(t) \quad (s, t \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

függvényegyenlet megoldásán alapul.

Mi van azonban, ha (1) és vele (2) a változóknak nem minden pozitív, illetve nem minden valós értékére, hanem csak egy összefüggő nyitott halmazon teljesül?

Gilányi Attila, Che Tat Ng és én ([5]) egy haszonelméleti probléma tárgyalása során hasonló, szintén csak összefüggő nyitott halmazon (mely nem téglalap) érvényes

$$k(s+t) = k(s) + m(s)n(t) \tag{3}$$

egyenletbe ütköztünk.

[1]A szerző a kanadai Natural Sciences and Engineering Research Council (NSERC) 2972 sz. Discovery Grant támogatásában részesült.

Itt közös általánosításuknak, a

$$k(s+t) = \ell(s) + m(s)n(t) \tag{4}$$

egyenletnek és néhány klasszikus speciális esetének *kiterjeszthetőségével* foglalkozunk összefüggő nyitott halmazból az egész síkra és az ebből nyert *általános megoldásokkal.*

Így válaszom a címben feltett kérdésre: *kiterjeszteni* az érvényességi tartományt (ha lehet).

Ez a dolgozat a Magyar Tudományos Akadémia 2004. június 28–29-i ülésszakán tartott előadásomnak új eredményekkel kibővített változata.

2. A Cauchy- és Pexider-egyenletek kiterjesztése

Mint ismeretes, minimális regularitási feltételeknek eleget tevő (pl. pozitív mértékű halmazon korlátos) $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény az

$$A(x+y) = A(x) + A(y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \tag{5}$$

(additív) Cauchy-egyenletnek, illetve $E : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ az

$$E(x+y) = E(x)E(y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big) \tag{6}$$

exponenciális Cauchy-egyenletnek akkor és csak akkor tesz eleget, ha létezik olyan valós C, illetve D konstans, hogy $A(x) = Cx$ minden $x \in \mathbb{R}$-re, illetve vagy $E(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re vagy pedig $E(x) = e^{Dx}$ minden $x \in \mathbb{R}$-re ($\mathbb{R}$ a valós számok halmaza).

Mi van azonban, ha az additív, illetve exponenciális Cauchy-egyenlet csak a valós sík egy részhalmazán, például egy összefüggő nyitott halmazon teljesül? Legyen R egy ilyen halmaz. Bevezetjük a következő jelöléseket:

(7)

$$R_s = \{s \mid \exists t : (s,t) \in R\}, \; R_t = \{t \mid \exists s : (s,t) \in R\}, \; R_{s+t} = \{s+t \mid (s,t) \in R\}.$$

Daróczy Zoltán és Losonczi László [4] bebizonyították a következőt. Ha $R \subset \mathbb{R}^2$ összefüggő nyitott halmaz és $k : R_s \cup R_t \cup R_{s+t} \to \mathbb{R}$ teljesíti az R-re korlátozott (additív) Cauchy-egyenletet, vagyis

$$k(s+t) = k(s) + k(t) \qquad \big((s,t) \in R\big), \tag{8}$$

akkor létezik k-nak egyetlen (= egy és csak egy) $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kvázi-kiterjesztése* a következő értelemben: eleget tesz (5)-nak és léteznek olyan a, b valós konstansok, hogy

$$R_s\text{-en} \quad k = A + a, \quad R_t\text{-n} \quad k = A + b \quad \text{és} \quad R_{s+t}\text{-n} \quad k = A + a + b. \tag{9}$$

Természetesen, ha R_s, R_t, R_{s+t} közül egy párnak vagy mind a háromnak van közös pontja, ez befolyásolja a vagy b vagy mindkettő értékét. *Ha mindháromnak van közös pontja (pl. ha az origó R-ben vagy a határán van), akkor $a = b = 0$ és A kiterjesztése k-nak:*

$$(10) \qquad R_s \cup R_t \cup R_{s+t}\text{-n} \qquad k = A.$$

A fenti helyzetekben az *egyenlet kvázi-kiterjesztéséről*, illetve *kiterjesztéséről* is fogunk beszélni.

A (8) egyenletnek általánosítása a

$$(11) \qquad k(s+t) = \ell(s) + n(t) \qquad \big((s,t) \in R\big),$$

(R-re korlátozott, additív) Pexider-egyenlet. Rimán János [10] kimutatta, hogy ennek van kvázi-kiterjesztése hasonló értelemben: léteznek olyan a, b konstansok és olyan $K, L, N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, hogy

$$(12) \qquad K(x+y) = L(x) + N(y) \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

és a (9)-hez hasonló

$$R_s\text{-en} \quad \ell = L + a, \qquad R_t\text{-n} \quad n = N + b \qquad \text{és} \qquad R_{s+t}\text{-n} \quad k = K + a + b$$

összefüggések állnak fenn. Én észrevettem [1], hogy ez azt is jelenti, hogy (11)-nek kiterjesztése is van $\mathbb{R}^2$-re abban a (10)-hez hasonló értelemben, hogy létezik egyetlen (a fentivel nem szükségképen azonos) $K, L, N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhármas, mely teljesíti (12)-t és

$$(13) \qquad R_s\text{-en} \quad \ell = L, \qquad R_t\text{-n} \quad m = M \quad \text{és} \quad R_{s+t}\text{-n} \quad n = N$$

-t is. Radó Ferenc és John Baker [9] ezt bebizonyították valós (és komplex) lineáris terekre és példákkal mutatták meg, hogy határpontok nem mindig vehetők hozzá a (11)-beli R-hez, valamint alkalmazásokat is adtak aggregációelméletben.

Mint Fulvia Skof (levélbeli közlés) ellenpéldákkal kimutatta, a

$$(14) \qquad k(s+t) = m(s)n(t) \qquad \big((s,t) \in R\big)$$

exponenciális Pexider-egyenletnek nincs mindig kiterjesztése és az

$$(15) \qquad e(s+t) = e(s)e(t) \qquad \big((s,t) \in R\big)$$

exponenciális Cauchy-egyenletnek sincs mindig kvázi-kiterjesztése összefüggő nyitott R halmazból $\mathbb{R}^2$-re. A helyzetet enyhítette John Baker [3] következő eredménye. (A valós vagy komplex normált lineáris terek Descartes-szorzatára kimondott eredményt itt $\mathbb{R}^2$-re fogalmazzuk és a függvényértékeket is komplex helyett valósnak vesszük.)

2.1. tétel [3]. *Ha* $m : R_s \to \mathbb{R}$, $n : R_t \to \mathbb{R}$, $k : R_{s+t} \to \mathbb{R}$ *(v.ö. (7)) kielégítik a (14) függvényegyenletet egy összefüggő nyitott R halmazon, akkor vagy*

(i) k *mindenütt nulla* R_{s+t}*-n*

vagy

(ii) k *sehol se nulla* R_{s+t}*-n.*

Az utóbbi, (ii) esetben m *és* n *se nulla sehol* R_s*-en, illetve* R_t*-n, valamint (14) egyértelműen multiplikatívan kiterjeszthető* $\mathbb{R}^2$*-re, vagyis létezik egyetlen olyan* $E : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ *függvény és olyan* $a \neq 0$, $b \neq 0$ *konstansok, hogy (6) teljesül* $\mathbb{R}^2$*-en, és*

$$(16) \qquad R_s\text{-en } \; m = aE, \quad R_t\text{-n } \; n = bE \quad \text{és} \quad R_{s+t}\text{-n } \; k = abE.$$

[A (16) összefüggések kiterjesztést és nemcsak kvázi-kiterjesztést jelentenek, mert $M(x) = aE(x)$, $N(y) = bE(y)$, $K(z) = abE(z)$ kielégítik a

$$(17) \qquad K(x+y) = M(x)N(y) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

egyenletet.]

Mint mondtuk ez enyhítette a helyzetet, de nem oldotta meg teljesen, mert az (i) esetben keveset mond az m és n függvényekről (csak azt, hogy mindenütt legalább az egyik nulla). Ezt a hézagot aránylag könnyen betöltöttem (nincs még publikálva). Azt kell csak meggondolni, hogy ha van olyan $s_0 \in R_s$, melyre $m(s_0) \neq 0$, akkor szükségképpen $n = 0$ a $\{t \in R_t \mid s_0 + t \in R_{s+t}\}$ intervallumon. Így kapjuk a következő eredményt.

2.2. tétel. *A (14) egyenlet általános* m, n *megoldásait az esetben mikor* R_{s+t}*-n* $k = 0$ *a következő konstrukció adja meg. Az* m *függvény lehet* R_s*-en azonosan nulla, akkor* n *tetszőleges az* R_t*-n. A nem azonosan nulla* m*-eket így szerkesztjük meg: vegyük* R_s*-nek egy tetszőleges nemüres* S *részhalmazát és adjunk* m*-nek tetszőleges nullától különböző értékeket* S*-en, míg* $R_s \setminus S$*-en* $m = 0$*. Legyen továbbá* $T := \{t \in R_t \mid \exists s \in S : s + t \in R_{s+t}\}$*-n* $n = 0$*, míg* n *tetszőleges lehet* $R_t \setminus T$*-n.*

[Persze lehetne m helyett n-nel is kezdeni.]

Vegyük észre, hogy S például intervallum is lehet és azon m tetszőleges (seholsem nulla) akármennyire reguláris (pl. folytonos, C^1, akárhányszor differenciálható, stb.) függvény lehet, mely a nulla-részekhez is regulárisan csatlakozhat. Tehát regularitási feltételekkel nem lehet a kiterjeszthetőséget helyreállítani vagy képlettel könnyen kifejezhető általános megoldásokat kapni, csak az (i) lehetőség kizárásával.

A (15) egyenlet kvázi-kiterjeszthetősége vagy kiterjeszthetősége összefüggő nyitott halmazról $\mathbb{R}^2$-re még bonyolultabb probléma a fenti tételbeli (i)-nek megfelelő esetben, mikor e-nek van nullpontja R_{s+t}-ben és így R_s-ben vagy R_t-ben is (bonyolultabb és nem egyszerűbb, mert $k = m = n$ bonyodalmat okozhat R_s,

R_t, R_{s+t} közös pontjain). Ezzel itt nem foglalkozunk. De *ha e-nek nincs null-pontja $R_s \cup R_t \cup R_{s+t}$-n, akkor a* (15) *egyenletnek mindig van egyetlen* (6) *kvázi-kiterjesztése R-ből $\mathbb{R}^2$-re:*

$$R_s\text{-en } e = aE,\ R_t\text{-n } e = bE,\ R_{s+t}\text{-n } e = abE \text{ és } \mathbb{R}^2\text{-en } E(x+y) = E(x)E(y).$$

Ha az origó R-ben vagy határán van, akkor ez $a = b = 1$-gyel kiterjesztése (15)*-nek.*

3. A $k(s+t) = \ell(s) + m(s)n(t)$ egyenlet kiterjesztése és megoldása

A (2), (3), (8), (11), (14) és (15) egyenleteknek közös általánosítása a

$$(18)\qquad k(s+t) = \ell(s) + m(s)n(t) \qquad \big((s,t) \in R\big)$$

függvényegyenlet. Mint azokról, (18)-ról is azt tételezzük fel, hogy összefüggő nyitott R halmazon teljesül. Az előzőleg (14) és (15) kapcsán említett komplikációknak (melyek az adott esetekben lehetetlenné teszik a kiterjesztést) elkerülése céljából feltesszük, hogy *k lokálisan nemkonstans* vagyis *R_{s+t} semelyik pozitív hosszúságú részintervallumán se konstans* a k függvény (Anders Lundberg [8] és mások az ilyen függvényt „philandering"-nek hívják, talán „csapodár"-ral lehetne magyarra fordítani). Ezen (és csak ezen, és csak k-ra vonatkozó) feltétel mellett mind (egyértelmű) kiterjeszthetőséget kimondó, mind az általános megoldást megadó tételt fogunk megfogalmazni, majd az általános megoldást lényegesen konkrétabbá tesszük abban az esetben, amikor k gyenge regularitási feltételnek is eleget tesz (pozitív mértékű halmazon korlátos). A bizonyításokat részben vázoljuk; a részletes bizonyítások [2]-ben találhatók.

3.1. tétel. *Ha k lokálisan nemkonstans, akkor a* (18) *függvényegyenlet mindig kiterjeszthető R-ből $\mathbb{R}^2$-re, vagyis létezik egyetlen olyan $K, L, M, N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényötös, hogy*

$$(19)\qquad K(x+y) = L(x) + M(x)N(y) \quad \textit{minden} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\textit{-re}$$

és

$$R_s\text{-en}\quad \ell = L,\quad R_t\text{-n}\quad m = M,\quad R_{s+t}\text{-n}\quad k = K.$$

Ekkor (18) *általános megoldása vagy*

$$m(s) = \omega,\quad \ell(s) = A(s) + B \quad (s \in R_s),$$

$$n(t) = \frac{1}{\omega}A(t) + P \quad (t \in R_t), \qquad k(q) = A(q) + B + P\omega \quad (q \in R_{s+t}),$$

vagy pedig

$$m(s) = \omega E(s),\quad \ell(s) = \alpha E(s) + B \quad (s \in R_s),$$

$$n(t) = \delta E(t) - \frac{\alpha}{\omega},\quad (t \in R_t), \qquad k(q) = \omega\delta E(q) + B \quad (q \in R_{s+t})$$

alakú, ahol $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $E : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ tetszőleges nemkonstans megoldása (5)*-nek, illetve* (6)*-nak és $\omega \neq 0$, $\delta \neq 0$, α, B, P tetszőleges konstansok.*

A bizonyítás vázlata. Először az összefüggő nyitott R halmaz egy teszőleges (c,d) pontjának hatszögű

$$(20)\qquad H(c,d;r) := \{(s,t) \mid s \in]c-r, c+r[,\ t \in]d-r, d+r[,\ s+t \in R_{s+t}\}$$

környezetéből terjesztjük ki (4)-et $\mathbb{R}^2$-re. Ehhez előbb a (c,d) pontot visszük be az origóba.

Könnyű látni, hogy a

$$\lambda(u) = \ell(u+c) - \ell(c), \quad \mu(u) = m(u+c) - m(c),$$

$$\nu(v) = n(v+d) - n(d), \quad \kappa(w) = k(w+c+d) - k(c+d)$$

-vel definiált függvények a

$$(21)\qquad \kappa(u+v) = \kappa(u) + m(u+c)\nu(v) \qquad \big((u,v) \in H(0,0;r)\big)$$

egyenletnek tesznek eleget. Az $u=0$ helyen ez $\kappa(v) = m(c)\nu(v)$-t ad. Itt $m(c) \neq 0$, mert különben κ és vele k konstans lenne, amit kizártunk. Tehát $\nu(v) = \kappa(v)/m(c)$ és, bevezetve $e(u) := m(u+c)/m(c)$-vel az e függvényt, (21)-ből a nullpont körüli hatszögön

$$(22)\qquad \kappa(u+v) = \kappa(u) + e(u)\kappa(v)$$

-t kapunk. A baloldal szimmetrikus lévén ebből

$$\kappa(u)\big[e(v)-1\big] = \kappa(v)\big[e(u)-1\big]$$

következik. Két eset van:

(a) Ha e azonosan 1, akkor $\kappa(u+v) = \kappa(u) + \kappa(v)$ az origó hatszögkörnyezetén és így, mint a 2. fejezet első részében láttuk, κ kiterjeszthető (5)-nek az egész síkon eleget tevő (additív) A függvénnyé.

(b) Ha e nem azonosan 1, akkor $\kappa(v) = \gamma[e(v)-1]$ $(\gamma \neq 0)$. Ezt (22)-be helyettesítve $e(u+v) = e(u)e(v)$-t kapunk az origó körüli hatszögön. Mint a 2. fejezet végén láttuk, ez egyértelműen kiterjeszthető (6)-tá $\mathbb{R}^2$-re.

A fentebb vázolt számítások kifejezik k, ℓ, m, n-et κ-val, illetve e-vel, így k, ℓ, m, n egyértelmű kiterjeszthetőségét is biztosítják, valamint megadják az így kapott K, L, M, N függvények kifejezését A-val, illetve E-vel. Ezzel a tétel be is van bizonyítva $H(c,d;r)$-re (ld. (20)). Mivel R nyitott halmaz, ha két nyitott részhalmazából van egy egyenletnek kiterjesztése akkor azok uniójából is van és ezek a kiterjesztések azonosak. Másrészt R összefüggő is, így szokásos kompaktsági érveléssel bizonyítható a kiterjeszthetőség az egész R-ből $\mathbb{R}^2$-re. A tétel többi állítása az előzőkből következik.

A fenti tételből könnyen következik a következő:

3.2. következmény. *Ha a lokálisan nemkonstans k függvény pozitív mértékű halmazon korlátos is, akkor* (18) *általános megoldása vagy*

$$m(s) = \omega, \quad \ell(s) = Cs + B \quad (s \in R_s),$$

$$n(t) = \frac{C}{\omega}t + P \quad (t \in R_t), \qquad k(q) = Cq + B + P\omega \quad (q \in R_{s+t})$$

vagy

$$m(s) = \omega e^{Ds}, \quad \ell(s) = \alpha e^{Ds} + B \quad (s \in R_s),$$

$$n(t) = \delta e^{Dt} - \frac{\alpha}{\omega} \quad (t \in R_t), \qquad k(q) = \omega\delta e^{Dq} + B \quad (q \in R_{s+t})$$

alakú, ahol $C \neq 0$, $D \notin \{0,1\}$, $\omega \neq 0$, $\delta \neq 0$, α, B, P *tetszőleges konstansok.*

Abban az esetben, amikor R *téglalap,* Járai Antal [7]-ben (18)-nak és általánosabb egyenleteknek is meghatározta általános *mérhető* megoldásait.

Végül nyitott **probléma**-ként kérdezzük, hogy mi az általános (vagy általános reguláris) megoldás abban az esetben, amikor k-ra *nem* teljesül, hogy lokálisan nemkonstans.

Irodalomjegyzék

[1] J. Aczél, Remark 28, *Aequationes Math.*, **29** (1985), 101.

[2] J. Aczél, Extension of a generalized Pexider equation, sajtó alatt a *Proc. Amer. Math. Soc.*-ban.

[3] J. A. Baker, Locally Pexider, sajtó alatt az *Aequationes Math.*-ban.

[4] Z. Daróczy and L. Losonczi, Über die Erweiterung der auf einer Punktmenge additiven Funktionen, *Publ. Math. Debrecen,* **14** (1967), 239–245.

[5] A. Gilányi, C. T. Ng, and J. Aczél, On a functional equation arising from comparison of utility representations, *J. Math. Anal. Appl.,* **304** (2005), 572–583.

[6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities,* Cambridge University Press, Cambridge (1934).

[7] A. Járai, A remark on a paper of J. Aczél and J. K. Chung: "Integrable solutions of functional equations of a general type", *Stud. Sci. Math. Hungar.,* **19** (1984), 273–274.

[8] A. Lundberg, On the functional equation $f(\lambda(x) + g(y)) = \mu(x) + h(x+y)$, *Aequationes Math.,* **16** (1977), 21–30.

[9] F. Radó and J. A. Baker, Pexider's equation and aggregation of allocations, *Aequationes Math.,* **32** (1987), 227–239.

[10] J. Rimán, On an extension of Pexider's equation, *Zb. Rad. Mat. Inst. Beograd (N.S.),* **1(9)** (1976), 65–72.

ÁLTALÁNOSÍTOTT NYÍLT HALMAZOK, ÁLTALÁNOSÍTOTT TOPOLÓGIÁK

CSÁSZÁR ÁKOS

1. Bevezetés

A most tárgyalni kívánt téma eredete a múlt század hatvanas éveire, tehát jó negyven évre vezethető vissza. Ekkor kezdtek a topológiai irodalomban megjelenni olyan cikkek, amelyekben a nyílt halmazokhoz sok tekintetben hasonlóan viselkedő, de azoknál általánosabb halmazok játszanak szerepet.

Hogy mindjárt néhány példával szolgáljunk, legyen X adott (nemüres) halmaz, $\exp X$ pedig ennek hatványhalmaza, és λ topológia az X halmazon. Ekkor [6] szerint egy $A \subset X$ halmazt *félnyíltnak* (semi-open) mondunk, ha

$$A \subset c_\lambda i_\lambda A, \tag{1.1}$$

ahol $i_\lambda A$ jelöli az A halmaz belsejét, $c_\lambda A$ pedig az A halmaz lezárását a λ topológiára nézve (tehát az elterjedt jelöléssel $i_\lambda A = \operatorname{int} A$ és $c_\lambda A = \operatorname{cl} A$, a rövidség kedvéért elhagyjuk a szokásos zárójeleket).

Ehhez hasonlóan [7] szerint az $A \subset X$ halmazt *előnyíltnak* (preopen) mondjuk, ha

$$A \subset i_\lambda c_\lambda A, \tag{1.2}$$

[8] szerint A *α-nyílt* (α-open), ha

$$A \subset i_\lambda c_\lambda i_\lambda A, \tag{1.3}$$

végül A [1] szerint *β-nyílt* (β-open), ha

$$A \subset c_\lambda i_\lambda c_\lambda A. \tag{1.4}$$

Azon, hogy az említett halmazosztályok tulajdonságai emlékeztetnek a nyílt halmazokéira, a következőt kell érteni. Legyen λ topológia X-en, és jelölje μ a λ-ra nézve félnyílt, előnyílt, α-nyílt vagy β-nyílt halmazok osztályának valamelyikét. Ekkor triviálisan $\emptyset \in \mu$ és könnyen láthatóan μ-beli halmazok tetszőleges egyesítése is μ-beli. Ennélfogva μ viselkedése bizonyos tekintetben emlékeztet valamely topológia nyílt halmazainak viselkedésére. A pontosság kedvéért meg kell jegyezni, hogy az α-nyílt halmazok ténylegesen topológiát (mégpedig az eredeti λ topológiánál finomabb topológiát) alkotnak [8], de általában sem a félnyílt halmazok, sem az előnyílt halmazok, sem a β-nyílt halmazok összessége nem topológia. Például ha X a számegyenes, λ pedig ennek szokásos euklideszi topológiája, akkor $[0,1]$ és $[1,2]$ bármelyike félnyílt, de $[0,1] \cap [1,2] = \{1\}$ nem félnyílt. Ugyanezzel az X és λ jelöléssel a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza és $(X - \mathbb{Q}) \cup \{0\}$ egyaránt előnyílt, de metszetük (azaz $\{0\}$) nem előnyílt.

Mindez talán eléggé alátámasztja a következő elnevezés bevezetését (további érveket még felsorolunk majd): ha X nemüres halmaz, nevezzük a $\mu \subset \exp X$ halmazrendszert *általánosított topológiá*nak (generalized topology, rövidítve GT), ha $\emptyset \in \mu$ és μ-beli halmazok tetszőleges egyesítése is μ-beli. Ennek megfelelően egy topologikus térben a félnyílt, előnyílt, β-nyílt halmazok bármelyikének rendszere GT.

Említettük, hogy a most bevezetett elnevezés nellett további érvek is felhozhatók. Valóban, legyen μ tetszőleges GT az X alaphalmazon. [5] megmutatja (a gondolatmenet nem különösen nehéz), hogy ha az $i_\mu : \exp X \to \exp X$ halmazfüggvényt az

$$i_\mu A = \bigcup\{M \in \mu : M \subset A\} \tag{1.5}$$

képlet értelmezi, akkor i_μ *szűkítő* (más szóval $i_\mu A \subset A$), *monoton* (vagyis $A \subset B \subset X$ esetén $i_\mu A \subset i_\mu B$), és *idempotens* (azaz $i_\mu i_\mu A = i_\mu A$). Nevezzük röviden *magoperáció*nak az olyan $i : \exp X \to \exp X$ halmazfüggvényt, amely a fenti értelemben szűkítő, monoton és idempotens.

Érvényes mármost az előbbi állítás megfordítása is: ha $i : \exp X \to \exp X$ magoperáció, akkor létezik pontosan egy μ GT, amelyre $i = i_\mu$, ti.

$$\mu = \{A \subset X : iA = A\}. \tag{1.6}$$

Lényeges, hogy itt a magoperációt úgy értelmeztük, ahogyan tettük, és a GT általánosított topológiák is pontosan a fenti módon vannak értelmezve (pl. nincs megkövetelve, hogy $X \in \mu$ legyen). A GT-k itt leírt kapcsolata a magoperációkkal talán eléggé meggyőzően mutatja GT itt elfogadott értelmezésének célszerűségét.

Továbbra is egy μ GT-t tekintve X-en, nem nehéz belátni [5], hogy a

$$c_\mu A = \bigcap\{X - M : M \in \mu,\ A \subset X - M\} \tag{1.7}$$

leképezés viszont *burokoperáció,* azaz olyan $c : \exp X \to \exp X$ leképezés, amely monoton, idempotens és *bővítő* (tehát $cA \supset A$). Megfordítva, ha $c : \exp X \to \exp X$ burokoperáció, létezik egy és csak egy μ GT, amelyre $c = c_\mu$, mégpedig $\mu = \{M \subset X : cM = M\}$. A kapcsolat az (1.5) és (1.7) lelépezés között igen egyszerű:

$$i_\mu(X - A) = X - c_\mu A. \tag{1.8}$$

Némileg egyszerűsíti a kifejezésmódot, ha a μ GT elemeit *μ-nyíltnak*, komplementumaikat *μ-zártnak* mondjuk. Így $i_\mu A$ az A-nál szűkebb μ-nyílt halmazok között a legbővebb, $c_\mu A$ pedig az A-t tartalmazó μ-zártak között a legszűkebb.

2. Általánosított nyílt halmazok

A mag- és burokoperációkkal kapcsolatban az 1. pontban idézett eredmények lehetővé teszik, hogy az (1.1)–(1.4) alatt megfogalmazott definíciókban a λ topológia szerepét tetszőleges μ GT vegye át.

Valóban, legyen ismét X adott nemüres halmaz, s most μ tetszőleges GT az X halmazon. Nevezzük az $A \subset X$ halmazt *μ-félnyíltnak*, ha

$$A \subset c_\mu i_\mu A. \tag{2.1}$$

Ugyanígy, legyen az A halmaz *μ-előnyílt,* ha

$$A \subset i_\mu c_\mu A, \tag{2.2}$$

μ-α-nyílt, ha

$$A \subset i_\mu c_\mu i_\mu A, \tag{2.3}$$

végül *μ-β-nyílt,* ha

$$A \subset c_\mu i_\mu c_\mu A. \tag{2.4}$$

Nem nehéz belátni [5], hogy a (2.1)–(2.4) halmazosztályok mindegyike GT. Jelöljük $\sigma(\mu)$-vel a μ-félnyílt halmazok osztályát, $\pi(\mu)$-vel a μ-előnyílt halmazokét, $\alpha(\mu)$-vel a μ-α-nyíltakét, végül $\beta(\mu)$-vel a μ-β-nyíltakét. Mindezek tehát μ-vel együtt GT-k X-en.

Érdemes megjegyezni, hogy a (2.1)–(2.4) definíciók lényegében véve tartalmazzák mindazokat a halmazosztályokat, amelyek az i_μ és c_μ halmazfüggvények segítségével nyerhetők. Azt kell ehhez meggondolni, hogy egyrészt i_μ és c_μ mindegyike idempotens, másrészt hogy [2] felhasználásával bármely $A \subset X$ halmazra

$$c_\mu i_\mu c_\mu i_\mu A = c_\mu i_\mu A \tag{2.5}$$

és

$$i_\mu c_\mu i_\mu c_\mu A = i_\mu c_\mu A. \tag{2.6}$$

Így a (2.1)–(2.4) alatti halmazok mellett csak a triviális $A \subset i_\mu A$ (csak $A \in \mu$ esetén teljesül) és az $A \subset c_\mu A$ (mindig teljesül) feltételek maradnak.

Az a körülmény, hogy a (2.1)–(2.4) definíció GT-ből kiindulva GT-hez vezet, megfogalmazhatóvá teszi a következő kérdést: hogyan lehet megkapni a $\xi(\eta)$ halmazosztályt, ha ξ a σ, π, α, β betűk valamelyike, η jelentése pedig a $\sigma(\mu)$, $\pi(\mu)$,

$\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$ szimbólumok valamelyike, ahol μ adott GT X-en? A definíciókból kiinduló türelmes számolás eredményeképpen a következő táblázathoz jutunk.

ξ	α	σ	π	β
α	α	σ	π	β
σ	σ	σ	θ	β
π	π	β	π	β
β	β	β	θ	β

Ebből kitűnik, hogy ha pl. $\xi = \pi$ és $\eta = \sigma(\mu)$, akkor (a harmadik sor második elemének megfelelően) $\xi(\eta) = \beta(\mu)$.

A táblázat harmadik oszlopában található θ jelek arra utalnak, hogy a $\xi = \sigma$ és $\eta = \pi(\mu)$, valamint a $\xi = \beta$ és $\eta = \pi(\mu)$ esetben a kapott halmazosztály általában nem esik egybe az $\alpha(\mu)$, $\sigma(\mu)$, $\pi(\mu)$, $\beta(\mu)$ osztályok egyikével sem. Erre könnyű példát mutatni még abban az esetben is, amikor μ nem GT (mint általában), hanem speciálisan topológia ([5, 3.4]). Ennélfogva megkísérelhetjük, hogy táblázatunkat azáltal tegyük pontosabbá, hogy definíciószerűen tetszőleges μ GT esetén

$$\sigma\big(\pi(\mu)\big) = \rho(\mu), \quad \beta\big(\pi(\mu)\big) = \nu(\mu),$$

más szóval

$$A \in \rho(\mu) \Leftrightarrow A \subset i_\mu c_\mu A \tag{2.7}$$

és

$$A \in \nu(\mu) \Leftrightarrow A \subset c_\mu i_\mu c_\mu A. \tag{2.8}$$

Ismét különösebb nehézség nélküli számolással be lehet látni, hogy a $\rho(\mu))$ és $\nu(\mu))$ osztályok bevezetése után az előbbi táblázat így módosul:

ξ	α	σ	π	ρ	ν	β
α	α	σ	π	ρ	ν	β
σ	σ	σ	ρ	ρ	ν	β
π	π	β	π	ν	ν	β
ρ	ρ	β	ρ	ν	ν	β
ν	ν	β	ν	ν	ν	β
β	β	β	ν	ν	ν	β

Például a táblázat negyedik sorának ötödik oszlopa szerint a $\xi = \rho$, $\eta = \nu(\mu)$ esetben $\xi(\eta) = \nu(\mu)$. Ennek megfelelően a táblázat egy félcsoport szorzótáblázatává alakult.

Kívánatos volna természetesen, hogy a (2.7) és (2.8) képletekkel értelmezett $\rho(\mu)$ és $\nu(\mu)$ halmazosztályokat valamilyen jól használható módon jellemezzük.

Erre a jellemzésre mód kínálkozik abban az esetben, amikor μ nem GT (mint általában), hanem speciálisan topológia. Ekkor (ezúttal ismét a $\mu = \lambda$ jelölést használva) nem nehéz belátni [5], hogy egyrészt

$$\rho(\lambda) = \nu(\lambda), \tag{2.9}$$

másrészt

$$A \in \rho(\lambda) = \nu(\lambda) \Leftrightarrow A \subset i_\lambda c_\lambda A \cup c_\lambda i_\lambda A. \tag{2.10}$$

Ez azonban felvet egy jelenleg teljesen nyitott kérdést: mi történik, ha μ nem topológia, hanem csak GT? A helyzet ugyanis az, hogy elég sok példa végigszámolása után sem sikerült olyan esetet találni, amikor a (2.9)-nek megfelelő

$$\rho(\mu) = \nu(\mu) \tag{2.11}$$

egyenlőség valamely μ GT-re *nem* teljesül, sem pedig olyat, amikor a (2.11)-nek eleget tevő halmazosztályt ne lehetne a (2.10)-nek megfelelő

$$A \in \rho(\mu) = \nu(\mu) \Leftrightarrow A \subset i_\mu c_\mu A \cup c_\mu i_\mu A \tag{2.12}$$

módon jellemezni. Ennek megfelelően elképzelhető, hogy a topologikus μ esetében tapasztalt viszonyok általában is, tehát tetszőleges μ GT esetén is érvényesek.

Mindezek a témakör tisztázásához tartozó igen érdekes nyitott kérdések.

Irodalomjegyzék

[1] M. E. Abd El-Monsef, S. N. El-Deeb, R. A. Mahmoud, β-open sets and β-continuous mappings, *Bull. Fac. Sci. Assiut Univ.*, **12** (1966), 77–90.

[2] Á. Császár, Generalized open sets, *Acta Math. Hungar.*, **75** (1997), 65–87.

[3] Á. Császár, On the γ-interior and γ-closure of a set, *Acta Math. Hungar.*, **80** (1998), 89–93.

[4] Á. Császár, Generalized topology, generalized continuity, *Acta Math. Hungar.*, **96** (2002), 351–357.

[5] Á. Császár, Generalized open sets in generalized topologies, *Acta Math. Hungar.*

[6] N. Levine, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 36–41.

[7] A. S. Mashhour, M. E. Abd El-Monsef, S. N. El-Deeb, On precontinuous and weak precontinuous mappings, *Proc. Math. Phys. Soc. Egypt*, **53** (1982), 47–53.

[8] O. Njåstad, On some classes of nearly open sets, *Pacific J. Math.*, **15** (1965), 961–970.

VÉGTELEN ABEL-CSOPORTOK MAGYARORSZÁGON

FUCHS LÁSZLÓ

A jelenlegi magyar matematikusok körében talán kevésbé ismert tény, hogy a múlt században jó néhány évig világszerte Magyarországot tekintették az Abel-csoportok kutatási központjának. Ez főként Szele Tibor debreceni professzor érdeme: az ő tehetsége, az ő lelkesedése és kiváló pedagógiai rátermettsége számos követőre talált kedvenc kutatási területén: a végtelen Abel-csoportok elméletében.

Szele Tibort a véges Abel-csoportok elmélete vezette a végtelen Abel-csoportokhoz. 1942-ben Hajós Györgynek sikerült megoldani Minkowski német matematikusnak egy nevezetes, majdnem fél évszázadig nyitott problémáját az n-dimenziós euklideszi térnek hézagmentes lefedéséről n-dimenziós kockákkal (Hajós [H]). Hajós átfogalmazta a problémát érdekes módon véges Abel-csoportokra, s ebben a formában sikerült bebizonyítania, hogy ha az n-dimenziós euklideszi tér n-dimenziós kockákkal úgy van lefedve, hogy minden pont valamelyik kockához tartozik s két kockának nincs közös belső pontja, akkor léteznek kockák, melyeknek egyik $n-1$-dimenziós lapjuk közös. A komplikált bizonyítás csoportgyűrűkre vonatkozó új tételekre épült. A 40-es évek végefelé Rédei László szegedi professzornak s Szelének sikerült a bizonyítást lényegesen leegyszerűsíteni (Rédei [R], Szele [Sz]).

A Hajós-tétellel kapcsolatos vizsgálatok felkeltették Szele Tibor érdeklődését a kommutatív csoportok struktúrájának általános problémája iránt. Felismerte, hogy az Abel-csoportok területén rengeteg érdekes megoldatlan kérdés rejtőzik: ez a terület szinte aranybánya algebristák számára. Szegeden, részben Rédei László, Szélpál István és Szendrei János közreműködésével, néhány alapvető, nem sok elméletet igénylő kérdést tisztázott (Szele [1], [2], [4], Rédei–Szele [1], Szele–Szélpál [1], Szele–Szendrei [1]); Szélpál maga is több kérdésre adott választ (Szélpál [1], [2], [3]). Szele szinte öntötte magából a problémákat, állandóan tele volt érdekes, alapvető problémákkal, amelyekre nem talált választ az irodalomban. Ezeket önzetlenül megosztotta mindenkivel, aki hajlandó volt őt meghallgatni. De ez őt nem elégítette ki, s mikor Debrecenben katedrát kapott, ottani tanítványaival együtt (Erdélyi Mária, Erdős Jenő, Gacsályi Sándor, Kertész Andor, Kovács László, Papp Zoltán) szisztematikusan felkutatta a végtelen Abel-csoportok teljes irodalmát. Felismerte, hogy míg Reinhold Baer úttörő cikkei ([B1], [B2]) szilárd alapját vetik meg az elméletnek, addig a jövőt Leonid Kulikov orosz matematikus 1945-ben megjelent alapvető cikke jelzi [K], amely lényegesen új impetuszt ad az elméletnek. Ebben a cikkben Kulikov a tetszőleges számosságú Abel-csoportok elméletében vezet be egészen új módszereket, jelentős mértékben fejlesztve az elméletet. A cikket Gacsályi Sándor lefordította magyarra és a gépelt példányokat buzgón tanulmányozta mindenki, aki Szele Tibor hatására érdeklődést mutatott a csoportelméletnek ebben az ágában. Így indult el a kutató munka Magyarországon az Abel-csoportok elméletében, és Szele Tibor rendkívüli tehetsége s kiváló vezetői képessége révén hamarosan jelentős sikereket hozott a kutatásban, komoly nemzetközi visszhangot keltve.

Szele Tibor szegedi éveinek legjelentősebb eredménye a végtelen Abel-csoportok elméletében a gyűrűk additív struktúrájának vizsgálata. Ezt ő kezdeményezte, és az ő nevéhez fűződik néhány alapvető eredmény (Szele [3], [5], [7], [15]). Ugyancsak jelentős az a cikke, amelyben a testelmélet analógiájára kifejleszti az Abel-csoportok elméletében az algebrai és transzcendens bővítéseket (Szele [6]). Ez abban az időben nagy érdeklődést keltett, bár ennek jelentősége azóta erősen lecsökkent a kiterjedt injektivitási vizsgálatok következtében.

Az 50-es évek elején indult igazán virágzásnak a magyar Abel-csoport iskola. Szele felismerte a Kulikov által bevezetett bázis-részcsoport rendkívüli jelentőségét, és tőle, valamint tanítványaitól néhány cikk jelent meg, amelyekben vagy továbbfejlesztik a bázis-részcsoportok elméletét, vagy pedig ezek segítségével fontos eredményeket bizonyítanak (Szele [14], Kovács [1], Papp [1]). Talán érdemes megemlíteni, hogy a kutatás nem korlátozódott Debrecenre: Szele Tibor hatására én is csatlakoztam az Abel-csoportok kutatóinak növekvő táborához. Első Abel-csoportos cikkemben (Fuchs [1]) Szelének egy problémáját oldottam meg: Kulikovnak egy p-csoportokra vonatkozó fontos kritériumát terjesztettem ki tetszőleges Abel-csoportokra, a Kertész Andor által adott átfogalmazás felhasználásával (Kertész [1]). Az elmélet vonzó szépségének hatására (egy időre) abbahagytam kutatásaimat ideálelméletben és a részben rendezett csoportok területén, s teljes gőzerővel kezdtem dolgozni az Abel-csoportok elméletében.

Szelével állandó kapcsolatom volt nemcsak levelezés révén, hanem személyesen is sokat matematizáltunk. Amikor Tibor feljött Budapestre egy minisztériumi vagy egy akadémiai ülésre, délutánjait szüleim lakásán (a Városligetnél) töltöttük egy szobába zárkózva. Órák hosszat matematizáltunk: saját és tanítványaink munkáit tárgyaltuk meg, sokszor próbáltunk közösen tisztázni megoldatlan problémákat, újabb publikációkat vitattunk meg nemcsak az Abel-csoportok elméletében, de az algebra más ágában is. Édesanyám volt az egyetlen személy, aki beléphetett munkánk szentélyébe: ő hozta az elengedhetetlen eszpresszót és a frissítőket. Tibor csak akkor távozott, amikor már sietnie kellett a Nyugati-pályaudvarra, hogy elérje az utolsó debreceni vonatot.

Tibortól nagyon sokat tanultam ezeken a megbeszéléseken, és rendkívül hálás vagyok neki, hogy bevezetett ebbe a lenyűgöző elméletbe, amely idővel munkásságom központi területévé vált. Vele és Kertész Bandival több közös problémán dolgoztunk, ezeknek a többsége publikálva is lett (Fuchs–Kertész–Szele [1]–[4]). A problémák jó részét Szele Tibor vetette fel. Azokban a kérdésekben, amelyeken együtt dolgoztunk, többnyire neki volt jó ötlete a nekiinduláshoz, azután együtt vagy külön töprengtünk a problémákon, vitatkoztunk és bizonyítottunk, s végül nekem jutott az a (nem éppen hálás) feladat, hogy a tételeket minél általánosabb formában fogalmazzam meg és végleges formába öntsem a kész dolgozatot. A legutolsó matematizálásunkon bizonyított eredményünk csak már mint Szelének posztumusz cikke jelent meg (Fuchs–Szele [1]).

A pesti egyetemen speciális előadásaim s heti szemináriumaink hatására néhány tanítványom komoly érdeklődést mutatott az Abel-féle csoportok elméletében: Fried Ervin, Grätzer György, Schmidt Tamás, Szász Ferenc, Wiegandt Richárd. Többen írtak is dolgozatot Abel-csoportokról (Fried [1], Grätzer–Schmidt [1], [2], Szász [1]), de érdeklődési területük nem maradt ebben a témában és mint kutatók más algebrai diszciplínákban váltak ki.

Hangsúlyoznom kell, hogy ezekben a kutatásokban mi magyar algebristák eléggé izolálva voltunk, jórészt csak magunkra támaszkodhattunk. Külföldi utazás vezető algebristákhoz alig valósult meg: azt a kevés utazási lehetőséget, amelyeket az Akadémia nyújtott, majdnem kizárólag az Akadémia tagjai vették igénybe. Nyugati algebristákkal személyes kapcsolat sokáig nem is létezett. Reinhold Baer meghívását Szele Tibor nem fogadhatta el, mert nem kapott útlevelet erre az útra. Érthetetlen módon jó ideig nem alakult ki kapcsolat orosz algebristákkal sem. Külföldi kapcsolataink főként a lengyel (Jerzy Łoś, Stanislaw Balczerzyk, Andrzej Hulanicki, Edward Sąsiada) és a cseh algebristákra (Vladimir Kořinek, Vlastimil Dlab) szorítkoztak – ezek a kapcsolatok nagyon is fontosnak bizonyultak. Csak 1956 után javult a helyzet: a nyugati országokba való utazásnak kevésbé volt akadálya, amennyiben a kiutazó devizaellátása külföldi forrásból biztosítva volt.

Külföldi kapcsolataink hiányával magyarázható, hogy dolgozatainknak túlnyomó többsége általunk felvetett problémákat tárgyal, s kevés olyan publikációt említhetünk ebből az időből, amelyek az Abel-csoportokra vonatkozó akkortájt legfontosabbaknak tartott kérdésekkel kapcsolatosak. Visszatekintve, úgy vélem, hogy problémaválasztásunk nem volt mindig a legszerencsésebb, de ahhoz nem fér kétség, hogy ezek a problémák olyan módszerek kibontakozására vezettek, amelyeknek nagy szerepük van abban, hogy az elmélet a jelenlegi magas fokra emelkedhetett.

Úgy látszik, hogy ebben az időben az Abel-csoportok elméletének fontosságára egyre többen kezdtek felfigyelni. Reinhold Baer alapvető cikkeit a 30-as években publikálta, az után alig jelent meg számottevő cikk Abel-csoportokról. Baer néhány fejezetet írt egy készülő Abel-csoportokról szóló könyvhöz (de nem fejezte be, mert egy másik könyv írása teljesen lekötötte). 1954-ben Irving Kaplansky publikált egy kis könyvet végtelen Abel-csoportokról (Kaplansky [Ka]), amelynek komoly hatása volt az amerikai algebristák körében. Alexander Kuros moszkvai professzor csoportelméleti könyvében [Ku] komoly teret szentel a végtelen Abel-csoportok elméletének, kivált Kulikov alapvető tételeinek. Vitathatatlan, hogy a kutatás fellendítése nagyrészt a magyar algebrai iskola érdeme. Büszkék lehetünk arra, hogy a nemzetközi izoláltság ellenére a kis számú, de lelkes magyar kutató gárda komoly sikereket könyvelhet az elmélet fejlesztésében.

Legyen szabad néhány alapvetőnek tekintett magyar eredményt kiemelni.

Kezdem a Szele által kezdeményezett területtel: a gyűrűk additív csoportjával. Alapvető dolgozatait az 1949–50-es években publikálta. E területen talán a leggyakrabban idézett eredmény Hopkins ismert tételének általánosítása: egy jobboldali Artin-gyűrű akkor és csak akkor Noether-féle, ha nem tartalmaz egy $\mathbb{Z}(p^\infty)$-vel izomorf részcsoportot egyetlen p prímszámra sem (Fuchs–Szele [2]). Ezzel ekvivalens feltétel az, hogy a gyűrű annullátora véges legyen. (Hopkins csak elégséges feltételt adott: ha a gyűrűnek van egységeleme.) Ebben a dolgozatban teljesen jellemeztük Artin-féle gyűrűk additív struktúráját. Eredményünket Szász Ferenc később kiegészítette (Szász [2]), kimutatván, hogy minden jobboldali Artin-féle gyűrű két Artin-gyűrűnek a direkt szorzata: az egyiknek additív csoportja torzió-csoport, míg a másiknak additív csoportja torziómentes, s ennek az utóbbinak feltétlenül van jobb egység-eleme.

Számos dolgozat kapcsolódik Szele úttörő munkáihoz. Megemlítem azon dolgozatomat (Fuchs [6]), amelyben többek között azt mutattam ki, hogy ha egy gyűrűnek az additív csoportja torzió-csoport, akkor a gyűrű-szorzást teljesen meghatározza a bázis-részcsoport: ez újabb adaléka a bázis-részcsoport fontosságának. Talán a legjobb bizonyíték az additív csoport fontos szerepére Israel Halperinnel közös dolgozatom (Fuchs–Halperin [1]), amelyben bebizonyítjuk, hogy minden von Neumann-féle reguláris gyűrű beágyazható egy egységelemes von Neumann-féle reguláris gyűrűbe. A bizonyítás lényegesen támaszkodik az additív struktúra szerkezetére, amelynek segítségével oly von Neumann-féle reguláris gyűrűt konstruálunk, amely felett minden von Neumann-féle reguláris gyűrű egy algebra.

Külön figyelmet érdemelnek a bázis-részcsoportra vonatkozó dolgozatok. Szele adott egy újfajta bevezetést, de a fő eredménye annak a roppant érdekes tulajdonságnak a felismerése, hogy egy p-csoportban a bázis-részcsoport mindig endomorf kép (Szele [14]). E tétele komoly meglepetést keltett. Mint már említettem, a Szele tanítványok közül Kovács Lászlónak és Papp Zoltánnak vannak figyelemre méltó eredményei a bázis-részcsoportról.

Szelével együtt alaposan tanulmányoztuk a Prüfer–Ulm–Zippin-féle elméletet, amely a megszámlálható Abel-féle p-csoportok teljes struktúráját karakterizálja számossági invariánsokkal. Sajnálatos módon, ezt az elméletet nem sikerült általánosítanunk egyetlen magasabb számosságú csoport-osztályra sem. Az Ulm-féle izomorfia-tételt 1968-ban Paul Hill és Peter Crawley kiterjesztette az ú.n. totálisan projektív p-csoportokra, de a Zippin-féle egzisztencia-tételt Kulikovnak és nekem majdnem egyidejűleg, egymástól teljesen függetlenül sikerült általánosítani 1952–53-es dolgozatainkban (Kulikov [K2], Fuchs [2]).

Szelével való matematizálásunkban visszatérő téma volt a direkt felbonthatatlan Abel-csoportok problémája. Az jól ismert volt, hogy a torzió-csoportok között csak a $\mathbb{Z}(p^\infty)$ csoportok és ezek részcsoportjai (a prímhatványrendű ciklikus csoportok) direkt felbonthatatlanok, míg a vegyes csoportok között egyáltalán nincs felbonthatatlan. A torziómentes csoportok között léteznek felbonthatatlanok (Bognár Mátyás adott egy igen egyszerű konstrukciót ezekre véges rang esetén, Bognár [1]), de abban az időben Reinhold Baer példái (a p-adikus egészek additív csoportjának tiszta részcsoportjai) tartották a számossági rekordot: a kontinuum. Rejtély volt, hogy miért nem sikerül a kontinuumnál nagyobb számosságú direkt felbonthatatlan csoportot konstruálni (azt gyanítottuk, hogy ebben a különböző típusok halmazának számossága: a kontinuum játszhat szerepet), és Szele egyre inkább arról volt meggyőződve, hogy a kontinuum a felső határ. Egészen meglepő volt, mikor 1957-ben majdnem egy időben három dolgozat is megjelent $2^{2^{\aleph_0}}$ számosságú felbonthatatlan csoportok létezését bizonyítva (Sąsiada [S], Hulanicki [H], Fuchs [12]). (1959-es dolgozatom [19], amelyben tetszőleges számosságú felbonthatatlan Abel-csoport létezését vélem bizonyítani, sajnos egy halmazelméleti hibát tartalmaz, amelyet csak később A. L. S. Corner küszöbölt ki nem-mérhető számosságokra.)

Sajnos, Szele már nem érte meg sejtésének cáfolatát: 1955-ben egy rövid, de rendkívül súlyos betegség után Szegeden örökre lehunyta szemét. Ez felmérhetetlen vesztesége volt nemcsak az Abel-csoportok kutató gárdájának, de az egész magyar algebrának is. Én nemcsak egy kongeniális munkatársat, de egy szívemhez oly közel álló jóbarátot is sirattam. Elvesztését sose tudtuk kiheverni. Halála után a debreceni Abel-kutató-csoport lényegileg megszűnt, ill. átalakult: például Kertész Andor és Papp Zoltán gyűrűk s modulusok vizsgálatára tért át, Kovács László nem-kommutatív csoportokra specializálódott, Gacsályi Sándor pedig topológiai kérdésekkel kezdett foglalkozni. Erdős Jenő volt az egyetlen, aki nem változtatott témát: néhány szép dolgozatot írt torziómentes Abel-csoportokról (Erdős [1]–[3]), de azután érthetetlen módon abbahagyta a publikálást.

Szólnom kell röviden Abel-csoportokról irt könyvem: *Abelian Groups* keletkezésének hátteréről. Amikor Kaplanskynak *Infinite Abelian Groups* c. könyve megjelent 1954-ben, Szele kifogásolta, hogy a szerző könyvéből kimaradt jónéhány, a p-csoportokra vonatkozó alapvető tétel. Szükségesnek tartotta, hogy egy átfogó, részletesebb könyv álljon az érdeklődők rendelkezésére. Maga is foglalkozott azzal a gondolattal, hogy egy ilyen jellegű könyvet írjon, de erre már nem volt alkalma 1955-ben bekövetkezett haláláig. Rám hárult az a szomorú feladat, hogy Szele hagyatékának Abel-csoportokra vonatkozó kéziratait átnézzem. Sok ötletet, értékes gondolatot magával vitt a sírba; feljegyzéseiből egy-két dolgozatot rendeztem sajtó alá, de semmi nyomát nem találtam annak, hogy a tervbe vett könyv részletein komolyan gondolkodott volna. Én kezdtem lassanként azzal a gondolattal foglalkozni, hogy Tibor tervét valóra váltsam. Miután a budapesti tudományegyetemen dékáni tisztségemtől 1957-ben megváltam, komolyan gondolhattam a könyvírást. De mielőtt végleg elhatároztam volna magam, próbaképpen néhány kiválasztott témán kezdtem dolgozni, hogy lássam, tudom-e majd vállalni a nagy feladatot. A munka új perspektívákat nyitott meg előttem, több új eredményre bukkantam a rendszerezés révén, s kedvet kaptam a munka folytatására. Egyik oberwolfachi konferencián Reinhold Baertől komoly biztatást kaptam a könyvírást ígérettel megtoldva, hogy könyvem kéziratát lektorálni fogja. Miután az Akadémiai Kiadó vállalta a készülő monográfia kiadását angol nyelven, ettől kezdve szinte minden időmet az Abel-csoportok könyv írására fordítottam, s vagy 8-9 hónap alatt el is készültem a kézirattal. Nagyon sok magyar eredmény került be a könyvbe, csakúgy mint Jerzy Łoś új elmélete a karcsú (slender) csoportokról (amely végül is általam kiegészítve először itt került publikálásra). Sok értékes tanácsot kaptam Baertől: az ő javaslatára az akkor újdonságnak számító homológikus algebrai kapcsolatokra is kitértem. Kertész Andor volt a másik lektor, őtőle is több hasznos tanácsot kaptam. A könyv felölelt majdnem minden fontos, akkor ismert eredményt a végtelen Abel-csoportok elméletében, számos új bizonyítással (ilyen átfogó munka a mai helyzetben már nem volna lehetséges), így mint referencia-kötet is hasznosnak bizonyult.

Nagy örömömre, a könyvet az érdeklődők kedvezően fogadták. Ebben az is közrejátszott, hogy az Abel-csoportok elmélete rendkívül hasznosnak bizonyult az új diszciplínákban: a homológikus algebrában s a kategória-elméletben. Rövid idő alatt elkelt a kinyomtatott 1000 példány, jóllehet az Akadémiai Kiadónak nem volt terjesztője angol nyelvterületeken. Az angol Pergamon Press kiadó rögtön megvette a copyright-ot az Akadémiai Kiadótól s néhányszor újra nyomatta a könyvet a 60-as években. Hamarosan leveleket, sőt kéziratokat kaptam a könyvben felvetett nyitott problémák megoldásaival.

A magyar Abel-csoport kutatásokat komoly elismerés érte, mikor az International Mathematics Union égisze alatt 1963-ban nemzetközi konferenciát rendeztünk Tihanyban. (A magyar szervek által javasolt három, Magyarországon erősen kultivált téma közül az Abel-csoportokat választották mint legaktuálisabbat.) Ezen a konferencián majdnem minden számottevő Abel-csoportos kutató részt vett: számos amerikai és orosz, jónéhány nyugati és keleti matematikus. Ez volt az első jelentős magyar konferencia, amely prominens nyugati és keleti matematikusokat gyűjtott össze egy fedél alatt. Úgy vélem, hogy ennek a konferenciának komoly szerepe volt abban, hogy egyre intenzívebb kapcsolat jött létre világszerte az Abel-csoportok kutatói között.

Ebben az időben már én voltam az egyetlen magyarországi algebrista, aki rendszeresen publikált az Abel-csoportok elméletében. Mint említettem, mind a debreceni, mind a budapesti algebristák érdeklődése az algebra más és más ága felé fordult, míg a szegediek Rédei László vezetése alatt egészen más algebrai témákkal foglalkoztak. Én egyre intenzívebben kezdtem foglalkozni a rendezett algebrai struktúrák elméletével, kivált a Riesz-féle interpoláció algebrai és függvénytani vonatkozásait vizsgálva. Miután 1966-ban Magyarországot elhagytam, Magyarországon megszűnt a kutatás a végtelen Abel-csoportok elméletében. (A véges Abel-csoportok területén a Hajós-faktorizációval kapcsolatosan Corrádi Keresztély és Szabó Sándor ért el figyelemre méltó eredményeket; a számos cikk közül csak egyet említek: [CS].)

Amint látjuk, majdnem két évtizedig virágzott a kutatás Magyarországon a végtelen Abel-csoportok elméletében, előkelő helyet foglalva el a nemzetközi színpadon, és jó lenne, ha erről a sikerről a magyar matematikusok nem feledkeznének meg a jövőben sem.

Irodalom

I. RÉSZ: magyar szerzők cikkei végtelen Abel-csoportokról

BOGNÁR MÁTYÁS

[1] Ein einfaches Beispiel direkt unzerlegbarer abelscher Gruppen, *Publ. Math. Debrecen,* **4** (1956), 509–511.

ERDÉLYI MÁRIA

[1] Direct summands of abelian torsion groups [magyarul], *Acta Univ. Debrecen,* **2** (1955), 145–149.

ERDŐS JENŐ

[1] On direct decompositions of torsion free abelian groups, *Publ. Math. Debrecen,* **3** (1954), 281–288.

[2] Torsion-free factor groups of free abelian groups and a classification of torsion free abelian groups, *Publ. Math. Debrecen,* **5** (1957), 172–184.

[3] On the splitting problem of mixed abelian groups, *Publ. Math. Debrecen,* **5** (1958), 364–377.

FRIED ERVIN

[1] On the subgroups of an abelian group that are ideals in every ring, *Proc. Colloq. Abelian Groups* (Budapest, 1964), 51–54.

FUCHS LÁSZLÓ

[1] The direct sum of cyclic groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **3** (1952), 177–195.

[2] On the structure of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **4** (1953), 267–288.

[3] On a special kind of duality in group theory. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **4** (1953), 299–314.

[4] On a property of basic subgroups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **5** (1954), 143–144.

[5] On abelian torsion groups which can not be represented as the direct sum of a given cardinal number of components, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **7** (1956), 115–124.

[6] Ringe und ihre additive Gruppe, *Publ. Math. Debrecen,* **4** (1956), 488–508.

[7] On a useful lemma for abelian groups, *Acta Sci. Math. Szeged,* **17** (1956), 134–138.

[8] Über universale homomorphe Bilder und universale Untergruppen von abelschen Gruppen, *Publ. Math. Debrecen,* **5** (1957), 185–196.

[9] Über das Tensorprodukt von Torsionsgruppen, *Acta Sci. Math. Szeged,* **18** (1957), 29–32.

[10] On quasi nil groups, *Acta Sci. Math. Szeged,* **18** (1957), 33–43.

[11] Wann folgt die Maximalbedingung aus der Minimalbedingung? *Arch. Math.,* **8** (1957), 317–319.

[12] On a directly indecomposable abelian group of power greater than continuum, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **8** (1957), 453–454.

[13] On the possibility of extending Hajós' theorem to infinite abelian groups, *Publ. Math. Debrecen,* **5** (1958), 338–347.

[14] *Abelian Groups,* Akadémiai Kiadó, 1958.

[15] Ein kombinatorisches Problem bezüglich abelscher Gruppen, *Math. Nachrichten,* **18** (1958), 292–297.

[16] On generalized pure subgroups of abelian groups, *Annales Univ. Sci. Budapest,* **1** (1958), 41–47.

[17] On character groups of discrete abelian groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **10** (1959), 133–140.

[18] Notes on abelian groups. I, *Annales Univ. Sci. Budapest,* **2** (1959), 5–23.

[19] The existence of indecomposable abelian groups of arbitrary power, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **10** (1959), 453–457.

[20] Notes on abelian groups. II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **11** (1960), 117–125.

[21] On the automorphism group of abelian p-groups, *Publ. Math. Debrecen,* **7** (1960), 122–129.

[22] Note on factor groups in complete direct sums, *Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III.,* **11** (1963), 39–40.

[23] On algebraically compact abelian groups, *J. Nat. Sci. Math.,* **3** (1963), 73–82.

[24] Recent results and problems on abelian groups, *Topics in Abelian Groups* (Chicago, 1963), 9–40.

[25] Some generalizations of the exact sequences concerning Hom and Ext, *Proc. Colloquium on Abelian Groups*(Budapest, 1964), 57–76.

Fuchs László és I. Halperin

[1] On the imbedding of a regular ring in a regular ring with identity, *Fund. Math.,* **54** (1964), 285–290.

Fuchs László, Kertész Andor és Szele Tibor

[1] On a special kind of duality in group theory. I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **4** (1953), 169–178.

[2] Abelian groups in which every serving subgroup is a direct summand, *Publ. Math. Debrecen,* **3** (1953), 95–105.

[3] On abelian groups whose subgroups are endomorphic images, *Acta Sci. Math. Szeged,* **16** (1955), 77–88.

[4] On abelian groups in which every homomorphic image can be imbedded, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.,* **7** (1956), 467–475.

Fuchs László és Szele Tibor

[1] Abel-csoportok egyetlen maximális alcsoporttal, *MTA III. Oszt. Közl.,* **5** (1955), 387–389.

[2] On Artinian rings, *Acta Sci. Math. Szeged,* **17** (1956), 30–40.

Gacsályi Sándor

[1] On algebraically closed abelian groups, *Publ. Math. Debrecen,* **2** (1952), 292–296.

[2] On pure subgroups and direct summands of abelian groups, *Publ. Math. Debrecen,* **4** (1955), 89–92.

[3] On limit operations in a certain topology for endomorphism rings of abelian groups, *Publ. Math. Debrecen,* **7** (1960), 353–358.

GRÄTZER GYÖRGY ÉS SCHMIDT TAMÁS

[1] A note on a special type of fully invariant subgroups of abelian groups, *Ann. Univ. Sci. Budapest,* **3–4** (1961), 85–87.

[2] On a problem of L. Fuchs concerning universal subgroups and homomorphic images of abelian groups, *Proc. Ned. Akad. Wetensch.,* **64** (1961), 253–255.

KERTÉSZ ANDOR

[1] On the decomposability of abelian p-groups into the direct sum of cyclic groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **3** (1952), 122–126.

[2] On fully decomposable abelian torsion groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.,* **3** (1952), 225–232.

[3] On a theorem of Kulikov and Dieudonné, *Acta Sci. Math. Szeged,* **15** (1953), 61–69.

[4] On subgroups and homomorphic images, *Publ. Math. Debrecen,* **3** (1953), 174–179.

[5] Zur Frage der Spaltbarkeit von Ringen, *Bull. Acad. Polon. Sci.,* **12** (1964), 91–93.

KERTÉSZ ANDOR ÉS SZELE TIBOR

[1] On abelian groups every multiple of which is a direct summand, *Acta Sci. Math. Szeged,* **14** (1952), 157–166.

[2] Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image, *Acta Sci. Math. Szeged,* **15** (1953), 70–76.

[3] On the existence of non-discrete topologies in infinite abelian groups, *Publ. Math. Debrecen,* **3** (1953), 187–189.

[4] On generalized p-groups [*Hungarian*], *Acta Univ. Debrecen,* **2** (1955), 1–5.

KOVÁCS LÁSZLÓ

[1] On subgroups of the basic subgroup, *Publ. Math. Debrecen,* **5** (1958), 261–264.

[2] On a paper of Ladislav Procházka, *Czechoslovak. Math. J.,* **13** (1963), 612–618.

[3] Admissible direct decompositions of direct sums of abelian groups of rank one, *Publ. Math. Debrecen,* **10** (1963), 254–263.

PAPP ZOLTÁN

[1] On the closure of basic subgroups, *Publ. Math. Debrecen,* **5** (1958), 256–260.

RÉDEI LÁSZLÓ ÉS SZELE TIBOR

[1] Die Ringe „ersten Ranges“, *Acta Sci Math. Szeged,* **12A** (1950), 18–29.

SZÁSZ FERENC

[1] Die abelschen Gruppen, deren volle Endomorphismenringe die Minimalbedingung für Hauptideale erfüllen, *Monatshefte Math.,* **65** (1961), 150–153.

[2] Über Artinsche Ringe, *Bull. Acad. Polon. Sci.,* **11** (1963), 351–354.

SZELE TIBOR

[1] Die abelsche Gruppen ohne eigentliche Endomorphismen, *Acta Sci. Math. Szeged,* **13** (1949), 54–56.

[2] Sur la décomposition des groupes abéliens, *C.R. Acad. Sci. Paris,* **229** (1949), 1052–1053.

[3] Zur Theorie der Zeroringe, *Math. Ann.,* **121** (1949), 242–246.

[4] Über die direkten Teiler der endlichen Abelschen Gruppen, *Comment. Math. Helv.,* **22** (1949), 117–124.

[4] Über die abelschen Gruppen mit nullteilerfreiem Endomophismenring, *Publ. Math. Debrecen,* **1** (1949), 89–91.

[5] Gruppentheoretische Beziehungen der Primkörper, *Mat. Aineiden Aikakauskirja,* **13** (1949), 80–85.

[6] Ein Analogon der Körpertheorie für abelsche Gruppen, *J. reine angew. Math.*, **188** (1950), 167–192.

[7] Gruppentheoretische Beziehungen bei gewissen Ringkonstruktionen, *Math. Z.*, **54** (1951), 168–180.

[8] On direct sums of cyclic groups, *Publ. Math. Debrecen,* **2** (1951), 76–78.

[9] On a theorem of Pontrjagin, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), 121–123.

[10] On groups with atomic layers, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), 127–129.

[11] On non-countable abelian groups, *Publ. Math. Debrecen,* **2** (1952), 300–301.

[12] On direct sums of cyclic groups with one amalgamated subgroup, *Publ. Math. Debrecen,* **2** (1952), 302–307.

[13] On direct decompositions of abelian groups, *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 247–250.

[14] On the basic subgroups of abelian p-groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **5** (1954), 129–141.

[15] Nilpotent Artinian rings, *Publ. Math. Debrecen,* **4** (1955), 71–78.

[16] On quasi-decomposable abelian groups, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), 109–114.

[17] On a topology in endomorphism rings of abelian groups, *Publ. Math. Debrecen,* **5** (1957), 1–4.

Szele Tibor és Szélpál István

[1] Über drei wichtige Gruppen, *Acta Sci. Math. Szeged,* **13** (1950), 192–194.

Szele Tibor és Szendrei János

[1] On abelian groups with commutative endomorphism ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), 309–324.

Szélpál István

[1] Die abelschen Gruppen ohne eigentliche Homomorphismen, *Acta Sci. Math. Szeged,* **13** (1949), 51–53.

[2] Die unendlichen abelschen Gruppen mit lauter endlichen echten Untergruppen, *Publ. Math. Debrecen,* **1** (1949), 63–64.

[3] The abelian groups with torsion-free endomorphism ring, *Publ. Math. Debrecen,* **3** (1953), 106–108.

II. RÉSZ: egyéb hivatkozás

[B1] R. Baer, The subgroup of elements of finite order of an abelian group, *Ann. Math.*, **37** (1936), 766–781.

[B2] R. Baer, Abelian groups without elements of finite order, *Duke Math. J.*, **3** (1937), 68–122.

[CS] Corrádi Keresztély és Szabó Sándor, A generalized form of Hajós' theorem, *Comm. Algebra,* **21** (1993), 4119–4125.

[H] Hajós György, Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, *Math. Z.*, **47** (1942), 427–467.

[Hu] A. Hulanicki, Note on a paper of de Groot, *Proc. Nederl. Acad. Wetensch.*, **61** (1958), 114.

[Ka] I. Kaplansky, *Infinite Abelian Groups,* University Michigan Press, Ann Arbor, 1954.

[K] L. Ya. Kulikov, On the theory of abelian groups of arbitrary power [oroszul], *Mat. Sb.*, **16** (1945), 129–162.

[K2] L. Ya. Kulikov, Generalized primary groups [oroszul], *Trudy Moskov. Mat. Obšč., 1* (1952), 247–326; **2** (1953), 85–167.

[Ku] A. G. Kuros, *Theory of Groups* [oroszul], Mir, 1953.

[R] Rédei László, Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski-Hajós, *Acta Sci. Math. Szeged,* **13** (1949), 21–35.

[S] E. Ṣąsiada, Construction of a direct indecomposable abelian group of a power higher than that of the continuum, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.*, **5** (1957), 701–703.

[Sz] Szele Tibor, Neuer vereinfachter Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós, *Publ. Math. Debrecen,* **1** (1949), 56–62.

MIKOR PERIODIKUS A FIBONACCI-SOROZAT?

STEVEN A. GAAL

Miért Fibonacci? Először más témáról akartam beszélni, de januárban olvastam:

DAN BROWN's DA VINCI CODE.

A könyv első lapjain olvassuk, hogy egy haldokló saját vérével írja a Louvre Múzeum márvány padlózatára a Fibonacci-sorozat kezdetének egy permutációját. Ez az egyszerű titkos üzenet végül is a gyilkosokhoz vezeti a hatóságokat.

Tudjuk, hogy a biológia veszélyes tudomány volt egyszer, de a matematika az egy *Safe Science,* biztonságos volt és talán marad is mindenkor. Mivel a számelmélet nem hasznos, az a *Safest of the Safe,* legbiztonságosabb a biztonságosak között.

Manapság a politikai félelem helyett vagy mellett más veszélyektől kell óvakodni. Ha kitudódik, hogy Te nem hiszed el, hogy a Nagy Világ egy BIG BANG-gal kezdődött, akkor elveszíted az ösztöndíjadat, nem tudsz állást kapni, és a fizikusok közül senki sem áll szóba veled.

Tegyük fel, hogy BIG BANG lett a vallásod, és azt hiszed, több ilyen Nagy Durranás történt, és talán fog is a közeljövőben történni. Akkor talán nem a fizikusok, hanem másféle emberek fognak megtámadni. Egy bang, vagy durranás az akusztikus jelenség. „Hogy tudnak ezek ilyesmiről beszélni, ha jól tudják, hogy akkor még levegő sem volt!" - mondta nekem egyszer valaki...

A Matematikai és Fizikai Társaság utolsó nyilvános ülésén az 1942–43. akadémiai évben Turán Pál adott elő a Riemann-sejtésről. Turán nem volt egyedül. Többen gondolkoztak ezen a nehéz problémán eredménytelenül. Ezek a szerencsétlenek sok időt vesztegettek el hiába, de sohasem gondoltak üzletre és profitra. Csak azt remélték, hogy a jó munkáért majd megkapják a „Mindennapi Kenyerüket". Ha egyikük, Alexits György, Varga Ottó, Erdős vagy Turán Pál, Rédei vagy Kalmár László, vagy Sz. Nagy Béla és ki tudja ki más, megoldott volna egy ilyen fontos problémát, csak néhány babérlevelet remélt, és puhább kenyérre vágyott.

Szegény Szele Tibor, Rényi Alfréd és mások számára még a hosszú élet sem adatott meg.

Mi most egy *Brave New World* hangyái lettünk. Így ha bebizonyítod a Riemann-sejtést, írd meg egyszerre legalább öt jól ismert matematikusnak különböző országokba, és találd meg az interneten:

`www.claymat.com.`

Ha a bizonyításod helyes, állítólag fogsz kapni egy millió US dollárt. De talán 35 százalék jövedelemadót kell majd fizetned az US Internal Revenue Service-nek, és lehet, hogy az EU is akar 40 százalékot. Kérdés: ha valaki másnak csupán 25 százalék a jussa, akkor mennyi marad neked?

Az előadás címe egy kérdés:

„Mikor periodikus a Fibonacci-sorozat?"

A következő válaszok lehetségesek:
A: sohasem
B: néha
C: mindig.

Az előadás alatt megmagyaráztam, hogy mind a három válasz igaz! Az (A) válasz volt az első: *The classical Fibonacci sequence grows exponentially and everybody knows that the exponential function (in the real world) is not periodic. However I pointed out that in the complex universe the restriction of* e^z *to the pure imaginary axis is a periodic function. I also told that this fact explains to particle-wave duality of light and electromagnetic radiation. (I did not say that it is the 'reason' or the 'cause' of this phenomenon.)*

I made a few additional comments at the end of the lecture which are not included in the text: First, the generating function can be determined for the case 'általánosított' $F(m, s)$ sorozatra... *Second I pointed out that when the classical sequence is extended for negative indices the resulting two-way infinite sequence provides a crude, one dimensional model for a universe with matter and anti-matter, followed by a pure energy state and then with one containing only matter i.e. positive terms and a periodically fluctuating phenomenon, namely that of the ratio* s_{n+1}/s_n. *(This is pure speculation...) Third I told that one can further generalize the sequence by considering a weight vector of dimension* d *and a corresponding seed. The corresponding matrix* M *can be expressed as the product of a lower and an upper triangular Toeplitz matrix.*

A hallgatóság jobb oldalán lévő vetítőgép használatával először a (B), majd a nehezebb (C) esetet bizonyítottam be. Ezeket a fóliákat a második rész tartalmazza.

A hallgatóság bal oldalán lévő vetítőgépen az alábbiak voltak olvashatók:

Történelmi Jegyzetek:

(az Encyclopedia Brittanica segítségével)

Al-Khowarazmi, lit. Khwarazm (Khiva) város szülöttje, híres arab matematikus volt a IX. században. Nevéből származnak az algorism és algorithm szavak. Bár Euklides sokkal előbb élt, mégis Euklides algoritmusának nevezzük módszerét, ami a $\gcd(a, b)$ megtalálásához vezet.

Leonardo Pisano más néven Filius Bonnacci vagy Fibonacci (12ab–12cd) valószínűleg Pisában született, és biztosan ott élt és dolgozott. Apja konzul volt Észak-Afrikában, így Fibonacci az arab-muzulmán földeket többször meglátogatta. Járt Egyiptomban, Szíriában, Görögországban és másutt is. Megtanulta a hindu-arab számrendszert és sok más matematikát is. Donald Knuth szerint *"Fibonacci was by far the greatest European mathematician before the Renaissance."* Később több fontos kódexet írt. Az egyik, „Liber abaci" volt az első nyugati irat az arab számjegyekről és a tízes számrendszerről.

Ebben található a probléma a gazdáról, aki nyulakat tenyészt egy magas kőfallal bekerített kertben. Egy párral, egy egészséges hím nyúllal és egy nagyon fiatal és szép nőstény nyuszi segítségével kezdi meg a szaporítást.

HOW MANY PAIRS OF RABBITS CAN BE PRODUCED FROM THAT PAIR IN A YEAR IF IT IS SUPPOSED THAT EVERY MONTH EACH PAIR BEGETS A NEW PAIR WHICH FROM THE SECOND MONTH ON BECOMES PRODUCTIVE?

Itt a megoldás:

Hónap:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Párok:	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Az n-dik tagot az s_n szimbólummal jelöljük. Kérdezzük: mi a sorozatépítés törvénye? A tagok különbségeit véve a

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55$$

sorozatot kapjuk, ami a 0 és az eredeti sorozat. Ezért úgy látszik, hogy $s_{n+1} = s_n + s_{n-1}$, ha $n = 2, 3, \ldots$. Lehet a sorozatot a 0. hónappal és $s_1 = 0$ és $s_2 = 1$ tagokkal kezdeni, mondván hogy az új házaspárnak először mézeshetük volt, vagy egy hónapig tartott amíg egymáshoz szoktak.

Állítólag ezt a Fibonacci-sorozatot már Pythagoras is ismerte. Azt hiszem, ez az első példa arra, amit most így neveznek:

DISCRETE LINEAR DETERMINISTIC POSITIVE
POPULATION MODEL

vagy röviden egy triviális mátrix modell. Rendszerint a dinamikus népességi modelleket nem ezzel a „Nyúl" problémával, hanem egy kissé komplikáltabb példával vezetik be. „A Bogarak Sorsa" lehetne szép név erre a problémára, és angolul talán *"The Beetles Fate"* volna a jó cím. Ha egy kicsit megváltoztatom a fenti angol szöveget, és adok hozzá néhány új mondatot, a Nyúl probléma majdnem olyan jó lesz, mint a bogarak meséje. Íme a fenti szöveg „szabad fordítása":

"The time variable t will be DISCRETE and its unit one season of the year."

Magyarán mondva: mivel egy harminc napos nőstény nyúl még nem akar terhes lenni, hónapok helyett a négy évszak lesz az idő fő egysége: Tavasz (Tv), Nyár (Ny), Ősz (O) és Tél (T). Így minden évszak három idő alegységből áll. Tehát

Tv	*Ny*	*O*	*T*	*Tv*	*Ny*	*O*	*T*	*Tv*	*Ny*	*O*	*T*	*Tv*	...
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	...
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	...

"Modern English:" The original text was written during the Dark Ages so it is tacitly understood that the pairs of rabbits had to be married and live a faithful, monogamous life style engaging in sexual union only for the purpose of the propagation of their race. God will bless their union with a single male and female offspring who will in due time get married and from that on help their parents to increment their race for the benefit of the Landlord forever!

Filius Bonacci nyulai legalább addig éltek, ameddig a sorozat tartott. Mivel manapság a sorozat végtelen, a jó nyulak örök életet kaptak!

Ugyanezt nyolc évszázaddal később így mondják:

TO: A Pisai Kutató Telep Igazgatójának
FROM: Prince Giovanni II
SUBJECT: Negyedéves Inspekió, Census és Átrendezés

A nyúlkolónia felügyelője az évszakok végén megszámolja a nőstény nyulakat minden korcsoportban, vagyis évek és annak szezonjai szerint.

Mivel ez egy DETERMINIZÁLT Kísérleti Gazdaság, minden szülő pár magzatjai közül a legerősebb nőstényt ki kell választani és, micro-chippel *meg-taggolni.*

Ugyanakkor az állatorvos megállapítja, mely hímek lesznek a legalkalmasabbak a nőstények szolgálatára. Ha ez az orvosi munka sikeres, csupán egy hím szükséges minden két tucat nőstény kielégítésére. A fölösleges, *nem-taggolt* debütansokat és a semmirevaló hímeket az alacsonyabb rangú alkalmazottak összegyűjtik, és piacra dobják. Mivel ez egy POZITÍV kísérlet, *short-selling* és nyúlvásárlás

SZIGORÚAN TILOS!

Kronecker szerint a pozitív egész számokat a jó Isten teremtette, és minden egyéb csupán emberi álmodozás. Így például:

Semmi: 0, Adósság: -5345,
A sorsjegyet kihúzták: \$ 10000000,
Adó a nyereségen: \$ -9999999.
Vagy a természettudományokban:

...	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
...	s_{-9}	s_{-8}	s_{-7}	s_{-6}	s_{-5}	s_{-4}	s_{-3}	s_{-2}	s_{-1}

Azonban Kronecker néha nagyon jól álmodott: Olyannyira, hogy a Műegyetemen a tenzor szorzat *(Kronecker product)* a mérnök-hallgatóknak rémálmokat *(nightmare)* okoz.

Néha egy 0 kezdő szezon létezik a sorozat leírásában: A nőstény **f** nagyon fiatal a kezdő szezon elején, de egy hónappal később már egy tizenéves **tf** lesz. A harmadik hónap végével már egy teljesen felnőtt és *fertile* nyúl **F** ugrál a kertben hím barátja társaságában. A kezdő szezont követő első szezon közepe felé a nőstény egy terhes *(pregnant)* nővé **pF** változik és a szezon végén már nagyon terhes **ppF**.

A második szezon kezdő hónapja alatt **ppF** egy remek nőstény nyulacskának $\mathbf{d_1}$ ad életet, aki szépen növekszik, és a második hónap alatt egy tizenévessé $\mathbf{td_1}$-é fejlődik. A szezon végével a leány *(daughter)* $\mathbf{D_1}$ már egy *fertile* fiatal nyúlasszonyka. Ezalatt az anya nyúl **F** megint a hímmel ugrándozik, *pregnált* nyúllá **pF** lesz, és a harmadik hónap vége felé már készülődik a szülésre. A harmadik szezon egy második ici-pici nőstény nyuszi $\mathbf{d_2}$ születésével nyílik meg.

Tehát a kezdő (*start-up* vagy *ramp-up*) szezon (**f tf F**) így folytatódott: (**F pF ppF**), és azután jött a második és harmadik aktív szezon:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{F} & \mathrm{pF} & \mathrm{ppF} \\ \mathrm{d_1} & \mathrm{td_1} & \mathrm{D_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{F} & \mathrm{pF} & \mathrm{ppF} \\ \mathrm{d_2} & \mathrm{td_2} & \mathrm{D_2} \\ \mathrm{D_1} & \mathrm{pD_1} & \mathrm{ppD_1} \end{pmatrix}.$$

Itt látjuk a következő három szezon lefolyását:

$$\begin{pmatrix} \mathrm{F} & \mathrm{pF} & \mathrm{ppF} \\ \mathrm{d_3} & \mathrm{td_3} & \mathrm{D_3} \\ \mathrm{D_2} & \mathrm{pD_2} & \mathrm{ppD_2} \\ \mathrm{D_1} & \mathrm{pD_1} & \mathrm{ppD_1} \\ \mathrm{gd_{11}} & \mathrm{tgd_{11}} & \mathrm{Gd_{11}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{F} & \mathrm{pF} & \mathrm{ppF} \\ \mathrm{d_4} & \mathrm{td_4} & \mathrm{D_4} \\ \mathrm{D_3} & \mathrm{pD_3} & \mathrm{ppD_3} \\ \mathrm{D_2} & \mathrm{pD_2} & \mathrm{ppD_2} \\ \mathrm{gd_{21}} & \mathrm{tgd_{21}} & \mathrm{Gd_{21}} \\ \mathrm{D_1} & \mathrm{pD_1} & \mathrm{ppD_1} \\ \mathrm{gd_{12}} & \mathrm{tgd_{12}} & \mathrm{Gd_{12}} \\ \mathrm{Gd_{11}} & \mathrm{pGd_{11}} & \mathrm{ppGd_{11}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{F} & \mathrm{pF} & \mathrm{ppF} \\ \mathrm{d_5} & \mathrm{td_5} & \mathrm{D_5} \\ \mathrm{D_4} & \mathrm{pD_4} & \mathrm{ppD_4} \\ \mathrm{D_3} & \mathrm{pD_3} & \mathrm{ppD_3} \\ \mathrm{gd_{31}} & \mathrm{tgd_{31}} & \mathrm{Gd_{31}} \\ \mathrm{D_2} & \mathrm{pD_2} & \mathrm{ppD_2} \\ \mathrm{gd_{22}} & \mathrm{tgd_{22}} & \mathrm{Gd_{22}} \\ \mathrm{Gd_{21}} & \mathrm{pGd_{21}} & \mathrm{ppGd_{21}} \\ \mathrm{D_1} & \mathrm{pD_1} & \mathrm{ppD_1} \\ \mathrm{gd_{13}} & \mathrm{tgd_{13}} & \mathrm{Gd_{13}} \\ \mathrm{Gd_{12}} & \mathrm{pGd_{12}} & \mathrm{ppGd_{12}} \\ \mathrm{Gd_{11}} & \mathrm{pGd_{11}} & \mathrm{ppGd_{11}} \\ \mathrm{G^2d_{11}} & \mathrm{tG^2d_{11}} & \mathrm{G^2D_{11}} \end{pmatrix}.$$

Összefoglalás:

Szezon:	1	2	3	4	5	6
Szaporítók:	1	1	2	3	5	8
Fejlődők:	0	1	1	2	3	5
Összesen:	1	2	3	5	8	13

DICTIONARY OF POPULATION DYNAMICS:

Population Dynamics = Népességdinamika
Modeling population dynamics = Népességdinamikai modellezés
Deterministic models of population growth = A népesség szaporodását leíró modell
Population Vector = Népességi vektor
Matrix M representing the effect of the Fertility and Mortality assumptions = A szaporodást és halálozást leíró M mátrix
Census = Népszámlálás
First Census = *Initial Census* = Első népszámlálás
age groups = korosztályok
Initial distribution vector of females in the various age groups = A nőstények korosztályok szerinti kezdeti eloszlása
female = nőstény vagy nő
male = hím vagy férfi
Good for nothings = semmirevalók
plenty of competing males; their number can be ignored = számtalan mohó *(eager)* hím; hogy mennyi van, az nem számít
life span = teljes életkor
binary relation = bináris reláció = pár reláció
binary operation = bináris operáció = pár operáció = bináris művelet = pár művelet
expecting female = áldott asszony vagy nőstény
fertile female = nőstény, aki most terhes lehetne
α male = a falu leghősiesebb, legerősebb alakja = Toldi Miklós vagy Háry János
time lag = késés két összefüggő esemény között például mozgásban vagy elektromos vezetésben (ahol az áram maximuma késik a feszültség maximumához képest) vagy fény, illetve EM sugárzás terjedése a véges sebesség miatt
mytosis = *cell division* = baktériumok kettéosztódása (a time lag itt rövid, a nyulaknál sokkal hosszabb)
Tribe = tribu = törzs
Colony = tartomány, kolónia
Isolated tribe or colony = elszigetelt kolónia
Long term survival prospects of a tribe or colony = Sokáig él-e a törzs vagy kolónia
Population vector p_n in the n-th year: $p_n = P^n p_0$, határértéke $\lim_{n\to\infty} P^n p_0$.

A következő anyag kissé változtatott formában ebből a könyvből származik:
Farina L. and S. Rinaldi: Age-structured Population Models
Plant, animal and human population models
Positive dynamical systems
State variables: biomass, its density or number of individuals
predation, competition and symbiosis among species

The Leslie model: *"... describes the time evolution of populations in which fertility and survival rates of individuals strongly depend on their age ..." The time t is discrete and denotes the year, or the reproduction season. The state variables*

$$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$$

represent the number of females (or individuals or couples) of age $1, 2, \ldots, n$ at the beginning of year t. The description of the aging process is by means of

$$x_{i+1}(t+1) = s_i x_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

where s_i is the survival coefficient at age i, that is to say, the fraction of females of age i that survive at least for one year. The first state equation takes into account the reproduction process and so

$$x_1(t+1) = s_0\big(f_1 x_1(t) + f_2 x_2(t) + \cdots + f_n x_n(t)\big)$$

where s_0 is the survival coefficient during the first year of life and f_i is the fertility rate of females of age i, that is the mean number of females born from each female of age i. A positive linear autonomous model *$x(t+1) = Ax(t)$ is defined by the foregoing state equations. The Leslie matrix A is*

$$\begin{pmatrix} s_0 f_1 & s_0 f_2 & \ldots & s_0 f_{n-1} & s_0 f_n \\ s_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & s_{n-1} \end{pmatrix}$$

Making demographic projections means the forcasting of $x(t) = A^t x(0)$.

THE FOLLOWING SLIDE WAS NOT SHOWN DURING THE LECTURE:

Egyik barátodnak több esze van, és hallgatott, amikor azt gondolta, hogy talán létezett valami a BANG előtt. Csak egy évfolyamtársának merte elmondani ezen gondolatait. Tíz nap múlva belenéz a New York Times vasárnapi kiadásába, és a következőt olvassa:

Professor XYZ, the world's leading theoretical astrophysicist and discoverer of the 13 dimensional space unifying all five experimentally verified interactions officially announced yesterday that something not yet completely understood preceeded the Bing Bang. Dr. XYZ is confident that he can work out the few missing details during his coming summer holidays in the Colorado Rockies.

Pletykázás, *unethical conduct*, nyilvános vagy titkos tudományos információgyűjtés mindig létezett. A nagy probléma, amint Professzor Wigner több mint harminc éve mondta, ő és kortársai valószínűleg az utolsók voltak, akik annak tudatában kutathattak, hogy amit találnak, azt kényelemben leírhatják, és előbb-utóbb az majd egy folyóiratban megjelenik. Annyi kutató dolgozik majd a közeljövőben – mondta Wigner –, hogy többen majdnem ugyanakkor fognak ugyanarra az eredményre jutni a világ négy sarkában.

Fibonacci-sorozatok

Eredeti, közönséges vagy klasszikus sorozat:

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad 55 \quad 89 \quad 144 \quad 233\ldots$$

sorozatépítés törvénye:

$$s_{k+2} = s_k + s_{k+1}, \qquad \text{ahol } k = 1, 2, \ldots$$

A mag *(seed)* $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ vagy $s_1 = 1$, $s_2 = 1$. Lehetne az $s_1 = 21$, $s_2 = 34$ párral vagy más hasonló párral is kezdeni. Csupán az előttük lévő tagok hiányoznak. A teljes sorozatot a $F\big((1,1),(0,1)\big)$ jelöli.

1. általánosítás. Választunk egy m_1, m_2 rendezett pozitív egész számpárt, amit súlyoknak nevezünk, és egy s_1, s_2 magpárt. Először a magok pozitív egész számok lesznek. Később majd nulla súlyokat is megengedünk, és a magok valósak és furcsább dolgok is lehetnek.

Az általánosított sorozatépítési törvény:

$$s_{k+2} = m_1 s_k + m_2 s_{k+1}.$$

Az új sorozat $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$ jele

$$F(\mathbf{m}, \mathbf{s}),$$

ahol $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ a sorozat magja és $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ a súly *(weight)*. Ezeket később vektoroknak tekintjük, azaz olyan mátrixoknak, amelyeknek csak egy soruk vagy egy oszlopuk van *(row vector or column vector)*.

Hamarosan megengedjük, hogy a magok negatív számok is legyenek. Azután a magok egy tetszőleges, kommutatív S félcsoport tagjai lesznek. A félcsoport párműveletét *(binary operation)* $+$ jelöli. Ilyen esetben additív félcsoportról szokás beszélni. Ha van egy semleges tag *(neutral element)*, akkor azt o jelöli. Így $o + s = s + o = s$ az S minden tagjára.

1. példa. Legyen $S = \mathbb{Z}_m$, azaz $\mathbb{Z}/(m)$, ahol az $m > 0$ modulus egy természetes szám. Ezen S egy gyűrű *(ring)*, de minket most csak az additív struktúra érdekel. Mondjuk, hogy $m = 7$, és legyen $s = \big((0),(1)\big)$, ahol (a) az a számot tartalmazó kongruenciaosztályt jelöli. Például

$$(3) = \{\cdots - 18, -11, -4,\ 3,\ 10,\ 17,\ 24, \ldots\}$$

Így (3), (-4) és (17) ugyanazt az osztályt *(class)* jelentik. Végül legyen $m_1 = m_2 = 1$.

Azt találjuk, hogy ez az $F(\mathbf{m}, \mathbf{s})$ periodikus sorozat. A sorozat tagjai modulo 7 kongruenciaosztályok, és a minimális periódushossz $l_p = 16$. A sorozat elején nincsen aperiodikus blokk. Hasonlóan a törtek decimális kifejezéséhez:

$5/6 = 1/2 + 1/3 = 0{,}83333333\ldots$ periodikus, azonban nem teljesen periodikus. Példánk sorozata így kezdődik:

$$(0)\ (1)\ (1)\ (2)\ (3)\ (5)\ (1)\ (6)\ (0)\ (6)\ (6)\ (5)\ (4)\ (2)\ (6)\ (1)$$

Fontos, hogy mint folytatódik: $s_{17} = (0)$ és $s_{18} = (1)$. A programozók ezt loopnak nevezik.

2. példa. Hasonló, csak a súlyok mások: $m_1 = 2$ és $m_2 = 1$. Az S magtár ugyanaz, és $\mathbf{s}\big((0),(1)\big)$ magvektor is pontosan az előbbi. Az eredmény is ugyanaz lesz, de egy kis változatosságot tudunk bevezetni, ha cseréljük a magtárt. Előbb S véges volt, ugyanis $S = \big\{(0),(1),(2),(3),(4),(5),(6)\big\}$. Most S az egész számok $\mathbb{Z}$ halmaza lesz. (Hét szűk esztendő után Kánaán.) Ekkor $F(\mathbf{m}, \mathbf{s})$ így kezdődik

$$0\ 1\ 1\ 3\ 5\ 11\ 21\ 43\ 85\ 171\ 341\ldots$$

Ennek a variációnak az az előnye, hogy csak most kell elhatározni, mi legyen a modulus. Ha hetet választok, és egy modulo $m = 7$ redukciót végzek ezen a sorozaton akkor

$$0\ 1\ 1\ 3\ 5\ 4\ 0\ 1\ 1\ 3\ 5\ldots$$

az eredmény. Így, ha $S = \mathbb{Z}_7$, a sorozat teljesen periodikus.

Ha $m = 4$, azaz $S = \mathbb{Z}_4$, amire kacsintani akarok, csupán egy másik redukciót kell csinálnom:

$$0\ 1\ 1\ 3\ 1\ 3\ 1\ 3\ 1\ 3\ 1\ldots$$

lett az eredmény. Így ha $S = \mathbb{Z}_4$, akkor az $F\Big((2,1), \big((0),(1)\big)\Big)$ a Fibonacci-sorozat kezdete

$$(0)\ (1)\ (1)\ (3)\ (1)\ (3)\ (1)\ (3)\ (1)\ (3)\ (1)$$

Sohasem fogjuk a zéró osztályt (0) újra látni. A sorozat periodikus, de nem teljesen periodikus. Ezt az egyszerű példát Professzor **Steven Vajda** könyvében olvashatjuk. Ha élne, Vajda most 103 éves lenne, és amikor a **Fibonacci & Lucas numbers and the golden section 1989** című könyvét írta, 86 vagy 87 éves volt.

1. propozíció. *Ha az additív S félcsoport véges, akkor az általánosított $F(\mathbf{m}, \mathbf{s})$ Fibonacci-sorozat mindig periodikus. A minimális periodus hossza $l_p \leq c^2$, ahol c a félcsoport elemeinek a száma.*

A 2. példa mutatja, hogy a sorozatnak aperiodikus kezdete is lehet. A véges kardinalitás feltételén lehet változtatni: így például S egy végtelen kommutatív félcsoport is lehet, de akkor az s_0, s_1 magokat csak a félcsoport véges rendű tagjai közül választhatjuk. (Az s tag véges rendű, ha $\{ks : k > 1\}$ véges halmaz.)

A bizonyítás a sorozat elemeinek párosításával kezdődik. Lehet az (s_{2k-1}, s_{2k}) párokat, vagy ha tetszik, az (s_{2k}, s_{2k+1}) párosítást használni. Kiválasztunk egy helyet a sorozatban, mondjuk épp s_{36} után, és onnan kezdve gondolatban folytatjuk a sorozatépítést, de nem tag után taggal, hanem tagpár után tagpárral folytatjuk a sorozatot. Ha már több mint c^2 párt képeztünk, akkor megállunk. Mivel a félcsoportnak csak c tagja van, legfeljebb c^2 különböző pár van. Minden postás tudja, hogy ez egy duplikációra vezet. Mondjuk:

$$(s_{2k-1}, s_{2k}) = (s_{2\ell-1}, s_{2\ell}). \tag{1}$$

Mikor az s_{2k-2} taghoz érünk, azt képzeljük, hogy onnantól kezdve a régi helyett egy új sorozatot építünk. A magjait már látjuk (s_{2k-1}, s_{2k}). A súlyok a régiek maradnak. Tehát a következő a sorozat, amit elkezdünk:

$$F\big(\mathbf{m}, (s_{2k-1}, s_{2k})\big).$$

Mikor az új sorozatban az új $(s_{2\ell-1}, s_{2\ell})$ párt elérjük, megint másképp folytatjuk a sorozatot: most az

$$F\big(\mathbf{m}, (s_{2\ell-1}, s_{2\ell})\big)$$

sorozat elejét kezdjük kiszámítani. Azonban (1) miatt csupán az $F\big(\mathbf{m}, (s_{2k-1}, s_{2k})\big)$ sorozatot kezdjük megint leírni. Mindenki tudja, hogy végig a régi $F\big(\mathbf{m}, (s_1, s_2)\big)$ sorozat tagjait számoltuk ki. Így látjuk, hogy az s_{2k-1} tagnál egy periodikus sorozat kezdődik, és az első periódus vége $s_{2\ell-2}$. A periódus hossza $l_p = 2l$, ahol $l = \ell - k$. Lehetséges, hogy van néhány periódus az s_{2k-1} előtt, és a sorozat aperiodikus módon is kezdődhet.

Mikor $m_1 = 1$ az első súly, és S egy additív csoport, akkor $s_{n-1} = s_{n+1} - m_2 s_n$, ahol $n > 1$. Az építési szabály és ez a képlet mutatja, hogy a periódus, amit találtunk kicserélhető egy ugyanolyan hosszú másikkal, amely az s_{2k-2} taggal kezdődik. Így azt látjuk, hogy van egy periódus, aminek l_p a hossza és s_1 a kezdete. Tehát ha $m_1 = 1$, akkor minden Fibonacci-sorozat teljesen periodikus.

Az M mátrix: Legyen S akármilyen additív félcsoport és a súly két tagja legyen pozitív egész szám vagy nulla. A sorozat $F(\mathbf{m}, s)$ a magokkal kezdődik és az $s_{n+1} = m_1 s_{n-1} + m_2 s_n$ építési szabály szerint folytatódik. Tehát

$$\begin{aligned} s_{n+2} &= m_1 s_n + m_2 s_{n+1} = m_1 s_n + m_2(m_1 s_{n-1} + m_2 s_n) \\ &= (m_1 m_2) s_{n-1} + (m_1 + m_2^2) s_n. \end{aligned}$$

Összefoglaljuk ezt a két kifejezést egy sorvektor-egyenletben

$$(s_{n+1}, s_{n+2}) = (s_{n-1}, s_n) \begin{pmatrix} m_1 & m_1 m_2 \\ m_2 & m_1 + m_2^2 \end{pmatrix}$$

Így minden (s_{n+1}, s_{n+2}) párt az előző párból az

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & m_1 m_2 \\ m_2 & m_1 + m_2^2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

mátrix szorzásával kapjuk meg. Minden $1 < k \leq n$ index párra, ahol k és n paritása azonos, a következő egyenlet érvényes:

$$(s_{n+1}, s_{n+2}) = (s_{k-1}, s_k)M^{(n+2-k)/2}. \tag{3}$$

Az $n = 2, 3, \ldots$ indexekre bevezetjük az

$$S_n = \begin{pmatrix} s_{n-1} & s_n \\ s_n & s_{n+1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

mátrixokat, akkor (3) szerint

$$S_{n+1} = S_{n-1}M, \qquad \text{ha } n > 2.$$

Ezért minden $n > 2$ és $k > 0$ értékre

$$S_{2k} = S_2 M^{k-1} \text{ és } S_{2k+1} = S_3 M^{k-1}. \tag{5}$$

2. propozíció. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, és $S = R^+$ a gyűrű additív csoportja, amit egy kétoldali Z-modulusnak tekintünk. Ekkor*

$$\det(S_n) = s_{n-1}s_{n+1} - (s_n)^2 = (-m_1)^{n-2}d, \tag{6}$$

ahol $n \geq 2$ és $d = \det(S_2) = m_1 s_1^2 + m_2 s_1 s_2 - s_2^2$.

Bizonyítás. Ha egy $A = \left(a_j^{(i)}\right)$ mátrix tagjai egy kommutatív gyűrűből származnak, akkor a determinánst a szokásos módon vezethetjük be. Így például $\det(A) = a_1^{(1)}a_2^{(2)} - a_1^{(2)}a_2^{(1)}$. Ha B egy másik ilyen mátrix, akkor $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Ha egy harmadik M mátrix tagjai egész számok, akkor AM és MA létezik és $\det(AM) = \det(A)\det(M)$. Az építési M mátrix determinánsa m_1^2, s így (5) szerint

$$\det(S_{2k}) = m_1^{2k-2}\det(S_2) = m_1^{2k-2}(s_1 s_3 - s_2^2).$$

Mivel $s_3 = m_1 s_1 + m_2 s_2$, látjuk, hogy

$$\det(S_2) = s_1 s_3 - s_2^2 = m_1 s_1^2 + m_2 s_1 s_2 - s_2^2.$$

Hasonló módon (5) miatt

$$\det(S_{2k+1}) = m_1^{2k-2}\det(S_3).$$

$\det(S_3)$ értékét kiszámítjuk a magokból $s_3 = m_1 s_1 + m_2 s_2$ és $s_4 = m_1 s_1 + m_2 s_3$ használatával: mivel $s_4 = m_1 m_2 s_1 + (m_1 + m_2^2)s_2$, a determináns $s_2 s_4 - s_3^2$ könnyen megkapható,

$$\det(S_3) = -m_1(m_1 s_1^2 + m_2 s_1 s_2 - s_2^2) = -m_1 \det(S_2).$$

3. propozíció. *Ha valamelyik n index olyan, hogy az s_{n-1} és s_n gyűrűelemeknek vannak inverzei, akkor*

$$s_{n+1}s_n^{-1} - s_n s_{n-1}^{-1} = (-m_1)^{n-2} d(s_{n-1}s_n)^{-1}. \tag{7}$$

Ha n olyan, hogy s_{n-2}, s_{n-1}, s_n mindhárman inverzekkel bírnak, akkor még

$$s_n s_{n-1}^{-1} - s_{n-1}s_{n-2}^{-1} = (-m_1)^{n-3} d(s_{n-2}s_{n-1})^{-1} \tag{8}$$

is érvényes, és ezért

$$s_{n+1}s_n^{-1} - s_{n-1}s_{n-2}^{-1} = (-m_1)^{n-3} m_2 d(s_{n-2}s_n)^{-1}. \tag{9}$$

Bizonyítás. Mivel az inverzek léteznek, (7) és (8) a második propozíció (6) számú egyenletéből osztással nyerhető. Ha (7) és (8) összegét vesszük, akkor (9) bal oldala következik, és a jobb oldalon

$$(-m_1)^{n-3} d(s_{n-2}^{-1} - m_1 s_n^{-1}) s_{n-1}^{-1} \tag{10}$$

áll. A sorozatépítés törvénye szerint $s_n - m_1 s_{n-2} = m_2 s_{n-1}$, és ezt szabad $s_{n-2}s_n$ inverzével szorozni. Az eredmény $s_{n-2}^{-1} - m_1 s_n^{-1} = m_2 s_{n-1}(s_{n-2}^{-1}s_n^{-1})$. Ha ezt a (10) alatti kifejezésbe helyettesítjük, akkor (9) következik.

4. propozíció. *Legyen $S = \mathbb{R}^+$ a valós számok testének additív csoportja, és legyenek a súlyok pozitív valós számok. A valós magok legyenek olyanok, hogy valamilyen i indexre $s_i > 0$ és $s_{i+1} > 0$. Ekkor minden $n \geq i+2$ értékre*

$$s_{n+1}/s_n - s_{n-1}/s_{n-2} = (-m_1)^{n-3} m_2 d/(s_{n-2}s_n). \tag{11}$$

(7) *miatt a végtelen sorozat*

$$s_{i+1}/s_i,\ s_{i+2}/s_{i+1},\ s_{i+3}/s_{i+2},\ s_{i+4}/s_{i+3},\ s_{i+5}/s_{i+4}, \ldots \tag{12}$$

rendszeresen ingadozik (regularly fluctuates), *és* (11) *miatt*

$$s_{2k+1}/s_{2k} < s_{2k-1}/s_{2k-2}, \qquad s_{2(k+1)}/s_{2k+1} > s_{2k}/s_{2k-1}, \tag{13}$$

ha k nagyobb mint $1 + i/2$.

Megjegyzés. Ha $m_2 = 0$, akkor az $s_n = m_1 s_{n-2}$ egyenlet szerint $s_{2k+1} = m_1^k s_1$ és $s_{2k} = m_1^{k-1} s_2$, ahonnan $s_{2k+1}/s_{2k} = m_1(s_1/s_2)$ és $s_{2k}/s_{2k-1} = s_2/s_1$ minden $k \geq 1$ értékre. Tehát a két alsorozat konvergál, de a teljes sorozat (12) széttartó, kivéve ha $m_1 s_1^2 = s_2^2$. Azonban ha $m_1 = 0$, akkor $s_{n+1} = m_2 s_n$, így $s_{n+1}/s_n = m_2$ minden n-re, és (12) triviálisan konvergál.

Karakterisztikus gyökök és spektrumok. Visszatérünk az eredeti Fibonacci-sorozat M mátrixához, ami szimmetrikus és pozitív definit. Valóban, ha $(x, y) \neq (0,0)$, akkor

$$\begin{aligned}(x,y)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} &= (x+y, x+2y)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ &= x(x+y)+(x+2y)y=(x+y)^2+y^2>0.\end{aligned}$$

Ilyen mátrixoknak vannak négyzetgyökei. Tényleg, ha $\pm A$

$$A_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\quad \text{vagy pedig}\quad A_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

akkor $A^2 = M$. Az A mátrixoknak a karakterisztikus polinomja $p_1(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ és az A_2 mátrixnak $p_2(\lambda) = \lambda^2 - \sqrt{5}\lambda + 1$. Mindkét esetben két valós sajátérték létezik, és így a spektrumok a következők:

$$\operatorname{spec}(A_1) = \left\{(1+\sqrt{5})/2,\ (1-\sqrt{5})/2\right\},$$

$$\operatorname{spec}(A_2) = \left\{(\sqrt{5}+1)/2,\ (\sqrt{5}-1)/2\right\}.$$

Tehát A_2 az M mátrix pozitív definit gyöke. Mindkét esetben a sajátértékek négyzetei az M mátrix spektrumához vezetnek. Látjuk, hogy a polinom, amit a $\lim_{n\to\pm\infty} s_{n+1}/s_n$ határérték létezéséből, az $s_{n+1} = s_{n-1} + s_n$ szabály segítségével találtunk, az indefinit A_1 mátrix $p_1(\lambda)$ polinomja. Ennek a mátrixnak a fontossága a következőképpen látható: Mivel $(s_{n-1}, s_n)A_1 = (s_n, s_{n-1}+s_n)$ minden n indexre, ezért $(s_{n-1}, s_n)A_1 = (s_n, s_{n+1})$. Tehát A_1 is használható sorozatépítésre, azonban minden szorzás ezzel a mátrixszal csak egy új tagot ad.

A következő részlet angolul van írva. Matematikai szempontból érdekes, és jó *English lesson.*

We note that the above square-root matrices can be found in two related ways: Let $A = \begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ *be such that* $A^2 = M = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. *Then* $a^2 + b^2 = 1$ *i.e.* $a^2 = 1 - b^2$ *and* $b^2 + c^2 = 2$ *i.e.* $c^2 = 2 - b^2$. *Since we also have* $ab + bc = 1$ *we get* $b^2c^2 = 1 - 2ab + a^2b^2$ *or* $b^2(2 - b^2) = 1 - 2ab + (1 - b^2)b^2$ *which reduces to* $1 - b^2 = 2ab$. *Squaring we get* $1 - 2b^2 + b^4 = 4a^2b^2 = 4(1 - b^2)b^2$ *which can be written as* $5b^4 - 6b^2 + 1 = 0$ *from which* $b^2 = 1$ *or* $b^2 = 1/5$. *Thus* $a^2 = 0$ *and* $c^2 = 1$ *or else* $a^2 = 4/5$ *and* $c^2 = 9/5$. *The rest is trivial.*

The other approach starts with $a^2 + b^2 = 1$ *and* $a = \cos\alpha$, $b = \sin\alpha$. *Since* $c^2 = 2 - b^2$ *we have* $c^2 = 2 - \sin^2\alpha$. *This determines A in terms of* α, *namely*

$$A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & \sqrt{2-\sin^2\alpha}\end{pmatrix}$$

Squaring gives

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 2 \end{pmatrix} \text{ where } s = \sin\alpha\big(\cos\alpha + \sqrt{2 - \sin^2\alpha}\,\big)$$

Since we need $s = 1$ *the choices for* α *become restricted. There is the* $\alpha = \pi/2$ *solution and the other one can be obtained by the following elementary calculation: If* $s = 1$ *then*

$$(\sin\alpha)^2(2 - \sin^2\alpha) = (1 - \sin\alpha\,\cos\alpha)^2$$

which after squaring on the right hand side reduces first to

$$\sin^2\alpha = 1 - 2\sin\alpha\,\cos\alpha \text{ and then to } 2\sin\alpha = \cos\alpha.$$

Squaring both sides we obtain $5\sin^2\alpha = 1$ *whence* $a = \sin\alpha = 1/\sqrt{5}$ *and* $b = \cos\alpha = 2/\sqrt{5}$. *Finally* $c = \sqrt{2 - \sin^2\alpha}$ *gives* $c = 3/\sqrt{5}$.

5. propozíció. *Az általános* M *mátrix akkor szimmetrikus, ha az* $m_1 = 1$ *vagy* $m_2 = 0$. *Ha az első súly* $m_1 = 1$, *úgy* M *pozitív definit, és* $M = A^2$, *ahol a* $\pm A$ *mátrix*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & m_2 \end{pmatrix} \text{ vagy } A_2 = \frac{1}{\sqrt{4 + m_2^2}} \begin{pmatrix} 2 & m_2 \\ m_2 & 1 + m_2^2 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés. Az M mátrixnak az általános esetben is van két négyzetgyöke, ugyanis $M = A^2$, ahol $\pm A$ a következő:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & m_1 \\ 1 & m_2 \end{pmatrix}$$

Ennek a mátrixnak a karakterisztikus polinomja $p_1(\lambda) = \lambda^2 - m_2\lambda - m_1$ és

$$\operatorname{spec}(A_1) = \left\{ \frac{1}{2}\Big(m_2 + \sqrt{m_2^2 + 4m_1}\,\Big),\ \frac{1}{2}\Big(m_2 - \sqrt{m_2^2 + 4m_1}\,\Big) \right\}.$$

Azonban ezeknek a sajátértékeknek a négyzetei nem adják meg az M mátrix sajátértékeit.

Bizonyítás. Egyszerűsítés okából itt az m_2 második súlyt m betűvel jelöljük. Az M mátrix pozitív definit tulajdonságát a következő kvadratikus forma használatával látjuk be:

$$Q(x, y) = (x\ y) \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 + m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

A szorzásokat elvégezve $Q(x, y) = x^2 + y^2 + 2mxy + m^2y^2 = (x + my)^2 + y^2$ következik, ami azt mutatja, hogy M szigorúan pozitív definit.

Tegyük föl, hogy az ismeretlen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mátrix olyan, hogy $A^2 = M$. Ekkor $a^2 + b^2 = 1$ és $b^2 + c^2 = 1 + m^2$, és ezért $c^2 = a^2 + m^2$. Azt is látjuk, hogy

$ab + bc = m$, vagyis $bc = m - ab$, és ezért $b^2c^2 = m^2 - 2abm + a^2b^2$. Ha c^2 helyébe az $1 + m^2 - b^2$ kifejezést írjuk, és a jobb oldalon az $a^2 = 1 - b^2$ helyettesítést használjuk, akkor az egyszerűsítések után $(1 - b^2)m^2 = 2abm$ következik. Tehát $a^2m^2 = 2abm$, és így $a^2m = 2ab$. Egyszerű lehetőség az $a = 0$ választás, aminek az a következménye, hogy $b = \pm 1$ és $c^2 = m^2$, vagyis a második súly négyzete. Ha pedig $a \neq 0$, akkor $am = 2b$. Így tehát $a^2 + b^2 = 1$ miatt az $a^2 = 4/(4 + m^2)$ következik. Ismét az $am = 2b$ formulát használva látjuk, hogy $b^2 = m^2/(4+m^2)$, és ezért $c^2 = a^2 + m^2$ mutatja, hogy $c^2 = (2 + m^2)^2(4+m^2)$. Végül visszaemlékszünk arra, hogy a bizonyítás alatt m az m_2 súlyt jelentette.

2. általánosítás. Legyen adva egy R kommutatív gyűrű, és egy R-modulus S úgy, hogy minden $r \in R$ és $s \in S$ párra $rs \in R$ létezik. Például, lehet R egy F test, amikor S egy F vektortér, amit rendszerint S helyett V-vel vagy hasonló betűvel jelölnek, azonban itt akkor is az S jelölést fogjuk használni. Legyenek a súlyok R tetszőleges tagjai, mondjuk $m_1 = r_1 \in R$ és $m_2 = r_2 \in R$. Az $\mathbf{m}$ súlypár állandó marad, a sorozat két magját azonban változtatni fogjuk. Ezért az $F(\mathbf{m}, \mathbf{s})$ jelölés helyett csak $F(\mathbf{s})$-t írunk, és ennek a sorozatnak n-edik tagját $F_n(s)$ fogja jelölni. Ha két magpár, mondjuk $\mathbf{s_1} = (s_{11}, s_{12})$ és $\mathbf{s_2} = (s_{21}, s_{22})$ adott, akkor $\mathbf{s} = \mathbf{s_1} + \mathbf{s_2}$ létezik, és minden n indexre $F_n(\mathbf{s}) = F_n(\mathbf{s_1}) + F_n(\mathbf{s_2})$. Továbbá, ha egy $r \in R$ és $\mathbf{s}$ magpár adott, akkor $r\mathbf{s} = (r\mathbf{s_1}, r\mathbf{s_2})$ is egy magpár és $F_n(r\mathbf{s}) = rF_n(\mathbf{s})$. Ezért minden n indexre, r_1, r_2 gyűrűtagra és $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ magpárra

$$F_n(r_1\mathbf{s_1} + r_2\mathbf{s_2}) = r_1F_n(\mathbf{s_1}) + r_2F_n(\mathbf{s_2})$$

végtelen sorozatok tagonkénti összeadását használva az

$$F(r_1\mathbf{s_1} + r_2\mathbf{s_2}) = r_1F(\mathbf{s_1}) + r_2F(\mathbf{s_2})$$

relációt kapjuk. Eredményünket így foglaljuk össze:

6. propozíció. *Legyen R egy kommutatív gyűrű, S egy R-modulus és $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$, ahol $m_1, m_2 \in R$. Ekkor a Fibonacci-sorozat $F = F(m)$ egy injektív lineáris transzformáció, nevezetesen $F : S \times S \to S^\infty$, ahol $S^\infty = \prod_{k=0}^{\infty} S_k$, és minden k indexre $S_k = S$.*

In the classical case R is not a ring; o in $\mathbf{N}_0$ (non-negative integers) exists, there is a + binary operation but $\mathbf{N}_0$ is only a kind of semiring.

Generating functions: *I am rewriting THIS using formal Laurent series and their evaluations.*

VISSZAPILLANTÁS AZ ELMÚLT 62 ÉVRE

HORVÁTH JÁNOS

Az az időszak, amelyről itt mesélni akarok, számomra 1942. szeptember 17-én kezdődik. Akkor álltam ugyanis sorban a Pázmány Péter Tudományegyetem quaesturáján, hogy beiratkozzam a bölcsészeti karra. Belepillantottam az előttem álló irataiba és láttam a nevét: Császár Ákos. Tudtam, hogy Ákos nyerte matematikából a középiskolai tanulmányi versenyt, így bemutatkoztam neki, és ezzel elültettem a csíráját annak a kis csoportnak, amelyiknek tagjai most itt nyolcvanadik életévüket ünneplik.

Aczél Jancsit sokkal régebbről ismertem, egyrészt a Berzsenyi Dániel reálgimnáziumból, ahol az (akkori) középiskola első négy osztályát végeztem, de főleg a Margitszigetről. Emlékszem, hogy egyik találkozásunk alkalmával a szigeten Hilbert és Ackermann Grundzüge der theoretischen Logik című könyvét szorongatta a kezében. Jancsi nem volt igazából évfolyamtársunk: mivel 1924 decemberében született, csak 1943-ban érettségizett, de hamar felzárkózott a többiekhez. Fuchs Lacit és Gaal (akkor még Gál) Pistát csak később ismertem meg, bár Lacit láttam az Eötvös-versenyen, ahol dicséretet nyert. A versenyen Ákos lett az első.

Jó volna azt mondhatni, hogy ezek után ültünk a padokban és matematikára tanítottak bennünket. Sajnos ez nem egészen így történt. Idemásolom az egyetemi leckekönyvemből a matematikai előadásokat, amelyeket hallgattam és néhány más adatot:

1942/43 I.
Matematikai proszeminárium Fejér Lipót
Differenciál- és integrálszámítás Fejér Lipót (Szász Pál)
Analitikus geometria Kerékjártó Béla
1942/43 II.
Matematikai proszeminárium Fejér Lipót
Differenciál- és integrálszámítás Fejér Lipót (Szász Pál)
A Fourier- és Laplace-féle sorokról Fejér Lipót
Analitikus geometria Kerékjártó Béla
1943/44 I.
Függvénytan Fejér Lipót
Matematikai proszeminárium Fejér Lipót
Matematikai szeminárium Fejér Lipót
Topológia Kerékjártó Béla
Nem-euklidesi geometria Kerékjártó Béla

Fejezetek az integrálszámításból Szász Pál
Végtelen sorok Szász Pál
1943/44 II. „A félév lezáratott" 1944 április 15
1944/45 I. „A félév lezáratott"
1944/45 II. ———————
1945/46 I.
Matematikai szeminárium Fejér Lipót
Matematikai proszeminárium Fejér Lipót
A Fourier-féle sorról Fejér Lipót
Projektív geometria Kerékjártó Béla
Geometriai csoportelmélet Kerékjártó Béla
Gyakorlatok a függvénytanból Szász Pál
1945/46 II.
A Fourier-féle sorról Fejér Lipót
Matematikai szeminárium Fejér Lipót
Matematikai proszeminárium Fejér Lipót
Felsőbb geometria Kerékjártó Béla (Fejes László)
Fejezetek az integrálszámításból Szász Pál
Gyakorlatok a függvénytanból Szász Pál

A felállításból kitűnik, hogy csak öt teljes félévet hallgattunk az egyetemen. Az 1944 tavaszi félév, amelyben ugyanazokat a tárgyakat vettem fel mint 1943 őszén, február eleje táján kezdődött és április első felében abbamaradt, bár Ákos és én még letettük az alapvizsgát, ami a középiskolai tanári oklevél megszerzéséhez volt szükséges.

1944 nyarán a bombázások által okozott romokat takarítottam Zuglóban, míg 1944/45 telén Aczél Jancsival együtt lövészárkokat és tankcsapdákat ástunk az akkori magyar-német határon. Nem hiszem, hogy komoly akadályai voltak a Vörös Hadsereg előretörésének. Császár Ákost mint civilt vitték el az oroszok „hadifogolynak", bátyját szintén. Ákos csak 1945 nyarán jutott haza, bátyja egyáltalán nem, míg édesapja szívrohamot kapott, mialatt Budán folytak a harcok, és orvosi segítség hiányában meghalt. Mialatt Ákos távol volt, menyasszonya – későbbi felesége – Cseley Klári beiratta az egyetemre, így hazaérkezése után tudott kollokválni. Engem Ákos beiratott 1944/45 első félévére, de a második félévre nem volt alkalmam beiratkozni, így a hét félév és „tényleges katonai szolgálatom" alapján dékáni engedéllyel kaptam a végbizonyítványt.

A felállításban feltüntettem, hogy a bevezető analízis tárgyakat Fejér Lipót nevében Szász Pál tanította. Ő akkor nyilvános rendkívüli egyetemi tanár és Fejér adjunktusa lehetett. Tőle tanultuk a legtöbb matematikát az egyetemen. Lelkes tanár volt, precízen és világosan magyarázott és meglepően sok anyagot tartalmaztak az előadásai. Nagyszerű tankönyvét még most is gyakran forgatom és örömmel tudtam meg, hogy nemrég végre lefordították angol nyelvre.

Fejér Lipótnak a Fourier-féle sorokról szóló előadását már a legelső félévben hallgattam. Akkor rájöttem arra, hogy középiskolás koromban megszerzett analízistudásom elég ahhoz, hogy a tárgyat a második félévben hivatalosan is felvegyem.

Az írásbeli kollokviumon sikerrel szerepeltem. Ennek az a nyitja, hogy karácsonyra megkaptam Pólya-Szegő tüneményes Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis című könyvét és megoldottam belőle a Fourier-féle sorokra vonatkozó feladatokat (VI. 29–38). A vizsgakérdések, amelyeket alighanem Szász Pál állított össze, éppen ezek körül kerültek ki. Sokáig úgy éreztem, hogy csaltam a vizsgán.

1942/43-ig Fejér kétévenkénti előadásainak „A Fourier- és Laplace-féle sorokról" volt a címük, de állítólag sohasem jutott el az utóbbiakig. A háború után egyszerűen „A Fourier-féle sorokról" lett a cím.

Fejér, akinek varázsos egyénisége ragyogó matematikai iskolát teremtett meg a huszadik század elején, nehéz időket élt át 1944/45-ben. Az ostromot egy szükségkórházban töltötte el, Krisztina körúti lakását bombatalálat érte és ő tanári szobájában lakott (akárcsak Kerékjártó Béla és családja) eléggé nyomorúságos körülmények közt. Ez viszont megkönnyítette a vele való személyes érintkezést, amelynek során sokat lehetett tőle tanulni, bár előadásai kevés anyagot tartalmaztak. 1948-ban már sokkal jobb körülmények közé került és munkakedve is visszatért, amihez hozzájárult Szegő Gábor budapesti látogatása, egy meghívás a Société pour l'Avancement des Sciences genfi kongresszusára és az ünneplés az Első Magyar Matematikai Kongresszuson hetvenedik születésnapja alkalmából. Így 1948 után műveinek jegyzékét még hét címmel gazdagította (*Összegyűjtött Munkái,* II. kötet, 97–103. sz.).

Az 1943/44-es tanévben Kerékjártó Béla a hiperbolikus síkgeometriának egy tőle származó felépítését adta elő (*Mat. Természettudományi Értesítő,* **59** (1940), 19–59; *Commentarii Math. Helvetici,* **13** (1940/41), 11–48). Az előadásokat gondosan kidolgoztam, a füzet, amelybe jegyzeteimet írtam, még mindig megvan, és látható belőle, hogy az előadás szinte egy mondat közepén szakadt meg.

A Topológia előadás nem nyújtott hasznos ismereteket. Úgy emlékszem, hogy többek közt Brouwer bonyolult, 1911-ből származó első bizonyítását a dimenziószám megmaradására tárgyalta. Császár Ákos arra emlékszik, hogy a kompaktság értelmezésével gyűlt meg a baja. Nem hiszem, hogy a topologikus tér Hausdorff-féle axiómái meg lettek említve, de a nulla pont megduplázásával nyert nem-Hausdorff tér igen. Jómagam a halmazelméleti topológia elemeit először Pontrjagin Topological Groups c. könyve második fejezetéből tanultam meg, majd később Bourbaki Topologie Générale-jából. Mintegy ellenhatásképpen, ötünk közül hárman (Császár, Gaal és én) írtunk a topológiába bevezető tankönyvet.

1945 őszén Kerékjártó már halálosan beteg volt. Az első félév végén Szász Pál írta alá nevében az indexeket. A második félévben csak egy geometria előadást hirdetett meg, amelyet Fejes László tanított. Kerékjártó Béla 1946. május 27-én elhunyt negyvenkilenc éves korában.

Fejes László abban az évben lett Budapesten magántanár és vette fel a Fejes Tóth nevet Fejér kérésére, aki attól tartott, hogy a két hasonlóan írott nevet összetévesztik. (Ez mégis megtörtént, lásd Santaló: Introduction to Integral Geometry, Hermann, Párizs 1953, 46. old.) Fejes saját eredményeiről adott elő, amelyeket hamarosan világszerte elismertek.

Elsőéves korunkban Kerékjártó analitikus geometria előadásához Szép Jenő vezette a gyakorlatokat, aki a tanév végén bevonult katonának, és utódja Fáry István lett. Szép már azokban az időkben foglalkozott csoportokkal és később ennek a tudományágnak nemzetközileg elismert művelőjévé vált. Mint a közgazdasági egyetem tanára, a Neumann János által alapított játékelméletnek is szakértője lett. Nagy örömmel láttam viszont ezen az ülésszakon jó egészségben, és megdöbbenéssel értesültem arról, hogy néhány héttel később hirtelen meghalt.

Az akkori Tanárképző Intézet keretében Veress Pál tartott egy Algebra című előadást, amelyből csak arra emlékszem, hogy binomiális együtthatókra vonatkozó identitásokat kellett bebizonyítanunk.

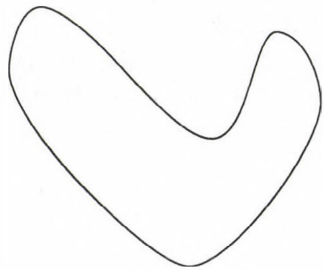
1946 őszén Riesz Frigyes érkezett Szegedről Budapestre. Az Egyenlőtlenségekről szóló előadását hallgattam és előadtam S. Bernstein bizonyítását Weierstraß approximációs tételére. Aczél Jancsi saját első eredményét adta elő (lásd lejjebb), míg Fuchs Laci egy új bizonyítását mondta el Hardy–Littlewood–Pólya egyenlőtlenségének általánosítására (*Mat. Tidsskrift B,* 1947, 53–54; v.ö. Mitrinović: Analytic Inequalities). Császár Ákos viszont a Valós Függvényeket hallgatta.

Remélem sikerült kidomborítanom, hogy az egyetemen kevesen tanítottak minket, és hogy kevés matematikát tanultunk. Magunknak kellett tehát valamit tennünk, hogy tudásunkat gyarapítsuk. Természetesen elsősorban a könyvekhez fordultunk. Bod Pétertől tanultam azt, hogy legyen nálam mindig matematikakönyv, így a villamoson vagy a fogorvos várószobájában eltöltött idő nem vész kárba. Péter tanácsát annyira megfogadtuk, hogy 1944/45 telén is voltak velünk könyvek: Veress Pál „Valós Függvények" c. könyve és Felix Hausdorff „Grundzüge der Mengenlehre"-je. Egyszer egy smasszer meglátta, hogy Veress könyve munkaidőben nálam van, és amikor kérdőre vont azt mondtam, hogy csak klozettpapír. Veress könyvét beköttettem a háború után és még most is megvan. A Hausdorff a matematikai könyvtáré volt. Amikor 1945 júliusában visszaadtam, rámpirítottak, hogy sokáig tartottam magamnál.

Bod Péter nagyon közel állt csoportunkhoz, és a vele való barátság mindmáig fennáll, pld. Ákosékkal rendszeresen bridzseztek. Én Péter iskolatársa voltam a gimnázium első négy osztályában. Ő magyarázta meg nekem a kvantummechanika alapfogalmait a Palatinus strand melegvizes medencéjében, és ő tanácsolta, hogy járjak át a Műszaki Egyetemre Bay Zoltán Atomfizika előadását hallgatni, amely ugyanakkor magántanári előadás volt a tudományegyetemen.

A másik módja tudásunk gyarapításának az volt, hogy egymásnak tartottunk előadásokat. Ezekből kevésre emlékszem, csak azt tudom, hogy de la Vallée-Poussin „Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'Ensemble, Classes de Baire" című könyve elolvasása után, egy hallatlanul rossz beszámolót adtam a Baire-féle osztályokról. Ezek az előadások 1946-ban átalakultak szemináriummá, amelyen első szárnypróbálgatásainkat tártuk a nyilvánosság elé. Nagy hallgatóság jött a szemináriumokra, hiszen ezek voltak abban az időben az egyetlen nyilvános matematikai előadások; a Bolyai János Matematikai Társulat éppen csak kezdett szervezkedni. A korai specializálódást elkerülendő, mindegyikünk egy másikunk eredményeiről számolt be. Ajánlottam, hogy ezt a tradíciót elevenítsük fel a mostani konferencia alkalmából, és hajlandó lettem volna pld. a végességi feltételek nélküli gyűrűk feletti modulusokról beszélni, de Fuchs Laci erről hallani sem akart.

Az utolsó szemináriumi ülés, amelyen részt vettem, 1947. május 14-én volt. Ezen különösen nagy közönség jelent meg, még Szőkefalvi Nagy Béla, aki éppen Budapesten tartózkodott, is ott volt. Én Gál Pistának Rényi Buba egy tételére adott elemi bizonyítását adtam elő, amelyik aztán megjelent a szegedi Actában (**11** (1946/48), 167–168). Előadásomat úgy kezdtem, hogy vegyünk egy zárt konvex görbét, és felrajzoltam a táblára ezt:



A közönség harsány hahotában tört ki, és egy ideig tartott, amíg rájöttem, hogy min nevetnek. A tétel egyébként úgy szól, hogy ha A a C görbe által bezárt terület, ϱ a legnagyobb beírt kör sugara, és $P\left(\frac{\varrho}{2}\right)$ a C görbétől $\frac{\varrho}{2}$ távolságra beírt párhuzamos görbe kerülete, akkor $A \leq \varrho P\left(\frac{\varrho}{2}\right)$.

Császár Ákos első publikációja (Kong. Norske Videnskab. Selskab. Forh. XX, no. 1) is szerepelt az egyik szeminárium műsorán. Ez topológiai tárgyú volt és elemi bizonyítást adott H. E. Vaughan egy tételére, amely szerint egy metrikus E tér akkor és csak akkor homeomorf egy olyan metrikus térrel, amelyben minden korlátos halmaz (relatív) kompakt, ha E lokálisan kompakt és szeparábilis.

Itt meg akarom jegyezni, hogy Gál Pista kivételével mindegyikünk első publikációja a Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Forhandlinger című folyóiratban jelent meg, sőt egyesek több cikket is publikáltak ott. Azokban az időkben kevés volt a folyóirat, míg a Forhandlinger gyorsan publikált és szerkesztője, Tambs Lyche, igen nagy jóindulattal kezelte a neki küldött kéziratainkat. A cikkek nem lehettek négy oldalnál hosszabbak, így a hosszabb kéziratokat Tambs Lyche maga osztotta több részre, és azok folytatásokban jelentek meg.

Fuchs Laci már akkor behatóan tanulmányozta az algebrát és az algebrai számelméletet van der Waerden és Hecke könyveiből. Nem tudom eléggé hangsúlyozni, mekkora hatással volt az egész világon a „Moderne Algebra" a megjelenése utáni években; érett matematikusok kutatási irányát változtatta meg. Jól emlékszem, mekkora elragadtatással olvastam a könyvet 1944 nyarán. Laci első dolgozatai ideálelméletről szólnak. Többek közt bevezette és vizsgálta a kvázi-primér ideál fogalmát (*Acta Sci. Math. Szeged,* **11** (1947), 174–183). Egy kommutatív A gyűrű P ideálja akkor *prím,* ha abból, hogy $ab \in P$ és $a \notin P$, következik, hogy $b \in P$ (azaz A/P nullosztómentes). A $Q \subset A$ ideál akkor *primér,* ha abból, hogy $ab \in Q$, $a \notin Q$, következik, hogy b valamilyen hatványa Q-hoz tartozik, azaz $b \in \sqrt{Q}$. Az $R \subset A$ ideál akkor *kváziprimér*, ha abból, hogy $ab \in R$, $a \notin \sqrt{R}$, következik, hogy $b \in \sqrt{R}$. Eszerint R akkor és csak akkor kváziprimér ha $\sqrt{R}$ prím.

Ötünk barátai közül megemlítem még évfolyamtársunkat, Mikolás Miklóst, valamint Fenyő Istvánt, aki néhány évvel idősebb volt nálunk. Pista volt az, aki Aczél Jancsiban felébresztette az érdeklődést a középértékek iránt. Ezek jelentős szerepet játszottak munkásságában, és elvezettek a függvényegyenletekhez, amelyeknek világszerte elismert legkiválóbb szakértője.

Jancsi 1946-ban fedezte fel a biszimmetria egyenletét

$$F\big(F(x_{11}, x_{12}), F(x_{21}, x_{22})\big) = \big(F(x_{11}, x_{21}), F(x_{12}, x_{22})\big), \tag{1}$$

amellyel sikerült az

$$m(x, y) = \phi^{-1}\big(p\phi(x) + q\phi(y)\big), \quad p + q = 1,\ p, q > 0$$

alakú nem-szimmetrikus kváziaritmetikus közepeket jellemeznie (*Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 392–400). Már előzőleg jellemezte a szimmetrikus közepeket ($p = q = \frac{1}{2}$) azzal a feltétellel, hogy az (1) alakú kifejezés mind a négy változóban szimmetrikus (*Kong. Norske Videnskab. Selskab. Forh. XIX*, no. 23, 83–86). Fuchs Laci tisztán algebrai szempontból vizsgálta a biszimmetria egyenletét (*Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **1** (1950), 303–320; l. még rendezett algebrai rendszerekről írt könyve XI. fejezetének 8. pontját).

Ugyancsak 1946-ban kezdtek a közgazdászok „konszisztens aggregációkkal" foglalkozni (ez a fogalom a pszihológiában is felmerül). A két kutatási irány egymásról mitsem tudva fejlődött 1968-ig, amikor is W. Gorman Aczélnak „Lectures on Functional Equations" c. könyvét olvasva rádöbbent, hogy a konzisztens aggregáció problémája azonos az nm változóra általánosított biszimmetriaegyenlet megoldásának problémájával. A történetet maga Aczél meséli el „Bisymmetry and Consistent Aggregation, Historical Review and Recent Results" c. nagyon olvasható cikkében (Choice, Decision and Measurement, Ed. A. A. Marley, Lawrence Erlbaum Associates, NJ 1997, 225–233 old.).

Aczél Jancsi befolyása alatt én is elkezdtem középértékekkel foglalkozni. Ez úgy kezdődött, hogy Turán Pál készült Amerikába utazni, és mivel én az 1938/39-es tanév alatt Angliában jártam iskolába, hetente egyszer felmentem hozzá, hogy angolul beszéljünk matematikáról. Nem tudom, mennyire segített ez Palinak a nyelv gyakorlásában, de én rengeteg matematikát tanultam, pld. a prímszámtétel eredeti bizonyítását. Egy alkalommal megemlítette Riesz Frigyes bizonyítását Hardy–Littlewood „kricket-egyenlőtlenségére", felteszem azért mert meg akarta tudni, hogyan játsszák a kricket sportot. Kíváncsi voltam arra, vajon miben áll ez az egyenlőtlenség, és amikor megnéztem, megismerkedtem a mérhető függvény átrendezésének fogalmával: f és g egymás átrendezései, ha az $\{f \geq \alpha\}$ és $\{g \geq \alpha\}$ halmazoknak minden α-ra ugyanaz a mértékük. Ezzel a fogalommal jellemezni tudtam a $[0, 1]$ intervallumban Lebesgue szerint mérhető függvények

$$M(f) = \phi^{-1}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(x))\,dx\right)$$

alakú szimmetrikus kváziaritmetikus közepeit.

Mind Aczél Jancsi, mind saját magam, középértékekről írtuk doktori disszertációinkat. Fuchs Laci is megmaradt egy ideig az ideálelméletnél, és csak később kezdett el rendezett struktúrákkal és Abel-féle csoportokkal foglalkozni. Mindkét témáról írt monográfiát. A csoportokról szóló könyveinek óriási sikere volt, többek közt a sok benne felvetett megoldatlan probléma miatt, amelyek kutatók seregeinek adtak tápot. Laci, aki 1949-ig a Tanítóképző Intézetben tanított, 1949-ben került az egyetemre és 1954-ben nevezték ki egyetemi tanárnak. Mint a kar legfiatalabb tanára, dékán volt egy ideig, ezalatt írta első könyvét Abel-féle csoportokról (1958), mert úgymond hivatali elfoglaltsága miatt nem jutott kutatáshoz. Egy teljesen új könyve végtelen Abel-csoportokról két kötetben jelent meg 1970-ben, illetve 1973-ban.

Császár Ákos elhagyta egy időre a topológiát és az integrál elmélete felé fordult. Miután elolvasta Veress könyvét, ki akarta kölcsönözni S. Saks „Théorie de l'Intégrale" c. könyvét a szemináriumi könyvtárból. A bökkenő az volt, hogy ez a mű állandó jelleggel Fejér Lipót íróasztalán feküdt. Amikor Ákos megkérte, hogy elvihesse a könyvet, Fejér odaadta neki három napra. Ákos éjt nappallá téve három nap alatt megtanulta a Saksot császárákosi alapossággal, minden bizonyítás legapróbb részletét átgondolva. Utána beszélgetése olyanokkal volt megspékelve mint „fonction à variation bornée généralisée au sens restreint". Disszertációját a magasabb rendű differencia- és differenciálhányadosokról francia nyelven publikálta (*Commentarii Math. Helvetici,* **21** (1948), 253–260; *Annales Sci. École Normale Sup.* (3) **64** (1948), 275–284). Jól tud franciául, mert francia elemibe járt, de görögből tanulmányi versenyt nyert, pedig nem járt ógörög elemi iskolába. Ákos még néhány évig az integrálás és a differenciálás elméletével foglalkozott, majd megalkotta a halmazelméleti topológia egy új ágát, a szintopogén struktúrák elméletét, amelynek saját száma van a Mathematics Subject Classification-ban: 54A15. Az 1958-as edinburghi nemzetközi matematikus kongresszuson már az Általános Topológiai Struktúrákról beszélt, majd megírta az elmélet részletes monográfiáját franciául (1960), és ezt követőleg egyre bővített kiadásokban angolul (1961) és németül (1963).

Erdős Pál egy levelében a következő problémát közölte Turán Pállal: Jelölje (a,b) két pozitív egész szám legnagyobb közös osztóját, $[a,b]$ a két szám legkisebb közös többszörösét, és legyen

$$\langle a,b\rangle = \frac{(a,b)}{[a,b]}.$$

A kérdés abból áll, hogy az

$$f(N) = \sup \sum_{i,j\le N} \langle n_i, n_j\rangle$$

függvény nagyságrendjét, ahol a legkisebb felső határ az $n_1 < n_2 < \cdots < n_N$ sorozatokra terjed ki, kell megbecsülni midőn $N \to \infty$. Turán feladta a problémát

Gál Pistának, aki brilliáns doktori disszertációjában kimutatta, hogy létezik két állandó $C > c > 0$ melyre

$$cN(\log\log N)^2 \le f(N) \le CN(\log\log N)^2.$$

A cikk a Nieuw Archief voor Wiskunde-ban (**23** (1949), 13–38) jelent meg egy holland nyelvű lábjegyzettel, amelynek hevenyészett fordítása a következő: „Ez a cikk teljes megoldását adja (alkalmazásokkal) annak a problémának, amelyik a 17. számú feladata az Amsterdami Matematikai Társulat által kitűzött pályázatnak. A problémát Erdős P. úr adta fel a szerzőnek, aki – akárcsak a szerző – nem tudta, hogy egy versenyfeladatról van szó. Mivel azonban alaki okokból (nem érkezett be a határidő előtt a Matematikai Társulathoz és nem névtelenül), a cikk nem jöhet számításba mint pályázó, a szerkesztőség vigaszdíjként elfogadta közlésre a Nieuw Archief voor Wiskunde-ban."

1947. július 9-én elutaztam Párizsba. Azt Budapesten is lehetett tudni, hogy ott aktív matematikai élet folyik. Egyszer Riesz Frigyes mutatta nekem „a fiatal Cartan" nagy cikkét a „balayage"-ról (*Ann. Univ. Grenoble,* **22** (1946), 221–280; *Œuvres,* III. köt. 1104–1169), amelyik éppen megérkezett. Én akkor olvastam Radó Tibor könyvét szubharmonikus függvényekről, és érdekelt a potenciálelmélet. Anyám bátyja Párizsban élt, így ottani tartózkodásom anyagi alapja egy időre biztosítva volt. Fejér Lipót adott egy ajánlólevelet Szolem Mandelbrojthoz, akivel egy ideig dolgoztam.

Szőkefalvi Nagy Béla a háború előtti utolsó tanévet Franciaországban töltötte és Grenoble-ban megbarátkozott Jean Favard-dal. A háború után Favard Párizsban lett tanár és elintézte, hogy a francia külügyminisztérium kulturális osztálya a szegedi matematikai könyvtárnak ajándékba adja az összes a háború alatt és után megjelent matematika könyvet és folyóiratot, valamint hogy előfizessen továbbra is a folyóiratokra. A könyvek azonban csak nem érkeztek meg Szegedre, és ezért Sz. Nagy Béla megbízott azzal, hogy beszéljek Favard-dal és esetleg menjek el a minisztériumba a szállítmányokat megsürgetni. Amikor beszélgetés közben kiderült, hogy magam is matematikus vagyok, Favard azonnal kijelentette, hogy a Centre National de la Recherche Scientifique 1948 szeptemberétől három ösztöndíjat fog adni fiatal magyar matematikusoknak. Az egyik ösztöndíjat én kaptam, a másik kettőre Gál Pista és Fáry Pista jöttek ki.

Párizsban akkor hallatlanul izgalmas idők voltak matematikailag. 1947/48-ban tartotta Jean Leray első előadását a Collège de France-ban, amelynek során forradalmasította az algebrai topológiát és a matematika több más ágát, bevezetve, többek közt, a kéve (faisceau, sheaf, Garbe) és a spektrálsorozat fogalmát. 1948-ban kezdte el Henri Cartan („a fiatal Cartan", akkor 44 éves volt) a szemináriumát az École Normale Supérieure-ben, ahol az első évben homológiáról, a másodikban homotópiáról volt szó. A résztvevők sorában volt Jean-Pierre Serre és 1949/50-ben Armand Borel is. Nekem sok nehézségem volt a tárggyal, hiszen Budapesten még a homológia szót sem hallottam, csak Gál Pista, aki belekukkantott az Alexandroff-Hopf könyv második felébe, említette egyszer, hogy létezik valami, amit Betti-féle számnak neveznek. Fáry Pista volt hármunk közül az, aki beledolgozta magát a Leray alkotta fogalmakba. Szerzett egy második doktorátust a párizsi egyetemen (akkor még csak egy volt) az algebrai varietások kohomológiájával foglalkozó cikkével (*Ann. of Math.*, **63** (1956), 437–490; **65** (1957), 21–73), amelynek alapján előbb professzor lett Montrealban, majd Berkeley (University of California) és a princetoni egyetem egyszerre ajánlottak fel neki állást az 1950-es évek vége felé. Pista Berkeley mellett döntött, és ott tanított túl korán bekövetkezett haláláig.

Gál Pista 1950. augusztus 13-án hagyta el Párizst. A princetoni Institute for Advanced Study hívta meg mint „fellow" és „member". Robert Openheimer meghívólevelével azonnal kapott vízumot az Egyesült Államokba. 1952 júniusáig volt a princetoni Intézetben, 1952 augusztusában feleségül vette Ilse (Lisl) Novak-ot, a matematikai logika kiváló művelőjét (l. Bourbaki, Théorie des Ensembles, 4. fejezet, Note Historique, 117. old.). 1953 elejétől 1958 nyaráig a Cornell egyetemen voltak, 1958 és 1960 közt Pista a Yale egyetemen volt kutató ösztöndíjjal. 1960 augusztusától a Minnesotai egyetemen tanított, ahol megírta, többek közt, a sárga Springer sorozatban megjelent nagy könyvét: „Linear Analysis and Representation Theory" (Grundlehren, 198. kötet, 1973), és ahonnan 1992-ben ment nyugalomba, azóta Nevada államban él.

1948 augusztusában haza tudtam látogatni Magyarországra egy a párizsi magyarok által szervezett különvonaton, kollektív útlevéllel. Budapesten együtt voltam az ifjú Császár házaspárral és Fuchs Lacival. Szüleimmel egy hetet Hévízen töltöttem és Keszthelyről hajóval mentem Aczél Jancsit és Zsuzsit meglátogatni, akik Balatonbogláron nyaraltak.

Ezután legördült a vasfüggöny. 1948 és 1958 közt keveset leveleztem az otthon maradt három társsal. A magyar matematikusok közül legtöbb kapcsolatom a két debreceni algebristával, Szele Tiborral és Kertész Andorral volt, akiket nem is ismertem személyesen. Sajnos mindketten fiatalon meghaltak mielőtt alkalmam lett volna velük találkozni.

1949 júniusának második felében Riesz Frigyes jött Párizsba. Az állomáson, ahová a repülőtérről jövő buszok érkeznek (Gare des Invalides), vártam rá. Még alig jött fel a lépcsőn, már mondta, hogy az előző nap a szüleimnél vacsorázott, akik azt üzenik, hogy ne menjek haza. Öccse, Riesz Marcel, akkor már egy ideje Párizsban tartózkodott és így megismerkedtem vele. Rényi Alfréd is megjelent Párizsban, ahol a két Riesz és Rényi előadásokat tartottak, majd mind a hatan (a két Riesz, Rényi, a két Pista és én) június legvégén Grenoble-ba utaztunk. Ott Brelot és Favard rendeztek egy kis kollokviumot.

Riesz Marcel már 1949-ben említette, hogy van neki egy definíciója többváltozós Hilbert-transzformáltra. 1951 februárjában újból Párizsban volt és 12-én ebéd közben elmondta, miről van szó. Egy az $\mathbf{R}^n$ téren definiált folytonos és a végtelenben gyorsan eltűnő f függvény α-rendű potenciálját az

$$\mathcal{R}_\alpha f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{\pi^{n/2}2^\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy$$

integrál definiálja ha $\Re\alpha > 0$, és annak analitikus folytatása az ellenkező esetben. Riesz kimutatta, hogy $\mathcal{R}_\alpha \circ \mathcal{R}_\beta = \mathcal{R}_{\alpha+\beta}$, valamint, hogy $\mathcal{R}_0 f = f$ és $\mathcal{R}_{-2} f = -\Delta f$, ahol Δ a Laplace-féle operátor. Az $\mathcal{R}_\alpha f$ kifejezés felfogható mint egy R_α mag és az f függvény konvolúciója, és akkor az előző összefüggéseket az

$$R_\alpha * R_\beta = R_{\alpha+\beta}, \quad R_0 = \delta, \quad R_{-2} = -\Delta\delta$$

egyenletek fejezik ki, ahol δ a Dirac-féle egységnyi tömeg a nullpontban. A

$$H = -\nabla R_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{x}{|x|^{n+1}}$$

magra tehát fennáll, hogy

$$H * H = \nabla R_1 * \nabla R_1 = \Delta R_2 = -R_{-2} * R_2 = -R_0 = -\delta,$$

továbbá az $n = 1$ esetben H éppen a Hilbert-transzformáció $\frac{1}{\pi x}$ magja. Ezek szerint az n-dimenziós térben az ú.n. Riesz Marcel-féle transzformált a

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{n+1}} \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} f(y) \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} \, dy$$

Cauchy-féle főérték. Be kellett tehát bizonyítanom, hogy ha $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$, akkor a határérték majdnem minden x pontban létezik, hogy $\mathcal{H}f$ egy kellőképpen értelmezett vektoriális $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^n)$ térhez tartozik, és $\|\mathcal{H}f\|_2 = \|f\|_2$, végül pedig a $\mathcal{H}(\mathcal{H}f) = -f$ reciprocitást. Az egydimenziós tételnek Titchmarsh „Introduction to the Theory of Fourier Integrals" c. könyvében található bizonyítása megfelelő módosításával sikerült a feladatot megoldanom. Ehhez be kellett vezetnem a konjugált Poisson-magot és kiszámítanom mind a Poisson-mag, mind a konjugált mag Fourier-transzformáltját, amiben egy képlet segített, amelyet kissé korábban Leray előadásában tanultam. Utólag kiderült, hogy a Poisson-mag Fourier-transzformáltja szerepel S. Bochner egy könyvében, és G. O. Okikiolu kimutatta, hogy belőle a konjugált magé nagyon egyszerűen megkapható.

1951 májusában, mialatt az említett bizonyításon dolgoztam, elhagytam Párizst mivel Bogotában, Kolumbia fővárosában, egy újonnan alapított egyetem, az Universidad de los Andes ajánlott fel állást. Az Egyesült Államokon át utaztam Kolombiába. Hajóval mentem New Yorkig. Reggel érkeztem oda, azonnal felhívtam Gál Pistát, majd kivonatoztam Princetonba és vele ebédeltem. Néhány nappal később értem jött új autójával, és meglátogattuk Mount Holyoke College-ban (ahol valamikor Zygmund tanított) egy unokatestvéremet, aki diák volt ott, valamint a Harvard és a Yale egyetemeket, ahol néhány matematikust már ismertünk, és néhánnyal megismerkedtünk.

Bogotában alkalmam volt vendégeket hívni, köztük Jean Dieudonnét és Laurent Schwartzot. Ez utóbbi szívesen látogatott trópusi országokat, ahol szenvedélyének, pillangók gyűjtésének hódolhatott. Schwartz 1953-ban két hetet töltött

Bogotában, de 1956-ban családjával együtt jött és három hónapig maradt. Ennek köszönhető, hogy disztribuciókkal kezdtem foglalkozni, és rájöttem, hogy a Riesz-féle magokat mint $\alpha \mapsto R_\alpha$ alakú disztribucióértékű meromorf függvényeket kell kezelni. Ezen sok évig dolgoztam (v.ö. N. Ortner, *J. Math. Anal. Appl.*, **297** (2004), 353–383).

1953-ban megnősültem, és 1954-ben nagyobb európai útra mentünk, amelynek során részt vettem az amsterdami nemzetközi matematikus-kongresszuson, ahol Magyarországról csak Alexits György és Rényi Alfréd voltak jelen.

Riesz Marcel közben nyugalomba vonult a lundi egyetemről és amerikai egyetemeken (Chicago, New York, Stanford) volt vendég. Az 1956/57 tanév egy részét a University of Marylandon töltötte, és kieszközölte azt, hogy nekem állást kínáljanak fel. 1957 szeptemberének legvégén érkeztünk College Park-ba és hamarosan felutaztunk New Yorkba az American Mathematical Society egy ülésére. Ott viszontláttam Gál Pistát, akivel a hat év alatt leveleztem. Ő segített dollárokat küldeni szüleimnek, akik 1951 nyarán elhagyták Magyarországot és egy ideig Párizsban tartózkodtak. Pista vendégül látott minket egy vacsorán apósa, Dr. Novak, lakásában. A vendégek közt volt S. Łojasiewicz, akinek híres bizonyítása temperált elemi megoldás létezésére akkor volt friss. Pistával 1960-ban megint találkoztam, amikor Vermontban nyaraltunk és útban New York felé rövid időre megálltunk a Yale Egyetemen.

Az edinburgh-i 1958-as International Congress of Mathematicians-on óriási meglepetés várt: közel harminc matematikus jött ki Magyarországról. Ott volt Császár Ákos, aki 1957 óta az Eötvös Loránd Tudományegyetemen volt tanár, ahol nyugalomba menésig, 1994-ig maradt, részben mint tanszékvezető vagy tanszékcsoportvezető. Előtte a Budapesti Műszaki Egyetemen tanított az 1950/51-es tanév kivételével, amikor is Riesz Frigyes adjunktusa volt a Tudományegyetemen. Edinburgh-ban voltak Aczél Jancsi és Fuchs Laci is, csak éppen Gál Pista hiányzott. Időnk nagy részét együtt töltöttük, és igen szomorúan kísértük ki őket a pályaudvarra, amikor is igazi skót módra hatan ültünk egy taxiban (a sofőrrel együtt).

Én és feleségem az 1963/64-es és 1964/65-ös tanévet Franciaországban töltöttük. A Párizs melletti Vanves községben béreltünk lakást egy házban, ahol az idők folyamán több más matematikus is lakott: Nachbin, de Lamadrid, Treves, Mizohata, Nohel, stb. Az első évben Nancyban tanítottam: minden csütörtök reggel leutaztam, és péntek este utaztam vissza. Többnyire vonattal mentem, de néha autóval és olyankor felhasználtuk a hétvégét arra, hogy Lotharingiában és főleg Elzászban turistáskodjunk.

1963 őszének elején Aczél Jancsi és Zsuzsi érkeztek Párizsba. Jancsi 1948 és 1950 közt Szegeden volt tanársegéd Kalmár Lászlónál. 1950-től 1952-ig a miskolci egyetemen volt tanszékvezető docens, de Aczélék a nehéz lakásviszonyok miatt 1951-ig továbbra is Szegeden laktak. Jancsi minden héten elrepült a Maszovlet járatával (mert akkor ilyen is volt) Miskolcra. 1952-től 1959-ig a debreceni egyetemen volt tanszékvezető docens, majd 1959-től tanszékvezető egyetemi tanár egészen Magyarországról való távozásáig, amelyről alább fog szó esni. A gainesvillei University of Florida hívta meg Jancsit vendégnek az 1963/64-es tanévre. Néhány nagyon kellemes és mulatságos nap után Zsuzsi és én kivittük Jancsit autóval az Orly repülőtérre, és néztük hogyan viszi a gép a nagy óceán fölé.

1964 májusában a Császár házaspár jött Párizsba Szicíliából, ahol egy geometria kollokviumon vettek részt. Ákos két előadást is tartott topológiáról. Az első után valaki (talán G. Choquet) azt mondta neki, látszik milyen gyakran adott elő franciául. Ákos azt felelte, hogy tulajdonképpen nem, sőt ez volt az első előadás, amelyet valaha franciául tartott. Csütörtökön feleségemmel és anyámmal, aki akkor éppen nálunk volt látogatóban, leautóztam Nancyba. Császárék másnap vonaton jöttek utánunk. Ákos megint tartott egy előadást, amelyet ünnepi ebéd előzött meg. Másnap anyám és nejem Ákosék jegyeivel vonaton utaztak Strasbourgba, míg Ákosék és én egy gyönyörű reggelen átautóztunk a Vogézeken. Mikor Ákosék elutazására került sor, elhatároztuk, hogy átvisszük őket Baden-Badenba. Odaérve láttuk, hogy még rengeteg idő van, és ha elvisszük őket Karlsruhe-ba, akkor felszállhatnak a Budapestre menő közvetlen vonatra és nem kell átszállniuk. Ezt meg is tettük és amikor a pályaudvar elé értünk, Ákos felkapta a koffereket és izgatottan rohant velük, hogy ülőhelyeket kapjon. Mondanom sem kell, hogy a vonat teljesen üres volt.

Kissé később azon a tavaszon Aczél Jancsiért mentem ki a repülőtérre, aki sok tapasztalattal és anekdotával tért vissza Floridából, és útban volt haza, Debrecenbe. Egy évvel később, 1965 tavaszán Kölnből jött az üzenet, hogy az egész család ott van és végleg elhagyták Magyarországot. Harmadnapra már vonaton ültünk, hogy meglátogassuk őket; Kati lányuk kérdezte is, vajon hogyan kaphattak Horváth Jancsi bácsiék olyan gyorsan vízumot. Miután Aczél Jancsi visszaérkezett Debrecenbe, a Magyar Tudományos Akadémia keresett valakit, aki elmegy hat hétre Kínába előadni. Jancsi hajlandó volt erre, feltéve, hogy utána ő és családja útlevelet kap ahhoz, hogy elmenjenek Ausztriába síelni. Erről a kirándulásról aztán nem tértek vissza Magyarországra, aminek fejében mind Jancsit, mind Zsuzsit jogerősen kétévi fegyházra ítélték. Tamássy Lajos egyszer Amerikában átadta Aczéléknak annak az ügyésznek az üdvözleteit, aki a perükben a vádat képviselte. Az ítélet sohasem lett hivatalosan megsemmisítve, de tudtommal Aczélék nem ülték le büntetésüket, sőt sok éve már nagyrabecsült vendégek Magyarországon. Köln után Jancsi a kanadai Waterloo Egyetemre került, ahol a két „Distinguished Professor" egyike lett. A kanadai Royal Society (azaz Akadémia) tagjává választotta és díszdoktorátust kapott a karlsruhei, gráci és katowiczei egyetemtől, valamint a két intézettől, ahol azelőtt működött: a miskolci és a debreceni egyetemtől. Kiderült, hogy a függvényegyenleteknek a magatartástudományokban is fontos szerepük van, ahogy ez Aczél, Falmagne és Luce „Functional Equations in the Behavioral Sciences" (*Math. Japonica,* **52** (2000), 469–512) c. cikkből megtudható. Jancsi évek óta minden télen rövidebb-hosszabb időt tölt a University of California irvine-i campusának „Institute for Mathematical Behavioral Sciences" nevű intézetében. Ezirányú működésének méltatása megtalálható R.ÍDuncan Luce „Personal reflections on an unintentional behavioral scientist" c. cikkében (*Aequationes Math.,* **58** (1999), 3–15), amelyet a nyájas olvasó figyelmébe ajánlok.

Ezidőtájt Fuchs Laci is hasonló akciót hajtott végre. Előbb mint vendég az 1961/62-es tanévet a Louisiana államban, New Orleans városában lévő Tulane egyetemen töltötte, majd 1966-ban végleg eltávozott Magyarországról. 1968-ig a University of Miami-n, Florida államban, tanított, majd átment a Tulane egyetemre, ahonnan az egész világot behálózó algebrai tevékenységet fejt ki. A kommutatív csoportok (azaz **Z**-modulusok) után áttért a gyűrűk feletti modulusok elméletére. Luigi Salce-val írt „Modules over Non-Noetherian Domains" c. könyvét (Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 64, American Mathematical Society, 2001) még felemelni is nehéz. Laci munkásságát két cikk is méltatja. Az egyik Rüdiger Göbel tollából származik: „László Fuchs – a personal evaluation of his contributions to mathematics" (*Periodica Math. Hungarica,* **32** (1996), 1–29). A másik a bevezetés a 2000. július 9-től 15-ig az ausztráliai Perthben megtartott ú.n. Agram konferencia előadásait tartalmazó könyvben (*Abelian Groups, Rings and Modules,* ed. A. V. Kelarev, R. Göbel, K. M. Rangaswamy, P. Schulz, C. Visonthaler. Contemporary Mathematics, Vol. 273, American Mathematical Society 2001).

1969 januárjában éppen New Orleansban volt az Amerikai Matematikai Társulat évi gyűlése, amelyen Aczél Jancsi és Horváthék (másfél éves lányukkal) is megjelentek, így legalább hárman az öt közül együtt voltunk. Az 1974-es vancouveri nemzetközi kongresszus volt diákkorunk óta az első alkalom, hogy mind az öten egyszerre voltunk jelen. Fuchs Laci ott közölte velünk, hogy röviddel előbb megnősült.

Én 1970-ben voltam 1948 óta először Magyarországon, majd újból 1971-ben és 1973-ban.

1984-ben Aczél Jancsi meghívta Császárékat egy hónapra Waterlooba és mind Fuchs Laci mind én odautaztunk, hogy hatvanadik születésnapunkat együtt ünnepeljük. Sajnos Gál Pistát nem sikerült rábírni, hogy velünk tartson. Jancsi egy kis kollokviumot rendezett, amelyiken mind a négyen előadtunk. Mint a legtöbb összejövetelünkön, sok vicc és nevetés volt, és tréfás plakát készült, amelyeken a résztvevők mindenféle álneveket kapnak. A találkozásról felvett fénykép látható Staar Gyula „A megélt matematika" c. könyvének (Gondolat, Budapest, 1990) 207. oldalán.

1989 májusában újból Budapesten voltam, éppen akkor, amikor a magyar-osztrák határ megnyílt, és a változások előszele fújdogált. 1993 óta, egy év (1997) kivételével, minden évben ellátogatunk Budapestre, sőt 1994-ben, amikor februárban Császár Ákos hetvenedik születésnapját ünnepeltük, kétszer is. Ákos hetvenötödik születésnapjára viszont Aczél Jancsi és Fuchs Laci utaztak Budapestre. A szerencse úgy hozza, hogy budapesti tartózkodásaim alkalmával gyakran viszontlátjuk egymást Aczél Jancsival, és sajnos ritkábban Fuchs Lacival. Egyébként Jancsival Párizsban is néha összehoz a véletlen.

És most, 2004 júniusában, végre mind az öten megint együtt vagyunk Budapesten a Magyar Tudományos Akadémia jóvoltából.

KÉT EPIZÓD A BIG FIVE EGY-EGY TAGJÁVAL KAPCSOLATBAN
(Elhangzott a „80 éves születésnap” rendezvényt követő banketten

SURÁNYI JÁNOS

Másodéves matematikusokat szigorlatoztattunk *Fuchs Lacival* algebrából és számelméletből. Ez úgy zajlott, hogy ki-ki a maga szobájában vizsgáztatott, és a végén összeültünk megállapítani az érdemjegyeket. Egy jó képességű fiatalember vizsgázott. Jó jegyet is kapott, de erősen dadogott. Mint kiderült, különösen a pé betűvel volt megakadva. Csinos fiú volt, amellett gátfutó bajnok országos szintű eredményekkel – de dadogott.

Mikor összeültünk, mondom Lacinak, pechemre a pythagoraszi számhármasokat kérdeztem tőle. Már össze kellett szorítanom az öklömet az íróasztal alatt, hogy el ne nevessem magam, ahogy állandóan a pipiket csalogatta. Mire Laci: „Hagyd el, könnyű dolgod volt. Nekem polinomokról felelt.”

—

A Matematikai Társulat egyik első, ha nem éppen a legelső kollokviuma Egerben folyt. Kísérő programként természetesen meglátogattuk a pincészetet is. Ott kínáltak az üzem különböző specialitásaival, de a Bikavér csak nem jött. Valaki meg is kérdezte, miért. A Pincemester részletesen elmondta a készítés technológiáját, hogy ehhez milyen szőlőfajták kellenek, milyen édességi fokkal stb.; és ez most már több éve nem jött össze, nem tudtak Bikavért csinálni.

Erre Kalmár, aki éppen nem sokkal előbb külföldön járt, elmondta, hogy ott ő bizony kapott Bikavért. Erre a Pincemester megvakarta a fejét és elmondta (titoktartás kötelezettsége mellett), hogy a nemzetközi piacról nem lehet kimaradni, mert oda visszakerülni akkor már igen nehéz. Ezért ilyen esetekben kénytelenek valami igen jó minőségű bort kellően feljavítani, és Bikavérként eladni.

Aczél János azonnal levonta a következtetést: Eszerint két módon készül Bikavér, az egyik, ahogy a Pincemester Úr leírta, – a másik: határátmenettel.

A GRADIENSPROBLÉMA

BUCZOLICH ZOLTÁN*

1. Bevezetés

Számomra, életkoromnál fogva, a Big 5 hosszú ideig csak Big 1,5 volt, mivel mire egyetemre kezdtem járni, addigra már csak *Császár Ákos* volt Magyarországon, *Fuchs László* híres Algebra jegyzete, melyből matematikusgenerációk tanulták és szerették meg az Algebrát növelte számomra a Big 1-et, Big 1,5-re. Mivel Császár Ákos Valós Analízis előadásai, valamint az azokat követő Laczkovich specik határozták meg tudományos kutatói érdeklődésemet, ezért ebben az előadásban egy Valós Analízis problémáról szeretnék beszélni.

Közismert, hogy ha az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény az (a, b) nyílt intervallum minden pontjában differenciálható, akkor deriváltja, f' Darboux-tulajdonságú és Baire egy osztályú, azaz előáll, mint folytonos függvények pontonként vett határértéke. Kevésbé ismert az úgynevezett Denjoy–Clarkson-féle tulajdonság [12], [11]. Ez a tulajdonság azt mondja ki, hogy tetszőleges (α, β) nyílt intervallumnak a deriváltra vonatkozó inverz képe, $(f')^{-1}(\alpha, \beta)$ vagy üres, vagy pozitív egydimenziós Lebesgue-mértékű. Ha a deriváltfüggvény folytonos akkor ez nyilvánvaló következménye annak, hogy nemüres nyílt halmazok pozitív mértékűek, azonban a deriváltfüggvény nem feltétlenül folytonos, így a Denjoy–Clarkson-tulajdonság azt mondja ki, hogy ennek ellenére egy deriváltfüggvény nem tud „súlytalanul" áthaladni egy intervallumon. Nem nehéz azonban olyan Darboux és Baire egy tulajdonságú függvényeket konstruálni, melyek nem rendelkeznek a Denjoy–Clarkson-tulajdonsággal. A deriváltfüggvények pontos karakterizációjának problémája már a Young házaspár idejében, a XX. század elején felvetődött, de a mai napig megoldatlan. E problémakörrel kapcsolatban az olvasó figyelmébe ajánljuk A. Bruckner [2] cikkét.

C. E. Weil gradiensproblémája a Denjoy–Clarkson-tulajdonság többdimenziós általánosítására vonatkozott.

Tegyük föl, hogy $n \geq 2$, és $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, továbbá $f : G \to \mathbb{R}$ a G minden pontjában differenciálható n-változós függvény. Ekkor az f gradiense,

*Ez a cikk a Big5 konferencián 2004. június 29-én elhangzott előadás kibővített anyaga.

Ezen előadásokhoz kapcsolódó kutatásokat az OTKA támogatta és remélhetőleg támogatni fogja (T032042, T049727).

$\nabla f = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)$ a G nyílt halmazból $\mathbb{R}^n$-be menő leképezés. Tegyük föl, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Igaz-e, hogy $(\nabla f)^{-1}(\Omega) = \{\mathbf{p} \in G : \nabla f(\mathbf{p}) \in \Omega\}$ vagy üres, vagy pozitív mértékű az n-dimenziós Lebesgue-mértékre vonatkozólag? Folytonosan differenciálható függvényekre a válasz nyilvánvalóan pozitív.

A gradiensprobléma egy másik, ekvivalens és érdekes átfogalmazása a következő:

Jelölje B_1 az n-dimenziós Euklideszi tér egységgömbjét. Létezik-e olyan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mindenütt differenciálható függvény, melynek a gradiense eltűnik az origóban, de Lebesgue majdnem mindenütt a gradiensének normája nagyobb, mint egy. Ez ugyebár azt jelenti, hogy $(\nabla f)^{-1}(B_1)$ nemüres, de nulla Lebesgue-mértékű. Azaz differenciálható függvényünk az origó egy kis környezetében „globálisan" alig változik, bár „egy valószínűséggel" gyorsan változik (ha a Lebesgue-mértéket mint ponthalmazok valószínűségét interpretáljuk).

A gradiensprobléma a Valós Analízis egy jól ismert és híres megoldatlan problémája volt. A 60-as évektől [24] megjelenése óta dolgoztak rajta. Én 1987-ben hallottam róla először: San Antonioban az Alamo előtt állva, röviddel azután, hogy bemutattak Clifford Weilnek azt mondta, hogy itt van egy nekem való megoldatlan probléma, de figyelmeztet, hogy nem könnyű. Szóval elkezdtem dolgozni rajta. Aztán 15 éven keresztül, hosszabb-rövidebb intenzívebb munkaperiódusok után félretettem, majd amikor valami újat tanultam újra elővettem. Néha, amikor úgy éreztem, hogy valamilyen önmagában is érdekes részeredményt kaptam akkor azt egy-egy cikkben megírtam, konferenciákon előadást tartottam róla. Végül 2002 nyarának végén sikerült megoldanom. Időközben 1990-ben a XIV. Valós Függvénytani Szimpóziumon a gradiensprobléma kikerült a szájhagyomány útján terjedő „folklór" problémák sorából és nyomtatásban is megjelent, [26]. Bár, Pólya György jól ismert tanácsát megfontolva igyekeztem mindkét irányból dolgozni a problémán, de az időm túlnyomó részét mégis azzal töltöttem, hogy megpróbáltam bizonyítani egy, a Denjoy–Clarkson-tulajdonság n-dimenziós változatára vonatkozó tételt. Azonban valami apróság mindig hiányzott... 2000-ben egy külföldi konferencián L. Zajíčekkel még fogadást is kötöttem arra, hogy a gradiensprobléma megoldása az előbb említett tétel lesz. Azonban 2002-ben felül kellett bírálnom az eddigi álláspontomat és komolyan elkezdtem dolgozni egy kétdimenziós ellenpéldán, ami aztán el is juttatott a megoldáshoz, illusztrálva azt a köznapi bölcsességet, hogy rugalmasan kell gondolkozni és egy korrekt eljárás során mindkét „felet" meg kell hallgatni.

Ebben az előadásban szeretném áttekinteni a gradiensprobléma megoldásához vezető állomásokat. A [8] cikk tartalmazza a részletes konstrukciót és a bizonyításrészleteket. Ez a cikk, illetve előadás a 27. Valós Függvénytani Szimpóziumon (2003. június, Opava, Csehország) [9], valamint a University of North Texas-on (Denton, Texas) tartott hasonló témakörű előadásaim átdolgozott, magyar nyelvű változata.

A gradiensprobléma megoldása tehát egy kétdimenziós ellenpéldafüggvény konstrukciója. A [8] cikkben megmutatom, hogy található olyan $f : G \to \mathbb{R}$, valamely $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon értelmezett differenciálható függvény és egy $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$

nyílt halmaz, hogy valamely $\mathbf{p} \in G$-re $\nabla f(\mathbf{p}) \in \Omega_1$ de a kétdimenziós Lebesgue-mérték, λ_2 szerint majdnem minden $\mathbf{q} \in G$-re a gradiens $\nabla f(\mathbf{q})$ nincs Ω_1-ben.

2. A gradiensprobléma megoldásának előzményei

2.1. A $\mathcal{H}_1$ Denjoy–Clarkson-tulajdonság. Nem nehéz belátni, [3], hogy ha az n-dimenziós Lebesgue-mértéket az egydimenziós Hausdorff-mértékkel, $\mathcal{H}_1$-gyel helyettesítjük, akkor a Denjoy–Clarkson-tulajdonság a többdimenziós esetben is érvényben marad:

1. tétel ([3], Theorem 1). *Tegyük föl, hogy $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és $f : G \to \mathbb{R}$ differenciálható. Ekkor minden $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazra $(\nabla f)^{-1}(\Omega)$ vagy üres, vagy pozitív $\mathcal{H}_1$-mértékű.*

Azaz nyílt halmazok gradiensleképezésre vonatkozó nemüres inverz képei legalább a $\mathcal{H}_1$-mértékre vonatkozólag nem lehetnek súlytalanok.

Holický, Malý, Weil és Zajíček a [16] cikkben megmutatta, hogy a fenti inverz kép más értelemben se lehet „súlytalan". A következő tételben kevéssé ismert a porozitás fogalma, mely halmazok lokális lyukacsosságát méri és az érdeklődő olvasó a [27] cikkben nézhet utána.

2. tétel ([16], Theorem 5). *Legyen $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és legyen f, G-n értelmezett differenciálható függvény. Tegyük föl, hogy $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olyan nyílt halmaz, melyre $(\nabla f)^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$. Ekkor a következő tulajdonságok teljesülnek:*

i. *$(\nabla f)^{-1}(\Omega)$ egyetlen pontjában sem porózus.*

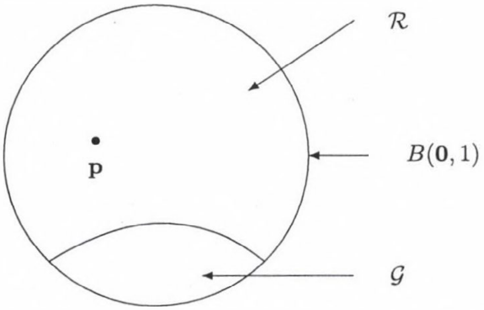
ii. *Ha $H \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és $H \cap (\nabla f)^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$, akkor nincs olyan nem azonosan nulla lineáris függvény, $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ melyre vonatkozólag $L\big(H \cap (\nabla f)^{-1}(\Omega)\big)$ nulla egydimenziós Lebesgue-mértékű lenne. Ebből következik, hogy $H \cap (\nabla f)^{-1}(\Omega)$ pozitív egydimenziós Hausdorff-mértékű.*

iii. *Ha $H \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és $H \cap (\nabla f)^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$, akkor $H \cap (\nabla f)^{-1}(\Omega)$ nem σ-porózus.*

A fenti tétel ii. pontjában lineáris függvénynek tetszőleges egyenesre való vetítést is választhatunk, azaz ha $(\nabla f)^{-1}(\Omega)$ nemüres, akkor tetszőleges egyenesre vett vetülete pozitív $\mathcal{H}_1$-mértékű.

2.2. A „paradox konvexitási" tulajdonság. Az előző alfejezet eredményei azt mutatják, hogy a [8] cikkben konstruált ellenpéldafüggvénynek meglehetősen komplikáltnak kell lennie. A következő, meglehetősen sok technikai részletet tartalmazó eredmény bizonyításakor arról voltam meggyőződve, hogy ilyen komplikált függvények nem is létezhetnek. Érdekes, hogy valószínűleg a technikai részletek miatt ez a cikk nemigen keltette föl még a gradiensprobléma iránt egyébként érdeklődő kollégák figyelmét se, bár utólag visszagondolva az itt megfogalmazott „paradox konvexitási" tulajdonság vezetett el végülis a [8] cikkbeli végső konstrukcióhoz.

Szóval tegyük föl, hogy $G_0 \subset \mathbb{R}^2$ nyílt és $f : G_0 \to \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvény, mely ellenpélda a gradiensproblémára. Ekkor található $\mathbf{x}_0 \in G_0$, $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^2$ és $\eta_0 > 0$, hogy $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}_0$ és $\lambda_2\big((\nabla f)^{-1}(B(\mathbf{p}_0, \eta_0))\big) = 0$, ahol $B(\mathbf{p}_0, \eta_0)$ az η_0 sugarú $\mathbf{p}_0$ középpontú nyílt gömb. Legyen $F_0 = \mathrm{cl}\Big((\nabla f)^{-1}\big(B(\mathbf{p}_0, \eta_0/2)\big)\Big)$ (ahol cl a lezárást jelöli). Mivel ∇f, F_0-ra vett megszorítása Baire egy függvény így található $\mathbf{x}_1 \in F_0$, ami a ∇f folytonossági pontja F_0-on. F_0 definíciójából következik, hogy $\nabla f(\mathbf{x}_1) \in \mathrm{cl}\big(B(\mathbf{p}_0, \eta_0/2)\big)$. Így, $B(\nabla f(\mathbf{x}_1), \eta_0/2) \subset B(\mathbf{p}_0, \eta_0)$. Ezután ∇f, F_0-ra vonatkozó $\mathbf{x}_1$-beli folytonosságát használva válasszunk $\delta > 0$-t úgy, hogy tetszőleges $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}_1, \delta) \cap F_0$-ra teljesüljön $\|\nabla f(\mathbf{x}_1) - \nabla f(\mathbf{y})\| < \eta_0/4$. Ekkor $B(\mathbf{x}_1, \delta) \cap F_0 \subset (\nabla f)^{-1}\big(B(\mathbf{p}_0, \eta_0)\big)$ és így $\lambda_2(B(\mathbf{x}_1, \delta) \cap F_0) = 0$. Másrészt, ha $\mathcal{R} = \nabla f\big(B(\mathbf{x}_1, \delta)\big) \cap B(\mathbf{p}_0, \eta_0/2)$ akkor $\mathcal{R} \subset B(\nabla f(\mathbf{x}_1), \eta_0/4)$. Így, $\mathcal{G} = B(\mathbf{p}_0, \eta_0/2) \setminus \mathrm{cl}(\mathcal{R})$ nemüres nyílt halmaz, és $(\nabla f)^{-1}\big(B(\mathbf{p}_0, \eta_0/2)\big)$-nak F_0-beli sűrűségéből következik, hogy $\mathcal{R}$ sem üres. Alkalmas áthelyettesítés után feltehető, hogy $\mathbf{p}_0 = \mathbf{O}$ és $\eta_0/2 = 1$. Ezenkívül $G = B(\mathbf{x}_1, \delta)$ választás mellett f ide való megszorításával dolgozhatunk. Így a következő tétel feltételei teljesülnek.



1. ábra. „Paradox konvexitás" a gradiens értékkészletében

3. tétel (ld. [6]). *Tegyük föl, hogy f differenciálható a $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon. Legyen $\overline{\Delta}_1 = \mathrm{cl}\{\mathbf{x} \in G : \nabla f(\mathbf{x}) \in B(\mathbf{O}, 1)\}$. Tegyük föl, hogy $\overline{\Delta}_1$ nemüres és $\lambda_2(\overline{\Delta}_1) = 0$. Legyen $\mathcal{R} = B(\mathbf{O}, 1) \cap \nabla f(G)$ és $\mathcal{G} = B(\mathbf{O}, 1) \setminus \mathrm{cl}(\mathcal{R})$. Ekkor $\mathcal{G}$ a sík konvex és nyílt részhalmaza, továbbá $\mathcal{G} \neq \emptyset$-ból még az is következik, hogy tetszőleges $\mathbf{p} \in \mathrm{int}\big(\mathrm{cl}(\mathcal{R})\big)$-re $\mathcal{H}_1\big(\{\mathbf{y} : \nabla f(\mathbf{y}) = \mathbf{p}\}\big) > 0$.*

A tétel kimondását megelőző érvelést felhasználva a Baire egy tulajdonságot kihasználva alkalmas helyettesítés és egy lineáris függvény hozzáadása után elérhető, hogy $\mathcal{G} \neq \emptyset$ és $\mathbf{O} \in \mathcal{R}$, ha f eredetileg egy ellenpélda függvény volt a kétdimenziós Denjoy–Clarkson-tulajdonságra. Ekkor $B(\mathbf{O}, 1)$ tartalmaz egy olyan félkörlemezt, melynek tetszőleges $\mathbf{p}$ pontjára $\mathcal{H}_1\big(\{\mathbf{x} : \nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}\}\big) > 0$ teljesül. Ez azt mutatja, hogy differenciálható függvényünk nagyon eltér azoktól a sima felületektől, melyekhez hozzászoktunk. Például ha valaki az $x_3 = f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ felső egységfélgömbfelületet tekinti, akkor tetszőleges $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$-re $(\nabla f)^{-1}(\mathbf{p})$ vagy üres, vagy egyetlen pontból áll. Tehát az ár, amit fizetnünk kell azért, hogy legyenek olyan nemüres nyílt halmazok melyeknek inverz ∇f képe nulla λ_2-mértékű az, hogy létezzen sok olyan pont, aminek inverz ∇f képe nagy a $\mathcal{H}_1$-mérték szerint.

Mivel $\operatorname{int}\big(\operatorname{cl}(\mathcal{R})\big)$ nem megszámlálható, így a 3. tételből az is következik, hogy $(\nabla f)^{-1}\big(B(\mathbf{O},1)\big)$ nem σ-véges $\mathcal{H}_1$-mértékű ($\operatorname{int}(A)$ az A halmaz belsejét jelöli).

Tehát lehetséges, hogy $(\nabla f)^{-1}\big(B(\mathbf{O},1)\big)$ nemüres, de nulla λ_2 mértékű, de a fentiek szerint legalább nem σ-véges $\mathcal{H}_1$ mértékű. Nyilván nem lenne érdektelen pontosabban feltérképezni az itt fellépő hézagot, azaz megválaszolni a következő kérdést:

1. kérdés. Tegyük föl, hogy $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és $f : G \to \mathbb{R}$ differenciálható, továbbá $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olyan nyílt halmaz, melyre $(\nabla f)^{-1}(\Omega) \neq \emptyset$. Mi mondható ekkor $(\nabla f)^{-1}(\Omega)$ Hausdorff-dimenziójáról?

2.3. Függvények sok érintősíkkal. Most visszatérünk a 3. tételhez. Tegyük föl, hogy e tétel feltételei teljesülnek és $\mathbf{p} \in \operatorname{int}\big(\operatorname{cl}(\mathcal{R})\big)$. Legyen $f^{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}$, ahol $\cdot$ az $\mathbb{R}^2$-beli skaláris szorzást jelöli. f szinthalmazaira a következő jelölést használjuk $f^{\mathbf{p}}_c \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} : f^{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = c\}$. A 3. tétel bizonyítását elemezve belátható, hogy található c-k, olyan pozitív λ_1-mértékű halmaza, hogy minden ilyen c-hez van az $f^{\mathbf{p}}_c$ szinthalmazán olyan $\mathbf{x}_c$ pont, hogy $\nabla f^{\mathbf{p}}(\mathbf{x}_c) = \mathbf{O}$, azaz, $\nabla f(\mathbf{x}_c) = \mathbf{p}$. Tehát az f grafikonja által megadott felületen sok olyan pont található, ahol a felület érintősíkjának gradiense $\mathbf{p}$.

Ez az érdeklődésemet olyan differenciálható függvények felé fordította melyeknek sok érintősíkja van. Ezzel kapcsolatos eredményeimet a [7] cikkben publikáltam. E cikk fő eredménye a következő:

4. tétel (ld. [7]). *Létezik olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 függvény és hozzá egy seholsem sűrű, zárt, nulla λ_2-mértékű $E \subset [0,1] \times [0,1]$ halmaz, továbbá egy nemüres nyílt $H \subset \mathbb{R}^3$, hogy minden $(a,b,c) \in H$ ponthoz van olyan $(x_0,y_0) \in E$ melyre a $z = f(x,y)$ felület $\big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\big)$ pontbeli érintősíkja $z = ax + by + c$.*

Tehát nemcsak differenciálható, hanem C^1 függvényeknek is lehet sok érintősíkjuk. Kiemelendő, hogy a fenti tételben H a háromdimenziós paramétertér egy nemüres nyílt halmaza, míg E egy nullmértékű halmaz a kétdimenziós térben azaz a fenti leképezésnél egy dimenziót nyerünk és ez a „Peano" görbékre emlékeztet. Egydimenziós érveléseknél megszoktuk, hogy a C^1 függvények elegendően simák. Magasabb dimenzióban azonban sokszor C^1, vagy magasabb osztályú simaság még nem elegendő. Erre a jelenségre sok példát találhatunk például a parciális differenciálegyenleteknél, pl. a jól ismert Szoboljev Lemma ([21] Th. 7.25) ahol a simasági feltevések és a konkluzió dimenziófüggő.

Egy másik, az általunk tárgyalt problémakörhöz szorosan kapcsolódó eredmény a Morse–Sard-tétel [18], [22].

5. tétel ([15], Theorem 1.3). *Legyenek M és N, m és n dimenziós differenciálható sokaságok továbbá $f : M \to N$, C^r leképezés. Ha $r > \max\{0, m-n\}$, akkor $f(\Sigma_f)$ nulla Lebesgue-mértékű N-ben (Σ_f az f kritikus pontjainak halmazát jelöli).*

Így, ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^2 függvény, akkor tetszőleges $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pontra az $f(x, y) - ax - by$ függvény kritikus értékeinek halmaza, $c_{(a,b)}$ nulla λ_1-mértékű. Így nem tartalmazhat intervallumot és Fubini tétele szerint az

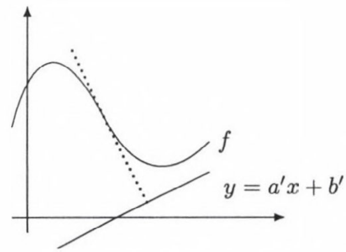
$$\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \text{ a } z = ax + by + c \text{ sík érinti a } z = f(x, y)\text{-t}\}$$

halmaz nulla λ_3-mértékű, és így a belseje üres.

A síkon értelmezett C^1 függvények még sok más érdekes tulajdonsággal rendelkezhetnek. Egyik kedvenc, témánkhoz kapcsolódó tételem Whitney [25] híres példája, melyben egy $\mathbb{R}^2$-n értelmezett olyan C^1 függvényt és hozzá egy nem elfajuló folytonos γ görbét konstruál, melyre $\nabla f = \mathbf{O}$, azaz a gradiens eltűnik a γ görbe minden pontjában, de f nem állandó a γ mentén. (Ez ugyebár minden hegymászó álma, úgy nyerni szintet, hogy közben nem megyünk fölfele. Sajnos az ár amit ezért fizetni kell az, hogy a γ görbe végtelen ívhosszú...) Ha a C^1 simasági föltevést differenciálhatósággá enyhítjük, akkor említésre méltó Körner [17] „szuper Whitney" függvénye, egy olyan nem állandó, a síkon értelmezett, differenciálható függvény, hogy $\mathbb{R}^2$ bármely két pontja összeköthető egy olyan γ folytonos görbével, hogy $\nabla f = \mathbf{O}$ a γ minden, a végpontoktól különböző pontjában.

Érdemes néhány szót szólni a 4. tétel egydimenziós változatáról is. Tegyük föl tehát, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ha $y = ax + b$ az f, $(x_0, f(x_0))$ pontbeli érintője, akkor legyen $S_1(x_0) = (a, b)$. Lehetséges-e, hogy $S_1(\mathbb{R})$ belseje nemüres?

Az egydimenziós esetben C^1 függvények már elegendően simák a Morse–Sard-tétel alkalmazhatóságához, így a C^1 esetben a válasz nemleges. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ pontra az $f(x) - ax$ függvény kritikus értékeinek halmaza nulla mértékű. Így, rögzített a-ra nulla λ_1-mértékű azon b-k halmaza, melyekre (a, b) az S_1 értékkészletéhez tartozik.

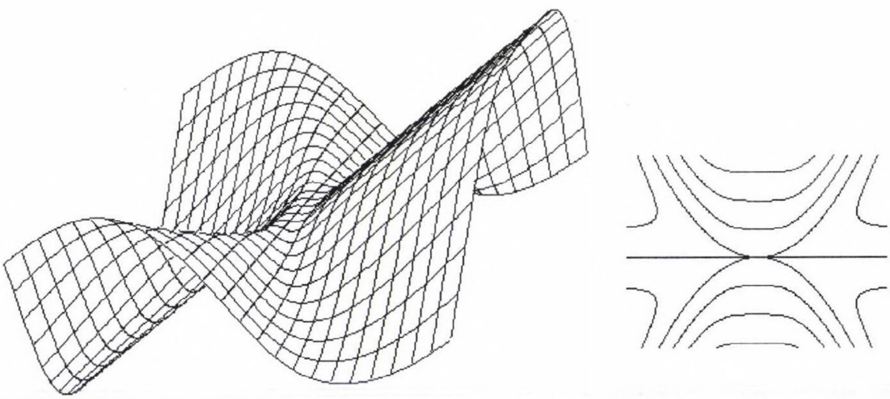


2. ábra. Az $y = a'x + b'$ egyenesre történő π' vetítés

Azt várhatnánk, hogy ha csak differenciálhatóságot teszünk föl, akkor a fenti kérdésre egy dimenzióban pozitív választ kapunk. Azonban a válasz még differenciálható függvényekre is negatív. Ezúttal egy másik kedvenc Valós Analízisbeli tételem, a Denjoy–Young–Saks-tétel ([23], Chap. IX, (3.7) Theorem, p. 267) egyik következménye adja meg a választ. Tegyük föl, hogy $y = a'x + b'$ adott síkbeli egyenes és π' jelöli az erre az egyenere való merőleges vetítést. Tegyük föl, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény és E' jelöli azon f grafikonján levő pontok π' képét, ahol f érintője merőleges $y = a'x + b'$-re, ld. a 2. ábrát. Ekkor $\lambda_1(E') = 0$. Ebből ismét következik, hogy $\lambda_2\big(S_1(\mathbb{R})\big) = 0$ teljesül még differenciálható függvényekre is.

2.4. Szinthalmazok. A gradiensprobléma kétdimenziós esetén dolgozva érdeklődésem a síkon értelmezett differenciálható függvények szintvonalrendszerének vizsgálata felé fordult. (Ez az a szintvonalrendszer amivel bárki, aki szeret kirándulni a turistatérképeken, vagy más földrajzi térképeken találkozhat.)

Tegyük föl, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható kétváltozós függvény. Kritikus pontokban a szintvonalak furcsán nézhetnek ki. Így természetes feltevés, hogy a gradiens legyen zérusvektortól különböző.



3. ábra. $f(x,y)$ bifurkációs szintvonalakkal

E feltétel mellett vajon igaz-e, hogy az $\{(x,y) : f(x,y) = c\}$ szintvonal differenciálható görbékből áll? A válasz nemleges ld. [4]. Ha tekintjük az

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3 - yx^4}{y^2 + x^4}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvényt, akkor a következő tétel szerint e függvénynek van olyan szintvonala, mely bifurkációs pontot tartalmaz. A 3. ábra bal felén ezt a függvényt ábrázoltuk. A jobb látószög kedvéért a koordinátatengelyeket elfordítottuk és az y tengely balról jobbra mutat. Az ábra jobb oldalán e függvény szinthalmazrendszerét illusztráltuk, az x és y tengelyek a szokásos irányokba mutatnak. E függvény bifurkációs tulajdonságait fogalmaztuk meg a következő tételben.

6. tétel ([4], Theorem 1). *Található olyan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melynek a gradiense sehol se tűnik el, azaz $\nabla f(x,y) \neq \mathbf{O}$ tetszőleges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$-re,* *de* $S_0 = \{(x,y) : f(x,y) = 0\} = \{(x,y) : |y| = x^2$, *vagy* $y = 0\}$, *és így a* $(0,0)$ *pontnak nincs olyan* G *nyílt környezete, amelyre* $U \cap S_0$ *egy nyílt intervallummal lenne homeomorf.*

Ez a tétel azonban a gradiensproblémához kapcsolódó kutatások szempontjából nem jelentett lényeges akadályt, hiszen a Baire egy tulajdonságot használva és egy alkalmas lineáris függvényt hozzáadva, mint a 3. tétel esetén, mindig lehetőség volt arra, hogy olyan függvényekkel dolgozzunk, amiknek gradiense az origótól elhatárolható. Ez a feltevés már elegendő ahhoz, hogy megszabaduljunk a szintvonalak bifurkációs pontjaitól:

7. tétel ([4], Theorem 2). *Tegyük föl, hogy* $G \subset \mathbb{R}^2$ *nyílt és* $f : G \to \mathbb{R}$ *olyan differenciálható függvény, melyre* $\|\nabla f(x,y)\| > r > 0$ *teljesül minden* $(x,y) \in G$*-re. Ha valamely* $(x_0, y_0) \in G$*-re* $c = f(x_0, y_0)$, *akkor található az* (x_0, y_0) *pontnak olyan* G_0 *környezete, hogy* $S_c = G_0 \cap \{(x,y) : f(x,y) = c\}$ *egy nyílt intervallummal homeomorf, és* S_c*-nek minden pontjában van érintője.*

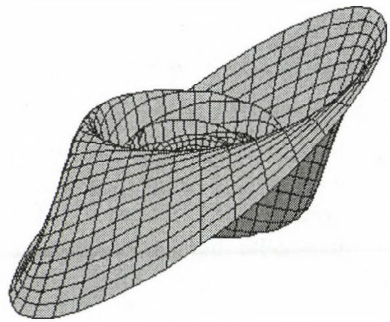
Elegendően erős simasági feltevések mellett hasonló eredmény kapható az implicit függvénytétel segítségével, azonban még az implicit függvénytétel különböző általánosításaihoz (ld. pl. [10]) is feltétel, hogy az $f(x,y)$ függvény y-szerinti parciális deriváltja nem tűnik el, valamint az (általánosított) parciális deriváltak lokális korlátossága is szükséges. Említésre érdemes azonban, hogy az implicitfüggvény tétel ikertestvéréhez az inverz függvény tételhez a differenciálhatóság elegendő feltevés. A [20] cikkben a szerzők megmutatták, hogy ha $f : G \to \mathbb{R}^n$ differenciálható a $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmazon és $\det f'(\mathbf{x}) \neq 0$ minden $\mathbf{x} \in G$-re, akkor f lokális diffeomorfizmus. Ez a tétel jól ismert egyetemi tananyag ha f elegendően sima, azonban ha csak differenciálhatóságot teszünk föl, akkor nemtriviális topológia, (Degree Theory) van a háttérben.

A 6. és 7. tételekben megkezdett kutatási irányt folytatta Elekes Márton. A [13] cikk eredményei azt mutatják, hogy ha egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény gradiense nem tűnik el, akkor tetszőleges $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : f(\mathbf{x}) = c\}$ szinthalmaz lokálisan homeomorf, vagy egy nyílt intervallummal, vagy (a bifurkációs pontokban) egy közös végpontból kiinduló véges sok szakasz uniójával. Ezenkívül a bifurkációs pontok diszkrét halmazt alkotnak.

2.5. Deriváltak approximatív folytonossága, parciális deriváltak.

1. definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény az $\mathbf{x}$ pontban approximatív folytonos, ha található olyan Lebesgue-mérhető $E \subset \mathbb{R}^n$ melynek az $\mathbf{x}$ Lebesgue-sűrűségi pontja és $\lim_{\mathbf{y} \to \mathbf{x}; \mathbf{y} \in E} f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$. Egy f függvény approximatív folytonossági pontjait A_f-fel jelöljük.

A [19] cikkben Petruska György megmutatta, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az F deriváltja, akkor f minden értékét felveszi approximatív folytonossági pontjai halmazán, azaz, $f(\mathbb{R}) = f(A_f)$. Ebből nyilvánvalóan következik az egydimenziós Denjoy–



4. ábra. $f(r, \phi)$

Clarkson-tulajdonság. Ezért keltette fel érdeklődésem e tétel többdimenziós általánosításának problémája. Az [5] cikkben a következő tételeket bizonyítottam. Ha a parciális deriváltakat tekintjük, akkor:

8. tétel ([5], Theorem 1). *Tegyük föl, hogy* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *differenciálható és* $i \in \{1, \dots, m\}$. *Ekkor* $f = \partial_i F$ *minden értékét felveszi* A_f*-en.*

Így differenciálható függvények parciális deriváltjai rendelkeznek a Denjoy–Clarkson-tulajdonsággal. F differenciálhatóságának feltevése szükséges, mivel ha csak a parciális derivált létezését tesszük föl, akkor:

9. tétel ([5], Theorem 2). *Található olyan folytonos* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvény, melynek* $f = \partial F / \partial x_1$ *parciális deriváltja mindenütt létezik és* f *nem veszi fel minden értékét* A_f*-en.*

Differenciálható függvények gradiensével kapcsolatban is az előzőhöz hasonló a helyzet.

10. tétel ([5], Theorem 3). *Található olyan* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *differenciálható függvény, hogy* ∇f *nem veszi föl minden értékét* $A_{\nabla f}$*-en.*

E függvény polárkoordinátás definíciója a következő:

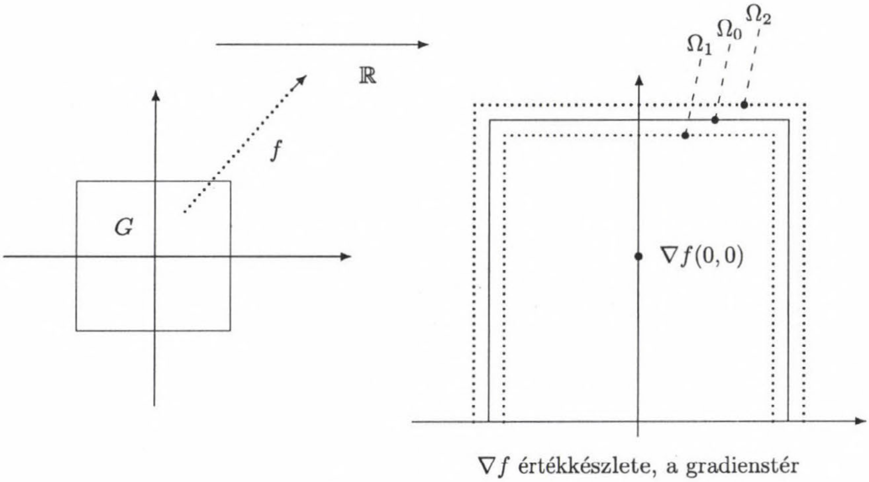
$$f(r, \phi) = \begin{cases} r^2 \sin\left(\phi + \dfrac{1}{r^2}\right), & \text{ha } r \neq (0,0); \\ 0, & \text{ha } r = 0. \end{cases}$$

Ezt ábrázoltuk a 4. ábrán. Az f függvény gradiense csak a $\mathbf{O}$-ban egyenlő a nullvektorral és ez az érték nem tartozik $A_{\nabla f}$-hez, ugyanis ahogy közeledünk az origóhoz spirálvonalak mentén „egyre meredekebben hullámzik" az f grafikonja.

2. kérdés. Tegyük föl, hogy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Egy $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektor a ∇f *reguláris értéke* ha található $\mathbf{x} \in A_{\nabla f}$, hogy $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Jelölje a reguláris értékek halmazát $REG(\nabla f)$. A gradiensproblémára adott ellenpéldánk az

[5] cikkben megfogalmazott $REG(\nabla f)$-nek a ∇f értékkészletében való sűrűségére vonatkozó kérdésre is negatív választ ad. Másrészt a $REG(\nabla f)$ karakterizálására vonatkozó kérdésünk továbbra is megválaszolatlan, sőt még érdekesebbé vált.

3. A gradiensproblémára választ adó konstrukció vázlata



5. ábra. f és ∇f

Legyen $G = (-1,1) \times (-1,1)$, $\Omega_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times [0,2]$, $\Omega_1 = (-0.49, 0.49) \times (0, 1.99)$, és $\Omega_2 = [-0.51, 0.51] \times [0, 2.01]$. Az 5. ábra jobb oldalán Ω_0 határát folytonos, míg Ω_1 és Ω_2 határát pontozott vonal jelöli.

A gradiensproblémára adott válaszunk a következő tétel. A bizonyítás részleteit a [8] cikkben tárgyaljuk, itt csak a fő gondolatokat vázoljuk és illusztráljuk.

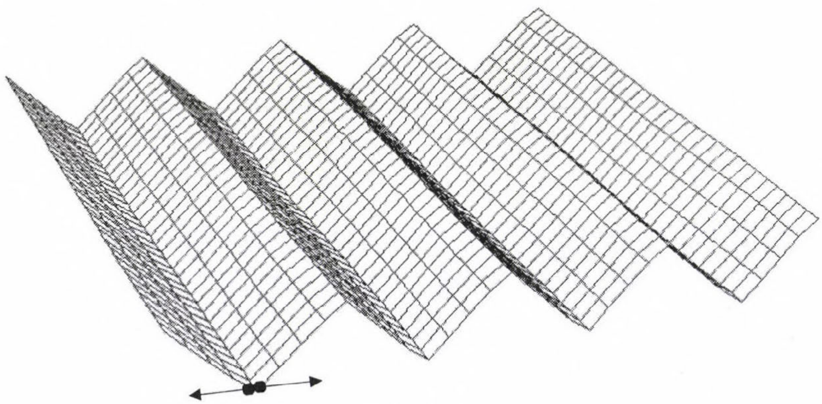
11. tétel ([8], Theorem 1). *Található olyan differenciálható $f : G \to \mathbb{R}$, hogy $\nabla f(0,0) = (0,1)$ és $\nabla f(\mathbf{p}) \notin \Omega_1$ majdnem minden $\mathbf{p} \in G$-re.*

E tétel illusztrálására az 5. ábra bal oldalán f értelmezési tartományát ábrázoltuk, az $\mathbb{R}$-be mutató nyíl illusztrálja, hogy f az $\mathbb{R}$-be képez, másrészt az ábra jobb oldalán a gradiensleképezés értékkészletét a „gradiens teret" tüntettük föl.

A 11. tétel bizonyítását elemezve az is megmutatható, hogy f Lipschitz-függvény és ∇f a nyílt „felső félsíkba" képez.

Ha a fenti tételben f differenciálhatóságának feltételét λ_2-majdnem mindenütt való differenciálhatóságra enyhítjük, akkor nagyon egyszerű bizonyos „globálisan csekély mértékben változó" Lipschitz-függvényeket megadni. A 6. ábrán a gradiensproblémán dolgozó kutatók egyik legegyszerűbb példafüggvényét, egy harmonikaszerűen hajtogatott papírlapot ábrázoltuk. Ez a függvény globálisan keveset változik, de ha elegendően sok cikk-cakkot hajtogatunk, akkor a gradiensvektor értéke majdnem mindenütt nagy. Az ábrán e nagy gradiensvektorokat nyilakkal illusztráltuk. E felület a hajtási élektől eltekintve mindenütt differenciálható és a majdnem mindenütt létező gradiens csak két, egy-egyenesbe eső, de ellentétes irányba mutató értéket vesz fel. Ha differenciálható függvényt szeretnénk, akkor a hajtási éleket simára kell csiszolni. Ekkor egy kicsiny, bár pozitív síkbeli mértékű halmazon a gradiens kis értékeket is felvesz, de az elérhető, hogy a keletkező felület gradiense minden pontban egy síkbeli szakaszhoz tartozzon. A hajtási élek irányának megválasztásával e szakasz is tetszőleges irányba fordítható.

E „simított hajtogatott papír" felület kicsit módosított változata az ellenpéldafüggvényünk elemi építőköve, amit a bizonyításban $\phi_{B_{n,k}}$ perturbációs függvénynek nevezünk. A 10. tétel, 4. ábrán bemutatott felülete is rokona a perturbációs függvényünknek, csak itt a „hajtogatás" egy spirál mentén történik.



6. ábra. Papírhajtogatás

A következőkben a 11. tétel bizonyítását vázoljuk. A $h_{-1}(x, y) = y$ függvénnyel indulunk. Ekkor G-n mindenütt $\nabla h_{-1} = (0, 1)$. Ezután h_n függvények egy alkalmas sorozatát választva $f(x, y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=-1}^{\infty} h_n(x, y)$ lesz majd a 11. tételben keresett függvény. Minden egyes h_{n+1} az előző részösszeg $f_n = \sum_{k=-1}^{n} h_k$ perturbációja lesz.

E perturbációkkal $\nabla f(\mathbf{p})$-t szeretnénk majdnem minden $\mathbf{p} \in G$-re Ω_1-en kívülre kényszeríteni.

A bizonyítás során egymásba skatulyázott G_n nyílt halmazok egy sorozatát definiáljuk úgy, hogy majdnem minden G_n-en kívüli $\mathbf{p}$ pontra $\nabla f(\mathbf{p}) \notin \Omega_1$. Egy „megállási idő" érveléssel nem perturbáljuk tovább a készülő függvényt majdnem minden olyan $\mathbf{p}$ pontban, melyre $\nabla f(\mathbf{p}) \notin \Omega_0$. Ezekben a pontokban $\sum_{n=-1}^{\infty} h_n(x, y) = \sum_{n=-1}^{n_0} h_n(x, y)$ valamely n_0-ra. Megmutatjuk, hogy $\lambda_2(G_n) \to 0$. A fő nehézség természetesen annak megmutatása, hogy f differenciálható marad a $\mathbf{p} \in \cap_{n=0}^{\infty} G_n$ pontokban, azaz olyan pontokban, melyeket végtelen sokszor perturbáltunk.

A konstrukció n-edik lépésében ($n = 0, 1, \dots$) bizonyos *perturbációs blokkoknak* nevezett, $B_{n,k}$ diszjunkt nyílt négyzeteket választunk, e négyzetek oldalai nem feltétlenül párhuzamosak a koordinátatengelyekkel és ezen irányok gondos megválasztása az egész bizonyítás legtrükkösebb része.

A $B_{n,k}$ nyílt négyzet középpontját $\mathbf{o}_{B_{n,k}}$-val jelöljük. Oldalai az egymásra merőleges $\mathbf{v}_{B_{n,k}}$ és $\mathbf{w}_{B_{n,k}}$ egységvektorokkal párhuzamosak. A $\mathbf{v}_{B_{n,k}}$ vektort a perturbációs blokk irányvektorának nevezzük, a korábbi papírhajtogatásnál ez felel meg az egyes hajtási élek irányának. E vektor és a $(0,1)$ közötti szög a $[-\pi/4, \pi/4]$ intervallumba fog esni. A $\mathbf{w}_{B_{n,k}}$ vektort úgy választjuk, hogy az első koordinátája pozitív és a papírhajtogatási 6. ábrán ez a vektor felel meg a gradiensvektorok irányvektorának. Legyen

$$B_{n,k} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{o}_{B_{n,k}} + \alpha \mathbf{v}_{B_{n,k}} + \beta \mathbf{w}_{B_{n,k}} \text{ ahol } |\alpha|, |\beta| < l_{B_{n,k}}\}.$$

Minden perturbációs blokkhoz egy $\phi_{B_{n,k}}$ perturbációs függvény tartozik. E függvény folytonosan differenciálható és eltűnik $B_{n,k}$-n kívül, ez a függvény egy lecsiszolt és „megszelídített" változata a 6. ábra hajtogatott papírjának, lényegében ezzel egyezik meg. Pontosabban a $B_{n,k}$ határához közel bizonyos átmeneti tartományokra van szükség (különben nem lesz folytonosan differenciálható a függvényünk), de az átmeneti tartományok mértékéből képzett sor konvergens és ezért a Borel–Cantelli-lemma szerint majdnem minden pont csak véges sok átmeneti tartományhoz tartozhat.

Rögzített n-re valamely $\mathbf{p} \in G$ pont legfeljebb egy, $B_n(\mathbf{p})$-vel jelölt perturbációs blokkhoz tartozhat hozzá. Ha nincs ilyen blokk, akkor legyen $B_n(\mathbf{p}) = \emptyset$ és $\phi_{B_n(\mathbf{p})} = 0$.

Legyen $h_n(\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \phi_{B_n(\mathbf{p})}(\mathbf{p})$, a [8] cikkben megmutattam, hogy

$$\nabla f(\mathbf{p}) = (0,1) + \sum_{n=0}^{\infty} \nabla \phi_{B_n(\mathbf{p})}(\mathbf{p}) = \sum_{n=-1}^{\infty} \nabla h_n(\mathbf{p}).$$

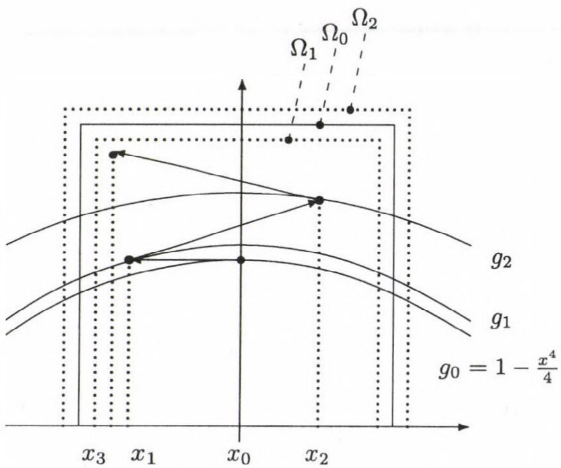
Az nyilvánvaló, hogy

$$\nabla f_n(\mathbf{p}) = (0,1) + \sum_{k=0}^{n} \nabla \phi_{B_k(\mathbf{p})}(\mathbf{p}).$$

Most azt vázoljuk, hogy az n-edik lépésben hogyan választunk perturbációs blokkokat. Teljes indukciót alkalmazunk.

Először egy elegendően kicsiny $c_0 = 0.004$ konstanst választunk. A nulladik lépésben csak négy perturbációs blokkot választunk, ezek: $B_{0,1} = (0,1) \times (0,1)$, $B_{0,2} = (-1,0) \times (0,1)$, $B_{0,3} = (-1,0) \times (-1,0)$ és $B_{0,4} = (0,1) \times (-1,0)$. Ekkor $\mathbf{v}_{B_{0,k}} = (0,1)$ és $\mathbf{w}_{B_{0,k}} = (1,0)$ ha $k = 1, \ldots, 4$. Alkalmasan megválasztjuk a $\phi_{B_{0,k}}$, $k = 1, \ldots, 4$ függvényeket.

A $G_0 \approx \cup_k B_{0,k}$ nyílt halmazt úgy választjuk, hogy $G \setminus G_0$ nullmértékű. (Bizonyos technikai okok miatt G_0 egy kicsit kisebb mint $\cup_k B_{0,k}$, de ebben a vázlatos bizonyításban egyszerűbb ha az olvasó úgy gondol G_0-ra, hogy megegyezik ezzel az unióval.) Ha $\mathbf{p} \in G_0$ akkor legyen $x_0(\mathbf{p}) = 0 = \pi_x(\nabla_{rc,0} f(\mathbf{p})) \approx \pi_x(\nabla f_{-1}(\mathbf{p})) = \pi_x(\nabla h_{-1}(\mathbf{p}))$, ahol az x tengelyre való vetítést π_x-szel jelöltük. Ismét, technikai részleteket átugorva célszerűbb ha x_0-t azonosítjuk a $\nabla h_{-1}(\mathbf{p})$ vektor első koordinátájával. Bevezetjük a konkáv $g_{0,\mathbf{p}}(x) = 1 - \frac{x^4}{4}$ segédfüggvényt. Ilyen, és később további indukciós lépésekben definiált konkáv segédfüggvények segítségével határozzuk meg a perturbációs blokkok irányvektorait a rákövetkező lépésekben.



7. ábra. A gradienstérbeli „pálya"

Tegyük föl, hogy $n \geq 0$, a c_n állandó és a G_n nyílt halmaz adott, továbbá minden $\mathbf{p} \in G_n$-re az $\{x_0(\mathbf{p}), \ldots, x_n(\mathbf{p})\} \subset [-1, 1]$ „pályát", a $B_0(\mathbf{p}), \ldots, B_n(\mathbf{p})$ perturbációs blokkokat és a $g_{n,\mathbf{p}}$ konkáv függvényeket már definiáltuk. Ezenkívül $|g'_{n,\mathbf{p}}(x)| \leq 1$ minden $x \in [-1, 1]$-re és ∇f_n folytonos G_n-en.

Legyen $G_n^* = \{\mathbf{p} \in G_n : \nabla f_n(\mathbf{p}) \in \Omega_0\}$. $\mathbf{p} \in G_n^*$-re legyen $\mathbf{v}_{\mathbf{p},n+1}$ a $g_{n,\mathbf{p}}$ függvény $(x_n(\mathbf{p}), g_{n,\mathbf{p}}(x_n(\mathbf{p})))$ pontbeli „fölfele mutató" normálvektora. Legyen $x_{n+1}^*(\mathbf{p}) = \pi_x(\nabla_{mrc,n+1} f(\mathbf{p})) \approx \pi_x(\nabla f_n(\mathbf{p}))$, ismét néhány hibatagot elhanyagolva ebben a bizonyításvázlatban érdemesebb ezt a második közelítő értéket használni a pontos, [8]-ban megadott $\pi_x(\nabla_{mrc,n+1} f(\mathbf{p}))$ érték helyett.

Az $n + 1$-edik lépésben szereplő perturbációs blokkok középpontjait a Vitali fedési tétel segítségével választjuk ki.

Az f_n gradiensének G_n^*, λ_2 majdnem minden pontjában való perturbálásához G_n^* majdnem minden pontját lefedjük a $B_{n+1,k}$, $k = 1, 2, \ldots$ perturbációs blokkokkal. E blokkokat úgy választjuk, hogy ha $\mathbf{p}$ jelöli a blokk középpontját, akkor $\mathbf{v}_{\mathbf{p},n+1}$ adja meg a blokk irányát. Az $x_{n+1}^*(\mathbf{p})$ értékek határozzák meg $x_{n+1}(\mathbf{p})$-t.

Végül néhány szót szeretnénk szólni azokról a g_n függvényekről, melyek kulcsszerepet játszanak a perturbációs blokkok irányának meghatározásánál. E függvények megadása a konstrukció legtrükkösebb fele. Bevezetésük ötletét egyrészt a 3. tétel adta, ez vezetett arra, hogy konkáv/konvex függvényekkel kell dolgozni.

A másik ötlet forrása egydimenziós dinamikus rendszerekkel áll kapcsolatban és akkor tanultam bele, amikor az [1] cikk bizonyításán dolgoztam. A g_n függvényekre vonatkozólag vetődött fel az a kérdés, hogy vajon miért az $1 - \frac{x^4}{4}$ függvénnyel dolgozom a „természetesebb" másodfokú $1 - \frac{x^2}{2}$ helyett. A válasz az, hogy változó második deriváltra van szükség a bizonyításban, ha a második derivált állandó akkor az érvelés nem működik.

Tegyük föl tehát, hogy $\mathbf{p} \in G$ rögzített, és e pontban végtelen sokszor perturbáltuk a kiindulási függvényt. $(x_{n,\mathbf{p}}, y_{n,\mathbf{p}}) = (x_n, y_n)$-re $n = 0, 1, \ldots$, elhanyagolva technikai hibatagokat, mint $\nabla f_{n-1}(\mathbf{p})$ értékére érdemes gondolni. Annak belátásához, hogy f differenciálható a $\mathbf{p}$ pontban, azt kell belátnunk, hogy (x_n, y_n) konvergál. (Dinamikus rendszerek nyelvét használva azt kell belátnunk, hogy ha az (x_n, y_n) „gradienstérbeli pálya" nem szökik meg az Ω_0 tartományból, akkor konvergens.) A jelölést egyszerűsítve g_n-t írunk $g_{n,\mathbf{p}}$ helyett (7. ábra).

A g_n függvények minden n-re konkávok a számegyenesen és Lipschitz 1 osztályúak $[-1, 1]$-en.

Ezenkívül eleget tesznek a következő lemmáknak:

1. lemma ([8], Lemma 2). *Minden $x \in \mathbb{R}$-re és $n = 0, 1, \ldots$-re $g_{n+1}(x) \geq g_n(x)$.*

2. lemma ([8], Lemma 3). *Ha $x_n \in [-1, 1]$ és $x_n \to x^*$ akkor található $y^* \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, hogy $y_n \to y^*$.*

3. lemma ([8], Lemma 4). *Ha $x_n \in [-1, 1]$, $\liminf x_n = x_* < \limsup x_n = x^*$ és $c = (x_* + x^*)/2$ akkor $g_n(c) \to \infty$. Ez a g_n függvények $[-1, 1]$-en vett uniform Lipschitz-tulajdonsága alapján maga után vonja, hogy $y_n \to \infty$ is teljesül.*

A 1. lemma azt mondja, hogy minél nagyobb n, annál magasabban helyezkedik el g_n grafikonja. Ez és a g_n függvények nem állandó konkávitása a 2. lemmában azt eredményezi, hogy ha az (x_n, y_n) sorozat első koordinátája konvergál, akkor a második koordináták sorozatának is van véges, vagy végtelen határértéke. Végül a 3. lemma szerint ha (x_n, y_n) egy korlátos sorozat, akkor az első koordináták konvergálnak és a 2. lemma alkalmazható. A fenti lemmákból tehát (x_n, y_n) konvergenciája következik, ha nem szökik meg véges időn belül Ω_0-ból, és így a konstruált f függvény differenciálható azokban a pontokban is ahol végtelen sok perturbációs lépést hajtottunk végre.

Irodalomjegyzék

[1] K. M. Brucks and Z. Buczolich, Trajectory of the turning point is dense for a co-σ-porous set of tent maps, *Fund. Math.*, **165** (2000), no. 2, 95–123.

[2] A. Bruckner, The problem of characterizing derivatives revisited, *Real. Anal. Exch.*, **21** (1995/96), no. 1, 112–133.

[3] Z. Buczolich, The n-dimensional gradient has the 1-dimensional Denjoy–Clarkson property, *Real Anal. Exch.,* **18** (1992/93), no. 1, 221–224.

[4] Z. Buczolich, Level sets of functions $f(x, y)$ with nonvanishing gradient, *J. Math. Anal. Appl.,* **185** (1994), no. 1, 27–35.

[5] Z. Buczolich, Approximate continuity points of derivatives of functions of several variables, *Acta Math. Hungar.,* **67** (1995), no. 3, 229–235.

[6] Z. Buczolich, Another note on the gradient problem of C. E. Weil, *Real Anal. Exch.,* **22** (1996/97), no. 2, 775–784.

[7] Z. Buczolich, Functions of two variables with large tangent plane sets, *J. Math. Anal. Appl.,* **220** (1998), no. 2, 562–570.

[8] Z. Buczolich, Solution to the gradient problem of C. E. Weil, to appear in *Revista Matematica Iberoamericana*, preprint available from `www.cs.elte.hu/~buczo`.

[9] Z. Buczolich, On the gradient problem of C. E. Weil, *Real Anal. Exch.,* 27th Summer Symposium Conference Reports, June 2003.

[10] F. Cater, A global implicit function theorem, *Real. Anal. Exchange,* **16**, no. 1, (1990/91), 268–273.

[11] J. A. Clarkson, A property of derivatives, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **53** (1947), 124–125.

[12] A. Denjoy, Sur une proprieté des fonctions dérivées, *Enseignement. Math.,* **18** (1916), 320–328.

[13] M. Elekes, Level sets of differentiable functions of two variables with non-vanishing gradient, *J. Math. Anal. Appl.,* **270** (2002), 369–382.

[14] H. Federer, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der matematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York (1969).

[15] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, **33**, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1976.

[16] P. Holický, J. Malý, L. Zajíček and C. E. Weil, A note on the gradient problem, *Real Anal. Exch.,* **22** (1996/97), no. 1, 225–235.

[17] T. W. Körner, A dense arcwise connected set of critical points – Molehills out of mountains, *J. London Math. Soc.* (2), **38** (1988), 442–452.

[18] A. P. Morse, The behavior of a function on its critical set, *Ann. of Math.* (2), **40** (1939), 62–70.

[19] G. Petruska, Derivatives take every value on the set of approximate continuity points, *Acta Math. Hungar.,* **42** (1983), no. 3–4, 355–360.

[20] M. Radulescu and S. Radulescu, Local inversion theorems without assuming continuous differentiability, *J. Math. Anal. Appl.,* **138** (1989), 581–590.

[21] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, *McGraw-Hill Book Co.,* (1973).

[22] A. Sard, The measure of the critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.,* **48** (1942), 883–890.

[23] S. Saks, *Theory of the integral*, Dover, New York, 1964.

[24] C. E. Weil, On properties of derivatives, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **114** (1965), 363–376.

[25] H. Whitney, A function not constant on a connected set of critical points, *Duke Math. J.*, **1**, (1935), 514–517.

[26] Query 1, *Real Anal. Exch.*, **16** (1990/91), no. 1, 373.

[27] L. Zajíček, Porosity and σ-porosity, *Real Anal. Exch.*, **13** (1987/88), 314–350.

EGÉSZÉRTÉKŰ PROGRAMOZÁS: POLIÉDERES MÓDSZEREK

BALAS EGON

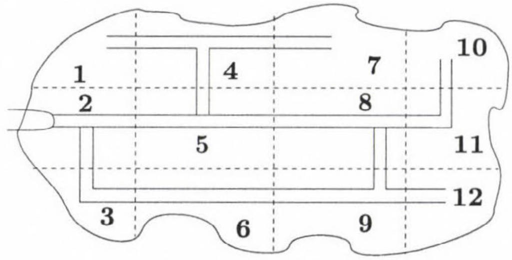
(2004. október 13-i székfoglaló előadás)

Kolozsváron, Erdély fővárosában születtem és nőttem fel. Középiskolás koromban a matematika és fizika voltak kedvenc tantárgyaim, de a háború kitörése más irányt adott életemnek: politikai tevékenységbe sodort, ami minden egyebet elsöpört. Náciellenes földalatti szervezkedés, bujdosás, majd letartóztatás, vallatás, börtön, szökés és felszabadulás követték egymást. Háború után román diplomáciai küldetés Londonba, majd letartóztatás és kétévi magánzárka a bukaresti Securitate hírhedt vallatóközpontjában. Sztálin halála után szabadon bocsátottak. Az ötvenes évek közepe táján pár évig mint gazdasági kutató működtem s könyvet írtam Keynes tanairól. Ennek kapcsán 1959 tavaszán kizártak a pártból és kidobtak a kutatóintézetből. Ekkor határoztam el, hogy szakmát változtatok, és 37 éves fejjel visszatérek ifjúkori szerelmemhez, a matematikához. (Mindezt megírtam máshol [9].)

Átrágtam magam néhány matematikai és operációkutatási könyvön és bedolgoztam magam a lineáris programozásba, miközben egy bukaresti faipari tervező intézetben dolgoztam. Első operációkutatási munkáimban Hammer Péterrel a szállítási feladat paraméteres változatát dolgoztuk ki. Az egészértékű programozás nem érdekelt különösebben: a változók egészértékűségére vonatkozó feltétel nem tűnt számomra gyakorlati fontosságúnak. De 1962-ben a tervezőintézeti munkámban olyan erdőgazdálkodási feladatra bukkantam, amely felnyitotta a szememet az egészértékű programozás óriási gyakorlati jelentőségére.

1. Az egészértékű programozás madártávlatból

Erdőirtási tervet kellett kidolgoznunk bizonyos parcellákra osztott területre, ahol meg volt adva minden (homogénnek számító) parcellára az ott termő fa mennyisége valamint minőség, fajta és kor alapján megállapított értéke, továbbá bizonyos korlátok az évente betakarítandó fa mennyiségére. Minthogy a betekarításból származó haszon nagyjából arányos volt a begyűjtött fa mennyiségével, úgy nézett ki, hogy egyszerű lineáris programozási feladattal állunk szemben. Kiderült azonban, hogy az egyik fő költségtétel semmiképpen sem ábrázolható lineárisan. A különböző parcellák eléréséhez úthálózatot kellett építeni. Attól függően, hogy melyik parcelláról lesz fabegyűjtés, az úthálózat egyik vagy másik szakasza került volna megépítésre, és az ezirányú döntések igen bonyolult módon függtek össze. Az *1. ábra* illusztrálja a helyzetet. Ha például fát akarunk begyűjteni a 9-es parcelláról, akár

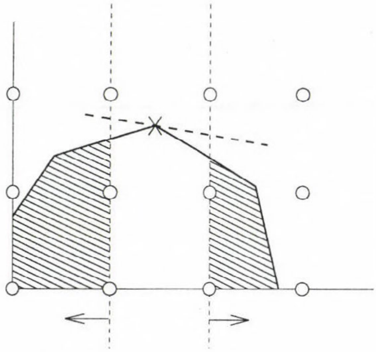


1. ábra. Erdőirtási feladat

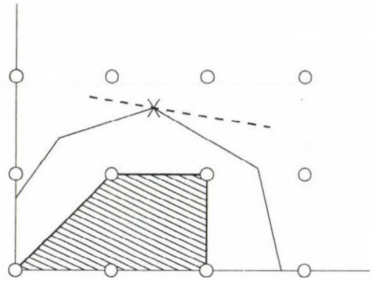
sokat, akár keveset, akkor meg kell építeni az útszakaszt, amely ezt a parcellát a 6-os vagy a 8-as parcellához köti. Ha viszont ezek bármelyikét megépítjük, akkor további útszakaszok válnak szükségessé, és így tovább. Ez egy 0–1 változós programozási feladathoz vezetett, és egyszeriből felnyitotta a szememet az így felfedezett ábrázolási eszköz fontosságára: 0–1-es változókkal ábrázolni lehet a legkülönbözőbb logikai feltételeket, amelyek jelenléte áthatja a mindennapi életben előforduló legtöbb helyzetet. Mi több, a 0–1-es programozás eszközt szolgáltat mindenféle nem konvex, nem folytonos, szabálytalan összefüggés ábrázolására.

Minthogy akkoriban nem volt forgalomban e típusú feladat megoldására alkalmas számítógépes program, kidolgoztam egy eljárást, amit additív algoritmusnak neveztem, mert csak összeadási és összehasonlítási műveleteket használt. Szélesebb körben implicit leszámlálásként vált ismeretessé. Főként logikai tesztelésből állt, amely a különböző változók 0-ra vagy 1-re való rögzítésének a következményeit fürkészte ki; így talán a jelenkori informatikában „feltétel-propagálás" (constraint propagation) néven szereplő eljárás szellemi előfutárjának tekinthető. Egyszerű volt számítógépre programozni, nem igényelt lineáris programozási szoftvert, és többé-kevésbé megbízhatóan képes volt kb. 30 változós feladatokat megoldani [1]. Erdőirtási feladatunk jó néhány kérdésére sikerült általa választ kapnunk.

Az egészértékű programozás területe, amelyre így rásodródtam, alig néhány évvel előbb vette kezdetét. Az egészértékűségi feltétellel lényegében két módon lehet megbirkózni. Az egyik abból áll, hogy megvizsgáljuk a lehetséges egészértékű hozzárendelések egy jól megválasztott részhalmazát, oly módon, hogy ezáltal közvetve az összes ilyen hozzárendelésekkel számolunk. Ez implicit leszámlálás néven ismeretes, és legjobban úgy valósítható meg, amint arra Land és Doig [29] és mások rámutattak, hogy a feladat lineáris relaxációjából korlátokat nyerünk az optimális megoldás értékére minden, a hozzárendelések által definiált részfeladatban – innen a korlátozás és szétválasztás elnevezés. A másik megközelítés, amelynek úttörője Gomory [24] volt, megkísérli a megoldáshalmazt konvexifikálni, illetve megtalálni a megengedett egészértékű megoldások konvex burkát, vagy ha ez nem lehetséges, akkor érvényes metszősíkok által megközelíteni a konvex burkot, vagyis olyan lineáris egyenlőtlenségek által, amelyek lemetszik a megengedett folytonos megoldások egy részhalmazát, de nem metszenek le megengedett egészértékű pontot. A *2(a)* és *2(b) ábrák* illusztrálják e két megközelítést.



2(a) ábra. Leszámlálás:
korlátozás és szétválasztás



2(b) ábra. Konvexifikálás:
metszési módszerek

A hatvanas évek közepe táján furcsa helyzet alakult ki az egészértékű programozás terén. Implicit leszámlálási, vagyis korlátozás-és-szétválasztási eljárásokat sikeresen programoztak számítógépre és használtak a gyakorlatban előforduló kis vagy néha közepes nagyságú feladatok megoldására. Viszont ezek az algoritmusok, habár idővel jóval kifinomultabbak lettek eredeti prototípusaiknál, nem épültek semmilyen mélyebb meglátásra a feladat tulajdonságait illetően, és nem voltak alkalmasak arra, hogy alapul szolgáljanak elméleti vizsgálatokhoz. Mi több, ezek az algoritmusok természetüknél fogva exponenciális komplexitásúak voltak. Másrészt a konvexifikálási megközelítés, amely azzal kecsegtetett hogy a látszólag megoldhatatlan egészértékű programozási feladatot a konvex burokra alkalmazott lineáris programozási feladatra vezeti vissza, komoly elméleti erőfeszítéseket váltott ki, amelyek jelentős eredményeket értek el a különböző metszősíkok tulajdonságait illetően, lapmeghatározó metszések jellemzése terén, stb., de mindezek az eredmények jó ideig nem vezettek még csak mérsékelten hatékony algoritmusokhoz vagy programokhoz sem. Így tehát, míg az elméleti munka és erőfeszítések zöme a metszősíkokra összpontosult, mikor gyakorlati feladatok megoldására került a sor, az egyetlen fajta használható szoftver a korlátozás-és-szétválasztás valamelyik variánsa volt, és az is csak aránylag kis feladatokkal volt képes megbirkózni. Az egész terület bizonyos fajta skizofréniában szenvedett: az alkalmazott operációkutatók esküdtek a korlátozás és szétválasztásra és lekicsinylően viszonyultak a metszősíkos megközelítéshez, amit gyakorlati jelentőség nélküli elméletnek tartottak; miközben a matematikus-kutatók majdnem kizárólagosan a metszősík-elméletre összpontosították erőfeszítéseiket, és a leszámlálási eljárásokat lekicsinylően gyalogló, nyers erőn alapuló módszerként kezelték. De e hasadástól eltekintve is, a hatvanas években kezdődő két, két és fél évtizeden át az egészértékű programozás egyrészt mint kvázi-egyetemes modellezési eszköz vált ismertté, amellyel szinte bármilyen helyzetet vagy feltételt kielégítő hűséggel lehet ábrázolni, másrészt mint olyan modell-kategória, amelyet a gyakorlatban megoldani csak kifejezetten kisméretű feladatok esetében lehet. Ez a helyzet a nyolcvanas évek végéig tartott, amikor végül is a metszősíkok gyakorlatilag hasznosnak bizonyultak: leszámlálással kombinálva, „branch-and-cut" (szétválasztás-és-metszés) vagy „cut-and-branch" (metszés-és-szétválasztás) néven (a kettő nem ugyanaz), a kilencvenes évek közepe felé már sikerült megoldaniok jelentős részét azoknak a feladatoknak, amikkel a leszámlálási algoritmusok nem voltak képesek megbirkózni. Végül is mondhatni, hogy az utolsó tizenöt évben gyökeresen kibővült az egészértékű programozás gyakorlati alkalmazhatósága.

Ezt a változást csupán két ténnyel szeretném illusztrálni:

• 1977-ben Vancouverben diszkrét optimalizálási értekezlet folyt le a terület minden számottevő képviselőjének részvételével, ahol 24 előadás és 16 bizottsági jelentés hangzott el a szakma állásáról [27]. Az előadások közül egyetlenegy tartalmazott számítási eredményeket: a szerzők négy kisebb méretű feladattal próbáltak megbirkózni, amelyekből hármat sikerült is megoldani. A jelentések értékelése szerint egészértékű programozásban sikeres megoldásra csak 30-nál kevesebb egészértékű változó esetében lehet számítani.

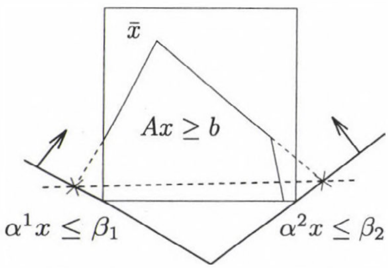
• 2003 nyarán Koppenhágában, a 18-dik Nemzetközi Matematikai Programozási Konferencián, előadás hangzott el az emelés-és-vetítés típusú metszéseknek az XPRESS nevű kereskedelmi szoftver egészértékű programozási modulusába való integrálásáról. Egyebek között az előadó, M. Perregaard [32], beszámolt száznál több nehéz, többnyire sokszáz változós egészértékű programozási feladaton végzett számítási kísérleteiről, amelyek során a 113 lefuttatott feladat közül 95-öt sikerült egyenként 30 percen belül (legtöbb esetben másodpercek alatt) megoldania.

Minek tudható be ez az ugrásszerű változás? Több tényező is közrejátszott: gyorsabb számítógépek, hatékonyabb és megbízhatóbb lineáris programozási szoftver, stb.; de nem utolsó sorban számottevő javulás a metszési módszerek téren, egyrészt maguknak a metszősíkoknak a minőségében, másrészt a metszősíkoknak a szétválasztási folyamatba való beágyazása révén. Ebben az összefüggésben nem kis elégtétellel éltem meg a kilencvenes évek elején az emelés-és-vetítés néven ismertté vált módszer sikerét, amelynek gyökerei a hetvenes évek elején kidolgozott diszjunktiv programozási módszerre nyúlnak vissza.

Mi is a diszjunktiv programozás, és hogyan keveredtem bele?

2. Átszúrásos metszések

Mint említettem, jómagam a leszámlálási/szétválasztási bejáraton át léptem az egészértékű programozás területére. Ennek ellenére, habár az additív algoritmusom a hatvanas években roppant népszerű volt, és a hetvenes évek közepéig az is maradt, én magam élénken érzékeltem e megközelítés korlátozott voltát, és a hatvanas évek vége fele konvexifikálással kezdtem foglalkozni. Az akkor divatos irányzat a metszősík-kutatás terén a csoportelméleti megközelítés volt; de minthogy érdeklődésem központjában a tiszta és vegyes 0–1-es programozás állt, más irányba fordultam, és a konvex analízis fogalmait és eszközeit próbáltam felhasználni, mint pl. a polaritás, vetítés, maximális konvex bővítés stb. Rájöttem, hogy igen érdekes metszősík-családot lehet előállítani olyan tetszőleges konvex S halmaz segítségével, amely tartalmazza a feladat lineáris relaxációjának poliéderét, de amelynek belseje nem tartalmaz megengedett egészértékű pontot [2]. Ez úgy történik, hogy megoldjuk a feladat lineáris programozási relaxációját, és az optimális megoldás által meghatározott poliedrális kónusz minden extremális sugarával átszúrjuk az adott S halmaz határát. Az így nyert átszúrási pontok úgynevezett átszúrásos metszést (intersection cut) határoznak meg, amely levágja a lineáris program optimumát, de nem vág le megengedett egészértékű pontot. Ezt a 3. ábra illusztrálja, ahol $\mathrm{LP} := \{x : Ax \geq b\}$ a lineáris relaxáció megengedett halmaza, $\bar{x}$ a lineáris program optimális megoldása, az S halmaz a két lineáris egyenlőtlenség által meghatározott féltérnek a metszete, és a két átszúrási ponton átmenő pontozott vonal ábrázolja



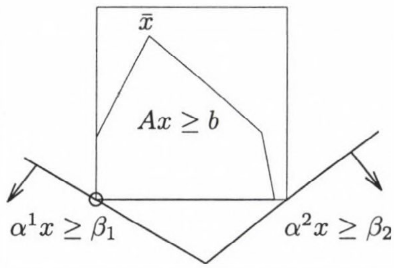
3. ábra. Átszúrásos metszés

az átszúrásos metszést. Aszerint, hogy hogyan választjuk meg a konvex S halmazt, különböző tulajdonságú átszúrásos metszést kapunk. Ha például S az egységkocka két szembenálló lapját tartalmazó két sík által meghatározott féltér metszése, akkor a vegyes egészértékű Gomory [25] féle metszősíkkal közeli rokonságban levő átszúrásos metszősíkot nyerünk. Minthogy a metszés mélysége az S halmaz alakjától és nagyságától függ, egy ideig az egységkockát tartalmazó különböző formájú halmazok maximális konvex bővítését vizsgáltam, ami elvezetett a konvex burok külső polárisának a fogalmához, mint a legnagyobb olyan konvex halmazhoz amelyet tulajdonságai alkalmassá tesznek átszúrásos metszősíkok előállítására [3].

Másrészt rövidesen kiderült, hogy minden átszúrásos metszés egyaránt tekinthető diszjunktív, vagyis diszjunkcióból nyert metszésnek is. Ha ugyanis az S konvex halmazt például két, az $\alpha^1 x \leq \beta_1$ és $\alpha^2 x \leq \beta_2$ egyenlőtlenségek által definiált féltér határozza meg, mint a *3. ábrán,* akkor az a feltétel miszerint az S halmaznak nem szabad megengedett egészértékű pontot mint belső pontot tartalmaznia, egyenértékű azzal a feltétellel, hogy minden megengedett egészértékű pontnak ki kell elégítenie az $(\alpha^1 x \geq \beta_1) \vee (\alpha^2 x \geq \beta_2)$ diszjunkciót, és az S konvex halmazból nyert átszúrásos metszést egyaránt tekinthetjük ebből a diszjunkcióból nyert diszjunktív metszésnek. Mindez rendben volna, de ha az átszúrásos metszés és a diszjunktív metszés közötti különbség csak értelmezésen múlik, vagyis csupán terminológiai, akkor mi a jelentősége a terminológiaváltásnak? Az igazság az, hogy a megváltozott nézőpont fontos új általánosításokat sugalmaz. Ha feladatunk lineáris programozási relaxációja például LP $:= \{x : Ax \geq b\}$, akkor a fenti diszjunktív feltételt megtoldhatjuk e rendszernek mindkét taghoz való hozzácsatolásával, és a

$$\begin{pmatrix} Ax \geq b \\ \alpha^1 x \geq b_1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} Ax \geq b \\ \alpha^2 x \geq \beta_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

feltételt nyerjük. E diszjunkciónak nyilván mindkét tagja poliéder, tehát e mellett a diszjunktív feltétel mellett optimalizálni annyi, mint poliéderek unióján optimalizálni. Mi több, a *3. ábra* példájának esetében a két poliéder egyike egy pontra redukálódik, a másika pedig üres, és így a két poliéder uniójának konvex burka egyetlen pontból áll (lásd a *4. ábrát*).



4. ábra. A diszjunktív halmaz konvex burka

3. Diszjunktív programozás

Így jutottam el tehát a diszjunktív programozáshoz, mint konvex poliéderek unióján való optimalizáláshoz. Konvex poliéderek uniója persze nem konvex halmaz. Általánosabban diszjunktív programozáson olyan optimalizálási feladatot értünk, amelynek feltételei konjunkció és diszjunkció által összekötött egyenlőtlenségek. Az ilyen feladat megengedett megoldásainak halmazát diszjunktív halmaznak, röviden d-halmaznak nevezzük. Egy diszjunktív halmaz több alakban is kifejezhető; ezek legfontosabbika a diszjunktív normál alak és a konjunktív normál alak. Röviden: a diszjunktív normál alak olyan diszjunkció, amelynek minden tagja diszjunkció-mentes; és a konjunktív normál alak olyan konjunkció, amelynek minden tényezője konjunkció-mentes. A diszjunktív programozás fő alkalmazási területe és az érdeklődésem középpontja a tiszta és vegyes 0–1-es programozás volt; de persze ez a keret és maga a fogalom ennél jóval tágabb szférát ölel fel.

A diszjunktív programozásnak két alapvető eredménye van, ami a 0–1-es programozásra döntő módon releváns [4, 5, 6]. Az első konvex poliéderek uniójára vonatkozik, vagyis diszjunktív normál alakban megadott d-halmazra. Azt mondja ki, hogy poliéderek uniójának zárt konvex burka tömören ábrázolható magasabb dimenziójú térben. Ebben az ábrázolásban a változók és feltételek száma lineáris függvénye az unió tagjai számának, tehát nem túl nagyszámú poliéder uniójának konvex burka hatékonyan előállítható. A második eredmény bizonyos gyakori tulajdonsággal rendelkező, konjunktív normál alakban megadott d-halmazra vonatkozik. Azt mondja ki, hogy az ilyen d-halmaz zárt konvex burka előállítható a diszjunkciók egyenkénti, egymás utáni aktiváltatásával, tehát annyi lépésben, amennyi az előforduló diszjunkciók száma. Minden lépés egy-egy újabb diszjunkciót aktiváltat és előállítja az így definiált (átmeneti) d-halmaz konvex burkát. Az utolsó lépés eredménye az eredeti d-halmaz zárt konvex burka. Íme a részletek:

Adva lévén poliéderek egy véges sokasága az n-dimenziós térben, $P_i := \{x \in \mathbb{R}^n : A^i x \geq b^i\} \neq \emptyset$, $i \in Q$, határozzuk meg az adott poliéderek uniójának zárt konvex burkát, vagyis P_Q-t, ahol $P_Q = \operatorname{conv}\Big(\bigcup_{i \in Q} P_i\Big)$ és $\operatorname{conv}(S)$ az S halmaz zárt konvex burkát jelenti. Vezessünk be az unió minden tagjára egy $(n+1)$-dimenziós vektort, (y^i, y_0^i)-t, és ezek segítségével definiáljuk az M halmazt mint

$$M := \left\{ (x, \{y^i, y_0^i\}_{i \in Q}) \;:\; \begin{aligned} x - \textstyle\sum(y^i \;:\; i \in Q) &= 0 \\ A^i y^i - b^i y_0^i &\geq 0 \\ y_0^i &\geq 0,\, i \in Q \\ \textstyle\sum(y_0^i \;:\; i \in Q) &= 1 \end{aligned} \right\}.$$

Legyen $\operatorname{Proj}_x(M)$ az M halmaz vetülete az x vektort tartalmazó altérre.

1. tétel. $P_Q = \operatorname{Proj}_x(M)$.

Az M halmaz tehát a poliéderek uniójának konvex burkát ábrázolja magasabb dimenziójú térben. Az ábrázolás lineáris, és az M-et definiáló rendszer minden bázismegoldása a következő formát ölti: $(y^k, y_0^k) = (x, 1)$ bizonyos k indexre, és $(y^i, y_0^i) = (0, 0)$ minden k-tól különböző i-re. Megjegyzendő, hogy bár az M definíciója nem tartalmaz egészértékűségi követelményt, az y_0^i változók értéke minden bázismegoldásban 0 vagy 1.

Ármost ahhoz, hogy az unió konvex burkát az eredeti, x-et tartalmazó térben ábrázolhassuk, vagyis hogy előállíthassuk P_Q-t, az M vetületét, szükségünk van az ú.n. vetítési kónuszra:

$$W := \left\{ (\alpha, \beta, \{u^i\}_{i \in Q}) \;:\; \alpha = u^i A^i,\; \beta \leq u^i b^i,\; u^i \geq 0,\; i \in Q \right\}.$$

2. tétel.

$$P_Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;:\; \alpha x \geq \beta,\; \forall (\alpha, \beta) \in W_0 \right\},$$

ahol

$$W_0 := \left\{ (\alpha, \beta) \;:\; \exists u^i,\; i \in Q,\; (\alpha, \beta, \{u^i\}_{i \in Q}) \in W \right\}.$$

Ha mármost a P_Q halmaz kónikus polárisát mint az összes P_Q-ra érvényes metszések (egyenlőtlenségek) halmazát definiáljuk, vagyis

$$P_Q^* := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1} : \alpha x \geq \beta, \ \forall x \in P_Q\},$$

azt látjuk, hogy $P_Q^* = W_0$.

A 0–1-es programozás esetében, ha a lineáris relaxáció megengedett halmaza $P := \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \geq b\}$ és az x_j változóra kimondjuk a 0–1 feltételt, ezzel két poliédert hozunk létre, $P_{j0} := \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \geq b, \ x_j = 0\}$ és $P_{j1} := \{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \geq b, \ x_j = 1\}$, és a $\operatorname{conv}(P_{j0} \cup P_{j1})$-t magasabb dimenziójú térben ábrázoló M halmaz a következő alakot ölti:

$$M := \Big\{(x, y, y_0, z, z_0) \in \mathbb{R}_+^{3n+2} : \begin{array}{rrrrl} x - & y & & - \ z & = 0 \\ & Ay - by_0 & & & \geq 0 \\ & - \ y_j & & & = 0 \\ & & & Az - bz_0 & \geq 0 \\ & & & z - z_0 & = 0 \\ & y_0 & & + \ z_0 & = 1 \end{array} \Big\}.$$

Ha most az M halmazt levetítjük az x alterére, azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{conv}(P_{j0} \cup P_{j1}) = \{x \in \mathbb{R}_+^n : \alpha x \geq \beta, \ (\alpha, \beta) \in W_0\},$$

ahol a konvex burkot definiáló egyenlőtlenségek halmaza

$$W_0 := \Big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1} : \begin{array}{l} \alpha \geq uA - u_0 e_j \\ \alpha \geq vA + v_0 e_j \\ \beta \leq ub \\ \beta \leq vb + v_0 \\ \quad u, v \geq 0 \end{array} \Big\}$$

A diszjunktív programozás második alapvető eredménye az olyan d-halmazra vonatkozik, amely a következő tulajdonsággal rendelkezik. Legyen a szóbanforgó d-halmaz konjunktív normál alakja

$$D := \left\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, \ \bigvee_{h \in Q_j} (d^h x \geq d_0^h), \ j = 1, \ldots, t\right\}.$$

A D diszjunktív halmazt „oldal-képző"-nek (facial) nevezzük, ha a $d^h x > d_0^h$ egyenlőtlenségek mindegyike az $Ax \geq b$ által definiált poliédernek egy oldalát határozza meg. Például a vegyes 0–1-es feladat megengedett megoldásainak halmaza, mint konjunktív normál alakban felírt d-halmaz így néz ki:

$$\{x \in \mathbb{R}_+^n : Ax \geq b, \ x_j \leq 0 \vee x_j \geq 1, \ j = 1, \ldots, t\},$$

ahol $p \leq n$, A-nak n oszlopa van, és az $Ax \geq b$ rendszer tartalmazza az $x \leq 1$ feltételeket. Ez a d-halmaz nyilván oldal-képző, hiszen $x_j \leq 0$ és $x_j \geq 1$ az $Ax \geq b$ és $x \geq 0$ feltételek által definiált poliédernek egy-egy oldalát hatarozzák meg.

Mármost a szóbanforgó tulajdonság abból áll, hogy oldal-képző d-halmaz konvex burkát előállíthatjuk úgy, hogy a diszjunkciókat egyenként, tetszőleges sorrendben alkalmazzuk, és minden újabb diszjunkció alkalmazása után előállítjuk az ebből keletkező d-halmaz konvex burkát. Ezt az eljárást „egyenkénti" vagy „sor szerinti" (sequential) konvexifikálásnak nevezzük, és közelebbről így néz ki: Tegyük fel hogy a fenti D halmaz oldal-képző. Definiáljuk P^0-at, $P^0 := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$, és $j = 1, \ldots, t$-re

$$P^j := \operatorname{conv}\left(P^{j-1} \cap \left\{x : \bigvee_{h \in Q_j} (d^h x \geq d_0^h)\right\}\right).$$

Ekkor érvényes a

3. tétel. $P^t = \operatorname{conv}(D)$.

Ha például D egy vegyes 0–1-es poliéder, ahol a diszjunkciók az $x_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \ldots, t$ alakot öltik és $P^0 := \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \geq b\}$, akkor

$$P^j := \operatorname{conv}\left(P^{j-1} \cap \{x : x_j \in \{0,1\}\}\right), \quad j = 1, \ldots, t$$

és P^t a tétel szerint a megengedett 0–1-es megoldások konvex burka.

Így tehát a vegyes 0–1-es programozási feladat p lépésben megoldható, ahol p a 0–1-es változók száma. Itt egy lépés abból áll, hogy a 0–1 feltételt egy változóra, mondjuk x_j-re, alkalmazzuk, és az így nyert P_{j0} és P_{j1} poliéderek uniójának előállítjuk a konvex burkát.

Míg a (tiszta vagy vegyes) 0–1-es programozási feladat oldal-képző, a (tiszta vagy vegyes) egészértékű programozási feladat, amely, ha korlátos, szintén megfogalmazható diszjunktív programozási feladatként, nem oldal-képző, ezért ez utóbbi esetben a megengedett megoldások konvex burka nem állítható elő sor szerinti eljárással. A diszjunktív programozás egyik korai eredménye volt, hogy felfedte a tiszta és vegyes 0–1-es programozási feladatnak eme legfontosabb megkülönböztető vonását az általános egészértékű programozáson belül.

4. Emelés és vetítés mint metszési módszer

Ezeket, és az ezekhez kapcsolódó más eredményeket egy 1974 júliusi kéziratban (technical report) fejtettem ki [4]. Minthogy azonban számítási eredményekkel nem tudtam őket alátámasztani, szakmai körökben hűvös fogadtatásban részesültek. Egy-két fiatal kutató kivételével, mint R. G. Jeroslow és C. Blair, akik bekapcsolódtak ebbe a kutatási irányba és lényeges hozzájárulásokkal gazdagították a területet [19, 28], a mértékadó szakmai körök szkeptikusak voltak. Így például a fent említett kéziratom annak idején nem jelent meg nyomtatásban, minthogy nem voltam hajlandó egy referens szája íze szerint átírni. A következő 25 év alatt számtalan kérést kaptam a MSRR 348-as számú kézirat egy-egy példányára, de nyomtatásban nem került közlésre 1998-ig, amikor is mint felkérésre írott cikk jelent meg két disztingvált kolléga méltató előszavával.

Úgy látszik hogy a latin mondás, *habent sua fata libelli* (minden könyvnek megvan a maga sorsa), elméletekre is áll. Habár a diszjunktív programozás beindítása idején, a hetvenes évek közepe táján, hűvös fogadtatásban részesült, mikor úgy 15 évvel később Ceria, Cornuéjols és jómagam lényegében ugyanezeket az eredményeket új keretben mutattuk be, „emelés és vetítés" (lift and project) elnevezéssel és számítási eredményekkel alátámasztva, a visszhang egészen más volt. A diszjunktív programozás eszméihez való visszatérésünket a Lovász és Schrijvernek [30] a mátrix kónuszokra vonatkozó igen érdekes munkája váltotta ki. Röviddel miután ezzel megismerkedtünk, rájöttünk hogy a Lovász–Schrijver-eljárásnak egy leegyszerűsített variánsa izomorfikus azzal a fent vázolt diszjunktív programozási eljárással, amely egy vegyes 0–1-es feladat megengedett pontjainak konvex burkát állítja elő t lépésben [10]. Ezúttal munkánkat az algoritmikus aspektusokra összpontosítottuk, és hatékony számítógépes programot is produkáltunk MIPO (Mixed Integer Program Otimizer) néven. A MIPO segítségével kimutattuk, hogy a diszjunktív metszések bizonyos fajtája, amelyet emelés és vetítési (E&V) metszésnek kereszteltünk, kombinálva egy felerősítési eljárással és beágyazva egy korlátozás és szétválasztási sémába, képes megoldani a legtöbb ismert vegyes 0–1-es programozási feladatot amellyel az akkor forgalomban lévő számítógépi programok nem voltak képesek megbirkózni [11].

Konkréten, az emelés-és-vetítés eljárással úgy állítunk elő metszéseket, hogy a feladat lineáris programozási relaxációjának megoldása után az optimális $\bar{x}$ megoldás egy 0–1-re korlátozott, de nem egészértékű komponensére, mondjuk a j-edikre, alkalmazzuk az $x_j \leq 0 \vee x_j \geq 1$ diszjunkciót, annak az (1) szerinti kibővített alakjában. Az ebből eredő két poliéder uniójának konvex burkát a 3. szakaszban leírt M halmaz segítségével ábrázoljuk, és vetítés útján e konvex burok egy megfelelően megválasztott egyenlőtlenségét állítjuk elő mint a helyileg „legmélyebb" E&V metszést. „Legmélyebb"-nek az $\bar{x}$ pont által maximálisan megszegett egyenlőtlenséget, illetve metszést nevezzük. E célból az alábbi úgynevezett Metszés-Előállító Lineáris Programot (MELP-t) oldjuk meg:

$$\min\left\{\bar{x}\alpha - \beta : (\alpha,\beta) \in W_0 \cap S\right\},$$

ahol W_0 a 3. szakaszban bevezetett kónusz és S egy normalizáló feltétel, mint például $\beta \in \{1,-1\}$, vagy $\sum_j |\alpha_j| \leq 1$. Ha az MELP optimális megoldása $(\alpha, \beta, u, u_0, v, v_0)$, akkor

4. tétel. *A keresett legmélyebb* E&V *metszés* $\alpha x \geq \beta$, *és ennek együtthatói*

$$\alpha_h = \begin{cases} \max\{ua_h - u_0, va_h + v_0\} & h = j \\ \max\{ua_h, va_h\} & h \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j\} \end{cases}$$

és

$$\beta = \min\{ub, vb + v_0\}.$$

Az MELP szerepe a metszés előállításában a következőképpen értelmezhető. Mint említettük, az előállítandó metszést az (1) alakú diszjunkcióból származtatjuk (ahol az $\alpha^1 x \geq \beta_1 \lor \alpha^2 x \geq \beta_2$ feltételt a $-x_j \geq 0 \lor x_j \geq 1$ feltétel helyettesíti). Ez felfogható úgy, hogy az (1) mindkét tagját a tag egyenlőtlenségeinek pozitív lineáris kombinációjával helyettesítjük:

$$\big((uA - u_0 e_j)x \geq ub\big) \lor \big((vA + v_0 e_j)x \geq vb + v_0\big),$$

ahol a metszés „ereje" vagy „mélysége" a két tag egyenlőtlenségeinek súlyozásától függ, vagyis az u, u_0, v, v_0 multiplikátorok megválasztásán múlik. Az MELP hivatása ezt a súlyozást optimalizálni.

A fenti metszés kizárólag az x_j-re alkalmazott diszjunkció folyománya. Ha a többi változók valamelyike ugyancsak egészértékűségi feltételnek van alávetve, akkor ezt a fentebbi metszés felerősítésére lehet felhasználni [12]. Ha az ilyen változók index-halmaza N_1, akkor

5. tétel. *A felerősített* E&V *metszés $\gamma x \geq \beta$, ahol*

$$\gamma_h = \begin{cases} \min\{ua_h + u_0\lceil m_h\rceil, va_h - v_0\lfloor m_h\rfloor\}, & h \in N_1 \\ \alpha_h & \textit{egyébként} \end{cases}$$

és

$$m_h = (va_h - ua_h)/(u_0 + v_0).$$

(Itt $\lceil m_h\rceil$ és $\lfloor m_h\rfloor$ az m_h felkerekített, illetve lekerekített egész értéke).

Az emelés-és-vetítési módszer sikere felkeltette a gyakorlati körök érdeklődését a sokáig elhanyagolt metszési módszerek iránt általában. Kiderült, hogy a korábban gyakorlatilag haszontalannak ítélt Gomory-féle metszések is hasznosíthatóak, ha megfelelő módon beágyazzák őket egy korlátozási és szétválasztási sémába. Minthogy ez utóbbi metszések számítógépes programozása roppant egyszerű, a kilencvenes évek vége felé már részeivé váltak a vezető kereskedelmi szoftvernek [18].

Az E&V metszősíkok előállítása a fent vázolt módon, habár kutatási szoftverben érdekes eredményekre vezetett (lásd pl. [20]-at), akkoriban még túl számításigényesnek nézett ki ahhoz, hogy kereskedelmi szoftverben alkalmazása kerüljön. E téren 2002-ben történt meg az áttörés, amikor is M. Perregaard-dal sikerült egy pontos megfeleltetést találnunk a magasabb dimenziójú térben felállított MELP és az eredeti lineáris program (LP) bázisai között [15]. Ez lehetővé tette, hogy az MELP-et implicite oldjuk meg az eredeti LP szimplex tábláján. Ugyanis a megfeleltetés alapján az MELP minden eleme, beleértve a redukált költség-koefficienseket, amelyeknek az előjelei irányítják az optimalizálási eljárás báziscseréit, kiszámíthatók az eredeti LP szimplex táblájának az adataiból. Így tehát az MELP megoldási folyamatának iterációit mímelni lehet az eredeti LP szimplex tábláján. Az erre a megfeleltetésre alapozott új eljárás sokszoros megtakarítást eredményezett az optimális E&V metszések előállításában, és így lehetővé tette az XPRESS kereskedelmi szoftver egészértékű programozási modulusába való beágyazását, ami lényegesen megnövelte a modulus hatékonyságát [32].

5. Párosítható részgráfok poliédere

Kombinatorikus optimalizálási feladatok általában nehezek; de ha a feladat lineáris relaxáltjának van valamilyen előnyös tulajdonsága, mint például a teljes unimodularitás, akkor a feladat könnyűvé válik. Néha egy feladat relaxáltja bizonyos ábrázolásban, mondjuk mint $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Cx \leq d\}$, nem mutat semmilyen kedvező tulajdonságot, de ha újabb változók bevezetésével magasabb dimenziójú térben ábrázoljuk (emelés!), mondjuk mint $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : Ax + By \leq b\}$, akkor e „bővített megfogalmazás"-ban (extended formulation) felbukkanhat a relaxáltnak valamilyen előnyös tulajdonsága. Ha e tulajdonság alapján sikerül kimutatnunk, hogy a relaxált bázismegoldásai, vagyis a Q csúcspontjai, egészértékűek, akkor Q-nak az eredeti altérre való vetítése megőrzi ezt a tulajdonságot. Tehát ha sikerül bebizonyítani, hogy $P = \mathrm{Proj}(Q)$, akkor bebizonyítottuk, hogy P egészértékű poliéder.

Tegyük fel például, hogy adva van a $G = (V, E)$ páros gráf, és jellemezni akarjuk a V csúcshalmaz olyan W részhalmazait, amelyek teljesen párosítható $G[W]$ részgráfot feszítenek. Bár első hallásra ez a feladat kissé mesterkéltnek tűnik, valójában egy gyakorlati ütemezési feladat kapcsán merült fel. Egy holland városi autóbusztársaság számára kellett a sofőrök napi menetrendjét összeállítani úgy, hogy adott útvonalakat optimálisan fedezzenek. Ez egy jólismert halmazfedési feladat, amelynek standard megfogalmazása

$$\min\left\{cx : Ax \geq e,\ x \in \{0,1\}^n\right\}.$$

Itt e az 1-esek vektora, c egy költségvektor, és A az a 0–1-es mátrix, amelynek sorai egy-egy útvonalszakasz lefedési lehetőségeit, oszlopai pedig egy-egy sofőr lehetséges napi menetrendjeit ábrázolják; a feladat tehát az összes lehetséges menetrendekből egy optimális kombinációt kiválasztani. A baj ez esetben az volt, hogy az összes lehetséges menetrendeknek, vagyis az A oszlopainak a száma túl nagy volt. Közelebbi vizsgálatra azonban kiderült, hogy az A minden oszlopa egy reggeli és egy délutáni menetrend kombinációjából állt, és az oszlopok nagy száma abból eredt, hogy minden megengedett, vagyis időben és térben kompatibilis kombinációt explicite előállítottak. Ha tehát a reggeli, illetve délutáni lehetséges menetrendek száma n_1, illetve n_2, és a megengedett kombinációk aránya (az összes lehetséges kombinációkhoz viszonyítva) r, akkor az A oszlopainak száma $r \times n_1 \times n_2$. Ha ezzel szemben a reggeli és délutáni menetrendeket olyan külön-külön feladatként kezeljük, amelyeknek a megoldásai bizonyos kompatibilitási feltételnek kell, hogy eleget tegyenek, akkor az alábbi feladatot kapjuk. Legyen $G = (V, E)$ az a páros gráf, amelynek csúcsai a reggeli (V_1), illetve délutáni (V_2) lehetséges menetrendeket képviselik, legyen (x^1, x^2) a (V_1, V_2)-höz rendelt karakterisztikus vektor, és legyen E a kompatibilis menetrendpárok listája, vagyis $(i, j) \in E$ akkor és csak akkor, ha a reggeli i menetrend kompatibilis a délutáni j menetrenddel. Keressük a $c^1x^1 + c^2x^2$ függvény minimumát a következő feltételek mellett:

(a) $A^1x^1 \geq e^1$, $A^2x^2 \geq e^2$;

(b) $x^1 \in \{0,1\}^{n_1}$, $x^2 \in \{0,1\}^{n_2}$; és

(c) $G[W(x^1, x^2)]$ a G teljesen párosítható részgráfja.

Itt az (a) feltétel az $Ax \geq e$ reggeli és délutáni megfelelőit fejezi ki, míg a (c) feltételben előforduló $W(x^1, x^2)$ az (x^1, x^2) által definiált csúcshalmaz, és $G[W]$ a G-nek a W által feszített részgráfja. Az így megfogalmazott feladatnak csak n_1+n_2 változója van ($r \times n_1 \times n_2$ helyett), viszont a (c) feltételt olyan egyenlőtlenségrendszerrel kell ábrázolni, amely a G gráf teljesen párosítható részgráfjait feszítő csúcshalmazok karakterisztikus vektorainak konvex burkát definiálja. Nevezzük ezt a G gráf teljesen párosítható részgráfjai poliéderének és jelöljük P-vel. Ha a $W \subseteq V$ csúcshalmazt képviselő bináris vektort x^W-vel jelöljük, akkor a keresett jellemzés tárgya

$$P := \operatorname{conv}\{x^W : W \subseteq V,\ G[W] \text{ teljesen párosítható}\}.$$

Mármost a Kőnig–Hall-tétel [26] szerint G páros gráf $G[W]$ részgráfja akkor és csak akkor teljesen párosítható, ha

(i) $|W \cap V_1| = |W \cap V_2|$, és

(ii) minden $S \subseteq W \cap V_1$ részhalmazra áll, hogy
$|S| \leq |N(S)|$,

ahol $N(S) := \{j \in W \cap V_2 : \exists i \in S,\ (i,j) \in E\}$. Ha ezt átültetjük a 0–1-es változókban kifejezett lineáris egyenlőtlenségek nyelvére, azt kapjuk hogy

$$\begin{aligned} P := \operatorname{conv}\Big\{x \in \{0,1\}^n :\ & x(V_1) - x(V_2) = 0 \\ & x(S) - x(N(S)) \leq 0,\ S \subseteq V_1\Big\}. \end{aligned}$$

Ezzel kapcsolatban felmerül a kérdés, hogy nem fölöslegesek-e a 0–1-es feltételek, illetve nem egészértékű poliéder-e a P lineáris programozási relaxáltja. Megjegyzendő, hogy a fenti egyenlőtlenség-rendszer koefficiens-mátrixa szemmel láthatóan nem teljesen unimoduláris. Hogy a kérdést megválaszoljuk, ábrázoljuk a feladatot a csúcs- és él-változók terében (emelés!), vagyis vezessünk be minden (i, j) élre egy u_{ij} él-változót, és jelöljük $u(i, N(i)) := \sum_j (u_{ij} : j \in N(i))$, $u(N(j), j) := \sum_i (u_{ij} : i \in N(j))$. Akkor a feladatunkat a következő egyenlőtlenség-rendszer adja meg:

$$\begin{array}{llll} & u(i, N(i)) - x_i & = 0 & i \in V_1 \\ (2) & u(N(j), j) \qquad - x_j & = 0 & j \in V_2 \\ & u_{ij} \geq 0,\ (i,j) \in E,\ 0 \leq x_j \leq 1, & & j \in V \end{array}$$

E rendszer teljesen unimoduláris, tehát a neki megfelelő poliéder egészértékű. Mármost könnyű belátni, hogy egy $W \subseteq V$ csúcshalmaz akkor és csak akkor feszíti a G teljesen párosítható részgráfját, ha az $x_i = 1$, $i \in W$, $x_i = 0$, $i \in V \setminus W$ által (2) révén definiált egyenlőtlenség-rendszer megoldható. Tehát a (2) rendszer feladatunknak érvényes „megemelt" ábrázolása. Sőt, ez az ábrázolás megadja a kulcsot kérdésünk megválaszolására [16]:

6. tétel.

$$P := \Big\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \le x \le 1 \\ x(V_1) - x(V_2) = 0 \\ x(S) - x\big(N(S)\big) \le 0, \; S \subseteq V_1\Big\}.$$

A tétel bizonyítása abból áll hogy kimutatjuk miszerint P a (2) által definiált poliéder vetülete az x-et tartalmazó altérre. A (2) vetítési kónusza

$$W := \{v \in \mathbb{R}^n : -v_i + v_j \ge 0, \; i \in V_1, \; j \in V_2, \; (i,j) \in E \\ v_i \ge 0, \; i \in V\}$$

és ennek extremális irányai azok a v vektorok amelyekre létezik olyan $\alpha > 0$, hogy vagy

(a) $$v_i = \begin{cases} \alpha & \text{ha } i = j^* \in V_2 \\ 0 & \text{ha } i \in V_1 \cup V_2 \setminus \{j^*\}, \end{cases}$$

vagy pedig

(b) $$v_i = \begin{cases} \alpha & \text{ha } i \in S \cup N(S) \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $G\big[S \cup N(S)\big]$ összefüggő gráf. Minthogy a vetítés szabályai értelmében a (2) által definiált halmaz vetülete

$$P := \big\{x \in \mathbb{R}^n : vx \le 0, \; x(V_1) - x(V_2) = 0, \; 0 \le x \le 1, \; v \in \text{extr}\, W\big\},$$

nem nehéz kimutatni, hogy az (a) eset v vektorai az $x \ge 0$ feltételeket eredményezik (fölöslegesen), míg a (b) eset v vektorai az $x(S) - x\big(N(S)\big) \le 0$ egyenlőtlenségeket produkálják minden olyan S-re, $S \subset V_1$, amelyre az $S \cup N(S)$ csúcshalmaz összefüggő részgráfot feszít. A bizonyítás mellékeredményeként tehát azt kapjuk, hogy a Kőnig–Hall-tételben elég ha a (ii) feltétel minden összefüggő részgráfot feszítő csúcshalmazra áll.

A fenti feladat páros gráfra vonatkozott. Ha most ugyanazt a feladatot általános gráfra vonatkozólag vetjük fel, ezzel már jóval keményebb fába vágjuk fejszénket. Az eljárás nagy vonalaiban ugyanaz, vagyis a feladatot él-változók bevezetésével magasabb dimenziójú térbe emeljük. Ezzel az ábrázolással a (2) helyett a következő egyenlőtlenség-rendszert kapjuk:

$$
(3)\qquad
\begin{array}{lll}
u(\delta(i)) - x_i = 0, & & i \in V \\
u(\gamma(S)) & \leq (|S|-1)/2, & S \in Q \\
u_{ij} \geq 0, \ (i,j) \in E, & 0 < x_j < 1, & j \in V
\end{array}
$$

ahol $G = (V, E)$ a szóbanforgó gráf, $Q := \{S \subseteq V : |S| \geq 3 \text{ és páratlan}\}$, $\delta(i) := \{(i,j) \in E : j \in V \setminus \{i\}\}$, $\gamma(S) := \{(i,j) \in E : i,j \in S\}$.

A (2)-től eltérően, a (3)-as rendszer exponenciális számú egyenlőtlenségből áll, és a rendszer koefficiens-mátrixa nem teljesen unimoduláris. Ennek ellenére, Edmonds jól ismert tételéből [22] következik, hogy a (3)-as rendszer minden bázismegoldása, vagyis a megfelelő poliéder minden csúcspontja, egészértékű. Így tehát, akárcsak a páros gráf esetében, a G teljesen párosítható részgráfjait feszítő csúcshalmazok poliedérét, vagyis ezen csúcshalmazok karakterisztikus vektorainak konvex burkát – jelöljük ezt ismét P-vel – megkaphatjuk a (3)-as rendszer megoldáshalmazának az x-et tartalmazó altérre való levetítése révén. Maga a vetítés szintén bonyolultabb, mint páros gráf esetében, ugyanis a vetítési kónusz

$$
W := \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^{|V|} \times \mathbb{R}^{|Q|} : -y_i + y_j + \sum (z_S : i,j \in S,\ S \in Q) \geq 0,\ (i,j) \in E \right\}
$$

exponenciális dimenziójú, és nem minden esetben hegyes (csúcsos). Ennek ellenére kimutatható, hogy a vetület minden nem-triviális (vagyis az $x_j \geq 0$ és $x_j \leq 1$ típusútól különböző) lapja $ax \leq a_0$ formájú, ahol $a = -y$ és $a_0 = \sum \big(z \cdot (|S|-1)/2 : S \in Q\big)$, (y,z) pedig a W kónusz egy extremális iránya. Az e tétel segítségével eszközölt vetítés a következő vetületet eredményezi, ahol $k(S)$ a $G[S]$ komponenseinek száma [17]:

7. tétel.

$$
\begin{aligned}
P := \Big\{ & x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x \leq 1 \\
& x(S) - x\big(N(S)\big) \leq |S| - k(S) \quad \textit{minden olyan } S\textit{-re, melyre } |S| = 1 \textit{ vagy} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad G[S] \textit{ páratlan csúcsszámú gráf} \Big\}.
\end{aligned}
$$

6. Irányított gráf kör-poliédere

Az emelés és vetítés egy másik sikeres alkalmazása irányított gráf kör-poliéderének, vagyis az irányított körök karakterisztikus vektorai konvex burkának a részleges jellemzése. Ezt a feladatot ismét gyakorlati probléma sugalmazta, mégpedig acélhengerművek mindennapi tevékenységének ütemezése. Egy hengermű izzó acéltömböket hengerel lemezzé. A napi program összeállítása abból áll, hogy kiválasztják a hengerlésre kerülő tömböket és felállítják a hengerlési sorrendet. A tömbök sorrendje erősen befolyásolja mind a termelési processzus hatékonyságát, mind a végtermék, vagyis a lemezek minőségét. Ha a program összeállítását ketté lehetne osztani tömbkiválasztási, és a kiválasztott tömbök sorbarendezési feladatára, az elsőt hátizsákfeladatként, a másodikat pedig utazóügynök-feladatként lehetne kezelni. Ez azonban nem járható út, ugyanis ha a tömbkiválasztás nem veszi tekintetbe a sorba rendezés követelményeit, akkor a kiválasztott tömbök halmazának sorba rendezési feladata könnyen megoldhatatlanná válhat. A kombinált feladat paradigmája viszont az olyan utazóügynök esete, aki nem köteles minden helységbe ellátogatni, de ahova ellátogat, ott díjat kap; ennek folytán olyan minimális összköltségű túrát kíván összeállítani, amelyben a befolyó díjösszeg elér egy kitűzött minimumot. Ezt a feladatot a díjbeszedő utazóügynök (prize collecting travelling salesman) problémájának [7] kereszteltük, heurisztikus megoldási módszereket dolgoztunk ki rá, majd szoftvert állítottunk össze, amely gyakorlati alkalmazást nyert: az LTV Cleveland Works acélhengerműveknél 1989-től kezdődően több mint tíz évig ezzel a szoftverrel állították össze a napi termelési menetrendet [13].

Az e feladat által sugalmazott elméleti probléma abból áll, hogy adott irányított gráf kör-poliéderét jellemezzük. Minthogy ez jelenlegi eszközeinkkel elérhetetlen, megközelítő jellemzésre törekszünk, vagyis a vizsgált poliéder lapjainak legfontosabb családjait igyekszünk felfedezni. Kiinduló pontul az az észrevétel szolgálhat, hogy ha feladatunkat az adott gráf Hamilton-köreire korlátozzuk, a jól ismert utazóügynök problémáját kapjuk, amely az utolsó ötven évben intenzív és fölöttébb sikeres vizsgálatok tárgyát képezte. Ennek eredményeképp, ha az utazóügynök poliéderének, vagyis a megoldások konvex burkának, a teljes jellemzésével nem is rendelkezünk, számos lap-családot ismerünk, amelyek összessége elég jól megközelíti a szóbanforgó poliédert ahhoz, hogy sokszáz változós feladatokat sikeresen tudjunk megoldani (lásd pl. [23]-at). Persze ha a feladatot kiterjesztjük a Hamilton-körökről tetszőleges körökre, egészen más poliédert kapunk, amelyre az utazóügynök poliéderének lap-meghatározó egyenlőtlenségei egyszerűen nem érvényesek. Felmerül azonban a kérdés, lehet-e azt a rengeteg ismeretet, amivel az utazóügynök poliéderéről rendelkezünk, valamilyen módon hasznosítani az irányított gráf kör-poliéderének vizsgálatában. A válasz az, hogy igenis lehet, mégpedig emelés és vetítés útján.

Jelöljük P-vel a $G = (N, A)$ irányított gráfra definiált utazóügynök poliédert, vagyis a Dantzig, Fulkerson és Johnson [21] megfogalmazásában,

$$\begin{aligned} P := \operatorname{conv}\big\{x \in \{0,1\}^A \ :\ & x(i, N(i)) = 1,\ i \in N \\ & x(N(j), j) = 1,\ j \in N \\ & x(S,S) \le |S| - 1, \forall S \subset N,\ 2 \le |S| \le n-1\big\}, \end{aligned}$$

ahol $x(i, N(i)) := \sum(x_{ij} : j \in N)$, $x(N(j), j) = \sum(x_{ij} : i \in N)$, és $n = |N|$.

Itt a két első feltételcsoport megoldáshalmaza egymást nem érintő körök G-t feszítő uniója, míg az utolsó egyenlőtlenség-rendszer a résztúrákat, vagyis n-nél rövidebb köröket zárja ki. Jelöljük továbbá P_K-val a G-re definiált kör-poliédert, vagyis a G irányított körei karakterisztikus vektorainak konvex burkát [14]:

$$
\begin{aligned}
P_K := \operatorname{conv}\Big\{ x \in \{0,1\}^A \ :\ & x(i, N(i)) < 1,\ i \in N \\
& x(N(i), i) - x(i, N(i)) = 0,\ i \in N \\
& \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_{ij} \geq 1 \\
& x(k, N) + x(\ell, N) - x(S, N \setminus S) \leq 1,\ \forall S \subset N, \\
& \qquad 2 \leq |S| \leq n-2,\ k \in S,\ \ell \in N \setminus S \Big\}.
\end{aligned}
$$

Itt az első három feltételcsoport megoldáshalmaza egymást nem érintő körök nem üres uniója, míg az utolsó egyenlőtlenség-csoport kizárja az egynél több kör unióját (ha ugyanis a megoldás K_1 és K_2 csúcshalmazú köröket tartalmaz, akkor megszegi az $S = K_1$, $k \in K_1$, $\ell \in K_2$ által definiált egyenlőtlenséget, minthogy $x(k, N) = 1$, $x(\ell, N) = 1$ és $x(S, N \setminus S) = 0$).

A kérdés, amire választ keresünk, a következő. Tegyük fel hogy hogy az $\alpha x \leq \alpha_0$ egyenlőtlenség P-nek egy lapját definiálja. Lehetséges-e ebből valamilyen módon egy vagy több P_K-ra érvényes lap-definiáló egyenlőtlenséget kapni? A válasz pozitív, és a módszer ismét csak emelés és vetítés egy változataként adódik. Ezúttal az emelés, vagy bővített megfogalmazás, abból áll, hogy G minden csúcsához hozzáadunk egy hurkot, vagyis az x_{ij} él-változók halmazát y_i hurok-változókkal egészítjük ki. A G-ből tehát $G_H := (N, A \cup H)$ lesz, ahol H a hurkok halmaza, és a magasabb dimenziós térben a P-ből P_H lesz, a kör- és hurkok-poliédere:

$$
\begin{aligned}
P_H := \operatorname{conv}\Big\{ (x,y) \in \{0,1\}^{A \cup H} \ :\ & x(i, N(i)) + y_i = 1,\ i \in N \\
& x(N(j), j) + y_j = 1,\ j \in N \\
& x(N, N) \geq 2 \\
& x(S, N \setminus S) + y_k + y_\ell \geq 1,\ \forall S \subset N, \\
& \qquad 2 \leq |S| \leq n-2,\ k \in S,\ \ell \in N \setminus S \Big\}.
\end{aligned}
$$

Itt az egyenletek biztosítják, hogy a megoldás a G_H minden csúcsára vagy a megfelelő hurkot, vagy egy bemenő és egy kimenő élet tartalmaz; tehát a megoldás egymást nem érintő körök és hurkok uniója. Az első egyenlőtlenség biztosítja, hogy a megoldás nem csupán hurkokból áll, míg a többi egyenlőtlenség szerepe a megoldásban előforduló körök számát egyre korlátozni.

Első lépésünk tehát az lesz, hogy a P-re érvényes lap-definiáló $\alpha x \leq \alpha_0$ egyenlőtlenségből a P_H-ra érvényes lap-definiáló $\alpha x + \beta y \leq \alpha_0$ egyenlőtlenséget állítunk elő. Ez egy, a poliéderes kombinatorikában jól ismert feladattípusnak, az úgynevezett lapemelésnek (facet lifting) speciális esete. Ha e speciális esettől eltekintünk, és P-t mint egy általános P_H poliédernek az x-et tartalmazó altérre való korlátozásaként fogjuk fel (vagyis P-t az $y_i = 0$ egyenletek révén kapjuk P_H-ból), akkor jól ismert módszer [31, 33, 34] áll rendelkezésünkre a β_i koefficiensek előállítására. A baj csak az, hogy ez a módszer általában minden koefficiens kiszámítására egy 0–1-es programozási feladat megoldását igényli. A bennünket érdeklő speciális esetben viszont az alábbi eredmény folytán ez a feladat aránylag könnyen megoldható [8]:

8. tétel. *Legyen $\alpha x \leq \alpha_0$ P-re érvényes, lap-definiáló egyenlőtlenség. Minden $k \in N$ indexre legyen F_k azon $\{i,j\} \subset N$ párok halmaza, amelyekre létezik olyan $x \in P$, hogy $\alpha x = \alpha_0$ és $x_{ik} = x_{kj} = 1$.*

(i) *Ha $\alpha x + \beta y \leq \alpha_0$ érvényes P_H-ra, akkor*
$\beta_k \leq \min\{\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} : \{i,j\} \in F_k\}, \quad k \in H.$

(ii) *Ha $\alpha x + \beta y \leq \alpha_0$ érvényes P_H-ra és*
$\beta_k = \min\{\alpha_{ik} + \alpha_{kj} - \alpha_{ij} : \{i,j\} \in F_k\}, \quad k \in H,$
akkor $\alpha x + \beta y \leq \alpha_0$ P_H egy lapját definiálja.

E tétel felhasználásával sikerült a P minden ismert lap-definiáló egyenlőtlenségére zárt képlet alapján előállítani a P_H megfelelő lap-definiáló egyenlőtlenségét. Ez utóbbiak tehát ma már mind ismertek.

Második lépésünk abból áll, hogy egy, a P_H poliéderre érvényes lap-definiáló egyenlőtlensegből megfelelő egyenlőtlenséget nyerjünk a P_K poliéderre. Ezt viszont vetítés útján érhetjük el [14].

9. tétel. *Legyen $\alpha x + \beta y \leq \alpha_0$ P_H-ra érvényes lap-definiáló egyenlőtlenség. Akkor*

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} (\alpha_{ij} - \beta_i) x_{ij} \leq \alpha_0 - \sum_{i \in N} \beta_i$$

P_K-ra érvényes lap-definiáló egyenlőtlenség.

Így tehát emelés és vetítés útján mindazon ismereteket amiket az irányított gráfra definiált utazóügynök poliéderre vonatkozólag az utolsó harminc évben szereztünk, sikerült az irányított gráf kör-poliéderére átültetni.

Irodalomjegyzék

[1] E. Balas, An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with 0–1 Variables, *Operations Research,* **13** (1965), 517–596.

[2] E. Balas, Intersection Cuts–A New Type of Cutting Planes for Integer Programming, *Operations Research,* **19** (1971), 19–39.

[3] E. Balas, Integer Programming and Convex Analysis: Intersection Cuts from Outer Polars, *Mathematical Programming,* **2** (1972), 350–382.

[4] E. Balas, Disjunctive Programming: Properties of the Convex Hull of Feasible Points, *MSRR* #348, Carnegie Mellon University, July 1974. Megjelent mint felkérésre írott cikk, G. Cornuéjols and W. R. Pulleyblank előszavával, *Discrete Applied Mathematics,* **89** (1998), 1–44.

[5] E. Balas, Disjunctive Programming, *Annals of Discrete Mathematics,* **5** (1979), 3–51.

[6] E. Balas, Disjunctive Programming and a Hierarchy of Relaxations for Discrete Optimization Problems, *SIAM J. on Algebraic and Discrete Methods,* **6** (1985), 466–486.

[7] E. Balas, The Prize Collecting Travelling Salesman Problem, *Networks,* **19** (1989), 621–636.

[8] E. Balas, The Prize Collecting Travelling Salesman Problem: II. Polyhedral Results. *Networks,* **25** (1995), 199–216.

[9] E. Balas, *A szabadság vonzásában,* Vince Kiadó (Budapest, 2002).

[10] E. Balas, S. Ceria and G. Cornuéjols, A Lift-and-Project Cutting Plane Algorithm for Mixed 0–1 Programs, *Mathematical Programming,* **58** (1993), 295–324.

[11] E. Balas, S. Ceria and G. Cornuéjols, Mixed 0–1 Programming by Lift-and-Project in a Branch-and-Cut Framework, *Management Science,* **42** (1996), 1229–1246.

[12] E. Balas and R. J. Jeroslow, Strengthening Cuts for Mixed Integer Programs, *European J. of Operational Research,* **4** (1980), 224–234.

[13] E. Balas and C. H. Martin, Combinatorial Optimization in Steel Rolling, in: *Proceedings of the DIMACS/RUTCOR Workshop on Combinatorial Optimization in Science and Technology (COST),* Rutgers University (April 1991).

[14] E. Balas and M. Oosten, On the Cycle Polytope of a Directed Graph, *Networks,* **36** (2000), 34–46.

[15] E. Balas and M. Perregaard, A Precise Correspondence Between Lift-and-Project Cuts, Simple Disjunctive Cuts, and Mixed Integer Gomory Cuts for 0–1 Programming, *Mathematical Programming B,* **94** (2003), 221–245.

[16] E. Balas and W. R. Pulleyblank, The Perfectly Matchable Subgraph Polytope of a Bipartite Graph, *Networks,* **13** (1983), 495–518.

[17] E. Balas and W. R. Pulleyblank, The Perfectly Matchable Subgraph Polytope of an Arbitrary Graph, *Combinatorica,* **7** (1989), 321–337.

[18] R. E. Bixby, M. Fenelon, Z. Gu, E. Rothberg and R. Wunderling, Mixed-Integer Programming: A Progress Report, in: M. Grötschel (editor), *The Sharpest Cut.* SIAM/MPS (2004), 309-326.

[19] C. E. Blair, Two Rules for Deducing Valid Inequalities for 0–1 Programs, *SIAM J. of Applied Math.,* **31** (1976), 614–617.

[20] S. Ceria and G. Pataki, Solving Integer and Disjunctive Programs by Lift-and-Project, in: R. E. Bixby et al (editors), *IPCO VI, Lecture Notes in Computer Science* #1412, Springer (1998), 271–283.

[21] G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson and S. M. Johnson, Solution of a Large-Scale Travelling Salesman Problem, *Operations Research,* **2** (1954), 393–410.

[22] J. Edmonds, Maximum Matching and a Polyhedron with 0–1 Vertices, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B,* **69B** (1965), 125–130.

[23] M. Fischetti, A. Lodi and P. Toth, Exact Methods for the Asymmetric Travelling Salesman Problem, in: G. Gutin and A. Punnen (editors), *The Travelling Salesman Problem and Its Variations,* Kluwer (2002), 169–206.

[24] R. E. Gomory, Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs, *Bulletin of the AMS,* **64** (1958), 275–278.

[25] R. E. Gomory, An Algorithm for the Mixed Integer Problem, Technical Report RM-2597, the RAND Corporation (1960).

[26] P. Hall, On Representatives of Subsets, *Journal of the London Mathematical Society,* **10** (1935), 26–30.

[27] P. L. Hammer, E. Johnson and B. Korte (editors), *Discrete Optimization I–II. Annals of Discrete Mathematics,* **4–5** (1979).

[28] R. E. Jeroslow, Representability in Mixed Integer Programming I: Characterization Results, *Discrete Applied Mathematics,* **17** (1987), 223–243.

[29] A. H. Land and A. G. Doig, An Automatic Method for Solving Discrete Programming Problems, *Econometrica,* **28** (1960), 497–500.

[30] L. Lovász and A. Schrijver, Cones of Matrices and Set Functions and 0–1 Optimization, *SIAM Journal of Optimization,* **1** (1991), 166–190.

[31] M. W. Padberg, On the Facial Structure of Set Packing Polyhedra, *Mathematical Programming,* **5** (1973), 199–215.

[32] M. Perregaard, A Practical Implementation of Lift-and-Project Cuts, Paper presented at the 18th International Symposium on Mathematical Programming, Copenhagen (August 2003).

[33] L. Wolsey, Facets of Strong Valid Inequalities for Integer Programs, *Operations Research,* **24** (1976), 367–372.

[34] E. Zemel, Lifting the Facets of 0–1 Polytopes, *Mathematical Programming,* **15** (1978), 268–277.

TARTALOMJEGYZÉK

Modok és Társa Nyomda, Kiskunhalas

Matematikai Lapok

Neumann-különszám
Vendégszerkesztő:
Petz Dénes

2002-2003/2

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat Lapja. Megjelenik évenként kétszer.

Új sorozat 11. évfolyam (2002–2003), 2. szám

(Megjelent 2006-ban)

Szerkesztőség: 1027 Budapest II., Fő u. 68. II. em. 224. Telefon: 225-8410.

Ára:
- A Bolyai János Matematikai Társulat tagjainak ingyenes
- nem társulati tagoknak egy évfolyam 2464 Ft (ÁFÁ-val).

Megrendelhető a szerkesztőségtől.

A NEUMANN-FÉLE MÉRÉS ÉS AZ ENTRÓPIA SZEREPE KVANTUM DINAMIKAI RENDSZEREKBEN

ROBERT ALICKI ÉS MARK FANNES
(Fordította Mosonyi Milán)

1. Neumann János kvantummechanikája

1930-ra Heisenberg, Born és Jordan mátrixmechanikája, valamint Schrödinger hullámmechanikája egyesített formát kapott Dirac [12] könyvében. Ebben az elméletben azonban *„selbswidersprechenden Eigenschaften"*, vagyis önellentmondó tulajdonságokkal rendelkező függvények is szerepet játszottak, ami Neumann Jánost arra késztette, hogy matematikailag precíz formalizmust keressen a kvantummechanikának. 1932-ben megjelent [19] könyvében Neumann bemutatta mind a fizikai elmélet konstrukcióját, mind pedig az ehhez szükséges matematikai eszközöket. Bár jelölésmódja mára némiképp elavult, a könyv a mai olvasó számára is tartogat érdekes gondolatokat, és kétségkívül jóval magasabb matematikai színvonalat képvisel, mint korának hasonló könyvei. A következő rövid összefoglalóban modern jelölésmódot használva mutatjuk be Neumann János elméletének alapjait.

Egy fizikai rendszer leírásához szükséges egy szeparábilis $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, melynek egységvektorai írják le a rendszer lehetséges állapotait[1]. Az állapotvektorok tartalmaznak minden hozzáférhető információt a rendszerről. Egy mérhető $\mathfrak{X}$ fizikai mennyiségnek önadjungált, nem feltétenül korlátos X operátor felel meg. Ezek az operátorok a spektráltételen keresztül egy-egy értelmű módon megfeleltethetők a számegyenes projektormértékeinek. Annak a valószínűsége, hogy egy φ állapotban az $\mathfrak{X}$ fizikai mennyiség a mérhető $M \subset \mathbb{R}$ halmazba eső értéket vesz fel, egyenlő $\|E(M)\,\varphi\|^2$-el. Az $\mathfrak{X}$ mennnyiség tetszőleges függvényének várható értéke így

$$M(F(\mathfrak{X});\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\, d\langle \varphi, E(\lambda)\,\varphi\rangle. \tag{1}$$

Ezután Neumann tárgyalja felcserélhető fizikai mennyiségek együttes várható értékét, a határozatlansági relációkat, projekcióknak igen/nem kérdésként való interpretációját, fotonokat és azok megkülönböztethetetlenségét.

[1] A lineáris analízis itt használt fogalmai, valamint a kvantummechanika Neumann-féle axiómái megtalálhatók a [23] könyvben is.

Neumann levezeti az elmélet statisztikai leírását. Ezen a ponton individuális rendszerek helyett sokaságokkal dolgozik. A véletlennek kétfajta forrása van a méréselméletben: egyrészt a rendszer valódi állapotát illető bizonytalanság, másrészt a mérés kimenetét illető bizonytalanság, amely a kvantummechanika lényegéből fakad. Amellett érvel, hogy nem szükséges rejtett paramétert tartalmazó elméletet használni, és bebizonyítja, hogy egy mérés kimenetelének eloszlása teljesen leírható egy statisztikus operátorral, vagyis egy ρ sűrűségmátrixszal:

$$M(\mathfrak{X}) = \operatorname{Tr} \rho X.$$

A következő pont a statisztikus operátor időfejlődésének kérdése. Kétfajta folyamatot különböztet meg. Az 1-es típus egy fizikai mennyiség mérése során fellépő véletlen változás:

$$\rho \mapsto \Pi_1(\rho) := \sum_j \langle e_j, \rho e_j \rangle P_{[e_j]}; \tag{2}$$

a fizikai mennyiség ebben az esetben nem-elfajuló tiszta pontspektrummal rendelkező önadjungált operátorral írható le, melynek ortonormált bázist alkotó sajátvektorai az $\{e_j\}$ vektorok, a $P_{[e_j]}$ projekciók pedig az általuk kifeszített altérre vetítenek. 2-es típusú folyamatot eredményez a rendszer belső fejlődése, melyet egy önadjungált H Hamilton-operátor ír le:

$$\rho \mapsto \Pi_2(\rho) := e^{-\frac{2\pi i}{h}tH} \rho e^{\frac{2\pi i}{h}tH}.$$

Termodinamikai érvelésre alapozva levezeti egy statisztikus operátor Neumann-entrópiájának alapvető formuláját[2]:

$$S(\rho) = -\operatorname{Tr} \rho \log \rho. \tag{3}$$

Bebizonyítja, hogy a 2-es típusú folyamatok nem változtatják az entrópiát, míg az 1-es típusúak általában növelik, és igazolja az entrópia konkavitását.

Az utolsó fejezetben veti fel a mérés problémáját, és a megkülönböztetés szükségességét a fizikai rendszer és a tudattal bíró megfigyelő között. Megvizsgálja annak a következményeit, ha egy összetett rendszernek csak egy része kerül megfigyelésre. Megmutatja, hogy ebben az esetben automatikusan egy sűrűségoperátort kapunk a részrendszeren, amit a teljes rendszer állapotának Schmidt-felbontása segítségével lehet kifejezni. Végezetül megmutatja, hogy ha egy kezdeti tiszta állapot felváltva 1-es és 2-es típusú folyamatokon megy keresztül, az monoton növekvő entrópiájú statisztikus operátorok sorozatát eredményezi

$$\Pi_1 \circ \Pi_2 \circ \ldots \circ \Pi_2\big(P_{[\varphi]}\big).$$

A kombinált folyamatok hatására fellépő entrópianövekedés alapvető eszköz a kvantum dinamikai rendszerek tanulmányozásában.

[2] Neumann gondolatkísérlete, amely a entrópiaformulához vezet, részletesen elemezve van a [22] munkában.

2. Algebrai kvantumelmélet

A kvantumelmélet későbbi fejlődésében a hangsúly áthelyeződik a Hilbert-tér szintjéről a mérhető mennyiségek szintjére. A mérhető mennyiségek algebrai struktúrájának hangsúlyozása nem olyan fontos kis rendszerek, mint például atomok vagy molekulák leírásában, azonban lényegesen áttekinthetőbb tárgyalásmódot tesz lehetővé a térelméletben vagy a kvantum statisztikus fizikában. Átfogó hivatkozás ebben a témakörben a [6] monográfia.

Az első alapkérdés ezen a téren az volt, hogyan lehetne mehghatározni az összes lehetséges realizációját a hely és az impulzus közötti alapvető $[P, Q] = -i\hbar$ felcserélési relációnak. Mivel a reláció fennállásához legalább az egyik operátornak nem korlátosnak kell lennie, ezért a problémát inkább Weyl-operátorokra átfogalmazva tárgyalták, vagyis keresték az összes olyan folytonos egyparaméteres

$$\mathbb{R} \ni q \mapsto u(q) \; (= \mathrm{e}^{iqQ}) \quad \text{és} \quad \mathbb{R} \ni p \mapsto v(p) \; (= \mathrm{e}^{ipP})$$

unitér csoportokat, amelyek kielégítik az

$$u(q)v(p) = e^{i\hbar pq} v(p)u(q)$$

felcserélési relációt. A kérdést Stone és Neumann oldotta meg: minden ilyen tulajdonságú reprezentráció a standard reprezentáció valahányszoros direkt összegeként áll elő, ahol a standard reprezentációt a szokásos, $L^2(\mathbb{R})$-en értelmezett hely- és impulzus operátor határozza meg. Az egyértelműségi tétel azt mutatja, hogy az algebrai megközelítés a kvantummechanika szokásos keretein belül legfeljebb esztétikai jelentőséggel bír.

A helyzet lényegesen megváltozik, ha végtelen sok részecskét tartalmazó rendszerek leírására kerül a sor. Már végtelen sok független részecske leírásához is szükségessé válik a nem teljes tenzorszorzatok bevezetése; a végtelen elemi tenzorok aszerint osztályozódnak, hogy faktoraik hogyan viselkednek a végtelenben. Ez Hilbert-terek sokaságát definiálja, melyek mindegyike globálisan invariáns olyan operátorok hatására nézve, melyek csak véges sok részecskét érintenek, azonban a különböző osztályokhoz tartozó vektorok merőlegesek egymásra.

Néhány rendkívül figyelemre méltó cikkben Murray és Neumann megalkotta az operátorgyűrűk, vagy mai nevükön Neumann-algebrák, elméletét [18]. Ezek korlátos operátorok olyan $\mathfrak{M}^*$-algebrái, melyek tartalmazzák az identitás operátort, és zártak a gyenge operátor topológiára nézve. Az alapvető jelentőségű bikommutáns tétel szerint $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}''$, ahol $\mathfrak{M}'$ az $\mathfrak{M}$ algebra kommutánsa, vagyis azon operátorok összessége, amelyek felcsrélhetők $\mathfrak{M}$ minden elemével. Ez az eredmény tehát összekapcsolja egy algebra topológiai és szimmetria tulajdonságait[3].

A '60-as években Segal, Gelfand, Kastler és mások munkája nyomán a végtelen rendszerek kinematikai leírásának még absztraktabb elmélete bontakozott ki: Egy absztrakt $\mathcal{A}$ C*-algebra tartalmazza az összes információt a rendszeren mérhető fizikai mennyiségekről, ilymódon meghatározva az alkotórészek természetét,

[3]Neumann operátoralgebrai munkásságát összefoglalja a [24] dolgozat.

statisztikáját, a geometriai kényszereket, stb. Az időfejlődést és általánosabban a szimmetriákat az algebra automorfizmusai írják le. A harmadik fontos tényező egy várható érték funkcionál ω, vagy más néven egy állapot, ami meghatároz egy kvantum valószínűségi mértéket a mérhető mennyiségeken. Ez a fajta leírás különösen jól használható például a rácson adott spinrendszerek tanulmányozásában.

Az egyik központi jelentőségű eredmény a Gelfand–Naimark–Segal-konstrukció, ami megmutatja, hogy egy $(\mathcal{A}, \omega)$ kvantum valószínűségi modell egyértelműen indukál egy Hilbert-tér modellt, azaz létezik egy kanonikus Hilbert-tér $\mathcal{H}_\omega$, egy kitüntetett Ω_ω egységvektorral, valamint egy $\pi_\omega : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H}_\omega)$ reprezentáció, amelyre $\pi_\omega(\mathcal{A})\,\Omega_\omega$ sűrű $\mathcal{H}_\omega$-ban, és

$$\omega(x) = \langle \Omega_\omega, \pi_\omega(x)\,\Omega_\omega \rangle \quad (x \in \mathcal{A}). \tag{4}$$

Ha ezenfelül az ω állapot invariáns a Θ időfejlődésre nézve, akkor egyértelműen létezik egy unitér operátor U_ω, melyre

$$\pi_\omega\big(\Theta(x)\big) = U_\omega^* \,\pi_\omega(x)\, U_\omega \quad (x \in \mathcal{A}), \qquad \text{és} \qquad U_\omega\,\Omega_\omega = \Omega_\omega. \tag{5}$$

A '70-es és a '80-as években számos kutatás koncentrált a kvantum statisztikus mechanika és a térelmélet szempontjából fizikailag releváns állapotok általános tulajdonságainak felderítésére és tanulmányozására. Alapállapotok és egyensúlyi állapotok központi szerepet játszottak ebben a kutatásban. A végtelen rendszerek egyensúlyi állapotának elmélete vezetett a Kubo–Martin–Schwinger-peremfeltétel felfedezéséhez. A Tomita–Takesaki-elmélettel való összefüggés hamarosan összekapcsolta a KMS-feltételt a Neumann-algebrák elméletének egyik fő kutatási területével.

További fontos előrelépés volt a kvantum mérések és nyílt kvantum rendszerek tanulmányozása, különös tekintettel a teljesen pozitív leképezések jelentőségére disszipatív kvantum rendszerek algebrai tárgyalásában. A teljes pozitivitás a lokalitással összekapcsolva többkomponensű rendszerekben mára a kvantuminformációelmélet egyik alapvető fogalma lett [20].

3. Kvantum mérések és nyílt rendszerek

A Neumann által bevezetett 1-es típusú folyamatok, lásd (2), olyan ideális méréseket írnak le, ahol a megfelelő operátorok nem-elfajuló tiszta pontspektrummal rendelkeznek. Ez a fajta leírás azonban nem volt alkalmas a mérési folyamat realisztikusabb vizsgálatára. Különböző szerzők továbbfejlesztették az elméletet [8, 10, 15, 11], és bevezették a POVM (pozitív-operátor-értékű mérték) fogalmát, ami a projektormérték általánosítása, és alkalmas nem éles kvantummechanikai mennyiségek mérésének leírására. A POVM-ek ugyanazon tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a projektormértékek, azzal a különbséggel, hogy egy mérhető halmazhoz rendelt operátornak nem feltétlenül kell projekciónak lennie, elég, ha pozitív operátor.

Egy nem éles valósértékű mérhető mennyiséghez tartozó POVM egy E leképezés a valós számok Borel-halmazairól a $\mathcal{H}$ Hilbert-tér korlátos operátorai halmazába, amelyre

- $E(M) \geq 0$, ha M a számegyenes Borel-mérhető részhalmaza,
- $E(\mathbb{R})$ az identitás,
- $E(\cup_j M_j) = \sum_j E(M_j)$ páronként diszjunkt halmazok minden (M_j) sorozatára.

Egy adott ρ állapotra az E POVM meghatároz egy valószínűségi mértéket $\mathbb{R}$-en,

$$M \mapsto \mathrm{Tr}\left(\rho\, E(M)\right),$$

amely minden statisztikai információt tartalmaz a mérés lehetséges kimeneteleiről.

Egy $A = \int \lambda\, dE_A(\lambda)$ spektrális felbontásával adott önadjungált operátorból, mint éles mérhető mennyiségből tipikusan egy $f(x, y)$ konfidencia mérték bevezetésével konstruálható POVM; itt $f(x, y) \geq 0$ és $\int f(x, y)\, dx = 1$. Ennek segítségével definiálható az A mennyiség „elkent" verziója, ami az alábbi POVM:

$$E(M) := \int_M \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\, d(E_A) y \right) dx$$

Egy másik példa kapható Neumann gondolatmenetét követve, aki a mérést az S rendszer és egy mérőműszer közötti kölcsönhatási folyamatnak tekintette. Maga mérőműszer szintén egy kvantum rendszer, de rendelkezik egy $A = \int \lambda\, dE_A(\lambda)$ úgynevezett mutató mennyiséggel, ami közvetlenül mérhető. Feltéve, hogy a műszer eredetileg a ϕ állapotban volt, és a rendszerrel való kölcsönhatása egy U unitér operátorral modellezhető, be lehet vezetni egy POVM-et a rendszeren a

$$\mathrm{Tr}\left(\rho E(M)\right) := \mathrm{Tr}\left(U\left(\rho \otimes |\phi\rangle\langle\phi|\right)U^* I \otimes E_A(M)\right) \tag{6}$$

formulával, ahol ρ tetszőleges állapot S-en. Észrevehető, hogy a (6)-ban definiált POVM a következő formájú:

$$E(M) = P_A U^* E_A(M) U P_A,$$

ahol P_A a $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}$ Hilbert-tér $\mathcal{H}_S \otimes \psi$ ($\mathcal{H}_S$-sel azonosítható) alterére való ortogonális projekció. Hasonlóan, $I \otimes E_A$ azonosítható E_A-val. Neumark dilatációs tétele szerint bármely POVM megkapható egy nagyobb Hilbert-téren ható projekciómértékből egy megefelelő ortogonális projekció segítségével.

A (6)-os formula kapcsolatot teremt a mérések és a nyílt kvantum rendszerek elmélete között. Az utóbbi témája egy, a környezetével kölcsönható S kvantum rendszer redukált dinamikájának vizsgálata; egy ilyen dinamika az S rendszer redukált sűrűségmátrixain ható irreverzibilis leképezésekkel írható le [5, 7]. A (6) formula segítségével definiálható egy $M \mapsto \Lambda(M)$ mérték $\mathcal{B}(\mathbb{R})$-en, mely értékeit a pozitív nyomoperátorokon ható pozitív affin leképezések halmazából veszi:

$$\mathrm{Tr}\,\big(B\,\Lambda(M)\rho\big) := \mathrm{Tr}\,\Big(U\big(\rho \otimes |\phi_A\rangle\langle\phi_A|\big)U^*\,B \otimes E_A(M)\Big), \qquad B \in B(\mathcal{H}_S). \tag{7}$$

A Λ leképezés egy szuperoperátor-értékű mérték vagy más néven transzformáció-értékű mérték, amelyre

- $\Lambda(M)\rho \geq 0$, ha $M \in B(\mathbb{R})$ és $\rho \geq 0$,
- $\Lambda(\cup_j M_j) = \sum_j \Lambda(M_j)$ páronként diszjunkt Borel-halmazok sorozataira.

A normálással kapott

$$\rho'(M) := \frac{\Lambda(M)\rho}{\mathrm{Tr}\,\big(\Lambda(M)\rho\big)}$$

sűrűségmátrix tekinthető egy mérés utáni feltételes állapotnak, ahol a feltétel az, hogy a mutató mennyiség értéke az M Borel-halmazba esik. Az A mérőműszerre vett parciális nyommal kapott $\Lambda := \Lambda(\mathbb{R})$ operáció, vagyis

$$\Lambda\rho := \mathrm{Tr}_A\,\Big(U\big(\rho \otimes |\phi_A\rangle\langle\phi_A|\big)U^*\Big) \tag{8}$$

egy dinamikai leképezést határoz meg a Schrödinger-képben, amely az S rendszer állapotát írja le a mérés után, amennyiben a mutató mennyiség értéke nem kerül leolvasásra.

Gyakran hasznosabb a dinamikai leképezéseket Heisenberg-képben tekinteni; ezt a

$$\mathrm{Tr}\,\big(B\,\Lambda(M)\rho\big) = \mathrm{Tr}\,\big(\rho\,\Lambda^*(M)B\big), \qquad B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_S),\ \rho \text{ sűrűségmátrix } \mathcal{H}_S\text{-en}$$

összefüggést kielégítő $\Lambda^*(M)$ leképezések határozzák meg. Speciálisan a (7) formulával adott Λ nem éles mennyiség felírható az

$$E(M) = \Lambda^*(M)I$$

formában.

A (8) formula matematikai struktúrája univerzális abban az értelemben, hogy leírja bármely olyan nyílt kvantumrendszer redukált dinamikáját, amely kölcsönhat egy kvantum tárolóval, mely eredetileg a ψ_A állapotban van. Az egyetlen fizikai feltételezés, hogy az összetett rendszer eredetileg szorzat állapotban van; ez gyakorlatilag nem más, mint a gyenge csatolási feltétel. Nem csorbítja az általánosságot, ha a környezet állapotát tisztának tételezzük fel, hisz bármely állapotot lehet „purifikálni" egy extra kvantumrendszer bevezetésével.

A $\Lambda(M)$ leképezések teljesen pozitívak, ami ekvivalens a következő Kraus-felbontással:

$$\Lambda(M)\rho = \sum_j X_j \rho X_j^* \qquad \text{és} \qquad \Lambda^*(M)B = \sum_j X_j^* B X_j, \tag{9}$$

ahol az $\{X_j\}$ korlátos operátorok között teljesül a $\sum_j X_j^* X_j \leq I$ összefüggés. Az $\{X_j\}$ operátorok megválasztása messze nem egyértelmű, ezenkívül a j-re vett összegzés helyett állhat integrálás. Egy d-dimenziós Hilbert-térrel leírható rendszer esetén elég legfeljebb d^2 tagot venni a (9) felírásban. Egy dinamikai leképezés nyomtartó volta a következő három ekvivalens feltétellel jellemezhető:

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{Tr}(\Lambda\rho) = \operatorname{Tr}\rho, \qquad \Lambda^* I = I, \qquad \text{vagy} \qquad \sum_j X_j^* X_j = I.$$

Végezetül pedig Stinespring dilatációs tétele szerint bármely teljesen pozitív dinamikai leképezés felírható redukált dinamika formájában (8).

4. Az entrópia tulajdonságai

Egy véges *abc*-n adott $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ valószínűségeloszlás információtartalmának klasszikus, Shannon-féle

$$H(\lambda) = \sum_{j=1}^{d} -\lambda_j \log \lambda_j$$

formulája [25] levezethető néhány egyszerű feltételből, úgymint folytonosság, az *abc* betűinek permutációjára vett invariancia, valamint a

$$H(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d) = H(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_d) + (\lambda_1 + \lambda_2)\, H\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)$$

kompatibilitási feltétel ([21], második fejezet). Ha úgy értelmezzük a λ mértéket, mint ami az $\{1, 2, \ldots, d\}$ szimbólumok előfordulási gyakoriságát adja meg valamely információforrás által kibocsájtott üzenetben, akkor H méri egy tipikus üzenet átlagos információtartalmát. Egy másik lehetséges értelmezés szerint H az üzenetek előállításának bizonytalanságát méri, és egy fontos Boltzmann-típusú tulajdonsága H-nak, hogy a forrás lényegében csak $\exp(nH)$ darab n hosszúságú üzenetet bocsájt ki.

A kvantummechanikában azonban mindig jelen van bizonytalanság, még akkor is, ha egyébként tökéletesen ismerjük a φ hullámfüggvény által kódolt rendszert. Valóban, az $\mathfrak{X}$ önadjungált mérhető mennyiség függvényeinek várható értékét a $\langle\varphi, E(\lambda)\,\varphi\rangle$ spektrálmérték adja meg, mint az (1) formulában. Természetesen egy ilyen tiszta állapotnak nulla entrópiája kell, hogy legyen. Ezenkívül az sem világos, hogy interpretálható egy sűrűségmátrix, mint tiszta állapotok sokasága. Egy d pontból álló konfigurációs téren adott valószínűségi mérték egyértelműen bontható fel Dirac-mértékek konvex kombinációjára, s így egyértelműen meghatároz egy sokaságot. A kvantummechanikában azonban egy sűrűségmátrix tiszta állapotok konvex kombinációjaként való előállítása messze nem egyértelmű, és így egy sűrűségmátrix egyszerre számtalan sokaságot definiál. Kiderül azonban, hogy a Neumann-entrópia továbbra is rendelkezik a fentinek megfelelő Boltzmann-típusú tulajdonsággal.

Egy sűrűségmátrix $S(\rho)$ entrópiája (3) alapvető matematikai tulajdonságainak tanulmányozásához fontos az entrópiafüggvény viselkedését ismerni összetett rendszerek esetén. Bár sok tulajdonság a klasszikus eset megfelelője, a bizonyítások általában nehezek és kifinomult matematikai eszközöket igényelnek [28, 21]. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy minden rendszer véges dimenziós Hilbert-térrel írható le. Általánosabb esetek természetesen szintén kezelhetők, megfelelő technikai feltételek mellett. Ha ρ^{12} jelöli egy kétkomponensű rendszer sűrűségmátrixát, akkor ρ^1 az első komponensre vett megszorítás, vagyis ρ^{12}-nek a második rendszerre vett parciális nyoma.

Egy n-dimenziós rendszer esetén $0 \leq S(\rho) \leq \log n$. A szélső értékek tiszta állapotokon vétetnek fel, melyekre $S = 0$, illetve a normált nyomon, melyre $S = \log n$. Mi több, S értéke csak ρ sajátértékeitől függ, s így invariáns bármely szimmetria transzformációra nézve. Az entrópia konkáv függvény:

$$\sum_{j=1}^{d} \lambda_j S(\rho_j) \leq S\Big(\sum_{j=1}^{d} \lambda_j \rho_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{d} \lambda_j S(\rho_j) + H(\lambda)$$

(Prop. 1.6 [21]-ben). Speciálisan, kevertebb állapotnak nagyobb az entrópiája. Végül, a $\rho \mapsto S(\rho)$ függvény folytonos, de a folytonosság foka sajnos függ ρ dimenziójától, ami nagy rendszerek tárgyalásában a technikai problémák egyik fő oka [13].

Kétkomponensű rendszerek esetén a legszembetűnőbb különbség a klasszikus esethez képest, hogy az entrópia $S(\rho^1) \leq S(\rho^{12})$ monotonitása nem feltétlenül teljesül. Ami azt illeti, bármely adott ρ^1 sűrűségmátrixnak létezik egy ρ^{12} kiterjesztése egy nagyobb rendszerre, melyre $S(\rho^{12}) = 0$. Ezt a konstrukciót purifikációnak hívják, és valójában nem más, mint a GNS konstrukció (4). A részrendszerek közötti tipikus kvantum korrelációk, melyek ezt lehetővé teszik, szolgáltatják többek között az alapot a kvantum kommunikácós és számítási eszközök kifejlesztéséhez. Mi több, ha ρ^{12} tiszta, akkor ρ^1-nek és ρ^2-nek megegyeszik az entrópiája. Az $S(\rho^{12}) - S(\rho^2)$ különbséget kvantum feltételes információnak hívják, bár általában felvehet negatív értékeket is. Megmutatható, hogy ez a mennyiség folytonos, mégpedig a második rendszerre nézve egyenletesen [2]. Ezenkívül az entrópia szubadditív

$$S(\rho^{12}) \leq S(\rho^1) + S(\rho^2),$$

és egyenlőség pontosan akkor áll, ha a két részrendszer független, azaz $\rho^{12} = \rho^1 \otimes \rho^2$. Végezetül

$$\big|S(\rho^1) - S(\rho^2)\big| \leq S(\rho^{12}).$$

A legnagyobb jelentőségű eredmény az entrópia erős szubadditivitása:

$$S(\rho^{123}) + S(\rho^2) \leq S(\rho^{12}) + S(\rho^{23}). \tag{11}$$

Ezen egyenlőtlenség bizonyítása hosszú ideig nyitott probléma volt, melyet először Lieb és Ruskai oldott meg [16]. A fenti entrópia egyenlőtlenségek mind levezethetők (11)-ből, mint speciális esetek, esetleg purifikáció használatával. Az egyenlőség teljesülése (11)-ben nagyon erős megszorítást jelent ρ^{123} struktúrájára nézve: lásd [14]. Viszonylag egyszerű bizonyítás adható (11)-re a relatív entrópia

$$S(\rho \mid \sigma) := \operatorname{Tr} \rho(\log \rho - \log \sigma)$$

fogalmának felhasználásával (lásd Prop. 1.9 [21]-ben). A relatív entrópiának szemléletes interpretáció adható pl. a kvantum statisztikus fizika keretein belül, mint egy tetszőleges és az egyensúlyi állapot szabadenergiájának különbsége. A KMS illetve a Tomita–Takesaki-elméleten belül egyszerű formula adható a relatív entrópiára a relatív moduláris operátor segítségével. Megmutatható, hogy az erős szubadditivitás ekvivalens egyrészről a relatív entrópia monotonitásával teljesen pozitív nyomtartó leképezések hatása alatt [17, 26, 21]

$$S(\Lambda\rho \mid \Lambda\sigma) \leq S(\rho \mid \sigma),$$

másrészről a relatív entrópia mindkét változójában vett együttes konvexitásával

$$S\Big(\sum_{j=1}^{d} \lambda_j \rho_j \;\Big|\; \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \sigma_j\Big) \leq \sum_{j=1}^{d} \lambda_j S(\rho_j \mid \sigma_j).$$

Eltolásinvariáns rácsrendszerek esetén a véges résztérfogatokra vett entrópiák monotonitása bizonyítható az erős szubadditivitás segítségével.

5. Entrópiatermelés klasszikus rendszerekben

Ebben a fejezetben klasszikus dinamikai rendszereket tekintünk, melyek egy Γ fázistérrel, egy μ valószínűségi mértékkel, valamint egy diszkrét idejű dinamikával adhatók meg. A dinamika itt egy mértéktartó és invertálható leképezés,

$$T : \Gamma \mapsto \Gamma, \qquad \mu(G) = \mu\big(T(G)\big) = \mu\big(T^{-1}(G)\big).$$

Elsőként Koopman és Neumann vették észre, hogy a Hilbert-tér operátorok kvantum formalizmusa rendkívül hasznos lehet ilyen rendszerek tanulmányozásában. A (Γ, μ, T) hármashoz hozzá lehet rendelni egy $(L^2(\Gamma, \mu), U_T)$ párt, ahol $L^2(\Gamma, \mu)$ a négyzetesen integrálható függvények tere Γ-n, U_T pedig a következő unitér operátor:

$$(U_T\psi)(x) := \psi\big(T(x)\big), \qquad \psi \in L^2(\Gamma, \mu).$$

A T leképezés számos lényeges ergodikus tulajdonsága tárgyalható az U_T operátor spektrális tulajdonságai segítségével. A következőkben megmutatjuk, hogy a Kolmogorov–Sinai-entrópia fogalma bevezethető ilyen típusú kvantummechanikai rendszerekben. Ez természetesen csak egy matematikai általánosítás, közvetlen fizikai értelmezés nélkül.

Bevezetésképp felidézzük a KS-entrópia konstrukciójának alaplépéseit. A Γ tér egy mérhető $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ partíciójához hozzárendelhető egy entrópia mennyiség:

$$H(C) := -\sum_{j=1}^{k} \mu(C_j) \log \mu(C_j).$$

A C és D partíciók közös finomítása az a $C \vee D$ partíció, amely az összes lehetséges $C_j \cap D_i$ metszetekből áll. Egy adott C partíció esetén a dinamika n lépése egy finomított

$$C^{(n)} := T^{-n+1}C \vee T^{-n+2}C \vee \cdots \vee T^{-1}C \vee C$$

partíciót eredményez, ahol $T^{-m}C := \{T^{-m}(C_1), T^{-m}(C_2), \ldots, T^{-m}(C_k)\}$. Ezek után definiálhatjuk a partíció dinamikai entrópáját

$$h(C,T) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H\big(C^{(n)}\big),$$

és a T leképezés KS- (vagy dinamikai) entrópiáját:

$$h(T) := \sup_{C} h(C,T). \tag{12}$$

A fenti konstrukció megismételhető a Hilbert-tér formalizmusban. Jelölje Ω a konstans 1 függvényt, amely egy 1 normájú vektor az $L^2(\Gamma,\mu)$ Hilbert-térben, és $U_T\Omega = \Omega$. A C partícióhoz hozzárendelhetjük ortogonális projekciók egy $\mathbf{P}_C := (P_{C_1}, P_{C_2}, \ldots, P_{C_k})$ családját, ahol

$$(P_C\phi)(x) := \mathbf{1}_C(x)\,\phi(x);$$

itt $\mathbf{1}_C$ jelöli a C halmaz karakterisztikus függvényét. Ez a projekciócsalád egy diszkrét projekció értékű mértéket, vagy másnéven egy egységfelbontást határoz meg,

$$\sum_{j=1}^{k} P_{C_j} = I \qquad \text{és} \qquad P_{C_i} P_{C_j} = \delta_{ij} P_{C_i}.$$

Ω és $\mathbf{P}_C$ segítségével definiálhatunk egy

$$\rho_C := \sum_{j=1}^{k} P_{C_j}\, |\Omega\rangle\langle\Omega|\, P_{C_j}$$

sűrűségmátrixot, melynek Neumann-entrópiája

$$S(\rho_C) = -\sum_{j=1}^{k} \|P_{C_j}\Omega\|^2 \log \|P_{C_j}\Omega\|^2 = H(C).$$

Felváltva alkalmazva a $\mathbf{P}_C$ által meghatározott mérést és az U_T unitér dinamikát, sűrűségmátrixok egy időfüggő

$$\rho_C(n) := \sum_{j_n=1}^{k} \cdots \sum_{j_1=1}^{k} U_T P_{C_{j_n}} \cdots U_T P_{C_{j_1}} |\Omega\rangle\langle\Omega| P_{C_{j_1}} U_T^* \cdots P_{C_{j_n}} U_T^*$$

sorozatát nyerjük, mely röviden a

$$\rho_C(n) = \left[\mathcal{U}_T \Lambda_P\right]^n |\Omega\rangle\langle\Omega|$$

formában írható, ahol

$$\mathcal{U}_T \rho := U_T \rho U_T^* \qquad \text{és} \qquad \Lambda_P \rho := \sum_j P_{C_j} \rho P_{C_j}.$$

Kihasználva, hogy $U P_C U^* = P_{T^{-1}(C)}$, könnyen megmutatható az

$$S\big(\rho_C(n)\big) = H\big(C^{(n)}\big)$$

összefüggés. Így mindkét dinamikai entrópia, $h(C,T)$ és $h(T)$, kifejezhető egy olyan képzeletbeli kvantum rendszer entrópiatermelésének segítségével, amelyen méréseket hajtunk végre.

A fenti konstrukció általánosítható egy $F = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$ egységosztás bevezetésével, ahol az f_j-k mérhető komplex értékű függvények Γ-n, melyekre teljesül a

$$\sum_{j=1}^{k} \left|f(x)\right|^2 = 1, \quad x \in \Gamma$$

normálási feltétel. Az f_j függvények azonosíthatók a megfelelő szorzásoperátorokkal

$$(f\psi)(x) := f(x)\,\phi(x),$$

melyek segítségével konstruálható egy transzformáció-értékű mérték

$$M \mapsto \Lambda_{\mathbf{F}}(M); \qquad \Lambda_{\mathbf{F}}(M)\rho := \sum_{j\in M} f_j \rho f_j^*,$$

valamint egy megfelelő POVM

$$M \mapsto E_{\mathbf{F}}(M); \qquad \big(E_{\mathbf{F}}(M)\psi\big)(x) := \sum_{j\in M} \left|f_j(x)\right|^2 \psi(x).$$

A KS-entrópia ismét megkapható a nem éles mérés és az unitér dinamika felváltva való hattatásával:

$$h(T) = \sup_F \left\{ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} S\big(\rho_F(n)\big) \right\}; \qquad \rho_F(n) = \left[\mathcal{U}_T \Lambda_F\right]^n |\Omega\rangle\langle\Omega|.$$

A szuprémumot vehetjük az összes $F = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$ partícióra nézve, illetve folytonos (sima) T dinamikai leképezés esetén szorítkozhatunk folytonos (sima) f_j függvényekre. Speciális esetekben a KS-entrópia kiszámítása egyszerűsíthető az eredeti (12) definícióhoz képest, megfelelően választott nem éles felbontások használatával [4].

6. Entrópiatermelés kvantum rendszerekben

Bár a klasszikus dinamikai rendszerek kvantum reprezentációja csupán egy kényelmes matematikai eszköz, a KS-entrópia fentebb bemutatott konstrukciója jó kiindulási alap lehet a megfelelő kvantum mennyiség definíciójához. Vannak azonban más lehetséges megközelítések is, melyek – a klasszikus esettel ellentétben – gyakran lényegesen különböző kvantum dinamikai entrópia fogalmakhoz vezetnek [9, 27].

A következőkben olyan egységes algebrai formalizmust használunk, amely egyaránt alkalmas klasszikus rendszerek, véges dimenziós kvantum rendszerek, kvantum mezők és kvantum rendszerek termodinamikai limeszének leírására. Ugyanakkor a GNS-konstrukció (lásd (4) és (11)) segítségével bármely absztrakt algebrai dinamikai rendszer tárgyalható a Hilbert-tér formalizmusban is. Ebben a reprezentációban az $\mathcal{A}$ C*-algebra absztrakt elemei a $\mathcal{H}_\omega$ Hilbert-tér korlátos operátoraiként jelennek meg, az Ω_ω vektor ciklikus a reprezentációra nézve, és az állapotot az $|\Omega_\omega\rangle\langle\Omega_\omega|$ egydimenziós projekció adja. A Θ dinamika reprezentáltja az U_ω unitér operátor, amely fixen hagyja az Ω_ω vektort.

Ezekután veszünk egy egységosztást, (10)-hez hasonlóan,

$$X = (X_1, X_2, \ldots, X_k) \qquad \text{és} \qquad \sum_{j=1}^{k} X_j^* X_j = I,$$

valamint az általa meghatározott teljesen pozitív nyomtartó leképezést $\mathcal{H}_\omega$ sűrűségmátrixain

$$\Lambda_X \rho := \sum_{j=1}^{k} \pi_\omega(X_j)\, \rho\, \pi_\omega(X_j^*).$$

Ismét felváltva hattatjuk az $\mathcal{U}_\Theta(\rho) := U_\omega^* \rho U_\omega$ dinamikát és Λ_X-et az $|\Omega_\omega\rangle\langle\Omega_\omega|$ referenciaállapoton, és megvizsgáljuk a

$$\rho_X(n) := \left[\mathcal{U}_T \Lambda_{\mathbf{F}}\right]^n |\Omega\rangle\langle\Omega|$$

sűrűségmátrix viselkedését nagy n időkre. Így kapunk egy partíciófüggő

$$h(\Theta, X) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} S\big(\rho_X(n)\big)$$

dinamikai entrópiát és magát a dinamikai entrópiát:

$$h(\Theta, \mathcal{A}_0) := \sup_{X \subset \mathcal{A}_0} h(\Theta, X).$$

Az utóbbi formulában $\mathcal{A}_0$ egy (általában sűrű) részalgebráját jelöli $\mathcal{A}$-nak, amely invariáns a dinamikára nézve. A partíciókra tett ezen megszorítás bizonyos regularitási tulajdonságot jelent a megengedett mérhető mennyiségekre nézve. Konkrét példákban általában nehéz feladat eldönteni, hogy ez a feltétel valóban szükséges-e.

A fentebb ismertetett entrópia számos konkrét példában explicite kiszámolható [1]. Mint azt az ötödik fejezetben láttuk, a klasszikus rendszerek speciális esetként jelennek meg az általános konstrukcióban, és ebben az esetben az itt ismertetett kvantum entrópia fogalom megegyezik a KS-invariánssal. A tanulmányozott rendszerek közé tartozik számos eltolás dinamika, mint például az eltolások a kvantum spinláncon, a szabad eltolás valamint a Powers–Price-eltolás, ezenkívül a nemkommutatív tórusz automorfizmusai és a kváziszabad fermion automorfizmusok.

Befejezésül megemlítünk egy kapcsolódási pontot a dinamikai entrópia és nemegyensúlyi rendszerek között [3]. Tekintsünk egy végtelen kiterjedésű alacsony sűrűségű fermion rendszert, ahol egy effektív egyrészecske dinamika jó közelítést jelent. Feltesszük, hogy a kezdeti eloszlás teljesen homogén. Ezek után bevezetünk egy lokális „csapdát" a rendszerben; a csapdával érintkező részecskék kikerülnek a rendszerből. Felváltva hattatva a csapdát és egy diszkrét idejű dinamikát modellezhetjük a csapdába hulló részecskék folyamát, melynek intenzitását a $J(t)$ áram adja meg t időpillanatban. A J áram aszimptotikus viselkedése nyilván információt szolgáltat a rendszeren belüli részecske transzportról. Megmutatható, hogy ez az áram összekapcsolható a rendszer dinamikai entrópia termelésével:

$$\Delta S(t) \geq cJ(t), \tag{13}$$

ahol c egy megfelelő konstans. Még abban az esetben is, ha az áram aszimptotikusan eltűnik, a (13) egyenlőtlenség hasznos információt szolgáltat az exponensekről, melyek meghatározzák a dinamikai entrópia szublineáris növekedését. Ráadásul a J áram exponensei összefüggenek a dinamika spektrális exponenseivel.

Irodalom

[1] R. Alicki and M. Fannes, *Quantum Dynamical Systems,* Oxford University Press (Oxford, 2001).

[2] R. Alicki and M. Fannes, Continuity of quantum conditional information, *J. Phys. A,* **37** (2004), L55–L57.

[3] R. Alicki, M. Fannes, B. Haegeman and D. Vanpeteghem, Coherent transport and dynamical entropy for fermionic systems, *J. Stat. Phys.,* **113** (2003), 549–574.

[4] R. Alicki, J. Andries, M. Fannes and P. Tuyls, An algebraic approach to the Kolmogorov–Sinai entropy, *Rev. Math. Phys.,* **8** (1996), 167–84.

[5] R. Alicki and K. Lendi, *Quantum Dynamical Semigroups and Applications,* Springer (Berlin, 1987).

[6] O. Bratteli and D. W. Robinson, (1979), *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1. C^*- and W^*-Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States,* Springer (Berlin); *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2. Equilibrium States. Models in Quantum Statistical Mechanics,* Springer (Berlin, Második kiadás, 1997).

[7] H. P. Breurer, and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems,* Oxford University Press (Oxford, 2002).

[8] P. Busch, M. Grabowski and P. J. Lahti, *Operational Quantum Physics,* Springer-Verlag, Berlin (1995).

[9] A. Connes, H. Narnhofer and W. Thirring, Dynamical entropy of C^*-algebras and von Neumann algebras, *Commun. Math. Phys,* **112** (1987), 691–719.

[10] E. B. Davies,, *Quantum Theory of Open Systems,* Academic Press (London, 1976).

[11] E. B. Davies and J. T. Lewis, An operational approach to quantum probability, *Commun. Math. Phys.,* **17** (1970), 239–59.

[12] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (1930).

[13] M. Fannes, A continuity property of the entropy density for spin lattice systems, *Commun. Math. Phys.,* **31** (1973), 291–294.

[14] P. Hayden, R. Jozsa, D. Petz and A. Winter,. Structure of states which satisfy strong subadditivity of quantum entropy with equality, *Commun. Math. Phys.,* **246** (2004), 359–374.

[15] K. Kraus, States, Effects, and Operations, *Lecture Notes in Physics,* **190**, Springer (Berlin, 1983).

[16] E. H. Lieb and M. B. Ruskai, Proof of the strong subadditivity of quantum mechanical entropy, *J. Math. Phys.,* **14** (1973), 1938–41.

[17] G. Lindblad, Completely positive maps and entropy inequalities, *Commun. Math. Phys.,* **40** (1975), 147–51.

[18] F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators, *Annals of Mathematics,* **37** (1936), 116–229. On rings of operators II, *Transactions of the American Mathematical Society,* **41** (1937), 208–248. On rings of operators IV, *Annals of Mathematics,* **44** (1943), 716–808.

[19] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik,* Springer, Berlin, *Foundations of Quantum Mechanics, 1955,* Princeton University Press (Princeton, 1932).

[20] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information,* Cambridge University Press (Cambridge, 2000).

[21] M. Ohya and D. Petz, *Quantum Entropy and Its Use,* Springer (Berlin, Második kiadás 2004) (1993).

[22] D. Petz, Entropy, von Neumann and the von Neumann entropy, in: *John von Neumann and the Foundations of Quantum Physics,* szerk. M. Rédei and M. Stöltzner, Kluwer (2001).

[23] Petz D., *Lineáris analízis,* Akadémiai Kiadó (2002).

[24] D. Petz and M. Rédei,. John von Neumann and the theory of operator algebras, in: *The Neumann Compendum,* szerk. F. Bródi, T. Vámos, World Scientific Series in 20th Century Math. vol. 1, World Scientific (Singapore, 1995), 163–185.

[25] C. Shannon, *Bell Systems Technical Journal,* Reprinted in C. E. Shannon and W. Weaver (1948), *The Mathematical Theory of Communication,* University of Illinois Press (Urbana, 1949).

[26] A. Uhlmann, (1977). Relative entropy and the Wigner–Yanase–Dyson concavity in an interpolation theory, *Commun. Math. Phys.,* **54**, 21–32.

[27] D. V. Voiculescu, Dynamical approximation entropies and topological entropy in operator algebras, *Commun. Math. Phys.,* **144** (1992), 443–90.

[28] A. Wehrl, General properties of entropy, *Rev. Mod. Phys.,* **50** (1978), 221–60.

Robert Alicki and Mark Fannes: Quantum dynamics, measurement and entropy

The aim of this paper is to present a line of ideas, centred around entropy production andquantum dynamics, emerging from von Neumann's work on foundations of quantum mechanics and leading to current research. The concepts of measurement, dynamical evolution and entropy were central in J. von Neumann's work. Further developments led to the introduction of generalized measurements in terms of positive operator-valued measures, closely connected to the theory of open systems. Fundamental properties of quantum entropy were derived and Kolmogorov and Sinai related the chaotic properties of classical dynamical systems with asymptotic entropy production. Finally, entropy production in quantum dynamical systems was linked with repeated measurement processes and a whole research area on nonequilibrium phenomena in quantum dynamical systems seems to emerge.

„AZ INTUICIONIZMUS IMMÁR SEMMILYEN ALAPON NEM UTASÍTHATÓ EL” NEUMANN JÁNOS GÖDEL NEMTELJESSÉGI TÉTELEIRŐL ÉS A MATEMATIKA TERMÉSZETÉRŐL

CSABA FERENC ÉS RÉDEI MIKLÓS*

1. Neumann a Hilbert-programról és az intuicionizmusról

Neumann János tudományos munkásságát matematikusként az aixomatikus halmazelmélet és a matematika alapjainak területén végzett vizsgálataival kezdte: 1926-ban Budapesten megvédett doktori dolgozata az axiomatikus halmazelméletről szólt, [13], és doktori fokozatának megszerzése után azonnal, még 1926-ban, Rockefeller ösztöndíjjal Göttingenbe ment, hogy Hilbert asszisztenseként dolgozzon a Hilbert-programon, melyről 1929-ben jelent meg cikke [12].

A Hilbert-program az egyik válasz volt a 19–20 sz. fordulóján a matematika alapjaiban kirobbant válság megoldására. A válságot a cantori naiv halmazelméletben felfedezett paradoxonok okozták: a naiv halmazelmélet egyik (hallgatólagos) feltételezése szerint bármely Φ tulajdonságra teljesül, hogy a Φ tulajdonságú dolgok összessége halmazt alkot. Kiderült azonban, hogy bizonyos Φ tulajdonságokkal definiált halmazok feltételezése ellentmondáshoz vezet: ha $\Phi(x)$ az a tulajdonság, amellyel egy x halmaz akkor rendelkezik, ha „nem eleme önmagának”, akkor a Φ tulajdonságú halmazok S halmaza pontosan akkor Φ-tulajdonságú, ha nem Φ-tulajdonságú, ez pedig ellentmondás (Russell-paradoxon).

A Hilbert-program alapgondolata, általánosan és a technikai részletek mellőzésével megfogalmazva[1], az volt, hogy fel kell építeni – valamely formális nyelven – egy axiomatikus rendszert, amely elegendő a matematika kifejtéséhez, majd pedig a formális nyelv matematikai vizsgálatával be kell bizonyítani, hogy a rendszer *konzisztens,* azaz nem léphetnek fel benne a Russell-paradoxonhoz hasonló ellentmondások. Ebben a gondolatban körkörösség van, amely teljesen nem küszöbölhető ki, de a Hilbert-program ezt a nehézséget azzal a követeléssel kívánta orvosolni, hogy a

*A munka az OTKA támogatásával készült. Szerződésszám: T43642.

[1] A Hilbert-program technikailag explicitebb megfogalmazását és részleteit illetően ld. pl. [7].

szóbanforgó aixomatikus rendszer ellentmondástalanságának bizonyítása során felhasznált matematika legyen „egyszerű", „véges". Hogy ez utóbbi pontosan mit jelent, azt Hilbert maga sosem definiálta precízen, de intuitíve a követelésnek azt kellett biztosítania, hogy ez a véges matematika legyen „biztonságos", legyen evidens rá vonatkozóan, hogy ne legyen ellentmondás benne.

A matematikában felmerült ellentmondások kiküszöbölésének egy másik lehetséges stratégiája az, hogy a matematikát meg kell „tisztítani", és pontosan arra a részre kell *korlátozni*, amely biztonságos. Ez az „intuicionizmus" néven ismert álláspont, melyet a holland L.E.J. Brouwer fogalmazott meg és dolgozott ki. Az intuicionizmus a biztonságot egyebek mellett úgy kívánja biztosítani, hogy nem fogadja el a kizárt harmadik elvét univerzálisan érvényesként, és elutasítja az indirekt egzisztenciabizonyításokat is. Ezzel nagyon erős, a klasszikus matematikában lépten-nyomon használt eszközöktől fosztja meg magát, aminek következtében a klasszikus matematika fontos részei

> ... vagy érvénytelenné váltak, vagy rendkívül bonyolult kisegítő megfontolások révén történő igazolásra szorultak. Ez utóbbi eljárásokban rendszerint sokat vesztettek az érvényesség általános voltából és a levezetés eleganciájából. Brouwer és Weyl ennek ellenére szükségesnek tartotta, hogy felülvizsgáljuk a matematikai szigor fogalmát, ezen eszméknek megfelelően.
>
> Nehéz túlbecsülni ezeknek az eseményeknek a jelentőségét. A huszadik század harmadik évtizedében két matematikus – mindkettő élvonalbeli, olyan mélyen és teljesen tudatában annak, hogy mi a matematika, mire való, s hogy miről szól, amilyen mélyen és teljesen tudatába lehet ennek valaki – azt javasolta, hogy változtassuk meg a matematikai szigor, az egzakt bizonyítás fogalmát! [19, p. 93–94]

Neumann hangsúlyozza, hogy csak nagyon kevés matematikus követte Brouwert és Weylt: a nagy többség egyszerűen úgy dolgozott tovább, mintha mi sem történt volna – abban a reményben, hogy az intuicionizmust majd csak sikerül valahogy megkerülni [21, p. 94]. A Hilbert-programot ezek után Neumann úgy határozza meg, mint azt a furfangos gondolatot, amely szerint az intuicionizmust önmagával kell megcáfolni:

> Hilbert a következő zseniális ötlettel állt elő a „klasszikus" (azaz intuicionizmus előtti) matematika igazolására. Az intuicionista rendszerben is adható szigorú leírás a klasszikus matematika működéséről, azaz leírható, bár nem igazolható a klasszikus rendszer működése. Ezért lehetséges, hogy intuicionista alapon bizonyítható: a klasszikus eljárások sohasem vezetnek ellentmondásokhoz, nem kerülhetnek ellentmondásba egymással. Világos volt, hogy ez a bizonyítás nagyon nehéz lenne, de voltak bizonyos indikációk, hogy milyen módon lehetne elvégezni. Ha ez a séma bevált volna, rendkívül figyelemre méltóan igazolta volna a klasszikus matematikát az opponens intuicionista rendszernek az alapján! [19, p. 94]

2. Neumann János és Gödel nemteljességi tétele felfedezésének körülményei

A Hilbert-programban döntő fordulat következett be 1930-ban: ezen év szeptember 5–7. között a Bécsben aktív tudományfilozófusokat tömörítő ú.n. Bécsi Kör és a hasonlóan gondolkodó tudományfilozófusokat Berlinben összefogó Empirikus Filozófiai Társaság konferenciát rendezett Königsbergben *Second Conference for Epistemology of the Exact Sciences* címmel. A konferencia egyik célja a matematika természetének megvitatása volt, speciálisan a három legjelentősebb matematikafilozófiai irányzat, a formalizmus, intuicionizmus és logicizmus álláspontjainak áttekintése és megvitatása. A konferencia résztvevői között volt a Bécsi Körbe tartozó Rudolf Carnap, aki a logicizmus alapjairól, Arend Heyting, aki az intuicionista matematikáról és Neumann, aki a formalista matematika felfogásról tartott plenáris előadást. Jelen volt a konferencán Kurt Gödel is, aki a konferencia keretében szeptember 7-én folytatott kerekasztal diszkusszió során jelentette be azt az eredményét, amelyet ma első nemteljességi tételként ismerünk: minden elegendően gazdag és konzisztens axiómarendszerben létezik eldönthetetlen állítás, azaz olyan értelmes állítás, melyre fennáll, hogy sem őt, sem a tagadását nem lehet az aixómarendszerben bebizonyítani.[2]

A konferencián jelen levő matematikusok és filozófusok között Neumann volt az, aki ezen bejelentés jelentőségét azonnal felismerte, kikérdezte Gödelt a részleteket illetően, majd Berlinbe visszatérve felfedezte azt, amit ma Gödel második nemteljességi tételeként tartunk számon: az a formula, amely egy axiómarendszerben az axiómarendszer konzisztenciáját fejezi ki, eldönthetetlen formula. Neumann erről a felfedezéséről 1930. november 20-án kelt levelében beszámol Gödelnek:

> Újabban ismét foglalkoztam logikával, alkalmazva azt a módszert amit ön olyan sikeresen használt arra, hogy eldönthetetlen tulajdonságokat mutasson fel. Eközben egy olyan eredményt értem el, amely figyelemreméltónak tűnik számomra. Be tudtam ugyanis bizonyítani, hogy a matematika ellentmondásmentessége bizonyíthatatlan.
>
> Pontosabban a következőről van szó:
>
> Egy formális, az aritmetikát is tartalmazó rendszerben az ön meggondolásaira támaszkodva kifejezhető az, hogy $1 = 2$ nem lehet az utolsó formulája egyetlen olyan bizonyításnak sem, amely a rendszer axiomáival kezdődik – ez a formula ténylegesen formulája a vizsgált formális rendszernek. Legyen ez a formula W.
>
> Egy ellentmondásos rendszerben bármely formula bizonyítható, így W is. Ha a [*rendszer*] konzisztenciája intuicionista módon megalapozható, akkor a tartalmi, intuicionista megfontolásoknak a formális rendszerbe való „fordításával" W-t is be lehet bizonyítani. (Az ön eredményei

[2] „Elegendően gazdag" itt azt jelenti: a „természetes számokat leírni képes", vagyis – lényegében – tartalmazza a Peano-axiómákat. A königsbergi konferencia további részleteit illetően lásd [3, pp. 135, 137] és [4, pp. 327–330].

alapján egy ilyen fordíthatóságot kétségbe lehetne vonni. Mindazonáltal azt hiszem, hogy a nevezett esetben fenn kell állnia, és nagyon szeretném a véleményét hallani erről.) Tehát ha W bizonyíthatatlan, akkor a rendszer konzisztens, de a konzisztenciája bizonyíthatatlan.

Mármost azt mutattam meg: konzisztens rendszerekben W mindig bizonyíthatatlan, azaz W bármely bizonyítását ellentmondásba lehet transzformálni.

Nagyon érdekelne a véleménye minderről, különösen a „fordíthatóság" kérdéséről.

Neumann Gödelhez, 1930. november 20, [4, p. 337], [16, p. 123]

Ha tehát feltesszük, hogy a rendszerünk konzisztens, akkor bizonyos, a rendszer konzisztenciáját természetes módon kódoló állítások is a rendszer eldönthetetlen (nem bizonyítható és nem is cáfolható) állításai lesznek.

Neumann Gödelnek írt, 1930. november 29-én kelt leveléből ([4, p. 339], [16, p. 124]) kiderül, hogy Gödel válaszolt Neumann november 20-i levelére, és bár úgy tűnik, Gödelnek ez a levele elveszett, Neumann november 29-én kelt leveléből az is kitűnik, hogy Gödel válasza tartalmazott egy különlenyomatot, amelyben Gödel második nemteljességi tétele már ki van mondva: időközben tehát, és Neumann-t éppenhogy megelőzve, Gödel is felfedezte a második nemteljességi tételt. Tény, hogy Gödel 1930. november 17-én beküldte publikálásra a második nemteljességi tételt tartalmazó cikkét[3] Neumann, elismerve Gödel elsőségét, így ír:

Minthogy ön bebizonyította az ellentmondásmentesség bizonyíthatatlanságának tételét – természetes folytatásaként és elmélyítéseként a korábbi eredényeinek – én természetesen nem fogok e tárgyban publikálni.

Neumann Gödelhez, 1930. november 29, [4, p. 338], [16, p. 124].

3. Gödel nemteljességi tételének neumanni értelmezése

A második nemteljességi tételből Neumann nagyon erős következtetést vont le a Hilbert-programra, és ezáltal a matematikafilozófiára nézve:

Mindennek következtében a megalapozási kérdést az ön eredményei alapján negatíve elintézettnek tartom: a klasszikus matematikának nincs szigorú igazolása [*Rechtfertigung*]. Hogy ennek ellenére milyen

[3]Ennek utolsó, 4. szakaszában szerepel a második nemteljességi tétel – de a precíz bizonyítás hiányzik. Ezt Gödel a „hamarosan megjelenő" folytatásban ígérte, amely azonban sohasen jelent meg. A második nemteljességi tétel bizonyítása nyomtatásban először a Hilbert és Paul Bernays által közösen írt *Grundlagen der Mathematik* c. alapműben jelent meg. Gödel utóbb arra hivatkozott, hogy eredményének gyors elfogadása miatt nem írta meg a tanulmány címében is beígért II. részt. Ha figyelembe vesszük, hogy a gondolatmenet követése még Ernst Zermelónak, a halmazelmélet doyenjének is komoly nehézséget okozott (amiről Gödellel folytatott levélváltása árulkodik, ld. [4, p. 419–431]), akkor ezt az állítást azért fenntartásokkal kell kezelnünk.

értelmet tulajdonítsunk azon reményünknek, hogy ténylegesen mindazonáltal ellentmondásmentes – nem tudom; de véleményem szerint ez semmit nem változtat a befejezett tényen.

Neumann Gödelhez, 1930. november 29, [4, p. 339–340], [16, p. 124]

Egy másik, Carnaphoz írott levelében ezt Neumann így fogalmazza meg:

Mindezek alapján ma úgy vélem, hogy

1. Gödel bebizonyította, hogy Hilbert-programja nem valósítható meg;
2. az intuicionizmus immár semmilyen alapon nem utasítható el (amennyiben eltekintünk az esztétikai szemponttól, amely természetesen a gyakorlatban számomra a döntő szerepet játssza).

A matematika megalapozására vonatkozó, a königsbergi szimpoziumon képviselt álláspontot emiatt túlhaladottnak tartom, Gödel alapvető felfedezései a kérdést teljesen új megvilágításba helyezték. (Tudom, hogy eredménye jelentőségének megítélésében Gödel sokkal óvatosabb, úgy vélem azonban, hogy *ebben* a tekintetben nincs igaza.)

Neumann Carnap-hoz, 1931. június 7, [6, p. 40–41] [16, p. 85]

Ahogyan a fenti, Carnaphoz írt levél utolsó mondata utal rá, Gödel maga nem vont le hasonlóan radikális konklúziókat a nemteljességi tételekről a Hilbert-programra nézve:

Hangsúlyozzuk, hogy a ix. tétel [*a második nemteljességi tétel*] nem mond ellent Hilbert formalista felfogásának. Ez ugyanis olyan konzisztenciabizonyítás létezését feltételezi, amely kizárólag finit módszereken alapul, és elképzelhető, hogy vannak olyan finit módszerek, amelyek a P elmélet [*A Principia Matematika logikai rendszere a Peano-axiómákkal*] formalizmusában *nem* fejezhetők ki.

([3, p. 195], a fordítás [1]-ből véve.

Neumann tehát radikálisan nem értett egyet Gödellel a nemteljességi tételek matematikafilozófiai jelentőségét illetően, és ezt több alkalommal meg is fogalmazta (pl. Gödelhez írt 1931. január 12-i levelében [4, p. 341]), [16, p. 125]).

A Neumann és Gödel közötti nézeteltérés oka az, hogy Neumann az intuicionizmust szigorúbban értelmezte mint Gödel: Neumann elképzelhetetlennek tartotta, hogy az intuicionizmus ne legyen reprodukálható, formalizálható, interpretálható egy olyan rendszerben, amelyre Gödel nemteljességi tétele igaz:

Abszolute nem értek egyet az intuicionizmus formalizálhatóságára vonatkozó nézetével.

Neumann Gödelhez, 1931. január 12, [4, p. 341]), [16, p. 125]

Speciálisan, Neumann elgondolhatatlannak tartotta, hogy létezzen olyan intuicionista bizonyítás, mely nem reprodukálható egy ilyen axiómarendszerben:

> Königsbergben személyesen (majd levélváltás során) szereztem tudomást K. Gödel (ismeri őt?) eredményeiről. Az (azóta nyomtatásban is megjelent) tételek szerint egyes logikai és matematikai állítások, pl. az analízis ellentmondásmentessége, bizonyos formális-logikai rendszerekben nem bizonyíthatók. Az eredmények ráadásul azt is megmutatják, hogy ez lényegileg lehetetlen, úgy látom ugyanis, hogy a bizonyítás lépései reprodukálhatók *egyetlen* olyan formális rendszerben (melyet nem akarok itt részletesen leírni) amelyre Gödel tétele fennáll.
>
> Neumann Carnaphoz, 1931. június 7., [6, p. 40–41] [16, p. 85]

Hogyan értelmezzük azt a neumanni tézist, miszerint Gödel tételei védtelenné teszik a klasszikus matematikát az intuicionista kritikával szemben? Először a Hilbert-program „furfangos tervének" kudarcára gondolhatunk, amely szerint a klasszikus matematikát magába foglaló formális rendszer konzisztenciabizonyítását az intuicionista aritmetika eszközeire szorítkozva kell végigvinni. Neumann 1927-ben még így írt erről:

> A bizonyításelméletnek (...) intuicionista alapokon kell felépítenie a klasszikus matematikát, és ezáltal a szigorú értelemben vett intuicionizmust ad absurdum kell vinnie.
>
> ([12, p. 257])

És éppen ez volt az, aminek lehetetlensége Gödel tételének egyik következménye. Ha a rendszert magának a rendszernek az arzenáljával bástyáznánk körül, csak légvárat építenénk. Nem véletlen, hogy Neumann, aki évekig dolgozott a konzisztenciabizonyításon – és még 1927-ben is úgy vélte, hogy jó úton jár – az elsők között ismerte fel a gödeli tételek súlyát.

A Gödel-tételek persze általánosabban, a matematika „metafizikai" alapjainak szintjén is értelmezhetők az intuicionista kihívás megerősítéseként. Az intuicionisták már említett alapelve szerint ugyanis a matematikában nem létezhet olyan igazság-, illetve hamisságfogalom, amely túlmutat az – akárcsak elvi lehetőségként tételezett – bizonyíthatóságon, illetve cáfolhatóságon. Gödel első nemteljességi tétele pedig pontosan ezt támasztja alá: ha egy axiómarendszer elegendően erős, akkor nem képes minden kijelentést úgy eldönteni, ahogy azt a „kétértékű" klasszikus igazságfogalom megkövetelné.

Gödel, mint említettük, nem vont le eredményeiből ilyen radikális következtetést. Ez az erős szakmai véleménykülönbség azonban nem akadályozta meg Neumannt abban, hogy a legnagyobb elismeréssel szóljon Gödelről. Egyszer egyenesen Arisztotelészhez hasonlította ([3, p. 8], máskor pedig megjegyezte, hogy Gödel az egyetlen élő matematikus, akiről bátran kijelentheti: pótolhatatlan (Neumann levele Flexner-hez, 1939. szeptember 27., [16, p. 117]). Érdemes megemlíteni, hogy Neumann első amerikai előadássorozatának témájául a nemteljességi tételeket választotta.

4. Neumann nézetei a matematikáról

A Hilbert-program megvalósíthatatlansága döntő jelentőségű volt Neumann matematikafelfogása számára: nézete szerint ez a fejlemény megmutatta, hogy nem létezik a matematikai szigorúságnak egy változhatatlan fogalma, és hogy a matematikát nem lehet matematikai eszközökkel megalapozni. Neumann ezt a véleményét többször, határozottan megfogalmazta:

> Azért mondtam el e vita [*a matematika alapjairól, speciálisan a Hilbert-programról szóló vita*] történetét, mert véleményem szerint minden másnál jobban megóv attól, hogy túlságosan garantáltnak tekintsük a matematika mozdíthatatlan szigorát. Ez saját életünk idején történt, és én magam is tudom, hogy milyen megalázóan könnyen változtak nézeteim az abszolút matematikai igazságról ez alatt az epizód alatt, és hogyan változtak háromszor egymás után! [19, p. 96]
>
> (...) aligha lehet hinni a matematikai szigor abszolút, változatlan, minden emberi tapasztalattól elkülönült fogalmának létezésében. Magam nagyon földönjáró álláspontot próbálok elfoglalni ebben a kérdésben. Bármilyen filozófiai vagy ismeretelméleti ízlése legyen valakinek ebben a vonatkozásban, a matematikus céh tényleges tapasztalata saját tárgyával kapcsolatban nagyon kevéssé támasztja alá a matematikai szigor a priori fogalmának létezését. [19, p. 96]

Mindebből az is következik, hogy

> A szigor fogalmának változékonysága azt mutatja, hogy valami más is belejátszik a matematika arculatába.
>
> [19, p. 90]

Ez a más Neumann szerint a természettudományok, speciálisan a fizika. Neumann úgy látta, hogy a matematika forrása a természettudomány:

> A modern matematika legjobb gondolatai közül sok (szerintem a legjobbak) világosan a természettudományokból ered. [19, p. 85]

Neumann a geometriát és az analízist említi mint nyilvánvalóan empirikus eredetű diszciplinákat, de ide sorolhatta volna pl. a nem kommutatív valószínűségszámítást, melyet nagyrészt ő alapozott meg az 1930-as évek közepén az operátorgyűrűk (ma Neumann-algebráknak nevezett struktúrák) vizsgálatával: a matematikának ez a terülte egyértelműen a kvantummechanikai jelenségek matematikai leírásának igényéből fejlődött ki, kezdetei a 20. század 20-as éveinek második felére nyúlnak vissza, amikor Neumann – szintén Göttingenben, a Hilbert asszisztenseként töltött idő alatt – a kvantummechanika ún. Hilbert-tér formalizmusának matematikai alapjait tisztázta három, ma már klasszikussá vált cikkében [9, 10, 11], és foglalta össze híres könyvében [15]. De ide sorolhatta volna az ergodelméletet is, mely a

19. sz. második felében Boltzmann és Maxwell munkásságának eredményeképpen kialakult klasszikus statisztikus mechanika fogalmi-matematikai megalapozásának kísérletéből ered, és amellyel kapcsolatban Neumann szintén kulcsfontosságú tételt bizonyított 1931-ben [14], döntő lökést adva az ergodelméleti kutatásoknak. (Neumann ergodelméleti eredményeit illetően ld. a [5] es [8] írásokat.)

A matematika empirikus eredetének tudatában lenni Neumann szerint azért is fontos, mert

> (...) a matematika maga nem tapasztalati tudomány – vagy legalábbis nem olyan módon művelik – és számos döntő vonatkozásban eltér a tapasztalati tudományok technikájától. [19, p. 85]

Ez lehetővé teszi, hogy a matematika eltávolodjon az empirikus, tapasztalati forrásoktól, ez az eltávolodás azonban veszéllyel jár:

> Ha egy matematikai diszciplína messzire távolodik a tapasztalati forrásától, vagy még inkább, ha már a második vagy harmadik nemzedéket csak közvetve érik el a „valóságból" származó eszmék, ez súlyos veszélyt rejt magában. Egyre inkább tiszta esztétizálássá válik, egyre tisztább *l'art pour l'art*-á. (...) súlyos a veszély, hogy a tárgy a kisebb ellenállás irányába fejlődik (...) és a diszciplína részletek és bonyodalmak szervezetlen tömegévé válik. Más szóval, a tapasztalati forrástól nagy távolságban (...) a matematikai tárgyat a degenerálódás fenyegeti.
>
> (...) [B]ármikor következik is be ez az állapot, számomra az egyetlen megoldásnak látszik a megfiatalító visszatérés a forráshoz: többé-kevésbé közvetlen tapasztalati eszmék beemelése a matematikába.
>
> [19, p. 103][4]

Irodalom

[1] Csaba F. (szerk), *A matematika filozófiája a 21. század küszöbén* (Osiris, Budapest, 2003).

[2] J. Glimm (ed.), *The Legacy of John von Neumann* (American Mathematical Society, Providence, R.i., 1990) Proceedings of Symposia in Pure Mathematics; 50.

[3] K. Gödel, *Collected Works,* Vol. i. Publications 1929–1936, S. Feferman, J. W. Dawson, Jr., S. C. Kleene, G. H. Moore, R. Solovay, J. van Heijenort (eds.), Oxford University Press (New York, 1986).

[4] K. Gödel, *Collected Works,* Vol. V. Correspondence H-Z, S. Feferman, J. W. Dawson, Jr., W. Goldfarb, C. Parsons, W. Sieg (eds.), Oxford University Press (New York, 2003).

[4] A fordítást kismértékben megváltoztattuk.

[5] G. W. Mackey, Von Neumann and the early days of ergodic theory, in: [2], 25–38.

[6] P. Mancosu, Between Vienna and Berlin: The immediate reception of Gödel's incompleteness theorems, *History and Philosophy of Logic,* **20** (1999), 33–45.

[7] Simonyi András, A Hilbert-program és Gödel nemteljességi tételei, *Magyar Filozófiai Szemle,* **43** (1999), 827–856.

[8] D. Szasz, Boltzmann's Ergodic Hypothesis: A Conjecture for Centuries? *Studia Scientia Mathematica Hungaria,* **31** (1996), 299–322.

[9] J. von Neumann, Mathematische Begründung der Quantenmechanik, *Göttinger Nachrichten* (1927), 1–57. In: [17], No. 9.

[10] J. von Neumann, Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik, *Göttinger Nachrichten* (1927), 245–272. In: [17], No. 10.

[11] J. von Neumann, Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten, *Göttinger Nachrichten* (1927) 245–272. In: [17], No. 11.

[12] J. von Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Mathematische Zeitschrift,* **26** (1927), 1–46. In: [17], No. 12.

[13] J. von Neumann, Die axiomatisierung der Mengenlehre, *Mathematische Zeitschrift,* **27** (1928), 669–752. In: [17], No. 16.

[14] J. von Neumann, Proof of the Quasi-ergodic Hypothesis, *Proceedings of the National Academy of Sciences,* **18** (1932), 70–82. In: [18], No. 12.

[15] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Dover Publications, New York, 1943) (first American Edition; first edition: Springer-Verlag, Heidelberg, 1932; first English translation: Princeton University Press, Princeton, 1955).

[16] J. von Neumann, *Selected Letters,* M. Rédei (ed.) (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2005) (nyomdában).

[17] J. von Neumann, *Collected Works Vol. i. Logic, Theory of Sets and Quantum Mechanics,* A.H. Taub (ed.) (Pergamon Press, 1962).

[18] J. von Neumann, *Collected Works Vol. ii. Operators, Ergodic Theory and Almost Periodic Functions in a Group,* A. H. Taub (ed.) (Pergamon Press, 1962).

[19] Neumann János, A Matematikus, in: [21], pp. 84–103.

[20] Neumann János, A matematika szerepe a tudományokban és a társadalomban, in: [21], pp. 104–122.

[21] Neumann János, *Válogatott Tanulmányok,* szerk. Ropolyi L. (Typotex, Budapest, 2003).

Ferenc Csaba and Miklós Rédei:
"There is no more reason to reject intuitionism"
John von Neumann on Gödel's incompleteness theorems and on the nature of mathematics

Based on recently discovered and published documents, especially letters by von Neumann to K. Gödel and R. Carnap, the paper recalls first the historical circumstances of the discovery of Gödel's incompleteness theorems and then analyzes von Neumann's interpretation of the second incompleteness theorem from the point of view of the fate of Hilbert's program. It is shown in particular that von Neumann discovered the second incompleteness theorem independently of Gödel but was late by a few days and so he decided not to publish it. In sharp contrast to Gödel, Von Neumann interpreted the second incompleteness theorem as the proof of unrealizability of Hilbert's program. From this von Neumann inferred that intuitionism cannot be rejected. While he did not follow the intuitionist practice in mathematics, he did take a very moderate position concerning precision in mathematics. Von Neumann aslo emphasized the empirical origin of mathematical concepts and warned of the dangers of mathematics becoming detached of its empirical source.

NEUMANN JÁNOS SZEREPE A HILBERT-TEREK ÉS LINEÁRIS OPERÁTORAIK ELMÉLETÉNEK MEGALAPOZÁSÁBAN

MATOLCSI MÁTÉ*

Neumann János születése 100. évfordulójának tiszteletére

1. Az absztrakt Hilbert-tér

Jól ismert tény, hogy Neumann János szerteágazó munkássága során olyan – azóta meghatározóvá vált – tudományágak alapjait fektette le, mint a kvantummechanika, számítástechnika és játékelmélet. Neumann személye olyannyira nagy hatást gyakorolt az emberiség fejlődésére, hogy a Financial Times 1999. december 24-i számában egyenesen az „Évszázad Emberének" (Man of the Century) kiáltotta ki. Neumann kiterjedt munkássága egy-egy szeletének bemutatására már már több írás irányult, lásd [18], [19] és részben [2]). Ebben a cikkben arra vállalkozunk, hogy betekintést adjunk Neumann matematikai munkásságának azon részébe, amelyben az absztrakt Hilbert-terek nem-korlátos lineáris operátorai elméletének alapjait fektette le. Az itt tárgyalt absztrakt fogalmakat és tételeket Neumann később a kvantummechanika matematikai megalapozásában használta fel (lásd [13]). Megjegyezzük, hogy a cikkben tárgyalt eredmények sorrendje helyenként eltér a történeti időrendiségtől.

Természetesen a *konkrét* Hilbert-terek behatóbb vizsgálata jóval Neumann munkásságának kezdete előtt, a XX. század elején, közvetlenül a Lebesgue-féle integrálfogalom megjelenése után megkezdődött. A Lebesgue-integrál lehetővé tette az L^p-terek definiálását, a Riesz–Fischer-tétel pedig kimondta ezen terek teljességét (azaz, mai szóhasználattal élve, biztosította, hogy ezek a terek *Banach-terek*). Különösen fontos szerep jutott a $p = 2$ esetnek, hiszen ebben az esetben ki lehetett használni az L^2-beli teljes ortonormált függvénysorozat létezését, és az eszerinti Fourier-sorfejtés igen hasznos eszköznek bizonyult differenciál- és integrálegyenletek megoldásakor. Egy L^2-beli f (általában komplex értékű) függvényt tehát helyettesíthetünk f-nek egy rögzített ortonormált bázisra vonatkozó $a_1, a_2, \ldots$ koordinátáival, és ezzel az azonosítással az egész L^2 teret megfeleltethetjük az úgynevezett *Hilbert-féle koordináta tér*nek, azaz az olyan $a_1, a_2, \ldots$ sorozatok terének,

*A szerzőt az OTKA T047276, F049457, T049301 támogatta.

amelyekre $\sum_j |a_j|^2 < \infty$ (erre a sorozattérre ma már inkább az ℓ^2 elnevezés használatos). Ebben a formalizmusban az ℓ^2 tér egy *lineáris operátorának* egy végtelen mátrix felel meg, és általában igen nehéz eldönteni, hogy egy mátrix *folytonos* transzformációt ír-e le. Az ℓ^2 térnek és folytonos operátorainak beható vizsgálata elsősorban Hilbert nevéhez fűződik; az elmélet sarokkövének tekinthető spektráltételt is neki sikerült először bebizonyítani (lásd [7]). Láthatjuk, hogy már maga az ℓ^2 tér is absztrakció során jött létre, hiszen a konkrét függvényeket számsorozatokkal helyettesítettük. Ha arra gondolunk azonban, hogy az ℓ^2 formalizmusban egy olyan egyszerű művelet, mint két lineáris transzformáció kompozíciója két végtelen mátrix összeszorzásának felel meg, akkor megérthetjük, hogy még az egyszerűbb tételek bizonyítása is jelentős technikai nehézségekkel járt, és gyakran nehéz volt kiigazodni a koordináták és indexek sűrűjében. Ebben a helyzetben Neumann volt az, aki felismerte, hogy létezik egy átláthatóbb absztrakt tárgyalásmód, amellyel a bizonyítások elegánsabbá válnak, és az új formalizmus segítségével új meghatározó eredmények kaphatók. A további absztrakció lényege, hogy a koordinátáktól úgy szabadulhatunk meg, hogy nem rögzítjük eleve a térnek egy ortonormált bázisát.

Neumann összegezte, hogy mik azok a meghatározó absztrakt tulajdonságok, amelyek az L^2 valamint az ℓ^2 teret jellemzik, és ezután ezekkel a tulajdonságokkal definiálta az *absztrakt* Hilbert-teret (lásd [10]). Módszerének lényege, hogy ezután már csak ezeket a definiáló tulajdonságokat használta, és így indította el a Hilbert-terek absztrakt elméletének fejlődését. Neumann a következő öt tulajdonsággal definiálta az absztrakt H Hilbert-teret ([10]):

A. H komplex vektortér.

B. H-n adott egy skalárszorzat, azaz $a \in \mathbb{C}$ és $f, g \in H$ esetén $\langle af, g\rangle = a\langle f, g\rangle$, $\langle f_1 + f_2, g\rangle = \langle f_1, g\rangle + \langle f_2, g\rangle$, $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$ és $\langle f, f\rangle \geq 0$ és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $f = 0$.

C. Az $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ által definiált normált tér szeparábilis.

D. H nem véges dimenziós.

E. A fent adott normával H teljes (azaz minden Cauchy sorozat konvergens).

Itt néhány megjegyzést illik tennünk: a ma is használatos absztrakt definíció annyiban tér el a fentiektől, hogy nem szokás eleve kizárni a véges dimenziós, illetve nem szeparábilis tereket (azaz nem szokás kikötni a C és D feltételeket). Gyakorlati szempontból azonban továbbra is a végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-terek a legfontosabbak. Az A pontban nem feltétlenül szükséges megkövetelni, hogy H komplex vektortér legyen, de az alkalmazások során a valós Hilbert-tereknek nem sok szerep jut.

Neumann ezután belátta ([10]), hogy az így definiált absztrakt Hilbert-tér izometrikusan izomorf az ℓ^2 térrel, így a két formalizmus ekvivalens (de hamar fény derült arra, hogy az absztrakt megfogalmazás könnyebben kezelhető).

Az absztrakt definíciót látva természetesen merül fel a következő kérdés: hogyan tudjuk eldönteni egy Banach-térről, hogy a norma skalárszorzatból származtatható-e (azaz, hogy valójában Hilbert-térről van-e szó)? Fréchet ([4]) bebizonyította, hogy ez a helyzet, ha a tér bármely 3 dimenziós altere izometrikusan izomorf egy Euklideszi térrel. Neumann és Jordan ([8]) azonban észrevették, hogy ennél több is állítható, és a következő elegáns karakterizációt adták:

1.1. tétel. *Egy* $(X, \|\cdot\|)$ *tér normája pontosan akkor származtatható skalárszorzatból, ha teljesül a parallelogramma szabály:*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

A tétel következménye, hogy a norma skalárszorzatból származtathatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy a tér minden 2 dimenziós altere Euklideszi legyen. Fontos megjegyezni, hogy ha a parallelogramma szabály teljesül, akkor az úgynevezett polarizációs azonossággal meg is kaphatjuk a skalárszorzatot:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2) - i\|f+ig\|^2 + i\|f-ig\|^2.$$

2. Önadjungált operátorok

Neumann a Hilbert-tér absztrakt definíciója után a lineáris operátorok vizsgálatához fordult ([10]). A folytonos lineáris operátorokat jellemzi a következő tétel:

2.1. tétel. *Egy R lineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha*

(i) $\|Rf\| \le C\|f\|$ *(minden $f \in H$-ra), vagy ekvivalensen*

(ii) $\langle Rf, g\rangle \le C\|f\|\,\|g\|$ *(minden $f, g \in H$-ra).*

Ennek a tételnek (és a Riesz-féle reprezentációs tétel egy egyszerű alkalmazásának) a következménye, hogy az egész H-n értelmezett korlátos szeszkvilineáris formák és korlátos lineáris operátorok megfeleltethetők egymásnak. Azaz, egy R korlátos operátornak megfeleltethetjük a $\phi(f,g) := \langle Rf, g\rangle$ formát, és fordítva, egy adott ϕ korlátos formához találhatunk olyan R operátort, amelyre $\phi(f,g) := \langle Rf, g\rangle$. Fontos megjegyezni, hogy (komplex Hilbert-tér esetén) egy $\phi(f,g)$ formát a polarizációs azonosság révén egyértelműen meghatározzák a $\phi(f,f)$ értékek. Ennek egyik következménye, hogy ha minden f-re $\langle Af, f\rangle = 0$, akkor $A = 0$.

Mi a helyzet azonban a nemkorlátos lineáris operátorokkal? Neumann felismerte, hogy az alkalmazásokban felmerülő differenciál- és integráloperátorok precíz kezeléséhez a nemkorlátos operátorok absztrakt elméletének megalapozása vezet. A matematikusokat foglalkoztató egyik fő probléma az volt, hogy a korlátos önadjungált operátorokra már bebizonyított spektráltételt milyen formában lehet nemkorlátos operátorokra megfogalmazni.

2.2. definíció. Egy (nem feltétlenül korlátos) A lineáris operátort szimmetrikusnak hívunk, ha $\langle Af, g\rangle = \langle f, Ag\rangle$ teljesül minden $f, g \in \mathrm{Dom}\, A$-ra.

Korlátos esetben ez éppen az önadjungáltságnak felel meg. Nemkorlátos esetben azonban az már ismert volt ([1]), hogy ez a tulajdonság önmagában még kevés ahhoz, hogy a spektráltétel érvényben maradjon. Neumann számára világos volt, hogy a nemkorlátos operátorok vizsgálatához a linearitáson túl fel kell tenni még valamilyen (a folytonosságnál gyengébb) regularitási tulajdonságot, és a következő definíciókat vezette be ([10], [14]):

2.3. definíció. Egy A lineáris operátort zártnak nevezünk, ha a gráfja $\Gamma(A) := \{(x; Ax) : x \in \operatorname{Dom} A\}$ zárt altér $H \times H$-ban.

Egy A lineáris operátort lezárhatónak hívunk, ha létezik olyan B zárt operátor amelyre $A \subset B$.

Egy sűrűn definiált A lineáris operátor A^* adjungáltját a következőképp értelmezzük: $\operatorname{Dom} A^* := \{g \in H : \text{létezik } g^* \text{ amelyre } \langle Af, g\rangle = \langle f, g^*\rangle\}$, és $A^*g := g^*$.

Egy A szimmetrikus operátort maximálisnak hívunk, ha A-nak nincs szimmetrikus (valódi) kiterjesztése. (Azaz nincs olyan szimmetrikus B operátor, amelyre $A \subset B$, és $A \neq B$.)

Egy A lineáris operátort önadjungáltnak (Neumann eredeti terminológiájában hipermaximálisnak) nevezünk, ha $A = A^*$.

Minden önadjungált operátor (maximális) szimmetrikus, azonban (a korlátos esettel ellentétben) léteznek olyan szimmetrikus operátorok, amelyek nem önadjungáltak. Neumann bebizonyította, hogy az önadjungált operátorokat éppen az tünteti ki a szimmetrikusok között, hogy érvényben marad rájuk a spektrális felbontási tétel ([10]).

Mielőtt rátérnénk a spektráltétel vizsgálatára, teszünk néhány egyszerű észrevételt. Nem nehéz belátni, hogy a fent definiált A^* adjungált operátor mindig zárt ([14]), előfordulhat azonban, hogy A^* nem sűrűn definiált (sőt, lehet példát adni olyan A-ra, amelynél A^* egyedül a 0 vektoron értelmezett). Ha azonban A zárt, akkor A^* sűrűn definiált, és $A = A^{**}$ ([14]). Továbbá egy A operátor pontosan akkor lezárható, ha A^* sűrűn definiált (és ekkor A^{**} az A *lezártja*) ([14]).

Látható, hogy a szimmetrikus operátor definíciója azzal ekvivalens, hogy $A \subset A^*$ (de A^* általában nem szimmetrikus!), így az előbbiekből következik, hogy egy szimmetrikus operátor mindig lezárható (és könnyű látni, hogy a lezártja is szimmetrikus), tehát egy maximális szimmetrikus operátor szükségképpen zárt. Speciálisan, ha A mindenütt értelmezve van és szimmetrikus, akkor a zárt gráf tételből adódóan azt kapjuk, hogy A szükségképpen korlátos (ezt már Hellinger és Toeplitz [6] korábban bebizonyították). Ez azt mutatja, hogy nincs remény arra, hogy egy nem korlátos szimmetrikus operátort a szimmetrikusság megtartásával az egész térre kiterjesszünk. Lássuk, milyen módon tudta Neumann a nemkorlátos esetben mégis kihasználni a korlátos szimmetrikus operátorokra már ismert spektráltétel.

Neumann először az absztrakt Hilbert-tér ortogonális projekcióit jellemezte: egy mindenütt értelmezett korlátos E operátor pontosan akkor egy zárt altérre való ortogonális projekció, ha $E^2 = E$ és $E = E^*$. Továbbá ortogonális projekciók összege, $E_1 + E_2 + \dots E_p$, pontosan akkor lesz ortogonális projekció, ha minden $E_m E_n = 0$ $(m \neq n)$.

Ezután Neumann definiálta további vizsgálatainak fő eszközét: tetszőleges R zárt, szimmetrikus operátor esetén a

$$V := (R - iI)(R + iI)^{-1}$$

operátort az R *Cayley-transzformáltjának* nevezzük [10]. Megmutatható, hogy V zárt, izometrikus operátor, amely a $\operatorname{Dom} V = \operatorname{Ran}(R + iI)$ alteret képezi a $\operatorname{Ran} V = \operatorname{Ran}(R - iI)$ altérre. A $\operatorname{Dom} V$ illetve $\operatorname{Ran} V$ alterek ortogonális kiegészítőjét *defekt-altereknek,* dimenziójukat (amely akár végtelen is lehet) *defekt indexeknek* nevezik. Neumann megmutatta ([10]), hogy V pontosan akkor maximális szimmetrikus, ha V valamelyik defekt indexe 0, és pontosan akkor önadjungált, ha V mindkét defekt indexe 0, azaz, ha V unitér. Fontos továbbá, hogy R-et vissszanyerhetjük V-ből az

$$R = i(I + V)(I - V)^{-1}$$

képlet segítségével. Neumann módszere tehát az volt, hogy kiindulva egy tetszőleges A önadjungált operátorból, annak V Cayley transzformáltja unitér (így korlátos), és V spektrálfelbontásából visszanyerhetjük A sepktrálfelbontását. Precízen megfogalmazva:

2.4. definíció. Ortogonális projekcióknak egy $E(\lambda)$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ családját az $[a, b]$ intervallumra támaszkodó spektrálmértéknek nevezzük, ha

(i) $E_\lambda \leq E_\mu$ ha $\lambda \leq \mu$

(ii) ha $\lambda \geq \lambda_0$ és $\lambda \to \lambda_0$, akkor minden $f \in H$-ra $E(\lambda)f \to E(\lambda_0)f$

(iii) ha $\lambda \to a$, akkor $E(\lambda)f \to 0$, illetve ha $\lambda \to b$, akkor $E(\lambda)f \to f$ minden $f \in H$-ra.

2.5. tétel. *Egy unitér U operátorhoz egyértelműen létezik egy $[0, 1]$-re támaszkodó $E(\lambda)$ spektrálmérték, amelyre*

$$\langle Uf, g \rangle = \int_0^1 e^{2\pi i \lambda} d\langle E(\lambda)f, g \rangle$$

teljesül minden $f, g \in H$ esetén.

Ezt a tételt Neumann úgy látta be ([10], Abhang II.), hogy módosította Riesz Frigyes egy a korlátos, szimmetrikus operátorok spektrálfelbontására irányuló bizonyítását. Ezután pedig kimondta a nemkorlátos önadjungált operátorokra vonatkozó spektráltételt [10]:

2.6. tétel. *Legyen $F(\lambda)$ egy $(-\infty, +\infty)$-re támaszkodó spektrálmérték. Ha az*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\langle F(\lambda)f, F(\lambda)f \rangle$$

integrál valamely $f \in H$-ra véges, akkor létezik egy olyan $f^* \in H$, amelyre minden $g \in H$-ra

$$(f^*, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\langle F(\lambda)f, g\rangle$$

teljesül. Az ilyen f-ekre legyen $Rf := f^*$. Az így kapott R operátor önadjungált, és minden önadjungált operátor egyértelműen előállítható ilyen alakban.

Ez a tétel nemcsak matematikai szempontból alapvető fontosságú, hanem a kvantummechanika matematikai modelljének is egyik pillére.

Az önadjungált operátorok kitüntetett szerepét figyelembe véve felmerül a kérdés, hogy egy adott szimmetrikus operátor vajon mindig kiterjeszthető-e önadjungálttá, és ha igen, hogyan jellemezhetők ezek a kiterjesztések. Neumann ezeknél a kérdéseknél is a Cayley-transzformáltat hívta segítségül ([10]). Könnyű látni, hogy ha R_1 az R kiterjesztése (ahol mindkét operátorról feltesszük, hogy szimmetrikus és zárt), akkor R_1 Cayley-transzformáltja, V_1, is kiterjesztése V-nek. Fordítva, V minden izometrikus V_1 kiterjesztéséhez létezik R-nek egy olyan R_1 zárt, szimmetrikus kiterjesztése, amelynek Cayley-transzformáltja éppen V_1. Ezek szerint tehát R-nek pontosan akkor létezik önadjungált kiterjesztése, ha V-nek létezik unitér kiterjesztése, és világos, hogy ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy a két defekt index megegyezzen egymással. Összefoglalva:

2.7. tétel. *Az R zárt, szimmetrikus operátornak pontosan akkor létezik önadjungált kiterjesztése, ha defekt-indexei egyenlők, és az önadjungált kiterjesztések egy-egyértelműen megfeleltethetők a V Cayley-transzformált unitér kiterjesztéseinek. R pontosan akkor önadjungált, ha mindkét defekt indexe 0. R pontosan akkor maximális szimmetrikus, ha legalább az egyik defekt indexe 0.*

Az önadjungált kiterjesztések vizsgálatakor Neumann külön figyelmet szentelt egy könnyebben ellenőrizhető, és a gyakorlati alkalmazásokban igen fontos speciális esetnek:

2.8. definíció. Egy zárt, szimmetrikus R operátort alulról korlátosnak nevezünk, ha $\langle Rf, f\rangle \geq C\|f\|^2$ minden ($f \in \operatorname{Dom} R$) esetén. Speciálisan, R-et pozitívnak nevezzük, ha $\langle Rf, f\rangle \geq 0$.

Hasonlóan definiáljuk a felülről korlátosság fogalmát, és az alulról, illetve felülről korlátos szimmetrikus operátorokat összefoglalva *félig korlátosnak* nevezzük. Neumann megmutatta, hogy minden félig korlátos szimmetrikus R operátornak létezik (szintén félig korlátos) önadjungált kiterjesztése [10]. Azt azonban először Friedrichsnek sikerült megmutatnia [5], hogy olyan önadjungált kiterjesztés is létezik, amelynek korlátja megegyezik az eredeti R operátor korlátjával. (Neumann csak annyit mutatott meg, hogy a kiterjesztés korlátja tetszőlegesen megközelítheti R korlátját.)

2.9. tétel. *Legyen R olyan zárt, szimmetrikus operátor, amelyre $\langle Rf, f\rangle \geq C\|f\|^2$ minden ($f \in \operatorname{Dom} R$) esetén. Ekkor létezik R-nek olyan S önadjungált kiterjesztése, amelyre $\langle Sf, f\rangle \geq C\|f\|^2$ minden ($f \in \operatorname{Dom} S$) esetén.*

Természetesen elég a $C = 1$ esetet vizsgálni. Friedrichs bizonyítása azon alapul, hogy a korlátos lineáris operátorok és szeszkvilineáris formák közötti egy-egyértelmű kapcsolatnak igen speciális esetben nemkorlátos operátorokra is van megfelelője. A részletek pontosítása nélkül említjük meg, hogy az R operátorhoz tartozó (Rf, g) szeszkvilineáris forma *lezárható,* és a lezárt formához *asszociált operátor* önadjungált, és ez szolgáltatja a keresett Friedrichs-féle kiterjesztést (lásd pl. [3]). A félig korlátos szimmetrikus operátorok önadjungált kiterjesztéseinek elméletét később Krein [9] fejlesztette tovább, jellemezve egy pozitív szimmetrikus operátor összes pozitív önadjungált kiterjesztését.

3. Normális operátorok

Az önadjungált operátorokra bizonyított tételek után Neumann a normális operátorok vizsgálatát kezdte meg [11]. Korlátos esetben egy A operátor normalitása egyszerűen definiálható az $AA^* = A^*A$ relációval. Nemkorlátos esetben azonban gondot okoz, hogy az operátorok nem mindenütt értelmezettek, így nem világos, hogy a fenti egyenletet hogyan értsük. Neumann ezért a következő kerülőutat választotta:

Két tetszőleges (nemkorlátos) lineáris operátor helyett tekintsük egy korlátos A és egy nem korlátos R operátor felcserélhetőségének problémáját. Ebben az esetben legalább A mindenütt értelmezett, így a felcserélhetőség egy természetes definíciója, hogy az $ARf = RAf$ egyenlőséget követeljük meg minden $f \in \mathrm{Dom}\, R$-re. (Ekvivalensen: $AR \subset RA$.) Ezután egy tetszőleges R operátorhoz definiálhatjuk azon A korlátos operátorok $\mathcal{M}^1(R)$ halmazát, amelyekre mind A, mind A^* felcserélhetők R-rel. Továbblépve, $\mathcal{M}^2(R)$ jelöli azon korlátos operátorok halmazát, amelyek adjungáltjukkal együtt az összes $\mathcal{M}^1(R)$-beli operátorral felcserélhetők. Ezt az eljárást iterálva definiálhatjuk az $\mathcal{M}^n(R) \in B(H)$ halmazokat.

Visszatérve arra az esetre, amikor maga R is korlátos Neumann megvizsgálta, hogy milyen tulajdonságai vannak a fenti $\mathcal{M}^n(R)$ halmazoknak. A pontos jellemzés érdekében a korlátos operátorok $B(H)$ algebráján különböző *operátor topológiákat* vezetett be [11]:

3.1. definíció. Az $A_n \subset B(H)$ operátorsorozat tart $A \in B(H)$-hoz

(i) normában, ha $\|A_n - A\| \to 0$

(ii) erősen, ha $A_n f \to Af$ minden $f \in H$-ra.

(iii) gyengén, ha $\langle A_n f, g\rangle \to \langle Af, g\rangle$ minden $f, g \in H$-ra.

Neumann megmutatta, hogy $R \in B(H)$ esetén $\mathcal{M}^n(R)$ gyengén zárt operátoralgebra, valamint $\mathcal{M}^1(R) = \mathcal{M}^3(R) = \ldots$ és $R \in \mathcal{M}^2(R) = \mathcal{M}^4(R) = \ldots$. (A gyengén zárt – vagy, ami ekvivalens, erősen zárt- operátoralgebrákat mai terminológiában Neumann-algebráknak nevezzük, és kutatásuk továbbra is az operátorelmélet egyik alapvető ága (lásd [18])). Bebizonyította továbbá, hogy $\mathcal{M}^2(R)$ pontosan akkor kommutatív algebra, ha R normális operátor. Ezek után nemkorlátos R esetén ezt a tulajdonságot használta a normalitás definiálására:

3.2. definíció. Egy R lineáris operátort normálisnak nevezünk, ha
(i) $\operatorname{Dom} R \cap \operatorname{Dom} R^*$ sűrű H-ban, és
(ii) $\mathcal{M}^2(R)$ kommutatív.

Későbbi kutatásai során (lásd [15]) Neumann megmutatta, hogy az első feltétel elhagyható, mert következik a másodikból (sőt, ha feltesszük, hogy R zárt, akkor $\operatorname{Dom} R = \operatorname{Dom} R^*$ következik). Ennek bizonyítását arra az önmagában is jelentős eredményére alapozta, amely azt állítja, hogy tetszőleges T zárt operátor esetén a T^*T operátor pozitív, önadjungált [14]. Korlátos T esetén ez triviális, az általános esetben azonban első ránézésre már az sem világos, hogy miért lenne T^*T sűrűn definiált. A T^*T operátor önadjungáltságának fontos következménye, hogy minden zárt operátornak létezik *poláris felbontása* [14], azaz olyan $T = WB$ előállítása, ahol $B\ \big(= (T^*T)^{1/2}\big)$ pozitív, önadjungált, továbbá W izometrikus transzformáció. (Bizonyos természetes megszorítások mellett ez a felbontás egyértelmű).

A nemkorlátos normális operátorok fenti úton való definiálása után Neumann megmutatta, hogy a spektrális felbontási tétel minden zárt, normális operátorra érvényben marad [11]:

3.3. tétel. *Legyen R zárt, normális operátor. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $\Delta(z)$ komplex spektrálmérték, amelyre:*
(i) *Rf (és R^*f) pontosan akkor van értelmezve, ha $\iint |z|^2 d\big\langle\Delta(z),\Delta(z)\big\rangle$ véges, és ilyen f esetén*
(ii) $\langle Rf, g\rangle = \iint z d\big\langle \Delta(z)f, g\big\rangle$ *és* $\langle R^*f, g\rangle = \iint \overline{z} d\big\langle\Delta(z)f, g\big\rangle$.

4. Függvénykalkulus, spektrálhalmazok

A spektráltétel önadjungált és normális operátorokra történő igazolása után természetes út nyílik operátorok függvényeinek definiálására. Neumann először korlátos önadjungált operátorokra tekintette az

$$\big\langle F(A)f, g\big\rangle = \int F(\lambda) d\big\langle E(\lambda)f, g\big\rangle$$

formulát (lásd [12]), és megmutatta, hogy ha $F(\lambda)$ az A spektrumán korlátos, mérhető függvény, akkor az előbbi képlet egy $F(A)$ korlátos, normális operátort definiál. Megmutatta továbbá, hogy ha F végigfut az összes, a spektrumon korlátos és mérhető függvényen, akkor az $F(A)$ operátorok kiadják az $\mathcal{M}^2(A)$ algebrát, és az $F \mapsto F(A)$ leképezés algebra homomorfizmus. (Megjegyezzük, hogy a funkcionálanalízis jelenleg legelterjedtebb felépítésében a lépések fordított sorrendben követik egymást: a Gelfand-transzformáció segítségével előbb definiálják a fenti algebra morfizmust, majd ebből vezetik le a spektrális felbontási tételt (lásd pl. [17]).) Neumann ezután a következőképp tért át a normális operátorok függvényeire: megmutatta, hogy ha N normális operátor, akkor létezik olyan A önadjungált operátor amelynek N függvénye, azaz $N = F(A)$ valamely F-re, és ezután a $G(N) := G\big(F(A)\big)$ definíciót alkalmazta [12].

Igazolható továbbá, hogy az $F(\lambda)$ függvény tulajdonságai szoros kapcsolatban vannak az $F(A)$ operátor tulajdonságaival: ha $|F(\lambda)| \le K$, akkor $\|F(A)\| \le K$, ha $F(\lambda)$ valós értékű, akkor $F(A)$ önadjungált, ha $F(\lambda)$ értékei a komplex egységkörön vannak, akkor $F(A)$ unitér.

Későbbi kutatásai során Neumann rátért tetszőleges korlátos operátorok függvényeinek vizsgálatára (lásd [16]). Természetes módon értelmezhetők egy tetszőleges korlátos A operátor $p(A) = p_n A^n + \cdots + p_1 A + p_0 I$ alakú polinomjai. Neumann ezután rátért az olyan $f(\lambda) = \frac{p_1(\lambda)}{p_2(\lambda)}$ alakú racionális törtfüggvényekre, amelyekben a nevező gyökei az A operátor spektrumán kívül esnek. Megmutatta, hogy az $f(A) = p_1(A)\big(p_2(A)\big)^{-1}$ definíció értelmes, és csak az f függvénytől függ (a p_1 és p_2 polinomok választásától nem). Az olyan f függvényekre amelyek egy az A spektrumát tartalmazó nyílt halmazon holomorfak az $f(A)$ operátort racionális törtfüggvényekkel való approximációval definiálta. Az önadjungált (és normális) operátoroknál látott összefüggések nyomán természetesen adódik a kérdés, hogy az $f(\lambda)$ függvény tulajdonságaiból tudunk-e következtetni az $f(A)$ operátor tulajdonságaira.

4.1. tétel. *A zárt egységkörlemez minden kontrakció operátornak spektrálhalmaza, azaz:*

Legyen $A \in B(H)$ kontrakció ($\|A\| \le 1$), és $f(\lambda)$ olyan holomorf függvény egy az egységkörlemezt tartalmazó nyílt tartományon, amelyre $|f(\lambda)| \le 1$ teljesül a zárt egységkörlemezen. Ekkor $\|f(A)\| \le 1$, tehát $f(A)$ is kontrakcó.

Neumann továbbá megmutatta, hogy a fenti tulajdonság jellemzi is a kontrakciókat: ha egy korlátos A operátornak az egységkörlemez spektrálhalmaza, akkor A kontrakció.

Neumann fenti eredményeinek sokszínűségét figyelembe véve láthatjuk, hogy annak ellenére, hogy őt elsősorban a fizikai alkalmazások motiválták, az elméleti matematikán belül is olyan alapvető, ma is fejlődő kutatási területeket nyitott meg, mint az operátoralgebrák elmélete, a szimmetrikus operátorok önadjungált kiterjesztéseinek vizsgálata, operátor-osztályok függvénykalkulusának vizsgálata és operátorok spektrálhalmazainak vizsgálata.

Irodalom

[1] T. Carleman, *Sur les équations integrales singuliéres a noyau réel symétrique,* Upsala (1923).

[2] Á. Császár and D. Petz., A panorama of the Hungarian real and functional analysis in the 20th century, *to appear.*

[3] W. G. Faris, *Self-adjoint operators,* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 433, Springer-Verlag (Berlin–New York, 1975).

[4] M. Fréchet, Sur la définition axiomatique d'une classe d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert, *Annals. of Math.*, **(2)36** (1935), 705–718.

[5] K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschrankter Operatoren, *Math. Annalen,* **109** (1934), 465–487.

[6] E. Hellinger and O. Toeplitz, Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, *Math. Annalen,* **69**, (1910) 289–330.

[7] D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Vierte Mitteilung, *Gött, Nachr.* (1906), 157–227.

[8] P. Jordan and J. von Neumann, On inner products in linear metric spaces, *Annals of Math,* **36** (1935), 719–723.

[9] M. G. Krein, The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian transformations and its applications (in Russian), *Mat. Sbornik,* **20** (1947), 431–495.

[10] J. von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitischer Funktionaloperatoren, *Math. Annalen,* **102** (1929), 49–131.

[11] J. von Neumann, Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Annalen,* **102** (1929), 370–427.

[12] J. von Neumann, Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Annals of Math.,* **32** (1931), 191–226.

[13] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik,* Springer (Berlin, 1932). (Magyar fordítás: *A kvantummechanika matematikai alapjai,* Budapest, 1980.)

[14] J. von Neumann, Über adjungierte Funktionaloperatoren, *Annals of Math.,* **33** (1932), 294–310.

[15] J. von Neumann, On normal operators, *N.A.S. Proc.,* **21** (1935), 366–369.

[16] J. von Neumann, Eine Spektraltheorie für allgemeine operatoren eines unitaren Raumes, *Math. Nachrichten,* **4** (1951), 258–281.

[17] G. K. Pedersen, *Analysis Now,* Graduate Texts in Mathematics, 118, Springer-Verlag (New York, 1989).

[18] D. Petz and M. Rédei, John von Neumann and the theory of operator algebras, in: *The Neumann Compendum,* 163–185, eds. F. Bródi, T. Vámos, World Scientific Series in 20th Century Math., vol. **1**, World Scientific (Singapore, 1995).

[19] M. Rédei: Why John von Neumann did not like the Hilbert space formalism of quantum mechanics (and what he liked instead), *Stud. Hist. Philos. Sci B Stud. Hist. Philos. Modern Phys.,* **27** (1996), no. 4 (1997), 493–510.

Máté Matolcsi: John von Neumann and the foundation of the abstract theory of Hilbert spaces

In this historical survey we describe John von Neumann's original approach to the foundation of the theory of abstract Hilbert spaces and the spectral theory of unbounded self-adjoint operators. The paper is dedicated to the John von Neumann centennial.

TÖBBCÉLÚ, VALÓSZÍNŰSÉGGEL KORLÁTOZOTT SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSI MODELL: A LINEÁRIS PROGRAMOZÁS DUALITÁS TÉTELÉNEK EGY ALKALMAZÁSA

PRÉKOPA ANDRÁS

A dolgozat elején ismertetjük Neumann János szerepét a dualitás tétel megfogalmazásában és bizonyításában. Ezt követően rátérünk a sztochasztikus programozási eredményünk ismertetésére. Megfogalmazunk egy olyan, valószínűséggel korlátozott modellt, melyben a célfüggvény egy tagja lineáris függvények maximuma. Abban az esetben, amikor véges sok célfüggvény maximumát vesszük és a valószínűségi korlátot jelentő feltételben szereplő valószínűségi változó véges tartóval rendelkezik, felírunk egy közelítő lineáris programozási feladatot. Megmutatjuk, hogy ha a célfüggvények vektorai körében egyik sem dominál egy másikat, akkor a duális feladat is ilyen típusú. A folytonos eloszlású valószínűségi változó esetére határátmenettel nyerünk primál-duál, több célfüggvényes, valószínűséggel korlátozott feladatpárt, midőn az eloszlásfüggvény szigorúan kvázikonkáv. Speciális esetben a Komáromi-féle (1986) feladatpárt és dualitás tételt kapjuk.

1. A lineáris programozás dualitás tételéről

A szakirodalom a lineáris programozás dualitás tételének első szabatos bizonyítását a Gale, Kuhn, Tucker (1951) szerzőhármasnak tulajdonítja. A tételnek azonban fontos előzményei vannak, melyekről Prékopa (1979) cikkemben említést teszek. Érdemes ezek körében különös figyelmet szentelni Neumann János egy nem publikált cikkében foglalt, tételszerűen kimondott állításnak, melyben a primál-duál feladatpár megfogalmazásán túl a dualitás tétel kimondására is sor kerül. A bizonyítás teljességét azonban a fent említett szerzőhármas vitatja.

Neumann már 1928-ban közölt egy olyan tételt, a mátrix játékok minimax tételét, melyben egy lineáris programozási primál-duál feladatpár felismerhető és bár Neumann más utat követett, a bizonyítás a dualitás tétel alapján egyszerűen elvégezhető. A lineáris programozással közelebbi kapcsolatba azonban csak akkor került, amikor őt 1947-ben Dantzig meglátogatta. Hosszasan elbeszélgettek és ennek eredményeképpen a princetoni Institute for Advanced Studyban 1949-ben közzétett egy kéziratos dolgozatot (Neumann, 1949), melyben gondolatait összefoglalta.

Felállította a lineáris programozási primál-duál kapcsolatot és adott egy bizonyítást is a tételre, melyben a lineáris egyenlőtlenségek alaptételére hivatkozik. Nem említi azonban, hogy kinek a tételére gondol. Ebben az időben már Farkas Gyula (1901) eredményei közismertek voltak és a lineáris egyenlőtlenségek alaptételén általában a homogén esetre vonatkozó Farkas-tételt értették. Ha Neumann erre hivatkozott, akkor a tétel általa adott bizonyításában valóban van egy logikai ugrás. Ha azonban Neumann ekkor Haar (1918, 1924) tételére gondolt, mely az inhomogén esetre vonatkozik, akkor a bizonyítás teljes. Haar dolgozatában nem ez a fő tétel, a Farkas-tétel inhomogén egyenlőtlenségekre vonatkozó változata könnyen bizonyítható a homogén esetre vonatkozó tétel alapján. Lehetséges, hogy Neumann ismerte Haar dolgozatait, de az is elképzelhető, hogy az említett általánosítási lehetőséget észrevette és szükségtelennek tartotta a figyelmet erre külön felhívni. Hogy pontosan mi járt Neumann fejében, rejtve marad előttünk, ám a közismerten zseniális Neumannról nyugodtan feltételezhetjük, hogy az utóbbi esetről van szó. Ha ezt elfogadjuk, akkor Neumannt kell a dualitás tétel első felfedezőjének tekintenünk.

A primál-duál feladatpár legegyszerűbb változata a következő:

primál feladat:

(1)
$$\begin{aligned} &\max c^T x \\ &\text{feltéve, hogy} \\ &Ax \le b \\ &\ \ x \ge 0, \end{aligned}$$

duális feladat:

(2)
$$\begin{aligned} &\min b^T y \\ &\text{feltéve, hogy} \\ &A^T y \ge c \\ &\quad y \ge 0. \end{aligned}$$

A dualitás tétel a következő módon fogalmazható meg:

1. tétel. *Ha az* (1), (2) *feladatpár valamelyikének van megengedett megoldása és véges optimuma, akkor a másik is rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal és az optimum értékek egyenlők.*

Ha vannak egyenlőséges feltételek és előjellel nem korlátozott változók, akkor is megfogalmazható primál-duál feladatpár. Az egyenlőséges feltételeket egyenlőtlenség párokkal helyettesítjük, az előjellel nem korlátozott változókat nemnegatív változók különbségeként állítjuk elő és eljutunk egy általánosabb primál-duál kapcsolathoz, illetve dualitás tételhez. Teljesség kedvéért felírjuk az általánosabb primál-duál feladatpárt is (feltesszük, hogy az egyenlőtlenséges feltételek, illetve a nemnegativitással korlátozott változók kerülnek előre):

primál feladat:

$$\begin{aligned}
&\max\{c_1^T x_1 + c_2^T x_2\}\\
&\text{feltéve, hogy}\\
(3)\qquad &A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \le b_1\\
&A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2\\
&\quad x_1 \ge 0,
\end{aligned}$$

duális feladat:

$$\begin{aligned}
&\min\{b_1^T y_1 + b_2^T y_2\}\\
&\text{feltéve, hogy}\\
(4)\qquad &A_{11}^T y_1 + A_{21}^T y_2 \ge c_1\\
&A_{12}^T y_1 + A_{22}^T y_2 = c_2\\
&\quad y_1 \ge 0.
\end{aligned}$$

A (3), (4) feladatpárra az 1. tétel változatlan formában érvényes.

A (3), (4) feladatpárt szemlélve észrevesszük, hogy minden primál (duál) relációhoz hozzárendelhető egy duál (primál) változó és vice versa. E megfeleltetésben egyenlőtlenséges feltételnek nemnegativitással korlátozott változó felel meg, egyenlőséges feltételnek pedig olyan változó, melyet nem korlátozunk előjellel. Ennek ismerete megkönnyíti adott LP duálisának a felírását.

2. Valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladat diszkrét valószínűségi változókkal

A sztochasztikus programozási feladatok megfogalmazása leggyakrabban oly módon történik, hogy kiindulunk egy ún. determinisztikus alapfeladatból, mellyel kapcsolatban azután megállapítjuk, hogy bizonyos paraméterei nem állandók, hanem valószínűségi változók. Az ily módon értelmét vesztett feladatra támaszkodva, valamilyen döntési elv felhasználásával, új feladatot fogalmazunk meg és ezt nevezzük sztochasztikus programozási feladatnak, vagy modellnek.

A sztochasztikus programozási feladatok körében a valószínűséggel korlátozott feladat típus az egyik legelterjedtebb. Tekintsük az alábbi determinisztikus alapfeladatot:

$$\begin{aligned}
&\min c^T x\\
&\text{feltéve, hogy}\\
(5)\qquad &Ax \ge b\\
&Tx \ge \xi\\
&\quad x \ge 0,
\end{aligned}$$

ahol A $m \times n$-es, T $r \times n$-es mátrix, x, c, b, ξ megfelelő méretű vektorok, ξ valószínűségi vektorváltozó, x döntési változó.

Az (5) feladat alapján megfogalmazzuk az alábbi, valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladatot:

$$
\begin{aligned}
&\min c^T x \\
&\text{feltéve, hogy} \\
&Ax \geq b \\
&P(Tx \geq \xi) \geq p \\
&x \geq 0,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

ahol p $(0 < p < 1)$ rögzített, a gyakorlatban 1-hez közeli valószínűség.

Tegyük fel, hogy a $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r)^T$ véletlen vektornak véges sok lehetséges értéke van, jelölje S ezek halmazát. Ebben az esetben megfogalmazunk egy a (6) feladattal ekvivalens feladatot, mely az ún. diszjunktív programozási feladatok körébe esik. A fentiekhez szükségünk van az ún. p-efficiens pont fogalmára (lásd Prékopa, 1990). Jelölje F a ξ valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényét: $F(z) = P(\xi \leq z)$, $z \in R^r$.

1. definíció. Az $s \in S$ pontot a ξ valószínűségi vektorváltozó eloszlása p-efficiens pontjának nevezzük, ha $F(s) \geq p$ és nincs olyan $y \in S$, $y \leq s$, $y \neq s$, melyre $F(s) \geq p$.

Jelölje $\{s_1, \ldots, s_N\}$ a p-efficiens pontok halmazát. Ezek segítségével a (6) feladat az alábbi alakban írható fel:

$$
\begin{aligned}
&\min c^T x \\
&\text{feltéve, hogy} \\
&Ax \geq b \\
&Tx \in \bigcup_{i=1}^{N} (s_i + R_+^r) \\
&x \geq 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

A (7) feladat a diszjunktív programozási feladatok körébe esik, ezek numerikus megoldása általában igen nehéz, a feladat nem-konvex jellege miatt. Szokás a feladatot $0-1$ értékű változók segítségével is felírni. Ezáltal a megoldás nem könnyebb, ám lehetőség nyílik meglévő programcsomagok alkalmazására. Másik lehetőség a feladatnak egy konvexifikációja, vagyis egy közelítő, konvex feladattal való helyettesítése. Az általunk erre a célra választott feladat a következő (lásd

Prékopa, Vizvári, Badics, 1998):

$$
(8)\qquad
\begin{aligned}
&\min c^T x\\
&\text{feltéve, hogy}\\
&Ax \qquad\qquad \geq b\\
&Tx - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i s_i \geq 0\\
&\qquad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1\\
&x \geq 0,\ \lambda \geq 0.
\end{aligned}
$$

A (8) feladat duálisa a következő:

$$
(9)\qquad
\begin{aligned}
&\max\{v + b^T u\}\\
&\text{feltéve, hogy}\\
&\quad v - s_i^T z \leq 0, \qquad i = 1, \ldots, N\\
&A^T u + T^T z \leq c\\
&\quad u \geq 0,\ z \geq 0.
\end{aligned}
$$

A (9) feladatban a döntési változók u, z és az előjellel nem korlátozott v. Ez utóbbi feldattal ekvivalens az alábbi többcélfüggvényes feladat:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
&\max\left\{\min_{1\leq i\leq N} s_i^T z + b^T u\right\}\\
&\text{feltéve, hogy}\\
&A^T u + T^T z \leq c\\
&\quad u \geq 0,\ z \geq 0,
\end{aligned}
$$

melyben a v változó nem szerepel.

A (7) feladat valószínűségi korlátjában szereplő $s_1, \ldots, s_N$ p-efficiens pontok a (10) feladatban több célfüggvényt eredményeznek. A (10) feladatban azonban valószínűségi korlát nincsen.

Ha a (10) feladatból indulunk ki, akkor viszont a dualizálás révén eljuthatunk a (8) alakú feladathoz, ekkor azonban az $\{s_1, \ldots, s_N\}$ vektorhalmaz egy olyan tulajdonságára van szükség, mely automatikusan adódik, ha ennek elemei ξ eloszlásának p-efficiens pontjai. Ez abban áll, hogy e vektorok között nincs olyan pár, melyben az egyik dominálja a másikat, vagyis $s_i \not\leq s_j$, ha $i \neq j$. A félig rendezett halmazok terminológiájával élve, az $\{s_1, \ldots, s_N\}$ halmaz egy ellenlánc.

Mielőtt tovább mennénk, megemlítünk egy tételt.

2. tétel (Prékopa, Vizvári, Badics, 1998). *Tegyük fel, hogy $\{s_1, \ldots, s_N\}$ egy ellenlánc az r-dimenziós tér félig rendezett halmazában. Ekkor minden $0 < p < 1$ esetén létezik olyan valószínűségeloszlás, melynek $s_1, \ldots, s_N$ a p-efficiens pontjai.*

A tétel bizonyítása egyszerű. Az $N = 1$ eset triviális. Ha $N \geq 2$ és $\varepsilon = (1-p)/(N-1) \leq p$, akkor az $s_1, \ldots, s_N$ pontokhoz felveszünk még egy d pontot oly módon, hogy $d \leq s_i$, $d \neq s_i$, $i = 1, \ldots, N$, majd d-hez hozzárendeljük a $p - \varepsilon$, az $s_1, \ldots, s_N$ pontok mindegyikéhez pedig az ε valószínűséget. Ha viszont $p < (1/N)$, akkor olyan d pontot veszünk fel, melyre $d \geq s_i$, $d \neq s_i$, $i = 1, \ldots, N$, majd d-hez hozzárendeljük az $1 - Np$, az $s_1, \ldots, s_N$ pontok mindegyikéhez pedig a p valószínűséget.

A bizonyításból látható, hogy $N + 1$ pont mindig elegendő a kívánt valószínűségeloszlás konstrukciójához.

A 2. tétel birtokában induljunk most ki a (10) feladatból, mellyel kapcsolatban feltesszük, hogy az $s_1, \ldots, s_N$ vektorok ellenláncot alkotnak. A (10) feladat ekvivalens a (9) feladattal, annak duálisa pedig a (8) feladat. A 2. tétel szerint létezik olyan P valószínűségeloszlás, melynek p-efficiens pontjai az $s_1, \ldots, s_N$ vektorok. A (8) feladat közelítése a P valószínűségeloszlással felírt (6), (7) feladatnak.

A fentiek szerint nem az eredeti, valószínűséggel korlátozott feladat, hanem annak közelítése hozható a lineáris programozás értelmében vett duális kapcsolatba egy többcélfüggvényes feladattal.

3. Az általános, többcélú, valószínűséggel korlátozott modell

Az előző szakaszban alkalmazott jelöléseink a diszkrét valószínűségi változós, valószínűséggel korlátozott modell hagyományos jelöléseihez igazodtak. Ebben a szakaszban azonban eltérünk ettől, és inkább a kétlépcsős modell jelöléseit alkalmazzuk, noha modellünk statikus, vagyis egylépcsős modellként is értelmezhető. Tekintsük az alábbi feladatot:

$$
\begin{aligned}
& \min \left\{ \max_{1 \leq i \leq M} c_i^T x + q^T y \right\} \\
& \text{feltéve, hogy} \\
(11) \qquad & \quad Ax + B\,y \geq b \\
& P(Tx + Wy \geq \xi) \geq p_0 \\
& \qquad x \geq 0,\ y \geq 0.
\end{aligned}
$$

Az eddigiekhez képest új az, hogy a feladatban egyidejűleg szerepel több célfüggvény és valószínűségi korlát, továbbá szerepelnek még a B, W mátrixok és a q, y vektorok. A döntési változók x és y. Az A, T mátrixok és az x, ξ, b vektorok méreteinek a korábban bevezetett jelölését megtartjuk, y komponenseinek a számát jelölje l. Ezzel a B, W mátrixok és a q vektor mérete is már adott.

Feltesszük, hogy ξ diszkrét valószínűségi változó, p_0-efficiens pontjai az s_i, $i = 1, \ldots, N$ vektorok. Ekkor a (11) feladattal ekvivalens az alábbi:

$$
\begin{aligned}
& \min\left\{ \max_{1\le i\le M} c_i^T x + q^T y \right\} \\
& \text{feltéve, hogy} \\
(12) \qquad & Ax + By \ge b \\
& Tx + Wy \in \bigcup_{i=1}^{N} (s_i + R_+^r) \\
& x \ge 0, \ y \ge 0.
\end{aligned}
$$

Ennek közelítése a következő:

$$
\begin{aligned}
& \min\left\{ \max_{1\le i\le M} c_i^T x + q^T y \right\} \\
& \text{feltéve, hogy} \\
& Ax + By \ge b \\
(13) \qquad & Tx + Wy - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i s_i \ge 0 \\
& \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \\
& x \ge 0, \ y \ge 0, \ \lambda \ge 0.
\end{aligned}
$$

Az előjellel nem korlátozott t változó bevezetésével a (13) feladatot felírjuk a vele ekvivalens újabb alakban:

$$
\begin{aligned}
& \min\{t + q^T y\} \\
& \text{feltéve, hogy} \\
& t - c_i^T x \ge 0, \quad i = 1, \ldots, M \\
(14) \qquad & Ax + By \ge b \\
& Tx + Wy - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i s_i \ge 0 \\
& x \ge 0, \ y \ge 0, \ \lambda \ge 0.
\end{aligned}
$$

A (14) feladat duálisaként a következő feladatot kapjuk:

$$
(15) \qquad
\begin{array}{l}
\max\{v + b^T u\} \\
\text{feltéve, hogy} \\
v - \qquad s_i^T z \qquad\qquad \leq 0, \quad i = 1, \ldots, N \\
\qquad B^T u + W^T z \qquad \leq q \\
\qquad A^T u + \; T^T z - \sum_{i=1}^{M} \mu_i c_i \leq 0 \\
\qquad\qquad\qquad \sum_{i=1}^{M} \mu_i \quad = 1 \\
\qquad\qquad u \geq 0, \; z \geq 0, \; \mu \geq 0.
\end{array}
$$

A c_i, $i = 1, \ldots, M$ vektorokról feltehetjük, hogy ha $i \neq j$, akkor $c_i \nleq c_j$. Ha ugyanis valamely $i \neq j$ számpár esetén $c_i \leq c_j$, akkor a feladat célfüggvényéből a $c_i^T x$ függvényt elhagyva, az optimális megoldások halmaza és az optimum érték nem változik.

Alkalmazzuk a 2. tételt a (15) feladatból vett $c_1, \ldots, c_M$ vektorok $-c_1, \ldots, -c_M$ negatívjaira, melyek szintén ellenláncot alkotnak. Ezekhez hozzáveszünk még egy alkalmas további d vektort, és az így kapott $M + 1$ vektort egy η valószínűségi változó lehetséges értékeinek tekintjük. A 2. tétel bizonyítása szerint tetszőleges $0 < p_1 < 1$ esetén létezik olyan d és a $\{-c_1, \ldots, -c_M, d\}$ halmazon értelmezett P valószínűségeloszlás, melynek p_1-efficiens pontjai a $\{-c_1, \ldots, -c_M\}$ halmaz elemei. Ezt felhasználva, a (15) feladat átírható az alábbi ekvivalens alakba:

$$
(16) \qquad
\begin{array}{l}
\max\left\{ \min_{1 \leq i \leq N} s_i^T z + b^T u \right\} \\
\text{feltéve, hogy} \\
\qquad W^T z + B^T u \leq q \\
P(-T^T z - A^T u \geq \eta) \geq p_1 \\
\qquad z \geq 0, \; u \geq 0.
\end{array}
$$

A (11) többcélú, valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási modell konvexifikáltjának duálisa tehát felírható hasonló típusú feladat formájában.

Ha az A, B, W mátrixok és a b, q vektorok 0-val egyenlők, akkor a (11), (16) feladatpár az alábbira redukálódik:

$$
(17) \qquad
\begin{array}{l}
\min\left(\max_{1 \leq i \leq M} c_i^T x \right) \\
\text{feltéve, hogy} \\
P(Tx \geq \xi) \geq p_0 \\
\qquad x \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max\left(\min_{1\le i\le N} s_i^T z\right)\\
(18)\qquad &\text{feltéve, hogy}\\
&P_1(-T^T z \ge \eta) \ge p_1\\
&z \ge 0.
\end{aligned}
$$

A (17), (18) feladatok konvexifikált változatai egymás duálisai a lineáris programozási duális megfeleltetés értelmében. Ezek Komáromi (1986) feladatainak diszkrét változatai.

A konvexifikált feladatokra természetszerűleg érvényes a dualitás tétel, és az is, hogy a két feladat közül akármelyiknek a szimplex módszerrel történő megoldása a másik feladat megoldását is szolgáltatja.

4. A folytonos eset

Folytonos eseten azt értjük, hogy a (11), (16) feladatokban ξ és η folytonos eloszlású valószínűségi változók. Erre az esetre bizonyítunk be egy dualitás tételt, a (14), (15) feladatokra támaszkodva. Ezekhez a ξ és η valószínűségi változók diszkretizálása révén jutunk. A (14), (15) közelítő feladatokra a lineáris programozás dualitás tételét alkalmazzuk, az eredeti, (11), (16) feladatokra vonatkozó nemlineáris programozási dualitás tételt pedig határátmenettel nyerjük.

Feltesszük, hogy a $\xi \in R^k$, $\eta \in R^n$ valószínűségi vektorváltozók eloszlásfüggvényei kvázikonkávak és adott, kompakt, konvex halmazokon szigorúan kvázikonkávak is. Ez utóbbin az értjük, hogy a kvázikonkávitási egyenlőtlenség szigorú értelemben teljesül minden pozitív hosszúságú szakasz esetén.

Ha a valószínűségi vektorváltozók sűrűségfüggvényei szigorúan logkonkávak adott konvex halmazokon, akkor Prékopa (1973) egy tétele szerint ez az eloszlásfüggvényekre is érvényes ugyanott. Ebből viszont következik az eloszlásfüggvények szigorú kvázikonkávitása ezeken a halmazokon.

Egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy mindkét eloszlásfüggvény az egész téren szigorúan kvázikonkáv. Később megszabadulunk ettől a megszorítástól és e tulajdonságot kompakt, konvex halmazokon kívánjuk csak meg.

Jelöljék F, G, rendre a ξ, η valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit.

Feltételünkből következik, hogy minden $0 < p_0$, $p_1 < 1$ esetén

$$S = \{w \mid F(w) \ge p_0\}$$
$$C = \{w \mid G(w) \ge p_1\}$$

kompakt, konvex halmazok és határpontjaik az

$$\tilde{S} = \{w \mid F(w) = p_0\}$$
$$\tilde{C} = \{w \mid G(w) = p_1\}$$

halmazok. Az is igaz, hogy $\tilde{S}$, $\tilde{C}$ szigorúan konvex felületek, melyek függvény alakban is leírhatók oly módon, hogy a változók közül bármelyiket a többiek függvényeként előállítjuk.

A (11) feladat ekvivalens az alábbi, végtelen sok alternatív feltételt tartalmazó diszjunktív programozási feladattal:

$$
\begin{aligned}
&\min \left\{ \max_{c \in \tilde{C}} c^T x + q^T y \right\} \\
&\text{feltéve, hogy} \\
(19) \qquad & Ax + B\,y \geq b \\
& Tx + Wy \in \bigcup_{s \in \tilde{S}} (s + R_+^r) \\
& x \geq 0, \; y \geq 0.
\end{aligned}
$$

Ugyanígy, a (16) feladattal ekvivalens az alábbi, hasonló típusú feladat:

$$
\begin{aligned}
&\max \left\{ \min_{s \in \tilde{S}} s^T z + b^T u \right\} \\
&\text{feltéve, hogy} \\
(20) \qquad & W^T z + B^T u \leq q \\
& -T^T z - A^T u \in \bigcup_{c \in \tilde{C}} (-c + R_+^n) \\
& z \geq 0, \; u \geq 0.
\end{aligned}
$$

A (19), (20) feladatok félig végtelen (semi infinite) diszjunktív programozási feladatok: véges dimenziós döntési változók szerepelnek bennük, az alternatív feltételek száma azonban végtelen, kontinuum számosságú.

Válasszunk egy az $\tilde{S} = \{w \mid F(w) = p_0\}$ halmazban mindenütt sűrű $s_1, s_2, \ldots$ sorozatot és egy a $\tilde{C}\{w \mid G(w) = p_1\}$ halmazban mindenütt sűrű $-c_1, -c_2, \ldots$ sorozatot.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$
\begin{aligned}
S_N &= \bigcup_{i=1}^{N} \{w \in R^r \mid w \geq \; s_i\} \\
C_M &= \bigcup_{i=1}^{M} \{w \in R^n \mid w \geq -c_i\} \\
\tilde{S}_N &= \{\; s_1, \ldots, \; s_N\} \\
\tilde{C}_M &= \{-c_1, \ldots, -c_M\}.
\end{aligned}
$$

Nyilvánvaló, hogy $S_N \subset S_{N+1}$, $C_M \subset C_{M+1}$, $\tilde{S}_N \subset \tilde{S}_{N+1}$, $\tilde{C}_M \subset \tilde{C}_{M+1}$.

Ha a (19), (20) feladatokban az $\tilde{S}$, $\tilde{C}$ halmazok helyett az $\tilde{S}_N$, $\tilde{C}_M$ halmazokra szorítkozunk, akkor azok a 3. szakasz (11), (16) feladataira redukálódnak. Könnyen belátható, hogy fennállnak az alábbi relációk:

$$\mathrm{cl}\left(\lim_{N\to\infty} S_N\right) = S$$

$$\mathrm{cl}\left(\lim_{M\to\infty} C_M\right) = C,$$

ahol cl $(\cdot)$ a zárójelben álló halmaz lezártját jelenti. Ebből viszont következik, hogy hasonló határérték reláció érvényes a (19), (20) feladatok megengedett megoldáshalmazaival kapcsolatban is. Az $\tilde{S}_N$, $\tilde{C}_M$ halmazokkal vett megengedett megoldáshalmazok határértékeinek lezártjai ($N \to \infty$, $M \to \infty$) rendre egyenlők a (19), (20) feladatok megengedett megoldáshalmazaival.

Mielőtt tovább mennénk, megemlítjük, hogy az $\tilde{S}_N$, $\tilde{C}_M$ halmazok diszkrét konvex halmazok. Egy véges elemű D halmazt diszkrét konvex halmaznak nevezünk, ha minden $h \in D$ esetén $h \notin \mathrm{riconv}\left(D\backslash\{h\}\right)$.

Ebből következik, hogy ha a (19), (20) feladatokban $\tilde{S}$, $\tilde{C}$ helyett $\tilde{S}_N$-et, $\tilde{C}_M$-et írunk, akkor a célfüggvények első tagjait a $\max\limits_{1\le i\le M} c_i^T x$, $\min\limits_{1\le i\le N} s_i^T z$ alakba írhatjuk. A véges N, M esetére vonatkozó feladatpár tehát az alábbi:

$$\begin{array}{ll} & \min\left\{\max\limits_{1\le i\le M} c_i^T x + q^T y\right\} \\ & \text{feltéve, hogy} \\ (21) & Ax + B\,y \ge b \\ & Tx + Wy \in \bigcup\limits_{i=1}^{N}(s_i + R_+^r) \\ & x \ge 0,\ y \ge 0, \end{array}$$

illetve ennek duálisa,

$$\begin{array}{ll} & \max\left\{\min\limits_{1\le i\le N} s_i^T z + b^T u\right\} \\ & \text{feltéve, hogy} \\ (22) & W^T z + B^T u \le q \\ & -T^T z - A^T u \in \bigcup\limits_{i=1}^{M}(-c_i + R_+^n) \\ & z \ge 0,\ u \ge 0, \end{array}$$

Könnyen belátható, hogy a véges N, M esetére vonatkozó optimum értékek az említett feltételek esetén konvergálnak a folytonos esetre vonatkozó optimum értékekhez.

A fenti gondolatmenet érvényben marad akkor is, ha az eloszlások tartói nem terjednek ki az egész térre, hanem csupán azt kívánjuk meg, hogy azok kompakt, konvex halmazok. Ez esetben az S_N, C_M, $\tilde{S}_N$, $\tilde{C}_M$ halmazokat e tartókra megszorítva kell értelmezni.

Az említett halmazsorozatok határértékeinek a lezártjai és az említett célfüggvény sorozatok határértékei függetlenek az $\{s_i\}$, $\{-c_i\}$ sorozatok megválasztásától.

Érvényes az alábbi

3. tétel. *Tegyük fel, hogy a (19), (20) feladatokban szereplő ξ, η valószínűségi vektorváltozók tartói kompakt, konvex halmazok és ezeken eloszlásfüggvényeik szigorúan kvázikonkávak (ez teljesül, ha sűrűségfüggvényeik szigorúan logkonkávak). Ekkor, ha a két feladat közül valamelyiknek van megengedett megoldása és véges optimuma, akkor ez a másik feladatra is érvényes és az optimum értékek egyenlők.*

Bizonyítás. Az $\tilde{S}_N$, $\tilde{C}_N$ halmazok segítségével felírjuk a (21), (22) feladatokat. Azt kell belátnunk, hogy ha a (19), (20) feladatok közül valamelyiknek van megengedett megoldása, akkor a másiknak is van. Ekkor ugyanis a megengedett megoldások halmazainak monoton konvergenciájából és a lineáris programozás dualitás tételéből az állítás következik.

Tegyük fel, hogy a (19) feladatnak van megengedett megoldása és véges optimuma: legyen x_0, y_0 megengedett megoldás. Ha a valószínűségi korlát egyenlőséggel teljesül, akkor az $s_1 = Tx_0 + Wy_0$ választás mellett minden N esetére a közelítő feladatnak van megengedett megoldása. Minthogy a megengedett megoldások halmazai N-ben növekvő sorozatot alkotnak és a (19) feladatnak van véges optimuma, minden közelítő feladatnak is van véges optimuma. A lineáris programozás dualitás tételének értelmében ugyanez érvényes a duális közelítő feladatokra is. Ez viszont maga után vonja azt, hogy a (20) feladatnak is van megengedett megoldása, ilyen pl. a most nyert duális közelítő feladat tetszőleges megengedett megoldása. A duális közelítő feladatok optimum értékeinek felső korlátja a (19) feladat optimum értéke, ezért ennek a sorozatnak van határértéke. Erről már beláttuk, hogy egyenlő a (20) feladat optimum értékével. Miután az optimum értékek a közelítő feladatok esetén egyenlők, ugyanez érvényes a (19), (20) feladatok optimum értékeire.

Ha a valószínűségi korlát határozott egyenlőtlenséggel teljesül, akkor elég nagy N esetén minden közelítő feladatnak van megengedett megoldása és a gondolatmenet ugyanúgy folytatható, mint az előbb.

Ugyanez a bizonyítás alkalmas arra az esetre is, amikor a (20) feladatból indulunk ki. ■

Komáromi (1986) dualitás tétele a 3. tétel speciális esete, midőn az A, B, W mátrixok és a b, q vektorok 0-val egyenlők.

5. Algoritmikus megoldás, alkalmazás

A (14), (15) feladatok numerikus megoldására hatékony módszer a Prékopa, Vizvári, Badics (1998) cikkben közölt metsző sík módszer. Ez tovább finomítható a t, v változókat tartalmazó feltételek speciális szerkezetének a figyelembe vételével. További hatékony megoldási módszert ajánl a Dentcheva, Prékopa, Ruszczyński (2000) cikk. Az utóbbi előnye az, hogy nem igényli a p-efficiens pontok előzetes leszámlálását, azokat az algoritmus végrehajtása során generálja.

A folytonos eset feladatára vonatkozólag arra az esetre is adódik fontos következmény, amikor csak egy célfüggvényünk van. Ha ugyanis a ξ valószínűségi vektorváltozó számára szimulációval generálunk elég sok lehetséges értéket, akkor a nyert diszkrét valószínűségi változójú feladatot, vagy ha kedvezőbb, annak duálisát megoldhatjuk az említett módszerekkel.

Irodalom

[1] G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions,* Princeton University Press (Princeton, N.J., 1963).

[2] D. Dentcheva, A. Prékopa and A. Ruszczyński, Concavity and Efficient Points of Discrete Distributions in Probabilistic Programming, *Math. Prog. Ser. A,* **89** (2000), 55–77.

[3] J. Farkas, Theorie der einfachen Ungleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* **124** (1901), 1–24.

[4] D. Gale, H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Linear Programming and the Theory of Games, in: *Activity Analysis of Production and Allocation,* Wiley (New York, 1951), 317–329.

[5] A. Haar, A lineáris egyenlőtlenségekről, *Math. és Természettud. Értesítő,* **36** (1918), 279–296.

[6] A. Haar, Über lineare Ungleichungen, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **2** (1924), 1–19.

[7] É. Komáromi, Duality in Probabilistic Constrained Linear Programming, in: *System Modelling and Optimization, Proc. 12th IFIP Conference,* Budapest, Hungary, (A. Prékopa, J. Szelezsán and B. Strazicky, eds.), Lecture Notes in Control and Inf. Sci. Vol. 84 (1986), 423–429.

[8] J. von Neumann, Zur Theorie der Gesellschaftspiele, *Mathematische Annalen,* **100** (1928), 295–320.

[9] J. von Neumann, Discussion of a Maximum Principle, in: *Collected Works,* (1961–1963, A. H. Taub, ed.), Pergamon Press (1949).

[10] A. Prékopa, *Lineáris Programozás,* Bolyai János Mat. Társulat (Budapest, 1968).

[11] A. Prékopa, On Logarithmic Concave Measures and Functions, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **34** (1973), 335–343.

[12] A. Prékopa, Neumann János matematikai közgazdaságtani és operációkutatási munkássága, in: *Neumann János élete és munkássága* (szerk. Szentiványi Tibor), Neumann János Számítógéptudományi Társaság (Budapest, 1979), 93–111.

[13] A. Prékopa, Dual Method for a One-Stage Stochastic Programming Problem with Random RHS, Obeying a Discrete Probability Distribution, *Zeitschrift für Operations Research,* **34** (1990), 441–461.

[14] A. Prékopa, *Stochastic Programming,* Kluwer Academic Publishers (Dordrecht, 1995).

[15] A. Prékopa, B. Vizvári and T. Badics, Programming under Probabilistic Constraint with Discrete Random Variable, in: *New Trends in Mathematical Programming* (F. Giannessi et al. eds.), Kluwer Academic Publishers (Dordrecht, 1998), 235–255.

[16] B. Vizvári, The Integer Programming Background of a Stochastic Integer Programming Algorithm of Dentcheva–Prékopa–Ruszczyński, *Optimization Methods and Software,* **17** (1987), 543–559.

András Prékopa: Multi-objective, probabilistic constrained stochastic programming model: an application of the duality theorem of linear programming

First we summarize John von Neumann's role in the formulation and proof of the duality theorem of linear programming. Then we present a new probabilistic constrained stochastic programming model, where one term in the objective function is the maximum of linear functions. For the case, where the maximum of a finite number of linear functions is taken and the support of the random vector in the stochastic constraint is finite, we write up an approximate LP. If the linear functions in the multi-objective term do not dominate each other, then the dual problem is of the same type. Primal-dual problems and duality theorem are obtained for the case of a continuous distribution too, by the application of a limiting procedure, under the assumption that the c.d.f. is strictly quasi-concave. As a special case we recover Komáromi's duality theory.

TÁRSULATI ÉLET – 2002

Szele Tibor-emlékérem

A Szele Tibor-emlékérem Bizottság döntése értelmében a 2002. évi érmet **Frank András** egyetemi tanár, az ELTE operációkutatási tanszéke vezetője kapta.

Indoklás: *Frank András* 1972-ben végzett az ELTE-n. 1976-ban szerzett egyetemi doktori, 1980-ban kandidátusi- 1990-ben tudományok doktora fokozatot. Több mint 70 tudományos dolgozatot írt. Munkájának nemzetközi elismertsége is széleskörű, azokra igen sok hivatkozás van. Vendégprofesszor volt Waterloo-ban, és több évig volt Bonnban, mint kiemelt „John von Neumann" vendégprofesszor. Számos konferencia meghívott előadója, melyek közül kiemelendő a Nemzetközi Matematikai Kongresszus (Berlin, 1998.)

Több eredményét tekinti alapvetőnek a nemzetközi közvélemény. Elsők között vezette be azt a módszert, hogy egy gráfelméleti problémában a lineáris célfüggvényt, illetve lineáris feltételeket alkalmasan szubmodulárisokkal helyettesítette. Modelljeire min-max tételeket bizonyított, hatékony optimalizálási algoritmusokat dolgozott ki, és a módszert sikerrel alkalmazta fontos problémák megoldására. Alapvető Frank Andrásnak és Tardos Évának az a közös eredménye, mely szerint minden polinomiális időben megoldható kombinatorikus optimalizálási feladat (0-1 változós lineáris programozási feladat) erősen polinomiális időben is megoldható. Az utóbbi években Frank András és tanítványai kidolgozták a gráfok összefüggőségnövelésének elméletét. Ezek a hálózatelméleti szempontból is fontos eredmények nehéz eszközöket igényelnek.

Az egyik legsikeresebb hazai iskolaalkotó matematikus. Formális és informális szemináriumain igen sok diák tanulta meg a kombinatorika és kombinatorikus optimalizálás alapjait, és kapott olyan kutatási feladatot, mely pályáját hosszú évekre meghatározta. Az évek során egy valódi, együttdolgozó kutatókból álló, nyüzsgő iskola alakult ki körülötte, tanítványait bevezeti az igényes alkalmazott matematikai munkába is.

Legsikeresebb tanítványa Tardos Éva, aki Fulkerson-díjat kapott a Frank András irányításával végzett munkájáért, és a Nemzetközi Matematikai Kongresszuson Kyotoban 1990-ben meghívott előadó volt. Sebő András és Győri Ervin nemzetközileg kiemelkedő kutatók, akik a Frank vezette informális szemináriumokon indultak el. Mindkettőjük kandidátusi disszertációja Frank András problémáinak megoldásából indult ki. A fiatalabb generációból Jordán Tibor és Szigeti Zoltán Frank

Andrásnál írták a PhD-jüket a fent említett összefüggőség-növelés témából, és abból kinövő kérdésekből. Azóta is mindketten igen sikeresen folytatják kutatásaikat ezekben a témákban; mindketten több évet voltak külföldön, és nemzetközileg elismert kutatók. A Frank által irányított doktoranduszok (Fleiner Balázs, Ujvári Miklós, Jüttner Alpár, Bajba Tamás, Király Tamás, Szegő László, Fülöp Otília) mindegyike eredményesen indul a pályáján. Témaválasztásuk sokszínűsége és sikeressége Frank széles áttekintését tükrözi a kombinatorikus optimalizálás egészéről. Megemlítendő még Benczúr András és Fleiner Tamás, akik a szakdolgozatukat írták Franknál, majd külföldön PhD-ztek jelentős részben olyan témában dolgozva, amit még a szakdolgozatukban Frank javaslatára kezdtek.

Beke Manó-emlékdíj

A Beke Manó-emlékdíj Bizottság a Beke Manó-díj első fokozatát ítélte oda **Fried Ervinnének.**

Indoklás: *Fried Ervinné* odaadó és eredményes munkájával a magyar matematikusok és matematikatanárok megbecsülését vívta ki. Hozzájárult ahhoz, hogy a matematika művelése sok-sok középiskolai diák, egyetemista, matematikát művelő tanár és nem tanár, esetleg a matematikai feladatokat csak kedvtelésből megoldó ember számára magas szinten hozzáférhető legyen. Salgótarjánban, a budapesti Kanizsai Dorottya Gimnáziumban és a József Attila Gimnáziumban tanított. 1974-től a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok felelős szerkesztője lett. Nyugdíjba vonulása után is tagja maradt a szerkesztőbizottságnak, 1993 óta tagja a Lapot felügyelő kuratóriumnak. A szakközépiskolások motiválására 1984-ben bevezette a C-jelű, a hozzájuk közelebb álló feladatok rovatát, amelyik mára talán a folyóirat legnépszerűbb rovatává vált. Szerkesztője volt a Lap 1993. évi centenáriumi számának, az 1994. évi angol nyelvű számnak, válogatója és társszerkesztője az 1998-ban megjelent angol nyelvű könyv anyagának. Több éven keresztül tagja volt az Oktatási Bizottságnak. (Fried Ervinné, sajnos nem vette át a díjat.)

A Beke Manó-díj 2. fokozatában részesülnek: **Kubatov Antal, Lénárt István, Náfrádi Ferenc, Szakaliné Haraszti Éva, Szommer Imréné, Veres Pál, Vígh Mária.**

Indoklás: *Kubatov Antal* a Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium tanára. A munkáját közelről ismerők szavait idézve „a magyar matematikaoktatásnak, a matematikai tehetséggondozásnak meghatározó egyénisége". Tanítványai rendszeresen szerepelnek a különböző országos versenyek díjazottjai között. Tudását, pedagógiai tapasztalatait szívesen osztja meg fiatalabb tanártársaival. Iskolájában hozzáértéssel irányítja a speciális matematikai osztályok tanítását. Matematika táborokban, konferenciákon előadásokat, feladatmegoldó szemináriumokat vállal és tart nagy sikerrel. Aktívan vesz részt a Bolyai Társulat munkájában, a Somogy megyei Tagozat titkára, az Oktatási bizottság tagja. Kubatov Antal volt a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny kaposvári rendezője.

Szommer Imréné tanító, 1971 óta a Szekszárdi Babits Mihály Általános Iskola hűséges dolgozója. Sokoldalúan képzett, magát folyamatosan képző pedagógus. Nagy gondot fordít tanítványainak matematikai nevelésére mind a tanítási órákon, mind azokon kívül is. Iskolájában évek óta szakkört vezet. Kiemelkedő tehetséggondozó munkáját igazolja növendékeinek különféle matematikai versenyeken tanúsított kitűnő szereplése. A megyei szintű pedagógiai munkába is bekapcsolódott.

Lénárt István 1969 óta foglalkozik matematikai és matematika-didaktikai kutatással. 1982 óta oktatási kísérleteket vezet a gömbi geometria minél korábbi taníthatóságát kutatva. Ebből fejlődött ki az a tananyag, amely az ELTE Természettudományi és Tanítóképző karain már az oktatás része lett, a hallgatók nagy élvezettel követik előadásait, szemináriumait. A sík és gömb összehasonlító geometriája témakörben nem csak Magyarországon, hanem Európa számos országában és Amerikában nagysikerű előadásokat tart. Széles látóköre, hallgatósághoz való alkalmazkodásának képessége teszi lehetővé, hogy a legfiatalabb korosztálytól kezdve a matematika iránt esetleg előítéletekkel bírókig, mindenkihez közel tudja vinni a geometriatanítás más, új szemléletét. A rajzgömbkészlet megalkotásával lehetővé tette, hogy a témakör tanítása a konkrét tevékenység szintjén kezdődhessen. A „Nem-euklideszi kalandok a rajzgömbön" című tankönyve mind Magyarországon, mind az angol nyelvterületen nagy sikert aratott.

Náfrádi Ferenc a Nyugat-Magyarországi Egyetem Apáczai Csere János Tanítóképző Főiskola matematika és természettudományi tanszékének főiskolai docense, matematika–fizika–számítástechnika szakos középiskolai tanár. Középiskolai tanárként lényeglátásra, logikus gondolkodásra nevelte tanítványait, a tanítás során megmutatta diákjainak a matematika szépségeit, megéreztette a tantárgy fontosságát, társadalmi hasznosságát. Fontosnak tartja, hogy minden diák számára biztosítva legyen a matematika terén a fejlődés lehetősége. 1985 óta mint tanítóképző főiskolai tanár, 1990 és 1996 között mint tanszékvezető ezt a szemléletet próbálta a leendő tanítók sajátjává tenni. Mind a tanítóképzés, mind a közoktatás területén vezető és fáradságos szerepet vállalt oktatási programok kidolgozásában, versenyek szervezésében, lebonyolításában. Rendszeresen részt vesz a felvidéki kihelyezett tanítóképzésben. A Bolyai János Matematikai Társulat megyei tagozati titkára. Számos publikációval gazdagította a középiskolai matematikatanítás és a felsőoktatás szakirodalmát.

Szakaliné Haraszti Éva az egri Neumann János Szakközépiskola és Gimnázium igazgatóhelyettese. Vezetői tevékenysége során iskolájában olyan matematikaoktatási műhelyt hozott létre, melynek eredményeképpen az iskola diákjai évről évre kiváló eredményeket érnek el országos versenyeken. Saját tanítványai is rendszeresen szerepelnek az Arany Dániel verseny és az OKTV díjazottjai között. A tanulók képességeit figyelembe véve, törekszik olyan problémákat kiválasztani, amelyek megoldása minden tanuló számára sikerélményt biztosítanak.

Veres Pál a miskolci Földes Ferenc Gimnázium igazgatója. Kiválóan felkészült, országosan ismert és elismert tanár, a speciális matematika tantervű oktatás szakembere. Közeli és távolabbi munkatársai szakértelmét, segítőkészségét, emberségét is tapasztalhatják. Nem csak a matematikában, hanem a közéletben is kiváló problémamegoldó. Iskolán kívüli tevékenysége is sokoldalú. Rendszeres előadója, programvezetője a Matematikatanárok Nyári Egyetemének. Rendszeresen csoportvezetője versenygyőztes diákok matematika táborainak. Konferenciák szervezőjeként és előadóként járul hozzá a határon kívüli magyarok szakmai fejlődéséhez. A Társulat Oktatási Bizottságának alelnöke volt a kitüntetés évében.

Vígh Mária a budapesti X. kerületi MÁV Telepi Általános Iskola tanára, szaktanácsadó. Szívügyének tekinti a hátrányos helyzetű tanulók fejlesztését, szakértelemmel, szeretettel, türelemmel foglalkozik tanítványaival, osztozik gondjaikban, örömeikben. Keresi az aktuális fejlesztési helyzetnek megfelelő matematikatanítási eljárásokat. Fővárosi szinten részt vett a matematikai nevelés megújításának fontos mozzanataiban. Bekapcsolódott a Fővárosi Pedagógiai Intézet és a hollandiai CITO Mérési Központ közös munkájába, amelynek keretében egy gyakorlati szemléletű feladatbank fejlesztésében vesz részt. Az FPI diagnosztikus matematikai méréseihez feladatanyagot készített és tapasztalatait tanulmányokban foglalta össze. Továbbképzéseken, módszertani napokon előadásokat tart. Közreműködője kerületi, budapesti matematika versenyeknek.

Grünwald Géza-emlékérem

Az e célból létrehozott bizottság 2002-ben úgy határozott, hogy a jelöltek közül a 2002. évi emlékérmet **Barát János, Matolcsi Máté, Podoski Károly** és **Szegedy Balázs** kapja.

Indoklás: *Barát Jánosnak,* aki 1974-ben született, 7 dolgozata jelent meg – a díj átadásáig – a véges geometriák és gráfelmélet témakörében, további 3 van elfogadva, illetve közlésre benyújtva. Munkásságát a Hamilton-körök számával foglalkozó TDK dolgozata indította el. Ezek után a gráfok szélesség típusú paramétereivel kezdett foglalkozni, jelenleg is e témában folytatja kutatásait.

Matolcsi Máténak, aki 1973-ban született, 6 megjelent és további 4 benyújtott, illetve elfogadott dolgozata van. Eleinte a formaösszeg konstrukciójának általánosításával foglalkozott, majd bekapcsolódott a transzfer függvények pozitív realizációjával kapcsolatos kutatásaiba. Ezzel párhuzamosan a „projekciós" Trotter-formula konvergenciáját is tanulmányozta.

Podoski Károly 1972-ben született, viszonylag későn kezdte matematikai kutatásait, így csak 2 megjelent dolgozata van. Munkásságát a csoportelméletben, végzi. Egyik fő eredménye, hogy kimutatta, hogy, ha egy G csoportot le lehet fedni végtelen κ számosságú kommutatív részcsoporttal, akkor a centrum indexe legfeljebb 2^{κ}, és ez a korlát tovább már nem javítható. Szegedy Balázzsal együtt feltérképezték a csoport kommutativitásának különböző mérőszámai közötti kapcsolatokat.

Szegedy Balázsnak, aki 1974-ben született, 4 dolgozata jelent meg, további 3 van elfogadva, illetve közlésre benyújtva. Érdeklődése középpontjában az algebra és azon belül a csoportelmélet áll, de írt kombinatorikai témájú dolgozatokat is. Doktori értekezésének védésére a közeli jövőben kerül sor.

Farkas Gyula-emlékdíj

A Farkas Gyula-emlékdíj Bizottság 2002-ben a következőknek ítélte oda az emlékdíjat:

Imreh Csanád (Szegedi Tudományegyetem, informatikai tanszékcsoport), **Pintér Márta** (Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, számítástudományi és informatikai tanszék), **Tasnádi Attila** (Budapesti Közgazdaságtudományi és Államigazgatási Egyetem, matematikai tanszék), valamint posztumusz díjat: **László Ákos** (Pécsi Tudományegyetem, matematika tanszék).

Indoklás: *Imreh Csanád* 1975-ben született. A JATE matematikus szakát 1998-ban fejezte be, kitüntetéses oklevéllel. Ugyanitt kapott 2001-ben doktori fokozatot. Egyik kutatási területe a hálózati folyamok szintézise. A feladat teljes általánosságban algoritmikusan nehéz, épp ezért fontos a jól megoldható részesetek vizsgálata. Ebben Imreh Csanád jelentős és szép eredményeket ért el. Másik fontos kutatási területe az on-line algoritmusok. Ezen belül különböző ütemezési feladatokkal foglalkozik, ezekre fejlesztett ki hatékony módszereket. Ezeket az eredményeket nemzetközi konferenciákon és rangos folyóiratokban publikálta. 2002-ben a saarbrückeni Max-Planck Intézetben egy több előadásból álló minikurzust tartott.

Pintér Márta 1974-ben született. 1997-ben kapott informatikus diplomát a Budapesti Műszaki Egyetemen. 2002-ben ugyanitt szerzett doktori fokozatot. Kutatásainak nagy része az alakfelismerés valószínűségi elméletéhez kapcsolódik. Bevezetett például egy új fogalmat függvényosztályok nagyságának mérésére, ami a klasszikus Vapnik–Chervonenkis-dimenziónál alkalmasabb a feladatra. Több nemzetközi konferencián tartott előadást, eredményeit referált folyóiratokban és konferenciakiadványokban publikálta, amelyek közül néhányra már a terület egyik legjobb folyóiratában hivatkoztak is.

Tasnádi Attila 1969-ben született. Előbb a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetemen szerzett közgazdász diplomát, majd 1997-ben az ELTE programtervező matematikus szakát is elvégezte, 2000-ben kapott közgazdaságtudományi PhD-t. Tasnádi Attila a matematikai közgazdaságtan és a játékelmélet terén ért el nemzetközileg is figyelemre méltó eredményeket. Olyan közgazdaságtani modelleket vizsgál, ahol a termelők dönthetnek a termékek áráról, és gyártókapacitásuk függvényében az áruk mennyiségéről is. Ebben a modellben sikerült például a játékelméletből ismert tiszta Nash-egyensúlyi pont létezését garantáló feltételeket meghatároznia. Eredményeit rangos szakmai folyóiratokban publikálta és jelent meg cikke a Természet Világában is.

László Ákos 1970-ben született. 1993-ban a BME gépészmérnöki karán szerzett mérnök matematikus diplomát. Ezt követően az ELTE Alkalmazott matematika doktori iskoláján folytatta tanulmányait. Érdeklődésének középpontjában az irányításelmélet állt. A lineáris rendszerek elméletének alapvető módszereit és eredményeit vizsgálta. Munkái mély matematikai tudásról tesznek bizonyságot. Algebrai, geometriai és komplex függvénytani eszközökkel ért el új eredményeket és helyezett korábbi, ismert eredményeket új megvilágításba. Több cikkét a témakör vezető lapja közölte. László Ákos ígéretes tehetség volt, de biztatóan induló pályája sajnos korán megszakadt. 2002-ben kapta meg a PhD fokozatot, de korai halála miatt az oklevelet már nem vehette át.

Rényi Kató-díj

A Bizottság döntése alapján a Rényi Kató-emlékdíj első fokozatában részesült **Kun Gábor,** az ELTE (2002-ben) negyedéves és **Mátrai Tamás,** az ELTE végzett hallgatója. Második fokozatban részesült **Bérczi Gergely, Lippner Gábor,** az ELTE negyedéves és **Szabó Jácint,** az ELTE végzett hallgatója.

Indoklás: *Kun Gábor* 2001-ben már megkapta a Rényi Kató-emlékdíj II. fokozatát, akkor díjazott két cikkét most nem vette figyelembe a bizottság. További 4 dolgozata alapján kapta a díj első fokozatát. Cikkeiben az alábbiakkal foglalkozik: kidolgozza a részbenrendezett halmazok fundamentális csoportjának és a fedőterek elméletét. Belátja, hogy egy ordervarietásban pontosan akkor nincs korona, ha minden bennelévő részbenrendezett halmaz fundamentális csoportja triviális. Lippner Gáborral közösen egy konvex halmazokkal kapcsolatos síkbeli Ramsey-problémában kettős exponenciálisra javítja a korábbi ismert korlátot. Egy másik cikkében ügyes konstrukciót ad Borel-halmazok egy speciális sorozatára.

Mátrai Tamás következőkben felsorolt eredményeit, a díj elnyeréséig 6 dolgozat tartalmazta. Egy, a differenciafüggvényekre vonatkozó Laczkovich-tétel kategóriaduálisát igazolva belátja, hogy ha egy f valós függvény minden differenciafüggvénye Baire-tulajdonságú, akkor f előáll $g + H + \phi$ alakban, ahol G Baire-tulajdonságú, H additív, ϕ minden differenciafüggvénye első kategóriájú halmaz kivételével 0. Egy másik dolgozatában azt vizsgálta, hogy adott $p < q$-ra egy f periodikus Lp függvénynek h-k milyen halmazára lehet az $f(x+h) - f(x)$ differenciafüggvénye Lq-ban, anélkül, hogy f maga Lq-beli lenne. Keleti Tamás azt sejtette, hogy ezek a halmazok éppen az N-halmazok (ahol egy nem mindenütt abszolút konvergens Fourier sor abszolút konvergens lehet). Mátrai ezt $q \leq 2$-re igazolta.

Bérczi Gergely a díj odaítéléséig 3 dolgozatot írt. Fehér Lászlóval és Rimányi Richárddal közös cikkében a $\sum 1,1$ és $\sum 1,1,1$ típusú szingularitások Thom-polinomjait számolják ki. Önálló dolgozataiban bebizonyítja, hogy minden $\alpha > 0$ aszimptotikus alsó sűrűségű sorozat 2 tényezős szorzataiból álló sorozat hézagai legfeljebb α^{-4} hosszúak, illetve Sárközy és Manduit-bináris sorozatok mértékeire vonatkozó tételeit általánosítja több szimbólumot tartalmazó sorozatokra.

Lippner Gábornak két dolgozata született a díj odaítéléséig. Kun Gáborral egy konvex halmazokkal kapcsolatos síkbeli Ramsey-problémában kettös exponenciálisra javítja a korábbi ismert korlátot. Egy 25 éve megoldatlan immerzióelméleti (differenciáltopológia) problémára ad teljes, kimerítő és effektív megoldást.

Szabó Jácint is kétdolgozatos a díj elnyeréséig. Király Zoltánnal nagymértékben kiterjesztette Kelmans úgynevezett feszített k-faktorokkal kapcsolatos eredményét, amely Tutte klasszikus tételének általánosítása. Egy másik cikke Kaneko azon tételével foglalkozik, amely karakterizálta azon gráfokat, amelyeknek létezik hosszú (tehát legalább 2 élű) utakból álló faktora. Szabó ezt általánosítja olyan erdőkre, amelyekben minden komponensében a maximális fokszám k. Tutte, illetve Kaneko tétele a $k = 1, 2$ eseteknek felel meg.

JELENTÉS A 2002. ÉVI SCHWEITZER MIKLÓS-EMLÉKVERSENYRŐL

A Bolyai János Matematikai Társulat a Schweitzer Miklós-emlékversenyt a 2002/2003-as tanévben 2002. november 8. és 18. között rendezte meg. A verseny szervezőbizottságának munkájában a következő tagok vettek részt: Laczkovich Miklós (elnök), Freud Róbert, Fried Ervin, Halász Gábor, Makai Endre, Michaletzky György, Pálfy Péter Pál, Ruzsa Imre, T. Sós Vera és Fleiner Tamás (titkár).

A bizottság október 7-i és október 21-i ülésén a beérkezett javaslatokból tíz feladatot választott ki az alábbiak szerint: 1. feladat: Komjáth Péter és Saharon Shelah javaslata; 2. feladat: Fleiner Tamás javaslata; 3. feladat: Fried Ervin javaslata; 4. feladat: Ruzsa Imre javaslata; 5. feladat: Laczkovich Miklós javaslata; 6. feladat: Totik Vilmos és Komjáth Péter javaslata; 7. feladat: Halász Gábor javaslata; 8. feladat: Pach János javaslata; 9. feladat: Moussong Gábor javaslata; 10. feladat: Móri Tamás javaslata.

A versenyen 13 versenyző vett részt, akik összesen 69 feladat megoldásásval próbálkoztak. A legnehezebbnek a negyedik, számelmélet feladat bizonyult, amire mindössze egyetlen teljes megoldás született. A bizottság november 27-i ülésén az alábbi döntést hozta:

I. díjban részesül **Kun Gábor,** az ELTE ötödéves matematikus hallgatója. Kun Gábor valamennyi feladatra helyes megoldást nyújtott be. Említést érdemel a 6. példában az $(a) \Rightarrow (b)$ implikáció elegáns bizonyítása, ami lényegesen egyszerűbb a kitűzők megoldásánál. Ugyancsak világosan és szépen igazolja a 2. feladat állítását. Kun Gábor a bizottság döntése alapján az I. díj mellett 45 000 Ft pénzjutalomban részesül.

II. díjat kap **Terpai Tamás,** az ELTE negyedéves matematikus hallgatója. Terpai Tamás a legnehezebbnek bizonyult 4. kivételével minden feladattal foglalkozott, a 7. kivételével minden benyújtott megoldása helyes. Terpai Tamás a II. díjjal 30 000 Ft pénzjutalmat vehet át.

III. díjat kap **Braun Gábor,** az ELTE 2002-ben végzett matematikus hallgatója, **Lippner Gábor,** az ELTE ötödéves matematikus hallgatója, illetve **Máthé András,** az ELTE harmadéves matematikus hallgatója. Braun Gábor megoldotta az 1., a 3., az 5., a 6., a 9. és a 10. feladatot. Lippner Gábor az 1., a 3., az 5., a 6., a 8., illetve a 10. feladatot oldotta meg és a 4. feladatban ért el részeredményt. Máthé András megoldotta az 1., a 3., az 5., a 6., a 8. és a 10. feladatot, a 6. feladathoz érdekes megjegyzést fűzött. A III. díj 20 000 Ft pénzjutalommal jár.

Dicséretben részesül **Gyenes Zoltán,** az ELTE harmadéves matematikus hallgatója, **Juhász András,** az ELTE negyedéves matematikus hallgatója, **Pálvölgyi Dömötör,** az ELTE harmadéves matematikus hallgatója és **Végh László**, az ELTE negyedéves matematikus hallgatója. Gyenes Zoltán megoldotta az 1., a 3., a 7., a 8. és a 10. feladatot és részeredményt ért el a 4. feladatban. Juhász András megoldotta az 1., a 3., és a 9. feladatot, lényeges eredményt ért el a 6. feladatban és részmegoldást adott a 7., illetve a 10. példára. Pálvölgyi Dömötör lényegében jól oldotta meg a 3. és a 8. feladatot illetve részeredményt ért el az 1., 5., 6. és 10. feladatban, továbbá ő adta a legegyszerűbb megoldást a 3. feladatra. Az 5. példára adott megoldása hibás, de javítható. Végh László az 1., 3., 8. és 10. feladatot oldotta meg és a 2. feladatban ért el lényeges eredményt.

A bizottság köszönetet mond mindazon közreműködőknek akik segítették a verseny lebonyolítását, így a kitűzött és ki nem tűzött feladatjavaslatokat beküldő kollégáknak és a Bolyai Társulat alkalmazottainak. A verseny sikerének természetesen elengedhetetlen feltétele volt a versenyzők részvétele, akiknek száma sajnos nem érte el a legutóbbi években megszokottat. A bizottság mindazonáltal megköszöni a részvevők kitartó munkáját, és az itt nem díjazottaknak is további sikeres versenyzést kíván.

Budapest, 2002. december 6.

Laczkovich Miklós (elnök) és Fleiner Tamás (titkár)
a Schweitzer Miklós-emlékverseny bizottsága nevében

A 2002. évi Schweitzer Miklós-emlékverseny feladatai és megoldásai 2002. november 8–18.

1. *Tetszőleges α rendszámra jelöljük $H(\alpha)$-val azon $f : \alpha \to \{-1,0,1\}$ függvények halmazát, amelyek csak véges sok helyen vesznek fel 0-tól különböző értéket. Rendezzük $H(\alpha)$-t az utolsó eltérés szerint, azaz $f,g \in H(\alpha)$ esetén legyen $f \prec g$ akkor, ha $f(\beta) < g(\beta)$ teljesül a legnagyobb $\beta < \alpha$ rendszámra, amelyre $f(\beta) \neq g(\beta)$. Bizonyítsuk be, hogy a $\big(H(\alpha), \prec\big)$ rendezett halmaz rendtípusa szétszórt (azaz nem tartalmaz a racionális számok szokásosan rendezett halmazával izomorf részhalmazt), továbbá minden szétszórt rendtípus beágyazható valamelyik $\big(H(\alpha), \prec\big)$-ba.*

Megoldás. Tegyük fel először, hogy valamilyen α rendszámra van rendezéstartó $f : (\mathbf{Q}, <) \to \big(H(\alpha), <\big)$ beágyazás. Legyen $\beta < \alpha$ a legkisebb rendszám, ami előfordul, mint $f(q_0)$ és $f(q_1)$ utolsó eltérése valamilyen $q_0 < q_1$-re. Legyen $q_0 < q_2 < q_3 < q_1$ két további racionális szám. Ekkor az $f(q_0), \dots, f(q_1)$ függvények megegyeznek β-n kívül, tehát $f(q_0)(\beta) < f(q_2)(\beta) < f(q_3)(\beta) < f(q_1)(\beta)$, ami lehetetlen.

A másik irányhoz nevezzünk egy rendezett halmazt kis halmaznak, ha valamelyik $\big(H(\alpha), <\big)$-ba ágyazható, egyébként pedig nagynak.

1. állítás. *Kis halmazok jólrendezett vagy fordítottan jólrendezett összege is kis halmaz.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $(A, <)$ halmaz az $(A_\beta, <_\beta)$ kis halmazok rendezett összege $(\beta < \tau)$, $(A_\beta, <_\beta)$ pedig beágyazható $\big(H(\alpha_\beta), <\big)$-be. Legyen α az α_β rendszámok felső korlátja, ekkor nyilván minden $(A_\beta, <_\beta)$ $\big(H(\alpha), <\big)$-be is ágyazható, legyen φ_β egy ilyen beágyazás. Ezután legyen $\varphi : A \to H(\alpha + \tau)$ az a beágyazás, ami $x \in A_\beta$-t abba az $\alpha + \tau \to \{-1, 0, 1\}$ függvénybe viszi, ami α alatt $\varphi_\beta(x)$-szel azonos, az $\alpha + \beta$ helyen 1, a többi helyen 0. Ez nyilván rendezett beágyazás lesz.

A fordítottan rendezett összeg esetében hasonlóan járunk el, csak a $\varphi(x)$ függvénynek az $\alpha + \beta$ helyen a -1 értéket adjuk.

Tegyük most fel, hogy $(A, <)$ nagy. Ha $x \in A$, legyen $A_x = \{y \in A : y < x\}$, $A^x = \{y \in A : x < y\}$.

2. állítás. *Ha $x \in A$, akkor $(A_x, <)$ vagy $(A^x, <)$ nagy.*

Bizonyítás. Különben $(A, <)$, mint a rendezett $A_x \cup \{x\} \cup A^x$ összeg eredménye, kis halmaz lenne.

3. állítás. *Van $x \in A$, amire $(A_x, <)$ és $(A^x, <)$ is nagy.*

Bizonyítás. Különben A az $A = A' \cup A''$ diszjunkt unióként írható, ahol A' azokól az x pontokból áll, amikre A_x kis halmaz, A'' pedig azokból az x pontokból áll, amikre A^x kis halmaz. Nyilván A_x kezdőszelet és A^x végszelet, tehát ez rendezett unió, így valamelyikük, mondjuk A'' nagy halmaz.

Legyen most $\{x_\beta : \beta < \mu\}$ kofinális, jólrendezett részhalmaz $(A'', <)$-ben. Ekkor az x_β-k által alkotott intervallumok kis halmazok jólrendezett összegére bontja a nagy $(A'', <)$-t, ami lehetetlen.

A 3. állítás segítségével sorra tudjuk definiálni az $F(q) \in A$ elemeket $(q \in \mathbf{Q})$, hogy $q < q'$ esetén az $\big(F(q), F(q')\big)$ intervallum nagy, ezzel beágyazzuk $(\mathbf{Q}, <)$-t $(A, <)$-be. ∎

A kitűzők megoldása

2. *Legyen G egyszerű, k-élösszefüggő, n csúcsú gráf, u és v pedig legyenek G különböző csúcsai. Bizonyítsuk be, hogy létezik G-ben u és v között k élidegen út, melyek bármelyike legfeljebb $\frac{20n}{k}$ élt tartalmaz.*

Megoldás. Irányítsuk G minden élét mindkét irányba, legyen a keletkező élek c kapacitása és k költsége is egységnyi. A kapott hálózatot jelöljük N-nel. A G gráf k-élösszefüggősége miatt létezik u és v közt k élidegen út, ezért az N hálózatban létezik u-ból v-be k értékű folyam. Mivel bármely k értékű $u - v$ folyam költsége pozitív, ezért a lineáris programozás dualitástétele miatt létezik az N hálózatban olyan k értékű x folyam is u-ból v-be, ami egyrészt minimális költségű, másrészt a kapacitások egész volta miatt egész értékű is, azaz k db élidegen irányított $u - v$ út karakterisztikus vektorának összege. Figyeljük meg, hogy ezen utak nem használhatják G egyetlen élét sem mindkét irányban, mert egy (2 hosszú) irányított kör törlése után olcsóbb k értékű $u - v$ folyamot kapunk. Ezért az x folyam k db élidegen (irányítatlan) útnak felel meg a G-ben.

Megmutatjuk, hogy a szóbanforgó utak egye sem túl hosszú. Jól ismert, hogy a fent említett – a k értékű folyamok költségét minimalizáló – lineáris program duálisának is létezik egész optimuma, ami egy, az N csúcsain értelmezett π potenciálfüggvény az alábbi tulajdonsággal. N bármely ab irányított élére

$$x(ab) < c(ab) \Rightarrow k(ab) \geq \pi(b) - \pi(a), \quad \text{illetve} \quad x(ab) > 0 \Rightarrow k(ab) \leq \pi(b) - \pi(a).$$

Vagyis ha a π potenciál nívóhalmazai a $V(G)$-t $V_0, V_1, \dots, V_m$ nemüres részhalmazokra partícionálják, akkor a kapott utak minden éle legalább egy nívóhalmazt ugrik előre, továbbá a legalább két nívóhalmazt ugró élek mindegyike útél. Azonnal adódik, hogy a nívóhalmazok m száma felső korlát a szóbanforgó utak bármelyikének hosszára.

Legyen $n_i := |V_i|$. Megmutatjuk, hogy $0 \le i \le m-5$-re

$$n_i + n_{i+1} + n_{i+2} + n_{i+3} + n_{i+4} + n_{i+5} \ge \frac{k}{2} + 1. \tag{1}$$

Ha ugyanis ez nem áll, akkor $V_{i+1}, V_{i+2}, V_{i+3}$, illetve V_{i+4} bármely v csúcsából legalább k él indul ki, amik közül legfeljebb $\frac{k}{2} - 1$ db vezethet a $V_i \cup V_{i+1} \cup \ldots \cup V_{i+5}$ halmazba. Tehát $V_{i+1} \cup V_{i+2} \cup V_{i+3} \cup V_{i+4}$ bármely v csúcsából legalább $\frac{k}{2} + 1$ olyan él indul, amelyik a V_i vagy a V_{i+5} halmazt átugorja, és ezért útél. Tudjuk, hogy a V_i-t átugró is és a V_{i+5}-t átugró élekből is legfeljebb annyi lehet, ahány utunk van, azaz k, vagyis

$$(n_{i+1} + n_{i+2} + n_{i+3} + n_{i+4}) \left(\frac{k}{2} + 1\right) \le 2k,$$

ahonnan

$$4 \le n_{i+1} + n_{i+2} + n_{i+3} + n_{i+4} \le \frac{2k}{(\frac{k}{2} + 1)} = \frac{4k}{k+2} < 4,$$

ellentmondás, tehát (1) valóban igaz. Innen

$$n \ge \left\lfloor \frac{m}{6} \right\rfloor \cdot \left(\frac{k}{2} + 1\right) \quad \Rightarrow \quad \left\lfloor \frac{m}{6} \right\rfloor \le \frac{2n}{k+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m}{6} \le \left\lceil \frac{2n}{k+2} \right\rceil,$$

így $m \le 6\lceil \frac{2n}{k+2} \rceil \le 6\lceil \frac{2n}{k} \rceil \le 6 \cdot \frac{2n+k}{k} \le 6 \cdot \frac{3n}{k} = \frac{18n}{k} < \frac{20n}{k}$ adódik. ■

A kitűző megoldása

3. *Az* $\mathbf{A} = \{\text{igen}, \text{nem}\}$ *halmazon értelmezett* $f : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ *függvényt döntési függvénynek mondjuk, ha*

(*a*) *mindegyik argumentumát megváltoztatva a függvényérték is megváltozik; valamint*

(*b*) *tetszőlegesen választott argumentuma helyébe a függvényértéket helyettesítve a függvényérték nem változik meg.*

Egy $h : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ *függvényt hatalmi függvénynek nevezünk, ha van olyan* i *index, hogy a függvény értéke mindig az* i*-edik argumentummal egyezik meg.*

Azt az $m : \mathbf{A}^3 \to \mathbf{A}$ *függvényt, amelynek értéke mindig az, ami az argumentumok között legalább kétszer fellép, nevezzük demokratikus függvénynek.*

Mutassuk meg, hogy minden döntési függvény előállítható hatalmi és demokratikus függvényekből összetett függvényként.

Megoldás. A feladatot a kitűzésbeli helyett az $A = \{1, -1\}$ halmazra fogjuk megoldani. Az A^n halmazon bevezetünk egy részbenrendezést: $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\underline{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in A^n$ elemekre $\underline{a} \le \underline{b}$, ha $a_i \le b_i$ teljesül minden $1 \le i \le n$ esetén. Jelölje $\underline{a} \in A^n$ esetén $-\underline{a} := (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ az $\underline{a}$ ellentettjét, $H \subseteq A^n$ esetén pedig $-H := \{-\underline{h} : \underline{h} \in H\}$ a H-beli elemek ellentettjeinek halmazát. Azt kell igazolnunk, hogy ha $f : A^n \to A$ *döntési* *függvény*, azaz f monoton ($\underline{a} \le \underline{b} \Rightarrow f(\underline{a}) \le f(\underline{b})$), valamint $f(-\underline{a}) = -f(\underline{a})$ áll tetszőleges $\underline{a} \in A^n$-re, akkor f előáll az m és a h_i^k függvények kompozíciójaként, ahol a $h_i^k : A^k \to A$ *hatalmi függvényt* illetve az $m : A^3 \to A$ *demokratikus függvényt* a $h_i^k(a_1, a_2, \ldots, a_k) := a_i$, illetve $m(a,b,c) := \frac{a+b+c}{|a+b+c|}$ egyenlőségek definiálják. Legyen $n \ge 1$ esetén $d_n : A^n \to A$ az a függvény, amire

$$d_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \begin{cases} 1 & \text{ha } a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1, \\ -1 & \text{ha } a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = -1, \\ h_n^n(a_1, \ldots, a_n) & \text{különben.} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy d_n döntési függvény, $d_1 = h_1^1$, $d_2 = h_1^2$, $d_3 = m$, továbbá, hogy $n \ge 4$-re $d_n = m\big(h_1^n, d_{n-1}(h_2^n, h_3^n, \ldots, h_n^n), h_n^n\big)$ teljesül. Innen n szerinti indukcióval adódik, hogy minden d_n függvény előáll demokratikus és hatalmi függvények kompozíciójaként.

A feladat állítását ugyancsak n szerinti indukcióval igazoljuk. Az állítás $n = 1$-re igaz, hiszen h_1^1 az egyetlen döntési függvény. Tegyük fel tehát, hogy minden $f : A^{n-1} \to A$ döntési függvény előáll a demokratikus függvény és hatalmi függvények kompozíciójaként, és rögzítsünk egy tetszőleges $f_n : A^n \to A$ döntési függvényt. Legyen

$$X := \{\underline{x} \in A^{n-1} : f_n(\underline{x}, 1) = 1, f_n(\underline{x}, -1) = -1\} = \{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\},$$

$$H := \{\underline{a} \in A^{n-1} : f_n(\underline{a}, 1) = f_n(\underline{a}, -1) = 1\}.$$

Világos, hogy az A^{n-1} halmaz az X, H és $-H$ halmazok diszjunkt uniója.

Lemma. *Minden $\underline{x} \in X$ elemhez létezik egy olyan $f_{\underline{x}} : A^{n-1} \to A$ döntési függvény, amire $f_{\underline{x}}(\underline{x}) = 1$ és $f_{\underline{x}}|_H \equiv 1$, $f_{\underline{x}}|_{-H} \equiv -1$ teljesül.*

Bizonyítás. Úgy konstruálunk egy megfelelő $f_{\underline{x}}$ függvényt, hogy meghatározzuk a $K := f_{\underline{x}}^{-1}(1) \subset A^{n-1}$ halmazt az alábbi tulajdonságokkal.

(1) $H \subset K$, (2) $\underline{x} \in K$, (3) K *felfelé zárt*, azaz $\underline{a} \ge \underline{b} \in K$ esetén $\underline{a} \in K$, valamint (4) A^{n-1} a K és $-K$ halmazok diszjunkt uniója.

Legyen K_0 a $H \cup \{\underline{x}\}$ halmaz felfelé zárt burka, azaz $K_0 := H \cup \{\underline{k} : \underline{x} \le \underline{k}\}$. Mivel H felfelé zárt, az imént definiált K_0 is az. Továbbá $K_0 \cap (-K_0) = \emptyset$, hiszen $H \cap (-H) = \emptyset$ és $\underline{x} \notin H \cup (-H)$. Tegyük fel ezután, hogy meghatároztuk a $K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_i$ felfelé zárt halmazokat úgy, hogy $K_i \cap (-K_i) = \emptyset$. Ha $K_i \cup (-K_i) = A^{n-1}$, akkor $K := K_i$ megfelel, és befejeztük a bizonyítást. Különben legyen $\underline{a} \in A^{n-1} \setminus \big(K \cup (-K)\big)$ egy tetszőleges elem és legyen K_{i+1} a $K_i \cup \underline{a}$ halmaz felfelé zárt burka, azaz $K_{i+1} := K_i \cup \{\underline{k} : \underline{a} \le \underline{k}\}$. Világos, hogy K_{i+1} is felfelé zárt, és hogy $K_{i+1} \cap (-K_{i+1}) = \emptyset$. Az A^{n-1} halmaz véges volta miatt a K_i halmazok lánca csak véges sokszor bővülhet, azaz előbb-utóbb találunk egy megfelelő K halmazt. ∎

Az indukciós feltétel szerint minden $f_{\underline{x}}$ függvény előáll az m és hatalmi függvények kompozíciójaként. Tehát $1 \le i \le k$ esetén az

$$f^i := f_{\underline{x}_i}(h_1^n, h_2^n, \ldots, h_{n-1}^n)$$

függvény is a fenti függvények kompzíciója. Figyeljük meg, hogy

$$f_n = d_{k+1}(f^1, f^2, \ldots, f^k, h_n^n).$$

Valóban: ha $\underline{h} \in H \cup -H$, akkor $f_n(\underline{h}, a_n) = f_{\underline{x}_i}(\underline{h}) = f^i(\underline{h}, a_n)$ teljesül tetszőleges $1 \leq i \leq k$-ra. Ha pedig $\underline{x} \in X$, akkor $f_n(\underline{x}, a_n) = a_n$, továbbá $f_{\underline{x}}(\underline{x}) = 1$ és $f_{-\underline{x}}(\underline{x}) = -1$ áll $-\underline{x} \in X$ miatt. Tehát f_n is előáll a demokratikus és hatalmi függvények összetételéből, és ezzel igazoltuk az indukciós lépést.

Pálvölgyi Dömötör megoldása alapján

4. *Adott n természetes számhoz tekintsük azon $A \subseteq \mathbb{Z}_n$ halmazokat, amelyekre az $xy = uv$ egyenletnek nincs más megoldása az $x, y, u, v \in A$ maradékosztályokból, mint az $x = u$, $y = v$ és az $x = v$, $y = u$ triviális megoldások. Legyen $g(n)$ az ilyen A halmazok elemszámának maximuma. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g(n)}{\sqrt{n}} = 1.$$

Megoldás. Belátjuk először, hogy $g(p^2) \geq p - 1$, ha p páratlan prím. Csak redukált maradékokat fogunk használni. Ezek $p(p-1)$ rendű ciklikus csoportot alkotnak. A kitűző egy eredménye szerint pedig kiválasztható a modulo $p(p-1)$ maradékosztályok közül $p - 1$ darab, amelyekből képzett kéttagú összegek mind különbözők (l. Erdős–Surányi, Válogatott fejezetek a számelméletből 2. kiadás, Polygon, Szeged 1996, 228. o.).

Megjegyzés. Kis erőfeszítéssel belátható, hogy $g(p^2) = p$.

Most megbecsüljük felülről $g(n)$-et. Legyen $x, y \in \mathbb{Z}_n$ esetén

$$H_{xy} = \{z \in \mathbb{Z}_n : x = yz,\ (z, n) = 1\}.$$

Ha A olyan halmaz, hogy az $xy = uv$ egyenletnek A-ban csak triviális megoldásai vannak, akkor az összes H_{xy}, $x, y \in A$, $x \neq y$ halmazok diszjunktak, ezért

$$\sum_{x,y\in A,\ x\neq y} |H_{xy}| \leq \varphi(n). \tag{1}$$

Lemma. *$|H_{xy}| = 0$, ha $(x, n) \neq (y, n)$, és $= \varphi(n)/\varphi(n/d)$, ha $(x, n) = (y, n) = d$.*

Bizonyítás. Az első fele nyilvánvaló. A második feléhez nézzük először azt az esetet, amikor n prímhatvány, $n = p^k$. Ekkor $d = p^l$, $0 \leq l \leq k$. Ha $l = k$, akkor z gyanánt bármely p-vel nem osztható maradék vehető, a megoldások száma tehát $\varphi(p^k)$. Ha $l < k$, akkor z maradéka meg van határozva modulo p^{k-l}, a megoldások száma tehát $p^l = \varphi(p^k)/\varphi(p^k/p^l)$.

Általános $n = \prod p_i^{k_i}$ és $d = \prod p_i^{l_i}$ esetén pedig a $\mathbb{Z}_n$-beli egyenlet, vagyis modulo n vett kongruencia, visszavezethető modulo $p_i^{k_i}$ kongruenciák rendszerére, a megoldásszám pedig a prímhatvány esetből szorzással nyerhető.

Legyen $r_d = \left|\{a \in A : (a, n) = d\}\right|$. A lemma alapján (1) a következőképpen írható:

$$\sum_{d|n} \frac{r_d(r_d - 1)}{\varphi(n/d)} \leq 1. \tag{2}$$

Legyen $D = \{d \mid n : r_d > 0\}$. Ekkor

$$\sum_{d\in D}(r_d - 1) \leq \left(\sum_{d\in D} \frac{(r_d - 1)^2}{\varphi(n/d)} \sum_{d\in D} \varphi(n/d)\right)^{1/2}.$$

Itt az első összeg (2) miatt ≤ 1, a második összeg pedig $\leq \sum_{d|n} \varphi(n/d) = n$, tehát

$$\sum_{d \in D} (r_d - 1) \leq \sqrt{n}.$$

Ehhez még hozzáadva azt, hogy

$$\sum_{d \in D} 1 \leq \sum_{d|n} 1 = \tau(n),$$

azt kapjuk, hogy

$$g(n) = |A| \leq \sqrt{n} + \tau(n) = \big(1 + o(1)\big)\sqrt{n}.$$

A kitűző megoldása

5. *Jelöljük a $H \subseteq [0,1]$ halmaz Lebesgue-féle külső mértékét $\lambda(H)$-val. Az $A \subseteq [0,1] \times [0,1]$ halmaz vízszintes és függőleges szekcióit A^y-nal és A_x-szel jelöljük, tehát $A^y = \{x \in [0,1] \colon (x,y) \in A\}$ és $A_x = \{y \in [0,1] \colon (x,y) \in A\}$ minden $x, y \in [0,1]$-re.*

(*a*) *Van-e a $[0,1] \times [0,1]$ négyzetnek olyan $A \cup B$ felbontása, amelyre A^y véges sok, $1/2$-nél kisebb összhosszúságú szakasz egyesítése, és $\lambda(B_x) \leq 1/2$ minden $x, y \in [0,1]$-re?*

(*b*) *Van-e a $[0,1] \times [0,1]$ négyzetnek olyan $A \cup B$ felbontása, amelyre A^y véges sok, legfeljebb $1/2$ összhosszúságú szakasz egyesítése, és $\lambda(B_x) < 1/2$ minden $x, y \in [0,1]$-re?*

Megoldás. Egyik felbontás sem létezik. Tegyük fel először, hogy $[0,1] \times [0,1] = A \cup B$, ahol A^y véges sok $1/2$-nél kisebb összhosszúságú szakasz egyesítése és $\lambda(B_x) \leq 1/2$ minden $x, y \in [0,1]$-re. Legyen $M_x \subset [0,1]$ olyan mérhető halmaz, amelyre $B_x \subset M_x$ és $\lambda(M_x) = \lambda(B_x) \leq 1/2$ minden $x \in [0,1]$-re. Ekkor a $D = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \, : \, y \notin M_x\}$ halmazra teljesül, hogy $D_x = [0,1] \setminus M_x$ mérhető, és legalább $1/2$-mértékű minden x-re, továbbá $D \subset A$, tehát D^y lefedhető véges sok, $1/2$-nél kisebb összhosszúságú szakasszal. Jelölje f a D halmaz karakterisztikus függvényét. Ekkor egyrészt $\int_0^1 f_x dy \geq 1/2$ minden x-re, másrészt $\overline{\int}_0^1 f^y dx < 1/2$ minden y-ra, ahol $\overline{\int}_0^1$ a Darboux-féle felső integrált jelöli. Legyen

$$F(x,y) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x + (i/n), y),$$

ahol az $x + (i/n)$ összegeket mod 1 értjük. Ekkor $\overline{\int}_0^1 f^y dx < 1/2$ alapján $F(x,y) < 1/2$ minden $x, y \in [0,1] \times [0,1]$-re. Másfelől tetszőleges rögzített x-re

$$\int_0^1 F(x,y)\, dy \geq \limsup_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x + (i/n), y)\, dy \geq \frac{1}{2}$$

a Fatou-lemma szerint. Ez nyilván lehetetlen.

Most tegyük fel, hogy $[0,1] \times [0,1] = A \cup B$, ahol A^y véges sok legfeljebb $1/2$ összhosszúságú szakasz egyesítése és $\lambda(B_x) < 1/2$ minden $x, y \in [0,1]$-re. Legyen $M_x \subset [0,1]$ olyan mérhető halmaz, amelyre $B_x \subset M_x$ és $\lambda(M_x) = \lambda(B_x) < 1/2$ minden $x \in [0,1]$-re.

Ekkor a $D = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : y \notin M_x\}$ halmazra teljesül, hogy $D_x = [0,1] \setminus M_x$ mérhető és $1/2$-nél nagyobb mértékű minden x-re, továbbá $D \subset A$, tehát D^y lefedhető véges sok legfeljebb $1/2$ összhosszúságú szakasszal. Jelölje f a D halmaz karakterisztikus függvényét, és legyen $h(x) = \int_0^1 f_x\, dy$ $(x \in [0,1])$. Ekkor egyrészt $h(x) > 1/2$ minden x-re, másrészt $\overline{\int}_0^1 f^y dx \le 1/2$ minden y-ra.

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Minden $y \in [0,1]$-re létezik egy $\delta(y) > 0$ úgy, hogy ha $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ a $[0,1]$ intervallum egy $\delta(y)$-nál finomabb felosztása, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i, y)(x_i - x_{i-1}) < (1/2) + \varepsilon \tag{1}$$

minden $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ esetén. Legyen $Y_n = \{y \in [0,1] : \delta(y) > 1/n\}$. Ekkor $Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots$ és $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n = [0,1]$, tehát $\lambda(Y_n) \to 1$, és így van olyan n, amelyre $\lambda(Y_n) > 1 - \varepsilon$. Legyen $c_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ $(i = 1, \ldots, n)$ tetszőleges. Ekkor $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i, y)$ az y-nak olyan mérhető függvénye, amely (1) szerint kisebb, mint $(1/2) + \varepsilon$ egy $1 - \varepsilon$ külső mértékű halmazon, tehát valójában $< (1/2) + \varepsilon$ egy $1 - \varepsilon$ mértékű mérhető halmazon. Ebből nyilvánvaló, hogy

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(c_i) \le (1/2) + 2\varepsilon.$$

A fentiekből világos, hogy $\overline{\int}_0^1 h\, dx \le 1/2$. Ez azonban ellentmond annak, hogy $h(x) > 1/2$ minden x-re. Valóban, legyen $X_n = \{x \in [0,1] : h(x) > (1/2) + (1/n)\}$. Ekkor $[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, tehát a kategória-tétel szerint van olyan n, hogy X_n sűrű valamely I intervallumban. Ha $|I| = a$, akkor h minden felső összege $\ge (1/2) \cdot (1 - a) + \big((1/2) + (1/n)\big) \cdot a = (1/2) + (a/n)$, tehát $\overline{\int}_0^1 h\, dx \ge (1/2) + (a/n)$.

A kitűző megoldása

6. *Legyen $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt. Igazoljuk, hogy az alábbi két állítás ekvivalens:*

(*a*) *K minden x pontjához található olyan $F_x \subseteq \mathbb{R}$ nem megszámlálható halmaz, hogy*

$$\operatorname{dist}(F_x, F_y) \ge |x - y|$$

teljesül minden $x, y \in K$ esetén;

(*b*) *K nulla mértékű.*

Megoldás. Legyen K nulla mértékű. Feltehető, hogy $K \subset (0,1]$. Az alábbiakban 2^n-diadikus intervallumon az $(i/2^n, (i+1)/2^n]$ alakú jobbról zárt intervallumokat értjük. Jegyezzük meg, hogy ha K nulla mértékű, akkor $o(2^n)$ darab 2^n-diadikus intervallum metszi csak K-t $(n \to \infty)$, legyenek ezek $(i_1/2^n, (i_1+1)/2^n], \ldots, (i_m/2^n, (i_m+1)/2^n]$, és legyen ezen intervallumok halmaza S_n. Itt minden i_j és az m is függ n-től és K-tól. Mint mondtuk, $m = o(2^n)$ ha $n \to \infty$. Legyen n olyan nagy, hogy $m < 2^n/24$ teljesül. Rendeljük hozzá az $I = (i_j/2^n, (i_j+1)/2^n]$, $j = 1, \ldots, m$ intervallumhoz a

$$H(I) = H_{n,K}(I) = \left[\left(\left[\frac{i_j}{8}\right] + 3j\right)\frac{1}{2^n}, \left(\left[\frac{i_j}{8}\right] + 3j + 1\right)\frac{1}{2^n}\right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{1}{2} + \left(\left[\frac{i_j}{8}\right] + 3j\right)\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} + \left(\left[\frac{i_j}{8}\right] + 3j + 1\right)\frac{1}{2^n}\right]$$

két zárt intervallumból álló halmazt. Mivel $3m/2^n \leq 1/8$, e két intervallumból az első mindig a $[0,1/4]$, a második pedig az $[1/2,3/4]$ intervallumba esik, ezért ha $I = \big(i_j/2^n, (i_j+1)/2^n\big]$ és $J = \big(i_k/2^n, (i_k+1)/2^n\big]$, $k > j$, akkor a $H(I)$ és $H(J)$ távolságára kapjuk, hogy

$$\operatorname{dist}\big(H(J), H(I)\big) \geq \big([i_k/8] + 3k\big)/2^n - \big([i_j/8] + 3j + 1\big)/2^n$$

$$\geq \big(i_k/8 - i_j/8 + 3(k-j) - 2\big)/2^n \geq \big((i_k+1)/8 - i_j/8\big)/2^n = \operatorname{diam}(I,J)/8.$$

Tehát ily módon az S_n intervallumrendszer minden I intervallumához hozzárendeltünk egy $H(I) = H_{n,K}(I)$ két zárt intervallumból álló halmazt úgy, hogy $I, J \in S_n$, $I \neq J$ esetén

$$\operatorname{dist}\big(H(J), H(I)\big) \geq \operatorname{diam}(I,J)/8. \tag{1}$$

Ez a konstrukció a $(0,1]$ intervallumon történt, és az egyes I intervallumokhoz rendelt (két zárt intervallumból álló) $H(I)$ halmazok is mind $[0,1]$-nek részei. Világos azonban, hogy ugyanez a konstrukció bármely más $(a,b]$ diadikus intervallumon is elvégezhető mégpedig úgy is, hogy egy, az $(a,b]$-be eső K-t metsző 2^n-diadikus I intervallumhoz rendelt $H(I)$ halmaz egy előre adott $[c,d]$ intervallumba esik, ahol az egyszerűség kedvéért mindig feltesszük, hogy a $[c,d]$ hossza megegyezik az $(a,b]$ hosszával.

Most ismételjük meg ezt az eljárást minden $I \in S_n$-en és a hozzárendelt halmaz minden intervallumán (itt I játssza az $(a,b]$ intervallum szerepét, és a $H(I)$ egy tetszőleges részintervalluma játssza a $[c,d]$ szerepét), majd az így kapott intervallumokon és a hozzájuk rendelt halmazok minden részintervallumán stb. Formálisan a következőt csináljuk: választunk egy gyorsan növekvő $\{n_m\}$ sorozatot, és minden $I \in \mathcal{S}_m = S_{2^{n_1}+\ldots+2^{n_m}}$ intervallumhoz hozzárendelünk egy 2^m darab zárt, $1/2^{n_1+\cdots+n_m}$ hosszú intervallumból álló $T_m(I)$ halmazt úgy, hogy ha I^* az a $\mathcal{S}_{m-1}$-be tartozó intervallum, amely tartalmazza I-t, és $T_{m-1}(I^*) = J_1^* \cup \ldots J_{2^{m-1}}^*$, $M_m = 2^{n_1} + \ldots + 2^{n_m}$ és $I^* = \big(a^*, a^* + 1/2^{M_{m-1}}\big]$, $J_l^* = \big[c_l^*, c_l^* + 1/2^{M_{m-1}}\big]$, akkor

$$T_m(I) = \bigcup_{l=1}^{2^{m-1}} \left\{ c_l + \frac{1}{2^{n_m}} H_{n_m,(K-a^*)2^{M_{m-1}}}\big((I-a^*)2^{M_{m-1}}\big) \right\},$$

azaz a fenti H konstrukciót elvégezzük az $\mathcal{S}_{m-1}$ minden I^* intervallumán (mint $(a,b]$-vel) és a hozzá rendelt $T_{m-1}(I^*)$ halmaz minden részintervallumán (mint $[c,d]$-vel).

Indukcióval kapjuk, hogy $I, J \in \mathcal{S}_m$, $I \neq J$ esetén

$$\operatorname{dist}\big(T_m(J), T_m(I)\big) \geq \operatorname{diam}(I,J)/8. \tag{2}$$

Valóban, ha I és J az $\mathcal{S}_{m-1}$-nek ugyanabba a részintervallumába esnek, akkor ez (1)-nek és annak a ténynek a folyománya hogy $I^* \in \mathcal{S}_{m-1}$ esetén $T_{m-1}(I^*)$ bármely két részintervallumának a távolsága legalább $I^*/4$; ha pedig nem, pl. $I \subset I^*$, $J \subset J^*$ ahol $I^* \neq J^*$, $I^*, J^* \in \mathcal{S}_{m-1}$, akkor az indukciós hipotézis szerint

$$\operatorname{dist}\big(T_m(J), T_m(I)\big) \geq \operatorname{dist}\big(T_{m-1}(J^*), T_{m-1}(I^*)\big) \geq \operatorname{diam}(I^*, J^*)/8 \geq \operatorname{diam}(I,J)/8.$$

Legyen $\mathcal{S} = \cup_m \mathcal{S}_m$, és $I \in \mathcal{S}$ esetén ha m az az index amelyre $I \in \mathcal{S}_m$, akkor legyen $T(I) = T_m(I)$. Az előző egyenlőtlenség adja, hogy $I, J \in \mathcal{S}$, $I \cap J = \emptyset$ esetén

$$\operatorname{dist}\big(T(J), T(I)\big) \geq \operatorname{diam}(I,J)/8. \tag{3}$$

Valóban, mindössze (2)-t kell alkalmazni a legkisebb olyan m indexre, amelyre I és J az $\mathcal{S}_m$ különböző intervallumainak részei (és ezekre az intervallumokra).

Ármost legyen $x \in K$ esetén

$$F_x = \bigcap_{x \in I,\ I \in \mathcal{S}} T(I) = \bigcap_{m,\ I \in \mathcal{S}_m,\ x \in I} T_m(I).$$

Mivel $x \in I_m \subset I_{m-1}$, $I_m \in \mathcal{S}_m$ esetén $T_m(I_m)$ a $T_{m-1}(I_{m-1})$ minden intervallumából két pozitív távolságra levő zárt intervallumot tartalmaz, F_x perfekt minden $x \in k$-ra. Továbbá (3) adja, hogy

$$\operatorname{dist}(F_x, F_y) \geq |x-y|/8,$$

ezzel a feladatbeli feltétel elegendőségét beláttuk (pontosabban az $x \to 8F_x$ renszer megfelel a feltételeknek).

A szükségesség bizonyításához tegyük ismét fel, hogy $K \subseteq [0,1]$, és minden $x \in F_x$ esetén F_x egy perfekt halmaz úgy, hogy ha $x, y \in K$, akkor F_x és F_y távolsága legalább akkora mint az x és az y távolsága. Egy rözített M-re legyen K_M azon $x \in K$-k halmaza amelyekre $F_x \subseteq [-M, M]$. Elegendő megmutatni, hogy K_M 0 mértékű minden M-re.

Az $F = \cup_{x \in K} F_x$ halmazon definiáljuk a g függvényt úgy, hogy $g(u) = x$ minden $u \in F_x$-re és $x \in K$-ra. Ekkor a feltevés alapján $\left|g(u) - g(v)\right| \leq |u-v|$ minden $u, v \in K$-ra (azaz g egy Lip 1 függvény 1 Lipschitz-konstanssal), és könnyen látható hogy ekkor g egyértelműen kiterjeszthető ugyanilyen tulajdonságú függvénnyé az F lezártjára, majd a lezárt köztes intervallumaira lineárisan kiterjesztve kapjuk a g egy kiterjesztését $[0,1]$-re. Jelöljük ezt továbbra is g-vel. Könnyen látható, hogy ez is rendelkezik a $\left|g(u) - g(v)\right| \leq |u-v|$, $u, v \in [0,1]$ tulajdonsággal, amiből világos, hogy g abszolút folytonos és így g majdnem mindenütt differenciálható.

Legyen H az F_x, $x \in K_M$ halmazok legkisebb elemeinek halmaza (vigyázat, H nem feltétlenül mérhető!). A K_M halmaz a H halmaz g melletti képe. Mivel f konstans minden F_x halmazon, ha egy $z \in H$ pontban g differenciálható, akkor ott a deriváltja 0. Tehát $H = H_0 \cup H_1$, ahol H_0 0 mértékű, és g differenciálható H_1 minden pontjában, és a deriváltja 0. Legyen $\varepsilon > 0$. Ha tehát $z \in H_1$, akkor valamilyen $1 > \delta_z > 0$-ra igaz az, hogy ha $0 < h \leq \delta_z$, akkor

$$\left|\frac{g(z) - g(z \pm h)}{h}\right| \leq \varepsilon. \tag{4}$$

Az $I_z = (z - \delta_z, z + \delta_z)$ intervallumok befedik H_1-et, ezért kiválasztható belőlük egy megszámlálható I_{z_i}, $i = 1, 2, \ldots$ rendszer, amely szintén befedi H_1-et. De ekkor $H_2 = \cup_i I_{z_i}$ mérthető, ezért van egy olyan $L_2 \subset H_2$ kompakt részhalmaza, hogy $H_2 \setminus L_2$ mértéke kisebb, mint ε. L_2-nek van egy véges befedése: $L_2 \subseteq \cup_{i=1}^{m} I_{z_i}$, és e véges befedésben feltételezhetjük, hogy egyetlen pont sem tartozik három befedő intervallumba (ha van ilyen pont, akkor valamelyik intervallum elhagyható).

(4) szerint minden I_z g melletti $g[I_z]$ képének a hossza legfeljebb $\varepsilon|I_z|$, ezért $\left|g[L_2]\right| \leq 2\varepsilon|L_2| \leq 2\varepsilon(M+2)$. Mivel $|H_2 \setminus L_2| < \varepsilon$, ez a halmaz befedhető ε-nál kisebb összhosszú intervallumrendszerrel. A Lip 1 tulajdonság miatt minden befedő I intervallum $g[I]$ képe legfeljebb $|I|$ hosszú, ezért $\left|g[H_2 \setminus L_2]\right| \leq \varepsilon$. Hasonlóan kapjuk, hogy $g[H_1]$ nulla mértékű.

De $K_M \subset g[H_1] \cup g[H_2 \setminus L_2] \cup g[L_2]$ miatt az eddigiekből $|K| \leq 2\varepsilon(M+2) + \varepsilon$ adódik, és mivel itt $\varepsilon > 0$ tetszőleges, igazoltuk, hogy K nulla mértékű.

A kitűzők megoldása

7. *Legyen a komplex értékű $F(z)$ függvény reguláris a komplex sík $\{0 < |z| < R\}$ kipontozott körlapján. Szintvonalon értsük a $\operatorname{Re} F(z)$ függvény valamely szinthalmazának komponensét, tehát olyan maximális összefüggő halmazt, amelyen $\operatorname{Re} F(z)$ állandó. Jelöljük $A(r)$-rel azon szintvonalak unióját, melyek teljes egészükben a $\{0 < |z| < r\}$ kipontozott körlapon helyezkednek el. Mutassuk meg, hogy ha $A(r)$ komponenseinek száma r-től független korlát alatt marad, akkor $F(z)$-nek 0-ban legfeljebb pólus szingularitása lehet.*

Megoldás. (A feladat szövegének kiegészítéseként jegyezzük meg, hogy pólus helyen a komponensek száma valóban korlátos, a pólus rendjének kétszerese elég kis r esetén.)

Az indirekt bizonyításban feltesszük, hogy a szingularitás lényeges. Legyen $U(z) = \operatorname{Re}F(z)$, $V(z) = \operatorname{Im}F(z)$, $F(z) = U(z) + iV(z)$. Kritikus pontnak $F'(z)$ zérus helyét nevezzük, kritikus értéknek $F(z)$ ott felvett érékét. S-sel és indexelt változataival szintvonalakat jelölünk, $c(S)$ jelenti $U(z)$ konstans értékét S-en.

Kizárólag olyan S szintvonalakat fogunk konstruálni, amelyek nem haladnak át kritikus ponton, sőt $c(S)$ a legfeljebb megszámlálható kritikus érték valós részétől mind különbözni fog. Ezt úgy érjük el – anélkül, hogy erre a későbbiekben külön kitérnénk –, hogy $c(S)$ értékét mindig intervallumból választhatjuk.

A kritikus pontokkal is kipontozott $\{0 < |z| < R\}$ körlapon $F(z)$ lokálisan konform (elágazás nélküli fedés), ezért S a $c(S)$ valós részű függőleges egyenes egy véges vagy végtelen nyílt részintervallumának a z síkra való felemelése, ami mindkét irányban elér a határig, 0-ig, illetve a $\{|z| = R\}$ körvonalig.

Tömören megfogalmazva:

1. lépés. *S-et megadhatjuk olyan $z(v)$ $(-\infty \leq \alpha < v < \beta \leq +\infty)$ paraméterezéssel, amelyre $F\big(z(v)\big) = c(S) + iv$ $(\alpha < v < \beta)$, és amely vagy 0-hoz vagy a $\{|z| = R\}$ körvonalhoz tart $v \to \alpha + 0$, illetve $v \to \beta - 0$ esetén.*

A továbbiakban röviden úgy fogjuk mondani, hogy S mindkét irányban 0-ban vagy a körvonalon ér véget.

2. lépés. *Tetszőleges n-re megadható n darab különböző szintvonal, S_i $(i = 1, \ldots, n)$ közös $c(S_i)$ értékkel, amelyek mindkét irányban 0-ban érnek véget.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $F(z)$ még $\{0 < |z| \leq R\}$-en is folytonos. Ha

$$\big|c(S)\big| > \max_{|\xi|=R} \big|U(\xi)\big|,$$

akkor S nem mehet $\{|z| = R\}$ közelébe, és mindkét irányban csak 0-ban érhet véget.

Jelöljük $n(w)$-vel azt, hogy $F(z)$ hányszor veszi fel – multiplicitással számolva – a w értéket a $\{0 < |z| < R\}$ kipontozott körlapon. Tegyük fel, hogy $n(w)$, valamilyen w_0 δ sugarú környezetére megszorítva, a w_1 pontban felveszi a legnagyobb értékét, és még erre a legnagyobb értékre is $n(w) \leq n(w_1) < n$ $\big(|w - w_0| < \delta\big)$ volna.

A w_1 ősképeit z_j-vel $(j = 1, \ldots, m < n)$ jelölve, ezek akármilyen kis környezetében $F(z)$ felveszi w_1 egy teljes környezetének a pontjait, mégpedig összesen $n(w_1)$-szer. De $n(w_1)$ maximális volt, tehát legalábbis w_1 ezen környezetének azokat a pontjait, amelyek w_0 δ sugarú környezetébe is beleesnek, $F(z)$ a z_j-k ezen kis környezetein kívül sehol másutt már nem veheti fel. Speciálisan 0 kis környezetében $F(z)$ kihagyná w_1 egy teljes környezetét, ellentmondásban a Casorati–Weierstrass-tétellel.

Arra jutottunk, hogy bármely w_0 bármely környezetében található olyan w érték, amit $F(z)$ legalább n-szer felvesz, sőt ilyen értéket egy teljes környezetből választhatunk. (Persze a Nagy Picard-tétel birtokában mindez triviális: $F(z)$, legfeljebb egy kivételtől eltekintve, minden értéket végtelen sokszor vesz fel.)

Jelöljük z_i-vel ($i = 1, \ldots, n$) a kiválasztott w n ősképét, és S_i-vel a z_i-t tartalmazó szintvonalat. Ezek mind különbözők, hiszen – ahogyan az 1. lépésben a szintvonalakat jellemeztük – S_i mentén $\operatorname{Im} F(z)$ szigorúan monoton módon változik, és így S_i-n $z = z_i$ az egyetlen pont, ahol $F(z) = w$.

Mivel w-t tetszőleges környezetből választhattuk, azt is elérhetjük, hogy $|\operatorname{Re} w| > \max_{|\xi|=R} |U(\xi)|$, és a kiinduló megjegyzésünk szerint S_i mindkét irányban 0-ban ér véget.

■

Ilyen 0-ból induló és oda visszatérő S szintvonalhoz 0-t hozzáképzelve Jordan-görbét kapunk. Jelöljük a belsejét $D(S)$-sel.

3. lépés. *Ha r olyan kicsi, hogy $\{|z| = r\}$ metszi $D(S)$-et, akkor $D(S)$ tartalmazza $A(r)$ egy komponensét.*

Bizonyítás. Legyen ehhez

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\substack{|z|=r \\ z\in\overline{D(S)}}} U(z), \qquad m \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\substack{|z|=r \\ z\in\overline{D(S)}}} U(z);$$

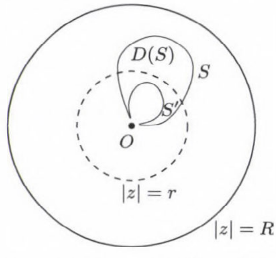
a felülvonás lezárást jelent.

$m \le c(S) \le M$, és M és m közül legalább az egyiket $U(z)$ kénytelen felvenni $D(S)$ belsejében.

A Maximum Elv szerint $m \le U(z) \le M$ $\big(z \in D(S),\ |z| > r\big)$. Ha e két egyenlőtlenség $D(S)$-ben az r sugarú körön belül is fennállna, akkor

$$\sup_{z\in D(S)} U(z) = M, \qquad \inf_{z\in D(S)} U(z) = m$$

volna, és legalább az egyiket $U(z)$ $D(S)$ belsejében ténylegesen fel is venné. Ez azonban lehetetlen, mert a Maximum Elv szerint akkor konstans volna.



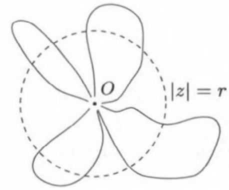
Van tehát $z' \in D(S)$, $|z'| < r$, amelyre $U(z') > M$ vagy $U(z') < m$. (A Phragmén–Lindelöf-elv legegyszerűbb változata szerint egyébként $U(z)$ nem is korlátos $D(S)$-ben.) A z'-t tartalmazó S' szintvonal sem $\{|z| = r\}$-et, sem S-et nem metszheti. Egyrészt tehát $S' \subset A(r)$, másrészt $S' \subset D(S)$. Ezért $A(r) \bigcap D(S)$ nem üres. S pontjai azonban nem tartoznak $A(r)$-hez, S belseje és külseje tehát elválasztja $A(r) \bigcap D(S)$-et $A(r) \setminus D(S)$-től.

■

4. lépés. *Ha tehát k felső korlát $A(r)$ komponenseinek a számára, akkor a mindkét irányban 0-ban végződő S szintvonalak által határolt $D(S)$ tartományok közül legfeljebb k diszjunktat lehet kiválasztani.*

Speciálisan a $D(S_i)$ tartományok között is legfeljebb csak k diszjunkt lehet, de jegyezzük meg, a 4. lépésben nem feltétel, hogy a tartományokhoz tartozó $c(S)$ értékek megegyezzenek.

Hogy a $c(S_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ értékek megegyeznek, azt most fogjuk kihasználni.

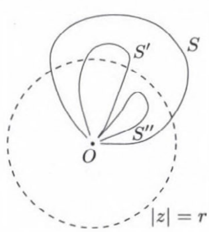


5. lépés. *$D(S_i)$ tartományokból alkotott monoton lánc is – azaz olyan sorozat, aminek minden eleme tartalmazza a következőt – legfeljebb csak k hosszúságú lehet.*

Bizonyítás. Legyen S és S' a lánc két szomszédos eleme; $c(S) = c(S')$, $D(S') \subset D(S)$.

A 3. lépésben az ottani S' konstrukciója azon múlt, hogy $U(z)$ az ottani $D(S)$ tartomány határán állandó. Ugyanez igaz most a $D(S) \setminus \overline{D(S')}$ tartományra is. Az okoskodás elismétlésével kapunk tehát egy szintvonalat – jelöljük S''-vel –, amelyre

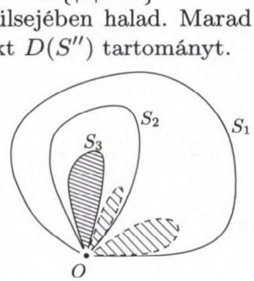
$$S'' \subset D(S) \setminus \overline{D(S')}, \qquad S'' \subset \{0 < |z| < r\}.$$



Két, egy pontban érintkező Jordan-görbe, mint amilyen $S' \bigcup \{0\}$ és $S'' \bigcup \{0\}$, háromféle helyzetben lehet egymáshoz képest:

$$D(S') \subset D(S''), \quad D(S'') \subset D(S'), \quad \text{vagy} \quad D(S') \bigcap D(S'') = \emptyset.$$

Ha r-et olyan kicsinek választjuk, hogy a $\{|z| = r\}$ körvonal messe $D(S')$-t, akkor az első eset ki van zárva, mert $S'' \subset \{|z| < r\}$. A második eset azért van kizárva, mert S'', választása szerint, $D(S')$ külsejében halad. Marad a harmadik eset: konstruáltunk $D(S)$-ben egy $\overline{D(S')}$-től diszjunkt $D(S'')$ tartományt.



Ha ezt a lánc minden szomszédos párjával elvégezzük, akkor a konstruált $D(S'')$ típusú tartományok a lánc utolsó tagjával együtt – az ábrán a vonalkázott tartományok – diszjunktak lesznek, a számuk pedig megegyezik a lánc hosszával. A $c(\ )$ értékek biztosan nem mind egyeznek meg, de ez – mint megjegyeztük – a 4. lépésben érdektelen: a lánc hossza legfeljebb k. ∎

Az 5. lépés bizonyításában már szó volt arról, hogy két $D(S_i)$ tartomány vagy diszjunkt, vagy egyik tartalmazza a másikat.

6. lépés. *Ilyen halmazrendszer előáll mint annyi monoton lánc egyesítése, ahány minimális – azaz további halmazt részként nem tartalmazó – halmaz van a rendszerben.*

Bizonyítás. Egy minimális halmazhoz tekintsük az őt tartalmazó halmazokat a rendszerünkből. Ezek közül bármelyik kettő metszi egymást, tehát az egyik része a másiknak, és így monoton módon sorba rendezhetők, monoton láncot alkotnak.

Másfelől véges rendszerben nyilván minden halmaz tartalmaz további halmazt nem tartalmazó, tehát minimális részhalmazt, és így benne lesz az ahhoz a minimális halmazhoz konstruált láncban.

(Hivatkozhatnánk persze Dilworth általános tételére: tetszőleges véges részbenrendezett halmaz előáll annyi monoton lánc egyesítéseként, amilyen hosszú a legnagyobb antilánc – azaz páronként összehasonlíthatatlan elemekből álló részhalmaz.) ∎

A minimális halmazok száma, diszjunktak lévén, a 4. lépés szerint legfeljebb k, és minden lánc az 5. lépés szerint legfeljebb k hosszú. Innen $n \leq k^2$, ami ellentmondás, mert n-et a 2. lépésben akármilyen nagynak választhattuk. Az ellentmondás bizonyítja a feladat állítását.

Megjegyzés. *A megoldás lényegében Kun Gábortól származik. A kitűző eredeti bizonyítása annyiban bonyolultabb, hogy ugyanazok az előzmények, amelyek itt a 6., kombinatorikus lépéshez vezettek, ott olyan $F(z)$ leírását igénylik, amelyre* $\operatorname{Re} F(z) > c(S)$ *$D(S)$-ben.*

8. *Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan c abszolút konstans, hogy minden n-pontú, általános helyzetű, síkbeli H ponthalmaz elemeit kiszínezhetjük $c \cdot \log n$ színnel úgy, hogy a sík bármely körlemeze, mely H-nak legalább egy pontját tartalmazza, H valamelyik színosztályából pontosan egy pontot fed.*

Megoldás. Kössünk össze két pontot egy éllel, ha van olyan kör, ami csak őket tartalmazza. (Ezt a gráfot egyébként Delaunay-háromszögelésnek hívják, mert telített síkgráf. Máskülönben a Dirichlet–Voronoi-cellafelbontás duálisa.) Minden síkgráf 4 színnel színezhető, tehát tartalmaz egy maximum $\frac{n}{4}$-pontú független halmazt. Ennek pontjait színezzük meg az első színnel, majd dobjuk el, és ismételjük meg az eljárást a maradék ponthalmazra, melynek legalább negyedsok pontját a második színnel színezzük. Így végül $\lceil \log_{4/3} n \rceil$ színnel mindent kiszínezünk.

Miért jó ez a színezés? Vegyünk egy tetszőleges kört, és nézzük meg, hogy mely pontjai kapták a legmagasabb számú színt, ami a körben előfordul. Ha csak egy ilyen pont van, akkor kész vagyunk. Ha legalább kettő, akkor az adott lépésben képzett gráfnak van egy teljes éle, ami a körbe esett, és ennek csak egyik végpontját hagyhattuk el. Így a másik végpont kénytelen magasabb számú színt kapni, ami ellentmondás.

A kitűző megoldása

9. *Legyen M összefüggő, kompakt, C^∞-differenciálható sokaság, és jelölje $C^\infty(M)$ az M-en értelmezett sima valós függvények vektorterét. Legyen $V \leq C^\infty(M)$ olyan altér, amely invariáns az M sokaság C^∞-diffeomorfizmusaira nézve, azaz $f \circ h \in V$, valahányszor $f \in V$ és $h\colon M \to M$ tetszőleges C^∞-diffeomorfizmus. Bizonyítsuk be, hogy ha V különbözik a $\{0\}$ és $C^\infty(M)$ alterektől, akkor pontosan a konstans függvényekből áll.*

Megoldás. Elég azt megmutatni, hogy ha V tartalmaz egy nem konstans f függvényt, akkor $V = C^\infty(M)$.

Vegyük észre, hogy nem konstans f-re df azonosan 0 nem lehet. Valóban, különben f lokálisan konstans volna, és így a $\{f^{-1}(c) \mid c \in \mathbb{R}\}$ halmazrendszer az M-nek nyílt partíciója lenne, legalább két nemüres partíciótaggal, ami ellentmond M összefüggőségének (ugyanis $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 \neq c_2$, $f^{-1}(c_1), f^{-1}(c_2) \neq \emptyset$ esetén $f^{-1}(c_1)$ nem-triviális zárt-nyílt halmaz M-ben).

Tegyük fel tehát, hogy a V-beli f függvényünkre és egy $p \in M$ pontra $(df)_p \neq 0$. Ekkor a kiegyenesítési tétel szerint létezik p-nek egy U nyílt környezete és azon egy τ : $U \to \mathbb{R}^n$ térkép, hogy $x \in U$-ra $f(x) = x_1$, ahol x_i a $\tau(x)$ i-edik koordinátája. Feltehető, hogy $\tau(U) \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt gömb.

Először belátjuk, hogy ha $g \in C^\infty(M)$ esetén $\operatorname{supp} g \subset U$, akkor $g \in V$. Ehhez egy elég kicsi $\varepsilon > 0$ szám választásával definiáljuk a h : $M \to M$ függvényt a következőképpen:

$$h(x) = \begin{cases} \tau^{-1}(x_1 + \varepsilon g(x), x_2, \ldots, x_n), & \text{ha } x \in U, \\ x & \text{ha } x \in M \setminus \operatorname{supp} g. \end{cases}$$

Hogy az $x \in U$ esetben adott definíció értelmes legyen, elég feltenni, hogy $\varepsilon \max |g(x)| \leq \operatorname{dist}\big(\operatorname{supp}(g \circ \tau^{-1}), \partial(\tau(U))\big)/2$, mert akkor $x \in \operatorname{supp} g$-re $(x_1 + \varepsilon g(x), x_2, \ldots, x_n) \in \tau(U)$, míg $x \in U \setminus \operatorname{supp} g$-re ugyanez a tartalmazási reláció nyilvánvalóan teljesül. (Ebből következőleg $x \in U \Rightarrow h(x) \in U$.) Így M két nyílt részhalmazán, amelyek uniója M, definiáltunk, a metszetükön egybehangzó módon, egy-egy C^∞ leképezést, ezért az ilymódon definiált h leképezés M-ből M-be menő C^∞ leképezés lesz. Továbbá h az M-nek C^∞ diffeomorfizmusa lesz, ha bijekció, és dh seholsem elfajuló. Nyilván elegendő ezeket a feltételeket U-n biztosítani. Mindkét feltétel biztosítva lesz, ha $\varepsilon \max |\partial(g \circ \tau^{-1})(x_1, x_2, \ldots, x_n)/\partial x_1| \leq 1/2$ teljesül. Ugyanis ekkor a $\tau \circ h \circ \tau^{-1}$: $\tau(U) \to \tau(U)$ leképezés, amely $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-et $(x_1 + \varepsilon(g \circ \tau^{-1})(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n)$-be viszi, a $\tau(U)$-nak minden x_1 tengelyiránnyal párhuzamos nyílt húrján bijekció (mivel a húr két végpontja egy-egy környezetében identikus, azért a folytonosság miatt szürjektív, és mivel első koordinátájának x_1 szerinti parciális deriváltja $1 + \varepsilon\partial(g \circ \tau^{-1})/\partial x_1 \geq 1/2$, azért injektív), továbbá ennek a leképezésnek a Jacobi-mátrixa nem szinguláris (mivel determinánsa $1 + \varepsilon\partial(g \circ \tau^{-1})/\partial x_1 \geq 1/2$).

Most legyen $x \in U$. Ekkor $h(x) \in U$ is fennáll, és ezek miatt $f(x)$, illetve $f(h(x))$ megegyezik $\tau(x)$-nek, illetve $\tau(h(x))$-nek az első koordinátájával, azaz x_1-gyel, illetve $x_1 + \varepsilon g(x)$-szel. Ezek szerint U-n teljesül az $(f \circ h)(x) = f(x) + \varepsilon g(x)$ egyenlőség. De $x \in M \setminus \operatorname{supp} g$-re $h(x) = x$, $g(x) = 0$, így az

$$f \circ h = f + \varepsilon g$$

egyenlőség az egész M-en fennáll. Itt $f \in V$, a feladat feltétele szerint $f \circ h \in V$ is fennáll, így az előbb belátott egyenlőségből kapjuk, hogy $g \in V$, mivel V lineáris altér.

Most legyen $g \in C^\infty(M)$ tetszőleges. Belátjuk, hogy $g \in V$. Először is, $\mathrm{Diff}^\infty(M)$-mel jelölve az M sokaság C^∞-diffeomorfizmusainak csoportját, a homogenitási lemma alapján minden $y \in M$ esetén létezik $h_y \in \mathrm{Diff}^\infty(M)$, amelyre $h_y(p) = y$. Ekkor a $\{h_y(U) \mid y \in M\}$ halmazrendszer M-nek nyílt fedése, így M kompaktsága miatt közülük véges sok, mondjuk $\{h_{y_1}(U), \dots, h_{y_k}(U)\}$ is fedése M-nek. Ehhez a $\{h_{y_1}(U), \dots, h_{y_k}(U)\}$ nyílt fedéshez létezik egy $\{u_1, \dots, u_k\} \subset C^\infty(M)$ függvényrendszer, amelyre $0 \le u_j \le 1$, $\sum_{j=1}^k u_j = 1$, és $\operatorname{supp} u_j \subset h_{y_j}(U)$, ahol $j = 1, \dots, k$. Ekkor minden $j = 1, \dots, k$-ra a $g_j = (u_j \cdot g) \circ h_{y_j}$ függvényre $g_j \in C^\infty(M)$ és $\operatorname{supp} g_j = h_{y_j}^{-1}(\operatorname{supp}(u_j \cdot g)) \subset h_{y_j}^{-1}(\operatorname{supp} u_j) \subset U$. Tehát a bizonyítás első részében bizonyítottak szerint $g_j \in V$. Ekkor viszont $u_j \cdot g = g_j \circ h_{y_j}^{-1} \in V$ a feladat feltétele szerint. Végül $g = \sum_{j=1}^k (u_j \cdot g) \in V$, mivel V lineáris altér.

A kitűző, Juhász András és Kun Gábor megoldásai alapján

10. *Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek közös eloszlása végtelen sok különböző értékre koncentrált diszkrét eloszlás. Legyen a_n annak a valószínűsége, hogy $X_1, \dots, X_{n+1}$ mind különböző értéket vesz fel, feltéve, hogy $X_1, \dots, X_n$ különböző értékeket vettek fel ($n \ge 1$). Mutassuk meg, hogy*

(a) $n \to \infty$ esetén a_n szigorúan monoton csökkenve tart 0-hoz; valamint

(b) a pozitív egész számok tetszőleges $1 \le f(1) < f(2) < \dots$ részsorozatára $X_1, X_2, \dots$ közös eloszlása megválasztható úgy, hogy a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{f(n)}}{a_n} = 1$$

összefüggés teljesüljön.

Megoldás. Legyenek az X_i-k által felvehető értékek valószínűségei $p_1 \ge p_2 \ge \dots > 0$ és legyen b_n annak a valószínűsége, hogy $X_1, X_2, \dots, X_n$ mind különböző értékeket vesznek fel. Ekkor

$$b_n = n! \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_n} p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_n} \quad \text{és} \quad a_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

A monoton csökkenés az alábbi általánosabb állításból is levezethető:

Lemma. *Ha $1 < m \le n$, akkor $b_m b_n > b_{m+n}$ és*

$$\frac{b_{m-1} b_{n+1} - b_{m+n}}{(m-1)(n+1)} \le \frac{b_m b_n - b_{m+n}}{mn}.$$

Ugyanis ebből azt kapjuk, hogy $b_{m-1} b_{n+1} < b_n b_m$, amiből a bizonyítandó $a_n < a_{m-1}$ egyenlőtlenség következik.

Bizonyítás. Szorozzuk össze a b_n-et és a b_m-et kifejező szummát, minden tagot minden taggal, és csoportosítsuk az eredményt aszerint, hogy a két összeszorzott tagban hány tényező közös.

$$b_m b_n = b_{m+n} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{*} f_1(A) f_2(B) n! m! \binom{m+n-2k}{m-k},$$

ahol $\sum_*$ a pozitív egészek azon A és B részhalmazaira történő szummázást jelöl, amelyekre $A \cap B = \emptyset$, $|A| = m + n - 2k$ és $|B| = k$, továbbá $f_i(A) = \prod_{j \in A} p_j^i$. Ezért

$$\frac{b_m b_n - b_{m+n}}{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_* f_1(A) f_2(B) \frac{(n-1)!(m-1)!(m+n-2k)!}{(m-k)!(n-k)!}.$$

Hagyjuk el a külső szumma utolsó tagját és használjuk fel, hogy $k < m$ esetén

$$\frac{(n-1)!(m-1)!(m+n-2k)!}{(m-k)!(n-k)!} = \frac{n!(m-2)!(m+n-2k)!}{(m-1-k)!(n+1-k)!} \left(1 + \frac{(k-1)(n+1-m)}{n(m-k)}\right).$$

Ezzel

$$\frac{b_m b_n - b_{m+n}}{mn} \geq \sum_{k=1}^{m-1} \sum_* f_1(A) f_2(B) \frac{n!(m-2)!(m+n-2k)!}{(m-1-k)!(n+1-k)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} \sum_* f_1(A) f_2(B) n!(m-2)! \binom{n+m-2k}{m-1-k} = \frac{b_{m-1} b_{n+1} - b_{m+n}}{(m-1)(n+1)}.$$

A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy $a_{2n} < 4q_n$ és $a_n > q_n$, ahol $q_n = p_{n+1} + p_{n+2} + \ldots$. Ebből már minden következni fog, ugyanis az első egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $a_n \to 0$. Ha pedig az f_n, $n \geq 1$ sorozat adott, legyen $f_0(n) = n$ és $f_i(n) = f\big(f_{i-1}(n)\big)$, $i \geq 1$, továbbá legyen $k(1) = 1$ és $k(n+1) = f_n\big(2k(n)\big)$. Végül legyen $p_i = \frac{1}{2}$ és $k(n-1) < i < k(n)$ esetén $p_i = \big(2^n\big(k(n) - k(n-1)\big)\big)^{-1}$. Ilyen módon valószínűségeloszlást kapunk, p_i monoton nemnövekvő, és

$$\frac{a_{k(n+1)}}{a_{2k(n)}} > \frac{q_{k(n+1)}}{4q_{k(n)}} = \frac{1}{8}.$$

Mivel

$$\frac{a_{k(n+1)}}{a_{2k(n)}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{a_{f_i(2k(n))}}{a_{f_{i-1}(2k(n))}},$$

azért

$$\max\left\{\frac{a_{f(j)}}{a_j} : 2k(n) \leq j \leq f_{n-1}\big(2k(n)\big)\right\} \geq \max\left\{\frac{a_{f_i(2k(n))}}{a_{f_{i-1}(2k(n))}} : 1 \leq i \leq n\right\} > 2^{-3/n}.$$

Mármost könnyen látható, hogy

$$\frac{b_{n+m}}{(n+m)!} \leq \frac{b_n}{n!} \frac{(q_n)^m}{m!},$$

amiből $a_{2n}^{n+1} \leq a_{2n} a_{2n-1} \ldots a_n = b_{2n+1}/b_n \leq \binom{2n+1}{n}(q_n)^{n+1} \leq 2^{2n}(q_n)^{n+1}$. Másrészt pedig

$$b_{n+1} = n! \sum_{|A|=n} f_1(A) \sum_{j \notin A} p_j > b_n q_n.$$

A kitűző megoldása

TARTALOMJEGYZÉK

CONTENTS

ERICSSON-DÍJ 2006

Felhívás díjazandó tanárok ajánlására
Beadási határidő: 2006. szeptember 15.

*Az Ericsson cég magyarországi Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által 1999-ben alapított díjat **általános-, vagy középiskolásokat tanító fizika- és matematikatanárok** nyerhetik el, az alább részletezett feltételek szerint. A díj alapításának célja, hogy támogassa és erősítse a magyarországi matematikai és természettudományos alapképzés világviszonylatban is kiemelkedő színvonalát, igényességét. Ennek köszönhető ugyanis, hogy a hazai műszaki és természettudományi diplomával rendelkezők tudása megfelelő szellemi értéket képvisel az igényes hazai és külföldi befektetők előtt és vonzóvá teszi Magyarország bekapcsolását a távközlés és egyéb csúcstechnológiák nemzetközi kutatási fejlesztési láncába.*

Az ERICSSON-DÍJAKAT 2006-ban két kategóriában ítélik oda:

1. „Ericsson a matematika és fizika népszerűsítéséért" díj

4 matematika- és 4 fizikatanár részére egyenként 200 000 Ft-tal járó díj, melyet olyan tanárok kaphatnak, akik tanítványaikkal aktívan bekapcsolódtak a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok vagy az ABACUS folyóiratának pontversenyeibe, vagy a tanítás mellett évek óta a legtöbbet teszik a tantárgyuk iránti érdeklődés felkeltéséért és megszerettetéséért.

2. „Ericsson a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért" díj

2 matematika- és 2 fizikatanár részére egyenként 200 000 Ft-tal járó díj, melyet olyan tanárok kaphatnak, akiknek tanítványai a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok vagy az ABACUS versenyein, vagy a Varga Tamás, Kalmár László, Arany Dániel matematikaversenyek, matematika vagy fizika OKTV, Öveges József, Mikola Sándor, Szilárd Leó fizikaversenyek, a Nemzetközi Matematika vagy Fizika Diákolimpiák, a Kürschák József matematikai tanulóversenyek vagy az Eötvös Loránd fizikaversenyek valamelyikén a 2000–2001-es tanévtől kezdődően elnyerték az első öt díj egyikét.

A díjakat a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány ítéli oda, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Ericsson-díjbizottságainak ajánlása alapján. A díjazandókra írásos javaslatot nyújthatnak be szakmai és társadalmi szervezetek, a javasolt tanár tevékenységét ismerő kollégák, tanítványok. **Az ajánlásnak tartalmaznia kell a javasolt személy részletes szakmai jellemzését** különös tekintettel azokra a szempontokra, amelyek alapján a díjra érdemesnek tartják. Ha a korábbi években már javasolt tanár nem kapott díjat, a felterjesztést (hivatkozva a már beküldött jellemzésre, esetleg kiegészítve azt) kérjük, ismételjék meg! A beadási határidő: **2006. szeptember 15.** Cím: Bolyai János Matematikai Társulat vagy Eötvös Loránd Fizikai Társulat, 1027 Budapest, Fő u. 68.

A bizottságok a benyújtott írásos javaslatok alapján 2006. október 6-ig döntést hoznak a jelöltek sorrendjéről. A bizottságok részletes indoklását tartalmazó jelentése után a MATFUND kuratóriuma 2006. október 16-ig dönt a díjazandók személyéről.

Modok és Társa Nyomda, Kiskunhalas