312.046
VII
1956
1-4

MATEMATIKAI LAPOK

VII. ÉVFOLYAM

1-2.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1956

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.
Budapest, 1956. május, VII. évfolyam 1—2. szám.
Felelős szerkesztő: Turán Pál.
Szerkesztők: Aczél János, Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd.
Szerkesztőség: Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.
A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.
Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850. Csekkszámlaszám: 61 257.
Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.
Előfizetés egy évre 20,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

Riesz Frigyes † 1
Erdős Pál: Megjegyzések a Matematikai Lapok két feladatához 10
Miron Nicolescu: A Román Tudományos Akadémia Matematikai Intézetének és a Bukaresti Egyetem Analízis Tanszékének matematikai munkásságáról 18
Hajnal András és Kalmár László: Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez I. 26
Bihari Imre: A Bessel-függvények egy monotonitási tulajdonságáról . . . 43
Fried Ervin: Algebrailag zárt testek mint véges bővítések 47
Obláth Richárd: Vályi Gyula (1855 január 25—1913 október 13) 61
Turán Pál: „Faktoriálisos" számrendszerbeli „számjegyek" eloszlásáról" 71
Rényi Alfréd: A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle előállításaiban 77
Aczél János: A természetes logaritmus és az exponenciális függvény bevezetéséről 101
Kővári Tamás: Egy Turán-féle problémáról 106
Heppes Aladár és Révész Pál: A Borsuk-féle feldarabolási problémához 108
Máté János: A kínai matematika történetének egy problémájáról 112
Feladatrovat 114
Példarovat 156
Jelentés a Beke Manó emlékdíj ötödik kiosztásáról 167
Hírek 171
Társulati élet 177
Könyvismertetés 201
Hibaigazítás 205

A Bolyai János Matematikai Társulat mélységes fájdalommal tudatja, hogy

RIESZ FRIGYES

egyetemi tanár, a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagja, a Francia Tudományos Akadémia levelező tagja, a Svéd Királyi Fiziográfiai Társaság külső tagja, a Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem, a Szegedi Tudományegyetem és a párizsi Sorbonne díszdoktora, a Bolyai János Matematikai Társulat tiszteletbeli elnöke 1956. évi február hó 28-án, 76 éves korában, hosszas szenvedés után elhunyt.

Halálának híre mélységesen megrendített valamennyiünket. Bár hosszú betegsége alatt, állapotának súlyossá válásakor ismételten aggódnunk kellett életéért, mégis az utolsó percig remény-

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

kedtünk, hogy az orvostudomány valamennyi vívmányát harcba vető erőfeszítések sikeresen veszik fel a küzdelmet a kérlelhetetlen végzettel. Szomorú megdöbbenéssel vettük a hírt, hogy nem így történt: a csodálatra méltó elme nem gondolkodik többé s a nagy szív megszünt dobogni.

Elhunyta nemcsak a magyar matematikai tudomány számára pótolhatatlan veszteség: személyében az egész világ matematikusainak egyik legkiválóbbja fejezte be a matematika számos fejezetét gyökeresen átformáló, alapvető jelentőségű felfedezésekben mérhetetlenül gazdag működését.

Riesz Frigyes 1880. január 22-én, Győrött született. Középiskoláinak elvégzése után, bár hajlama a tudományos kutatás s a matematika felé vonzotta, a zürichi műegyetemre iratkozott be. Az akkori hazai viszonyok között szülei, s talán ő maga is, biztosabbnak látták a mérnöki pályát, mint az igen kevés perspektívát nyujtó matematikusi hivatást. Csakhamar győzedelmeskedett azonban az elmélyedő tudományos kutatás iránti vonzódása és egyetemi tanulmányait a budapesti, majd a göttingai tudományegyetemen folytatta és fejezte be. Megszerezte a bölcsészdoktori oklevelet is, értékes gondolatokban gazdag, de különösebb figyelmet nem keltő projektív geometriai tárgyú doktori értekezésével.

A tanári oklevél megszerzése után Lőcsén, majd Budapesten kap gimnáziumi tanári állást. Eközben szorgalmasan tanulmányozza a tudományos irodalmat, megismerkedik a valós függvénytan egészen új fejlődési szakaszát megindító francia matematikai iskola (Baire, Borel, Lebesgue) eredményeivel s magáévá teszi annak gondolatkörét. Mélyenjáró gondolatai azonban nem vezetnek azonnal valóban jelentős sikerre; több, különféle tárgykörhöz tartozó és kisebb-nagyobb érdeklődést keltő dolgozat közlése után csak 1907-ben mutatják be a párizsi tudományos akadémián első olyan munkáját, amelyben szellemének nagysága teljes erejével megmutatkozik s amely egymagában is a matematikai gondolkodás legnagyobbjai közé emelné őt: ekkor közli a nem sokkal később Ernst Fischer által is felfedezett és azóta Riesz—Fischer-tétel néven általánosan ismert tételt.

Ezzel mintha megtört volna a jég; megtalálva azt a munkaterületet, amelyen fényes tehetsége akadálytalanul kibontakozhatik, rövid egymásutánban közli újabb és újabb, most már szinte kivétel nélkül alapvető jelentőségű felfedezéseit. Ezeknek legtöbbje a Riesz—Fischer-tétel gondolatköréhez csatlakozik, az abban rejlő lehetőségeket aknázza ki egyre mélyebben, az általa keltett gondolatoknak vonja le egyre messzebbre ható következményeit. Ugyanakkor azonban arra is jut energiája, hogy a Rómában 1908-ban tartott nem-

zetközi matematikai kongresszuson egy rövid előadásban megalkossa az általános topologikus tér első valóban használható és mai napig is (módosított, de ekvivalens formában) életképes axiómarendszerét.

A már világszerte ismert s a fiatal kutatók legkiválóbbjai közé sorolt tudós munkásságát csak elkésve és vontatottan követi külső elismerés. Középiskolai tanári állásából csak 1911-ben szólítják a kolozsvári egyetem helyettes tanári székébe s nyilvános rendes tanári kinevezésére még ezután is három évig várnia kell. Időközben 1913-ban megjelenik Párizsban addigi felfedezéseit nagyszerű formában összegező könyve a végtelen sok ismeretlenes egyenletrendszerekről. A fényes sikerek elől a hazai tudományos élet sem zárkózhatik el: a Magyar Tudományos Akadémia 1916-ban levelező tagjává választja.

Kolozsvári működése 1920-tól lehetetlenné válik. A hírneves tudóst bizonyára szívesen látta volna katedráján számos külföldi egyetem, ő azonban hű marad hazájához és vállalja a kilátástalan, csaknem reménytelennek tűnő feladatot: Szegeden, a semmiféle tudományos hagyománnyal nem rendelkező alföldi városban, úgyszólván a semmiből indítja meg egy egyetemi intézet működését. A tudományos munkát hátráltató körülmények, az egyetem egyre változó ideiglenes, más célra készült épületekben való elhelyezése nem gátolja meg abban, hogy szegedi működésének éveiben is tovább folytassa nagyszerű felfedezéseinek sorozatát. Sőt újabb, ugyancsak reménytelennek tetsző, áldozatos munkát kívánó feladatba is fog: kiváló tanártársával, Haar Alfréddal együtt idegennyelvű matematikai folyóiratot alapít olyan országban, amelyben addig csupán egy magyar s egy idegennyelvű, matematikai és fizikai cikkeket egyaránt közlő folyóiratot sikerült fenntartani (méghozzá a háborús évek vége felé egyre csökkenő terjedelemben), s a matematikai szedés nehéz feladatában teljesen járatlan nyomdával rendelkező városban. Bámulatra méltó akaraterővel diadalmaskodik a nehézségeken s a szegedi Acta rövidesen a legnagyobb multú tudományos folyóiratok színvonalával vetekszik, eleinte tartalmában, majd kiállításában is.

Bár egyre ontja az analízis fejlődésében újabb és újabb távlatokat nyujtó dolgozatait s bár világszerte a legelső matematikai kutatók közé kezdik sorolni, az akkori politikai viszonyok miatt nem sikerül budapesti egyetemi tanári kinevezést nyernie s első ízben visszautasítják a Magyar Tudományos Akadémia rendes tagjává való jelölését is. Csak másodszori jelölésekor, 1936-ban választják meg rendes tagnak, Budapestre való áthelyezését pedig csak a népi demokrácia valósította meg.

A felszabadulás Szegeden éri, ahol 1944 novemberében az elsők között kezdi meg előadásait. Ő vállalja el az egyetem rektori tisztét, ezt a megtisztelő, de az akkori időkben különösen áldozatos munkát igénylő megbizatást. Amikor 1946-ban végre valóra válik régi vágya s a Budapesti Tudományegyetem tanárának hívhatja meg őt, a távozó nagy tudóst a Szegedi Tudományegyetem díszdoktorává avatja. 1949-ben a Kossuth-díj aranyfokozatával tüntetik ki, majd 1950-ben, hetvenedik születésnapja alkalmából a Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem ujonnan szervezett természettudományi karát éri az a megtiszteltetés, hogy — Fejér Lipóttal együtt — őt avassa egyik legelső díszdoktorává.

Magas kora és gyakori betegeskedése nem akadályozza meg az aktív tudományos munkában. Egy életen át kikristályosodott módszereit, nagyszerű felfedezéseinek nagy részét foglalja össze tanítványával, Szőkefalvi-Nagy Bélával együtt irt „Leçons d'analyse fonctionnelle" című munkájában, amely 1952-ben jelenik meg. Az utóbbi évek matematikai könyvterméséből talán egy műnek sem volt — világviszonylatban — ilyen sikere: azóta két további francia nyelvű kiadása jelent meg, lefordították orosz, német, angol és kínai nyelvre. E munkájáért 1953-ban a Kossuth-díj nagydíját nyeri el.

Egyre romló egészségi állapota mellett is töretlen akaraterővel látja el egyetemi tanári teendőit; minthogy huzamosabb ideig állni nem tud, ülve tartja előadásait, a képleteket asszisztensének diktálva. Részt vesz tudományos életünk irányításában is, mint a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának elnöke; e tisztségéről való lemondásra csak 1955-ben kényszeríti betegségének feltartózhatatlan elhatalmasodása. Ez év tavaszán még előadást vállal a budapesti tudományegyetem matematikai-fizikai-kémiai karának ülésszakán, ez azonban már hattyúdala; ősszel ágynak esik, hosszú ideig élet és halál között lebeg, majd állapota átmenetileg javul s már a kórház elhagyására sző terveket, amikor hirtelen súlyosra fordul a betegség és mindnyájunk fájdalmára lezárja a végzet ellen folytatott küzdelmet.

Nem lehet feladatunk, hogy Riesz Frigyes tudományos munkásságát e helyen részletesen méltassuk; arra kell szorítkoznunk, hogy kiemeljük tudományos egyéniségének néhány különösen jellegzetes vonását.

Rendkívüli mértékben rendelkezett a lényeges meglátására, a látszólag távoleső fogalmak közötti analógiák megragadására szolgáló képességgel. A Riesz—Fischer-tétel felfedezése után csakhamar észrevette, hogy az lehetővé teszi, hogy a Lebesgue-féle értelemben négyzetesen integrálható függvények összessége és a végtelen

sok koordinátával rendelkező vektorok összessége között kölcsönösen egyértelmű és a távolságot is megtartó megfeleltetést létesítsünk; ilyen módon az említett függvények halmazát geometriai tulajdonságokkal lehet felruházni, belőlük az L^2-vel jelölt függvényteret lehet megalkotni. Ennek mintájára a p-edik hatványukkal együtt integrálható függvényekből is egy — bonyolultabb szerkezetű — L^p függvényteret alkot, amelynek alapvető, részben az L^2 térre emlékeztető tulajdonságait ő fedezi fel. Mindezen függvényterekben megállapítja a lineáris operációk legáltalánosabb alakját, vagyis megkonstruálja az összes olyan folytonos $L(f)$ hozzárendeléseket, amelyek a kérdéses függvénytér minden f eleméhez egy $L(f)$ valós számot rendelnek hozzá, éspedig úgy, hogy

$$L(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 L(f_1) + c_2 L(f_2).$$

Megoldja az analóg feladatot a folytonos függvények által alkotott C függvénytér esetében is. Megadja annak a feltételét, hogy az L^p tér valamely részhalmazán értelmezett lineáris operáció kiterjeszthető legyen az egész térre, s ezáltal döntően járul hozzá a régóta vizsgált ún. momentum-probléma megoldásához. A talált módszereket és eredményeket rendkívül hatékonyan alkalmazza az integrálegyenletek bizonyos, a matematikai fizikában igen hasznosnak mutatkozó típusainak tárgyalására s igen szemléletes okoskodással bizonyít be olyan eredményeket, melyeket előtte Fredholm rendkívül nehézkes apparátus segítségével tudott csak bizonyítani.

A most felsorolt, 1920 előtt talált eredmények szolgáltatták azt a konkrét anyagot, amelyre támaszkodva lengyel matematikusok a lineáris operációk általános elméletét megalkották; az ebben alapvető szerepet játszó ún. Banach-féle terekre éppen az előbb említett, Riesz által részletesen vizsgált L^p és C terek nyujtották az első, klasszikus példákat. Ilyenformán ő volt az, aki a függvényterek vizsgálatában az első lépéseket megtette s ezáltal a funkcionális analízis ma már hatalmas tudománnyá terebélyesedett elméletét megalkotta. Ennek további kiépítésében is igen aktívan részt vett s azt később is számos értékes eredménnyel gazdagította, amelyeknek legnagyobb része az euklideszi terek, a végtelen sok dimenziós koordinátatér és az L^2 tér legközvetlenebb általánosítását képező Hilbert-féle terek elméletébe vág.

Csaknem teljesen elszigetelt ezzel szemben Riesz Frigyes munkásságában az 1908-as római kongresszuson tartott, már említett előadása, amelyben a topologikus tér fogalmát értelmezi. Akkor már ismeretes volt a metrikus tér Fréchet-től származó és kitünően bevált fogalma, a térfogalom további általánosítására maga Fréchet is több, sikerültnek nem mondható kísérletet tett. A lényegesnek páratlanul mély meglátása kellett ahhoz, hogy Riesz Frigyes

alig néhány évvel Fréchet első munkáinak megjelenése után olyan axiómarendszert nyujtson a topologikus tér általános fogalma számára, amely azóta is csak jelentéktelen mértékben volt általánosítható s amely a topológiai vizsgálatok gerincét képező topologikus tereket mind magában foglalja. Ezek a vizsgálatai akkor nem keltettek különösebb visszhangot, ő maga sem folytatta azokat, úgyhogy az általa adott topologikus térfogalom jelentősége csak a huszas években, a szovjet és a lengyel topológiai iskolák munkássága nyomán domborodott ki.

Ismét az általánosításra alkalmas lényeg megragadásának csodálatos példáját bámulhatjuk Riesz Frigyesnek a szubharmonikus függvények fogalmára vezető és ezek elméletét megalapozó kutatásaiban. Az egyváltozós konvex függvény fogalmának többváltozós függvényekre való átvitelével sokan próbálkoztak, számos különféle jellegű általánosítás ismeretes, amelyeknek egyike sem talált számottevő alkalmazásra. Riesz Frigyes látta meg, hogy a konvex függvény jellegzetes tulajdonsága abban áll, hogy ha egy intervallum végpontjaiban egy lineáris függvény alatt marad, akkor ugyanez az intervallum belsejében is teljesül; lineáris függvény pedig az a függvény, amelynek az intervallum felezőpontjában felvett értéke egyenlő a végpontokban felvett értékek számtani középértékével. Tegyünk itt az egyváltozós függvény helyébe kétváltozóst, az intervallumok helyébe körlemezeket: akkor a lineáris függvények szerepét átveszik azok a függvények, amelyeknek a körlemez középpontjában felvett értéke a kerületen felvett értékek számtani középértéke, vagyis a harmonikus függvények, a konvex függvény fogalma pedig átmegy azon függvény fogalmába, amely egy harmonikus függvény alatt marad az egész körlemezen, hacsak a körlemez kerületén alatta marad; ezek éppen a Riesz Frigyes által bevezetett szubharmonikus függvények. Ő fejtette ki e függvények elméletének első lényeges eredményeit, köztük azt az alapvető megállapítást, hogy a szubharmonikus függvények azonosak a negatív tömegeloszlások potenciáljaival; ennek nyomán a szubharmonikus függvények elmélete rövidesen hatalmas mértékben kiépült s a potenciálelmélet fejlődésének egészen új lendületet adott. Riesz Frigyes tanítványa, Radó Tibor, az első közlemények megjelenése után alig tizenöt évvel már terjedelmes füzetben számolhatott be az elmélet fényes eredményeiről.

Jellegzetes vonása Riesz Frigyes egyéniségének az is, hogy mások munkáiban is meglátja az újat, a továbbfejlődésre képeset, s azt eredményesen tudja alkalmazni saját problémáinak megoldására. Ő volt a legelsők egyike, aki meglátta a Lebesgue-féle integrálfogalom jelentőségét s azt a függvényterek elméletének kiépíté-

sében hatékonyan felhasználta. Mai szemmel nézve rendkívül meglepő, hogy Lebesgue-nek és körének ma alapvetőnek tartott munkái a maguk idejében milyen kicsiny nemzetközi visszhangot váltottak ki; csaknem azt lehet mondani, hogy a Lebesgue-integrál Riesz Frigyes által talált alkalmazásai voltak az első olyan eredmények, amelyek megmutatták, hogy a Lebesgue-féle integrálnak a Riemann-félénél általánosabb volta nem puszta öncél, hanem döntő jelentőségű olyan analógiák megállapításában, amelyek a a klasszikus integrálfogalom mellett maradva nem állanának fenn.

Hasonló a helyzet egy másik integrálfogalom, a Stieltjes-féle integrál esetében is. Bár ezt a fizikusok szabatos definíció nélkül régóta alkalmazták mint tömegeloszlásra vonatkozó integrált s bár a szabatos definíciót König Gyula előadásaiban, Stieltjes pedig a múlt század nyolcvanas éveiben közzétett dolgozataiban megadta, ez az integrálfogalom mindaddig csaknem ismeretlen maradt, amíg Riesz Frigyes azt a C tér lineáris operációinak előállítására fel nem használta. Ez a fontos alkalmazás terelte rá Lebesgue figyelmét a Stieltjes-integrál fogalmára s vezette őt saját integrálfogalmának a Stieltjes-félét is magában foglaló, azóta számos további fontos általánosítást eredményező továbbfejlesztésére.

A lényeg meglátására szolgáló képesség szorosan összefügg Riesz Frigyesnek ama következetes törekvésével, hogy a bonyolult gondolatokat egyszerűsítse, a hosszadalmas utakat lerövidítse. Megnyilvánul ez a törekvés munkáinak formájában is; stílusa utolérhetetlenül világos, kifejező, mindig a lényeget kidomborító, a részletekben soha sem elvesző. De megnyilvánul ez a törekvés a munkák tartalmában is, éspedig nemcsak abban, hogy saját vizsgálatait mindig a legleszűrtebb, legelegánsabb formában teszi közzé, hanem abban is, hogy mások eredményeit is törekszik mindig a lehető legegyszerűbb formára hozni.

Ezen a téren szinte hihetetlen eredményeket ért el. Évtizedeken át fáradozott azon, hogy a Lebesgue-integrál elméletének minél egyszerűbb, minél kevesebb előzetes meggondolást igénylő felépítését nyujtsa. Míg Lebesgue eredeti felépítésében s az annak nyomán haladókban is az integrál elméletét megelőzi a mérhető halmazok s a mérték elméletének meglehetősen szemléletes, de hosszadalmas tárgyalása, addig Riesz Frigyes végül is eljutott a Lebesgue-integrál elméletének kifejtésére szolgáló olyan módszerhez, amely csupán a nullamértékű halmazok néhány sorban bebizonyítható tulajdonságait használja fel s rendkívül gyorsan elvezet az integrálelmélet minden fontos eredményéhez. Ezt az előadásaiban régóta tárgyalt felépítésmódot alkalmazza 1952-ben megjelent munkájában is példátlan eleganciával.

Nem kevésbé volt sikeres az a törekvése, hogy a monoton függvények majdnem mindenütt való differenciálhatóságáról szóló Lebesgue-féle tétel bizonyítását egyszerűsítse. Míg a régebbi tárgyalásban ez a tétel az integrálelmélet nehéz tételeinek következményeként adódott, s bizonyításának későbbi változatai sem kerülhették el a mértékelmélet mélyenfekvő segédeszközeit, addig Riesz Frigyes 1932-ben a tétel bizonyítását egy teljesen elemi lemmára vezette vissza, egyébként is rendkívül elegáns meggondolással. Így lehetővé vált e tartalmában igen egyszerű tételnek az őt megillető helyen, tudniillik a differenciálszámítás körében való tárgyalása; belőle csakhamar számos további fontos tételt sikerült levezetnie.

Jelentős egyszerűsítéseket hajtott végre a Hilbert-tér lineáris operátorainak elméletében is. A korlátos önadjungált operátorok spektrálelőállításának Hilbert-féle, igen nehézkes bizonyítását már 1913-ban megjelent könyvében jelentősen egyszerűbbel és elegánsabbal pótolta, majd később hasonlóan járt el a nem-korlátos operátorok spektrálelőállítására vonatkozó Neumann János-féle tétellel is. Joggal írta Szőkefalvi-Nagy Béla, hogy a tárgyalásnak Riesz Frigyestől származó egyszerűsítései nélkül aligha lehetett volna a Hilbert-tér operátorainak spektrálelméletét 80 oldalnyi terjedelemben bizonyításokkal együtt összefoglalni.

Meg kell még említenünk azokat az egyszerűsítéseket és általánosításokat, amelyekkel Riesz Frigyes az ergod-elméletnek a harmincas években kialakult tudományát gazdagította, s végül, de nem utolsó sorban, azt a remek eleganciájú bizonyítást, amelyet a konformis leképezések alaptételére Fejér Lipóttal együtt talált; ennek az addig rendkívül körülményesen bizonyítható alapvető jelentőségű tételnek azóta ez „a“ bizonyítása, ezt tartalmazzák az azóta megjelent összes tankönyvek és monográfiák.

A bonyolult egyszerűvé tételére való törekvés már a tudóstól a tanár felé vezet bennünket. Riesz Frigyes e téren is felejthetetlen teljesítményt nyujtott. Azok az erőfeszítések, amelyeket a valós függvénytan egyes eredményeinek elérésére szolgáló utak lerövidítésére tett, közvetve, de legtöbbször közvetlenül is az oktatás céljait szolgálták: hallgatóit akarta a modern analízis e fontos fogalmaihoz és eredményeihez közelebb hozni. Ezek sokszor talán nem is tudták értékelni, milyen nagyszerű élményben lehet részük az ő előadásainak hallgatásakor, hiszen az egyszerűsítés erejét csak az érzi igazán, aki már a bonyolult és hosszadalmas utat is megjárta. Remek összefoglalását adja a látszólag elérhetetlen magasságokba vesző problémák kézzelfoghatóvá tételére szolgáló mesterfogásainak rektori székfoglalójában; minden pedagógus számára megszívlelendő

programot ad itt e szavaival: „a komplikáltat egyszerűvé, a nehezet könnyűvé tenni". Ez volt Riesz Frigyesnek, a tanárnak tüneményes sikerrel végrehajtott célkitűzése, ennek szolgálatába állította alkotó munkásságának jelentékeny részét is.

1950-ben, hetvenedik születésnapja alkalmából, a Szovjetunió Tudományos Akadémiája díszes okiratban kívánt tudományos munkásságához további sok sikert. Ebben álltak e szavak: „Ön egyike a matematikai gondolkodás legelső élő mestereinek." E szavak egyike, fájdalom, ma már nem valóság: Riesz Frigyes nincs többé az élők sorában. De alkotásai, amelyek a XX. század matematikai felfedezéseinek legjelentősebbjei között sorakoznak, mégis közöttünk tartják nagy szellemét, hiszen csak az hal meg igazán, akit elfelejtenek; Riesz Frigyes halhatatlan emlékét pedig évszázadok múlva is őrizni fogják az emberiség legnagyobbjai között.

Megjegyzések a Matematikai Lapok két feladatához

ERDŐS PÁL

A Matematikai Lapokban megjelent a következő feladat[1]: Bebizonyítandó, hogy minden ε-hoz megadható oly a, amelyre $\varphi(a)+\varphi(a+1)<\varepsilon a$, ($\varphi(a)$ az Euler-féle φ függvényt jelenti.)

Talán nem lesz érdektelen megvizsgálni, vajon mennyire élesíthető a feladat állítása — annál is inkább, mert elemi analitikus számelméleti módszerekkel kérdésünkre válaszolni tudunk s az érdeklődő olvasó e módszerekkel aránylag könnyen megismerkedhetik. Az is jól látható lesz, hogy hogyan jönnek létre azok a tételek, melyekben többszörösen iterált logaritmusok szerepelnek, melyek az analítikus számelmélettől távolesőket sokszor furcsa hangzásuknál fogva mulattatják.

E cikkben $c_1, c_2, \ldots$ pozitív konstansokat fognak jelölni, $\log_r n$ az r-szer iterált logaritmust jelöli, $L_n=[\log_3 n/\log_4 n]$.

I. TÉTEL. *Minden $\varepsilon>0$-hoz létezik oly $n_0=n_0(\varepsilon)$, hogy minden $n>n_0$-hoz van oly $a<n$, melyre*

$$\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi(a+L_n)<\varepsilon a.$$

II. TÉTEL. *Minden pozitív η-ra fennáll, hogy*

$$\liminf_{a=\infty}[\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi(a+(1+\eta)L_n)]/a=\infty.$$

A II. tétel nyilván azt jelenti, hogy az első tételben foglalt állítás tovább nem élesíthető.

Első pillanatban talán azt gondolhatnánk, hogy az I. és II. tételek problémánk teljes megoldását tartalmazzák. E tételek azonban még a következő módon élesíthetők.

[1] MEDGYESSY PÁL, II. (1951), 145. o. 40-ik feladat, LIPTÁK JÓZSEF és TAKÁCS LAJOS megjegyzik, hogy minden k-hoz és ε-hoz van oly a, melyre $\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi(a+k)<\varepsilon a$. IV. (1953), 38—39.

III. TÉTEL:

$$\liminf_{a=\infty}\left[\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots\right.$$

$$\left.+\varphi\left(\left[a+\frac{\log_3 a}{\log_4 a-\log_5 a}+\frac{c\log_3 a}{(\log_4 a)^2}\right]\right)\right]\Big/ a=e^c/\alpha,$$

ahol $\alpha=\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1/p}$ *(a szorzat nyilván konvergens).*

A III. tételt nem fogjuk bebizonyítani, ugyanis a bizonyítás azonos, csak kissé komplikáltabb, mint az I. és II. tételek bizonyításai. Tudtommal itt fordul elő először egy tételben ötszörösen iterált logaritmus.

LANDAUtól[2] származik a következő tétel:

$$\liminf_{n=\infty}\varphi(n)\log_2 n/n=e^{-C},$$

ahol C az Euler konstanst jelöli. Legyen $g(n)$ n-nek nem csökkenő függvénye, ($g(n)$ állandó is lehet). Fennáll

IV. TÉTEL.

$$\liminf_{n=\infty}\max\left(\varphi(n),\varphi(n+1),\ldots,\varphi(n+[g(n)])\right)(e^C\log_2 n)^{1/[g(n)+1]}/n=1.$$

Amennyiben $g(n)\to\infty$ az $(e^C)^{1/g(n)+1}$ faktor természetesen 1-gyel helyettesítendő.

A IV. tételből következik, hogyha $g(n)/\log_3 n\to\infty$, akkor

$$\liminf_{n=\infty}\max\left(\varphi(n),\varphi(n+1),\ldots,\varphi(n+[g(n)])\right)/n=1.$$

Ennél azonban lényegesen élesebb tételt mondottam ki egy régebbi dolgozatomban.[3] A IV. tételt se fogjuk bebizonyítani, mert a bizonyítás hasonló az I. és II. tételek bizonyításához.

Egy n számot akkor nevezünk abundánsnak, ha $\sigma(n)\geqq 2n$, ahol $\sigma(n)$ n osztóinak összegét jelenti. Egy régebbi dolgozatomban[3] bebizonyítottam, hogy létezik két konstans c_1 és c_2 úgy, hogy van $c_1\log_3 n$ n-nél kisebb konzekutív abundáns szám, de nincs $c_2\log_3 n$ n-nél kisebb konzekutív abundáns szám. A következő élesebb tételt tudom bebizonyítani:

V. TÉTEL. *Létezik két folytonos függvény* $f(x)$ *és* $g(x)$, $f(x)$ *az* $(1,\infty)$ *intervallumban van definiálva,* $f(1)=\infty$, $f(\infty)=0$,

[2] Arch. Math. und Phys. (1903), 86—91.

[3] Note on consecutive abundant numbers, Journal London Math. Soc. 10 (1935), 128—131.

$f(x)$ szigorúan monoton csökkenő, $g(x)$ a $(0,1)$ intervallumban van definiálva s ott szigorúan monoton növekvő, $g(0)=0$, $g(1)=\infty$, úgyhogy azon n alatti leghosszabb konzekutív egész számokból álló sorozat hossza, melyekre vagy $\sigma(a)>ax$, vagy $\varphi(a)<ax$, $(1+o(1))f(x)\log_3 n$, vagy $(1+o(1))g(x)\log_3 n$ alakú.

Az V. tétel bizonyítását szintén nem közöljük, mert hasonlít az I. és II. tételek bebizonyításához s egy régebbi dolgozatomban levő bizonyításhoz.[3]

TURÁNtól[4] származik a következő feladat: Jelölje $d(n)$ n osztóinak számát. Létezik-e tetszőleges nagy pozitív k-hoz oly n, hogy

$$d(n)<d(n+1)-k \quad \text{és} \quad d(n)<d(n-1)-k. \tag{1}$$

Ismeretes, hogy $d(n)$ maximuma $2^{\log n/\log_2 n}$ rendű (e tétel WIGERTtől való),[5] ez pontosan azt jelenti, hogyha $\varepsilon>0$ tetszés szerinti pozitív szám, akkor minden $n>n_0(\varepsilon)$-ra $d(n)<2^{(1+\varepsilon)\log n/\log_2 n}$, viszont végtelen sok n-re $d(n)>2^{(1-\varepsilon)\log n/\log_2 n}$. (1) már most következőképpen élesíthető: Minden $\varepsilon>0$-hoz található oly $l=l(\varepsilon)$, hogy végtelen sok n-re fennáll, hogy

$$d(n)<l,\quad d(n+1)>2^{(1/2-\varepsilon)\log n/\log_2 n},\quad d(n-1)>2^{(1/2-\varepsilon)\log n/\log_2 n} \tag{2}$$

(2) valószínűleg tovább nem élesíthető, azaz $\frac{1}{2}-\varepsilon$ nem helyettesíthető $\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)$-nal. (2) bizonyítását nem részletezzük, elég egyszerűen következik BRUN módszerének alkalmazásával, (1) és (2)-höz hasonlóan vizsgálhatjuk, milyen éles lokális maximuma lehet $d(n)$-nek. Itt a következő bizonyítható: minden $\varepsilon>0$-hoz létezik végtelen sok n, melyre

$$d(n)>2^{(1-\varepsilon)\log n/\log_2 n}[\max(d(n+1),d(n-1))]. \tag{3}$$

(3) bizonyítását szintén nem részletezzük, BRUN módszerével itt is könnyen célt érünk, itt azonban Brun módszere valószínűleg elkerülhető lesz (lásd a Mat. Lapok-ban rövidesen megjelenendő feladatom megoldását).

Valószínűnek látszik különben, hogy $n>n_0(\varepsilon)$ esetén

$$d(n(n+1))=d(n)d(n+1)<2^{(1+\varepsilon)\log n/\log_2 n}. \tag{4}$$

[4] Mat. Lapok V. (1954), 48. 71. feladat.

[5] Lásd pl. E. Trost Primzahlen, vagy pedig Hardy—Wright Number Theory third edition. Lásd még Kalmár László, Középiskolai Mat. Lapok II. (1950), 91.

Azonban (4) bebizonyítása igen nehéznek látszik. A főnehézség a következő: Ha $(A, B) = 1$, akkor mindig van oly $0 < x \leqq AB$, melyre $x \equiv 0 \pmod{A}$, $x \equiv 1 \pmod{B}$. A „baj" mármost az, hogy nem ismeretes oly használható feltétel, mely $x > (AB)^{1-\varepsilon}$-t tudna biztosítani.

Felvethető még a következő kérdés: Melyik a leghosszabb n alatti sorozat, melyre $\sigma(a) < \sigma(a+1) < \cdots < \sigma(n+k)$?

VI. TÉTEL. *Legyen* $T_n = [\log_3 n / \log_6 n]$, $i_1, i_2, \ldots, i_{T_n}$ *az* $1, 2, \ldots, T_n$ *számok egy tetszésszerinti permutációja. Akkor ha* $n > n_0(\varepsilon)$, *létezik oly* $a < n$, *melyre* $\sigma(a+i_1) < \sigma(a+i_2) < \cdots < \sigma(a+i_{T_n})$. *Ezzel szemben, ha* $n > n_0(\varepsilon)$, *nincs oly* $a < n$, *melyre* $\sigma(a) < \sigma(a+1) < \cdots < \sigma(a+[(1+\varepsilon)T_n])$, *vagy* $\sigma(a) > \sigma(a+1) > \cdots > \sigma(a+[(1+\varepsilon)T_n])$. *Ugyanily tétel érvényes a* φ *függvényre*

VII. TÉTEL. *Legyen* $k = (\log n)^{1/2-\varepsilon}$ $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *az* $1, 2, \ldots, k$ *számok egy tetszésszerinti permutációja. Akkor ha* $n > n_0(\varepsilon)$ *létezik oly* $a < n$, *melyre* $d(a+i_1) < d(a+i_2) < \cdots < d(a+i_k)$.

A VI. és VII. tételekre még más helyen vissza fogok térni, valószínűnek látszik, hogy a VII. tétel nem marad igaz, ha $(\log n)^{1/2-\varepsilon}$-t $(\log n)^{1/2+\varepsilon}$-nal helyettesítjük.

Az I. TÉTEL *bizonyítása.* Legyen

$$A_n = \prod_{p < \frac{1}{2}\log n} p.$$

Ismeretes, hogy $\prod_{p<x} p < 4^x$ [5] s ezért $A_n < n^{1/2}$. MERTENS[6] ismert tétele szerint

$$\varphi(A_n)/A_n = \prod_{p < \frac{1}{2}\log n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = (1 + o(1))e^{-C}/\log_2 n. \tag{5}$$

Létezik mármost oly $a_1, a_2, \ldots, a_{L_n}$ sorozat, melyre $(a_1 \cdot a_2 \cdots a_{L_n}) | A_n$ és

$$\varphi(a_i)/a_i = (1 + o(1))\ (\log_2 n)^{-1/L_n} = (1 + o(1))/\log_3 n, \quad 1 \leqq i \leqq L_n. \tag{6}$$

(6) bizonyítása igen egyszerű. Legyen

$$a_1 = 2 \cdot 3 \ldots p_{s_1},\ a_2 = \prod_{s_1+1}^{s_2} p_j, \ldots,\ a_i = \prod_{s_{i-1}+1}^{s_i} p_j \ldots, \qquad 1 \leqq i \leqq L_n$$

[6] Hardy—Wright (second edition) 349.

ahol p_{s_i}, $1 \leqq i \leqq L_n$ a következő módon van definiálva:

$$\prod_{s_{i-1}+1}^{s_{i+1}} \left(1-\frac{1}{p}\right) < \frac{1}{\log_3 n} < \prod_{s_{i-1}+1}^{s_i} \left(1-\frac{1}{p}\right). \tag{7}$$

(5)-ből és (7)-ből nyilván következik, hogy

$$\varphi(a_i)/a_i = (1+o(1))/\log_3 n \quad \text{és} \quad \prod_{j=1}^{s_{L_n}} \left(1-\frac{1}{p_j}\right) > \frac{1}{\log_2 n},$$

azaz (6) fennáll és (5) miatt $p_{s_{L_n}} < \frac{1}{2}\log n$ s ezzel állításunk igazolva van.

Legyen mármost

$$x+i \equiv 0 \pmod{a_{i+1}},\ 0 \leqq i \leqq L_n-1,\ \frac{n}{2} < x < n, \tag{8}$$

$x \pmod{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$ egyértelműen meg van határozva s ezért $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{L_n} \leqq A_n < \frac{n}{2}$ miatt (8) megoldható. Mármost $L_n < \log_3 n$ és (6) és (8) miatt

$$\varphi(x+i)/x < (1+o(1))\,\varphi(x+i)/(x+i) \leqq \varphi(a_{i+1})/a_{i+1} = \\ = (1+o(1))/\log_3 n. \tag{9}$$

Tehát (9) miatt

$$(\varphi(x)+\varphi(x+1)+\cdots+\varphi(x+L_n))/x < (1+o(1))L_n/\log_3 n < \varepsilon$$

$n > n_0$-ra

s ezzel az I. tétel be van bizonyítva.

A II. TÉTEL *bebizonyítása*. Legyen

$$\varphi'(a) = \prod' \left(1-\frac{1}{p}\right),$$

ahol $\prod'$ azt jelenti, hogy $p|a$, $p < 2\log a$. Könnyű belátni, hogyha $a < 2n$, akkor

$$\varphi'(a) = (1+o(1))\,\varphi(a). \tag{10}$$

Ugyanis a nyilván legfeljebb $\log a/\log_2 a$ $2\log a$-nál nagyobb prímszámmal lehet osztható, ezért

$$\varphi(a) \leqq \varphi'(a) < \varphi(a)\left(1-\frac{1}{2\log a}\right)^{-\log a/\log_2 a} = (1+o(1))\,\varphi(a),$$

ezzel tehát (10) be van bizonyítva. (10) miatt nyilván elég lesz

bebizonyítani, hogy minden $\eta > 0$-ra

$$\liminf_{a=\infty} (\varphi'(a)+\varphi'(a+1)+\cdots+\varphi'(a+[(1+\eta)L_a]))/a = \infty. \quad (11)$$

Legyen

$$\varphi'(a+i)/(a+i) = \alpha_i.$$

(11) helyett nyilván elég lesz bebizonyítani, hogy

$$\Sigma \alpha_i \to \infty, \quad 0 \leqq i \leqq [(1+\eta)L_a]. \quad (12)$$

Fennáll

$$\prod \alpha_i \geqq \prod_{p<2\log a}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{(1+\eta)L_a/p+1} =$$

$$= \prod_{p<2\log a}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{p<2\log a}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{(1+\eta)L_a/p} > \frac{c_1}{a^{(1+\eta)L_a}\log_2 a},$$

$$\left(a = \prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1/p}\right).$$

Minthogy azonban a számtani közép nagyobb, mint a mértani, nyerjük, hogy

$$\Sigma \alpha_i \geqq [(1+\eta)L_a]\left(\frac{c_1}{a^{(1+\eta)L_a}\log\log a}\right)^{1/(1+\eta)L_a} > c_2 L_a/(\log_3 a)^{1/(1+\eta)} \to \infty$$

ha $a \to \infty$,

amivel (12) s ezért a II. tétel be van bizonyítva.

A legutóbbi időben SCHINZEL bebizonyította a következő tételt: Legyenek $a_i > 0$, $1 \leqq i \leqq k$, akkor létezik egész számok oly végtelen sorozata, melyre

$$\lim_{l=\infty} \frac{\varphi(n_l+i+1)}{\varphi(n_l+i)} = a_i, \quad 1 \leqq i \leqq k.$$

Ugyanilyen tétel érvényes $\sigma(n)$-re is. Ezzel kapcsolatban a következő tételt bizonyítottam be:

Létezik oly végtelen sorozat n_l, melyre

$$\lim_{l=\infty} \frac{\max \varphi(n_l+i_1)}{\min \varphi(n_l+i_2)} = 1, \quad 1 \leqq i_1, i_2 < \left[(1-\varepsilon)\frac{\log_3 n}{\log_6 n}\right].$$

Ezzel szemben $\lim_{n=\infty} \max \frac{\varphi(n+i+1)}{\varphi(n+i)} = \infty$, $\lim \min \frac{\varphi(n+i+1)}{\varphi(n+i)} = 0$,

$1 \leqq i < \left[(1+\varepsilon)\frac{\log_3 n}{\log_6 n}\right]$.

Ugyanilyen tétel érvényes $\sigma(n)$-re is.

О ДВУХ ЗАДАЧАХ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ЖУРНАЛЕ „MATEMATIKAI LAPOK“

П. Ердёш

(Р е з ю м е)

Пусть будет $L_n = [\log_3 n / \log_4 n]$. [$\log_r n$ = продукт логарифмирования, повторенного в r раз.) В этом случае для каждого ε и $n > n_0$ существует $a < n$, для которого

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \cdots + \varphi(a+L_n) < \varepsilon a.$$

С другой стороны для каждого $\eta > 0$

$$\liminf_{a \to \infty} \frac{\varphi(a) + \varphi(a+1) + \cdots + \varphi[a + (1+\eta) L n]}{a} = \infty.$$

Далее утверждается (без доказательства), что

$$\liminf_{a \to \infty} \frac{\varphi(a) + \varphi(a+1) + \cdots + \varphi\left(a + \frac{\log_3 a}{\log_4 a - \log_5 a} + \frac{c \log_3 a}{(\log_4 a)^2}\right)}{a} = \frac{e^c}{\alpha}.$$

$$\alpha = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1/p}.$$

Даются далее несколько других результатов без доказательства, из которых здесь приводятся только:

Пусть $k_n = \dfrac{\log_3 n}{\log_6 n}$ и пусть $i_1, i_2, \ldots, i_{k_n}$ будет любая перестановка селых $1, 2, \ldots, k_n$. Тогда для $n > n_0$ существует $a < n$, причем

$$\varphi(a + i_1) > \varphi(a + i_2) > \cdots > \varphi(a + i k_n).$$

С другой стороны для $n > n_0(\varepsilon)$

$$\varphi(n) > \varphi(n+1) > \cdots > \varphi[n + (1+\varepsilon) k_n]$$

не может быть справедливым. Эти же самые результаты справедливы для $\sigma(n)$ вместо $\varphi(n)$.

REMARKS ON TWO PROBLEMS OF THE MATEMATIKAI LAPOK

Let $L_n = [\log_3 n / \log_4 n]$. [$\log_r n$ denotes the r times iterated logarithm). Then for every ε and $n > n_0$ there exists an $a < n$ for which

$$\varphi(a) + \varphi(a+1) + \cdots + \varphi(a + L_n) < \varepsilon a.$$

On the other hand for every $\eta > 0$

$$\liminf_{a \to \infty} \frac{\varphi(a) + \varphi(a+1) + \cdots + \varphi(a + (1+\eta) L_n)}{a} = \infty.$$

Further it is stated without giving the proof that

$$\liminf_{a\to\infty} \frac{\varphi(a)+\varphi(a+1)+\cdots+\varphi\left(a+\frac{\log_3 a}{\log_4 a-\log_5 a}+\frac{c\log_3 a}{(\log_4 a)^2}\right)}{a} = \frac{e^c}{\alpha},$$

$$\alpha = \prod_p \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1/p}.$$

Several other results are stated without proof, here we mention only one: Put $k_n = \frac{\log_3 n}{\log_6 n}$ and let $i_1, i_2, \ldots, i_{k_n}$ be any permutation of the integers $1, 2, \ldots, k_n$. Then for $n > n_0$ there exists an $a < n$ so that

$$\varphi(a+i_1) > \varphi(a+i_2) > \cdots > \varphi(a+i_{k_n}).$$

On the other hand for $n > n_0(\varepsilon)$

$$\varphi(n) > \varphi(n+1) > \cdots > \varphi(n+(1+\varepsilon)k_n)$$

can not hold. The same results hold for $\sigma(n)$ instead of $\varphi(n)$.

A Román Tudományos Akadémia Matematikai Intézetének és a Bukaresti Egyetem Analízis Tanszékének matematikai munkásságáról

MIRON NICOLESCU
a Román Tud. Ak. lev. tagja

A demokratikus kormányzat országunk tudományos dolgozóinak és különösképpen a matematikusoknak a multtal összehasonlítva páratlan lehetőséget nyújtott kutatói tevékenységük kifejtésére.

Ismertetni szeretném ennek a tevékenységnek egy részét a Matematikai Intézet 2. osztálya és a Bukaresti Egyetem analízis tanszéke által elért eredményeken keresztül. A két kollektíva közötti kapcsolatot az előadó személye biztositja, aki mindkettőnek a vezetője.

Ez a tevékenység két főbb irányba fejlődött:

1. valós függvénytani irányba, mely egyben érintkezik a funkcionálanalízis és topológia területével,

2. parciális differenciálegyenletrendszerek megoldhatóságának exisztencia, unicitási és stabilitási kérdéseinek irányába, mely érintkezik az Intézet 3. osztályának (differenciálegyenletek osztálya) problémakörével.

Ismertetni szeretném röviden az utóbbi években e két témakörben elért eredményeket:

1. §.

Közismert tény, hogy a valós függvények elméletének Baire, Lebesgue és Borel-féle megfogalmazása számos olyan nyitott kérdést hagy hátra, mely még megoldásra vár.

Például egy ilyen kérdés, mely az előadót egy ideig foglalkoztatta az a probléma, hogyan lehet felépiteni a matematikai analízist egy több dimenziós térben — egyszerűség kedvéért mondjuk síkban — olymódon, hogy a legkevésbé legyen ráutalva az

egyváltozós függvényanalízis eredményeire. Számos fontos eredményt értek el ebben az irányban, ahol a Lebesgue-féle kettős integrál és az intervallumfüggvények elmélete parancsoló módon megmutatta, hogy a síkban az egyváltozós függvények deriváltjának szerepét a

$$Du = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{u(x+h, y+k) - u(x+h, y) - u(x, y+k) + u(x, y)}{hk}$$

differenciáloperátornak kell játszania. Mint az jól ismeretes, megfelelő körülmények között ez a $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ másodrendű hiperbólikus operátorra redukálódik. Ezt a határértéket hiperbólikus deriváltnak fogjuk nevezni. Elképzelhető egy olyan matematikai analízis, amely ezen az operátoron, mint „deriválton" alapszik; az első lépéseket ebben az irányban Fréchet (1915) és főleg Karl Bögel két dolgozatában (1934—1935) tette meg. A Studii si Cercetări Matematice (III. k. 1952) című folyóiratban közölt cikkével előadó is hozzá kívánt járulni ennek az elméletnek továbbfejlesztéséhez.

Az említett dolgozatnak csupán az alábbi eredményét kívánom idézni:

Ha $U(x, y)$ $(n+1)$-szer deriválható hiperbólikus értelemben egy olyan kétdimenziós intervallumban, melynek középpontja az origó, akkor

$$1. \quad U(x, y) = \sum_{k=0}^{n} D^{-k}[D^k U(x, 0) + D^k U(0, y) - D^k U(0, 0)] + R_n$$

ahol a D^{-k} operátort a

$$D^{-1} U = \int_0^x dx' \int_0^y U(x', y') dy', \; D^{-k} = D^{-1}(D^{-k+1}) \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

rekurzióval definiáljuk és az R_n maradéktagot az

$$R_n = \frac{x^{n+1} y^{n+1}}{[(n+1)!]^2} D^{n+1} U(\xi, \eta)$$

kifejezés szolgáltatja, ahol (ξ, η) a vizsgált intervallum egy belső pontja.

Az 1. képlet bizonyos értelemben a D differenciáloperációnak megfelelő Taylor-formula általánosításának tekinthető. Ez a formula természetszerűleg a D operátor analicitásának gondolatát veti fel; ezt hiperbólikus analicitásnak fogjuk nevezni. Tegyük fel, hogy U akárhányszor deriválható hiperbólikus értelemben és hogy

egyenletesen teljesül a

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

feltétel a vizsgált intervallumban.

Akkor, ha az intervallum középpontját az (a,b) pontba toljuk el és elvégezzük az $n \to \infty$ határátmenetet, az 1. helyébe az

$$U(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} D^{-k}[D^k U(x,b) + D^k U(a,y) - D^k U(a,b)]$$

képletet nyerjük.

Minden, valamely I intervallumban hiperbólikus értelemben akárhányszor deriválható U függvényt, mely az I intervallum bármely (a,b) pontjának környezetében az előző típusú sorba fejthető, hiperbólikus értelemben analitikusnak mondunk I-ben.

Az említett dolgozatban hiperbólikus analicitásra az egy valós változós függvények analicitási kritériumával teljesen analóg szükséges feltételeket adtam. Példaképpen ezek közül a legegyszerűbb kritériumot idézem:

Ha a vizsgált intervallum minden (x,y) pontjára és minden természetes n számra

$$|D^n U(x,y)| < M$$

akkor U hiperbólikus értelemben analitikus ebben az intervallumban.

Egy másik problémakörre térek át. Azt javasoltam S. Marcusnak, asszisztensemnek, hogy az egy- vagy több változós függvények deszkriptív elméletével mélyrehatóbban foglalkozzék, a Baire-féle szempontból és abból a megjegyzésből indulva ki — melyet jóllehet többször már megismételtek, de a konzekvenciákat szisztematikusan mégsem vonták le — hogy a Baire-féle „ritka" halmazok ugyanazt a szerepet játszhatják a valós függvényeknek egy ilyen deszkriptív elméletében, mint a nullaméretű halmazok a függvények metrikus elméletében.

Ezeket a megjegyzéseket Sierpinski és Banach egymástól függetlenül elért eredményei is igazolták.

Az S. Marcus által folytatott vizsgálatok sok érdekes eredményt szolgáltattak, melyeket 1952 óta több cikkben publikált a Román Tudományos Akadémia Közleményeiben.

Elmélyítve ezt az analógiát az ismert metrikus és deszkriptív tulajdonságok között, egy szótárt állított fel, melynek néhány kifejezését itt közlöm:

1. „null-mérték" ↔ „első kategória" (ritka halmaz)
2. „mérhetőség" ↔ „Baire tulajdonság"
3. „0-nál nagyobb mértékű ↔ „Második kategóriájú halmaz" „halmaz"
4. „teljes sűrűség" ↔ „rezíduum" (Denjoy)

Ennek a szótárnak megfelelően jólismert approximatív határérték, approximatív folytonosság, approximatív deriválhatóság fogalmaknak rendre azok a fogalmak felelnek meg, melyeket S. Marcus kvalitatív határértéknek, kvalitatív folytonosságnak és kvalitatív deriválhatóságnak nevez.

Az alábbiakban közlök két ilyen „fordítási" példát S. Marcus már publikált dolgozataiból:

1. Denjoy egyik tétele azt mondja ki, hogy egy mérhető és majdnem mindenütt véges függvény majdnem mindenütt approximatív folytonos; ennek a következő tétel felel meg: egy Baire-tulajdonsággal rendelkező függvény kvalitatív folytonos egy reziduumon.

2. Sztyepanov egy tétele szerint egy majdnem mindenütt approximatív folytonos függvény mérhető; ennek a következő tétel felel meg: egy reziduumon kvalitatív folytonos függvény Baire-tulajdonsággal rendelkezik.

S. Marcus kiterjesztett több egyváltozós függvényekre vonatkozó tételt kétváltozósakra.

Értékes segítséget nyújtott kollektív munkánkban a legújabb szovjet irodalom tanulmányozása. Harmadévet szenteltünk heti szemináriumainkból Kronrod fontos munkájának ("Sur les ensembles de niveau des fonctions de deux variables"). Megbeszéléseink eredményeit S. Marcus adta közre „Kétváltozós monoton függvényekről" cím alatt. Ennek a — még sajtó alatt lévő — dolgozatnak fő célja az volt, hogy a Kronrod által adott monotonitási fogalmat egybevesse a többi monotonitási fogalmakkal (Tonelli, Lebesgue, Wallace).

*

Kollektívánk egy másik irányban is végzett kutató munkát, éspedig parabólikus és hiperbólikus típusú parciális differenciálegyenletekkel és egyenletrendszerekkel foglalkozott.

Az ezzel a kérdéssel foglalkozó kollektíva elé azt a feladatot tűztem ki, hogy próbáljanak újabb kritériumokat keresni az unicitásra, a Cauchy-féle probléma korrekciójára (Hadamard értelemben), a stabilitásra, (Ljapunov értelemben) vonatkozóan analógiát állítva fel a közönséges differenciálegyenletekkel és egyenletrendszerekkel. A kollektíva három fiatal kutatóból állt: Ciprian Foias,

VALENTIN POENARU és GEORGES GUSSI. Nemrég fejezték csak be egyetemi tanulmányaikat és máris érdekes eredményeket értek el, nem csupán a könnyebbik útat követve és felhasználva a Laplace-transzformáció és funkcionálanalízis eredményeit, hanem a valós függvénytan elméletének mélyebb tételei segítségével is. Az említett kutatók eredményei könnyebben ismertethetők, ha az alábbi definíciókat megadom:

1. A $\omega(t)$ függvény egy Osgood-féle függvény, ha az monoton növekvő és az

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\omega(t)}$$

integrál minden $x > 0$-ra divergál.

2. Az $\omega(t)$ függvény egy Wintner-féle függvény, ha az monoton növekvő és az

$$\int_x^\infty \frac{dt}{\omega(t)}$$

integrál minden $x > 0$-ra divergál.

3. A folytonos $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_m)$ függvény OSGOOD-TONELLI feltételnek tesz eleget, ha

$$|f(x, u) - f(x, u')| \leqq K(x)\omega(\Sigma|u_i - u'_i|)$$

ahol K egy szummálható függvény és ω pedig egy Osgood-féle függvény.

4. A folytonos $f(x, u)$ függvény WINTNER-TONELLI feltételnek tesz eleget, ha

$$|f(x, u)| \leqq K(x)\omega(\Sigma|u_i|)$$

ahol K egy szummálható függvény és ω pedig egy Wintner-féle függvény.

Az említett szerzők ösztönzésemre vizsgálták a

A $$Du = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

egyenletet, majd a

B $$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(t, x)\frac{\partial u}{\partial x} = f_i(t, x, u_k)$$

egyenletrendszert.

Az A egyenletre az alábbi eredményt nyerték:

Ha az $f(x, y; u, v, w)$ függvény OSGOOD—TONELLI feltételnek tesz eleget y és u, v, w változókban, akkor a Cauchy-féle probléma megoldása egyértelmű.

Az említett fiatal kutatók a B egyenletrendszert helyettesítették a

$$B' \qquad u_i(t,x) = \varphi_i[x_i(0;t,x)] + \int_0^t f_i\{\tau, x(\tau;t,x); u_k[\tau, x_i(\tau;t,x)]\}\,d\tau$$

integrálegyenletrendszerrel, ahol $\varphi_i(x) = u_i(0,x)$ és $x_i(\tau;t,x)$ a

$$C \qquad \frac{dx_i}{d\tau} = \lambda_i(\tau, x_i)$$

közönséges differenciálegyenletrendszernek egy megoldása, mely a (t,x) ponton keresztül megy. Kimutatták, hogy ha a C egyenletrendszer x_i megoldása egyértelmű és ha az $f_i(t,x,u_k)$ függvények OSGOOD—TONELLI) feltételnek tesznek eleget a t és u_k változókban, akkor a B' integrálegyenletrendszer megoldásai is egyértelműek, Továbbmenőleg, ha a C megoldása folytatható minden τ-ra és ha az f_i-k WINTNER—TONELLI feltételnek tesznek eleget a t és u_k változókban, a B' egyenletrendszer megoldásai folytathatók az egész síkon.

Végül. ha azok a $K_i(t)$ függvények, amelyek az OSGOOD—TONELLI (illetve WINTNER—TONELLI) feltételekben szerepelnek, szummálhatók az egész egyenesen, akkor a B megoldásai stabilisak (illetve asszimptotikusan korlátosak.)

*

Ismertetésemben tevékenységünk egyik legérdekesebb részéhez értem. A bukaresti egyetem analízis tanszékének kollektívája tevékenységébe bekapcsolta a II. és III. éves egyetemi hallgatók un. „Matematikai analízis körét" is amely a matematikai kutatás módszereivel is megismerteti a hallgatóságot. Ennek nagyon örvendetes eredményei voltak. A hallgatók olyan buzgalommal foglalkoztak saját kutatási munkáikkal, hogy olykor emlékeztetni kellett őket vizsgakötelességeikre.

Ismertetem a kör tagjainak néhány eredményét azért, hogy képet nyújtsak matematikai ismereteikről és ambiciójukról.

Egy eredmény RIESZ FRIGYESnek egy tételét terjeszti ki olyan absztrakt terekre, amelyekben egy mérték van definiálva. Legyen ν az E halmaz F részhalmazain értelmezett függvény, mely telje-

sen additív E-ben. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy ν primitív függvénye legyen egy $f \in L_{p(f)}$ függvények, az, hogy az F minden olyan véges $\{A_j\}$ $j = 1, 2, \ldots, n$ halmazsorozatára, melyek kölcsönösen diszjunktak és pozitív mértékűek, fennáljon

$$\sum_{j=1}^{n} p\left(\frac{\nu(A_j)}{\mu(A_j)}\right)\mu(A_j) \leqq N$$

Itt p az egész számegyenes értelmezett valós függvény, mely folytonos, konvex és még alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

$$1^\circ \qquad p(t) = p(-t), \qquad p(0) = 0$$

$$2^\circ \qquad \lim_{t \to \infty} \frac{p(t)}{t} = \infty$$

$L_{p(f)}$ az E-n értelmezett f függvények osztálya, melyek a következő tulajdonsággal rendelkeznek:

1° f mérhető

2° $p(f)$ integrálható.

Amennyiben E az n-dimenziós euklidesi tér és μ a Lebesgue-mérték, MEDVEGYEV tételét nyerjük, ha pedig $p(t) = t^n$ $(n > 1)$, RIESZ említett tételét kapjuk. Az ismertetett eredmény ALEXANDRA BAGDASAR III. éves egyetemi hallgatónőtől származik.

Egy másik hallgatónő, DANA TĂUTU, a következő foglalkozott: BANACH óta ismeretes, hogy egy folytonos és korlátos variációjú függvény totális variációját a LEBESGUE értelemben vett

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N(t)\,dt$$

integrál szolgáltatja, ahol $N(t)$ az f „karakterisztikus" függvénye, vagyis az $f(x) = t$ egyenlet megoldásainak száma. Kérdés, mikor állítható, hogy $N(t)$ majdnem mindenütt folytonos, vagyis RIEMANN értelemben integrálható?

Az említett hallgatónő jellemezte a függvények azon osztályát, melyekre ez fennáll: annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $N(t)$ R-integrálható legyen az, hogy az $f(M')$ halmaz nullméretű legyen. Itt M' az $f(x)$ függvény extrémum ponthalmazának derivált halmaza.

Egy másik harmadéves hallgató, ALDO LAZAR, a Darboux-értelemben vett folytonosság fogalmával foglalkozott kétváltozós függvények esetén. Vizsgálatainál CSÁSZÁR ÁKOS eredményeiből indult

ki. Kimutatta annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy függvény a változók együttesére nézve DARBOUX értelembe véve folytonos legyen, az, hogy parciálisan, valamennyi változóra külön-külön is DARBOUX értelemben folytonos legyen. Kimutatta, hogy például, ha az $f(x, y)$ folytonos és $g(t), h(t)$ Darboux-értelemben folytonosak, az

$$F(t) = f[g(t), h(t)]$$

függvény nem szükségképpen folytonos DARBOUX értelemben véve.

Előadásomban arra törekedtem, hogy — bár változatosan — lehetőség szerint hű képet adjak arról a munkáról, melyet a Matematikai Intézet egy szektorában és az Egyetem egyik tanszékén kifejtenek. A Matematikai Intézet többi osztályán és az egyetem többi matematikai tanszékén hasonló munka folyik.

Kutatóink élénk tudományos teremtő munkája, mely a béke és népek közötti testvériség ügyét is szolgálja, arra bátorít bennünket, hogy optimizmussal tekintsünk országunk matematikai jövője felé.

СОДЕРЖАНИЕ

Николеску М.: О математической деятельности Математического института Румынской Академии Наук и Кафедры анализа университета, Букарест.

SUMMARY

M. NICOLESCU: On the mathematical activity of the Mathematical Institut of the Rumanian Academy and of the Chair of Analysis of the University of Bucarest.

Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez[1] I.

HAJNAL ANDRÁS és KALMÁR LÁSZLÓ

1. Jelen dolgozat a halmazelmélet GÖDEL-féle axiómarendszerének[2] egyszerűsítésével foglalkozik; ugyanis megmutatjuk, hogy ennek az axiómarendszerének egyik axiómája felesleges, mert a többi axióma segítségével bebizonyítható. Bevezetésül ismertetjük a halmazelmélet GÖDEL-féle axiómarendszerét és viszonyát a halmazelmélet többi axiómarendszeréhez.

A halmazelmélet axiómatizálását azok a logikai ellentmondások, ún. antinómiák[3] tették szükségessé, amelyek a halmazelmélet eredeti, ún. naiv felépítése során felléptek. A naiv halmazelméletben magától értetődőnek tartjuk azt az elvet, hogy minden T tulajdonsághoz létezik olyan halmaz, amely azokból és csak azokból az elemekből áll, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk. Ha pl. T gyanánt azt a tulajdonságot választjuk, amely akkor és csak akkor van meg egy x dolognak (elemnek), ha x olyan halmaz, amely a saját elemei között nem szerepel, akkor az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmazához jutunk, amely az ismert módon az ún. RUSSELL-féle antinómiához[4] vezet.

A halmazelmélet történetileg első, ZERMELO-féle axiómarendszerében[5] ennek az elvnek az ún. részhalmazaxióma[6] felel meg,

[1] Ez a dolgozat HAJNAL ANDRÁS készülő kandidátusi disszertációjának megbeszélése során keletkezett. KALMÁR LÁSZLÓ előadta 1955. szeptember 21-én a Bolyai János Matematikai Társulat balatonvilágosi számelméleti és kombinatorikai kollokviumán „Egy kombinatorikus okoskodás az axiómatikus halmazelméletben" címmel. Angol változata, kissé más beállításban, a *Publicationes Mathematicae*-ben jelenik meg.

[2] Lásd GÖDEL [1], 3—6. oldal. (A nevek után szögletes zárójelbe tett számok a dolgozat végén található irodalomra utalnak.)

[3] A halmazelmélet itt felhasznált fogalmai, valamint a halmazelmélet antinómiái megismerhetők pl. FRAENKEL [5]-ből, vagy KALMÁR [1]-ből.

[4] RUSSELL [1], 101—107. oldal; lásd még FRAENKEL [5], 3. kiadás, 210—213. oldal, vagy KALMÁR [1], 242—246. oldal.

[5] ZERMELO [1], 262—267. oldal.

[6] Zermelonál (és Fraenkelnél): Aussonderungsaxiom.

amely szerint tetszőleges H halmazhoz és tetszőleges, H elemeire értelmezett T tulajdonsághoz[7] van olyan H' halmaz, amely a H halmaznak azokból és csak azokból az elemeiből áll, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk. Ez az axióma sok tekintetben pótolja az említett elvet, azonban (legalább is ahhoz hasonló módon) nem vezet a halmazelmélet (ismert) antinómiáihoz[8]. Ugyanis pl. avégett, hogy ennek az axiómának segítségével az önmagukat nem tartalmazó halmazok halmazához jussunk, előbb egy olyan „majoráns" H halmazra volna szükségünk, amely minden önmagát nem tartalmazó halmazt eleme gyanánt tartalmaz, pl. az összes dolgok, vagy az összes halmazok halmazára; már pedig a ZERMELO-féle axiómák egyike sem állítja ilyen halmaz létezését, és nem is látszik semmiféle mód, ahogyan ilyen halmaz létezése következnék belőlük. Hasonlóan, a BURALI-FORTI-féle antinómiát[9] azáltal kerüli el a ZERMELO-féle axiómarendszer, hogy nem tartalmaz olyan axiómát, amely az összes rendszámok halmazának létezését állítaná és úgy látszik, hogy e halmaz létezése közvetett úton sem következik belőlük.

A ZERMELO-féle axiómarendszernek számos fogyatékossága van. Mindenekelőtt használja a (definit) tulajdonság fogalmát, pedig ez a fogalom nem tartozik az axiómarendszer alapfogalmai közé és ZERMELO nem is definiálja ezt a fogalmat azok segítségével[10]. Továbbá a ZERMELO-féle axiómarendszer nem alkalmas bizonyos nagy, pl. $\mathfrak{c}+2^{\mathfrak{c}}+2^{2^{\mathfrak{c}}}+\cdots$ számosságú halmazok létezésének bebizonyítására, ahol $\mathfrak{c}$ a kontinuum számossága. Végül az a körülmény, hogy a halmazelmélet ZERMELO-féle axiómatikus felépítésében másféle összességekről nem lehet beszélni, mint halmazokról, már pedig az axiómák nem kívánják meg az összes halmazok, vagy az összes rendszámok halmazának létezését (hacsak nem lép fel a RUSSELL-féle ill. a BURALI-FORTI-féle antinómia mégis csak a ZERMELO-féle axiómatikus halmazelméletben), nehézkessé teszi a halmazelmélet felépítését a ZERMELO-féle axiómák alapján, hiszen e fel-

[7] ZERMELO *definit* tulajdonságról beszél, azonban nem mondja meg világosan, mit jelent ez a jelző (lásd a 10. jegyzetet is).

[8] Az a kérdés, hogy a ZERMELO-féle, vagy valamely másik, a halmazelmélet felépítésére alkalmas axiómarendszer *más úton* sem vezethet-e az ismert antinómiák valamelyikéhez, vagy pedig új antinómiához, más szóval, hogy ellentmondástalan-e, még nincs eldöntve.

[9] BURALI-FORTI [1]; lásd még FRAENKEL [5], 3. kiadás, 210—213. oldal, vagy KALMÁR [1], 250. oldal.

[10] ZERMELO következő szavai: Eine Frage oder Aussage E über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden, heißt „definit", nem tekinthetők a definit tulajdonság (kérdés, állítás) szabatos definíciójának.

építésben nem szabad a halmazok, vagy a rendszámok összességéről beszélni.

Az első két fogyatékosság kiküszöbölése végett FRAENKEL módosította a ZERMELO-féle axiómarendszert[11]. Ami a (definit) tulajdonság fogalmát illeti, FRAENKEL észrevette, hogy a halmazelmélet axiómatikus felépítéséhez elég a részhalmaz-axiómát abban az esetben alkalmazni, amikor a H halmaz valamely tetszőleges x elemének T tulajdonsága abban áll, hogy valamely x-től függő $F(x)$ halmaz eleme valamely x-től függő $G(x)$ halmaznak, vagy abban, hogy $F(x)$ nem eleme $G(x)$-nek, vagy abban, hogy $F(x)$ ugyanaz a halmaz, mint $G(x)$, vagy pedig abban, hogy $F(x)$ nem ugyanaz, mint $G(x)$, és a részhalmaz-axiómát csak ilyen tulajdonságokra mondta ki. Ezzel újabb nehézség lépett fel: definiálni kellett, mit értünk egy H halmaz valamely tetszőleges x elemétől függő $F(x)$ halmazon, más szóval, a H halmazon értelmezett, halmazelméleti értelemben vett függvényen[12]. Ezt a nehézséget FRAENKEL azzal küzdötte le, hogy a függvény fogalmát rekurzív módon definiálta.[13] Nem világos eleve, hogy az ilyen definíció jogos[14]; azonban matematikai logikai meggondolások mutatják, hogy ha nem is olyan értelemben jogos, mintha a függvény fogalmának a halmazelmélet alapfogalmai segítségével történő, halmazelméleti definíciója volna, de olyan értelemben elfogadható, hogy annak a definíciójához tar-

[11] FRAENKEL [4], továbbá [5], 3. kiadás, 285—288. oldal; [6], 253—255. és 271. oldal; [7], 103—115. oldal. A részhalmaz-axióma FRAENKEL által szabatosan kimondott alakja már FRAENKEL [3]-ban, a pótlás axiómája pedig már FRAENKEL [2]-ben (speciálisabb alakban már FRAENKEL [1]-ben) szerepel.

Annak a kérdésnek tárgyalásába, hogy mi a célja FRAENKEL azon további változtatásának, amely abban áll, hogy ZERMELO egyik axiómájának, a meghatározottság axiómájának módosításával kizárja olyan elemek létezését, amelyek nem halmazok, és hogy helyeselhető-e ez a cél, most nem megyek bele.

[12] Minthogy a FRAENKEL-féle axiómarendszerben nincs (és nem is lehet) szó más elemről, mint halmazról (lásd az előző jegyzetet), magától értetődik, hogy a függvények értékei is halmazok.

[13] A függvény fogalmának az a (nem rekurzív, halmazelméleti) definíciója, amely szerint függvényen olyan halmazt értünk, amelynek minden eleme rendezett pár és nincs két olyan eleme, amelynek második komponense közös, első komponense azonban nem (e definíció az F függvénynek az összes $\langle F(x), x\rangle$ alakú rendezett párok halmazával való azonosításán alapul, ahol x átfutja az F függvény értelmezési tartományát), nem bizonyul e célra elegendőnek, mert a halmazelmélet FRAENKEL-féle axiómái nem biztosítják a részhalmaz-axióma szükséges alkalmazásainak megfelelő valamennyi, ilyen értelemben vett függvény létezését. Pl. annak a függvénynek, amely mindenütt értelmezve van és értéke az x helyen x-szel egyenlő, az összes $\langle x, x\rangle$ alakú rendezett párok összessége felelne meg; azonban ez az összesség, hasonló módon, mint az összes halmazok összessége, ellentmondásra vezetne.

[14] A rekurzív definíció jogosságának halmazelméleti bizonyításához szükség van a részhalmaz-axiómára.

tozik, hogy mik a halmazelmélet axiómái. E felfogásban a részhalmaz-axióma nem egy, hanem végtelen sok axióma: bármely két (adott sorrendben megadott) F és G függvényhez négy részhalmaz-axióma tartozik. Eszerint a halmazelmélet FRAENKEL-féle axiómarendszere végtelen sok axiómából áll[15].

Ami a $c + 2^c + 2^{2^c} + \cdots$ és nagyobb számosságú halmazokat illeti, FRAENKEL ezek létezését egy új axiómának, a pótlás axiómájának a ZERMELO-féle axiómarendszerhez csatolásával biztosítja. Ez az axióma azt mondja ki, hogy minden H halmazhoz és minden, H elemeire értelmezett F függvényhez létezik olyan K halmaz, amely úgy keletkezik, hogy H minden egyes x elemét a megfelelő, x-től függő $F(x)$ elemmel pótoljuk. Ez az axióma szintén a függvény fogalmán alapul, tehát ismét voltaképpen végtelen sok (minden egyes F függvényhez más és más) axióma. NEUMANN rámutatott, hogy ezek az axiómák csak akkor nem bizonyíthatók be mind a többi axiómák alapján, ha a függvényfogalom rekurzív definícióját is módosítjuk; azonban megfelelő módosítás után a pótlás (végtelen sok) axiómája segítségével nemcsak az eredeti célt, a nagy számosságú halmazok létezésének bizonyítását lehet elérni, hanem a rendszámok és a számosságok elméletét is fel lehet építeni[16].

A harmadik fogyatékosság az axiómarendszer FRAENKEL-féle módosítása ellenére is megmarad: a halmazok, vagy a rendszámok összességéről a FRAENKEL-féle axiómarendszerben sem lehet beszélni. Pl. a transzfinit indukcióval való bizonyítás jogosságát, vagyis azt, hogy ha valamely, tetszőleges α rendszámra vonatkozó állítás igaz a 0 rendszámra és valahányszor igaz minden olyan rendszámra, amely kisebb valamely α rendszámnál, mindannyiszor α-ra is igaz, akkor ez az állítás minden α rendszámra igaz, a halmazelmélet FRAENKEL-féle axiómatikus felépítésében nem lehet a következő egyszerű, a naiv halmazelméletből ismert módon indokolni. Tekintsük azon rendszámok összességét, amelyre a kérdéses állítás nem igaz. Ha ez az összesség nem volna üres, akkor, mint az összes rendszámok nagyság szerint jólrendezett összessége rész-

[15] Hasonló értelemben végtelen sok axiómából áll pl. az aritmetika PEANO-féle axiómarendszere, hiszen a teljes indukció axiómája, az „állítás" fogalmának mint általános, az aritmetika alapfogalmai segítségével definiálható aritmetikai fogalomnak híján, minden egyes (teljes indukcióval bebizonyítandó) állításra külön-külön axióma.

[16] NEUMANN [3]; a rendszámok (és a számosságok) elméletének ilyen felépítéséhez használt alapgondolat már NEUMANN [1]-ben is szerepel (a naiv halmazelmélet nyelvén). FRAENKEL még azt gondolta, hogy a (rendszámok és a) számosságok elméletének felépítéséhez további axiómákra van szükség; lásd FRAENKEL [1].

halmazának, volna legkisebb eleme, vagyis volna legkisebb olyan α_0 rendszám, amelyre a kérdéses állítás nem igaz. Ez azonban lehetetlen, mert α_0 nem lehet sem 0, hiszen a kérdéses állítás igaz a 0-ra; de 0-tól különböző rendszám sem lehet, mert akkor volnának nála kisebb rendszámok, ezekre mindre igaz a kérdéses állítás (mert α_0 a legkisebb olyan rendszám, amelyre nem igaz), tehát a feltevés szerint α_0-ra is igaz. Ehelyett a halmazelmélet axiómatikus felépítése során, ha a FRAENKEL-féle axiómákból indulunk ki, így kell okoskodnunk. Ha a kérdéses állítás pl. valamely α_1 rendszámra nem volna igaz, akkor tekintsük az α_1-nél kisebb rendszámok H halmazát (ennek létezése, a pótlás axiómájának felhasználásával, következik a FRAENKEL-féle axiómákból). A részhalmaz-axiómából következik olyan H' halmaz létezése, amelynek elemei H-nak azok és csak azok az elemei, tehát azok és csak azok az α_1-nél kisebb rendszámok, amelyekre a kérdéses állítás nem igaz. Ez a H' halmaz nem lehet üres, sem azért nem, mert H üres, hiszen akkor $\alpha_1 = 0$ volna, már pedig a 0 rendszámra igaz a kérdéses állítás; sem azért nem, mert az α_1-nél kisebb rendszámokra mindre igaz a kérdéses állítás, mert akkor a feltevés szerint α_1-re is igaz volna. A FRAENKEL-féle axiómákból következik, hogy minden olyan (létező) halmaz, amelynek minden eleme rendszám, jólrendezett, ha elemeit nagyság szerint rendezzük; tehát H' is az és így van legkisebb eleme. Legyen ez α_0. Akkor α_0-ra sem igaz a kérdéses állítás, de az α_0-nál kisebb olyan rendszámok halmaza[17], amelyekre nem igaz, már üres, hiszen ezek mind kisebbek α_1-nél is, tehát elemei H'-nek is; már pedig H'-nek nincs α_0-nál kisebb eleme. Ez azonban éppúgy lehetetlenségre vezet, mint az előbb az a feltevés, hogy az α_1-nél kisebb olyan rendszámok H' halmaza, amelyre a kérdéses állítás nem igaz, üres, de α_1-re mégsem igaz a kérdéses állítás[18].

[17] E halmaz létezése szintén a részhalmaz-axiómából következik.

[18] A fenti meggondolást valamivel egyszerűbb alakban is el lehetne mondani, ez azonban nem változtat azon a tényen, hogy a rendszámok tetszőleges összességeinek elkerülése csak nehézkesen lehetséges. — A fenti meggondolást elvileg minden állításra, amelyet transzfinit indukcióval be akarunk bizonyítani, külön-külön el kellene végezni, mert az állítás általános fogalma nem halmazelméleti fogalom, ennélfogva a transzfinit indukcióval való bizonyítás jogosságát nem lehet általános halmazelméleti tételként kimondani. Az olyan tételeket, amelyek nem mondhatók ki a halmazelmélet, vagy valamely más axiómatizált diszciplina általános tételeként, de amelyek bizonyítása módot ad arra, hogy a kérdéses diszciplina végtelen sok tételét közös módon bebizonyítsuk, *metatételeknek* szokás nevezni; ilyen értelemben a transzfinit indukcióval való bizonyítás jogossága is metatétel. Sokszor általánosabban minden olyan tételt metatételnek neveznek, amely valamely axiómatizált diszciplina tételeinek összességéről állít valamit; ilyen értelemben az a tétel is metatétel, amely a kérdéses diszciplina ellentmondástalanságát mondja ki.

NEUMANN e fogyatékosság kiküszöbölése végett teljesen új módon axiómatizálta a halmazelméletet[19]. Abból a megjegyzésből indult ki, hogy nem az okozza az antinómiákat, hogy olyan összességeket *tekintünk*, mint pl. a halmazok, vagy a rendszámok összessége, hanem az, hogy ezeket más összességek *elemeinek tekintjük*. Ennélfogva (valószínűleg) úgy is ki lehet küszöbölni az antinómiákat, hogy nem minden összességről kívánjuk meg, hogy más összesség eleme lehessen, hanem csak az összességek egy speciális fajtájáról. Az ilyen speciális fajta összességeket nevezi *halmazoknak;* tetszőleges összességek számára az *osztály* kifejezést használja. Eszerint minden halmaz osztály, de fordítva nem; pl. az összes halmazok, vagy az összes rendszámok osztálya nem halmaz. Egy osztály tehát csak akkor lehet valamely osztály eleme, ha halmaz.

NEUMANN azonban egyúttal ki akarta küszöbölni a függvényfogalommal kapcsolatos nehézségeket is, amelyek miatt FRAENKELnek végtelen sok axiómára volt szüksége. Evégett sem a halmaz, sem az osztály fogalmát nem tekinti alapfogalomnak, hanem visszavezeti őket a függvény fogalmára, amennyiben az osztályokat karakterisztikus függvényükkel azonosítja[20]. Persze a függvények sem lehetnek mindannyian valamely osztály elemei; azokat, amelyek lehetnek, valamint a nem függvény-jellegű elemeket, „I-dolgoknak" nevezi, a „függvény" helyett pedig a „II-dolog" kifejezést használja. Azok a II-dolgok, amelyek nem tartoznak az I-dolgok közé, függvény értelmezési tartományának sem lehetnek elemei; tehát a II-dolgok az I-dolgok összességén értelmezett függvények. Axiómái nem halmazok és osztályok, hanem ilyen függvények, valamint I-dolgok létezését mondják ki. NEUMANN axiómarendszere a függvényfogalommal kapcsolatos nehézségek kiküszöbölése folytán már véges számú axiómából áll.

Azonban NEUMANN axiómarendszere is bonyolult és nagymértékben eltér a halmazelmélet szokásos axiómarendszereitől. BERNAYS jegyezte meg, hogy ez az eltérés felesleges, hiszen azáltal, hogy olyan osztályokat is megengedünk, amelyek nem halmazok, magától megszűnnek a függvényfogalommal kapcsolatos nehézségek, hiszen a függvény fogalmát az *osztály* fogalmára már kielégítő módon vissza lehet vezetni a 13. jegyzetben említett módon, ha halmaz helyett osztályt mondunk. (Pl. az összes $\langle x, x \rangle$ alakú

[19] NEUMANN [2]; lásd még NEUMANN [4]-et is.

[20] Minthogy a 0 és 1 (számosság vagy rendszám) definíciója csak később (az axiómák alapján) lehetséges, NEUMANN olyan függvényt ért karakterisztikus függvényen, amely 0 és 1 helyett csak az A és B értékeket veszi fel, ahol A és B szintén alapfogalmak NEUMANN axiómarendszerében.

rendezett párok *osztálya* nem vezet ellentmondásra és reprezentálja az $y = x$ függvényt, ha nem kívánjuk, hogy halmaz legyen.) Ezért BERNAYS, NEUMANN gondolatait felhasználva, úgy axiomatizálta a halmazelméletet[21], hogy (az elemként tartalmazás relációján kívül, amely Zermelonál és Fraenkelnél is szerepel az alapfogalmak között[22],) az osztály és a halmaz fogalmát használta alapfogalom gyanánt. Bernaysnál még felesleges bonyodalom, hogy a halmazokat nem tekinti osztályoknak, hanem minden halmazhoz hozzárendel egy-egy osztályt, azt, amelynek ugyanazok az elemei, mint a kérdéses halmaznak; ezt a felesleges megkettőzést GÖDEL szüntette meg, egyuttal néhány további apró módosítást is végrehajtva a BERNAYS-féle axiómarendszeren.

2. A halmazelmélet így keletkezett GÖDEL-féle axiómarendszere a következő[23].

Alapfogalmak: osztály, halmaz, tartalmazás.

Tetszőleges osztályokat latin nagy betűvel, tetszőleges halmazokat latin kis betűvel jelölünk; az e célra használt betűket osztályváltozóknak ill. halmazváltozóknak nevezzük. Azt, hogy a B osztály tartalmazza az A osztályt, így jelöljük: $A \in B$, és úgy is mondjuk, hogy az A osztály eleme a B osztálynak.

Axiómák (és a rövidebb kimondásukhoz szükséges definíciók):

A1. Minden halmaz osztály.

A2. Minden olyan osztály, amely valamely osztály eleme, halmaz.

A3. (A meghatározottság axiómája.) Ha az A és B osztályoknak ugyanazok a halmazok az elemeik, akkor $A = B$ (vagyis A ugyanaz az osztály, mint B).

A4. (Pár-axióma.) Bármely két x és y halmazhoz van olyan p halmaz, hogy $x \in p$ és $y \in p$, de p-nek nincs más eleme, mint x és y.

[21] BERNAYS [1]; lásd még BERNAYS [2], [3], [4], [5], [6] és [7] dolgozatait is.

[22] Neumannál ehelyett az a reláció szerepel alapfogalom gyanánt, amely egy F függvény (II-dolog), egy x I-dolog és egy y II-dolog között akkor áll fenn, ha $y = F(x)$.

[23] GÖDEL [1], 3—6. oldal. GÖDEL ezt az axiómarendszert arra használja, hogy bebizonyítsa, hogy amennyiben ebből az axiómarendszerből a kiválasztás axiómáját elhagyva ellentmondástalan axiómarendszert kapunk, akkor nemcsak akkor kapunk ellentmondástalan axiómarendszert belőle, ha ismét hozzávesszük a kiválasztás axiómáját, hanem még akkor is, ha ezenkívül az általánosított CANTOR-féle sejtést is hozzávesszük axióma gyanánt, amely szerint minden α rendszámra $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. GÖDEL bizonyításmódja azonban alkalmazható a ZERMELO—FRAENKEL-féle, a NEUMANN-féle és a BERNAYS-féle axiómarendszerre is.

Definíció. Ilyen halmaz az A1 és A3 axiómák folytán csak egy van; ezt a halmazt az x és y (vagy az y és x) halmazokból képezett (rendezetlen) *párnak* nevezzük és így jelöljük: $\{x, y\}$ (vagy $\{y, x\}$). Ha $x = y$, akkor a $\{x, y\} = \{x, x\}$ párt az x halmazból képezett *egyelemű halmaznak* nevezzük és így jelöljük: $\{x\}$.

Definíció. A $\{x\}$ egyelemű halmazból és a $\{x, y\}$ párból képezett $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ párt az x és y halmazokból képezett *rendezett párnak* nevezzük[24] és röviden így jelöljük: $\langle x, y\rangle$. Az x halmazt a $\langle x, y\rangle$ rendezett pár *első komponensének*, az y halmazt pedig *második komponensének* nevezzük.

Definíció. Az x halmazból és a $\langle y, z\rangle$ rendezett párból alkotott $\langle x, \langle y, z\rangle\rangle$ rendezett párt az x, y és z halmazokból alkotott *rendezett hármasnak* nevezzük és röviden így jelöljük: $\langle x, y, z\rangle$. Az x halmazt a $\langle x, y, z\rangle$ rendezett hármas *első komponensének*, az y halmazt a *második komponensének*[25], a z halmazt pedig a *harmadik komponensének* nevezzük.

Definíció. Az olyan osztályt, amelynek minden eleme rendezett pár, relációnak nevezzük. Azon, hogy egy R reláció *fennáll* az x és y halmazok között, azt értjük, hogy $\langle x, y\rangle \in R$; ehelyett röviden azt is írjuk, hogy xRy. Az olyan F relációt, amelyre abból, hogy yFx és $y'Fx$, következik, hogy $y = y'$ (tehát amelynek nincs két olyan eleme, amelyeknek második komponense közös, de első komponense nem), *függvénynek* nevezzük; általánosabban az olyan F osztályról, amelyre abból, hogy $\langle y, x\rangle \in F$ és $\langle y', x\rangle \in F$, következik, hogy $y = y'$, azt mondjuk, hogy *egyértelmű leképezést létesít*. (Eszerint minden függvény egyértelmű leképezést létesít, de fordítva nem; egyértelmű leképezést ugyanis olyan osztály is létesíthet, amelynek olyan eleme is van, amely nem rendezett pár.) Ha F függvény, továbbá valamely x halmazhoz van olyan y halmaz, hogy yFx, akkor azt mondjuk, hogy az F függvény

[24] A rendezett pár fogalmának ez a visszavezetése a halmazelmélet alapfogalmaira Kuratowskitól származik; lásd Kuratowski [1], 171. oldal. Könnyen látható, hogy az így definiált fogalomnak megvan az a két tulajdonsága, amit a naiv halmazelmélet megkíván a rendezett pár fogalmától: bármely két x és y elemhez (azaz, a Gödel-féle axiómatikus halmazelméletben, halmazhoz) egy és csak egy olyan rendezett pár van, amelynek x az első és y a második komponense, továbbá két rendezett pár (akkor és) csak akkor azonos, ha első komponensük is, második komponensük is megegyezik.

[25] Eszerint a $\langle x, y, z\rangle = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle$ halmaz második komponense, ha rendezett hármasnak tekintjük, akkor az y halmaz, ha pedig rendezett párnak tekintjük, akkor a $\langle y, z\rangle$ rendezett pár. Ez nem okoz félreértést, mert a jelölésből mindig látszik, minek tekintjük.

értelmezve van az x helyen; ebben az esetben azt, a függvényfogalom definíciója folytán egyértelműen meghatározott halmazt, amelyre yFx, az F függvény által az x helyen *felvett értéknek* nevezzük és így jelöljük: $F(x)$. (GÖDEL ehelyett a WHITEHEAD—RUSSELL-féle $F'x$ jelölést használja.) Általánosabban, ha F olyan osztály, amely egyértelmű leképezést létesít, akkor azon, hogy az F osztály által létesített leképezés valamely x halmazhoz az y halmazt rendeli hozzá, azt értjük, hogy $\langle y, x\rangle \in F$.

B1. (A tartalmazás relációjának axiómája.) Van olyan osztály, amelynek valamely $\langle x, y\rangle$ rendezett pár akkor és csak akkor eleme, ha $x \in y$[26].

B2. (Metszet-axióma.) Bármely két A és B osztályhoz van olyan osztály, amely azokat és csak azokat a halmazokat tartalmazza amelyek A-nak is, B-nek is elemei[27].

B3. (A komplementer osztály axiómája.) Bármely A osztályhoz van olyan osztály, amely azokat és csak azokat a halmazokat tartalmazza, amelyek A-nak nem elemei[28].

B4. (Az értelmezési tartomány axiómája[29].) Bármely A osztályhoz van olyan osztály, amely azokat és csak azokat az x halmazokat tartalmazza, amelyekhez van olyan y halmaz, hogy $\langle y, x\rangle \in A$.

B5. (A direkt szorzat axiómája[30].) Bármely A osztályhoz van olyan osztály, amelynek valamely $\langle y, x\rangle$ rendezett pár akkor és csak akkor eleme, ha $x \in A$.

[26] Ez az osztály nem szükségképpen reláció, hiszen nem kötöttük ki, hogy ne legyen olyan eleme, amely nem rendezett pár. Azonban a B1 axiómából (a többi axióma felhasználásával) következik olyan E *reláció* létezése, amelyre xEy akkor és csak akkor áll, ha az x halmaz eleme az y halmaznak; ezt (a meghatározottság axiómája és a reláció-fogalom definíciója folytán egyértelműen meghatározott) E relációt a (halmazok közötti) *tartalmazás relációjának* nevezhetjük. (Az x halmaz és az A osztály közötti $x \in A$ „reláció" nyilván nem reláció az imént definiált értelemben!)

[27] Ilyen osztály a meghatározottság axiómája folytán csak egy van; ezt az osztályt az A és B osztályok *metszetének* nevezzük és AB-vel jelöljük.

[28] Ilyen osztály a meghatározottság axiómája folytán csak egy van; ezt az osztályt az A osztály *komplementerjének* nevezzük és $-A$-val jelöljük.

[29] Ha A *függvény*, akkor a B4 axióma által posztulált és a meghatározottság axiómája folytán egyértelműen meghatározott osztály azokat és csak azokat az x halmazokat tartalmazza, amely x helyeken az A függvény értelmezve van; ezt az osztályt az A függvény *értelmezési tartományának* nevezhetjük. Azonban lényeges, hogy a B4 axiómát ne csak függvényekre, hanem tetszőleges osztályokra megkívánjuk.

[30] A B5 axiómából (a többi axióma felhasználásával) következik, hogy bármely két A és B osztályhoz van olyan C osztály, amelynek elemei azok az $\langle x, y\rangle$ rendezett párok, amelyekre $x \in A$ és $y \in B$ és csak ezek (tehát C-nek nincs olyan eleme, amely nem rendezett pár, vagyis C reláció); ez a C osztály a meghatározottság axiómája folytán egyértelműen meg van határoz-

B6. (A konverzió axiómája[31].) Bármely A osztályhoz van olyan osztály, amelynek valamely $\langle x, y\rangle$ rendezett pár akkor és csak akkor eleme, ha $\langle y, x\rangle \in A$.

B7. (A ciklikus permutáció axiómája.) Bármely A osztályhoz van olyan osztály, amelynek valamely $\langle x, y, z\rangle$ rendezett hármas akkor és csak akkor eleme, ha a (belőle ciklikus permutációval keletkező) $\langle y, z, x\rangle$ rendezett hármas eleme A-nak[32].

B8. (Az inverzió axiómája.) Bármely A osztályhoz van olyan osztály, amelynek valamely $\langle x, y, z\rangle$ rendezett hármas akkor és csak akkor eleme, ha a (belőle inverzióval, ti. utolsó két elemének felcserélésével keletkező) $\langle x, z, y\rangle$ rendezett hármas eleme A-nak.

Definíció. Az A osztályt *üresnek* nevezzük, ha nincs eleme[33]. Az A és B osztályokat *egymástól idegeneknek* nevezzük, ha nincs közös elemük.

Definíció. Az A osztályt a B osztály *részének* (vagy *részosztályának*, abban az esetben, ha halmaz, *részhalmazának*) nevezzük, ha az A osztály minden eleme a B osztálynak is eleme. A B osztály valamely A részosztályát a B osztály *valódi részének* (*valódi részosztályának*, ill. ha halmaz, akkor *valódi részhalmazának*) nevezzük, ha $A \neq B$.

C1. (A végtelen halmaz axiómája.) Van olyan a halmaz, amely nem üres és amelynek bármely eleme valódi része a egy másik elemének[34].

va. Ezt a C osztályt az A és B osztályok *direkt* (vagy *Descartes-féle*) *szorzatának* nevezzük és így jelöljük: $A \times B$. A B5 axióma közvetlenül az összes halmazok osztálya és az A osztály direkt szorzatának létezését posztulálja. (Az összes halmazok osztályának, vagyis olyan osztálynak létezése, amelynek minden halmaz eleme, a komplementer osztály axiómájából és a metszet-axiómából következik.)

[31] A B6 axióma által posztulált osztály nincs egyértelműen meghatározva, mert nem kötöttük ki, hogy ne legyen olyan eleme, amely nem rendezett pár, vagyis, hogy reláció legyen. Azonban a B6 axiómából (a többi axióma felhasználásával) következik olyan B *reláció* létezése is, amelyre $\langle x, y\rangle \in B$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, x\rangle \in A$; ez a reláció már egyértelműen meg van határozva. Ha A is reláció (amit nem kötöttünk ki), akkor tehát $x\,B\,y$ akkor és csakis akkor áll, ha $y\,A\,x$. Az ilyen tulajdonságú B relációt az A reláció *konverzének* nevezzük. (Ha A is, B is függvény, akkor B az A inverz függvénye.)

[32] Ez az osztály nincs egyértelműen meghatározva, mert nem kötöttük ki, hogy ne legyen olyan eleme, amely nem rendezett hármas. Hasonló megjegyzés érvényes a B8 axiómára.

[33] A komplementer osztály axiómájából és a metszet-axiómából következik, hogy van üres osztály; a meghatározottság axiómájából pedig, hogy csak egy van.

[34] Heurisztikusan (és a végtelen halmaz fogalmának megfelelő definíciója alapján szabatosan is) könnyen be lehet látni, hogy ez az a halmaz végtelen.

C2. (Az összeghalmaz axiómája.) Bármely x halmazhoz van olyan halmaz, amelynek minden olyan halmaz eleme, amely az x halmaz valamely elemének eleme[35].

C3. (A hatványhalmaz axiómája.) Bármely x halmazhoz van olyan halmaz, amely az x halmaz minden részhalmazát tartalmazza[36].

C4. (A pótlás axiómája[37].) Bármely x halmazhoz és bármely olyan A osztályhoz, amely egyértelmű leképezést létesít, van olyan halmaz, amelynek azok és csak azok a halmazok az elemei, amelyeket az A osztály által létesített leképezés az x halmaz valamely eleméhez rendel hozzá.

D. (A fundáltság axiómája.) Minden olyan A osztálynak, amely nem üres, van olyan eleme, amely idegen az A osztálytól[38].

E. (A kiválasztás axiómája.) Van olyan A osztály, amely egyértelmű leképezést létesít, mégpedig olyant, amely minden nem üres x halmazhoz hozzárendeli x valamely elemét.

3. A továbbiakban a GÖDEL-féle axiómarendszer B1—B8 axiómáival foglalkozunk[39]. Ezeknek az axiómáknak az a szerepe a hal-

[35] Ez a halmaz nincs egyértelműen meghatározva, mert nem kötöttük ki, hogy ne legyen olyan eleme, amely az x halmaz egyetlen egy elemének sem eleme. Azonban a C2 axiómából (a többi axióma felhasználásával) következik olyan halmaz létezése is, amely az x halmaz elemeinek elemeit és csak azokat tartalmazza; ezt, a meghatározottság axiómája (és az A1 axióma) folytán egyértelműen meghatározott halmazt az x halmaz *összeghalmazának*, vagy az x halmaz *elemei összegének* nevezzük.

[36] Ez a halmaz nincs egyértelműen meghatározva, mert nem kötöttük ki, hogy ne legyen olyan eleme, amely nem részhalmaza az x halmaznak. Azonban a C3 axiómából (a többi axióma felhasználásával) következik olyan halmaz létezése is, amely az x halmaz részhalmazait és csak azokat tartalmazza; ezt, a meghatározottság axiómája (és az A1 axióma) folytán egyértelműen meghatározott halmazt az x halmaz *hatványhalmazának* nevezzük.

[37] Ez az axióma nemcsak a FRAENKEL-féle axiómarendszer pótlás-axiómájának szerepét veszi át, hanem bizonyos tekintetben a részhalmaz-axióma szerepét is. Ugyanis nem kötöttük ki, hogy az x halmaz minden v eleméhez legyen egy olyan u halmaz, hogy $\langle u, v\rangle \in A$; így lehetséges, hogy a C4 axióma által posztulált halmaz nem az x halmaznak, hanem egy részhalmazának valamely egyértelmű leképezés által létesített képe.

[38] Ez az axióma kizárja olyan A osztály létezését, amelynek minden eleme tartalmazza az A osztály valamelyik elemét. Ha volna ilyen osztály, akkor annak egy x_1 elemét választva, majd x_1-nek olyan x_2 elemét, amely A-nak is eleme, majd annak ismét olyan x_3 elemét, amely A-nak is eleme, és így tovább, A olyan $x_1, x_2, x_3, \ldots$ elemeihez jutnánk, amelyek „egymásba vannak skatulyázva" (azaz $x_2 \in x_1, x_3 \in x_2, \ldots$), de amelynek „mélyén nincs semmi"; az ilyen osztály nem volna „fundálva" (megalapozva).

[39] Ezek az axiómák, B2 és B3 kivételével, felhasználják a rendezett pár és a rendezett hármas fogalmát, ezek a fogalmak pedig a rendezetlen pár fogalmán alapulnak; a rendezetlen pár fogalmát viszont olyan definícióval vezettük be, amelynek jogosultságát az A1, A3 és A4 axióma segítségével láttuk be. Ilyen értelemben a B1—B8 axiómák feltételezik az A1, A3 és A4 axiómákat is.

mazelmélet GÖDEL-féle axiómatikus felépítésében, hogy ezeknek az axiómáknak segítségével tudjuk bizonyos osztályok létezését bebizonyítani. Mégpedig, mint látni fogjuk, ezek az axiómák elegendők ahhoz, hogy — amennyiben a tulajdonság-fogalmat egy bizonyos szabatosan elhatárolt, de azért a halmazelmélet axiómatikus felépítésének céljaira elegendő tág értelemben értjük, — bebizonyítsuk, hogy minden ilyen elhatárolt értelemben vett T tulajdonsághoz van olyan osztály, amelynek elemei azok és csak azok a halmazok, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk[40]. A C1—C4 axiómák segítségével aztán ezeknek az osztályoknak egy részéről, mégpedig mindazokról, amelyekre szükség van a halmazelmélet axiómatikus felépítéséhez, be lehet bizonyítani, hogy halmazok (de azokról, amelyeknek halmaz-volta antinómiához vezetne, pl. az összes halmazok, összes rendszámok, vagy az összes számosságok osztályáról, nem[41]).

Bár az a körülmény, hogy a B1—B8 axiómák segítségével, tehát *véges számú* axióma segítségével sikerült tetszőleges adott (az említett elhatárolt értelemben vett) tulajdonságú halmazok osztályának létezését bebizonyítani, magában véve nagy teljesítmény,[42]

[40] Majoráns halmazra most nincs szükség, mert nem olyan *halmaz*, csak olyan *osztály* létezését állítjuk, amelynek azok és csak azok a halmazok az elemei, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk. (Egyébként majoráns *osztály* mindig létezik, hiszen minden halmaz eleme az összes halmazok osztályának, lásd a 30. jegyzetet.) Hogy az ilyen osztály létezése nem vezet antinómiára, azt legkönnyebben a RUSSELL-féle antinómia példáján láthatjuk. A T tulajdonságot úgy választva, hogy egy halmaznak akkor és csak akkor legyen meg a T tulajdonsága, ha nem eleme önmagának, bebizonyíthatjuk az önmagukat nem tartalmazó *halmazok osztályának*, vagyis olyan R osztálynak létezését, amelyre, bármely r halmaz esetén, akkor és csak akkor áll $r \in R$, ha $r \notin r$. Ha feltételezzük, hogy R halmaz, akkor, R-et választva r gyanánt, adódik, hogy $R \in R$ akkor és csak akkor áll, ha $R \notin R$, ami az ismert módon ellentmondásra vezet. Ez azonban csak azt mutatja, hogy R *nem halmaz* és ennélfogva az A2 axióma szerint nem lehet eleme semmiféle osztálynak sem, így önmagának sem. Ebből azonban nem adódik a szokott módon ellentmondás, hiszen R csak az összes önmagukat nem tartalmazó *halmazok*, nem pedig az önmagukat nem tartalmazó *osztályok* osztálya; tehát abból, hogy R önmagát nem tartalmazó *osztály*, nem következik, hogy eleme R-nek (mint ahogy következnék, ha R önmagát nem tartalmazó *halmaz* volna, vagy ha R, az A2 axiómával ellentétben, nemcsak az önmagukat nem tartalmazó *halmazokat*, hanem azokat az önmagukat nem tartalmazó *osztályokat* is tartalmazná, amelyek nem halmazok).

[41] Ez úgy értendő, hogy *nem ismeretes* olyan mód, amelynek segítségével a C1—C4, vagy akár az A1—A4, B1—B8, C1—C4, D és E axiómák alapján be lehetne bizonyítani pl. az összes rendszámok osztályának halmaz-voltát. Az az állítás, hogy *nincs* is ilyen bizonyítás, ekvivalens azzal a még bebizonyítatlan állítással, hogy a GÖDEL-féle axiómarendszer ellentmondástalan.

[42] Ez a teljesítmény lényegében Neumanntól származik; de már az is előfutárjának tekinthető, hogy FRAENKELnek véges számú lépésben sikerült olyan függvény-fogalmat definiálnia, hogy a részhalmaz-axióma azon fogalmazása,

mégis feltűnő, hogy Gödelnek ehhez két olyan jellegű axiómára van szüksége, mint B7 és B8. GÖDEL maga megemlíti, hogy BERNAYS azért tudja a B7 és B8 axiómákat egyetlen axiómával pótolni[43], mert külön axiómában megkívánja az összes egyelemű, azaz $\{x\}$ alakú halmazok osztályának létezését. Ebből látszik, hogy GÖDEL nem gondolt arra, hogy — mint ebben a dolgozatban megmutatjuk — *a* B8 *axióma nélkülözhető, amennyiben a Gödel-féle axiómarendszer többi axiómája (nevezetesen az* A1, A3 *és* A4, *valamint a* B1—B7 *axiómák) alapján bebizonyítható.* Hogy erre eddig nem gondoltak, az abból is látható, hogy MARKOV bebizonyította[44], hogy a B6 axióma nélkülözhető, amennyiben bebizonyítható a B4, B5 és B8 axiómák alapján, de ő sem tesz említést a B8 axióma nélkülözhetőségéről[45].

4. A B8 axióma azt mondja ki, hogy bármely A osztályhoz van olyan B osztály, amelynek valamely $\langle x, y, z\rangle$ rendezett hármas akkor és csak akkor eleme, ha komponensei, x, y és z, eleget tesznek a $\langle x, z, y\rangle \in A$ feltételnek. A rendezett hármas, majd a rendezett pár fogalmának definíciója szerint

$$\langle x, z, y\rangle = \langle x, \langle z, y\rangle\rangle = \{\{x\}, \{x, \langle z, y\rangle\}\} = \{\{x\}, \{x, \{\{z\}, \{z, y\}\}\}\};$$

tehát a $\langle x, z, y\rangle \in A$ feltétel így is írható:

$$\{\{x\}, \{x, \{\{z\}, \{z, y\}\}\}\} \in A.$$

Jelöljük sorra a $\{x\}$, $\{z\}$, $\{z, y\}$, $\{\{z\}, \{z, y\}\}$ $(= \langle z, y\rangle)$, $\{x, \{\{z\},$

hogy bármely H halmazhoz és bármely két F és G függvényhez létezik négy olyan halmaz, amelynek elemei sorra a H halmaznak azok és csak azok az x elemei, amelyekre $F(x) \in G(x)$, $F(x) \notin G(x)$, $F(x) = G(x)$ ill. $F(x) \neq G(x)$, e függvényfogalom alkalmazása esetén elegendő a halmazelmélet axiómatikus felépítéséhez.

[43] BERNAYS azon c(3) axiómája, amely az ő axiómarendszerében a GÖDEL-féle B7 és B8 axiómák szerepét átveszi, úgy szól, hogy bármely olyan A osztályhoz, amelynek elemei mind $\langle a, \langle b, c\rangle\rangle$ alakú rendezett párok (azaz, a rendezett hármas fogalmának fenti, GÖDEL-féle definícióját alkalmazva, rendezett hármasok), van olyan osztály, amelynek elemei azok és csak azok az $\langle\langle a, b\rangle, c\rangle$ alakú rendezett párok, ahol a, b és c olyan halmazok, amelyekre $\langle a, \langle b, c\rangle\rangle \in A$.

[44] MARKOV [1].

[45] MARKOV eredményéből és a jelen dolgozat eredményéből korántsem következik, hogy a B6 és B8 axiómák *egyidejűleg* nélkülözhetők, mert MARKOV felhasználja a B8 axiómát a B6 axióma bebizonyításához, mi viszont felhasználjuk a B6 axiómát a B8 axióma bebizonyításához. — A B8 axióma nélkülözhetőségét sejteni lehet abból, hogy, mint BERNAYS utólag bebizonyította (BERNAYS [7], 94. oldal), az összes egyelemű halmazok osztályának létezését kimondó b(1) axiómája nélkülözhető az ő axiómarendszerében. (Ebből azonban, a GÖDEL-féle axiómarendszer eltérései miatt a BERNAYS-féle axiómarendszertől, nem adódik közvetlenül a B8 axióma nélkülözhetősége a GÖDEL-féle axiómarendszerben.)

$\{z, y\}\}$ $(= \{x, \langle z, y\rangle\})$, $\{\{x\}, \{x, \{\{z\}, \{z, y\}\}\}\}$ $(= \langle x, z, y\rangle)$ halmazokat p-vel, q-val, r-rel, s-sel, t-vel és u-val:

$$p = \{x\},$$
$$q = \{z\},$$
$$r = \{z, y\},$$
$$s = \{\{z\}, \{z, y\}\} = \{q, r\},$$
$$t = \{x, \{\{z\}, \{z, y\}\}\} = \{x, s\},$$
$$u = \{\{x\}, \{x, \{\{z\}, \{z, y\}\}\}\} = \{p, t\}.$$

Az egyelemű halmaz és a rendezetlen pár fogalmának definíciója alapján (az A1 axiómának és a meghatározottság axiómájának felhasználásával) könnyen adódik, hogy pl. p az egyetlen olyan halmaz, amely eleget tesz annak a feltételnek, hogy $x \in p$ és hogy nincs olyan v halmaz, amely eleme p-nek és különböző x-től, és pl. r az egyetlen olyan halmaz, amely eleget tesz annak a feltételnek, hogy $z \in r$ és $y \in r$ és hogy nincs olyan v halmaz, amely eleme r-nek és különböző z-től is, y-tól is. Ez a feltétel a matematikai logikában használatos & (és), $\neg$ (nem igaz, hogy) és (Ev) (van olyan v, ti. olyan v halmaz, hogy) jelölések segítségével[46] így írható fel rövidebben:

$$(1) \qquad x \in p \,\&\, \neg (Ev)(v \in p \,\&\, v \neq x),$$

ill.

$$(2) \qquad z \in r \,\&\, y \in r \,\&\, \neg (Ev)(v \in r \,\&\, v \neq z \,\&\, v \neq y).$$

Hasonlóan, a q, s, t és u halmazokat a következő feltételek jellemzik egyértelműen:

$$(3) \qquad z \in q \,\&\, \neg (Ev)(v \in q \,\&\, v \neq z),$$

$$(4) \qquad q \in s \,\&\, r \in s \,\&\, \neg (Ev)(v \in s \,\&\, v \neq q \,\&\, v \neq r),$$

$$(5) \qquad x \in t \,\&\, s \in t \,\&\, \neg (Ev)(v \in t \,\&\, v \neq x \,\&\, v \neq s),$$

ill.

$$(6) \qquad p \in u \,\&\, t \in u \,\&\, \neg (Ev)(v \in u \,\&\, v \neq p \,\&\, v \neq t).$$

A páraxióma szerint léteznek ilyen p, q, r, s, t és u halmazok; mégpedig u a $\langle x, z, y\rangle$ halmaz. Ennélfogva a $\langle x, z, y\rangle \in A$ feltétel akkor

[46] A matematikai logika jeleit csak rövidség kedvéért használjuk; ezek nélkül az egyes feltételeket több oldalas mondatban kellene kimondani. Egyetlen matematikai logikai tételre sem hivatkozunk; sőt, még az &, $\neg$ és (Ev) jelekkel jelölt műveleteknek a matematikai logikában szokásos szabatos definícióját sem használjuk fel.

és csak akkor teljesül, ha vannak olyan p, q, r, s, t és u halmazok, amelyek az (1)—(6) feltételen kívül még az $u \in A$ feltételnek is eleget tesznek, vagyis, ha az x, y és z halmazok eleget tesznek a következő feltételnek[47]:

$$(7)\quad (Ep)(Eq)(Er)(Es)(Et)(Eu)(x \in p \,\&\, \neg(Ev)(v \in p \,\&\, v \neq x) \,\&$$
$$\&\, z \in q \,\&\, \neg(Ev)(v \in q \,\&\, v \neq z) \,\&$$
$$\&\, z \in r \,\&\, y \in r \,\&\, \neg(Ev)(v \in r \,\&\, v \neq z \,\&\, v \neq y) \,\&$$
$$\&\, q \in s \,\&\, r \in s \,\&\, \neg(Ev)(v \in s \,\&\, v \neq q \,\&\, v \neq r) \,\&$$
$$\&\, x \in t \,\&\, s \in t \,\&\, \neg(Ev)(v \in t \,\&\, v \neq x \,\&\, v \neq s) \,\&$$
$$\&\, p \in u \,\&\, t \in u \,\&\, \neg(Ev)(v \in u \,\&\, v \neq p \,\&\, v \neq t) \,\&\, u \in A).$$

A (7) feltételben a tartalmazás fogalmán kívül halmazok különbözőségének fogalma is szerepel; ezt azonban kiküszöbölhetjük belőle. Valóban, a meghatározottság axiómája (és az A1 axióma) folytán két halmaz akkor és csak akkor különböző egymástól, ha van olyan halmaz, amelyik a két halmaz közül az egyiknek eleme, a másiknak nem. Ennélfogva pl. ahelyett, hogy $v \neq x$, ezt írhatjuk:

$$(Ew)((w \in v \,\&\, w \notin x) \vee (w \in x \,\&\, w \notin v)),$$

ahol a $\vee$ jel a „vagy" szó rövidítése. Ez utóbbi jelet is kiküszöbölhetjük, hiszen ahelyett, hogy $w \in v$ és $w \notin x$ vagy $w \in x$ és $w \notin v$, azt is mondhatjuk, hogy nem igaz az, hogy sem az nem igaz, hogy $w \in v$ és $w \notin x$, sem az, hogy $w \in x$ és $w \notin v$; ha itt még pl. $w \notin x$ helyett azt írjuk, hogy $\neg\, w \in x$ (nem igaz, hogy $w \in x$), akkor tehát ahelyett, hogy $v \neq x$, ezt írhatjuk:

$$(Ew) \neg(\neg(w \in v \,\&\, \neg\, w \in x) \,\&\, \neg(w \in x \,\&\, \neg\, w \in v)).$$

Hasonlóan járva el a (7) feltételben szereplő $v \neq z$, $v \neq y$, $v \neq q$, $v \neq r$, $v \neq s$, $v \neq p$ és $v \neq t$ állításokkal, a (7), vagyis az $\langle x, z, y \rangle \in A$

[47] E feltétel nyilván valóban csak az x, y és z halmazokra, valamint az A osztályra vonatkozik: vagyis az, hogy teljesül-e, vagy nem, csak az x, y, z halmazoktól és az A osztálytól függ. Ugyanis a feltételben szereplő p, q, r, s, t, u és v halmazváltozók látszólagos, más néven *kötött* változók. Általában, ha egy w halmazváltozó csak az (Ew) jeleken és olyan zárójeleken belül szerepel valamely feltételben, amelyek előtt (Ew) jel áll, akkor az, hogy e feltétel teljesül-e, nem függ a w halmaztól: w a kérdéses feltételben kötött változó. Azokat a halmazváltozókat, amelyek valamely feltételben nem kötöttek, tehát az, hogy a kérdéses feltétel teljesül-e, függ attól, hogy e változók mely halmazokat jelentenek, valamint a feltételben szereplő osztályváltozókat, e feltétel *szabad* változóinak nevezzük. (A továbbiak szempontjából fontos, hogy kötött *osztályváltozókat* nem használunk, vagyis pl. az (EX) jelet nem használjuk abban az értelemben, hogy van olyan X *osztály*, amelyre valamilyen állítás teljesül.)

feltételt a következő alakban is írhatjuk:

$$
\begin{aligned}
(8)\quad & (Ep)(Eq)(Er)(Es)(Et)(Eu)(x \in p \,\&\, \neg (Ev)(v \in p \,\& \\
& \&\, (Ew) \neg (\neg (w \in v \,\&\, \neg w \in x) \,\&\, \neg (w \in x \,\&\, \neg w \in v))) \,\& \\
& \&\, z \in p \,\&\, \neg (Ev)(v \in q \,\& \\
& \&\, (Ew) \neg (\neg (w \in v \,\&\, \neg w \in z) \,\&\, \neg (w \in z \,\&\, \neg w \in v))) \,\& \\
& \&\, z \in r \,\&\, y \in r \,\&\, \neg (Ev)(v \in r \,\& \\
& \&\, (Ew) \neg (\neg (w \in v \,\&\, \neg w \in z) \,\&\, \neg (w \in z \,\&\, \neg w \in v))) \,\& \\
& \&\, (Ew) \neg (\neg (w \in v \,\&\, \neg w \in y) \,\&\, \neg (w \in y \,\&\, \neg w \in v))) \,\& \\
& \&\, q \in s \,\&\, r \in s \,\&\, \neg (Ev)(v \in s \,\& \\
& \&\, (Ew) \neg (\neg (w \in v \,\&\, \neg w \in q) \,\&\, \neg (w \in q \,\&\, \neg w \in v))) \,\& \\
& \&\, (Ew) \neg (\neg (w \in v \,\&\, \neg w \in r) \,\&\, \neg (w \in r \,\&\, \neg w \in v))) \,\& \\
& \&\, x \in t \,\&\, s \in t \,\&\, \neg (Ev)(v \in t \,\& \\
& \&\, (Ew) \neg (\neg (w \in v \,\&\, \neg w \in x) \,\&\, \neg (w \in x \,\&\, \neg w \in v))) \,\& \\
& \&\, (Ew) \neg (\neg (w \in v \,\&\, \neg w \in s) \,\&\, \neg (w \in s \,\&\, \neg w \in v))) \,\& \\
& \&\, p \in u \,\&\, t \in u \,\&\, \neg (Ev)(v \in u \,\& \\
& \&\, (Ew) \neg (\neg (w \in v \,\&\, \neg w \in p) \,\&\, \neg (w \in p \,\&\, \neg w \in v))) \,\& \\
& \&\, (Ew) \neg (\neg (w \in v \,\&\, \neg w \in t) \,\&\, \neg (w \in t \,\&\, \neg w \in v))) \,\&\, u \in A).
\end{aligned}
$$

Az $\langle x, z, y \rangle \in A$ feltételt azért hoztuk ilyen látszólag bonyolult alakra, hogy lássuk, hogy az $u \in A$ állításból, valamint $k \in l$ alakú állításokból, ahol k és l helyett tetszőleges halmazváltozók állhatnak, az &, $\neg$ és (Ek) jeleknek, ahol k helyett ismét tetszőleges halmazváltozó állhat, ismételt (véges számú) alkalmazásával felírható. Ennélfogva ahelyett, hogy magát B8 axiómát bizonyítanók be az A1, A3 és A4, valamint B1—B7 axiómák segítségével, elegendő azt az általánosabb metatételt[48] megmutatnunk, hogy vala-

[48] Lásd a 18. jegyzetet. Valóban metatételről van szó, mert azt állítjuk, hogy az olyan osztály létezése, amelynek valamely $\langle x, y, z \rangle$ rendezett hármas akkor és csak akkor eleme, ha a $\Phi(x, y, z, A)$ feltétel teljesül, e feltétel minden egyes (a szövegben pontosan megadott módon való) választása esetén egy-egy tétele a pusztán az A1, A3, A4, valamint a B1—B7 axiómák által axiomatizált diszciplinának.

Arra a közelfekvő kérdésre, miért ezt a metatételt bizonyítjuk be ahelyett a speciális esete helyett, amikor $\Phi(x, y, z, A)$ a (8) feltételt jelenti, könnyen válaszolhatunk: könnyebb ezt a metatételt általánosan bebizonyítani, mint közvetlenül a kérdéses speciális esetét; de természetesen e metatétel bizonyítása alapján meg lehetne adni a kérdéses speciális eset bizonyítását is, vagyis a B8 axióma halmazelméleti bizonyítását az A1, A3, A4, valamint a B1—B7 axiómák alapján, csak nagyon sokszor kellene ismételni a metatétel bizonyításában sze-

hányszor $\Phi(x, y, z, A)$ bizonyos, $k \in A$ és $k \in l$ alakú állításokból, ahol k és l helyett tetszőleges halmazváltozók állhatnak, az $\&$, $\neg$ és (Ek) jeleknek, ahol k helyett ismét tetszőleges halmazváltozó állhat, ismételt alkalmazásával felírható olyan feltétel, amelyben az A osztályváltozón kívül csak az x, y és z szabad változók szerepelnek, akkor az a halmazelméleti tétel, hogy bármely A osztályhoz van olyan osztály, amelynek valamely $\langle x, y, z \rangle$ rendezett hármas akkor és csak akkor eleme, ha komponensei, x, y és z, eleget tesznek a $\Phi(x, y, z, A)$ feltételnek, bebizonyítható az A1, A3 és A4, valamint B1—B7 axiómák alapján.

A Bessel-függvények egy monotonitási tulajdonságáról

BIHARI IMRE

R. G. COOKE[1] kimutatta, hogy $\nu > -1$ esetén a $J_\nu(x)$ Bessel-függvény „félhullámai" jobb felé haladva területre nézve csökkennek ($x > 0$). Bizonyítása a Bessel-függvények igen messzemenő tulajdonságait használta föl. MAKAI ENDRE[2] a következő tételt bizonyította be igen egyszerű módon: ha

(a) a $z_0 < z < Z_0$-ban (ahol Z_0 véges, vagy végtelen) folytonos $f(z)$ függvény növekvő,

(b) létezik az $y'' + f(z)y = 0$ differenciálegyenletnek olyan partikuláris megoldása, melynek van három egymás után következő zérus helye (z_1, z_2, z_3),

(c) $y(z)$ és $y'(z)$ zérushelyei kölcsönösen elválasztják egymást (z_0, Z_0)-ben, akkor

$$|y(z_2 - u)| > |y(z_2 + u)| \qquad 0 < u < z_3 - z_2. \quad (1)$$

Következésképpen

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} y(z)dz\right| > \left|\int_{z_2}^{z_3} y(z)dz\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

és

$$\max_{z_1 < z < z_2} |y(z)| > \max_{z_2 < z < z_3} |y(z)|. \quad (3)$$

Alkalmazva e tételt az $y'' + f(z)y = 0, f(z) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{z^2}$ alakba transzformált Bessel egyenlet egy tetszőleges $y = y(z)$ megoldására

[1] A monotonic property of Bessel functions, Journal of the London Mathematical Society, 12 (1937), pp. 180—185.

[2] On a monotonic property of certain Sturm—Liouville functions, Acta Math. Acad. Scient. Hungaricae (1952) T. III. pp. 165—172.

MAKAI bebizonyította az (1), (2), (3) tulajdonságot a $J_\nu(z)$ függvényre föltéve, hogy $|\nu| > \frac{1}{2}$.

A következőkben megmutatjuk a fenti tétel alkalmazásaképpen a (2) tulajdonság érvényét a $J_\nu(z)$ függvényre még $\frac{1}{3} \leqq \nu < \frac{1}{2}$ esetén is, továbbá, hogy $Y_\nu(z)$ a (3) tulajdonsággal még $|\nu| < \frac{1}{2}$ esetén is rendelkezik!

Az $y''(x) + x^\lambda y(x) = 0$ $(\lambda > 0)$ differenciálegyenlet $y(x) = \sqrt{x} J_{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{2}{\mu} x^{\frac{\mu}{2}}\right)$ $(\mu = \lambda + 2)$ megoldása MAKAI tétele szerint rendelkezik az (1), (2), (3) tulajdonságokkal. A (2) tulajdonság azt jelenti, hogy a következő sorozat

$$A_k = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{x} J_{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{2}{\mu} x^{\frac{\mu}{2}}\right) dx \right| \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

— ahol $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a $J_{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{2}{\mu} x^{\frac{\mu}{2}}\right)$ nem negatív zérushelyei — monoton csökkenő. Helyettesítve $\frac{2}{\mu} x^{\frac{\mu}{2}}$-et z-vel

$$A_k = K \left| \int_{z_k}^{z_{k+1}} z^{\frac{3}{\mu} - 1} J_{\frac{1}{\mu}}(z) dz \right| \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

ahol $z_1, z_2, z_3, \ldots$ a $J_{\frac{1}{\mu}}(z)$ nem negatív zérushelyei és $K > 0$ független a k-tól. Ezért a

$$B_k = \left| \int_{z_k}^{z_{k+1}} J_{\frac{1}{\mu}}(z) dz \right| \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \quad (z_1 = 0)$$

sorozat szintén monoton csökkenő, ha $\frac{3}{\mu} - 1 \geqq 0$, $\frac{1}{\mu} \geqq \frac{1}{3}$. Figyelembe véve, hogy $\lambda > 0$, $\mu > 2$ az $\frac{1}{3} \leqq \frac{1}{\mu} < \frac{1}{2}$ paraméterértékek között állíthatjuk a B_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ sorozat csökkenő voltát.

Az $y=\sqrt{x}J_{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{2}{\mu}x^{\frac{\mu}{2}}\right)$ függvény is — mint láttuk — rendelkezik az (1) és (3) tulajdonságokkal. Az $u(x)=\sqrt{\frac{x}{x_k}}J_{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{2}{\mu}x^{\frac{\mu}{2}}\right)$ függvény egy másik megoldása ugyanannak az egyenletnek. Ebből

$$J_{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{2}{\mu}x^{\frac{\mu}{2}}\right)=\sqrt{\frac{x_k}{x}}u(x)$$

és innen nyilvánvaló, hogy

$$\left|J_{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{2}{\mu}x^{\frac{\mu}{2}}\right)\right|\gtrless|u(x)| \qquad x\lesseqgtr x_k.$$

Az $u(x)$ függvény rendelkezik az (1) és (3) tulajdonságokkal, a $J_{\frac{1}{\mu}}\left(\frac{2}{\mu}x^{\frac{\mu}{2}}\right)$ függvény tehát à fortiori rendelkezik ezekkel és a $\frac{2}{\mu}x^{\frac{\mu}{2}}=z$ helyettesítés után a $J_{\frac{1}{\mu}}(z)$ függvény megtartja a (3) tulajdonságot $\left|\frac{1}{\mu}\right|<\frac{1}{2}$ esetén.

Ezzel a módszerrel a (2) tulajdonságra nem lehet következtetni $\frac{1}{\mu}<\frac{1}{3}$ esetén és az (1)-re nem $\frac{1}{\mu}<\frac{1}{2}$ esetén. A másodfajú $Y_\nu(z)$ Bessel-függvényre hasonló tétel érvényes ugyanezen paraméterértékek mellett az első pozitív zérushelyétől fogva.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

И. Бихари

(Резюме)

Р. Г. Куком было выявлено, что площадь под отдельными волнами функции Бесселя $J_\nu(x)$ убывается при $\nu>-1$ и $x>0$. Э. Макаи доказал эту теорему для $|\nu|>\frac{1}{2}$. Данная статья содержит простое доказательство для случая $\frac{1}{3}\leqq\nu<\frac{1}{2}$.

ON A MONOTONIC PROPERTY OF BESSEL FUNCTIONS

I. Bihari

(Summary)

R. G. Cooke has shown that the area of the „waves" of the Bessel function $J_\nu(x)$ are decreasing for $\nu > -1$ and $x > 0$. E. Makai has proved this theorem for $|\nu| > \frac{1}{2}$ in a very simple way. This paper contains a simple proof for $\frac{1}{3} \leqq \nu < \frac{1}{2}$.

Algebrailag zárt testek mint véges bővítések

FRIED ERVIN

I.

A modern testelmélet kiindulópontjának a különböző számtestek, függvénytestek vizsgálata során elért eredmények tekinthetők. A STEINITZ nyomán megindult intenzív vizsgálatokat három fő kérdéscsoportra lehet felosztani.

1. A legfontosabb kutatások a testek közös struktúrális tulajdonságaira vonatkoznak. A prímtestekre, az algebrai és transzcendens bővítésre, az algebrai lezárásra stb. vonatkozó eredmények, melyek nagyrészt magától STEINITZTŐL erednek, a modern testelmélet legalapvetőbb tételeinek tekinthetők.

2. A második kérdéscsoportba azok a problémák sorolhatók, amelyeknek csak bizonyos tulajdonságú testekben van értelmük, illetve a megoldás lényeges mértékben függ a tekintett test struktúrális tulajdonságaitól. Az elrendezhetőség kérdése például prímkarakterisztikájú testekben nem vizsgálható, s csak az úgynevezett formálisan valós testekben nyert pozitív megoldást, vagy a polinomoknak elsőfokú irreducibilis polinomok szorzatára való bontása csak algabrailag zárt testekben valósítható meg s. í. t.

3. A harmadik kérdéscsoportba azokat a problémákat sorolhatjuk, amelyek a különböző testek közti összefüggésekre vonatkoznak. Így például a valós és a racionális számtest kapcsolata tudvalevőleg az, hogy a valós számtestet racionális számokból álló Cauchy-féle sorozatok határértékei segítségével állíthatjuk elő, vagyis a racionális számtest perfekt lezártjaként. Hasonló kapcsolat áll fenn a p-adikus számtestek és a racionális számtest között. (Ilyen jellegű kérdésekkel általánosabban az értékelmélet foglalkozik.) A valós és komplex számtest közötti kapcsolat kérdése szintén ebbe a problémakörbe tartozik.

Mi a továbbiakban ezzel az utóbbi kérdéssel, tehát a valós és a komplex számtest kapcsolatával óhajtunk foglalkozni. E két

test kapcsolatát algebrai szempontból lényegileg feltárja az a tény, hogy a komplex számtest a valós számtestnek $i = \sqrt{-1}$-gyel való bővítése. Elképzelhető azonban az, hogy más számtestek i-vel való bővítése szintén a komplex számtestet eredményezi. Valóban, nem a valós számtest az egyedüli, melynek i-vel való bővítése a komplex számtest. ARTIN és SCHREIER kimutatták, hogy azon testeknek, melyeknek i-vel való bővítése a komplex számtest, van egy közös tulajdonságuk, mégpedig az, hogy valósan zártak[1]. Természetesen ezek után azonnal felvetődik az a kérdés, hogy vajon bármely valósan zárt testnek i-vel való bővítése a komplex számtestet szolgáltatja-e. Ez már nem áll; csak annyit lehet állítani, hogy a kapott bővítés algebrailag zárt lesz. Sőt, ARTIN és SCHREIER kimutatták, hogy *minden valósan zárt testnek i-vel való bővítése algebrailag zárt, és ha egy testből i-vel való bővítés útján algebrailag zárt testet nyerünk, akkor e test szükségképpen valósan zárt.* Ezek szerint i-vel való bővítéssel algebrailag zárt test csak valósan zárt testből nyerhető.

ARTIN tovább élesítette ezen eredményét. Kimutatta, hogy *ha egy algebrailag zárt test*

1. 0-*karakterisztikájú,*
2. *egy K testnek algebrai és*
3. *véges*[2] *bővítése,*

akkor K szükségképpen valósan zárt. Természetesen ez esetben a bővítés i-vel történhetik.

Meg fogjuk vizsgálni, hogy szükséges-e ARTIN előbbi tételében mindhárom feltételt kikötni. Be fogjuk bizonyítani, hogy az első két feltétel teljesen elhagyható! BOURBAKI Algèbre c. könyve VI. fejezetében egy feladatsorozatot találunk, amelynek megoldása az itteni első feltétel elhagyhatóságát jelenti. Ezt lényegében ugyanezen az úton haladva fogjuk bebizonyítani.

A harmadik feltétel teljes elhagyása nyílván lehetetlen. Valószínűnek látszik ellenben az, hogy e feltétel gyengébbel pótolható, amennyiben a végesség helyett elegendő bizonyos számossági korlátozást adni a bővítésre vonatkozóan; lásd még V.-ben.

Be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

I. TÉTEL. *Ha egy algebrailag zárt test valamely valódi résztestéből véges*[2] *bővítésként előállítható, akkor*

[1] Az alapvető tételekre és fogalmakra vonatkozóan utalunk dolgozatunk II. részére.

[2] Véges bővítésen azt értjük, hogy véges sok elemet adjungálunk.

1. *a bővített test valósan zárt,*
2. *a bővítés i-vel történhetik.*

E tételből speciális esetként adódik, hogy p-karakterisztikájú algebrailag zárt test nem lehet véges bővítés.

II.

A bizonyítás folyamán több modern algebrai fogalmat és tételt fogunk felhasználni. Ezek a tételek megtalálhatók a legtöbb modern algebrai tankönyvben, — például RÉDEI Algebra I. című könyvében, — így itt csak ismertetésükre fogunk szorítkozni.

1. A csoportelméletből néhány egyszerű tényre hívatkozunk.

Csoportnak nevezzük elemeknek tetszőleges halmazát, melyben értelmezve van egy asszociatív és invertálható művelet. Ha a csoport elemeinek száma véges, akkor a csoportot végesnek, elemeinek számát pedig a csoport rendjének nevezzük. Prímrendű csoport ciklikus, vagyis létezik oly σ eleme, melynek hatványaiként a csoport minden eleme előállítható. Ha egy csoport rendje osztható p^k-val (ahol p prímszám), akkor e csoportnak van p^k-rendű részcsoportja.

2. Most a testelméletből nézzünk néhány fogalmat.

Elemek valamely halmazát testnek nevezzük, ha értelmezve van benne két asszociatív, kommutatív és invertálható művelet: az összeadás és szorzás, melyeket a disztributivitás köt össze. (0, az additív egység, az egyedüli elem, melynek nincs multiplikatív inverze.)

Ha egy testhez létezik olyan szám, hogy bármely testbeli elemet ennyiszer összeadva, 0-t kapunk, akkor e számot a test karakterisztikájának nevezzük. Ha nincs oly testelem, melyet valahányszor összeadva 0-t kapnánk, akkor a testet 0-karakterisztikájúnak nevezzük. Egy test karakterisztikája csak 0 vagy egy prímszám lehet.

Egy testnek bizonyos elemek halmazával való bővítésén azt a legszűkebb testet értjük, amelyik az adott testet és a szóbanforgó elemek halmazát tartalmazza. (Ha egyáltalában van ilyen test.) Ha az elemhalmaz véges, akkor a bővítést is végesnek nevezzük; amennyiben pedig csak egy elemből áll, akkor egyszerű bővítésről vagy egyszerű adjunkcióról beszélünk. Ez esetben azt mondjuk, hogy a testhez egy elemet adjungáltunk. Ha az az elem, melyet egy testhez adjungáltunk, kielégít egy testbeli együtthatós

polinomot, akkor az elemet a test felett algebrainak, és a bővítést is algebrainak nevezzük. Azon testbeli együtthatós irreducibilis polinom fokát, melyet az adjungált elem kielégít, a bővítés fokának nevezzük. Amennyiben egy bővített test minden eleme az eredetileg megadott úgynevezett alaptest felett algebrai, akkor is algebrainak nevezzük a bővítést. Egy bővítés véges, ill. egyszerű algebrai, ha algebrai és véges, ill. egyszerű. Amennyiben a testhez adjungált elem nem gyöke semmilyen alaptestbeli együtthatós polinomnak, akkor a bővítést transzcendensnek nevezzük.

Általában a testeket nemcsak önmagukban szoktuk vizsgálni, hanem más test bővítéseként is. Legyen például L a K-nak bővítése, akkor ha L-ről mint K bővítéséről mondunk valamit, az L/K jelölést használjuk. Például L/K egyszerű bővítés azt jelenti, hogy L a K-nak egyszerű bővítése.

Ha L/K egyszerű algebrai bővítés, akkor e bővítés foka független attól, hogy L milyen elem adjunkciójával állt elő. Ezt a számot az L test K-ra vonatkozó fokának nevezik, és $[L:K]$-val jelölik. A bővítések foka összeszorzódik, vagyis ha L/K és M/L egyszerű bővítés, akkor M/K is az, és $[M:K] = [M:L]\cdot[L:K]$.

3. További testelméleti fogalmakat veszünk.

Tekintsünk egy egyszerű algebrai bővítést. Mint tudjuk, egy egyszerű algebrai bővítés egy elem adjunkcióját jelenti. Ez az elem kielégít egy alaptestbeli együtthatós irreducibilis polinomot. Ha ezen polinomnak csupa egyszeres gyökei vannak, akkor ezt a bővítést szeparábilisnek nevezzük. Egyszerű szeparábilis bővítések egymásutánja ismét egyszerű szeparábilis bővítés. Vagyis, ha M/L és L/K egyszerű szeparábilis, akkor ugyancsak szeparábilis lesz az M/K is. Ha egy test minden egyszerű algebrai bővítése szeparábilis, akkor e testet tökéletesnek nevezik. Minden 0-karakterisztikájú test tökéletes. Ha tekintünk egy nem tökéletes testet, akkor e testnek létezik nem véges algebrai bővítése. Legyen ugyanis K egy nem tökéletes test. Ekkor a karakterisztikája nem lehet 0, legyen p. Vegyük most a testbeli elemek p-edik gyökét. Ezen elemek egy K-val izomorf, K-t tartalmazó és K felett algebrai K_1 testet alkotnak. Az izomorfizmus folytán K_1 szintén nem lesz tökéletes. Hasonló módon képezhetjük K_1-ből a K_2, majd ebből a K_3 stb. testeket; ezek mindegyike az előzőnél bővebb és K felett algebrai lesz. Tekintsük e testek $\bar{K}$ egyesítését; ez K-nak algebrai, de nem véges bővítése.

4. Nézzük most a Galois-elméletből felhasználandó fogalmakat.

Egy egyszerű algebrai bővítést akkor nevezünk Galois-bővítésnek, vagy normálisnak, ha abból, hogy egy az alaptest felett irreducibilis polinomnak egy gyöke benne van a bővítésben, következik, hogy ezen polinomnak minden gyöke a bővítésben van.

Egy testnek tetszőleges önmagára való egy-egyértelmű, művelettartó leképezését automorfizmusnak nevezzük. Ha most tekintjük egy véges szeparábilis Galois-bővítésnek azon automorfizmusait, amelyek az alaptest minden elemének önmagát feleltetik meg, ezen automorfizmusok csoportot alkotnak, melyet a bővítés Galois-csoportjának nevezünk. A bővített testeknek az alaptestet tartalmazó résztestei, az úgynevezett közbülső testek, és a Galois-csoport részcsoportjai közt egy-egyértelmű megfeleltetés létesíthető.

Tekintsünk egy K közbülső testet. Azon automorfizmusok, melyek e K test minden elemének önmagát feleltetik meg, a Galois-csoportnak egy G részcsoportját alkotják. Ezt a G részcsoportot feleltetjük meg a K közbülső testnek. Ha pedig az automorfizmusoknak egy G részcsoportját vesszük, akkor azok az elemek, melyeket ezen részcsoport minden automorfizmusa önmagába visz át, egy K közbülső testet alkotnak, amelyet a G részcsoportnak feleltetünk meg. Tekintsünk egy közbülső testet. Ennek megfelel egy részcsoport, és e részcsoportnak ismét egy közbülső test. Ez a test az eredetivel azonos lesz. A hasonló módon kapott részcsoport—közbülső test—részcsoport megfeleltetésben szereplő két részcsoport is megegyezik. A közbülső testek és a részcsoportok között még a következő összefüggés is fennáll. Tekintsünk egy közbülső testet. Az eredeti Galois-bővítésnek (mely e testnek is Galois-bővítése lesz) ezen közbülső testre vonatkozó foka és az ugyanezen közbülső testhez tartozó részcsoport rendje megegyezik. Speciálisan az egész bővítés foka is megegyezik a Galois-csoport rendjével.

Legyen egy Galois-bővítéshez tartozó csoport n-edrendű ciklikus csoport. Tegyük fel azonkívül, hogy az alaptest karakterisztikája nem osztója n-nek, és az n-edik egységgyökök az alaptestben vannak. Ekkor létezik a bővítésben egy olyan elem, melynek n-edik hatványa az alaptestben van, és generálja a bővítést (vagyis, ha az alaptesthez adjungáljuk ezt az elemet, akkor éppen a szóbanforgó bővítést kapjuk). Amennyiben az alaptest karakterisztikája osztója n-nek, akkor e tétel nem igaz. Ha a bővítés foka maga is prímszám, akkor mégis elég egyszerűen lehet a bővítést jellemezni. Ezt az esetet megtalálhatjuk A. A. ALBERT Modern Higher Algebra című könyvében, de itt is adunk rá egy bizonyítást, amely az előbbinél lényegesen egyszerűbb. (A III/2 lemmában.)

5. Megemlítünk végül néhány fogalmat, mely az algebrai zártsággal és a formális valósággal van kapcsolatban.

Egy testet akkor nevezünk algebrailag zártnak, ha minden e testbeli együtthatós polinomnak van e testben gyöke. Ilyen test például a komplex vagy az összes algebrai számok teste.

Mint tudjuk, valós számok négyzeteinek összege csak akkor lehet 0, ha e számok mindegyike 0. Ennek megfelelően egy testet akkor nevezünk formálisan valósnak, ha elemeinek négyzetösszege csak akkor lehet 0, mikor ezen elemek mindegyike 0. Ezzel ekvivalens definíció az, ha azt kötjük ki, hogy elemeinek négyzetösszege sohase legyen -1. Formálisan valós test csak 0-karakterisztikájú lehet. Ugyanis p-karakterisztikájú testben az $1 = 1^2$-et $(p-1)$-szer összeadva, $p-1 = -1$-et kapunk. A valós számok teste azonban a formális valóságon kívül még bizonyos maximalitással rendelkezik, abban az értelemben, hogy bármely algebrai bővítését vesszük (ilyen csak egy van: a komplex számtest), ez már nem lesz formálisan valós. Az ilyen tulajdonságú testeket, tehát amelyek formálisan valósak, de nincs formálisan valós algebrai bővítésük, valósan zártaknak nevezzük.

Ha a valós számtesthez i-t adjungáljuk, akkor a komplex számtestet kapjuk. Azonban nemcsak az i, hanem más nem valós komplex szám adjunkciója is a komplex számtestet adja. Mindenesetre, ha a valós számtestből a komplex számtestet akarjuk megkapni, ezt elérhetjük úgy, hogy az i-t adjungáljuk, de más adjunkcióval is. Ezért mondjuk azt, hogy a bővítés i-vel „történhetik".

III.

Mielőtt a bizonyítást megkezdenénk, abból a célból, hogy a bizonyítás egységesebb és áttekinthetőbb legyen, előzőleg két lemmát bizonyítunk be.

1. LEMMA. Ha egy A algebrailag zárt test valamely V testnek véges algebrai bővítése, akkor e bővítés szeparábilis.

Ellenkező esetben ugyanis V prímkarakterisztikájú, és a II.-ben mondottak alapján a V testhez konstruálhatnánk egy $\bar{V}$ testet, melyre $V \subset \bar{V} \subset A$ és $\bar{V}$ a V-nek nem véges bővítése. Ekkor azonban A sem lehetne véges bővítése a V-nek, ami a feltételnek ellentmond.

A 2. lemma bizonyításához előrebocsájtjuk a következőket.

Legyen L/K p-edfokú Galois-bővítés, és a bővítéshez tartozó — ciklikus — Galois-csoport generátoreleme σ. Tekintsük a $\Sigma n_i \sigma^i$

alakú egészegyütthatós formális polinomokat (n_i egész, modulo p; $n\sigma = \sigma n$). Legyen $P(x)$ egész együtthatós polinom, és $[P(\sigma)](\gamma)$-n értsük az L test $P(\sigma(\gamma))$ elemét ($\gamma \in L$). Könnyen látható, hogy e polinomok gyűrűt alkotnak, és az L testnek önmagába való összegtartó leképezései lesznek.

2. LEMMA. Legyen $L = K(\vartheta)$ a K-nak szeparábilis Galois-bővítése. Ha a bővítés foka és K karakterisztikája ugyanaz a p prímszám, akkor létezik L-nek oly α eleme, hogy $L = K(\alpha)$ és α egy $x^p = x + a$ ($a \in K$) alakú egyenlet gyöke.

BIZONYÍTÁS: Mivel a bővítés szeparábilis, ezért a bővítés Galois-csoportjának rendje p. Azonban p-edrendű csoport ciklikus; legyen σ generátoreleme. Az előrebocsátottak alapján:

$$(\sigma - 1)^p = \sigma^p - \binom{p}{1}\sigma^{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1}\sigma - 1 = \sigma^p - 1.$$

Alkalmazva $(\sigma - 1)^p$-t tetszőleges $\gamma (\in L)$-re, kapjuk, hogy

$$(\sigma - 1)^p(\gamma) = (\sigma^p - 1)\gamma = \sigma^p(\gamma) - \gamma = \gamma - \gamma = 0.$$

Az utolsó egyenlet azt jelenti, hogy ha γ-ra p-szer alkalmazzuk a $(\sigma - 1)$ transzformációt, akkor 0-t kapunk. Válasszunk most egy fix γ-t, melyre $\gamma \notin K$, és tekintsük azt a legkisebb k-t, melyre $(\sigma - 1)^k(\gamma) = 0$. Nyilván $0 < k \leq p$. A feltevés alapján $\delta = (\sigma - 1)^{k-1}(\gamma)$-ra $\delta \neq 0$, de $(\sigma - 1)\delta = 0$, vagyis $\sigma(\delta) = \delta$. Ezek szerint δ a σ-nál, s így a Galois-csoport minden eleménél (amely σ hatványa) fixen marad, tehát $\delta \in K$. Mivel γ-t úgy választottuk, hogy $\gamma \notin K$, ezért $\delta \neq \gamma$ és $k > 1$. Mármost a $\beta = (\sigma - 1)^{k-2}(\gamma)$ elemre $(\sigma - 1)\beta = \delta \in K$; vagyis $\sigma(\beta) = \beta + \delta$. Azt állítjuk, hogy az $\alpha = \frac{\beta}{\delta}$ elem bír a tételben megkívánt tulajdonsággal. Ugyanis $\sigma(\alpha) = \sigma\left(\frac{\beta}{\delta}\right) = \frac{\beta + \delta}{\delta} = \alpha + 1$ folytán

$$\sigma(\alpha^p - \alpha) = (\alpha + 1)^p - (\alpha + 1) = \alpha^p - \alpha = a \in K.$$

$[L:K] = p$ és $\alpha \notin K$ miatt $L = K(\alpha)$, és itt az előbbiek értelmében valóban $\alpha^p - \alpha - a = 0$ ($a \in K; \alpha \in L; L = K(\alpha)$), mint állítottuk.

IV.

Ezek után térjünk magának a tételnek a bizonyítására. A következőkben A-val jelöljük a szóbanforgó algebrailag zárt testet és V-vel azt a testet, amelyikből A véges bővítésként előállítható.

1. *eset*: A/V *algebrai.*

Legyen először $[A:V]=p$ prímszám. Kimutatjuk:

(i) Az A χ karakterisztikája — amely nyilván megegyezik V karakterisztikájával — p-től különböző,

(ii) a bővítés egy p^2-edik primitív egységgyökkel történhetik,

(iii) a bővítés foka: $p=2$.

(i) bizonyítása indirekt módon történik. Tegyük fel, hogy $\chi=p$. Mivel A algebrailag zárt, így A/V normális és az 1. lemma alapján szeparábilis. Ez esetben azonban $L=A$ és $K=V$-re $\chi=p$ mellett teljesülnek a 2. lemma feltételei, és így léteznek olyan $\alpha(\in A)$ és $a(\in V)$ elemek, hogy $A=V(\alpha)$ és $\alpha^p-\alpha=a$.

A algebrai zártsága miatt minden A-beli együtthatós polinomnak van A-ban gyöke. Speciálisan van olyan $\vartheta\in A$, melyre $f(\vartheta)=0$, ahol $f(x)=x^p-x-a\alpha^{p-1}$ (a és α az előzőek). Tekintettel $A=V(\alpha)$-ra, ϑ a $\vartheta=\sum_{i=0}^{p-1}u_i\alpha^i$ alakban írható, ahol $u_i\in V$. ϑ-t az $x^p-x-a\alpha^{p-1}$ polinomba behelyettesítve és az $\alpha^p=\alpha+a$ azonosságot felhasználva, kapjuk, hogy

$$(1)\qquad f(\vartheta)=\sum_{i=0}^{p-1}u_i^p(\alpha+a)^i-\sum_{i=0}^{p-1}u_i\alpha^i-a\alpha^{p-1}=0.$$

Mivel $[V(\alpha):V]=p$, ezért az (1) alatti kifejezés, mely α-nak legfeljebb $(p-1)$-edfokú V-beli együtthatós polinomja, 0 kell hogy legyen. Tekintsük speciálisan α^{p-1} együtthatóját: $u_{p-1}^p-u_{p-1}-a=0$. Ennélfogva $u_{p-1}(\in K)$ gyöke az $x^p-x-a=0$ egyenletnek. Mivel x^p-x-a-ról feltettük, hogy K felett irreducibilis, így ez lehetetlen.

Lássuk most (ii) bizonyítását. (i) alapján feltehetjük, hogy $[A:V]=p$ esetén $\chi\neq p$. Kimutatjuk, hogy ezen feltétel mellett $A=V(\eta)$, ahol η egy p^2-edik primitív egységgyök. $[A:V]=p$-ből következik, hogy $\varepsilon\in V$ (ahol $\varepsilon^p=1$, $\varepsilon\neq 1$). Ugyanis, mivel A algebrailag zárt, $\varepsilon\in A$. De A minden olyan eleme, mely nem eleme V-nek, egy V-beli együtthatós p-edfokú irreducibilis polinom gyöke kell, hogy legyen, márpedig ε kielégíti az $x^{p-1}+\cdots+x+1$ $(p-1)$-edfokú polinomot is. $[A:V]=p$-ből, A/V szeparábilitásából, $\chi\neq p$-ből és $\varepsilon\in V$-ből következik, hogy $A=V(\alpha)$, ahol $\alpha^p\in V$.

Mivel A algebrailag zárt, megoldható benne az $x^p-\alpha=0$ egyenlet. Legyen ennek egyik gyöke $\sqrt[p]{\alpha}$, vagyis $\sqrt[p]{\alpha}\in V(\alpha)$. Ekkor azonban $\sqrt[p]{\alpha}$ a $\sqrt[p]{\alpha}=f(\alpha)$ alakban írható, ahol $f(x)$ egy V-beli együtthatós legfeljebb $(p-1)$-edfokú polinom. Tegyük α helyébe

egyik konjugáltját, $\varepsilon\alpha$-t; ekkor $\sqrt[p]{\alpha}$ helyébe is annak egyik konjugáltja lép:

$$\sqrt[p]{\varepsilon\alpha} = f(\varepsilon\alpha), \quad \text{illetve} \quad \eta_i \sqrt[p]{\alpha} = f(\varepsilon\alpha),$$

ahol η_i az $x^p - \varepsilon = 0$ egyenlet valamelyik gyöke, vagyis egy p^2-edik primitív egységgyök. Ki fogjuk mutatni, hogy $A = V(\eta_i)$. Az nyilvánvaló, hogy $V(\eta_i) \subseteq A$, csupán azt kell bizonyítani, hogy $A \subseteq V(\eta_i)$. Ehhez elegendő annak kimutatása, hogy $[V(\eta_i) : V] = p$. Mint láttuk, $\sqrt[p]{\alpha} = f(\alpha)$ és $\eta_i \sqrt[p]{\alpha} = f(\varepsilon\alpha)$. Ezekből azonnal adódik, hogy

$$\eta_i f(\alpha) = f(\varepsilon\alpha),$$

vagyis α kielégít egy legfeljebb $(p-1)$-edfokú polinomot, melynek együtthatói $V(\eta_i)$-ből valók. Mivel $[V(\alpha) : V] = p$, másrészt $[V(\alpha) : V] = [V(\alpha) : V(\eta_i)] \cdot [V(\eta_i) : V]$ és $[V(\alpha) : V(\eta_i)] \leq p - 1$, így $[V(\eta_i) : V] = p$, tehát $V(\eta_i) = A$.

Hátra van még (iii) bizonyítása, vagyis, hogy $[A : V] = 2$. A (ii) bizonyításánál alkalmazott gondolatmenetet használjuk fel itt is, csupán α helyett η_i-val kell végezni az okoskodást. A algebrai zártságából következik, hogy

$$\sqrt[p]{\eta_i} = g(\eta_i) \qquad (\text{ahol } g(x) = a_0 + \cdots + a_{p-1}x^{p-1},\ a_i \in V). \tag{2}$$

Ismét a konjugáltakra térve, adódik:

$$\sqrt[p]{\varepsilon\eta_i} = g(\varepsilon\eta_i).$$

Ebből nem következtethetünk a $\sqrt[p]{\varepsilon\eta_i} = \eta_i \sqrt[p]{\eta_i}$ egyenlőségre, mert $\sqrt[p]{\varepsilon}$-ról csak annyit tudunk, hogy η_i-nak valamelyik konjugáltjával egyenlő, azaz

$$\sqrt[p]{\varepsilon\eta_i} = \varepsilon^k \eta_i \sqrt[p]{\eta_i} \qquad (\text{ahol } k \text{ egész szám és } 0 \leq k < p)$$

A $\sqrt[p]{\eta_i} = g(\eta_i)$-t az $\varepsilon^k \eta_i \sqrt[p]{\eta_i} = g(\varepsilon\eta_i)$-ba helyettesítve,

$$\varepsilon^k \eta_i g(\eta_i) = g(\varepsilon\eta_i) \tag{3}$$

adódik. Ez η_i-ra nézve legfeljebb $(p-1)$-edfokú V-beli együtthatós egyenlet, és mivel $[V(\eta_i) : V] = p$, ezért (3) az η_i-ra vonatkozóan azonosság. Hasonlítsuk össze (3)-ban a bal és jobboldalon η_i együtthatóit:

$$a_0 = a_{p-1}\varepsilon^{k+1},\ a_1\varepsilon = a_0\varepsilon^k, \ldots, a_{p-2}\varepsilon^{p-2} = a_{p-2}\varepsilon^k, a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = a_{p-2}\varepsilon^k. \tag{4}$$

Ha (4)-ben valamelyik $a_i = 0$ volna, akkor minden a_i és így (2) miatt η_l is 0 volna, ami nyilván lehetetlen. Így tehát egyik a_i sem 0. Szorozzuk össze a (4) alatti egyenlőségeket, és osszuk $a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{p-1} \neq 0$-val:

$$\varepsilon^{ph+1} = \varepsilon^{\frac{p(p-1)}{2}},$$

vagy $\varepsilon^p = 1$-et felhasználva,

$$\varepsilon = \varepsilon^{\frac{p(p-1)}{2}}. \tag{5}$$

Ha mármost $p \neq 2$ volna, akkor $\frac{p-1}{2}$ egész volna, amiből $\varepsilon^{p\frac{p-1}{2}} = 1$, vagyis (5) alapján $\varepsilon = 1$ következnék, ami feltevésünknek ellentmond.

Így tehát bebizonyítottuk, hogy $[A : V] = p$ esetén csak $p = 2$ lehet, mikoris $\eta_l = i\,(i^2 = -1)$, $\chi \neq 2$ és $A = V(i)$.

Most térjünk arra az esetre, mikor $[A : V] = n$ összetett szám. Be fogjuk bizonyítani, hogy ez ellentmondásra vezet. Először kimutatjuk, hogy csak $n = 2^l$ lehet. Tekintsük ugyanis az A/V-hez tartozó Galois-csoportot. Ha e csoport rendjének volna egy p páratlan prímszám osztója, akkor volna egy p-edrendű részcsoportja is (lásd II.). Tekintsük ezen részcsoporthoz tartozó K közbülső testet. Mivel A algebrailag zárt, A/K normális bővítés. Ez azonban, mint már kimutattuk, csak akkor lehet, ha $p = 2$. Tehát valóban igaz, hogy n szükségképpen 2^l.

Most azt is kimutatjuk, hogy $l < 2$. Ha ugyanis $l \geqq 2$ volna, akkor ismét a II.-ben említettek alapján a Galois-csoportnak lenne egy negyedrendű, és ennek egy másodrendű részcsoportja. Legyenek az ezekhez tartozó megfelelő közbülső testek L és K. Ezekre tehát fennállnak a következők: $V \subseteq K \subset L \subset A$ és $[A : L] = [L : K] = 2$. Alkalmazva a prímfokú bővítés esetében kapott eredményt, adódik, hogy $A = L(i)$ és $i \notin L$, így eleve $i \notin K$. Ekkor azonban

$$4 = [A : K] = [A : K(i)] \cdot [K(i) : K] = [A : K(i)] \cdot 2,$$

amiből $[A : K(i)] = 2$ következik. Ha most újból felhasználjuk a prímfokú bővítés esetében kapott eredményt, azt nyerjük, hogy $A = K(i)(i) = K(i)$, vagyis $[A : K] = 2$, ami ellentmond az $[A : K] = 4$ feltevésnek. Így tehát kimutattuk, hogy ha A a V-nek véges algebrai bővítése, akkor csak az $[A : V] = 2$, $A = V(i)$ $(i^2 = -1)$ eset lehetséges.

Tételünk 2. részét így az algebrai esetben kimutattuk. Be kell még bizonyítani, hogy V valósan zárt. Ez azonban egészen könnyen következik abból, hogy A algebrailag zárt, $\chi \neq 2$ és $A = V(i)$. Ugyanis, ha $\alpha \in A$, akkor $\alpha = a + bi\,(a, b \in V)$. Mivel $A = V(i)$ algebrailag zárt, így $\sqrt{a+bi} = x + yi \in A$ $(x, y \in V)$. Ebből $\chi \neq 2$ miatt $x = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ következik. Ez pedig azt jelenti, hogy minden $a, b\,(\in V)$-re $\sqrt{a^2+b^2} \in V$ is fennáll. Teljes indukcióval nyerjük, hogy ha $a_i \in V$, akkor $\sqrt{\Sigma a_i^2} \in V$ is igaz, vagyis sohasem lehet $\Sigma a_i^2 = -1$. Tehát V valósan zárt. (Ugyanis egyetlen algebrai bővítésében: A-ban, már benne van i.)

2. *eset: A/V tetszőleges véges bővítés.*

Most tehát már nem tesszük fel a bővítésről, hogy algebrai, hanem csupán azt, hogy véges. Az eddigi eredmények birtokában ez az eset könnyen elintézhető. Legyen ugyanis t_1 transzcendens $V_0 = V$ felett, t_2 transzcendens $V_1 = V_0(t_1)$ felett, ..., t_k transzcendens $V_{k-1} = V_{k-2}(t_{k-1})$ felett, de A minden eleme már algebrai a $V_k = V_{k-1}(t_k)$ felett. Ilyen k nyilván van, hiszen különben A nem lenne V-nek véges bővítése. Ha $k = 0$, akkor a bővítés algebrai, ez esetben pedig már bizonyítottuk a tételt. Ha $k > 0$, akkor vagy $V_k = A$, vagy $V_k(i) = A$, és $V_{k-1}(\supseteq V_0)$-ra igaz, hogy $V_{k-1}(\sqrt[3]{t_k}) = V_k$. Mivel t_k transzcendens a V_{k-1} felett, így $\sqrt[3]{t_k} \notin V_k$. Ellenkező esetben ugyanis $\sqrt[3]{t_k} = f(t_k)$-ból, — ahol $f(x)$ V_{k-1}-beli együtthatós polinom — következnék, hogy $f^3(t_k) - t_k = 0$, ami lehetetlen. De $\sqrt[3]{t_k} \notin V_k$ is ellentmondásra vezet, hiszen $t_k \in V_k$ és $\sqrt[3]{t_k} \notin V_k$ miatt $\sqrt[3]{t_k}$ algebrai V_k, és így A felett, de $[A : V_k] \leqq 2$ miatt $\sqrt[3]{t_k}$ nem lehet eleme A-nak, ami A algebrai zártságának ellentmond.

Ezzel maradéktalanul bebizonyítottuk az I.-ben kimondott tételt.

A tételből már következik az Artin-tételben szereplő két elhagyott feltétel is: a bővítés nyilván algebrai, hiszen i-vel történhetik; a 0 karakterisztikájúság pedig V valós zártságából következik.

KOROLLÁRIUM. *Valósan zárt test nem állítható elő véges bővítésként.*

Ugyanis $V = M(\alpha)$, $[V : M] = n$ esetén $A = M(\alpha, i)$-ből $M = V$ következik.

V.

Nézzük meg, hogy eredményünk, mely azt fejezi ki, hogy algebrailag zárt testhez „túlközel" csak valósan zárt test lehet, általánosítható-e. Az első kérdés nyilván az, hogy nem lehet-e a tételt tovább élesíteni, „véges" helyett „megszámlálhatót" mondva. További megkötés nélkül nyilván nem, hiszen — mint ismeretes, — az összes (abszolút) algebrai számok teste algebrailag zárt és elemeinek száma megszámlálható, és így bármely abszolút algebrai számtestből megszámlálható sok elem adjungálásával előállhat az algebrai számok teste. Vagyis semmi esetre sem lehet igaz az, hogy ha egy tetszőleges K testhez megszámlálható sok elemet adjungálva algebrailag zárt testet kapunk, akkor K valósan zárt. Elképzelhető viszont — legalább is nincs rá triviális ellenpélda — hogy amennyiben egy K' test olyan tulajdonságú, hogy belőle legfeljebb megszámlálható sok elem adjungálásával a komplex számtestet kapjuk, akkor ez a számtest már valósan zárt (és a bővítés i-vel történhetik). Valószínűnek látszik, hogy ha elég nagy egy algebrailag zárt testnek a számossága, akkor csak igen nagy számosságú elem adjungálásával érhető el valamely résztestéből, eltekintve a megfelelő valósan zárt testektől.

A most felvetett problémát fogalmazzuk meg pontosabban. Az A algebrailag zárt test számossága legyen $\aleph_\alpha$. Tekintsük azokat az $\aleph_\beta$ számosságokat, melyekre létezik az A-nak oly K részteste, melyből alkalmas $\aleph_\beta$ számosságú elem adjungálásával A-t kapjuk, de $A \neq K(i)$. Ilyen $\aleph_\beta$ számosság biztosan van, például $\aleph_\beta = \aleph_\alpha$ megfelel. Tekintsük ezen $\aleph_\beta$ számosságok közül a legkisebbet. Ez a legkisebb $\aleph_\gamma$ számosság a következő tulajdonsággal bír: létezik olyan K részteste az A-nak, hogy K-ból $\aleph_\gamma$ számosságú elem adjungálásával A-t kapjuk, de $A \neq K(i)$; és bármely $\aleph_\delta < \aleph_\gamma$ számosságra, ha valamely K' testből legfeljebb $\aleph_\delta$ számosságú elem adjungálásával A-t kapunk, akkor már $A = K(i)$. (Tételünk éppen azt mondja ki, hogy minden $\aleph_\alpha$-ra $\aleph_\gamma \geqq \aleph_0$.) A kérdés tehát a következő:

Adott $\aleph_\alpha$ számossághoz meghatározandó azon $\aleph_\gamma$ számosság, melyre a következők teljesülnek: van oly $\aleph_\alpha$ számosságú A algebrailag zárt test, mely előállítható egy K résztestéből $\aleph_\gamma$ számosságú elemmel való adjunkció révén, ahol $A \neq K(i)$; de bármely $\aleph_\delta < \aleph_\gamma$ számosságra, ha egy $\aleph_\alpha$ számosságú algebrailag zárt A test valamely K' résztestéből legfeljebb $\aleph_\delta$ számosságú elem adjungálásával előáll, akkor szükségképpen $A = K'(i)$. Ez a kérdés teljesen nyitott; egyedül azt tudjuk, hogy $\aleph_0 \leqq \aleph_\gamma \leqq \aleph_\alpha$.

VI.

Eredményünk alkalmazásaként megoldunk egy CSÁSZÁR ÁKOStól származó problémát.

Ismeretes, hogy egy algebrailag zárt testbeli együtthatós irreducibilis polinom legfeljebb első-, egy valósan zárt testbeli együtthatós irreducibilis polinom pedig legfeljebb másodfokú lehet. Mármost a Császár-féle probléma az, hogy lehet-e más testek esetén is korlátot adni az irreducibilis polinomok fokára, és ha igen, akkor milyen számok léphetnek fel pontos korlátként.

Be fogjuk bizonyítani:

II. TÉTEL. *Ha egy F test olyan tulajdonságú, hogy az $F[x]$ polinomgyűrűben az irreducibilis polinomok foka korlátos, akkor a legkisebb k korlátra teljesül: $k=1$ vagy $k=2$. Az első esetben F algebrailag zárt, a másodikban valósan zárt.*

Célunk kimutatni, hogy van olyan F felett algebrai α elem, melyre $F(\alpha)=A$ algebrailag zárt. Válasszunk egy olyan α elemet, amely egy pontosan k-adfokú irreducibilis polinom gyöke, ahol k az irreducibilis polinomok fokának legkisebb korlátja. Tekintsük az $F(\alpha)=A$ testet. Ha A nem lenne algebrailag zárt, akkor lenne olyan β elem, amely algebrai A felett, és $\beta \notin A$. Ekkor azonban az $A(\beta)=B$ testre $F \subset A \subset B$ és $[B:F]>[A:F]=k$. B az F-nek véges algebrai bővítése, mely feltétlenül szeparábilis. Ellenkező esetben ui. az F test nem lenne tökéletes, és így lenne olyan a eleme, melyre az x^p-a polinom irreducibilis, ahol p az F karakterisztikája. Ebből azonban könnyen belátható, hogy irreducibilisek az $x^{p^2}-a$, $x^{p^3}-a, \ldots, x^{p^n}-a, \ldots$ polinomok is; és ha n-et úgy választjuk, hogy $p^n>k$ legyen, akkor máris ellentmondásra jutottunk azzal a feltétellel, hogy k az irreducibilis polinomok fokának korlátja. Mivel tehát B/F szeparábilis, van olyan γ elem, melyre $B=F(\gamma)$. Ez a γ egy k-nál magasabbfokú F-beli együtthatós polinomnak lenne a gyöke, de ilyen a feltételek szerint nincs, tehát A algebrailag zárt és F-nek véges bővítése. Ez esetben pedig vagy $A=F$ — mikoris $k=1$ — vagy, mint bizonyítottuk, $A=F(i)$ és $k=2$. Ezzel ki is mutattuk állításunkat.

АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫЕ ТЕЛА КАК КОНЕЧНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

Э. Фрид

(Р е з ю м е)

В данной статье исследуется вопрос о том, из каких (алгебраически не замкнутых) тел можно получить адъюнгированием конечно многих элементов алгебраически замкнутые тела. Автором дается доказательство того, что это возможно только при вещественно замкнутых телах, когда уже адъюнгирование i дает алгебраически замкнутое тело.

Автором выдвигается следующая более общая задача. Для данной численности $\aleph_\alpha$ следует определить численность $\aleph_\beta$, чтобы получить алгебраически замкнутое тело A с численностью $\aleph_\alpha$, которое можно представить из частного тела V адъюнгированием элемента с численностью $\aleph_\beta$, однако $A \neq V(i)$; и если алгебраически замкнутое тело A' с любой численностью $\aleph_\alpha$ можно представить из частного тела V' адъюнгированием элемента с численностью меньшей $\aleph_\beta$, то уже $A' = V'(i)$.

В заключение, в качестве приложения для решения задачи А. Часара, автор доказывает: если степень многочленов с данными телесными коэффициентами является ограниченной, то эти многочлены или не выше первой степени, причем данное тело является алгебраически замкнутым, или не выше второй степени, и тело является вещественно замкнутым.

ALGEBRAICALLY CLOSED FIELDS AS FINITE EXTENSIONS

E. Fried

(S u m m a r y)

The author considers the problem: from which fields F (not algebraically closed) may we obtain by adjunction of a finite number of elements an algebraically closed field? It is proved that these F are exactly the really closed fields, when the adjunction of i already yields an algebraically closed field. (For algebraic adjunctions this is stated in Bourbaki's Algèbre, chap. VI, Problem, pp. 47—48.)

An open question is the following. Given a cardinal number $\aleph_\alpha$, determine $\aleph_\beta$ such that there exists an algebraically closed field A of power $\aleph_\alpha$ which may be obtained from some subfield V by adjunction of a set of power $\aleph_\beta$, without being $A = V(i)$, but for all algebraically closed fields A' of power $\aleph_\alpha$ this is impossible for a set of power $< \aleph_\beta$.

As a solution of a problem stated by A. Császár it is shown that if the irreducible polynomials over a field F are of bounded degree, then either the polynomials are of degree ≤ 1 and F is algebraically closed, or the polynomials are of degree ≤ 2 and F is really closed.

VÁLYI GYULA

(1855 január 25—1913 október 13)

OBLÁTH RICHÁRD

Múlt év január 25-én volt VÁLYI GYULA néhai kolozsvári egyetemi tanár születésének századik évfordulója. Vályi, anyja révén DÓZSA GYÖRGYnek, a nagy szabadsághősnek egyenes leszármazottja. Vályi matematikai munkássága megérdemli, hogy ezen évforduló alkalmából megemlékezzünk róla.

A BOLYAIak városában, Marosvásárhelyen született. A Tentamen első kiadásának Bolyai sajátkezű ajánlásával ellátott két példánya, melyet Vályi a kolozsvári egyetem matematikai intézetének ajándékozott, tanúskodik arról a meleg barátságról, mely családjaikat összefűzte. Vályi Bolyai iskolájának, a marosvásárhelyi református kollégiumnak növendéke volt, utána az akkor ujonnan alapított kolozsvári egyetemre került, ahol RÉTHY MÓR professzor 1874-ben legelső kollégiumául az abszolút geometriát választotta. Bolyai felfedezése akkor még nem volt közismert, Réthy helyes érzékkel a Bolyaiak szellemét igyekezett az új egyetemen terjeszteni. A sovány vézna Vályi tehetsége és szorgalma hamar feltünt. Az egyetem elvégzése után — mint akkor oly sok ifjú tehetséget — őt is Berlinbe vonzotta a híres „Dreigestirn", WEIERSTRASS, KRONECKER, KUMMER. Előadásaikat „Professoren Kolleg"-nek hívták, mert hallgatóságuk általában nem az egyetem rendes hallgatóiból, hanem más egyetemek tanáraiból állt. A múlt század hetvenes-nyolcvanas éveiben Berlin volt a matematikus világ centruma, mint később, egész a nácizmus uralomra jutásáig Göttingen és Páris. Az ifjú Vályi is Berlinben tökéletesítette tanulmányait, de életének tragikuma már ekkor jelentkezett.

Súlyos szembaja, mely egész életén át kínozta, már kora ifjúságában, berlini tanulmányi éveiben oly súlyossá vált, hogy hónapokon át olvasni sem tudott.

Tragikumot mondtam, mert hiszen szemevilágára mindenkinek szüksége van, de a matematikusnak még sokkal inkább. A geometriai kutatás mozgató rugója, lelke, amint CLEBSCH mondta: die Freude an der Gestalt (a gyönyörködés a formákban), a formula-

rengetegen is csak a látás útján uralkodunk. Nem Vályi az egyetlen matematikus, aki rosszul látott. Napjainkban a topológia egyik vezető tudósa PONTRJAGIN, a kiváló szovjet matematikus vak, közismert, hogy EULER, a matematika egyik fejedelme, élete utolsó 17 évében mindkét szemére teljesen vak volt. Ez még tragikusabb a süket zenész tragédiájánál! Önkéntelenül WAGNER RICHÁRDra kell gondolnom, aki Beethovenjében a vak látnokot állítja szembe a süket zenésszel. Természetesen távol áll tőlem, hogy Vályi Gyulát Eulerrel mérjem össze, de az ilyen csapás súlyát mindenki érzi. Ezzel a súlyos akadállyal csak rendkívüli tehetség tud megküzdeni. Minő akaraterejének, fantáziájának és emlékezetének kell lennie, hogy mégis az egyre rohamosabban fejlődő tudomány színvonalán maradhasson. Vályi mégis úrrá lett az akadályokon. Nagyjelentőségű tudóssá fejlődött, aki szép és fontos eredményekkel gazdagította tudásunkat és mintaszerűen tökéletes, a tudomány mindenkori szintjét elérő egyetemi előadásokat tartott. Sohasem ismételte ugyanazt az előadást változatlanul. Számos önálló vizsgálatát és eredményét, amelyet szembaja miatt nem publikálhatott, előadásaiba olvasztotta be. Tanszékutóda HAAR ALFRÉD, a világhírű nagy matematikus mondta róla, hogy főleg a komplex változós függvénytant, sehol sem adták elő akkor a Vályiénál magasabb színvonalon.

Vályi éles judiciumára és gyors felfogó képességére jellemző apróságot mondok el, FEJÉR LIPÓTtól hallottam. Vályinál minden reggel hat órakor megjelent egy fiatalember, a felolvasója — hogy miért épp ily kora hajnalban, azt persze nem tudom. Ez a fiatalember felolvasta Vályi beérkező postáját. Századunk elején a budapesti egyetem egyik magántanára, akinek ambiciói felülmúlták képességeit, terjedelmes könyvet írt a differenciálegyenletek elméletéről. A könyvet persze megküldte Vályinak is. A fiatalember kötelességszerűen kezdi felolvasni a könyvet, amelynek legelső lapjain lényeges hiba van, a végtelen sorok szorzásának CAUCHY—MERTENS-féle tétele tárgyalásában. A hibát Vályi rögtön első hallásra észrevette, a könyvet becsukatta, mondván, hogy ezekután a folytatásra nem kíváncsi.

Áttérek Vályi néhány munkájának és eredményének bemutatására. Nem törekszem teljességre, csak néhány jellemzőre szorítkozom.

Legnagyobb hírre doktori értekezése *„A másodrendű partiális differentiális egyenletek elméletéhez"* tett szert. Ezt 1906-ban újra kiadták,[1] németül pedig 1910-ben.[2] Az ekkor már igen gyenge

[1] Math. és Phys. Lapok 15., 1906., p. 256—269.

[2] J. VÁLYI: Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Archiv d. Math. u. Phys. (3) 15., 1910., p. 294—304.

szemű Vályi helyett kartársa SCHLESINGER LAJOS fordította németre, a kiadás munkájában Fejér Lipót is segédkezett. Ez igen figyelemre méltó, mert a matematika történetében igen ritka eset, hogy egy disszertációt újra kiadjanak. (Eltekintve persze azoktól az esetektől, amikor egy matematikus összegyűjtött munkáit adják ki.) E sorok írója Vályién kívül nem is tud más esetekről, mint KRONECKER és FINSLER híres disszertációiról.

A dolgozat kiinduló pontjául szolgáló technikai feladatra — amely a dolgozatban meg sincs említve — még visszatérek, előbb matematikai tartalmát vázolom. Ha a V függvény csak a $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ parciális differenciálhányadosoktól függ, azt a parciális differenciálegyenletet vizsgálja, amelytől az

$$\int\int V(p, q)\, dx\, dy$$

kettős integrál szélsőértékeinek meghatározása függ. Ez a szokásos

$$P=\frac{\partial V}{\partial p};\quad Q=\frac{\partial V}{\partial q};\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y};\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

jelölésekkel

$$\frac{\partial P}{\partial p}r+2\frac{\partial P}{\partial q}s+\frac{\partial Q}{\partial q}t=0$$

egyenlet vizsgálatát jelenti. Ennek megoldása általában rendkívüli nehézségekbe ütközik, de néha könnyebb. A feladat tehát mindazon

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}r+2\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}s+\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}t=0 \qquad (1)$$

differenciálegyenletek meghatározása, amelyekben V csupán p és q függvénye, és amelyek MONGE módszerével integrálhatók, azaz amelyeket sikerül elsőrendű differenciálegyenletre visszavezetni, hiszen ezek integrálására kész módszerek vannak.

Vályi ezért a következő két feladatot tűzi ki magának:

1. Ha V meg van adva, mi a kritériuma annak, hogy a redukció elsőrendű parciális differenciálegyenletekre lehetséges-e vagy sem?

2. Ha lehetséges, az elsőrendű egyenletek tényleges felállítása.

Ezekben a kérdésekben a másodfokú egyenlet diszkriminánsának mintájára alkotott

$$D=\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^2-\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}}$$

vagy részletesen kifejtve:

$$D=\sqrt{\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p\,\partial q}\right)^2-\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial q^2}}$$

kifejezés vizsgálatával ér célhoz. D ezen kifejezését, mely a p és q változók függvénye, átalakítja, hogy q és P függvényeként jelentkezzék. *Ha most a*

$$-2D\frac{\partial^2 D}{\partial q^2}+2D^3\frac{\partial^2 D}{\partial P^2}+3\left(\frac{\partial D}{\partial q}\right)^2+D^2\left(\frac{\partial D}{\partial P}\right)^2=0 \qquad (2)$$

identitás teljesül, akkor és csakis ekkor (1) *elsőrendű parciális differenciálegyenletekre redukálható.*

A feltétel teljesülése esetén megadja a megoldáshoz vezető eljárást.

Felvet egy további kérdést is. Azt kérdi, mikép kaphatók meg az összes V függvények, amelyek esetén a szélsőértékprobléma ily módon megoldható. E célból a (2) egyenlet általános megoldását kell megkeresni. A megoldás módszerét helyesen fejti ki, de számolási hiba folytán dolgozata utolsó lapján hibás egyenletre jut, amelyről azt állítja, hogy mivel általános megoldásához vezető módszer ismeretlen, nem tudja megoldani. Ezt a hibát csak 25 év mulva, 1905-ben ismerte fel KAPTEYN. Érdekes, hogy a számítási hiba elkerülésével kapott helyes egyenlet megoldható, KAPTEYN meg is adja a megoldást.

Itt az ideje, hogy az (1) egyenlet technikai hátteréről is szóljak. A múlt század utolsó tizedeiben világszerte sokan igyekeztek a repülés problémáját megoldani. Közöttük MARTIN LAJOS is, a kolozsvári egyetem matematika tanára. Készüléke nem vált be; egyik alkatrészét, amely a gép mozgását lett volna hivatva biztosítani — a hajócsavar mintájára — peripellernek nevezte. A peripeller mozgását írta le az (1) egyenlet. Ezért tüzte ki RÉTHY MÓR az (1) egyenlet vizsgálatát Vályi disszertációs témájául. Martin próbálkozásait a korabeli elismert tudósok nem vették komolyan, Réthy tehát nem engedte meg nevének megemlítését Vályi doktori értekezésében. Ugyancsak a peripellerre is gondolt (anélkül, hogy említette volna) KŐNIG GYULA is pályadíjnyertes művében.[3] Sőt még

[3] KŐNIG GYULA: *A másodrendű és két független változót tartalmazó parciális differenciálegyenletek elmélete.* Budapest 1885. A Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának külön kiadványa.

KÜRSCHÁK JÓZSEF[4] is, a másodrendű lineáris parciális differenciálegyenletekről szóló, Vályihoz kapcsolódó dolgozataiban is gondol implicite a peripellerre. Magától értetődik, hogy mikép Vályit és Réthyt, Kőnigét és Kürschákot is elsősorban az érdekes szép matematikai probléma vonzotta. Kürschák Mathematische Annalen cikkében említi Vályi problémáját, ez irányította Kapteyn figyelmét a kérdésre, aki — amint már említettük — észrevette Vályi hibáját és a kérdést megoldotta.

A másik tárgy, amellyel Vályi a közlemények hosszabb sorában foglalkozott, a többszörösen perspektív háromszögek.

Ha két háromszög ABC és $A_1B_1C_1$ perspektív helyzetű, mindig található oly kúpszelet, amelyre vonatkozólag a két háromszög polárreciprok, ami alatt pontosan azt értjük, hogy az A, B, C csúcsok polárisai a B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 oldalak és az A_1, B_1, C_1 csúcsok polárisai BC, CA, AB.

Vályi a tételt így általánosítja: *Ha két háromszög kétszeresen perspektív, akkor két ily kúpszelet van, és ezek egymást kétszeresen érintik.* A tételt tovább általánosítja és bebizonyítja, hogy *ha két háromszög r-szeresen perspektív* ($r = 2, 3, 4, 6$), *akkor r számú olyan kúpszelet van, amelyekre vonatkozóan egymás polárreciprokjai.*

Röviden vázolom a legegyszerűbb esetben Vályi érdekes bizonyítását, amelyből kitűnik, hogy ámbár személy szerint nem volt HUNYADY JENŐ tanítványa, de azért eléggé hatott rá. Igaz, hogy geometriai tételek formális algebrai tárgyalása a mult század nyolcvanas éveiben talán a CAYLEY, SYLVESTER, SALMON „angol iskolá"-jának befolyása alatt általános volt. Figyeljük meg Vályi rendkívüli érzékét a jelölések célszerű megválasztásában, ami ilyen természetű feladatokban már félsiker.

Legyen abc és 123 két perspektív háromszög, ahol a és 1, b és 2, c és 3 a megfelelő szögpontok. Ezt a perspektivitást így jelöli ($a_1b_2c_3$). A koordináta rendszert is célszerűen és ügyesen választja meg. Legyen a háromszögek egyike, pl. abc a koordiná-

[4] KÜRSCHÁK JÓZSEF: A kettős integrálok variálásánál föllépő másodrendű parciális differenciálegyenletekről. *Math. és Termtud. Értesítő* 7., 1889. p. 296—307.

KÜRSCHÁK JÓZSEF: A variációszámítás parciális differenciálegyenleteinek egy különös osztályáról. *Uo.* 8., 1890., p. 60—75.

Ugyanezek németül: *Mathematische Annalen.* J. KÜRSCHÁK: Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit gleichen Charakteristiken. *Math. Ann.* 37., 1890. és Ü. d. partielle Diffgl. des Problems $\delta\iint\sqrt{V(p,q)}\,dx\,dy = 0$. *Uo.* 44., 1849.

tháromszög, még pedig

$$\begin{aligned} \overline{bc}&: \quad x=0 \\ \overline{ca}&: \quad y=0 \\ \overline{ab}&: \quad z=0; \end{aligned}$$

akkor a másik háromszög oldalainak egyenletei írhatók ebben az alakban

$$\begin{aligned} \overline{23}&: \quad \lambda x+y+z=0 \\ \overline{31}&: \quad x+\mu y+z=0 \\ \overline{12}&: \quad x+y+\nu z=0 \end{aligned}$$

és az a kúpszelet, amelyre nézve a polárreciprocitás fennáll:

$$k\equiv\lambda x^2+\mu y^2+\nu z^2+2yz+2zx+2xy=0.$$

Többszörös perspektivitás esetén a megfelelő csúcsok másképp is összekapcsolhatók. Persze több eset lehetséges, ha $\mu=\nu$ a két háromszög egyszersmind az (a_1, b_3, c_2) perspektivitásban is van. Az ehhez tartozó kúpszelet

$$k_1\equiv\lambda x^2+y^2+z^2+2\mu yz+2zx+2xy=0$$

tehát

$$k-k_1=(\mu-1)(y-z)^2$$

ebből következik, hogy a két kúpszelet kétszeresen érinti egymást, az érintési húr az $\overline{a1}$ egyenes.

Eldöntendő most, hogy ez a szükségesnek mutatkozó feltétel egyszersmind elégséges-e?

k és k_1 kettősen érintkező kúpszeletek egyenlete megfelelően választott koordinátarendszerben

$$\begin{aligned} k&\equiv\xi^2+2\eta\zeta=0 \\ k_1&\equiv l\xi^2+2\eta\zeta=0. \end{aligned}$$

Legyenek az *1* pont koordinátái $0, \eta_1, \zeta_1$, a *2* pont koordinátái ξ_2, η_2, ζ_2. k tartozzék az $(a_1 b_2 c_3)$, k_1 az (a_1, b_3, c_2) perspektivitáshoz. Akkor

ac egyenlete $\xi_2\xi+\zeta_2\eta+\eta_2\zeta=0$ (*2* polárisa k-ra)
ab „ $l\xi_2\xi+\zeta_2\eta+\eta_2\zeta=0$ (*2* „ k_1-re).

Most azonban *3* egyrészt ab polusa k-ra $(l\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$, másrészt ac polusa k_1-re $\left(\frac{\xi_2}{l}, \eta_2, \zeta_2\right)$ tehát $l^2=1$ ezért $l=-1$-nek kell lennie, hiszen $l=1$ k_1-et k-val azonossá tenné.

Tehát a szükséges és elégséges feltétel:

k és k_1-nek kettős érintkezésben kell lennie; mivel $l^2 - 1 = 0$, a két megoldás összege zérus és ezért $(k + lk)$-nak két elsőfokú szorzóra kell oszlania.

Ezen feltételek mellett a *2* szögpont teljesen tetszés szerint választható, *1* az érintési húron tetszés szerint választható, ezen adatok *3*-at már egyértelműleg meghatározzák, úgy hogy *123* háromszög k és k_1-re nézve ugyanazon háromszöghöz polár-reciprok.

Ezzel fogalmat adtunk VÁLYI bizonyítási módszeréről,[5] amelyet tételének *r*-szeresen perspektív háromszögekre való kiterjesztésénél persze tovább finomít és amely az analitikai geometria mesterének mutatja.

Egyik későbbi cikkében[6] azzal az esettel foglalkozik, amikor mindkét többszörösen perspektív háromszög ugyanabba a harmadrendű görbébe van beírva. Sőt a WEIERSTRASS-féle $p(u)$ függvény néhány sajátságának felhasználásával kimutatja, hogy *a harmadrendű* (hatodosztályúnak feltételezett) *görbén vannak r-szeresen perspektív sokszögek.* (*r* tetszésszerinti pozitív egész szám.) Ugyanilyen tárgyú harmadik dolgozatában bizonyos tekintetben specializált többszörösen perspektív sokszögekkel foglalkozik. A harmadrendű görbe valamely P pontjában húzott érintőjének a görbével való további (általában különböző) metszéspontját P *tangenciális pontjának* nevezi. Steiner-féle sokszögnek nevezzük az olyan sokszöget, melynek minden csúcsa a megelőzőnek tangenciális pontja. Az említett dolgozat ilyen STEINER-féle poligonokról állapít meg érdekes tételeket, persze szintén az elliptikus $p(u)$ függvény kétszeres periodicitásának felhasználásával, de részletesebb ismertetésükre nincs terünk.

Tételeit magától értetődőleg *a térre is kiterjeszti*, de a három dimenzióban a viszonyok lényegesen bonyolultabbak lévén, a perspektivitás mellett, sőt első sorban a lineáris komplexussal foglalkozik.

Talán érdemes megjegyezni, hogyan fejlődik tovább és terebélyesedik a megkezdett téma. Épp napjainkban foglalkoznak sokat a matematikusok és a matematikatörténészek az ötlet és az elmé-

[5] VÁLYI GY.: Többszörösen kollineár háromszögek kúpszeleteknél. *Math. és Termtud. Ért.* 2., 1883/4 p. 170—174.
VÁLYI J.: Mehrfache Collineation von zwei Dreiecken. *Archiv der Mathematik u. Phys.* 70., 1882., p. 105—110.

[6] VÁLYI GY.: A harmadrendű görbék elméletéhez I. *Math. Termtud. Ért.* 8., 1889., p. 23—28. Uazon cím II. *uott.* 9., 1890., p. 18—25.; Harmadik közlemény *uott.* 10., 1891., p. 2—13.

lyedő tanulmány szerepével a felfedezésben. Elég lesz, ha korunk egyik legkiemelkedőbb matematikusának VAN DER WAERDENnak híres tanulmányára utalunk.[7]

A fenti témakörből még megemlítem Vályi néhány szép eredményét.[8]

Két perspektív tetraéder megfelelő *élei metszik* egymást. A megfelelő élek síkjainak közös pontja a perspektivitás centruma, a megfelelő élek metszéspontjainak közös síkja a perspektivitás síkja.

Kőnig Gyula és Vályi felvetették a kérdést, hogy megfordítva, abból a tényből, hogy két tetraéder élei metszik egymást, *a perspektív helyzet szükségkép következik-e?* Vizsgálatuk eredménye, hogy annak az egy esetnek kivételével, amikor két tetraédernak csak egy-egy megfelelő oldala és a szembenfekvő szögpontja közös, a megfelelő élek metszéséből a perspektív helyzet szükségkép következik.

Többszörösen perspektív tetraéderekkel[9] is foglalkozik és kimutatja, hogy 2 valós tetraédernél *csak egyszeres, kétszeres vagy négyszeres perspektivitás lehetséges.* Ez utóbbi esetben a 4 perspektivitási centrum *oly tetraéder csúcsai, mely az adottak bármelyikével négyszeresen perspektív és a perspektivitás centrumai a harmadik tetraéder csúcsai. Már a kétszeres perspektivitásnál is az egyik centruma a másik síkjában fekszik.* (Desmikus helyzetűek.)

A Hunyady-iskola eszmekörébe tartozik az a kis dolgozata,[10] amelyben arra a kérdésre felel, hogy *milyen n változós négyzetes alakok vihetők át lineáris helyettesítéssel $m(<n)$ változós alakba.* Megmutatja, hogy *olyanok, amelyeknek determinánsa és összes átlói aldeterminánsai az m-ik fokig bezárólag eltűnnek — de ha az m-edfokú átlós aldeterminánsok között van olyan, amely nem nulla, akkor a kvadratikus alakot lineáris helyettesítéssel kevesebb, mint m-változóssá átalakítani nem lehet.*

Lapunknak ma is a feladatrovat egyik legkedveltebb rovata. Hasonlókép volt lapunk elődjénél a Mathematikai és Physikai Lapoknál is. A Mathematikai és Physikai Lapok első éveiben Vályi volt egyik legnépszerűbb feladatszerző. Némelyik feladatára 7—8 különböző megoldás érkezett, ami mutatja, hogy a feladatok

[7] B. L. VAN DER WAERDEN: Eingebung und Überlegung in der Mathematik. I. *Elemente der Math.* (Basel) 8., 1953., p. 121—129, uaz II. *uott* 9., 1954., p. 1—9. Uaz III. *Uott* p. 49—56.

[8] VÁLYI GY.: A perspektív tetraéderek tanához. *Math. Termtud. Ért.* 4., 1885. p. 55—56.

[9] VÁLYI GY.: Többszörösen perspektív tetraéderek. *uott* p. 6—8.

[10] VÁLYI GY.: A négyzetes alakok tanához. *Math. Termtud. Ért.* 5., 1886/7., p. 226—229.

érdekesek voltak. Hadd mutassunk be néhányat. Legszebb talán ez: *Ha az ABC háromszög magassági pontja M, és a BCM, CAM, ABM háromszögek körül írt körök középpontjai* A_1, B_1, C_1 *akkor az ABC és* $A_1B_1C_1$ *háromszögek kongruensek.* (Erre 8 megoldás érkezett). Másik érdekes feladata: meg vannak adva az A, B, C, P, Q pontok, megszerkesztendő három kúpszelet úgy, hogy az első a $BCPQ$, a második $CAPQ$, a harmadik az $ABPQ$ pontokon menjen át és egyszersmind érintsék egymást az A, B illetve C pontban. Erre 5 különböző megoldás érkezett. Egy másik feladatában azt a tételt tűzi ki bizonyításra, hogy *a tetraéder magasságainak hiperboloidja ama fajhoz tartozik, amelynél a* LAPLACE *egyenlet gyökeinek összege zérus.* Erre is számos megoldás érkezett.

VÁLYI egyéb elemi geometriai kérdések iránt is érdeklődött.[11] A háromszög magasságainak talppontjai háromszöget határoznak meg, amelyet talpponti háromszögnek nevezünk. Ha az eredeti ABC háromszög szögei α, β, γ, a talpponti háromszög szögei

$$\alpha_1 = \pi - 2\alpha, \quad \beta_1 = \pi - 2\beta, \quad \gamma_1 = \pi - 2\gamma$$

ha az eredeti háromszög hegyes szögű volt, $\left(\alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$ ha azonban az ABC háromszög pl. A-nál tompaszögű volt, akkor

$$\alpha_1 = 2\alpha - \pi, \quad \beta_1 = 2\beta, \quad \gamma_1 = 2\gamma.$$

Derékszögű háromszögnél a talpponti háromszög elfajul az átfogóra rajzolt magasságra.

A talpponti háromszög magasságainak talppontjai a második s így tovább az n-ik talpponti háromszöget $A_nB_nC_n$ határozzák meg. Vályi felveti és megoldja a kérdést, *melyek azok a háromszögek, amelyek n-ik talpponti háromszögükhöz hasonlók* és hány ily háromszög van. *Számuk* $2^n(2^n - 1)$.

A felsoroltakkal korántsem merítettük ki Vályi Gyula publikált munkáinak ismertetését, de remélem fogalmat adnak produkciójának irányáról. Amint már említettem publikációi matematikai tevékenységének csak egy részét, talán kisebb részét teszik ki, mert munkásságának zöme egyetemi előadásaira esik. Előadásai révén számítjuk ma Vályi Gyulát a magyar matematika büszkeségei közé.

[11] VÁLYI GY.: A talpponti háromszögekről. *Math. Phys. Lapok* 10., 1901., p. 309—321. és ugyanez németül.

VÁLYI GY.: Über die Fusspunktdreiecke. *Monatshefte für. Math. u. Phys.* 14., 1903., p. 243—252.

Ezek az előadások sziporkázóan ötletesek voltak, nemcsak figyelembe vették a tudomány legújabb haladását, hanem saját kutatásainak nem publikált részleteit is tartalmazták. Beosztásuk az érdeklődést nemcsak állandóan ébren tartotta, hanem fokozni is tudta. Többször, még jóval halála után is szó volt kiadásukról, a magyar matematikai irodalom nagy kára, hogy az első világháborút követő nyomor miatt nem jelentek meg. Előadásaiban látszik legjobban VÁLYI nagysága, ezek mutatják be őt a legmagasabb színvonalon.

Persze előadásainak kidolgozásában is emlékezetére volt utalva. Ezért villámcsapásként érte, amikor emlékezete az órán cserben hagyta. Nem volt öreg, nem érte meg 60-ik évét sem, tehát az egyszeri emlékezetkiesést nem kellett volna tragikusan vennie, de ő a lelkes tanár kétségbe volt esve, azonnal nyugdíjazását kérte és kérvényét tanártársai rábeszélése ellenére sem volt hajlandó visszavonni, így tehát nyugdíjazták. Nem sokáig volt nyugdíjban, hamar meghalt. Schlesinger Lajos, a nagy matematikus, aki másfél évtizedig volt a kolozsvári egyetemen Vályi kollégája, a karhoz intézett részvétiratában így jellemzi „Ennek a most bevégződött életnek tragédiája volt, hogy testi törékenység akadályozta mindazon gazdag szellemi tulajdonságok kifejtésében, melyekkel Vályi dicsekedhetett — és mégis, úgyis mint kutató, úgyis mint tanár maradandót és kitűnőt nyújtott."

СОДЕРЖАНИЕ

R. Облат: О Дьюла Вальи (25 янв. 1855. г. — 13. окт. 1913 г.)

SUMMARY

R. OBLÁTH: Gyula Vályi (25. Jan. 1855—13. Oct. 1913)

„Faktoriálisos“ számrendszerbeli „számjegyek“ eloszlásáról

Turán Pál

Riemann a göttingeni egyetemhez 1854-ben benyújtott habilitációs dolgozata végén[1] a következő érdekes megjegyzést teszi:

„In demselben Umfange, d. h. zwischen je zwei noch so nahen Argumentenwerthen unendlich oft, kann die trigonometrische Reihe auch selbst dann convergiren, wenn ihre Coefficienten nicht zuletzt unendlich klein werden. Ein einfaches Beispiel einer solchen Reihe bildet die unendliche Reihe $\sum_{1,\infty} \sin(n! x\pi)$, wo $n!$ wie gebräuchlich:

$$= 1.2.3. \ldots n,$$

welche nicht bloss für jeden rationalen Werth von x convergirt, indem sie sich in eine endliche verwandelt, sondern auch für eine unendliche Anzahl von irrationalen, von denen die einfachsten sind $\sin 1, \cos 1, \frac{2}{e}$ und deren Vielfache, ungerade Vielfache von e, $\frac{e - \frac{1}{e}}{4}$ u. s. w.“

Mint Genocchi megjegyezte,[2] $x = \frac{e - \frac{1}{e}}{4}$-re a sor nem konvergens. E tény mindenesetre azt mutatja, hogy a vizsgált sor konvergenciapontjainak áttekintése nem nagyon könnyű és így azon természetesen felvetődő kérdésnek a Riemann-féle soron való tanulmányozása sem, hogy „milyen nagy“ lehet egy olyan trigonomet-

[1] „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“. Ges. Werke p. 227—264.

[2] „Intorno ad alcune serie“, Torino, 1875.

rikus sor konvergenciapontjainak halmaza, melynek együtthatói nem tartanak 0-hoz. „Túl nagy" halmaz persze nem várható, hiszen ismert,[3] hogy e konvergenciapontok halmaza a közönséges mértékre nullmértékű; az azonban elképzelhető, hogy finomabb mérési módok mellett (Hausdorff-mérték, transfinit átmérő, stb.) e konvergenciahalmaz pozitív mértékű is lehet. 1941-ben észrevettem, hogy a Riemann-féle sor helyett célszerűbb a

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\sin 2\pi n!^2 x \qquad 0<x<1 \tag{1}$$

sort vizsgálni, ennek konvergenciapontjainak halmaza *pontosan* karakterizálható, amennyiben x-nek egy sajátságos előállítását használva a felelet egycsapásra nyerhető. Mint ismert, minden $0\leqq x<1$ felírható

$$x=\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu!^2} \tag{2}$$

alakban, ahol $\nu=2, 3, \ldots$-ra a_ν egész és

$$0\leqq a_\nu\leqq \nu^2-1; \tag{3}$$

mint jólismert, ha véges hosszú előállításokat kizárunk, a (2) előállítás egyértelmű. Ezt (1)-be téve nyilván

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{n=2}^{\infty}\sin 2\pi n!^2\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\frac{a_\nu}{\nu!^2}\right)= \\ &=\sum_{n=2}^{\infty}\sin 2\pi\left(\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{a_{n+2}}{(n+1)^2(n+2)^2}+\cdots\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Mivel (3) miatt

$$\begin{aligned} &\frac{a_{n+2}}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{a_{n+3}}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2}+\cdots\leqq \\ &\leqq\frac{(n+2)^2-1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\frac{(n+3)^2-1}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2}+\cdots= \\ &=\left(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}\right)+ \\ &+\left(\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2}\right)+\cdots=\frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

[3] Cantor—Lebesgue tétele. Lásd pl. Zygmund „Trigonometrical series" c. könyvében, p. 267.

és így $|\sin\alpha - \sin\beta| \leqq |\alpha - \beta|$ miatt

$$\left| f(x) - \sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{2\pi a_{n+1}}{(n+1)^2} \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=2}^{\infty} \left| \sin 2\pi \left(\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} + \cdots \right) - \sin \frac{2\pi a_{n+1}}{(n+1)^2} \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=2}^{\infty} 2\pi \left(\frac{a_{n+2}}{(n+1)^2(n+2)^2} + \cdots \right) \leqq 2\pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < 2\pi$$

azaz $f(x)$ *sora pontosan azon x-ekre konvergál, melyekre a*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \sin \frac{2\pi a_{n+1}}{(n+1)^2} \tag{5}$$

sor. Így tehát például adódik, hogy, ha x olyan, hogy

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^2} < \infty , \tag{6}$$

akkor az (1) sor biztosan konvergál.

Mivel a (6) tulajdonságú x-pontok H halmaza zárt, tehát H-nak van transfinit átmérője; egy Erdőshöz írott levelemben, szintén 1941-ben, azt a kérdést vetettem fel, vajon H-halmaz transfinit átmérője pozitív-e. Mint Erdős válaszában írta, ez valóban igaz. A kérdés további vizsgálatának azonban, mint oly sok másnak, Hitlerék támadása a Szovjetunió ellen végetvetett; ma már állítólag oly $\sum_{0}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$ alakú sor is ismeretes, melynek együtthatói nem tartanak 0-hoz és melynél a konvergenciapontok halmazának $x^{1-\varepsilon}$-hez tartozó Hausdorff-mértéke is pozitív, bármilyen kis pozitív szám is ε.

Az eddig mondottak még nem indokolják a dolgozat címét. Ez azonban világosabbá lesz, ha a (6) alatti megállapítást összekapcsoljuk Cantor—Lebesgue fent idézett tételével. Ez rögtön adja, hogy *a* $0 \leqq x < 1$ *köz x-eit* (2) *alakban előállítva egy nullmértékű halmaz x-ei hijján a* $\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^2}$ *sor divergens.* E tény helyes megértéséhez emlékeztetünk Borel egy klasszikus tételére. E szerint, ha $q \geqq 2$ egész és a $0 \leqq x < 1$ köz minden x számát

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{b_\nu}{q^\nu} \qquad 0 \leqq b_\nu \leqq q-1 \tag{7}$$

alakban állítjuk elő, akkor egy nullmértékű halmaz x-ei hijján a $0, 1, \ldots, q-1$ jegyek eloszlása egyenletes abban az értelemben,

hogy fix x mellett egy fix b számjegy előfordulásainak számát az első y darab számjegy közül $M_b(y)$-al jelölve

$$\lim_{y\to\infty}\frac{M_b(y)}{y}=\frac{1}{q} \tag{8}$$

függetlenül a b jegytől. A (7) alatti előállítás azonban igen speciális esete az általános Cantor-féle előállításoknak.[4] Ha

$$q_1, q_2, \ldots$$

tetszőleges 1-nél nagyobb pozitív egész számok, akkor a $0 \leqq x < 1$ köz minden egyes x száma előállítható

$$x=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu}{q_1 q_2 \ldots q_\nu} \tag{9}$$

alakban, ahol $\nu = 1, 2, \ldots$-ra

$$0 \leqq c_\nu \leqq q_\nu - 1$$

és, ha véges kifejtésektől eltekintünk, ezen előállítások is egyértelműek. Természetes kérdés volt mármost, hogy alakul Borel tétele a (9) alakú Cantor-féle kifejtések esetén. Az előző megjegyzések után már könnyen belátható a következő tétel, mely tudomásom szerint időben az első eredmény volt ezirányban.

TÉTEL: *Ha a* $\sum_\nu \frac{1}{q_\nu}$ *sor konvergens, akkor a* $0 \leqq x < 1$ *köz* x*-eire, egy nullmértékű halmaz hijján, a*

$$\sum_\nu \frac{c_\nu}{q_\nu}$$

sor, sőt, a

$$\sum_\nu \frac{\min\left(c_\nu,\ (q_\nu - c_\nu),\ \left|c_\nu - \frac{q_\nu}{2}\right|\right)}{q_\nu} \tag{10}$$

sor is divergens.

A bizonyításhoz elég megjegyezni, hogy azon x_0-k halmazán, melyekre a (10) sor konvergens, egyben a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2\pi q_1 q_2 \ldots q_n x_0$$

[4] L. pl. O. PERRON, Irrationalzahlen, de Gruyter, Berlin und Leipzig, 1921., pp. 111—116.

sor is konvergens; ez előbbivel analóg módon látható be. Ebből Cantor—Lebesgue tétele alapján az állítás máris következik.

RÉNYI A. a valószínűségszámítás egy új axiomatikus elméletének kidolgozása során észrevette, hogy a valószínűségszámítás módszerei módot adnak arra, hogy a c_ν „számjegyek" eloszlására pontosabb tételeket nyerjünk a $\sum_\nu \frac{1}{q_\nu} < \infty$ esetben is és tárgyalni lehessen a $\sum_\nu \frac{1}{q_\nu} = \infty$ esetet is.[5] Mégsem látszott érdektelennek azon megjegyzés, hogy a trigonometrikus sorok elméletén át is el lehetett jutni idevágó érdekes eredményhez. Nem volna érdektelen megvizsgálni, meddig lehet eljutni ezen az úton.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЦИФР „ФАКТОРИАЛЬНОЙ" СИСТЕМЫ ЧИСЕЛ

П. Туран

(Р е з ю м е)

В данной статье автором сообщается теорема, найденная в 1941 г. в результате дальнейшего развития классической теоремы Бореля; эта теорема относится к представлению чисел интервала $0 \leqq x < 1$ в виде

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{q_1 q_2 \cdots q_\nu}$$

где цифры $q_\nu \geqq 2$ целые, и c_ν относится к „цифрам" $0 \leqq c_\nu \leqq q_\nu - 1$. Автор доказывает на основании теории тригонометрических рядов, что ряд

$$\sum_\nu \frac{\left(\min c_\nu, (q_\nu - c_\nu)_\nu \;\middle|\; c_\nu - \frac{q_\nu}{2} \right)}{q_\nu}$$

является расходящим с исключением x-множества нулевой размерности, если $\sum_\nu \frac{1}{q_\nu}$ является сходящим.

[5] L. RÉNYI A.: A valószínűségszámítás új axiomatikus felépítése, MTA III. o. Osztályközleményei 4 (1954), 369—427.

ON THE DISTRIBUTION OF „DIGITS" IN CANTER-SYSTEMS

P. Turán

The following theorem is proved via trigonometrical series on the distribution of the "digits" c_ν in the representation

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{q_1 q_2 \cdots q_\nu}$$

where $q_\nu \geqq 2$ are integers and for the integers c_ν

$$0 \leqq c_\nu \leqq q_\nu - 1$$

holds. For almost all x in $0 \leqq x < 1$ the series

$$\sum_{\nu} \frac{\min\left(c_\nu, (q_\nu - c_\nu), \left| c_\nu - \frac{q_\nu}{2} \right| \right)}{q_\nu}$$

is divergent if only $\sum_{\nu} \frac{1}{q_\nu} < \infty$. The theorem was found in 1941.

A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle előállításaiban

RÉNYI ALFRÉD

1. §.

Vizsgáljuk egy tetszőleges, 0 és 1 közé eső x valós szám végtelen tizedestört alakjában való előállítását: legyen ez

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}{}' \frac{\varepsilon_k(x)}{10^k} \qquad (0 \leqq x < 1) \tag{1.1}$$

ahol $\varepsilon_k(x)$, a kifejtés k-adik jegye, a $0, 1, 2, \ldots, 9$ számok valamelyikével egyenlő.[1] Kézenfekvő a kérdés, hogy mit lehet mondani általában a jegyek eloszlásáról, tehát ha $N_n(r, x)$ jelöli azt, hogy az $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)$ számok közül hány egyenlő r-el ($r = 0, 1, 2, \ldots, 9$), mit lehet állítani az $\frac{N_n(r, x)}{n}$ hányadosról, vagyis az r jegy relatív gyakoriságáról az x szám első n jegye között, illetve e relatív gyakoriság határértékéről, ha $n \to \infty$?

E kérdésre a választ É. BOREL [1] adta meg 1909-ben, amenyiben bebizonyította, hogy majdnem minden x valós szám tizedestörtkifejtésében a tiz számjegy mindegyike határértékben ugyanazzal a relatív gyakorisággal fordul elő, vagyis, hogy a $(0, 1)$ intervallum egy 0-mértékű halmazához tartozó x számok kivételével minden x-re $(0 \leqq x < 1)$ fennáll, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(r, x)}{n} = \frac{1}{10} \qquad (r = 0, 1, \ldots, 9). \tag{1.2}$$

[1] A dolgozatunkban tárgyalt vonatkozásban mellékes, hogy az $x = \frac{a}{10^r}$ (a és r nemnegatív egész számok) számok esetében a két lehetséges előállítás közül melyiket választjuk; megállapodhatunk például abban, hogy az említett esetben mindig azt az előállítást választjuk, amelyben a jegyek valahonnan kezdve mind 0-val egyenlők.

BOREL tételét úgy lehet tehát megfogalmazni, hogy majdnem minden valós szám tizedestört kifejtésében a tíz számjegy mindegyike ugyanolyan „gyakran" (ugyanolyan „sűrűséggel") fordul elő.[2] A (2) reláció a következő ekvivalens alakra is hozható:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(r,x)}{N_n(s,x)} = 1 \qquad (r,s = 0,1,\ldots,9). \tag{1.3}$$

2. §.

BOREL azt is megjegyezte, hogy hasonló tétel érvényes bármely alapú számrendszerben is, tehát, ha $q \geqq 2$ tetszőleges pozitív egész szám és vizsgáljuk az x valós szám $(0 \leqq x < 1)$ előállítását végtelen q-adikus tört alakjában, vagyis az

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q^k} \tag{2.1}$$

alakban, ahol $\varepsilon_k(x)$ a $0,1,\ldots,q-1$ számok egyikével egyenlő és újból $N_n(r,x)$ jelöli azt, hogy az $\varepsilon_1(x),\varepsilon_2(x),\ldots,\varepsilon_n(x)$ jegyek között az r jegy hányszor fordul elő, akkor a $(0,1)$ intervallum egy 0-mértékű E_q halmazához tartozó x számok kivételével minden x-re fennáll, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(r,x)}{n} = \frac{1}{q} \qquad (r = 0,1,\ldots,q-1) \tag{2.2}$$

illetve, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(r,x)}{N_n(s,x)} = 1 \qquad (r,s = 0,1,\ldots,q-1). \tag{2.3}$$

BOREL tételéhez néhány megjegyzést fűzünk.

A) Ha egy x számra (2.2) (ill. (2.3)) érvényes, azt mondjuk, hogy x előállítása a q alapu számrendszerben *normális*. Mivel megszámlálható sok 0-mértékű halmaz egyesítése is 0-mértékű, tehát az $E_2, E_3, \ldots, E_q, \ldots$ halmazok egyesítésével keletkező E halmaz is 0-mértékű; ha azonban x nem tartozik az E halmazhoz, akkor nem tartozhat egyetlen E_q-hoz sem, tehát előállítása *bármely* alapú számrendszerben normális; BOREL tételét tehát a következő alakban is ki lehet mondani: A $(0,1)$ intervallumban majdnem minden x szám előállítása minden számrendszerben normális.

[2] Ezt szokták úgy is kifejezni, hogy a tíz számjegy mindegyike ugyanolyan valószínűséggel fordul elő; lásd erre vonatkozólag a 3. §-t.

B) BOREL tételéből az is könnyen következik, hogyha az x szám végtelen tizedestört kifejtésében nem az egyes jegyek előfordulásait vizsgáljuk, hanem a jegyek sorozatát k-tagú csoportokra bontjuk, vagyis vizsgáljuk az

$$(\varepsilon_{nk+1}(x), \varepsilon_{nk+2}(x), \ldots, \varepsilon_{nk+k}(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

k-tagu jegy-csoportokat, egy ilyen jegy-csoport összetételére, (a sorrendet is figyelembevéve) nyilván 10^k-féle lehetőség van és mind a 10^k lehetőség majdnem minden x szám kifejtésében ugyanolyan „gyakran" fordul elő. Ugyanis, ha az x számot a 10^k alapú számrendszerben fejtjük ki, x n-edik jegyét $e_n(x)$-szel jelölve

$$e_{n+1}(x) = \varepsilon_{nk+1}(x)10^{k-1} + \varepsilon_{nk+2}(x)\,10^{k-2} + \ldots + \varepsilon_{nk+k}(x)$$

hiszen

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{10^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_{nk+1}(x)10^{k-1} + \ldots + \varepsilon_{nk+k}(x)}{10^{k(n+1)}}$$

és így $e_{n+1}(x)$ egyértelműen meghatározza az $\varepsilon_{nk+1}(x), \ldots, \varepsilon_{nk+k}(x)$ „jegyeket." Ennélfogva abból, hogy $e_n(x)$ majdnem minden x-re ugyanolyan gyakran veszi fel a $0, 1, 2, \ldots, 10^k - 1$ értékeket, következik, hogy majdnem minden x szám tizedestörtkifejtésében a lehetséges 10^k féle k-tagú jegycsoport ugyanolyan gyakran fordul elő. Nyilván bármely más alapú számrendszerben is ez a helyzet.

C) A nyert eredményből az is következik, hogy ha x tizedestört kifejtésének nem az összes jegyeit vizsgáljuk, hanem csak azokat, amelyek sorszáma egy megadott számtani sorhoz tartozik, majdnem minden x kifejtésében ezen kitüntetett jegyek között is a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek egyformán gyakran fordulnak elő. Ennél még több igaz: akárhogy adjuk meg pozitiv egész számok egy végtelen $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$ sorozatát az $\varepsilon_{k_1}(x), \varepsilon_{k_2}(x), \ldots, \varepsilon_{k_n}(x), \ldots$ számsorozatban majdnem minden x-re a $0, 1, \ldots, 9$ számjegyek egyformán gyakran fordulnak elő. Ez az állítás nem következik ugyan BOREL tételéből, de a Borel-tétel bizonyításából látható, hogy ugyanúgy bizonyítható be, mint BOREL eredeti tétele.

3. §.

BOREL említett tételét ma úgy tekintik, mint a valószínűségszámitás egy általános tételének, a *nagy számok erős törvényének*

érdekes speciális esetét és így is szokták bebizonyítani.[3] A tétel valószínűségszámítási átfogalmazásához úgy jutunk, hogy a következő kísérletsorozatot vizsgáljuk: Találomra választunk egyet a $0, 1, \ldots, 9$ számok közül, úgy, hogy mind a 10 szám egyformán valószínű; ezt a kísérletet újra meg újra megismételjük, ugy, hogy az egyes kísérletek eredményei egymástól függetlenek legyenek. A kapott jegysorozat legyen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$; akkor tehát $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ független valószínűségi változók, amelyek mindegyike a $0, 1, \ldots, 9$ értékeket $\frac{1}{10}$ valószínüséggel veszi fel. Egy ilyen változó-sorozatra alkalmazható a nagy számok erős törvénye, amely ez esetben azt állítja, hogy $\nu_n(r)$-rel jelölve, hogy az r számjegy ($r = 0, 1, \ldots, 9$) hányszor fordul elő az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ számsorozatban, 1 valószínűséggel igaz, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(r)}{n} = \frac{1}{10}$ ($r = 0, 1, \ldots, 9$). A két probléma között a kapcsolatot az teremti meg, hogy ha az x számot magát valószínűségi változónak tekintjük, amely egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumban, vagyis annak a valószínűsége, hogy x az (a, b) intervallumba essék ($0 \leqq a \leqq b \leqq 1$), $(b-a)$-val egyenlő, akkor az (1) kifejtésben szereplő $\varepsilon_n(x)$ mennyiségek, amelyek maguk is valószínűségi változók (hiszen maga x is az) ugyanolyan sajátságokkal bírnak, mint az előbb említett kísérletsorozathoz tartozó ε_n valószínűségi változók, tehát ε_n a $0, 1, \ldots, 9$ értékeket rendre $\frac{1}{10}$ valószínűséggel veszi fel, továbbá az ε_n változók teljesen függetlenek.[4]

4. §.

Jelen dolgozat BOREL tételének általánosításával foglalkozik, valós számok ugynevezett Cantor-féle előállításaira vonatkozólag. A Cantor-féle előállítás a valós számok egy adott q-alapú számrendszerben való előállításának direkt és természetes általánosítása. Egy x szám előállítását a q-alapú számrendszerben a következő

[3] Megjegyzendő, hogy BOREL tétele speciális esete egy általános ergodtételnek is (l. [2]), továbbá — mint SZÜSZ PÉTER megjegyezte — bebizonyítható H. WEYL egy általános tétele [3] segítségével, de bebizonyítható egész közvetlenül is (l. pl. [5]) vagy egy ortogonális sorokra vonatkozó, általános tétel speciális esetekét [4].

[4] A dolgozatban előforduló valószínűségszámítási fogalmakat illetőleg lásd pl. [6]. A Borel tételt illetőleg lásd [6], 435. o. 22. feladat.

meggondolással nyerhetjük. Az x abszcisszájú pont helyzete a $(0, 1)$ intervallumban a következőképpen határozható meg: a $(0,1)$ intervallumot q számú egyenlő részszintervallumra osztjuk és ezeket a részintervallumokat balról jobbra haladva megszámozzuk a $0, 1, \ldots, q-1$ számokkal (minden intervallumhoz a baloldali végpontját hozzászámítjuk, de a jobboldali végpontját nem). Ha az x abszcisszájú pont — röviden: az x pont — a k-adik részintervallumba esik, legyen $\varepsilon_1(x) = k$. Azt a részintervallumot, amelybe x esik, újból q egyenlő részintervallumra bontjuk fel, amelyeket balról jobbra haladva megint megszámozunk a $0, 1, \ldots, q-1$ számokkal. Ha az x pont az l-edik ilyen $\left(\frac{1}{q^2}\text{ hosszúságú}\right)$ részintervallumba esik, legyen $\varepsilon_2(x) = l$. Ezt az eljárást folytatva, az x számot n lépés után $\frac{1}{q^n}$ pontossággal határoltuk be, tehát az eljárást minden határon túl folytatva az x pont helyét egyértelműen meghatározhatjuk és nyilvánvaló, hogy (1. 1) fennáll.

Az előbb leírt eljárást nyilván általánosíthatjuk a következőképpen: nem mindig ugyanannyi részre osztunk, hanem az első lépésnél q_1 részre, a második lépésnél q_2-részre, ... az n-edik lépésnél q_n részre osztunk, ahol a q_n számok tetszőleges, 2-nél nem kisebb pozitív egész számok. Amikor q_n részre osztunk, a részeket megszámozzuk a $0, 1, \ldots, q_n - 1$ számokkal; n osztás után egy-egy részintervallum hossza nyilván $\frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n}$. A mondottakból következik, hogy akárhogyan írjuk is elő a q_n pozitív egész számokból álló számsorozatot ($q_n \geqq 2$), bármely x szám ($0 \leqq x < 1$) előállítható

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k} \tag{4. 1}$$

a lakban, ahol $\varepsilon_k(x)$, az x szám kifejtésének k-adik „számjegye" a $0, 1, \ldots, q_k - 1$ értékeket veheti fel. A (4. 1) előállítást először ilyen általánosságban G. CANTOR vizsgálta ([7]); (4. 1)-et az x szám Cantor-féle sorfejtésének nevezik (lásd pl. [8]) a $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ számsorozat által meghatározott általános számrendszerben.[5] Je-

[5] Megjegyzendő, hogy ha $Q_1, Q_2, \ldots Q_n \ldots$ pozitív egész számok egy tetszőleges sorozata, amelyről csak azt kötjük ki, hogy $Q_n \geqq 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ bármely N egész szám egyértelműen előállítható az

$$N = a_1 + a_2 Q_1 + a_3 Q_1 Q_2 + \ldots + a_n Q_1 Q_2 \ldots Q_n$$

alakban, ahol a_k a $0, 1, \ldots, Q_k - 1$ értékeket veheti fel. Egész számok előállítására azonban ezek az általános Cantor-féle számrendszerek nemigen használatosak.

lentse itt is $N_n(r, x)$ azt, hogy az r szám ($r = 0, 1, \ldots$) hányszor fordul elő az $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)$ számjegyek között. Célunk megvizsgálni, hogy a (2. 2) ill. (2. 3) összefüggések menyiben általánosíthatók valós számok tetszőleges Cantor-féle előállításaira. Nyilvánvaló, hogy különösen az az eset érdekes, amikor a q_n számsorozat nem korlátos; ez esetben ugyanis az x szám Cantor-sorának számjegyei között minden nemnegatív egész szám előfordulhat. Erre az esetre vonatkozik az alábbi 1. tétel, amely Borel tételének analogonjának tekinthető bizonyos Cantor-sorokra.

1. TÉTEL: *Vizsgáljuk a* $(0, 1)$ *intervallum* x *számainak előállítását a* $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ *számsorozathoz tartozó Cantor-féle számrendszerben, vagyis az*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k}$$

előállítást, ahol $\varepsilon_k(x)$ *a* $0, 1, \ldots, q_k - 1$ *számok valamelyikével egyenlő.*[6] *Jelentse* $N_n(r, x)$ *az* $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)$ *számok közül azok számát, amelyek* r*-rel egyenlők. A pozitív egész számokból álló* $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ *számsorozatról, azonkívül, hogy* $q_n \geqq 2$, *tegyük fel a következőket:*

a) $$\lim_{n \to \infty} q_n = +\infty$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} \text{ } \textit{divergens.}$$

Ez esetben a $(0, 1)$ *intervallumban fekvő majdnem minden* x *számra érvényesek a*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(r, x)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}} = 1 \qquad (r = 0, 1, \ldots) \tag{4. 2}$$

határértékrelációk, amiből következik, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(r, x)}{N_n(s, x)} = 1 \qquad (r, s = 0, 1, \ldots) \tag{4. 3}$$

Az a) és b) feltételek teljesülése esetén tehát majdnem minden valós szám Cantor-féle előállításában a jegyek között az ösz-

[6] Hogy az $\varepsilon_k(x)$ függvények definiciójának egyértelműségét minden x-re biztosítsuk, abban az esetben, ha $x = \frac{a}{q_1 q_2 \ldots q_n}$ (a egész), a két lehetséges előállítás közül azt választjuk, amelyben a jegyek valahonnan kezdve mind 0-val egyenlők.

szes nemnegatív egész számok egyformán „gyakran“ fordulnak elő. Vegyük észre azonban, hogy a)-ból következik, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q_k}=0$, és így (4. 2)-ből következik, hogy $\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(r,x)}{n}=0$ $(r=0,1,\ldots)$. A tárgyalt esetben tehát minden egyes jegy relatív gyakorisága majdnem minden valós szám Cantor-sorában 0-hoz tart, azonban a különböző jegyek relatív gyakoriságai ugyanolyan gyorsan tartanak 0-hoz, úgy, hogy két relatív gyakoriság hányadosa — amint ez (4. 3)-ból látszik — 1-hez konvergál.

Mielőtt az 1. tétel bizonyítására rátérnénk, jegyezzük meg, hogy a b) feltétel a tétel érvényességéhez szükséges is; ha ugyanis $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_n}$ konvergens, akkor (4. 3) nem áll fenn majdnem minden x-re. Ezt legegyszerűbben úgy láthatjuk be, hogy azon x számok halmazának a mértéke, amelyeknek a $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ számsorozathoz tartozó Cantor-sorában a 0 jegy nem fordul elő, nyilván $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{q_n}\right)$ és ha $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_n}<+\infty$, a $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{q_n}\right)$ végtelen sorozat konvergens és értéke pozitív. Ezzel szemben az a) feltétel, mint később látni fogjuk, enyhíthető. Megjegyzendő, hogy a (4. 3) reláció a következő ekvivalens alakra is hozható:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(r,x)}{\sum_{s=0}^{N-1}N_n(s,x)}=\frac{1}{N}\qquad\begin{pmatrix}r=0,1,\ldots,N-1\\ N=2,3,\ldots\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

A (4. 4) reláció a következőképpen értelmezhető: ha az $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x), \ldots$ számsorozatból elhagyjuk azokat a számokat, amelyek $N-1$-nél nagyobbak, a megmaradó számsorozatban, amely már csak a $0, 1, \ldots, N-1$ számokból áll, ez az N számjegy egyforma „gyakran“ fordul elő és ez igaz majdnem minden x számra $(0 \leqq x < 1)$, akármilyen pozitív egész N értéket választunk is.

Az 5. §-ban közöljük az 1. tétel bizonyítását, amely KOLMOGOROV egy nevezetes valószínűségszámítási tételén alapszik. A 6. §-ban ill. a 8. §-ban azokat a Cantor-sorokat vizsgáljuk, amelyekre az 1. tétel a) illetve b) feltevései nem teljesülnek. Az 1. tétel nem tartalmazza BOREL klasszikus tételét, mivel az a) feltevés a q-alapú számrendszerre (amikor $q_n=q, n=1,2,\ldots$) nem teljesül. A 6. §-ban kimondunk egy általános tételt, amely BOREL tételét és az 1. tételt egyaránt speciális esetként tartalmazza.

5. §.

Tekintsük, ugyanúgy, mint a 3. §.-ban, x-et valószínűségi változónak amely egyenletes eloszlású a (0, 1) intervallumban. Ez esetben $\varepsilon_n(x)$ $n = 1, 2, \ldots.)$ is valószínűségi változó lesz, mégpedig $\varepsilon_n(x)$ a $0, 1, \ldots, q_n - 1$ értékeket rendre $\frac{1}{q_n}$ valószínűséggel veszi fel.[7] Könnyen belátható, hogy az $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x), \ldots \varepsilon_n(x), \ldots$ változók teljesen függetlenek, vagyis akárhogyan adunk meg $k_1, k_2, \ldots, k_n$ nemnegatív egész számokat, $(0 \leqq k_j \leqq q_j - 1;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, fennállnak a

$$(5.1)\quad \mathbf{P}(\varepsilon_1(x) = k_1, \varepsilon_2(x) = k_2, \ldots, \varepsilon_n(x) = k_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbf{P}(\varepsilon_j(x) = k_j)$$

összefüggések, ahol $\mathbf{P}(\ldots)$ a zárójelben álló esemény valószínűségét jelöli.

(5. 1) egyszerűen azt fejezi ki, hogy egy olyan intervallum hossza, melyet úgy nyertünk, hogy a (0, 1) intervallumot q_1 egyenlő részintervallumra bontottuk, ebből egyet kiválasztottunk és azt q_2 egyenlő rész intervallumra bontottuk, ezek közül egyet kiválasztottunk, s. i. t. végül az n-edik lépésben kiválasztottuk az $n-1$-edik lépésben nyert intervallum q_n egyenlő részintervalluma közül az egyiket, mindig $\frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n}$-nel egyenlő, akárhogy is történt az n választás.

Definiáljuk a $\xi_{nr}(x)$ $(n = 1, 2, \ldots; r = 0, 1, \ldots)$ valószínűségi változókat a következőképpen:

$$(5.2)\quad \xi_{nr}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \varepsilon_n(x) = r \\ 0 & \text{ha } \varepsilon_n(x) \neq r. \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy rögzített r mellett a $\xi_{1r}(x), \ldots, \xi_{nr}(x), \ldots$ változók is teljesen függetlenek, hiszen $\xi_{nr}(x)$ csak $\varepsilon_n(x)$-től függ. Számítsuk ki $\xi_{nr}(x)$ várható értékét és szórását. Mivel

$$\mathbf{P}(\xi_{nr}(x) = 1) = \frac{1}{q_n} \text{ és } \mathbf{P}(\xi_{nr}(x) = 0) = 1 - \frac{1}{q_n} \text{ ha } r \leqq q_n - 1$$

és $\xi_{nr}(x) \equiv 0$, ha $r \geqq q_n$, tehát ha egy ζ valószínűségi változó várható értékét $\mathbf{M}(\zeta)$-val, szórását $\mathbf{D}(\zeta)$-val jelöljük,

[7] Ahelyett, hogy x-et a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változónak tekintjük, vehetjük azt a valószínűségi mezőt, amelynek elemi eseményeit a (0, 1) intervallum pontjai, eseményeit a (0, 1) intervallum Lebesgue szerint mérhető részhalmazai reprezentálják és bármely esemény valószínűsége az illető eseményt reprezentáló halmaz Lebesgue-mértékével egyenlő, és tekinthetjük az $\varepsilon_n(x)$ függvényeket ezen a valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változóknak.

$$\mathbf{M}(\xi_{nr}(x)) = \frac{1}{q_n} \quad \text{ha } 0 \leqq r \leqq q_n - 1 \tag{5.3}$$

és

$$\mathbf{D}(\xi_{nr}(x)) = \sqrt{\frac{1}{q_n}\left(1 - \frac{1}{q_n}\right)} \quad \text{ha } 0 \leqq r \leqq q_n - 1. \tag{5.4}$$

Most szükségünk lesz KOLMOGOROV következő jólismert alapvető tételének, az ún. „három sor" tételnek[8] a következő speciális esetére: *Ha az* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ *valószínűségi változók teljesen függetlenek és* $\mathbf{M}(\eta_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *a* $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$ *sor 1 valószínűséggel konvergens, vagy 1 valószínűséggel divergens, aszerint, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}^2(\eta_n)$ *(numerikus) sor konvergens, vagy divergens.*

Szükségünk lesz továbbá KRONECKER következő ismert lemmájára: *Ha a* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *sor konvergens és a* b_k *pozitiv számsorozat monoton növekvőleg tart* $+\infty$*-hez akkor* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{n=1}^{n} b_k a_k = 0.$

A KOLMOGOROV-tételt KRONECKER lemmájával kombinálva a következő, szintén ismert [10], de ritkábban használt valószínűségszámítási segédtételt nyerjük:

[8] Az általános tétel (lásd [9]) a következőképpen hangzik: Legyenek $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ teljesen független valószínűségi változók, K egy pozitiv állandó és

$$\zeta_n = \begin{cases} \eta_n & \text{ha } |\eta_n| \leqq K \\ 0 & \text{ha } |\eta_n| > K \end{cases}$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$ sor 1 valószínűséggel konvergens, ha konvergens a következő három sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|\eta_n| > K), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}(\zeta_n) \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}^2(\zeta_n).$$

Ha ezen sorok közül legalább az egyik divergens, a $\sum_{n-1}^{\infty} \eta_n$ sor 1 valószínűséggel divergens. Megjegyzendő, hogy e tételnek az a következménye hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$ sor minden körülmények között vagy 1 valószínűséggel konvergens, vagy 1 valószínűséggel divergens, KOLMOGOROV egy másik tételének az ún. „0 vagy 1 törvénynek" a speciális esete.

Segédtétel: Ha az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ *valószínűségi változók teljesen függetlenek,* $\mathbf{M}(\eta_n)=0$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{D}^2(\eta_n)}{b_n^2}<+\infty$ *akkor* $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\eta_k$ 1 *valószínűséggel* 0*-hoz tart, feltéve hogy* $0<b_n\leqq b_{n+1}$ $(n=1,2,\ldots)$ *és* $\lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$.

Ugyanis KOLMOGOROV tételéből következik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\eta_n}{b_n}$ sor 1 valószínűséggel konvergens és így KRONECKER lemmájának alkalmazása azonnal elvezet állításunkhoz.

Mármost legyen $\eta_n=\xi_{nr}-\frac{1}{q_n}$ és $b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q_k}$ akkor (5.2) szerint, ha $q_n\leqq r$ akkor $\eta_n\equiv-\frac{1}{q_n}$, ha pedig $r<q_n$, akkor $\mathbf{M}(\eta_n)=0$ és $\mathbf{D}^2(\eta_n)=\frac{1}{q_n}\left(1-\frac{1}{q_n}\right)$ és így, mivel a) szerint $r<q_n$ teljesül, hacsak $n\geqq n_r$,

$$\sum_{n=n_r}^{\infty}\frac{\mathbf{D}^2(\eta_n)}{b_n^2}=\sum_{m=n_r}^{\infty}\frac{\frac{1}{q_n}\left(1-\frac{1}{q_n}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q_k}\right)^2}\leqq\sum_{m=n_r}^{\infty}\frac{\frac{1}{q_n}}{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{q_k}\right)}=$$

$$=\sum_{n=n_r}^{\infty}\left(\frac{1}{b_{n-1}}-\frac{1}{b_n}\right)$$

és így a b) feltételre való tekintettel a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{D}^2(\eta_n)}{b_n^2}$ sor konvergens. Ennélfogva a segédtétel alkalmazható és így kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\eta_k}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q_k}}=0\right)=1$$

vagyis, hogy

$$\mathbf{P}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_{kr}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{q_k}}=1\right)=1. \tag{5.5}$$

Figyelembevéve, hogy $\sum_{k=1}^{n} \xi_{kr} = N_n(r, x)$ hiszen $\sum_{k=1}^{n} \xi_{kr}$ egyenlő az r számnak az $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)$ számjegyek közötti előfordulásainak számával, láthatjuk, hogy (5. 5) nem más, mint (4. 2), amit bizonyítani akartunk. Mivel (4. 3) (4. 2)-nek nyilvánvaló következménye, ezzel tehát az 1. tételt bebizonyítottuk.

6. §.

Most megfogalmazzuk az 1. tételnek azt az általánosítását, amely BOREL klasszikus tételét is magában foglalja.

2. TÉTEL: *A pozitív egész számokból álló* $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ *számsorozatról* ($q_n \geqq 2$, $n = 1, 2, \ldots$) *tegyük fel, hogy* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ *divergens. Vizsgáljuk a* (0, 1) *intervallum* x *számainak előállítását az*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k}$$

Cantor-sor alakjában, ahol $\varepsilon_k(x)$ *a* $0, 1, \ldots, q_k - 1$ *értékeket veheti fel. Jelölje* $N_n(r, x)$ *az* $\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)$ *számok közül az r-rel egyenlők számát. Akkor majdnem minden* x *számra teljesülnek a*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(r, x)}{\sum_{\substack{k=1 \\ r<q_k}}^{n} \frac{1}{q_k}} = 1 \qquad (r = 0, 1, \ldots) \tag{6. 2}$$

relációk, ahol a nevezőben álló összeg egyenlő az $\frac{1}{q_k}$ *számok összegével k-nak azon értékeire, melyekre* $r < q_k$ *és* $k \leqq n$; (6. 2)*-ből következik, hogy*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(r, x)}{N_n(s, x)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{\substack{k=1 \\ r<q_k}}^{n} \frac{1}{q_k}}{\sum_{\substack{k=1 \\ s<q_k}}^{n} \frac{1}{q_k}} \tag{6. 3. 1}$$

azon (r, s) *nemnegatív egész számokból álló számpárokra, amelyekre a* (6. 3. 1) *reláció jobboldalán álló határérték létezik.*

Megjegyzések: Ha r és s olyan számok, hogy az $r < q_n$ és $s < q_n$ egyenlőtlenségek véges sok n kivételével minden n-re egyidejűleg teljesülnek, akkor a (6. 3. 1) jobboldalán álló határérték létezik és 1-gyel egyenlő, tehát

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(r, x)}{N_n(s, x)} = 1. \tag{6. 3. 2}$$

Ez az eset áll fenn például akkor, ha $q_n = q$ $(n = 1, 2, \ldots)$ $r \leqq q - 1$ és $s \leqq q - 1$; ez esetben speciális esetként nyerjük Borel tételét. Ez az eset áll fenn akkor is, ha $q_n \to \infty$, és r és s tetszőlegesek; ez esetben speciális esetként nyerjük az 1. tételt. Végül érvényes (6. 3. 2) akkor is, ha teljesül a következő feltétel:

a′) a pozitív egész számok sorozata felbontható két részsorozatra, az A és B számsorozatokra, olymódon, hogy $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ n \in A}} q_n = +\infty$ *és*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \in A}}^{n} \frac{1}{q_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}} = 1.$$

Ilyenmódon az 1. tétel állításának élesítéséhez jutunk, ugyanis az *a′*) feltétel az *a*) feltétel enyhítésének tekinthető.

Azt, hogy az *a′*) feltételből következik, hogy a (6. 3. 1) jobboldalán álló határérték létezik és 1-gyel egyenlő, úgy láthatjuk be, hogy *a′*)-ból következik, hogy megadhatók olyan n_r és n_s számok, hogy $r < q_n$ ha $n \geqq n_r$ és $n \in A$ és $s < q_n$, ha $n \geqq n_s$ és $n \in A$, és így

$$\frac{\sum\limits_{\substack{k=n_r \\ k \in A}}^{n} \frac{1}{q_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}} \leqq \frac{\sum\limits_{\substack{k=1 \\ r < q_k}}^{n} \frac{1}{q_k}}{\sum\limits_{\substack{k=1 \\ s < q_k}}^{n} \frac{1}{q_k}} \leqq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}}{\sum\limits_{\substack{k=n_s \\ k \in A}}^{n} \frac{1}{q_k}}$$

és így *a′*)-ből valóban következik, hogy a (6. 3. 1) jobboldalán álló határérték létezik és 1-gyel egyenlő.

A 2. tétel bizonyítása teljesen ugyanúgy történhet a segédtétel alapján, mint az 1. tétel bizonyítása, ezért a bizonyítást nem részletezzük.

7. §.

Példák. 1. Legyen $q_n = n+1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, vagyis vizsgáljuk a $(0, 1)$ intervallum x számainak az

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{(k+1)!}$$

alakban való előállítását, ahol $\varepsilon_k(x)$ a $0, 1, \ldots, k$ értékeket veheti fel. Ez esetben az 1. tétel összes feltételei teljesülnek, vagyis majdnem minden x-re az $\varepsilon_n(x)$ számjegyek között az összes nemnegatív egész szám ugyanolyan gyakran fordul elő.

2. Legyen $q_n = n+1$ ha $n \neq 2^j$ és $q_{2^j} = 2$ $(j = 0, 1, \ldots)$. Ez esetben

$$\sum_{\substack{k=1 \\ r<q_k}}^{n} \frac{1}{q_k} = \sum_{\substack{k=r \\ k \neq 2^j}}^{n} \frac{1}{k+1} \sim \log n \quad \text{ha} \quad r \geqq 2$$

és

$$\sum_{\substack{k=1 \\ r<q_k}}^{n} \frac{1}{q_k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2^j}}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\left[\frac{\log n}{\log 2}\right] \sim \left(1 + \frac{1}{\log 4}\right) \log n \quad \text{ha} \quad r = 0 \text{ vagy}$$

$r = 1$, ennélfogva majdnem minden x-re

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(r, x)}{N_n(s, x)} = \begin{cases} 1 & \text{ha } r \geqq 2 \text{ és } s \geqq 2, \text{ továbbá, ha} \\ & r \leqq 1 \text{ és } s \leqq 1 \\ \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\log 4}} & \text{ha } r \geqq 2 \text{ és } s \leqq 1, \\ 1 + \dfrac{1}{\log 4} & \text{ha } r \leqq 1 \text{ és } s \geqq 2. \end{cases}$$

3. Legyen $q_n = n+1$, ha $n \neq j!$ és $q_{j!} = 2$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Ez esetben teljesül a 2. tételhez fűzött megjegyzésben szereplő a') feltétel, mivel $\sum_{j! \leqq n} \frac{1}{2} = O\left(\frac{\log n}{\log \log n}\right)$, tehát (6. 3. 2) fennáll minden r-re és s-re.

4. Legyen $q_{2n-1} = q_1$ és $q_{2n} = q_2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, ahol $2 \leqq q_1 < q_2$. Ez esetben

$$\sum_{\substack{k=1\\ r<q_k}}^{n}\frac{1}{q_k}\sim\begin{cases}\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{q_2}\right) & \text{ha}\quad 0\leqq r\leqq q_1-1\\ \dfrac{n}{2q_2} & \text{ha}\quad q_1\leqq r\leqq q_2-1\\ 0 & \text{ha}\quad q_2\leqq r.\end{cases}$$

Ennélfogva a 2. tétel szerint majdnem minden x-re

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(r,x)}{N_n(s,x)}=\begin{cases}1 & \text{ha}\quad 0\leqq r\leqq q_1-1\ \text{és}\ 0\leqq s\leqq q_1-1\\ & \text{vagy}\ q_1\leqq r\leqq q_2-1\ \text{és}\ q_1\leqq s\leqq q_2-1\\ \dfrac{q_1}{q_1+q_2} & \text{ha}\quad q_1\leqq r\leqq q_2-1\ \text{és}\ 0\leqq s\leqq q_1-1\\ \dfrac{q_1+q_2}{q_1} & \text{ha}\quad q_1\leqq s\leqq q_2-1\ \text{és}\ 0\leqq r\leqq q_1-1\end{cases}$$

5. Legyen $q_n=q\geqq 2$ ha $n\neq j^2$ és $q_{j^2}=j$. Ez esetben

$$\sum_{\substack{k=1\\ r<q_k}}^{n}\frac{1}{q_k}=(n-[\sqrt{n}])\frac{1}{q}+\sum_{r^2<k^2\leqq n}\frac{1}{k}=\frac{n}{q}+O(\sqrt{n})\quad\text{ha}\quad r\leqq q-1$$

és

$$\sum_{\substack{k=1\\ r<q_k}}^{n}\frac{1}{q_k}=\sum_{r^2<k^2\leqq n}\frac{1}{k}\sim\frac{1}{2}\log n\quad\text{ha}\quad q\leqq r.$$

Ennélfogva a 2. tétel szerint majdnem minden x-re

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(r,x)}{N_n(s,x)}=\begin{cases}1 & \text{ha}\quad r\leqq q-1\ \text{és}\ s\leqq q-1\\ & \text{vagy}\ r\geqq q\ \text{és}\ s\geqq q.\\ 0 & \text{ha}\quad r\geqq q\ \text{és}\ s\leqq q-1\\ +\infty & \text{ha}\quad r\leqq q-1\ \text{és}\ s\geqq q.\end{cases}$$

6. Legyen $q_1=2$ és $q_n=2^{m+1}$, ha $n=N^{2^m}$, ahol $N>1$ nem négyzetszám és $m\geqq 0$, vagyis ha n egyenlő valamely N egész szám 2^m-edik hatványával, de nem egyenlő valamely egész szám 2^{m+1}-edik hatványával. Másszóval, legyen $q_n=2$ ha n nem négyzetszám, $q_n=4$, ha n négyzetszám, de nem negyedik hatvány, $q_n=8$, ha n negyedik hatvány, de nem nyolcadik hatvány, s. i. t.

Figyelembe véve, hogy n alatt n olyan k szám van, amelyre $q_k\geqq 2$, $[\sqrt{n}]$ olyan k szám, amelyre $q_k\geqq 4$ és általában $[n^{\frac{1}{2^m}}]$ olyan

k szám van, amelyre $q_k \geqq 2^{m+1}$, könnyen belátható, hogy ha $f(r)$ jelöli azt a legkisebb m egész számot, amelyre $2^{m+1} > r$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(r,x)}{N_n(s,x)} = \begin{cases} 1 & \text{ha } f(r) = f(s) \\ 0 & \text{ha } f(r) > f(s) \\ \infty & \text{ha } f(r) < f(s). \end{cases}$$

8. §.

Ebben a pontban a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < +\infty$ esettel foglalkozunk; ezzel az esettel foglalkozik TURÁN PÁL [11] dolgozata. KOLMOGOROVnak az 5. pontban említett tételéből következik, hogy ha

$$\xi_{nr}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \varepsilon_n(x) = r \\ 0 & \text{ha } \varepsilon_n(x) \neq r \end{cases}$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_{nr}(x) - \frac{1}{q_n} \right)$ sor ez esetben majdnem minden x-re konvergál, tehát a $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{nr}(x)$ sor is majdnem minden x-re konvergál, és így majdnem minden x szám Cantor-sorában minden r számjegy csak véges sokszor fordul elő, tehát $N_n(r,x)$ valamely n_r-től kezdve állandó.[9] Kézenfekvő kérdés, mi a valószínűsége annak, hogy az r jegy a $\varepsilon_n(x)$ számsorozatban pontosan k-szor forduljon elő, vagyis mekkora azon x számok halmazának mértéke, amelyeknek Cantor-sorában az r jegy pontosan k-szor fordul elő. Ezt a valószínűséget $P_k^{(r)}$-vel jelölve, fennáll a következő összefüggés, amely megadja a $\{P_k^{(r)};\ k = 0, 1, \ldots\}$ valószínűségeloszlás generátorfüggvényét:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(r)} z^k = \prod_{r<q_n} \left(1 + \frac{z-1}{q_n} \right). \tag{8. 1}$$

A (8. 1) jobboldalán álló szorzat speciális esetekben explicit módon kiszámítható és így a $P_k^{(r)}$ számok meghatározhatók.

Például, ha $q_n = n^2 + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ és $r = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(0)} z^k = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z-1}{n^2+1} \right) = \frac{sh(\pi\sqrt{z})}{\sqrt{z} \cdot sh\,\pi}$$

[9] n_r értéke természetesen x-től függ.

tehát

$$P_k^{(0)} = \frac{2\pi^{2k+1}}{(2k+1)!\,(e^{\pi}-e^{-\pi})} \qquad (k=0,1,\ldots).$$

Vizsgáljuk most magukat az $\varepsilon_n(x)$ valószínűségi változókat. Mivel

$$\mathbf{M}(\varepsilon_n(x)) = \frac{q_n-1}{2}$$

$$\mathbf{D}^2(\varepsilon_n(x)) = \frac{(q_n-1)^2}{12} + \frac{q_n-1}{6}$$

tehát az $\eta_n = \dfrac{\varepsilon_n(x) - \dfrac{q_n-1}{2}}{q_n^{3/2}}$ változókra teljesülnek a Kolmogorov-tétel feltételei és így a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dfrac{\varepsilon_n(x)}{q_n} - \dfrac{1}{2}}{q_n^{1/2}} \tag{8.2}$$

sor majdnem minden x-re konvergens. Ha q_n monoton nem csökkenő, akkor a Kronecker-lemma segítségével (8.2)-ből nyerjük, hogy majdnem minden x-re

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\varepsilon_k(x)}{q_k} - \dfrac{n}{2}}{\sqrt{q_n}} = 0. \tag{8.3}$$

Ha nemcsak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ konvergens, hanem a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n^{\alpha}}$ sor is, ahol $0<\alpha<1$, akkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dfrac{\varepsilon_n(x)}{q_n} - \dfrac{1}{2}}{q_n^{\alpha/2}} \tag{8.4}$$

sor is majdnem minden x-re konvergens és ha q_n monoton nem csökkenő, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\varepsilon_k(x)}{q_k} - \dfrac{n}{2}}{q_n^{\alpha/2}} = 0. \tag{8.5}$$

Még pontosabb eredményt ad az ún. iterált logaritmustétel, (lásd [12]) amelyet az $\frac{\varepsilon_n(x)}{q_n}$ korlátos valószínűségi változó sorozatra alkalmazva adódik, hogy majdnem minden x-re

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \log\log n}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \tag{8.6}$$

és

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} - \frac{n}{2}}{\sqrt{n \log\log n}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \tag{8.6.2}$$

A centrális határeloszlástétel LJAPUNOV-féle alakjából (lásd [6], 511. o.) viszont az következik, hogy ha $E_n(y)$ jelöli azon x pontok halmazát, amelyekre

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_k} - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < y$$

és $|E_n(y)|$-al jelöljük az $E_n(y)$ halmaz Lebesgue-féle mértékét, akkor

$$\lim_{n\to\infty} |E_n(y)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt. \tag{8.7}$$

TURÁN PÁL eredményei a valószínűségszámítási tárgyalásmódból a következőképpen adódnak:

KOLMOGOROV az 5. §-ban említett általános tételéből következik, hogy ha az $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ valószínűségi változók korlátosak és a $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}(\eta_n)$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$ sor 1 valószínűséggel divergens. Alkalmazva ezt a tételt a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{q_n}$ sorra, és figyelembe véve, hogy $\mathbf{M}\left(\frac{\varepsilon_n(x)}{q_n}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2q_n} \geqq \frac{1}{4}$ következik, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{q_n}$ majdnem minden x-re divergens; továbbá, hogy $\Sigma \frac{\varepsilon_n(x)}{q_n^{1+\alpha}}$ is diver-

gens, hacsak a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n^{\alpha}}$ sor divergens; így például, ha $q_n=(n+1)^2$, akkor nemcsak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{n^2}$, hanem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{n^3}$ is majdnem mindenütt divergens. Legyen $\delta_n(x)=\min\left(\varepsilon_n(x), q_n-\varepsilon_n(x), \left|\varepsilon_n(x)-\frac{q_n}{2}\right|\right)$. Figyelembevéve, hogy $M\left(\frac{\delta_n(x)}{q_n}\right)\geqq c$, ahol c egy n-től független pozitív állandó, következik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n(x)}{q_n}$ sor is divergens, majdnem minden x-re, továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n(x)}{q_n^{1+\alpha}}$ is divergens majdnem minden x-re, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n^{\alpha}}$ sor divergens.

9. §.

Foglalkozzunk most azzal a kérdéssel, hogy az 1. pontban a Borel-tételhez fűzött megjegyzések mennyiben vihetők át az 1. tétel feltételeinek eleget tevő Cantor-sorokra. Nézzük először az *A*) megjegyzést. Nevezzük az x szám kifejtését a $\{q_n\}$ számsorozathoz tartozó Cantor-féle rendszerben normálisnak, ha a (3. 2) reláció fennáll. Az 1. tételből nem következik, hogy majdnem minden x szám $(0\leqq x<1)$ *minden* az 1. tétel feltételeinek eleget tevő Cantor-féle rendszerben való kifejtése normális; ugyanis az összes, az 1. tétel feltételeinek megfelelő $\{q_n\}$ számsorozatok halmaza kontinuum számosságú és minden $\{q_n\}$ számsorozathoz tartozik a kivételes x-értékek egy 0-mértékű halmaza; márpedig kontinuum számosságú 0 mértékű halmaz együtt lefedheti a teljes (0, 1) intervallumot. Érdekes megvizsgálni, hogy valóban lefedik-e ezek a kivételes halmazok együtt a (0, 1) intervallumot, vagyis megadható-e bármely x-hez $(0\leqq x<1)$ egy olyan, az 1. tétel feltételeinek eleget tevő $\{q_n\}$ sorozat, hogy x kifejtése a megfelelő Cantor-féle rendszerben nem normális. E kérdésre a válasz igenlő.

Ezt például a következőképpen lehet megmutatni.[10] Legyen x egy tetszőleges szám a (0, 1) intervallumban. Válasszunk egy tetszőleges, csupa páros és $\geqq 4$ számból álló q_n számsorozatot;

[10] Az alábbi bizonyítás alapgondolata Erdős Páltól származik.

legyen $q_n = 2p_n$ ($p_n \geqq 2$) és vizsgáljuk x kifejtését abban a Cantor-sorban, amely a q_n számsorozathoz tartozik. Ha ez a kifejtés nem normális, akkor már meg is találtuk a keresett Cantor-rendszert; ha a kifejtés normális, akkor a következőképpen járunk el: Legyen

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{q_1, q_2, \ldots, q_n} \tag{9.1}$$

Ezt a sorfejtést át fogjuk alakítani egy nem normális sorfejtéssé. Vizsgáljuk meg ε_1-et. Ha ε_1 páratlan, vagy 0, legyen $\varepsilon_1^* = \varepsilon_1$ és $q_1^* = q_1$. Ha ε_1 páros és $\varepsilon_1 \geqq 2$, vagyis $\varepsilon_1 = 2\delta_1$, ahol $\delta_1 \geqq 1$, legyen $\varepsilon_1^* = \delta_1$, $q_1^* = p_1$ és $q_2' = 2q_2$. Mivel $q_1^* \cdot q_2' = \frac{q_1}{2} \cdot 2q_2 = q_1 q_2$, továbbá $\varepsilon_2 < q_2 < 2q_2$, tehát

$$x = \frac{\varepsilon_1^*}{q_1^*} + \frac{\varepsilon_2}{q_1^* q_2'} + \frac{\varepsilon_3}{q_1^* q_2' q_3} + \cdots \tag{9.2}$$

(9.2) nyilván x kifejtése a $q_1^*, q_2', q_3, \ldots, q_n, \ldots$. sorozathoz tartozó Cantor-sorba. Most megvizsgáljuk ε_2-t. Ha ε_2 páratlan, vagy 0, legyen $\varepsilon_2^* = \varepsilon_2$ és $q_2^* = q_2'$, ha ε_2 páros és $\geqq 2$, azaz $\varepsilon_2 = 2\delta_2$, legyen $\varepsilon_2^* = \delta_2$, $q_2^* = q_2$ és $q_3' = 2q_3$; mindkét esetben

$$x = \frac{\varepsilon_1^*}{q_1^*} + \frac{\varepsilon_2^*}{q_1^* q_2^*} + \frac{\varepsilon_3}{q_1^* q_2^* q_3'} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{q_1^* q_2^* q_3' q_4 \ldots q_n} \tag{9.3}$$

Ezt az eljárást minden határon túl folytatva nyerjük az

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n^*}{q_1^* q_2^* \ldots q_n^*} \tag{9.4}$$

kifejtést. Mivel q_n^* csak a $\frac{q_n}{2}$, q_n, $2q_n$ számok egyikével lehet egyenlő és a q_n sorozatra az 1. tétel *a*) és *b*) feltevései teljesülnek, a q_n^* sorozatra is teljesülnek ugyanezek a feltételek. Másrészt, ha $N_n^*(r, n)$ jelöli a $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \ldots, \varepsilon_n^*$ számok között a r-rel egyenlők számát, akkor (3, 2) szerint

$$N_n^*(2s, x) = N_n(4s, x) \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}$$

és

$$N_n^*(2r+1, x) = N_n(2r+1, x) + N_n(4r+2, x) \sim 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

tehát

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n^*(2r+1, x)}{N_n^*(2s, x)} = 2 \qquad (r, s = 0, 1, 2, \ldots)$$

vagyis az x szám (9. 4) kifejtése nem normális.

Megjegyzendő, hogy ha a q_n számsorozat monoton növekvő volt, a fenti konstrukcióval nyert q_n^* számsorozat már általában nem lesz az. Felmerül ezért a kérdés: lehet-e bármely x számhoz egy olyan $\{q_n\}$ *monoton növekvő* számsorozatot találni, amelyre az 1. tétel *a*) és *b*) feltételei teljesülnek, úgy, hogy x-nek a $\{q_n\}$ sorozathoz tartozó Cantor-sora ne legyen normális. Ezt a kérdést Szüsz Péter oldotta meg.[11]

Természetesen igaz azonban, hogy akárhogyan választunk is ki véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok, az 1. tétel feltételeinek megfelelő Cantor-rendszert, majdnem minden x szám kifejtése mindezekben a számrendszerekben normális.

Foglalkozzunk most az 1. pont B) megjegyzésének átvitelével. Az a gondolat, amit a Borel-tétel esetében alkalmaztunk, csak olyan Cantor-sorokra alkalmazható, amelyekre nemcsak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$ hanem $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q_{nk+1}\, q_{nk+2} \ldots q_{nk+k}}$ is divergens. Könnyen belátható, hogy ha viszont ez a feltétel nem teljesül, a megfelelő állítás sem érvényes. Az egyszerűség kedvéért szorítkozzunk a $k=2$ esetre. Legyen $\zeta_{nrs} = 1$ ha $\varepsilon_{2n-1}(x) = r$ és $\varepsilon_{2n}(x) = s$, egyébként pedig $\zeta_{nrs} = 0$. Kolmogorov tételéből következik, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_{2n-1}\, q_{2n}}$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{nrs}$ sor is 1 valószínűséggel konvergens, tehát majdnem minden x szám kifejtésében az r és s jegyek közvetlenül egymásután csak véges sokszor fordulnak elő.

Ami a *C*) megjegyzést illeti, hasonló a helyzet; ha $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ egy tetszőleges számsorozat, az $\varepsilon_{k_1}(x), \varepsilon_{k_2}(x), \ldots, \ldots, \varepsilon_{k_n}(x), \ldots$ számok nyilván akkor és csak akkor fognak ugyanolyan statisztikus viselkedést mutatni, mint a teljes $\varepsilon_n(x)$ sorozat, ha nemcsak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n}$, hanem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_{k_n}}$ is divergens.

[11] Dolgozata e lap következő számában jelenik meg.

10. §.

Befejezésül még néhány megjegyzést szeretnék tenni annak megvilágítására, hogy mi vezetett az e dolgozatban tárgyalt kérdések megvizsgálására. A valószínűségszámítás egy új axiómatikus elméletének kidolgozása során a nagy számok erős törvényét igyekeztem kiterjeszteni feltételes valószínűségi mezőkre. Az 1. tételre először az említett általános tétel speciális eseteként jutottam [13]; a tétel — amint ezt megmutattuk — természetesen az általános elmélettől függetlenül, közvetlenül is bebizonyítható. Az 1. tétel valószínűségszámítási szempontból azért érdekes, mert segítségével igen egyszerű modellt nyerünk egy olyan valószínűségi változó értékeire vonatkozó független megfigyelések végtelen sorozatára vonatkozólag, amely változó értékkészlete a nemnegatív egész számok halmaza és feltételes valószínűségeloszlása egyenletes ezen a halmazon, vagyis azon feltevés mellett, hogy a változó értéke egy tetszőleges, nemnegatív egész számokból álló *véges* halmazhoz tartozik, a változó e halmaz minden elemét egyenlő valószínűséggel veszi fel.

A 2. tétel valószínűségszámítási érdekessége abban áll, hogy igen általános feltételes valószínűségeloszlással bíró valószínűségi változók értékkészletére vonatkozó megfigyelések sorozatára nyerhetünk egyszerű modellt; különösen érdekes ebből a szempontból a 7. §. 6. példája.

IRODALOM

[1] Borel É.: Sur les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rediconti del Cirolo Mat. dl Palermo* 26 (1909), 247—271. o.

[2] Riesz Frigyes: Az ergodikus elméletről. *Mat.-Fiz. Lapok* 1943.

[3] Weyl H.: Über Gleichverteilung mod 1. *Math. Annalen* 77 (1916) 313—352

[4] Riesz Frigyes,: Nullahalmazok és szerepük az analízisben, I. Magyar Matematikai Kongresszus Közleményei, Budapest, 1950, 205—224. o.

[5] Rényi A.: Simple proof of a theorem of Borel and of the law of the iterated logarithm, *Mathematisk Tidskrift B.* (1948) 41—48. o.

[6] Rényi A.: Valószínűségszámítás, Tankönyvkiadó, Bp. 1954, 1—746. o.

[7] Cantor G.: Über die einfachen Zahlensysteme, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 14 (1869).

[8] Perron O.: Irrationalzahlen, Göschen, Berlin, 1921, 111—116. o.

[9] Kolmogoroff A.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin (1933) 60 o.

[10] Loève M.: Probability theory, van Nostrand, New-York, 1955, 238 o.

[11] Turán Pál.: „Faktoriálisos" számrendszerbeli számjegyek eloszlásáról, *Matematikai Lapok* 7 (1956) 71—76 o.

[12] Kolmogoroff A.: Über das Gesetz des iterierten Logarithmus Math. Annalen 101 (1929) 126—135.

[13] Rényi A.: A valószínűségszámítás egy új axiomatikus felépítése, *MTA III. o. Osztályközleményei* 4 (1954) 367—425. o., továbbá
Rényi A.: (A new axiomatic theory of probability, *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.*) 6 (1955) 185—336.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЦИФР В РЯДАХ КАНТОРА

А. Реньи

(Резюме)

Пусть $\{q_n\}$ обозначает последовательность положительных целых чисел $q_n \geqq 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Г. Кантор показал ([7] см. тоже [8]), что каждое вещественное число x $(0 \leqq x < 1)$ может быть представлено в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{q_1 q_2 \cdots q_n}, \tag{1}$$

где n-ная цифра $\varepsilon_n(x)$ может принимать значения $0, 1, \ldots, q_n - 1$. Представление (1)—единственное, несмотря на рациональные числа вида $\frac{a}{q_1 q_2 \cdots q_N}$ (где a—положительное целое число), для которых имеются два представления; в этом случае мы всегда возьмем конечное, в котором $\varepsilon_n(x) = 0$ для $n > N$.

В настоящей работе исследуются те статистические свойства последовательности $\varepsilon_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, которые имеют место для почти всех x. Пусть $N_n(r, x)$ обозначает число появлений неотрицательного целого числа r среди n первые цифры разложения x в ряд Кантора (1).

Доказывается (Теорема 1), что если $q_n \to \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} = +\infty$, то для почти всех x в $(0, 1)$ имеем)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(r, x)}{N_n(s, x)} = 1 \qquad (r, s = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

т. е. все цифры $0, 1, 2, \ldots$ „равновероятны“.

Более общая теорема (Теорема 2) высказывает, что если мы предположим только $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} = +\infty$, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_n(r, x)}{N_n(s, x)} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{\substack{k=1 \\ r < q_k}}^{n} \frac{1}{q_k}}{\sum_{\substack{k=1 \\ s < q_k}}^{n} \frac{1}{q_k}} \tag{3}$$

при условии, что предел в правой части (3) существует. Эта теорема

содержит классическую теорему Бореля о нормальных чисел как частный случай.

Случай $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_n}<+\infty$ тоже исследован; исследуются различные статистические свойства цифр $\varepsilon_n(x)$. На конце статьи автор указывает на связь этих исследований с теорией полей условной вероятности, развитой недавно автором (см. [13]).

ON THE DISTRIBUTION OF THE DIGITS IN CANTOR'S SERIES

by

A. Rényi

(Summary)

Let q_n denote a sequence of positive integers, $q_n \geqq 2$ $(n=1, 2, \ldots)$. It has been shown by G. Cantor ([7], see also [8]) that every real number x $(0 \leqq x < 1)$ can be represented in the form

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n(x)}{q_1 q_2 \cdots q_n} \tag{1}$$

where the n-th "digit" $\varepsilon_n(x)$ can take on the values $0, 1, \ldots, q_n-1$. The representation (1) is unique, except for rational numbers of the form $\frac{a}{q_1 q_2 \cdots q_N}$ where a is a positive integer, for which two representations are possible, (in this case we choose always the finite one in which $\varepsilon_n(x)=0$ for $n>N$).

In the present paper the statistical properties of the sequence $\varepsilon_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ which are valid for almost all x, are investigated. Let us denote by $N_n(r, x)$ the number of occurrence of the nonnegative integer r among the first n digits of the development of x into the Cantor series (1).

It is proved (Theorem 1.) that if $q_n \to \infty$ and $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_n}=+\infty$, then for almost all x in (0, 1) we have

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(r, x)}{N_n(s, x)}=1 \qquad (r, s=0, 1, \ldots) \tag{2}$$

i. e. all digits $0, 1, 2, \ldots$ are "equiprobable".

A more general theorem (Theorem 2.) states that if only $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_n}=+\infty$ is supposed, we have

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(r, x)}{N_n(s, x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{\substack{k=1\\ r<q_k}}^{n}\frac{1}{q_k}}{\sum_{\substack{k=1\\ s<q_k}}^{n}\frac{1}{q_k}} \tag{3}$$

provided that the limit on the right of (3) exists. This theorem contains the classical theorem of Borel on normal decimals as a special case.

The case $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < +\infty$ is also investigated, and several statistical properties of the digits $\varepsilon_n(x)$ are mentioned. Finally, the connection with the theory of conditional probability spaces, developed recently by the author (see [13]) is pointed out.

A természetes logaritmus és az exponenciális függvény bevezetéséről

Szele Tibor emlékének ajánlva[1]

Aczél János

A következő apró didaktikai megjegyzés a természetes logaritmus és az exponenciális függvény egyetemi bevezetéséhez kíván egy, a szokottaktól eltérő és azokhoz képest talán bizonyos előnyökkel rendelkező ötletet adni.

E függvények bevezetése általában a következő utak egyikén szokott történni:

1. Többé-kevésbé érdekessé téve bevezetik e-t, mint határértéket és azután elég önkényes módon éppen az ezen alappal vett logaritmust (és exponenciális függvényt) nevezik el külön. Ilyen alapon pl. a π alapú logaritmus is külön nevet kaphatna, stb.

2. Az előbbi módszer egy érdekes variánsa a $2; 1{,}1^{10}; 1{,}01^{100}; \ldots$ sorozatot azzal indokolja, hogy az ilyen alapú logaritmus-rendszerekben egyre sűrűbb lesz az olyan könnyen meghatározható szám, melynek egyszerű véges tizedestört a logaritmusa. E szellemes módszernek azonban az a bizonyos mértékig groteszk hátránya, hogy a határértékként kapott e alapú rendszerben azután egyáltalán nincs olyan a triviálistól eltérő racionális szám, aminek egyszerűen kiszámítható volna a logaritmusa.

3. $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. Ennek előnye, hogy tényleges szükségletet elégít ki (x^n-nek csak $n = -1$-nél nem ismerjük az integrálját),

[1] Jelen megjegyzés itt közölt szövege lényegtelen változtatásoktól és bővítésektől eltekintve, megegyezik a szerző által Szele Tibornak 1952. március 15-i kelettel írt levél szövegével.

viszont hátránya az, hogy legalább is a derivált — határozatlan integrál — határozott integrál előadási sorrend esetén túl későn, az integrálásnál vezetődik be a természetes logaritmus, amire pedig már a differenciálásnál, mégpedig más függvények (a^x, ${}^a\log x$) differenciálásánál szükség van.

4. e^x az egyetlen exponenciális függvény, melynek $x=0$-nál 45°-os hajlásszögű érintője van. Sok tekintetben ez a legrövidebb út, viszont hátránya, hogy a hallgató nem-igen érti, miért döntő jelentőségű az $x=0$ pontban húzott érintő hajlásszöge, hisz ez a szempont más görbéknél nem merült fel.

Természetesen a fenti felsorolás sem a módszerek száma, sem előnyeik és hátrányaik tekintetében nem törekedett teljességre. Az elmondottakból mégis talán bizonyos joggal lehet a következő két következtetést levonni:

I. Az $\ln x$ függvény nem annyira természetes logaritmus — hiszen egyik bevezetésmódja sem természetes és az sem egészen áll, hogy a természetben, vagy a technikában kitüntetett szerepe volna, mert ott csak az érdekes, ha a derivált arányos a függvénnyel és az, ha egyenlő vele, nem előny — mint inkább elkerülhetetlen, ugyanis a már ismerős ${}^a\log x$ (pl. ${}^{10}\log x$) és még előbb a^x sem differenciálható nélküle. Ez azt a gondolatot sugallja, hogy éppen ezt a tényt lehetne e függvény bevezetésének természetes indokául felhasználni.

II. Ezek szerint korainak látszik a határértéknél, vagy a függvényábrázolásnál bevezetni a természetes logaritmust (1., 2., 4), viszont túlkésőnek látszik az integrálásnál bevezetni (3.), hanem a differenciálásnál merül fel a természetes szükséglet e függvény definiálására.

Mindezek alapján érdemel talán kipróbálást a következő bevezetési mód:

Az a^x függvényt az egyik szokásos módon hatványozással, gyökvonással, reciprok értékkel, és határátmenettel definiálva megemlítjük, hogy ez a függvény folytonos és pl. $\lim_{h\to 0} a^h = 1$, továbbá, hogy konvex függvény. Ez utóbbit vagy (pl. műegyetemi előadásnál) a szemléletből fogadjuk el, vagy az exponenciális függvény konvexitásával egyenértékű tetszőleges valós kitevőjű Bernoulli-egyenlőtlenséget bizonyítjuk, vagy pedig a mindkettővel szintén ekvivalens általános kitevőjű számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget. (Az előbbire nézve lásd pl. P. P. Korovkin Egyenlőtlenségek c. füzetét az orosznyelvű Népszerű Matematikai Előadások c. sorozatban, Moszkva—Leningrád 1951, az utóbbira nézve pl. G. H. Hardy—J. E. Littlewood—G. Pólya Inequalities c. könyvét,

Cambridge 1934, vagy Aczél J.—Surányi J. cikksorozatát a Középiskolai Matemetikai Lapok 3—4 (1951—52) köteteiben.[2])

Az elemi függvények differenciálhányadosai képzésénél a^x differenciálásának azzal kezdünk neki, hogy a differenciahányadost szokás szerint átalakítjuk:

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\frac{a^h-1}{h}.$$

Így a differenciahányados a^x-szer egy konstans lesz.

Látható, hogy a második tényező a $(0,h)$ szakaszon vett szelő irány-tangense. Az, hogy van határértéke, egyrészt abból következik, hogy $h>0$ csökkenésével a szelő irány-tangensek a konvexitás miatt monoton csökkennek, $h<0$ növekedésével pedig monoton nőnek és a két sorozat megfelelő tagjainak

$$\frac{a^h-1}{h}\Big/\frac{a^{-h}-1}{-h}=a^h \qquad (h>a)$$

hányadosa 1-nél nagyobb és 1-hez tartó lévén, a csökkenő sorozat alulról, a növő felületről korlátos, van határértékük és ezek egyenlők. Így a differenciahányados második tényezőjének határértéke az $x=0$ pontbeli érintő iránytangense. Itt látszik tehát a^x $x=0$-beli iránytangense kiemelt szerepének indokoltsága. (Itt esetleg át lehet térni a 4. út indokoltabb folytatására, azt kérdezve, hogy mikor lesz a deriváltban a^x mellett fellépő szorzó konstans éppen 1.)

Azt kaptuk, hogy a a^x deriváltja egyenlő a^x-szer egy konstans. Ezt a szorzó konstanst, melynek értékét minden a-ra meg kell ismernünk ahhoz, hogy a^x deriváltját bármely pozitív alap esetén képezni tudjuk, elnevezzük $\ln a$-nak:

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

Határozzuk meg tehát a $\ln a$ függvényt, melyet úgy definiáltunk eszerint, mint a^x iránytényezőjét $x=0$-nál.

$\ln(a^t)$ az $(a^t)^x=a^{tx}$ iránytényezője $x=0$-ban. Ez a függvény t-szeres vízszintes zsugorítása a^x-nek, így az iránytényező t-sze-

[2] Abból, hogy egy folytonos függvénygörbének *minden* húrja alatt van *egy* pontja, következik, hogy a függvény konvex. — Így $a^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\sqrt{a^{x_1}a^{x_2}}\leq\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}$-ből is következik a^x konvexitása. (Ld. a két utóbb idézett munkát.)

rezödik:

$$\ln (a^t) = t \ln a,$$

vagy $a^t = x$, $t = {}^a\log x$ jelöléssel (${}^a\log x$-et, mint a^x inverzfüggvényét már ismerjük):

$$\ln x = {}^a\log x \ln a,$$

tehát $\ln x =$ konstansszor egy logaritmus-függvény, így rendelkezik a logaritmus-függvények összes fontos tulajdonságaival (szorzat, hányados, hatvány stb. logaritmusa). Kérdés, hogy tényleg maga is logaritmus-e, és ha igen, mi az alapszáma, vagyis melyik az az e szám, mellyel identikusan

$$\ln x = {}^e\log x.$$

Mivel

$$\ln x = {}^e\log x \ln e,$$

tehát kell, hogy

$$\ln e = 1$$

legyen, tehát a keresett e az Y tengelt 45° alatt metsző exponenciális görbe alapszáma. Így

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad ({}^a\log x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$${}^a\log x = (\ln x)/(\ln a), \text{ stb.}$$

Az itt vázolt módszer részleteire nem térünk ki, a részletes kidolgozást az egyes előadók egyéni ízlésüknek megfelelően úgyis különbözőképpen végzik. Azt sem állítom, hogy ez volna a bevezetésben vázolt probléma egyedül lehetséges vagy legjobb megoldása, de talán a fentiek arról meggyőznek többeket, hogy érdemes kipróbálni az itt vázolt bevezetési módszert.

О ВВЕДЕНИИ ЕСТЕСТВЕННОГО ЛОГАРИФМА И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Я. Ацель (г. Дебрецен)

(Резюме)

Рекомендуется в вузовском обучении определить натуральный логарифм посредством (делающей необходимым введение этой функции) реляции $(a^x)' = a^x \ln a$ как

$$\ln a = \frac{(a^x)'}{a^x} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}.$$

Это можно геометрически рассматривать как коэффициент направления кривой $y = a^x$ в точке $x = 0$. В виду того, что $y = (a^t)^x = a^{tx}$ есть t-кратное горизонтальное сжатие этой кривой a^k, умножится на t и данный коэффициент направления, и получается

$$\ln a^t = t \ln a.$$

Из этого вытекают основные свойства логарифмической функции, а также и то, что $\ln a = {}^e\log a$, где e является основым числом экспоненциальной функции, пересекающей ось y под углом 45°.

ÜBER DIE EINFÜHRUNG DES NATÜRLICHEN LOGARITHMUS UND DER EXPONENTIALFUNKTION

J. Aczél

(Zusammenfassung)

Es wird vorgeschlagen den naturlichen Logarithmus $\ln a$ im Universitätsunterricht mittels der Relation $(a^x)' = a^x \ln a$ (die die Einführung von $\ln a$ überhaupt nötig macht) als

$$\ln a = \frac{(a^x)'}{a^x} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

zu definieren. Dies kann geometrisch als der Richtungskoeffizient der Kurve $y = a^x$ im Punkte $x = 0$ gedeutet werden. Da $y = (a^t)^x = a^{tx}$ eine t-fache horizontale Zusammenschrumpfung dieser Kurve ist, wird dabei auch dieser Richtungskoeffizient mit t multipliziert, so dass

$$\ln a^t = t \ln a$$

gilt, woraus die Grundeigenschaften der Logarithmusfunktion folgen und auch dass $\ln a = {}^e\log a$ ist, wo e die Grundzahl jener Exponentialfunktion ist, die die Y-Achse unter einem 45°-Winkel schneidet.

Egy Turán-féle problémáról

KŐVÁRI TAMÁS

TURÁN PÁL vetette fel a következő kérdést: Létezik-e olyan $f(z)$ egészfüggvény, amelynél az

$$f(z), f'(z), \ldots, f^{(n)}(z), \ldots$$

függvények gyökeinek egyesített halmaza mindenütt sűrű a számsíkon?

Az alábbiakban a Rouché-tétel segítségével megkonstruálunk egy egészfüggvényt, amely a kívánt tulajdonsággal bír, és így a felvetett kérdésre pozitív választ ad.

Legyen z_n egy pontsorozat, amely a komplex számsík minden racionális pontját[1] végtelen sokszor tartalmazza és ezenkívül $|z_n| \leqq n$. (Ilyen pontsorozat egyszerű módon konstruálható meg.) Definiáljuk az $f(z)$ függvényt a következőképpen:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{z^{n^3}}{(n^3)!}\left(z_n - \frac{z}{n^3+1}\right)$$

Ez egészfüggvény, amelynek k^3-edik deriváltja:

$$f^{(k^3)}(z) = (z_k - z) + \sum_{n=k+1}^{\infty}{}' \frac{z^{n^3-k^3}}{(n^3-k^3)!}\left(z_n - \frac{z}{n^3-k^3+1}\right).$$

A $|z_k - z| = \frac{1}{k}$ körön

$$\left|\frac{z^{n^3-k^3}}{(n^3-k^3)!}\left(z_n - \frac{z}{n^3-k^3+1}\right)\right| \leqq \left(\frac{e(k+1)}{n^3-k^3}\right)^{n^3-k^3}(n+1) \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{2e}{7}\right)^{n^2}(n+1) < \left(\frac{6}{7}\right)^{n^2} < \left(\frac{6}{7}\right)^{n}$$

[1] Racionális ponton olyan pontot értünk, amelynek mind valós, mind képzetes koordinátája racionális.

ha $n > k \geqq 4$ mert

$$\frac{k+1}{n^3-k^3} \leqq \frac{k+1}{(k+1)^3-k^3} \leqq \frac{2}{7}$$

$$n^3-k^3=(n-k)(n^2+nk+k^2)>n^2$$

és $n+1<\left(\frac{3}{e}\right)^{n^2}$ ha $n \geqq 5$. Tehát a $|z-z_k|=\frac{1}{k}$ körön $k \geqq 40$ esetén

$$|f^{(k^3)}(z)-(z_k-z)| \leqq \sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n=6\left(\frac{6}{7}\right)^k<\frac{1}{k}=|z_k-z|.$$

Igy Rouché tétele alapján, $k \geqq 40$ esetén $f^{(k^3)}(z)$-nek a $|z-z_k|<\frac{1}{k}$ körben egy ξ_k gyöke van. Világos, hogy ezen ξ_k gyökök halmaza mindenütt sűrű a számsíkon; és igy az $f(z)$ egészfüggvény valóban eleget tesz a Turán-féle követelménynek.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ П. ТУРАНА

Т. Кёвари

(Резюме)

Дается положительное решение следующей задачи, выдвинутой П. Тураном. Существует-ли целая функция $f(z)$, для которой соединенное множество корней функций

$$f(z), f^1(z), \ldots, f^{(n)}(z)$$

имеет одинаковую плотность во всей плоскости чисел.

ON A PROBLEM SET BY P. TURÁN

T. Kővári

(Summary)

The positive solution of the following problem of Turán is given: is there an integral function $f(z)$, for which the set of the roots of the functions $f(z), f^1(z), \ldots, f^{(n)}(z), \ldots$ is everywhere dense on the whole complexe plane.

A Borsuk-féle feldarabolási problémához

HEPPES ALADÁR ÉS RÉVÉSZ PÁL

1933-ban mondta ki Borsuk[1] a következő sejtést:

Az n dimenziós Euklidesi tér minden $D(K)$ átmérőjű K ponthalmaza felbontható $n+1$ olyan részhalmazra, amelyek mindegyikének átmérője kisebb $D(K)$-nál. (Egy K ponthalmaz $D(K)$ átmérőjénél értjük a

$$D(K) = \sup_{P_i, P_j \in K} \varrho(P_i, P_j)$$

számot, ahol $\varrho(P_i, P_j)$ a P_i és P_j pontok távolságát jelenti.)

Könnyen látható, hogy a sejtésnél több nem igaz, ugyanis az n dimenziós szabályos szimplex $n+1$ csúcspontjából álló K ponthalmaz bármely két pontjának a távolsága $D(K)$, tehát nem bontható fel $(n+1)$-nél kevesebb $D(K)$-nál kisebb átmérőjű halmazra.

A sejtéssel kapcsolatban pozitív eredményt ért el Hadwiger,[2] aki bebizonyította, hogy:

„Egy n dimenziós $(n>1)$ K tojástest, amelynek átmérője $D(K)=1$, szétdarabolható $n+1$ $M_i (i=0, 1, \ldots, n)$ részre úgy, hogy e részek átmérőjére a

$$D(M_i) \leqq 1 - 2r \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} \right\}$$

egyenlőtlenség érvényes, ahol r a határfelület „belső gördülő sugarát" jelenti. (Egy felület belső gördülő sugara egyenlő a felület legkisebb főgörbületi sugarával. Tojástesteknek nevezzük az olyan zárt, korlátos, konvex ponthalmazokat, amelyek határfelületének belső gördülő sugara pozitív.)

Közelmultban H. G. Eggleston[3] igazolta a sejtés helyességét $n=3$ esetre.

Alábbiakban egyszerűbb bizonyítást adunk a sejtés következő speciális esetére:

TÉTEL: A három dimenziós tér minden egységátmérőjű, véges ponthalmaza felbontható négy részhalmazra, amelyek mind egynél kisebb átmérőjűek. (Az, hogy csupán egységátmérőjű ponthalmazokra szorítkozunk nyilván nem jelent megszorítást.)

Definíció: Véges sok zárt egységsugarú gömb közösrészét — amelyet legalább három gömb határol, gömbpoliédernek fogjuk nevezni. A gömbpoliéder lapjain értjük egy-egy „alkotó gömb" felületének azt az összefüggő darabját, amely egyúttal a poliédernek is határát képezi. A lapokat határoló köríveket éleknek, az élek metszéspontjait pedig csúcsoknak mondjuk. Az élek nyilván egynél kisebb sugarú körívek.

I. Segédtétel: Egy gömbpoliédernek legfeljebb annyi lapja van, ahány gömb közösrészeként keletkezik.

Megjegyzés: Könnyen látható, hogy egy egységsugarú gömb két, belsejében vagy határán levő ponttal együtt bármely, e két ponton átmenő egységsugarú körnek — e pontok által meghatározott — rövidebb ívét tartalmazza.

Bizonyítás: Megmutatjuk, hogy egy gömbfelületen a poliédernek legfeljebb egy lapja helyezkedhet el. Nyilván minden olyan gömbfelületi pont, amelyet az összes alkotó gömb tartalmaz, határpontja a gömpoliédernek. Megjegyzésünk értelmében, tehát ha egy alkotó gömb felületének két pontja rajta van a gömbpoliéder határán, akkor e gömbnek e két pontot összekötő rövidebb főköríve is a gömbpoliéder határához tartozik.

Következésképpen a tekintett gömb felületének minden a gömbpoliéder határán levő pontja a gömbpoliédernek ugyanazon lapján helyezkedik el, amivel az 1. segédtételt igazoltuk.

2. segédtétel: Nincs a térben olyan egységátmérőjű véges R pontrendszer, amelynek minden pontjához megadható e rendszernek legalább négy, e ponttól egységnyi távolságra levő pontja.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy létezik ilyen R pontrendszer. Jelöljük R pontjait P_i-vel ($i = 1, 2, \ldots, k$). Íjunk a rendszer minden P_i pontja köré egységsugarú G_i gömböt. Tekintsük e gömbök közös részeként keletkező G gömbpoliédert.

Minthogy R rendszer átmérője egy, valamennyi pontja hozzátartozik G gömbpoliéderhez, másrészt minden R-beli pont legalább egy G_i gömb határán van, tehát G-nek is határához tartozik.

Tekintsünk egy tetszőleges G_i gömböt. Ennek határán legalább négy R-beli pont helyezkedik el. Lássuk be, hogy G_i határán van a G gömbpoliédernek lapja. 1. segédtétel bizonyításánál láttuk,

hogy ha G_i két pontja G határára esik, akkor G_i-nek e két ponton átmenő rövidebb főköríve is G határán van. E főkörív nem eshet G-nek élére, hiszen G élei egységnél kisebb sugarú körívek. Következésképpen G_i határán van lapja a G gömbpoliédernek. 1. segédtétel felhasználásával nyerjük, hogy G_i határán a gömbpoliédernek pontosan egy L_i lapja van.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges P_i pont a G gömbpoliédernek olyan csúcspontja, amelyben legalább négy él fut össze, illetve négy lap találkozik. Jelöljük az L_i-n levő R-beli pontokat $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_r}$-rel ($r \geqq 4$). $L_{i_1}, L_{i_2}, \ldots, L_{i_r}$ lapok a P_i pontot tartalmazzák, tehát P_i-ben legalább négy él fut össze.

Lehetséges, hogy G-nek $P_1, P_2, \ldots, P_k$ pontokon kívül további csúcsai is vannak, amelyek mindegyikében természetesen legalább három él fut össze. G csúcspontjainak számát jelöljük $(k+d)$-vel.

Beláttuk tehát, hogy G lapjainak száma $l = k$, éleinek száma: $e \geqq \frac{4k+3d}{2}$, csúcsainak száma pedig $c = k+d$. Mivel G zárt egyszeresen összefüggő test lapjai egyszeresen összefüggő felületdarabok, alkalmazható rá az Euler-féle poliéder-tétel:

$$l + c = k + k + d = e + 2 \geqq \frac{4k+3d}{2} + 2$$

Ebből $0 \geqq d+4$ adódik, ami $d \geqq 0$ miatt lehetetlen. Ezzel a segédtételt igazoltuk.

A tétel bizonyítását a pontok számára vonatkozó teljes indukcióval végezzük.

$n \leqq 4$-re a tétel nyilván igaz.

Legyen $n > 4$ és tegyük fel, hogy $n-1$ pontból álló pontrendszerre már igazoltuk a tételt.

Tekintsünk egy n pontból álló egységátmérőjű térbeli K pontrendszert. 2. segédtétel értelmében a rendszer pontjai közt van olyan P pont, amelytől a rendszer pontjai közül legfeljebb 3 van egységnyi távolságra. A P pont elhagyásával keletkezett $n-1$ pontból álló K' pontrendszer az indukciós feltevés értelmében felbontható 4 olyan részre, amelyek mindegyikének átmérője kisebb egynél. Minthogy P-től a K' rendszernek legfeljebb 3 egységnyi távolságra levő pontja van, amelyek legfeljebb 3 különböző osztályba tartoznak, a P pontot sorolhatjuk a K' felbontásánál keletkezett olyan osztályba, amelyek az említett — P-től egységnyi távolságra levő — pontok egyikét sem tartalmazza. Ezzel a K rendszert 4 egységnél kisebb átmérőjű részre osztottuk.

A fentebb bizonyított tételből könnyen adódik, hogy a Borsuk sejtés térbeli poliéderekre is igaz, úgyanis minden konvex poliéder előáll, mint csúcsainak konvex burka, a konkáv poliéderek helyett, ha ezek konvex burkaként előálló konvex poliédert daraboljuk fel, ezzel az eredeti konkáv poliédernek is — a tételnek megfelelő — felosztását nyerjük.

Nevezzük egy csúcshoz tartozó cellának a poliéder azon P pontjainak halmazát, amelyeknek az illető csúcstól mért távolsága kisebb vagy egyenlő bármely más csúcstól mért távolságnál. Az így nyert cellák nyilván kimeritik a poliédert, továbbá (felhasználva, hogy egységnyi távolság csak csúcsok közt léphet fel) könnyen látható, hogy a csúcsokat a fenti tételnek megfelelően osztva fel, majd az egyes cellákat az általuk tartalmazott csúccsal egy osztályba sorolva a poliédernek megfelelő felosztását nyerjük.

IRODALOM

[1] K. Borsuk: Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. Fundamenta Math. (20) 177—190 (1933).

[2] H. Hadwiger: Über die Zerstückung eines Eikörpers. Math. Zeitschrift (51) 161—165 (1949).

[3] H. G. Eggleston: Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter. Journal of the London Math. Soc. (30) 11—14. (1955).

К ПРОБЛЕМЕ БОРШУКА О РАЗДРОБЛЕНИИ

А. Хеппеш, П. Ревес

(Резюме)

Х. Г. Эггльстон доказал для $n = 3$ предположение Боршука, согласно которому каждое точечное множество в n-мерном пространстве диаметром в 1 можно разбить на несвязанные $(n + 1)$ части диаметром меньше единицы.

Автором дано более простое доказательство на специальный случай, когда точечное множество содержит лишь конечное количество точек.

A SPLITTING PROBLEM OF BORSUK

A. Heppes and P. Révész

(Summary)

H. G. Eggleston has proved for $n = 3$ Borsuk's conjecture according to which every point-set in the n-space with diameter 1 can be split into $(n + 1)$ disjunct subsets with diameters < 1. The present paper contains a simpler proof for the special case when the point-set contains only a finite number of points.

A kínai matematika történetének egy problémájáról

MÁTÉ JÁNOS

E lapok hasábjain többször esett szó Li Zsen-Su kínai matematikusnak 1867-ben bizonyítás nélkül közölt következő azonosságáról:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2. \tag{1}$$

Az alábbiakban az (1) azonosság fennállására elemi bizonyítást adunk. Ha (1)-ben $m = n+k$ jelölést vezetjük be és az összegezés sorrendjét megfordítjuk, úgy (1)-gyel ekvivalens következő alakot nyerjük:

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{m+j}{2k} = \binom{m}{k}^2. \tag{2}$$

Ha most itt

$$\binom{m+j}{2k} = \sum_{i=0}^{j} \binom{m}{2k-i}\binom{j}{i}$$

Cauchy-féle felbontást alkalmazzuk és tekintetbe vesszük, hogy $\binom{k}{j}\binom{j}{i} = \binom{k}{i}\binom{k-i}{k-j}$, úgy (2) baloldala a következőképpen írható:

$$\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j} \binom{k}{j}\binom{k-i}{k-j}\binom{k}{i}\binom{m}{2k-i} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=i}^{k} \binom{k}{j}\binom{k-i}{k-j}\binom{k}{i}\binom{m}{2k-i}. \tag{3}$$

A fenti egyenlőség jobboldalát az összegezés sorrendjének felcserélésével nyertük.

Ha (3) jobboldalán a j szerinti összegezést elvégezzük, úgy (1) a következő ekvivalens alakban írható fel:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{m}{2k-i}\binom{2k-i}{k} = \binom{m}{k}^2. \tag{4}$$

Ugyanis

$$\sum_{j=i}^{k} \binom{k}{j}\binom{k-i}{k-j} = \binom{2k-i}{k}.$$

Ha most tekintetbe vesszük, hogy $\binom{m}{2k-i}\binom{2k-i}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{k-i}$ és (4) mindkét oldalát $\binom{m}{k}$-val osztjuk, arra jutunk, hogy

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{m-k}{k-i} = \binom{m}{k}$$

ez pedig igaz Cauchy képlete szerint. Ezzel az (1) állítás helyességét is igazoltuk.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИСТОРИИ КИТАЙСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Я. Мате

(Резюме)

Автором дается элементарное доказательство тождества, сообщенного без доказательства китайским математиком Ли Цжен-Шу в 1867 г. (1). Данное доказательство основывается только на общеизвестной зависимости Коши, относящейся к биноминальным коэффициентам.

ON A PROBLEM IN THE HISTORY OF CHINESE MATHEMATICS

J. Máté

Summary

The author gives an elementary proof of the identity (1) which was published without proof by the Chinese mathematician Le-Jen Shoo in 1867. The present proof is based only on Cauchy's well-known relation concerning binomial coefficients.

ОТДЕЛ ЗАДАЧ

В журнале «Matematikai Lapok» с начала появления публикуются задачи, так же как и решения последних и список читателей, приславших решения. В будущем в журнале будут помещены также французские и русские переводы задач. В данном номере дополнительно сообщаются переводы текстов задач, опубликованных в первых шести годах издания. Следует отметить, что решения 74-ой и последующих задач еще не были опубликованы.

ЗАДАЧИ

1. Покажем, что последовательность

$$\varphi_n(z) = 1 + 2z + \ldots + (n+1)z^n$$

сумм первых n членов ($n = 0,1, \ldots$) степенного ряда

$$1 + 2z + \ldots + nz^{n-1} + \ldots$$

является последовательностью многочленов, ортогональных на окружности единичного радиуса комплексной плоскости z относительно веса

$$A(z) = |1 - z|^2,$$

т. е. имеет место равенство

$$\int_{|z|=1} \varphi_n(z)\,|(\bar{z})|^{\nu}\,A(z)\,|dz| = 0^* \qquad (\nu = 0,1 \ldots, n-1)$$

(Пал Туран)

2. Найдем все последовательности

$$f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

* $\bar{z}$ означает число, комплексно сопряженное с числом z.

рациональных многочленов ($f_n(z)$ — многочлен степени n), являющиеся ортогональными в смысле предыдущей задачи на окружности единичного радиуса плоскости z относительно некоторой интегрируемой функции $B(z)$ как веса и получающиеся в качестве суммы первых n членов формального степенного ряда

$$b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots$$

(Пал Туран)

3. Пусть $f(x)$ — ограниченная сверху или снизу четная функция с неотрицательными коэффициентами Фурье. Доказать, что если ряд Фурье функции $f(x)$ абсолютно сходится хотя бы в одной точке, то он абсолютно сходится всюду.

(Дьёрдь Алексич)

4. Показать, что нет трех таких иррациональных чисел, что между любыми двумя соседними натуральными числами находится целочисленное кратное одного (и только одного) из этих трех чисел.

(Дьёрдь Хайош)

5. Исходим из какого-то размещения с равными элементами первых n натуральных чисел по n-k. Из него мы получим другое размещение, если к каждому его элементу прибавим 1, а вместо n (если оно входит в исходное размещение) пишем 1. Повторяя этот прием, мы получаем вместе с исходным n размещений. Требуется доказать, что среди них имеется k таких, к которым можно найти размещение без равных элементов первых n натуральных чисел по n-k, каждый элемент которого больше соответствующего элемента того размещения, которому оно было поставлено в соответствие.

(Дьёрдь Хайош)

6. Пусть дана направленная ломанная $P_0 P_1 \ldots P_n$. Внутренний угол треугольника $P_{k-1} P_k P_{k+1}$ при P_k обозначим через α_k и пусть $i_k = \pi - \alpha_k$. Назовем сумму

$$I = i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-1}$$

полным изменением направления ломанной. Требуется доказать, что если H — длина ломанной и T — расстояние между ее концами, то $T \geqq H \cos \frac{I}{2}$, при условии, что $I < \pi$. Равенство может

иметь место только в том случае, если ломанная состоит из двух равных отрезков.

(Альфред Реньи)

7. Пусть радиус наибольшей из окружностей, касающихся извне сторон данного треугольника, равен ϱ_a, а радиус описанной (около того же треугольника) окружности — r. Доказать что $\varrho_a \geqq \frac{3}{2} r$.

(Пал Эрдёш)

8. Докажем в связи с предыдущей задачей следующие неравенства относительно радиусов ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c окружностей, касающихся извне треугольника, вписанного в окружность радиуса r:

$$\frac{4}{3} r < \frac{\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c}{3} \leqq \frac{3}{2} r \leqq \sqrt[4]{\frac{\varrho_a^4 + \varrho_b^4 + \varrho_c^4}{3}}$$

(Ласло Фэйеш-Тот)

9. Показать, что если a_1, a_3, a_3, и b_1, b_2, b_3 означают длину сторон двух вещественных треугольников, то выражение

$$\sum (a_i^2 + a_j^2 - a_k^2) b_k^2 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

(полярные формы, фигурирующей в формуле Герона) неотрицательно и обращается в нуль только тогда, когда треугольники вырождаются в коллинеарные и подобные тройки точек.

(Енё Эгервари)

10. Пусть r — положительное вещественное число. Рассмотрим последовательность $r_1 = r$, $r_{n+1} = r^{r_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Доказать, что последовательность r_n сходится тогда и только тогда, если

$$e^{-e} \leqq r \leqq e^{\frac{1}{e}}$$

(Альфред Реньи)

11. В плоскости даны четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$. Для точек E,F,G,H, соотв. E',F',G',H', находящихся на сторонах четырехугольников, имеет место

$$(ABE) = (DCG) = (A'B'E') = (D'C'G')$$

$$(BCF) = (ADH) = (B'C'F') = (A'D'H').$$

Поставим в соответствие точке пересечения X прямых EG и FH точку пересечения X' прямых $E'G'$ и $F'H'$. Если одна из точек X, X' пробегает прямую, что пробегает другая?

(Ференц Картеси)

12. Множество A, состоящее из бесконечно многих целых чисел и множество B, состоящее из конечного числа целых чисел, обладают тем свойством, что всякое целое число может быть представлено и притом единственным образом, как сумма одного числа из A и одного из B. Требуется доказать, что существует отличное от нуля целое число, которое будучи прибавлено к любому элементу множества A дает снова число, входящее в A.

(Н. Г. де Бруйн, Делфт)

13. Из последовательности 1, 2, 3, ... вычеркнем каждый k-тый член и образуем последовательность частичных сумм оставшейся последовательности; из нее вычеркнем каждый $(k-1)$-ый член и напишем последовательность частичных сумм оставшихся; из нее вычеркнем каждый $(k-2)$-ой член и т. д. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока после вычеркивания каждого второго члена не напишем последовательность частичных сумм. Покажем, что таким образом получается последовательность $1^k, 2^k, 3^k, \ldots$

(Като Реньи)

14. Докажем, что не существует такого формального степенного ряда

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

частичные суммы которого $s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu x^\nu$ образовывали бы ортогональную на отрезке $(-1, +1)$ последовательность многочленов относительно интегрируемого веса $p(x)$, т. е. для которого имело бы место равенство

$$\int_{-1}^{1} s_n(x)\, x^\nu\, p(x)\, dx = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, (n-1)).$$

(Пал Туран)

15. Обозначим через $T_n(x)$ n-ый многочлен Чебышева, для которого $T_n(\cos \vartheta) = \cos n\vartheta$. Найдем все формальные ряды

$$d_0 T_0(x) + d_1 T_1(x) + \ldots + d_n T_n(x) + \ldots,$$

частичные суммы которых

$$\sigma_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu T_\nu(x)$$

образуют на отрезке $(-1, +1)$ ортогональную последовательность в смысле предыдущей задачи относительно какого-либо интегрируемого веса $p(x)$.

(Пал Туран)

16. Доказать, что если одно из натуральных чисел $n, n+1, \ldots, n+k$ делит произведение остальных, то $n \leq k!$

(Пал Эрдёш)

17. Известно, что если N является степенью простого числа, а n, k — произвольные целые числа, для которых $N > n > k > 0$, то N не может делить $\binom{n}{k}$. Обладают ли другие числа N этим свойством?

(Яношг Шураньи)

18. Пусть дана функция $y = f(x)$, положительная, монотонно возрастающая, дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке (a, b). Изобразим эту функцию в прямоугольной системе координат x, y. Разделим отрезок $(f(a), f(b))$ оси y на равные части. Проведем через точки деления горизонтальные прямые, пересекающие кривую и опустим из точек пересечения перпендикуляры к оси x. Таким образом мы разделили площадь криволинейной трапеции на полосы. Какого условие того, чтобы площади этих полос возрастали вместе с возрастанием x? Для какой функции будут равны площади всех полос?

(Альфред Реньи)

19. Сколько среди сочетаний с равными элементами чисел $1, 2, \ldots, n$ по m таких, элементы которых $k_1 \leq k_2 \leq \ldots \leq k_m$ удовлетворяют неравенству $k_i < c + i$ $(i = 1,2,\ldots,m$; c— заданное целое число)?

(Дьёрдь Хайош)

20. Даны $2n+1$ точки на поверхности n-мерной сферы единичного радиуса. Доказать, что среди них имеются две, расстояние между которыми меньше, чем $\sqrt{2}$.

(Пал Эрдёш)

21. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные вещественные числа, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — положительные числа, то все корни уравнения

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{A_i A_j}{(x-a_i)(x-a_j)} = 0$$

вещественны.

(Пал Туран)

22. Найти n нецелых действительных чисел так, чтобы открытый промежуток, ограниченный двумя последовательными натуральными числами, содержал единственное целочисленное кратное одного (и только одного) из этих чисел. При каком n задача имеет решение и каковы ее решения? (Ср. с задачей 4.)

(Дьёрдь Хайош)

23. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$ какая-нибудь последовательность целых чисел. Обозначим через $D(a)$ число решений уравнения $n_i - n_j = a$, функцию $D(a)$ назовем *функцией распределения разностей* последовательности. Доказать, что можно задать две таких последовательности $n_1, n_2, \ldots, n_k$ и $m_1, m_2, \ldots, m_k$, состоящие из целых чисел и обладающие одинаковыми функциями распределения разностей, которые не могут быть переведены друг в друга с помощью переноса и отражения, т. е. нельзя задать целое число d так, чтобы имело место $n_i = d + m_i$ для всех i или $n_i = d - m_i$ для всех i.

(Альфред Реньи)

24. Пусть $f(k)$ означат число тех пифагоровых троек, состоящих из целых положительных чисел, а $g(k)$ — число тех пифагоровых троек, состоящих из взаимно простых целых положительных чисел, которые не содержат чисел, больших k. К чему стремятся $\frac{f(k)}{k}$ и $\frac{g(k)}{k}$ при $k \to \infty$?

(Эндре Макаи)

25. Рассмотрим числа $n^k - n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots,$) при фиксированном целом положительном k. Чему равен их наибольший общий делитель? При каком k он будет равняться 2?

(Ласло Фукс)

26. Рассмотрим на поверхности шара единичного радиуса n фиксированных точек и область площади f. Покажем, что эта

область всегда может быть расположена так, чтобы число покрытых ею точек было $\geq \frac{nf}{4\pi}$.

(Ласло Фэйеш-Тот)

27. Пусть $f(x)$ — монотонно убывающая, положительная функция на отрезке (0,1), для которой $\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$ и $f\left(\frac{x}{2}\right) < C\,f(x)$. Пусть ε означает измеримое множество, плотность которого в точке 0 равна 0, и обозначим через ε_h часть множества ε, лежащую на отрезке $(h, 1)$. Показать, что при $h \to 0$ отношение интегралов $\int_{\varepsilon_h} f(x)\,dx$ и $\int_h^1 f(x)\,dx$ стремится к 0.

(Акош Часар)

28. Функция $f(n)$, определенная для чисел $n = 1, 2, 3, \ldots$, монотонно возрастает и для взаимно простых a, b имеет место равенство

$$f(a\,b) = f(a) + f(b)$$

Доказать, что $f(n) = C \log n$.

(Пал Эрдёш)

29. Стороны треугольника ABC равны (в обычном порядке) a, b, c, его периметр k, его площадь t. Пусть A_1, B_1, C_1 означают точки, симметричные точкам B, C, A относительно точек C, A, B соответственно. Пусть $a_1 = A\,A_1$, $b_1 = B\,B_1$, $c_1 = C\,C_1$. Доказать, что

$$a_1\,b\,c + a\,b_1\,c + a\,b\,c_1 \geq 4\,k\,t\,.$$

(Рихард Облат)

30. Пусть H — конечное множество точек в пространстве не лежащих на одной прямой. Докажем, что в пространстве существует не более, чем одна точка, не принадлежащая множеству H и обладающая тем свойством, что сумма исходящих из нее и направленных к точкам множества H единичных векторов равна нулю.

(Дьюла Сёкефальви-Надь)

31. Если все корни полинома $F(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n$ лежат в полуплоскости $x \leq 0$ плоскости $z = x + iy$, то все средние Енсена этого полинома, то есть все полиномы вида

$$R_k(F) = b_0 + \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right) \cdots \left(1 - \frac{\nu - 1}{k}\right) z^\nu$$

$$(b_{n+1} = b_{n+2} = \ldots = 0)$$

обладают этим же свойством.

(Пал Туран)

32. Дан неравносторонний треугольник с рациональным отношением сторон. Доказать, что плоскость может быть однократно покрыта треугольниками, равными данному, таким образом, что треугольник принимает бесконечно много различных положений.

(Ференц Картеси и Дьёрдь Хайош)

33. Доказать, что для множества A, состоящего из целых чисел, может быть найдено множество B, состоящее из двух целых чисел так, что всякое целое число может быть представлено единственным образом как сумма одного элемента из A и одного из B, только тогда, если все целые числа, которые не могут быть представлены в виде разности двух элементов множества A, являются нечетными кратными одного и того же целого числа.

(Альфред Реньи)

34. Последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ не содержит бесконечной монотонно убывающей подпоследовательности. Доказать, что для любого числа A может быть найдено не более чем конечное множество последовательностей неотрицательных целых чисел $x_1, x_2, \ldots$ так, чтобы было

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots = A .$$

(Пал Эрдёш)

35. Даны $n + 2$ точки на поверхности n-мерной сферы единичного радиуса. Доказать, что между ними имеются две, расстояние между которыми не больше, чем $\sqrt{2}$.

(Г. Дэвенпорт и Дьёрдь Хайош)

Эта задача, предложенная Дьёрдем Хайошем, была уже напечатана в корректуре 1-го выпуска 2-го тома нашего журнала, когда редакция получила аналогичную задачу Г. Дэвенпорта (Лондон), предназначенную на опубликование в отделе задач журнала.

36. Докажем, что для любого упорядоченного счетного множества можно найти подобное ему подмножество множества рациональных чисел, упорядоченных по величине.

(Тибор Селе)

37. Пусть $\frac{p(x)}{q(x)}$ рациональная функция, $q(x) \neq \text{const.}$ и

$$q(x) = (x-)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots (x-l)^{\lambda}.$$

Разложим $\frac{p(x)}{q(x)}$ в простые дроби с помощью обычного метода сравнения коэффициентов. Покажем, что значения всех определителей, фигурирующих в решении получаемой системы линейных уравнений с помощью правила Крамера, остаются неизменными, если сделать замену переменного $u = x - \xi$.

(Акош Часар)

38. Мы говорим, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, соответственно минимум, в широком смысле, если существует такая окрестность x_0, в которой имеет место $f(x) \leq f(x_0)$ соответственно $f(x) \geq f(x_0)$. Доказать, что проекция максимумов и минимумов в широком смысле на ось y дает счетное множество.

(Иштван Гехер)

39. Построить последовательность регулярных в круге $|z| \leq 1$ функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ... так, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ сходился в круге $|z| \leq 1$ абсолютно, но неравномерно.

(Пал Туран)

40. Докажем для φ-функции Эйлера, что для любого положительного числа ε можно найти такое целое число a, что

$$\frac{\varphi(a) + \varphi(a+1)}{a} < \varepsilon.$$

(Пал Меддьешши)

41. Доказать, что число членов степеней полинома, содержащего больше одного члена, стремится к бесконечности вместе с показателем степени.

(Альфред Реньи)

42. Коническое сечение пересекает стороны треугольника в шести точках. Рассмотрим точки, гармонически сопряженные с вершинами треугольника, относительно точек пересечения конического сечения со сторонами треугольника. Доказать, что полученные таким образом шесть точек лежат на одном коническом сечении.

(Рихард Облат)

43. По k концентрическим окружностям с радиусами $r_1, r_2, \ldots, r_k$ движутся точки с массами $m_1, m_2, \ldots, m_k$ соответственно с постоянными угловыми скоростями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Требуется показать, что если числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ линейно независимы (над полем рациональных чисел), и если ни одно из чисел $m_1 r_1, m_2 r_2, \ldots, m_k r_k$ не превосходит сумму остальных, то центр масс движущихся точек принимает положения, как угодно близкие к произвольной точке наименьшего круга.

(Пал Туран)

44. Вывести формулу

$$\sum_{i=2}^{n} \left[\frac{n}{i}\right] (\varphi i) = \binom{n}{2},$$

где φ означает функцию Эйлера, а $\left[\frac{n}{i}\right]$ – наибольшее целое число, не превосходящее $\frac{n}{i}$.

(Пал Меддьеши)

45. Поместим в вершинах треугольника массы α, β, γ, затем β, γ, α наконец γ, α, β. При каких условиях будет треугольник, образованный получаемыми при этом центрами тяжести, подобен исходному?

(Енё Эгервари)

46. Докажем тождество

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{l} = (-1)^k \binom{n}{l-k}.$$

(Янош Шураньи)

47. Пусть $f(x)$ положительная убывающая функция на отрезке (0,1), для которой $\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$. Пусть ε означает измеримое множество, плотность которого в точке 0 равна 0, и обозначим через ε_h часть множества ε, попадающую в отрезок $(h, 1)$. Показать, что

$$\liminf_{h\to 0} \int_{\varepsilon_h} f(x)\,dx \Big/ \int_h^1 f(x)\,dx = 0.$$

(Отто Блум)

с 48. Каково условие того, чтобы алгебраическое уравнение вещественными коэффициентами имело три корня, лежащих на одной прямой.*

(Рихард Облат)

49. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots$ — последовательность с положительными членами и $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \ldots$ сходится, то можно найти такую последовательность индексов $n_1, n_2, \ldots$, для которой имеет место $\sqrt{\frac{n_k+1}{n_k}} \to 1$ и ряд $a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots$ сходится.

(Пал Эрдёш)

50) Даны $n + 2$ точки на поверхности n-мерной сферы единичного радиуса и среди них нет двух таких, расстояние между которыми было бы меньше, чем $\sqrt{2}$. Доказать, что тогда из них можно выбрать по меньшей мере $2n$ различными образами две, расстояние между которыми равно $\sqrt{2}$.

(Дьёрдь Хайош)

51. Покажем, что для всех натуральных чисел верно соотношение

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{n+k+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$$

(Пал Туран)

* Решение задачи автору неизвестно.

52. Пусть p — произвольное простое число. Обозначим через $C(p^n)$ мултипликативную группу корней степени p^n из единицы и через $C(p^\infty)$ мултипликативную группу корней всех степеней p, p^2, p^3, ... из единицы. Доказать, что всякая абелева группа может быть гомоморфно отображена на одну из групп $C(p^k)$, $(k = 1, 2, 3, \infty)$.

(Тибор Селе)

53. Пусть H — множество, состоящее из полунепрерывных снизу функций, определенных на произвольном множестве ε n-мерного пространства. Доказать, что из H можно выбрать конечное или счетное множество функций так, чтобы верхняя огибающая этих функций была в то же время верхней огибающей всех функций из H. Под верхней огибающей функкции понимаем функцию, значение которой в каждой точке равно верхней границе значений огибаемых функций в данной точке ($+\infty$ и $-\infty$ тоже допускаются в качестве значений функций).

(Иштван Гехер)

54. Исходя из каких комплексных z_1 итерация

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n^2 + a)$$

дает сходящуюся последовательность при фиксированном комплексном a?

(Фридьеш Рис)

55. Верна ли при $k = 1, 2, 3 \ldots$ формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-2^x} - e^{-2^{x+1}}\right) \left\{ \begin{matrix} \cos 2k\pi x \\ \sin 2k\pi x \end{matrix} \right\} dx = 0?$$

(Бела Барна)

56. Доказать, что если нечетное простое число p является делителем числа вида $x^2 + ay^2$ и числа вида $u^2 - av^2$, причем p не является делителем a, то оно имеет вид $4n + 1$. (Все буквы означают целые числа, $(x, y) = (u, v) = 1$).

(Рихард Облат)

57. Доказать, что если каждый двугранный угол (несамопересекающегося) многогранника выпуклый, то есть меньше 180°, то и многогранник является выпуклым, то есть он содержит

для любых двух своих точек отрезок, соединяющий их друг с другом.

(Дьёрдь Хайош)

58. Определить радиус сходимости и сумму ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2kn}{kn} x^n \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

(Лайош Такач)

59. Доказать, что если в любом бесконечном подмножестве некоторого полуупорядоченного множества существуют два сравнимых между собой элемента, то у него есть бесконечное подмножество, любые два элемента которого сравнимы между собой.

(Андраш Хайнал)

60. Доказать, что для отличных от нуля комплексных чисел a_1, b_1, a_2, b_2, удовлетворяющих условию $a_1 b_2 - a_1 b_1 \neq 0$, можно найти (положительное) C так, что если для регулярных в круге $|z| \leq C$ функций $f_1(z)$, $f_2(z)$ имеют место равенства

$$f_1(0) = a_1, \quad f_1'(0) = b_1, \quad f_2(0) = a_2, \quad f_2'(0) = b_2,$$

то ни одна из функций $|f_1(z)|$, $|f_2(z)|$ не может быть больше другой во всех точках этого круга.

(Пал Туран)

61. Пусть дано целое число a и пусть $f(n)$ — числово-теоретическая функция с целочисленными значениями, для которой

$$\sum_{d \mid n} f(d) = a^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Доказать, что $n \mid f(n)$

(Йожеф Чима)

62. Доказать, что если $a > 1$, то

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{\log(1-x)} \sum_{k=0}^{\infty} x^{a^k} = -\frac{1}{\log a}$$

(Петер Сюс)

63. Корни многочлена нечетной степени $P(z)$ располагаются симметрично относительно корня z_0 (вместе с кратностями). Доказать, что $P''(z_0) = 0$.

(Бела Сёкефальви-Наль)

64. Для каких целых функций $f(z)$

$$n\left[f\left(z+\frac{1}{n}\right)-f(z)\right]$$

равномерно сходится к $f'(z)$ во всей плоскости?

(Ласло Гехер)

65. Пусть площадь основного параллелограмма плоской решетки равна единице. Доказать, что если плоская замкнутая выпуклая область расположена симметрично относительно какого-либо узла решетки и ее площадь не меньше, чем $4r$, где r натуральное число, то она содержит по меньшей мере $2r+1$ узел решетки.

(Пал Туран)

66. Каково необходимое и достаточное условие того, чтобы система линейных уравнений была однозначно разрешима относительно одного заданного неизвестного?

(Арпад Петё)

67. Требуется задать вещественную функцию, определенную на отрезке (a, b), дифференцируемую произвольное число раз, не являющуюся постоянной ни на каком отрезке, содержащемся в (a, b), которая обращается в нуль вместе со всеми своими производными на множестве положительной меры.

(Тамаш Кёвари)

68. Существует ли в интервале (a, b) такая полная ортогональная система функций, которая кроме того ортогональна на интервале (a, b) относительно неотрицательного, непостоянного и 1. непрерывного, 2. абсолютно непрерывного веса $p(x)$?

(Акош Часар)

69. Найти функции $f(x)$, определенные для всех вещественных чисел и удовлетворяющие функциональному уравнению

$$f(ax+b)=cf(x)+d,$$

где a, b, c, d заданные вещественные числа.

(Янош Ацел)

70. Доказать, что геометрическое среднее параллельных сторон описанной около окружности трапеции не меньше расстояния между ними.

(Янош Шураньи)

71. Пусть $d(n)$ означает число делителей натурального числа n. Доказать, что для любого положительного N можно найти такое n, что

$$d(n-1)-d(n)>N \qquad \text{и} \qquad d(n+1)-d(n)>N.$$

(Пал Туран)

72. Докажем, что упорядоченное множество является вполне упорядоченным тогда и только тогда, если всякое его подмножество подобно некоторому его отрезку. (Отрезком называется такое подмножество, которое вместе с любым своим элементом содержит все предшествующие ему элементы.)

(Ласло Калмар)

73. Мы говорим, что некоторое множество точек проективной плоскости является выпуклым, если оно вместе с любыми двумя своим точками содержит хотя бы один из соединяющих эти две точки отрезков. Требуется доказать, что если некоторое множество точек выпукло, то либо оно, либо его дополнение содержит все точки некоторой прямой.

(Янош Ципсер)

74. Покажем, что на любой прямой комплексной плоскости, параллельной мнимой оси, абсолютное значение функции Г монотонно убывает при удалении от вещественной оси.

(Пал Туран)

75. В центре C некоторой группы G единственным элементом конечного порядка является единица, а факторгруппа G/C абелева и все ее элементы имеют конечный порядок. Доказать, что группа G абелева.

(Тибор Селе)

76. Составим из областей, равных данной выпуклой и центрально-симметричной области, решетку, покрывающую всю плоскость, плотность которой меньше, чем $\frac{4}{3}$.

(Дьёрдь Грецер и Элигиус Шмидт)

77. Построим функцию, обладающую ограниченым отношением разностей и недифференцируемую на некотором наперед заданном множестве меры нуль.

(Янош Ципсер)

78. Найти все многогранники, все плоские сечения которых имеют не более пяти вершин.

(Дьёрдь Хайош)

79. Значения непрерывных функций $M(x, y)$ и $N(x, y)$ лежат в случае $x<y$ в интервале (x, y), а в случае $y<x$ в интервале (y, x). Доказать, что последовательность a_1, b_1, a_2, b_2, ..., образованная согласно закону

$$a_{n+1} = M(a_n, b_n), \qquad b_{n+1} = N(a_n, b_n),$$

сходится.

(Янош Ацел)

80. Можно ли дополнить матрицу с m строками и n столбцами ($m<n$), состоящую из целых рациональных чисел, $(m+1)$-ой строкой, состоящей из целых рациональных чисел, так, чтобы наибольший общий делитель определителей порядка $m+1$ новой матрицы совпадал с наибольшим общим делителем определителей порядка m исходной матрицы?

(Ласло Фукс)

81. Доказать, что существует такое иррациональное число, что знаменатели подходящих дробей его разложения в непрерывную дробь все являются k-тыми степенями (k-заданное целое число).

(Петер Сюс)

82. Доказать, что множество значений вполне непрерывных линейных преобразований пространства L_2 не может исчерпать все пространство.

(Янош Ципсер, Ласло Гехер и Ласло Пал)

83. Пусть даны натуральное число n и отрезок (a, b), являющийся частью отрезка $(-1, 1)$. Покажем, что можно задать на отрезке $(-1, 1)$ такой неотрицательный, обращающийся в нуль разве лишь на конечном множестве и дифференцируемый вес, что все корни n-ого члена полной последовательности многочленов, ортогональных относительно этого веса, лежат внутри отрезка (a, b).

(Иштван Винце)

84. Докажем, что для любого натурального числа n можно найти евклидово кольцо, которое содержит точно n простых элементов.

(Эрвин Фрид)

85. Построить степенной ряд, сходящийся в замкнутом единичном круге, сумма которого там неограничена.

(Тамаш Кёвари и Вера Т. Шош)

86. Доказать, что для всякого натурального числа можно найти бесконечно много таких n, что

$$a(n) > \prod_{i=1}^{k} d(n-i)\,d(n+i),$$

где $d(n)$ означает число делителей n.

(Пал Эрдёш)

87. Доказать, что если для 2π-периодической непрерывной функции $f(x)$ при всех n выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^2\,dx \leq Ch^2,$$

то $f(x)$ удовлетворяет условию Липшитца с показателем 1/2.

(Дьёрдь Алексич)

88. Доказать, что если группа имеет элемент порядка p^n (p — простое число), а порядок группы меньше p^{2n}, то группа не может быть простая.

(Керестей Корради)

89. Доказать, что какова бы не была последовательность $\varepsilon_n \to 0$, всегда можно найти такую последовательность a_n, что $|a_n| > |\varepsilon_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и произведение $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ сходится.

(Пал Туран)

90. Существует ли вогнутое тело, всякое плоское сечение которого односвязно?

(Дьёрдь Гретцер и Элигиус Шмидт)

91. Найти необходимое и достаточное условие, которое надо наложить на комплексные числа $\{a_{ik}\}$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$, чтобы существовала последовательность интегрируемых с квадратом функций $f_1, f_2, \ldots$, удовлетворяющих соотношениям $\int f_i \bar{f}_k = a_{ik}$. $(i, k = 1, 2, \ldots)$

(Янош Ципсер)

92. Пусть дана последовательность $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ и пусть последовательность $a_1, a_2, \ldots$ состоит из целых чисел, делящихся в интервалах (n_k, n_{k+1}) на 2^k.

Рассмотрим при фиксированном r числа $a_{i1} = a_{i2} + \ldots + a_{ir}$ $(i_1 \leq_2 \leq \ldots \leq_{ir})$. Доказать, что плотность последовательности этих чисел равна нулю.

(Пал Эрдёш)

Problèmes

Dès son commencement, notre journal publie des problèmes, puis les solutions des problèmes et les noms des lecteurs qui ont envoyé des solutions à la rédaction. Nous publierons à l'avenir le texte des problèmes aussi en traductions française et russe. A cette occasion, nous publions la traduction du texte des problèmes parus dans les six premiers volumes. Nous remarquons encore que la solution des problèmes 74 et suivants n'ont pas été publiées jusqu'à présent.

1. Démontrer que les sommes partielles

$$\varphi_n(z) = 1 + 2z + \cdots + (n+1)z^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

de la série

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1} + \cdots$$

forment une suite de polynomes orthogonaux sur la circonférence unité du plan complexe par rapport à la fonction de poids

$$A(z) = |1 - z|^2,$$

c'est-à-dire qu'on a

$$\int_{|z|=1} \varphi_n(z)\bar{z}^\nu A(z)\,|dz| = 0. \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

(P. Turán)

2. Déterminer toutes les suites

$$f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z), \ldots$$

de polynomes rationnels (où $f_n(z)$ est de degré n) qui forment une suite orthogonale sur la circonférence unité du plan complexe par rapport à une fonction de poids intégrable $B(z)$ au même sens qu'au problème précédent et qui sont les sommes partielles successives d'une série formelle de puissances

$$b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n + \cdots$$

(P. Turán)

3. Soit $f(x)$ une fonction paire, bornée d'un côté, ayant des coefficients de Fourier non-négatifs. Démontrer que si la série de Fourier de $f(x)$ est absolument convergente en un point, elle l'est partout.

(Gy. Alexits)

4. Démontrer qu'il n'existe pas trois nombres irrationnels tels qu'entre deux nombres naturels consécutifs quelconques se trouve un multiple entier de l'un (et de l'un seul) des trois nombres irrationnels.

(Gy. Hajós)

5. Une variation avec répétition d'ordre n-k des n premiers nombres naturels soit donnés. On obtient une nouvelle variation en augmentant tous les éléments d'une unité et en substituant l'unité au nombre n (si celui-ci se trouve dans la variation). En répétant ce procédé, on obtient n variations (y comptant celle qui a été donnée). Démontrer que parmi celles il y a k telles qu'on puisse trouver une variation sans répétition d'ordre $n-k$ des n premiers nombres naturels, dont les éléments dépassent les éléments respectifs de la variation en question.

(Gy. Hajós)

6. Soit $P_0P_1\cdots P_n$ un polygone orienté. L'angle intérieur situé près de P_k du triangle $P_{k-1}P_kP_{k+1}$ soit α_k. Soit $i_k = \pi - \alpha_k$ et appelons la somme

$$I = i_1 + i_2 + \cdots + i_{n-1}$$

la *variation totale de direction* du polygone. Démontrer qu'en désignant par H la longueur du polygone et par T la distance de ses extrémités, on a $T \geqq H\cos\frac{I}{2}$, pourvu qu'on ait $I < \pi$. Pour que le signe d'égalité y soit valable, il faut et il suffit que le polygone se compose de deux segments de la même longueur.

(A. Rényi)

7. Soit ϱ_a le rayon du plus grand des cercles ex-inscrits d'un triangle, et soit r le rayon du cercle circonscrit du triangle. Démontrer qu'on a $\varrho_a \geqq \frac{3}{2}r$.

(P. Erdős)

8. En poursuivant les idées du problème précédent, démontrer qu'en désignant par ϱ_a, ϱ_b et ϱ_c les rayons des cercles ex-inscrits d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r, on a les

inégalités suivantes :

$$\frac{4}{3}r < \frac{\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c}{3} \leqq \frac{3}{2}r \leq \sqrt[4]{\frac{\varrho_a^4+\varrho_b^4+\varrho_c^4}{3}}.$$

(L. Fejes-Tóth)

9. Démontrer qu'en désignant par a_1, a_2, a_3 et par b_1, b_2, b_3 les longueurs des côtés de deux triangles réels, l'expression

$$\sum (a_i^2 + a_j^2 - a_k^2) b_k^2 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

(la forme polaire de la forme qui figure dans la formule de Héron) est non-négative et ne s'annule que si les triangles dégénèrent en deux triples collinéaires et semblables de points.

(J. Egerváry)

10. Soit r un nombre réel positif. Considérons la suite suivante : $r_1 = r$, $r_{n+1} = r^{r_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la suite $\{r_n\}$ converge vers une limite finie, c'est que l'on ait

$$e^{-e} \leqq r \leqq e^{1/e}.$$

(A. Rényi)

11. Deux quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont donnés dans le plan. On a pour des points E, F, G, H et E', F', G', H', situés sur leurs côtés, les égalités

$$(ABE) = (DCG) = (A'B'E') = (D'C'G'),$$
$$(BCF) = (ADH) = (B'C'F') = (A'D'H').$$

On fait correspondre au point d'intersection X des droites EG et FH le point d'intersection X' des droites $E'G'$ et $F'H'$. Quel est le lieu géométrique du point X' lorsque le point X décrit une droite ? *(F. Kárteszi)*

12. L'ensemble infini A de nombres entiers et l'ensemble fini B de nombres entiers sont tels que tout nombre entier peut être écrit d'une façon et d'une seule comme la somme d'un élément de l'ensemble A et d'un élément de l'ensemble B. Démontrer qu'il existe un nombre entier, différent de zéro, tel qu'en l'ajoutant à un élément quelconque de l'ensemble A, on obtient un élément de ce même ensemble.

(N. G. de Bruijn, Delft.*)*

13. De la suite $1, 2, 3, \ldots$ des nombres naturels, on supprime le k-ième, le $(2k)$-ième, etc. De la suite des sommes partielles de la suite qui reste, on supprime la $(k-1)$-ième, la $(2(k-1))$-ième,

etc. De là suite des sommes partielles des nombres qui restent, on supprime la $(k-2)$-ième, la $(2(k-2))$-ième, etc. On répète ce processus $k-1$ fois et on prend les sommes partielles des nombres qui restent. Démontrer que ces sommes partielles sont identiques au nombres $1^k, 2^k, 3^k, \ldots$.

(K. Rényi)

14. Démontrer qu'il n'y a pas de série formelle de puissances

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

dont les sommes partielles $s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu x^\nu$ forment une suite orthogonale dans l'intervalle $(-1, +1)$ par rapport à une fonction de poids intégrable $p(x)$, c'est-à-dire telle qu'on ait

$$\int_{-1}^{1} s_n(x)\, x^\nu\, p(x)\, dx = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

(P. Turán)

15. Désignons par $T_n(x)$ le n-ième polynome de Tchébycheff, défini par $T_n(\cos \vartheta) = \cos n\vartheta$. Déterminer les séries formelles

$$d_0 T_0(x) + d_1 T_1(x) + \cdots + d_n T_n(x) + \cdots$$

dont les sommes partielles

$$\sigma_n(x) = \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu T_\nu(x)$$

forment une suite orthogonale dans l'intervalle $(-1, +1)$ par rapport à une fonction de poids intégrable $p(x)$, au même sens qu'au problème précédent.

(P. Turán)

16. Démontrer que si l'un des nombres naturels $n, n+1, \ldots, n+k$ est un diviseur du produit des autres, on a $n \leqq k!$

(P. Erdős)

17.* Il est bien connu que, N étant une puissance d'un nombre premier et n et k étant des nombres entiers tels que $N > n > k > 0$, le nombre N ne peut pas être un diviseur de $\binom{n}{k}$. Y a-t-il d'autres nombres N de cette propriété et quels sont-ils?

(J. Surányi)

* L'auteur a posé ce problème sans connaître la solution.

18. Soit $y=f(x)$ une fonction positive, monotone croissante et possédant une seconde dérivée continue dans l'intervalle (a, b). Considérons l'image de cette fonction dans un système rectangulaire de coordonnées (x, y). Divisons l'intervalle $(f(a), f(b))$ de l'axe des y en parties égales, traçons des droites parallèles à l'axe des x par les extrémités des intervalles partiels de la subdivision et abaissons des perpendiculaires à l'axe des x des points d'intersection des parallèles en question avec la courbe $y=f(x)$. De cette façon, on a partagé l'aire sous la courbe en parties. Quelle est la condition de ce que les aires des ces parties croissent en les parcourant dans la direction des x croissants? Pour quelle fonction les aires de ces parties seront-elles égales?

(A. Rényi)

19. Combien y a-t-il de combinaisons avec répétition d'ordre m formées des nombres $1, 2, \ldots, n$ telles qu'en désignant leurs éléments en ordre croissant par $k_1, k_2, \ldots, k_m$, on ait $k_i < c+i$ $(i=1, 2, \ldots, m$; c est un nombre entier donné)?

(Gy. Hajós)

20. $2n+1$ points étant donnés sur la surface de la sphère unité dans l'espace à n dimensions, démontrer qu'il existe deux de ces points dont la distance est inférieur à $\sqrt{2}$.

(P. Erdős)

21. Démontrer que, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des nombres réels distincts et $A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant des nombres positifs, toutes les racines de l'équation

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \frac{A_i A_j}{(x-a_i)(x-a_j)} = 0$$

sont réelles.

(P. Turán)

22. Déterminer n nombres réels, différents des nombres entiers, tels que tout intervalle ouvert délimité par deux nombres entiers voisins contienne un multiple entier de l'un (et de l'un seul) des n nombres. Pour quels entiers n possède le problème une solution et quelles sont ces solutions? (Cf. problème 4.)

(Gy. Hajós)

23. Soit $n_1, n_2, \ldots, n_k$ une suite finie de nombres entiers. Désignons par $D(a)$ le nombre des solutions de l'équation $n_i - n_j = a$. La fonction $D(a)$ sera appelée la *fonction de distribution des différences* de la suite donnée. Démontrer qu'il existe deux

suites $n_1, n_2, \ldots, n_k$ et $m_1, m_2, \ldots, m_k$ de nombres entiers dont les fonctions de distribution des différences sont identiques et telles que l'une ne peut pas être transformée en l'autre par une symétrie et par une translation, c'est-à-dire qu'il n'existe pas un nombre entier d tel qu'on ait $n_i = d + m_i$ pour tous les i ou bien $n_i = d - m_i$ pour tous les i.

(A. Rényi)

24. Désignons par $f(k)$ et par $g(k)$ les nombres des triples pythagoréens de nombres entiers positifs et de ceux de nombres entiers positifs premiers entre eux qui sont formés des nombres ne dépassant pas le nombre k. Quelles sont les limites de $f(k)/k$ et de $g(k)/k$ pour $k \to \infty$?

(E. Makai)

25. Considérons pour un entier positif k fixé les nombres $n^k - n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Quel est le plus grand diviseur commun de ces nombres? Pour quels k sera ce plus grand diviseur commun égal à 2?

(L. Fuchs)

26. Considérons n points fixés et un domaine d'aire f sur la surface de la sphère unité. Démontrer qu'on peut donner une position à ce domaine telle qu'on ait $m \geqq nf/4\pi$ pour le nombre m des points qu'il contient.

(L. Fejes-Tóth)

27. Soit $f(x)$ une fonction positive et décroissante dans l'intervalle (0,1) et telle que $\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$ et que $f\left(\frac{x}{2}\right) < Cf(x)$, C étant une constante. Soit E un ensemble mesurable dont la densité égale zéro au point 0 et désignons par E_h la partie de l'ensemble E qui est située dans l'intervalle $(h, 1)$. Démontrer que le quotient des intégrales $\int_{E_h} f(x)\,dx$ et $\int_h^1 f(x)\,dx$ tend vers zéro pour $h \to 0$.

(Á. Császár)

28. Une fonction $f(n)$, définie pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, est monotone croissante et on a

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

pour tout couple de nombres a et b premiers entre eux. Démontrer que $f(n) = c \log n$.

(P. Erdős)

29. Les côtés d'un triangle ABC sont a, b et c, le périmètre du triangle est k, l'aire égale t. Désignons par A_1, B_1 et C_1 les symétriques des points B, C et A par rapport aux points C, A et B respectivement. Soit $a_1 = AA_1$, $b_1 = BB_1$ et $c_1 = CC_1$. Démontrer que

$$a_1bc + ab_1c + abc_1 \geqq 4kt.$$

(R. Obláth)

30. Soit H un ensemble fini de points non collinéaires dans l'espace. Démontrer qu'il n'y a dans l'espace qu'un point au plus qui n'appartient pas à H et pour lequel la somme des vecteurs unités issus de ce point dans les directions des points de H est nulle.

(Gy. Szőkefalvi-Nagy)

31. Démontrer que si tous les zéros du polynome $F(z) = b_0 + b_1z + \cdots + b_nz^n$ sont situés dans le demi-plan $x \leqq 0$ du plan $z = x + iy$, toutes les moyennes de Jensen de ce polynome, c'est-à-dire les polynomes

$$R_k(F) = b_0 + \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 - \frac{2}{k}\right) \cdots \left(1 - \frac{\nu - 1}{k}\right) z^\nu$$

$$(b_{n+1} = b_{n+2} = \cdots = 0)$$

possèdent la même propriété. *(P. Turán)*

32. Un triangle n'est pas régulier et ses côtés ont une proportion rationnelle. Démontrer qu'on peut couvrir simplement le plan avec des triangles congruents au triangle donné de façon que ces triangles aient une infinité de positions distinctes.

(F. Kárteszi et *Gy. Hajós)*

33. Un ensemble A de nombres entiers et un ensemble B composé de deux nombres entiers étant donnés de façon que tout nombre entier puisse être décomposé d'une façon et d'une seule en somme d'un élément de A et d'un élément de B, démontrer que les nombres entiers qui ne sont pas différences de deux éléments de A, soient les multiples impairs d'un même nombre entier.

(A. Rényi)

34. Une suite $a_1, a_2, \ldots$ de nombres positifs ne contient aucune suite partielle (infinie) monotone décroissante. Démontrer qu'à un nombre A quelconque il ne correspond qu'un ensemble fini de suites $x_1, x_2, \ldots$ de nombres entiers non-négatifs telles que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots = A.$$

(P. Erdős)

35. $n+2$ points étant donnés sur la surface de la sphère unité dans l'espace à n dimensions, démontrer qu'il existe deux de ces points dont la distance ne dépasse pas $\sqrt{2}$.

(H. Davenport et *Gy. Hajós)*

36. Démontrer qu'à un ensemble ordonné et dénombrable quelconque, il correspond un ensemble semblable de nombres rationnels (ordonné d'après la grandeur).

(T. Szele)

37. Posons

$$q(x)=(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}$$

et soit $p(x)$ un polynome de degré inférieur à celui de $q(x)$. Décomposons la fraction $p(x)/q(x)$ en fractions élémentaires par la méthode connue de la comparaison des coefficients. Démontrer qu'en résolvant par la règle de Cramer le système d'équations linéaires qui résulte , on rencontre des déterminants dont la valeur ne varie pas lorsqu'on emploie une substitution linéaire $u=x-\xi$.

(Á. Császár)

38. La fonction réelle $f(x)$ possède au point x_0 un maximum ou un minimum au sens large, si l'on a $f(x) \leqq f(x_0)$ ou $f(x) \geqq f(x_0)$, selon le cas, en un voisinage convenable de x_0. Démontrer que les valeurs de $f(x)$ qu'elle prend aux points où elle possède un extrémum au sens large, forment un ensemble dénombrable.

(I. Gehér)

39. Construire une suite $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots$ de fonctions holomorphes sur le cercle $|z| \leqq 1$ de façon que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ converge absolument, mais ne converge pas uniformément, sur le même cercle $|z| \leqq 1$.

(P. Turán)

40. Démontrer qu'à un ε positif quelconque correspond un nombre entier a tel que

$$\frac{\varphi(a)+\varphi(a+1)}{a} < \varepsilon,$$

où φ désigne la fonction d'Euler.

(P. Medgyessy)

41. Démontrer que le nombre des termes de la n-ième puissance d'un polynome quelconque composé de deux termes au moins, tend vers l'infini avec l'exposant n.

(A. Rényi)

42. Une section conique rencontre les côtés d'un triangle en six points. Considérons les conjugués harmoniques des sommets du triangle par rapport aux points d'intersection des côtés et de la section conique. Démontrer que ces six points sont situés sur une section conique.

(R. Obláth)

43. k points de masses $m_1, m_2, \ldots, m_k$ font un mouvement de rotation sur des circonférences concentriques de rayons $r_1, r_2, \ldots, r_k$ respectivement, ayant les vitesses angulaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ constantes. Démontrer que si les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont linéairement indépendants et si aucun des nombres $m_1 r_1, m_2 r_2, \ldots, m_k r_k$ ne dépasse la somme des autres, le centre de gravité de ces k points décrit une trajectoire qui est dense à l'intérieur de la plus petite circonférence.

(P. Turán)

44. Démontrer l'identité

$$\sum_{i=2}^{n} \left[\frac{n}{i}\right] \varphi(i) = \binom{n}{2},$$

où φ désigne la fonction d'Euler et $\left[\frac{n}{i}\right]$ le plus grand entier qui ne dépasse pas $\frac{n}{i}$.

(P. Medgyessy)

45. On pose successivement des poids α, β, γ, puis β, γ, α, enfin γ, α, β, aux sommets d'un même triangle. Quelle est la condition de ce que le triangle formé par les trois centres de gravité correspondants soit semblable au triangle donné?

(J. Egerváry)

46. Démontrer l'identité

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} \binom{n+i}{l} = (-1)^k \binom{n}{l-k}.$$

(J. Surányi)

47. Soit $f(x)$ une fonction positive et décroissante dans l'intervalle $(0, 1)$ pour laquelle $\int_0^1 f(x)\,dx = +\infty$. Soit E un ensemble mesurable dont la densité égale zéro au point 0 et désignons par E_h la partie de l'ensemble E qui est située dans l'intervalle $(h, 1)$. Démontrer la relation

$$\liminf_{h \to 0} \int_{E_h} f(x)\,dx \Big/ \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

(M. Bognár)

48.* Quelle est la condition de ce qu'une équation algébrique à coefficients réels possède trois racines situées sur une même droite ? *(R. Obláth)*

49. Démontrer que si les nombres $a_1, a_2, \ldots$ sont positifs et si la série $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots$ est convergente, on peut trouver une suite $n_1, n_2, \ldots$ d'indices telle que $n_{k+1}/n_k \to 1$ et que $a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots$ soit convergente.

(P. Erdős)

50. $n+2$ points sont donnés sur la surface de la sphère unité dans l'espace à n dimensions de façon que la distance de deux quelconques de ces points soit au moins $\sqrt{2}$. Démontrer qu'il y a au moins $2n$ couples de points parmi les points donnés tels que leur distance soit égale à $\sqrt{2}$.

(Gy. Hajós)

51. Démontrer que pour un nombre naturel n quelconque

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{n+k+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

(P. Turán)

52. Soit p un nombre premier quelconque. Désignons par $C(p^n)$ le groupe multiplicatif des p^n-ièmes racines de l'unité et par $C(p^\infty)$ le groupe multiplicatif de toutes les p-ièmes, p^2-ièmes, p^3-ièmes, ... racines de l'unité. Démontrer que tout groupe abélien est homomorphe à un des groupes $C(p^k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$.

(T. Szele)

* L'auteur a posé ce problème sans connaître la solution. La rédaction n'a reçu aucune solution.

53. Soit H une famille de fonctions semi-continues *inférieurement* sur un ensemble E de l'espace euclidien à n dimensions. Démontrer qu'on peut trouver un nombre fini ou une infinité dénombrable de fonctions de la famille H de façon que l'enveloppe supérieure de ces fonctions soit identique à l'enveloppe supérieure des fonctions de la famille H. (On appelle enveloppe supérieure d'une famille de fonctions réelles la fonction dont les valeurs sont égales en tout point à la borne supérieure des valeurs prises par les fonctions de la famille en question au même point, y compris les valeurs $+\infty$ et $-\infty$.)

(I. Gehér)

54.* Un nombre complexe a étant donné, quels sont les valeurs complexes z_1 telles que le procédé d'itération

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n^2 + a)$$

soit convergent? *(F. Riesz)*

55. Est-il vrai que l'on a pour $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2^x} - e^{-2^{x+1}}) \cdot \left\{ \begin{matrix} \cos 2k\pi x \\ \sin 2k\pi x \end{matrix} \right\} dx = 0 ?$$

(B. Barna)

56. Soit p un nombre premier impair qui n'est pas diviseur d'un nombre entier a, mais qui est diviseur des nombres $x^2 + ay^2$ et $u^2 - av^2$, où x, y, u et v sont des nombres entiers tels que $(x, y) = (u, v) = 1$. Démontrer que p est de la forme $4n + 1$.

(R. Obláth)

57. Démontrer que si tous les dièdres d'un polyèdre simple sont convexes (c'est-à-dire inférieurs à 180°), le polyèdre est lui-même convexe, c'est-à-dire qu'il contient tous les segments qui relient deux quelconques de ses points.

(Gy. Hajós)

58. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2kn}{kn} x^n \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

(L. Takács)

* L'auteur a posé ce problème sans connaître la solution. La rédaction n'a reçu aucune solution.

59. Démontrer que si tous les sous-ensembles infinis d'un ensemble partiellement ordonné contiennent deux éléments comparables, cet ensemble contient un sous-ensemble infini dont deux éléments quelconques sont comparables.

(A. Hajnal)

60. Soient a_1, b_1, a_2 et b_2 des nombres complexes différents de zéro et tels que $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Démontrer qu'il existe une constante C telle que, si l'on a les égalités

$$f_1(0) = a_1, \quad f_1'(0) = b_1, \quad f_2(0) = a_2, \quad f_2'(0) = b_2$$

pour deux fonctions $f_1(z)$ et $f_2(z)$, holomorphes sur le cercle $|z| \leqq C$, aucune des fonctions $|f_1(z)|$ et $|f_2(z)|$ ne peut être supérieure à l'autre en tous les points du cercle.

(P. Turán)

61. Un nombre entier a étant donné, soit $f(n)$ une fonction arithmétique à valeurs entières telle que

$$\sum_{d|n} f(d) = a^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Démontrer qu'on a $n | f(n)$.

(J. Csima)

62. Démontrer qu'on a pour $a > 1$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{\log(1-x)} \sum_{k=0}^{\infty} x^{a^k} = -\frac{1}{\log a}.$$

(P. Szüsz)

63. Les zéros d'un polynome $P(z)$ de degré impair sont symétriques (même en comptant leurs multiplicités) par rapport au zéro z_0 du polynome. Démontrer qu'on a $P''(z_0) = 0$.

(B. Szőkefalvi-Nagy)

64. Quelles sont les fonctions entières $f(z)$ telles que

$$n\left[f\left(z + \frac{1}{n}\right) - f(z)\right]$$

tend uniformément vers $f'(z)$ sur le plan complexe entier?

(L. Gehér)

65. Soit l'aire d'un parallélogramme fondamental d'un réseau dans le plan égale à l'unité. Démontrer que si un domaine fermé convexe est symétrique par rapport à un point du réseau et si

son aire n'est pas inférieure à $4r$, où r est un nombre naturel, ce domaine contient au moins $2r+1$ points du réseau.

(P. Turán)

66. Quelle est la condition nécessaire et suffisante de ce qu'un système d'équations linéaires détermine de façon univoque la valeur d'un inconnu donné?

(Á. Petheő)

67. Construire une fonction réelle indéfiniment dérivable dans un intervalle qui n'est constante dans aucun intervalle partiel et qui s'annule avec toutes ses dérivées sur un ensemble de mesure positive.

(T. Kővári)

68. Y a-t-il un système de fonctions orthogonal et complet dans un intervalle (a, b) qui est orthogonal dans le même intervalle par rapport à une fonction de poids $p(x)$ non-négative, non constante et 1. continue, 2. absolument continue?

(Á. Császár)

69. a, b, c et d étant des nombres réels donnés, quelles sont les solutions (définies pour tous les nombres réels) de l'équation fonctionnelle

$$f(ax+b)=cf(x)+d?$$

(J. Aczél)

70. Démontrer que la moyenne géométrique des côtés parallèles d'un trapèze circonscrit à un cercle, n'est pas inférieure à la distance des mêmes côtés.

(J. Surányi)

71. Désignons par $d(n)$ le nombre des diviseurs du nombre naturel n. Démontrer qu'à tout nombre positif N correspond un n tel que

$$d(n-1)-d(n)>N \quad \text{et que} \quad d(n+1)-d(n)>N.$$

(P. Turán)

72. Démontrer que la condition nécessaire et suffisante de ce qu'un ensemble ordonné soit bien ordonné, c'est que tout sous-ensemble de cet ensemble soit semblable à un sous-ensemble qui contient tous les éléments qui précèdent un quelconque de ses éléments.

(L. Kalmár)

73. Appelons convexe un sous-ensemble du plan projectif s'il contient au moins l'un des deux segments qui relient deux quelconques de ses points. Démontrer que si un ensemble est convexe, ou bien cet ensemble, ou bien l'ensemble complémentaire de celui-ci, contient une droite entière.

(J. Czipszer)

74. Démontrer que le module de la fonction gamma est monotone décroissant lorsqu'on parcourt une demi-droite quelconque du plan complexe, parallèle à l'axe imaginaire, en s'éloignant de l'axe réel.

(P. Turán)

75. Le centre C d'un groupe G ne contient d'élément d'ordre fini autre que l'élément unité, le groupe quotient G/C est abélien et tous ses éléments sont d'ordre fini. Démontrer que G est un groupe abélien.

(T. Szele)

76. Construire un réseau de domaines couvrant le plan entier et ayant une densité inférieure à 4/3, d'un domaine donné, convexe et symétrique par rapport à un point.

(Gy. Grätzer et *E. Schmidt)*

77. Construire une fonction dont les quotients de différences sont bornés et qui n'est pas dérivable sur un ensemble donné de mesure nulle.

(J. Czipszer)

78. Quels sont les polyèdres dont toute section plane est un polygone ayant cinq côtés au plus?

(Gy. Hajós)

79. Les valeurs des fonctions continues $M(x, y)$ et $N(x, y)$ appartiennent à l'intérieur de l'intervalle (x, y) ou de celui (y, x), suivant que $x < y$ ou que $y > x$. Démontrer que la suite $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$, formée d'après les formules

$$a_{n+1} = M(a_n, b_n), \quad b_{n+1} = N(a_n, b_n),$$

est convergente.

(J. Aczél)

80. Une matrice de m lignes et n colonnes $(m < n)$ et dont les éléments sont des nombres entiers rationnels étant donnée, peut-on la compléter par une $m+1$-ième ligne composée d'éléments entiers rationnels de façon que le plus grand diviseur com-

mun des déterminants d'ordre $m+1$ de la nouvelle matrice soit identique au plus grand diviseur commun des déterminants d'ordre m de la matrice donnée?

(L. Fuchs)

81. Démontrer qu'il y a un nombre irrationnel tel que, dans son développement en fraction continue, les dénominateurs de toutes les fractions approchées sont des k-ièmes puissances complètes (k étant un nombre naturel donné).

(P. Szüsz)

82. Démontrer que le domaine des valeurs d'une transformation linéaire complètement continue de l'espace L_2 ne peut pas coïncider avec l'espace entier.

(J. Czipszer, L. Gehér et *L. Pál)*

83. Soient n un nombre naturel donné et (a, b) un intervalle partiel donné de l'intervalle $(-1, +1)$. Démontrer qu'il existe une fonction de poids non-négative, dérivable et ne s'annulant qu'en un nombre fini de points dans l'intervalle $(-1, +1)$ et telle que toutes les racines du n-ième polynome de la suite orthogonale de polynomes correspondante sont situées dans l'intervalle (a, b).

(I. Vincze)

84. Un nombre naturel n étant donné, démontrer qu'il existe un anneau euclidien qui contient exactement n éléments premiers.

(E. Fried)

85. Construire une série de puissances qui converge dans le cercle unité fermé et dont la somme n'est pas bornée dans ce cercle.

(T. Kővári et *V. T. Sós)*

86. Démontrer qu'il correspond à tout nombre naturel k une infinité d'entiers n tels que

$$d(n) > \prod_{i=1}^{k} d(n-i)\,d(n+i),$$

où $d(n)$ désigne le nombre des diviseurs de n.

(P. Erdős)

87. $f(x)$ étant une fonction continue et de période 2π, démontrer que si l'on a pour tous les h réels

$$\int_0^{2\pi} |f(x+h)-f(x)|^2 dx \leqq Ch^2,$$

la fonction $f(x)$ satisfait à une condition de Lipschitz d'exposant 1/2.

(Gy. Alexits)

88. Démontrer que si un groupe possède un élément d'ordre p^n (p étant un nombre premier) et si p^{2n} dépasse l'ordre du groupe, le gronpe ne peut pas être simple.

(K. Corrádi)

89. Démontrer qu'une suite $\varepsilon_n \to 0$ étant donnée, on peut trouver une suite a_n telle que $|a_n| > \varepsilon_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) et que le produit $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ soit convergent.

(P. Turán)

90. Y a-t-il un corps concave dont toutes les sections planes sont simplement connexes?

(Gy. Grätzer et E. Schmidt)

91. Donner une condition nécessaire et suffisante que les nombres complexes a_{ik} ($i, k = 1, 2, \ldots$) doivent remplir pour qu'on puisse trouver une suite $f_1, f_2, \ldots$ de fonctions à carré intégrable telle que

$$\int f_i \bar{f}_k = a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots).$$

(J. Czipszer)

92. Une suite $0 < n_1 < n_2 < \cdots$ étant donnée, la suite $a_1, a_2, \ldots$ soit composée des nombres situés dans l'intervalle (n_k, n_{k+1}) et divisibles par 2^k ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Considérons, pour r donné, les nombres $a_{i_1}+a_{i_2}+\cdots+a_{i_r}$ ($i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_r$) et démontrons que la suite de ces nombres possède la densité 0.

(P. Erdős)

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket, az egyes feladatok megoldását külön lapon, a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.

Kitűzött feladatok

89. Bizonyítsuk, hogy tetszőlegesen adott, zérushoz tartó $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sorozathoz található $a_1, a_2, \ldots$ sorozat úgy, hogy $|a_n| > |\varepsilon_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$, és a $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ szorzat konvergens.

Turán Pál

90. Van-e olyan konkáv test, melynek minden síkmetszete egyszeresen összefüggő?

Grätzer György és *Schmidt Eligius*

91. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy adott $\{a_{ik}\}$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$ komplex számokhoz mikor található olyan négyzetesen integrálható függvényekből álló $f_1, f_2, \ldots$ sorozat, melyre

$$\int f_i \bar{f}_k = a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots).$$

Czipszer János

92. Legyen adva egy $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ sorozat. Álljon az $a_1, a_2, \ldots$ sorozat az (n_k, n_{k+1}) intervallumokban a 2^k-val osztható egész számokból. Adott r mellett tekintsük az $a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_r}$ $(i_1 \leqq i_2 \leqq \cdots \leqq i_r)$ számokat. Bizonyítandó, hogy e számok sorozatának sűrűsége 0.

Erdős Pál

Megoldott feladatok

68. feladat. Van-e olyan az (a, b) intervallumban ortogonális, teljes függvényrendszer, amely (a, b)-ben még egy nem-negatív, nem állandó és 1. folytonos, 2. abszolút folytonos $p(x)$ súlyfüggvényre nézve is ortogonális?

(Császár Ákos)

Megoldás. Bizonyítjuk, hogy az első kérdésre igennel, a másodikra pedig nemmel kell felelni. Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy $a = 0$ és $b = 1$.

1. Legyenek $I_1, I_2, \ldots$ a Cantor-féle halmaz kiegészítő intervallumai. Alkossanak az $f_{k1}(x), f_{k2}(x), \ldots$ függvények az I_k intervallumon teljes ortogonális rendszert, és legyen értékük az I_k intervallumon kívül 0. Az $f_{kn}(x)$ függvények $(k, n = 1, 2, \ldots)$ nyilván ortogonálisak a (0, 1) intervallumon. Rendszerük teljes is, mert ha $g(x)$ mindegyikre ortogonális, akkor az $f_{k1}(x), f_{k2}(x), \ldots$ rendszer teljessége miatt $g(x) = 0$ majdnem mindenütt mindegyik I_k intervallumon, tehát a teljes (0, 1) intervallumon is.

Legyen $p(x)$ a Cantor-féle függvény, melynek értéke minden I_k intervallumon egy-egy pozitív konstans. Az $f_{kn}(x)$ függvények e súlyra nézve is ortogonálisak, hiszen két ilyen függvény szorzatának a $p(x)$ súllyal való megszorzása állandóval való szorzást jelent. Minthogy $p(x)$ nem állandó és folytonos, az első kérdésre valóban igennel kell felelni.

2. Alkossanak az $f_1(x), f_2(x), \ldots$ függvények teljes ortogonális rendszert, legyenek továbbá ortogonálisak az abszolút folytonos $p(x)$ súlyfüggvényre nézve is. Ezek szerint $p(x)f_i(x)$ ortogonális az $f_k(x)$ függvények $(k = 1, 2, \ldots)$ mindegyikére $f_i(x)$ kivételével. Az $f_k(x)$ függvények rendszerének teljessége miatt tehát majdnem mindenütt

$$p(x)f_i(x) = c_i f_i(x),$$

azaz, ahol csak $f_i(x) \neq 0$, majdnem mindenütt $p(x) = c_i$. Így a $p(x)$ függvény értékkészlete egyrészt a $c_1, c_2, \ldots$ számokból áll, másrészt azokból az értékekből, amelyeket $p(x)$ azokon a helyeken vesz fel, ahol az $f_1(x), f_2(x), \ldots$ függvények mindegyike eltűnik. Ezért $p(x)$ értékkészlete nullmértékű, hiszen az utóbb említett helyek halmaza az $f_1(x), f_2(x), \ldots$ rendszer teljessége miatt nullmértékű, és abszolút folytonos függvény értékkészlete nullmértékű halmazon maga is nullmértékű. Minthogy azonban $p(x)$ folytonos, értékkészlete a (0, 1) intervallumon csak akkor lehet nullmértékű, ha $p(x)$ állandó. Arra a kérdésre, hogy lehet-e $p(x)$ nem-állandó, nemmel kell tehát felelni. *Szőkefalvi-Nagy Béla*

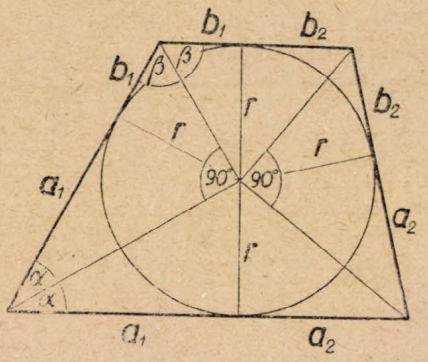
A 68. feladat megoldását beküldötte még *Czipszer János.*

70. feladat. Bizonyítandó, hogy az érintőtrapéz párhuzamos oldalainak mértani közepe nem kisebb távolságuknál.

(Surányi János)

I. megoldás. A beírt kör érintési pontjai a trapéz párhuzamos oldalait a_1 és a_2, ill. b_1 és b_2 darabokra, szárait pedig a_1 és b_1, ill. a_2 és b_2 darabokra osztják (l. 1. ábra). A szárak a beírt kör középpontjából derékszög alatt látszanak (az ábrán $2\alpha+2\beta=180°$, s így valóban $\alpha+\beta=90°$). A beírt kör r sugarára tehát a két derékszögű háromszögből

(1) $$r^2=a_1b_1=a_2b_2.$$



1. ábra

Minthogy a trapéz magassága $2r$, a bizonyítandó állítás

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2)\geqq 4r^2=2(a_1b_1+a_2b_2),$$

azaz átrendezés után

$$(a_1-a_2)(2_1-b_2)\leqq 0.$$

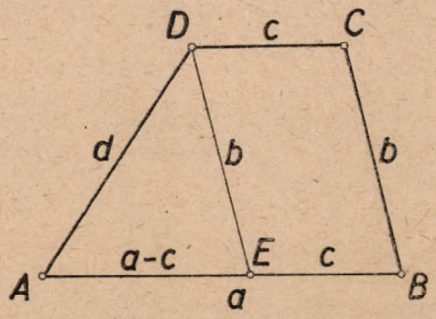
Ez igaz, mert e szorzat tényezői egyező előjelűek nem lehetnek, hiszen különben a_1 és b_1 rendre nagyobb, ill. kisebb lenne a_2-nél és b_2-nél, ami (1) miatt lehetetlen.

Kántor Sándor

II. megoldás. Jelölje a és c a trapéz párhuzamos oldalait, legyen $a\geqq c$. Jelölje b és d a szárakat, ezekre tehát $b+d=a+c$. Bontsuk fel a trapézt egy parallelogrammára és az $ADE\triangle$-re (l. 2. ábra), melynek oldalai $AE=a-c$, $DE=b$, $DA=d$. A D pont

az A, E fókuszú, tehát $a-c$ fókusztávolságú, és $b+d=a+c$ nagytengelyű ellipszisen van. A D pontnak a nagytengelytől való m távolsága a kistengelynél nagyobb nem lehet, azaz

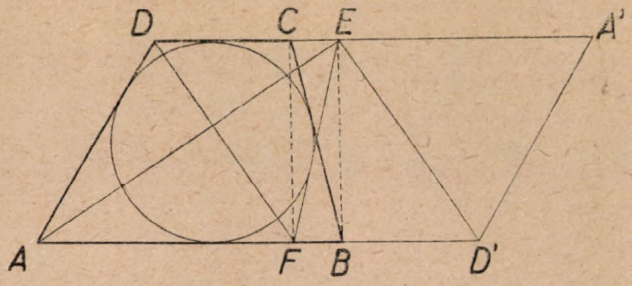
$$m \leqq \frac{1}{2}\sqrt{(a+c)^2-(a-c)^2}=\sqrt{ac}.$$



2. ábra

Csiszár Imre

III. megoldás. Az $ABCD$ érintőtrapézt BC szárának felezőpontjára tükrözve az $AD'A'D$ parallelogrammához jutunk (l. 3. ábra). Legyen B és C merőleges vetülete a parallelogramma szemközti oldalegyeneseire E és F, jelöljük AE és DF metszéspontját G-vel.



3. ábra

A tükrözés miatt $DC=BD'$. Azt kell tehát kimutatnunk, hogy az $AD'E\triangle$-ben az EB magasság nem nagyobb azon szeletek mértani középarányosánál, amely szeletekre ez a magasság az AD' oldalt bontja, vagyis azt kell bizonyítanunk, hogy az $AEB'\sphericalangle$ nem hegyesszög.

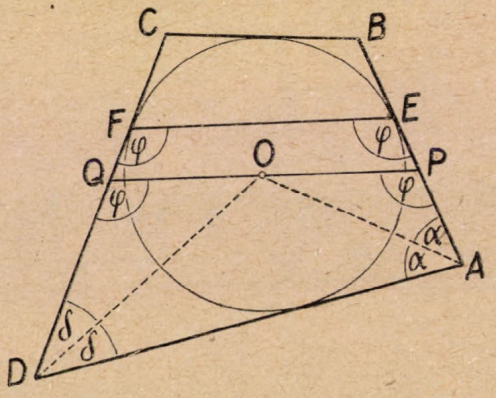
A tükrözés folytán $DF \| ED'$. Kimutatandó tehát, hogy az $AGF\sphericalangle$ nem hegyesszög, vagyis az, hogy az $AGD\sphericalangle = EGF\sphericalangle$ nem tompaszög. Vegyük még figyelembe, hogy EF is érinti a trapézünkbe írt kört, azaz $AFED$ is érintőtrapéz, hiszen a beírt kör tükrös a trapéz középvonalára, a BC és EF szakaszok pedig egymás tükörképei. Így beláttuk, hogy a bizonyítandó állítás azzal ekvivalens, hogy érintőtrapéz átlóinak metszéspontjából a szárak nem látszhatnak tompaszög alatt.

Ez utóbbi állításnál többet mond az, hogy a sík egyetlen pontjából sem lehet az érintőtrapéznek mindkét szára tompaszög alatt látható. Ez pedig nyomban következik abból az ismert tényből, hogy az érintőtrapéz szárai fölé írt Thales-körök egymást kívülről érintik (l. az 1953. évi Arany-verseny első fordulójának 3. feladatát).

Surányi János

IV. megoldás. A feladat állításának következő általánosítását bizonyítjuk: *A konvex $ABCD$ érintőnégyszögbe írt, O középpontú kör érintse az AB és CD oldalt E és F pontban. Az O ponton át EF-fel párhuzamosan húzott egyenes az AB és CD oldalakat belső P és Q pontban metszi, és PQ nem nagyobb az AB és CD oldalak mértani középarányosánál.*

1. Minthogy az EF egyenes metszi az AB és CD egyeneseket, a P és Q metszéspontok is léteznek. Bizonyítanunk kell,



4. ábra

hogy P és Q az AB és CD oldalaknak belső pontjai. A szerepek egyenlőségére való tekintettel elég ezt a P pontra megmutatnunk, és elég azt igazolnunk, hogy az AB egyenesen B és P az A pont-

nak ugyanazon az oldalán van. Ennek igazolásánál nyilván feltehetjük, hogy P a BA félegyenesen van, s ez majd abból következik, hogy az $OAB\sphericalangle$ kisebb az $OPB\sphericalangle$-nél, vagyis a 4. ábra jelöléseivel

$$\alpha < \pi - \varphi.$$

Minthogy a kör húrja a végpontjaiban húzott érintőkkel egyenlő szögeket zár be, továbbá az EF és PQ egyenesek párhuzamosak, ábránknak φ-vel jelölt szögei egyenlők, az $AEFD$ négyszög szögösszege tehát

$$2\alpha + 2\delta + 2\varphi = 360°.$$

Ebből nyomban adódik a fenti egyenlőtlenség.

2. Minthogy imént tett megállapításunk szerint $\alpha + \delta + \varphi = 180°$, a $DQO\triangle$ és $OPA\triangle$ hasonló, mert mindkettőben előfordul kettő e 180° összegű három szög közül. E hasonlóság következtében

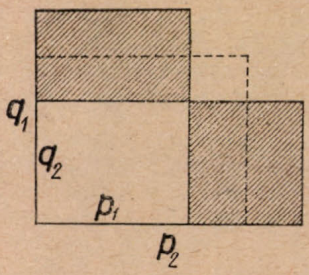
$$PA \cdot QD = OP \cdot OQ = \frac{1}{4} PQ^2,$$

ugyanis az EF húrra merőleges körátmérőre vonatkozó szimmetria miatt $OP = OQ$. Ugyanúgy adódik, hogy

$$PB \cdot QC = \frac{1}{4} PQ^2.$$

3. Az utolsó két egyenlőség alapján már következik a feladat állítása, ha igazoljuk a következőt: Ha $p_1 q_1 = p_2 q_2 = a^2$, akkor $(p_1 + p_2)(q_1 + q_2) \geqq 4a^2$, vagy másként

$$\frac{p_1 + p_2}{2} \cdot \frac{q_1 + q_2}{2} \geqq a^2.$$



5. ábra

Ezt a számtani és mértani középre vonatkozó tételt nem használva geometriai úton bizonyítjuk. Egy p_1, q_1 és egy p_2, q_2 oldalú téglalapot tekintünk. E két egyenlő területű téglalapot egy-egy sarkuknál egymásra helyezzük úgy, hogy a p_1 és p_2, valamint a q_1 és q_2 oldalak egyenesei fedjék egymást. E téglalapok közös részének területét T-vel, ezen túlnyúló részüknek területét pedig — a téglalapok területének egyezése folytán jogosan ugyanavval a betűvel — t-vel jelöljük. A téglalapok egybe nem eső párhuzamos oldalainak középpárhuzamosai egy $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, $\frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ oldalú téglalapot

határoznak meg. Ez az új téglalap a T területű közös részből, mindkét t területű téglalapnak feléből és még egy téglalapból tevődik össze (hacsak mind a három téglalap nem azonos). Az új téglalap területe ezek szerint az eredeti két téglalap területénél, $(T+t)$-nél nagyobb, vagy legfeljebb azzal egyenlő. Ez éppen állításunk helyességét szolgáltatja. *Gallai Tibor*

A 70. feladat megoldását beküldötték még: *Alpár László, Balatoni Ferenc, Berkes Jenő, Biczó Géza, Császár Ákos, Dux Erik, Erdősi József, Fried Ervin, Hajagos Béla, Hammer József, Klafszky Emil, Koncz Károly, Krekó Béla, Molnár Ferenc, Molnár József, Obláth Richárd, Papp Zoltán, Révész Pál, Schopp János.*

71. feladat. Jelentse $d(n)$ az n természetes szám osztóinak számát. Bizonyítandó, hogy minden pozitív N számhoz található olyan n, hogy

$$d(n-1)-d(n)>N \quad \text{és} \quad d(n+1)-d(n)>N.$$

(Turán Pál)

Megoldás. A feladat követelményének megfelelő n természetes számokat a következőképpen szerkeszthetünk: Válasszunk két olyan a és b relatív prím természetes számot, amelyekre $d(a)>N+2$ és $d(b)>N+2$. Ismeretes, hogy $(a,b)=1$ miatt megadhatók az x és y természetes számok úgy, hogy $bx-ay=2$. Azt állítjuk, hogy

$$n=abt+bx-1=abt+ay+1$$

eleget tesz a feladat követelményének, ha a t természetes számot úgy választjuk meg, hogy n prímszám legyen. Ilyen t érték Dirichlet ismert tétele szerint van, hiszen ab és $bx-1=ay+1$ relatív prímek, mert $bx-1=ay+1$ nem osztható sem a, sem b törzstényezőivel.

Mivel n prímszám, $d(n)=2$. Minthogy $n-1$ osztható a-val, $d(n-1)>d(a)>N+2$, és $(n+1)$-nek b-vel való oszthatósága miatt $d(n+1)>d(b)>N+2$. Ezek szerint n valóban kielégíti a feladat követelményét. *Takács Lajos*

A 71. feladat megoldását beküldötték még: *Dux Erik, Hosszú Miklós, Kővári Tamás.*

72. feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy rendezett halmaz akkor és csak akkor jólrendezett, ha minden részhalmaza hasonló a halmaz valamelyik szeletéhez. (Szelet az olyan részhalmaz, amely bármely elemével együtt minden előbbi elemet tartalmaz.)

(Kalmár László)

Megoldás. Jólrendezett halmaz minden részhalmaza is jólrendezett, s rendszáma nem nagyobb az egész halmaz rendszámánál (l. pl. Alekszandrov: Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe, III. fejezet, 12. tétel), tehát hasonló annak egy szeletéhez.

Ha egy rendezett halmaz minden részhalmaza hasonló a halmaz valamelyik szeletéhez, akkor ez áll az egyelemű részhalmazokra is, úgyhogy a halmaznak van egyelemű szelete, vagyis első eleme. Ez az elem egyúttal a halmaz minden szeletének is első eleme, tehát minden részhalmazban is van első elem, vagyis a halmaz jólrendezett.

Császár Ákos

A 72. feladat megoldását beküldötték még: *Ádám András, Hajós György, Kántor Sándor, Kővári Tamás, Lakatos Imre, Papp Zoltán, Révész Pál.*

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat a Bolyai Társulat címére kérjük (Bp. V. Reáltanoda u. 13—15.) A borítékra írjuk rá feltűnően: Példarovat. Minden megoldást külön lapra írjunk. Közlésre szánt példákat is szívesen fogadunk.

A **49.** példára a VI. évfolyam 1. számának megjelenése előtt megoldás érkezett még Biczó Gézától.

Kitűzött példák

67. Egy háromszög egyik belső pontját kössük össze a csúcsokkal, és az összekötő szakaszokat hosszabbítsuk meg a ponton túl az oldalakig. Bizonyítsuk be, hogy a meghosszabbító szakaszok összege kisebb a háromszög legnagyobb oldalánál.

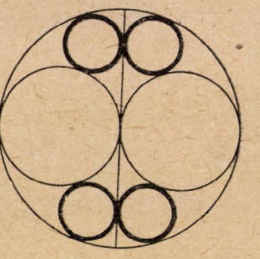
(*Erdős Pál*)

68. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre $\frac{n+1}{n}$ is és a reciproka is felírható véges tizedestört alakban?

(*Fried Ervin*)

69. Az 1. ábrán látható négy kis kör sugara a legnagyobb kör sugarának negyede; ez számítással könnyen igazolható. (Lásd a II. gimnáziumi könyvben az 1951. évi kiadásban a 97. lapon.) Igazoljuk számítás nélkül!

(*Zalotay Elemér*)



1. ábra

70. Határozzuk meg a háromszög hozzáírt köreinek sugarát, ha összegük: $r_1+r_2+r_3=11$ cm, a háromszög kerülete $k=12$ cm, beírt körének sugara $\varrho=1$ cm. Mekkorák a háromszög oldalai?

(*Biczó Géza*)

71. Jelölje a, b, c egy háromszög oldalait, m_a, m_b, m_c pedig a megfelelő magasságokat. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(m_a+m_b+m_c)\left(\frac{1}{m_a}+\frac{1}{m_b}+\frac{1}{m_c}\right).$$

(*Bukovszky Ferenc*)

72. Bizonyítsuk be, hogy ha $a_i>0$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \geqq n^2.$$

73. Az alábbi sorozatoknak nagyon egyszerű a képzési szabálya. Mik ezek a szabályok? Írjuk fel mindegyik sorozat következő három elemét!

a) 2, 4, 8, 7, 5, 10, 11, 13, 8, 7, 14, 19, 20, 22, ...

b) 0, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 6, 6, 7, 11, 7, 13, 9, 8, 8, ...

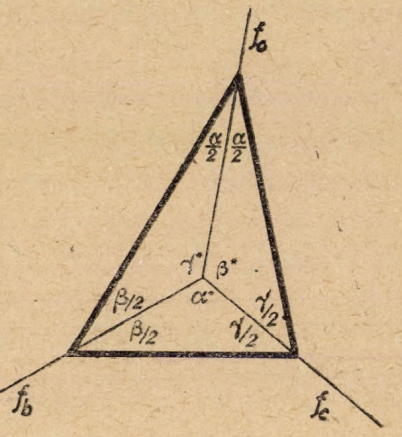
c) 1, 1, 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 19, 20, 25, 28, 29, ...

Megjegyezzük, hogy mindegyik sorozat végtelen és egyik sem korlátos, vagyis mindegyikben vannak akármilyen számnál nagyobb számok. A *c*) sorozat monoton, sőt, ha első elemét elhagyjuk, szigorúan monoton, vagyis több ismétlődés nem fordul elő benne. Azt a nevezetes sejtést, hogy tagjai közt végtelen sokszor fordulnak elő szomszédos természetes számok, még senkinek sem sikerült sem bebizonyítani, sem megcáfolni.

Megoldott példák

51. példa. Oldjuk meg az I. gimnáziumi matematika könyv következő feladatát: „Megrajzoltuk egy háromszög három (egy ponton áthaladó) szögfelező egyenesét és egy oldalának egyik pontját. Hogyan szerkeszthető meg ezekből a háromszög?“ (Az 1949. évi kiadásban a 348. lapon a 13. feladat.) Bizonyítsuk be a talált szerkesztés helyességét.

I. megoldás. A szögfelezők szögei és a háromszög szögei közti ismert összefüggés miatt (a 2. ábra jelölésével: $\alpha^* = \frac{\alpha}{2} + 90°$ stb.) a három megadott egyenes a háromszög alakját már meghatározza. (Még azt sem kell előre megadni, hogy a hat félegyenes közül melyik három megy át a háromszög csúcsain. Szomszédos félegyeneseket ugyanis nem választhatunk, hiszen a szögfelező egyenesek magukat az oldalakat és nem meghosszabbításukat metszik; az pedig mindegy, hogy a nem szomszédosak közül az egyik hármat választjuk, vagy a másik hármat, a csúcsszögek egyenlősége miatt a háromszög alakja mindkét esetben ugyanolyan lesz.)



2. ábra

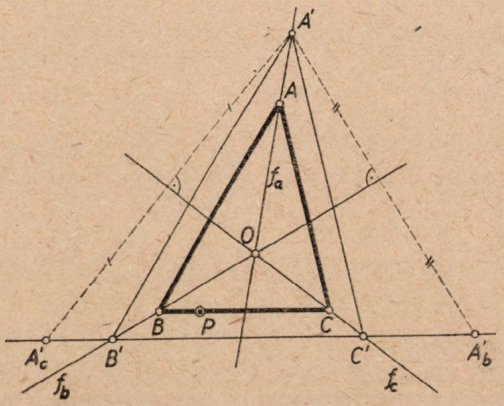
Ha tehát egyelőre elejtjük azt a feltételt, hogy az egyik oldal az adott P ponton menjen át, akkor egy a keresetthez hasonló $A'B'C'$ háromszöget kaphatunk, a következő módon:

Az $A'B'C'$ háromszög A' csúcsát az f_a szögfelezőn tetszésszerint vegyük fel. Mivel az oldalegyenesek a szögfelezőkre szimmetrikusak, A'-nek f_b-re, ill. f_c-re vonatkozó A'_b, ill. A'_c tükörképe rajta kell hogy legyen a keresett $B'C'$ oldalegyenesen. Ez az oldalegyenes tehát csak az $A'_bA'_c$ egyenes, s így a háromszög B', ill. C' csúcsa csak ennek az egyenesnek f_b-vel, ill. f_c-vel való metszéspontja lehet.

A tükrözések miatt nyilvánvaló, hogy f_b és f_c az $A'B'C'$ háromszögnek szögfelezője; az f_a egyenes átmegy f_b és f_c metszéspontján és az A' csúcson, ebből következik, hogy f_a a harmadik szögfelező.

Az $A'B'C'$ háromszög és a keresett ABC háromszög nemcsak hasonló, hanem hasonló helyzetű is. (Ugyanis mindkét háromszög oldalai $\frac{\alpha}{2} = \alpha^* - 90°$ stb. szögeket zárnak be a szögfelezőkkel, és így megfelelő oldalaik párhuzamosak.) Az ABC háromszög szerkesztése tehát: a P ponton át párhuzamost húzunk az

$A'B'C'$ háromszög valamelyik oldalával (ha P-nek pl. a BC oldalra kell kerülnie, akkor $B'C'$-vel); ez az egyenes f_b-ből $A'B'C'$ ill. f_c-ből kimetszi a B, ill. C pontot, a B ponton át $A'B'$-vel húzott párhuzamos pedig az A csúcsot.



3. ábra

Be kell még bizonyítanunk, hogy AC párhuzamos $A'C'$-vel; ebből következni fog, hogy az ABC háromszög teljesít minden előírást. Ezt például így láthatjuk be:

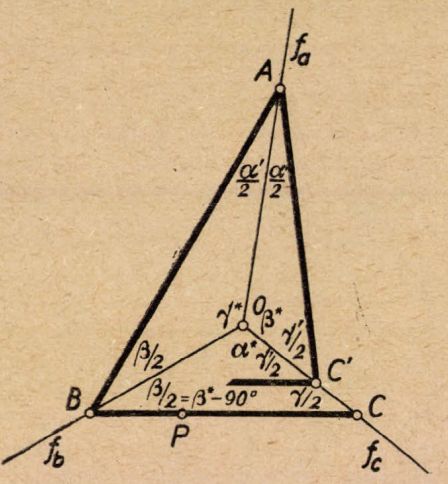
$$\frac{OC'}{OC} = \frac{OB'}{OB}\,\frac{OA'}{OA}.$$

a szerkesztés miatt, tehát $OA'C'_\Delta \sim OAC_\Delta$ (két oldalarány és a közbezárt szög egyezése folytán), és így $AC \| A'C'$. Ezzel a szerkesztés helyességét igazoltuk.

Megoldás csak akkor lehet, ha a megadott szögfelezők három nem szomszédos félegyenese három tompaszögre vágja szét a síkot $\left(\text{hiszen } \alpha^* = \frac{\alpha}{2} + 90° \text{ stb. kell legyen}\right)$. Ez ekvivalens azzal, hogy a három megadott egyenes hat hegyesszögre vágja szét a síkot. A szerkesztésből látható, hogy ez nemcsak szükséges, hanem elégséges feltétele is a megoldhatóságnak, bárhol van is a P pont (az egyenesek metszéspontját kivéve).

Biczó Géza és *Reményi Gusztáv*

II. megoldás. Mivel a szögfelezők szögeiből megszerkeszthetjük a háromszög szögeit, a háromszög BC oldalát azonnal megkaphatjuk: ez csak a P ponton át húzott, f_b-hez $PBO \sphericalangle = \beta^* - 90° = \frac{\beta}{2}$ szögben hajló egyenesnek f_b és f_c közti szakasza lehet. Tükrözzük ezt az egyenest f_b-re (f_a-val való metszéspont: A), s a tükörképet f_a-ra (f_c-vel való metszéspont: C'). Be kell bizonyítanunk, hogy újbóli tükrözéssel a BC oldalhoz jutunk (ebben már benne van az, hogy $C = C'$ és az is, hogy f_c felezi az itt keletkező szöget).



4. ábra

Először azt bizonyítjuk, hogy újbóli tükrözéssel a BC-vel párhuzamos egyeneshez jutunk. Ehhez csak ki kell számítanunk a keletkező $\frac{\alpha'}{2}$, $\frac{\gamma'}{2}$ és $\frac{\gamma}{2}$ szögeket (4. ábra):

$$\frac{\alpha'}{2} = 180° - \gamma^* - (\beta^* - 90°) = 360° - \gamma^* - \beta^* - 90° = \alpha^* - 90°.$$

Ugyanígy:

$$\frac{\gamma'}{2} = 180° - \beta^* - (\alpha^* - 90°) = \gamma^* - 90°,$$

és

$$\frac{\gamma}{2} = 180° - \alpha^* - (\beta^* - 90°) = \gamma^* - 90°.$$

$\gamma = \gamma'$, tehát a párhuzamosságot igazoltuk.

Bizonyítanunk kell még, hogy $OC = OC'$. Ez a sinus-tétellel könnyen adódik:

$$\frac{OC}{OB} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}, \quad \frac{OB}{OA} = \frac{\sin\frac{\alpha'}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}, \quad \frac{OA}{OC'} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha'}{2}},$$

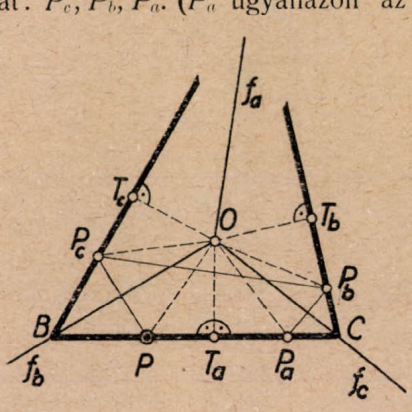
s az egyenleteket összeszorozva:

$$\frac{OC}{OC'} = 1, \text{ azaz } OC = OC'.$$

A szerkesztés tehát helyes.

Koncz Károly és *Reményi Gusztáv*

III. megoldás. Tükrözzük körül a P pontot az 5. ábra szerint a három szögfelezőn. Így megkapjuk mindhárom oldalnak egy-egy pontját: P_c, P_b, P_a. (P_a ugyanazon az oldalon van, amelyen P.) A PP_a egyenes (ha ugyan $P \neq P_a$!) lesz a háromszög BC oldalegyenese. (B, ill. C az egyenesnek f_b, ill. f_c-vel való metszéspontja.)



5. ábra

Be kell bizonyítanunk, hogy ha ezt az egyenest egyrészt f_b-n másrészt f_c-n át tükrözzük, akkor a két tükörkép egymást f_a-n metszi, s vele egyenlő szögeket zár be.

Ennek a két egyenesnek egy-egy pontjáról, P_c-ről és P_b-ről tudjuk, hogy egymásnak f_a-ra vonatkozó tükörképei. Ha kimutatjuk, hogy még egy ilyen pontpár van a két egyenesen, akkor ezzel igazoltuk, hogy a két egyenes egymásnak f_a-ra vonatkozó tükörképe; ez éppen azt jelenti, hogy f_a-n metszik egymást, s vele egyenlő szögeket zárnak be.

Ez a másik két pont (ha csakugyan *másik* két pont!) az O-ból a két egyenesre bocsátott merőlegesek T_c és T_b talppontja

lesz. Annyi bizonyos, hogy $OT_c = OT_b$, hiszen mindkettő egyenlő az O-ból BC-re bocsátott OT_a merőleges szakasszal a szögfelező ismert tulajdonsága miatt. Be kell még látnunk, hogy az OT_c és OT_b szakasznak f_a-val alkotott szöge is egyenlő. Mivel P_c és P_b f_a-ra szimmetrikus, f_a-val alkotott szögeik is egyenlők; elég tehát belátni, hogy $P_cOT_c\sphericalangle = P_bOT_b\sphericalangle$. De ez igaz, hiszen $OT_cP_c\triangle \cong$ $\cong OT_bP_b\triangle$ (két oldal és a derékszög egyenlősége miatt). A bizonyítás arra az esetre is érvényes, amikor P_c a BT_c-n és így a P_b a CT_b-n kívül esik.

Tehát P_cT_c és P_bT_b csakugyan egymásnak f_a-ra vonatkozó tükörképei, vagyis a szerkesztés helyes.

Bártfai Pál és *Bukovszky Ferenc.*

Megjegyzés. A szimmetria alapján nyilvánvaló, hogy a P_c pont ugyanakkor esik egybe a T_c-vel, amikor a P_b a T_b-vel és a P_a (s egyben a P is) a T_c-val. Ha tehát P és P_a két különböző pont, akkor a szerkesztés helyességének fenti bizonyítása kifogástalan; ha viszont P és P_a egybeesik, akkor másik szerkesztésre is van szükség:

OP-re P-ben merőlegest szerkesztünk, ez metszi ki f_b-ből B-t, f_c-ből C-t. Az előbbiekből már következik, hogy ennek a BC egyenesnek f_b-re és f_c-re vonatkozó tükörképe is f_a-n metszi egymást.

Bukovszky Ferenc

IV. megoldás. Ismeretes (lásd pl. az I. gimnáziumi matematika könyvet, I. kiadás, 370. lap), hogy két egymást metsző egyenesen át való tükrözés helyettesíthető az egyenesek metszéspontja körüli elforgatással; az elforgatás szöge a két egyenes szögének kétszerese.

Ha tehát a P pontot nem egyszer tükrözzük körül a három szögfelezőn (mint a III. megoldásban), hanem kétszer egymásután, akkor az f_b-n és f_a-n való tükrözés $2\gamma^*$, az f_c-n és f_b-n való tükrözés $2\alpha^*$, az f_a-n és f_c-n való tükrözés $2\beta^*$, összesen 720°-os szögű elforgatással helyettesíthető. Tehát a P pont hatodik képe önmaga.

Ennek alapján a III. megoldásban leírt szerkesztés helyessége igen egyszerűen belátható. A szerkesztést most, kis módosítással, úgy fejezzük be, hogy a PP_a egyenest is körültükrözzük a három szögfelezőn, ugyanolyan irányban, mint a P pontot. Be kell látnunk, hogy a harmadik tükrözés után a PP_a egyeneshez jutunk vissza. Az egyenes P pontja a harmadik tükrözés után a P_a pontba kerül, a P_a pont a fent mondottak szerint P-be; két pont meghatározza az egyenest, tehát a szerkesztés helyességét bebizonyítottuk.

Sztanó Tamás

További megoldást küldött be: Reményi Gusztáv.

52. példa. Oldjuk meg a tetszésszerinti oldalszámú sokszögekre vonatkozó, az előbbivel analóg feladatot!

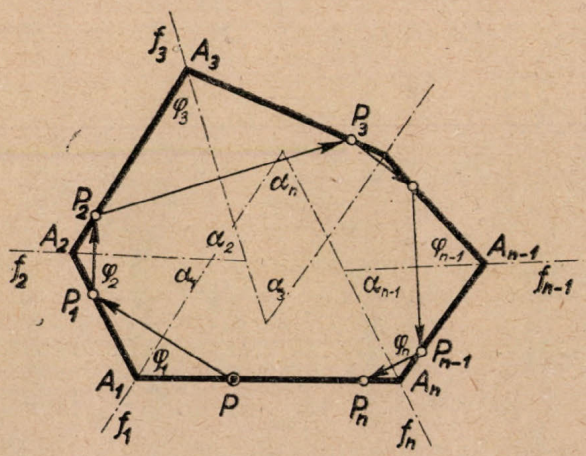
Megoldás. Egyszerűség kedvéért szorítkozzunk konvex sokszögekre. Akkor a szomszédos szögfelezők biztosan metszik egymást; szögeik legyenek:

$$\alpha_i = (f_i, f_{i+1}) \sphericalangle .$$

Legyen továbbá

$$\varphi_i = (A_{i-1} A_i, f_i) \sphericalangle .$$

Képzeljük megszerkesztve a sokszöget. Tükrözzük P-t és a nyert tükörképeket sorban az egyes szögfelezőkön át. Ha $P_n \equiv P$, akkor a PP_n egyenes a keresett sokszög egyik oldalegyenese. Mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy a PP_n egyenes n-edik tükörképe azonos legyen a PP_n egyenessel?



6. ábra

Ha van megoldás, akkor

$$\varphi_2 = 180° - \varphi_1 - \alpha_1,$$
$$\varphi_3 = 180° - (180° - \alpha_1 - \varphi_1) - \alpha_2 = \varphi_1 + \alpha_1 - \alpha_2,$$
$$\varphi_4 = 180° - (\varphi_1 + \alpha_1 - \alpha_2) - \alpha_3 = 180° - \varphi_1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

Két esetet kell megkülönböztetnünk:

I. Páros n esetében

$$\varphi_n = 180° - \varphi_1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots - \alpha_{n-1},$$
$$\varphi_{n+1} = \varphi_1 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n; \qquad (1)$$

de $\varphi_{n+1} = \varphi_1$ és ezért

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n = 0. \qquad (*)$$

Vagyis mivel $\Sigma\alpha_i = 360°$, a páros és páratlan α-k összege egyaránt 180°. Ez tehát a megoldhatóság szükséges feltétele.

Kimutatjuk, hogy ez elegendő feltétel is. Tegyük fel, hogy (*) teljesül. Akkor P-ből P_n-et előállítva és PP_n-et sorban tükrözve a szögfelezőkön át, PP_n n-edik tükörképe és f_1 szöge: $\varphi_{n+1} = \varphi_1$ ((1) és (*) alapján), ami azt jelenti, hogy PP_n és n-edik tükörképe vagy párhuzamos egymással, vagy egybeesik. Minthogy azonban P-nek az n-edik tükörképe P_n, így P_n közös pontja a két egyenesnek, tehát nem lehetnek párhuzamosak, egybe kell esniük. Ezzel egyuttal bebizonyítottuk a szerkesztés helyességét is.

II. Páratlan n esetében

$$\varphi_n = \varphi_1 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots - \alpha_{n-1},$$
$$\varphi_{n+1} = 180° - \varphi_1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n;$$

de $\varphi_{n+1} = \varphi_1$, tehát

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}(180° - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n). \qquad (**)$$

Vagyis mivel $\Sigma\alpha_i = 360°$, a páros α-k összege $90° + \varphi_1$, a páratlanoké $270° - \varphi_1$. Ez tehát a megoldhatóság szükséges feltétele.

Kimutatjuk, hogy a feltétel elégséges is. Tegyük fel, hogy teljesül a (**) feltétel, vagyis az adott P-t és nyert tükörképeit tükrözve a szögfelezőkön át, a kapott PP_n egyenes f_1-gyel ekkora φ_1 szöget zár be. Ekkor a kapott PP_n egyenest f_1-en kezdve végigtükrözve a szögfelezőkön, az n-edik tükörképének és f_1-nek hajlásszöge:

$$\varphi_{n+1} = 180° - \varphi_1 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n.$$

De (**) folytán $\varphi_{n+1} = \varphi_1$, és az I. esethez hasonlóan látható, hogy létezik egyetlen a feltételeknek megfelelő sokszög.

Bártfai Pál

Megjegyzés. Ha $P \equiv P_n$, akkor szintén szét kell választanunk ugyanazt a két esetet:

I. Páros n esetén a síkot n egyenesre tükrözve a sík nem fordul át a másik oldalára: a sík elmozgatása megy végbe, amely vagy párhuzamos eltolás, vagy pont körüli forgatás (lásd például Kutuzov: Geometria 150—151. lap). Mivel egy pont helyben marad, csak elforgatásról lehet szó, mégpedig e pont körül. Tetszőleges Q pont és n-edik tükörképe meghatározza az elforgatás szögét: $QPQ_n \sphericalangle$. Olyan P-n átmenő egyenest keresünk, amely

önmagába megy át. Ilyen akkor és csak akkor van, ha az elforgatás szöge $0°$ vagy $180°$; ekkor minden a P-n átmenő egyenes megfelel.

II. Páratlan n esetén a sík az n egyenesre való tükrözés folytán átfordul a másik oldalára. A sík e transzformációja egy elmozgatás és egy egyenesre való tükrözés összege (lásd KUTUZOV: Geometria, 177. lap). Mivel egy pont helyben marad, párhuzamos eltolásról nem lehet szó, hanem csak egy pont körüli elforgatásról és tengelyes tükrözésről.

Mivel $P \equiv P_n$, a tükörtengelynek át kell mennie az egyedül lehetséges forgási középponton, P-n, de akkor egyetlen tengelyes tükrözéssel helyettesíthető a két transzformáció. A tükörtengelynek egy másik, F pontját is megkaphatjuk tehát, ha egy másik pontnak, Q-nak és n-edik tükörképének, Q_n-nek az összekötő szakaszát megfelezzük. A tükörtengely ennélfogva PF, a másik egyenes pedig, amely önmagába megy át a PF-re, P-ben emelt merőleges. Ez esetben tehát mindig van egyetlen megoldás.

Ha az I. és II. esetben utoljára kapott egyenest a szögfelezőkön körültükrözzük, megkapjuk a keresett sokszög oldalegyeneseit.

Klafszky Emil

53. példa. Szerkesszünk sokszöget, ha adva vannak (helyzetüket tekintve) az oldalfelező merőlegesei.

Megoldás. Képzeljük el, hogy egy sokszög eleget tesz a feltételeknek. Tükrözzük a sokszög A_1 csúcsát és egy másik X_1 pontot sorban az oldalfelező merőlegeseken át. Mindegyik tükrözés változatlanul hagyja az A_iX_i távolságot. Az A_i pont utoljára visszakerül az eredeti A_1 pontba, az X_i pont pedig X_{n+1} pontba. Mivel $AX_1 = AX_{n+1}$, A rajta van az X_1X_{n+1} szakasz felező merőlegesén (feltéve, hogy $X_1 \neq X_{n+1}$).

Ugyanezt egy másik, Y_1 ponttal is megcsinálhatjuk; ha most is másik pontba jutunk vissza, s e két pont összekötő szakaszának felező merőlegese metszi az előbbi felező merőlegest, akkor a metszéspont lesz a keresett A_1 pont. Ezt körültükrözve megkapjuk a sokszög többi csúcsát.

Ha $X_1 \equiv X_{n+1}$, akkor nincs szükség további szerkesztésre, az a sokszög, amelynek a csúcsai az X_i pontok, eleget tesz a feltételeknek. (Azt persze nem tudhatjuk, hogy egyetlen megoldás-e.)

Elképzelhető azonban, hogy $X_1X_{n+1} \parallel Y_1Y_{n+1}$. Mikor valósulhat meg ez az eset? Vizsgáljuk külön a páros és páratlan n esetét. (Most is, mint az előbbi példában, egyszerűség kedvéért szorítkozzunk konvex sokszögekre.)

I. Páros számú egyenesre való tükrözés irányítást tartó egybevágósági transzformáció, vagyis eltolás vagy forgatás (speciálisan lehet a sík egyhelyben hagyása is). Eltolás (esetleg egyhelyben hagyás) akkor, ha a szomszédos felezőmerőlegesek hajlásszögei közül — az előző példa jelölésével: az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ szögek közül — a páros indexüek összege külön 180°, a páratlanoké is külön 180°. Ugyanis két metsző egyenesre való tükrözés a két egyenes bezárta szög kétszeresével való elforgatásával ekvivalens; tehát ebben az esetben a forgásszögek összege 360°. Ha a forgásközéppontok egybeesnek, vagyis az egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor ez egyhelyben hagyást jelent; ekkor a sík bármely pontját körültükrözve a kívánt tulajdonságú sokszöghez jutunk (esetleg elfajulóhoz), s ez mindig húrsokszög lesz. Ha azonban a forgásközéppontok különbözőek, akkor a transzformációk együttvéve általában a sík eltolását eredményezik, ekkor egyetlen pont sem kerül vissza a helyére, vagyis nincs olyan sokszög, amilyennek a szerkesztését a feladat kívánja. Ekkor lesz $X_1X_{n+1} \parallel Y_1Y_{n+1}$.

Ha a páros és a páratlan indexű szögek összege különböző, akkor a transzformáció a síknak egy pont körüli elforgatása: ez az egy pont olyan tulajdonságú, hogy körültükrözve önmagába tér vissza. Közben végigmegy a keresett tulajdonságú sokszög csúcsain. Ekkor tehát a feladatnak egy megoldása van, és ezt az előbbiekben már leírt szerkesztés adja meg. Ekkor tesz $X_1X_{n+1} \parallel Y_1Y_{n+1}$.

II. Ha páratlan oldalszámú sokszöget kell szerkeszteni, vagyis páratlan számú egyenesre kell tükrözni a síkot, akkor a sík irányítása megváltozik. A transzformáció ekkor vagy tükrözés, (ekkor egy egyenes marad fix, egyszeresen végtelen sok megoldás van), vagy tükrözés és eltolás (nincs fix pont), vagy tükrözés és a tükörtengelyen kívüli pont körüli forgatás (nincs fix pont); a tükrözés és a tükörtengelyen levő pont körüli elforgatás összegét azért nem kell külön esetként tekintetbe venni, mert ez egyetlen tükrözéssel helyettesíthető. Páratlan oldalszám esetén tehát sohasem határozott a feladat: ha egyáltalán van megoldása, végtelen sok megoldása van. Ez a szerkesztésben úgy mutatkozik meg, hogy az X_1X_{n+1} és az Y_1Y_{n+1} egyenesek felező merőlegese egybeesik.

Koncz Károly

Megoldást küldtek be még: Biczó Géza, Klafszky Emil.

Jelentés
a Beke Manó emlékdíj ötödik kiosztásáról

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége által kiküldött bizottság elnöke Surányi János, tagjai: Ambrózy Géza, Czapáry Endre, Gádor Endréné, Hódi Endre, Tolnai Jenő, Vigassy Lajos, és Varga Tamás előadó voltak. A bizottság az emlékdíj szabályzatának megfelelően megállapította, hogy a díjak odaítélésével elsősorban a matematika tankönyvek, továbbá a matematikát népszerűsítő könyvek és füzetek írását, valamint az ilyen tárgyú előadások tartását kívánja jutalmazni; továbbá fontos szempontnak tekinti a bizottság a kiváló tanári munkát, a matematikaoktatás elvi kérdéseivel való foglalkozást, a tanári továbbképzést elősegítő írói és előadói működést, a jó szakkörvezetői munkát, a Bolyai Társulat keretében végzett szervezőmunkát, végül a Matematikai Lapok és A Matematika Tanítása feladatainak megoldása terén elért kiemelkedő eredményt.

A bizottság az e szempontok alapján számbajövő kartársak közül az anyagi lehetőségeket számbavéve, október 21-i ülésén a következők jutalmazását határozta el — e határozatot az Intézőbizottság november 11-i ülésén jóváhagyta és a december 2-i elnökségi ülés tudomásul vette:

A bizottság 2000 Ft jutalommal tünteti ki Szele Tibor, ez évben elhúnyt egyetemi tanárt; 1000—1000 Ft-tal jutalmazza Bíró József gimn. igazgatóhelyettest, Bóka István gimnáziumi igazgatót, Faludi Istvánné szakfelügyelőt, Faragó László gimnáziumi tanárt, Pósa Vilmosné egyetemi tanársegédet és Reményi Gusztáv gimnáziumi tanárt.

Indokolás

Szele Tibor egyetemi tanár, a matematikai tudományok doktora, munkásságának fő részét a tudományos kutató és szervező munka alkotta; ezért Kossuth-díjjal is kitüntették. Emellett azonban kimagasló munkát végzett a matematika megszerettetése és oktatása területén is. Rövid egyetemi tanári pályafutása alatt olyan tanítványi gárdát nevelt fel Debrecenben, amely máris jelentékenyen hozzájárul a magyar algebrai iskola eredményeinek továbbviteléhez. Ezt nemcsak magasszínvonalú és ugyanakkor a legnagyobb mértékig közérthetőségre törekvő egyetemi előadásaival érte el, hanem avval is, hogy a hozzáfordulóknak mindig kész volt problémáikban segítséget adni, nem kímélve munkaidejét és erejét. Rendkívül nagy hatásának egyik főforrása szeretetreméltó egyénisége, munkatársaival és tanítványaival való meleg emberi kapcsolata volt.

Tudományos kutató munkája mellett rövid életéből telt egy olyan kitűnő egyetemi tankönyv megírására is, mint a „Bevezetés az algebrába". Ez a könyv példát mutat abban a tekintetben, hogyan lehet az alapvető

kérdéseket a legegyszerűbben tárgyalni, s ugyanakkor a gondolatmenet megbontása nélkül a tudomány újabb fejlődésének irányába is kitekintést nyújtani.

Tudományos munkái mellett a matematikát népszerűsítő és a matematika oktatásának kérdésével foglalkozó írásai is jelentek meg. Egy előadása, amelyben a komplex számok bevezetésének kérdésével didaktikai vonatkozásban is foglalkozott, cikk alakjában is megjelent. (A komplex számok bevezetése vektoralgebrai alapon Matematikai Lapok, 1950, 349—362. Kibővített alakban, A komplex számok geometriája címen, megjelent az Előadások az iskolai matematika köréből c. cikkgyűjteményben is, Szocialista nevelés az iskolai matematika köréből c. cikkgyűjteményben is, Szocialista Nevelés Könyvtára, 117. sz.; 69—83.) Egy másik matematikát népszerűsítő írása a Szocialista Nevelés Kiskönyvtára sorozatban jelent meg (Elemi geometriai problémák megoldása vektorokkal, Sz. N. Kk. 4. sz., 75—93.). Ezenkívül a Középiskolai Matematikai Lapokba is — amelynek diákkorában egyik leghűségesebb megoldója volt —, több alkalommal tűzött ki feladatokat.

Mint a Bolyai János Matematikai Társulat debreceni tagozatának alelnöke, kiemelkedő szerepet vállalt a tagozati élet kialakításában, többek között az előadások megszervezésében. Ő maga is számos alkalommal tartott nagysikerű népszerűsítő és továbbképző előadásokat, nemcsak Debrecenben, hanem sok más helyen is. Szele Tibor kezdeményezéséből indultak meg a középiskolai matematikai délutánok. Ezt a kezdeményezést később a többi tagozatok is átvették, és a középiskolai matematikai délutánok azóta Társulatunk egyik fontos működési területévé váltak.

Végül kiemeli a bizottság azt a jelentős munkát, amelyet Szele Tibor különböző versenybizottságokban, elsősorban a Schweitzer Miklós emlékversenybizottságban végzett, a feladatok kitűzése, elbírálása és a versenybizottsági jelentés elkészítése terén.

Bíró József, a mezőtúri Dózsa György gimnázium igazgatóhelyettese, az Oktatásügy Kiváló Dolgozója. Szaktudásával, alapos ismereteivel magasan kiemelkedik kollégái közül. Iskolai munkáján felül is elmélyülten foglalkozik matematikával. A pedagógusok részére szervezett továbbképzésben oktatóként működik.

Oktatómunkája kiváló, óráira lelkiismeretesen készül. Nyugodt, megfontolt nevelő, aki önmagával és tanítványaival szemben egyaránt igényes. Nemcsak megköveteli tőlük az anyag ismeretét, hanem meg is szerettetni velük a matematikát. Tanítványai közül többen rendszeres megoldói a Középiskolai Matematikai Lapokban kitűzött feladatoknak, és minden évben sikeresen szerepelnek a matematikai versenyeken.

Oktatómunkája nem korlátozódik saját iskolájára. Vezetésével a helybeli három középiskola sikeres tanulmányi versenyt rendezett. Rendszeresen résztvesz középiskolai versenyek bírálóbizottságaiban, emellett tagja a pedagógiai főiskolák hallgatói részére rendezett matematikai verseny szervező és bírálóbizottságának. A Matematika Tanításában a folyóirat megjelenése óta rendszeres, kitűnő feladatmegoldóként szerepel, és maga is több feladatot tűzött ki. A Középiskolai Matematikai Lapokban is több feladat jelent meg tőle.

Bóka István gimnáziumi igazgató, a Bolyai Társulat pécsi tagozatának elnöke. Negyvenkét éve tanítja kitűnő eredménnyel a matematikát és ábrázoló geometriát. Különösen ki kell emelni a szakérettségi tanfolyamon végzett lelkes és eredményes munkáját. Ennek elismeréseképpen nyerte el 1953-ban a Munka Érdemérem kitüntetést.

Három év óta, amióta aktívan bekapcsolódott a Bolyai Társulat pécsi tagozata vezetőségének munkájába, komolyan fellendült a pécsi matematikai élet és maga is rendszeresen tart igen értékes előadásokat. Fáradhatatlanul foglalkozik a matematikatanárok továbbképzésével. Nagysikerű kezdeményezését, a tanárok részére rendezett feladatmegoldó délutánok tartását, ma már a Társulat több tagozata átvette.

Rendszeresen foglalkozik Bóka kartárs az ábrázoló geometriát tanító nevelőkkel. Komoly érdemei vannak abban, hogy ezt a tantárgyat Baranya megye területén jó eredménnyel tanítják.

Bóka István odaadó tanári munkája, fáradhatatlan igyekezete kartársai megsegítésében, példaképül állhat minden nevelő előtt.

Faludi Istvánné Győr—Sopron megyei szakfelügyelő, a Bolyai Társulat győri tagozatának megalakulása óta elnöke. Tanári és szakfelügyelői munkáját fáradhatatlan odaadással végzi. Szakfelügyelői feladatain túlmenően Győr—Sopron megye valamennyi matematikaszakos nevelőjében ébrentartja a szaktárgya iránti érdeklődést. Munkája nagymértékben hozzájárult ahhoz, hogy a Társulat győri tagozatának oktatási munkája állandóan az elsők között van. Ezzel összefügg a matematikatanítás magas színvonala a megye iskoláiban, tanulók előretörése a különböző matematikai versenyeken.

Faludi Istvánné csöndben, szerényen végzi munkáját, a dícséreteket szívesen áthárítja másokra, pedig azokat igazán megérdemli.

Faragó László a Széchenyi gimnázium tanára. Elismerten kiváló nevelő. Bár alig öt éve foglalkozik középiskolai oktatómunkával, és ezalatt az idő alatt is különböző iskoláknál működött, máris sok kitűnő tanítvány került ki a keze alól: a Rákosi Mátyás tanulmányi versenyen 6, az Arany Dániel tanulmányi versenyen ugyancsak 6 tanítványa nyert eddig helyezést vagy dícséretet. Tanítványai a Középiskolai Matematikai Lapoknak is állandó megoldói. Oktatómunkájában nem szorítkozik a kiválók nevelésére, minden osztályának matematika tudását rövid idő alatt az átlagot meghaladó színvonalra emeli.

Faragó Lászlónak számottevő irodalmi munkássága van a matematikai didaktika terén. Társszerzője az ipari és mezőgazdasági technikumok IV. osztályos matematika tankönyvének. Három szakköri füzetét haszonnal forgatják a középiskolai diákok. Résztvett egy matematikai szakköri útmutató készítésében. Egy didaktikai dolgozatát a Budapesti Pedagógus Továbbképző Intézet, egy másikat a Magyar Tudományos Akadémia pályadíjjal jutalmazta. Didaktikai cikkei jelentek meg A Matematika Tanítása, a Budapesti Nevelő és a Köznevelés c. folyóiratokban. A Matematikai Lapok példarovatának és A Matematika Tanítása feladatrovatának legkiválóbb feladatmegoldói közé tartozik.

Társulatunk munkájában is aktív részt vesz. A Budapesti és Pest megyei Tagozat titkára, a versenybizottságok állandó résztvevője. Budapesten és vidéken is több előadást tartott a Társulat megbízásából. Ezenkívül a Magyar—Szovjet Baráti Hónapok alkalmával rendezett előadások számára tematikákat dolgozott ki a teljes indukcióról és topológiai problémákról.

Pósa Vilmosné a Budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem tanársegéde, a matematikatanítás módszertanának előadója. A Matematika Tanítása folyóiratnak szerkesztőbizottsági tagja. Az Oktatásügyi Minisztérium mellett tanácsadó szervként működő módszertani bizottságnak megalakulása óta tagja. Már egyetemi hallgató korában a matematika didakti-

kája felé fordult az érdeklődése. Az egyetem elvégzése után egy félévig a bécsi kísérleti iskolákat látogatta. A felszabadulás után kapott csak tanári állást. 1949-ben került a budapesti Pedagógiai Főiskola gyakorló általános iskolájába, majd a Pedagógiai Főiskolára, ahol a matematika szakmódszertanát adta elő 5 évig, a Főiskola megszűntéig. Kiváló pedagógiai munkásságáért 1948-ban a Köztársasági Érdemrend bronz fokozatával tüntették ki.

Az általános iskolai matematikaoktatás számos didaktikai problémáját alaposan kidolgozta, és elkészítette a pedagógiai főiskolák módszertani jegyzeteit, amelyekben az egész általános iskolai matematikaoktatás problematikáját részletekbe menően dolgozta fel. Főiskolai munkáján kívül is sokat dolgozott. Irt általános iskolai szakköri füzetet, útmutatókat szakérettségizők számára és az általános iskolai tankönyvekhez, cikkeket A Matematika Tanításába és egyes részleteket gyűjteményes pedagógiai munkákhoz.

Reményi Gusztáv a nyíregyházi Zrínyi Ilona leánygimnázium tanára. Tanári munkájában nagy figyelmet fordít az önálló gondolkodás kialakítására. Tevékeny részese a matematika tanításában a felszabadulás óta végbemenő fejlődésnek. Több esetben kapott megbízást különböző általános és középiskolai tankönyvek megbírálására, és mindig kitűnt preciz és alapos bírálataival.

A Bolyai János Matematikai Társulat nyíregyházi tagozatának titkára. Nagy szerepe van a tagozat munkájának fellendítésében. Nemcsak a matematika-népszerűsítő és továbbképző előadások szervezésében vesz tevékeny részt, hanem maga is nagysikerű előadásokat tart Nyíregyházán és más helyeken is.

Szakköri munkája példaadó. Egyik szakköri tagja ez évben az Arany Dániel tanulmányi versenyen első díjat, egy másik dícséretet nyert.

Reményi Gusztáv sajátmagát is állandóan képezi. A felszabadulás után két szaktárgya mellé megszerezte harmadiknak az ábrázoló geometria szakos tanári képesítést. A Matematikai Lapok példáinak és A Matematika Tanítása feladatainak egyik legjobb és legprecizebb megoldója. Résztvesz különböző versenybizottságok munkájában. Tagja a pedagógiai főiskolák közti matematikai verseny bírálóbizottságának.

HÍREK

Külföldi hírek

Szovjetunió

N. G. Csudakov kiváló szovjet matematikus ötvenedik születésnapját 1954. decemberében ünnepelték meg a szovjet matematikusok. Csudakov jelenleg a szaratovi egyetem algebrai és számelméleti tanszékének vezetője. Az analitikus számelmélet terén ért el kiemelkedő eredményeket.

1955. február 25-én a moszkvai matematikai társulat a moszkvai egyetemmel együtt Gauss halálának százéves évfordulója alkalmából ülést tartott. P. Sz. Alexandrov lev. tag megnyitó beszéde után V. A. Rübnyikov; P. N. Delaunay és A. I. Markusevics professzorok ismertették Gauss munkásságát.

Május 11-től 13-ig a moszkvai egyetem fennállásának 200 éves évfordulója alkalmából az egyetem ünnepi ülésszakot tartott. Több matematikai előadás is hangzott el. Sz. L. Szoboljev „Numerikus számítások aktuális problémái" címen adott elő. Előadásában a numerikus módszereket mint a funkcionálanalízis egy fejezetét tárgyalta. Részletesen foglalkozott a nagyteljesítményű elektronikus matematikai gépek kérdésével és azzal, hogy a gépek milyen hatást gyakoroltak a matematika fejlődésére.

A moszkvai matematikai társulat május 24-i ülésén megvitatta az Állami Tudományos és Műszaki Könyvkiadó Vállalat (Gosztehizdat) 1956. évi matematikai könyvkiadási tervét.

A. N. Kolmogorov akadémikus a párizsi egyetem meghívására november hónap folyamán előadásokat tartott Párizsban. Ez alkalommal a párizsi egyetem díszdoktorává avatták.

A Szovjetunió Tudományos Akadémiája Fizikai és Matematikai Tudományok Osztálya a Moszkvai Állami Egyetemmel együtt 1956. január 17-től 24-ig összszövetségi konferenciát tart, melynek tárgya a funkcionálanalízis és alkalmazásai. A Szovjetunió Tudományos Akadémiájának Elnöksége ez alkalommal tíznapos tartózkodásra meghívta Moszkvába Riesz Frigyes akadémikust és Szőkefalvi-Nagy Béla levelező tagot.

„Valószínűségszámítás és alkalmazásai" címen nemzetközi folyóirat indul 1956. januárjától kezdődően a Szovjetunióban. A folyóiratot A. N. Kolmogorov akadémikus szerkeszti. Évenként hatszor jelenik meg. Dolgozatokat közlésre a folyóirat bármilyen világnyelven elfogad.

India

A Nemzetközi Matematikai Unió (IMU) legközelebbi kollokviumát Bombay-ben (Tata-Institute of Fundamental Research) tartja 1956. február 14—22-ig. A kollokvium a zeta-függvények témakörével fog foglalkozni. A meghívottak között szerepel Turán Pál akadémikus, aki „On the density hypothesis in the theory of the zeta-function of Riemann" címen tart előadást.

Német Demokratikus Köztársaság

1955. november 23-tól 26-ig a drezdai műegyetem alkalmazott matematikai intézete nemzetközi kollokviumot rendezett a számolástechnika aktuális problémáiról. A kollokviumon Németország mindkét részéből szép számú résztvevő jelent meg. A Szovjetunió, Bulgária, Csehszlovákia, Lengyelország, Magyarország, és Románia delegációkkal képviseltették magukat. Magyar részről Hajós György akadémikus és Békéssy András vett részt a kollokviumon. A kollokvium tárgyát elsősorban az elektronikus számológépek szerkesztésének és használatának problémái alkották. N. I. Lehmann, a drezdai, A. Walther és H. J. Dreyer a darmstadti, A. Svoboda, a prágai, R. Marczinski a varsói és V. Toma dolgozata a bukaresti gépkonstrukciók állásáról számolt be. Különösen érdekes volt A. A. Abramos (Moszkva) előadása a lineáris egyenletrendszerek megoldásánál fellépő hibákról és F. L. Bauer (München) előadása a lineáris algebra iterációs eljárásairól. A kollokvium utolsó napján K. H. Weise (Kiel) ismertette a négyszíntétel bizonyítását célzó gondolatmenetét.

Új folyóirat indult „Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik" címen Günther Asser és Karl Schröter szerkesztésében. A szerkesztőbizottságnak magyar részről Kalmár László és Péter Rózsa is tagjai. A lapot a berlini Humboldt Egyetem Matematikai-Logikai Intézete adja ki.

Román Népköztársaság

A Román Népköztársaság Tudományos Akadémiája 1956. május 27-től június 2-ig tartja meg a Román Népköztársaság matematikusainak IV. kongresszusát. A kongresszusra külföldi matematikusokat is meghívnak. A következő szekcióülések lesznek: 1. algebra és számelmélet, 2. analízis, 3. geometria, 4. alkalmazott matematika, 5. matematika módszertana és története. A kongresszuson a következő témakörökkel kapcsolatban fognak beszámolni a Román Népköztársaságban folyó matematikai munkáról: 1. differenciálgeometria, 2. közönséges differenciálegyenletek és parciális differenciálegyenletek, 3. algebra, topológia, és funkcionálanalízis, 4. függvénytan, 5. alkalmazott matematika.

Egyéb külföldi hírek

1955. június 20-tól 23-ig Kopenhágában tartották meg a valószínűségszámítás telefonproblémáknál való alkalmazásával foglalkozó első nemzetközi kongresszust. A legközelebbi előreláthatólag 1958-ban, Hágában lesz.

A „L'Enseignement Mathématique" című folyóirat — mely egyben a Nemzetközi Matematikai Oktatási Bizottság (CIEM) hivatalos közlönye — szerkesztését J. Karamata, kiváló jugoszláv matematikus vállalta, aki egyben a genfi egyetem professzora is. A lap célkitűzései között szerepel ismertető, didaktikai, valamint matematikatörténeti és filozófiai tárgyú cikkek közlése. A lap részletesen tájékoztatja olvasóit a Bizottság munkájáról.

Az International Radio Scientific Union legutóbbi ülésszakán felhívta a matematikusok figyelmét a következő problémákra:

1. Rádióhullámok terjedése olyan közegben (pl. troposzféra, ionoszféra), amelyben turbulencia lép fel, mely a dielektromos állandónak térbeli statisztikus elosztását eredményezi. Ez viszont a rádióhullámok szóródását (szabálytalan visszaverődés, diffrakció) hozza létre (Booker, Carrol, Megaw és mások).

2. Szükséges lenne megvizsgálni, hogy létezik-e kapcsolat egy lineáris elektromos áramkör „frekvenciasávja" és „időállandója" között. Ez a probléma matematikai szempontból egy valós változós függvény és annak cosinus és sinus Fourier-transzformáltja alakjai közt fennálló geometriai relációval analóg.

3. Meghatározandó egy impulzussorozat átlagos spektruma. Az egyes impulzusok általában identikusak és periódikusak, időben véletlenszerűen következnek be és véletlen deformációknak vannak alávetve. Ezt a problémát R. Fortet tárgyalta (L'Onde Électrique, 34, 683, 1954.). A probléma tovább általánosítható a következőképpen:

4. Össze kell hasonlítani a véletlen jelek spektrumát ugyanazon rendszer által kibocsátott egyetlen jel spektrumával. Célszerű egy adott kibocsátóra a spektrumot oly módon meghatározni, hogy vagy $E(t)$ elemi jelet, vagy $E(t)$ jeleknek periódikus sorozatát vesszük. Azonban az a spektrum, amely

1. $$E(t-t_1)+\ldots+E(t-t_n)$$

összegnek felel meg és amelyben az elemi jelek időben el vannak tolva és a t_i-k valósznűségi változók, nem szükségképpen áll egyszerű kapcsolatban egy egyszerű jel vagy egy periódikus jel spektrumával.

Az amplitudó moduláció és impulzus moduláció összes eseteiben a két spektrum összehasonlítása könnyen elintézhető. Ezekben az esetekben ugyanis, ha az (1) összeget alkalmazzuk mint bemenetet, akkor a

$$S(t-t_1)+\ldots+S(t-t_n)$$

összeg, amely a kimenetet reprezentálja, csupán egy lineáris transzformációban különbözik az (1) összegtől.

Azonban a probléma megoldásra vár abban az esetben is, mikor a transzformáció nem lineáris. Speciálisan frekvencia modulációnál az (1) alakú jelnek olyan kimeneteli jel felel meg, amely komplex alakban az

$$S(t-t_1)\ldots S(t-t_n)$$

szorzatnak felel meg, és a különböző spektrumok közötti kapcsolat nem látszik nagyon egyszerűnek azon esetekben, amikor a modulációs index nem nagyon kicsiny.

Hazai hírek

Rényi Alfréd lev. tag a londoni egyetem meghívására matematikai előadásokat tartott Londonban. Az alábbiakban közöljük előadásainak címét és időpontját, valamint azokét is, melyeket — különböző meghívásoknak eleget téve — egyebütt Angliában, továbbá — visszautazása közben — Franciaországban és Svájcban tartott.

London, Imperial College
okt. 27. A valószínűségszámítás egy új axiomatikus megalapozása I.
nov. 1. A valószínűségszámítás egy új axiomatikus megalapozása II.
nov. 2. A MTA Matematikai Kutató Intézetének munkájáról. (G. A. Barnard professzor szemináriumában.)
London, University College
nov. 3. A rendezett minták elméletéről.
nov. 9. Valószínűségszámítási módszerek alkalmazása a számelméletben. (H. Davenport professzor szemináriumában.)
London, Birckbeck College

nov. 9. A komplex potenciál egyrétűségéről a hidrodinamikában
(A. C. Offord professzor szemináriumában.)
Oxford, Magdalen-College
nov. 5. A valószínűségszámítás egy új axiomatikus megalapozása.
Cambridge, Arts School
nov. 10. A valószínűségszámítás egy új axiomatikus megalapozása.
nov. 11. Valószínűségszámítási módszerek számelméleti alkalmazása
Páris, Institut Henry Poincaré
nov. 16. A valószínűségszámítás alapjairól.
nov. 17. Valószínűségszámítási módszerek a számelméletben.
Genfi Egyetem
nov. 25. A valószínűségszámítás alapjairól.

Erdős Pál, a külföldön élő kiváló magyar matematikus a Tudományos Akadémia meghívására augusztus 28-tól november 10-ig, két és fél hónapot töltött idehaza. Ittartózkodása során 15 előadást tartott. Ezeknek egy részéről lapunk „Társulati élet" rovatában beszámoltunk, a többiekre vonatkozóan előreláthatólag lapunk legközelebbi számában számolunk be. Legközelebbi látogatását a matematikai közvélemény nagy érdeklődéssel várja.

Nikola Minkov, a szófiai Fatechnikai Főiskola Matematikai-Fizikai-Mechanikai tanszékének tanszékvezető docense a kulturális egyezmény keretében szeptember 1-től december 2-ig, három hónapot töltött hazánkban.

Kazimierz Urbanik, wroclawi matematikus, a kulturális egyezmény keretében november 5-től december 31-ig, két hónapot töltött hazánkban. Ittartózkodása folyamán hat előadást tartott, amelyekből lapunk „Társulati élet" rovatában számoltunk be.

Maurice Fréchet francia akadémikus, a Sorbonne tanára, az Akadémia meghívására 10 napot töltött hazánkban, október 15-től október 26-ig. Társulatunkban tartott előadásairól ugyancsak a „Társadalmi élet" rovatban számolunk be. Október 16-án a MTA Mat. Kut. Intézetében „Valószínűségi változók, melyek értéke tetszőleges tér eleme" címen tartott előadást.

Vaclav Pleskot, a prágai Műszaki Főiskola Földmérő kara matematikai tanszékének tanszékvezető egyetemi tanára, az Oktatásügyi Minisztérium vendégeként szeptember 20-tól október 8-ig hazánkban tartózkodott. Október 7-én a MTA Mat. Kut. Intézetében „A nomográfia mai állása" címen tartott előadást.

G. Vranceanu akadémikus, a bukaresti egyetem tanára, a prágai matematikai kongresszusról való hazautazása közben útját megszakítva, 10 napot Budapesten töltött, október 24-től november 2-ig. Társulatunkban tartott két előadásáról Lapunkban ugyancsak beszámoltunk. Okótber 28-án a MTA Mat. Kut. Intézetében „Affin összefüggő terek globális differenciál tulajdonságairól" címen tartott előadást.

A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetévé alakult át. Az erre vonatkozó akadémiai elnöki utasítást az alábbiakban közöljük. A rendelet kelte óta az Intézet a következő csoportokkal bővült: komplex függvénytani csoport, vezetője Turán Pál akadémikus; funkcionálanalízis csoport, vezetője Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag.

A Magyar Tudományos Akadémia elnökének 14/1955. MTA. számú

UTASÍTÁSA

a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete átszervezéséről és elnevezésének megváltoztatásáról.

A matematika eredményeinek a termelésre való alkalmazását célzó módszerek kidolgozása és az alkalmazott matematikai tudományok művelése érdekében a Minisztertanács a 155/1950/(VI. 3.) M. T. számú rendeletével létesítette a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetét.

Az Alkalmazott Matematikai Intézet eddigi működése azt igazolja, hogy meghatározott feladatait eredményesen elvégezte, a gazdasági és tudományos élet különböző szerveitől kapott feladatokat nagyrészt sikeresen megoldotta és főfeladatának tekintette a matematika alkalmazásaira vonatkozó tervszerű kutatómunka megindítását.

Az Intézet további fejlődését gátolja az a körülmény, hogy az elméleti matematikai kutatásnak nincs megfelelő központi szerve, továbbá, hogy a matematika alkalmazásaira vonatkozó kutatásoktól el van választva, így azt kellőképpen nem támogathatja. A magyar matematikai kutatások nemzetközileg elismert színvonala, továbbá az elmélet és a gyakorlat egységének a matematikai kutatások terén való fokozottabb megvalósítása érdekében szükséges a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének átszervezése Matematikai Kutató Intézetté, ezért az alábbi utasítást adom ki:

1. A matematikai kutatás fejlesztése és eredményeinek a népgazdaság érdekében való felhasználása, továbbá a matematikai kutatás terén az elmélet és gyakorlat egységének fokozottabb megvalósítása érdekében a 155/1950/(VI. 3.) M. T. sz. rendelettel létesített Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetét — Matematikai Kutató Intézetté — kell átszervezni.
2. Az Intézet további működését a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézete elnevezéssel folytatja.
3. Az átszervezés nem csökkentheti az intézetnek a matematika alkalmazásai terén eddig végzett munkáját, hanem ellenkezőleg, annak magasabb színvonalra való emelését célozza. Az átszervezéssel el kell érni, hogy az intézet a matematika kutatóit az eddiginél fokozottabban bevonja a matematikának a népgazdaság fejlesztését szolgáló alkalmazásai terén végzett munkájába.
4. Az intézet szervezetét és feladatkörének részletes szabályait az igazgató állapítja meg és azt az Akadémia elnöke hagyja jóvá.
5. Jelen utasítás végrehajtásáról a Magyar Tudományos Akadémia, III. Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának titkára — az intézet igazgatójával egyetértésben — gondoskodik.

Budapest, 1955. július hó 19.

Rusznyák István s. k.
elnök

Kandidátusok

Lapunk legutóbbi száma óta a következő újabb kandidátusi disszertáció megvédésekre került sor, részben hazánkban, részben a Szovjetunióban:

Kis Ottó „Harmonikus és trigonometrikus interpoláció konvergenciájáról" című kandidátusi disszertációját 1955. november 3-án védte meg Le-

ningrádban. Aspiránsvezetője V. I. Krülov professzor volt, az opponensek pedig Sz. M. Lozsinszkij, a matematikai tudományok doktora, és I. A. Jegorova, a matematikai tudományok kandidátusa.

Czách László „Nyeregpontmódszer alkalmazása az elliptikus differenciálegyenletek elméletében" című kandidátusi disszertációját 1955. november 24-én, Leningrádban védte meg. Aspiránsvezetője L. V. Kantorovics professzor volt, az opponensek pedig Sz. G. Mihlin, a matematikai tudományok doktora és G. P. Akilov, a matematikai tudományok kandidátusa.

Pukánszky Lajos „Vizsgálatok a Hilbert-tér operátorgyűrűinek elméletéből" című kandidátusi disszertációját 1955. október 1-én védte meg. Aspiránsvezetője Szőkefalvi-Nagy Béla lev. tag volt, az opponensek pedig Császár Ákos, a matematikai tudományok doktora és Tandori Károly, a matematikai tudományok kandidátusa.

Szendrey János „Gyűrűk Schreier-féle bővítéseiről" című kandidátusi disszertációját 1955. október 1-én védte meg. Opponensek voltak Fuchs László, a matematikai tudományok doktora, és Kertész Andor, a matematikai tudományok kandidátusa.

Seres István „I. Schur egy sejtésének igazolása" című kandidátusi disszertációját 1955. október 21-én védte meg. Opponensek voltak Rédei László akadémikus és Turán Pál akadémikus.

Móor Arthur „Vizsgálatok általános metrikus terekben„ című kandidátusi disszertációját 1955. október 22-én védte meg. Aspiránsvezetője Varga Ottó lev. tag volt, az opponensek pedig Hajós György akadémikus és Fejes-Tóth László, a matematikai tudományok doktora.

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége ezúton kéri fel a Társulat összes tagjait, hogy tudományos munkáik különlenyomatainak lehetőleg teljes sorozatát a Társulat különlenyomat-gyűjteménye számára szíveskedjenek a Társulat címére (Budapest, V. Reáltanoda u. 13—15.) mielőbb eljuttatni. A Társulat Elnöksége ugyanis azt szeretné, ha a Társulat könyvtárának különlenyomat-gyűjteménye a magyar matematikusok munkáinak különlenyomatait lehetőleg hiánytalanul tartalmazná.

Kérjük, hogy különlenyomataik eljuttatásával egyúttal szíveskedjenek közölni azon dolgozataik jegyzékét, melyekből nélkülözhető különlenyomatuk nincsen, hogy azokat, illetve azok fotokópiáit a Társulat más úton beszerezhesse. A Társulat Elnöksége köszönettel veszi, ha a Társulat tagjai a birtokukban lévő, magyar vagy külföldi szerzők dolgozatait tartalmazó felesleges különlenyomatokat a Társulat könyvtárának adományként átadják. A Társulat Elnöksége előre is köszönetet mond tagjainak.

Társulati élet

A Bolyai János Matematikai Társulat Budapesti és Pestmegyei Tagozatának előadásai 1955. szeptember 1-től, december 31-ig

Szeptember 23.

ERDŐS PÁL: Elemi geometriai problémák.
(Ifjúsági Matematikai Kör előadása.)

Szeptember 30.

ERDŐS PÁL: A valószínűségszámítás néhány alkalmazásáról a számelméletben és analízisben.

Legyen (1) $f(x+1)=f(x)$, $-\infty<x<\infty$, $\int_0^1 f(x)=0$, $\int_0^1 f^2(x)=1$, legyen továbbá $\frac{n_{k+1}}{n_k}>c>1$. Felvetődött a kérdés, vajjon igaz-e, hogy majdnem minden x-re (2) $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(n_k x)=0$.

Kai, Salem és Zygmund (1)-et bebizonyították abban az esetben, ha

$$\int_0^1 (f(x)-\Phi_n(f))^2=0\left(\frac{1}{(\log n)^{\varepsilon}}\right),$$

ahol $\Phi_n(f)$ $f(x)$ Fourier sorának n-edik részletösszegét jelenti. Raikov viszont bebizonyította, hogy (2) igaz, ha $n_k=2^k$ (ez esetben elég feltenni, hogy $f(x)$ L_1-ben van.)
Azonban az előadó bebizonyította (Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 67 (1949), 51—56), hogy (2) nem igaz, sőt van oly (1)-et kielégítő $f(x)$, melyre

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(n_k x)=\infty,$$

majdnem minden x-re (sőt $f(x)$ L_∞-ben van, azaz $\int_0^1 f(x)^p dx$ minden p-re létezik.) Nem ismeretes azonban, vajon létezik-e oly (1)-et kielégítő korlátos $f(x)$, melyre (2) nem igaz.
Hasonlóképpen nem ismeretes a válasz Koksma következő kérdésére:

Igaz-e, hogy minden (1)-et kielégítő $f(x)$-re teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(kx) = 0. \tag{3}$$

Koksma (3) teljesülését $f(x)$-re vonatkozó igen általános feltételek mellett bebizonyította.

Október 8.

Fried Ervin: Szerkesztések csak körző használatával.
(Előadás középiskolás diákok részére.)

Október 14.

Freud Géza: Hővezetési feladatok összetett peremfeltételek mellett. Bizonyos hővezetési feladatoknál figyelembe kell venni a hővezető közeggel érintkező testek hőkapacitását is. Ez bonyolultabb peremfeltételekre vezet, mint amilyeneket az irodalomban eddig ismertettek; az előadó ezeket összetett peremfeltételeknek nevezte el. Az előadó ismertette az összetett peremfeltételekhez tartozó feladatok megoldását az egydimenziós esetben. Bebizonyította a feladat megoldásának egyértelműségét és stabilitását.

Október 19.

Surányi János: Az elemi függvénytan alapfogalmainak kialakítása a középiskolában.
(Előadás középiskolai tanárok részére.)

Október 21.

Steinfeld Ottó: Félcsoportok kvázi-ideáljairól.
Az előadás definiálja a félcsoport kváziideáljának fogalmát. A kvázi-ideálra vonatkozó néhány egyszerű eredmény kimutatása után bebizonyította St. Schwarz azon sejtését, hogy egy félcsoport bármely minimális kváziideálja csoport és egy-egy alkalmas minimális balideál és jobbideál metszeteként adható meg. Ezenkívül érvényes, hogy minimális kváziideál létezése esetén az F félcsoport Szuskevics-féle magja az F összes minimális kváziideáljának egyesítési halmaza. Az elmondott eredményekből következményként adódik a félcsoportokra vonatkozó néhány ismert eredmény is.

Október 21.

Erdős Pál: Számelméleti problémák. (Ifjúsági Matematikai Kör.)

Október 22.

Maurice Fréchet (Paris): Funkcionálisok lokális szélsőértékei.
Definíciók. BWH-tér: absztrakt elemek olyan E halmaza, amelyben összeadás, valós számokkal való szorzás, semleges elem és norma van értelmezve a vektorterekhez analóg tulajdonságokkal $a+0=a$, $\|0\|=0$, $\|r\cdot a\|=|r|\cdot\|a\|$, $\|a+b\|\leqq\|a\|+\|b\|$, stb. Funkcionális a BWH-térben: $y\in E$-hez hozzárendelt $G(y)$ szám. Szélsőérték = maximum vagy minimum.
$G(z)$-nek lokális minimuma van a $z\equiv y$ helyen, ha van y-nak olyan $\|z-y\|<\varrho$ környezete, ahol $G(z)\geqq G(y)$. Erős a minimum, ha $G(z)>G(y)$ a $z\neq y$ esetben.
$G(z)$-nek van (általánosított) n-edrendű variációja a $z\equiv y$ helyen

ha vannak α-tól nem függő $G_1(y, u), \ldots, G_n(y, u)$ funkcionálisok, melyekre $y, u \in E$ és valós α mellett

$$G(y + \alpha u) = G(y) + \alpha G_1(y, u) + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\alpha^n}{n!} G_n(y, u) + \alpha^n \varepsilon_n(y, u, \alpha)$$

ahol

$$\lim_{\alpha \to 0} \varepsilon_n(y, u, \alpha) = 0. \tag{1}$$

Ekkor $G_n(y, u)$ a $G(z)$-nek n-edrendű általánosított variációja az y helyen az u növekmény mellett, jelölése $G_n(y, u) = \delta^n_{u^n} G(y)$. Bebizonyítható, hogy 1^0 $G_1, \ldots, G_{n-1}$ nem mások, mint az y-nak és u-nak megfelelő első, $\ldots, n-1$-edrendű általánosított varriációk; 2^0 hogy $G_n(y, \lambda u) = \lambda^n G_n(y, u)$ minden λ számra.

Legyen $m_n(y)$ és $M_n(y)$ a $G_n(y, \Delta y)\ \|\Delta y\|^n$ kifejezés alsó ill., felső határa, mikor Δy befutja E-t úgy, hogy $\|\Delta y\| \neq 0$.

$G(z)$ n-edrendű variációja a $z \equiv y$ helyen rendelkezik a P tulajdonsággal, ha (1)-ben a határérték egyenletes az $\|u\| = 1$ feltétel mellett, s a Q tulajdonsággal, ha 1^0 $G(z)$-nek y környezetében is van n-edrendű variációja, 2^0 fennáll

$$G(y + u) = G(y) + \delta_u G(y) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \delta^{n-1}_{u^{n-1}} G(y) +$$
$$+ \frac{1}{n!} \delta^n_{u^n} G(y + \vartheta u), \quad \text{ahol} \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Október 22.

Erdős Pál: Interpoláció s approximáció polynomokkal.

Legyen $\begin{matrix} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}\ x_2^{(2)} \\ \cdots \end{matrix}$ normál pontcsoportsorozat, ahol az $x_i^{(k)}$ pontok a $(-1, +1)$-ben vannak s ha $\omega_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i^{(n)})$, akkor az

$$X_k^{(n)} = x_k^{(n)} + \frac{\omega'(x_k)}{\omega''(x_k)}$$

pontok mind a $(-1, +1)$-en kívül vannak. Fejér bebizonyította, hogy minden folytonos függvényhez létezik oly $f_n(x)$ polinom sorozat, $f_n(x) \to f(x), f_n(x)$ foka legfeljebb $(2n-1)$-ed fokú s $f_n(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)})$, $1 \leqq i \leqq n$.

Előadó bebizonyította a következő tételt (Annals of Math. 44 (1943) 330—337). Legyen $x_i^{(n)}$, $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq n < \infty$ oly pontcsoportsorozat, melyre $|l_k^{(n)}(x)| < c$, $-1 \leqq x \leqq 1$, ahol c csak a pontcsoportsorozattól függő konstans $\left(l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}\right)$. Legyen $f(x)$ tetszésszerinti folytonos függvény. Akkor minden

ε-hoz létezik oly $f_n(x)$ polinom-sorozat, melyre $f_n(x) \to f(x)$, melynek foka $< n(1+\varepsilon)$ s melyre $f_n(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)})$, $1 \leqq i \leqq n$. E tétel több irányban általánosítja Fejér tételét s Bernstein egy tételének általánosításaként is tekinthető. Az ily tulajdonságú matrixokat nevezzük A tulajdonságúnak. A fentebb idézett cikkben szükséges és elégséges feltételt adott az előadó arra, hogy egy matrix A tulajdonságú legyen s egy másik Fejértől felvetett problémát is megadott, de helyszűke miatt ezeket nem tárgyalhatja.

Október 25.

Maurice Fréchet (Paris): Egy szorzási szabályra nézve deriválható felületek.

$c_1, \ldots, c_p$ egységvektorok az E_p térben; $w = x_1 c_1 + \cdots + c_p x_p$, $f_1, \ldots, f_n$ egységvektorok az E_n térben; $W = Y_1 f_1 + \cdots + Y_n f_n$ $W = \Phi(w)$ deriválható R-re vonatkozóan a $w = w^0$ helyen, ha 1^0 $\Phi(w)$ differenciálható a $w = w^0$ helyen,

2^0 $d\Phi(w) = \Phi' \cdot dw$, ahol $\Phi' = \sum \Phi'_k f_k$ nem függ w-től.

Az R szabály szükségképpen

$$f_k \cdot c_r = \sum_{k=1}^{n} a_{krh} f_k$$

alakú. Φ' a Φ-nek egy R-re vonatkozó *deriváltja* a w^0 helyen. (w) *paranalitikus* R-re vonatkozólag w^0 *környezetében.*

$$n = 3, \quad p = 2$$

Az S *felület* deriválható egy R szabályra vonatkozólag ($n = 3$, $p = 2$), ha van olyan

$$X = X(u, v), \quad Y = Y(u, v), \quad Z = Z(u, v)$$

paraméteres előállítása, amelynek az S értelmezési tartományában, D-ben, R-re vonatkozólag deriválható $\Phi(w) = Xf_1 + Yf_2 + Zf_3$ függvény felel meg, ahol $w = ue_1 + ve_2$.

Ha $\Phi' = L(u, v) f_1 + M(u, v) f_2 + N(u, v) f_3$, akkor az

$$X = L(u, v), \quad Y = M(u, v), \quad Z = N(u, v)$$

felület S-nek *egy* R-re vonatkozó *derivált-felülete.* Egy S felület *exponenciális felület R-re vonatkozólag,* ha egybeesik R-re vonatkozó egyik derivált-felületével.

További részletek: előzetes közlemény Verhandelingen der kon. nederland. Akad. van Wetenschappen *21* (1954), 1—44; részletesen Annales École Normale Supérieure (3) *71* (1954), 29—85.

Október 31.

G. Vranceanu: Bizonyos szimmetrikus terek globális tulajdonságairól.

Az előadó azzal a kérdéssel foglalkozott, hogy bizonyos zárt terek hány környezettel boríthatók be. Vizsgálatait kiterjesztette a szférikus térre, az elliptikus térre, a komplex, projektív térre és kvaternió-projektív térre is. A vizsgálatok elvezettek e tereknek a szférikus térből fibrálással való származtatásához. Foglalkozott még az előadó többek között az említett terekben két ponton áthaladó geodetikus vonalak számával is.

November 2.

ERDŐS PÁL: Polinomok számelméleti tulajdonságairól.
Legyen $f(x)$ egész együtthatós irreducibilis polinom. Előadó bebizonyította, hogy (London Math. Soc. Journal 27 (1952) 7—15.)

$$c_1 n \log < \sum_{k=1}^{n} d(f(k)) < c_2 n \log n.$$

Valószínűleg igaz, hogy $\sum_{k=1}^{n} d(f(k)) = (1 + o(1)) n \log n$, de ennek bebizonyítása igen nehéznek látszik, $n = 2$-re ez Bellman és Shapiro eredménye.
Legyen $f(x)$ egész együtthatós polinom, mely nem bontható fel csupa lineáris egész együtthatós polinom szorzatára. Nagell bebizonyította, hogy $\prod_{k=1}^{n} f(k)$ szorzat legnagyobb prímfaktora $> c n \log n$. Ez eredményt előadó $n(\log n)^{c \log\log\log n}$-re élesítette. (London Math. Soc. Journal 27 (1952) 379—384).
Legyen $f(x)$ harmadfokú irreducibilis polinom. Akkor végtelen sok n mellett $f(n)$ négyzetmentes szám (London Math. Soc. Journal 28 (1953), 416—425).

November 4.

CSÁSZÁR ÁKOS: Beszámoló a prágai kongresszusról. Klubest.

November 11.

Téma nélküli klubest.

November 12.

HAJÓS GYÖRGY: Vektorok alkalmazása geometriai feladatok megoldásánál. (Előadás középiskolás diákok számára.)

November 16.

VARGA TAMÁS: Algebrai függvények. (Előadás középiskolai tanárok számára.)

November 18.

VINCZE ISTVÁN: Megjegyzések a transzcendens egészfüggvények elméletéhez.
(1. november 5.-i szegedi előadás. Előadó befejezésül ismertette a tárgyalt kérdés összefüggését bizonyos feltételes valószínűségekre vonatkozó problémával.)

November 28.

FENYŐ ISTVÁN: A disztribucióelmélet és annak alkalmazásai. (Az Eötvös Loránd Fizikai Társulattal közös rendezésben)
Előadó ismertette a L. Schwartz-féle disztribució fogalmát és a disztribuciókon végezhető legfontosabb műveleteket. Vázolta az elmélet alkalmazhatóságát elsőrendű közönséges lineáris egyenletrendszerek megoldására.

December 9.

K. URBANIK (Wroclav): Disztribuciók elmélete és alkalmazása sztochasztikus folyamatoknál.

Az előadás alapvető mondanivalója a sztochasztikus folyamat fogalmának olyan általánosítása, hogy a folyamat deriváltja mindig létezzék. Az általánosított folyamatok realizációi az általános függvények (disztribuciók). Előadó olyan általánosított folyamatokkal foglalkozott, amelyek vagy független növekményűek, vagy független értékűek, vagy stacionáriusak. A független értékű folyamatok a Brown-féle mozgásban találnak alkalmazásra (Langevin egyenlete, harmonikus sztochasztikus oszcillátor egyenlete). Az előadás során az előadó igazolta általánosított stacionárius folyamatokra Hincsin azon tételének analogonját, mely szerint egy folyamat korrelációs függvénye előállítható egy nem csökkenő függvény Fourier transzformáltjaként, továbbá bebizonyította az általánosított stacionárius folyamat spektrális felbontására vonatkozó tételt, végül pedig az ergod-tételt. A részletes bizonyítások a Studia Matematicában fognak megjelenni.

December 10.

SURÁNYI JÁNOS: Rácspontok és törtek.
(Előadás középiskolás diákok számára).

December 16.

Az 1955. évi Kürschák József verseny eredményhirdetése.
A feladatokat Hajós György ismertette.
Az előadást megelőzően osztottuk ki az 1955. évi Beke Manó emlékdíjat.

December 23.

K. URBANIK (Wroclav) Az elágazó sztochasztikus folyamatok egy problémájáról.
(Születési és halálozási folyamatok egy problémájáról). Jelentse $S(\xi)$ a részecskék maximális számát egy ξ_t homogén születési és halálozási folyamatban. Előadó a

$$\varrho(\xi) = \sup_{\xi_t = S(\xi)} t - \inf_{\xi_t = S(\xi)} t$$

valószínűségi változó feltételes várható értékét határozta meg azon feltétel mellett, hogy $S(\xi) = n$,

$$(1) \qquad E(\varrho(\xi) \mid S(\xi) = n) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} \frac{U_{k-1}}{k} \left(\frac{U_{n-k}}{U_n} - \frac{U_{n-k-1}}{U_{n-1}} \right)$$

ahol $n \geqq 1$,

$$U_n = (-a_0)^{-n} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

$U_0 = 1$, $U_n = 0$ $n < 0$-ra és a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

jelenti a folyamat átmenetvalószínűségeit. Jelöljük P-vel a ξ_t folyamat kihalási valószínűségét. Ha $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 a_n P^n < \infty$ akkor az (1) fel-

tételes várható értékre fennáll

$$E(\varrho(\xi)\,|\,S(\xi)=n)=\begin{cases}-\dfrac{1}{nm_1}+o\left(\dfrac{1}{n}\right) & \text{ha } m_1\neq 0\\ \dfrac{1}{m_2}+o(1) & \text{ha } m_1=0\end{cases}$$

aszimptotikus formula, ahol

$$m_1=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n P^{n-1} \quad \text{és} \quad m_2=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\,a_n P^{n-2}$$

December 30.

Aczél János: A geometriai objektumok elméletéről. A geometriai objektumok elmélete 20 éves történetének és felosztásának (definíció, klasszifikációelmélet, derivációelmélet, objektumok algebrája) ismertetése után áttekintette a klasszifikációelmélet főbb eredményeit. Részletesebben az egydimenziós egy- és többkomponensű első és magasabb osztályú objektumok normálalakjára vonatkozó tételeket fejti ki. Ugyancsak bizonyítással együtt közöl néhány eredményt a kovariáns deriváltakra vonatkozóan, továbbá gondolatmenetet vázol az objektumok algebrájának egy eredményéhez.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szegedi Tagozatának rendezvényei 1955. január 1-től december 31-ig

Február 13.

Szegedi középiskolák matematikai tanulóversenye felszabadulásunk tízéves évfordulójának tiszteletére.

Február 18.

Aczél János: Megjegyzések a disztributivitásról.
K. Borsuk azon problémájának megoldása, hogy melyek az összes (folytonos, leoszthető) asszociatív műveletek, amelyekre az összeadás disztributív. Több bizonyítást adott az előadó. Ekvivalens tétel a szorzásról. Alkalmazás Jánossy problémájára a valószínűségszámítás megalapozásával kapcsolatban. (A valószínűségek összeadási és szorzási képletének levezetése természetesnek látszó feltevésekből.)

Február 26.

Surányi János: Elsőfokú egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságáról. (l. Matematikai Lapok, VI. 2—3. sz. 274. oldal)

Március 5.

A szegedi középiskolák matematikai tanulóversenyének eredményhirdetése.

Március 11.

Kovács László: Az 1954. évi Schweitzer verseny feladatainak ismertetése. (l. Matematikai Lapok VI. kötet 4. sz.)

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Március 12.

Szász Gábor: Megjegyzések Areskin egy hálóelméleti tételéhez. G. Ja. Areskin szovjet matematikus a disztributiv hálók kongruenciarelációira nemrég kapott igen értékes eredményeinek leírásához bevezette a „gyengén-komplementumos" hálók fogalmát. Az előadó a hálók kongruenciarelációi és ezek magjai közötti összefüggések általános vizsgálatából kiindulva, ismertette Areskin eredményeit, majd az Areskin definíciójánál egyszerűbb jellemzést adott a gyengén-komplementumos hálókra. Végül e hálók szerkezetére vonatkozó néhány saját-eredményét ismertette. — Az előadás a magyar—szovjet barátság hónapja keretében történt.

Március 12.

Steinfeld Ottó: Féligegyszerű gyűrűk jellemzése kváziideálokkal. Bevezette a gyűrű kváziideáljának mint az ideálok általánosításának fogalmát. A féligegyszerű gyűrűk Noether-féle alaptételének, a Fuchs—Szele tételnek és a kváziideálokra vonatkozó segédtételeknek felhasználásával a féligegyszerű gyűrűket bizonyos minimális kváziideálok direkt összegeként jellemzi. Ez a jellemzés lehetőséget nyujt a Wedderburn—Artin tételek és a féligegyszerű gyűrűkre vonatkozó egyéb eredmények új bizonyítására is.

Március 19.

A magyar—szovjet barátság hónapja keretében matematikai előadások középiskolai tanulók részére.

Március 26.

Rényi Alfréd: A. Ja. Hincsin és E. B. Dünkin tételei és azok általánosítása. (l. IV. évf. 2—3. 275. oldal)

Március 26.

Szele Tibor: Topologikus gyűrűk.
Legyen az R tetszőleges egységelemes gyűrűnek a G Abel-féle csoport endomorfizmusgyűrűjében való kanonikus reprezentációja P. Előadó 0-rendszernek nevezte a P gyűrű olyan α_ν elemeinek rendszerét, amelyekre bármely $x \in G$ esetén $x\alpha_\nu = 0$, legfeljebb véges sok ν index kivételével. Ekkor a P gyűrűben bevezethető olyan (szeparált) topológia, amelyben a 0-rendszerek és csak ezek összegezhetők. Ebben a topológiában P ama A részhalmazai a zártak, amelyekre abból, hogy β-hoz bármely $x \in G$-re végtelen sok $x\beta = x\alpha_\nu$-t kielégítő $\alpha_\nu \in A$ tartozik, $\beta \in A$ következik.

Március 28.

Kertész Andor: Féligegyszerű endomorfizmusgyűrűk.
Legyen G tetszőleges Abel-féle torziócsoport. A G csoport teljes endomorfizmusgyűrűjének Jacobson-féle radikálja akkor és csak akkor 0, ha G elemi Abel-féle csoport, azaz bármely 0-tól különböző elemének rendje négyzetmentes szám.

Április 15.

Pintér Lajos ismertette Ahiezer—Glazman: Hilbert tér lineáris operátorainak elmélete c. könyvét.

Április 20.

ALEXITS GYÖRGY: Konstruktiv függvénytani problémák.
(l. Acta Mat. Hung. 1955. VI. sz. 41—46. oldal).

Május 7.

TAKÁCS LAJOS: Részecskeszámlálókkal kapcsolatos valószínűségszámítási problémák. Az előadás részecske számlálóknál fellépő észlelési és koincidencia kérdésekkel foglalkozott. Előadó a részecskeszámlálók szokásos I. modelljét (Geiger—Müller számláló) és II. modelljét (elektron sokszorozó kristály számlálók) azon általánosabb esetben vizsgálja, midőn a holt idők, illetve impulzus idők valószínűségi változók, és a részecskének a számlálócsőhöz történő érkezési időpontjai úgynevezett rekurrens folyamatot alkotnak.

Május 21.

HAJÓS GYÖRGY: Ki nem színezhető gráfokról.
Az előadás olyan előírást ismertetett, amelyik az $n+1$ szögpontú teljes gráfból kiindulva, bizonyos műveletek alkalmazásával elvezet minden n színnel ki nem színezhető gráfhoz.

Június 6.

STEFAN SCHWARZ: Über die Theorie der Charaktere bikompakter Halbgruppen über maximale Ideale in bikompakten Halbgruppen.
(l. Matematikai Lapok VI. kötet 2—3. 280—281. oldal).

Október 8.

ERDŐS PÁL: Additiv számelméleti problémák.
(l. szept. 24.-i debreceni előadás).

Október 22.

Helyi csoport alakulása Békéscsabán, a következő tárgysorozattal:
ACZÉL JÁNOS: A kúpszeletek középiskolai tárgyalása.
BAKOS TIBOR: Számolást helyettesítő rajzok az iskolai oktatásban.
Ünnepélyes alakulás.
Üzemlátogatás.
VERMES MIKLÓS: Optikai kísérletek.
Ismerkedési est a TTIT békéscsabai székházában.

Október 23.

HÓDI ENDRE: Feladatmegoldások.

November 5.

VINCZE ISTVÁN: Transzcendens egész függvények maximum-modulusáról.
Az $F(z)=a_0+a_1z+\cdots$ transzcendens egész függvényre ismeretes az

$$|a_n|<\frac{M(r)}{r^n},\quad M(r)=\max_{|z|=r}|F(z)|,\quad n=1,\ 2,\ldots$$

Cauchy-féle egyenlőtlenség. Előadó kimutatta, hogy r-nek egy és csakis egy $r=r_n$ értékére legkisebb a jobboldal és így legélesebb az egyenlőtlenség. Az $r_n (n=1,2,\ldots)$ sorozat vizsgálata azt mu-

tatja, hogy az analízis több összefüggése (pl. a Stirling-formula egy gyengébb alakja) e sorozatra érvényes tételek speciális esete. Előadó a továbbiakban tételt adott az r_n sorozat sűrűsége és az $F(z)$ függvény növekedési rendje közötti összefüggésre. Végül az

$$\int_0^\infty \frac{r^n}{M(r)}\, dr$$

momentumokra adott becslést az együtthatók segítségével.

November 19.

Freud Géza: Ortogonális polinomok korlátosságáról és aszimptotikájáról.
Az előadó Ja. L. Geronimus két tételét ismertette, az eredetitől néhány pontban eltérő bizonyítással.

December 10.

Császár Ákos: A normális eloszlás egy jellemzése.
A normális eloszlás egy régóta ismert és a hibaszámításban gyakran felhasznált jellemző tulajdonságáról megmutatta az előadó, hogy az a szokásos feltevések (sűrűségfüggvény létezése, pozitív volta stb.) nélkül is jellemzi a normális valószínűség eloszlást.

December 10.

K. Urbanik: (Wroclav): Disztribuciók elmélete és alkalmazása sztochasztikus folyamatoknál.
(l. Matematikai Lapok, 1956. VII. 244. oldal).

A Bolyai János Matematikai Társulat Debreceni Tagozatának 1955. évi előadásai

Január 27.

Kalmár László: Az általános rekurziv függvény fogalmához. Az előadó mindenekelőtt ismertette az általános rekurziv függvény fogalmát, kidomborítva ennek a függvényegyeletekkel való kapcsolatát. Majd ismertette K. Schröter következő problémáját: azonos-e az általános rekurziv függvények osztálya azoknak az aritmetikai függvényeknek osztályával, amelyekhez van olyan függvényegyenlet, amelynek a kérdéses függvény az egyik ismeretlen megoldása, valamint e próbléma pozitív megoldásának jelentőségét azon Church-féle hipotézis alátámasztása szempontjából, amely szerint a minden egyes helyen véges számu lépésben kiszámítható aritmetikai függvények osztálya azonos az általános rekurziv függvények osztályával. Végül negatív értelemben oldotta meg az előadó a Schröter-féle problémát és rámutatott arra, hogy az így kapott tétel nyomós ellenérv az említett Church-féle hipotézissel szemben.

Február 24.

Kertész Andor: Az euklideszi geometria vektoralgebrai felépítése. — Előadó vázolta az euklideszi geometria axiomatikus vektoralgebrai felépítését, majd példákkal illusztrálta a vektoralgebrai módszer használhatóságát elemi geometriai tételek igazolására.

Február 28.

Gyires Béla: G. Landsberg determináns tételének általánosítása. Az előadásban a szerző G. Landsberg 1910-ben megjelent determináns-tételének általánosítását adta. A tételből speciális esetként a Gram-féle determináns általánositott alakjának egyik előállítása következik. Innen pedig Toeplitz, illetve Hankel-féle determinánsok alakjára vonatkozó azonosság.

Március 4.

Nemes László: Egyenlőtlenségek.
MSzBH előadás a hajdúszoboszlói Általános Gimnáziumban.

Március 10.

Soós Gyula: Egyenlőtlenségek.
MSzBH előadás a Debreceni Fazekas Mihály Gyakorló Gimnáziumban.

Március 11.

Aczél János: A geometriai objektumok elméletéhez. Az egykomponensü differenciális objektumokat egydimenziós térben a transzformáció-függvény analicitásának feltevése mellett Dubnov, Vagner és Penzov határozták meg. A Lie-elméletre való visszavezetés módszerénél ez a feltétel nem is enyhíthető. Golabnak sikerült e feltevést (függvényegyenletekre való visszavezetéssel) kétszeri, illetve egyszeri differenciálhatóságra csökkenteni. A jelen előadásban az előadó ugyanazon eredményeket kizárólag (egyes változókan való) folytonosság feltevése mellett vezette le. Részletesebben annak Golabén alapuló, de a feltételek enyhítésén túlmenően is lényegesen rövidebb bizonyítását fejtette ki, hogy nincs harmadiknál magasabb osztályú objektum a mondott kategóriában.

Március 16.

Mátyás Antal: Feladatmegoldások.
MSzBH előadás a hajdúszoboszlói Irinyi János Általános Gimnáziumban.

Március 17.

Botos György: Feladatmegoldások.
MSzBH előadása az Arany János Diákotthonban.

Március 21.

Vikár István: Feladatmegoldások.
MSzBH előadás a Szeghalmi Bolyai Farkas Gimnáziumban.

Március 28.

Barna Béla: A térképszínezésről.
MSzBH előadás a Debreceni Kossuth Gyakorló Gimnáziumban.

Március 28.

Jermendi László: Végtelen sorok.
MSzBH előadás a Szeghalmi Bolyai Farkas Általános Gimnáziumban.

Április 15.

Szép Jenő: Modern algebrai problémák. (Algebrai struktúrák felbontása.)

Május 13.

Rényi Alfréd: Valószínűségszámítási módszerek a számelméletben.

Előadó vázolta, hogy milyen eredmények várhatók a valószínűségszámítás számelméleti alkalmazásaitól, kitért néhány ezzel kapcsolatos problémára és ismertetett néhány idevágó eredményt, így többek között Turán Pál eredményeit az egész számok törzstényezőinek számára vonatkozólag, és Erdős Pál és M. Kac azon tételét, hogy ha $U(n)$ jelenti az n szám különböző törzstényezőinek számát, és $W(N,x)$ azon $n \leqq N$ természetes számok számát, amelyekre

$$\frac{U(n) - \log\log N}{\sqrt{\log\log N}} < x$$

akkor

$$\lim_{N\to\infty} \frac{W(N,x)}{N} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Előadó megjegyezte, hogy Erdős és Kac tételéből következik, hogy azon n számok sűrűsége, melyekre $\frac{U(n) - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}} < x$, szintén egyenlő $\Phi(x)$-szel, azaz, ha $W_N(x)$ jelenti azon N alatti n számok számát, amelyekre $\frac{U(n) - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}} < x$, akkor $\lim_{N\to\infty} \frac{W_N(x)}{N} = \Phi(x)$, vagyis az $\frac{U(n) - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}}$ $(n \leqq N)$ számelméleti függvény értékkészlet-eloszlása konvergál a normális eloszláshoz, ha $N \to \infty$. Erdős egy másik tétele szerint ha

$$\frac{|k - \log\log N|}{\sqrt{\log\log N}} < C, \tag{1}$$

ahol $C > 0$ állandó, és ha $P_k(N)$ jelöli azon N alatti n természetes számok számát, melyekre $U(n) = k$, akkor $P_k(N) = \frac{(\log\log N)^k}{k!} e^{-\log\log N}(1 + o(1))$, ahol $o(1)$ az (1) feltétel mellett k-ban egyenletesen tart 0-hoz, ha $N \to \infty$. Erdősnek ebből a tételéből egyszerűen bebizonyítható, hogy ha $D(n) = U(n) - [\log\log n]$ és $Q_i(N)$ jelenti azon N alatti n számok számát, melyekre $D(n) = i$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, akkor

$$\lim_{N\to\infty} \frac{Q_i(N)}{Q_j(N)} = 1 \quad (i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{2}$$

A (2) reláció azt jelenti, hogy a $D(n)$ függvény $(n \leqq N)$ értékkészlet-eloszlása ha $N \to \infty$ az összes egész számok halmazán egyenletes (feltételes) valószínűség-eloszláshoz konvergál. Ez a

példa is mutatja, hogy a feltételes valószínűségi mezők az előadó által kidolgozott elmélete (1. Rényi A.: A valószínűségszámítás új axiomatikus felépítése, MTA. III. o. Közleményei 4. (1954). 369—428) alkalmazásra talál a számelméletben is. Az előadó rámutatott az említett elmélet más számelméleti alkalmazási lehetőségeire is.

Előadó rámutatott, hogy az összes $U(n)$-re vonatkozó említett tételek érvényesek $V(n)$-re is, ahol $V(n)$ jelöli az n szám összes törzstényezőinek számát, és foglalkozott a következő tétellel: ha $\delta(n) = V(n) - U(n)$, akkor azon természetes számok sűrűségét, amelyekre $\delta(n) = k$, s_k-val jelölve ($k = 0, 1. 2, \ldots$)

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k = \prod_{p=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 + \frac{1}{p - z}\right) \quad (|z| < 2) \qquad (3)$$

ahol a szorzat a összes p törzsszámokra terjesztendő ki. A (3) képletből $z = 0$ helyettesítéssel nyerjük azt a jól ismert eredményt, hogy a négyzetmentes számok sűrűsége $\frac{6}{\pi^2}$.

Május 13.

T. Sós Vera és Turán Pál: Komplex számok hatványösszegeiről. Az előadásban a második szerző könyvében foglalt főtételek extremum-feladat formáiról volt szó. A bennük szereplő legjobb állandókra előadók az eddigieknél jobb egyenlőtlenségeket vezettek le. A javítások H. Cartan egy tételének elkerülésén alapszanak.

Május 26.

Moór Artúr: Általános differenciálgeometriai terekről. (Pedagógus továbbképző előadás.)

Június 3.

Kertész Andor: Szele Tibor matematikai munkássága. Az előadó ismertette Szele Tibor matematikai munkásságát, különös tekintettel azokra az eredményekre, amelyeket Szele Tibor a végtelen Abel-féle csoportok elméletében, a gyűrűelméletben és a topológikus algebrában ért el.

Szeptember 24.

Erdős Pál: Az additív számelmélet néhány kérdéséről. Legyen $a_1 < a_2 < \cdots$ egész számok végtelen sorozata. $f(n)$ jelentse az $n = a_i + a_j$ egyenlet megoldásainak számát. Turán és az előadó azt sejtették, hogy ha $f(n) > 0$ minden elengedő nagy n-re, akkor $\overline{\lim}\, f(n) = 0$. Ez ma sincs bebizonyítva. Továbbá sejtették, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = cn + O(1) \qquad (1)$$

lehetetlen. Fuchs cornelli professzor és az előadó nemrég bebizonyították a következő élesebb formában:

Legyen $c > 0$, akkor:

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = cn + o\left(\frac{n^{1/4}}{(\log n)^{1/2}}\right) \qquad (2)$$

lehetetlen. Ezen eredmény nyilván összefügg az ismert Hardy–Landau eredménnyel az $x^2 + y^2 < n$ egyenlet megoldásainak számáról. A részletes bizonyítás a London Math. Soc. Journalban fog megjelenni.

Október 19.

Soós Gyula: Térfogatszámítás.
(Előadás tanárok részére.)

Október 20.

Gyires Béla: Szakkörökben tárgyalható valószínűségszámítási kérdések.
(Előadás tanárok részére.)

November 4.

Fejes-Tóth László: Szabályos alakzatok.
Az előadó ismertette a diszkrét mozgáscsoportok klasszikus elméletének, valamint ezek szélsőértéktulajdonságokon alapuló ujabb elméletének néhány eredményét.

November 21.

Varga Ottó: A derivált matrixok egy alkalmazásáról.
Előadó a Sylvester-Franke determináns tételre egy szemléletes geometriai bizonyítást adott. A bizonyítás p-vektorok segítségével történt.

December 1.

Rapcsák András: Magasabbrendű számtani haladványok.
(Előadás tanárok részére.)

December 6.

Fenyő István: A disztribució elmélet alkalmazása lineáris differenciálegyenletrendszerek megoldására.
Előadó a disztribució elmélet segítségével numerikus számításra is alkalmas eljárást adott

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ik}\left(\frac{d}{dx}\right)\gamma_k = f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

alakú differenciálegyenletrendszerek megoldására, ahol P_{ik} polinómok, valamint

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ik}\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)\gamma_k = f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

differenciálegyenletrendszerek $\gamma_k^{(l)}(0) = \alpha_k^{(l)}$, $\gamma_k^{(l)}(1) = \beta_k^{(l)}$ alakú peremértékproblémájának megoldására.

A Bolyai János Matematikai Társulat Miskolci Tagozatának rendezvényei 1955. január 1-től december 31-ig

Január 13.

Bede Lajos: Háromszögekkel kapcsolatos feladatok megoldása. Előadás tanárok számára.

Január 26.

Nikodémusz Antal: Hiperbolikus tipusú differenciálegyenletek. Az előadó hiperbolikus tipusú egyenleteket kevéssé ismert fizikai példával, hangsebesség fölötti linearizált síkbeli potenciáláramlással vezette be. Bevezette a karakterisztika fogalmát és ennek segítségével bizonyította a megoldás létezését adott kezdőérték mellett a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(\bar{M}^2-1)-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0 \qquad (\bar{M}>1, \text{ konst.})$$

egyenletre és egy grafikus megoldási eljárást mutatott be.

Február 9.

Batár Zoltán: A számelmélet elemei I. Előadás tanárok számára.

Február 9.

Borbély Samu: Diff. egyenletek formális megoldási elvei I. Előadás tanárok számára.

Február 16.

Batár Zoltán: A számelmélet elemei. II. Előadás tanárok számára.

Február 18.

Raisz Iván szervezésében középiskolai délután, a következő témákkal: 1. Kürschák József élete és két tételének ismertetése. 2. Szélsőérték feladat szemléletes megoldása, 3. Logaritmus egyenletek.
A témákat középiskolai tanulók dolgozták ki.

Február 23.

Ankét az érettségi előkészitésről.

Február 28.

Bede Lajos: A négyszögek tanítása. Előadás tanárok számára.

Március 2.

Batár Zoltán: Számelméleti kongruencia és alkalmazásai. Előadás diákok számára.

Március 2.

Nikodémusz Antal: Pythagoras tétel bizonyításai. Előadás ált. isk. tanárok számára.

Március 2.

Obadovics J. Gyula: A számfogalom felépítése.
Előadás ált. isk. tanárok számára.

Március 4.

Bede Lajos: Négyszögek tanítása.
Előadás ált. isk. tanárok részére.

Március 4.

Hosszú Miklós: Egyenlőtlenségek. MSZBH.
Előadás diákok számára. (Kilián Gimn.)

Március 9.

Szele Tibor: Geometriai szerkesztések algebrai elmélete.
Előadás tanárok számára.

Március 9.

Parai Gusztáv: Geometriai szerkesztések.
Előadás tanárok számára.

Március 10.

Fényes Imre: Fejezetek a fizika hazai történetéből.
Előadás tanárok számára.

Március 11.

Czibere Tibor: Egyenlőtlenségek. MSZBH.
Előadás diákok számára. (Vámos I. Leánygimn.)

Március 11.

Obadovics J. Gyula: Egyenlőtlenségek. MSZBH
Előadás diákok számára. (Gépipari Technikum).

Március 11.

Burány János: Egyenlőtlenségek. MSZBH
Előadás diákok számára (Kohászati Technikum)

Március 11.

Maschek Tivadar: Feladatmegoldások. MSZBH
Előadás diákok számára (Szerencs, Bocskay Gimn.)

Március 16.

Szarka Zoltán: A térképezésnél használt vetületek. MSZBH
Előadás diákok számára (Földes Ferenc Gimn.)

Március 16.

Huszthy László: Egyenlőtlenségek. MSZBH
Előadás diákok számára (Ózd, Kohászati Techn.)

Március 16.

Czibere Tibor: Geometriai szerkesztések. MSZBH
Előadás diákok számára, (Tokaj, Petőfi Gimn.)

Március 16.

Törő Béla: Feladatmegoldások. MSZBH
Előadás diákok számára. (Ózd, József Attila Gimn.)

Március 16.

Hosszú Miklós: Egyenlőtlenségek. MSZBH
Előadás diákok részére, (Bányaipari Techn.)

Március 18.

Fónyad Zoltán: Egyenlőtlenségek. MSZBH
Előadás diákok számára (Közgazdasági Leány Technikum)

Március 25.

Hoffman Andor: A számegyenes felépítése, racionális és irracionális számok. MSZBH
Előadás diákok részére (Tanítónőképző)

Március 25.

Batár Zoltán: Egyenlőtlenségek. MSZBH
Előadás diákok számára (Vilamosenergiaip. Technikum)

Március 25.

Surányi János: Geometria és számelmélet. MSZBH
Előadás tanárok számára.

Március 25.

Batár Zoltán: Egyenlőtlenségek. MSZBH
Előadás diákok részére (Közgazdasági Techn.)

Március 30.

Batár Zoltán: Egyenlőtlenségek. MSZBH
Előadás diákok részére (Mezőkövesd, I. László G.)

Március 31.

Középiskolai délután. (Kilián Gimn.)
Témák: 1. Permutáció, 2. Kombináció, 3. Variáció.
A témákat középiskolai tanulók dolgozták ki.

Április 1.

Gáspár Gyula: A determinánselmélet megalapozása.
Az előadó ismertette a determinánselmélet axiomatikus megalapozására vonatkozó eddigi vizsgálatokat (Weierstrasse, Artin, Menger vizsgálatait), majd bemutatta saját axiomarendszerét, amelyik közvetlenül kapcsolódik a teljes matrixgyűrűben értelmezett műveletekhez.

Április 1.

Hoffman Andor: A számegyenes felépítése, racionális és irracionális számok. (MSZBH előadás a Rákóczi Gimnáziumban, Sárospatakon)
Nagy Ilona: Egyenlőtlenségek.
(MSZBH előadás a Sárospataki Tanítókepző Intézetben)

Április 1.

Batár Zoltán: Egyenlőtlenségek.
(MSZBH előadás a Sátoraljaújhelyi Kossuth Gimnáziumban)

Április 1.

Kiss Barna: Feladatmegoldások
(MSZBH előadás a Sátoraljaújhelyi Közgazdasági Technikumban).

Április 6.

Petrich Géza: Síkmértani szerkesztések a térgeometria segítségével. (Előadás tanárok részére)

Április 13.

György Árpád: Fizikai kísérletek bemutatása magyarázatokkal.
(Előadás diákok számára)

Április 13.

Batár Zoltán: Matematikai mulatságok.
(Előadás diákok részére)

Április 19.

Bede Lajos: Áttekintés a VI. osztályos geometriáról.
(Előadás tanárok számára)

Április 20.

Borbély Samu: Differenciálegyenletek alkalmazása technikai problémák megoldására. Az előadó — folytatva régebbi előadását — bemutatta lineáris differenciálegyenleteknek operátoros megoldási módját inhomogén esetben. Megvizsgálta e módszer alkalmazhatósági területét és egyben bemutatta, hogy az un. Heaviside-féle kalkulus milyen feltételek mellett alkalmazható. Külön kitért a fizikai alkalmazásokra is, így elsősorban a tranziens jelenségek tárgyalására.

Április 27.

Kósch János: Pythagoras-tétel.
(Előadás ált. iskolai tanárok számára)

Április 27.

Raisz Iván: A trigonometria felépítése.
(Előadás tanárok részére)

Április 28.

Pazár Béla: Szekvenciális analízis.

Május 4.

Neukomm Gyula: Érdekes szerkesztési feladatok.
(Előadás tanárok számára)

Szeptember 28.

Tóth Sándor: A kinetikus gázelmélet néhány alapvető kérdése.
(Előadás diákok számára)

Szeptember 28.

Batár Zoltán: Kongruens számok és alkalmazásai.
(Előadás diákok számára)

Október 5—7.
Évnyitó ankét.

Október 5.
Borbély Samu: Elnöki megnyitó
Batár Zoltán: Titkári beszámoló
Petrich Géza: A térmértan oktatásának kérdései.
Bede Lajos: Az algebrai alapfogalmak bevezetése az általános iskolában.

Október 6.
Darkó Béla: Az analitikus geometria tanítása.
Barth Klára: A százalékszámítás a közönséges törtekkel kapcsolatban.

Október 7.
Borbély Samu: Hővezetési problémák matematikai tárgyalása.

Október 7.
Czibere Tibor: Hővezetési problémák klasszikus esetben.
Az előadó ismertette a hővezetés problémakörével kapcsolatos hőtani alapfogalmakat. Ezután levezette a hővezetés differenciálegyenletét általánosan, majd tárgyalta, hogy milyen problémákat vet fel az a tény, ha a differenciálegyenletben szereplő ún. termikus paramétereket nem tekintjük állandóknak, amint nem is állandók azok, hanem a hőmérséklet függvényei. Ezután bemutatta a kérdés megoldását néhány esetben, adott kezdeti és peremfeltételek mellett. Itt kitért Ju. Tajc vizsgálataira is, amelyek acélöntvények hőkezelési kérdéseivel kapcsolatosak.

Október 7.
Maschek Tivadar: Hővezetési paraméterek mérése magas hőmérsékleten. — Előadó ismertette azokat a kísérleti berendezéseket, amelyek segítségével a hővezetési paramétereket (fajhő stb.) mérték 0-tól 800° C-ig terjedő hőintervallumban. Ezután rátért a mért eredmények kritikai vizsgálatára és egyben ismertette azokat az elveket, amelyek alapján folytatni fogják ezirányú kutatásaikat a mérési határok pontosságának a fokozásával. Előadása során eredeti konstrukciójú berendezéseket is bemutatott.

Október 12.
Obadovics J. Gyula: Matematikai versenyfeladatok.
(Előadás középiskolai tanárok részére)

Október 12.
Gáspár Gyula: A függvényfogalom legmegfelelőbb kialakítása a középiskolában és ezzel kapcsolatos kérdések.
(Előadás tanárok számára a Sárospataki Rákóczi Gimnáziumban.)

Október 12.
Batár Zoltán: Matematikai tréfák.
(Előadás diákok számára a Sárospataki Rákóczi Gimnáziumban.)

Október 19.

Prékopa András: Független valószínűségi változók végtelen sorainak konvergenciájáról.

Október 26.

Batár Zoltán: Matematikai tréfák.
(Előadás az Ózdi Általános Gimnáziumban, diákok számára).

November 16.

Gáspár Gyula: Lineáris egyenletrendszerek nem kommutatív struktúrákban. — Az előadó áttekintést adott a nem kommutatív struktúrákon felépített lineáris egyenletrendszerek megoldására vonatkozó eddigi kutatásokról, így többek között ismertette Dieudonné vizsgálatait. Ezután áttekintést adott saját e területre eső vizsgálatairól, amelyeket kvaterniókon szemléltetett.

November 16.

Törő Béla: Matematikai műszerek.
(Előadás diákok számára a Sárospataki Rákóczi Gimnáziumban.)

November 23.

Bede Lajos: Függvénytani alapfogalmak az általános iskolai anyaggal kapcsolatosan.
(Előadás tanárok számára)

November 23.

Összevont szakköri ülés, az alábbi előadásokkal:
Parai Gusztáv: Pythagorasi egyenlet és pythagorasi számhármasok. Ezután diákok a következő előadásokat tartották: Bolyai János ifjúkora, feladatok Bolyai korából, Pythagoras tétel két bizonyítása, tréfás matematikai feladatok. A Középiskolai Matematikai Lapokból feladatmegoldások.

November 25.

Bede Lajos: Algebrai alapfogalmak előkészítése.
(Előadás tanárok számára)

November 30.

Szabó Jenő: Analitikus geometria tanítása a középiskolában.
(Előadás tanárok számára)

December 3.

Obádovics J. Gyula: Szovjet matematikai folyóiratszemle.
(Előadás tanárok számára)

December 7.

Batár Zoltán: Sorozatok és sorok.
(Előadás ált. isk. tanárok számára)

December 2.

Bede Lajos: Az algebrai alapfogalmak előkészítése az ált. iskola felsőbb osztályaiban.
(Előadás a Szerencsi Gimnáziumban)

December 14.

Szabó Jenő: Az analitikus geometria tanítása a középiskolában. II. rész.
(Előadás tanárok számára).

December 21.

Pásztor István: A halmazelmélet elemei.

A Bolyai János Matematikai Társulat Pécsi Tagozatának rendezvényei 1955. január 1-től június 30-ig

Január 6.

Bán Lajos: Hogyan tanítom az analitikai geometriát?
Előadás után vita.

Január 12, 19.

Bodlaki Ákos: Apollonius érintési feladatai. (Feladatmegoldás).

Január 28.

Nagy Sándor: Valószínűségszámítás alapfogalmai.

Február 23.

Székely Jenő: A komplex számokról.

Március 16.

Hites Ferenc: A függvénytan módszeres tanítása a középiskolában. Előadás után vita.

Március 20.

Achátz Imréné: A matematika tanításának fejlődése a felszabadulás óta.

Március 22.

Székely Jenő: A matematika tudomány fejlődése a felszabadulás óta.

Március 30.

Selényi Géza: Egyenletek egészszámú megoldásairól.

Április 25.

Ligeti Béla: Elemi geometriai bizonyítások.

Május 4.

Szőkefalvi-Nagy Béla: Héron képletéről és ennek általánosításairól.

Május 7.

Középiskolások matematikai versenye.

Május 25.

Nagy Sándor: Érdekes valószínűségszámítási feladatok.

Október 24.

Kalmár László: Hogyan küzdhet a matematikus tanár a pedagógiai pesszimizmus ellen.

Szőkefalvi-Nagy Béla: Egyesített események valószínűségéről.

Október 25.

Mosoni György: Dolgozatírás és javítás módszere az általános iskolai matematikai oktatásban.
Előadás után vita.

Október 25.

Székely Jenő: A számelmélet elemei.
Megbeszélés az általás iskolai matematikai oktatásról.
Vitavezető: Achátz Imréné.

Október 25.

Rábai Imre: Versenyfeladatok,

November 1.

Bóka István: Ábrázoló mértan (tanfolyam heti 2 óránként).

November 1.

Bóka István: A III. és IV. osztályos geom. módszeres feldolgozása (2 hetenként, ált. isk. nevelők részére).

December 9.

Achátz Imréné: A matematikai fogalmak és szaknyelv.

December 15.

Székely Jenő: Megemlékezés Bolyai Jánosról.

December 15.

Bóka István: Menelaos és Ceva tételéről és azok néhány alkalmazásáról.

A Bolyai János Matematikai Társulat Veszprémi Tagozatának előadásai 1955. január 1-től december 31-ig

Április 8.

Róth Erzsébet: Feladatmegoldások.
(Előadás Keszthelyen, diákok számára.)

Április 13.

Somkuti Lajosné: Egyenletek egészszámu megoldásai.
(Előadás tanárok részére.)

Május 5.

Freud Géza: Néhány hővezetési probléma megoldása.

Május 5.

Fejes-Tóth László: Egy geometriai szélsőérték-probléma a növények világában. — TTIT-vel közös rendezés.

Április 15.

Rozsnyói Lajos: A mértan tanításának kérdéseiről.

Október 25.

Vámos Zsuzsa: Valószínűségszámítás.
(Előadás tanárok és diákok részére.)

November 17.

Fejes-Tóth László: Szimmetria a természetben, a művészetben és a geometriában. — A TTIT-vel közös rendezés.

December 8.

Fáy László: A bolygók mozgásának törvényei.

A Bolyai János Matematikai Társulat Egri Tagozatának előadásai 1955. január 1-től december 31-ig

Február 19.

Nagy Ferenc: A mértani helyek tulajdonságai.
(Előadás ált. iskolai nevelők számára.)

Március 9.

Hajdu Imre: Feladatmegoldások.
(MSZBH előadás általános iskolai tanárok számára.)

Március 11.

Hartly Domokos: Maximum-minimum feladatok.
MSZBH előadás ált. isk. nevelők számára.)

Március 16.

Rónai Kálmán: Egyenlőtlenségek.
(MSZBH előadás középiskolai diákok részére, a Gyöngyösi Ált. Gimnáziumban.)

Március 22.

Egyed Antal: Egyenlőtlenségek.
(Előadás a Gyöngyösi Gimnáziumban.)

Március 24.

Fodor Miklós: Feladatmegoldások.
(MSZBH előadás a Hatvani Vegyipari Technikumban, középiskolások részére.)

Március 30.

Nagy Ferenc: A mértani helyek mint szerkesztési módszer.
(Előadás ált. iskolai nevelők részére.)

Április 23.—24.

Konferencia a Társulat és a Központi Pedagógustovábbképző Intézet közös rendezésében következő tárgysorozattal:

Április 23.

Bemutató tanítás a Dobó Gimnáziumban. I. gimn. összefoglaló óra számtanból. Tartotta Békési Pál.

Április 23.

Makai Endre: Egy minimum probléma a tehetetlenségi nyomatékkal kapcsolatosan.

Április 23.

Fenyő István: A függvényábrázolás néhány problémája.

Április 24.

Strommer Gyula: Projektív ábrázoló geometria.

Április 24.

Hódi Endre: A trigonometria néhány előnyös alkalmazása.

Június 8.

Pelle Béla: Feladatmegoldások.
(Előadás az Ált. Leánygimnáziumban.)

Junius 11.

Pelle Béla: Feladatmegoldások.
(Előadás az Áll. Leánydiákotthonban.)

Június 17.

Nagy Sándor: A valószínűségszámításról.

Október 23.

Tasnády István: A matrixszámítás elemei.

December 8.

Strommer Gyula: Térmértani problémák.

Könyvismertetés

A. O. Gelfond: Differenciaszámítás
c. könyvének ismertetése

A differenciaszámítás alapfogalmai és klasszikus feladatai körülbelül az infinitezimális számítások elemeivel egyidősek: egy $f(x)$ függvény $\Delta f = f(x+h)-f(x)$ első differenciájának (növekményének) és $\Delta^2 f, \Delta^3 f, \ldots$ magasabb differenciáinak fogalma és meghatározása nevezetes esetekben, kapcsolata a függvénynek egy aritmetikai haladvány mentén felvett szukcesszív értékeivel, a különbségi hányados általánosításaiként felfogható ún. osztott differenciák[1] szerepe a parabolikus interpoláció alapfeladatának megoldásában, a differenciák felhasználása interpolációnál és közelítő kvadratúránál ekvidisztans alappontok esetén, a legegyszerűbb differenciaegyenletek és ezek megoldása „szummálás" útján stb. — mindez lényegileg már NEWTON, TAYLOR, STIRLING előtt ismert volt, majd a 18. században és a múlt század első felében — EULER, LAPLACE, LAGRANGE, GAUSS, JACOBI, CSEBISEV és mások munkássága nyomán — az analízis önálló és nagyjából lezártnak látszó ágává fejlődött. Az interpoláció és mechanikus kvadratúra problémaköre volt az, mely új fejlődés kiinduló-pontjává vált a mult század végén (STIELTJES); az idevágó valós függvénytani módszerekkel nyert eredményeket ma már nem annyira a differenciaszámításhoz, mint inkább a Sz. N. BERNSTEIN és iskolájának kezdeményezésére kialakult általános közelítés-elmélet (konstruktív függvénytan) diszciplinájához számítjuk.[2] Ugyancsak tért hódított a századforduló óta a komplex változós függvénytan módszereinek felhasználása a differenciaszámításban; ebben a szellemben íródott és lényeges előrehaladást jelentett NÖRLUND nagy összefoglaló monográfiája (1924). Itt már a differenciaképzés és az inverz művelet (alkalmas értelemben vett „szummálás")[3] elméletének a differenciál- és integrálkalkulusnak megfelelő, rendszeres felépítését találjuk; mivel az eredmények kézenfekvő határátmenetek elvégzése esetén ismert klasszikus tényekbe mennek át, az utóbbiaknak lényeges mélyítésével, általánosításával állunk szemben, mely az alkalmazások igényeit is kielégíti.

[1] Valóban indokolt KOWALEWSKI elnevezése: „NEWTON-féle differenciahányadosok" (Interpolation und genäherte Quadratur, 7. o.), bár ez kevésbé terjedt el a szakirodalomban.

[2] Hadd utaljunk itt AHIJEZER: Az approximáció elméletéről és NATANSZON: Konstruktív függvénytan c. (magyar fordításban nemrég megjelent) kitűnő művére.

[3] NÖRLUND egy $\varphi(x)$ függvény „szummájának" az $F(x+h)-F(x) = h\varphi(x)$ (h fix!) differenciaegyenletnek egy általa bevezetett, meglehetősen „erős" összegezési eljárással nyerhető megoldását nevezi („főmegoldás"). Vö. Vorlesungen über Differenzenrechnung, 43. o.

A. O. GELFOND akadémikus szóbanforgó (magyar fordításban 1954 végén kiadott) művének eredetije 1952-ben jelent meg Moszkvában és Leningrádban; a magyar kiadást TURÁN PÁL látta el gondolatébresztő előszóval. A mű anyaga és tárgyalásmódja több szempontból eltér az ismert tankönyvekétől. Jellegét elsősorban az határozza meg, hogy a szerző a klasszikus anyag lényeges fejezeteinek ismertetése mellett részletesen kifejti a komplex interpoláció, approximáció-elmélet számos eredményét is, valamint ezek felhasználását az egész függvények modern elméletében és a számelméletben; olyan terület ez, mely A. MARKOV és D. SZELIVANOV differenciaszámítási munkásságának szovjet folytatói közül mindenekelőtt a szerzőnek köszönhet sokat.

A bevezetés megfogalmazza és jellemző példákon illusztrálja a differenciaszámítás alapvető feladatait: interpoláció, szummálás, differenciaegyenletek megoldása a „valósban" és a komplex változós analitikus függvények körében.

Az I. fejezet tárgya: interpoláció. LAGRANGE, NEWTON és HERMITE interpolációs képleteinek részletes tárgyalása során szóba kerülnek az elsőfajú Csebisev-polinomok mint egy ismert szélsőértékfeladat megoldásai, továbbá az osztott differenciák különböző előállításai tetszőleges valós és komplex interpolációs alappontok esetén; az adott háromszögmátrixhoz tartozó interpolációs eljárás ismertetéséhez természetes módon kapcsolódik a processzus konvergenciájának, függvények interpolációs sorral való előállíthatóságának kérdése. Minthogy a Lagrange-féle interpolációs eljárás folytonos függvény esetében divergálhat, kézenfekvő olyan polinomtípusok keresése, melyekkel *minden*, pl. a [0, 1] számközben folytonos függvény tetszőleges pontossággal, egyenletesen megközelíthető.[4] Az egyszerű explicit megoldást nyújtó ún. BERNSTEIN-polinomokat a szerző tetszőleges alappontok esetére általánosítja; foglalkozik továbbá BERNSTEIN tételével a legjobb közelítésről és a komplex síkban approximációra legalkalmasabb ún. FABER-polinomokkal.

A II. fejezetben a gamma-függvény alaptulajdonságainak és az egész függvények elméletére vonatkozó legfontosabb tényeknek összefoglalását a közönséges és általános Newton-sornak (mint interpolációs soroknak) a tárgyalása követi. Azok az itt közölt tételek, melyek egész függvények általános Newton-sorba való fejthetőségére vonatkoznak, többnyire a szerzőtől származnak, akárcsak a fejezet végén bemutatott két szép számelméleti alkalmazás egészértékű függvényekről és bizonyos számok transzcendenciájáról.[5]

A III. fejezet egy általános komplex interpolációs feladatnak van szánva: „Nevezzük valamely $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ egész függvény egy *elemének* az $f_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n C_{nk}$ sorösszeget, ahol $C_{0k}, C_{1k}, C_{2k}, \ldots$ adott $\|C_{nh}\|$ kétszeresen végtelen mátrix elemei. Előállítandó $F(z)$, ha ismeretes $f_1, f_2, \ldots$." E problémának igen nevezetes speciális eseteit sikerül a szerzőnek megoldania, így pl. $F(z)$ megkonstruálását $F^{(n)}(n) = A_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ ismeretében; más esetekben a kérdés az ún. „komplex momentumok problémájára" vezethető vissza.

A IV. fejezet ismét klasszikus anyaggal foglalkozik: $\Delta F(x) = \varphi(x)$ differenciaegyenlet megoldásával abban az esetben, ha $\varphi(x)$ adott polinom és az

[4] WEIERSTRASS első approximáció-tétele szerint ilyen polinom-közelítés minden zárt közben folytonos függvénynél lehetséges.

[5] Az utóbbi tételnek: α és e^{α} nem lehet egyidejűleg algebrai szám, kivéve az $\alpha = 0$ esetet — közvetlen folyománya pl. e és π transzcendenciája. Még messzebb menő eredményt ért el GELFOND, midőn 1934-ben SCHNEIDERrel egyidőben bebizonyította HILBERT következő sejtését: ha $\alpha \neq 0, 1$, továbbá α és β algebrai, β irracionális szám, akkor α^{β} valós értéke transzcendens.

$f(x_0)+f(x_0+h)+\cdots+f(x_0+nh)$ típusú összegek „zárt" aszimptotikus előállításának megadásával $n\to\infty$ esetére („összegezés"). Az előbbi feladat az analízisnek szinte minden ágában nagy szerepet játszó Bernoulli-féle számokra és polinomokra, az utóbbi pedig az aszimptotikus sorfejtéseknél szinte nélkülözhetetlen ún. Euler-féle összegező formulára vezet. E ponton a szerző — matematikus-egyéniségének megfelelően — nem elégszik meg a Bernoulli-polinomok alaptulajdonságainak és az Euler-képlet egyszerű következményeinek bemutatásával, hanem kitér a Bernoulli-féle számok *aritmetikai* sajátságaira is és bebizonyítja Staudt szép tételét: bármely B_ν Bernoulli-féle szám $C_\nu-\sum\frac{1}{k+1}$ alakban állítható elő, ahol C_ν egész szám és az összegezés olyan k természetes számokra terjesztendő ki, melyekre $k+1$ törzsszám, továbbá $k\mid\nu$.

Az utolsó, V. fejezet a lineáris homogén és inhomogén differenciaegyenletek meglehetősen komplett tárgyalását nyújtja, kiemelve mindazt, ami itt lineáris differenciálegyenletek elméletével analóg. (Az együtthatók variálásának módszere, kapcsolat inhomogén és megfelelő homogén egyenlet megoldása között, „exponenciális helyettesítés" és karakterisztikus egyenlet állandó együtthatók esetén stb.) Annál szembetűnőbbek az újszerű eredmények: Poincaré nevezetes tétele ill. ennek Perron-féle kiterjesztése bizonyos lineáris differenciaegyenletek megoldásainak aszimptotikus viselkedéséről és Hölder tétele, mely szerint a gamma-függvény — az egyszerű $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ differenciaegyenlet egyik megoldása — nem elégíthet ki egyetlen (polinom-együtthatós) algebrai differenciálegyenletet sem.[6] Az utóbbi — mint látjuk — éppen a differencia- és differenciálegyenletek megoldásainak *eltérő* jellegét mutatja; bizonyítása Ostrowski kb. harminc éve közölt elegáns módszerét követi. — A fejezetet a végtelen rendű lineáris differenciálegyenletek legegyszerűbb osztályának tárgyalása és — alkalmazásként — a függvényperiódus fogalmának többirányú kiterjesztése zárja le.

Gelfond műve nem tankönyv a szó szoros értelmében. Ezt ő maga is érezteti az előszóban, midőn hangsúlyozza, hogy a keretek közé be kívánta venni a komplex differenciaszámítás több újabb keletű mély eredményét az alkalmazásokkal együtt, melyek eddig túlnyomórészt csak folyóiratokban voltak hozzáférhetők, s ugyanakkor felsorolja azokat a fejezeteket (I., IV., V.), melyeket egészben vagy részben egyetemi oktatási célokra felhasználhatóknak tart. A szerző csak a differenciaszámítás jelzett új iránya tekintetében törekszik a teljességre s azt nagy mértékben el is éri, talán csak a faktoriális-sorok ma már szépen kiépült elmélete hiányolható, hiszen ezek a differenciaegyenletek studiumánál hasonló szerepet játszanak, mint a differenciálegyenletek esetében a hatványsorok, úgyhogy fontosságuk mind elméleti, mind gyakorlati szempontból számottevő. A könyvet világos, jól áttekinthető és pedagógiailag is átgondolt előadásmódja mindenesetre kiválóan alkalmassá teszi arra, hogy egyetemi hallgatók vagy a témától távolabb állók a klasszikus anyag tanulmányozására használják, míg a többi (modern anyagot felölelő) fejezet kétségtelenül a szakember számára is elgondolkoztató, aspiránsoknak pedig disszertációjuk tárgykörének megválasztásánál tekintetbe jövő olvasmány. Külön ki kell emelnünk az osztott differenciákkal vagy a $\Delta F(x)=\varphi(x)$ differenciaegyenlet tárgyalásával kapcsolatban *többféle* lehetséges út egyidejű instruktív bemutatását, valamint a számos helyen beiktatott példákat és gyakorlatokat. A mű kiállítása szép, a sajtóhibák száma aránylag kevés; a szerkesztés gondosságát

[6] Höldernek a mult század végén talált tétele eddig — tudomásom szerint — csak két könyv anyagában szerepelt: Nielsen: Handbuch der Theorie der Gammafunktion c. művében (1906) és Nörlund fent említett differenciaszámításában.

mutatja, hogy a szerzőnek egy kb. könyve megjelenésével egyidőben közölt kiegészítő észrevételét [7] (az I. fejezet 5. §-ára vonatkozólag) a magyar kiadásban már felhasználták a megfelelő szövegrész kijavítására.

Hazai matematikai irodalmunk eddig csak egy differenciaszámítást mondhatott magáénak: Jordan Károlynak angol nyelven megjelent, nagyszabású és nemzetközi viszonylatban is elismerést szerzett munkáját,[8] mely elsősorban a matematikai statisztika igényeit tartja szem előtt és bővelkedik az érdekes történeti megjegyzésekben. Ami az idevágó magyar nyelvű szakirodalmat illeti, ki kell emelnünk, hogy mind Beke Manó, mind Szász Pál kétkötetes analízise tartalmazza az interpoláció-elmélet elemeit; az utóbbinak jelentékenyen kibővült, 1951-ben megjelent második kiadása felöleli a magyar matematikai iskolának, mindenekelőtt Fejér Lipótnak, Erdős Pálnak, Turán Pálnak és Grünwald Gézának, az interpolációra ill. mechanikus kvadratúrára vonatkozó számos új eredményét és — szemben a legtöbb nagy külföldi analízissel — a Bernoulli-féle számok és polinomok mellett az Euler—Maclaurin-féle összegező formulát és alkalmazásait is. Ugyancsak kiterjedt interpolációelméleti anyagot talál az olvasó Natanszon közelítés-elméleti könyvének magyar fordításában. Gelfond fent ismertetett munkája a maga új anyagával és a klasszikus eredmények tárgyalásában érvényesülő eredeti szempontjaival mindamellett hézagpótló mű, melynek megjelenése bizonyára ösztönzőleg hat majd a komplex interpoláció, valamint a komplex differenciaszámítás és az analitikus számelmélet közös határterületein folyó hazai kutatásokra.

Mikolás Miklós,
a matematikai tudományok kandidátusa.

[7] А. О. Гельфонд, Об одной интерполяционной задаче. Доклады Академии Наук СССР, Том 84 (1952), 429—432.

[8] Ch. Jordan: Calculus of finite differences, Budapest, 1939. (654 oldal.)

HIBAIGAZÍTÁS

Lapunk előző kötetébe néhány értelemzavaró sajtóhiba csúszott:

191. o. (1) formulában $\wedge(\wedge$ helyett $\wedge$ írandó

192. o. alulról 4. sor $\psi_{\gamma i_1 \ldots i_n}(x)$ helyett $\psi_{\lambda i_1 \ldots i_n}(x)$ írandó

194. o. felülről 4—5. sorban helyesen:„... egy-egy $\xi(x), \xi_1(x), \xi_2(x)$ egyváltozós ...“ olvasandó.

194. o. táblázatában az $x \in I^m$, $y \in I^2$-nek megfelelő kockában $\zeta_2(x)$ helyett $\xi(x)$ olvasandó.

ОПЕЧАТКА

Формула в резюме на 197. странице должно быть:

$$\forall x_1 x_2 \exists x_3 \mathbf{M}_1 \wedge \forall y_1 y_2 y_3 \mathbf{M}_2$$

ERRATA

P. 197. in line 6 from the bottom read „aquaints" for „aquints"
in line 5 from the bottom read „announced" for „annouueed"
the formula should read:

$$\forall x_1 x_2 \exists x_3 \mathbf{M}_1 \wedge \forall y_1 y_2 y_3 \mathbf{M}_2$$

A kézirat beérkezett: 1956. I. 6. — Példányszám: 1300
Terjedelem 13 (A/5) ív
A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Szöllössy Károly

Szegedi Nyomda Vállalat 55 6394 Felelős vezető: Vincze György

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

СОДЕРЖАНИЕ

Фридьеш Рис 1
Эрдёш П.: О двух задачах, опубликованных в журнале „Математикаи Лапок“ 10
Николеску, М.: О математической деятельности Математического института Румынской Академии Наук и Кафедры анализа Университета, Бухарест 18
Хайнал, А. и Калмар, Л.: Замечание к системе аксиом Гёдела теории множеств I. 26
Бихари, Н.: Об одном свойстве монотонности Функции Бесселя . . . 43
Фрид, Э.: Алгебраически замкнутые тела как конечные сокращения . 47
Облат, Р.: О Дьюла Вальи (25 янв. 1855 г.—13. окт. 1913 г.) 61
Туран, П.: О распределении цифр „факториальной“ системы чисел . 71
Реньи, А.: О распределении цифр в рядах Кантора 77
Ацель, Я.: О введении естественного логарифма и экспоненциальной функции 101
Кёвари, Т.: Об одной задаче П. Турана 106
Хеппеш, А. и Ревес, П.: К проблеме Боршука о раздроблении . . . 108
Мате, Я.: Об одной задаче истории китайской математики 112
Проблемы 114
Примери 156
Премия Мано Беке 167
Математические и личные известия 171
Из жизни общества 177
Обзор книги 201
Опечатки 205

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg géprással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Ára 14,— Ft.

Előfizetés évi 20,— Ft.

CONTENT

Frédéric Riesz: † 1
P. Erdős; Remarks on two problems of the Mathematikai Lapok . . . 10
M. Nicolescu: On the mathematical activity of the Mathematical Institut of the Rumanian Academy and of the Chair ot the Analysis at the University of Bucarest 18
A. Hajnal and L. Kalmár: Remark on the Gödelian axiom system of the set theory I. 26
I. Bihari: On a monotonicity-property of the Bessel functions 43
E. Fried: Algebraically closed fields as finite extensions 47
R. Obláth: Life and works of J. Vályi 61
P. Turán: On the distribution of the digits in Cantor-systems 71
A. Rényi: On the distribution of the digits in Cantor' s series 77
J. Aczel: On the introduction of the exponential and logaritmic function 101
T. Kővári: On a problem of Turán 106
A. Heppes and P. Révész: On the splitting problem of Borsuk . . . 108
J. Máté: On problem in the history of Chinese mathematics 112
Problems 114
Examples. 156
Report on the Beke-prize 167
News 174
Society life 177
Book review 201
Errata 205

Különböző külföldi természettudományos, műszaki, orvosi stb szakfolyóiratok 1953—1954. évi vegyes számai a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila u. 3. sz. alatti lapüzletében példányonként megvásárolhatók.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.

312.046

MATEMATIKAI LAPOK

VII. ÉVFOLYAM

3-4.

SZÁM

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT
BUDAPEST, 1956

MATEMATIKAI LAPOK

A Bolyai János Matematikai Társulat lapja. Megjelenik évenkint négyszer.

Budapest, 1956 VII. évfolyam 3—4. szám.

Felelős szerkesztő: Turán Pál.

Szerkesztők: Aczél János, Hajós György, Kalmár László, Rényi Alfréd.

Szerkesztőség: Budapest V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330.

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány-utca 21. III. Telefon: 111—010.

A kiadásért felel: az Akadémiai Kiadó igazgatója.

Terjeszti a Posta Központi Hírlap Iroda Vállalat Budapest, V., József nádor-tér 1. Telefon: 180-850. Csekkszámlaszám: 61 257.

Előfizetés, személyes ügyfélszolgálat József nádor-tér 1. Üzlethelyiség. Telefon: 183—022.

Előfizetés egy évre 20,— Ft.

TARTALOMJEGYZÉK

J. Karamata: Bevezetés a valós függvények növekedésének egy elméletébe 207
E. Marczewski: Megjegyzések, számok Cantor-féle kifejtésével kapcsolatban 212
Erdős Pál: Megjegyzések Kővári Tamás egy dolgozatához 214
Hajnal András és Kalmár László: Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez II. 218
Szász Pál: Bolyai Farkas sokszögátdarabolási tételéről 230
Mikolás Miklós: A Jacobi-, Laguerre- és Hermite-féle polinomok együttes jellemzéséről 238
Szele Tibor: Elemi bizonyítás a véges testek elméletének alaptételére . 249
Tekse Kál[illegible] Körvonalzóval végezhető szerkesztésekről 255
Fáy Árpád: A Markov-féle számokról 262
Egerváry Jenő: Stieltjesnek egy mátrixelméleti lemmájáról 271
Szénássy Barna: Martinovics Ignác matematikai munkássága 277
1956. évi Kossuth-díjasaink 291
Jelentés a Beke Manó-emlékdíj hatodik kiosztásáról 296
Az 1955. évi Schweitzer Miklos matematikai emlékverseny 299
Feladatrovat 318
Példarovat 327
Magyar szerzők idegen nyelven megjelent munkáinak magyar nyelvű ismertetése 338
Hírek 342
Társulati élet 344
Könyvismertetés 372

Bevezetés a valós függvények növekedésének egy elméletébe

J. KARAMATA

A Budapesten 1956. ápr. 6-án tartott előadás összefoglalása

1. P. DU BOIS-REYMOND volt az első, aki „Infinitärcalcül" c. művében megalkotta a valós függvények növekedésének általános elméletét. Negyven évvel később, 1910-ben, E. BOREL „Leçons sur la théorie de la croissance" és G. H. HARDY „Order of infinity" c. munkájukban egyidejűleg feleleventették ezt az elméletet. Különösen HARDY egészítette ki P. DU BOIS-REYMOND elméletét s egy olyan tételt bizonyított be, amelyet az elmélet alaptételének lehet tekinteni. Bevezeti a logaritmikus-exponenciális függvények H_0 osztályát, amelynek függvényei az alapműveletek, a log és az exp operációk véges számú alkalmazásával állnak elő, és megmutatja, hogy ennek az osztálynak bármely két függvénye összehasonlítható a $\prec$, $\succ$ és $\sim$ relációk valamelyikével. Végül mintegy újabb negyven év mulva BOURBAKI IV. könyvének 5. fejezetében („Étude locale des fonctions"), 1951-ben kidomborítja ennek a tételnek algebrai jellegét. Nevezzük HARDY-*féle testnek* a végtelen egy környezetében értelmezett és deriválható függvényeknek olyan **H** testét, amely minden f függvénnyel együtt annak f' deriváltját is tartalmazza; BOURBAKI megmutatja, hogy egy ilyen test bármely két függvénye mindig összehasonlítható, s kimutatva, hogy a H_0 test HARDY-féle, igen elegáns bizonyítást ad HARDY tételére.

2. Ezekből a gondolatokból kiindulva meg szeretném mutatni ebben a bevezetésben, hogy ez az elmélet az olyan rendezési relációval ellátott függvénygyűrűk tanulmányozásán alapszik, amelyekben el nem tűnő függvények esetén a rendezési reláció a klasszikus aszimptotikus relációkba megy át.

Tekintsük ebből a célból a végtelen egy környezetében értelmezett függvények összességét és alkossuk meg a *függvényelemek* F halmazát, vagyis az

$$f = g, \quad \text{hacsak} \quad x \geqq x_{f,g}$$

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

ekvivalencia-relációnak megfelelő ekvivalencia-osztályok halmazát.

Az F halmaz kommutatív gyűrű, ha $f+g$ és fg a szokásos módon van definiálva.

Ezt a gyűrűt előrendezési relációval lehet ellátni, éspedig úgy, hogy az

$$f \overset{\lambda}{\preceq} g \quad (\text{vagy} \quad f \overset{\lambda}{\preceq} g)$$

relációt akkor definiáljuk érvényesnek, ha van olyan valós λ szám, hogy

$$|f - \lambda g| \leqq \varepsilon |g| \quad \text{minden} \quad x > x_\varepsilon\text{-ra.}$$

Ha $\lambda \neq 0$, akkor $f \overset{\lambda}{\preceq} g$ maga után vonja a $g \overset{\mu}{\preceq} f$, $\mu = 1/\lambda$ relációt; ebben az esetben definícióképpen

$$f \succeq g;$$

ha $\lambda = 0$, definícióképpen $f \prec g$, illetőleg $g \succ f$.*

Világos, hogy a $\preceq$ reláció

1) reflexiv: $f \overset{\lambda}{\preceq} f$ a $\lambda = 1$ választással;

2) tranzitív: $f \overset{\lambda}{\preceq} g$ és $g \overset{\mu}{\preceq} h$ esetén $f \overset{\lambda\mu}{\preceq} h$;

3) antiszimmetrikus: $f \overset{\lambda}{\preceq} g$ és $g \overset{\mu}{\preceq} f$ esetén $\lambda\mu = 1$ s ennélfogva $f \succeq g$.

3. A $\preceq$ reláció az F halmazból (félig) rendezett halmazt alkot s első célunk az, hogy F-nek ezen reláció értelmében teljesen rendezett részhalmazait konstruáljuk meg. Ebből a célból először egy összehasonlíthatósági kritériumot adunk a $\preceq$ reláció számára a következő fogalom bevezetésével.

Legyen $\tilde{F} \subset F$ az állandó előjelű függvényelemek halmaza, nem számítva a 0 elemet (sg $a = +1$, 0 vagy -1 aszerint, hogy $a > 0$, $a = 0$ vagy $a < 0$). A γ relációt értelmezzük úgy, hogy $f \gamma g$ akkor és csak akkor, ha $x \in \tilde{F}$ alkalmas megválasztásával $f = xg$ (multiplikatív kongruencia). A γ reláció ekvivalencia-reláció, mert $\tilde{F}$ multiplikatív csoport; legyen $\Gamma \in F/\gamma$, speciálisan $\tilde{F} \in F/\gamma$ és minden Γ elem $\Gamma = g\tilde{F}$ alakban írható. Mármost érvényes az

1. TÉTEL. *Ahhoz, hogy f összehasonlítható legyen g-vel, szükséges és elégséges, hogy $qf + pg \in \Gamma$ legyen minden egész számok-*

* A $\prec$ és $\succ$ jelek itt bevezetett jelentése eltér a HARDY és BOURBAKI által használttól.

ból álló (p, q) *számpárra legfeljebb egy* (p_0, q_0) *párral arányosak kivételével, más szóval minden olyan számpárra, melyre*

$$p_0 q - p q_0 \neq 0.$$

Ennek a kritériumnak alapján rögtön adódik, hogy

Minden olyan additív G *csoport, melyre*

$$G \subset \Gamma \cup \{0\},$$

teljesen rendezett; a legérdekesebb speciális eset akkor adódik, ha $\Gamma = \tilde{F}$, ebből következik a

2. TÉTEL. *Minden állandó előjelű függvényelemekből álló additív* $\tilde{G}$ *csoport teljesen rendezett a* $\preceq$ *reláció értelmében.*

Az a tény, hogy a $\tilde{G}$ csoportok alkotják a legfontosabb esetet, kiderül a következő tételből is, amely a $G/\asymp$ és G/γ kvociens-halmazok egyidejű vizsgálatával nyerhető.

3. TÉTEL. *Minden teljesen rendezett additív* G *csoport*

$$G = \sum_{\iota} g_\iota \tilde{H}_\iota$$

alakban állítható elő, vagyis minden $g \in G$ *elem*

$$g = \sum_{\nu} g_\nu h_\nu, \qquad h_\nu \in \tilde{H}_\iota$$

alakú, ahol a $\tilde{H}_\iota$*-k* G*-nek állandó előjelű függvényelemekből álló részcsoportjai.*

4. A 2. tétel alapján világos, hogy *minden folytonos függvényelemekből álló* K *test teljesen rendezett,* hiszen $f \in K$ esetén $1/f \in K$; speciálisan *a Hardy-féle* $\mathbf{H}$ *testek* is *teljesen rendezettek.*

Ezekután BOURBAKI megmutatja, hogy minden $\mathbf{H}$ test kibővíthető az

$$y' = fy + g \qquad (f, g \in \mathbf{H})$$

differenciálegyenletek y megoldásainak, például az $y = \log |f|$ és $y = e^f$ $(f \in \mathbf{H})$ függvényeknek, algebrai adjungálásával. A racionális függvények testéből kiindulva, a körzővel és vonalzóval megszerkeszthető elemű testek konstrukciójához hasonló eljárással eljut, $\log |f|$ és e^f szukcesszív adjungálása útján, a H_0 speciális Hardy-féle testhez és a Hardy-féle tétel bizonyításához.

5. Végül hasonló, sőt egyszerűbb, gondolatmenet mutatja, hogy minden $K \subset \mathbf{H}$ résztesthez, melyre

$$f \succ 1 \text{ és } g \in K \text{ esetén } g(f) \in K,$$

adjungálhatók a végtelenhez tartó $f \in K$ függvények f^{-1} inverzei.

Még általánosabban,

$$f \succ 1 \quad \text{és} \quad g \in K$$

esetén az

$$y = f^{-1} \quad \text{és} \quad z = g(y)$$

jelölésekkel z aszimptotikusan összehasonlítható K minden elemével és adjungálható is hozzá.

Valóban, minthogy

$$z' = g'(y)/f'(y) = h(y), \quad \text{ahol} \quad h \in K,$$

azért y-nak minden K-ból vett együtthatójú $p(x, y)$ polinomjára

$$(p(x, y))' = p'_x(x, y) + p'_y(x, y)h(y).$$

Mármost abból, hogy

$$x = f(y) \quad \text{és} \quad f \in K,$$

következik, hogy

$$p'_x(f(y), y) + p'_y(f(y), y)\,h(y) \in K,$$

tehát $(p(x, y))'$ s még inkább $p(x, y)$ állandó előjelű és $K(z)$ csakugyan folytonos függvényelemekből álló test.

Az így megszerkesztett $K(z)$ test azonban nem szükségképpen $\mathbf{H}$ test.

Speciálisan, amikor a logaritmikus-exponenciális függvények H_0 testéről van szó, minthogy H_0 kielégíti az előbb K-ra kirótt feltételeket, következik, hogy a H_0 test minden végtelenhez tartó függvényének inverze összehasonlítható ezzel a testtel és adjungálható is hozzá.

Továbbá abból, hogy tetszőleges $g \in H_0$ mellett $f \in H_0$, $f \succ 1$, $y = f^{-1}$ esetén $g(y)$ adjungálható a H_0 testhez, következik, hogy minden olyan H_1 test, amelynek elemei x-ből és y-ból véges számú racionális művelettel és a log és exp függvények véges számú alkalmazásával nyerhetők, szintén $\mathbf{H}$ test.

A következő kérdés mégis nyitott marad: a H_0 test elemeinek *növekedési rend*jeiből álló halmaz, vagyis a $H_0/\asymp$ kvocienshalmaz, kibővül-e a H_1 testre való áttéréskor, más szóval $H_0/\asymp$ egyenlő-e a $H_1/\asymp$ halmazzal?

ВВЕДЕНИЕ В ОДНУ ТЕОРИЮ РОСТА ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Й. Карамата

Тезисы доклада, сделанного в Будапеште 6-го апреля 1956 года. Основные мысли и некоторые применения алгебраической теории Н. Бурбаки роста вещественных функций.

INTRODUCTION À UNE THÉORIE DE LA CROISSANCE DES FONCTIONS RÉELLES

par J. Karamata

Résumé de la conférence, faite à Budapest le 6 avril 1956; en partant des idées de N. Bourbaki, l'auteur introduit les notions nécessaires pour une théorie algébrique de la croissance des fonctions réelles, et donne quelques applications de cette théorie.

Megjegyzések, számok Cantor-féle kifejtésével kapcsolatban

E. Marczewski

(Kivonat egy Turán Pálhoz intézett levélből)

1. Legyen $q_n \geqq 2$ egész számoknak egy sorozata; az $a_n(x)$-k legyenek olyan egész számok, amelyekre $0 \leqq a_n(x) \leqq q_n - 1$, úgy, hogy

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(x)}{q_1 q_2 \dots q_n} \qquad \text{ha} \quad x \in I = \langle 0, 1 \rangle$$

Az Ön közlése szerint fennáll, hogy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j(x)}{q_j} = \infty \tag{1}$$

majdnem minden x-re I-ben.

Ennek a megjegyzésnek főcélja egy egyszerű bizonyítást adni a következő általánosabb

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j(x)}{q_j - 1} = \frac{1}{2} \tag{2}$$

relációra, melyből (1) következik.

(2) *bizonyítása:* Az $\dfrac{a_j(x)}{q_j - 1}$ $(j = 1, 2, \dots)$ független valószínűségi változók, $0 \leqq \dfrac{a_j(x)}{q_j - 1} \leqq 1$ és várható értékük $E\left(\dfrac{a_j(x)}{q_j - 1}\right) = \dfrac{1}{2}$. Így a nagy számok erős törvényéből következik (2).

A Cantor-féle kifejtéssel kapcsolatban még a következő relációk állnak fenn:

2. Ha $n_1 < n_2 < \dots$-ra fennáll $q_{n_1} = q_{n_2} = \dots$ akkor az $a_{n_1}(x), a_{n_2}(x), \dots$ sorozatban (I-ben majdnem mindenütt) minden

egyes q egész szám $(0 \leqq q < q_{n_1})$ $\frac{1}{q_{n_1}}$ sűrűséggel fordul elő. (Borel tételének általánosítása.)

3. Ha $\lim_j q_{n_j} = \infty$ $(n_1 < n_2 < \ldots)$, akkor az $a_{n_1}(x), a_{n_2}(x), \ldots$ sorozatban minden egyes q egész számnak sűrűsége 0, majdnem mindenütt I-ben. (GÖTZ és MARCZEWSKI egy megjegyzésének általánosítása.)

ЗАМЕЧАНИЯ В СВЯЗИ С РАЗЛОЖЕНИЕМ КАНТОРА ЧИСЕЛ

Е. Марчевский

REMARKS ON THE CANTOR-EXPANSIONS OF REAL NUMBERS

by E. MARCZEWSKI

Megjegyzések Kővári Tamás egy dolgozatához

ERDŐS PÁL

TURÁN vetette fel a következő kérdést: Létezik-e oly $f(z)$ egész függvény, amelynél az

$$f(z), f'(z), f''(z), \ldots$$

függvények gyökeinek egyesített halmaza mindenütt sűrű az egész síkon?

KŐVÁRI[1] e kérdésre igenlően válaszolt. A következőkben néhány ehhez kapcsolódó kérdéssel óhajtok foglalkozni.

Legyen $z_1, z_2, \ldots$ komplex számok tetszőleges sorozata. Elsősorban bebizonyítjuk, hogy létezik oly $f(z)$ egész függvény és $n_1 < n_2 < \cdots$ sorozat, hogy $f^{(n_k)}(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Ezzel természetesen KŐVÁRI tételére új bizonyítást adtunk.

Legyen $n_l = 2^l - 1$, $l = 1, 2, \ldots$. Nyilván

$$n_l > n_1 + n_2 + \cdots + n_{l-1} + l - 1. \tag{1}$$

Legyen mármost

$$f(z) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \prod_{i=1}^{l} (z - z_i)^{n_i+1}, \tag{2}$$

ahol a c_l konstansok oly gyorsan tartanak 0-hoz, hogy $f(z)$ egész függvény legyen (a c_l számok ily választása nyilván lehetséges). Könnyű belátni mármost, hogy $f^{(n_k)}(z_k) = 0$. Ugyanis

$$f(z) = f_{k,1}(z) + f_{k,2}(z), f_{k,1}(z) = \sum_{l=1}^{k-1} c_l \prod_{i=1}^{l} (z - z_i)^{n_i+1},$$

$$f_{k,2}(z) = \sum_{l=k}^{\infty} c_l \prod_{i=1}^{l} (z - z_i)^{n_i+1}.$$

[1] Mat. Lapok VII (1956), 106—107.

(1) miatt $f_{k1}(z)$ n_k-adik differenciálhányadosa identikusan 0, $f_{k,2}^{(n_k)}(z)$ n_k-adik differenciálhányadosa viszont 0 a z_k helyen és ezzel tételünk be van bizonyítva.

Most a következő élesebb tételt bizonyítjuk be:

Legyen $z_1, z_2, \ldots$ komplex számok tetszőleges sorozata. Legyen továbbá $n_1 < n_2 < \cdots$ egész számok tetszőleges sorozata, melynek komplementer sorozata $m_1 < m_2 < \cdots$ végtelen. Akkor létezik oly $f(z)$ egész függvény, melyre $f^{(n_k)}(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Jelölje ugyanis $g_l(z)$ azon legfeljebb m_l-edfokú polinómot, melyre

$$g_l^{(n_i)}(z_i) = 0, \quad \text{ha} \quad n_i < m_l \tag{3}$$

és mely nem identikusan 0. Nyilván ily polinóm létezik, minthogy a (3) alatti feltételek $m_l - l$ homogén lineáris egyenletrendszert adnak $m_l + 1$ ismeretlennel, s ennek mindig van nem triviális megoldása. Legyen mármost

$$f(z) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l g_l(z)$$

ahol a c_l konstansok úgy lettek választva, hogy $f(z)$ egész függvény. Könnyű belátni, hogy $f^{(n_k)}(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Legyen ugyanis

$$f(z) = f_{k,1}(z) + f_{k,2}(z), \; f_{k,1}(z) = \sum_{l=1}^{n_k - k} c_l g_l(z) + \sum_{n_k - k < l} c_l g_l(z).$$

(Az n_k-nál kisebb m-ek száma $n_k - k$.) Legyen m_s a legnagyobb m, mely n_k-nál kisebb, $s = n_k - k$. Akkor nyilván $f_{k,1}(z)$ legfeljebb m_s-edfokú és $m_s < n_k$, tehát $f_{k,1}^{(n_k)}(z_k) = 0$. (3) miatt viszont $f_{k,2}^{(n_k)}(z_k) = 0$, s ezzel tételünk be van bizonyítva.

Ha az m_k sorozat üres vagy véges, úgy e bizonyítás nyilván nem érvényes — azonban a tétel sem igaz, mert mint GONCSAROFF [2] egy tételéből következik, nem mindig van oly identikusan 0 egész függvény, melyre $f^{(n)}(z_n) = 0$ (még akkor sem, ha a z_n-k mind

[2] Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques etc Annales Sci l'École Normale 47 (1930), 1—78. GONCSAROFF e cikkében többek között a következő tételt bizonyítja be: Legyen $f(z)$ reguláris a 0 pont környezetében, továbbá $f^{(n)}(z_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $z_n \to 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} |z_{n+1} - z_n| < \infty$. Akkor $f(z) \equiv 0$. Lásd továbbá ERWE, Eine Interpolationsaufgabe, Archiv. der Math. VII (1956) 55—58.

különbözők). RÉNYI[3] és én nemrég bebizonyítottuk, hogy ha z_n jelenti $f^{(n)}(z)=0$ abszolút értékre nézve legkisebb gyökét, akkor

$$\limsup n|z_n| = \infty, \tag{4}$$

ami persze mutatja, hogy a z_n-eket nem lehet tetszőlegesen előírni. RÉNYIvel[3] azt is kimutattuk, hogy (4) bizonyos szempontból nem élesíthető, azaz ha $A_n \to \infty$, létezik oly z_n sorozat és egy nem identikusan eltűnő $f(z)$ egész függvény, melyre $n|z_n| < A_n$ és $f^{(n)}(z_n)=0$.

ERWE[2] cikkében említi azon kérdést, mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy létezzék oly $f(z)$ egész függvény, melyre $f^{(n)}(z_n)=0$, $n=1,2,\ldots$? Erre egyelőre nem tudok válaszolni, csak a következő triviális megjegyzést szeretném tenni: Ha a z_n sorozatnak nincs a végesben sűrűsödési helye, úgy ily $f(z)$ mindig létezik. Legyen ugyanis $f(z)$ azon egész függvények valamelyike, melynek a z_n helyen $(n+1)$-edrendű gyöke van $n=1,2,\ldots$ esetén. Nyilván $f^{(n)}(z_n)=0$ minden n-re.

Most még két problémát szeretnék megemlíteni, melyeknek egyikét sem tudom megoldani.

1. Létezik-e oly $f(z)$ egész függvény, mely a következő tulajdonsággal bir: Legyen $n_1 < n_2 < \cdots$ tetszőleges végtelen sorozat, akkor az $f^{(n_k)}(z)=0$ gyökeinek egyesítési halmaza mindenütt sűrű az egész síkon? Könnyű belátni, hogy ily függvény akkor és csak akkor létezik, ha minden $|z-z_0|<r$ körhöz van oly $n_0=n_0(z_0,r)$, hogy minden $n>n_0$-ra $f^{(n)}(z)=0$-nak van gyöke a $|z-z_0|<r$ körben.

2. Legyen $H_1, H_2, \ldots$ halmazok tetszőleges végtelen sorozata. Tegyük fel, hogy egyetlen H_k-nak sincs a végesben sűrűsödési pontja. Létezik-e oly $f(z)$ egész függvény és $n_1 < n_2 < \cdots$ sorozat, hogy az $f^{(n_k)}(z)=0$ gyökeinek halmaza tartalmazza H_k-t minden k-ra? Könnyű belátni, hogy ha a H_k halmazok mind végesek, akkor ily $f(z)$ létezik.

ЗАМЕЧАНИЯ В СВЯЗИ С ОДНОЙ РАБОТОЙ Т. КЁВАРИ

П. Эрдёш

Пусть $z_1, z_2, \ldots$ есть любая последовательность комплексных чисел, а $n_1 < n_2 < \cdots$ любая бесконечная последовательность, дополнительная к которой также бесконечна. Автор доказывает, что существует такая целая

[3] RÉNYIvel való cikkünk rövidesen megjelenik az Acta Math. Hungarica-ban.

функция $f(z)$, что $f^{(n_k)}(z_k)=0$ при $k=1, 2, \ldots$. Ставятся следующие две проблемы: 1. Пусть $H_1, H_2, \ldots$ есть бесконечная последовательность множеств. Но одно из H_k не имеет конечных точек слущения. Доказать, что всегда существует последовательность натуральных $n_1<n_2<\cdots$ и целая функция $f(z)$ такие, что корни $f^{(n_k)}(z)=0$ содержат H_k при $k=1, 2, \ldots$. 2. Доказать, что существует такая целая функция $f(z)$, что для всех росследовательностей $n_1<n_2<\cdots$ соединение множеств корней $f^{(n_k)}(z)=0$ всюду плотно на плоскости.

REMARKS ON A PAPER OF T. KŐVÁRI

by P. Erdős

Let $z_1, z_2, \ldots$ be an arbitrary sequence of complex numbers and $n_1<n_2<\cdots$ an arbitrary infinite sequence whose complementary sequence is infinite. The author proves that there exists an entire function $f(z)$ so that $f^{(n_k)}(z_k)=0$ for $k=1, 2, \ldots$.

The following two problems are raised: 1. Let $H_1, H_2, \ldots$ be an infinite sequence of sets. No H_k has a finite limit point. Does there always exist a sequence of integers $n_1<n_2<\cdots$ and an entire function $f(z)$ so that the roots of $f^{(n_k)}(z)=0$ contains H_k for $k=1, 2, \ldots$. 2. Does there exist an entire function $f(z)$, so that for every sequence $n_1<n_2<\cdots$ the union of the set of all the roots of $f^{(n_k)}(z)=0$ is everywhere dense in the plane.

Megjegyzés a halmazelmélet Gödel-féle axiómarendszeréhez II.*

HAJNAL ANDRÁS ÉS KALMÁR LÁSZLÓ

5. Az említett metatétel bizonyításának gondolatmenete az, hogy először a legegyszerűbb, az $\&$, $\neg$ és (Ek) jeleket nem tartalmazó feltételekre bizonyítjuk be a megfelelő osztály létezését, majd megmutatjuk, hogy ha bizonyos feltételekre érvényes, akkor érvényes a belőlük az $\&$, $\neg$ és (Ek) jelek alkalmazásával keletkező feltételre is. Azonban az (Ek) jel alkalmazásával több szabad változót tartalmazó feltételből kapunk (eggyel, ti. a k halmazváltozóval) kevesebb szabad változót tartalmazó feltételt; ezért a fenti gondolatmenetet csak úgy követhetjük, ha a bebizonyítandó metatételt még általánosabban, x, y és z helyett tetszőleges számú szabad halmazváltozót tartalmazó feltételekre bizonyítjuk be.

Evégett mindenekelőtt a rendezett pár és a rendezett hármas fogalmát kell általánosítanunk több komponens esetére. Ez könnyen

* I. részt lásd: *Mat. Lapok*, 7 (1956), 26—42. oldal. Az alábbi 48. jegyzet az I. rész 41. oldalára való, azonban hibás tördelés miatt ott félbemaradt.

[48] Lásd a 18. jegyzetet. Valóban metatételről van szó, mert azt állítjuk, hogy az olyan osztály létezése, amelynek valamely $\langle x, y, z\rangle$ rendezett hármas akkor és csak akkor eleme, ha a $\Phi(x, y, z, A)$ feltétel teljesül, e feltétel minden egyes (a szövegben pontosan megadott módon való) választása esetén egy-egy tétele a pusztán az A1, A3, A4, valamint a B1—B7 axiómák által axiómatizált diszciplinának.

Arra a közelfekvő kérdésre, miért ezt a metatételt bizonyítjuk be ahelyett a speciális esete helyett, amikor $\Phi(x, y, z, A)$ a (8) feltételt jelenti, könnyen válaszolhatunk: könnyebb ezt a metatételt átlagosan bebizonyítani, mint közvetlenül a kérdéses speciális esetét; de természetesen e metatétel bizonyítása alapján meg lehetne adni a kérdéses speciális eset bizonyítását is, vagyis a B8 axióma halmazelméleti bizonyítását az A1, A3, A4, valamint a B1—B7 axiómák alapján, csak nagyon sokszor kellene ismételni a metatétel bizonyításában szereplő gondolatmenetet. Éppen az ilyen könnyítésben áll a metatételek alkalmazásának jelentősége az axiómatikus vizsgálatokban. Tudomásom szerint BOLYAI JÁNOS Appendixében fordul elő a szakirodalomban először metatétel bizonyítása és alkalmazása axiómatikus vizsgálatban: azé a metatételé, amely szerint minden olyan tétel, amely az euklidesi geometria valamely tételéből úgy jön létre, hogy egyenes helyett mindenütt L-vonalat (paraciklust), sík helyett pedig mindenütt F-felületet (paraszférát) mondunk, a geometria axiómarendszerében a párhuzamosság axiómája nélkül bebizonyítható tételek közé tartozik.

lehetséges[49]:

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle = \langle x_1, \langle x_2, x_3, x_4\rangle\rangle,$$
$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\rangle = \langle x_1, \langle x_2, x_3, x_4, x_5\rangle\rangle,$$
. . . . . .

általában, ha már a $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ rendezett n-es definiálva van, akkor a $\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\rangle$ rendezett $n+1$-esen az x_1 halmazból és a $\langle x_2, \ldots, x_{n+1}\rangle$ rendezett n-esből képezett rendezett párt értjük:

$$\langle x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\rangle = \langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_{n+1}\rangle\rangle. \tag{9}$$

Ez az egyenlet $n = 2$ esetén a rendezett hármas fenti definíciójába megy át; hogy $n = 1$ esetén is igaz legyen:

$$\langle x_1, x_2\rangle = \langle x_1, \langle x_2\rangle\rangle,$$

a $\langle x\rangle$ „rendezett egyesen" magát az x halmazt célszerű érteni:

$$\langle x\rangle = x.$$

A (9) egyenletet nem tekintjük általános definíciónak, csak olyan eljárásnak, amelynek segítségével minden *adott* n-re definiálhatjuk az $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ rendezett n-est. Valójában csak bizonyos n értékekre lenne szükségünk a rendezett n-es fogalmára ahhoz, hogy a B8 axióma nélkülözhetőségét megmutassuk, éspedig legfeljebb az $n = 1, 2, \ldots,$ 11 értékekre (minthogy a (8) feltételben 11 halmazváltozó szerepel: az x, y és z szabad változókon kívül a p, q, r, s, t, u, v, w kötött változók); azonban egyszerűbb általánosan felírni a (9) definíciót, mint külön-külön definiálni a rendezett egyes, hármas, ..., tizenegyes fogalmát[50].

A rendezett n-es fogalma segítségével a következőképpen mondhatjuk ki az előző pontban szereplő metatétel általánosítását.

Legyen $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ olyan, az $x_1, \ldots, x_n$ halmazokra és az A osztályra vonatkozó feltétel, amely felírható olyan formula alakjában, amely bizonyos, $x_i \in x_j$ és $x_i \in A$ alakú állításokból, ahol

[49] Áttekinthetőség kedvéért indexes latin kisbetűket is használunk halmazváltozók gyanánt; viszont az i, j, m és n betűkkel ezentúl csak (adott) pozitív egész számokat jelölünk.

[50] Természetesen a halmazelmélet axiómatikus felépítése során előbbutóbb definiáljuk a tetszőleges pozitív egész szám (mint tetszőleges véges, nem üres halmaz számossága) fogalmát és definíciója alapján bebizonyítjuk a rekurzív definíció jogosságát; ettől kezdve a rendezett n-es definícióját — megfelelő fogalmazásban — általános, halmazelméleti definíciónak tekinthetjük. Azonban ahhoz, hogy a halmazelmélet axiómatikus felépítésében e pontig eljussunk, szükség van e fogalom bizonyos — véges számú — speciális esetére (mondjuk $n = 20$-ig); ezért a (9) egyenlet — nem általános definíciónak, hanem a szükséges n-ekre vonatkozó egyes definíciók rövid összefoglalásának tekintve — megkönnyíti a halmazelmélet axiómatikus felépítését is.

x_i és x_j nemcsak az $x_1, \ldots, x_n$ halmazváltozók lehetnek, hanem további, a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltételben kötött halmazváltozók is, az &, $\neg$ és (Ex_m) jelek ismételt alkalmazásával keletkezik, ahol x_m helyett ismét tetszőleges, az $x_1, \ldots, x_n$ szabad változóktól különböző halmazváltozó állhat. Nem kötjük ki, hogy az $x_1, \ldots, x_n$ és A változók mindegyike valóban előforduljon e formulában, csak azt, hogy ezeken kívül más szabad változó ne forduljon elő benne; azt sem írjuk elő, hogy $x_1, \ldots, x_n$ milyen sorrendben jelöljék az ebben a formulában szereplő (és esetleg még további) szabad halmazváltozókat. Akkor az a tétel, hogy bármely A osztályhoz van olyan osztály, amelynek valamely $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ rendezett n-es akkor és csak akkor eleme, ha komponensei teljesítik a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltételt, bebizonyítható az A1, A3 *és* A4, *valamint a* B1—B7 *axiómák alapján*[51].

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltételt kifejező formulában (röviden: a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulában) nem szerepel $x_i \in x_i$ alakú „alkatrész" (az olyan formulát, amely a kimondott metatételben szereplő feltételek mellett annak a további feltételnek is eleget tesz, hogy nincs $x_i \in x_i$ alakú alkatrésze, rövidség kedvéért *szabályos formulának* nevezzük). Valóban, $x_i \in x_i$ helyett azt mondhatjuk, hogy van x_i-nek olyan x eleme, amely x_i-vel egyenlő, vagyis

$$(Ex)(x \in x_i \,\&\, x = x_i)$$

(ahol x tetszőleges, x_i-től különböző halmazváltozó); $x = x_i$ helyett pedig azt, hogy $\neg\, x \neq x_i$ (nem igaz, hogy $x \neq x_i$), s az itt szereplő $x \neq x_i$ állítás helyett, mint fentebb, azt írhatjuk, hogy

$$(Ew) \neg (\neg (w \in x \,\&\, \neg\, w \in x_i) \,\&\, \neg (w \in x_i \,\&\, \neg\, w \in x))$$

[51] Ez a metatétel — azon kívül, hogy Gödelnél a B8 axióma is szerepel a bizonyításhoz megengedett axiómák között (sőt megengedi axiómarendszerének valamennyi axiómáját, a kiválasztás axiómájának kivételével) — abban különbözik Gödel M1 metatételétől (lásd Gödel [1], 8. oldal), amelyet Gödel a halmazelmélet axiómatikus felépítésének meggyorsítására használ, hogy Gödel *A* helyett több osztályváltozót megenged (amit mi is megtehetnénk), továbbá $x_i \in x_j$ és $x_i \in A_j$ alakú állításokon kívül $A_i \in x_j$ és $A_i \in A_j$ alakú állításokat is megenged a szóbanforgó formula „alkatrészei" gyanánt. Bizonyítása azzal kezdődik, hogy ezeket az újabb alkatrészeket ki lehet küszöbölni, mert az A2 axióma folytán $A_i \in x_j$ ill. $A_i \in A_j$ csak akkor állhat, ha A_i halmaz, tehát akkor és csak akkor áll, ha van olyan x halmaz, hogy $x = A_i$ és $x \in x_j$ ill. $x \in A_j$; ennélfogva $A_i \in x_j$ helyett azt írhatjuk, hogy $(Ex)(x = A_i \,\&\, x \in x_j)$, $A_i \in A_j$ helyett pedig azt, hogy $(Ex)(x = A_i \,\&\, x \in A_j)$. Az így bejövő egyenlőség-jelet úgy küszöbölhetjük ki, mint az $x_i \in x_i$ alakú alkatrészek kiküszöbölése kapcsán a szövegben.

Ha $n = 1$, akkor metatételünk épp azt mondja ki, hogy az a tétel, hogy van olyan osztály, amelynek azok és csak azok az x halmazok (vagyis $\langle x \rangle$

(ahol w ismét tetszőleges, x-től és x_i-től különböző halmazváltozó). Ily módon az $x_i \in x_i$ alkatrész helyébe azt írhatjuk, hogy

$$(Ex)(x \in x_i \,\&\, \neg (Ew) \neg (\neg (w \in x \,\&\, \neg\, w \in x_i) \,\&\, \neg (w \in x_i \,\&\, \neg\, w \in x)))\,;$$

ezt minden esetleges $x_i \in x_i$ alakú alkatrésszel megtéve, szabályos formulához jutunk[52].

Nevezzük a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulában szereplő &, $\neg$ és (Ex_m) jelek összes számát (ahol x_m tetszőleges halmazváltozót jelenthet) a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formula *rendjének*. Pl. $x_i \in x_j$ és $x_i \in A$ nulladrendű formulák (és minden nulladrendű formula vagy $x_i \in x_j$, vagy $x_i \in A$ alakú); $\neg\, x_1 \in x_2$, $x_1 \in x_2 \,\&\, x_2 \in x_3$ és $(Ex)(x \in x_1)$ elsőrendű, $\neg\, (x_1 \in x_2 \,\&\, x_2 \in x_1)$, $x_1 \in x_2 \,\&\, x_2 \in x_3 \,\&\, x_3 \in x_4$ és $(Ex)(x_1 \in x \,\&\, \&\, x \in x_2)$ másodrendű formulák. A (8) formula 134-edrendű.

A bebizonyítandó metatétel érvényességét először a 0-adrendű szabályos formulákra mutatjuk meg; majd megmutatjuk, hogy ha minden olyan szabályos formulára igaz, amelynek rendje kisebb, mint valamely m pozitív egész szám, akkor igaz az m-edrendű szabályos formulákra is. Ezzel minden szabályos formulára meg lesz mutatva, hogy igaz[53].

rendezett egyesek) elemei, amelyeknek megvan a T tulajdonságuk, bármely T tulajdonság esetén bebizonyítható az A1, A3 és A4, valamint a B1—B7 axiómák alapján, amennyiben egy x halmaz tulajdonságán olyan, x-en és esetleges (adottnak képzelendő) A osztályon (vagy több ilyen osztályon) kívül más szabad változót nem tartalmazó formula alakjában felírható feltételt értünk, amely a mondott módon keletkezik $x_i \in x_j$ és $x_i \in A$ (vagy $x_i \in A_j$) alakú alkatrészekből. Így értettük a 3. pont elején a tulajdonság-fogalom szabatos elhatárolását. A (definit) tulajdonság fogalmának ilyenfajta szabatos elhatárolása (a Zermelo-féle axiómarendszer keretein belül) Skolemtől származik; lásd Skolem [1], Zermelo [2], Skolem [2].

Természetesen ahelyett, hogy Gödel M1 metatételét bizonyítjuk be a B8 (és az A2, valamint a D) axióma felhasználása nélkül a szükséges speciális esetben, megtehettük volna azt, hogy Gödel M3 metatételét (lásd Gödel [1], 14. oldal) bizonyítsuk be így, megfelelő módon specializálva; ezt ugyanis a (8) formula helyett közvetlenül az $\langle x, z, y\rangle \in A$ feltételre is alkalmazhattuk volna. Ez azonban azt jelentette volna, hogy az $\langle x, z, y\rangle \in A$ feltételnek a (8) alakra hozása helyett általánosabban kellett volna bizonyos alakú feltételeket ilyenszerű formula alakjában kifejezni. Ez nem könnyítette volna meg a bizonyítás követését. (Gödelnek természetesen szüksége van az M3 metatételre is a halmazelmélet axiómatikus felépítésének meggyorsítása végett.)

[52] Gödel az $x_i \in x_i$ alakú alkatrészek kiküszöbölése helyett a D axiómát (a fundáltság axiómáját) használja, amelyből könnyen adódik, hogy nincs olyan x halmaz, amely teljesítené az $x \in x$ feltételt. — A (8) formula, mint azonnal látható, szabályos, úgy, hogy a B8 axióma nélkülözhetőségének bebizonyításához nem is volna szükséges nem-szabályos formulákra kimondani a fenti metatételt.

[53] A teljes indukcióval való bizonyítás megengedett (bár még nem mutattuk meg, hogy a teljes indukcióval való bizonyítás jogosultsága következik a halmazelmélet axiómáiból), mert nem halmazelméleti tétel, hanem metatétel bizonyítására használjuk. Ugyanis a kimondott metatétel éppen azt jelenti, hogy

6. Ahhoz, hogy a bebizonyítandó metatétel érvényességét 0-adrendű szabályos formulákra megmutassuk, szükségünk lesz néhány segédtételre.

1. segédtétel. *Ha* $n \geqq 3$, *akkor*[54]

$$\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, x_2, \langle x_3, \ldots, x_n \rangle \rangle.$$

Bizonyítás. A (9) definíció folytán

$$\langle x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, \langle x_2, x_3, \ldots, x_n \rangle \rangle = \\ = \langle x_1, \langle x_2, \langle x_3, \ldots, x_n \rangle \rangle \rangle,$$

ez pedig, a rendezett hármas fogalmának definíciója folytán, nem más, mint a $\langle x_1, x_2, \langle x_3, \ldots, x_n \rangle \rangle$ rendezett hármas.

2. segédtétel[55]. *A* B5 *és* B6 *axiómákból következik, hogy bármely A osztályhoz van olyan B és C osztály, hogy, tetszőleges x és y halmazok esetén,*

$\langle y, x \rangle \in B$ *akkor és csak akkor áll, ha* $x \in A$,

$\langle x, y \rangle \in C$ *akkor és csak akkor áll, ha* $x \in A$.

Bizonyítás. A B osztály létezését éppen a B5 axióma mondja ki; a C osztály létezése ebből a B6 axióma alapján következik.

3. segédtétel[56]. *A* B5, B6 *és* B7 *axiómákból következik, hogy bármely A osztályhoz van olyan F, G és H osztály, hogy,*

a benne foglalt állítás minden egyes adott $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára igaz; már pedig adott $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formula rendje adott nemnegatív egész szám és ahhoz, hogy adott m nemnegatív egész számra állíthassuk, hogy a metatétel az m-edrendű szabályos formulákra igaz, nincs szükségünk a teljes indukcióval való bizonyítás jogossága axiómatikus bizonyítására, hanem elég azt a meggondolást m-szer ismételnünk, hogy minthogy a metatétel igaz a 0-adrendű, tehát az 1-nél kisebb rendű szabályos formulákra, azért igaz az elsőrendűekre is, minthogy igaz a 0-ad és elsőrendű, tehát a 2-nél kisebb rendű szabályos formulákra, azért igaz a másodrendűekre is és így tovább. Pl. ahhoz, hogy a (8) formulára bebizonyítsuk a metatételt, 134-szer kellene azt a meggondolást ismételnünk, amelyet a metatétel általános bizonyításában mondunk el; de teljes indukciót egyszer sem kellene végeznünk.

[54] A ... jel az x_i és x_j változók között (ahol $j \geqq i$) mindig azt jelenti, hogy közéjük növekvő index sorrendjében, vesszőkkel elválasztva, mindazok az x_m változók írandók, ahol $i < m < j$ (ha $j = i + 1$, vagy $j = i$, akkor egy sem; az utóbbi esetben x_i és x_j egyike elhagyandó).

[55] Lásd a 2.3 tételt Gödel [1]-ben a 9. oldalon.

[56] Lásd a 2.31, 2.32 és 2.33 tételt Gödel [1]-ben a 9. oldalon; azonban Gödel a G osztály létezésének bebizonyításához a B8 axiómát is használja. A B8 axióma nélkülözhetőségének bizonyításához döntő a 3. segédtétel jelen alakja.

tetszőleges x, y és z halmazok esetén,

$\langle z, x, y\rangle \in F$ *akkor és csak akkor áll, ha* $\langle x, y\rangle \in A$,
$\langle x, z, y\rangle \in G$ *akkor és csak akkor áll, ha* $\langle x, y\rangle \in A$,
$\langle x, y, z\rangle \in H$ *akkor és csak akkor áll, ha* $\langle x, y\rangle \in A$.

Bizonyítás. F osztály gyanánt választhatjuk a 2. segédtételben szereplő B osztályt, hiszen $\langle z, x, y\rangle = \langle z, \langle x, y\rangle\rangle \in B$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x, y\rangle \in A$. A B7 axióma folytán ehhez a B osztályhoz van olyan K osztály, hogy, tetszőleges x, y és z halmazok esetén, $\langle x, y, z\rangle \in K$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, z, x\rangle \in B$, s a K osztályhoz olyan L osztály, hogy $\langle x, y, z\rangle \in L$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, z, x\rangle \in K$. Akkor H osztály gyanánt választhatjuk ezt az L osztályt, hiszen $\langle x, y, z\rangle \in L$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, z, x\rangle \in K$, ez pedig akkor és csak akkor áll, ha $\langle z, x, y\rangle \in B$, vagyis, ha $\langle x, y\rangle \in A$. Végül a G osztály létezése így adódik. A B6 axióma folytán van olyan M osztály, hogy, tetszőleges x és y halmazok esetén, $\langle x, y\rangle \in M$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, x\rangle \in A$; s ehhez az M osztályhoz a 3. segédtételnek az F osztály létezésére vonatkozó, már bebizonyított része szerint van olyan N osztály, hogy, tetszőleges x, y és z halmazok esetén, $\langle z, x, y\rangle \in N$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x, y\rangle \in M$. Ehhez az N osztályhoz a B7 axióma folytán van olyan P osztály, hogy, tetszőleges x, y, z halmazok esetén, $\langle x, y, z\rangle \in P$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, z, x\rangle \in N$. Akkor G osztály gyanánt választhatjuk ezt a P osztályt, hiszen $\langle x, z, y\rangle \in P$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle z, y, x\rangle \in N$, ez pedig akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, x\rangle \in M$, vagyis, ha $\langle x, y\rangle \in A$.

E segédtételek alapján a következőképpen bizonyíthatjuk be a kimondott metatételt 0-adrendű szabályos formulák esetére. Az ilyen $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formula, mint mondtuk, csak $x_i \in A$, vagy $x_i \in x_j$ alakú lehet, ahol i, ill. i és j az $1, \ldots, n$ természetes számok közül való (mert az x_i változó az $x_i \in A$ formulának, s az x_i és x_j változók az $x_i \in x_j$ formulának szabad változói), továbbá az utóbbi esetben $i \neq j$ (mert a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formula szabályos). Ha tehát $x_i \in x_j$ mellett az $x_j \in x_i$ formulát is figyelembevesszük $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ gyanánt, akkor feltehetjük, hogy $i < j$.

Ha $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ az $x_i \in A$ formula, akkor $n = 1$ esetben i csak 1 lehet és maga az A osztály olyan, amelynek az $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle x_1\rangle = x_1 = x_i$ halmaz akkor és csak akkor eleme, ha $x_i \in A$, azaz ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Legyen tehát $n > 1$ és tegyük fel egyelőre, hogy $i < n$. Akkor az A osztályhoz a 2. segédtétel szerint van olyan C osztaly, hogy $\langle x, y\rangle \in C$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in A$, speciálisan $\langle x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\rangle = \langle x_i, \langle x_{i+1}, \ldots, x_n\rangle\rangle \in C$

akkor és csak akkor áll, ha $x_i \in A$. Ha $i = n$, akkor maga A ilyen osztály, ugyanis ekkor $\langle x_i, \ldots, x_n \rangle = \langle x_i \rangle = x_i$. Ha $i = 1$, akkor a C osztály máris olyan, hogy $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in C$ akkor és csak akkor áll, ha $x_i \in A$, vagyis, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Legyen tehát $i > 1$. A 2. segédtétel szerint ehhez a C osztályhoz van olyan B_1 osztály, ahhoz ismét olyan B_2 osztály, és így tovább, hogy $\langle y, x \rangle \in B_1$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in C$, $\langle y, x \rangle \in B_2$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in B_1$, és így tovább. Speciálisan $\langle x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n \rangle = \langle x_{i-1}, \langle x_i, \ldots, x_n \rangle \rangle \in B_1$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, \ldots, x_n \rangle \in C$, vagyis ha $x_i \in A$; $\langle x_{i-2}, x_{i-1}, \ldots, x_n \rangle = \langle x_{i-2}, \langle x_{i-1}, \ldots, x_n \rangle \rangle \in B_2$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_{i-1}, \ldots, x_n \rangle \in B_1$, vagyis ismét akkor és csak akkor, ha $x_i \in A$; és így tovább, végül B_{i-1} olyan osztály, amelyre $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in B_{i-1}$ akkor és csak akkor áll, ha $x_i \in A$, vagyis, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Ennek a B_{i-1} ($i = 1$ esetén C) osztálynak létezését a 2. segédtétel, tehát a B5 és B6 axiómák alapján bizonyítottuk be.

Legyen mármost $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ az $x_i \in x_j$ vagy az $x_j \in x_i$ formula, ahol $1 \leqq i < j \leqq n$. A B1 axióma folytán van olyan E osztály, hogy $\langle x, y \rangle \in E$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in y$, ehhez pedig a B6 axióma folytán olyan Q osztály, hogy $\langle x, y \rangle \in Q$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle y, x \rangle \in E$, vagyis, ha $y \in x$. Ennélfogva abban az esetben, ha $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ az $x_i \in x_j$ formula, $\langle x_i, x_j \rangle \in E$ akkor és csak akkor áll, ha $x_i \in x_j$, vagyis ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül; abban az esetben pedig, ha $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ az $x_j \in x_i$ formula, $\langle x_i, x_j \rangle \in Q$ akkor és csak akkor áll, ha $x_j \in x_i$, vagyis, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Jelöljük R-rel az első esetben az E, a második esetben a Q osztályt; akkor $\langle x_i, x_j \rangle \in R$ mindkét esetben akkor és csak akkor áll, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Ha $n = 2$, akkor $1 \leqq i < j \leqq n = 2$ miatt $i = 1$ és $j = 2$; tehát akkor R máris olyan osztály, hogy $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_i, x_j \rangle \in R$ akkor és csakis akkor áll, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül.

Legyen tehát $n > 2$ és tegyük fel egyelőre, hogy $j < n$. Akkor az R osztályhoz a 3. segédtétel szerint van olyan H osztály, hogy $\langle x, y, z \rangle \in H$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x, y \rangle \in R$, speciálisan, az 1. segédtétel folytán, $\langle x_i, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n \rangle = \langle x_i, x_j, \langle x_{j+1}, \ldots, x_n \rangle \rangle \in H$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, x_j \rangle \in R$, vagyis ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Ha $j = n$, akkor $\langle x_i, x_j, \ldots, x_n \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$, tehát akkor R maga választható ilyen H osztály gyanánt.

Tegyük fel mármost egyelőre, hogy $j > i + 1$; akkor ugyancsak a 3. segédtétel szerint a H osztályhoz van olyan G_1 osztály, hogy $\langle x, z, y \rangle \in G_1$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x, y \rangle \in H$, továbbá a G_1 osztályhoz van olyan G_2 osztály, hogy $\langle x, z, y \rangle \in G_2$ akkor

és csak akkor áll, ha $\langle x, y\rangle \in G_1$, és így tovább. Speciálisan, az 1. segédtétel folytán, $\langle x_i, x_{j-1}, x_j, \ldots, x_n\rangle = \langle x_i, x_{j-1}, \langle x_j, \ldots, x_n\rangle\rangle \in G_1$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, \langle x_j, \ldots, x_n\rangle\rangle \in H$, vagyis, ha $\langle x_i, x_j, \ldots, x_n\rangle \in H$; $\langle x_i, x_{j-2}, x_{j-1}, \ldots, x_n\rangle = \langle x_i, x_{j-2}, \langle x_{j-1}, \ldots, x_n\rangle\rangle \in G_2$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, \langle x_{j-1}, \ldots, x_n\rangle\rangle \in G_1$, vagyis ha $\langle x_i, x_{j-1}, \ldots, x_n\rangle \in G_1$, tehát ismét akkor és csak akkor, ha $\langle x_i, x_j, \ldots, x_n\rangle \in H$; és így tovább, végül G_{j-i-1} olyan osztály, amelyre $\langle x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\rangle \in G_{j-i-1}$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, x_j, \ldots, x_n\rangle \in H$, vagyis akkor és csak akkor, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Ha $j > i+1$ nem teljesül, hanem $j = i+1$, akkor maga a H osztály olyan, hogy $\langle x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\rangle = \langle x_i, x_j, \ldots, x_n\rangle \in H$ akkor és csak akkor áll, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Jelöljük G-vel $j > i+1$ esetén a G_{j-i-1} osztályt, $j = i+1$ esetén pedig a H osztályt; akkor tehát $\langle x_i, \ldots, x_n\rangle \in G$ akkor és csak akkor áll, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül.

Ha mármost $i = 1$, akkor tehát G olyan osztály, amelyre $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle x_i, \ldots, x_n\rangle \in G$ akkor és csak akkor áll, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül; ha pedig $i > 1$, akkor a G osztállyal ugyanúgy járunk el, mint fentebb a C osztállyal: a 2. segédtétel szerint van a G osztályhoz olyan B_1 osztály, hogy $\langle y, x\rangle \in B_1$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in G$, majd ehhez olyan B_2 osztály, hogy $\langle y, x\rangle \in B_2$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in B_1$, és így tovább. Speciálisan $\langle x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n\rangle = \langle x_{i-1}, \langle x_i, \ldots, x_n\rangle\rangle \in B_1$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, \ldots, x_n\rangle \in G$; $\langle x_{i-2}, x_{i-1}, \ldots, x_n\rangle = \langle x_{i-2}, \langle x_{i-1}, \ldots, x_n\rangle\rangle \in B_2$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_{i-1}, \ldots, x_n\rangle \in B_1$, vagyis akkor és csak akkor, ha $\langle x_i, \ldots, x_n\rangle \in G$; és így tovább, végül $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in B_{i-1}$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_i, \ldots, x_n\rangle \in G$, vagyis akkor és csak akkor, ha a $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Ennek a B_{i-1} ($i = 1$ esetén G) osztálynak létezését a B1 axióma és a 2. és 3. segédtétel, tehát a B1, B5, B6 és B7 axiómák alapján láttuk be; így a kimondott metatétel érvényességét tetszőleges 0-adrendű szabályos formulára és tetszőleges adott n-re bebizonyítottuk.

7. Még csak annak megmutatása van hátra, hogy ha a kimondott metatétel minden olyan szabályos formulára igaz, amelynek rendje kisebb, mint valamely m pozitív egész szám, akkor igaz az m-edrendű szabályos formulákra is. Ez ugyanúgy történhetik, mint Gödelnél[57].

Valóban, $m > 1$ esetén minden m-edrendű $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$ szabályos formula vagy $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A) \,\&\, \Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ alakú,

[57] Lásd Gödel [1], 10—11. oldal.

ahol $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$ és $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ m-nél alacsonyabbrendű szabályos formulák, vagy $\neg \Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ alakú, ahol $\Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ m-nél alacsonyabbrendű (ti. m—1-edrendű) szabályos formula, vagy pedig $(Ex)\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ alakú, ahol x valamely, $x_1, \ldots, x_n$-től különböző halmazváltozó, $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ pedig m-nél alacsonyabbrendű (ti. ismét m—1-edrendű) szabályos formula. Itt a $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$, $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ és $\Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulákban nem fordul elő más szabad változó, mint $x_1, \ldots, x_n$ és A (ezek sem mind kell, hogy előforduljanak benne, $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$-ban és $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$-ban akkor sem, ha $\Phi(x_1, \ldots, x_n, A)$-ban mind előfordul); továbbá az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ formulában nem fordul elő más szabad változó, mint $x, x_1, \ldots, x_n$ és A (az x változót mindig előre írhatjuk az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ jelölésben, függetlenül attól, hogy az $x, x_1, \ldots, x_n$ és A változók mely helyeken, milyen sorrendben fordulnak elő az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ formulában). Mármost a feltevés szerint a kimondott metatétel igaz a $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$ és a $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$, a $\Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$, ill. az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára; és azt kell megmutatnunk, hogy a $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$ & & $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$, a $\neg \Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ ill. az $(Ex)\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára is igaz.

Valóban, az, hogy a kimondott metatétel igaz a $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$ és $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulákra, azt jelenti, hogy bármely A osztályhoz van olyan B_1 és B_2 osztály, hogy $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in B_1$ ill. $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in B_2$ akkor és csak akkor áll, ha a $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$ ill. a $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. A B2 axióma szerint a B_1 és B_2 osztályokhoz van olyan B osztály, hogy $x \in B$ akkor és csak akkor áll, ha $x \in B_1$ és $x \in B_2$; speciálisan $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in B$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in B_1$ és $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in B_2$, vagyis, ha $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$ & $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ teljesül. Ezzel a kimondott metatételt a $\Phi_1(x_1, \ldots, x_n, A)$ & $\Phi_2(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára is bebizonyítottuk.

Az, hogy a kimondott metatétel igaz a $\Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára, azt jelenti, hogy bármely A osztályhoz van olyan C osztály, hogy $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in C$ akkor és csak akkor áll, ha a $\Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. A B3 axióma szerint a C osztályhoz van olyan C' osztály, hogy $x \in C'$ akkor és csak akkor áll, ha $x \notin C$. Speciálisan $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in C'$ akkor és csak akkor áll, ha $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \notin C$, vagyis, ha a $\Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel nem teljesül; más szóval akkor és csak akkor, ha a $\neg \Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. Ezzel a kimondott metatételt a $\neg \Psi(x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára is bebizonyítottuk.

Végül az, hogy a kimondott metatétel igaz az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ formulára (és a benne előforduló esetleges szabad változók $x, x_1,$

$\ldots, x_n, A$ sorrendjére), azt jelenti, hogy bármely A osztályhoz van olyan D osztály, hogy $\langle x, x_1, \ldots, x_n \rangle \in D$ akkor és csak akkor áll, ha az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n, A)$ feltétel teljesül. A B4 axióma szerint a D osztályhoz van olyan D' osztály, hogy $x \in D'$ akkor és csak akkor áll, ha van olyan y halmaz, hogy $\langle y, x \rangle \in D$. Speciálisan $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in D'$ akkor és csak akkor áll, ha van olyan x halmaz, hogy $\langle x, \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \rangle = \langle x, x_1, \ldots, x_n \rangle \in D$, vagyis olyan, hogy az $\Omega(x, x_1, \ldots, x_n)$ feltétel teljesül; más szóval akkor és csak akkor, ha az $(Ex)\Omega(x, x_1, \ldots, x_n)$ feltétel teljesül. Ezzel a kimondott metatételt az $(Ex)\Omega(x, x_1, \ldots, x_n)$ formulára is és így általánosan bebizonyítottuk[58]; ezzel azt is megmutattuk, hogy a B8 axióma az A1, A3 és A4, valamint a B1—B7 axiómák alapján bebizonyítható.

IRODALOM

P. Bernays [1], A system of axiomatic set theory — Part I, *The Journal of Symbolic Logic*, **2** (1937), 65—77.
[2], A system of axiomatic set theory — Part II, *ugyanott*, **6** (1941), 1—17.
[3], A system of axiomatic set theory — Part III, *ugyanott*, **7** (1942), 65—89.
[4], A system of axiomatic set theory — Part IV, *ugyanott*, **7** (1942), 133—145.
[5], A system of axiomatic set theory — Part V, *ugyanott*, **8** (1943), 89—106.
[6], A system of axiomatic set theory — Part VI, *ugyanott*, **13** (1948), 65—79.
[7], A system of axiomatic set theory — Part VII, *ugyanott*, **19** (1954), 81—96.

C. Burali-Forti [1], Una questione sui numeri transfiniti, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **11** (1897), 154—164.

A. Fraenkel [1], Axiomatische Begründung der transfiniten Kardinalzahlen, *Mathematische Zeitschrift*, **13** (1922), 153—188.
[2], Zu den Grundlagen der Cantor—Zermeloschen Mengenlehre, *Mathematische Annalen*, **86** (1922), 230—237.
[3], Der Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms, *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, phys.-math. Klasse, 1922, 253—257.

[58] Figyeljük meg, hogy a B, C' ill. D' osztály létezésének bebizonyításához, a B_1 és B_2, C ill. D osztályok létezésén kívül, csak a B2, B3 ill. B4 axiómát használtuk fel. A B1, B5, B6 és B7 axiómákat akkor használtuk fel, amikor a 0-adrendű szabályos formulák esetét intéztük el. Az A1, A3 és A4 axiómákat lépten-nyomon felhasználtuk anélkül, hogy hivatkoztunk volna rájuk, amikor rendezett n-esekkel dolgoztunk. Valóban, az $\{x, y\}$ rendezetlen pár és vele együtt az $\langle x, y \rangle$ rendezett pár, az $\langle x, y, z \rangle$ rendezett hármas stb. létezése és egyértelműsége tetszőleges x, y ill. x, y, z stb. halmazok esetén az A1, A3 és A4 axiómákból következett.

[4], Die Axiome der Mengenlehre, *Scripta Universitatis atque Bibliothecae Hierosolymitanarum*, math. et phys., **1** (1923), no. 6.
[5], *Einleitung in die Mengenlehre*, Berlin, 2. kiadás. 1923; 3. kiadás, 1928.
[6], Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, *Mathematische Zeitschrift*, **22** (1925), 250—273.
[7], *Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*, Leipzig és Berlin, 1927.

K. Gödel [1], The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory, *Annals of Mathematics Studies*, **3** (1940).

Kalmár L. [1], *A matematika alapjai* (egyetemi jegyzet), I. kötet: halmazelmélet, Budapest (Felsőoktatási Jegyzetellátó Vállalat), 1953.

C. Kuratowski [1], Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles, *Fundamenta Mathematicae*, **2** (1921), 161—171.

A. A. Markov (А. А. Марков) [1], О зависимости аксиомы В6 от других аксиом Bernays'a—Gödel'я, Известия Академии Наук СССР, сер. мат., **12** (1948), 569—570.

J. v. Neumann [1], Zur Einführung der transfiniten Zahlen, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **1** (1922-23), 199—208.
[2], Eine Axiomatisierung der Mengenlehre, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **154** (1925), 219—240.
[3], Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengenlehre, *Mathematische Annalen*, **99** (1928), 373—391.
[4], Die Axiomatisierung der Mengenlehre, *Mathematische Zeitschrift*, **27** (1928), 669—752.

B. Russell [1], *The principles of mathematics*, 1. kötet, London, 2. kiadás, 1937.

Th. Skolem [1], Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre, *Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem fünften Kongreß der skandinavischen Mathematiker* (Helsingfors, 1922, megjelent 1923-ban), 217—232.
[2], Einige Bemerkungen zu der Abhandlung von E. Zermelo: „Über die Definitheit in der Axiomatik", *Fundamenta Mathematicae*, **15** (1930), 337—341.

E. Zermelo [1], Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, *Mathematische Annalen*, **65** (1908), 261—281.
[2], Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik, *Fundamenta Mathematicae*, **14** (1929), 339—344.

ЗАМЕЧАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ АКСИОМ ГЁДЕЛЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Андраш Хайнал и Ласло Кальмар

В статье доказывается, что метатеорема М1 Гёделя (The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory, *Annals of Mathematics Studies* **3** (1940), стр. 8; русский перевод: Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы

с аксиомами теории множеств, Успехи Математических Наук, 3 (1948), стр. 96—149) может быть доказана без использования аксиомы B8 Гёделя. Так как аксиома B8 является частным случаем метатеоремы M1, то отсюда следует, что аксиома B8 может быть опущена совсем. Доказательство основывается на рассуждении чисто комбинаторического характера. Английский вариант настоящей работы будет в скором времени опубликовано в журнале *Publicationes Mathematicae* (Дебрецен).

EINE BEMERKUNG ZUM GÖDELSCHEN AXIOMENSYSTEM DER MENGENLEHRE

Von András Hajnal und László Kalmár (Szeged)

Es wird beweisen, daß der Metasatz M1 von Gödel (The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory, *Annals of Mathematics Studies*, 3 (1940), S. 8) sich ohne das Gödelsche Axiom B8 beweisen läßt. Da Axiom B8 ein Spezialfall des Metasatzes M1 ist, so folgt hieraus, das Axiom B8 überhaupt entbehrlich ist. Das Kern des Beweises ist eine rein kombinatorische Überlegung. Eine englische Version der Arbeit wird demnächst in den *Publicationes Mathematicae* (Debrecen) erscheinen.

Bolyai Farkas sokszögátdarabolási tételéről

Szász Pál

A síkban minden egyenesvonalú egyszerű sokszög átdarabolható adott alapú téglalappá. Vagyis véges számú sokszögre bontható úgy, hogy azokból adott egyenesdarabbal mint alappal bíró téglalapot állíthatunk össze.

E tételt elsőnek Bolyai Farkas[1] mondotta ki és bizonyította be. Vele körülbelül egyidejűleg P. Gerwin[2] is kimondta és bebizonyította a tételt abban az alakban, hogy két egyenlő területű egyenesvonalú egyszerű sokszög mindig egymásbadarabolható. Bizonyításában egészen más, a Bolyai Farkasénál bonyodalmasabb módszert alkalmazott. Azóta sokan foglalkoztak a tétel ez utóbbi alakjának bebizonyításával,[3] a régebbiek közül hazánkban Réthy Mór[4] és Spiegl Zsigmond.[5] Újabb keletű V. F. Kagan bizonyítása.[6] Ez emlékeztet P. Gerwin idézett bizonyítására, annál

[1] Wolfgang Bolyai de Bolya, Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheseos purae elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici, Maros Vásárhelyini 1832—1833, t. II. 60—61; editio secunda t. II. Budapestini 1904, 108—109. Vö. még Varga Tamás[7], 106—109, ahol is e bizonyítás magyar átültetésben található.

[2] P. Gerwin, Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke, Journal für die reine und angewandte Mathematik 10 (1833), 228—234.

[3] Az idevágó irodalmat illetően vö. F. Enriques, Fragen der Elementargeometrie I, 2. Aufl., Leipzig—Berlin 1923, VI. fejezet 3—5 §§, főleg 160—169, továbbá R. Bonola, Index operum ad geometriam absolutam spectantium, Libellus etc., Claudiopoli 1902, 129—130, és M. Simon, Über die Entwicklung der Elementar-geometrie im XIX. Jahrhundert, Leipzig 1906, 115—120.

[4] Réthy Mór, Végszerűen egyenlő területek, Matematikai és Természettudományi Értesítő 8 (1890), 176—202, speciálisan 178—180, Endlich-gleiche Flächen, Mathematische Annalen 38 (1891), 405—428, speciálisan 407—409, Végszerűen egyenlő területek (Első közlemény), Matematikai és Fizikai Lapok 2 (1893), 1—16, speciálisan 4—6.

[5] Spiegl Zsigmond, Adalék a végszerűen egyenlő területek elméletéhez, Matematikai és Fizikai Lapok 2 (1893), 17—20.

[6] Vö. B. V. Kutuzov, Geometria, ford. Faragó László, Budapest, 1954 57 §, 261—265.

már egyszerűbb, de semmivel sem könnyebb, mint a BOLYAI FARKASÉ. Viszont lényegesen egyszerűsítette az utóbbi bizonyítást legújabban egy egyszerű ötlet által VARGA TAMÁS.[7]

A tétel BOLYAI FARKAS adta fenti alakjának előnye a P. Gerwin-félével szemben, hogy a terület fogalmától függetlenül is van értelme. Kívánatos tehát ezt a bizonyításban is elkerülni. BOLYAI FARKAS bizonyításából ez könnyen ki is küszöbölhető. De nincs szükség a bizonyításban az egyenesdarabok mérésére, sőt a Hilbert-féle *szakaszkalkulusra*[8] sem. Ilyen természetű bizonyítással szolgált már B. NIEWENGLOWSKI és L. GÉRARD közösen írt könyve,[9] ahol is a bizonyításban nemcsak a terület fogalma nincs felhasználva, hanem az egyenesdarabok mérése és a hasonlóság tana sem, de anélkül, hogy ott e módszertani szempont ki volna emelve. A szerzőkre hatással lehetett O. STOLZ[10] bizonyítása, amely azonban még nem felel meg ennek a szempontnak, annyiban, hogy hallgatagon felhasználja a DE ZOLT-féle axiómát,[11], amelyet pedig a hasonlóság tanának segítségével bizonyítottak be F. SCHUR[12] valamint W. KILLING[13] és mások[14] felhasználva ARCHIMEDES axiómáját, ez utóbbitól függetlenül azután D. HILBERT.[15]

Az alábbiakban a tétel fent írt alakjának ismét más, a terület fogalmától független bizonyítását mutatjuk be s éppen azt akarjuk kiemelni, hogy a B. NIEWENGLOWSKI és L. GÉRARD könyvében követett módszerhez hasonlóan *nem használjuk fel sem az egyenesdarabok mérését, sem pedig a szakaszkalkulust.* Bizonyításunk BOLYAI FARKAS eredeti bizonyításához igazodik, de annál — azt hisszük — egyszerűbb. És közvetlenebb az említett könyvben található bizonyításnál, amennyiben nem használja fel az egyenlő alapú és magasságú parallelogrammák egymásbadarabolhatóságát.[16]

[7] VARGA TAMÁS, Bolyai Farkas átdarabolási tétele, Matematikai Lapok 5 (1954), 101—114, főleg 109—110.

[8] D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl. Leipzig und Berlin 1930, 15. § 60—64. Vö. még ugyanitt 18—21 §§ 69—82.

[9] B. NIEWENGLOWSKI—L. GÉRARD, Cours de Géométrie élémentaire I, Paris 1898, 343—344.

[10] O. STOLZ, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik I, Leipzig 1885, 75—77 és 333. Vö. még ugyanattól, Die ebenen Vielecke und die Winkel mit Einschluss der Berührungs-Winkel als Systeme von absoluten Grössen, Monatshefte für Mathematik und Physik 5 (1894), 233—240, főleg 233—234.

[11] Vö. F. ENRIQUES[3], i. m. 160 és O. STOLZ[10], második i. h. 234.

[12] Vö. F. ENRIQUES[3], i. m. 160—162.

[13] W. KILLING, Einführung in die Grundlagen der Géométrie II, Paderborn 1898, 23—31.

[14] Lásd [12].

[15] D. HILBERT[8], i. m. 69—80.

[16] E tételnek egy igen egyszerű bizonyítását adja J. M. C. DUHAMEL, Des méthodes dans les sciences de raisonnement II, Paris 1866, 447—448.

Tárgyalásunk alapját képezik az illeszkedés, a rendezés, az egybevágóság és a párhuzamosság Hilbert-féle axiómái,[17] továbbá ARCHIMEDES axiómája. Az utóbbi elkerülhetetlen, mert amint azt éppen D. HILBERT[18] vizsgálataiból tudjuk, e nélkül a tételt nem is lehet bebizonyítani.

*

A bizonyítás lényegét az alábbi tétel bizonyítása képezi, éppen úgy, mint BOLYAI FARKAS eredeti bizonyításában.

Ha valamely parallelogramma egyik átlójának bármely közbülső pontján át az oldalakkal rendre párhuzamos két egyenest fektetjük, az átló két különböző oldalán keletkező parallelogrammák egymásba átdarabolhatók.

Bizonyítás. Legyen a parallelogramma szóbanforgó átlója $\overline{PQ}$, a választott közbülső pont $A = A'$, a másik átló végpontjai C és C'. Messe az A ponton át fektetett és a $\overline{CQ}$ oldallal párhuzamos egyenes a PC oldalt a B, $\overline{QC'}$-t a D' pontban, az A-n átmenő és a $\overline{PC}$ oldallal párhuzamos egyenes pedig a $\overline{PC'}$ oldalt a B', $\overline{QC}$-t a D pontban. Be kell bizonyítanunk, hogy az $ABCD$ parallelogramma átdarabolható az $A'B'C'D'$ parallelogrammába.

Ha A a $\overline{PQ}$ felezőpontja, akkor e két parallelogramma egybevágó és így az állítás evidens. Ellenkező esetben feltehetjük, hogy $\overline{PA} < \overline{AQ}$. Lehetséges, hogy $\overline{PA}$ az $\overline{AQ}$-nak aliquot része, mondjuk $\overline{AQ} = n\overline{PA}$. Ekkor egyben $\overline{BC} = n\overline{PB}$ és $\overline{B'C'} = n\overline{PB'}$ s ennélfogva mind $ABCD$, mind pedig $A'B'C'D'$ röviden kifejezve a $PBA'B'$ parallelogramma n-szerese, ezek tehát egymásba átdarabolhatók.

Tegyük fel most, hogy $\overline{PA}$ nem aliquot része $\overline{AQ}$-nak. Akkor ARCHIMEDES axiómája szerint van olyan n pozitív egész szám, amelyre

$$(1) \qquad n\overline{PA} < \overline{AQ} < (n+1)\overline{PA}.$$

Legyen először $n > 1$. Rakjuk fel A-ból Q felé egymás után az

$$(2) \qquad \overline{AP_1} = \overline{P_1P_2} = \cdots = \overline{P_{n-2}P_{n-1}} = \overline{PA} \qquad (P_0 = A)$$

egyenesdarabokat (1. ábra) s jelöljük a P_i ponton átmenő és CQ-val párhuzamos egyenesnek AD, ill. BC-vel való metszéspontját A_i, resp. B_i-vel, a P_i-n át fektetett és PC-vel párhuzamos egye-

[17] D. HILBERT[8], i. m. 2—7. §§.
[18] D. HILBERT, i. m. 72—73.

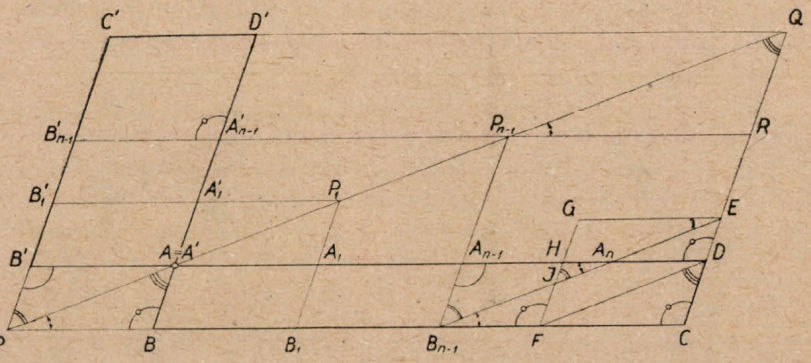
nesnek az $A'D'$, ill. $B'C'$-vel való metszéspontját pedig A_i', resp. B_i'-vel ($i = 1, 2, \ldots, n-1$). (2)-ből következik, hogy

$$\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \cdots = \overline{A_{n-2}A_{n-1}} = \overline{B'A} \qquad (A_0 = A) \tag{3}$$

és

$$\overline{A'A_1'} = \overline{A_1'A_2'} = \cdots = \overline{A_{n-2}'A_{n-1}'} = \overline{BA'} \qquad (A_0' = A').$$

Ennélfogva az $ABB_{n-1}A_{n-1}$, valamint az $A'B'B_{n-1}'A_{n-1}'$ parallelogramma rövid kifejezéssel a $PBA'B'$-nek $(n-1)$-szerese, ezek tehát egymásba átdarabolhatók. S mivel az $ABCD$ parallelogramma nyilván az $ABB_{n-1}A_{n-1}$ és $A_{n-1}B_{n-1}CD$ parallelogrammáknak, $A'B'C'D'$ pedig hasonlóképp az $A'B'B_{n-1}'A_{n-1}'$ és $A_{n-1}'B_{n-1}'C'D'$-nek az összetétele, azért $ABCD$-nek az $A'B'C'D'$-be való átdarabolhatósága be lesz bizonyítva, ha kimutatjuk, hogy az $A_{n-1}B_{n-1}CD$ parallelogramma átdarabolható $A_{n-1}'B_{n-1}'C'D'$-be.



1. ábra

(1)-ből folyólag nyilván

$$n\overline{B'A} < \overline{AD} < (n+1)\overline{B'A}$$

s minthogy (3) alapján $\overline{AA_{n-1}} = (n-1)\overline{B'A}$, azért A_{n-1} és D között az A_n pont úgy választható, hogy

$$\overline{A_{n-1}A_n} = \overline{B'A}, \quad \overline{A_nD} < \overline{A_{n-1}A_n}. \tag{4}$$

Ekkor $A_nA_{n-1}B_{n-1} \triangle \equiv A'B'P \triangle$, mert $\overline{A_{n-1}A_n} = \overline{B'A'}$ mellett $\overline{A_{n-1}B_{n-1}} = \overline{B'P}$ (párhuzamosok közti párhuzamosok) és $A_nA_{n-1}B_{n-1} \sphericalangle = A'B'P \sphericalangle$, miután $A_{n-1}B_{n-1} \| B'P$. Ennélfogva $A_nB_{n-1}A_{n-1} \sphericalangle = A'PB' \sphericalangle$, tehát $B_{n-1}A_n \| PA'$. Jelöljük $B_{n-1}A_n$ és CQ metszéspontját E-vel, a D ponton átmenő és A_nB_{n-1}-gyel

párhuzamos egyenesnek PC-vel való metszéspontját pedig F-fel. Minthogy a szerkesztésből folyólag A_n az A és D között van, a Pasch-féle axióma[19] értelmében E a D és Q közé s így D az E és C közé esik, tehát ugyanezen axióma szerint F a C és B_{n-1} között van. Tekintsük az FC, CE oldalakkal s közbezárt $FCE\sphericalangle$-gel bíró $FCEG$ parallelogrammát. Legyen AD és FG metszéspontja H. Minthogy $\overline{A_{n-1}H} = \overline{B_{n-1}F} = \overline{A_nD}$ (rendre párhuzamosok közti párhuzamosok), azért (4)-re tekintettel H az A_{n-1} és A_n között s ennélfogva A_n a H és D között van. Tehát FH és A_nB_{n-1} metszéspontját I-vel jelölve, a Pasch-féle axióma értelmében I egyrészt A_n és B_{n-1}, másrészt H és F s ennek folytán G és F közé esik. S mivel H a mondottak alapján I és G között van, ugyancsak a Pasch-féle axióma szerint A_n az I és E közé esik. Ezekből folyólag az $A_{n-1}B_{n-1}CD$ parallelogramma az $A_nA_{n-1}B_{n-1}$, $B_{n-1}FI$ háromszögeknek és az $FCDA_nI$ ötszögnek, $FCEG$ pedig az EGI, A_nDE háromszögeknek és ugyanezen ötszögnek az összetétele. Ez összetevő részek azonban páronként egybevágóak. Ugyanis $\overline{B_{n-1}A_n} = \overline{FD} = \overline{IE}$ (rendre párhuzamosok közti párhuzamosok) és $A_{n-1}A_nB_{n-1}\sphericalangle = GEI\sphericalangle$, valamint $A_{n-1}B_{n-1}A_n\sphericalangle = GIE\sphericalangle$, mivel $A_nA_{n-1} \| EG$ és $B_{n-1}A_{n-1} \| IG$, tehát $A_nB_{n-1}A_{n-1}\triangle \equiv EIG\triangle$. Továbbá $\overline{B_{n-1}F} = \overline{A_nD}$, valamint $\overline{FI} = \overline{DE}$ (párhuzamosok közti párhuzamosok) és $B_{n-1}FI\sphericalangle = B_{n-1}CE\sphericalangle = A_nDE\sphericalangle$, miután $FI \| CE$ és $DA_n \| CB_{n-1}$, következőleg $B_{n-1}FI\triangle \equiv A_nDE\triangle$. Az $FCDA_nI$ ötszög pedig egybevágó önmagával. Ezzel kimutattuk, hogy az $A_{n-1}B_{n-1}CD$ parallelogramma átdarabolható $FCEG$-be. Ez utóbbi azonban egybevágó a $B'_{n-1}A'_{n-1}D'C'$ parallelogrammával, amit következőképp láthatunk be. Minthogy $\overline{FD} = \overline{PA}$, valamint $\overline{DC} = \overline{AB}$ (párhuzamosok közti párhuzamosok) és $CDF\sphericalangle = CQP\sphericalangle = BAP\sphericalangle$ miután $DF \| QP$ és $QC \| AB$, azért $CDF\triangle \equiv BAP\triangle$ és így $\overline{FC} = \overline{PB}$. Viszont $\overline{PB} = \overline{B'_{n-1}A'_{n-1}}$ (párhuzamosok közti párhuzamososok), tehát

$$\overline{FC} = \overline{B'_{n-1}A'_{n-1}}. \tag{5}$$

Mivel továbbá $A'_{n-1}P_{n-1}$ és CQ metszéspontját R-rel jelölve $\overline{B_{n-1}C} = \overline{P_{n-1}R}$, valamint $\overline{B_{n-1}E} = \overline{P_{n-1}Q}$ (párhuzamosok közti párhuzamosok) és $CB_{n-1}E\sphericalangle = CPQ\sphericalangle = RP_{n-1}Q\sphericalangle$, minthogy $B_{n-1}E \| PQ$ és $PC \| P_{n-1}R$, azért $B_{n-1}CE\triangle \equiv P_{n-1}RQ\triangle$ s így $\overline{CE} = \overline{RQ}$. De $\overline{RQ} = \overline{A'_{n-1}D'}$ (párhuzamosok közti párhuzamosok), tehát egyben

$$\overline{CE} = \overline{A'_{n-1}D'}. \tag{6}$$

[19] V. ö. D. Hilbert[8], i. m. 3. §, 4—5.

Végül $CE \| BD'$ folytán $FCE\sphericalangle = PBD'\sphericalangle$, viszont $BP \| A'_{n-1}B'_{n-1}$ alapján $PBD'\sphericalangle = B'_{n-1}A'_{n-1}D'\sphericalangle$, következőleg

$$FCE\sphericalangle = B'_{n-1}A'_{n-1}D'\sphericalangle. \tag{7}$$

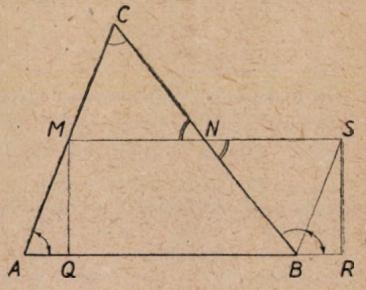
(5), (6) és (7)-ből mármost következik, hogy valóban

$$FCEG\square = B'_{n-1}A'_{n-1}D'C'\square.$$

Ennélfogva az $A_{n-1}B_{n-1}CD$ parallelogrammának $FCEG$-be való átdarabolhatósága egyszersmind azt is jelenti, hogy $A_{n-1}B_{n-1}CD$ átdarabolható az $A'_{n-1}B'_{n-1}C'D'$ parallelogrammába.

Ezzel a fentebbiek értelmében megmutattuk, hogy amennyiben (1) alatt $n > 1$, az $ABCD$ parallelogramma átdarabolható $A'B'C'D'$-be. Ezt $n = 1$ esetén pedig ugyanúgy láthatjuk be, mint ahogy az $A_{n-1}B_{n-1}CD$ parallelogrammának $A'_{n-1}B'_{n-1}C'D'$-be való átdarabolhatóságát éppen kimutattuk. Tehát a tétel teljesen be van bizonyítva.

E tételnek folyamánya, hogy *bármely parallelogramma átdarabolható adott alapú és ugyanolyan szögű parallelogrammává.* Mert ha $ABCD$ a szóbanforgó parallelogramma s a BC egyenesre B-ből felrakjuk a C-vel vele átellenes irányban az adott alappal egyenlő $\overline{BP}$ egyenesdarabot, P-n át az AB-vel, AP és CD-nek Q metszéspontján át pedig AD-vel párhuzamost fektetünk, akkor ezek metszéspontját C'-vel, előbbinek AD-vel, utóbbinak AB-vel való metszéspontját pedig B', ill. D'-vel jelölve, a bebizonyított tétel értelmében $ABCD$ átdarabolható az $AB'C'D'$ parallelogrammába, amelyben pedig a szerkesztés alapján $\overline{AB'} = \overline{BP}$ éppen az adott alap és $B'\sphericalangle = B\sphericalangle$.



2. ábra

Ez utóbbi tételből pedig következik, hogy *háromszög mindig átdarabolható adott alapú téglalappá.*

Ismeretes ugyanis, hogy a háromszög átdarabolható egyáltalában téglalappá. Ezt pl. a következőképpen láthatjuk be. Legyen az ABC háromszög egyik hegyesszöge az $A\sphericalangle$ és $\overline{AC} \leqq \overline{AB}$ (2. ábra). Bocsássuk az $\overline{AC}$ oldal M felezőpontjából AB-re az $\overline{MQ}$ merőlegest és fektessünk M-en át AB-vel párhuzamost. Ez utóbbinak BC-vel való N metszéspontja tudvalevőleg felezi a $\overline{BC}$ oldalt. Minthogy $A\sphericalangle$ hegyesszög, azért Q az A ponttól B felé esik s $\overline{AQ} < \overline{AM} < \overline{AC} \leqq \overline{AB}$ folytán $\overline{AQ} < \overline{AB}$, tehát Q az A és B között van. Ennélfogva ABC az MNC, MAQ háromszögek és az

$MQBN$ trapéz összetétele. E részekből pedig téglalapot állíthatunk össze. Ennek belátására fektessünk a B ponton át AC-vel párhuzamost, s bocsássuk ennek MN-nel való S metszéspontjából AB-re az $\overline{SR}$ merőlegest. Akkor az SNB háromszög nyilván BC-nek az ABC háromszöggel átellenes oldalán van s mivel $MCN\sphericalangle = SBN\sphericalangle$ és $MNC\sphericalangle = SNB\sphericalangle$, azért $\overline{CN} = \overline{BN}$ folytán $MNC\triangle \equiv SNB\triangle$. Minthogy pedig $ABS\sphericalangle$ mint az $A\sphericalangle$ supplementuma tompaszög, B a Q és R közé esik és $QAM\sphericalangle = RBS\sphericalangle$, tehát $\overline{AM} = \overline{CM} = \overline{BS}$ folytán $MAQ\triangle = SBR\triangle$. A szerkesztésből folyólag $MQRS$ téglalap, és a mondottak szerint az ABC háromszöget alkotó MNC, MAQ, $MQBN$ részek rendre egybevágóak az e téglalapot kitevő SNB, SBR, $MQBN$ részekkel. Az ABC háromszög tehát átdarabolható ez $MQRS$ téglalappá. Ezt mármost az előbbi tétel értelmében átdarabolhatjuk adott alapú téglalappá, tehát az átdarabolás tranzitivitása[20] folytán az ABC háromszög is ebbe átdarabolható.

Most már BOLYAI FARKAS tételét tüstént beláthatjuk. Bontsuk ugyanis a sokszöget háromszögekre, ezek mindegyikét daraboljuk át egy-egy, az adott alappal bíró téglalappá, végül rakjuk e téglalapokat egymásra. Ily módon olyan téglalapot nyertünk, amelynek alapja az adott egyenesdarab és amely az eredeti sokszöget alkotó részekből van összeállítva. A sokszög tehát átdarabolható az adott alappal bíró téglalappá. Qu. e. d.

(Beérkezett 1955. január 8-án.)

О ТЕОРЕМЕ ФАРКАША БОЯИ О ПЕРЕКРОЙКЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

П. Сас

Снова доказывается теорема Фаркаша Бояи,[1] согласно которой в плоскости каждый простой многоугольник может быть перекроен в прямоугольник с данным основанием. В противоположность книге Б. Ниэвенгловски и Л. Жерара,[9] где приведено доказательство такого же характера, но менее естественное, родчеркивается, что в доказательстве не используется ни измерение отрезков, ни исчисление отрезков Гилберта.[8] Доказательство является упрощением оригинального доказательсьва Фаркаша Бояи.

[20] Lásd pl. D. HILBERT [8], i. m. 18. §, 70—71.

ÜBER DEN SATZ VON WOLFGANG BOLYAI ÜBER DIE ZERSCHNEIDUNG GERADLINIGER EBENEN VIELECKE

von P. Szász

Der Satz von Wolfgang Bolyai [1], laut welchem ein geradliniges einfaches Vieleck in der Ebene mit einem Rechteck von gegebener Grundlinie zerlegungsgleich ist, wird in vorliegender Arbeit von neuem bewiesen. Es wird im Gegensatz zu dem Buche [9] von B. Niewenglowski und L. Gérard wo ein derartiger doch nicht so unmittelbarer Beweis zu finden ist, hervorgehoben, dass *bei unserer Darstellung weder das Messen von Strecken, noch die* Hilbertsche *Streckenrechnung* [8] *zur Verwendung kommt.* Der Beweis ist eine Vereinfachung des ursprünglichen Beweises von Wolfgang Bolyai.

(Eingegangen am 8. Januar 1955).

A Jacobi-, Laguerre- és Hermite-féle polinomok együttes jellemzéséről

MIKOLÁS MIKLÓS

1. A címben említett polinomokat együtt *„klasszikus" ortogonális polinomok*nak szokás hívni, minthogy ezek szolgáltatják az ortogonális polinomrendszerek legtöbbet vizsgált és az alkalmazások szempontjából is legfontosabb példáit. Közvetlen előállításuk ún. *Rodrigues-típusú* formulákkal történhetik:

$$J_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^\nu}{(2\nu)!!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^\nu[(1-x)^{\alpha+\nu}(1+x)^{\beta+\nu}]}{dx^\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

a *Jacobi-féle* (vagy hipergeometrikus),

$$L_\nu^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{\nu!}x^{-\alpha}e^x\frac{d^\nu(e^{-x}x^{\nu+\alpha})}{dx^\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

a *Laguerre-féle*,

$$H_\nu(x) = (-1)^\nu e^{x^2}\frac{d^\nu e^{-x^2}}{dx^\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

a *Hermite-féle* polinomok szokásos jelölése és definíciója.[1] A paraméterek egy-egy választásának számos nevezetes — történetileg

[1] Az idevágó szakirodalom jelölései mindmáig nem egységesek; mi SZEGŐ GÁBOR Orthogonal polynomials (1939) c. ismert kitünő monográfiájának definícióit tartjuk szem előtt. A szóbanforgó elmélet alaptényei megtalálhatók magyar nyelven SZÁSZ PÁL analízisének lényegesen kibővített új kiadásában (1951). — Természetesen más értelmezések is lehetségesek: így származtathatók a klasszikus polinomrendszerek az $1, x, x^2, \ldots$ sorozatból „ortogonalizálással", vagy generátorfüggvények, sajátértékfeladatok segítségével. Az első és másodfajú Csebisev-polinomok lényegileg (konstans faktoroktól eltekintve) a $T_\nu(x) = [\cos \nu\xi]_{\cos\xi = x}$ ill. $U_\nu(x) = \left[\frac{\sin(\nu+1)\xi}{\sin\xi}\right]_{\cos\xi = x}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ képletekkel határozhatók meg.

néha jóval előbb ismeretessé vált — speciális eset felel meg. Így $J_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)$ $\alpha=\beta$ mellett az ún. *ultraszférikus* (Gegenbauer-féle) polinomokba megy át, melyek között vannak az $\alpha=\beta=0$ esetnek megfelelő *Legendre-féle*, valamint az $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ és $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ esethez tartozó első- ill. másodfajú *Csebisev-polinomok*;[2] $L_\nu^{(\alpha)}(x)$ $\alpha=0$ mellett a szűkebb értelemben vett (közönséges) Laguerre-polinomokat szolgáltatja.

Mármost a $J_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$ polinomok $\alpha>-1, \beta>-1$ mellett a $(-1,1)$ intervallumra és az $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ súlyfüggvényre, az $L_\nu^{(\alpha)}(x)$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$ polinomok $\alpha>-1$ mellett a $(0,\infty)$ intervallumra és az $x^\alpha e^{-x}$ súlyra,[3] végül a $H_\nu(x)$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$ polinomok $(-\infty,\infty)$-re és az e^{-x^2} súlyfüggvényre vonatkozólag alkotnak ortogonális rendszert. Általában — mint ismeretes — valamely $\{\varphi_\nu(x)\}$ függvényrendszerről akkor mondjuk, hogy egy $a<x<b$ számközre és egy itt nem-negatív $w(x)$ súlyfüggvényre vonatkozólag *ortogonális*, ha *minden* szóbajövő indexpárra

$$\int_a^b w(x)\varphi_m(x)\varphi_n(x)dx=0 \qquad (m\neq n).$$

Ha $w(x)\equiv 1$, akkor szűkebb értelemben vett (közönséges) ortogonalitásról beszélünk.[4]

[2] Fejér Lipót nevéhez fűződik többek között a Legendre-polinomoknak két egészen új irányú általánosítása, ezekre, ill. ultraszférikus polinomokra vonatkozó nevezetes eredményekkel együtt. L. pl. Fejér L.: [1] A hatványsorról és a vele kapcsolatos Legendre-féle többtagúakról, Mat. és Term. tud. Értesítő, *53* (1935), 1—17. o.; [2] Trigonometrische Reihen und Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge, Transactions Amer. Math. Soc., *39* (1936), 18—59. o.; [3] Hatványsorok többszörösen monoton együtthatósorozattal, Mat. és Term. tud. Értesítő, *60* (1936), 1—27. o. Vö. továbbá Szegő G.: Orthogonal polynomials, 131—134. o.; 169—170. o.

[3] A Jacobi- és Laguerre-polinomok fenti értelmezése tetszőleges komplex paraméterértékek esetén is érvényes; az $\alpha>-1$ és $\beta>-1$, ill. $\alpha>-1$ megszorítás csak az ortogonalitáshoz, pontosabban a megfelelő súlyfüggvény integrálhatóságához szükséges.

[4] Ennek klasszikus példája: a bármely 2π hosszúságú számközben ortogonális $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots$ sorozat, a közönséges Fourier-sorok alapfüggvényrendszere. — Tudjuk, hogy az ortogonális rendszerek és az ezek szerint „haladó" ortogonális sorok elméletének elnevezései bizonyos analóg geometriai fogalmakra utalnak; így pl. két függvény ortogonalitásának két vektor merőlegessége, ezek szorzatintegráljának a vektorkoordináták szorzatösszege (tehát a kérdéses vektorok skaláris szorzata) felel meg stb.

Fontos tény, hogy az $y = J_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)$ polinom az

$$(1)\quad [(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}y']' = -\nu(\nu+\alpha+\beta+1)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta y \qquad (-1<x<1),$$

az $y = L_\nu^{(\alpha)}(x)$ polinom az

$$(2)\quad [x^{\alpha+1}e^{-x}y']' = -\nu x^\alpha e^{-x} y \qquad (0<x<\infty),$$

végre $y = H_\nu(x)$ az

$$(3)\quad (e^{-x^2}y')' = -2\nu e^{-x^2}y \qquad (-\infty<x<\infty)$$

másodrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek tesz eleget; rögtön látjuk, hogy mindhárom ilyen alakú:

$$(4)\quad [g(x)y']' = -\lambda_\nu w(x) y \qquad (a<x<b),$$

ahol λ_ν csak ν-től függő pozitív állandó s a $g(x)$, $w(x)$ együtthatók (a, b)-ben folytonosak és pozitívok. (4)-et *Sturm—Liouville-féle differenciálegyenlet*nek szokás nevezni; tekintve, hogy ez egyúttal a harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenletét is magában foglalja ($g(x) = w(x) \equiv 1$, $\lambda_\nu = \nu^2$), a (4)-re vonatkozó — különösen a századforduló idején fellendült — kiterjedt vizsgálatok természetes általánosítási törekvéseket tükröznek.

2. Egy nemrég megjelent dolgozatában[5] közölte ACZÉL JÁNOS azt a meglepően hangzó sejtést, hogy a fenti — az együtthatók egészen speciális választásának megfelelő — három példával és ezeknek lineáris transzformáltjaival[6] már ki is vannak merítve az olyan ortogonális polinomrendszerek, melyek egy (4)-típusú differenciálegyenlet megoldásaiból épülnek fel. Itt és a következőkben polinomrendszeren mindig olyan *végtelen* sorozat értendő, melynek n-edik eleme *pontosan* $(n-1)$-edfokú, valós együtthatós polinom $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; egy ilyen rendszert röviden *Sturm—Liouville-félének* nevezünk, ha minden eleme egy (4)-típusú egyenletnek tesz eleget.

Most megmutatjuk, hogy valóban a Jacobi-, Laguerre- és Hermite-polinomok szolgáltatják az *összes* Sturm—Liouville-féle ortogonális polinomrendszereket. Pontosabban:

[5] ACZÉL J.: Eine Bemerkung über die Charakterisierung der klassischen orthogonalen Polynome, Acta Math. Sci. Hung., *4* (1953), 315—321. o.

[6] Nyilvánvaló pl.: a $\{J_\nu^{(0,0)}(x)\}$ Legendre-polinomok $(-1, 1)$-beli ortogonalitásából következik, hogy $\{J_\nu^{(0,0)}(2x)\}$ a $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ közben, $\{J_\nu^{(0,0)}(2x-1)\}$ a $(0, 1)$ közben ortogonális s i. t.; továbbá a transzformáltak is kielégítenek egy-egy (4)-alakú differenciálegyenletet.

I. TÉTEL. *Ha valamely* $P_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ *polinomrendszer Sturm—Liouville-féle és ortogonális (bizonyos intervallumra és súlyfüggvényre vonatkozólag), akkor* $\{P_\nu(x)\}$ *konstans szorzóktól és a független változó esetleges lineáris transzformációjától eltekintve Jacobi-, Laguerre-, ill. Hermite-polinomokból áll aszerint, amint az ortogonalitási alapintervallum véges, az egyik, ill. mindkét irányban végtelen.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy fennállnak a

$$[g(x)P'_\nu(x)]' = -\lambda_\nu w(x)P_\nu(x) \quad (a < x < b;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

egyenletek. Innen pl.

$$g(x) = -\frac{\lambda_1}{P'_1(x)} \int_A^x w(t)P_1(t)\,dt \qquad (a < A \leqq x < b),$$

ami evidenciába helyezi, hogy $g(x)$ (a, b)-ben differenciálható; írhatjuk tehát egyúttal

$$\frac{g(x)}{w(x)} P''_\nu(x) + \frac{g'(x)}{w(x)} P'_\nu(x) + \lambda_\nu P_\nu(x) = 0 \tag{6}$$

$$(a < x < b;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

(6) $\nu = 0$-ra $\lambda_0 = 0$-t szolgáltat, $\nu = 1$ és $\nu = 2$ mellett pedig azt mutatja, hogy $P'_\nu(x)$ együtthatója szükségképpen legfeljebb első-, $P''_\nu(x)$-é legfeljebb másodfokú polinom; írjuk:

$$\frac{g'(x)}{w(x)} = l_0 + l_1 x = l(x), \tag{7}$$

$$\frac{g(x)}{w(x)} = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 = q(x), \tag{8}$$

ahol az együtthatók mind valósak és

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 > 0. \tag{9}$$

Eszerint (5) egyenértékű a következő *Fuchs-tipusú* lineáris differenciálegyenlettel:

$$q(x)P''_\nu(x) + l(x)P'_\nu(x) + \lambda_\nu P_\nu(x) = 0 \tag{10}$$

$$(a < x < b;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots);$$

innen pedig $\{P_\nu(x)\}$ ortogonalitásának felhasználásával már folyik a tétel állítása, amint ez W. HAHN egy dolgozatából kitűnik.[7]

[7] Vö. W. HAHN: Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen, Math. Zeitschrift *39* (1935), 634—638. o. Ha ui. $q(x)$-nek két különböző valós gyöke van, továbbá ha $q_2 = 0, q_1 \neq 0$, ill. $q_2 = q_1 = 0$, akkor (10) rendre a (11), (12), (13) differenciálegyenletbe transzformálható, a megma-

Vegyük észre, hogy az (1)—(3) egyenletek ilyen alakra is hozhatók:

$$(11)\quad (1-x^2)y''-[(\alpha+\beta+2)x+(\alpha-\beta)]y'+\nu(\nu+\alpha+\beta+1)y=0 \qquad (-1<x<1),$$

$$(12)\quad xy''-[x-(\alpha+1)]y'+\nu y=0 \qquad (0<x<\infty),$$

$$(13)\quad y''-2xy'+2\nu y=0 \qquad (-\infty<x<\infty).$$

3. Kiemelendő, hogy (7)-ből és (8)-ból a

$$(14)\quad g'(x)=\frac{l_0+l_1x}{q_0+q_1x+q_2x^2}g(x) \qquad (a<x<b)$$

reláció, az ún. *Pearson-féle differenciálegyenlet* következik.[8] Mellékeredményként nyertük tehát, hogy *ha* (4)*-nek eleget tesz egy polinomrendszer minden eleme, akkor* y' *együtthatójára egy* (14) *alakú feltétel,* y*-éra pedig a*

$$(15)\quad w(x)=\frac{g(x)}{q_0+q_1x+q_2x^2} \qquad (a<x<b)$$

kapcsolat érvényes.

E tényt felhasználjuk arra, hogy a klasszikus polinomrendszerekre vonatkozólag egy másik, ugyancsak igen egyszerű *jellemzési tételt* állapítsunk meg. Itt az ortogonalitás helyett közös karakterisztikus tulajdonságként egy határfeltétel-pár szerepel, ti., hogy (4)-ben y' együtthatójának az alapintervallum két végpontjában „erős" zérushelye legyen (vö. (1)—(3)).

II. TÉTEL. *Ha valamely* $\{P_\nu(x)\}$ *polinomrendszernek minden eleme kielégít egy* (4)*-alakú differenciálegyenletet a*

$$(16)\quad \lim_{x\to a+0}[g(x)x^\nu]=\lim_{x\to b-0}[g(x)x^\nu]=0 \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)$$

határfeltételek mellett, akkor $\{P_\nu(x)\}$ *konstans faktoroktól és a füg-*

radt esetek pedig az ortogonalitás miatt nem állhatnak meg. Itt a szóbanforgó okoskodás ama nevezetes tétel bizonyításának második felét szolgáltatja, hogy *egy ortogonális polinomrendszer, melynek derivált-rendszere is ortogonális, szükségképpen a klasszikus rendszerek egyikévé degenerál.* — Ugyancsak a (10) egyenlet polinom-megoldásaival foglalkozik W. C. BRENKE: On polynomial solutions of a class of linear differential equations of second order, Bull. Amer. Math. Soc. *36* (1930), 77—84. o., valamint S. BOCHNER: Über Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme, Math. Zeitschrift, *29* (1929), 730—736. o.

[8] (14) újabban nemcsak az ortogonális polinomrendszerek irodalmában, hanem valószínűségszámítási és statisztikai alkalmazásoknál is mind gyakrabban fellép.

getlen változónak esetleges lineáris transzformációjától eltekintve egy $\{J_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ $(\alpha > -1, \beta > -1)$, *vagy* $\{L_\nu^{(\alpha)}(x)\}$ $(\alpha > -1)$ *rendszerrel, ill. a* $\{H_\nu(x)\}$ *rendszerrel azonos, aszerint, amint* (a, b) *véges, az egyik, ill. mindkét irányban végtelen.*

BIZONYÍTÁS. A fentiek értelmében abból, hogy $\{P_\nu(x)\}$ (4)-hez „tartozó" Sturm—Liouville-féle polinomrendszer, következik (14) és (15). Az előbbi könnyen megoldható, hiszen (14)-ből

$$g(x) = \exp \int \frac{l_0 + l_1 x}{q_0 + q_1 x + q_2 x^2} dx.$$

A jobboldali racionális törtfüggvény integrálásánál a következő lehetőségeket kell megkülönböztetnünk (vö. (9)): 1) $q_2 \neq 0$ és $q_1^2 > 4q_0q_2$; 2) $q_2 \neq 0$ és $q_1^2 = 4q_0q_2$; 3) $q_2 \neq 0$ és $q_1^2 < 4q_0q_2$; 4) $q_2 = 0, q_1 \neq 0$; 5) $q_1 = q_2 = 0$. A 2) és 3) eset nem állhat meg a (16) határfeltételek miatt; az 1), 4), 5) esetben pedig (16) figyelembe vételével rendre a következő képletek és megszorítások adódnak (C tetszőleges pozitív állandó):

$$(17)\quad \begin{cases} [a, b] \text{ véges}, q(x) \equiv q_2(x-a)(x-b), g(x) = C(b-x)^{\varepsilon_1}(x-a)^{\varepsilon_2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a < x < b), \\ \varepsilon_{1,2} = \dfrac{l_1}{2q_2} \pm \dfrac{1}{q_2(b-a)}\left(l_0 - \dfrac{l_1 q_1}{2q_2}\right) > 0; \end{cases}$$

$$(18^*)\quad \begin{cases} a \text{ véges és } b = \infty,\ g(x) = C(x-a)^\tau e^{\frac{l_1}{q_1}x} \qquad (a < x < \infty), \\ l_1 q_1 < 0,\ a = -\dfrac{q_0}{q_1},\ \tau = \dfrac{1}{q_1}\left(l_0 - \dfrac{l_1 q_0}{q_1}\right) > 0; \end{cases}$$

$$(18^{**})\quad \begin{cases} a = -\infty \text{ és } b \text{ véges},\ g(x) = C(b-x)^\tau e^{\frac{l_1}{q_1}x} \qquad (-\infty < x < b), \\ l_1 q_1 > 0,\ b = -\dfrac{q_0}{q_1},\ \tau = \dfrac{1}{q_1}\left(l_0 - \dfrac{l_1 q_0}{q_1}\right) > 0; \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} a = -\infty \text{ és } b = \infty,\ g(x) = C \exp\left(\dfrac{l_1}{2q_0} x^2 + \dfrac{l_0}{q_0} x\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (-\infty < x < \infty), \\ l_1 q_0 < 0. \end{cases}$$

Rögtön látjuk, hogy a $g(x)$ számára kapott kifejezések y' (1), (2), ill. (3) alatti együtthatójának lineáris transzformáltjai; a $w(x)$ számára (15) alapján nyert megfelelő kifejezések viszont y-nak

(1), (2), ill. (3) alatti együtthatójával vannak ugyanilyen kapcsolatban.[9] Ha ε_1 helyett $(\alpha+1)$-et, ε_2 helyett $(\beta+1)$-et, τ helyett szintén $(\alpha+1)$-et írunk, akkor a (17)—(19) alatti eseteknek megfelelően (5) a következő relációkba megy át ($\nu=0, 1, 2, \ldots$):

$$(20)\qquad [(b-x)^{\alpha+1}(x-a)^{\beta+1}P_\nu'(x)]' = -\frac{\lambda_\nu}{q_2}(b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta}P_\nu(x),$$
$$(a<x<b;\ \alpha>-1, \beta>-1)$$

$$(21)\qquad [(x-a)^{\alpha+1}e^{\frac{l_1}{q_1}x}P_\nu'(x)]' = -\frac{\lambda_\nu}{q_1}(x-a)^{\alpha}e^{\frac{l_1}{q_1}x}P_\nu(x),$$
$$(a<x<\infty;\ \alpha>-1, l_1q_1<0)$$

$$(22)\qquad [(b-x)^{\alpha+1}e^{\frac{l_1}{q_1}x}P_\nu'(x)]' = \frac{\lambda_\nu}{q_1}(b-x)^{\alpha}e^{\frac{l_1}{q_1}x}P_\nu(x),$$
$$(-\infty<x<b;\ \alpha>-1, l_1q_1>0)$$

$$(23)\qquad \left[\exp\left(\frac{l_1}{2q_1}x^2+\frac{l_0}{q_0}x\right)P_\nu'(x)\right]' = -\frac{\lambda_\nu}{q_0}\exp\left(\frac{l_1}{2q_0}x^2+\frac{l_0}{q_0}x\right)P_\nu(x).$$
$$(-\infty<x<\infty;\ l_1q_0<0).$$

Mivel — mint ismeretes — az (1)—(3) differenciálegyenleteknek nincsenek más polinom-megoldásai, mint a megfelelő klasszikus polinomok állandószorosai s a jobboldali konstans faktorok értéke is egyértelműen meg van határozva (sajátértékek), a (20)—(23) relációk alternatív fennállásából folyik állításunk.

4. Végül említésre érdemes a következő

III. TÉTEL. *Egy* (4)*-et kielégítő* $\{P_\nu(x)\}$ *(Sturm—Liouville-féle) polinomrendszernél* (16) *ekvivalens azzal a kikötéssel, hogy* $\{P_\nu(x)\}$ (a, b)*-ben* $w(x)$ *súllyal ortogonális legyen* (O_1^*)*, sőt azzal az erősebbnek látszóval is, hogy* (a, b)*-ben* $\{P_\nu(x)\}$ *a* $w(x)$ *súlyra,* $\{P_\nu'(x)\}$ *pedig a* $g(x)$ *súlyra vonatkozólag ortogonális legyen* (O_1^{**}).

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy érvényes (5).

[9] Azt a tényt, hogy a Pearson-féle differenciálegyenlet a (16) feltételekkel együtt lényegileg már meghatározza a klasszikus ortogonális rendszerekhez tartozó súlyfüggvényeket, felhasználtam egy nemrég megjelent munkámban is egy Jacobi-, Laguerre- és Hermite-polinomokra vonatkozó *általánosabb jellemzési tétel* bizonyításánál, amely ezeket nem mint polinom-, hanem mint teljes ortogonális rendszereket karakterizálja, differenciálegyenlet fennállásának kikötése *nélkül*. Vö. MIKOLÁS M.: Über gewisse Eigenschaften orthogonaler Systeme der Klasse L^2 und die Eigenfunktionen Sturm—Liouvillescher Differentialgleichungen, Acta Math. Acad. Scient. Hung. *6* (1955), 147—190. o. (Satz 8.)

Innen könnyű számolással következik a minden m, n indexpárra érvényes

$$(24)\quad [g(x)(P'_m(x)P_n(x)-P_m(x)P'_n(x))]' = (\lambda_n-\lambda_m)w(x)P_m(x)P_n(x) \qquad (a<x<b)$$

azonosság, amelyből

$$(25)\quad (\lambda_n-\lambda_m)\int_A^B w(x)P_m(x)P_n(x)dx =$$

$$= g(x)(P'_m(x)P_n(x)-P_m(x)P'_n(x))\Big|_{x=A}^{x=B} \qquad (a<A\leqq x\leqq B<b).$$

Szükségünk lesz még az

$$(26)\quad \int_A^B g(x)P'_m(x)P'_n(x)dx = g(x)P'_m(x)P_n(x)\Big|_{x=A}^{x=B} +$$

$$+\lambda_m\int_A^B w(x)P_m(x)P_n(x)dx \quad (a<A\leqq x\leqq B<b;\ m,n=0,1,2,\ldots)\,.$$

egyenlőségre, mely a baloldal parciális integrálása és (5) figyelembe vétele után áll elő.

Mármost nyilvánvalóan elegendő megmutatnunk egyfelől, hogy (16)-ból következik az O_1^{**} feltétel, másfelől, hogy O_1^{*} teljesülése maga után vonja (16) fennállását.

1° Az előbbi állítás (25)-ből és (26)-ból közvetlenül kiolvasható. Mivel ui. $g(x)(P_m(x)P_n(x)-P_m(x)P'_n(x))$ felbontható végesszámú konst. $g(x)x^r$ alakú tag összegére, (16) érvényessége esetén $A\to a+0$, $B\to b-0$ határátmenettel nyerjük:

$$(27)\quad \int_a^b w(x)P_m(x)P_n(x)dx = 0 \qquad (m\neq n);$$

ugyanez a határátmenet (26) esetében (16) és (27) alapján az

$$(28)\quad \int_a^b g(x)P'_m(x)P'_n(x)dx = 0 \qquad (m\neq n)$$

feltételt szolgáltatja. (27) és (28) azonban együtt éppen az O_1^{**} kikötést jelenti.

2° Az utóbbi állítást igazolandó, tegyük fel, hogy O_1^*, azaz (27) fennáll. Akkor (25) szerint egyúttal

$$\lim_{\substack{A\to a+0\\ B\to b-0}} g(x)\left(P_m'(x)P_n(x)-P_m(x)P_n'(x)\right)\Big|_{x=A}^{x=B}=0 \tag{29}$$

$$(m\neq n;\ m,n=0,1,2,\ldots),$$

ahol az A-ra és B-re vonatkozó határátmenet egymástól függetlenül értendő.

Ha $P_\nu(x)$-ben x^ν együtthatóját γ_ν-vel jelöljük, akkor speciálisan $m=1$, $n=0$ esetén (29)-ből

$$\lim_{\substack{A\to a+0\\ B\to b-0}} g(x)\cdot\gamma_1\gamma_0\Big|_{x=A}^{x=B}=\gamma_1\gamma_0\left[\lim_{B\to b-0} g(B)-\lim_{A\to a+0} g(A)\right]=0;$$

tehát

$$\lim_{A\to a+0} g(A)=\lim_{B\to b-0} g(B)=K_0.$$

Amennyiben a $\nu=0,1,2,\ldots,N-1$ értékek mindegyikére

$$\lim_{A\to a+0} g(A)A^\nu=\lim_{B\to b-0} g(B)B^\nu,$$

úgy (29) alapján írhatjuk:

$$\lim_{\substack{A\to a+0\\ B\to b-0}} g(x)P_{N+1}'(x)P_0(x)\Big|_{x=A}^{x=B}=$$

$$=\lim_{\substack{A\to a+0\\ B\to b-0}} g(x)\left[(N+1)\gamma_{N+1}\gamma_0 x^N+\cdots\right]\Big|_{x=A}^{x=B}=$$

$$=(N+1)\gamma_{N+1}\gamma_0\left[\lim_{B\to b-0} g(B)B^N-\lim_{A\to a+0} g(A)A^N\right]=0,$$

$$\lim_{A\to a+0} g(A)A^N=\lim_{B\to b-0} g(B)B^N=K_N. \tag{30}$$

Eszerint a (30) alatti határértékek *minden* nem-negatív egész N kitevőre léteznek és egy közös K_N számmal egyenlők; eredményünket (16)-tal egybevetve látjuk, hogy már csak $K_N=0$ $(N=0,1,2,\ldots)$ kimutatása hiányzik. Valóban, ha valamely ν indexre $K_\nu\neq 0$ volna, akkor $A^{N-\nu}=g(A)A^N/g(A)A^\nu$ limesze $A\to a+0$ és $B^{N-\nu}=g(B)B^N/g(B)B^\nu$ határértéke $B\to b-0$ mellett egyaránt K_N/K_ν lenne; de innen $\lim_{A\to a+0} A^{N-\nu}=\lim_{B\to b-0} B^{N-\nu}$ $(N=0,1,2,\ldots)$ következnék, ami $a\neq b$ folytán lehetetlen.

Beérkezett 1955. aug. 25-én.

ОБ ОБЩЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ, ЛАГЕРРА И ЭРМИТА

М. Миколаш

Дифференциальные уравнения (1), (2), и (3) многочленов Якоби $\{J_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)\}$, Лагерра $\{L_\nu^{(\alpha)}(x)\}$ и Эрмита $\{H_\nu(x)\}$ имеют общий вид (4) с непрерывными и положительными (a, b) коэффициентами $g(x)$, $w(x)$ и зависящим лишь от ν параметром $\lambda_\nu > 0$ (так называемое дифференциальное уравнение Штурма—Луивилля). Настоящая работа принимает к одной гипотезе Я. Ацеля (см. (5)), согласно которой приведенные выше „классические" системы многочленов и их линейные преобразования являются единственными системами, состоящими из решений уравнения типа (4) (коротко: системы Штурма—Луивилля) и кроме того также ортогональны (на некотором интервале с некоторой весовой функцией).

Доказывается, что действительно:

Если некоторая система многочленов $P_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ является системой Штурма—Луивилля и ортогональна, то $\{P_\nu(x)\}$, если не принимать во внимание постоянные множители и линейное преобразование независимой переменной, состоит из многочленов Якоби, Лагерра или Эрмита в зависимости от того будет ли отрезок ортогональности конечен, или бесконечен в одну или в обе стороны. (Теорема I.).

Дальнейшие результаты:

Если каждый элемент системы многочленов $\{P_\nu(x)\}$ удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению типа (4) и граничным условиям (16), то $\{P_\nu(x)\}$, если не принимать во внимание постоянные множители и линейное преобразование независимой переменной, совпадает с одной из систем $\{J_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ $(\alpha > -1, \beta > -1)$, $\{L_\nu^{(\alpha)}(x)\}$ $(\alpha > -1)$ или $H_\nu(x)$ в зависимости от того, будет ли (a, b) конечен в одну или в обе стороны. (Теорема II.)

Для системы многочленов Штурма—Луивилля (16) эквивалентно ортогональности $P_\nu(x)$ на (a, b) с весом $w(x)$, более того, с кажущимся более сильным условием ортогональности на (a, b) $\{P_\nu(x)\}$ с весом $w(x)$ а $\{P'_\nu(x)\}$ с весом $g(x)$. (Теорема III.)

ON COMMON CHARACTERIZATION OF THE JACOBI, LAGUERRE AND HERMITE POLYNOMIALS

By M. Mikolás (Budapest)

The differential equations (1), (2), (3) of the Jacobi polynomials $\{J_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)\}$, of the Laguerre polynomials $\{L_\nu^{(\alpha)}(x)\}$, and of the Hermite polynomials $\{H_\nu(x)\}$ respectively, have the common form (4) with in (a, b) positive and continuous coefficients $g(x)$, $w(x)$, the parameter $\lambda_\nu > 0$ depending upon ν only (*Sturm—Liouville equation*). J. Aczél conjectured that the classical polynom sets mentioned before are determined by satisfying (4) (being of „Sturm—Liouville type") and by their orthogonality. (Cf. [5].)

Now, the preceding paper contains the following results:

If a polynom system $P_\nu(x)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ is of Sturm—Liouville type and orthogonal, then $\{P_\nu(x)\}$ consists, save for constant factors and eventual linear transformation of the variable, only of Jacobi, Laguerre and Hermite polynomials resp., according that the orthogonality interval is finite, on the one side, or on both sides infinite. (Theorem I.)

If a polynom system $\{P_\nu(x)\}$ contains only solutions of a differential equation having the form (4) *and connected with the boundary conditions* (16), *then $\{P_\nu(x)\}$ is, apart from trivial linear transformations, identical to one of systems $\{J_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ $(\alpha > -1, \beta > -1)$, $\{L_\nu^{(\alpha)}(x)\}$ $(\alpha > -1)$, $\{H_\nu(x)\}$, according to case of (a, b) finite, on the one side, or on both sides infinite. (Theorem II.)*

In the case of any polynom system $\{P_\nu(x)\}$ of Sturm—Liouville type, (16) *is equivalent to the orthogonality of $\{P_\nu(x)\}$ in (a, b) with the weight function $w(x)$, moreover to the assumption (appearing as stronger), that both of $\{P_\nu(x)\}$ and $\{P'_\nu(x)\}$ are orthogonal in (a, b) with the weight functions $w(x), g(x)$ respectively. (Theorem III.)*

Received 25. Aug. 1955.

Elemi bizonyítás a véges testek elméletének alaptételére*

SZELE TIBOR

A véges testek elméletének alaptétele a következő három állítást tartalmazza:

I. *Egy véges test elemeinek száma mindig törzsszámhatvány.*

II. *Bármely p^n törzsszámhatványhoz van p^n elemű test.*

III. *Két p^n elemű test mindig izomorf.*

Ez a tétel lényegében az összes véges testet meghatározza. Ha még figyelembe vesszük, hogy WEDDERBURN nevezetes tétele alapján bármely véges ferdetest szükségképpen kommutatív, az alaptétel egyben az összes véges ferdetest leírását is szolgáltatja.

A véges testek elméletének alaptétele már VAN DER WAERDEN úttörő könyvének megjelenése óta szerepel az algbrai tankönyvirodalomban, a tételre adott bizonyítások azonban több-kevesebb előismeretet igényelnek a testelmélet köréből.[1] A jelen dolgozat célja az alaptétel egy olyan bizonyításának bemutatása, amely csupán az algebra legáltalánosabb fogalmainak és e fogalmakra vonatkozó legelemibb tételeknek ismeretét tételezi fel,[2] tehát testelméleti tanulmányok nélkül is megérthető.

A tétel bizonyítása:

* Jelen dolgozat a szerző egy posthumus cikke, amelyet a fennmaradt feljegyzések alapján KERTÉSZ ANDOR rendezett sajtó alá.

[1] Lásd pl. VAN DER WAERDEN, Moderne Algebra I. (harmadik kiadás), 128—131. old.; BOURBAKI, Algèbre, Ch. V. 168—169. old.; BIRKHOFF—MACLANE, A survey of modern algebra, 428—431. old.; PICKERT, Einführung in die höhere Algebra, 191—194. old.; RÉDEI, Algebra I., 437—441. old., stb.

[2] Pontosabban felhasználjuk a komplex számok, közelebbről az egységgyökök legegyszerűbb tulajdonságait, a csoport, gyűrű, test fogalmát, s ezek elméletéből a legelemibb tételeket; így pl. a testelméletből azt, hogy testben algebrai egyenletnek legfeljebb annyi megoldása van, mint a fokszám, a gyűrűelméletből a normális osztályozás elvét, az ideál és a maradékosztálygyűrű fogalmát, s hogy egységelemes gyűrű esetén ez utóbbi test, ha az ideál maximális.

I

Nyilvánvaló, hogy a K véges test ε egységelemének additív rendje egy p törzsszám, s ekkor ugyanez áll K bármely $\neq 0$ elemére is. Ha most α olyan eleme K-nak, amely az összes $k\varepsilon\,(k=0, 1, \ldots, p-1)$ elemektől különbözik, akkor az összesen p^2 számú

(1) $$k\varepsilon + l\alpha \quad (k=0, 1, \ldots, p-1;\ l=0, 1, \ldots, p-1)$$

elem is mind különböző. Egy

$$k_1\varepsilon + l_1\alpha = k_2\varepsilon + l_2\alpha \quad (l_1 \neq l_2)$$

relációból ugyanis

(2) $$(l_1 - l_2)\varepsilon\alpha = (k_2 - k_1)\varepsilon$$

következnék, s mivel $0 < |l_1 - l_2| < p$, létezik olyan t egész szám, amelyre $t(l_1 - l_2) \equiv 1 \pmod p$. A (2) egyenletet t-vel szorozva

$$\alpha = t(k_2 - k_1)\varepsilon$$

adódik, ami nyilvánvaló ellentmondás, minthogy α feltevésünk szerint nem $k\varepsilon$ alakú. Ha még az (1) elemek sem merítik ki teljesen K-t, akkor hasonlóan adódik, hogy K-nak legalább p^3 számú különböző eleme van, s. i. t. Ennélfogva K összes elemének száma csak p hatványa lehet.

II

Tekintsük az

$$x^{p^n-1} - 1 = 0$$

egyenletnek elegettevő $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \alpha^2, \ldots, \alpha_r = \alpha^r = 1\ (r = p^n - 1)$ egységgyököket; ezek racionális egész együtthatójú

(3) $$\beta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r$$

kombinációi a komplex számok egy R részgyűrűjét alkotják. Természetesen R valamely eleme többféleképpen írható (3) alakban. Nyilvánvaló, hogy pR, azaz az R gyűrű összes $p\beta$ $(\beta \in R)$ alakú elemeinek halmaza ideálja R-nek, s ezen ideál szerint R véges számú maradékosztályra esik szét. Ennélfogva van R-nek olyan I *maximális ideálja*, amelyre

(4) $$pR \subseteq I \subset R.$$

Ekkor az $R/I = K$ gyűrű véges test.

K legfeljebb p^n elemű. R tetszőleges (3) alatti elemére ugyanis érvényes (4) miatt,[3] hogy

$$\beta^p \equiv a_1\alpha_1^p + \cdots + a_r\alpha_r^p \pmod{I}$$
$$\vdots$$
$$\beta^{p^n} \equiv a_1\alpha_1^{p^n} + \cdots + a_r\alpha_r^{p^n} = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r = \beta \pmod{I}.$$

Ennélfogva K mindegyik eleme eleget tesz az $x^{p^n} - x = 0$ egyenletnek s ennek a K testben legfeljebb p^n megoldása van.

Megmutatjuk másfelől, hogy a

$$0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$$

elemekkel reprezentált maradékosztályok csupa különböző elemei K-nak, amely tehát pontosan p^n elemű test. Az mindenekelőtt világos, hogy $\alpha_k \not\equiv 0 \pmod{I}$, mert abból, hogy $\alpha_k \equiv 0 \pmod{I}$, az következnék, hogy $\alpha_k^r = 1 \equiv 0 \pmod{I}$, ez viszont nem lehetséges, mivel az R gyűrű I $(\neq R)$ ideálja nem tartalmazhatja a gyűrű egységelemét.

Ha másrészt $\alpha_u \equiv \alpha_{u+v} \pmod{I}$ $(u, v$ természetes számok és $v \leqq r-1)$, azaz $\alpha^u \equiv \alpha^{u+v} \pmod{I}$ állana, akkor ebből

$$\alpha^u(1 - \alpha^v) \equiv 0 \text{ s így } \alpha^v \equiv 1 \pmod{I}$$

következnék, tekintve, hogy $\alpha \not\equiv 0 \pmod{I}$ és R/I test. Hogy ez lehetetlen, a következőképpen adódik: Legyen v és r legnagyobb közös osztója d: $(v, r) = d$, továbbá $r = r'd$. Mivel $1 \leqq v \leqq r-1$, tehát $\alpha^v \neq 1$), a geometriai sor összegképlete alkalmazható, s így

$$0 = \alpha^v + \alpha^{2v} + \cdots + \alpha^{r'v} \equiv r' \pmod{I}.$$

Továbbá $r' \mid r = p^n - 1$ alapján $(p, r') = 1$, van olyan s egész szám, amelyre $p \mid sr' - 1$. Ebből viszont

$$r' \equiv 0 \text{ és } p \equiv 0 \pmod{I}$$

miatt $1 \equiv 0 \pmod{I}$ adódnék, ami nyilván ellentmondás.

A nyert eredmény úgy is fogalmazható, hogy a $(p^n - 1)$-edik egységgyök-vektorokra (az eleve értelmezett közönséges szorzáson felül) lehet egy összeadási műveletet értelmezni oly módon, hogy e vektorok a zérusvektorral együtt testet alkotnak. Érdekes és szép

[3] Pontosabban itt azt használjuk ki, hogy a β p-edik hatványának kifejtett alakjában az $a_i^p \alpha_i^p$ tagok kivételével valamennyi tag együtthatója p-vel osztható, tehát az ilyen tagok mod I zérussal kongruensek, továbbá, hogy bármely a-ra $a^p \equiv a \pmod{p}$.

volna egy áttekinthető, szemléletes geometriai értelmezést adni ennek a ténynek.

A II. bizonyításával kapcsolatban érdemes még hangsúlyoznunk, hogy a konstrukció nyilvánvalóan mutatja azt, hogy a K test multiplikatív csoportja ciklikus.

III

Az előbb konstruált p^n elemű testet továbbra is K-val jelölve, legyen L tetszőleges p^n elemű test. Annak megmutatása céljából, hogy L izomorf K-val, induljunk ki abból, hogy a K test K^* multiplikatív csoportjának $\bar{\alpha}$ generátorelemével $\varepsilon, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^2, \ldots, \bar{\alpha}^{n-1}$ lineárisan függetlenek a racionális egész számok együtthatótartományára nézve. (Mostantól kezdve felülhúzott vonallal azt az I szerinti maradékosztályt jelöljük, amelybe R illető eleme esik; $\varepsilon = \bar{1}$ a K test egységeleme.) Ha ugyanis fennállna egy

$$b_0\varepsilon + b_1\bar{\alpha} + \cdots + b_k\bar{\alpha}^k = 0 \quad (b_k\bar{\alpha}^k \neq 0, \quad 1 \leqq k < n)$$

reláció, akkor ebből $\bar{\alpha}^k = b'_{k-1}\bar{\alpha}^{k-1} + \cdots + b'_0\varepsilon$ adódnék, ami feltevésünkkel ellentétben azt jelentené, hogy K elemeinek száma legfeljebb p^k.

Már most az $\varepsilon, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^2, \ldots, \bar{\alpha}^{n-1}$ elemek így kimutatott lineáris függetlensége miatt K minden eleme pontosan egyszer előáll $c_0\varepsilon + c_1\bar{\alpha} + \cdots + c_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1}$ $(0 \leqq c_j \leqq p-1; j = 0, 1, \ldots, n-1)$ alakban, úgyhogy

$$\bar{\alpha}^n = a_{n-1}\bar{\alpha}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{\alpha} + a_0\varepsilon. \tag{5}$$

A K és L testek izomorfizmusának igazolása céljából az eddigiek alapján nyilván elegendő azt megmutatnunk, hogy L tartalmaz olyan δ elemet, amelyre

$$\delta^n = a_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + a_1\delta + a_0\varepsilon' \tag{6}$$

érvényes, L egységelemét ε'-vel jelölve.

Jelöljük az $x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_0$ polinomot $f(x)$-el. Az osztási algoritmussal meghatározunk olyan $g(x)$ és legfeljebb $(n-1)$-ed fokú $h(x)$ polinomokat, amelyekre

$$x^{p^n-1} - 1 = f(x)g(x) + h(x) \tag{7}$$

azonosan teljesül. Ekkor fennáll

$$0 = \bar{\alpha}^{p^n-1} - \varepsilon = f(\bar{\alpha})g(\bar{\alpha}) + h(\bar{\alpha})$$

is, ahol természetesen $f(\bar{\alpha}), g(\bar{\alpha}), h(\bar{\alpha})$ úgy értelmezendő, hogy a szereplő polinomok konstans tagját ennek ε-szorosával helyettesítettük. Legutóbbi egyenletünkből (5) figyelembevételével $h(\bar{\alpha}) = 0$ adódik, amivel megmutattuk, hogy a $h(x)$ polinóm valamennyi együtthatója p-vel osztható. Ennélfogva az L test bármely δ_k elemére is

$$h(\delta_k) = 0, \tag{8}$$

ahol most értelemszerűen $h(x)$ konstans tagját annak ε'-szörösével pótoljuk. Mivel az L test bármely $\delta_k \neq 0$ elemére

$$\delta_k^{p^{n-1}} - \varepsilon' = 0$$

(7) és (8) alapján azt nyerjük, hogy $f(\delta_k)g(\delta_k) = 0$. Ennélfogva L bármely $\delta_k \neq 0$ elemére vagy $f(\delta_k) = 0$, vagy $g(\delta_k) = 0$. Az utóbbi azonban csak (p^{n-1})-nél kevesebb elemre következhetik be, mert a $g(x)$ polinom fokszáma $p^n - 1 - n$. Így kell lennie L-ben olyan $\delta_k = \delta$ elemnek, amelyre $f(\delta) = 0$, azaz (6) teljesül. Ezzel célunkat elértük.

Megjegyzés. A bizonyításból nyilvánvaló, hogy az $f(x)$ polinom mod p irreducibilis. Megmutattuk tehát, hogy bármely n természetes számhoz található mod p irreducibilis n-ed fokú polinom. A p^n elemű test konstrukciója a gyakorlatban egy ilyen polinom kikeresése útján történhetik.

Lássunk erre egy egyszerű példát: Legyen $p = 5$, $n = 2$. Az $f(x) = x^2 + x + 1$ polinom (mod 5) nyilvánvalóan irreducibilis. Az $f(x) = 0$ egyenlet egyik gyökét ϱ-val jelölve a 25 elemű véges test az összes $k + l\varrho$ $(k, l = 0, 1, 2, 3, 4)$ alakú számok halmaza, ahol az összeadás és a szorzás művelete a közönséges összeadás és szorzás azzal a megjegyzéssel, hogy a művelet elvégzése után mindig a mod 5 legkisebb nem negatív maradékra redukálunk.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ПОЛЕЙ*

Т. Селе

В настоящей работе доказывается следующая известная теорема: Число элементов конечного поля является степенью простого числа. Для любого простого числа p и любого положительного целого числа n

* Настоящая работа является посметрной. Из записок автора составил ее А. Кертес.

существует конечное поле, состоящее из p_n элементов. Любые два конечные поля с одинаковым числом элементов изоморфны.

Простое доказательство опирается только на самые общие понятия алгебры и простейшие теоремы относящиеся к ним.

AN ELEMENTARY PROOF OF THE FUNDAMENTAL THEOREM FOR FINITE FIELDS*

by T. Szele

There is given a proof of the following well known theorem:

The number of elements in a finite field is a power of a prime. For any prime p and positive integer n there exists a finite field with p^n elements. Any two finite fields with the same number of elements are isomorphic.

The proof is simple and makes use only of the most general concepts of algebra, and of the simplest results concerning these.

* The present paper is a posthumous one, arranged for publication from the author's notes by A. Kertész.

Körvonalzóval végezhető szerkesztésekről

TEKSE KÁLMÁN

Körző és vonalzó korlátozott használatával végezhető kvadratikus geometriai szerkesztések vizsgálatával régóta foglakoznak. Kb. 1000 évvel ezelőtt a híres arab matematikus ABÛL VÂFÁ (940—998) már könyvet írt a vonalzóval és adott nyílásszögű körzővel végezhető szerkesztésekről. Később a XVI. század olyan kiváló tudósai, mint DAL FERRONE, TARTAGLIA, CARDANO, BENEDETTI, LEONARDO DA VINCI és a híres német festő: ALBRECHT DÜRER foglalkoztak e kérdéssel. Cardano írja egyik könyvében, hogy Dal Ferroneval együtt Euklides összes feladatát meg tudja szerkeszteni vonalzóval és adott nyílású körzővel. És e kérdések iránt az érdeklődés egyre fokozódott.

Az ilyenirányú kutatásoknak nagy lökést adott STEINER 1833-ban megjelent munkája,[1] melyben kimutatta, hogy minden olyan szerkesztés, mely körzővel és vonalzóval elvégezhető, pusztán vonalzóval is végrehajtható, ha ismeretes a síkon egy kör a középpontjával. Sőt, mint F. SEVERI és elemi úton OBLÁTH RICHÁRD is bebizonyították,[2] a szerkesztések elvégzéséhez egy teljes körvonal helyett elegendő annak bármilyen kicsiny adott íve is, ha ismeretes a középpontja. Ehhez kapcsolódott E. Weiss dolgozata,[3] melyben megmutatta, hogy a Steiner-féle szerkesztésekben a sík ∞^2 számú sugársora helyett elég négy sugársor is a feladat megoldá-

[1] J. STEINER: Die geometrischen Konstruktionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. Ostwalds Klassiker. Nr. 60., 1896.

[2] F. SEVERI: Sui problemi determinati risolubili colla riga e col compasso. *Rendic. Circ. Mat. Palermo* 256—263. o. 1904.

R. OBLÁTH: Bemerkungen zur Theorie d. Geom. Konstr. *Monatshefte f. Math. u. Phys.* 26. 1915.

Az alapkör további korlátozására és bővebb irodalomra vonatkozólag lásd: OBLÁTH R.: Adalék a geometriai szerkesztések elméletéhez. *Mat. Lapok* 2. 219—221. o. 1951.

[3] E. WEISS: Konstruktionen mit hängenden Linealen. *Deutsche Mathematik.* 6. 3. o. 1941.

sához. Munkájában feltételezte, hogy a sugársorok tartója közül három egy egyenesbe esik, a negyedik az egyenesen kívül van, és belőle az alapkörhöz húzható érintők talppontjai adva vannak.

Másrészről G. MOHR (1672) és L. MASCHERONI (1797) munkáikban egymástól függetlenül bebizonyították, hogy csupán körzővel is elvégezhető minden kvadratikus szerkesztés. Feltételezték azonban, hogy tetszés szerinti nagy sugarú kör is rajzolható. K. YANAGIHARA japán matematikus azt is bebizonyította,[4] hogy körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztések akkor is végrehajthatók pusztán körzővel, ha nem tudunk tetszőlegesen nagy vagy kicsiny köröket rajzolni, hanem csak olyanokat, melyek ϱ sugarára fennáll az $r \leqq \varrho \leqq R$ egyenlőtlenség, ahol $R > r$ előre megadott nagyságú szakaszok.

JOHANNES HJELMSLEV vizsgálat alá vette azokat a szerkesztéseket, melyek pusztán egy konstans R sugarú körzővel illetve éremmel végezhetők el.[5] Dolgozatában feltételezte, hogy egy körhöz adott pontjában az érintőkör is megszerkeszthető. Ezzel az eszközzel persze nem minden, de mint később látni fogjuk igen sok kvadratikus szerkesztés elvégezhető.

HJELMSLEV dolgozatában felvetette azt a problémát, hogy hasonlóan HILBERT-nek a vonalzó és „Streckenüberträger" segítségével végzett szerkesztésekkel foglalkozó vizsgálataihoz, milyen szerkesztések végezhetők el körvonalzóval és ívlemetszővel? Ez utóbbi úgy értendő, hogy lemetszünk bármely ívet, amely a körvonalzón megjelölhető. E dolgozat célja az ilyenirányú vizsgálatok folytatása.

Feltesszük, hogy adva van a síkban mozgatható R sugarú körvonalzó, melyen tehát megjelölhetők pontok és olyan ívek, melyek végpontjainak távolsága $2R$-nél kisebb. Pl. az R sugarú körvonalzóval $2R$-nél rövidebb hosszúságú szakasz felmérhető egy adott egyenesre annak egy adott pontjából. Bebizonyítjuk a következő

TÉTELT: *Minden olyan szerkesztés, mely körzővel és vonalzóval elvégezhető, végrehajtható egy R sugarú körvonalzóval is, ha adva van a síkban két sugársor, melyek tartóinak távolsága $2R$.*

A bizonyításban felhasználjuk Hjelmslev következő eredményeit (1.—4.), melyek abban az esetben érvényesek, ha a tekintett A és B pontok távolsága kisebb $2R$-nél és a szerkesztéseket egy R sugarú körvonalzóval végezzük:

[4] K. YANAGIHARA: On Limited Mascheroni Geometrical Constructions. *The Tôhoku Math. J.* 34. 89 l. 1931.

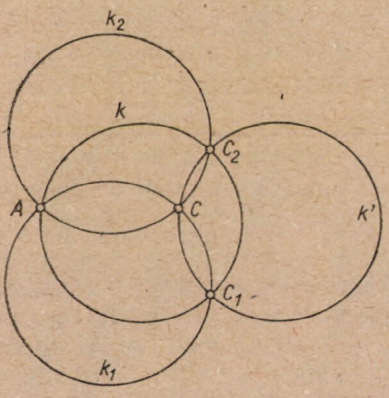
[5] J. HJELMSLEV: Konstruktioner ved Passer med fest indstelling unden Brug of Lineal, *Mathematisk Tidsskrift.* A. 1938. 77—85. o.

1. Megszerkeszthető az R sugarú k kör egy tetszőleges A pontjának diametriálisan ellentettje, melyet a k kör A és egy tetszőleges B pontján átmenő k_1 kör B pontbeli k_1' érintőköre metsz ki k-ból.

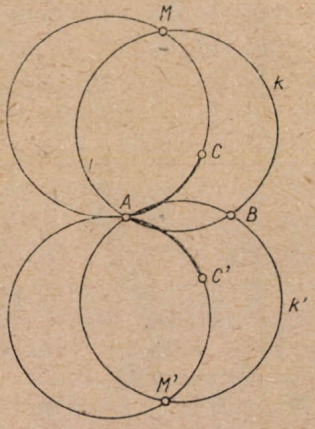
2. Megszerkeszthető az $\overline{AB}$ távolság tetszőleges többszöröse. Az $\overline{AB}$ egyenesen B pontból $\overline{AB}$ távolságra levő másik pont ugyanis, az A és B pontokon átmenő két R sugarú kör két B pontbeli R sugarú érintőkörének másik metszéspontja. Ezen eljárás k-szoros ismétlésével $\overline{AB}$ szakasz $(k+1)$-szeresét kapjuk.

3. Az $\overline{AB}$ egyenesre bármely végpontján keresztül merőleges szerkeszthető. Legyenek az A és B pontokon átmenő k_1 és k_2 körök B pontbeli érintőkörei rendre k_1' és k_2'. Akkor a k_1' és k_2 körök C metszéspontját és B-t összekötő egyenes merőleges $\overline{AB}$-re.

4. Az $\overline{AB}$ távolság önmagával párhuzamosan eltolható úgy, hogy az A pont egy tetszőleges (A és B pontoktól $2R$-nél kisebb távolságú) adott C pontba kerüljön; vagy más szavakkal: egy R sugarú k kör eltolható úgy, hogy egy A pontja adott C pontba kerüljön.



1. ábra



2. ábra

Az A és C pontokon átmenő R sugarú k_1 és k_2 körök metszik az adott k kört még két pontban. Jelöljük e két metszéspontot C_1-el és C_2-vel (lásd: 1. ábra) A keresett k' kör a C, C_1 és C_2 pontokon átmenő R sugarú kör.[6]

[6] Lásd még: L. Bieberbach: *Theorie der geometrischen Konstruktionen. Basel.* 1952. 38—39. o.

5. Bármely C pontnak, melynek távolsága A és B pontoktól kisebb, mint $2R$, megszerkeszthető az $\overline{AB}$ egyenesre vonatkozó tükörképe.

Jelöljük az A és B pontokon átmenő két R sugarú kört k és k'-el. Az A és C pontokon átmenő R sugarú kör M pontban metszi k-t (lásd 2. ábra). $\overset{\frown}{AM}$ ívet k' kör megfelelő ívére A pontból felmérve kapjuk az M pont $\overline{AB}$ egyenesre vonatkozó tükörképét: M' pontot. A körvonalzó segítségével az $\overset{\frown}{AC}$ ívet A pontból az A és M' pontokon átmenő R sugarú kör megfelelő ívére felmérve éppen C keresett C' tükörképét kapjuk.

6. Ha A és B pontok távolsága nem nagyobb $2R$-nél, akkor egy R sugarú körvonalzóval megszerkeszthető az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontja, ha ismeretes a síkban két sugársor, melyek tartóinak távolsága $2R$.

Az A és B pontokon átfektetett körvonalzó segítségével $\overline{AB}$ szakaszt önmagával párhuzamosan eltoljuk úgy, hogy pl. B pont az egyik sugársor M_1 tartójával essék egybe, majd (M_2-vel jelölve a másik sugársor tartóját) M_2A-t úgy, hogy M_2 az M_1 ponttal essék egybe. Ha $\overline{AB}$ nem párhuzamos $\overline{M_1M_2}$-vel, akkor így egy parallelogrammát kapunk, melynek egyik átlóját $\overline{AB}$-t a másik felezi. Ha $\overline{AB}$ párhuzamos $\overline{M_1M_2}$-vel, akkor $\overline{AB}$-t M_1 körül tetszőleges $\alpha + k\pi$ ($k = 1, 2, \ldots$) szöggel elforgatva, felezőpontja a fentiek szerint szerkeszthető, melyet visszaforgathatunk $\overline{AB}$-re.

7. Az előbbi két szerkesztés segítségével megszerkeszthetjük olyan C pontnak az $\overline{AB}$ egyenesre való merőleges vetületét, melyek távolsága A és B pontoktól kisebb $2R$-nél.

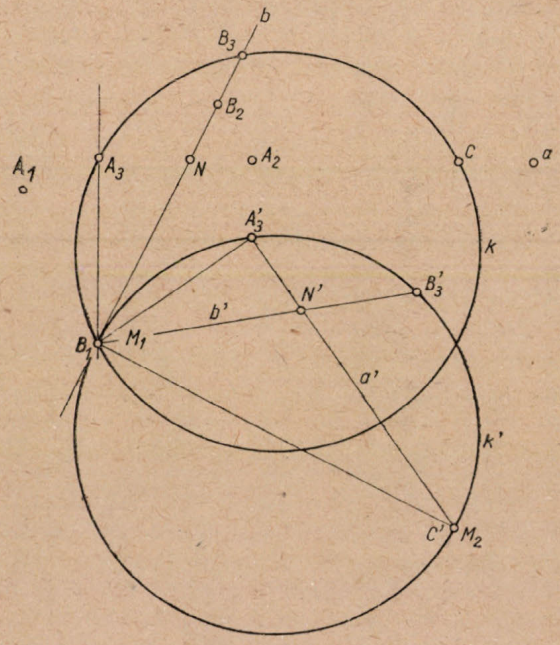
1. Ezek segítségével bizonyítjuk a következőt:

Adva két a és b egyenes két-két pontjával A_1 és A_2 illetve B_1 és B_2 pontokkal. Ha A_1 és A_2 illetve B_1 és B_2 pontok távolságai kisebbek, mint $2R$, akkor ezen egyenesek metszéspontja egy R sugarú körvonalzóval megszerkeszthető, ha a síkban adva van két olyan sugársor, melyek tartóinak távolsága $2R$.

Bizonyítás: Jelöljük az egyik sugársor tartóját M_1-el, a másikét M_2-vel. Eltoljuk pontrendszerünket önmagával párhuzamosan úgy, hogy pl. B_1 pont az M_1 pontba kerüljön. Megszerkesztjük M_2 pont merőleges vetületét az a egyenesre: az A_3 pontot.

$\overline{M_1A_3}$-at M körül elforgatjuk úgy, hogy M_2-nek az elforgatott egyenesre eső vetülete éppen az A_3-nak megfelelő A_3' pont legyen. Ehhez A_3 és M_1 pontokon átfektetett R sugarú k körön megjelöljük

az M_1 pont diametrálisan ellentettjét: C pontot, k körnek a b egyenessel ($\overline{B_1B_2}$-vel) való B_3 metszéspontját, valamint A_3-at (lásd 3. ábra). Most k-t olyan k' helyzetbe hozzuk, hogy B_1 pontja helyben maradjon, C pedig M_2 pontba kerüljön. Az így kapott $\overline{M_1A_3'}$ valóban merőleges $\overline{A_3'M_2}$-re azaz $\overline{A_3'M_2}$ az a egyenes M_1 pont körüli a' elforgatottja; B_3 pont B_3' elforgatottja és M_1 által meghatározott b' egyenes b egyenes elforgatottja. Így az a' és b' egyenesek N' metszéspontja az a és b egyenesek M metszéspontjának elforgatottja. Az $\overline{M_1N'}$ távolságot M_1 pont körül visszaforgatva a b egyenesre, az egyenesek N metszéspontját kapjuk.



3. ábra

II. Az I. szerkesztés felhasználásával most már *két-két tetszésszerinti A_1, A_2 és B_1, B_2 pontokkal adott a és b egyenesek metszéspontja is megszerkeszthető.* Ehhez alkalmasan *sűrítjük* az egyenesek pontjait a következő eljárással:

Pl. az A_1 és A_2 pontok megfelelő környezetében vegyünk fel egy-egy P_1 és P_2 pontot úgy, hogy $\overline{A_1P_1}$ és $\overline{A_2P_2}$ egyenesek Q metszéspontja már az I. eljárással megszerkeszthető legyen. Így az

$\overline{A_1Q}$ egyenes és vele együtt az A_2 pont is eltolható önmagával párhuzamosan úgy, hogy az egyenes A_1 pontja M_1-be kerüljön. Jelöljük A_2 pont új helyzetét A_2'-el. Ekkor a sugársor $\overline{M_1A_2'}$ egyenesén tetszésszerint sűríthetjük a pontokat, melyeket az $\overline{A_1A_2}$ egyenesre visszatolva, most már az I. szerkesztés végrehajtásához alkalmas sűrűségű pontsorozatot kapunk.

Ilymódon tehát két sugársorral (melyek tartóinak távolsága $2R$) és egy R sugarú körvonalzóval helyettesíteni tudjuk a síkban szabadon mozgatható vonalzót; azaz a fentiekkel elvégezhető minden vonalzóval végrehajtható szerkesztés.

III. A bevezetőben említett Steiner-féle szerkesztések felhasználásával azonban a körzővel és vonalzóval végrehajtható szerkesztések pusztán vonalzóval is elvégezhetők, ha ismeretes egy alapkör középpontjával. Esetünkben adva van egy R sugarú alapkör középpontjával együtt, II. alapján pedig az R sugarú körvonalzóval és két sugársorral (melyek tartóinak távolsága $2R$) minden vonalzóval elvégezhető szerkesztés végrehajtható. Így a Steiner-féle szerkesztések felhasználásával ezekkel minden körzővel és vonalzóval elvégezhető szerkesztés is végrehajtható, amivel állításunkat bizonyítottuk.

A fentiekkel kapcsolatban megjegyezzük, hogy OBLÁTH RICHÁRD idézett, a Matematikai Lapokban megjelent dolgozatában felvetette a sérült éremmel való szerkesztések gondolatát is.

Állításunk akkor is igaz, ha körvonalzónk sérült (azaz nem tudunk teljes kört rajzolni), *sőt elég a körvonalzónak bármilyen kicsiny adott íve is* a fenti szerkesztések végrehajtásához. Ugyanis az 1.—7. segédszerkesztések akadálytalanul végrehajthatók ezzel, ha a szereplő pontok olyan közel vannak egymáshoz, hogy körvonalzónk bármely — a szerkesztésekben felhasznált — pontpáron átfektethető. I. bizonyítása is teljesen hasonlóan elvégezhető. Ehhez megjegyezzük, hogy M_1 és M_2 pontokon keresztül úgy fektetünk át R sugarú kört, hogy M_2 ponton keresztül olyan egyenest húzunk, melynek távolsága M_1-től kisebb, mint körvonalzónk adott ívéhez tartozó húrjának hossza. Megszerkesztjük M_1 pontnak erre az egyenesre eső vetületét. M_1-en és e vetületen átmenő körvonal átmegy M_2 ponton is. Ezekután II. és III. állításai változatlanul érvényesek.

Megemlítjük még, hogy III-ban a Steiner-féle szerkesztésekhez nem szükséges a teljes körív kirajzolása. Ugyanis K. Yanagihara bebizonyította,[7] hogy minden kvadratikus szerkesztés elvégezhető pusztán vonalzóval, ha ki van rajzolva két egymást metsző

[7] K. YANAGIHARA: Note on the construction Problems in Elementary Geometry *The Tôhoku Math. J.* 24. 125—127. o. 1925.

(bármilyen kicsiny) adott körív, vagy három nem egy körsorhoz tartozó olyan kör tetszőlegesen kicsiny adott ívei, melyeknek nincs közös pontjuk.

О ПОСТРОЕНИЯХ, ПРОИЗВОДИМЫХ ПРИ ПОМОЩИ КРУГЛОЙ ЛИНЕЙКИ

К. Текше

В данной статье дается доказательство следующей теоремы:

Каждое построение, производимое при помощи циркуля и линейки, можно производить также посредством круглой линейки с радиусом R, если в плоскости имеются 2 пучка лучей, центры которых находятся на расстоянии $2R$.

Под названием круглая линейка авторы подразумевают круглую пластинку, по окружности которой можно нанести определенные дуги.

ÜBER MIT KREISLINEAL DURCHFÜHRBAREN KONSTRUKTIONEN

von Kálmán Tekse

Obige Arbeit beweist den folgenden Satz:

Jede Konstruktion, die mit Zirkel und Lineal durchführbar ist, kann auch mit Hilfe eines Kreislineales vom Radius R ausgeführt werden, wenn in der Ebene 2 Strahlenbüschel gegeben sind, deren Träger sich im Abstand von 2R befinden.

Unter Kreislineal verstehen wir eine Kreisplatte, an deren Umfang gegebene Bögen angetragen werden können.

A Markov-féle számokról

FÁY ÁRPÁD

MARKOV lánctörtek segítségével bebizonyította a következő tételsorozatot: Ha ξ és η, x és y-ban valósegyüttható homogén lineáris formák determinánsát Δ-val jelöljük és m-el jelöljük a $\xi\eta$ szorzatok abszolút értékének alsó határát, midőn (x, y) befutja az összes egész értékpárokat, kivéve a $(0, 0)$ helyettesítést, vagyis

$$m = \inf_{\substack{(x,y)\neq(0,0),\\ \text{egészek}}} |\xi(x, y)\eta(x, y)|$$

akkor:

$$m \leqq \frac{|\Delta|}{\sqrt{5}}.$$

Egy unimoduláris egészegyüttható helyettesítéstől és egy konstans szorzótól eltekintve egyértelműen meg vannak határozva azok a formák, melyekre

$$\frac{m}{|\Delta|} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{m}{|\Delta|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{m}{|\Delta|} = \frac{5}{\sqrt{221}}, \ldots$$

egyenlőségek közül az egyik áll; és nincsenek olyan formák, melyekre

$$\frac{m}{|\Delta|} > \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} > \frac{m}{|\Delta|} > \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{m}{|\Delta|} > \frac{5}{\sqrt{221}}, \ldots$$

egyenlőtlenségek közül valamelyik állna.

Az $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{221}}, \ldots$ az un. Markov-féle számok, melyek szigorúan csökkenve tartanak az 1/3-hoz. Ez a tételsorozat veti fel annak az M halmaznak a vizsgálatát, melyre $z \in M$ akkor és csak, akkor, ha vannak olyan ξ, η formák melyekre $z = \frac{m}{|\Delta|}$. A következőkben be fogom bizonyítani, hogy

1° M zárt.

2° A fent kiírt Markov-féle számok közötti hézagok létezését.

3° A számegyenesen az 1/3 alatt is van olyan szakasz, melyben nincs pontja M-nek.

Megjegyzések.

$0 \in M$, mert a $\xi = x$, $\eta = y$ formákra $\inf |\xi\eta| \leqq |\xi(1,0)\eta(1,0)| = 0$ tehát $m = 0$, és $|\Delta| = 1$ ezért $\frac{m}{|\Delta|} = 0$. Olyan formákra, melyekre $m \neq 0$ szokásos az $m = 1$ feltevés, a következő tétel alapján: Ha $z \in M$, és $z \neq 0$, akkor nem csak olyan ξ, η formák vannak, melyekre $\frac{m}{|\Delta|} = z$, hanem olyan ξ', η' formák is, melyekre $m' = 1$ és $\frac{1}{|\Delta'|} = z$.

Nyilván a $\xi' = \frac{1}{m}\xi$ és az $\eta' = \eta$ formák teljesítik a követelményt.

1° M zárt. Vagyis ha $z_n \to z$ midőn $n \to \infty$ és $z_n \in M$ akkor $z \in M$.

Bizonyítás: Ha $z = 0$ akkor az előző megjegyzés alapján $0 \in M$. Feltehető, hogy $z \neq 0$, akkor elég nagy indextől kezdve $z_n > \frac{z}{2} > 0$. A sorozatnak csak ezzel a részével foglalkozzunk.

$z_n \in M$ és $z_n \neq 0$ tehát az előző megjegyzés alapján vannak olyan ξ_n, η_n formák, melyekre $\inf |\xi_n \eta_n| = 1$ és $\frac{1}{|\Delta_n|} = z_n$. A ξ_n, η_n egész helyeken felvett értékkészlete a ξ_n, η_n koordinatarendszerben ábrázolva egy szabályos pontrácsot alkot, melynek pontja az origó is és az alapparallelogramma területe $|\Delta_n|$. A bizonyítás alapgondolata az, hogy a ξ_n, η_n formákat alkalmas alakra hozva, a hozzájuk tartozó rácsokból mindig kiválasztható egy alapparallelogramma, melynek élvektorait egy n-től független korlát alá tudjuk szorítani, így ezek sorozatából kiválasztva egy konvergens részsorozatot, ennek határértéke olyan rácsot állít elő melyre $\frac{m}{|\Delta|} = z$ igaz lesz.

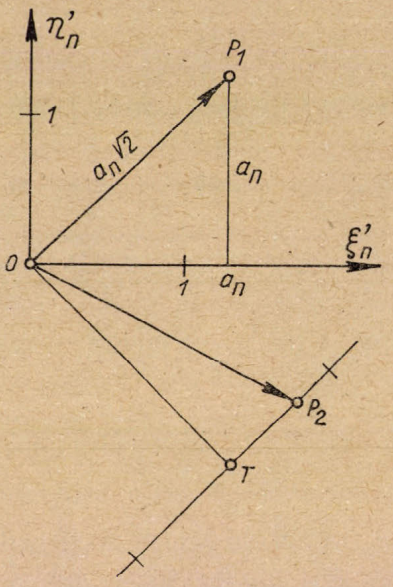
Mivel $\inf |\xi_n \eta_n| = 1$ van oly $(x_n, y_n) \neq (0,0)$, egész értékpár, hogy $|\xi_n(x_n, y_n)\, \eta_n(x_n, y_n)| - 1 < \varepsilon_n < 2$ és $\varepsilon_n \to 0$ midőn $n \to \infty$ x_n és y_n relatív prímek, mert ha $(x_n, y_n) = d \geqq 2$ volna[1], akkor az

[1] Itt a zárójel a legnagyobb közös osztót jelöli.

$\frac{1}{d} x_n$ és $\frac{1}{d} y_n$ egész értékpárnál

$$\left| \xi_n\left(\frac{x_n}{d}, \frac{y_n}{d}\right) \eta_n\left(\frac{x_n}{d}, \frac{y_n}{d}\right) \right| = \frac{1}{d^2} |\xi_n(x_n, y_n)\, \eta_n(x_n, y_n)| < \frac{3}{4}$$

volna, ami $\inf |\xi_n \eta_n| = 1$ miatt nem lehet.



1. ábra

$\xi_n(x_n, y_n) \neq 0$ és $\eta_n(x_n, y_n) \neq 0$, mert $|\xi_n \eta_n| \geqq 1$, ezért λ és az előjel alkalmas választásával elérhető, hogy a $\xi'_n = \pm \lambda \xi_n$ és $\eta'_n = \frac{1}{\lambda} \eta_n$ formákra[2] $\xi'_n(x_n, y_n) = \eta'_n(x_n, y_n) = a_n > 0$ és az új formákra is $|\Delta'_n| = |\Delta_n|$ és a szorzat abszolút értékek értékkészlete nem változott, $|\xi'_n \eta'_n| = |\xi_n \eta_n|$ minden x, y-ra, tehát

$$\inf |\xi'_n \eta'_n| = 1 \text{ és } \frac{1}{|\Delta'_n|} = z_n$$

Mivel $(x_n, y_n) = 1$[1], a ξ'_n, η'_n rácsban az $\overrightarrow{OP_1}(a_n, a_n)$ választható alapvektornak. Azok a rácspontok, melyek vele együtt egy alap-

[2] Ebben és a következő bekezdésben n rögzített.

vektorrendszert alkotnak, az $\overrightarrow{OP_1}$-el $|\Delta_n'|$ területű rácsparallelogrammát kell hogy előállítsanak, ezért az origótól $\overline{OT} = \frac{|\Delta_n|}{a_n\sqrt{2}}$ távolságra haladó, $\overrightarrow{OP_1}$-el párhuzamos egyeneseken vannak és az egyik egyenes mentén az egymástól mért távolságuk $\overline{OP_1} = a_n\sqrt{2}$. Tekintsük az egyenesek közül a $\xi - \eta \geqq 0$ félsíkban fekvőt, ezen biztosan van egy P_2 rácspont az origónak erre az egyenesre eső T talppontjának $\frac{a_n\sqrt{2}}{2}$ sugarú környezetében, vagyis P_2 a $|\xi + \eta| \leqq a_n$ tartományba esik. Erre a P_2-re a háromszög egyenlőtlenség alapján:

$$\overline{OP_2} \leqq \overline{OT} + \overline{TP_2} \leqq \frac{|\Delta_n|}{a_n\sqrt{2}} + a_n\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A $0 \leqq a_n^2 - 1 < \varepsilon_n < 2$ alapján $1 \leqq a_n^2 < 3$ tehát $\overrightarrow{OP_1}$ (a_n, a_n) korlátos, $|\Delta_n| = \frac{1}{z_n} \leqq \frac{2}{z}$ és az előbbi egyenlőtlenségek alapján $\overrightarrow{OP_2}$ korlátos. Ílymódon az $\overrightarrow{OP_1}$ és $\overrightarrow{OP_2}$ alapvektoroknak megválasztásával az $x\overrightarrow{OP_1} + y\overrightarrow{OP_2}$ vektorok befutják az összes rácspontokat midőn (x, y) végigfut az összes egész értékpárokon. A rács ezen befutásához tartozó, a rácsvektorok koordinátáit jelölő formák legyenek $\xi_n''(x, y)$, $\eta_n''(x, y)$. $\xi_n''(1, 0) = \eta_n''(1, 0) = a_n$ és $\xi_n''(0, 1)$, $\eta_n''(0, 1)$ mint az alapvektorok koordinátái korlátosak, ezért mint négydimenziós pontsorozatból kiválasztható egy konvergens részsorozat. Ezek határértékét alkalmas módon jelölve:

$$\xi_{n_\nu}''(1, 0) \to \xi(1, 0),\ \eta_{n_\nu}''(1, 0) \to \eta(1, 0),$$
$$\xi_{n_\nu}''(0, 1) \to \xi(1, 0),\ \eta_{n_\nu}''(0, 1) \to \eta(0, 1).$$

A $\xi = \xi(1, 0)x + \xi(0, 1)y$ $\eta = \eta(1, 0)x + \eta(0, 1)y$ formákra $\xi_{n_\nu}'' \to \xi$ $\eta_{n_\nu}'' \to \eta$ rögzített x, y mellett.

Ezekre a ξ, η formákra

$$\xi(1, 0) = \lim_{n_\nu \to \infty} \xi_{n_\nu}''(1, 0) = \lim_{n_\nu \to \infty} a_{n_\nu} = 1$$

mert $\varepsilon_{n_\nu} \to 0$, ugyanígy

$$\eta(1, 0) = 1, \text{ tehát } \xi(1, 0) = \eta(1, 0) = 1$$

másrészt rögzített $(x, y) \neq (0, 0)$ egészek mellett

$$|\xi(x, y)\eta(x, y)| = \lim_{n_\nu \to \infty} |\xi_{n_\nu}''(x, y)\,\eta_{n_\nu}''(x, y)| \geqq 1,$$

tehát inf $|\xi\eta| = 1$ és mert a determináns az elemeinek folytonos függvénye

$$\frac{1}{|\Delta|} = \lim_{n_\nu \to \infty} \frac{1}{|\Delta_{n_\nu}|} = \lim z_{n_\nu} = z$$

Vagyis $z = \frac{m}{|\Delta|}$, ezért $z \in M$. qu. e. d.

Ezzel a bizonyítással a zártságon kívül még speciális formák létezését is beláttuk, amit a következő tétel bizonyítására használunk ki:

Annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy $z \in M$ legyen, az, hogy választva egy u, v koordinátarendszert, az $u = \frac{1}{2z}$ egyenesen, a $-\frac{1}{2} \leqq v \leqq \frac{1}{2}$ szakaszon, legyen olyan (u_2, v_2) pont, hogy

$$\left| u_2^2 - \left(v_2 + \frac{x}{y} \right)^2 \right| \geqq \frac{1}{y^2}$$

bármely (x, y), $y \neq 0$ egészekre.

Szükségesség bizonyítása:

$z \in M$; legyen $z_n = z$ minden n-re, akkor teljesülnek az 1° tétel feltételei, hiszen $z_n \to z$ és $z_n \in M$. Ezért léteznek olyan ξ, η formák, melyekre

$$\inf |\xi\eta| = |\xi(1,0)\eta(1,0)| = \xi(1,0) = \eta(1,0) = 1 \text{ és } \frac{1}{|\Delta|} = z.$$

A $\xi(0,1)$ és $\eta(0,1)$ számokra még $\xi(0,1) - \eta(0,1) \geqq 0$ és $|\xi(0,1) + \eta(0,1)| \leqq 1$ is teljesül, mert a levezetés során a P_2 $(\xi_n''(0,1), \eta_n''(0,1))$ pontról mindig biztosítottuk, hogy a $\xi - \eta \geqq 0$ $|\xi + \eta| \leqq a_n$ tartományba essék, és $a_n \to 1$, tehát ezek torlódási pontjára a fenti egyenlőtlenségek állnak.

Bevezetve az $u = \frac{1}{2}(\xi - \eta), v = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$ koordinátatranszformációt és a $(\xi(0,1), \eta(0,1))$ pont új koordinátáit u_2, v_2-vel jelölve, az előző megjegyzés alapján $u_2 \geqq 0$ és $-\frac{1}{2} \leqq v_2 \leqq \frac{1}{2}$ és $|\Delta| = |\xi(0,1) - \eta(0,1)| = 2u_2$ miatt $u_2 = \frac{1}{2z}$ vagyis az (u_2, v_2) pont a kívánt szakaszra esik.

Bármely $(x, y), y \neq 0$ egészekre

$$|(yu_2)^2-(yv_2+x)^2| = |[x+y(u_2+v_2)][x+y(v_2-u_2)]| =$$
$$= |\xi(x,y)\eta(x,y)| \geqq \inf|\xi\eta| = 1$$

mert $u_2+v_2=\xi(0,1)$ és $v_2-u_2=\eta(0,1)$ tehát y^2-tel osztva kapjuk a kívánt egyenlőtlenséget.

Az elégségesség bizonyítása:

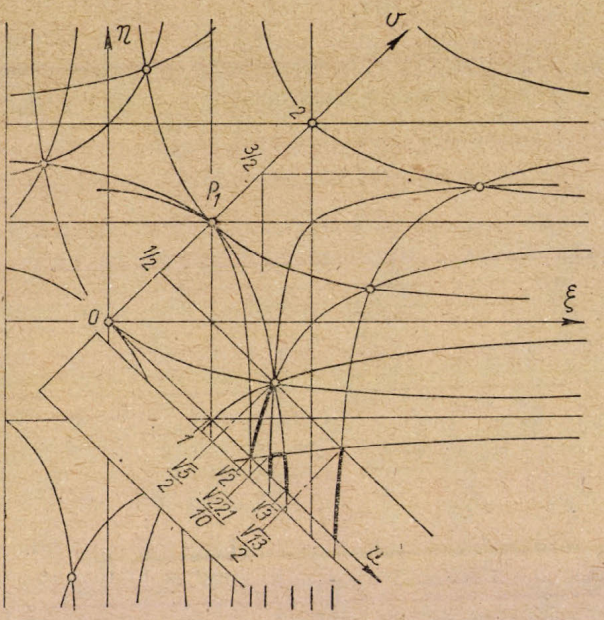
Ha u_2, v_2 teljesíti $y \neq 0$ esetén az $|(yu_2)^2-(yv_2+x)^2| \geqq 1$ egyenlőtlenséget, akkor $y=0$ esetén $x \neq 0$ egészet véve az egyenlőtlenség szintén teljesül. Bevezetve a $\xi = x+y(u_2+v_2)$ $\eta = x+y(v_2-u_2)$ formákat, ezekre ellenőrizhető, hogy $m=1$, és $\frac{1}{|\Delta|} = z$.

A 2° és 3° tétel igazolása most már könnyen adódik, ha megkeressük az u, v síkon rögzített (x, y) egészek mellett az $\left|u^2-\left(v+\frac{x}{y}\right)^2\right| = \frac{1}{y^2}$ hiperbolapárokat. Ha ezek belseje teljesen lefedi az $u=\frac{1}{2z}, -\frac{1}{2} \leqq v \leqq \frac{1}{2}$ szakaszt, akkor a szakaszon nincs olyan pont, melyre a szükséges és elegendő feltétel teljesülne, ezért $z \notin M$. Mivel a hiperbolarendszer tükrös az u tengelyre, elég ellenőrizni, hogy a $0 \leqq v \leqq \frac{1}{2}$ szakaszt lefedik-e a hiperbolák.

A 2. ábrából könnyen leolvasható és a hiperbolák metszéspontjainak meghatározásával a monotonitás miatt egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy ha $\frac{1}{\sqrt{5}} < z$ vagyis $u < \frac{\sqrt{5}}{2}$ akkor a $0 \leqq v \leqq \frac{1}{2}$ szakasz az $|u^2-(v-1)^2| = 1$ hiperbolapáron belül van. Tehát $z \notin M$. Ha $\frac{1}{2\sqrt{2}} < z < \frac{1}{\sqrt{5}}$ vagyis $\frac{\sqrt{5}}{2} < u < \sqrt{2}$ akkor a szakasz az $|u^2-(v+1)^2| = 1$ hiperbolapáron belül van. Tehát $z \notin M$. Ha $\frac{5}{\sqrt{221}} < z < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ vagyis $\sqrt{2} < u < \frac{\sqrt{221}}{10}$ akkor a szakaszt részben az $|u^2-(v+1)^2| = 1$, részben az $\left|u^2-\left(v-\frac{3}{2}\right)^2\right| = \frac{1}{4}$ hiperbolapár fedi, ezért $z \notin M$.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Hasonlóan adódik a 3° tétel: Ha $\frac{1}{\sqrt{13}} < z < \frac{1}{2\sqrt{3}} < \frac{1}{3}$ vagyis $\sqrt{3} < u < \frac{\sqrt{13}}{2}$ akkor a szakaszt az $|u^2-(v-2)^2| = 1$ hiperbolapár fedi, ezért $z \notin M$.



2. ábra

Az ábra egyben azt is megmutatja, hogy hol vannak azok az (u_2, v_2) pontok, melyektől várhatjuk a szükséges és elegendő feltétel teljesítését. Példaképpen megmutatom, hogy $\frac{1}{\sqrt{13}} \in M$. Az $u = \frac{\sqrt{13}}{2}$ szakaszon a $v = \frac{1}{2}$ pont olyan hogy

$$\left|\left(y\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y + x\right)^2\right| = |3y^2 - xy + x^2| < 1$$

nem teljesül egész $(x, y) \neq (0, 0)$ értékpárokra, mert ez csak úgy

lehetne, ha $3y^2 - xy + x^2 = 0$ lenne, vagyis a $w^2 - w + 3$ egyenletnek volna racionális gyöke. Tehát $\left|\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{y}\right)^2\right| \geqq \frac{1}{y^2}$, az elegendő feltétel teljesül.

Az előbbiekhez hasonló módon M pontjai között további hézagok kimutatása is lehetséges, mégis valószínű, hogy vannak olyan szakaszok, ahol M mindenütt sűrű, mikor is a zártság miatt az egész szakasz M-hez tartozik. Mint utólag szerző értesült, MARCHALL HALLnak egy lánctörtekre vonatkozó tételéből következik ilyen tulajdonságú szakasz létezése.

О ЧИСЛАХ МАРКОВА

А. Фаи

В настоящей статье рассматривается множество действительных чисел M, определенное следующим образом: $z \in M$ тогда и только тогда, когда существуют однородные линейные формы $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ с действительными коэффициентами, при которых

$$z = \frac{m}{|\Delta|}, \text{ где } m = \inf |\xi\eta| \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

и Δ определитель ξ, η.

Доказаны следующие утверждения:

1° M является замкнутым

2° M не имеет элементов в открытых интервалах $\left(\infty, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{221}}\right)$. (Теоремы Маркова. $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{221}}$ являются первыми хорошо известными тремя числами Маркова.)

3° M не имеет элементов в открытом интервале $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$.

ON MARKOFF'S NUMBERS

by A. Fáy

Author examines a set of real numbers M having the following properties: $z \in M$ if and only if there exist homogeneous linear forms $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ with real coefficients for which $z = \frac{m}{|\Delta|}$, where $m = \inf |\xi\eta|$ over all integer pairs $(x, y) \neq (0, 0)$ and Δ is the determinant of $\xi\eta$.

The following is proved:

1° M is closed

2° M has no elements in the open intervals $\left(+\infty, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{221}}\right)$. (Theorems of Markoff. $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{5}{\sqrt{221}}$ are the first three of the Markoff's number).

3° M has no elements in the open interval $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$.

Stieltjesnek egy mátrixelméleti lemmájáról

EGERVÁRY JENŐ

Jelölések:

$a, b, c, \ldots$	skalárok	$\mathbf{A}^*$	= transponáltja $\mathbf{A}$-nak
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$	oszlopvektorok	$\|\mathbf{A}\|$	= determinánsa $\mathbf{A}$-nak
$\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{c}^*, \ldots$	sorvektorok	$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$	= diagonális mátrix
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots$	mátrixok	$\mathbf{E} = \langle 1, 1, \ldots, \rangle$	= egységmátrix

STIELTJES egy 1886-ban megjelent dolgozatában[1] mint lemmát közölte a következő tételt:

I. TÉTEL. *Ha egy pozitív definit kvadratikus alak mátrixának a fődiagonálison kívüli valamennyi eleme negatív, akkor ezen mátrix reciprokának valamennyi eleme pozitív.*

STIELTJES megjegyzésének egy — nem szükségképpen szimmetrikus mátrixokra vonatkozó — általánosítását adta J. L MOSAK[2] és H. E. GOHEEN[3] egy lemmában, amely következőképpen hangzik:

II. TÉTEL. *Ha egy mátrixnak*

α) valamennyi főminora pozitív és

β) valamennyi eleme a fődiagonálison kívül negatív, akkor a mátrix reciprokának valamennyi eleme pozitív.

MOSAK és GOHEEN teljes indukcióval bizonyították be állításaikat. Ebben a dolgozatban megmutatjuk, hogy a mátrixok dia-

[1] T. J. STIELTJES, Sur les racines de l'equation $X_n = 0$, *Acta Math.*, **9** (1886), 385—400.

[2] J. L. MOSAK, *General equilibrium theory in international trade* (Cowles Comission Monograph, 1944), 49—51.

[3] H. E. GOHEEN, On a lemma of Stieltjes on matrices, *American Math. Monthly*, **56** (1949), 328—329.

dikus előállításának segítségével[4] a II. tétel direkt úton bebizonyítható.

Ha **A** kielégíti a II. α) feltételt, akkor $a_{11} > 0$ és a következő azonosságot kapjuk:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{21}a_{11}^{-1} \\ \vdots \\ a_{n1}a_{11}^{-1} \end{bmatrix} \left[1, \frac{a_{12}}{a_{11}}, \dots, \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right] =$$

$$= \frac{1}{a_{11}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2n} \end{vmatrix} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{n1} & a_{n2} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}' \end{bmatrix}.$$

Könnyű belátni, hogy az $\mathbf{A}'$ mátrix is kielégíti a II. tétel feltételeit. Valóban, $\mathbf{A}'$ főminorai szorzások és osztások segítségével előállíthatók **A** főminoraival,[5] a fődiagonálison kívüli

$$a_{11}a_{ij} - a_{i1}a_{1j} \qquad (i \neq j,\ i \geqq 2,\ j \geqq 2)$$

elemek pedig a II. α) és β) feltételek következtében nyilvánvalóan negatívak.

Vezessük be a

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a_{21}a_{11}^{-1} \\ \vdots \\ a_{n1}a_{11}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -v_{21} \\ \vdots \\ -v_{n1} \end{bmatrix}; \quad \left[1, \frac{a_{12}}{a_{11}}, \dots, \frac{a_{1n}}{a_{11}}\right] = [1, -w_{12}, \dots, -w_{1n}]$$

jelölést és hangsulyozzuk, hogy ezen vektorok első elemei pozitívak, az összes többi negatív.

[4] L. még E. Egerváry, On a property of the projector matrices and its application to the canonical reduction of matrix functions, *Acta Sci. Math.* Szeged, **15** (1953), 1—6.

[5] E. Pascal, *Die Determinanten* (Leipzig, 1900), 38—41.

Ugyanezt a redukciós eljárást $\mathbf{A}'$-re alkalmazva, majd tovább folytatva, végül az $\mathbf{A}$ mátrix alábbi diadikus előállítására jutunk:[4]

$$\mathbf{A} = q_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -v_{21} \\ -v_{31} \\ \vdots \\ -v_{n1} \end{bmatrix} [1, -w_{12}, -w_{13}, \ldots, -w_{1n}] +$$

$$+ q_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -v_{32} \\ \vdots \\ -v_{n2} \end{bmatrix} [0, 1, -w_{23}, \ldots, -w_{2n}] + \cdots + =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -v_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ -v_{31} & -v_{32} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -v_{n1} & -v_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -w_{12} & -w_{13} \cdots & -w_{1n} \\ 0 & 1 & -w_{23} \cdots & -w_{2n} \\ & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= (\mathbf{E} - \mathbf{M}) \langle q_1, \ldots, q_n \rangle (\mathbf{E} - \mathbf{N}),$$

ahol

$$q_1 = a_{11}; \quad q_k = \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{kk} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{k-1,\,k-1} \end{vmatrix} \qquad k = 2, 3, \ldots, n$$

és ahol valamennyi q_k, v_{ij}, w_{ij} elem pozitív.

Innen

$$\mathbf{A}^{-1} = \{(\mathbf{E} - \mathbf{M}) \langle q_1, \ldots, q_n \rangle (\mathbf{E} - \mathbf{N})\}^{-1} =$$
$$= (\mathbf{E} - \mathbf{N})^{-1} \langle q_1, \ldots, q_n \rangle^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1}.$$

De $\mathbf{M}$ és $\mathbf{N}$ pozitív elemekkel bíró nilpotens mátrixok, úgyhogy $\mathbf{M}^n = 0$, $\mathbf{N}^n = 0$ tehát

$$(\mathbf{E} - \mathbf{M})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{M} + \cdots + \mathbf{M}^{n-1},$$
$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{E} + \mathbf{N} + \cdots + \mathbf{N}^{n-1}) \langle q_1^{-1}, q_2^{-1}, \ldots, q_n^{-1} \rangle (\mathbf{E} + \mathbf{M} + \cdots + \mathbf{M}^{n-1}).$$

Fenti kifejezés világosan mutatja, hogy $\mathbf{A}^{-1}$ két ellentétes helyzetű és pozitív elemekkel bíró háromszögmátrixnak és egy ugyancsak pozitív elemekkel bíró diagonális mátrixnak a szorzata, következésképpen $\mathbf{A}^{-1}$ valamennyi eleme pozitív.

Rugalmasan kapcsolt részecskékből álló rendszerek rugalmassági mátrixára vonatkozó néhány ismert eredmény azt sugallja, hogy a II. tétel feltételei gyengébb feltételekkel helyettesíthetők.

Például, ha a rendszer olyan, két végén rögzített korpuszkuláris húr, melyet egyenlő tömegű és egyenlő közökben elhelye-

zett n tömegpont alkot, akkor a megfelelő rugalmassági mátrix[6]

$$(*)\quad \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}, \qquad |\mathbf{A}_n| = n+1,$$

és a reciprokának[7]

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \frac{1}{n+1} \begin{bmatrix} 1\cdot n & 1(n-1) & \cdots & 1\cdot 2 & 1\cdot 1 \\ 1(n-1) & 2(n-1) & \cdots & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \\ 1(n-2) & 2(n-2) & \cdots & 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1\cdot 1 & 2\cdot 1 & \cdots & (n-1)\cdot 1 & n\cdot 1 \end{bmatrix}$$

valamennyi eleme pozitív. Ez az eredmény fizikailag mindenesetre nyilvánvaló, mint a folytonos húrhoz tartozó Green-függvény pozitivitására vonatkozó jól ismert tételnek finit analogonja.

A II. tétel egy általánosításaként — mely a (*) alakú mátrixokra is vonatkozik — bebizonyítjuk a következő tételt:

III. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy egy n-edrendű* $\mathbf{A}_n$ *mátrixnak*

α) *főminorai, azaz az*

$$|\mathbf{A}_k| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

determinánsok pozitivak,

β) *valamennyi eleme a fődiagonálisán kívül nem-pozitív,*

γ) *a diagonális fölött levő háromszögben minden egyes oszlopa, a diagonális alatt levő háromszögben pedig minden egyes sora tartalmaz legalább egy negatív elemet.*

Akkor a mátrix reciprokának valamennyi eleme pozitív.

Mivel

$$\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}}{|\mathbf{A}_2|} & -\dfrac{a_{12}}{|\mathbf{A}_2|} \\ -\dfrac{a_{21}}{|\mathbf{A}_2|} & \dfrac{a_{11}}{|\mathbf{A}_2|} \end{bmatrix},$$

a tétel nyilvánvalóan igaz olyan másodrendű mátrixokra, amelyek kielégítik a III. α, β, γ feltételeket. Tegyük fel, hogy a tétel igaz

[6] L. pl. E. J. ROUTH, *Advanced Dynamics*, Part II (1884), 226—228.

[7] R. MISES-PH. FRANK, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik u. Physik (Braunschweig, 1930), I. Teil, 502—503.

minden olyan $(n-1)$-edrendű mátrixra, amely kielégíti a III. α, β, és γ feltételeket, és tekintsük egy n-edrendű mátrixnak alábbi particionált alakját:

$$\mathbf{A}_n = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hdashline a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{v}_n \\ \hdashline \mathbf{w}_n^* & a_{nn} \end{array}\right],$$

melynek reciproka (ugyanúgy particionálva)[8]

$$\mathbf{A}_n^{-1} = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A}_{n-1}^{-1} + \dfrac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|}\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{v}_n\mathbf{w}_n^*\mathbf{A}_{n-1}^{-1} & -\dfrac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|}\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{v}_n \\ \hdashline -\dfrac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|}\mathbf{w}_n^*\mathbf{A}_{n-1}^{-1} & \dfrac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|} \end{array}\right].$$

Rövidség kedvéért vezessük be az $\mathbf{A} \succ 0$ jelölést arra a tulajdonságra, hogy $\mathbf{A}$ valamennyi eleme pozitív. Nyilván abból, hogy $\mathbf{A} \succ 0$ és $\mathbf{B} \succ 0$, következik, hogy $\mathbf{A}+\mathbf{B} \succ 0$ és $\mathbf{AB} \succ 0$.

A feltevés szerint

$$\mathbf{A}_{n-1}^{-1} \succ 0$$

innen III. β) és γ) feltételek miatt

$$-\mathbf{A}_{n-1}^{-1}\mathbf{v}_n \succ 0, \quad -\mathbf{w}_n^*\mathbf{A}_{n-1}^{-1} \succ 0$$

és az α) feltétel miatt:

$$\frac{|\mathbf{A}_{n-1}|}{|\mathbf{A}_n|} > 0,$$

következésképpen $\mathbf{A}_n^{-1}$ összes blokkjában valamennyi elem pozitív, qu. e. d.

Megjegyzés. A jelen dolgozat befejezése után ismerte meg a szerző G. de Rham következő dolgozatát: Sur un théoreme de Stieltjes relatív a certaines matrices, *Academie Serbe des Sciençes, Publications de l'Institut Math.*, 4 (1952), 133—134. Noha címe és tárgya majdnem azonos a jelen dolgozatéval, a tartalomban kevés átfedés mutatkozik (csak szimmetrikus matrixok esetében), a módszer pedig teljesen más.

[8] L. pl. R. A. Frazer, W. J. Duncan and A. R. Collar, *Elementary Matrices* (Cambridge, 1938), 112—115.

ОБ ОДНОЙ ЛЕМИЕ СТИЛТЬЕСА ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ

Й. Эгервари

Венгерский перевод научной статьи, опубликованной на английском языке на стр. 99—103 тома 15 (1954 г.) Acta Scientiarum Mathematicarum (г. Сегед).

ON A LEMMA OF STIELTJES

By J. Egerváry

Hungarian translation of the paper "On a lemma of Stieltjes on matrices" (Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, vol. 15 (1954), p. 99—103.

Martinovics Ignác matematikai munkássága

Szénássy Barna

1955. június 20-án kétszáz éve, hogy született, és ugyancsak az év május 20-án volt 160 éve, hogy a budai Vérmezőn a hóhér bárdja alatt meghalt a jakobinusok vezére, Martinovics Ignác. A két határ közötti szűk negyven esztendő azon mozzanatait, melyek szerves részei a felvilágosodás korabeli magyar történelemnek, a jakobinusokra vonatkozó iratok sorozatos közzétételével [3][1], és több tanulmánnyal hitelesen világítják meg történészeink, korrigálva a múltban megjelent, több esetben célzatosan ferdítő tanulmányok által rajzolt képet. A felszabadulás utáni évek eme szorgos munkája azonban még mindig hiányos. A magyar jakobinusok többsége ugyanis nemcsak politikai téren tevékenykedett, hanem munkásságuk átnyúlt egyes szaktudományokba is. Így maga Martinovics is hű képviselője a múlt századok tudós ideáljának, a polihisztornak, aki nem tudott hosszabb ideig megállapodni egyetlen szaktudománynál sem, hanem iparkodott lehető sokat áttekinteni, főként a kapitalizmus emlőin rohamosan fejlődő műszaki és természeti tudományokból. Munkássága ilyen vonatkozásban csaknem teljesen feltáratlan, noha megismerése tudománytörténeti szempontból sem látszik érdektelennek. Tudjuk, hogy több kémiai tárgyú tanulmánya jelent meg nyugati lapokban, és azokról jónevű szakemberek elismerő bírálatokat is írtak; néhány műszaki konstrukciója (mikrométer-csavar, légszivattyú, léggömb, cséplőgép, dohányvágó) szélesebb körökben keltett érdeklődést; három kötetre tervezett kísérleti fizikai tankönyvének nyomtatásban is megjelent két első kötete (Lemberg, 1787—88) betekintést nyújthat a monarchiában folyó fizika-oktatás akkori színvonalába; filozófiai, csillagászati és biológiai elgondolásairól is maradtak fenn

[1] A zárójelben szereplő számok a dolgozatunk végén felsorolt források sorszámaira vonatkoznak.

írásbeli dokumentumok: sajnos — tudomásunk szerint — még ma is hiányzik ezek korszerű értékelése.

A matematika iránti érdeklődés is végighúzódik MARTINOVICS egész pályáján, hol egyik-másik munkája, hol életének külső eseményei beszélnek erről a tényről. Eppen ezért, ha meg akarjuk ismerni MARTINOVICS matematikai munkásságát, két különböző utat kell megjárnunk: át kell olvasnunk matematikai vonatkozású írásait, és le kell mérnünk az akkori magyar matematikai színvonalhoz viszonyított értéküket; másodszor — esetleges következtetések céljából — össze kell gyűjtenünk MARTINOVICS életének azon eseményeit, melyek valamilyen kapcsolatban vannak a matematikával.

MARTINOVICS egyetlen matematikai tárgyú könyvet írt. Ez a munka 1780-ban jelent meg a »királyi egyetem« betűivel, és a 12 oldal terjedelmű ajánláson és bevezetőn kívül 140 számozott oldalt tartalmaz. Teljes címe: *Theoria generalis aequationum omnium graduum novis illustrata formulis ac iuxta principia sublimioris calculis finitorum.* FRAKNÓI említi [7], hogy a budai ferences kolostor könyvtárának katalógusában szerepelt MARTINOVICS: *Mathesis pura,* Buda, 1780. c. munkája, a művet azonban nem lehetett megtalálni. Már FRAKNÓI lehetségesnek mondotta, hogy a két könyv ugyanaz, amit kétségtelenné tesz egyrészt kiadási éveik azonossága, terjedelmük megegyező volta, másrészt az, hogy maga MARTINOVICS sehol sem hivatkozik a második könyvre. Ugyanannak a könyvnek két különböző megnevezése annyiban érthető, hogy az egyenletek elméletét azon korban a »tiszta matézis«-hez sorolták, és valószínűleg csak munkakímélés céljából írták a katalógusba a hosszú cím helyett a rövidebb, és a könyv jellegét feltüntető címet. Arra is van adat, hogy a budai egyetemhez benyújtott pályázatával kapcsolatban a bírálók kezén átment MARTINOVICS egy olyan kézírásos tanulmánya, mely a körre vonatkozó tételeket tárgyal. Maga a dolgozat azonban ma már fel nem lelhető, valószínűleg visszakerült MARTINOVICShoz és nála kallódott el. Igy meg kell elégednünk a fent említett egyetlen, és hazai könyvtárainkban több helyen (Széchényi, Ráday, Pannonhalmi, Pécsi Egyetemi kvt.) meglévő könyvének ismertetésével.

MARTINOVICS könyvét KEREKGEDEI MAKÓ PÁLnak (1724—1793), a budai egyetem bölcsészeti kara igazgatójának ajánlotta. A bőbeszédű és kissé dagályos sorok a tudományos kérdésekkel foglalkozók együttműködésének hasznáról beszélnek, majd oldalakon át méltatják a »kitűnő« férfi nagy érdemeit. A jász-

apáti születésű jezsuita MAKÓ egy ideig a nagyszombati egyetemen, majd 1763—73. között a bécsi Teréziánumban tanárkodott. A jezsuita rend 1773-ban történt feloszlatása, és ezt követőleg a nagyszombati egyetem Budára való átköltözése alkalmával MAKÓ a váci egyházmegyébe vétette fel magát, és Mária Terézia a budai egyetem bölcsészeti karának igazgatását bízta rá. Ebben a munkakörben dolgozott aztán haláláig. MAKÓ igen jelentékeny munkát végzett a Ratio Educationis kidolgozásában, bécsi tartózkodása alatt pedig három olyan matematikai könyvet írt, melyek magasan kiemelkednek a magyar szerzőktől kiadott művek közül.[2] Munkái nemcsak a monarchia országaiban, hanem egyes nyugati államokban is ismertek és népszerűek voltak. Jórészt az ő munkája eredményének tulajdonítják, hogy a XVIII. sz. vége felé a bécsi matematika fellendült.

Az ajánló sorok után MARTINOVICS üdvözli az olvasót, és rövid programot ad a könyv céljára és használatára vonatkozólag.

A VI nagyobb részre és ezen belül 25 fejezetre osztott munka első lapjai az egyenletek tárgyalásához szükséges alapvető fogalmakat ismertetik, definiciókat közölnek és kijelölik a tárgyalásra váró kérdéseket. Így rögtön az első fejezet axiómáknak nevezett, a tranzitivitással kapcsolatos egyenlőségeket és egyenlőtlenségeket ismertet, majd sorra kerülnek az egyenletek transzformálására vonatkozó tételek. Már ezen bevezető fejezetekben észrevehetjük MARTINOVICS írásának szembetűnő jó oldalait, de hibáit is. A könyv határozott érdeme, hogy szem előtt tartja a fokozatosság elvét, mindig egyszerűbb, szemléletesebb tényekből kiindulva halad a bonyolultabbak felé, úgyhogy az általánosabb jellegű tételek sok esetben az előzőleg ismertetett speciális eredményekből maguktól adódnak. Ugyanakkor gyakran hiányosak, pontatlanok a bizonyítások, olykor teljesen nélkülözzük azokat. A matematikai szigor, a precízitás nem erőssége MARTINOVICSnak. Így pl. a könyv hosszasan beszél a négyzetgyökvonásról, de meg sem említi annak kétértékű voltát; de

[2] MAKÓ könyvei: a) Compendiaria matheseos institutio. Bécs, 1768. Később Velencében is kiadták, b) Calculi differentialis et integralis institutio. Bécs, 1768., c) De arithmeticis et geometricis aequationum resolutionibus libri duo. Bécs, 1770.

Ezek közül a legismertebb a differenciál- és integrálszámítással foglalkozó mű, mely az első magyar szerzőtől származó analízis; MARTINOVICS a harmadik könyvre hivatkozik többször. E munka lényegében ugyanazon algebrai problémákat tárgyalja, mint MARTINOVICS munkája, azonban részletesebben és matematikai szempontból precízebben.

a másodfokú egyenletek tárgyalása során a szerző természetesnek veszi, hogy a négyzetgyökvonás kétértékű művelet. Ilyesfajta példát sokat említhetnénk, ezek azonban az eredmények lényegét nem érintik, legföljebb nem kellő elmélyedésre mutatnak. Mintha az lett volna MARTINOVICS célja, hogy a bő anyag feldolgozásában minél hamarabb érjen el a matematikailag mutatósabb, érdekesebb és az általa láthatólag kedveltebb részek tárgyalásához.

A könyv nagyobb része a lineáris és magasabbfokú algebrai egyenletek, illetve egyenletrendszerek megoldásáról szól. A lineáris rendszerek megoldására a behelyettesítő és az összehasonlító módszert ismerteti, de a megoldhatóság feltételeit nem részletezi. Ezután azt fejtegeti, hogy milyenek lehetnek egy valós együtthatós n-ed fokú algebrai egyenlet gyökei. A könyv ezen része a többihez viszonyítva részletezőbb, és bizonyos tekintetben MARTINOVICS gyakorlati érzékére enged következtetni. Az általa bemutatott, többségükben gyakorlati feladatok ugyanis különböző (pozitív-negatív, racionális-irracionális, valós-komplex) gyökökhöz vezetnek, MARTINOVICS azonban gondot fordít arra, hogy megadja a plauzibilis magyarázatát a gyökök minőségbeli különbségének. Törekvésének igazolására csak egy feladatot említünk (amely MAKÓnál is szerepel): megkeresendő az m és n tömegű, *homogén gömbalakú* testek középpontjainak centrálisán azon O_x pont, amelyben elhelyezett x tömeget az m és n egyenlő erővel vonzza (feltéve, hogy a tömegek közötti vonzóerő fordítva arányos a tömegközéppontok közti távolság négyzetével). MARTINOVICS gondosan magyarázgatja, hogy a másodfokú egyenlethez vezető feladat pozitív gyöke azt jelenti, hogy O_x az O_m és O_n között, míg a negatív, hogy azokon kívül van. A komplex gyökök magyarázata már némi nehézséget okoz. Azt észreveszi MARTINOVICS, hogy komplex gyökök mindig párosával fordulnak elő, ha pedig az egyenletnek *csak* komplex gyökei vannak, magyarázatul annyit mond, hogy az egyenletben foglalt feltételek a reális világban nem teljesülhetnek. Az egyenlet koefficienseinek jeléből konkrét feladatok segítségével következtet a gyökök előjelére, és így igazolja a Descartes-féle jelszabályt, tehát nem a maga általánosságában.

A könyv IV. caputjában az $y = x \pm a$ eltolási, továbbá az $y = ax$ hasonlósági transzformációról beszél, majd példákon mutatja be, hogy eme transzformációk segítségével miként lehet nem teljes n-ed fokú polinomot teljessé kiegészíteni, illetve teljes polinomból hogyan lehet egyes tagokat eliminálni.

A gyökök korlátjainak meghatározására MARTINOVICS — mint mondja — a korabeli matematikusok által legkedveltebb módszereket mutatja be. Így az olyan valós koefficiensű

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (a_0 > 0)$$

egyenlet esetében, melyben csupán egyetlen koefficiens negatív, a pozitív gyökökre az egyenlet átrendezésével keres korlátot: a negatív tag transzpozíciója után a baloldali tagok egyenként mind kisebbek a jobboldalinál. Másik eljárása nem ennyire primitív és jóval általánosabb: deriváljuk az előbbi egyenletet $(n-1)$-szer. Ha tetszőleges pozitív, a behelyettesítése esetén a deriváltak mindegyike pozitív, akkor a felső korlát a pozitív gyökökre, ha viszont tetszőleges negatív b behelyettesítésével a páros fokszámú deriváltak pozitívak, de a páratlan fokszámúak negatívak, akkor b a negatív gyökökre alsó korlát.[3]

A Newton-féle binomiális tétel és a legnagyobb közös osztó tárgyalása után kerül sor a másod-, harmad-, negyedfokú, valamint az ilyenekre redukálható egyenletek ismertetésére. A Cardano-féle formulák levezetése után MARTINOVICS kitér a gyökök számának és milyenségének tárgyalására is.

Az egyenletek numerikus megoldásáról szóló részben a NEWTONTÓL (1669)[4] származó alábbi gyökközelítő eljárás szerepel: keressünk valamilyen módon a kérdéses x gyökre olyan (alsó, vagy felső) k korlátot, melytől a gyök csak valódi tört értékkel különbözik. Vagyis az $x = k + d$ egyenletben $|d| \leqq \frac{1}{2}$. Ha az egyenletre az $x = k + d$ transzformációt alkalmazzuk, akkor

[3] Az eljárás, melyet MARTINOVICS bizonyítás nélkül közöl, NEWTONTÓL származik (Arithmetica universalis, II. k. 4. fejezet, 1673—83). Igazolása Budan-Fourier következő ismert tétele alapján könnyen történik: ha az $f^{(i)}(a)$ $(i = 0,1\ldots, n-1)$ számsorozatban a jelváltások száma $V(a)$ és $f^{(i)}(b)$-ben $V(b)$, akkor az $\langle a, b \rangle$ intervallumban a gyökök száma $V(a) - V(b) - 2k$, ahol k alkalmas nem-negatív egész szám. Nézzük most az $f(x)$ gyöktényezős előállítását. A szorzat deriválásának szabálya miatt az $f^{(i)}(x)$ differenciálhányadosok ugyancsak a gyöktényezők valamilyen szorzatainak összegéből tevődnek össze, vagyis, ha a nagyobb bármely pozitív gyöknél, akkor az összes $f^{(i)}(a)$ pozitív (többszörös gyökök esetén sem módosul a helyzet). Hogy a feltétel elégséges is, a következőként láthatjuk be: válasszuk az A számot úgy, hogy nagyobb legyen az $f(x)$ egyenlet összes pozitív gyökénél. A Budan-Fourier tétel szerint $V(a) = V(A) = 0$, vagy másként $V(a) - V(A) = 0$, tehát az $\langle a, A \rangle$ intervallumban nincs gyök. Vagyis a ugyancsak felső korlát.

Annak igazolására, hogy ha $b < 0$ és $f^{(i)}(b)$ váltakozó előjelű, akkor b kisebb $f(x)$ bármely gyökénél, az $f(-x) = f(y)$, és $f^{(i)}(y) = f^{(i)}(x)(-1)^n$ összefüggések révén visszavezethető az első esetre.

[4] Cantor: Geschichte der Math. 3. k. II. rész. Leipzig, 1898. 100—101. l.

az egyelőre ismeretlen d-re egy n-ed fokú egyenletet nyerünk. Ez utóbbiból a megkívánt pontosságtól függően d magasabbfokú tagjai közül néhányat elhagyhatunk, az így nyert alacsonyabbfokú egyenlet d-re ad első megközelítést. Az eljárást folytatva a d hibát fokozatosan approximálhatjuk. A módszer indokolható, ha az $f(x)$ polinomot a $d = x - k$ helyen Taylor-sorba fejtjük.

Végül több más formula mellett $n = 2,3$ és 4 esetére MARTINOVICS igazolja az egyenletek megoldásában is hasznosítható ún. Halley—Marie-féle approximációs képletet (l. pl. Tropfke 2. k. 140. l.), mely szerint:

$$\sqrt[n]{a^n \pm b} = \frac{n-2}{n-1}\,a + \sqrt{\frac{a^2}{(n-1)^2} \pm \frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}}$$

Kissé hosszadalmasan foglalkoztunk MARTINOVICS könyvének ismertetésével, annak igazolása céljából, hogy a munka tekintélyes anyagot ölel fel. Ez — ha figyelembe vesszük a magyar matematika akkori színvonalát — MARTINOVICS jóval átlagon felüli látókörére és olvasottságára mutat. Megállapításunkat egyébként a számos szerzőre való hivatkozás is igazolja (WOLFF, MACLAURIN, NEWTON, SCHERFFER, BOSCOVICH, LA CAILLE MAKÓ és mások).

A XVIII. században nagy mértékben gazdagodott az algebra, de a sok új eredmény mellett sor került a régebbi vizsgálatok tüzetesebb bírálatára is. A fejlődés a századforduló táján már szükségszerűleg vezetett a Ruffini—Abel-féle tételhez. A XVIII. században az algebra művelői között olyan nevekkel találkozunk, mint EULER, LAGRANGE, VANDERMONDE, CRAMER, MACLAURIN, LAPLACE, LACROIX, hogy a legnagyobbak közül is csak néhányat említsünk. Belátható, hogy a XVIII. században kiadott algebrakönyvek között bőven találunk olyanokat, melyek — didaktikailag is jó felépítésben — jelentős új eredményeket tárgyalnak. A világviszonylatban ismert e korbeli könyvek listáján csak két magyar matematikus nevével találkozunk: a már említett KEREKGEDEI MAKÓ PÁLéval, és a Magyarországról fiatalon Németországba távozott SEGNER ANDRÁSéval (1704—1777). Az inkább fizikai tevékenysége révén ismert SEGNER matematika-könyvei és néhány dolgozata eredeti algebrai eredményeket is tartalmaznak (a Descartes-féle jelszabály új bizonyítása, a harmadfokú egyenletek megoldására új grafikus eljárás stb.). Az ő munkáiktól eltekintve a század magyar matematikai irodalma szegényes. Nem mintha hazánkban nem jelentek volna

meg matematikai munkák — a bibliográfia csaknem másfélszáz magyar matematikai tankönyvszerzőt ismer 1830. előtt — maga ez a szám azonban ne tévesszen meg. A munkák között ugyanis aligha találunk 4—5 olyat, melyek az európai színvonalat úgyahogy megütik. Megítélésünk szerint MARTINOVICS munkája ezek között nem kap helyet, de közvetlenül utánuk következik, és — a szerző történelmi szerepétől függetlenül — említést érdemel a magyar matematika történetében.

Egyetlen munka alapján nem mindig lehet megbízható képet formálni a könyv szerzőjéről, néhány észrevételt mégis tehetünk MARTINOVICSra vonatkozólag: olyan matematikusnak látszik, aki gyors észjárásával hamar át tud tekinteni dolgokat, rendszerező készsége révén pedig ügyesen foglalja ismereteit egységbe. A gördülékeny, könnyed stílus érthetővé, élvezetes olvasmánnyá teszi munkáját. Ugyanakkor azonban nyugtalan szelleme mintha nem engedné, hogy behatoljon a matematika mélységeibe oly mértékig, hogy eleget tegyen a matematikai szigorúság követelményeinek, vagy hogy új eredmények feltárása is lehetővé váljék számára. Könyvéből az is kivehető, hogy csak olyat ír le, amit maga is ért, szolgailag nem másol különböző könyvekből — bizony ez számos korabeli magyar matematikusról nem mondható el.

A második út, melyből MARTINOVICS matematikai tevékenységére következtethetünk magában véve is érdekes, és ez életének külső eseményeiből adódik.[5] Az első ilyen esemény időpontja nagyjából egybeesik fentebb ismertetett könyvének megjelenésével: MARTINOVICS ugyanis 1780-ban pályázatot nyújtott be a nemrégiben szervezett nagyváradi akadémia matematika tanszékének elnyerése céljából. A bécsi udvar rendelkezése értelmében ilyen esetekben a pályázóknak konkurzuson (versenyen) kellett résztvenniök, ez alól csak olyanoknak adtak felmentést, akik elismert szaktekintélyek voltak. Az írásbeli és szóbeli részből álló verseny eredménye alkotta a pályázók rangsorolásának alapját. A MARTINOVICS pályázatával kapcsolatos, Pesten lefolytatott vizsgálat bizottságának elnöke, a piarista rendhez tartozó ismert író, DUGONICS ANDRÁS (1740—1818) volt, aki a jezsuita rend eltörlése óta a nagyszombati, majd a budai egyetemen töltötte be az »elemi« (tiszta és alkalmazott) matematika tanszé-

[5] Az adatokat — a dolgozat végén felsorolt forrásokon kívül — BENDA KÁLMÁN levéltárosnak, JELITAI JÓZSEF matematika-történész özvegyének (ki férje hátramaradt feljegyzéseit rendelkezésemre bocsátotta) és JERZY ŁOS toruni egyetemi tanárnak köszönöm.

két. MARTINOVICS szóbeli vizsgálatáról DUGONICS emlékirataiban a következő olvasható ([7] 25. l.): »Kezdettem őtet azon tudományból faggatni; hanem szerencsétlenségére épen olyan kérdéseket tettem neki, melyekre ő nem felelhetvén, oly nagy hangosan beszéllett mégis a Mathesisnek dicsőségéről, hogy azon Excellentiás Urakat ... egészben a maga részére vonta. Én ellenek szegeztem magamat, és mégis vakmerőségét (mert mit akart azon haszontalan hangos szavakkal) az urak eleibe adtam. Velem tartott Makó Pál is ... Nagy nehezen verhettük le azon Excellentiás Urakat, kik annyira bele bolondultak, hogy egy akadémiát megcsúfítani akartak egy tudatlannal.«

Szokatlanul erőseknek tűnnek fel e szavak, és lehetetlen mögöttük valami rejtett indokot — egyéni ellenszenvet, vagy a különböző szerzetekhez tartozók közötti féltékenységet — nem keresnünk. DUGONICS szavai ugyanis egyáltalában nem meggyőzőek, hisz a hátramaradt matematikai művek MARTINOVICS javára billentik a tudás mérlegét. DUGONICS matematikai munkásságát egyetlen mű jelzi: *A tudákosság négy könyve,* melynek 1784-ben megjelent első kiadásában az algebra és az elemi geometria szerepel, és csak az 1798-ban közzétett második kiadáshoz csatolták a harmadik és negyedik »könyvet« (a trigonometriát és a kúpszeletekről szóló részt). Az első »könyv« tárgyalja ugyan az egyenleteket, de csak a másodfokúakig, a magasabbfokúakat a szerző röviden elintézi azzal, hogy azokat »megfejteni nagyobb mesterség«. Amíg MARTINOVICS könyve — matematikai irodalmunk akkori színvonalát tekintve — a magasabb matézis körébe sorolható, addig a DUGONICSé kifejezetten elemi jellegű, de az ilyen könyvek között is a gyengébbek közé tartozik. Értékét néhány régebbi bírálat túlozta, valójában egyetlen érdeme annak az igazolása, hogy a magyar nyelv alkalmassá tehető a szaktudományok művelésére. Egyébként DUGONICSról, mint matematikusról nem sok jót mondhatunk. Egyike a múlt századok azon »tudós« epigonjainak, kik érdemtelenül nyertek el megtisztelő állásokat és az önkritika teljes hiányában szentnek és felülmúlhatatlannak képzelték magukat. Önteltségének igazolására elegendő, ha egyetlen szakaszát idézzük annak az ódának, melyet második könyve elejére íratott valamelyik barátjával:

Új Fáradság, Nyelv-újjítás
Kellett, és nagy Elme;
Mind ki-tellett Dugonics-túl,
S — elé-állott erre.

De hogy a matematikának ezen »nagy elméje« milyen — a tisztán formális analógián alapuló — »bizonyítást« vallott büszkén a »maga leleményének«, melyre az »előtte élt Tudákosok« képtelenek voltak rájönni, érdemes elmondanunk a háromszög területi képletének Dugonics által adott levezetését: nyilvánvaló (?), hogy a háromszög alapjának pontjait egy zérussal kezdődő számtani sor tagjainak, a magasságot pedig a tagok számának tekinthetjük. Így — figyelembevéve a számtani sor összegképletét — a háromszög területe az alap és a magasság fél szorzatával egyenlő. Q. e. d! (2. könyv 72, l.) Emellett, amíg Martinovics tanári munkáját az egykori adatok eredményesnek mondják, addig Dugonicscsal szemben ilyen téren komoly kifogások merültek fel, sőt azt is tudjuk, hogy a matematikai vizsgák eredménytelensége miatt 1796-ban a helytartótanács utasította tanulmányi bizottságának ülnökeit az examenek gyakori ellenőrzésére.

Tény, hogy Martinovicsnak nem sikerült elnyernie a nagyváradi katedrát, sőt nemsokára egy hittudományi pályázata is eredménytelenül végződött.

Midőn rokonai közbenjárására 1781-ben Martinovicsnak sikerült a ferencesrendet otthagynia és katona-pappá nevezték ki, akkor Csernovicba kerülve nemcsak az ottani ezred lelkészi teendőit látta el, hanem mint mérnökkari matematikus is működött. Csernovicból indult el hosszabb külföldi útjára, és Párisban több matematikussal kötött ismeretséget, sőt — vallomása szerint — ezek vezették be az »illuminátusok«-nak nevezett baloldali titkos szervezetbe. Párisi ismerősei között szerepel a csillagász Lalande (1732—1807) és a matematikus Condorcet (1743—1794), aki hosszú időn át volt a francia akadémia titkára. Lalande írta (Montucla híres, háromkötetes matematikatörténete negyedik köteteként) az első asztronómia történetet, Condorcet pedig jelentős eredményeket ért el a valószínűség- és differenciaszámításban, továbbá a differenciálegyenletek területén. Martinovics vallomásában arról is szólt, hogy a légkör magasságának mérésére kidolgozott eljárását Lagrange (1736—1813) elismerő levelekkel jutalmazta — mindezekről azonban közvetlen írásos dokumentumok nem maradtak. Azonban az kétségtelen, hogy külföldi útja alkalmával Martinovics jó nevet szerzett, mert csak ezzel magyarázható, hogy 1783. szept. 29-én (Grüssmann exjezsuita, ismert fizikus, Bécsbe történt áthelyezése után) konkurzus nélkül nevezték ki a lembergi akadémia természettani tanszékére. Ezt az állást akkor is megtartotta, midőn egy év múlva az akadémiát egyetemmé szervezték át.

Ugyancsak tudományos tevékenységének tulajdoníthatjuk, hogy őt választották meg a lembergi egyetem filózófiai fakultása első dékánjává és tanulmányi vezetőjévé. A lembergiek véleménye egyébként megoszlott MARTINOVICSról, a professzorok között is voltak barátai és ellenfelei, tisztelői és lekicsinylői, de abban mindenki megegyezett, hogy igen tehetséges, aki talán túlságosan rabja fantáziájának, de rendszeres munka esetén nagy alkotásokra lenne képes. A fizika mellett matematikát is előadott, sőt — ami abban az időben a szigorúan kötött tananyag mellett a monarchia országaiban ritkaság számba ment — joga volt, hogy előadásaihoz saját jegyzeteit és könyveit használja.

Az utolsó, de egyben legjellemzőbb esemény, melyet MARTINOVICS matematikai munkásságával kapcsolatban meg kell említenünk, a budapesti tudományegyetem levéltári anyaga alapján a következőként rekonstruálható: HORVÁTH JÁNOS (1732—1799) exjezsuita, a budai egyetem fizika és mechanika tanára 34 évi szolgálat után 1791 tavaszán nyugdíjazását kérte, és a tanügyi hatóságok helyt adtak a kérésnek. HORVÁTH egyik leghíresebb professzora volt a nagyszombati, majd a budai egyetemnek, kinek fizika-tankönyvei több kiadást is megértek, Elementa matheseos c. matematikai munkáját pedig előbb Nagyszombaton (1772—73), majd Augsburgban (1782) adták ki.

MARTINOVICS a hosszú külföldi távollét után visszavágyott hazájába, és — miután eredménytelenül folyamodott a pécsi tankerületi főigazgatói állásra — Pestre utazva benyújtotta a helytartótanácshoz a meghirdetett egyetemi tanszék elnyerése érdekében írt pályázatát. Kívüle még heten adtak be kérvényt, ismertebb tudós ezek között nem szerepelt. A helytartótanácstól az egyetem tanácsához kerültek a folyamodványok, és ez — meghallgatva a bölcsészeti kar véleményét — rövid időn belül, 1791. aug. 6-án döntött a három jelölt személyének kérdésében. MARTINOVICS nem szerepelt a jelöltek között, mellőzését azzal indokolták meg, hogy tudományos munkásságát nem ismerik, csupán fizikai könyvének második kötetét, azt azonban a kritika nem fogadta kedvezően.

Ez az érvelés feltétlenül sántít, hisz MARTINOVICS matematika könyve alig tíz évvel azelőtt jelent meg, éspedig ugyanannak az egyetemnek a betűivel!

MARTINOVICS meglepődve értesült az egyetem határozatáról, annál is inkább, mert biztosra véve ügye sikerét, lembergi állásáról közben lemondott. Sietve írt — többek között — egy beadványt a helytartótanácshoz, melyben hivatkozik tudományos ér-

demeire, a kitüntető külföldi elismerésekre, és a pesti professzorokat azzal vádolta, hogy összefogtak ellene, iparkodtak hazájától távoltartani. Ugyanakkor a következőket írta VAN SWIETENnek, a bécsi tanügyi bizottság mindenható elnökének: »... egyebek között az álnok Makó így szólt: miután a bécsi tanulmányi bizottság igája alól felszabadultunk, azon kell lennünk (ti. jezsuitáknak), hogy azok számát, akik ezen hatóság által csempésztettek az egyetemre, ne szaporítsuk, hanem kevesbítsük. Végül azt is hozzáfűzték, hogy mivel ferences szerzetemet tíz éve elhagytam, nem lehetek jó keresztény; és ilyennek kell lennie véleményük szerint a fizika tanárának egy apostoli országban. O miseres hominum mentes, o pectora coeca!.«

VAN SWIETEN nem válaszolt a levélre, ezzel szemben a helytartótanács részletes jelentést kért az egyetemtől MARTINOVICS tudományos munkásságáról.

Az egyetem ebben az esetben — látszólag — már körültekintőbben járt el, mert felszólította HORVÁTH JÁNOST, PASQUICH JÁNOST (1753—1829), a felsőbb matematika tanárát és WINTERL JAKAB JÓZSEFET (1739—1809), a vegytan orvoskari professzorát, hogy mondjanak véleményt MARTINOVICS fizikai, matematikai, illetve kémiai tevékenységéről.

Mindhárom bírálat igen elmarasztaló: HORVÁTH nem látott a MARTINOVICSénál rosszabb fizika könyvet, WINTERL szerint a kémia alapfogalmaival sincs tisztában, és a dolgozatokban fellelhető hibák hosszú listáját küldte be, PASQUICH pedig latin nyelvű bírálatában — többek között — az alábbiakat mondta:

»*Theoria generalis aequationum omnium graduum novis illustrata formulis* ... Budae, 1780. Solida, adeoque mathematica objecti notitia ubique desideratur, lex nova pro nexu arithmetico inter quantitates, circa quos aequationum theoria servatur, nullibi in opere comparet: theoriam igitur generalem aequationum omnium graduum, et formulas novas, quae ipsam illustrent, in opusculo hoc nemo inveniet.«

»*Mathematische Abhandlung über einige Eigenschaften des Kreises.* Proprietates hae ejusmodi sunt, ut non credam extare mediocrem mathematicum, qui ipsos attentione dignos censeat: si quis vero contrarium sentit, promitto illi, me aliquot centurias talium proprietatum annis singulis in lucem editurum.«

»Praeter haec opuscula legi quoque partem secundam physicae Cl. D. Martinovics. Continet illa materiam physico-mathematicam, cuius pertractatio D. Autori infelicissime successit, ita, ut inconceptibile sit, qui fieri possit, ut juvenes optatam

fructum inde referant; id autem eo magis miror, quod certo sciam, excellentissima opera, quae materiam illam pertractant, D. Autori nota fuisse.«[6]

A szakvélemények jogot adtak a bölcsészeti karnak, hogy ne változtasson eredeti felterjesztésén, azt csupán megtoldotta olyan kiegészítésekkel, hogy az elismerő külföldi véleményeket nem tartja döntőeknek, hogy a kart munkájában »egyedül az igazság szeretete vezette«, és »távolállt a szándék, hogy elzárják Martinovics elöl az utat, mely hazájába visszavezetheti«.

Így aztán a közbeeső tanügyi hatóságok változtatás nélkül fogadták el az eredeti javaslatot, és a császár végül is a horvát származású exjezsuita áldozárt, DOMIN JÓZSEF (1754—1819) pécsi akadémiai tanárt nevezte ki a fizika tanszékére. Nevét három fizikai tárgyú könyv őrzi, továbbá EÖTVÖS LÓRÁND egy rövid megjegyzése, mely szerint az elektromos úton való gyógymódokkal is foglalkozott. ([5] 339. l.)

Csaknem két évszázad távlatából természetesen nehéz határozottan kimondanunk, hogy a bírálók és a szolgálati út közbeeső tanügyi szervei célzatosan rosszindulatúan jártak el MARTINOVICCSal szemben. Mindenesetre szakmai tudás hiányával nem vádolhatjuk a bírálókat, és főként PASQUICHOT nem, aki jó képzettségű csillagász volt, hátramaradt 1788-iki konkurzusi dolgozata pedig eredeti matematikai gondolkozásra mutat. Lipcsében 1791-ben kiadott *Unterricht in der Differential- und Integralrechnung* c. könyvét több külföldi matematikus elismerőleg bírálta, és pl. a paralelák történetéből ismert KÄSTNER külön is kiemelte a mű gyakorlati alkalmazhatóságát. Azonban

[6] »*Mindenféle fokú egyenletek új képletekkel magyarázott általános elmélete*... Buda, 1780. A tárgy alapos és kellő matematikai ismerete mindenütt hiányzik; a mennyiségek közötti aritmetikai összefüggésekre vonatkozó azon új törvények, melyek körül az egyenletek elmélete forog, a munkából seholsem tűnnek ki: ilyenmódon a tetszőleges fokú egyenletek általános elméletét és azokat az új formulákat, melyek ezt megvilágítanák, e kis munkában senki sem találja.«

»*A kör néhány tulajdonságáról szóló matematikai értekezés.* Ezek a tulajdonságok olyasfajták, hogy nem hiszem létezik középszerű matematikus, aki ezeket figyelemreméltónak találná; ha mégis az ellenkezőt véli valaki, akkor megigérem neki, hogy egy-egy év alatt többszáz ilyen tulajdonságot napvilágra hozok.«

»E művecskéken kívül olvastam az i. t. Martinovics úr fizikájának második részét is. Ez fizikai-matematikai anyagot tartalmaz, melynek tárgyalása a szerzőnek nagyon szerencsétlenül sikerült, úgyhogy elképzelhetetlen, hogy az ifjak a megkívánt ismereteket innen megszerezhetnék; ezt pedig annál inkább csodálom, mert biztosan tudom, hogy a szerző ismer igen kiváló olyan munkákat, melyek ezt az anyagot tárgyalják.«

az már feltűnő, hogy az alapos PASQUICH annyira nem építő jellegű, felületes bírálatot mondott MARTINOVICS munkáiról, szavait különben sem tekinthetjük igazságosaknak. Mintha neki, de a másik két bírálónak is csak az lett volna a feladata, hogy a kar előző döntését igazolják. Szigorú eljárásuk annál feltűnőbb, mert a budai egyetem matematikai és fizikai tanszékeinek köztudomásúlag még jóval később is voltak olyan tanárai, kiknek nevét legfeljebb teljesség kedvéért említi meg a magyar tudománytörténet.

A véletlen játéka, hogy az irattári anyag néhány aktájával hátrább bukkanunk olyan sorokra, melyekben PASQUICH a kar számára gyűjtötte össze a saját könyvéről szóló dicsérő külföldi véleményeket (köztük pl. a KÄSTNERét és VÉGÁét). Önként felvetődik a kérdés, hogy amit PASQUICH esetében fontosnak tartott a bölcsészeti kar, miért nem vette hiteltérdemlőnek MARTINOVICCSal kapcsolatban?

Igen megokoltnak látszik ezek után a feltevés, hogy a budai egyetem exjezsuita tagjai szervezetten és szándékosan mellőzték a szabadelvű, felvilágosult MARTINOVICSOt, attól az elvtől vezérelve, hogy lehetőleg minél több tanszéket töltsenek be saját embereikkel. A forradalmi »eszmék hajnalának pacsirtája« (Kossuth) ezért nem hallathatta sohasem szavát magyar katedráról.

IRODALOM

[1.] Barabás Tibor: Martinovics élete. Budapest, 1945.
[2.] Becker—Hofmann: Geschichte der Mathematik. Bonn, 1951.
[3.] Benda Kálmán: A magyar jakobinusok iratai, I. (kéziratban) II—III. Bp. 1952.
[4.] Cajori: A history of mathematics. New York, 1953.
[5.] Eötvös Lóránd: Jedlik Ányos emlékezete. Természettudományi Közlöny 29. k. (1897) 387—402. l.
[6.] Finkel—Starzynski: Historya uniwersytetu Lwowskiego. Lwów, 1894.
[7.] Fraknói Vilmos: Martinovics és társainak összeesküvése. Bp. 1880.
[8.] Fraknói Vilmos: Martinovics élete. Bp. 1921.
[9.] Horányi: Memoria Hungarorum et provincialium scriptis editis notorum. I—II. Bécs, 1775—76.
[10.] Martinovics Ignác: Theoria generalis aequationum etc. Buda, 1780.
[11.] Szentpétery Imre: A bölcsészeti kar története. Bp. 1935.
[12.] Tropfke: Geschichte der Elementar-Mathematik. Berlin—Leipzig. 1921—24.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ И. МАРТИНОВИЧА

Б. Сенашши

Вождь венгерского якобинского движения И. Мартинович родился в городе Пешт в 1755 году. В 1795 он был казнен венским правительством за революционную деятельность. Кроме своей политической работы Мартинович занимался и научными проблемами своего времени. В 1780 г. в городе Буда он опубликовал труд о теории алгебраических уравнений. Предметом настоящей статьи является ознакомление с вышеуказанной книгой. Автор статьи дает подробное описание событий: что предпринимали реакционные профессора университета города Буда в 1791 году для того, чтобы воспрепятствовать получению Мартиновичем кафедры в университете.

THE MATHEMATICAL WORK OF I. MARTINOVICS (1755—1795)

B. Szénássy

Life and scientific work of Ignác Martinovics.

KOSSUTH-DÍJASAINK

Jordan Károly

tudományos munkáinak jegyzéke

1. Ch. Jordan, Dédoublement de l'acide butanoloïque 2, et recherches sur les dérivés actifs de cet acide. Étude numérique sur la formule transformée de Thorpe et Rücker. Genève 1895.
2. Ph. Guye et Ch. Jordan, Dédoublement de l'acide butane—2-oloïque. Comptes rendus de l'Académie des Sciences Vol. CXX. 1895.
3. Ph. A. Guye et Ch. Jordan, Dérivés de l'acide α—oxybutirique actif. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Vol. CXX. 1895.
4. Guye et Jordan, Recherches expérimentales sur les butanol—2-oiques actifs. Bulletin de la Société Chimique de Paris 3e séries, Tome 15, Paris 1996.
5. Guye et Jordan, Éthers des acides α—oxybutyriques actifs. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Vol. CXX. Paris 1895.
6. Guye et Jordan, Formule simplifiée pour calculer les variations de densité des liquides avec la température. Bulletin de la Société Chimique de Paris. Tome 15, Paris 1896.
7. Guye et Jordan, Dispersion rotatoire des corps actifs liquides non polymérisés. Comptes rendus de l'Académie des Sciences Vol. CXXII. Paris 1896.
8. Jordan K., A valószínűségszámítás alkalmazása meteorológiai viszonyainkra. Atmosphaera. Budapest 1904.
9. Ch. Jordan, La propagation des ondes sismiques. Revue Générale des Sciences Paris 1907.

9a. Jordan K., A Hévízi tó fenekének fölmérése. A Balaton tudományos tanulmányozásának eredményei II. kötet. Függelék. Bp. 1908.

10. Ch. Jordan et R. Fiedler, Contribution à la Geométrie des courbes convexes et de certaines courbes qui en dérivent. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. Tome 154, Paris 1912.
11. Ch. Jordan et R. Fiedler, Contribution à l'étude des Courbes convexes fermées, Hermann, Paris 1912.
12. Ch. Jordan et Fiedler, Courbes Orbiformes, Archiv der Mathematik und Physik, Band XXI, Berlin 1912.
13. Ch. Jordan and R. Fiedler, On a particular case of closed convex curves. The Tohoku Mathematical Journal Vol. 6 Sendai, Japan 1914.
14. Ch. Jordan et R. Fiedler, Courbes convexes fermées à largeur constante. Archiv der Mathematik und Physik, Band XXI. p. 362, Berlin. 1914.
15. Jordan K. és Fiedler R. Zárt konvex görbékkel kapcsolatos görbékről. Mathematikai és Physikai Lapok 1915 Budapest.
16. Jordan K. A köd. Természettudományi Közlöny 131—132 pótfüzete. Budapest 1918.

17. Jordan K. Várpalotai évi meteorológiai jelentés. Időjárás, XXIII. évfolyam, Budapest 1919.
18. Ch. Jordan, Sur une série de polynomes dont chaque somme partielle représente la meilleure approximation d'un degré donné suivant la méthode des moindres carrés. Proceedings of the London Mathematical Society Vol. 20 London 1921.
19. Jordan K. A valószínűség a tudományban és az életben. Természettudományi Közlöny 775—778 füzete. Budapest 1921.
20. K. Jordan. Kritik der Proportionalwahlsysteme. Zeitschrift für gesamte Staatswissenschaft. 76 Jahrg. Tübingen 1921.
21. Jordan K. Észlelések eredményeinek törvénybefoglalása polynomok segélyével. Mathematikai és Physikai Lapok XXIX kötet. 1922.
22. K. Jordan, Eine Vereinfachte Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate. Meteorologen-Tagung auf dem Hohen Sonnblick (Meteorologische Zeitschrift, Braunschweig 1922.
23. Ch. Jordan, On the Inversion of Bernoulli's Theorem. Philosophical Magazine Vol. XLV. London 1923.
24. Ch. Jordan, On the Montmort—Moivre Problem. Acta Scientiarum Mathematicarum Tom. I, Szeged 1923.
25. Ch. Jordan, On a New Demonstration of Maclaurin's or Euler's Summation Formula, The Tohoku Mathematical Journal Vol. 21 Sendai, 1922.
26. Ch. Jordan, Sur la théorie des erreurs d'observation, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tomo XLVII, Palermo 1923.
27. Ch. Jordan, On Daniel Bernoulli's „Moral expectation" and on a new conception of expectation. American Mathematical Monthly Vol. XXXI New York 1924.
28. Ch. Jordan, On probability. Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. Vol. 7. 1925.
29. Jordan K. Mathematikai Statisztika, Athenaeum, Budapest 1927.
30. Ch. Jordan, Formules nouvelles pour comparer deux probabilités a posteriori, Comtes rendus de l'Académie des Sciences t. 182. Paris 1926.
31. Ch. Jordan, Développement nouveau pour l'application du théorème de Bernoulli. Comptes Rendus t. 182. Paris 1926.
32. Ch Jordan, Sur l'inversion du théorème de Bernoulli, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences t. 182, Paris 1926.
33. Ch. Jordan, On Poisson's and Lexis's Problem of Probability of Repeated Trials. Philosophical Magazine Vol. III London, 1927.
34. Ch. Jordan, Statistique Mathématique, Gauthier Villars. Paris, 1927.
35. Ch. Jordan, Sur la probabilité des épreuves répétées, le théorème de Bernoulli et son inversion. Bulletin de la Société mathématique de France. Tome LIV, Paris 1926.
36. Ch. Jordan, Sur un cas generalisé de la probabilité des épreuves répétées, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences t. 184 Paris 1927.
37. Ch. Jordan, Les mathématiques appliquées, à la statistique, Revue de la Société Hongroise de Statistique Budapest 1927.
38. Jordan K. A korrelációs módszerek alkalmazása a meteorológiában. Időjárás, Budapest 1927.
39. Ch. Jordan, Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées, Acta Scientiarum Mathematicarum, t. III, Szeged 1927.
40. Jordan K. Körösy relativintenzitási koefficiensei. Magyar Statisztikai Szemle, Budapest 1927.
41. Jordan K., A valószínűségszámítás alapfogalmai. Mathematikai és Physikai Lapok XXXIV. kötet. Budapest 1928.

42. Ch. Jordan, Les coefficients d'intensité relativ de Körösy, Revue de la Société Hongroise de Statistique, Budapest 1927.
43. Ch. Jordan, Sur une formule d'interpolation dérivée de la formule d'Everett, Metron, Rivista Internazionale di Statistica, Roma 1928.
44. Ch. Jordan, Sur des polynomes analogues aux polynomes de Bernoulli et sur des formules de sommation analogues à celle de MacLaurin-Euler. Acta Scientiarum Mathematicarum, Tome IV. Szeged, 1929.
45. Jordan K. A matematikai reménységről, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok. VI. évf. Budapest 1929.
46. Jordan K. Véletlen, Valószínűség és Természeti Törvény, Athenaeum, 1929. évf. Budapest.
47. Jordan K. A trendvonal kiszámítása a legkisebb négyzetek elmélete alapján. Országos Gazdaságstatisztikai Bizottság Közleményei 1. szám. Budapest 1930.
48. Ch. Jordan, Sur la détermination de la tendance séculaire des grandeurs statistique par la méthode des moindres carrés. Journal de la Société Hongroise de Statistique, Budapest 1930.
49. Jordan K. Megjegyzés a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok egy valószínűségszámítás feladatához. Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok VII. évf. 1930.
50. Ch. Jordan, Sur une formule d'interpolation, Atti del Congresso Internazionale dei Matematici. Bologna 1928, t. VI.
51. Ch. Jordan, Approximation and graduation according to the principle of least squares by orthogonal polynomials. Annals of Mathematical Statistics. Ann Arbor Michigan, 1932.
52. Ch. Jordan, On Stirling's Numbers. Tôhoku Mathematical Journal, Vol. 37, Sendai, Japan 1933.
53. Ch. Jordan, Interpolation without printed differences in the case of two or three independent variables. Journal of the London Mathematical Society Vol. 8 London 1933.
54. C. Jordan, Problema delle prove ripetute a piu variabili independenti Giornale dell'Istituto degli Attuari. Anno IV, Roma 1933.
56. C. Jordan, Inversione della formula di Bernoulli relativa al problema delle prove ripetute a piu variabili. Giornale del Istituto Italiano degli Attuari. Anno IV. Roma 1933.
57. Ch. Jordan, Sur l'emploi des moyennes géometriques et arithmetiques. Journal de la Société Hongroise de Statistique. Budapest 1934.
58. Ch. Jordan Teoria della perequazione e dell'apprissimazione. Giornale dell'istituto Italiano degli Attuari, Anno V, Roma 1934.
59. Ch. Jordan, Le théorème de probabilité de Poincaré généralisé aus cas de plusieurs variables indépendantes. Acta Scientiarum Mathematicarum. Tom. VII Szeged 1934.
60. Ch. Jordan, On approximation and on the test criteria by the χ test and by Bayes theorem. Journal de la Société Hongroise de Statistique Budapest 1937.
61. Ch. Jordan, Sur l'approximation d'une fonction à plusieurs variables. Acta Scientiarum Mathematicarum, Vol. VII. Szeged 1937.
62. Jordan K, A korreláció számítás alkalmazása a meteorológiában. Időjárás. Budapest 1937.
63. Ch. Jordan, Critique de la correlation au point de vue des probabilités. Colloque consacré à la théorie des probabilités à Genève. Hermann Paris 1938.
64. Ch. Jordan, Calculus of Finite Differences. Budapest 1939.

65. Jordan K. Az ismétléses variációkról. Középiskolai Mathematikai és Fizikai Lapok. XV. évf. Budapest 1939.
66. Jordan K. A differencia számítás szerepe a statisztikában. Magyar Statisztikai Szemle. XVII, évf. Budapest 1939.
67. Ch. Jordan, Probabilité des épreuves répétées dans le cas général. Bulletin de la Société Mathématique de France. Paris 1939.
68. Ch. Jordan. Rôle du calcul des différences finies en statistique. Journal de la Société Hongroise de Statistique. Année 1939.
69. Jordan K. A korreláció számítása. Magyar Statisztikai Szemle kiadványai 1. szám. Budapest 1941.
70. Ch. Jordan, Remarques sur la loi des erreurs. Acta Scientiarum Mathematicarum. Tomus X. Szeged 1941.
71. Ch. Jordan, Complément au théorème de Simmons sur les probabilités Acta Scientiarum Mathematicarum. Vol. XI. Szeged 1946.
72. Róna Zs. és Jordan K. A légnyomás és a hőmérséklet közötti kapcsolat január és július hónapokban. Időjárás 1948 (52. köt.)
73. Ch. Jordan. Approximation and graduation by orthogonal moments. Hungarica Acta Mathematica. Vol. I. 1949.
74. Ch. Jordan, Calculus of finite differences. II. ed. New York 1947.
75. Jordan K. Periodikus menetet mutató észlelések megközelítése trigonometrikus függvénnyel. Időjárás 53. köt. Budapest 1949.
76. Jordan K. Elliptikus függvények és alkalmazásuk. Mérnöki Továbbképző Intézet Kiadványai 5. sz. Budapest 1950.
77. Jordan K. Megjegyzés az éghajlat fogalmának meghatározásához. Időjárás 54. köt. Budapest 1950.
78. Jordan K. Következtetések Statisztikai észlelésekből. Magyar Tud. Akadémia III. osztályának Közleményei. I. köt. 1951.
79. Jordan K. A számolás eredete és a számrendszerek. Középiskolai Matematikai Lapok III. kötet 1951. Budapest.
80. Jordan K. Megújuló sokaságok és az ipari utánpótlás valószínűségszámítási tárgyalása. Matemetikai Lapok. II. évf. 1951.
81. Jordan K. Észlelések törvényszerűségének megállapítása több változó esetén. Magyar Tud. Akadémia III. oszt. Közleményei. III. köt. Budapest 1953.
82. Jordan K. Van der Waals állapotegyenlete. Magyar Fizikai Folyóirat I. köt. Budapest 1953.
83. Ch. Jordan, Sur l'équation de Van der Waals. Acta Physika. Vol. III. Budapest 1954.
84. Jordan K. A valószínűségszámítás néhány új eredményéről. Magyar Tud. Akadémia III. oszt. Közleményei V. köt. Budapest 1955.
85. Jordan K. Fejezetek a klasszikus valószínűségszámításból. Akadémia Kiadó, Bpest 1956.

Gallai Tibor

Gallai Tibor, a budapesti Műszaki Egyetem matematika professzora, a matematika-tanítás egyik legnagyobb mestere. Már középiskolai tanári pályája alatt mint pedagógus országos hírnevet szerzett. Tanítványaival megszerettette a matematikát, teljes mértékben kiaknázta a matematika-tanítás óriási nevelő erejét.

Szakdidaktikai képességeit fényesen bizonyítja Péter Rózsával együtt írt középiskolai tankönyve, mely talán a világirodalom egyik legjobb ilyenirányú

könyve. Hogy középiskolai tanáraink körében többen kételkedve fogadták, annak talán főoka a Horthy-időszak alacsonyszínvonalú tanérképzési rendszerében keresendő.

Mint műegyetemi tanár hervadhatatlan érdemeket szerzett. Előadásai mintaszerűek. Nemcsak alaposan átgondoltak és kitűnő előadói készséggel előadottak, hanem hallgatói részére felejthetetlen élményként hatnak. Köztudomású, hogy éveken át a gépészmérnöki karra igen sok, nagyon gyenge előképzettségű hallgatót vettek fel. Más tanár keze alatt ezek legnagyobb része talán hamarosan abbahagyta volna tanulmányait, de Gallai Tibor előadásai nyomán nemcsak megértették a tananyagot, hanem legtöbben azt meg is szerették. Különösen sokat köszönhetnek szakérettségis hallgatói, akikkel fáradságot nem kímélve egyénileg is sokat foglalkozott. Ezzel óriási érdemeket szerzett az új, népi műszaki értelmiség kinevelése terén.

Tanítványai mint embert is nagyon szeretik. Többszáz hallgatója van, de szinte mindegyiket személyesen ismeri, ismeri problémáikat, nehézségeiket. Pedig szigorú tanár, az általa adott osztályzatnak értéke van.

Előadásait és egészen kitűnő jegyzetét évről-évre átdolgozza. Felhasználja tapasztalatait úgy, hogy előadásai és jegyzetei egy kiváló és nagytudású pedagógus tapasztalatait és mély gondolatait tükrözik.

Gallai Tibor portréja nem lenne teljes, ha nem említenők meg, hogy nemcsak hallgatóinak, hanem munkatársainak is kiváló tanítója. Szakmai továbbképző előadásainak eredeti és egyéni hangja, mondanivalójának gazdagsága sok értékes gondolatot ébreszt tanszékének dolgozóiban. Úgy vezeti tanszékét, mint kiváló karmester dirigálja zenekarát: mindenki világosan látja gondolatait, önként és örömmel hajtja végre intencióit.

Gallai Tibor Kossuth-díjának odaítélését elsősorban pedagógiai munkásságával indokolták. A Kossuth-díj azonban nemcsak a kiváló tanárnak, hanem a tehetséges matematikusnak is szól. Olyan matematikai előadásokat tartani, olyan tankönyvet és jegyzeteket írni, mint amiket Gallai tart és ír, csak oly kiváló matematikus tud, akinek egyéni, önálló gondolatai vannak, aki valóban meg tudja ragadni a lényeget, aki nemcsak reprodukálja, hanem szinte újra teremti mondanivalóját.

Jelentés
a Beke Manó-emlékdíj hatodik kiosztásáról

A Bolyai János Matematikai Társulat Elnöksége által kiküldött bizottság elnöke Surányi János, tagjai Biró József, Bóka István, Faludi Istvánné, Faragó László, Reményi Gusztáv, és Pósa Vilmosné előadó. A bizottság az emlékdíj szabályzatának megfelelően megállapította, hogy a díjak odaítélésében a matematika oktatása és népszerűsítése terén elért kiváló eredményeket jutalmazza. Így elsősorban a matematikai tankönyvek és füzetek írását, a tanári továbbképzést elősegítő írói és előadói működést, a matematikai oktatás elvi kérdéseivel való foglalkozást, a kiváló tanári munkát, a Bolyai Társulat keretében végzett szervezőmunkát.

A bizottság június 5-i ülésén a következő határozatot hozta:

2000,— Ft jutalommal tünteti ki Kárteszi Ferenc egyetemi tanárt, 1000—1000 Ft-tal jutalmazza Dér Zoltán gimnáziumi tanárt, Stéger Ferenc gyakorló gimnáziumi tanárt, Szénássy Barna egyetemi adjunktust és Varga Árpád gimnáziumi tanárt.

Indokolás

Kárteszi Ferenc egyetemi tanár, a matematikai tudományok kandidátusa, tudományos kutató és szervező munkája mellett mindenkor szívügyének tekintette az oktató és nevelő munkát. Nagy része volt a felszabadulás utáni új középiskolai matematikai tantervek kidolgozásában, a középiskolai matematika-oktatás új alapokra helyezésében. Tevékeny szerepet töltött be az általános iskolai és középiskolai szakosító és átképző tanfolyamokon. A pedagógiai főiskolák számára kidolgozta az ábrázoló geometria anyagot. Számos továbbképző és matematikát népszerűsítő előadást tartott mind a középiskolai tanárok, mind a diákok számára, nagy részüket a Bolyai Társulat vidéki tagozataiban.

Már a felszabadulás előtt részt vett a Matematikai és Didaktikai Lapok szerkesztésében. Tagja a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztőbizottságának; ebben a lapban több cikke jelent meg, amelyekben egy-egy szép elemi témát dolgoz fel a középiskolások számára; ugyanitt feladatokat is kitűzött.

A matematika iránt érdeklődő diákok számára írt munkái közül a „Tanulj jobban" sorozatban jelent meg az „Az olló geometriája", „A kocka", a „Szabályos testek". A szakosító tanfolyamok számára írta meg „A tér megismerése" című könyvét (Erdősi Józseffel).

Szerkesztésében és kommentárjaival jelent meg Bolyai János Appendixének jubileumi kiadása, továbbá sajtó alá rendezte Lobacsevszkij „Geometriai vizsgálatok a párhuzamosok köréből" című művének magyar fordítását. A Szocialista Nevelés Kiskönyvtára közli „Bevezetés a Bolyai—Lobacsevszkij geometriába" című előadását, amelyet a Bolyai Társulat egyik budapesti konferenciáján

tartott. Sajtó alatt van „Ábrázoló geometria" című egyetemi tankönyve. Állandó tagja a Kürschák József matematikai tanulóverseny bizottságának.

Nagy elfoglaltsága mellett is mindig talál módot arra, hogy tanítványaival egyénileg is foglalkozzék, feladatokkal lássa el őket és matematikai érdeklődésüket fejlessze és irányítsa. Egyetemi szemináriumain különös gondot fordít arra, hogy a szeminárium résztvevőit megtanítsa előadni és megismertesse velük az önálló kutatás és irodalomhasználat módszereit.

Dér Zoltán gimnáziumi tanár kimagasló tanári munkát végez. A soproni szakérettségis tanfolyamon tanított annak megalakulásától megszüntéig és az ott végzett jó munkájáért kapta az Oktatásügy Kiváló Dolgozója kitüntetést. Jelenleg a soproni Széchenyi gimnázium tanára. Évek óta a soproni egyetem fizikai tanszékének megbízott előadója. Iskolai munkájában nagy képzettsége mellett a szerénység és a nagy segítő készség jellemzi, amellyel az ifjúsággal foglalkozik.

Részt vett a Bolyai János Matematikai Társulat soproni tagozatának megalapításában és annak aktív tagja, több ízben tartott előadást tanítók, tanárok számára. A helyi tagozat Tudományos Csoportjában jelentős munkát fejtett ki és a textilüzemek számára problémáik matematikai megfogalmazásával nagy szolgálatot tett.

A Széchenyi gimnáziumon kívül tanít még a tanítóképzőben és a dolgozók általános gimnáziumában. A fiatalabb kartársak szakmai tudását a pedagógus továbbképzés keretében is jelentősen emeli.

Stéger Ferenc gyakorló iskolai tanár, többszörösen pályadíjnyertes tankönyvíró. A felszabadulás óta megjelent általános iskolai tankönyvek túlnyomó többségének társszerzője; így a kitűnő hatodikos mértankönyvnek is. Módszertani útmutatókat is írt. Társszerzője a részben osztott és osztatlan iskolák számára írt segédkönyveknek és a „Használd a matematikát" című népszerűsítő matematika könyvnek. Megjelent egy tanulmánya „Az egyenletek grafikus megoldása az általános iskolában" címmel. Az V. és VI. osztályos tankönyvpályázaton első díjat nyert (Varga Tamással) és társszerzője a most készülő V. és VI. osztályos számtan könyveknek.

41 éve tanít. Igen kiváló tanári munkát végez, általános iskolában és gimnáziumban egyformán kimagaslóan jól tanít. Bemutató óráit jól tervezi és terveit kitűnően meg is valósítja. Tanítványai biztos tudásra tesznek szert, gondolkodnak és jól számolnak. A rábízott tanárjelölteket jól vezeti, sokat fejlődnek mellette. Kartársainak szívesen és sokat segít.

1955-ben az „Oktatásügy Kiváló Dolgozója" kitüntetést kapta.

A Matematika Tanítása egyik legjobb feladatmegoldója.

Szénássy Barna a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem adjunktusa. Kitűnő pedagógiai adottságaival, logikusan felépített előadásaival megszerettette a vegyész hallgatókkal a matematikát.

Fő érdeklődési köre a matematika történetének kutatása. Nagy látogatottságnak örvendenek az ilyen tárgyú speciálkollégiumai. Több ilyen irányú munkája jelent meg és van készülőben. Ezek a munkák fontos igényt elégítenek ki, hézagpótlók, ha elvétve mutatnak is fel pontatlanságokat, amelyek kiküszöbölésére kell törekednie. Mint az egyetem természettudományi kara tudományos diákkörei vezetője, nagy mértékben hozzájárult a hallgatók tudományos érdeklődésének felkeltéséhez és a módszeres kutatások megszervezéséhez.

Évek óta a Bolyai Társulat debreceni tagozatának titkára. Számos tudományos és pedagógiai jellegű előadást tartott. A matematikai délutánok megalakulása után hosszú időn át heti két órában maga vezette ezeket. Részben neki tulajdonítható, hogy különböző versenyeken annyi debreceni tanuló ért el kimagasló eredményeket. A versenyek rendezésében és lebonyolításában is

aktív részt vesz. A Társulat részére előadási anyagul szolgáló brosúrát dolgozott ki.

VARGA ÁRPÁD gimnáziumi tanár négy évig szakérettségis tanfolyamon tanított, jelenleg a szombathelyi Nagy Lajos gimnázium tanára. 1946-ban a Közoktatásügyi Minisztérium értékes tanári oktató munkájáért jutalomban részesítette. Több tanítványa, köztük szakérettségis is szerepelt eredményesen a tanulmányi versenyeken. Minden évben a felmérő dolgozatok alapján osztályaival az első három helyezett tanár közé sorolta az Oktatásügyi Minisztérium illetékes osztálya. 1954-ben „Kiváló tanár" kitüntetést kapott. Egy dolgozatát a számolási és mechanikus készség fejlesztéséről a OM jutalmazta. Több cikke jelent meg, illetve van megjelenőben a Vasi Nevelőben a matematikaoktatás egyes konkrét problémáiról.

A Bolyai Társulat szombathelyi tagozatának elnöke. A tagozat munkájában számos előadás tartásával vesz részt. Az évente megrendezett középiskolai tanulmányi versenyek megyei versenybizottságának tagja. Javaslatára 1956 augusztusában megyei munkaközösség alakult meg, mely kéthavonként a gimnázium első osztálya részére programot ad a számolási készség fejlesztéséhez.

Az 1955. évi Schweitzer Miklós matematikai emlékverseny

A Bolyai János Matematikai Társulat 1955. november 26 és december 3 között tartotta hetedik SCHWEITZER MIKLÓS matematikai emlékversenyét. A versenyzők egy hétig dolgozhattak a feladatok megoldásain. A kitűzött feladatokat 1955. november 26-án 13 órakor függesztették ki a különböző egyetemek, főiskolák, tudományos intézetek és a Bolyai János Matematikai Társulat tagozatainak hirdetőtábláin. A megoldások benyújtásának, illetve postáraadásának végső határideje 1955. december 3-án 13 óra volt. A versenyen részt vehetett minden egyetemi vagy főiskolai hallgató, továbbá mindazok, akik az egyetemet vagy főiskolát 1955-ben fejezték be.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Legyen $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ az r-dimenziós euklidesi térben $n+m$ számú egységvektor, legyenek az **a**-k egymás között, a **b**-k pedig szintén egymás között páronként merőlegesek ($n, m \leqq r$). A tér tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorához rendeljük hozzá az

$$\mathbf{y} = T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_k)\mathbf{b}_k$$

vektort. Mutassuk ki, hogy az $\mathbf{x}, T\mathbf{x}, T^2\mathbf{x} = T(T\mathbf{x}), \ldots, T^n\mathbf{x} = T(T^{n-1}\mathbf{x})$ vektorsorozat konvergens és jellemezzük geometriailag a határértékvektornak az $\mathbf{x}$ vektortól való függését. (A $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ jel a $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ vektorok belső szorzatát jelöli.)

2. Legyenek $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ a $[0, 1]$ intervallumban Lebesgue-integrálható függvények, amelyekre $\int_0^1 f_i(x)\,dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$. Kimutatandó, hogy ha $0 < \alpha < 1$, akkor megadható a $[0, 1]$ intervallumnak olyan α mértékű E részhalmaza, amelyre $\int_E f_i(x)\,dx = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

3. Legyen a ξ valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvénye páros függvény, legyen továbbá $f(x)$ x pozitív értékeire monoton nem-növekvő. Tegyük fel, hogy $D^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$ létezik. Bizonyítsuk be, hogy bármely nem-negatív λ számra érvényes a

$$P(|\xi| \geqq \lambda D) \leqq \frac{1}{1+\lambda^2}$$

egyenlőtlenség.

4. Megkeresendők azok az α, β természetes számok, $\alpha > 1$ és p, q, r prímszámok, amelyekre a $p^\alpha = q^\beta + r^\alpha$ összefüggés fennáll (α, β, p, q, r nem szükségképpen különböző számok).

5. Mutassuk meg, hogy ha egy gyűrű bármely x elemére $x^2 - x$ centrumelem, akkor a gyűrű kommutatív.

6. Nevezzük valamely N természetes szám prímtényezős előállításában valamely p primszám kitevőjének azt a k kitevőt, amellyel a p prímszám N prímtényezős előállításában előfordul (k tehát az az egész szám, amelyre $p^k | N$ de $p^{k+1} \nmid N$), a p prímszám járulékának pedig nevezzük a p^k hatványt. Mutassuk meg, hogy ha n természetes szám, akkor $n!$ prímtényezős előállításában két prímszám közül annak a járuléka a nagyobb, amelynek a kitevője nagyobb.

7. Bármely p páratlan prímszám esetén a

$$2\left(1 + x^{\frac{p+1}{2}} + (1-x)^{\frac{p+1}{2}}\right)$$

polinom mod p kongruens egy racionális egész együtthatós polinom négyzetével.

8. Mutassuk meg, hogy bármely tetraédernek van három olyan hegyes lapszöge, hogy az ezeket bezáró lapok között a tetraéder minden lapja szerepel.

9. Mutassuk meg, hogy bármely F_1 elliptikus paraboloidhoz megadható olyan (tőle különböző) F_2 elliptikus paraboloid és a térnek egy olyan, F_1-et F_2-be átvivő affinitása, hogy kielégüljön a következő feltétel: F_1 bármely olyan pontját, amely az affinitásnak nem fixpontja, a képpontjával összekötő egyenes mindkét felületet érinti.

10. Bizonyítandó, hogy ha egy konvex poliéder csúcsai szabályos eloszlásúak, továbbá élei és lapjai kongruensek, akkor a

poliéder szabályos. (Szabályos eloszlásúnak nevezünk egy pontrendszert akkor, ha a pontrendszer bármely pontja átvihető a pontrendszer bármely másik pontjába a tér olyan kongruens, azaz távolságtartó leképezésével, amely az egész pontrendszert önmagába viszi át.)

A versenyen 21 versenyző vett részt és összesen 95 megoldást nyújtott be. A versenyzők közül 10 a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem, 1 a budapesti Műszaki Egyetem, 3 a szegedi Tudományegyetem, 5 a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem volt, illetve jelenlegi hallgatója, 1 volt szovjet ösztöndíjas és 1 középiskolai tanuló.

A megoldásokat beküldők száma és különösen a beküldött megoldások száma az 1954. évi Schweitzer versenyhez képest lényeges csökkenést mutat (1954-ben 30 versenyző, 161 megoldás) ami részben a nehezebb feladatoknak tulajdonítható. Különösen szembetűnő a beérkezett rossz, illetve rosszul megfogalmazott megoldások nagy száma. Örvendetes jelenség, hogy a versenyzőknek majdnem fele I. vagy II. éves hallgató.

A versenybizottság az összevont első és második díjat megosztva HEPPES ALADÁRnak, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem IV. éves alkalmazott matematikus hallgatójának és KOVÁCS LÁSZLÓnak, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem II. éves matematika-fizika szakos hallgatójának ítélte oda. HEPPES ALADÁR ötletes és jól kidolgozott megoldásokat nyújtott be az 1., 3., 8., 9., 10. feladatokra; az 1. és 3. feladatot lényegesen általánosítja, különösen kiemelendő a 3. feladatra beküldött megoldása. A 3. feladatot az összes versenyzők közül ő oldja meg egyedül.

KOVÁCS LÁSZLÓ kiválóan kidolgozott megoldásokat nyújtott be az 1., 5., 7., 8., 9. feladatokra, továbbá igen részletesen vizsgálja 4. feladat megoldását. Különösen szépek a 8. és 9. feladatokra beküldött megoldásai.

A harmadik díjat CSIMA JÓZSEF aspiránsnak ítélte oda a bizottság. CSIMA JÓZSEF jó megoldásokat küldött be az 5., 8., 9., 10. feladatokra. A 10. feladatra beküldött megoldása igen ötletes, a 8. feladatra beküldött általánosítása pedig nagyon figyelemreméltó munka.

A versenybizottság több feladat igen ügyes megoldásáért dícséretben részesítette KÁNTOR SÁNDORt, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem III. éves matematika-fizika szakos hallgatóját, és PAPP ZOLTÁNt, a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem II. éves matematika-fizika szakos hallgatóját.

Végül kiemelendőnek tartja a versenybizottság BÁRTFAI PÁL, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem I. éves matematika-

fizika szakos hallgatója, GRÄTZER GYÖRGY a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem II. éves matematika-fizika szakos hallgatója és SZTANÓ TAMÁS, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem volt hallgatója teljesítményét, akik a legszebb megoldást küldték be a 4., 5. ill. 1. feladatokra. A versenybizottság ugyancsak említésre méltónak tartja OVÁRI FERENCnek, a székesfehérvári József Attila Gimnázium IV. osztályos tanulójának munkáját, aki helyes megoldást küldött be a 8. feladatra.

A versenybizottság:

BAKOS TIBOR — RÉDEI LÁSZLÓ
FODOR GÉZA — SZÁSZ GÁBOR
KALMÁR LÁSZLÓ — SZENDREI JÁNOS
PUKÁNSZKY LAJOS — SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA
TANDORI KÁROLY

A feladatok megoldásai a következők:

1. feladat

1. megoldás. Nevezzük az $\mathbf{a}$-k által kifeszített n-dimenziós teret A térnek, a $\mathbf{b}$-k által kifeszített m-dimenziós teret pedig B térnek. Minthogy egy $\mathbf{c}$ egységvektor esetén $(\mathbf{x}, \mathbf{c})\mathbf{c}$ $\mathbf{x}$-nek $\mathbf{c}$ irányú komponensét jelenti, azért a $T\mathbf{x}$ operáció geometriai jelentése a következő: Vegyük az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ irányú komponenseinek $\mathbf{x}_A$ összegét (azaz $\mathbf{x}$-nek az A térre való vetületét), majd $\mathbf{x}_A$-nak a B térre való vetületét. Tehát $T\mathbf{x} = T_B(T_A\mathbf{x})$, ahol T_A, ill. T_B az A, ill. B térre való vetítést jelenti. Az értelmezésből nyilvánvaló, hogy $T\mathbf{x} = \mathbf{x}$, valahányszor $\mathbf{x}$ az AB térnek, azaz az A és B terek *közös részének* a vektora.

Kimutatjuk, hogy *a* $T^n\mathbf{x}$ *sorozat konvergál, mégpedig* $\mathbf{x}$*-nek az* AB *térre való vetületéhez,* $\mathbf{x}_{AB}$-hez. Bontsuk fel az $\mathbf{x}$ vektort az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{AB} + \mathbf{x}'$ alakban, $\mathbf{x}'$ tehát $\mathbf{x}$-nek az AB térre merőleges komponensét jelenti. A fentiek alapján $T\mathbf{x}_{AB} = \mathbf{x}_{AB}$, elég tehát azt kimutatni, hogy $T^n\mathbf{x}' \to 0$. Nevezzük A' térnek az A tér azon vektorai által alkotott teret, amelyek AB-re merőlegesek és B' térnek a B tér azon vektorainak összességét, amelyek AB-re merőlegesek. Nyilván $T_A\mathbf{x} = T_{AB}\mathbf{x} + T_{A'}\mathbf{x}$ és $T_B\mathbf{x} = T_{AB}\mathbf{x} + T_{B'}\mathbf{x}$. Ha $\mathbf{x}'$ merőleges az AB térre, akkor $T\mathbf{x}' = T_{B'}(T_{A'}\mathbf{x}')$. Minthogy az A' tér egységvektorai és a B' tér egységvektorai két zárt és diszjunkt halmazt alkotnak, létezik olyan, egynél kisebb, nemnegatív ϑ szám, hogy $|(\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B)| \leqq \vartheta$, A'-nek bármely $\mathbf{e}_A$ és B'-nek bármely $\mathbf{e}_B$ egy-

ségvektorára. Ebből következik, hogy az A' tér vektorai a B' térre való vetítéskor legalább ϑ arányban megrövidülnek és viszont. Tehát $|T^2\mathbf{x}'| = |T_{B'}(T_{A'}(T\mathbf{x}'))| \leqq \vartheta^2 |T\mathbf{x}'|$, $|T^3\mathbf{x}'| = |T_{B'}(T_{A'}(T^2\mathbf{x}'))| \leqq \vartheta^2 |T^2\mathbf{x}'|, \ldots, |T^n\mathbf{x}'| \leqq \vartheta^2 |T^{n-1}\mathbf{x}'|$, amiből következik, hogy $T^n\mathbf{x}' \to O$.

Heppes Aladár

Hasonló megoldást nyújtott be FÁY ÁRPÁD és KOVÁCS LÁSZLÓ. (Vázlatosan: KÁNTOR SÁNDOR.)

HEPPES ALADÁR még megjegyzi, hogy a feladat kettő helyett több altér esetére is átvihető.

2. megoldás. Legyen $\mathfrak{A}$, ill. $\mathfrak{B}$ az **a**-k, ill. a **b**-k által kifeszített altér, az ezekre való merőleges vetítést pedig jelöljük P-vel, ill. Q-val, akkor $T = QP$. Tekintsük az $A = PQP$ szimetrikus transzformációt. Mivel bármely $\mathbf{x}$ vektorra

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (QP\mathbf{x}, QP\mathbf{x}) = |QP\mathbf{x}|^2,$$

ezért $0 \leqq (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \leqq |\mathbf{x}|^2$ és így $O \leqq A \leqq I$. Ebből következik, hogy

$$I \geqq A \geqq A^2 \geqq \cdots \geqq A^n \geqq \cdots \geqq O.$$

Szimmetrikus transzformációk korlátos monoton sorozata konvergens lévén, van olyan B lineáris transzformáció, hogy minden x vektorra $A^n\mathbf{x} \to B\mathbf{x}$ és így $QA^n\mathbf{x} \to QB\mathbf{x}$. Mivel $QA^n = Q(PQP)^n = (QP)^{n+1} = T^{n+1}$, azért $T^n\mathbf{x} \to K\mathbf{x}$, ahol $K = QB$. Továbbá $T^{n+1}\mathbf{x} = T(T^n\mathbf{x}) \to TK\mathbf{x}$, tehát $K\mathbf{x} = TK\mathbf{x}$, azaz $K\mathbf{x} \in \mathfrak{AB}$.

Legyen $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{y}'$ az $\mathbf{x}$ vektor felbontása $\mathfrak{AB}$-be eső $\mathbf{y}$ és $\mathfrak{AB}$-re merőleges $\mathbf{y}'$ komponensei összegére. Ekkor $T^n\mathbf{x} = \mathbf{y} + T^n\mathbf{y}' \to \mathbf{y} + K\mathbf{y}' = \mathbf{y}$, ugyanis $K\mathbf{y}' = O$. Ez utóbbi abból következik, hogy egyrészt $K\mathbf{y}' \in \mathfrak{AB}$, másrészt $K\mathbf{y}'$ merőleges $\mathfrak{AB}$ minden $\mathbf{z}$ vektorára:

$$(K\mathbf{y}', \mathbf{z}) = \lim_{n\to\infty} ((QP)^n\mathbf{y}', \mathbf{z}) = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{y}', (PQ)^n\mathbf{z}) = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{y}', \mathbf{z}) = 0.$$

Tehát $T^n\mathbf{x} \to \mathbf{y}$, ahol $\mathbf{y}$ az $\mathbf{x}$ vektornak az $\mathfrak{AB}$ altérre való merőleges vetülete.

A bizonyítás érvényes abban az esetben is, ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ a Hilbert-tér két tetszőleges, véges vagy végtelen dimenziójú altere, T pedig az ezekre való P, ill. Q merőleges projekciók szorzata: $T = QP$.

Sztanó Tamás

2. feladat

A példában kitűzött feladatnál általánosabban kimutatjuk, hogy ha $E \subseteq [0, 1]$ tetszőleges mérhető halmaz és $\int_E f_i(x)\,dx = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor minden $0 < \alpha < 1$ számhoz megadható olyan $F \subset E$ halmaz, hogy $\int_F f_i(x)\,dx = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ és $\mu F = \alpha \cdot \mu E$, ahol μE jelöli az E halmaz Lebesgue-mértékét.

Az általános eset könnyen adódik az $\alpha = \frac{1}{2}$ esetből. Legyen ugyanis

$$\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2^m} \qquad (\varepsilon_m = 0, \text{ vagy } 1)$$

az α szám diadikus kifejtése. Az $\alpha = \frac{1}{2}$ esetre vonatkozó tétel folytatólagos alkalmazásával meghatározható az E halmaz mérhető részhalmazainak egy olyan $\{F_m\}$ sorozata, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

1) $\mu F_m = \frac{\varepsilon_m}{2^m} \cdot \mu E,$

2) $\int_{F_m} f_i(x)\,dx = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$

és

3) $F_i \cap F_j = O \qquad (i \neq j).$

Az 1) és 2) tulajdonságból következik, hogy az

$$F = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$$

halmaz mértéke α és a 2) és 3) tulajdonságból következik, hogy $\int_F f_i(x)\,dx = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Tehát az F halmaz valóban eleget tesz az állítás követelményeinek.

A továbbbiakban tehát csak az $\alpha = \frac{1}{2}$ esettel foglalkozunk. Az $n = 1$ esetben az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy az állítás valmely n természetes számra igaz, ekkor megmutatjuk, hogy $n + 1$ esetén is igaz.

Legyen tehát $E \subseteq [0, 1]$ olyan mérhető halmaz, amelyre $\int_E f_i(x)\,dx = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Kimutatjuk, hogy ekkor megadható mérhető halmazoknak olyan $\{F_t\}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ serege, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

a) $F_t \subset E$, $\mu F_t = \frac{1}{2}\mu E$,

b) $F_1 = E - F_0$,

c) $\int_{F_t} f_i(x)\,dx = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$,

d) $\int_{F_t} f_{n+1}(x)\,dx = \varphi(t)$ t-nek folytonos függvénye.

Minthogy a feltevés szerint $\int_E f_{n+1}(x)\,dx = 0$, ezért b) szerint $\varphi(0)$ és $\varphi(1)$ vagy mindketten 0-val egyenlők, vagy ellenkező előjelűek, így Bolzano-tétele értelmében van olyan $0 \leqq t_0 \leqq 1$, hogy $\varphi(t_0) = 0$. A c) feltétel alapján nyilvánvaló ezekután, hogy az $F = F_{t_0}$ halmaz eleget tesz az állítás követelményeinek.

Az $\{F_t\}$ halmazrendszert a következő módon alkotjuk meg. Alkalmazva folytatólagosan az állítást n függvény esetére, teljes indukcióval meghatározható az E halmaz részhalmazainak egy olyan E_m^k $(m = 1, 2, \ldots;\ k = 1, \ldots, 2^m)$ rendszere, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

α) $E_{m+1}^{2k-1} \cup E_{m+1}^{2k} = E_m^k$, $E_{m+1}^{2k-1} \cap E_{m+1}^{2k} = O$,

$$\mu E_{m+1}^{2k-1} = \mu E_{m+1}^{2k} = \frac{1}{2}\mu E_m^k,$$

β) $\int_{E_m^k} f_i(x)\,dx = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Jelöljük ezek után I_m^k-val a $\left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right)$ intervallumot. Kimutatjuk, hogy az

$$F_t = \bigcup_{I_m^k \subseteq \left[\frac{t}{2}, \frac{1+t}{2}\right]} E_m^k \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

halmazrendszer rendelkezik a fenti a)—d) tulajdonságokkal. Figyelembevéve, hogy ha $I_{m'}^{k'} \subseteq I_m^k$, akkor $E_{m'}^{k'} \subseteq E_m^k$, következik, hogy

$F_1 = E - F_0$ és hogy F_t előállítható az

$$F_t = \bigcup E_{m'}^{k'}$$

alakban is, ahol az összeg egyes tagjai közös pont nélküliek és az összegzés azokra a k', m' értékpárokra van kiterjesztve, amelyekre $\mu[\bigcup I_{m'}^{k'}] = \sum \mu I_{m'}^{k'} = \mu\left[\left(\frac{t}{2}, \frac{1+t}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}$. Ebből következik, hogy az így definiált F_t halmazokra teljesülnek az a) és c) feltételek.

A d) tulajdonság kimutatására elég figyelembevenni azt, hogy a fenti megjegyzés szerint

$$\mu[(F_{t'} - F_t) \cup (F_t - F_{t'})] = |t' - t|,$$

amiből következik, hogy — $\psi_t(x)$-szel jelölve F_t karakterisztikus függvényét — fennáll az

$$\int_0^1 |\psi_{t'}(x) - \psi_t(x)|\, dx \to 0 \qquad (t \to t')$$

reláció, amiből adódik, hogy

$$\varphi(t) = \int_{F_t} f_{n+1}(x)\, dx = \int_0^1 f_{n+1}(x)\, \psi_t(x)\, dx$$

t-nek folytonos függvénye. Ezzel állításunkat teljesen bebizonyítottuk.

Megjegyzés. Erre a feladatra helyes megoldás nem érkezett be. Az itt közölt megoldást PUKÁNSZKY LAJOS kutató bocsájtotta a bizottság rendelkezésére.

A feladatban szereplő állítás speciális esete A. LJAPUNOV szovjet matematikus következő tételének: Egy megszámlálhatóan additív, nem atomikus mértékfüggvény, amely értékeit egy n-dimenziós valós vektortérben veszi fel, konvex és zárt értékkészlettel rendelkezik. (L. A. LJAPUNOV, Sur les fonctions-vecteurs complètement additives, *Izvesztija Akad. Nauk*, 4 (1940), 465—478, és P. HALMOS, The range of a vektor measure, *Bulletin of the American Math. Society*, 54 (1948), 416—421.)

3. feladat

Megmutatjuk, hogy a példa feltevései mellett érvényes a következő, a feladatban szereplőnél élesebb becslés:

(I) $P(|\xi| \geqq \lambda D) \leqq 1 - \frac{\lambda}{2}$, ha $0 \leqq \lambda \leqq 1$,

(II) $P(|\xi| \geqq \lambda D) \leqq \frac{1}{2\lambda^2}$, ha $1 \leqq \lambda$.

Nyilvánvaló, hogy ezekből következik az állítás.

A példa feltevéseiből következik, hogy a ξ valószínűségi változó $M(\xi)$ várható értéke 0-val egyenlő, továbbá $F(x)$ eloszlásfüggvénye a $(-\infty, 0)$ intervallumban alulról konvex és $F(-x) = 1 - F(x)$. Így egyszerűen belátható, hogy az $\eta = \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$G(x) = \begin{cases} 1 - 2F(-\sqrt{x}), & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leqq 0 \end{cases}$$

és $G(x)$ a pozitív félegyenesen alulról konkáv.

Mivel

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) = M(\eta) = \int_0^\infty x\, dG(x),$$

így D^2 egyenlő az $x = 0$, $y = 1$ és az $y = G(x)$ görbék által határolt tartomány területével. Minthogy $G(x)$ alulról konkáv, ezért az $x_0 = \lambda^2 D^2$ pontban húzott támasztóegyenes és az $x = 0$, $y = 1$ egyenesek által bezárt háromszög területe D^2-nél nem nagyobb. Viszont ennek a háromszögnek a területe nem kisebb, mint $2\lambda^2 D^2[1 - G(\lambda^2 D^2)]$. Tekintve végül, hogy a definíció szerint $P(|\xi| \geqq \lambda D) = 1 - G(\lambda^2 D^2)$, adódik, hogy

$$D^2 \geqq 2\lambda^2 D^2[1 - G(\lambda^2 D^2)] = 2\lambda^2 D^2 P(|\xi| \geqq \lambda D),$$

amiből következik (II).

(II)-ből $\lambda = 1$ esetén adódik, hogy $G(D^2) \geqq \frac{1}{2}$ és így $1 - G(D^2) \leqq \frac{1}{2}$. Mivel továbbá $G(0) = 0$ és $1 - G(\lambda^2 D^2)$ a $[0, 1]$ szakaszon alulról konvex, ezért ha $0 \leqq \lambda \leqq 1$, akkor

$$P(|\xi| \geqq \lambda D) = 1 - G(\lambda^2 D^2) \leqq 1 - \frac{\lambda}{2}.$$

Ezzel az állításunkat teljesen bebizonyítottuk.

Heppes Aladár

4. feladat

Írjuk fel a diofantikus egyenletet a következő alakban:

$$p^\alpha - r^\alpha = q^\beta.$$

Nyilvánvaló, hogy p, q és r közül az egyik és csakis az egyik 2-vel egyenlő. Három esetet különböztetünk meg.

1) $p = 2$. Ebben az esetben nyilvánvaló, hogy nincs megoldás.

2) $q = 2$. Ekkor $p^\alpha - r^\alpha = (p-r)(p^{\alpha-1} + \cdots + r^{\alpha-1}) = 2^\beta$. Minthogy p és r páratlan prímszámok, ezért $p - r = 2^\gamma (\gamma \geqq 1)$ és $p^{\alpha-1} + \cdots + r^{\alpha-1} \equiv \alpha \equiv 0 \pmod 2$. Legyen $\alpha = 2\varepsilon$ $(\varepsilon \geqq 1)$. Ekkor $p^{2\varepsilon} - r^{2\varepsilon} = (p^\varepsilon - r^\varepsilon)(p^\varepsilon + r^\varepsilon) = 2^\beta$ és így $p^\varepsilon - r^\varepsilon = 2^\varrho$, $p^\varepsilon + r^\varepsilon = 2^\sigma$ $(\sigma, \varrho \geqq 1)$. Az utóbbi két egyenletet összeadva és kivonva, nyerjük, hogy $2p^\varepsilon = 2^\sigma + 2^\varrho$, $2r^\varepsilon = 2^\sigma - 2^\varrho$. Az utóbbiból következik, hogy $\varrho = 1$ és így $p^\varepsilon - r^\varepsilon = 2$, amiből adódik, hogy $\varepsilon = 1$. Tehát $p = 2^{\sigma-1} + 1$ és $r = 2^{\sigma-1} - 1$. Mivel p és r prímszámok, ezért szükségképpen $\sigma - 1 = 2$, amiből következik, hogy $p = 5$, $r = 3$, $\alpha = 2$ és $\beta = 4$. A $q = 2$ esetben tehát csak egyetlen megoldás van.

3) $r = 2$. Ebben az esetben a megoldandó egyenlet $p^\alpha - 2^\alpha = q^\beta$.

a) Tekintsük először azt az esetet, amikor $p > 3$. Ekkor $p^\alpha - 2^\alpha = (p-2)(p^{\alpha-1} + \cdots + 2^{\alpha-1}) = q^\beta$ és így $p - 2 = q^\gamma$ és $p^{\alpha-1} + 2p^{\alpha-2} + \cdots + 2^{\alpha-1} = q^\delta$ $(\delta > \gamma > 0)$. Az utóbbi egyenletből $p = q^\gamma + 2$ helyettesítéssel nyerjük, hogy $(q^\gamma + 2)^{\alpha-1} + 2(q^\gamma + 2)^{\alpha-2} + \cdots + 2^{\alpha-1} = q^\delta$, amiből következik, hogy $q^\gamma | \alpha \cdot 2^{\alpha-1}$, tehát $\alpha = tq^\gamma$. Így a megoldandó egyenlet $p^{tq^\gamma} - 2^{tq^\gamma} = 2^\beta$. Ekkor $p^q - 2^q = q^\eta$ $(\eta > 0)$, amiből a $p = q^\gamma + 2$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$q^{\gamma q} + \binom{q}{1} 2q^{\gamma(q-1)} + \cdots + \binom{q}{q-1} 2^{q-1} q^\gamma = q^\eta.$$

Mivel a $p - 2 = q^\gamma$ és $p^\alpha - 2^\alpha = q^\beta$ összefüggések miatt $\eta - \gamma > 1$, ezért itt a baloldal utolsó tagjának kivételével minden tag osztható $q^{\gamma+2}$-vel, ami ellentmondásra vezet. Így a $p > 3$ esetben nincs megoldás.

b_1) Legyen $p = 3$ és α páros $(\alpha = 2\varepsilon)$. Ekkor a megoldandó egyenlet $3^{2\varepsilon} - 2^{2\varepsilon} = q^\beta$. Nyilvánvaló, hogy $3^2 - 2^2 | q^\beta$, amiből következik, hogy $q = 5$ és így $3^\varepsilon + 2^\varepsilon = 5^{\beta_1}$ és $3^\varepsilon - 2^\varepsilon = 5^{\beta_2}$. Ezt a két egyenletet egymásból kivonva adódik, hogy $2^{\varepsilon+1} = 5^{\beta_1} - 5^{\beta_2}$, amiből

következik, hogy $\beta_2 = 0$ és így $\varepsilon = 1$. Ebben az esetben tehát $p = 3$, $q = 5$, $r = 2$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ az egyetlen megoldás.

b_2) Legyen végül $p = 3$ és α páratlan. Megmutatható, hogy ekkor α csak prímszám lehet. Legyen ugyanis $\alpha = \alpha'\varepsilon$ (α' páratlan prímszám, $\varepsilon > 1$). Mivel most

$$3^{\alpha'\varepsilon} - 2^{\alpha'\varepsilon} = q^{\beta},$$

ezért $3^{\varepsilon} - 2^{\varepsilon} = q^{\beta'}$ ($\beta' > 0$). A $3^{\varepsilon} = q^{\beta'} + 2^{\varepsilon}$ helyettesítéssel adódik a fenti egyenletből, hogy

$$q^{\beta'\alpha'} + \cdots + \alpha' q^{\beta'} 2^{\varepsilon(\alpha'-1)} = q^{\beta} \qquad (\beta > \beta').$$

Itt a baloldal utolsó tagján kívül minden tag osztható $q^{\beta'+1}$-gyel, ezért szükségképpen $\alpha' = q$. Ezzel megmutattuk, hogy α minden törzstényezője q-val egyenlő. Ekkor egyenletünkből következik, hogy

$$3^{q} - 2^{q} = q^{\beta''}.$$

Ez azonban lehetetlen, mert a kis Fermat-féle tétel szerint $q \mid 3^{q} - 3,\ 2^{q} - 2$, amiből következik, hogy $3^{q} - 3 - (2^{q} - 2) = q^{\beta''} - 1$ is osztható q-val, ami lehetetlen. Tehát α összetett szám nem lehet. $A_{\mathfrak{B}}^{\varepsilon}$ feladat tehát a $3^{\alpha} - 2^{\alpha} = q^{\beta}$ speciális egyenlet megoldására redukálódik, ahol α páratlan prímszám.

Bártfai Pál
Papp Zoltán

Elfogadható megoldást küldtek be: Biczó Géza, Kovács László és Major József.

Megjegyzések. Papp Zoltán még azt is megmutatta, hogy a b_2) esetben β csak páratlan szám lehet. Tekintsük ugyanis a

$$3^{\alpha} - 2^{\alpha} = q^{\beta}$$

egyenletet, ahol α és q páratlan számok. Ha β páros, akkor $4 \mid q^{\beta} - 1$, azonban

$$4 \nmid 3^{\alpha} - 2^{\alpha} - 1,$$

mert $3^{\alpha} - 1 = 2(3^{\alpha-1} + \cdots + 1)$ nem osztható 4-gyel. Tehát β csak páratlan szám lehet.

Az a kérdés, hogy melyek a $3^{\alpha} - 2^{\alpha} = q^{\beta}$ egyenlet összes megoldásai, még nyitott.

5. feladat

Felhasználva azt, hogy centrumelemek különbsége is centrumelem, a feltevésből egyszerű számolással adódik, hogy a gyűrű bármely két x és y elemére

$$xy = x[(x+y)^2-(x+y)-(x^2-x)-(y^2-y)]-(x^2-x)y-xyx =$$
$$= [(x+y)^2-(x+y)-(x^2-x)-(y^2-y)]x-y(x^2-x)-xyx=yx.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Grätzer György

Megoldották még: ÁDÁM ANDRÁS, CSIMA JÓZSEF, DÖMÖLKI BÁLINT, FÁY ÁRPÁD, KÁNTOR SÁNDOR, KOVÁCS LÁSZLÓ, MAJOR JÓZSEF, PAPP ZOLTÁN, SCHMIDT ELIGIUSZ, SZTANÓ TAMÁS és TOMOR BENEDEK.

Megjegyzések: A versenyzők egy része ugyanezt az utat követi, csak több lépésben érve el a feladat megoldását; a versenyzők másik része először kimutatja, hogy x^2 centrumelem és ebből kivonva az x^2-x centrumelemet nyeri az állítást.

GRÄTZER GYÖRGY megemlíti, hogy a feladat M. H. STONE egy tételének általánosítása, amely szerint egy idempotens Boole-gyűrű mindig kommutatív. (L. M. H. STONE, The theory of representations for Boolean algebras, *Transactions of the American Math. Society*, 40 (1936), 39—40.)

Továbbá SCHMIDT ELIGIUSZ megemlíti, hogy ferdetestekben a feladat megoldása egyszerűbb.

6. feladat

Az állítás igazolására előrebocsájtunk néhány megjegyzést. Legyen n természetes szám és p prímszám; jelöljük $v_p(n)$-nel p kitevőjét, vagyis azt a legnagyobb természetes számot, amelyre $p^{v_p(n)} | n!$. Ismeretes, hogy

$$v_p(n) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \cdots,$$

ahol $[\alpha]$ α egész részét jelöli. Ebből az előállításból nyilvánvaló, hogy

$$(1) \qquad v_p(n) < n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{p^j} = \frac{n}{p-1},$$

$$(2) \qquad v_p(n_1+n_2) \geqq v_p(n_1) + v_p(n_2)$$

és ha m és l természetes számok, akkor

(3) $$v_p(mp) = m + v_p(m)$$

és

(4) $$v_p(ln) \geqq l v_p(n).$$

Legyen m az a legnagyobb természetes szám, amelyre teljesül az

$$mp \leqq n$$

egyenlőtlenség. Ekkor (3) szerint

(5) $$v_p(n) \geqq v_p(mp) = m + v_p(m).$$

Ha $n \geqq p^2$, azaz $m \geqq p$, akkor $v_p(m) \geqq 1$ és így (5) alapján $v_p(n) \geqq m+1$. Ebből m definícióját felhasználva adódik, hogy

(6) $$\frac{v_p(n)}{n} > \frac{1}{p}, \quad \text{ha} \quad n \geqq p^2.$$

Ha $n < p^2$, azaz $1 \leqq m \leqq p-1$, akkor (5) miatt $v_p(n) \geqq m$ és mivel m definíciója szerint $n \leqq (m+1)p-1$, ezért

(7) $$\frac{v_p(n)}{n} \geqq \frac{m}{(m+1)p-1} \geqq \frac{1}{2p-1}, \quad \text{ha} \quad n < p^2.$$

Az állítás bizonyítására tekintsünk két különböző p és q prímszámot és tegyük fel, hogy

(8) $$p = aq + b,$$

ahol a és b természetes számok, $a \geqq 1$ és $1 \leqq b \leqq q-1$. Ekkor (1) szerint

$$n > v_p(n)(p-1)$$

és ebből (2) és (3) alapján adódik, hogy

(9) $$v_q(n) \geqq v_q(v_p(n)aq + v_p(n)b - v_p(n)) \geqq$$
$$\geqq v_p(n)a + v_q(v_p(n)a) + v_q(v_p(n)b - v_p(n)).$$

A következőkben külön fogjuk vizsgálni az $a \geqq 2$ és $a = 1$ eseteket.

I. $a \geqq 2$. Ekkor (9)-ből nyerjük, hogy $v_q(n) \geqq a v_p(n)$ és így $q^{v_q(n)} \geqq (q^a)^{v_p(n)}$. Ebből az egyenlőtlenségből már következik az állítás, ha megmutatjuk, hogy $q^a > p$. Ez pedig, kivéve a $q=2$ és $a=2$ esetet, nyilvánvaló, mert (8) miatt

$$p \leqq (a+1)q - 1$$

és ha $q \geqq 3$, $a \geqq 2$, vagy ha $q \geqq 2$ és $a \geqq 3$, akkor

$$q^a > (a+1)q - 1.$$

Tekintsük még azt az esetet, amikor $q = 2$ és $a = 2$. Ekkor (8) miatt $p = 5$, továbbá (9)-ből (8) alapján adódik, hogy

$$v_2(n) \geqq 2v_5(n) + v_2(2v_5(n)) \geqq 2v_5(n) + v_5(n) = 3v_5(n)$$

és így

$$2^{v_2(n)} \geqq (2^3)^{v_5(n)} = 8^{v_5(n)} > 5^{v_5(n)}.$$

Ezzel az $a \geqq 2$ esetre az állítást bebizonyítottuk.

II. $a = 1$. Ekkor (9)-ből (4) és (8) alapján adódik, hogy

$$\frac{v_q(n)}{v_p(n)} \geqq 1 + b\,\frac{v_q(v_p(n))}{v_p(n)}. \tag{10}$$

Az állítás igazolására megmutatjuk, hogy

$$\frac{\log p}{\log q} < \frac{v_q(n)}{v_p(n)}. \tag{11}$$

Mivel itt $\log p = \log(q+b) < \log q + \dfrac{b}{q}$, ezért elegendő bebizonyítani, hogy

$$\frac{v_q(n)}{v_p(n)} \geqq 1 + \frac{b}{p \log q}. \tag{12}$$

a) Tekintsük először azt az esetet, amikor $v_p(n) \geqq q^2$. Ekkor (10)-ből (6) felhasználásával nyerjük, hogy

$$\frac{v_q(n)}{v_p(n)} \geqq 1 + b\,\frac{1}{q},$$

amiből $q \geqq 3$ esetén következik (12). Ha $q = 2$, akkor (8) miatt $p = 3$ és ekkor (11) (6) és (9) felhasználásával könnyen belátható.

b) Tegyük fel ezek után, hogy $q \leqq v_p(n) < q^2$. Legyen k az a természetes szám, amelyre

$$kq \leqq v_p(n) < (k+1)q.$$

Ekkor (10) és (7) alapján adódik, hogy

$$\frac{v_q(n)}{v_p(n)} \geqq 1 + kb\,\frac{1}{(k+1)q - 1} \geqq 1 + \frac{b}{2q-1};$$

ha itt $q \geqq 7$, vagy $q \geqq 5$ és $k \geqq 2$, akkor ebből adódik (12). A kivételes $q=5$, $k=1$; $q=3$, $k=1$; $q=2$, $k=1$ esetekben (11) könnyen ellenőrizhető.

c) Tekintsük végül azt az esetet, amikor $v_p(n) < q$. Ekkor $n \geqq v_p(n)p = v_p(n)q + v_p(n)b$ és így (5) szerint

$$v_q(n) \geqq v_p(n) + v_q(v_p(n)b). \tag{13}$$

Ha itt $v_p(n)b \geqq q$, akkor (7) és (13) szerint

$$\frac{v_q(n)}{v_p(n)} \geqq 1 + b\,\frac{v_q(v_p(n)b)}{v_p(n)b} \geqq 1 + \frac{b}{2q-1},$$

amiből következik (12), ha $q \geqq 7$; a kivételes $q=5, 3, 2$ esetekben (11) könnyen ellenőrizhető. A $v_p(n)b < q$ esetben is az állítás könnyen bizonyítható. Ekkor ugyanis (8) miatt $v_p(n)\,(p-q) < q$ és így $v_p(n)p < (v_p(n)+1)q$. Ha $q \geqq 3$ és $v_p(n) > 0$, akkor ebből adódik, hogy $p < \left(1 + \frac{1}{v_p(n)}\right)q$, tehát

$$p^{v_p(n)} < eq^{v_p(n)} < q^{v_q(n)}.$$

Különben az állítás nyilvánvaló.

Megjegyzés. Erre a feladatra helyes megoldás nem érkezett be. A feladat ERDŐS PÁL professzortól származik, aki ezt a feladatot az *American Math. Montly* c. folyóiratban már egyszer kitűzte (53(1946), 594). A fentiekben W. J. HARRINGTON megoldását ismertettük (*American Math. Monthly*, 55(1948), 433—435).

7. feladat

A feladat állításánál több is igaz: bármely n természetes számra a

$$P(x) = 2\left[1 + x^{\frac{p^n+1}{2}} + (1-x)^{\frac{p^n+1}{2}}\right]$$

polinom is kongruens mod p egy racionális egész együtthatós polinom négyzetével.

Szorozzuk meg $P(x)$-et a

$$Q(x) = \frac{2}{x}\left[1 + x^{\frac{p^n+1}{2}} - (1-x)^{\frac{p^n+1}{2}}\right]$$

egész együtthatós polinommal. Mivel $k \neq 0, p^n$ esetben $\binom{p^n}{k} \equiv 0$

(mod p), ezért a p-karakterisztikájú K testben $(1-x)^{p^n}=1-x^{p^n}$ és így

$$P(x)Q(x)=\frac{4}{x}\left[\left(1+x^{\frac{p^n+1}{2}}\right)^2-(1-x)^{p^n+1}\right]=$$

$$=\frac{4}{x}\left[1+2x^{\frac{p^n+1}{2}}+x^{p^n+1}-(1-x)(1-x^{p^n})\right]=4\left(1+x^{\frac{p^n+1}{2}}\right)^2.$$

Tehát $P(x)$ és $Q(x)$ szorzata teljes négyzet. Ebből már állításunk következik, ha megmutatjuk, hogy $P(x)$ és $Q(x)$ relatív prímek, azaz K-ban nincs közös gyökük, vagyis nincs olyan x_0 egész szám, amelyre $P(x_0)\equiv Q(x_0)\equiv 0 \pmod p$. Ez az utóbbi pedig nyilvánvaló. Mert ha egy x_0 egész számra teljesülne ez a reláció, akkor

$$P(x_0)-x_0Q(x_0)=4(1-x_0)^{\frac{p^n+1}{2}}$$

is osztható lenne p-vel, amiből következne, hogy $x_0\equiv 1 \pmod p$. Viszont ha $x_0\equiv 1 \pmod p$, akkor $P(x_0)\equiv 4\not\equiv 0 \pmod p$ és így x_0 nem lehet közös gyök. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Kovács László.

Megoldották még: KÁNTOR SÁNDOR, MAJOR JÓZSEF és SZABÓ LAJOS.

Megjegyzés. KÁNTOR SÁNDOR és MAJOR JÓZSEF megemlítik hogy a példa állítása RÉDEI LÁSZLÓ professzor egy tételéből következik. (L. L. RÉDEI, Über einige merkwürdige Polynome in endlichen Körpern mit Zahlentheoretischen Beziehungen, *Acta Sci. Math. Szeged*, 11 (1946—48), 42, 2. tétel).

8. feladat

Nyilvánvaló, hogy két lap akkor és csakis akkor zár be hegyes lapszöget, ha egyiknek a másik síkjára való merőleges vetülete részben vagy teljesen lefedi a második lapot, továbbá bármely lap síkjára vetítsük is a tetraédert, az illető lap teljesen le lesz fedve. Így egyrészt minden lap bezár legalább egy hegyes lapszöget, másrészt mivel egy maximális területű lap teljes lefedéséhez nem elég egyetlen lap vetülete, ezért egy maximális területű lap legalább két hegyes lapszöget zár be.

Legyen mármost A_1 a tetraéder (egyik) maximális területű lapja és zárjon be ez hegyes lapszöget például az A_2 és A_3 lapokkal. E két hegyes lapszöghöz hozzávéve egy az A_4 lap által bezárt hegyes lapszöget, nyerjük a feladat megoldását.

Kovács László

Megoldották még: ÁDÁM ANDRÁS, BÁRTFAI PÁL, GRÄTZER GYÖRGY, HEPPES ALADÁR, KÁNTOR SÁNDOR ÓVÁRI FERENC, PAPP ZOLTÁN (elemi úton), CSIMA JÓZSEF, SCHMIDT ELIGIUSZ és TOMOR BENEDEK (vektorok felhasználásával).

Megjegyzés. Kiemelendő CSIMA JÓZSEF általánosítása, amely a következőképpen fogalmazható. Az n-dimenziós szimplexnek feleltessünk meg egy G gráfot olymódon, hogy a szimplex L_i lapjának feleljen meg a G gráf C_i szögpontja és a C_i, C_j szögpontok akkor és csakis akkor legyenek összekötve, ha az L_i, L_j lapok hegyes szöget zárnak be. CSIMA JÓZSEF megmutatja, hogy az ilymódon definiált G gráf összefüggő; megfordítva egy összefüggő (véges) gráfhoz mindig megadható egy a fenti módon neki megfelelő szimplex. Nyilvánvaló, hogy az állítás első részéből következik, hogy *egy n-dimenziós szimplexnek mindig van n számú olyan hegyes lapszöge, hogy az ezeket bezáró lapok között a szimplex minden lapja szerepel.*

9. feladat

1. *Analitikus megoldás.* E feladat megoldását nagymértékben megkönnyíti az az ismert tétel, hogy bármely két elliptikus paraboloidhoz található olyan (reguláris) affinitás, amely egyiket a másikba viszi át. Tegyük fel ugyanis, hogy van olyan F_1^* elliptikus paraboloid, amelyhez megadható egy F_2^* elliptikus paraboloid és α^* affinitás a kívánt módon. Ekkor biztosan van olyan b (reguláris) affinitás, amelyre $F_1 = bF_1^*$. Nyilvánvaló, hogy az $F_2 = b\alpha^* b^{-1} F_1 = bF_2^*$ elliptikus paraboloid és az $\alpha = b\alpha^* b^{-1}$ affinitás megfelel a követelményeknek, hiszen F_1 és F_2 az F_1^*-ból és F_2^*-ból a b affinitással keletkeztek, és b az α^* által egymáshoz rendelt pontokat α által egymáshoz rendelt pontokba, továbbá F_1^* és F_2^* érintőit F_1 és F_2 érintőibe viszi át.

Feladatunk csupán az, hogy megadjunk egy-egy F_1^*, F_2^* elliptikus paraboloidot és egy α^* affinitást, amelyek kielégítik a feladat követelményeit. Egyszerű számolás meggyőz arról, hogy

$$F_1^*: x_1^2 + x_2^2 = 2x_3,$$
$$F_2^*: x_1^2 + x_2^2 = -2x_3,$$
$$\alpha^*: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

megfelelnek a követelményeknek. Először is, az α^* leképezésnek

egyetlen fixpontja van: a paraboloidok közös (0, 0, 0) csúcspontja; ha tehát a $P_1 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ pont az F_1^*-on van és x_{10}, x_{20}, x_{30} nem mind 0-ok, akkor képe, $P_2 = (x_{20}, -x_{10}, -x_{30})$ az F_2^*-on van, s különbözik P_1-től. De akkor az $e = P_1P_2$ egyenes egyértelműen meghatározott, s az $y_1 = x_{10} + t(x_{20} - x_{10})$, $y_2 = x_{20} + t(-x_{10} - x_{20})$, $y_3 = x_{30} + t(-2x_{30})$ paraméteres alakban adható meg. Ebből már közvetlenül látható, hogy az e egyenes benne van az F_1^*-ot P_1-ben érintő $x_{10}y_1 + x_{20}y_2 = x_{30} + y_3$ síkban, valamint az F_2^*-ot P_2-ben érintő $x_{20}y_1 - x_{10}y_2 = -(-x_{30}) - y_3$ síkban.

Kovács László

Hasonlóan oldották meg: FÁY ÁRPÁD, PAPP ZOLTÁN, SCHMIDT ELIGIUSZ (utóbbi a forgási paraboloidra való redukció nélkül).

2. Konstruktív megoldás. Legyen F_1 egy tetszésszerinti elliptikus paraboloid és P_1 ennek egy tetszésszerinti pontja, F_1 tengelyét jelöljük t-vel. Legyen σ_1 a P_1 ponton átmenő t-re merőleges sík és jelöljük O_1-gyel t-nek és σ_1-nek a metszéspontját. Legyenek végül a és b a σ_1 és F_1 metszeteként adódó ellipszis tengelyei.

Tükrözzük F_1-et a C csúcspontjában érintő síkra; F_1 képe legyen F'. Ezután nyújtsuk a teret b irányában úgy, hogy F'-ből F'' forgási paraboloid keletkezzék, majd végezzünk a t tengely körül 90°-os forgatást. Végül végezzünk b irányában az előbbi nyújtással azonos mértékű zsugorítást; ezzel F'' egy F_2 elliptikus paraboloidba megy át. Ezeknek a leképezéseknek egymásutáni végrehajtása végeredményben affinitást ad. Nyilvánvaló, hogy a fenti leképezésnél F_1 (nem pontonként, hanem egészében) tükörképébe megy át, mégpedig minden egyes P_1 pont képe a tükörképéhez, P'-höz tartozó normálmetszeten a P'-t tartalmazó átmérőhöz konjugált átmérő P_2 végpontja. E normálmetszet síkját jelöljük σ_2-vel.

Megmutatjuk, hogy a P_1P_2 egyenes mind F_1-et, mind F_2-t érinti. A $[t, P_1]$ sík parabolát metsz ki F_1-ből, ennek P_1-beli e érintője és a σ_1-beli normálmetszet f érintője meghatározzák az F_1-et a P_1 pontban érintő $[e, f]$ síkot. A parabola elemi tulajdonsága szerint e a t-t olyan O_2 pontban metszi, amelyre $\overline{O_1C} = \overline{O_2C}$; de akkor a σ_2 is t-t O_2-ben metszi. Mivel a P'-höz tartozó normálmetszet P'-beli érintője párhuzamos f-fel, s O_2P_2 az O_2P'-höz konjugált átmérő, ezért O_2P_2 párhuzamos f-fel. Eszerint P_2, s vele együtt P_1P_2 benne van az F_1-et P_1-ben érintő síkban, tehát F_1-et érinti; szimmetria okokból (felcserélve F_1 és F_2 szerepét) F_2-t is érinti. Ezzel a kívánt bizonyítást elvégeztük.

Kántor Sándor

Hasonló megoldást küldtek még be CSIMA JÓZSEF és HEPPES ALADÁR. Megoldásaik annyiban különböznek KÁNTOR SÁNDOR megoldásától, hogy ők előbb forgási paraboloid esetére redukálják a problémát s azután erre az esetre lényegileg a most ismertetett eljárást alkalmazzák.

10. feladat

Abból a feltevésből, hogy a poliéder csúcsai szabályos eloszlásúak, következik, hogy a csúcsok által alkotott pontrendszer súlypontja bármely, a poliéder csúcsrendszerét önmagába átvivő kongruens leképezésnek fixpontja. Így a poliéder csúcsai egy gömbön feküsznek. Ebből és a poliéder konvexitásából adódik, hogy a poliéder lapjai körbe írt, konvex — és a feltevés szerint — egyenlő oldalú sokszögek, ezért a poliéder lapjai szabályosak és a feltevés szerint egybevágók. Ebből könnyen adódik, hogy a poliéder testszögletei is egybevágók. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Csima József

Megoldották még: HEPPES ALADÁR, GRÄTZER GYÖRGY, DÖMÖLKI BÁLINT, DURST ENDRE és BICZÓ GÉZA.

Megjegyzés. CSIMA JÓZSEF és a nem teljes megoldást beküldő FÁY ÁRPÁD kivételével a többi megoldás az Euler-féle tételt használja fel.

FELADATROVAT

Szerkeszti: HAJÓS GYÖRGY

A feladatrovatnak szánt küldeményeket, egyes feladatok megoldásait külön lapon, a következő címre kérjük: Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, V., Reáltanoda u. 13—15.

A 41. feladatra, melynek megoldásait a IV. évfolyam 39—41. lapjain közöltük, újszerű megoldás érkezett a szerkesztőséghez. Ezt a megoldást az alábbiakban közöljük.

Az utolsó feladatrovat lezárása után, de annak megjelente előtt, a 70. feladatra DANCS ISTVÁN és KISS ERNŐ, a 71. feladatra pedig DANCS ISTVÁN küldött be megoldást.

Kitűzött feladatok

93. Legyen $P_1, P_2 \ldots$ a $(0, 1)$ intervallumban elhelyezkedő, különböző pontokból álló, az intervallumban mindenütt sűrű pontsorozat. A $P_1, \ldots, P_{n-1}$ pontok az intervallumot n darabra osztják, s a P_n pont ezek egyikét két darabra osztja. Jelölje a_n és b_n e két darab hosszát. Bizonyítandó, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n (a_n + b_n) = \frac{1}{3}.$$

J. Karamata (Belgrád)

94. Melyek azok a minden valós értékre definiált, szimmetrikus $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvények, melyek eleget tesznek a következő két feltételnek:

$$1)\ f(x_1 + t, \ldots, x_n + t) = f(x_1, \ldots, x_n) + t,$$
$$2)\ f(ux_1, \ldots, ux_n) = uf(x_1, \ldots, x_n),$$

ahol $x_1, \ldots, x_n$, t tetszőleges valós számok és u tetszőleges *a*) valós szám, *b*) 0-tól különböző valós szám, *c*) pozitív szám?

Aczél János

95. Bizonyítandó, hogy végtelen sok olyan n természetes szám van, amelyekre a $\varphi(x) = n$ egyenletnek pontosan két megoldása van, s hogy végtelen sok olyan m természetes szám van, amelyekre a $\sigma(x) = m$ egyenletnek pontosan egy megoldása van. (Itt $\varphi(x)$ az Euler-féle φ függvény, $\sigma(x)$ pedig az x természetes szám osztóinak összege.)

Erdős Pál

96. Két derékszögű torzötszög egyikének négy oldalegyenese egyenként derékszögben metszi a másiknak négy oldalegyenesét. Bizonyítandó, hogy az ötödik oldalegyenesek is derékszögben metszik egymást. (A derékszögű torzötszögnek mind az öt szöge derékszög.)

Kárteszi Ferenc

Megoldott feladatok

41. feladat. Bizonyítandó, hogy egy egynél több tagot tartalmazó polinom hatványainak tagszáma a hatványkitevővel együtt végtelenhez tart.

(Rényi Alfréd)

III. Megoldás. Tartozzanak az egynél több tagú $f(x)$ polinom együtthatói a nullkarakterisztikájú K testhez. Legyen f fokszáma m, és különböző gyökhelyeinek száma K egy algebrailag zárt bővítésében r. Feltehetjük, hogy f abszolút tagja nem tűnik el.

Ha $i \leqq n$, akkor a

$$d_{ni} = (f^n, (f^n)^{(i)})$$

polinom fokszáma $nm - ir$, és így

$$g_{ni} = (f^n)^{(i)} / d_{ni}$$

fokszáma $nm - i - (nm - ir) = i(r-1)$.

Ha egy $k \geqq 0$ egész számra

$$s = r^k + r^{k-1} + \cdots + r + 1 \leqq n,$$

akkor azt állítjuk, hogy az f^n polinomban az

$$x^s, x^{s-1}, \ldots, x^{rs}$$

hatványok együtthatói nem tűnhetnek el mindannyian. Az ellenkező esetben ugyanis $(f^n)^{(s)}$ osztható lenne x-nek $rs - s + 1 = r^{k+1}$-edik hatványával, és ebből

$$x^{r^{k+1}} \mid g_{ns}$$

következnék, hiszen x nem osztója f-nek, s így d-nek sem. Ez azonban lehetetlenség, mert g_{ns} fokszáma $s(r-1) = r^{k+1} - 1$.

Ha adott n mellett k az a legnagyobb egész szám, amelyik a fenti egyenlőtlenséget kielégíti, akkor a $0, 1, 2, \ldots, k$ számok mindegyike kielégíti, s ezért megállapításainkból következik, hogy az f^{n} polinomnak legalább $k+1$ tagja van. Így tehát n növekedtével f^{n} tagszáma is minden határon túl nő.

Nieh Ling-chao (Peking)

74. feladat. Mutassuk meg, hogy a komplex síknak a képzetes tengellyel párhuzamos minden egyenesén a gamma-függvény abszolút értéke a valós tengelytől távolodva monoton fogy.

(Turán Pál)

I. megoldás. Ismeretes, hogy

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{z}n!}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

Ha tehát $z=x+iy$, akkor

$$|\Gamma(z)|=\frac{1}{|z|}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{x}n!}{|z+1|\cdots|z+n|}.$$

Az utóbbi tört számlálója y-tól nem függ, nevezője pedig $|y|$ növelésekor növekszik, úgyhogy limesze $|y|$ növelésekor nem növekszik. Így tehát $|y|$ növelésekor $|\Gamma(z)|$ fogy, mert $\frac{1}{|z|}$ fogy.

Császár Ákos

II. megoldás. Ismeretes, hogy

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}.$$

Minden, a képzetes tengellyel párhuzamos egyenesen e^{Cz} és $e^{-\frac{z}{n}}$ $(n=1, 2, \ldots)$ abszolút értéke állandó, viszont ugyanott $|z|$ és $\left|1+\frac{z}{n}\right|$ $(n=1, 2, \ldots)$ a valós tengelytől távolodva monoton nő. Ebből következik, hogy $|\Gamma(z)|$ monoton fogy.

Kővári Tamás

A 74. feladat megoldását beküldötték még: Durst Endre, Hajagos Béla, Hosszú Miklós, Koncz Károly, Krekó Béla, Pintér Lajos, Szűsz Péter.

75. feladat. A G csoport centrumában csak az egységelem véges rendű, a G/C faktorcsoport Abel-féle és minden eleme véges rendű. Bizonyítandó, hogy G Abel-féle.

(Szele Tibor)

Megoldás. Legyen a és b két tetszőleges eleme G-nek. G/C kommutativitása miatt ab és ba C-nek ugyanahhoz a mellékosztályához tartozik, tehát egyik a másikból egy c centrumelemmel szorozva áll elő:

$$ab = bac.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy $c = 1$.

Mivel C/G minden eleme véges rendű, áll ez az a-t tartalmazó mellékosztályra is, van tehát a-nak C-hez tartozó a^n hatványa. Erre a kitevőre

$$a^n = b^{-1}a^n b = (b^{-1}ab)^n = (ac)^n = a^n c^n.$$

Így tehát $c^n = 1$, és mivel a centrum egyetlen véges rendű eleme az egységelem, $c = 1$.

Kertész Andor

A 75. feladat megoldását beküldték még: DURST ENDRE, FRIED ERVIN, HAJAGOS BÉLA, HAJÓS GYÖRGY, HOSSZÚ MIKLÓS, KONCZ KÁROLY, KŐVÁRI TAMÁS, PAPP ZOLTÁN, PÁTER ZOLTÁN, PINTÉR LAJOS, TURÁN PÁL.

76. feladat. Adott konvex, centrálszimmetrikus tartományból készítendő olyan, az egész síkot lefedő tartományrács, melynek sűrűsége 4/3-nál kisebb.

(Grätzer György és Schmidt Eligius)

I. megoldás. Ismeretes, hogy konvex, centrálszimmetrikus tartományba írható affin szabályos hatszög. Ilyen hatszögből a síkot egyrétűen borító hatszögrácsot építhetünk fel. Ha e rács minden hatszögét lefedjük egy az adott tartományból eltolással származó, tartománnyal, akkor a teljes síkot lefedő tartományrácshoz jutunk, melynek sűrűsége a tartomány és a hatszög területének aránya. Ha tehát megmutatjuk, hogy a tartomány területe a beírt affin szabályos hatszög területének 4/3-szorosánál kisebb, akkor beláttuk, hogy a szerkesztett tartományrács megfelel a feladat követelményének.

A hatszög szemközti csúcsaiban párhuzamos támaszegyeneseket húzunk az adott tartományhoz. Így a tartomány köré írt centrálszimmetrikus hatszöghöz jutunk. Megmutatjuk, hogy e körülírt hatszög területe a beírt hatszög területének legfeljebb 4/3-szorosa. Tekintsük evégből a körülírt hatszögnek a beírt hatszögön túlnyúló darabjait. Az így tekintett hat háromszög közül három

szomszédosra, az ABC, CDE, EFG háromszögekre bizonyítjuk, hogy területük összege a beírt hatszög területének legfeljebb egyhatoda, s ezzel a körülírt hatszögről kimondott állítást is igazoljuk, hiszen a másik három háromszög egybevágó a mondott hárommal.

Mivel a beírt hatszög affin szabályos, az A pontot C-re és a G pontot E-re tükrözve ugyanazt a H pontot kapjuk, és a $CEH\triangle$ területe a beírt hatszög területének egyhatoda. Tükrözzük az $ABC\triangle$-et a C pontra, az $EFG\triangle$-et pedig az E pontra vonatkozólag. A $CDE\triangle$ és a kapott két háromszög a $CEH\triangle$-ön belül helyezkedik el, és egymásra nem borulnak, hiszen páronként egy-egy közös oldalegyenesnek más-más oldalán helyezkednek el. Ezzel a körülírt és a beírt hatszög területarányáról mondottakat igazoltuk.

Következik ebből, hogy az adott tartomány területe sem lehet a beírt affin szabályos hatszög területének 4/3-szorosánál nagyobb, és ekkora is csak úgy lehet, ha az adott tartomány maga egy centrálszimmetrikus hatszög. Ez utóbbi esetben azonban a síkot egyrétűen borító tartományrácsot szerkeszthetünk tartományunkból. Így tehát minden esetben utasítást adtunk 4/3-nál kisebb sűrűségű, a síkot lefedő tartományrács szerkesztésére.

Marik Miklós

II. megoldás. Az első megoldás gondolatmenetére hivatkozva elég azt megmutatnunk, hogy adott konvex, centrálszimmetrikus tartományba írható olyan centrálszimmetrikus hatszög, hogy a tartomány területe e hatszög területének 4/3-szorosánál kisebb.

Tekintsük az adott tartománynak (egyik) leghosszabb AB átmérőjét. Erre végpontjaiban merőlegeseket állítva a tartomány támaszegyeneseit kapjuk. Legyen egyszerűbb számítás kedvéért AB hossza 2. Emeljünk AB-re merőlegeseket annak negyedében és háromnegyedében. A kapott négy metszéspont, C_1, C_2, D_1, D_2, valamint A és B egy beírt centrálszimmetrikus hatszöget szolgáltat. Jelölje m és n a C_1 és C_2 pont távolságát az AB egyenestől.

Egyszerű számítás szerint a mondott hatszög területe $\frac{3}{2}(m+n)$.

Az adott tartományt AB felezőmerőlegese két egybevágó félre osztja. Ezeknek egyike azon a trapézen belül helyezkedik el, amelynek szárai a C_1 és C_2 pontban tartományunkhoz húzott támaszegyenesek, párhuzamos oldalai pedig az AB szakaszra A-ban és felezőpontjában emelt merőlegesek. E trapéz területe $m+n$, s így a tartomány területe legfeljebb $2(m+n)$.

[1] Fejes Tóth László: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum (Springer, 1953), 103. l.

Ezzel beláttuk, hogy tartományunk területe nem lehet nagyobb a szerkesztett beírt hatszög területének 4/3-szorosánál. Egyenlő is csak akkor lehet, ha a tartomány fele egybeesik a szerepeltetett trapézzel, amikor tehát tartományunk centrálszimmetrikus hatszög. Minthogy ilyenből 1 sűrűségű tartományrács szerkeszthető, a feladat követelményét minden esetben kielégítettük.

Tekse Kálmán

A 76. feladat megoldását beküldték még BÁRTFAI PÁL és KONCZ KÁROLY.

Megjegyzés. A közölt második megoldás leghosszabb átmérőt szerepeltet. Ez nem lényeges megszorítás, csak a számítást egyszerűsíti valamelyest. Akármelyik átmérőből kiindulhatunk, ennek végpontjaiban párhuzamos támaszegyeneseket húzhatunk, s aztán ezekkel párhuzamos metsző egyenesekkel dolgozhatunk.

A feladatnak *Fejes Tóth László* következő, többetmondó tétele[1] adta az indítékot: Bármely konvex, centrálszimmetrikus síktartományból készíthető a síkot leborító tartományrács, melynek sűrűsége legfeljebb $\frac{2\pi}{\sqrt{27}} \sim 1{,}209$. E tétel bizonyítása azonban nem elemi.

77. feladat.[2] Szerkesszünk korlátos differenciahányadosú függvényt, amelyik egy adott nullmértékű halmazon nem differenciálható.

(Czipszer János)

Megoldás. Legyen E a számegyenesen adott null-halmaz. A diszjunkt nyílt $I_k^{(0)}$ intervallumokat úgy választjuk meg, hogy $G_0 = \bigcup_k I_k^{(0)} \supset E$ és $m G_0 \leqq 1$ teljesüljön, ahol m a mértéket jelöli. Ezt követően sorra úgy választjuk meg az $n = 1, 2, \ldots$ esetekben a diszjunkt nyílt $I_k^{(n)}$ intervallumokat, hogy

$$G_{n-1} \supset G_n = \bigcup_k I_k^{(n)} \supset E$$

és miden k-ra

$$m(G_n \cap I_k^{(n-1)}) \leqq \frac{1}{10} m I_k^{(n-1)} \tag{1}$$

teljesüljön. Nyilvánvaló, hogy $H = \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n \supset E$ és

$$m G_n \leqq \frac{1}{10^n}. \tag{2}$$

[2] A feladat eredetileg hibás szövegezéssel jelent meg. Helyesbítését lásd VI. évf. 39. l.

Bevezetjük az $F(x)=m[F\cap(-\infty,x)]$ és $F(x,y)=m[F\cap(x,y)]$ jelöléseket, ahol F akármely mérhető halmazt jelölhet. Azt állítjuk, hogy az

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n G_n(x)$$

függvény megfelel a feladat követelményeinek. Ez a függvény mindenütt értelmezve van, mert (2) folytán a sor mindenütt konvergens. A függvény korlátos differenciahányadosú, mert $x<y$ esetén

$$f(y)-f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n G_n(x,y)\leqq G_0(x,y)\leqq y-x.$$

Érdekességként megjegyezzük, hogy függvényünk monoton növekvő, mert hiszen $x<y$ esetén $0\leqq G_0(x,y)-G_1(x,y)\leqq f(y)-f(x)$.

Legyen $x\in H$, és tetszőlegesen adott r mellett $x\in I_k^{(r)}=(a_r,b_r)$. Így tehát az $\{a_r\}$ sorozat monoton növekedve, a $\{b_r\}$ sorozat pedig monoton csökkenve tart x-hez. Az a_r értékre

$$f(x)-f(a_r)=\sum_{n=0}^{r}(-1)^n G_n(a_r,x)+\sum_{n=r+1}^{\infty}(-1)^n G_n(a_r,x)=$$

$$=\sum_{n=0}^{r}(-1)^n(x-a_r)+\sum_{n=r+1}^{\infty}(-1)^n G_n(a_r,x)=$$

$$=\frac{1+(-1)^n}{2}(x-a_r)+\sum_{n=r+1}^{\infty}(-1)^n G_n(a_r,x)$$

alapján

$$\left|\frac{f(x)-f(a_r)}{x-a_r}-\frac{1+(-1)^r}{2}\right|=\frac{1}{x-a_r}\left|\sum_{n=r+1}^{\infty}(-1)^n G_n(a_r,x)\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{G_{r+1}(a_r,x)}{x-a_r}\leqq\frac{G_{r+1}(a_r,b_r)}{x-a_r}\leqq\frac{1}{10}\frac{b_r-a_r}{x-a_r}$$

következik, az utolsó lépésnél (1)-et használva fel. A b_r értékre hasonló okoskodás szerint

$$\left|\frac{f(b_r)-f(x)}{b_r-x}-\frac{1+(-1)^r}{2}\right|\leqq\frac{1}{10}\frac{b_r-a_r}{b_r-x}.$$

Ha tehát c_r jelenti az a_r és b_r értékek közül azt, amelyik messzebb van x-től, akkor

$$\left|\frac{f(c_r)-f(x)}{c_r-x}-\frac{1+(-1)^n}{2}\right|\leqq\frac{1}{5}$$

Ezek szerint páros r esetén

$$\frac{f(c_r)-f(x)}{c_r-x} \geqq \frac{4}{5},$$

páratlan r esetén pedig

$$\frac{f(c_r)-f(x)}{c_r-x} \leqq \frac{1}{5}.$$

$f(x)$ tehát az x helyen nem differenciálható, hiszen a $\{c_r\}$ sorozat x-hez tart. Ezzel megmutattuk, hogy $f(x)$ a feladat második követelményét is kielégíti, mert E egyetlen pontjára sem differenciálható.

Kővári Tamás

A 77. feladat megoldását beküldötte még Császár Ákos és Pintér Lajos.

ЗАДАЧИ

93. Пусть последовательность точек $P_1, P_2, \ldots$ состоит из разных расположенных на отрезке $(0, 1)$ и всюду плотных там точек. Точки $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ делят отрезок на n частеи, точка P_n делит один из них на две части. Обозначим через a_n и b_n их длину. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n (a_n + b_n) = \frac{1}{3}$$

Е. Карамата (Бельград)

94. Каковы те отределенные для всех вещественных значений симметричные функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, которые удовлетворяют двум следующим условиям:

1) $f(x_1 + t, \ldots, x_n + t) = f(x_1, \ldots, x_n) + t$,
2) $f(ux_1, \ldots, ux_n) = uf(x_1, \ldots, x_n)$,

где $x_1, \ldots, x_n, t$ любые вещественные числа, а u а) вещественное число, б) отличающееся от нуля вещественное число, в) положительное число?

Янош Ацел

95. Доказать, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n, для которых уравненме $\varphi(x) = n$ имеет точно два решения, и что существует бесконечно много таких натуральных чисел m, для которых уравнение $\sigma(x) = m$ имеет точно одно решение.

Пал Эрдэш

96. Каждая из четырех ребер одного из двух прямоугольных пространственных пятиугольников пересекают под прямым углом четыре ребра другого. Доказать, что и пятые ребра пересекают друг друга под прямым углом. (Все пять углов прямоугольного пространственного пятиугольника прямые).

Фэрэнц Картеси

Problèmes proposés

93. Soit $P_1, P_2, \ldots$ une suite de points distincts partout dense dans l'intervalle $(0, 1)$. Les points $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ subdivisent l'intervalle en n parties et le point P_n divise l'une d'elles en deux parties. En désignant par a_n et b_n les longuers de ces deux parties, démontrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n (a_n + b_n) = \frac{1}{3}$$

J. Karamata (Belgrade).

94. Quelles sont les fonctions symétriques $f(x_1, \ldots, x_n)$ définies pour chaque valeur réelle qui vérifient les conditions suivantes:

1) $f(x_1 + t, \ldots, x_n + t) = f(x_1, \ldots, x_n) + t$,
2) $f(ux_1, \ldots, ux_n) = uf(x_1, \ldots, x_n)$,

où $x_1, \ldots, x_n, t$ sont des nombres réels quelconques, et u est:

a) Un nombre réel quelconque,
b) Un nombre réel quelconque différent de zéro,
c) Un nombre positif quelconque.

J. Aczél

95. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels n tels que l'équation $\varphi(x) = n$ ait exactement deux solutions, et qu'il existe une infinité de nombres naturels m tels que l'équation $\sigma(x) = m$ ait exactement une solution. ($\varphi(x)$ désigne la fonation d'Euler et $\sigma(x)$ la somme des diviseurs du nombre naturel x.)

P. Erdős

96. Quatre côtés de deux pentagones rectangulaires gauche se coupent deux à deux à angle droit. Démontrer que leurs cinquièmes côtés se coupent également sous un angle droit. (Tous les cinq angles du pentagone rectangulaire gauche sont des angles droits.)

F. Kárteszi

PÉLDAROVAT

Szerkeszti: VARGA TAMÁS

A megoldásokat a Bolyai Társulat címére küldjük (Bp. V., Reáltanoda u. 13—15). A borítékra írjuk rá feltűnően: *Példarovat.* Minden megoldást külön lapra írjunk, név feltüntetésével. Közlésre szánt példákat megoldással együtt szívesen fogadunk. Megjegyezzük azonban, hogy geometriai példákkal rovatunk évekre el van látva.

Kitűzött példák

74. Egy háromszög oldalai:

$$a < b < c.$$

Mi a nagyság szerinti sorrendje

a) a háromszög súlyvonalainak (s_a, s_b, s_c);

b) a háromszög szögfelezőinek (f_a, f_b, f_c)?

75. *a*) Hányféleképpen cserélheti el n személy a kalapját úgy, hogy egyiknek a fején se legyen a saját kalapja?

b) Mi a valószínűsége annak, hogy ha n személy közt találomra osztjuk szét az n személy kalapját, egyiknek a fejére sem kerül a saját kalapja?

(Feltesszük, hogy minden személynek pontosan egy kalapja van.)

(Bukovszky Ferenc)

76. Egy R sugarú kört belülről érint egy r sugarú kör. A két kör határolta sarlószerű idomba írjunk olyan köröket, amelyek érintik az adottakat is és egymást is (mindegyik két másikat). Szerepeljen ezek között az a kör is, amelynek középpontja az eredeti két kör centrálisán van; legyen ennek a sugara ϱ_0, a tőle mindkét oldalt sorakozó körök sugara pedig sorban $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$. Kiszámítandó ϱ_n, mint R, r és n függvénye! *(Horvay Béla)*

Megoldott példák

54. példa. Az 1953. évi Schweitzer Miklós emlékverseny 2. feladatával kapcsolatban* határozzuk meg a párok maximális számát, ha a „tábla" $(2k_1 + 1)$-soros és $2l_1$-oszlopos.

Kárteszi Ferenc

* Lásd Matematikai Lapok V. (1954), 125. (2—3. szám.)

I. megoldás. Ha egy sorban x fehér és $2l-x$ fekete bábu van (az indexeket az egyszerűség kedvéért elhagyjuk), akkor e sor által adott párok száma:

$$x(2l-x) \leqq l^2.$$

Tehát az összes sor által adott párok száma legfeljebb $(2k+1)l^2$.

Ha egy oszlopban y fehér és $2k+1-y$ fekete bábu van, akkor egy oszlop által adott párok száma:

$$y(2k+1-y) \leqq \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 = \left(k+\frac{1}{2}\right)^2 = k^2+k+\frac{1}{4},$$

vagyis

$$y(2k+1-y) \leqq k^2+k.$$

Így a $2l$ oszlop által adott párok száma legfeljebb $k(k+1)2l$.

A párok maximális számára, M-re tehát ezt kapjuk:

$$M \leqq (2k+1)l^2+2lk(k+1).$$

A triviális elhelyezkedésnél (ha ti. minden bábu saját színén áll) ez meg is valósul, tehát

$$M = (2k+1)l^2+2lk(k+1).$$

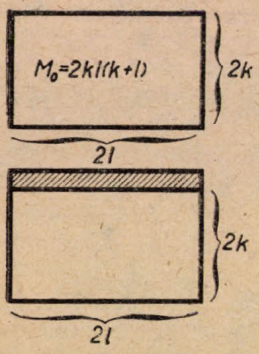
Reményi Gusztáv

Hasonló megoldást küldött: Bártfai Pál, Bukovszky Ferenc, Kiss Ernő, Koncz Károly.

II. megoldás. A Schweitzer verseny 2. feladatában bizonyítást nyert, hogy a $2k$ soros és $2l$ oszlopos táblán a párok maximális száma

$$M_0 = 2kl(k+l),$$

és hogy ilyen maximális elrendezésnél minden sorban és oszlopban ugyanannyi fehér bábu van, mint fekete.



7. ábra

Illesszünk most ehhez a táblához például felül egy újabb sort. Ennek minden bábuja „függőlegesen" k számú párt jelent, összesen $2kl$-et. Sem ez a szám, sem az új soron belüli párok száma nem változik, ha a soron belül cseréket hajtunk végre. Nyilván úgy kapunk a sor hozzáillesztésével legtöbb párt, ha a párok száma a soron belül maximális, vagyis l^2. (l fehér és

l fekete bábu.) Eszerint:

$$M = M_0 + 2kl + l^2 = kl(k+l+1) + l^2.$$

Bukovszky Ferenc

55. példa. Ugyane feladattal (lásd az **54.** példát!) kapcsolatban, ha a „tábla" $(2k_2+1)$-soros és $(2l_2+1)$ oszlopos, határozzuk meg a párok maximális számát, ha a fehér bábuk száma $2k_2l_2+k_2+l_2+1$, és a feketéké $2k_2l_2+k_2+l_2$.

(*Kárteszi Ferenc*)

I. megoldás. Ha x ismét az egy sorban kiválasztott fehérek száma, akkor az e sorban levő párok száma:

$$x(2l+1-x) \leqq l(l+1).$$

Analóg módon, ha y egy oszlopban a fehérek száma, akkor ezen oszlop alapján a párok száma:

$$y(2k+1-y) \leqq k(k+1).$$

Tehát az összes párok maximális száma:

$$M \leqq l(l+1)\ (2k+1) + k(k+1)\ (2l+1).$$

Egyenlőség van például, ha az első l oszlopba k, az utolsó $l+1$ oszlopba $k+1$ fehér bábu jut, míg az első k sorba l, az utolsó $k+1$-be pedig $l+1$ jut.

Koncz Károly

Hasonló megoldást küldött be: Bártfai Pál, Biczó Géza, Bukovszky Ferenc, Kiss Ernő, Reményi Gusztáv.

II. megoldás. Az előző példa megoldásában kimutattuk, hogy a $2l$ oszlopos és $2k+1$ soros táblán a párok maximális száma (jelöljük most M_0-lal):

$$M_0 = 2kl(k+l+1) + l^2 = l^2(2k+1) + 2kl(k+1),$$

és hogy ekkor minden sorban l számú fehér és l számú fekete bábu van.

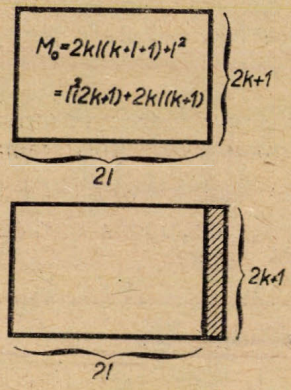
Illesszünk most ehhez a táblázathoz például jobbról egy újabb oszlopot. Ennek minden bábuja „vízszintesen" l számú párt alkot, összesen $l(2k+1)$ új párt.

Sem ez a szám, sem az új oszlopon belüli párok száma nem változik, ha az oszlopon belül cseréket hajtunk végre. Nyilván úgy eredményez legtöbb új párt az oszlop hozzáillesztése, ha a párok száma már ezen belül is maximális, vagyis $k(k+1)$. Ez elérhető

$k+1$ számú fehér és k számú fekete bábuval. Így végül ezt kapjuk:

$$M = l^2(2k+1)+2kl(k+1)+k(k+1)+l(2k+1)$$
$$= (2k+1)l(l+1)+(2l+1)k(k+1).$$

Bukovszky Ferenc

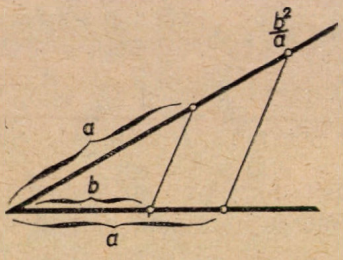


8. ábra

56. példa. Adva van három szakasz: a, b és c. Osszuk fel a c szakaszt $a^5 : b^5$ arányban egységszakasz felvétele nélkül.

(*Schopp János*)

Megoldás. Szerkesszük meg először az $a^2 : b$ szakaszt. (Például így: egy szög egyik szárára felmérjük a csúcstól az a szakaszt, a másikra pedig a b szakaszt és — megint a csúcstól — az a szakaszt, s az utóbbinak végpontjából párhuzamost húzunk az előbbi kettő végpontját összekötő szakasszal; 9. ábra.) Ugyanilyen szerkesztéssel kapjuk tovább $a^2 : b$-ből az $a^3 : b^2$ szakaszt és hasonló módon a $b^2 : a$ és $b^3 : a^2$ szakaszt. Tovább nem is kell mennünk, mert $a^3 : b^2$ és $b^3 : a^2$ aránya éppen $a^5 : b^5$; ebben az arányban kell felosztanunk tehát a c szakaszt, amit szintén párhuzamosok húzásával végezhetünk az ismert módon.



9. ábra

Koncz Károly

Megoldást küldött még: BUKOVSZKY FERENC, CSISZÁR IMRE. KÁNTOR SÁNDOR, KISS ERNŐ, KLAFSZKY EMIL, H. NAGY ISTVÁN, REMÉNYI GUSZTÁV.

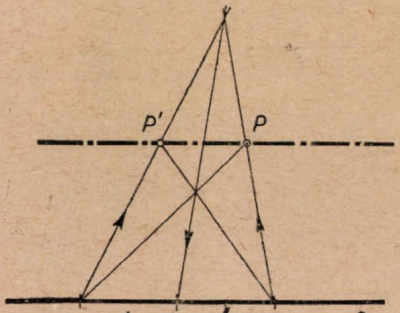
Megjegyzés. Mint többen megjegyezték, tetszés szerinti $a^n : b^n$ arányú felosztás is könnyen végezhető hasonló módon.

57. példa. HILBERT bebizonyította, hogy a vonalzóval és a körzővel megszerkeszthető sokszögek vonalzóval és egységátrakóval (étalon) is megszerkeszthetők, de az irodalomban nincs ilyen szerkesztés közölve. Szerkesszük meg a szabályos ötszöget vonalzóval és étalonnal. (Az étalon olyan eszköz, amellyel adott szakaszt bármely egyenesre felmérhetünk. Ez kétféle megszorítást jelent a körző alkalmazásásával szemben: egyrészt adott pont körül nem lehet vele kört rajzolni, csak a kör *véges számú* pontját lehet kijelölni — nem lehet tehát körnek egyenessel vagy másik körrel való metszéspontját sem képezni — másrészt ennek a körnek a sugarát sem változtathatjuk.)

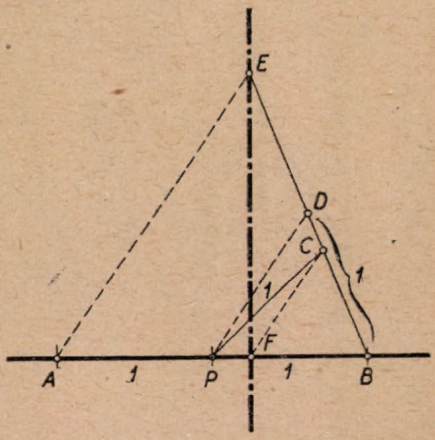
(*Obláth Richárd*)

Megoldás.

1. Szükség lesz a következő alapfeladatok megoldására:
a) Egyenessel adott ponton át párhuzamos szerkesztése. Az



10. ábra



11. ábra

egyenesre kétszer egymás után felmérem az egységet, és megszerkesztem a 10. ábrán látható teljes négyoldalt. Mint ismeretes, ekkor $P'P \| e$.

b) Párhuzamosok húzásával tetszőleges távolságot átmásolhatunk tetszőleges egyenesre, végezhetünk arányos osztást, tetszőleges távolságot felezhetünk.

c) Adott pontból vagy pontban egyenesre merőlegest szerkeszthetünk, például a 11. ábra szerinti módon. Az ábrán

$AP = BP = CP = 1$,

a BC-re mért BD ugyancsak 1,

$DP \parallel CF \parallel AE$.

Ekkor $EF \perp AB$, mert $EFB \triangle \cong ACB \triangle$.

Ha EF-fel P-n át párhuzamost húzunk, a P-ben emelt merőlegest kapjuk.

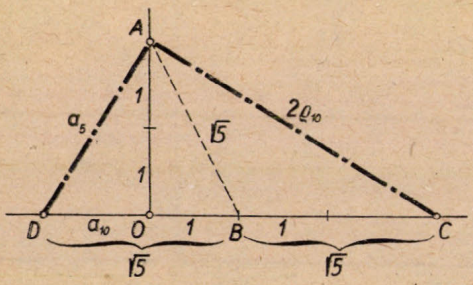
2. A szerkesztéshez a következő ismert összefüggéseket használjuk fel. Ha a kör sugara két egység, akkor

a szabályos tízszög beírt körének sugara $\varrho_{10} = \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$;

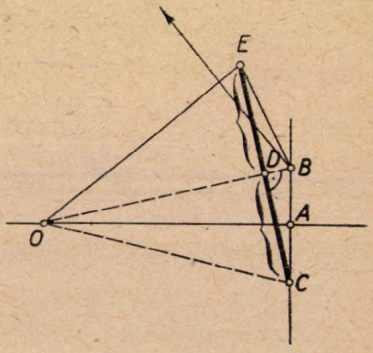
a szabályos tízszög oldala $a_{10} = \sqrt{5}-1$;

a szabályos ötszög oldala $a_5 = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Ezek az ábra szerint szerkeszthetők meg:



12. ábra



13. ábra

$OA \perp OC$; $OA = 2$, $OB = 1$. Ekkor $AB = \sqrt{5}$. Ezt felmérjük az OC egyenesen B-től mindkét irányban, így megkapjuk az $AD = a_5$, $OD = a_{10}$ és $AC = 2\varrho_{10}$ szakaszt.

Ezek alapján most már csak össze kell állítani az ötszöget. Felvesszük az $OA = \varrho_{10}$ szakaszt, A-ban merőlegest emelünk rá, erre

rámérjük két irányban az $AB = AC = \frac{a_{10}}{2}$ szakaszt. $OBC\triangle$ a tízszög egy cikke lesz. A C-ből OB-re húzott merőleges D-ben metszi OB-t; a CD szakaszt D-n túl ugyanannyival meghosszabbítva kapjuk az E pontot, az ötszög másik csúcsát. Ezt folytatva megkapjuk az ötszög valamennyi csúcsát.

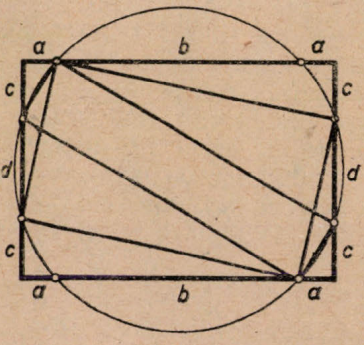
Bártfai Pál

Megoldást küldött még: BICZÓ GÉZA, BUKOVSZKY FERENC, CSISZÁR IMRE, KONCZ KÁROLY, REMÉNYI GUSZTÁV.

58. példa. Bizonyítsuk be, hogy adott téglalapba írható, adott átlójú, egymással nem egybevágó téglalapok területének összege egyenlő az eredeti téglalap területével. (Egy téglalapról akkor mondjuk, hogy egy másik téglalapba írtuk, ha az utóbbinak minden oldalán van az előbbinek egy csúcsa.)

(Steinfeld Ottó)

I. megoldás. A beírt téglalapok csúcsait Thales tétele szerint egy olyan kör metszi ki az eredeti téglalap oldalaiból, amelynek középpontja a téglalap középpontjában (átlóinak felezéspontjában) van. A feladatnak csak akkor van értelme, ha ez a kör — mint az ábra esetében is — a téglalapnak mind a négy oldalát metszi két-két pontban.



14. ábra

Jelöljük a téglalap oldalain keletkezett szakaszokat az ábra szerint a, b, c, d-vel, a nagy téglalap területét T-vel, a beírtakét t_1-gyel és t_2-vel. Az utóbbiak területét kifejezhetjük úgy, hogy T-ből levonjuk a sarkokon kimaradó háromszögek területét:

$$t_1 = T - (a+b)(c+b) - ac$$

$$t_2 = T - (a+b)c - (c+d)c.$$

Összeadva:

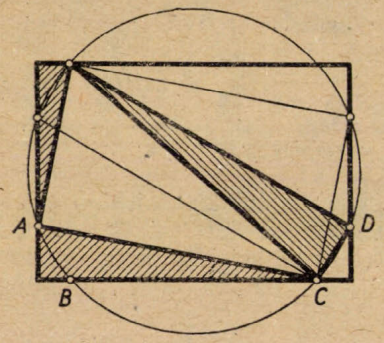
$$t_1 + t_2 = 2T - \{(a+b)(c+d) + ac + (a+b)c + (c+d)a\}.$$

A kapcsos zárójelben levő kifejezés négy olyan téglalap területét jelenti, amelyek együtt a nagy téglalapot adják. Tehát $t_1 + t_2 = T$.

Kiss Ernő

Hasonló megoldást küldött be: BÁRTFAI PÁL, KONCZ KÁROLY, REMÉNYI GUSZTÁV.

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy az egyik beírt téglalap területe egyenlő a másik beírt téglalapon kívül kimaradó háromszögek területével; ez éppen a keresett összefüggés más megfogalmazása. Mindkét területnek a felét vesszük (az ábrán vonalkázott háromszögek). Ha bebizonyítjuk, hogy a vonalkázott háromszögek hasonlók, akkor készen vagyunk, hiszen ezek egy derékszögű háromszög két befogójára és az átfogójára vannak írva. A befogókra írott háromszögekről ez nyilvánvaló. Az átfogóra írott háromszög is derékszögű, és egyíves szöge ugyanakkora (CD) íven nyugszik, mint az $ACB\sphericalangle$. Ebből következik állításunk.



15. ábra

Bukovszky Ferenc

Hasonló megoldást küldött be: Császár Imre, Klafszky Emil.

59. példa. Legfeljebb hány részre osztható a gömbfelület n főkörrel?

Megoldás. Ha $n-1$ főkörhöz felveszünk még egy n-ediket, akkor ez az eddigieket legfeljebb $2(n-1)$ pontban metszheti. Ha metszéspontok nem esnek egybe (amit elérhetünk kis elmozgatással, hiszen csak végesszámú metszéspontot kell elkerülnünk), akkor pontosan ennyi új metszéspont lép fel. Haladjunk végig az új főkörön; minden új metszésponthoz hozzárendelhetjük azt a részt, amelybe behatol. Tehát $2(n-1)$ részt metsz (vág ketté) az új főkör, és így a keresett P_n számra a következő rekurziós képletet kapjuk:

$$P_n = P_{n-1} + 2(n-1).$$

Figyelembevéve, hogy $P_1 = 2$, ebből

$$P_n = 2(n-1) + 2(n-2) + \cdots + 2(2-1) + 2 = 2\frac{(n-1)n}{2} + 2 =$$

$$= (n-1)n + 2.$$

Kántor Sándor

Hasonló megoldást küldött be: Biczó Géza, Bukovszky Ferenc (kétfélét), Császár Imre, Kiss Ernő, Koncz Károly.

Más megoldást adott (a síkbeli analóg feladatra való visszavezetéssel): Bártfai Pál, Reményi Gusztáv.

60. példa. Egy vándor megy Bagdadból Bokharába. Egy falunál elágazik az útja; egyik ága Bokharába vezet, a másik a sivatagba. Csak a falubeliek tudják, melyik a helyes út; ezekről viszont ismeretes, hogy egyrészük mindig igazat mond, a többi mindig hazudik. Egyet közülük megkérdez a vándor, anélkül, hogy tudná, igazmondóval beszél, vagy hazuggal, s a feleletből (amely csak egyetlen „igen"-ből vagy „nem"-ből állhat) megállapítja, melyik a helyes út. Milyen kérdést tett fel?

I. megoldás. A vándor azt kérdezi: „Ha én azt kérdezném, hogy melyik út vezet Bokharába, azt mondaná, hogy ez?" — és rámutat az egyik (tegyük fel, hogy a helyes) útra.

Ha a megkérdezett igazmondó, akkor a helyes útra azt mondaná, hogy az a helyes út, s most is azt mondja, hogy azt mondaná. Ha viszont a megkérdezett hazug, akkor azt mondaná, hogy az nem a helyes út, de mert hazug, ezt most tagadja, vagyis szintén igennel felel.

Hasonló gondolatmenettel arra jutunk, hogy ha a vándor a hamis útra mutatott, akkor kérdésére „nem" választ kap, akár igazmondó a megkérdezett, akár nem. Tehát minden esetben meg tudja állapítani, melyik a helyes út.

Bukovszky Ferenc

Hasonló megoldást küldött be: BÁRTFAI PÁL, CSÍSZÁR IMRE, JACOBY KÁROLY, KONCZ KÁROLY, REMÉNYI GUSZTÁV.

II. megoldás. Rámutat a vándor az egyik útra és megkérdezi a falubelitől: „Arra a kérdésre, hogy ez az út vezet-e Bokharába, igennel felelne-e egy olyan falujabeli ember, aki nem azt válaszolná a kérdésre, mint maga?"

Ha a válasz: „nem", akkor ezen az úton indul Bokhara felé. Mert ha igazmondóval beszélt, akkor ez helyesen közölte vele, hogy a hazugok „nem"-et feleltek volna kérdésére. Ha viszont hazuggal beszélt, akkor ez letagadta, hogy az igazmondók „igen"-nel válaszoltak volna.

Ha a válasz: „igen", akkor a másik úton indul Bokhara felé, teljesen hasonló meggondolások alapján.

Kántor Sándor

Hasonló megoldást küldött be: FENYŐ GYÖRGY, VASVÁRI JÓZSEF.

Megjegyzés. Lényegében különböző megoldás csak ez a kettő van. (Az első a $-(-a)=+(+a)$ a második a $-(+a)=+(-a)$, azonosságnak felel meg.) Ezek azonban igen sokféleképpen fogal-

mazhatók. (Pl. így is: „Azonos választ adna-e arra a kérdésre, hogy ez a helyes út és arra, hogy mindig igazat mond?" Ennek a párja: „Különböző választ adna-e...?")

61. példa. Vegyünk n számú halmazt (lehetnek köztük üresek is, részben vagy egészen fedhetik is egymást). Bárhogyan válasszunk is ki ezek közül egy vagy több halmazt, beszélhetünk azon elemek összességéről, amelyek a kiválasztott halmazok mindegyikének elemei, de a többi halmaz egyikének sem. Nevezzük ezt a kiválasztott halmazokhoz tartozó atomnak.

a) Hányféleképpen helyezkedhetik el egymáshoz képest n halmaz, ha két elhelyezkedést akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egy atom az egyikben üres, a másikban nem?

b) Hányféle elhelyezkedés lehetséges akkor, ha üres halmazokat nem engedünk meg? (A határozottság kedvéért felsoroljuk két nem üres halmaz, A és B lehetséges elhelyezkedéseit: idegenek; egybeesnek; közös részük nem üres, de egyikkel sem esik egybe; A része B-nek; B része A-nak. A két utolsó esetet tehát külön esetnek tekintjük!)

Megoldás.

a) Egy n elemű halmaz összes részhalmazainak száma 2^n; ugyanis minden elemre két lehetőség van: vagy kiválasztjuk vagy nem, és ez összesen 2^n lehetőség. Ha kizárjuk az üres részhalmazt, akkor $2^n - 1$ lehetőség marad. Ennyiféleképpen választhatunk ki az n halmaz alkotta halmazrendszerből legalább egyet, tehát ennyi atomja van a halmazrendszernek.

A halmazok lehetséges elhelyezkedéseit vizsgálva, minden atomra vonatkozóan ismét két lehetőség van: vagy üres, vagy nem. Mivel $2^n - 1$ atom van, a halmazok 2^{2^n-1} elhelyezkedése lehetséges.

b) Jelöljük n nem üres halmaz összes lehetséges különböző elhelyezkedésének számát E_n-nel. Ezt úgy határozhatjuk meg, hogy 2^{2^n-1}-ből leszámítjuk:

(1) azt az elhelyezkedést, amelynél mind az n halmaz üres: 1 db;

(2) azokat, amelyeknél $n-1$ üres, 1 nem: n db;

(3) azokat, amelyeknél $n-2$ üres, 2 nem: $\binom{n}{2} E_2$ db;

(4) azokat, amelyeknél $n-3$ üres, 3 nem: $\binom{n}{3} E_3$ db;

$\vdots$

végül azokat, amelyeknél 1 üres, $n-1$ nem: $\binom{n}{n-1} E_{n-1}$ db.

Tehát:

$$E_n = 2^{2^n-1} - \left[\binom{n}{n-1}E_{n-1} + \binom{n}{n-2}E_{n-2} + \cdots\right.$$

$$\left. \cdots + \binom{n}{3}E_3 + \binom{n}{2}E_2 + \binom{n}{1}E_1 + 1\right].$$

Reményi Gusztáv.

Megoldást küldött be még: BUKOVSZKY FERENC. Csak *a)*-ra: BÁRTFAI PÁL, KONCZ KÁROLY.

MAGYAR SZERZŐK IDEGEN NYELVEN MEGJELENT MUNKÁINAK MAGYAR NYELVŰ ISMERTETÉSE

Kétváltozós valós függvények nívóhalmazainak struktúrájáról

CSÁSZÁR ÁKOS

Legyen $f(z)$ a z komplex változónak valós függvénye. Jelentse $S(z_0, r_0, \alpha, \beta)$ a $z = z_0 + re^{i\varphi}$, $0 < r < r_0$, $\alpha < \varphi < \beta$ körcikket. Legyen $\mathfrak{R}$ a komplex sík pont-halmazainak öröklődő és σ-additív rendszere.

Azt mondjuk, hogy $f(z)$ a z_0 helyen $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{R})$ tulajdonságú, ha alkalmas pozitív r számra

$$E_z[f(z) \leqq f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta) \in \mathfrak{R};$$

$f(z)$ a z_0 helyen $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{R})$ tulajdonságú, ha alkalmas pozitív r-re

$$E_z[f(z) < f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \in \mathfrak{R},$$

de minden pozitív r-re

$$E_z[f(z) \leqq f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \notin \mathfrak{R};$$

$f(z)$ a z_0 helyen $O_{\alpha\beta}(\mathfrak{R})$ tulajdonságú, ha minden pozitív r-re

$$E_z[f(z) < f(z), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \notin \mathfrak{R}$$

és

$$E_z[f(z) > f(z_0), z \in S(z_0, r, \alpha, \beta)] \notin \mathfrak{R}.$$

Az első két definícióban a $\leqq$ ill. $<$ jelet $\geqq$ ill. $>$ jellel helyettesítve, a $D_{\alpha\beta}(\mathfrak{R})$ ill. a $D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{R})$ tulajdonság definíciójához jutunk.

A dolgozat főeredményei a következők:

Ha egy E halmaz minden pontjához találhatók oly $\alpha < \beta$ számok, hogy $f(z)$ e pontban $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{R})$ (vagy $D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{R})$ tulajdonságú, akkor E egyesítése egy $\mathfrak{R}$-halmaznak, egy olyan halmaznak, amely lefedhető megszámlálható sok rek-

tifikálható ívvel s egy olyan halmaznak, amelyben $f(z)$ értékkészlete megszámlálható. Ha E minden pontjához találhatók oly $\alpha < \beta$ és $\gamma < \delta$ számok, hogy $f(z)$ e pontban $C^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ vagy $D^*_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ s egyidejűleg $C_{\gamma\delta}(\mathfrak{N}), D_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ vagy $O_{\gamma\delta}(\mathfrak{N})$ tulajdonságú, akkor E egyesítése egy $\mathfrak{N}$-halmaznmk s egy olyan halmaznak, amely lefedhető megszámlálható sok rektifikálható ívvel. Ha E minden pontjához találhatók oly $\alpha < \beta$ számok, hogy $f(z)$ e pontban egyidejűleg $C_{\alpha\beta}(\mathfrak{N})$ és $C_{\alpha+n,\,\beta+n}(\mathfrak{N})$ tulajdonságú, akkor E ismét az előbbi típusú.

Ha a nívóhalmazok struktúrájának előbbi osztályozását úgy módosítjuk, hogy az $S(z_0, r, \alpha, \beta)$ körcikkel közös rész alkalmas pozitív r-e $\mathfrak{N}$-hez való tartozása helyett azt kívánjuk, hogy a kérdéses nívóhalmaz $S(z_0, r, \alpha, \beta)$-ra vonatkozó átlagos külső sűrűsége r-rel együtt 0-hoz tartson, akkor az előbbiekhez egészen hasonló állításokat nyerünk, csupán az $\mathfrak{N}$-halmazok szerepét a nullamértékű halmazok veszik át (s így a megszámlálható sok rektifikálható ívvel lefedhető kivételes halmazok elesnek.)

Acta Sci. Math. T. 15. Fasc. 3—4. (Tartalmi kivonat)

Körív és gömbfelület két extremális sajátságáról

Moór Artúr és Török Sándor

Legyen adva O ponttal bíró α szög. Jelentse g_1 ill. g_2 az α szög szárait, legyen továbbá a g_1 ill. g_2 félegyenesen megadva egy T_1 ill. T_2 pont úgy, hogy $\overline{OT_1} = \overline{OT_2}$. Tekintsük azon görbeíveket, amelyek az OT_1T_2 háromszögben fekszenek, görböletük szakaszonként, érintőjük az egész görbe mentén folytonos, T_1 és T_2 ívek két végpontja, azonkívül a g_1 és g_2 félegyenesek ezen íveket a T_1 és T_2-ben (tehát a végpontban) érintik. *Meghatározandó az a görbeív, amelyeknek a maximális görbülete a legkisebb, ill. minimiális görbülete a legnagyobb.*

Mindkét probléma megoldása éppen az a körív, amely a fenti feltételeket kielégíti. Ez a következő tétel alapján látható be:

1. Tétel: Ha a $K(s)$ egy oly görbeív görbületét jelenti amely a fenti feltételeket kielégíti, akkor fennáll a

$$\max K(s) > K_0 > \min K(s)$$

egyenlőtlenség, K_0 a feltételeknek eleget tevő körív görbülete.

A fenti probléma analogonja a háromdimenziós térben könnyen megfogalmazható. Ebben az esetben a szög szerepét egy kúp veszi át, T_1 és T_2 helyett pedig egy körvonal fog szerepelni, amelynek minden pontja a kúp csúcspontjától egyenlő távolságra lesz. A görbék helyett most meghatározott helyzetű és a kúpot az adott körvonal mentén érintő felületek szerepelnek, míg a görbület helyett a felületnek vagy a Gauss-féle, vagy a középgörbülete áll. Ezen felületekre fennáll a következő tétel:

2. Tétel: Ha K ill. H egy olyan felület Gauss-féle ill. középgörbületét jelenti, amely a térbeli probléma feltételeit kielégíti, akkor fennáll a következő két egyenlőtlenség:

$$\max K \geqq \frac{1}{r^2} \geqq \min K, \qquad \max H \geqq \frac{1}{r} \geqq \min H,$$

ahol r az adott kúpot az adott kör mentén érintő gömb sugara.

Ezen tételből következik, hogy az adott kúpot az adott kör mentén érintő felületek görbületének maximumát ill. minimumát az r sugarú gömb

szolgáltatja, a 2. tételből azonban az egyértelműség nem következik, a síkbeli analóg problémával ellentétben, ahol az 1. tétel egyúttal az egyértelműséget is biztosítja.

Az 1. és 2. tétel egy H. Brunn-tól származó ún. egyszerű holdakra vonatkozó tétel segítségével ill. ezen tétel térbeli analgonjával bizonyítható.

Az Acta Scientiarum Mathematicarum 15. kötetének 157—163. oldalán (1954) német nyelven megjelent dolgozat kivonata.

Egy speciális ferdecsoport a csoportelméletben

RÉDEI LÁSZLÓ (Szeged) és STÖHR ALFRED (Göttingen)

Legyenek G, Γ adott csoportok, s jelöljék $a, b, \ldots$ illetve $\alpha, \beta, \ldots$ e csoportok elemeit, speciálisan e illetve ε az egységelemet.

Bizonyos, nagy általánosságú strukturakonstrukciókra RÉDEI már régebben bevezette a rövid *ferdeszorzat* elnevezést (maga a fogalomalkotás lényegében véve egy jól ismert HAMILTON-féle elven nyugszik), s megvizsgálta, hogy az (a, α) elempárok halmazában

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (a\, b^{\alpha}, \beta^{\alpha}, a^{b}\, \alpha^{b}\, \beta) \qquad (b^{\alpha}, \beta^{\alpha} \in G;\ a^{b},\ \alpha^{b} \in \Gamma)$$

által definiált ferdeszorzat mikor csoport. Az

$$(a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab,\, a^{b}\, \alpha^{b}\, \beta),$$
$$(a, \alpha)\,(b, \beta) = (ab^{\alpha},\, \alpha^{b}\, \beta)$$

fontos speciális esetek éppen a SCHREIER-féle csoportbővítést illetve a ZAPPA—SZÉP-féle szorzatot jelentik. Ezekre az esetekre KOCHENDÖRFFER (Zur Theorie der Rédeischen schiefen Produkte, *Journal für die reine und angewandte Math*, **192** (1953) nemrég további speciális eseteket is visszavezetett.

A jelen dolgozatban kiderül, hogy

$$(a, \alpha)\,(b, \beta) = (a^{\beta}\, b,\, \alpha^{b}\, \beta) \qquad (a^{\beta} \in G,\ \alpha^{b} \in \Gamma)$$

sem nyújt újabb ferdeszorzatot, hanem (lényegében véve) csak a ZAPPA—SZÉP-féle szorzatnak egyik, SZÉP által (On the structure of groups wich can be represented as the product of two subgroups, *Acta Sci, Math.* (Szeged) **12 A** (1950), 57—61) részleteson vizsgált fontos speciális esete.

Az Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, **15.** kötetének (1953) 7—11. oldalán német nyelven megjelent dolgozat kivonata.

A Remak-féle felbontás általánosítása

Írták: SZÉP JENŐ és RÉDEI LÁSZLÓ

Jelöljön G oly csoportot, amelynek normálosztóira teljesül a minimál- és maximálfeltétel. G normális felbontásának nevezünk minden oly

$$G = N_1 \cdots N_n \tag{1}$$

faktorizációit, amelyre teljesül, hogy:

a) mindegyik N_i G-nek normálosztója.

b) (1)-ből egyik N_i sem törölhető.

c) egyik N_i sem bontható fel két valódi normálosztójának szorzatára.

Az (1) normális felbontás magjának nevezzük a

$$\prod_{1 \leqq i < k \leqq n} (N_i \cap N_k)$$

csoportot. A $D = 1$ esetben (1) éppen a G-nek Remak-féle felbontása. Érvényes a következő tétel, amelynek $D = 1$ esete az ismert KRULL—SCHMIDT-féle tétel:

Tétel. Ha $G = N_1 \cdots N_n = N_1' \cdots N_n'$ a G-nek két normális felbontása közös D maggal, akkor $n = n'$, s a tényezők alkalmas sorrendjével $N_i D / D$ centrálisan izomorf $N_i' D / D$-vel ($i = 1, \ldots, n$), s érvényesek a $G = N_1 \cdots$ $\cdots N_i N_{i-1}' \cdots N_n'$ normális felbontások is ($i = 1, \ldots, n-1$).

A bizonyítás KRULL—SCHMIDT tételére való visszavezetéssel történik.

Az Acta Scientiarum Mathematicarum. Szeged, **15.** kötetének (1953) 85—86. oldalán megjelent dolgozat kivonata.

Azokról az Abel-féle csoportokról, amelyekben minden végesen generált alcsoport endomorf kép

Írta: KERTÉSZ ANDOR és SZELE TIBOR

Szerzők meghatározzák az összes olyan Abel-féle csoportot, melynek bármely végesen generált alcsoportja endomorf képe a csoportnak.

Legyen G additív Abel-féle csoport. Ha G minden eleme véges rendű, akkor G-t torziócsoportnak nevezzük. Egy torziócsoport mindig felbontható egyértelműen meghatározott primer komponenseinek direkt összegére, amely utóbbiak különböző prímszámokhoz tartozó p-csoportok. Egy csoportot akkor nevezünk p csoportnak, ha bármely elemének rendje a fix p prímszám hatványa. Korlátlan elemrendű az olyan p-csoport, amelyben nincsen legnagyobb rendű elem. Egy Abel-féle p-csoportban az összes olyan alcsoportok egyesítési halmaza, amelynek p^∞ típusú csoportok direkt összegére bonthatók, maga is egy p^∞ típusú csoportok direkt összegére bontható csoport, amely direkt összeadandója az egész csoportnak. Ezt az alcsoportot a csoport maximális algebrailag zárt alcsoportjának nevezzük.

A kitűzött probléma megoldását a következő két tétel szolgálja:

1. tétel. *A G Abel-féle torziócsoport bármely végesen generált alcsoportja akkor és csak akkor endomorf képe G-nek, ha G bármely P primer komponense kielégíti azt a követelményt, hogy amennyiben P maximális algebrailag zárt A alcsoportja nem 0, a P/A faktorcsoport korlátlan elemrendű.*

2. tétel. *A végtelen rendű elemet is tartalmazó G Abel-féle csoport bármely végesen generált alcsoportja akkor és csak akkor endomorf képe G-nek, ha G véges számú végtelen ciklikus csoportnak és egy olyan torziócsoportnak direkt összege, amelyet az 1. tételben jellemeztünk, vagy pedig ha G bármely n természetes számhoz tartalmaz olyan direkt összeadandót, amely n végtelen ciklikus csoport direkt összege.*

Az Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **15.** (1953) kötetének 70—76. oldalán angol nyelven megjelent dolgozat kivonata.

Hírek

Külföldi hírek

Románia

A IV. Román Matematikai Kongresszus 1956. május 27—június 4-ig tartott. A kongresszus munkája 5 szekcióban zajlott le a bukaresti C. I. Parhon egyetem épületében. A kongresszuson igen sok külföldi állam képviseltette magát. Az előadók között 9 francia, köztük a kilencven éves Hadamard, 4 szovjet, 1 angol, 2 cseh, 11 magyar, 3 kínai, 5 olasz, 8 német, 8 lengyel, 2 amerikai, 1 bolgár, 1 norvég, 1 jugoszláv, 1 svájci, 2 belga, 1 izraeli és 1 japán matematikus szerepelt. Az előadások nyelve román, orosz, francia, angol, német, olasz és eszperanto volt. A kongresszus után a Román Matematikai Társulat 2 csoportos körutazást rendezett a külföldi vendégek számára, egyiket az Al-Dunára, másikat Dél-Erdélybe. Magyar részről — időrendi sorrendben — a következő előadások hangzottak el:

Kertész Andor: Lineáris egyenletrendszerek általános elméletéről (német nyelven).

Freud Géza: Ortogonális polinómsorokról (német nyelven).

Varga Ottó: Mértékkel bíró differenciálgeometriai terekről (német nyelven).

Császár Ákos: A normális eloszlás egy jellemzéséről (francia nyelven.)

Hajós György: Gráfok színezéséről (francia nyelven).

T. Sós Vera: Hatványsorok konvergenciájáról a konvergenciakör határán (német nyelven).

Vincze István: Egész transzcendens függvények abszolút értékének maximumáról (német nyelven).

Szőkefalvi-Nagy Béla: A Hilbert-tér normális transzformációinak gyenge limesze (francia nyelven).

Erdős Pál: Polinómok aritmetikai tulajdonságairól (angol nyelven).

Turán Pál: Lakunáris hatványsorokról (német nyelven).

Alexits György: Fourier-sorok majdnem mindenütt való konvergenciájáról (francia nyelven).

Szovjetunió

1956. június 25-től július 4-ig tartották a III. Össz-szövetségi Matematikai Kongresszust a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának rendezésében. A következő szekciókban hangzottak el előadások:

1. Számelmélet.
2. Algebra.
3. Differenciál- és integrálegyenletek.

4. Függvénytan.
5. Funkcionálanalízis.
6. Valószínűségszámítás.
7. Topológia.
8. Geometria.
9. Matematikai logika és matematikai alapjai.
10. Numerikus módszerek.
11. Mechanika.
12. Matematikai fizika problémái.
13. Matematika története.

Számos külföldi ország küldte el képviselőit a kongresszusra. Előadást tartott 12 lengyel, 3 magyar, 2 francia, 5 olasz, 5 jugoszláv, 2 cseh, 7 román, 4 német, 2 bolgár, 1 svéd, 1 norvég, 2 amerikai, 1 angol, 6 kínai és 1 indiai matematikus. A kongresszus résztvevői az egyik vasárnap megtekintették a Kremlt, majd az ülések befejezése után két napra Leningrádba látogattak.

Magyar részről a következő előadások hangzottak el:

Kalmár László: Jelfogók megtakarítása logikai gépekben (orosz nyelven).

Kalmár László: Egy hipotézisről az úgynevezett megoldhatatlan aritmetikai problémákban (német nyelven).

Kalmár László: Logikai műveletek megvalósítása huzalos dobozok segítségével (angol nyelven).

Szőkefalvi-Nagy Béla—Korányi Ádám: Operátorelméleti módszer a komplex függvénytanban (francia nyelven).

Turán Pál: A sűrűségi hipotézisről a Riemann-féle zetafüggvény elméletében (német nyelven).

Alexits György (előadta Turán Pál): Egy szummációs tétel az ortogonális sorok elméletében (német nyelven).

Társulati élet

A Bolyai János Matematikai Társulat Győri Tagozatának előadásai 1955. január 1-től december 31-ig

Február 22.

MELICHER MIKLÓS: középiskolai délután.

Február 23.

KERESZTURY GYÖRGY: Néhány a vektoralgebrával kapcsolatos probléma.

A Központi Pedagógus Továbbképző Intézettel közös rendezésben, a Győr megyei Tanács VB. Oktatási Osztálya, az Ismeretterjesztő Társulat Matematikai és Csillagászati Szakosztálya és a Pedagógus Szakszervezet Győr megyei Szervezete közreműködésével, a felszabadulás tizedik évfordulója alkalmával a magyar-szovjet barátsági hónap keretében matematikai ünnepi előadássorozat.

Március 30.

Délelőtt Bemutató tanítás.

a) középiskolai tanárok részére a Győri Kazinczy Leánygimnáziumban Barabás Sarolta vezetésével.
b) ált. iskolai tanárok részére a Győri Lenin úti Áll. Ált. Iskolában Csonka Józsefné tartotta.
Megnyitó. Tartotta Karl Géza a megyei tanács oktatási osztályvezetője
DETRE LÁSZLÓ: A csillagászat és matematika határterületei.

Délután GALLAI TIBOR: A térfogatszámítás megalapozása.
GÁDOR ENDRÉNÉ: Geometriai szerkesztésekről.
VARGA TAMÁS: A magyar matematikatanítás fejlődése a felszabadulás óta.
Klubest.

Március 31.

TASNÁDY ISTVÁN: A geometriai szerkeszthetőségek elmélete.
RÉNYI ALFRÉD: Matematika—logika– dialektika.

Május 4.

FEJES-TÓTH LÁSZLÓ: A gazdaságosság elvének rendező hatása a geometriában.

Szeptember 26.

Pálmay Lóránt: Egyszerű nomogramok.

Október 24.

Kárteszi Ferenc: A több dimenziós térről.

November 30.

Greguss Pál: Az akusztikai energia tudományos és ipari alkalmazási területei.

December 5.

Czapáry Endre: A Mohr—Mascheroni-féle szerkesztések.

A Bolyai János Matematikai Társulat Soproni Tagozatának előadásai 1955. január 1-től december 31-ig

Január 15.

Dér Zoltán: Számrendszerek kialakulása és a számírás.

Február 11.

Autherid Éva: Klasszikus szerkesztési problémák.

Február 25.

Dér Zoltán: Harmadfokú egyenletek megoldása.

Március 12.

Barta Ernő: Mit kíván az egyetem a középiskolától.
Dér Zoltán: A hosszegység története és megállapításának fizikai és matematikai problémái.

Április 15.

Dér Zoltán: Komplex számok és egység gyökök.
(Diákdélután.)

Április 29.

Autherid Éva: A kúpszeletek származtatása.

Szeptember

Vas Jenő: A projektív geometria elemei.

Október 29.

Hódi Endre: Szélsőértékfeladatok az elemi függvények tulajdonságainak felhasználásával.

November 19.

Szeliánszky Ferenc: A geometria tanítása és szöveges egyenletek megoldása.

December 10.

Pálmay Lóránt: Nomogramok.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szolnoki Tagozatának előadásai 1955. január 1-től december 31-ig

Január 19.
GÁDOR ENDRÉNÉ: A VI. osztályos mértankönyv tanítása.
(Előadás általános iskolai tanárok részére.)

Március 19.
HAJÓS GYÖRGY: Az 1954. évi Kürschák verseny feladatairól.
(Előadás tanárok részére.)

Április 22.
BUKOVSZKY FERENC: *A fizikai dimenziók módszere.

Május 9.
FENYŐ ISTVÁN: A disztribució-elmélet alapjai.

Május 9. RÉVAI KATALIN: Valószínűségszámítás.
(Középiskolai délután a Jászberényi Ált. Gimnáziumban.)

Május 15. RÉVAI KATALIN: Egyenlőtlenség.
(Középiskolai délután a Mezőtúri Ált. Gimnáziumban.)

Szeptember 30.
SZÉNÁSSY BARNA: A tudományos matematikai vizsgálatok magyar úttörői.
(Segner András és Sipos Pál életműve.)

November 19.
KALMÁR LÁSZLÓ: A matematikai analízis módszerei a középiskolában.

A Bolyai János Matematikai Társulat Nyíregyházi Tagozatának előadásai 1955. január 1-től december 31-ig

Január 22.
SOMOSSY JÁNOS: Rácsgeometriai problémákról.

Február 5.
Klubest. Iskolai terminológiai problémák.

Február 19.
LAKATOS ISTVÁN: Az elektronoptika alapkérdései.

Március 2.
AMBRÓZY GÉZA: A diofantikus egyenletekről. *K. m. d.

Március 5.
MOLNÁR LÁSZLÓ: Új gyorsszámolási eljárás.

Március 16.
REMÉNYI GUSZTÁV: Feladatmegoldások. (MSZBH) K. m. d.

* K. m. d.: középiskolai mat. du.

Március 19.

Reményi Gusztáv: Mi a vonal. (Parhomenko cikke alapján MSzBH)

Március 24.

Tiszolczy István: Feladatmegoldások. (MSZBH) K. m. d.

Április 2.

Bereznay Gyula: Mit köszönhet a magyar gazdasági számtantanítás a Szovjetuniónak? (MSZBH) K. m. d.

Április 16.

Bereznay Gyula: Valószínűségszámítási problémákról.

Április 27.

Reményi Gusztáv: Versenyfeladatok.

Szeptember 24.

Tiszolczy István: Függvénytranszformációk.

Október 16.

Hódi Endre: Geometriai transzformációk.

November 10.

Bereznay Gyula: A szögharmadolásról. K. m. d. Kisvárdán.

November 15.

Reményi Gusztáv: Mi a vonal? Előadás Kisvárdán.

November 17.

Reményi Gusztáv: Egyenletek egyenértékűsége. Középiskolai matematikai délután Nagykállón.

November 20.

Bereznay Gyula: Versenyfeladatok.

December 15.

Somossy János: Megemlékezés Gaussról.

A Bolyai János Matematikai Társulat Szombathelyi Tagozatának előadásai 1955. január 1-től december 31-ig

Január 13.

Hódi Endre: Szöveges feladatok megoldása.

Január 13.

Gádor Endréné: A VI. osztályos mértankönyv tanításának problémái.

Január 13.

Ligeti Béla: Geometriai szerkesztések és bizonyítások az ált. iskolában. (Előadás Zalaegerszegen.)

Március 12.

Zsuppán József: Egyenlőtlenségek. (MSZBH előadás.)

Március 14.

Pászthory Antal: Egyenlőtlenségek. (MSZBH előadás.)

Március 16.

Czapáry Endre: Feladatmegoldások. (MSZBH előadás.)

Március 16.

Czapáry Endre: Feladatmegoldások. (MSZBH előadás.)

Március 17.

Karner Emilia: Feladatmegoldások. (MSZBH előadás Kőszegen.)

Március 20.

Bukovszky Ferenc: A fizikai dimenziók módszere.

Március 20.

Réiman István: Komplex számok alkalmazása geometriai feladatok megoldásánál.

Március 21.

Varga Árpád: Egyenlőtlenségek és elemi szélsőérték feladatok.

Március 22.

Schandl Gábor: Egyenlőtlenségek.

Március 24.

Borsay Katalin: Egyenlőtlenségek.

Március 26.

Csontos Miklós: Feladatmegoldások.

Március 28.

Könyves Tóth Kálmán: Néhány klasszikus egyenlőtlenség.

Március 30.

Novák Zoltán: Feladatmegoldások.

Március 31.

Buvári András: Egyenlőtlenségekkel való számolás és érdekesebb egyenlőtlenségek.

Április 20.

Horváth Béla: Egyenlőtlenségek.

Április 27.

Gádor Endréné: Az I. gimn. kísérleti matematika könyvről.
Arató István: Aerodinamikai kísérletek a fizikai szakkörben.

Szeptember 26.

Varga Árpád: Affin transzformáció alkalmazása szerkesztésekben.

Október 24.

VARGA ÁRPÁD: Szimmetrikus egyenletek.

Október 28.

GÁDOR ENDRÉNÉ: Mértan tanítása az általános iskolában.

November 25.

PÁSZTHORY ANTAL: A nomográfia elemei és alkalmazása (TTIT-vel közös rendezés.)

November 28.

CZAPÁRY ENDRE: Mohr—Mascheroni-féle szerkesztések.

December 12.

REIMAN ISTVÁN: Geometriai transzformációk csortelméleti tárgyalása.

A Bolyai János Matematikai Társulat Budapesti és Pest megyei Tagozatának előadásai 1956. január 1-től június 30-ig

Január 6.

Az 1955. évi Schweitzer Miklós verseny eredményhirdetése és díjkiosztása. A versenyfeladatokat Tandori Károly ismertette. (Megjelent a Matematikai Lapok VII. 3—4. számában)

Január 13.

ERDŐSI JÓZSEF: Bevezetés a nem-euklideszi geometriába. (Ifjúsági Matematikai Kör előadása)

Január 13.

OBLÁTH RICHÁRD: Megemlékezés Vályi Gyuláról. (Megjelent a Matematikai Lapok VII. 1—2. számában)

Január 18.

FARAGÓ LÁSZLÓ: Elemi transzcendens függvények. (Előadás tanárok részére)

Január 20.

BIHARI IMRE: Egy Bellmann lemma általánosítása és alkalmazása. (1. Acta Math. Ac. Scien. Hung. VII. kötet 81. oldal)

Január 21.

POGÁNY JÁNOS: Szerkesztések véges kiterjedésű síklapon. (Előadás középiskolai diákok részére)

Február 3.

KERTÉSZ ANDOR: Operátormodulusok radikálja.

Legyen R tetszőleges gyűrű és G tetszőleges R-modulus. Előadó radikálnak nevezi az összes olyan részmodulusok metszetét, amelyek szerint vett faktormodulus nem triviális egyszerű modulus. A radikál e definíciójával egy olyan elmélet építhető ki, amely

analóg a gyűrűelméletben a Jacobson radikál elméletéhez. Speciálisan, ha egy tetszőleges gyűrűt tekintünk baloldali operátormodulusnak, akkor radikálja Jacobson radikáljával esik össze. Ennek alapján a Jacobson-radikálnak több tisztán moduluselméleti jellemzése adható meg.

Február 3.

„Sajátértékfeladatok perburbációszámítása" címmel előadássorozat megindítása az MTA Matematikai Kutató Intézete Differenciálegyenletek Osztályával közösen. Az előadásokat Szőkefalvi-Nagy Béla akadémikus és Korányi Ádám kutató tartották.

I. A perturbációelmélet problémája a következő: hogyan változnak meg az $A_0\varphi = \lambda\varphi$ sajátértékfeladat megoldásai, ha az A_0 operátort egy tőle kevéssé eltérő $A(\in)$ operátorral helyettesítjük. A Schrödinger által a kvantummechanikában bevezetett formális perturbációszámítás alkalmazhatóságának feltételeit megállapítani súlyos matematikai probléma, amely csak a Hilbert-tér elméletének segítségével tárgyalható egzaktul. Az előadó röviden ismertette a perturbációelmélet módszereit és eredményeit, majd összefoglaló áttekintést adott a Hilbert-tér elméletének a későbbiek folyamán felhasználásra kerülő definícióiról és tételeiről. Az előadást Korányi Ádám tartotta.

Február 7.

Rényi Alfréd: Milyen irányban fejlődik a matematika.
A Társadalom- és Természettudományi Ismeretterjesztő Társulat Matematikai és Csillagászati Szakosztályával közös előadássorozat.

Február 10.

Pál László: Végtelen halmazokról.
(Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása)

Február 13.

Szőkefalvi-Nagy Béla: Trigonometrikus egyenlőtlenségek és approximációk. (I. rész)
Ha a 2π szerint periodikus, korlátos, integrálható $f(x)$ függvény Fourier-sora

$$f(x) \sim \sum_{k=m}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

alakú, $(m \geqq 1)$ akkor H. Bohr egyik tétele szerint az

$$F(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

integrálfüggvény a

$$\max_x |F(x)| \leqq \frac{\pi}{2m} \max_x |f(x)|$$

egyenlőtlenségnek tesz eleget és itt az állandó nem javítható. Előadó ismertette és diszkutálta ennek az egyenlőtlenségnek, valamint a magasabbrendű integrálfüggvényekre vonatkozó meg-

felelőinek Favard által adott bizonyítását, valamint az ennek a bizonyításnak mintegy mellékeredményeként kiadódó pontosítását a Jackson-féle approximáció-tételnek.

Február 18.

KÁRTESZI FERENC: Érdekes térgeometriai feladatok.
(Előadás középiskolai diákok számára)

Február 21.

HAJÓS GYÖRGY: Mi az a negyedik dimenzió (A TTIT-tel közös előadássorozat).

Február 22.

TASNÁDY ISTVÁN: A függvények ábrázolása; görbetranszformáció és koordinátatranszformáció.
(Előadás a középiskolai tanárok részére)

Február 24.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: Trigonometrikus egyenlőtlenségek és approximációk. (II. rész)

Előadó ismertette a Bohr-féle tételt általánosító saját eredményeit. Az $f(x)$ integrálfüggvényei helyett az

$$f_\lambda(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \tilde{f}_\lambda(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \lambda_k (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

függvényekről van ezekben szó, ahol $\{\lambda_k\}$ adott nullasorozat. Ha $\{\lambda_k\}$ háromszorosan monoton, akkor

$$\max_x |f_\lambda(x)| \leqq \left[\frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} \lambda_{(2\nu+1)m} \right] \max_x |f(x)|$$

ha pedig $\{\lambda_k\}$ kétszeresen monoton és $\sum \frac{\lambda_k}{k}$ konvergens, akkor

$$\max_x |\tilde{f}_\lambda(x)| \leqq \left[\frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2\nu+1} \lambda_{(2\nu+1)m} \right] \max_x |f(x)|;$$

a konstansok nem javíthatók. A bizonyítások mellékeredményeiként approximációelméleti eredmények is adódnak. Ezek az eredmények igazak maradnak, ha az $\|f\|_\infty = \max |f(x)|$ metrika helyett az $\|f\|_p = \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$ metrikát tekintjük, ahol $1 \leqq p < \infty$. Sőt a $p = 1$ esetben a fenti konstansok továbbra is pontosak, míg a $p > 1$ esetben a fenti konstansokról nem állítható, hogy pontosak. Végül vizsgálta az előadó a Bohr-Favard-féle egyenlőtlenségnek és a Bernstein-féle egyenlőtlenségnek a viszonyát Kolmogorov egy nevezetes tételéhez, amely egy $f(x)$ függvény $(-\infty < x < \infty)$, valamint ennek két különböző rendű integrálfüggvényének maximumai között állapít meg egy egyenlőtlenséget.

Február 24.

PÁL LÁSZLÓ: Végtelen halmazokról. (II. rész)
(Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása)

Március 1.

„Sajátértékfeladatok perturbációszámítása"

2. Az előadó levezette a Schrödinger-féle formális perturbációszámítás képleteit. Ezeknek a formuláknak alapjául az a feltevés szolgál, hogy az $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \cdots$ perturbált operátor sajátértékei és sajátvektorai ε-nak reguláris hatványsorai, és az együtthatók összehasonlításának egyszerű módszerével nyerhetők. Az elmélet fő feladata ennek a feltevésnek az igazolása a gyakorlatilag fontos esetekben. Az előadó ellenpéldákkal illusztrálta a formális módszer alkalmazásának nehézségeit. Az előadás második részét néhány segédtétel bizonyítása alkotta a Hilbert-tér lineáris operátorainak elméletéről.(Az előadást KORÁNYI ÁDÁM tartotta.)

Március 2.

ERDŐS PÁL: Az irracionális számokról.
(Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása)

Március 2.

ERDŐS PÁL: Az egymásután következő számok szorzatairól és az ezzel kapcsolatos diofantikus egyenletekről.

Március 6.

ALEXITS GYÖRGY: Bolyai János, a tudomány nagy forradalmára.
(Előadás a TTIT-tel közös rendezésben)

Március 9.

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: Beszámoló a moszkvai funkcionálanalízis konferenciáról. Klubest az MSzBH keretében.

Március 14.

ERDŐS PÁL: Taylor-sorok által definiált analitikus függvényekről. Legyen $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ Taylor-sor melynek konvergenciaköre az egységkör. Fabry egy tétele szerint ha $\frac{n_k}{k} \to \infty$, akkor $f(z)$ az egységkörön túl nem folytatható. Pólya bebizonyította, hogyha $\liminf \frac{n_k}{k} < \infty$ akkor mindig van oly $\sum a_k z^{n_k}$ hatványsor, melynek konvergenciaköre az egységkör s mely az egységkörön túl folytatható — azaz Fabry tétele tovább nem élesíthető. Előadó erre egy elemi bizonyítást adott (Trans. Amer. Math. Soc. 57 (1945), 102—104).

Március 15.

„Sajátértékfeladatok perturbációszámítása".

3. Az előadó ismertette Szőkefalvi-Nagy Béla egy általános téte-

lét, amely az $A(\varepsilon)$ operátorra vonatkozó néhány egyszerű feltevés mellett állítja, hogy az operátor spektrumának bármely izolált részéhez tartozó spektrálprojekció az ε paraméternek reguláris analitikus függvénye. Az előadásra került bizonyítás a spektrálprojekciónak az operátor rezolvense segítségével való integrál-előállításán alapszik. (Az előadást Korányi Ádám tartotta)

Március 16.

Reiman István: Bevezetés a projektív geometriába.
(Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása)

Március 16.

Czách László és Kiss Ottó beszámoltak szovjetunióbeli tanulmányaikról. Klubest az MSzBH keretében.

Március 20.

Császár Ákos: Geometria mérés nélkül.
(Előadás a TTIT-tel közös rendezésben)

Március 23.

Reiman István: Bevezetés projektív geometriába. II. rész.
(Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása)

Március 23.

Fuchs László ismertette A. G. Kuros „Csoportelmélet" c. munkáját. (Klubest, az MSzBH keretében)

Március 28.

Faragó László ismertette Gyelone-Zsitomirszkij: „Geometriai feladatok gyüjteménye" c. könyvét. (Előadás tanárok részére az MSzBH alkalmából)

Március 29.

Erdős Pál: Reláció-elméleti problémákról.
Legyen E halmaz számossága m, minden $x \varepsilon E$-hez tartozik E-nek egy részhalmaza $f(x)$, tegyük fel, hogy létezik oly $n < m$ hogy minden x-re $f(x)$ számossága n-nél kisebb. Akkor létezik E-nek oly E_1 részhalmaza, melynek számossága m és amely szabad, azaz ha $x \varepsilon E_1, y \varepsilon E_1$ akkor $x \notin f(y)$ és $y \notin f(x)$. (A probléma Turántól való, a kérdés irodalmát lásd P. Erdős: Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950) 127—141 és G. Fodor: Acta Szeged, (1950) és (1955).

Március 30.

Kalmár László: A halmazelmélet axiomatikus felépítésének módjairól. I. rész.
A halmazelmélet jelentősége a matematika többi fejezete szempontjából. A halmazelmélet antinómiái; az axiomatikus felépítés szükségessége. A Zermelo-féle axiómarendszer. A halmazelmélet olyan felépítésének vázolása ezen axiomarendszer alapján, amely a lehetőséghez képest követi a nem-axiamatikus felépítés menetét. A „definit tulajdonság" fogalmának szabatos elhatárolása Skolem és Fraenkel nyomán. A rendszámok és számosságok Neumann-féle elmélete. A halmazelmélet véges számú axióma segítségével

való felépítésének problémája. A Neumann-féle és a Gödel-féle axiómarendszer. A halmazelmélet felépítésének vázolása a Gödel-féle axiómarendszer alapján.

Április 6.

Reiman István: Bevezetés a projektív geometriába. III. (Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása)

Április 6.

J. Karamata: Függvények növekedésének egy elméletéről. (l. 207. oldalon).

Április 7.

Vincze István: Elemi feladatok az analízis köréből. (Előadás középiskolai diákok számára)

Április 10.

Rényi Alfréd: A véletlen birodalma. (A TTIT-tel közös előadássorozat)

Április 12.

„Sajátértékfeladatok perturbációszámítása".
5. A 3. előadáson ismertetett tétel segítségével nem csak a formális módszer alkalmazhatóságát lehet igazolni, hanem becsléseket is lehet kapni a formális módszerrel nyert hatványsorok együtthatóira, aminek a fizikai alkalmazások szempontjából nagy fontossága van. Az előadó részletesen ismertette az egyszeres sajátérték esetében nyerhető becsléseket. (Az előadást Szőkefalvi-Nagy Béla tartotta)

Április 13.

Kalmár László: A halmazelmélet axiomatikus felépítésének különböző módjairól. (II.)
(l. előző előadás kivonatát)

Április 16.

Freud Géza: Derivált függvény approximációja a függvényt approximáló polinomok deriváltjaival. (Előadás az MTA Matematikai Kutató Intézete Valósfüggvénytani Osztályával közös rendezésben)

Április 18.

Pásztor István: Elemi függvényvizsgálat és szélsőértékproblémák. (Előadás középiskolai tanárok részére)

Április 20.

Kiss Ottó: A trigonometrikus és harmonikus interpoláció konvergenciájáról.
Az előadó szükséges és elégséges feltételeket adott a trigonometrikus interpoláció konvergenciájára az analitikus, ill. a néhányszor differenciálható periodikus függvények körében és megadta azt a legkisebb zárt tartományt, amelyben analitikus periodikus függvények trigonometrikus interpolációja egyenletesen konvergál tetszőleges csomópontok mellett.

Az analitikus függvényekkel kapcsolatos eredmények folyományai harmonikus függvények harmonikus polinomokkal való interpolációjára vonatkozó tételeknek.
Mindezek az eredmények analogonjai Fejér Lipót, Kalmár László és V. J. Krilov tételeinek a Lagrange-féle interpoláció elméletéből.

Április 24.

Turán Pál: Híres megoldott és megoldatlan problémák az egész számok elméletében.
(A TTIT-tel közös előadássorozat)

Április 26.

„Sajátértékfeladatok perturbációszámítása."
6. Az előadó a többszörös sajátértékek kérdésével foglalkozott. Az előbbi tételek alapján egy indukciós gondolatmenet segítségével a többszörös, véges multiplicitású sajátértékek esetén is bizonyítható a perturbált sajátértékek és sajátvektorok regularitása és a Schrödinger-féle módszer alkalmazhatósága. Az előadás tárgyát ez a Szőkefalvi-Nagy Bélától származó bizonyítás képezte.
(Az előadást Korányi Ádám tartotta)

Április 27.

Hajnal András: A halmazelmélet axiomatikus felépítésének különböző módjairól. (III.)
Előadó csatlakozott Kalmár László előző két előadásához, amelyben többek között ismertette a halmazelmélet Gödel-féle axióma rendszerét. Ismertette Gödelnek azt az eredményét, hogy ha a halmazelméletnek a Gödel-féle (kiválasztási axiómát nem tartalmazó) axiómarendszere ellentmondástalan, akkor ellentmondástalan marad akkor is, ha a kiválasztási axiómát és az általánosított kontinuum hipotézist új axiómákként hozzávesszük ehhez az axiómarendszerhez. Ismertetett még néhány, a projektív halmazok elméletébe vágó — Novikovtól származó — relatív ellentmondástalansági tételt, melyeknek bizonyítása szintén Gödel eredményén alapul.

Május 4.

Alexits György: Egy tétel az ortogonális sorok szummálhatóságáról. (l. Acta Sci. Math. Szeged, 1956. XVII. 1—2)

Május 5.

Kárteszi Ferenc egyetemi tanár vezetésével középiskolai matematikai délután. A diákdélutánon előre kitűzött feladatok megoldását bemutatták: Geszti Tamás, Orlik Péter és Szász Domokos.

Május 11.

Turán Pál beszámolója indiai útjáról.
(Klubest)

Május 11.

Reiman István: A hiperboloidról.
(Az Ifjúsági Matematikai Kör előadása)

Május 16.

Bihari Imre: Pontsoros nomogrammok készítése.
(Előadás középiskolai tanárok részére)

Május 18.

Czách László, ismertette Szoboljev: „Funkcionálanalízis a matematikai fizikában" c. könyvét.

Május 25.

Hajós György beszámolója kínai útjáról.
(Klubest)

Május 25.

Az Ifjúsági Matematikai Kör klubestje, kötött téma nélkül.

Június 2.

Az 1956. évi Arany Dániel matematikai verseny eredményhirdetése és díjkiosztása. Az I. osztályos feladatokat Varga Tamás, a II. osztályos feladatokat Lőrincz Pál ismertette.

Június 6.

I. P. Kahane (Montpellier): Exponenciális összegek határfüggvényeinek analitikus folytatásáról.

Legyen Ω komplex sík halmaza, Λ egy komplex sorozat $E_\Omega(\Lambda)$ azon $f(x)$ függvényeknek a halmaza, amelyek Ω egész kompakt belsejében egyenletesen megközelíthetők $\sum a(\lambda)e^{\lambda\delta}$ alakú lineáris kombinációkkal. Ha $E_\Omega(\Lambda)$ nem tartalmazza az összes olyan függvényeket, amelyek analitikusok Ω-ban, akkor célunk meghatározni egy olyan nyílt G halmazt, hogy minden f függvény $\in E_\Omega(\Lambda)$ analitikusan folytatható úgy, hogy $\in E_G(\Lambda)$ legyen.

f-et a következő alakban határozzuk meg:

$$(1) \qquad f(z+\zeta) = \int f(\zeta+\zeta)\, d\mu_z(\zeta)$$

ahol $e^{wz} - \Phi_z(w) = e^{wz} - \int e^{w\delta}\, d\mu_z(\zeta)$ a Λ halmazon eltűnik és a Λ tartójára teljesül $\mu_z \subset \Omega$.

Ha z folytonosan változik, az (1) által definiált függvény nem függ mástól, mint z-től; μ_z „tartója" (ért. tartománya) Ω egy kompakt résztartományban van, továbbá az $\int |d\mu_z|$ integrál korlátos. Előadó megmutatta, hogyan lehet Φ_z-t úgy meghatározni, hogy mindez teljesüljön.

Alkalmazások Dirichlet sorokra: szingularitások helyének meghatározása, összefüggések a függvény egész síkban való növekedése és egy vízszintes sávban való növekedése között.

Előadó utal különböző más alkalmazásokra is (majdnem-periodikus függvények stb.).

Egy analóg folytatási elv lehetővé teszi Mandelbrojt és Turán bizonyos problémáinak megoldását, amelyek valós függvényekre vonatkoznak.

Június 6.

M. Lazard (Poitiers): Affin tereken értelmezett algebrai csoportok nilpotens voltáról.

Az előadás célja annak bebizonyítása, hogy az olyan algebrai csoportok, amelyeknek hordozó halmaza affin tér, nilpotensek. Ez az eredmény a Lie-csoportok egyik ismert tétele megfordításának tekinthető: minden egyszeresen összefüggő nilpotens Lie-csoport az R^n téren értelmezett algebrai csoportnak tekinthető. A problémát mindenekelőtt a gyűrűelmélet nyelvén fogalmazzuk meg: vizsgáljuk a $2n$ határozatlant tartalmazó

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

polinomokat, melyeknek együtthatói egy kommutativ, egységelemes A gyűrűből vannak véve és amelyek olyanok, hogy ha $B \supset A$ egy gyűrűbővítése A-nak, akkor $B^n \times B^n$-nek B^n-be való

$$(u, \ldots, u_n) \cdot (v_1, \ldots, v_n) = (f_1(u_1, \ldots, v_n), \ldots, f_n(u_1, \ldots, v_n))$$

leképezése B^n-en *csoport*ot alkot. Meg akarjuk mutatni, hogy ez a csoport mindig nilpotens (tetszőleges B esetén).

Először is megmutatjuk, hogy ez igaz, ha A véges test. Ehhez két megjegyzésre van szükségünk: 1. ha B véges test, akkor B^n elemeinek száma primszámhatvány, ezért minden B^n-en értelmezett csoport nilpotens; 2. a nilpotens B^n csoport osztálya legfeljebb n (ha B test), mert B^n növekvő centrális sorozatából készíthető egy n-dimenziós affin térbe ágyazott algebrai sokaságokból álló szigorúan növekvő sorozat.

Az általános eset tárgyalása céljából tekintsük az f_i polinomok együtthatói által generált A_0 gyűrűt, s térjünk át ennek a gyűrűnek a maximális ideálokkal alkotott kvóciensére: ezzel a feladatot az előbbi speciális esetre vezettük vissza.

(Az előadás tartalma megjelent a következő helyen: C. R. Ac. Sci. Paris, *241* (195), 1687—189.)

Június 6.

G. Bourion (Algir): A Taylor-sor és a polinomokkal való approximáció.

A Társulat negyedik rendes közgyűlése

A Bolyai János Matematikai Társulat 1956. június 29-én tartotta negyedik rendes küldött közgyűlését, a következő tárgysorozattal:

1. Elnöki megnyitó.
2. Valkó Endre, az MTESZ főtitkárának megnyitó beszéde.
3. Főtitkári beszámoló.
4. Pénztárosi jelentés.
5. A pénztáros jelentésének megvitatása.
6. A Társulat új tisztikarának megválasztására jelölőbizottság kiküldése.

7. A jelölőbizottság javaslattétele és szavazás a javaslatok felett.
8. Szavazatszedő bizottság kiküldése.
9. Az 1956. évi Beke Manó emlékdíj és a Grünwald Géza pályadíj kiosztása.
10. A szavazatszedő bizottság beszámolója a szavazás eredményéről.
11. A Társulat kiküldötteinek megválasztása az MTESZ közgyűlésére.
12. Elnöki zárószó.

A közgyűlés programjához a következő előadások és vitaülések kapcsolódtak:

Június 29-én, pénteken

Fuchs László: Néhány szó a csoportelméletről.

Cser Andor, a Pedagógiai Tudományos Intézet munkatársa ismertette a bevezetésre kerülő általános iskolai tantervet, valamint a kidolgozandó középiskolai tanterv fő szempontjait. Vitavezető Kárteszi Ferenc volt.

Június 30-án, szombaton

Gallai Tibor: Néhány gráfelméleti problémáról.

Faragó László és Varga Tamás ismertették a gimnázium I. osztályának új tankönyvét.

A közgyűlés pesti és vidéki résztvevői nagyszámban megtekintették a közgyűlés időtartama alatt a miskolci Kilián György gimnázium matematika és fizika szakköri anyagát, mely a közgyűlés időtartama alatt a Társulat helyiségében volt kiállítva.

A közgyűlést Alexits György, a Társulat elnöke nyitotta meg, és a következőket mondotta:

Tisztelt Közgyűlés!

— Nem könnyű a szokásos néhány szóval megnyitni ezt a közgyűlést, mert egyrészt a legutolsó közgyűlés óta évek teltek el, másrészt azóta hatalmas jelentőségű események történtek, amelyek közelről érintik a közgyűlés munkáját. A Szovjetunió Kommunista Pártjának XX. kongresszusa olyan friss légkört teremtett, hogy ezt Társulatunk működése, programja szempontjából lehetetlen figyelembe nem venni. A XX. kongresszus szelleme döntően befolyásolhatja a Társulat működését, hiszen ennek a társulatnak mint társadalmi szervnek a szerepe fokozódni fog a jövőben és lényegesen többet tehet és többet kell tennie működési területén, mint eddig. Gondoljunk csak arra, hogy a világ forrásban van. Gondoljunk az országszerte folyó vitákra, ahol az emberek megszólalnak, és azok is, akiknek nincs hivatalos funkciójuk, igen komoly, értékes hozzászólásokkal gazdagíthatják a mi, kissé hivatalos színezetűvé vált, túlzottan centralizált társadalmi életünket. Ez a matematikai életben is éreztette hatását. Elég a mindent felülről-várás, az önálló gondolatok elfojtása vagy semmibevevése. Gondoljunk, a tankönyvvitára, arra a dogmatikus gondolkodásra, amelyet néhányan a Szovjetunió oktatására való jogtalan és megalapozatlan hivatkozással igyekeztek alátámasztani. Felesleges itt, olyan emberek előtt, akik a matematikában dolgoznak bővebben kifejteni, hogy milyen sematizálás folyt, mennyire formulák beszajkózására törekedtek. Ha megkérdezzük, kinek a kötelessége ezen változtatni, azt hiszem a matematikusokat kell elsősorban említeni. A matematika természete magával hozza, hogy a matematikus ösztönösen irtózik a dogmatikus gondolkodástól, formalizmustól, skolasztikától. A Társulatnak igen komoly és fontos szerepe lesz a tudományos kutatás, az oktatás szervezésében és az oktatandó anyag kialakításában. Feladata lesz a maga kritikáját hangoztatni.

Ez a kritika bizonyára nem mindig lesz tökéletes. Elvégre elég hosszú periódus múlt el felettünk, amikor módszeresen igyekeztünk elszoktatni önmagunkat és másokat a kritikától. A kezdeti ügyetlenségekkel is követhetünk el hibákat, hiszen a Társulat tagjai emberek, akik tévedhetnek. A legkomolyabb kárt azonban az okozná, ha továbbra is azt a defenzív álláspontot foglalnánk el, hogy jobb inkább hallgatni, mint egyébként hasznos és építő kritika közben egy csekély hibát elkövetni. Hibázni nem kell és nem kell hibázásra bíztatni az embereket, de meg kell érteni a hibákat és nem szabad remegni attól, hogy esetleg hibázunk, mert az ilyen magatartás nem mozdíthatja elő a fejlődést. A közgyűlés fő feladata javaslatokat tenni az építő kritika szellemében. A főtitkári beszámoló számos ilyen javaslatot tartalmaz és sok feladatot tűz ki. Arra kéri a tagtársakat, hogy a közgyűlésen igyekezzenek ebben a szellemben résztvenni. A közgyűlés minden résztvevőjének jó és hasznos munkát kíván, és felkéri Valkó Endrét felszólalása megtartására.

Valkó Endre, a Műszaki és Természettudományi Egyesületek Szövetsége főtitkára üdvözlő szavai után Surányi János, a Társulat főtitkára a következőkben számolt be a Bolyai János Matematikai Társulat előző közgyűlése óta végzett munkájáról:

Tisztelt Közgyűlés! Kedves Tagtársak, Kedves Vendégek!

Társulatunk előző (harmadik) közgyűlését 1953 június 20-án, tehát kerek három évvel ezelőtt tartotta. Mi sem természetesebb, mint az, hogy amikor először készültem beszámolni Társulatunk működéséről a közgyűlés előtt, először is a közgyűlések beszámolóit tanulmányoztam át. Mindjárt az első sorok olvasásakor feltűnik a közgyűlések közti időszakok állandó növekedése. A II. közgyűlés másfél évre, a harmadik kettőre követte az előzőt, annak lezajlása óta pedig három év telt el. Ha ennek meg is voltak a külső okai, (elsősorban anyagiak), mégis szeretnék bevezetőben annak a reménynyemnek adni kifejezést, hogy ez a sorozat nem fog tovább növekedni, hanem monoton csökkenve visszatér a jövőben a kívánatos alapszabályszerű működéshez. Természetesen nem térhetek itt ki részletesen a Társulat minden tevékenységére. Inkább arra igyekszem rámutatni, hogy milyen tanulságok vonhatók le további feladatainkra.

Amikor a múlt évben nehézségek merültek fel a közgyűlés rendes időben való megtartása körül, akkor Társulatunk vezetői a nyár elején összeültek egy nem hivatalos megbeszélésre, hogy mégis mérlegeljék a Társulat további feladatait. Itt az a vélemény alakult ki — és ennek nyomai már Rényi Alfréd 1953. évi főtitkári beszámolójában is megtalálhatók —, hogy Társulatunk eddigi igen nagyarányú fejlődése nem mindenütt áll arányban Társulatunk lehetőségeivel, nem is annyira az anyagiakat, mint inkább a kartársak igénybevehető energiáit tekintve. Éppen ezért főfeladatnak azt kell tekinteni, hogy lemérjük, mik azok a munkák, amiket valóban eredményesen tud ellátni a Társulat és ezeken a területeken elményíteni a Társulat munkáját. Azóta történtek is lépések ebben az irányban és ma a Szovjetúnió Kommunista Pártja XX. Kongresszusa után úgy látjuk, hogy valóban lényeges hibák szimptomái voltak azok, amikre felfigyeltünk. E hibák lényege az volt, amire az elnöki megnyitó is utalt. Részben nem tudtuk, de nem is mertük vállalni egy társadalmi egyesület egyes lényeges funkcióit. Ritkán teremtettünk alkalmat, hogy tagjaink megvitathassák munkaterületük problémáit, hiszen igen kérdéses lett volna, hogy el merik-e mondani az őszinte véleményüket, és ha merték volna is, még valószínűtle-

nebb lett volna, hogy érvényt tudjunk annak szerezni és ne ellenséges tevékenységet szimatoljanak mögöttük.

Nem is lehet most más feladatunk, mint hogy Társulatunk vonatkozásában igyekezzünk a kongresszus irányelveinek fényénél minél teljesebb mértékben felkutatni a hibákat és a feladatok helyes megválasztását. Természetesen az a leszűkítés, amire fentebb céloztam, nem jelentheti semmilyen eddig eredményesen végzett tevékenységünk korlátozását, de még azt sem, hogy ne vállalnánk újabb feladatokat, amennyiben azok ellátására valóban a Társulat hivatott, de feltétlenül jelentenie kell azt, hogy a feladatokat a megoldásukra mozgósító erők számbavételével tűzzük magunk elé.

Így mindjárt új természetű feladatot tűzött társulatunk elé a II. ötéves terv irányelveinek megvitatása. Ennek kapcsán szükségessé vált a matematika művelése és oktatása terén fennálló problémák és az ezeken a területeken dolgozó kartársak problémáinak felmérése. Igyekeztünk ezeket lehetőleg széles keretben feldolgozni és ennek alapján részletes javaslatokat juttattunk el az illetékes szervekhez. Ezek a javaslatok két csoportra oszlanak. Az alsó és középfokú oktatással kapcsolatos javaslatok kívánják a jobb munkakörülmények biztosítását a pedagógusok számára, így jobb társadalmi megbecsülésüket, lényegesen nagyobb anyagi megbecsülésükre egy teljesítményt is figyelembe vevő bérezési rendszer kidolgozását és bevezetését, a kötelező óraszám 18-ra csökkentését, a lakáshelyzet megjavítását, tudományos munkára való lehetőség biztosítását, ahol ez indokolt. Javasoltuk az általános- és középiskolákban a megfelelő szakképzettség megszerzésének kötelezővé tételét, ehhez a pedagógusok továbbképzésének az eddiginél sokkal intenzívebb támogatását. Az oktatás színvonalának emelése érdekében javasoltuk reális tantervek kidolgozását, különösen a technikumok oktatási rendszerének alapos felülvizsgálását. A politechnikai képzés elmélyítése érdekében a térgeometriai ismeretek megjavítására tettünk néhány javaslatot. Javasoltuk a tankönyvek honoráriumának és a szerzői jogoknak rendezését, végül a tanárképzés felemelését 5 évre.

A javaslatok második, tudományos kutatással és felsőoktatással foglalkozó csoportjában — rámutatva a tudományos pálya iránti érdeklődésben mutatkozó egyes káros jelenségekre — ugyancsak felvetettük a társadalmi és anyagi megbecsülés kérdését; a tudományos munka tekintetbevételét a felsőoktatási intézmények létszámának megállapításánál. Javasoltuk a tudományos kutatás támogatásának fokozását. Ezzel kapcsolatban indítványoztuk az Akadémia Matematikai Kutató Intézetének fejlesztéséhez szükséges feltételek biztosítását, az Intézet megfelelő elhelyezését. Javasoltuk egy 10 éves terv kidolgozását a matematikusokkal való ellátás kérdésére. Foglalkoztunk az egyetemi és aspiránsképzés kereteinek felülvizsgálatával és a helyes felvételi szempontok kérdésével. Kívántuk az egyetemi intézetek felszerelésének korszerűsítését. A tudományos kutatás egyik égető kérdése a külföldi folyóirat- és könyvbeszerzés lehetővé tétele. Több javaslat foglalkozik a nemzetközi kapcsolatok fejlesztésével. Így javasoltuk a jövő évben a II. Matematikai Kongresszus megrendezését, majd 5 évenkénti rendszeres megismétlését. Javasoltuk egy ösztöndíjrendszer újraélesítését. Foglalkoztunk a folyóiratok és kiadványok terjedelmének növelésével és a honoráriumrendszer kérdésével. Végül, de nem utolsó sorban, felvetettük a matematikai számológépek beszerzésének és az ilyen irányú kutatás, majd később számológép-gyártás megszervezésének és anyagi támogatásának fontos problémáját.

Ezek a javaslatok érintenek olyan problémákat is, amelyek szemelőtt tartása más szerveknek inkább volna feladata és ezekkel kapcsolatban meg

is keressük az illetékes szerveket. Úgy gondolom azonban, hogy ezek felvetése nélkül nem vethettük volna fel, vagy legalábbis nem adtunk volna helyes képet az elsősorban bennünket illető problémákról sem. Nem foglalkozhatom itt a javaslatok indokolásával, de erről annál is könnyebben lemondhatok, mert a felsőbb szerveknek megküldött anyagot tagozataink is megkapták és arra a Matematikai Lapok is vissza fognak térni. Úgy gondolom azonban, hogy az itt felvetett problémák nagy részében nem elégedhetünk meg azzal, hogy ezeket egyszer felvetettük. Társulatunknak a jövőben lényegesen nagyobb figyelmet kell szentelnie tagjai és az általuk ellátott munkaterületek problémáinak. Feladatunknak látom különösen annak a megszervezését, hogy matematikus ifjúságunk felvethesse és felvesse problémáit és azokra választ kaphasson. Ez hozzájárulhat a fiatalok intenzívebb bekapcsolódásához is a Társulat munkájába.

Társulatunk működéséről szólva az előző közgyűlési beszámoló örömmel állapította meg a taglétszám nagyarányú növekedését, azonban már akkor felmerült a tagdíjfizetés hiányosságának problémája. A tényleges tagnévsor ellenőrzése kapcsán — amely szerint Társulatunknak 1468 tagja van, ezek közül 900 pesti — ismét azt kellett tapasztalnunk, hogy — Balázs Dezsőné adminisztrátorunknak a tagdíjbeszedés érdekében kifejtett igen nagy és lelkiismeretes munkája ellenére is — tagságunk igen nagy része, főleg a vidékiek, nagymértékben el van maradva a tagdíjfizetéssel. Így Budapesten 70 esetben leszünk kénytelenek a taglörlés foganatosításával élni. Ezen adminisztratív intézkedések mellett azonban meg kell keresnünk annak a módját is, hogy a központi adminisztráció ilyen irányú terhelését csökkentsük, de ugyanakkor a tagdíjfizetést intenzívebbé tegyük, olymódon, hogy ebbe a munkába a helyi tagozatokat az eddiginél erősebben bevonjuk. Ahol a MTESz-nek helyi intézőbizottságai vannak, ott megoldható lesz az, hogy a tagdíjfizetés ezeken keresztül történjék. A többi tagozatokra beszedési munkát nem hárítunk, de adminisztrációnk így felszabaduló munkaereje lehetővé teszi majd, hogy velük szorosabb együttműködést építsünk ki. Erre vonatkozóan a közeljövőben részletesebb javaslatokat szándékozunk kidolgozni.

Ha már szó esett a központi adminisztrációról, nem hangsúlyozhatom eléggé azt a nagy segítséget, amit Székely Gáborné szervezőtitkár és Balázs Dezsőné adminisztrátor nyújtott lelkes, odaadó munkájával. Ki kell emelnünk Székelyné körültekintő gondosságát, aki sok fontos problémára és lehetőségre hívta fel a figyelmet és számos értékes javaslatot köszönhetünk neki. Ugyancsak köszönet illeti Pásztor István titkárt, a Társulat vezetésében végzett állandó munkájáért.

Társulatunk munkájáról elmondhatjuk, nem kis örömmel és büszkeséggel, hogy a matematika iránt érdeklődők legszélesebb rétegei: diákok, pedagógusok, kutatók, matematika iránt érdeklődő műszakiak, országszerte ismerik és gyakran fordulnak hozzánk problémáikkal. Úgy gondolom, ebben az irányban elért eredményeink mintaszerűek. Ezek a sikerek nagy részben tagozataink jó munkájának köszönhetők. Ez a munka állandóan változó feladatok megoldását követeli és sokirányú munka, amelyet tagozataink gyakran igen különböző adottságok és lehetőségek között kell, hogy megoldjanak. Igen változó azon szervek és intézmények támogatása is, amelyekkel tagozatainknak együtt kell, vagy kellene működnie. Éppen ezért igen nehéz e munkák összehasonlítása is. Örömmel állapíthatjuk azonban meg, hogy tagozataink néhány kivétellel helyesen mérlegelik lehetőségeiket és odaadó munkával igyekeznek a lehetőségekhez képest legjobb eredményt mutatni fel. Ne tekintsék ezért munkájuk lebecsülésének, ha az időt tekintetbe

véve háromévi sokirányú fáradozásukról itt csak egy-két rövid mondatban emlékezem meg, főként a tapasztalt javulásra, vagy esetleges visszaesésre hívja fel a figyelmet.

Társulatunk a múlt közgyűlés határozata alapján megalakította a budapesti tagozatot, továbbá új tagozatot létesített Kecskeméten. Bár felmerült igény más tagozat létesítésére is, ettől el kellett tekintenünk, mert ennek anyagi fedezetét nem láttuk biztosíthatónak. Társulatunk működési területe mégis szélesedett az elmúlt három év alatt, a múlt közgyűlésen tervbevett helyi csoportok létrehozása révén. Ezek munkája többnyire csak most van kialakulóban egy-egy helyi tagozat irányításával. Különösen jó munka folyik a szegedi tagozat irányította békéscsabai csoportban, továbbá Pápán, ahol a győri tagozat hathatós támogatásával szervezik az előadásokat.

Az elmúlt három év alatt tagozatainkban összesen jóval 1000 fölötti előadás hangzott el. Tudományos előadások elsősorban az egyetemek székhelyén működő tagozatokban folytak. Örvendetesen megélénkült a munka ezirányban az előző évekhez képest Szegeden.

Majdnem minden tagozatunk igen eredményes munkát végzett a tanári továbbképzés és a diákelőadások tekintetében. A sok jó munka között is külön említést érdemel Szombathely sokirányú és a környező városok iskoláit is rendszeresen bevonó tevékenysége, továbbá Győr, Miskolc jó munkája és a nyíregyházi, pécsi, szolnoki tagozat, amelyek a szükségletek és lehetőségek felmérésével igen gyümölcsözően tudják felhasználni a rendelkezésre álló erőket. Örvendetesen javul a tanári továbbképző munka a debreceni tagozatban is.

A Társulat üzemi és ismeretterjesztő tevékenysége legnagyobbrészt az erre hivatott TTIT támogatására szorítkozik és — amint azt már az előző közgyűlés beszámolója is hangsúlyozta —, ez is látszik a helyes megoldásnak. Az együttműködés egyik legértékesebb eredménye a közelmúltban nagy érdeklődéssel lefolyt ismeretterjesztő előadássorozat. Kevés eredményt tudunk azonban felmutatni a műszakiak matematikai érdeklődésének felkeltésében és kielégítésében. Annál dicséretre méltóbb miskolci tagozatunk tevékenysége, ahol ilyen irányú előadások rendszeresen folynak, igen jó színvonallal és nagy érdeklődés mellett. Ugyancsak meg kell említenünk a győri tagozat textiltechnikusok és mérnökök számára tartott műszaki vonatkozású sikeres előadásait. Nagyon kevéssé használja ki Társulatunk a klubesték nyújtotta lehetőségeket. Ezek rendszeresen, mondhatni, csak Budapesten folynak és egyes külföldi útibeszámolóktól eltekintve, ezek látogatottságát sem tekinthetjük kielégítőnek. Úgy gondolom, legközelebbi feladataink közé kell sorolni annak megvizsgálását, hogyan lehetne a klubestéket valóban a feszélyezetlen megbeszélések alkalmaivá tenni és az iránt való érdeklődést növelni.

Az itt felsorolt tevékenységeken kívül tagozataink számos nagy rendezvényt tartottak és a helyi igényeknek és lehetőségeknek megfelelően különböző egyéb irányú tevékenységet folytattak. Így a budapesti tagozat több ízben szervezett szemináriumokat. A nyíregyháziak a lev. főiskolai hallgatóknak rendszeresen tartottak tanulmányaikat segítő és elmélyítő előadássorozatokat. Évek óta igen rendszeresen folyik ilyen tevékenység Pécsett, ahol évről-évre tanfolyamszerűen foglalkoznak feladatmegoldással, vagy egy tankönyv, vagy egy-egy tananyag részletes feldolgozásával. Az elmúlt évben ők is, debreceni, szegedi és nyíregyházi tagozatunk is helyi matematikai versenyeket szervezett.

A vidéken tartott nagy rendezvények a tanári továbbképzést szolgálták; 4 kétnapos és 7 egynapos rendezvényünk volt az előző közgyűlés óta.

Nagy rendezvényeink kivétel nélkül igen sikeresek és eredményesek voltak. Külön ki kell azonban emelni a miskolci tagozat rendezvényeit, mind kitűnő szervezésük, mind pedig a megnyilvánult nagy érdeklődés tekintetében. A Kilián gimnáziumnak a legutóbbi rendezvényükkel kapcsolatban bemutatott anyagát a tagtársak a szünetekben megtekinthetik. Köszönet illeti ezért a Kilián György gimnázium igazgatóságát és a kiállítást odaadó munkával megrendező kartársakat. Itt említem meg intézőbizottságunk javaslatát, hogy a tagozataink (anyagi lehetőségeink arányában) látogassák egymás nagy rendezvényeit és cseréljék ki tapasztalataikat.

Megemlítem még, hogy a múlt közgyűlés egyik határozatának megfelelően megjelent a tanári továbbképző előadásainak egy újabb gyűjteménye a Szocialista Nevelés Kiskönyvtára sorozatban.

Továbbra is igen nagy sikerrel rendeztük meg évről-évre a Magyar—Szovjet Barátság Hónapját. Az ennek keretében elhangzott előadások legnagyobb része a Társulat központjában készült brossúrákat használta fel. Több tagozatunk ezt az alkalmat használta fel a környékbeli iskolákban előadások tartására. Kívánatos volna azonban, hogy az így felvett kapcsolatokat minden tagozatunk rendszeressé tegye, ahogy ezt például a szombathelyiek tették.

Az egyes tagozatok munkáját áttekintve, fel kell figyelnünk néhány örvendetes, vagy kevésbé örvendetes jelenségre. Így feltűnően ellanyhult a munka az utolsó félévben az egri tagozatban. Sürgősen meg fogjuk vizsgálni, milyen segítségre szorulnak munkájuk eredményes folytatásához. Az újonnan alakult kecskeméti tagozat szép kezdés után 1955-ben teljesen abbahagyta a munkát. Ennek főoka az volt, hogy Szemerey titkár kartárs súlyos nehézségei miatt képtelen volt a Társulat ügyeivel foglalkozni, de most már bizalommal várhatjuk a tagozat munkájának újabb fellendülését. Sokáig akadozott a Társulat soproni tagozatának munkája is. Az 1954 őszén megválasztott új vezetőség, különösen Horváth Kálmán titkár kartárs működése óta azonban örvendetes fellendülés tapasztalható. Súlyos problémák előtt áll szépen dolgozó szolnoki tagozatunk, mert a Közlekedési Egyetem Pestre helyezésével a vezetőség több tagja, így a lelkiismeretes, jó mukát végző Révai Katalin titkár is megválik a tagozattól. Bízunk benne, hogy a tagozat új vezetősége helyesen fogja feladatát megválasztani az új helyzetben és a tagozat továbbra is jó munkát fog végezni. Említettem már a szombathelyi tagozat kiváló munkáját a tanárok továbbképzése területén. Ez annál is figyelemre méltóbb teljesítmény, mert Vas megyében a tanévben nem volt szakfelügyelő, mégis sikerült a tagozatnak összefogni, nemcsak a középiskolai, de az általános iskolai tanárok munkáját is. A veszprémi tagozat munkája is sokáig igen akadozó volt, annak ellenére, hogy helyi feltételei kedvezőek. Örömmel állapíthatjuk meg azonban, hogy ebben a tanévben a tagozat munkája javulást mutat. A tagozatok munkájának támogatására elnökségünk patrónusokat állított az egyes tagozatok mellé, bár vitathatónak bizonyult, hogy van-e erre minden tagozatnak szüksége, viszont Kalmár László rendszeres és hathatós támogatása amit patrónusi működésével adott, mutatja, hogy ez az intézmény igen hasznos lehet. Javasolom, hogy Kalmár Lászlónak ezért a tevékenységéért mondjon a közgyűlés jegyzőkönyvileg köszönetet.

Ezek után az a nem egészen hálás feladatom van még, hogy javaslatot tegyek a Társulat vándorzászlóinak odaítélésére. Nehéz volna az egyes működési területeken a jók közül a legjobbakat kiválasztani. Így javaslataimat inkább azon az alapon teszem meg, hogy hol tapasztalható a legnagyobb fejlődés az utolsó közgyűlés óta. Javasolom, hogy a legjobb tagozat

számára kiírt vándorzászlót a miskolci tagozatnak adja a közgyűlés, akiknek sokoldalú, eredményes munkája a beszámolóból is kitűnik. Követésre méltó, hogy sokirányú munkájukat sok kartárs bevonásával, a munka jó elosztásával sikerült megoldaniok. Sokat köszönhettek a más szervekkel fennálló jó kapcsolatoknak. — A legjobb pedagógiai munkát végző tagozat számára alapított vándorzászlót javasolom, hogy a szombathelyi tagozat kapja meg, amelyik nehéz körülmények között végzett igen eredményes munkát. Végül javasolom, hogy a legjobb tudományos munkáért járó vándorzászlót a szegedi tagozat kapja meg, amelynek ezirányú munkája a múlt közgyűlés óta szépen fejlődött.

Külön emlékezem meg az Ifjúsági Körről, melynek formális megalakítását az utolsó közgyűlés határozta el, de végleges kereteit csak 1954 őszén kapta meg. Ez azonban nem akadályozta meg legjobb középiskolásainkat abban, hogy közben is rendszeresen folytassák működésüket, részben önképző előadások formájában, részben előadássorozatok meghallgatásával és megvitatásával. Jó munkájukért, saját dícséretre méltó aktívításuk mellett köszönet illeti a Kör irányításával megbízott Molnár József aspiránst, aki igen lelkiismeretesen foglalkozott a fiatalokkal.

A tagozatok munkáját továbbra is a Társulat Tudományos és Oktatási Szakosztályai irányították. Évente szempontokat adtak a munkatervek összeállításához, segítséget nyújtottak a megfelelő előadók biztosításához. A Tudományos Szakosztály szervezte emellett a pesti tudományos előadásokat és klubesteket. Ezen a téren sikerült az eddiginél nagyobb tervszerűséget és rendszerességet elérni, amiért elsősorban Kővári Tamást, a szakosztály titkárát illeti köszönet. Nem sikerült azonban kellő javulást elérni az előadások látogatottsága és különösen a fiatalok mozgósítása területén, bár javulás a múlt közgyűlés óta kétségtelenül tapasztalható. Nehezíti itt a munkát a Matematikai Kutató Intézet hasonló tevékenységével való koordinálás hiánya. Kívánatos ezen sürgősen javítani. Igen fontos és eredményes új kezdeményezés a szakosztály munkájában a Magyar Tudományos Akadémia III. osztálya közreműködésével matematikai kollokviumok rendezése évenként. Az elmúlt három évben a Társulat 10 kollokviumot rendezett, amiken összesen 150 referátum és nagyszámú értékes hozzászólás hangzott el.

A kollokviumok szervezésére alkalmanként kiküldött szervező bizottságok jó munkáját igen nagymértékben megkönnyítette Pásztor István titkár és Székely Gáborné szervezőtitkár igen fáradságos és gyakran sok utánjárást igénylő munkája, amivel a megfelelő feltételeket minden alkalommal sikerült biztosítaniuk.

Ezek a megbeszélések évről évre igen értékesnek bizonyultak. Növeli jelentőségüket, hogy az elmúlt évben külföldi vendéget is tudtunk hívni a kollokviumokra és keresni fogjuk a módját, hogy ez a jövőben kiszélesíthető legyen.

Az oktatási szakosztályra, amely a múltban is igen sikeres munkát végzett, megnövekedett feladatok hárultak azáltal, hogy megszűnt a továbbképzés szervezett és kötelező formája. Társulatunk a Pedagógus Továbbképző Intézetekkel együttműködve igyekezett a továbbképzés feladatát minél eredményesebben ellátni, annak ellenére, hogy a minisztérium és a szakszervezet — amely szervek véleményünk szerint elsősorban lennének hivatottak e munkát ellátni — korábban nyújtott támogatásukat is lényegesen csökkentették. Az egyes tagozatokban az oktatási szakosztály által, vagy a szakosztály támogatásával szervezett nagyobb rendezvényekről már beszámoltam. Emellett az oktatási szakosztály nagyrendezvénye a közgyűléshez csatlakozó programunk is, amelyet a MTESz támogatásával és azzal, hogy a

közgyűlést koordinálhattuk az Oktatásügyi Minisztérium programjával — sikerült biztosítanunk, ha nem is abban a keretben, amiben terveztük és kívánatosnak tartottuk volna. Sajnálattal vette tudomásul az elnökség, hogy Hódi Endre, a szakosztály korábbi alelnöke, erről a tisztéről lemondott, mert ipari beosztásba került. Körültekintő, pontos munkájával azonban továbbra is támogatja a szakosztályt. Társulatunk továbbra is évente megrendezte részben az OM hathatós támogatásával, vagy az OM-mal együttműködve a korábban is tartott közép- és főiskolai versenyeket. A versenyek iránti érdeklődésnek — azt mondhatjuk — kialakult egy egyenletes átlagos nívója és a versenyek lebonyolításának formái is jól kialakultak. Itt említem meg, hogy egy tavalyi csehszlovák javaslatra visszatérve, lépéseket tettünk az OM-mal együtt együttműködés létrehozására a középiskolai versenyek tekintetében Lengyelország, Csehszlovákia és Magyarország között. Nem látszik kedvező jelnek az, hogy a pedagógiai főiskolák versenye, amelynek szakmai lebonyolítását Társulatunk három éven keresztül végezte, a pesti pedagógiai főiskolával együtt megszűnt.

A műszaki fejlesztés kérdésének előtérbe kerülésével kapcsolatban alakult meg a múlt év végén a Társulat műszaki bizottsága, melynek terve korábban is többször felmerült. A bizottság munkájától reméljük, hogy Társulatunkban sikerül megjavítani a műszaki matematika kérdéseivel és a műszakiakkal való foglalkozást és a műszaki társegyesületekkel jobb kapcsolat kiépítését. A bizottság munkája most van kialakulóban, de máris hozzákezdett az oktatási szakosztállyal együttműködve a technikumi matematika oktatás kérdésének felülvizsgálatához. Maga elé tűzte a műegyetem matematika oktatásával való foglalkozást. Segítséget nyújtott a bizottság a MTESz társegyesületeinek matematikai tanfolyamok szervezésében. Megkezdte egy nomográfiai kiállítás megszervezését, amit azonban anyagi- fedezet hiányában el kellett halasztani. A műszaki bizottság megszervezésében lelkes és jó munkát végzett Körmendi István kartárs, a bizottság titkára, akit Pásztor István titkár támogatott.

1955 elején alakult meg a Társulat könyvbizottsága, a kiadók képviselőivel rendezett ankét keretében. Bár a kezdeményezés a kiadók egyöntetű helyeslésével találkozott, a kapcsolatokat eddig csak néhány kiadóval tudtuk fenntartani. Remélhető azonban, hogy sikerül ezt a munkát a bizottság agilis felelőse, Koncz Károly irányításával kiszélesíteni. Ugyancsak a könyvbizottság hatáskörébe tartoznak a Társulat brossúrái, amelyek a vidéki tagozatok számára nyújtanak anyagot és előadási vázlatot. Az elmúlt három év alatt több brossúra készült, nagyobbrészt a Magyar—Szovjet Barátsági Hónapok alkalmából. A brossúrák számának növelése a tagozatok egyöntetű igénye, sajnos, azonban ennek szintén anyagi nehézségei vannak pillanatnyilag.

Igen nagymértékű fejlődésről számolhatok be a könyvtárral kapcsolatban és ez kizárólag új könyvtárosunk, Székely Gábor agilis és élelmes működésének köszönhető. Keze alatt a könyvtár állománya rövid idő alatt kb. hatszorosára emelkedett. Megvetette az alapjait egy komoly különlenyomat gyűjteménynek. Sikerült megszereznie a Magyar—Szovjet Társaság komoly támogatását könyvtárunk fejlesztéséhez. A Társulatnak azelőtt csak elvétve létező cserekapcsolatait kiépítette. Jelenleg 100 körül van a cserefolyóiratok száma és most is számos cserekapcsolat létesítése van folyamatban. Javasolom, hogy a Magyar—Szovjet Társaságnak, valamint Székely Gábor könyvtárosnak mondjon a közgyűlés jegyzőkönyvileg köszönetet. Székely Gábort ezen eredményes tevékenységéért — Társulatunk javaslatára — a MTESZ jutalomban is részesítette.

A nagy fejlődés azonban komoly problémákat is vet fel. Igy bár kaptunk az MTESz-től újabban egy könyvszekrényt és három polcot, a könyvtári anyag egy része mégis a földön hever. Ennél is nagyobb probléma azonban, hogy igen értékes folyóiratanyagunk — így például különböző fontos szovjet folyóiratok ritkaságszámba menő háborús évfolyamaikkal — kötetlenek és így igen könnyen rongálódnak és megőrzésük is igen nehéz, tekintettel a nyitott könyvespolcokra. Sürgősen be kell köttetnünk ezeket, amire azonban egyelőre nincsen anyagi fedezetünk. De még a könyvtár fejlesztésére jutó összeg is lényegesen csökkent, hivatkozással arra, hogy tagjainknak és Társulatunknak rendelkezésére áll a műszaki könyvtár. Azonban ez matematikai anyagának nagy részét szintén Társulatunk könyvtárának adta át és így ez az általában helyes elv Társulatunkra nem vonatkoztatható. A beszerzésre rendelkezésre álló összeg lényeges csökkentése miatt kénytelenek voltunk a tagozati könyvtárok fejlesztéséről egyelőre teljesen lemondani.

A múlt közgyűlésen még in statu nascendi levő Matematika Tanítása c. folyóirat megindulásával most már három lapnak viseli gondját a Társulatunk. Ezek közül az OM-mal közösen kiadott Középiskolai Matematikai Lapok és a Matematika Tanítása állandóan igen nagy példányszámban jelenik meg. A szerkesztőbizottságok Neukomm Gyula, ill. Gádor Endréné felelős szerkesztő irányításával rendszeres jó munkát végeznek. Köszönet illeti a pontverseny megszervezéséért és azzal járó hatalmas munka lebonyolításáért Neukomm Gyula mellett Lukács Ottót, aki mint technikai segéderő második éve működik közre ebben a munkában, továbbá az OM-ot és a Tankönykiadó Vállalatot, amelyek biztosították e verseny díjazását. Annál nagyobbak a hiányosságok a terjesztés területén a Matematikai Lapoknál. Sikerült itt is biztosítani a lapok rendszeres megjelenését. Éppen időszerű feladat volna, hogy a tagozatok komoly munkába kezdjenek a lap népszerűsítését illetően, bár a példányszám növekedése papírnehézségekbe is ütközik, ami annál is súlyosabb, mert a nemzetközi cserék kiszélesítése és általában a lap iránt megnyilvánuló igények szükségessé teszik a lap terjedelemnövelését.

Társulatunk kapcsolata a MTESz-szel Túri Istvánné központi titkár beállítása óta rendszeressé vált. Gyakran megértéssel igyekezett problémáinkon segíteni és bízunk benne, hogy néhány még megoldatlan problémánkban is — mint például kiküldetési rovatunk elégtelen volta — sikerülni fog segítségével a helyzeten javítani. A rokonszakmájú csoportok tanácskozása megalakulása pozitív lépést jelent a társulatok autonóm működésének fejlesztése irányában. Kívánatos volna a rokonszakmájú csoportok hatáskörét kiterjeszteni és működését pontosan körvonalazni.

Társulatunk nevében ezen a helyen is köszönetet kell mondanom az Akadémia III. osztályának azért a jó együttműködéséért, amelynek révén állandóan nagy erkölcsi és anyagi támogatást adott Társulatunknak, különösen a kollokviumok rendezésénél. Kívánatos, hogy az Akadémián belül rövid idő óta működő függetlenített MTESz-titkárral is jó kapcsolatot tudjunk kiépíteni. Reméljük ezirányban is a III. osztály támogatását.

Az Oktatásügyi Minisztériummal lényegesen megjavult az együttműködés a középiskolai versenyek tekintetében és megnövekedett az ebben a vonatkozásban kapott anyagi támogatás is. Nagy nehézség azonban még mindig, hogy a dolgozatjavítások honorálását nem sikerült megoldani. Ugyanakkor semmiképp sem tekinthető kielégítőnek — mint már említettem — a továbbképzőmunkánkhoz kapott támogatás. Csak a legnagyobb megelégedés hangján emlékezhetem meg viszont e területen a továbbképző inté-

zetekkel fennálló együttműködésről, mely nélkül ez a feladat nem is volna megoldható.

Továbbra is nagyon hiányzik a Pedagógus Szakszervezettel létesítendő kapcsolat, eltekintve egyes helyi, jó kapcsolatoktól (Győr, Miskolc). Ennek létrehozásában a MTESz segítségét kérjük.

Említettem már fejlődőben lévő együttműködésünket a TTIT-tal. Sajnos, amint éppen a közgyűlést megelőző elnökségi ülésen értesültem — a TTIT matematikai és csillagászati osztályának egy országos értekezletén — amiről elmulasztották Társulatunkat értesíteni — olyan hangok hallatszottak, hogy Társulatunk visszahúzódnék e kapcsolatoktól. Ezt a tények fogják remélhetőleg megcáfolni.

Megállapodtunk a kapcsolatunk mikéntjében a Pedagógiai Tudományos Intézettel. Sajnos, ez — hibánkon kívül — eddig csak írásban jött létre. Reméljük azonban, hogy a ma délutáni ankét közelebb fog vinni az együttműködés tényleges megvalósulásához.

A belföldi intézményekkel való kapcsolatok mellett feltétlenül fontosnak látom külföldi kapcsolataink kiépítését, mai eddig csak személyes látogatásokra korlátozódott. A fentebb említett kezdeményezésen kívül bejelenthetem a közgyűlésnek, hogy a Minisztertanács hozzájárult belépésünkhöz a Nemzetközi Matematikai Unióba. Javasolom, bízza meg a közgyűlés a megválasztandó elnökséget az ezirányban szükséges lépések mielőbbi megtételével. A MTESz-nek és ezen keresztül Társulatunknak is, lehetősége nyílt, ha szerény mértékben is, külföldi meghívásokra és kiküldetésekre. Igyekezni fogunk módot keresni arra, hogy ezeket egyéb lehetőségekkel is kiszélesítsük, hogy a formálisan felveendő kapcsolatokat élővé tehessük.

Beszámolóm végére érve örömmel állapíthatom meg, hogy számos, igen eredményes tevékenységről szólhattam, ami igen sok kartárs odaadó munkájának eredményeként jött létre. Éppen ezért Társulatunk vezetősége néhány kiemelkedő munkát végző kartársunk megjutalmazását határozta el. Sajnos, ez a felsorolás távolról sem meríti ki a kiemelkedő munkát végző kartársak névsorát, mindössze azt az összeget, amit erre a célra a MTESz hathatós támogatásával mozgósítani tudtunk.

Társulatunk javaslatára a MTESz elnöksége 1500 forint jutalomban részesítette Társulatunk miskolci vezetőségét.

Társulatunk elnöksége a következő jutalmak kiosztását határozta el:

500—500 Ft jutalomban részesíti Czapáry Endrét, a szombathelyi és Szeliánszky Ferencet, a győri tagozat titkárát.

300—300 Ft jutalomban részesíti Achátz Imrénét, a pécsi tagozat titkárát, Gádor Endrénét, az Oktatási Szakosztály alelnökét, Horváth Kálmánt, a soproni tagozat titkárát, Molnár Józsefet, az Ifjúsági Matematikai Kör patronusát, Révai Katalint a szolnoki, Reményi Gusztávot, a nyiregyházi és Szendrei Jánost a szegedi tagozat titkárát.

100—100 forintos könyvutalványban részesíti a következő előadó kartársakat: Erdősi József, Faragó László, Körmendi István, Kővári Tamás, Horvay Katalin, Lőrincz Pál, Reiman István, Sziráki László és Tasnády István.

A főtitkári beszámoló megvitatása alkalmával 16 hozzászólás hangzott el. A közgyűlés az elhangzott kiegészítésekkel együtt elfogadta a főtitkár beszámolóját, és jegyzőkönyvi köszönetet szavazott meg a főtitkárnak értékes munkájáért.

Alexits György elnök ezután felkéri Fuchs Lászlót, ismertesse pénztárosi jelentését.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA

Fuchs László pénztárosi jelentése:

	1953 év	1954 év	1955 év
01. Két. adm. munkaerő díjazása	21 001,28	24 441,38	26 407,40
A titkár félállása	6 000,—	6 000,—	—
A Matematikai Lapok, Középisk. Mat. Lapok techn. munkáiért és egyéb alkalmi díjak	5 487,20	8 596,80	15 489,61
Kiküldetés	39 357,20	25 325,45	31 917,80
Nagyobb rendezvények	20 432,27	9 767,50	9 231,90
Reprezentáció	1 554,45	989,35	1 896,36
Irószer, nyomtatvány, karbantartás	9 956,49	13 286,87	10 256,40
Posta, telefon	7 481,02	8 762,58	7 422,83
Könyvbeszerzés	3 922,40	7 418,07	4 011,30
Vidéki csoportok támogatása	—	632,69	602,29
Közteher	2 648,82	3 303,81	4 189,70
Pályadíjak	14 700,—	11 800,—	13 772,05
Jutalmak	529,90	2 090,50	—
Összes kiadás	133 071,05	122 415,—	125 211,74
Tagdíjak (bevétel)	8 175,48	5 724,60	6 831,—

A fenti kimutatásban nem szerepelnek a fenntartási költségek, ezek a MTESz központi költségvetésében kapnak helyet.

A pénztáros megjegyzi, hogy a Társulat pénzügyeinek fejlődése nem tartott lépést azzal a fejlődéssel, amely az utóbbi években a Társulat, de a MTESz vonalán is bekövetkezett. Társulatunk vezetőségének véleménye az, hogy Társulatunk működését a MTESz-nek fokozottabb anyagi juttatással kellene támogatnia, figyelembe véve, hogy tagjaink zöme általános- és középiskolai tanár, egyetemi hallgató, akik sem nem állnak oly anyagi bázison, mint egyes műszaki testvéregyesületek tagjai, sem nem kapnak kiküldetésükhöz munkahelyüktől megfelelő anyagi támogatást. Egyesületünk költségvetésében elsősorban a kiküldetési költségek és a könyvek beszerzésére fordítható összeg felemelését kérjük. Megfelelő dotáció nélkül a Társulat elnöksége nem tudja tagjaink számára a társulati élettel, a továbbképzéssel stb. kapcsolatos jogos kívánságaikat teljesíteni.

A közgyűlés egyhangúlag elfogadja a pénztáros jelentését és megadja a pénztárosnak a felmentvényt.

Az elnök javaslatára a következő bizottságokat választja meg a közgyűlés: jelölőbizottság: Bede Lajos, Gáspár Gyula, Koncz Károly, Reiman István és Reményi Gusztáv.

Szavazatszedő bizottság: Prékopa András, Ozoray Mária és Horvay Katalin.

Ezután következett a Grünwald Géza díj harmadízben történő kiosztása. Rényi Alfréd, a bizottság előadója ismertette, hogy az 1954. évi Grünwald Géza pályadíjra összesen 5 pályamunka érkezett be. Tekintettel arra, hogy ezek között több jutalmazásra feltétlenül érdemes pályamunka volt, a bizottság eltekintett attól, hogy egyéb, be nem nyújtott, egyébként igen kiváló, 1954-ben írt és az alapszabályok értelmében elvben tekintetbe vehető

munkákat tekintetbe vegyen. A bizottságban az a vélemény alakult ki, hogy a Grünwald Géza pályadíj súlyának és tekintélyének ártana az, hogy ha a rendelkezére álló összeget megosztanák és így az egyes pályázók csak kis összegű jutalomban részesülhetnének. Ezért a bizottság úgy döntött, hogy az 1954-ben meghirdetett Grünwald Géza pályadíjat egy összegben PRÉKOPA ANDRÁSnak ítéli oda „Sztochasztikus halmazfüggvények" c. kandidátusi disszertációjáért a következő indokolással: „A szerző igen alaposan ismeri a mértékelmélet, a valószínűségszámítás és speciálisan a sztochasztikus folyamatok elméletének irodalmát, az ezekben használatos fogalomalkotásokat és bizonyítási eljárásokat eredeti és igen ötletes módon alkalmazza, s velük a sztochasztikus folyamatokról való ismereteinket jelentékenyen kiszélesítő, további kutatásoknak és alkalmazásoknak indítékot adó, értékes eredményeket ér el azáltal, hogy lerakja a sztochasztikus halmazfüggvények eddig hiányzó általános elméletének alapjait." A bizottság végül azzal a javaslattal fordult a Társulat Elnökségéhez, hogy a jövőben a Grünwald Géza pályadíj kétévenként kerüljön kiosztásra, azonban a Társulat az eddig évente rendelkezésre álló keretnek legalább a kétszeresét biztosítsa.

Alexits György elnök átadta Prékopa Andrásnak a 3000 Ft-os Grünwald Géza díjat, majd felkérte Pósa Vilmosnét a Beke Manó-díj előadóját, hogy ismertesse a Beke bizottság jelentését. (l. a lap 296. oldalán) Alexits György elnök Kárteszi Ferencnek, Dér Zoltánnak, Stéger Ferencnek Szénássy Barnának és Varga Árpádnak átadta a Beke Manó-díjat és oklevelet.

A szavazás előtt jóváhagyás végett ismertette az elnök a vidéki tagozatok vezetőségét: az alábbiak szerint:

Szeged:

Elnök: Rédei László
Alelnök: Szőkefalvi-Nagy Béla
Titkár: Szendrei János

Debrecen:

Elnök: Varga Ottó
Alelnök: Aczél János
Gyires Béla
Titkár: Szénássy Barna

Miskolc:

Elnök: Gáspár Gyula
Alelnök: Bede János
Szabó Jenő
Titkár: Batár Zoltán

Pécs:

Elnök: Bóka István
Alelnök: Bagyinka Mária
Titkár: Achátz Imréné

Veszprém:

Elnök: Fejes Tóth László
Alelnök: Loránd Imréné
Titkár: Somkúti Lajosné

Eger:

Elnök: Nagy Ferenc
Alelnök: Gömböcz József
Titkár: Hartly Domokos

Győr:

Elnök: Faludi Istvánné
Alelnök: Marót Rezső
Titkár: Szeliánszky Ferenc

Sopron:

Elnök: Garai József
Alelnök: Kiss Ignác
Titkár: Horváth Kálmán

Nyiregyháza:

Elnök: Baditz Károly
Alelnök: Ambrózy Géza
Titkár: Reményi Gusztáv

Szombathely:

Elnök: Varga Árpád
Alelnök: Pászthory Antal
Titkár: Czapáry Endre

Budapest:

Elnök: Tasnády István
Alelnök: Ligeti Béla
Zalán Frigyes
Titkár: Faragó László

Kecskemét:

Elnök: Schronk Jenő
Alelnök: Szemerey Andor
Titkár: Hamza Győzőné

A közgyűlés a következő vezetőséget választotta meg:

Elnökség:

Elnök: Alexits György
Társelnökök: Erdős Pál
Hajós György
Kalmár László
Turán Pál
Ügyvezető alelnök: Rényi Alfréd
Alelnök: Kárteszi Ferenc
Főtitkár: Surányi János
Titkár: Pásztor István
Pénztáros: Fuchs László
Jegyző: Vincze István
Elnökségi tagok: Aczél János
Császár Ákos
Fenyő István
Gádor Endréné
Gallai Tiborné
Hódi Endre
Koncz Károly
Neukomm Gyula
Fegyelmi bizottság: Kertész Andor
Koncz Károly
Szász Pál
Fegyelmi bizottsági póttagok: Medgyesi Pál
Reimann István

Választmányi tagok:

Bakos Tibor, Szeged
Balázs János, Bpest
Barna Béla, Debrecen
Bálint Elemér, Bpest
Bede Lajos, Miskolc
Bognár Mátyás, Bpest
Borbély Samu, Bpest
Császár Ákosné, Bpest
Cser Andor, Bpest
Dombi Béla, Pécs
Dusnoki István, Szeged
Erdősi József, Bpest
Földes István, Bpest
Freud Géza, Bpest
Fried Ervin, Bpest
Gáspár Gyula, Bpest
Gyarmathi László, Debrecen
Gyires Béla, Debrecen
Horvay Katalin, Bpest
Huszár Géza, Bpest
Körmendi István, Bpest
Lőrincz Pál, Bpest
Makai Endre, Bpest
Mikolás Miklós, Bpest
Molnár József, Bpest
Obláth Richárd, Bpest
Késedi Ferenc, Bpest
Petrich Géza, Miskolc
Péter Rózsa, Bpest
Prékopa András, Bpest
Raisz Iván, Miskolc
Rieger Richárd, Bpest
Rényi Kató, Bpest
Soós Paula, Szeged
Strommer Gyula, Bpest
Szabó Jenő, Miskolc
Szász Gábor, Szeged
Szentmártony Tibor, Bpest
Székely Gábor, Bpest
Székely Jenő, Pécs
Szép Jenő, Bpest
Takács Lajos, Bpest
Tandori Károly, Szeged
Tolnai Jenő, Bpest
Tóth Lajosné, Debrecen
Turán Pálné, Bpest
Vadas Gáborné, Pécs
Varga Dezső, Veszprém
Varga Tamás, Bpest
Vermes Miklós, Bpest
Zigány Ferenc, Bpest

Választmányi póttagok:

Ádám Manó, Bpest
Bereczki Ilona, Szeged
Barabás Sára, Győr
Dénes Péter, Bpest
Fazekas Ferenc, Bpest
Králik Dezső, Bpest
Lánczi Ivánné, Bpest

Bujtár József, Pécs
Barth Klára, Miskolc
Ozorai Mária, Bpest
Pataki Béláné, Bpest
Pál László, Bpest
Rapcsák András, Debrecen
Rejtő Magda, Bpest
Seres Iván, Bpest
Szüsz Péter, Bpest
Pál Sándor, Bpest

A közgyűlés Surányi János főtitkár javaslatára a következőket választotta meg a MTESz közgyűlésére küldötteknek: Alexits György, Császár Ákos, Czapáry Endre, Faragó László, Fenyő István, Fuchs László, Gádor Endréné, Gáspár Gyula, Hódi Endre, Kalmár László, Makai Endre, Pásztor István, Reiman István, Rényi Alfréd, Surányi János, Székely Gábor, Tasnády István.

A közgyűlést Hajós György társelnök zárta be (Alexits György elnök távolléte miatt). Jó munkát kívánt a Társulat újonnan választott vezetőségének, valamint a közgyűlés résztvevőinek mind mindennapi munkájukhoz, mind a közgyűléshez csatlakozó előadásokon és ankétokon.

K. m. f.

Bóka István *Czapáry Endre*

a jegyzőkönyv hitelesítői.

Könyvismertetés

Rényi Alfréd: Valószínűségszámítás

(Tankönyvkiadó, 1954, 746 old.)

Rényi Alfréd könyvének megjelenése régóta várt eseménye a hazai matematikai könyvkiadásnak. Eddig a magyar nyelvű matematikai irodalomban nem volt olyan könyv, amely a valószínűségszámítás szerteágazó modern elméletéről átfogó képet nyújtott volna. Az elmúlt években nagymértékben megnövekedett azoknak a matematikusoknak és gyakorlati szakembereknek a száma, akik nagy érdeklődéssel fordultak a valószínűségszámítás felé. Szükségessé vált tehát egy olyan könyv kiadása, amelyet egyrészt egyetemi tankönyvként lehet használni, másrészt pedig alkalmas arra, hogy a valószínűségszámítást alkalmazó más tudományágak művelői és speciálisan ezzel a témakörrel foglalkozó matematikusok számára kompendiumként szolgáljon. Rényi könyve azonban nemcsak a magyar nyelvű szakirodalom számára nagy nyereség. Máris folyamatban van német nyelvű kiadása az NDK-ban, amelynek elkészülését külföldön is nagy érdeklődéssel várják. Ugyanis mind a tárgyalt anyag mennyisége, mind a gyakorlati alkalmazások, továbbá a korszerű tárgyalásmód és végül e három szempont összeegyeztetése tekintetében többet nyújt mint a meglevő, hasonló jellegű könyvek.

Nem térhetek itt ki arra, hogy mi a különbség Rényi Alfréd könyve és a többi valószínűségszámítással foglalkozó könyv között, mert ezek száma igen nagy, azonban a szóban forgó könyv értékeléséhez szükséges, hogy legalább pár szóban összehasonlítsam három könyvvel, amelyek talán leginkább közkézen forognak. Ezek: Feller, An introduction to probability theory and its applications; Gnyegyenko, Kursz tyeorii verojatnosztyej II. kiadás; Uspensky, Introduction to mathematical probability. Feller könyvének még csak az első, a diszkrét eloszlásokról szóló része jelent meg 1950-ben. Sok gyakorlati alkalmazást tárgyal és egyes fejezetek, mint pl. a Markov-láncokról szóló, elég bő anyagot tartalmaznak, azonban csak speciális eloszlásokkal foglalkozik, és így az olvasó nem szerezhet belőle általános tudást. Uspensky könyve úgy tekinthető, mint a klasszikus valószínűségszámítás világos és szép összefoglalása. A könyv 1937-ben jelent meg, tehát nem is csodálkozhatunk azon, hogy a modern eredmények nem találhatók meg benne. Gnyegyenko könyvének második kiadása 1955-ben jelent meg. Megismerteti az olvasót a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle megalapozásával. Sokoldalú és modern könyv. A második kiadásban elég gazdag feladatgyűjteményt is találunk, azonban az alkalmazásokkal nagyon keveset foglalkozik, mindössze egy-két feladaton keresztül. Rényi azt a célt tűzte maga elé, hogy a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle megalapozásán állva, egy exaktul felépített, bő anyagot tartalmazó és egyúttal az alkalmazások szempontjából is gazdag könyvet adjon az olvasó kezébe. Ez a feladat elég nehéz volt, de kisebb hibáktól eltekintve, a meg-

oldás igen jól sikerült. Gondoljunk arra, hogy egy könyvben, szervesen összefüggő részekben, egészen konkrét gyakorlati alkalmazásokról és absztrakt Lebesgue integrálokról kell beszélni. A tárgyalásban pedig nem lehet feltételezni valós függvénytani ismereteket, mert a könyvet nemcsak matematikusok használják, azonkívül az egyetemen a matematikus hallgatók harmadéves korukban kezdenek valószínűségszámítást tanulni, valós függvénytant pedig csak később.

A könyv 16 fejezetből és 4 függelékből áll. Az egyes fejezetekhez csatolt feladatok száma összesen 504. Az olvasó munkájának megkönnyítésére a szokásos név- és tárgymutatókon kívül külön van egy tárgymutató a könyvben szép számmal található táblázatokra és egy a gyakorlati alkalmazásokra vonatkozólag. A könyv végén pedig egy kezdő és szakember számára egyaránt hasznos irodalomjegyzéket találunk. Itt nem csupán a hazai és a világirodalomban megtalálható fontosabb könyvek és cikkek vannak felsorolva, hanem a különböző történeti munkák, feladatgyűjtemények, táblázatok stb.

Az I—II. fejezetek a valószínűségszámítás megalapozásával foglalkoznak. Itt a könyv írója — Glivenkót követve — az eseményeket előbb mint egy Boole-algebra elemeit fogja fel. Ezután véges Boole-algebrára a szöveg közben, az általános esetre pedig az 1. függelékben bebizonyítja Stone tételét, amely azt mondja ki, hogy minden Boole-algebra izomorf egy halmaztesttel. Az eseményeket tehát — amelyekről szemléletesen beláttuk, hogy Boole-algebrát alkotnak — mindig úgy tekinthetjük, mint egy halmaztest elemeit, és ezzel eljutottunk Kolmogorov elméletéhez. Így Glivenko elmélete csak egy lépcsőfok a Kolmogorov-elmélethez való eljutáshoz. Ez a lépcsőzetes felépítés azért célszerű, mert megkönnyíti az olvasó számára a valószínűségszámítás axiomatikájának megértését. A II. fejezet egy paragrafusa a valószínűség fogalmával kapcsolatos elvi kérdéseket vitatja meg. Ezt később bővebben ismertetem. A fejezet tovább a kombinatorikai és geometriai valószínűségekkel foglalkozik. Több érdekes klasszikus problémát találunk itt a szöveg közben és a feladatok között egyaránt. Ezek között tárgyalja a Maxwell—Boltzmann, a Bose—Einstein és a Fermi—Dirac statisztikák alapfeladatainak megoldását, a Galton-deszkával és a Brown-mozgással kapcsolatos egyes feladatokat, a geometriai valószínűséggel kapcsolatban pedig a Bertrand-féle paradoxont, a Buffon-féle tűproblémát stb.

A III. fejezet a feltételes valószínűséggel, a függetlenséggel és a klasszikus valószínűség-eloszlások (binomiális, polinomiális, hipergeometriai, negatív binomiális, Markov—Pólya—Eggenberger-féle eloszlás) bevezetésével és azok gyakorlati alkalmazásaival foglalkozik.

A IV. fejezet tárgya a Poisson-eloszlás és annak gyakorlati alkalmazásai. Ebben a fejezetben szerző két helyen is saját (ill. másokkal közös) eredményeit tárgyalja. Ezek közül az első arra vonatkozik, hogy mikor lesz egy homogén, független növekményű eseményfolyamat Poisson-féle (szerzőnek Jánossy Lajossal és Aczél Jánossal elért közös eredménye), a második pedig a diszkrét-eloszlások algebrájának egy új tárgyalásmódját szolgáltatja. Ennek az utóbbinak az a lényege, hogy ebben a tárgyalásmódban egyes tételek tisztán algebrai úton, a generátorfüggvény fogalmának felhasználása nélkül bizonyíthatók be. Ehhez a kompozíció és a keverés műveletének értelmezése és tulajdonságainak megállapítása útján jutunk el. A Poisson-eloszlás alkalmazásaként tárgyalja a radioaktív bomlásjelenségeket, a csillagok térbeli eloszlását és a kolloid-részecskék Brown-mozgását. A fejezet végén táblázatok is vannak.

Az V. fejezetben a binomiális eloszlásnak a normális eloszlással való közelítéséről van szó. A Stirling-formula bizonyítása céljából szerző valós integrálokra ismerteti a Laplace-féle nyeregpont-módszert, majd a binomiális eloszlás tagjainak egy igen pontos közelítését adja meg. Ennek segítségével

bebizonyítja a Moivre—Laplace-féle határértéktételt, majd a nagy számok törvényének Bernoulli-féle alakját. Az utóbbi tétellel kapcsolatban érdekes fejtegetéseket közöl, amelyek tisztázzák a tétel jelentőségét a valószínűségszámítás gyakorlati alkalmazásaiban. Látszólag itt ugyanis egy circulus vitiosusszal állunk szemben, mert a nagy számok törvénye megfogalmazásában benne van a valószínűség szó. Ezekkel rokon fejtegetéseket a XI. fejezetben is találunk. Sok érdekes feladat van a fejezet végén. Ezek közül az egyik úgy szól, hogy bizonyítsuk be a Csebisev-féle egyenlőtlenség segítségével Weierstrassnak a folytonos függvények approximációjára vonatkozó tételét.

A VI. fejezet a valószínűségi változó és az eloszlásfüggvény fogalmával foglalkozik. Ennek a fejezetnek a megírása pedagógiai szempontból igen sok gondot okozhatott. Eddig még egy valószínűségszámítással foglalkozó tankönyv sem vezette be teljesen szabatosan és általánosan a Kolmogorov-elmélet alapján állva a valószínűségi változó fogalmát. Itt ugyanis absztrakt térben értelmezett mérhető függvényről kell beszélni. Szerző a definíciót előbb szemléletesen, majd szabatosan vezeti be. Azután foglalkozik a többdimenziós és feltételes eloszlás- és sűrűségfüggvényekkel, majd a valószínűségi változók függetlenségével. Bevezeti az egy- és többdimenziós egyenletes és normális eloszlás fogalmat, végül pedig azt vizsgálja, hogy hogyan lehet kiszámítani egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvényének ismeretében $\psi(\xi)$ sűrűségfüggvényét, ahol $\psi(x)$ monoton és differenciálható függvény.

A VII. fejezetben két valószínűségi változó összegének, különbségének, szorzatának és hányadosának a sűrűségfüggvényét számítja ki. Példaként többek között megemlíti a Maxwell-féle, a χ^2, a Student-féle, a béta-eloszlást. Majd az eloszlások keverését és ennek alkalmazásait tárgyalja.

A VIII. fejezet tárgya a várható érték. A ξ valószínűségi változó $M(\xi)$ várható értékét úgy értelmezi, mint az elemi események Ω terében értelmezett $\xi = \xi(\omega)$ mérhető függvény absztrakt Lebesgue-integrálját. Előzetes valós függvénytani ismereteket nem tételez fel, a tételeket mind bebizonyítja. Ugyanilyen tárgyalásmódot találunk a feltételes várható értékre vonatkozólag is. Szó van még itt a kvantilisekről és a Markov-féle egyenlőtlenségről.

A IX. fejezet az egy- és többdimenziós eloszlások szórásával és a korrelációs együtthatóval foglalkozik. Ezt a fogalmat ugyanúgy tárgyalja, mint a várható értéket, vagyis a ξ valószínűségi változó szórása nem más, mint a $(\xi - M(\xi))^2$ változó absztrakt Lebesgue-integrálja. Szerző nem elégszik meg azzal, hogy megmutatja a korrelálatlanság és a függetlenség nem azonos voltát, hanem közli L. V. Kantorovicsnak azt az érdekes tételét, mely szerint ha a ξ és η valószínűségi változók csak véges sok értéket vehetnek fel, és tetszőleges hatványaik korrelálatlanok, akkor ξ és η függetlenek. Ezután a feltételes szórást és a korrelációs hányadost ismerteti.

A X. fejezet a matematikai statisztika elemeiről szól. Ez a fejezet csak vázolni akarja a statisztika leggyakoribb feladatait és ezek megoldásait. Egy valószínűségszámítási tankönyv nem tartalmazhatja a különböző statisztikai módszerek részletes ismertetését. Talán egyesek, a gyakorlati alkalmazások iránt érdeklődök közül, azt várták Rényi könyvétől, hogy abban a praxisukban előforduló kiértékelésekre részletes eljárásokat fognak találni. Ezt a feladatot csak külön, egyes szakterületekkel foglalkozó könyvek oldhatják meg. Itt mindössze a Bayes-módszer, az eltérés és illeszkedési vizsgálatok lényege van vázolva, majd szó van a legkisebb négyzetek módszeréről és a regressziós görbékről. A fejezet végén találunk egy táblázatot a Student-féle próbához, egy lefényképezett Gauss-papirost és egy nomogramot konfidenciahatárok megkereséséhez.

A nagy számok törvényéről szóló XI. fejezet az egyik legszebb fejezete a könyvnek. Megtaláljuk itt a Bernoulli-féle tétel Markov-, Hincsin- és Bern-

stein-féle általánositásait. Tárgyalja a Csebisev-féle egyenlőtlenség Bernsteintől származó élesítését és ennek alkalmazását az egyidejűségi tényezővel kapcsolatos számításokra. Ezután jönnek a nagy számok erős törvényei. Itt megtaláljuk a Kolmogorov-egyenlőtlenséget és az ennek segítségével bizonyítható, Kolmogorovtól származó tételeket. Ezeket Glivenkónak a matematikai statisztikára vonatkozó ismert alaptétele és az iterált logaritmus-tétel követi. Az utóbbi tételnek azonban csak a féloldalas alakját bizonyítja. Itt kerül közlésre először, a 24. feladatban J. Hajek csehszlovák matematikus egy egyenlőtlensége, amely rokon a Kolmogorov-egyenlőtlenséggel. Ennek az egyenlőtlenségnek az előnye abban rejlik, hogy segítségével egyszerűbben lehet bebizonyítani a nagy számok erős törvényeit, mint a Kolmogorov-egyenlőtlenséggel.

A XII. fejezet a karakterisztikus és a generátorfüggvényt tárgyalja. Az előbbivel kapcsolatban szerepelnek az unicitási és a konvergencia-tételek. Egy paragrafus a normális eloszlás néhány tulajdonságával foglalkozik. Ezek között helyet foglalnak Cramér és Bernstein ismert tételei. A generátorfüggvénnyel kapcsolatban ismerteti a láncreakciók matematikai tárgyalását.

A XIII. fejezet főként a centrális határeloszlástétellel foglalkozik. Szerepelnek azok a tételek, amelyek a normális eloszláshoz való konvergenciát mondják ki a Ljapunov-, illetve Lindeberg-féle feltételek teljesülése esetén. A lokális tételek közül a fejezet Gnyegyenkónak egy 1954-ből származó érdekes tételét tartalmazza. Ugyancsak ebben a fejezetben van szó a χ^2-próbáról. Ez azért került ide és nem a statisztikai fejezetbe, mert a normális eloszláshoz való konvergencia alkalmazásának tekinthető. A fejezet még egy, a Poisson-eloszláshoz való konvergenciatétel bizonyításával foglalkozik. A határeloszlástételeket talán lehetett volna egy kicsit bővebben tárgyalni. Például nincs szó a könyvben a korlátlanul osztható eloszlásokról. Ezeket szerző arra való utalással nem tárgyalja, hogy Gnyegyenkónak és Kolmogorovnak erről a témáról szóló „Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai" c. könyve magyarul is megjelent. Ez a könyv azonban nem egyetemi tankönyv és kezdőnek igen nehéz. Másrészt a határeloszlástételekről alkotott kép hiányos, ha az olvasó nem ismerkedik meg a központi határeloszlástételnél általánosabb tételekkel. Kívánatos volna a német kiadásban ezt a hiányosságot megszüntetni.

A XIV. fejezet a Markov-láncok elméletét foglalja össze több alkalmazással. Nemcsak a véges, de a megszámlálhatóan végtelen, sőt, folytonos állapothatározójú homogén Markov-láncok ergodicitását is részletesen tárgyalja. Az utóbbival kapcsolatban ismerteti Erdős Pál, W. Feller és H. Pollard egy közös, a megújítási elmélet körébe tartozó tételét. Ebben a fejezetben különösen szép számban vannak alkalmazások. Ezek az üzemek energiafogyasztásának ingadozására, a hőátadás Ehrenfest-féle modelljére, a visszaverő falak közötti kóborlásra és a Brown-mozgásra vonatkoznak. A feladatok között is több olyan van, amelyik egy-egy konkrét gyakorlati alkalmazással foglalkozik. Így pl. a megújítási elmélet több tételét találjuk meg feladat formájában. Ugyancsak a feladatok között szerepel a Markov-láncokra vonatkozó centrális határeloszlástétel is.

A rendezett minták elméletéről szóló XV. fejezet nagymértékben szerző saját munkásságát tartalmazza. Az első részben a $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ variációs sorra vonatkozólag találunk több tételt. A bizonyítások azon az észrevételen alapulnak, hogy a $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_n^*$ változók Markov-láncot alkotnak. Ebből kiindulva a szerző új módszert dolgozott ki, mellyel a rendezett minták elméletének legtöbb tételét egyszerűbben tudta bebizonyítani. Ezzel a módszerrel bebizonyított olyan tételeket is, amelyek addig nem voltak ismeretesek. Ezek az $F_n(x)$ empirikus eloszlásnak az $F(x)$ elméleti eloszlástól való

$$\frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)}$$

relatív eltérései a $0 < a \leqq F(x) < b \leqq 1$ feltétel melletti maximumainak, illetve abszolút érték-maximumainak határeloszlásaira vonatkoznak. A fejezet második részében Szmirnov és Kolmogorov tételeit ismerteti bizonyítás nélkül. Végül az utolsó részben bebizonyítja Gnyegyenko és Koroljuk tételét, valamint az ebből határátmenettel levezethető, korábbi keletű Szmirnov-tételt. Ezek két minta összehasonlítására vonatkoznak. Itt találkozunk a Gnyegyenkótól és Koroljuktól származó szellemes bizonyítási módszerrel. Külön meg kell emlékeznünk a fejezet végén levő táblázatokról. Ezek a Kolmogorov-függvényre, a Gnyegyenko—Koroljuk-függvényre és a Rényi említett tételében szereplő $L(z)$-függvényre vonatkoznak. A feladatok között megtaláljuk a Wilcoxon-próba ismertetését Rényi idevágó eredményeivel. Emellett a rendezett minták elméletének több más tétele is szerepel a feladatok között.

Az utolsó fejezet a sztochasztikus folyamatok elméletéből vett néhány kiragadott kérdés tárgyalásával foglalkozik. Szerepel a Poisson-folyamat néhány tulajdonsága, Doeblinnek a homogén, egész értékű, véges sok állapotú Markov-folyamatok ergodicitására vonatkozó tétele, az Erlang-eloszlás, üzemek energiafogyasztása ingadozásának tárgyalása és a folytonos Markov-folyamatokra vonatkozó, Kolmogorov-féle egyenletek ismertetése. A Poisson-folyamat által származtatott másodlagos sztochasztikus folyamatokkal kapcsolatban megtaláljuk Rényi Alfrédnak egy eredményét. Az itt közölt bizonyítás Rényi Alfréd és Takács Lajos közös munkája. Bár ez a fejezet elméleti anyag tekintetében aránylag keveset nyújt, mert pl. stacionárius folyamatokról egyáltalán nincs szó, a feladatok változatosak és sok szép gyakorlati alkalmazást tartalmaznak.

Az 1. függelékben megtaláljuk Stone tételének a bizonyítását.

A 2. függelék a halmazelméleti és mértékelméleti segédeszközökkel foglalkozik. Itt két dologról van szó. Egyrészt egy T halmaztesten értelmezett mérték kiterjesztéséről a T-t tartalmazó legkisebb Borel-féle halmaztestre és ennek teljessé tételéről, másrészt pedig Kolmogorovnak a kompatibilis eloszlásfüggvényekre vonatkozó tételéről. Ezzel az utóbbi tétellel szokták bizonyítani előírt tulajdonságú valószínűségi változó-összesség (sorozatok, sztochasztikus folyamatok stb.) egzisztenciáját.

A 3. függelékben Rényi ismerteti saját új axiómarendszerét, amely a feltételes valószínűségre vonatkozik. Az így definiált valószínűségi mező a Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt speciális esetként tartalmazza. Az új axiómarendszer felállítására Rényit az a törekvés vezette, hogy értelmet adjon az egész térben való egyenletes valószínűség-eloszlásnak, és általában nem normálható mérték által származtatott feltételes valószínűség-eloszlásoknak.

Szóljunk pár szót külön is a könyvben található feladatokról. Ezek tartalmuknál és mennyiségüknél fogva nagymértékben emelik a könyv nivóját. Igen sok feladat egy-egy fontos tételt, illetve témakört tárgyal és így egyben az elméleti részt kiegészíti. Meg kell állapítanunk azonban, hogy a nehezebb feladatok dominálnak a könyvben. Jó lett volna több gyakorló jellegű feladatot hozni, amelyek megoldását minden matematikus-hallgatótól megkívánhatjuk.

Egy hiányossága a könyvnek az, hogy a tárgyalásmódba egy-két kisebb inkonzekvencia belecsúszott. Nem egy helyen előfordul, hogy olyan tételeket használ fel, amelyeknek csak speciális eseteit bizonyította be korábban. Így például a VI. fejezet 2. §-ában bebizonyítja, hogy ha ξ valószínűségi változó és $f(x)$ folytonos függvény, akkor $f(\xi)$ is valószínűségi változó. Ismeretes, hogy $f(\xi)$ akkor is valószínűségi változó, ha $f(x)$ Baire-függvény, ezt azonban a könyv nem tárgyalja, pedig a XI. fejezet 4. tételének bizonyításánál az η_k változók a ξ_k változók diszkontinuus függvényei. Ugyancsak ez a helyzet a VI. fejezet 6. §-ának 7. tételével. A XI. fejezetben a Kolmogorov-egyenlőtlenséget egészen általánosan bizonyítja, az eloszlások diszkrét vagy folytonos voltára való tekintet nélkül, márpedig így szükség van a VI. fejezet említett tételének

általánosabb alakjára. Ezek a példák azt mutatják, hogy ha valós függvénytani alapon, teljesen szabatosan akarjuk felépíteni a valószínűségszámítást — ami feltétlenül helyes és mint említettem, ebből a szempontból Rényi könyve egyedülálló —, akkor jobb az alapvető tételeket egészen általánosan kimondani, hogy a későbbi bonyodalmakat elkerüljük. Az említett hibák azonban könnyen kijavíthatók és semmit sem vonnak le a könyv értékéből.

A technika és valamennyi természettudomány egyre nagyobb mértékben alkalmazza a valószínűségszámítást. Ennek megfelelően, ahol csak lehet, a könyv kitér az alkalmazások tárgyalására. Ezek között több olyan problémával találkozunk, amelyet eddig az irodalomban — beleértve az illető szaktudomány irodalmát is — sehol sem tárgyaltak le matematikailag kellő szabatossággal. Ilyen pl. a rádioaktív bomlás, a Maxwell-féle eloszlás indokolása (ezzel kapcsolatban szerzőnek egy újabb dolgozata is van sajtó alatt), a bimolekuláris reakció tárgyalása. Nagy figyelmet fordít a részecskeszámlálás, a minőségellenőrzés, a telefontechnika és a tartalékolás egyes kérdéseire. Ezekkel és sok más alkalmazással kapcsolatban az Alkalmazott Matematikai Intézet idevágó munkásságát is ismerteti.

Az alkalmazások között meg kell emlékeznünk a matematikán belüli alkalmazásokról is. Ezeket leginkább a feladatok között találjuk meg. A III. fejezet 5.1. feladata az Euler-féle φ-függvény explicit kifejezésének valószínűségszámítási bizonyításával foglalkozik. Különösen a XI. fejezet feladattára gazdag ebből a szempontból. A 20. feladat E. Hille egy tételének, a 21. pedig a Laplace-transzformáció elméletében ismeretes Post—Widder-féle inverziós formula bizonyításával foglalkozik. Érdemes megemlíteni a XIII. fejezet 16. és 17. feladatát, ahol Borelnek a valós számok tizedestört kifejtésében szereplő jegyek statisztikus tulajdonságaira vonatkozó tételéről és ennek általánosításáról van szó. Az V. fejezet ismertetésénél már említettem a Weierstrass-féle approximációs tételnek a nagy számok törvénye alapján történő bizonyítását. Ez is a feladatok között szerepel. Ez a Bernsteintől származó bizonyítás azon alapszik, hogy a

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

Bernstein-féle polinomokban az $f\left(\frac{k}{n}\right)$ értékek szorzói nem mások, mint egy n-rendű binomiális eloszlás tagjai és a Csebisev-egyenlőtlenség értelmében

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-p\right|>\varepsilon} \binom{n}{k}p^k q^{n-k} < \frac{pq}{\varepsilon^2 n},$$

ahol az összegezés k-ra vonatkozik. Ezek jó példák arra, hogy általános valószínűségszámítási tételekből néha igen egyszerűen adódnak más tárgyú matematikai tételek.

A könyv nagy figyelmet fordít a véletlen és a valószínűség fogalmával kapcsolatos ideológiai kérdésekre. A determinizmus és indeterminizmus harca természetszerűleg felmerül a valószínűségszámítással kapcsolatos filozófiai kérdések tárgyalásánál. A kérdés a következő: vajon ha azt mondjuk, hogy egy esemény véletlen, akkor azt értjük-e ezen, hogy nincs oka? Rényi a könyv bevezetésében a következő szavakkal fejti ki álláspontját: „ha a körülmények K komplexuma tartalmazza mindazon tényezőket, okokat, amelyek egy jelenségre hatással vannak, úgy kauzális szkémával írható le a jelenség. Ha azonban a K komplexum nem tartalmazza mindazokat a körülményeket, amelyek a jelenség lefolyására hatást gyakorolnak, úgy sztochasztikus szkémával állunk szemben.

Felmerül természetésen a kérdés, hogy mi szükség van a sztochasztikus szkémákra: miért nem igyekszünk az összes tekintetbe jövő okokat, körülményeket számbavenni? Erre a válasz igen egyszerű: azért, mert ez igen sok esetben nem valósítható meg, legalább is tudásunk, ismereteink mai állása mellett, de nem is szükséges."

Ami a valószínűség fogalmát illeti, jól ismert az az igen éles vita, amely a harmincas években folyt és amelynek középpontjában a Mises- és a Kolmogorov-féle elméletek álltak. A különböző álláspontok ismertetésével és a pozitivista beállítottságú Mises-féle elmélet kritikájával szerző a valószínűség pontos matematikai fogalmának bevezetése előtt egy külön paragrafusban foglalkozik. Kifejti Kolmogorov elméletének elvi alapját is, mely szerint egy esemény valószínűsége egy objektív, numerikus állandó, amely ugyanúgy elválaszthatatlan jellemzője egy véletlen tömegjelenségnek, mint ahogy a tömeg elválaszthatatlan jellemző adata a testnek. Ideológiai vonatkozású fejtegetéseket még több más helyen is találunk. Így pl. a nagy számok törvényével kapcsolatban, a statisztikáról szóló fejezetben és a valószínűségszámítás történetével foglalkozó 4. függelékben.

Meg kell állapítanunk, hogy Rényi Alfréd könyve megírásával nagy és igen értékes munkát végzett és reméljük, sok matematikust, sok más tudományággal foglalkozó kutatót és gyakorlati embert fog ösztönözni arra, hogy megismerkedjék a valószínűségszámítással és annak alkalmazásaival.

Prékopa András.

A kézirat beérkezett: 1956. X. 12. — Terjedelem: 10,75 (A/5) ív

A kiadásért felelős: az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki felelős: Szöllössy Károly

Szegedi Nyomda Vállalat 56-4140 Felelős vezető: Vincze György

MTA Könyvtára
Periodika 3525/1961 sz.

СОДЕРЖАНИЕ

Й. Карамата: Введение в одну теорию роста вещественных функций . 207
Е. Марчевский: Замечания в связи с разложением Кантора чисел . . 212
П. Эрдёш: Замечания в связи с одной работой Т. Кёвари 214
А. Хайнал и Л. Кальмар: Замечание относительно системы аксиом Гёделя теории множеств II. 218
П. Сас: О теореме Фаркаша Бояи о перекройке многоугольников . . 230
М. Миколаш: Об общей характеристике многочленов Якоби, Лагерра и Эрмита 238
Т. Сэлэ: Элементарное доказательство основной теорема для конечных полей 249
К. Текше: О построениях, производимых при помощи круглой линейки 255
А. Фай: О числах Маркова 262
И. Эгервари: Об одной лемме Стилтьеса из теории матриц 271
Б. Сенашши: Математическая деятельность И. Мартиновича 277
Лауреаты премии имени Кошута 1956-го года 291
Сообщение о присуждении премии имени Мано Бэкэ 296
Математическая олимпиада памяти Миклоша Швэитцэра 1955-ого года 299
Задачи 318
Примеры 327
Рецензии венгерских авторов 338
Сообщения 342
В математическом обществе имени Яноша Бояи 344
Критика и библиография 372

CONTENT

J. Karamata: Introduction to a theory of the increase of real functions . 207
E. Marczewski: Remarks on the Cantor-expansions of real numbers . . 212
P. Erdős: Remarks on a paper of T. Kővári 214
A. Hajnal and L. Kalmár: Remark on the Gödelian axiom-system of the set theory II. 218
P. Szász: On the splitting-theorem of W. Bolyai 230
M. Mikolás: On common characterisation of the Jacobi, Laguerre and Hermite polynomials 238
T. Szele: An elementary proof of the fundamental theorem for finite fields 249
K. Tekse: On geometrical constructions with circular ruler 255
Á. Fáy: On a Markoff's numbers 262
J. Egerváry: On a lemma of Stieltjes 271
B. Szénássy: The mathematical work of I. Martinovics 277
The list of scientific works of Ch. Jordan 291
Report on awarding the Manó Beke prize 296
Report on the M. Schweitzer Mathematical Competition in 1955 299
Problems 318
Examples 327
Reviews: Hungarian authors 338
News 342
Society life 344
Book review 372

Ára 11,— Ft.
Előfizetés évi 20,— Ft.

A Bolyai János Matematikai Társulatba belépni szándékozók forduljanak a Társulat elnökségéhez (Budapest, V., Reáltanoda-utca 13—15. Telefon: 187—330). Közlésre szánt dolgozatok (lehetőleg géprással s a lap egyik oldalát használva) a lap szerkesztőségéhez ugyanoda küldendők.

Kérjük cikkíróinkat, hogy amennyiben különlenyomatra tartanak igényt, cikkük kefelevonatának visszaküldésekor ezirányú kívánságukat a kért különlenyomatok számának megjelölésével feltétlenül jelentsék be.

Különböző külföldi természettudományos, műszaki, orvosi stb. szakfolyóiratok 1953—1954. évi vegyes számai a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila u. 3. sz. alatti lapüzletében példányonként megvásárolhatók.

Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy lapunk régebbi számai kaphatók a Posta Központi Hírlap Iroda V., József Attila-u. 3 szám alatti Újságboltjában.