MATEMATIKAI LAPOK

X. ÉVFOLYAM

1-2.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1959

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.

Budapest, 1959. szeptember, X. évfolyam 1—2. szám.

Felelős szerkesztő: Turán Pál.

Szerkesztők: Aczél János, Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd.

Szerkesztőség: Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.

A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.

Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat, Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850. Csekkszámlaszám: 61 257.

Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat: József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.

Előfizetés egy évre 20,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

1891—1958

Egerváry Jenő tudományos munkáinak jegyzéke

1. Az integrálegyenletek egy osztályáról. *Mathematikai és Physikai Lapok* **23** (1914) 301—355.
2. A seismikus trajektóriákról s az azokkal kapcsolatos Bertrand-féle problémáról. *Mathematikai és Physikai Lapok* **26** (1917) 1—18.
3. Über die seismischen Trajektorien und über das Bertrandsche Problem in der Seismologie, *Gerlands Beiträge zur Geophysik* **14** (1918) 284—299.
4. Über die characteristischen geometrischen Eigenschaften der Legendreschen und Tschebyscheffschen Polynome, *Archiv der Mathematik und Physik* (3) **27** (1918) 17—24.
5. On a maximum-minimum problem and its connexion with the roots of equations, *Acta litterarum ac scientiarum* **1** (1922) 39—45.
6. Egy symmetrikus multilineáris formára vonatkozó minimum feladat, *Mathematikai és Physikai Lapok* **29** (1922) 21—43.
7. Über gewisse Extremumprobleme der Funktionentheorie, *Mathematische Annalen* **99** (1928) 542—561.
8. Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome, *Mathematische Zeitschrift* **27** (1928) 641—652 (*Szász Ottó*val együtt).
9. A trinom egyenletről, *Matematikai és Fizikai Lapok* **37** (1930) 36—57.
10. On a generalisation of a theorem of a Kakeya, *Acta Litterarum ac Scientiarum*, Szeged **5** (1931) 78—82.
11. Matrixok kombinatorikus tulajdonságairól, *Matematikai és Fizikai Lapok* **38** (1931) 16—28.
12. Verschärfung eines Harnackschen Satzes und anderer Abschätzungen für nichtnegative harmonische Polynome, *Mathematische Zeitschrift* **34** (1932) 741—757.
13. Jelentés az 1934. évi Kőnig Gyula jutalomról, *Matematikai és Fizikai Lapok* **41** (1934) 93—102.

14. Szász Pál: A differenciál- és integrálszámítás elemei (Könyvismertetés), *Matematikai és Fizikai Lapok* **42** (1935) 247—248.
15. Abbildungseigenschaften der arithmetischen Mittel der geometrischen Reihe, *Mathematische Zeitschrift* **42** (1937) 221—230.
16. A tetraéderről, *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok* **14** (1937) 1—4.
17. A magasságponttal bíró tetraéderről, *Matematikai és Fizikai Lapok* **45** (1938) 18—35.
18. Über ein Minimumproblem der Elementargeometrie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **178** (1938) 174—186.
19. Az elektromágneses térben elektronmozgás differenciálegyenleteiről, *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai- és Természettudományi Értesítő* **57** (1938) 968—987.
20. On Orthocentric Simplexes *Acta Litterarum ac Scientiarum*, Szeged **9** (1940) 218—226.
21. Über ein räumliches Analogon des Sehnenvierecks, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **182** (1940) 122—128.
22. Az n-méretű euklidesi tér görbéiről, *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai- és Természettudományi Értesítő* **59** (1940) 787—797.
23. Az n-méretű euklidesi tér görbéinek símulógömbjeiről, *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai- és Természettudományi Értesítő* **59** (1940) 775—786.
24. Fondements d'une théorie générale de la courbure linéaire, *Commentarii Mathematici Helvetici* **13** (1940) 257—276 (*Alexits György*-gyel együtt).
25. Azonosságok alkalmazásairól, *Mennyiségtani és Természettudományi Didaktikai Lapok* (1943) 33—41.
26. Seismikus méréseknél alkalmazandó geometriai szerkesztésekről, *Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Természettudományi Értesítő* **61** (1943) 1109—1114 (*Gerő L., Pogány B. és Vargha B.*-val együtt).
27. A forgattyús hajtómű keresztfejsebességének maximuma, *Technika* **7** (1944).
28. *Differenciálegyenletek*, Mérnöktovábbképző Intézet Kiadványai, 1945.
29. A remark on the lenght of the circle and on the exponential function, *Acta Litt. ac Scient.*, Szeged **11** (1946) 114—118.
30. On a new form of the differential equations of the problem of three bodies, *Hungarica Acta Mathematica* **1** (1946) 1—18.
31. Об одном ободщении решзния Лагранжа задачи трех тел, Доклады Академии Наук СССР **55** (1947) 805—807.
32. Sur une nouvelle solution particulière du problème des trois corps, *Commentarii Mathematici Helvetici* **24** (1950) 1—3.
33. On a generalization of a theorem of Sylvester, *Hungarica Acta Mathematica* **1** (1947) 53—57.
34. *A mechanika differenciálegyenleteiről*, Mérnöktovábbképző Intézet Kiadványai, 1948.
35. A Rayleigh-módszer alkalmazása forgó rendszerek kritikus szögsebességének megállapításánál, *Matematikai Lapok* **1** (1949) 16—26.
36. On the smallest convex cover of a simple arc of space-curve, *Publicationes Mathematicae* **1** (1949) 65—70.
37. On the mapping of the unit-circle by polynomials, *Acta Scientiarum Mathematicarum* **12** (1950) 226—230.
38. A remark on the curvature and tortuosity of space-curves, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **1** (1950) 46—47.
39. On the Feuerbach-spheres of an orthocentric simplex, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **1** (1950) 5—16.
40. Eine Bemerkung über definite quadratische Formen, *Publicationes Mathematicae* **1** (1950) 193—195.

41. Az ortocentrikus koordináta-rendszerről és annak néhány alkalmazásáról, *Az Első Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei* (1952) 387—396.
42. A matematika gyakorlati alkalmazásai, különös tekintettel a technika differenciálegyenleteire. *A Magyar Tudományos Akadémia III (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **1** (1951) 101—115.
43. On a certain point of the kinetical gas theory, *Studia Mathematica* **12** (1951) 170—180 (*Turán Pál*lal együtt).
44. A kinetikus gázelmélet bizonyos kérdéseiről, *A Magyar Tudományos Akadémia III (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **1** (1951) 303—314. (*Turán Pál*lal együtt).
45. A hővezetési differenciál-egyenlet megoldása az időtől lineárisan függő kerületi feltétel mellett, *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **1** (1952) 11—22 (*Lovass-Nagy Viktor*ral együtt).
46. Matrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról, *A Magyar Tudományos Akadémia III (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **3** (1953) 417—458.
47. On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions, *Acta Scientiarum Mathematicarum* **15** (1953) 1—6.
48. On a lemma of Stieltjes on matrices, *Acta Scientiarum Mathematicarum* **15** (1953) 99—103.
49. Stieltjesnek egy mátrixelméleti lemmájáról, *Matematikai Lapok* **7** (1956) 271—276.
50. On the hermitian normalform of a matrix and Sylvester's law of nullity, *Publicationes Mathematicae* **3** (1953) 144—149.
51. Matrixok diadikus előállításán alapuló módszer bilineáris alakok transzformációjára és lineáris egyenletrendszerek megoldására, *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 11—32.
52. On the contractive linear transformations of n-dimensional vector space, *Acta Litt. ac Scient.*, Szeged **15** (1954) 178—182.
53. On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice-dynamics, *Acta Scientiarum Mathematicarum* **15** (1954) 211—222.
54. Páronként felcserélhető blokkokból álló hipermatrixokról és azok alkalmazásáról a rácsdinamikában, *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 31—47.
55. Über die Faktorisation von Matrizen und ihre Anwendung auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **35** (1955) 111—118.
56. On the Applicationof the Matrix Theory to the Calculation of Chain-bridges, *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* **11** (1955) 241—256.
57. A matrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására, *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 9—23.
58. A matrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására, *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **5** (1955) 301—313.
59. Hunyadi—Scholtz-féle matrixok alkalmazása a rácsos szerkezetek elméletében, *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 289—300.
60. Auflösung eines homogenen linearen diophantischen Gleichungssystems mit Hilfe von Projektormatrizen, *Publicationes Mathematicae* **4** (1955—56) 481—483.

61. Remarques algébriques sur la solution donnée par M. Fréchet à l'équation de Kolmogoroff II, *Publicationes Mathematicae* **5** (1957) 60—71 *(Aczél János*-sal együtt).
62. Régi és új módszerek lineáris egyenletrendszerek megoldására, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 109—122.
63. Az inverz matrix általánosítása, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 315—324.
64. Begründung und Darstellung einer allgemeinen Theorie der Hängebrücken mit Hilfe der Matrizenrechnung, *Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brückenbau und Hochbau* (Zürich) **16** (1956) 149—184.
65. A függőhidak általános elméletének megalapozása és felépítése mátrixszámítás segítségével. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 3—32.
66. A differenciálokról, *Matematikai Lapok* **8** (1957) 79—85.
67. Über einige Anwendungen von Hypermatrizen, deren Blöcke vertauschbar sind, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* **37** (1957) 1—2.
68. Über eine Verallgemeinerung der Purcellschen Methode zur Auflösung linearer Gleichungssysteme, *Osterreichisches Ingenieur—Archiv* **11** (1957) 249—221.
69. On rank-diminishing operations and their applications to the solution of linear equations, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik.* (sajtó alatt).
70. Bemerkungen zum Transportproblem, *MTW—Mitteilungen (Mathematisches Labor de Technischen Hochschule in Wien)* **5** (1958) 278—284.
71. Kombinatorikus módszer a szállítási probléma megoldására, *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató intézetének Közleményei* **4** (1958). (sajtó alatt).
72. Notes on Interpolation V (On the stability of the interpolation on a finite interval). *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **9** (1958) 259—268 *(Turán Pál*-lal együtt).
73. Notes on Interpolation VI (On the stability of the interpolation on an infinite interval), *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959). *(Turán Pál*-lal együtt) 55—62.
74. On the application of matrices and hypermatrices in engineering analysis, *Mémoires et Publications de la Societé des Sciences, des Arts et des Lettres du Hainaut* (1959).
75. Über eine konstruktive Methode zur Reduktion einer Matrix auf die Jordansche Normalform, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959). 31—54.
76. Über eine Eigenschaft der Parabel und des Paraboloids, *Publicationes Mathematicae* **6** (1959).
77. Über eine Methode zur numerischen Lösung der Poissonschen Differenzengleichung für beliebe Gebiete, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **10** (1959).
78. Discrete models and matrix methods in the engineering mechanics. Az *Indian Society of Theoretical and Applied Mechanics III. Kongresszusának Közleményei.* Sajtó alatt. *(Lovass-Nagy V.*-ral és *Kolin L.*-val együtt.).

Egerváry Jenő tudományos munkáinak ismertetésével következő számunk fog foglalkozni.

Neumann János axiomatikus halmazelméleti munkásságáról

Hajnal András

Ebben a cikkben Neumann János a halmazelmélet axiomatikus megalapozása terén 1922 és 1930 között kifejtett alapvető jelentőségű munkásságával foglalkozunk.

Mint ismeretes a halmazelmélet axiomatizálását azok a logikai ellentmondások, antinomiák tették szükségessé, amelyek az ún. naív halmazelmélet felépítése során felléptek. Mikor Neumann János első cikke erről a tárgyról megjelent, a halmazelmélet axiomatizálása még kialakulóban volt. Létezett már a halmazelmélet Zermelo—Fraenkel-féle axiomarendszere[1], de még igen kezdetleges stádiumban. Ebben a Z.—F.-féle axiomarendszerben 3 alapfogalom szerepelt, az elem fogalma, a halmaz fogalma és az „x-halmaz az y-halmaz eleme“ reláció. Már Zermelo felsorolta azokat az erre az alapfogalmakra vonatkozó axiomákat, amelyeket a halmazelmélet szokásos tételeinek levezetéséhez szükségesnek vélt, azonban a felsorolás részben hiányos volt, részben pedig a felsorolt axiomák megfogalmazása még pontatlan. Két axioma volt, amelynek megfogalmazása ebben az axiomarendszerben gondot okozott, ez a két axioma a részhalmaz-axioma és a pótlás-axioma volt.

A részhalmaz-axioma azt biztosítja, hogy ha x tetszőleges halmaz, és $T(y)$ tetszőleges „finit“ tulajdonság, akkor létezik az x halmaz $T(y)$ tulajdonságú y elemekből álló részhalmaza. Azt azonban, hogy milyen tulajdonságok finit tulajdonságok, Zermelónak még nem sikerült pontosan definiálni.

A pótlás axiomája azt biztosítja, hogy ha x tetszőleges halmaz és f tetszőleges függvény, amely x minden elemén értelmezve van, akkor létezik az x halmaz elemeinek f által adott képeiből alkotott halmaz. Fraenkel vizsgálatai során kiderült, hogy bár a

[1] A halmazelmélet Z.—F.-féle axiomarendszerének történeti kialakulására és az ezzel kapcsolatos irodalmi utalásokra vonatkozóan lásd [6]-ot.

függvény fogalma definiálható az általa vizsgált axiomatikus halmazelméletben, a pótlás axiomájában azonban nem elegendő az ilyen függvényekre szorítkozni, hanem valamilyen módon definiálni kell egy általánosabb függvényfogalmat.

Az említett nehézségeken kívül az sem volt plauzibilis, hogy a halmazelmélet valóban felépíthető teljes egészében a Z.—F.-féle axiomák alapján. Nem volt nehéz ugyan ezeknek az axiomáknak az alapján definiálni pl. a kölcsönösen egyértelmű leképezés fogalmát, és ennek alapján definiálni azt, hogy két halmaz mikor egyenlő számosságú, a számosság fogalmának definiciója azonban már reménytelennek látszott új alapfogalom bevezetése nélkül. A naív halmazelméletben ui. itt lényegében úgy járunk el, hogy az egymással ekvivalens halmazoknak ezt a tulajdonságát (ti., hogy egymással ekvivalensek) nevezzük a számosságuknak. Ennek megfelelően az axiomatikus halmazelméletben posztuláljuk vagy bebizonyítjuk bizonyos elemek létezését úgy, hogy minden halmaz hozzá legyen rendelve egy és csak egy ilyen elemhez, az egymással ekvivalensek és csak ezek ugyanahhoz az elemhez. Ilyen elemek definiálására azonban mint láttuk, a naív halmazelméletben nem törekedtünk és problematikus volt, hogy az axiomatikus halmazelméletben definiálni lehet-e ezeket vagy pedig létezésüket fel kell tenni. Hasonló volt a helyzet a naív halmazelmélet többi ún. „absztrakcióval definiált“ fogalma, pl. a rendszám és a rendtípus esetén.

Ezért volt jelentős, hogy Neumannak [1] cikkében sikerült megalkotni a Z.—F.-axiomarendszer alapfogalmai és már ismert axiomái segítségével a rendszámok és ezen keresztül — a kiválasztási axioma felhasználásával — a számosságok axiomatikus elméletét. Neumann alapgondolata az, hogy az üres halmaz legyen a legkisebb rendszám, és minden más rendszámot reprezentáljunk úgy, mint az összes nála kisebb rendszámok halmazát. Ennek megfelelően a rendszámok:

$$0 = 0,\ 1 = \{0\},\ 2 = \{0, \{0\}\},\ 3 = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}, \ldots$$

$$\ldots,\ \omega = \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}, \ldots\},\ \omega + 1 =$$

$$= \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \{0, \{0\}, \{0, 0\}\}\}, \ldots$$

$$\ldots,\ \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \ldots\}\}, \ldots$$

stb. lesznek. Az említett cikkben Neumann megmutatja, hogy lehet az axiomatikus halmazelméletben olyan tulajdonságot definiálni,[2]

[2] Természetesen ott nem transzfinit indukcióval, hiszen amíg a rendszámok nincsenek értelmezve erről nem is lehet beszélni.

melynek az ilyen alakú halmazok tesznek eleget, s ha ezeket úgy rendezi, hogy $x < y$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in y$, akkor ezek valóban kielégítő axiomatikus megfelelői a rendszámoknak.[3] Ez utóbb említett állítás igazolásában addig jut el, hogy kimondja a transzfinit indukcióval való definíció tételét és vázolja ennek bizonyítását.

Mint ismeretes, a transzfinit indukcióval való definíció jogosultsága azt jelenti, hogy ha megadunk egy g-függvényt, amely megmutatja, hogy egy f függvény α helyen felvett értéke hogyan függjön α-tól, és az α-nál kisebb helyeken felvett értékeitől, akkor ilyen f függvény létezik és értéke minden α rendszámra egyértelműen meg van határozva.

Mikor azután Fraenkelnek sikerült pontosan definiálni azt az általánosabb függvényfogalmat, amelyre a halmazelmélet felépítéséhez a pótlás axiomájában szükség van — és ezzel együtt pontos értelmet adni a részhalmaz axiomában szereplő finit tulajdonság fogalmának — Neumann [3] cikkében visszatért a transzfinit indukcióval való definíció kérdésére, és bebizonyította ennek jogosultságát erre az általánosabb függvényfogalomra is, ezzel lényegében befejezve a halmazelmélet axiomatikus felépítését a Z.—F.-féle axiomarendszer alapján.[4]

A Z.—F.-féle axiomarendszer azonban több szempontból nem volt kielégítő. Először is a részhalmaz-axioma és a pótlás-axioma pontos megfogalmazása után kiderült, hogy ezek tulajdonképpen axiomasémák, amelyek megszámlálhatóan végtelen sok különböző axiomát foglalnak össze. Másodszor itt az antinomiákat úgy kerülik el, hogy a túlnagy halmazok létezését eleve kizárják. Az összes halmazok halmazának létezését pl. nem lehet bizonyítani. Harmadszor pedig a Fraenkel által megadott függvényfogalom tulságosan bonyolult, áttekinthetetlen és nehezen kezelhető volt.

Neumann tehát mikor azt a célt tűzte maga elé, hogy megadja a halmazelmélet megfelelő axiomatizálását, azt tartotta szem előtt, hogy az axioma-rendszer véges sok axiomából álljon, lehetőleg létezzenek benne a nagyon nagy halmazok is, óvatosan megkülönböztetve a nem túl nagyoktól, hogy antinomiák mégse legyenek, és végül, hogy az axiomarendszer technikailag könnyebben

[3] Ha a rendszámok axiomatikus elméletét már megalkottuk, akkor a számosságokat már definiálhatjuk úgy, hogy minden számosságot a legkisebb ilyen számosságú rendszámmal reprezentálunk. Ez lehetséges, mert egy adott rendszámmal egyenlő számosságú rendszámok már halmazt alkotnak.

[4] Neumann ebben a cikkében tulajdonképpen azt is bebizonyítja, hogy a Fraenkel által megadott függvényfogalom még nem elég általános és azt egy kissé módosítani kell, hogy most már valóban kielégítő legyen.

legyen kezelhető, mint elődje. Ez utóbbi pedig úgy látszott megvalósíthatónak, ha a halmaz fogalma helyett a függvényt választja alapfogalomnak. Neumann doktori disszertációjában meg is adott egy ilyen axioma-rendszert és megadta a halmazelmélet felépítését ennek az axiomarendszernek alapján.[5]

A Neumann-féle axiomarendszer alapfogalmai a következők: a függvény, melyet Neumann II.-dolog-nak nevez és az elem, amelyet I.-dolog-nak nevez, (a két fogalom köre érintkezik, az olyan dolgokat, amelyek I.-dolgok és II.-dolgok is, I., II.-dolgoknak nevezi.) Továbbá két operáció, az egyik az $[f, x]$, amelynek akkor és csak akkor van értelme, ha f II.-dolog és x I.-dolog és értéke mindig I.-dolog, s amely az „f-függvény értékét az x helyen" reprezentálja, a másik egy szintén kétváltozós (x, y) operáció, amely csak I.-dolgokra van értelmezve, és amely a rendezett pár fogalmát fogja reprezentálni. Ezenkívül még 2 alapfogalom van az A és B konstansok.

A halmaz fogalmát és az elemének lenni relációt ezekből az axiomák segítségével már definiálja. Hogy a nagy összességek létezését biztosítsa, először a halmazénál általánosabb osztály-fogalmát definiálja. Egy f II.-dolgot akkor nevez osztálynak, ha az csak az A és B elemeket veszi fel értékként. Az x I. dolog akkor eleme az f-osztálynak, ha $[f, x] \neq A$. Halmaznak pedig csak akkor nevez egy f-osztályt, ha nincs olyan függvény, amely ezt az összes I.-dolgok osztályára képezi le, ha tehát nem túlságosan nagy. Az antinomiák elkerülésére pedig felteszi — a IV. 2. axiomában — hogy egy f II.-dolog akkor és csak akkor nem I.—II.-dolog, ha azon x elemek osztálya, amelyekre $[f, x] \neq A$ áll, leképezhető egy függvény segítségével az összes I.-dolgok osztályára. Ez az axioma biztosítja, hogy egy „nagy halmaz", tehát egy olyan osztály, amelyik nem halmaz nem lehet I.-dolog, és ezért nem lehet eleme egyetlen osztálynak sem Ez pedig megakadályozza az antinómiák szokásos bizonyításainak reprodukálását.

A terjedelem korlátozott volta lehetetlenné teszi annak megmutatását, hogy hogyan sikerül Neumannak véges sok axiomával lehetővé tenni a halmazelmélet axiomatizálását és felépítését. Csak annyit jegyzünk meg, hogy ez lényegében akkor lehetséges, ha minden a $[f, x]$ és (x, y) operációkból az $=$ és ε relációkból felépülő $\varphi(x)$ logikai formuláról, amely csak I.-dolgokon átfutó kötött változókat tartalmaz, az axiomák alapján be lehet bizonyítani, hogy van olyan f II.-dolog, amelyre bármely x I.-dologra $\varphi(x) \equiv \equiv [f, x] \neq A$ áll, azaz létezik az ilyen tulajdonságú x I.-dolgok

[5] Lásd [2]-őt és [4]-et. A felépítés részletesen csak [4]-ben van leírva.

osztálya. Ahhoz pedig, hogy ezt a tételt külön-külön minden φ formulára be lehessen bizonyítani, elegendő az ilyen formulák felépítésére szolgáló véges sok logikai operációnak (helyettesítés, konjunkció, negáció, exisztenciális kvantifikáció) megfelelő feltételes exisztencia axiomák teljesülését kikötni.[6] Természetesen az axiomarendszer ezeken az axiomákon kívül tartalmaz még a rész-halmaz és pótlás-axiomán kívüli Z.—F.-féle axiomáknak megfelelő axiomákat, pl. végtelenségi axiomákat.

A Neumann-féle axioma-rendszernek azonban még elég sok szépséghibája van. Először is az, hogy az alapfogalmak választása nem természetes, másodszor az, hogy technikailag még mindig nem elég könnyen kezelhető. Ezért ma már az axiomatikus vizsgálatokban nem igen használják. Időközben Bernays és Gödel munkássága nyomán kialakult a halmazelmélet természetesebb, a halmaz, az osztály, és az „elemének lenni" reláció fogalmakon épülő axiomarendszere, amely szintén véges sok axiomából áll.[7] Az azonban, hogy ezeket az axiomarendszereket sikerül végesen axiomatizálni, ugyanazon a gondolaton alapul, amelyet a Neumann is használt és a halmazelmélet felépítésének technikai megkönnyítésénél szerepet játszó meta-tételek ebben az axioma-rendszerben is alapvetőek.

Maga Neumann is végzett további vizsgálatokat [5]-ben axiomarendszerének egyszerűsítésére, továbbá annak megmutatására, hogy axiomarendszere épp olyan természetes, mint a Z.—F.-féle alapfogalmakon épülő axiomarendszer.

Az eredeti Neumann-féle axiomarendszerben a már említett IV. 2 axioma tűnik elsősorban természetellenesnek. Ebből ui. következik, hogy bármely két osztály, amely nem halmaz ekvivalens. A Russel-antimónia gondolatmenetét alkalmazva adódik, hogy az összes I.-dolgok osztálya nem halmaz. A Burali—Forti-féle antimónia miatt pedig az összes rendszámok osztálya sem halmaz, ezért ez a két osztály ekvivalens és így az összes I.-dolgok osztálya jól rendezhető. Ezért a IV. 2 axioma burkoltan tartalmazza a kiválasztási axiomát is. Ez már azért is hátrányos, mert így a Neumann-féle axioma-rendszert az eredeti formájában nem is lehet a kiválasztási axioma nélkül vizsgálni.

6 A φ formulák mondott tulajdonságát kimondó tétel, nem halmazelméleti tétel, és bizonyítása csak azt mutatja meg, hogy minden konkrét formula esetén hogyan kellene ezt a tételt a halmazelméletben bizonyítani. Az ilyen tételeket meta-tételeknek nevezik és a halmazelmélet axiomatikus felépítésének megkönnyítésére Neumann alkalmazta először. Neumann idézett [4] dolgozatában az általunk említett meta-tétel több különböző segédtételre bontva szerepel.

7 Erről részletesebben lásd [6]-ot.

Neumann ezért megfogalmazta a IV. 2 axiomát gyengébb alakban is, amelyben lényegében azt mondja ki, hogy ha egy osztály ekvivalens egy halmazzal, akkor maga is halmaz. Megmutatta, hogy ha az eredeti axiomarendszer IV. 2 axiomáját evvel a gyengébb axiomával helyettesíti, és ehhez még a kiválasztási axiomát is hozzáveszi, akkor, ha az így kapott gyengébb axiomarendszer ellentmondástalan, úgy ellentmondástalan az ő eredeti axiomarendszere is. Miután az említett gyengébb axiomarendszer már csak „természetes" axiomákat tartalmaz, az eredeti axiomarendszer is elfogadható.[8]

Neumann ezenkívül — szintén [5]-ben — megmutatta, hogy ha az eredeti axiomarendszere ellentmondástalan, akkor ellentmondástalan marad akkor is, ha a következő feltevéseket hozzávesszük az axiomarendszerhez:

a) minden I.-dolog I.—II.-dolog.

b) az A, B értékek speciálisan 0-val és $\{0\}$-val egyenlő.

c) a (x, y) rendezett pár $\{\{x\}, \{x, y\}\}$-nal egyenlő.

d) nincs olyan végtelen $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ halmazsorozat, amelyre $x_{n+1} \varepsilon x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

b) és *c)* azt mutatja, hogy az axiomarendszer áttekinthetősége végett túl sok alapfogalmat vezettünk be szükségtelenül.

a)-t a Z.—F.-axiomarendszerben a meghatározottsági axioma erős formájának hívják, mert ott lényegében azt fejezi ki, hogy az egyetlen elem, amelynek nincs eleme az üres halmaz, itt azt fejezi ki, hogy minden dolog függvény, de itt is nevezhetjük a meghatározottsági axioma erős formájának, mert azt fejezi ki, hogy az egyébként csak függvényekre érvényes meghatározottsági axioma a $(x)[[f, x] = [g, x]] \rightarrow f = g$ axioma bármely két f, g-dologra teljesül.

d)-t a fundáltság axiomájának nevezik és ekvivalens avval, hogy minden halmaz megkapható az üres halmazból a hatványhalmaz és összeghalmaz-képzés transzfinit iterálásával.

Az említett relatív ellentmondástalansági tételeknek az a jelentősége, hogy az *a)-b)-c)-d)* feltételeknek is eleget tevő Neumann-féle axiomarendszer lényegesen áttekinthetőbb és így további axiomatikus vizsgálatokra alkalmasabb.

[8] Időközben meglehetősen bonyolult logikai eszközökkel kimutatták, hogy ha a Z.—F.-féle axiomarendszer ellentmondástalan, akkor ellentmondástalan a Neumann-féle axiomarendszer is. Lásd pl. [7]. A megfordított állítás nyilvánvaló, mert a Z.—F.-axiomarendszer minden halmazokra és az ε-relációra vonatkozó axiómája tétele vagy axiomája a Neumann-féle axiomarendszernek.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] v. Neumann J.: Zur Einführung der transfiniten Zahlen. Acta Szeged 1 (1922—23), pp. 199—208.
[2] v. Neumann J.: Eine Axiomatisierung der Mengenlehre. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 154 (1925), pp. 219—240.
[3] v. Neumann J.: Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre. Mathematische Annalen 99 (1928). pp. 373—391.
[4] v. Neumann J.: Die Axiomatisierung der Mengenlehre. Math. Zeitschrift 27 (1928), pp. 669—752.
[5] v. Neumann J.: Über eine Widerspruchfreiheitsfrage in der axiomatischen Mengenlehre. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 160 (1929), pp. 227—241.
[6] Hajnal A.—Kalmár L.: Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiomarendszeréhez I. Matematikai Lapok, VII. évf. 1—2. (1956) 26—46.
[7] Novák L. I.: A construction for consistent systems. Fundamenta Mathematicae, 37 (1950) pp. 87—110.

О ТРУДАХ ЯНОШ-А НЕУМАНН-А В ОБЛАСТИ АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

A. Hajnal

THE WORK OF J. VON NEUMANN IN THE AXIOMATIC SET-THEORY

A. Hajnal

Bolyai Farkas, a matematika modern didaktikájának előfutára

(Halálának százéves évfordulójára)

— A Bolyai János Matematikai Társulat szegedi Jubileumi Vándorgyűlésén tartott előadás —

KÖNYVES TÓTH KÁLMÁN

Tulajdonképpeni előadásom megkezdése előtt a dolgozat előzményeit szeretném pár szóval elmondani.

A kérdést elsőizben dr. Dávid Lajos vetette fel a Magyar Pedagógiai folyóirat 1921. évi XXX. kötetében (148. lap), majd Bujdosó Ernő fejtette ki részletesen „A matematika didaktikája Bolyai Farkasnál“ című, 1934-ben kiadott értekezésében. Ebben a munkában Bujdosó Ernő bebizonyítja, hogy a modern matematikatanítás általános elvei Bolyai Farkasnál, világviszonylatban is elsőízben, hiánytalanul megtalálhatók.

Számomra a kérdést dr. Kárteszi Ferenc professzor úr tette fel, az 1954. évi Természettudományi Kari pályázatokkal kapcsolatban, s munkámban azóta is, amiben csak tehette, segített. Ezért itt is szeretnék köszönetet mondani.

Ezután legnagyobb köszönet illeti meg dr. Visnya Aladár nyugalmazott igazgató kartársat, aki Bolyai Farkas eredeti könyveit rendelkezésemre bocsátotta, s ezzel egyáltalán lehetővé tette a kutatást.[1]

* * *

[1] A szövegben minden idézet Bolyai Farkas eredeti, különböző helyeken kiadott írásaiból való. Az előadás jellege miatt nem közlöm a pontos megtalálási helyet. Az általános és a függvénytani rész megközelítően teljes kifejtését „Hogyan jelentkeznek Bolyai Farkasnál a modern tanítás alapelvei a matematikatanításban“ címmel a Matematika Tanítása folyóirat számára megírtam és a szerkesztőségnek átnyújtottam, közlése eddig nem történt meg. — A geometriai részt teljes egészében Bolyai Farkas Ürtan elemei kezdőknek c. tankönyvéből vettem, ennek a könyvnek mai szaknyelvre általam átültetett kiadása a közeljövőben jelenik meg a Tankönyvkiadó Vállalat Szakköri Füzeteksorozatában.

1856. november 20-án halt meg Bolyai Farkas. Életében teljes mértékben megvalósult, amit Aritmetikája (1843.) Végszavában ír: „A matézist gróf Sternau jólelkű öregasszonyhoz hasonlítja, mely száraz csont-kezével az arcról letörli a könnyet: de ez se törölheti azokról le, akik inkább ifjú (ti. asszony) által szereznek többet is. — A halál angyala törli mind le; minden ábrázaton vagy a remény csalfa mosolya, vagy az évek bú-irata; s a számtalan forrásokból jaj-zúgva omló árban a más iránti érzés kereke meredten áll; s alig vehetni el egy-két cseppet a keserűség tengeréből.“ —

Ezekbe a sorokba egész szerencsétlen életfolyamát beleszorítja: szeretetét a matematika iránt, szerencsétlen házasságait; fiával, Jánossal és a „nagy“ Gauss-szal kapcsolatos reményeket; az eredmény nélkül eliramló hosszú éveket; a kisváros és a nagyvilág (Gauss, Magyar Tudományos Akadémia) érzéketlenségét rendkívüli erőfeszítései iránt.

Erőfeszítése valóban rendkívüli volt, már csak anyagi körülményei miatt is: „Fizetésünkkel lehetetlen béérnünk; az élet gondja elöli a lelket, az időt elveszi, s a Hazára tér a mi kárunk, — hogy' világoljunk másoknak mutatni az utat a sötétbe, ha nints honnét tölteni az olajat?“

És mégis világolt a sötétben, a régimódi tanítás sötétségében, pedig szerinte „bizonyos dolgoknak megvan a maguk epochája, amikor különböző helyeken egyidőben fedeztetnek fel; mint tavasszal az ibolyák mindenütt kikelnek“; mégis, a modern tanítás elveit, korát megelőzően, megtaláljuk nála.

Nincs idő arra, hogy teljességre törekedjem, csupán főbb vonásaiban szeretném megmutatni Bolyai Farkas mai szemmel nézve is modern didaktikai munkásságát. — Gazdag írásos hagyatékában szétszórtan is, rendszeresen kifejtve is, találhatunk adatokat modern gondolkodásának megismeréséhez.

Például a *tudományosság* megvalósításával kapcsolatban a következőket írja: „Minden, ami taníttatik, valóság (azaz a lélek épületére tartozó) legyen; maradjon el, ami a lelket vagy nem formálja, vagy egyébnek, ami könnyebben és inkább formálná, helyét veszi el; a tudományt is le kell a lehetségig minden szükségtelenből vetkeztetni, magában is elég nagy s mind nő; mire emelni haszontalan terhet, melyet a módi vagy a hiú büszkeség teszen reá a való kontójára; nem azt teszi ugyan ez, hogy a tudomány könnyűszerűvé tétessék: alaposon kell a legalsóbb oskolában is tanítani, és úgy, hogy a legfelsőben tanítandókkal megegyezzék; sok függ a kezdettől, hogy a folytatás, ha szükséges lesz, egy plánum szerint menjen. — De a valóság is a korhoz s a tanuló eszenyílásához legyen mérve." — Ebben a szövegben egyben a *koncentrikus tárgyalásmód* alapelvét is lefekteti; és, ami ma is probléma, a *túlterhelés ellen* is felemeli a szavát, és megmutatja a megoldás egyetlen racionális útját.

A mechanikus, formális, könyv- és értelemnélküli „magolással" szemben nagyon fontosnak tartja az *értelemszerűséget*. Egyik barátját levélben megszidja: „Miért nem magyaráztad meg neki, ha megtanultattad? vagy miért tanultattál olyant, amit magyarázni nem akartál? — de töllem tudta meg, hogy azt érteni is kell!" Pedig nagy a haszna a magyarázatnak: „Magyaráztam neki belőle, s úgy tetszett, mintha új világ nyílt volna meg előtte." — Panaszkodik a marosvásárhelyi állapotokra is (Gaussnak): „Mikor idejöttem, alig akadt valaki a kollégiumban, aki többet tudott volna, mint *gépiesen* a négy műveletet."

Alapelvnek tekinti a *szemléletesség* minél nagyobb mértékű megvalósítását is. A tanító „mindég azokon kezdje, amit láthat, foghat." Egyik tanítványa külön kiemeli róla: „Előadása... szemléltető (intuitiv) volt. Könyveiben is nyoma van ennek, mert ott a geometrikus alakokat úgy állítja elé, hogy azok a *papír síkjából kikelnek*, mind a három kiterjedést előtüntetve." Szinezi is ábráit, a kezdetleges nyomdatechnika miatt minden egyes könyvben szabad kézzel.

Sokszor hangsúlyozza a ma is hallható *többi elveket*, rendszerességet, önállóságot, érthetőséget, az elmélet és a gyakorlat egységét s a többieket.

A matematika tudományos felépítése, amelyet Tentamenjében és a Kurzer Grundriss-ban találhatunk meg feldolgozva, nála nem azonos a didaktikai szempontból való rendszerezéssel. Az anyag didaktikai sorrendjét Aritmetikájában (1843., 180. lap) találjuk meg lefektetve. A két rendszer között a legnagyobb eltérés talán az, hogy tudományos rendszerében bizonyos mértékben különválasztja az aritmetikát és a geometriát, a didaktikai rendszerben viszont egybeépíti a kettőt, mindenütt a cél gyorsabb elérését s a *nagyobb érthetőséget* tartva szem előtt.

Mind az aritmetika mind a geometria önállóságának skrupulózus végigvitele szerinte „túlzás; rövid az élet, a dolog s nehézség sok: az időt s erőt kímélni kell; s a számot és tért, két örök testvért, az erőszakos elválasztás helyett, egymás kölcsönös segítségére, össze kell ölelkeztetni."

A didaktikus rendszerrel kapcsolatban szükséges megjegyeznünk, hogy ez a felépítés is feltételezi már a matematikához szükséges elemi alapfogalmak, mint pl. a számlálás s az alapműveletek köznapi fogalmai, a legelemibb geometriai formák s bizonyos térszemlélet ismeretét.

Az Aritmetika (1843.) 180. lapjáról a didaktikus rendszer a következő:

1. Először az aritmetika és a geometria közös alapfogalmait tűzi ki megtárgyalásra, ilyenek pl. a rész, a semmi, az egyenlőség, részenkénti egyenlőség, mennyiség, szám, nagyobb-kisebb, mérés stb. fogalma.

2. Ezután először a geometria elemei következzenek az egybevágósággal kapcsolatos problémákkal, majd

3. az aritmetika elemeit kell tárgyalni: ezek a szorzás és osztás általánosságban való értelmezése, s az ezekkel kapcsolatos, törtek, aránypárok, stb ismertetése. Jellemző, hogy a szorzást *mérttezés*nek, a szorzatot *eggymértt*nek nevezi, utalva a műveleteknek a mérésből és összehasonlításból való származására; az osztást *párzás*nak, hiszen adott szorzatból és tényezőből keressük az adott tényező párját. A tárgyalásmódban az algebrában szükséges nem kommutatív szorzat megalapozása is felfedezhető.

4. Ezután visszatér a geometriára, az aránypárok ismerete lehetővé teszi a párhuzamos szelők tételének, majd a háromszögek hasonlóságának és általában a hasonlóságnak tárgyalását (kitér az összemérhetetlen esetekre is). Bemutatja ennek közvetlen következményeit, külön hangsúlyozza a műveletek, mint a szorzás, osztás, négyzetgyökvonás, grafikus elvégzésének módjait, a területszámítás alapfogalmait.

5. A műveletek megismerésével a különböző sorozatok tárgyalása is lehetővé vált, a sorbafejtés legegyszerűbb eseteivel, ilyen pl. a számtani és mértani sorozat, $(a+b)^n$, stb.

6. Ezután a sík trigonometriájának elemeit tanítja, annyit, amennyi a hatványfogalom általánosításához szükséges belőle. A sorozatokat is ezért vette előre.

7. A hatványozás és a logaritmus általános elméletét számtani és mértani sor tagjainak egy-egyértelmű megfeleltetésére alapozza.

8. A trigonometria többi része ezután következhet.

9. „Azután jöhetne a függvénytan; ahova az egyenlettan, az infinitezimális számítás és a többi is tartozik, ahol szükséges, geometriailag világosítva (érthetővé téve),

10. ily készülettel lehetne a geometria felsőbb mezejére lépni."

Lássuk ezek után néhány konkrét probléma tárgyalásmódját.

I. Az aritmetika és a geometria azért kapcsolódik nála annyira szoros egységbe, mert szerinte elvont mennyiség nincs, minden mennyiség „egyeni képviseletben“, azaz megfelelő hosszúságú egyenes szakasznak képzelve lép be a számítások menetébe, és minden velük végzett művelet eredménye ismét távolság, mint ahogyan a ma is használatos grafikus műveletvégzésnél tapasztalható.

II. *a*) A függvényekkel kapcsolatban érdemes idéznünk függvény-definícióját; ezen a modern függvényfogalom íze érezhető: „Ha változót (változókat) állandóval (állandókkal) tetszőleges (algebrai vagy geometriai) művelettel kapcsolunk össze, az ezt kifejező *képezet* (képlet, utasítás): függvény. Ez *közö*s jele (*kép*e) mindannak, amit — a változó akármelyik megengedett értékét véve — eredményül kapunk.“ (Ezért nevezi *közkép*nek a függvényt.)

b) Hogy mennyire általános ez a függvényfogalom, függvényábrázolásával kapcsolatban is láthatjuk: pl. „valamely egyenesen nőljön x valamely ponttól kezdve, s minden x-ből bizonyos törvény szerint emeljünk merőlegest, ezen merőlegeseket jelöljük y-nal, akkor az y-ok halmaza, vagy az y-ok felső végének halmaza, vagy a bezárt terület mind x függvénye“. — Másik ábrázolási mód: mozgó Y-tengely segítségével. Megemlíti még pl. a polár-koordináta-rendszereket is.

c) Az egyenletek megoldását mint a függvények konkrét értékéhez tartozó változóérték keresését tárgyalja. A megoldással kapcsolatban megemlékezik az egyenértékű átalakítás fontosságáról: a kapott végeredmény éppen akkor elégíti ki bizonyosan az eredeti egyenletet, „ha minden művelet, mellyel az első egyenletből az utolsót kaptuk, olyan, hogy ha pl. A-ból következett B, következzék B-ből is A.“

Az egyenletmegoldás menetét másodfokú betűegyütthatós, nevezőben is ismeretlent tartalmazó egyenleten mutatja be. „Tulajdonképpen azon az úton mehet a tanuló: igyekezzék, hogy az egyenlet egyik oldala maga az ismeretlen legyen, a másik oldal csupa ismeretesekből álljon.“ „Könnyebb megoldani az egyenletet, ha tiszta: vagyis ha az ismeretlen csak egy tagban szerepel. Ezért önként jön arra törekedni, hogy a nem-tisztát is tisztává tegyük.“ Itt elsősorban a másodfokú egyenlet megoldására céloz, de értelemszerűen magasabbfokú egyenleteknél is ez a módszer. „Ha x helyébe $y+k$-t teszünk x^2+ax+b-ben, s $k=-\frac{a}{2}$, oly tiszta másodfokú egyenlet jön ki, melyben y az ismeretlen; ennek értékéhez $-\frac{a}{2}$-t kell hozzáadni, hogy x-t megkapjuk.“

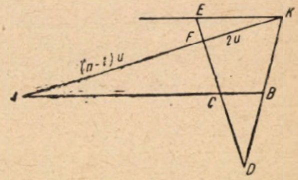
Ez a függvénytranszformációs eljárás a nem-elsőfokú egyenletek megoldásának általánosabb útját mutatja, mint az önkényes, formális algebrai, teljes-négyzetté-kiegészítés. Szemléletesebb is a másodfokú függvény ábrázolásából kiindulva az egyenletek grafikus megoldásán át ezen az úton vezetni a tanulók gondolkodását; így jobban a függvények vizsgálatához kapcsolódik az egyenletek tárgyalása, a magasabbfokúak felé is megvan a továbbépítés lehetősége, s az így rendszerezett anyag szilárdabban maradhat a tanulók emlékezetében.

III. *a*) Az *egyenessel,* főleg természetével, tulajdonságaival kapcsolatban, nagyon óvatosan bánik Bolyai Farkas, hiszen már megjelent nagy fia korszakalkotó műve, az Appendix, s ez gyökeresen felforgatott sok addigi szemléletes elképzelést.

A következő definíciót adja: „Egyenes vonal az olyan görbe, amelynek akármely két pontját választjuk is ki, a vonal köztük levő alkotó részével egybevágó másik görbe nem létezik ugyanazon két pont között.“ Gyakorlatban is alkalmazza: „A terepen kisebb távolságon kifeszített zsinór, kötél vagy lánc segítségével jelölünk ki egyenest. A kötél vagy lánc annál inkább megközelíti az egyenest, minél kisebb súlyú s minél inkább megfeszítik; de meg kell jegyezni, hogy vízszintes helyzetben véges erővel nem feszíthetjük tökéletesen egyenesbe.“ Sőt: „még azt is meg kell jegyeznünk, hogy — ha a terep nem sík — akkor nem egyenest, hanem két pont közötti egyenesre illeszthető függőleges síknak és a Föld színének metszésvonalát jelölhetjük meg.“

Ezekből látszik, mennyire tisztán igyekszik megtartani az egyenes fogalmát, mennyire megkülönbözteti az egyenest mindattól, amit általában, a köznyelvben, egyenesnek szokás nevezni.

b) A párhuzamos egyenesekkel még óvatosabban bánik. A párhuzamosság lényegét ő is a *nem-metszésben* látja. Még az euklidesi geometrián belüli szerkesztéseknél is kerüli a párhuzamosok húzását. Ennek, persze, az is oka, hogy az egyetlen egyélű vonalzót és az egy körzőt minél gazdaságosabban használhassa fel.



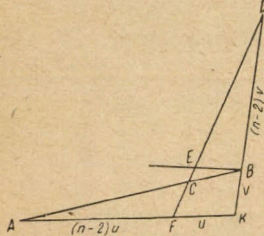
1. ábra

Így pl. párhuzamos húzása nélkül végzi el adott szakasz n-edrészének megszerkesztését.

„AB szakasz n-edrészét kell megszerkeszteni. (1. ábra) AK félegyenesre tetszésszerinti u szakaszt választva mérjük fel az $AK = (n+1)\cdot u$ és $AF = (n-1)\cdot u$ szakaszokat; jelöljük ki a K B-re vonatkozó D tükörképét; DF metszi ki AB-ből azt a C pontot, melyre $CB=\frac{AB}{n}$.

Bizonyítás. Legyen $KE \| AB$, s E DF és KE metszéspontja. A látható hasonló háromszögekből: $KE:BC=DK:DB$, tehát $KE=2BC$. Ugyancsak a hasonlóság miatt: $AC:EK=AF:FK$, vagyis $AC:2BC=(n-1)\cdot u:2u$, ebből $2u\cdot AC=2u\cdot(n-1)\cdot BC$, tehát $AB=n\cdot BC$.

Másik módszer. (2. ábra) AK félegyenesre, ismét tetszésszerinti u szakaszt választva, mérjük fel az $AF=(n-2)\cdot u$ és az $AK=(n-1)\cdot u$ szakaszokat. Ezután KB félegyenesre mérjük fel a $KD=(n-1)\cdot KB$ szakaszt. DF metszi ki AB-ből azt a C pontot, melyre $CB=\frac{AB}{n}$.



2. *ábra*

Bizonyítás. Legyen $BE \| AK$, s E DF és BE metszéspontja. A látható hasonló háromszögekből: $BE:KF=DB:DK$, tehát $BE=u\cdot\frac{(n-2)\cdot v}{(n-1)\cdot v}$. Ugyancsak a hasonlóság miatt: $AC:BC=AF:BE$, vagyis $AC:BC=(n-2)\cdot u:\frac{n-2}{n-1}\cdot u$, ebből $AC=(n-1)\cdot BC$, tehát, $AB=n\cdot BC$.

Ennél a módszernél csökkenthetjük a körzőbeállítások számát, ha K a B középpontú u sugarú és az A középpontú $(n-1)\cdot u$ sugarú körök metszéspontja, ekkor ugyanis $KD=KA$."

c) Ha nem párhuzamos két síkbeli egyenes, s csak egy közös pontjuk van, szög keletkezik. A szög nagyságát a szárai közti — csúcsa körül akármekkora sugárral írt — körív nagyságával jellemzi; sőt a szöget és az ívet egyenlőknek is mondja, ha a figyelembe vett szögek mindegyikénél ugyanolyan sugarú körívek szerepelnek.

Talán legszebb alkalmazási területe ezen szögmérési módszernek Bolyai Farkas középponti és kerületi szögekre vonatkozó bizonyítása. Természetesen ugyanezt a bizonyítást másféle szögmértékkel is meg lehet fogalmazni, de ez illik legjobban a tétel és a bizonyítás természetéhez.

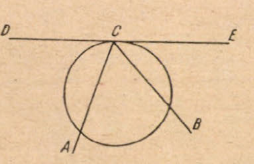
Bevezetésül, a merőlegesszárú szögek segítségével, a szokásos módon bizonyítja Bolyai Farkas: „A kör érintőjének az érintési pontból kiinduló húrjával bezárt szöge a húr két végével meghatározott ívhez tartozó középponti szög fele." — Ezt felhasználva bizonyítja a tételt: „Bármely kerületi szög fele az ugyanazon ívhez tartozó középponti szögnek."

Bizonyítás. (3. ábra)

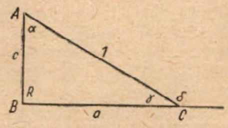
„$DCA\sphericalangle + ACB\sphericalangle + BCE\sphericalangle = \pi$ és (az idézett tétel szerint)

$$DCA\sphericalangle = \frac{\widehat{CA}}{2},\ BCE\sphericalangle = \frac{\widehat{BC}}{2} \text{ valamint } \widehat{CA} + \widehat{AB} + \widehat{BC} = 2\pi,$$

csak $ACB\sphericalangle = \frac{\widehat{AB}}{2}$ lehetséges. Ezt kellett bizonyítani."



3. *ábra*



4. *ábra*

IV. Bolyai Farkas „Alkalmazás a közéletre" című fejezetben, a terepen való mérések módszereit mutatja be. A legtöbbet alkalmazott módszer: hasonló idomok megfelelő oldalainak aránya alapján való számítás. Ugyanerre a célra állítja be a *Trigonometria* tanítását is. A szögfüggvények definícióját így adja meg:

„Az egységnyi átfogójú derékszögű háromszög akármelyik oldala (4. ábra) a vele szemközti szögnek és mellékszögének is sinusa; és a szög sinusának ellentettje a szög ellentettjének sinusa is egyben. Amennyiben pedig $\gamma + \delta = \frac{\pi}{2}$, γ sinusa δ-nak cosinusa; és $\frac{\sin k}{\cos k}$ pedig tang k." Ez a definíció a teljes kör összes szögeire értelmezi a szögfüggvényeket. Mégpedig a $-\pi < \alpha < 0$ és a $0 < \alpha < \pi$ intervallumban (az átfogó is sinusa a derékszögnek). Explicite $\sin 0 = \cos \frac{\pi}{2}$ hiányzik, de ez is értelmezhető a „szög sinusának ellentettje a szög ellentettjének sinusa is egyben" definícióval, hiszen $\sin(-0) = -\sin 0 = 0$ kell legyen. Ezzel a megjegyzéssel, mivel 0 mellékszöge π, a szögfüggvények értelmezési tartománya $-\pi \leqq \alpha \leqq \pi$-re egészül ki. —

a) Ennek a definíciónak közvetlen következményei a szögfüggvényekre vonatkozó előjelszabályok és a sinus-tétel.

b) Könnyen adódnak az összeg-képletek is. Bármely háromszög esetén ugyanis (5. ábra)

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\varepsilon=\sin\gamma;$$

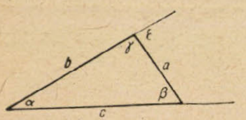
és vagy (6. ábra szerint):

$$c=a\cos\beta+b\cos\alpha,$$

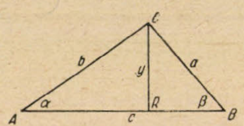
vagy (7. ábra szerint):

$$c=b\cos\alpha-a\cos\beta'=$$

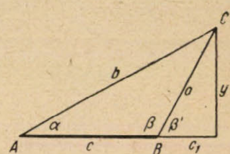
$$=a\cos\beta+b\cos\alpha.$$



5. *ábra*



6. *ábra*



7. *ábra*

Alkalmazzuk a sinus-tételt:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=\frac{c}{b}=\frac{a\cos\beta+b\cos\alpha}{b};$$

rendezve:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma=\frac{a\sin\beta\cos\beta+b\cos\alpha\sin\beta}{b},$$

mivel pedig

$$a\sin\beta=b\sin\alpha,$$

fennáll:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

A $\sin(\alpha-\beta)$-ra vonatkozó megfelelő összefüggést hasonlóan vezeti le, a cosinusra vonatkozóakat pedig ezekből a

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$ definíció segítségével.

Így ezeknek az összefüggéseknek a levezetése az összes, háromszögekkel kapcsolatban előforduló esetekre érvényes, tehát a gyakorlatilag előforduló esetekre. Egyedüli megkötés: a háromszög szögösszege. — A mostani középiskolai tankönyvekben található bizonyítás csak hegyesszögösszegű pozitív hegyesszögekre érvényes, tehát a gyakorlati szükségességet sem fedezi. Az általános esetre szóló bizonyítást középiskolában sehol sem tárgyaljuk, mégis, legalább az előforduló esetekre érvényes erejű bizonyítás szükséges volna. — Bolyai Farkas, elemi módszerekkel, levezeti teljes általánosságban is az összegképleteket.

c) Az úgynevezett cosinus-tételt Bolyai Farkas csak adott három oldal esetén a szögek kiszámítására alkalmazza; két oldal és a közbezárt szög megadásakor szokatlan összefüggést vezet le (5. ábra, a, b, γ): A sinus tétel szerint:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}=\frac{\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma}{\sin\beta};$$

és, cos β-val egyszerűsítve:

$$\frac{a}{b}=\frac{\operatorname{tg}\beta\cos\gamma+\sin\gamma}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Innen

$$a\operatorname{tg}\beta=b\operatorname{tg}\beta\cos\gamma+b\sin\gamma,$$

rendezve

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{b\sin\gamma}{a-b\cos\gamma}.$$

Ez az összefüggés a cosinus-tételnél sokkal könnyebben kezelhető, még a tangens-tételnél is; az utóbbival szemben egyetlen hátránya, hogy a nevezőben levő különbség miatt a logaritmus nem használható közvetlenül; de a tangens-tétel $\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2}$ kifejezéseivel összevetve ez a hátrány is elenyésző.

Valóban csodálatos, hogy elmaradt környezete ellenére *teljes modern elvszerűség* jellemezte munkáját. Az az érzésünk, hogy erre éppen a matematika művelése tette őt képessé, s ugyanezért tartotta ő is szükségesnek a matematika tanítását: „Az vissza is adhat azon külső világosságból, mellyel még csak mint félholddal, szürkületesen világítunk bele ebbe a virradástól messzenéző éjszakába."

Ezzel a megemlékezéssel és méltatással adót szeretnénk leróni Bolyai Farkasnak: a hálát, melyet környezete és közvetlen utódai megtagadtak tőle. Nem számított hálára, azért adta ki *névtelenül* tankönyveit, s mert tudta: „A hálára számító nevelő, nem méltó reá; aki hálátlan, pedig méltó, hogy a gyermekek sárral hajigálják, s a hölgyek jéghidegen taszítsák; mert jóltevőt, lévő s leendő szüléket hűt.“

Megnyugtathatjuk egyben Bolyai Farkast afelől, amit vágyva vágyott megmutatni, „hogy nem csak semmivel terhelte, elég sárban, a kimívelődés szekerét“.

ДИДАКТИКА МАТЕМАТИКИ ФАРКАШ-А БОЯИ

K. Könyves Tóth

W. BOLYAI PRECURSOR OF MODERN DIDACTICS OF MATHEMATICS.
(TO THE 100th anniversary of his death).

K. Könyves Tóth.

Körbe és kör köré írt sokszögekről

Fejes Tóth László

Jelen dolgozatban bebizonyítjuk a következő két tételt,[1] amelyekben $T(s)$- és $L(s)$-sel jelöljük valamely s síkidom területét és kerületét.

1. *Legyen S_n egy k kör köré írt n-szög $\overline{S}_n$ egy k köré írt szabályos n-szög, K_n az $\overline{S}_n$ köré írt kör és S_n^* S_n és K_n közös része. Akkor*

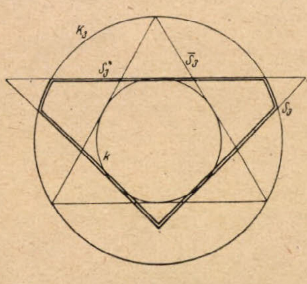
$$T(S_n^*) \geqq T(\overline{S}_n)$$

és egyenlőség csak akkor áll, ha S_n is szabályos.

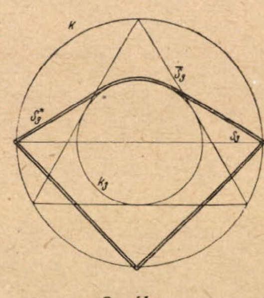
2. *Legyen s_n egy K körbe írt n-szög, $\overline{s}_n$ egy K-ba írt szabályos n-szög, k_n az $\overline{s}_n$-be írt kör és s_n^* s_n és k_n konvex burka. Akkor*

$$L(s_n^*) \leqq L(\overline{s}_n)$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha s_n is szabályos.



1. ábra



2. ábra

[1] Az első tétel nem új [L. Fejes Tóth, New proof of a minimum property of the regular n-gon, Amer. Math. Monthly 54 (1947) 589] és azt csak a másodikkal való kapcsolata miatt közöljük itt.

Nyilvánvaló módon $T(S_n) \geqq T(S_n^*)$ és $L(s_n) \leqq L(s_n^*)$. Ezért tételeink tartalmazzák a, Lhuilier- és Steinerre viszonyuló, jól ismert $T(S_n) \geqq T(\bar{S}_n)$ és $L(s_n) \leqq L(\bar{s}_n)$ egyenlőtlenséget. Látni fogjuk viszont, hogy az $L(S_n) \geqq L(\bar{S}_n)$ és $T(s_n) \leqq T(\bar{s}_n)$ egyenlőtlenség a a fenti irányban nem élesíthető, amennyiben az $L(S_n^*) \geqq L(\bar{S}_n)$ és $T(s_n^*) \leqq T(\bar{s}_n)$ egyenlőtlenség általában nem igaz.

Első tételünk bizonyítása meglepően egyszerű. Tekintsük a k kör középpontját S_n i-edik oldalával összekötő félegyenesek S_n-en kívül és K_n-en belül eső pontjainak h_i halmazát. Nyilvánvaló, hogy $T(h_i) \leqq T(s)$, ahol s jelenti K_n-nek k egy érintője által lemetszett szeletét. Ezért

$$T(S_n^\times) = T(K_n) - \sum_{i=1}^{n} T(h_i) \geqq T(K_n) - n\,T(s) = T(\bar{S}_n).$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a h_i halmazok mind egybevágók s-sel, vagyis ha S_n kongruens $\bar{S}_n$-sal.

A második tétel bizonyításához tegyük fel, hogy K sugara 1 s így k_n sugara $r_n = \cos\dfrac{\pi}{n}$. Jelöljük s_n^* i-edik „oldalának" látószögét, K középpontjából $2\omega_i$-el. Akkor ennek az oldalnak a hossza $l(\omega_i)$, ahol

$$l(\omega) = \begin{cases} 2\sin\omega & , \quad 0 \leqq \omega \leqq \dfrac{\pi}{n}, \\ 2r_n\left(\omega - \dfrac{\pi}{n}\right) + 2\sin\dfrac{\pi}{n}, & \dfrac{\pi}{n} < \omega \leqq \pi. \end{cases}$$

Mivel $l(\omega)$ $(0, \pi/n)$-ben konkáv, $(\pi/n, \pi)$-ben lineáris és $l'\left(\dfrac{\pi}{n} - 0\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{n} = 2r_n = l'\left(\dfrac{\pi}{n} + 0\right)$, azért $l(\omega)$ az egész $(0, \pi)$ intervallumban konkáv, s így a Jensen-féle egyenlőtlenség szerint

$$L(s_n^*) = \sum_{i=1}^{n} l(\omega_i) \leqq n\,l\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2n\sin\frac{\pi}{n} = L(\bar{s}_n).$$

Az egyenlőség esete nyilvánvaló.

Az első tétel bizonyítása minden változtatás nélkül, a másodiké pedig értelemszerű módosítással alkalmazható a nem-euklideszi síkban is. Érdemes továbbá megjegyezni, hogy a gömbi geometriában a két tétel egymással ekvivalens. A gömbi polaritásban ugyanis egy k körnek, egy k köré írt szabályos n-szögnek és az e köré írt K_n körnek megfelel egy K kör, egy K-ba írt szabályos n-szög és egy ebbe írt k_n kör. Nézzük mi felel meg egy k köré írt S_n n-szög K_n-be eső S_n^* részének. S_n-nek nyilvánvalóan egy K-ba írt s_n n-szög a képe. Mozogjon a P pont S_n-nek egy K_n-et metsző oldalán K_n belsejében. Eközben a P-hez tartozó p főkör s_n egyik csúcsa körül forog. Amikor P eléri K_n-et, akkor p érinti k_n-et. Mozgassuk most P-t K_n-en S_n következő oldaláig. Ekkor p beburkolja k_n egy ivét, s végül átmegy s_n következő csúcsán. Látható ebből, hogy miközben P végigfut S_n^* határán, p beburkolja s_n^*-ot, tehát S_n^*-nak a polaritásában s_n^* felel meg. Mivel továbbá, a polaritás ismert tulajdonságai alapján, $T(S_n^*)+L(s_n^*)=2\pi$, azért $T(S_n^*)$ akkor lesz minimális, amikor $L(s_n^*)$ maximális. Ezzel a két tétel ekvivalenciája be van bizonyítva.

Példát mutatunk még egy-egy olyan sokszögre, amelyre $L(S_n^*)<L(\bar{S}_n)$, illetőleg $T(s_n^*)>T(\bar{s}_n)$. Legyen S_3 az egységnyi sugarú k kör köré írt derékszögű egyenlőszárú háromszög. Akkor

$$L(S_3^*)=2+4\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}=9{,}97\cdots<L(\bar{S}_n)=6\sqrt{3}=10{,}39\cdots.$$

Ha viszont s_3 az egységnyi sugarú K körbe írt derékszögű egyenlőszárú háromszög, akkor k_3 és s_3 egyesített halmazának területe $1+\frac{\pi}{8}$, s ezért

$$T(s_3^*)>1+\frac{\pi}{8}=1{,}39\cdots>T(\bar{s}_3)=\frac{\sqrt{27}}{4}=1{,}29\cdots.$$

О МНОГОУГОЛЬНИКАХ, ВПИСАННЫХ В ОКРУЖНОСТЬ И ОПИСАННЫХ ВОКРУГ ОКРУЖНОСТИ

L. Fejes Tóth

Пусть R есть правильный n-угольник, k-окружность, вписанная в R, K-окружность, описанная вокруг R, s n-угольник, описанный вокруг k, S n-угольник, вписанный в K, s^* общая часть s и K, S^* выпуклая огибающая S и k. Доказывается, что $T(s^*)\geqq T(R)$ и $L(S^*)\leqq L(R)$, где т обозначает площадь, а L периметр. Доказывается также, что неравенства $L^*(s)\geqq L(R)$ и $T(S^*)\leqq T(R)$, вообще говоря, не имеют места.

ÜBER EINEM KREIS EIN- UND UMBESCHRIEBENE VIELECKE

L. Fejes Tóth

Es sei R ein regelmässiges n-Eck vom Inkreis k und Umkreis K, s ein k umbeschriebenes, S ein K einbeschriebenes n-Eck, s^* der Durchschnitt von s und K und S^* die konvexe Hülle von S und k. Es wird gezeigt, dass $T(s^*)\geqq T(R)$ und $L(S^*)\leqq L(R)$, wo, T und L^* Flächeninhalt und Umfang bedeuten. Dagegen gelten die Ungleichungen $L(s^*)\geqq L(R)$ und $T(S^*)\leqq T(R)$ im allgemeinen nicht.

Geőcze Zoárd

SZÉNÁSSY BARNA

(Varga Ottó professzornak tisztelettel 50. születésnapja alkalmával)

A farkasréti temetőben a hősi halottak sírjai között szerényen húzódik meg egy töredezett, egyszerű kis kőkereszt, rajta a felirat: Dr. Geőcze Zoárd hadnagy, 1. npf. gy. e. Budapest † 1916. XI. 26.

Kevesen tudják, hogy a sírban a magyar matematika század eleji hősi korának egyik legnagyobb hatású, és a külföldi szakirodalomban ma gyakran emlegetett kutatója alussza örök álmát. Itthon a közvetlenül érdekelt matematikusokon kívül alig ismerik GEŐCZE nevét, a vele foglalkozó két terjedelmesebb dolgozat[1] a második világháború eseményei következtében nem jutott el az olvasókhoz.

Ez a rövid ismertetés nem tart számot a teljességre, célja inkább annak a felvázolása, hogy GEŐCZE Zoárd alapvető matematikai gondolatai miként terebélyesedtek ki a modern analízis egy tekintélyes fejezetévé.

[1] SZÉNÁSSY BARNA: Emlékbeszéd GEŐCZE ZOÁRD felett. Stephaneum. Budapest, 1941,

SZÉNÁSSY BARNA: GEŐCZE ZOÁRD matematikai munkássága és a felszínmérés újabb eredményei. A Szent István Akadémia 1943. évi Értesítőjében. 118—142. l.

GEŐCZE Zoárd 1873. augusztus 23-án Budapesten született. Apja a Ludovika tanára, a kiegyezés korának egyik legképzettebb hadászati szakírója volt, kinek a magyar katonai nyelv sokat köszön. Zoárd a VIII., majd a IV. kerületi főreáliskolában végezte középiskolai tanulmányait, meglehetős középszerű eredménnyel. Élethivatásul a tanári pályát választotta, az oklevél megszerzése céljából a budapesti tudományegyetem bölcsésztudományi karára iratkozott be. Mint ismeretes a múlt század végén a tudományegyetem matematikus hallgatói számára a műegyetem professzorai is tartottak előadásokat. GEŐCZÉre nagy hatást gyakoroltak KÖNIG Gyula mélyenszántó és gondolatébresztő kollégiumai, kedvet kapott az önálló búvárkodáshoz, és vizsgálatának eredményeit pályamunka formájában be is nyújtotta. A munka azonban nem vívta ki KÖNIG Gyula elismerését, a hirtelen haragú GEŐCZE a kritikára igen magyarosan adta meg válaszát. Ezáltal el is vesztette KÖNIG további támogatását, ami azért nagyon sajnálatos, mert akkori matematikusaink többsége — köztudomásúlag — KÖNIG Gyulától kapta az indítást, és az ő szava döntő jelentőségű volt szakmai és oktatásügyi kérdésekben egyaránt.

GEŐCZE — mint szakvizsgás tanár —1896-ban állást vállalt a podolini algimnáziumban. Itt hamarosan megnősült, felesége LIPPÓCZY Irma mintaképe volt a szerető élettársnak, ki mindig a legnagyobb odaadással segítette át férjét az élet elkerülhetetlen zökkenőin.

Életének legközelebbi állomása az ungvári alreáliskola volt, hova 1899-ben került rendes tanári minőségben. Az érdekes, szinte különc emberről sok jellegzetes emléket őriztek meg volt ottani kartársai és tanítványai. Gyakorta lehetett látni, amint kezében egy hatalmas akácfa fokossal, szájában az elmaradhatatlan Virginia szivarral már hajnali öt órakor szokásos körútjára indult az Ungvár-környéki hegyekbe, vagy a szép fekvésű szőlőkertekbe. Robusztus alakja legkevésbé sem vallott elmélyedő matematikusra. Füttyszó mellett, a fokossal nagyokat kaszálva barangolta a vidéket és közben állandóan töprengett.

Házasságából hét fiú és egy leány származott. Gyermekeit rajongásig szerette, de családi boldogságára árnyékot vetettek a nevelés súlyos anyagi terhei. Valójában azonban csak egy dolog keserítette el: tudományos vizsgálatai, melyek az akkor rohamosan épülő valós függvénytan körébe tartoztak, minduntalan elakadtak a számára csaknem elérhetetlen szakirodalom hiánya miatt. Első értekezése [1][2] az ungvári alreáliskola 1905. évi Értesítőjében jelent

[2] Szögletes zárójelben levő számok GEŐCZE dolgozatainak sorszámaira vonatkoznak.

meg, ezt egy év múlva ugyanitt olyan tanulmány követte, melynek tárgya későbbi kizárólagos vizsgálati területéhez, a felszínmérés problémaköréhez tartozik [2]. Az értekezésben található új gondolatokat SCHLESINGER Lajos a kolozsvári egyetem tanára vette észre, ki fel is szólította, hogy eredményeit röviden foglalja össze. Ez a kis tanulmány 1907-ben a Comptes Rendus-ben látott napvilágot [4].

Ez az értekezés alapot szolgáltatott arra, hogy a kultuszminisztérium egy évre szóló ösztöndíjjal a valós függvénytani kutatások centrumába, Párizsba küldje GEŐCZÉt. Itt alkalma volt megismernie a francia matematikusok — BAIRE, BOREL, LEBESGUE, POINCARÉ — legújabb eredményeit. Különösen LEBESGUE munkásságát tanulmányozta nagy figyelemmel, első Párizsban írott tanulmányát is neki küldte el bírálatra. Sajnos még LEBESGUEnél is kudarcot vallott — mint annak idején KÖNIGnél — az értekezés olvasatlanul került vissza. Mint a kísérő levél elárulja, LEBESGUE nem tudott megbarátkozni GEŐCZE nehéz stilusával, az általa bevezetett sok új elnevezéssel és jelöléssel. Azonban arról is van dokumentumunk, hogy midőn LEBESGUE később megismerte GEŐCZE eredményeit, igen sokra értékelte azokat.

Tudománytörténeti érdekesség kedvéért megemlítem, hogy Párizsban GEŐCZE gyakran találkozott Madame CURIE-vel, később leveleztek is. Maria SKLODOWSKA iparkodott rábeszélni matematikusunkat, hogy maradjon kinn, erre GEŐCZÉnek az volt a válasza, hogy a legkisebb magyar egyetem katedráját sem cserélné el a Sorbonneért.

Az első ösztöndíjas év gazdag, de be nem fejezett tanulmányai indokolttá tették, hogy egy évi itthoni munka után 1910-ben újra Párizsba menjen GEŐCZE. Ennek az évnek szép eredménye volt a Sorbonne doktori oklevele, a „docteur de l'université".

Hazatérése után egyre növekvő híre, kiszélesedő munkássága a tudományos élet középpontjába, Budapestre szólította. Új munkahelye az V. kerületi főreáliskola volt, itt tanított ezután az első világháború kitöréséig. Eredményei kellő alapot nyújtottak, hogy 1913-ban a budapesti tudományegyetem „Sokaságelmélet és valós változók függvényei" c. tárgykörből magántanárrá képesítse. FEJÉR Lipóttól tudom, hogy a referenseknek sok munkát adott GEŐCZE nehezen érthető dolgozatainak elbírálása.

Ugyanebben az évben az Akadémia pályázatot írt ki egy nagyszabású matematikai mű összeállítására. „A halmazelmélet geometriai alkalmazásai" c. tervezete alapján az Akadémia GEŐCZÉt bízta meg, sajnos ennek a munkának csak kis töredéke készült el. Egy ideig a bokros középiskolai tanári elfoglaltság hátráltatta, később a frontszolgálat lehetetlenné tette az alapos tanulmányokat igénylő, úttörő munka megírását.

Ugyanis a világháború kitörése után csakhamar behívták GEŐCZÉt katonai szolgálatra. Mint tartalékos tiszt előbb a szerb arcvonalon küzdött, itt résztvett POTIOREK táborszernagy szomorú Drina melletti visszavonulásában. A hihetetlen áldozatokkal járó hadművelet során GEŐCZE ezredét is szétszórták, a megmaradt kis létszámú legénységet és tiszteket egy zászlóaljba tömörítve az északi frontra vitték. A jelentkezés alkalmával ismerte meg GEŐCZÉt PFLANZER-BALTIN vezérezredes. Kímélni akarva a neki előre beajánlott matematikust, egy villamos erőműtelep hálózatának ellenőrzésével bízta meg. Mintegy 25 km hosszú vonalat kellett GEŐCZÉnek naponta hol gyalog, hol lóháton bejárnia. A munka fárasztó volt ugyan, de elvégzése után jutott idő a matematikára is. Dolgozatait tábori postán küldözgette haza, a korrekturát már itthon maradt kartársai végezték el.

A vezérezredes kétségtelen jóindulatának azonban csakhamar tragikus lett a vége: GEŐCZE hatalmas fizikuma sem sokáig bírta a megerőltető munkát. Csernovicból nagy betegen Bécsbe szállították, innen hazavágyott, haza is hozták. Alapos meghűléssel, és — amint az egykori kórházi bizonyítvány mondja — a hadi fáradalmak által megviselt idegzettel vették fel 1916. tavaszán egyik budapesti kórházba. Szívbajjal párosult oedema munkaereje teljében oltotta ki életét ugyanezen év november 26-án.

Az V. kerületi reáliskola Értesítőjében FRÖHLICH Károly írt szép nekrológot, a Matematikai és Fizikai Társulat 1916. dec. 7-én tartott ülésén — a hősi halált halt ZEMPLÉN Győzővel egyszerre — róla is kegyeletes szavakkal emlékezett meg EÖTVÖS Loránd:

„Még egy megrendítő veszteségünket kell bejelentenem. Mult hó 26-án a harctéren szerzett betegsége következtében elhunyt GEŐCZE Zoárd, a nagy mathematikus, a mi kedves társunk, aki a felületek elméletére vonatkozó vizsgálódásainak világraszóló eredményeit itt velünk is közölni szokta. Sem házi gondok és gyermekek zaja, sem a lövészárok kényelmetlenségei s az ágyúk dörgése nem zavarták meg őt abban, hogy gondolkozását kedvenc feladatának megoldására összpontosítsa s arra vonatkozó tudásunkat kibővíteni és mélyíteni törekedjék. Tiszteletet és hervadhatatlan babért érdemel az, ki mint ő eszményi célt tűz maga elé s ahhoz hű marad a haláláig."

*

GEŐCZE Zoárd matematikai tevékenysége egész terjedelmében olyan problémák körül csoportosul, melyek megoldása valós függvénytani eszközöket igényel. Szakdolgozatában és első nyomtatásban megjelent értekezésében [1] olyan geometriai konstrukciót adott meg, mely mindenütt folytonos, azonban tetszőlegesen kis intervallumban végtelen ívhosszú görbét állít elő. Beigazolódott, hogy e konstrukció egyszersmind egyik legegyszerűbb példa mindenütt folytonos, seholsem differenciálható függvényre. A Geőcze-féle példa ismertetését mellőzzük, mivel azzal, valamint néhány konzekvenciájával a Matematikai Lapokban két cikk is foglalkozott.[3]

GEŐCZE többi dolgozatai a felszínméréssel kapcsolatos kérdésekről szólnak. Ezirányú vizsgálatainak megértéséhez és értékeléséhez célszerű előbb néhány fogalmat és történelmi adatot felemlítenünk.

A felszínszámítás kiépítéséhez a felület két elvileg különböző definíciójából indulhatunk ki. A hétköznapi szemléletnek igen jól megfelel, ha a felületdarabot, mint az egységnégyzetnek a háromdimenziós térben elhelyezett kölcsönösen egyértelmű és folytonos képét vezetjük be. Legyen az így definiált felület neve *egyszerű* (GEŐCZE kifejezésével élve: *igazi*). Értelmezhetjük azonban a felületet tisztán formálisan is: az u, v paramétersíkon megadunk egy zárt Jordan-görbét, valamint az ezáltal határolt paramétertartományban egyértékű és folytonos $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ függvényhármast. Nevezzük e függvényhármast *folytonos felület*nek.

Az $$F: x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v) \qquad (1)$$

függvényeket a derékszögű térbeli koordinátarendszerben ábrázolva zárt pontsokaságot nyerünk. Folytonos felületek esetén a felszínszámítás független minden geometriai okoskodástól, és kifejezetten a többváltozós függvények analízisének körébe tartozik.

Abban a speciális esetben, mikor $x = u$; $y = v$, a könnyebben kezelhető

$$z = f(x, y) \qquad (2)$$

függvényt nyerjük.

A felszínszámítás kérdésében még a jelen század elején is tisztázatlan volt számos probléma. Ismerték ugyan — főként EULER, MONGE, RODRIGUES, GAUSS, PEANO, MINKOWSKI, HERMITE és SCHWARZ alapvető munkássága révén — a felület és a felszín több értelmezését is, de a minduntalan felmerült nehézségek azt bizonyították, hogy ezek az értelmezések hiányosak, vagy hibásak, és segítségükkel a felszínmérés problémája nem intézhető el teljes egészében. Régebben általában síklapú háromszögeket írtak a fe-

[3] KÁNTOR SÁNDOR: GEŐCZE ZOÁRD függvénye mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható. Matematikai Lapok, VIII. évf. 264—267. l.
CSÁSZÁR ÁKOS: Megjegyzés GEŐCZE ZOÁRD függvényéhez. Uo. 268—271.

lületbe, és a felszínt a háromszögek területösszege határértékeként értelmezték, ha a háromszög oldalak hossza a zérus felé tart. Ez az értelmezés analogonja az ívhossz húrok segítségével történő megközelítésének. Azonban 1880-ban H. A. SCHWARZ egy GENOCCHI-hoz írott levelében megmutatta, hogy az egyenes hengerbe írott háromszöges poliéderhálózat területe a határátmenet kellő megválasztása esetén nem tart a hengerpalást felszínéhez.

A — ma már tankönyvekben is szereplő — Schwarz-féle példa a múlt század végétől kezdve arra indított több matematikust, hogy tüzetesebb vizsgálat alá vegyék a felszín definícióját. Egyesek a beírt háromszögekre tettek bizonyos megszorításokat,[4] mások új értelmezéseket adtak a felszínre. PEANO[5] szerint a következő módon kell eljárnunk: osszuk fel valami módon a felületet véges számú darabra, és e darabokat egymástól elválasztva deformáció nélkül vigyük valamilyen véghelyzetbe. Vetítsük e darabok mindegyikét merőlegesen egy adott síkra, az így kapott vetületek területösszege legyen T. A felületdarab minden lehetséges feldarabolására, és e darabok minden lehető helyzetére képezett T értékek *supremuma* a Peano-féle felszín. Jele legyen $P(F)$.

MINKOWSKI[6] a felszín értelmezésekor abból az alapgondolatból indult ki, hogy a köbtartalom kiszámítása általában kisebb nehézségekkel jár mint a felszíné, következésképpen a felszínmérést lehetőleg a köbtartalom méréséből kell előállítanunk. Írjunk e célból a felület minden pontjából, mint középpontokból r sugarú gömböket. A tér azon pontjai, melyek e gömbök legalább egyikének felületén vagy belsejében vannak, egy testet határoznak meg, legyen ennek a köbtartalma $V(r)$. Ha létezik $\lim\limits_{r\to 0} \dfrac{V(r)}{2r}$, akkor ez a Minkowski-féle felszín. Konvex felületekre a Minkowski-féle felszínmérték sikerrel alkalmazható, azonban példák szerkeszthetők olyan nem zárt felületekre, melyeknél a Minkowski-féle felszín kisebb a más értelmezések révén nyerhető felszínmértéknél (L. GEŐCZE [10] II. 258—259. l.)

4 Pl. O. HÖLDER (Beiträge zur Potentialtheorie. Dissertation. Stuttgart, 1882. 29. l.) szerint a beírt háromszögek bármely szögének bizonyos véges határok között kell lennie. RADEMACHER (Über partielle und totale Differenzierbarkeit. Math. Annalen, 79. k. 1919. 340—359. l.) megköveteli, hogy a beírt háromszögek síkja a határátmenetnél a felület érintősíkjához tartson. A Schwarz-példa esetében könnyen igazolható e feltétel elégséges volta.

5 G. PEANO: Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale. Torino, 1887. 164. l.

6 H. MINKOWSKI: Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. Jahresbericht d. d. Math. Ver. 9. k. 1901. 115—121. l.

A modern vizsgálatok általában LEBESGUE felszín definicióját veszik alapul. Ezt *egyszerű* felületekre a következőként adhatjuk meg: jelölje $A(P)$ az egyszerű, síklapú háromszögekből összetett poliéderfelület elemi értelemben vett felszínét (a háromszögek területösszegét), legyen továbbá S valamilyen egyszerű felület, P_n pedig egyszerű poliéder-felületek S-hez konvergáló sorozata. Az $A(P_n)$ számsorozatnak általában nincs határértéke, de $\underline{\lim}\, A(P_n)$ mindig létezik, és értéke függ S-től, valamint a P_n sorozat megválasztásától. Az S-hez konvergáló különböző P_n sorozatoknak megfelelő $\underline{\lim}\, A(P_n)$ számhalmaz *alsó határa az S felület Lebesgue-féle felszíne*. Jele legyen $L(S)$.

Az $L(S)$ funkcionál nyilván már csak az S felülettől függ. Cikkünk terjedelme nem teszi lehetővé, hogy az $L(S)$-re érvényes fontosabb relációkat felsoroljuk, továbbá a definícióban szereplő *konvergencia* (FRÉCHET-től származó) fogalmát precízirózzuk. Megemlítendő azonban, hogy a Lebesgue-féle definíció — mutatis mutandis — átvihető a *folytonos* felületekre is, és ezáltal definiálható az $L(F)$ funkcionál.[7]

A Lebesgue-féle definícióból következik, hogy a felülethez konvergáló poliédersorozat a felszínre csak felülről szab határt. A Lebesgue-definíció eme tulajdonságát GEŐCZE felhasználta egy olyan — az irodalomban gyakran idézett — példa konstruálására [12, 15], mely a helyzetet legrosszabb, mintegy torz esetében mutatja be:

Adjuk meg a felületet az (1) folytonos transzformációkkal, ahol az u, v paraméterek a Q egységnégyzetben változnak. Osszuk fel Q-t az u, illetve a v tengelyekkel párhuzamos egyenesek révén q^2 számú kongruens kisebb négyzetre, majd minden kis négyzetet egy átlója segítségével két háromszögre. Így $2q^2$ egybevágó háromszöget nyerünk. Ha egy ilyen háromszög csúcspontjai A, B, C, akkor ezeknek a felületen feleljenek meg az $A°$, $B°$, $C°$ pontok. Legyen $A°$, $B°$, $C°$ csúcspontú síklapú háromszögek területének összege T_q, akkor

$$L(F) \leqq \lim_{q \to \infty} T_q.$$

Ha most a felület csak az u paraméter függvénye, vagyis

$$F: x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u) \tag{3}$$

[7] Az irodalomban a felszínértelmezéssel kapcsolatban általában LEBESGUE: Intégrale, Longueur, Aire (Annali di Mat. III. sorozat, 7. kötet, 1902, 315. l.) c. tanulmányát idézik. Történelmi hűség kedvéért meg kell említenünk, hogy a definíciót LEBESGUE már előbb publikálta. Vö. Sur la définition de l'aire d'une surface. Comptes Rendus, 129. kötet. 1899. 870—883. l.

akkor minden A°, B°, C° csúcspontú síklapú háromszög területe zérus, mivel a szerkesztés módja miatt három csúcsa közül kettő egybeesik. Így azonban $\lim_{q\to\infty} T_q = 0$, következésképpen $L(F) = 0$.

Ha azonban (3) olyan térgörbét értelmez, mely egy kocka minden pontját kitölti — ilyen térgörbe létezését PEANO mutatta ki — akkor egyszersmind olyan felületet is megadtunk, mely egy kocka minden pontját kitölti, és melynek felszíne zérus. Viszont *egyszerű* felület esetén a Lebesgue-féle felszín mindig nagyobb zérusnál — ezt legelőször GEŐCZÉnek sikerült igazolnia. [14]

*

GEŐCZE Zoárd egyik ösztöndíjas jelentéséből tudjuk, hogy a Lebesgue-féle felszíndefiníciót csak első párizsi tartózkodása idején, 1908-ban ismerte meg. Azonban ezt megelőzőleg, 1906-ban ő maga is adott egy felszíndefiníciót [2], mely igen eredményesen felhasználhatónak bizonyult a felszínmérés elméletében:

Osszuk fel az F felületet az $F_1, F_2, \ldots, F_n$ részekre, és ez utóbbiakat projiciáljuk merőlegesen az xy, yz és zx koordinátasíkokra. Az F_i felületdarab három projekciójának a területe legyen a_i, b_i, c_i és képezzük a következő összeget:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Ennek az összegnek F minden lehetséges felosztására adódó *supremuma a Geőcze-féle felszín.*

Értelemszerűleg elvárható, hogy a Lebesgue és a Geőcze-féle felszínmérték bizonyos — a felületre kirótt — feltételek teljesülése esetén közös értéket adjon; a kutatások egyik fontos célja éppen ezen feltételek megállapítása. Ezen túlmenőleg azonban még a kérdések egész sora vethető fel: mi mondható a különféle felszíndefiníciók egymáshoz való viszonyáról, mi az érvényességi köre a klaszikus kettős integrálnak[8] a felszín kiszámítása terén, hogyan általánosít-

[8] A klasszikus kettős integrál

(1)-re: $$I(F) = \int\int_Q (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}\, du\, dv$$

(2)-re: $$I(f) = \int\int_Q \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}} dx\, dy$$

A betűk jelentése ismeretes az analízisből.

hatók az eredmények hiperfelületekre, stb. Mindezek a problémák felvethetők a (2)-vel megadott, egyszerűbben kezelhető, valamint a paraméterekkel értelmezett (1) felületekkel kapcsolatban, hol a viszonyok jóval bonyolultabbak. GEŐCZE e problémák egy részében végleges jellegű eredményeket ért el, másutt megindítója lett a modern analíziskutatások egy új fejezetének.

Hangsúlyoznunk kell, hogy GEŐCZE nehezen követhető vizsgálatainak áttekinthetőbb kidolgozásában és továbbfejlesztésében elévülhetetlen érdemeket szerzett a magyar származású RADÓ Tibor, jelenleg az ohiói egyetem professzora, aki RIESZ Frigyes buzdítására a húszas évek közepe táján kezdett GEŐCZE dolgozataival és a felszínmérés kérdésével foglalkozni. Nagyrészt RADÓ munkásságának köszönhető, hogy a felszínmérés problémaköréről ma már terjedelmes monográfiákkal rendelkezünk[9], melyek szerves egységbe öntik az utóbbi 3—4 évtized alatt megjelent — többszázra becsülhető — értekezések lényegesebb eredményeit.

GEŐCZE vizsgálatainak többsége a (2) egyenlettel megadott felületekre vonatkozik. Ennél felszíndefiníciója a következőként alakul: legyen q a Q egységnégyzet egy olyan négyzetekre való felosztásának egyik eleme, hogy a q csúcspontjai rendre (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2). A q négyzet minden (x, y) pontjára tehát igaz, hogy $x_1 \leqq x \leqq x_2$; $y_1 \leqq y \leqq y_2$. Vezessük be a következő relációkat:

$$a(z, q) = \int_{x_1}^{x_2} |f(x, y_2) - f(x, y_1)|\, dx$$

$$b(z, q) = \int_{y_1}^{y_2} |f(x_2, y) - f(x_1, y)|\, dy$$

$$c(z, q) = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$c(z, q)$ nyílván a q négyzet területe; $a(z, q)$ pedig annak az xz síkba eső idomoknak a mértéke, melyet a $z = f(x, y_1)$ és $z = f(x, y_2)$ görbék, valamint ezen sík $x = x_1$, $x = x_2$ egyenesei határolnak. Hasonlóféle az értelme $b(z, q)$-nak az yz síkon. A térbeli Pythagoras-tétellel állítható ármost elő a

$$g(z, q) = (a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}$$

[9] T. RADÓ: Length and area. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications. 30. kötet. New-York, 1948.
L. CESARI: Surface area. Princeton, 1956.
Az ezekben található gazdag bibliográfia feleslegessé teszi e helyen egyes tanulmányok idézését.

Geőcze-féle alapmennyiség. Az egységnégyzet mostani feloszlását jelölje D, akkor

$$G(z, D) = \sum_{q=1}^{n} g(z, q).$$

A $G(z, D)$ függvényre GEŐCZE — többek közöt — az alábbi alapvető összefüggéseket igazolta:

Ha D^+ a D egy további alfelosztása akkor $G(z, D) \leqq \leqq G(z, D^+)$.

Ha $z_n(x, y) \to z(x, y)$ akkor $G(z_n, D) \to G(z, D)$.

Igazolható továbbá, hogy a Q négyzet minden lehetséges felosztása esetén *folytonos* felületekre létezik

$$\limsup G(z, D) = \Gamma(z),$$

$\Gamma(z)$ *a felület Geőcze-féle felszíne.*

Általában pedig igaz, hogy

$$\Gamma(z) \leqq \begin{matrix} L(z), \\ I(z). \end{matrix} \tag{4}$$

GEŐCZE matematikai munkásságának egyik legjelentősebb eredménye annak igazolása, hogy *rektifikálható*[10] felületekre (4)-nél az egyenlőség van érvényben, 1927-ben RADÓ Tibor a tételt úgy módosította, hogy állítása *folytonos* felületekre is igaz. Megjegyzem, hogy ez említett tétel levezetésekor GEŐCZE még nem használhatta fel az újabb valósfüggvénytani kutatások eredményeit, és — hogy úgy mondjuk — a matematikai szerszámot magának kellett megteremtenie. Így hasznos eredményeket ért el a féligfolytonos függvények [9] és a felületek érintősíkjainak elmélete körül is [17].

Legyen per definitionem az $f(x, y)$ kétváltozós függvény $V_y(x)$-el jelölt teljes variációja egyenlő annak az egyváltozós függvénynek a teljes variációjával, amely $f(x, y)$-ból úgy számazik, hogy x valamely rögzített $(0, 1)$ intervallumbeli értékénél y a $(0,1)$ intervallumban változik; hasonló módon definiálandó a $V_x(y)$ teljes variáció is. A Geőcze-féle alapmennyiségek segítségével igazolható, hogy

$$L(z) \leqq \int_0^1 V_y(x)\,dx + \int_0^1 V_x(y)\,dy + 1.$$

[10] Rektifikálható a $z = f(x, y)$ felület, ha eleget tesz a Lipschitz-féle feltételnek, vagyis $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ esetén létezik olyan véges pozitív K állandó, hogy

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqq K\,|(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2|^{\frac{1}{2}}$$

Következésképpen, ha megadható olyan pozitív véges K szám, hogy

$$\int_0^1 V_y(x)\,dx + \int_0^1 V_x(y)\,dy \leqq K \tag{5}$$

akkor a $z=f(x,y)$ felület Lebesgue-féle felszíne véges. Igaz az is, hogy e kritérium a felszín végességéhez nemcsak elegendő, hanem szükséges is [18].[11]

Geőcze néhány eredményt a nem paraméterekkel értelmezett *hiperfelület*ekre is igazolt, ez az általánosítás már különösebb nehézségekkel nem jár. Így pl. az $u=f(x,y,z)$ hiperfelület hiperfelszínének végességéhez (5)-höz hasonlóan szükséges és elégséges, hogy az

$$\int_0^1\int_0^1 V_z(x,y)\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 V_y(x,z)\,dx\,dz + \int_0^1\int_0^1 V_x(y,z)\,dy\,dz$$

összegre megadható legyen egy véges pozitív K korlát.

Itt $V_z(x,y)$ a háromváltozós függvény totális variációja, ha x-et és y-t rögzítjük és z változik. ([13], [18] 80—81. l.)

Amíg a (2) egyenlettel értelmezett felületek felszínének kérdése főként Geőcze Zoárd, Lamariello, Tonelli, Radó Tibor és mások munkássága révén már régebben elintézést nyert, addig a paraméterekkel értelmezett felületek felszínének problémájában bizonyos topologikus jellegű nehézségek miatt csak az utolsó években sikerült végleges eredményeket elérnie Radó Tibornak és Lamberto Cesarinak. Geőcze hozzákezdett ugyan e problémakörnek a kidolgozásához, de nagyszabású programjának a megvalósításához már nem volt ideje. Utolsó — részben már poszthumusz — értekezései inkább csak körvonalazzák a teendőket. E területen elért konkrét eredményei közül kettőt emelünk ki. Egyik az a kritérium, mely szerint a paraméterekkel értelmezett felület felszínének végességéhez szükséges és elegendő, hogy létezzék $v_1 \neq v_2$ esetén olyan véges pozitív K állandó, hogy

$$|x(u,v_1)-x(u,v_2)| + |y(u,v_1)-y(u,v_2)| +$$
$$+ |z(u,v_1)-z(u,v_2)| < K\,|v_1-v_2|$$

legyen [11]. Másik eredménye szerint [17, 19] a paraméteres alak-

[11] Ugyanezt a kritériumot találta később Tonelli is: Sulla quadratura della superficie. Rend. della Ac. dei Lincei. 1926. 357—362. l.

ban előállított *rektifikálható* felületekre is érvényes az

$$L(F) = G(F) = P(F) \geq I(F)$$

egyenletsor.

Egyébként a felszínmérés kérdésével is úgy vagyunk bizonyos mértékig, mint a számelmélet egyik-másik problémájával: a probléma és az eredmény könnyen megfogalmazható, de az eredményhez vezető út rendkívül nehéz. Mindazáltal GEŐCZE bonyolult, sokszor az érthetetlenség határait súroló levezetéseit RADÓ Tibornak sikerült lényegesen egyszerűsitenie azáltal, hogy a Geőcze-féle vetületek helyébe más, a lényegen nem változtató, de a valós függvénytani követelményeknek jobban megfelelő új fogalmat, a *vetületmag* fogalmát helyettesítette.[12]

*

A mások által elért újabb eredmények már inkább csak a speciális területeken működő matematikusokat érdekelhetik. Napjainkban is gyakran látnak napvilágot olyan tanulmányok, melyek a felszínmérés valamelyik nyílt kérdését fejtegetik — GEŐCZE neve mindezekben úgy szerepel, mint aki úttörő volt a problémakörben. Így munkássága némileg a hadvezér szerepköréhez hasonlítható: a nagy hadászati tervet megalkotta, de a részletek kidolgozása több vonatkozásban már másokra várt.

GEŐCZE ZOÁRD MEGJELENT DOLGOZATAI

[1] Folytonos rendszert képező síkgörbék ívhosszáról. Az ungvári reáliskola 1904/5. tanévi Értesítőjében. 32 lap.

[2] A forgásfelület quadraturája. Az ungvári reáliskola 1905/6. tanévi Értesítőjében. 12 lap.

[3] $z = f(x, y)$ felület quadraturája. Budapest, 1906. 58 lap. Kézzel írott és sokszorosított kiadás.

[4] Quadrature des surfaces, courbes. Comptes Rendus, 144. kötet, 1907. 253—256. l.

[5] Adatok a $z = f(x, y)$ felület quadraturájához. Math. Termtud. Értesítő. 26. kötet, 1908. 475—512. l.

[6] Quadrature des surfaces courbes. Thèse. Paris, 1908. 88 lap. Ugyanez: Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. 26. kötet, 1910. 1—88. l.

[7] Recherches générales sur la quadrature des surfaces courbes. Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. 27. k. 1911. 1—21., 131—163., 30. k. 1914. 1—29. l.

[12] Erre vonatkozólag l. pl. RADÓ: A felszínmérés elméletéhez. Math. és Természettud. Ért. 45. k. 1928. 225—244. l.

[8] Contribution à la quadrature des surfaces courbes. Comptes Rendus. 152. kötet, 1911. 678—679. l.

[9] Sur la fonction semi-continue. Bulletin de la Société math. de France. 39. kötet, 1911. 256—295. l.

[10] A területmérésről. Mathematikai és Physikai Lapok. 20. k. 1911, 255—301., 21. k. 1912, 24—57. l.

[11] Sur la quadrature des surfaces courbes. Comptes Rendus. 154. kötet. 1912. 1211—1213. l.

[12] Sur l'exemple d'une surface dont l'aire est égale a zéro et qui remplit un cube. Bulletin de la Société math. de France. 41. kötet. 1913. 29–31. l.

[13] Sur la quadrature des variétés. Comptes Rendus. 157. kötet, 1913. 910—912. l.

[14] A felszínmérés elméletéhez. Mathematikai és Természettudományi Értesítő. 31. k. 1913. 306—308. l.

[15] Kockát kitöltő, zérus területű felület példája. Mathematikai és Physikai Lapok. 23. k. 1914. 115—117. l.

[16] A zérus területű felületről. Mathematikai és Természettudományi Értesítő 33. k. 1915. 730—748. l.

[17] A rectifiabilis felületről. Mathematikai és Természettudományi Értesítő. 34. k. 1916. 337—354. és 587. l.

[18] Felületdarab véges mérőszámának szükséges és elégséges feltételéről. Mathematikai és Physikai Lapok. 25. k. 1916. 61—81. l.

[19] A felület területének Peano-féle definitiójáról. Mathematikai és Természettudományi Értesítő. 35. k. 1917. 325—358. l.

[20] Az általános felületről. Mathematikai és Természettudományi Értesítő. 35. k. 1917. 359—360. l.

ТРУДЫ ZOARDA-a GEŐCZE

B. Szénásy

THE WORK OF THE LATE Z. GEŐCZE

B. Szénásy.

Megjegyzések egy versenyfeladathoz

ERDŐS PÁL és SURÁNYI JÁNOS

1. Ismeretes, hogy az $1, 2, \ldots, k$ számok szorzatával bármely egymásutáni k szám szorzata osztható. GALLAI Tibortól[1] származik az a kérdés, hogy ha tetszésszerint adunk meg különböző-egészeket és annyi egymásutáni egész számot, mint az adott számok legnagyobbika, akkor hány számot kell ezek közül kiválasztani, hogy a kiválasztott számok szorzata már minden esetben osztható legyen az adott számok szorzatával. Speciálisan 2 és 3 számra a következő kérdés adódik — és ez versenyfeladatként, szerepelt[2] —

Döntsük el a következő állítások helyességét:

a) *Ha $a>b$ pozitív egész számok, akkor bármely b számú egymásután következő egész szám között van két olyan, amelyek szorzata osztható ab-vel.*

b) *Ha $a<b<c$ pozitív egész számok, akkor bármely c számú egymásután következő egész szám között van három olyan, amelyek szorzata osztható abc-vel.*

A válasz[3] az a) kérdésre igenlő, a b) kérdésre viszont pl. $a=7\cdot 11$, $b=7\cdot 13$, $c=11\cdot 13$ és a

$$(6\cdot 7\cdot 11\cdot 13-71=)\,5935\leqq x\leqq 6077=(6\cdot 7\cdot 11\cdot 13+71)$$

számköz ellenpéldát szolgáltat. Ennek kapcsán további kérdések merülnek fel: lehet-e áttekintést nyerni az összes ellenpéldákon? Hány szám kiválasztását kell megengedni ahhoz, hogy szorzatuk osztható legyen abc-vel? Vagy a 3 szám kiválasztásánál maradva meg milyen (1-nél nagyobb) α-ra lesz igaz, hogy bármely αc hosszúságú számköz egészeiből kiválasztható 3 egész szám úgy, hogy

[1] Szóbeli közlés 1948-ból.

[2] [1] Lásd a 6. feladatot a 329. oldalon. A [ ]-be tett számok a dolgozat végén felsorolt cikkekre utalnak.

[3] [1] 338. old.

szorzatuk osztható legyen abc-vel? Az első kérdésre nyerhető válasz meg fogja adni a kulcsot a továbbiak megválaszolásához is, ezért ezzel fogunk részletesebben foglalkozni. Végül megemlítünk néhány eredményt a felvetett általános problémára vonatkozóan is.

2. Legyen adva három különböző szám[4] a, b, c és annyi egymásutáni szám, mint a három szám legnagyobbika. A következő meggondolások mind azon az egyszerű tényen alapulnak, hogy ha a három szám valamelyike egy r egész szám s-szeresénél nem kisebb, akkor az egymásutáni számok közt r-nek legalább s többszöröse szerepel — hiszen legalább rs egymásutáni egész számunk van. Minden esetre van az egymásutáni számok közt a-nak, b-nek és c-nek egy-egy többszöröse. Ha ezek a többszörösök különböző számok, akkor szorzatuk osztható abc-vel. Ha ugyanaz a k szám osztható mondjuk a-val és b-vel és van egy ettől különböző l szám, amelyik c-vel is osztható, akkor k osztható a és b legkisebb közös többszörösével, $[a, b]$-vel. Ha mondjuk $a < b$, akkor az (a, b) legnagyobb közös osztó valódi osztója b-nek, s így nem nagyobb annak a felénél. Van tehát az egymásutáni számok közt k-n kívül is egy (a, b)-vel osztható szám. Ha ez egy l-től is különböző m szám, akkor klm osztható az $[a, b]c(a, b) = abc$ számmal.

Ha (a, b)-vel osztható számként l-et találjuk, akkor ez osztható $[(a, b), c]$-vel, viszont van k-n és l-en kívül legalább még egy szám, amelyik osztható $((a, b), c) = (a, b, c)$-vel, a három szám legnagyobb közös osztójával, mert ennek a három szám legnagyobbika legalább háromszorosa. Az így kiválasztott három szám szorzata tehát osztható az

$$[a, b]\,[(a, b), c]\,((a, b), c) = [a, b]\,(a, b)c = abc$$

számmal.

3. Az eddigiek szerint ellenpélda csak olyan esetben állhat elő, ha az egymásutáni számok közt van olyan k szám, amelyik a-val is, b-vel is, c-vel is osztható, és a három szám egyikének sincs az egymásutáni számok közt ettől különböző többszöröse. Ez csak akkor következhet be, ha a három szám legnagyobbika is kisebb a legkisebb kétszeresénél.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy ez fennáll. Legyen $(a,b,c) = d$ $a = a_1 d, b = b_1 d, c = c_1 d$. Ekkor $(a_1, b_1, c_1) = 1$, és így az $(a, b) = u, (a, c) = v, (b, c) = w$ számok páronkint relatív prímek. Továbbá vannak olyan a', b', c' egészek, amelyekkel fennáll $a = a'uvd, b = b'uwd, c = c'vwd$ és a', b', c' szintén páronkint relatív prímek.

[4] Nagysági megkötést szimmetria kedvéért nem tettünk a három számra

Megmutatjuk, hogy ellenpélda létezéséhez az is szükséges, hogy $a' = b' = c' = 1$, legyen, továbbá u, v, w különböző prímek legyenek, amelyek legnagyobbika is kisebb a legkisebb kétszeresénél, k pedig ne legyen osztható egyikük négyzetével sem.

Ha pl. $a' > 1$, akkor van k-n kívül még egy uvd-vel osztható l szám; továbbá b és c közül valamelyik wd-nek legalább kétszerese és így van egy wd-vel osztható szám is k-n kívül. Ha ez l-től is különböző, akkor szorzata k-val és l-lel osztható abc-vel; ha l osztható wd-vel is, akkor osztható $uvwd$-vel is és van d-nek a kiválasztott két számon kívül is legalább egy többszöröse az egymásután számok közt, a három kiválasztott szám szorzata ez esetben is osztható abc-vel.

Legyen most $u = u_1 u_2$ összetett szám. Ha a két 1-nél nagyobb tényező valamelyike legalább 3, akkor biztosan található két egymástól és k-tól különböző szám, amelyek egyike $u_1 vd \left(= \frac{a}{u_2}\right)$-vel, a másika $u_2 wd \left(= \frac{b}{u_1}\right)$-gyel osztható és ezeknek és k-nak a szorzata osztható abc-vel. Ha viszont $u_1 = u_2 = 2$ és ugyanaz a k-tól különböző l szám osztható $u_1 vd$-vel és $u_2 wd$-vel, akkor ez a szám $2vwd$-vel is osztható. Mivel pedig $a = 4vd$ és $b = 4wd$ közül az egyik nem kisebb mint $8d$, így előfordul egy harmadik szám az egymásutáni számok közt, amelyik $2d$-vel osztható. Ezzel ismét találtunk 3 számot, amelyek szorzata osztható abc-vel.

Tegyük most fel, hogy k osztható pl. u^2-tel. Mivel a és k közül valamelyik legalább kétszerese vd-nek, b és c közül pedig valamelyik legalább kétszerese wd-nek, így az előbbiekhez hasonlóan ismét található három szám, amelyek szorzata osztható abc-vel.

4. Legyen mostmár $a' = b' = c' = 1$ és u, v, w prím, továbbá a, b és c egyikének se forduljon elő többszöröse az egymásutáni számok közt k-n kívül. Ekkor nem választható ki k-hoz még két szám úgy, hogy szorzatuk osztható legyen abc-vel. Előfordulhat azonban, hogy u^2d-nek, v^2d-nek és w^2d-nek találunk egy-egy többszörösét és ezek szorzata ismét osztható abc-vel. Az említett három szám közül kettőhöz található nagyobb a, b, c között, s így ezeknek mindig szerepel többszöröse az egymásutáni számok közt, a legnagyobbnak azonban — legyen ez pl. w^2d — nem biztos, hogy lép fel többszöröse, sőt belátható, hogy van $uvwd$-nek olyan többszöröse, amely w^2d-nek az őt közrefogó mindkét többszörösétől messzebb van, mint a, b, c legkisebbike. Az ilyen tulajdonságú többszörösök közt található olyan k szám is, amelyik u, v, w egyikének sem osztható a négyzetével. Ekörül pedig kijelölhető egy olyan számköz, amelyiknek hossza a, b, c legnagyobbikával egyenlő, és amelyik — k-t leszámítva — nem tartalmazza abc és w^2d egyikének sem többszörösét.

5. Nem térünk ki d elemzésére, bár arra is nyerhetők volnának bizonyos megszorítások. Az $(a, b, c) = 1$ esetben az ellenpéldák következő teljes áttekintését nyertük:

I. TÉTEL. *Ha az*[5] $a < b < c$ *egész számok relatív prímek, akkor abban és csak abban az esetben van* c *egymásutáni egész szám, amelyek közül nem választható ki 3 úgy, hogy szorzatuk osztható legyen* abc*-vel, ha* $a = uv$, $b = uw$, $c = vw$ *alaku,* u, v, w *prímek és* $u < v < w < 2u$.

Az egymásutáni számok közt kell lennie egynek, amelyiknek legnagyobb közös osztója abc*-vel* uvw, *de sem* a*-nak más többszöröse, sem* w^2*-nek többszöröse nem fordulhat elő a számok között.*

Ebből az eredményből következik, hogy a cikk elején említett ellenpélda a lehető legkisebb a, b, c értékeket adja meg, mert 7 a legkisebb prímszám, amely után van két, a kétszeresénél kisebb prímszám. Viszont a $143 (= 11 \cdot 13)$, $187 (— 11 \cdot 17)$, $221 (= 13 \cdot 17)$ számokhoz az említett ellenpéldáénál kisebb számokból álló

$$(11 \cdot 13 \cdot 17 - 18 =) 2313 \leqq x \leqq 2533 (= 11 \cdot 13 \cdot 17 + 102)$$

számsorozat is ellenpéldát szolgáltat, mert $17^2 = 289$-nek, a $11 \cdot 13 \cdot 17 = 2431$-et közrefogó többszörösei: $2312 (= 8 \cdot 283)$ és $2601 (= 9 \cdot 289)$ nem esnek ebbe a számközbe.

6. Ejtsük most el ismét el az $(a, b, c) = 1$ feltevést. A **4.** pont elején tett feltételek mellett ekkor is van ud, vd és wd-nek egy-egy k-tól különböző többszöröse az egymásutáni számok közt (és ezek biztosan különböznek egymástól). Így

II. TÉTEL. *Ha* $a < b < c$ *egész számok és tetszés szerint adunk meg* c *számú egymásutáni egész számot, ezek közt mindig van legfeljebb 4 olyan, amelyik szorzata osztható* abc*-vel.*

7. Keressünk végül olyan α pozitív számot, amelyre igaz az, hogy ($a < b < c$-t ismét feltéve) bármely αc hosszúságú számköz egészei közt van három, amelyek szorzata osztható abc-vel. Nyilván csak azokat az eseteket kell vizsgálni, amelyekben a c hosszúságú számközre ez még nem teljesül. Tegyük fel tehát ismét a **4.** pont elején szereplő követelményeket, és azt is, hogy $(a, b, c) = 1$.

[5] Mivel a b, c szerepe szimmetrikus, nyilván nem jelenti az általánosság megszorítását, hogy itt ismét előírtuk nagysági sorrendjüket.

Ebben az esetben αc-nek legalább akkorának kell lennie, mint $2a = 2uv$ és w^2 közül a kisebb, tehát α-ra kell, hogy

$$(1) \qquad \alpha \geqq \min\left(\frac{2uv}{c}, \frac{w^2}{c}\right) = \min\left(\frac{2u}{w}, \frac{w}{v}\right)$$

teljesüljön. Így α nagyobb a két szám mértani közepénél (tekintve, hogy a két szám nem lehet egyenlő):

$$(2) \qquad \alpha < \sqrt{\frac{2uv}{vw}} = \sqrt{2\frac{u}{v}}.$$

Mivel $u/v < 1$, de 1-hez tetszés szerinti közeli értékeket felvehet, továbbá, ha u és v közel egyenlők, w pedig $\sqrt{2}u$-hoz közeli érték, akkor $2u/w$ és w/v egyidejűleg tetszés szerint közel lehet $\sqrt{2}$-höz, — ezek a feltételek pedig kielégíthetők, mert a szomszédos prímek hányadosa 1-hez tart, — így a tekintett esetben α minimális értéke $\sqrt{2}$. Ez az érték abban az esetben is megfelel, ha $(a, b, c) = d > 1$, (de a **4.** pont többi kikötései teljesülnek) mert ekkor

$$\alpha c > \min\left(c\frac{2u}{w}, c\frac{w}{v}\right) = \min(2uvd, w^2d),$$

és ebben az esetben valóban kiválasztható egy αc hosszúságú számköz egészeiből 3 úgy, hogy szorzatuk osztható legyen abc-vel.

III. Tétel. *Ha $a < b < c$. akkor bármely $\sqrt{2}c$ hosszúságú számköz egészeiből kiválasztható 3, amelyek szorzata osztható abc-vel. Ha $\lambda < \sqrt{2}$, akkor megadható olyan $a < b < c$ számhármas és olyan λc hosszúságú számköz, amelyiknek az egészeire az állítás már nem teljesül.*

8. A nyert ellenpéldák segítségével könnyen belátható az is, hogy

IV. Tétel. *Ha k legalább 3, akkor mindig megadható k különböző egész szám és annyi egymásutáni egész, mint az adott számok legnagyobbika, hogy az egymásutáni egészek közül semelyik k szorzata ne legyen osztható az adott egészek szorzatával.*

Az **1.** pont ellenpéldája pl. könnyen módosítható úgy, hogy minden $3 \leqq k \leqq 12$-re ellenpéldát szolgáltasson. Vegyünk ki a $13, 2\cdot 13, \ldots, 11\cdot 13$ számok közül $k-1$-et, de úgy, hogy $7\cdot 13$ és $11\cdot 13$ köztük legyen és a $7\cdot 11$ számot. Ezek szorzata osztható $7^2\cdot 11^2\cdot 13^{k-1}$-nel.

Az 1. pontban adott számközben nincs 13-nak 1-nél magasabb hatványával osztható szám, így $k-1$ számot kell kiválasztani, hogy szorzatuk osztható legyen 13^{k-1}-nel. Ezek közt szerepelhet a $7 \cdot 11$-gyel osztható 6006, de sem 7-nek, sem 11-nek más többszöröse nem szerepelhet. Mivel $7 \cdot 11$-nek sem szerepel más többszöröse az adott számközben, mint 6006, így még legalább 2 számot kell kiválasztani, hogy a szorzat 7^2-nel is, 11^2-nel is osztható legyen.

Hasonlóan látható be a tétel 12-nél nagyobb k-ra is, ha elég nagy u, v, w prímszámokat veszünk, amelyekre $u<v<w<2u$ és egy olyan számközt, mely eleget tesz az I. tételbeli feltételnek.

9. Az így nyert ellenpéldákban k szám megadása esetén $k+1$ szám kiválasztása mindig elegendő, általában azonban ennél sokkal rosszabb is lehet a helyzet. Vegyünk l prímszámot: $p_1<p_2<\cdots<p_k$ úgy, hogy $2p_1^2$ nagyobb legyen, mint p_l^2. Ez tetszésszerinti l-re lehetséges, mivel a szomszédos prímek hányadosa 1-hez tart. Képezzük az összes $p_i p_j$ $(i, j=1, \ldots, l)$ számokat. Ezek száma

$$k=\frac{l(l+1)}{2}.$$

Találhatunk olyan p_l^2 egymásutáni számot, amelyek között előfordul $p_1 p_2 \ldots p_l$ egy többszöröse, amely ezen prímek egyikének a négyzetével sem osztható, ezen kívül nem fordul elő a $p_i p_j$ $(i, j=1, \ldots l;\ i \neq j)$ többszöröse. Végül $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_l^2$-nek csak egy-egy tööbbszöröse fordul elő, de ezek sem oszthatók a megfelelő p_i-nek 2-nél magasabb kitevős hatványával. Ilyen számköz a $2p_1^2>p_l^2$ feltétel következtében alkalmas kongruenciák megoldásával megadható.

Az adott számok szorzata

$$p_1^{l+1} p_2^{l+1} \ldots p_l^{l+1}.$$

Kiválasztva a több, p_i-vel, vagy valamelyik p_i-nek magasabb hatványával osztható számokat, ezek száma $l+1$ és szorzatuk az adott prímek mindegyikének a köbével osztható. Minden további prímtényezőhöz tehát már egy-egy külön szám kiválasztása szükséges, összesen $l(l-2)$-é, az előbbi $l+1$ számmal együtt $l(l-1)+1$ számot kell tehát a kérdéses számközből kiválasztani, hogy szorzatuk osztható legyen az adott $l(l+1)/2$ szám szorzatával. Itt tehát a kiválasztandó számok száma közel kétszerese az adottakénak. Azt nem tudjuk, hogy lehet-e ez az arány lényegesen kedvezőtlenebb is.

10. Egy további rokon probléma a következő: $f(n)$ jelentse azt a legkisebb számot, amely mellett igaz, hogy bárhogy adunk is meg n különböző természetes számot

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n, \tag{3}$$

tetszésszerinti $f(n)a_n$ egymásutáni egész szám közül kiválasztható n szám úgy, hogy köztük minden a_i-nek szerepeljen többszöröse és különböző a_i-khez kiválasztott többszörösök különbözők legyenek. Meghatározandó $f(n)$. Az előző bekezdés eredményéből következik, hogy $f(n) \geqq 2$ másrészt világos. hogy $f(n) \leqq n$, azonban ennél jobb becslések is nyerhetők.

Ismeretes, [2], hogy ha n egy adott természetes szám, akkor azoknak a számoknak a száma egy elég nagy x korlát alatt, amelyeknek nincs n és $2n$ közé eső osztója, kisebb, mint

$$\frac{x}{(\log n)^{\alpha}}, \tag{4}$$

ahol α állandó. Ebből következik, hogy $f(n)$ minden határon túl nő, ha n nő. Válasszuk ugyanis a_i-k gyanánt az n és $2n$ közti számokat, másrészt az $(1, x)$ számközt osszuk $f(n)2n$ hosszúságú szakaszokra. Ezek száma $\left[\frac{x}{2nf(n)}\right]$ és mindegyikben van n szám, amelyek közül mindegyik egy-egy (egymástól különböző) $n+i$ alakú szám többszöröse. Így x-ig az n és $2n$ közti számoknak legalább

$$\left[\frac{x}{2nf(n)}\right] n$$

számú többszöröse van és ez nem lehet nagyobb (4)-nél. Ebből adódik, hogy alkalmas c állandóval

$$f(n) \geqq c\,(\log n)^{\alpha}.$$

11. Lényegesen javítható a felső becslés is. Legyenek a (3) alatti számok tetszés szerint adva. Bármely $2a_n$ hosszúságú intervallumban van mindegyik a_i-nek többszöröse. Ha valamilyen $k<n$-re legfeljebb k különböző szám választható ki ezzel a tulajdonsággal és k' a legkisebb egész, amelyik nem kisebb, mint k/n, akkor a kiválasztott számok közt van legalább egy, — jelöljük m-mel — amelyik legalább k' különböző a_i-vel, mondjuk a_{i_1}-gyel, a_{i_2}-vel, s í.t. $a_{i_{k'}}$-vel osztható. Ekkor vagy $m+a_{i_1}, m+a_{i_2}, \ldots, m+a_{i_{k'}}$, vagy pedig $m-a_{i_1}, m-a_{i_2}, \ldots, m-a_{i_{k'}}$ mind az adott $2a_n$ hosszúságú számközbe esnek és rendre oszthatók az egymás-

tól különböző $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k'}}$-vel. Az adott számnak tehát kiválasztható egy-egy többszöröse úgy is, hogy azok közt legalább k' különböző legyen s így k és k' választása szerint

$$k \geqq k' \geqq \frac{n}{k}, \quad k \geqq \sqrt{n}.$$

Az így kiválasztott legalább $\sqrt{n}$ többszöröshöz válasszunk ki egy-egy a_i-t.

Ugyanígy látható, hogy a maradó $n_1 = n - k \leqq n - \sqrt{n}$ darab a_i-hez a csatlakozó $2a_n$ hosszúságú számközből ismét kiválaszthatunk legalább $\sqrt{n_1}$ számot úgy, hogy a maradó a_i-k mindegyikének legyen köztük többszöröse. Mindegyik kiválasztott számhoz hozzárendelünk egy osztóját az a_i-k közül és ezt addig folytatjuk, míg minden a_i-re sor kerül. Ha ez l lépés után következik be, akkor

$$f(n) \leqq 2l.$$

12. Becsülnünk kell tehát l-et n segítségével. Tudjuk, hogy az

$$n_0 = n, \; n_{r+1} = n_r - \sqrt{n_r}, \qquad (r = 0, 1, \ldots, l-1)$$

sorozatra

$$\sum_{\lambda=0}^{l} \sqrt{n_\lambda} \geqq n,$$

mert a bal oldal nem kisebb mint az egyes lépésekben kiválasztott a_i-k számának az összege.

Legyen $x \leqq \sqrt{n}$ és jelöljük l_x-szel azoknak a λ-knak a számát, amelyekre

$$\frac{x}{2} < \sqrt{n_\lambda} \leqq x \text{ azaz } \frac{x^2}{4} < n_\lambda \leqq x^2.$$

Egy ilyen n_λ-t minden lépésben $\sqrt{n_\lambda}$-val, tehát legalább $x/2$-vel csökkentünk és ezt az $x^2/4$ és x^2 közé eső legnagyobból kiindulva $l_x - 1$-szer ismételve ebben az intervallumban maradunk, tehát

$$(l_x - 1)\frac{x}{2} < \frac{3}{4}x^2, \qquad l_x < \frac{3}{2}x + 1.$$

Legyen S az a természetes szám, amelyre

$$2^S < \sqrt{n} \leqq 2^{S+1}.$$

Ekkor l-et azon λ-k számának összegeként határozva meg, melyekhez tartozó n_λ-k négyzetgyöke sorra a $\left(\sqrt{n}, \frac{\sqrt{n}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{n}}{2}, \frac{\sqrt{n}}{4}\right), \ldots$ $\left(\frac{\sqrt{n}}{2^{S-1}}, \frac{\sqrt{n}}{2^S}\right), \left(\frac{\sqrt{n}}{2^S}, 1\right)$ intervallumba esnek,

$$l = \sum_{i=0}^{S} l_{\frac{\sqrt{n}}{2^i}} < \sum_{i=0}^{S}\left(\frac{3}{2}\frac{\sqrt{n}}{2^i}+1\right) = \frac{3\sqrt{n}}{2}\cdot\frac{1-1/2^{S+1}}{1-1/2}+S<$$

$$<3\sqrt{n}+S<3\sqrt{n}+\frac{\log n}{2\log 2}<C\sqrt{n},$$

ahol C egy alkalmas, 3-nál nagyobb állandó.

Ezzel egyszersmind $f(n)$-re azt nyertük, hogy egy alkalmas C' állandóval

$$f(n) \leqq C'\sqrt{n}.$$

Megjegyezzük, hogy mind a két korlát még nagyon durvának látszik. Az alsó korlát megállapitásánál minden a_i-nek minden többszörösét számba vettük a tekintetbe vett intervallumokban és nem mindegyiknek csak egy-egy többszörösét. A felső becslésnél viszont az egy-egy $2a_n$ hosszúságú intervallumba eső különböző többszörösök számának becslése látszik durvának.

IDÉZETT IRODALOM

[1] Az 1954. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny, *Matematikai Lapok*, **6** (1955), 328—345. old.

[2] Erdős P.: Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, *Journ. of London Math. Soc.*, **10** (1935), 126—128. old.

ЗАМЕЧАНИЯ К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ

P. Erdős и J. Surányi

Пусть $0 < a_1 < \cdots < a_n$ данные целые числа. Авторы изучают следующую проблему: сколько чисел нужно выбрать из последовательных целых чисел, число которых a_n, чтобы произведение выбранных чисел делилось на $a_1 \cdots a_n$. Детально рассматривается случай $n=3$. (Этот случай был предложен на математической конкурсе имени Schweizer-a 1954-ого года.) Доказывается также, что, если $\varepsilon > 0$ и n достаточно велико, то может потребоваться больше чем $(2-\varepsilon)n$ чисел, но остаётся открытым вопрос: это ли самый неблагоприятный случай.

Пусть далее $f(n)$ обозначает наименьшее число, для которого имеет место следующее: из $f(n)\, a_n$ последовательных целых чисел можно выбрать по кратному чисел $a_1, \ldots, a_n$ так, чтобы к различным a_i относились различные кратные. Доказывается, что с некоторыми постоянными c, c', α

$$c\,(\log n)^\alpha < f(n) < c' \sqrt{n}.$$

Повидимому, обе оценки могут быть улучшенны. С определением верхней грани связан следующий вопрос: к скольким a_i можно выбрать попарно различные кратные из промежутка длины $2a_n$. Легко видеть, что таких a_i не меньше $\sqrt{n}$, но и эта оценка, повидимому, может быть улучшенна.

BEMERKUNGEN ZU EINER AUFGABE EINES MATHEMATISCHEN WETTBEWERBS

von P. Erdős und J. Surányi

Es seien $0 < a_1 < \cdots < a_n$ gegebene ganze Zahlen. Aus beliebig gegebenen a_n aufeinander folgenden ganzen Zahlen sollen gewisse so ausgewählt werden, dass ihr Produkt durch $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ teilbar sei. Der Fall $n=3$ (Gegenstand der Aufgabe 6 des M. Schweitzer mathematischen Wettbewerbes, 1954) wird näher behandelt, es wird ferner gezeigt, dass für grosse Werte von n, bei beliebigen $\varepsilon > 0$ die Auswahl von mehr als $(2-\varepsilon)n$ Elementen nötig sein kann. Die Frage bleibt offen, ob nicht noch ungünstigere Fälle vorkommen können.

Es sei ferner $f(n)$ die kleinste Zahl, für die bei beliebig gegebenen a_i-Zahlen aus beliebigen $f(n)\, a_n$ aufeinainder folgenden ganzen Zahlen zu jedem a_i so ein Vielfaches zugeordnet werden kann, dass zu verschiedenen a_i verschiedene Vielfache gehören. Es wird mit passenden Konstanten c, c', α $c(\log n)^\alpha < f(n) < c' \sqrt{n}$ gezeigt, keiner der Schranken scheint aber genau zu sein.

In Zusammenhang mit der oberen Schranke wird gezeigt, dass aus $2a_n$ aufeinander folgenden ganzen Zahlen wenigstens $\sqrt{n}$ verschiedene Vielfachen von verschiedenen a_i ausgewählt werden können, $\sqrt{n}$ scheint aber wieder nicht die genaue untere Grenze zu sein.

A halmazelmélet ekvivalencia-tételéről

Szász Pál

Ha a X és Y halmazokra $X \sim Y' \subset Y$ és $Y \sim X' \subset X$, akkor $X \sim Y$.

A halmazelmélet e jólismert alapvető *ekvivalenciatételét* legközvetlenebbül és legegyszerűbben König Gyula [1] bizonyította be 1906-ban. Ez elvontan és tömören előadott bizonyítást a *gráfelmélet* nyelvén később König Dénes [2] fogalmazta meg.

Az alábbi sorokban részletesen leírt bizonyítás lényegében megegyezik König Gyula idézett bizonyításával [3], de annál valamivel talán még egyszerűbb és szemléletesebb [4].

*

Legyen az $X \sim Y'$ ekvivalenciában az $x \in X$ elemhez tartozó $y \in Y'$ elem $y = f(x)$, az $Y \sim X'$ ekvivalenciában pedig az $y \in Y$ elemhez tartozó $x \in X'$ elem $x = \varphi(y)$.

Nevezzük az itt szereplő $y = f(x)$ relációkat szemléletesen *„f-kapcsoknak"*, az $x = \varphi(y)$ relációkat pedig *„φ-kapcsoknak"*.

$x_0 \in X'$ esetén *az $y_0 = f(x_0)$ kapoccsal kezdődő „visszakeresési sorozat"* alatt a véges vagy végtelen

$$y_0 = f(x_0),\ x_0 = \varphi(y_1), \ldots, y_i = f(x_i),\ x_i = \varphi(y_{i+1}), \ldots$$

kapocs-sorozatot értjük. Ha ebben eljutván az $y_n = f(x_n)$ kapocsig itt már $x_n \in X - X'$, akkor e kapoccsal a sorozat befejeződik. Vagy ha eljutván az $x_n = \varphi(y_{n+1})$ kapocsig itt már $y_{n+1} \in Y - Y'$, akkor a sorozat be is fejeződik ezzel a kapoccsal. Amennyiben $x \in X - X'$, az $y = f(x)$ kapoccsal kezdődő visszakeresési sorozat per definitionem ebből az egy kapocsból álljon.

Hasonlóképpen, $y_1 \in Y'$ esetén *az $x_0 = \varphi(y_1)$ kapoccsal kezdődő „visszakeresési sorozat"* alatt a véges vagy végtelen

$$x_0 = \varphi(y_1),\ y_1 = f(x_1), \ldots, x_i = \varphi(y_{i+1}),\ y_{i+1} = f(x_{i+1}), \ldots$$

kapocs-sorozatot értjük. Ha $y \in Y - Y'$, akkor az $x = \varphi(y)$ kapocscsal kezdődő visszakeresési sorozatot per definitionem ez az egyetlen kapocs alkossa.

E definíciókból folyólag valamely visszakeresési sorozat vagy

I) f-kapoccsal végződik,

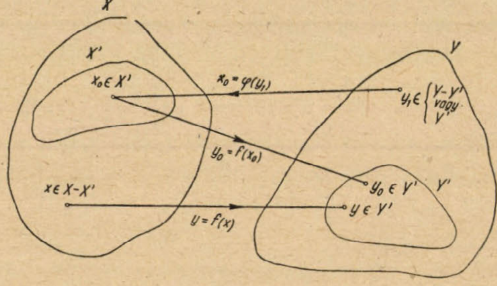
vagy ·

II) φ-kapoccsal végződik,

vagy pedig

III) végtelen.

A fenti tétel bebizonyitása most már abból fog állani, hogy bizonyos kapcsokat *„kidobunk“* s megmutatjuk, hogy a megmaradó kapcsok az X és Y halmazok elemeinek kölcsönösen egyértelmű vonatkozását létesítik.



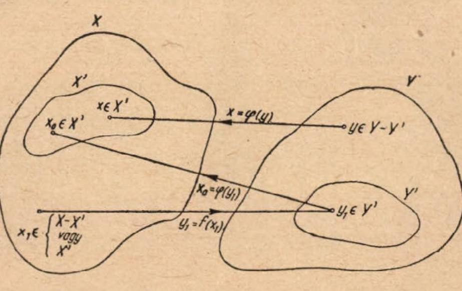
1. ábra

Akár f-kapcsot, akár φ-kapcsot megtartunk, ha a vele kezdődő visszakeresési sorozat ugyanolyan típusú kapoccsal végződik, viszont kidobunk, ha a másik fajta kapoccsal végződik. Továbbá végtelen visszakeresési sorozat esetén a kezdő kapcsot megtartjuk ha f-kapocs, viszont kidobjuk ha φ-kapocs (vagy pedig a fordítottban állapodunk meg).

Megmutatjuk, hogy ilyen eljárás mellett minden $x \in X$ elem egy és csak egy $y \in Y$ elemmel marad kapcsolva és viszont.

Először is $x \in X - X'$ esetén ez $x \in X$ elem már eleve egyedül az $f(x) = y \in Y'$ elemmel van kapcsolva (1. ábra) és az $y = f(x)$ f-kapocs meg is marad, minthogy a vele kezdődő visszakeresési sorozat ebből az egy kapocsból áll s így f-kapoccsal is végződik. Valamely $x_0 \in X'$ elemet pedig eredetileg két kapocs kapcsol: az $y_0 = f(x_0)$ f-kapocs és bizonyos $x_0 = \varphi(y_1)$ φ-kapocs (1. ábra). Minthogy azonban ez f-kapoccsal kezdődő visszakeresési sorozatnak az utóbbi φ-kapoccsal kezdődő éppen a folytatása, azért e két sorozatra egyidejűleg áll fenn vagy az I), vagy a II), vagy pedig a III) eset. Megállapodásunk szerint az I) esetben az $y_0 = f(x_0)$ kapcsot megtartjuk, viszont az $x_0 = \varphi(y_1)$ kapcsot kidobjuk, a II) esetben fordítva, a III) esetben pedig az $y_0 = f(x_0)$ kapcsot megtartjuk, viszont az $x_0 = \varphi(y_1)$ kapcsot kidobjuk (vagy fordítva, aszerint, hogy ez esetre nézve hogyan állapodtunk meg). Szóval az $x_0 \in X'$ elemet eredetileg kapcsoló két kapocs közül egy és csak egy megmarad.

Hasonlóképpen, $y \in Y - Y'$ esetén ez $y \in Y$ elem eleve egyedül a $\varphi(y) = x \in X'$ elemmel van kapcsolva (2. ábra) s az $x = \varphi(y)$ φ-kapocs meg is marad, miután a vele kezdődő visszakeresési sorozatot ez az egyetlen kapocs alkotja, tehát φ-kapoccsal is végződik. Valamely $y_1 \in Y'$ elemet pedig eredetileg két kapocs kapcsol: az $x_0 = \varphi(y_1)$ φ-kapocs és bizonyos $y_1 = f(x_1)$ f-kapocs (2. ábra).



2. *ábra*

Mivel pedig e φ-kapoccsal kezdődő visszakeresési sorozatnak az utóbbi f-kapoccsal kezdődő éppen a folytatása, azért a fentebbiekhez hasonlóan adódik, hogy ez $y_1 \in Y'$ elemet eleve kapcsoló két kapocs közül egy és csak egy megmarad.

Ezzel kimutattuk, hogy minden $x \in X$ elem egy és csak egy $y \in Y$ elemmel marad kapcsolva és fordítva. Ha tehát minden $x \in X$ elemhez a vele kapcsolva maradt $y \in Y$ elemet rendeljük hozzá, akkor ezáltal kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesítünk az X és Y halmazok elemei között. Tehát $X \sim Y$, qu. e. d.

Ebből a bizonyításból (amely mint mondottuk lényegében KŐNIG GYULA bizonyítása), látható, hogy érvényes az ekvivalenciatétel következő élesítése is, amelyet határozottan először S. BANACH [5] mondott ki:

Ha az X-halmazt valamely f kölcsönösen egyértelmű leképezés az Y halmaz egy részhalmazára, továbbá az Y halmazt valamely φ kölcsönösen egyértelmű leképezés az X halmaz egy rész-

halmazára képezi le, akkor az X halmaz két egymástól idegen X_1 és X_2, az Y pedig két egymástól idegen Y_1 és Y_2 halmaz összegére bontható úgy, hogy az X_1 halmazt az f leképezés Y_1-re, az Y_2 halmazt pedig a φ leképezés X_2-re képezi le.

Ugyanis az X, ill. Y halmaznak az eredeti kapcsok egy része fenti „kidobása" után f-kapocs által kapcsolt elemei bizonyos X_1, ill. Y_1 halmazt, φ-kapocs által kapcsolt elemei pedig bizonyos X_2, ill. Y_2 halmazt alkotnak s ezek éppen a mondott tulajdonságúak.

IRODALOM

[1] J. Kőnig, Sur le théorie des ensembles, *Comptes Rendus* (Paris), 143 (1906), 110—112, vagy ugyanattól, A halmazok elméletéhez, *Matematikai és Fizikai Lapok*, 15 (1906), 253—255.

[2] Dénes Kőnig, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936, 85—87.

[3] Kőnig Gyula később megjelent könyvében, lásd J. Kőnig, *Neue Grudlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre*, Leipzig 1914, 215—219, a tételnek más bebizonyítását közölte, amelyben G. Hessenberg bizonyításának alapgondolatát használja fel. Vö. G. Hessenberg, *Grundbegriffe der Mengenlehre*, Sonderdruck aus den „Abhandlungen der Fries'schen Schule", I. Band, 4. Heft, Göttingen 1906, § 21.

[4] Kőnig Gyula bizonyításának részletes ismertetésére nézve lásd Kalmár László, *A matematika alapjai I*, Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat, Budapest, 1957, 43—45.

[5] S. Banach, Un théorème sur les transformations biunivoques, *Fundamenta Mathematicae*, 6 (1924), 236—239. spec. 236—237.

О ТЕОРЕМЕ ЭКВИВАЛЕНЦИИ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

P. Szász

Выработается в наглядноя и детальной форме доказательство J. König к теореме эквиваленции Кантора в теории множеств.

ÜBER DEN ÄQUIVALENZSATZ DER MENGENLEHRE

Von Paul Szász

(Auszug)

Der bekannte Beweis von J. Kőnig, für den Cantorschen Äquivalenzsatz, wird in ausführlicher und anschaulicher Form ausgearbeitet.

Analitikus függvények zérushelyeinek eloszlása és a Cauchy—Hadamard-formula

MIKOLÁS MIKLÓS

1. Legyen $z = x + iy$ komplex változó, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ valamely $|z| < \varrho$ körbelsőben reguláris függvény. $f(z)$ zérushelyeinek számára, valamint a gyökök abszolút értékeinek szorzatára vonatkozólag a komplex függvénytan nevezetes, klasszikusnak számító tételei nyujtanak tájékoztatást — így a logaritmikus derivált reziduumának felhasználása, HADAMARD és JENSEN idevágó (kb. félszázados) eredményei.[1] Mindazonáltal nem tekinthető kielégítően megoldottnak a következő alapvető probléma: adva lévén $f(z)$-nek $c_0 = f(0) \neq 0$, $c_m = f^{(m)}(0)/m!$ $(m = 1, 2, \ldots)$ TAYLOR-együtthatói, hogyan lehet *kizárólag ezek* segítségével pontosan meghatározni, ill. alulról jól megbecsülni a kezdőponthoz legközelebbi (egy vagy több) gyöknek 0-tól való távolságát; más szóval: annak a legnagyobb ($|z| < \varrho$-ban levő, origó-centrumú) körnek a sugarát, melyen belül $f(z)$ nem tűnik el.

E rövid dolgozatban az említett problémát meromorf függvényekre kiterjesztve, a CAUCHY—HADAMARD-féle formula felhasználásával közelítjük meg: egy determinánst tartalmazó explicit előállítás (I. tétel) levezetése, egy ehhez csatlakozó kiegészítés (II. tétel) és néhány megjegyzés után megmutatjuk, hogy a keresett körsugár értéke egyszerűbb, jól áttekinthető alakban is írható, mely utóbbi lényegileg nem javítható alsó becslést szolgáltat (III.—IV. tétel). Végül eredményünket algebrai egyenletek legkisebb abszolút értékű gyökével kapcsolatban alkalmazzuk (V. tétel).

2. A következőkben állandóan $c_n = f^{(n)}(0)/n!$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ és $R \leqq \infty$ azon R_0 számok felső határát jelenti, melyekre a $|z| < R_0$ körben $f(z)$ szinguláris helyei 0 (sík) JORDAN-mértékű halmazt alkotnak és itt $f(z) \neq 0$.

[1] Vö. pl. SZÁSZ PÁL: A diff. és integrálszámítás elemei, 2. kiadás (Bp., 1951), II. kötet; L. BIEBERBACH: Funktionentheorie, I.—II.

I. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy $f(z)$ meromorf*[2] *egy $|z| < \varrho < \infty$ körlemezben és $f(0) \neq 0$.*

$f(z)$-nek akkor és csak akkor van zérushelye a szóbanforgó körbelsőben, ha

$$(1) \qquad \frac{|c_0|}{\varrho} < V < \infty.$$

ahol

$$V = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} |H_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$$

és

$$(2) \qquad H_\nu = \begin{vmatrix} c_\nu & c_{\nu-1} \cdots & c_2 & c_1 \\ c_{\nu-1} & c_{\nu-2} \cdots & c_1 & c_0 \\ c_{\nu-2} & c_{\nu-3} \cdots & c_0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_0 \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots);^3$$

(1) *teljesülése esetén*

$$(3) \qquad R = |c_0| V^{-1}.$$

BIZONYÍTÁS. 1° $f(z)$ $|z| = \varrho$ körön belüli pólusainak száma a feltevés szerint, gyökeinek száma pedig az analitikus függvények identitási tételből folyóan véges; az utóbbi számot jelöljük N-el. Nyilvánvaló, hogy $1/f(z)$ a $|z| < \varrho$ körlemeznek minden olyan pontjában holomorf, mely $f(z)$-nek nem 0-helye; $f(z)$ gyökei $f(z)^{-1}$-nek pólusai és viszont, továbbá gyök-multiplicitásnak a reciprok függvénynél a kapcsolt pólus rendszáma felel meg.[4] Innen a CAUCHY—TAYLOR-féle kifejtési tétel alapján rögtön következik, hogy az

$$(4) \qquad \begin{cases} f(z)^{-1} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_\nu z^\nu + \cdots \\ \gamma_\nu = \dfrac{1}{\nu!} [f(z)^{-1}]^{(\nu)}_{z=0} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \end{cases}$$

MACLAURIN-sorelőállítás R^* konvergencia-sugara $N = 0$ esetén $\geqq \varrho$,

[2] Azaz legfeljebb véges-számú pólustól eltekintve holomorf.

[3] H_ν képzésmódja nyilvánvaló: a harmadik sortól kezdve minden sorban c_0-tól jobbra csupa 0 áll.

[4] $f(z)$ bármely pólusa — pontosabban szólva — $f(z)^{-1}$-nek *megszüntethető szinguláris helye,* mely a megfelelő határértéknek függvényértékként való bevezetése után a pólus rendszámával egyenlő multiplicitású zérushellyé válik.

$N \geqq 1$ mellett pedig $0 < R^* = R < \varrho$; másrészt a CAUCHY—HADAMARD-formula szerint mindkét esetben

$$(5) \qquad 1/R^* = \overline{\lim_{\nu\to\infty}} |\gamma_\nu|^{\frac{1}{\nu}}.$$

2° Így elegendő még azt igazolnunk, hogy

$$(6) \qquad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} |\gamma_\nu|^{\frac{1}{\nu}} = |c_0|^{-1} V.$$

Valóban, a (4)-ből adódó — a kezdőpont bizonyos környezetében érvényes —

$$(7) \qquad (\gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_\nu z^\nu + \cdots)(c_0 + c_1 z + \cdots + c_\nu z^\nu + \cdots) \equiv 1$$

azonosság és a CAUCHY-féle szorzási szabály felhasználásával nyerjük ($c_0 \neq 0$!):

$$(8) \qquad \begin{cases} \gamma_0 c_0 = 1, \quad \gamma_0 = c_0^{-1}; \\ \gamma_0 c_\nu + \gamma_1 c_{\nu-1} + \cdots + \gamma_{\nu-1} c_1 + \gamma_\nu c_0 = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

s az első $\nu+1$ egyenletből a CRAMER-szabály szerint:

$$(9) \qquad \begin{cases} \gamma_\nu = \dfrac{(-1)^\nu}{c_0^{\nu+1}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{\nu-1} & c_\nu & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{\nu-2} & c_{\nu-1} & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{\nu-3} & c_{\nu-2} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 & 1 \end{vmatrix} = \\ = (-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} c_0^{-(\nu+1)} H_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

(9)-ből közvetlenül (6)-ra jutunk, qu. e. d.

3. A fenti megoldás abban az esetben is szolgáltat alsó becslést R számára, ha $f(z)$ meromorf voltát nem kötjük ki.

II. TÉTEL. *Legyen* $\mathfrak{P}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ $(c_0 \neq 0)$ *egy pozitív konvergencia-sugarú hatványsor és jelölje* $f(z)$ *a* $\mathfrak{P}(z)$*-ből analitikus folytatással keletkező egyértékű (teljes) analitikus függvényt.*

Akkor $f(z)$ *meromorf és nem tűnik el a* $|z| < |c_0| V^{-1}$ *körlemezben, tehát*

$$(10) \qquad R \geqq |c_0| V^{-1}.$$

BIZONYÍTÁS. Tekintsük a (9) együtthatókkal képzett $\sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu z^\nu$ hatványsort; ez — mint tudjuk — $f(z)^{-1}$ MACLAURIN-sora, tehát konvergencia-sugara:

$$R^* = |c_0| V^{-1}$$

pozitív. A sor összegfüggvénye, azaz $f(z)^{-1}$ a $|z| < R^*$ körbelsőben reguláris lévén, következik, hogy $f(z)$-nek itt legfeljebb pólusai vannak (véges számban) és egyetlen 0-helye sincs.

4. (2) a *szimmetrikus* determinánsok egy nevezetes alosztályába, az

$$\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{n-1} \\ A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_n \\ A_2 & A_3 & A_4 & \cdots & A_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n-1} & A_n & A_{n+1} & \cdots & A_{2n-2} \end{vmatrix}$$

típusú un. *rekurrens* determinánsok közé tartozik.[5] Ezeknek fontos alkalmazásaik vannak az algebrai egyenletek, a bilineáris és kvadratikus alakok elméletében (diszkrimináns-négyzet, elemi osztók stb.)[6]; lényeges tulajdonságuk, hogy mindegyik A_k-t a megfelelő

$\Delta^k A_0 = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} A_{k-j}$ differenciával helyettesítve $(k = 1, 2, \ldots)$, a determináns értéke nem változik.[7] Minthogy azonban egy ily determináns egyszerű kiszámításáról csak igen speciális esetekben lehet szó, felvetődik H_ν megbecslésének problémája.

A determináns-definíciót figyelembe véve, triviális a

$$\begin{cases} H_\nu \leqq \left(\sum_{k=1}^{\nu} |c_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{\nu-1} |c_k|\right)\left(\sum_{k=0}^{\nu-2} |c_k|\right) \cdots \left(\sum_{k=0}^{1} |c_k|\right) \\ \leqq \left(\sum_{k=0}^{\nu} |c_k|\right)^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

egyenlőtlenség, honnan

$$V \leqq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|; \tag{11}$$

[5] Használatos a „Hankel-féle" vagy „ortoszimmetrikus" elnevezés is.

[6] Vö. pl. R. FRICKE: Algebra, I. (Braunschweig, 1924); továbbá G. FROBENIUS: Über die Elementarteiler der Determinanten, Sitzungsber. d. Preuss. Akad. Berlin, 1894, 31—44.

[7] L. pl. BEKE MANÓ: Determinánsok, 60—63. o.

ez az eredmény mindjárt javítható az ismert *Hadamard-féle determinánstétel* felhasználásával:[8] tetszőleges, komplex számokból képezett determináns abszolut értéke nem lehet nagyobb, mint a sorok (vagy oszlopok) normáinak[9] szorzata. — Kapjuk:

$$(12)\qquad \begin{gathered} H_\nu^2 \leqq (|c_0|^2+|c_1|^2+\cdots+|c_\nu|^2)^\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots), \\ V \leqq \left(\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \end{gathered}$$

ami (10) alapján az

$$(13)\qquad R \geqq |c_0| \left(\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

becslésre vezet. ((11)—(13)-ban felteendő $\sum |c_k|$, ill. $\sum |c_k|^2$ konvergenciája.)

Megemlítjük, hogy $|z| \leqq 1$ mellett reguláris $f(z)$ függvény esetében (13) egy más — a függvénytanban és analitikus számelméletben többször alkalmazott — egyenlőtlenségnek is folyománya,[10] továbbá, hogy ez esetben a hatványsorok PARSEVAL-formulája alapján:

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\vartheta})|^2\, d\vartheta.$$

5. A fentiekben H_ν felső korlátjaként olyan szorzatot (ill. hatványt) adtunk meg, melynek tagszáma (összeg-alakban) $\nu\cdot\nu!$ (ill. $(\nu+1)^\nu$). Hogy ez meglehetősen durva becslést jelent, kitűnik abból, hogy H_ν-t az utolsó sor elemei szerint kifejtve, majd a nyert — H_ν-vel egyező típusú — aldeterminánsok kifejtését, ugyanúgy tovább folytatva, végül is H_ν számára $2^{\nu-1}$ tagú összeget kapunk; szeretnők mármost a végeredményt mennél egyszerűbb, könnyen áttekinthető alakban felírni, hogy (13) javítása lehetségessé váljék. — Erre vonatkozólag fennáll a következő

[8] L. J. HADAMARD: Résolution d'une question relative aux déterminants. Bull. des Sci. Math. (2) **17.** (1893), 240—246. A valós elemek esetére vonatkozó W. WIRTINGER-féle bizonyítás megtalálható SZÁSZ PÁL i. m., 418. o.

[9] Egy $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ komplex számrendszer *normáján* — mint ismeretes — az $(|a_1|^2+|a_2|^2+\cdots+|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ (nem-negatív) számot értjük.

[10] Vö. pl. E. LANDAU: Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. II. (Leipzig, 1927), 102—103.

III. TÉTEL. *Az elemek tetszőleges választása mellett a* (2) *determináns értéke:*

$$(15)\qquad H_\nu = (-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \sum_{\lambda=1}^{\nu} (-1)^\lambda c_0^{\nu-\lambda} S_{\lambda,\nu} \qquad (\nu \geqq 1),$$

ahol

$$(16)\qquad S_{\lambda,\nu} = \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_\lambda=\nu \\ n_j>0}} c_{n_1}\cdots c_{n_\lambda}.$$ [11]

BIZONYÍTÁS. Legyen megadva $\nu \geqq 1$ és egy $(c_0, c_1, \ldots c_\nu)$ komplex értékrendszer; feltehetjük, hogy $c_0 \neq 0$, mert különben (2) mellékdiagonálisától jobbra csupa 0 áll s az állítás evidens.

Tekintsük most a

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\nu} c_n z^n$$

polinomot; $\zeta = \varphi_\nu(z) - c_0$ jelölés mellett írhatjuk:

$$\frac{1}{c_0+\zeta} - \frac{1}{c_0} = c_0^{-1}\left[\frac{1}{1+(\zeta/c_0)} - 1\right] =$$

$$= -c_0^{-2}\zeta + c_0^{-3}\zeta^2 - c_0^{-4}\zeta^3 + - \cdots \qquad (|\zeta| < |c_0|).$$

Így $z=0$ bizonyos környezetében

$$\varphi_\nu(z)^{-1} - \varphi_\nu(0)^{-1} = (c_0+\zeta)^{-1} - c_0^{-1} =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda c_0^{-(\lambda+1)} \left(\sum_{n=1}^{\nu} c_n z^n\right)^\lambda =$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^\lambda c_0^{-(\lambda+1)} \sum_{n_1,\ldots,n_\lambda=1}^{\nu} c_{n_1}\cdots c_{n_\lambda} z^{n_1+\cdots+n_\lambda} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{\lambda=1}^{k} (-1)^\lambda c_0^{-(\lambda+1)} \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_\lambda=k \\ 1\leqq n_j \leqq \nu}} c_{n_1}\cdots c_{n_\lambda};$$

másrészt elegendő kis abszolút értékű z-kre (vö. (4), (9))

$$\varphi_\nu(z)^{-1} - \varphi_\nu(0)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k,\nu} z^k,$$

[11] Itt tehát az összegezés azokra a *pozitív egész* $(n_1, \ldots, n_\lambda)$ értékrendszerekre terjesztendő ki, melyek kielégítik a $n_1 + \cdots + n_\lambda = \nu$ feltételt. — Minthogy így $S_{\lambda,\nu}$ nem függhet c_0-tól, (15) szerint H_ν c_0-nak legfeljebb $(\nu-1)$-edfokú polinomja.

ahol

(17) $$\gamma_{k,\nu}=\gamma_k=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}c_0^{-(k+1)}H_k\,,\quad (k=1,2,\ldots,\nu).$$

A hatványsorok unicitási tételét alkalmazva, kapjuk tehát

(18) $$c_0^{-(k+1)}H_k=(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\sum_{\lambda=1}^{k}(-1)^{\lambda}c_0^{-(\lambda+1)}\sum_{\substack{n_1+\cdots+n_\lambda=k\\ n_j\geqq 1}}c_{n_1}\cdots c_{n_\lambda}$$
$$(k=1,2,\ldots,\nu),$$

ami $k=\nu$ esetén éppen az állítást szolgáltatja.[12]

6. Az I.—III. tétel összekapcsolásával kimondhatjuk: valamely, $z=0$ környezetében a $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ $(c_0\neq 0)$ sorral adott, s ebből analítikus folytatással definiált $f(z)$ függvény mindenesetre meromorf és nem tűnik el a

(19) $$|z|=|c_0|\cdot\varliminf_{\nu\to\infty}\left|\sum_{\lambda=1}^{\nu}(-1)^{\lambda}c_0^{\nu-\lambda}S_{\lambda,\nu}\right|^{-\frac{1}{\nu}}\quad(>0)$$

kör belsejében; ha $f(z)$ még egy (19)-cel koncentrikus, nagyobb sugarú körön belül is meromorf, akkor $f(z)$ *legkisebb abszolút értékű* (egy vagy több) *gyöke* a (19) körön fekszik, úgyhogy

(20) $$R=|c_0|\cdot\varliminf_{\nu\to\infty}\left|\sum_{\lambda=1}^{\nu}(-1)^{\lambda}c_0^{\nu-\lambda}S_{\lambda,\nu}\right|^{-\frac{1}{\nu}}.$$

Nem nehéz e nevezetes (19) kör sugarára jó alsó korlátot adni.

IV. TÉTEL. 1. *Ha* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ $(|z|<\vartheta)$ *és* $c_0\neq 0$, *továbbá* (*) $|c_m|\leqq KB^m$ $(m=1,2,\ldots)$, *ahol* K *és* B *pozitív állandók, akkor*

(21) $$R\geqq\frac{|c_0|}{B(K+|c_0|)};$$

[12] (15) nyilván másként is bebizonyítható, pl. teljes indukcióval, de a fenti, generátorfüggvényt használó okoskodás látszik a legegyszerűbbnek.

speciálisan (21) *fennáll* $K = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $B = 1/r$ *mellett, ha* $r > 0$ *értékét úgy adjuk meg, hogy* $f(z)$ *holomorf a* $|z| \leqq r$ *körlemezben.*

2. (21) *nem javítható abban az értelemben, hogy* $f(z)$ *alkalmas választása mellett, megfelelő* K, B *konstansokkal az egyenlőség jele érvényes.*

BIZONYÍTÁS. 1° Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy bármely adott (pozitív egész) ν-re:

$$T_{\lambda,\nu} = \sum_{\substack{n_1+\cdots+n_\lambda=\nu \\ n_j>0}} 1 = \binom{\nu-1}{\lambda-1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

Valóban,

$$T_{1,\nu} = 1 = \binom{\nu-1}{0};$$

feltéve (22) érvényességét a $\lambda = 1, 2, \ldots, k$ értékekre és megállapítva, hogy a $\nu = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k+1}$ diofantoszi egyenlet pozitív megoldásainak száma nyilván a $\nu - 1 = n_1 + \cdots + n_k$, $\nu - 2 = n_1 + \cdots + n_k, \ldots$, $\nu - (\nu - k) = k = n_1 + \cdots + n_k$ egyenletek megfelelő megoldás-számainak összege, kapjuk:

$$T_{k+1,\nu} = \binom{\nu-2}{k-1} + \binom{\nu-3}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1} = \binom{\nu-1}{k}.$$

2° (22) és a feltételezett (*) egyenlőtlenségek felhasználásával írhatjuk:

$$|H_\nu| = \left| \sum_{\lambda=1}^{\nu} (-1)^\lambda c_0^{\nu-\lambda} S_{\lambda,\nu} \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\lambda=1}^{\nu} |c_0|^{\nu-\lambda} K^\lambda B^\nu \binom{\nu-1}{\lambda-1} = B^\nu K (K + |c_0|)^{\nu-1},$$

$$V = \overline{\lim_{\nu\to\infty}} |H_\nu|^{\frac{1}{\nu}} \leqq B(K + |c_0|);$$

tehát (10)-re tekintettel

$$R \geqq |c_0| V^{-1} \geqq |c_0| \cdot B^{-1} (K + |c_0|)^{-1}.$$

A jól ismert *Cauchy-féle együttható becslések*: $|c_m| \leqq M(r) r^{-m}$ $(m = 0, 1, \ldots)$ — ahol $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ — mutatják, hogy *min-*

den hatványsorra teljesül (*) pl. $K = M(r)$, $B = r^{-1}$ mellett $(\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} |c_m|^{\frac{1}{m}} < r^{-1} < \infty)$.

3° Tekintsük a

$$g(z) = \frac{\beta(\varkappa + \alpha_0)z - \alpha_0}{1 - \beta z} \qquad (z \neq \beta^{-1}) \tag{23}$$

lineáris törtfüggvényt, ahol $\beta > 0$, $\varkappa > 0$, $\alpha_0 > 0$. Minthogy most $c_0 = -\alpha_0$, $c_m = \varkappa\beta^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, K és B értékéül önként adódik $\varkappa$, ill. β, a (21)-be való behelyettesítés pedig az $\alpha_0/\beta(\varkappa + \alpha_0)$ korlátot adja. De ez éppen $g(z)$ egyetlen gyöke, tehát példánkra

$$R = \frac{\alpha_0}{\beta(\varkappa + \alpha_0)}, \tag{24}$$

qu. e. d.

7. (21)-gyel kapcsolatban kijelentjük, hogy konkrét $f(z)$ függvény esetén nincs akadálya (*)-ban K és B „legjobb", azaz olyan megválasztásának, mely (21) jobboldalát a lehető legnagyobbá teszi. Ugyancsak nem érdektelen megjegyezni, hogy (20)-hoz, ill. a IV. tételhez természetesen az I.—II. tételtől függetlenül is eljuthatunk, legrövidebben akkor, ha felhasználjuk az összetett függvények magasabb deriváltjaira vonatkozó (ma elég kevéssé ismert) ún. FAÀ DI BRUNO-féle formulát,.[13] Mindamellett H_ν determinánsalakjának regisztrálása sem tűnik feleslegesnek, az innen kézenfekvő módon folyó (az irodalomban más igazolással előforduló) (13) becsléssel együtt: bizonyos esetekben a (2) determináns megfelelő átalakítása hasznos lehet.

8. Még a 6. §-ban tárgyaltaknak egy könnyű alkalmazására, *algebrai egyenletek legkisebb abszolút gyökének* meghatározására kivánunk rámutatni. — Mint ismeretes, az irodalomban található explicit gyök-becslések főleg olyan kör sugarának az együtthatókkal való kifejezését adják, mely tartalmazza az egyenlet összes gyökeit, vagy legalább egy gyökét — azaz *felső* korlátokról van szó a gyökök abszolut értéke számára; FEJÉR LIPÓTnak egy nevezetes eredménye olyan felső becslést ad a kezdőponthoz legköze-

[13] Többváltozós és vektor-vektor függvényekre való kiterjesztését, valamint alkalmazásokat illetően vö. M. MIKOLÁS: Über die höheren Differentialkoeffizienten zusammengesetzter Skalar- bzw. Vektorfunktionen und einige Anwendungen derselben. Annales Univ. Sci. Budapest, 1. (1958). 49—65; kül. 57, (4.3).

lebbi gyök modulusára, mely csak az egyenletben tényleg előforduló tagok számától, valamint a két legalacsonyabb fokú tagtól függ.[14] A közelítő eljárások közül kiemelendő az iteratív jellegű D. Bernoulli—Gräffe-féle módszer, továbbá több, Turán Pál módszerének alkalmazásával nyert idevágó eredmény.[15] — A következő tétel egyrészt kifejezi a kezdőponthoz legközelebbi gyök abszolút értékét pontosan és közvetlenül az egyenlet együtthatóival, másrészt használható *alsó* korlátot ad meg ezen érték (tehát egyúttal az összes gyökök abszolút értéke) számára.

V. Tétel. *Jelölje* ξ_j $(j=1,2,\dots,N)$ *egy* $Q_M(z)=c_{p_0}+$ $+c_{p_1}z^{p_1}+\dots+c_{p_h}z^{p_h}$ $(0=p_0<p_1<\dots<p_h=M;\ c_{p_n}\neq 0,\ n=$ $=0,1,\dots,h)$ *komplex együtthatós polinom különböző gyökeit és legyen* $R_1=\min\limits_{1\leq j\leq N}|\xi_j|$.

Akkor fennáll

$$R_1=|c_0|\cdot\varlimsup_{\nu\to\infty}\left|\sum_{\lambda=1}^{\nu}(-1)^{\lambda}c_0^{\nu-\lambda}\,\sigma_{\lambda,\nu}\right|^{-\frac{1}{\nu}},\tag{25}$$

ahol

$$\sigma_{\lambda,\nu}=\sum_{p_{n_1}+\dots+p_{n_\lambda}=\nu}c_{p_{n_1}}\cdots c_{p_{n_\lambda}};\tag{26}$$

továbbá

$$R_1\geq\left(\frac{C_{1,h}}{|c_0|}+1\right)^{-1};\tag{27}$$

és egyúttal

$$R_1\geq\min\left(1,\frac{|c_0|}{hC_{1,h}}\right),\tag{28}$$

ahol

$$C_{1,h}=\max_{1\leq n\leq h}|c_{p_n}|.\tag{29}$$

Bizonyítás. 1° A (25)—(26) előállítás azonnal adódik (20)-ból, ha figyelembe vesszük, hogy $S_{\lambda,\nu}$ (16) alatti kifejezésben csak

[14] L. pl. Fejér Lipót: Az algebrai egyenletek legkisebb abszolút értékű gyökéről. Mat. és Phys. Lapok, **17** (1908), 308—324.

[15] L. pl. O. Perron: Algebra, II. (Berlin—Leipzig, 1927), 20—40, ill. Turán Pál: Az analízis egy módszeréről és annak egyes alkalmazásairól (Bp., 1943, Akad. Kiadó); II. rész, 8. § (108—113. o.) — Vö. még A. Rényi—P. Turán: On the zeros of polynomials, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **3** (1952), 275—284; továbbá P. Turán: Remark on the preceding paper of J. W. S. Cassels, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **7** (1956), 291—294.

azok a tagok nem tünnek el, melyekben az *összes* indexek a $(p_1, p_2, \ldots, p_h)$ értékrendszerből valók.

2° Mivel $|c_{p_n}| \leqq C_{1,h}$ $(n = 1, 2, \ldots, h)$, alkalmazhatjuk (21)-et $K = C_{1,h}$ és $B = 1$ mellett, miáltal éppen (27)-re jutunk.

3° Hogy (25)-ből megkapjuk (28)-at (ami bizonyos esetekben élesebb becslést jelent (27)-nél, csupán azt kell észrevennünk, hogy

$$\sum_{p_{n_1}+p_{n_2}=\nu} 1 \leqq h$$

és általában — mint teljes indukcióval könnyen következik —

$$(30) \qquad \sum_{p_{n_1}+\cdots+p_{n_\lambda}=\nu} 1 \leqq h^{\lambda-1} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Valóban, (30) alapján írhatjuk:

$$\left| \sum_{\lambda=1}^{\nu} (-1)^{\lambda} c_0^{\nu-\lambda} \sigma_{\lambda,\nu} \right| \leqq C_{1,h} |c_0|^{\nu-1} \sum_{\lambda=1}^{\nu} \left(\frac{h \cdot C_{1,h}}{|c_0|} \right)^{\lambda-1},$$

honnan

$$\lim_{\nu \to \infty} \left| \sum_{\lambda=1}^{\nu} (-1)^{\lambda} c_0^{\nu-\lambda} \sigma_{\lambda,\nu} \right|^{-\frac{1}{\nu}} \geqq \begin{cases} |c|, \\ h \cdot C_{1,h} \end{cases}$$

aszerint, amint $hC_{1,h}/|c_0| \leqq 1$, illetőleg $hC_{1,h}/|c_0| > 1$. Az utóbbi egyenlőtlenség pedig $|c_0|$-vel való beszorzás után (28)-at szolgáltatja, qu. e. d.

9. (27) és egy jól ismert felső becslés alapján a $Q_M(z) = 0$ egyenlet *valamennyi gyökére* az igen könnyen megjegyezhető

$$\left(\frac{C_{1,h}}{|c_0|} + 1 \right)^{-1} \leqq |\xi_j| \leqq \frac{C_{0,h-1}}{|c_M|} + 1$$
$$(j = 1, 2, \ldots, N \leqq M)$$

limitáció érvényes, ahol $C_{0,h-1} = \max\limits_{0 \leqq n \leqq h-1} |c_{p_n}|$.[16]

Végül megjegyezzük, hogy a dolgozat eredményei természetesen nemcsak 0-helyek, hanem komplex változós függvények teljes értékkészletének vizsgálatára felhasználhatók: ha w adott komplex szám és a oly pont, melyben $f(a) \neq w$, akkor $f(z)$ a-hoz legközelebbi „w-helyének" keresése $F(z) = f(z+a) - w$ 0-hoz legközelebbi gyökének keresésével egyértelmű.

(Beérkezett 1959. III. 31-én)

[16] A felső korlátra vonatkozólag vö. pl. PERRON, i. m., 21. o.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ФОРМУЛА CAUCHY—HADAMARD-A

M. MIKOLÁS (Будапешт)

Пусть функция комплексной переменной $f(z)$ регульярна в начальной точке, $c_0 = f(0) \neq 0$, $c_m = f^{(m)}(0)/(m)!$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Работа занимается следующей проблемой: каким образом можно определить или хорошо оценить снизу абсолютное значение R наиближайшего к 0 нуля аналитической функции, порождённой элементом $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, исключительно с помощью $c_0, c_1, c_2, \ldots$.

Результаты:

Теорема I. Предположим, что $f(z)$ мероморфна в круге $|z| < \varrho < \infty$. $f(z)$ имеет здесь нуль в том и только в том случае, если имеет место (I). Здесь $V = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} |H_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$ H_ν-определитель (2) Если выполняется (I), то $R = |c_0|\, V^{-1}$.

Теорема II. $f(z)$ во всяком случае мероморфна и $\neq 0$ в круге $|z| < |c_0|\, V^{-1}$, поетому выполняется (10).

На основании теоремы об определителях Hadamard-a в качестве следствия получается (13), при условии, что $\sum |c_k|^2$ сходится.

Теорема III. Значение определителя (2) (в слулае любых комплексных элементов) может быть записано в виде (15)—(16).

Следствие: в двух предшествующих теоремах

$$V^{-1} = \underline{\lim_{\nu \to \infty}} \left| \sum_{\lambda=1}^{\nu} (-1)^{\lambda} c^{\nu-\lambda} S_{\lambda,\nu} \right|^{-\frac{1}{\nu}} \quad (>0).$$

Теорема I. Если $c_0 \neq 0$, $|c_m| \leq KB^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ где K и B положительные постоянные, то $R \geqq |c_0|/B(K + |c_0|)$. Эта оценка не может быть улучшенна в том смысле, что при подходящем выборе $f(z)$ и постоянных K, B имеет место равенство.

(Пример: (23), где $\beta > 0$, $\varkappa > 0$, $\alpha_0 > 0$.)

Теорема. Пусть различные корни многочлена

$$Q_M(z) = \sum_{n=0}^{h} c_{p_n} z^{p_n} \quad (0 = p_0 < p_1 < \cdots < p_k = M;\ c_{p_n} \neq 0)$$

суть ξ_j $(j = 1, 2, \ldots, N \leqq M)$ и пусть $R_1 = \min_{1 \leqq j \leqq N} |\xi_j|$. Тогда имеет место (25), где (26), и (27), где (28), (29).

Применяя эти теоремы к $F(z) = f(z + a) - w$ вместо $f(z)$, получим соответствующие теоремы о „w-местах“ $f(z)$.

ON THE DISTRIBUTION OF ZEROS OF ANALYTIC FUNCTIONS AND THE CAUCHY—HADAMARD FORMULA

By M. MIKOLÁS (Budapest)

Let $f(z)$ be a function regular at the origin, $c_0 = f(0) \neq 0$, $c_m = f^{(m)}(0)/m!$ $(m = 1, 2, \ldots)$ the TAYLOR (MACLAURIN) coefficients of $f(z)$; let us denote by R the upper bound of the numbers $R_0 > 0$ such that the analytic continuation of $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ does not vanish for $|z| < R_0$, i. e. the minimal distance R of the zeros of this function from the origin. — The paper deals with the following fundamental problem: give the exact value or a sharp lower estimate, resp., for R, using *only* the prescribed values $c_0, c_1, c_2, \ldots$.

Results:

I. *Suppose that* $f(z)$ *is meromorphic for* $|z| < \varrho < \infty$. — *There is at least one zero of* $f(z)$ *within* $|z| = \varrho$ *if and only if* (1) *holds with* $V = \overline{\lim_{\nu \to \infty}} |H_\nu|^{\frac{1}{\nu}}$, H_ν *denoting the* (*recurrent*) *determinant* (2); *if* (1) *is fulfilled, we have* $R = |c_0| V^{-1}$.

II. *In any case,* $f(z)$ *is meromorphic and* $\neq 0$ *for* $|z| < |c_0| V^{-1}$, *so that* (10) *holds.*

Applying the well-known "determinant-theorem" of HADAMARD, we get the inequality (13), provided that $\sum |c_k|^2 < \infty$.

III. *In case of arbitrary complex elements, the value of the determinant* (2) *may be written in the form* (15) *with* (16).

Corollary: in Th. I.–II., we have

$$V^{-1} = \underline{\lim}_{\nu \to \infty} \left| \sum_{\lambda=1}^{\nu} (-1)^{\lambda} c_0^{\nu-\lambda} S_{\lambda,\nu} \right|^{-\frac{1}{\nu}} \quad (>0).$$

IV. *If* $c_0 \neq 0$, $|c_m| \leqq K B^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$, *where* K *and* B *are positive constants, then* $R \geqq |c_0| / B(K + |c_0|)$. — *The last estimation cannot be improved in the sense that in certain special cases* (*for some* $f(z)$, B *and* K *being suitably chosen*) *the sign of equality is valid.*

(Example: (23) with $\beta > 0$, $\varkappa > 0$, $\alpha_0 > 0$.)

V. *Write* $Q_M(z) = \sum_{n=0}^{h} c_{p_n} z^{p_n}$ $(0 = p_0 < p_1 < \cdots < p_h = M;\ c_{p_n} \neq 0)$; *let* ξ_j $(j = 1, 2, \ldots, N \leqq M)$ *be all the distinct zeros of* $Q_M(z)$, *furthermore* $R_1 = \min_{1 \leqq j \leqq N} |\xi_j|$.

Then we have (25) *with* (26) *and both* (27) *and* (28) *with* (29).

By considering $F(z) = f(z + a) - w$, the above propositions yield corresponding ones on the points where $f(z)$ assumes a given complex value w.

Megjegyzés Jánossy Lajos egy dolgozatához

Fenyő István

Jánossy Lajos egyik dolgozatában[1] rámutatott arra, hogy egyes valószínűségszámítási problémáknál a Laplace-transzformáció azért használható előnyösen, mert az két függvény $f(t)$ és $g(t)$ konvolucióját, tehát az

$$(1) \qquad f*g=\int_0^t f(t-\tau)\, g(\tau)\, dt$$

függvényt az f és g Laplace-transzformáltjának szorzatába viszi át. A szerző által vizsgált problémáknál gyakran lépnek fel a kétváltozós $u(x, y)$ és $v(x, y)$ függvényekből képezett

$$(2) \qquad u \overset{*}{*} v=\int_x^y u(x, t)\, v(t, y)\, dt$$

alakú függvények is. Világos, hogy az (1) alatti konvolució a (2) alattinak speciális esete: ha ugyanis $u(x, y)=u(y-x)$ és $v(x, y)= =v(y-x)$, akkor (2) a két függvény konvolucióját szolgáltatja a $t=y-x$ helyettesítés mellett. Jánossy kifejtette, hogy előnyösen használható lenne egy olyan, az $u(x, y)$ kétváltozós függvények halmazán értelmezett homogén, lineáris transzformáció, mely a (2) alatt értelmezett általánosított konvoluciót a „tényezők" transzformáltjának szorzatába viszi át. Ő a következő transzformációt ajánlotta: tekintsük az $u(x, y)$-t egy lineáris homogén integrálegyenlet magjának. E mag valamely sajátértéke legyen s, a hozzátartozó jobb- és baloldali sajátfüggvények legyenek $\varphi_s(x)$ és $\psi_s(y)$; $\frac{\varphi_s}{s}$ és $\frac{\psi_s}{s}$ függvényeket (s-ben) tekinti általánosított Laplace-transzformál-

[1] L. Jánossy: On The generalization of the Laplace-transform in probability theory. Acta Math. Hung. II. 1951. p. 177—183.

taknak. Ha u_k az u mag k-ik iteráltja, akkor ennek általánosított Laplace-transzformáltja $\frac{\varphi_s}{s^k}$ ill. $\frac{\psi_s}{s^k}$. Jánossy ezt az $\mathfrak{L}(f_k) = [\mathfrak{L}(f)]^k$ formula analogonjának tekinti, itt f_k az f függvény k-ik iteráltját jelenti ($f_k = f * f * \cdots * f$), $\mathfrak{L}$ a Laplace-transzformáció szokásos jele. Ennek a Jánossy által ajánlott transzformációnak több hátránya van és nagyon is egyes speciális valószínűségszámítási problémák testére van szabva. A transzformálandó u függvénynek ui. nem mindig létezik sajátértéke, ezesetben transzformáltról nem is beszélhetünk. Másodszor e transzformáció a konvolució tétel analogonját csak akkor mutatja, ha a transzformálandó függvényeknek közös sajátfüggvényrendszerük van, ez pedig nagyon erős megszorítás.

E hátrányok kiküszöbölésére talán célszerűbb az alábbi általánosított Laplace-transzformációt használni, mely jóval kevesebb megszorítás mellett alkalmazható.

Azonnal belátható, hogy olyan homogén lineáris transzformáció, mely a konvolució-tétel analog tulajdonságával bir, bármilyen kétváltozós függvényre nem definiálható. Ennek oka az, hogy míg az (1) alatti konvolució művelete kommutatív, addig a (2) alatti általánosított konvolució általában nem az. Ezért tehát kiindulunk egy u kétváltozós függvényből, és tekintjük az összes vele permutábilis $v(x, y)$ függvényt, tehát azokat, melyekre

$$u \overset{*}{\underset{*}{}} v = v \overset{*}{\underset{*}{}} u.$$

A v függvények ezen osztályát jelöljük V_u-val. Az általánosított Laplace-transzformációt csak a V_u fölött fogjuk definiálni.

Legyen $u = T(f)$ egy homogén lineáris transzformáció, mely minden $t \geqq 0$-ra definiált és Laplace-transzformációval bíró $f(t)$ egyváltozós függvényt a V_u halmaz valamely függvényébe viszi át. Erről tegyük még fel, hogy egyértelműen megfordítható és olyan, hogy ha

$$u = T(f) \text{ és } v = T(g),$$

akkor

$$u \overset{*}{\underset{*}{}} v = T(f * g). \tag{3}$$

Ha ilyen T transzformáció létezik, akkor u általánosított Laplace-transzformáltját a következő módon definiáljuk:[2]

$$L(u) = \mathfrak{L}[T^{-1}(u)] = \mathfrak{L}(f)$$

[2] T^{-1}-el jelöljük T inverzét.

Ennek tényleg meg van az a tulajdonsága, hogy

$$L(u \overset{*}{*} v) = L(u) \cdot L(v),$$

mert

$$L(u \overset{*}{*} v) = \mathfrak{L}(f * g) = \mathfrak{L}(f)\,\mathfrak{L}(g) = L(u)\,L(v).$$

Az egész tehát egy az előbbi tulajdonságokkal biró $T(f)$ transzformáció létén múlik. De ilyen létezik, például az ún. Szahnovics-féle.[3] Ennek explicit alakját a következő módon nyerhetjük: legyen $k(x, y)$ egy tetszőleges Volterra típusú magfüggvény. Akkor az $\mathfrak{E} + k$ operátor egyértékű inverze létezik: $[\mathfrak{E} + k]^{-1}$, $\mathfrak{E}$ jelenti az identitásoperátort, azt tehát, mely minden függvényt sajátmagába visz át. Az $f(t)$ egyváltozós függvény helyett tekintsük az $f(y-x)$ függvényt és ehhez az f-hez a következő $u(x, y)$ függvényt rendeljük hozzá:

$$u = T(f) = [\mathfrak{E} + k] \overset{*}{*} f(y-x) \overset{*}{*} [\mathfrak{E} + k]^{-1}.$$

Világos, hogy ez a transzformáció homogén lineáris, egyértékű inverzzel rendelkező. Inverze:

$$f(y-x) = [\mathfrak{E} + k]^{-1} \overset{*}{*} u \overset{*}{*} [\mathfrak{E} + k].$$

Ha $f(t)$ befutja az összes $t \geqq 0$-ra definiált egyváltozós folytonos függvényt, akkor $T(f)$ befutja az összes u-val permutábilis kétváltozós függvényt.

Végül, a Szahnovics-féle transzformáció rendelkezik a (3) alatti tulajdonsággal. Figyelembevéve ugyanis azt, hogy $[\mathfrak{E} + k]^{-1} \overset{*}{*} [\mathfrak{E} + k] = \mathfrak{E}$ és $f(y-x) \overset{*}{*} g(y-x) = [f * g]_{t=y-x}$, adódik, hogy

$$u \overset{*}{*} v = [\mathfrak{E} + k] \overset{*}{*} f \overset{*}{*} [\mathfrak{E} + k]^{-1} \overset{*}{*} [\mathfrak{E} + k] \overset{*}{*} g \overset{*}{*} [\mathfrak{E} + k]^{-1} =$$

$$= [\mathfrak{E} + k] \overset{*}{*} f \overset{*}{*} g \overset{*}{*} [\mathfrak{E} + k]^{-1} = [\mathfrak{E} + k] \overset{*}{*} (f * g) \overset{*}{*} [\mathfrak{E} + k]^{-1} = T(f * g).$$

Az elmondottak alapján tehát valamely V_u függvényosztály tagjai között éppen úgy kiépíthető az általánosított Laplace-transzformáció segítségével az operátorszámítás, mint az egyváltozós függvényeknél szokásos. Ha például $f(t)$ differenciálható és $f'(t)$ Laplace-transzformáltja is létezik, továbbá $\bar{u} = T(f')$, akkor

(4) $$L(\bar{u}) = \mathfrak{L}(f') = s\,\mathfrak{L}(f) - f(0) = s\,L(u) - f(0).$$

[3] L. A. Szahnovics (Л. А. Сахнович): Спектральний анализоператоров виде. $Kf = \int_0^x K(x-t)\,f(t)\,dt$. Известия Академии Наук СССР 22. 299—308. 1958.

Könnyen tisztázható az is, hogy az u-ról $\bar{u}(x,y)$-ra való áttérés műveletének („általánosított differenciálás") mi felel meg. Ha feltesszük, hogy

$$f(t)-f(0)=\int_0^t f'(t)\,dt=1*f',$$

akkor

$$u=T(f)=T(1*f')+T(f(0))=T(1)\overset{*}{*}T(f')+f(0)\,T(1)=$$
$$T(1)\overset{*}{*}\bar{u}+f(0)\,T(1).$$

$\bar{u}$ tehát a

(5) $$T(1)\overset{*}{*}\bar{u}=u-f(0)\,T(1)$$

elsőfajú Volterra-típusú integrálegyenlet megoldása. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az (5) egyenletnek megoldása létezzék az, hogy $f=T^{-1}(u)$ mindenütt differenciálható függvény legyen. Ha $K(x,y)$ rezolvens magja $R(x,y)$, akkor

$$T(1)=[\mathcal{E}+k]\overset{*}{*}1\overset{*}{*}[\mathcal{E}+k]^{-1}=[\mathcal{E}+k]\overset{*}{*}1\overset{*}{*}[\mathcal{E}-R]=$$

$$=1+\int_x^y K(x,t)\,dt-\int_x^y R(t,y)\,dt-\int_x^y\int_x^t K(x,t)\,R(t,y)\,dt\,dt=E(x,y),$$

tehát $E(x,y)$ az $x=y$ egyenes mentén $\equiv 1$. Feltételezve azt, hogy K és u az x szerint folytonosan differenciálhatóak, az (5) egyenletből az adódik (ha mindkét oldalát x-szerint differenciáljuk), hogy

$$-E(x,x)\,\bar{u}(x,y)+\int_x^y \frac{\partial E(x,t)}{\partial x}\,\bar{u}(t,y)\,dt=\frac{\partial u}{\partial x}-f(0)\frac{\partial E}{\partial x}.$$

vagyis

$$\bar{u}-\int_x^y \frac{\partial E(x,t)}{\partial x}\,\bar{u}(t,y)\,dt=f(0)\frac{\partial E}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Ez $\bar{u}$-ban egy másodfajú Volterra típusú integrálegyenlet, melynek feltevéseink mellett egyértelmű megoldása létezik. Ha $\frac{\partial E}{\partial x}$ rezolvens magja $\varrho(x,y)$, akkor

(6) $$\bar{u}=f(0)\frac{\partial E}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}+\varrho\overset{*}{*}\left[f(0)\frac{\partial E}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

$\bar{u}$ tehát u-ból egy bonyolult integródifferenciál operátor segítségével nyerhető. Lássuk az eddigiek egy gyakorlati alkalmazását! Ha tekintjük például az

$$\bar{u}+\lambda u=v$$

integrodifferenciálegyenletet ($\bar{u}$ a (6) alatti kifejezést jelenti), ahol v adott a V_u függvényosztályba tartozó függvény λ pedig állandó szám, akkor ennek az integrodifferenciál egyenletnek a megoldása az általánosított Laplace-transzformáció segítségével igen egyszerűen így történhet:

$$L(\bar{u})+\lambda L(u)=L(v)$$

(4) alapján

$$(s+\lambda)L(u)=L(v)+p,$$

ahol p egy állandó (a kirótt kezdeti feltételtől függ). Ebből

$$L(u)=\frac{L(v)+d}{s+\lambda}=\frac{1}{s+\lambda}L(v)+\frac{p}{s+\lambda}=\mathfrak{L}(e^{-\lambda t}*g+pe^{-\lambda t});$$

$$u=T(e^{-\lambda t}*g+pe^{-\lambda t})$$

ahol $g=T^{-1}(v)$.

Az általánosított Laplace-transzformáció elméletének kidolgozása és alkalmazásainak részletesebb ismertetése túllépi e dolgozat kereteit, erre egyebütt térünk vissza.

ЗАМЕЧАНИЕ К ОДНОЙ РАБОТЕ L. JÁNOSSY

I. Fenyő

L. Jánossy в одной своей работе предлагает использовать одно преобразование, являющееся обобщением преобразования Laplace-a, которое может применяться при решении некоторых теоретико-вероятностных проблем. Однако это преобразование имеет ряд недостатков. Настоящая работа рассматривает следующее преобразование, которая лучше может рассматриваться как обобщение преобразования Laplace-a: Пусть V есть такое множество функций двух переменных, для которых действие

$$u \mathbin{\substack{*\\*}} v=\int_x^y u(x,t)\,v(t,y)\,dt \qquad (u, v \in V)$$

переместимо. Тогда, как известно, существует такое подобное преобразование T, которое отображает V на множество функций, определённых на отрезке $[0,\infty)$. Под обобщённым преобразованием Laplace-a функции $u(x,y)\in V$ понимается преобразование

$$L(u)=\mathfrak{L}[T^{-1}(u)]$$

где T^{-1} преобразование, обратное T, $\mathfrak{L}$ обозначает обычное преобразование Laplace-a. Это преобразование является очень сильным аналогом преобразование Laplace-a, например,

$$L(u \ast\!\!\ast v) = L(u)\, L(v) \qquad (u, v \in V).$$

EINE BEMERKUNG ZUR ARBEIT VON L. JÁNOSSY: ON THE GENERALISATION OF THE LAPLACE-TRANSFORM IN PROBABILITY THEORY

I. FENYŐ

Es sei V eine Klasse derjenigen Funktionen von zwei Veränderlichen, für welche die Operation

$$u \ast\!\!\ast v = \int_x^y u(x,t)\, v(t,y)\, dt$$

kommutativ ist. Es existiert dann eine eindeutig umkehrbare Ähnlichkeitstransformation T, welche die Funktionen von V in die in $[0, \infty)$ definierte Funktionen überführt. Folgende Transformation wird betrachtet:

$$L(u) = \mathfrak{L}[T^{-1}(u)]$$

$\mathfrak{L}$ ist das Zeichen der Laplace-Transformation, T^{-1} die Inverse von T. Die Transformation Zeigt eine grosse Ähnlichkeit zur Laplace-Transformation, z. B.

$$L(u \ast\!\!\ast v) = L(u)\, L(v).$$

A görög matematika definíciós-axiómatikus alapjai

Szabó Árpád

Bevezetés

Az elmúlt évek során több dolgozatban igyekeztem kimutatni, hogy a legrégibb görög deduktív matematika keletkezése az eleai filozófia hatásának tulajdonítható.[1] Erre a gondolatra — az időrend figyelembevételén kívül — két megfigyelés vezetett. *Egyrészt* ugyanis az a körülmény, hogy gyakran találkozunk az V. századi görög matematikában ún. indirekt bizonyítási formával, annak a történeti jellegű sejtésnek a fölállítására késztetett, hogy deduktív matematika mindaddig nem is lehetséges, amíg nem ismeretes az indirekt bizonyítási forma.[2] Márpedig ennek a bizonyítási formának a kialakítása aligha rekonstruálható valamely mégcsak empirikus-praktikus jellegű matematika keretein belül; annál könnyebb volt viszont rámutatnom arra, hogyan jött létre ez a gondolkozási forma az eleai filozófiában.[3] *Másrészt* úgy láttam: az eleai filozófia hatá-

[1] Á. Szabó: „Eleatica" (Acta Antiqua Acad. Scient. Hung. III. Budapest, 1955, 67—103); „Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá?" (Matematikai Lapok VIII., Budapest, 1957, 8—36 és 232—247); „A matematikai *bizonyítás* görög terminus technicusa" (Antik Tanulmányok, Budapest, 1958, 25—43).

[2] „Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá?" i. h.

[3] Természetesen nem ismételhetem meg ebben az összefüggésben azt az egész gondolatmenetet, amelynek során erre a következtetésre jutottam. Minthogy azonban ma még sokan kétségbevonják tételem helyességét — azt a gondolatot ti. hogy a görög matematikusok az indirekt bizonyítást csakugyan

sát bizonyítja a görög matematika evidencia-fogalmának történeti fejlődése is.[4] Azt hiszem, sikerült kimutatnom, hogy a legrégibb

az eleatáktól tanulták —, legyen szabad ezúttal emlékeztetnem legfontosabb régebbi érveimre.

1. Az indirekt bizonyítás legrégibb ismert alkalmazását — legalábbis a görögök között! — Parmenidés tanítókölteményében találjuk. Ugyanennek a bizonyítási formának legrégibb matematikai alkalmazásai mai tudásunk szerint mind későbbiek, a Parmenidés *utáni* időkből származnak.

2. Nincs magyarázatunk arra, hogyan találhatták volna meg az indirekt bizonyítási formát praktikus-empirikus matematikai imeretek alapján. Ez más szóval azt jelenti: megoldatlan rejtély maradna, hogyan jöttek rá az indirekt bizonyítás alkalmazásának a lehetőségére, és főként arra, hogy ilymódon csakugyan lehet bizonyítani valamit, ha ennek a műfogásnak — az indirekt bizonyításnak — a keletkezését valamilyen kezdetleges még csak empírikus jellegű matematikai gyakorlatból akarnók levezetni. (Ezzel szemben megmagyarázható ennek a gondolkozási módnak a kialakulása az eleai filozófián belül; lásd erre vonatkozóan „Zum Verständnis der Eleaten“ c. tanulmányomat Acta Antiqua Acad. Scient. Hung. II. 1954, 243—289).

3. Az indirekt bizonyításnak az alkalmazása a görög matematikában *együtt* lép fel egy egészen különös antiempírikus és szemléletellenes tendenciával. Nincs magyarázat arra a csak praktikus-empírikus matematika szempontjából, miért kapcsolódott össze ez a két jelenség: az indirekt bizonyítás és az antiempírikus tendencia. De nagyon jól megmagyarázható ugyanez a kapcsolat az eleai filozófia szempontjából. Az eleatáknak el *kellett* utasítaniok minden empíriát, érzéki észrevevést és praktikus tapasztalatot, mert csak így tarthattak ki indirekt bizonyításaikból adódó következtetéseik mellett. Az indirekt bizonyítás kapcsolata az antiempírikus tendenciával természetesen ott jött létre, ahol ennek megvolt a maga értelme, az eleai filozófiában. A matematikusok ezt a kettőt együtt vették át és együtt alkalmazták ott is, ahol a kettő kapcsolata nem volt szükségszerű, hiszen a matematikában az indirekt bizonyítás legtöbbször nem mondott ellent a tapasztalatnak.

4. Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy azt is meg tudjuk mondani: mi késztette a legrégibb matematikusokat az indirekt bizonyítás eleai módszerének az átvételére? Ez a módszer lehetővé tette számukra egy olyan tény kimutatását, amely tény praktikus-empírikus módszerekkel nem mutatható ki, ez pedig az *inkommenzurabilitás* létezése. Az, hogy két mennyiség pl. a négyzet oldala és átlója *összemérhetetlen* végérvényesen praktikus-empírikus módszerekkel nem mutatható ki; de nagyon könnyen kimutatható ez az indirekt bizonyítás alkalmazásával; vö. „Eleatica“ i. h.

E négy pontban összefoglalt érvek alapján továbbra is fenntartom régebbi tételemet: az indirekt bizonyítást a görög matematika az eleai filozófiából vette át. — Érdekes egyébként, hogy néha felbukkan a szakirodalomban egy-egy olyan utalás, amely arra mutat, hogy mások is közeljártak már az előbbi négy pontban megokolt következtetésemhez. J. E. Hoffmann „Geschichte der Mathematik, erster Teil. Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. Berlin 1953 (Sammlung Göschen Bd. 226) című munkájából származik pl. a következő idézet (27 l.): „Jetzt bemächtigten sich die Mathematiker der indirekten Schlussweise, die schon Zenon von Elea (490?—430?) angewendet hatte, um die landläufigen Ansichten vom Wesen des Raumes, der Zeit und vor allem der Bewegung durch scharfsinnige Trugschlüsse in Frage zu stellen“.

[4] „A matematikai bizonyítás görög terminus technicusa“ i. h.

görög matematikában az evidencia empirikus-szemléletes jellegű volt; már az V. században fölváltotta azonban az ilyen jellegű, kezdetleges evidenciára való törekvést egy egészen különös antiempirikus és szemléletellenes tendencia. Ez a tendencia egyszerre jelentkezett az indirekt bizonyítási forma első matematikai alkalmazásaival, és ugyanúgy mint amaz: az eleai filozófia hatására volt visszavezethető.

Ebben a dolgozatban az eleai filozófiának a görög matematika definíciós-axiómatikus megalapozására gyakorolt hatását igyekszem kimutatni.

1. Az euklidészi alapelvek történeti problémája

Mint ismeretes, EUKLIDÉS klasszikus munkájában, az i. e. 300 körül keletkezett „Elemek"-ben, mindjárt a mű elején egy hármas csoportban sorolja föl a matematika alapelveit, vagy más néven: principiumait.[5] Latin fordításban *definitiones, postulata* és *communes animi conceptiones* e hármas csoport neve.[6] PROKLOS az „Elemek" újplatónikus magyarázója az i. sz. V. században részletesen tárgyalja művében azt a kérdést, mi az értelme és jelentősége ezeknek a be-nem-bizonyított alapelveknek az egész matematika szempontjából, sőt PROKLOS kísérletet tesz arra is, hogy megvilágítsa, miben különböznek egymástól a fölsorolt hármas csoport tagjai.[7] Szerinte az alapelvek (principiumok) bizonyítás

[5] EUKLIDÉS szövegében nincs közös összefoglaló neve a *definitiones, postulata* és *communes animi conceptiones* elnevezésű csoportokba foglalt matematikai principumoknak. Az újplatónikus kommentátor, PROKLOS *ἀρχαὶ* vagy *ὑποθέσεις* néven foglalja össze ezt a három csoportot. A régebbi elnevezés, amely legalábbis PLATÓN korából már kimutatható, *ὑποθέσεις* volt; vö. PLATÓN, Resp. VI. 510 C.

[6] E dolgozatban szándékosan használom mindig e három görög terminus latin fordítását úgy, ahogy megtalálja ezt az olvasó EUKLIDÉS modern kiadójánál J. L. HEIBERGnél is (Euclidis Elementa, Vol. I Lipsiae 1883). Nem akarok ugyanis foglalkozni a terminológia-történet bonyolult, csak filológiai érdekességű problémájával. Mint más összefüggésben kimutattam már, e három terminus közül kettő — a *definitiones* és a *communes animi conceptiones* — görög megnevezése EUKLIDÉS mai szövegében későbbi eredetű, nem magától EUKLIDÉStől származik; EUKLIDÉS e két csoport megnevezésére még más görög szavakat használt, csak később változtatták meg e terminusok görög neveit részben ARISTOTELÉS részben pedig a sztoikus filozófia hatására. Lásd erre vonatkozólag „Die Grundlagen in der frühgriechischen Mathematik" c. dolgozatomat: Studi Italiani di Filologia Classica XXX. 1958, 1—51.

[7] PROCLI Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii, ed. G. FRIEDLEIN, Lipsiae 1873 75 kk. — A számunkra legfontosabb Proklos-helyeket német fordításban közli: O. BECKER, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg-München 1954 98 kk. és 121. kk.

nélkül előrebocsátott állítások, amelyeket nem is kell bizonyítanunk, amelyekből azonban sorra levezethetők a matematika összes tételei. Csak az nem derül ki PROKLOS magyarázataiból: hogyan jöttek rá a történeti fejlődés során arra, hogy az egész matematika ilyen be nem bizonyított állításokra épül?

Erre a kérdésünkre a modern tudomány is legtöbbször csak úgy válaszol, hogy emlékeztet ARISTOTELÉSre. El szokták mondani,[8] hogy ARISTOTELÉS előtt még arról vitatkoztak az emberek: egyáltalán van-e olyan tudomány, amely mindent bebizonyít? Hiszen ennek a törekvésnek szükségszerűen „regressus in infinitum"-hoz kell vezetnie! Vagy talán megkerülhető volna ez a nehézség akkor, ha a tudomány egyes tételeit egymásból vezetnék le?[9] Emlékeztetnek aztán arra, hogy ARISTOTELÉS volt az, aki tudatosan szembefordult mind a két felfogással; ő mutatott rá először arra, hogy minden tudománynak bizonyíthatatlan de mégis igaz principiumokból kell kiindulnia, sőt ő, ARISTOTELÉS volt az is, aki először tette vizsgálat tárgyává a kérdést: milyeneknek kell lenniök a tudomány kiindulásul választott bizonyíthatatlan principiumainak. — Minthogy azonban PROKLOS egy alkalommal megemlíti: a pergéi APOLLONIOS megpróbálta bebizonyítani EUKLIDÉS első egyenlőségi axiómáját[10] —, egyesek úgy gondolják, hogy éppen ez a tény a bizonyíték arra: milyen nehéz volt érvényre juttatnia ARISTOTELÉSnek a bizonyításra és a bizonyíthatatlan principiumokra vonatkozó felfogását; még száz évvel később a pergéi APOLLONIOS sem értette meg világosan ARISTOTELÉS tanítását, bármilyen kiváló matematikus volt is egyébként.[11] — Mint látjuk, ez a felfogás rendkívül fontosnak tartja ARISTOTELÉS szerepét a görög matematika definíciós-axiómatikus megalapozásában. Szinte az a benyomásunk — az előbbi gondolatmenet alapján —, mintha ARISTOTELÉS érdeme volna az, hogy egyszer fölismerték a matematikai bizonyíthatóság elvi határait s ezzel együtt a definíciós-axiómatikus megalapozás lehetőségét, illetőleg szükségszerűségét. Nem tagadja ugyan az imént ismertetett felfogás sem, hogy ARISTOTELÉS elgondolásának kifejtésekor már jelentős matematikai anyagra támaszkodhatott — azaz más szóval: a matematika definíciós-axiomatikus megalapozásának legalább a kezdetei már ARISTOTELÉS előtt is meglehettek —, de mégis hangsúlyozza:[12] ARISTOTELÉS érdeme,

[8] Vö. K. v. FRITZ, „Die APXAI in der griechischen Mathematik", Archiv für Begriffsgeschichte Bd. 1. Bonn 1955.
[9] Analytica posteriora I 3, 72 b, 5 kk.; I 19—23; p. 83 b, 32—84 a 6.
[10] PROCLUS 183, 13 kk.
[11] K. v. FRITZ i. h. 64—65.
[12] K. v. FRITZ uo. 98.

hogy félreérthetetlenül leszögezte: minden tudománynak bizonyíthatatlan de mégis megtámadhatatlan principiumokból kell kiindulnia. Márpedig ha ez csakugyan így volt, akkor mégiscsak ARISTOTELÉS érdeme az, hogy legalább elvben — alig egy generációval korábban mint EUKLIDÉS — előkészítette a talajt a matematika definíciós-axiómatikus megalapozásához. Látszólag jól vág ehhez az elgondoláshoz az a tény is, hogy a pergéi APOLLONIOS még ARISTOTELÉS után is bizonyítani akarta EUKLIDÉS első egyenlőségi axiómáját; mintha ez is azt mutatná, hogy az emberek ARISTOTELÉS előtt aligha lehettek tisztában a matematikai bizonyíthatóság elvi korlátaival.

Nem óhajtom kétségbevonni ennek az itt vázolt felfogásnak a viszonylagos igazát. ARISTOTELÉS említett gondolatai részben csakugyan megvilágítják azokat a nehézségeket is, amelyekkel a korabeli matematikusoknak meg kellett küzdeniök. De azt hiszem, mégis túlzás volna ebből arra következtetni, hogy ARISTOTELÉSnek egyáltalán jelentős szerepe lett volna a görög matematika definíciós-axiomatikus megalapozásának előkészítésében. A görög matematikának azok az alapelvei, amelyeket EUKLIDÉS műve legelején összeállít, jóval az ARISTOTELÉSt megelőző időkből származnak.

Ezt a tényt — legalább részben — már a régebbi kutatás is fölismerte. TANNERY pl. figyelmeztetett arra,[13] hogy az „Elemek" első könyvének 4. és 7. definícióját — az „egyenes vonal" és a „sík felület" meghatározását — EUKLIDÉS egyáltalán nem használja művében. Még ennél is feltűnőbb, hogy helyenként az euklidészi definíciók terminológiája sem egyezik azzal a terminológiával, amelyet EUKLIDÉS tételeiben és bizonyításaiban használ. A „téglalap" neve pl. az első könyv 22. definíciójában görögül, *ἑτερόμηκες*, holott EUKLIDÉS ezt a síkidomot egyébként mindig *παραλληλόγραμμον*-nak nevezi. Ugyanez a 22. definíció említi a „rombusz" fogalmát is, amelyről EUKLIDÉS egyetlenegy tételében sem beszél; majd hallunk a „romboid"-ról (*ῥομβοειδές*), amelyet EUKLIDÉS később a tételek során egyáltalán nem különböztet meg a *παραλληλόγραμμον*-tól. De nem következetesek az „Elemek" első könyvének definíciói a „sokszögek" elnevezését illetően sem; mert a 19. definíció értelmében azt várnánk, hogy a „sokszögeket" *oldalaik* szerint fogjuk megnevezni (*τρίπλευρα, πολύπλευρα*), holott EUKLIDÉS később ezeket az idomokat mindig következetesen *szögeik* szerint nevezi meg (*τρίγωνον, πεντάγωνον* etc.).[14]

[13] P. TANNERY, "Sur la locution *ἐξ ἴσου*", Revue des Études grecques t. X 1897 14-18 = Mémoires Scientifiques (publiés par J. L. HEIBERG—H. G. ZEUTHEN, Toulouse-Paris 1912) II 540—544.

[14] P. TANNERY, "Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide", Bulletin des

TANNERY ezekhez a megfigyeléseihez azt a nyílván helyes következtetést fűzte, hogy az euklidészi „Elemek“ első könyvének definíciói bizonyára nem is magától EUKLIDÉS-től származnak.[15] EUKLIDÉSnek nagyon sok elődje volt már, s ezek a régebbi matematikusok — különösen ha „Elemeket“ állítottak össze — bizonyára ugyanúgy definíciókat bocsátottak fejtegetéseik elé, mint később maga EUKLIDÉS is tette. EUKLIDÉS pedig valószínűleg sok mindent készen vett át elődeitől.[16] Így történhetett meg aztán, hogy olyasmi is belekerült definíciói közé, amire a mű szempontjából tulajdonképpen már nem volt szüksége; máskor meg megfeledkezett arról, hogy ezeknek a definícióknak a terminológiája nem pontosan ugyanaz, mint a tételek és bizonyítások során használt terminológia. Ez ugyan súlyos hiba volt a matematika szempontjából, de mégis hálásak lehetünk érte EUKLIDÉSnek, mert éppen ez teszi lehetővé számunkra, hogy némi bepillantást nyerjünk az EUKLIDÉS-előtti matematika történetébe.

TANNERY ezt a sejtését igazában csak az „Elemek“ első könyvének definícióira vonatkoztatta. Azóta viszont — függetlenül TANNERYtől — hasonló történeti megítélésben részesült már EUKLIDÉSnek ún. kongruencia-axiómája is.[17] K. v. FRITZ ugyanis észrevette, hogy EUKLIDÉS ugyan felállítja ezt az axiómát, de aztán később — egy-két jelentéktelen esettől eltekintve — úgyszólván sohasem használja, holott gyakran lényegesen megkönnyíthette volna a dolgát azzal, ha éppen erre az axiómára hívatkozik. Ennek a különös eljárásnak az oka az, hogy EUKLIDÉS nyilván kerülni akarja az egymásra-illesztésnek azt az empírikus módszerét, amelyet ez az axióma szentesít.[18] Tudjuk viszont PROKLOS szövegéből, hogy a kérdéses axióma módszerét — az empírikus egymásra-illesztést — régebben olyan bizonyításokban is használták, amelyeket EUKLIDÉS már egyáltalán nem vesz föl művébe. Ezt a módszert tehát, amely — úgy látszik — még a görög matematika régebbi korszakából származik, EUKLIDÉS előtt gyakran használhatták. EUKLIDÉS viszont arra törekedett, hogy ezt a régi módszert lehetőleg kivetkőztesse eredeti empírikus jellegéből.[19] — A 7. euk-

Sciences mathématiques, 2e série, t. VIII 1884, 162—175 = Mém. Scient. II 48–63.

15 Mém. Scient. II 55.

16 Ugyanígy ítéli meg az euklidészi definíciókat A. M. FRENKIAN (Le postulat chez Euclide et chez les modernes, Paris 1940 14) is.

17 Eucl. Elem. I. Communes animi conceptiones VII: "Quae inter se congruunt, aequalia sunt."

18 K. v. FRITZ i. h. 76 k.

19 Uo. 94.

lidészi axióma — a kongruencia axiómája — tehát olyan módszert szentesít, amelyet EUKLIDÉS már lehetőleg kerülni igyekszik. Ez a körülmény arra mutat, hogy EUKLIDÉS kérdéses axiómája bizonyára éppenúgy régebbi korok öröksége, mint ahogy az előbb említett különös definíciók is csak azzal magyarázhatók, hogy ezek EUKLIDÉS korában tulajdonképpen már idejétmúlt hagyomány voltak. Az említett megfigyelések nagyon könnyen azt a gyanút kelthetik: vajon EUKLIDÉS többi matematikai alapelve nem ugyanígy régebbi korok hagyományából számazik-e? — Ez az elgondolás mindenesetre jól illenék ahhoz, ami ma már közismert EUKLIDÉS-ről. EUKLIDÉS tulajdonképpen nem volt nagy matematikus. Művének legfontosabb és legnehezebb részeit készen vette át más szerzőktől, főként THEAITÉTOStól (az „Elemek" X. és XIII. könyvét) és EUDOXOStól (az V. és XII. könyvet). Ezek a részek, valamint az „Elemek" aritmetikáról szóló könyvei (VII és IX), csakugyan magas színvonalon mozognak; más részek viszont messze elmaradnak ezek mögött, gyakran hibásak és fogalmazásukban itt-ott zavarosak. EUKLIDÉS matematikai színvonala nyilván attól függ, hogy milyen színvonalú forrás állott a rendelkezésére. Ott ahol kiváló matematikusok munkáit használhatta, ő maga is kiváló munkát végzett; ott viszont, ahol mintaképe alacsonyabb színvonalon mozgott, ő sem tudott magasabbra emelkedni. EUKLIDÉS nem teremtő géniusz, inkább csak ügyes didaktikus volt.[20] — Ha viszont az „Elemek" szerzője tudós komplikátor módjára szerkesztette művét, akkor eleve föltehető, hogy ugyanezzel a módszerrel állította össze tudományának alapelveit is. Kiindulhatunk tehát abból a föltevésből, hogy az euklidészi „Elemek" alapelvei bizonyára régebbi korok hagyományából származnak. Kérdés csak az: vajon történeti adatok támogatják-e ezt a föltevésünket?

2. Az aritmetika elsőbbsége

Mielőtt megkísérelném kimutatni néhány euklidészi alapelv történeti eredetét, érdemes lesz fölfigyelnünk a görög matematika egyik különös vonására. Mint ismeretes, a görög matematika túlnyomórészt *geometriai jellegű.* EUKLIDÉS legismertebb műve tulajdonképpen a geometria „elemeit" foglalja össze, s mindaz ami nem-geometria erősen háttérbe szorul nála, így pl. az egész aritmetika az „Elemek" VII., VIII. és IX. könyvében. Ma már tudjuk, hogy a görög matematikai tudománynak ez a tárgyalási módja

[20] B. L. van. der WAERDEN, Erwachende Wissenschaft, Basel-Stuttgart 1956, 323.

egy olyan általános „geometrizálásnak" a következménye, amely — jóllehet már az EUKLIDÉS előtti korokban divatba jött — igazában mégis másodlagos jelenség;[21] úgy látszik, ezt az utólagos „geometrizálást" az irracionális mennyiségek felismerése tette szükégessé.[22] Ahhoz ugyanis, hogy általános egzakt megoldást találjanak a másodfokú egyenletekre, át kellett térniök a számok területéről a geometriai mennyiségek területére. Az a bizonyos „geometrikus algebra", amelyet EUKLIDÉS „Elemeinek" II. és VI. könyve tárgyal, érvényes irracionális szakaszokra is, és mégis egzakt tudomány. — Tudjuk viszont, hogy a görögök régebben a matematikának ez előtt a geometrizálása előtt, még másképp ítélték meg a geometriát. A pythagoreus ARCHYTAS pl. i. e. 400 körül még a következőket írhatta „a logisztika (= aritmetika) mint tudomány messze fölülmulja a többit, különösen a geometriát, mert ez (= az aritmetika) világosabban kezeli tárgyát, mint amazok... és ahol a geometria már nem boldogul, a logisztika (= az aritmetika) még tovább bizonyít."[23] — Ezt az idézetet eddig szinte csak arra használta fel a történeti kutatás, hogy érzékeltesse azt a nagy változást, amelynek nem sokkal ARCHYTAS után — az irracionális mennyiségek felfedezése és az ezzel összefüggő általános geometrizálás miatt — be kellett következnie a tudományos szemléletben.[24] De egyáltalán

[21] Vö. O. NEUGEBAUER, „Zur geometrischen Algebra — Studien zur Gesch. der antiken Algebra III (Quellen und Studien zur Gesch. der Mathematik etc. Abt. B. Bd. 3 Berlin 1936 245—259) és B. L. van der WAERDEN, „Zenon und die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik", Math. Ann. 117, 1940 141—161.

[22] Lásd B. L. van der WAERDEN „Erwachende Wissenschaft" c. könyvében a 204. lapon kezdődő fejezetet: „Wozu die geometrische Einkleidung?"

[23] H. DIELS—W. KRANZ, Fragmente der Vorsokratiker[5] 47 (= Vorsokratiker[4] 35) Archytas B 4.

[24] O. NEUGERBAUER i. h. 247: „Die Prägnanz dieses Ausspruchs ist umso interessanter, als er ja nur um wenige Jahre älter ist, als die Geometrisierung der griechischen Mathematik, die wir als ihre *klassisöhe* Form anzusehen gewöhnt sind" és B. L. van der WAERDEN, Math. Ann. 117 1940, 158: „Wenige Jahrzehnte später hat sich das Blatt bereits gewendet: THEAITETOS entwickelt seine Klassifikation der irrationalen Strecken, und bei PLATO ist das Verhältnis zwischen Logistik und Geometrie vollständig umgekehrt (?). Die bisherige Logistik ist als Wissenschaft verpönt, die geometrischen Schlüsse sind die wahren Vorbilder exakter Beweisführung. Bei EUKLID ist die Algebra vollends aus dem Bereich der offiziellen Geometrie verbannt und darf nur in geometrischem Gewande, als Flächenrechnung oder geometrische Algebra ihr Dasein fristen." — Meg kel mégis jegyeznem, hogy ez az utóbbi idézet — ott, ahol a kérdőjelet (?) közbeszúrtam — nem elég egyértelmű. A valóságban ti. PLATÓN csak a *praktikus* logisztikát száműzi a tudományból — éppenúgy egyébként mint a *praktikus* geometriát is. Különben azonban mint teórétikus tudomány az aritmetika továbbra is megtartotta elsőbbségét — legalább elvben — a teóretikus geometriával szemben.

nem tették fel ezzel kapcsolatban azt a kérdést; tulajdonképpen miért is volt annyira bizalmatlan ARCHYTAS a geometriával szemben? — Mint majd később látni fogjuk; ez a kérdés döntő jelentőségű az egész görög matematika történeti fejlődésének a megértése szempontjából.

Úgy látszik, régebben a geometriát egyáltalán nem is tartották matematikai diszciplinának. JAMBLICHOS, a *Vita Pythagorica* szerzője megemlíti pl. egy alkalommal, hogy a legrégibb geometriai kézikönyvnek — az ún. „pythagorasi geometriának" (*ἡ γεωμετρία πρὸς Πυθαγόρου* —, amelynek alapján először tartottak geometriai tárgyú előadásokat,[25] *ΙΣΤΟΡΙΗ* volt a neve.[26] Ha mármost meggondoljuk egyrészt azt, hogy a pythagoreusok tudományukat, különösen a számokról szóló tanítást, *μαθήματα* névvel jelölték,[27] másrészt pedig azt, hogy *ἱστορίη* csak valamiyen empirikus, látásból származó tudást lehet,[28] akkor JAMBLICHOSnak idézett híradását nem is magyarázhatjuk másként, csak úgy, hogy abban az időben amikor a geometria még *ἱστορίη* volt, ezt az ismeretanyagot nem is tartották még igazi *μάθημα*-nak. — Úgy látszik, még PROKLOS, az euklidészi „Elemek" késői kommentátora is tud arról hogy a geometriát nem mindjárt kezdetben, csak valamikor később ismerték el igazi matematikai diszciplinának, és még akkor is csak az aritmetikát követő második helyre tették. Erre mutatnak PROKLOS következő szavai: „Hogy a geometria is része az egész matematikának, és hogy *második helyen áll az aritmetika után*..., ezt már kifejtették a régiek, nem szükséges itt részleteznünk."[29] Különösen tanulságosak ezek a szavak azért, mert ebből látjuk, hogy a geometriát — legalább elvben — még akkor is „másodrangú tudománynak" tartották, amikor már az egész görög matematikát régesrégen geometrizálták.

[25] Vö. B. L. van der WAERDEN, Erwachende Wissenschaft 191.

[26] JAMBLICHOS, Vita Pythagorica 89. — A hely magyarázatához lásd „A matematikai *bizonyítás* görög terminus technicusa" c. dolgozatomat az i. h.

[27] B. L. van der WAERDEN, „Die Arithmetik der Pythagoreer I", Math. Ann. 120 1947/49 127: Die Pythagoreer verstanden unter *μαθήματα* ein geordnetes System von Sätzen und Beweisen, und die grösste und erste von diesen Wissenschaften war ihnen die Lehre von den Zahlen (vgl. PLATON, Epinomis 990 C)". — ARISTOTELÉS Metaph. A 5. fejezet) szerint a pythagoreusok voltak az elsők, akik *μαθήματα*-val foglalkoztak; vö. K. REIDEMEISTER, Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949 52.

[28] B. SNELL, Die Ausdrücke für den Begriff des Wissens in der vorplatonischen Philosophie (Philologische Untersuchungen herausg. von A. KIESSLING und U. v. WILAMOWITZ—MOELLENDORFF 29. Heft, Berlin 1924) 59—71; A. FRENKIAN, Revue des Études Indoeuropéennes, Bucarest-Paris 1938 468—474.

[29] PROCLUS 48, 9 kk. Ugyanez az aritmetika és geometria rangsorolása PLATÓNnál is (Epinomis 990 CD).

Nem akarom egyelőre részletesebben tárgyalni azt a kérdést: mi az oka annak, hogy az antik tudományban az aritmetika és geometria egymáshoz való viszonyának problémája ilyen ellentmondó megítélésben részesült? — A különös ti. az, hogy egy történetileg jól meghatározható időpontban az egész görög matematikát geometrizálták, mert fölismerték ennek a tárgyalási módnak az előnyeit; természetes, hogy ebben a „geometrizált matematikában" az aritmetika csak alárendelt szerephez juthatott; úgy látszik azonban, ez mégsem akadályozta meg az antik teorétikusokat abban, hogy továbbra is az aritmetikát tartsák elsőrangú tudománynak, a geometriát pedig csak utána a második helyre tegyék. Anélkül, hogy már most magyarázatot keresnék erre a különös jelenségre, egyelőre inkább a következőkre hívom fel a figyelmet: az a körülmény, hogy volt a deduktív matematika kialakulása során egy olyan korszak, amikor a geometriát mégcsak *ἱστορίη*-nek nevezték, holott ugyanebben az időben az aritmetikát már a jóval igényesebb *μάθημα* szóval jelölték, arra mutat, mintha ebben az időben még csak az aritmetikát tartották volna „jólmegalapozott" matematikai diszciplinának, mintha ekkor még nem ismerték volna azokat az alapelveket, amelyek később lehetővé tették, hogy a geometriában is a matematika egyik részdiszciplináját lássák.[30] — Bár ez a gondolat egyelőre csak bizonytalan sejtés, mégis indokolhatja a következő módszertani kísérletet: keressük előbb az aritmetika alapelveinek történeti eredetét, és csak azután tegyük fel a kérdést: honnan származnak a görög geometria alapelvei. Mert igaz ugyan, hogy EUKLIDÉSZ csak az „Elemek" VII. könyvében kezdi tárgyalni az aritmetikát, de ez az eljárás — feltehetően — csak a görög matematika utólagos geometrizálásából következik; az említett meggondolások mindenesetre azt a gyanút keltik, mintha a görög matematika legrégibb alapelvei az aritmetikai alapelvek lettek volna.

A következőkben behatóbban vizsgálom a görög aritmetika alapelveit, azaz EUKLIDÉS „Elemei" VII. könyvének néhány definícióját.

3. Az egység és a számok

Az euklidészi aritmetika definícióinak vizsgálatát nagyon megkönnyíti az a körülmény, hogy az „Elemek" IX. könyvének „függelékében" (IX 21—36) fennmaradt az a bizonyos páros- és

[30] PROCLUS szerint (48, 9 kk.): *ἡ γεωμετρία τῆς ὅλης ἐστὶ μηθηματικῆς μέρος.*

páratlanról szóló tanítás, amely mai tudásunk szerint a görög deduktív matematika egyik legrégibb tételsorozata. O. Becker megállapítása szerint[31] ez a tételsorozat még az i. e. V. század közepéről vagy e század első feléből származik.[32] Szervesen hozzátartozik azonban ehhez a tételsorozathoz a VII. könyv néhány definíciója (6—9 és 12) is. Nyilvánvaló, hogy előbb tudniok kellett az antik aritmetikusoknak azt, hogy mi a „páros“ illetőleg „páratlan szám“, s csak azután kezdhettek hozzá egy ilyen tételsorozat összeállításához. Ugyanaz a datálás tehát, amely érvényes magára a tételsorozatra, érvényes kell hogy legyen az említett definíciókra. Tudta ezt már Becker is, bár nyomatékosan nem hangsúlyozta.[33] Könnyű lesz azonban kiegészítenünk Beckernek ezekre a definíciókra vonatkozó megállapításait. Világos ugyanis, hogy nemcsak az általa említett definíciók (VII. def. 6—9 és 12) tartoznak szervesen a páros és páratlan elméletéhez. Mert aligha lehet páros és páratlan számokat megkülönböztetni anélkül, hogy az ember ne gondolkoznék egyszersmind azon is: mi a *szám*? Többé-kevésbé tehát a *szám* definíciója is (VII. def. 2.) „alkotórésze“ az említett tételsorozatnak. Minthogy viszont az euklidészi definíció szerint: „a szám *egységekből* összetett halmaz“,[34] úgy látszik, az „egység“ definíciója (VII def. 1) sem hagyható ki a páros és páratlan elméletéből. Csakugyan találkozunk az „egy“ fogalmával nemcsak a „páratlan szám“ euklidészi definíciójának (VII def. 7) egyik változatában, hanem több ízben a páros és páratlanról szóló tanítás tételeiben illetőleg bizonyításaiban is. — Véleményem szerint tehát az „egység“ és a „szám“ definíciója szerves alkotórésze az említett tételsorozatnak; ezeknek a definícióknak is meg kellett már lenniök akkor, amikor a páros és páratlan elméletét fölépítették.

Felmerülhet ezzel a sejtéssel szemben az a gyanú, hogy az *egység* és a *szám* euklidészi definícióit talán mégis csak később, filozófiai spekulációk alapján fogalmazták meg, és nem már abban

[31] O. Becker, Quellen und Studien zur Gesch. der Mathematik etc. Abt. B Bd. 3, 1936 533—553.

[32] O. Becker, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg—München 1954 38.

[33] Lásd Grundlagen etc. i. h.: „Den Sätzen Elementa IX 21—34 sind die Definitionen 6—9, 12 aus dem VII. Buch voranzustellen.“

[34] *Ἀριθμός ἐστιν τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.* C. Thaer német fordítása (Die Elemente von Euklid, Leipzig 1935) ugyancsak használja e definíció német szövegében a „halmaz“ (Menge) kifejezést. Bár ez Euklidésszel kapcsolatban anakronizmusnak látszik, mégis lásd ehhez e dolgozat két utolsó fejezetét.

a régi korban, amikor magát a tételsorozatot összeállították. Ezt a gyanút főként az a meggondolás támogathatná, hogy a páros és páratlan elmélete csupa egyszerű, triviális tételből áll; az emberek az első pillantásra az a benyomása, mintha egyáltalán nem is volna szükségünk az *egység* és a *szám* pontos definícióira, ahhoz, hogy ilyen triviális tételeket fölállítsunk. — De ha jobban meggondoljuk, valójában még ez a tény sem ellene, inkább mellette szól annak, hogy az *egység* és a *szám* definícióinak meg kellett már lenniök akkor, amikor a kérdéses tételsorozatot összeállították. A különös ti. az, hogy bár a páros és páratlan triviális tételeit szinte soha senki kétségbe nem vonhatta, aki egy kevéssé is foglalkozott a számokkal, mégis ezeket a tételeket kínos pontossággal lépésről-lépésre bebizonyították; így volt ez egyébként — mai tudásunk szerint — az egész korai görög matematikában.[35] Ez viszont azt mutatja, hogy azt, aki e tételeket összeállította, tulajdonképpen nem is annyira az állítások konkrét tartalma érdekelte, mint inkább az elmélet fölépítése. Nyilván azt akarta bemutatni, hogyan haladunk lépésről-lépésre még egy ilyen egyszerű esetben is, ha valamit hiánytalanul bizonyítani akarunk. A páros és páratlan elméletének hiánytalan bizonyításához viszont nélkülözhetetlen az *egység* és a *szám* definíciója. — De szerencsére más úton is meggyőződhetünk arról, hogy a két említett definíció — az *egy* és a *szám* — csakugyan nagyon régi korból származik.

A VII. könyv első definíciója szerint: „*egy* az, ami szerint minden dolgot egynek mondunk."[36] A megfogalmazás annyira tömör, hogy az első pillanatra alig sejtjük, mi minden lappang mögötte. Minthogy azonban egy alkalommal PLATÓN is említi az „egységről szóló tanítást",[37] érdemes lesz közelebbről megvizsgálnunk, mit ért ezen. Egy ízben PLATÓN „Állam" c. dialógusában ezt olvassuk:[38]

„Hiszen tudod, hogy a matematikusok kinevetnék azt, aki megpróbálná felosztani az egyet, és semmiképpen sem járulnának hozzá kísérletéhez; mert ha te részekre akarnád bontani az *egységet*, ők ehelyett inkább megsokszoroznák, mert mindenképpen el akarnák kerülni azt, hogy az egy valaha is „nem-egy"-nek, hanem sok részből állónak tűnjék fel. Ha aztán valaki megkérdezné tőlük: miféle számokról beszéltek, ti különös emberek? Hát hol van

[35] Vö. B. L. van der WAERDEN, Math. Ann. 120 1947/49 139.

[36] *Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.*

[37] PLATON, Resp. VII 525: *ἡ περὶ τὸ ἓν μάθησις.*

[38] PLATON, Resp. VII 525 D—526 A.

olyan egység, amilyeneknek ti definiáljátok:[39] egyik a másikkal teljesen egyenlő, semmi különbség sincs közöttük, és egyik sem bontható részekre? — Ugyan mit felelnének erre a kérdésre? Nemde azt, hogy olyan számokról beszélnek, amelyeket csak elgondolni lehet, és amelyek másként mint gondolati úton nem is hozzáférhetőek."

Az egység tehát eszerint oszthatatlan. Igaz ugyan, hogy a gyakorlatban minden egység részeire bontható, s nyilvánvaló az is, hogy a görög kereskedők, építészek, mérnökök lépten-nyomon számoltak törtekkel is, de nem így volt ez ebben a régi tudományban. A görög aritmetika ARCHIMÉDÉS koráig egyáltalán nem vett tudomást a törtekről. Mint a Platón-idézet mondja, az aritmetikusok a részekre bontás helyett inkább megsokszorozták az *egyet*. A smyrnai THEÓN meg is magyarázza, hogyan értsük e szavakat: „Ha az *egyet* a látható dolgok világában osztjuk, akkor ez test mivoltában kisebb lesz és részeire bomlik ugyan, számszerűen azonban növekszik, mert az egy helyére sok dolog lép."[40] Ezek a szavak nemcsak az előbbi Platón-idézet értelmét magyarázzák, hanem — ami ezúttal fontosabb — reávilágítanak egyszersmind az euklidészi definíció értelmére is: *egy* az, ami szerint minden dolgot egynek mondunk". Ez a tény viszont már önmagában is fontos támpont az euklidészi definíció datálásához. Nyilvánvaló, hogy ennek a definíciónak a PLATÓNt megelőző időkből kell származnia, ha már PLATÓN is ugyanabban az értelemben beszélhetett az *egy*ről, mint az euklidészi definíció. — Ugyanezt a provizórikus datálásunkat támogatja a következő megfigyelés. B. L. van der WAERDEN megállapította az euklidészi „Elemek" VII. könyvéről, hogy ennek tételei minden valószínűség szerint még az i. e. V. századból származnak.[41] Azok a matematikai problémák viszont, amelyeket ez a könyv tárgyal, tulajdonképpen mind abból adódtak, hogy a törteket ki akarták küszöbölni a számelméletből, mert *az egyet oszthatatlannak tartották.*[42] Az *egység* euklidészi definíciójának meg kellett tehát már lennie i. e. V. században is. — A következőkben majd látni fogjuk, hogy valójában

39 *Ὦ θαυμάσιοι, περὶ ποίων ἀριθμῶν διαλέγεσθε, ἐν οἷς τὸ ἓν οἷον ὑμεῖς ἀξιοῦτέ ἐστιν ;* Az idézet utolsó előtti szavában a görög „axioma" szó töve rejlik. PLATÓN, korában az „axióma" szó még *definiciót* is jelenthetett. A terminológia kérdéséhez lásd „Die Grundlagen in der frühgriechischen Mathematik" (Studi Italiani di Filologia Classica 1958) c. dolgozatomat.

40 Idézi B. L. van der WAERDEN, Erwachende Wissenschaft 189.

41 B. L. van der WAERDEN, „Die Arithmetik der Pythagoreer I", Math. Ann. 120 1947/49 127—153.

42 B. L. van der WAERDEN, Erwachende Wissenschaft 188 k.

éppen ezzel a definícióval — *egy* — kezdődött az egész korai görög deduktív matematika.

Tanulságos előbbi Platón-idézetünk azért is, mert félreérthetetlenül megmagyarázza: miért tartják az aritmetikusok oszthatatlannak az *egységet*? Azt akarják ezzel elkerülni, „hogy az *egy* valaha is *nem-egynek*, hanem sok részből állónak tűnjék fel" (*εὐλαβούμενοι μή ποτε φανῇ τὸ ἓν μὴ ἓν ἀλλὰ πολλὰ μόρια*). Mert ha az *egy* osztható volna akkor ez azt jelentené, hogy az, ami *egy*, nemcsak *egy*, hanem egyszersmind ennek az ellenkezője: „nem-egy", *sok* is. Ez más szóval azt jelenti, hogy az *egy* oszthatósága implikálja azt a gondolatot: az egy fogalma magában zárja nemcsak az *egyet*, hanem ellenkezőjét, a „nem-egyet", a *sokat* is. — Látjuk e rövid interpretációból: mi vezetett tulajdonképpen az *egy* oszthatatlanságának a gondolatára? — Felfedezték az ellentmondást abban a gondolatban, hogy „az *egy* osztható" — más szóval: ez a gondolat implikálja egyszersmind azt is, hogy az egy fogalma ellentmondásos (az, ami *egy* ugyanakkor „nem-egy", *sok* is) —, s éppen ez az ellentmondás mutatta, hogy a vizsgált gondolat („az *egy* osztható") nem lehet igaz, ennek a gondolatnak az ellenkezője kell hogy igaz legyen: „az *egy* oszthatatlan".

Látjuk Platón-idézetünk eddig bemutatott interpretációjából:

1. Az *egység* euklidészi definíciója csakugyan pregnáns, többet mond, mint amennyit az első pillanatra látunk belőle. Mert ezt az állítást — „*egy* az, ami szerint minden dolgot egynek mondunk" — hajlandók volnánk az első pillantásra szinte semmitmondó, csak leíró megállapításnak tartani. Ezzel azonban alaposan tévednénk. Mert ezek az egyszerű szavak valójában még azt is megokolják: miért kellett a korai görög aritmetikának kiiktatnia a törteket a számelmélet köréből. A látszólag „semmitmondó" euklidészi definíció valójában egy elég hosszú gondolatsor zárótétele; ez a megállapítás igazában választ is a két lehetőség közül: *osztható-e* vagy *oszthatatlan-e az egy*?

2. Látjuk az előbbi Platón-idézetből azt is, mi vezetett az *egy* oszthatatlanságának a gondolatához, azaz: hogyan jutottak az *egy* euklidészi definíciójához; felismerték annak az állításnak, hogy „az *egy* osztható", *ellentmondásos jellegét*, és ebből a felismerésből látták, hogy csak a másik állítás lehet igaz: „az *egy* oszthatatlan". — Tanulságos a tárgyalt definíció keletkezésének itt megvilágított útja azért is, mert más összefüggésben rámutattam már arra, hogy a korai görög matematika bizonyításmódja gyakran ugyanez volt.[43] A pythagoreusok ún. indirekt bizonyítási módja

[43] Szabó Á., „Hogyan lett a matematikai deduktív tudománnyá?" i. h., és „A matematikai *bizonyítás* görög terminus technicusa" i. h.

éppen abból állt, hogy egy gondolatsor folyamán kimutatták valamely állítás ellentmondásos jellegét, amely állítás éppen azért nem is lehet igaz, s ez volt a bizonyíték arra, hogy a vizsgált állítás ellenkezője a helyes. Az *egy* definíciójának a felállításakor tehát ugyanazt az utat és ugyanazt a módszert követték — ti. az indirekt bizonyítást — mint nagyon sok levezetett tétel igazolásakor. Az *egység* euklidészi definíciója tulajdonképpen egy indirekt bizonyítás zárótétele. Ez a körülmény viszont egyszersmind cáfolat is arra a feltevésre, mintha a görög matematikában a szigorú bizonyítási mód kialakulása okvetlenül *korábban* kezdődött volna, mint az első definíciós megalapozási kísérletek.[44] Az a tény, hogy az *egység* euklidészi definíciója tulajdonképpen egy ugyanolyan indirekt bizonyítás zárótétele, mint amilyennel már a legrégibb ismert görög matematikai tételek bizonyításaiban is találkozunk, inkább amellett szól, mintha a legrégibb matematikai bizonyításokkal egy időből származhatnának a legrégibb definíciók is.

Még tovább következtethetünk, ha alaposabban megvizsgáljuk előbbi Platón-idézetünket. Ez az idézet ugyanis hangsúlyozza a következő gondolatokat: „az *egy* oszthatatlan", „csak gondolatban létezik", „minden *egy* önmagában teljesen egyforma és rész nélküli". Ha jól meggondoljuk ezt a jellemzést — és különösen akkor, ha nemcsak fordításban, hanem egyszersmind görög eredetijében is olvassuk a szöveg megfogalmazását: *ἴσον τε ἕκαστον πᾶν παντὶ καὶ οὐδὲ σμικρὸν διαφέρον, μόριον τε ἔχον ἐν ἑαυτῷ οὐδέν* — lehetetlen, hogy eszünkbe ne jusson: PARMENIDÉS. Hiszen ő hajszálpontosan ugyanezekkel a vonásokkal jellemezte az eleai „létezőt" (*τὸ ὄν*). Szinte találomra idézhetjük PARMENIDÉS tanítókölteményének töredékeiből a következő sorokat: „Nem is osztható a *létező*, mert egész és egyforma. Sem erősebb sem gyengébb lét nincs benne sehol, amely összefüggését gátolhatná: mindenütt egyformán *létezővel* van tele. Ezért összefüggő egészében, és *létező* tapad benne hiánytalanul *létező*höz."[45] Nem véletlen az sem, hogy az eleai filozófia rendszerében a *létező* (*τὸ ὄν*) és az *egy* (*τὸ ἕν*) tulajdonképpen azonos fogalmak.

Az a benyomásunk tehát, hogy az *egység* euklidészi definíciója valójában nem is egyéb, mint az eleai *létező*ről szóló tanítás tömör összefoglalása. Jellemző, hogy ehhez a definícióhoz is ugyanazon az úton — az indirekt bizonyítás alkalmazásával — jutottak el, mint ahogy PARMENIDÉS is indirekt úton jutott el a

[44] K. v. FRITZ i. h. 90 k.

[45] H. DIELS—W. KRANZ, Fragmente der Vorsokratiker^5 I 28 Parmenides B fr. 8, 22 kk.

létezőről szóló tanításához.[46] Az *egyről* szóló matematikai tanítás tehát (ἡ περὶ τὸ ἕν μάθησις), amelyet PLATÓN emleget,[47] azonos az eleai filozófiának a *létezőről* szóló tanításával.

Az a megállapítás, hogy EUKLIDÉS aritmetikájának legelső definíciója tulajdonképpen PARMENIDÉSnek a *létezőről* szóló tanítását foglalja össze, igazában egyáltalán nem meglepő. Többször rámutattam már arra, hogy pythagoreusok ún. indirekt bizonyítási formája — a korai görög deduktív matematika nélkülözhetetlen módszere — az eleai filozófiából származik. Kiemeltem azt is, hogy elképzelhetetlennek tartom a történeti folyamat fordított fejlődésrendjét: eredetileg *nem* a matematikusok fejlesztették ki saját gyakorlatukban az indirekt bizonyítás módszerét, és *nem* ők bocsátották később ezt a módszert az eleai filozófusok rendelkezésére, hanem éppen ellenkezőleg: a deduktív matematika első képviselői az indirekt bizonyítást az eleai filozófusoktól tanulták.[48] Valószínű volt tehát már régebbi kutatásaim alapján is, hogy a korai görög deduktív matematika elképzelhetetlen az eleai filozófia nélkül. Ugyanezt a megállapítást támogatja a most kifejtett felismerés: úgy látszik, az aritmetika definíciós megalapozásának első kísérlete is összefügg az eleai filozófia tanításával; ezért foglalja össze tömören az euklidészi aritmetika első definíciója PARMENIDÉSnek a *létezőről* szóló tanítását.

*

Az *egység* euklidészi definíciójának vizsgálata az eleai filozófia közelébe vezetett. Minthogy viszont ismeretes: nemcsak a tárgyalt definíció — amelyet a hagyomány magára PYTHAGORASra vezet vissza[49] — tömör összefoglalása a legfontosabb eleai tanításnak, hanem különben is vannak olyan vonásai a korai görög matematikának, amelyek eleai hatásra vallanak,[50] könnyen arra gondolhatnánk, hogy a legrégibb deduktív görög matematika talán nem is egyéb, mint az eleai filozófia továbbfejlesztése. Csakugyan azt hiszem, ez a gondolat — legalább részben — igazolható. Mielőtt azonban folytatnám ennek a nézetnek közelebbi megokolását, helyesbítenem kell a régebbi kutatásnak egyik elterjedt tévedését.

46 Vö. O. GIGON, Der Ursprung der griechischen Philosophie, Basel 1945 250.

47 PLATON, Resp. VII 525.

48 Lásd ehhez az 1. jegyzetben említett dolgozataimat, valamint e dolgozat 3. jegyzetének szövegét.

49 Vö. Sext. Emp. ad. math. X 260—261.

50 A gyakran használt indirekt bizonyítási formán kívül különösen a görög matematika antiempírikus és szemléletellenes tendenciájára gondolhatunk; lásd előbb említett dolgozataimat.

A tudományos irodalom az eleaták és pythagoreusok egymáshoz való viszonyát gyakran nem úgy ítéli meg, ahogy eddigi fejtegetéseimből következnék. A pythagoreusok aritmetikájában ugyanis nem az eleai filozófia továbbfejlesztését látják, hanem ehelyett az eleaták és pythagoreusok „szembenállásáról" beszélnek. Ez a felfogás, amelynek legjelentősebb képviselője annak idején TANNERY volt,[51] főként a következő három tétellel jellemezhető:

1. PARMENIDÉS filozófiája, jóllehet a pythagoreusok tanításaiból sarjadt ki (?), lényegében mégis a pythagoreusok *pluralista felfogása* ellen irányult.

2. A pythagoreusok voltak PARMENIDÉS legélesebb és legveszélyesebb ellenfelei, minthogy továbbra is kitartottak régebbi keletű pluralizmusuk mellett.

3. Az eleai ZÉNÓNnak, PARMENIDÉS tanítványának az érvei a pythagoreus pluralizmus ellen irányultak; ZÉNÓN azt akarta kimutatni érveivel, hogy a mozgás egyáltalán nem volna lehetséges, ha igaz volna a pythagoreusok pluralizmusa.

Ezek közül a gondolatok közül különösen elterjedt volt az utolsó pontban említett.[52] Bár a szakirodalom ma már elég szkeptikusan ítéli meg ezt a konstrukciót,[53] amely komolyanvehető érvekkel vagy antik adatokkal nem is támogatható, mégis érdemes lesz alaposabban megvizsgálnunk az egész elgondolásnak legalább a magvát. Kérdés ti. az: beszélhetünk-e egyáltalán az eleaták és

[51] "Pour l'histoire de la science hellène, Paris 1887" 249—250: Parménide avait écrit son poème dans un milieu ou, comme penseurs, les pythagoriens seuls étaient en honeur; il avait reproduit plus ou moins exactement leur enseignement exotérique... mais en tout cas, il avait nié la vérité de leur thèse dualiste. — p. 250: les attaques contre son poème durent donc venir surtout de pythagoriens, et c'est eux que Zénon prit à partie. — p. 248—249: Zénon n'a nullement nié le mouvement... il a seulement affirmé son incompatibilité avec la croyance à la pluralité.

[52] Lásd ezekhez C. THAER bibliográfiai adatait: „Antike Mathematik 1906—1930" (Bursians Jahresberichte über die Fortschritte der klass. Altertumswissenschaft 1943 Bd. 283 44. kk.), különösen F. CAJORI (Isis 3, 1920—21, 7—20), R. MONDOLFO (Riv. Fil. 5, 1927 433—452) és Ph. B. E. JOURDAIN (Mind 25, 1916 42—55; 28, 1919 123—124) dolgozatait. — ZÉNÓN argumentumainak ilyen értelmezése ellen foglalt állást: B. L. van der WAERDEN, Math. Ann. 117 1940 143 k.

[53] G. VLASTOS idézi pl. J. E. RAVEN könyvéről (Pythagoreans and Eleatics. An account of the interaction between the two opposed schools during the fifth and early fourth centuries B. C., Cambridge 1948) írt kritikájában (Gnomon 1953, 31) W. A. HEIDEL (The Pythagoreans and Greek Mathematics, AJPh 61 1940 21) megállapítását: „there is not, so far as I know, a single hint in our sources that the Greeks were aware of the purpose of Zeno to criticize the fundamental doctrines of the Pythagoreans."

pythagoreusok (= aritmetikusok) „szembenállásáról“, és ha igen, mi volt ez?

Mint ismeretes, az eleaták csak az *egy*nek, az *ὄν*-nak a létezését fogadták el és tagadták, hogy a *sok*, a *több* lehető volna, mert azt tartották, hogy ebben az utóbbiban kimutatható a gondolat önellentmondása.[54] Ha viszont tagadjuk a *sok*, létezését, akkor egyáltalán nem lehetséges semmiféle aritmetika. — Már ebből is látható, hogy az aritmetikusok nem tehették magukévá minden további nélkül az eleai tanítást. Átvehették ugyan az eleai filozófia elveit az *egyre* vonatkozóan, de a *sok* megítélésében szükségszerűen más álláspontra kellett helyezkedniök, mert különben magát az aritmetikát tagadták volna meg. Csakugyan, az aritmetika második definíciója EUKLIDÉSnél éppen a *sok* fogalmát vezeti be, amikor kimondja: „a szám *egységekből* összetett halmaz“.

Csakugyan volt tehát különbség eleaták és pythagoreusok között a *sok* megítélésében. De tévedés volna, ha azt hinnők, hogy ez a két irányzat — az eleaták és a pythagoreusok (= aritmetikusok) — szembenálltak egymással. Mert a pythagoreusok bevezették ugyan a *sok* fogalmát a „szám“ definíciójával, de ezzel még egyáltalán nem vonták kétségbe az *egy*ről szóló eleai tanítást; éppen ellenkezőleg, mint PLATÓN mondja: „megsokszorozták az *egyet*“.[55] Hogy pedig az *egy*nek ez a „megsokszorozása“ valóban az eleai tanítás továbbfejlesztése volt, azt a következőkből látjuk.

1. A görög aritmetikusok ugyanúgy kezelték a *számokat*, mint az eleaták a *létezőt*. PLATÓN egy alkalommal hangsúlyozza, hogy az aritmetikában a számoknak nincs látható és tapintható testük;[56] a *számok* csak gondolati elemek, amelyek másként mint gondolkozás útján nem is hozzáférhetőek.[57] Éppenígy óvta már PARMENIDÉS is tanítványait attól, hogy a létezőt az *ὄν*-t, érzékszerveikkel, látással, hallással vagy tapintással akarják tapasztalni; mint tanítókölteményében írja: „Ne bízd magad a sok mindennel kísérletező megszokásra: céltalan látásodra, zúgó hallásodra vagy nyelvedre. Ne ezekkel, *értelmeddel* döntsd el a sokatvitatott kérdést, amelyet eléd tárok“.[58] — Azáltal viszont, hogy a számok az aritmetika körében már ugyanolyan gondolati elemekké lettek, mint

[54] Vö. W. CAPELLE, Die Vorsokratiker, Leipzig 1935 173 kk.

[55] PLATON, Resp. VII 525 E.

[56] Uo. 525 D: *οὐδαμῇ ἀποδεχόμενον ἐάν τις αὐτῇ ὁρατὰ ἢ ἁπτὰ σώματα ἔχοντας ἀριθμους προτεινόμενος διαλέγηται.*

[57] Uo. 526: *ὧν διανοηθῆναι μόνον ἐγχωρεῖ, ἄλλως δ'οὐδαμῶς μεταχειρίζεσθαι δυνατόν.*

[58] Frg. 1, 34 kk.

amilyen az eleai filozófiában az *egy* volt, nem is lehetett már többé olyan könnyen kétségbevonni a „sok“ létezését, mint ezt megelőzően; hiszen az eleaiak a „sok“ fogalmát csak mint a tapasztalható és érzékelhető világ *konkrét* megjelenési formáját vonták kétségbe. A „szám“ viszont már nem ebben a konkrét értelemben volt „sok“, hanem mint az absztrakt eleai *egy* ugyancsak absztrakt megsokszorozása.

2. Egy másik, még fontosabb érv amellett, hogy a *szám* fogalma csakugyan az eleai *egy*nek, a *létező*nek a továbbfejlesztése, a következő. PLATÓN világosan megmondja, hogy mi volt az aritmetikusok célja az *egy* megsokszorozásával: ezzel akarták megkerülni az *egy* oszthatóságát.[59] A pythagoreus aritmetika a törteket csakugyan *számviszonyokká* (arányokká) alakította át s ezzel a tört helyébe tette ennek matematikai aequivalensét.[60] Vagyis a definícióval megteremtett új számfogalom lehetővé tette, hogy továbbra is fönntartsák azt az eleai tételt, hogy „az *egy* oszthatatlan“. (Nevezzük ezt a tételt a továbbiakban röviden az eleai „oszthatatlanság dogmájának“.)

Nyilvánvaló, hogy az a számfogalom, amelyet az euklidészi definíció bevezet — „a szám egységekből összetett halmaz“ — nem azonos a régi, naiv és hagyományos számfogalommal. A pythagoreus „szám“ nemcsak abban különbözik a mindennapitól, hogy a törteket figyelmen kívül hagyja — ha a *szám* egységekből összetett halmaz, akkor a tört *nem szám*. Még ennél is érdekesebb talán, hogy a pythagoreusok az *egyet* is kirekesztették a számok köréből. Bár a számsor az *eggyel* kezdődik, és köznapi felfogás szerint természetesen az *egy* is szám, ez nem volt összeegyeztethető a eleai-pythagoreus gondolkodással. Mert a számok mint egységekből összetett halmazok alkotórészeire, egységekre bonthatók, az *egy* maga viszont már oszthatatlan. Ezért az *egyet* kiemelték a számsorból és külön elbánásban részesítették. Ez vezetett aztán ilyen körülményes megfogalmazásokra: „Ha *a* valamely szám, vagy az *egy*. . .„[61] Érdekes azonban megfigyelni, milyen nehezükre esett az első görög matematikusoknak, a pythagóreusoknak állandóan szemelőtt tartani azt, hogy az *egy* nem szám. Hogy ezt példával illlusztráljam, hívatkozom az „Elemek“ VII. könyvének két tételére. (Mint ismeretes, B. L. van der WAERDEN kimutatta, hogy az euklidészi „Elemek“ VII. könyve pythagoreus eredetű, még az

[59] PLATON, Resp. VII 525 D—E. (A szöveg fordítását föntebb már idéztem.)
[60] B. L. van der WAERDEN, Erwachende Wissenschaft 189.
[61] B. L. van der WAERDEN, uo. 180, 1. jegyzet.

i. e. V. századból származik.[62]) Az egyik tétel, amelyikre hívatkozni akarok (VII 9), így hangzik:

„Ha valamely szám r é s z e[63] *egy másiknak, és egy további s z á m u g y a n a z a r é s z e ismét egy másiknak, akkor fölcserélve is az első szám úgy viszonylik a harmadikhoz, mint a második a negyedikhez.“*

Ez a tétel tehát kimondja, hogy ha $a:b=c:d$, akkor a belső tagokat fölcserélve is érvényes az arányosság: $a:c=b:d$. Ugyanezt mondja ki EUKLIDÉS VII 15 tétele is arra az esetre, ha $a=1$.

„Ha valamely számban megvan maradék nélkül az egység, és egy további szám u g y a n o l y a n m é r t é k b e n megvan maradék nélkül ismét egy másik számban, akkor fölcserélve is az egység úgy viszonylik a harmadik számhoz, mint a második a n e g y e d i k h e z.

Nem kétséges, hogy ez a tétel ugyanazt állítja, mint az előbbi, arra az esetre, ha $a=1$. Csak azért kellett ezt külön is felállítani és az előbbitől függetlenül újra bebizonyítani, mert antik elmélet szerint az *egy* „nem szám“. — Feltűnő azonban az utóbbi tétel rendkívül körülményes megfogalmazása. Azzal most nem érdemes foglalkoznunk, hogy a praemissa maga is semmitmondó tautológia „ha valamely számban megvan maradék nélkül az egység...“ — ez a feltételes mondat semmitmondó, mert a *szám* antik definíciójából („egységekből összetett halmaz“) eo ipso következik, hogy *minden* számban megvan maradék nélkül az egység. De el kell ismernünk, hogy a praemissának ez a semmitmondó jellege a szöveg eredeti görög fogalmazásából nem tűnik ki olyan élesen, mint amilyenné a magyar fordításban lett. Ez tehát még megbocsátható. — De az eredetiben is zavaróan hat az, hogy a szerző „*negyedik* szám“-ról beszél. Hiszen a tételt éppen azért kellett újra felállítania, mert antik elmélet szerint az *egy* „nem szám“. Márpedig ha ez így van, akkor az általa tárgyalt formulában ($1:b=c:d$) egyáltalán nincs „*negyedik* szám“. A szerző tehát ügyetlen fogalmazásával elárulta magát: mégiscsak úgy kezelte az *egyet*, mintha szám volna.

*

E fejezet összefoglalásaként megállapíthatjuk, hogy az euklidészi aritmetika első két definíciója — az *egy* és a *szám* — minden jel szerint az eleai filozófiai hatására vall. E definíciók meg-

[62] Math. Ann. 120 1947/49 127 kk.

[63] A „rész“ és „részek“ euklidészi terminusokkal a következő fejezetben foglalkozunk. E két tétel magyar fordításban igyekeztem megtartani az eredeti terminusokat.

fogalmazását döntő mértékben befolyásolta az osztás problémája, illetőleg az eleai filozófia oszthatatlanság dogmája. Ezt a nézetemet támogatja és kibővíti a következő fejezet.

4. A számok oszthatósága

A pythagoreusok csak azért tarthattak ki továbbra is az *egy* oszthatatlanságáról szóló eleai tanítás mellett, mert az *egyet* megsokszorozták *számokká*. Ezen az úton a tört helyébe állíthatták matematikai aequivalensét: két vagy több szám egymáshoz való viszonyát, az arányt. Ezzel azonban még korántsem oldották meg véglegesen az osztás problémáját. Mert az *egyet* most már ugyan valóban oszthatatlannak tarthatták, de azáltal hogy megsokszorozták, új értelme lett az *osztás* fogalmának. Ha a *szám* „egységekből összetett halmaz", akkor minden szám egységekre bontható, azaz „osztható" is. Látjuk tehát, hogy az „oszthatóság" fogalma — éppen az *egy* megsokszorozása következtében — új értelmet kapott. Az eleai filozófiában az a kérdés, hogy „osztható-e" vagy „oszthatatlan-e" még csak a *létezőre* (τὸ ὄν), az *egyre* vonatkozott, s ezért az eleaták a „*konkrét* sok" fogalmával együtt tagadhatták az „oszthatóságot" is; de egészen más lett a helyzet akkor, amikor a pythagoreusok az *egy* megsokszorozásával, azaz: a *szám* definíciójával megteremtették az „*absztrakt* sok" fogalmát. Újra fel kellett most már vetniök az „oszthatóság" kérdését is. — Csakugyan látni fogjuk majd a következőkben, hogy a legrégibb görög aritmetika alapvető, centrális problémája az oszthatóság kérdése volt.

Részben már a régebbi kutatás is felismerte azt, hogy az „oszthatóság" a pythagoreus aritmetika fontos problémája volt. B. L. van der WAERDEN utalt pl. arra, hogy valószínűleg éppen a *törtekkel való számolás* problémája adott alkalmat annak a régi pythagoreus számelméletének a felállítására, amelynek egy részét az euklidészi „Elemek" VII. könyve tárgyalja. Hangsúlyoznia kellett azonban, hogy e tételek szerzőjét az „Elemek" VII. könyvében nem annyira a számok oszthatósága, mint inkább az arányok és az arányok egyszerűsítésének a kérdése érdekelte.[64] A régi számelméletnek ez a töredéke nyilván még abból a korból származik, amikor a legfontosabb probléma az „*egy* oszthatatlansága" volt. Mindenekelőtt a törtek matematikai aequivalensét kellett megtalálni az arányokban; először erre öszpontosult a régi aritmetikusok

[64] Erwachende Wissenschaft 188 k.

figyelme. Ugyanakkor azonban fontos probléma volt maguknak a számoknak az oszthatósága is; ezt látjuk az „Elemek“ VII. könyvének több alapvető definíciójából. Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy — legalább részben — megvilágíthatjuk ezeknek a definícióknak a genezisét is.

A görög aritmetika legrégibb ismert tételsorozata, a páros és páratlan elmélete az osztás illetőleg pontosabban: a kétfelé-osztás problémájából sarjadt ki.[65] A legegyszerűbb fajta osztás: a kétfelé-osztás, a *felezés*. Az az ige, amellyel a görög aritmetika a *felezést* jelöli, *διαιρεῖν*, az eleai filozófia korábbi terminológiájában még csak általában az „oszthatóságot“ jelölte; *οὐδὲ διαιρετόν ἐστιν*, „nem is osztható (ti. a létező)“ — mondja PARMENIDÈS tanítóköltemenye.[66] Kétségtelen, hogy *διαιρεῖν* szó régebbi jelentése: „szétszedni, osztani“; ebben az értelemben használja ezt még PARMENIDÉS. A szónak ebből a régebbi, általánosabb jelentéséből csak *később* fejlődhetett ki az a speciális jelentés, amelyben ugyanez a szó az aritmetikában használatos: *„felezni* (ti. valamely számot)“.[67] Ebben az esetben tehát a szónak a jelentésfejlődése is azt mutatja, hogy az „osztás“ amely régebben az eleai filozófiában még nem volt több, mint magának a *létező*nek, az *egy*-nek meghatározatlan részekre való „oszthatósága“ (illetőleg pontosabban: *„oszthatatlansága“*) csak később az aritmetikában specializálódott valamely szám *„kétfelé*-oszthatóságának, illetőleg *„felezhetőségének“* a problémájává. A páros és páratlanról szóló pythagoreus elmélet a számokat aszerint különböztette meg, hogy „felezhetők“ vagy „nem-felezhetők“, *párosak* illetőleg *páratlanok*. Feltehető, hogy éppen ez a megkülönböztetés volt a kezdet a számok oszthatóságának behatóbb vizsgálata során; erre épült az egész tételsorozat, a páros és páratlan elmélete.

Miután azonban az „osztás“ eleai terminusát, a *διαιρεῖν* igét az aritmetikában a *felezés* megjelölésére foglalták le, a számok egyéb oszthatóságának jelölésére új terminusokat kellett bevezetniök. Ezeknek az új terminusoknak a genezise többé-kevésbé fényt vet a korai görög aritmetika történetére is.

[65] Lásd: Á. SZABÓ, „Eleatica“ i. h. 78 kk.

[66] H. DIELS—W. KRANZ, Fragmente der Vorsokratiker[5] I 28 B fr. 8, 22.

[67] Jellemző, hogy az euklidészi definíció (Elem. VII. def. 6 és 7) a *διαρεῖν* igét már csak a *δίχα* adverbiummal („kétfelé“) egészíti ki. A páros szám pontosabb definíciója PLATÓNnál még így hangzott: „két *egyenlő részre* osztható“ (Leg. 895 E). A régebbi, a platóni szóhasználat mutatja, hogy az eleai terminus aritmetikai értelmét kezdetben pontosabban meg kellett határozni. Később megelégedhettek a kevésbé pontos adverbium (*δίχα*) kiegészítésével is, mert ekkor a *διαιρεῖν* igét mint terminust az aritmetikában — a páros és páratlan elméletétől eltekintve — már egyáltalán nem használták.

Mindenekelőtt meglepő, hogy az „Elemek" VII. könyvében az aritmetikai definíciók több ízben használják azt a görög igét, amelyet egyébként a „mérés" megjelölésére szoktak használni: *μετρεῖν* vagy *καταμετρεῖν*. Feltűnő ennek az igének a használata azért mert a „mérés" sokkal inkább a geometriára jellemző, mintsem az aritmetikára. A törzsszám euklidészi definícióját pl. (VII def. 11) tartalma szerint a következőképpen fordíthatnánk magyarra: „törzsszám az, amelyben csak az *egy* van meg maradéktalanul"; az eredeti megfogalmazás azonban tulajdonképpen így hangzik: „törzsszám az, amelyet csak az *eggyel* lehet mérni".[68] A „mérés" igéjének a használata az aritmetikában fényt vet arra is, hogyan szemléltette az antik aritmetikus a *számokat* és az *egyet*. Mind a *számokat* mind pedig az *egyet* vonalszakaszok ábrázolták; természetesen a *szám* definíciója értelmében — „a szám egységekből összetett halmaz" — számok ábrázolására csak olyan szakaszokat választhattak, amelyek többszörösei voltak az *egy* ábrázolására választott szakasznak. A számoknak ez a vonalszakaszokkal való ábrázolása közismert és általános az egész antik aritmetikában. Bizonyos az is, hogy a „mérés" igéjének aritmetikai definíciókban csak akkor van értelme, ha a *számoknak* és az *egynek* erre az ábrázolásmódjára gondolunk. Amíg nem volt ilyen ábrázolásmód, addig nem is lehetett használni a „mérés" igéjét abban az értelemben, amelyben pl. ezt a törzsszám előbb idézett definíciója használja. Ez a körülmény viszont lehetővé tesz számunkra egy fontos kronológiai megállapítást. — Az antik aritmetikában ugyanis a számoknak vonalszakaszokkal való ábrázolását megelőzte egy ennél kezdetlegesebb ábrázolási mód. A páros és páratlan elméletét pl., mint O. BECKER kimutatta,[69] eredetileg nem vonalszakaszokkal hanem számolókövekkel (*ψῆφοι*) szemléltették. A páros számot felerészben fehér, felerészben pedig fekete kövekkel ábrázolták, míg valamely páratlan szám esetében eggyel több fehér vagy fekete követ használtak. (Hogy a vonalszakaszokkal való ábrázolás éppen a páros és páratlan esetében nem lehet az eredeti, arról meggyőzhet bennünket maga az euklidészi definíció is: „páratlan az a szám, amely **nem** felezhető". Már ebből is láthatjuk, hogy a páros és páratlan szám különbségét — a számnak vonalszakaszokkal való ábrázolása esetén — egyáltalán nem lehet szemléltetni, hiszen minden vonalszakasz felezhető.) — Amint ezt a kérdést más összefüggésben megvilágítottam már: a számolókövekkel való kezdetlegesebb szemléltetési módot akkor váltotta fel az antik aritmeti-

[68] *Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.*

[69] Quellen und Studien zur Gesch. der Mathematik etc. Abt. B. Bd. 3 1936 536 kk.

kában a számoknak vonalszakaszokkal való ábrázolása, amikor — a logikus, deduktív bizonyítási módra való áttéréssel egyidőben — antiempirikus és *szemléletellenes* tendencia jelentkezett az ókori tudományban.[70] Ha mármost valamely aritmetikai definícióban a „mérés" igéjével találkozunk, akkor ez kétségbevonhatatlan jele annak, hogy e definíció megfogalmazásakor a számokat már mint vonalszakaszokat ábrázolták. Minthogy viszont az előbbi gondolatmenet értelmében a számoknak vonalszakaszokkal való ábrázolása jele egyszersmind annak is, hogy már a *deduktív aritmetika* korában vagyunk, kimondhatjuk: az „Elemek" VII. könyvében azok az aritmetikai definíciók, amelyek a „mérés" igéjét használják,[71] már a deduktív tudomány új fogalmait írják le; ez más szóval azt jelenti, hogy e fogalmakat már a deduktív tudomány teremtette meg. — Természetesen új fogalmakat teremtett a deduktív aritmetika az *egy* és a *szám* esetében is, mert a köznapi használatban ezek a szavak nem ugyanazt jelentették, mint az aritmetikában; az *egy* köznapi felfogás szerint osztható volt, nem úgy mint az aritmetika „egy" fogalma, a *szám* pedig köznapi értelmezés szerint több volt, mint az, amit az aritmetikában *szám*nak neveztek, számon a törteket és az *egyet* is érthették. Ebben a két esetben azonban — az *egy* és a *szám* esetében — a deduktív aritmetika csak módosította a köznapi használatból átvett fogalmakat. Azokban az esetekben viszont, amelyeket most kezdek tárgyalni, az aritmetikai definíció olyan új fogalmakat teremt, amelyeknek megfelelője a köznapi használatból egyáltalán nem ismeretes.

Tanulságos pl. az „Elemek"VII. könyvének 3. és 4. definíciója: mind a kettő egy-egy olyan fogalmat határoz meg, amely a mai aritmetika szempontjából rendkívül egyszerű és közönséges. Ahhoz azonban, hogy e fogalmak genezisét is megértsük, meg kell vizsgálnunk mindkét definíció euklidészi megfogalmazását. A VII. könyv 3. definíciója ugyanis kimondja:

„Része valamely szám egy másik számnak, a kisebb a nagyobbnak, ha *méri a nagyobbat.*"

Tudjuk már az eddigiekből, hogyan értsük az idézett definíció utolsó kiemelt szavait. Ha egy kisebb szám „mér" egy nagyobb számot, akkor ez azt jelenti, hogy *maradéktalanul megvan*

[70] A következőkhöz lásd „A matematikai *bizonyítás* görög terminus technicusa" c. dolgozatomat az i. h.

[71] Ilyen definíciók pl. az Elemek VII könyve elején a 3., 4., 5., 8., 9., 10., 11., 12., 13., 14. és 15. — Jellemző, hogy a páros és páratlan szám definíciója — amely mai tudásunk szerint a legrégibb definíciók közé tartozik — még nem használja ezt az igét, pedig az egyöntetűség kedvéért itt is ezt várnánk.

benne. Ezt a viszonyt két szám között — amelyet tehát mi az „oszthatóság“ fogalmával jelölünk, a kisebb szám *osztója* a nagyobbnak — az idézett definíció úgy mondja, hogy a kisebb szám, amely „méri“ a nagyobbat, *része* (μέρος) amannak. Az „osztó“ fogalmának ez a megjelölése („rész“ = μέρος) önmagában még nem volna feltűnő. Érdekes azonban, hogy ennek a viszonynak az ellenkezőjét, tehát azt, hogy valamely kisebb szám „*nem*-osztója“ egy nagyobbnak, hogyan fejezi ki EUKLIDÉS definíciója? Mi lesz a neve annak a viszonynak két szám között, amellyel pl. a 8 : 3 arányban találkozunk, amikor a kisebb szám (3) „nem méri“ a nagyobbat (8), nincs meg benne maradéktalanul? — Éppen ezt nevezi meg EUKLIDÉS másik vizsgálandó definíciója (VII. def. 4.):

„Részei (μέρη) valamely szám egy másik számnak, a kisebb a nagyobbnak, ha nem méri (azaz: ha nincs meg benne maradéktalanul).“[72]

Mint látjuk, a különös ebben az esetben tulajdonképpen az, hogy a „*nem*-osztó“ fogalmát ugyanannak a szónak a többesszámával („részek“ = μέρη) írják körül, amelynek egyesszáma az „osztót“ jelölte. Még feltűnőbb ez az antitézis — „rész“ és „részek“ ahelyett, hogy „osztó“ és „*nem*-osztó“ — akkor, ha figyelembe vesszük, hogy a páros és páratlan szám antitézisét az euklidészi definíció is a mi gondolkozásunknak megfelelően írja le: „felezhető“ és „*nem*-felezhető“. — Mi lehet mármost a történeti magyarázata ennek a különös definíciós antitézisnek: „rész“ és „részek“?

Úgy gondolom, ennek a két definíciónak a genezisét jobban megértjük akkor, ha arra gondolunk, hogyan alakult ki az aritmetika rendszere az eleai filozófia tanításaiból. Az eleaták szerint a *létező* „egy“ és „oszthatatlan“, vagyis nyilvánvaló, hogy az eleai filozófiában a „rész“ (μέρος) fogalma nem is játszhatott pozitív szerepet; az eleatáknak a *sok* fogalmával, a pluralizmussal együtt a „részt“ is tagadniok kellett. Megváltozott azonban a helyzet akkor, amikor a pythagoreusok az *egyet* megsokszorozták és a számot mint „egységekből összetett halmazt“ definiálták. Az „oszthatóság“ filozófiai problémája ezáltal újra aktuálissá lett s egyszersmind differenciálódott is. Kézenfekvő volt ekkor a legegyszerűbb fajta oszthatóság a („felezhetőség“) jelölésére a leggyakrabban használt eleai terminust, a διαιρεῖν igét használni. Ugyanakkor viszont azt a névszót — „rész“ = μέρος — amely az eleaták által még tagadott „osztás“ eredményét jelölte, fölhasználhatták a számok egyéb oszthatóságának a megjelölésére. Minthogy pedig a defini-

[72] Def. 4. Μέρη ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν μὴ καταμετρῇ.

ció szerint a szám egységekből áll — „egységekből összetett halmaz“ —, semmi akadálya sem lett volna annak, hogy az egységeket a szám részeinek tekintsék. Úgy látszik, csak a terminusokkal való takarékoskodás az oka annak, hogy az antik aritmetika azokat az egységeket, amelyek együttvéve valamely számot alkotnak, sohasem nevezi részeknek. (Mert azt, hogy az *egy* minden számnak osztója, úgy is ki lehetett fejezni, hogy az *egy* minden számot *mér*.[73]) A „részek“ terminust inkább lefoglalták annak a viszonynak a jelölésére, amikor két szám közül a kisebb *nem* volt osztója a nagyobbnak. *Részek*nek nevezték ebben az esetben a kisebb számot a nagyobbhoz viszonyítva azért, mert a kisebb szám ilyenkor nagyobb számnak csak bizonyos „részeit“ (*μέρη*), egységeit foglalta magában. Amikor viszont a kisebb szám maradéktalanul megvolt a nagyobb számban, azt mondhatták, hogy a kisebb ilyenkor a nagyobbnak nemcsak bizonyos „részeit“ (= egységeit) foglalja magában, hanem teljes egészében is csakugyan „része“ (= osztója) amannak.

Úgy látszik tehát, hogy a görög aritmetikának ez a két terminusa — „rész“ és „részek“ — ugyanúgy az eleai filozófia tanításának önálló továbbfejlesztése során alakult ki, mint az „osztás“ jelölésére használt *διαιρεῖν* ige új, aritmetikai jelentése („felezni“).

Végül pedig arra kell még felhívnom a figyelmet ebben a fejezetben, hogy a törzsszámok és összetett számok alapvető euklidészi megkülönböztetése ugyancsak az oszthatóság vizsgálatából vezethető le. Miután ugyanis megállapították, hogy a szám definíciója értelmében az *egy* minden számnak osztója — az *egy* minden számot *mér* —, lehetővé vált a számok következő dichotomikus megkülönböztetése: azok a számok, amelyeknek osztója „csak az *egy*“ az ún. *törzsszámok* (VII. def. 11), és azok a számok, amelyeknek osztója „nem csak az *egy*“ (tehát az *egy*en kívül valamely „szám“ is, vö. VII. def. 13) az ún. *összetett számok* (= nem törzsszámok).

*

Ha mármost áttekintjük legutóbbi két fejezetünk eredményeit, megállapíthatjuk, hogy azok a legfontosabb alapvető aritmetikai definíciók, amelyeket az euklidészi „Elemek“ VII. könyve elé bocsátott gyűjteményből kiemeltünk — „egy“, „szám“, „páros szám“, „páratlan szám“, „rész“, „részek“, „törzsszám“, „összetett szám“ — úgy látszik, egytől-egyig mind az eleai filozófia szerves továbbfejlesztéseként magyarázhatók. A döntő probléma, amely ezeknek a

[73] Közvetve ezt mondja ki a *szám* definíciója is: „egységekből összetett halmaz“.

definícióknak a megfogalmazását egyáltalán szükségszerűvé tette, az „oszthatóság“ filozófiai kérdése volt, illetőleg az eleaták oszthatatlansági dogmája. A pythagoreusok továbbra is ki akartak tartani a legfontosabb eleai tanítás értelmében az ellentmondásmentesség elve mellett.[74] Ezért előbb a *szám* definíciójával — az *egy* megsokszorozásával — megteremtették az „absztrakt *sok*“ fogalmát, majd pedig, hogy az oszthatóságnak ezáltal újra felmerülő problémáját ellentmondásmentesen megoldják, az eleaták példájára dichotomikus definíciókat vezettek be. — Úgy látszik, ez volt a kezdete a görög aritmetika definíciós megalapozásának bizonyára még az i. e. V. század első felében.

5. Az oszthatóság és a geometria

Más összefüggésben röviden megemlítettem már, hogy a geometriában korántsem volt olyan könnyű alkalmazni az eleaták elveit, mint az aritmetikában.[75] Amikor pl. megpróbálták, hogy az eleai tanítás értelmében ne empirikusan, érzéki tapasztalás útján igazoljanak valamely ismeretet — vagyis amikor a matematikában már nem elégedtek meg egyes konkrét esetek szemléletes bemutatásával, hanem logikus úton általános érvényű absztrakt bizonyításokat kerestek-, viszonylag könnyű volt a számokat úgy kezelni, mint pusztán gondolati elemeket. Tulajdonképpen csak a konkrét adott számoktól kellett valahogyan megszabadulniok az aritmetikusoknak; ezért a számokat nem ábrázolták többé számolókövekkel, hanem azt mondták: legyen valamely tetszőleges vonalszakasz valamilyen tetszőleges szám képe. Ennek az újfajta „szemléltetésnek“ megvolt az a nagy előnye, hogy mindig tudhatták: nem azokról a vonalszakaszokról van szó, amelyek valamely adott esetben bizonyos számokat képviselnek, hiszen ugyanezek a vonalszakaszok más esetben egészen más számokat is képviselhettek. Szinte sohasem fenyegetett az a veszély, hogy az ábrázolás puszta eszközét (a vonalszakaszt) és azt, amit így ábrázoltak (a számot), összetévesztik. De korántsem volt ilyen egyszerű a helyzet a geometriában; itt már alig tudták érvényesíteni azt az eleai elvet,

74 Nem térhetek ki ebben a dolgozatban arra a tételemre, hogy az eleaták legfőbb érdeme a logikai ellentmondásmentesség elvének megfogalmazása volt. Csak utalok ezúttal régebbi dolgozataimra: „Beiträge zur Gesch. der griechischen Dialektik“ (Acta Antiqua Acad. Scient. Hung. I 1953 377—410), „Zur Gesch. der Dialektik des Denkens“ (uo. II 1954 17—62), „Zum Verständnis der Eleaten“ (uo. II 1954 245—289) és „Eleatica“ i. h.

75 Lásd „A matematikai *bizonyítás* görög terminus technicusa“ i. h.

hogy elszakadjanak az érzéki tapasztalástól és pusztán a gondolkozás útján igazolják valamely állítás helyességét. A geometriai idomok távolról sem voltak olyan elvont, csak gondolati elemek, mint a számok. Hiába hangsúlyozták volna pl., hogy a háromszög, amelyet lerajzolnak, sohasem azonos a csak elgondolható háromszöggel; természetes, hogy a geometriában nem voltak olyan éles határok az ábrázolás puszta eszköze és az ábrázolt gondolati tartalom között, mint amilyenek az aritmetikában viszonylag könnyen érvényesíthetőek voltak. Épenígy a geometriai bizonyításban sem volt olyan könnyű megszabadulni a konkrét szemléltetéstől, vagyis az érzékszervek útján nyert tapasztalástól, mint amilyen könnyen megvalósítható volt ez az aritmetikában. EUKLIDÉS ugyan mindent elkövetett, hogy geometriai tételeinek és bizonyításainak konkrét szemléletességét legalább elkendőzze,[76] de ez a törekvése legtöbbször eredménytelen maradt: ábrái többé-kevésbé mégiscsak szemléletesre sikerültek.

Még nagyobb nehézségekbe ütköztek az első matematikusok akkor, amikor a geometriában is vizsgálni kezdték az „oszthatóságnak“ azt az eleai problémáját, amely az aritmetika felépítésében olyan termékenynek és ösztönző hatásúnak bizonyult. Már a legrégibb pythagoreus aritmetikában is kimutathatók a nyomai annak, hogy az oszthatósággal kapcsolatos geometriai nehézségeket a görög matematikusoknak igen korán észre kellett venniök. Ennek igazolására érdemes lesz közelebbről megismernünk EUKLIDÉS egyik aritmetikai tételének a bizonyítását. A vizsgálandó tétel az „Elemek“ VII. könyvében található (VII. 31), amelyről — mint már említettem — ismeretes, hogy pythagoreus eredetű, még az i. e. V. századból származik.[77] A tétel maga kimondja: *Minden összetett számnak osztója valamely törzsszám.* A bizonyítás gondolatmenete a következő:

Legyen a valamely tetszőleges összetett szám. Bebizonyítandó, hogy van olyan törzsszám, amely osztója ennek az a összetett számnak. Minthogy a összetett szám, a 13. definíció értelmében osztója ennek valamely b szám, mert összetett éppen az a szám, amelynek osztója valamely más, nála kisebb szám. (Ne feledkezzünk meg arról, hogy az antik aritmetika szerint: az *egy* nem szám!). A b szám viszont, amely osztója a számnak, vagy törzsszám, vagy nem-törzszám (= összetett szám); harmadik lehetőség nincs. Ha törzsszám b, akkor máris igaznak bizonyult a VII. 31. tétel, mert megvan az a törzsszám, amely osztója a számnak; ha viszont

[76] Lásd uo.
[77] B. L. van der WAERDEN, Math. Ann. 120 1947/49 127—153.

nemtörzsszám (= összetett szám) *b*, akkor ismét a 13. definíció értelmében osztója *b*-nek valamely *c* szám, amely ennek folytán osztója természetesek *a*-nak is. Ez a *c* szám viszont megint vagy törzsszám vagy nem-törzsszám; harmadik lehetőség nincs. Ha törzsszám *c*, akkor igaznak bizonyult a VII. 31. tétel, mert megvan az a *c* törzsszám, amely osztója *a* összetett számnak; ha nem-törzsszám *c*, akkor tovább vizsgáljuk ennek a számnak *d* szám osztóját, illetőleg esetleg *d* szám további osztóit mindaddig, amíg olyan törzsszámot nem találunk, amely osztója *a* összetett számnak. A bizonyítás hangsúlyozza, hogy ezen az úton végül is találnunk kell egy olyan törzsszámot, amely osztója *a* összetett számnak. Mert ha nem találnánk olyan törzsszámot, amely osztója volna *a* számnak, akkor ez azt jelentené, hogy *a* számnak végtelen sok folyton kisebbedő osztója van, amelyek mind összetett számok, ez pedig a számok körében nem lehetséges (*ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς*).

Feltűnő e bizonyítás utolsó, görögül is idézett mondata, amely azt állítja: a *számok körében nem lehetséges*, hogy valamely mennyiségnek végtelen sok folyton kisebbedő osztója legyen. Ez a megfogalmazás ugyanis felkeltheti a következő gyanút: Vajon e bizonyítás szerzője nem azért beszélt-e olyan körültekinthető óvatossággal a *számok köréről*, amelyben nem lehetséges, hogy valamely mennyiségnek végtelen sok folyton kisebbedő osztója legyen, mert tudomása volt arról, hogy van egy olyan terület is, ahol ugyanez nagyon könnyen lehetséges? — Csakugyan kimutathatjuk, hogy az i. e. V. században — tehát éppen abban az időben, amikor B. L. van der WAERDEN sejtése szerint az euklidészi „Elemek" VII. könyvének keletkeznie kellett — sokatvitatott probléma volt: „valamely mennyiség végtelen sok folyton kisebbedő osztója". Nem kell ennek az állításnak az igazolásához egyéb, minthogy emlékeztessünk az eleai ZÉNÓN paradox érvelésére, amely szerint a mozgás azért nem lehetséges, mert a mozgó testnek előbb a pálya felét kellene befutnia; mielőtt azonban a mozgó test ezt a felezési pontot elérhetné, előbb a fél-pálya felét kellene megtennie. Továbbfolytatva az így elkezdett felezést, kiderül, hogy a mozgó test pályája tuladonképpen végtelen sok szakasz összege.[78] — Nem lényeges most az a kérdés: hogyan ítéljük meg ZÉNÓN említett paradoxonát; az mindenesetre bizonyos, hogy elképzelhetetlen volna ez az érvelés, ha nem tudnák, hogy minden szakasz folytonos felezéssel végtelen sok, egyre kisebbedő szakaszok összegére bont-

[78] Lásd ARISTOTELES, Phys. Z 9.239 b 9 és 2.233 a 21.

ható;[79] viszont az így keletkező egyre kisebbedő szakaszok mindegyike természetesen maradéktalanul megvan az egész szakaszban, vagyis az egész szakasznak végtelen sok folyton kisebbedő osztója van.

Világos tehát, hogy a tárgyalt euklidészi tétel (VII. 31) bizonyítása a „számok körét“ éppen a szakaszok körétől, azaz a geometriától akarta elhatárolni. Valóban, antik felfogás szerint éppen abban állott az aritmetika nagy előnye, hogy ezen a területen sikerült megoldani az oszthatóságnak azt a problémáját, amelyet mai tudásunk szerint az eleaták vetettek fel. Miután az *egyet* oszthatatlannak tekintették, a *számot* pedig mint „egységekből összetett halmazt“ definiálták, világos volt, hogy a számok körében bármely meghatározott mennyiségnek csak véges számú osztója lehet. A végtelenül továbbfolytatható osztás lehetőségével együtt pedig kiküszöbölték az antik számelméletből azt is, amit a görög matematika *ἄρρητον*-nak, kimondhatatlannak, irracionálisnak, vagy más szóval ellentmondásosnak tartott.[80]

De nem alkalmazhatták ilyen egyszerűen az eleaták elgondolását a geometriára. A legnagyobb nehézség ti. abból következett, hogy úgy látszott, mind az anyag mind pedig a tér *végtelenül osztható* . Éppen ezért arra a következtetésre kellett jutniok, hogy sem az anyagban sem a térben — vagyis a geometriában — nincs valami olyasmi, amit *legkisebbnek* lehetne nevezni.[81] Viszonylag könnyű volt — mindaddig, amíg csak számokról beszéltek — a pusztán gondolatban létező *egy*re hívatkozni, amely oszthatatlan és legkisebb; de nem találtak ilyen legkisebb egységet a geometriában. Mint PROKLOS mondja: „a geometriában egyáltalán nincs olyasmi, ami a legkisebb volna, és ott, ahol az osztás végtelenül folytatható, ott megvan az irracionális (az ésszerűtlen, *τὸ ἄλογον*) is.“[82] Semmi akadálya sem volt annak, hogy az aritmetikában az *egy*ből és a *számok*ból induljanak ki, mert ezeknek nem volt anyaguk, és mint pusztán gondolati elemek ellentmondásmentesek lehettek, de a geometriában természetszerűleg nem találtak ilyen egyszerű elemeket, amelyekből kiindulhattak volna. „Világos, hogy a számok anyagtalanabbak és tisztábbak, mint a geometriai meny-

[79] Vö. A. A. FRAENKEL, Abstract Set Theory, Amsterdam 1953 10 k. Megjegyzendő azonban, hogy FRAENKEL ZÉNÓN két argumentumát, az előbbi jegyzetben említettet és az ún. *Achilles*t (ARISTOTELES, Phys. Z. 9.239 b 14) összevonja; ezért írhatja összefoglalásul: „an apparently intuitive instance of an infinite aggregate is given by the set of all the segments that Achilles has to cover until he can overtake the tortoise.“

[80] PROCLUS 60, 7 kk. Vö. „Eleatica“ i. h. 96 kk.

[81] PROCLUS 60, 11 kk.

[82] Uo. 60, 15.

nyiségek, és hogy ezért a számok alapja (principiuma ἀρχή-ja) is egyszerűbb, mint a geometriai mennyiségeké" — írja PROKLOS.[83]

Meglepőek e legutóbbi Proklos-idézetek a történész számára többek között azért is, mert az euklidészi „Elemek" ókori magyarázója, PROKLOS újplatónikus filozófus volt, aki az i. sz. V. században, tehát majdnem nyolcszáz évvel később élt, mint EUKLIDES. Azok az eleai eredetű gondolatok viszont, amelyeket a legutóbbi Proklos-idézetekből is kiolvashatónak tartok, még jóval az EUKLIDESt megelőző korból, az i. e. VI. század végéről vagy az V. elejéről származnak. — Dehát egyáltalán szabad-e az eleai filozófusoknak a matematikai gondolkozásra gyakorolt hatását egy olyan antik szerzőnek a szavaival illusztrálni, aki kb. 1.000 évvel később élt, mint a szóbanforgó eleai filozófusok, és amikor ez a szerző — PROKLOS — az említett helyen egyáltalán nem is hívatkozik az eleatákra? — kérdezhetné az elfogulatlan olvasó. De bármennyire indokoltnak látszik is az első pillantásra — éppen a szokatlanul nagy idő-intervallum miatt — a kétkedő tartózkodás PROKLOS gondolatainak eredetét illetően, hangsúlyoznom kell, hogy az adott összefüggésben alaptalan a gyanú. Minden jel arra mutat, hogy PROKLOS az itt vizsgált kérdésben megbízható forrás. A geometriának azokat a nehézségeit, amelyeket PROKLOS a tér végtelen oszthatóságára vezet vissza, csakugyan az eleaták fedezték fel legkorábbban. Az eleai ZÉNÓN pl. számos érvet tudott felsorolni annak a bizonyítására, hogy a „tér" fogalma ellentmondásos, s ezekben az érvekben nemegyszer éppen a végtelen oszthatóságra utalt.[84] Az eleaták nem riadtak vissza attól sem, hogy levonják a következtetést a térre vonatkozó felismerésükből: az, ami annyira ellentmondásos, mint a „tér" fogalma, éppoly kevéssé lehet valóság, mint a többi ellentmondásos fogalom, pl. „mozgás", „keletkezés" vagy „idő"; ez más szóval azt jelenti, hogy az eleaták *tagadták* a tér létezését.[85]

Ha viszont tagadjuk a tér valóságát, akkor nem lehetséges a térről szóló tudomány, a geometria sem. Ha a „tér" ellentmondásos fogalom, akkor azok közé tartozik ez is, amelyek eleai felfogás szerint érzékszerveink útján tapasztalhatók ugyan, de amelyek az ellentmondásmentes gondolkozás számára felfoghatatlanok, azaz megismerhetetlenek. Ilyennek tartották az eleai filozófusok pl. a „mozgást". Nyilvánvaló, hogy tudták az eleaták is: a mozgás a *gyakorlatban* lehetséges, lépten-nyomon bizonyítja ezt érzéki ész-

[83] PROCLUS 95. 23 kk.
[84] Vö. W. CAPELLE, Die Vorsokratiker, Leipzig 1935, 172 k.
[85] Vö. PLATON, Theait. 180 E.

revevésünk. Az a körülmény, hogy mégis *tagadták* a mozgást, csak annyit jelenthet, hogy úgy gondolták: a mozgás az érzékszervek útján tapasztalható, de a logikus, ellentmondásmentes gondolkozás számára felfoghatatlan, elgondolhatatlan. (Ezt jelenti az az eleai tétel, hogy a mozgás csak hamis látszat — *δόξα* —, olyasvalami, amiről nem lehet tudásunk.) Bizonyára így kell értenünk azt a másik eleai tételt is, hogy „nincs tér". A térre vonatkozó tudásunk ugyanúgy ellentmondásos, mint a mozgásra vonatkozó tapasztalatunk. Más szóval: eleai felfogás szerint úgy kellene megítélnünk a térre vonatkozó tudást is, mint a mozgásra vonatkozó tapasztalatot: ezek csak érzékeléseink eredményei.

Úgy látszik, a régi pythagoreusok — akik, mint láttuk már, az aritmetikában az eleai elvek megvalósítására törekedtek — kezdetben átvették a térre vonatkozó tudás eleai megítélését is. Legalábbis erre mutat az a körülmény, hogy egy föntebb idézett híradás szerint a geometria legrégibb kézikönyvének, az ún. pythagorasi geometriának *ἱστορίη* volt a neve.[86] A *ἱστορίη* szó eredetileg csak látásból származó empirikus tudást jelölhetett.

De a geometriának ez a megítélése hosszú időre magukat a pythagoreusokat sem elégíthette ki. Mert ez a tudomány már az őket megelőző időben is elég fejlett volt. Még ha nem is volt a geometria a régebbi korban deduktív tudomány, bizonyára több lehetett már, mint amennyit a *γεωμετρία* elnevezés jelenteni látszik: praktikus-empirikus ismeretek összessége a földmérésről. Az iónok régi földmérésének[87] már az eleatákat megelőző időkben is abban az irányban kellett fejlődnie, amely később — minden jel szerint éppen az eleaták nyomán és főként a pythagoreus aritmetika példájára — a teórétikus tudományhoz vezetett. Erre mutat az a körülmény, hogy a történeti hagyomány szerint már a milétoszi THALÉS ismerte a geometriai „szög" fogalmát, szögekre vonatkozó tételeket állított fel, sőt valamiképpen — feltehetőleg szemléletesen és empirikusan — bizonyította is a tételeit. Érthető, hogy már ezek a történeti előzmények is a geometria elvi megalapozására ösztönözhették a pythagoreusokat.

Az elvi megalapozás kezdetben, úgy látszik, abból állott, hogy minden további nélkül az aritmetikát tették meg a geometria alapjává. Ezért mondhatta PROKLOS, hogy „a geometria második helyen áll az aritmetika után, minthogy ezáltal lesz teljessé és ettől nyeri határait."[88] Ennek az állításnak a tartalmát csak akkor

[86] Lásd föntebb „Az aritmetika elsőbbsége" c. fejezetet.

[87] U. v. WILAMOWITZ—MOELLENDORFF, Platon I 493: „Ionisch ist das Wost und die Sache (scil: *γεωμετρία*)"; vö. B. SNELL i. h. 78.

[88] PROCLUS 48, 9 kk.

értjük meg igazán, ha közelebbről vizsgáljuk a „pont" euklideszi definícióját.

Az „Elemek" legelső definíciója így hangzik: „Pont az, aminek nincs része".[89] Amiképpen az aritmetikáról szóló könyvek legelső definíciója azt a legkisebb alkotórészt, az *egyet* nevezi meg, amelynek sokszorozásával a számok előállíthatók, ugyanúgy áll a geometriai könyvek előtt annak a megnevezése, ami a geometriában a „legkisebb" (*τὸ ἐλάχιστον*), a *ponté*. A két definíciót, az *egy* és a *pont* meghatározását, csakugyan összehasonlíthatjuk. A számokról szóló fejtegetések annak a legkisebb alkotórésznek a megnevezésével kezdődnek, amely antik felfogás szerint „nemszám" ugyan, de amely nélkül a számok mégis elképzelhetetlenek volnának; így áll a helyzet — antik felfogás szerint — a ponttal is, amely önmagában nem geometriai mennyiség ugyan (*οὐ μέγεθος*) de nélküle mégis elképzelhetetlenek volnának a geometriai mennyiségek. — Első pillantásra plauzibilisnek látszik ugyan ez az összehasonlítás — és nem kétséges az sem, hogy a régi pythagoreusok éppen ebből indultak ki, amikor azt állították, hogy az *egy* „helyezés nélküli", a *pont* pedig „helyezéssel bíró" valami[90]—, de tagadhatatlan ugyanakkor az is: mind az összehasonlítás maga, mind pedig a „helyezésről" és „helyezésnélküliségről" szóló sokatmondóan homályos kifejezések igazában csak arra jók, hogy elkendőzzék az alapvető nehézséget. Mert lássuk csak közelebbről, mit állít a *pont* definíciója.

„Pont az, aminek nincs része." E szerint a definíció szerint a pontot görögül *μέγεθος ἀμερές*-nek, rész nélküli mennyiségnek vagy nagyságnak lehet nevezni. A megjelölésből magából is látszik, hogy ez tulajdonképpen önellentmondás, „contradictio in adjecto". Még érdekesebb azonban, hogy ezt a kifejezést az eleai ZÉNÓN is használta,[91] s nem kétséges az sem, hogy mit értett ezen. A „rész nélküli nagyság" (*μέγεθος ἀμερές*) ZÉNÓN nyelvén ugyanazt jelentette a térre vonatkoztatva, amit az időre vonatkoztatva a „most" (*νῦν*) szóval jelölt. Nem véletlen, hogy még PROKLOS is a geometriai „pont" fogalmát az időbeli „most" fogalmával hasonlítja össze.[92] ZÉNÓN ugyanis az időfolyamatot *tartamnélküli* időpontokra („most" = *νῦν*) bontotta fel, és így mutatta ki az „idő" és a „mozgás" fogalmának ellentmondásosságát, elgondolhatatlanságát.[93]

[89] *Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.*
[90] PROCLUS 59, 17. k.: *ἡ μὲν μονὰς ἄθετός ἐστιν, ἡ δὲ στιγμὴ θέσιν ἔχουσα.*
[91] PSEUDO—ARISTOTELES, De lineis insec. 968 a 18.
[92] PROCLUS 93, 6.
[93] Részletesebben erről: Á. SZABÓ, Zur Gesch. der Dialektik des Denkens, i. h.

ARISTOTELÉS meg akarván cáfolni ZÉNÓNnak ezt az érvelését, arra hívatkozott, hogy az idő mint folyamat távolról sem áll csupa „most"-ból, tartamnélküli időpontokból; ez csak ZÉNÓN hamis praemissája.[94] — Csakugyan, választhatunk a két lehetőség között: vagy igazat adunk érzéki tapasztalatainknak és elismerjük az idő létezését, nem törődvén azzal, hogy ez a fogalom, „idő", ellentmondásos; ebben az esetben az a tartamnélküli időpont, a „most", amelyről ZÉNÓN beszél, csak az emberi gondolkozás realitásnélküli absztrakciója. Ha viszont az ellentmondásmentesség követelményéhez ragaszkodunk, érzéki tapasztalatainkat kell téveseknek minősítenünk, s ebben az esetben csak tartamnélküli időpontokról beszélhetünk, de el kell utasítanunk az „idő" fogalmát, mivel az ellentmondásos. Mint ismeretes, az eleaták ezt az utóbbi lehetőséget választották. — Nem kétséges, hogy ugyanez az alternatíva érvényes a „rész nélküli nagyság", a geomatriai *pont* fogalmára is. Vagy eleve elismerjük a tér létezését, ahogy ez érzéki tapasztalatainkból adódik, s akkor a *pont* létezését kell tagadnunk; csakugyan PROKLOS is azt állítja egy alkalommal, hogy a geometriában nincs legkisebb mennyiség, tehát igazában nem létezik a *pont*.[95] Vagy szigorúan ragaszkodunk az ellentmondásmentesség elvéhez, s akkor a tér létezését kell tagadnunk. Ha viszont tagadjuk a tér létezését, akkor egyáltalán nem lehetséges a térről szóló tudomány, a geometria sem.

Látjuk tehát, hogy a régi pythagoreusoknak az a törekvése, hogy a geometriát éppenolyan ellentmondásmentesen építsék fel mint az aritmetikát, tulajdonképpen zsákutcába vezetett. Találóan jellemezte ezt a helyzetet K. REIDEMEISTER a következő szavakkal: „A pont és a vonal sem a szemlélet sem a gondolkozás számára nincs adva. Egynémely geometriai fogalom evidens; evidens az is, hogy ezeket a fogalmakat ellentmondásmentes rendszerbe akarják foglalni. De azokat a kezdeteket, amelyekből levezethető lenne a tervezett elmélet, csak keresik mint ellentmondásmentes kiegészítését annak, ami evidens."[96] Legfeljebb csak azzal kellene még kiegészítenünk ezt a jellemzést, hogy a pythagoreusok igazában *nem találták meg* azokat az egyszerű és ellentmondásmentes alapokat, amelyekből kiindulva legalább éppoly ellentmondásmentesen

[94] ARISTOTELES, Phys. Z 9.239 b 30.

[95] PROCLUS 60, 11 k.

[96] K. REIDEMEISTER, Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949 12: Punkte und Strecken sind weder dem Anschauenden noch dem Denkenden gegeben. Einige geometrische Begriffe leuchten ein, die Idee, dieselben zu einer widerspruchsfreien Theorie zu vereinigen, leuchtet ein. Die einfachen Anfänge aber, aus denen sich diese geplante Theorie entwickeln liesse werden gesucht als widerspruchsfreie Ergänzungen des Einsichtigen.

építhették volna fel geometriájukat, mint amennyire sikerült ez nekik az aritmetikában. Sőt a *pont*nak — és ugyanígy a vonalnak — definíciójával tulajdonképpen *hamis* alapokra helyezték tudományukat, a geometriát. Mert a *pont* euklidészi definíciója értelmében igazában tagadniok kellett volna a tér létezését s ezzel együtt a geometriát is.

Csakugyan tudjuk, hogy az ókorban gyakran szemükre vetették a geometria művelőinek: hamis tételekből indulnak ki.[97] Bizonyára erre a régi kifogásra gondolt az újplatónikus PROKLOS is, amikor felszólította a matematikusokat: szabadítsák ki a geometriát — mint képletesen mondta — „Kalypsó karjaiból“ és emeljék e tudományt a teljesebb, szellemibb megismerés szférájába.[98] Mint ismeretes, N. HARTMANN úgy gondolta, hogy PROKLOS e szavai előremutatnak a geometriának egy olyan tárgyalási módja felé, amelyet csak jóval később DESCARTES kezdett megvalósítani, ti. az analytikus geometria felé.[99]

6. „Az egész nagyobb, mint a rész“

A dolgozat eddigi fejezeteiben arra törekedtem, hogy rekonstruáljam és megvilágítsam azt a történeti folyamatot, amely a deduktív tudomány elvi megalapozásához vezetett. Kiderült, hogy ennek a megalapozásnak az előkészítése az aritmetikában két világosan megkülönböztethető lépésből állott. Egyrészt ugyanis változatlanul átvették az eleaták alapelveit — mind az *egy*ről és ennek oszthatatlanságáról szóló tanítást, mind pedig az ellentmondásmentesség elvét általában; ez volt az első lépés. Másrészt pedig bevezettek egy új definíciót, a *szám* fogalmának a meghatározását; ez a másik lépés lehetővé tette, hogy az aritmetikában fenntartsák az ellentmondásmentességről szóló eleai tanítást. — Tulajdonképpen tehát csak ez a második lépés — a *szám* fogalmának a definíciója — tekinthető az aritmetika önálló megalapozásának. Mert igazában éppen ez a definíció teszi világossá annak a területnek — a számok körének — a határait, amelyeken belül ellentmondásmentes állításokat, tételeket fogalmazhattak meg. Ez a definíció tehát csakugyan hozzátartozott már az aritmetika önálló elvi megalapozásához. Világosan kitűnik EUKLIDÉS aritmetikai definícióinak

97 Ilyen szemrehányás ellen veszi védelmébe ARISTOTELÉS (Analyt. post. I 10) a geometria művelőit.

98 PROCLUS 54—55.

99 N. HARTMANN, Des Proklus Diadochus philosophische Anfangsgründe der Mathematik, Giessen 1909 33; vö. A. SPEISER, Die mathematische Denkweise, Basel—Stuttgart 1952, 64 k.

ez a jelentősége annak a tételnek a bizonyításából, amellyel már a megelőző fejezetben foglalkoztunk egyszer. Ennek a tételnek („Elemek“ VII 31) a bizonyítása ugyanis egyáltalán nem vonja kétségbe ZÉNÓN állítását a „végtelen sok egyre kisebbedő osztóról“, csak azt hangsúlyozza, hogy a *számok* körében nem lehet valamely mennyiségnek (számnak) „végtelen sok egyre kisebbedő osztója“, mert ez ellentmondana a szám definíciójának. Nyilvánvaló tehát: úgy fogalmazták meg a szám definícióját, hogy ez legyen az alapja a reá épülő tételek ellentmondásmentességének.

Az a benyomásunk tehát, hogy a „*legrégibb* matematikai alapelvek“ éppen a definíciók lehettek. Úgy látszik, a történeti fejlődés során a matematikának mint deduktív tudománynak a megalapozását definíciók felállításával kezdhették. Csakugyan, EUKLIDÉS-nél az aritmetikáról szóló könyvek előtt nem is találunk más természetű matematikai alapelveket, mint definíciókat.[100] Ez a körülmény is azt a feltevést támogatja, hogy a görög aritmetikát kezdetben, úgy látszik, csak definíciókra építették. Természetesen nem azt állítjuk ezzel, mintha a görögök a számelméletben azokon az aritmetikai definíciókon kívül, amelyeket EUKLIDÉS felsorol, más matematikai alapelvet egyáltalán nem is használták volna. Régen ismeretes már, hogy EUKLIDÉS különösen geometriai fejtegetéseiben gyakran használ olyan elveket is, amelyeket nem sorol fel előrebocsátott principiumai között.[101] Nyilvánvaló, hogy ezekben az esetekben *nem-tudatosan* egy-egy olyan elvet érvényesített, amelynek principium-jellegét az ókorban még nem ismerték fel. Könnyen kimutathatnánk róla ugyanezt az aritmetikában is. Ha tehát mégis azt állítjuk, hogy az a pythagoreus aritmetika, amelyet az euklidészi „Elemek“ VII. könyvéből ismerünk *csak definíciókra épül*, akkor ez úgy értendő, hogy a régiek mindenesetre abban a meggyőződésben lehettek: aritmetikai tételeiket csak az előrebocsátott definíciókból vezetik le. Az aritmetikához elégnek tarthatták a definíciókat.

[100] Az „Elemek“ I. könyvében a *communes animi conceptiones* néven összefoglalt csoportról már ókorban azt tartották, hogy ezek az elvek általános érvényűek, tehát az aritmetikára is vonatkoznak, az aritmetika is felhasználja ezeket az axiómákat. Ez kétségtelenül igaz ugyan, de a későbbiekben látni fogjuk majd, hogy ezek mégis geometriai eredetű axiómák, geometriai problémák adtak alkalmat felállításukra; másrészt ezeket az elveket *(communes animi conceptiones)* nem is használták — vagy legalábbis: nem voltak tudatában annak, hogy használják — a legrégibb pythagoreus aritmetika tételeinek bizonyításában.

[101] Vö. P. TANNERY, Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide, Mém. Scient. II 48—63. ("Il ne faut pas croire que les postulats et les notions communes représentent tout ce qu'Euclide admet de fait dans ses démonstrations.")

Fontos ez a megfigyelés azért, mert nyomára vezethet bennünket annak: hogyan találták meg a görög matematika többi alapelvét. — Már e dolgozat első fejezetében említettem, hogy EUKLIDÉS a matematika alapelveit az „Elemek“ legelején hármas csoportban sorolja fel; e hármas csoport nevei latin fordításban: *definitiones, postulata* és *communes animi conceptiones*. Ha mármost azt kérdezzük, hogyan jött létre ez a hármas csoport, akkor az eddig elmondottak alapján a következőkre gondolhatunk.

A geometria definícióit minden valószínűség szerint az aritmetikai definíciók mintájára fogalmazták meg. Láttuk már, hogy a *pont* euklidészi definíciója tulajdonképpen csak kísérlet arra, hogy az *egy* aritmetikai definícióját módosított formában átvigyék a geometria területére. A geometriai pontnak, amelynek „nincs része“, nyilván ugyanolyan *oszthatatlannak* kell lennie, mint az aritmetikai *egy*nek. Feltűnő a két első geometriai definíció egymásutánja is: „pont az, aminek nincs része“ és „a vonal szélességnélküli hosszúság“; emlékeztet ez a két meghatározás az *egy* és a *szám* definíciójának egymásután következésére az aritmetikában. A kérdés csak az: vajon miért nem követték az aritmetika példáját a „vonal“ meghatározásában is? Miért nem határozták meg a „vonalat“ is úgy, mint a „számot“ az aritmetikában? Ha a szám „egységekből összetett halmaz“, akkor miért ne lehetett volna a vonal — „pontok összessége“? — Egy ilyen meghatározás mindenesetre kézenfekvő lett volna, hiszen PROKLOS egyszer már idézett szavai szerint a geometria csakugyan az aritmetikából indult ki. És mégis gondosan elkerülték, hogy a vonalat vagy a szakaszt mint „pontok összességét“ jelöljék meg. Látni fogjuk majd, hogy ez tudatos elővigyázatosság volt a régiek részéről, mert egy ilyen definícióval mégcsak jobban kiemelték volna a geometria megalapozásának azt az ellentmondásos jellegét, amelyet különben is érezniök kellett. Egyelőre azonban hangsúlyozzuk inkább csak azt a tényt, ami már a megelőző fejezetből is kiderülhetett: a *pont* geometriai definíciója a pythagoreusokat sem elégíthette ki. Nekik is tudniok kellett, hogy ez a definíció nem áll azon a fokon, mint aritmetikai definícióik, nem teszi lehetővé a geometriának olyan ellentmondásmentes felépítését, mint amilyen az aritmetikáé.

Bizonyára éppen azért kényszerültek az antik matematikusok *postulatumok* és *axiómák* (= *communes animi conceptiones*) összeállítására, mert éppen a geometriában nagyon hamar észre kellett venniök, hogy a definíciók önmagukban nem elégségesek a deduktív tudomány elvi megalapozásához. — Világos, hogy az euklidészi postulatumok csakugyan geometriai eredetűek; nem is használhatók ezek máshol, mint a geometriában. — Nem ilyen egyértelmű azoknak az alapelveknek a megítélése, amelyeket EUKLIDÉS szövege *communes animi conceptiones* néven sorol fel. Vannak ugyan ezek között is geometriai jellegű tételek, pl. a kongruencia axiómája, de a legtöbb mégis általánosabb érvényű, nemcsak a geometriában használható, pl.: „ha egyenlőkből egyenlőket vonunk ki, a maradékok egyenlők.“ Mégis később látni fogjuk majd, hogy az EUKLIDÉSnél *communes animi conceptiones* néven felsorolt matematikai alapelvek geometriai eredetűek; ez más szóval azt jelenti, hogy geometriai jellegű problémák adtak alkalmat ezeknek a be nem bizonyítható tételeknek a felállítására. A következőkben azt a kérdést akarom megvizsgálni, hogyan és miért került sor az EUKLIDÉSnél *communes animi conceptiones*nek nevezett matematikai alapelvek megfogalmazására.

Mindenekelőtt arra kell emlékeztetnem, hogyan ítélte meg a régebbi kutatás ezeknek az elveknek a történetét. Már TANNERY helyesen felismerte, hogy ezeknek a principiumoknak a görög megnevezése EUKLIDÉS szövegében (*Κοιναὶ ἔννοιαι*) későbbi, sztoikus eredetre vall.[102] Kitűnik TANNERY egyik mellékes megjegyzéséből az is, hogy már ő közel járt ahhoz a felismeréshez: a régebbi és eredeti görög terminust (*ἀξίωμα*) csak utólag a sztoikus filozófia hatására változtatták meg EUKLIDÉS szövegében.[103] — Mégis TANNERY ezt az utóbbi, nézetem szerint *helyes* gondolatát igazában feladta akkor, amikor ugyanabban a dolgozatában egyszersmind azt is állította, hogy a *communes animi conceptiones* néven megjelölt elveket tulajdonképpen csak az EUKLIDÉS utáni időkben állították össze[104], a görög matematikusok; bizonyára csak akkor lettek figyelmesek ezekre az alapelvekre, amikor a pergéi APOLLONIOS megpróbálta bebizonyítani őket.[105] — Az a vélemény hogy a *com-*

[102] Mém. Scient. II 60: “Ce terme d’ἔννοια n’est nullement de la langue philosophique de l’époque; on le chercherait vainement *avec une signification technique* (az én kiemelésem — Sz. Á.) dans l’oeuvre de Platon ou dans celle d’Aristote; il appartient aux stoiciens dont l’école commencait seulement au temps d’Euclide etc.”

[103] Uo. 62—63: “il est à remarquer, que les stoiciens changèrent complètement le sens du mot ἀξίωμα, et appelèrent de ce nom une proposition quelconque, vraie ou fausse; c’est là qu’il faut chercher la raison de l’adoption d’une autre désignation dans nos textes d’Euclide.

[104] Uo. 56: Quant aux notions communes, elles ne seraient pas de lui (= Euclide); il les aurait employées comme allant de soi ou comme supposées par les définitions.

[105] Uo.: L’attention ne se serait portée sur cette question qu à l’époque d’Apollonius, qui essaya de démontrer ces propositions et reconnut leur liaison avec la définition de l’égalité et des opérations de l’addition et de la soustraction géométriques. Les éditeurs succesifs d’Euclide auraient pris depuis lors l’habitude d’insérer un recueil plus ou moins complet de ces notions suivant le point de vue aquel ils se plaçaient.

munes animi conceptiones néven összefoglalt csoport az EUKLIDÉS utáni korból származik, márcsak azért is valószínűtlen, mert tudjuk, hogy az *ἀξίωμα* szót, ezeknek az alapelveknek régebbi nevét, már EUKLIDÉS előtt ARISTOTELÉS korában is használták mint matematikai terminust, sőt az egyik ilyen, EUKLIDÉSnél harmadik helyen hagyományozott „axiómát“ több ízben szószerint is idézi ARISTOTELÉS:[106] „ha egyenlőkből egyenlőket vonunk ki, a maradékok egyenlők.“ Már ez a tény önmagában is amellett szól, hogy az euklidészi *communes animi conceptiones* — legalábbis nagy egészükben — éppenúgy régebbi korokból származnak, mint a föntebb tárgyalt definíciók. — Ezt a történeti jellegű sejtést közelebbi érvek is támogatják. Az alábbiakban EUKLIDÉS 8. axiómáját vizsgálom meg közelebbről.

*

EUKLIDÉS 8. axiómája kimondja: „az egész nagyobb, mint a rész“.[107] Érdekes ez a matematikai alapelv már csak azért is, mert EUKLIDÉS az „Elemek“-ben — legalábbis ebben a formájában — alig használja. Annál gyakrabban találkozunk viszont EUKLIDÉS indirekt bizonyításaiban egy olyan sztereotíp záróformulával, amely valamiképpen összefügg az idézett axiómával. Az „Elemek“ I. könyve 6. tételének bizonyításában pl. azt olvassuk: ha igaz volna az a téves gondolat, amelyet cáfolni akarunk, akkor „a kisebb egyenlő volna a nagyobbal, ami nem lehetséges“. Ez a záróformula — „a kisebb egyenlő volna a nagyobbal, ami nem lehetséges“ —, úgy látszik, EUKLIDÉS korában közismert és gyakran használt fordulat volt a geometriai bizonyításokban, mert nemcsak EUKLIDÉS használja ezt, hanem találkozunk ezzel ugyanebben a megfogalmazásban az EUKLIDÉSnél valamivel idősebb pitanéi AUTOLYKOSnál is.[108] EUKLIDÉS modern kiadója, J. L. HEIBERG az ilyen esetekben mindig utal — szöveghez fűzött latin fordításában — a 8. axiómára.[109] Nem kétséges, hogy az utalás helyénvaló: a 8. axióma és az említett sztereotíp fordulat mind tartalmilag mind genetikusan összefügg egymással. A kérdés csak az: hogyan ítéljük meg összefüggésüket? P. TANNERY, aki először hívta fel a figyelmet arra, hogy a 8. axióma és a vele rokon sztereotíp formula *nem azonosak,* igazában csak felvetette a problémát, de nem adott rá magyará-

106 Érdekes, hogy bár TANNERY is tudott erről (vö. Mém. Scient. II 62), mégsem vette észre, mennyire ellentmond ez az előbbi jegyzetben idézett véleményének.

107 *Τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν.*

108 Pl. a "De sphaera quae movetur" (ed. HULTSCH) c. munka 3. tételében.

109 Pl. Vol. I pag. 26 et passim.

zatot; úgy látszik arra gondolhatott, hogy a 8. axiómát csak utólag és elég ügyetlenül absztrahálták az EUKLIDÉSnél is gyakran használt sztereotíp fordulatból.[110]

Mindenekelőtt meg kell állapítanunk a 8. axióma és a vele rokon sztereotíp fordulat relatív kornológiáját. Kérdés ti., vajon csakugyan előbb találták-e meg a sztereotíp formulát és csak később absztrahálták belőle az axiómát magát — úgy ahogy TANNERY gondolta — vagy inkább mégis megfordítva: nem a későbbi sztereotíp formula származik-e a régebbi axiómából? — Azt hiszem erre a kérdésre nagy valószínűséggel válaszolhatunk. Nem kell ehhez egyéb, mint hogy komolyan mérlegeljük mind a két lehetőséget, s rögtön látjuk majd, hogy az egyik a kettő közül sokkal valószínűbb, mint a másik.

A 8. axióma idézett szövege az „egész“ és a „rész“ fogalmát állítja szembe egymással, megállapítván, hogy e kettő közül melyik a *nagyobb*. A sztereotíp formula viszont, amely kétségtelenül öszszefügg a tárgyalt axiómával, egyáltalán nem is említi ezeket a fogalmakat: „egész“ és „rész“. „A *kisebb* egyenlő volna a *nagyobbal*, ami nem lehetséges“ — ebben a formulában az „egész“ és a „rész“ helyett a „*kisebb*“ és a „*nagyobb*“ fogalmai jelennek meg olymódon, hogy az „egész“ helyébe a „nagyobb“, a „rész“ helyébe pedig a „kisebb“ fogalma lép. Ha mármost abból indulunk ki, hogy a régebben megfogalmazott axiómából fejlődött ki később a tárgyalt sztereotíp formula, akkor egyáltalán nem nehéz megértenünk ezt a kettős fogalomcserét. Az „egész“ fogalmát könnyen felválthatta a „nagyobb“, és ugyanígy a „rész“ fogalmát a „kisebb“ fogalma, hiszen a gyakorlatban csakugyan valamely dolognak az egésze mindig a nagyobb, és ugyanannak a dolognak a része pedig az előbbihez viszonyítva a kisebb mennyiség. — Úgy látszik tehát, a sztereotíp formula levezethető a 8. axiómából, s ez a körülmény amellett szól, hogy bizonnyára korábban megvolt az axióma maga, s csak később fejlődött ki ebből a sztereotíp formula. — Ellenőrzésül kíséreljük meg most a másik feltevést, s induljunk ki abból a gondolatból, hogy régebben már az axióma megfogalmazása előtt is megvolt a sokszor használt sztereotíp fordulat: „a kisebb egyenlő volna a nagyobbal, ami nem lehetséges“. Kérdés: hogyan fejlődött ki ebből a formulából az axióma maga? Vajon elképzelhető-e, hogy a „nagyobb“ és a „kisebb“ antitéziséből — ha csakugyan ez volt a régebbi — idővel kifejlődjék az „egész“ és a „rész“ antitézise? Felcserélhető-e minden további nélkül a „nagyobb“ fogalma az „egész“, a „kisebb“ pedig a „rész“ fogalmával? De

[110] Mém. Scient. II 54.

hiszen az, ami *nagyobb* valamely dologból, egyáltalán nem mindig szükségszerűen a dolog *egésze* is, ami pedig *kisebb*, az nem feltétlenül egyszersmind *rész* is. Egy ilyen természetű fogalomcsere lélektanilag a legkevésbé sem volna indokolt. A sztereotíp formulából tehát *nem* vezethető le a vizsgált axióma, és ez ismét amellett szól, hogy bizonyára az axióma megfogalmazása a régebbi, és a sztereotíp formula a későbbi.

A relatív kronológiára vonatkozó vizsgálatunk tehát azzal az eredménnyel járt: feltehetjük, hogy korábban megfogalmazták magának az axiómának a szövegét, úgy ahogy azt EUKLIDÉSnél olvassuk, s csak később fejlesztették ki ebből az axiómából — a geometria mindennapos bizonyítási gyakorlata során — azt a sztereotíp formulát, amelyet már EUKLIDÉS előtt is gyakran használtak. Kérdés azonban: miért és mikor állították fel ezt az axiómát?

Ez a megállapítás — „az egész nagyobb, mint a rész" — annyira triviális, hogy szinte azt kérdezzük: miért kellett ezt az egyszerű „igazságot" mint axiómát kimondani? Nem alaptalan ez a kérdésünk már csak azért sem, mert EUKLIDÉS ezt az axiómát elég ritkán használja. A sokszor használt sztereotíp fordulat, amelyet épp az imént vezettünk vissza erre az axiómára, nem azonos magának az axiómának az állításával. Sőt szinte az a benyomásunk, EUKLIDÉSnek magának is sokkal inkább szüksége lehetett volna a „nagyobb" és „kisebb" fogalmak definíciójára, mint erre az axiómára, amely szinte csak arra jó, hogy ennek alapján kiokoskodjuk: hogyan lett belőle később az a sztereotíp formula, amelyet olyan gyakran használnak.

Mi adhatott tehát alkalmat ennek az axiómának a felállítására: „az egész nagyobb, mint a rész"? — Úgy gondolom, hogy mielőtt ezt az axiómát felállították volna, bizonyára akadtak olyanok, akik kétségbevonták ezt a triviális „igazságot", s mikor aztán látták, hogy ez milyen következményekkel jár, kénytelenek voltak az ellenkező értelmű állítást mint magában is evidens de be nem bizonyítható tételt axiómaként kimondani. Ez lehetett a különös, 8. axióma eredete. — Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy még a nevét is meg tudjuk mondani annak, aki kétségbevonta azt a triviális igazságot, amelyet éppen ez után a kísérlet után kellett axiómaként kimondani.

ARISTOTELÉS beszél egy alkalommal[111] az eleai ZÉNÓN egyik érdekes paradoxonáról, amely szerint „a fele idő egyenlő a duplájával" (*ἴσον εἶναι χρόνον τῷ διπλασίῳ τὸν ἥμισυν*). Sajnos, nem ismerjük szó szerint ZÉNÓN érvelését, még a gondolatmenetet is

[111] ARISTOTELES, Phys. Z 9.239 b 33.

csak annak az Aristotelésnek a híradásából rekonstruálhatjuk, aki cáfolni akarta Zénónt. De még így is feltűnő Zénón konkluziója. Az az állítás, hogy „a fele idő egyenlő a duplájával" olyan különös összefüggést akar megállapítani a „fele" és „duplája" fogalmak között, ami ellenkezik minden józan tapasztalattal. Még érdekesebb ez a paradoxon, ha meggondoljuk, hogy ezek a fogalmak: „fele" és „duplája" az adott összefüggésben minden nehézség nélkül helyettesíthetők a „rész" és „egész" fogalmaival. Ha ugyanis Zénón azt állította, hogy „a fele idő egyenlő a duplájával", akkor nyilván valamely idő *részét* tette egyenlővé ugyanannak az időnek az *egészével*. A zénóni paradoxon tehát éppen az ellenkezőjét állítja annak, amit Euklidés 8. axiómája úgy mond: „az egész nagyobb, mint a rész". — Már ennek az egyszerű megállapításnak az alapján is felmerülhet a kérdés: vajon nem éppen azért kellett-e felállítani Euklidés 8. axiómáját, mert bizonyára voltak olyanok, akik azt az igazságot, amelyet ez a tétel bizonyítás nélkül megállapít, a Zénónéhoz hasonló paradox érvelésekkel kétségbevonták? Legfeljebb csak az szólhatna ez ellen a következtétés ellen, hogy Zénón paradoxona Aristotelés szavai szerint az *időre* vonatkozott, a 8. euklidészi axióma viszont általános *matematikai* elv; vagyis nem látjuk még tisztán, vajon Zénón paradox érvelése csakugyan közvetlenül hatott-e a matematikusokra? Ezért a következőkben megkísérelem — legalább nagy vonásokban — a zénóni paradoxon interpretációját. Előrebocsátom azonban, hogy ebben az interpretációban főként Zénón gondolatainak rekonstrukciójára törekszem és csak mellékesen veszem figyelembe Aristotelésnek Zénón ellen irányuló kritikáját.

Megkönnyíti Zénón gondolatainak rekonstrukcióját az a körülmény, hogy az Aristotelést kommentáló Simpliciusnál fennmaradt egy olyan magyarázó ábra, amely a kérdéses szöveghelyhez kapcsolódik, és amelyet Simplicius a régebbi kommentátortól, az aphrodisiasi Alexandertől vett át.[112] Ugyanezt az ábrát használom én is.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & A & A & A & A & \\
B & B & B & B\rightarrow & & & \\
 & & \leftarrow C & C & C & C &
\end{array}
$$

Zénon — Aristotelés szerint — a következőképpen okoskodott: Legyenek adva valamely versenypályán *A*, *B* és *C* betűkkel jelölt testek. A testek egy-egy sorban egymástól egyenlő távolságra helyez-

[112] Simplicius 1016 kk.; vö. 1019, 27. — Mind a szöveget mind pedig az ábrát lásd H. Diels, Vorsokratiker^{4} I 19 Zenon A 28.

kednek el. Mind a három sor négy-négy betűje tehát négy-négy különböző, de egymástól egyenlő távolságra elhelyezett és nyilván egyenlő *tömegű* testet jelöl — bár természetesen a görög szövegben a „tömeg“ terminus nem fordul elő. Az első sorban elhelyezett testek (*A A A A*) mozdulatlanok. A másik két sorban a testek egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek abban az irányban, ahogy ezt a nyilak mutatják. Ha a *B* és *C* sorban elhelyezett testek ugyanabban az időpontban és éppen ott kezdik el mozgásukat azonos sebességgel, ahol az ábra mutatja őket, világos, hogy ugyanabban az időpontban érik el a pálya két ellentétes szélén mozgásuk végső pontját. Ez más szóval azt jelenti, hogy egyenesvonalú egyenletes mozgás és azonos sebesség esetén az első *B* test ugyanakkor érkezik jobboldalt az utolsó *A* test alá, amikor az első *C* test megérkezik baloldalt az első *A* alá. — Ha mármost — ZÉNÓN érvelése szerint — grafikusan ábrázolni akarnánk a mozgó test által megtett utat — vagy ami ebben az esetben egyértelmű ezzel: a mozgás idejét —, akkor ezt két *A* betűvel (*A A*) jelölhetnénk, mert csakugyan mind az első *B*-vel mind pedig az első *C*-vel jelölt test két *A* betűvel jelölt test mellett haladt el. — ZÉNÓN azonban úgy gondolta, hogy a mozgásnak ugyanezt az időtartamát nemcsak a nyugalomban maradó testeken mérhetjük, hanem éppenúgy az azonos sebességgel de ellenkező irányban haladó testeken is. Ebben az utóbbi esetben azonban az előbb mért időtartamot nem két, hanem négy betűvel fogjuk jelölni, mert az első *B* test négy mozgó *C* test mellett haladt el, és ugyanez érvényes az első *C* testre is, amely négy mozgó *B* test mellett haladt el. A két mérés paradox eredménye tehát abból áll, hogy ugyanazt az időtartamot egyszer két betűvel (*A A*), egyszer meg négy betűvel (*B B B B* vagy *C C C C*) mértük. Ezért ZÉNÓN következtetése szerint: „a fele idő egyenlő a duplájával“.

Mielőtt megkisérelnénk a behatóbb magyarázatot, érdemes lesz kiemelnünk az előbbi gondolatmenetből egy olyan vonást, amelyet eddig figyelmen kívül hagytak a kommentátorok. Mint említettem már, a mellékelt ábra betűi *testeket* jelölnek, amelyek mozognak, illetőleg mozdulatlanul állnak. Ugyanezek a betűk azonban akkor, amikor az említett méréseket végezzük, már nemcsak testeket, hanem egyszersmind *szakaszokat* is jelölnek. Mert ha a mozgás idejét két *A* betűvel mérjük (*A A*) abból a meggondolásból kiindulva, hogy ez alatt az idő alatt a mozgó test két mozdulatlanul álló *A* test mellett haladt el, akkor világos, hogy ebben a jelölésben a két betű (*A A*) már nemcsak a két mozdulatlanul álló testet jelenti, hanem egyszersmind a mozgó testek által megtett útszakaszt is.

Ez a megfigyelés — hogy ti. a betűk az előbbi gondolatmenet értelmében nemcsak testeket, hanem egyszersmind *szakaszokat* is jelentenek — azért fontos, mert lehetővé teszi a mellékelt ábra datálását. Említettem már, hogy az ábra ugyan SIMPLICIUSnál maradt fenn, de még attól az ARISTOTELÉSt magyarázó ALEXANDERtől származik, aki az i. sz. 2. század végén élt. Előbbi megfigyelésünk viszont arra vall, hogy ábránk nem is az i. e. 4. századból, ARISTOTELÉStől, hanem még az i. e. 5. század első feléből, bizonyára magától ZÉNÓNtól származik. Tudjuk ugyanis, hogy az 5. századi geometriában a vonalszakaszokat még csak egy-egy betűvel jelölték — nem úgy mint később EUKLIDÉSnél a szakasz két végpontjához írt két különböző betűvel —, ha pedig összegezni akartak két szakaszt, akkor egyszerűen egymás mellé írták a két szakasz jelölésére használt két betűt, tehát pl. a D és E szakasz összegét $(D+E)$ így jelölték: $D\,E$.[113] Ugyanezt a jelölési módot használja magyarázó ábránk $(A\,A=A+A)$, amely már ARISTOTELÉS korában is elavult volt. Ez tehát arra vall, hogy ARISTOTELÉS, amikor meg akarta cáfolni ZÉNÓN paradoxonát, változatlanul vette át ZÉNÓN ábráját és nem módosította azt a saját korabeli jelölési rendszernek megfelelően. Így kerülhetett ez az ábra ARISTOTELÉS szövegéből a régi kommentátoron, az aphrodisiasi ALEXANDERen keresztül SIMPLICIUShoz, aki számunkra is megőrizte.

Ugyanebből a megfigyelésünkből adódik még egy másik következtetés. ZÉNÓN a „fele időről“ és a „duplájáról“ beszélt. A „fele időt“ két betűvel ($A\,A$), a „dupláját“ pedig néggyel ($B\,B\,B\,B$ vagy $C\,C\,C\,C$) jelölte. Minthogy azonban a betűk ebben az összefüggésben *szakaszokat* képviselnek, semmi akadálya sem lett volna annak, hogy ZÉNÓN valamely szakasznak a felére és egészére állítsa fel paradoxonát. — Látjuk tehát, hogy a zénóni paradoxon valamiképpen a geometria paradoxona is, hiszen éppen a geometria foglalkozik szakaszokkal. Ez viszont azt látszik bizonyítani, hogy EUKLIDÉS 8. axiómája csakugyan összefügghet valamiképpen ezzel a paradoxonnal, amely éppen a 8. axiómában kimondott matematikai elv evidensnek látszó igazságát vonja kétségbe.

Lássuk ezek után közelebbről ZÉNÓN ún. hamis következtetését. ARISTOTELÉS feltétlenül meg volt győződve arról, hogy az egész érvelés hamis. Tanítványai még nála is buzgóbb igyekezettel leplezték le az álokoskodást. Talán éppen EUDÉMOS, a matematika első történésze ment ezen a téren a legmesszebbre. „ZÉNÓN-

[113] Pl. ARCHYTAS (BOETIUS, De institutione musica. ed. G. FRIEDLEIN, Lipsiae 1867 pag. 285); vö. B. L. van der WAERDEN, Math. Ann. 120 1947/49 134 és SZABÓ Á., „A matematikai *bizonyitás* görög terminus technicusa“ i. h. 35—36.

nak ez az érvelése hihetetlenül ostoba, mondja EUDÉMOS, mert azonnal elárulja a benne rejlő álokoskodást" — olvassuk SIMPLICIUSnál.[114] Úgy látszik, ZÉNÓNnak nem sok szerencséje volt paradoxonával az ókorban, sőt gyakran még ma is úgy ítélik meg, mint egykor az Aristotelés-tanítványok. Éppen ezért érdemes lesz egyszer mind az álokoskodást, mind pedig a mögötte rejlő geniális gondolatot közelebbről megvizsgálnunk.

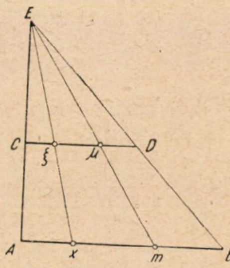
Ami az álokoskodást illeti, ez a következő. ZÉNÓNnak igaza volt ugyan, amikor azt gondolta, hogy azonos sebesség (*c*) esetén mind a mozgás idejét (*t*) mind pedig a megtett utat (*s*) ábrázolhatjuk ugyanazzal a szakasszal; minden azonos időszakasznak megfelel ebben az esetben a megtett útnak egy-egy azonos nagyságú szakasza. De mégis tévedett ZÉNÓN, amikor figyelmen kívül hagyta, hogy ugyanazon *t* időszakasz alatt is megduplázódik a megtett út (2*s*), ha megduplázzuk a sebességet mint vektormennyiséget. Mert nyilvánvaló, hogy azoknak a testeknek egymáshoz viszonyított sebessége, amelyek változatlan és azonos sebességgel mozognak ugyan, de *ellentétes irányban*, nem egyszerűen csak *c*, hanem 2*c*. Ezért nem is fogható fel ZÉNÓN ábráján a négy betű (*B B B B* vagy *C C C C*) — a teljes szakasz — mint a megtett útnak és a mozgás idejének az ábrázolása. Ez a négy betű már csak a két mozgó testcsoport által *együttesen* megtett utat ábrázolja, míg az első esetben — amikor a mozgó testek útját a nyugalomban maradó testeken mértük — a két betű (*A A*) nemcsak a megtett útnak, hanem egyszersmind a mozgás idejének az ábrázolása is volt. Az álokoskodás tehát abban áll, hogy ZÉNÓN egyrészt figyelmen kívül hagyta a sebesség megduplázását, másrészt pedig az „egész szakaszt" a mozgás-idő ábrázolásának tüntette fel, holott ez — ellentétes irányban mozgó testek esetén — már csak ezeknek a testeknek egymástól való eltávolodása.

Ebben az értelemben mutatják ki ARISTOTELÉS tanítványai a szofizmát ZÉNÓN okoskodásában. De azt hiszem, súlyos hibája ennek az interpretációnak az, hogy figyelmen kívül hagyja a zénoni paradoxon geniális magvát és egyáltalán nem veszi tudomásul azt a problémát, amelyre ZÉNÓN fel akarta hívni a figyelmet. Mindenekelőtt félrevezető az előbbi interpretációban a „sebesség" (*c*) és a „sebesség megduplázásának" (2*c*) a fogalma. Sebességen ugyanis mi az útnak az időhöz való viszonyát értjük, vagyis azt az útszakaszt, amelyet a mozgó test egy bizonyos időtartam alatt megtesz. Ez más szóval azt jelenti, hogy mind az utat mind pedig az időt olyan kisebb egységekre bontjuk fel, amelyeket valamilyen hossz-

[114] SIMPLICIUS (ARISTOTELÉS Physika-jához) 1019, 32 kk.

mértékkel vagy tartammal mérünk, holott ZÉNÓN egyáltalán nem így gondolkozott. Ő a mozgás idejét csupa tartamnélküli időpontra, „most"-ra bontotta fel, és ennek megfelelően az ő szemléletében a szakasz is kiterjedés nélküli pontok összesége volt.[115] Eszerint nála mind a szakasz fele, mind pedig a szakasz egésze (a szakasz felének a „duplája") végtelen sok pontból áll, egy-egy végtelen halmaz. És vajon ez a két halmaz nem „egyenlő"-e valamiképpen egymás között, ahogy ZÉNÓN gondolta?

A két halmaz pontjai csakugyan kölcsönösen és egyértelműen leképezhetők egymásra. (Meggyőződhetünk erről a következőképpen. Legyen AB szakasz az egyik halmaz — az, amelyet ZÉNÓN a „duplájának" nevez — és CD a másik — az, amely ZÉNÓNnál a „fele" az előbbinek. Ha összekötjük A pontot a C-vel és meghosszabbítjuk ezt a vonalat mindaddig, amíg E pontban metszi a BD szakasz meghosszabbítását, akkor az ABE háromszöget nyerjük. Ha mármost összekötjük AB szakasz tetszőleges x pontját E-vel, megkapjuk a CD szakaszon a ξ metszéspontot. Ha meg a CD szakasz tetszőleges μ pontját kötjük össze E-vel, a vonal meghosszabbítása megadja az AB szakaszon az m metszéspontot. Az x és ξ illetőleg a μ és m pontok egymásnak kölcsönösen megfordítható leképezései. Ugyanez érvényes az AB és CD szakasz bármely pontjára.[116] Ez pedig más szóval a halmazelmélet nyelvén azt jelenti, hogy a két halmaz *ekvivalens.* Végtelen halmazok esetében a részhalmaz is *ekvivalens* lehet az egész halmazzal.



1. ábra

ZÉNÓNnak az a véleménye tehát, hogy „a fele idő ekvivalens (= egyenlő) a duplájával" — miután ő az időt végtelen sok tartamnélküli időpontra, „most"-ra bontotta fel — a halmaz elmélet tanítása szerint mindenesetre megállja a helyét. Ez a paradoxon tulajdonképpen csak egy végtelen halmaznak részhalmazával való ekvivalenciáját mondja ki. Természetes, hogy ebben a gondolatmenetben az olyan fogalmak mint a „sebesség" és „a sebesség megduplázása" nem használhatók. A mozgásnak minden egyes tartamnélküli időpontjához a megtett útnak csak egyetlen egy kiterjedésnélküli térpontja tartozhatik. Eszerint a „sebesség megduplá-

[115] Vö. ARISTOTELÉS, Phys. Z 9.239 b 30.

[116] A mozgás idejének és a megtett útnak ilyen kölcsönösen egyértelmű és megfordítható leképezése a valóságban éppen a mozgás ténye által valósul meg.

zása" márcsak azért is elgondolhatatlan valami, mert ez azt jelentené, hogy a test egyszerre (ugyanabban a tartamnélküli időpontban) két különböző térponton, tehát tulajdonképpen két különböző *helyen* van — bár ebben az összefüggésben magának a *hely* fogalmának is alig van már értelme, hiszen a kiterjedésnélküli térpont már nem is nevezhető a szó igazi értelmében „hely"-nek.

Világos, hogy ZÉNÓN ezzel a paradoxonával is csak a „mozgás", „idő" és „tér" fogalmak elgondolhatatlanságát (= ellentmondásosságát) akarta kimutatni. Ugyanakkor azonban „álokoskodásával" szinte anticipálta is olyan problémák helyes megoldását, amelyeket magasabb fokon csak a modern halmazelmélet tudott tárgyalni. Kimutatta ugyanis, hogy ezek a fogalmaink: „rész", „egész" és „egyenlő" csak véges halmazok esetében érvényesek. Végtelen halmazok esetében a rész is ekvivalens lehet az egésszel. — A gondolatmenet „hibája" igazában nem is az, hogy ZÉNÓN figyelmen kívül hagyta a „sebesség megduplázását", hiszen ettől a fogalomalkotástól ő tudatosan elfordult. A hiba inkább az, hogy nem különböztette meg az „ekvivalens" fogalmát az „egyenlő" fogalmától, az ekvivalenciát is ugyanazzal a görög szóval jelölte (*ἴσον*), amelyet különben csak az „egyenlő" jelölésére használtak. De ne feledkezzünk meg arról sem, hogy mi magunk is csak G. CANTOR, a modern halmazelmélet megalapítója óta különböztetjük meg következetesen ezt a két fogalmat.

Látjuk azonkívül azt is, hogy ZÉNÓN igazában nemcsak azt bizonyította, amit ARISTOTELÉS állít róla: „a fele idő ekvivalens a duplájával". Ugyanakkor bizonyítania kellett azt is, hogy valamely szakasznak a fele (egy része) ekvivalens a szakasz egészével — ha a szakaszt mint végtelen sok pont összességét fogjuk fel. Ezek a gondolatok pedig szükségszerűen következtek a *pont* geometriai definíciójából. Ha *pont* az, aminek nincs része, akkor a *vonal* csak végtelen sok pont összessége lehet, ebben az esetben pedig minden vonalszakasz ekvivalens bármely részével. Ezért nem lehetett a geometriában a vonalt mint pontok összességét definiálni. És ebben az összefüggésben lesz érthetővé az is, miért kellett felállítani a 8. euklidészi axiómát: *az egész nagyobb, mint a rész.*

7. Hogyan került sor a geometria axiómatikus megalapozására?

A megelőző fejezetben kiderült, hogy a 8. euklidészi axióma felállítására ZÉNÓN tárgyalt paradoxona adott alkalmat. ZÉNÓN ugyanis azt állította — ha szabad ARISTOTELÉSnek erre vonatkozó szavait az elmondottak értelmében általánosabban fogalmaznunk —, hogy „a rész *egyenlő* (= ekvivalens) az egésszel". A 8. axióma viszont éppen ezzel az állítással szemben szögezi le az empirikus igazságot: „az egész nagyobb, mint a rész".

A 8. axióma eredetének ez a megvilágítása megerősítheti azt a gyanúnkat is, hogy az EUKLIDÉSnél gyakran használt sztereotíp formula — „a kisebb egyenlő volna a nagyobbal, ami nem lehetséges" — csakugyan összefügg az axiómával. Ha ugyanis merev formalizmussal csak magának a 8. axiómának a szövegéhez ragaszkodnánk, könnyű lenne arra hívatkoznunk, hogy ez az axióma egyáltalán nem is beszél az „egyenlőség" fogalmáról; ez a fogalom csak az axiómából levezetett sztereotíp formula szövegében jelenik meg. Minthogy azonban most már tudjuk: a 8. axióma éppen egy olyan gondolatot cáfol, amely valami „elfogadhatatlant" állított az egyenlőségről, nem lehet tovább kétségünk az iránt, hogy valójában ez az axióma is az „egyenlőség" problémájával foglalkozik; negatív megállapítás ez arról, hogy mi az „egyenlő": az egész és a rész nem egyenlők, az egész nagyobb, mint a rész.

Jobban érthető ebben a megvilágításban az is, hogyan függ össze a 8. axióma a többi euklidészi axiómával. EUKLIDÉSnél öszszesen 9 axiómát találunk. Ezek közül az utolsót, a 9.-t általában nem tartják authentikusnak,[117] ezért ezzel most nem foglalkozunk. A többi nyolc viszont mind arról állapít meg valamit: mi az „egyenlő" és mi a „nem egyenlő". Miután az előbbiekben tisztáztuk legalább egy axiómának az eredetét, kézenfekvő arra gondolnunk, hogy bizonyára a többi egyenlőségi axióma felállítására is ugyanaz a körülmény adott alkalmat, amelyre a 8. axióma tárgyalása során rámutattunk. Minden jel arra mutat, hogy az „egyenlőség" fogalma az eleai filozófiában lett annyira problématikussá, hogy axiómaként empirikus megállapításokat kellett kimondani arra vonatkozóan: mi a geometriában az „egyenlő" és a „nem egyenlő". (Ezért tartom az EUKLIDÉSnél *communes animi conceptiones* néven összefoglalt csoportot g e o m e t r i a i e r e d e t ű axiómáknak.) Ezekben az esetekben azonban az állítás érvényességét már nem a gondolat ellentmondásmentessége — azaz tulajdonképpen az ellenkező vélemény ellentmondásosságának a kimutatása — garantálta, mint az aritmetika definícióiban, hanem — tekintet nélkül az eleai követelményre — pusztán olyan *praktikus-empirikus tapasztalat, amelyet véges halmazok vizsgálatából absztraháltak.*

A 8. axiómának az az állítása, hogy az egész nagyobb, mint a rész, evidens és azonnal érthető ugyan, de az eleaták módszeré-

[117] Vö. pl. A. FRENKIAN, Le postulat chez Euclide et chez les modernes, Paris 1940 20, 3. jegyzet.

vel nem bizonyítható. Sőt, az eleaták módszerével éppen ennek az axiómának az ellenkezője volt bizonyítható. És mégis a bizonyíthatatlan, empirikus, csak véges halmazok esetére érvényes megállapítást kellett a görögöknek a matematika alapjává tenniök, mert különben egyáltalán nem lett volna felépíthető a geometria rendszere. — Ebben az összefüggésben lesz világossá annak az arisztotelészi gondolatnak a mélyebb értelme is, amelyet már e dolgozat első fejezetében említettünk, hogy ti. a geometria tudományának bizonyíthatatlan de mégis igaz és megtámadhatatlan principiumokból kell kiindulnia. Egyik ilyen bizonyíthatatlan de mégis empirikusan igaznak talált és megtámadhatatlan alaptétel pl. a 8. axióma.

E dolgozat előbbi fejezetei megvilágíthatják azt a kérdést is: hogyan jutottak a történeti fejlődés során arra a gondolatra, hogy a matematikának mint deduktív tudománynak definíciós-axiómatikus alapokból kell kiindulnia. Erről az elmondottak alapján a következőt gondolhatjuk. Valószínű, hogy a matematikai tudomány definíciós-axiómatikus megalapozása először a geometria területén lett tudatossá. Láttuk e dolgozatból, hogy már az aritmetika is az eleai filozófia *önálló továbbfejlesztése* volt. Az aritmetikában azonban továbbra is megtarthatták az eleai filozófia által adott kereteket. Igaz, hogy a számelméletben is egy alapvetően új definíciót — a *szám* fogalmát — kellett bevezetniök a pythagoreusoknak, de ez még nem állította szembe őket PARMENIDÉS és ZÉNÓN filozófiájával. Éppen ellenkezőleg: az új definíció annyira termékenynek bizonyult, hogy lehetővé tette az eleai módszer további érvényesítését és egy olyan területnek — az aritmetikának — ellentmondásmentes felépítését, amely szinte úgy hatott mint az eleai filozófia új és önálló tartománya. A pythagoreus aritmetika lett az eleai filozófiának talán legnagyobb és legmaradandóbb alkotása.

De megváltozott a helyzet akkor, amikor a jólbevált módszert a geometria területén is érvényesíteni akarták. Itt már korántsem voltak olyan könnyen alkalmazhatók az eleaták elvei, mint az aritmetikában. Sőt, ha egyáltalán tudománnyá akarták tenni a geometriát, éppen az eleatákkal szemben kellett elhatárolniok magukat az új tanítás képviselőinek. (A geometriában már nem használhatták azt az eleai logikát, amely a végtelen halmazok vizsgálatától sem riadt vissza.) Az elhatárolás eszköze pedig az axióma volt, azaz olyan empirikus igazság, amelyet nem lehet ugyan bizonyítani, sőt néha cáfolható is, amelyet azonban mégis a további bizonyítás alapjává kellett tenniök. A geometria megalapozása tehát már nemcsak az eleai filozófia továbbfejlesztése volt, hanem egyszersmind *állásfoglalás is az eleai filozófiával szemben.*

Végül pedig arra szeretném még felhívni a figyelmet, hogy az az állásfoglalás az eleai filozófiával szemben, amely az utókor számára mint a görög geometria elvi megalapozása maradt fenn, minden jel szerint döntően befolyásolta a logika későbbi fejlődését is. Mint ismeretes, L. E. J. BROUWER, a mai matematikai intuicionizmus megalapítója állította fel azt a tételt, hogy az arisztotelészi logikát tulajdonképpen véges halmazok vizsgálatából absztrahálták, és ezért ez a logika a matematikára — amennyiben a matematika végtelen halmazokkal foglalkozik — nem is kötelező érvényű.[118] Később O. BECKER megpróbálta ellenőrizni ennek a tételnek történeti részét ARISTOTELÉS néhány művén és arra a megállapításra jutott, hogy ARISTOTELÉS megvizsgált munkáiban — néhány jelentéktelen kivételtől eltekintve — csakugyan nincs ún. transzfinit bizonyítás.[119] Bár e részleges vizsgálat eredményét O. BECKER maga is csak provizórikusnak minősítette, talán szabad lesz mégis ezzel kapcsolatban e dolgozat befejezéseként emlékeztetnem arra, hogy ARISTOTELÉS a „végtelen" fogalmát is általában mindig abban a klasszikus értelemben használja, amely a matematikában G. CANTOR fellépéséig egyedül megengedett volt, vagyis ezen mindig *potenciális* végtelent ért. Ez a dolgozat viszont meggyőzhetett arról, hogy mind a logikában a véges halmazok vizsgálatára való korlátozódás, mind pedig a matematikában a „végtelen" fogalmának korlátozása a potenciális végtelenre, úgy látszik, a 8. euklidészi axióma felállításától datálható. Ezt megelőzően azonban az eleaták logikai kérdésekkel kapcsolatban végtelen halmazokat is vizsgáltak, sőt közeljártak az *aktuális* végtelen fogalmához is.

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОСНОВАНИЯ ГРЕЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Á. SZABÓ

ON THE AXIOMATIC FOUNDATION OF GREEK MATHEMATICS

Á. SZABÓ

118 L. E. J. BROUWER, Intuitionistische Mengenlehre (1919), Jahresber. d. Deutsch. Math. Vereingg. Bd. 28 203 kk.

119 O. BECKER, Eudoxos-Studien IV. Anhang, Quellen und Studien zur Gesch. der Mathematik etc. Abt. B Bd. 3 1936 380 kk.

Egy másodfokú kongruencia geometriai vizsgálata

Reiman István

Az alábbiakban geometriai meggondolások segítségével megvizsgáljuk az

(1) $$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz\equiv 0 \pmod{p}$$

(p páratlan prim) kongruencia megoldásainak számát és megmutatjuk, hogy ha a baloldalon álló kvadratikus forma determinánsa nem kongruens nullával modulo p, akkor (1)-nek pontosan p^2 megoldása van.

Jelöljük a mod p maradékosztály-testet K_p-vel; e test elemeivel az (1) így írható:

(2) $$\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{3} a_{ik}x_ix_k=0, \qquad (a_{ik}=a_{ik},\ |a_{ik}| \text{ determináns} \neq 0).$$

Vezessük be az (x_1, x_2, x_3) rendezett elemhármas jelölésére a szokásos

$$\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$$

vektor-jelölést, az $\mathbf{x}$-ből származtatott

$$(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3,\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3)$$

elemhármast pedig jelöljük $\mathbf{Ax}$-szel; jelölje továbbá $\mathbf{ux}$ az $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ és $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3$$

-mal értelmezett skalár szorzatát. Ezekkel a jelölésekkel (2)

(3) $$\mathbf{xAx}=0$$

alakban írható. Az $|a_{ik}|$ determináns szimmetrikus voltából következik, hogy tetszőleges $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ elemhármasokra

(4) $$\mathbf{xAy}=\mathbf{yAx}.$$

Feladatunk lényegileg a (3)-at kielégítő $\mathbf{x}$ elemhármasok számának meghatározása.

Vizsgálatunk céljára tekintsük a K_p-re épített véges projektív síkgeometriát [2]. Mint ismeretes, pontnak, ill. egyenesnek tekintjük a test elemeiből képezett (x_1, x_2, x_3) rendezett elemhármasokat, amelyekben nem minden elem 0. Az $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ és $\mathbf{y}(y_1, y_2, y_3)$ pontokat (egyeneseket) akkor és csakis akkor tekintjük azonosaknak, ha van K_p-ben olyan λ elem, amelyre

$$x_i = \lambda y_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Az $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ pont és $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ egyenes illeszkedésének feltétele:

$$\mathbf{ux} = 0.$$

Az így definiált síkon érvényesek a következő állítások: két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik, két különböző egyenesnek pontosan egy közös pontja van. Három pont akkor és csakis akkor illeszkedik egy egyenesre, ha közülük bármelyik előállítható a másik kettő lineáris kombinációjaként, a test elemeiből vett paraméterekkel. Mindezekből egyszerűen következik, hogy minden egyenesre $p+1$ pont és minden pontra $p+1$ egyenes illeszkedik. A sík pontjainak és egyeneseinek száma egyenlő.

Tekintsük most azt a polaritást, amely a sík minden $\mathbf{x}$ pontjához (pólusához) az

$$\mathbf{u} = \mathbf{Ax}$$

egyenest (polárist) rendeli. Ez a hozzárendelés az $|a_{ik}|$ determináns nem nulla volta miatt kölcsönösen egyértelmű, továbbá: egy pont akkor és csakis akkor illeszkedik egy egyeneshez, ha a pont polárisa is illeszkedik az egyenes pólusához. Nevezzük *abszolút pontnak* (egyenesnek) az olyan pontot (egyenest), amelyik illeszkedik polárisához (pólusához). Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az $\mathbf{x}$ pont illeszkedjék polárisára, $\mathbf{u}$-ra, az

$$\mathbf{ux} = \mathbf{xAx} = 0$$

egyenlőség fennállása. Ezek szerint az és csakis az az elemhármas szolgáltatja (3) egy megoldását, amelyhez abszolút pont tartozik. Célunk most a véges projektív sík abszolút pontjainak meghatározása.

1. Ismeretes, hogy *a véges projektív sík minden polaritásának van legalább egy abszolút pontja* [1].

2. *Egy egyenesen legfeljebb két abszolút pont létezhet.* Legyen ui. $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ abszolút pont, polárisaik $\mathbf{Ax}$ és $\mathbf{Ay}$, tehát

(5) $$\mathbf{xAx} = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{yAy} = 0.$$

Ha a feltevéssel ellentétben e két pont összekötő egyenesén lenne még egy abszolút pont, ez előállítható lenne $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ lineáris kombinációjaként $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}$ alakban. Ez is illeszkedne polárisára, tehát fennállna a

$$(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})\,\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) = 0$$

egyenlőség, ebből viszont (4) és (5) miatt

$$\mathbf{xAy} = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{yAx} = 0$$

következne; ez azonban azt jelentené, hogy két különböző pont, az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ illeszkedne két különböző egyeneshez, $\mathbf{Ax}$-hez és $\mathbf{Ay}$-hoz.

3. *Ha egy nem-abszolút egyenesen van egy abszolút pont, akkor van még egy.* Legyen ui. $\mathbf{u}_1$ nem-abszolút egyenes. Válasszunk ki ezen egy nem-abszolút pontot, $\mathbf{x}_2$-t (ilyen **2.** miatt biztosan létezik). Az $\mathbf{x}_2$ polárisa, $\mathbf{u}_2$ így illeszkedik $\mathbf{u}_1$ pólusára, $\mathbf{x}_1$-re és $\mathbf{u}_1$-ből az $\mathbf{x}_3$ pontot metszi ki; ennek polárisa, $\mathbf{u}_3$ ugyancsak illeszkedik $\mathbf{x}_1$-re és $\mathbf{x}_2$-ben metszi $\mathbf{u}_1$-et. Az így szerkesztett $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ pontpárhoz hasonlóan párokba szedhetjük $\mathbf{u}_1$ összes nem-abszolút pontjait. Nyilvánvaló, hogy két különböző pontpárnak nem lehet közös eleme, ezért $\mathbf{u}_1$ nem-abszolút pontjainak száma páros. Így, ha egy nem-abszolút egyenesen van egy abszolút pont, a többi p pont között kell lennie legalább még egy abszolút pontnak, hiszen p páratlan.

4. *Egy nem-abszolút egyenesen 0 vagy 2 az abszolút pontok száma.* Ez közvetlen következménye a **2.** és **3.** állításoknak.

5. *Egy abszolút egyenesre pontosan egy abszolút pont illeszkedik.* Ha ui. az $\mathbf{u}_1$ abszolút egyenesre pólusán, $\mathbf{x}_1$-en kívül még egy $\mathbf{x}_2$ abszolút pont is illeszkednék, akkor ennek $\mathbf{u}_2$ polárisa is illeszkednék az $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ pontokra, tehát azonos lenne $\mathbf{u}_1$-gyel.

Az állítás duálisa:

6. *Egy abszolút pontra pontosan egy abszolút egyenes illeszkedik.*

7. *A sík abszolút pontjainak száma* $p+1$. Válasszuk ki az **1.** szerint biztosan létező $\mathbf{x}_1$ abszolút pontot. Az erre illeszkedő $\mathbf{u}_1$ abszolút egyenesen kívül $\mathbf{x}_1$-en **6.** miatt még p számú nem-abszolút egyenes megy át, ez a $p+1$ egyenes tartalmazza a sík összes pontjait. **4.** szerint az $\mathbf{x}_1$-re illeszkedő nem-abszolút egyenesek mindegyikén $\mathbf{x}_1$-en kívül még egy abszolút pont van. A síknak tehát van $p+1$ abszolút pontja. Több azonban nincs, mert ha lenne, akkor $\mathbf{x}_1$ valamelyik nem-abszolút egyenesén 3, vagy az abszolút egyenesén 2 abszolút pont lenne, ami **4.** és **5.** miatt lehetetlen.

Nyilvánvaló, hogy a (1) kongruencia minden megoldása egy abszolút pontot, ill. abszolút egyenest ad meg, és minden abszolút pont (egyenes) megoldása (1)-nek. Egy ponthoz azonban $p-1$ elemhármas tartozik, hiszen az (x_1, x_2, x_3) és $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ ugyanazt a pontot szolgáltatják és a λ paraméter $p-1$ különböző értéket vehet fel, így az abszolút pontok (1)-nek

$$(p+1)(p-1)=p^2-1$$

megoldását adják. Ehhez hozzászámítva még a triviális $(0, 0, 0)$ megoldást, nyerjük, hogy

az (1) *kongruencia megoldásainak száma* p^2.

Megjegyezzük, hogy a fentiekkel teljesen azonos módon vizsgálhatnánk a (2) egyenlet megoldásait a p^α rendű véges test felett. Ebben az esetben arra az ismert eredményre jutunk, hogy a megoldások száma $p^{2\alpha}$ [3].

IRODALOM

[1] Baer. R. Polarities in finite projektive planes. (Bull. Amer. Math. Soc. 52, 77—93 (1946)).
[2] Carmichael, R. C. Introduction to the theory of groups of finite order. Boston 1937.
[3] Dickson, L. E. Linear groups. Leipzig 1901.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО СРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

I. Reiman

В работе доказывается, что число решений квадратичного сравнения

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ik} x_i x_k \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p)$$

(p-простое число, $a_{ik}=a_{ki}$) равно p^2, если определитель квадратичной формы не делится на p.

Чтобы доказать это утверждение, рассматривается конечная проэктивная плоскость, построенная на тело классов вычетов относительно p. На этой плоскости определяется полярность, сопоставляющая точке $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ прямую

$$\mathbf{u}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3).$$

Точка называется абсолютной, если оно расположенна на сопоставленной ей прямой; эти точки суть решения исследуемого сравнения. Геометрическими и комбинаторными соображениями доказывается, что плоскость содержит $p+1$ абсолютных точек, отсюда следует, что число решений равно $(p+1)(p-1)+1=p^2$.

Результат этим же методом может быть обобщён на случай уравнения над конечным телом порядка p^α

$$\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{3} a_{ik}x_i x_k = 0$$

$(a_{ik}=a_{ki},\ \det|a_{ik}| \neq 0)$, в этом случае число решений $p^{2\alpha}$.

GEOMETRISCHE UNSERSUCHUNG EINER QUADRATISCHEN KONGRUENZ

I. Reiman

In vorliegender Arbeit wird gezeigt, dass die Anzahl der Lösungen der quadratischen Kongruenz

$$\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{3} a_{ik}x_i x_k \equiv 0 \pmod p$$

(p prim, $a_{ik}=a_{ki}$) p^2 beträgt, insofern die Determinante der quadratischen Form mod p nicht mit Null kongruent ist.

Zwecks der Lösung betrachten wir die endliche projektive Ebene über dem Restklassenkörper modulo p. Auf dieser Ebene erzeugen wir eine Polarität, die dem Punkte $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ die Gerade

$$\mathbf{u}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

zuordnet. Wir nennen einen Punkt „absolut“, wenn seine zugeordnete Gerade ihn enthält. Die absoluten Punkte liefern die Lösungen der untersuchten Kongruenz. Mit Hilfe geometrischer, bzw. kombinatorischer Überlegungen zeigen wir, dass die Ebene $p+1$ absolute Punkte besitzt, daher die Anzahl der Lösungen

$$(p+1)(p-1)+1=p^2$$

beträgt.

Mit derselben Methode lässt sich das Resultat auf die Lösungen der Gleichung

$$\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{3} a_{ik}x_i x_{ik} = 0 \qquad (a_{ik}=a_{ki},\quad \mathrm{Det}\,|a_{ik}|\neq 0)$$

über einem endlichen Körper der Ordnung p^α verallgemeinern; die Anzahl der Lösungen ist dann $p^{2\alpha}$.

Az Eneström—Kakeya tételről

VINCZE ISTVÁN

1. Jól ismert azon Eneström (1893) és tőle függetlenül Kakeya (1920) által talált egyszerű és szép tétel, mely szerint a

$$\varphi(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n = 0 \tag{1}$$

egyenletnek, melynek *valós* együtthatóira a

$$\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_n \geqq 0 \tag{2}$$

feltétel teljesül, nem fekhetnek gyökei az egységkörön belül. Kiterjedt irodalom ad e tételre bizonyításokat, általánosításokat, és alkalmazásokat. Turán Pál hívta fel a figyelmemet arra, hogy tudomása szerint e tétel komplex együtthatós egyenletekre vonatkozó analogonja még nem szerepel az irodalomban. Utóbb felhívta a figyelmemet néhány újabb cikkre [2, 3] amelyek a monotonítás fogalmának komplex számokra való különböző kiterjesztése esetére mondanak ki polinomokra, ill. trigonometrikus polinomokra vonatkozó tételeket. Az alábbiakban a komplex együtthatókra vonatkozó, fentiektől eltérő igen egyszerű monotonitási feltevéssel élünk és az Eneström—Kakeya tétel erre vonatkozó analogonjával foglalkozunk.

2. Legyenek az (1) egyenlet együtthatói

$$\alpha_k = a_k + i b_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots n$$

komplex számok, melyek valós és komplex része elégítse ki az

$$\begin{aligned} a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq 0, \\ b_0 \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n \geqq 0, \end{aligned} \tag{2'}$$

feltételeket. Ekkor fennáll az az állítás, hogy *a* (2′) *feltételeknek eleget tevő együtthatójú* (1) *egyenlet gyökei nem fekhetnek az* $r_0 = \frac{|a_0 + i b_0|}{a_0 + b_0}$ *sugarú körön belül.*

Minthogy $a_0 \geqq 0$ és $b_0 \geqq 0\,(a_0^2 + b_0^2 \neq 0)$ minden értékére fennáll az

$$1 \geqq \frac{|a_0 + i\,b_0|}{a_0 + b_0} \geqq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

egyenlőtlenség, ennélfogva állításunkból következik, hogy *a* (2') *feltétel mellett az* (1) *egyenlet gyökei nem fekhetnek a* $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071\ldots$ *sugarú körön belül*

Állításunk $b_0 = 0$ esetben az Eneström—Kakeya tételt adja, azonban két szempontból tekinthető pontatlannak:

a) Nyitott kérdés, hogy a tételben szereplő r_0 határ $r_0 < 1$ esetben pontos-e? Az alábbi 3. §-ban megmutatjuk, hogy az

$$1 + i + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$$

egyenletnek, melynek együtthatói kielégítik a (2') feltételeket, van olyan z_0 gyöke, amelyre

$$0{,}905 < |z_0| < 0{,}91$$

tehát az egységkör belsejébe esik. Tételünk azonban erre az esetre a sokkal kisebb $r_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ határt adja.

b) Az

$$(1 + i) + (1 + i)\,z + \cdots + (1 + i)\,z^n = 0 \tag{3}$$

egyenleteknek nincsenek gyökei az egységkör belsejében, tételünk (közvetlen) alkalmazása mégis az $r_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ határt adja meg. Éppen ezért az együtthatókra vonatkozó (2') feltételnél valamivel általánosabb feltétel alapján kerül megfogalmazásra és így fentebbi állításainkat is tartalmazza a következő

Tétel. *Ha az* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ *komplex számokhoz található olyan* (φ, ψ) *szögpár, hogy* $|\varphi - \psi| < \pi$

$$\alpha_k = a_k\,e^{i\varphi} + b_k\,e^{i\psi},\ k = 0, 1, 2, \ldots n$$

és

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq 0,$$

$$b_0 \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n \geqq 0,$$

akkor az (1) *egyenletnek nincs gyöke a* $\varrho_0 = \frac{|\alpha_0|}{a_0 + b_0}$ *sugarú körön belül*

Néhány megjegyzés: Az $\alpha_k = a_k + ib_k$ $(k=0, 1, \ldots n)$ együtthatókra vonatkozó (2') „monotonitási" feltétel geometriailag azt jelenti, hogy a komplex sík első negyedébe eső α_k komplex pontokból a tengelyekre húzott merőleges szakaszok k különböző értékeire nem metszhetik egymást (azonban összeeshetnek), hanem a tengelyszakaszokkal alkotott négyzetek növekvő k-val tartalmazzák a továbbiakat. A tételünkben mondott monotonitási feltétel ármost olyan komplex együtthatókra vonatkozik, amelyek az origón átmenő valamely más koordináta tengelypárra tesznek eleget ilyen feltételnek.

Minthogy

$$1 \geqq \frac{|a_0 e^{i\varphi} + b_0 e^{i\psi}|}{a_0 + b_0} = \varrho_0 \geqq \left| \cos\frac{\varphi - \psi}{2} \right|,$$

ennélfogva ϱ_0-ra az együtthatóktól függetlenül csak $|\varphi - \psi| < \frac{\pi}{2}$ esetben kaphatunk $\frac{\sqrt{2}}{2}$ vagy ennél jobb alsó határt.

Bizonyítás: A klasszikus Hurwitz-féle bizonyítás menetét alkalmazzuk: $|z| < 1$-re érvényes a következő reláció

$$|(1-z)\varphi(z)| = |\alpha_0 - (\alpha_0 - \alpha_1) z - \cdots - (\alpha_{n-1} - \alpha_n) z^n - \alpha_n z^{n+1}| =$$

$$= |\alpha_0 - e^{i\varphi}[(a_0 - a_1) z + (a_1 - a_2) z^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n) z^n + a_n z^{n+1}] -$$

$$- e^{i\psi}[(b_0 - b_1) z + (b_1 - b_2) z^2 + \cdots + (b_{n-1} - b_n) z^n + b_n z^{n+1}]| \geqq$$

$$\geqq |\alpha_0| - (|a_0 - a_1||z| + |a_1 - a_2||z|^2 + \cdots + |a_{n-1} - a_n||z|^n + a_n |z|^{n+1}) -$$

$$- (|b_0 - b_1 |z| + |b_1 - b_2||z|^2 + \cdots + |b_{n-1} - b_n||z|^n + b_n |z|^{n+1}) \geqq$$

$$\geqq |\alpha_0| - (a_0 + b_0)|z|.$$

Az utolsó kifejezés azonban határozottan pozitív, ha

$$|z| < \frac{|\alpha_0|}{a_0 + b_0} = \varrho_0,$$

vagyis e sugarú kör nem tartalmazhat gyököt. Q. e. d.

3. Vizsgáljuk az

$$1 + i + z + z^2 + \cdots + z^n = 0$$

egyenletet, amely az

$$\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = i$$

alakban is írható. Ez az egyenlet egynél kisebb abszolut értékű z-re csak akkor teljesülhet, ha az $1-z^{n+1}$ és $1-z$ „vektorok" merőlegesek és z a 3., míg z^{n+1} az első síknegyedbe esik. Valós és komplex részre térve ugyanez olvasható le az

$$1+r\sin\varphi-r^{n+1}\cos(n+1)\varphi=0$$

$$1-r\cos\varphi-r^{n+1}\sin(n+1)\varphi=0$$

egyenletrendszerből is. Ha $\varphi=-\frac{\pi}{2}$ és $n=8k-2$ alakú, $k=$ $=1,2,\ldots$, akkor r-re nézve a

$$\sqrt{2}-r-r^{n+1}=0$$

egyenlet adódik, amelynek baloldala az $r=1$ helyen $\sqrt{2}-2<0$, s így az egyenletnek $r_n<1$ gyöke van. A legkisebb abszolut értékű gyököt n legkisebb szóbajöhető értékére $n=6$-ra kapjuk, amikor is r_6-ra $0{,}905<r_6<0{,}91$ adódik.

4. Aczél János [1] dolgozatának egy meggondolása az Eneström—Kakeya tételre *valós* együtthatók esetén a következő egyszerű, elegáns bizonyítást sugalmazza, (amely valószínűleg szerepel az irodalomban): Az (1) egyenletből

$$(1-z)\varphi(z)=\alpha_0-(\alpha_0-\alpha_1)z-\cdots-(\alpha_{n-1}-\alpha_n)z^n-\alpha_n z^{n+1},$$

vagy bevezetve a $p_k=\alpha_k-\alpha_{k+1}$, $n=0,1,2,\ldots n-1$, $p_n=\alpha_n$ nemnegatív mennyiségeket, egyenletünk a

$$\frac{p_0z+p_1z^2+\cdots+p_nz^{n+1}}{p_0+p_1+\cdots+p_n}=1$$

alakra hozható. Minthogy a baloldal a z^k $(k=1,2,\ldots n+1)$ komplex pontrendszer súlypontja, amely e pontok legkisebb konvex burkolóján belül fekszik, $|z|<1$-re fenti egyenlet nem állhat, amiből a tétel adódik.

A 2. §-ban mondott tételünkre hasonló bizonyítás nyerhető, mely az alábbi igen egyszerűen bizonyítható tételen alapul:

Legyen $\bar{z}$ a $z_1, z_2, \ldots z_n$ komplex pontrendszer „súlypontja" a $\pi_k=p_k+iq_k$, $p_k\geqq 0$, $q_k\geqq 0$ „komplex" tömegeloszlás esetén:

$$\bar{z}=\frac{\sum_{k=1}^{n}(p_k+iq_k)z_k}{\sum_{k=1}^{n}(p_k+iq_k)},$$

akkor

$$|\bar{z}| \leqq \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k + \sum_{k=1}^{n} q_k}{\left|\sum_{k=1}^{n} (p_k + i q_k)\right|} \cdot \max_{1 \leqq k \leqq n} |z_k|.$$

Ebből adódik a

$$\max_{1 \leqq k \leqq n} |z_k| \geqq \frac{\sqrt{2}}{2} |\bar{z}|$$

egyenlőtlenség is, ami független a p_k és q_k számoktól.

IRODALOM

[1] Aczél J.: On some sequences defined by recurrences. Acta Universitatis Szegediensis. Tom. XIII. Fasc. 2. (1949) 136–139.

[2] Krishnaiah, P. V.: On Kakeya's theorem. J. London Math. Soc. 30 (1955) 314—319.

[3] Zaring, W. M.: Multiply monoton complex sequences. Proc. Amer. Math. Soc. (1953) 583—593.

О ТЕОРЕМЕ ENESTRÖM – KAKEYA

I. Vincze

Автор распространяет теоремы Eneström—Kakeya на случай комплексных коэффичиентов Он доказывает следующую теорему:

Если комплексные числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ могут быть записанны в виде

$$\alpha_k = a_k e^{i\varphi} + b_k e^{i\psi} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

где

$$a_0 \geqq a_1 \geqq \cdots \geqq a^n,$$

$$b_0 \geqq b_1 \geqq \cdots \geqq b_n,$$

то уравнение

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_n z^n = 0$$

не имеет корня внутри круга радиуса

$$\varrho_0 = \frac{|\alpha_0|}{a_0 + b_0} \geqq \left|\cos \frac{\varphi - \psi}{2}\right|$$

Открытым остаётся следующий вопрос: является ли радиус ϱ_0 наименьшим в случае $\varphi \neq \psi$. Автор показывает, что уравнения

$$1 + i + z + \cdots + z^{8k-2} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

имеют корень внутри единичного круга, который однако превосходит данную в теореме грань.

ON THE THEOREM OF ENESTRÖM—KAKEYA

I. VINCZE

Author considers an analogon of the theorem of Eneström—Kakeya for complex coefficients. The following theorem is proved:

If the complex numbers $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$ *are of the form*

$$\alpha_k = a_k e^{i\varphi} + b_k e^{i\psi}, \quad k = 0, 1, 2, \dots n,$$

where $|\varphi - \psi| < \pi$ *and*

$$a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \dots \geqq a_n \geqq 0,$$

$$b_0 \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \dots \geqq b_n \geqq 0,$$

then the equation

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n = 0$$

has no roots inside the circle with radius $\varrho_0 = \dfrac{|\alpha_0|}{a_0 + b_0} \geqq \left| \cos \dfrac{\varphi - \psi}{2} \right|$.

It is an open question whether the limit ϱ_0 is exact in the case $\varphi \neq \psi$. Author shows that the equations $1 + i + z + \dots + z^n = 0$ $(n = 1, 2, \dots)$ have a root inside the unit circle, but it exceeds the limit given in the above theorem.

Állandószélességű síkgörbék egy jellemzése

Heppes Aladár

Alpár László vetette fel a következő kérdést. Melyek azok a zárt, konvex síkgörbék, amelyeknek mindegyik húrja a húr által meghatározott ívek egyikének legnagyobb húrja.

A kérdés vizsgálata az állandószélességű görbékhez vezetett.

Definíció: *Állandószélességű* egy zárt, konvex síkgörbe, ha bármely két, a görbét közrefogó párhuzamos támaszegyenesének egymástól való távolsága ugyanannyi. (Ez a távolság a görbe legnagyobb húrjának hosszával egyenlő.)

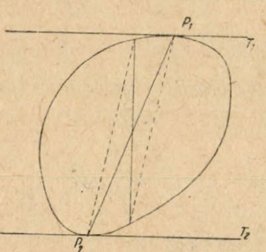
Bebizonyítjuk a következő

Tételt: Egy zárt, konvex síkgörbe akkor és csak akko állandószélességű, ha mindegyik húrja a húr által meghatározot ívek egyikének legnagyobb hurja.

Első lépésként az állandószélességű görbék definíciójáról e görbék egy ismert jellemzésére térünk át, amely szerint egy zárt, konvex síkgörbe akkor és csak akkor állandószélességű, ha bármely párhuzamos támaszegyenespárja merőleges a görbének a támaszegyeneseket összekötő húrjára. A görbe két pontját *átellenes*nek nevezzük, ha e pontokon át párhuzamos támaszegyenesek fektethetők. (Könnyen belátható, hogy az így jellemzett görbék az állandószélességűek. Egyfelől, ha a párhuzamos támaszegyenesek távolsága állandó érték, akkor az őket összekötő húr hossza ennél az értéknél nagyobb nem lehet, a húr tehát merőleges a támaszegyenesekre. Másfelől, ha bármely két párhuzamos támaszegyenes merőleges az őket összekötő húrra, akkor a görbe két „átellenes íve" felfogható ugyanannak az egyenesseregnek — a legnagyobb húrok seregének — ortogonális trajektóriájaként, s ezért a két ív által kimetszett húrok hossza, azaz a párhúzamos támaszegyenesek távolsága — állandó érték.)

Ha egy állandószélességű görbét tetszőleges pontjából kiindulva végigjárunk, a görbe pontjainak a kezdőponttól való távolsága előbb monoton nő, majd monoton fogy. Ellenkező esetben volna a görbének olyan közbülső P pontja, amelyhez a kezdőpontból a legnagyobb húrnál rövidebb és a P pontbeli támaszegyenesek egyikére merőleges húr vezetne. Minthogy a görbe állandószélességű, a kezdőponton át is fektethetnénk e húrra merőleges támaszegyenest. Ez azonban lehetetlen, mert állandószélességű görbéknél a párhuzamos támaszegyenesek távolsága a legnagyobb húr hosszával egyenlő.

Tekintsünk most egy állandószélességű görbét és annak egy nem maximális húrját. A húr által meghatározott ívek közül nevezzük nagyobbnak azt, amely tartalmazza a húr végpontjainak átellenes pontjait. (E két pont nem eshet különböző ívekre, mert akkor a görbének lenne két, közös pont nélküli legnagyobb húrja, ami lehetetlen.) A választott húr egyik végpontjából kiindulva járjuk végig a kisebb ívet. Eközben a kezdőponttól való távolság monoton nő amig a húr másik végéhez jutunk. A körüljárás során ugyanis a valóban fogyó szakaszba csak a kezdőpontnak a nagyobb íven levő átellenes pontján áthaladva juthatnánk el. (Az ív két belső pontja közti távolság hasonló okból monoton nő, ha az egyik pontot az íven a másiktól távolodva az ív, illetve a húr végpontjába visszük.) A kisebb ív legnagyobb húrja tehát a végpontjait összekötő húr.



1. ábra

Induljunk ki ezután egy zárt, konvex görbéből, amelynek mindegyik húrja a húr által meghatározott ívek egyikének legnagyobb húrja. A tétel állításával ellentétben tegyük fel, hogy e görbe nem állandószélességű és így van olyan $P_1 P_2$ húrja, amely a párhuzamos T_1, T_2 támaszegyeneseket köti össze, de nem merőleges azokra. Ha a T_1, T_2 támaszegyenesekre merőleges és a $P_1 P_2$ húr felezőpontján átmenő húrt meghúzzuk, olyan húrhoz jutunk, amely nem legnagyobb húrja az általa meghatározott ívek egyikének sem. Egyik végének P_1-től, másiknak P_2-től való távolsága — a derékszögű háromszögek oldalaira vonatkozó egyenlőtlenség alapján — nagyobb a húr hosszánál.

(1958. július 8.)

ОБ ОДНОМ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ КРИВЫХ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ

A. HEPPES

Автор доказывает следующую теорему: Некоторая замкнутая плоская кривая тогда и только тогда есть кривая постоянной ширины, если каждая ее хорда является наибольшей хордой одной из двух дуг, определенных, концами хорды.

ON CHARACTERISATION OF CURVES OF CONSTANT WIDTH

A. HEPPES

The author proves the following theorem: A closed convex plane curve is of constant width, if and only if, every chord of it is a greatest chord of one of the two arcs determined by its endpoints.

Hatványsorok konvergencia-tulajdonságairól

CORRÁDI KERESZTÉLY

Bevezetés

E dolgozatban két, a hatványsorok konvergenciakörön való viselkedésével kapcsolatos jelenség vizsgálatával akarunk foglalkozni. Az első ezek közül így fogalmazható:

I. Tétel: Létezik olyan hatványsor, mely az egységkör kerületén egyenletesen konvergens, de nem abszolut konvergens.

A második így önthető szavakba:

II. Tétel: Létezik oly, az egységkörben reguláris függvény, mely az egységkörben nem korlátos, s melynek hatványsora az egységkör kerületén mindenütt konvergens.

Mindkét probléma jól ismert, az első állítását az alábbi sokkal többetmondó tétellel lehet helyettesíteni:

I. a. Tétel: Létezik oly

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

az egységkörben reguláris függvény, melyre

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

az egységkör kerületén egyenletesen konvergens, de adott tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon>0$ esetén a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^{2-\varepsilon}$$

végtelen sor divergens.

A dolgozat célja, hogy ezen ismert tételekre rövid és egyszerű bizonyítást adjon, melyeknek konstrukciója talán érdemel némi figyelmet.

Az I. Tétel H. Bohr-tól, az I. a. tétel, Carleman-tól származik. Egy egyszerű konstrukció áll Turán Pál [1] dolgozatában is az I. a. tétel bizonyítására és ebben az I. tétellel foglalkozó dolgozatok részletes jegyzéke is megtalálható. Az I. tételt Landau is tárgyalja „Neuere Ergebnisse der Funktonentheorie" c. könyvében. A II. Tétel Fejér Lipóttól való; tőle függetlenül Kővári Tamás és Sós Vera is észrevették a tétel által kimondott jelenséget [2]. Mi az I. és II. tételek bizonyításával fogunk foglalkozni.

I. §

Az I. Tétel bizonyítása. A tétel állításának megfelelő hatványsort az alábbi alakban állítjuk elő:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z),$$

ahol a $P_n(z)$ polynomok az alábbi módon vannak definiálva:

$$P_n(z)=\frac{z^{2^{n+1}}}{n2^{n+1}}\prod_{k=0}^{n}(1+(-1)^k z^{2^k}), \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Ezen polynomok először is nem nyúlnak egymásba, mert

$$2^{n+1}+\sum_{k=0}^{n}2^k=2^{n+2}-1<2^{n+2}$$

teljesülése folytán $P_n(z)$ legmagabbfokú tagja alacsonyabbfokú $P_{n+1}(z)$ legalacsonyabbfokú tagjánál.

Másodszor ezen hatványsor minden $P_n(z)$ polynomjában egy tetszőleges, előforduló z-hatvány együtthatója ± 1, tekintettel arra, hogy minden egész egyértelműen állítható elő kettőhatványok összegeként. Ebből közvetlenül világos, hogy a szóbanforgó hatványsor együtthatóinak abszolutérték összege

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

ami divergens.

A vizsgált sor egyenletes konvergenciája így látható be: legyen

$$g(z)=(1+z)(1-z^2)$$

$$\max_{|z|\leqq 1}|g(z)|=\max_{|z|\leqq 1}|(1+z)(1-z^2)|=A$$

ekkor nyilván $A<4$, mert $A\geqq 4$ azt jelentené, hogy van oly

$|z_0| \leqq 1$ pont, melyre

$$|g(z_0)| \geqq 4$$

ez viszont lehetetlen, mivel

$$|g(z_0)| \leqq |1+z_0|\,|1-z_0^2| \leqq (1+|z_0|)(1+|z_0|^2) \leqq 2\cdot 2 = 4$$

s az egyenlőség is csak $|1+z_0|=2, |1-z_0^2|=2$ esetben lenne elérhető, ami azonban az ebből folyó

$$|1+z_0|=2$$

$$|1-z_0|=1$$

egyenlőségek folytán csak a $|z_0|>1$ esetén lenne elérhető. Így $A=(2-\varepsilon)^2$ jelölésben

$$|P_n(z)| \leqq \frac{2}{n2^{n+1}} |g(z)|\,|g(z^4)| \cdots |g(z^{4^{\left[\frac{n}{2}\right]}})| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n2^n}(2-\varepsilon)^{2\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)} \leqq \frac{1}{n2^n}(2-\varepsilon)^{n+2} =$$

$$= \frac{1}{n}(2-\varepsilon)^2\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

s így a $P_n(z)$ polynomsor egyenletesen konverges, s az $\frac{1}{n}$-es szorzófaktor miatt a hatványsor egyenletes konvergenciája is adódik.

II. §

Hogy a II. tétel követelményeit teljesítő hatványsor konstrukcióját jobb megvilágításba helyezzük előbb az alábbi egyszerű, az I. Tétel speciális esetét képező állítást bizonyítjuk be:

III. Tétel: Létezik olyan hatványsor, mely az egységkör kerületén mindenütt konvergens, de nem abszolut konvergens.

Bizonyítás: Vizsgáljuk az alábbi polynomsort

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z),$$

ahol a $P_n(z)$ polynomok az alábbi módon vannak definiálva:

$$P_n(z) = \frac{z^{n^2}}{n2^n}(1-z)^n, \qquad (n=1,2,.,,).$$

Könnyű látni, hogy ez a polynomsor egyúttal hatványsor is, mivel

$$n^2+n<(n+1)^2$$

folytán bármely két polynom nem tartalmaz azonos kitevőjű z-hatványt.

Ezen polynomsor által definiált hatványsor az egységkör kerületén nem abszolut konvergens, ugyanis

$$(1-z)^n=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\binom{n}{\nu}z^{n-\nu}$$

folytán a kerületen a hatványsor abszolut értékét tekintve a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}$$

numerikus sorral van reprezentálva, s ez

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}=2^n$$

eljesülése folytán a harmonikus-sor divergenciája miatt divergens.

A kerületi pontokban való konvergencia így látható: $f(z)$ részletösszegeit $s_m(z)$-vel jelölve az

$$|s_m(z)-s_l(z)|<\varepsilon$$

reláció megmutatása elég, hacsak m és l, ε-tól és z-től függően elég nagy.

$z\neq-1$ esetén

$$|P_n(z)|<\frac{1}{n}\left|\frac{1-z}{2}\right|^n=\frac{1}{n}q^n<q^n$$

ahol

$$0<q<1.$$

Így a polynomsor minden $|z|=1$ pontban, hacsak $z\neq-1$ konvergens, s az $\frac{1}{n}$-es szorzófaktor miatt maga a hatványsor is konvergens.

Ha $z=-1$, akkor a sor a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

Leibnizt-sor konvergenciája folytán konvergens.

Ezen előkészítés után lássuk a II. tétel bizonyítását. Először egy megjegyzést akarunk tenni. Ha a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

az egységkörben konvergens hatványsorra

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$$

divergens, akkor a hatványsor összegfüggvénye a kör belsejében nem lehet korlátos.

Ezen megjegyzés után vizsgáljuk a $\sum_{n=2}^{\infty} P_n(z)$ polynomsort, ahol

$$P_n(z) = \frac{z^{n^2}}{2^n \log^{1/2} n}(1-z)^n, \qquad (n=2, 3, \ldots).$$

Ez hatványsor is, mert mint az előző példánál láttuk

$$n^2 + n < (n+1)^2$$

folytán egymásbanyúlás nincs. A vizsgált hatványsor konvergenciája az egységkör kerületén ugyanúgy látható, mint a bevezető jellegű tételnél.

Másrészt

$$\sum_{m=4}^{\infty} |a_m|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{2n} \log n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}^2,$$

s felhasználva, hogy

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu}^2 = \binom{2n}{n}$$

valamint, hogy

$$\binom{2n}{n} > \frac{2^{2n}}{2n+1}$$

arra jutunk, hogy

$$\sum_{m=4}^{\infty} |a_m|^2 > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \log n},$$

s a jobboldalon álló sor divergenciája miatt az állítás a megjegyzés miatt adódik.

IRODALOM

[1] P. Turán: On some examples in the theory of power series. (Bull. of the Am. Math Soc. 54 (1948) 932—936).
[2] Kővári T.—Sós V. Matematikai Lapokban megjelent feladat.

О ПОВЕДЕНИИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ НА ОКРУЖНОСТИ СХОДИМОСТИ

K. Corrádi

Работа занимается двумя проблемами, связянными с поведением степенных рядов на окружности сходимости. Эти проблемы известны, но что простота конструкций заслуживает некоторого внимания.

Первая проблема: существует степенной ряд, равномерно сходящийся на единичной окружности, но не сходящийся абсолютно.

Вторая проблема: существует степенной ряд, везде сходящийся на единичной окружности, сумма которого не ограниченна внутри единичной окружности.

ÜBER KONVERGENZ-EIGENSCHAFTEN VON POTENZREIHEN

K. Corrádi

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir zwei Probleme, die mit dem Verhalten von Potenzreihen am Rande ihrer Konvergenzkreisen verbunden sind.

Das erste dieser Probleme lautet: Es gibt eine Potenzreihe. die am Rande des Einheitskreises gleichmässig, doch nicht absolut konvergiert.

Das zweite kann man so fassen: Es gibt eine Potenzreihe, die am Rande des Einheitskreises überall konvergiert, doch stellt ihre Summe eine, im Inneren des Einheitskreises unbeschränkten Funktion dar.

Die Resultaten selbst, sind ja bekannt, doch vielleicht die Einfachkeit der Konstruktionen verdient gewisse Interesse.

Az 1959. évi Kossuth-díjjal kitüntetett Freud Géza dolgozatainak jegyzéke

1. Békéssy—Freud—Marx—Nagy: Elméleti fizikai feladatok. Egyetemi tankönyv, Tankönyvkiadó, 1951.
2. Restglied eines Tauberschen Satzes I. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 2 (1951), 299—308.
3. Über die Mohrensteinsche Berechnung des H_2Molekuls. Acta Phys. Ac. Sci. Hung. 1 (1952), 325—328.
4. Über die starke (*C*, 1) Summierbarkeit von orthogonalen Polynomreihen. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 3 (1952), 83—88.
5. Ortogonális polinomok erős (*C*, 1) szummálhatóságáról. MTA III. Oszt. Közl. 3 (1953), 507—512.
6. Über die Konvergenz orthogonaler Polynomreihen. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 3 (1952), 89—98.
7. Über einen reihentheoretischen Satz von L. Fejér. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 3 (1952), 173—176.
8. Fejér Lipót egy sorelméleti tételéről. MTA III. Oszt. Közl. 3 (1953) 45—54.
9. Restglied eines Tauberschen Satzes II. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 3 (1952), 299—306.
10. A statisztikus atommodell kinetikus energia korrekciójáról. AMI Közl. 1 (1952), 389—391.
11. Kétkomponensű ideális gázelegy elosztása centrifugális erőtérben. AMI Közl. 1 (1952), 365—367.
12. Párhuzamos elektromos vezetők mágneses terének számításáról I. AMI Közl. 1 (1952), 377—387.
13. Egy Tauber-típusú tételről. MTA III. Oszt. Közl. 3 (1953), 45—54.
14. Módosított egycentrum kölcsönhatási integrálok számítása. AMI Közl. 1 (1952), 369—375. (Arató Mátyással közösen.)
15. J. P. Natanson „Konstruktív függvénytan“ c. könyvéről. MTA III. Oszt. Közl. 3 (1953), 109—116.
16. Über die absolute Konvergenz von orthogonalen Polynomreihen. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 4 (1953), 127—136.
17. Ortogonális polinomsorok abszolut konvergenciájáról. MTA III. Oszt. Közl. 5 (1955), 49—57.
18. Über die Lebesgueschen Funktionen der Lagrangeschen Interpolation. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 4 (1953) 137—142.
19. A Lagrange-féle interpoláció Lebesgue-függvényeiről. MTA III. Oszt. Közl. 3 (1953), 563—568.
20. Über eine Satz von P. Erdős und P. Turán. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 4 (1953), 255—266.
21. Erdős Pál és Turán Pál egy tételéről. MTA III. Oszt. Közl. 4 (1954), 209—214.

22. Körkeresztmetszetű vezetőben fellépő áramkiszorításról. AMI Közl. 2 (1953), 467—478.
23. Über die Stromverdrängung in kreiszylindrischen Leitern. Acta Techn. Ac. Sci. Hung. 1 (1953)
24. Párhuzamos elektromos vezetők mágneses terének számításáról II. AMI Közl. 2 (1953), 479—488. (Szilvay Gézánéval közösen.)
25. Über die Konvergenz des Hermite—Fejérschen Interpolationsverfahrens. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 5 (1954), 109—128.
26. A Hermite—Fejér-féle interpolációs eljárás konvergenciájáról. MTA III. Oszt. Közl. 5 (1955), 29—47.
27. Restglied eines Tauberschen Satzes III. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 5 (1954), 275—289.
28. Über orthogonale Polynome. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 5 (1954), 291—298.
29. Ortogonális polinomokról. MTA III. Oszt. Közl. 5 (1955), 21—27.
30. Ein Zusammenhang zwischen den Funktionenklassen Lip α und Lip (β, γ). Acta Sci. 5 (1954), 260.
31. Über das Gliedweise Differenzieren einer orthogonaler Polynomreihe. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 6 (1955), 221—226.
32. Über einseitige Approximation durch Polynome I. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 16 (1955) 12—28.
33. Односторонние L_1 — приближения и ух прибченение к тефечам тауберсного, Докл. Акад. Наук СССР 102 (1955) 689—691.
34. A potenciálelmélet harmadik peremértékfeladatáról. AMI Közl. 3 (1954), 223—239.
35. Elektromos térbe helyezett dipolus rotátor kvantált energianívóinak kiszámítása. AMI Közl. 3 (1954), 235—246. (Bognár Jánossal közösen.)
36. Über differentierten Folgen der Lagrangeschen Interpolation. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 6 (1955), 467—474.
37. Hővezetési és diffuziós feladatok összetett peremfeltételekkel. AMI Közl. 3 (1955), 369—394.
38. A körlemezre vonatkozó Dirichlet-elv alkalmazhatóságáról. MTA MKI Közl. 1 (1956), 151—156.
39. Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis. (Králik Dezsővel közösen.) Acta Math. Ac. Sci. Hung. VII. (1956), 411—418.
40. A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről I. (Adler Györggyel együtt.) MTA MKI Közl. 1 (1956), 157—166.
41. A hővezetés differenciálegyenletének maximum-elvéről III. MTA MKI Közl. 1 (1956), 437—446.
42. Körkeresztmetszetű vezetőben mutatkozó áramkiszorításáról. MTA VI. Oszt. Közl. 18 (1956), 7—8.
43. Über gleichzeitige Approximation einer Funktion und ihrer Derivierten. IV. Österrichisches Mathematikerkongress, Wien, 1956.
44. Untersuchungen über orthogonale Polynome. Bukaresti Matematikai Kongresszus, 1956.
45. Parciális differenciálegyenletek. Műszaki Matematikai gyakorlatok, Tankönyvkiadó, 1957.
46. Über die Asymptotík orthogonaler Polynome. Publications de l'Institut Mathématique, Beograd, T. XI (1957), 19—32.
47. Eine Bemerkung zur asymptotischen Darstellung von Orthogonalpolynomen, Math. Scandinavica 5 (1957), 285—290.
48. Some remarks on one-sided approximation (with T Ganelius) Math. Scand. 5 (1957), 276—284.

49. Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successive par un polynome trigonométrique et par ses dérivées successives, Acta Mathematica, Uppsala, 99 (1958), 33—52 (avec J. Czipszer).
50. Über eine Eigenschaft der Lösungen der Wärmeleitungsgleichung, Publications de l'Ac. Bulgare des Sci., sajtó alatt.
51. Über das Thomsonsche Prinzip. MTA MKI Közl. III. évf. 1—2 (1958), 21—24.
52. Eine Ungleichung für Tschebischeffsche Approximationspolynome, Acta Sci. (Szeged). T XIX—3—4 (1958), 162—164.
53. Über die Approximation reeller stetiger Funktionen mit gewöhnlichen Polynomen. Mathematische Annalen. Bd 137 (1959) 17—25.
54. Ein Beitrag zu dem Satze von Cantor und Bendixson. Acta Math. Ac. Sci. Hung. T. IX. 3—4 (1958), 333—336.
55. Bemerkung über die Konvergenz eines Interpolationsverfahrens von P. Turán. Acta Math. Ac. Sci. Hung. T. IX. 3—4 (1958), 337—341.

FELADATROVAT

Szerkeszti: Hajós György

A feladatrovatnak szánt küldeményeket (az egyes feladatok megoldását külön lapon) a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Szabadság tér 17.

Kitűzött feladatok

105. Legyen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ minden valós $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ sorozatra értelmezett, mindegyik változójában monoton növekvő valós függvény. Igaz-e, hogy ha $x_i \leqq y_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, akkor

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \leqq f(y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots)?$$

Czipszer János

106. Legyen k tetszőlegesen adott természetes szám. Bizonyítandó, hogy végtelen sok olyan p prímszám van, amelyre az

$$x^4 = 2^k y^p + z^2$$

egyenlet természetes számokkal megoldható.

Corrádi Keresztély

107. Bizonyítandó, hogy $0 < s < 2s \leqq t$ esetén

$$\sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k}{t-k} \binom{t-k}{s} \binom{s}{k} = 0.$$

Császár Ákos

108. Az n-dimenziós euklidesi térben szabályos m-parallelotopnak nevezzük az $\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{e}_i$ $(0 \leqq \alpha_i \leqq 1)$ helyvektorú pontok összességét, ha az $\mathbf{e}_i$ vektorok nem nullvektorok, páronként ortogonálisak és koordinátáiknak egyike sem negatív. Kérdés, megválasztható-e véges sok szabályos m-parallelotop úgy, hogy a térnek 0-nál több, de 2^m-nél kevesebb pontja legyen e parallelotopok közül páratlan soknak a csúcspontja?

Grätzer György, Hajnal András és Schmidt Eligius

Megoldott feladatok

85. feladat. Konstruáljunk olyan hatványsort, amelyik a zárt egységkörben konvergens, és összege ott nem korlátos.

(Kővári Tamás és T. Sós Vera)

Megoldás. Elég a hatványsor konvergenciáját és nem korlátos voltát magán az egységkörön biztosítani. Itt a $z=e^{ix}$ helyettesítés után a hatványsort valós és képzetes részére felbontva két konjugált trigonometrikus sort kapunk. Elegendő ezek megkonstruálása olymódon, hogy mindenütt konvergensek legyenek, és legalább egyikük összege ne legyen korlátos.

Ha $f(x)$ olyan 2π szerint priodikus, nem korlátos függvény, amely minden x-re teljesíti a *Dini*-féle és a *Pringsheim*-féle konvergenciakritériumokat, amelyre tehát $\frac{1}{t}[f(x+t)+f(x-t)-2f(x)]$ és $\frac{1}{t}[f(x+t)-f(x-t)]$ a $t=0$ hely környezetében L-integrálható, akkor Fourier-sora megfelel a fenti kívánalmaknak. *Dini* szerint ugyanis (lásd pl. *Szőkefalvi-Nagy:* Valós függvények és függvénysorok, 269. o.) a sor minden x-re $f(x)$-hez konvergál, és azért összege nem korlátos. *Pringsheim* szerint viszont (lásd uo. 279. o.) a konjugált sor is minden x-re konvergens.

Ilyen $f(x)$ függvényt pl. a következőképpen készíthetünk: Legyen a $-\pi<x\leqq\pi$ értékekre $f(x)=xg(x)$, és ezenkívül 2π szerint periódikus. Legyen $g(x)$ páratlan, $g\left(\frac{\pi}{n}\right)=n^2$ $(n=2,3,\ldots)$, a $\frac{\pi}{n}$ helyek $\frac{1}{n^4}$ sugarú környezetében alkossák a $g(x)$ függvény görbéjét az x-tengelyen nyugvó, $\frac{2}{n^4}$ alapú és n^2 magasságú egyenlőszárú háromszögek szárai, végül legyen e környezeteken kívül a zárt $[0, \pi]$ intervallumban $g(x)=0$.

A konstruált $f(x)$ függvény megfelel a követelményeinknek: $f(x)$ nem korlátos, hiszen $f\left(\frac{\pi}{n}\right)=n\pi$ $(n=2,3,\ldots)$; $f(x)$ a nyílt $(0,\pi)$ intervallum minden egyes helyén nyilvánvalóan kielégíti a két fönti kritériumot; az $x=0$ helyen *Pringsheim* kritériuma eleve teljesül, mert $f(x)$ páros, *Dini* kritériuma viszont $g(x)$ integrálhatóságát követeli meg, ami a konstrukcióból világos.

Fáy Árpád

A 85. feladat megoldását beküldötte még *Szüsz Péter.*

Megjegyzés. Fejér L.: Aszimptotikus értékek meghatározásáról c. cikkében (Math. és Term. Tud. Értesítő, 1908) bebizonyította, hogy

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-z}} e^{\frac{1}{z-1}}$$

rendelkezik a szóbanforgó tulajdonsággal.

Turán Pál

86. feladat. Bizonyítandó, hogy minden k természetes számhoz található végtelen sok n úgy, hogy

$$d(n) > \prod_{i=1}^{k} d(n-i)\, d(n+i),$$

ahol $d(n)$ n osztóinak számát jelenti.

(Erdős Pál)

I. megoldás. Először is megjegyezzük, hogy a feladat állítása *A. Schinzel* egy tételének általánosítása (lásd *Publicationes Mathematicae* **3** (1954), 261—262). Valószínűnek látszik, hogy ha A_m az első m prímszám szorzatát jelöli, és m elég nagy, akkor $n = A_m$ kielégíti a feladat követelményét. Ennek bizonyítása nem látszik azonban könnyűnek. Mi azt bizonyítjuk, hogy ha $m > m_0(k)$, akkor megválasztható a $t < A_m$ természetes szám úgy, hogy $n = tA_m$ eleget tesz követelményünknek.

Rögzítsük egyelőre az $|i| < A_m$ feltételt kielégítő, 0-tól különböző i egész számot. A $tA_m + i$ számok mindegyike kisebb, mint $A_m(A_m+1)$. Ezért e számok minden A_m-nél nagyobb osztójának megfelel egy-egy A_m-nél kisebb komplementer osztójuk. Ebből következik, hogy

$$\sum_{t=1}^{A_m-1} d(tA_m+i) \leqq 2 \sum_{t=1}^{A_m-1} d'(tA_m+i),$$

ahol d' az A_m-nél kisebb osztók számát jelenti.

A számbavett osztók mindegyike felírható rs alakban, ahol $r(i, A_m)$ és $(s, A_m) = 1$. A $tA_m + i$ $(t = 1, 2, \ldots, A_m - 1)$ sorozatelemei közül az rs osztóval rendelkezőknek a száma kisebb, mint $1 + \frac{A_m}{s}$. Ezeket figyelembe véve a

$$\sum_{t=1}^{A_m-1} d'(tA_m+i) < d[(i, A_m)] \sum_{s=1}^{A_m-1} \left(1 + \frac{A_m}{s}\right) < 2d(i) A_m \log A_m$$

becsléshez jutunk. Előző eredményünk felhasználásával a $0<|i| \leqq \leqq k < A_m$ megszorítás mellett ilymódon

$$\sum_{t=1}^{A_m-1} d(tA_m+i) < 4d(i)A_m \log A_m < 4kA_m \log A_m$$

adódik. Ebből következik, hogy a tA_m+i $(t=1,2,\ldots,A_m-1)$ számok között $(4kA_m/\log A_m)$-nél kevesebb olyan van, amelyre

$$d(tA_m+i) \geqq (\log A_m)^2$$

teljesül. Azoknak a t értékeknek a száma pedig, amelyekre a most felírt egyenlőtlenség az $i \neq 0$, $|i| \leqq k$ megszorításoknak eleget tevő i értékek valamelyikére teljesül, kisebb, mint

$$8k^2 A_m/\log A_m < \frac{1}{2} A_m < A_m - 1,$$

feltételezve, hogy m elég nagy. Van ezért olyan t érték, amelyre a szóban forgó egyenlőtlenség a számba jövő i értékek egyikére sem teljesül, amelyre tehát az $i \neq 0$, $|i| \leqq k$ megszorításoknak eleget tevő i értékek mindegyikére

$$d(tA_m+i) < (\log A_m)^2.$$

Az így választott t értékre teljesül a

$$\prod_{i=1}^{k} d(tA_m-i)\, d(tA_m+i) < (\log A_m)^{4k}$$

egyenlőtlenség. Ebből következik, hogy az $n=tA_m$ értékre teljesül a feladat állítása, mert kimutatjuk, hogy

$$(\log A_m)^{4k} < d(tA_m).$$

Evégből egyrészt arra hivatkozunk, hogy $d(tA_m) \geqq d(A_m) = 2^m$, másrészt pedig az

$$A_m = p_1 p_2 \ldots p_m < p_m^m < (2^m)^m = 2^{m^2}$$

becslés felhasználásával arra, hogy $m^{8k} < 2^m$, újból felhasználva azt hogy m egy megfelelően nagynak választott $m_0(k)$ értéknél nagyobb.

Erdős Pál

II. megoldás. A feladat állításánál lényegesen többet bizonyítunk. Bizonyítani fogjuk, hogy:

Tetszőlegesen adott k, n_0, m_0 természetes számokhoz és $M \geqq 1$ értékhez megadható olyan $n > n_0$ természetes szám, amelyre

$$\log^{(m_0)} d(n) > M \prod_{\nu=1}^{k} d(n-\nu)\, d(n+\nu).$$

Itt $\log^{(r)} x$ az r-szer iterált logaritmusfüggvényt jelöli.

Ezen túlmenően még azt is bizonyítjuk, hogy *ha $N(X)$ azoknak az $1 \leqq n \leqq X$ intervallumban tartozó n értékeknek a számát jelenti, amelyekre a fenti egyenlőtlenség teljesül, akkor elég nagy X értékekre*

$$N(X) > c' \frac{X}{\log^{2k} X}$$

ahol $c' = c'(k;\, n_0, m_0, M)$ az X értéktől független pozitív állandó.

Állításaink bizonyítása végett rögzítsük egyelőre m értékét, jelöljük p_i-vel az i-edik törzsszámot, és tekintsük a

$$(1) \qquad 0 < n \equiv 0 \pmod{p_1 p_2 \ldots p_m}$$

által megszabott számtani haladványt, továbbá a p_{m+i} $(i = 1, 2, \ldots)$ prímszámok mindegyikére a $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k$ értékválasztással adódó

$$(2) \qquad \nu + 1 p_{m+i} \qquad (1 = 0, 1, 2, \ldots),$$

összesen $2k$ darab számtani haladványt.

Ha ezekkel a számtani haladványokkal a *Brun*-féle szita módszerét alkalmazzuk, akkor a következő eredményhez jutunk: Létezik olyan $c = c(k) > 2$ állandó, hogy ha az (1) sorozat X-nél nem nagyobb elemei közül kiszitáljuk a $p_{m+i} \leqq X^{1/c}$ prímszámokhoz tartozó (2) sorozatok elemeit, akkor a maradó elemek $N(X)$ számára, elég nagy X mellett,

$$N(X) > c^* \frac{X}{\log^{2k} X}$$

ahol $c^* = c^*(k, m)$ az X értéktől független pozitív állandó.

Nyilvánvaló tény, hogy a kiszitálás után maradó n értékek és a számba jövő ν értékek bármelyikével képzett $n + \nu$ számnak csak $X^{1/c}$-nél nagyobb törzstényezői vannak. Ezért a

$$d(n+\nu) \leqq 2^c \qquad (\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k)$$

egyenlőtlenség alapján

$$\prod_{\nu=1}^{k} d(n-\nu)\, d(n+\nu) \leqq 2^{2kc}.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy

$$d(n) \geqq 2^m,$$

akkor beláttuk, hogy ha m választása eleget tesz az

$$m \geqq m_0^* = \max\left\{ n_0, \left[\frac{\exp^{(m_0-1)}\{M 2^{2kc}\}}{\log 2}\right] + 1 \right\} = m_0^*(k; n_0, m_0, M)$$

megszorításoknak, akkor kívánt tulajdonságú n értékhez jutunk. Itt $\exp^{(r)}\{x\}$ az r-szer iterált exponenciális függvényt jelenti. Eredményünkből a kívánt tulajdonságú n értékek számára adott becslésünk helyessége is kiolvasható.

Sao Pin-cung (Peking)

89. feladat. Bizonyítsuk, hogy tetszőlegesen adott, zérushoz tartó $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sorozathoz található $a_1, a_2, \ldots$ sorozat úgy, hogy $|a_n| > |\varepsilon_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ és a $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ szorzat konvergens.

(Turán Pál)

I. megoldás. Nyilván feltehető, hogy az adott $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sorozat elemeinek abszolút értéke 1-nél kisebb. E feltevés mellett bizonyítjuk, hogy a feladat követelményein túlmenően még az is elérhető, hogy a végtelen szorzat értéke 1 legyen.

Válasszuk meg evégből az a_{2k-1}, a_{2k} értékeket $(k = 1, 2, \ldots)$ olyan módon, hogy az $|a_{2k-1}| > |\varepsilon_{2k-1}|$, $|a_{2k}| > |\varepsilon_{2k}|$ megkötéseken túlmenően

$$(1 + a_{2k-1})(1 + a_{2k}) = 1$$

is teljesüljön, hogy továbbá az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat 0-hoz tartson. Ezt elérhetjük, mert ha a_{2k-1} értékéül az

$$|\varepsilon_{2k-1}|, \quad \frac{|\varepsilon_{2k}|}{1 - |\varepsilon_{2k}|}$$

számoknál nagyobb pozitív értéket választunk, akkor — mint egyszerű számítás mutatja, — az $|a_{2k}| > |\varepsilon_{2k}|$ feltétel is teljesül, és minthogy az imént megadott alsó korlátok 0-hoz tartanak, a választást úgy ejthetjük meg, hogy az a_{2k-1} értékek sorozata, és ezzel együtt az adódó a_{2k} értékek sorozata is 0-hoz tartson.

A kapott végtelen szorzat páros sok tényezőből álló részletszorzatai 1-gyel egyenlők, a páratlan sok tényezőből állók pedig $a_{2k+1} \to 0$ miatt 1-hez tartanak. A konstruált végtelen szorzat tehát valóban 1-hez konvergál.

Quittner Pál

II. megoldás. Azt a többet mondó állítást bizonyítjuk, hogy ha $\varepsilon_n \to 0$, akkor van olyan $\{a_n\}$ sorozat, hogy $|a_n| = |\varepsilon_n|$ és $\prod_1^\infty (1+a_n)$ konvergens. Nyilván feltehető az általánosság megszorítása nélkül, hogy $0 < |\varepsilon_n| < 1$ már kezdettől fogva teljesül.

Legyen ekkor $a_1 = |\varepsilon_1|$ és, ha az $a_1, \ldots, a_n$ számokat már megválasztottuk, válasszuk meg a_{n+1}-et a következőképpen: ha $p_n = \prod_1^n (1+a_k) \geqq 1$, legyen $a_{n+1} = -|\varepsilon_{n+1}|$, ha pedig $p_n < 1$, akkor legyen $a_{n+1} = |\varepsilon_{n+1}|$. Az így nyert végtelen szorzat konvergens.

Ha ugyanis bizonyos n_0-tól kezdve $a_n < 0$ (vagy $a_n > 0$), akkor a p_n részletszorzatok n_0-tól kezdve 1-nél nagyobb számokból álló monoton csökkenő sorozatot (vagy 1-nél kisebb pozitív számokból álló monoton növekvő sorozatot) alkotnak. Ha viszont az a_n számok sorozata végtelen sokszor vált előjelet, akkor jelváltás előtt a $\{p_n\}$ sorozat átlépi 1-et, utána pedig 1 felé közeledik egészen addig, amig újból át nem lépi 1-et, és újból előjelváltás nem következik be. Ha azonban n már olyan nagy, hogy $|\varepsilon_n| < \varepsilon$, akkor az 1 átlépése utáni p_n-ekre $1 - \varepsilon < p_n < 1 + \varepsilon$, s ugyanez a közbeesőkre még inkább áll, úgyhogy ekkor $p_n \to 1$.

Császár Ákos

A 89. feladat megoldását beküldték még *Kővári Tamás, Quittner Pál* (második megoldást is), *Sztanó Tamás, Vincze Endre.*

91. feladat. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy adott a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots)$ komplex számokhoz mikor található olyan négyzetesen integrálható függvényekből álló $f_1, f_2, \ldots$ sorozat, melyre

$$\int f_i \bar{f}_k = a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots).$$

(Czipszer János)

I. megoldás. Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{A} = \|a_{ik}\|$ végtelen mátrixhoz találhatók olyan $f_i \in L^2$ függvények, hogy

$$(1) \qquad (f_i, f_k) = \int f_i \bar{f}_k = a_{ik}.$$

ekkor nyilván

$$\alpha) \quad a_{ik} = \bar{a}_{ki}$$

továbbá, ha $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tetszőleges komplex számokat jelöl, akkor

$$0 \leqq \left(\sum_{\nu=1}^m \lambda_\nu f_{i_\nu}, \sum_{\mu=1}^m \lambda_\mu f_{i_\mu} \right) = \sum_{\nu=1}^m \sum_{\mu=1}^m \lambda_\nu \bar{\lambda}_\mu a_{i_\nu i_\mu},$$

tehát a jobboldali Hermite-féle alak pozitív definit vagy pozitív szemidefinit, amiből ismert módon következik, hogy determinánsa $\geqq 0$. Eszerint

β) *az $\mathfrak{A}$ mátrix minden főminora nemnegatív.*

Látható az is, hogy ha az f_{i_ν} függvények lineárisan függetlenek, akkor az alak pozitív definit, s így determinánsa pozitív, ha viszont az f_{i_ν} függvények lineárisan függenek. akkor az alak szemidefinit és determinánsa eltűnik.

Megmutatjuk, hogy ha az $\mathfrak{A}$ mátrix az α) és β) feltételeknek eleget tesz, akkor találhatók is hozzá (1)-nek eleget tevő $f_i \in L^2$ függvények. Vegyünk fel e célból egy ortonormális $\{\varphi_i\}$ függvényrendszert. A β) feltétel miatt $a_{11} \geqq 0$, tehát γ konstanst megválaszthatjuk úgy, hogy $|\gamma|^2 = a_{11}$ legyen. Az $f_1 = \gamma\varphi_1$ jelölést alkalmazva (1) teljesül $i, k \leqq 1$ esetén.

Tegyük most fel, hogy már sikerült megválasztani az $f_1, \ldots, f_n$ fügyvényeket úgy, hogy f_i lineáris kombinációja legyen a $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ függvényeknek, és hogy (1) teljesüljön $i, k \leqq n$ mellett. Megmutatjuk, hogy akkor f_{n+1} is megválasztható úgy, hogy lineáris kombinációja legyen a $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ függvényeknek, és hogy $(f_i, f_{n+1}) = a_{i,n+1}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ teljesüljön. Ezáltal teljes indukcióval igazoljuk, hogy a keresett $\{f_i\}$ sorozat létezik.

Keressünk ki az $f_1, \ldots, f_n$ függvények közül egy maximális lineárisan független részrendszert; az egyszerűség kedvéért feltehető (mert a számozás megváltoztatásával elérhető), hogy ez a részrendszer az $f_1, \ldots, f_r$ $(r \leqq n)$ függvényekből áll. Keressük most f_{n+1}-et

$$f_{n+1} = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_r f_r + \lambda \varphi_{n+1}$$

alakban. Ekkor a λ_i és λ együtthatókat úgy kell megválasztanunk, hogy $i = 1, \ldots, n$ esetén

$$\begin{aligned} (f_i, f_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{r} \bar{\lambda}_k (f_i, f_k) + \bar{\lambda}(f_i, \varphi_{n+1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{r} a_{ik} \bar{\lambda}_k = a_{i,n+1} \qquad (i = 1, \ldots, n), \end{aligned} \tag{2}$$

továbbá

$$(f_{n+1}, f_{n+1}) = a_{n+1,n+1} \tag{3}$$

legyen. Mindenek előtt megmutatjuk, hogy a $\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_r$ számokra nyert (2) lineáris egyenletrendszer megoldható. Ez azt jelenti, hogy az

$$\mathfrak{A}_{nr} = \left\| \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nr} \end{matrix} \right\| \quad \text{és} \quad \mathfrak{B}_{nr} = \left\| \begin{matrix} a_{11} \ldots a_{1r} & a_{1,n+1} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} \ldots a_{nr} & a_{n,n+1} \end{matrix} \right\|$$

mátrixok rangja megegyezik. $\mathfrak{A}_{nr}$ rangja azonban r, mert az $f_1, \ldots, f_r$ függvények lineáris függetlensége folytán az $\mathfrak{A}_{rr}$ mátrix determinánsa pozitív. $\mathfrak{B}_{nr}$ rangjának megállapítása végett tekintsük az $\mathfrak{A}_{n+1,n+1}$ mátrixot. Ha ennek rangja is csak r, akkor $\mathfrak{B}_{nr}$-é is ennyi. Ha $\mathfrak{A}_{n+1,n+1}$ rangja $r+1$, akkor ismert tétel szerint $\mathfrak{B}_{nr}$ valamely $(r+1)$-edrendű aldeterminánsa csak akkor lehetne zérustól különböző, ha az ugyanazon sorokból álló főminor sem tűnnék el; ez utóbbi azonban az $\mathfrak{A}_{nn}$ mátrixnak $(r+1)$-edrendű főminora és így eltűnik, mert a megfelelő indexű $f_{i_1}, \ldots, f_{i_{r+1}}$ függvények lineárisan függenek, hiszen $f_1, \ldots, f_r$ maximális lineárisan független rendszert alkotott. Nem lehet azonban $\mathfrak{A}_{n+1,n+1}$ rangja $(r+1)$-nél nagyobb sem; az imént idézett tétel szerint ennek bizonyításához elég megmutatni, hogy $\mathfrak{A}_{n+1,n+1}$ minden $(r+2)$-edrendű főminora eltűnik (erre persze csak $r<n$ esetén van szükség). Egy ilyen főminor azonban mindig tartalmaz egy olyan $(r+1)$-edrendű főminort, amely már aldeterminánsa $\mathfrak{A}_{nn}$-nek, s így az előbb mondottak szerint eltűnik, tehát a hozzá tartozó Hermite-féle alak szemidefinit, s akkor a belőle szegélyezéssel keletkező vizsgált főminorhoz tartozó Hermite-féle alak nem lehet definit. Ezért ez az alak is csak szemidefinit lehet, s így determinánsa ugyancsak eltűnik. Beláttuk ily módon, hogy $\mathfrak{A}_{n+1,n+1}$ és ezzel együtt $\mathfrak{B}_{nr}$ rangja is r.

Bebizonyítottuk a (2) egyenletrendszer megoldhatóságát. Megoldása az első r egyenletből a Cramer-szabály szerint nyerhető, vagyis a

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots a_{1r} & a_{1,n+1} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{r1} & \ldots a_{rr} & a_{r,n+1} \\ a_{n+1,1} & \ldots a_{n+1,r} & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

determináns $a_{n+1,k}$ eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsát C_k-val $(k=1, \ldots, r)$, az $a_{n+1,n+1}$ elemhez tartozót pedig D-vel jelölve

$$\bar{\lambda}_1 : \ldots : \bar{\lambda}_r : (-1) = C_1 : \ldots C_r : D.$$

Jelöléseinkkel

$$(f_{n+1}, f_{n+1}) = \left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i + \lambda \varphi_{n+1}, \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_k + \lambda \varphi_{n+1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \lambda_i \bar{\lambda}_k a_{ik} + |\lambda|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{\bar{C}_i}{D} \cdot \frac{C_k}{D} a_{ik} + |\lambda|^2.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy $i \leqq r$ miatt $\sum_{k=1}^{r} a_{ik} C_k = - a_{i,n+1} D$, akkor

$$(f_{n+1}, f_{n+1}) = -\frac{1}{D} \sum_{i=1}^{r} a_{i,n+1} \overline{C}_i + |\lambda|^2$$

adódik, és ebből $\sum_{i=1}^{r} a_{i,n+1} \overline{C}_i = C - a_{n+1,n+1} D$ felhasználásával (amit C és D valós voltára való tekintettel írhattunk fel ebben az alakban)

$$(f_{n+1}, f_{n+1}) = -\frac{C}{D} + a_{n+1,n+1} + |\lambda|^2.$$

Így aztán (3) a

$$|\lambda|^2 = \frac{C}{D}$$

alakot ölti, s ebből C nemnegatív, valamint D pozitiv voltára való tekintettel megállapíthatjuk, hogy λ is megválasztható a követelményeinket kielégítő módon.

Császár Ákos

II. megoldás. Állítjuk, hogy a kívánt tulajdonságú függvények megválaszthatóságához szükséges és elegendő, hogy a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i \bar{x}_k \geqq 0 \tag{4}$$

egyenlőtlenség álljon minden n természetes számra és minden $\{x_i\}$ komplex számrendszerre.

A szükségesség evidens, hiszen egyenlőtlenségünk baloldalán $\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ normájának négyzete áll.

Az elégségesség bizonyítása végett tekintsük az

$$y_k = \sum_i a_{ik} x_i \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

alakban előállítható sorozatokat, ahol is az x_k számok közül csak véges sok különbözik 0-tól. Az így előállított $y = \{y_k\}$ sorozatok evidens módon lineáris sokaságot alkotnak. Ha

$$y_k = \sum_i a_{ik} x_i, \qquad y'_i = \sum_i a_{ik} x'_i, \tag{5}$$

legyen

$$(6)\quad \langle y,y'\rangle=\sum_k y_k\bar{x}'_k=\sum_k\sum_i a_{ik}x_i\bar{x}'_k=\sum_i\sum_k x_i\bar{a}_{ki}\bar{x}'_k=\sum_i x_i\bar{y}'_i$$

(itt felhasználtuk azt a (4)-ből könnyen folyó tényt, hogy $a_{ik}=\bar{a}_{ki}$). A definíció ekvivalens alakjaiból látható, hogy $\langle y,y'\rangle$ értéke nem függ y és y' (5) alatti előállításainak speciális választásától. $\langle y,y'\rangle$ nyilván y-ban lineáris, y'-ben pedig konjugált-lineáris. (4) alapján $\langle y,y\rangle\geqq 0$. E tulaldonságokból már következik a Cauchy—Bunyakovszkij—Schwarz-féle egyenlőtlenség érvényessége:

$$|\langle y,y'\rangle|^2\leqq\langle y,y\rangle\cdot\langle y',y'\rangle.$$

Ha valamely y-ra $\langle y,y\rangle=0$, akkor tehát minden y'-re $\langle y,y'\rangle=0$, amiből pedig (6) alapján következik, hogy y minden y_i komponense 0, azaz $y=0$.

Az y sorozatok ezek szerint az $\langle y,y'\rangle$ belsőszorzat-definícióval egy (nem teljes) $\mathfrak{H}$ Hilbert-teret alkotnak. Speciálisan, $y^{(l)}$-lel jelölve azt a sorozatot, amely az $x_l=1$, $x_k=0$ $(k\neq l)$ választásnak felel meg, azt kapjuk (6)-ból, hogy

$$\langle y^{(i)},y^{(k)}\rangle=a_{ik}.$$

Ezek után nem marad más hátra, mint az $y^{(i)}$ vektorrendszernek az $L^2(a,b)$ függvénytérbe való izometrikus leképezése. Ez lehetséges, hiszen $\mathfrak{H}$ dimenziója véges vagy megszámlálható, hiszen $\mathfrak{H}$-t az $y^{(i)}$ vektorok kifeszítik. Ezért pl. egy-egy teljes ortonormált rendszer segítségével izometrikusan leképezhető a megszámlálhatóan végtelen dimenziójú $L^2(a,b)$ térbe.

Megjegyzés. Általában igaz, hogy ha $k(p,q)$ valamely $S\times S$ halmazon értelmezett pozitív definit függvény, azaz ha

$$\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n k(p_i,p_k)x_i\bar{x}_k\geqq 0$$

minden S-beli p_i és komplex x_i értékrendszerre, akkor létezik egy $\mathfrak{H}$ Hilbert-térben egy olyan $\{e_p\}_{p\in S}$ vektorrendszer, amelyre

$$(e_p,e_q)=k(p,q).$$

(Lásd pl. M. Г. Крейн: Эрмитово—положительные ядра на однородных пространствах (I часть), Украиский Математический Журнал Акад. Наук УССР, **1** (1949), 64—98, különösen a 66. lapon).

Szőkefalvi-Nagy Béla

A 91. feladat megoldását beküldötte még *Sztanó Tamás.*

92. feladat. Legyen adva egy $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ sorozat. Álljon az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat az (n_k, n_{k+1}) intervallumokban a 2^k-val osztható egész számokból. Adott r mellett tekintsük az $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n}$ $(i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_r)$ számokat. Bizonyítandó, hogy e számok sorozatának sűrűsége 0.

(Erdős Pál)

Megoldás. Az állítást r-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyitjuk. Jelölje $A_r(x)$ az r-tagú összegként előállítható, x-nél nem nagyobb számok számát. Az x-nél nem nagyobb a_i számok számára, $A_1(x)$-re vonatkozólag világos, hogy ha $x > n_k$, akkor

$$A_1(x) \leqq n_k + \frac{1}{2^k}(x - n_k), \qquad \frac{A_1(x)}{x} \leqq \frac{1}{2^k} + \frac{n_k}{x}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

Bármely pozitív ε-hoz megválasztható k úgy, hogy az utolsó kifejezés első tagja kisebb legyen $\varepsilon/2$-nél, majd ehhez a k értékhez x_0-t úgy, hogy $x_0 > n_k$ legyen és a második tag is kisebb legyen $\varepsilon/2$-nél. Ezzel elértük, hogy $x > x_0$ esetén $A_1(x)/x < \varepsilon$. Az $r = 1$ esetre bebizonyítottuk tehát az állítást.

Tegyük fel, hogy valamilyen $r = \varrho$ értékre helyes az állítás. Legyen k egy tetszőleges természetes szám. A $\varrho + 1$ tagú összegként előállítható számok közül a 2^k-val nem oszthatók előállításában szerepelnie kell egy n_k-nál nem nagyobb tagnak, a többi tag pedig egy ϱ tagú összegként előállított számot ad. Ezért

$$A_{\varrho+1}(x) \leqq \frac{x}{2^k} + n_k A_\varrho(x), \qquad \frac{A_{\varrho+1}(x)}{x} \leqq \frac{1}{2^k} + \frac{n_k}{x} A_\varrho(x).$$

Bármely pozitív ε-hoz megválasztható k úgy, hogy az utolsó kifejezés első tagja kisebb legyen $\varepsilon/2$-nél, majd ehhez a k értékhez az indukciós feltevés értelmében x_0 úgy, hogy $x_0 > n_k$ legyen és

$$\frac{A_\varrho(x)}{x} < \frac{\varepsilon}{2n_k}$$

is teljesüljön. Ezzel elértük, hogy ha $x > x_0$, akkor $A_{\varrho+1}(x)/x < \varepsilon$. Íly módon a feladat állítását r minden értékére igazoltuk.

Surányi János

A 92. feladat megoldását beküldte még *Hajós György* és *Kővári Tamás.*

Problèmes proposés

105. Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ une fonction réelle définie pour toute suite réelle $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, monotone croissante pour chacune de ses variables. Peut-on conclure des relations $x_i \leqq y_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ que

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \leqq f(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)?$$

J. Czipszer

106. On donne un entier positif k arbitraire. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p pour lesquels l'équation

$$x^4 = 2^k y^p + z^2$$

possède des solutions entières.

K. Corrádi

107. Démontrer que si $0 < s < 2s \leqq t$, alors

$$\sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k}{t-k} \binom{t-k}{s} \binom{s}{k} = 0.$$

Á. Császár

108. Dans l'espace euclidien à n dimensions nous appelons m-parallélotope régulier l'ensemble des points déterminés par les vecteurs $\mathbf{a} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{e}_i$ $(0 \leqq \alpha_i \leqq 1)$, si les vecteurs $\mathbf{e}_i$ ne sont past nuls, s'ils sont orthogonaux deux-à-deux et s'ils ont des coordonnées non-négatives. Peut-on choisir un nombre fini de m-parallélotopes réguliers de manière telle que le nombre de tous les points de l'espace qui sont simultanément les sommets d'un nombre impaire de ces m-parallélotopes, soit supérieur à 0 et inférieur à 2^m?

G. Grätzer, A. Hajnal et *E. Schmidt*

HÍREK

ÉRTESÍTÉS A II. MAGYAR MATEMATIKAI KONGRESSZUSRÓL

A Magyar Tudományos Akadémia és a Bolyai János Matematikai Társulat közösen rendezi meg Budapesten a II. Magyar Matematikai Kongresszust 1960. augusztus 24 és 31. között. A kongresszus megemlékezik a nem euklideszi geometria egyik felfedezője, Bolyai János halálának 100. évfordulójáról. A kongresszuson az alábbi szekciók fognak működni:

1. Algebra és számelmélet
2. Geometria és topológia
3. Analizis
4. Valószínűségszámítás és matematikai statisztika
5. Matematikai logika és matematikai gépek elmélete
6. A matematika alkalmazásai
7. A matematika története és oktatása.

A kongresszus iránt érdeklődők forduljanak a kongresszus szervezőbizottságához. Cím: Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete, Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15. A szervezőbizottság az érdeklődők címére rendszeresen megküldi a kongresszusra vonatkozó tájékoztatókat.

СООБЩЕНИЕ О ВТОРОМ ВЕНГЕРСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ СЪЕЗДЕ

24—31-ого августа 1960-ого года в Будапеште состоится второй венгерский математический съезд. Съезд совместно организуют Венгерская Академия Наук и Математическое Общество имени Яноша Бояи. Съезд почтит память Яноша Бояи, в связи со столетием со дня его смерти. На съезде будут работать следующие секции:

1) алгебра и теория чисел,
2) геометрия и топология,
3) анализ,
4) теория вероятностей и математическая статистика,
5) математическая логика и теория математических машин,
6) приложения математики,
7) история математики и преподавание математики.

Интересующиеся могут обратиться к организационному комитету съезда. Адрес: Математический Институт Венгерской Академии Наук, Budapest, V., Reáltanoda u. 13/15. Организационный комитет будет регулярно высылать интересующимся информацию относительно съезда.

ANNOUNCEMENT OF THE II. HUNGARIAN MATHEMATICAL CONGRESS

The II. Hungarian Mathematical Congress will take place from 24th till 31st of August, 1960, in Budapest, as organised jointly by the Hungarian Academy of Sciences and the Bolyai János Mathematical Society. The Congress will commemorate of Bolyai János, one of the discoverers of the non-euclidian geometry, at the occasion of the centenary of his death.

The following sections of the Congress will work:

1. Algebra and number theory
2. Geometry and topology
3. Analysis
4. Probability theory and mathematical statistics
5. Mathematical logic and theory of mathematical machines
6. Applications of mathematics
7. History of mathematics and mathematical education

Those interested in the Congress should apply to the Organizing Committee. Address: Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15. The Organizing Committee will regularly supply the inquirers with further informations concerning the Congress.

COMMUNICATION SUR LE DEUXIÈME CONGRÈS MATHÉMATIQUE HONGROIS

L'Académie des Sciences de Hongrie et l'Association Mathématique János Bolyai organiseront en commun le deuxième Congrés Mathématique Hongrois qui se tiendra à Budapest du 24 au 31 Août 1960. Pendant le Congres aura lieu la commémoration du 100-ième anniversaire de la mort de János Bolyai, l'un des fondateurs de la géométrie non-euclidienne.

Dans le cadre du Congrès prendront part les sections suivantes:

1. Algébre et théorie des nombres
2. Géométrie et topologie
3. Analyse mathématique
4. Calcul des probabilités et statistique mathématique
5. Logique mathématique et théorie des machines mathématiques
6. Application des mathématiques
7. Histoire et enseignement des mathématiques.

Les personnes intéressées au Congrès sont priées de s'informer auprès du Comité d'Organisation du Congrès. Adresse: Institut de Mathématique de l'Académie des Sciences de Hongrie, Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15.

Le Comité d'organisation enverra systématiquement à l'adresse des intérréssés les informations relatives à ce Congrès.

ANMELDUNG DES II. UNGARISCHEN MATHEMATISCHEN KONGRESSES

Der II. Ungarische Mathematische Kongress wird vom 24. bis 31. August 1960 in Budapest stattfinden. Der Kongress wird eine gemeinsame Veranstaltung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Bolyai János Mathematischen Gesellschaft sein. Der Kongress wird Bolyai János, eines der Entdecker der nichteuklidischen Geometrie, anlässlich des 100. Jahrestages seines Todes, gedenken. Im Rahmen des Kongresses werden die folgenden Sektionen tagen:

1. Algebra und Zahlentheorie
2. Geometrie une Topologie
3. Analysis
4. Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik
5. Mathematische Logik und Theorie der mathematischen Maschinen
6. Anwendungen der Mathematik
7. Geschichte und Unterricht der Mathematik.

Die sich für den Kongress Interessierenden sollen sich zum Organisationsausschuss des Kongresses wenden. Adresse: Mathematisches Institut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15. Die Organisationsausschuss wird den Interessierten regelmässig weitere Auskunft über dem Kongress erteilen.

Olaszország

Az Olasz Matematikai Társulat (Unione Matematica Italiana) 1959 szeptember 11-től 16-ig matematikai kongresszust rendez Nápolyban. A kongreszszuson a következő szekcióülések lesznek:

I. Algebra
II. Analizis
III. Valószínűségszámítás és alkalmazásai
IV. Geometria
V. Mechanika és matematikai fizika
VI. Topológia
VII. Matematika története, matematikai logika. Didaktika.

Szovjetunió

Kulturális csereegyezmény keretében Rózsa Pál 1958. X. 7-től XI. 19-ig a Szovjetunióban járt. Moszkvában a „Hypermatrixok alkalmazásáról korpuszkuláris rendszerek mechanikájában" címen tartott előadást.

Prékopa András 1958. IX. 30-tól X. 29-ig tartózkodott a Szovjetunióban. Moszkvában és Leningrádban „Stochasztikus halmazfüggvények", Kievben pedig „Másodlagos folyamatok elméletéről" és „A magyar matematikai statisztikai szervezetről" címen tartott előadást.

Lengyelország

A Lengyel Tudományos Akadémia Matematikai Intézetének meghívására Erdős Pál, T. Sós Vera és Turán Pál 1958. V. 19-től VI. 7-ig tartózkodott Lengyelországban. Erdős Pál Varsóban, Krąkóban, Wroclawban, Poznanban és Lublinban eredményekről és megoldatlan problémákról tartott előadást különböző tárgykörökből. T. Sós Vera Wroclawban „A lánctörtalgoritmus geometriai értelmezése és alkalmazásai" címen tartott előadást. Turán Pál Varsóban „Magasabb fokú kongruenciákról" és „A diofantikus approximáció elméletének egyes újabb problémáiról" címen, Lublinban, Poznanban, Wroclawban és Krakóban „Egy különös divergenciajelenség a hatványsorok konvergencia körének kerületén" címen tartott előadást.

Kultúrális csereegyezmény keretében L. Ziermann Margit 1959. I. 4—I. 14-ig és Tandori Károly 1958. V. 19—VI. 7-ig tett látogatást. Tandori Károly Poznanban „Über die Konvergenz und Summierbarkeit der Orthogonalreihen" és Lodzban „Über die orthogonalen Funktionen" címen két előadást tartott

Kína

Kalmár László a Kultúrcsereegyezmény keretében 1958. XI. 22—1959. III. 1-ig Kinában tartózkodott. Ott léte alatt a következő előadásokat tartotta:
Pekingben: XI. 29-én A matemetikai logikáról
XII. 1-én A matematikai logikai függvénykalkulus eldöntésproblémájáról
2-án Az ún. eldönthetetlen matematikai problémákról
4-én Church tételéről. Matematikai axiómarendszerek ellentmondástalanságáról
5-én Gödel és Church tételeinek bizonyításáról. Matematikai axiómarendszerek ellentmondástalanságáról.
6-án Gentzen ellentmondástalanság-bízonyítása egyszerűsített változatának részletéről
8-án A matematikai logika néhány műszaki alkalmazásáról I.
9-én „ „ „ „ „ II.
25-én és 26-án A szegedi logikai gépről I. és II.
I. 3, 4, 6 és 7-én Automatikus számológépek programozásának néhány kérdéséről I-IV.
I. 5-én A felsőoktatás néhány problémájáról a magyar egyetemeken:

Vuhanban: XII. 12-én A szegedi logikai gépről
13-án Automatikus számológépek programozásának néhány kérdéséről.

Hangcsouban: XII. 21-én A matematikai logikáról és néhány alkalmazásáról.

Sanghajban: XII. 17-én Automatikus számológépek programozásának néhány kérdéséről.
18-án A szegedi logikai gépről
I. 12-én A matematikai logikáról
13-án A matematikai logika néhány műszaki alkalmazásáról.
I. 14, 16, 19 és 20-án A matematikai logika elemei és műszaki alkalmazásai
I. 20 és 21-én A szegedi logikai gépről
I. 26, 27 és 28-án Automatikus számológépek programozásáról
I. 29-én A felsőoktatás néhány problémájáról a magyar egyetemeken
I. 30-án Az un. eldönthetetlen matematikai problémákról.

Románia

A Román Tudományos Akadémia Geometriai és topológiai kollokviumot rendezett Iasiban 1958. VI. 1—VI. 6-ig. A kollokviumon Bognár Mátyás és Császár Ákos vettek részt és előadtak „Alekszandrov lokális dualitási tételének általánosítása“ illetve, „Egyszerű görbékről“ címen. A kollokvium befejezése után Császár Ákos „Konvex halmazokról és függvényekről“ címen tartott előadást Bukarestben.

Kultúrális Csereegyezmény keretében Molnár József 1958. IX. 9—30-ig és Szép Jenő 1959. II. 23—III. 10-ig tartózkodott Romániában. Szép Jenő Bukarestben és Kolozsvárt „Algebrai srukturák bővítése“ címen tartott előadást.

Német Demokratikus Köztársaság

Kultúrális csereegyezmény keretében Fodor Géza 1958. X.1—21-ig és Soós Gyula 1958. V. 27—VII. 17-ig tartózkodott a Német Demokratikus Köztársaságban.

Csehszlovákia

Kulturális Csereegyezmény keretében Muszka Dániel 1958. IX. 26—XII. 11-ig és Steinfeld Ottó 1958. VI. 3—24-ig tett látogatást Csehszlovákiában

*

A Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik Saarbrückenben konferenciát rendezett 1958 áprilisában, melyen Egerváry Jenő „Hypermatrix-algoritmusok mechanikai és elektrotechnikai alkalmazásai" címen tartott előadást.

*

A Monsi műegyetem „Les Mathématiques de l'Ingenieur" címen műszaki matematikai konferenciát tartott 1958. júniusában. Magyar részről Egerváry Jenő vett részt. Előadásainak címe „Discrete models and matrix methods in engineering analysis" és „The Hungarian method in econometry" volt. A konferencián részt vett még Freud Géza. „Egy hővezetési feladatról" címen tartott előadást.

*

Egerváry Jenő 1958. július 2-án Bécsben „Über kombinatorische Eigenschaften von Matrizen und ihre Anwendungen in der Ökonometrie" címen adot elő.

Hollandia

Hajós György az Utrechti egyetem meghívására 1958. IX. 10—X. 21-ig Hollandiában tartózkodott. Utrechtben, Amsterdamban, Delftben és Leydenben tartott előadásokat.

*

Békéssy András 1958. I. 12—26-ig Hollandiában volt tanulmányúton.

*

Fejes-Tóth László különböző meghívásoknak eleget téve 1958. X. 1—XI. 20-ig Helsinki, Stockholm, Uppsala, Kopenhága, Kiel, Hamburg, Frankfurt a. M., Heidelberg, Karlsruhe, Freiburg i. Br., Tübingen, München és Erlangen városokban tartott előadásokat, közben részt vett X. 20—28-ig az Oberwolfachban rendezett „Geometrie—Tagung"-on. Kinttartózkodása alatt a következő címeken tartott előadást:

„Über einige schöne Extremalfiguren",
„Ungelöste Probleme der anschaulichen Geometrie"
„Kugelanordnungen in Räumen konstanter Krümung",
„Bedeckung einer Kugel durch Kugeln",
„Symetrie und Wirtschaftlichkeit".
„Kreislagerungsprobleme".

*

Rédei László 1958 IV. 19—V. 12-ig tartózkodott külföldön. Rostockban és Uppsalaban „Polinomgyűrűk ideáljairól főideálgyűrű felett" és „Körosztási testekről" címen, Osloban „A háromszög nevezetes pontjainak elmélete" és „Elsőfokban nemkommutatív véges félcsoportok" címen és Greifswaldban „Kedvenc kutatási témáim" címen adott elő.

*

Rényi Alfréd 1958 augusztusában meghívásra Amsterdamban „Valós számok előállításainak ergodikus tulajdonságairól" címen és St. Andrewsben a Royal Statistical Society által rendezett matematikai statisztikai konferencián „Valószínűség és keverés" címen tartott előadást.

Juvancz Iréneusz 1958. X. 15—21-ig részt vett a Deutsche Gesellschaft für Ernährung által Bad Neuenahrban rendezett konferencián. „Allgemeine Probleme zur Statistik der Arteriosklerose“ címen tartott előadást.

*

Sarkadi Károly „Vizsgálatok a Bayes-tétel problémaköréből“ című kandidátusi disszertációját 1958. jún. 6-án védte meg. Opponensek voltak:
Tandori Károly a matematikai tudományok doktora
Vincze István a matematikai tudományok kandidátusa.

*

Fried Ervin „Vektorterek Galois modulusa“ című kandidátusi értekezését 1958. jún. 6-án védte meg: Opponensek voltak:
Rédei László akadémikus
Kertész Andor a matematikai tudományok doktora.

Társulati élet

Matrixelmélet és alkalmazásai kollokvium előadáskivonatai

Szeptember 22., hétfő de.

BOSZNAY ÁDÁM: *Mechanikai lengőrendszerek vizsgálata matrix-számítás segitségével.* Elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt fontos probléma mechanikai lengőrendszerek sajátkörfrekvenciáinak meghatározása. Határozatlan szabadságfok (rendszám) esetén jelenleg csak néhány egészen speciális felépítésű lengőrendszerfajta sajátkörfrekvenciáit tudjuk explicite felírni, a gyakorlati problémákban azonban az ilyeneknél általánosabb lengőrendszerek sajátkör-frekvencia-meghatározásának kérdése merül fel. Gyakorlatilag jól alkalmazható módszerekkel is csak az ún. láncszerű, sima modellel kapcsolatban rendelkezünk. Célszerű tehát a nem ilyen modelleket velük megegyező sajátkörfrekvenciákkal bíró láncszerű sima modellekre visszavezetni. S. Falk adott egy ilyen módszert, de képleteinek levezetését nem közölte. Az előadás a Lánczos által szerkesztett egyik véges iterációs eljárásra támaszkodva a *matrixszámítás alkalmazásával* bemutatta ezeknek a képleteknek a levezetését. Különösen előnyösnek tűnik a Falk-féle visszavezetés és az előadó által régebben szerkesztett sajátkör-frekvencia meghatározó módszer összekapcsolása.

SZABÓ JÁNOS: *A matrix-számítás alkalmazása hidszerkezetek szilárdsági vizsgálatánál.* Az alkalmazhatóság feltétele — a szuperpozíció lehetősége és a terhelések — alakváltozások közötti lineáris összefüggés — hídszerkezeteknél vagy eleve teljes egészében, vagy az értelmezési tartomány egyes kisebb szakaszain belül kielégíthető. Az alkalmazás során újabban elért eredmények vázlatos ismertetése:

1. A szóbajövő szilárdságtani feladatok túlnyomó része egy $\mathbf{K}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ alakú matrix-egyenlet megoldására vezet, amelyben a technikai feltételek alapján kimutatható, hogy $|\mathbf{K}| \neq 0$. A megoldást $\mathbf{x}=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}$ alakban nyerjük, ahol ($\mathbf{K}=[K_{jk}]$; $\mathbf{D}=\langle K_{jj}\rangle$; $\mathbf{A}=\mathbf{K}\mathbf{D}^{-1}=\mathbf{B}+\mathbf{E}$; $\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{b}_n]$; $\mathbf{F}_0=\mathbf{E}$ és $\mathbf{F}_n=\mathbf{A}^{-1}$ jelölésekkel) az invertálás az

$$\mathbf{F}_j=\mathbf{F}_{j-1}-\frac{\mathbf{F}_{j-1}\,\mathbf{b}_j\,\mathbf{e}_j^*\,\mathbf{F}_{j-1}}{1+\mathbf{e}_j^*\,\mathbf{F}_{j-1}\,\mathbf{b}_j}$$

rekurziv formulával hajtható végre.

2. A szilárdságtanból vett példán (gerendatartó vizsgálata) egyszerű eszközökkel kimutatható egy differenciálegyenlet differenciaegyenlettel való megközelítéséből származó hiba nagyságrendje.

3. Kétméretű folytonos szerkezetek (lemezek, falak, héjak, stb) numerikus

számításánál alkalmazott matrixszámításra épített két módszer vázlatos ismertetése: *a*) a parciális differenciálegyenletek közelítése differenciaegyenletekkel, *b*) a folytonos modell megközelítése véges sűrűségű tartóráccsal. Az utóbbiból származó előnyök.

FAZEKAS FERENC: *Változó merevségű tengely kritikus szögsebességének vizsgálata matrix-számítás segítségével.* E problémát Egerváry Jenő 1949-ben oldotta meg klasszikus módszerrel. Az előadó ugyanezt a problémát a Marguerre-féle matrix-számításos módszerrel tárgyalja.
A szimmetrikus elrendezésű forgó rendszer bal felének jobb szélső darabja, a *rótor* az $y_1 = \mathbf{R} y_0$ matrixegyenlettel jellemezhető, ahol $\mathbf{R}$ negyedrendű kvadratikus matrix, elemei ω (szögsebesség) függvényei.
A rótortól balra, az *i*-edik *tengelyszakasz* matrixegyenlete $y_{i+1} = \mathbf{R}_i x_i$, ahol $\mathbf{R}_i$ negyedrendű felső háromszögmatrix. A *teljes forgó rendszer* matrixegyenlete tehát $y_{n+1} = \left(\prod_{i=1}^{n} \mathbf{R}_i\right) \mathbf{R} y_0$. A kerületi feltételek figyelembevételével adódó homogén lineáris egyenletrendszer determinánsának eltűnéséből az Egervárynál is szereplő sajátértékegyenletet kapjuk. Ebből pl. nomogramm segítségével nyerhető a *legkisebb kritikus szögsebesség* közelítő értéke.

SZENDY KÁROLY: *A Laplace-transzformáció egy finit analógiája.* Lineáris differenciál egyenletek megoldása esetén a Laplace-transzformáció visszatranszformálásánál előforduló nehézségek kiküszöbölésére javasolható a függvények diszkrét értékekkel való előállítása. Ilymódon az egyváltozós függvény oszlop-, a kétváltozós téglalapalakú matrixba foglalható. A függvény differenciálhányadosát helyettesítő differencia hányadosának matrixa pedig előállítható két oly oszlopmatrix összegeként, amelynél az első tag egy egyenletes triangulár (háromszög) matrixnak ($\mathbf{D}$) és a függvény matrixának szorzata, a második pedig a függvény kezdeti értékének és a Dirac-függvénynek megfelelő matrixnak szorzata. Hasonlóképpen lehet a *k*-adrendű differencia hányados matrixképét is meghatározni.
Az állandó együtthatójú differenciál egyenlet matrix előállítása $\mathbf{S}\mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{Q}\mathbf{e}$, amelybe $\mathbf{S}$ és $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{D}$ matrix polinomjaiként képzett egyenletes triangulármatrixok. Mivel egyenletes triangulár matrixok szorzata kommutábilis, ezek a matrixok skalárként kezelhetők, ilymódon $\mathbf{S}$ matrix inverze könnyen meghatározható. A $\mathbf{D}$ matrix inverze, az $\mathbf{L}$ ún. integrálási mátrix, amely az $1(x-\xi)$ egységfüggvény matrix előállítása. Belátható, hogy $\mathbf{L}$ matrix pedig az $\frac{(x-\xi)}{k!}$ függvény matrix alakja; $e^{-(x-\xi)}$ függvényé pedig $(\mathbf{E} + a\mathbf{L})^{-1} = \mathbf{D}(\mathbf{D} + a\mathbf{E})^{-1}$; továbbá, hogy $y(x-\xi)$ függvény a következő triangulár matrixsor összegével állítható elő: $\sum_{x-\xi=1}^{n} y(x-\xi)\, e^{-(x-\xi)\mathbf{D}}$, amely a Laplace-transzformációnak finit alakja. Bemutatható ebben az esetben is az első és második eltolási tétel érvényessége.
Változó együtthatójú differencia egyenlet is megoldható, azonban az $\mathbf{S}$ matrix már nem egyenletes triangulár matrix, a tényezők felcserélésére pedig megfelelő algoritmust lehet használni.

BRÓDY ANDRÁS: *A mátrix-számítás felhasználása a társadalmi munkamegtakarítás mérésére.* Az előadás szövege megjelenik a MTA Matematikai Kutató Intézete Közleményeiben.

Szeptember 22., hétfő du.

Tassi Géza: *Rugalmas-plasztikus állapotú sztatikailag határozatlan szerkezetek vizsgálata matrix-számítás alkalmazásával.* Rúdszerkezetek teherbírásának meghatározásánál és tervezésénél egyre nagyobb teret hódít a képlékenységtan alapján álló számítás. Tetszőleges — egy paramétertől függő — teherhez tartozó erőjáték és alakváltozási állapot meghatározására azonban a szokásos egyszerűsítő feltételezések mellett sem dolgoztak ki részletesen általános eljárást. A matrixszámítás ez új területen való alkalmazásakor le kell győzni az abból adódó nehézségeket, hogy mivel a szuperpozíció elve — szemben a rugalmas anyagú tartókkal — nem érvényes, a feladat *egy* lineáris egyenletrendszerrel nem fogalmazható meg.

A képlékeny alakváltozás közvetett figyelembevételének A. A. Gvozgyev által javasolt módszert továbbfejlesztve a szerkezet erőmódszerrel való megoldásából kiindulva lineáris egyenletrendszer írható fel, amely azt fejezi ki, hogy a — pl. hajlított — tartó valamely keresztmetszetében a külső teher és a plasztikus csuklókon fellépő terhelő elfordulások hatására legfeljebb a határnyomaték lép fel. Törőterhelés esetén az elfordulásokra felírható inhomogén lineáris egyenletrendszer együttható matrixának rangja eggyel kisebb, mint a rendszáma. Automatikus módszerrel meghatározható a terhelési paraméternek az az értéke, amelyre az egyenletrendszer kompatibilis. Minthogy a folyási mechanizmus általában előre nem ismert, a plasztikus csuklók kialakulásának helyeit és a törőteher paraméterét egyszerű minimum feladattal kell meghatározni. Az előfordulásoknak a törőterhelés fellépése pillanatában való értékét az egyenletrendszer *egy* szabad paramétertől függő lineáris megoldásai szolgáltatják. Az lesz a legutoljára kialakuló plasztikus csukló, amelyen fellépő elfordulásnak, mint a szabad paraméter lineáris függvényének zérushelye extrémális. A plasztikus csuklók kialakulási sorrendjét, a rajtuk fellépő elfordulásokat és a nyomatéki ábrákat ugyancsak szélső érték feladat megoldása adja, s ehhez az egyenletrendszer együttható matrixa bizonyos minormatrixainak invertálása szükséges. Ezek egy-egy diád ismételt leválasztásával számíthatók. Az így kidolgozott eljárás könnyen áttekinthető és gépi úton is egyszerűen elvégezhető.
A matematikai probléma megoldása jelentős részben Rózsa Pál munkájának eredménye.

Sándor István: *Feszített betongerenda tartóvégének feszültség-eloszlás-vizsgálata a matrixszámítás segítségével.* Ha egy derékszögű négyszög keresztmetszetű gerenda saját síkjában működő erőkkel van terhelve, akkor síkbeli feszültség állapot vizsgálatáról van szó.
Ezt az állapotot a σ_x és σ_y normális és τ_{xy} nyírófeszültségek jellemzik.
Mint ismeretes, az $F(x, y)$ feszültségfüggvény kielégíti a $\Delta\Delta F(x, y) = 0$ biharmonikus differenciálegyenletet és a megfelelő kerületi feltételeket. Ha a differenciálegyenletet differenciaegyenlettel közelítjük, akkor a következő matrixegyenletet kapjuk a feszültségfüggvénynek (a rácspontokhoz tartozó) értékeiből alkotott $\mathbf{F}$ matrixra:

$$\mathbf{C}^2\mathbf{F} + 2\mathbf{CFC} + \mathbf{FC}^2 = \mathbf{P}.$$

A $\mathbf{P}$ matrix magában foglalja a kerületi feltételeket, $\mathbf{C}$ pedig a második differenciál képzésének megfelelő kontinuáns matrix, amelynek ismert a spektrálfelbontása: $\mathbf{C} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^*$.
Behelyettesítve az egyenletbe és bevezetve az $\mathbf{S} = \mathbf{U}^*\mathbf{F}\mathbf{U}$ és $\mathbf{G} = \mathbf{U}^*\mathbf{P}\mathbf{U}$ matrixokat,

$$s_{ij} = \frac{g_{ij}}{\lambda_i^2 + 2\lambda_i\lambda_j + \lambda_j^2}$$

adódik, ahonnan a keresett f_{ij} értékek, majd pedig a $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ feszültségek (közelítő) értékei meghatározhatók.

Sárkány György: *Ellenáramú szétválasztó vegyipari alapműveletek elméleti fokozatszámának meghatározásáról.* Az extrakció, rektifikálás és abszorbció elméleti fokozatszámán (elméleti tányérszám) azt értjük, hogy 2 egymással csak részben vagy általában nem elegendő, ellenáramban mozgó folyadék-, illetve gázfázisnak hányszor kell egymással érintkezni és köztük fázisegyensúlyt előállítani ahhoz, hogy az egyes fázisok koncentrációviszonyai előírt módon alakuljanak. Ezért az elméleti fokozatszámot a fázisegyensúly beállítását és a fázisok szétválását jellemző egyenletekből lehet kiszámítani. Minden egyes elméleti fokozatra (érintkezési folyamatra) 4 típusú egyenletet lehet felírni: a koncentrációk fázisegyensúlyi összefüggését, a teljes anyagmérleget, egyik fáziskomponensre vonatkozó anyagmérleget és a fázismennyiséget meghatározó paraméter egyenlegét. Eszerint n elméleti meghatározására 4, egyenként n egyenletből álló egyenletrendszert nyerünk és a feladat az egyes egyenletrendszerek egyenletei számának, n-nek kiszámítása.

Az egyenletrendszerek e szokatlan, az egyenletek számát meghatározó megoldását végeztük el azon feltevések mellett, hogy a fázisegyensúlyt és a fázismennyiséget meghatározó paraméter viselkedését leíró empirikus összefüggéseket szakaszonként lineáris függvénnyel lehet megközelíteni. Az így nyert egyenletrendszereket matrixegyenletek alakjában írjuk fel. Lineáris matrixegyenleteket nyerünk, ha a fázismennyiséget meghatározó paramétert állandónak tekinthetjük. Az egyenletek számának meghatározása a matrixegyenletben szereplő nilpotens matrix explicit alakban könnyen előállítható polinomjának alkalmazása révén válik lehetővé. Bonyolultabb, nem lineáris matrixegyenletek adódnak, ha a fázismennyiséget meghatározó paramétert is szakaszonként lineáris függvényekkel közelítjük. Ezekből a matrixegyenletekből az ismeretlen koncentrációk kiküszöbölhetők és a megmaradó ismeretlenek számára tört-lineáris rekurziós formulát nyerünk, amelyből n ismét kiszámítható. Az eddigi eredmények, — amelyekhez Rózsa Pál közreműködésével jutottunk, — összhangban vannak az irodalomban hasonló esetekre nyert képletekkel.

Krekó Béla: *A simplex módszer néhány alkalmazása (gazdasági problémák megoldására).* Legyenek a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ vektorok az n-dimenziós tér egyik bázisának vektorai. Ha valamelyik $\mathbf{b}_i$ vektort kicseréljük a tér egy alkalmasan megválasztott $\mathbf{a}$ vektorával, megváltoznak a tér vektorainak az új bázisra vonatkozó koordinátái is. A lineáris programozással kapcsolatos szimplex módszer numerikus szempontból is igen egyszerű eljárást ad az új koordináták meghatározására. Ezt az eljárást elemi transzformációnak fogjuk nevezni.

Ilyen elemi transzformációk sorozatos alkalmazásával bármely $\mathbf{A}$ matrix oszlopvektoraiból r lépésben kiválaszthatunk r olyan vektort, amely bázisát alkotja az oszlopvektortérnek. (Az r az $\mathbf{A}$ rangja.) Ezzel a kérdéses matrixnak egy olyan, az

$$\underset{(m,\,n)}{\mathbf{A}} = \underset{(m,\,\lambda)}{\mathbf{A}_1} \cdot \underset{(\lambda,\,n)}{\mathbf{A}_2}$$

alakban felírható sajátos bázisfelbontását nyerjük, ahol az $\mathbf{A}_1$ oszlopvektorai a kiválasztott bázisvektorok lesznek, az $\mathbf{A}_2$ pedig — oszlopvektorainak megfelelő átrendezésével — az

$$[\mathbf{E}, \mathbf{D}]$$

alakra hozható. Itt az első blokk egy r-edrendű egységmatrix, a $\mathbf{D}$ pedig egy $(r, n-r)$ típusú matrix.

Tekintsük ezután az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a}$$

egyenletet. Ha történetesen az $\mathbf{A}$ első r oszlopvektora alkotja az oszlopvektortér bázisát, akkor az előzőek szerint

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot [\mathbf{E}, \mathbf{D}];$$

ha pedig egyenletünk eleget tesz a kompatibilitás követelményének, akkor

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_1 \mathbf{c}.$$

E feltételek mellett egyenletünk ekvivalens lesz az

$$[\mathbf{E}, \mathbf{D}]\,\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

egyenlettel. Ennek megoldása pedig az

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{D} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{t}$$

alakban írható fel, ahol a $\mathbf{t}$ bármilyen $n-r$ elemű vektor lehet. Nevezetes körülmény, hogy az említett numerikus eljárás közvetlenül szolgáltatja mind a $\mathbf{c}$, mind a $\mathbf{D}$ elemeit. Ugyanekkor a kompatibilitás kérdése is automatikusan realizálódik.
Ez a módszer természetesen jól alkalmazható a matrixok inverzének meghatározására is. Erre számos példa hozható a gazdasági tervezés területéről.

Dömölki Bálint: *Szállítási feladat megoldása automatikus számológépek segítségével.* „Szállítási feladat"-nak a lineáris programozás feladatának azt a speciális esetét szokták nevezni, amikor megadott $x_i \geqq 0$, $y_j \geqq 0$ és $c_{ij} \geqq 0$ számokhoz kell olyan z_{ij} nemnegatív elemekből álló matrixot keresni, hogy a

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} z_{ij} &= x_i \\ \sum_{i=1}^{m} z_{ij} &= z_j \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\; j = 1, 2, \ldots, n)$$

feltételek teljesülése mellett a

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} z_{ij}$$

összeg értéke minimális legyen.
A feladat numerikus megoldására általában használatos módszer, egy tetszőleges kiinduló megoldás sorozatos javításán alapul. Előadó vázolja a módszer célravezető voltának egy bizonyítását a matrixok és gráfok kapcsolata segítségével. Rámutat a módszer különleges előnyeire automatikus számológépekre való alkalmazhatóság szempontjából, valamint ismertet néhány problémát, amelyek az $M-3$ gépre való programozás során vetődtek fel.

Szeptember 23., kedd de.

Egerváry Jenő: *Konstruktív módszer matrixoknak Jordan-féle normálalakra való redukálására.* Az előadott módszer a Jordan-féle normálalakra való redukálást két lépésben hajtja végre, az adott matrix jobb- és baloldali saját- és fővektorainak szimultán és szimmetrikus alkalmazása mellett.

Először a hermitikus projektoroknak bázisfaktorokra bontása útján nyert transzformáló matrixokkal az adott matrixot olyan diagonális hypermatrixokra redukáljuk, amelynek blokkjai az egyes sajátértékekhez tartozó jobb- és baloldali invariáns alterek bázisait szolgáltatják. Minden egyes blokk additive tevődik össze egy idempotens és egy nilpotens komponensből.

Másodszor minden egyes nilpotens komponenshez egyszerű algoritmus segélyével a jobb- és baloldali fővektoroknak egy biortogonális rendszerét számítjuk ki. Ezek segélyével egy nem-derogatorius nilpotens matrix azonnal Jordan alakra redukálható, a derogatorius esetben pedig az eljárás iterációjával adódik a végleges redukált alak, mint Jordan-direkt összege.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Egyenletesen korlátos lineáris transzformációk véges dimenziós euklidesi térben.* Legyen $y = Tx$ a véges dimenziós komplex euklidesi R tér egy lineáris transzformációja (azaz $T(ax_1 + bx_2) = aTx_1 + bTx_2$), és tegyük fel, hogy ez egyenletesen korlátos abban az értelemben, hogy létezik olyan M konstans, amelyre

$$\|T^n x\| \leqq M\|x\| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$\|\cdot\|$ jelentvén a vektorok hosszúságát. A következőt bizonyította be az előadó: T hasonló egy kontrakcióhoz, azaz van olyan invertálható B lineáris transzformációja R-nek önmagára, amelyre $\|BTB^{-1}x\| \leqq \|x\|$.

KOVÁCS LÁSZLÓ: *Megjegyzés a lineáris egyenletrendszerek elméletével kapcsolatban.* Az előadó rámutatott a particionált matrixok szorzásszabályának a lineáris egyenletrendszerek elméletével való kapcsolatára. A particionált matrixok szorzásszabálya természetes ekvivalenciát biztosít megfelelő típusú matrixok felett értelmezett lineáris egyenletrendszerek és skaláris egyenletrendszerek között. Ezen ekvivalencia segítségével konstruktív bizonyítás nyerhető arra az először Kertész Andor által bizonyított tételre, amely szerint a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elmélete féligegyszerű gyűrűk felett is érvényes.

Szeptember 23., kedd du.

RÉDEI LÁSZLÓ és TURÁN PÁL: *A ciklikus matrix rangja véges test felett.* Ha B egy q-elemű véges test, akkor szerzők kimutatták, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{q-2} \\ \alpha_{q-2} & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{q-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_0 \end{pmatrix} \qquad \alpha_\nu \in B, \quad \alpha_0 \neq 0$$

alakban írt ciklikus matrix rangja ν, ha ν az

$$A_{q-1} = A_{q-2} = \cdots = A_{q-\nu} = 0, \quad A_{q-1-\nu} \neq 0$$

-val van definiálva; itt A_j jelenti az A j-ed rendű főminorjai összegét. A bizonyítás indirekte adódik azon tételükből, hogy az $\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{q-2} x^{q-2} = 0$ egyenlet B-beli különböző megoldásainak száma az előbbi ν-vel egyenlő.

KALMÁR LÁSZLÓ: *Egy probléma a Boole-féle matrixok áramköri alkalmazásaival kapcsolatban.* Boole-féle matrixnak nevezünk egy (négyzetes) matrixot, ha elemei valamely Boole-féle algebra elemei. Ilyen matrixokkal hasonlóan végzünk műveleteket, mint közönséges matrixokkal, csak az elemek összeadásának és szorzásának szerepét a megfelelő Boole-féle műveletek (diszjunkció vagy más néven unió, ill. konjukció vagy más néven metszet) veszik át.

Tekintsünk egy elektromechanikus blokkot, amelynek $R_1, R_2, \ldots, R_k$ jelfogói bizonyos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ külső körülményekre reagálnak oly módon, hogy az R_i jelfogó akkor és csak akkor húz meg, ha az x_i körülmény bekövetkezik; ez esetben legyen $X_i = \uparrow$, más esetben $X_i = \downarrow$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Legyen a blokknak n kivezetése: $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Legyenek előírva a blokk működési feltételei abban a formában, hogy $i, j = 1, 2, \ldots, n$ esetén legyen előírva, hogy annak az ítéletnek a logikai értéke, hogy a P_i és P_j pontok között a blokk vezető összeköttetést létesít, milyen f_{ij} (Boole-féle) függvénye legyen az $X_1, X_2, \ldots, X_k$ logikai változóknak. Ezen f_{ij} függvények (logikai formulák) Boole-féle matrixot alkotnak.

Minthogy a P_i pontok mindegyike önmagával mindig vezető összeköttetésben van (a külső körülményektől függetlenül), ezért azonosan $f_{ii} = \uparrow$, vagyis az F matrix átlós elemei $\uparrow$-zal egyenlők. Minthogy a P_i pont akkor és csakis akkor van vezető összeköttetésben a P_j ponttal, ha P_j vezető összeköttetésben van a P_i ponttal, ezért $f_{ij} = f_{ji}$, vagyis a F matrix szimmetrikus. Minthogy a vezető összeköttetés tranzitív, ezért valahányszor $f_{ij} = \uparrow$ és $f_{jh} = \uparrow$, mindannyiszor $f_{ih} = \uparrow$. Ebből következik, hogy

$$f_{ih} = f_{i1}f_{1h} \vee f_{i2}f_{2h} \vee \cdots \vee f_{in}f_{nh};$$

ha ugyanis a baloldal értéke $\uparrow$, akkor a jobboldal $f_{ih}f_{hh}$ tagja $f_{hh} = \uparrow$ miatt $\uparrow$, tehát az egész jobboldal is; fordítva, ha a jobboldal értéke $\uparrow$, vagyis valamelyik tagja $\uparrow$, akkor az említett tranzitivitás miatt a baloldal is $\uparrow$. Ennélfogva az F Boole-féle matrix idempotens: $F^2 = F$. (A tranzitivitás ezen matrixelméleti átfogalmazására Pollák György hívta fel a figyelmemet; valószínűnek tartom azonban, hogy előbb is ismert volt.)

Eszerint a szóbanforgó elektromechanikus blokk F „feltételmatrixa" az átlóban csupa $\uparrow$ elemet tartalmazó, szimmetrikus, idempotens matrix; fordítva, minden ilyen matrix tekinthető feltételmatrixnak.

Mármost egy adott elektromechanikus blokk helyességének, vagyis annak ellenőrzése, megfelel-e az előírt működési feltételeknek, tehát annak az ítéletnek logikai értéke, hogy a P_i és P_j pontok között van vezető összeköttetés, az $X_1, X_2, \ldots, X_k$ logikai változók minden értéke mellett $f_{ij}(X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_k)$-val egyenlő-e, rendszerint (amennyiben nem szorítkozunk szúrópróbaszerű ellenőrzésre) úgy történik, hogy $j = 2, 3, \ldots, n$ és $i = 1, 2, \ldots, j-1$ esetén ellenőrizzük, a mondott egyenlőség fennáll-e $(X_1, X_2, \ldots, X_k$ minden értékére). Más szóval az F matrixnak csak azt a tulajdonságát használjuk ki, hogy átlójában csupa $\uparrow$ áll és hogy szimmetrikus. Ez azonban feleslegesen sok próbát igényel, hiszen a matrix idempotenciáját nem használtuk ki.

Világos, hogy a mondott próbák közül mindemellett egyetlen egyet sem hagyhatunk el minden esetben, mert hiába ellenőriztük az említett egyenlőség fennállását $i < j$, $i \neq i_0, j \neq j_0$ esetén $(i_0 < j_0)$, ebből még nem tudhatjuk, fennáll-e $i = i_0$, $j = j_0$ esetén is. Ugyanis előfordulhat, hogy az $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_k$ változók valamely értéke mellett $i < j$, $i \neq i_0$, $j \neq j_0$ esetén $f_{ij} = \downarrow$, ezzel, valamint az idempotenciával $f_{i_0j_0} = \uparrow$ is, $f_{i_0j_0} = \downarrow$ is összefér. Más szóval: az F matrix átlóalatti elemei az idempotencia miatt nem függetlenek, mégsem (egyértékű) függvénye egyik sem a többinek.

Lehetségesnek látszik azonban az ellenőrzéshez használt próbák számának csökkentése, ha nem maguknak a matrixelemeknek, hanem azok bizonyos

Boole-féle függvényeinek megegyezését ellenőrizzük (a valóságos blokkra vonatkozó ill. a működési feltételekből kapott matrix esetén).

Így a következő probléma adódik. *Meghatározandó egy F szimmetrikus, idempotens, az átlóban csupa* ↑*-at tartalmazó Boole-féle matrix* f_{ij} *elemeinek lehető kevésszámú Boole-féle függvényéből álló olyan rendszere, hogy amennyiben e függvényrendszer elemei két szimmetrikus, idempotens, az átlóban csupa* ↑*-at tartalmazó Boole-féle matrix esetén megegyeznek, akkor a két matrix azonos.*

Rózsa Pál: *A lineáris programozás matrixelméleti megalapozása.* A lineáris egyenletrendszerek megoldásának problémája matrixelméleti szempontból abban áll, hogy az adott egyenletrendszert egy vele ekvivalens olyan egyenletrendszerré alakítsuk át, amelynek együtthatómatrixa *Hermite*-féle normál alakú. (A Hermite féle normál alakú matrix olyan kvadratikus matrix, amelynek fődiagonálisában minden elem 1 vagy 0, ahol 1 áll, ott ennek az oszlopában valamennyi többi elem 0, ahol 0 áll, ott ennek a sorában valamennyi többi elem 0.) A Hermite-féle normál-alakú együtthatómatrixszal bíró egyenletrendszer tehát automatikusan szétválasztja az ismeretleneket „szabad" és „kötött" ismeretlenekre.

Megadható egy egyszerű algoritmus, amelynek segítségével a Hermite-féle normál-alakú matrix egy olyan másik ugyancsak Hermite-féle normálalakú matrixra transzformálható, hogy az 1-esek a fődiagonálisnak más helyén álljanak, tehát mások legyenek az egyenletrendszer szabad, illetve kötött ismeretlenei.

A lineáris programozás alapfeladata tudvalevően egy lineáris egyenlőtlenségrendszer olyan nem-negatív megoldásainak a meghatározása, amelyek bizonyos lineáris függvényt maximalizálnak (ill. minimalizálnak). Ha az egyenlőtlenségrendszert új ismeretlenek behozásával egyenletrendszerré alakítjuk át, Hermite-féle normálalakú együtthatómatrixszal bíró egyenletrendszert nyerünk, amelynek az adott feltételeket kielégítő megoldásához az említett algoritmus megfelelő alkalmazásával jutunk. Ezzel tulajdonképpen a *Dantzig* nevéhez fűződő úgynevezett szimplex-módszernek tisztán matrixelméleti interpretációját nyerjük.

Hajtman Béla: *Monokvadratikus egyenletrendszerek megoldásáról.* Az egyetlen másodfokú és több lineáris egyenletből álló egyenletrendszerekre explicit megoldóképletet írt fel az előadó.

$$(1) \qquad (Px_i - R_i)^2 = 0,$$

ahol P és R_i jól kezelhető szimbolikus determinánsok, x_i pedig az egyik, nem teljesen tetszőlegesen választott ismeretlen. A fenti képletet az egyenletek számával megegyező számú ismeretlent tartalmazó egyenletrendszerekre vezette le, de megmutatta, hogy az általános eset lényegileg erre vezethető vissza.

Az (1) képlet segítségével elvégezte az előadó a megoldások teljes algebrai diszkusszióját is. Végül rámutatott, hogy a követett eljárás alkalmazható olyan, a monokvadratikushoz hasonló egyenletrendszerek esetében is, amelyek a lineáris egyenleteken kívül egy tetszőleges magasabbfokú egyenletet tartalmaznak.

Pethő Árpád: *Megjegyzés a) lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságával, b) lineáris differenciaegyenletek matrixmegoldásával kapcsolatban.*

a) Ismeretes, hogy egy K ferdetestben adott $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,\ldots,m)$ lineáris egyenletrendszer (itt $n=m$ feltehető, $n \neq m$ esetben ui. az ismeretlenek ill. az egyenletek számát triviálisan úgy növeljük, hogy $n=m$ fennálljon) egyértelmű megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele az $[a_{ij}]$ (kvadratikus) matrix regularitása. Az előadó általánosítása a következő: a fenti egyenletrendszer az ismeretlenek $(x_1,\ldots,x_n)$ halmazának $(x_{\nu_1},\ldots,x_{\nu_2})$ $(k \leqq n)$ részhalmazát akkor és csak akkor határozza meg egyértelműen, ha 1° a rendszer kompatibilis; 2° rang $[a_{ij}]-k =$ rang $[a'_{ij}]$, ahol

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & j \neq \nu_1,\ldots,\nu_k \\ 0, & j=\nu_1,\ldots,\nu_k. \end{cases}$$

b) *b)* A differenciaszámításban a (kétváltozós) parciális állandó együtthatójú egyenletek kezdőértékfeladatának közönséges egyenletek kezdőértékfeladatává való redukciójára ismeretes a generátorfüggvénymódszer; az előadó egy eljárást ismertetett, amellyel a redukció elemi matrixszámítással végrehajtható.

Aczél János: *A matrix-számítás alkalmazása a geometriai okjektumok elméletében.* A matrixszámításnak, azon belül különösen a multiplikatív matrix-matrix függvényeknek és a vektor-vektor függvények matrixderiváltjának alkalmazása a geometriai objektumok klasszifikációelméletére (lineáris objektumok), kovariáns deriváltjára, algebrájára és komitánsaira.

Hosszú Miklós: *A matrix-számítás alkalmazása a geometriai objektumok elméletében. II.* Az előadó két egyszerű bizonyítást adott M. Kucharzewski azon tételére, amely szerint a matrixok skalár értékű multiplikatív függvénye csupán a matrix determinánsától függ, éspedig közönséges értelemben multiplikatív módon. Az egyik bizonyítás azon alapszik, hogy minden matrix felbontható két tényezőre, amelyek külön-külön diagonális alakra transzformálhatók, diagonális matrixokra viszont már egyszerűen bizonyítható a tétel állítása; a másik bizonyítás J. Dieudonné egy tételére támaszkodik, amely szerint (egy ferdetest felett) minden invertálható mátrix felbontható olyan tényezők szorzatára, amelyeknek csupán egyik eleme különbözik az egységmatrixtól, s ilyen típusú matrixok skalár értékű multiplikatív függvénye már szintén egyszerűen kiszámítható.

Balogh Albert: *Egydimenziós, egykomponensű első és másodosztályú geometriai objektumok racionális tört transzformációs képletének meghatározása.* Az egydimenziós egy komponensű első és másodosztályú racionális tört transzformációs képletű geometriai objektumok meghatározása a következő matrix függvény egyenletekhez vezet:

a) $\qquad \lambda(x,y)\,F(xy) = F(x)\,F(y)$

b) $\qquad \lambda(y_1,y_2,z_1,z_2)\,(F(y_1z_1,\,y_1^2z_2+z_1y_2) = F(z_1,z_2)\,F(y_1,y_2),$

ahol $F(x) = (f_{ij}(x))$ $(i,j=1,2)$ 2×2-es típusú matrixot jelöl. Az előadásban ezen függvényegyenletek megoldását, valamint a racionális tört transzformációs képletű geometriai objektumok meghatározását tárgyalta az előadó.

Szekeres György: *Matrixok exponenciális és poláris előállítása.* Ismeretes, hogy a klasszikus folytonos matrixcsoportok elemei előállíthatók $A=\exp T$ alakban, hol T egy lineáris matrixtér elemeit futja végig. N. G. de Bruijn és az előadó munkája egyéb matrixsokaságok exponenciális előállítását tárgyalja egységes módszer szerint. Például minden szimmetrikus unitér matrix $\exp iS$ alakra hozható, ahol S valós szimmetrikus.

Néhány új poláris előállítást is lehet nyerni a módszerrel, melyek közt legérdekesebb a következő: Minden nem-szinguláris matrix előállítható $R \exp iT$ alakban, ahol R, T valós matrixok.

ERDŐS PÁL: *Matrixok kombinatorikus tulajdonságai.* Legyen (a_{ik}) n-edrendű duplán sztochasztikus matrix. Van der Waerden 30 éve sejtette, hogy a kifejtési tagok abszolút értékeinek összege

$\geqq \frac{n!}{n^n}$, egyenlőség akkor és csakis akkor, ha $a_{ik} = \frac{1}{n}$. E sejtés mindmáig nincsen bebizonyítva.

Előadó sejtette, hogy mindig van egy 0-tól különböző kifejtési tag, amelyben a tényezők összege $\geqq 1$. Marcus és Rhee be is bizonyították, sőt azt is kimutatták, hogy van egy 0-tól különböző kifejtési tag, amelyben a tényezők összege $\geqq \frac{1}{n} \sum a_{ik}^2$.

Előadó egy másik sejtése, hogy van egy kifejtési tag, amelyben a tényezők szorzata $\geqq \frac{1}{n^n}$, de ez eddig nincs bebizonyítva.

A Bolyai János Matematikai Társulat budapesti előadásai 1958 július 1-től december 31-ig

Szeptember 19.

K. MARUHN: *Über hydrodinamische Existenzfragen.*

Szeptember 20.

SURÁNYI JÁNOS: *Egy nevezetes rácsgeometriai tétel és alkalmazásai.* Középiskolai matematikai délután.

Október 10.

I. M. BEREZANSZKIJ: *Differenciáloperátorok felbontása sajátfüggvények szerint.* Az előadás az L_2-ben értelmezett önadjungált operátorok sajátfüggvények szerinti felbontásával foglalkozott, amely a korlátos operátorok kváziintegrállal való előállítása alapján történt. Ezek az eredmények alkalmazásra kerültek a közönséges és parciális differenciáloperátorok, valamint a differenciaoperátorok sajátfüggvények szerinti felbontásánál. Az előadás anyaga a következő cikkekben található:

1. „Razlozsényije po szobsztvennim funkcijam szumoszoprjazsennih operatorov“, Matem. Szbornyik, 43, NT. (1957), 75—126.
2. „Razlozsényija po szobsztvennim funkcijam uravnyenyij b csasztnih razrosztjah vtorovo porjádka“, Trudi Moszk. matem. ob.-va 5 (1956), 203—268.

Október 17.

S. MARCUS: *A Riemann-integrál egy Lebesgue-tipusú elméletéről.* Legyen E az R^n térnek egy kvadrálható halmaza. Az E-n értelmezett valós f függvény Jordan szerint mérhető E-n, ha azok az α-k, amelyekre az $\{x | x \in E, f(x) > \alpha\}$

halmaz nem kvadrálható, megszámlálható halmazt alkotnak. Az ilyen függvények részére egy megszámlálható értékhalmazt állandóan elkerülő függőleges felosztásból kiindulva egy integrál értelmezhető, amely a Lebesgue-féle integráltól csak annyiban különbözik, hogy a Lebesgue-féle mérték helyébe a Jordan-féle mérték lép. Annak, hogy az E-n korlátos f függvény ilyen értelemben integrálható legyen, szükséges és elegendő feltétele, hogy f az E-n majdnem mindenütt folytonos legyen. Ez a tény mutatja, hogy az így értelmezett integrál abban az esetben, amikor E kvadrálható halmaz, a Riemann-féle integrállal egyezik meg.

Október 17.

Az Ifjúsági Matematikai Kör klubdélutánja.

Október 18.

Horvay Katalin: *Néhány érdekes háromszög szerkesztési feladat a háromszöghöz tartozó körök felhasználásával.* Középiskolai matematikai délután.

Október 24.

St. Gołąb: *Differenzialkomitanten und Liesche Ableitung.* Az Ω objektummezőnek egy megadott ϑ vektormezőre vonatkozó Lie-féle deriváltját az Ω, ϑ mezőkhöz tartozó differenciál komitánsnak tekinthetjük. Az előadó azt a célt tűzte ki, hogy Ω és ϑ valamennyi differenciálkomitánsra vonatkozólag mellékfeltételek választásával a Lie-féle deriváltak klasszikus formáihoz eljusson. Ezt a célt bizonyos Ω mezőknél el lehet érni.

Október 31.

Freud Géza: *Jackson approximációs tételének lokalizációja egy pontra.*

November 4.

L. Csakalov (Szófia): Über die Verteilung der Nullstellen einiger Klassen von Polynomen.

November 14.

Császár Ákos: *A komplex függvénytan megalapozásáról.* Az előadó a komplex függvénytan megalapozásánál fellépő topológiai nehézségek elkerülésére egy felépítésmódot vázolt. Ebben az a pontnak a rektifikálható (zárt vagy nem zárt) L görbére vonatkozó indexét az

$$\mathrm{ind}_L\, a = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dz}{z-a}$$

képlet definiálja, majd a Cauchy-féle alaptételnek és integrálformulának téglaalapokra történő bebizonyítása után a következő tételt bizonyítja be: Ha $f(z)$ reguláris minden olyan pontban, amelynek a rektifikálható, zárt C_j görbékre vonatkozó indexösszege nem 0 (s magukon e görbéken is), akkor

$$\sum_j \int_{C_i} f(z)\, dz = 0.$$

A bizonyítás $f(z)$-nek olyan racionális függvényekkel történő egyenletes approximációján alapszik, amelyeknek pólusait a C_j görbék együttvéve nem kerülik meg.

November 13.

C. FOIAS: *Spektrális halmazok néhány alkalmazásáról.* Egy H Hilbert-tér T operátora spektrális halmazának fogalmát Neumann János vezette be 1951-ben [1]. Fő tételét (az egységkörlemez T-nek spektrális halmaza akkor és csakis akkor, ha $\|T\| \leqq 1$) többféleképpen bizonyították ([2], [3], [4]), azonban kezelhető funkcionális kalkulus hiányában a spektrális halamaz fogalmát csupán a H-beli $\frac{du}{dt} = A(t)u$ egyenlet vizsgálatánál alkalmazták. Előadó vizsgálta ezt a kérdést és észrevette, hogy egy olyan funkcionális kalkulust kell konstruálni, amely olyan függvényekre alkalmazható, melyek nem szükségszerűen analitikusak az egész spektrumon, de analitikusak egy reguláris S spektrális halmaz belsejében és folytonosak az S halmazon, kivéve $F_r S$-nek véges számú olyan pontját, melyek nem sajátértékei T-nek. Előadó ezt a kalkulust a harmonikus spektrális mérték bevezetésével tudta megvalósítani [6]. Legyen S spektrális halmaz, melynek határa T-nek egy zárt Jordan-görbéje. Akkor minden S-ben analitikus $f(x)$ függvényre

$$(1) \qquad \|\operatorname{Re} f(T)\| = \| \frac{1}{2}[f(T) + f(T)^*]\| \leqq \sup_{\lambda \in S} |\operatorname{Re} f(\lambda)|.$$

Minden S-ben harmonikus $u(\lambda)$ valós függvényhez hozzárendelhetők olyan S-ben egyértékű analitikus függvények, hogy $u(\lambda) = \operatorname{Re} f(\lambda), \lambda \in S$. Definíciószerűen $u(T) = \operatorname{Re} f(T)$. (1) értelmében az $u(\lambda) \to u(T)$ leképezés kiterjeszthető minden S-beli folytonos harmonikus függvényre, megőrizve a linearitás és monotonitás tulajdonságát ($u(\lambda) \geqq 0$-ből következik $u(T) \geqq 0$). Ily módon, ha $\varrho(\zeta)$ $F_r S$-en folytonos valós függvény, a $\varrho(\lambda) \to u_\varrho(T)$ leképezés lineáris és monoton, ahol $u_\varrho(\lambda)$ egy olyan megoldása a Dirichlet-problémának, melyre $u_\varrho(\zeta) = \varrho(\zeta)$ $F_r S$-en; következik, hogy létezik szimmetrikus operátoroknak egy olyan $\{\omega(t; \beta, S)\}$ családja, (ahol β $F_r S$ tetszőleges Borel-féle részhalmaza) amelyre

$$u_\varrho(T) = \int_{F_r S} u_\varrho(S)\, \omega(T; d\zeta, S).$$

Ez a család T-nek harmonikus spektrális mértéke. Konform leképezés esetén invariáns és T spektrális tulajdonságaival szoros kapcsolatban van; például mindazon pontok, melyekre $\omega(T; \{\zeta\}, S) \neq 0$ T-nek $F_r S$-en fekvő sajátértékei (éppen ez a tulajdonság tette lehetővé ezt a kalkulust).

Előadó megjegyezte, hogy ezek az eredmények alkalmazhatók operátoroknak Szőkefalvi-Nagy-féle általánosítására is, azonban Szőkefalvi-Nagy Béla felhívta előadó figyelmét, hogy sokkal egyszerűbb módon ugyanez a kalkulus megkonstruálható (sokkal általánosabban) kiindulva Szőkefalvi-Nagy Béla egyik alapvető tételéből [2], mely a kontrakciók unitér dilatációjára vonatkozik; e célból szükség volt egy kontrakció és annak unitér dilatációja λ sajátértékeinek ($|\lambda| = 1$) identitására vonatkozó spektrális tételre (ez az a tulajdonság, amit Schreiber [7] nem ismert fel és így kénytelen volt az operátorok osztályát leszűkíteni). Szőkefalvi-Nagy Béla és az előadó ezt a kérdést megoldották [8]. Előadó nem tér ki valamennyi alkalmazásra. Reguláris spektrális halmaz esetén a harmonikus spektrális mérték a normál dilatáció spektrális mértékének vetületeként adódik (mint szerzők azt [8]-ban bevezették). De [6] módszerének finomításával igen általános spektrális halmazok harmonikus spektrális mértéke konstruálható és továbbmenőleg a normál dilatáció egzisztenciája is levezethető. Előadó disszertációja [11] éppen ezt tartalmazza. Ehhez a gondolatkörhöz kapcsolódva az alábbi két probléma vetődött fel az előadást követő megbeszélés során:

1. Melyek azok az operátorok, melyeknek spektrális gyűrűje $\{\lambda; r \leqq |\lambda| \leqq R\}$;
2. Mely nem korlátos függvények osztályára terjeszthető ki a [8] funcionális kalkulus (még kontrakció esetén is (§ 1.)). Előadó úgy véli, hogy ez lehetséges olyan $f(\lambda)$ függvényekre, melyek analitikusak $S = \{\lambda; |\lambda| \leqq 1\}$-ben és folytonosak $F_r S = \{\lambda; |\lambda| = 1\}$-ben véges számú olyan (ζ_k) pont kivételével, melyekre $\lim (\lambda - \zeta_k)^{n_k} f(\lambda) \to 0$ elég nagy rögzített n_k-ra.

Irodalom. [1] J. von Neumann, Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes, *Math. Nachrichten*, 4 (1951), 258—281. — [2] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **15** (1953) 87—92. — [3] E. Heinz, Ein von Neumannscher Satz über beschränkte Operatoren im Hilbertschen Raum, *Gött. Nachrichten* (1952), 5—6. — [4] Fr. Riesz et B. Sz.-Nagy, *Lecons d'analyse fonctionnelle*, 2 éd. (Budapest), 1953. — [5] C. Foiaş, G. Gussi et V. Poenaru, L'étude de l'équation $\frac{du}{d\tau} = A(\tau)u$ pour certaines classes d'opérateurs non-bornés, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **86** (1957), 335—347. — [6] C. Foiaş, La Mesure harmonique-spectrale et le théorie spectrale des opérateurs générau d'un espace de Hilbert, *Bull. Math. Soc. France*, **85** (1957) 263—282. — [7] M. Schreiber, A functional calculus for general operators in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958) 108—118. — [8] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert, III. *Acta Sci. Math.*, **19** (1958) 26—46. — [9] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Une relation parmi les vecteurs propres d'un opérateur de l'espace de Hilbert et de l'opérateur adjoint, *Acta Sci. Math.* **20** (1959). — [10] C. Foiaş, Quelques applications des ensembles spectraux. I. La mesure harmonique-spectrale (en roumain), *Studii si cercetari mat.*, (à paraitre).

November 21.

Bollobás Béla: *Egy lefedési tételről és annak alkalmazásáról.* Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása.

November 21.

Graetzer György és Schmidt E. Tamás: *Disztributív egyenlőségekről.* Legyenek $f(x, y, z)$ és $g(x, y, z)$ az L háló polinomjai. Az $f(x, y, z) = g(x, y, z)$ azonosságot *disztributív egyenlőségnek* nevezzük, ha L disztributivitása ekvivalens $f(a, b, c) = g(a, b, c)$ fennállásával, minden $a, b, c \in L$-re. Az előadásban a következő két tétel bizonyítása szerepelt:

1. tétel. Az L moduláris háló n eleme akkor és csak akkor neutrális, ha valamely $f(x, y, z) = g(x, y, z)$ disztributiv egyenlőségre és minden a, b elempárra $f(n, a, b) = g(n, a, b)$.

2. tétel. Az L moduláris háló a, b, c elemhármasára, s valamely $f(x, y, z) = g(x, y, z)$ disztributív egyenlőségre akkor és csakis akkor áll fenn $f(a, b, c) = g(a, b, c)$, ha $a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$.

November 20.

Pásztor István: *A halmazelmélet elemei.* Középiskolai matematikai délután.

December 5.

Mészáros Lajos: *Egy analógiás egyenletmegoldó gép bemutatása.*

December 12.

A Beke Manó díj kiosztása. Az 1958. évi *Kürschák József* matematikai tanulóverseny eredményhirdetése és díjkiosztása. A versenyfeladatokat *Surányi János* ismertette.

December 13.

A Középiskolai Matematikai Lapok 1958. I. félévi pontversenyének eredményhirdetése és díjkiosztása.

REIMAN ISTVÁN: *Egy geometriai transzformáció és alkalmazásai.*

December 16.

GÁDOR ENDRÉNÉ: *A matematikatanitás kérdései az edinburghi nemzetközi matematikai kongresszuson.*

December 19.

SZABÓ ÁRPÁD: *A görög matematika definiciós axiómatikus megalapozása.* (Megjelenik a Mat. Lapok X. 1—2. számában.)

December 19.

Az Ifjúsági Matematikai Kör klubdélutánja.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szegedi Tagozatának előadásai 1958. január 1-től december 31-ig

Január 22.

ACZÉL JÁNOS: *Függvényegyenletekről és alkalmazásaikról* (l. a szegedi vándorgyűlési előadás szövegét).

Február 22.

FREUD GÉZA: *Zygmund-féle „sima" függvények* (l. Budapest III. 28. Mat. Lapok IX. 3—4.).

Március 8.

GRATZER GYÖRGY és SCHMIDT E. TAMÁS: *Hálók kongruencia-reláció-hálójának karakterisztikus tulajdonságairól.* G. Birkhoff és O. Frink egyik cikkükben szükséges feltételeket adtak egy hálóra vonatkozóan, hogy egy alkalmas struktúra kongruencia-reláció hálójával izomorf legyen. A kutatók egyelőre még messze vannak attól, hogy eldönthessék, vajon ezek a feltételek (komplettség, gyenge atomosság, bizonyos folytonossági tulajdonságok stb.) elegendőek-e. Az előadók két egészen speciális esetben, amikor a vizsgált háló lánc vagy Boole-algebra, kimutatták, hogy a kérdéses feltételek elegendőek. Az előadás anyaga az előadóknak az Annales Univ. Sci. Budapestiensis de Rolando Eötvös nominatae-ban megjelenő cikkének első része.

Április 18.

ÁDÁM ANDRÁS: *Gráfelméleti vizsgálatok kétpólusú hálózatokról.* Az előadás első részére vonatkozóan a Matematikai Lapok IX. évfolyama (1958) 1—2. számának 178. oldalán megjelent tartalmi kivonatra utalunk.[1]
Ezt követően további gráfelméleti eredményeket ismertetett az előadó. Az eredmények olyan sorosan és párhuzamosan irreducibilis gráfokra vonatkoz-

[1] Az ábra alatti sorban helyesen hét (7) út olvasandó.

nak, amelyek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy a kettős élek törlésével előálló gráfnak is megy át pálya bármely élén. Az ilyen gráfok kettős éleit soroljuk osztályokba a következő reláció tranzitív kiterjesztésével: két él relációban áll, ha oly pontban futnak össze, amelyből csak kettős élek indulnak ki. Az osztályokat *hidaknak* nevezzük. A nyert tételek megvilágítják a hidak lehetséges elhelyezkedéseit a tekintett gráfokban, további probléma marad a hidak belső szerkezetének vizsgálata. Az előadás befejező része a kétpólusú gráfok és logikai műveletek kapcsolatával foglalkozott. Az eredmények konstruktív módszereket adnak egy kétpólusú gráf sorosan ill. párhuzamosan kapcsolt komponenseinek elkülönítésére a gráf által realizált logikai művelet alapján.

Május 10.

Császár Ákos: *Egyszerű görbék.* Az R Hausdorff-térben az x pont *elágazási pont*, ha x minden elég kicsiny nyilt környezetének határa legalább három pontból áll. R *egyszerű görbe*, ha összefüggő, több pontból álló Hausdorff-tér és nem tartalmaz elágazási pontot. Az előadó Czipszer Jánossal közösen, új bizonyítást adott F. Frankl ama tételére, amely szerint megszámlálható sűrű halmazt tartalmazó egyszerű görbe szükségképpen vagy egy zárt intervallummal, vagy egy körvonallal, vagy egy egyenessel, vagy egy félegyenessel homeomorf, s a legáltalánosabb egyszerű görbét is hasonló módon nyerhetjük, csak a fenti speciális alakzatok definíciójában kell a valós számok halmazának szerepét más folytonosan rendezett halmazoknak adnunk. Megmutatta továbbá, hogy a tétel első felében a megszámlálható sűrű halmaz létezésének feltevése pótolható azzal, hogy a tér metrizálható.

K. Menger egy tételének általánosításaként megmutatta még, hogy ha egy több pontból álló, összefüggő, bikompakt R Hausdorff-tér csak véges számú elágazási pontot tartalmaz s ha R minden pontjához található olyan n természetes szám, hogy e pontnak vannak tetszőlegesen kicsiny, legfeljebb n határponttal rendelkező nyilt környezetei, akkor R véges számú általános ív egyesítése, amelyek közül bármely kettőnek legfeljebb egy végpontja lehet közös. (Általános ív az olyan tér, amely a zárt intervallumhoz analóg módon, de a valós számok helyett tetszőleges folytonosan rendezett halmazból kiindulva nyerhető halmazzal homeomorf.) Ha itt R tartalmaz megszámlálható sűrű részhalmazt, általános ívek helyett közönséges ívek (azaz zárt intervallumokkal homeomorf halmazok) tehetők. Ha továbbá a több pontból álló, összefüggő, bikompakt R Hausdorff-tér csak véges számú elágazási pontot tartalmaz, akkor R (tetszőleges számú) általános ívek egyesítése, amelyek közül bármely kettőnek csak egy közös végpontja lehet; ha R tartalmaz megszámlálható sűrű részhalmazt, általános ív helyett itt is közönséges ív tehető, s ezek száma legfeljebb megszámlálható.

Végül F. B. Jones egy tételének általánosításaként megmutatta, hogy ha a több pontból álló, összefüggő, lokálisan összefüggő és teljes R metrikus tér nem tartalmaz triódát (azaz három, egy közös végpontból kiinduló és más közös pontot nem tartalmazó Hausdorff-teret), akkor R homeomorf vagy egy zárt intervallummal, vagy egy körvonallal, vagy egy egyenessel, vagy egy félegyenessel.

Május 28.

Steinfeld Ottó: *Zassenhaus lemmájának egy általánosítása.*

Június 3.

Frantisek Sik (Bratislava): *Über Summen geordneter Gruppen.*

Október 8.

I. M. BEREZANSZKIJ (Szovjetunió): *Die Eigenfunktionenzerlegung für allgemeine selbstadjungierte Operatoren.*

Október 11.

S. MARCUS (Románia): *A projektív halmazok mérhetőségéről.*

Október 30.

L. F. CSAJKOVSZKIJ (Szovjetunió): *A Szovjetunió elektronikus számológépei.* Beszámoló jellegű előadás.

November 1.

A. P. JERSOV (Szovjetunió): *A Szovjetunió Tudományos Akadémiája Számítási Központjának munkája a programozás automatizálása és a programok ellenőrzése terén.* Beszámoló jellegű előadás.

December 6.

SZÁSZ FERENC: *Asszociatív gyűrűk néhány osztályának leírása.* Meghatároztuk a következő négy gyűrű osztályt:

1. Gyűrűk, amelyekben minden balideál $L = \text{Re} + L_1$ alakú, ahol az összeg direkt, $e^2 = e$ és L_1 nilbalideál.
2. Gyűrűk, amelyekben bármely valódi részgyűrű baloldali főideál.
3. Gyűrűk, amelyekben bármely valódi részgyűrű felfeszített baloldali főideál.
4. Gyűrűk, amelyekben a végesen generált, nullától különböző valódi részgyűrűk egymás közt izomorfak.

A Bolyai János Matematikai Társulat Debreceni Tagozatának előadásai 1958. január 1-től december 31-ig

Február 13.

GYARMATHI LÁSZLÓ: *Ciklográfia.* Előadás középiskolai tanárok számára.

Február 19.

HOSSZÚ MIKLÓS: *Az Euler-féle homogén függvényről.*

1. Legyen K_0 egy K test 0-on kívüli része és $H(x, y)$ olyan művelet K_0-n, amelynek az $x \to ax + b$ $[a(u), b(u), u \in U]$ lineáris transzformációk automorfizmusai. Feltéve, hogy minden x_0-hoz van $u \in U$ úgy, hogy $a(u)\,x_0 + b(u)$ a K_0 akármelyik kiválasztott eleme

$$H(x, y) = \begin{cases} x = h(y-x), & \text{ha} \quad b \neq 0 \\ x\,g(yx^{-1}), & \text{ha} \quad b = 0, \end{cases}$$

ahol $ah(z) = h(az)$.

2. A súlyozott középértékek $[h(z) = cz]$ egyik jellemző tulajdonsága a H művelet autodisztributivitása.

3. Az $x * y = xy^{-1}$ kvociens csoportművelet, mint speciális 0-ad fokú homogén függvény, jellemezhető az $(x * z) * (y * z) = x * y$ tulajdonsággal.

Február 26.

FENYŐ ISTVÁN: *A Mikusiński-féle operátorszámítás általánosítása.* Tekintsük a $0 \leqq x \leqq y$ tartományban definiált, annak minden korlátos résztartományában korlátos és folytonos függvényeket. Két ilyen függvény K és L konvolucióján az

$$K * L = \int_x^y K(x, t)\, L(t, y)\, dt$$

függvényt értjük. Ha azokat a függvényeket vesszük, amelyekre az előbbi konvolúció művelete kommutatív, akkor ezek egy nullosztómentes gyűrűt alkotnak. Ezt hányados testté bővítve, ennek elemeit kétváltozós operátoroknak nevezzük. Ha a gyűrű a $K(x, y) = 1$ függvényt tartalmazza, kapjuk a Mikusinszki-féle operátortestet. Az előadás a kétváltozós operátortest tulajdonságaival és integrodifferenciálegyenletek megoldásaira való alkalmazásaival foglalkozott.

Március 5.

KOVÁCS LÁSZLÓ ismertette PÓLYA GYÖRGY: *A gondolkodás iskolája c. könyvét.* Előadás középiskolai diákok részére a Kossuth Lajos Gyakorló gimnáziumban.

Március 12.

VINCZE ISTVÁN: *Statisztikai hipotézisek vizsgálata.* A statisztikai próba valamely statisztikai sokaságra vonatkozó feltételezés helyességének vizsgálatára szolgál a sokaságból vett kisebb-nagyobb minta alapján. Az előadó a statisztikai próbák természetét és problémakörét (első- és másodfajú hiba, torzítatlanság, konzisztencia, stb.) egy tétel selejtarányának ellenőrzésére vonatkozó mintavételi terv vizsgálatán keresztül ismertette. — Végül a statisztikai próbáknál nagy szerepet játszó elégséges statisztikai függvény fogalmát és annak egy szemléltető geometriai jelentését ismertette.

Március 18.

KOVÁCS LÁSZLÓ: *Feladatmegoldások, versenyelőkészités.* Előadás középiskolai diákok részére a Hajdúböszörményi Bocskai gimnáziumban.

Április 2.

M. ROSENBLATT-ROTH (Románia): *L'étude des directions enveloppantes dans un espace à conexion affine.*

Április 15.

BÁRTFAI PÁL: *Ergodelmélet.*

KOVÁCS LÁSZLÓ: *Gyűrűk lefedéséről.*

Április 16.

BÁRTFAI PÁL: *Egyenletek megoldásával kapcsolatos furcsaságok.* Előadás középiskolai diákok részére a Kossuth Lajos Gyakorló Gimnáziumban.

Április 18.

CSÁSZÁR ÁKOS: *Konvex halmazokról és függvényekről.* Az előadó A. Ostrowski egy ismert tételének következő általánosítását bizonyította be: Legyen $f(x)$ a Jensen-féle értelemben konvex függvény az n-dimenziós euklidesi tér konvex nyilt K halmazán, s tegyük fel, hogy van olyan mérhető $g(x)$ függvény, hogy valamely pozitív mértékű mérhető $E \subset K$ halmazon $f(x) \leq g(x)$ fennáll. Ekkor $f(x)$ folytonos K-n. A bizonyítás a következő segédtételen alapult: ha C az n-dimenziós euklidesi térben fekvő olyan halmaz, amely két pontjával együtt az általuk határolt szakasz felezőpontját is tartalmazza, s ha C tartalmaz pozitív mértékű mérhető részhalmazt, akkor C belseje konvex és C minden pontja belsejének határához tartozik.

Április 25.

M. Kuczma (Lengyelország): *Multiplicative scalar functions of matrices.*

Április 28.

Rényi Kató: *Periodikus egész függvényekről.* Az előadó ismertette periodikus egész függvények hatványsorának együttható sorozatára vonatkozó eredményeit.

Rényi Alfréd: *Keverő halmazsorozatok.* Legyen μ egy mérték az Ω halmaz részhalmazainak $\mathfrak{A}$ σ-algebráján és $\mu(\Omega)=1$. Nevezzük az $A_n \in \mathfrak{A}$ halmazsorozatot α sűrűségű erősen keverő halmazsorozatnak $(0<\alpha<1)$, ha bármely $B \in \mathfrak{A}$ halmazra

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \mu(A_n B) = \alpha\mu(B)$$

ahol $A_n B$ az A_n és B halmazok közös részét jelöli. Az előadó a következő tételt bizonyította be: Ha $A_0=\Omega$ és (1) teljesül, abban az esetben, ha $B=A_k$ $(k=0, 1, \ldots)$, akkor bármely $B\in\mathfrak{A}$-ra teljesül vagyis annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az A_n halmazsorozat erősen keverő legyen, az, hogy fennálljanak a

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n A_k) = \alpha\mu(A_k)$$

relációk $(k=1, 2, \ldots)$. Az előadó ismertette ennek a tételnek néhány valószínűségszámítási alkalmazását. (Lásd Rényi A. "On mixing sequences of sets", Acta Math. Ac. Sci. Hung. 9 (1958/215—228.)

Április 29.

Kovács László: *Feladatmegoldások.* Előadás középiskolai diákok számára a Hajdúböszörményi Gimnáziumban.

Május 9.

Turán Pál: *Egy különös divergenciajelenség a konvergenciakör kerületén.* Megjelent a Publications de l'Institut Mathématique, Beograd, T. XII., 19—26.

Június 30.

Szu Buchin (Kínai Népköztársaság): *A konnexió elmélete felületelemek terében.*

Szeptember 16.

W. Engel: *Beitrage zur arithmetischen Theorie der Cremona-Transformationen der Ebene.*

Október 3.

S. Marcus (Románia): *Egyenlőtlenségekkel definiált függvényosztályok és alkalmazásaik a függvényegyenletek elméletében.* Vizsgáljuk a függvények következő három osztályát:

a) A *szubadditív függvények,* amelyek eleget tesznek az $f(x+y)\leqq f(x)+f(y)$ relációnak.

b) A *konvex függvények*, amelyek eleget tesznek az $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ relációnak.

c) Az *intern függvények*, amelyekre a $\min\,[f(x), f(y)] \leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqq$ $\leqq \max\,[f(x), f(y)]$ reláció érvényes.

Az intern függvények egy Császár Ákos által bevezetett függvényosztályt általánosítanak; ezek a függvények eleget tesznek a

$$\min\,[f(x), f(y)] < f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \max\,[f(x), f(y)] \quad \text{vagy}$$

$$\min\,[f(x), f(y)] = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \max\,[f(x), f(y)]$$

feltételeknek. Az a), b) és c) osztályok tanulmányozása eddig egymástól függetlenül ment végbe, azonban felhasználva az összeg-halmazok elméletében elért eredményeket, amelyeket S. Piccard a valós függvények, más szerzők pedig az n-dimenziós tér ponthalmazai számára dolgoztak ki, az a), b) és c) osztályok részére egy bizonyos pontig közös elmélet fejleszthető ki. Ezen az úton elért eredményekből néhány példát adunk. Legyen $S(E)$ az $x+y$ alakú számok halmaza, ahol $x \in E$, $y \in E$.

Feltételezzük, hogy bármely $\varepsilon > 0$ mellett a $(0, \varepsilon) \cap S(E)$ halmaz tartalmaz egy intervallumot. (Minden E halmaz, amelyre $E \cap (0, \varepsilon)$ pozitív mértékű minden pozitív ε-ra, eleget tesz a követelményeknek). Hogyha f szubadditív $(0, \infty)$-ben és felülről korlátos E-n, akkor f felülről korlátos bármely kompakt $I \subset (0, \infty)$ intervallumon.

Legyen f valós függvény, amely az R^n térnek nyitott és konvex G halmazán konvex. Hogyha egy $E \subset G$ pozitív n-dimenziós mértékű halmazon az f függvény mérhető függvény által majorálható, akkor f folytonos G-n. (Ezt a tételt, amely A. Ostrowski egyik eredményét általánosítja, egyidejűleg, de más úton haladva Császár Ákos is bebizonyította).

Október 10.

Szekeres György: *Spinor-geometria.*

Erdős Pál: *Számelméleti problémák.*

Október 17.

St. Gołąb: *Zwei Fragen aus der Riemannschen Geometrie.*

Moór Arthur: *Meghatározott típusú objektumokból képezhető tenzorokról.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Miskolci Tagozatának előadásai 1958. január 1-től december 31-ig

Február 7.

Gehér László: *Hiperkonvex metrikus terekbe való folytonos transzformációkról.* Az előadó megadta a hiperkonvex metrikus terek értelmezését és ismertette az ilyen terekre vonatkozó eddigi vízsgálatok eredményét. Ezután rátért a hiperkonvex metrikus terekbe való folytonos transzformációk approximálásának és kiterjesztésének problémájára és vázolta ezen kérdés megoldásában elért saját eredményeit.

Február 12.

Nikodémusz Antal: *A gázdinamikai egyenlet egy új megoldása.* Az előadó a hangsebességnél nagyobb sebességgel haladó forgás-testek légellenállásának kiszámítására adott egy új számítási eljárást. Ismertette a történeti előzményeket, síkbeli és kúpostestek körül kialakult sebességi mező meghatározását, végül az általános (nem linearizált) differenciálegyenlet megoldási módszerét.

Február 19.

Gáspár Gyula: *Egyenletek, egyenletrendszerek.* I. rész. Bevezető előadás. Középiskolai tanárok részére.

Szabó Jenő: *Feladatok az „Egyenletek, egyenletrendszerek" (I. rész). című előadáshoz.* (Előadás középiskolai tanárok részére.)

Február 26.

Török Gábor: *Fejezetek a legújabb atomkutatás köréből.* (Előadás ált. iskolai tanárok részére.)

Március 4.

Vághó Ildikó: *Komplex számok trigonometriai alakja.* Előadás középiskolai diákok részére.

Március 19.

Gáspár Gyula: *Egyenletek, egyenletrendszerek. II.* Előadás középiskolai tanárok részére.

Március 26.

Hnisz László: *Hogyan készítsük elő a tanulókat fizikából az érettségi vizsgálatra.* Előadás középiskolai tanárok részére.

Április 2.

Obádovics J. Gyula ismertette „Pólya György: *A gondolkodás iskolája"* c. *könyvét.*

Április 8.

Aczél János ismertette a *„Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen"* c. Birkhauser (Basel) kiadásában megjelenő könyvét.

Április 16.

Egyenletek, egyenletrendszerek. III. Bevezetés: Gáspár Gyula. Feladatok: Darkó Béla.

Április 23.

Petrich Géza: *A műszaki rajz és az ábrázoló geometriaoktatás kapcsolata.* Előadás középiskolai tanárok számára.

Április 23.

Szabó Jenő: *A függvényfogalom bevezetése és a függvények vizsgálata a gimnázium IV. osztályában.* Előadás középiskolai tanárok részére Ózdon.

Koller Erzsébet: *Érdekes feladatok.* Előadás ált. iskolai tanárok részére.

Batár Zoltán: *Tréfás matematika.* Előadás általános iskolás diákok számára.

Nagy Ilona: *Többismeretlenes egyenletrendszer megoldása determinánsokkal.* Klubdélután.

Vághó Ildikó: *A logarléc felépitése és használata.* Előadás középiskolai diákok részére.

Vincze Endre: *Mire használható a pantográf?* Előadás középiskolai diákok részére.

Április 24.

Huszthy László: *A kombinatorika elemei, alkalmazásuk a binomiális tétel bizonyítására.* Előadás középiskolai tanárok részére.

Április 25.

Nikodémusz Antal: *Nomogrammok készítése.* Előadás középiskolai tanárok részére Mezőkövesden.

Április 28.

Batár Zoltán: *A matematika szerepe a tréfás számolásban.* Előadás diákok részére.

Fónyad Zoltán: *A hibaszámitás alapfogalmai és az egyszerű számtani műveletek hibái.* Előadás középiskolai tanárok számára.

Április 30.

Kertész Andor: *A lineáris egyenletrendszerek elméletének általánosításáról.* Az előadó a lineáris egyenletrendszerek klasszikus elméletét ismertetve beszámolt azokról az eredményekről, amelyek ezt az elméletet egyrészt a tetszőlegesen sok ismeretlent és egyenletet tartalmazó rendszerek, másrészt a féligegyszerű gyűrűk, ill. algebrailag zárt operátormodulusok feletti lineáris egyenletrendszerek esetére általánosítják. Rávilágított arra, hogy ebben az általánosításban milyen fontos szerepet játszik az egyenletrendszer kompatibilitásának helyes értelmezése. Az ismertetett eredményeket példákkal illusztrálta.

Május 7.

M. Kuczma (Krakkó): *Scalar valued multiplikative matrix functions.* Az előadó egy egyszerűbb bizonyítást mutatott Kucharzewski lengyel matematikus azon tételére, amely szerint az ilyen függvények a matrix determinánsának multiplikatív függvényei. Az egyszerűsítés abban áll, hogy a matrixok diagonális alakra való transzformálását egységnyi determinánsú matrixokkal szorzással és egyes tényezőknek egy sorból (ill. oszlopból) való kiemelésével s egyidejűleg egy másik sornak (ill. oszlopnak) ugyanezen tényezővel való beszorzásával el tudta érni sorok vagy oszlopok felcserélése nélkül. Előadás a Népek Barátsági Hónapja keretében.

Május 7.

HUSZTHY LÁSZLÓ ismertette az Ingenieur Archiv c. folyóiratból „GROSSMANN: *Experimentelle Bestimmung von Torsionsspannungen durch eine hydrodinamische Analogie*“ c. cikkét. Előadás a Népek Barátsági Hónapja keretében.

NIKODÉMUSZ ANTAL: *Alkalmazott matematikai szakfolyóiratok ismertetése.* Előadás a Népek Barátsági Hónapja keretében.

SALÁNKI JÓZSEF: *Ferdefogazású fogaskerék gyártásának néhány geometriai problémája.* (Mérnöki diplomaterv ismertetése.)

Május 8.

TÖRŐ BÉLA: *Matematikai bizonyítások.* Előadás a Putnoki Mezőgazdasági Technikumban.

Május 9.

SZARKA ZOLTÁN: *Racionális egész és törtfüggvények ábrázolása.* Előadás Tokajban, a Petőfi gimnáziumban.

TÖRŐ BÉLA: *Matematikai bizonyítások.* Előadás Ózdon, a Közgazdasági Technikumban.

NIKODÉMUSZ ANTAL: *A nomográfia eredményei.* Előadás a Földes Ferenc gimnáziumban.

Május 13.

VINCZE ENDRE: *A középértékek nagyságrendi viszonyai.* Előadás a Közgazdasági Technikum Ipari Tagozatában Miskolcon.

Május 14.

PAZÁR BÉLA: *A korrelációszámítás alapelve.*

Október 8.

SZÉNÁSSY BARNA: *Bolyai Farkas.* Matematikatörténeti előadás a Gépipari Technikumban Miskolcon.

Október 15.

BATÁR ZOLTÁN: *Beszámoló a balatonvilágosi matematikai kollokviumról.* A balatonvilágosi matrixelméleti kollokvium ismertetése.

HOSSZÚ MIKLÓS: *Beszámoló a balatonvilágosi matematikai kollokviumról.* A balatonvilágosi kollokviumokon elhangzott előadások ismertetése, különös tekintettel a matrixelméleti kollokviumon felmerült megoldatlan problémákra.

Október 29.

ACZÉL JÁNOS: *A geometriai objektumok elméletének függvényegyenletei I.*

ST. GOŁĄB (Krakkó): *A geometriai objektumok elméletének függvényegyenletei II.* (A szerzők készülő könyvének ismertetése.)

December 17.

URBÁN BARNABÁS: *Hogyan biztosíthatjuk a tanulók önálló munkáját a házifeladatok elkészítésével?* Előadás középiskolai tanárok részére Miskolcon a Gépipari Technikumban.

December 17.

Parai Gusztáv: *Az ált. iskolai VIII. o. számtan és mértan lengyel tankönyv ismertetése és példái.* Előadás ált. iskolai tanárok részére a Dayka G. úti ált. iskolában.

December 17.

Nikodémusz Antal: *Egyszerű nomogrammok szerkesztése.* Előadás diákok részére a Közgazdasági Technikum Keresk. Tagozatában.

Könyvismertetés

Carson Flammer: Spheroidal Wave Functions
(Stanford University Press, Stanford, California, 1957, 220 oldal.)

A szferoidális hullámfüggvények a

$$(1) \qquad \frac{d}{dz}\left[(1 \pm z^2)\frac{du}{dz}\right] + \left(\lambda + \gamma z^2 - \frac{\mu^2}{1 \pm z^2}\right) u = 0$$

másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek bizonyos peremfeltételeket kielégítő megoldásai. Ezek a peremfeltételek a megoldásoknak a differenciálegyenlet szinguláris helyein való viselkedését írják elő. A szferoidális hullámfüggvények $\gamma = \mu = 0$ esetén a Legendre-polinomokra redukálódnak. $\gamma = 0$ esetén az (1) differenciálegyenlet az ún. hozzárendelt gömbfüggvények differenciálegyenletével azonos, míg $\mu = \frac{1}{2}$ esetén egyszerű transzformációval a Mathieu-féle függvények differenciálegyenletét nyerhetjük belőle. Maga az (1) differenciálegyenlet egy szintén egyszerű átalakítással olyan alakba írható át, amely az ún. Heun-féle differenciálegyenlet speciális esete.

Ha az (1) differenciálegyenlet megoldását a 0, $\pm i$ (ill. ± 1) helyek körüli hatványsorba fejtéssel kíséreljük meg, akkor a hatványsor koefficienseire háromtagú rekurziós formula adódik. Ez a rekurziós formula nem megoldható olyan értelemben, hogy a hatványsor n-ik együtthatója zárt formulával nem adható meg.

Hasonló a helyzet akkor, ha az (1) differenciálegyenletet

$$\sum_{r=0}^{\infty} d_r P_{m+r}^{m}(z)$$

alakú, a hozzárendelt gömbfüggvények szerint haladó végtelen sorbafejtéssel próbáljuk megoldani: a d_r koefficiensek most is háromtagú rekurziós formulának tesznek eleget.

Ha $|z|$ nagy szám, akkor a Bessel-függvények szerinti sorbafejtés is számításba jöhet. Az együtthatók itt is háromtagú rekurziós formulának tesznek eleget.

A gyakorlat szempontjából fontosak a szferoidális hullámfüggvényeknek aszimptotikus előállításai a γ paraméter nagy értékei esetén, továbbá a sajátértékek numerikus értékei a γ és μ paraméterek különböző értékei mellett.

A szferoidális függvényeknek legrégebbi felhasználására a $\Delta u + \lambda u = 0$ térbeli hullámegyenletnek olyan megoldásánál került sor, amely megoldás peremfeltételként előírja, hogy egy forgási ellipszoid felületén a hullámfüggvény — vagy ennek normálismenti deriváltja — 0-val egyenlő. A szferoidális hullámfüggvények egyéb felhasználása szinte kizárólag a fizika egyes területeire korlátozódik és fizikai problémák vizsgálatánál felmerülő kérdések voltak legnagyobbrészt azok, amelyek e függvények elméletének továbbfejlesztésére adtak impulzust.

A jelen könyv a szferoidális hullámfüggvények tulajdonságait állítja össze az alkalmazott matematikus, a matematikai fizikus és a mérnök szempontjait szem előtt tartva, tehát a tárgykört nem a tiszta matematikus szemszögéből nézi. (A szerző az utóbbiaknak Meixner és Schäfke: Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen című könyvét ajánlja.) Célkitűzésének megfelelően a szerző a tételek bizonyítását nem adja, ellenben pl. nagy részletességgel ismerteti a fentebb említett sorbafejtések első néhány koefficienseinek meghatározására szolgáló, rövidnek egyáltalán nem nevezhető formulákat, továbbá a sajátértékek közelítő meghatározására szolgáló sorbafejtések első néhány tagját. A könyv második fele pedig 166 különféle táblázatban a szferoidális hullámfüggvényekkel kapcsolatos numerikus adatokat közöl.

Mint táblázatgyűjtemény azonban ez a könyv nem a legteljesebb, mert Stratton, Morse, Chu, Little és Corbató azonos című, ugyancsak 1957 évben megjelent könyve nem kevesebb, mint 550 oldalon közöl e függvényekkel kapcsolatos numerikus adatokat.

Makai Endre

Dirk J. Struik: A matematika rövid története

(Gondolat, 1958.)

Nem elszigetelt jelenség, hogy a matematika speciális területein önállóan búvárkodó tudósok közül egyesek matematika-történeti munkákat is írnak. Elég, ha *Loria, Hankel, Felix Klein, Gnyegyenko* vagy *van der Waerden* nevét említjük. Az ilyen szerzők történeti munkáit általában az jellemzi, hogy bennük erősen kidomborodik az író egyéni érdeklődési területe, miközben a tőle távolabbeső matematikai diszciplinák óhatatlanul hátrányba kerülnek. A múlt század komplex-függvénytani és geometriai kutatásainak aligha tudta volna bárki is plasztikusabb és színvonalasabb összefoglalását adni *Felix Klein*-nál (Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, I—II. kötet. 2. kiadás New York, 1956.), ugyanakkor az már feltűnő, hogy ez a rendkívül széles látókörű tudós milyen kevés szót fordított pl. a halmazelmélet és a valós függvénytan ismertetésére.

Önkéntelenül is ilyen gondolatok vetődnek fel bennünk, midőn a kiváló differenciálgeométer, *Dirk J. Struik* most magyarul is megjelent, rövidre szabott matematika-történetét lapozgatjuk. A könyv révén — a szerző érdeklődési körének megfelelően — a terjedelemhez mérten mély és éles kép rajzolódik ki a geometria többévezredes fejlődéséről, ehhez képest viszont az analízis és a számelmélet ismertetése hiányosabbnak látszik. Nem azt hiányoljuk — a szerző az előszóban mentegeti magát —, hogy nem jútott hely *Roberval, Lambert* vagy *Schwarz* tevékenységének megemlítésére, de néhány sort biztosítani kellett volna olyan alkotók számára, mint *Mittag—Leffler, F. Neumann, Cesaro, Csebisev, Markov, Kovalevszkaja* és mások — esetleg kevésbé jelentős matematikusok mellőzése árán is.

Ezt az aránytalanságot azonban szívesen megbocsátjuk a szerzőnek egy eléggé nem méltányolható és — nyugati matematikusról lévén szó — bátorságot, modern felfogást tükröző törekvése mellett. Ez pedig az, hogy *Struik* nem l'art pour l'art műveli a matematika-történetet, hanem azt beágyazva az egyetemes tudománytörténetbe, mindenütt kidomborítja az eszmék megszületésének első rugóit, kultúrpolitikai és társadalmi hátterét is. Ilyesféle tendenciát láthatunk már *J. E. Hoffmann* nem rég megjelent háromkötetes kis matematika-történetében (Sammlung Göschen, 226., 875. és 882. sz.) is, de sokkal szűkebb keretek között, *Struik* azonban láthatólag ezt tekintette könyve megírása során irányító elvnek. Ilyen vonatkozásban sikerült is eredetit, önállót és korszerűt nyújtania.

Szükségtelennek tartjuk, hogy részletekbemenően ismertessük a munka anyagát. Röviden annyit mondhatunk, hogy a legrégibb időktől a XIX. század végéig bezárólag tárgyalja a matematika történetét, sok helyen önálló szempontok szerint csoportosítva az anyagot, és nem riadva vissza eddigi ismereteinktől eltérő megállapításoktól sem. Különösen meggyőző a legújabb kutatásokra támaszkodó ama véleménye, mely szerint a babiloni matematika magasabb színvonalon állott, mint az egyiptomi, érdekes továbbá a középkori Kelet matematikájáról írott cikke (4. fejezet: A Kelet a görög társadalom lehanyatlása után). E részben egyébként érezhető a jeles szovjet matematika-történész, *Juskevics* professzor komoly segítsége, a XIX. századról szóló fejezetben pedig *Klein* fentebb már említett munkájának a hatása.

Struik nagy olvasottságát, több — a matematikát alkalmazó — szaktudományban való jártasságát sok példával igazolhatnánk. Azonban éppen az anyag újszerű feldolgozása olyan nehézségekkel jár, melyek könnyen vezetnek tévedésekhez, pontatlanságokhoz.

Nem igaz, pl. hogy *Gauss* „1816. körül birtokában volt a nem-euklidesi geometriának" (153. l.), csak annyi állítható, hogy ismert néhány abszolut-geometriai jellegű tételt. *Bolyai* János pedig nem „megpróbálkozott" (181. l.) az abszolut-geometria megteremtésével, de azt valóban meg is alkotta. Előfordulnak ellentmondások, átfedések, téves évszámok, a nevekben, könyvcímekben és formulákban elírások is.

A magyar kiadás külsőben tetszetősebb az eredetinél, néhány képet jobbal cseréltek ki. A fordítás szó- és nem értelemszerinti, helyenként hibás is. Ezáltal még csak szaporodott a félreérthető, szakmailag téves kifejezések, mondatok száma. Olvassuk, hogy *Regiomontanus* „60,000 fokig számolta ki a sinus-értékeket" (94. l.), *Euler* „halála után sok kéziratot hagyott hátra" (128. l.). Megtudjuk, hogy „gépekről szóló könyvek jelentek meg jóval a könyvnyomtatás feltalálása előtt" (104. l.), hogy *D'Alembert*-t „lelencként" találták meg (137. l.).

Kár volt ezt az értékes, sokak által várt, hézagpótló művet ennyire pontatlan formában kiadni. Az esetleges második magyar kiadás mindenesetre még gondos előkészítést kíván.

Szénássy Barna

Előfizethető

A Posta Központi Hírlap Irodánál (Budapest, V., József-nádor tér 1.) és bármely postahivatalnál. Csekkszámlaszám: egyéni előfizetésnél 61.257. Közületi 61.066 (vagy átutalás az M. N. B. 47. sz. folyószámlájára)

vagy

Az Akadémiai Kiadónál (Budapest, V., Alkotmány u. 21) csekkszámlaszám: 05.915,111—46 (vagy átutalás az M. N. B. 46. sz. folyószámlájára).

A kézirat beérkezett: 1959. VI. 5. — Példányszám: 1400 — Terjedelem: 12 (A/5) ív
A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki felelős: Pataki Ferenc

Szegedi Nyomda Vállalat 59-2524

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENT

Ára 12 Ft.
Előfizetés évi 20 Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Különböző külföldi természettudományos, műszaki, orvosi stb. szakfolyóiratok 1953—1954. évi vegyes számai a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila u. 3. sz. alatti lapüzletében példányonként megvásárolhatók.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.

MATEMATIKAI LAPOK

X. ÉVFOLYAM

3-4.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1959

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.

Budapest, 1960. június, X. évfolyam 3—4. szám.

Felelős szerkesztő: Turán Pál.

Szerkesztők: Aczél János, Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd.

Szerkesztőség: Budapest V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.

A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.

Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat, Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850. Csekkszámlaszám: 61 257.

Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat: József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.

Előfizetés egy évre 20,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

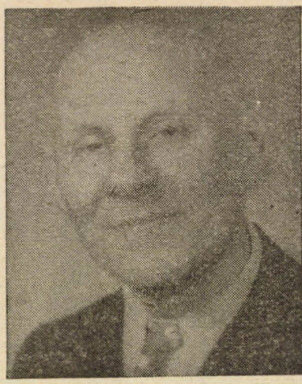
FEJÉR LIPÓT

1880—1959

1909

1922

Fejér Lipót akadémikus, a budapesti matematikai iskola megalapitója 1959. okt. 15-én eltávozott körünkből. Lapunk következő száma fog róla megemlékezést közölni



Obláth Richard dolgozatainak jegyzéke

1. Merőleges szerkesztése egy egyenes adott pontjában vonalzóval és étalonnal. Mathematikai és Physikai Lapok 18., 1909 p. 174—176.
2. Bemerkungen zur Theorie der geometrischen Konstruktionen. Monatshefte für Mathematik und Physik. 26., 1915., p. 295—298.
3. Quadratische Reste und Nichtreste. Lösung einer Aufgabe. Archiv der Mathematik und Physik. 3 Reihe, Band 23. 1914/15. p. 187—188.
4. Számelméleti tételek. Mathematikai és Physikai Lapok 27., 1918., p. 91—94.
5. Az $x^3+k=y^2$ határozatlan egyenletről. Bemutatva a Szent István Akadémia 1918. október 18.-i ülésén. Megjelent a Szent István Akadémia Értesítőjében 3. kötet, 1918., p. 172—18).
6. Analízis és geometriai alkalmazásai. Műegyetemi hallgatók, mérnökök, technikusok részére. Budapest 1920. Német József kiadása. XVI + 208 lap.
7. A prímszámok eloszlásáról. Bemutatva a Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának 1930. január 14.-én tartott ülésében. Megjelent Mathematikai és Természettudományi Értesítő 47., 1930., p. 250—253. Francia nyelvű kivonata uott. p. 254.
8. Über die Verteilung der Primzahlen. The Tôhoku Mathematical Journal, (Sendai, Japan) 32., 1930., p. 328—331.
9. Über Produkte aufeinander folgender Zahlen. The Tôhoku Mathematical Journal, Memorial Volume on the Occasion of the 60 th birthday of the Editor T. Hayashi. Vol. 38., 1933., p. 73—92.
10. Sur la théorie des constructions cubiques. Bemutatva a francia Tudományos Akadémia 1933. november 27.-én tartott ülésében. Megjelent Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences 197., 1933., p. 1383—1385.
11. Zur Theorie der Konstruktionen dritten Grades. The Tôhoku Mathematical Journal 39., 1934., p. 1—5.

12*a*) Egymásra következő számközök prímszámairól. Matematikai és Fizikai Lapok 41., 1934., p. 41—44.

b) Francia nyelvű kivonata uott. p. 44.

13. Congruences with binomial Coefficients. Bemutatva az indiai Tudományos Akadémia 1934. november 9.-én tartott ülésében. Megjelent Proceedings of the Indian Academy of Sciences Vol. 1., 1934, p. 383—386.

14. Über einen arithmetischen Satz von Kürschák. Commentarii Mathematici Helvetici 8., 1935/6 p. 186/187.
15. Über Primzahlen in aufeinander folgenden Intervallen. Annali di matematica pura ed applicata, serie IV., tomo XIV., 1935—36., p. 299—303.
16. Über eine diophantische Gleichung. Wyadonoczny Matematyczne (Warszawa) 42, 1936., p. 127—128.
17. Über diophantische Gleichungen der Form $n! = x^p + y^p$ und $n! \pm m! = x^p$. Erdős Pállal közösen. Acta Scientiarum Mathematicarum Universitatis Szeged. 8., 1937., p. 241—255.
18. Der rechte Winkel un die kubischen Konstruktionen. Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht 68., 1937., p. 301—306.
19. Zwei zahlentheoretische Sätze. (Aufgaben No. 258 und 259) Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 47. 1937. p. 64 kurzív.
20. Question proposée no. 3056. Une proposition sur le quadrilatere. Mathesis 51., 1937., p. 492.
21. Über die Zahl x^2-1. Mathematica B. (hollandi) 8. 1939—1940·, p. 161—172.
22*a*) Az x^2-1 számokról. Matematikai és Fizikai Lapok 47. 1940., p. 58—76.
b) Francia nyelvű kivonata uott. p. 76—77.
23. Sobre ecuaciones diofanticas imposibles de la forma $x^m + 1 = y^n$ Revista Matematica Hispano-Americana, serie 4, tomo 1 p. 122 - 141.
24. Une proposition sur le quadrangle. Mathesis. 54., 1942. p. 351.
25. Sobre los prodottos dos numeros consecutivos. Revista Matemática Hispano Americana. 4. serie, tomo 2., 1942., p. 190—210 és 253—270.
26. Note on the binomial Coefficients. The Journal of the London Mathematical Society. Vol 23., 1948., p. 252—253.
27. Megjegyzés a számtani sorról. Matematikai Lapok 1., 1950., p. 138—139. Francia és orosz kivonata uott. p. 139.
28. Über das Produkt fünf aufeinander folgender Zahlen in einer arithmetischen Reihe. Publicationes Mathematicae 1., 1950., p. 222—226.
29. Sur l'équation diophantienne

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}.$$

Mathesis 59., 1950., p. 308—316.
30. Über die diophantische Gleichung $x^3 - 1 = 2y^2$. Bemutatva a Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának 1950. június 2. ülésében. Megjelent Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae I., 1950., p. 113—116 és 321—322.
31*a*) Une équation diophantienne de M. Segre. Bemutatva a liègei Tudományos Akadémia 1951. március 15.-én tartott ülésében. Megjelent Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège 20., 1951., p. 199—20 4.
b) Une équation diophantienne de M. Segre. (Addition). Bemutatva a liège-i Tudományos Akadémia 1951. május 17.-én tartott ülésében. Megjelent Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 20., 1951., p. 378.
c) Deux notes sur quelques équations diophantiennes. Mathesis 60., 1951., p. 307—309 és 333—336.
32. Ein Beitrag zur Theorie der geometrischen Konstruktionen. Acta Scientiarum Mathematicarum Universitatis Szeged. 1951., p. 81—82.

33. Eine Bemerkung über Produkte aufeinander folgender Zahlen. Journal of the Indian Mathematical Society. Memorial Volume in memorian S. Sivasankaranarayana Pillai., 1951. XV. p. 135—139.
34. Gyökmennyiségek aritmetikai sajátságairól. Az első magyar matematikai kongresszuson 1950. augusztus 28.-án tartott előadás. Megjelenik a kongresszus Actáiban p.
35. Adalék a geometriai szerkesztések elméletéhez. Matematikai Lapok 2. kötet. 1951.
36. Une remarque sur les formules de récurrence. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae II., 1951 p. 303—309.
37. Une note sur l'équation de Pell—Fermat. Mathesis.
38. Über die Integrationskonstante. Elemente der Mathematik. (Basel—Zürich).
39. Über einige unmögliche diophantische Gleichungen. Tidsskrift for Mathematik.
40. Az egyszeri díjas életbiztosítások tartaléka. Biztosítási és Közgazdasági Lapok. 1921. március 15.
41. A valutáris biztosításokról. Biztosítási és Közgazdasági Lapok, 1923. március 15.
42. A díjvisszatérítésről a nyugdíjbiztosításban. Biztosítási és Közgazdasági Lapok. 1931. május 15.
43. A munkaidőről — munkaadói szempontból. Munkaügyi Szemle 12. 1938., p. 511—516.
44. A középiskolai matematikai lapok és a matematikai versenyek múltjáról. Középiskolai Matematikai Lapok, új sorozat 2., 1950. p. 3—7.

Egerváry Jenő munkásságáról

Rózsa Pál

1958. november 30-án elhunyt Egerváry Jenő akadémikus, egyetemi tanár, Társulatunk tiszteletbeli elnöke. Halálával nagy veszteség érte mind a hazai, mind pedig a nemzetközi matematikai életet.

Egerváry Jenő 1891. április 16-án született Debrecenben. A debreceni főreáliskolában tett érettségit 1909-ben. Egyetemi tanulmányait Budapesten, a Tudományegyetemen végezte, 1914-ben szerezte meg a doktori címet. A budapesti Földrengési Obszervatóriumban dolgozott mint tanársegéd, majd a budapesti Felsőipariskola tanára lett. Közben a szegedi Tudományegyetemen magántanári képesítést nyert. Ezt 1927-ben visszavonták, és több, mint tíz évig kellett várnia, amíg ismét magántanár lehetett. Ehhez az is hozzájárult, hogy a Tanácsköztársaság alatt előadásokat tartott az Egyetemen — matematikából. 1932-ben tudományos munkásságának elismeréseképpen a Kőnig Gyula jutalomban részesült. 1938-ban a budapesti Tudományegyetemen magántanár lett, majd 1941-ben kinevezték a Műegyetem nyilvános rendes tanárává, ahol haláláig működött. 1943-ban a Tudományos Akadémia levelező tagjai sorába választotta. A felszabadulás után nagy érdemeket szerzett az alkalmazott matematika széles körben való elterjesztése érdekében kifejtett tevékenységével. Tevékeny szerepe volt a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének megalapításában. Ebben az Intézetben a „Mechanikai és Szilárdságtani Osztály" vezetője, majd az Intézetnek Matematikai Kutató Intézetté való átszervezése után a „Mátrixelmélet és Alkalmazásai Osztály" vezetője volt haláláig. Tudományos munkásságának elismeréséül kétszer tüntették ki Kossuth-díjjal: 1949-ben és 1953-ban. Oktatási tevékenységet az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetemen kívül az Eötvös Loránd Tudományegyetemen is kifejtett, ahol az alkalmazott matematika szakos hallgatók részére a differenciálegyenletek című előadást tartotta éveken keresztül.

EGERVÁRY tudományos dolgozatainak jegyzékét a Matematikai Lapok előző (X. 1—2) számában közöltük. (A következőkben a szögletes zárójelbe tett számok az ottani dolgozatjegyzék megfelelő dolgozatára való utalást jelentik.) Ha kissé figyelmesebben nézi az ember ezt a jegyzéket, lehetetlen észre nem venni, hogy munkásságának nagyobbik része (több, mint 40 dolgozat!) a felszabadulás óta eltelt 14 évre esik. A tudományos munka anyagi és erkölcsi megbecsülése hatalmas mértékben bontakoztatta ki alkotókedvét. Életének utolsó éveiben ez az aktivitás nem hogy csökkent volna, ellenkezőleg: állandóan új eredményekkel gazdagította a nemzetközi matematikai irodalmat és megbecsülést szerzett a magyar matematikusok nevének világszerte. Kétszeres veszteség számunkra, hogy alkotóerejének teljében hagyott itt bennünket.

EGERVÁRY tudományos munkásságának ismertetése igen nehéz feladat elé állít, annyira szerteágazó volt az érdeklődési köre. Első eredményei, (de sok későbbi is), FEJÉR LIPÓT munkásságához kapcsolódnak. FEJÉR inspirálta doktori értekezését is. Számos dolgozatot írt az analízis és a függvénytan köréből, közben azonban figyelme az algebrai egyenletek felé is fordult. Már első dolgozataira jellemző, hogy a determinánselmélet sok helyütt fontos és hasznos segédeszköz szerepét tölti be. Ezzel kapcsolatban talán nem felesleges megemlíteni, hogy 1932-ben KŐNIG DÉNES — többek között — a következő szavakkal jellemezte EGERVÁRY addigi munkásságát: „EGERVÁRY számolókészsége — elsősorban ami a determinánsszámításokat illeti — vörös fonálként végigvonul csaknem valamennyi munkáján, és ebben a tekintetben működésében — HUNYADI JENŐ és SCHOLTZ ÁGOSTON munkáira gondolva — bizonyos fokig talán magyar matematikai tradíciók feléledését állapíthatjuk meg." Úgy vélem, hogy EGERVÁRY későbbi — főleg életének utolsó éveiben közölt — munkái teljes mértékben alátámasztják KŐNIG DÉNES megállapítását. Közben azonban EGERVÁRY érdeklődése — szinte párhuzamosan — egyrészt geometriai, másrészt elméleti fizikai kérdések felé fordult. 1938-tól kezdve körülbelül tizenöt éven keresztül egymásután közli eredményeit a geometria és a differenciálegyenletek tárgyköréből, elsősorban az ortocentrikus koordinátarendszerről és annak alkalmazásairól, valamint a háromtest problémával kapcsolatos vizsgálatairól. Életének utolsó hat évében azután szinte kizárólag a mátrixelméleti kutatásoknak szentelte munkásságát, nagy figyelmet fordítva az alkalmazásokra.

EGERVÁRY valamennyi munkáját — miként előadásait is — a világosság, szabatosság, valamint az eleganciára való törekvés jellemzi. Stílusa tömör, sehol egy fölösleges szót nem találni, de ez sohasem megy az érthetőség rovására. Egyik legfőbb eszköze, amelynek segítségével mindig közel tudja hozni az olvasót a tárgyhoz, a szemléltetés. Másik jellemző vonása, ami csaknem valamennyi művén végigvonul, az az igény, hogy eredményeinek az alkalmazási területeit megtalálja és megmutassa, legyenek azok a legelvontabb területről valók is.

EGERVÁRY tudományos munkásságának itt következő ismertetésénél felhasználtam KŐNIG DÉNESnek az 1932. évi Kőnig Gyula jutalom odaítélése alkalmából készült jelentését, amelyben EGERVÁRY addigi eredményeinek igen szép értékelését adta.

EGERVÁRY első dolgozata [1], mint bölcsészdoktori értekezés, az integrálegyenletekre vonatkozik.

A

$$\varphi(x)+\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi=f(x)$$

integrálegyenlet megoldása, ahol φ az ismeretlen függvény, a, b, $f(x)$, $K(x,\xi)$ pedig adott számok, illetőleg függvények, tudvalevőleg úgy fogható fel, mint a kontinuumszerű végtelenbe való átvitele az elemi algebra azon feladatának, amely egy n-ismeretlenű, n egyenletből álló elsőfokú egyenletrendszer megoldását kívánja. Ezen egyenletrendszer úgy adódik, hogy az (a, b) integrálási intervallumot n egyenlő hosszúságú részletintervallumra bontjuk és az

$$\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

integrált az ezen beosztásra vonatkozó közelítő összegével pótoljuk. Az ismeretlenek ez esetben a keresett φ függvénynek ezen osztópontokban felvett értékei. Ezen „n-edik közelítő egyenletrendszer" megoldásából az integrálegyenlet megoldása általában az $n\to\infty$ határátmenettel adódik. EGERVÁRY doktori értekezésében azt az elméletileg is és az alkalmazások szempontjából is nevezetes esetet vizsgálja, amikor $K(x,\xi)$ az ún. mag-függvény csupán az $x-\xi$ különbségtől függ és ennek $b-a$ szerint periódikus függvénye. E megszorító feltevés következménye, hogy a közelítő egyenletrendszer determinánsa *ciklikus* determináns lesz, és mint ilyen, egy jól ismert determináns-tétel szerint, elsőfokú tényezőkre bomlik. Ez a körülmény feleslegessé teszi a hatványsorba való fejtést, amely az általános esetben elkerülhetetlen. EGERVÁRY explicite kiszámítja a determináns határértékét $n\to\infty$-re és pedig FREDHOLM általános határáttérési módszerétől eltérő, a speciális esetre szabott egyszerűbb módszerrel. Az így adódó ún. Fredholm-féle transzcendens maga is nem hatványsoralakban, hanem prímtényezős előállításban adódik. E szorzatalak evidenciába hozza azt a már régebben felismert tényt, hogy az ún. sajátértékek a mag Fourier-sorba való fejtésénél fellépő együtthatók reciprok értékei.

Egerváry ezen vizsgálataihoz kapcsolódott Fenyő István, aki eredményeit általánosította a *Buletinul Politechnicii „Gh. Asachi"* 3. kötetében (1948), valamint a *Publicationes Math.* 2. és 3. kötetében megjelent dolgozataiban.

1918-ban jelent meg EgerváRYnak a polinomok és algebrai egyenletek körébe vágó első dolgozata [4]. Kiindulópontul itt a szinuszfüggvény, illetve szinuszgörbe következő négy szemléletes tulajdonsága szolgál: 1) Egy tetszőleges zérushely és a szomszédos minimumhely közti terület megegyezik e zérushely és a szomszédos maximumhely közti területtel. 2) Két szomszédos zérushely közti területek mind megegyeznek. 3) Minden zérushely inflexiós pont. 4) Az összes maximumok és minimumok abszolút értékre megegyeznek.

Egerváry azt a kérdést veti fel, hogy az adott n-edfokú u_n polinomok között, amelyeknek minden zérushelye valós és egyszeres, melyeknek van meg — külön-külön — az 1), 2), 3) illetve 4) tulajdonságuk. Így rendre a következő polinomokhoz jut:

1) ha a, b, C tetszőleges valós állandók, akkor

$$u_n(x) = C\frac{d^n[(x-a)(x-b)]^n}{dx^n},$$

ezek azok a polinomok, amelyek az n-edfokú Legendre-féle polinomból a független változó lineáris transzformációjával adódnak (ez az eredmény Fejér Lipóttól származik);

2) a Csebisev-féle $n+1$-edfokú polinomok deriváltjai;

3) az $n-1$-edfokú Legendre-féle polinomból integrálással (alkalmasan választott alsó határral) és a független változó lineáris transzformációjával adódó függvények;

4) maguk az n-edfokú Csebisev-polinomok.

Egerváry azt is kimutatja, hogy az említett függvények az egyedüliek, amelyek az említett követelményeket kielégítik. E tulajdonságok tehát jellegzetesek az említett és az analízis számos fejezetében fontos szerepet játszó polinomokra, úgyhogy az Egerváry által felismert geometriai sajátságok e polinomok bevezetésére is alkalmasak.

A [7], [8] és [12] dolgozatokat közösen az jellemzi, hogy a karakterisztikus egyenletek alkalmazását adja a hatványsorok és polinomok elméletében. Ezekhez kapcsolódott M. J. Dieudonnénak a *Comptes Rendus* 192. kötetében megjelent dolgozata és E. LANDAU „*Über einen Egerváry'schen Satz*" című, a *Math. Zeitschrift* 29. kötetében megjelent dolgozata.

Legyen a $|z|<1$-re konvergens

$$f(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots$$

hatványsorra előírva az első n együttható, éspedig úgy, hogy $0<c_0\leqq c_1\leqq c_2\leqq\cdots\leqq c_{n-1}$. FEJÉR a következő eredményekre jutott. Az $|f(z)|$-nek $|z|\leqq 1$-re vonatkozó maximuma nem lehet kisebb, mint a $\sum_{\nu=0}^{n-1} x_\nu^2=1$ feltétel mellett tekintett

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu(x_0x_{n-\nu-1}+x_1x_{n-\nu-2}+\cdots+x_{n-\nu-1}x_0)$$

kvadratikus alak maximuma. Ez a maximum pedig e kvadratikus alak mátrixához tartozó karakterisztikus egyenlet (egyszeres) legnagyobb gyöke: λ_n^*. Van továbbá egy ($|z|\leqq 1$-re reguláris) racionális törtfüggvény, mégpedig

$$h(z)=\lambda_n^*\frac{x_{n-1}^*+x_{n-2}^*z+\cdots+x_0^*z^{n-1}}{x_0^*+x_1^*z+\cdots+x_{n-1}^*z^{n-1}},$$

amelyet hatványsorba fejtve a megadott kezdőegyütthatókat kapjuk és $|z|<1$-re abszolút értékének maximuma éppen λ_n^*. EGERVÁRY [7] dolgozatának legfőbb érdeme, hogy egy speciális esetben ténylegesen kiszámítja ezt a λ_n^* gyököt. Ezt az esetet az jellemzi, hogy valamely ϱ számra, (ahol $0<\varrho\leqq 1$), $c_0=\varrho^{n-1}$, $c_1=\varrho^{n-2},\ldots,c_{n-1}=1$. EGERVÁRY kimutatja, hogy a karakterisztikus egyenlet legnagyobb gyöke: $\lambda_n(\varrho)$, n és ϱ monoton növekvő függvénye és

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n(\varrho)=\frac{1}{1-\varrho^2}.$$

Ami speciálisan a $\varrho=1$ és $\varrho=\dfrac{n}{n+1}$ eseteket illeti, kimutatja, hogy

$$\lambda_n\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}}\sim\frac{n}{e},$$

$$\lambda_n(1)=\frac{1}{2\cos\dfrac{n\pi}{2n+1}}\sim\frac{2}{\pi}n.$$

Ezekben az esetekben EGERVÁRY egyszersmind kiszámítja a megfelelő $h(z)$ racionális törtfüggvényeket is.

A SZÁSZ OTTÓval együtt írt [8] dolgozatban tárgyalt kérdések a következő általános probléma speciális esetei. Legyen a valós $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \ldots, \alpha_n, \beta_n$ számok választása azáltal korlátozott, hogy feltesszük, hogy a

$$(1) \qquad \tau(t) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \cos \nu t + \beta_\nu \sin \nu t)$$

trigonometrikus polinom minden t-re *nem-negatív.* A rögzített $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ számokkal megalkotva az

$$L(\tau) = a_0 + a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + \cdots + a_n\alpha_n + b_n\beta_n$$

lineáris formát, az a kérdés, hogy L milyen határok közt változhatik és mely α_ν, β_ν számokra, illetve mely $\tau(t)$ trigonometrikus polinomra éri el két szélső értékét. FEJÉR és SZÁSZ vizsgálatai alapján erre a következő válasz adható. Legyen $\nu = 1, 2, \ldots, n$-re $c_\nu = a_\nu + ib_\nu$ és $c_{-\nu}$ a c_ν konjugált komplex értéke, és jelölje az $a_{ik} = c_{k-i}$ értékekből alkotott hermitikus mátrix legkisebb, illetve legnagyobb saját értékét ω, illetve Ω. Ekkor $\omega \leq L(\tau) \leq \Omega$. Azok a τ polinomok, amelyekre az első vagy második helyen az egyenlőségjel érvényes, egy homogén lineáris egyenletrendszerből adódnak.

Az a_ν, b_ν számok specializálása által EGERVÁRY és SZÁSZ a következő nevezetes eredményre jutnak. *A nem-negatív* (1) *alatti trigonometrikus polinomok mindegyikére fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek, amelyek egyrészt az egyes tagok amplitudójára, másrészt a polinom differenciálhányadosának abszolút értékére szolgáltatnak felső korlátot:*

$$\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \leq 2 \cos \frac{\pi}{\left[\frac{n}{k}\right] + 2}; \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\left| \frac{d\tau}{dt} \right| \leq \sqrt{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}}.$$

Egyszersmind megállapítják azokat az *egyetlen* τ polinomokat, amelyekre az egyik vagy a másik egyenlőtlenségben az egyenlőségjel érvényes.

Ezekkel a vizsgálatokkal kapcsolatos a [12] dolgozat. Ez az egységkörben nem-negatív általános harmonikus polinomokra vonatkozó *szélsőértékproblémákat* tárgyal.

Először is egy HARNACKtól származó tétel élesítéseként a következő tételt bizonyítja be. Legyen

$$P_n(r, t) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} r^\nu (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t) > 0, \quad \text{ha} \quad r < 1,$$

akkor teljesül az alábbi két egyenlőtlenség:

$$P_n(r,t) \leqq \frac{\sin(n+1)\theta_M}{\sin\theta_M} \quad \text{ha} \quad r \leqq \frac{\cos(n+2)\frac{\theta_M}{2}}{\cos n\frac{\theta_M}{2}}$$

$$\left(0 \leqq \theta_M \leqq \frac{\pi}{n+2}\right),$$

illetve

$$P_n(r,t) \geqq \left|\frac{\sin(n+1)\vartheta_m}{\sin\vartheta_m}\right| \quad \text{ha} \quad r \leqq \left|\frac{\cos(n+2)\frac{\vartheta_m}{2}}{\cos n\frac{\vartheta_m}{2}}\right|$$

$$\left(\frac{\pi}{n+2} \leqq \vartheta_m \leqq \frac{\pi}{n+1}\right),$$

az egyenlőségjel pedig csak a

$$P_n^*(r,t) = 1 + \frac{2}{\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} + n + 1} \times$$

$$\times \sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{\sin(n-\nu+1)\theta}{\sin\theta} + (n-\nu+1)\cos\nu\theta\right] r^\nu \cos\nu t$$

harmonikus polinomra teljesül ($\theta = \theta_M$, illetve $\theta = \pi - \vartheta_m$), amely az egységkör kerületén a

$$P_n^*(1,t) = \frac{1}{2\left[\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} + n + 1\right]} \times$$

$$\times \left[\frac{\sin(n+1)\frac{t+\theta}{2}}{\sin\frac{t+\theta}{2}} + \frac{\sin(n+1)\frac{t-\theta}{2}}{\sin\frac{t-\theta}{2}}\right]^2$$

n-edrendű koszinusz-polinomba megy át. $\theta_M = 0$, illetve $\theta_M = \frac{\pi}{n+2}$ esetén speciális esetként adódik FEJÉR egy-egy korábbi eredménye.

A továbbiakban — egy S. BERNSTEIN által megoldott probléma általánosításaként — a következő problémát oldja meg. Az egységkörben nem-negaítv n-edrendű harmonikus polinomoknak adva van e kör kerületének két helyén az értéke:

$$P_n(1, \varphi) = P_\varphi \geqq 0, \quad P_n(1, \psi) = P_\psi \geqq 0,$$

meghatározandó az egységkör tetszőleges belső pontjában e polinomok minimuma. EGERVÁRY azt találja, hogy (ha $\varrho < 1$)

$$P_n(\varrho, 0) \geqq \frac{P_\varphi S_n(0, \psi) + P_\psi S_n(0, \varphi) - 2\sqrt{P_\varphi P_\psi} \left| S_n\left(\frac{\varphi-\psi}{2}, \varphi\right) \right|}{S_n(0, \varphi) S_n(0, \psi) - S_n\left(\frac{\varphi-\psi}{2}, \varphi\right)^2},$$

ahol

$$S_n(\alpha, \beta) = \frac{\sin(n+1)\alpha - 2\varrho \sin n\alpha \cos(\alpha-\beta) + \varrho^2 \sin(n-1)\alpha}{(1-\varrho^2)\sin\alpha};$$

az egyenlőségjel pedig csak arra a $P_n^*(r, t)$ harmonikus polinomra érvényes, amelynek az egységkörön felvett $P_n^*(1, t)$ értéke a

$$\begin{vmatrix} \sqrt{P_n^*(1, t)} & \sqrt{P_\varphi} & \sqrt{P_\psi} \\ S_n\left(\frac{\varphi - t}{2}, \varphi\right) & S_n(0, \varphi) & S_n\left(\frac{\varphi-\psi}{2}, \varphi\right) \\ S_n\left(\frac{\psi - t}{2}, \psi\right) & S_n\left(\frac{\psi-\varphi}{2}, \psi\right) & S_n(0, \psi) \end{vmatrix} = 0$$

egyenletből adódik. Abban az esetben, ha $\varrho = 0$, a BERNSTEINtől származó probléma megoldására jutunk. (Ő ugyanis a kör középpontjában kereste a mininumot.)

Ugyancsak FEJÉR eredményeihez kapcsolódik a [15] dolgozat. Ismeretes, hogy a

$$w = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + \cdots \tag{2}$$

geometriai sor a $|z| \leqq 1$ konvergenciakörét az $\Re(w) \geqq -\frac{1}{2}$ egyrétű félsíkra képezi le; FEJÉR kimutatta, hogy a zárt egységkörben a (2) sor egyetlen részletösszege sem egyrétű, egy másik dolgozatában pedig kimutatta, hogy a geometriai sor harmad- (és magasabb-) rendű aritmetikai közepei a zárt egységkörben egyrétűek. FEJÉR eredményeit EGERVÁRY a [15] dolgozatában a következő tételekkel egészítette ki:

1. *A* (2) *geometriai sor* $\frac{s_n^{(1)}(z)}{n}$ *elsőrendű aritmetika közepei,*

ahol

$$s_n^{(1)}(z)=nz+(n-1)z^2+\cdots+z^n,$$

a zárt egységkörben egyrétűek és a $w=\frac{s_n^{(1)}(1)}{n}$ *perempontra nézve csillagszerűek.* (Egy tartományt tudvalevően akkor nevezünk egyik belső pontjára nézve csillagszerűnek, ha ezen ponton áthaladó valamennyi egyenesnek van a tartománnyal közös szakasza.)

2. *A* (2) *geometriai sor* $\frac{s_n^{(2)}(z)}{\binom{n+1}{2}}$ *másodrendű aritmetikai közepei, ahol*

$$s_n^{(2)}(z)=\binom{n+1}{2}z+\binom{n}{2}z^2+\cdots+\binom{2}{2}z^n,$$

a zárt egységkörben egyrétűek és egy bizonyos, a $w=0$ *pontot belső pontként tartalmazó tartomány valamennyi pontjára nézve csillagszerűek.*

3. *A* (2) *geometriai sor* $\frac{s_n^{(3)}(z)}{\binom{n+2}{3}}$ *harmadrendű aritmetikai közepei, ahol*

$$s_n^{(3)}(z)=\binom{n+2}{3}z+\binom{n+1}{3}z^2+\cdots+\binom{3}{3}z^n,$$

a zárt egységkörben egyrétűek és konvexek. E tételeire FEJÉR és SZEGÖ, a Duke Math. Journal 18. kötetében elegáns alternatív bizonyításokat adtak.

A [37] dolgozatban FEJÉR LIPÓT és SZÁSZ OTTÓ egy-egy eredményét általánosítja. Tekintsük azon $P(z)$ polinomok $\{\pi\}$ halmazát, amelyek teljesítik a következő feltételeket: 1) $P(z)$ fokszáma nem nagyobb, mint n, 2) $P(o)=0$, 3) $\Re P(z)\geqq-1$ ha $|z|\leqq 1$. FEJÉR bebizonyította, hogy

$$-1\leqq\Re P(e^{it})\leqq n,$$

SZÁSZ O. pedig bebizonyította, hogy

$$-\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2(n+1)}\leqq\Im P(e^{it})\leqq\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Eredményeikből következik, hogy a $\{\pi\}$ halmazból vett $P(z)$ polinomok által leképezett egységkör képei a

$$-1\leqq\Re w\leqq n,\quad -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2(n+1)}\leqq\Im w\leqq\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2(n+1)}$$

négyszög belsejébe esnek.

A [37] dolgozatban EGERVÁRY meghatározza a $\{\pi\}$ halmazból vett polinomok által leképezett egységkör képeinek pontos tartományát. Eredményei a következők:

1) *A $\{\pi\}$ halmaz polinomjai által leképezett egységkör egyesített képe egy olyan konvex tartomány, amely egybeesik a*

$$P_n^*(z)=\frac{2}{n+1}\{nz+(n-1)z^2+\cdots+z^n\},\quad P^*(z)\subset\{\pi\}$$

polinom által leképezett egységkör képének konvex burkával.

2) *E konvex tartományt meghatározó függvény* (a 0 pontra vonatkoztatva):

$$p(\theta)=\frac{\sin\dfrac{n\theta}{n+1}}{\sin\dfrac{\theta}{n+1}},\qquad -\pi\leqq\theta\leqq\pi.$$

A $\theta=0$, illetve $\theta=\frac{\pi}{2}$ speciális esetben adódik FEJÉR, illetve SZÁSZ fent említett eredménye.

Az [5], [6], és [9] dolgozatokban EGERVÁRY az algebrai egyenletek gyökeinek elhelyezkedésével, illetve azon tartományok meghatározásával foglalkozik, amelyekben — az együtthatókra vagy a gyökökre vonatkozó bizonyos korlátozások mellett — egy-egy gyök mozoghat.

Az [5] és [6] dolgozat a *szimmetrikus multilineáris* alakokkal kapcsolatos szélsőértékfeladatokkal foglalkozó vizsgálatokat tartalmazza. A $z_1, z_2, \ldots, z_n$ változók legáltalánosabb szimmetrikus multilineáris alakja

$$S=c_0z_1z_2\cdots z_n+c_1\sum z_1z_2\cdots z_{n-1}+\cdots+c_{n-1}\sum z_1+c_n;$$

az itt szereplő összegek a z_i változók elemi szimmetrikus alakjai. Tekintsük az $S=0$ egyenlet összes $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ gyökrendszereit. Minden ilyen gyökrendszerhez tartozik egy m szám, mint a $|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|$ számok legkisebbike. HEAWOOD és GRACE vizsgálataiból kiderül, hogy van olyan, csupán a $c_0, c_1, \ldots, c_n$ együtthatóktól függő M korlát, amelynél ezen m számok egyike sem nagyobb és amely M amellett olyan, hogy valamely az $S=0$ egyenletet kielégítő $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ rendszerhez tartozó m számmal megegyezik. EGERVÁRY a következő problémát veti fel és oldja meg: meghatározandók az $S=0$ egyenlet mindazon $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ gyökrendszerei, amelyekre $m = \min(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|)$ a maximális M értéket veszi fel. Fontos szerepet játszik itt az n-változós $S = 0$ egyenlet egyváltozós ún. adjungált egyenlete:

$$G(\zeta) \equiv c_0 \zeta^n + \binom{n}{1} c_1 \zeta^{n-1} + \cdots + c_n = 0,$$

amely $S = 0$-ból úgy adódik, hogy az összes z_i-ket egymással (és ζ-val) egyenlővé tesszük. Legyenek $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ az adjungált egyenlet gyökei. EGERVÁRY kimutatja, hogy M a $|\zeta_1|, |\zeta_2|, \ldots, |\zeta_n|$ számok legnagyobbikával egyenlő. Fő eredménye a következő. *Ha a $G(\zeta) = 0$ egyenlet abszolút értékre legnagyobb gyökei mind egyszeres gyökök és a $G(\zeta) = 0$ egyenlet nem minden gyökének M az abszolút értéke, akkor az $S = 0$ egyenletet kielégítő minden olyan $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ értékrendszer, amelyre*

$$\min(|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_n|) = M,$$

csupa megegyező $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ számból áll és z a $G(\zeta) = 0$ egyenlet valamelyik abszolút értékre legnagyobb gyöke.

A [9] dolgozat *a trinom egyenlet gyökeinek elhelyezkedésével* foglalkozik. A dolgozat alapgondolata, hogy két binom szorzatának deriváltja az általános trinom. Binom egyenlet gyökeinek pedig a Gauss-féle síkban egy szabályos sokszög szögpontjai felelnek meg. Ezért a trinom egyenlet gyökhelyei úgy foghatók fel, mint két szabályos sokszög szögpontjaiba helyezett egységtömegek erőterének egyensúlyi helyzetei, ha feltesszük, hogy az erők a távolsággal ordítottan arányosak. Ezek alapján EGERVÁRY az

$$(3) \qquad A z^{n+m} + B z^m + C = 0;$$

$A = |A| e^{i\alpha}$, $B = |B| e^{i\beta}$, $C = |C| e^{i\gamma}$ n és m relatív prímszámok trinom egyenlet gyökeinek az elhelyezkedésére a következőket állapítja meg. *Húzzunk a kezdőpontból $2(n+m)$ félegyenest:*

$$\theta = \theta_\lambda^{(n+m)} \equiv \frac{\gamma - \alpha + (2\lambda + 1)\pi}{n+m} \pmod{2\pi}, \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, n+m$$

$$\theta = \theta_\mu^{(m)} \equiv \frac{\beta - \alpha + (2\mu + 1)\pi}{m} \pmod{2\pi}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m$$

$$\theta = \theta_\nu^{(n)} \equiv \frac{\gamma - \beta + (2\nu + 1)\pi}{n} \pmod{2\pi}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

ezek $n+m$ *olyan szektort határoznak meg, amelyek nyílásszöge*

$$|\theta_\lambda^{(n+m)}-\theta_\mu^{(m)}|\leqq\frac{\pi}{n+m}, \quad \text{illetve} \quad |\theta_\lambda^{(n+m)}-\theta_\nu^{(n)}|\leqq\frac{\pi}{n+m}.$$

Ezen szektorok mindegyike a (3) *egyenletnek pontosan egy gyökét tartalmazza.* Mindegyik szektor a benne foglalt gyök pontos változási tartományát adja, amennyiben az együtthatók argumentumainak megtartása és abszolút értékének változtatása esetén a gyök az egész zárt szektort befutja.

A gyökök abszolút értékeinek az elhatárolására a következőképpen kell eljárni. *Húzzuk meg az*

$$|A|z^{n+m}-|B|z^m+|C|=0$$

$$|A|z^{n+m}+|B|z^m+(-1)^m|C|=0$$

egyenletek gyökhelyein áthaladó koncentrikus köröket. A körök középpontja legyen a kezdőpont. Az így kapott

$$\left|\frac{B^{n+m}}{A^m C^n}\right|\leqq\frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m} \quad \text{esetén} \quad n+m+1,$$

illetve

$$\left|\frac{B^{n+m}}{A^m C^n}\right|>\frac{(n+m)^{n+m}}{n^n m^m} \quad \text{esetén} \quad n+m+2$$

kör $n+m$ *olyan körgyűrűtartományt határoz meg, amelyek mindegyike a* (3) *egyenletnek pontosan egy gyökét tartalmazza.* Az így meghatározott körgyűrűk a bennük foglalt gyök pontos változási tartományát adják, amennyiben az együtthatók abszolút értékének megtartása, és az argumentumok megváltoztatása esetén a gyök az egész zárt körgyűrűt befutja.

A fenti két síkbeosztás egyesítésével meghatározható az az $n+m$ *körgyűrűszektor, amelyek mindegyike a* (3) *egyenletnek pontosan egy gyökét tartalmazza.*

E vizsgálatokkal bizonyos kapcsolatokat mutat a [10] dolgozat, amely az ún. KAKEYA-féle tétel általánosításáról szól.

Legyen P és ϱ két pozitív szám és $P\geqq\varrho$. Tegyük fel a pozitív együtthatójú

$$a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n=0 \tag{4}$$

egyenlet együtthatóiról, hogy $\nu=0,1,2,\ldots, m-1, m+1,\ldots, n$ esetében fennállnak a

$$P\varrho a_{\nu+1}-(P+\varrho)a_\nu+a_{\nu-1}>0 \tag{5}$$

egyenlőtlenségek (itt a_{-1} és a_{n+1} helyébe zérus teendő). Akkor a (4) egyenletnek *m gyöke a nyílt* $|z|<\varrho$ *tartományban, n—m gyöke pedig a nyílt* $|z|>P$ *tartományban van.* Ha egy vagy több (5) egyenlőtlenség baloldala eltűnik, akkor némely gyök e tartományok határára is eshet. KAKEYA tétele innen abban a speciális esetben adódik, amikor $\nu=1,2,\ldots,n-1$-re fennáll a $\varrho a_{\nu+1}-a_\nu>0$ egyenlőtlenség, ekkor ugyanis elég nagy pozitív P esetén $m=n$-re teljesülnek az (5) egyenlőtlenségek, tehát a (4) egyenletnek n gyöke van a $|z|<\varrho$ körben.

Az [5], [6], [9] és [10] dolgozatok nagy érdeklődést és visszhangot keltettek a hazai és külföldi matematikusok körében. E munkákhoz kapcsolódott SZEGŐ G. és A. COHN a *Mathematische Zeitschrift* 13., illetve 14. kötetében megjelent dolgozatában. Idézi EGERVÁRYt VAN VLECK a *Bulletin of the American Mathematical Society* 35. kötetében megjelent, az algebrai egyenletek gyökei elhelyezkedésének újabb irodalmáról szóló referátumban, majd M. J. DIEUDONNÉ a *Mémorial des Sciences Mathématiques* sorozat *„La théorie analitique des polynomes d'une variable"* című kötetében, az *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* új sorozatában pedig W. SPECHT az *„Algebraische Gleichungen mit reellen oder komplexen Koeffizienten"* című kötetben.

EGERVÁRY dolgozatai között különleges helyet foglal el a *mátrixok kombinatorikus tulajdonságaival* foglalkozó [11] dolgozat, egyrészt tárgyánál fogva, másrészt a legutóbbi időkben az alkalmazások révén nyert jelentőségénél fogva. A dolgozat KŐNIG DÉNES következő tételéhez kapcsolódik. Bármely mátrixra az olyan vonalak (azaz sorok és oszlopok) minimális száma, melyek összességükben az összes el nem tűnő elemeket tartalmazzák, megegyezik az olyan el nem tűnő elemek maximális számával, melyek páronként nem feküsznek egy vonalban. EGERVÁRY e tétel új (ti. teljes indukcióra alapított) bizonyítását és általánosítását adja. Ez az általánosítás a következőképpen fogalmazható. *Válasszunk ki a nem-negatív egész elemekből álló n-edrendű* $[a_{ik}]$ *mátrixból n olyan elemet:* $a_{1\nu_1}, a_{2\nu_2}, \ldots, a_{n\nu_n}$, *amelyek kettesével más-más sorba és más-más oszlopba tartoznak és legyen M az összes így adódó* $a_{1\nu_1}+a_{2\nu_2}+\cdots+a_{n\nu_n}$ *összegek maximális értéke. Legyenek másrészt* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *olyan nem-negatív egész számok, amelyek* $i, j=1,2,\ldots,n$-*re kielégítik a* $\lambda_i+\mu_j\geqq a_{ij}$ *feltételeket. Akkor a* $\lambda_1+\mu_1+\lambda_2+\mu_2+\cdots+\lambda_n+\mu_n$ *összeg legkisebb értéke éppen M.* (A fent említett speciális tétel innen abban az esetben adódik, ha minden a_{ij} vagy 0 vagy 1.)

Ennek a dolgozatnak a jelentőségét az adja meg, hogy több mint húsz évvel később H. W. KUHN az Egyesült Államokban felismerte a dolgozatban közölt tétel alkalmazási lehetőségét a matematikának egy viszonylag új, a közgazdasági alkalmazásokkal foglalkozó tudományágában, az ekonometriában. KŐNIG és EGERVÁRY tiszteletére *„magyar módszer"*-nek nevezte eljárását, amelyet az úgynevezett *hozzárendelési* (assignment) probléma megoldására használt. Később M. M. FLOOD továbbfejlesztette a módszert, majd EGERVÁRY, amikor 1957-ben tudomást szerzett az amerikai szerzők munkáiról, ezek eredményeinek a felhasználásával alkalmazta a módszert az úgynevezett *szállítási* probléma megoldására.

A szállítási probléma a következő. Adva van k számú termelő hely és l számú fogyasztó hely. A T_i termelő hely tárol ν_i egységet $(i=1,2,\ldots,k)$, az F_j fogyasztó hely igényel μ_j egységet $(j=1,2,\ldots,l)$. Tegyük fel, hogy $\sum_{i=1}^{k}\nu_i=\sum_{j=1}^{l}\mu_j$. Legyen a szállítási költség T_i termelő helyről az F_j fogyasztó helyre c_{ij} (nemnegatív egész). Kérdés, hogyan kell a szállítást úgy megszervezni, hogy a szállítási összköltség minimális legyen. Matematikai megfogalmazásban ez azt jelenti, hogy a $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}c_{ij}x_{ij}$ lineáris forma minimumát kell meghatározni a $\sum_{j=1}^{l}x_{ij}=\nu_i$ $(i=1,2,\ldots,k)$ és $\sum_{i=1}^{k}x_{ij}=\mu_j$ $(j=1,2,\ldots,l)$ feltételi egyenletek és — a probléma természetéből folyó — $x_{ij}\geqq 0$ feltételi egyenlőtlenségek kielégítése mellett.

(Abban a speciális esetben, amikor $\nu_i=\mu_j=1$ $(i=1,2,\ldots,k;$ $j=1,2,\ldots,l)$, akkor a szállítási probléma ekvivalens az úgynevezett hozzárendelési problémával.)

EGERVÁRY eljárása, amelyet a [70] és [71] dolgozatban fejtett ki, lényegében azon alapszik, hogy a $[c_{ij}]$ mátrix soraihoz a ν_i, oszlopaihoz pedig a μ_j *multiplicitásokat* rendeli $(i=1,2,\ldots,k;$ $j=1,2,\ldots,l)$, s ennek megfelelően, ha a c_{ij} elemeknek valamely részhalmazát az $i_1, i_2,\ldots,i_p$-edik sorból és a $j_1, j_2,\ldots,j_q$-adik oszlopból álló vonalrendszer tartalmazza, akkor azt mondja, hogy ez a részhalmaz $\nu_{i_1}+\nu_{i_2}+\cdots+\nu_{i_p}+\mu_{j_1}+\mu_{j_2}+\cdots+\mu_{j_q}$ multiplicitásösszegű vonalrendszerrel van fedve. A c_{ij} elemeket iteratív lépésekben a

$$c_{ij}^{(\alpha+1)}=c_{ij}^{(\alpha)}-u_i^{(\alpha)}-v_j^{(\alpha)};\ c_{ij}^{(0)}=c_{ij};\ c_{ij}^{(\alpha)}\geqq 0;\ \alpha=1,2,\ldots$$

transzformációkkal addig módosítja (átlagban csökkenti), míg egy olyan transzformált mátrixhoz jut, amelynek 0 elemeit nem lehet n-nél kisebb multiplicitásösszegű vonalrendszerrel fedni.

Az az út, amelyet KŐNIG és EGERVÁRY említett tételei a gráfelméleti megfogalmazástól a szállítási probléma megoldásáig befutottak, igen szépen és meggyőzően példázza az elmélet és gyakorlat egységét, és azt a kölcsönhatást, amely mindkettő fejlődését szükségképpen előreviszi.

EGERVÁRY geometriai tárgyú munkáinak a sorát a [17] dolgozat nyitja meg. Ebben az olyan tetraéderek főbb tulajdonságait tárgyalja szimmetrikus paraméterek segítségével, melyeknek magasságai egy pontban találkoznak. Ezek a magasságponttal bíró, vagy *ortocentrikus* tetraéderek — azonkívül, hogy magasságpontjuk van — még számos olyan analógiát mutatnak a háromszöggel, amely az általános tetraédernél nem áll fenn.

A ϱ_{ik} élhosszúságú ortocentrikus tetraéderre EGERVÁRY bevezeti a

$$\lambda_i = \frac{\varrho_{ik}^2 + \varrho_{il}^2 - \varrho_{kl}^2}{2}, \qquad i, k, l, m = 1, 2, 3, 4$$

független paramétereket, és kimutatja, hogy annak élhossza, oldallapfelülete és köbtartalma egyszerű összefüggésben van a λ_i paraméterek elemi szimmetrikus függvényeivel.

A [20], [21], [39] és [41] dolgozatokban azt mutatta meg, hogy ortocentrikus szimplexszel (tetraéderrel) kapcsolatos vizsgálatoknál előnyösen alkalmazható az „ortocentrikus koordinátarendszer), azaz egy olyan baricentrikus (homogén) koordinátarendszer, amelynek alapszimplexe (tetraédere) ortocentrikus.

Az n-méretű euklideszi tér görbéire vonatkozó vizsgálatokat tartalmaz a [22] és [23] dolgozat.

A [22] dolgozat fő eredménye a következő. Ha az n-méretű euklideszi tér egy rektifikálható görbéjét az s ívhossz szerint n-szer folytonosan differenciálható

$$x_1 = x_1(s),\ x_2 = x_2(s), \ldots, x_n = x_n(s)$$

függvények határozzák meg, továbbá ha $P_0 = P(s_0)$ a görbének egy reguláris pontja, azaz olyan, amelyre nézve a

$$G_k = \begin{vmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{k1} & \cdots & X_{kk} \end{vmatrix}; \qquad X_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^{(i)} x_\nu^{(j)} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

Gram-féle determinánsok egyike sem tűnik el, akkor

1) *a görbe P_0 pontjához és ennek környezetében felvett P_1 pontjához tartozó k-méretű simuló hipersíkok η_k hajlásszögének a P_0P_1 ívhosszhoz való viszonya $P_1 \to P_0$ esetén a következő határértéket szolgáltatja:*

$$\frac{d\eta_k}{ds} = \lim_{P_1 \to P_0} \frac{\eta_k}{P_0P_1} = \frac{\sqrt{G_{k+1}G_{k-1}}}{G_k}; \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

2) *Egy* $[P(s_1), P(s_2), \ldots, P(s_{k+2})]$ *húrszimplex élhosszainak a*

$$\Phi(P_1P_2 \cdots P_{k+2}) = \frac{(k+1)^2}{k} \frac{V(P_1P_2 \cdots P_{k+1}P_{k+2})V(P_2 \cdots P_{k+2})}{P_1P_{k+2}V(P_1P_2 \cdots P_{k+1})V(P_2 \cdots P_{k+1}P_{k+2})}$$

függvénye, ahol $V(P_1 \cdots P_k)$ a $k-1$ méretű szimplex köbtartalma, $s_\varkappa \to s_0$ esetén ugyancsak a fenti határértékhez tart

$$\lim_{P_\varkappa \to P_0} \Phi(P_1P_2 \cdots P_{k+2}) = \frac{\sqrt{G_{k+1}G_{k-1}}}{G_k}. \tag{6}$$

Ezek szerint, ha az $\frac{1}{\varrho_k}$ k-adik görbületet, mint a k-méretű simuló hipersík kontingenciaszögének az ívelemhez való viszonyát értelmezzük, akkor ezek a görbületek, egyrészt, mint a koordináták deriváltjainak függvényei, a BLASCHKE-féle görbületekkel megegyeznek, másrészt a (6) előállítás a görbületeket távolságfogalom bevezetésével metrizált terekben is értelmezhetővé teszik. Eredményének fő érdeme az, hogy BLASCHKE pusztán formális úton nyert formuláját geometriai tartalommal töltötte meg, amennyiben ahhoz az n-edik görbület geometriai definíciójából kiindulva sikerült eljutnia. A görbület e definíciója alapján a FRENET-féle formulák, továbbá a simuló gömbök és a görbületek közti összefüggések megtartják a háromméretű térben mutatkozó egyszerű és szimmetrikus alakjukat.

A [23] dolgozatban az n-méretű euklideszi tér görbéinek símulógömbjeire vonatkozó következő tételt bizonyítja be EGERVÁRY. *Ha teljesülnek a* [22] *dolgozatban tett feltételek, akkor a görbén, annak $P(s_0)$ pontja környezetében felvett $P(s_1), \ldots P(s_{k+1})$ pontokon átmenő $k-1$ méretű gömb határhelyzete $P(s_\varkappa) \to P(s_0)$ esetén a $P(s_0)$ ponthoz tartozó $k-1$ méretű simulógömb, amelynek R_{k-1} sugarát, mint a koordináták deriváltjainak függvényét, a*

$$\begin{vmatrix} -R_{k-1}^2 & q' & q'' & \cdots & q^{(k)} \\ q' & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ q^{(k)} & X_{k1} & X_{k2} & \cdots & X_{kk} \end{vmatrix} = 0, \quad k = 2, 3, \ldots, n$$

egyenlet határozza meg, ahol

$$q^{(\varkappa)}=\frac{1}{2}\frac{\partial^{\varkappa}}{\partial s^{\varkappa}}\sum_{\nu=1}^{n}[x_{\nu}(s)-x_{\nu}(t)]^{2}_{t=s}.$$

Ennek alapján a simulógömbök és a görbületek közt a következő összefüggést állapítja meg:

$$R_{k+1}^{2}=R_{k}^{2}+\frac{R_{k}^{2}}{R_{k}^{2}-R_{k-1}^{2}}\left(\frac{dR_{k}}{ds}\right)^{2}\varrho_{k+1}^{2};\qquad \begin{array}{l}R_0=0;\ R_1=\varrho_1\\ k=1,2,\ldots,n-2.\end{array}$$

Kimutatja továbbá, hogy az n-méretű térben érvényes az

$$(R_{n}^{2}-R_{n-2}^{2})\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^{2}=R_{n-1}^{2}\left(\frac{dR_{n-1}}{ds}\right)^{2}$$

összefüggés, ahol $d\sigma$ a pólusgörbe ds-hez tartozó ívelemét jelenti. (Mindkét formula a háromméretű térre ismert megfelelő összefüggések általánosítása.)

ALEXITS GYÖRGYgyel együtt írt [24] dolgozatában megadja a lineáris görbületek általános elméletének az alapjait félmetrikus terekben, és megmutatja, hogy az speciális esetként magában foglalja az euklideszi tér rektifikálható görbéinek görbületelméletét. — Legyen pq az M félmetrikus tér p és q pontjának a távolsága, legyen

$$D(q_1,q_2,\ldots,q_m)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & (q_iq_j)^2\end{vmatrix},\qquad i,j=1,2,\ldots,m,$$

továbbá

$$\varkappa(p_0,p_1,\ldots,p_{n+1})=$$
$$=\frac{n+1}{p_0p_{n+1}}\sqrt{|D(p_0,\ldots,p_{n+1})D(p_1,\ldots,p_n)|:|D(p_0,\ldots,p_n)D(p_1,\ldots,p_{n+1})|}$$

(a nevező 0-tól különböző). $n\geqq 2$ esetén $\varkappa$ független p_ν sorrendjétől. Az M tér p_0 pontbeli n-edik lineáris görbülete a következő:

$$\varkappa_n(p_0)=\lim_{\substack{p_\nu\to p_0\\ \nu=1,2,\ldots,n+1}}\varkappa(p_0,\ldots,p_{n+1})$$

(feltéve, hogy a határérték létezik), a másodfajú n-edik görbület pedig

$$\varkappa_n^{*}(p_0)=\lim_{\substack{p_\nu\to p_0\\ \nu=1,2,\ldots,n+2}}\varkappa(p_1,\ldots,p_{n+2})$$

(feltéve, hogy létezik).

A dolgozat eredményei közül felsorolunk néhány tételt. Egy kompakt M térben akkor és csakis akkor létezik mindenütt $\varkappa_n^*(p_0)$, ha $\varkappa_n(p_0)$ mindenütt létezik és folytonos. Legyen M kontinuum egy E_k euklideszi térben. Ha $\varkappa_{k-1}(p)$ M-ben mindenütt 0-tól különböző és folytonos, akkor M megszámlálhatóan végtelen olyan rektifikálható ív lokálisan összefüggő összege, amelyeknek páronként csak véges sok pontja közös. Ha M speciálisan olyan ív, amelynek $\varkappa_\varrho(\varrho = 1, 2, \ldots, k)$ koordinátái p_0-ben az ívhossz szerint $n+1$-szer deriválhatók és $\left|\sum_{\varrho=1}^{k} x_\varrho^{(i)} x_\varrho^{(j)}\right| \neq 0$, $(i, j, = 1, 2, \ldots, n)$, akkor $\varkappa_n(p_0)$ létezik. Ha a deriváltak p_0-ban folytonosak is, akkor $\varkappa_n^*(p_0)$ is létezik. $\varkappa_\nu(p_0)$ értékei megegyeznek (E_n-ben) a FRENET-féle formulák együtthatóival (a görbületekkel). Ha M rektifikálható görbe és midenütt $\varkappa_n(p_0) = 0$, akkor M egy n-méretű síkban van. EGERVÁRY eredményei hatással voltak L. M. BLUMENTHAL torzióra vonatkozó vizsgálataira (lásd: "*Theory and applications of distance geometry*" című könyvét), valamint SAWYER hasonló jellegű kutatásaira is.

A differenciálegyenletek tárgykörébe tartozó első dolgozatát [19] 1938-ban közölte EGERVÁRY. A későbbi években is számos dolgozata jelent meg e területen elért eredményeiről, elsősorban a háromtest-problémáról [30], [31], [32], továbbá forgó rendszerek kritikus szögsebességének megállapításáról [35], a hővezetés speciális kerületi feltételek esetén való megoldásáról [45]. Nagy figyelmet fordított a helyes matematikai modell megválasztásával kapcsolatos kérdésekre. Ezirányú fejtegetéseit tartalmazza a [42] dolgozat. Külön kell azonban megemlíteni, hogy a differenciálegyenletekről tartott előadásai során mindig beleszőtte azokba egyéni észrevételeit, megjegyzéseit, számos kisebb-nagyobb, külön nem is publikált eredményét, sajátos egyéni felépítést adván ezzel a tárgynak. Mindig arra törekedett — mégpedig sikerrel —, hogy az anyag áttekinthetőségét növelje, a szétágazó kérdéseket egységes keretbe foglalja, és, hogy a mélyebb, általánosabb összefüggéseket megvilágítsa.

A [19] dolgozat az elektronmozgás differenciálegyenleteivel foglalkozik. Tudvalevő, hogy konzervatív erőtérben történő pontmozgás differenciálegyenleteinek első integráljait a klasszikus mechanikai elvek (energiatétel, ciklikus koordináták elve) szolgáltatják. Ezek kizárólagos alkalmazásával a pontmozgás problémája tengelyszimmetrikus erőtér esetén egyetlen másodrendű differenciálegyenletre redukálható és centrális erőtér esetén kvadraturák segítségével teljesen megoldható. EGERVÁRY a [19] dolgozatában kimutatta, hogy az elektromágneses, tehát *nem* konzervatív erőtérben történő elektronmozgás differenciálegyenleteire a fenti általános elvek kiterjeszthetők és azok integrálása szempontjából ugyanolyan jelentőségűek, mint konzervatív erőtér esetén. Ennek a kiterjesztésnek az a körülmény adja meg a lehetőségét, hogy az elektronmozgás differenciálegyenletei általánosított kinetikus potenciál bevezetésével a LAGRANGE-féle alakra hozhatók.

A [30], [31] és [32] dolgozat a háromtest-probléma differenciálegyenletének egy új alakjával és annak speciális esetekben való megoldásával foglalkozik. EGERVÁRY érdekes analógiát vett észre a háromtest-probléma és az erőmentes pörgettyű differenciálegyenletei között. Ezen analógia megállapítását annak a körülménynek a felismerése tette lehetővé, hogy mind a háromtest-probléma, mind pedig az erőmentes pörgettyű esetén a kinetikus és potenciális energia csak a rendszer főtehetetlenségi tengelyeinek sebességkomponenseitől és a testek ezen főtengelyekre vonatkozó koordinátáitól, valamint sebességkomponenseitől függ, a térbeli abszolút helyzettől azonban független. A pörgettyűelméletből ismeretes, hogy ha a pörgettyű főtehetetlenségi tengelyeit mint mozgó koordinátarendszert tekintjük, a pörgettyűmozgás 12-edrendű differenciálegyenletrendszere szétesik három másodrendű és két harmadrendű rendszerre. A másodrendű rendszerek a súlypont mozgását határozzák meg, az egyik harmadrendű rendszer alkotja a kinematikai egyenleteket, a másik harmadrendű rendszer pedig azonos a pörgettyű EULER-egyenleteivel. EGERVÁRY megmutatja, hogy ha a háromtest-problémánál is a főtehetetlenségi tengelyeket tekinti mozgó koordinátarendszerként (általános koordinátáknak két főinerciasugarat és egy szögkoordinátát választ), akkor a háromtest-probléma 18-adrendű differenciálegyenletrendszere szétesik három másodrendű, két harmadrendű és egy kilencedrendű rendszerré. A másod- és harmadrendű rendszerek jelentése ugyanaz, mint a pörgettyű esetén, a kilencedrendű rendszer pedig a háromtest-probléma egyenleteinek egy új alakjaként tekinthető. E rendszernek nyilván egy-egy első integrálja az energiaintegrál és a szögsebességek közötti összefüggést kifejező integrál. Ezek segítségével és az idő kiküszöbölésével a rendszer hatodrendűre redukálható. — Ha az általános koordináták (azaz egy-egy test távolsága), ismertek az idő függvényében, akkor a rendszer kvadratúrával integrálható. Ily módon a háromtest-probléma differenciálegyenleteinek ezen új alakjából kiolvasható LAGRANGEnak az a tétele, hogy ha a három test által meghatározott háromszög oldalainak a mozgását ismerjük, mint az idő függvényét, akkor a probléma kvadratúrával megoldható. Speciális esetekben EGERVÁRY megoldja a differenciálegyenletet és azt is megmutatja, hogy ezekből hogyan adódik néhány, más szerző (pl. PYLARINOS, SZOKOLOV) által is közölt eredmény.

TURÁN PÁLlal közösen írott [43] és [44] dolgozataiban a kinetikus gázelmélet alapjaival foglalkoznak. A gázt akár pontszerű molekulák összességének fogva fel egy mechanikai-determinisztikus tárgyalás elképzelhetetlennek látszott, mert nem látszott, hogyan jöhet ilyen úton ki, hogy *bármily* rendezetlen kezdeti helyzetből a molekulák „egész rövid" időn belül egyenletes eloszlásúvá rendeződnek a gáztérben és „kis időtartam" híján egyenletes eloszlásúak is maradnak. A két dolgozat közül a magyar nyelvű [44] a teljesebb; ebben a π-élű kockának feltételezett E edényben (nagy) n számú pontszerű molekulát tetszőleges kezdőhelyzetben

$$x'_{j\nu 0}=n^{\frac{2}{5}}\left(1+\nu n^{-\frac{101}{100}}\right)\sqrt{j},\qquad \nu=1,2,\ldots,n;\, j=1,2,3,$$

kezdősebességeket felvéve tiszta mechanisztikus tárgyalással megmutatták, hogy ha K egy tetszőleges, az edény éleivel párhuzamos oldalú kocka E-ben V_k köbtartalommal és $V(t_0,K)$ a $t=t_0$ időpontban K-ban levő molekulák száma, akkor a $0\leqq t\leqq n^{1/4}$ időintervallumban

$$\left|\frac{V(t,K)}{n}-\frac{V_k}{\pi^3}\right|<n^{-\frac{1}{10}}$$

áll fenn, kivéve egy legfeljebb $cn^{\frac{41}{300}}\log n$ összidőtartamot. Ez kb. azt jelenti $n\sim 10^{23}$ esetén, hogy fenti kezdeti sebességek mellett a sűrűségingadozás 1 %-nál kisebb egy nap alatt legfeljebb 5 mp összidő kivételével bármely K részkockában. A reálishoz még közelebb álló modellt lehetett volna megadni, ha — mint a dolgozat végén megjegyzik — az

$$\int_0^T\left|N(t,K)-\frac{V_k}{\pi^3}n\right|dt$$

integrál helyett az

$$\int_0^T\left(N(t,K)-\frac{V_k}{\pi^3}n\right)^2dt$$

tárgyalásából indultak volna ki. E vizsgálatokat folytatja M. LIPSCHUTZ—JEWICH "Probability and determinism" című dolgozatában az *American Journal of Physics* 1957. kötetében.

Ugyancsak TURÁN PÁLlal írta [72] és [73] dolgozatait. Ezekben a „legökonomikusabb stabilis" interpoláció meghatározásával foglalkoznak a $[-1, +1]$ közben a $p(x) \equiv 1$ súlyfüggvény mellett, illetve a $[0, \infty]$ és $[-\infty, +\infty]$ közökben az e^{-x}, illetve e^{-x^2} súlyfüggvények mellett. Hogy csak a legegyszerűbb eredményt említsük meg, a $[-1, +1]$ intervallumra „optimális" interpolációs eljárásnak a

$$\sigma_n(x, y_1, \ldots, y_n) = y_1 \frac{1+x}{2} P_{n-2}(x)^2 + y_n \frac{1-x}{2} P_{n-2}(x)^2 + \\ + \sum_{\nu=1}^{n-2} y_\nu \frac{1-x^2}{1-\xi_\nu^2} \left(\frac{P_{n-2}(x)}{P'_{n-2}(\xi_\nu)(x-\xi_\nu)} \right)^2$$

által adott eljárást találják, ahol $P_{n-2}(x)$ az $(n-2)$-ik Legendre-polinom $P_{n-2}(1) = 1$ normálással és ξ_ν az ő gyökei. Ha az y_ν értékek egy $[-1, +1]$-ben folytonos függvény értékei, akkor igen röviden megmutatják, hogy e σ_n interpolációs polinomok egyenletesen konvergálnak $f(x)$-hez $[-1, +1]$-ben, míg FEJÉR hasonló „lépcsőparabolái" csak a $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ közben konvergálnak. E dolgozat és FEJÉR bizonyos eredményeinek szintézise található SZÁSZ PÁL egy újabb dolgozatában és nyilván további vizsgálatoknak lesz kiindulópontja.

1953-ban jelent meg EGERVÁRY összefoglaló jellegű mátrixelméleti dolgozata [46], amely mintegy bevezetését képezi az ezután következő tevékenységének. Ez az az alap, amelyre életének utolsó hat évében kifejtett munkássága épült, tartalmazza mindazt, ami a későbbiek megértéséhez szükséges, és egyben előrevetíti a továbbfejlődés irányait.

EGERVÁRY mátrixelméleti munkáiban nagy szerepe van a mátrixok diadikus felbontásának. Maga a diadikus felbontás azelőtt is ismert volt, ő látta meg azonban először az alkalmazásában rejlő lehetőségeket, amelynek révén új irányt szabott mind az elméleti vizsgálatoknak, mind pedig a numerikus számítási módszerek egyszerűsítésének. A diadikus felbontás alkalmazásának a lehetősége először a mátrixok bázisfaktorokra való bontása kapcsán merült fel.

Legyen $\mathbf{A}$ n soros és m oszlopos r-edrangú mátrix. A bázisfaktorokra való bontás feladata abban áll, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixot úgy bontsuk fel egy r-edrangú $\mathbf{B}$ és r-edrangú $\mathbf{C}^*$ mátrix szorzatára, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}^* = \sum_{k=1}^{r} \boldsymbol{b}_k \boldsymbol{c}_k^*$ legyen, ahol a $\boldsymbol{b}_k$ vektorok $\mathbf{B}$ oszlopvektorai, a $\boldsymbol{c}_k^*$ vektorok pedig $\mathbf{C}^*$ sorvektorai.

A diadikus felbontás lényege mármost a következő. Ha $\mathbf{A}$ rangja $\varrho(\mathbf{A}) \geqq 1$, akkor van legalább egy 0-tól különböző $a_{\beta\gamma}$ eleme.

Képezzük az

$$
(7)\quad a_{\beta\gamma}\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1m}\\ \cdot\ \cdots\ \cdot\\ a_{n1}\cdots a_{nm}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a_{1\gamma}\\ \vdots\\ a_{n\gamma}\end{bmatrix}[a_{\beta 1}\cdots a_{\beta m}]=\begin{array}{c} \qquad\underset{\smile}{\gamma}\qquad \\ \begin{bmatrix} a'_{11}\cdots 0\cdots a'_{1m}\\ \cdot\ \cdots\ \cdots\ \cdot\\ 0\ \cdots 0\cdots 0\\ a'_{n1}\cdots 0\cdots a'_{nm}\end{bmatrix}\end{array}=\mathbf{A}'_{(\beta}
$$

különbséget. Az így nyert $\mathbf{A}'$ mátrix egy sora és egy oszlopa csupa 0 elemet tartalmaz, a többi eleme pedig az $\mathbf{A}$ mátrix elemeiből képezett másodrendű determinánsok. Ha a fenti eljárást az $\mathbf{A}'$ mátrixra megismételjük, akkor olyan mátrixhoz jutunk, amelynek már két sora és két oszlopa tartalmaz csupa 0 elemet, a többi eleme pedig $\mathbf{A}'$ elemeiből alkotott másodrendű determinánsok, azaz $\mathbf{A}$ elemeiből alkotott harmadrendű determinánsok. Az eljárást folytatva, r lépés után 0 mátrixhoz jutunk. Ezzel a faktorizáció végetért.

A [47] dolgozatában EGERVÁRY a projektor (idempotens) mátrixokra vonatkozóan bizonyítja be a következő érdekes tételt. (Projektornak nevezzük a $\mathbf{P}$ mátrixot, ha kielégíti a $\mathbf{P}^2-\mathbf{P}=0$ egyenletet.) *Ha egy r-edrangú* $\mathbf{P}$ *projektormátrixot lineárisan független diádok összegeként* $\mathbf{P}=\sum_{k=1}^{r}\mathbf{u}_k\mathbf{v}_k^*$ *alakban állítunk elő, akkor az* $\mathbf{u}_k$, *illetve* $\mathbf{v}_k^*$ *vektorok a projektormátrix jobb-, ill. baloldali sajátvektorai, amelyek automatikusan biortogonalizálva vannak, azaz kielégítik az* $\mathbf{u}_k^*\mathbf{v}_l=\delta_{kl}$ *összefüggéseket.* E tételnek az a felismerés ad elméleti és gyakorlati jelentőséget, hogy a projektormátrixot nem is lehet másképpen diádok összegére bontani, mint úgy, hogy a diádok vektor-tényezői biortogonálisak. A tétel közvetlen alkalmazást nyer mátrixok sajátvektorainak a meghatározásánál, valamint általában egy mátrix függvényének kanonikus előállításánál. Ismeretes ugyanis, hogy bármely mátrix, illetve annak analitikus függvénye (ha a mátrix valamennyi sajátértéke a minimálegyenlet egyszeres gyöke és a függvény konvergenciakörének belsejébe esik) előállítható a LAGRANGE-féle mátrix-polinomok lineáris formájaként. A LAGRANGE-féle mátrix-polinomokhoz úgy jutunk, hogy a mátrix minimálegyenletének gyökhelyein interpoláló LAGRANGE-féle alappolinomokban a skalár változó helyébe írjuk a mátrixot. Könnyen kimutatható, hogy ezek a Lagrange-féle mátrix-polinomok *projektorok*, tehát, ha alkalmazzuk rájuk a fenti tételt, akkor a diadikus felbontásuk által megkapjuk az adott mátrix jobb- és baloldali sajátvektorainak teljes biortogonális rendszerét.

A mátrixok diadikus felbontásának segítségével általánosította EGERVÁRY STIELTJESnek egy mátrixelméleti lemmáját [48], [49]. A lemma így hangzik: Ha egy pozitív definit kvadratikus alak mátrixának a födiagonálison kívüli valamennyi eleme negatív, akkor ezen mátrix reciprokának valamennyi eleme pozitív. EGERVÁRY bebizonyította, hogy a fenti feltételek gyengébb feltételekkel helyettesíthetők. Tétele a következő. *Ha egy mátrixnak valamennyi főminora pozitív, valamennyi eleme a födiagonálison kívül nem-pozitív és a diagonális fölött levő háromszögben minden egyes oszlopa, a diagonális alatt levő háromszögben pedig minden egyes sora tartalmaz legalább egy negatív elemet, akkor a mátrix reciprokának valamennyi eleme pozitív.* E tétel további általánosítását adta R. S. VARGA, „On a lemma of STIELTJES on matrices" című, a *Westinghouse Electric Corporation* kiadásában, 1957-ben megjelent dolgozatában.

Mint EGERVÁRY megjegyzi, az eredeti feltételek gyengítésének a lehetőségét meglehetősen nyilvánvalóvá teszi néhány, a rugalmasan kapcsolt részecskékből álló rendszerek rugalmassági mátrixára vonatkozó eredmény. Például, ha a rendszer olyan két végén rögzített kurpuszkuláris húr, amelyet egyenlő tömegű és egyenlő közökben elhelyezett n tömegpont alkot, akkor a megfelelő rugalmassági mátrix elemei a következők:

$$a_{ik} = \begin{cases} 2 & \text{ha } i-k=0 \\ -1 & \text{ha } |i-k|=1 \\ 0 & \text{a többi.} \end{cases}$$

Ennek reciproka, mint ismeretes, csupa pozitív elemet tartalmaz, ami fizikailag is nyilvánvaló, mint a folytonos húrhoz tartozó Green-függvény pozitivitására vonatkozó tétel finit analogonja.

Néhány további dolgozatában a mátrixok HERMITE-féle normál alakjának jut jelentősebb szerep. Egy mátrixot akkor nevezünk HERMITE-féle normál alakúnak, ha kielégíti a következő feltételeket: 1) háromszögmátrix, azaz a födiagonális alatt, vagy felett csak 0 elemet tartalmaz (felső, ill. alsó háromszögmátrix), 2) a födiagonálisban álló elemek értéke 1 vagy 0, 3) a 0 födiagonális elemeket tartalmazó sorok csupa 0-ból állnak, 4) az 1 födiagonális elemeket tartalmazó oszlopok (az 1-esen kívül) csupa 0 elemet tartalmaznak. Ha egy mátrix csak az 1), 2), 3) feltételeket elégíti ki, akkor azt kvázihermitikusnak nevezzük.

EGERVÁRY az [59] dolgozatban megmutatta, hogy a diadikus felbontás segítségével hogyan bontható fel egy adott kvadratikus mátrix egy nem-szinguláris és egy kvázihermitikus mátrix szorzatára. (Egy alkalmas nem-szinguláris mátrixszal való szorzással a kvázihermitikus mátrix könnyen transzformálható HERMITE-féle normál alakúra.) Ugyanebben a dolgozatban az HERMITE-féle normál alakú mátrixok alkalmazásával egyszerű és direkt bizonyítást találunk a SYLVESTER-fele nullitás-törvényre. Egy mátrix nullitása alatt értjük a rendszám és a rang különbségét. A SYLVESTER-féle tétel azt mondja ki, hogy két mátrix szorzatának a nullitása *legalább* akkora, mint az egyes tényezők nullitása és *legfeljebb* akkora, mint a tényezők nullitásának az összege.

Az [51] és [55] dolgozatokban azt mutatja meg EGERVÁRY, hogy a kvázihermitikus alakra való transzformálás révén hogyan adható általános módszer olyan lineáris egyenletrendszerek megoldására, amelyeknek együtthatómátrixa teljesen tetszőleges. A módszer lényege az, hogy az $\mathbf{A}x = 0$ egyenletrendszer együtthatómátrixát olyan módon kell két tényező szorzatára bontani, hogy az $\mathbf{A}x = \mathbf{BC}x = 0$ egyenletből $\mathbf{C}x = 0$ következzék, a $\mathbf{C}$ mátrix pedig minél jobban megközelítse az HERMITE-féle normál alakot. Ugyanis a $\mathbf{H}x = 0$ egyenlet megoldása, ha $\mathbf{H}$ HERMITE-féle normál alakú, $x = (\mathbf{E} - \mathbf{H})t$, ahol t tetszőleges elemű paraméter-vektor. Az HERMITE-féle normál alak egyúttal automatikusan szétválasztja az egyenletrendszer *szabad* és *kötött* ismeretleneit. EGERVÁRY kimutatja, hogy az adott $\mathbf{A}$ mátrix diadikus felbontásának a segítségével elérhető, hogy a $\mathbf{C}$ mátrix *kvázihermitikus* legyen. Ez a rendszer szabad és kötött ismeretleneit szintén automatikusan szétválasztja, a kötött ismeretlenek pedig (a szabad ismeretlenek függvényében) rekurzív úton egyszerűen meghatározhatók. (Inhomogén lineáris egyenletrendszer mindig visszavezethető homogén lineárisra.) Az eljárás speciális esetként tartalmazza CHOLESKY és BANACHIEWICZ módszerét, amely nem szinguláris együtthatómátrixoknak háromszögmátrixokra való faktorizációján alapszik.

Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszereivel foglalkozik még a [62], [63] és [68] dolgozat is. Érdekes és egyben jellemző, hogy a matematika ezen sokak által teljesen lezártnak vélt területét EGERVÁRY számos új eredménnyel gazdagította. A [62] és [69] dolgozatban egy olyan általános *rangcsökkentő* eljárást dolgoz ki, amely a diadikus felbontás általánosításának tekinthető, és lehetőséget ad a lineáris egyenletrendszerek *véges iterációval* való egyszerű megoldására. Az eljárás a következő lemmán alapszik. *Ha valamely* $\mathbf{A}$ *mátrixból* $\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^*$ *diádot levonunk,* $\mathbf{A}$ *rangja akkor és csakis akkor csökken eggyel, ha a* $\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^*$ *diád*

$$\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^* = \frac{\mathbf{A}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^*\mathbf{A}}{\boldsymbol{v}^*\mathbf{A}\boldsymbol{u}}$$

alakban írható fel, ahol $\boldsymbol{u}$ *és* $\boldsymbol{v}^*$ *tetszőleges, csupán a* $\boldsymbol{v}^*\mathbf{A}\boldsymbol{u} \neq 0$ *feltételt kielégítő vektorok.* Ha most egy tetszőleges r-edrangú $\mathbf{A}$

mátrixból indulunk ki, azt r lineárisan független diád összegére tudjuk bontani az

$$\mathbf{A}_{k+1}=\mathbf{A}_k-\frac{\mathbf{A}_k \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{v}_k^* \mathbf{A}_k}{\boldsymbol{v}_k^* \mathbf{A}_k \boldsymbol{u}_k}$$

iteratív eljárással, ahol $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}$ és $\boldsymbol{u}_k$, $\boldsymbol{v}_k^*$ tetszőleges, csupán a

$$\boldsymbol{v}_k^* \mathbf{A}_k \boldsymbol{u}_k \neq 0$$

feltételt kielégítő vektorok. Ekkor $\mathbf{A}$ diadikus felbontását

$$\mathbf{A}=\sum_{k=1}^{r} \frac{\mathbf{A}_k \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{v}_k^* \mathbf{A}_k}{\boldsymbol{v}_k^* \mathbf{A}_k \boldsymbol{u}_k}$$

szolgáltatja. (Az $\boldsymbol{u}_k=\boldsymbol{e}_k$, $\boldsymbol{v}_k^*=\boldsymbol{e}_k^*$ választás mellett az előzőekben ismertetett diadikus felbontáshoz jutunk, lásd (7).)

Az ismertetett iteratív eljárás közvetlenül alkalmazható az $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=0$, $\varrho(\mathbf{A})=r$ egyenletrendszer megoldására. Eszerint ezen egyenletrendszer általános megoldását $\boldsymbol{x}=\mathbf{X}_r\boldsymbol{t}$ szolgáltatja, ahol $\boldsymbol{t}$ tetszőleges, $\mathbf{X}_r$ pedig egy $(n-r)$-edrangú szimmetrikus projektor, amelyet az

$$\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{X}_k-\frac{\mathbf{X}_k \boldsymbol{a}_{\nu_k} \boldsymbol{a}_{\nu_k}^* \mathbf{X}_k}{\boldsymbol{a}_{\nu_k}^* \mathbf{X}_k \boldsymbol{a}_{\nu_k}}, \quad \mathbf{X}_1=\mathbf{E}$$

iterációval nyerünk. (Az $\boldsymbol{a}_{\nu_k}^*$ vektorok $\mathbf{A}$ mátrix sorvektorai.) Azok az $\boldsymbol{a}_\mu^*\mathbf{X}=0$ egyenletek, amelyekre $\mu\neq\nu_k$, az előző egyenletek következményei és automatikusan eliminálódnak. Abból a célból, hogy az adott egyenletrendszer lineárisan független megoldásainak egy teljes rendszerét megkapjuk, meg kell határozni az $\mathbf{X}_{r+1}$ mátrix

$$\mathbf{X}_{r+1}=\mathbf{Y}\mathbf{Y}^*, \quad \mathbf{Y}=[\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_{n-r}]$$

bázisfaktorokra bontott alakját (ez legcélszerűbben a (7) diadikus felbontás segítségével valósítható meg). Ekkor, mivel $\mathbf{X}_r$ szimmetrikus projektor, az $\boldsymbol{y}_1,\ldots,\boldsymbol{y}_{n-r}$ vektorok automatikusan eleget tesznek az $\boldsymbol{y}_i^*\boldsymbol{y}_j=\delta_{ij}$ összefüggéseknek, tehát az egyenletrendszer lineárisan független megoldásainak egy ortonormált rendszerét alkotják.

A [60] dolgozatban EGERVÁRY a fenti rangcsökkentő eljárást alkalmazza homogén lineáris *diofantoszi* egyenletrendszerek megoldására. Egyetlen diofantoszi egyenlet esetén eredménye a BARNETT—MENDEL-féle megoldási formulát szolgáltatja.

A [68] dolgozatban ugyancsak a rangcsökkentő eljárás segítségével dolgozott ki egy *másik* véges iterációs módszert lineáris egyenletrendszerek megoldására. Ez a módszer lényegében abban különbözik az előzőtől, hogy itt az iterációs lépés a következő:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k - \frac{\mathbf{X}_k \mathbf{e}_{\nu_k} \mathbf{a}^*_{\mu_k} \mathbf{X}_k}{\mathbf{a}^*_{\mu_k} \mathbf{X}_k \mathbf{e}_{\nu_k}}, \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{E},$$

ahol a ν_k, μ_k indexet úgy kell megválasztani minden egyes lépésnél, hogy $\mathbf{a}^*_{\mu_k}\mathbf{X}_k\mathbf{e}_{\nu_k}$ az $\mathbf{a}^*_{\mu_k}\mathbf{X}_k$ vektornak egy 0-tól különböző eleme eleme legyen. Az $\mathbf{X}_{k+1}$ mátrix rangja $n-k$, és kielégíti az első μ_k egyenletet: $\mathbf{a}^*_1\mathbf{X}_{k+1}=0, \ldots, \mathbf{a}^*_{\mu_k}\mathbf{X}_{k+1}=0$. Továbbá, mivel $\mathbf{X}_{k+1}\mathbf{e}_{\nu_1}=0, \ldots, \mathbf{X}_{k+1}\mathbf{e}_{\nu_k}=0$, az $\mathbf{X}_{k+1}$ mátrix ν_1-ik, ..., ν_k-ik oszlopa eltűnik, a többi pedig az első k egyenlet lineárisan független megoldásrendszere. Ily módon r lépés után olyan mátrixhoz jutunk, amelyből a teljes lineárisan független megoldásrendszer közvetlenül kiolvasható, feleslegessé válik tehát az $\mathbf{X}_{r+1}$ mátrixnak a [62] dolgozatban említett diadikus felbontása. — E módszer a a PURCELL-féle vektormódszer általánosítása tetszőleges együtthatómátrixok esetére. A módszer lehetővé teszi két egyenletrendszer egyidejű megoldását is.

A [63] dolgozatban EGERVÁRY az *inverz mátrix* fogalmát tetszőleges (téglalap alakú) mátrixokra terjeszti ki és egy, az invertálandó mátrix bázisfaktorokra való bontásán alapuló eljárást ad az általánosított inverz kizárólag *racionális* műveletek segítségével történő explicit előállítására. Az általánosított invertálás vizsgálatánál az egységmátrixnak, mint az egyetlen n-edrangú nem-szinguláris projektornak a szerepét az n-dimenziós térben az n-edrendű, de tetszőleges r-edrangú *szinguláris projektorok* veszik át és az általánosított invertálás esetén azt kívánjuk, hogy *az adott mátrix az ő inverzével bármelyik oldalról szorozva egy, vele megegyező rangú projektort eredményezzen.* Az ily módon általánosított inverz mátrix racionális műveletekkel való explicit előállítását az adott mátrix bázisfaktorokra való bontása teszi lehetővé, (a baloldali tényező ugyanis balról, a jobboldali pedig jobbról invertálható). Az általános inverz előállítására vonatkozik a következő tétel: *Ha az adott r-edrangú* $\mathbf{A}$ *mátrix bázisfaktorokra bontott alakja* $\mathbf{A}=\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^*$, *akkor az* $(\mathbf{A}\mathbf{X})^2=\mathbf{A}\mathbf{X}$, *illetve* $(\mathbf{X}\mathbf{A})^2=\mathbf{X}\mathbf{A}$ *összefüggéssel definiált r-edrangú* $\mathbf{X}$ *inverz mátrix*

$$\mathbf{X}=\mathbf{Q}(\mathbf{P}^*\mathbf{A}\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{P}^*$$

alakban állítható elő, ahol $\mathbf{Q}$ *és* $\mathbf{P}^*$ *tetszőleges, csupán az* $|\mathbf{A}_2^*\mathbf{Q}|\neq 0$, $|\mathbf{P}^*\mathbf{A}_1|\neq 0$ *feltételeket kielégítő mátrix.* Abban az esetben, ha $\mathbf{Q}=\mathbf{A}_2$ és $\mathbf{P}^*=\mathbf{A}_1^*$, akkor a fenti eredmény speciális esetként kiadódik R. PENROSE egy dolgozatában közölt általánosított inverz. Nála azonban az inverz mátrix megszerkesztéséhez az invertálandó mátrix spektrálfelbontásának az ismerete szükséges. Az általánosított inverz segítségével ugyancsak lehetséges olyan lineáris egyenletrendszerek megoldásának explicit előállítása, amelyeknek együtthatómátrixa tetszőleges.

A mátrixok bázisfaktorokra való bontásának talán a legszebb alkalmazása található a [75] dolgozatban, amely egyszersmind EGERVÁRY mátrixelméleti munkásságának betetőzését jelenti abban az értelemben, hogy a mátrixelmélet egy önmagába zárt problémakörét egységes módszerrel tárgyalja és oldja meg. Ebben a dolgozatban ugyanis EGERVÁRY olyan módszert ad kvadratikus mátrixoknak JORDAN-féle normál alakra való redukálására, amely *konstruktív* abban az értelemben, hogy a *módszer* — amennyiben a sajátértékek ismeretesek — *csupán mátrixok összeadását és szorzását igényeli*, tehát megfelelő automatikus számológépen egyszerűen programozható. A módszernél lényeges szerepet játszik a mátrixoknak bázisfaktorokra való bontására szolgáló algoritmus, a módszer áttekinthetőségét pedig jelentékenyen növeli az a körülmény, hogy az adott mátrix jobb- és baloldali saját- és fővektorait, a redukció egész folyamán szimultán és szimmetrikusan használja fel. A redukciós módszer a következő két lépésből áll.

1) Az adott n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixhoz, a LAGRANGE- és az HERMITE-féle interpolációs polinomok felhasználásával, megszerkeszthetők olyan $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_m$ projektorok, amelyek a

$$\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = 0, \quad \text{ha} \quad i \neq j \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^{m} \mathbf{P}_i = \mathbf{E}$$

összefüggéseket elégítik ki. Ezeket a projektorokat $\mathbf{P}_i = \mathbf{U}_i\mathbf{V}_i^*$ alakú bázisfaktorokra bontva, közvetlenül (particionált alakban) nyerünk olyan n-edrendű $\mathbf{V}^*$ és $\mathbf{U}$ mátrixokat, amelyek egymásnak inverzei, és amelyekkel a $\mathbf{V}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ transzformációt végrehajtva

$$\langle \lambda_1\mathbf{E}_{\alpha_1} + \mathbf{N}_1,\ \lambda_2\mathbf{E}_{\alpha_2} + \mathbf{N}_2, \ldots, \lambda_m\mathbf{E}_{\alpha_m} + \mathbf{N}_m \rangle,$$

$$\mathbf{N}_k = \mathbf{V}_k^*(\mathbf{A} - \lambda_k\mathbf{E}_n)\mathbf{U}_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m$$

alakú diagonális hipermátrixot nyerünk. Itt $\mathbf{E}_\alpha$ α-rendű egységmátrix, és $\mathbf{N}_k$ a λ_k sajátvektorhoz tartozó nilpotens komponens.

2) Adott α rendű és β indexű $\mathbf{N}$ nilpotens mátrixhoz egyszerű algoritmussal szerkeszthetők olyan

$$\begin{bmatrix} y^*\mathbf{N}^{\beta-1} \\ y^*\mathbf{N}^{\beta-2} \\ \vdots \\ y^* \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad [x, \mathbf{N}x, \ldots, \mathbf{N}^{\beta-1}x]$$

vektorok, amelyek $\beta < \alpha$ esetben kiegészíthetők az α-dimenziós vektortér biortogonális bázisaivá. Ha ezzel a biortogonális rendszerrel hasonlósági transzformációt végzünk, akkor az $\mathbf{N}$ nilpotens mátrix az

$$\mathbf{N} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{J}_\beta & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_1 \end{bmatrix}$$

alakú diagonális hipermátrixra redukálódik, ahol $\mathbf{J}_\beta$ β-rendű Jordan-blokk és $\mathbf{N}_1$ egy $\alpha-\beta$-rendű nilpotens mátrix, amely a fenti eljárással tovább redukálható.

Az eddigiektől némileg eltérő problémakört tárgyal az [53] és [54] dolgozat. Ezekben az a törekvés jut kifejezésre, hogy a közönséges mátrixokra vonatkozó fogalmak és számítási módszerek *páronként felcserélhető blokkokból álló hipermátrixokra* kiterjeszthetők legyenek. Ennek a jelentősége abban áll, hogy egy mn-rendű mátrixszal való műveleteket visszavezeti m-edrendű és n-edrendű mátrixokkal való műveletekre. Ilyen irányú régebbi eredmények a direkt szorzat *sajátértékeire* vonatkoznak, valamint olyan hipermátrixok *sajátértékeire*, amelyeknek a blokkjai ugyanazon $\mathbf{A}$ mátrix $f_{ij}(\mathbf{A})$ függvényei. Ebben a dolgozatában EGERVÁRY egyrészt kiterjeszti a fenti típusú hipermátrixok sajátértékeire vonatkozó eredményeket a *sajátvektorokra* is, másrészt a *determináns* és *adjungált* fogalmát, valamint kiszámításuk módját meghatározza felcserélhető blokkokból álló hipermátrixokra. A dolgozat lényeges tételei a következők:

1. tétel. *Ha* $[\mathbf{A}_{ij}]$ *hipermátrix m-edrendű* $\mathbf{A}_{ij}$ *blokkjai páronként felcserélhetők, akkor* $[\mathbf{A}_{ij}]$ *determinánsa, illetve adjungáltja a következő képletekkel oldható meg:*

$$\det[\mathbf{A}_{ij}] = \det(\mathbf{det}[\mathbf{A}_{ij}]),$$

$$\operatorname{adj}[\mathbf{A}_{ij}] = \mathbf{adj}[\mathbf{A}_{ij}] \cdot \{\operatorname{adj}(\mathbf{det}[\mathbf{A}_{ij}]) \cdot \times \mathbf{E}_n\},$$

ahol

$$\mathbf{det}[\mathbf{A}_{ij}] = \sum_{(\nu)} \pm \mathbf{A}_{1\nu_1}\mathbf{A}_{2\nu_2} \dots \mathbf{A}_{n\nu_n}$$

és $\mathbf{adj}[\mathbf{A}_{ij}]$ *olyan hipermátrixot jelent, amelynek blokkjai ugyanolyan módon függnek az* $\mathbf{A}_{ij}$ *blokkoktól, mint ahogy* $\operatorname{adj}[a_{ij}]$ *közönséges adjungált elemei függnek az* a_{ij} *skalár elemektől.*

2. tétel. *Ha* $\mathbf{A}$ *szimmetrikus (hermitikus) m-edrendű mátrix, amelynek sajátértékei* $a_1, a_2, \dots, a_m$ *és ha* $f_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ *a valós x változónak olyan,* — egyébként tetszőleges — *polinomjai,*

amelyeknek egyedül az $f_{ji}(x)=f_{ij}(x)$ *feltételt kell kielégíteniök, akkor az* $\mathbf{A}_{ij}=f_{ij}(\mathbf{A})$ *blokkokból álló* $[\mathbf{A}_{ij}]$ *hipermátrix felbontását*

$$[\mathbf{A}_{ij}]=\mathbf{T}\langle\lambda_{11},\ldots,\lambda_{1n},\lambda_{21},\ldots,\lambda_{2n},\ldots,\lambda_{m1},\ldots,\lambda_{mn}\rangle\mathbf{T}^*;\ \mathbf{T}^*\mathbf{T}=\mathbf{E}_{mn}$$

szolgáltatja, ahol a λ_{ij} *sajátértékek és a*

$$\mathbf{T}=\langle\overset{1}{\breve{\mathbf{U}}},\overset{2}{\breve{\mathbf{U}}},\ldots,\overset{n}{\breve{\mathbf{U}}}\rangle\mathbf{P}\langle\mathbf{V}_1,\mathbf{V}_2,\ldots,\mathbf{V}_m\rangle$$

transzformáló mátrix tényezői az

$$\mathbf{A}=\mathbf{U}\langle a_1,a_2,\ldots,a_m\rangle\mathbf{U}^*$$

$$[f_{ij}(a_k)]=\mathbf{V}_k\langle\lambda_{k1},\lambda_{k2},\ldots,\lambda_{kn}\rangle\mathbf{V}_k^*,\qquad k=1,2,\ldots,m$$

spektrálfelbontásból nyerhetők, $\mathbf{P}$ *pedig olyan permutáló mátrix, amely az*

$$(11)(12)\cdots(1m)(21)(22)\cdots(2m)\cdots(n1)(n2)\cdots(nm)$$

alakban rendezett számpárok sorozatát

$$(11)(21)\cdots(n1)(12)(22)\cdots(n2)\cdots(1m)(2m)\cdots(nm)$$

sorozatba transzformálja. Ekkor $[\mathbf{A}_{ij}]$ *sajátvektorait* $\mathbf{T}$ *oszlopai adják.*

A 2. tételnek szimmetrikus $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokból alkotott direkt szorzatára vonatkozó $\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B}=[\mathbf{A}b_{ij}]$ speciális esetét érdemes külön megfogalmazni:

$\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B}$ sajátértékei az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sajátértékeiből alkotott a_ib_j szorzatok, $\mathbf{A}\cdot\times\mathbf{B}$ sajátvektorai pedig az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sajátvektoraiból alkotott $\boldsymbol{u}_i\cdot\times\boldsymbol{v}_j$ direkt szorzatok.

A direkt szorzat fogalma alkalmas segédeszköznek bizonyult különféle szabályos szerkezetű mechanikai rendszerek matematikai vizsgálatánál. A rácsdinamikában olyan részecskéknek a rendszerét vizsgálják, amelyek egyensúlyi helyzetükben szabályos rácsot képeznek, s minden egyes részecskére a legközelebbi szomszédja gyakorol hatást, amely esetleg egy rögzített peremrészecske is lehet. A részecskékből alkotott véges rács normál rezgéseinek az ismerete elsőrendű fontosságú az anyag korpuszkuláris elméletében. A 2. tétel alkalmazása lehetővé teszi, hogy a kerület mentén rögzített két- és háromdimenziós tömegpontrács normál rezgéseit is meghatározzuk. Az eredmény a következő: a két- vagy háromdimenziós rács sajátvektorai az egydimenziós „élrácsok" sajátvek oraiból alkotott direkt szorzatok, a frekvenciák négyzete pedig az egydimenziós élrácsok frekvenciáinak négyzetösszege.

A felcserélhető blokkokból álló hipermátrixokra vonatkozó eredményeinek felhasználásával a [74] és [77] dolgozatban EGERVÁRY egy jól programozható módszert dolgozott ki a *tetszőleges alakú tartományokra* vonatkozó POISSON-féle differenciaegyenlet megoldására. Tudvalevő, hogy a matematikai fizikában előforduló parciális differenciálegyenletek (POISSON-egyenlet, biharmonikus differenciálegyenlet, stb.) numerikus megoldásának sokszor használt módszere az úgynevezett *rácsmódszer.* Ennek alkalmazása esetén a feladat egy sok ismeretlenes lineáris algebrai egyenletrendszer megoldására vezet. Téglalap alakú tartományok esetén ennek az egyenletrendszernek az együtthatómátrixa felcserélhető blokkokból álló hipermátrix lesz, amelynek invertálása az [53] dolgozat eredményeinek az alapján megoldottnak tekinthető. Tetszőleges (rácspontokból álló) tartomány esetén EGERVÁRY módszerének az alapgondolata a következő: Bármely (rácspontokból álló) L tartomány beágyazható egy T téglalap alakú tartományba, az L-re vonatkozó differenciaegyenlet pedig a T-re vonatkozó differenciaegyenlettől csak abban különbözik, hogy a kerületi feltételek megváltoznak. Ez gyakorlatilag annyit jelent, hogy a T tartományhoz tartozó — ismertnek tekinthető reciprokkal bíró — együtthatómátrix egy *minormátrixát* kell invertálni. EGERVÁRY bebizonyította, hogy *ha egy mátrix reciprokából a* (7) *összefüggésnek megfelelően egy diádot levonunk, akkor a kapott mátrix csupa* 0 *elemet tartalmazó sorának és oszlopának elhagyásával nyert mátrix nem más, mint az eredeti mátrix megfelelő sorának és oszlopának elhagyásával adódó minormátrix reciproka.*[1] A diádok leválasztásának iterálásával tehát a T tartományhoz tartozó együtthatómátrix inverzéből tetszőleges L tartományhoz tartozó együtthatómátrix inverze meghatározható, mégpedig annyi lépésben, ahány határ-rácspontja az L tartománynak nem közös a T tartomány határával.

A mátrixelmélet alkalmazásait illetően meg kell említeni az [59] dolgozatot, amelynek az ad érdekességet, hogy sztatikai feladatok megoldása során olyan lineáris egyenletrendszerekre jut, amelyek együtthatómátrixai lényegileg ugyanolyan típusúak, mint amelyekkel először SCHOLTZ és HUNYADI munkáikban foglalkoztak.

[1] EGERVÁRYtól függetlenül ugyanerre az eredményre jutott — más bizonyítással — RÓZSA PÁL és N. SIEBER. Lásd: RÓZSA P.: *A mátrixelmélet néhány új tételéről és azok alkalmazásáról lineáris differencia- és differenciálegyenletek megoldására.* Kandidátusi disszertáció, Budapest 1956. és П. Рожа: „О применении клеточных матриц в меланике кориуску лярных систем“, Успехи математических наук **14** (1959) вып. 4 (88) 207—211, valamint H. STENKER—N. SIEBER: „Ein Reduktionssatz über Umkehrmatrizen und seine Anwendung auf ein Beispiel aus des Statik“, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar* **6** (1958/59) 105—117.

A feladat egy háromszöget alkotó három rúdból, illetve egy tetraédert alkotó hat rúdból álló rácsos szerkezet rúderőinek a meghatározása, ha a szerkezetet a csuklókban egyensúlyban levő erőrendszer terheli.

A [64] és [65] dolgozat a *függőhidak* általános elméletét tárgyalja. A finitizált lánchídmodell egyensúlyi egyenletrendszerét mátrixelméleti segédeszközökkel állítja fel és oldja meg. Ezzel egyidejűleg azt a tényt is kellő megvilágításba helyezi, hogy a lineáris differenciálegyenletek elméletéből ismert Green-függvénynek (hatásfüggvénynek), illetve a Green-függvény bilineáris sorfejtésének, finit analogonokként, a fenti egyenletrendszer koefficiensmátrixának *inverze*, illetve annak *spektrálfelbontása* felelnek meg. EGERVÁRY ezen eredményeihez kapcsolódik S. O. ASPLUNDnak a *Mathematica Scandivanica* 7. kötetében (1959) megjelent „Finite boundary value problems solved by Green's matrix" című dolgozata.

Meg kell még említeni, hogy EGERVÁRY rendkívüli ötletgazdagságáról nemcsak dolgozatainak nagy száma, valamint egyetemi előadásainak egyéni színekkel való tarkítása tanúskodik, hanem az a szerep is, amelyet számos feladat kitűzése, illetve megoldása révén a matematikai gondolkodásra való nevelés terén betöltött. Rovatvezetője volt egy ideig a *Matematikai és Fizikai Lapok* „Kitűzött Feladatok" rovatának, tevékenyen részt rett a „*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*" feladat-rovatában, majd a *Matematikai Lapok* hasonló rovatában. Nevéhez számos érdekes és ötletes feladat kitűzése, illetve feladat-megoldás fűződik, beleértve tanulóversenyeinket is.

Ez az ismertetés természetesen nem tarthat teljességre számot. Igyekeztem azonban művein keresztül bemutatni EGERVÁRY rendkívül sokoldalú, színes matematikai egyéniségét. Munkássága, mely hosszú időn át termékenyítőleg fog hatni a fiatalabb matematikusnemzedékre, szolgáljon tanulságul mindnyájunknak: volt munkatársainak, tanítványainak, valamennyi barátjának.

Neumann János munkássága az algebrában és számelméletben

Írta: Rédei László

Neumann János korunk egyik legkiválóbb matematikusa volt. 1957-ben bekövetkezett halála óta lapunk hasábjain több cikk ismertette munkásságát rendre az operátorelmélet (és quantummechanika), az elektronikus számológépek elmélete, a geometria s az axiomatikus halmazelmélet terén. Mindezen tudományágakban egyenként kiérdemelte a „nagy" jelzőt, rendkívüli nagysága pedig abban áll, hogy önmagában egyesíteni tudta szinte az egész matematikát, beleértve az algebrát és számelméletet is.

Steinitz előtt szokás volt az algebrát a matematika egyéb területei segédtudományának tekinteni. Bár az algebra azóta önálló tudománnyá vált, ezzel segédszerepe nem csökkent, hanem inkább megnövekedett. Így Neumann János egész munkássága is oly nagy mértékben használ algebrai apparátust, hogy őt már ezért jelentős algebristának kell tartani, ezenfelül azonban, bár viszonylag kisebb számmal, igen nevezetes tisztán algebrai és számelméleti kutatásokat is végzett. E kutatásai is igen széles skálát mutatnak, mégpedig a következő területekre esnek: algebrai egyenletek gyökelhatárolása, gyűrűelmélet, testelmélet, topologikus csoportok elmélete, hálóelmélet, algebrai számelmélet, geometriai számelmélet. Az alábbiakban röviden ismertetem Neumann Jánosnak idevágó munkásságát, mellőzve ennek a topologikus csoportok elméletébe tartozó részét, amelyekről más ismertetés fog szólni.

Neumann Jánosnak első dolgozata, amelyet Fekete Mihállyal közösen írtak: „Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome" (Jahresber. D. M. V. 31 (1922), 125—138), gyökelhatárolási kérdésekkel foglalkozik. Legyen n adott természetes szám. Jelöljön $f(z)$ valamely $z^n+\cdots+a_n$ komplex együtthatós polinomot. Legyen továbbá E véges ponthalmaz a komplex számsíkon. A $f(z)$ polinomot E-hez tartozó (n-edfokú) Csebicsev-féle polinomnak nevezzük, ha $|f(z)|$-nek E halmazon felvett maximuma minimális. Egy ilyen Csebicsev-féle polinomot $f_E(z)$-vel jelölök. De la Vallée Poussin szerint $f_E(z)$ létezik, s ha E legalább n pontból áll, egyértelműen meghatározott. A következők jó áttekintése végett $f(z)$ polinomot speciálisnak nevezem, ha együtthatói valósak (azaz zérushelyei — multiplicitásukat is figyelembe véve — a valós tengelyre szimmetrikusan helyezkednek el), továbbá hasonlóan $f_E(z)$ polinomot speciálisnak nevezem, ha E a valós tengelyre szimmetrikus. Gauss tétele szerint az $f'(z)$ zérushelyei az $f(z)$ zérushelyei halmazának konvex burkába esnek. Ehhez csatlakozik Jensen tétele, amely szerint speciális $f(z)$ esetén az $f'(z)$ minden zérushelye egy-egy olyan körlemezre esik, amelynek átmérője $f(z)$-nek két konjugált zérushelyét köti össze. E két tételnek analogonjai érvényesek $f_E(z)$-re nézve. Mégpedig Fejér Lipót szerint bármely $f_E(z)$ zérushelyei az E konvex burkában fekszenek, hacsak E legalább n pontból áll. Mármost Fekete és Neumann tétele hasonlóan egészíti ki Fejér tételét, mint ahogy Jensen tétele kiegészíti Gauss tételét. Mégpedig érvényes: Bármely speciális $f_E(z)$ zérushelyei egy-egy olyan körlemezre esnek, amelynek átmérője E-nek két konjugált pontját köti össze.

Neumann Jánosnak egyetlen dolgozata van az algebrai számelmélet köréből. Ismeretes, hogy a 19. század matematikai kutatásainak egyik legjelentősebb törekvése volt az algebrai számelmélet megalapozása. Kummer a róla nevezett ideális számok bevezetésével elintézte a körosztási testek esetét. Ez vezette Dedekindet az ideálfogalom megalkotására, amelynek segítségével 1877-ben sikerült az algebrai számelméletet megalapoznia. A feladatot vele majdnem egyidőben Kronecker is megoldotta, azonban a Dedekind-féle ideálelmélet bizonyult alkalmasabbnak. Újabb forradalmi fejlődést jelentett a Hensel-féle p-adikus szám fogalma, s ezzel együtt az algebrai számelméletnek új alapokra helyezése. A Dedekind- és Hensel-féle elméleteknek bizonyos értelemben való szintézisét végezte Prüfer 1925-ben az általa megalkotott ideális számok segítségével s már a következő évben megjelent Neumann „Zur Prüferschen Theorie der idealen Zahlen" (Acta Sci. Math. Szeged, 2 (1926), 193—227) dolgozata, amelyben Prüfer elméletét jelentősen leegyszerűsíti, s kibővíti, egyben a valós számok Cantor-féle elméletéhez, vagy még inkább a Hensel-féle elméletnek Kürschák- ill. Bauer-féle megalapozásához közelebb hozza. Meg kell azonban jegyezni, hogy azóta az algebrai számelmélet fejlődése más utat vett, mégpedig teljesen beleolvadt a testek értékeléselméletébe (l. Hasse, Zahlentheorie, Berlin 1949.).

A korszakalkotó Steinitz-féle testelmélet (1910) egyik alaptétele a transzcendens testbővítésekről szól, amely kimondja a transzcendenciabázis existenciáját s számosságának invarianciáját. Ennek a tételnek speciálisan a valós számok testére vonatkozó része már Lebesguetől (1907) származik. Neumann „Ein System algebraisch unabhängiger Zahlen" (Math. Ann. 99 (1928), 134—141) dolgozatában explicite megadja a valós számok testének következő, kontinuum számosságú algebrailag független elemeit:

$$A_\varrho = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{2^{[\varrho\nu]} - 2^{\nu^2}},$$

ahol $[x]$ az entier-függvény, s ϱ befutja a pozitív számok halmazát. Megjegyzi, hogy ezek az A_ϱ számok nem alkotnak transzcendenciabázist, ilyennek explicit megadása nem is remélhető.

Minkowski híres tétele szerint $n\,(\geqq 1)$ számú

$$l_i(x) = l_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

$D \neq 0$ determinánsú valós homogén lineáris polinom és $|D|$ szorzatú $c_1, \ldots, c_n$ pozitív számok esetén az

$$|l_i(x)| \leqq c_i \qquad (i=1, \ldots, n)$$

egyenlőtlenségrendszernek van nemtriviális (azaz nem csupa 0-ból álló) diophantikus megoldása. Szintén Minkowski határátmenettel kimutatta, hogy a tétel igaz marad, ha a rendszerben $n-1$ számú "$=$" jelt törlünk, amiért $n \geqq 2$ esetén a

$$\left| \prod_{i=1}^{n} l_i(x) \right| < |D|$$

egyenlőtlenségnek szintén van nemtriviális diophantikus megoldása. Ezt az utóbbi állítást Neumann „Zum Beweise des Minkowskischen Satzes über Linearformen" (Math Zeitschr. 30 (1929), 1—2) dolgozatában egyszerű megjegyzéssel (határátmenet nélkül) bizonyítja. Elegendő ugyanis e célból Minkowski eredeti tételében c_1-et az $|l_1(x)|$ függvénynek az egész helyekhez tartozó értékkészletén kívül választani (ami $n \geqq 2$ esetén lehetséges). Teljesség kedvéért megjegyzem, hogy Minkowskinak a fenti egyenlőtlenségrendszerben (bizonyos általa megnevezett triviális kivételes esetek mellőzése után) az összes "$=$" jelek törölhetőségére vonatkozó híres sejtésére Neumann gondolata már hatástalan, hanem ezt a sejtést igen nagy apparátussal Hajós György bizonyította.

Neumann Jánosnak P. Jordan és E. Wigner szerzőkkel közös „On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism" (Ann. Math. 35 (1934), 29—64) dolgozata tekintettel kvantummechanikai alkalmazásokra azokkal a valós számok teste fölött formálisan valós végesrangú kommutatív nemasszociatív algebrákkal foglalkozik, amelyekben $a^{\mu}a^{\nu}=a^{\mu+\nu}$ és $(a^2b)a=a^2(ba)$ feltételek teljesülnek. Mint egyik főeredmény kiderül, hogy e két tulajdonság (a többi tulajdonság feltételezése mellett) ekvivalens. Továbbá sikerül a szóbanforgó algebrák teljes leírása. Mégpedig ezek olyan mátrixalgebrák, amelyekben a mátrixok közönséges $A \cdot B$ szorzása helyett az

$$A B=\frac{1}{2}(A \cdot B+B \cdot A)$$

úgynevezett kváziszorzás (vagy Jordan-féle szorzás) érvényes, s a mátrixok elemei valós számok, kivéve egyetlen esetet, amelyben 3×3 típusú Hermite-féle mátrixokról van szó s az elemek Cayley-féle számok. A. A. Albert "On a certain algebra of quantum mechanics" (Ann. Math. 35 (1934), 65—73) csatlakozó dolgozatában kimutatja, hogy a mondott kivétel tényleges, azaz olyan esetről szól, amely nem izomorf a többi szóban forgó algebra egyikével sem.

Neumannak egyik legjelentősebb algebrai vizsgálatáról szól „On regular rings" (Proc. Nat. Acad. U. S. A. 22 (1936), 707—713) dolgozata. Ebben bevezeti a „Neumann-féle regularitás" fogalmat, mégpedig egy a gyűrűelemet regulárisnak nevez, ha az $axa=a$ egyenlet (a gyűrűben) megoldható. (Speciálisan ferdetestnek minden eleme reguláris.) Továbbá egy R egységelemes gyűrűnek két balideálját egymás inverzének nevezi, ha metszetük 0, egyesítésük R, s magát a gyűrűt regulárisnak nevezi, ha minden balideálja reguláris. (Ez a hálóelmélet nyelvén azt jelenti, hogy a balideálok hálója komplementumos.) Kimutatja, hogy (egységelemes gyűrűkön belül) a következő feltételek ekvivalensek: 1. A gyűrű reguláris, 2. Minden jobbideálnak van inverze („dualitás"), 3. Minden féloldali főideál egy idempotens elemmel generálható, 4. A gyűrű minden eleme reguláris. Továbbá kimutatja, hogy egységelemes minimumfeltételes gyűrűk esetén a regularitás és féligegyszerűség ekvivalens tulajdonságok. A Neumann-féle regularitás azóta sok vizsgálat tárgyát képezi. Kovács László „A note on regular rings" (Publ. Math. Debrecen 4 (1955—56), 465—468) többek között kimutatta, hogy egy gyűrű akkor és csak akkor Neumann-reguláris, ha bármely B balideálra és J jobbideálra $JB=J \cap B$. (Megjegyzendő, hogy $\subseteq$ minden gyűrűben érvényes.)

Neumann Jánosnak F. J. Murray-vel a metrikus gyűrűkről közösen írt „On rings of operators, IV" (Ann. Math. 44 (1943), 716—808) nagy dolgozatában segédeszközként szerepel egy példa olyan megszámlálható csoportra, amelyben az egységelem kizárása után minden elem konjugáltjainak osztálya végtelen. E példát szerző általánosította.

A hálóelméletben Neumann nem végzett öncélú vizsgálatokat, hanem főleg a folytonos geometriákról és a reguláris gyűrűkről folytatott vizsgálatai tartalmaznak olyan segédvizsgálatokat, amelyek hatásosan elősegítették a hálóelmélet új fejlődését. Így például Neumann nyomán alakult ki hálóban (s általánosabban a részben rendezett halmazokban) a centrum fogalma, továbbá másokkal egyidőben, de tőlük függetlenül, hálóban alkalmazta az Urysohn-féle csillag-konvergencia fogalmát. Ő vette észre, hogy minden moduláris komplementumos háló relatív komplementumos, amely tételét újabban Szász Gábor élesítette. Szintén Neumann állapította meg, hogy Boole-algebrákban érvényes a végtelen disztributivitás.

Ceva és Menelaos tételeinek általánosításairól

MOLNÁR FERENC

1. Ismeretes a síkgeometriából a következő két tétel:

CEVA TÉTELE. *Legyenek A_1', A_2', A_3' a háromszög A_1, A_2, A_3 csúcsaival szemközti oldalegyeneseknek a csúcsoktól különböző pontjai. Az $A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3'$ egyenesek akkor és csak akkor mennek át egy közös (végesben levő vagy végtelen távoli) ponton, ha*

$$(A_1A_2A_3')(A_2A_3A_1')(A_3A_1A_2') = 1.$$ [1]

MENELAOS TÉTELE. *Az előző tétel jelölései mellett az A_1', A_2', A_3' pontok akkor és csak akkor vannak egy egyenesen, ha*

$$(A_1A_2A_3')(A_2A_3A_1')(A_3A_1A_2') = -1.$$

Több szerző foglalkozott a fenti tételek térbeli általánosításaival, így N. A. KOLMOGOROV [1], P. COUDERC és A. BALLICCIONI [2], míg Z. NÁDENÍK [3] és N. M. BESZKIN [4] e tételek n-dimenziós általánosításait vizsgálták. A jelen dolgozatban összefoglaljuk és további tételekkel egészítjük ki Ceva és Menelaos tételeinek eddig ismert n-dimenziós általánosításait, majd a kapott eredményeket a tetraéderre alkalmazva, felhasználjuk azokat a tetraéder néhány nevezetes egyenesének és síkjának vizsgálatára.

2. Ceva és Menelaos tételeinek n-dimenziós általánosításaihoz szükségünk van mindenekelőtt a háromszög n-dimenziós analogonjának, az n-dimenziós szimplexnek a fogalmára. *Szimplexet* alkot az n-dimenziós euklideszi térben $n+1$ olyan pont, amelyek nincsenek egy hipersíkban ($n-1$-dimenziós altérben). A pontok a szimplex *csúcsai*, a csúcsokat összekötő egyenesek a szimplex *élei*.

[1] (MNO) az M, N, O kollineáris pontok osztóviszonyát jelöli, azaz $(MNO) = \frac{MO}{ON}$, ha O végesben levő pont (MO és ON előjeles távolságok), $(MNO) = -1$, ha O végtelen távoli pont.

A szimplex valamelyik csúcsával szemközti *határoló lapnak* nevezzük a többi csúcs által meghatározott $n-1$-dimenziós szimplexet, az őt tartalmazó hipersík a szimplex említett csúcsával szemközti *lapsík*. — A fenti értelmezés szerint a háromszög kétdimenziós, a tetraéder háromdimenziós szimplexnek tekinthető.

Vegyünk fel az $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ csúcsokkal rendelkező n-dimenziós szimplex, $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ mindegyik A_iA_j élegyenesén egy-egy, a csúcsoktól különböző, de különben tetszőleges (végesben levő vagy végtelen távoli) pontot és jelöljük ezeket A_{ij}-vel $(i, j = 1, 2, \ldots, n+1;\ A_{ij} \equiv A_{ji})$.[2] Azt mondjuk, hogy a kapott $\binom{n+1}{2}$ számú pont *Ceva-*, ill. *Menelaos-elhelyezkedésű*, ha kiválasztva közülük bármelyik $A_iA_jA_k$ háromszöglapon levő három pontot, azokra Ceva, ill. Menelaos tétele érvényes (azaz a pontokat a szemközti háromszögcsúcsokkal összekötő egyenesek egy ponton mennek át, ill. a pontok egy egyenesen vannak).

A Ceva- és Menelaos-elhelyezkedésű pontok fogalmának felhasználásával könnyen megadhatjuk a bevezetésben említett tételek következő egyszerű n-dimenziós általánosításait:

A) n-DIMENZIÓS CEVA-TÉTEL (l. BESZKIN [4]). Ha az A_{ij} pontok Ceva-elhelyezkedésűek, akkor mindegyik $A_iA_jA_k$ háromszögben ezeket a pontokat a szemközti háromszögcsúcsokkal összekötő egyenesek egy A_{ijk} ponton *(Ceva-pont)* mennek át (A_{ij} az A_iA_j egyenes Ceva-pontja). Továbbá bármelyik $A_iA_jA_kA_l$ tetraéderben a kapott A_{ijk} pontokat a szemközti A_l csúccsal összekötő négy egyenes páronként metszi egymást (ugyanis az A_lA_{ijk} és A_iA_{jkl} egyenesek benne vannak az A_i, A_l, A_{jk} pontok által meghatározott síkban), következésképpen egy közös A_{ijkl} Ceva-ponton mennek át (ellenkező esetben ugyanis az egyenesek a tetraéder csúcsaival együtt egy síkban lennének, ami lehetetlen). Az eljárást tovább folytatva, végül eljutunk a szimplexnek egyetlen $P \equiv A_{12\ldots n+1}$ Ceva-pontjához. Bebizonyítható [4], hogy ha bárhogyan is bontjuk fel az $n+1$ számot pozitív egész p és q számok összegére, az $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_p}$ rész-szimplex Ceva-pontját az eredeti $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ szimplexre kiegészítő $A_{j_1}A_{j_2}\ldots A_{j_q}$ rész-szimplex Ceva-pontjával összekötő egyenes átmegy a P ponton (speciálisan: a szimplex csúcsait a szemközti lapsíkok Ceva-pontjaival összekötő egyenesek átmennek a P ponton). — Megfordítva, ha a P pont nincs rajta az $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ szimplex egyik határoló lapsíkján sem, akkor a P

[2] A következőkben — ha az ellenkezőjét külön nem tesszük fel — az összes előforduló pontok — a szimplex csúcsai kivételével — végtelen távoli pontok is lehetnek.

pontot a szimplex csúcsaival összekötő egyeneseknek a szemközti lapsíkokkal alkotott metszéspontjaiból mint Ceva-pontokból kiindulva, a fenti eljárás megfordításával a szimplex élein levő, egyértelműen meghatározott A_{ij} Ceva-elhelyezkedésű pontokhoz jutunk.

Az elmondottakból közvetlenül adódnak Ceva tételének tetraéderre vonatkozó következő általánosításai:

A1) Legyenek A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 a tetraéder A_1, A_2, A_3, A_4 csúcsaival szemközti lapsíkoknak az élegyenesekre nem illeszkedő pontjai. Az $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3, A_4A'_4$ egyenesek akkor és csak akkor mennek át egy közös ponton, ha az összes háromszöglapon levő A'_j pontokat a háromszögcsúcsokkal összekötő $A_iA'_j$ $(i, j = 1, 2, 3, 4;\ i \neq j)$ egyenesek a tetraéder élegyeneseit hat Ceva-elhelyezkedésű pontban metszik.

A2) A tetraéder szemközti élegyenesein levő A_{ij} pontokat összekötő egyenesek akkor és csak akkor mennek át egy közös ponton, ha az A_{ij} pontok Ceva-elhelyezkedésűek. (L. [2].) — (Itt csak a feltétel elegendő volta következik a fentiekből, a feltétel szükséges volta viszont egyszerű sztereometriai okoskodással adódik.)

B) Ceva tételének fenti n-dimenziós általánosításából egyszerűen adódik a következő tétel:

Ha az A_{ij} pontok Ceva-elhelyezkedésűek, és így a szimplexnek van egyetlen P Ceva-pontja, akkor bárhogyan is bontjuk fel az $n+1$ számot pozitív egész p és q számok összegére, az $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_p}$ rész-szimplex Ceva-pontja és a kiegészítő szimplex $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_q}$ csúcsai által meghatározott q-dimenziós sík tartalmazza a P pontot. (speciálisan: bármelyik A_{ij} pont és az A_iA_j élen kívüli $n-1$ számú $A_k (\neq A_i, A_j)$ csúcs által meghatározott hipersíkok átmennek a P ponton). — A bizonyításhoz elég annyit megjegyezni, hogy a fenti q-dimenziós sík tartalmazza az $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_p}$ és $A_{j_1}A_{j_2}\ldots A_{j_q}$ rész-szimplexek Ceva-pontjait összekötő egyenest, ami viszont A) szerint átmegy a P ponton.

Megfordítva, ha az A_{ij} pontokat az $A_k (\neq A_i, A_j)$ csúcsokkal összekötő hipersíkok egy közös P ponton mennek át, amely nincs rajta a szimplex egyik határoló lapsíkján sem, akkor az A_{ij} pontok Ceva-elhelyezkedésűek. — Ugyanis bármelyik rögzített A_k csúcsot tartalmazó hipersíkoknak az A_kP egyenes közös egyenese, így azok tartalmazzák az A_kP egyenesnek a szemközti lappal alkotott A'_k metszéspontját. A kapott $A_kA'_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ egyeneseknek P közös pontja, így A) szerint az A'_k pontokból mint Ceva pontokból kiindulva a szimplex élein levő A'_{ij} Ceva-elhelyezkedésű pontokhoz jutunk. De akkor tételünk első részéből kifolyólag az $A_1\ldots A_{i-1}A'_{ij}A_{j+1}\ldots A_{n+1}$ hipersík tartalmazza a P pontot. Másrészt viszont a feltevés szerint P az $A_1 \ldots A_{i-1} A_{ij} A_{j+1} \ldots A_{n+1}$ hipersíknak is pontja, következésképpen $A_{ij} \equiv A'_{ij}$, mint az $A_1 \ldots A_{i-1} P A_{j+1} \ldots A_{n+1}$ hipersíknak az $A_i A_j$ élegyenessel való egyetlen közös pontja, vagyis az A_{ij} pontok Ceva-elhelyezkedésűek.

A most bizonyított tétel tetraéder esetében a következőképpen szól:

B1) A tetraéder éleit a szemközti élegyenesek A_{ij} pontjaival összekötő hat síknak akkor és csak akkor van közös pontja, ha az A_{ij} pontok Ceva-elhelyezkedésűek.

C) n-DIMENZIÓS MENELAOS-TÉTEL. Az A_{ij} pontok akkor és csak akkor tartoznak ugyanazon hipersíkhoz, ha Menelaos-elhelyezkedésűek. — (A bizonyításra vonatkozólag l. BESZKIN [4].)

Tetraéderre kimondva:

C1) Az A_{ij} pontok akkor és csak akkor vannak egy síkban, ha Menelaos-elhelyezkedésűek.

3. Ceva és Menelaos tételeinek előző, csak helyzetgeometriai fogalmakat használó általánosításain túlmenően megadható ezen tételeknek olyan közös általánosítása is, melyben osztóviszonyszorzat szerepel:

1. TÉTEL. *Ha az n-dimenziós szimplex élegyenesein elhelyezkedő A_{ij} pontok Ceva-, ill. Menelaos-elhelyezkedésűek, akkor az élekből bárhogyan kiválasztott, a szimplex összes csúcsait tartalmazó zárt $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ n-dimenziós $n+1$-szögre fennáll*

$$\Pi_n = (A_1 A_2 A_{12})(A_2 A_3 A_{23}) \cdots (A_{n+1} A_1 A_{n+1,1}) = 1,$$

ill.

$$\Pi_n = (A_1 A_2 A_{12})(A_2 A_3 A_{23}) \cdots (A_{n+1} A_1 A_{n+1,1}) = (-1)^{n+1}.$$

Megfordítva, ha n páros és az A_{ij} pontokra $\Pi_n = 1$, akkor a pontok Ceva-elhelyezkedésűek, ha $\Pi_n = -1$, akkor Menelaos-elhelyezkedésűek; ha viszont n páratlan és $\Pi_n = 1$, akkor az A_{ij} pontok Ceva- vagy Menelaos-elhelyezkedésűek. (V. ö. NÁDENÍK [3].)

BIZONYÍTÁS. Ha az A_{ij} pontok Ceva-elhelyezkedésűek, akkor az előzőkben említett eljárással eljuthatunk a szimplex egyetlen P Ceva-pontjához. A P pontnak a szimplexre vonatkozó baricentrikus koordinátáit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$-gyel jelölve,[3] a súlypont értelmezése

[3] A síkbeli baricentrikus koordináták mintájára értelmezhetjük az n-dimenziós euklideszi térben a P pontnak egy megadott szimplexre vonatkozó baricentrikus koordinátáit: $P[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}]$, ha az α_i súlyokkal súlyozott A_i szimplexcsúcsok súlypontja P. Minden pontnak konstans szorzótól eltekintve egy és csak egy baricentrikus koordináta-$n+1$-ese van. Végesben levő pontra $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1} \neq 0$, végtelen távoli pontra $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n+1} = 0$.

szerint $(A_iA_jA_{ij})=\frac{\alpha_j}{\alpha_i}$, ahonnan

$$\Pi_n=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\cdots\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}=1.$$

Ha viszont az A_{ij} pontok Menelaos-elhelyezkedésűek, akkor meghatározva minden élegyenesen az A_{ij} pontnak az A_i és A_j pontokra vonatkozó A'_{ij} harmonikus társát, $(A_iA_jA_{ij})=-(A_iA_jA'_{ij})$ miatt Ceva-elhelyezkedésű pontokhoz jutunk, amelyekből kiindulva ismét eljuthatunk a szimplex egyetlen P Ceva-pontjához. A P pont α_i $(i=1,2,\ldots,n+1)$ baricentrikus koordinátáira most nyilván $(A_iA_jA_{ij})=-(A_iA_jA'_{ij})=-\frac{\alpha_j}{\alpha_i}$ teljesül, ahonnan

$$\Pi_n=(-1)^{n+1}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\cdots\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}=(-1)^{n+1}.$$

Ezzel állításunk első részét bizonyítottuk.

Állításunk második részét n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. $n=2$-re állításunk nyilván igaz (l. a háromszögre vonatkozó Ceva-, ill. Menelaos-tételt). $n=3$-ra állításunkat a következőképpen igazolhatjuk: Tegyük fel, hogy a tetraéder éleiből bárhogyan kiválasztott, a tetraéder összes csúcsait tartalmazó zárt $A_1A_2A_3A_4$ térbeli négyszögre fennáll $\Pi_3=1$. Ennek alapján felírhatjuk a következő egyenlőségeket:

$$[(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})](A_3A_4A_{34})(A_4A_1A_{41})=1,$$

$$[(A_2A_3A_{23})(A_3A_1A_{31})](A_1A_4A_{14})(A_4A_2A_{42})=1,$$

$$[(A_3A_1A_{31})(A_1A_2A_{12})](A_2A_4A_{24})(A_4A_3A_{43})=1.$$

Az egyenlőségek összeszorzásával és $(ABC)(BAC)=1$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$[(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})(A_3A_1A_{31})]^2=1,$$

vagyis a tetraéder *tetszőleges* $A_1A_2A_3$ háromszöglapjának oldalegyenesein levő A_{ij} pontok Ceva- vagy Menelaos-elhelyezkedésűek. Ha mindegyik háromszöglapon levő pontok Ceva-elhelyezkedésűek, akkor definíció szerint az összes A_{ij} pontok is ilyenek. Ha viszont van olyan $A_1A_2A_3$ háromszög, melynek oldalegyenesein levő pontok Menelaos-elhelyezkedésűek, akkor az összes A_{ij} pontok is ilyenek.

Ugyanis, ha a másik három háromszög közül valamelyikre, pl. $A_1A_2A_4$-re Ceva tétele, azaz

$$(A_1A_2A_{12})(A_2A_4A_{24})(A_4A_1A_{41})=1$$

teljesülne, akkor a kapott egyenlőséget az

$$(A_2A_1A_{21})(A_1A_3A_{13})(A_3A_2A_{32})=-1$$

egyenlőséggel szorozva

$$(A_1A_3A_{13})(A_3A_2A_{32})(A_2A_4A_{24})(A_4A_1A_{41})=-1$$

adódnék, feltevésünkkel ellentétben.[4]

Tegyük fel most, hogy állításunk $n<k$-ra már igaz; bizonyítjuk, hogy akkor $n=k$-ra is teljesül. Legyen először k páros és $\Pi_k=1$. Mivel $\Pi_k=1$ a szimplex éleiből alkotott tetszőleges zárt $A_1A_2\ldots A_{k+1}$ k-dimenziós $k+1$-szögre teljesül, felírhatjuk a következő egyenlőségeket:

$$\begin{aligned}
&[(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})\cdots(A_{k-1}A_kA_{k-1,k})]\cdot\\
&\cdot(A_kA_{k+1}A_{k,k+1})(A_{k+1}A_1A_{k+1,1})=1,\\
&[(A_2A_3A_{23})(A_3A_4A_{34})\cdots(A_kA_1A_{k1})]\cdot\\
(1)\qquad&\cdot(A_1A_{k+1}A_{1,k+1})(A_{k+1}A_2A_{k+1,2})=1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[(A_kA_1A_{k1})(A_1A_2A_{12})\cdots(A_{k-2}A_{k-1}A_{k-2,k-1})]\cdot\\
&\cdot(A_{k-1}A_{k+1}A_{k-1,k+1})(A_{k+1}A_kA_{k+1,k})=1.
\end{aligned}$$

Az egyenlőségek összeszorzásával és $(ABC)(BAC)=1$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$[(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})\cdots(A_{k-1}A_kA_{k-1,k})(A_kA_1A_{k1})]^{k-1}=1,$$

ahonnan, mivel $k-1$ páratlan, adódik

$$(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})\cdots(A_{k-1}A_kA_{k-1,k})(A_kA_1A_{k1})=1,$$

és ez nyilván teljesül az $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$ szimplex éleiből alkotott *tetszőleges* zárt $A_1A_2\ldots A_k$ k-szögre. Mivel $k-1$ páratlan, az induk-

[4] Könnyen belátható, hogy tetraédernél a Menelaos-elhelyezkedésű pontok vagy mind az élek meghosszabbításain vannak, vagy valamelyik lapot határoló élek meghosszabbításain és a többi él belsejében, vagy két szemközti él meghosszabbításain és a többi él belsejében.

ciós feltevés értelmében bármelyik $A_1A_2\dots A_k$ $k-1$-dimenziós részszimplex élegyenesein levő A_{ij} pontok Ceva- vagy Menelaos-elhelyezkedésűek. Ebből már következik, hogy az $A_1A_2\cdots A_kA_{k+1}$ szimplex *összes* A_{ij} pontjai Ceva-elhelyezkedésűek. Ugyanis az előzőek szerint nyilván bármelyik $A_iA_jA_k$ háromszögre Ceva vagy Menelaos tétele érvényes. Ha viszont volna olyan $A_1A_2A_3$ háromszög, amelyre Menelaos tétele, vagyis

$$(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})(A_3A_1A_{31})=-1$$

teljesülne, akkor a kapott egyenlőséget az

$$(A_1A_3A_{13})(A_3A_4A_{34})\cdots(A_kA_{k+1}A_{k,k+1})(A_{k+1}A_1A_{k+1,1})=1$$

egyenlőséggel szorozva

$$(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})\cdots(A_kA_{k+1}A_{k,k+1})(A_{k+1}A_1A_{k+1,1})=-1$$

adódnék, feltevésünkkel ellentétben.

Ha k páros és $\Pi_k=-1$, akkor az (1) alatti egyenlőségekben jobboldalt mindenütt -1 áll, következésképpen

$$[(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})\cdots(A_{k-1}A_kA_{k-1,k})(A_kA_1A_{k1})]^{k-1}=(-1)^k=1,$$

ahonnan ismét

$$(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})\cdots(A_{k-1}A_kA_{k-1,k})(A_kA_1A_{k1})=1$$

adódik. Innen az előző bizonyítás mintájára könnyen belátható, hogy az $A_1A_2\dots A_kA_{k+1}$ szimplex élegyenesein levő A_{ij} pontok Menelaos-elhelyezkedésűek.

Ha k páratlan és $\Pi_k=1$, akkor az

$$[(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})\cdots(A_{k-2}A_{k-1}A_{k-2,k-1})]\cdot$$
$$\cdot(A_{k-1}A_kA_{k-1,k})(A_kA_{k+1}A_{k,k+1})(A_{k+1}A_1A_{k+1,1})=1,$$

$$[(A_2A_3A_{23})(A_3A_4A_{34})\cdots(A_{k-1}A_1A_{k-1,1})]\cdot$$
$$\cdot(A_1A_{k+1}A_{1,k+1})(A_{k+1}A_kA_{k+1,k})(A_kA_2A_{k2})=1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$[(A_{k-1}A_1A_{k-1,1})(A_1A_2A_{12})\cdots(A_{k-3}A_{k-2}A_{k-3,k-2})]\cdot$$
$$\cdot(A_{k-2}A_{k+1}A_{k-2,k+1})(A_{k+1}A_kA_{k+1,k})(A_kA_{k-1}A_{k,k-1})=1$$

egyenlőségek összeszorzásával és $(ABC)(BAC)=1$ felhasználásával kapjuk, hogy

$$[(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})\cdots(A_{k-2}A_{k-1}A_{k-2,k-1})(A_{k-1}A_1A_{k-1,1})]^{k-2}=1,$$

ahonnan, mivel $k-2$ páratlan, adódik

(2) $(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})\cdots(A_{k-2}A_{k-1}A_{k-2,k-1})(A_{k-1}A_1A_{k-1,1})=1,$

és ez nyilván teljesül az $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$ szimplex éleiből alkotott *tetszőleges* zárt $A_1A_2\ldots A_{k-1}$ $k-1$-szögre. Az eljárást tovább folytatva most már a $k-2$-, majd a $k-4$-,..., 6-dimenziós rész-szimplexekre, kapjuk végül, hogy az eredeti szimplex éleiből alkotott *tetszőleges* zárt $A_1A_2A_3A_4$ négyszögre

(3) $(A_1A_2A_{12})(A_2A_3A_{23})(A_3A_4A_{34})(A_4A_1A_{41})=1.$

Mivel $k-2$ páratlan, az indukciós feltevés értelmében (2)-ből következik, hogy bármelyik $A_1A_2\ldots A_{k-1}$ $k-2$-dimenziós rész-szimplex élegyenesein levő A_{ij} pontok Ceva- vagy Menelaos-elhelyezkedésűek. Ha mindegyik $k-2$-dimenziós rész-szimplex élegyenesein levő pontok Ceva-elhelyezkedésűek, akkor az összes pontok is ilyenek, hiszen mindegyik háromszögre Ceva tétele érvényes. Ha viszont van olyan $A_1A_2\ldots A_{k-1}$ rész-szimplex, melynek élegyenesein levő pontok Menelaos-elhelyezkedésűek, akkor az *összes* A_{ij} pontok is ilyenek. Ugyanis ekkor az $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ pontok közül bárhogyan kiválasztott háromszögre Menelaos tétele érvényes. Ha pedig ezek közül kiválasztott két tetszőleges pont, pl. A_1 és A_2 az A_k és A_{k+1} pontok közül valamelyikkel, pl. A_k-val olyan $A_1A_2A_k$ háromszöget alkotna, melyre Ceva tétele, vagyis

$$(A_1A_2A_{12})(A_2A_kA_{2k})(A_kA_1A_{k1})=1$$

teljesülne, akkor a kapott egyenlőséget az

$$(A_2A_1A_{21})(A_1A_3A_{13})(A_3A_2A_{32})=-1$$

egyenlőséggel szorozva

$$(A_1A_3A_{13})(A_3A_2A_{32})(A_2A_kA_{2k})(A_kA_1A_{k1})=-1$$

adódnék, ami ellentmond (3)-nak. Ha viszont az $A_1A_kA_{k+1}$ háromszögre teljesülne

$$(A_1A_kA_{1k})(A_kA_{k+1}A_{k,k+1})(A_{k+1}A_1A_{k+1,1})=1$$

(ahol A_1 az $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ csúcsok közül bármelyik lehet), akkor ezt az előzőkből már következő

$$(A_1A_2A_{12})(A_2A_kA_{2k})(A_kA_1A_{k1})=-1$$

egyenlőséggel szorozva

$$(A_1A_2A_{12})(A_2A_kA_{2k})(A_kA_{k+1}A_{k,k+1})(A_{k+1}A_1A_{k+1,1})=-1$$

adódnék, (3)-mal ellentétben. Ezzel bebizonyítottuk, hogy az $A_1A_2\ldots A_{k+1}$ szimplex összes háromszögére Menelaos tétele érvényes, vagyis az A_{ij} pontok Menelaos-elhelyezkedésűek.

MEGJEGYZÉS. A most bebizonyított tétel — összevetve a 2. fejezetben mondottakkal (l. C) és B)) — újabb szükséges, ill. elégséges feltételt ad arra vonatkozólag, hogy az A_{ij} pontok egy hipersíkhoz tartozzanak, ill. hogy az A_{ij} pontokat az $A_k(\neq A_i, A_j)$ csúcsokkal összekötő hipersíkok egy közös ponton menjenek át (NÁDENÍK [3] tételeinek általánosításai).

4. Ha a háromszögre vonatkozó Ceva-tételt csak végesben levő pontokra alkalmazzuk, akkor a benne szereplő osztóviszonyokat részletesen kiírva, bizonyos előjeles távolság-szorzatok egyenlőségéhez jutunk. Ezen észrevétel alapján, az n-dimenziós euklideszi térben előjeles távolságok helyett előjeles térfogatokat szerepeltetve, megadható Ceva tételének következő általánosítása:

2. TÉTEL. *Legyenek $A_1', A_2', \ldots, A_{n+1}'$ a szimplex $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ csúcsaival szemközti határoló lapsíkoknak olyan végesben levő pontjai, amelyek nem tartoznak hozzá e lapokat határoló $n-2$-dimenziós lapsíkok egyikéhez sem. Jelöljük továbbá K_{il}-lel az $A_1\ldots A_{i-1}A_i'A_{i+1}\ldots A_{l-1}A_{l+1}\ldots A_{n+1}$ $n-1$-dimenziós rész-szimplex előjeles térfogatát ($i, l=1,2,\ldots, n+1$; $i\neq l$).*[5] *Az A_iA_i' ($i=1,2,\ldots, n+1$) egyeneseknek akkor és csak akkor van közös (végesben levő vagy végtelen távoli) pontjuk, ha*

(4) $K_{i_1l_1}K_{i_2l_2}\cdots K_{i_{n+1}l_{n+1}}=C(\neq 0)$ *(konstans)* $(i_r, l_s=1,2,\ldots,n+1)$.[6]

Tételünk bizonyításához szükségünk van a következő segédtételre:

SEGÉDTÉTEL. *Legyen P az n-dimenziós térnek olyan végesben levő pontja, amely nem tartozik hozzá az $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ szimplexet határoló $n-1$-dimenziós lapsíkok egyikéhez sem. A P pont baricentrikus koordinátáit α_i-vel, az $A_1\ldots A_{i-1}PA_{i+1}\ldots A_{n+1}$ szimplexek előjeles térfogatait K_i-vel jelölve ($i=1,2,\ldots,n+1$), fennáll*

(5) $$K_1:K_2:\cdots:K_{n+1}=\alpha_1:\alpha_2:\cdots:\alpha_{n+1}.$$[7]

[5] $K_{il}>0$, ha A_i' az A_i-vel szemközti határoló lap A_l-lel szemközti $n-2$-dimenziós határának azon az oldalán van, amelyen A_l, ellenkező esetben $K_{il}<0$.

[6] Tételünk első részét tetraéderre megfogalmazva l. *Enzykl. d. math. Wiss.*, III, I/2, 1057.

[7] A tett feltevések értelmében mindegyik α_j zérustól különböző és $\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j\neq 0$.

BIZONYÍTÁS. Ismeretes, hogy az $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ szimplex előjeles térfogata definíció szerint

$$K=\frac{1}{n!}\,\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\cdots\mathbf{a}_n,$$

ahol $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\cdots\mathbf{a}_n$ a szimplex valamelyik csúcsából a többi csúcsokba vezető $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ n-dimenziós vektorok „vegyes szorzata", vagyis annak az n-edrendű determinánsnak az értéke, melynek i-ik sorában az $\mathbf{a}_i$ vektor koordinátái állnak. Legyen A_{n+1} a szimplexnek egy A_i-től különböző csúcsa és jelöljük innen az A_j csúcshoz vezető vektort $\mathbf{a}_j$-vel ($j=1,2,\ldots,n$), a P ponthoz vezető vektort pedig $\mathbf{p}$-vel. A súlypont értelmezése szerint

$$\left(\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j\right)\mathbf{p}=\sum_{j=1}^{n+1}\alpha_j\mathbf{a}_j \qquad (\mathbf{a}_{n+1}=0). \tag{6}$$

Az $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ vektorok sorrendje megválasztható úgy, hogy $K>0$ legyen. Ekkor $\mathbf{p}$ (6) alatti kifejezését helyettesítve és a determináns ismert tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy

$$K_i=\frac{1}{n!}\,\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_{i-1}\mathbf{p}\,\mathbf{a}_{i+1}\cdots\mathbf{a}_{n+1}=\frac{\alpha_i}{\sum\limits_{j=1}^{n+1}\alpha_j}K \qquad (i=1,2,\ldots,n+1),$$

amiből, minthogy $K\Big/\sum\limits_{j=1}^{n+1}\alpha_j$ konstans, adódik (5).

A 2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Tételünk első része segédtételünk közvetlen következménye. Ugyanis tegyük fel, hogy az A_iA_i' egyeneseknek van közös pontjuk és jelöljük ennek baricentrikus koordinátáit α_i-vel ($i=1,2,\ldots,n+1$). Ekkor, alkalmazva segédtételünket az A_i csúcsokkal szemközti határoló szimplexekre és a $P\equiv A_i'$ pontokra ($i=1,2,\ldots,n+1$), kapjuk, hogy

$$K_{il}=\lambda_i\alpha_l \qquad (l=1,2,\ldots,n+1;\ l\neq i),$$

ahol λ_i konstans, és így

$$K_{i_1l_1}K_{i_2l_2}\cdots K_{i_{n+1}l_{n+1}}=\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_{n+1}}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_{n+1}}=C(\neq 0)\ \text{(konstans)}.$$

A segédtétel bizonyítását követve könnyen belátható, hogy K_{il} az [5] alatt mondottak szerint pozitív, ill. negatív előjelű.

Megfordítva, ha (4) teljesül, akkor az A_iA_i' egyenesek közül bármelyik kettő egy síkban van. Ezt az általánosság megszorítása nélkül elegendő pl. az A_1A_1' és A_2A_2' egyenesekre bizonyítani. Ehhez jelölje az A_1, ill. A_2 csúccsal szemközti hipersíkokon belül az A_2A_1', ill. A_1A_2' egyeneseknek az $A_3, A_4, \ldots, A_{n+1}$ pontok által meghatározott $n-2$-dimenziós síkkal való metszéspontját $\bar{A}_2$, ill. $\bar{A}_1$. Az A_1, ill. A_2 csúccsal szemközti lapokon A_1', ill. A_2' baricentrikus koordinátáit az $[\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1,n+1}]$, ill. $[\alpha_{21}, \alpha_{23}, \ldots, \alpha_{2,n+1}]$ szám-n-esekkel jelölve, a súlypont értelmezése szerint $\bar{A}_2$, ill. $\bar{A}_1$ baricentrikus koordinátái az $A_3A_4 \ldots A_{n+1}$ szimplexre vonatkozóan $\alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1,n+1}$, ill. $\alpha_{23}, \ldots, \alpha_{2,n+1}$. Alkalmazva a segédtételt az $A_2A_3 \ldots A_{n+1}$ szimplexre és a $P \equiv A_1'$ pontra, ill. az $A_1A_3 \ldots A_{n+1}$ szimplexre és a $P \equiv A_2'$ pontra, kapjuk, hogy

$$\frac{K_{1i}}{K_{1j}} = \frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{1j}}, \quad \text{ill.} \quad \frac{K_{2i}}{K_{2j}} = \frac{\alpha_{2i}}{\alpha_{2j}} \qquad (i, j = 3, \ldots, n+1).$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $i = 3$ és $j = 4$. Ekkor a (4) alatti feltételt alkalmazva a következő alakban:

$$(K_{13}K_{24})(K_{32}K_{45}K_{56} \cdots K_{n+1,1}) = (K_{14}K_{23})(K_{32}K_{45}K_{56} \cdots K_{n+1,1}),$$

adódik

$$\frac{K_{13}}{K_{14}} = \frac{K_{23}}{K_{24}}, \quad \text{általában} \quad \frac{K_{1i}}{K_{1j}} = \frac{K_{2i}}{K_{2j}},$$

ahonnan

$$\frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{1j}} = \frac{\alpha_{2i}}{\alpha_{2j}} \qquad (i, j = 3, \ldots, n+1).$$

Innen a súlypont egyértelműsége miatt kapjuk, hogy $\bar{A}_2 \equiv \bar{A}_1$, tehát az A_1A_1', A_2A_2' egyenesek az $A_1, A_2, \bar{A}_2$ pontok síkjában vannak.

Mivel tehát az A_iA_i' egyenesek közül bármelyik kettő egy síkban van, páronként metszik egymást, következésképpen egy közös ponton mennek át (másképp volna három olyan egyenes, pl. $A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3'$, amelyek háromszöget alkotnának — melynek egyik csúcsa végtelen távoli pont is lehet — vagyis az A_1', A_2', A_3' pontok az A_1, A_2, A_3 pontok síkjában lennének, ami lehetetlen).

Megjegyzés. A bizonyítás második részében a (4) alatti feltételnél kevesebbet használtunk fel. Elegendő lett volna annyit feltennünk, hogy

$$(7) \qquad K_{ij}K_{kl} = K_{il}K_{kj} \qquad (i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n+1).$$

5. Ceva és Menelaos tételeinek tetraéderre megfogalmazott általánosításait jól alkalmazhatjuk a tetraéder néhány ismert és kevésbé ismert tulajdonságának egyszerű bizonyítására.[8]

a) A tetraéder súlyvonalai, azaz a csúcsokat a szemközti lapok súlypontjaival összekötő egyenesek, továbbá a szemközti élek felezőpontjait összekötő egyenesek, valamint az éleket a szemközti élfelezőpontokkal összekötő síkok egy ponton, a tetraéder súlypontján mennek át. — Ugyanis az élek felezőpontjai Ceva-elhelyezkedésű pontok. (V. ö. **1**, A1), A2) és B1).)

b) A tetraéder összes belső lapszögfelező síkjai, három egy csúcsban összefutó élen átmenő belső és a többi élen átmenő külső lapszögfelező síkjai, továbbá egy szemközti élpár élein átmenő belső és a többi élen átmenő külső lapszögfelező síkjai egy-egy ponton mennek át, melyek rendre a beírt gömb, hozzáírt gömb (a tetraéder egyik lapját kívülről és a többi lap meghosszabbításait érintő gömb), ill. a külső érintőgömb (az összes lapok meghosszabbításait érintő gömb) középpontjai (ez utóbbi végtelen távoli pont is lehet). Viszont két szemközti élpár élein átmenő belső és a többi két élen átmenő külső lapszögfelező síkok a szemközti éleket egy síkban levő pontokban metszik. — Ugyanis a tetraéder bármelyik *e* élén átmenő lapszögfelező sík a szemközti élegyenest olyan pontban metszi, amely az élszakaszt az *e* élben találkozó háromszögek területeinek arányában osztja — belső lapszögfelező sík esetében ez az osztóviszony pozitív, külső esetében negatív. Ebből már egyszerűen következik, hogy a lapszögfelező síkoknak a szemközti élekkel való metszéspontjai a fenti esetekben rendre Ceva-, ill. Menelaos-elhelyezkedésűek. (V. ö. **1**, B1), ill. C1).)

c) A tetraéder magasságvonalai, vagyis a csúcsokból a szemközti lapokra bocsátott merőlegesek akkor és csak akkor mennek át egy közös ponton, a tetraéder magasságpontján, ha a talppontokat a megfelelő háromszögcsúcsokkal összekötő egyenesek az éleket hat Ceva-elhelyezkedésű pontban metszik. Ez pedig akkor és csak akkor teljesül, ha a szemközti élek merőlegesek egymásra *(ortocentrikus tetraéder)*. Ekkor a talppontok a lapok magasságpontjai, az éleken levő hat pont pedig a lapmagasságok talppontjai. A tetraéder magasságpontján áthaladnak a szemközti éleken levő pontokat összekötő egyenesek — melyek éppen a szemközti élek normáltranzverzálisai —, továbbá az éleken átmenő és a szemközti élekre merőleges síkok — melyek az éleket éppen a fenti hat pontban metszik. (V. ö. **1**, A1), A2) és B1).) — A1) alapján

[8] A tetraéder a), b), c) alatt következő tulajdonságaira vonatkozólag l. [5] és [6].

a fenti állítás csak olyan tetraéderre igazolható, ahol a magasságvonalak talppontjai nincsenek rajta egyik élegyenesen sem. Könnyen belátható azonban, hogy állításunk minden tetraéderre igaz (l. pl. [6]).

d) A tetraéderlapok beírt köreinek, ill. egyik lap beírt körének és a többi lap ezen lap oldaléleit belső pontban érintő hozzáírt köreinek középpontjait a szemközti csúcsokkal összekötő egyenesek akkor és csak akkor mennek át egy-egy közös ponton, ha a szemközti élek szorzata állandó *(izodinamikus tetraéder)*. — Ugyanis az említett körök középpontjait a háromszögcsúcsokkal összekötő egyenesek, a belső, ill. a megfelelő belső és külső élszögfelező egyenesek, akkor és csak akkor metszik az éleket hat Cevaelhelyezkedésű pontban, ha mindegyik élen a kapott két metszéspont megegyezik, vagyis — a szemközti élpárokat a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2-vel jelölve — az a_2 élen levő metszéspontra a szögfelezők ismert tulajdonságából

$$b_2 : c_2 = c_1 : b_1,$$

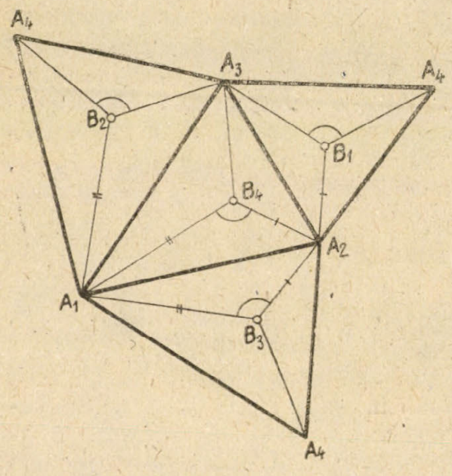
ahonnan $b_1 b_2 = c_1 c_2$. Hasonlóan kapjuk, hogy $a_1 a_2 = c_1 c_2$. (V. ö. **1**, A1).)[9]

e) Ismeretes, hogy a háromszög beírt körének, ill. hozzáírt köreinek érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötő egyenesek egy-egy ponton mennek át (belső, ill. külső Gergonne-pontok). A tetraéderlapok belső Gergonne-pontjait, ill. egyik lap belső és a másik három lap ezen lap oldaléleit belső pontban érintő hozzáírt köreihez tartozó külső Gergonne-pontjait a szemközti csúcsokkal összekötő egyenesek akkor és csak akkor mennek át egy-egy közös ponton, ha a tetraédernek van belső, ill. a kitüntetett lap éleit belső pontban érintő külső élérintő gömbje.[10] — Ugyanis ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy a lapok beírt körei, ill. egyik lap beírt köre és a többi lap megfelelő hozzáírt körei a tetraéder élein érintkezzenek, ami csak a kimondottak esetén teljesül. (V. ö. **1**, A1).)

[9] Könnyű megadni olyan tetraédert, melynél a szemközti élek szorzata két szemközti élpárra megegyezik, de mégsem izodinamikus. Ilyen pl. az a tetraéder, melynek alapja szabályos háromszög, negyedik csúcsának ezen levő merőleges vetülete pedig valamelyik háromszögcsúcs, és ennek a csúcsnak az alaptól való távolsága megegyezik az alapháromszög oldalával. Itt a harmadik élpár éleinek végpontjaiból kiinduló egyenesek páronként metszik egymást, de a két metszéspont különböző.

[10] A belső élérintő gömb a tetraéder valamennyi élét belső pontban, valamely külső élérintő gömb egyik lap határoló éleit belső, a többi élt külső pontban érinti.

f) A tetraéder beírt gömbjének, hozzáírt gömbjeinek, ill. külső érintőgömbjeinek érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötő egyenesek akkor és csak akkor mennek át egy-egy közös ponton, ha az érintési pontok beírt gömbnél a háromszöglapok első izogonális pontjai *(izogonális tetraéder)*, hozzáírt gömbnél a belső érintési pont első izogonális pont, a külső érintési pontok második izogonális pontok, végül külső érintőgömbnél azokon a lapsíkokon levő érintési pontok, melyeknek azonos oldalán van a gömb és a tetraéder, első, a többi érintési pontok második izogonális pontok.[11] (L. pl. [7].)

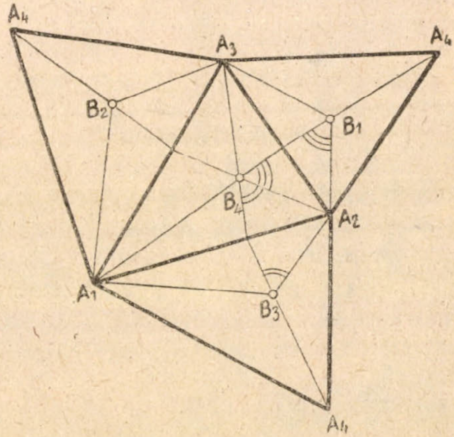


1a ábra

Állításunk igazolásához induljunk ki abból, hogy meghatározva mindegyik háromszöglapon az érintőgömbök érintési pontjaiból a háromszöget határoló élek látószögeit, a tetraéder szemközti éleinek látószögei a beírt gömb és a külső érintőgömbök érintési pontjaiból egyenlők, a hozzáírt gömbök érintési pontjaiból kiegészítő szögek. Ugyanis a beírt gömb B_i érintési pontjaira nézve, külső pontból a gömbhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt, $A_iA_jB_k\triangle \cong A_iA_jB_l\triangle$, tehát $A_iB_kA_j\sphericalangle = A_iB_lA_j\sphericalangle = \varepsilon_{ij}$ $(i, j, k, l = 1, 2, 3, 4;\ \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji})$, ahonnan az összes $A_iA_jA_k$ háromszögekre felírt $2\pi = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_{jk} + \varepsilon_{ki}$ egyenlőségekből következik $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{kl}$. (L. az 1a ábrát, amely a tetraédernek az $[A_1A_2A_3]$ síkban kiterített hálózatát mutatja.) A többi érintőgömbre vonatkozó fenti állítás hasonlóan igazolható. — Mármost bármelyik érintőgömb érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötő négy egyenes akkor és

[11] Első, ill. második izogonális pontnak nevezzük a háromszög oldalai fölé kifelé, ill. befelé írt egyenlőoldalú háromszögek külső csúcsait a szemközti háromszögcsúcsokkal összekötő egyenesek közös pontját. Ha a háromszög mindegyik szöge kisebb 120°-nál, akkor az első izogonális pontból mindhárom oldal 120°-os szög alatt látszik; ha van 120°-os szöge, akkor ennek csúcsa az; ha van 120°-nál nagyobb szöge, akkor az első izogonális pontból, továbbá mindegyik háromszögnél a második izogonális pontból a háromszög két oldala 60°-os, harmadik oldala 120°-os szög alatt látszik.

csak akkor megy át egy közös ponton, ha mindegyik lapon az érintési pontokat a háromszögcsúcsokkal összekötő egyeneseknek az élekkel alkotott metszéspontjait meghatározva, a tetraéder mindegyik élén a kapott két pont megegyezik. Ez pedig a beírt gömb B_i érintési pontjaira nézve az 1b ábrán levő kétíves, ill. háromíves szögek egyenlősége miatt akkor és csak akkor teljesül, ha az összes ε_{ij} szögek egyenlők, vagyis mindegyik 120°. Mivel B_i a háromszög belső pontja, megegyezik az első izogonális ponttal. Hasonlóan igazolhatók a hozzáírt gömbre és a külső érintőgömbre vonatkozó állítások is.[12]



1b ábra

6. Ismeretes, hogy a tetraéder bizonyos nevezetes vonalai (pl. a magasságvonalak) általában páronként kitérők, de egy egyköpenyű hiperboloid ugyanazon seregbeli alkotói. Ezt figyelembe véve kínálkozik Ceva tételének olyan általánosítása, amely szükséges és elégséges feltételt ad arra vonatkozóan, hogy a tetraéder csúcsaiból kiinduló négy egyenes ilyen tulajdonsággal rendelkezzék:

3. TÉTEL. *Jelöljük A_i'-vel a tetraéder A_i csúcsával szemközti lapsíknak az élegyenesekre nem illeszkedő tetszőleges pontját ($i=1, 2, 3, 4$), továbbá A_{ij}-vel az A_iA_j' ($i \neq j$) egyenesnek az A_kA_l élegyenessel való metszéspontját ($A_{ij} \neq A_{ji}$). A páronként kitérő A_iA_i' egyenesek akkor és csak akkor tartoznak egy másodrendű vonalfelület ugyanazon seregbeli alkotói közé (hiperboloidikus elhe-*

[12] Az elmondottakból következik, hogy izogonális tetraéder mindegyik élszöge 120°-nál kisebb; továbbá, ha egy külső érintőgömb érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötő egyenesek egy közös ponton mennek át, akkor valamelyik éllel szemközti két élszög nagyobb 120°-nál. — Ebből kiindulva megadható olyan tetraéder, melynél a beírt gömb érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötő egyenesek közül kettő-kettő metszi egymást, de nem izogonális. Ilyen pl. az a tetraéder, melynek lapjai két-két egybevágó, szimmetrikus elhelyezkedésű, 30°-os, ill. 120°-os szárszögű egyenlőszárú háromszög. — A fentiek alapján belátható az is, hogy a tetraéder beírt gömbjének érintési pontjai akkor és csak akkor egyeznek meg minden lapon a beírt kör középpontjával, ha a tetraéder szabályos.

lyezkedésűek), ha mindegyik $A_j A_k A_l$ lapháromszögre

$$(8) \qquad (A_j A_k A_{il})(A_k A_l A_{ij})(A_l A_j A_{ik}) = 1.$$

Ha a négy egyenes párhuzamos ugyanazon síkkal, akkor hiperbolikus paraboloid, egyébként egyköpenyű hiperboloid alkotói.

BIZONYÍTÁS. Ha a négy páronként kitérő egyenes hiperboloidikus elhelyezkedésű, akkor bármelyiknek minden pontjából, pl. az $A_i A_i'$ egyenes A_i pontjából húzható a másik hármat metsző egyenes, ami nyilván az $[A_i A_j A_j']$, $[A_i A_k A_k']$, $[A_i A_l A_l']$ síkok közös egyenese. Ez az egyenes az $A_j A_k A_l$ háromszög síkját az $A_j A_{ij}$, $A_k A_{ik}$, $A_l A_{il}$ egyenesek közös pontjában metszi, amiből Ceva tétele szerint adódik (8). — Megfordítva, ha (8) teljesül, akkor a tetraéder bármelyik A_i csúcsából kiinduló fenti három síknak van közös egyenese, ami az $A_i A_i'$-től különböző másik három egyenest is metszi, következésképpen a négy egyenes hiperboloidikus elhelyezkedésű.

A 3. tétel alkalmazásaként megemlítjük a következőket:

a) Ha a tetraéder egyik szemközti élpárja sem merőleges egymásra és a magasságvonalak talppontjai nincsenek rajta egyik élegyenesen sem, akkor a magasságvonalak hiperboloidikus elhelyezkedésűek. — Ugyanis ekkor A_i' az A_i csúcs merőleges vetülete a szemközti lapon, tehát

$$(A_j A_k A_{il}) = \frac{t_{ik}}{t_{ij}} = \frac{t_k \cos \alpha_{ij}}{t_j \cos \alpha_{ik}}$$

(ahol t_{ij} az $A_i A_k A_i'$ háromszög, t_j az A_j csúccsal szemközti lap területe, α_{ij} az $A_i A_j$ élnél levő belső, ill. külső lapszög), amiből (8) következik.[13]

b) Ha a tetraédernek nincs két olyan szemközti élpárja, melyek szorzata megegyezik, akkor a lapok beírt köreinek, ill. az egyik lap beírt körének és a többi lap ezen lap oldaléleit belső pontban érintő hozzáírt köreinek középpontjait a szemközti csúcsokkal összekötő egyenesek hiperboloidikus elhelyezkedésűek. — Ugyanis ekkor a szögfelező tétel értelmében

$$(A_j A_k A_{il}) = \pm \frac{A_i A_j}{A_i A_k},$$

[13] A magasságvonalak nyilván nem lehetnek ugyanazon síkkal párhuzamosak (ugyanis ekkor a tetraéderlapok merőlegesek lennének erre a síkra), tehát egyköpenyű hiperboloidon vannak. — Egyébként könnyen belátható, hogy ha a tetraéder egyik szemközti élpárja sem merőleges egymásra, akkor a magasságvonalak *mindig* egy egyköpenyű hiperboloidon vannak.

amiből (mivel negatív előjel csak a hozzáírt körök külső érintési pontjainál lép fel, mégpedig egy szorzatban legfeljebb kétszer) már következik (8).

c) Ha a tetraéder érintőgömbjeinek érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötő egyenesek páronként kitérők, akkor hiperboloidikus elhelyezkedésűek. — Ugyanis a beírt gömb B_i érintési pontjaira $A_iA_jB_k\triangle \cong A_iA_jB_l\triangle$ miatt $t_{kl}=t_{lk}$ (t_{kl} az $A_iA_jB_k$ háromszög területe), amiből

$$(A_jA_kA_{il})=\frac{t_{lk}}{t_{lj}}$$

felhasználásával következik (8). Hasonlóan kapjuk a többi érintőgömb érintési pontjaira vonatkozó állítást is. (L. [7].)[14]

IRODALOM

[1] Н. А. Колмогоров, Тетраэдрометрия, Мат. Образование, 2—3 (1929), 90—98.

[2] P. Couderc et A. Balliccioni, *Premier livre du tétraèdre* (Paris, 1935), 81—82.

[3] Z. Nádeník, Rozšíření vět Menelaovy a Cevovy na *n*-dimensionální útvary, *Časopis Pest. Mat.*, **81** (1956), 1—25.

[4] Н. М. Бескин, Теоремы Чевы и Менелая в *n*-мерном пространстве, Мат. Просвещение, **1** (1957), 119—127.

[5] H. Thieme, *Die Elemente der Geometrie* (Leipzig und Berlin, 1909), 360—374.

[6] Molnár F., A tetraéder nevezetes pontjairól, *Középisk. Mat. Lapok*, **16** (1958), 1—6. és 33—38.

[7] I. I. Neuberg, Über die Berührungskugeln eines Tetraeders, *Jahresb. d. d. Math. Ver.*, **16** (1907), 345—358.

ОБ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ

Ф. Молнар

Работа содержит несколько известных и несколько новых *n*-мерных теорем Чевы и Менелая (см. также Наденик [3] и Бескин [4]). Из доказанных теорем отметим следующую:

Теорема 2. Пусть $A_1', A_2', \ldots, A_{n+1}'$ такие точки $n-1$-мерных граней n-мерного симплекса, противоположных его вершинам $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, которые не принадлежат $n-2$-мерной границе этих граней. Обозначим

[14] Az a), b), c) alatt szereplő A_i' pontokra (8) nyilván akkor is teljesül, ha az A_iA_i' egyenesek páronként nem kitérők, ekkor azonban nem lesznek hiperboloidikus elhelyezkedésűek. — Az $[A_iA_jA_j']$, $[A_iA_kA_k']$, $[A_iA_lA_l']$ síkok a), ill. b) esetén az A_i csúcsú triéder „magasságsíkjai", ill. „súlysíkjai", ezek tehát egy-egy egyenesben metszik egymást.

через K_{il} положительный или отрицательный объем $n-1$-мерного подсимплекса $A_1 \ldots A_{i-1} A'_i A_{i+1} \ldots A_{l-1} A_{l+1} \ldots A_{n+1}$ $(i, l = 1, 2, \ldots, n+1;\ i \neq l)$. Прямые $A_i A'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ в том и только в том случае имеют общую точку или общее направление, если $K_{i_1 l_1} K_{i_2 l_2} \ldots K_{i_{n+1} l_{n+1}} = C$ (постоянно) $(i_r, l_s = 1, 2, \ldots, n+1)$.

В конце работы автор с помощью полученных результатов изучает некоторые знаменитые прямые и плоскости тетраэдра.

ÜBER EINIGE VERALLGEMEINERUNGEN DER SÄTZE VON CEVA UND MENELAOS

F. MOLNÁR

Die Arbeit enthält einige bekannte bzw. neue Verallgemeinerungen der Sätze von Ceva und Menelaos auf den n-dimensionalen euklidischen Raum (vgl. NÁDENÍK [3] und BESKIN [4]). Von den bewiesenen Sätzen sei der folgende erwähnt:

SATZ 2. *Es seien* $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n+1}$ *beliebige eigentliche Punkte der den Scheitelpunkten* $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ *des Simplexes gegenüberliegenden* $n-1$*-dimensionalen Seitenräume, die nicht in den* $n-2$*-dimensionalen Seitenräumen liegen. Ferner bezeichne* K_{il} *den Inhalt des* $n-1$*-dimensionalen Teilsimplexes* $A_1 \ldots A_{i-1} A'_i A_{i+1} \ldots A_{l-1} A_{l+1} \ldots A_{n+1}$ $(i, l = 1, 2, \ldots, n+1;\ i \neq l)$, *mit Vorzeichen genommen. Die Geraden* $A_i A'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ *haben dann und nur dann einen gemeinsamen (eigentlichen oder unendlich fernen) Punkt, wenn*

$$K_{i_1 l_1} K_{i_2 l_2} \cdots K_{i_{n+1} l_{n+1}} = C \qquad (i_r, l_s = 1, 2, \ldots, n+1)$$

ist, wobei C eine von Null verschiedene Konstante bedeutet.

Zuletzt verwendet der Verfasser die erhaltenen Ergebnisse auf die Untersuchung einiger besonderen Geraden und Ebenen des Tetraeders.

Néhány megjegyzés trigonometrikus polinomokról

Rényi Kató

Egy régebbi dolgozatomban egy véges rendű periodikus függvényekre vonatkozó tétel ([1] III. Tétel) speciális eseteként ([1] I. Tétel) adódott, hogy ha $f(z)$ exponenciális típusú periodikus egész függvény τ típusszámmal és P periódussal és $T(f, z_0)$ jelenti $f(z)$ azon deriváltjainak számát, melyeknek a z_0 pontban többszörös gyökük van, akkor

$$T(f, z_0) \leqq \frac{e}{2} |P| \tau. \tag{1}$$

Amint az alábbiakból kitűnik, ezen eredmény a fent említett általánosabb tétel nélkül, teljesen elemi úton is megkapható, felhasználva azt az ismert tételt (lásd pl. [2] 109. old. vagy [3] 165. old.), hogy ha $f(z)$ exponenciális típusú periodikus egész függvény τ típusszámmal és P periódussal, akkor

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{\frac{2k\pi}{P} iz}, \quad \text{ahol} \quad N \leqq \frac{1}{2\pi} |P| \tau, \tag{2}$$

vagyis $f(z)$ legfeljebb $\frac{|P|\tau}{2\pi}$-edrendű trigonometrikus polinom. Ezen észrevétel azonban nem csupán (1) elemi bizonyítását teszi lehetővé, hanem a

$$T(f, z_0) < 2N \leqq \frac{1}{\pi} |P| \tau \tag{1a}$$

pontos egyenlőtlenséghez vezet.

A továbbiakban először *n-tagú* (és nem feltétlenül n-edrendű) 2π szerint periodikus trigonometrikus polinomokkal fogunk foglalkozni. Többször használjuk majd a következő jelöléseket: $E_1(\varphi, z_0)$ ill. $E_2(\varphi, z_0)$-lal jelöljük a $\varphi(z)$ egész függvény azon páratlan- ill. párosrendű deriváltjainak számát, amelyek a z_0 pontban eltűnnek és $E(\varphi, z_0) = E_1(\varphi, z_0) + E_2(\varphi, z_0)$.

Mindenek előtt be fogjuk látni, hogy ha $c_n(z)$ valamely n-tagú cosinus-polinom, $c_n(z) \not\equiv \text{const.}$, akkor

$$E_2(c_n, 0) \leqq n-1. \tag{3}$$

Két esetet kell megkülönböztetnünk. Először olyan cosinus-polinomokat vizsgálunk, amelyeknek nincs konstans tagja, vagyis

$$c_n(z) = a_1 \cos k_1 z + a_2 \cos k_2 z + \cdots + a_n \cos k_n z, \tag{4}$$

ahol $k_1, k_2, \ldots, k_n$ különböző pozitív egész számok. Tegyük fel — állításunkkal ellentétben —, hogy

$$c_n^{(2l_j)}(0) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

ahol $0 \leqq l_1 < l_2 < \cdots < l_n$. (5) nyilvánvalóan

$$\sum_{r=1}^{n} a_r k_r^{2l_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{5a}$$

alakban írható. Ismeretes azonban (lásd pl. [4] V. Fej. 48. Probl.), hogy az

$$\begin{vmatrix} x_1^{\alpha_1} & x_2^{\alpha_1} \cdots x_s^{\alpha_1} \\ x_1^{\alpha_2} & x_2^{\alpha_2} \cdots x_s^{\alpha_2} \\ \vdots & \\ x_1^{\alpha_s} & x_2^{\alpha_s} \cdots x_s^{\alpha_s} \end{vmatrix}$$

determináns nullától különböző, feltéve, hogy $x_1, x_2, \ldots, x_s$ különböző pozitív számok, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ pedig különböző nem-negatív egészek. Ebből következik, hogy az (5a) homogén lineáris egyenletrendszernek csak a triviális $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ megoldása van. Tehát (4) alakú polinomokra (3) valóban fennáll.

Tekintsünk most olyan n-tagú cosinus-polinomokat, amelyeknek van konstans tagja, vagyis

$$c_n(z) = a_0 + a_1 \cos k_1 z + \cdots + a_{n-1} \cos k_{n-1} z, \tag{4a}$$

ahol $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ különböző pozitív egész számok. Akkor

$$\gamma_{n-1}(z) = c_n(z) - a_0$$

olyan $(n-1)$-tagú cosinus-polinom, amelyiknek nincs konstans tagja, vagyis

$$E_2(\gamma_{n-1}, 0) \leqq n-2.$$

Viszont $l \geqq 1$-re $c_n^{(l)}(0) = \gamma_{n-1}^{(l)}(0)$, tehát a (3) egyenlőtlenség (4a) alakú polinomokra is igaz, sőt, utóbbiaknál egyenlőség legfeljebb akkor állhat fenn, ha $c_n(0) = 0$.

Analog állítás igaz sinus-polinomokra: ha $s_n(z)$ valamely n-tagú sinus-polinom, $s_n(z) \not\equiv 0$, akkor

(6) $$E_1(s_n, 0) \leqq n-1.$$

Valóban legyen

(7) $$s_n(z) = b_1 \sin k_1 z + b_2 \sin k_2 z + \cdots + b_n \sin k_n z,$$

ahol $k_1, k_2, \ldots, k_n$ különböző pozitív egész számok. Ha $E_1(s_n, 0) \geqq n$ lenne, akkor $s_n(z)$ deriváltjára az $E_2(s'_n, 0) \geqq n$ egyenlőtlenséget kapnánk, ami (3) miatt csak úgy volna lehetséges, ha $s'_n(z) \equiv \text{const.}$ De akkor $s_n(z) \equiv 0$ volna, hiszen a lineáris függvények közül csak a konstansok periodikusak.[1]

A

(10) $$c_{n+1}(z) = (1-\cos z)^n$$

cosinus-polinom ill. ennek deriváltja egy példa arra, hogy (3) ill. (6) nem javítható.

Térjünk most át tetszőleges n-tagú $P_n(z)$ trigonometrikus polinomokra, vagyis — a (4) ill. (4a) és (7) jelöléseket használva — legyen

$$P_n(z) = c_t(z) + s_{n-t}(z),$$

ahol $0 \leqq t \leqq n$. Akkor

$$P_n^{(l)}(z) = c_t^{(l)}(z) + s_{n-t}^{(l)}(z) \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots),$$

vagyis

(11) $$E_1(P_n, 0) = E_1(s_{n-t}, 0) \quad \text{és} \quad E_2(P_n, 0) = E_2(c_t, 0).$$

Ha

(12) $$c_t(z) \not\equiv \text{const.},$$

akkor (3)-ból következik, hogy

(13) $$E_2(c_t, 0) \leqq t-1;$$

viszont

(14) $$s_{n-t}(z) \not\equiv 0$$

esetében (6) szerint

(15) $$E_1(s_{n-t}, 0) \leqq n-t-1.$$

[1] Ugyanezen meggondolásból következik, hogy ha

(8) $$P_n(z) = a_0 + b_1 \sin k_1 z + \cdots + b_{n-1} \sin k_{n-1} z \qquad (a_0 \neq 0),$$

akkor

(9) $$E_1(P_n, 0) \leqq n-2.$$

Ez azt jelenti, hogy ha (12) és (14) egyidejűleg fennáll, akkor, (11), (13) és (15) következtében

(16) $$E_1(P_n, 0)+E_2(P_n, 0) \leqq n-2.$$

Összefoglalva: Legyen $P_n(z)$ valamely n-tagú trigonometrikus polinom, $P_n(0)=0$[2], $P_n(z) \not\equiv 0$. Ha $E_1(P_n, 0) \geqq n$ ill. $E_2(P_n, 0) \geqq n$, akkor $P_n(z)$ cosinus- ill. sinus-polinom; egyébként viszont

(17) $$E(P_n, 0) \leqq n-2.$$

Most már szinte önmagától adódik az (1a) egyenlőtlenség. Ha ugyanis $g(z)$ valamely 2π periódusú N-edrendű trigonometrikus polinom,

(18) $$g(z)=\sum_{k=-N}^{N} d_k e^{kiz};$$

akkor a következő esetek lehetségesek:

$g(z)$ N-edrendű — vagyis legfeljebb N tagú sinus-polinom; akkor, mivel a 0 helyen valamennyi párosrendű derivált eltűnik, minden egyes eltűnő páratlanrendű deriváltnak és az eggyel kisebb (páros) rendű deriváltnak is többszörös gyöke van a 0 pontban, tehát $T(g, 0)=2E_1(g, 0)$, vagyis (6) szerint $T(g, 0) \leqq 2N-2$;[3]

$g(z)$ N-edrendű — vagyis legfeljebb $N+1$ tagú — cosinus-polinom; akkor aszerint, hogy $g(0)=0$ illetőleg $g(0) \neq 0$, azt kapjuk, hogy $T(g, 0)=2E_2(g, 0)-1$, illetőleg $T(g, 0)=2E_2(g, 0)$, vagyis (3) szerint — figyelembe véve, hogy $N+1$ tag esetén egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha maga a függvény is eltűnik a 0 helyen — $T(g, 0) \leqq 2N-1$;

$g(z)$ N-edrendű — vagyis legfeljebb $2N+1$ tagú — „vegyes" polinom; ha $g(0)=0$, akkor (16) szerint $E(g, 0) \leqq 2N-1$, vagyis $T(g, 0) \leqq 2N-2$ és ez nyilvánvalóan igaz akkor is, ha $g(0) \neq 0$.

Ha tehát $g(z)$ (18) alakú, akkor

(1c) $$T(g, 0) \leqq 2N-1,$$

ahol egyenlőség kizárólag akkor lehet, ha $g(z)$ $N+1$ tagú cosinus-polinom és $g(0)=0$. A (10) alatti függvény példa arra is, amikor (1c)-ben egyenlőség van.

Az a tény, hogy az eddigiekben 2π szerint periodikus függvényeket vizsgáltunk a 0 helyen, nem jelent megszorítást. Ha ui.

[2] A $P_n(0)=0$ feltételre kizárólag azért van szükség, hogy a (8) alakú polinomokat kizárjuk.

[3] Ha $g(z)$ N-edrendű — vagyis legfeljebb $N+1$ tagú — (8) alakú polinom, akkor is $T(g, 0) \leqq 2E_1(g, 0)$, vagyis (9) szerint $T(g, 0) \leqq 2N-2$.

az $f(z)$ függvény (2) alakú — vagyis P periódusú N-edrendű trigonometrikus polinom — és z_0 a komplex sík egy tetszőleges pontja, akkor a

$$g(z)=f\left[\frac{zP}{2\pi}+z_0\right]$$

függvény (18) alakú $\left(d_k=c_k e^{\frac{2k\pi}{P}iz_0};\ k=0,1,2,\dots\right)$ és

$$g^{(r)}(0)=\left(\frac{P}{2\pi}\right)^r f^{(r)}(z_0) \qquad (r=0,1,2,\dots).$$

Vagyis $T(f,z_0)=T(g,0)$ és ezzel állításunkat igazoltuk.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] C. Rényi: On periodic entire functions. II, Annales Univ. Sci. Budapestinensis de R. Eötvös nom. 1 (1958) pp. 123—126.

[2] R. P. Boas: Entire functions, New York, Academic Press, 1954.

[3] N. I. Ahijezer: Előadások az approximáció elméletéről, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1951.

[4] G. Pólya—G. Szegő: Aufgeben und Lehrsätze aus der Analysis II, Berlin, Springer Verlag, 1925.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ТРIГОНОМЕТРIЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

Rényi Kató

Резюме

Пусть $P_n(z)$ тригонометрический многочлень имеющий n членов, $P_n(0)=0$, $P_n(z)\not\equiv 0$. Доказано, что если число производных четного соотв. нечетного порядка от $P_n(z)$ изчезывающих в точке $z=0$ превосходит $n-1$, то $P_n(z)$ является нечетным соотв. четным; в остальном (т. е. если $P_n(z)$ "смешанный" многочлень) число производных изчезывающих в точке $z=0$ не превосходит $n-2$.

SOME REMARKS ON TRIGONOMETRICAL POLYNOMIALS

by Catherine Rényi

Summary

Let $P_n(z)$ be a trigonometrical polynomial with n terms, $P_n(0)=0$, $P_n(z)\not\equiv 0$. It is shown, that if the number of those derivatives of even or odd order of $P_n(z)$ which vanish in the point $z=0$ exceeds $n-1$, then

$P_n(z)$ is a sine- or cosine-polynomial respectively; otherwise — i. e. if $P_n(z)$ is a "mixed" polynomial — the number of those derivatives of $P_n(z)$ which vanish in $z=0$ does not exceed $n-2$.

In a previous paper the author has proved a theorem concerning periodic entire functions of finite order ([1] Theorem III.) from which she deduced as a special case ([1] Theorem I.) that if $f(z)$ is a periodic entire function of exponential type τ with period P then if $T(f, z_0)$ denotes the number of those derivatives of $f(z)$ which have multiple roots in the point z_0 we have inequality (1). This result was too much emphasised in [1]. As a matter of fact, it is well known (see e. g. [2] p. 109) that if $f(z)$ is a periodic entire function with period P and of exponential type τ then $f(z)$ is of the form (2), i. e. $f(z)$ is a trigonometrical polynomial of order not exceeding $\frac{|P|\tau}{2\pi}$. This remark and the result above makes it possible to prove (1) in a completely elementary way; moreover one obtains in this way the best possible inequality, namely that for the function (2) we have (1a).

Az információelmélet egy fogalmának értelmezéséről

VINCZE I.

1. Az információ továbbításának matematikai elméletét C. SHANNON [9] alapozta meg, akinek nagyjelentőségű kezdeményező munkássága az eltelt rövid idő alatt rendkívüli érdeklődést váltott ki a matematikusok, fizikusok és híradástechnikusok körében és jelentős kutatásokat indított meg. SHANNON a termodinamikai entrópia fogalmából kiindulva definiálta egy valószínűségi eloszlásrendszer „bizonytalanságának" mértékét. Az általa adott entrópia fogalomnak szabatos matematikai tárgyalása diszkrét valószínűségi változók esetében A. J. HINCSINtől [3] származik, míg folytonos eloszlások esetében a kérdés tisztázásában BALATONI J. és RÉNYI A. [1], különösen pedig RÉNYI A. egy újabb dolgozata [8] alapvető jelentőségű. A valószínűségi eloszlásrendszerek entrópiájával kapcsolatos további vizsgálatok során bevezették két eloszlás ún. I- és J-divergenciáját (lásd [4, 2, 5, 7]). Az I-divergencia KULLBACK és LEIBLER [5], valamint KULLBACK [6] munkáiban nyert először jelentős alkalmazást, míg A. PÉREZ [7] mint egy valószínűségi változónak egy másikra vonatkozó relatív információját kezeli. Az I-divergencia a matematikai statisztikában is igen hasznosnak mutatkozik [6, 10]. Az alábbiakban az I-divergenciára adunk szemléletes információelméleti értelmezést, nálunk azonban — eltérően PÉREZ tárgyalásától — a két eloszlásfüggvény nem azonos szerepet játszik.

Értelmezésünk az információnak „érdeklődésünk eloszlására vonatkoztatott" mértékéhez vezet, amely fogalomról néhány példán mutatjuk meg, hogy bizonyos gyakorlati kérdésfeltevéseknél használhatónak mutatkozik. Meggondolásunk a legegyszerűbb esetre vonatkozik, míg az általánosabb esetek tárgyalására szerző vissza kíván térni.

2. Legyenek egy kísérlet lehetséges kimenetelei az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események, amelyek rendre $p_1, p_2, \ldots, p_n$ valószínűséggel következnek be.

Ekkor az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ teljes eseményrendszer entrópiáján, bizonytalanságának mértékén az

$$(1) \qquad E_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i}$$

nemnegatív mennyiséget szokás érteni. Erre a

$$0 \leqq E_n \leqq \log n$$

egyenlőtlenség érvényes: legnagyobb a kísérlet kimenetelére vonatkozó bizonytalanságunk akkor, ha $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$, amikor is $E_n = \log n$, míg $E_n = 0$, ha valamelyik esemény valószínűsége 1, míg a többié 0. Amikor az $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ rendszer (1) alatti entrópiájáról beszélünk, hallgatólagosan feltételezzük, hogy a kísérlet kimenetele szempontjából *éppen ezek* az események érdekelnek bennünket, és nem a bizonyos esemény valamely más felbontása. Ha nem volna semmi jelentősége számunkra annak, hogy pl. az A_1 és A_2 események közül melyik következik be, akkor nyilván az $A_1', A_3, \ldots, A_n$ rendszerről beszélnénk, ahol $A_1' = A_1 + A_2$ és — $p_1' = p_1 + p_2$ jelöléssel — ennek

$$E_{n-1} = p' \log \frac{1}{p'} + \sum_{i=3}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i}$$

az entrópiája, amelyről könnyen kimutatható, hogy

$$E_{n-1} \leqq E_n,$$

vagyis a bizonytalanság, ami várható is, kisebb volna. — Ezt a következőkben úgy fejezzük ki, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események a kimenetel szempontjából „egyenlő mértékben" érdekelnek, s ha „érdeklődésünknek az események közötti eloszlását" mennyiségileg ki akarjuk fejezni, mindegyik eseményhez az $\frac{1}{n}$ nagyságot rendeljük; vagyis az $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ rendszer entrópiája érdeklődésünknek e lehetséges események közötti $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ szerinti eloszlása esetén vezet az (1) formulához, és az entrópia, vagyis a bizonytalanság mértéke csakis ilyen feltételezés mellett bír értelemmel.

Mielőtt a folytonos eloszlásra vonatkozó meggondolásunkra térnénk, vezessük be az entrópia helyett a rendszerre vonatkozó tájékozottságunk mértékét: vonjuk ki az entrópiát annak maximális értékéből:

$$(2)\qquad I_n = \log n - E_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \log np_i,$$

erre szintén fennáll a

$$0 \leqq I_n \leqq \log n$$

reláció. Minthogy I_n akkor éri el maximumát, ha $E_n = 0$, vagyis ha a kimenetelt illetően nincs bizonytalanságunk, ennélfogva az I_n mennyiséget — véges rendszer esetén — nevezhetjük a rendszer információjának*.

3. Legyen most ξ folytonos valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel, amelyről egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az egész számegyenesen $F'(x) = f(x)$ *pozitív* sűrűségfüggvénnyel bír. Ha a ξ-re vonatkozó megfigyelésünk eredménye csupán olyan szempontból bír érdekességgel, hogy értéke a mediánnál kisebb-e, vagy nagyobb, akkor a rendszer információja ξ eloszlásától függetlenül adható meg: $I_2(\xi) = 0$. Ha pedig csak a $(\xi < x_0)$ vagy a $(\xi \geqq x_0)$ események érdekesek számunkra, akkor az $F(x)$-től kevéssé függő

$$I_{x_0}(\xi) = F(x_0) \log 2F(x_0) + (1 - F(x_0)) \log 2(1 - F(x_0))$$

eredményre jutunk.

Ha egy folytonos eloszlású ξ valószínűségi változóra vonatkozó tájékozottságunk mértékét definiálni akarjuk, akkor figyelembe kell venni azt a nyilvánvaló szempontot, hogy a gyakorlat számára a ξ értéktartományának nem feltétlenül minden pontja bír egyenlő mértékben érdekességgel: pl. igen nagy A és B pozitív értékek esetén a $(\xi < -A)$ vagy $(\xi > B)$ események nem olyan „részletesen" érdekelnek, mint a $(-A \leqq \xi \leqq B)$ intervallumon belül a ξ kimenetele. Folytonos ξ változó esetén mármost érdeklődésünk eloszlását a következő módon értelmezzük: minden $n \geqq 2$ természetes számra megadjuk a számegyenesnek n részre való olyan felosztását, amely mellett minden rész egyenlő módon érdekel. Ilyen felosztásrendszer akkor nem mond ellent önmagának, ha felfogható, mint egy eloszlás kvantiliseinek rendszere. Ez könnyen belátható: az $x_0^{(n)} = -\infty$ és $x_n^{(n)} = \infty$ $(n = 2, 3, \ldots)$ jelölések mellett, ha $n = 2$ esetén az $(x_0^{(2)} < \xi < x_1^{(2)})$ és $(x_1^{(2)} \leqq \xi < x_2^{(2)})$ esemé-

* Megjegyezzük, hogy az irodalomban az „információ mennyiség" elnevezés más vonatkozásban és értelemben is előfordul. Lásd Balatoni—Rényi [1], 14. oldal (16) formula.

nyek bírnak azonos — $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{2}$ — mértékben érdekességgel, akkor $n=3$ esetén nyilván az $x_1^{(3)} < x_1^{(2)} < x_2^{(3)}$ egyenlőtlenségnek kell teljesülnie, továbbá minden $n=2k$-ra az $x_k^{(n)} = x_1^{(2)}$ kell teljesüljön, s í. t. Általában tehát $x_k^{(n)} = x_{rk}^{(rn)}$ fog teljesülni minden r egész számra s az n-hez tartozó osztópontok elválasztják egymástól az $(n+1)$-hez tartozó osztópontokat.

Ha az osztópontok

$$(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}) \qquad n=2,3,\ldots$$

randszerét ilymódon megválasztottuk, akkor az a $\Phi(x)$ függvény, amelyre $\Phi(x_k^{(n)}) = \frac{k}{n}$ $k=0,1,2,\ldots,n$; $n=2,3,\ldots$ és amelyre az egész számegyenesen a monotonitást megköveteljük, egyértelműen meghatározott, erre $\Phi(-\infty)=0$, $\Phi(\infty)=1$, azaz a valószínűségeloszlásfüggvényre jellemző tulajdonságokkal bír.

A ξ valószínűségi változó információját mármost érdeklődésünk Φ eloszlására nézve a következőképpen definiáljuk: minden n-re tekintjük a következő diszkrét eloszlásra az információt: $p_i^{(n)} = F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)})$; $i=1,2,\ldots,n$. Erre az információ:

$$I_{n,\Phi}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)})) \log n (F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)})).$$

Írjuk $\frac{1}{n}$ helyébe a vele minden i-re egyenlő $\Phi(x_i^{(n)}) - \Phi(x_{i-1}^{(n)})$ mennyiséget, akkor

$$I_{n,\Phi}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)})) \log \frac{F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)})}{\Phi(x_i^{(n)}) - \Phi(x_{i-1}^{(n)})}.$$

Legyen most $F'(x) = f(x) > 0$ és $\Phi'(x) = \varphi(x) > 0$ és végezzük el az $n \to \infty$ határátmenetet (ami mindenkor a $\Phi(x)$ kvantilisei által adott osztópontrendszereken keresztül történik), akkor a ξ változónak a Φ eloszlásra vonatkozó „relatív információjának” következő kifejezéséhez jutunk:

$$I_\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \tag{3}$$

ami vagy véges nemnegatív érték, vagy ∞. A sűrűségfüggvények pozitivitására vonatkozó feltételt helyettesíthetjük azzal, hogy az

$F(x)$ és $\Phi(x)$ eloszlások egymásra nézve kölcsönösen abszolút folytonosak*.

RÉNYI ALFRÉD megjegyezte, hogy az $I_\Phi(\xi)$ kifejezés nem más, mint a (0,1) intervallumban értelmezett $\eta = \Phi(\xi)$ valószínűségi változó szokásos értelemben vett entrópiája negatív előjellel; ugyanis η eloszlásfüggvénye $G(y) = F(\Phi^{-1}(y))$ és $G'(y) = g(y)$ jelöléssel egyszerűen adódik az

$$I_\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = -\int_0^1 g(y) \log \frac{1}{g(y)} dy$$

összefüggés. Ha a (0,1)-ben egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét $\psi(y)$-nal jelöljük, akkor természetesen fenti reláció az

$$I_\Phi(\xi) = I_\psi(\eta) = I_\psi(\Phi(\xi))$$

relációval azonos, vagyis az $\eta = \Phi(\xi)$ transzformáció olyan valószínűségi változóhoz vezet, amelyre nézve a (0,1) értelmezési tartományon érdeklődésünk eloszlása egyenletes.

* A (3) alatti kifejezés lényegében az irodalomban szereplő I-divergencia, míg a J-divergencia ennek szimmetrizált alakja:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \varphi(x)) \log \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx,$$

amely mennyiség a két eloszlás eltérése mértékének tekinthető.

Ez utóbbi nem-negativitása triviális: ahol $f(x) - \varphi(x) \geqq 0$, ott $\frac{f(x)}{\varphi(x)} \geqq 1$ s megfordítva is. A (3) alatti kifejezés nem-negativitása itt a véges rendszer entrópiájának nem-negativitásából következik. Az irodalomban [5] ezt a Jensen-féle egyenlőtlenség segítségével szokták bizonyítani. — Megemlítem, hogy T. SÓS VERA erre a következő igen egyszerű és elegáns bizonyítást közölte velem: A logaritmus függvény alakjából leolvasható, hogy

$$\log \frac{1}{t} \geqq 1 - t.$$

Írjunk $t = \frac{\varphi(x)}{f(x)}$-et, akkor

$$f(x) \log \frac{f(x)}{\varphi(x)} \geqq f(x) - \varphi(x).$$

Minthogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$, innen integrálással állításunk következik.

Ez a megjegyzés magyarázatát adja annak is, hogy diszkrét esetben érdeklődésünk eloszlásaként miért nem jön tekintetbe valamely az egyenletestől eltérő $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ eloszlás, vagyis fenti értelmezésünk miért nem vezet

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{p_i}{q_i}$$

alakú információhoz. Véges esetben ugyanis az értékek transzformációja az entrópia, ill. információ értékén nem változtat. Kivételt képezhet az az eset, amikor a transzformáció különböző értékeket azonosba visz át, amely esetben az újabb rendszer entrópiája és információja az eredeti formában számítandó, amint azt a 2. pontban említettük.

4. A $\Phi(x)$ eloszlásra vonatkozó (3) alatti relatív információ módot ad elsősorban különböző eloszlások azonos Φ-re vonatkozó információjának összehasonlítására s azonos eloszlások esetén különböző mértékekre vonatkozó relatív információk mértékének összehasonlítására; az általános eset értelmezése további vizsgálatra szorul, ami az entrópiának RÉNYI által definiált dimenziója alapján történhet.

Legkevesebb a relatív információnk a $\Phi(x) \equiv F(x)$ mértékre vonatkozólag, ti. $I_F(\xi) = 0$ és csakis ebben az esetben, amint az könnyen igazolható.

Ez megfelel annak, hogy véges rendszer esetén is az információ akkor és csakis akkor 0, ha az „egyenlő érdekességgel” bíró események mind egymással, és ezzel az érdeklődésünk mértékével azonos valószínűségű események. Az egész számegyenesen „egyenlő eloszlású” mértékre vonatkozó relatív információ módszerünkkel nem tárgyalható: a számegyenes két „egyenlő” részre még felosztható a 0 ponttal, de végesben fekvő két pont már nem osztja három „egyenlő” részre. Ebben az esetben a RÉNYI által adott tárgyalás a megfelelő.

5. Ebben a paragrafusban az

$$I_\Phi(\xi) \geqq 0$$

relációnak néhány egyszerű következményét mutatjuk meg és példákat adunk.

a) Legyen $f(x) \geqq 0$ az egész számegyenesen értelmezve és legyen

$$\Phi'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-n)^2}{2\sigma^2}}. \tag{4}$$

Ekkor

$$I_\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x)\, dx + \log \sqrt{2\pi}\,\sigma + \frac{1}{2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx \geqq 0.$$

Ha most $M(\xi) = \mu$ és $D^2(\xi) = \sigma^2$, akkor az információelméletben fontos szerepet játszó következő kifejezésre kapunk felső korlátot:

$$E_F = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x)\, dx \leqq \log \sqrt{2\pi e}\,\sigma.$$

Eredményünk azt adja, hogy az E_F entrópia az adott szórású eloszlások között normális eloszlás esetén maximális. Hasonlóképpen értelmezhető a pozitív változókra vonatkozó alábbi egyenlőtlenség is.

b) Legyen ξ pozitív valószínűségi változó, vagyis $x < 0$-ra $f(x) = 0$ és legyen

(5) $$\Phi'(x) = \varphi(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

Ekkor

$$I_\Phi(\xi) = \int_{0}^{\infty} f(x) \log f(x)\, dx + \log \frac{1}{\lambda} + \lambda \int_{0}^{\infty} x f(x)\, dx.$$

Ha most $M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, akkor a következő relációhoz jutunk:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x)\, dx \leqq \log \frac{e}{\lambda}.$$

c) Ha ξ normális eloszlású $M(\xi) = \mu_0$ várható értékkel és $D(\xi) = \sigma_0$ szórással, és $\Phi'(x)$ kifejezése a (4) alatti, akkor

$$I_\Phi(\xi) = \frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma^2} + \log \frac{\sigma}{\sigma_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1\right).$$

Ha $\sigma_0 = \sigma$, akkor

$$I_\Phi(\xi) = \frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma^2}.$$

E kifejezés értéke akkor nagy, ha $|\mu - \mu_0| \gg \sigma_0$, vagyis valóban akkor bírunk nagy relatív információval Φ-re nézve, ha a várható értékek igen távol esnek egymástól a szóráshoz képest, akkor ugyanis ξ értéke igen kis valószínűséggel esik abba a $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ intervallumba, ami igen nagy — 99,7% — mértékben érdekel bennünket.

d) Legyen most ξ exponenciális eloszlású $M(\xi)=\frac{1}{\lambda_0}$ várható értékkel, míg $\Phi'(x)$ kifejezése legyen az (5) alatti. Ekkor

$$I_\Phi(\xi)=\log\frac{\lambda_0}{\lambda}+\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}-1\right)\geqq 0.$$

Ez az eredményünk is az előbbihez hasonló módon támasztja alá az I-divergenciának, mint relatív információnak fogalmát.

(Szerző előadta az MTA Matematikai Kutató Intézete Matematikai statisztikai osztályának 1958. november 20-i osztályszemináriumán.)

IRODALOM

[1] BALATONI J.—RÉNYI A.: Az entrópia fogalmáról. MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, I (1956), 9—40 o.

[2] HÁJEK J.: A property of J-divergences of marginal probability distributions. Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, 460—463. o.

[3] Хинчин А. Я.: Понятие энтропии в теории вероятностей. Успехи Математических Наук, т. 8 (1953) 3—51 o.

[4] JEFFREYS H.: Theory of probability. 2nd ed. Oxford, 1948.

[5] KULLBACK S.—LEIBLER R. A.: On information and sufficiency. Annals of Mathematical Statistics, 22 (1951), 79-86 o.

[6] KULLBACH S.: An application of information theory to multivariate analysis. Annals of Mathematical Statistics, 23 (1953), 3—51 o.

[7] PÉREZ A.: Notions géneralisées d'incertitude, d'intropie et d'information du point de vue de la théorie de martingales. Transactions of the first Prague Conférence on information theory, statistical decision functions, random processes, Prague, 1957. 183—208 o.

[8] RÉNYI A.: On the dimension and entropy of probability distributions. Acta Mathematica A. Sci. Hungaricae, 10 (1959) 1, 193—215 o.

[9] SHANNON C. E.: A mathematical system of communication. Bell System Technical Journal, 27 (1948), 379—423 o. és 623—656 o.

[10] Санов И. Н.: О вероятности больших отклонений случайных величин. Математический сборник, т. 42 (1957) I. II.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОДНОГО ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

И. Винце

Резюме

Энтропия полной системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$E_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i} \qquad (0 \leqq E_n \leqq \log n),$$

где $P(A_i) = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Это выражение энтропии "молчаливо" предполагает, что с точки зрения протекания события возможные результаты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ интересуют нас "в равной степени", Если бы было безразлично, какое из событий A_1 и A_2 произойдет, то энтропию давало бы следующее выражение:

$$E_{n-1} = (p_1 + p_2) \log \frac{1}{p_1 + p_2} + \sum_{i=3}^{n} p_i \log \frac{1}{p_i} \leqq E_n.$$

Это замечание в случае непрерывной случайной величины приводит к мере относительной информации, для которой получается выражение I-расходимости теории информации.

Переидем сначала с энтропии к следующей мере информации:

$$I_n = \log n - E_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \log n p_i \qquad (0 \leqq I_n \leqq \log n).$$

Пусть теперь ξ будет непрерывной случайной величиной с функцией распределения $F(x)$ и функцией плотности $F'(x) = f(x)$, где $f(x) > 0$ для вцех x.

С практической точки зрения часто не каждая точка вещественной осы представляает для нас одинаковый интерес. Если, например, A и B очень большие положительнье числа, то часто события $(\xi < -A)$ и $(\xi > B)$ в дальнейших деталях не интересуют, в противоположность событию $(-A < \xi < B)$. Поэтому вводится "мера нашей заинтересованности", относительно случайной величины ξ, что выражается функцией распределения. В конечном (дискретном) случае это распределение равномерно на событиях $A_1, A_2, \ldots, A_n$, которые, как мы уже упоминалы, интересуют нас в "одинаковой степени". В случае непрерывной случайной величины для любых n разделим вещественную осы на $n+1$ таких частей, каждая из которых в одинаковой мере значительна для нас. Таким образом мы придём к системе разбиении $(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)})$ вещественной прямой $(x_0^{(n)} = -\infty,$ $x_n^{(n)} = +\infty)$. Легко видеть, что ета система лишь в том случае имеет смысл, если точки $x_k^{(n)}$ могут рассматриваться как квантиленты некоторой функции распределения: например, точки, относящиеся к n, должны отделять друг от друга точки, относящиеся к $n+1$, должно вышолняться условие $x_k^{(n)} = x_{rk}^{(rn)}$ $(r = 1, 2, \ldots)$. Эта фуикция распределения, которую мы обозначим через $\Phi(x)$, однозначно определяется её значениями:

$$\Phi(x_k^{(n)}) = \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad n = 2, 3, \ldots$$

Для данного n теперь информация

$$I_{n,\Phi}(\xi)=\sum_{i=1}^{n}[(F(x_i^{(n)})-F(x_{i-1}^{(n)})]\log n[F(x_i^{(n)})-F(x_{i-1}^{(n)})]$$

и заменой $\frac{1}{n}=\Phi(x_i^{(n)})-\Phi(x_{i-1}^{(n)})$, если воспользоваться условием $\Phi'(x)=$ $=\varphi(x)>0$ $(-\infty<x<\infty)$, получаем следующее соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} I_{n,\Phi}(\xi)=I_{\Phi}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\log\frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx.$$

Таким образом выражение $I_{\Phi}(\xi)$ может рассматриваться как информация случайной величины ξ, отнесенная к распределению нашей заинтересованности $\Phi(x)$.

Если распределение ξ нормально с параметрами (μ_0, σ_0) и

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}\,dt,$$

то

$$I_{\Phi}(\xi)=\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}.$$

Следовательно, информация велика, если $|\mu-\mu_0|\gg\sigma_0$, т. е. если ξ попадает на отрезок $|\mu-3\sigma_0,\ \mu+3\sigma_0|$ с очень малой вероятностью, что очень большой степени (т. е. 99,7%) интересует нас.

Статья упоминает также несколько простых следствии неотрицательности I-расходимости.

ON AN INTERPRETATION OF A CONCEPT OF INFORMATION-THEORY

I. Vincze

Summary

1. The entropy of system of events $A_1 A_2, \ldots, A_n$ is in case $P(A_i)=p_i$, $i=1, 2, \ldots, n$

$$E_n=\sum_{i=1}^{n} p_i\log\frac{1}{p_i}\qquad(0\leqq E_n\leqq\log n).$$

The expression of entropy implies the assumption that regarding the result of the phenomenon under consideration, the events $A_1, A_2, \ldots A_n$ are of "equal interest" to us. Would it namely be e. g. of no importance to us which of the events A_1 and A_2 occurs, then the entropy of the system would obviously be given by

$$E_{n-1}=(p_1+p_2)\log\frac{1}{p_1+p_2}+\sum_{i=3}^{n}p_i\log\frac{1}{p_i}\leqq E_n.$$

This remark leads in case of a continuous random variable to the measure of the relative information, for which the expression of I-divergence of the information theory holds.

Let us first consider instead of the entropy the quantity

$$I_n = \log n - E_n = \sum_{i=1}^{n} p_i \log np_i \qquad (0 \leqq I_n \leqq \log n)$$

Let now ξ be a continuous random variable with distribution function $F(x)$ and frequency function $F'(x) = f(x)$ where $f(x) > 0$ for any value of x. If we are interested only in whether the observed value of ξ exceeds the median or not, then we obtain for the information independent of the distribution function $I_2(\xi) = 0$. If we are interested in the events $(-\infty < \xi \leqq x_0)$ and $(x_0 \leqq \xi < \infty)$ then the information is given by

$$I_{x_0}(\xi) = F(x_0) \log 2F(x_0) + (1 - F(x_0)) \log 2(1 - F(x_0)),$$

the value of which depends only to a relatively small degree on $F(x)$.

From a practical point of view often not all points of the real line are of the same importance. Are for example A and B large positive numbers, then it often occurs, that the events $(\xi < -A)$ and $(\xi > B)$ do not interest us in further details, in contrary to the event $(-A < \xi < B)$. Now we introduce the "distribution of our interest" regarding a random variable. This we express by means of a distribution function. In the case of a finite distribution — as already mentioned — each event is of the same importance to us. In this case our interest regarding the events $A_1, A_2, \ldots, A_n$ is given by the uniform distribution $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$. In case of a continuous random variable ξ we divide the real line for each n into parts, each of the intervals being of equal importance to us. So we obtain a system $(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)})$ of the divisions of the real line, with $x_0^{(n)} = -\infty$, $x_n^{(n)} = \infty$, $n = 2, 3, \ldots$ It is easy to see that this system is only reasonable if the points $x_k^{(n)}$ can be regarded as the quantiles of a distribution function; as e.g. the deviding points belonging to n must separate those belonging, to $n+1$, further the relations $x_k^{(n)} = x_{rk}^{(rn)}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ must hold. This distribution function denoted by $\Phi(x)$ is uniquely determined by his values $\Phi(x_n^{(n)}) = \frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$

For a given n the information is

$$I_{n,\Phi}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)})) \log (n(F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)}))),$$

or after the substitution of $\frac{1}{n} = \Phi(x_i^{(n)}) - \Phi(x_{i-1}^{(n)})$,

$$I_{n,\Phi}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)})) \log \frac{F(x_i^{(n)}) - F(x_{i-1}^{(n)})}{\Phi(x_i^{(n)}) - \Phi(x_{i-1}^{(n)})}.$$

If we assume furthermore that $\Phi'(x) = \varphi(x) > 0$ for all real x, then we obtain by means of limiting process the relation

$$\lim_{n \to \infty} I_{n,\Phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \frac{f(x)}{\varphi(x)}\, dx = I_\Phi(\xi),$$

which is the so-called I-divergence, and which is either a nonnegative finite value or ∞. The expression $I_\Phi(\xi)$ can be regarded as the information of the random variable relative to the distribution Φ of our interest.

Is $\Phi(x) = F(x)$, then $I_\Phi(\xi) = 0$, which corresponds in the finite case to $p_i = \text{const.}$

In case of the "uniform distribution of the whole real line" the method of RÉNYI gives suitable procedure. Is for example

$$P(\xi < x) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}\, dt$$

and

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt,$$

then

$$I_\Phi(\xi) = \frac{(\mu_0 - \mu)^2}{2\sigma^2} + \log \frac{\sigma}{\sigma_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} - 1\right).$$

Is $\sigma = \sigma_0$, then

$$I_\Phi(\xi) = \frac{(\mu - \mu_0)^2}{2\sigma_0^2}.$$

The information is large, if $|\mu - \mu_0| \gg \sigma_0$, that is if the random variable ξ falls with very small probability within the interval $(\mu - 3\sigma_0,\ \mu + 3\sigma_0)$, which does interest us to a great extent (namely 99,7% of our interest is concentrated in this interval).

The examination of the exponential case gives similar results. According to a remark of A. RÉNYI the expression $I_\Phi(\xi)$ equals both the negative entropy (in the common sense) of the random variable $\eta = \Phi(\xi)$ defined in the interval (0,1) and our information about η relative to our interest uniform in the some interval.

The article deals with some further consequences of the nonnegativity of the relative information.

Sima függvények approximációjáról

FREUD GÉZA

Weierstrass jól ismert tétele szerint minden 2π szerint periodikus folytonos $f(x)$ függvényt tetszőleges pontossággal közelíthetünk

$$(1) \qquad t_n(x) = a_{on} + \sum_{k=1}^{n} (a_{kn} \cos kx + b_{kn} \sin kx)$$

alakú trigonometrikus polinomokkal. Jackson és Bernstein vizsgálatai szerint szoros kapcsolat áll fenn a közelítés „jósága" és a függvény folytonossági mértéke közt [3]. A közelítés jóságát azzal mérjük, hogy a függvényt már olyan trigonometrikus polinom is jól közelíti, melynek n rendszáma alacsony. Egy $f(x)$ folytonos függvény folytonossági mértékeként az

$$(2) \qquad \omega(\delta; f) = \sup_{\substack{|h| \leqq \delta \\ x \leqq [0, 2\pi]}} |f(x+h) - f(x)|$$

függvényt tekintik. Jackson tétele szerint n minden értékéhez van olyan trigonometrikus polinom, amely $f(x)$-től kevesebbel tér el, mint $A_0 \omega(n^{-1}; f)$, ahol A_0 univerzális állandó. Továbbmenően, ha $f(x)$ r-szer folytonosan differenciálható, akkor van olyan $\{t_n(x)\}$ sorozat, hogy

$$|f(x) - t_n(x)| \leqq A_r n^{-r} \omega(n^{-1}; f^{(r)}) \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

ahol az $\{A_r\}$ sorozat se x-től, se f-től nem függ. (J. Favard később bebizonyította, hogy az $\{A_r\}$ sorozat korlátos.) Bernstein mutatta meg, hogy ez a tétel számos függvényklasszisra megfordítható. Az $f(x)$ függvényről akkor mondjuk, hogy α exponensű Lipschitz-feltételnek tesz eleget (jelekben: $f \in \mathrm{Lip}\, \alpha$), ha egy alkalmasan választott $K > 0$ számmal eleget tesz az

$$(3) \qquad |f(x+h) - f(x)| \leqq K |h|^{\alpha}$$

egyenlőtlenségnek, h és x minden értékére. Jackson tétele szerint akkor $f(x)$-et $n^{-\alpha}$ rendben közelíthetjük n-edrendű trigonometrikus polinomokkal és Bernstein éppen azt mutatta ki, hogy $\alpha < 1$ esetén ez az állítás megfordítható: Ha $f(x)$-et n-edrendű trigonometrikus polinomokkal $n^{-\alpha}$ rendben tudjuk közelíteni, ahol $\alpha < 1$, akkor $f \in \mathrm{Lip}\, \alpha$. Általánosabban, legyen r egész szám és $0 < \alpha < 1$. Az $f(x)$ függvénynek akkor és csak akkor van olyan r-edrendű folytonos deriváltja, amely a $\mathrm{Lip}\, \alpha$ osztályba tartozik, ha létezik olyan $\{t_n(x)\}$ trigonometrikus polinomsorozat, hogy

$$(4) \qquad |f(x) - t_n(x)| \leqq K n^{-r-\alpha}.$$

Ki szeretnénk emelni a megfordítási tétel két legfontosabb hiányosságát: 1. Nem jellemezhető segítségével a Lip 1 függvényosztály, 2. nem lehet segítségével az approximáló polinomokról leolvasni, hogy a függvény differenciálható-e (csak azt, hogy van-e $\mathrm{Lip}\, \alpha$ osztályba tartozó deriváltja).

Ami az első kérdést illeti, az Alexits és Zamansky egy eredménye szerint a konjugált függvény Fourier-sora segítségével megválaszolható[1].

A második kérdésre Zygmund vizsgálatai vetettek fényt. Ha egy $f(x)$ függvény folytonosan differenciálható, akkor Jackson tétele szerint alkalmasan választott $t_n(x)$ sorozatra x-ben egyenletesen

$$(5) \qquad \lim_{n \to \infty} n|f(x) - t_n(x)| = 0.$$

A fordítottja nem igaz; Bernstein olyan $f(x)$ függvényt szerkesztett, amelyre (5) alkalmasan választott $\{t_n(x)\}$-szel x-ben egyenletesen teljesül és $f(x)$ mégsem differenciálható.

Mármost Zygmund bebizonyította, hogy (5) akkor, és csak akkor elégíthető ki x-ben egyenletesen, ha $f(x)$ folytonos és x-ben egyenletesen

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h} = 0.$$

Az ezen feltételnek eleget tevő folytonos $f(x)$-eket Zygmund sima függvényeknek (smooth functions) nevezte el. Könnyű kimutatni, hogy azok a pontok, ahol egy sima függvény differenciálható, bármely tetszőlegesen kis intervallumon belül kontinuum számosságúak. Ennek alapján kézenfekvő a 2. kérdést az alábbival helyettesíteni:

[1] $f \in \mathrm{Lip}\, 1$ akkor és csak akkor, ha $\tilde{f}$-at Fourier-sorának n-edrendű Fejér-féle közepe n^{-1} rendben közelíti. (Lásd Alexits [1], [2] és M. Zamansky [4].)

2. *a*) Melyek azok a pontok, ahol egy $f(x)$ sima függvény differenciálható?

Az alábbiakban ezt a kérdést fogjuk megválaszolni.

TÉTEL: *Legyen $f(x)$ sima, vagyis alkalmasan választott $\{t_n(x)\}$-re (5) x-ben egyenletesen teljesül és ξ tetszőlegesen rögzített valós szám. Az $f(x)$ függvény a ξ helyen akkor és csak akkor differenciálható, ha a*

$$\lim_{n\to\infty} t'_n(\xi) = F(\xi)$$

határérték létezik és ekkor $F(\xi) = f'(\xi)$.

A tétel igazolásához az alábbi lemmára lesz szükségünk, amely bizonyítás nélkül meg van említve Zamansky cikkében:

Lemma: ha (5) x-ben egyenletesen teljesül, akkor ugyancsak x-ben egyenletesen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t''_n(x)}{n} = 0. \tag{6}$$

Bizonyítás[2]: (5) következtében tetszőleges ε-hoz található olyan μ_0 pozitív egész szám, hogy x minden értékére

$$|t_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon n^{-1} \quad \text{ha} \quad n > 2^{\mu_0}, \tag{7}$$

amiből

$$|t_{2^{\mu+1}}(x) - t_{2^\mu}(x)| \leqq 2\varepsilon 2^{-\mu},$$

hacsak $\mu \geqq \mu_0$. Így a Bernstein-féle egyenlőtlenség[3] értelmében

$$|t''_{2^{\mu+1}}(x) - t''_{2^\mu}(x)| \leqq 8\varepsilon 2^{\mu} \text{ ha } \mu \geqq \mu_0.$$

Innen

$$2^{-\mu}|t''_{2^\mu}(x)| \leqq 2^{-\mu} \sum_{\varrho=\mu_0}^{\mu} |t''_{2^\varrho}(x) - t''_{2^{\varrho-1}}(x)| + 2^{-\mu}|t''_{2^{\mu_0-1}}(x)| \leqq$$

$$\leqq 8\varepsilon 2^{-\mu} \sum_{\varrho=0}^{\mu-1} 2^\varrho + 2^{-\mu}|t''_{2^{\mu_0-1}}(x)| \leqq 8\varepsilon + 2^{-\mu}|t''_{2^{\mu_0-1}}(x)|.$$

2 Az itt közölt bizonyítás, amely egyszerűbb, mint a szerzőé, Turán Páltól származik.

3 Ha $t_\nu(x)$ ν-edrendű trigonometrikus polinom, akkor

$$|t'_\nu(x)| \leqq \nu \operatorname{Max} |t_\nu(x)|.$$

Legyen $\mu_1 \geqq \mu_0$ olyan nagy, hogy a második tag $\mu \geqq \mu_1$ esetén ε-nál kisebb, akkor

$$(8) \qquad 2^{-\mu} |t''_{2^\mu}(x)| \leqq 9\varepsilon.$$

Legyen $n \geqq 2^{\mu_1}$ és az a pozitív egész szám, melyre $2^{\mu+1} > n > 2^\mu$; (7) következtében

$$|t_n(x) - t_{2^\mu}(x)| \leqq \varepsilon(n^{-1} + 2^{-\mu}) \leqq 3\varepsilon n^{-1}$$

és így a Bernstein-egyenlőtlenségből ($t_n - t_{2^\mu}$ n-edrendű trigonometrikus polinom!)

$$|t''_n(x) - t''_{2^\mu}(x)| \leqq 3\varepsilon n,$$

végül tekintettel (8)-ra

$$|t''_n(x)| \leqq 3\varepsilon n + 9\varepsilon 2^\mu \leqq 12\varepsilon n;$$

ebből (6) következik.

Rátérhetünk a főtétel bizonyítására. Legyen $|h| \leqq 1$ és az $n = n(h)$ pozitív egész számot válasszuk úgy, hogy

$$(9) \qquad |h|^{-1} \leqq n < 2|h|^{-1}.$$

(5) következtében

$$(10) \qquad \lim_{|h| \to 0} \left\{ \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - \frac{t_n(\xi+h) - t_n(\xi)}{h} \right\} = 0.$$

A Taylor-képlet szerint

$$\frac{t_n(\xi+h) - t_n(\xi)}{h} = t'_n(\xi) + \frac{h}{2} t''_n(\xi + \vartheta h).$$

A segédtétel és (9) következtében a jobb oldalon a második tag zérushoz tart, ha $h \to 0$ így (10)-ből

$$\lim_{|h| \to 0} \left\{ \frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} - t'_n(\xi) \right\} = 0;$$

ebből tételünk állításai leolvashatók.

Befejezésül megemlítjük tételünk egy érdekes következményét. Legyen

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x)$$

hézagos trigonometrikus sor, ahol $\frac{n_{k+1}}{n_k} > \vartheta > 1$ és $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = \lim\limits_{k \to \infty} b_k = 0$.

Azt állítjuk, hogy a (11) sor konvergenciapontjainak halmaza olyan sűrű, hogy minden intervallumba kontinuumnyi sok pontja esik. Ezt a tételt Zygmund [6] már bebizonyította. Mint látni fogjuk, tételünk felhasználásával a bizonyítás lényegesen egyszerűsödik és áttekinthetőbbé válik. Ennek igazolására tekintsük a (11) formális integrálásával nyert

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{n_k}\sin n_k x-\frac{b_k}{n_k}\cos n_k x\right) \tag{12}$$

sort, amely a Cauchy-féle hányadoskritérium értelmében minden x-re konvergál. Legyen N pozitív egész szám és $n_r \leqq N < n_{r+1}$ és a (12) sor N-edrendű részletösszege

$$s_N(x)=\sum_{k=1}^{r}\left(\frac{a_k}{n_k}\sin n_k x-\frac{b_k}{n_k}\cos n_k x\right).$$

Akkor

$$|g(x)-s_N(x)| \leqq \operatorname*{Max}_{k\geqq r}(|a_k|+|b_k|)\sum_{k>r}\frac{1}{|N_k|} \leqq$$

$$\leqq \operatorname*{Max}_{k\geqq r}(|a_k|+|b_k|)\cdot\frac{1}{N}(1+\vartheta^{-1}+\vartheta^{-2}+\cdots)$$

és így

$$\lim_{N\to\infty} N[g(x)-s_N(x)]=0.$$

Tehát $g(x)$ sima függvény, és a bebizonyított tétel értelmében egy adott ξ pontban akkor és csak akkor differenciálható, ha az $s'_N(\xi)$ sorozat konvergens. Az $\{s'_N(x)\}$ sorozat tagjai nem egyebek, mint a (11) sor részletösszegei, tehát a (11) sor pontosan azokban a pontokban konvergens, ahol $g(x)$ differenciálható. Ez minden intervallumon belül kontinuumnyi sok pontban bekövetkezik.

Kiegészítésképpen ismertetjük annak bizonyítását, hogy egy sima folytonos $h(x)$ függvény kontinuumnyi sok helyen differenciálható. Ha a $h(x)$ függvény egy szakaszon lineáris, akkor ott triviális módon mindenütt differenciálható; elegendő tehát olyan szakaszt vizsgálnunk, ahol a függvény nem lineáris és legyen $[a, b]$ ezen szakasz belsejében. Mivel $h(x)$ sima, az

$$f(x)=-\frac{h(b)-h(a)}{b-a}(x-a)-h(a)+h(x)$$

függvény is sima, hiszen a lineáris rész második differenciája azonosan zérus. Mivel $f(x)$ nem lehet lineáris $[a,b]$-ben és $f(a)=f(b)=0$, tehát legalább egy közbülső pontban nem tűnik el; vegyen ott fel pl. pozitív értéket. Akkor található olyan $x_0 \in (a, b)$ hely, ahol $F(x)$ felveszi $[a, b]$-beli maximumát:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqq 0 \text{ és } \frac{-f(x_0)+f(x_0-h)}{h} \leqq 0.$$

Ezen két hányados összege a függvény simasága következtében zérushoz tart, ami csak úgy lehetséges, ha a két tag külön-külön is tart zérushoz; tehát $f'(x_0)$ létezik és zérussal egyenlő. Ennek következtében $h'(x_0)$ is létezik és egyenlő $\frac{h(b)-h(a)}{b-a}$-val. Mivel $h(x)$ nem lineáris, a $\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$ függvény nem lehet állandó és tekintettel arra, hogy folytonos $x > a$-ra, értékkészlete az adott szakaszban kitölt egy $[m_1, m_2]$ intervallumot. Minden $m \in [m_1, m_2]$-höz tartozik az adott szakasz egy x_m pontja, ahol $h(x)$ differenciálható és $h'(x_m) = m$. A különböző m értékekhez nyilván különböző x_m pontok tartoznak, tehát az $\{x_m\}$ ponthalmaz számossága kontinuum.

IRODALOM

[1] Alexits Gy.: A Fourier-sor Cesaro-közepével való approximáció nagyságrendjéről. Mat. Fiz. Lapok 48 (1941) 410—422.

[2] G. Alexits: Sur l'ordre de grandeur d'approximation d'une fonction contininue pares sommes de Fejér. Acta Math. Ac. Sci. Hung. 3 (1952) 29—42.

[3] J. P. Natanszon: Konstruktív függvénytan. Akadémiai Kiadó, Budapest, 19.

[4] M. Zamansky: Classes de saturation des procédés de sommation des series de Fourier I—II. Annales d'École Normale Superieur 66 (1949) 19—93 és 67 (1950) 161—198.

[5] A. Zygmund: On the convergence of lacunary trigonometric series. Fundamenta Math. 16 (1930) 90—107.

[6] A. Zygmund: Trigonometrical Series. Cambridge University Press, 1959.

[7] A. Zygmund: On smooth functions. Duke Math. Journal 12 (1945) 47—76.

О ПРИБЛИЖЕНИИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Г. Фрайд

Согласно Зигмунду 2π периодическая, непрерывная функция называетья гладкой, если равномерно относительно x

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h} = 0.$$

Зигмунд доказал, что необходимым и достаточным условием этого является существование последовательности тригонометрических многочленов (1) для которой имеет место (5). Автор доказывает, что гладкая функция $f(x)$, дифференцируема в точке ξ в том и только в том случае, если

$$\lim_{n\to\infty} t_n'(\xi) = f'(\xi).$$

С помощью етого результата он даёт более простое доказательство теоремы Зигмунда, согласно которой тригонометрический ряд с пробелами (11) сходится на множестве меры континуума, если его коэффициенты сходятся к нулю.

ÜBER DIE APPROXIMATION GLATTER FUNKTIONEN

G. Freud

Eine nach 2π periodische stetige Funktion heisst nach Zygmund glatt, wenn gleichmässig in x $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h}=0$ besteht. Infolge eines Satzes von Zygmund ist $f(x)$ dann und nur dann glatt, falls es eine Folge trigonometrischer Polynome (1) gibt, welche (5) befriedigen. Verf. zeigt, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein glattes $f(x)$ an der Stelle ξ differenzierbar sei, darin besteht, dass $\lim\limits_{n\to\infty} t_n'(\xi)=f'(\xi)$ sei. Mit Hilfe dessen wird ein vereinfachtes Beweis des Satzes angegeben, dass jede trigonometrische Lückenreihe (11) mit $\dfrac{n_{k+1}}{n_k} > \vartheta > 1$, deren Koeffizienten gegen Null streben, auf einer Punktmenge mit der Mächtigkeit des Kontinuums Konvergiert. Dieses Resultat stammt ebenfalls von Zygmund.

Rédei László egy félcsoport-elméleti problémájáról

LAJOS SÁNDOR

RÉDEI LÁSZLÓ „*Algebra I*" című könyvének német kiadásában[1] közli az alábbi problémát:

Igaz-e, hogy ha egy félcsoport Frattini-részfélcsoportja üres, akkor a félcsoport széthasítható? $O(F) \leqq 3$ esetén[2] ez így van.

Félcsoportnak nevezünk egy halmazt, ha értelmezve van benne egy asszociatív művelet. A Frattini- vagy Φ-részfélcsoport fogalma a csoportelméletben szereplő Frattini- vagy Φ-részcsoporthoz hasonlóan értelmezhető. Egy tetszőleges F félcsoport *Φ-részfélcsoportja* F mindazon elemeiből áll, amelyek F mindegyik generátorrendszeréből elhagyhatók. *Széthasítható* félcsoporton olyan félcsoportot értünk, amelynek minden nemüres részhalmaza részfélcsoportja ezen félcsoportnak.

A következőkben ellenpéldát adunk a fenti sejtésre minden 3-nál nagyobb számosság esetén. A kérdésre tehát csak $O(F) \leqq 3$ esetén igenlő a felelet.

1. *Ellenpélda $O(F)=4$-re.* Tekintsük a következő, Cayley tábláikkal megadott 2 elemű félcsoportokat:

$$\begin{array}{c|cc} F_{21} & a_1 & a_2 \\ \hline a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cc} F_{22} & b_1 & b_2 \\ \hline b_1 & b_1 & b_2 \\ b_2 & b_1 & b_2 \end{array}.$$

(Ilyen félcsoportokat alkotnak például az

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

[1] L. RÉDEI [2] 90. oldal.
[2] $O(F)$ az F félcsoport rendjét jelöli.

illetve a

$$b_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

mátrixok a szokásos mátrix-szorzásra nézve.)

Jelöljük F_4-gyel e két félcsoport direkt szorzatát,

$$F_4=F_{21}\times F_{22}.$$

F_4 elemei: $(a_1, b_1)=a$, $(a_2, b_2)=b$, $(a_1, b_2)=ab$, $(a_2, b_1)=ba$, s Cayley táblája

F_4	a	b	ab	ba
a	a	ab	ab	a
b	ba	b	b	ba
ab	a	ab	ab	a
ba	ba	b	b	ba

(i) F_4 *széthasíthatatlan*, mert például az a, b elemekből álló részhalmaz nem részfélcsoportja F_4-nek.

(ii) F_4 *Φ-részfélcsoportja üres*, mert az a és b, illetve az ab és ba elemekből álló generátorrendszerek F_4-nek minimális generátorrendszerei, tehát F_4 bármely x eleméhez van olyan generátorrendszere F_4-nek, amelyből x nem hagyható el.

2. *Ellenpélda tetszőleges* $n \geqq 4$ *számosságra.* Legyen n először tetszőleges természetes szám. Tekintsük az

$$F_n \doteq F_4 \cup [z_1, \ldots, z_{n-4}]$$

halmazt[3], ahol F_4 az imént adott 4 elemű félcsoport, $z_1, \ldots z_{n-4}$ pedig tetszőleges F_4-hez nem tartozó elemek. F_n-ben a szorzást így értelmezzük:

$$(1)\qquad \begin{cases} xy=xy, & \text{mint } F_4\text{-ben, ha } x, y \in F_4, \\ xz_i=z_i x=z_i, & \text{ha } x \in F_4, \quad (i=1,\ldots,n-4), \\ z_i z_j=z_j z_i=z_j, & \text{ha } i \leqq j^4, \quad (i,j=1,\ldots,n-4). \end{cases}$$

Ez a szorzás asszociatív, mert $(xy)z=x(yz)$, ha $x, y, z \in F_4$.

[3] $[x, y, \ldots]$ az $x, y, \ldots$ elemek halmazát jelöli.

[4] $\leqq$ helyett itt $\geqq$-t is vehetnénk, sőt általánosabban n elemű ellenpéldát úgy is készíthetünk, hogy F_4-hez egyenként adjungálunk $n-4$ elemet, adjungáláson Hewitt és Zuckerman [1] cikkének 2.2, 2.3, 2.4 és 2.5 tételeiben megadott adjunkciók bármelyikét értve.

Ha egy szorzatban F_4-beli elemek és z_i-k is szerepelnek, akkor (1) miatt F_4 elemei törölhetők, ezért az asszociativitást már csak a z_i elemekre kell igazolni. $(z_i z_j)z_k = z_i(z_j z_k)$, mert (1) miatt mindkét oldalon a maximális indexű z-vel egyenlő a szorzat. Ezzel bebizonyítottuk, hogy F_n félcsoport az (1) szorzásra nézve.

(i) F_n *széthasíthatatlan,* mert tartalmazza a széthasíthatatlan F_4 félcsoportot.

(ii) F_n *Φ-részfélcsoportja üres.* A szorzás (1) értelmezéséből látható, hogy a $z_1, \ldots, z_{n-4}$ elemek nem hagyhatók el F_n egyetlen generátorrendszeréből sem, ezért F_n generátorrendszereit úgy kapjuk, hogy F_4 generátorrendszereihez hozzávesszük a $z_1, \ldots, z_{n-4}$ elemeket. Tehát

$$F_n = \{a, b, z_1, \ldots, z_{n-4}\} = \{ab, ba, z_1, \ldots, z_{n-4}\},$$

s látható, hogy F_n egyik eleme sem hagyható el F_n mindegyik generátorrendszeréből, azaz $\Phi(F_n) = \square$[5].

Ha mármost $\mathfrak{n}$ tetszőleges végtelen számosság, akkor F_4-hez nem tartozó elemek $\mathfrak{n}$ számosságú jólrendezett halmazát csatoljuk F_4-hez, s a műveletet (1)-hez hasonlóan definiáljuk. Az előbbi gondolatmenettel bizonyítható, hogy így valóban ellenpéldát kapunk.

Ezzel minden $\mathfrak{n} \geqq 4$ számosság esetén megadtunk $\mathfrak{n}$ számosságú széthasíthatatlan félcsoportot, amelynek Φ-részfélcsoportja üres. RÉDEI LÁSZLÓ fenti sejtése tehát csak $O(F) \leqq 3$ esetén igaz.

(1959. szeptember 30.)

IRODALOM

[1] E. HEWITT and H. S. ZUCKERMAN, Finite dimensional convolution algebras, *Acta Math.*, **93** (1955), 67—119.

[2] L. RÉDEI, *Algebra I.* (Leipzig, 1959).

[5] $\Phi(F)$ az F félcsoport Φ-részfélcsoportját, a „$\square$" jel pedig az üres halmazt jelöli.

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ L. RÉDEI

S. Lajos

Автор отвечает отрицательно на следующий вопрос L. Rédei [2, стр. 90]

Расщепляемы ли полугруппы, Φ-подполугруппы которых являются пустыми? В случае $O(S) \leqq 3$ это[6] выполняется.

Φ-подполугруппа одной полугруппы S состоит из всех элементов которые можно вычеркивать из всякой системы образующих полугруппы S.

Полугруппа S называется расщепляемой, если всякое непустое подмножество полугруппы S является подполугруппой этой полугруппы.

Автор дает контрпримеры на любую мощность $\mathfrak{n} \geqq 4$, т. е. ответ на предыдущий вопрос L. Rédei является утвердительным тогда и только тогда, когда $O(S) \leqq 3$.

ON A PROBLEM OF L. RÉDEI

S. Lajos

The author gives a negative answer to the following problem of L. Rédei [2, p. 90]:

Are all semigroups S with $\Phi(S) = \square$ splitting? In case $O(S) \leqq 3$ this[7] *holds.*

$\Phi(S)$ is the *Frattini-* or *Φ subsemigroup* of the semigroup S, which consists of all elements of S which may be omitted from every generating system of S.

A *sp itting semigroup* is a semigroup in which every non-empty set is a subsemigroup.

It is shown that to arbitrary cardinal number $\mathfrak{n} \geqq 4$, there exists a non-splitting semigroup S of order $\mathfrak{n}$ with $\Phi(S) = \square$.

[6] $O(S)$ обозначает порядок полугруппы S.

[7] $O(S)$ denotes the order of the semigroup S, $\Phi(S)$ the Φ-subsemigroup of S, and the symbol „$\square$" the empty set.

A hatványsorok elméletének egy kérdéséről[1]

TURÁN PÁL

Legyen $f(z)$ reguláris az $|z| < 1$ körben és folytonos $|z| \leqq 1$-re, a $z = 0$ körüli Taylor-sora legyen

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

Jólismert tény, hogy az (1) alatti sor $|z| < 1$-re konvergens és előállítja $f(z)$-t. Fejér vette észre, hogy e tétel $|z| = 1$-re általában nem igaz.[2] Könnyen belátható ezzel szemben, hogy, ha az (1) alatti sor együtthatóira is teszünk kirovást éspedig azt, hogy

$$(2) \qquad |a_n| \leqq \frac{1}{n} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

akkor az (1) alatti sor $|z| \leqq 1$-re egyenletesen konvergál (éspedig $f(z)$-hez). Kézenfekvő kérdés, vajjon e nevezetes tételben a (2) alatti feltétel nem helyettesíthető-e enyhébbel. A következőkben megmutatjuk, hogy e kérdésre a felelet *nemleges.* Pontosabban szólva *tetszőleges pozitív és monoton végtelenhez tartó $\omega(n)$ sorozathoz található oly*

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* z^n$$

hatványsor, melynek $f^*(z)$ összegfüggvénye $|z| < 1$-ben reguláris és $|z| \leqq 1$-ben folytonos, továbbá

$$|a_n^*| \leqq \frac{\omega(n)}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

[1] A Bolyai János Matematikai Társulat által rendezett sorelméleti kollokviumon 1959. október 8-án tartott előadás.

[2] "Sur les singularités des séries de Fourier de fonctions continues" Annales de l'Ecole Norm. Sup. 28 (1911) p. 63—103.

de a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^*$$

sor mégis divergens.

Fejér dolgozatának megjelenése óta majdnem 50 év telt el; már tíz évvel ezelőtt, mikor e tételt találtam, sem gondoltam, hogy e tétel nem volna ismert. Hogy most mégis közlöm a tételt és bizonyítását, annak oka Karamatának egy, az edinburgi kongresszuson tett szóbeli megjegyzésén kívül az a tény, hogy a Proceedings of Amer. Math. Soc. 1958-ban közölt egy dolgozatot[3], mely a következő jóval gyengébb tételt tartalmazza.

Tetszőlegesen lassan végtelenhez tartó pozitív $\omega(n)$-számsorozathoz található oly

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n' \cos nx \tag{4}$$

trigonometrikus sor, mely egy *L-integrálható* $F(x)$ függvény Fourier-sora, továbbá $n=1, 2, \ldots$-ra

$$|a_n'| \leqq \frac{\omega(n)}{n}$$

és $t \to 0$-ra

$$\int_0^t F(x)dx = o(t)$$

de a (4)-sor $x=0$-ra mégis divergens.

Mint az idézett dolgozatban megadott konstrukcióból rögtön látható, a fenti $F(x)$ $x=0$-ra nem folytonos, míg előbb kimondott tételünk nemcsak azt engedi kimondani, hogy $F(x)$ minden valós x-re folytonos lehet, hanem még $F(x)$ ún. konjugált függvénye is és amellett a divergencia ténye megmarad.

Fejér ellenpélda-konstrukciója lényegileg a kétparameteres

$$g(z, k, n) = z^k \left(\frac{1}{n} + \frac{z}{n-1} + \cdots + \frac{z^{n-1}}{1} - \right.$$

$$\left. - \frac{z^{n+1}}{1} - \frac{z^{n+2}}{2} - \cdots - \frac{z^{2n}}{n} \right)$$

[3] Kumari Sulaxana „On the non-convergence of Fourier series", p. 293—299.

polinomok azon tulajdonságán alapszik, hogy $|z| \leqq 1$-re

$$(5) \qquad |g(z, k, n)| \leqq C,$$

függetlenül k és n-től is. Fejér konstrukciója voltaképp egy *metodus,* mely a hasonló feladatok egy egész sorozatához adaptálható. Feladatunkat a Fejér-féle metodus egy finomításával oldjuk meg, amennyiben alapul a háromparameteres

$$(6) \qquad \begin{aligned} G(z, k, n, m) = z^k \biggl(\frac{1}{n} + \frac{z}{n-1} + \cdots + \frac{z^{n-m}}{m} - \\ - \frac{z^{n+m}}{m} - \frac{z^{n+m+1}}{m+1} - \cdots - \frac{z^{2n}}{n} \biggr) \end{aligned}$$

polinomokat vesszük, ahol k nemnegatív egész, $m < n$ pozitív egész számok. Mivel

$$(7) \qquad \begin{aligned} G(z, k, n, m) = g(z, k, n) - z^k \biggl(\frac{z^{n-m+1}}{m-1} + \cdots \\ \cdots + \frac{z^{n-1}}{1} - \frac{z^{n+1}}{1} - \frac{z^{n+2}}{2} - \cdots - \frac{z^{n+m-1}}{m-1} \biggr) = \\ = g(z, k, n) - g(z, k+n-m+1, m-1) \end{aligned}$$

tehát (7)-ből adódik $|z| \leqq 1$-re

$$(8) \qquad |G(z, k, n, m)| \leqq 2C,$$

függetlenül k, n és m-től. Ezen megjegyzéssel a Fejér-féle elegáns konstrukciós metodus összes eddigi alkalmazásai a konstruált sorok együtthatóira vonatkozó erős felső korlátozásokkal egészíthetők ki; mi csak a tételben adott eredményre fogunk szorítkozni.[4]

Hogy a dolog formális részét ne komplikáljuk, szorítkozzunk az

$$\omega(n) = \log n$$

speciális esetre; az általános esetben a konstrukció teljesen analog. Tekintsük az

$$(9) \qquad f^*(z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} G(z, 3^{(3^{l^3}+l^3)}, 3^{(3^{l^3}+l^3)}, 3^{3^{l^3}})$$

[4] Igen érdekes volna a tárgyalt elvek alapján az együtthatófeltételt kielégítő oly folytonos hatványsor szerkesztése, mely $|z| = 1$-nek „nagy" részhalmazán divergál. Ugyancsak érdekes feladat volna az analóg kérdés, ha az együtthatófeltétel $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 < \infty$.

függvényt. (8) alapján $f^*(z)$ reguláris $|z|<1$-ben és folytonos $|z|\leqq 1$-ben. A G-polinomok explicit kifejezéseit (6)-ból (9)-be beírva és tekintve, hogy $G(z, 3^{(3^{l^3}+l^3)}, 3^{(3^{l^3}+l^3)}, 3^{3^{l^3}})$-ben z előforduló legmagasabb kitevője

$$3\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)}=3^{(3^{l^3}+l^3+1)}$$

míg a $G(z, 3^{(3^{(l+1)^3}+(l+1)^3)}, 3^{(3^{(l+1)^3}+(l+1)^3)}, 3^{3^{(l+1)^3}})$ polinom z-nek

$$3^{3^{(l+1)^3}+(l+1)^3}\text{-ik}\quad (>3^{3^{l^3}+l^3+1}\text{-ik})$$

hatványával *kezdődik*, látjuk, hogy (9) nem más, mint egy hatványsor zárójelezett alakja. Ezt

$$(10)\qquad f^*(z)=\sum_{n=81}^{\infty} a_n^* z^n$$

alakba írva tehát csak azt kell igazolnunk, hogy $N\geqq 81$-re

$$(11)\qquad \overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{N}{\log N}|a_N^*|<\infty$$

és a

$$(12)\qquad \sum_{n=81}^{\infty} a_n^* \quad \text{sor divergens.}$$

Utóbbi állítás igazolására tekintsük a (12)-sor n_l-ik részletösszegeinek $s_{n_l}^*$-sorozatát, ahol

$$(13)\qquad n_l=2\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)}-3^{3^{l^3}},$$

az l-ik zárójelezett „blokk" „balszárnyá"-ban szereplő maximális index. Mivel

$$G(1, k, n, m)=0$$

tehát (9)-ből és (6)-ból

$$s_{n_l}^*=\frac{1}{l^2}\sum_{3^{3^{l^3}}\leqq n\leqq 3^{(3^{l^3}+l^3)}}\frac{1}{n}>\frac{1}{100}l,$$

azaz az s_n^* sorozat tényleg divergens.

Hátra van a (11) alatti állítás igazolása. Ha N nem lép fel, mint z exponense egyetlen $G(z, 3^{(3^{l^3}+l^3)}, 3^{(3^{l^3}+l^3)}, 3^{3^{l^3}})$-ben sem, akkor nyilván $a_N^*=0$; elég tehát csak azon N-eket nézni, melyek, mint z exponense fellépnek valamelyik $G(z, 3^{(3^{l^3}+l^3)}, 3^{(3^{l^3}+l^3)}, 3^{3^{l^3}})$-ben. Vagy röviden: N valamely pozitív egész l-re vagy az

$$(14)\qquad 3^{(3^{l^3}+l^3)} \leqq N \leqq 2\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)} - 3^{3^{l^3}} (= n_l)$$

(az l-ik „blokk" „balszárnya") vagy az

$$(15)\qquad (n_l =) 2\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)} + 3^{3^{l^3}} \leqq N \leqq 3\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)}$$

(az l-ik „blokk" „jobbszárnya") egyenlőtlenséget elégítse ki. A (14)-esetben a $G(z, k, n, m)$ polinomok „balszárnyán" álló együtthatók monotonitását tekintve (1. (6))

$$\frac{N}{\log N}|a_N^*| \leqq \frac{n_l}{\log n_l} a_{n_l}^* = \frac{2\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)} - 3^{3^{l^3}}}{\log (2\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)} - 3^{3^{l^3}})}\cdot \frac{1}{l^2}\cdot 3^{-3^{l^3}} <$$

$$(16)\qquad < \frac{2\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)}}{\log (3^{(3^{l^3}+l^3)})}\cdot 3^{-3^{l^3}} = \frac{2\cdot 3^{l^3}}{(3^{l^3}+l^3)\log 3} < \frac{2}{\log 3}.$$

Végül a (15)-esetben

$$\frac{N}{\log N}|a_N^*| = \frac{1}{l^2}\cdot \frac{N}{\log N}\cdot \frac{1}{N - 2\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)}} <$$

$$(17)\qquad < \frac{N}{N - 2\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)}}\cdot \frac{1}{\log (2\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)})} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{(3^{l^3}+l^3)\log 3}\cdot \left(1 + \frac{2\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)}}{N - 2\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)}}\right) <$$

$$< \frac{1}{3^{l^3}\log 3}\left(1 + \frac{2\cdot 3^{(3^{l^3}+l^3)}}{3^{3^{l^3}}}\right) < \frac{3}{\log 3}.$$

(16)- és (17)-el a (11)-állítás igazolása és így az egész tételé is befejezést nyert.

ОБ ОДНОЙ ТОЧКЕ ТЕОРИИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

П. Туран

В настоящей заметке к любой медленно стремящейся к бесконечнати последовательности $w(n)$ строится такой степенной ряд

$$f^*(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^* z^n,$$

сумма которого резулярна при $|z|<1$ и непрерывна при $|z|\leqq 1$, для которого

$$|a_n^*|\leqq \frac{w(n)}{n} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

и ряд расходится при $z=1$.

Конструкция, кроме некоторой идеи Фейера, опираетя на тот факт, что для $|z|\leqq 1$, положительного целого k и положительных целых $m<n$ иногочлены

$$z^k\left(\frac{1}{n}+\frac{z}{n-1}+\cdots+\frac{z^{n-m}}{m}-\frac{z^{n+m}}{m}-\frac{z^{n+m+1}}{m+1}-\cdots-\frac{z^{2n}}{n}\right)$$

по модуно не превосходят некоторое положительное число, независящее от k, n и m.

ON A POINT IN THE THEORY OF POWER-SERIES

By P. TURÁN

Given any positive sequence $\omega(n)$ which tends to $+\infty$ arbitrarily slowly, an example

$$f^*(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^* z^n \tag{1}$$

is constructed, which is regular for $|z|<1$ and continuous for $|z|\leqq 1$, the restriction

$$|a_n^*|\leqq \frac{\omega(n)}{n}$$

is for $n=1,2,\ldots$ fulfilled and still the power-series (1) diverges for $z=1$.

The construction is based beyond some ideas of Fejér on the further remark that for $|z|\leqq 1$, positive integer k, positive integers $m<n$ the polynomials

$$G(z,k,n,m)=z^k\left(\frac{1}{n}+\frac{z}{n-1}+\cdots+\frac{z^{n-m}}{m}-\right.$$
$$\left.-\frac{z^{n+m}}{m}-\frac{z^{n+m+1}}{m+1}-\cdots-\frac{z^{2n}}{n}\right)$$

are absolutely less than a positive numerical constant, independently of k, n and m.

Egy additív számelméleti probléma

ERDŐS PÁL és SURÁNYI JÁNOS

1. A Waring-féle problémakörrel és a vegyes előjelű hatványösszegekkel való előállításra vonatkozó analóg problémával kapcsolatban merült fel a következő kérdés: előállítható-e minden n egész szám pl. négyzetszámok segítségével úgy, hogy 1-től valamilyen alkalmas r határig minden négyzetszámot felhasználunk vagy pozitív vagy negatív előjellel, tehát

$$n = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j j^2, \quad \varepsilon_j = \pm 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

alakban. Ha ez lehetséges, további kérdés lehet r minimális értéke és adott n-hez mindazon r-értékek meghatározása, amelyekkel ilyen előállítás lehetséges.

Itt a négyzetszámokat természetesen csak példaként említettük, a probléma hasonlóan felvetődik négyzetszámok helyett tetszésszerinti adott k-val a k-adik hatványok sorozatára, de felvethető pl. a prímszámok sorozatára a négyzetszámok helyett és felmerül a kérdés, nem érvényes-e olyan tétel, amely szerint egész számok bizonyos általános, nem túl erős feltételnek eleget tevő sorozataira ezek a kérdések megválaszolhatók. Az alábbiakban egy ilyen tételt bizonyítunk be.

2. Tegyük fel egyelőre, hogy a pozitív egész számokból álló

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$$

sorozat olyan, hogy minden n természetes számra, vagy legalább egy alkalmas korláton felül mindegyikre fennáll alkalmas r-rel, hogy

$$n = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j a_j, \quad \varepsilon_j = \pm 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

A csupa pozitív taggal írt összegre vezessük be a

$$\sum_{j=1}^{r} a_j = A_r$$

jelölést.

Ha $\varepsilon_{j_1}, \varepsilon_{j_2}, \ldots, \varepsilon_{j_l}$ értéke -1, a többi ε_j-é $+1$, akkor

$$A_r - n = 2(a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_l}),$$

tehát az A_r értékek közt végtelen sok párosnak és végtelen sok páratlannak kell lennie, hogy tetszésszerinti n-hez legyen olyan r, amelyre $A_r - n$ páros. Másrészt az $(A_r - n)/2$ számnak legalább egy r-re előállíthatónak kell lennie csupa különböző, és a_r-nél nem nagyobb a_j-k összegeként.

Ez a rövid meggondolás közelebb hozza a következő tétel feltételeinek egy részét:

Legyen $0 < a_1 < a_2 < \cdots$ *egész számok sorozata:*

a) *amelyben végtelen sok páratlan szám van,*

b) *amelyre igaz, hogy bizonyos véges számú* $m_1, \ldots, m_s$ *szám kivételével minden természetes szám felbontható csupa különböző* a_j*-k összegére, és*

c) *amelyre alkalmas* k_0*-lal, ha* $k > k_0$*, akkor*

$$a_{k+1} < 2a_k - m_s;$$

akkor minden n *egész szám előállítható*

$$n = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j a_j, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

alakban.

Legyen r_n *az az egész szám, amelyre*

$$\sum_{j=1}^{r_n - 1} a_j < n \leqq \sum_{j=1}^{r_n} a_j.$$

Megadható egy c *állandó úgy, hogy a fönti állításban* r *felvehet minden* r_n*-nél és* c*-nél nagyobb értéket, amelyre* A_r *és* n *egyező párosságú.*

Ha pl. az a_i-k páratlanok, akkor r minimális értéke legfeljebb $r_n + 2$, ha pedig váltakozva párosak és páratlanok, akkor legfeljebb $r_n + 3$. Az első esetbe tartozik pl. a prímszámok sorozata, a másodikba a négyzetszámoké és általában a k-adik hatványoké. A négyzetszámok és prímszámok sorozatára még visszatérünk.

A c) feltételt a bizonyításban lényegesen kihasználjuk, azonban szökségességét nem látszik semmi plauzibilissé tenni.

3. A tétel állításai a következő segédtételből olvashatók le: *A fönti tétel feltételei mellett ha valamilyen r-re*

$$t \leqq \sum_{j=1}^{r} a_j = A_r$$

és t sem m_i sem nem $A_r - m_i$ alakú $(i = 1, 2, \ldots, s)$, akkor t előállítható csupa a_r-nél nem nagyobb különböző a_j összegeként is.

Ebből a kimondott tétel így látható be: Legyen c akkora, hogy $a_{c+1} > 2m_s$. Legyen n tetszésszerinti természetes szám, r_n pedig jelentse az (1) egyenlőtlenséggel meghatározott számot. Legyen $r > r_n$, $r > c$ és olyan, hogy n és $A_r = \sum_{j=1}^{r} a_j$ egyező párosságú; az a) feltétel szerint van végtelen sok ilyen r érték. Képezzük a

$$t_r = \frac{A_r - n}{2}$$

számot; ez feltevésünk szerint egész. A c megválasztása szerint

$$t_r = \frac{A_{r-1} + a_r - n}{2} \geqq \frac{A_{r_n} - n + a_r}{2} \geqq \frac{a_{c+1}}{2} > m_s,$$

másrészt

$$t_r < \frac{A_r}{2} = A_r - \frac{A_r}{2} \leqq A_r - \frac{A_{c+1}}{2} \leqq A_r - \frac{a_{c+1}}{2} < A_r - m_s,$$

tehát t_r sem nem m_i, sem nem $A_r - m_i$ alakú, és így a segédtétel szerint t_r előállítható csupa különböző és a_r-nél nem nagyobb a_j összegeként:

$$t_r = a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_l} \qquad j_1 < j_2 < \cdots < j_l \leqq r.$$

Innen

$$n = A_r - 2t_r = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j a_j,$$

$$\varepsilon_j = \begin{cases} -1, \text{ ha } j = j_1, \text{ vagy } j_2, \ldots, \text{ vagy } j_l, \\ +1 \text{ különben.} \end{cases}$$

Segédtételünkből tehát egyszerűen következik a kimondott tétel.

4. Ha t_1 és t_2 két különböző természetes szám, amelyre $t_1+t_2=A_r$ és valamelyik előállítható csupa különböző és a_r-nél nem nagyobb a_j összegeként, akkor nyilvánvalóan ugyanez áll a másikra is. Ennek folytán egyrészt világos, hogy a segédtétel az m_i számokon kívül az A_r-m_i alakú számokra sem lehet igaz, másrészt igazolni elég a segédtételt pl. azokra a t-kre, amelyekre

$$0<t\leqq\frac{1}{2}A_r.$$

Ha t egy ennek eleget tevő egész és nem valamelyik m_i, akkor amennyiben kisebb a_{r+1}-nél, úgy előállítható a b) feltétel szerint csupa különböző a_j-k összegeként és ezek mind kisebbek a_{r+1}-nél, tehát nem nagyobbak a_r-nél, t-re tehát egy segédtételünknek is megfelelő előállítást kapunk.

Ha $n\geqq a_{r+1}$, akkor válasszuk v-t úgy, hogy fennálljon

$$a_r+a_{r-1}+\cdots+a_{v+1}<t\leqq a_r+a_{r-1}+\cdots+a_{v+1}+a_v,$$

és képezzük a

$$t'=n-a_r-a_{r-1}-\cdots-a_{v+1}(\leqq a_v)$$

számot. Ha ez nem valamelyik m_i, akkor ismét a b) feltétel szerint előállítható

$$t'=a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_l},\quad a_{j_1}<a_{j_2}<\cdots<a_{j_l}\leqq a_v$$

alakban, s így

$$t=t'+a_r+a_{r-1}+\cdots+a_{v+1}=a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_l}+a_{v+1}+\cdots+a_r$$

egy kívánt alakú előállítás.

5. Ha végül valamilyen i-re $t'=m_i$, akkor képezzük a $t''=t'+a_{v+1}$ számot. Legyen a_k a sorozat utolsó eleme, amelyik még nem nagyobb, mint $t''/2$, akkor a c) feltétel szerint

$$a_k\leqq\frac{t''}{2}<a_{k+1}<2a_k-m_s\leqq t''-m_s.$$

Innen

$$m_s<t''-a_{k+1}<a_{k+1}$$

tehát b) folytán $t''-a_{k+1}$ előállítható csupa különböző a_j-k összegeként és ezek az a_j-k mind kisebbek a_{k+1}-nél. Így $t''=(t''-a_{k+1})+a_{k+1}$ is előállítható csupa különböző a_j-k összegeként, amelyek között a_{k+1} a legnagyobb. Mivel

$$t=t''+a_{v+2}+\cdots+a_{r-1}+a_r,$$

így a segédtételt ebben az esetben is igazoltuk, ha még belátjuk, hogy $a_{k+1} < a_{v+2}$. De

$$a_{k+1} < t'' - m_s = t' + a_{v+1} - m_s = a_{v+1} + m_i - m_s \leqq a_{v+1} < a_{v+2}.$$

Ezzel igazoltuk a segédtételt s egyszersmind a tételt is.

6. A prímszámok sorozatát véve a_i-k gyanánt ismeretes, hogy 1, 4 és 6 kivételével minden egész szám előállítható csupa különböző prímek összegeként, másrészt[1], ha $n \geqq 5$, akkor $p_{n+1} \leqq \leqq 2p_n - 7$. Ebből a **3.** pont gondolatmenetét követve és jelöléseit használva a_{c+1}-nak választható 13, tehát a tételbeli c gyanánt 5. A négyzetszámokra már lényegesen több a kivétel, de *minden 128-nál nagyobb egész szám már előállítható csupa különböző négyzetszám összegeként*[2]. Másrészt egyszerűen számítással belátható, hogy ha $n \geqq 13$, akkor

$$(n+1)^2 \leqq 2n^2 - 129.$$

Most a_{c+1} gyanánt 17^2 választandó és így tételünkben négyzetszámok esetén c választható 17-nek.

7. Általában igen nehéz kérdés annak az eldöntése, hogy mikor állítható elő minden elég nagy szám egy adott $a_1 < a_2 < \cdots$ egész számokból álló sorozat különböző elemeinek összegeként. Ha egy sorozatra ez teljesül, nevezzük T_1 tulajdonságúnak. Nyilván szükséges ehhez, hogy minden u-hoz és m-hez legyen olyan $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_l}$, amelyre

$$a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_l} \equiv u \pmod{m}.$$

Azt gondolhatnánk, elégséges feltételt kapunk, ha ezen kívül még megköveteljük, hogy az a_{k+1}/a_k hányados 1-hez tartson, ez azonban nem áll[3].

[1] Az utóbbi állítás helyett mindjárt az látható be, hogy minden $m \geqq 10$-re (nem csak prímszámra) m és $2m-7$ közt van prímszám. Erre ugyanolyan gondolatmenet alkalmazható, mint arra, hogy n és $2n$ közt van prím (L. pl. [1] 129—132 old. v. [2] 341—344. old.) Ennek az egyenlőtlenségnek a felhasználásával az előbbi 12-nél nagyobb számokra teljes indukcióval látható, addig pedig könnyen ellenőrizhető.

[2] Ez is teljes indukcióval látható be, mint a prímszámokra vonatkozó megfelelő állítás. A következő 33 szám nem állítható elő különböző négyzetszámok összegeként: 2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 15, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 43, 44, 47, 48, 51, 55, 60, 67, 72, 76, 92, 96, 112, 124, 128.

[3] Erről a kérdésről J. W. S. Cassels egy érdekes cikke van megjelenőben az *Acta Sci. Mth. Univ. Szeged*-ben.

Ismeretes, [3], hogy az $a_n = n^k$ sorozatnak minden adott k pozitív egész számra megvan a T_1 tulajdonsága, de pl. tetszőleges relatív prím μ és ν mellett az összes $\mu^k \nu^l$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$ számokból álló sorozatról csak legutóbb mutatta meg BIRCH[4], hogy megvan a T_1 tulajdonsága. Érdekes kérdésnek látszik, hogy ha α egy 1 és 2 közti szám, t pedig adott pozitív szám, akkor az $a_n = [t\alpha^n]$ sorozatnak megvan-e a T_1 tulajdonsága.

Talán természetesebb kérdés a következő tulajdonság vizsgálata: Azt mondjuk, hogy egy $a_1 < a_2 < \cdots$ sorozat T_2 tulajdonságú, ha megvan a T_1 tulajdonsága, és ez akkor is megmarad, ha a sorozatból bárhogy elhagyunk véges sok elemet. Nyilvánvalóan megvan ez a tulajdonsága az összes természetes számoknak, vagy az összes páratlan számoknak, de nincs meg a T_2 tulajdonsága az $a_n = 2^{n-1}$ sorozatnak, noha ez a T_1 tulajdonsággal rendelkezik. Ez a kérdés felvetés annyival látszik könnyebben megközelíthetőnek, a T_1 tulajdonságénál, mert ez nem múlhat néhány kis szám tulajdonságain. (Hasonlóan mint a Waring-féle problémakörben is természetesebbnek bizonyult az elég nagy számok előállításához szükséges k-adik hatványok számának kérdése, mint az összes természetes számok előállításáé[5].)

A számok k-adik hatványának adott k természetes számra, a prímszámok sorozatának megvan a T_2 tulajdonsága, talán már szerepelt is az irodalomban. Érdekes volna ebből a szempontból is megvizsgálni $1 < \alpha < 2$-re az $[\alpha^n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozatot.

IRODALOM

[1] ERDŐS P.—SURÁNYI J.: *Válogatott számelméleti kérdések*, (Budapest 1960, Tankönyvkiadó V.) 250 old.

[2] G. H. HARDY—E. M. WRIGHT: *An Introduction to the theory of numbers*, (Oxford, 1954) XVI + 419. old.

[3] R. SPRAGUE: Über Zerlegung in n-te Potenzen mit lauter verschiedenen Grundzahlen, *Math. Zeitschrift*, **51** (1949), 466—468. old.

[4] Dolgozata a *Proc. of Cambridge Phil. Soc.*-ben van sajtó alatt. Eredménye következik CASSELS 3. lábjegyzetben említett eredményéből is.

[5] L. pl. [1] 170—185 old. v. [2] 317—325. old.

ОБ ОДНОЙ ПВОБЛЕМЕ АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

P. Erdős и J. Surányi

Авторы доказывают, что, если для безконечной последовательности целых чисел $0 < a_1 < a_2 < \cdots$ выполняются следующие условия: *a)* последовательность содержит весконечно много нечётных элементов, *b)* за исключением некоторых чисел $m_1 < m_2 < \cdots < m_s$ каждое положительное целое число может быть представленно в виде суммы различных, *c)* для всех достаточно больших k $a_{k+1} < 2a_k - m_s$, то всякое целое число n может быть представленно в виде

$$n = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i a_i \qquad \varepsilon_i = \pm 1 \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Здесь r может быть любим достаточно большим числом, для которого чётность $\sum_{i=1}^{r} a_i$ и n совпадает.

Хотя не видно, что условие *c)* необходимо, оно играет существенную роль в доказательстве. Было бы интересно дать простое достаточное условие того, когда некоторая последовательность удовлетворяет условию *b)*, или решитч выполняется ли оно для последовательности $[t\alpha^n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ при данных $t > 0$, $1 < \alpha < 2$,

ÜBER EIN PROBLEM AUS DER ADDITIVEN ZAHLENTHEORIE

von P. Erdős und J. Surányi

Folgender Satz wird bewiesen: Für die aus ganzen Zahlen bestehende Folge $0 < a_1 < a_2 < \cdots$ gelte folgendes: a) Es gibt unendlich viele ungerade Elemente der Folge, b) alle natürliche Zahlen bis auf gewisse endlich viele: $m_1 < \cdots < m_s$ können als Summe von verschiedenen Elementen der Folge dargestellt werden, c) für genügend grosse Werte von k gilt $a_{k+1} < 2a_k - m_s$. In diesem Falle kann jede ganze Zahl n in der Form

$$n = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i a_i, \quad \varepsilon_i = \pm 1 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

dargestellt werden. Für r kann jeder genügend grosser Wert gewählt werden, für dem die Parität von n und $\sum_{i=1}^{r} a_i$ übereinstimmen.

Kein Grund scheint die Notwendigkeit der Voraussetzung c) zeigen, im Beweis wird sie aber wesentlich ausgenützt. Es wäre interessant eine brauchbare hinreichende Bedingung dafür zu geben dass eine Folge die Eigenschaft b) besitzt, oder zu entscheiden, ob die Folge $[t\alpha^n]$, wo $t > 0$, $1 < \alpha < 2$ gegebene Zahlen sind, die Eigenschaft b) besitzt oder nicht.

Jelentés az 1958. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 1958. december 5. és 12-ike között rendezte meg a tizedik Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyt.

A versenyen mindössze tízen vettek részt az előző versenyek 17—30 résztvevőjével szemben.

A versenybizottság az első díjat és az ezzel járó 1200 Ft pénzjutalmat CSISZÁR IMRÉnek, az Eötvös Loránd Tudományegyetem III. éves alkalmazott matematika szakos hallgatójának ítélte oda. Csiszár Imre az 1., 7. és 9. feladat kivételével valamennyi feladatot megoldotta, az 1. és a 7. feladatra is adott be részmegoldást. Több feladat megoldását általánosította.

A második díjat és az ezzel járó 800 Ft pénzjutalmat BÁRTFAI PÁL, az Eötvös Loránd Tudományegyetem IV. éves alkalmazott matematika szakos hallgatójának ítélte oda. Bártfai Pál helyes megoldást adott az összes feladatra az 1., 7., 9. és 11. feladat kivételével. Az 1. és 7. feladatot is részben megoldotta. Több megjegyzést fűz az egyes feladatokhoz. A megoldások kidolgozása nem elég gondos.

A bizottság dicséretben és 200 Ft értékű könyvjutalomban részesíti STÁHL JÁNOSt, az Eötvös Loránd Tudományegyetem II. éves matematika-fizika szakos hallgatóját. Stáhl János oldotta meg legszebben a 3. feladatot. Helyes megoldást adott még a 4., 6. és 8. feladatra is.

Budapest, 1959. április 10.

A versenybizottság tagjai:
CSÁSZÁR ÁKOS
HAJÓS GYÖRGY
KIS OTTÓ
RÉNYI ALFRÉD
TURÁN PÁL

1. feladat.

Melyek azok a csoportok, amelyeknek minden generátorrendszere tartalmaz egy bázist? (Bázison a csoport olyan elemrendszerét értjük, amelynek elemei által generált ciklikus csoportok direkt szorzata maga a csoport.)

Erre a feladatra csak Papp Zoltán adott teljes megoldást. Csiszár Imre megoldása nem teljes, Bártfai Pálé csak részben helyes. Az alábbiakban közölt megoldás gondolatmenete megegyezik Pappéval.

Be fogjuk bizonyítani, hogy azok a csoportok, amelyek eleget tesznek a feladat követelményeinek vagy

1. egy p-ed és egy q-adrendű[1] ciklikus csoport direkt szorzata (azaz pq-adrendű ciklikus csoport) vagy

2. rögzített p és k-val p^k-adrendű ciklikus csoportok direkt szorzata.

Legyen G a feladat követelményeit kielégítő csoport. Ekkor G ciklikus csoportok direkt szorzata, tehát Abel-csoport.

Ha[2] $G = \Pi\{a_\lambda\}$ és H bizonyos $\{a_\lambda\}$-k direkt szorzata, akkor H is eleget tesz a feladat követelményének. Ugyanis H-nak egy generátorrendszerét a H-ban nem szereplő a_λ-kkal kiegészítve, G-nek generátorrendszerét nyerjük; ebből kiválasztható G-nek egy bázisa és ha innen a hozzávett a_λ-kat elhagyjuk, H-nak bázisát nyerjük.

Feltehető, hogy mindegyik a_λ vagy végtelenrendű vagy prímhatványrendű. Most példákat adunk olyan H-kra, amelyek nem tesznek eleget a feladat követelményének.

1. $H = \{a\}$, a végtelenrendű. $[a^2, a^3]$ generátorrendszer, de nem tartalmaz bázist.

2. $H = \{a\} \times \{b\}$, $O(a) = p^k$, $O(b) = p^l$, $k > l$.[3] Ekkor az $[a, ab]$ generátorrendszer nem tartalmaz bázist.

3. $H = \{a\} \times \{b\}$, $O(a) = p^k (k > 1)$, $O(b) = q^l (q \neq p)$. Itt az $[a, a^p b]$ generátorrendszer nem tartalmaz bázist.

4. $H = \{a\} \times \{b\} \times \{c\}$, $O(a) = p$, $O(b) = q$, $O(c) = r$, $p \neq q$, $p \neq r$ (p, q, r prímek). Most az $[ab, ac]$ generátorrendszer nem tartalmaz bázist.

A fentiekből következik, hogy a feladat követelményének csak az 1. és 2. alatt említett csoportok tehetnek eleget. Ugyanis 1. miatt G torziócsoport, 2. miatt azonos prímszámhoz tartozó prímhatványrendű komponensei mind azonosrendűek, 3. miatt különböző prímek csak akkor szerepelhetnek, ha a komponensek prímrendűek, de akkor 4. miatt csak két tényező lehet. Így valóban már csak a fent említett két esetben teljesülhet a feladat követelménye.

[1] p és q prímszámokat jelölnek.

[2] $\{a\}$ jelenti az a elem által generált ciklikus csoportot, Π pedig direkt szorzatot jelöl.

[3] $O(a)$-val jelöljük az a elem rendjét.

Bebizonyítjuk, hogy ekkor a feladat követelménye valóban teljesül.

Az 1. esetben G-nek minden generátorrendszere tartalmaz vagy egy pq-adrendű elemet, vagy egy p-ed és egy q-adrendű elemet, így ez az eset jó.

Befejezésül bebizonyítjuk, hogy a 2. eset is jó.

Ebben az esetben G tetszőleges generátorrendszeréből elhagyhatók a p^k-nál alacsonyabbrendű elemek. A fennmaradó generátorrendszerből kiválasztunk egy maximális független rendszert.[4] Erről fogjuk kimutatni, hogy bázis. Ezt úgy fogjuk belátni, hogy l-re vonatkozó teljes indukcióval bebizonyítjuk: G-nek minden p^l-edrendű eleme benne van e rendszer által generált alcsoportban.

Ha $b_1, b_2, \ldots$ ez a rendszer és b a G-nek p^k-adrendű eleme az eredeti S generátorrendszerben, akkor a lineáris összefüggés miatt alkalmas egész $n_1, \ldots, n_r$-rel

$$b^{p^{k-1}} = b_1^{n_1} b_2^{n_2} \cdots b_r^{n_r}. \tag{1}$$

Mivel G-nek minden p-edrendű eleme előállítható S elemeinek p^{k-1}-ik hatványával, G-nek ezen elemei előállíthatók a b_i-k segítségével is. Ezzel állításunkat $l=1$-re már bebizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $1, 2, \ldots, l-1$-re és bizonyítsuk azt l-re. (1)-ből p-ik hatványozással a baloldal 1 lesz, tehát a jobb is, de ott a b_i-k lineárisan függetlenek, így

$$b_i^{n_i p} = 1, \quad p^k \mid n_i p, \quad n_i = p^{k-1} n_i'.$$

De ekkor (1)-ből

$$[b^{p^{k-l}} b_1^{-p^{k-l} n_1'} \cdots b_r^{-p^{k-l} n_r'}]^{p^{l-1}} = 1,$$

ahonnan az indukciós feltevés miatt $[\cdots]$ eleme az S által generált $\{S\}$ alcsoportnak és így $b_i \in \{S\}$ miatt $b^{p^{k-l}} \in \{S\}$. $b^{p^{k-l}}$ p^l-edrendű elem és így G-nek tetszőleges p^l-edrendű eleme valóban $\{S\}$-ben van. $l=k$-ra kapjuk, hogy $G=\{S\}$ és így a 2. eset is jó.

2. feladat.

Nevezzük az n pozitív egész számot A-típusúnak, ha van $\sqrt[3]{n}$-nél nagyobb törzstényezője. Jelentse $A(x)$ az x-nél nem nagyobb A-típusú számok számát. Bizonyítsuk be, hogy létezik

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x}.$$

[4] Egy rendszer független, ha az elemei által generált alcsoport az elemek által generált ciklikus alcsoportok direkt szorzata.

A feladatot Bártfai Pál és Csiszár Imre oldották meg. Bártfai megoldása több pontatlanságot tartalmaz, Csiszáré a határértéket is meghatározza, ezért az utóbbit közöljük, lényegtelen változtatásokkal.

Először be fogjuk bizonyítani, hogy

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} \geqq D,$$

azután azt, hogy

$$\overline{\lim}_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} \leqq D,$$

ahol

$$D = \log 3 - \frac{1}{2}\log^2\frac{3}{2} - \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\log(2-2t)}{t}\,dt.$$

Innen az állítás nyilván adódik és az is következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(x)}{x} = D.$$

Biztosan A-típusú minden olyan x-nél nem nagyobb természetes szám, amelynek van $\sqrt[3]{x}$-nél nagyobb törzstényezője. A p-vel osztható x-nél nem nagyobb természetes számok száma $\left[\frac{x}{p}\right]$, tehát ha képezzük a $\sum\limits_{x^{1/3}<p\leqq x} \left[\frac{x}{p}\right]$ összeget, akkor az összes fentemlített számot összeszámoltuk. Kétszer számoltuk azonban azokat, amelyeknek 2 különböző $\sqrt[3]{x}$-nél nagyobb törzstényezője is van (több nyilván nem lehet). Számuk $\sum\limits_{x^{1/3}<p<q\leqq x} \left[\frac{x}{pq}\right]$. Tehát

$$A(x) \geqq \sum_{x^{1/3}<p\leqq x} \left[\frac{x}{p}\right] - \sum_{x^{1/3}<p<q\leqq x} \left[\frac{x}{pq}\right].$$

A további becsléseket a

$$\sum_{p\leqq x} \frac{1}{p} = C + \log\log x + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \qquad (C \text{ állandó})$$

aszimptotikus formulából adódó

$$\sum_{x^\alpha < p < x^\beta} \frac{1}{p} = \log \frac{\beta}{\alpha} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

képlet alapján végezzük.

Legyen $\frac{2}{3} < s < 1$. Ekkor

$$\sum_{x^{1/3} < p \leqq x} \left[\frac{x}{p}\right] \geqq \sum_{x^{1/3} < p < x^s} \left[\frac{x}{p}\right] = \sum_{x^{1/3} < p < x^s} \frac{x}{p} + O(x^s) =$$

$$= x\left[\log 3s + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right] + O(x^s).$$

(A [ ] elhagyásával elkövetett hibát a tagok számával becsüljük.)

Legyen továbbá

$$\frac{1}{3} = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = \frac{1}{2}.$$

Ekkor

$$\sum_{x^{1/3} < p < q \leqq x} \left[\frac{x}{pq}\right] = \sum_{x^{1/3} < p < q \leqq x^{1/2}} \left[\frac{x}{pq}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{x^{\alpha_{i-1}} < p \leqq x^{\alpha_i}} \sum_{x^{1/2} < q \leqq x^{1-\alpha_{i-1}}} \left[\frac{x}{pq}\right] \leqq \sum_{x^{1/3} < p < q \leqq x} \frac{x}{pq} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{x^{\alpha_{i-1}} < p \leqq x^{\alpha_i}} \sum_{x^{1/2} < q < x^{1-\alpha_{i-1}}} \frac{x}{pq} \leqq \frac{x}{2}\left(\sum_{x^{1/3} < p \leqq x^{1/2}} \frac{1}{p}\right)^2 +$$

$$+ x \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{x^{\alpha_{i-1}} < p \leqq x^{\alpha_i}} \frac{1}{p}\right)\left(\sum_{x^{1/2} < p \leqq x^{1-\alpha_{i-1}}} \frac{1}{p}\right) =$$

$$= x\left[\frac{1}{2}\log^2\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^{k} \log\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} \log(2 - 2\alpha_{i-1}) + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right].$$

Legyen $\varepsilon > 0$. Válasszuk az α_i sorozatot olyan finoman, hogy a

$$\sum_{i=1}^{n} \log\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} \log(2 - 2\alpha_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \log(2 - 2\alpha_{i-1})(\log\alpha_i - \log\alpha_{i-1})$$

összeg ε-nál kevesebbel különbözzön az

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \log(2-2t)\, d\log t = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\log(2-2t)}{t}\, dt$$

integráltól. (Ez minden $\varepsilon > 0$ esetén lehetséges.)

Ekkor

$$\sum_{x^{1/3} < p < q \leqq x} \left[\frac{x}{pq}\right] \leqq x\left[\frac{1}{2}\log^2\frac{3}{2} + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\log(2-2t)}{t}\, dt + \varepsilon + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right],$$

tehát

$$A(x) \geqq x\left[\log 3s - \frac{1}{2}\log^2\frac{3}{2} - \right.$$

$$\left. - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\log(2-2t)}{t}\, dt - \varepsilon + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right] + O(x^s),$$

amiből

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} \geqq \log 3s - \frac{1}{2}\log^2\frac{3}{2} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\log(2-2t)}{t}\, dt - \varepsilon.$$

Mivel ez tetszőleges $\frac{2}{3} < s < 1$ és $\varepsilon > 0$ esetén igaz, egyúttal

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} \geqq \log 3 - \frac{1}{2}\log^2\frac{3}{2} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\log(2-2t)}{t}\, dt = D,$$

tehát első állításunk be van bizonyítva.

Legyen ismét $\frac{2}{3} < s < 1$ és jelöljük $A_s(x)$-el az x^s és x közé eső A-típusú számok számát. Mivel minden x^s és x közé eső A-típusú számnak van $x^{s/3}$-nál nagyobb prímtényezője és p-vel osztható x-nél nem nagyobb számok száma $\left[\frac{x}{p}\right]$, az összes fent említett számot összeszámoltuk, ha képezzük a $\sum\limits_{x^{s/3} < p \leqq x} \left[\frac{x}{p}\right]$ összeget. De két különböző $\sqrt[3]{x}$-nél nagyobb prímszámmal osztható számokat kétszer számoltuk, ezek száma $\sum\limits_{x^{1/3} < p < q < x} \left[\frac{x}{pq}\right]$, tehát

$$A_s(x) \leqq \sum_{x^{s/3} < p \leqq x} \left[\frac{x}{p}\right] - \sum_{x^{1/3} < p < q < x} \left[\frac{x}{pq}\right].$$

Itt

$$\sum_{x^{s/3} < p \leqq x} \left[\frac{x}{p}\right] \leqq \sum_{x^{s/3} < p \leqq x} \frac{x}{p} = x\left[\log\frac{3}{s} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right].$$

Legyen

$$\frac{1}{3} = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_k = \frac{s}{2}, \quad \alpha_i - \alpha_{i-1} < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

A [ ] elhagyásával eredő hibát a tagok számával becsülve, azt kapjuk, hogy

$$\sum_{x^{1/3} < p < q < x} \left[\frac{x}{pq}\right] \geqq \sum_{x^{1/3} < p < q < x^{s/2}} \left[\frac{x}{pq}\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \sum_{x^{\alpha_{i-1}} < p \leqq x^{\alpha_i}} \sum_{x^{s/2} < q \leqq x^{s-\alpha_{i-1}}} \left[\frac{x}{pq}\right] = \sum_{x^{1/3} < p < q \leqq x^{s/2}} \frac{x}{pq} + O(x^s) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{x^{\alpha_{i-1}} < p \leqq x^{\alpha_i}} \sum_{x^{s/2} < q \leqq x^{s-\alpha_{i-1}}} \frac{x}{pq} + O(x^{s+\alpha_i-\alpha_{i-1}}) \right] =$$

$$= \frac{x}{2}\left[\left(\sum_{x^{1/3} < p \leqq x^{s/2}} \frac{1}{p}\right)^2 - \sum_{x^{1/3} < p \leqq x^{s/2}} \frac{1}{p^2}\right] +$$

$$+ x \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{x^{\alpha_{i-1}} < p \leqq x^{\alpha_i}} \frac{1}{p}\right)\left(\sum_{x^{s/2} < p \leqq x^{s-\alpha_{i-1}}} \frac{1}{p}\right) + O(x^{s+\delta}) =$$

$$= x\left[\frac{1}{2}\log^2\frac{3s}{2} + \sum_{i=1}^{k} \log\frac{2(s-\alpha_{i-1})}{s} \log\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right] + O(x^{s+\delta}).$$

Itt felhasználtuk azt, hogy

$$\sum_{x^{1/3}<p<x^{s/2}} \frac{1}{p^2} < \sum_{x^{1/3}<n<x^{s/2}} \frac{1}{n^2} = O\left(\int_x^{x^{s/2}} \frac{dt}{t^2}\right) = O(x^{-1/3}) = O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Minden $\varepsilon > 0$ és $s < 1$ számpárhoz található olyan $\delta > 0$, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \log \frac{2(s-\alpha_{i-1})}{s} \log \frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}$$

ε-nál kevesebbet különbözzön az $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \log\left(2-\frac{2t}{s}\right) d\log t$ integráltól és $s+\delta<1$ legyen. Ekkor végeredményben azt nyerjük, hogy

$$A_s(x) \leqq x\left[\log\frac{3}{s} - \frac{1}{2}\log^2\frac{3s}{2} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \log\left(2-\frac{2t}{s}\right)\frac{dt}{t} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right] + O(x^{s+\delta}).$$

Innen, felhasználva azt, hogy $A_s(x)$ definíciója szerint

$$\left|\frac{A(x)-A_s(x)}{x}\right| < \frac{1}{x^{1-s}} \to 0,$$

azt nyerjük, hogy

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{A(x)}{x} = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{A_s(x)}{x} \leqq \log\frac{3}{s} - \frac{1}{2}\log^2\frac{3s}{2} -$$

$$- \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \log\left(2-\frac{2t}{s}\right)\frac{dt}{t} + \varepsilon.$$

Mivel ez tetszőleges $\frac{2}{3} < s < 1$ és $\varepsilon > 0$ esetén igaz egyúttal

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{A(x)}{x} \leqq \log 3 - \frac{1}{2}\log^2\frac{3}{2} - \int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\log(2-2t)}{t}\,dt = D.$$

Ezzel második állításunk is be van bizonyítva.

3. feladat.

Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív egész n szám törzstényezős előállításában legalább egy prímtényező legalább a második hatványon szerepel, akkor n ugyanannyiféleképpen állítható elő *páros sok* 1-nél nagyobb egész szám szorzataként, mint *páratlan sok* 1-nél nagyobb egész szám szorzataként. (Két előállítás, mely csak a tényezők sorrendjében különbözik egymástól, *különböző*nek számít.)

Ezt a feladatot Bártfai Pál, Csiszár Imre és Stáhl János oldották meg. Stáhl megoldása a legszebb. Ismertetjük ezt a megoldást.

Legyen

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}, \quad \alpha_1 \geqq 2.$$

Tekintsük n egy felbontását:

$$n = a_1 a_2 \cdots a_l \quad \left(1 \leqq l \leqq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i,\ a_i > 1\right).$$

Legyen a_i az első olyan tényező, mely osztható p_1-gyel. Ha $a_i = p_1$, akkor feleltessük meg az $a_1 a_2 \cdots a_l$ felbontásnak az

$$a_1 \cdots a_{i-1}(a_i a_{i+1}) \cdots a_l = a_1 \cdots a_{i-1}(p a_{i+1}) \cdots a_l$$

felbontást. (a_{i+1} létezik, mert p_1-nek még legalább egyszer szerepelnie kell, mivel $\alpha_1 \geqq 2$). Ha $a_i \neq p_1$, akkor pedig az

$$a_1 \cdots a_{i-1}\, p_1 \left(\frac{a_i}{p_1}\right) a_{i+1} \cdots a_l$$

felbontást.

Ilyen módon a páros, ill. páratlan számú tényezőt tartalmazó előállítások között megfeleltetést létesítettünk. Könnyű látni, hogy ez kölcsönösen egy-egyértelmű. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Csiszár megoldása a következő:

Legyen $n > 1$ természetes szám. Legyen n $g(n)$-féleképpen előállítható páros számú, $h(n)$-féleképpen páratlan számú egynél nagyobb egészszám szorzatként. Legyen $g(1) = 1$, $h(1) = 0$.

Jelentse $g_d(n)$, ill. $h_d(n)$ az $n>1$ szám páros, ill. páratlan tényezőszámú felbontásai közül azoknak a számát, amelyek a $d>1$ számmal kezdődnek $(d|n)$.

Ekkor

$$g_d(n)=h\left(\frac{n}{d}\right),$$

ui. $\frac{n}{d}$ bármely páratlan tényezőszámú felbontásához hozzávéve elsőként a d tényezőt, n-nek d-vel kezdődő páros tényezőszámú felbontását kapjuk és megfordítva; hasonlóképpen

$$h_d(n)=g\left(\frac{n}{d}\right).$$

(Ez még $d=n$ esetén is igaz, minthogy

$$h_n(n)=1,\quad g_n(n)=0).$$

Tehát

$$g(n)=\sum_{\substack{d|n\\ d>1}} g_d(n)=\sum_{\substack{d|n\\ d>1}} h\left(\frac{n}{d}\right),\quad h(n)=\sum_{\substack{d|n\\ d>1}} g\left(\frac{n}{d}\right),$$

amiből az

$$f(n)=g(n)-h(n)$$

függvényre azt nyerjük, hogy

$$f(n)=\sum_{\substack{d|n\\ d>1}}\left[h\left(\frac{n}{d}\right)-g\left(\frac{n}{d}\right)\right]=-\sum_{\substack{d|n\\ d>1}} f\left(\frac{n}{d}\right),$$

azaz

$$\sum_{d|n} f(d)=\sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right)=0,\quad \text{ha}\quad n>1.$$

$n=1$ esetén pedig

$$\sum_{d|1} f(d)=f(1)=g(1)-h(1)=1.$$

Tehát az $f(n)$ függvény összegezési függvénye megegyezik a Moebius-függvényével, amiből következik, hogy

$$f(n)=\mu(n).$$

Ezzel a feladat állítása bizonyítást nyert, minthogy $\mu(n)=0$, ha n osztható legalább egy prímszám négyzetével. Egyúttal meghatároztuk az $f(n)\doteq g(n)-h(n)$ különbség értékét négyzetmentes számokra is.

A feladat következő megoldása Turán Páltól származik.

Ha $z=x+iy$ és $x>1$, akkor a Riemann-féle zetafüggvény a

$$\zeta(z)=\frac{1}{1^z}+\frac{1}{2^z}+\cdots+\frac{1}{n^z}+\cdots \tag{2}$$

sorral van értelmezve és itt

$$\zeta(z)=\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^z}}.$$

Ekkor itt

$$\frac{1}{\zeta(z)}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^z},$$

ahol $\mu(n)$ a Moebius-féle μ-függvény. Másrészt $x\geqq 2$-re

$$|\zeta(z)-1|=\left|\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\cdots\right|\leqq\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots<$$

$$<\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=\frac{3}{4}<1,$$

azaz

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta(z)}&=\frac{1}{1-[1-\zeta(z)]}=1+[1-\zeta(z)]+[1-\zeta(z)]^2+\\&+\cdots=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu[\zeta(z)-1]^\nu.\end{aligned} \tag{3}$$

De (2)-ből

$$[\zeta(z)-1]^\nu=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{r_\nu(n)}{n^z},$$

ahol $r_\nu(n)$ jelenti fix ν mellett azt, hogy n hányféleképpen állítható elő mint ν darab 1-nél nagyobb tényező szorzata. Ezt (3)-ba téve adódik, hogy

$$\frac{1}{\zeta(z)}=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\sum_{n=2}^{\infty}\frac{r_\nu(n)}{n^z}.$$

Könnyen látható, hogy például $x \geqq 3$-ra a jobboldali kettős sor abszolút konvergens, tehát itt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} r_{\nu}(n) \right],$$

ahol a $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} r_{\nu}(n)$ sor nyilván csak látszólag végtelen. Az egyértelműségi tétel szerint $n \geqq 2$-re

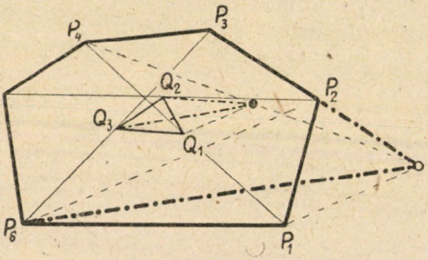
$$\sum_{\nu \geqq 1} (-1)^{\nu} r_{\nu}(n) = \mu(n),$$

amiből a feladat állítása és általánosítása négyzetmentes számokra már következik.

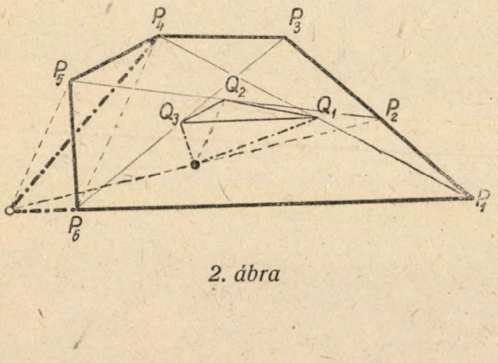
4. feladat.

Legyen $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ egy konvex hatszög. Jelöljük területét T-vel és a P_1P_4, P_2P_5, ill. P_3P_6 átlók Q_1, Q_2, ill. Q_3 felezőpontjai által alkotott háromszög területét t-vel. Bizonyítsuk be, hogy

$$t < \frac{1}{4} T.$$



1. ábra



2. ábra

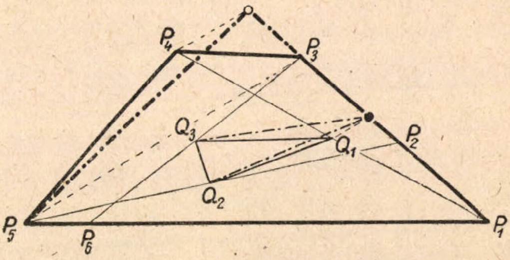
Ezt a feladatot Bártfai Pál, Csiszár Imre, Sárközy András és Stáhl János oldották meg hibátlanul.

Először Bártfai elemi megoldását ismertetjük.

A bizonyítás közben többször fel lesz használva a következő tény: adott egy egyenes és egy szakasz a síkon, akkor a szakasz pontjai közül valamelyik végpontja van legtávolabb az egyenestől.

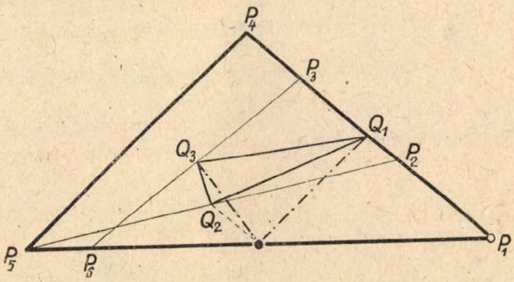
A bizonyítás alapötlete: A hatszöget át lehet alakítani háromszöggé úgy, hogy T nem változik, t nem fogy.

Válasszuk ki pl. a P_1 csúcsot. Ha ezt P_2P_6-tal párhuzamosan mozgatjuk a P_2P_3 oldaltól P_5P_6-ig, a hatszög területe nem változik, a Q_1 pont is egy egyenesszakaszon mozog eközben, ennek egyik végpontja lesz Q_2Q_3-tól legtávolabb, tehát t nem csökken P_1-nek az alkalmas oldalra, például P_2P_3-ra való eltolásával. Most és a továbbiakban az eltolt csúcsok betűzése változatlan marad.



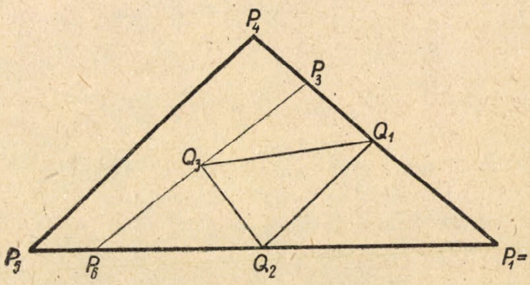
3. ábra

A megmaradt ötszögben az egyik oldalon három P pont van. Válasszuk ki az ezzel szemközti csúcsot, jelenleg P_5-öt, és toljuk rá P_4P_6-tal párhuzamosan valamelyik szomszédos oldalra, pl. P_1P_6-ra, úgy, hogy t ne csökkenjen.



4. ábra

A kapott négyszögben két szomszédos oldalon van három-három P pont. Az ezektől különböző, esetünkben P_4 csúcs eltolása következik az előzőkkel analóg módon. Esetünkben P_4 P_2P_3-ra kerül. Ekkor Q_1 a kapott háromszög P_1P_4 oldalának felezőpontja lesz. Toljuk el P_2-t P_1 vagy P_4-be úgy, hogy t ne csökkenjen. Esetünkben ez P_1 lesz. Most már Q_2 is a háromszög P_2P_5 oldalának felezőpontja lesz, tehát Q_1Q_2 a háromszög egy középvonala. Q_3 belső pont, tehát a $Q_1Q_2Q_3\triangle$ hozzátartozó magassága az eredetinek kevesebb, mint a fele. Mindebből következik, hogy a $Q_1Q_2Q_3\triangle$ területe kevesebb, mint a



5. ábra

$P_1P_4P_5\triangle$ területének negyede, amiből az állítás még inkább következik.

Elemi megoldást adott még Csiszár, analitikusat Csiszár, Sárközy és Stáhl. Az utóbbit ismertetem, némileg kibővítve.

Jelöljük a hatszög csúcspontjainak koordinátáit (x_i, y_i)-vel. Ekkor Q_i koordinátái $\frac{x_i+x_{i+3}}{2}$, $\frac{y_i+y_{i+3}}{2}$, tehát

$$t=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{x_1+x_4}{2} & \frac{y_1+y_4}{2} & 1 \\ \frac{x_2+x_5}{2} & \frac{y_2+y_5}{2} & 1 \\ \frac{x_3+x_6}{2} & \frac{y_3+y_6}{2} & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{16}\left\|\begin{matrix} x_1+x_4 & y_1+y_4 & 2 \\ x_2+x_5 & y_2+y_5 & 2 \\ x_3+x_6 & y_3+y_6 & 2 \end{matrix}\right\|.$$

Bontsuk fel a determinánst 8 determináns összegére és becsüljük meg az összeg abszolút értékét az abszolút értékek összegével. Azt kapjuk, hogy

$$t\leqq\frac{1}{16}\left\{\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_6 & y_6 & 1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \\ x_6 & y_6 & 1 \end{matrix}\right\| +\right.$$

$$\left. + \left\|\begin{matrix} x_4 & y_4 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} x_4 & y_4 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_6 & y_6 & 1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} x_4 & y_4 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} x_4 & y_4 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \\ x_6 & y_6 & 1 \end{matrix}\right\|\right\} =$$

$$=\frac{1}{8}(t_{123}+t_{126}+t_{153}+t_{156}+t_{423}+t_{426}+t_{453}+t_{456}),$$

ahol t_{ijk} a $P_iP_jP_k\triangle$ (röviden h_{ijk}) területét jelenti. Könnyű meggyőződni arról, hogy $h_{123}, h_{153}, h_{156}$ és h_{453}, ill. $h_{126}, h_{423}, h_{426}$ és h_{456} egyesítése a hatszöget adja, tehát a zárójelben álló kifejezés $2T$-vel egyenlő,

$$t\leqq\frac{1}{4}T.$$

Az egyenlőség elhagyható, mert a konvexitás miatt h_{123} és h_{153} ellenkező előjelűek és így a fenti összeg abszolút értéke határozottan kisebb a megfelelő abszolút értékek összegénél.

5. feladat.

Bizonyítsuk be, hogy sem a nyílt, sem a zárt intervallumot nem lehet véges sok, páronként közös pont nélküli, egymásból eltolással származó valódi részhalmaz egyesítéseként előállítani.

Erre a feladatra Bártfai Pál és Csiszár Imre adtak helyes megoldást. Megoldásuk lényege a következő.

Először a zárt intervallum esetével foglalkozunk. Feltehetjük, hogy az $E=[0,1]$ intervallumról van szó.

Tegyük fel indirekte, hogy

$$E=\bigcup_{0}^{r} E_i, \quad E_i \cap E_j = 0, \quad E_i = E_0 + a_i.$$

Feltehetjük, hogy

$$0 \in E_0, \quad 0 < a = a_1 < a_2 < \cdots < a_r.$$

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy ekkor

$$[ka, (k+1)a) \in E_i, \quad (k+1)a \notin E_i \qquad (k=0,1,2,\ldots).$$

Ebből következik, hogy

$$[ka, (k+1)a) \in E$$

minden k-ra, ami lehetetlen, és ezzel az állítás be lesz bizonyítva.

$k=0$ esetén az állítás igaz, mert nyilván

$$[0, a) \in E_0, \quad a \in E_1,$$

tehát $a \notin E_0$.

Tegyük fel, hogy az állítás már be van bizonyítva $k<n$-re és bizonyítsuk $k=n$-re.

Mivel a feltevés szerint

$$[(n-1)a, na) \subset E_i \subset E, \quad na \in E, \quad na \in E_j.$$

Először foglalkozzunk azzal az esettel, amikor $j \neq 0$. Ekkor na egy előző E_0-beli ia pont eltolásával származik, tehát

$$[na, (n+1)a) \in E_j, \quad (n+1)a \notin E_j,$$

az állítás ebben az esetben igaz.

Most legyen $j=0$. Ekkor

$$(n+1)a \in E_1, \quad [na, (n+1)a) \subset E.$$

Bebizonyítjuk, hogy ekkor

$$[na, (n+1)a) \subset E_0$$

és ezzel az állítás be lesz bizonyítva.

Ha ui.

$$x \in (na, (n+1)a) \quad \text{és} \quad x \in E_1,$$

akkor

$$[na, (n+1)a) \in E_1$$

ami lehetetlen, ha pedig

$$x \in E_i \qquad (i \neq 0, 1),$$

akkor x-szel együtt egy a hosszúságú balról zárt jobbról nyílt szakasz is benne van E_i-ben, tehát $(n+1)a$ is, ami lehetetlen.

6. feladat.

Bizonyítsuk be, hogy, ha

$$a_n \geqq 0 \quad \text{és} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geqq \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens és összege kisebb mint $2ea_1$.

Ez a feladat Grünwald Géza feljegyzéseiben szerepelt.

A 6. feladatot kilencen oldották meg: Bártfai Pál, Csiszár Imre, Daróczy Zoltán, Ellmann Gábor, Galambos János, Megyesi László, Papp Zoltán, Sárközy András és Stáhl János.

Az összes megoldás körülbelül a következő gondolatmenetet követi.

Legyen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

A feltevés értelmében

$$\frac{s_n}{n} \geqq s_{2n} - s_n ,$$

tehát

$$s_{2n} \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right) s_n .$$

Innen teljes indukcióval adódik, hogy

$$s_{2^n} \leqq (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right) a_1 . \tag{4}$$

Mivel $x > 0$ esetén

$$e^x > 1 + x,$$

a jobboldal

$$<2a_1 e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}<2ea_1.$$

Mivel a sor tagjai a feltevés értelmében nem negatívak, ebből már következik a sor konvergenciája és a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Több versenyző megjegyzi, hogy a sor összegére jobb becslést is lehet adni. Így megfelel például a $3\sqrt{e}a_1$ korlát is, mert (4) jobboldala

$$<2\frac{3}{2}e^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}<3e^{\frac{1}{2}}a_1.$$

A pontos felső határ nyilván

$$a_1\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^k}\right).$$

7. feladat.

Legyenek a_0 és a_1 tetszőleges valós számok és

$$a_{n+1}=a_n+\frac{2}{n+1}a_{n-1}. \qquad (n=1,2;3,\ldots)$$

Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{a_n}{n^2}$ sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét.

Az első állítást csak Bártfai Pál és Csiszár Imre bizonyította be, a határértéket senkinek sem sikerült meghatározni.

A konvergenciát Bártfai és Csiszár a következőképpen bizonyítják.

Legyen először a_0 és a_1 pozitív. Ekkor az a_n sorozat nyilván növekedő, tehát

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{a_n+\frac{2}{n+1}a_{n-1}}{(n+1)^2}<\frac{a_n+\frac{2}{n+1}a_n}{(n+1)^2}=a_n\frac{(n+3)}{(n+1)^3}.$$

De

$$(n+3)n^2=n^3+3n^2<n^3+3n^2+3n+1=(n+1)^3,$$

tehát

$$\frac{n+3}{(n+1)^3}<\frac{1}{n^2},\quad \frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}<\frac{a_n}{n^2},$$

vagyis az $\frac{a_n}{n^2}$ sorozat fogyó. Mivel nyilván pozitív tagú is, konvergens kell hogy legyen.

Legyenek az (a_0^*, a_1^*) és (a_0^{**}, a_1^{**}) pozitív számpárok olyanok, hogy $\begin{vmatrix} a_0^* & a_1^* \\ a_0^{**} & a_1^{**} \end{vmatrix} \neq 0$. Ekkor tetszőleges a_0 és a_1-re áll az

$$a_0 = \lambda a_0^* + \mu a_0^{**}, \quad a_1 = \lambda a_1^* + \mu a_1^{**}$$

egyenlőség, tehát minden n-re teljesül az

$$a_n = \lambda a_n^* + \mu a_n^{**}$$

összefüggés. Mivel már láttuk, hogy az $\frac{a_n^*}{n^2}$ és $\frac{a_n^{**}}{n^2}$ sorozatok konvergensek, az $\frac{a_n}{n^2}$ sorozat is konvergens lesz.

Az $\frac{a_n}{n^2}$ sorozat határértéke a következőképpen határozható meg. A fentiek értelmében a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

hatványsor konvergens a $|z|<1$ körben. (Még könnyebb látni, hogy a konvergencia fennáll $|z|<\frac{1}{2}$ esetén és a bizonyításhoz ez is elég.) Legyen tehát $|z|<1$ és

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

A feltevés értelmében

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_{n-1}}{n+1} z^{n+1},$$

vagyis

$$f(z) - a_0 - a_1 z = z[f(z) - a_0] + 2\int_0^z t f(t)\,dt.$$

Differenciálással adódik az

$$f'(z) - a_1 = f(z) - a_0 + z f'(z) + 2z f(z),$$

azaz

$$f'(z) - \frac{1+2z}{1-z} f(z) = \frac{a_1 - a_0}{1-z}$$

differenciálegyenlet.

Ezt a differenciálegyenletet a szokásos módon megoldva, és figyelembe véve, hogy

$$f(0) = a_0,$$

az

$$f(z) = \frac{1}{4}(1-z)^{-3}[(a_1 - a_0)(2z^2 - 6z + 5) + (9a_0 - 5a_1)e^{-2z}] =$$

$$= \frac{g(z)}{(1-z)^3}$$

egyenlőség adódik.

Innen a komplex függvénytan egy tételének felhasználásával vagy közvetlen számítással adódik, hogy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[g(1) \frac{(n+1)(n+2)}{2} + O(n) \right] z^n,$$

tehát

$$a_n = \frac{g(1)}{2}(n+1)(n+2) + O(n),$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{g(1)}{2} = \frac{1}{8}[(9e^{-2} - 1)a_0 + (1 - 5e^{-2})a_1].$$

Ezzel a keresett határértéket meghatároztuk.

Megjegyzés. Szekeres György és Turán Pál a nevezetes Sylvester-féle megoldatlan problémával kapcsolatban meghatározták (Akad. Ért. 1937. p. 796—806) az

$$S_4 = \frac{1}{2^{n^2}} \sum_{\varepsilon_{ik} = \pm 1} \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} \cdots \varepsilon_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_{n1} \cdots \varepsilon_{nn} \end{vmatrix}^4$$

összeget. Ha

$$S_4 = n!^2 \psi(n),$$

akkor kimutatták, hogy

$$\psi(1) = 1, \quad \psi(2) = 2$$

mellett

$$\psi(n+1)=\psi(n)+\frac{2}{n+1}\psi(n-1).$$

Tehát feladatunk megoldása adja, hogy

$$S_4 \sim \frac{n!^2 n^2}{2e^2} \sim \pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n+2}.$$

Ugyanis most $a_1=1$, $a_2=2$, tehát

$$2=1+\frac{2a_0}{2}, \quad a_0=1,$$

$$\psi(n) \sim \frac{n^2}{2e^2}.$$

8. feladat.

Legyen $f(x)$ 1-periódusú, nemnegatív, a $(0, 1)$ intervallumban felülről konvex, a 0 pontban folytonos függvény;[5] x valós, n természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy

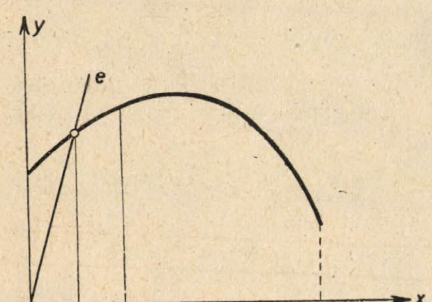
$$f(nx) \leqq nf(x).$$

Megjegyzés. A feladat állítása általánosítja a jólismert

$$|\sin nx| \leqq n|\sin x|$$

egyenlőtlenséget.

Erre a feladatra 5 helyes megoldást küldtek be Bártfai Pál, Csiszár Imre, Daróczy Zoltán, Papp Zoltán, ill. Stáhl János.



6. ábra

A megoldások többé-kevésbé hasonlóak, egyik lehetséges megfogalmazás a következő.

Elegendő a $0<x<1$ esetre szorítkozni, mert az $x=0$ eset triviális, az $x<0$ és $x \geqq 1$ eset pedig a periodicitás miatt visszavezethető az előbbiekre.

Legyen $x<\xi<1$. Mivel 0 és x között a konvexitás miatt a függvény az ábrán látható e

[5] Az $f(x)$-re tett utolsó feltevés az eredeti szövegből kimaradt.

egyenes fölött van, x és 1 között alatta kell hogy legyen ugyancsak a konvexitás miatt. Ez azt jelenti, hogy

$$\frac{f(\xi)}{\xi} < \frac{f(x)}{x},$$

azaz

$$f(\xi) < \frac{\xi}{x} f(x). \tag{5}$$

Ha $0 \leqq \xi < x$, akkor ehhez hasonlóan

$$f(\xi) < \frac{1-\xi}{1-x} f(x). \tag{6}$$

Jelölje $\{a\}$ az a szám tört részét.

Legyen

$$\xi = \{nx\}.$$

$\xi = x$ esetén a tétel állítása nyilvánvaló.

Most tegyük fel, hogy $\xi > x$. Mivel

$$\xi \leqq nx,$$

azaz

$$\frac{\xi}{x} \leqq n,$$

(5)-ből és a periodicitásból következik a tétel állítása.

Végül legyen $\xi < x$.

Ha

$$x \leqq 1 - \frac{1}{n},$$

akkor

$$\frac{1-\xi}{1-x} \leqq \frac{1}{\frac{1}{n}} = n,$$

ha pedig

$$x = 1 - \frac{1}{n} + \alpha,$$

ahol

$$0 < \alpha < \frac{1}{n},$$

akkor

$$nx = n - 1 + n\alpha, \quad \{nx\} = n\alpha,$$

tehát

$$\frac{1-\xi}{1-x} = \frac{1-n\alpha}{\frac{1}{n}-\alpha} = n.$$

Mind a két esetben

$$\frac{1-\xi}{1-x} \leqq n,$$

innen, (6)-ból és a periodicitásból az állítás ebben az esetben is következik.

9. feladat.

Bizonyítsuk be, hogy, ha $|z| \leqq 1$-re

$$f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

és

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^2 d\varphi < \left(1 + \frac{|a_1|^2}{4}\right)^2,$$

akkor $f(z)$-nek van a $|z| \leqq 1$ körben gyöke. Erre a feladatra a versenyzők nem küldtek be megoldást.

A következő megoldás Turán Páltól származik. A Schwarz egyenlőtlenség értelmében

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|\, d\varphi \leqq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^2 d\varphi},$$

innen és a feltevésből következik, hogy

$$(7) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|\, d\varphi < 1 + \frac{|a_1|^2}{4}.$$

Ha az állítással ellentétben $f(z) \neq 0$ volna $|z| \leqq 1$ esetén, akkor $\sqrt{f(0)} = 1$ választás mellett $\sqrt{f(z)}$ reguláris függvény a $|z| \leqq 1$ zárt körlemezen, tehát ott

$$(8) \qquad \sqrt{f(z)} = 1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots.$$

Alkalmazzuk $\sqrt{f(z)}$-re a Parseval formulát:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sqrt{f(e^{i\varphi})}|^2 d\varphi = 1 + |b_1|^2 + |b_2|^2 + \cdots.$$

Itt a bal oldalon

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|\, d\varphi$$

áll, tehát (7) értelmében

$$1 + |b_1|^2 + |b_2^2| + \cdots < 1 + \frac{|a_1|^2}{4}$$

és annál inkább

$$1 + |b_1|^2 < 1 + \frac{|a_1|^2}{4},$$

(9) $$|b_1| < \frac{|a_1|}{2}.$$

(8)-ból négyzetreemeléssel adódik, hogy

$$f(z) = 1 + 2b_1 z + \cdots,$$

tehát a feltevés értelmében

$$b_1 = \frac{a_1}{2}.$$

Ez ellentmond (9)-nek, tehát indirekt feltevésünk helytelen, a feladat állítása teljesül.

10. feladat.

Legyen k természetes szám,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin v}{v}\right)^{2k} \cos 2xv\, dv.$$

Bizonyítsuk be, hogy

1. $f(x) = 0$, ha $x \geqq k$ vagy $x \leqq -k$;
2. $f(x) \geqq 0$, ha $-k < x < k$;

3. $f(x)$ minden $(l, l+1)$ intervallumban $(l=-k, -k+1, \ldots, k-1)$ egy-egy legfeljebb $(2k-1)$-edfokú polinom.[6]

A feladatot Bártfai Pál és Csiszár Imre oldották meg. Az alábbiakban lényegtelen változtatásokkal ismertetjük Csiszár megoldását. A másik megoldás hasonló.

A feladatban szereplő függvény helyett vizsgáljuk az általánosabb

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin v}{v}\right)^n \cos 2xv$$

függvényt.

Mint ismeretes (lásd pl. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления II. 645, ill. III. 648.)

$$f_1(x) = \begin{cases} \pi, & \text{ha} \quad |x| < \frac{1}{2} \\ \pi/2, & \text{ha} \quad x = \frac{1}{2} \\ 0, & \text{ha} \quad |x| > \frac{1}{2} \end{cases}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \pi(1-|x|), & \text{ha} \quad |x| \leqq 1 \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geqq 1 \end{cases}.$$

Legyen $n \geqq 3$. Ekkor az integrál nyilván konvergens. Parciális integrálással

$$u = \sin^n v \cos 2xv, \qquad w' = v^{-n}$$

szereposztással adódik, hogy

$$f_n(x) = \frac{1}{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n \sin^{n-1} v \cos v \cos 2xv - 2x \sin^n v \sin 2xv}{v^{n-1}} dv.$$

(A kiintegrált rész a végtelenben eltűnik, a parciális integrálás nyilván jogos.)

Minthogy

$$\cos v \cos 2xv = \frac{1}{2} [\cos(2x+1)v + \cos(2x-1)v],$$

$$-\sin v \sin 2xv = \frac{1}{2} [\cos(2x+1)v - \cos(2x-1)v],$$

[6] Az eredeti szövegben hibásan $\cos xv$ szerepelt $\cos 2xv$ helyett.

tehát

$$f_n(x)=\frac{1}{2(n-1)}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^{n-1}[(n+2x)\cos(2x+1)v+$$

$$+(n-2x)\cos(2x-1)v]dv=$$

$$=\frac{(n+2x)f_{n-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)+(n-2x)f_{n-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2(n-1)}.$$

A most kapott rekurziós formulából és $f_1(x)$, $f_2(x)$ fenti explicit előállításából teljes indukcióval könnyű levezetni, hogy

1. $f_n(x)=0$, ha $|x|\geqq n|2$ $\left(n=1 \text{ esetén } x>\frac{1}{2}\right)$;
2. $f_n(x)>0$, ha $|x|<n|2$;
3. $l=0,1,\ldots,n-1$ esetén a $\left(-\frac{n}{2}+l,-\frac{n}{2}+l+1\right)$ intervallumban $f_n(x)$ egy legfeljebb $n-1$-edfokú polinom.

Innen $n=2k$ esetén adódik a tétel állítása kiegészítve azzal, hogy 2.-ben $\geqq 0$ helyett >0 írható. Nem lenne nehéz bebizonyítani azt sem, hogy a szóban forgó polinomok pontosan n-edfokúak.

A következő megoldás Turán Páltól származik és explicite megadja a szóban forgó polinomokat.

Mivel

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^{2k}\sin 2xv\,dv=0$$

az integrandus páratlan volta miatt, tehát

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^{2k}e^{2ixv}dv=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{iv}-e^{-iv}}{2iv}\right)^{2k}e^{2ixv}dv=$$

$$=\frac{1}{i}\int_{(0)}\left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{2z}\right)^{2k}e^{2xz}dz,$$

ahol az integrál a képzetes tengely mentén veendő. A Cauchy-féle integráltétel könnyű alkalmazásával adódik, hogy

$$f(x)=\frac{1}{i}\int\limits_{(1)}\left(\frac{e^{z}-e^{-z}}{2z}\right)^{2k}e^{2xz}\,dz,$$

ahol az integráció útja a $\operatorname{Re} z=1$ függőleges egyenes. A binomiális tétel alkalmazásával nyerjük, hogy

$$f(x)=\frac{1}{2^{2k}}\sum_{\nu=0}^{2k}(-1)^{\nu}\binom{2k}{\nu}\frac{1}{i}\int\limits_{(1)}\frac{e^{(2\nu-2k+2x)z}}{z^{2k}}\,dz. \tag{10}$$

Mint jól ismert és könnyen igazolható

$$\frac{1}{i}\int\limits_{(1)}\frac{e^{az}}{z^{2k}}\,dz=\begin{cases}0, & \text{ha } a\leqq 0\\ 2\pi\dfrac{a^{2k-1}}{(2k-1)!}, & \text{ha } a\geqq 0.\end{cases} \tag{11}$$

Ezért $x\leqq -k$ esetén (10)-ben minden tag 0, azaz $f(x)=0$. $x\geqq k$ esetén ez következik $f(x)$ párosságából. Ezzel első állításunk be van bizonyítva.

Ha $|x|<k$, akkor (10) és (11)-ből adódik, hogy

$$f(x)=\frac{2\pi}{2^{2k}(2k-1)!}\sum_{2k\geqq\nu\geqq k-x}(-1)^{\nu}\binom{2k}{\nu}(2\nu-2k+2x)^{2k-1}=$$

$$=\frac{\pi}{(2k-1)!}\sum_{2k\geqq\nu\geqq k-x}(-1)^{\nu}\binom{2k}{\nu}(\nu-k+x)^{2k-1}.$$

Innen következik a feladat 2. és 3. állítása és megkaptuk $f(x)$ explicit előállítását.

A következő megoldás Rényi Alfrédtől származik és szintén explicit formulát ad $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^{n}\cos 2xv\,dv$-re a valószínűségszámítás felhasználásával.

Legyenek a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ valószínűségi változók függetlenek és egyenletes eloszlásúak a $(-1,+1)$ intervallumban és legyen

$$\zeta_n=\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n.$$

A ξ_k változók közös eloszlásának karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^{ixt}dx=\frac{\sin t}{t},$$

tehát ζ_n karakterisztikus függvénye

$$M(e^{it\zeta_n})=\varphi_n(t)=[\varphi(t)]^n=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n.$$

Ha mármost $f_n(x)$ jelöli ζ_n sűrűségfüggvényét, akkor

$$\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}f_n(x)dx$$

és így a Fourier-féle inverziós formula szerint

$$f_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n e^{-ixt}dt.$$

Mivel $\dfrac{\sin t}{t}$ páros függvény,

$$f_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^n \cos xt\,dt.$$

Az $f_n(x)$ függvényeket explicite meghatározhatjuk a definíciójukból, vagyis az

$$f_n(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f_{n-1}(x-u)du$$

rekurzió segítségével. Az általános képlet a következő:

$$f_n(x)=\frac{1}{2^n(n-1)!}\sum_{l=0}^{\left[\frac{n+x}{2}\right]}(-1)^l\binom{n}{l}(n+x-2l)^{n-1},\quad \text{ha } |x|\leqq n$$

és

$$f_n(x)=0,\quad \text{ha } |x|>n.$$

(Ez a képlet megtalálható Rényi Alfréd „Valószínűségszámítás" c.

könyvében is a 713. oldalon. Itt sajtóhiba van: $(n-1)!$ kimaradt.) Így

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin v}{v}\right)^n \cos 2xv\,dv=$$

$$=\frac{\pi}{(n-1)!}\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}+x\right]}(-1)^l\binom{n}{l}\left(\frac{n}{2}+x-l\right)^{n-1},\quad \text{ha } |x|\leqq\frac{n}{2}.$$

Ha $n=2k$, ugyanazt a formulát nyerjük, mint az előbb.

11. feladat.

Legyen $a_n=(-1)^n$ $(n=1,2,\dots,2N)$. Jelölje $A_N(x)$ az $a_1, a_2, \dots, a_{2N}$ számok közül kiválasztható azon N tagú $a_{i_1}+a_{i_2}+\dots+a_{i_N}$ alakú összegek számát $(1\leqq i_1<i_2<\dots<i_n\leqq 2N)$, melyek kisebbek, mint $x\sqrt{N|2}$.[7] Bizonyítandó, hogy

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{A_N(x)}{\binom{2N}{N}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

Erre a feladatra csak Csiszár Imre küldött be helyes megoldást. Az alábbiakban lényegtelen változtatásokkal közöljük a megoldását.

Legyen $-N\leqq k\leqq N$ és jelentse $B_{N,k}$ a k-val egyenlő $a_{i_1}+\dots+a_{i_N}$ alakú összegek számát. Minthogy az a_n számok közül N számú $+1$-gyel, N számú (-1)-gyel egyenlő és mivel

$$a_{i_1}+\dots+a_{i_N}=k$$

akkor és csak akkor teljesül, ha az a_{i_r} számok közül $\frac{N+k}{2}$ számú egyenlő $+1$-gyel, $\frac{N-k}{2}$ számú pedig -1-gyel, azért

$$B_{N,k}=\begin{cases}\dbinom{N}{\frac{N+k}{2}}\dbinom{N}{\frac{N-k}{2}}, & \text{ha } N-k \text{ páros}\\[2ex] 0, & \text{ha } N-k \text{ páratlan.}\end{cases}$$

[7] Az eredeti szövegben $N|2$ helyett tévesen $N|8$ állt.

Tegyük fel először, hogy $x>0$ és legyen

$$A_N^{\mathrm{I}}=\sum_{-N\leqq k\leqq 0} B_{N,k},\quad A_N^{\mathrm{II}}=\sum_{0<k<x\sqrt{N|2}} B_{N,k}.$$

Világos, hogy

$$A_N=A_N^{\mathrm{I}}+A_N^{\mathrm{II}}. \tag{12}$$

Mivel

$$B_{N,k}=B_{N,-k},\quad \sum_{k=-N}^{N} B_{N,k}=\binom{2N}{N},$$

tehát

$$A_N^{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\binom{2N}{N}+\frac{1}{2}B_{N,0}.$$

De páros N esetén a Stirling-formula értelmében

$$\frac{\binom{N}{N|2}^2}{\binom{2N}{N}}=\frac{\dfrac{N!^2}{(N|2)!^4}}{\dfrac{(2N)!}{N!^2}}=\frac{N!^4}{(2N)!\,(N|2)!^4}\sim$$

$$\sim\frac{4\pi^2N^2\left(\dfrac{N}{e}\right)^{4N}}{\sqrt{4\pi N}\left(\dfrac{2N}{e}\right)^{2N}\pi^2N^2\left(\dfrac{N}{2e}\right)^{4N}}=\frac{2N\sqrt{N}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2e}{N}\right)^{2N},$$

tehát

$$\lim_{N\to\infty}\frac{A_N^{\mathrm{I}}}{\binom{2N}{N}}=\frac{1}{2} \tag{13}$$

és elég A_N^{II}-vel foglalkoznunk.

$\lim\limits_{N\to\infty} A_N^{\mathrm{II}}\Big/\binom{2N}{N}$ kiszámítása végett becsüljük meg a

$$b_{N,k}=\frac{\binom{N}{\frac{N+k}{2}}\binom{N}{\frac{N-k}{2}}}{\binom{2N}{N}}$$

kifejezést, ha $N\to+\infty$ és $k=0(\sqrt{N})$.

A Stirling-formula alkalmazásával nyerjük:

$$b_{N,k}=\frac{N!^4}{\left(\frac{N+k}{2}\right)!^2\left(\frac{N-k}{2}\right)!^2(2N)!}=$$

$$=\frac{\left(\frac{N}{e}\right)^{4N}2\pi^2N^2e^{O\left(\frac{1}{n}\right)}}{\left(\frac{N+k}{2e}\right)^{N+k}\left(\frac{N-k}{2e}\right)^{N-k}\left(\frac{2N}{e}\right)^{2N}4\pi^2\frac{N+k}{2}\frac{N-k}{2}2\sqrt{\pi N}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi N}}\frac{e^{O\left(\frac{1}{N}\right)}}{\left(1+\frac{k}{N}\right)^{N+k+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-k+1}}=\frac{2}{\sqrt{\pi N}}\frac{e^{O\left(\frac{1}{n}\right)}}{T}.$$

Felhasználva azt, hogy

$$\log(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+\tau h^4,$$

ahol

$$|\tau|\leqq 1, \quad \text{ha} \quad |h|<3/4,$$

elég nagy N esetére nyerjük:

$$\log T=(N+k+1)\log\left(1+\frac{k}{N}\right)+(N-k+1)\log\left(1-\frac{k}{N}\right)=$$

$$=(N+k+1)\left(\frac{k}{N}-\frac{k^2}{2N^2}+\frac{k^3}{3N^3}+\tau_1\frac{k^4}{N^4}\right)+$$

$$+(N-k+1)\left(-\frac{k}{N}-\frac{k^2}{2N^2}-\frac{k^3}{3N^3}+\tau_2\frac{k^4}{N^4}\right)=\frac{k^2}{N}+O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Innen és abból, hogy

$$e^{O\left(\frac{1}{N}\right)}=1+O\left(\frac{1}{N}\right)$$

adódik, hogy

$$b_{N,k}=\frac{2}{\sqrt{\pi N}}e^{-\frac{k^2}{N}+O\left(\frac{1}{N}\right)}=\frac{2}{\sqrt{\pi N}}e^{-\frac{k^2}{N}}\left[1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right].$$

Ezért

$$\frac{A_N^{\mathrm{II}}}{\binom{2N}{N}} = \sum_{0<k<x\sqrt{N/2}} \frac{B_{N,k}}{\binom{2N}{N}} = \sum_{0<k<x\sqrt{N/2}}' b_{N,k} =$$

$$= \sum_{0<k<x\sqrt{N/2}}' \frac{2}{\sqrt{\pi N}} e^{-\frac{k^2}{N}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

ahol Σ' azt jelenti, hogy az összegezés csak azokra a k-kra terjed ki, amelyekre $N-k$ páros.

Felhasználva, hogy a tagok száma $= O(\sqrt{N})$, a nyert kifejezés így is írható:

$$\frac{A_N^{\mathrm{II}}}{\binom{2N}{N}} = \sum_{0<k<x\sqrt{N/2}}' \frac{2}{\sqrt{\pi N}} e^{-\frac{k^2}{N}} + O\left(\frac{1}{N}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{0<k/\sqrt{N/2}<x}' \frac{2}{\sqrt{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sqrt{\frac{N}{2}}}\right)^2} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Az itt szereplő összeg nyilván az

$$\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

integrál egy $\frac{2}{\sqrt{\frac{N}{2}}}$ finomságú felosztáshoz tartozó közelítő összegének tekinthető. $N \to \infty$ esetén ez a felosztássorozat minden határon túl finomodik, tehát

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_N^{\mathrm{II}}}{\binom{2N}{N}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du. \tag{14}$$

Mivel

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2},$$

(12), (13) és (14)-ből következik, hogy valóban

$$\lim_{N\to\infty} \frac{A_N}{\binom{2N}{N}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Az $x \leqq 0$ eset hasonlóan tárgyalható.

A következő valószínűségszámítási bizonyítás Rényi Alfrédtől származik.

Legyen S_N az N darab $+1$-ből és N darab -1-ből álló halmazból találomra kiválasztott N elem összege. Ekkor $s_n = 2k - N$ valószínűsége nyilván $\binom{N}{k}^2 \Big/ \binom{2N}{N}$, tehát s_N karakterisztikus függvénye

$$f_N(t) = \frac{1}{\binom{2N}{N}} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}^2 e^{it(2k-N)}.$$

Az $f_N(t)$ függvény előállítható integrálalakban a következőképpen:

$$f_N(t) = \frac{e^{-itN}}{2\pi\binom{2N}{N}} \int_{-\pi}^{+\pi} [1+e^{i(t+\varphi)}]^N [1+e^{i(t-\varphi)}]^N d\varphi$$

és így némi átalakítás után

$$f_N(t) = \frac{4^N}{2\pi\binom{2N}{N}} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[\cos\frac{t+\varphi}{2} \cos\frac{t-\varphi}{2}\right]^N d\varphi.$$

Legyen

$$\frac{4^N}{\sqrt{\pi N}\binom{2N}{N}} = \lambda_N.$$

Ekkor a Stirling-formula szerint

$$\lim_{N\to\infty} \lambda_N = 1.$$

Bevezetve a

$$\vartheta = \varphi\sqrt{\frac{N}{2}}$$

új változót, adódik, hogy

$$(15) \qquad f_N\left(t\sqrt{\frac{2}{N}}\right)=\frac{\lambda_N}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi\sqrt{\frac{N}{2}}}^{+\pi\sqrt{\frac{N}{2}}}\left(\cos\frac{t+\vartheta}{\sqrt{2N}}\cos\frac{t-\vartheta}{\sqrt{2N}}\right)^N d\vartheta.$$

Mivel

$$\cos\frac{t+\vartheta}{\sqrt{2N}}\cos\frac{t-\vartheta}{\sqrt{2N}}\sim e^{-\frac{t^2+\vartheta^2}{2}},$$

tehát (15) értelmében

$$(16) \qquad \lim_{N\to\infty} f_N\left(t\sqrt{\frac{2}{N}}\right)=e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\vartheta^2}{2}}d\vartheta=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Mivel $e^{-t^2/2}$ a normális eloszlás karakterisztikus függvénye, (16)-ból jól ismert tétel segítségével következik, hogy

$$\lim_{N\to+\infty} P\left(\frac{s_N}{\sqrt{\frac{N}{2}}}<x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

és éppen ez volt a bizonyítandó állítás.

Megjegyzendő, hogy a feladat állítása speciális esete egy általános tételnek, amelyet Erdős Pál és Rényi Alfréd bizonyították be és amely az AMI közleményeiben van sajtó alatt.

CONCOURS COMMÉMORATIF MIKLÓS SCHWEITZER POUR L'ANNÉE 1958

Problème 1.

Quels sont les groupes, dont chaque système générateur contient une base? (On appelle base un système d'éléments du groupe qui engendre des groupes cycliques dont le produit direct est le groupe lui-même.)

Problème 2.

Appelons le nombre entier positif n de type A s'il possède un facteur premier supérieur à $\sqrt[3]{n}$. Désignons par $A(x)$ le nombre des nombres de type

A non supérieur à x. Démontrer que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x}$$

existe.

Problème 3.

Démontrer que si dans la décomposition en facteurs premiers du nombre entier positif n figure au moins un facteur premier de puissance $\geqq 2$, alors n peut être obtenu autant de fois comme produit d'un nombre impair de facteurs entiers supérieurs à 1, que le produit d'un nombre pair de facteurs entiers supérieurs à 1. (Deux produits qui ne diffèrent l'un de l'autre que par l'ordre de leurs facteurs doivent être considérés comme différents.)

Problème 4.

Soit $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ un hexagone convexe. Désignons son aire par T et par t celle du triangle formé par les milieux Q_1, Q_2 resp. Q_3 des diagonales P_1P_4, P_2P_5 resp. P_3P_6. Démontrer que

$$t < \frac{1}{4} T.$$

Problème 5.

Démontrer que ni un intervalle ouvert, ni un intervalle fermé ne peut être formé comme la somme d'un nombre fini de sous-ensembles propres sans points communs et obtenus l'un de l'autre par une translation.

Problème 6.

Démontrer que si

$$a_n \geqq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \geqq \sum_{k=n+1}^{n} a_k \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

alors la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ est convergente et sa somme est inférieure à $2ea_1$.

Problème 7.

Soient a_0 et a_1 des nombres réels arbitraires et

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}.$$

Démontrer que la suite $\frac{a_n}{n^2}$ est convergente et déterminer sa limite.

Problème 8.

Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 1 non négative, convexe d'en haut dans l'intervalle (0, 1), continue au point O;[8] x est réel, n un en-

[8] Cette dernière condition a été omise du texte originel.

tier positif. Démontrer que

$$f(nx) \leqq nf(x).$$

Problème 9.

Démontrer que si pour $|z| \leqq 1$

$$f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\varphi})|^2 d\varphi < \left(1 + \frac{|a_1^2|}{4}\right)^2,$$

alors $f(z)$ a un zéro dans le cercle $|z| \leqq 1$.

Problème 10.

Soit k un entier positif,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin nv}{v}\right)^{2k} \cos 2xv\, dv.$$

Démontrer que

1° $f(x) = 0$, si $x \geqq k$ ou $x \leqq -k$;

2° $f(x) \geqq 0$, si $-k < x < k$;

3° $f(x)$ est un polynom de degré $(2k-1)$ au plus dans chaque intervalle $(l, l+1)$ $(l = -k, -k+1, \ldots, k-1)$.[9]

Problème 11.

Soit $a_n = (-1)^n$ $(n = 1, 2, \ldots, 2N)$. Désignons par $A_N(x)$ le nombre des sommes à N termes et de la forme $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_N}$ $(1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots \leqq \leqq 2N)$ qui sont inférieures à $x\sqrt{N/2}$.[10] Démontrer que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{A_N(x)}{\binom{2N}{N}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du \qquad (-\infty < x < \infty).$$

[9] Dans le texte originel par suite d'une erreur commise, $\cos xv$ figurait au lieu de $\cos 2xv$.

[10] Dans le texte originel par suite d'une erreur commise $N/8$ figurait au lieu de $N/2$.

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket, az egyes feladatok megoldását külön lapon, a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Szabadság tér 17.

Kitűzött feladatok

109. Egy téglatest alakú ládát olyan egybevágó téglákkal akarunk megtölteni, amelyek éleinek aránya 1 : 2 : 4. Bizonyítandó, hogy ez csak akkor lehetséges, ha a láda „párhuzamosan" elhelyezett téglákkal is megtölthető (amikor az ugyanolyan hosszú téglaélek mind párhuzamosak).

N. G. De Bruijn (Amsterdam)

110. Egy rendezett csoport P, Q szeletéről azt mondjuk, hogy a hozzá tartozó rés 0, ha minden $d > 0$ csoportelemhez található a $p - q < d$ összefüggést kielégítő $p \in P$ és $q \in Q$. Bizonyítsuk be, hogy egy elrendezés akkor és csak akkor archimédeszi, ha minden szelethez 0 rés tartozik.

Fried Ervin

111. A síkbeli Δ_1, Δ_2 háromszögek csúcsain át a másik háromszög megfelelő oldalára merőlegest fektetünk. Δ_1-ből kiindulva ilyen módon a Δ_3, Δ_2-ből kiindulva pedig a Δ_4 háromszög oldalegyeneseihez jutunk. Bizonyítsuk be, hogy e háromszögek területére $\Delta_1 : \Delta_2 = \Delta_3 : \Delta_4$.

Kárteszi Ferenc

Megoldott feladatok

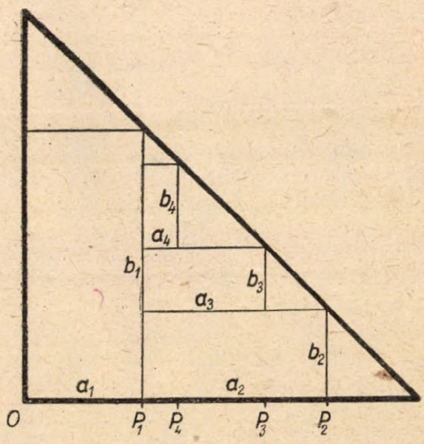
93. feladat. Legyen $P_1, P_2, \ldots$ a $(0, 1)$ intervallumban elhelyezkedő, különböző pontokból álló, az intervallumban mindenütt sűrű pontsorozat. A $P_1, \ldots, P_{n-1}$ pontok az intervallumot n darabra osztják, s a P_n pont ezek egyikét két darabra osztja. Jelölje a_n és b_n e két darab hosszát. Bizonyítandó, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n (a_n + b_n) = \frac{1}{3}.$$

(*J. Karamata*, Belgrád)

I. megoldás. Először az $a_n b_n$ szorzatokat ábrázoljuk ekkora területű téglalapokkal úgy, ahogyan ezt ábránk bemutatja. A kapott téglalapok egy egységbefogójú egyenlőszárú derékszögű háromszögben egyrétűen helyezkednek el, és n növekedtével az egész háromszöget kitöltik.

Emeljünk mindegyik téglalap fölé $a_n + b_n$ magasságú hasábot, a háromszög fölé pedig olyan egységmagasságú tetraédert, amelynek csúcsa a derékszögű csúcsban, O-ban emelt merőlegesen van. Megmutatjuk, hogy ez a tetraéder a hasábok mindegyikének a felét tartalmazza, hogy tehát a hasábok térfogatának az összege a tetraéder térfogatának kétszeresével, azaz 1/3-dal egyenlő.



1. ábra

Elég tehát belátnunk, hogy a tetraédernek a háromszög fölé boruló lapja a hasáb testátlóján halad át, vagyis azt, hogy a téglalap O-hoz legközelebbi csúcsában emelt, a tetraéder említett lapján végződő merőlegesnek a hossza éppen $a_n + b_n$. Ez valóban így van, mert, miként a tetraéder O-ba futó élei egyenlők, az ilyen merőleges egyenlő azzal a szakasszal, amelyik a merőleges talppontjától az egyenlőszárú derékszögű háromszög befogójával párhuzamosan az átfogóig terjed.

Kiss Ernő

II. megoldás. Először azt bizonyítjuk be, hogy ha a $P_1, \ldots, P_{n-1}$ pontok sorrendjét megváltoztatjuk, a $\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k (a_k + b_k)$ összeg nem változik. Elég, ha ezt csak P_k és P_{k+1} felcserélésére mutatjuk meg, sőt szorítkozhatunk arra az esetre, amikor a vizsgált összeg tagjai egyáltalában megváltoznak, amikor tehát P_{k+1} az a_k, b_k hosszúságú szakaszok egyikén, pl. a b_k hosszúságú szakaszon van. Ekkor az összeg két tagja változik meg, mégpedig

$$a_k(a_{k+1}+b_{k+1})(a_k+a_{k+1}+b_{k+1})+a_{k+1}b_{k+1}(a_{k+1}+b_{k+1})$$

helyébe

$$(a_k+a_{k+1})b_{k+1}(a_k+a_{k+1}+b_{k+1})+a_k a_{k+1}(a_k+a_{k+1})$$

lép, és ezek a kifejezések valóban egyenlők.

Ha tehát a $P_1,\ldots,P_{n-1}$ pontokat úgy rendezzük el, hogy $x_1,\ldots,x_{n-1}$ koordinátáik monoton csökkenjenek, akkor $x_0=1$, $x_n=0$ jelöléssel a

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k(a_k+b_k)=\sum_{i=1}^{n} x_i x_{i-1}(x_{i-1}-x_i)$$

eredményhez jutunk. Az utóbbi összeg határértéke azonban a pontsorozat mindenütt sűrű volta miatt

$$-\int_1^0 x^2 dx=\frac{1}{3}.$$

Detre László

III. megoldás. Minthogy

$$a_n b_n(a_n+b_n)=\frac{1}{3}[(a_n+b_n)^3-a_n^3-b_n^3],$$

összevonás révén

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n(a_n+b_n)=\frac{1}{3}[1-(c_0^3+\cdots+c_N^3)]$$

adódik, ahol $c_0,\ldots,c_N$ azoknak az intervallumoknak a hossza, amelyekre a $P_1,\ldots,P_N$ pontok a (0, 1) szakaszt felosztják.

Azt kell már csak belátnunk, hogy a jobboldali kivonandó 0-hoz tart. Ez így is van, mert

$$\sum_{i=0}^{N} c_i^3 \leqq (\max c_i)^2 \sum_{i=0}^{N} c_i=(\max c_i)^2,$$

és a mindenütt sűrűség miatt N növekedtével $\max c_i \to 0$.

Sarkadi Károly

IV. megoldás. Azt bizonyítjuk be, hogy a pozitív x értékekre értelmezett $f(x) > 0$ függvényre

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f(a_n + b_n) - f(a_n) - f(b_n)] = f(1)$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0. \tag{1}$$

Az előző megoldás mutatja, hogy ez az állítás a feladatét magában foglalja, hiszen $f(x) = x^3$ kielégíti a megadott feltételt.

A vizsgált sor részletösszege összevonás után

$$\sum_{n=1}^{N} [f(a_n + b_n) - f(a_n) - f(b_n)] = f(1) - \sum_{i=0}^{N} f(c_i)$$

alakban írható, ahol $c_0, \ldots, c_N$ ismét azoknak a szakaszoknak a hossza, amelyekre a $P_1, \ldots, P_N$ pontok a $(0, 1)$ intervallumot felosztják. A feladat tehát annak vizsgálata, hogy az

$$S_n = \sum_{i=0}^{N} f(c_i)$$

összeg 0-hoz tart-e.

Ha (1) teljesül, akkor adott $\varepsilon > 0$ értékhez megválasztható δ úgy, hogy $x < \delta$ esetén $f(x) < \varepsilon x$. Ha N elég nagy, akkor a mindenütt sűrűség miatt $c_i < \delta$ $(i = 0, \ldots, N)$ és ezért

$$S_N < \varepsilon \sum_{i=0}^{N} c_i = \varepsilon.$$

Ebben az esetben tehát N növekedtével S_N valóban 0-hoz tart. Megjegyezzük, hogy $f(x)$ pozitivitására itt nem volt szükségünk.

Ha (1) nem teljesül, akkor van olyan $\varepsilon > 0$ és pozitív értékekből álló, 0-hoz tartó $\delta_1, \delta_2, \ldots$ sorozat, hogy

$$\frac{f(\delta_n)}{\delta_n} \geq \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Feltehetjük azt is, hogy a $\delta_1, \delta_2, \ldots$ sorozat monoton csökken, s hogy $\delta_0 = 1$ jelöléssel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} < \infty, \tag{2}$$

hiszen a sorozat ritkításával ez elérhető. Bontsuk fel a (0, 1) intervallumot δ_1 hosszúságú szakaszokra és egy δ_1-nél nem nagyobb maradékra; a kapott intervallumok mindegyikét bontsuk fel δ_2 hosszúságúakra és egy ennél nem nagyobb maradékra; és így tovább. Pontsorozatul válasszuk a sorozatosan bevezetett intervallumok végpontjait.

Az n-edik felbontás után a δ_n hosszúságú szakaszok száma legalább

$$\left[\frac{1}{\delta_1}\right]\left[\frac{\delta_1}{\delta_2}\right]\cdots\left[\frac{\delta_{n-1}}{\delta_n}\right] \geqq \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta_{i-1}}{\delta_i}-1\right)=\frac{1}{\delta_n}\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}\right)>\frac{c}{\delta_n},$$

ahol c pozitív és a (2) miatt konvergens $\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{\delta_i}{\delta_{i-1}}\right)$ szorzat értékét jelöli. Ha tehát N az n-edik felbontásig bevezetett végpontok száma, akkor $f(x)$ pozitivitása miatt

$$S_N>\frac{c}{\delta_n}f(\delta_n)\geqq\varepsilon,$$

és ezért az S_N sorozat nem tart 0-hoz.

Rényi Alfréd

A 93. feladat megoldását beküldték még: BALATONI JÁNOS, BALÁZS JÁNOS, BÁRTFAI PÁL, CSÁSZÁR ÁKOS, CSISZÁR IMRE, GESZTELYI ERNŐ, MAKAI ENDRE, THIRY IMRE.

94. feladat. Melyek azok a minden valós értékre definiált, szimmetrikus $f(x_1,\ldots,x_n)$ függvények, melyek eleget tesznek a következő két feltételnek:

$$1)\quad f(x_1+t,\ldots,x_n+t)=f(x_1,\ldots,x_n)+t,$$

$$2)\quad f(ux_1,\ldots,ux_n)=uf(x_1,\ldots,x_n),$$

ahol $x_1,\ldots,x_n,t$ tetszőleges valós számok és u tetszőleges *a)* valós szám, *b)* 0-tól különböző valós szám, *c)* pozitív szám?

(Aczél János)

Megoldás. Előre bocsátjuk, hogy $f(0,\ldots,0)=0$, mert $u=2$ választással 2)-ből $f(0,\ldots,0)=2f(0,\ldots,0)$ adódik. Ez azt jelenti, hogy $u=0$ választással 2) eleve teljesül, hogy tehát a *b)* eset a *c)* esettel azonos. Megállapításunkból 1) alapján adódik, hogy $f(a,\ldots,a)=a$, és ezért a következőkben feltehetjük, hogy az $x_1,\ldots,x_n$ értékek nem mind egyenlők.

Jelölje m és σ az $x_1, \ldots, x_n$ értékek számtani közepét és szórását, legyen továbbá

$$x_i = m + \sigma y_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Az így bevezetett $y_1, \ldots, y_n$ értékek számtani közepe 0 és szórásuk 1.

Az 1) tulajdonság, valamint az $u > 0$ választással alkalmazott 2) tulajdonság alapján

$$f(x_1, \ldots, x_n) = m + f(\sigma y_1, \ldots, \sigma y_n) = m + \sigma f(y_1, \ldots, y_n).$$

Eredményünk olyan előírást ad, amely elvezet az f függvényhez, ha f-nek az $y_1, \ldots, y_n$ értékrendszerekhez tartozó értékeit ismerjük. Ha ezeket az értékeket szimmetrikus módon, de egyébként önkényesen választjuk meg, akkor olyan f függvényhez jutunk, amely kielégíti az 1) feltételt és $u > 0$ esetben a 2) feltételt is.

A kapott függvények közül azok elégítik ki a 2) feltételt negatív u értékekre is, amelyekre ez $u = -1$ választással teljesül. Ez bekövetkezik, ha ugyanezt az $y_1, \ldots, y_n$ értékrendszerek körén belül elmondhatjuk.

Ezek szerint a feladat megoldásaihoz a következőképpen jutunk: A *b)* és *c)* esetben egy tetszőleges szimmetrikus g függvényt választunk, és az f függvényt az

$$f(x_1, \ldots, x_n) = m + \sigma g\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}, \ldots, \frac{x_n - m}{\sigma}\right)$$

előírással értelmezzük. Az *a)* esetben ugyanígy járunk el azzal az eltéréssel, hogy g függvényül tetszőleges páratlan és szimmetrikus függvényt választunk.

Említést érdemel, hogy ha $n = 2$, akkor az *a)* esetben $f = m$ az egyetlen megoldás. Ekkor ugyanis (y_1, y_2) csak $(1, -1)$ vagy $(-1, 1)$ lehet, és páratlan szimmetrikus függvény értéke ezeken a helyeken 0.

Hajós György

A 94. feladat megoldását beküldték még: Császár Ákos Rényi Alfréd, Sarkadi Károly.

98. feladat. Kérdés, hogy ha az $x_1, \ldots, x_n$ pozitív számokra

$$x_1 + \cdots + x_n = n + a,$$

$$\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} = n + \frac{1}{a},$$

ahol $0 < a < 1$, akkor teljesül-e az

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geqq n + 1 - a^2$$

egyenlőtlenség.

*(Barna Béla)**

Megoldás. A feltételeket kielégítő $x_1, \ldots, x_n$ értékekre

$$\Sigma(1-x_i)^2 = n - 2\Sigma x_i + \Sigma x_i^2 = n - 2(n+a) + \Sigma x_i^2,$$

tehát

$$\Sigma x_i^2 = n + 2a + \Sigma(1-x_i)^2.$$

A feladat tehát

$$\Sigma(1-x_i)^2 \geqq 1 - 2a - a^2$$

helyességének ellenőrzését kívánja.

Ez az egyenlőtlenség mindig teljesül, mert ha pl. $0 \leqq x_1 < a < 1$, akkor

$$\Sigma(1-x_i)^2 \geqq (1-x_1)^2 > (1-a)^2,$$

ha viszont az $x_1, \ldots, x_n$ értékek mindegyikére $x_i \geqq a > 0$, akkor

$$\Sigma(1-x_i)^2 = \Sigma x_i\left(x_i + \frac{1}{x_i} - 2\right) \geqq a\Sigma\left(x_i + \frac{1}{x_i} - 2\right) =$$

$$= a\left[(n+a) + \left(n + \frac{1}{a}\right) - 2n\right] = 1 + a^2.$$

A feladat kérdésére ezek szerint igenlő a válasz. Kiolvashatjuk a megoldásból azt is, hogy a vizsgált egyenlőtlenségben $\geqq n + 1 - a^2$ helyett $> n + 1 + a^2$ is állhatna.

Balázs János

A 98. feladat megoldását beküldték még: Czipszer János, Fáy Árpád, R. O. Davies (Leicester), Makai Endre.

100. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a Hilbert-tér egységgömbjének felületén megadható olyan végtelen ponthalmaz, amelynek bármely két pontja $\sqrt{2}$-nél távolabb van egymástól, s hogy ha a Hilbert-tér tömör egységgömbjének egy végtelen részhalmaza a gömb belsejének legalább egy pontját tartalmazza, akkor tartalmaz két olyan pontot, amelyek $\sqrt{2}$-nél közelebb vannak egymáshoz.

(Czipszer János és Erdős Pál)

* A szerző ezt a feladatot a megoldást nem ismerve közölte.

Megoldás. a) Előre bocsátjuk, hogy ha a Hilbert-tér elemeire $\|f\|=\|g\|=1$, akkor $\|f-g\|>\sqrt{2}$ és $\operatorname{Re}(f,g)<0$ egymással nyilván ekvivalens állítások. A feladat első állítását igazoljuk tehát, ha olyan $f_1, f_2, \ldots$ sorozatot adunk meg, amelynek elemeire $i \neq k$ esetén $\operatorname{Re}(f_i, f_k)<0$ teljesül, hiszen ez a reláció a normálás után is érvényben marad.

Tegyük fel, hogy az $f_1, \ldots, f_n$ elemeket már megválasztottuk, s hogy ezek lineárisan függetlenek. Legyen g az általuk kifeszített altérre ortogonális, és

$$f_{n+1}=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i + g.$$

A c_i együtthatókat megválaszthatjuk úgy, hogy $\operatorname{Re}(f_{n+1}, f_i)<0$ az $i=1, \ldots, n$ értékek mindegyikére teljesüljön, ugyanis az

$$(f_{n+1}, f_i)=c_1(f_1, f_i)+\cdots+c_n(f_n, f_i) \doteq -1 \qquad (i=1, \ldots, n)$$

egyenletrendszer determinánsa a lineáris függetlenség miatt nem 0. Ezek szerint egy tetszőleges f_1 elemből kiindulva kívánt tulajdonságú végtelen sorozathoz juthatunk.

b) Tegyük fel az $f_1, f_2, \ldots$ sorozatról, hogy $\|f_1\|=c<1$, $\|f_i\| \leqq 1$ $(i=2,3,\ldots)$, továbbá $i \neq k$ esetén $\|f_i-f_k\| \geqq \sqrt{2}$.

Feltevéseinkből következik, hogy a $k=2,3,\ldots$ értékekre

$$\|f_1-f_k\|^2 \doteq c^2+\|f_k\|^2-\operatorname{Re}(f_1, f_k) \geqq 2,$$

tehát

$$\operatorname{Re}(f_1, f_k) \leqq \frac{c^2+\|f_k\|^2-2}{2} \leqq \frac{c^2-1}{2}<0.$$

Hasonlóan adódik bármely $i \neq k$ értékpárra, hogy $\operatorname{Re}(f_i, f_k)<0$.

Ezeket felhasználva

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} f_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\|f_i\|^2+\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i+1}^{n} \frac{2}{ik} \operatorname{Re}(f_i, f_k) \leqq$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\|f_i\|^2+\sum_{k=2}^{k} \frac{2}{k} \operatorname{Re}(f_1, f_k)<\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}+(c^2-1) \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

Elég nagy n-re ez lehetetlen, mert a harmonikus sor divergenciája miatt az utolsó egyenlőtlenség jobboldala negatívvá válik. Ez az ellentmondás a feladat második állításának a helyességét bizonyítja.

Gehér László

A 100. feladat megoldását beküldték még: BÁRTFAI PÁL, CSISZÁR IMRE, KONCZ KÁROLY, SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA.

PROBLÈMES PROPOSÉS

109. On veut remplir une caisse, ayant la forme de parallélépipède rectangulaire, de briques congruentes dont les arêtes ont la proportion 1:2:4. Démontrer que ce n'est possible que si l'on peut remplir la caisse de briques de position parallèle (c'est-à-dire de façon telle que les arêtes égales des briques soient parallèles les unes aux autres).

N. G. De Bruijn (Amsterdam)

110. Nous disons qu'une coupure P, Q d'un groupe ordonné possède la lacune égale à 0, s'il existe à un élément quelconque $d > 0$ du groupe deux éléments $p \in P$ et $q \in Q$ tels que $p - q < d$. Démontrer que le groupe est ordonné par un ordre d'Archimède si et seulement si chaque coupure possède la lacune égale à 0.

E. Fried

111. Deux triangles Δ_1 et Δ_2 étant donnés dans le plan, nous faisons passer par les sommets de ces triangles des perpendiculaires aux côtés correspondants de l'autre triangle. On parvient de cette manière aux côtés d'un triangle Δ_3 à partir de Δ_1 et à ceux de Δ_4 à partir de Δ_2. Démontrer l'égalité $\Delta_1 : \Delta_2 = \Delta_3 : \Delta_4$ pour les aires de ces triangles.

F. Kárteszi

Jelentés a Beke Manó emlékdíj nyolcadik kiosztásáról

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége által kiküldött bizottság elnöke Surányi János, tagjai Achátz Imréné, Bakos Tibor, Pogány János és Gádor Endréné előadó voltak. A bizottság az emlékdíj szabályzatának megfelelően megállapította, hogy a díjak odaítélésével elsősorban a matematikát népszerűsítő könyvek és füzetek írását, valamint az ilyen tárgyú előadások tartását kívánja jutalmazni. Az elbírálásban ugyancsak fontos szempontnak tekinti a bizottság a kiváló tanári munkát, a tanári továbbképzést elősegítő írói és előadói működést, a jó szakköri munkát és a Bolyai Társulat keretében végzett szervező munkát.

A bizottság e szempontoknak megfelelően az 1958. november 3-i, illetve december 1-i ülésén az alábbi határozatot fogadta el, amelyet az elnökség jóváhagyott:

A bizottság 2000 Ft jutalommal tünteti ki Kalmár László egyetemi tanárt; 1000—1000 Ft-tal jutalmazza Autheried Évát a soproni Széchenyi gimnázium tanárát, Göndöcs Lászlót az I. ker. Szilágyi Erzsébet gyakorló leánygimnázium tanárát, Parai Gusztávot a miskolci Bőripari Technikum tanárát, Reiman Istvánt az Eötvös Loránd Tudományegyetem Ábrázoló Geometriai Tanszékének tanársegédét, Várhelyi Ferencet a Fővárosi Pedagógiai Szeminárium gyakorló általános iskolájának tanárát.

Indokolás

Kalmár László Kossuth-díjas egyetemi tanár, a MTA levelező tagja sokrétű munkájának súlypontja a tudományos kutatásra esik, emellett azonban mindenkor szívvel-lélekkel kivette részét a matematika népszerűsítéséből. Már hallgatótársainak olyan mértékben tudott segítséget nyújtani, hogy többen közülük az ő tanítványának tekintik magukat. Mindég különös éleslátással mutat rá az egyes matematikai gondolatmenetek döntő mozzanataira, ezek hatóerejére. Nagy gondot fordít az anyag megértetése mellett a gondolkodásra nevelésre. Ha ezzel időnként komoly erőfeszítést követel is hallgatóitól, aki erre rászánja magát az sokszoros hasznát látja. A háború után több éven keresztül előadássorozatban foglalkozott a matematikai érdeklődés felkeltésének kérdésével. Ezeket az előadásokat szívesen látogatták a tanárok is.

Az ő ösztönzésére és erős támogatásával indultak meg a múlt rendszerben erőszakosan megszüntetett Középiskolai Mat. és Fiz. Lapok pótlására a Dombi Béla szerkesztette matematikai példaívek, majd a háború után a szegedi feladatívek és később a Középiskolai Matematikai Lapok; továbbá ezzel párhuzamosan az országos matematikai tanulóversenyek. Több, matematikai továbbképzést és módszertani kérdéseket érintő cikke jelent meg az említett lapokban és A Matematika Tanítása c. folyóiratban. Gyakran vett részt tankönyvek bírálatában. Elnöke volt a Művelődésügyi Minisztérium mellett működött Matematikai Módszertani Tanácsnak és jelentős része volt annak eredményes munkájában.

Egyik kezdeményezője volt a matematikus-társulat újjáalakításának, és mindig kiveszi részét Társulatunk munkájából. Különösen figyelemre méltó az a segítség, amit a pécsi tagozatnak nyújtott, mint annak patronusa. Tanácsaival és előadások tartásával egyaránt hozzájárult a tagozat munkájának fellendüléséhez. Emellett számos továbbképző előadást tartott az ország más részein is.

Széles tanítványi gárda hálás Kalmár professzornak azért, hogy megszerettette velük a matematikát, és megszerettette a matematika terjesztésének a feladatát is. Az eddig magasabb Beke-díjjal kitüntetettek nagyobb fele az ő tanítványai közül került ki.

Autheried Éva — a soproni Széchenyi fiúgimnázium tanára, — egyike Győr-Sopron megye legkiválóbb matematikatanárainak. Tárgyát a modern didaktika elvei szerint, egyéni színnel, kiváló eredménnyel tanítja. Főerőssége a logikus gondolkodásra való nevelés, a matematika összefüggéseinek meglattatása, s az elméletnek a gyakorlattal való jó összekapcsolása.

Mint nevelő is értékes egyéniség. Tárgyán keresztül munkaszeretetre, becsületességre, helytállásra és felelősségre neveli tanulóit. Kiváló oktató és nevelő munkáját sok éven át a szakérettségis tanfolyamokon hasznosította, előtte és utána pedig a megye gimnáziumaiban. A középiskolás tanulóifjúság nevelését életcélnak tekinti és bár többízben kapott meghívást vidéki egyetemektől, a középiskolás ifjúság neveléséhez és szeretett tanítványaihoz hű maradt.

A tanári továbbképzésnek nemcsak résztvevője, hanem aktív segítője. Értékes munkát végzett és végez az iskolai matematikai munkaközösségek vezetésében, mint a kezdő tanárok odaadó és önzetlen segítője. Nagy tudását, sok éves tapasztalatát szívesen osztja meg másokkal.

Matematika szeretete áthatja tanítását és tanítványaival való magatartását, s sok esetben inspirálója annak, hogy tanítványai a matematika tanári pályát választják hivatásukul.

Bár nem szereplő egyéniség, mind a továbbképzés, mind a Bolyai Társulat soproni tagozata keretében több előadást tartott. Értékes munkáját nemcsak tanítványai és a kezdő kartársak szeretete és hálája, hanem a megyei és minisztériumi felügyeleti szervek elismerése is kíséri. Többször kapott jutalmat, s kormánykitüntetésben is részesült. Tulajdonosa a „Kiváló tanár" érdeméremnek.

Göndöcs László az I. ker. Szilágyi Erzsébet gyakorló leánygimnázium tanára. Tanári munkáját kiválóan végzi. Számos tanítványát lelkesítette a Középiskolai Matematikai Lapokban való dolgozásra és a versenyeken való részvételre. A Bolyai Társulat által szervezett magyar-szovjet barátsági hónapok keretében előadásokat tartott középiskolai tanulók számára. Már évek óta résztvesz az Országos Középiskolai tanulmányi verseny és az Arany Dániel verseny dolgozatainak átvizsgálásában. A Társulat Oktatási Szakosztályának keretében a középiskolai oktatás színvonalának emelésén fáradozik. Az Eötvös gimnáziumban kiválóan dolgozó szakmai munkaközösséget vezetett; ennek munkájáról A Matematika Tanítása c. folyóiratban is beszámolt.

Göndöcs László élénken kivette részét a műegyetemi oktatás és a tanárképzés munkájából is. Mint gyakorló vezető tanár elmélyülten foglalkozik a matematikatanítás módszertani kérdéseivel is. Így a tanítóképzésbe kapcsolódva foglalkozott az alsótagozati számtantanítás módszertanával; véleményezte a tanítóképzők matematikai tantervét, majd az elmúlt évben a szervezés alatt álló felsőfokú tanítóképzők módszertani tantervét vizsgálta. A matematika és ábrázoló geometria tanítás kérdéseivel foglalkozó értekezleteken mindig igen építő módon vesz részt, és hozzászólásaival fontos kérdések tisztázásához vagy eldöntéséhez segít hozzá. Jelenleg egy középiskolai geometriai tárgyú szakköri füzet írásával foglalkozik. Kiváló tanári és tanárjelölt-vezető munkájának elismeréseképpen a Fővárosi Tanácstól többízben pénzjutalmat kapott, egyízben pedig rendkívüli előléptetésben részesült.

Parai Gusztáv a miskolci Bőripari Technikum tanára. Tanári munkáját lelkiismeretesen és igen szép eredménnyel végzi. Óráit mintaszerű gondossággal építi fel és kitűnő pedagógiai érzékkel vezeti. Tanulóival kötelező tananyag közlésen túlmenően is foglalkozik. Tanítványai közül sokan résztvesznek a Középiskolai Matematikai Lapok feladatmegoldó versenyén; minden évben többen bekerültek az Arany Dániel, ill. az Országos Középiskolai Matematikai verseny döntőjébe. Kollégái és diákjai szeretik, nagy népszerűségnek örvend. Az oktatáson kívül komoly nevelő munkát végez, az iskolán kívül is foglalkozik az ifjúsággal.

Nélkülözhetetlen társadalmi munkát végez a Bolyai János Matematikai Társulat helyi tagozatának vezetőségi tagjaként. Matematika-népszerűsítő tevékenységéhez tartozik, hogy a tanárok részére rendezett szakmai továbbképző előadások egyik legtevékenyebb résztvevője, és gyakran tart az általános és középiskolai tanárok számára is előadást. A Bolyai Társulat összejöveteleinek megszervezésében is jelentős szerepe van. Áldozatkész és pontos munkájára mindig lehet számítani. Kivette részét a középiskolai tankönyv bírálattal kapcsolatos munkákból is.

Reiman István; az Eötvös Loránd Tudományegyetem Ábrázoló Geometriai Tanszékének tanársegéde. Az egyetemen végzett munkája mellett a tanárjelöltekkel való foglalkozásának eredményesebbé tétele érdekében az 1957/58 tanév óta egy gimnáziumi osztályt is tanít. Kiváló pedagógiai rátermettsége már egyetemi hallgató korában megmutatkozott.

A Bolyai Társulat keretében igen sok előadást tartott tanároknak és diákoknak, Budapesten és vidéken egyaránt. Tanári továbbképző előadásokat tartott a Fővárosi Pedagógiai Szeminárium és a Központi Pedagógus Továbbképző Intézet tanfolyamain, valamint a TIT József Attila szabadegyetemén is. Előadásait a kristálytiszta logika, a módszeres felépítés, a világos előadásmód jellemzi. Gyakorlatban mutatja be minden egyes előadásával a matematika tanításának eredményes módszerét. Szép és eredményes munkát végzett a középiskolai tanárok átképzése során is.

A csoportelmélet geometriai alkalmazásáról cikke jelent meg A Matematika Tanításában. Kitűnő szakköri füzetet írt középiskolai tanulók részére a „Geometriai feladatok megoldása komplex számsíkon” címmel.

Várhelyi Ferenc a Fővárosi Pedagógiai Szeminárium gyakorló általános iskolájának tanára. A gyakorló iskola didaktikai munkájának megfelelően a Művelődésügyi Minisztérium, a Központi Pedagógus Továbbképző Intézet és a Fővárosi Pedagógiai Szeminárium megbízásából résztvett tankönyvek, tantervi útmutatók, tankönyvpályázatok, szemléltető eszközök, oktatófilmek bírálatában, valamint az új általános iskolai tanterv elkészítésében. Tanítási munkáját igen jó szakmai és pedagógiai felkészültség, az órákra való mintaszerű gondos előkészület jellemzi. Várhelyi Ferenc szenvedélyes tanár. Tanítványainak logikus gondolkodási képessége és számolási készsége egyaránt kitűnő. Ki kell emelni azt a sok szellemes ötletet, amelyekkel óráin a matematika anyag állandó ismétlését biztosítja.

Igen sok gondot fordít a formalizmus elkerülésére, anélkül, hogy az ismeretek szilárdsága csorbát szenvedne.

Óráit rendszeresen látogatják a budapesti matematikatanárok, az egyetem tanárjelöltjei, a Központi Pedagógus Továbbképző Intézet tanfolyamainak hallgatói. Emellett előadások tartásával és szemináriumok vezetésével is jelentős mértékben segíti a budapesti tanárok szakmai továbbképzését. Cikke jelent meg A Matematika tanításában a folyamatos ismétlésről.

Budapest, 1958. december 12.

Jelentés a Beke Manó emlékdíj kilencedik kiosztásáról

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége az emlékdíj kiosztása céljából bizottságot küldött ki. Elnöke: Surányi János, tagjai: Hódi Endre, Reiman István, Várhelyi Ferenc és Göndöcs László a bizottság előadója. A bizottság az emlékdíj szabályzatának megfelelően megállapította, hogy a díjak odaítélésével elsősorban a matematikát népszerűsítő könyvek és füzetek írását, valamint az ilyen tárgyú előadások tartását kívánja jutalmazni. Az elbírálásban ugyancsak fontos szempontnak tekinti a bizottság a kiváló tanári munkát, a tanári továbbképzést elősegítő írói és előadói működést, továbbá a jó szakköri munkát és a Bolyai Társulat keretében végzett szervező munkát.

A bizottság a fenti szempontokra figyelemmel az 1959 június hó 12-én megtartott ülésén az alábbi határozatot fogadta el, amelyet az Elnökség jóváhagyott.

A bizottság 2000 Ft jutalommal tünteti ki Hajós György Kossuth-díjas akadémikus, egyetemi tanárt, 1000—1000 Ft-tal jutalmazza Farsang Pálnét, az Egyetem Ságvári Endre gyakorló iskolájának vezető tanárát, Ördögh Lászlót, a debreceni Fazekas Mihály gyakorló gimnázium vezető tanárát és Gazsó István szakfelügyelőt, a szegedi tanítóképző tanárát.

Indokolás

Hajós György Kossuth-díjas akadémikus, egyetemi tanár, működésének főrésze ugyan a matematikai kutatásra és a felsőfokú oktatásra esik, azonban rendszeresen kiveszi részét a matematika népszerűsítéséből is. Egyetemi előadásai mindenkor igen közkedveltek.

Gyakran tart tanárok és szakfelügyelők részére továbbképző előadásokat, amelyeket pedagógusaink mindenkor nagy érdeklődéssel várnak és hallgatnak. Előadásai a korszerű és színvonalas matematikai oktatás szempontjából iránytmutatók. Nem egyszer mutatott rá matematikai oktatásunkban a megcsontosodott helytelen szemléletre, a tévesen használt fogalmakra, és kiküszöbölésük módjára. Ezekben az előadásokban éles logikával fejtette ki a középiskolában is használandó tiszta matematikai fogalmakat, definíciókat, és a geometria egyes részeiből olyan értékes összefüggéseket és bizonyításokat mutatott be, amelyek a középiskolai oktatásban is igen előnyösen felhasználhatók.

Nagy érdeklődés kísérte a különböző ismeretterjesztő intézmények keretében széles érdeklődő közönség számára tartott előadásait is. Ezek közül a „Miért szép a matematika" témakörben tartott előadássorozatra ma is sokan emlékeznek vissza és szívesen látnák viszont nyomtatásban. A diákok részére középiskolai délutánt tartott a vektorokról.

Igen nagy része van a Kürschák versenyek mintaszerű megrendezésében. Már a második világháború előtt tagja, majd előadója volt az Eötvös-verseny bíráló bizottságának és 1949 óta ő irányítja az annak folytatásaként rendezett Kürschák József matematikai tanulóverseny szervezését. A feladatokat elemző beszámolói évről-évre sok oldalról világítják meg a verseny feladatait. Társszerzőkkel együtt újra megjelentették átdolgozott kiadásban Kürschák József Versenytételek című munkáját, majd kiadták a későbbi versenyek feladatait tartalmazó második kötetet, melynek alapjául Hajós előadói beszámolói szolgáltak.

Hajós György mint a Társulat Oktatási Szakosztályának elnöke, kiveszi részét az értelmes és korszerű matematikai oktatás kialakításáért folyó munkából.

FARSANG PÁLNÉ az Egyetem Ságvári Endre gyakorló gimnáziumának és általános iskolájának vezető tanára. Évekig a Ped. Főiskola Kertész utcai gyakorló iskolájában tanított. Kiválóan felépített órái, melyeken középponti szerepet biztosít a tanulók logikus gondolkodásra való nevelésének, rendkívül alkalmasak arra, hogy mintául szolgáljanak azoknak a tanárjelölteknek, akiket most már több év óta igen eredményesen nevel. Bemutató óráin a gyakorló pedagógusok, igazgatók és szakfelügyelők is komoly haszonnal vesznek részt.

Tanítványai nagy kedvvel és számottevő eredménnyel tanulják a matematikát. Számolási készségük, gondolkodásuk és matematikai kifejezőkészségük is egyaránt fejlett.

Farsang Pálné a tudatosság fokára emeli oktató és nevelő munkáját. Ehhez nagymértékben hozzájárul az a tény, hogy sokat foglalkozik a matematikatanítás módszertani kérdéseivel, és a matematikatanítás magasabb színre való emelése érdekében állandóan új utakat, eredményesebb módszereket törekszik keresni. Ezirányú munkásságának eredményeiről a szakirodalomban is beszámolt. Így a tizedes törtekkel való osztás tanításának általa kidolgozott metodikáját „A Matematika Tanítása" folytatásokban közölte. Ezenkívül a számelmélet és a törttel való szorzás tanításának módszertani kérdéseivel is elmélyedten foglalkozik. Elgondolásait tanításának eredményei teljes mértékben igazolták. Módszertani problémákról a főiskolai hallgatóknak előadásokat tartott. A hasonlóság általános iskolai tanításáról külön előadása is volt.

Farsang Pálné valóságos művésze a tanításnak. Tagja a Társulat oktatási bizottságának.

ÖRDÖGH LÁSZLÓ a debreceni Fazekas Mihály gyakorló gimnázium vezető tanára. Több mint 20 éves munkássága folyamán az oktatás különböző területein működött: volt egyetemi gyakornok és tanársegéd, középiskolai szakfelügyelő és oktató káder, de a legtöbb időt a középiskolai ifjúság matematika tanításának szolgálatában töltötte el.

Oktató tevékenységét igen kitűnő szakmai és pedagógiai képzettség, a tanítási órák gondos megszervezése, a logikus gondolkodásra nevelés, a nagyfokú lelkiismeretesség, szerénységéből fakadó rendkívül megnyerő magatartás és mindezek következményeképpen kiváló eredményesség jellemzi. Munkájában állandóan törekszik a matematikai oktatás színvonalának emelésére. Ezt tanítványainak nemcsak az érettségi vizsgálatokon való sikeres szereplése, hanem az Arany Dániel, valamint az Országos Középiskolai versenyeken elért értékes helyezései is meggyőzően bizonyítják. Diákjai jelenleg is a Középiskolai Matematikai Lapok legjobb feladat megoldói közé tartoznak.

Mint gyakorló gimnáziumi vezető tanár igen értékes munkát végez a leendő tanárnemzedék szakmai és didaktikai képzésében. Lelkesedése, hivatásszeretete, személyes példaadása nagy hatással van a hozzá beosztott tanárjelöltekre.

Ördögh László többízben tartott bemutató tanítást és módszertani előadást. Tevékenyen közreműködött az I. oszt. gimnáziumi matematikai útmutató megírásában.

Eredményes tanári munkájáért 1953-ban az „Oktatásügy kiváló dolgozója" kitüntetést kapta.

Gazsó István a szegedi tanítóképző tanára, Csongrád megye és Szeged középiskoláiban a matematika és ábrázoló geometria szakfelügyelője. Munkáját lelkiismeretesen és odaadással végzi. Kiemelkedőnek tartjuk a közép és általános iskolai tanárok továbbképzésében kifejtett tevékenységét. Ennek keretében számos előadást tartott Szegeden, Hódmezővásárhelyen, Csongrádon, Makón, Szentesen. Szorosan együtt dolgozik a Társulat szegedi tagozatával.

A középiskolai matematikai versenyek, elsősorban a megyei döntők szervezésében végez fontos munkát, többször részt vett az első fordulókon beadott dolgozatoknak a szegedi tagozaton belüli felülvizsgálatában.

Mint tankönyv- és tantervbírálónak jelentős szerepe van a matematika oktatás fejlesztésében. A Művelődésügyi Minisztérium és a Pedagógiai Tudományos Intézet felkérésére többízben volt bíráló és vett részt a matematika tanításával kapcsolatos kérdéseket megvitató értekezleteken s volt ilyen bizottságnak a tagja.

Figyelemre méltó az irodalmi munkássága:

1. „Matematika a tanítóképzők I. o. számára" c. tankönyv. (Varga Tamással közösen.)
2. „Szerkesztések." Szakköri füzet az általános iskolai tanulók számára.
3. „Algebra." Szakköri füzet az általános iskolai tanulók részére.
4. „A gimnáziumi matematikai tanítás jelenlegi helyzete 1955." (Pedagógiai Tudományos Intézet.)

Budapest, 1959. jún. 24.

Jelentés az 1954 évi Grünwald Géza emlékdíjról

Hosszú Miklós az 1954 évi Grünwald Géza emlékdíj pályázatra benyújtotta „Néhány többváltozós függvényegyenlet általánosítása" című dolgozatát.

Hosszú Miklós dolgozatában az (a, b) intervallumon értelmezett $F(x, y) \in \in (a, b)$ ismeretlen (szigorúan monoton) függvényre vonatkozó

(1a) $F[x, F(y, z)] = F[F(x, y), z]$ (asszociativitás),

(2a) $F(x, y) = F[F(x, z), F(y, z)]$ (tranzitivitás),

(3a) $F[F(x, y), F(u, v)] = F[F(x, u), F(y, v)]$ (biszimmetria),

(4a) $F[F(x, y), z] = F[F(x, z), F(y, z)]$ (autodisztributivitás)

függvényegyenletekben több ismeretlen függvényt szerepeltetve az illető egyenletek alábbi általánosításait vizsgálja:

(1) $F[x, G(y, z)] - H[K(x, y), z]$,

(2) $K(x, y) = F(G(x, z), H(y, z)]$,

(3) $F[G(x, y), H(u, v)] = K[L(x, u), M(y, v)]$,

(4) $F[G(x, y), z] = G[F(x, z), F(y, z)]$ (disztributivitás)

(1) egyszersmind általánosítása az

$$(1\alpha) \qquad F(x, u+v) = F[F(x, u), v] \qquad \text{(transzláció),}$$

$$(1\beta) \qquad F[x, G(u, v)] = F[F(x, u), v] \qquad \text{(transzformáció)}$$

függvényegyenleteknek is, és speciális esetként tartalmazza az asszociatív jellegű törvényeket.

A dolgozat 1. §-ában az (1)—(4) megoldását adja meg az (1)—(3) esetben a szereplő függvényekről feltételezve, hogy létezik el nem tűnő elsőrendű folytonos parciális deriváltjuk, illetve a (4) esetben kétszer differenciálhatók és mindegyik esetben szigorúan monotonok. A 2. §-ban néhány speciális esetet vizsgál, ahol a differenciálhatóság helyett elég csak folytonosságot feltételezni. A 3. §-ban az (1α) és (1a) kiterjesztésével foglalkozik arra az esetre, midőn a változók és maga az ismeretlen függvény nem skaláris mennyiségek, hanem többdimenziós vektorok. Így (1α) megoldása az n-dimenziós $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ térvektorok $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ additív paraméter rendszertől függő $F(x, U) = y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ transzformációinak kanonikus előállítását szolgáltatja, az (1a) függvényegyenlet bizonyos megszorító feltevések melletti megoldása pedig feleletet ad arra a kérdésre, mikor lehet additív paramétereket bevezetni.

Mint utólag kiderült, (4) és (1β) fontos szerepet játszik a geometriai objektumok elméletében, s a probléma időszerűségét mutatja, hogy e függvényegyenleteket egyidejűleg többen is vizsgálták, főként lengyel matematikusok, így S. Golab. H. Pidek, illetve más szempontból kiindulva foglalkozott (1β)-val S. Lojasiewicz. Úgyszintén más nomográfiai problémából kiindulva oldotta meg egyidejűleg (1)-et C. Ryll-Nardzewski. Hosszú Miklós tőlük függetlenül jutott el eredményeihez.

Az eredmények és az alkalmazott meggondolások egyaránt érdekesek, a terület alapos ismeretére és határozott matematikai ötletességre vallanak. A dolgozat lényegesen újat mond a függvényegyenletek elméletében.

A bizonyítások és az eredmények megfogalmazása is vázlatos; a részleteket illetően a szerző megjelent, vagy megjelenő dolgozataira hivatkozik. A pályázatra benyújtott dolgozat egyébként megjelenik a MTA III. Oszt. Közleményeiben (*6* (1956), 439—449).

A dolgozatot a Grünwald-díj I. fokozatának elnyerésére a bizottság nemcsak mint egyedül benyújtott pályamunkát, de az azévben megjelent magyarnyelvű dolgozatok közt is kiválóan érdemesnek találta.

A bíráló bizottság.

Beszámoló a középiskolai diákok első nemzetközi matematikai olimpiászáról

A Román Népköztársaság Matematikai és Fizikai Társulata az ország felszabadulásának 15-ik, valamint a Társulat megalapításának 10-ik évfordulója alkalmából Nemzetközi Matematikai Olimpiászt rendezett, f. év július 21-től 31-ig, a Szovjetunió és az európai népi demokratikus országok középiskolás tanulói részvételével. A Matematikai Olimpiász megtartásához jelentős erkölcsi és anyagi támogatással járult hozzá a Román Oktatás- és Nevelésügyi Minisztérium, továbbá a Román Munkásifjúság Szövetsége is. Az Első Nemzetközi Matematikai Olimpiászon 4 szovjet és 8—8 bolgár, csehszlovák, lengyel, magyar, német, valamint román diák ill. diáklány versenyzett egymással.

A versenyzőknek Sztálinvárosban (Orasul Stalin) két egymásutáni napon (júl. 24. és 25.) írásban kellett megoldaniok 3—3 feladatot. Első nap egy-egy aritmetikai, algebrai és trigonometriai példát kaptak, míg második dolgozatukban két síkmértani és egy térmértani feladattal kellett foglalkozniok. A feladatokat az egyes küldöttségek vezetőiből alakult nemzetközi bizottság válogatta ki, a különböző résztvevő országok képviselői által kitűzésre javasolt példák közül. Sajnos nem mindegyik küldöttség hozott magával a versenyen kitűzésre szánt feladatokat. A kitűzött 6 feladat közül kettőt-kettőt a magyar és a román, egyet-egyet pedig a csehszlovák és a lengyel küldöttség vezetője terjesztett be. A versenydolgozatokat ugyanaz a nemzetközi bizottság bírálta el, amely a versenyfeladatokat is megállapította.

Az olimpiászon résztvevő magyar küldöttség, amelyet Hódi Endre az Optikai Kutató Laboratórium tudományos munkatársa vezetett, szép sikert ért el: A három első díj közül egyet Csanak György, a debreceni Fazekas Mihály gyak. gimnázium idén érettségizett tanulója nyert meg, a három második díjas között volt Halász Gábor, a budapesti Rákóczi Ferenc gimnázium ugyancsak idén végzett tanulója, az öt harmadik díj közül kettő került Magyarországra: az egyiket Bollobás Béla, aki idén a budapesti Apáczai Csere János gyak. gimnáziumban II. osztályt végzett, a másikat pedig Muszély György, a budapesti Vörösmarty Mihály gimnázium III. osztályt végzett tanulója nyerte. Végül a 10 dícséretben részesült diák között is találunk magyar nevet: Szász Domokosét, a budapesti Eötvös József gimnázium idén érettségizett tanulójáét.

Az olimpiász eredményének kihirdetése ünnepélyes keretek között történt Bukarestben július 28-án. A Román Matematikai és Fizikai Társulat Elnöksége részéről Grigore C. Moisil akadémikus, a nálunk is jól ismert kiváló matematikus mondott ünnepi beszédet és ő osztotta ki a díjakat is.

Az írásbeli dolgozatok elkészítésének ideje alatt a küldöttségek vezetői hasznos megbeszéléseket folytattak a középiskolai matematikatanítás problémáiról. A tanácskozások középpontjában a következő három kérdés állott:

1. Az iskola és a gyakorlati élet kapcsolatának szorosabbá tétele,
2. a középiskolai matematika anyag modernizálása és
3. a tanulók túlterhelésének csökkentése.

A küldöttségek vezetőinek e hivatalos jellegű megbeszéléseken kívül is bőven volt módjuk tájékozódni afelől, hogy milyen a középiskolai matematikatanítás helyzete az egyes szocialista országokban, mely problémák megoldásán dolgoznak a szakdidaktikusok és milyen eredményeket értek el ezen a téren. Az olimpiász tartama alatt azonban nemcsak a küldöttségek vezetői között létesültek a közös érdeklődési körön alapuló szívélyes baráti kapcsolatok, hanem a küldöttségek tagjai, a különböző szocialista országok diákjai és diáklányai között is. Hamar leküzdötték a nyelvi nehézségeket, egymásnak tolmácsoltak, ha kellett és bensőséges baráti légkör alakult ki közöttük. A személyes kapcsolatok kiépülését nagymértékben elősegítette az olimpiász kiegészítő, kulturális programja, amelynek keretében a résztvevők a Román Népköztársaság számos ipari és kulturális létesítményét, továbbá természeti szépségét tekintették meg.

A vendéglátók igen nagy szeretettel fogadták az Első Nemzetközi Matematikai Olimpiász külföldi résztvevőit és egész romániai tartózkodásuk során rendkívül figyelmes bánásmódban részesítették őket. Azzal a meggyőződéssel hagytuk el Románia földjét a diákok e nemes versenye után, hogy ez a kezdeményezés helyes volt; a továbbiakban is szükség van arra, hogy ilyen nemzetközi tanulmányi versenyeket rendezzenek, még pedig mind a középiskolai matematikatanítás eredményességének fokozása szempontjából, mind a különböző nemzetiségű tanárok és tanulók közötti baráti kapcsolatok kiépítése és egymás életének megismerése, egymás problémáinak megértése szempontjából.

A feladatokat a Középiskolai Matematikai Lapok októberi száma kitűzte megoldásra.

HÍREK

Fuchs László meghívás alapján két hetet töltött Hollandiában, ahol Delftben három, Amsterdamban, Utrechtben és Eindhovenben egy-egy előadást tártott a következő címekkel:

1. Strukturfragen in der Theorie der abelschen Gruppen.
2. Tensorsches Produkt abelscher Gruppen.
3. Über die Charaktergruppe von diskreten abelschen Gruppen.

Ugyancsak meghívásra két előadást tartott a párizsi egyetemen az 1. és 2. témákról.

Fuchs László, Rédei László és *Szép Jenő* a nyugat-németországi Oberwolfachban levő Mathematisches Forschungsinstitut meghívására részt vettek és előadást tartottak az intézet által rendezett csoportelméleti kollokviumon. A R. Baer frankfurti és H. Wielandt tübingeni professzorok vezette kollokviumon az intézet vagy tíz ország szakembereit látta vendégül. Az említetteken kívül W. Gaschütz (Kiel), O. Grün (Würzburg), M. Lazard (Paris), F. Loonstra (Haag), G. Zappa (Firenze), R. Kochendörffer (Rostock) és többen mások tartottak előadást. *Fuchs* a tenzori sorozatról, *Rédei* a véges kommutatív félcsoportok struktúrájáról, *Szép* csoportoknak egy általános bővítéséről adott elő.

Az Unione Matematica Italiana 1959. szept. 11-től szept. 16-ig tartotta VI. nemzeti matematikai kongresszusát Nápolyban, melyre meghívták a népi demokratikus országok Akadémiáit is. A Magyar Tudományos Akadémiát Alexits György és Turán Pál, a csehszlovák Akadémiát J. Novak és V. Knichal, a román Akadémiát C. Jacob és A. Haimovici, a lengyel Akadémiát W. Orlicz és A. Bielecki, a bolgár Akadémiát L. Csakalov képviselték. A délelőttök folyamán olasz matematikusok tartottak egyórás előadásokat, délután a munka szekciókban folytatódott. A szekciók a következők voltak:

I. Algebra.
II. Analízis.
III. Valószínűségszámítás és alkalmazásai, közgazd. matematika.
IV. Geometria.
V. Mechanika és matematikai fizika.
VI. Topológia.
VII. Történet, a matematika filozófiája. Didaktika.

A kongresszuson jelentékeny számú külföldi matematikus jelent meg és adott elő. A magyar résztvevők a következő előadásokat tartották:

Adler György: Refrigerazioneacentrocorrente di materie granulase.

Alexits György: Alcuni problemi di serie orthogonali.

Alpár László: Recherches sur certains phénomenes de sommabilité et de divergence des séries de Taylor

Fuchs László: Reine Untergruppen von abelschen Gruppen.

T. Sós Vera: The some questions of the theory of diophantine approximation.

Turán Pál: On some new applications of an analytical method.

Társulati élet

A Bolyai János Matematikai Társulat rendezésében, a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával, az Egészségügyi-, Földművelésügyi Minisztérium és a Kulturkapcsolatok Intézete közreműködésével tartott

BIOMETRIAI SYMPOSION
előadásai:
(1959. szeptember 7., 8., 9.)

Plenáris ülés

Szeptember 7., délelőtt

Plenáris ülés. Megnyitás.

D. J. Finney (Aberdeen): *A kisérletezés rentabilitása.*

Juvancz I. (Budapest): *A statisztikai analizis eredményeinek interpretációja.*

B. A. Szevasztyanov (Moszkva): *Elágazó sztochasztikus folyamatok, mint populációk növekedésének modelljei.*

Délután

Medgyessy P. (Budapest): *Eloszlásfüggvény-szuperpoziciók felbontásáról.*

Gyires B. (Debrecen): *A Toeplitz-féle formák alkalmazásáról a matematikai statisztikában.*

Rényi Alfréd (Budapest): *Sztochasztikus kapcsolatok mérőszámairól.*

Fischer J. (Budapest): *Maximálkorreláció és regresszió.*

Csáki P. (Budapest): *A maximálkorreláció kiszámitásáról.*

J. Perkal (Wroclaw): *Hosonlóság a populáció viszonylatában.*

Humán szekció ülése

Szeptember 8., délelőtt

P. D. Oldham (Penarth): *Klinikai és külső kipróbálás.*

V. Schliack (Berlin): *Diabetes-statisztikák.*

E. Jutzi (Karlsburg): *Diszkriminancia- és szekvenciális analizis a diagnosztikában.*

Tamássy J.-né (Budapest): *Probitanalízis alkalmazása az odentológiai kutatásban.*

Délután

Barsy Gy. (Budapest): *Biológiai értékmérések néhány gyakorlati tapasztalata.*

F. Link (Bratislava): *Kvantális reakciók egyes kérdései.*

Agrár szekció ülése

Szeptember 8., délelőtt

O. FISCHER (Praha): *Szántóföldi kisérletek statisztikai értékelésének elméletéhez.*

SARKADI K. (Budapest): *Normalitás-vizsgálat bizonyos esetekben.*

ZANA J. (Budapest): *Az 5 × 5-ös, k + 1 ismétlésű rácsnégyzet efficienciája.*

MARTON Á. (Budapest): *A faktoriális kisérlctezés néhány problémája.*

REIMAN J.—VINCZE I. (Budapest): *Két különböző elemszámú minta összehasonlításáról.*

Délután

H. RUNDFELDT (Hannover): *Az interakció jelentősége a növénytermesztési kisérleti terv készítésében.*

OSVÁTH J. (Martonvásár): *Az eltérésnégyzetösszeg korrekciója a minta elemszámának megváltozásakor.*

SVÁB J. (Budapest): *A kisparcellás kisérleti eredmények realizálódása üzemi körülmények között.*

WELLISCH P. (Budapest): *Nem-ortogonális kisérletsorozatok.*

Szeptember 9., délelőtt

Humán szekció ülése

A. JA. BOJARSZKIJ (Moszkva): *Biometriai szempontok a demográfiában.**

ACSÁDY GY. (Budapest): *A demográfia biometriai vonatkozásaival kapcsolatos néhány tapasztalat.*

H. GROSSE (Stralsund): *Boncolási százalékarány és halálozási gyakoriság.*

PRÉKOPA A. (Budapest): *Születési és halálozási folyamatokról.*

V. MYSLIVEC (Praha): *Statisztikai módszerek a rádióizotópokkal végzett kisérletekben.*

Délután

R. SULANKE (Berlin): *Az integrálgeometria biometriai alkalmazásairól.*

ZAJTA A. (Budapest): *Újabb módszerek két minta összehasonlítására.*

CSÁKI E. (Budapest): *Az X-próba kiterjesztése.*

Szeptember 9., délelőtt

Agrár szekció ülése

K. SCHMIDT (Dummerstorf): *Apaállatok tenyészértékének megállapítása utódellenőrzéssel.*

KECSKÉS S. (Budapest): *A Mezőhegyesen végzett utódellenőrzés módszertani tanulságai.*

GUBA S. (Budapest): *A rendelkezésre álló törzskönyvi adatok alapján végezhető utódellenőrzés hazai lehetőségei.*

MUNKÁCSY F. (Gödöllő): *Az örökletesség és a környezet nem-lineáris kapcsolatának kérdése az ivadékvizsgálatban.*

SÜLLE J.-né (Budapest): *Rangkorrelációs eljárások az állattenyésztésben.*

SZIGETI J. (Budapest): *A megfigyelések szükséges számának megállapitása a tenyésztési kisérletekben.*

* Felolvasta: Pallós Emil.

Délután

Horn A. (Budapest): *Örökölhetőség* (h^2) *jelentősége az állattenyésztésben, különös tekintettel a magyarországi kutatásokra.*

Csukás A.-né (Budapest): *A heritabilitás-vizsgálatok feltételeinek egyes kérdései.*

Tóth S. (Budapest): *Az alomnépesség és a 30 napos alomsúly örökölhetősége egy magyarországi mangalica-állományban.*

Sebestyén G. (Gödöllő): *Örökölhetőségi vizsgálatok és a szelekció hatékonysága a magyartarka állományban.*

A Bolyai János Matematikai Társulat „Csoportok és általánosításai" kollokviumának (Lajosforrás, 1959. szeptember 2—4.) előadáskivonatai

Aczél János: *Függvényegyenletek csoportokon és kvázicsoportokon.* Referáló előadás.

Az előadó az $(x\,1\,y)\cdot(y\,2\,z)=x\,3\,z$ ill. $(x\,1\,z)\,2\,(y\,1\,z)=x\,1\,y$, $(x\,1\,y)\,2\,z=x\,3\,(y\,4\,z)$ és $(x\,1\,y)\,2\,(u\,3\,v)=(x\,4\,u)\,5\,(y\,6\,v)$ függvényegyenletek teljes megoldását ismerteti csoportokon ($x\cdot y$ a csoportművelet), ill. kvázicsoportokon. Az $x \cap y$ ($n=1, 2, \ldots, 6$) műveletek explicite megadhatók. Az eredménynek több érdekes alkalmazása van.

St. Balzerzyk (Toruń): *Boole-algebrákon értelmezett függvények csoportjai.*

Legyen m egy kardinális szám, G egy m számosságú Abel-csoport és B egy m-additív Boole-algebra. Az $S(B, G)$ csoportot mint azon $x \in B^G$ függvények csoportját definiáljuk, amelyre $\bigcup_{g \in G} x(g)=1$ és $x(g_1) \cap x(g_2)=0$, ha $g_1 \neq g_2$; az összeadás a következő ekvivalenciával van értelmezve: $x+y= =z \Longleftrightarrow z(g)=\bigcup_{g' \in G}[x(g') \cap y(g-g')]$ minden $g \in G$-re. Ez a fogalom az izomorf csoportok komplett direkt összegének általánosítása.

Tétel. Ha G torziómentes Abel-csoport és $S(I)$ jelöli azon $x \in S(B, G)$ függvények alcsoportját, melyekre $\bigcup_{0 \neq g \in G} x(g)$ a B Boole-algebra I ideáljához tartozik, ha továbbá I_β az I által generált σ-ideál, akkor $S(I_\beta)/S(I)$ algebrailag kompakt, torziómentes csoport.

Alkalmazásként adódik megszámlálhatóan sok végtelen ciklikus csoport komplett direkt összegének a diszkrét direkt összeg szerinti faktorcsoportjának struktúrája.

Erdélyi Mária: *Algebrailag zárt csoportok.*

Az alábbi vizsgálatok W. R. Scott és B. H. Neumann algebrailag zárt csoportokkal kapcsolatos eredményeihez csatlakozik.

A G csoport A részcsoportját *félig-direkt tényezőnek* nevezzük, ha létezik G-nek egy olyan N normálosztója, melyre

$$G=\{A, N\} \quad \text{és} \quad A \cap N=1.$$

Legyen G a H csoport részcsoportja s legyen $h\alpha$ $(\alpha \in \Delta)$ H-nak valamely generátor rendszere mod G; ekkor H a $G_\Delta^*=G * x_\Delta$ szabad szorzat homomorf képe a $g \to g$, $x_\alpha \to h\alpha$ megfeleltetésnél, ahol az x_α $(\alpha \in \Delta)$ az x_Δ csoport szabad generátorai. Ha N ezen homomorfizmus magja, továbbá ha $p(N)$ jelöli azon legkisebb számosságot, amely meghaladja az N normálosztó generátor rendszereinek minimális számosságát, végül ha n jelöli a

$p(N)$-ek közül a legkisebbet, [N végigfut mindazon normálosztókon, melyekre $H \cong (G * x_\Delta)/N$], akkor H-t a G csoport n-bővítésének nevezzük.
Egy a G csoport feletti egyenletrendszeren értjük $f_\beta(x_\alpha) = 1$ ($\beta \in \Gamma$) alakú egyenletek rendszerét, ahol $f_\beta(x_\alpha) \in G^*_\Delta$ és Γ egy tetszőleges nem üres indexhalmaz. Egy egyenletrendszert kompatibilisnek nevezünk, ha megoldható valamely, G-t alcsoportként tartalmazó csoportban.
A G csoportot n-algebrailag zártnak nevezzük, ha bármely, G feletti, n-nél kevesebb ismeretlent tartalmazó kompatibilis egyenletrendszer már G-ben is megoldható.
Eredmények: 1. A G csoport A részcsoportja akkor és csakis akkor félig direkt tényezője G-nek, ha bármely A feletti G-ben megoldható egyenletrendszer már A-ban is megoldható. 2. Ha $G = A * B$ (szabadszorzat), ekkor A félig-direkt tényezője G-nek. 3. A G csoport akkor és csakis akkor n-algebrailag zárt, ha bármely n-bővítésének félig-direkt tényezője. 4. Ha a G csoport n-algebrailag zárt minden n számosságra, akkor G csak az egységelemből áll. 5. Ha a G csoport szabad faktora bármely olyan csoportnak, amely őt részcsoportként tartalmazza, ekkor G csak az egységelemből áll.

ERDŐS JENŐ: *p-adikus modulusok dualitási elméletei.*

FUCHS LÁSZLÓ: *Tetszőleges számosságú direkt felbonthatatlan Abel-csoportok létezéséről.*

Az (Abel-féle) torzió-csoportok között jól ismeretesek a (direkt) felbonthatatlanok, míg felbonthatatlan vegyes csoport nem létezik. Először 1957-ben konstruáltak a kontinuumnál nagyobb számosságú felbonthatatlan torziómentes csoportokat. Sasiada bebizonyította, hogy minden α megszámlálható rendszámhoz létezik egy olyan felbonthatatlan csoport, melynek számossága $\geqq \aleph_\alpha$. Nyitva maradt azonban az a probléma, hogy lehet-e minden kardinális szám valamely felbonthatatlan csoport számossága. Érvényes a következő általános eredmény:

TÉTEL. Bármely végtelen m kardinális számhoz létezik egy olyan merev rendszer, melynek számossága 2^m, s mely m számosságú torziómentes csoportokból áll.
Merev rendszernek a G_γ csoportoknak olyan halmazát nevezzük, melyre teljesül egyrészt, hogy egyetlen G_γ-nak sincs nem-triviális homomorfizmusa valamely másik G_μ-be, másrészt mindegyik G_γ csoportnak bármely endomorfizmusa előáll mint egy racionális számmal való szorzás. Nyilvánvalóan egy merev rendszer torziómentes csoportjai felbonthatatlanok.
Következmények: 1. Bármely m kardinális számhoz létezik pontosan 2^m m-számosságú felbonthatatlan csoport. 2. (de Groot egy problémájának megoldása). Minden m-hez létezik 2^m nem-izomorf, m számosságú torziómentes csoport. 3. (Szele—Szendrei egy problémájának megoldása.) Bármely m-hez létezik 2^m nem-izomorf csoport, amelyek m számosságúak és amelyeknek endomorfizmus-gyűrűje (és így automorfizmus-csoportja is) kommutatív.

MARIA HASSE (Drezda): *Megjegyzések a kategóriák, gruppoidok és gráfok elméletéhez.*

Az előadó a kategória, gruppoid és funktor fogalmát, Ehresmann (Jahresber. DMV 60, 1957) cikkének megfelelően definiálja. A faktorkategória fogalma tetszőleges kategóriákra értelmezhető. A gruppoidok speciális esetében, mikor a faktorgruppoidot egy „normális" részgruppoid szerinti osztályozással, illetve „normális“ ekvivalencia-relációval nyerjük, e fogalom pontosabban kivizsgálható. Gruppoidokra átvihetők a csoportelmélet homomorfizmus és izomorfizmus-tételei. A kategóriákhoz és gruppoidokhoz hozzárendelhetők megfelelően definiált gráfok. Definiálható továbbá a szabad kategóriák, a szabad gruppoidok és a gruppoidok szabad szorzatának fogalma. Az előadó több tételt mond ki kategóriákra és gruppoidokra, melyek a csoportelmélet ismert tételeinek általánosításai.

K. A. Hirsch (London): *Újabb eredmények az automorfizmus csoportokról.* Sok példa ismeretes olyan G torziómentes Abel-csoportokra, amelyeknek $A(G)$ automorfizmus-csoportja véges, pl. a másodrendű ciklikus csoport. Felmerül a kérdés, hogy mely véges csoportok állíthatók elő az $A(G)$ alakban? Kimutatható, hogy 1. Ha $A(G)$ torziócsoport, akkor exponense véges, sőt osztója 12-nek. 2. Az összes kommutatív $A(G)$ csoport explicite megadható. 3. A nemkommutatív, 4-exponensű csoportok teljesen kivizsgálhatók. Harmadrendű elemek a nem-kommutatív esetben is fellépnek; pl. a 12-es rendű diciklikus csoport és a 24-edrendű binér tetraéder csoport is fellép. A vizsgálatok még nincsenek lezárva.

Hosszú Miklós: *Homogén kvázicsoportok.*
Definiáljuk a G^+ (nem szükségkép kommutatív) csoporton a G^+ gruppoidot a következő összefüggéssel:

(1) $$x * y = x + \sigma(-x + y) \quad (x, y \in G):$$

Ekkor G-t G^+ feletti homogén gruppoidnak nevezzük. G^+ rendelkezik az

$$F_s x = x + s \quad (G^* \times G \rightarrow G^*), \quad F_s(x * y) = F_s x * F_s x * F_s y$$

tranzitív automorfizmus csoporttal és megfordítva, minden gruppoid, melynek T automorfizmus-csoportja egyszeresen, tranzitív homogén egy T-vel izomorf G^+ csoport felett.

1. tétel. Bármely olyan gruppoid, mely rendelkezik felcserélhető endomorfizmusok tranzitív rendszerével, (ezek nem alkotnak szükségkép csoportot), homogén valamely Abel-csoport felett.

2. tétel. Bármely bal disztributív Q^* kvázicsoport, mely eleget tesz a

(2) $$z * (x * y) = (z * x) * (z * y), \quad x, y, z \in Q$$

összefüggésnek, homogén valamely G^+ csoport felett, sőt ebben az esetben az $x \rightarrow \sigma x$ megfeleltetés G^+-nak automorfizmusa, melyre $x \rightarrow x + \sigma(-x)$ invertálható. Így a (2) függvényegyenletnek a legáltalánosabb invertálható megoldása

$$x * y = (\varepsilon - \sigma)x + \sigma y, \quad x, y \in Q,$$

ahol G^+ tetszőleges csoport, mely szintén az Q halmazon van értelmezve s melyre $x \rightarrow \sigma x$ oly automorfizmus, hogy az $x \rightarrow (\varepsilon - \sigma)x = x - \sigma x$ megfeleltetés invertálható. Könnyen nyerhető ebből Aczél János egy sejtése:

3. tétel. Bármely Q^* kétoldali disztributív kvázicsoport homogén valamely G^+ Abel-csoport felett, olymódon, hogy $x * y = \omega x + \sigma y$; $x, y \in Q$ teljesül, ahol $\sigma, \omega = \varepsilon - \sigma$ felcserélhető automorfizmusai G^+-nak.

1. KOROLLÁRIUM. Bármely Q^* kétoldali disztributív kvázicsoport mediális, azaz $(a*b)*(c*d)=(a*c)*(b*d)$, $a, b, c, d \in Q$. Az 1. korollárium pozitív választ ad S. K. Stein egy kérdésére. V. D. Belousov bebizonyította, hogy bármely $2n+1$-rendű Moufang-loop izotóp valamely kétoldali disztributív kvázicsoporttal. Ebből adódik a

2. KOROLLÁRIUM. Bármely $2n+1$-rendű kommutatív Moufang-loop csoport.

KERTÉSZ ANDOR: *A modulusok általános elméletéről.*

Az Abel-csoportok elmélete két módon terjeszthető ki a modulusok elméletének irányában. Először is vizsgálhatók a valamilyen speciális operátor tartománnyal (a p-adikus számok gyűrűje, Dedekind-gyűrűk, stb.) ellátott modulusok. A másik irányzatban megkísérlik az Abel-csoportok elméletének fogalmait és eredményeit az operátor-modulusok minél szélesebb osztályára átvinni. Valóban az Abel-csoportok elméletének bármely tétele felveti azt a kérdést, hogy keressük meg azokat az operátor-tartományokat, melyek felett a modulusok eleget tesznek a szóbanforgó tételnek. Nyilvánvaló, hogy az ilyenirányú vizsgálatok a gyűrűelméletet is gazdagítják. Az előadás a második kutatási irányzat néhány eredményéről ad áttekintést. Az előadó több megoldhatatlan problémát vet fel.

R. KOCHENDÖRFER (Rostock): *Csoportok multiplikátoráról.*

Legyen γ a $\mathfrak{H}$ véges csoport p-Sylow-csoportja, továbbá $\mathfrak{H}=\sum\gamma V$, ahol V befutja $\mathfrak{H}$-nak valamely γ-szerinti $\mathfrak{B}$ jobbreprezentáns-rendszerét. Ha a $\mathfrak{B}$ komplexusnak megvan az a tulajdonsága, hogy bármely $P\in\gamma$-ra, $P^{-1}\mathfrak{B}P=\mathfrak{B}$ akkor a $\mathfrak{H}$ multiplikátorának p-Sylow-csoportja izomorf γ multiplikátorával.

A. G. KUROS (Moszkva): *Direkt felbontások algebrai kategóriákban.*

Az előadó ismertette az algebrai kategória fogalmát, és néhány erre vonatkozó fontosabb tételt. Értelmezhető egy kategória valamely objektumának direkt felbontása s erre a fogalomra olyan tételek nyerhetők, melyek egyenes általánosításai Baer, Schmidt és Kuros csoportelméleti direkt felbontási tételeinek.

LAJOS SÁNDOR: *Általánosított ideálok félcsoportokban.*

Az S félcsoport A rész-félcsoportját (m, n)-ideálnak, ill. (m, n)-kváziideálnak nevezzük, ha

$$A^m S A^n \subseteq A, \quad \text{illetve} \quad A^m S \cap S A^n \subseteq A,$$

ahol m és n nem-negatív egészek. Az R és L szimbólumok bármely $R\cdots LLR$ permutációjára definiáljuk az $R\cdots LLR$-ideált, mint olyan részhalmazt, amely S valamely jobbideáljának a balideáljának a balideáljának... a jobbideálja.

TÉTELEK: Az S félcsoport A részhalmaza akkor és csakis akkor $RL\cdots RL$-ideál, ahol $RL\cdots RL$ valamely tetszőleges permutációja m R-nek és n L-nek, ha A (m, n)-ideál. 2. Az S félcsoport B részhalmaza akkor és csakis akkor (m, n)-kváziideál, ha egy $(m, 0)$- és egy $(0, m)$-ideálnak a metszete. 3. Az S Neumann-reguláris félcsoportban bármely (m, n)-ideál (m, n)-kváziideál és viszont.

Hasonló definíciók és állítások fogalmazhatók meg gyűrűk és félgyűrűk esetére.

F. LOONSTRA (Hága): *Szubdirekt szorzatok.*

1930—31-ben R. Remak néhány dolgozatot publikált a minimális normálosztókról és szubdirekt szorzatokról. Ha az 1931 óta publikált terjedelmes csoportelméleti irodalmat áttekintjük, az a benyomásunk támad, hogy Ramek eredményei mindmáig kevés hatást gyakoroltak és többé-kevésbé figyelmen kívül maradtak. Remak első dolgozata (Journal f. r. u. a. Math., 162) valamely csoport összes minimális normálosztója szorzatának struktúráját vizsgálja és egyúttal a további dolgozatok (ibid., 163 és 164) előkészítéséül is szolgál, amelyekben Remak a direkt szorzatok részcsoportjaival, az ún. szubdirekt szorzatokkal foglalkozik. Remak csupán a véges csoportok esetét tekinti és ezért érdemes a legfontosabb eredményeket kissé általánosabban vizsgálni, amellyel egyrészt Remak eredményeire szeretnénk a figyelmet irányítani és másrészt bizonyos irányú alkalmazhatósági lehetőségeket megadni.

J. Łoś és E. Sąşiada (Toruń): *A karcsú csoportok elmélete és alkalmazásai* (Előadta Fuchs László).

A G Abel-csoportot karcsúnak nevezzük, ha megszámlálhatóan sok végtelen ciklikus csoport komplett direkt összegének bármely, G-be való homomorfizmusa legfeljebb véges-sok ciklikus komponenst képez le nem-triviálisan. A torziómentes Abel-csoportok elméletében igen használható fogalomnak bizonyult a karcsú csoportoknak Łostól eredő fogalma. Az előadó ismerteti a fontosabb tételeket és a (jórészt Saşiadától származó) alkalmazásokat.

A. W. Mostowski (Varsó): *Csoport-varietás felett definiált szabadcsoport részcsoportjairól.*

Az előadó szükséges és elegendő feltételeket adott meg, hogy valamely primitív (vagyis részcsoport, homomorfizmus és komplett direkt szorzat képzésre nézve zárt) csoport-osztály felett definiált szabad-csoport részcsoportjai is szabadok legyenek. Eredményeit alkalmazta bizonyos speciális csoportosztályokra.

Hanna Neumann (Sale): *Beágyazási tételek csoportokra* (B. H. Neumann és Hanna Neumann eredményei).

Graham Higmannal együtt kb. 10 évvel bebizonyították, hogy bármely megszámlálható csoport beágyazható valamely két elemmel generálható csoportba. A bizonyítás fő eszköze az egy azonosított részcsoportú szabadszorzat volt. Újabban egy teljesen új eljárást nyertek valamely adott, megszámlálható G csoportnak egy két elemmel generált H csoportba való beágyazására, koszorú szorzatot (wreath product) használván a szabad szorzat helyett. A korábbi konstrukcióval ellentétben ez az eljárás a H csoportról s a beágyazás természetéről is bizonyos információkat nyújt, és így lehetőséget ad arra, hogy olymódon konstruáljuk meg a H csoportot, hogy H megőrizze G számos tulajdonságát.

Képezzük először a G-csoportnak és a C ciklikus csoportnak $W = G\ Wr\ C$ koszorúszorzatát, vagyis W bővítése G izomorf példányai komplett direkt szorzatának — véges vagy végtelen soknak — egy automorfizmussal, amely ciklikusan permutálja a tényezőket. Ha G beletartozik a $\mathfrak{B}$ csoport-varietásba, akkor nyilván W azon csoport-varietás valamely eleme, amelyet $\mathfrak{B}$ elemeinek Abel-csoportokkal való bővítései révén nyerjük, vagy másképp megfogalmazva: a W csoport kommutátor alcsoportja mindazon törvényeknek eleget tesz, amelyek G-ben teljesülnek. Megismételjük ezt a lépést, vagyis képezzük W-nek egy ciklikus csoporttal való koszorúszorzatát. Ezen második bővítésnek meghatározható egy H részcsoportja, amelyet két elem generál s mely tartalmaz egy G-vel izomorf részcsoportot. Így most H azon csoportok osztályába tartozik, amelyek metabel bővítései a $\mathfrak{B}$ csoport-varietásnak, vagy ismét: a H csoport olyan tulajdonságú, hogy második kommutátor-alcsoportjában mindazon törvények teljesülnek, amelyek G-ben igazak. Még az is teljesül, teljesen általánosan, hogy a konstrukció alkalmas véghezvitele esetén G H''-höz tartozik.

Ez az eljárás a következő tételeket szolgáltatja:

1. Ha G (véges és) feloldható, λ hosszúságú derivált-sorozattal, akkor H vehető (végesnek és) feloldhatónak úgy, hogy deriváltsorozata legfeljebb $\lambda+2$-hosszúságú.

2. Ha G exponense n és végesen generálható, ekkor H felvehető úgy, hogy exponense n^k legyen.

3. Ha G véges p-csoport, ekkor H is vehető véges p-csoportnak.

4. Ha G véges nilpotens csoport, akkor H-ról is feltehető, hogy véges és nilpotens.

Az összes vizsgált esetben a beágyazási eljárás uniform, abban az értelemben, hogy G generátorai bizonyos előre meghatározott szavai H két generátorának — pontosan ugyanúgy, mint ahogy az a korábbi konstrukcióinál is volt.

Papp Zoltán: *Algebrailag zárt modulusok Noether-féle gyűrűk felett.*

Az előadó modulus-elméleti jellemzéseit adja a Noether-gyűrűknek. Az R gyűrű akkor és csakis akkor Noether-féle, ha a következő ekvivalens feltételek teljesülnek:

a) algebrailag zárt R-modulusok növekvő láncának egyesítése is algebrailag zárt;

b) algebrailag zárt R-modulusok diszkrét összege is algebrailag zárt;

c) bármely algebrailag zárt R-modulus algebrailag zárt minimális R modulusoknak diszkrét direkt összege.

Az algebrailag zárt minimális R-modulusokat az előadó R^* balideáljainak segítségével definiálja, ahol R Noether-gyűrű, továbbá R^* a Dorroch-bővítése R-nek.

Végül az előadó megadja az algebrailag zárt R-modulusoknak egy teljes invariáns rendszerét.

Peák István: *Bizonyos félcsoportok egy kompatibilis osztályozásáról.*

Legyen H egységelemes félcsoport, továbbá H centruma, Z, oly csoport, amely H-ban nem ideál. Ebben az esetben Z különböző (jobboldali) mellékosztályai egyszeresen lefedik $1, H$-t és ezek a mellékosztályok a komplexus szorzásra nézve egy H/Z félcsoportot képeznek, amely H-nak homomorf képe.

Rédei László: *A Hajós-féle faktorizáció-problémáról* (Referátum).

A Hajós által több mint egy évtizeddel ezelőtt felvetett probléma egy G véges ciklikus csoport olyan $G=AB$ faktorizációit illeti, amelyben az A, B tényezők G-nek tetszésszerinti komplexszusai (részhalmazai) lehetnek és a jobboldalon direkt szorzat értendő. Egy ilyen faktorizációt röviden triviálisnak nevezünk, ha A és B közül legalább az egyik tovább faktorizálható olyan kéttényezős direkt szorzatra, amelyben egyik tényező G-nek valódi részcsoportja. Hajós, Rédei, Bruijn és Sands együttesen meghátározták mindazokat a G-ket, amelyeknek csak triviális faktorizációja létezik, ezek a G-k viszonylag igen kevesen vannak. További probléma a többi G összes nemtriviális faktorizációinak meghatározása. Ez sikerült a $p^3q^2/p, q$ különböző prímszámok) rendű csoportok esetében, s remélhető, hogy a használt eljárás az általános esetben is célra fog vezetni.

Rédei László: *Végesen generált kommutatív félcsoportok elméletéről.*
Az előadó ismertette a végesen generált kommutatív félcsoportok általa kidolgozott struktúraelméletének főtételét.

E. Saşiada (Toruń): *Nem-izomorf csoportok, amelyek egymás direkt összeadandói* (Előadta: Fuchs László).
Nevezetes probléma, hogy léteznek-e olyan, nem-izomorf Abel-csoportok, amelyek egymásnak direkt összeadandói. A szerző bebizonyítja, hogy ilyenek léteznek. A konstrukció B. Jónsson egy példáján és a karcsú csoportok elméletén alapszik.

S. Schwarz (Bratislava): *Azon félcsoportok, amelyeknek minden valódi ideálja csoport.*
Az előadó meghatározza az összes olyan félcsoportot, amelynek minden (bal-, jobb-, kétoldali-) ideálja csoport. Rédei László és Pollák György vizsgálták azokat a félcsoportokat, amelyeknek minden részfélcsoportja csoport (Publ. Math. 6.). Az alábbi eredményből egyszerű korolláriumként adódik Rédei és Pollák tétele.
1. Legyenek G_1 és G_0 közös elem nélküli csoportok és φ G_1-nek egy tetszőleges homomorfizmusa G_0-ba. Bevezetünk egy szorzást az $S=G_1\cup G_0$ halmazba, olymódon, hogy a szorzás a csoportokban (izomorfizmustól eltekintve) nem változik meg és $a\odot b=\varphi(a)b$, $b\odot a=b\varphi(a)$ teljesül minden $a\in G_1$, $b\in G_0$-re. Ekkor S félcsoport lesz, amelyet $S[G_1, G_0; \varphi]$-vel jelölünk.
2. Legyen G egy csoport, b valamely rögzített eleme G-nek és u valamely G-n kívüli elem. Definiálunk az $S=G\cup\{u\}$ halmazban egy szorzást olymódon, hogy ez G elemeire (izomorfizmustól eltekintve) az eredeti maradjon, továbbá teljesüljenek a következő egyenlőségek:

$$u^2=b^2,\quad u\odot x=bx,\quad x\odot u=xb\quad \text{minden } x\in G\text{-re},$$

ekkor S félcsoport lesz, amelyet $S[G, u; b]$-vel jelölünk.
Tétel. Az S félcsoportra akkor és csakis akkor teljesül, hogy minden valódi ideálja csoport, ha a következő négy lehetőség egyike áll fenn:
a) $S=S[G_1, G_0; \varphi]$ alkalmasan választott G_0, G_1 és φ-vel;
b) $S=S[G, u; b]$ alkalmasan választott G és $b\in G$-vel;
c) $S=G\times H$, ahol G csoport, $H=\{e_1, e_2\}$ pedig félcsoport az $e_ie_k=e_i$ $(i, k=1, 2)$ szorzásra nézve;
d) $S=G\times H'$, ahol G csoport, és H' a H-val antiizomorf.

Szász Ferenc: *Végtelen csoportokról, amelyeknek minden valódi alcsoportja véges.*
O. J. Schmidt vetette fel a következő problémát: Határozzuk meg az összes olyan végtelen csoportot, amelynek minden valódi alcsoportja véges. 1949-ben Szélpál adott a kommutatív esetre egy elemi bizonyítást, kimutatva, hogy a szóbanforgó csoportok p^∞ típusú Prüfer-csoportok. A probléma teljes általánosságban még megoldatlan.
Az előadó kimutatta, hogy a Schmidt-féle probléma megoldásának akkor is a Prüfer-féle csoportokat kapjuk, ha a G-csoport kommutativitását a következő feltételek egyikével pótoljuk:
1. G-ben nincs maximális normálosztó.
2. G FC-csoport (azaz a konjugált elemek osztályai végesek);
3. G lokálisan véges S-csoport (minden p-hez csak egy Sylow-részcsoport tartozik);
4. G RN-csoport (létezik egy feloldható normál-rendszer).

SZENDREI JÁNOS: *Félcsoportok kétoldali leképezéseiről.*

A kétoldali leképezések fontos szerepet játszanak a félcsoport-elméletben. A. H. Clifford a félcsoportok bővítésproblémáját csak részlegesen oldotta meg. A félcsoportok kétoldali leképezésének segítségével lehet a Clifford-féle problémát tárgyalni és megoldani. Alkalmazásként kapjuk A. N. Kaufmann-nak a ciklikus félcsoportokra vonatkozó eredményét.

SZÉP JENŐ: *Faktorizálható csoportokról.*

Az előadás célja, hogy áttekintést adjon a faktorizálható csoportok elméletének mai állásáról. Magállapíthatjuk, hogy a faktorizálható csoportok vizsgálata lényegileg 3 irányban halad. Először is, strukturális vizsgálatok — a tágabb értelemben; — ezek általában a csoportelmélet klasszikus eredményeire támaszkodnak. Más vizsgálatok az itt felmerülő bővítési problémát igyekeznek explicite megoldani konkrét csoportok esetén. Harmadszor: a faktorizálható csoportok leírása függvényegyenletekkel és ezen függvényegyenletek alkalmazása a másik két kutatási irányban.

H. WIELANDT (Tübingen): *Csoportok önmagukba való leképezésekkel.*

Az operátor-csoport fogalmát általánosítani lehet olymódon, hogy a G csoportot önmagába való leképezéseknek egy Ω halmazával együtt tekintjük: minden $g \in G$, $\alpha \in \Omega$ párhoz hozzárendelünk egy $g^{\alpha} \in G$ elemet és feltesszük, hogy $1^{\alpha}=1$. Az így definiált fogalomra bizonyítható egy Jordan—Hölder tétel. A G-nek az 1 elemet fixen hagyó önmagába való leképezéseinek öszszessége egy egyszerű majdnem-gyűrűt alkotnak és megfelelő végességi feltételek mellett megkaphatjuk így az összes fontos egyszerű majdnem-gyűrűt, amely nem gyűrű. A csoportok önmagukba való leképezésekkel reprezentációs modulusok helyett lépnek fel, ha egy adott csoport reprezentációit nemkommutatív csoportok automorfizmusainak segítségével vizsgáljuk.

A Bolyai János Matematikai Társulat által 1959. október 6-án, 7-én és 8-án Budapesten megrendezett „Sorelméleti kollokviumon" elhangzott előadások kivonata

Október 6-án, délelőtt

ERDŐS PÁL: *Néhány szummabilitásra vonatkozó problémáról.*

Hanani és az előadó a következő tételt bizonyították be: Legyen $a_1, a_2, \ldots$ valós számok végtelen sorozata, amelyre $|a_n| > C > 0$, $a_n/\sqrt{n} \to 0$ és α tetszésszerinti valós szám. Akkor létezik oly $\varepsilon_n = \pm 1$ sorozat, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k a_k$ C_1-szummálható α-hoz, Könnyű belátni, hogy itt $a_n/\sqrt{n} \to 0$ nem javítható. Talán azonban igaz a következő tétel: Legyen $a_1, a_2, \ldots$ valós számok szorzata, amelyre $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ C_1-szummálható. Akkor minden valós α-hoz van oly $\varepsilon_n = \pm 1$ sorozat, amelyre $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k a_k$ C_1 szummálható α-hoz. Ezt a sejtést még akkor sem sikerült előadónak bebizonyitania, ha feltette, hogy $a_n/\sqrt{n} < \infty$.

V. D. Obreskov (Bulgária): *Tipikus közepekkel való abszolut szummabilitásra vonatkozó néhány Tauber-típusú tételről.*

Legyen $\{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty)$ valós számoknak egy szorzata. Egy

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sor a k-ad rendű Riesz Marcel-féle tipikus közepekkel és s összeggel akkor szummálható (a továbbiakban (R, λ, k)-szummálható), ha az

$$s_\lambda^k(x) = x^{-k} \sum_{\lambda_n < x} a_n (x - \lambda_n)^k\text{-al}$$

definiált $\{s_\lambda^k(x)\}$ sorozat s-hez konvergál, ha x minden határon túl nő. Az (1) sor k-ad rendű tipikus közepekkel akkor abszolút szummálható (a továbbiakban $|R, \lambda, k|$-szummálható), ha az $s_\lambda^k(x)$ függvény korlátolt variációjú az (a, ∞), $a > 0$ intervallumban, azaz, ha az

$$\int_a^{\infty} |ds_\lambda^k(x)|$$

integrál konvergens.

Előadó a következő tételeket bizonyította:

1. Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy az (1) sor $|R, \lambda, 1|$-szummabilitásából annak abszolút konvergenciája következzék az, hogy a

$$t_n = \frac{1}{\lambda_{n+1}} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu a_\nu$$

sorozat korlátolt variációjú legyen.

2. Legyen $\{n_\mu\}_1^\infty$ és $\{m_\mu\}_1^\infty$ egész számoknak két szorzata, amelyek eleget tesznek a

$$n_\mu < m_\mu \leqq n_{\mu+1}, \quad \mu = 1, 2, 3, \ldots, \frac{\lambda_{m_\mu}}{\lambda_{n_\mu}} > q > 1$$

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty$$

feltételeknek. Tegyük fel, hogy az (1) sor $|R, \lambda, 1|$-szummálható és az a_n tagokra $a_n = 0$ teljesül $n_\mu < n < m_\mu$ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots)$ esetén. Ekkor a

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left| \sum_{n=m_\mu}^{n_{\mu+1}} a_n \right|$$

sor konvergens.

A tétel 1-nél magasabbrendű $|R, \lambda, k|$-szummabilitásra is érvényes, ha további megszorításokat teszünk λ_n-re.

M. Zamansky (Franciaország): *Théoremes generaux de saturation.*

Rényi Alfréd: *Szummációs módszerek valószínűségszámítási interpretációja.*

Szüsz Péter: *Feltételesen konvergens sorok átrendezéséről.*

Előadó a következő tételt bizonyította be:

Legyen $\psi(1), \psi(2), \ldots$ a természetes számsor egy permutációja. Akkor megadható oly $c_1, c_2, \ldots$ monoton zérushoz tartó pozitív zérus-szorzat, amely a következő két tulajdonsággal bír:

1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \infty,$$

2. minden oly feltételesen konvergens $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sorra, amely konvergens és

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A,$$

továbbá $|a_k| \leqq c_k$, teljesül a $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\psi(k)} = A$ reláció is.

W. Maier (N. D. K.): *s-függvény és integrállogaritmus.*

A Goldner és Gauss által bevezetett transzcendens

$$\int_{a}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma} e^{-\sigma} = \lambda(\sigma) \quad |\text{arc}\,\sigma| < \pi$$

felfogható úgy is, mint egy, L. Krockener által kétszeresen periodikus és valamivel általánosabb függvény felépítésénél használt sorfejtés határesete. $o < \text{arc}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) < \pi$ és $o < x, y < 1$-re

$$s\begin{pmatrix} x\,y \\ n \end{pmatrix} = \sum_{h,k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(xh+yk)}}{n+h\omega_1+k\omega_2}$$

eleget tesz egy addiciós tételnek, amely s-ben algebrai, pontosan másodfokú. O. Holder eredményei alapján $\lambda(\sigma)$-ra nem algebrai, hanem legalább is transzcendens függvényegyenlet lett volna várható. Valóban létezik $\lambda(\sigma)$-ra egy 4. fajú (Stufe) integrofüggvényegyenlet négy független változóval és speciális esetben egy kvadratikus első fajú integrálegyenlet.

Október 6., délután

Kötetlen vita a Technika Háza klubhelyiségében.

Október 7., délelőtt

Turán Pál: *Egy sorelméleti kérdésről.*

(Az előadás teljes szövege megjelenik a Matematikai Lapok ezen számában.)

W. ORLICZ (Lengyelország): *Einige Bemerkungen über biorthogonale Systeme im Raume C.*

ALEXITS GYÖRGY: *Az ortogonális sorok néhány konvergencia kérdéséről.*
Az előadó felsorolta az ortogonális sorok konvergencia- és szummációelméletének néhány újabb eredményét és ezzel kapcsolatban több megoldatlan problémát vetett fel, amelyek tavaszra megjelenő könyvében is szerepelnek.

TANDORI KÁROLY: *Ortogonális sorokról.*
Az előadó egy újabb elegendő feltételt adott pozitív, monoton csökkenő együtthatójú ortogonális sorok Cesàro-szummálhatóságára. Továbbá szükséges feltételeket adott arra, hogy adott $\{a_n\}$ együtthatójú $\sum a_n \varphi_n(x)$ ortogonális sor minden $\{\varphi_n(x)\}$ ortonormált rendszerre majdnem mindenütt konvergens, illetve Cesàro-szummálható legyen.

LEINDLER LÁSZLÓ: *Ortonormált polinomrendszerekről.*
Az előadó ismertetett egy olyan tételt, s röviden annak bizonyítását, amelynek segítségével több, eddig csak ortonormált $\{\Phi_n(x)\}$ $(n=0, 1, \dots)$ függvényrendszerekre bizonyított divergencia tétel, bizonyítható ortonormált $\{P_n(x)\}$ polinomrendszerekre is.

SZÜSZ PÉTER: *Lakunáris trignometrikus abszolút konvergenciájáról.*
Előadó a következő két tételt ismertette:

1. TÉTEL. Létezik oly $u_1, u_2, \dots$ egész számokból álló számsorozat, hogy

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} > K \quad (k=1, 2, \dots),$$

ahol K egy tetszőlegesen nagy konstans, továbbá *minden* monoton csökkenő pozitívtagú $\{a_k\}$ sorozatra

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \sin 2\pi u_k x| < \infty$$

csak akkor lehetséges, ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$.

2. TÉTEL. Legyen $u_1, u_2, \dots$ egész számok egy szigorúan növekvő sorozata amelyre teljesül $\frac{u_{k+1}}{u_k} \to \infty$, ha $k \to \infty$. Akkor létezik oly monoton csökkenő $a_1, a_2, \dots$ sorozat, amelyre $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ és mégis kontinuumnyi sok x-re

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \sin 2\pi u_k x| < \infty.$$

Október 7., délután

Kötetlen vita a MTA Tudósklubjában.

Október 8., délelőtt

TURÁN PÁL: *Egységkörben reguláris függvények egy sorbafejtéséről.*

Előadó explicite megadott az egységkörben reguláris és itt egyrétű $f_\nu(z)$ függvények sorozatát ($\nu = 1, 2, \ldots$) a következő tulajdonságokkal. Ha $f(z)$ reguláris $|z| < 1$-ben, $f(o) = 0$ és folytonos $|z| \leqq 1$-ben, akkor $f(z)$ kifejthető valós c_ν együtthatókkal

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu f_\nu(z)$$

alakú sorba, ahol a sor $|z| < 1$-ben konvergens és előállítja $f(z)$-t, továbbá

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \operatorname{Im} f_\nu(z) = \operatorname{Im} f(z)$$

a *zárt* $|z| \leqq 1$ körlemezen, de a

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \operatorname{Re} f_\nu(z)$$

sor az egységkör kerületének egy mindenütt sűrű halmazán divergál. A tételt alkalmazta analitikus függvények szorzat előállítására is. Az eredmények megjelenőben vannak a Bull. de l'Acad. Pol.-ben.

FREUD GÉZA: *Fourier-sorok és sima függvények.*

Egy 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény legyen egy ξ pontot tartalmazó nyilt intervallumban sima; akkor a ξ pontban akkor és csak akkor differenciálható, ha a Fourier sora Fejér-közepének differenciálhányadosaiból alkotott sorozat a ξ pontban konvergál (az előadó egy korábbi eredményének lokalizálása).

ALPÁR LÁSZLÓ: *Egyes hatványsorok szummabilitása és divergenciája a konvergencia-kör kerületén.*

Legyen

$$(1) \qquad f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

egy a $|z| < 1$ körben reguláris függvény. Tegyük fel ezenkívül, hogy

$$(2) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$$

sor konvergens. Jelölje még ϱ_0 az egységkör egy rögzített belső pontját ($0 < |\zeta_0| < 1$). Az

$$(3) \qquad f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = f_2(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu$$

kapcsolattal definiált függvény akkor ugyancsak reguláris a $|z| < 1$ körben és

$$f_1(1) = f_2\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right).$$

Azt lehetne várni, hogy a megfelelő

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0)\left(\frac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}\right)^\nu$$

sor szintén konvergens bármilyen is az $|z|<1$ körben reguláris $f_1(z)$ függvény. Ezzel szemben Turán Pál bebizonyította, hogy adott ζ_0-hoz találhatók olyan az egységkörben reguláris $f_1(z)$ függvények, hogy a (2) sor konvergenciája ellenére a (4) sor divergens legyen.

Turán Pál még azt is kimutatta, hogy ha az (1) sor Abel szummábilis a $z=1$ pontban, akkor a (3) sor hasonló tulajdonságú a $z=\dfrac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$ pontban.

Turán Pál eredményeiből kiindulva az előadó először két speciális eredményét említette meg:

1. Legyen k pozitív egész szám, akkor adott ζ_0-hoz találhatók olyan a $|z|<1$ körben reguláris $f_1(z)$ függvények, hogy a (2) sor (C,k) szummabilitása ellenére a (4) sor ne legyen (C,k) szummabilis.

2. Legyen k nem negatív egész szám, akkor a (2) sor (C,k) szummabilitása mindig maga után vonja a (4) sor $(C, k+1)$ szummabilitást.

Ezután az előadó részletesen foglalkozott az alábbi két általános tétellel:

3. Legyenek $k\geqq 0$ és $\delta\geqq\frac{1}{2}$ tetszőleges valós számok, akkor a (2) sor (C,k) szummabilitása maga után vonja a (4) sor $(C, k+\delta)$ szummabilitását.

4. Legyenek $k\geqq 0$ és $\delta<\frac{1}{2}$ tetszőleges valós számok, akkor adott ζ_0-hoz találhatók olyan a $|z|<1$ körben reguláris függvények, hogy a (2) sor (C,k) szummálhatósága ellenére a (4) sor ne legyen $(C,k+\delta)$ szummabilis.

L. Iliev (Szófia): *Szingularitások hatványsor konvergencia körének peremén.*

Legyen p egy természetes szám, $\alpha>1$ és t_1 tegyen eleget $0<t_1<\frac{\pi}{2p}$ feltételnek. Jelöljük $A_{\alpha,p}(1)$-vel azt a görbét, amelyet az alábbi ívekből rakunk össze:

$$x=\frac{1}{\alpha}[(\alpha-1)\cos pt+\cos(p+1)t] \qquad -t_1\leqq t\leqq t_1,$$

$$y=\frac{1}{\alpha}[(\alpha-1)\sin pt+\sin(p+1)t] \qquad -t_1\leqq t\leqq t_1$$

és

$$\varrho=\varrho_1, \qquad \theta\leqq\theta\leqq 2\pi-\theta_1,$$

ahol $x=x(t)$, $y=y(t)$ $z=x+iy$-nek Descartes féle koordinátái; ϱ_1, Θ_1 pedig az $x(t_1)$, $y(t_1)$ pontok polárkoordinátái. $A_{\alpha,p}(\zeta)$, $\zeta=e^{i\theta_0}$-vel jelöljük azt a görbét, amely olymódon keletkezik, hogy az $A_{\alpha,p}(1)$-t θ_0 szöggel az origo körül elforgatjuk.

Érvényes a következő tétel:

A

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

hatványsornak van egy olyan $n_1, n_2, \ldots$ index sorozata és létezik egy olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy a

$$c_n = 0 \quad (n_\nu < n \leqq (1+\varepsilon) n_\nu, \nu = 1, 2, \ldots)$$

feltétel teljesül.

Az esetben, ha ez a sor egy $A_{\alpha, p(\zeta)}(p > \varepsilon^{-1})$ görbe belsejében korlátos akkor

$$s_{n_\nu}(\zeta) = \sum_{n=0}^{n_\nu} c_n \zeta^n = O(1), \quad \nu \to \infty, \quad \zeta = e^{i\theta_0}.$$

Ha pedig

$$\lim_{\varrho \to 1-0} f(\varrho e^{i\theta_0}) = s$$

is teljesül, akkor

$$\lim_{\nu \to \infty} \sum_{n=0}^{n_\nu} c_n \zeta^n = 1.$$

Ez a tétel általánosítja M. Evgrafov (Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. math. 16 (1952), 521) és D. Gaier és Meyer—König (Jahresber. D. M. V. 59 (1956), 36) eredményeit és D. Gaier és W. Meyer—König módszerével bizonyítható.

P. Vermes (Anglia): *Periódikus sorozatok transzformációi.*

R. H. C. Newton 1954-ben bevezette a periódikus sorozatok szummabilitásának fogalmát. $x = \{x_k\}$, (x_k komplex), $x_{k+p} = x_k$. Előadó 1955-ben előbbi eredményeit általánosította. (Mindkét dolgozat az Indigationes Mathematicae-ben jelent meg.) A periodikus sorozatok P tere egy lineáris tér, azonban a $\sup |x_k|$ természetes normára nézve nem teljes. Egy $\|x\| = \log p + \sup |x_k|$ pseudonorma, amely az $\|x\| = 0$ tulajdonsággal rendelkezik és amelyből következik $x = 0$ és $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$, de melyre $\|\lambda x\| = \lambda' \|x\|$, ahol $\lambda' \leqq \max(1, |\lambda|)$, a P teret teljessé teszi. A P' gyengén duális lineáris tér olyan u sorozatokból áll, amelyeknél $\sum u_k x_k$ konvergens minden P-beli x-re (abszolút konvergencia nincs kikötve) és u P'-höz tartozik akkor és csakis akkor, ha $u(z) = \sum u_k z^k$ konvergens minden $z = e^{2\pi i t}$-re, ahol t racionális. A P' egy fontos lineáris altere az Ω annulátor tér, amely azon u-kból áll, amelyekre $\sum u_k x_k = 0$ és x_k P-hez tartozik. Ebből következik, hogy u akkor és csakis akkor tartozik Ω-hoz, ha $u(z) = \sum u_k z^k = 0$ az egységkörön és t racionális. Szekeres, Erdős, Piranian és Clunie konstruáltak ilyen sorokat és ha $u(z)$ ilyen sor, $f(z) u(z^m)$ is az, ahol $f(z)$ polinom és m pozitív egész Azaz Ω kontinuumnyi sok különböző sorozatot tartalmaz.

Előadó célja $P \to P$-ben olyan matrixokat jellemezni, amelyek egy tetszőleges periodikus sorozatot egy olyan más periodikus sorozatba transzformálnak, amelynek periodusa különbözik az előzőétől. Előadó csupán elégséges feltételeket tud adni.

Legyen R az ugyanazon q sorú matrixok ismétlődéséből álló tér, ahol valamennyi sor egy P'-beli sorozat.

Legyen s az olyan lépcső-matrixok tere, amelyeket az R-beli matrixokból képezünk olymódon, hogy r, $2r$, $3r$ szukcesszív blokkokat, oszlopokat jobbra toljuk és a maradék helyet zérussal töltjük ki.

Legyen O az olyan annulátor matrixok tere, amelyeket az Ω-ból vett tetszőleges sorok alkotnak. Nyilvánvaló, hogy az elemek lehetnek nem-korlátosak.

Minden olyan matrix, amely egy O-beli, egy R-beli és véges számú s-beli matrixoknak az összege, egy $P \to P$-matrix.

Előadó sejtése, hogy minden $P \to P$-matrix ilymódon képezhető. Számos kérdés merül fel matrix-szorzatokkal, operátor-szorzatokkal, asszociativitással és az inverzzel kapcsolatban.

M. Kuczma (Lengyelország): *A* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{x^n}$ *sorokról.*

Előadó vizsgálta az

$$S_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{x^n} \qquad x > 0 \quad p = 1, 2, \ldots$$

függvényeket. Az $S_p(x)$ függvények racionálisak. Bizonyította, hogy a

$$\lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{\frac{S_p(x)}{p!}} = \frac{1}{\ln x}$$

határérték létezik.

A továbbiakban vizsgálta a

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_p S_p(x)$$

sort is, ahol u_p konstans valós együttható. A sornak több olyan tulajdonsága van, amelyik analóg a hatványsorok bizonyos tulajdonságaival. Végül előadó eredményeit valós egészfüggvényekkel kapcsolatos tételek bizonyítására használta fel.

Október 8-án délután

Kötetlen vita a MTA Matematikai Kutató Intézetében.

A Bolyai János Matematikai Társulat Pécsi Tagozatának előadásai 1958. január 1-től 1958. december 31-ig

Február 19.

Bóka István: *A kúpszelet mint geometriai hely.* Tanári továbbképző előadás.

Április 17.

Hites Ferenc: *A logaritmus tanításáról.* Tanári továbbképző előadás.

Április 24.

Gádor Endréné: *A trigonometrikus egyenletek tanítása.* Tanári továbbképző előadás.

Június 25.

Nagy Sándor: *A matematikai gondolkodás lélektanáról.* Pedagógiai észrevételek Pólya György könyvével kapcsolatban.

Feladatmegoldó és előkészítő délutánok középiskolai diákok számára, tanév alatt kéthetenként. Vezette Csaba István.

Szeptember 5.

ACHÁTZ IMRÉNÉ: *A módszertan szabadsága a matematika tanításában.*

November 12.

BÓKA ISTVÁN: *A komplex számok.* I. rész.

November 26.

BÓKA ISTVÁN: *A komplex számok.* II. rész.

Október 30.

BÓKA ISTVÁN: *Koncentráció elmélet alkalmazása a geometria tanításában.*

November 29.

REIMAN ISTVÁN: *Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Veszprémi Tagozatának előadásai 1958. január 1-től december 31-ig

Február 19.

VARGA DEZSŐ: *A vektoralgebra néhány geometriai alkalmazása.*

Március 20.

KERTÉSZ ANDOR: *Az algebrai egyenletek története.*

Szeptember 30.

FEJES TÓTH LÁSZLÓ: *Geometriai szélsőérték problémák.*

Október 29.

Bemutató tanítás a gimnázium I. osztályában. Tartotta: KNOLL JÁNOS. Vitavezető SÜTTŐ KÁLMÁN szakfelügyelő volt.

November 14.

MOLNÁR JÓZSEF: *Geometriai transzformációk.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Egri Tagozatának előadásai 1958. január 1-től december 31-ig

Április 16.

REIMAN ISTVÁN: *A projektív geometria elemei.*

November 22.

MOLNÁR JÓZSEF: *Néhány geometriai probléma.*

December 12.

HORVAY KATALIN: *Háromszöggeometriai tételek.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Győri Tagozatának előadásai 1958. január 1-től december 31-ig

Február 28.

Matematikai ankét a TIT-tel közös rendezésben.

MARÓT REZSŐ: *Osztályozás a matematika órán.*

SZELIÁNSZKY FERENC: *Szerencsejátékaink néhány kombinatórikus kérdéséről.*

Április 23.

LOVAS ISTVÁN: *Egy újabb lépés az anyag belső szerkezetének megismerése felé.* (Az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös előadás.)

PRÉKOPA ANDRÁS: *Eseményalgebra.*

Május 21.

KÁRTESZI FERENC: *Kristályok, rácsok és számok geometriája.*

Október 15.

ERDŐSI JÓZSEF: *A Riemann-geometria.*

Október 29.

MOLNÁR ERNŐ: *Maximum-minimum feladatok.* Előadás a középiskolák III. és IV. osztályos tanulói számára.

November 25.

FARAGÓ LÁSZLÓ: *A gimnáziumi (I. osztályos) geometriai anyag feldolgozásáról.* Módszertani tanfolyam az ősz folyamán; előadtak: Szeliánszky Ferenc, Faludi Istvánné, Marót Rezső és Barabás Sára.

A Bolyai János Matematikai Társulat Soproni Tagozatának előadásai 1958. január 1-től december 31-ig

Február 18.

BAYER ISTVÁN: *Elektromosságtani kisérletekről.* Az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös előadás.

Március 24.

RÉNYI ALFRÉD: *A keverés matematikai elmélete.*

Április 21.

SURÁNYI JÁNOS: *Számelméleti kérdések.*

Szeptember 15.

Ankét általános- és középiskolai tanárok számára. Vitavezető: HORVÁTH KÁLMÁN és PIACSEK ISTVÁN. Továbbképző előadássorozat a Megyei Tanács Művelődési Osztályával közös rendezésben.

Október 8.

Autheried Éva: *Matematikai gondolkodásra való nevelés.*

Október 15.

Lugossy György: *Az osztályozás.*

Október 22.

Takács Endréné: *A számonkérésről és feleltetésről.*

Október 29.

Vass Jenő: *Az órára való felkészülés.*

November 24.

Pásztor Endre: *Fizikai gyorsító berendezések.* Az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közösen rendezett előadás.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szolnoki Tagozatának előadásai 1958. január 1-től december 31-ig

Február 3.

Rédl László: *Beszámoló csehszlovákiai tanulmányutamról.* (A csehszlovákiai matematika tanításáról.)

Verbai Lajos: *A valószínűségszámítás elemei és néhány gyakorlati alkalmazás.*

Március 12.

Kalmár László: *Kibernetika II.*

Március 18.

Rédl László: *A matematika tanítása Csehszlovákiában.* Előadás Karcagon.

Március 25.

Rédl László: *A matematika tanítása Csehszlovákiában.* Előadás Mezőtúron.

Március 30.

Rédl László: *A matematika tanítása Csehszlovákiában.* Előadás Jászberényben.

A Bolyai János Matematikai Társulat Nyiregyházi Tagozatának előadásai 1958. január 1-től december 31-ig

Február 4.

Somossy János: *Fourier-sorokról.*

Március 3.

Bereznai Gyula: *Feladatmegoldások.*

Április 10.

Gádor Endréné: *A gyakorló óra.*

Nikodémusz Antal: *A matematikai fizika differenciálegyenletei.* Továbbképzési nap.

Május 27.

Baditz Károly: *Az Euler-féle összefüggések és alkalmazásaik.*

Szeptember 5.

Reményi Gusztáv: *Hamis bizonyítások.* Előadás a vásárosnaményi gimnáziumban.

Szeptember 13.

Ankét az I. osztályos algebra tanításáról. Bevezetőt mondott: Reményi Gusztáv.

Október 25.

Bereznai Gyula: *Az indirekt bizonyításról.*

November 9.

Bereznai Gyula: *A geometria alapjai.*

November 5.

Megbeszélés a függvénytranszformációk tanításáról.

November 23.

Bereznai Gyula: *Elemi geometriai transzformációk.*

November 29.

Horvay Katalin: *Tetraéderrel kapcsolatos feladatok.*

December 7.

Bereznai Gyula: *Mértani hely és szerkesztés.*

December 17.

Kelemen József: *A tökéletes számokról.*

December 4.

Reményi Gusztáv: *A harmadfokú egyenlet megoldása.* Előadás a kisvárdai gimnáziumban.

December 3.

Bereznai Gyula: *Egyenlőtlenségek, egyenlőtlenség-rendszerek.* Előadás a kisvárdai gimnáziumban diákok számára.

December 1.

Reményi Gusztáv: *A harmadfokú egyenlet megoldása.* Előadás a nagykállói Budai Nagy Antal gimnáziumban.

December 18.

Reményi Gusztáv: *A harmadfokú egyenlet megoldása.* Előadás a tiszalöki ált. gimnáziumban.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szombathelyi Tagozatának előadásai 1958. január 1-től december 31-ig

Január 27.

Könyves-Tóth Kálmán: *Bolyai Farkas geometriája, távlatnyitás az abszolút geometria felé.* Előadás a körmendi Kölcsey Ferenc gimnáziumban.

Január 30.

Pászthory Antal: *Nomográfia és alkalmazásai.* Előadás a nagykanizsai ált. gimnáziumban.

Február 26.

Előadássorozat a sárvári gimnáziumban.

Csontos Miklós: *Matematikai szakköri foglalkozás.*

Czapáry Endre: *Szempontok a gimnáziumi I. osztályos algebra tanításához.*

Varga Árpád: *A logikus gondolkodásra való nevelés.*

Március 6.

Czapáry Endre: *Tapasztalatok a gimnázium I. osztályos matematika oktatásában különös tekintettel az általános iskola nyújtotta ismeretekre.*

Március 28.

Erdősi József: *Bevezetés az abszolut geometriába.* Előadás a nagykanizsai Landler Jenő gimnáziumban.

Március 29.

Erdősi József: *Bevezetés az abszolut geometriába.* Előadás a zalaegerszegi Zrinyi M. ált. gimnáziumban.

Április 25.

Erdősi József: *Bevezetés a Riemann-féle geometriába.* Előadás a nagykanizsai Landler Jenő gimnáziumban.

Április 26.

Erdősi József: *Bevezetés a Riemann-féle geometriába.* Előadás a zalaegerszegi Zrinyi Miklós gimnáziumban.

Április 28.

Gádor Endréné: *Gyakorló óra az általános iskolában.* Előadás ált. iskolai tanárok részére.

Április 28.

Gádor Endréné: *Az új általános iskolai tanterv ismertetése.*

Hódi Endre: *Szélsőértékfeladatok elemi megoldása.*

Varga Tamás: *Az új VI. oszt. ált. isklai tankönyv ismertetése.*

Június 4.

Varga Árpád: *Az egyenlőtlenségek.* Előadás a szentgotthárdi Vörösmarty gimnáziumban.

Szeptember 10.

Czapáry Endre: *Középiskolai matematika tanításunk problémái.*

Október 6.

VARGA ÁRPÁD: *Szimmetrikus egyenletek.* Előadás a celldömölki Gábor Áron ált. gimnáziumban.

Október 15.

CZAPÁRY ENDRE: *Pythagorasi számok.* Előadás a zalaegerszegi leánygimnáziumban.

Október 25.

ERDŐSI JÓZSEF: *A négydimenziós tér.* Előadás a zalaegerszegi Zrinyi M. ált. gimnáziumban.

Október 24.

ERDŐSI JÓZSEF: *A négydimenziós tér.* Előadás a nagykanizsai Landler Jenő gimnáziumban.

Október 30.

BAKOS TIBOR: *Gyakorlati képzés és térmértan.*

December 15.

GÁDOR ENDRÉNÉ: *Beszámoló az edinburghi matematikai kongresszusról.*

December 8.

KOLLER NÁNDOR: *Axonometrikus ábrázolás.* Előadás a vasvári általános gimnáziumban.

November 5.

BUVÁRI ANDRÁS: *Viszonyított mennyiségek a fizikában.* Előadás a nagykanizsai Landler Jenő gimnáziumban.

November 12.

HORVÁTH JENŐ: *A háromszög nevezetes vonalai és pontjai.* Előadás a sárvári gimnáziumban.

November 11.

KOLLER NÁNDOR: *Az axonometrikus ábrázolás.* Előadás a nagykanizsai Landler Jenő gimnáziumban.

November 13.

KOLLER NÁNDOR: *Az axonometrikus ábrázolás.* Előadás a zalaegerszegi Zrínyi Miklós ált. gimnáziumban.

November 26.

FARAGÓ LÁSZLÓ: *Egyenlettel megoldható szöveges feladatok metodikája.*

A Bolyai János Matematikai Társulat Kecskeméti Tagozatának előadásai 1958. január 1-től december 31-ig

Április 19.

ERDŐSI JÓZSEF: *Szerkesztések a gömb felületén.*

Április 24.

Tanári továbbképző konferencia a Szolnoki Tagozattal közös rendezésben.

HÓDI ENDRE: Speciális görbék a középiskolában.

Május 10.

REIMAN ISTVÁN: *Geometriai feladatok megoldása komplex számok segítségével*

November 13.

KISS LÁSZLÓ: A matematika-történet felhasználása a középiskolai tanításban.

December 16.

PÁSZTOR ISTVÁN: *A halmazelmélet elemei.*

Kiegészítés a „Matrixelmélet és alkalmazásai kollokvium" előadáskivonataihoz.

GYIRES BÉLA (Debrecen): *Egy számelméleti determinánstételről.*
Jelölje $N_r(a, m)$ az $x_1 \ldots x_{r+1} \equiv a (\mathrm{mod}\, m)$ kongruencia (m természetes, a egész szám) inkongruens megoldásainak a számát. Amennyiben

$$a_{jk}^{(\delta)} = \begin{cases} N_r\left(\frac{(j,k)}{d}, (j,k)\right), & \text{ha } d|j, d|k \\ 0 & \text{minden más esetben} \end{cases}$$

és $\delta_k | k$ $(k = 1, \ldots, n)$, akkor

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(\delta_2)} & \cdots & a_{1n}^{(\delta_n)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(\delta_2)} & \cdots & a_{2n}^{(\delta_n)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n_1}^{(1)} & a_{n_2}^{(\delta_2)} & \cdots & a_{nn}^{(\delta_n)} \end{vmatrix} = M_r(1, 1)\, M_r\left(\frac{2}{\delta_2}, 2\right) \cdots M_r\left(\frac{n}{\delta_n}, n\right),$$

ahol az $M_r\left(\frac{k}{\delta_k}, k\right)$ számok az $N_r(a, m)$ számokkal az

$$M_r(1, m) = N_r(1, m),$$

$$M_r(a, am) = M_r(p_1^{t_1}, p_1^{e_1}) \cdots M_r(p_n^{t_n}, p_n^{e_n}),$$

$$M_r(p^t, p^e) = N_r(p^t, p^e) - N_r(p^{t-1}, p^{e-1}) \qquad (0 < t \leqq e)$$

formulák segitségével fejezhetők ki, hacsak $am = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ és $a = p_1^{t_1} \cdots p_n^{t_n}$ az am, illetve az a primtényezős előállítása és p is primszám. Figyelembe véve azt, hogy

$$N_r(a, m) = N_r((a, m), m),$$

$$N_r(d, m) = N_r(p_1^{t_1}, p_1^{e_1}) \cdots N_r(p_n^{t_n}, p_n^{e_n}), \; d|m,$$

$$N_r(p^t, p^e = \binom{t+r}{r} \varphi^r(p^e) \qquad (0 \leqq t < e),$$

$$N_r(p^e, p^e) = \sum_{k=0}^{r} \binom{k+e-1}{k} p^{e(r-k)} \varphi^k(p^e),$$

ahol most $m = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$, illetve $d = p_1^{t_1} \cdots p_n^{t_n}$ az m, illetve a d primtényezős előállítása, p prímszám, φ az Euler-féle függvény, továbbá a

$$\sum_{a=1}^{m} N_r(a, m) = \sum_{d|m} \varphi(d) N_r\left(\frac{m}{d}, m\right) = m^{r+1}$$

azonosságot, kimondott tételünk alkalmazásaként nyerjük Smith közismert determináns tételének

$$\begin{vmatrix} (1,1)^{r+1} & (1,2)^{r+1} & \cdots & (1,n)^{r+1} \\ (2,1)^{r+1} & (2,2)^{r+1} & \cdots & (2,n)^{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (n,1)^{r+1} & (n,2)^{r+1} & \cdots & (n,n)^{r+1} \\ & (r=0,1,2,\ldots) & & \end{vmatrix} = \Phi_r(1)\,\Phi_r(2) \cdots \Phi_r(n)$$

általánosítását, ahol

$$\Phi_r(k) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k=1 \\ k^{r+1}\left(1-\dfrac{1}{p_1^{r+1}}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{p_n^{r+1}}\right), & \text{ha } k=2,3,\ldots, \end{cases}$$

hacsak a k primtényezős előállítását a $k = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$ adja meg.

Kertész Andor: *Megjegyzés a lineáris diofantikus egyenletrendszerek elméletéhez.*

Legyen $x_1, x_2, \ldots$ határozatlanoknak legfeljebb megszámlálhatóan végtelen halmaza, és tekintsünk e határozatlanokban egy tetszőleges

$$(1) \qquad f_\beta(x) = n_{\beta_1} x_{i_1} + \cdots + n_{\beta k} x_{i_k(\beta)} = 0$$

egészegyütthatós homogén lineáris egyenletrendszert. Ez nyilvánvalóan kompatibilis. Most helyettesítsük a jobboldalon álló nullákat egészszámokkal úgy, hogy szintén kompatibilis egyenletrendszert kapjunk. Az (1) egyenletrendszerből a fenti módon előálló összes kompatibilis egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg egész értékkel, ha az $x_1, x_2, \ldots$ határozatlanokkal kifeszített szabad Abel-féle csoportban az (1) egyenletrendszer baloldalán álló $f_\beta(x)$ lineáris formák által generált részcsoport direkt összeadandó. E tétel bizonyítása A. Ehrenfeuchtnak J. H. C. Whitehead egy problémájára vonatkozó eredményére (Bull. Acad. Polonaise Sci. Cl. III. 3 (1955), 127—128) van alapozva.

Könyvismertetés

A. Zygmund, Trigonometric series
(Cambridge, 1959)

Csaknem 25 éve jelent meg Zygmund monográfiájának első kiadása, ez a matematikus körökben közismert és nagyrabecsült mű. Az »új Zygmund« a maga két kötetével számos tekintetben felülmúlja a régit. Nemcsak azért, mert nagyobb anyagot ölel fel, hanem azért is, mert az egész mű érettebbé vált: világosabban rámutat a hatalmas anyag összefüggéseire és arra törekszik, hogy a bizonyítások során kiemelje a lényeget.

Az új monográfia első kötete nagyjában a régi könyvet tartalmazza azzal az eltéréssel, hogy a szerző egyrészt beolvasztott újabb eredményeket, másrészt olyan régebbieket, amelyek már az előzőben is szerepelhettek volna, de onnan vagy kimaradtak, vagy csupán a »Miscellaneous theorems and examples« cím alatt voltak röviden megemlítve. (Megjegyezzük, hogy az új könyv megfelelő rovata a réginél több útbaigazítást nyújt az egyes tételek önálló bizonyításához.) Mivel az első kiadás közismert, a kétkötetes nagy munka részletes ismertetése helyett megelégszünk azzal, hogy a két könyv közötti lényeges eltéréseket emeljük ki.

Az I. fejezet a szükséges fogalmak ismertetését és az egyváltozós valós függvények elméletének a könyvben szereplő módszereit tartalmazza tömör fogalmazásban.

A II. fejezetben új a sima függvények általános tulajdonságainak vizsgálata, valamint Lebesguenek a Lip α osztályú függvények Fourier-sorral való approximációjára vonatkozó tétele (a részletösszegek $O(n^{-\alpha}\log n)$ nagyságrendben approximálnak), továbbá ennek az eredménynek egy Salemtől és Zygmundtól származó általánosítása. A Lebesgue-féle konvergencia-kritérium tárgyalása is új: precízebb és általánosabb, mint az első kiadásban volt.

A III. fejezetben a Cesaro-féle szummáció elé kívánkozott a Fourier-sorok lineáris közepei általános tulajdonságainak tömör ismertetése. Így az első kiadás megfelelő fejezetével összehasonlítva, ez teljesebb (megtaláljuk még ebben a fejezetben többek között a Rogosinski-féle szummációt, valamint egy függvény ugráshelyeinek meghatározását Fejér, illetve Wiener módszerével). A következő paragrafust folytonos függvények trigonometrikus polinómokkal való approximálásának szenteli; ez a rész teljesen új és mintegy tíz oldalon tömören, de világosan ismerteti ezt a tárgykört. A klasszikus direkt és inverz tételeken kívül (Bernstein, Jackson, de la Vallé Poussin) újabb eredmények is megtalálhatók itt: az $O(1/n)$ approximációs nagyságrenddel jellemzett, s a szerzőtől bevezetett függvényosztályra vonatkozó Zygmund-féle tételek, valamint a Lip 1 függvényosztálynak a konjugált sor Fejér-közepeivel való jellemzése (Alexits és Zamansky).

A IV. fejezet a régi kiadás megfelelő fejezeténél lényegesen bővebb. Tartalmazza Hardy és Littlewood tételeit a Fourier-sorok $(C, \alpha > 0)$- és Abel-közepeinek L^p- integrálható függvényekkel való majorálhatóságára vonatkozóan (ez a rész az első kiadás X. fejezetében szerepelt). Bemutatja Marcinkievicznek az $f(x)$ függvény $\tilde{f}(x)$ konjugáltja exisztenciájára vonatkozó reális függvénytani módszerét, valamint Kolmogoroff egy eredményét, amely szerint az $E(f > y)$ halmaz mértéke megbecsülhető egy integrállal. E két utóbbi eredménynek később szerep jut a Fourier-sorok konvergencia-problémájának némely újabb vizsgálatánál.

Az V. fejezetben új a Riesz-féle szorzatok tulajdonságainak részletes ismertetése. A szerző a lakunáris trigonometrikus sorokat is részletesebben tárgyalja, mint az első kiadásban. Új pl. a »kis hézagú« Fourier-sorok vizsgálata, amiből — alkalmazásként — Fabry egyik tételének egy speciális esetét nyeri (a $\sum c_n z^{\nu_n}$ alakú hatványsorok analitikusan nem folytathatók a konvergenciakörön túl, ha $(\nu_{n+1} - \nu_n) \to \infty$).

A VI. fejezetben új azoknak a halmazoknak a vizsgálata, amelyeken egy trigonometrikus sor abszolút korvergens anélkül, hogy mindenütt az lenne.

A VII. fejezetben az olvasó új bizonyítást talál Riesz Marcelnek az első kiadásban is szereplő tételére. Új anyag továbbá Hardy—Littlewood, Kolmogorov és Zygmund konjugált függvényekre vonatkozó néhány eredménye, a H^p (Hardy) és N (Nevanlinna) osztályba tartozó függvények vizsgálata, valamint Helson tétele (Steinhaus egy sejtésének bizonyítása) és a konformis leképezésre vonatkozó rész.

A VIII. fejezet — az első kiadáshoz hasonlóan — tartalmazza Kolmogorov mindenütt divergens Fourier-sorát, de ezenkívül a csupán majdnem mindenütt divergens Fourier sorra adott példát is. Ez utóbbi szerkesztésén alapul ugyanis majdnem mindenütt divergens konjugált Fourier-sorok szerkesztése (Hardy—Rogosinski, Sunouchi), valamint annak a bizonyítása, hogy van majdnem mindenütt divergens, de csak véges oszcillációjú Fourier-sor is (Marcinkiewicz).

A IX. fejezet a trigonometrikus sorok általános elméletének az előző kiadásnál lényegesen teljesebb ismertetését adja. Újak pl. a Lebesgue-féle szummációra vonatkozó, Fatou tételén túlmenő eredmények, továbbá azok a lokalizációs tételek, amelyek csupán szummálhatósági feltételeknek alávetett általános trigonometrikus sorokra vonatkoznak.

A második kötet túlnyomórészt új anyagot tartalmaz. A X. fejezettel kezdődik, amely a trigonometrikus interpolációt tartalmazza. Ez a régi kiadásban nem szerepelt. Az elemi fogalmakon kívül megtaláljuk a középértékben való konvergenciára vonatkozó tételeket (Bernstein, Erdős—Turán, Marcinkiewicz, Zygmund) és a trigonometrikus interpolációs eljárás divergenciájára vonatkozó eredményeket (Faber, Erdős, Grünwald, Marcinkiewicz). A fejezet végén az interpolációs polinom konjugáltjának tulajdonságait ismerteti a szerző.

A XI. fejezet a Fourier-sor formális deriváltja szummálhatóságának a problémájával foglalkozik, valamint a Cesàro-szummálhatóság szükséges és elégséges feltételével (Hardy—Littlewood). A fejezet számos fontos eredményt tartalmaz, s ezenfelül tárgyalja a derivált-fogalom és a Denjoy-integrál különböző általánosításait is.

A XII. fejezetet a lineáris függvényoperátorok interpolációjának szenteli a szerző (ezt a fogalmat Riesz Marcel vezette be). Az itt nyert eredmények egyrészt lehetővé teszik igen általános feltételek mellett az L^p $(p > 1)$ osztályhoz tartozó függvények Fourier-együtthatóinak a vizsgálatát (Young—Hausdorff, Riesz Frigyes és Paley tételei); másrészt olyan új módszert nyújtanak, mely lehetővé tesz bizonyos vizsgálatokat a Fourier-sor majdnem mindenütt való konvergenciájának kérdése tekintetében. Ezek a módszerek a könyv következő fejezeteiben kerülnek alkalmazásra.

A XIII. fejezet elején Kolmagorov—Szeliversztov—Plessner tételét ismerteti, amely az L^2-integrálható függvények Fourier-sorának majdnem mindenütt való konvergenciájára vonatkozik. Ez a tétel az első kiadás X. fejezetében is szerepelt kevésbé általános alakban. Ezt követi e tételnek a csupán L^p $(1 < p \leqq 2)$ osztályú függvények Fourier-sorára való általánosítása (Littlewood és Paley). Új anyag Marcinkiewicz konvergenciakritériumának, úgyszintén Kuttner konjugált sorok szimultán konvergenciájára vonatkozó tételének a tárgyalása. Az L^p $(p > 1)$ osztályú függvények Fourier sorának erős szummálhatóságára vonatkozó tételekhez (ezek egy része az első kiadás X. fejezetében is megtalálható) járul Marcinkiewicz tétele, amely szerint az L-integrálható függvények Fourier-sora is majdnem mindenütt erősen szummálható. Ez az anyagban és gondolatokban gazdag fejezet az általános ortogonális sorok konvergenciájára vonatkozó néhány tétellel, valamint bizonyos Fourier-sorok nulla-mértékű divergenciahalmazainak kapacitására vonatkozó vizsgálatával zárul.

A XIV. fejezet új témakörrel foglalkozik, jórészt az L^p $(p > 1)$ osztályhoz tartozó függvények Fourier-sorai konvergenciájának nehéz problémájával. A fejezet legemlítésreméltóbb része a Littlewood—Paley-féle

$$g(\vartheta) = \left\{ \int_0^1 (1-r)\,|f'(re^{i\vartheta})|^2 dr \right\}^{1/2}$$

függvény és más analóg függvények vizsgálata, valamint Kuttner tételének egy általánosítása, amelynél a konjugált sor szummálhatóságát nem kell előre kikötni.

A XV. fejezet természetes folytatása az előzőnek. Littlewoodnak, Paleynek, Marcinkiewicznek, és Zygmundnak, az L^p $(p > 1)$, illetve néha csupán L-osztályú függvények Fourier-sorai részletösszegeivel képezett részsorozatokra vonatkozó mélyenfekvő tételeit tartalmazza.

A XVI. fejezet Fourier-integrálok elméletével foglalkozik, és sokkal gazdagabb, mint az első kiadás XII. fejezete, ahol ennek az elméletnek csupán egy rövid bevezetését találjuk meg. A tömören ismertetett anyagból megemlítjük Salemnek és Zygmundnak azokat az eredményeit, amelyek a valószínűségszámítás témakörével határosak és a Fourier-sorok részletösszegeinek eloszlásával foglalkoznak, továbbá Paley—Wiener exponenciális típusú függvényekre vonatkozó tételét, végül a trigonometrikus integrálok egyértelműségére és ekvikonvergenciájára vonatkozó eredményeket.

A XVII. fejezet tömören ismerteti a többváltozós Fourier-sorok elméletét. A szerző csupán a rektanguláris szummáció kérdését tárgyalja, a szférikus szummációval egyáltalában nem foglalkozik. A fejezet és a könyv a többváltozós hatványsorok határfüggvényeinek exisztenciájával zárul.

Mindenki, aki alaposan ismeri Zygmund régi könyvének gazdagságát, csak elámulhat, hogy az új kiadás mennyi új tárgykört képes részletesen feldolgozni, s azok lényegét kiemelni anélkül, hogy a terjedelmet túlságosan megnövelné. Ez természetesen a szerző ragyogó bizonyítástechnikájának köszönhető. Ha mindehhez hozzávesszük, hogy a két kötet a rengeteg ismert eredményen kívül számos kisebb-nagyobb jelentőségű, teljesen új eredményt is közöl és az ismert eredmények is gyakran az eredetinél általánosabb alakban szerepelnek, bátran mondhatjuk, hogy Zygmund új könyve a matematikai monográfia-irodalom egyik gyöngyszeme.

Bármily kiváló mű is Zygmund új könyve, nem hagyhatjuk szó nélkül, hogy a szerző történeti megjegyzései több ízben tévesek, ami annál sajnálatosabb, mert a kezdő kutató bizonyára ugyanúgy hitelt ad a történeti megjegyzéseknek is, mint a könyv ragyogó matematikai tartalmának.

Alexits György

PÓLYA GYÖRGY: A GONDOLKODÁS ISKOLÁJA

(Bibliothéka, 1957)

Pólya György professzornak, a több, mint négy évtizede külföldön (jelenleg az Amerikai Egyesült Államokban) élő világhírű magyar matematikusnak »How to solve it« (Hogyan oldjuk meg?) című könyvének első kiadása 1945-ben jelent meg a princetoni egyetem nyomdájában. A magyar fordítás (amely Lakatos Imre munkája és amelyet Varga Tamás nézett át) az 1948-ban megjelent ötödik, bővített kiadás alapján készült. A magyar kiadás címe a mű német nyelvű kiadása címének (Die Schule des Denkens) a fordítása. A magyar kiadáshoz a szerző külön előszót írt: ebben tanárának, Beke Manónak egy megjegyzésére emlékszik vissza, aki, amikor Pólya György mint egyetemi hallgató az indexét vitte hozzá aláírásra, az indexből látva, hogy Pólya előzőleg filozófiát hallgatott, így szólt: »Úgy, úgy, — maga a filozófiától jön a matematikához. Vissza fog térni a filozófiához. De ne térjen vissza túl korán!«. Beke Manónak igaza lett: e könyv, bár elsősorban didaktikai mű, valóban filozófiai munkának is nevezhető. A könyv célkitűzését a szerző az előszóban a következőképpen foglalta össze: *»E sorok írója emlékszik azokra az időkre, amikor maga is diák volt... Előadásokat hallgatott, könyveket olvasott, próbálta beleélni magát a készen kapott megoldásokba és matematikai állításokba, de közben újra és újra fel kellett tennie magában egy zavaró kérdést: Igen, a megoldás rendben van, nyilvánvalóan helyes. De hogyan lehet rájönni egy ilyen megoldásra? ... hogyan lehet felfedezni egy ilyen tételt. Hogyan tudnék én magam rájönni ilyesmire? E sorok írója ma egyetemen ad elő matematikát; úgy gondolja és reméli is, hogy néhány lelkesebb tanítványa hasonló kérdéseket tesz fel magának. Igyekszik hát kielégíteni kívánságukat. Mindig azon van, hogy megértse ne csak ennek vagy annak a feladatnak a megoldását, ha-*

nem a megértés alapgondolatát és a rávezető helyes eljárásokat is, és megpróbálja ezeket másoknak is átadni. Ez vitte rá ennek a könyvnek megírására. Reméli, hogy ezzel hasznára lesz a tanároknak, akik ki akarják fejleszteni tanítványaik feladatmegoldó készségét és a diákoknak, akik saját maguk is szeretnének belejönni a feladatmegoldásba.«

Joggal állapítja meg a szerző, hogy »*bár ez a könyv főleg matematikatanárok és matematikával foglalkozó diákok számára készült, minden olyan olvasó érdeklődésére is számíthat, akit érdekelnek a felfedezés és megfejtés módszerei*«. Valóban, ez a könyv igen széles olvasóközönségnek szól, köztük olyanoknak is, akik a matematikától idegenkednek. Jól tudjuk, hogy az emberek nagyobbik része, sajnos, világszerte az utóbbi kategóriába tartozik. Ezen a sajnálatos helyzeten csak az iskolai matematika-oktatás egészen gyökeres átformálásával lehet segíteni. Ezzel a problémával ma szinte minden országban foglalkoznak és keresik a megoldását. Ma már teljesen nyilvánvalóvá vált, hogy a hagyományos matematika-tanításnak mind a tananyaga, mind pedig a módszerei elavultak és nem alkalmasak arra, hogy a diákok zömében a matematika iránti érdeklődést felkeltsék és ezért mélyreható átalakításra szorulnak. Természetesen rendkívül sok múlik a tanáron, és a jó tanár ma is sokkal több diákkal tudja megszerettetni a matematikát, azonban ebben őt az elavult tananyag és a tanterv előírásai nem segítik elő kellően, sőt, megkötik a kezét. E referátum keretein túlnő az a probléma, hogy milyen irányban kell keresni és hogyan lehet megtalálni a kiutat abból a zsákutcából, amelybe az iskolai matematika-oktatás jutott; itt csak néhány gondolatot vetek fel röviden arra vonatkozólag, hogy mi is a baj az iskolai matematika-oktatással, miért dolgozik olyan rossz »hatásfokkal«? Úgy látom, hogy a jelenlegi iskolai tananyag fő hiányossága, hogy nem ad helyes képet a matematikáról, hiszen lényegében a XVII. századnál áll meg. A matematika azóta végbement fejlődéséről az iskolában szinte nem is esik szó. Ugyanakkor a matematikát nem fejlődésében mutatja be és nem ad helyes képet a matematika széleskörű alkalmazhatóságáról sem. Az, ami a matematikában igazán lényeges, az iskolai matematika-tanításban nem jut eléggé érvényre. A tanítási módszer leggyakoribb hibája viszont az, hogy nem neveli eléggé a diákokat önálló gondolkodásra, arra, hogy ne csak megadott sablonokat alkalmazzanak, hanem megízleljék a nehézségek önálló legyőzésének örömét, azt az örömet, amelyről PÓLYA GYÖRGY, a következőket írja: »*A nagy felfedezések nagy feladatokat oldanak meg, de nincs olyan feladat, amelynek megoldásához ne volna szükség valami kis felfedezésre. Lehet, hogy a feladat, amelyen gondolkodol, egyszerű; de ha felkelti érdeklődésedet, mozgósítja találékonyságodat és végül, ha sikerül önállóan megoldanod, átéled a felfedezés izgalmát és diadalát. Ha még fogékony korban sikerül ilyen tapasztalatot szerezned, kedvet kaphatsz a szellemi munkára és ez talán egész életre szóló nyomot hagy gondolkodásodban és jellemedben.*« Valóban, a gondolkodásra nevelő matematika-tanítás nemcsak a matematikát teszi vonzóbbá és a fokozottabb érdeklődés folytán könnyebben érthetővé is, hanem ösztönzőleg hat a diák egész szellemi fejlődésére és nagy jellemformáló erővel is bír: kitartásra, céltudatosságra, koncentrálnitudásra, kritikai szellemre és saját értelmi képességeiben való bizalomra nevel. Ezért a gondolkodásra nevelés a matematika-tanítás egyetlen helyes útja. Ilyen módszerrel lehet csak elérni, hogy a diákok zöme megszeresse a matematikát. Csak az első lépések nehezek ezen az úton. Ezért mondja Pólya György, hogy »*ha valaki egyszer megízleli a matematika örömét, nem fogja egykönnyen elfelejteni. Ebben az esetben már minden esély megvan arra, hogy a matematika később is jelenteni fog neki valamit: kedvenc szórakozását, foglalkozásához jó segédeszközt, vagy akár foglalkozást, talán éppen életcélt.*« Pólya György könyve nagy segítséget jelent mindazoknak, akik gondolkodásra való nevelésre törekedve tanítanak matematikát bármely fokon. A könyv a matematikai gondolkodás »induktív«, heurisztikus mozzanataira hívja fel a figyelmet. »*A matematika* — írja — *egyfelől Eukleidész szigorú tudománya, de valami más is. Az eukleidészi módon tárgyalt matematika rendszeres deduktív tudománynak tűnik; ezzel szemben a matematika — miközben dolgozik vele az ember — kísérleti, induktív jellegű. A matematika mindkét arculata ugyanolyan régi, mint maga a matematika. A második azonban egy tekintetben mégis új: a matematikát „in statu nascendi" a születés, a felfedezés folyamatában még sohasem tették ilyen módon hozzáférhetővé sem diákok, sem tanárok, sem a nagyközönség részére.*« Valóban, éppen abban áll Pólya György könyvének úttörő jelentősége, hogy a feladatmegoldásokat keletkezésükben mutatja be. Azt mondhatná erre valaki, hogy a feladatmegoldások születését a szerző tulajdonképpen kissé szépítve mutatja be, hiszen a megoldás ötletére legtöbbször nem azon a következetes, logikus úton jön rá az ember, ahogy ezt a könyv ábrázolja. A feladatmegoldó gondolatmenetében gyakran merész ugrások is előfordulnak, gyakran a szerencse, a véletlen, egy »tudat alatti« gondolatkapcsolás is szerepet játszhat. Valóban, Pólya György könyve tulajdonképpen nem azt mutatja meg, hogy ő maga vagy más valójában hogyan jött rá egy feladat megoldására, hanem hogy hogyan jöhetett volna rá, ha egészen konzekvensen és céltudatosan járt volna el. Ezekre az ellenvetésekre azonban könnyen lehet válaszolni. Bár a tényleges feladatmegoldás folyamata ritkán olyan tudatos, mint azt a könyv bemutatja, a tudatosságra való törekvés a feladatmegoldásokban azonban ennek ellenére nagy segítséget jelent, mert ha nem is pótolja a szellem felvillanásait, előkészítheti és valószínűbbé teheti azokat. Minderre a szerző is rámutat. »*A felfedezés első szabálya* — írja például — *a tehetség és a jószerencse... A felfedezésnek olyan szabálya, amely minden... feladat megoldásához elvezetne, többet érne, mint... a bölcsek köve. A filozófia régi álma mindenféle feladatra alkalmazható csalhatatlan szabályok felállítása, de ez az álom örökre álom marad. Ésszerű heurisztika nem törekedhet tévedhetetlen szabályok felállítására, de igyekezhet tanulmányozni azokat az eljárásokat (gondolkodási műveleteket, gondolatmeneteket, lépéseket), amelyek rendszerint hasznosak a feladatok megoldásában... Az ilyen kérdések és útmutatások gyűjteménye, ha kellő általánossággal fogalmazzuk őket meg és szabatos elrendezést adunk nekik, talán nem olyan kívánatos, mint a bölcsek köve, de elérhető. A mi listánk éppen ilyen gyűjtemény.*« A szerző itt arra a listára utal, amely a magyar kiadásban ugyanúgy, mint az angolban, a könyv belső borítólapjain van táblázatszerűen elrendezve, és a feladatmegoldás főbb fázisait mutatja be. Négy fázist különböztet meg: 1. A feladat megértése. 2. Tervkészítés. 3. Tervünk végrehajtása.

4. A megoldás vizsgálata. Különösen az 1. és 4. fázis az, amelyre sok feladatmegoldó (sőt, sok tanár is) nem szokott elegendő időt és fáradságot szánni. Az 1. fázisba tartozik annak világos megértése, hogy mi van adva, miből indulhatunk ki és hogy mit akarunk elérni, továbbá, hogy a kiindulópontot a céllal milyen utak, összefüggések kötik össze; hogy a kikötésekben nincs-e ellentmondás, elegendők-e az ismeretlen meghatározására vagy sem, vagy éppen kevesebb is elegendő volna-e stb. A 4. fázis nemcsak az eredmény ellenőrzését jelenti, hanem beleértendő a bizonyítás egyszerűsítésére való törekvés, a nyert eredmény lehetséges alkalmazásainak, esetleges általánosításainak vizsgálata is. Rendkívül fontos, hogy az említett előkészítő és befejező fázisokra a tanár kellő gondot fordítson és ne sajnálja tőlük az időt. A feladatmegoldás 2. és 3. fázisára vonatkozólag is számos nagyon is megszívlelendő tanácsot ad a szerző; gondolok például az analógiák tudatos felhasználásának kérdésére.

Azt mondhatná valaki, hogy e szabályok csak nagyon általános útbaigazítást adnak és az, hogy e szabályokat alkalmazva eljut-e valaki egy nehezebb feladat megoldásához, attól függ, hogy az adott konkrét esetben hogyan hajtja végre az említett útmutatásokat. Pusztán a könyv útmutatásai alapján, komolyabb szellemi erőfeszítés nélkül aligha fog valaki egy komolyabb feladatot megoldani. Ez persze igaz, és nem is lehet másképp. Mint a szerző fent idézett megjegyzése is rámutat, nem is lehetséges olyan »bűvös« szabály, amely pótolja az önálló gondolkodást, az alkotó szellemi munkát. A »lista« tanácsainak nem is ez a célja, nem akar lehetetlent, nem gondolkodást pótló recepteket ad, hanem éppen az önálló gondolkodásra nevel. Pólya tanácsai nem teszik és nem is tehetik feleslegessé a szellemi erőfeszítést, de segíthetnek abban, azáltal, hogy jó irányba terelik, hogy az erőfeszítés minél eredményesebb legyen.

Azt mondhatná valaki Pólya Györgynek a feladatmegoldásra vonatkozó tanácsairól, hogy azok mind »maguktól értetődőek«. Ezzel a megállapítással nem kívánok vitába szállni, mert bizonyos értelemben helytálló: valóban, Pólya tanácsainak igazsága nemcsak, hogy első hallásra evidens, hanem valóban, az ember úgy érzi a legtöbb tanács olvasásánál, hogy erre már ő is gondolt, sőt időnként többé-kevésbé tudatosan alkalmazta is feladatok megoldása és tanítás közben, ha nem is fogalmazta meg magának azt ilyen világosan. Ez azonban a könyvnek nem hibája, hanem éppen ellenkezőleg, egyik legfőbb érdeme. Pólya György könyvében a heurisztikus gondolkodásnak valóban éppen azokat a mozzanatait foglalta össze rendszeresen, tömör és kifejező fogalmazásban, amelyeket mindenki, akinek a matematikai feladatmegoldásban némi gyakorlata van, jól ismer. Az új, az úttörő ebben a könyvben elsősorban az, hogy rendszert igyekszik vinni a heurisztikus gondolkodásba.

A könyv három főrészből áll. Az I. rész az említett »lista« részletes magyarázatát és illusztrálását tartalmazza számos érdekes példán. A II. rész egy variáció az előbbi témára: párbeszéd formájában foglalja össze a feladatmegoldásra vonatkozó útmutatás-listát. A III. rész »A heurisztika rövid szótára« Bolzano, Descartes, Leibniz, Pappus, Pascal és mások gondolataival és közmondásokkal tarkítva a szerző találó és ragyogóan szellemes megjegyzéseit tartalmazza a heurisztika néhány fontos kérdéséről. Csak néhány példát ragadunk ki itt ezekből a megjegyzésekből, részben eredeti, részben jólismert gondolatok csattanóan tömör megfogalmazását.*

»Ihletedet mindig kövesd — de egy csipetnyi kétellyel.«

»Ha hajlasz a pedantériára és mindenáron valami szabályra akarsz támaszkodni, akkor legyen ez a következő szabály: „Vedd elő a saját eszedet!”«

»A kezdő matematikus legyen azon, hogy eljusson első fontos felfedezéséhez: fedezze fel, hogy mi érdekli legjobban, találja meg a neki legmegfelelőbb kutatási irányt.«

»Igényesebb tervnek több esélye van a sikerre.«

»A stílus első szabálya, hogy legyen valami mondanivalód. A stílus második szabálya, hogy ha történetesen két dolgot akarsz mondani, uralkodj magadon: először az egyiket mondd el, és csak azután a másikat.«

»Semmilyen ötlet sem rossz, csak azzá válhat, ha kritikátlanul elfogadjuk. Csak az igazán rossz, ha semmilyen gondolatunk sincs.«

A szerző néhány »szintetikus« közmondást konstruált; ezek közül példaként csak egyet idézünk:

»Ha gombát találsz, vagy felfedezésre bukkansz, jól nézz körül, mind a kettő telepekben nő.«

E néhány idézetet azért ragadtuk ki a könyvből, hogy felkeltsük azok érdeklődését, akik még nem olvasták el ezt a könyvet, amelyet véleményem szerint minden matematikusnak, a matematika minden tanárának el kell olvasnia.

Befejezésül még néhány szót a magyar kiadásról. Pólya György könyve a szó nemes értelmében irodalmi mű, amelynek nemcsak tartalma, hanem stílusa is eredeti és élvezetes, ezért lefordítása más és sok tekintetben nehezebb feladatot jelentett, mint általában egy népszerű matematikai könyv fordítása. Nehezítette a fordító feladatát számos olyan részlet (mint pl. egy mulatságos anagramma), amely jellegénél fogva lefordíthatatlan. A fordító e nehézségekkel sikeresen birkózott meg; a magyar fordítás nemcsak a könyv mondanivalóját, hanem stílusát is híven igyekszik követni. A könyv gondos kiállításáért a kiadót elismerés illeti.

Pólya György kitűnő és külföldön mindenütt nagy sikert aratott könyvének magyar kiadása matematikai irodalmunk komoly nyeresége, amelyet a hazai matematikusok, tanárok és diákok egyaránt örömmel és érdeklődéssel fogadtak. Ezt bizonyítja, hogy a könyv már teljesen kifogyott. Előrelátható lett volna, hogy 3000 példány túl kevés lesz; reméljük azonban, hogy rövidesen megjelenik a második kiadás is. Reméljük továbbá, hogy idővel magyar fordításban is megjelenik Pólya György professzor ugyanezen témakörről írt, részletesebb és a kérdéskörbe mélyebben behatoló újabb munkája is (G. Pólya, Mathematics and plausible reasoning. I. Induction and analogy in mathematics. II. Patterns of plausible inference. Princeton University Press, 1954), amelynek nemrégiben a Szovjetunióban megjelent orosz fordításának *Sz. A. Janovszkaja* által írt előszavából csak a következőket idézzük:

* Helyenként eltérünk a magyar fordítástól és az angol eredetit saját szavainkkal adjuk vissza.

»Arról a kérdésről, lehetséges-e olyan elmélet, amelynek tárgyát nem a matematikai bizonyítások, hanem az ilyen bizonyításokra és általában a matematikai igazságokra, feladatok megoldására való rájövést elősegítő módszerek alkotják, már az ókor óta folyik a vita. E kérdések kell, hogy érdekeljenek minden matematikust és mindenkit, aki a matematikát tanítja vagy tanulja. Ezért reméljük, hogy Pólya könyve hasznára fog válni és örömet fog okozni a szovjet olvasók széles táborának.« Reméljük, hogy rövidesen ugyanezt a reményt a magyar olvasókra vonatkozólag is kifejezésre juttathatjuk, *Pólya György* említett részletesebb munkája magyar kiadásának megjelenése alkalmából.

Rényi Alfréd

Bírálat Huszár Géza: Matematika II—III. Aritmetika és Analízis c. egyetemi tankönyvéről

Huszár Géza négy részből álló matematikai tankönyvet írt, az első rész hónapokkal ezelőtt jelent meg Kombinatorika címmel, a második és harmadik rész egy kötetbe fűzve nemrégen hagyta el a sajtót, a negyedik rész Algebra címmel még nem jelent meg. Hogy milyen olvasóközönségnek, illetve milyen hallgatóknak (egyetemi tankönyvről lévén szó) szánta a szerző könyvét, arról sem a címlap, sem pedig az előszó nem tájékoztat. A II. és III. rész Bevezetésének egy mondata utal pusztán erre a kérdésre: »Tárgyunk egyetemünkön segédtárgy«. Ebből a beavatott, aki tudja, hogy Huszár Géza a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem matematikai professzora, arra következtet, hogy e tankönyv közgazdász hallgatók számára készült. Bírálatunk ennek tudomásul vételével készült, de helyes lett volna ezt a körülményt a címlapon, de lagalábbis az előszóban kidomborítani.

A tankönyv első kötete a kombinatorikával foglalkozik, erről itt nem lesz szó, bírálatunk csakis az Aritmetika és Analízis c. kötetre vonatkozik.

Elöljáróban azonnal leszögezzük, hogy e kötetnek sem tárgyválasztásával, de különösen feldolgozásával nem értünk egyet. Kezdjük először a tárgyválasztással. A modern közgazdaságtudomány bizonyos matematikai ismereteket kíván és a fejlődés tendenciája arra utal, hogy egyre több matematikára lesz a közgazdászoknak szükségük. Helyes tehát, hogy a közgazdaságtudományi egyetemen tanítanak felsőbb matematikát, sőt, úgy hisszük, a jelenleginél bővebb matematikaanyagot kellene tanítani. De, véleményünk szerint, ma a közgazdásznak nem a legfontosabb a számelmélet, a kongruenciák elmélete, vagy a diofantikus egyenletek elmélete; ezek helyett számukra fontosabb kérdésekkel kellene foglalkozni. Azt is erősen vitathatónak tartjuk, hogy az irracionális számok bevezetésének legalkalmasabb módja a lánctörtekkel való bevezetés.

Ellenvetésül fel lehetne hozni, hogy hasznos, ha a közgazdászok egységes képet kapnak a matematika módszereiről és a matematikán tanulják meg a szigorúan következetes, logikus gondolkodást, még akkor is, ha úgy választjuk ki a tananyagot, hogy annak előreláthatóan semmilyen hasznát sem veszik a jövőben. Ez az ellenérv még akkor sem állná meg a helyét, ha a tárgyalásmód valóban alkalmas mód lenne a logikus gondolkodás kifejlesztéséhez. De, sajnos, a Huszár-féle tárgyalásmód nemhogy logikus gondolkodásra tanítja olvasóit, hanem még azokat is megzavarhat, akik például a középiskolában megszerették a matematikai gondolkodást. Félreértés ne essék: tisztában vagyunk azzal, hogy a könyv nem matematikus hallgatóknak íródott, tehát a precizitással szemben nyilván szerényebb igényeket támasztunk, de az egyetemi tankönyvtől joggal elvárhatja mindenki, hogy pl. kifejezetten hibás meghatározások, alany-állítmány nélküli mondatokkal ne legyen tele. Nem baj az, ha egy állítást, mondjuk, a szerző nem bizonyít, hanem csupán illusztrál, egy példával, de akkor mondja azt meg és ne járjon el úgy, mint ahogyan azt teszi pl. a 13. oldalon. Itt két számnak, 72 és 28-nak összeszorozza a legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét és konstatálja, hogy ez 72 · 28. Utána levő sorban így folytatja: »Azt az önmagában is érdekes tényt *bizonyítottuk* be ezzel, hogy...«. Kipróbál egy állítást egy számpáron és erre azt mondja, hogy bizonyítás! Ilyesmit, sajnos, másutt is csinál, pl. a 10. oldalon, ahol egyetlen példából von le általános következtetést.

Talán az sem nagy baj, ha didaktikai meggondolásból *ideiglenesen* valamit nem definiál szabatosan, csupán szemléletesen érzékelteti valamely fogalom lényegét, de már súlyos hibának minősítjük azt, hogy meg nem magyarázott fogalmakkal operál a szerző, azokra épít, és *sehol* sem magyarázza meg őket. Az irracionális szám bevezetésénél (42. old.) épít például az ilyen, nem is egyszerű fogalmakra, mint határértékre, sorozat konvergenciájára, anélkül, hogy valami magyarázatot is fűzne ezekhez. A könyvben végtelen sorozatokról, és hatványsorokról is szó van és sem a konvergencia, sem a határérték fogalma sehol sincsen megmagyarázva!

Nem segíti elő a matematikai gondolkodásra való nevelést az sem, hogy a szerző megszegi azt a már a középiskolában hangoztatott elvet, hogy egy jelölést csak egy fogalom szimbolizálására szabad felhasználni. A könyv első részében (ahol határértékről is van már szó) az (a, b) intervallum jelölésére az $a \rightarrow b$ jelet használja (például 45. oldalon), a második részében minden magyarázat nélkül ez a jel a határátmenetet jelöli. Általában miért nem jó a szerzőnek a világszerte elfogadott és használatos intervallum jelölés és mi indokolja a világszerte használatos határértékjel megmásítását?

Az eddigiek is elégségesek ahhoz, hogy a könyvről ne alkossunk jó véleményt. De ezek mind eltörpülnek azon hibák mellett, melyekkel az analízisről szóló részben találkozunk. Szinte oldalanként van olyasmi, amin a hozzáértő meghökken. Bizonyításul álljon itt néhány kiragadott idézet: »Azonban, ha a P_1 pont igen közel (»infinitezimálisan« közel) van P-hez, úgyhogy mérőműszerekkel (elsősorban szemünkkel) nem tudjuk azokat megkülönböztetni egymástól s úgy *képzeljük* (sic!), hogy a megfelelő jellemző háromszöget nagyítón (?) át nézzük, akkor egyenes vonalúnak látjuk a PP_1 ívet (hajlását szemünkkel nem tudjuk appercipiálni), *tehát* (!) az érintőt a szelőtől nem tudjuk megkülönböztetni, s akkor az $\frac{y_1-y}{x_1-x}$ hányadost az érintő irányhatározójának *tekintjük*. Miután pedig $P(x, y)$ a futópont, a tetszés szerinti pont, ez a hányados bármely ponthoz húzott érintő irányhatározóját adja meg, tehát ezt a hányadost úgy tekinthetjük (!!), mint magát a deriváltat, ha sikerül egy adott függvényre alkalmazva átalakítani ezt a hányadost (!!!). Ebben a formában nem hagyhatjuk (?), mert csak azt mondja, hogy egy igen kicsiny növekményt szeretnénk elosztani egy másik igen kicsi növekménnyel« (87. old.). »Összeg, szorzat és hatvány deriválása. További általános elemi szabályaink bemutatásánál feltesszük a szereplő függvények *folytonosságát.*« (89. old.) Itt u. is nem folytonosságot, hanem deriválhatóságot kellett volna feltenni. A 107. oldalon a következőket olvassuk: »Függvénykapcsolatok helyett az analitikai alakok (?) (modellek) vizsgálata s főleg a grafikus ábrázolás a síkon történő (két dimenziós) változás látszatát kelti.« Ugyancsak érthetetlen az is, ami ezek után a fejezet végéig le van írva. Az egyik bekezdés pl. ezzel a mondattal kezdődik (159. old.): »Az $y = (1 + x)^{\alpha}$ formában szokás írni, és binomális függvénynek nevezzük.« Ez nem nagyon fejleszti közgazdászaink matematikai érzékét és látókörét! De hallgassuk meg az improprius integrál »definícióját« (175. old.) is: »$\int_1^{\omega} \frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{\omega}$, s ha most *ω igen nagy szám...*« Ezek után csaknem magától értetődik, hogy az összes (minden rendszámú) deriválttal bíró függvények analitikai függvények... (78. old.).

Ismételjük, a fentiekhez hasonló idézetek egész garmadát sorolhatnánk fel. De ezeken túlmenően van az egész könyvnek egy furcsa, általunk érthetetlen jellege. Ez pedig a következő: összehasonlító konvergenciakritériumokról beszél, sőt fel is használja őket, de a konvergenciát és határértéket sehol sem magyarázza meg; az egyik függvény differenciálhatóságát kétféle módon is »bizonyítja«, de a differenciálhatóság fogalmát sehol sem magyarázza (az általunk is idézett, a 87. oldalon levő szöveg nyilván nem magyarázat). Egy sor konvergenciájának szükséges feltételéről sehol sem beszél, de bőven tárgyalja — érdekes példa gyanánt — a harmonikus sort! Összehord egy csomó anyagot, amiről nehéz megérteni, miért van a könyvben, a közgazdászképzés kedvéért aligha... Így például miért kell bőven tárgyalni az elemi számelméletnek a középiskolában részletesen tanított fejezeteit, vagy miért kell a bő függelékben a trigonometrikus összefüggéseket »tompaszögre« hosszasan bizonyítani, amikor röviden lehet azt minden szögre megtenni.

Huszár a bevezetésben azt írja, hogy gondolkodásra akarja növelni, könyvén keresztül a dialektikus gondolkodásra szoktatni olvasóit. Ehelyett a legtisztább verbalizmus sugárzik az egész könyvből. Ezt már egészen sajátságos tipográfiája is elárulja, de ez a szövegben is kifejezésre jut. Csak egy jellemző példa: a 100. oldalon az alulról konvex görbét *pohár*alakúnak nevezi, mert az parabola *pozitív a* mellett ilyen alakú! És ezzel még több helyen is találkozunk!

A könyvért a felelősség elsősorban a szerzőt terheli. De osztoznak a felelősségben Bacskay Zoltán és Gyires Béla lektorok és a kiadó is. Igaz ugyan, hogy Gyires Béla lektori véleményében több, mint 150 hibára mutatott rá, de ezekből a konzekvenciákat nem vonta le kellő eréllyel és végülis azon feltételezéssel, hogy a szerző a felsorolt hibákat kijavítja, kiadásra ajánlja a könyvet. Hibás a kiadó, mert a Gyires Béla által felsorolt hibák kijavításához nem ragaszkodott.

Fenyő István

I. G. Petrovszkij, Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951. 151. old. 28,— Ft.

I. G. Petrovszkij akadémikus könyve a közönséges differenciálegyenletek elméletének alapvonalait foglalja össze.

Az első rész első fejezetében a differenciálegyenletekkel kapcsolatos definíciók és a differenciálegyenletek geometriai interpretációja szerepel. A második fejezet a legegyszerűbb közönséges differenciálegyenlet-típusok megoldásait tartalmazza. A harmadik fejezetben a szerző a közönséges differenciálegyenletek megoldásának általános elméletével foglalkozik. A tárgyalás a megoldások exisztencia-tételei, valamint ezeknek a kezdő feltételektől való függése köré csoportosul. Különösen figyelmet érdemel és a szakember számára is nagyon tanulságos a *Tyihonov—Caccioppoli*-féle kontrakciós elv, amely a szukcesszív approximáció módszerén alapuló összes exisztencia-bizonyítások magva. Részletesen foglalkozik a szerző a szinguláris pontokkal és vonalakkal is.

A második rész a közönséges differenciálegyenletrendszerekről szól. A negyedik fejezetben a definíciók és a geometriai interpretáció után a szerző az alaptételeket fogalmazza meg, majd az előbb említett kontrakciós elvet alkalmazza a differenciálegyenletrendszerekre is. Az ötödik fejezetben a lineáris differenciálegyenletrendszerek általános elméletének igen alapos és részletes kidolgozása következik. Ennek kapcsán szó esik a másodrendű lineáris homogén differenciálegyenletek megoldásainak zérushelyeiről és az n-edrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet megoldásáról is. A hatodik fejezet az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletrendszerekről szól. Ismerteti a homogén egyenletrendszer alaprendszerének és az inhomogén rendszer partikuláris megoldásainak meghatározását. Külön paragrafusban foglalkozik a megoldások stabilitásával.

A függelékben a szerző az elsőrendű parciális differenciálegyenletekkel foglalkozik röviden. (A parciális differenciálegyenletek elméletének részletes tárgyalását a szerző az *Előadások a parciális differenciálegyenletekről* című kötetben adja.)

A szerző könyvében nem egészen 130 oldalra hatalmas anyagot sűrít össze. Ezt úgy éri el, hogy egyrészt fogalmazása tömör, másrészt úgy, hogy több bizonyítási lehetőség esetén általában a legrövidebbet választja. (Pl. *Cauchy* tételének *komplex* bizonyítása.)

A könyv didaktikai módszere kiváló. Minden új fogalmat megfelelően választott példák segítségével világít meg, a bizonyításokat gondosan dolgozza ki, az egyes fejezetek felépítése könnyen áttekinthető, jól tagolt. Éppen ezért a könyvet nagy haszonnal forgathatja mindenki, aki e tudományág iránt érdeklődik.

A fordítás *Koncz Károly* gondos munkáját dícséri.

Scharnitzky Viktor

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENT

Ára 12 Ft.
Előfizetés évi 20 Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Szabadság tér 17. Telefon: 311—793). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg gépírással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Különböző külföldi természettudományos, műszaki, orvosi stb. szakfolyóiratok 1953—1954. évi vegyes számai a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila u. 3. sz. alatti lapüzletében példányonként megvásárolhatók.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.

A kézirat beérkezett: 1960. II. 18. — Példányszám: 1500 — Terjedelem: 12 (A/5) ív
A kiadásért felelős: Bernát György, az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki felelős: Pataki Ferenc

Szegedi Nyomda Vállalat 60-1004